



HAL
open science

Algèbres de Cherednik et ordres sur les blocs de Calogero-Moser des groupes imprimitifs

Emilie Liboz

► **To cite this version:**

Emilie Liboz. Algèbres de Cherednik et ordres sur les blocs de Calogero-Moser des groupes imprimitifs. Combinatoire [math.CO]. Université de Franche-Comté, 2012. Français. NNT : 2012BESA2010 . tel-00865350

HAL Id: tel-00865350

<https://theses.hal.science/tel-00865350>

Submitted on 24 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale Carnot-Pasteur

Thèse de Doctorat

présentée par

Émilie Liboz

pour obtenir le grade de
Docteur de Mathématiques de l'Université de
Franche-Comté – Besançon

Algèbres de Cherednik et Ordres sur les blocs de Calogero-Moser des groupes imprimitifs

Thèse soutenue le 3 décembre 2012, devant le jury composé de :

Cédric Bonnafé (directeur)	Directeur de Recherche à l'Université de Montpellier 2
Iain Gordon (rapporteur et président du jury)	Professeur à l'Université d'Édimbourg
Nicolas Jacon (codirecteur)	Maître de Conférences à l'Université de Franche-Comté
Thierry Levasseur (rapporteur)	Professeur à l'Université de Brest
Michela Varagnolo	Maître de Conférences à l'Université de Cergy-Pontoise

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Cédric Bonnafé et Nicolas Jacon qui m'ont initiée à la théorie des représentations des groupes de réflexions complexes. Grâce à leurs grandes qualités scientifiques et personnelles, ils ont su me motiver et rendre ce travail de trois ans très agréable. Je les remercie particulièrement pour la patience dont ils ont fait preuve pendant la relecture de cette thèse et pour l'aide qu'ils m'ont apportée pour améliorer ma rédaction.

Mes remerciements se dirigent ensuite vers mes deux rapporteurs, en commençant par Iain Gordon qui m'a accompagnée tout au long de ma thèse. Je lui suis reconnaissante de m'avoir invitée à Édimbourg puis de m'avoir permis de participer au trimestre de travail "On the Interaction of Representation Theory with Geometry and Combinatorics" à HIM. Je le remercie également pour le temps qu'il m'a accordé lors de discussions mathématiques enrichissantes. Merci aussi à Thierry Levasseur pour sa lecture attentive de mon manuscrit et ses remarques très intéressantes. Leur présence dans le jury, ainsi que celle de Michela Varagnolo, a été un grand honneur pour moi, merci à tous d'avoir fait le déplacement.

À l'occasion de conférences, j'ai eu la chance de rencontrer des mathématiciens formidables. Merci à Maria et Peng pour leur aide ainsi qu'à Olivier B, Cédric L, Jérémie, Daniel, Tuong-Huy et Thomas pour les bons moments passés ensemble.

Cette thèse a été réalisée au sein du laboratoire de mathématiques de Besançon et je tiens à remercier chaleureusement tous ses membres pour la bonne ambiance qu'il y règne. J'ai une pensée particulière pour Gilles et son investissement auprès des doctorants, pour Richard et Romain (merci pour votre patience), ainsi que pour Florence, Cécile, Jean-Robert et Anne-Marie avec qui j'ai beaucoup apprécié de partager mes enseignements. Merci aussi aux membres de l'I3M pour leur accueil, en particulier à Vanessa qui a agrémenté mes visites à Montpellier de bonnes petites soirées ainsi qu'à Anne sans qui cette thèse n'aurait peut-être pas vu le jour.

Merci aussi à mes collègues doctorants qui sont devenus mes amis et qui ont égayé mes années de thèse : Alexis, Karine, Guillaume, Mathilde, Anthony, Guixiang, Michel, etc... avec un merci spécial à Céline pour son aide et son soutien dans la dernière ligne droite et à Olivier qui a été un grand frère de maths très encourageant.

Je remercie aussi les musiciens de l'OUBFC pour tous les mercredis soirs passés ensemble et tous mes amis qui ont su aussi me changer les idées et me reconforter dans les moments difficiles. Je tiens enfin à exprimer toute ma gratitude à ma famille pour leurs encouragements. Sans vous le parcours aurait été plus difficile, merci de m'avoir accompagnée sur ce chemin !

Table des matières

Introduction	9
1 Préliminaires	
1 Combinatoire	19
1.1 Partitions d'un entier	19
Définitions - ℓ -abaque d'une partition - ℓ -cœurs	
1.2 Multipartitions d'un entier	26
Contenu d'une multipartition - Résidus - Symboles associés à une multipartition et partitions $\kappa_m^s(\lambda)$ - Partitions $\tau_s(\lambda)$	
2 Algèbre	35
2.1 Système de Clifford	35
Actions de Γ et $\hat{\Gamma}$ - Blocs de A et \bar{A} - Radicaux de Jacobson - Orbites de caractères	
2.2 Algèbres symétriques	40
Éléments de Schur - Algèbre symétrique tordue	
2.3 Représentations de Carquois	42
3 Géométrie	45
3.1 Quotient catégorique	45
3.2 Décomposition de Bialynicki-Birula	45
3.3 Ordre sur les \mathbb{C}^* -points fixes	47
Définition - Cas d'une variété lisse - Cas d'une variété normale	
3.4 Compatibilité du préordre avec certains types de morphismes	49
Cas d'un morphisme \mathbb{C}^* -équivariant, surjectif et projectif - Quotient par un groupe fini	

2 Algèbre de Cherednik d'un sous-groupe distingué

4	Algèbre de Cherednik et algèbre de Hecke associées à un groupe de réflexions complexe	59
4.1	Groupes de réflexions complexes	59
	Réflexions complexes - Groupes de réflexions complexes	
4.2	Algèbres de Hecke	61
	Définition générale et algèbre de Hecke cyclotomique - Représentations des algèbres de Hecke - Fonctions \mathbf{a} et \mathbf{A}	
4.3	Algèbres de Cherednik	63
	Définition - Centre et algèbre de Cherednik restreinte - Élément d'Euler et \mathbf{c} -fonction - Bébés Modules de Verma - Fibre $\Upsilon_c^{-1}(0)$ - Blocs de Calogero-Moser	
5	Comparaison des algèbres de Cherednik associées	73
5.1	Les différentes algèbres et leurs radicaux	73
5.2	Définition des foncteurs	76
5.3	Commutativité des foncteurs	77
	Res et M_c - M_c et Ind - Res, Ind et L_c	
6	Comparaison des blocs	83
6.1	Partition de Calogero-Moser de W et de K	83
	Système de Clifford - Comparaison des simples - Comparaison des blocs	
6.2	Comparaison des nombres de décomposition	86
6.3	Comportement de la \mathbf{c} -fonction sur les blocs de Calogero-Moser	87

3 Algèbre de Cherednik et Blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$

7	Description algébrique	93
7.1	Présentation de $G(\ell, 1, n)$	93
	Définition - Réflexions - Caractères irréductibles	
7.2	Algèbres associées	97
	Algèbre de Cherednik - Algèbre de Hecke	
7.3	Formules pour les \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions	100
	Calcul de la fonction \mathbf{A}	
7.4	Fonction \mathbf{c}	103
	Formule pour la \mathbf{c} -fonction - \mathbf{c} -chambres	
8	Les variétés mises en jeu	107
8.1	Variétés de Carquois	107
	Deux actions sur la variété des représentations - Formes symplectiques et	

applications moments associées - Variétés $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{d})$ et $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$

8.2 Propriétés des variétés $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ 110
 Homéomorphismes - Description de $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ - Filtration de Jordan-Hölder -
 Lissité de $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ - Normalité de $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ - Résolution des singularités -
 Irréductibilité de $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ - Variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$

8.3 \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathcal{X}_\theta(n)$ et $\mathcal{M}_\theta(n)$ 117
 Alcôves et murs - Cas lisse : variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$ et schémas de Hilbert - Cas non
 lisse : J -classes

9 Ordres sur les blocs de Calogero-Moser 125

9.1 Différentes descriptions de $CM_h(G(\ell, 1, n))$ 125
 Description géométrique - Description combinatoire

9.2 Différents ordres sur $CM_h(G(\ell, 1, n))$ 128
 Ordres algébriques - Ordre combinatoire - Ordre géométrique

9.3 Liens entre les différents ordres 135
 Ordres algébriques et combinatoires - Ordre géométrique et autres ordres

9.4 Cas $\ell = 2$ 140
 Blocs et classes d'équivalence pour B_n - Lien entre l'ordre géométrique et le
 pré-ordre combinatoire pour B_n

4 Construction des différents ordres sur les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, e, n)$

10 Algèbres et variété associées 149

10.1 Le groupe $G(\ell, e, n)$ et ses représentations 149

10.2 Algèbre de Cherednik et blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, e, n)$ 150

10.3 Algèbre de Hecke et α -fonction pour $G(\ell, e, n)$ 152

10.4 Construction et propriétés de la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ 153

11 \mathbb{C}^* -points fixes et ordres sur les blocs 157

11.1 Cas $e \nmid n$ 157

11.2 Cas $e \mid n$: perspectives de recherche 158

11.3 Exemple de $G(2, 2, 2)$ 158
 Variétés $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ et $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$ - Résolution crépante -
 Différents éclatements de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ selon son lieu singulier -
 Isomorphisme entre \mathcal{M}/C_2 et $\mathcal{M}_{\theta'}(2)$ - \mathcal{M} est la normalisation de $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$

5 Annexes

A Description des bébés modules de Verma pour $G(2, 1, 2)$ 169

A.1 Algèbre de Cherednik associée à $G(2, 1, 2)$ 169

A.2 Algèbre des invariants 169

TABLE DES MATIÈRES

A.3	Caractères irréductibles de $G(2, 1, 2)$	170
A.4	Description des bébés modules de Verma	171
A.5	Bases des bébés modules de Verma	172
	$M_h(\mathbf{1}) - M_h(\epsilon) - M_h(\gamma) - M_h(\epsilon\gamma) - M_h(V)$	
A.6	Sur les murs $h = H_1 \neq 0$ et $h = -H_1 \neq 0$	178
A.7	Sur le mur $H_1 = 0$ et $h \neq 0$	180
B	Application moment $\mu_{\mathbb{C}}$	183
C	Étude de la variété $\mathcal{M}_\theta(n)$ dans le cas d'un groupe cyclique	187
C.1	Équation des variétés quotients	187
	Quotient symplectique - Quotient GIT	
C.2	\mathbb{C}^* -points fixes pour $\ell = 2$	192
	Points fixes de $\mathcal{X}_\theta(1)$ - Points fixes de $\mathcal{M}_\theta(1)$	
D	Calcul des blocs de B_4	195
	Index	205

Introduction

Contexte

Cette thèse est basée sur l'étude des algèbres de Cherednik rationnelles. Ces objets algébriques sont issus de la théorie des systèmes intégrables et ont été introduits en 2002 par P. Etingof et V. Ginzburg dans [EG02]. Ce sont des cas particuliers des algèbres de réflexions symplectiques, construites comme des déformations de $\mathbb{C}[V] \rtimes \Gamma$, où V est un espace vectoriel symplectique et Γ est un sous-groupe fini de $Sp(V)$.

Groupes de réflexions complexes

Les groupes de Weyl sont des groupes finis associés à des systèmes de racines. Ils sont composés de matrices à coefficients rationnels et engendrés par des réflexions orthogonales par rapport à des hyperplans définis par les racines. Ces groupes sont la base de nombreuses théories algébriques, comme la théorie de Lie (ce sont les squelettes des groupes réductifs et des algèbres de Lie) ou celle des algèbres de Hecke.

Les groupes de réflexions complexes sont une généralisation naturelle de cette construction au corps des nombres complexes. Si \mathfrak{h} est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, un élément de $GL(\mathfrak{h})$ est appelé pseudo-réflexion s'il fixe un hyperplan de \mathfrak{h} . Un groupe de réflexions complexe W est alors défini comme un sous-groupe fini de $GL(\mathfrak{h})$ engendré par des pseudo-réflexions et, si l'on restreint le corps des coefficients aux nombres réels, on retrouve les groupes de Coxeter. Ces groupes sont caractérisés par leur algèbre des fonctions polynomiales invariantes : c'est une algèbre de polynômes et ce sont les seuls groupes finis de matrices vérifiant cette propriété. Les groupes de réflexions complexes irréductibles ont été classifiés en 1954 : ils sont décrits par la famille infinie des groupes imprimitifs $G(\ell, e, n)$ et 34 groupes exceptionnels.

La théorie des représentations de ces groupes apparaît dans beaucoup de domaines mathématiques, comme la topologie algébrique (les groupes de tresse), l'étude des représentations des groupes réductifs finis (cf. [BMM99]) ou la recherche de résolutions symplectiques. En effet, il a été démontré dans [Ver00] que si la variété $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W$ admet une résolution symplectique alors W est engendré par des réflexions.

Algèbres de Hecke

Il est possible de définir l'algèbre de Hecke associée à un groupe de réflexions complexe, même si ce n'est pas un groupe de Weyl. Dans ce cas, l'algèbre de Hecke cyclotomique $\mathcal{H}_{\mathbf{q}}(W)$ associée au groupe de réflexions complexe W et au paramètre \mathbf{q} est une déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[W]$ (cf. [BMR98] et [Ari95]). Cette construction généralise celle faite initialement pour les groupes de Weyl : par exemple,

si W est de type $G(\ell, 1, n)$, alors $\mathcal{H}_{\mathbf{q}}(W)$ est un quotient de l'algèbre de Hecke affine de type A_n . De plus, si $\mathcal{H}_{\mathbf{q}}(W)$ est semi-simple déployée alors ses modules simples sont en bijection avec $\text{Irr } W$, l'ensemble des classes d'isomorphie des caractères irréductibles de W .

Dans la théorie des représentations des algèbres de Hecke associées aux groupes de réflexions complexes, une fonction joue un rôle fondamental : la \mathbf{a} -fonction. Dans le cas où W est un groupe de Coxeter, cette fonction permet de partitionner $\text{Irr } W$ en familles (cf. [Lus84] et [GI]). De plus, la base de Kazhdan-Lusztig de $\mathcal{H}_{\mathbf{q}}(W)$ permet de construire un ordre partiel $\prec_{\mathcal{LR}}$ sur W dont les classes d'équivalence sont appelées les cellules bilatères et cet ordre induit un ordre sur $\text{Irr } W$, qui est relié à celui de la \mathbf{a} -fonction. Une conjecture de Lusztig, démontrée dans le cas des paramètres égaux, relie les cellules aux familles. Mais cette théorie ne s'applique pas aux groupes de réflexions complexes, la base de Kazhdan-Lusztig n'existant que dans le cas réel.

Un enjeu important de ces dernières années a donc été de développer un analogue de la théorie de Kazhdan-Lusztig à la grande famille des groupes de réflexions complexes. Les deux problèmes majeurs posés par cette recherche sont les suivants.

Question 1. *Peut-on généraliser la partition en famille de la théorie de Kazhdan-Lusztig pour W un groupe de réflexions complexe ?*

Question 2. *Si oui, peut-on construire un ordre sur cette partition qui serait relié à l'ordre $\prec_{\mathcal{LR}}$ dans le cas d'un groupe de Coxeter ?*

Les familles de Rouquier, définies par M. Broué et S. Kim dans [BK02] apportent un début de réponse à la question 1, tout comme les conjectures de Gordon-Martino et de Martino, que nous exposerons plus tard. De plus, I. Gordon résout partiellement la question 2 pour les groupes $G(\ell, 1, n)$ dans [Gor08], grâce aux algèbres de Cherednik.

Algèbres de Cherednik

L'algèbre de Cherednik $H_{t,\mathfrak{h}}(W)$ associée au groupe de réflexions complexe W et aux paramètres t et \mathfrak{h} est une algèbre de réflexion symplectique pour $\Gamma = W$ et $V = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$. La théorie des représentations de ces algèbres est extrêmement riche et reliée à de nombreux domaines, outre les représentations des algèbres de Hecke, comme par exemple :

- les algèbres de Schur (cf. [Rou08]),
- les opérateurs de Dunkl (cf. [EM]),
- les schémas de Hilbert et les liens avec les conjectures de Haiman,
- la recherche de déformations ou de désingularisations de la variété $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W$.

Suivant les valeurs du paramètre t , les algèbres de Cherednik ont un comportement très différent.

Pour $t \neq 0$, $H_{t,\mathfrak{h}}(W)$ a un centre trivial, elle admet des modules simples de dimension infinie et une catégorie de représentations, appelée catégorie \mathcal{O} , construite sur le modèle de la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes (cf. [GGOR03]). Cette catégorie est dite "de plus haut poids", ce qui signifie qu'il existe certains modules, appelés modules standards, paramétrés par $\text{Irr } W$ et dont la description des facteurs de composition fait intervenir un ordre. Cet ordre est l'ordre de la \mathbf{c} -fonction, qui apparaît naturellement dans la théorie des représentations des algèbres

de Schur ou des algèbres de Hecke associées aux groupes de réflexions complexes (cf. [Rou08]).

Pour $t = 0$, cette algèbre a un centre non trivial et tous les modules simples de $H_{0,\mathfrak{h}}(W)$ sont de dimension finie. En quotientant $H_{0,\mathfrak{h}}(W)$ par un idéal inclus dans son centre, on obtient une algèbre de dimension finie, appelée algèbre de Cherednik restreinte et notée $\overline{H_{0,\mathfrak{h}}(W)}$. Les modules simples de cette algèbre étant aussi paramétrés par $\text{Irr } W$ (cf. [Gor03]), la décomposition en blocs de cette algèbre définit donc une partition de $\text{Irr } W$, que l'on appelle partition de Calogero-Moser de W . Une conjecture de Martino, vérifiée pour les groupes imprimitifs, décrit les blocs de cette partition comme des unions de familles de Rouquier. De plus, à partir de l'algèbre de Cherednik $H_{0,\mathfrak{h}}(W)$, on peut définir la variété de Poisson $\text{Specm } Z(H_{0,\mathfrak{h}}(W))$, appelée espace de Calogero-Moser, qui est une déformation de la variété singulière $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W$. La géométrie de cette variété et l'étude des représentations de l'algèbre $H_{0,\mathfrak{h}}(W)$ sont donc intimement liées : d'un côté, la géométrie particulièrement intéressante de la variété singulière enrichit la théorie des représentations de l'algèbre et de l'autre, l'étude des représentations de $H_{0,\mathfrak{h}}(W)$ permet de trouver des désingularisations et des déformations de la variété quotient.

Il est donc naturel, dans le cas $t = 0$, de chercher des modèles (comme la \mathbf{c} -fonction pour $t \neq 0$) qui nous permettraient de comprendre les représentations de $\overline{H_{0,\mathfrak{h}}(W)}$ et donc la partition de Calogero-Moser de W . C'est dans cet esprit que I. Gordon, dans [Gor08], a relié les représentations de $\overline{H_{0,\mathfrak{h}}(G(\ell, 1, n))}$ à la géométrie de certaines variétés de carquois, introduites par H. Nakajima dans [Nak94]. Ces variétés, qui sont des désingularisations de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$, lui ont permis de construire, grâce à la décomposition de Bialynicki-Birula, un ordre géométrique sur $\text{Irr } G(\ell, 1, n)$ qu'il a relié à la \mathbf{c} -fonction.

Liens entre les différents problèmes

Les algèbres de Cherednik apportent une réponse conjecturale à la question 1. En effet, une conjecture de Gordon-Martino (cf. [GM09]) prédit que la partition de Calogero-Moser coïncide avec la partition en familles de Lusztig pour les groupes de Coxeter et elle est vérifiée pour les groupes de type A_n , D_n , $I_2(n)$ et B_n dans certains cas. Les algèbres de Cherednik en $t = 0$ permettraient donc de généraliser la construction des familles de Lusztig à tous les groupes de réflexions complexes. La principale difficulté dans le cas complexe reste la construction d'un "bon" ordre qui décrirait les cellules, problème soulevé par la question 2. De nombreux travaux ont été effectués dans ce sens, comme par exemple [Gor08] et [GI].

Les questions 1 et 2 sont donc étroitement liées au problème qui consiste à trouver un modèle pour décrire les représentations de $\overline{H_{0,\mathfrak{h}}(W)}$. La question suivante, résolue dans [Gor08] pour $G(\ell, 1, n)$ et pour certains paramètres, englobe tous ces problèmes, ainsi que la recherche de désingularisations de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W$.

Question 3. *Existe-t-il une variété complexe $\mathcal{M}_{\mathfrak{h}}(W)$ et un morphisme \mathbb{C}^* -équivariant $\pi : \mathcal{M}_{\mathfrak{h}}(W) \rightarrow (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W$ tels que :*

- les \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathcal{M}_{\mathfrak{h}}(W)$ décrivent la partition de Calogero-Moser de W ,
- l'ordre défini par la décomposition de Bialynicki-Birula sur $\mathcal{M}_{\mathfrak{h}}(W)^{\mathbb{C}^*}$ soit relié aux ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions et à l'ordre $\prec_{\mathcal{LR}}$ si W est un groupe de Coxeter ?

En général, la variété $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(W)$ n'est pas lisse. Ce n'est donc pas une résolution symplectique de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W$ mais elle reste intéressante pour construire un ordre géométrique sur la partition de Calogero-Moser de W . Enfin, on va chercher à relier cet ordre à la \mathbf{a} -fonction car elle intervient dans la définition des familles de Lusztig, à la \mathbf{c} -fonction car elle intervient dans le cas $t \neq 0$ puis à l'ordre $\prec_{\mathcal{LR}}$ qui décrit les cellules et qui est équivalent à l'ordre de dominance pour le type A_n .

Cette thèse se place dans ce contexte et a pour objectif de généraliser les travaux de I. Gordon, en répondant à la question 3 pour tous les paramètres pour $G(\ell, 1, n)$ puis pour $G(\ell, e, n)$ lorsque $e \nmid n$ et en proposant un début de réponse pour le cas $e \mid n$. Cette recherche va nous amener à créer des ponts entre des domaines très différents des mathématiques, comme la théorie des représentations, la combinatoire ou la géométrie des variétés de carquois.

Résumé des différents travaux de recherche

Dans le cas $G(\ell, 1, n)$, I. Gordon a répondu à la question 3 en construisant une variété $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$ à partir de la variété des représentations du carquois cyclique à ℓ sommets. Puis en partitionnant l'espace des paramètres pour lesquels la variété est lisse en alcôves, de la forme $\alpha(\mathbf{s}, w, \pm)$ avec $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^\ell$ et $w \in \mathfrak{S}_\ell$, il a décrit les \mathbb{C}^* -points fixes de cette variété par des partitions d'un entier : pour $\mathbf{h} \in \alpha(\mathbf{s}, w, +)$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n))^{\mathbb{C}^*} &\leftrightarrow \mathcal{P}_{\nu_{\mathbf{s}}}(N) \\ \mathbf{x}_{\mathbf{h}}(\lambda) &\leftrightarrow \tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \lambda), \end{aligned}$$

où $N = \ell n + |\nu_{\mathbf{s}}|$.

Il a ensuite construit un homéomorphisme $\mathbf{U}(1)$ -équivariant entre $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$ et l'espace de Calogero-Moser $\text{Specm } Z(H_{0,\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)))$. Cela lui a permis, grâce aux résultats obtenus dans [Gor03, §5], de paramétrer la partition de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$ par les \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$. Il a donc obtenu deux descriptions de la partition de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$: une géométrique, grâce aux points fixes, et une combinatoire, par les partitions $\tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \lambda)$.

À partir de ces deux paramétrages, il a pu construire deux ordres sur les blocs constituant la partition de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$: un ordre géométrique $\prec_{\mathbf{h}}$ puis un ordre combinatoire $\triangleleft_{\mathbf{h}}$. Enfin, il a relié ces ordres et ceux des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \lambda \prec_{\mathbf{h}} \mu & \implies & \lambda \triangleleft_{\mathbf{h}} \mu. \\ \downarrow & & \\ \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\mu) & & \\ \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\mu) & & \end{array}$$

Une partie de cette thèse étend la construction de tous ces ordres à l'ensemble des paramètres, en s'appuyant notamment sur la normalité de la variété $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$, pour \mathbf{h} se trouvant sur un mur d'une alcôve. Nous nous intéresserons de plus aux relations, pour certains paramètres, entre l'ordre combinatoire et l'ordre de dominance sur les partitions associées aux symboles des ℓ -multipartitions de n , ce qui permet de relier les ordres $\prec_{\mathbf{h}}$ et $\triangleleft_{\mathbf{h}}$, au moins conjecturalement, à l'ordre $\prec_{\mathcal{LR}}$ (cf. [Gl, rem 2.6 et th. 7.11]). Enfin, nous étendrons les liens existant entre ces ordres au cas non lisse.

Plus précisément, nous allons montrer les relations suivantes.

- Pour $\mathbf{h} \in \alpha(\mathbf{s}, w, -)$:

$$\lambda \triangleleft_{\mathbf{h}} \mu \xleftrightarrow[\frac{s_{\ell-1-i} - i}{z}]{(w-m)^i =} \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \xrightarrow{r > 0} \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu). \end{cases}$$

- Pour $\mathbf{h} \in \alpha(\mathbf{s}, w, +)$:

$$\lambda \triangleleft_{\mathbf{h}} \mu \xleftrightarrow[\frac{-s_i - i}{z}]{(w-m)^i =} \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \xrightarrow{r < 0} \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu). \end{cases}$$

- Pour \mathbf{h} sur un mur et ℓ quelconque : $B \prec_{\mathbf{h}} B' \implies \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(B) \leq \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(B') \\ \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(B) \geq \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(B'). \end{cases}$
- Pour \mathbf{h} sur un mur et $\ell = 2$: $B \prec_{\mathbf{h}} B' \implies B \triangleleft_{\mathbf{h}} B'$,

où B et B' sont des blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$.

Afin d'étendre ces différentes constructions à $G(\ell, e, n)$, nous allons construire la bonne variété lorsque e ne divise pas n . Cette variété, notée $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(e, n)$, est le produit fibré de $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$ par $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$ au-dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$ pour un paramètre \mathbf{h} se trouvant sur un mur. Ses points fixes décrivent bien la partition de $G(\ell, e, n)$ parce que cette variété est définie à partir de $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$ et que les partitions de $G(\ell, 1, n)$ et de $G(\ell, e, n)$ sont reliées (cf. [Bel]), mais nous n'avons pas cherché à construire dans ce cas un homéomorphisme avec l'espace de Calogero-Moser. Le travail effectué pour $G(\ell, 1, n)$ nous permet alors d'étendre les définitions des ordres à $G(\ell, e, n)$ pour $e \nmid n$ et de les relier, au théorème 11.1.2.

Dans le cas où e divise n , nous proposons une variété $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(G(\ell, e, n))$ en réponse à la question 3. Cette variété est la normalisation de $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(e, n)$ et nous étudions le cas $G(2, 2, 2)$ pour lequel elle permet de décrire géométriquement la partition de Calogero-Moser du groupe.

Structure de la thèse

Cette thèse se décompose en quatre parties. La première nous permet d'introduire les outils utiles pour les parties suivantes, en commençant au chapitre 1 par la combinatoire des partitions et des multipartitions d'un entier qui paramètrent les représentations des groupes imprimitifs. Le chapitre 2 présente la théorie des systèmes de Clifford et généralise au cas abélien des résultats de M. Chlouveraki sur les orbites de caractères et de blocs d'algèbres formant un système de Clifford (cf. théorème 2.1.7 et corollaire 2.1.16). Enfin, le dernier chapitre étudie la construction d'un ordre sur les \mathbb{C}^* -points fixes d'une variété quasi-projective normale, ainsi que sa compatibilité avec certains morphismes.

La deuxième partie compare les algèbres de Cherednik associées à deux groupes de réflexions complexes $K \triangleleft W$. Au chapitre 5, nous présentons la construction donnée dans [Bel] de la sous-algèbre $H_{0,\mathbf{h}}(K)$ de $\overline{H_{0,\mathbf{h}}(W)}$, dont les blocs sont en bijection avec ceux de l'algèbre restreinte en $t = 0$ associée à K . Puis nous montrons à la proposition 5.1.5 que $\text{rad}(\overline{H_{0,\mathbf{h}}(W)}) = \overline{H_{0,\mathbf{h}}(W)} \otimes_{\overline{H_{0,\mathbf{h}}(K)}} \text{rad}(H_{0,\mathbf{h}}(K))$, ce qui nous permet de

montrer au théorème 5.3.7 que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{H_{0,\mathbf{h}}(K)}\text{-mod} & \xleftarrow{L_{\mathbf{h}}^K} & \mathbb{C}[K]\text{-mod} \\
 \text{Ind} \uparrow \text{Res} & & \text{Ind} \uparrow \text{Res} \\
 \overline{H_{0,\mathbf{h}}(W)}\text{-mod} & \xleftarrow{L_{\mathbf{h}}^W} & \mathbb{C}[W]\text{-mod}.
 \end{array}$$

Nous sommes alors en mesure de généraliser la description, qui est faite dans le cas cyclique dans [Bel], de la partition de Calogero-Moser de K en fonction de celle de W au cas abélien (cf. théorème 6.1.4).

La troisième partie est consacrée à l'étude des différents objets associés aux groupes $G(\ell, 1, n)$. Une formule de la \mathbf{A} -fonction est obtenue au théorème 7.3.3, sur le modèle de celle de la \mathbf{a} -fonction donnée dans [GJ11]. Le chapitre 8 introduit les variétés $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$, étudie leurs \mathbb{C}^* -points fixes d'après [Gor08] et montre, à la proposition 8.2.15, qu'elles sont normales. Nous présentons au chapitre 9 les différentes descriptions de la partition de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$ et définissons les ordres $\prec_{\mathbf{h}}$ et $\triangleleft_{\mathbf{h}}$, introduits par I. Gordon, pour un paramètre \mathbf{h} tel que la variété $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$ est lisse. Nous allons étendre ces définitions à tous les paramètres, en utilisant la normalité des variétés $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(n)$ puis nous énoncerons les différents liens entre ces ordres démontrés dans [Gor08]. Nous montrerons ensuite, au théorème 9.3.3, que l'ordre combinatoire est équivalent à l'ordre de dominance sur les partitions associées aux symboles pour certains paramètres, ce qui nous permettra de montrer directement pour ces paramètres que l'ordre combinatoire est moins fin que les ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions. Enfin, nous généraliserons tous ces liens au cas non lisse (cf. théorème 9.3.10 et proposition 9.4.7 pour le cas du type B_n). Nous terminerons par l'étude du cas des groupes de type B_n , pour lesquels nous relierons les blocs aux classes d'équivalences de l'ordre combinatoire au corollaire 9.4.5.

Cette généralisation au cas non lisse nous permet dans la dernière partie d'étendre les constructions de ces ordres aux groupes $G(\ell, e, n)$. Nous commençons par donner la description de la partition de Calogero-Moser de $G(\ell, e, n)$ issue de [Bel], puis nous construisons la variété $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(e, n)$ dont les \mathbb{C}^* -points fixes décrivent les blocs de $\overline{H_{0,\mathbf{h}}(G(\ell, e, n))}$, lorsque e ne divise pas n (cf. paragraphes 10.4 et 11.1). Dans ce cas, nous définissons les ordres géométriques et combinatoires et nous les relierons aux ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions au théorème 11.1.2. Pour le cas où e divise n , nous présentons une variété qui pourrait être le bon candidat pour cette description : la normalisation de $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}(e, n)$, puis nous montrons que, sous une certaine hypothèse qui est fortement plausible, c'est le cas pour $G(2, 2, 2)$ (cf. théorème 11.3.11), ce qui était notre hypothèse.

Notations : Dans tout le manuscrit, on notera :

- $A\text{-mod}$ la catégorie des A -modules de type fini sur un anneau A et $\text{Irr } A$ l'ensemble des classes d'isomorphie des A -modules simples
- et pour deux anneaux $A \subset B$ tels que B est un A -module de type fini,

$$\text{Res}_A^B : B\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$$

le foncteur de restriction défini de manière naturelle par restriction de l'action au sous-anneau et le foncteur d'induction :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_A^B : A\text{-mod} &\rightarrow B\text{-mod} \\ M &\mapsto B \otimes_A M. \end{aligned}$$

Première partie

Préliminaires

Combinatoire

L'étude des représentations des groupes de réflexions complexes nous amène naturellement à considérer des objets combinatoires, comme les partitions ou les multipartitions d'un entier qui paramètrent les caractères irréductibles de certains groupes de réflexions complexes.

Ce chapitre consiste à introduire toutes ces notions combinatoires dont on aura besoin par la suite, le lecteur pourra donc s'y référer au fur et à mesure de la lecture des autres chapitres.

1.1 Partitions d'un entier

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. Une partition d'un entier n est une suite d'entiers $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ telle que $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$. L'entier r est appelé la hauteur de λ , on le notera $h(\lambda)$.

On écrit alors $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $|\lambda| = \sum_{i=1}^r \lambda_i$.

L'ensemble des partitions de l'entier n est noté $\mathcal{P}(n)$.

Remarque 1.1.2. (i) Par convention, on considère que la partition vide est de hauteur nulle.

(ii) On note 1^n la partition $(1, \dots, 1)$ de n .

(iii) En général, on notera λ_k pour k quelconque, en considérant que si $k > h(\lambda)$, alors $\lambda_k = 0$.

On peut définir un ordre partiel sur l'ensemble $\mathcal{P}(n)$ en posant

$$\lambda \leq \mu \iff \forall i \geq 1, \sum_{j=1}^i \lambda_j \leq \sum_{j=1}^i \mu_j.$$

Et on note $\lambda < \mu$ si $\lambda \leq \mu$ et $\lambda \neq \mu$.

Définition 1.1.3. On appelle cet ordre l'ordre de dominance sur les partitions d'un même entier.

Pour $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, on pose $n(\lambda) = \sum_{1 \leq j < i \leq r} \min\{\lambda_i, \lambda_j\} = \sum_{i=1}^r (i-1)\lambda_i$ et

$$n^*(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \lambda_i(\lambda_i - 1).$$

Remarque 1.1.4. Deux partitions distinctes peuvent avoir le même $n(\lambda)$ comme $\lambda = (4, 2, 1, 1)$ et $\mu = (3, 3, 2) \in \mathcal{P}(8)$ qui vérifient $n(\lambda) = n(\mu) = 7$. Ce n'est pas le cas si les partitions sont comparables avec l'ordre de dominance, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 1.1.5. Soient λ et $\mu \in \mathcal{P}(n)$. Si $\lambda \leq \mu$ alors $n(\lambda) \geq n(\mu)$ avec égalité si et seulement si $\lambda = \mu$.

Démonstration. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= \sum_{i=1}^r (i-1)\lambda_i \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=j+1}^r \lambda_i \\ &= rn - \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^j \lambda_i \end{aligned}$$

qui entraînent la proposition. □

Définition 1.1.6. À une partition λ de n donnée, on associe un diagramme de Young, défini par

$$[\lambda] := \{(a, b), 1 \leq a \leq h(\lambda) \text{ et } 1 \leq b \leq \lambda_a\} \subset \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Les éléments de $[\lambda]$ sont appelés des boîtes et le contenu d'une boîte $\gamma = (a, b)$ est par définition

$$\text{cont}(\gamma) = b - a.$$

On peut visualiser le diagramme de Young $[\lambda]$ par une succession de boîtes arrangées en lignes justifiées à gauche, avec λ_1 boîtes dans la première ligne, ..., λ_r boîtes dans la dernière ligne et faire apparaître les contenus dans les boîtes du diagramme, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 1.1.7. Le diagramme de Young associé à la partition $(6, 3, 1) \in \mathcal{P}(10)$ est

0	1	2	3	4	5
1	0	1			
2					

où, pour $a \in \mathbb{N}^*$, $\bar{a} := -a$.

Définition 1.1.8. À une partition λ donnée, on associe la partition transposée ${}^t\lambda$ qui a pour diagramme de Young le transposé de celui de λ . Plus précisément, on peut définir ${}^t\lambda$ par $({}^t\lambda)_j = \text{card}\{1 \leq i \leq r, \lambda_i \geq j\}$.

Exemple 1.1.9. ${}^t(6, 3, 1) = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$

L'application transposée est compatible avec l'ordre de dominance ainsi qu'avec les fonctions n et n^* dans le sens où elle vérifie :

$$\lambda \triangleleft \mu \iff {}^t\lambda \triangleright {}^t\mu$$

ainsi que le résultat suivant :

Lemme 1.1.10. $n^*(\lambda) = n({}^t\lambda)$.

Preuve. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} n^*(\lambda) &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{\lambda_j-1} i \\ &= 1 \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j - 1 \geq 1\} + 2 \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j - 1 \geq 2\} \\ &\quad + 3 \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j - 1 \geq 3\} + \dots \\ &\quad + (\lambda_1 - 1) \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j - 1 \geq \lambda_1 - 1\} \\ &= 1 \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j \geq 2\} + 2 \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j \geq 3\} \\ &\quad + 3 \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j \geq 4\} + \dots \\ &\quad + (\lambda_1 - 1) \times \text{card}\{1 \leq j \leq r, \lambda_j \geq \lambda_1\} \\ &= \sum_{i=1}^{\lambda_1} (i-1)({}^t\lambda)_i \\ &= n({}^t\lambda) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Par la suite, on aura besoin d'un résultat élémentaire sur une partition et sa transposée que l'on va démontrer maintenant.

Lemme 1.1.11. Soit λ une partition alors pour tous $j \geq 1$ et $k \geq 1$, on a

$$({}^t\lambda)_j \neq j - \lambda_k + k - 1.$$

Preuve. Par définition, $({}^t\lambda)_j = s \geq 0$ si et seulement si

- $\forall 1 \leq k \leq s, \lambda_k \geq j$
- $\forall k \geq s + 1, \lambda_k \leq j - 1$.

Donc pour tout $1 \leq k \leq s, j - \lambda_k + k - 1 \leq j - j + s - 1 = s - 1$ et pour tout $k \geq s + 1, j - \lambda_k + k - 1 \geq j - (j - 1) + s + 1 - 1 = s + 1$. Dans tous les cas, $j - \lambda_k + k - 1 \neq s$. □

1.1.2 ℓ -abaque d'une partition

Définition 1.1.12. Pour une partition λ et un entier relatif s , on définit la suite infinie strictement décroissante $\beta_s(\lambda) = (\lambda_1 + s, \lambda_2 + s - 1, \dots, \lambda_j + s - j + 1, \dots)$ et on l'appelle le β -nombre de λ .

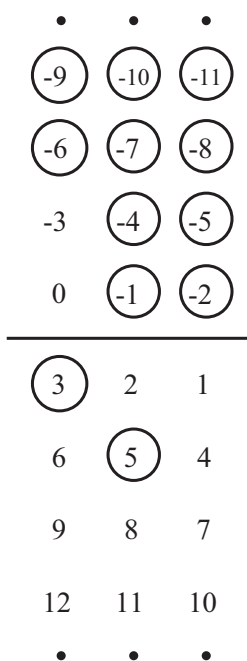
Remarque 1.1.13. (i) Comme cette suite se stabilise en la suite $(s - j + 1)_j$ à partir de $j = h(\lambda) + 1$, il est facile de retrouver s et λ à partir de $\beta_s(\lambda)$.

(ii) Par construction, on a clairement $\lambda \trianglelefteq \mu \iff \forall i \geq 1, \sum_{j=1}^i (\beta_s(\lambda))_j \leq \sum_{j=1}^i (\beta_s(\mu))_j$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, le β -nombre $\beta_0(\lambda) = \{\lambda_1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_j - j + 1, \dots\}$ peut être décrit de manière unique par des perles sur un abaque $\mathcal{A}(\lambda)$ qui a ℓ colonnes, numérotées de gauche à droite par $i = 0, \dots, \ell - 1$ (cf. par exemple [Lei99]).

Les différentes positions des perles sur l'abaque sont numérotées par des entiers, la colonne numéro i comportant tous les entiers congrus à $-i$ modulo ℓ , dans l'ordre croissant de haut en bas. Si l'on numérote les lignes par des entiers relatifs dans l'ordre croissant de haut en bas, la ligne contenant 0 étant numérotée par $j = 0$, alors la perle (i, j) , qui est située sur la colonne numéro i et sur la ligne numéro j , est étiquetée par l'entier $-i + \ell j$.

Exemple 1.1.14. La figure suivante représente le 3-abaque de la partition $(5, 4, 1, 1)$ puisque $\beta_0((5, 4, 1, 1)) = (5, 3, -1, -2, -4, -5, -6, \dots)$.



On appelle *trous* les positions inoccupées de l'abaque qui sont étiquetées par des entiers négatifs et *particules* les perles occupées et étiquetées par des entiers strictement positifs. Par exemple, l'abaque précédent a deux trous : 0 et -3 et deux particules : 3 et 5. Dans l'abaque d'une partition, il y a toujours autant de trous que de particules (cf. [Lei99]).

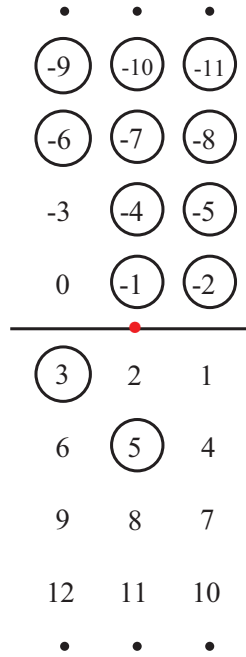
Si l'on considère la partition transposée de λ , on peut chercher à comparer les abaques de λ et de ${}^t\lambda$.

Définition 1.1.15. À partir d'un abaque \mathcal{A} donné, on construit un autre abaque \mathcal{A}' qui vérifie : la position (i, j) de \mathcal{A}' est occupée si et seulement si la position $(\ell - 1 - i, -j + 1)$ de \mathcal{A} n'est pas occupée.

On appelle cet abaque l'abaque antisymétrique de \mathcal{A} .

Remarque 1.1.16. Passer de la position (i, j) étiquetée par l'entier $-i + \ell j$ à la position $(\ell - 1 - i, -j + 1)$ étiquetée par $1 + i - \ell j$ revient à appliquer la symétrie par rapport au "centre" de l'abaque, qui est le point situé au milieu de la ligne de l'abaque séparant les entiers négatifs des entiers strictement positifs.

Exemple 1.1.17. Le centre d'un 3-abaque est représenté par le point rouge dans la figure ci-dessous.



Proposition 1.1.18. *L'abaque antisymétrique de $\mathcal{A}(\lambda)$ est $\mathcal{A}({}^t\lambda)$.*

Démonstration. Notons $r = h(\lambda) = ({}^t\lambda)_1$.

La position (i_0, j_0) de $\mathcal{A}({}^t\lambda)$ est occupée si et seulement s'il existe j tel que

$$-i_0 + \ell j_0 = ({}^t\lambda)_j - j + 1.$$

De même, la position $(\ell - 1 - i_0, -j_0 + 1)$ de $\mathcal{A}(\lambda)$ est occupée si et seulement s'il existe k tel que

$$1 + i_0 - \ell j_0 = \lambda_k - k + 1.$$

Ainsi, si les deux positions étaient occupées simultanément dans les deux abaques, on aurait

$$({}^t\lambda)_j = j - \lambda_k + k - 1,$$

ce qui contredit le lemme 1.1.11.

Donc si la position (i_0, j_0) de $\mathcal{A}({}^t\lambda)$ est occupée alors la position symétrique est inoccupée dans $\mathcal{A}(\lambda)$ et si la position (i_0, j_0) de $\mathcal{A}(\lambda)$ est occupée alors la position symétrique est inoccupée dans $\mathcal{A}({}^t\lambda)$.

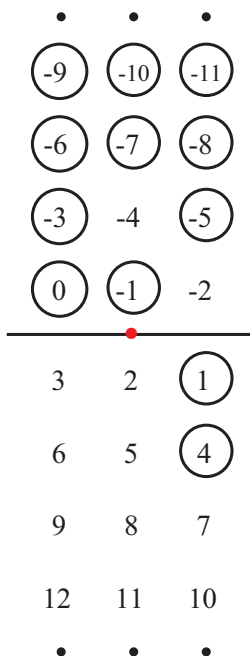
Il faut maintenant montrer que si la position (i_0, j_0) de $\mathcal{A}({}^t\lambda)$ est inoccupée alors la position symétrique est occupée dans $\mathcal{A}(\lambda)$.

- Toutes les positions (i_0, j_0) telles que $-i_0 + \ell j_0 \leq -\lambda_1 = -h({}^t\lambda)$ sont occupées dans $\mathcal{A}({}^t\lambda)$.
- Concernant les positions (i_0, j_0) telles que $-i_0 + \ell j_0 > r$: elles sont toutes inoccupées dans $\mathcal{A}({}^t\lambda)$ et alors $1 + i_0 - \ell j_0 \leq -r$ donc les positions symétriques sont toutes occupées dans $\mathcal{A}(\lambda)$.
- Étudions maintenant les boîtes (i_0, j_0) telles que

$$-\lambda_1 + 1 \leq -i_0 + \ell j_0 \leq r \iff -r + 1 \leq 1 + i_0 - \ell j_0 \leq \lambda_1.$$

Parmi ces $r + \lambda_1$ boîtes, il y a λ_1 boîtes occupées dans $\mathcal{A}({}^t\lambda)$ (celles qui ont pour étiquettes $({}^t\lambda)_k - k + 1$, $1 \leq k \leq \lambda_1$) et, de même, parmi les $r + \lambda_1$ boîtes symétriques, il y a r boîtes occupées dans $\mathcal{A}(\lambda)$. Donc les seules boîtes inoccupées de $\mathcal{A}({}^t\lambda)$ sont les symétriques des boîtes occupées dans $\mathcal{A}(\lambda)$. \square

Exemple 1.1.19. La partition transposée de $(5, 4, 1, 1)$, dont l'abaque est représenté à l'exemple 1.1.14 est $(4, 2, 2, 2, 1)$. Le β -nombre associé est $\beta_0((4, 2, 2, 2, 1)) = (4, 1, 0, -1, -3, -5, -6, -7, -8, \dots)$, la partition transposée a donc pour abaque :

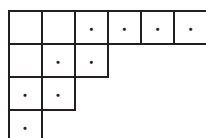


Construisons l'abaque antisymétrique de cet abaque : il aura deux particules : en 5 (qui est le symétrique de -4 par rapport au point rouge) et en 3 (le symétrique de -2) ainsi que deux trous : en 0 (le symétrique de 1) et en -3 (le symétrique de 4). On retrouve l'abaque de $(5, 4, 1, 1)$ donné à l'exemple 1.1.14.

1.1.3 ℓ -cœurs

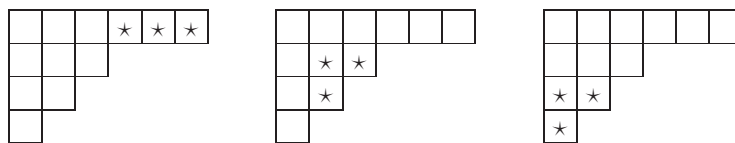
Définition 1.1.20. Une boîte (a, b) du diagramme de Young $[\lambda]$ d'une partition λ est dite à la frontière de $[\lambda]$ si $(a, b + 1)$, $(a + 1, b)$ ou $(a + 1, b + 1)$ n'est pas une boîte de $[\lambda]$.

Exemple 1.1.21. La frontière de $[(6, 3, 2, 1)]$ est représentée par des points sur le diagramme suivant :



Définition 1.1.22. Un ℓ -crochet frontière d'une partition λ est une suite de ℓ boîtes consécutives se trouvant sur la frontière de $[\lambda]$ qui sont telles que, si l'on enlève ces boîtes du diagramme de Young $[\lambda]$, on a toujours un diagramme de Young d'une partition, appelée prédécesseure de λ .

Exemple 1.1.23. La partition $(6, 3, 2, 1)$ a trois 3-crochets frontières, représentés par des étoiles sur les diagrammes suivants :



Définition 1.1.24. Une partition qui n'a pas de ℓ -crochet frontière est appelé un ℓ -cœur.

Si λ n'est pas un ℓ -cœur alors on peut enlever un ℓ -crochet frontière au diagramme de Young $[\lambda]$ pour obtenir une partition μ , prédécesseur de λ . On dit dans ce cas que l'on obtient μ à partir de λ en lui enlevant un ℓ -crochet frontière. On recommence cette opération sur μ et ainsi de suite jusqu'à obtenir le ℓ -cœur associé à λ . Le diagramme de Young d'un ℓ -cœur est tel qu'on ne peut pas lui enlever de ℓ -crochet frontière et obtenir encore un diagramme de Young.

Exemple 1.1.25. Le ℓ -cœur associé à la partition $(6, 3, 2, 1)$ est la partition vide.

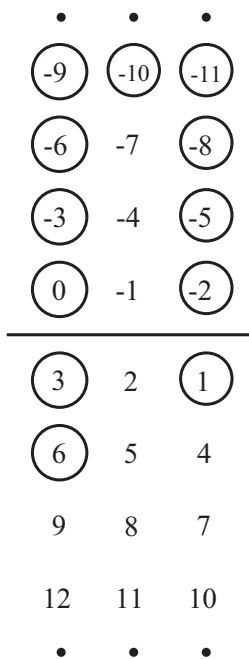
L'abaque associé à un ℓ -cœur est tel que dans chaque colonne, il n'y a pas de vide entre deux perles. On obtient le ℓ -cœur associé à une partition en repoussant vers le haut toutes les billes de l'abaque de cette partition (cf [Lei99]). De plus, sachant qu'il y a autant de trous que de particules dans l'abaque d'une partition, si, pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, on note

$$s_i = \begin{cases} \text{nombre de particules de la colonne numéro } i \text{ si elle en contient} \\ -\text{nombre de trous sinon,} \end{cases}$$

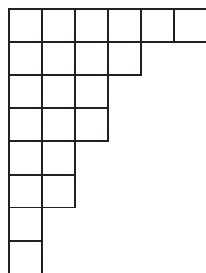
alors on obtient un élément $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^\ell = \{(s_0, \dots, s_{\ell-1}), \sum_{i=0}^{\ell-1} s_i = 0\}$.

Réciproquement, à partir d'un élément de \mathbb{Z}_0^ℓ , on peut construire un ℓ -cœur par le procédé inverse. On a donc une bijection entre \mathbb{Z}_0^ℓ et l'ensemble des ℓ -cœurs, que l'on notera $\mathbf{s} \mapsto \nu_{\mathbf{s}}$.

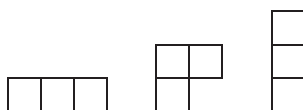
Exemple 1.1.26. L'abaque associé à $\mathbf{s} = (2, -3, 1)$ a deux particules dans la colonne numéro 0, trois trous dans la colonne numéro 1 et une particule dans la colonne numéro 2. On obtient donc l'abaque suivant :



et la partition associée a pour β -nombre $\beta_0(\nu_s) = (6, 3, 1, 0, -2, -3, -5, -6, -8, -9, -10, \dots)$ et donc $\nu_s = (6, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$. C'est bien un 3-cœur car son diagramme de Young est de la forme



et l'on voit bien que l'on ne peut pas lui enlever de 3-crochets frontières, qui sont de la forme



et retomber sur un diagramme de Young.

1.2 Multipartitions d'un entier

Nous verrons par la suite (cf. théorème 7.1.3) que les partitions d'un entier permettent de décrire combinatoirement les caractères irréductibles du groupe symétrique. Pour décrire de la même manière $\text{Irr } G(\ell, 1, n)$, où $G(\ell, 1, n) = (\mu_\ell)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, on va utiliser les ℓ -multipartitions de n .

Nous allons introduire cette notion dans ce paragraphe et définir deux partitions associées à une multipartition $\lambda : \kappa_m^s(\lambda)$ et $\tau_s(\lambda)$ qui nous seront utiles pour décrire les blocs de $G(\ell, 1, n)$.

Définition 1.2.1. Une ℓ -multipartition de n est un ℓ -uplet de partitions

$$\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell) \text{ qui vérifie } \sum_{r=1}^{\ell} |\lambda^r| = n.$$

On note $\mathcal{P}(\ell, n)$ l'ensemble des ℓ -multipartitions de l'entier n .

Pour $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell) \in \mathcal{P}(\ell, n)$ et pour $1 \leq i \leq \ell$ on pose $h^i = h(\lambda^i)$. La hauteur de λ est alors le nombre $h_\lambda = \max\{h^i, 1 \leq i \leq \ell\}$.

1.2.1 Contenu d'une multipartition

À une multipartition $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)$, on peut aussi associer un diagramme de Young $[\lambda]$ qui est constitué des ℓ diagrammes de Young des partitions constituant λ . Chaque boîte γ de $[\lambda]$ est décrite par un triplet (a, b, c) où $1 \leq c \leq \ell$ est la composante où se trouve γ , $1 \leq a \leq h^c$ le numéro de la ligne et $1 \leq b \leq \lambda_a^c$ le numéro de la colonne.

Définition 1.2.2. Pour $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, $\gamma \in [\lambda]$ et $\mathbf{m} = (m^0, \dots, m^{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$, on définit le \mathbf{m} -contenu de $\gamma = (a, b, c)$ par $\text{cont}_{\mathbf{m}}(\gamma) = b - a + m^{c-1}$ et on l'écrit à l'intérieur de la boîte.

Exemple 1.2.3. Pour $\lambda = ((2, 1), (1), (3))$ et $\mathbf{m} = (0, 1, 3)$, on obtient

$$[\lambda] = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \right)$$

Lemme 1.2.4. En gardant les notations ci-dessus, on a :

$$\sum_{\gamma \in [\lambda]} \text{cont}_{\mathbf{m}}(\gamma) = \sum_{c=1}^{\ell} (|\lambda^c| m^{c-1} + n({}^t \lambda^c) - n(\lambda^c)).$$

Preuve. Pour c fixé, $\sum_{a=1}^{h^c} \sum_{b=1}^{\lambda_a^c} b = \sum_{a=1}^{h^c} \frac{\lambda_a^c (\lambda_a^c + 1)}{2} = n^*(\lambda^c) + |\lambda^c| = n({}^t \lambda^c) + |\lambda^c|$ d'après

le lemme 1.1.10 et $\sum_{a=1}^{h^c} \sum_{b=1}^{\lambda_a^c} a = n(\lambda^c) + |\lambda^c|$, enfin $\text{card}\{(a, b), 1 \leq a \leq h^c \text{ et } 1 \leq b \leq \lambda_a^c\} = |\lambda^c|$. On conclut par définition du contenu. \square

1.2.2 Résidus

Soit x une indéterminée. On définit le résidu d'une partition λ par l'élément de $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$:

$$\text{Res}_\lambda(x) = \sum_{(a,b) \in [\lambda]} x^{\text{cont}(a,b)}.$$

Pour une multipartition $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)$ et un ℓ -uplet d'entiers $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{\ell-1})$, on définit le \mathbf{r} -résidu translaté de λ par

$$\text{Res}_\lambda^{\mathbf{r}}(x) = \sum_{i=0}^{\ell-1} x^{r_i} \text{Res}_{\lambda^{i+1}}(x) = \sum_{\gamma \in [\lambda]} x^{\text{contr}(\gamma)}.$$

1.2.3 Symboles associés à une multipartition et partitions $\kappa_m^s(\lambda)$

On va maintenant définir des objets combinatoires associés aux multipartitions : les symboles.

Définition 1.2.5. Soient $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell) \in \mathcal{P}(\ell, n)$ et $h \geq h_\lambda$ un entier, le symbole ordinaire de taille h de λ est défini par

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B^0 \\ \vdots \\ B^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

où $B^i = (B_1^i, \dots, B_h^i)$ avec $B_j^i = \lambda_j^{i+1} - j + h$.

Soit $\mathbf{m} = (m^0, \dots, m^{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$. On note $\rho = [\max(m^0, \dots, m^{\ell-1})]$ où $[\cdot]$ consiste à prendre la partie entière et pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, on pose $hc^i = h^{i+1} - m^i$ et on définit $hc^\lambda := \max\{hc^i, 0 \leq i \leq \ell - 1\}$.

Définition 1.2.6. Soient $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$ et s un entier supérieur ou égal à $hc^\lambda + 1$. Le \mathbf{m} -symbole ordinaire de taille s de λ est défini par

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{B}^0 \\ \vdots \\ \tilde{B}^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{B}^i = (\tilde{B}_{\rho+s}^i, \dots, \tilde{B}_1^i)$ avec $\tilde{B}_j^i = \lambda_j^{i+1} - j + m^i + \rho + s$.

Définition 1.2.7. On définit le \mathbf{m} -symbole décalé de taille s de λ par

$$\mathfrak{B}_m^s(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^0 \\ \vdots \\ \mathfrak{B}^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

avec $\mathfrak{B}^i = \beta^i(s - hc^i)$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, où $\beta^i = (\lambda_{h^{i+1}}^{i+1}, \dots, \lambda_j^{i+1} - j + h^{i+1}, \dots, \lambda_1^{i+1} - 1 + h^{i+1})$ et pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ et $t \geq 0$,

$$\beta(t) := \begin{cases} (\beta_1, \dots, \beta_k) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ (t - [t], t - [t] + 1, \dots, t - 1, \beta_1 + t, \dots, \beta_k + t) & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

La suite \mathfrak{B}^i est donc de taille $s + [m^i]$.

Exemple 1.2.8. Pour $\ell = 2$, $n = 5$ et $s = 4$, les multipartitions $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$ ont pour symboles décalés :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \mathfrak{B}_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{B}_{(1, 0)}^s(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \mathfrak{B}_{(1, 0)}^s(\mu) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 1.2.9. Dans [GJ11, §5.5], l'entier s est choisi tel que $s \geq hc^\lambda$. Dans le cas où

$$\max(hc^0, \dots, hc^{\ell-1}) \leq s < \max(hc^0, \dots, hc^{\ell-1}) + 1,$$

il existe des i tels que $0 \leq s - hc^i < 1$, alors la ligne correspondante du symbole ne sera pas translatée (cf. définition de $\beta(t)$). Mais l'écriture du symbole est plus claire si toutes les lignes sont translatées. C'est pourquoi on prendra toujours $s \geq hc^\lambda + 1$ et si plusieurs multipartitions rentrent en jeu, on prendra un s qui vérifie cette inégalité pour toutes les multipartitions que l'on considère.

On peut relier les différents symboles d'une multipartition de la manière suivante :

- le \mathbf{m} -symbole de taille s et le symbole ordinaire de taille $h = \rho + s$ sont reliés par la formule : $\tilde{B}^j = (B_{\rho+s}^j + m^j, \dots, B_1^j + m^j)$.
- le \mathbf{m} -symbole et le \mathbf{m} -symbole décalé de taille s sont reliés par $\tilde{B}^j = (m^j, m^j + 1, \dots, m^j + \rho - [m^j] - 1, \mathfrak{B}_{[m^j]+s}^j + \rho, \dots, \mathfrak{B}_1^j + \rho)$.

Définition 1.2.10. On définit le contenu \mathbf{m} -chargé d'une multipartition λ par le multiensemble

$$\text{cont}(\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)) = \mathfrak{B}^0 \cup \dots \cup \mathfrak{B}^{\ell-1}$$

où s est un entier tel que $s \geq hc^\lambda + 1$.

Notons $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = (\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_t)$ la partition constituée des éléments de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$, le \mathbf{m} -symbole décalé de taille s de la multipartition λ . Ici $t = \ell s + \sum_{i=0}^{\ell-1} [m^i]$.

Lemme 1.2.11. La somme $\sum_{i=1}^t \kappa_i$ ne dépend pas de λ mais seulement des paramètres ℓ , n , s et \mathbf{m} . Plus précisément, on a :

$$\sum_{i=1}^t \kappa_i = n + \frac{\ell s(s-1)}{2} + \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(sm^i + m^i [m^i] - \frac{[m^i]([m^i] + 1)}{2} \right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \kappa_i &= \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(\sum_{j=1}^{[s-hc^i]} (s - hc^i - j) + \sum_{j=1}^{h^{i+1}} (\lambda_j^{i+1} - j + h^{i+1} + s - hc^i) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(s - hc^i - \frac{[s - hc^i]([s - hc^i] + 1)}{2} + |\lambda^{i+1}| \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^{i+1}(h^{i+1} + 1)}{2} + h^{i+1}(s + m^i) \right) \\ &= n + \sum_{i=0}^{\ell-1} \left((s - h^{i+1} + [m^i])(s - h^{i+1} + m^i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(s - h^{i+1} + [m^i])(s - h^{i+1} + [m^i] + 1)}{2} - \frac{h^{i+1}(h^{i+1} + 1)}{2} \right. \\ &\quad \left. + h^{i+1}(s + m^i) \right) \\ &= n + \frac{\ell s(s-1)}{2} + \sum_{i=0}^{\ell-1} \left(sm^i + m^i [m^i] - \frac{[m^i]([m^i] + 1)}{2} \right) \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.12. Si les m^i ne sont pas tous entiers, alors les κ_i ne sont pas des entiers. On utilisera encore le terme "partition" même si les éléments de $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ ne

sont pas tous entiers et on étendra la définition de l'ordre de dominance (cf. définition 1.1.3) sur les partitions au cas rationnel de façon évidente. De plus, cet ordre est invariant par translation sur les m^i : soit $p \in \mathbb{Q}$, on note $\mathbf{m} + p = (m^0 + p, \dots, m^{\ell-1} + p)$, soient alors λ et μ deux multipartitions et $s \geq \max\{hc^\lambda, hc^\mu, hc^\lambda - p, hc^\mu - p\} + 1$, on a :

$$\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \iff \kappa_{\mathbf{m}+p}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}+p}^s(\mu).$$

En effet, à la ligne i de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\mu)$, on va rajouter les mêmes $[m^i + p] - [m^i]$ termes puis on va ajouter p à tous les termes suivants de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\mu)$. Pour les partitions, cela revient à ajouter p à toutes les parts de $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et de $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ puis à rajouter ensuite les mêmes éléments, au même endroit. Cela ne va donc pas changer l'ordre de dominance. De la même manière, on voit que cet ordre est indépendant de l'entier s choisi.

Exemple 1.2.13. Pour les notations de l'exemple 1.2.8, on a :

$$\kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda) = (6 ; 4 ; 3, 5 ; 2, 5 ; 1, 5 ; 1 ; 0, 5 ; 0)$$

$$\kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu) = (5, 5 ; 4, 5 ; 3 ; 2, 5 ; 2 ; 1 ; 0, 5 ; 0)$$

qui sont des partitions de l'entier $19 = 5 + \frac{2 \times 4 \times 3}{2} + 4 \times \frac{1}{2}$ et

$$\kappa_{(1, 0)}^s(\lambda) = (6 ; 4 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0)$$

$$\kappa_{(1, 0)}^s(\mu) = (6 ; 5 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0)$$

qui sont des partitions de 21.

Le groupe \mathfrak{S}_ℓ agit naturellement sur $\mathcal{P}(\ell, n)$ de la manière suivante : pour $w \in \mathfrak{S}_\ell$ et $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell) \in \mathcal{P}(\ell, n)$,

$$w \cdot \lambda = (\lambda^{w^{-1}(1)}, \dots, \lambda^{w^{-1}(\ell)}).$$

Il agit de la même manière sur \mathbb{Q}^ℓ en permutant les m^i .

Lemme 1.2.14. Avec les notations précédentes, si $w \in \mathfrak{S}_\ell$ alors $\kappa_{w \cdot \mathbf{m}}^s(w \cdot \lambda) = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$.

Démonstration. Par définition, la ligne numéro i du symbole $\mathfrak{B}_{w \cdot \mathbf{m}}^s(w \cdot \lambda)$ va correspondre à la ligne numéro $w^{-1}(i)$ de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$, les partitions consistant à remettre dans l'ordre les éléments de ces deux symboles sont donc égales. \square

1.2.4 Partitions $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$

On vient de définir une partition $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ à partir d'une multipartition λ . On va maintenant construire une autre partition $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ et tenter de comparer l'ordre de dominance de ces deux partitions.

Soient $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)$ une ℓ -multipartition et $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}_0^\ell$ un ℓ -uplet d'entiers, qui est tel que $\sum_{i=0}^{\ell-1} s_i = 0$. Pour $1 \leq i \leq \ell$, on note \mathcal{T}_i la suite décroissante infinie :

$$\mathcal{T}_i := \{(\ell(x-1) + i, x \in \beta_{s_{i-1}}(\lambda^i))\}$$

où le β -nombre $\beta_{s_{i-1}}(\lambda^i)$ a été défini en 1.1.12.

Définition 1.2.15. La partition $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ est définie comme l'unique partition ρ telle que le β -nombre $\beta_0(\rho)$ consiste à réordonner l'ensemble $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{T}_i$.

D'après la remarque 1.1.13, ce procédé donne lieu à une bijection

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Z}_0^{\ell} \times \bigsqcup_{M \geq 0} \mathcal{P}(\ell, M) & \rightarrow \bigsqcup_{N \geq 0} \mathcal{P}(N) \\ (\mathbf{s}, \lambda) & \mapsto \tau_{\mathbf{s}}(\lambda) \end{cases}$$

Exemple 1.2.16. $\tau_{(1,-1)}((2, 2, 1); \emptyset) = (5, 4, 1, 1)$ car $\beta_1((2, 2, 1)) = (3, 2, 0, -2, -3, -4, \dots)$ et $\beta_{-1}(\emptyset) = (-1, -2, -3, -4, \dots)$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{2(3-1) + 1, 2(2-1) + 1, 2(0-1) + 1, 2(-2-1) + 1, 2(-3-1) + 1, \dots\} \\ &= \{5, 3, -1, -5, -7, -9, \dots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= \{2(-1-1) + 2, 2(-2-1) + 2, 2(-3-1) + 2, \dots\} \\ &= \{-2, -4, -6, -8, \dots\} \end{aligned}$$

$$\text{et } \beta_0(\tau_{(1,-1)}((2, 2, 1); \emptyset)) = (5, 3, -1, -2, -4, -5, -6, -7, -8, \dots).$$

Remarque 1.2.17. On peut étendre de façon triviale la définition de $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ au cas où les s_i sont des rationnels tels que, pour tout $0 \leq i \leq \ell - 1$, $\ell s_i \in \mathbb{Z}$.

On a vu au paragraphe 1.1.3, qu'à un ℓ -uplet $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^{\ell}$, on pouvait associer un ℓ -cœur que l'on notera $\nu_{\mathbf{s}}$. De plus, le premier point de [Gor08, 7.10] affirme le résultat suivant.

Proposition 1.2.18 ([JK81], lem. 2.7.13, th. 2.7.30). Soient $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^{\ell}$, $\nu_{\mathbf{s}}$ le ℓ -cœur associé à \mathbf{s} et $N = \ell n + |\nu_{\mathbf{s}}|$, alors $\tau_{\mathbf{s}} : \lambda \in \mathcal{P}(\ell, n) \mapsto \tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ décrit une bijection de $\mathcal{P}(\ell, n)$ sur $\mathcal{P}_{\nu_{\mathbf{s}}}(N)$ qui est l'ensemble des partitions de l'entier N qui ont pour ℓ -cœur $\nu_{\mathbf{s}}$.

Étudions maintenant certaines propriétés de ces partitions, dont nous aurons besoin par la suite. Au lemme 1.2.14, on a défini une action naturelle de \mathfrak{S}_{ℓ} sur $\mathcal{P}(\ell, n)$ et on aimerait avoir un résultat similaire à celui du lemme 1.2.14 mais sur les partitions $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$. Ce n'est pas le cas pour l'action de \mathfrak{S}_{ℓ} sur \mathbb{Z}_0^{ℓ} qui consiste à permuter les s_i . On va donc poser, pour $w \in \mathfrak{S}_{\ell}$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^{\ell}$,

$$w \cdot \mathbf{s} = (s'_0, \dots, s'_{\ell-1}) \text{ où, } \forall 1 \leq i \leq \ell, s'_{i-1} = s_{w^{-1}(i)-1} + \frac{w^{-1}(i) - i}{\ell}.$$

Cette définition, qui consiste en un changement de repère affine car $s'_{i-1} + \frac{i}{\ell} = s_{w^{-1}(i)-1} + \frac{w^{-1}(i)}{\ell}$, peut paraître mystérieuse à ce stade de notre présentation, pourtant, nous verrons par la suite qu'elle est tout à fait naturelle dans le cadre des algèbres de Cherednik (cf remarque 8.3.6).

Proposition 1.2.19. Si $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^{\ell}$ et $w \in \mathfrak{S}_{\ell}$, alors $\tau_{w \cdot \mathbf{s}}(w \cdot \lambda) = \tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$, avec $w \cdot \mathbf{s} = (s'_0, \dots, s'_{\ell-1})$ où, $\forall 1 \leq i \leq \ell, s'_{i-1} = s_{w^{-1}(i)-1} + \frac{w^{-1}(i) - i}{\ell}$.

Remarque 1.2.20. Défini ainsi, le ℓ -uplet $(s'_0, \dots, s'_{\ell-1})$ n'est pas forcément un ℓ -uplet

d'entiers, mais comme $\sum_{i=0}^{\ell-1} s'_i = 0$ et que pour tout i , $\ell s'_i \in \mathbb{Z}$, la partition $\tau_{w \cdot \mathbf{s}}(w \cdot \lambda)$ est bien définie d'après la remarque 1.2.17.

Démonstration. L'ensemble \mathcal{T}_i associé à \mathbf{s} et λ qui apparaît dans la définition de $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ et que l'on peut noter $\mathcal{T}_i^{\mathbf{s}}(\lambda)$ peut s'écrire

$$\mathcal{T}_i^{\mathbf{s}}(\lambda) = \{\ell(\lambda_j^i + s_{i-1} - j) + i, j \geq 1\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i^{w \cdot \mathbf{s}}(w \cdot \lambda) &= \{\ell(\lambda_j^{w^{-1}(i)} + s_{w^{-1}(i)-1} + \frac{w^{-1}(i)-i}{\ell} - j) + i, j \geq 1\} \\ &= \{\ell(\lambda_j^{w^{-1}(i)} + s_{w^{-1}(i)-1} - j) + w^{-1}(i), j \geq 1\} \\ &= \mathcal{T}_{w^{-1}(i)}^{\mathbf{s}}(\lambda). \end{aligned}$$

□

Enfin, pour terminer la présentation des partitions $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$, on peut se demander s'il y a un lien entre $\tau_{\mathbf{s}}({}^t\lambda)$ et λ , c'est l'objet du résultat suivant, qui est énoncé par exemple dans la démonstration du corollaire 9.5 de [Gor08] mais sans preuve. Nous allons donc en proposer une, qui est basée sur la notion d'abaque antisymétrique que nous avons introduite au paragraphe 1.1.2.

Proposition 1.2.21. *Pour $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$ et $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^\ell$, on note $\bar{\mathbf{s}} = (-s_{\ell-1}, \dots, -s_0)$ et $\bar{\lambda} = ({}^t\lambda^\ell, \dots, {}^t\lambda^1)$. On a alors*

$$\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda}) = {}^t(\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.1.18, il suffit de montrer que l'abaque correspondant à la partition $\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda})$ est l'abaque antisymétrique (cf. définition 1.1.15) de celui correspondant à $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$.

On va donc supposer que l'on a une perle en position (i_0, j_0) dans l'abaque de $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ et montrer qu'alors la position $(\ell - 1 - i_0, -j_0 + 1)$ de celui de $\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda})$ est inoccupée.

S'il existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ et $j \geq 1$ tels que

$$-i_0 + \ell j_0 = \ell(\lambda_j^i + s_{i-1} - j) + i$$

alors pour des raisons de congruence modulo ℓ , on a $i = \ell - i_0$ et l'égalité $-i_0 + \ell j_0 = \ell(\lambda_j^{\ell-i_0} + s_{\ell-i_0-1} - j) + \ell - i_0$ entraîne

$$\lambda_j^{\ell-i_0} - j + 1 = j_0 - s_{\ell-1-i_0}.$$

Et si la position $(\ell - 1 - i_0, -j_0 + 1)$ de $\mathcal{A}(\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda}))$ était occupée, il existerait $m \in \{1, \dots, \ell\}$ et $k \geq 1$ tels que

$$1 + i_0 - \ell j_0 = \ell((\bar{\lambda}^m)_k + \bar{s}_{m-1} - k) + m.$$

Mais alors $m = 1 + i_0$, $\bar{\lambda}^m = {}^t\lambda^{\ell-i_0}$, $\bar{s}_{m-1} = -s_{\ell-1-i_0}$ et

$$({}^t\lambda^{\ell-i_0})_k - k = -j_0 + s_{\ell-1-i_0}.$$

On obtiendrait $\lambda_j^{\ell-i_0} - j + 1 = -({}^t\lambda^{\ell-i_0})_k + k$, ce qui contredirait le lemme 1.1.11.

On a donc montré que si la position (i_0, j_0) de $\mathcal{A}(\tau_{\mathbf{s}}(\lambda))$ est occupée alors il n'y a pas de perle sur la position symétrique de l'abaque de $\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda})$.

Montrons maintenant que si la position (i_0, j_0) de $\mathcal{A}(\tau_{\mathbf{s}}(\lambda))$ est inoccupée alors la position symétrique de l'abaque de $\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda})$ est occupée. Notons

$$\bar{M} := \max\{\ell(\bar{\lambda}_1^i + \bar{s}_{i-1} - 1) + i, 1 \leq i \leq \ell\},$$

i_1 l'entier i pour lequel ce maximum est atteint, ainsi que

$$M := \max\{\ell(\lambda_1^i + s_{i-1} - 1) + i, 1 \leq i \leq \ell\}$$

et i_2 l'entier i pour lequel M est atteint. Par symétrie, on a alors :

$$\ell(\bar{\lambda}_{h(\bar{\lambda}^{\ell-i_2+1})}^{\ell-i_2+1} + \bar{s}_{\ell-i_2} - h(\bar{\lambda}^{\ell-i_2+1})) + \ell - i_2 + 1 = \min\{\ell(\bar{\lambda}_{h(\bar{\lambda}^i)}^i + \bar{s}_{i-1} - h(\bar{\lambda}^i)) + i, 1 \leq i \leq \ell\},$$

$$\ell(\lambda_{h(\lambda^{\ell-i_1+1})}^{\ell-i_1+1} + s_{\ell-i_1} - h(\lambda^{\ell-i_1+1})) + \ell - i_1 + 1 = \min\{\ell(\lambda_{h(\lambda^i)}^i + s_{i-1} - h(\lambda^i)) + i, 1 \leq i \leq \ell\}.$$

Et donc toutes les boîtes d'étiquette inférieure ou égale à $\bar{m} := \ell(\bar{s}_{\ell-i_2} - h(\bar{\lambda}^{\ell-i_2+1}) - 1) + \ell - i_2 + 1$ sont occupées dans $\mathcal{A}(\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda}))$, ainsi que les $\ell - 1$ boîtes précédentes (d'étiquette comprise entre $\bar{m} + 1$ et $\bar{m} + \ell - 1$), qui seront occupées chacune par un élément de $\mathcal{A}_{\bar{\mathbf{s}}}^i(\bar{\lambda})$, pour $1 \leq i \leq \ell$, $i \neq i_2$.

Considérons alors une boîte (i_0, j_0) de $\mathcal{A}(\tau_{\mathbf{s}}(\lambda))$.

- Si $-i_0 + \ell j_0 \geq M + 1$, alors la boîte est inoccupée. Mais la boîte symétrique dans $\mathcal{A}(\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\lambda}))$ a pour étiquette $1 + i_0 - \ell j_0 \leq -M = \bar{m} + \ell - 1$, elle est donc occupée d'après ce que l'on vient de voir.
- Si $-i_0 + \ell j_0 = M$ ou si $-i_0 + \ell j_0 \leq m$, avec $m := \ell(s_{\ell-i_1} - h(\lambda^{\ell-i_1+1}) - 1) + \ell - i_1 + 1 = -\bar{M} - \ell - 1$, alors la boîte est occupée.
- Il reste donc à traiter le cas des boîtes dont l'étiquette vérifie $m + 1 \leq -i_0 + \ell j_0 \leq M - 1$, qui sont au nombre de $M - m - 1 = \bar{M} - \bar{m} - 1$ boîtes et on conclut de la même manière que dans la démonstration de la proposition 1.1.18, en utilisant le fait que les applications $\mathbf{s} \mapsto \bar{\mathbf{s}}$ et $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ sont involutives. \square

Exemple 1.2.22. À l'exemple 1.2.16, on a calculé $\tau_{\mathbf{s}}(\mu)$ pour $\mathbf{s} = (1, -1)$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$. Calculons $\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\mu})$ pour comparer. On a $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{s}$ et $\bar{\mu} = (\emptyset; (3, 2))$, $\mathcal{T}_0^{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\mu}) = \{1, -1, -3, -5, \dots\}$, $\mathcal{T}_1^{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\mu}) = \{4, 0, -6, -8, \dots\}$. Donc $\beta_0(\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\mu})) = (4, 1, 0, -1, -3, -5, -6, -7, -8, \dots)$ et on a bien $\tau_{\bar{\mathbf{s}}}(\bar{\mu}) = (4, 2, 2, 2, 1) = {}^t(5, 4, 1, 1) = {}^t\tau_{\mathbf{s}}(\mu)$.

Proposition 1.2.23. Soient $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^\ell$, $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(\ell, n)$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{Q}^\ell$, défini par $m^i = -s_i - \frac{i}{\ell}$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$. Alors pour s un entier tel que $s \geq \max\{hc^\lambda, hc^\mu\} + 1$, on a

$$\tau_{\mathbf{s}}({}^t\lambda) \triangleleft \tau_{\mathbf{s}}({}^t\mu) \iff \kappa_{\mathbf{m}}^{\mathbf{s}}(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^{\mathbf{s}}(\lambda).$$

Démonstration. Soit $w_0 = (1, \ell)(2, \ell - 1) \dots$, le mot de longueur maximale. D'après les propositions 1.2.19 et 1.2.21, $\tau_{\mathbf{s}}({}^t\lambda) = \tau_{\mathbf{s}}(w_0 \cdot \bar{\lambda}) = \tau_{w_0 \cdot \mathbf{s}}(\bar{\lambda}) = {}^t\tau_{\overline{w_0 \cdot \mathbf{s}}}(\lambda)$, avec

$$(\overline{w_0 \cdot \mathbf{s}})_i = \left(-s_i + \frac{\ell - 1 - 2i}{\ell} \right).$$

Il faut donc relier la suite $\beta_0(\tau_{\overline{w_0 \cdot \mathbf{s}}}(\lambda))$ à la partition $\kappa_{\mathbf{m}}^{\mathbf{s}}(\lambda)$ pour les paramètres choisis.

Or $\beta_0(\tau_{\overline{w_0 \cdot \mathbf{s}}}(\lambda))$ correspond à l'ensemble infini $\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{T}_i$ où, pour $1 \leq i \leq \ell$,

$$\mathcal{T}_i = \left\{ \ell \left(\lambda_j^i - j - s_{i-1} - \frac{i}{\ell} \right) + \ell - 1, j \geq 1 \right\}.$$

En posant $m^i = -s_i - \frac{i}{\ell}$ et en prenant un entier $s \geq \max\{h(\lambda^i) - m^{i-1}, h(\mu^i) - m^{i-1}, 1 \leq i \leq \ell\} + 1$, on obtient que pour tout i :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{T}_i - (\ell - 2)}{\ell} + s &= (\lambda_1^i - 1 + m^{i-1} + s, \dots, \lambda_{h(\lambda^i)}^i - h(\lambda^i) + m^{i-1} + s, \\ &\quad m^{i-1} + s - h(\lambda^i) - 1, \dots, m^{i-1} + s - h(\lambda^i) - [m^{i-1} + s - h(\lambda^i)], \\ &\quad m^{i-1} + s - h(\lambda^i) - [m^{i-1} + s - h(\lambda^i)] - 1, \dots). \end{aligned}$$

On reconnaît une suite infinie décroissante dont les termes positifs sont exactement ceux de \mathfrak{B}^{i-1} , la ligne numéro $(i-1)$ du symbole $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$. On a alors

$$\frac{\mathcal{T}_i - (\ell - 2)}{\ell} + s = \tilde{\mathfrak{B}}^{i-1},$$

où si $\mathfrak{B}^i = (\mathfrak{B}_1^i, \dots, \mathfrak{B}_{s+[m^i]}^i)$ alors

$$\tilde{\mathfrak{B}}^i = (\mathfrak{B}_{s+[m^i]}^i, \dots, \mathfrak{B}_1^i, \mathfrak{B}_1^i - 1, \mathfrak{B}_1^i - 2, \dots).$$

Ainsi, si l'on note $\tilde{\kappa}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ la suite infinie obtenue en réordonnant les termes de $\tilde{\mathfrak{B}} = (\tilde{\mathfrak{B}}^0, \dots, \tilde{\mathfrak{B}}^{\ell-1})$ par ordre décroissant, les termes positifs de cette suite sont exactement ceux de $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et les termes négatifs ne dépendent que de \mathbf{m} . De plus, elle vérifie :

$$\beta_0(\tau_{w_0 \cdot \mathbf{s}}(\lambda)) + \ell s = \ell \tilde{\kappa}_{\mathbf{m}}^s(\lambda) + \ell - 2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{s}}({}^t\lambda) \triangleleft \tau_{\mathbf{s}}({}^t\mu) &\iff \tau_{w_0 \cdot \mathbf{s}}(\mu) \triangleleft \tau_{w_0 \cdot \mathbf{s}}(\lambda) \\ &\iff \beta_0(\tau_{w_0 \cdot \mathbf{s}}(\mu)) \triangleleft \beta_0(\tau_{w_0 \cdot \mathbf{s}}(\lambda)) \\ &\iff \tilde{\kappa}_{\mathbf{m}}^s(\mu) \triangleleft \tilde{\kappa}_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \\ &\iff \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda). \end{aligned}$$

□

Exemple 1.2.24. Pour $\ell = 2$, $\mathbf{s} = (0, 0)$, $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$, on a ${}^t\lambda = (\emptyset; (2, 2, 1))$, ${}^t\mu = ((3, 2); \emptyset)$ et

$$\tau_{(0,0)}({}^t\lambda) = (4, 3, 1, 1, 1) \triangleleft (5, 2, 2, 1) = \tau_{(0,0)}({}^t\mu).$$

Pour illustrer le résultat précédent, il nous faut prendre \mathbf{m} tel que $m^0 = 0$ et $m^1 = -\frac{1}{2}$. Effectuons une translation de $\frac{1}{2}$ sur \mathbf{m} pour avoir des paramètres positifs. On obtient $\mathbf{m} = (\frac{1}{2}, 0)$ et pour $s = 4$, on a

$$\kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda) = (6 ; 4 ; 3, 5 ; 2, 5 ; 1, 5 ; 1 ; 0, 5 ; 0)$$

$$\kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu) = (5, 5 ; 4, 5 ; 3 ; 2, 5 ; 2 ; 1 ; 0, 5 ; 0)$$

soit $\kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda)$.

Algèbre

Dans ce chapitre, nous allons présenter des résultats d'algèbre qui nous seront utiles par la suite. On commencera par l'étude d'un système de Clifford, dans le but de généraliser les propositions 2.3.15 et 2.3.18 de [Ch109] au cas abélien et sans l'hypothèse de l'existence d'une extension semi-simple déployée, afin de pouvoir les appliquer aux algèbres de Cherednik. Pour cela, nous démontrerons un résultat comparant les radicaux de deux algèbres formant un système de Clifford. Nous présenterons ensuite les résultats de M. Chlouveraki dont nous aurons besoin pour étudier les algèbres de Hecke des groupes $G(\ell, e, n)$ et finirons par une introduction aux représentations de carquois.

2.1 Système de Clifford (pour un groupe abélien)

Dans ce paragraphe, on va considérer deux algèbres A et \bar{A} de dimension finie sur \mathbb{C} qui forment un système de Clifford, c'est à dire telles que

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} a_{\gamma} \bar{A}$$

avec Γ un groupe fini abélien, $(a_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ une suite d'éléments de A^{\times} telle que $a_1 \in \bar{A}$ et pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$:

$$a_{\gamma} a_{\gamma'} \in a_{\gamma\gamma'} \bar{A} \text{ et } a_{\gamma} \bar{A} a_{\gamma}^{-1} = \bar{A}.$$

Et on va comparer leurs blocs, leurs radicaux, puis leurs caractères irréductibles.

Remarque 2.1.1. *Si A et \bar{A} forment un système de Clifford pour le groupe Γ , on dit aussi que A est le produit croisé de \bar{A} et Γ (cf. [Mon80, chap.0, §3]).*

2.1.1 Actions de Γ et $\hat{\Gamma}$

À un élément $\gamma \in \Gamma$, on peut associer un automorphisme de \bar{A} de la forme

$$\bar{a} \mapsto a_{\gamma} \bar{a} a_{\gamma}^{-1}$$

qui ne dépend, modulo les automorphismes intérieurs, que de γ . Le groupe Γ agit donc sur $\text{Irr } \bar{A}$ en modifiant l'action par cet automorphisme : pour $\bar{\chi} \in \text{Irr } \bar{A}$,

$$\gamma \cdot \bar{\chi}(\bar{a}) = \chi(a_{\gamma} \bar{a} a_{\gamma}^{-1}).$$

De plus, on a une action de Γ sur $Z(\bar{A})$, le centre de \bar{A} , de la forme $\gamma \cdot \bar{a} = a_\gamma \bar{a} a_\gamma^{-1}$ et elle est telle que

Lemme 2.1.2. $Z(\bar{A})^\Gamma = Z(A) \cap \bar{A}$.

Preuve. Soit $a_\gamma \bar{a}$ un élément de A . Si $x \in Z(\bar{A})^\Gamma$ alors

$$\begin{aligned} x a_\gamma \bar{a} &= a_\gamma x a_\gamma^{-1} a_\gamma \bar{a} && \text{car } x \text{ est fixe sous l'action de } \Gamma \\ &= a_\gamma x \bar{a} \\ &= a_\gamma \bar{a} x && \text{car } x \in Z(\bar{A}) \end{aligned}$$

et donc $x \in Z(A) \cap \bar{A}$.

Réciproquement, si $x \in Z(A) \cap \bar{A}$ alors $x \in Z(\bar{A})$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $a_\gamma x a_\gamma^{-1} = x$ car $x \in Z(A)$, donc x est fixe sous l'action de Γ . □

Le groupe des caractères de Γ , que l'on note $\hat{\Gamma}$, agit lui sur A par automorphismes d'algèbre de la manière suivante : pour $\delta \in \hat{\Gamma}$, $\gamma \in \Gamma$ et $\bar{a} \in \bar{A}$,

$$\delta \cdot (a_\gamma \bar{a}) = \delta(\gamma) a_\gamma \bar{a}$$

et cette action vérifie

Lemme 2.1.3. $A^{\hat{\Gamma}} = \bar{A}$

Preuve.

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\iff x = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \bar{a}_\gamma \text{ avec } a_\gamma = 0 \forall \gamma \neq 1 \\ &\iff x \in A^{\hat{\Gamma}} \text{ car si } \gamma \neq 1 \text{ on peut trouver } \delta \in \hat{\Gamma} \text{ tel que } \delta(\gamma) \neq 1. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.1.4. $Z(A)^{\hat{\Gamma}} = Z(\bar{A})^\Gamma$

2.1.2 Blocs de A et \bar{A}

Commençons par rappeler la théorie des blocs dans le cadre général d'une algèbre finie. On considère un anneau \mathcal{O} noethérien et intégralement clos et A une \mathcal{O} -algèbre qui est libre et de type fini en tant que \mathcal{O} -module.

Définition 2.1.5. Un élément e de A est un idempotent si $e^2 = e$.

Deux idempotents e_1 et e_2 non nuls sont dits orthogonaux si $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$.

Un idempotent $e \in A - \{0\}$ est dit primitif s'il ne peut pas s'écrire comme la somme de deux idempotents non nuls orthogonaux.

On note $\text{Bl}(A)$ l'ensemble des idempotents primitifs centraux de A . Pour $e \in \text{Bl}(A)$, on peut munir Ae d'une structure d'algèbre d'unité e .

Proposition 2.1.6 ([Ch109], 2.1.3).

1. L'unité 1 de A s'écrit $1 = \sum_{e \in \text{Bl}(A)} e$.
2. Les projections $\pi_e : A \rightarrow Ae$ définissent un isomorphisme d'algèbres :

$$\begin{aligned} A &\simeq \prod_{e \in \text{Bl}(A)} Ae \\ a &\rightarrow (ae)_{e \in \text{Bl}(A)} \\ \sum_{e \in \text{Bl}(A)} a_e &\leftarrow (a_e)_{e \in \text{Bl}(A)}. \end{aligned}$$

On a alors $A\text{-mod} \simeq \bigoplus_{e \in \text{Bl}(A)} Ae\text{-mod}$ et on appelle aussi $\text{Bl}(A)$ l'ensemble des blocs de l'algèbre A .

Revenons à nos algèbres A et \bar{A} en système de Clifford. Les automorphismes définis par Γ (respectivement $\hat{\Gamma}$) sur \bar{A} (respectivement sur A) définissent une action de Γ sur $\text{Bl}(\bar{A})$ et une action de $\hat{\Gamma}$ sur $\text{Bl}(A)$ qui vérifient le résultat suivant.

Théorème 2.1.7. *Il existe une bijection*

$$\begin{aligned} \text{Bl}(\bar{A})/\Gamma &\leftrightarrow \text{Bl}(A)/\hat{\Gamma} \\ \bar{\Omega} &\leftrightarrow \Omega \end{aligned}$$

$$\text{telle que } \sum_{\bar{B} \in \bar{\Omega}} e_{\bar{B}} = \sum_{B \in \Omega} e_B.$$

Démonstration. On a clairement une bijection entre $\text{Bl}(\bar{A})/\Gamma$ et l'ensemble des idempotents primitifs de $Z(\bar{A})^\Gamma$ qui est donnée par $\bar{\Omega} \mapsto \sum_{\bar{B} \in \bar{\Omega}} e_{\bar{B}}$ et de même entre $\text{Bl}(A)/\hat{\Gamma}$

et les idempotents primitifs de $Z(A)^{\hat{\Gamma}}$. Le corollaire 2.1.4 qui affirme que $Z(\bar{A})^\Gamma = Z(A)^{\hat{\Gamma}}$ nous donne donc la bijection. \square

Corollaire 2.1.8. *Si les algèbres A et \bar{A} sont semi-simples alors il existe une bijection*

$$\begin{aligned} (\text{Irr } \bar{A})/\Gamma &\leftrightarrow (\text{Irr } A)/\hat{\Gamma} \\ \bar{\Omega} &\leftrightarrow \Omega \end{aligned}$$

qui vérifie : $\forall \Omega \in (\text{Irr } A)/\hat{\Gamma}, \exists m_\Omega \in \mathbb{N}$ tel que

1. $\forall \chi \in \Omega, \text{Res}_A^A \chi = m_\Omega \sum_{\bar{\chi} \in \bar{\Omega}} \bar{\chi}$
2. $\forall \bar{\chi} \in \bar{\Omega}, \text{Ind}_A^A \bar{\chi} = m_\Omega \sum_{\chi \in \Omega} \chi.$

Démonstration. Si les algèbres sont semi-simples alors les blocs sont des singletons et la bijection énoncée dans le théorème est en fait une bijection sur les classes d'isomorphie de caractères. De plus cette bijection est telle que, si l'on note e_χ l'idempotent associé au caractère χ , on ait $\sum_{\bar{\chi} \in \bar{\Omega}} e_{\bar{\chi}} = \sum_{\chi \in \Omega} e_\chi$. Or, pour $\chi \in \text{Irr } A$ et $\bar{\chi} \in \text{Irr } \bar{A}$,

$\chi \mid \text{Ind}_A^A \bar{\chi}$ si et seulement si e_χ n'agit pas par 0 sur le module $Ae_{\bar{\chi}}$. Mais d'après l'égalité $\sum_{\bar{\chi} \in \bar{\Omega}} e_{\bar{\chi}} = \sum_{\chi \in \Omega} e_\chi$, si $\bar{\Omega}$ est l'orbite de $\bar{\chi}$ alors nécessairement $\chi \in \Omega$ et ré-

ciproquement. De plus, d'après la loi de réciprocity de Frobenius (cf. [CR81, 10.9]), $(\text{Ind}_A^A \bar{\chi}, \chi) = (\text{Res}_A^A \chi, \bar{\chi}) = (\text{Res}_A^A \delta \cdot \chi, \bar{\chi}) = (\text{Ind}_A^A \bar{\chi}, \delta \cdot \chi) := m_\Omega$, quel que soit $\delta \in \hat{\Gamma}$. \square

Remarque 2.1.9. *Dans le cas où $H \triangleleft G$ sont deux groupes finis tels que le quotient G/H est abélien, en prenant $A = \mathbb{C}[G]$ et $\bar{A} = \mathbb{C}[H]$, on retrouve la théorie de Clifford présentée par exemple dans [CR81, chapitre 1, paragraphe 11], qui est améliorée dans le cas abélien car les multiplicités sont les mêmes dans Res et Ind et on ne suppose pas que les caractères s'étendent au stabilisateur.*

On aimerait maintenant comparer les orbites des caractères car, si l'on note $\text{Irr}(\bar{B})$ l'ensemble des caractères irréductibles de \bar{B} , on a clairement $\gamma \cdot \text{Irr}(\bar{B}) = \text{Irr}(\gamma \cdot \bar{B})$ et de même pour $\hat{\Gamma}$ et un bloc B de A . Pour cela, on va utiliser les radicaux de Jacobson de A et \bar{A} .

2.1.3 Radicaux de Jacobson

Rappelons que pour B un anneau unitaire, on peut définir son radical de Jacobson, $\text{rad}(B)$, comme l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de B . Cet idéal a les propriétés suivantes, présentées dans [Jac45] :

Théorème 2.1.10 (Jacobson).

1. $\text{rad}(B)$ est un idéal bilatère
2. $b \in \text{rad}(B) \iff \forall x \in B, 1 - xb \in B^\times$
3. si I est un nil-idéal (i.e. si tous ses éléments sont nilpotents), alors $I \subset \text{rad}(B)$.

Proposition 2.1.11. Si de plus B est une \mathbb{C} -algèbre de dimension finie alors

1. $\text{rad}(B)$ est un idéal nilpotent,
2. si M est un B -module alors (M est semi-simple) $\iff (\text{rad}(B)M = 0)$.

Notons $R_A = \text{rad } A$ et $\overline{R_A} = \text{rad } \overline{A}$. Comme A est un \overline{A} -module libre, l'inclusion $\overline{R_A} \subset \overline{A}$ donne lieu à une injection $A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A} \hookrightarrow A \otimes_{\overline{A}} \overline{A} = A$, et on peut voir les éléments de $A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A}$ comme des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $a_i r_i$, avec $a_i \in A$ et $r_i \in \overline{R_A}$. C'est un idéal bilatère de A car $a_i r_i a_\gamma = a_i a_\gamma a_\gamma^{-1} \cdot r_i$ et $a_\gamma^{-1} \cdot r_i \in \overline{R_A}$ car l'automorphisme de \overline{A} qui à $\bar{a} \in \overline{A}$ associe $a_\gamma \cdot \bar{a} = a_\gamma \bar{a} a_\gamma^{-1}$ stabilise le radical de Jacobson de \overline{A} . On a alors :

Proposition 2.1.12. $R_A = A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A}$.

Démonstration. On va d'abord montrer l'inclusion $A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A} \subset R_A$ grâce à la caractérisation du radical d'une algèbre de dimension finie comme son plus grand idéal bilatère nilpotent (cf théorème 2.1.10 et proposition 2.1.11). La nilpotence de $A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A}$ vient de celle de $\overline{R_A}$. En effet, comme $A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \overline{A} \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \otimes \overline{R_A}$, la multiplication est définie par $(a_\gamma \otimes r)(a_{\gamma'} \otimes r') = (a_\gamma a_{\gamma'}) \otimes (a_{\gamma'}^{-1} \cdot r) r'$. Or $(a_{\gamma'}^{-1} \cdot r) \in \overline{R_A}$. La nilpotence de $\overline{R_A}$ entraîne donc la nilpotence de $A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A}$ et on obtient la première inclusion.

Pour l'inclusion $R_A \subset A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A}$, il suffit de montrer que $A/(A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A})$ est semi-simple, d'après le deuxième point de la proposition 2.1.11. Puisque $A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \otimes \overline{R_A}$, alors $A/(A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A}) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \otimes \overline{A}/\overline{R_A}$. Et donc, en posant $H = A/(A \otimes_{\overline{A}} \overline{R_A})$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $H_\gamma = a_\gamma \otimes \overline{A}/\overline{R_A}$, on doit montrer que l'algèbre $H = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$ est semi-simple

sachant que $H_1 = \overline{A}/\overline{R_A}$ est semi-simple.

Soient $M' < M$ deux H -modules. On voudrait montrer que M' admet un supplémentaire dans M , sachant que, l'algèbre H_1 étant semi-simple, M' admet un supplémentaire dans M en tant que H_1 -module. C'est un résultat classique (théorème de Maschke pour les produits croisés, cf. [Mon80, 0.1]) que nous allons redémontrer ici. Il nous faut donc construire un projecteur $\pi : M \rightarrow M'$ qui soit un morphisme de H -modules, à partir d'un projecteur $\pi_1 : M \rightarrow M'$ qui est un morphisme de H_1 -modules.

Lemme 2.1.13. *L'application*

$$\begin{aligned}\pi : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi_1^\gamma(m),\end{aligned}$$

où $\pi_1^\gamma(m) = a_\gamma \pi_1(a_\gamma^{-1}m)$, ne dépend pas du choix des a_γ . C'est un morphisme de H -modules qui est tel que $\pi|_{M'} = \text{id}_{M'}$, $\text{Im } \pi = M'$ et $\pi \circ \pi = \pi$.

Preuve du lemme 2.1.13.

- π est indépendant du système de représentants choisis. En effet, si l'on prend un autre système de représentants $\{b_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un élément $\alpha_\gamma \in \bar{A}^\times$ tel que $a_\gamma = b_\gamma \alpha_\gamma$ et comme π_1 est un morphisme de H_1 -modules, pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $m \in M$, on a $a_\gamma \pi_1(a_\gamma^{-1}m) = b_\gamma \alpha_\gamma \pi_1(\alpha_\gamma^{-1} b_\gamma^{-1} m) = b_\gamma \pi_1(b_\gamma^{-1} m)$.
- π est bien à valeurs dans M' : M étant un H -module, $\forall m \in M$ et $\gamma \in \Gamma$, $a_\gamma^{-1}m \in M$ et comme π_1 est une application de M dans M' , $\pi_1(a_\gamma^{-1}m) \in M'$. De plus M' est aussi un H -module donc $\pi(m) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \pi_1(a_\gamma^{-1}m) \in M'$.
- π est un morphisme de H -modules : il est clairement linéaire par définition. Montrons maintenant que les applications π_1^γ sont des morphismes de H_1 -modules, ce qui fera de π un morphisme de H_1 -modules : soit $h_1 \in H_1$ et $m \in M$,

$$\begin{aligned}\pi_1^\gamma(h_1 m) &= a_\gamma \pi_1(a_\gamma^{-1} h_1 m) \\ &= a_\gamma \pi_1(a_\gamma^{-1} h_1 a_\gamma a_\gamma^{-1} m) \\ &= a_\gamma a_\gamma^{-1} h_1 a_\gamma \pi_1(a_\gamma^{-1} m) && \text{car } a_\gamma^{-1} h_1 a_\gamma \in H_1 \\ &= h_1 \pi_1^\gamma(m)\end{aligned}$$

Soit $h \in H$, montrons que $\forall m \in M$, $\pi(hm) = h\pi(m)$. Sachant que $H = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$,

pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un $h_\gamma \in H_1$ tel que $h = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma h_\gamma$, on a alors :

$$\begin{aligned}\pi(hm) &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma' \in \Gamma} \pi_1^{\gamma'}(hm) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} a_{\gamma'} \pi_1(a_{\gamma'}^{-1} a_\gamma h_\gamma m) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} a_{\gamma'} \pi_1(a_{\gamma'}^{-1} a_\gamma h_\gamma a_\gamma^{-1} a_{\gamma'} a_{\gamma'}^{-1} a_\gamma m) \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma h_\gamma \sum_{\gamma' \in \Gamma} a_{\gamma'}^{-1} a_{\gamma'} \pi_1((a_{\gamma'}^{-1} a_\gamma)^{-1} m)\end{aligned}$$

or pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $a_\gamma a_{\gamma'} \in a_{\gamma\gamma'} A^\times$, donc il existe α_γ et $\alpha_{\gamma, \gamma'} \in A^\times$ tels que $a_\gamma^{-1} = \alpha_\gamma^{-1} a_{\gamma^{-1}}$ et $a_{\gamma^{-1}} a_{\gamma'} = a_{\gamma^{-1}\gamma'} \alpha_{\gamma, \gamma'}$, alors

$$\begin{aligned}\pi(hm) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma h_\gamma \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma' \in \Gamma} \alpha_\gamma^{-1} a_{\gamma^{-1}\gamma'} \alpha_{\gamma, \gamma'} \pi_1(\alpha_{\gamma, \gamma'}^{-1} a_{\gamma^{-1}\gamma'}^{-1} \alpha_\gamma m) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma h_\gamma \alpha_\gamma^{-1} \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma' \in \Gamma} a_{\gamma^{-1}\gamma'} \pi_1(a_{\gamma^{-1}\gamma'}^{-1} \alpha_\gamma m) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma h_\gamma \alpha_\gamma^{-1} \pi(\alpha_\gamma m) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma h_\gamma \pi(m) && \text{car } \pi \text{ est un morphisme de } H_1\text{-modules} \\ &= h\pi(m).\end{aligned}$$

- $\pi|_{M'} = \text{id}_{M'}$: soit $m' \in M'$ puisque $\pi_1|_{M'} = \text{id}_{M'}$, alors $\pi_1(m') = m'$ et $\forall \gamma \in \Gamma$, $\pi_1(a_\gamma^{-1}m') = a_\gamma^{-1}m'$ car M' est un H -module. Mais alors $\forall \gamma \in \Gamma$, $\pi_1^\gamma(m') = m'$ et $\pi(m') = m'$.

Or on a montré que $\pi(M) \subset M'$ donc on a bien $\pi(M) = M'$ et $\pi \circ \pi = \pi$.

□

Donc M' admet un supplémentaire (qui est égal à $\ker \pi$) en tant que H -module et $H = A/(A \otimes_{\bar{A}} \bar{R}_A)$ est semi-simple. □

Corollaire 2.1.14. *Les radicaux \bar{R}_A et R_A vérifient $R_A \cap \bar{A} = \bar{R}_A$.*

Démonstration. $\bar{R}_A \subset (A \otimes_{\bar{A}} \bar{R}_A) \cap \bar{A} = R_A \cap \bar{A}$ et $R_A \cap \bar{A}$ est un idéal bilatère nilpotent de \bar{A} donc $R_A \cap \bar{A} \subset \bar{R}_A$ d'où l'égalité. □

Remarque 2.1.15. *La proposition 2.1.12 et le corollaire 2.1.14 sont valables pour un groupe Γ quelconque.*

2.1.4 Orbites de caractères

Dans la démonstration de la proposition 2.1.12, il apparaît que les algèbres semi-simples A/R_A et \bar{A}/\bar{R}_A forment un système de Clifford pour le même groupe Γ , on peut donc leur appliquer le corollaire 2.1.8 et obtenir une bijection entre $(\text{Irr}(\bar{A}/\bar{R}_A))/\Gamma$ et $(\text{Irr}(A/R_A))/\hat{\Gamma}$. De plus, quotienter un anneau par son radical ne change pas les modules simples donc $\text{Irr}(\bar{A}/\bar{R}_A) \leftrightarrow \text{Irr}(\bar{A})$ et $\text{Irr}(A/R_A) \leftrightarrow \text{Irr}(A)$. On obtient donc le résultat suivant.

Corollaire 2.1.16. *Il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} (\text{Irr } \bar{A})/\Gamma & \leftrightarrow & (\text{Irr } A)/\hat{\Gamma} \\ \bar{\Omega} & \leftrightarrow & \Omega \end{array}$$

qui vérifie : $\forall \Omega \in (\text{Irr } A)/\hat{\Gamma}$, $\exists m_\Omega \in \mathbb{N}$ tel que

1. $\forall \chi \in \Omega$, $\text{Res}_{\bar{A}}^A \chi = m_\Omega \sum_{\bar{\chi} \in \bar{\Omega}} \bar{\chi}$
2. $\forall \bar{\chi} \in \bar{\Omega}$, $\text{Ind}_{\bar{A}}^A \bar{\chi} = m_\Omega \sum_{\chi \in \Omega} \chi$.

2.2 Algèbres symétriques

Dans ce paragraphe, on va se placer dans le contexte du chapitre 2 de [Ch109] sur lequel est basée cette présentation. On considère un anneau \mathcal{O} noethérien et intégralement clos et A une \mathcal{O} -algèbre qui est libre et de type fini en tant que \mathcal{O} -module. On suppose aussi qu'il existe une extension K de $\text{Frac}(\mathcal{O})$ telle que $KA = K \otimes_{\mathcal{O}} A$ est semi-simple déployée et que A est une algèbre symétrique de forme symétrisante t . On note \mathcal{O}_K la clôture intégrale de \mathcal{O} dans K .

2.2.1 Éléments de Schur

On a alors, d'après [GP00, chapitre 7],

Proposition 2.2.1. *Pour tout $\chi \in \text{Irr } KA$, il existe $s_\chi \in \mathcal{O}_K$ tel que*

$$t = \sum_{\chi \in \text{Irr } KA} \frac{1}{s_\chi} \chi.$$

Les éléments s_χ sont appelés les éléments de Schur de l'algèbre A .

Au paragraphe précédent, on a construit une bijection entre les orbites de $\text{Irr } A$ et de $\text{Irr } \bar{A}$ sous les actions de $\hat{\Gamma}$ et Γ dans le cas où A et \bar{A} forment un système de Clifford. On peut donc se demander si, quand on rajoute l'hypothèse de symétrie sur ces deux algèbres, on va pouvoir comparer les éléments de Schur entre deux orbites. C'est l'objectif du paragraphe 2.3.3 de [Chl09], dans le cas d'un groupe cyclique, que l'on va présenter maintenant.

2.2.2 Algèbre symétrique tordue

Supposons que l'algèbre A admet une sous-algèbre \bar{A} qui a les mêmes propriétés (libre, de type fini, symétrique de forme symétrisante la restriction de t à \bar{A} et telle que $K\bar{A}$ est semi-simple déployée) et qui, de plus, vérifie :

$$A = \bigoplus_{\eta \in C} a_\eta \bar{A}$$

avec C un groupe cyclique, $a_1 \in \bar{A}$, $t(a_\eta) = 0 \forall \eta \neq 1$ et pour tous $\eta, \eta' \in C$:

$$a_\eta \in A^\times, a_\eta a_{\eta'} \in a_{\eta\eta'} \bar{A} \text{ et } a_\eta \bar{A} a_\eta^{-1} = \bar{A}.$$

On dit dans ce cas que A est l'algèbre symétrique tordue de C sur \bar{A} .

On a un résultat semblable au corollaire 2.1.16 pour les caractères de $\text{Irr } KA$ et $\text{Irr } K\bar{A}$ mais comme le groupe que l'on considère est cyclique, les multiplicités sont égales à 1 (cf. [Ste89, prop. 6.1]) et l'hypothèse de symétrie a permis à M. Chlouveraki de comparer les éléments de Schur.

Proposition 2.2.2 ([Chl09], 2.3.15). *Il existe une bijection*

$$\begin{aligned} (\text{Irr } K\bar{A})/C &\leftrightarrow (\text{Irr } KA)/\hat{C} \\ \bar{\Omega} &\leftrightarrow \Omega \end{aligned}$$

telle que :

1. $\forall \chi \in \Omega, \text{Res}_{K\bar{A}}^{KA} \chi = \sum_{\bar{\chi} \in \bar{\Omega}} \bar{\chi}$
2. $\forall \bar{\chi} \in \bar{\Omega}, \text{Ind}_{K\bar{A}}^{KA} \bar{\chi} = \sum_{\chi \in \Omega} \chi$
3. $\sum_{\chi \in \Omega} e_\chi = \sum_{\bar{\chi} \in \bar{\Omega}} e_{\bar{\chi}}$
4. pour tous $\chi \in \Omega$ et $\bar{\chi} \in \bar{\Omega}$, $s_\chi = \text{card}(\Omega) s_{\bar{\chi}}$.

2.3 Représentations de Carquois

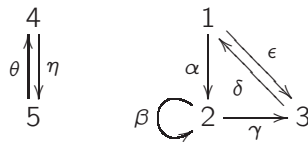
Définition 2.3.1. Un carquois fini Q est la donnée de deux ensembles finis : Q_0 appelé ensemble des sommets et Q_1 appelé ensemble des flèches, ainsi que de deux applications

$$s : Q_1 \rightarrow Q_0$$

$$t : Q_1 \rightarrow Q_0$$

appelées source et but.

Exemple 2.3.2. Pour le carquois suivant :

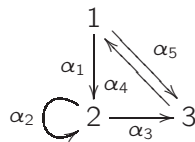


on a $Q_0 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $Q_1 = \{\alpha; \beta; \gamma; \delta; \epsilon; \eta; \theta\}$ et, par exemple, $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = 2$.

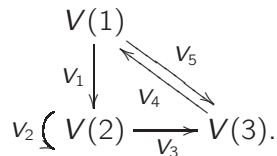
On considère un corps k algébriquement clos.

Définition 2.3.3. Une représentation V d'un carquois Q est la donnée d'un k -espace vectoriel $V(x)$ pour tout sommet x et d'une application k -linéaire $V_\alpha : V(s(\alpha)) \rightarrow V(t(\alpha))$ pour toute flèche α .

Exemple 2.3.4. Une représentation du carquois



est un diagramme de la forme



Définition 2.3.5. Un morphisme de représentations $f : V \rightarrow W$ est la donnée d'applications linéaires $f_x : V(x) \rightarrow W(x)$, pour tout sommet x , telles que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V(x) & \xrightarrow{V_\alpha} & V(y) \\ f_x \downarrow & & \downarrow f_y \\ W(x) & \xrightarrow{W_\alpha} & W(y) \end{array}$$

commutent pour toute flèche α , avec $x = s(\alpha)$ et $y = t(\alpha)$.

Le morphisme identité de V est donné par les $\mathbf{1}_{V(x)}$.

La composée de $f : V \rightarrow W$ avec $g : U \rightarrow V$ est définie par $(f \circ g)_x = f_x \circ g_x$.

Exemple 2.3.6. 1) Se donner un espace vectoriel E et un endomorphisme u revient à se donner une représentation du carquois

$$\begin{array}{c} \circlearrowleft 1. \end{array}$$

2) Se donner une application linéaire entre deux espaces vectoriels revient à se donner une représentation du carquois

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2.$$

Définition 2.3.7.

On dit qu'une représentation V de Q est de dimension finie sur k si pour tout $x \in Q_0$, $V(x)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur k .

Le vecteur dimension $\underline{\dim} V \in \mathbb{N}^{Q_0}$ d'une représentation de Q de dimension finie est défini par $(\underline{\dim} V)_x = \dim V(x)$.

Pour $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$, on notera $\text{Rep}(Q, \mathbf{d})$ la catégorie des représentations du carquois Q de dimension \mathbf{d} .

Géométrie

Ce chapitre est majoritairement consacré à l'étude des variétés quasi-projectives complexes, munies d'une action de \mathbb{C}^* et ayant un nombre fini de points fixes. Dans le cas d'une variété normale X , nous généraliserons la construction d'un ordre sur $X^{\mathbb{C}^*}$, faite dans [Gor08, 5.4] pour une variété X lisse, puis nous montrerons que cet ordre est compatible avec un morphisme \mathbb{C}^* -équivariant, surjectif et projectif, ou avec l'action de quotienter par un groupe fini.

3.1 Quotient catégorique

Définition 3.1.1. Soit G un groupe algébrique agissant régulièrement sur une variété affine \mathcal{E} . La variété quotient $\mathcal{E} // G$ est définie par la propriété universelle suivante :

il existe un morphisme de variétés $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} // G$ tel que si \mathcal{F} est une variété et si $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est un morphisme de variétés constant sur les G -orbites alors il existe un unique morphisme de variétés $\tilde{f} : \mathcal{E} // G \rightarrow \mathcal{F}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} \\
 \searrow \pi & & \nearrow \tilde{f} \\
 & \mathcal{E} // G &
 \end{array}$$

L'existence de cette variété quotient n'est pas systématique. Cependant, le théorème suivant affirme que le quotient d'une variété affine par un groupe réductif existe toujours.

Théorème 3.1.2 ([BS02] et [Bor70], proposition II.6.16). Soit A une k -algèbre de type fini sur un corps commutatif k et G un groupe algébrique réductif agissant sur A par automorphismes de k -algèbres. Alors la sous-algèbre A^G des invariants sous l'action de G est de type fini sur k et la variété affine $\text{Specm}(A^G)$ vérifie la propriété universelle de la définition 3.1.1.

Ainsi, si G est un groupe réductif et \mathcal{E} une variété affine, on peut définir la variété $\mathcal{E} // G$ comme la variété affine ayant pour anneau de fonctions $k[\mathcal{E}]^G$.

3.2 Décomposition de Bialynicki-Birula

On considère une variété complexe quasi-projective munie d'une action régulière de \mathbb{C}^* . Soit $x \in X$, on peut s'intéresser, si elle existe, à la limite de $\lambda \cdot x$ quand λ tend

vers 0 ou vers l'infini. Cette limite sera alors un point fixe.

Réciproquement, si l'on prend un point fixe $x_0 \in X^{\mathbb{C}^*}$, on peut s'intéresser à l'ensemble des points attirés sous l'action de \mathbb{C}^* par ce point fixe, c'est le but de la définition suivante.

Définition 3.2.1. Soit $x_0 \in X^{\mathbb{C}^*}$, l'ensemble $X_{x_0} = \{x \in X, \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot x = x_0\}$ est appelé ensemble attractif de x_0 .

Dans le cas d'une variété projective, la limite existe toujours (cf. lemme 2.4.1 de [CG10]). On obtient donc une partition de la variété X , appelée décomposition de Bialynicki-Birula :

$$X = \bigsqcup_{x \in X^{\mathbb{C}^*}} X_x.$$

Exemple 3.2.2. Déterminons la décomposition de Bialynicki-Birula de $X = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ munie d'une action de \mathbb{C}^* de la forme $t \cdot (x_0 : \dots : x_N) = (t^{w_0} x_0 : \dots : t^{w_N} x_N)$.

- Cas simple : On suppose d'abord que $w_0 = 0 < w_1 < \dots < w_N$ et on comprendra facilement ce qu'il se passe dans des cas plus compliqués.

Si $x_0 \neq 0$ alors $(x_0 : \dots : x_N)$ est fixe si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$ et si $x_0 = 0$ alors $t \cdot (0 : x_1 : \dots : x_N) = (0 : x_1 : t^{w_2 - w_1} x_2 : \dots : t^{w_N - w_1} x_N)$ et donc, si $x_1 \neq 0$, $(0 : x_1 : \dots : x_N)$ est fixe si et seulement si $x_2 = \dots = x_N = 0$. On voit donc que dans ce cas on a $N + 1$ points fixes : $p_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$, $p_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0)$, ..., $p_N = (0 : \dots : 0 : 1)$.

Un point $x = (x_0 : \dots : x_N)$ est dans l'ensemble attractif correspondant au point fixe $p_i = (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0)$, où le 1 est situé sur la coordonnée numéro i , si :

$$\begin{aligned} p_i &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^{w_0} x_0 : \dots : t^{w_N} x_N) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (t^{w_0 - w_i} x_0 : \dots : t^{w_{i-1} - w_i} x_{i-1} : x_i : t^{w_{i+1} - w_i} x_{i+1} : \dots : t^{w_N - w_i} x_N). \end{aligned}$$

Et comme pour $0 \leq k \leq i-1$, $w_k - w_i < 0$, ceci implique que $x_0 = \dots = x_{i-1} = 0$.

Donc $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_{p_i} = \{(0 : \dots : 0 : 1 : x_{i+1} : \dots : x_N), x_j \in \mathbb{C}\}$. Et on a bien la décomposition

$$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{i=0}^N \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_{p_i}.$$

De plus, $\overline{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_{p_i}} = \bigcup_{j \geq i} \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_{p_j}$.

- Cas général : Pour décrire la décomposition de Bialynicki-Birula sans hypothèse sur les w_i , on partitionne l'ensemble $\{0, \dots, N\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ où $C_i = \{k \in \{0, \dots, N\}, w_k = c_i\}$ avec $c_1 < c_2 < \dots < c_r$. Les points fixes sont alors de la forme $(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ où $\forall j \notin C_i, x_j = 0$. On peut donc décomposer $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})^{\mathbb{C}^*}$ en composantes connexes $W_1 \sqcup \dots \sqcup W_r$ où pour tout i , W_i est isomorphe à $\mathbb{P}^{|C_i| - 1}(\mathbb{C})$ car

$$W_i = \{(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \text{ où } \forall j \notin C_i, x_j = 0\}.$$

On note alors $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i = \bigcup_{x \in W_i} \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_x$ qui est la réunion des ensemble attractifs

correspondant aux points fixes dans la $i^{\text{ème}}$ composante. Il est de la forme :

$$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i = \{(y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \text{ tels que } \exists j \in C_i, y_j \neq 0 \text{ et } \forall j \in C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{i-1}, y_j = 0\}$$

et il est donc isomorphe à $\mathbb{P}^{|C_i|-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{A}^{|C_{i+1}|+\dots+|C_r|}(\mathbb{C})$. Son adhérence est isomorphe à $\mathbb{P}^{|C_i|+\dots+|C_r|-1}(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})}_i = \bigcup_{k \geq i} \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_k$.

De plus, si x est un point fixe contenu dans la composante W_i , on peut montrer que l'ensemble attractif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_x$ est fermé dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i$. En effet prendre la limite revient à projeter sur la composante $\mathbb{P}^{|C_i|-1}(\mathbb{C})$ de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i$, donc si l'on note p cette projection, on a $z \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_x \iff p(z) = x$ donc $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_x = p^{-1}\{x\}$ est fermé dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i$.

On fera par la suite l'hypothèse suivante :

Hypothèse. X est une variété qui a un ensemble fini de \mathbb{C}^* -points fixes.

Mais on pourra se référer à [BB73] pour un cadre plus général.

Définition 3.2.3. Si l'on peut ordonner les points fixes x_1, \dots, x_n de manière à ce que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\bigcup_{j \leq i} X_{x_j}$ soit fermé, alors la décomposition est dite filtrable.

Si de plus pour tout i , l'ensemble $\overline{X_{x_i}}$ est une union d'ensembles attractifs X_{x_j} , avec $j \leq i$ alors elle est dite stratifiable.

Exemple 3.2.4. La décomposition de Bialynicki-Birula de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ que l'on a vue à l'exemple 3.2.2 est stratifiable.

Ces propriétés de la décomposition vont nous intéresser par la suite, on aimerait donc savoir quand elles sont valables. Dans cette optique, A. Bialynicki-Birula a démontré le résultat suivant dans [BB76] :

Proposition 3.2.5. Si la variété X est lisse et projective alors la décomposition est filtrable.

3.3 Ordre sur les \mathbb{C}^* -points fixes

Cette décomposition de la variété liée aux \mathbb{C}^* -points fixes va nous permettre de définir un ordre sur ces points fixes.

3.3.1 Définition

On considère comme précédemment une variété complexe quasi-projective munie d'une action de \mathbb{C}^* et qui a un nombre fini de points fixes sous cette action.

Par unicité de la limite, deux ensembles attractifs correspondant à deux points fixes distincts sont disjoints. Par contre, l'adhérence de l'un peut rencontrer l'autre. C'est sur ce principe que I. Gordon a construit un ordre partiel sur les \mathbb{C}^* -points fixes d'une variété de carquois lisse dans [Gor08, 5.4]. Mais on va voir que cette définition est valable dans un cadre plus général.

La relation $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $\overline{X_x} \cap X_y \neq \emptyset$, pour x et $y \in X^{\mathbb{C}^*}$, est clairement réflexive mais pas transitive. On va donc s'intéresser au préordre engendré par cette relation.

Définition 3.3.1. Soient x et $y \in X^{\mathbb{C}^*}$, on dit que $x \preceq y$ si et seulement si

il existe $x_1, \dots, x_r \in X^{\mathbb{C}^*}$ tels que $x_1 = x$, $x_r = y$
et quel que soit $1 \leq i \leq r-1$, $\overline{X_{x_i}} \cap X_{x_{i+1}} \neq \emptyset$.

On notera $x \prec y$ si $x \preceq y$ et $x \neq y$.

Par contre la relation ainsi définie ne sera en général pas antisymétrique. Sans hypothèses supplémentaires sur la variété X , on ne peut donc définir, par ce moyen, qu'un préordre. Notons que l'on définit ce préordre même dans le cas où la variété n'est pas projective. Dans ce cas, la variété ne se partitionne pas nécessairement en ensembles attractifs mais on peut quand même définir le préordre.

3.3.2 Cas d'une variété lisse

On a vu au paragraphe 3.2 que si la variété est lisse alors la décomposition est filtrable. Dans ce cas, la relation que nous venons de définir sera antisymétrique.

Proposition 3.3.2. *Si la décomposition est filtrable alors le préordre \preceq est un ordre.*

Démonstration. Supposons que l'on peut ordonner les points fixes x_1, \dots, x_n de manière à ce que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\bigcup_{j \leq i} X_{x_j}$ soit fermé. Il suffit alors de montrer que la relation est antisymétrique en la comparant à l'ordre usuel \leq sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ des indices. Supposons que l'on ait $\overline{X_{x_i}} \cap X_{x_j} \neq \emptyset$. Comme $X_{x_1} \cup \dots \cup X_{x_i}$ est un fermé contenant X_{x_j} on a $\overline{X_{x_j}} \subset X_{x_1} \cup \dots \cup X_{x_i}$. On obtient alors $(X_{x_1} \cup \dots \cup X_{x_i}) \cap X_{x_j} \neq \emptyset$ donc il existe $1 \leq k \leq i$ tel que $X_{x_j} \cap X_{x_k} \neq \emptyset$, soit $k = j$ et alors $i \geq j$. On a donc montré que si $\overline{X_{x_i}} \cap X_{x_j} \neq \emptyset$ alors $i \geq j$, ce qui prouve l'antisymétrie. \square

3.3.3 Cas d'une variété normale

Si X est normale alors, selon le théorème 1 de [Sum74], on peut construire un plongement \mathbb{C}^* -équivariant et localement fermé de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ qui est muni d'une action de \mathbb{C}^* de la forme $t \cdot (x_0 : \dots : x_N) = (t^{w_0} x_0 : \dots : t^{w_N} x_N)$. Par continuité et \mathbb{C}^* -équivariance de ce plongement, le préordre que l'on a défini sur $X^{\mathbb{C}^*}$ sera alors fortement lié à la décomposition de Bialynicki Birula de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ que l'on a décrite à l'exemple 3.2.2. Cette propriété va entraîner l'antisymétrie de la relation sur $X^{\mathbb{C}^*}$.

Théorème 3.3.3. *Si X est une variété complexe, quasi-projective et normale alors la clôture transitive de la relation de la définition 3.3.1 est une relation d'ordre.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la relation engendrée par $x \preceq y \iff \overline{X_x} \cap X_y \neq \emptyset$ est antisymétrique. Notons ι le plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Soient x et $y \in X^{\mathbb{C}^*}$ tels que $\overline{X_x} \cap X_y \neq \emptyset$ et $\overline{X_y} \cap X_x \neq \emptyset$. Tout d'abord, par \mathbb{C}^* -équivariance de ι , $\iota(x)$ et $\iota(y)$ sont deux \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Supposons que $\iota(x) \in W_i$ et $\iota(y) \in W_j$. Par continuité de ι , on a $\iota(\overline{X_x}) \subset \overline{\iota(X_x)}$ (car $\iota^{-1}(\overline{\iota(X_x)})$ est un fermé contenant X_x donc il contient $\overline{X_x}$). On a aussi $\iota(X_x) \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_{\iota(x)} \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i$. Ainsi l'hypothèse $\overline{X_x} \cap X_y \neq \emptyset$ et $\overline{X_y} \cap X_x \neq \emptyset$ implique $\overline{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i} \cap \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_j \neq \emptyset$ et $\overline{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_j} \cap \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i \neq \emptyset$ et en appliquant la proposition 3.3.2 et le fait que $\overline{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i} = \bigcup_{k \geq i} \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_k$ (cf. exemple 3.2.2), on obtient que $i = j$. Donc nécessairement $\iota(x)$ et $\iota(y)$ sont dans la même composante W_i . Or on a vu que les ensembles attractifs étaient fermés (et disjoints) dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_i$ donc $\overline{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})_{\iota(x)}} \cap \mathbb{P}^N(\mathbb{C})_{\iota(y)} \neq \emptyset$ implique $\iota(x) = \iota(y)$ soit $x = y$. \square

3.4 Compatibilité du préordre avec certains types de morphismes

Par la suite, on va chercher à relier des ordres géométriques construits sur des variétés différentes afin de généraliser la définition de I. Gordon. Il sera donc intéressant pour nous de savoir si le préordre que nous venons de définir, qui est un ordre dans certains cas, est compatible avec certains morphismes.

3.4.1 Cas d'un morphisme \mathbb{C}^* -équivariant, surjectif et projectif

Soient X et Y des variétés quasi-projectives, munies d'une action de \mathbb{C}^* et admettant un nombre fini de points fixes sous cette action. On suppose que X admet une décomposition de Bialynicki-Birula de la forme :

$$X = \bigsqcup_{x \in X^{\mathbb{C}^*}} X_x$$

et qu'il existe un morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ qui est \mathbb{C}^* -équivariant, surjectif, projectif (et donc fermé).

Comme π respecte la \mathbb{C}^* -action sur ces deux variétés, il est naturel de se demander s'il va conserver les préordres définis à partir de cette action. Commençons par comparer les points fixes et les ensembles attractifs.

Proposition 3.4.1. $\pi(X^{\mathbb{C}^*}) = Y^{\mathbb{C}^*}$

Démonstration. L'inclusion $\pi(X^{\mathbb{C}^*}) \subset Y^{\mathbb{C}^*}$ vient du fait que π est continu et \mathbb{C}^* -équivariant.

Pour l'inclusion inverse, prenons $y \in Y^{\mathbb{C}^*}$ et considérons la fibre $\pi^{-1}(y)$. C'est une variété projective (car π est projectif) qui est munie d'une action de \mathbb{C}^* , donc par le même argument que celui donné après la définition 3.2.1, elle admet un point fixe $x \in \pi^{-1}(y) \cap X^{\mathbb{C}^*}$. \square

Comme dans le paragraphe précédent, pour $x \in X^{\mathbb{C}^*}$, on note X_x l'ensemble attractif correspondant à x et de même, pour $y \in Y^{\mathbb{C}^*}$, on note Y_y l'ensemble des points attirés par y . On a alors :

Proposition 3.4.2. $Y_y = \bigcup_{\substack{x \in X^{\mathbb{C}^*} \\ \pi(x)=y}} \pi(X_x)$

Démonstration. On raisonne par double inclusion :

- soit $x \in X^{\mathbb{C}^*}$ et $z \in X_x$ alors $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot z = x$ et comme π est continu et \mathbb{C}^* -équivariant on obtient $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot \pi(z) = \pi(x)$ et donc $\pi(X_x) \subset Y_{\pi(x)}$
- soit $w \in Y_y$ alors comme π est surjectif il existe $z \in X$ tel que $w = \pi(z)$ mais d'après la décomposition de Bialynicki Birula de X , il existe $x \in X^{\mathbb{C}^*}$ tel que $z \in X_x$ mais alors comme on vient de le voir $y = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot w = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot \pi(z) = \pi(x)$.

\square

Corollaire 3.4.3. Si X admet une décomposition de Bialynicki-Birula de la forme

$X = \bigsqcup_{x \in X^{\mathbb{C}^*}} X_x$ alors Y se décompose aussi en ensembles attractifs et sa décomposition s'obtient à partir de celle de X :

$$Y = \bigsqcup_{y \in Y^{\mathbb{C}^*}} \bigcup_{\substack{x \in X^{\mathbb{C}^*} \\ \pi(x)=y}} \pi(X_x).$$

Démonstration. Cela vient du fait que π est surjectif. \square

Supposons maintenant que l'on a construit, sur le modèle du paragraphe précédent, deux préordres sur $X^{\mathbb{C}^*}$ et $Y^{\mathbb{C}^*}$ que l'on note \prec . Montrons qu'ils sont compatibles avec le morphisme π .

Lemme 3.4.4. *Si π est un morphisme fermé alors tout sous-ensemble E de X vérifie*

$$\pi(\overline{E}) = \overline{\pi(E)}.$$

Preuve. Il est clair que $\pi(\overline{E}) \subset \overline{\pi(E)}$ car π est continu et comme on a toujours $\pi(E) \subset \pi(\overline{E})$ qui ici est un ensemble fermé car π est fermé, l'inclusion inverse est vérifiée. \square

Proposition 3.4.5. *Si x et x' sont deux points fixes de X tels que $\overline{X_x} \cap X_{x'} \neq \emptyset$ alors $\overline{Y_{\pi(x)}} \cap Y_{\pi(x')} \neq \emptyset$.*

Démonstration. À la proposition 3.4.2, on a vu que $\pi(X_x) \subset Y_{\pi(x)}$ et d'après le lemme 3.4.4, on a $\pi(\overline{X_x}) = \overline{\pi(X_x)}$ alors, comme ici $\overline{X_x} \cap X_{x'} \neq \emptyset$, on obtient

$$\emptyset \neq \pi(\overline{X_x} \cap X_{x'}) \subset \pi(\overline{X_x}) \cap \pi(X_{x'}) = \overline{\pi(X_x)} \cap \pi(X_{x'}) \subset \overline{Y_{\pi(x)}} \cap Y_{\pi(x')}.$$

\square

Corollaire 3.4.6. *Si $x \prec x'$ alors $\pi(x) \prec \pi(x')$.*

Démonstration. Cela vient de la définition du préordre qui est la clôture transitive de la relation $\overline{X_x} \cap X_{x'} \neq \emptyset$ ainsi

$$x \prec x' \iff \exists x_1 = x, x_2, \dots, x_m = x' \in X^{\mathbb{C}^*} \text{ tels que } \forall i : \overline{X_{x_i}} \cap X_{x_{i+1}} \neq \emptyset.$$

En appliquant la proposition on construit des éléments de $Y^{\mathbb{C}^*}$ $\pi(x_1) = \pi(x)$, $\pi(x_2)$, ..., $\pi(x_m) = \pi(x')$ tels que $\forall i : \overline{Y_{\pi(x_i)}} \cap Y_{\pi(x_{i+1})} \neq \emptyset$ et donc $\pi(x) \prec \pi(x')$. \square

Proposition 3.4.7. *Si y et y' sont deux points fixes de Y tels que $\overline{Y_y} \cap Y_{y'} \neq \emptyset$ alors il existe $x, x' \in X^{\mathbb{C}^*}$ tels que $\pi(x) = y$ et $\pi(x') = y'$ et $\overline{X_x} \cap X_{x'} \neq \emptyset$.*

Démonstration. D'après la proposition 3.4.2, le lemme 3.4.4 et, du fait que $X^{\mathbb{C}^*}$ est fini, $\overline{Y_y} \cap Y_{y'} \neq \emptyset$ implique :

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \left(\overline{\bigcup_{\substack{x \in X^{\mathbb{C}^*} \\ \pi(x)=y}} \pi(X_x)} \right) \cap \left(\bigcup_{\substack{x' \in X^{\mathbb{C}^*} \\ \pi(x')=y'}} \pi(X_{x'}) \right) \\ &= \left(\bigcup_{\substack{x \in X^{\mathbb{C}^*} \\ \pi(x)=y}} \pi(\overline{X_x}) \right) \cap \left(\bigcup_{\substack{x' \in X^{\mathbb{C}^*} \\ \pi(x')=y'}} \pi(X_{x'}) \right) \end{aligned}$$

donc il existe $x, x' \in X^{\mathbb{C}^*}$ tels que $\pi(x) = y$ et $\pi(x') = y'$ et $\pi(\overline{X_x}) \cap \pi(X_{x'}) \neq \emptyset$.
 On peut alors choisir $\alpha \in \overline{X_x}$ et $\beta \in X_{x'}$ tels que $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$ mais d'après la décomposition de Bialynicki Birula de X , il existe $z \in X^{\mathbb{C}^*}$ tel que $\alpha \in X_z$. En appliquant π aux égalités $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot \alpha = z$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot \beta = x'$ et en utilisant que $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$ on obtient que $\pi(z) = \pi(x') = y'$. On a donc construit $x, z \in X^{\mathbb{C}^*}$ tels que $\pi(x) = y$ et $\pi(z) = y'$ et $\overline{X_x} \cap X_z \neq \emptyset$. \square

Corollaire 3.4.8. *Si $\pi(x) \prec \pi(x')$ alors il existe $x_1, x_2, x'_2, x'_3, \dots, x_m$ ou x'_m tels que $\pi(x_1) = \pi(x)$, $\pi(x_m) = \pi(x')$, pour tout $2 \leq i \leq m-1$, $\pi(x_i) = \pi(x'_i)$ et pour $1 \leq i \leq m-1$, $x_i \prec x_{i+1}$ si i est impair et $x'_i \prec x'_{i+1}$ si i est pair.*

Démonstration. Si $\pi(x) \prec \pi(x')$ alors il existe $y_1 = \pi(x), y_2, \dots, y_m = \pi(x') \in Y^{\mathbb{C}^*}$ tels que $\overline{Y_{y_i}} \cap Y_{y_{i+1}} \neq \emptyset$ pour tout i . Mais alors la précédente proposition montre l'existence de points fixes $x_1, x_2, x'_2, x'_3, x_3, x_4, \dots$ de X tels que, par exemple $\overline{Y_{y_1}} \cap Y_{y_2} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{X_{x_1}} \cap X_{x_2} \neq \emptyset$ et $\overline{Y_{y_2}} \cap Y_{y_3} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{X_{x'_2}} \cap X_{x'_3} \neq \emptyset$, soit par définition $x_1 \prec x_2$ et $x'_2 \prec x'_3$. On a donc bien $\pi(x_i) = \pi(x'_i) = y_i$ pour tout i et $x_i \prec x_{i+1}$ si i est impair et $x'_i \prec x'_{i+1}$ si i est pair. \square

Remarque 3.4.9. *Le fait que le dernier point s'écrive x_m ou x'_m dépend de la parité de m : si m est pair alors on aura des points $x_1, x_2, x'_2, x'_3, \dots, x_m$ et sinon les points seront notés $x_1, x_2, x'_2, x'_3, \dots, x'_m$ pour des raisons de cohérence avec les notations du corollaire. Par la suite, on notera toujours x_m afin d'alléger les notations.*

Le morphisme π est donc compatible avec le pré-ordre géométrique puisqu'il vérifie, pour x et $x' \in X^{\mathbb{C}^*}$:

$$\pi(x) \prec \pi(x') \iff \begin{array}{l} \text{il existe } x_1, x_2, x'_2, x'_3, \dots, x_m \in X^{\mathbb{C}^*} \text{ tels que } \pi(x_1) = \pi(x), \\ \pi(x_m) = \pi(x'), \text{ pour tout } 2 \leq i \leq m-1, \pi(x_i) = \pi(x'_i) \\ \text{et pour } 1 \leq i \leq m-1, x_i \prec x_{i+1} \text{ si } i \text{ est impair} \\ \text{et } x'_i \prec x'_{i+1} \text{ si } i \text{ est pair.} \end{array}$$

3.4.2 Quotient par un groupe fini

On va maintenant étudier un cas particulier du paragraphe précédent. On suppose qu'un groupe fini G agit régulièrement sur la variété X et que cette action commute avec celle de \mathbb{C}^* . On peut donc considérer la variété quotient X/G et étudier sa décomposition de Bialynicki-Birula. On note π la projection $X \rightarrow X/G$, ce morphisme est bien \mathbb{C}^* -équivariant, surjectif, fermé et projectif, il vérifiera donc toutes les propriétés énoncées au paragraphe précédent mais la plupart vont pouvoir être étendues.

Pour commencer, on a bien $(X/G)^{\mathbb{C}^*} = \pi(X^{\mathbb{C}^*})$ mais ici, tous les points de la fibre $\pi^{-1}(y)$, avec $y \in (X/G)^{\mathbb{C}^*}$, vont être fixes :

Proposition 3.4.10. *Soit $x \in X$, alors $\pi(x) \in (X/G)^{\mathbb{C}^*} \iff x \in X^{\mathbb{C}^*}$.*

Démonstration. Si $\pi(x)$ est fixe, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \pi(\lambda \cdot x) = \pi(x)$. Donc l'ensemble $\{\lambda \cdot x, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, qui est connexe, est inclus dans $\pi^{-1}\{\pi(x)\}$ qui est fini. Il est donc réduit au point x qui est fixe. \square

Remarque 3.4.11. *On a donc une bijection entre $X^{\mathbb{C}^*}/G$ et $(X/G)^{\mathbb{C}^*}$. Comme G est fini, ceci implique que $X^{\mathbb{C}^*}$ est fini si et seulement si $(X/G)^{\mathbb{C}^*}$ est fini.*

On peut aussi améliorer le résultat du corollaire 3.4.3 grâce au lemme suivant :

Lemme 3.4.12. $[\pi(X_{x_i}) \cap \pi(X_{x_j}) \neq \emptyset] \Leftrightarrow [\pi(x_i) = \pi(x_j)] \Leftrightarrow [\pi(X_{x_i}) = \pi(X_{x_j})]$.

Preuve.

- Si $\pi(X_{x_i}) \cap \pi(X_{x_j}) \neq \emptyset$ alors il existe $z_i \in X_{x_i}$ et $z_j \in X_{x_j}$ tels que $\pi(z_i) = \pi(z_j)$ et donc il existe $g \in G$ tel que $z_i = gz_j$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ $\lambda \cdot z_i = g(\lambda \cdot z_j)$ et en appliquant π et en faisant tendre λ vers 0 on obtient que $\pi(x_i) = \pi(x_j)$.
- Si $\pi(x_i) = \pi(x_j)$, il existe $g \in G$ tel que $x_i = gx_j$. Alors soit $y \in \pi(X_{x_i})$, il existe $z_i \in X_{x_i}$ tel que $y = \pi(z_i) = \pi(g^{-1}z_i) \in \pi(X_{x_j})$. Donc $\pi(X_{x_i}) \subset \pi(X_{x_j})$ et on peut aisément échanger les rôles de i et j pour obtenir l'égalité.

□

En prenant, pour chaque point fixe $y \in (X/G)^{\mathbb{C}^*}$, un représentant $x_y \in \pi^{-1}(y)$, on obtient donc une décomposition de la forme

$$X/G = \bigsqcup_{y \in (X/G)^{\mathbb{C}^*}} \pi(X_{x_y}).$$

Deux éléments x et x' dans la même orbite donnent des ensembles attractifs qui s'envoient sur le même ensemble par π et cet ensemble est égal à $(X/G)_{\pi(x)}$ d'après la proposition 3.4.2. Alors si l'on décompose $X^{\mathbb{C}^*} = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_r$ en orbites sous l'action de G et que pour tout $1 \leq j \leq r$ on choisit un élément x_j dans X_j alors la décomposition de Bialynicki-Birula de X/G est

$$X/G = \bigsqcup_{j=1}^r \pi(X_{x_j}).$$

L'égalité $\pi(X_x) = (X/G)_{\pi(x)}$ nous permet de construire un morphisme surjectif $\pi_x : X_x \rightarrow (X/G)_{\pi(x)}$ qui correspond à la restriction de π à X_x . Il est alors naturel de se demander s'il ne permettrait pas "d'identifier" les ensembles attractifs.

Proposition 3.4.13. Soit $x \in X^{\mathbb{C}^*}$, on définit $G_x = \{g \in G, gx = x\}$ alors π_x induit un morphisme bijectif entre X_x/G_x et $(X/G)_{\pi(x)}$.

Démonstration. Soient z et z' des éléments de X_x qui vérifient $\pi(z) = \pi(z')$ alors il existe $g \in G$ tel que $z = gz'$ mais alors

$$x = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot z = \lim_{\lambda \rightarrow 0} g(\lambda \cdot z') = gx$$

donc $g \in G_x$.

□

Enfin, comme les actions de G et de \mathbb{C}^* commutent, on a clairement $X_{g \cdot x} = g \cdot X_x$ et donc, dans ce cas, les deux pré-ordres vont se correspondre par le quotient de manière beaucoup plus simple que dans le cas général.

Proposition 3.4.14. Soient x et $y \in X^{\mathbb{C}^*}$,

$$\pi(x) \prec \pi(y) \iff \exists g \in G \text{ tel que } x \prec gy.$$

Démonstration. On a, comme au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}
 \pi(x) \prec \pi(y) &\iff \exists x_1, x_2, x'_2, x'_3, \dots, x_m \in X^{\mathbb{C}^*} \text{ tels que } \pi(x_1) = \pi(x), \\
 &\pi(x_m) = \pi(y), \text{ pour tout } 2 \leq i \leq m-1, \pi(x_i) = \pi(x'_i) \\
 &\text{et pour } 1 \leq i \leq m-1, \overline{X_{x_i}} \cap X_{x_{i+1}} \neq \emptyset \text{ si } i \text{ est impair et} \\
 &\overline{X_{x'_i}} \cap X_{x'_{i+1}} \neq \emptyset \text{ si } i \text{ est pair,} \\
 &\iff \exists x_1, x_2, x'_2, x'_3, \dots, x_m \text{ tels que } \exists g_1 \in G, x = g_1 \cdot x_1 \text{ et} \\
 &\exists g_m \in G, x_m = g_m \cdot y, \text{ pour tout } 2 \leq i \leq m-1, \exists g_i \in G, \\
 &\text{tel que } x_i = g_i x'_i \text{ si } i \text{ est pair et } x'_i = g_i x_i \text{ si } i \text{ est impair} \\
 &\text{et pour } 1 \leq i \leq m-1, \overline{X_{x_i}} \cap X_{x_{i+1}} \neq \emptyset \text{ si } i \text{ est impair et} \\
 &\overline{X_{x'_i}} \cap X_{x'_{i+1}} \neq \emptyset \text{ si } i \text{ est pair,} \\
 &\iff \exists x_1, x'_2, x_3, x'_4, \dots, x_m \text{ et } \exists g_1, g_2, \dots, g_m \in G \text{ tels que} \\
 &x = g_1 \cdot x_1 \text{ et } x_m = g_m \cdot y, \text{ pour tout } 2 \leq i \leq m-1 : \\
 &\overline{X_{g_1 \dots g_i \cdot x_i}} \cap X_{g_1 \dots g_{i+1} \cdot x'_{i+1}} \neq \emptyset \text{ si } i \text{ est impair et} \\
 &\overline{X_{g_1 \dots g_i \cdot x'_i}} \cap X_{g_1 \dots g_{i+1} \cdot x'_{i+1}} \neq \emptyset \text{ si } i \text{ est pair,} \\
 &\iff \exists g = g_1 \cdots g_m \in G \text{ tel que } x \prec g \cdot y
 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.4.15. Ainsi, dans le cas, par exemple, où G agit trivialement sur les points fixes de X , les deux pré-ordres sont équivalents. De plus, par cette correspondance, l'antisymétrie de la relation d'un côté, entraîne la bonne définition de l'ordre de l'autre côté.

Deuxième partie

Algèbre de Cherednik d'un sous-groupe distingué

Introduction

Un des principaux objectifs de cette thèse est de généraliser la construction faite dans [Gor08] pour certains paramètres d'un ordre géométrique sur les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$ à l'ensemble des paramètres pour $G(\ell, 1, n)$ puis à $G(\ell, e, n)$.

Nous aurons donc besoin de comparer les partitions de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$ et de $G(\ell, e, n)$. Ce travail a déjà été fait dans [Bel, 6.10]. Dans le cadre plus général où $K \triangleleft W$ sont deux groupes de réflexions tels que le quotient $W/K = C$ est cyclique, G. Bellamy a construit dans [Bel, §4] une bijection entre la partition de Calogero-Moser de W et les orbites de la partition de Calogero-Moser de K sous l'action de C . Au théorème 6.1.4, nous allons étendre ce résultat au cas où le quotient est abélien.

Cette partie débutera par une présentation des algèbres de Hecke et des algèbres de Cherednik associées à un groupe de réflexions complexe.

Au chapitre 5, on rappellera la construction faite dans [Bel], pour deux groupes de réflexions $K \triangleleft W$, de la sous-algèbre $\widetilde{H_c(K)}$ de $\overline{H_c(W)}$ dont les simples et les blocs sont en bijection avec ceux de $\overline{H_c(K)}$. Puis on montrera que les algèbres $\overline{H_c(W)}$ et $\widetilde{H_c(K)}$ forment un système de Clifford, ce qui nous permettra d'appliquer les résultats du paragraphe 2.1 pour énoncer à la proposition 5.1.5 que $\text{rad}(\overline{H_c(W)}) = \overline{H_c(W)} \otimes_{\widetilde{H_c(K)}} \text{rad}(\widetilde{H_c(K)})$. Ce résultat nous permettra entre autre de montrer le théorème 5.3.7 :

Théorème. *À équivalence près, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{H_c(K)}\text{-mod} & \xleftarrow{\widetilde{L_c^K}} & \mathbb{C}[K]\text{-mod} \\
 \text{Ind} \downarrow \text{Res} & & \text{Ind} \downarrow \text{Res} \\
 \overline{H_c(W)}\text{-mod} & \xleftarrow{L_c^W} & \mathbb{C}[W]\text{-mod}
 \end{array}$$

où les foncteurs L_c^W et $\widetilde{L_c^K}$ sont liés à la définition des bébés modules de Verma qui sera présentée au chapitre 4.

Le dernier chapitre de cette partie sera consacré à la généralisation au cas abélien non cyclique des résultats de [Bel].

Algèbre de Cherednik et algèbre de Hecke associées à un groupe de réflexions complexe

4.1 Groupes de réflexions complexes

4.1.1 Réflexions complexes

On considère un \mathbb{C} -espace vectoriel \mathfrak{h} de dimension finie.

Définition 4.1.1. *Un isomorphisme non trivial s de \mathfrak{h} est une pseudo-réflexion s'il agit trivialement sur un hyperplan de \mathfrak{h} .*

Les hyperplans fixés par des pseudo-réflexions sont appelés les hyperplans de réflexions et pour H un hyperplan correspondant à une pseudo-réflexion s , on notera α_s une forme linéaire sur \mathfrak{h} telle que $\ker \alpha_s = H$. Donc si s' est une autre pseudo-réflexion fixant H alors α_s et $\alpha_{s'}$ sont proportionnelles. On choisira aussi un élément $v_s \in \mathfrak{h}$ qui engendre le supplémentaire s -stable de H et tel que $\alpha_s(v_s) = 1 - \det(s)^{-1}$.

Remarque 4.1.2. *Le choix de α_s et v_s entraîne que toute pseudo-réflexion s vérifie :*

$$\forall h \in \mathfrak{h}, h - s(h) = -\det(s)\alpha_s(h)v_s.$$

De plus, un isomorphisme de \mathfrak{h} agit naturellement sur \mathfrak{h}^ de la manière suivante : soient $f \in \mathfrak{h}^*$, $h \in \mathfrak{h}$ et $g \in \text{GL}(\mathfrak{h})$: $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1} \cdot h)$. On a alors, pour toute pseudo-réflexion s :*

$$\forall f \in \mathfrak{h}^*, f - s(f) = f(v_s)\alpha_s.$$

Et en particulier, $s(v_s) = \det(s)v_s$ et $s(\alpha_s) = \det(s)^{-1}\alpha_s$.

4.1.2 Groupes de réflexions complexes

Définitions et exemples

Les pseudo-réflexions complexes vont nous amener à définir une famille de groupes finis qui englobe les groupes de Coxeter finis : les groupes de réflexions complexes.

Définition 4.1.3. *Un groupe de réflexions complexe est un sous-groupe fini W de $\text{GL}(\mathfrak{h})$ engendré par des pseudo-réflexions.*

On gardera par la suite la notation W pour un groupe de réflexions.

Par exemple, le groupe de permutations \mathfrak{S}_n est un groupe de réflexions : on le voit comme le sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^n)$ qui est engendré par les matrices de transposition qui sont des réflexions.

À un groupe de réflexions complexe W , on associe \mathcal{S}_W l'ensemble des pseudo-réflexions de W et \mathcal{A}_W celui des hyperplans de réflexions de W . Pour tout $H \in \mathcal{A}_W$, on note W_H le fixateur de H . C'est un groupe cyclique d'ordre $e_H = |W_H|$. Ses représentations peuvent donc être décrites de la manière suivante : si on note $\det_H = \det|_{W_H}$, alors $\text{Irr}(W_H) = \{\det_H^j, 0 \leq j \leq e_H - 1\}$.

Le groupe W agit sur l'ensemble \mathcal{A}_W et, pour deux hyperplans dans la même orbite \mathcal{C} , leurs fixateurs seront conjugués, ils auront donc le même ordre, que l'on peut noter $e_{\mathcal{C}}$ et le même ensemble de caractères irréductibles, que l'on va noter $\text{Irr}(W_{\mathcal{C}})$. L'ensemble

$$U = \bigsqcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{A}_W/W} \text{Irr}(W_{\mathcal{C}})$$

est donc en bijection avec l'ensemble des paires (\mathcal{C}, j) , où \mathcal{C} est une orbite de \mathcal{A}_W sous l'action de W et $0 \leq j \leq e_{\mathcal{C}} - 1$.

Les groupes de réflexions complexes irréductibles ont été classifiés dans [ST54] :

Théorème 4.1.4 (Shephard-Todd). *L'ensemble des groupes de réflexions complexes irréductibles est décrit, à isomorphisme près, par :*

- la série infinie des groupes imprimitifs $G(\ell, e, n)$, où ℓ , e et n sont des entiers non nuls tels que e divise ℓ , composés de matrices monomiales de taille n telles que
 - le seul terme non nul sur chaque colonne est une racine $\ell^{\text{ième}}$ de l'unité
 - le produit de tous les termes non nuls est une racine $\frac{\ell}{e}^{\text{ième}}$ de l'unité.
- 34 groupes exceptionnels.

On retrouve le groupe symétrique puisque $\mathfrak{S}_n = G(1, 1, n)$, il est irréductible au sens où il n'est pas décomposable en un produit de groupes mais la représentation par permutation \mathbb{C}^n n'est pas irréductible. Le groupe diédral $I_2(n) = G(n, n, 2)$ apparaît dans la série infinie, ainsi que les groupes cycliques $\mu_{\ell} = G(\ell, 1, 1)$, les groupes de Weyl de type $D_n = G(2, 2, n)$ et de type $B_n = G(2, 1, n)$. Plus généralement, le groupe de réflexions $G(\ell, 1, n)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mu_{\ell}^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

Caractérisation des groupes de réflexions complexes

Un sous-groupe G de $GL(\mathfrak{h})$ va agir naturellement sur l'algèbre symétrique $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$. On peut identifier cette algèbre à celle des fonctions polynomiales sur \mathfrak{h} qui est une algèbre de polynômes $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, où $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$. On note alors $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G$ l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sous l'action de G .

Par exemple, le groupe \mathfrak{S}_n agit sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ par permutations des indéterminées et $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ est une algèbre de polynômes, engendrée par les n polynômes symétriques élémentaires. Cette propriété caractérise en fait les groupes de réflexions complexes (cf. [ST54] et [Che55]) :

Théorème 4.1.5 (Shephard-Todd, Chevalley, Serre). *Soient \mathfrak{h} un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et G un sous-groupe fini de $GL(\mathfrak{h})$. Alors :*

G est un groupe de réflexions si et seulement si il existe f_1, \dots, f_n des éléments homogènes de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G$ et algébriquement indépendants tels que $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$.

De plus, lorsque ceci est vérifié, si l'on note $d_i := \deg(f_i)$ pour $1 \leq i \leq n$, alors les entiers d_i ne dépendent que de G , sont uniques à permutations près et vérifient :

$$(i) |G| = \prod_{i=1}^n d_i = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[\mathfrak{h}]}{\langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^G \rangle}$$

$$(ii) \text{card}(\mathcal{S}_G) = \sum_{i=1}^n (d_i - 1).$$

On note ici $\langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^G \rangle$ l'idéal de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ engendré par les éléments homogènes de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G$ de degré strictement positif.

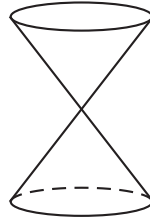
La caractérisation algébrique des groupes de réflexions entraîne une caractérisation géométrique. En effet, si G est un sous-groupe fini de $\text{GL}(\mathfrak{h})$, on peut définir la variété quotient \mathfrak{h}/G comme la variété algébrique affine dont l'algèbre des fonctions polynomiales est $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G$ (cf. §3.1). On a alors :

Corollaire 4.1.6. G est un groupe de réflexions $\Leftrightarrow \mathfrak{h}/G$ est une variété lisse.

D'après le théorème 4.1.5, si W est un groupe de réflexions alors \mathfrak{h}/W est isomorphe à \mathfrak{h} mais l'isomorphisme n'est pas canonique.

Remarque 4.1.7. Si W est un groupe de réflexions qui agit sur \mathfrak{h} , il ne va pas agir comme un groupe de réflexions sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$, la variété $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W$ sera donc singulière.

Exemple 4.1.8. Pour $\mathfrak{h} = \mathbb{C}$, $W = G(2, 1, 1) \simeq \mu_2$ agit sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ par $\sigma \cdot (x, y) = (-x, -y)$, on a $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*]^W = \mathbb{C}[X^2, Y^2, XY] \simeq \mathbb{C}[A, B, C]/\langle C^2 - AB \rangle$ et donc $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/W = \{(a, b, c) \in \mathbb{A}^3, c^2 = ab\}$ est un cône.



La variété $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/\mu_2$

4.2 Algèbres de Hecke

4.2.1 Définition générale et algèbre de Hecke cyclotomique

On note $\mathfrak{h}^{\text{reg}}$ l'espace \mathfrak{h} auquel on a enlevé les hyperplans de \mathcal{A}_W . Il est stable sous l'action de W . On note aussi $B_W = \pi_1(\mathfrak{h}^{\text{reg}}/W, x_0)$ le groupe de tresses associé à W , avec $x_0 \in \mathfrak{h}^{\text{reg}}$. On considère $\{\mathbf{q}_u, u \in U\}$ un ensemble d'indéterminées et pour un entier positif e on note $\zeta_e = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{e}\right)$.

Définition 4.2.1. Soit $\mathbf{R} = \mathbb{C}[\mathbf{q}_u^{\pm 1}, u \in U]$, on appelle algèbre de Hecke de W sur \mathbf{R} le quotient $\mathcal{H}(W)$ de $\mathbf{R}[B_W]$ par les relations :

$$\prod_{0 \leq j < e_c} (T_H - \zeta_{e_c}^j \mathbf{q}_{(c,j)}) = 0,$$

pour tout $H \in \mathcal{A}_W$, C l'orbite H , et T_H le générateur de la monodromie autour de H (cf. par exemple [BK02, 2.A]).

Remarque 4.2.2. *Quand on prend la spécialisation $\mathbf{q}_{(c,j)} \mapsto 1$, on retrouve la présentation par générateurs et relations de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[W]$ (cf. [BM04] et [BMR98]). L'algèbre de Hecke peut donc être vue comme une déformation de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[W]$: on déforme la multiplication en introduisant des paramètres \mathbf{q}_u .*

Pour la suite de ce mémoire, on va faire l'hypothèse suivante, qui est vérifiée pour les groupes de réflexions $G(\ell, e, n)$ qui vont nous intéresser par la suite (cf. [BMM99, 1.17 et 1.18]).

Hypothèse. L'algèbre $\mathcal{H}(W)$ est libre de rang $|W|$ en tant que \mathbf{R} -module et il existe une forme linéaire $t : \mathcal{H}(W) \rightarrow \mathbf{R}$ qui est une forme symétrisante pour la \mathbf{R} -algèbre $\mathcal{H}(W)$. De plus, par la spécialisation $\mathbf{q}_{(c,j)} \mapsto 1$, la forme t devient la forme canonique sur l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[W]$.

Soit \mathbf{q} une indéterminée (ou un élément de \mathbb{C}^*) et $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_{(c,j)}\}$ des entiers relatifs. On considère la spécialisation $\mathbf{R} \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{q}^{\pm 1}]$, $\mathbf{q}_{(c,j)} \mapsto \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(c,j)}}$, l'algèbre de Hecke associée à cette nouvelle donnée sera appelée algèbre de Hecke cyclotomique de W sur $\mathbb{C}[\mathbf{q}^{\pm 1}]$ et notée $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W)$.

4.2.2 Représentations des algèbres de Hecke

Le résultat suivant (cf [Chl09, prop 4.3.4]) est utile pour étudier les représentations des algèbres de Hecke :

Théorème 4.2.3. *Il existe un entier r tel que si \mathbf{z} est une racine $r^{\text{ième}}$ de \mathbf{q} , alors l'algèbre $\mathbb{C}(\mathbf{z})\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W) := \mathbb{C}(\mathbf{z}) \otimes_{\mathbb{C}[\mathbf{q}^{\pm 1}]} \mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W)$ est semi-simple déployée.*

Ainsi, par le théorème de déformation de Tits (cf [GP00, 7.4.6]), on a une bijection entre les modules simples de cette algèbre et ceux de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[W]$. On peut donc écrire :

$$\text{Irr}(\mathbb{C}(\mathbf{z})\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W)) = \{V_{\mathbf{z},\mathbf{m}}^E, E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]\}.$$

D'après l'hypothèse que l'on a faite, l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W)$ est munie d'une forme symétrisante $t : \mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W) \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{q}^{\pm 1}]$. Cette structure d'algèbre symétrique va naturellement s'étendre à l'algèbre $\mathbb{C}(\mathbf{z})\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W)$ par extension des scalaires. On notera encore $t : \mathbb{C}(\mathbf{z})\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{z})$. D'après la proposition 2.2.1, il existe alors des éléments de Schur $\{s_E, E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]\}$, qui sont des polynômes de Laurent en \mathbf{z} tels que

$$t = \sum_{E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]} \frac{1}{s_E} \chi_E$$

où χ_E est le caractère du module simple $V_{\mathbf{z},\mathbf{m}}^E$.

Ces éléments vont nous permettre de définir la \mathbf{a} -fonction de Lusztig qui joue un rôle primordial dans l'étude des représentations des algèbres de Hecke (cf. [Lus03]).

4.2.3 Fonctions \mathbf{a} et \mathbf{A}

Comme les éléments de Schur sont des polynômes de Laurent en l'indéterminée \mathbf{z} , on peut parler de leur valuation et de leur degré en \mathbf{z} (ou en \mathbf{q}).

Définition 4.2.4. Soit $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$, on pose

$$\mathbf{a}_m(E) = -\text{val}_{\mathbf{q}}(s_E) = -\frac{\text{val}_{\mathbf{z}}(s_E)}{r} \text{ et } \mathbf{A}_m(E) = \text{deg}_{\mathbf{q}}(s_E) = \frac{\text{deg}_{\mathbf{z}}(s_E)}{r}.$$

Ces fonctions nous permettent de munir l'ensemble $\text{Irr } W$ d'un ordre partiel en posant, pour E et F des $\mathbb{C}[W]$ -modules simples,

$$E \leq_a F \iff \mathbf{a}_m(E) < \mathbf{a}_m(F) \text{ ou } E = F.$$

On appelle cet ordre l'ordre de la \mathbf{a} -fonction et on construit de la même manière l'ordre de la \mathbf{A} -fonction.

4.3 Algèbres de Cherednik

En 1992, I. Cherednik a introduit une famille d'algèbres, dites algèbres de Hecke doubles affines (cf. [Che91] et [Che92]). En 2002, P. Etingof et V. Ginzburg ont étudié dans [EG02] des dégénérescences rationnelles de ces algèbres, qu'ils ont appelées algèbres de Cherednik rationnelles. Ce sont des cas particuliers des algèbres de réflexions symplectiques pour des groupes de réflexions complexes.

4.3.1 Définition

On considère une famille de paramètres complexes $\{t, c_s ; s \in \mathcal{S}_W\}$, qui a la propriété suivante :

$$c_s = c_{s'} \text{ si les réflexions } s \text{ et } s' \text{ sont conjuguées.}$$

Le groupe $W \subset \text{GL}(\mathfrak{h})$ agit naturellement sur $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)$, l'algèbre tensorielle sur \mathbb{C} . La définition suivante est tirée de [Mar] :

Définition 4.3.1. L'algèbre de Cherednik rationnelle $H_{t,c}(W)$ associée au groupe de réflexions W et aux paramètres t et c est le quotient de $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*) \rtimes W$ par les relations :

$$[x, x'] = 0, \quad [y, y'] = 0, \quad \text{et } [y, x] = t \langle x, y \rangle - \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle x, v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la forme bilinéaire définie par dualité de \mathfrak{h} et \mathfrak{h}^* , $x, x' \in \mathfrak{h}^*$, $y, y' \in \mathfrak{h}$ et les éléments α_s et v_s correspondent à ceux définis au paragraphe 4.1.1.

C'est une algèbre \mathbb{Z} -graduée avec $\text{deg}(\mathfrak{h}) = -1$ et $\text{deg}(\mathfrak{h}^*) = 1$.

Par définition, il existe différents morphismes des algèbres $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, $\mathbb{C}[W]$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ dans $H_{t,c}(W)$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (cf. [EG02, 1.3]) entraîne que ces morphismes sont injectifs :

Théorème 4.3.2. La multiplication définit un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels :

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \xrightarrow{\sim} H_{t,c}(W).$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 4.1.1, si deux pseudo-réflexions s et s' fixent le même hyperplan alors α_s et $\alpha_{s'}$ sont proportionnelles, de même pour v_s et $v_{s'}$. Elles correspondront donc à la même fraction $\frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle x, v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle}$. On peut alors les regrouper dans la somme qui définit la relation de commutation entre x et y . Cela donne une définition de l'algèbre de Cherednik liée à un autre système de paramètres. Soit $\{\mathbf{h}_u, u \in U\}$ un ensemble de nombres complexes, où $U = \bigsqcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{A}_W/W} \text{Irr}(W_{\mathcal{C}})$. En posant $\mathbf{h}_{(\mathcal{C},0)} = 0$ pour tout \mathcal{C} , et pour $s \in W_H$, avec $H \in \mathcal{C}$:

$$c_s = \sum_{j=0}^{e_{\mathcal{C}}-1} \det(s)^{-j} (\mathbf{h}_{(\mathcal{C},j)} - \mathbf{h}_{(\mathcal{C},j-1)}),$$

on obtient la définition de l'algèbre de Cherednik donnée dans [Rou08, §5], avec la relation de commutation suivante :

$$[y, x] = t \langle x, y \rangle - \sum_{H \in \mathcal{A}_W} \frac{\langle \alpha_H, y \rangle \langle x, v_H \rangle}{\langle \alpha_H, v_H \rangle} \gamma_H$$

$$\text{où } \gamma_H = \sum_{w \in W_H - \{1\}} \left(\sum_{j=0}^{e_{\mathcal{C}}-1} \det(w)^{-j} (\mathbf{h}_{(\mathcal{C},j)} - \mathbf{h}_{(\mathcal{C},j-1)}) \right) w, \text{ pour } H \in \mathcal{C}.$$

Remarque 4.3.3. (i) Dans ces formules comme par la suite, on utilise la convention que les indices j sont considérés modulo $e_{\mathcal{C}}$.

(ii) Pour relier l'algèbre de Cherednik à l'algèbre de Hecke correspondant à un même groupe W , on pourra identifier les paramètres de la manière suivante : $\mathbf{h}_{(\mathcal{C},j)} = \mathbf{m}_{(\mathcal{C},j)}$.

4.3.2 Centre et algèbre de Cherednik restreinte

Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, les algèbres $H_{at,ac}(W)$ et $H_{t,c}(W)$ sont isomorphes. Ainsi l'étude de $H_{t,c}(W)$ avec $t \neq 0$ se ramène à celle de $H_{1,c}(W)$. Par contre, les algèbres $H_{1,c}(W)$ et $H_{0,c}(W)$ ont une différence structurelle majeure :

- $Z(H_{1,c}(W)) = \mathbb{C}$
- $H_{0,c}(W)$ a un centre non trivial.

Pour le premier point, on pourra se référer par exemple à la remarque avant le théorème 3.1 de [EG02]. Nous allons développer le deuxième point dans ce paragraphe.

Une conséquence de cette différence est que la théorie des représentations sera considérablement différente selon que t soit nul ou non. La richesse de $Z(H_{0,c}(W))$ va donner lieu à la théorie détaillée ici et issue de [Gor03], comme le résultat suivant, énoncé dans [EG02, 4.15] mais dont la preuve suivante provient de [Gor03, 3.6].

Proposition 4.3.4 (Etingof-Ginzburg). $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W \subset Z(H_{0,c}(W))$

Lemme 4.3.5 (Gordon). Pour tout $p \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ et tout $s \in \mathcal{S}_W$, α_s divise $p - s(p)$.

Preuve du lemme. Raisonnons par récurrence sur le degré des polynômes de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$. Pour les polynômes de degré 1, c'est à dire les éléments x de \mathfrak{h}^* , on a $x - s(x) = \langle x, v_s \rangle \alpha_s$ d'après la remarque 4.1.2. Donc α_s divise bien $x - s(x)$. Soit un entier $d \geq 2$, supposons que pour tous les éléments p de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ de degré inférieur ou égal à $d-1$, α_s divise $p - s(p)$ et montrons que c'est aussi vrai pour tous les éléments de degré d . Considérons un monôme v de degré d , on peut le décomposer comme un produit $v = xx'$ de deux

monômes de degré strictement inférieur à d . Et donc par l'hypothèse de récurrence, il existe z et $z' \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ tels que $x - s(x) = z\alpha_s$ et $x' - s(x') = z'\alpha_s$. Mais alors

$$\begin{aligned} v - s(v) &= xx' - s(xx') \\ &= (x - s(x))s(x') + x(x' - s(x')) \\ &= z\alpha_s s(x') + xz'\alpha_s \\ &= (zs(x') + xz')\alpha_s. \end{aligned}$$

Et le lemme est montré par le principe de récurrence. □

Démonstration de la proposition 4.3.4. Le lemme nous permet de construire l'élément de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ suivant :

$$\langle p, v_s \rangle = \frac{p - s(p)}{\alpha_s}. \quad (1)$$

On peut alors montrer que

$$\langle pp', v_s \rangle = \langle p, v_s \rangle s(p') + p \langle p', v_s \rangle.$$

Grâce à cette formule, on peut étendre la relation $[x, y] = \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle x, v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s$,

que l'on note (*), à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ par récurrence sur le degré des polynômes de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$. En effet, pour x un élément de \mathfrak{h}^* , l'égalité (*) est vérifiée pour tout $y \in \mathfrak{h}$. Soit d un entier plus grand que 2, supposons que tous les éléments x de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ de degré inférieur ou égal à $d - 1$ vérifient (*). Soit v un monôme de degré d , on peut le décomposer en un produit $v = xx'$, où x et x' sont deux monômes de degré strictement inférieur à d . On a alors, pour tout élément y de \mathfrak{h} ,

$$\begin{aligned} [xx', y] &= [x, y]x' + x[x', y] \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle x, v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} sx' + x \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle x', v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} (\langle x, v_s \rangle s(x') + x \langle x', v_s \rangle) s \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle xx', v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s \end{aligned}$$

Donc, par le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ on a :

$$[p, y] = \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle p, v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s \quad (2).$$

De plus l'égalité (1) entraîne :

$$\begin{aligned} p \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W &\Leftrightarrow \forall w \in W, w(p) = p \\ &\Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{S}_W, s(p) = p \\ &\Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{S}_W, \langle p, v_s \rangle = 0. \end{aligned}$$

Et donc, en utilisant (2), on montre que si $p \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$, alors $p \in Z(H_{0,c}(W))$. On peut démontrer de la même manière que $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W \subset Z(H_{0,c}(W))$, ce qui démontre la proposition. □

La proposition [EG02, 4.15] montre de plus que $Z(H_{0,c}(W))$ est un $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ -module libre de rang $|W|$. On peut donc construire le morphisme de variétés fini correspondant :

$$\Upsilon_c : \text{Specm}(Z(H_{0,c}(W))) \rightarrow \text{Specm}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W) = \mathfrak{h}/W \times \mathfrak{h}^*/W$$

Comme $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ est inclus dans le centre de $H_{0,c}(W)$, on peut voir cette algèbre comme une algèbre sur $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$. De plus, d'après les théorèmes de Shephard-Todd (théorème 4.1.5) et de PBW (théorème 4.3.2), si l'on choisit une $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ -base $(x_1, \dots, x_{|W|})$ de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ et une $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ -base $(y_1, \dots, y_{|W|})$ de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ alors $(x_i \otimes y_j)_{1 \leq i, j \leq |W|}$ est une $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ -base de $H_{0,c}(W)$. Donc $H_{0,c}(W)$ est un $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ -module libre de rang $|W|^3$.

Enfin, si l'on note $(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W)_+$ l'idéal maximal de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ composé des éléments sans terme constant, on peut construire

$$\overline{H_{0,c}(W)} = H_{0,c}(W) / ((\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W)_+ H_{0,c}(W))$$

Définition 4.3.6. On appelle cette algèbre l'algèbre de Cherednik restreinte associée à W , elle est de dimension $|W|^3$.

Par construction, on a un morphisme de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ dans $\overline{H_{0,c}(W)}$ qui se factorise par l'idéal $\langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \rangle$ en un morphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} := \mathbb{C}[\mathfrak{h}] / \langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \rangle$ dans $\overline{H_{0,c}(W)}$ et ce de même pour $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}$ et $\mathbb{C}[W]$. On a donc un morphisme de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}$ dans $\overline{H_{0,c}(W)}$.

Proposition 4.3.7. Le morphisme $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W} \rightarrow \overline{H_{0,c}(W)}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Le théorème 4.3.2 nous permet de montrer la surjectivité de ce morphisme et la bijectivité vient de l'égalité des dimensions. \square

L'algèbre $H_{0,c}(W)$ étant finie sur son centre, les $H_{0,c}$ -modules simples sont tous de dimension finie sur \mathbb{C} (ce qui n'est pas le cas pour $t \neq 0$ car il existe des $H_{1,c}(W)$ -modules simples de dimension infinie, cf. [GGOR03]). Dans la suite, on va étudier les modules simples de $\overline{H_{0,c}(W)}$. De plus, ses blocs sont décrits par la fibre en 0 du morphisme Υ_c .

Proposition 4.3.8. L'ensemble $\Upsilon_c^{-1}(0)$ est en bijection avec les blocs de l'algèbre de dimension finie $\overline{H_{0,c}(W)}$.

Démonstration. Si l'on traduit l'application Υ_c en terme d'idéaux maximaux, comme l'élément 0 de $\text{Specm}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W)$ correspond à l'idéal maximal $(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W)_+$, la fibre $\Upsilon_c^{-1}(0)$ est décrite par les idéaux maximaux de $Z(H_{0,c}(W))$ contenant l'idéal $(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W)_+$. Cet ensemble est en bijection avec les idéaux maximaux de l'algèbre $Z(H_{0,c}(W)) / ((\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W)_+ Z(H_{0,c}(W)))$ qui est commutative et de dimension finie. On conclut grâce au paragraphe 2.10 de [BG01], basé sur un résultat de [Mül76], qui montre que les idéaux maximaux de cette algèbre sont en bijection avec les blocs de $\overline{H_{0,c}(W)}$. \square

Corollaire 4.3.9. L'algèbre $\overline{H_{0,0}(W)}$ n'a qu'un seul bloc.

Démonstration. Si $c_s = 0$ pour tout s alors il est facile de voir que le centre de $H_{0,0}(W)$ est $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^*]^W$. Donc Υ_0 est le morphisme $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*/W \rightarrow \mathfrak{h}/W \times \mathfrak{h}^*/W$ qui n'a que le point 0 dans sa fibre en 0. \square

Par la suite, on ne va s'intéresser qu'aux algèbres correspondant à $t = 0$, on les notera d'ailleurs $H_c(W)$ mais on mentionnera quand même ce qu'il se passe pour $t \neq 0$, notamment en ce qui concerne les représentations de ces algèbres. On notera aussi $Z_c(W)$ le centre de l'algèbre $H_c(W)$ et $\overline{H}_c(W)$ l'algèbre de Cherednik restreinte correspondante.

4.3.3 Élément d'Euler et c-fonction

On va s'intéresser dans cette partie à deux éléments particuliers de l'algèbre de Cherednik définis de la manière suivante.

Définition 4.3.10. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de \mathfrak{h}^* et $(y_i)_{i \in I}$ la base antéduale associée. On appelle élément d'Euler l'élément de $H_c(W)$ défini par $eu = \sum_i x_i y_i - eu_0$ où

$$eu_0 = \sum_{s \in \mathcal{S}_W} \frac{c_s}{1 - \det(s)^{-1}} s = \sum_{s \in \mathcal{S}_W} \frac{c_s}{\langle \alpha_s, \nu_s \rangle} s.$$

Remarque 4.3.11. (i) La définition de eu ne dépend pas du choix de la base $(x_i)_{i \in I}$.
(ii) Un simple calcul utilisant le lien entre les paramètres donné au paragraphe 4.3.1 montre qu'avec l'autre système de paramètres la définition de l'élément d'Euler est la suivante :

$$eu_0 = \sum_{C \in \mathcal{A}_W/W} \sum_{H \in C} \sum_{j=0}^{e_C-1} \left(\sum_{w \in W_H} \det(w)^{-j} w \right) \mathbf{h}_{(C,j)}$$

qui est l'opposée de celle donnée au paragraphe 2.7 de [CGG12].

La fonction $s \mapsto c_s$ étant invariante par conjugaison, il est facile de vérifier que l'élément eu_0 est dans le centre de $\mathbb{C}[W]$. D'après le lemme de Schur, il agit donc par un scalaire sur les modules irréductibles de $\mathbb{C}[W]$, ce qui nous amène à définir la **c-fonction** de la manière suivante :

Définition 4.3.12. Soit $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$, on note $\mathbf{c}_c(E)$ le scalaire par lequel l'élément d'Euler eu_0 agit sur E .

Remarque 4.3.13. (i) On note $\mathbf{c}_c(E)$ car, comme la définition de eu_0 ne fait pas intervenir le paramètre t , la **c-fonction** ne dépend que de c .
(ii) Cette fonction sur les $\mathbb{C}[W]$ -modules simples est liée à un ordre sur $\text{Irr } W$, qui est construit sur le même principe que celui des **a** et **A**-fonctions :

$$E \leq_c F \iff \mathbf{c}_c(E) - \mathbf{c}_c(F) \in \mathbb{R}_+^* \text{ ou } E = F.$$

Par contre eu_0 n'est pas en général dans le centre de $H_{t,c}(W)$, mais pour $t = 0$, l'élément eu est central dans $H_{0,c}(W)$ comme le montre le résultat suivant :

Proposition 4.3.14. L'élément d'Euler eu commute avec les éléments de W et vérifie, pour $x \in \mathfrak{h}^*$ et $y \in \mathfrak{h}$, $[eu, x] = tx$ et $[eu, y] = -ty$.

Démonstration. Si l'on prend $w \in W$ alors $(w(y_i))_i$ est une base de \mathfrak{h} et $(w(x_i))_i$ correspond à sa base duale. Ainsi, comme $\sum_i x_i y_i = \sum_i w(x_i)w(y_i)$, on a

$$\begin{aligned} w \sum_i x_i y_i &= \sum_i w(x_i)w(y_i)w \\ &= \sum_i x_i y_i w \end{aligned}$$

Or on a vu que eu_0 commute avec les éléments de W , on peut donc en déduire la même propriété pour eu . On va maintenant présenter le calcul de $[eu, x_i]$, pour x_i un élément de la base. On en déduit le résultat pour un élément quelconque de \mathfrak{h}^* par linéarité et le calcul de $[eu, y_i]$ se fait de la même manière, en utilisant les relations de commutation et la remarque 4.1.2.

$$\begin{aligned} [eu, x_i] &= \sum_j x_j [y_j, x_i] - \sum_s \frac{c_s}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} (s(x_i) - x_i) s \\ &= tx_i - \sum_s \frac{c_s}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} \left(\langle x_i, v_s \rangle \left(\sum_j \langle \alpha_s, y_j \rangle x_j \right) - \langle x_i, v_s \rangle \alpha_s \right) \\ &= tx_i \end{aligned}$$

□

On vient de définir une troisième fonction sur $\text{Irr } \mathbb{C}[W]$, il est donc naturel de chercher à la relier aux autres fonctions \mathbf{a} et \mathbf{A} déjà définies au paragraphe 4.2.3. Pour cela, il faut d'abord relier les algèbres $\mathcal{H}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(W)$ et $H_{t, c}(W)$ que l'on considère : on va donc poser $\mathbf{m}_{(\mathcal{C}, j)} = \mathbf{h}_{(\mathcal{C}, j)}$. Pour ce choix, le lien entre les fonctions a été établi au paragraphe 3.3 de [CGG12], à partir d'un résultat de [BMM99, 6] :

Proposition 4.3.15. *Soit $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$. Si l'on a $\mathbf{m}_{(\mathcal{C}, j)} = \mathbf{h}_{(\mathcal{C}, j)}$ pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{A}_W/W$ et $0 \leq j \leq e_{\mathcal{C}} - 1$, alors*

$$\mathbf{c}_c(E) = \mathbf{A}_m(E) - \mathbf{a}_m(E) + \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{A}_W/W} \sum_{j=0}^{e_{\mathcal{C}}-1} \mathbf{m}_{(\mathcal{C}, j)}.$$

Dans ce cas, l'ordre défini sur $\text{Irr } \mathbb{C}[W]$ par la \mathbf{c} -fonction est le même que celui déterminé par la fonction $\mathbf{A} - \mathbf{a}$.

4.3.4 Bébés Modules de Verma

On va définir, dans ce paragraphe, des modules sur l'algèbre restreinte $\overline{H_c(W)}$, appelés bébés-modules de Verma, qui ont été construits par I. Gordon dans [Gor03] sur le modèle des modules de Verma pour les algèbres de Lie. La définition suivante est valable pour $t = 0$ mais on a une définition semblable dans le cas $t \neq 0$.

On note $\overline{H_c^-(W)}$ la sous-algèbre de $\overline{H_c(W)}$ isomorphe à $\mathbb{C}[W] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}$ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel et $\overline{H_c^+(W)}$, la sous-algèbre de $\overline{H_c(W)}$ isomorphe à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes \mathbb{C}[W]$ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. À un $\mathbb{C}[W]$ -module E , on associe un $\overline{H_c^-(W)}$ -module simple E^- sur lequel la partie $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]_{+}^{\text{co}W}$ agit par 0 et un $\overline{H_c^+(W)}$ -module simple E^+ sur lequel la partie $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_{+}^{\text{co}W}$ agit par 0. On peut alors définir le $\overline{H_c(W)}$ -module suivant :

Définition 4.3.16. Soit E un $\mathbb{C}[W]$ -module, on note

$$M_c(E) = \text{Ind}_{\overline{H_c(W)}}^{\overline{H_c(W)}} E^-.$$

Remarque 4.3.17. Par définition du module induit, $M_c(E) = \overline{H_c(W)} \otimes_{\overline{H_c(W)}} E^-$, mais comme, en tant qu'espaces vectoriels, $\overline{H_c(W)} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{H_c(W)}$, on a

$$M_c(E) \simeq_{\mathbb{C}\text{-e.v.}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} E$$

et $\dim_{\mathbb{C}} M_c(E) = |W| \dim_{\mathbb{C}}(E)$.

Cet isomorphisme est même un isomorphisme de $\overline{H_c^+(W)}$ -modules, où l'action de $\mathbb{C}[W]$ sur $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} E$ est définie par $w \cdot (a \otimes n) = w(a) \otimes (w \cdot n)$.

On pose alors

$$L_c(E) = M_c(E) / \text{rad}_{\overline{H_c(W)}}(M_c(E))$$

et on a le résultat suivant (qui provient de [HN91, §3]).

Proposition 4.3.18 (Holmes-Nakano).

(i) Soit $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$. Le module $L_c(E)$ est simple et c'est l'unique quotient simple de $M_c(E)$.

(ii) Si E et F sont deux $\mathbb{C}[W]$ -modules simples alors $L_c(E) \simeq L_c(F) \Rightarrow E \simeq F$.

(iii) $\{L_c(E), E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]\} = \text{Irr } \overline{H_c(W)}$.

On peut trouver la démonstration de ce résultat dans [HN91], dans le cadre général d'une algèbre à décomposition triangulaire. Nous allons présenter ici une preuve plus détaillée et adaptée à notre contexte.

Démonstration.

Lemme 4.3.19. $\text{Irr } \overline{H_c^+(W)} = \{E^+, E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]\}$ et $\text{Irr } \overline{H_c^-(W)} = \{E^-, E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]\}$.

Preuve du lemme 4.3.19. Comme $\mathbb{C}[W] \simeq \overline{H_c^+(W)} / \langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^{\text{co}W} \rangle$, on a un morphisme d'algèbres $\phi : \overline{H_c^+(W)} \rightarrow \mathbb{C}[W]$. Un $\mathbb{C}[W]$ -module peut donc être vu comme un $\overline{H_c^+(W)}$ -module en posant $b \cdot m = \phi(b) \cdot m$. De plus, si l'on considère un $\overline{H_c^+(W)}$ -module simple L , comme $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^{\text{co}W}$ est un idéal nilpotent de l'algèbre de dimension finie $\overline{H_c^+(W)}$, il agit par 0 sur L et donc $\phi(L) = L$. On a donc une bijection entre les modules simples de $\mathbb{C}[W]$ et $\overline{H_c^+(W)}$ et de même pour $\overline{H_c^-(W)}$. \square

Lemme 4.3.20. $M_c(E)$ a un unique $\overline{H_c^+(W)}$ -quotient simple qui est E^+ .

Preuve du lemme 4.3.20. Tout d'abord, on a $\text{Hom}_{\overline{H_c^+(W)}}(M_c(E), F^+) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}[W]}(E, F)$ car les applications φ et ψ définies par

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\overline{H_c^+(W)}}(\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes E, F^+) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}[W]}(E, F) \\ f &\xrightarrow{\varphi} \varphi(f) : n \mapsto f(1 \otimes n) \\ \psi(g) : a \otimes n &\mapsto ag(n) \longleftarrow g \end{aligned}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

Prenons alors un $\overline{H_c^+(W)}$ -quotient simple de $M_c(E)$, il sera isomorphe à un F^+ d'après le lemme 4.3.19. Ceci nous donne un morphisme surjectif $\pi : M_c(E) \twoheadrightarrow F^+$ et un morphisme non nul $\varphi(\pi) : E \rightarrow F$. Donc $F \simeq E$ d'après le lemme de Schur. \square

Lemme 4.3.21. $L_c(E)$ est un $\overline{H_c(W)}$ -module simple.

Preuve du lemme 4.3.21. D'après la proposition 2.1.11, ce quotient est un $\overline{H_c(W)}$ -module semi-simple. Donc il existe un morphisme π et des $\overline{H_c(W)}$ -modules simples L_1, \dots, L_r tels que

$$\pi : M_c(E) \twoheadrightarrow L_1 \oplus \dots \oplus L_r.$$

Pour $1 \leq i \leq r$, le module L_i vu comme $\overline{H_c^+(W)}$ -module n'est pas nécessairement simple, on considère alors un $\overline{H_c^+(W)}$ -quotient simple L'_i de L_i . En notant φ_i la projection non nulle associée, on peut construire le morphisme :

$$p'_i : M_c(E) \xrightarrow{\pi} L_1 \oplus \dots \oplus L_r \xrightarrow{p_i} L_i \xrightarrow{\varphi_i} L'_i.$$

Supposons que le quotient $M_c(E)/\text{rad}_{\overline{H_c(W)}}(M_c(E))$ n'est pas simple, c'est à dire que $r \geq 2$. Alors, comme $M_c(E)/\ker p'_1$ et $M_c(E)/\ker p'_2$ sont deux $\overline{H_c^+(W)}$ -quotients simples de $M_c(E)$, ils sont égaux d'après le lemme 4.3.20 et donc $\ker p'_1 = \ker p'_2$. Comme π est surjectif, ceci implique que $\ker \varphi_1 = L_1$ et $\ker \varphi_2 = L_2$, ce qui est absurde. Donc $r = 1$. \square

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition 4.3.18.

(i) Le lemme 4.3.21 montre que le radical de $M_c(E)$ est maximal. Par définition du radical d'un module, ceci montre que $M_c(E)$ n'a qu'un seul sous-module maximal et donc un unique quotient simple.

(ii) D'après le lemme 4.3.20, E^+ est l'unique $\overline{H_c^+(W)}$ -quotient simple de $M_c(E)$ et donc c'est aussi l'unique quotient simple de $L_c(E)$. Ainsi, si $L_c(E) \simeq L_c(F)$ alors $E^+ \simeq F^+$ et donc $E \simeq F$.

(iii) Soit L un $\overline{H_c(W)}$ -module simple. D'après le lemme 4.3.19, comme $\overline{H_c^-(W)}$ -module, il a un sous-module simple E^- . On note alors ι le plongement $E^- \hookrightarrow L$. Le morphisme de $\overline{H_c(W)}$ -modules défini par

$$\phi : \begin{array}{ccc} M_c(E) & \rightarrow & L \\ a \otimes n & \mapsto & a\iota(n) \end{array}$$

est non nul donc surjectif par simplicité de L . Et donc L est un quotient simple de $M_c(E)$. Le point (i) nous permet de conclure. \square

Les bébés-modules de Verma pour le groupe $G(2, 1, 2)$ ont été calculés en annexe A.

Pour le cas $t = 1$, on a une définition similaire de modules sur $H_{1,c}(W)$ qui permettent de définir une catégorie de plus haut poids associée à l'ordre :

$$E < F \iff \mathbf{c}_c(E) - \mathbf{c}_c(F) \in \mathbb{Z}_{>0}$$

(pour plus de détails, cf [Rou08, th. 5.2]). On voit donc ici l'importance de la \mathbf{c} -fonction pour décrire les représentations de l'algèbre de Cherednik dans le cas $t \neq 0$. On va s'intéresser désormais au cas $t = 0$ pour lequel on essaiera de construire un ordre similaire sur $\text{Irr } \mathbb{C}[W]$ permettant de créer des liens entre les cas $t = 0$ et $t \neq 0$.

4.3.5 Fibre $\Upsilon_c^{-1}(0)$

Les résultats énoncés au paragraphe précédent sur les bébés modules de Verma et la proposition 4.3.8 nous permettent de définir l'application suivante :

$$\Theta_c : \text{Irr } \mathbb{C}[W] \rightarrow \Upsilon_c^{-1}(0)$$

qui à $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$ associe le point x de $\Upsilon_c^{-1}(0)$ définissant le bloc qui contient le $H_c(W)$ -module simple $L_c(E)$.

La fibre $\Upsilon_c^{-1}(0)$ a été étudiée au paragraphe 5 de [Gor03] où l'on peut trouver les résultats suivants.

Théorème 4.3.22 (Gordon). *Si le point x de $\Upsilon_c^{-1}(0)$ est lisse dans $\text{Specm}(Z_c(W))$ alors $|(\Theta_c^{-1}(x))| = 1$.*

Corollaire 4.3.23 (Gordon). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les fibres de Θ_c sont des singletons.*
- (ii) $|(\Upsilon_c^{-1}(0))| = |\text{Irr } W|$.
- (iii) *Tous les points de $\Upsilon_c^{-1}(0)$ sont lisses.*

4.3.6 Blocs de Calogero-Moser

Les fibres de l'application Θ_c partitionnent l'ensemble $\text{Irr } \mathbb{C}[W]$ en blocs de la manière suivante :

Définition 4.3.24. *Soient E et $F \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$. On dit que E et F sont dans le même bloc si $\Theta_c(E) = \Theta_c(F)$. On appelle cette partition en blocs la partition de Calogero-Moser de W et on la note $CM_c(W)$.*

Remarque 4.3.25. *Dire que E et F sont dans le même bloc de Calogero-Moser revient à dire que les $H_c(W)$ -modules simples correspondant $L_c(E)$ et $L_c(F)$ sont dans le même bloc de l'algèbre $H_c(W)$.*

On a défini des fonctions sur $\text{Irr } \mathbb{C}[W]$: les \mathbf{a} , \mathbf{A} et \mathbf{c} -fonctions, voyons maintenant si ce sont des invariants des blocs de Calogero-Moser.

Proposition 4.3.26. *Soient $x \in \Upsilon_c^{-1}(0)$ et $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$ tels que $x = \Theta_c(E)$. Alors le scalaire $\mathbf{c}_c(E)$ est l'évaluation de $-eu$ en x .*

Démonstration. À l'élément $x \in \text{Specm}(Z_c(W))$ on associe un idéal maximal de $Z_c(W)$ qui est défini par $I_x = \{P \in Z_c(W), P(x) = 0\}$. Comme $x \in \Upsilon_c^{-1}(0)$, l'idéal $(\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])_+$ est inclus dans I_x et donc on peut considérer l'idéal maximal de $Z_c(W)/(\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])_+$ correspondant que l'on note \tilde{I}_x . À cet idéal, on peut associer un idempotent primitif e_x de $Z_c(W)/(\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*])_+$ qui est tel que $e_x \notin \tilde{I}_x$. Comme $x = \Theta_c(E)$, le module $L_c(E)$ est dans le bloc $H_c(W)e_x$, donc d'après le lemme qui suit, $eu \cdot e_x = -\mathbf{c}_c(E)e_x$. Évaluons cette égalité en x : on obtient $eu(x)e_x(x) = -\mathbf{c}_c(E)e_x(x)$ et comme $e_x \notin \tilde{I}_x$, $e_x(x) \neq 0$. On a alors $\mathbf{c}_c(E) = -eu(x)$.

Lemme 4.3.27. *Le scalaire par lequel eu agit sur $L_c(E)$ est $-\mathbf{c}_c(E)$.*

Preuve du lemme. Par définition des bébés modules de Verma, l'action de eu sur $L_c(E)$ est la même que celle de $-eu_0$ sur E (car les y_i vont agir par 0). \square

Corollaire 4.3.28. *La fonction \mathbf{c} est constante à l'intérieur d'un bloc de Calogero-Moser.*

En ce qui concerne les \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions, on n'a pas de démonstration générale de leur constance sur les blocs de Calogero-Moser comme pour la \mathbf{c} -fonction. On verra (cf. corollaires 9.1.10 et 10.3.3), grâce à la description combinatoire des blocs de Calogero-Moser pour les groupes imprimitifs exposée aux chapitres 9 et 10, que ces fonctions sont constantes sur les blocs de $G(\ell, e, n)$, qui seront les seuls groupes qui nous intéresseront par la suite.

Les parties 3 et 4 seront consacrées à l'étude des algèbres de Cherednik et de Hecke associées aux groupes $G(\ell, e, n)$. On étudiera notamment en détails les \mathbf{a} , \mathbf{A} et \mathbf{c} -fonctions, ce qui nous permettra d'étudier les ordres associés à ces fonctions sur les blocs de Calogero-Moser de ces groupes.

Comparaison des algèbres de Cherednik associées

Au cours de ce chapitre, nous allons nous placer dans la configuration où W est un groupe de réflexions complexe et où K est un sous-groupe distingué de W qui est lui aussi engendré par des réflexions. En conservant les notations du paragraphe 4.1, le groupe K va agir sur l'espace \mathfrak{h} par inclusion et on pourra donc définir l'algèbre de Cherednik $H_c(K)$ associée à K .

Nous allons tout d'abord chercher à relier les algèbres $H_c(K)$ et $H_c(W)$, puis nous comparerons les représentations de leurs algèbres restreintes $\overline{H_c(K)}$ et $\overline{H_c(W)}$. Cette question a déjà été étudiée par G. Bellamy dans [Bel], dans le cas où le quotient W/K est cyclique. On propose ici une approche plus générale qui est valable pour deux algèbres à décomposition triangulaire : $A = R^+ \otimes R_0 \otimes R^- \subset A' = R^+ \otimes R'_0 \otimes R^-$, telles que R_0 et R'_0 forment un système de Clifford.

5.1 Les différentes algèbres et leurs radicaux

On considère deux groupes de réflexions complexes $K \triangleleft W$ et leurs algèbres de Cherednik associées $H_c(K)$ et $H_c(W)$.

Exemple 5.1.1. Par définition des groupes $G(\ell, e, n)$, on pourra considérer par exemple $W = G(\ell, 1, n)$ et $K = G(\ell, e, n)$, dans ce cas, on verra que le quotient est cyclique, mais pour $W = G(\ell, 1, n)$ et $K = (\mu_\ell)^n$, le quotient est isomorphe à \mathfrak{S}_n . Enfin, certains groupes exceptionnels (G_7 , G_{11} et G_{15} par exemple) contiennent des sous-groupes distingués qui sont tels que le quotient est abélien non cyclique.

Dans le but de comparer leurs représentations, on voudrait que l'inclusion $K \subset W$ se généralise à $H_c(K) \subset H_c(W)$. On a déjà une application naturelle $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*) \rtimes K \rightarrow H_c(W)$. Pour obtenir à partir de cette application un morphisme d'algèbres $H_c(K) \rightarrow H_c(W)$, il faut simplement que la relation

$$[y, x] = - \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle x, v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s, \quad \text{pour } x \in \mathfrak{h}^* \text{ et } y \in \mathfrak{h},$$

soit la même dans $H_c(K)$ et dans $H_c(W)$. Pour cela, le paramètre c doit vérifier $c_s = 0$, $\forall s \in \mathcal{S}_W - \mathcal{S}_K$. Enfin, le théorème de PBW (théorème 4.3.2) montre que ce morphisme est injectif.

Pour la suite de cette partie, nous allons choisir un tel paramètre c . De plus, on notera $C = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ et $D = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^K \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^K$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_c(K) & \hookrightarrow & H_c(W) \\ & & \downarrow \\ & & \overline{H_c(W)} \end{array}$$

où la projection correspond au quotient par l'idéal $C_+H_c(W)$. Introduisons maintenant une nouvelle algèbre associée à K : la sous-algèbre $\widetilde{H_c(K)}$ de $\overline{H_c(W)}$ qui est telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_c(K) & \hookrightarrow & H_c(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{H_c(K)} & \hookrightarrow & \overline{H_c(W)} \end{array}$$

commute. Cela signifie que

$$\widetilde{H_c(K)} = H_c(K)/C_+H_c(K),$$

et en tant qu'espace vectoriel,

$$\widetilde{H_c(K)} \simeq_{\text{C.e.v.}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes \mathbb{C}[K] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}.$$

L'algèbre de Cherednik restreinte correspondant à K est par définition $\overline{H_c(K)} = H_c(K)/D_+H_c(K)$ et l'inclusion $C \subset D$ permet de définir la projection

$$p : \widetilde{H_c(K)} \twoheadrightarrow \overline{H_c(K)}.$$

On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_c(K) & \hookrightarrow & H_c(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{H_c(K)} & \hookrightarrow & \overline{H_c(W)} \\ \downarrow p & & \\ \overline{H_c(K)} & & \end{array}$$

Cette projection vérifie la proposition suivante, qui va nous permettre d'identifier les modules simples de ces deux algèbres d'après le raisonnement de [Bel, 3.3]. Ce sera très utile par la suite car, $\widetilde{H_c(K)}$ étant une sous-algèbre de $\overline{H_c(W)}$, on pourra relier les $\widetilde{H_c(K)}$ -modules aux $\overline{H_c(W)}$ -modules par restriction et induction et donc comparer les représentations des deux algèbres de Cherednik restreintes.

Proposition 5.1.2 (Bellamy). $\ker p \subset \text{rad } \widetilde{H_c(K)}$

Démonstration. Par construction, on a $\ker p = D_+H_c(K)/C_+H_c(K)$. Cet idéal de $\widetilde{H_c(K)}$ est engendré par des éléments centraux (car $D \subset Z(H_c(K))$) d'après la proposition 4.3.4), et nilpotents car l'algèbre $\widetilde{H_c(K)}$ est une algèbre graduée de dimension finie.

Mais par définition (cf. §2.1.3), $\widetilde{\text{rad}} H_c(K)$ est l'intersection des idéaux maximaux de $\widetilde{H}_c(K)$, il contient donc tous les éléments nilpotents centraux et donc $\ker p$. \square

Le fait que $\overline{H_c(K)}$ soit le quotient de $\widetilde{H}_c(K)$ par un idéal inclus dans le radical de $\widetilde{H}_c(K)$ implique le résultat suivant.

Corollaire 5.1.3 (Bellamy). *Les $\widetilde{H}_c(K)$ -modules simples sont en bijection avec les modules simples de $\overline{H_c(K)}$.*

Intéressons nous maintenant aux radicaux des algèbres $\widetilde{H}_c(K) \subset \overline{H_c(W)}$, dans le but d'étudier les foncteurs d'induction et de restriction entre ces deux algèbres. Pour les comparer, on va utiliser les résultats du paragraphe 2.1.

Lemme 5.1.4. *Soit $\{\dot{\gamma}, \gamma \in W/K\}$ un système de représentants de W/K dans W . On a un système de Clifford (au sens du paragraphe 2.1) :*

$$\overline{H_c(W)} = \bigoplus_{\gamma \in W/K} \dot{\gamma} \widetilde{H}_c(K)$$

et un isomorphisme de $\mathbb{C}[W]$ -modules :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[K]} \widetilde{H}_c(K) &\simeq \overline{H_c(W)} \\ w \otimes (x \otimes k \otimes y) &\mapsto wxky. \end{aligned}$$

Preuve. L'application $\psi : \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[K]} \widetilde{H}_c(K) \rightarrow \overline{H_c(W)}$ définie par, pour $x \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, $w \in W$, $y \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ et $k \in K$: $\psi(w \otimes (x \otimes k \otimes y)) = wxky$, est clairement un morphisme de $\mathbb{C}[W]$ -modules. Montrons que c'est un isomorphisme :

- soit $xwy \in \overline{H_c(W)}$, alors $xwy = ww^{-1}(x)y = \psi(w \otimes (w^{-1}(x) \otimes e \otimes y))$, où e est le neutre de K . Donc ψ est surjectif.
- On vérifie facilement que $\mathbb{C}[W] = \bigoplus_{\gamma \in W/K} \dot{\gamma} \mathbb{C}[K]$. Donc, en tant qu'espace vectoriel,

$\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[K]} \widetilde{H}_c(K) \simeq \bigoplus_{\gamma \in W/K} \dot{\gamma} \widetilde{H}_c(K)$ et on peut conclure par égalité des dimensions pour la bijectivité de ψ .

En prenant $\bar{A} = \overline{H_c(K)}$, $A = \overline{H_c(W)}$ et $\Gamma = W/K$, on a bien un système de Clifford car $\dot{\gamma}\dot{\gamma}' = \dot{\gamma}\dot{\gamma}'a$, où $a \in K \subset \widetilde{H}_c(K)$. \square

En appliquant la proposition 2.1.12 et le corollaire 2.1.14, on obtient alors le résultat suivant :

Proposition 5.1.5. $\text{rad}(\overline{H_c(W)}) = \overline{H_c(W)} \otimes_{\widetilde{H}_c(K)} \text{rad}(\widetilde{H}_c(K))$ et

$$\text{rad} \widetilde{H}_c(K) = \text{rad} \overline{H_c(W)} \cap \widetilde{H}_c(K).$$

Nous allons maintenant chercher à comparer les modules simples des algèbres $\overline{H_c(W)}$ et $\widetilde{H}_c(K)$. Mais d'après le corollaire 5.1.3 et la proposition 4.3.18, il suffit pour cela de relier $\text{Irr} \overline{H_c(W)}$ et $\text{Irr} \widetilde{H}_c(K)$, en comparant les bébés-modules de Verma

de ces deux algèbres. L'objectif du paragraphe suivant est donc de construire des foncteurs L_c^W et L_c^K de manière à ce que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H_c(K)}\text{-mod} & \xleftarrow{L_c^K} & \mathbb{C}[K]\text{-mod} \\ \text{Ind} \updownarrow \text{Res} & & \text{Ind} \updownarrow \text{Res} \\ \overline{H_c(W)}\text{-mod} & \xleftarrow{L_c^W} & \mathbb{C}[W]\text{-mod} \end{array}$$

ce qui nous permettra de passer d'une algèbre à l'autre de manière aisée.

5.2 Définition des foncteurs

Au paragraphe 4.3.4, nous avons défini le $\overline{H_c(W)}$ -module simple $L_c(E)$ pour un $\mathbb{C}[W]$ -module simple E . On peut de façon évidente étendre cette construction à un module E quelconque, même si le module $L_c(E)$ sera réductible en général.

Dans la situation qui nous intéresse où $K \triangleleft W$ sont deux groupes de réflexions complexes, on notera ces foncteurs

$$M_c^W \text{ et } L_c^W : \mathbb{C}[W]\text{-mod} \rightarrow \overline{H_c(W)}\text{-mod},$$

$$M_c^K \text{ et } L_c^K : \mathbb{C}[K]\text{-mod} \rightarrow \overline{H_c(K)}\text{-mod}.$$

Ils vérifient $L_c^W(E)$ est simple si E est simple et $L_c^K(F)$ est simple si F est simple.

En considérant la sous-algèbre $\widetilde{H_c^-}(K)$ de $\widetilde{H_c(K)}$ isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}$, on peut définir de la même manière deux autres foncteurs : pour un $\mathbb{C}[K]$ -module F , on construit le $\widetilde{H_c(K)}$ -module

$$\widetilde{M_c^K}(F) = \widetilde{H_c(K)} \otimes_{\widetilde{H_c^-}(K)} F^-,$$

où F^- est le $\widetilde{H_c^-}(K)$ -module obtenu à partir de F en faisant agir les éléments de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}$ par 0. Le foncteur $\widetilde{M_c^K} : \mathbb{C}[K]\text{-mod} \rightarrow \widetilde{H_c(K)}\text{-mod}$ induit l'existence d'un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{L_c^K} : \mathbb{C}[K]\text{-mod} & \rightarrow & \widetilde{H_c(K)}\text{-mod} \\ & & F \mapsto \widetilde{M_c^K}(F) / \text{rad } \widetilde{H_c(K)} \cdot \widetilde{M_c^K}(F). \end{array}$$

Remarque 5.2.1. Si F est un $\mathbb{C}[K]$ -module simple alors $L_c^K(F)$ est un $\overline{H_c(K)}$ -module simple et, si on le munit de la structure de $\widetilde{H_c(K)}$ -module définie par la projection p , on obtient un $\widetilde{H_c(K)}$ -module simple qui est $\widetilde{L_c^K}(F)$.

Enfin, par la suite nous allons nous intéresser également aux foncteurs $\text{Res}_K^W := \text{Res}_{\mathbb{C}[K]}^{\mathbb{C}[W]}$, $\text{Ind}_K^W := \text{Ind}_{\mathbb{C}[K]}^{\mathbb{C}[W]}$, $\text{Res}_{\widetilde{H_c(K)}}^{\overline{H_c(W)}}$ et au foncteur $\text{Ind}_{\widetilde{H_c(K)}}^{\overline{H_c(W)}}$ qui, d'après le lemme 5.1.4, a la propriété suivante :

Proposition 5.2.2. $\text{Ind}_{\widetilde{H_c(K)}}^{\overline{H_c(W)}}$ est un foncteur exact.

5.3 Commutativité des foncteurs

5.3.1 Foncteurs Res et M_c

Proposition 5.3.1. *Le diagramme $\overline{H_c(W)}\text{-mod} \xrightarrow{\text{Res}} \widetilde{H_c(K)}\text{-mod}$ commute.*

$$\begin{array}{ccc} \overline{H_c(W)}\text{-mod} & \xrightarrow{\text{Res}} & \widetilde{H_c(K)}\text{-mod} \\ M_c^W \uparrow & & \uparrow \widetilde{M}_c^K \\ \mathbb{C}[W]\text{-mod} & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbb{C}[K]\text{-mod} \end{array}$$

Démonstration. Soit $S \in \mathbb{C}[W]\text{-mod}$. On doit montrer que

$$\text{Res}_{\overline{H_c(W)}/\overline{H_c(K)}} M_c^W(S) \simeq \widetilde{M}_c^K(\text{Res}_K^W S)$$

en tant que $\widetilde{H_c(K)}$ -modules. Par définition du foncteur \widetilde{M}_c^K et comme $\widetilde{H_c(K)} \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{H_c(K)}$, on obtient :

$$\widetilde{M}_c^K(\text{Res}_K^W S) = \overline{H_c(K)} \otimes_{\overline{H_c(K)}} (\text{Res}_K^W S)^- \simeq_{\mathbb{C}\text{-e.v.}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} (\text{Res}_K^W S)^-.$$

Mais on a aussi $M_c^W(S) \simeq_{\mathbb{C}\text{-e.v.}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} S^-$ et comme la restriction conserve la structure d'espace vectoriel, on a $\text{Res}_{\overline{H_c(W)}/\overline{H_c(K)}} M_c^W(S) \simeq_{\mathbb{C}\text{-e.v.}} \overline{H_c(W)} \otimes_{\overline{H_c(W)}} S^-$.

Soit alors

$$\Phi : \begin{cases} \overline{H_c(K)} \otimes_{\overline{H_c(K)}} (\text{Res}_K^W S)^- & \rightarrow \overline{H_c(W)} \otimes_{\overline{H_c(W)}} S^- \\ h \otimes s & \mapsto h \otimes s \end{cases}$$

Φ est bien défini car $\overline{H_c(K)}$ est une sous algèbre de $\overline{H_c(W)}$ telle que $\overline{H_c(K)} \subset \overline{H_c(W)}$ et c'est clairement un morphisme de $\overline{H_c(K)}$ -modules. De plus il est surjectif car tout élément de $\overline{H_c(W)} \otimes_{\overline{H_c(W)}} S^-$ peut s'écrire comme un élément de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} S$ qui est clairement l'image par Φ d'un élément de $\overline{H_c(K)} \otimes_{\overline{H_c(K)}} (\text{Res}_K^W S)^-$ et c'est un isomorphisme par égalité des dimensions (les deux \mathbb{C} -espaces vectoriels sous-jacents sont isomorphes). On a donc montré que $\text{Res}_{\overline{H_c(W)}/\overline{H_c(K)}} M_c^W(S) \simeq \widetilde{M}_c^K(\text{Res}_K^W S)$ en tant que $\overline{H_c(K)}$ -modules et que le diagramme commute. \square

Nous allons maintenant chercher à obtenir le même type de diagramme commutatif mais cette fois pour la catégorie $\overline{H_c(K)}\text{-mod}$ plutôt que pour $\widetilde{H_c(K)}\text{-mod}$. Ceci va être possible grâce à la projection $p : \overline{H_c(K)} \rightarrow \overline{H_c(K)}$ qui nous a permis d'identifier $\text{Irr } \overline{H_c(K)}$ avec $\text{Irr } \overline{H_c(K)}$. En effet, en concaténant les deux diagrammes des propositions 5.3.1 et 5.3.2, on pourra alors construire le diagramme commutatif recherché.

Proposition 5.3.2. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & \overline{H_c(K)}\text{-mod} & \\ \widetilde{M}_c^K \nearrow & & \searrow / \ker p \\ \mathbb{C}[K]\text{-mod} & \xrightarrow{M_c^K} & \overline{H_c(K)}\text{-mod} \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Pour montrer que $M_c^K(T) \simeq \widetilde{M}_c^K(T) / \langle \ker p \cdot \widetilde{M}_c^K(T) \rangle$, on va construire un morphisme $\varphi : \widetilde{M}_c^K(T) \rightarrow M_c^K(T)$ tel que $\ker \varphi = \langle \ker p \cdot \widetilde{M}_c^K(T) \rangle$. Soit alors

$$\varphi : \begin{cases} \widetilde{H}_c(K) \otimes_{\widetilde{H}_c(K)} T^- & \rightarrow \overline{H}_c(W) \otimes_{\overline{H}_c(W)} T^- \\ h \otimes t & \mapsto p(h) \otimes t \end{cases}$$

φ est bien défini et surjectif car la projection $p : \widetilde{H}_c(K) \rightarrow \overline{H}_c(W)$ est telle que $p(\widetilde{H}_c(K)) \subset \overline{H}_c(W)$. C'est clairement un morphisme de $\widetilde{H}_c(K)$ -modules. De plus, un élément de $\ker p \cdot \widetilde{M}_c^K(T)$ est annulé par φ . Prenons maintenant un élément de $\widetilde{M}_c^K(T)$ qui est dans $\ker \varphi$. Il existe (t_1, \dots, t_r) des éléments de T tels que $T = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}t_i$ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel et

$$\widetilde{M}_c^K(T) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}K} \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}t_i \right) \simeq \bigoplus_{i=1}^r (\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}K} \otimes \mathbb{C}t_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^r (\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}K} \otimes t_i).$$

Ainsi tout élément de $\widetilde{M}_c^K(T)$ (respectivement $M_c^K(T)$) s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^r q_i \otimes t_i$ avec $q_i \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W}$ (respectivement $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}K}$). Donc

$$\sum_{i=1}^r q_i \otimes t_i \in \ker \varphi \iff \sum_{i=1}^r p(q_i) \otimes t_i \iff q_i \in \ker p, \forall 1 \leq i \leq r,$$

et dans ce cas, $\sum_{i=1}^r q_i \otimes t_i \in \langle \ker p \cdot \widetilde{M}_c^K(T) \rangle$. Donc $\ker \varphi = \langle \ker p \cdot \widetilde{M}_c^K(T) \rangle$ et le diagramme commute. \square

Corollaire 5.3.3. Si l'on note F le foncteur :

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_c(W)\text{-mod} & \rightarrow & \overline{H}_c(K)\text{-mod} \\ M & \mapsto & \text{Res}_{\overline{H}_c(K)}^{\overline{H}_c(W)} M / \langle \ker p \cdot \text{Res}_{\overline{H}_c(K)}^{\overline{H}_c(W)} M \rangle \end{array}$$

alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_c(W)\text{-mod} & \xrightarrow{F} & \overline{H}_c(K)\text{-mod} \\ M_c^W \uparrow & & \uparrow M_c^K \\ \mathbb{C}[W]\text{-mod} & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbb{C}[K]\text{-mod} \end{array}$$

5.3.2 Commutativité des foncteurs M_c et Ind

Proposition 5.3.4. Le diagramme $\overline{H}_c(W)\text{-mod} \xleftarrow{\text{Ind}} \overline{H}_c(K)\text{-mod}$ commute.

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_c(W)\text{-mod} & \xleftarrow{\text{Ind}} & \overline{H}_c(K)\text{-mod} \\ M_c^W \uparrow & & \uparrow M_c^K \\ \mathbb{C}[W]\text{-mod} & \xleftarrow{\text{Ind}} & \mathbb{C}[K]\text{-mod} \end{array}$$

Démonstration. On a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{\widetilde{H_c(K)}}^{\widetilde{H_c(W)}} \left(\widetilde{M_c^K}(T) \right) &= \overline{H_c(W)} \otimes_{\widetilde{H_c(K)}} \left(\widetilde{H_c(K)} \otimes_{\widetilde{H_c(K)}} T^- \right) \\ &\simeq \overline{H_c(W)} \otimes_{\widetilde{H_c(K)}} T^- \\ &\simeq \overline{H_c(W)} \otimes_{\overline{H_c(W)}} \left(\overline{H_c(W)} \otimes_{\widetilde{H_c(K)}} T^- \right). \end{aligned}$$

Donc pour montrer que $\operatorname{Ind}_{\widetilde{H_c(K)}}^{\widetilde{H_c(W)}} \left(\widetilde{M_c^K}(T) \right) \simeq M_c^W(\operatorname{Ind}_K^W T)$, il suffit de montrer que $\overline{H_c(W)} \otimes_{\widetilde{H_c(K)}} T^- \simeq \left(\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[K]} T \right)^-$.

On va pour cela utiliser le morphisme d'algèbres $\pi_W : \overline{H_c(W)} \rightarrow \mathbb{C}[W]$ qui correspond au quotient par l'idéal $\langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]_+^{\operatorname{co}W} \rangle$.

Lemme 5.3.5. *Le morphisme $\Psi : \begin{cases} \overline{H_c(W)} \otimes_{\widetilde{H_c(K)}} T^- & \rightarrow (\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[K]} T)^- \\ h \otimes t & \mapsto \pi_W(h) \otimes t \end{cases}$*

est un isomorphisme de $\overline{H_c(W)}$ -modules.

Preuve du lemme. Comme π_W est un morphisme surjectif d'algèbres vérifiant, pour $w \in W$ et $h \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]_+^{\operatorname{co}W} : \pi_W(w) = w$ et $\pi_W(h) = 0$, Ψ est un morphisme surjectif de $\overline{H_c(W)}$ -modules. De plus, les modules ayant la même dimension en tant que \mathbb{C} -espaces vectoriels (égale à $\frac{|W|^2}{|K|} \dim_{\mathbb{C}} T$), Ψ est un isomorphisme. \square

On a donc montré que

$$\operatorname{Ind}_{\widetilde{H_c(K)}}^{\widetilde{H_c(W)}} \left(\widetilde{M_c^K}(T) \right) \simeq \overline{H_c(W)} \otimes_{\overline{H_c(W)}} \left(\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[K]} T \right)^- = M_c^W(\operatorname{Ind}_K^W T).$$

\square

Il serait maintenant naturel de chercher à prouver une proposition duale de la proposition 5.3.2 pour le foncteur Ind , c'est à dire obtenir une construction naturelle d'un foncteur H de manière à ce que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{H_c(K)}\text{-mod} & \\ \widetilde{M_c^K} \nearrow & & \nwarrow H \\ \mathbb{C}[K]\text{-mod} & \xrightarrow{M_c^K} & \overline{H_c(K)}\text{-mod} \end{array}$$

Or la manière naturelle de construire un $\widetilde{H_c(K)}$ -module à partir d'un $\overline{H_c(K)}$ -module correspond au foncteur $H : M \mapsto \underline{M}$ tel que $\underline{M} = M$ en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel et l'action de $\widetilde{H_c(K)}$ est définie par $h \cdot m = \rho(h) \cdot m$. Mais comme $\widetilde{M_c^K}(T)$ et $M_c^K(T)$ ne sont pas isomorphes en tant qu'espaces vectoriels, on ne peut pas construire un tel diagramme commutatif. Ceci n'est pas un problème car nous cherchons à comparer les modules simples des algèbres $\widetilde{H_c(K)}$ et $\overline{H_c(W)}$ et d'après le corollaire 5.1.3, il y a une bijection entre les simples de $\overline{H_c(K)}$ et les simples de $\widetilde{H_c(K)}$. Donc pour étudier la commutativité des foncteurs Res , Ind et L_c , les propositions 5.3.1 et 5.3.4 vont suffire.

5.3.3 Commutativité des foncteurs Res, Ind et L_c

Afin d'alléger les notations de ce paragraphe, on va poser :
 $A = \widetilde{H_c(K)}$, $A' = \mathbb{C}[K]$, $B = \widetilde{H_c(W)}$ et $B' = \mathbb{C}[W]$, et on se trouve alors dans le contexte suivant :

- $A \subset B$, $A' \subset B'$,
- A' et B' sont des algèbres semi-simples,
- $\text{rad } B = B \otimes_A \text{rad } A$ (d'après la proposition 5.1.5),
- B est un A -module libre (d'après le lemme 5.1.4),
- on a des foncteurs $M_A, L_A : A'\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ et $M_B, L_B : B'\text{-mod} \rightarrow B\text{-mod}$ qui vérifient, d'après le paragraphe 5.2 et la proposition 5.3.4, pour $E \in B'\text{-mod}$ et $F \in A'\text{-mod}$:

$$M_B(B' \otimes_{A'} F) \simeq B \otimes_A M_A(F)$$

$$L_A(F) = M_A(F) / \text{rad}(A)M_A(F)$$

$$\text{et } L_B(E) = M_B(E) / \text{rad}(B)M_B(E).$$

Et on voudrait montrer que $L_B(B' \otimes_{A'} F) \simeq B \otimes_A L_A(F)$. Or

$$\begin{aligned} L_B(B' \otimes_{A'} F) &= M_B(B' \otimes_{A'} F) / \text{rad}(B)M_B(B' \otimes_{A'} F) \\ &\simeq B \otimes_A M_A(F) / \text{rad}(B)M_B(B' \otimes_{A'} F) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver le résultat suivant :

Lemme 5.3.6. $\text{rad}(B)M_B(B' \otimes_{A'} F) \simeq B \otimes_A (\text{rad}(A)M_A(F))$.

$$\text{Preuve. Soit } \phi : \begin{cases} B \otimes_A (\text{rad}(A)M_A(F)) & \rightarrow \text{rad}(B)M_B(B' \otimes_{A'} F) \\ b \otimes_A x & \mapsto bx \end{cases}$$

Comme $\text{rad } B = B \otimes_A \text{rad } A$ et $M_B(B' \otimes_{A'} F) \simeq B \otimes_A M_A(F)$, ϕ est bien défini et surjectif et comme B est un A -module plat, l'inclusion $\text{rad}(A)M_A(F) \subset M_A(F)$ donne une injection $B \otimes_A \text{rad}(A)M_A(F) \hookrightarrow B \otimes_A M_A(F) \simeq M_B(B' \otimes_{A'} F)$ donc ϕ est un isomorphisme. □

On a donc

$$\begin{aligned} L_B(B' \otimes_{A'} F) &\simeq B \otimes_A M_A(F) / \text{rad}(B)M_B(B' \otimes_{A'} F) \\ &\simeq B \otimes_A M_A(F) / B \otimes_A (\text{rad}(A)M_A(F)) \\ &\simeq B \otimes_A (M_A(F) / \text{rad}(A)M_A(F)) \\ &\simeq B \otimes_A L_A(F) \end{aligned}$$

ce qui prouve que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A\text{-mod} & \xleftarrow{L_A} & A'\text{-mod} \\ \text{Ind} \downarrow & & \downarrow \text{Ind} \\ B\text{-mod} & \xleftarrow{L_B} & B'\text{-mod} \end{array}$$

Pour obtenir le même résultat avec les foncteurs Res, on peut utiliser des équivalences de catégories. Le foncteur

$$L_A : \begin{cases} A'\text{-mod} & \rightarrow & A\text{-mod} \\ V & \mapsto & M_A(V) / \text{rad}(A)M_A(V) = A / \text{rad}(A) \otimes_A M_A(V) \end{cases}$$

peut être vu comme un foncteur à valeur dans la catégorie $A/\text{rad}(A)\text{-mod}$. Mais comme A' et $A/\text{rad}(A)$ sont des algèbres semi-simples, et que L_A échange bijectivement les modules simples, L_A est un équivalence de catégories, ainsi que L_B . Il existe donc des foncteurs

$$L_A^{-1} : A/\text{rad}(A)\text{-mod} \rightarrow A'\text{-mod} \text{ et } L_B^{-1} : B/\text{rad}(B)\text{-mod} \rightarrow B'\text{-mod}$$

tels que, à isomorphismes de foncteurs près, $L_A \circ L_A^{-1} = \mathbf{1}_{A/\text{rad}A}$, $L_A^{-1} \circ L_A = \mathbf{1}_{A'}$, $L_B \circ L_B^{-1} = \mathbf{1}_{B/\text{rad}B}$ et $L_B^{-1} \circ L_B = \mathbf{1}_{B'}$.

Ceci implique que (L_A, L_A^{-1}) et (L_B, L_B^{-1}) sont des couples de foncteurs adjoints et sachant que $(\text{Res}_A^B, \text{Ind}_A^B)$ et $(\text{Res}_{A'}^{B'}, \text{Ind}_{A'}^{B'})$ sont aussi des foncteurs adjoints, $L_A^{-1} \circ \text{Res}_A^B$ est adjoint à $\text{Ind}_A^B \circ L_A$ et $\text{Res}_{A'}^{B'} \circ L_B^{-1}$ est adjoint à $L_B \circ \text{Ind}_{A'}^{B'}$.

Ainsi, le fait que $\text{Ind}_A^B \circ L_A = L_B \circ \text{Ind}_{A'}^{B'}$ entraîne que $L_A^{-1} \circ \text{Res}_A^B = \text{Res}_{A'}^{B'} \circ L_B^{-1}$, ce qui donne en composant à gauche par L_A et à droite par L_B :

$$\text{Res}_A^B \circ L_B = L_A \circ \text{Res}_{A'}^{B'}$$

Donc le diagramme $A\text{-mod} \xleftarrow{L_A} A'\text{-mod}$ est commutatif et en se replaçant dans

$$\begin{array}{ccc} A\text{-mod} & \xleftarrow{L_A} & A'\text{-mod} \\ \uparrow \text{Res} & & \uparrow \text{Res} \\ B\text{-mod} & \xleftarrow{L_B} & B'\text{-mod} \end{array}$$

notre contexte de départ, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.3.7. *À équivalence près, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H_c(K)\text{-mod}} & \xleftarrow{\widetilde{L_c^K}} & \mathbb{C}[K]\text{-mod} \\ \text{Ind} \downarrow \text{Res} & & \text{Ind} \downarrow \text{Res} \\ \overline{H_c(W)\text{-mod}} & \xleftarrow{L_c^W} & \mathbb{C}[W]\text{-mod} \end{array}$$

Comparaison des blocs

Au paragraphe 4.3.6, on a défini la partition de Calogero-Moser $CM_c(W)$ pour un groupe de réflexions complexe W . Elle consiste à regrouper les modules simples de $\mathbb{C}[W]$ qui sont envoyés par le foncteur L_c^W dans le même bloc de l'algèbre de Cherednik restreinte $\overline{H_c(W)}$. On peut définir de la même manière une partition $CM_c(K)$ pour K un sous-groupe normal de W qui est engendré par des réflexions. L'objectif de ce chapitre est, sous l'hypothèse $c_s = 0 \forall s \in \mathcal{S}_W - \mathcal{S}_K$, de construire une bijection entre $CM_c(W)$ et les orbites de $CM_c(K)$ sous l'action de W/K , dans le cas où W/K est abélien (on généralise le travail de [Bel] qui correspond au cas cyclique). On utilisera ensuite ce lien ainsi que le théorème 5.3.7 que l'on vient de démontrer pour comparer les nombres de décomposition de modules se trouvant dans des blocs en bijection. Enfin, on montrera que la \mathbf{c} -fonction est conservée par cette bijection.

6.1 Partition de Calogero-Moser de W et de K

Le corollaire 5.1.3 nous permet d'identifier $\text{Irr } \overline{H_c(K)}$ et $\text{Irr } \widetilde{H_c(K)}$. De plus, les blocs de ces algèbres vont se correspondre car d'après [Bel, proposition 3.3], les blocs de $\widetilde{H_c(K)}$ sont les pré-images de ceux de $\overline{H_c(K)}$ par l'application p . Pour comparer les partitions $CM_c(W)$ et $CM_c(K)$, il suffit donc de relier les blocs de l'algèbre $\overline{H_c(W)}$ avec ceux de sa sous-algèbre $\widetilde{H_c(K)}$. Dans ce but, nous allons généraliser les résultats de [Bel, 4] au cas où W/K est abélien, en utilisant les résultats du paragraphe 2.1.

6.1.1 Système de Clifford

D'après le lemme 5.1.4, les algèbres $\overline{H_c(W)}$ et $\widetilde{H_c(K)}$ forment un système de Clifford :

$$\overline{H_c(W)} = \bigoplus_{\gamma \in W/K} \gamma \widetilde{H_c(K)},$$

où $\{\gamma, \gamma \in W/K\}$ est un système de représentants de W/K dans W .

Hypothèse. Nous allons supposer dans la suite de ce chapitre que le quotient W/K est abélien et nous le noterons Γ .

Nous allons donc pouvoir appliquer les résultats du paragraphe 2.1. Tout d'abord, on a une action de Γ sur le centre de $\widetilde{H_c(K)}$ définie par

$$\gamma \cdot \tilde{h} = \gamma \tilde{h} \gamma^{-1},$$

où $\tilde{h} \in Z(\widetilde{H_c(K)})$, ainsi qu'une action de $\hat{\Gamma}$ sur $\overline{H_c(W)}$ qui est définie par l'automorphisme d'algèbre :

$$\delta \cdot (\gamma \tilde{h}) = \delta(\gamma) \gamma \tilde{h},$$

où $\tilde{h} \in \widetilde{H_c(K)}$ et qui stabilise les sous-algèbres $\overline{H_c^-(W)}$ et $\overline{H_c^+(W)}$.

De même, on a une action de Γ sur $\text{Irr } \mathbb{C}[K]$ et une action de $\hat{\Gamma}$ sur $\text{Irr } \mathbb{C}[W]$ et par construction, les foncteurs L_c^W et $\widetilde{L_c^K}$ sont compatibles avec ces actions.

Lemme 6.1.1. *Soient $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$, $F \in \text{Irr } \mathbb{C}[K]$, $\gamma \in \Gamma$ et $\delta \in \hat{\Gamma}$, on a*

1. $L_c^W(\delta \cdot E) = \delta \cdot L_c^W(E)$,
2. $\text{stab}_{\hat{\Gamma}}(L_c^W(E)) = \text{stab}_{\hat{\Gamma}}(E)$,
3. $\widetilde{L_c^K}(\gamma \cdot F) = \gamma \cdot \widetilde{L_c^K}(F)$,
4. $\text{stab}_{\Gamma}(\widetilde{L_c^K}(F)) = \text{stab}_{\Gamma}(F)$.

6.1.2 Comparaison des simples

Dans ce contexte et grâce au théorème 5.3.7 qui affirme que les foncteurs Res , Ind , L_c^W et $\widetilde{L_c^K}$ commutent, on obtient un résultat semblable au corollaire 2.1.16 pour les algèbres $\widetilde{H_c(K)}$ et $\overline{H_c(W)}$.

Proposition 6.1.2. *Il existe une bijection*

$$\begin{array}{ccc} (\text{Irr } \widetilde{H_c(K)}) / \Gamma & \leftrightarrow & (\text{Irr } \overline{H_c(W)}) / \hat{\Gamma} \\ \tilde{\Omega} & \leftrightarrow & \Omega \end{array}$$

qui vérifie : $\forall \Omega \in (\text{Irr } \overline{H_c(W)}) / \hat{\Gamma}$, $\exists m_{\Omega} \in \mathbb{N}$ tel que

1. $\forall \chi \in \Omega$, $\text{Res}_{\overline{H_c(W)} / \widetilde{H_c(K)}} \chi = m_{\Omega} \sum_{\tilde{\chi} \in \tilde{\Omega}} \tilde{\chi}$
2. $\forall \tilde{\chi} \in \tilde{\Omega}$, $\text{Ind}_{\widetilde{H_c(K)} / \overline{H_c(W)}} \tilde{\chi} = m_{\Omega} \sum_{\chi \in \Omega} \chi$.

Remarque 6.1.3. *Dans le cas où $\Gamma = W/K$ est cyclique, comme on l'a mentionné au paragraphe 2.2.2, on a $m_{\Omega} = 1$ pour toute orbite Ω , on retrouve alors [Bel, 4.7].*

6.1.3 Comparaison des blocs

On cherche à relier les blocs des algèbres $\overline{H_c(W)}$ et $\widetilde{H_c(K)}$. Pour cela, on va utiliser le résultat du théorème 2.1.7 et montrer que l'action de $\hat{\Gamma}$ sur $\text{Bl}(\overline{H_c(W)})$ est triviale grâce au lemme 4.8 de [Bel], qui est énoncé dans le cas cyclique mais qui est valable si l'on suppose W/K seulement abélien. On obtient donc une généralisation de [Bel, 4.11] au cas abélien.

Théorème 6.1.4. Soient $B \in CM_c(W)$ et $\Gamma(B) := \{F \in \text{Irr } \mathbb{C}[K], \text{ il existe } E \in B \text{ tel que } F | \text{Res}_K^W E\}$. Alors il existe $\bar{B} \in CM_c(K)$ tel que $\Gamma(B) = \Gamma \cdot \bar{B}$. On a donc une bijection :

$$CM_c(W) \leftrightarrow CM_c(K)/\Gamma.$$

Démonstration du théorème 6.1.4. Le théorème 2.1.7 nous permet de construire une bijection entre $CM_c(W)/\hat{\Gamma}$ et $CM_c(K)/\Gamma$, il nous suffit donc de démontrer que l'action de $\hat{\Gamma}$ sur $CM_c(W)$ est triviale pour conclure.

Soient $\delta \in \hat{\Gamma}$, B un bloc de $CM_c(W)$ et $E \in B$. Pour montrer que $\delta \cdot E \in B$, comme les bésés-modules de Verma sont indécomposables, il suffit de construire un morphisme non nul de $M_c^W(\delta \cdot E)$ dans $M_c^W(E)$. Notons $\mathfrak{m} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^K$, idéal gradué et maximal de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^K$. Le groupe W agit sur \mathfrak{m} et sur \mathfrak{m}^2 , on peut donc considérer U un supplémentaire de \mathfrak{m}^2 dans \mathfrak{m} gradué et W -stable. D'après le lemme 2.1 de [BBR02], U engendre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^K$ et $\dim U$ est le nombre minimal de générateurs de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^K$, donc $\mathbb{C}[U^*] = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^K$. On a alors $\mathbb{C}[U^*]^\Gamma = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ et donc par le théorème de Chevalley-Shephard-Todd (cf. théorème 4.1.5), Γ agit sur U^* comme un groupe de réflexions et $\mathbb{C}[U^*]^{\text{co}\Gamma} = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^K / \langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \rangle$ est isomorphe à la représentation régulière de Γ . Donc pour $\delta \in \hat{\Gamma}$, il existe $g \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^K - \langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^W \rangle$ qui engendre la représentation de dimension 1 correspondant à δ . On a alors, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma(g) = \delta(\gamma)g$. Construisons le morphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \Phi : M_c(\delta \cdot E) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes (\delta \cdot E) &\longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes (\delta \cdot E) \simeq M_c(E) \\ f \otimes x &\longmapsto fg \otimes x \end{aligned}$$

et montrons que c'est un morphisme de $\overline{H_c(W)}$ -modules.

- Action de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W}$: Il est clair que Φ est compatible à cette action.
- Action de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}$: L'action d'un élément $y \in \mathfrak{h}$ sur un élément de la forme $1 \otimes x$ est nulle, pour que Φ soit compatible à cette action, il faut donc que $yg \otimes x = 0$. Mais comme g est invariant sous K et que $c_{\mathcal{S}_W - \mathcal{S}_K} = 0$, d'après les formules (1) et (2) de la démonstration de la proposition 4.3.4, pour tout $y \in \mathfrak{h}$, $yg = gy$ et donc $yg \otimes x = gy \otimes x = 0$.
- Action de $\mathbb{C}[W]$: Soient $w \in W$ et $\gamma \in \Gamma$, $k \in K$ tels que $w = \gamma k$. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(w(1 \otimes x)) &= \Phi(1 \otimes \delta(\gamma)\gamma kx) \\ &= g \otimes \delta(\gamma)\gamma kx \\ &= w(g)w \otimes x \\ &= w\Phi(1 \otimes x). \end{aligned}$$

On a donc construit un morphisme non nul de $M_c^W(\delta \cdot E)$ dans $M_c^W(E)$, ce qui prouve que E et $\delta \cdot E$ sont dans le même bloc B . □

Exemple 6.1.5. Le lemme 4.12 de [Bel] détaille une situation intéressante dans le cas où les multiplicités m_Ω sont égales à 1 (par exemple dans le cas cyclique) : si $\{E\}$ est un bloc singleton de $CM_c(W)$ et si $\text{Res}_K^W E = F_1 \oplus \dots \oplus F_e$, avec $e = |\Gamma|$ et $F_i \not\cong F_j \forall i \neq j$, est la décomposition en facteurs irréductibles de $\text{Res}_K^W E$ (c'est ce que l'on entend par $F_i | \text{Res}_K^W E$), alors $\forall 1 \leq i \leq e$, le singleton $\{F_i\}$ est un bloc de $CM_c(K)$.

6.2 Comparaison des nombres de décomposition

Maintenant que l'on a comparé les blocs de K et de W , on va chercher à être plus précis dans la description des représentations en comparant les suites de composition de $M_c^W(S)$ et de $\widetilde{M}_c^K(\text{Res } S)$, pour un $\mathbb{C}[W]$ -module S . Commençons par donner quelques définitions.

On considère une algèbre R de dimension finie sur \mathbb{C} .

Définition 6.2.1. Soit M un R -module non nul, une suite finie de sous-modules de M

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M$$

est appelée suite de composition pour M si chaque quotient M_{i+1}/M_i est simple.

Remarque 6.2.2. Tout module de dimension finie sur \mathbb{C} admet une suite de composition et le théorème de Jordan-Hölder (cf. par exemple théorème 5.3 de [Ass97]) affirme que l'entier m et les classes d'isomorphie des M_{i+1}/M_i sont des invariants de M . On peut donc donner la définition suivante :

Définition 6.2.3. Les quotients M_{i+1}/M_i sont appelés facteurs de composition de M . Pour $L \in \text{Irr } R$, on note $[M : L]$ le nombre de facteurs de composition de M isomorphes à L .

Définition 6.2.4. On appelle groupe de Grothendieck de R et on note $G_0(R)$ le groupe défini par générateurs et relations de la manière suivante :

- les générateurs sont les classes d'isomorphie $[X]$ des R -modules X de type fini,
- toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ avec A, B et C des R -modules de type fini, définit une relation $[B] = [A] + [C]$.

On a alors, d'après [Gio62] :

Proposition 6.2.5. $G_0(R)$ est un groupe abélien libre de base $([S], S \in \text{Irr } R)$. De plus la composante d'indice $[S]$ de la classe d'un R -module M est égale à $[M : S]$.

Dans l'idée de relier les représentations des algèbres $\overline{H_c(W)}$ et $\widetilde{H_c(K)}$, on va chercher à comparer les nombres $[M_c^W(S) : L_c^W(S')]$ et $[\widetilde{M}_c^K(T) : \widetilde{L}_c^K(T')]$ pour S, S' dans un même bloc B de $CM_c(W)$ et pour $T, T' \in \Gamma(B)$.

Pour cela, on va utiliser les résultats de la proposition 5.3.1 et du théorème 5.3.7, en notant indifféremment Res pour les foncteurs Res_K^W et $\text{Res}_{\overline{H_c(W)}/\widetilde{H_c(K)}}$ afin de ne pas alourdir les notations :

$$\text{Res } M_c^W(S) \simeq \widetilde{M}_c^K(\text{Res } S) \text{ et } \text{Res } L_c^W(S) \simeq \widetilde{L}_c^K(\text{Res } S) \text{ pour } S \in \text{Irr } \mathbb{C}[W].$$

À partir de maintenant on considère B un bloc de $CM_c(W)$. Comme $\mathbb{C}[K]$ est une algèbre semi-simple, on a :

$$\text{Res } S = \bigoplus_{T \in \Gamma(B)} T^{[\text{Res } S : T]}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{Res } M_c^W(S) &= \widetilde{M}_c^K(\text{Res } S) \\ &= \bigoplus_{T \in \Gamma(B)} \widetilde{M}_c^K(T)^{[\text{Res } S : T]}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Sachant que l'algèbre $\overline{H_c(W)}$ n'est pas semi-simple, pour exprimer $M_c^W(S)$ en fonction des modules $L_c^W(S')$ avec $S' \in B$, on doit se placer dans le groupe de Grothendieck associé à l'algèbre $\overline{H_c(W)}$.

La proposition 6.2.5 nous donne l'égalité suivante dans le groupe $G_0(\overline{H_c(W)})$:

$$[M_c^W(S)] = \sum_{S' \in B} [M_c^W(S) : L_c^W(S')] [L_c^W(S')].$$

Alors, après restriction à $\widetilde{H_c(K)}$, cette égalité devient, dans $G_0(\widetilde{H_c(K)})$,

$$\begin{aligned} [\text{Res } M_c^W(S)] &= \sum_{S' \in B} [M_c^W(S) : L_c^W(S')] [\text{Res } L_c^W(S')] \\ &= \sum_{S' \in B} [M_c^W(S) : L_c^W(S')] [\widetilde{L}_c^K(\text{Res } S')] \\ &= \sum_{S' \in B, T' \in \Gamma(B)} [\text{Res } S' : T'] [M_c^W(S) : L_c^W(S')] [\widetilde{L}_c^K(T')]. \end{aligned}$$

Pour finir, en transcrivant l'égalité (6.1) dans $G_0(\widetilde{H_c(K)})$, on obtient

$$\begin{aligned} [\text{Res } M_c^W(S)] &= \sum_{T \in \Gamma(B)} [\text{Res } S : T] [\widetilde{M}_c^K(T)] \\ &= \sum_{T \in \Gamma(B), T' \in \Gamma(B)} [\text{Res } S : T] [\widetilde{M}_c^K(T) : \widetilde{L}_c^K(T')] [\widetilde{L}_c^K(T')]. \end{aligned}$$

Alors, l'identification des composantes de $[\text{Res } M_c^W(S)]$ dans la base $\{[\widetilde{L}_c^K(T')], T' \in \text{Irr } K\}$ de $G_0(\widetilde{H_c(K)})$, nous donne le résultat suivant pour Res et on obtient un résultat similaire pour Ind en utilisant la proposition 5.3.4.

Proposition 6.2.6. *Si B un bloc de Calogero-Moser de W , $S \in B$ et $T' \in \Gamma(B)$, alors*

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \Gamma(B)} [\text{Res } S : T] [M_c^K(T) : L_c^K(T')] &= \sum_{S' \in B} [\text{Res } S' : T'] [M_c^W(S) : L_c^W(S')], \\ \sum_{T \in \Gamma(B)} [\text{Ind } T : S] [M_c^K(T') : L_c^K(T)] &= \sum_{S' \in B} [\text{Ind } T' : S'] [M_c^W(S') : L_c^W(S)]. \end{aligned}$$

6.3 Comportement de la c-fonction sur les blocs de Calogero-Moser

Enfin, pour terminer la comparaison de $CM_c(W)$ avec $CM_c(K)$, on va étudier les valeurs de la c-fonction sur les blocs de W et de K .

On a montré, au corollaire 4.3.28, que la fonction \mathbf{c} est constante à l'intérieur des blocs de Calogero-Moser d'un groupe de réflexions complexe. Donc si l'on considère un bloc \bar{B} de $CM_c(K)$, on peut noter $\mathbf{c}_c(\bar{B})$ la valeur de la \mathbf{c} -fonction à l'intérieur de ce bloc. Mais d'après le théorème 6.1.4, il existe un bloc B de $CM_c(W)$ tel que $\Gamma \cdot \bar{B} = \Gamma(B)$, où Γ est le quotient W/K que l'on considère toujours abélien. En notant $\mathbf{c}_c(B)$ la valeur de la \mathbf{c} -fonction à l'intérieur du bloc B , on voudrait comparer les nombres $\mathbf{c}_c(B)$ et $\mathbf{c}_c(\bar{B})$.

Soit $E \in \text{Irr } \mathbb{C}[W]$, on a défini le nombre $\mathbf{c}_c(E)$ comme le scalaire par lequel l'élément

$$eu_0 = - \sum_{s \in \mathcal{S}_W} \frac{c_s}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s$$

agit sur E . Or on a choisi le paramètre c de l'algèbre $H_c(W)$ tel que $c_s = 0$ pour $s \in \mathcal{S}_W - \mathcal{S}_K$ donc l'élément eu_0 est un élément de $\mathbb{C}[K] \cap Z(\mathbb{C}[W])$. On peut donc s'intéresser à son action sur des $\mathbb{C}[W]$ -modules simples comme sur des $\mathbb{C}[K]$ -modules simples et on a :

Proposition 6.3.1. *Si $B \in CM_c(W)$ et $\bar{B} \in CM_c(K)$ sont tels que $\Gamma \cdot \bar{B} = \Gamma(B)$, alors*

$$\mathbf{c}_c(B) = \mathbf{c}_c(\bar{B}).$$

Démonstration. Soit $F \in \bar{B}$, alors d'après la théorie de Clifford et la description des blocs de K et de W ,

$$\text{Ind}_K^W F = \mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[K]} F = \bigoplus_{E \in B} E^{[E:F]}.$$

Soit x un élément non nul de $\text{Ind}_K^W F$, d'un côté, il existe $(a_i)_i \subset \mathbb{C}[W]$ et $(x_i)_i \subset F$ tels que $x = \sum_i a_i \otimes x_i$ et alors

$$\begin{aligned} eu_0 \cdot x &= \sum_i eu_0 \cdot a_i \otimes x_i \\ &= \sum_i a_i eu_0 \otimes x_i && \text{car } eu_0 \in Z(\mathbb{C}[W]) \\ &= \sum_i a_i \otimes eu_0 \cdot x_i && \text{car } eu_0 \in \mathbb{C}[K] \\ &= \sum_i a_i \otimes \mathbf{c}_c(\bar{B})x_i \\ &= \mathbf{c}_c(\bar{B})x \end{aligned}$$

et d'un autre côté, pour $E \in B$, il existe $x_E \in E$ tel que $x = \sum_{E \in B} x_E$ donc

$$\begin{aligned} eu_0 \cdot x &= \sum_E eu_0 \cdot x_E \\ &= \sum_E \mathbf{c}_c(B)x_E \\ &= \mathbf{c}_c(B)x \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Troisième partie

Algèbre de Cherednik et Blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$

Introduction

Dans cette partie, nous nous concentrons sur l'étude des blocs des groupes imprimitifs de la forme $G(\ell, 1, n)$, afin d'étendre le travail effectué dans [Gor08] à l'ensemble des paramètres.

Nous allons commencer par présenter au chapitre 7 les groupes $G(\ell, 1, n)$, paramétrer leurs caractères irréductibles par les ℓ -multipartitions de n et introduire les algèbres de Cherednik et de Hecke associées à ces groupes. Puis au théorème 7.3.3, nous obtiendrons, sur le modèle de ce qui a été fait pour la \mathbf{a} -fonction dans [GJ11, 5.5.11] et à partir d'un calcul de [BK02], une formule combinatoire pour la \mathbf{A} -fonction qui nous permettra d'exprimer la \mathbf{c} -fonction par les contenus des multipartitions (on retrouve ainsi la formule de [Rou08, 6.2]).

Le chapitre 8 consistera à introduire, d'après [Gor08] et [Nak09], les variétés de carquois $\mathcal{M}_\theta(n)$ associées au carquois cyclique à ℓ sommets qui seront fondamentales pour la suite de notre étude. Ces variétés sont lisses pour certains paramètres ($\theta \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$) et normales quel que soit la valeur de θ . Sachant que l'on cherche à généraliser au cas non lisse le travail effectué par I. Gordon, on va relier au paragraphe 8.2.6 les variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$ et $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ pour $\theta \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$ et $\theta' \notin \mathbf{H}^{\text{reg}}$ assez proches, grâce à un morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$ (cette idée nous a été donnée par I. Gordon et nous l'en remercions vivement). Enfin, on présentera l'étude menée dans [Gor08] des \mathbb{C}^* -points fixes de ces variétés, notamment leur description combinatoire grâce aux alcôves.

La paramétrisation des blocs par les \mathbb{C}^* -points fixes des variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$ faite par I. Gordon nous donne plusieurs descriptions combinatoires de $CM_c(G(\ell, 1, n))$ dues à I. Gordon et M. Martino. On peut alors construire plusieurs ordres sur ces blocs : des ordres algébriques (donnés par la \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions) et des ordres combinatoires et géométriques dont nous généraliserons la construction à l'ensemble des paramètres aux paragraphes 9.2.2 et 9.2.3. Dans [Gor08], il a été montré que les ordres algébriques et combinatoires étaient plus fins que l'ordre géométrique pour un paramètre dans \mathbf{H}^{reg} . Ceci nous amène à penser que cet ordre pourrait être un bon candidat pour modéliser, à la manière de la \mathbf{c} -fonction pour $t \neq 0$, les représentations de $H_c(G(\ell, 1, n))$. Nous avons donc étendu ce résultat à l'ensemble des paramètres (cf. théorème 9.3.10 et proposition 9.4.7 pour $\ell = 2$). Enfin, nous avons relié les blocs des groupes de Weyl de type B aux classes d'équivalences de l'ordre combinatoire au corollaire 9.4.5.

Description algébrique

7.1 Présentation de $G(\ell, 1, n)$

7.1.1 Définition

La série de groupes de réflexions complexes $G(\ell, 1, n)$ a été introduite au théorème 4.1.4.

Définition 7.1.1. *Pour deux entiers positifs non nuls ℓ et n , le groupe $G(\ell, 1, n)$ est constitué des matrices monomiales de taille n telles que le seul terme non nul sur chaque colonne est une racine $\ell^{\text{ième}}$ de l'unité.*

Il est d'ordre $\ell^n n!$ et il est isomorphe à $(\mu_\ell)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

C'est bien un groupe de réflexions car il est engendré par les matrices suivantes, qui représentent des pseudo-réflexions :

- les matrices de transpositions $s_{i,j}$, pour $1 \leq i \neq j \leq n$,
- les matrices diagonales σ_i , pour $1 \leq i \leq n$, qui n'ont qu'un seul terme différent de 1 sur leur diagonale, ce terme se trouvant sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et valant $\zeta_\ell = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\ell}\right)$.

Remarque 7.1.2. *En posant $s_0 = \sigma_1$ et $s_i = s_{i,i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$, on obtient une présentation de $G(\ell, 1, n)$ par générateurs $\{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ et relations (cf. [GJ11, 5.1]) :*

$$\begin{aligned} s_0^\ell &= 1 \\ s_i^2 &= 1 && \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ s_i s_j &= s_j s_i && \text{si } |i-j| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} && \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ s_0 s_1 s_0 s_1 &= s_1 s_0 s_1 s_0. \end{aligned}$$

7.1.2 Réflexions de $G(\ell, 1, n)$

L'ensemble $\mathcal{S}_{G(\ell,1,n)}$ des pseudo-réflexions de $G(\ell, 1, n)$ peut alors se décomposer en ℓ classes de conjugaison :

$$\mathcal{S}_{G(\ell,1,n)} = \mathcal{S}_0 \sqcup \mathcal{S}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{S}_{\ell-1},$$

où $\mathcal{S}_0 = \{s_{i,j} \sigma_i^r \sigma_j^{-r}, 1 \leq i \neq j \leq n \text{ et } 0 \leq r \leq \ell-1\}$ et où l'ensemble \mathcal{S}_t , pour $1 \leq t \leq \ell-1$, regroupe les pseudo-réflexions $\{\sigma_i^t, 1 \leq i \leq n\}$, qui sont d'ordre $\frac{\ell}{t \wedge \ell}$.

Notons $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n$ l'espace sur lequel agissent ces pseudo-réflexions, (y_1, \dots, y_n) la base canonique de \mathfrak{h} et (x_1, \dots, x_n) la base duale associée. On peut décrire dans ces bases les éléments α_s et v_s associés à une pseudo-réflexion s (cf paragraphe 4.1.1), pour tous les éléments de $\mathcal{S}_{G(\ell, 1, n)}$.

La réflexion s qui a pour matrice $s_{i,j}\sigma_i^r\sigma_j^{-r}$ dans la base (y_1, \dots, y_n) vérifie

$$\begin{cases} s(y_k) = y_k & \forall k \notin \{i, j\} \\ s(y_i) = \zeta_\ell^r y_j \\ s(y_j) = \zeta_\ell^{-r} y_i \end{cases}$$

L'hyperplan $H_{i,j,r}$ correspondant à cette réflexion a donc pour équation $\alpha_{s_{i,j}\sigma_i^r\sigma_j^{-r}} = 0$, où

$$\alpha_{s_{i,j}\sigma_i^r\sigma_j^{-r}} = x_j - \zeta_\ell^r x_i.$$

On a $w \in W_{H_{i,j,r}}$ si et seulement si

$$\begin{cases} w(y_k) = y_k & \forall k \notin \{i, j\} \\ w(\zeta_\ell^r y_j + y_i) = \zeta_\ell^r y_j + y_i \end{cases}$$

et comme la matrice de w dans la base (y_1, \dots, y_n) n'a qu'un seul terme non nul sur chaque ligne, on a forcément $w = id$ ou $w = s$. Donc le fixateur de $H_{i,j,r}$ est d'ordre $e_{i,j,r} = 2$. De plus, l'élément v_s associé à s est de la forme :

$$v_{s_{i,j}\sigma_i^r\sigma_j^{-r}} = y_j - \zeta_\ell^{-r} y_i.$$

Enfin, l'orbite de $H_{i,j,r}$ sous l'action de W est $\mathcal{C}_1 = \{H_{p,q,t}, 1 \leq p \neq q \leq n \text{ et } 0 \leq t \leq \ell - 1\}$ car

$$\begin{cases} \sigma_m^t(H_{i,j,r}) = H_{i,j,r} & \text{si } m \notin \{i, j\} \\ \sigma_i^t(H_{i,j,r}) = H_{i,j,|r-t|} \\ s_{p,q}(H_{i,j,r}) = H_{i,j,r} & \text{si } p \text{ et } q \notin \{i, j\} \\ s_{i,q}(H_{i,j,r}) = H_{q,j,r} & \text{si } q \neq j. \end{cases}$$

L'hyperplan associé à la réflexion σ_i^t est $H_i = \ker x_i$ et donc $v_{\sigma_i^t} = (1 - \zeta_\ell^{-t})y_i$. Le fixateur de H_i est le sous-groupe engendré par σ_i , il est d'ordre $e_i = \ell$. L'orbite de H_i sous W est $\mathcal{C}_2 = \{H_j, 1 \leq j \leq n\}$ car

$$\begin{cases} \sigma_j^r(H_i) = H_i \\ s_{p,q}(H_i) = H_i \\ s_{i,q}(H_i) = H_q. \end{cases} \quad \text{si } i \notin \{p, q\}$$

7.1.3 Caractères irréductibles de $G(\ell, 1, n)$

Partitions d'un entier et caractères de \mathfrak{S}_n

En regardant la décomposition d'un élément de \mathfrak{S}_n en produit de cycles à supports disjoints, on voit clairement que les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n sont paramétrées par les partitions de n (cf. paragraphe 1.1). Les ensembles $\mathcal{P}(n)$ et $\text{Irr } \mathfrak{S}_n$ ont donc même cardinal. De plus, la construction de caractères irréductibles $\{\chi_\lambda, \lambda \in \mathcal{P}(n)\}$ de \mathfrak{S}_n à partir des partitions de n (cf. [GP00, th. 5.4.5]) permet de mettre explicitement ces deux ensembles en bijection.

Théorème 7.1.3 (Frobenius). *Pour $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, on peut construire un caractère irréductible χ_λ de \mathfrak{S}_n tel que l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n) &\rightarrow \text{Irr } \mathfrak{S}_n \\ \lambda &\mapsto \chi_\lambda \end{aligned}$$

soit une bijection.

Exemple 7.1.4. *Avec la convention de [GP00], on associe le caractère signature à la partition (1^n) et le caractère trivial à sa transposée (n) .*

Description des caractères irréductibles de $G(\ell, 1, n)$

Par construction, $G(\ell, 1, n) \simeq \mathfrak{S}_n \times (\mu_\ell)^n$. La description combinatoire de $\text{Irr } \mathfrak{S}_n$ par les partitions de l'entier n va donc nous donner une paramétrisation de $\text{Irr } G(\ell, 1, n)$. Nous allons ici rappeler une construction des caractères irréductibles de $G(\ell, 1, n)$ à partir des ℓ -multipartitions de n , en généralisant à ℓ quelconque les résultats pour les groupes de type B_n du paragraphe 5.5 de [GP00]. C'est un résultat bien connu, on pourra en trouver une démonstration dans [GJ11, 5.1.3].

Théorème 7.1.5 (Specht). *Les ensembles $\text{Irr } G(\ell, 1, n)$ et $\mathcal{P}(\ell, n)$ sont en bijection.*

On peut même décrire explicitement les caractères irréductibles de $G(\ell, 1, n)$ par les multipartitions, à partir des caractères χ_λ , comme énoncé dans le corollaire qui suit la démonstration de ce théorème.

Démonstration. Le sous-groupe distingué N_n des matrices diagonales de $G(\ell, 1, n)$ est engendré par les σ_i qui sont tous conjugués. Notons s_i la matrice correspondant à la transposition $(i, i+1)$ et considérons a_1, \dots, a_ℓ des entiers positifs tels que $n = a_1 + \dots + a_\ell$. On leur associe $\delta_{a_1, \dots, a_\ell}$ le caractère irréductible de N_n défini par

$$\delta_{a_1, \dots, a_\ell}(\sigma_j) = \zeta_\ell^{k-1} \text{ si } a_1 + \dots + a_{k-1} < j \leq a_1 + \dots + a_k$$

et on pose

$$\text{Irr}(G(\ell, 1, n), \delta_{a_1, \dots, a_\ell}) = \{\chi \in \text{Irr } G(\ell, 1, n), \text{Res}_{N_n}^{G(\ell, 1, n)} \chi \text{ contient } \delta_{a_1, \dots, a_\ell}\}.$$

Le groupe $G(\ell, 1, n)$ agit par conjugaison sur N_n (les éléments de \mathfrak{S}_n permutent les σ_i et N_n agit trivialement) donc il agit aussi sur $\text{Irr}(N_n)$. Soit χ un caractère irréductible de N_n , comme N_n est un groupe abélien, χ est multiplicatif et donc $\sigma_i^\ell = 1$ implique que $\chi(\sigma_i) = \zeta_\ell^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ telle que $0 \leq \alpha_{\tau(1)} \leq \dots \leq \alpha_{\tau(n)} \leq \ell-1$ alors on peut trouver des entiers a_1, \dots, a_ℓ de somme n tels que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $a_1 + \dots + a_{\alpha_{\tau(i)}} < i \leq a_1 + \dots + a_{\alpha_{\tau(i)} + 1}$. Alors pour tout i , on a

$$\begin{aligned} \tau^{-1} \cdot \chi(\sigma_i) &= \chi(\tau \sigma_i \tau^{-1}) \\ &= \chi(\sigma_{\tau(i)}) \\ &= \zeta_\ell^{\alpha_{\tau(i)}} \\ &= \delta_{a_1, \dots, a_\ell}(\sigma_i). \end{aligned}$$

Donc tout caractère irréductible de N_n est conjugué à un $\delta_{a_1, \dots, a_\ell}$. De plus, si $(a_1, \dots, a_\ell) \neq (a'_1, \dots, a'_\ell)$, alors $\delta_{a_1, \dots, a_\ell}$ et $\delta_{a'_1, \dots, a'_\ell}$ ne peuvent pas être dans la même orbite sous l'action de $G(\ell, 1, n)$. Donc $\{\delta_{a_1, \dots, a_\ell}, a_1 + \dots + a_\ell = n\}$ est un système complet de représentants des classes de conjugaison de $G(\ell, 1, n)$ sur $\text{Irr}(N_n)$.

Lemme 7.1.6.

$$\text{Irr } G(\ell, 1, n) = \bigsqcup_{a_1 + \dots + a_\ell = n} \text{Irr}(G(\ell, 1, n), \delta_{a_1, \dots, a_\ell})$$

Preuve du lemme. Soient χ un caractère irréductible de $G(\ell, 1, n)$ et θ une composante irréductible de $\text{Res}_{N_n}^{G(\ell, 1, n)} \chi$. D'après ce que l'on vient de voir, il existe un unique caractère $\delta_{a_1, \dots, a_\ell}$ qui soit conjugué à θ . Alors d'après le théorème de Clifford (cf. [Isa76, 6.2]),

$$\text{Res}_{N_n}^{G(\ell, 1, n)} \chi = \left(\text{Res}_{N_n}^{G(\ell, 1, n)} \chi, \delta_{a_1, \dots, a_\ell} \right) (\delta_{a_1, \dots, a_\ell} + \text{les caractères conjugués à } \delta_{a_1, \dots, a_\ell}),$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire défini sur l'ensemble des caractères de N_n . Or aucun conjugué de $\delta_{a_1, \dots, a_\ell}$ dans $G(\ell, 1, n)$ n'est de la forme $\delta_{a'_1, \dots, a'_\ell}$, donc il existe un unique ℓ -uplet d'entiers (a_1, \dots, a_ℓ) tel que $\chi \in \text{Irr}(G(\ell, 1, n), \delta_{a_1, \dots, a_\ell})$. \square

Notons encore $G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell)$ le plongement de $G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell)$ dans $G(\ell, 1, n)$ en considérant les matrices diagonales par blocs. C'est un sous-groupe de $G(\ell, 1, n)$ contenant N_n qui peut être décrit de la façon suivante :

$$\text{Lemme 7.1.7. } G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell) = \text{Stab}_{G(\ell, 1, n)}(\delta_{a_1, \dots, a_\ell})$$

Preuve du lemme.

$$\begin{aligned} \tau \in \text{Stab}_{G(\ell, 1, n)}(\delta_{a_1, \dots, a_\ell}) &\Leftrightarrow \text{pout tout } 1 \leq k \leq \ell \\ &\quad [a_1 + \dots + a_{k-1} < j \leq a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k] \text{ équivaut} \\ &\quad \text{à } [a_1 + \dots + a_{k-1} < \tau(j) \leq a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k] \\ &\Leftrightarrow \tau \text{ permute les } a_1 \text{ premiers éléments ensemble,} \\ &\quad \text{puis les } a_2 \text{ suivants, etc...} \\ &\Leftrightarrow \tau \in G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell) \end{aligned}$$

\square

Posons $\text{Irr}(G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell), \delta_{a_1, \dots, a_\ell}) =$

$$\{\Psi \in \text{Irr}(G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell)), \text{Res}_{N_n}^{G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell)} \Psi \text{ contient } \delta_{a_1, \dots, a_\ell}\}$$

et notons ϵ_k le morphisme de $G(\ell, 1, a_k)$ qui envoie les s_i sur 1 et σ_1 sur ζ_ℓ^{k-1} . Il est bien défini car

$$\begin{aligned} \epsilon_k((s_i \sigma_1^t)(s_j \sigma_1^u)) &= \epsilon_k(s_i \sigma_1^t s_j \sigma_1^{-t} \sigma_1^t \sigma_1^u) \\ &= \zeta_\ell^{t(k-1)} \zeta_\ell^{u(k-1)} \\ &= \epsilon_k(s_i \sigma_1^t) \epsilon_k(s_j \sigma_1^u) \end{aligned}$$

Il nous permet d'étendre $\delta_{a_1, \dots, a_\ell}$ à $G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell)$ par le caractère irréductible $\psi = 1_{G(\ell, 1, a_1)} \otimes \epsilon_2 \otimes \dots \otimes \epsilon_\ell$. Alors d'après le corollaire de Gallagher (cf. [Isa76, 6.17]), quand β parcourt $\text{Irr}((G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell))/N_n) = \text{Irr}(\mathfrak{S}_{a_1}) \times \dots \times \text{Irr}(\mathfrak{S}_{a_\ell})$, $\beta\psi$ parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de

$$\text{Ind}_{N_n}^{G(\ell, 1, a_1) \times \dots \times G(\ell, 1, a_\ell)} (\delta_{a_1, \dots, a_\ell}).$$

Or on sait décrire tous les caractères irréductibles de \mathfrak{S}_{a_i} par les partitions de l'entier a_i , donc $\beta = \chi_{\lambda^1} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda^\ell}$ où λ^i est une partition de a_i . Ainsi

$$\beta\psi = \widetilde{\chi_{\lambda^1}} \otimes (\epsilon_2 \otimes \widetilde{\chi_{\lambda^2}}) \otimes \cdots \otimes (\epsilon_\ell \otimes \widetilde{\chi_{\lambda^\ell}}),$$

où si χ est un caractère de \mathfrak{S}_a , $\widetilde{\chi}$ est son relèvement à $G(\ell, 1, a) = \mathfrak{S}_a \times (\mu_\ell)^a$ qui vérifie le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G(\ell, 1, a) & \xrightarrow{\widetilde{\chi}} & \mathbb{C} \\ & \searrow \pi_a & \uparrow \chi \\ & & \mathfrak{S}_a. \end{array}$$

Mais on a vu que $G(\ell, 1, a_1) \times \cdots \times G(\ell, 1, a_\ell) = \text{Stab}_{G(\ell, 1, n)}(\delta_{a_1, \dots, a_\ell})$ donc par le théorème [Isa76, 6.11],

$$\begin{array}{ccc} \text{Irr}(G(\ell, 1, a_1) \times \cdots \times G(\ell, 1, a_\ell), \delta_{a_1, \dots, a_\ell}) & \longrightarrow & \text{Irr}(G(\ell, 1, n), \delta_{a_1, \dots, a_\ell}) \\ \Psi & \longmapsto & \text{Ind}_{G(\ell, 1, a_1) \times \cdots \times G(\ell, 1, a_\ell)}^{G(\ell, 1, n)}(\Psi) \end{array}$$

est une bijection. On pose donc

$$\chi_{(\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)} = \text{Ind}_{G(\ell, 1, a_1) \times \cdots \times G(\ell, 1, a_\ell)}^{G(\ell, 1, n)}(\widetilde{\chi_{\lambda^1}} \otimes (\epsilon_2 \otimes \widetilde{\chi_{\lambda^2}}) \otimes \cdots \otimes (\epsilon_\ell \otimes \widetilde{\chi_{\lambda^\ell}}).$$

Quand les λ^i parcourent les partitions de a_i pour tout i , $\chi_{(\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)}$ parcourt $\text{Irr}(W_n, \delta_{a_1, \dots, a_\ell})$ et comme $\text{Irr}(W_n) = \bigsqcup_{a_1 + \dots + a_\ell = n} \text{Irr}(W_n, \delta_{a_1, \dots, a_\ell})$, le théorème est démontré. \square

Corollaire 7.1.8. *Les caractères irréductibles du groupe $G(\ell, 1, n)$ sont exactement les*

$$\chi_{(\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)} = \text{Ind}_{G(\ell, 1, a_1) \times \cdots \times G(\ell, 1, a_\ell)}^{G(\ell, 1, n)}(\widetilde{\chi_{\lambda^1}} \otimes (\epsilon_2 \otimes \widetilde{\chi_{\lambda^2}}) \otimes \cdots \otimes (\epsilon_\ell \otimes \widetilde{\chi_{\lambda^\ell}})$$

quand $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)$, avec $|\lambda^i| = a_i$, parcourt l'ensemble $\mathcal{P}(\ell, n)$ des ℓ -multipartitions de n .

Exemple 7.1.9. *On peut définir 2ℓ caractères irréductibles $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_\ell, \tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_\ell)$ de $G(\ell, 1, n)$ de la manière suivante : pour $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq j \leq n$, $\epsilon_i(\sigma_1) = \tilde{\epsilon}_i(\sigma_1) = \zeta_\ell^{i-1}$, $\epsilon_i(s_j) = 1$ et $\tilde{\epsilon}_i(s_j) = -1$. D'après l'exemple 7.1.4, les ϵ_i seront décrits par les ℓ -multipartitions $\lambda_i = (\emptyset, \dots, \emptyset, (n), \emptyset, \dots, \emptyset)$, où la partition (n) est placée à la $i^{\text{ième}}$ part et les $\tilde{\epsilon}_i$ seront paramétrés par les ℓ -multipartitions $\tilde{\lambda}_i = (\emptyset, \dots, \emptyset, 1^n, \emptyset, \dots, \emptyset)$, où la partition 1^n est placée à la $i^{\text{ième}}$ part.*

7.2 Algèbres associées

7.2.1 Algèbre de Cherednik

On va décrire en détail l'algèbre de Cherednik, pour $t = 0$, associée au groupe de réflexions $G(\ell, 1, n)$. Comme nous venons de le voir, l'ensemble $\mathcal{S}_{G(\ell, 1, n)}$ des réflexions de ce groupe a ℓ classes de conjugaison $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{\ell-1}$. Le paramètre c de l'algèbre de Cherednik $H_c(G(\ell, 1, n))$ va donc prendre ℓ valeurs : $c_0 = c_{\mathcal{S}_0}, \dots, c_{\ell-1} = c_{\mathcal{S}_{\ell-1}}$. Comme

dans [Gor08], on va les exprimer à l'aide d'un paramètre $\mathbf{h} = (h, H_1, \dots, H_{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$, en posant, cf [Gor08, 2.7],

$$c_0 = h \text{ et } c_i = \sum_{j=0}^{\ell-1} \zeta_\ell^{-ij} H_j, \text{ pour } i \geq 1.$$

On posera aussi $H_0 = -(H_1 + \dots + H_{\ell-1})$. Ce paramétrage rationnel va notamment nous permettre de relier $H_c(G(\ell, 1, n))$ aux algèbres de Hecke correspondantes. G. Bellamy, dans [Bel, 6.4], a donné des formules inverses exprimant les H_j en fonction des c_i :

$$H_j = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell-1} \zeta_\ell^{ij} c_i, \text{ pour } 1 \leq j \leq \ell - 1.$$

Exprimons maintenant, avec ce nouveau paramétrage, les relations de commutation

$$[y, x] = - \sum_{s \in \mathcal{S}_W} c_s \frac{\langle \alpha_s, y \rangle \langle x, v_s \rangle}{\langle \alpha_s, v_s \rangle} s$$

dans l'algèbre $H_c(G(\ell, 1, n))$. En gardant les mêmes notations qu'au paragraphe 7.1.2,

1. pour $s = s_{p,q} \sigma_p^r \sigma_q^{-r} \in \mathcal{S}_0$, avec $1 \leq p \neq q \leq n$ et $0 \leq r \leq \ell - 1$, on a :

$$\alpha_s = x_q - \zeta_\ell^r x_p \text{ et } v_s = y_q - \zeta_\ell^{-r} y_p.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bullet \langle \alpha_s, y_i \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{p, q\} \\ 1 & \text{si } i = q \\ -\zeta_\ell^r & \text{si } i = p \end{cases} \\ \bullet \langle x_j, v_s \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{p, q\} \\ 1 & \text{si } j = q \\ -\zeta_\ell^{-r} & \text{si } j = p \end{cases} \\ \bullet \langle \alpha_s, v_s \rangle &= 1 - \det(s)^{-1} = 2 \\ \bullet c_s &= c_0 = h. \end{aligned}$$

2. pour $s = \sigma_p^t \in \mathcal{S}_p$, avec $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq t \leq \ell - 1$, on a :

$$\alpha_s = x_p \text{ et } v_s = (1 - \zeta_\ell^{-t}) y_p.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bullet \langle \alpha_s, y_i \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq p \\ 1 & \text{si } i = p \end{cases} \\ \bullet \langle x_j, v_s \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq p \\ 1 - \zeta_\ell^{-t} & \text{si } j = p \end{cases} \\ \bullet \langle \alpha_s, v_s \rangle &= 1 - \det(s)^{-1} = 1 - \zeta_\ell^{-t} \\ \bullet c_s &= c_p = \sum_{j=0}^{\ell-1} \zeta_\ell^{-pj} H_j \end{aligned}$$

On voit donc que si $i \neq j$ alors $\langle \alpha_s, y_i \rangle \langle x_j, v_s \rangle = 0$.

Les relations de commutation entre les éléments des bases de \mathfrak{h} et de \mathfrak{h}^* sont alors les suivantes :

$$[y_i, x_i] = -h \sum_{r=0}^{\ell-1} \sum_{j \neq i} s_{i,j} \sigma_i^r \sigma_j^{-r} - \sum_{t=1}^{\ell-1} \left(\sum_{j=0}^{\ell-1} \zeta_\ell^{-tj} H_j \right) \sigma_i^t$$

$$[y_i, x_j] = h \sum_{r=0}^{\ell-1} \zeta_\ell^r s_{i,j} \sigma_i^r \sigma_j^{-r} \text{ si } i \neq j.$$

On notera désormais $H_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$ l'algèbre de Cherednik associée au paramètre \mathbf{h} .

Pour finir, relierons le deuxième système de paramétrage $\{\mathbf{h}_u, u \in \bigsqcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W} \text{Irr}(W_{\mathcal{C}})\}$

au paramètre $\mathbf{h} = (h, H_1, \dots, H_{\ell-1})$. On a vu qu'il y avait deux orbites d'hyperplans de réflexions sous l'action de $G(\ell, 1, n) : \mathcal{C}_1 = \{H_{p,q,t}, 1 \leq p \neq q \leq n \text{ et } 0 \leq t \leq \ell-1\}$, qui vérifie $e_{\mathcal{C}_1} = 2$ et $\mathcal{C}_2 = \{H_j, 1 \leq j \leq n\}$ avec $e_{\mathcal{C}_2} = \ell$. On a donc :

$$\mathbf{h}_u = ((\mathbf{h}_{(\mathcal{C}_1,0)}, \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_1,1)}), (\mathbf{h}_{(\mathcal{C}_2,0)}, \dots, \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_2,\ell-1)})), \text{ avec } \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_1,0)} = \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_2,0)} = 0.$$

Et on pose, comme dans [Mar10, 3.1] : $h = \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_1,0)} - \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_1,1)}$, $H_i = \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_2,i)} - \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_2,i-1)}$ pour tout $1 \leq i \leq \ell-1$, soit :

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_1,1)} &= -h \\ \mathbf{h}_{(\mathcal{C}_2,i)} &= H_1 + \dots + H_i \text{ pour } i \geq 1. \end{cases}$$

7.2.2 Algèbre de Hecke

Passons maintenant à la description de l'algèbre de Hecke cyclotomique $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(G(\ell, 1, n))$, avec $\mathbf{m} = ((\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,0)}, \mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,1)}), (\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_2,0)}, \dots, \mathbf{m}_{(\mathcal{C}_2,\ell-1)}))$. L'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(G(\ell, 1, n))$ a n générateurs T_0, \dots, T_{n-1} qui vérifient les relations de tresse :

$$\begin{aligned} T_i T_j &= T_j T_i & \text{si } |i-j| > 1, \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-2, \\ T_0 T_1 T_0 T_1 &= T_1 T_0 T_1 T_0 \end{aligned}$$

et les relations suivantes :

$$\prod_{j=0}^{\ell-1} (T_0 - \zeta_\ell^j \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_2,j)}}) = 0 \text{ et } (T_i - \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,0)}})(T_i + \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,1)}}) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1.$$

Remarque 7.2.1. Quitte à changer T_i en $\mathbf{q}^{-\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,1)}} T_i$, pour $1 \leq i \leq n-1$, on peut remplacer les relations $(T_i - \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,0)}})(T_i + \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,1)}}) = 0$ par

$$(T_i - \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,0)} - \mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,1)}})(T_i + 1) = 0.$$

On a défini au paragraphe 4.2.2, les éléments de Schur $\{s_E, E \in \text{Irr } W\}$ associés à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W)$. Pour $W = G(\ell, 1, n)$, on a vu au théorème 7.1.5 que $\text{Irr } W$ était en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}(\ell, n)$ des ℓ -multipartitions de n . Les éléments de Schur sont donc paramétrés par les multipartitions, on les note $\{s_\lambda, \lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)\}$. Ils ont été calculés dans [GIM00], [CJ12] et [Mat04, 5.18] en utilisant le symbole ordinaire d'une multipartition (cf. définition 1.2.5). On se référera par la suite à l'exposé de [GJ11, §5], afin d'avoir les mêmes notations, on va poser :

$$u = \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,0)} - \mathbf{m}_{(\mathcal{C}_1,1)}} \text{ et } v_j = \zeta_\ell^j \mathbf{q}^{\mathbf{m}_{(\mathcal{C}_2,j)}} \text{ pour } 0 \leq j \leq \ell-1.$$

On définit alors les éléments suivants, pour \mathbf{B} le symbole ordinaire de taille h de $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)$:

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mathbf{B}}(u, V_0, \dots, V_{\ell-1}) &= \prod_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ (\alpha, \beta) \in B^i \times B^j \\ \alpha > \beta \text{ si } i=j}} (u^\alpha V_i - u^\beta V_j), \\
 \theta_{\mathbf{B}}(u, V_0, \dots, V_{\ell-1}) &= \prod_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in B^i \\ 1 \leq k \leq \alpha}} (u^k V_i - V_j), \\
 \nu_{\mathbf{B}}(u, V_0, \dots, V_{\ell-1}) &= \prod_{0 \leq i < j \leq \ell-1} (V_i - V_j)^h \theta_{\mathbf{B}}(u, V_0, \dots, V_{\ell-1}), \\
 \sigma_{\mathbf{B}} &= \binom{\ell}{2} \binom{h}{2} + n(\ell-1), \\
 \tau_{\mathbf{B}} &= \sum_{i=1}^{h-1} \binom{\ell(h-i)+1}{2}, \\
 |\mathbf{B}| &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq \ell-1 \\ \alpha \in B^i}} \alpha
 \end{aligned}$$

et on est en mesure d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 7.2.2 (Geck-lancu-Malle).

Soit λ une ℓ -multipartition de n et soit \mathbf{B} un symbole ordinaire de λ alors

$$s_\lambda(u, V_0, \dots, V_{\ell-1}) = \left((u-1) \prod_{0 \leq i \leq \ell-1} V_i \right)^{-n} (-1)^{\sigma_{\mathbf{B}}} u^{\tau_{\mathbf{B}} - |\mathbf{B}| + n} \frac{\nu_{\mathbf{B}}(u, V_0, \dots, V_{\ell-1})}{\delta_{\mathbf{B}}(u, V_0, \dots, V_{\ell-1})}$$

Et cette expression ne dépend pas du choix de h .

Remarque 7.2.3. Avec cette expression et sachant que $u = \mathbf{q}^{\mathbf{m}(c_{1,0}) - \mathbf{m}(c_{1,1})}$ et $V_j = \zeta_\ell^j \mathbf{q}^{\mathbf{m}(c_{2,j})}$, on voit clairement que les éléments de Schur pour les algèbres de Hecke cyclotomiques sont des polynômes de Laurent en \mathbf{q} .

7.3 Formules pour les \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions

Supposons que le paramètre $\mathbf{m} = ((\mathbf{m}(c_{1,0}), \mathbf{m}(c_{1,1})), (\mathbf{m}(c_{2,0}), \dots, \mathbf{m}(c_{2,\ell-1})))$ est tel que $\mathbf{m}(c_{1,0}) > \mathbf{m}(c_{1,1})$ et posons

$$r = \mathbf{m}(c_{1,0}) - \mathbf{m}(c_{1,1}) \in \mathbb{N}^* \text{ et pour } 0 \leq j \leq \ell-1, m^j = \frac{\mathbf{m}(c_{2,j})}{r} \in \mathbb{Q}.$$

On notera encore \mathbf{m} le ℓ -uplet $(m^0, \dots, m^{\ell-1})$.

D'après le paragraphe 4.2.3, on peut définir les fonctions \mathbf{a} et \mathbf{A} de la manière suivante :

Définition 7.3.1. Pour $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, on pose $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = -\text{val}_{\mathbf{q}}(s_\lambda)$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = \text{deg}_{\mathbf{q}}(s_\lambda)$.

Remarque 7.3.2. La définition de la \mathbf{a} -fonction se généralise au cas $\mathbf{m}(c_{1,0}) < \mathbf{m}(c_{1,1})$, en utilisant la propriété démontrée au paragraphe 4.2 de [CJ11] :

$$\mathbf{a}_{(\mathbf{m}(c_{1,0}), \mathbf{m}(c_{1,1})), (\mathbf{m}(c_{2,0}), \dots, \mathbf{m}(c_{2,\ell-1}))}(\lambda) = \mathbf{a}_{(\mathbf{m}(c_{1,1}), \mathbf{m}(c_{1,0})), (\mathbf{m}(c_{2,0}), \dots, \mathbf{m}(c_{2,\ell-1}))}({}^t \lambda)$$

où ${}^t \lambda = ({}^t \lambda^1, \dots, {}^t \lambda^\ell)$.

Donc pour $r < 0$, on utilisera la formule $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = \mathbf{a}_{-\mathbf{m},-r}({}^t \lambda)$ pour se ramener au cas que l'on va étudier ici (car $\mathbf{m}(c_{2,j}) = r m^j = (-r) \times (-m^j)$).

Sur le modèle de ce qui a été fait pour la \mathbf{a} -fonction à la proposition 5.5.11 de [GJ11], on va maintenant donner une formule explicite de la \mathbf{A} -fonction à partir de la formule de la proposition 7.2.2.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = r \left(-n \sum_{i=0}^{\ell-1} m^i - |\mathbf{B}| + \tau_{\mathbf{B}} - \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{B}^i \times \mathbf{B}^j \\ \alpha > \beta \text{ si } i=j}} \max(\alpha + m^i, \beta + m^j) \right. \\ \left. + h \sum_{0 \leq i < j \leq \ell-1} \max(m^i, m^j) + \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \mathbf{B}^i \\ 1 \leq k \leq \alpha}} \max(k + m^i, m^j) \right). \quad (7.1)$$

Par la suite, on divisera tout par $r > 0$ pour simplifier les notations.

7.3.1 Calcul de la fonction \mathbf{A}

On peut réécrire les parties en vert et en rouge de la formule (7.1), comme cela a été fait dans [BK02, 3.18], en utilisant les \mathbf{m} -symboles ordinaires (cf. définition 1.2.6).

$$\sum_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \mathbf{B}^i \\ 1 \leq k \leq \alpha}} \max(k + m^i, m^j) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \mathbf{B}^i \\ 1 \leq k \leq \alpha + m^i}} \max(k, m^j) - \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \mathbf{B}^i \\ 1 \leq k \leq m^i}} \max(k, m^j) \\ = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \tilde{\mathbf{B}}^i \\ 1 \leq k \leq \alpha}} \max(k, m^j) - \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \tilde{\mathbf{B}}^i \\ 1 \leq k \leq m^i}} \max(k, m^j) \\ \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{B}^i \times \mathbf{B}^j \\ \alpha > \beta \text{ si } i=j}} \max(\alpha + m^i, \beta + m^j) = \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ (\alpha, \beta) \in \tilde{\mathbf{B}}^i \times \tilde{\mathbf{B}}^j \\ \alpha > \beta \text{ si } i=j}} \max(\alpha, \beta).$$

Ce qui donne une nouvelle expression de la fonction \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = -n \sum_{i=0}^{\ell-1} m^i - |\mathbf{B}| + \tau_{\mathbf{B}} - \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \tilde{\mathbf{B}}^i \\ 1 \leq k \leq m^i}} \max(k, m^j) + h \sum_{0 \leq i < j \leq \ell-1} \max(m^i, m^j) \\ - \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ (\alpha, \beta) \in \tilde{\mathbf{B}}^i \times \tilde{\mathbf{B}}^j \\ \alpha > \beta \text{ si } i=j}} \max(\alpha, \beta) + \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq \ell-1 \\ \alpha \in \tilde{\mathbf{B}}^i \\ 1 \leq k \leq \alpha}} \max(k, m^j) \quad (7.2)$$

À partir des partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = (\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_t)$ définies au paragraphe 1.2.3, on peut alors construire les fonctions suivantes :

$$n_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = \sum_{i=1}^t (i-1) \kappa_i \\ N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = \ell \sum_{i=1}^t \sum_{j=0}^{[\kappa_i]} (\kappa_i - j) = \ell \sum_{i=1}^t \frac{[\kappa_i] + 1}{2} (2\kappa_i - [\kappa_i]).$$

Théorème 7.3.3. Soient $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{m} = (m^0, \dots, m^{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$ et s un entier tel que $s \geq hc^\lambda + 1$ alors :

(i) $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = r(n_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - n_{\mathbf{m}}^s(\emptyset))$

(ii) $\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = r(N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - N_{\mathbf{m}}^s(\emptyset) + n_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - n_{\mathbf{m}}^s(\emptyset) - n(\sum_{0 \leq i \leq \ell-1} m^i + \ell s)).$

Remarque 7.3.4. Grâce à ces formules, on voit clairement que les fonctions \mathbf{a} et \mathbf{A} sont continues en les paramètres et que les ordres des \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions ne dépendent pas de la valeur de $r > 0$.

Démonstration. Pour le point (i), il faut se référer à la proposition 5.5.11 de [GJ11]. La démonstration du point (ii) est vraiment semblable au point (i) : on va raisonner par récurrence sur n . Quand $n = 0$ la formule est clairement vérifiée. Supposons maintenant que $n \geq 1$ et que la proposition est vraie pour toute ℓ -multipartition de rang $n - 1$. Soit $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, comme $n \geq 1$, λ admet au moins une part non nulle. On construit alors, à partir de λ , une multipartition μ de rang $n - 1$ en enlevant 1 à la première part de λ qui est différente de la partition vide (c'est à dire λ_k pour le plus petit k). Alors μ est une ℓ -multipartition et on a $s \geq hc^\lambda + 1 \geq hc^\mu + 1$. Donc par récurrence

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\mu) = (N_{\mathbf{m}}^s(\mu) - N_{\mathbf{m}}^s(\emptyset)) + (n_{\mathbf{m}}^s(\mu) - n_{\mathbf{m}}^s(\emptyset)) - (n - 1)(\sum_{0 \leq i \leq \ell-1} m^i + \ell s).$$

Pour exprimer $\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$, il faut donc calculer la différence $\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) - \mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\mu)$ en utilisant la formule (7.2).

Quand on fait la différence des deux parties en bleu, beaucoup d'éléments se simplifient car, par exemple $\tau_{B_\lambda} = \tau_{B_\mu}$, et on trouve $-1 - \sum_{0 \leq i \leq \ell-1} m^i$.

Concernant la partie verte, on peut encore simplifier son écriture en notant $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{\ell(\rho+s)}$ les éléments du \mathbf{m} -symbole de taille s de λ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ (\alpha, \beta) \in \tilde{B}^i \times \tilde{B}^j \\ \alpha > \beta \text{ si } i=j}} \max(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{0 \leq i < j \leq \ell-1 \\ (\alpha, \beta) \in \tilde{B}^i \times \tilde{B}^j}} \max(\alpha, \beta) - \sum_{\substack{0 \leq i \leq \ell-1 \\ \alpha \in \tilde{B}^i}} \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\ell(\rho+s)} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \max(\delta_i, \delta_j) + \sum_{j=i}^{\ell(\rho+s)} \max(\delta_i, \delta_j) \right) - \sum_{i=1}^{\ell(\rho+s)} \delta_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell(\rho+s)} (\ell(\rho+s) - i) \delta_i \end{aligned}$$

et sachant que, quand on compare les \mathbf{m} -symboles de λ et μ , ils ne diffèrent qu'à un seul indice que l'on notera k et cette différence est de 1. Donc quand on fait la différence entre les deux parties vertes on obtient $-\ell(\rho+s) + k$.

En suivant le même raisonnement, quand on fait la différence des deux parties rouges on trouve $\sum_{j=0}^{\ell-1} \max(\delta_k, m^j)$. Notons (x, y) le couple tel que $\delta_k = \lambda_x^y - x + m^y + \rho + s$ alors

$1 \leq y \leq \ell$ et $1 \leq x \leq h^y$. Donc pour tout $0 \leq j \leq \ell-1$, on a $\delta_k \geq -h^y + m^y + m^j + s \geq m^j$. Ainsi la différence entre les deux parties rouges est égale à $\ell \delta_k$.

On obtient alors

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) - \mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\mu) = -1 - \sum_{j=0}^{\ell-1} m^j - \ell(\rho + s) + k + \ell\delta_k. \quad (7.3)$$

Si l'on compare maintenant les \mathbf{m} -symboles décalés de λ et μ , on s'aperçoit qu'un seul élément diffère, qu'il est au même indice k que pour les \mathbf{m} -symboles et que la différence est aussi de 1. Donc

$$n_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - n_{\mathbf{m}}^s(\mu) = k - 1. \quad (7.4)$$

De même

$$N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - N_{\mathbf{m}}^s(\mu) = \ell\kappa_k = \ell\delta_k - \ell\rho. \quad (7.5)$$

En compilant les formules (7.3), (7.4) et (7.5), on obtient

$$\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) - \mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\mu) = (N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - N_{\mathbf{m}}^s(\mu)) + (n_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - n_{\mathbf{m}}^s(\mu)) - \sum_{j=0}^{\ell-1} m^j - \ell s$$

ce qui prouve le point (ii) par récurrence. □

Le lemme 1.2.14 nous permet d'affirmer que, pour $w \in \mathfrak{S}_\ell$, $n_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = n_{w \cdot \mathbf{m}}^s(w \cdot \lambda)$ et $N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = N_{w \cdot \mathbf{m}}^s(w \cdot \lambda)$ d'où

Corollaire 7.3.5. *Soit $w \in \mathfrak{S}_\ell$, $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{m} = (m^0, \dots, m^{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$ et s un entier tel que $s \geq hc^\lambda + 1$ alors :*

(i) $\mathbf{a}_{w \cdot \mathbf{m},r}(w \cdot \lambda) = \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$

(ii) $\mathbf{A}_{w \cdot \mathbf{m},r}(w \cdot \lambda) = \mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$.

Ce corollaire, la remarque 7.3.2 et nous donnent le résultat suivant :

Corollaire 7.3.6. *Pour $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)$ et $\mathbf{m} = (m_0, \dots, m^{\ell-1})$, on note $\bar{\lambda} = ({}^t\lambda^\ell, \dots, {}^t\lambda_1)$ et $\bar{\mathbf{m}} = (-m^{\ell-1}, \dots, -m^0)$. On a alors*

$$\mathbf{a}_{\bar{\mathbf{m}},-r}(\bar{\lambda}) = \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda).$$

7.4 Fonction \mathbf{c}

Sachant que, d'après la proposition 4.3.15, on a

$$\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = \mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda) - \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) + r \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} m^i - 1 \right),$$

le théorème 7.3.3 donne une formule simple pour la fonction \mathbf{c} :

Proposition 7.4.1. *Soient $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{m} = (m^0, \dots, m^{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$ et s un entier tel que $s \geq hc^\lambda + 1$ alors*

$$\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = r(N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - N_{\mathbf{m}}^s(\emptyset)) - rn \left(\sum_{0 \leq i \leq \ell-1} m^i + \ell s \right) + r \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} m^i - 1 \right).$$

7.4.1 Formule pour la \mathbf{c} -fonction

La notion de contenu d'une multipartition (cf. définition 1.2.2) nous permet de simplifier la formule obtenue à la proposition 7.4.1 :

Proposition 7.4.2. Soient $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{m} = (m^0, \dots, m^{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$ alors

$$\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) = r\ell \sum_{\gamma \in [\lambda]} \text{cont}(\gamma) - rn \sum_{i=0}^{\ell-1} m^i + r \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} m^i - 1 \right).$$

Remarque 7.4.3. (i) D'après le lemme 1.2.4, on retrouve, à une constante additive près, la formule de la \mathbf{c} -fonction donnée par R. Rouquier dans [Rou08, 6.2].

(ii) Cette formule nous permet de voir que la \mathbf{c} -fonction est continue en les paramètres.

Démonstration. Cela revient à montrer que $\ell \sum_{\gamma \in [\lambda]} \text{cont}(\gamma) = N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - N_{\mathbf{m}}^s(\emptyset) - \ell ns$.

Pour calculer $N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - N_{\mathbf{m}}^s(\emptyset)$, comparons les \mathbf{m} -symboles décalés de λ et de la multipartition vide :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^j(\lambda) &= (m^j - [m^j], m^j - [m^j] + 1, \dots, s - h^{j+1} + m^j - 1, s - h^{j+1} + m^j + \lambda_{h^{j+1}}^{j+1}, s - \\ & h^{j+1} + m^j + \lambda_{h^{j+1}-1}^{j+1} + 1, \dots, s - h^{j+1} + m^j + \lambda_1^{j+1} + h^{j+1} - 1) \\ \mathfrak{B}^j(\emptyset) &= (m^j - [m^j], m^j - [m^j] + 1, \dots, s - h^{j+1} + m^j - 1, s - h^{j+1} + m^j, s - h^{j+1} + m^j + \\ & 1, \dots, s - h^{j+1} + m^j + h^{j+1} - 1). \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell} (N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) - N_{\mathbf{m}}^s(\emptyset)) &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=0}^{h^{j+1}-1} \left((m^j - [m^j]) + \dots + (s - h^{j+1} + m^j + \lambda_{h^{j+1}-i}^{j+1} + i) \right) - \left((m^j - [m^j]) + \dots + (s - h^{j+1} + m^j + i) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=0}^{h^{j+1}-1} \left((s - h^{j+1} + m^j + i + 1) + \dots + (s - h^{j+1} + m^j + i + \lambda_{h^{j+1}-i}^{j+1}) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{h^{j+1}} \sum_{k=1}^{\lambda_i^{j+1}} (s + k - i + m^j) \\ &= ns + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{i=1}^{h^{j+1}} \sum_{k=1}^{\lambda_i^{j+1}} (k - i + m^j) \\ &= ns + \sum_{\gamma \in [\lambda]} \text{cont}(\gamma) \end{aligned}$$

(la dernière égalité revient à décrire les boîtes de $[\lambda]$ par les triplets $(j, k, i)_{\substack{1 \leq j \leq \ell \\ 1 \leq i \leq h^j \\ 1 \leq k \leq \lambda_i^j}}$). \square

7.4.2 \mathbf{c} -chambres

On va s'intéresser par la suite à l'ordre que définit la \mathbf{c} -fonction sur $\mathcal{P}(\ell, n)$. En effet, au paragraphe 4.3.3, on a défini grâce à la \mathbf{c} -fonction un ordre partiel sur $\text{Irr } W$, pour W un groupe de réflexions complexe. Or pour $W = G(\ell, 1, n)$, on a vu au théorème 7.1.3,

que $\text{Irr } G(\ell, 1, n) \leftrightarrow \mathcal{P}(\ell, n)$, l'ordre de la \mathbf{c} -fonction se transporte donc sur $\mathcal{P}(\ell, n)$ de la manière suivante :

$$\lambda \leq_c \mu \iff \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu) < \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) \text{ ou } \lambda = \mu.$$

Dans le chapitre 9, on va essayer d'interpréter géométriquement cet ordre fondamental dans l'étude des représentations de l'algèbre de Cherednik $H_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$, c'est pourquoi on va utiliser l'expression de la \mathbf{c} -fonction en fonction du paramètre $\mathbf{h} = (h, H_1, \dots, H_{\ell-1})$:

$$\mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) = \ell \sum_{i=2}^{\ell} |\lambda^i| (H_1 + \dots + H_{i-1}) - \ell h \left(\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{\ell} (n(\lambda^i) - n({}^t\lambda^i)) \right).$$

Remarque 7.4.4. C'est la formule de [Gor08, 2.5] qui correspond à la formule de [Rou08, 6.2]. L'ordre défini par cette fonction est donc le même que celui que définit la formule de la proposition 7.4.2, avec le changement de paramètres $\mathbf{m}_{(c,j)} = \mathbf{h}_{(c,j)}$, soit

$$r = h \text{ et } m^i = \frac{H_1 + \dots + H_i}{r} \text{ pour } i \geq 1.$$

Le \mathbf{c} -ordre n'est pas un ordre total car deux multipartitions distinctes peuvent avoir la même image par la fonction \mathbf{c} en un \mathbf{h} fixé. Mais comme la fonction \mathbf{c} est linéaire en \mathbf{h} , pour λ et μ fixées, l'équation $\mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) = \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\mu)$ définit un hyperplan de l'ensemble des paramètres \mathbf{H} , qu'on note $H_{\lambda,\mu}$. Et le fait que $\lambda <_{\mathbf{c}_{\mathbf{h}}} \mu$ ou $\mu <_{\mathbf{c}_{\mathbf{h}}} \lambda$ détermine de quel côté de l'hyperplan se trouve \mathbf{h} . Il y a un nombre fini de $H_{\lambda,\mu}$ qui délimitent des chambres à l'intérieur desquelles le \mathbf{c} -ordre est total.

Définition 7.4.5. On appelle ces chambres les \mathbf{c} -chambres.

Exemple 7.4.6. L'ensemble $\mathcal{P}(2, 3)$ est constitué de 10 éléments :

$$\lambda_1 = ((3); \emptyset), \lambda_2 = ((2, 1); \emptyset), \lambda_3 = ((1, 1, 1); \emptyset), \lambda_4 = ((2); (1)), \lambda_5 = ((1, 1); (1)),$$

$$\lambda_6 = ((1); (1, 1)), \lambda_7 = ((1); (2)), \lambda_8 = (\emptyset; (1, 1, 1)), \lambda_9 = (\emptyset; (2, 1)), \lambda_{10} = (\emptyset; (3)).$$

Ces multipartitions donnent les fonctions \mathbf{c} suivantes :

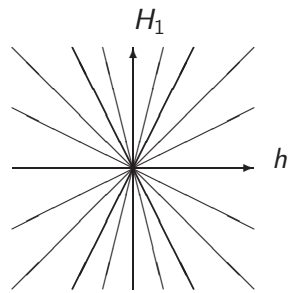
$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_1) &= 0, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_2) = -6h, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_3) = -12h, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_4) = 2H_1 - 4h, \\ \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_5) &= 2H_1 - 8h, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_6) = 4H_1 - 8h, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_7) = 4H_1 - 4h, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_8) = 6H_1 - 12h, \\ \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_9) &= 6H_1 - 6h, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda_{10}) = 6H_1. \end{aligned}$$

Et ces fonctions correspondent aux 10 murs suivants :

$$h = 0, \quad H_1 = 0, \quad H_1 = h, \quad H_1 = -h, \quad H_1 = 2h$$

$$H_1 = -2h, \quad H_1 = 4h, \quad H_1 = -4h, \quad H_1 = \frac{1}{2}h, \quad H_1 = -\frac{1}{2}h.$$

Dans ce cas on a donc 20 \mathbf{c} -chambres.



c-chambres pour $B_3 = G(2, 1, 3)$

Les variétés mises en jeu

Les variétés de carquois ont été introduites par H. Nakajima dans [Nak94]. Elles sont construites à partir de la variété des représentations d'un carquois dont on a donné la définition au paragraphe 2.3.

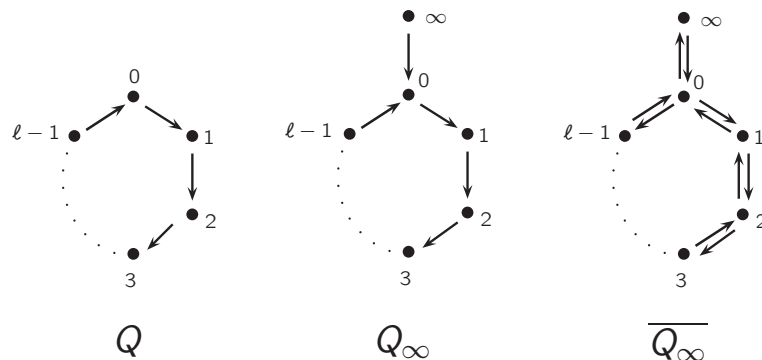
Dans ce chapitre, nous allons expliquer cette construction pour un carquois cyclique puis exposer certaines propriétés de ces variétés.

Enfin, on détaillera la description combinatoire de leurs points fixes sous une action naturelle de \mathbb{C}^* , issue de [Gor08].

8.1 Variétés de Carquois

8.1.1 Deux actions sur la variété des représentations

On considère le carquois cyclique Q à ℓ sommets numérotés de 0 à $\ell - 1$. On introduit le carquois Q_∞ qui correspond au carquois Q auquel on a rajouté un sommet noté ∞ qui rejoint le sommet 0 par une seule flèche et $\overline{Q_\infty}$ le double carquois construit à partir de Q_∞ en ajoutant une flèche α^* qui est l'opposée de chaque flèche α du carquois Q_∞ .



Dans [Gor08, §3], I. Gordon considère une famille de variétés définies à partir des représentations du carquois $\overline{Q_\infty}$. On va présenter ici cette construction ainsi que certaines propriétés de ces variétés, en se basant principalement sur cet article ainsi que sur [Kin94] et [Nak09].

Étudions la variété des représentations du carquois $\overline{Q_\infty}$ sur \mathbb{C} . Soit $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{\ell-1}) \in \mathbb{N}^\ell$ un vecteur dimension de Q , on lui associe $\mathbf{d}' = \mathbf{d} + \mathbf{e}_\infty = (d_0, \dots, d_{\ell-1}, 1)$ un vecteur dimension de $\overline{Q_\infty}$. On note alors $R(\mathbf{d}') = \text{Rep}(\overline{Q_\infty}, \mathbf{d}')$, soit

$$R(\mathbf{d}') : = \left(\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \text{Mat}_{d_{i+1}, d_i}(\mathbb{C}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \text{Mat}_{d_i, d_{i+1}}(\mathbb{C}) \right) \oplus \mathbb{C}^{d_0} \oplus (\mathbb{C}^{d_0})^*.$$

Et on pose $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = (X_0, \dots, X_{\ell-1}, Y_0, \dots, Y_{\ell-1}; v, w) \in R(\mathbf{d}')$.

Le groupe $\mathbf{G}(\mathbf{d}) = \prod_{i=0}^{\ell-1} \text{GL}_{d_i}(\mathbb{C})$ ainsi que le groupe unitaire $\mathbf{U}(\mathbf{d})$ agissent sur $R(\mathbf{d}')$ par, pour $g = (g_0, \dots, g_{\ell-1}) \in \mathbf{G}(\mathbf{d})$,

$$g \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = (g_1 X_0 g_0^{-1}, \dots, g_0 X_{\ell-1} g_{\ell-1}^{-1}, g_0 Y_0 g_1^{-1}, \dots, g_{\ell-1} Y_{\ell-1} g_0^{-1}; g_0 v, w g_0^{-1}).$$

On peut définir une autre action sur $R(\mathbf{d}')$, celle des quaternions :

Définition 8.1.1. *L'algèbre des quaternions \mathcal{H} est une algèbre de dimension 4 sur \mathbb{R} munie d'une base $(1, i, j, k)$ telle que 1 est l'élément neutre pour la multiplication et*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k.$$

On peut définir une action de \mathcal{H} sur l'ensemble $R(\mathbf{d}')$ des représentations du carquois $\overline{Q_\infty}$ en posant :

$$i \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = (\sqrt{-1}\mathbf{X}, \sqrt{-1}\mathbf{Y}; \sqrt{-1}v, \sqrt{-1}w),$$

$$j \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = (\mathbf{Y}^\dagger, -\mathbf{X}^\dagger; w^\dagger, -v^\dagger),$$

où \dagger signifie l'opérateur adjoint hermitien.

Enfin, la fonction $g : R(\mathbf{d}') \times R(\mathbf{d}') \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g((\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w), (\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}; \tilde{v}, \tilde{w})) = \text{Re} \left(\sum_{r=0}^{\ell-1} (\text{Tr}(X_r \tilde{X}_r^\dagger) + \text{Tr}(Y_r \tilde{Y}_r^\dagger)) + \text{Tr}(v \tilde{v}^\dagger) + \text{Tr}(w \tilde{w}^\dagger) \right)$$

est un produit scalaire sur $R(\mathbf{d}')$. Cette structure apportée à la variété $R(\mathbf{d}')$ lui confère une structure symplectique.

8.1.2 Formes symplectiques et applications moments associées

Proposition 8.1.2.

$$\omega_i : R(\mathbf{d}') \times R(\mathbf{d}') \rightarrow \mathbb{R}; (z, \tilde{z}) \mapsto g(iz, \tilde{z}),$$

$$\omega_j : R(\mathbf{d}') \times R(\mathbf{d}') \rightarrow \mathbb{R}; (z, \tilde{z}) \mapsto g(jz, \tilde{z}),$$

$$\omega_k : R(\mathbf{d}') \times R(\mathbf{d}') \rightarrow \mathbb{R}; (z, \tilde{z}) \mapsto g(kz, \tilde{z})$$

sont trois formes symplectiques réelles sur $R(\mathbf{d}')$.

Preuve. Étant donné que l'espace tangent en tout point de $R(\mathbf{d}')$ est $R(\mathbf{d}')$, la forme bilinéaire ω_x correspondant à la forme symplectique ω au point x sera la même pour tous les points de la variété. Il suffit donc de vérifier que les formes ω_i , ω_j et ω_k sont bilinéaires, antisymétriques et non dégénérées ce qui se fait facilement. \square

On définit alors deux formes symplectiques $\omega_{\mathbb{R}} := \omega_j$ et $\omega_{\mathbb{C}} := \omega_j + \sqrt{-1}\omega_k$ qui vérifient :

$$\omega_{\mathbb{R}}((\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w), (\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}; \tilde{v}, \tilde{w})) = -\operatorname{Im} \left(\sum_{r=0}^{\ell-1} (\operatorname{Tr}(X_r \tilde{X}_r^\dagger) + \operatorname{Tr}(Y_r \tilde{Y}_r^\dagger)) + \operatorname{Tr}(v \tilde{v}^\dagger) + \operatorname{Tr}(w \tilde{w}^\dagger) \right)$$

$$\omega_{\mathbb{C}}((\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w), (\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}; \tilde{v}, \tilde{w})) = \sum_{r=0}^{\ell-1} (\operatorname{Tr}(\tilde{X}_r Y_r) - \operatorname{Tr}(X_r \tilde{Y}_r)) + \operatorname{Tr}(\tilde{v} w) - \operatorname{Tr}(v \tilde{w}).$$

Proposition 8.1.3. *Les applications*

$$\mu_{\mathbb{R}} : \begin{cases} R(\mathbf{d}') & \rightarrow (\operatorname{Lie}(\mathbf{U}(\mathbf{d})))^* \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) & \mapsto \frac{\sqrt{-1}}{2} ([\mathbf{X}, \mathbf{X}^\dagger] + [\mathbf{Y}, \mathbf{Y}^\dagger] + v v^\dagger - w^\dagger w) \end{cases} \text{ et}$$

$$\mu_{\mathbb{C}} : \begin{cases} R(\mathbf{d}') & \rightarrow (\operatorname{Lie}(\mathbf{G}(\mathbf{d})))^* \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) & \mapsto [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + v w \end{cases}$$

sont les applications moments associées à $\omega_{\mathbb{R}}$ et $\omega_{\mathbb{C}}$, en identifiant $\operatorname{Lie}(\mathbf{U}(\mathbf{d}))$ et $\operatorname{Lie}(\mathbf{G}(\mathbf{d}))$ avec leurs duaux grâce à la trace.

La démonstration de ce résultat pour $\mu_{\mathbb{C}}$ est présentée en annexe B, celle pour $\mu_{\mathbb{R}}$ est semblable. Ces applications moments vont nous permettre de définir les variétés de carquois qui nous intéressent.

8.1.3 Variétés $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{d})$ et $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$

À partir de maintenant, on va considérer $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$ et on va identifier θ à $(\theta_0 \operatorname{id}_{d_0}, \dots, \theta_{\ell-1} \operatorname{id}_{d_{\ell-1}}) \in \operatorname{Lie} \mathbf{G}(\mathbf{d})$.

On considère la sous-variété $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta)$ de $R(\mathbf{d}')$. L'action de $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ sur cette variété est celle induite par l'action de ce groupe sur $R(\mathbf{d}')$ décrite précédemment. Comme $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ est un groupe réductif, $\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta)]^{\mathbf{G}(\mathbf{d})}$ est un \mathbb{C} -algèbre de type fini donc, d'après le paragraphe 3.1, on peut définir la variété affine

$$\mathcal{X}_\theta(\mathbf{d}) := \operatorname{Specm} \mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta)]^{\mathbf{G}(\mathbf{d})} = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta) // \mathbf{G}(\mathbf{d})$$

qui a pour anneau de polynômes $\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta)]^{\mathbf{G}(\mathbf{d})}$.

On va maintenant définir une deuxième variété quotient, appelée quotient GIT pour "geometric invariant theory" (cf. [MFK94]).

Pour $\theta \in \mathbb{Z}^\ell$, on définit χ_θ , le caractère de $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ associé à θ , par $\chi_\theta(g) := \prod_{i=0}^{\ell-1} (\det g_i)^{\theta_i}$.

Plus généralement, pour $\theta \in \mathbb{Q}^\ell$ et j un entier, on peut considérer $\chi_{j\theta}$ dès que $j\theta \in \mathbb{Z}^\ell$. On pose alors

$$\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\chi_{j\theta}} = \{f \in \mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)], \forall g \in \mathbf{G}(\mathbf{d}), g \cdot f = \chi_{j\theta}(g) f\}$$

si $j\theta \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\mathcal{X}_{j\theta}} = 0$ sinon.

L'algèbre $B = \bigoplus_{j \geq 0} \mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\mathcal{X}_{j\theta}}$ est alors une $\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\mathbf{G}(\mathbf{d})}$ -algèbre de type fini graduée. Donc, d'après [Har77, Chap. 2, §2], on peut définir la variété

$$\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}) := \text{Proj} \bigoplus_{j \geq 0} \mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\mathcal{X}_{j\theta}} = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) //_{\theta} \mathbf{G}(\mathbf{d})$$

et d'après l'exemple 4.8.1 du même chapitre de [Har77], c'est une variété qui est projective sur la variété affine $\text{Specm} \mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\mathbf{G}(\mathbf{d})} = \mathcal{X}_0(\mathbf{d})$.

8.2 Propriétés des variétés $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$

8.2.1 Homéomorphismes

On peut identifier les variétés de carquois que l'on vient de définir à des sous-variétés de $R(\mathbf{d}')/\mathbf{U}(\mathbf{d})$, ce qui va nous permettre de comparer les variétés $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{d})$ et $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$.

Lemme 8.2.1 (Nakajima-King). *La variété $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{d})$ est homéomorphe à $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)/\mathbf{U}(\mathbf{d})$ et la variété $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ est homéomorphe à $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})/\mathbf{U}(\mathbf{d})$.*

On pourra trouver une référence du résultat concernant $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{d})$ dans [Nak94, 3.1] et de celui concernant $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ dans [Kin94, §6].

Sachant que l'on vient d'identifier les variétés $\mathcal{X}_{\frac{\theta}{2}}(\mathbf{d})$ et $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ à des variétés qui sont proches, on peut chercher à relier ces deux variétés de carquois par un homéomorphisme de variétés complexes, en utilisant les deux homéomorphismes précédents. C'est l'idée de [Gor08, 3.7].

Proposition 8.2.2 (Gordon). *Les variétés $\mathcal{X}_{\frac{\theta}{2}}(\mathbf{d})$ et $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ sont homéomorphes.*

Démonstration. On a un morphisme :

$$\Psi : \begin{cases} \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}\left(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2}\right) / \mathbf{U}(\mathbf{d}) & \longrightarrow \mu_{\mathbb{C}}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) / \mathbf{U}(\mathbf{d}) \\ u & \longmapsto \frac{-i-k}{\sqrt{2}}u. \end{cases}$$

La formule exacte de Ψ est

$$\Psi((\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) + \mathbf{U}(\mathbf{d})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger, \mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger; v + w^\dagger, w - v^\dagger)) + \mathbf{U}(\mathbf{d}).$$

Soit $z = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) \in \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}\left(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2}\right)$ alors $\mu_{\mathbb{C}}(z) = 0$ et $\mu_{\mathbb{R}}(z) = \frac{\sqrt{-1}\theta}{2}$ et

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{C}}\left(\frac{-i-k}{\sqrt{2}}z\right) &= \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{C}}(-\sqrt{-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger, \mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger; v + w^\dagger, w - v^\dagger)) \\ &= \frac{1}{2}(-(\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger)(\mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger) + (\mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger)(\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger) \\ &\quad -vw + v^\dagger w - w^\dagger v + w^\dagger v^\dagger) \\ &= \frac{1}{2}([\mathbf{X}, \mathbf{X}^\dagger] + [\mathbf{Y}, \mathbf{Y}^\dagger] + v^\dagger w - w^\dagger v - ([\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + vw) \\ &\quad + (\mathbf{Y}^\dagger \mathbf{X}^\dagger - \mathbf{X}^\dagger \mathbf{Y}^\dagger + w^\dagger v^\dagger)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\mu_{\mathbb{R}}(z) - \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{C}}(z) + \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{C}}(z)^\dagger \\ &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{\mathbb{R}}\left(\frac{-i-k}{\sqrt{2}}z\right) &= \frac{1}{2}\mu_{\mathbb{R}}(-\sqrt{-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger, \mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger; v + w^\dagger, w - v^\dagger)) \\
 &= \frac{\sqrt{-1}}{4}(-[\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger, \mathbf{X}^\dagger + \mathbf{Y}] - [\mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger, \mathbf{Y}^\dagger - \mathbf{X}] \\
 &\quad - (v + w^\dagger)(v^\dagger + w) + (w^\dagger - v)(w - v^\dagger)) \\
 &= \frac{\sqrt{-1}}{4}(2(\mathbf{Y}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Y}) + 2(\mathbf{X}^\dagger\mathbf{Y}^\dagger - \mathbf{Y}^\dagger\mathbf{X}^\dagger) - 2(w^\dagger v^\dagger + vw)) \\
 &= \frac{-2\sqrt{-1}}{4}(\mu_{\mathbb{C}}(z) + \mu_{\mathbb{C}}(z)^\dagger) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

De plus, si on note $g = \frac{-i-k}{\sqrt{2}}$ alors $gg^\dagger = 1$ donc $g \in \mathbf{U}(\mathbf{d})$. Donc Ψ est bien défini, il est bien à valeurs dans $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)/\mathbf{U}(\mathbf{d})$ et il est évidemment continu. Son inverse étant la multiplication par g^\dagger , c'est un homéomorphisme. \square

8.2.2 Description de $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$

On va commencer par décrire la variété $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ à l'aide de représentations, d'après [Nak09, §2.2]. On pourra aussi se référer à [Kin94].

Un élément de $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ correspond à une représentation (V, W) de $\overline{\mathcal{Q}}_\infty$ où $V = (V_0, \dots, V_{\ell-1})$ est de dimension $(d_0, \dots, d_{\ell-1})$ et W de dimension 1, car on a choisi $\mathbf{d}' = (d_0, \dots, d_{\ell-1}, 1)$. Pour $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$ et $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{\ell-1})$ fixés, on choisit $\theta_\infty \in \mathbb{Q}$ tel que $\sum_{i=0}^{\ell-1} \theta_i d_i + \theta_\infty = 0$.

On définit alors, pour une représentation (V, W) de dimension quelconque,

$$\theta(V, W) := \sum_{i=0}^{\ell-1} \theta_i \dim V_i + \theta_\infty(1 - \delta_{W,0}),$$

où $\delta_{W,0} = 1$ si $W = 0$ et 0 sinon, et

$$\mu_\theta(V, W) := \frac{\theta(V, W)}{1 - \delta_{W,0} + \sum_{i=0}^{\ell-1} \dim V_i},$$

que l'on appelle la pente de (V, W) .

Remarque 8.2.3. Les éléments de $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$ sont de pente nulle.

Définition 8.2.4.

- Une représentation (V, W) est dite θ -semistable si pour toute sous-représentation (V', W') de (V, W) , on a $\mu_\theta(V', W') \leq \mu_\theta(V, W)$.
- Elle est dite θ -stable si l'on a une égalité stricte sauf pour $(V', W') = (V, W)$.
- Une représentation θ -polystable est une somme directe de représentations θ -stables de même pente.

Remarque 8.2.5. Par sous-représentation de (V, W) on entend que W' est un sous-espace vectoriel de W et pour tout $0 \leq i \leq \ell-1$, V'_i est un sous-espace vectoriel de V_i tels que $X_i(V'_i) \subset V'_{i+1}$, $Y_i(V'_{i+1}) \subset V'_i$, $v(V'_0) \subset W'$ et $w(W') \subset V'_0$, où $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w)$ sont les morphismes correspondant à la représentation (V, W) .

On notera $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s}$ (respectivement $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-ss}$) l'ensemble des représentations θ -stables (respectivement θ -semistables) de $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)$.

Remarque 8.2.6. *D'après le théorème [Rei08, 3.3], les fibres de la restriction du morphisme $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \rightarrow \mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ à $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s}$ sont exactement les $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ -orbites de $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s}$. On notera donc $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s}/\mathbf{G}(\mathbf{d})$ l'image de $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s}$ par ce morphisme.*

8.2.3 Filtration de Jordan-Hölder

Théorème 8.2.7 ([Rud97]). *Si (V, W) est θ -semistable alors il existe des sous-espaces vectoriels*

$$0 = \tilde{V}_{N+1} \subset \tilde{V}_N \subset \cdots \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_0 = V$$

et un entier $0 \leq k_W \leq N$ tels que

- $(\tilde{V}_{i+1}, \delta_{i+1}W)$ est une sous-représentation de $(\tilde{V}_i, \delta_i W)$ pour tout $0 \leq i \leq N$, où

$$\delta_i W = \begin{cases} W & \text{pour } 0 \leq i \leq k_W \\ 0 & \text{pour } k_W + 1 \leq i \leq N + 1, \end{cases}$$

- les représentations quotients $(\tilde{V}_i, \delta_i W)/(\tilde{V}_{i+1}, \delta_{i+1}W)$ sont θ -stables pour $0 \leq i \leq N$ et ont toutes même pente.

Définition 8.2.8. *On appelle cette filtration la filtration de Jordan-Hölder de (V, W) .*

D'après les propositions 2.6 et 3.2 de [Kin94], deux représentations θ -semistables ont les mêmes facteurs de composition dans leur filtration de Jordan-Hölder si et seulement si elles correspondent au même point dans $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$, on a donc :

Théorème 8.2.9 (King-Nakajima).

- $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ est un ensemble de représentations θ -semistables modulo l'équivalence d'avoir les mêmes facteurs de composition avec multiplicité dans la filtration de Jordan-Hölder.
- L'ensemble des classes d'isomorphie de représentations θ -stables, que l'on note $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})^s$, est un ouvert lisse de $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$.

Remarque 8.2.10. *En considérant, pour une représentation θ -semistable, la somme directe des quotients qui apparaissent dans la filtration de Jordan-Hölder correspondante, on obtient une représentation θ -polystable de même dimension que celle de départ. Ainsi, on peut aussi voir $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ comme un ensemble de représentations θ -polystables modulo isomorphismes.*

On va maintenant étudier les propriétés de régularité de $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$.

8.2.4 Lissité de $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$

Le carquois \underline{Q} qui nous intéresse ici a un graphe qui est un diagramme de Dynkin étendu de type $A_{\ell-1}$. On note R le système de racines de type $A_{\ell-1}$ qui correspond au sous-carquois de \underline{Q} dont les sommets sont $1, \dots, \ell - 1$ et sont indexés par les racines simples de R : $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}$. Les racines positives de $\widehat{A}_{\ell-1}$ sont de la forme $\beta + m\delta$, où $\delta = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^{\ell}$ est un vecteur dimension de \underline{Q} , $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in R \cup \{0\}$ et si $m = 0$, alors $\beta \in R^+$, d'après le théorème de Kac (cf. [Kac83, 5.6]). Elles définissent une partition de l'ensemble des paramètres $\{\theta \in \mathbb{Q}^{\ell}\}$.

Définition 8.2.11. Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\ell$ un vecteur dimension de \mathbb{Q} et \widetilde{R}_+ l'ensemble des racines positives de $\widetilde{A}_{\ell-1}$, on définit

$$R_+(\mathbf{d}) := \{\gamma \in \widetilde{R}_+, \gamma < \mathbf{d}\}.$$

Un mur GIT est un hyperplan de l'espace des paramètres défini par une équation de la forme $\theta \cdot \gamma = 0$, où $\gamma \in R_+(\mathbf{d})$.

Les murs GIT partagent l'espace des paramètres en un nombre fini d'ouverts que l'on appelle chambres GIT.

Remarque 8.2.12. D'après [CB01], le produit scalaire $\theta \cdot \gamma$ est défini dans une base indexée par les sommets de \mathbb{Q} . Donc pour $\beta \in R$, si l'on note $(\beta_1, \dots, \beta_{\ell-1})$ les coordonnées de β dans la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1})$, alors $\beta \cdot \theta = \sum_{i=1}^{\ell-1} \beta_i \theta_i$ et $\delta \cdot \theta = \sum_{i=0}^{\ell-1} \theta_i$.

Ces chambres permettent de décrire certaines propriétés de $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$, d'après [Nak09, 2.12].

Théorème 8.2.13 (Nakajima).

- (i) Si θ est à l'intérieur d'une chambre GIT alors $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s} = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-ss}$ et donc $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d}) = \mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})^s$ est lisse.
- (ii) Si θ_1 et θ_2 sont deux paramètres dans une même chambre (ou sur un même mur) alors les variétés $\mathcal{M}_{\theta_1}(\mathbf{d})$ et $\mathcal{M}_{\theta_2}(\mathbf{d})$ sont isomorphes.

Remarque 8.2.14. D'après la démonstration du lemme 4.3 de [Gor08], quand θ est à l'intérieur d'une chambre GIT, la variété $\mathcal{X}_\theta(\mathbf{d})$ est aussi lisse.

8.2.5 Normalité de $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$

Quand θ est à l'intérieur d'une chambre GIT la variété $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ est lisse donc normale, en fait elle l'est pour tout paramètre θ :

Proposition 8.2.15. $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ est une variété normale, quel que soit $\theta \in \mathbb{Q}^\ell$.

Démonstration. D'après [CB03, 1.1], la variété de carquois pour un paramètre θ nul, $\mathcal{M}_0(\mathbf{d})$, qui est alors un quotient affine, est normale. Or, dans [Nak09, (2.3)], H. Nakajima a factorisé $\mathcal{M}_0(\mathbf{d})$ de la manière suivante : $\mathcal{M}_0(\mathbf{d}) = M^{\text{el}} \times \mathcal{M}_0^{\text{norm}}$, où M^{el} est un espace affine. Donc $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_0} = \mathcal{O}_{\mathcal{M}_0^{\text{norm}}}[X_1, \dots, X_n]$ et le fait que $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_0}$ soit intégralement clos implique que $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_0^{\text{norm}}}$ l'est aussi. Donc $\mathcal{M}_0^{\text{norm}}$ est une variété normale. De plus, dans [Nak09, §2.7], il a montré que la variété $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ est localement isomorphe à $\widehat{\mathcal{M}}_0^{\text{norm}} \times T$ où $\widehat{\mathcal{M}}_0^{\text{norm}}$, qui est définie comme $\mathcal{M}_0^{\text{norm}}$ (seuls les espaces (V, W) changent), est normale et T est le produit d'un espace vectoriel par un espace affine. Donc $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ est une variété normale. \square

8.2.6 Résolution des singularités

Pour un paramètre θ' sur un mur, la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})$ peut être singulière. Mais si l'on s'éloigne un peu de θ' , on se retrouve à l'intérieur d'une chambre et donc les variétés associées sont lisses. Afin de trouver une résolution de la variété singulière $\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})$, on aimerait relier les variétés $\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$ et $\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})$ pour des paramètres θ et θ' vérifiant l'hypothèse suivante :

Hypothèse.

- θ' se trouve sur un mur GIT
- θ est à l'intérieur d'une chambre GIT qui borde ce mur.

On supposera par la suite que les paramètres θ et θ' vérifient cette hypothèse. D'après le théorème 8.2.13, il faut alors exprimer la θ -semistabilité en fonction de la θ' -semistabilité, cela a été fait dans [Nak09, 2.12].

Proposition 8.2.16 (Nakajima).

- (i) Une représentation θ -semistable est θ' -semistable
- (ii) Une représentation θ' -stable est θ -stable

Remarque 8.2.17. Ce résultat est valable aussi en remplaçant θ' par 0 et θ par θ' sur un mur.

D'après le point (i) et le théorème 8.2.13, on a $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s} = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-ss} \subset \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta'-ss} \rightarrow \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta'-ss} //_{\theta'} \mathbf{G}(\mathbf{d})$ ce qui nous permet de construire un morphisme

$$\pi_{\theta, \theta'} : \mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d}) = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta-s} // \mathbf{G}(\mathbf{d}) \rightarrow \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)^{\theta'-ss} //_{\theta'} \mathbf{G}(\mathbf{d}) = \mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d}).$$

Et le point (ii) implique l'existence d'un morphisme $\phi : \mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s \rightarrow \mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ tel que $\pi_{\theta, \theta'} \circ \phi = \text{id}_{|\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s}$. On a donc $\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s \subset \pi_{\theta, \theta'}^{-1}(\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d}))$ et

$$(\pi_{\theta, \theta'})_{|\pi_{\theta, \theta'}^{-1}(\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s)} : \pi_{\theta, \theta'}^{-1}(\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s) \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s$$

est un isomorphisme.

Dans le cas particulier où $\theta' = 0$, $\mathcal{M}_0(\mathbf{d}) = \mathcal{X}_0(\mathbf{d})$, le morphisme $\pi_{\theta, 0} : \mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathcal{M}_0(\mathbf{d})$ est alors, par définition, surjectif et projectif. Il est donc naturel de se demander si le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$ n'a pas les mêmes propriétés.

Proposition 8.2.18. Le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$ est projectif (donc séparé et fermé).

Démonstration. Pour démontrer que $\pi_{\theta, \theta'}$ est projectif, on va utiliser le fait que les morphismes $\pi_{\theta, 0}$ et $\pi_{\theta', 0}$ définis par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d}) & \xrightarrow{\pi_{\theta, \theta'}} & \mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d}) \\ & \searrow \pi_{\theta, 0} & \swarrow \pi_{\theta', 0} \\ & \mathcal{M}_0(\mathbf{d}) & \end{array}$$

sont projectifs et le fait que si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ est projectif et g est séparé alors f est projectif (cf. [Har77, ex. 4.8 et 4.9]). Le fait que $\pi_{\theta', 0}$ soit séparé et fermé vient du fait qu'un morphisme projectif est propre d'après [Har77, 4.9].

□

Proposition 8.2.19. Le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$ est surjectif.

Démonstration. Dans la remarque 2.24 de [Nak09], H. Nakajima montre que dans le cas d'un carquois de type affine les strates présentes dans l'image de $\pi_{\theta, \theta'}$ sont toutes relevées dans $\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})$, ce qui signifie que $\pi_{\theta, \theta'}$ est surjectif. \square

Le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$ est donc propre et tel que $\pi_{\theta, \theta'}^{-1}(\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s) \simeq \mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s$. De plus, d'après [Nak94, 4.1], $\pi_{\theta, \theta'}^{-1}(\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})^s)$ est dense dans $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$. On a donc le résultat suivant.

Théorème 8.2.20 (Nakajima). $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ est une résolution des singularités de $\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})$.

8.2.7 Irréductibilité de $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$

Le théorème 8.2.20 entraîne que, pour θ à l'intérieur d'une chambre GIT, $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ est irréductible. Mais le fait que $\pi_{\theta, \theta'}$ soit surjectif implique alors que $\mathcal{M}_{\theta'}(\mathbf{d})$ l'est aussi. On a donc :

Proposition 8.2.21. $\forall \theta \in \mathbb{Q}^{\ell}$, $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ est irréductible.

8.2.8 Variétés $\mathcal{M}_{\theta}(n)$

Les variétés $\mathcal{M}_{\theta}(\mathbf{d})$ que nous venons de définir vont nous permettre de décrire géométriquement les blocs de Calogero-Moser de l'algèbre de Cherednik $H_{\mathfrak{h}}(G(\ell, 1, n))$. Dans ce sens, on va définir les paramètres θ et \mathbf{d} de cette variété à l'aide de ceux de cette algèbre.

Hypothèse. Dans toute la suite, on va considérer, pour un paramètre $\mathbf{h} = (h, H_1, \dots, H_{\ell-1})$, avec $H_0 = -(H_1 + \dots + H_{\ell-1})$:

$$\theta = (-h + H_0, H_1, \dots, H_{\ell-1}) \text{ et } \mathbf{d} = (n, \dots, n).$$

La variété correspondant à ces paramètres sera notée $\mathcal{M}_{\theta}(n)$.

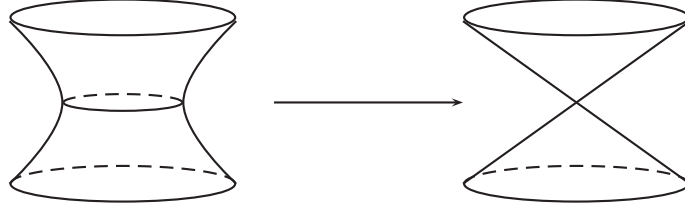
D'après [CB02, 1.1], on a alors $\mathcal{M}_0(n) \simeq (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$. Donc, d'après le théorème 8.2.20, si θ est à l'intérieur d'une chambre GIT, $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ est une résolution symplectique de la variété singulière $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$.

Exemple 8.2.22. Illustrons maintenant ce chapitre pour $\ell = 2$ et $n = 1$, c'est à dire pour le groupe de réflexions μ_2 . Tous les calculs sont faits en annexe C et on pourra y trouver plus généralement les équations des variétés de carquois pour tous les groupes cycliques μ_{ℓ} . On montre en annexe que la variété $\mathcal{X}_{(\theta_0, \theta_1)}(1)$ a pour équation $fg = e^2 - \theta_1 e$, c'est donc un cône si $\theta_1 = 0$ et un hyperboloïde à une nappe sinon. Concernant la variété $\mathcal{M}_{\theta}(1)$, on a le résultat suivant.

Pour $\theta_1 \in \mathbb{N} - \{0\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\theta}(1) = \{ & ((e, f, g), [u_0 : \dots : u_{\theta_1}]) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\theta_1}(\mathbb{C}), \\ & fg = e^2, \text{ et } \forall 1 \leq i, j, i+k, j-k \leq \theta_1 : eu_i = gu_{i-1}, fu_i = eu_{i-1}, \\ & u_i u_j = u_{i+k} u_{j-k} \}. \end{aligned}$$

On a donc bien une projection $\pi_{\theta,0} : \begin{cases} \mathcal{M}_\theta(1) & \rightarrow \mathcal{X}_0(1) \\ ((e, f, g), [u_0 : \dots : u_{\theta_1}]) & \mapsto (e, f, g) \end{cases}$ qui est représentée sur la figure suivante et qui vérifie $\pi_{\theta,0}^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.



$\mathcal{M}_\theta(1)$ qui se projette sur $\mathcal{X}_0(1) \simeq \mathbb{C}^2/\mu_2$, pour $\theta_1 \neq 0$

Et on voit bien sur la figure et sur les équations, que

$$(\pi_{\theta,0})|_{\pi_{\theta,0}^{-1}(\mathcal{X}_0(1)^s)} : \pi_{\theta,0}^{-1}(\mathcal{X}_0(1)^s) \rightarrow \mathcal{X}_0(1)^s = \mathcal{X}_0(1) - \{0\}$$

est un isomorphisme.

L'ensemble \mathbf{H} des paramètres va alors être découpé en chambres GIT comme nous l'avons vu à la définition 8.2.11. Or nous avons déjà donné une partition de cet ensemble au paragraphe 7.4.2 : la partition en \mathbf{c} -chambres dans lesquelles l'ordre donné par la \mathbf{c} -fonction est total. Ces deux découpages ont été comparés au théorème 4.5 de [Gor08] mais commençons par décrire les chambres GIT en fonction du paramètre \mathbf{h} , comme cela a été fait dans [Gor08, 4.4].

Lemme 8.2.23 (Gordon). *La variété $\mathcal{M}_\theta(n)$ est lisse si θ ne se trouve pas sur les hyperplans d'équations :*

$$h = 0 \text{ et } (H_i + \dots + H_j) + mh = 0$$

où $1 \leq i \leq j \leq \ell - 1$ et $1 - n \leq m \leq n - 1$.

Remarque 8.2.24. (i) *La description des chambres donnée au paragraphe 8.2.4 nous donne des hyperplans supplémentaires qui ont pour équations $(H_i + \dots + H_j) + nh = 0$ où $1 \leq i \leq j \leq \ell - 1$. Mais le résultat de [Gor08, 4.4] est plus fin et montre que pour un paramètre θ sur ces hyperplans, la variété $\mathcal{M}_\theta(n)$ est lisse. Pour $G(\ell, 1, n)$, on appellera donc "murs GIT", les hyperplans définis par les équations de ce lemme.*

(ii) *Avec le changement de paramètres : $\mathbf{m}_{(c_1,0)} - \mathbf{m}_{(c_1,1)} = r = h$ et $\mathbf{m}_{(c_2,i)} = H_1 + \dots + H_i$ que l'on a donné à la remarque 7.4.4, on retrouve les équations des hyperplans essentiels donnés par M. Chlouveraki dans [Chl09, 5.3.4].*

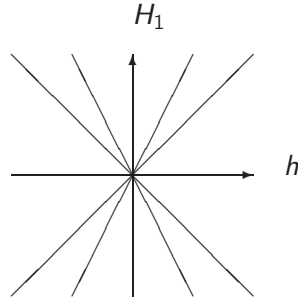
On notera dorénavant \mathbf{H}^{reg} l'espace \mathbf{H} privé des murs GIT.

Théorème 8.2.25 (Gordon). *La décomposition en \mathbf{c} -chambres est un raffinement de celle en chambres GIT.*

Cette correspondance entre les \mathbf{c} -chambres et les chambres GIT (cf. [Gor08, 4.6] pour la démonstration) va nous permettre de décrire géométriquement, grâce aux variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$, l'ordre de la \mathbf{c} -fonction.

Exemple 8.2.26. *Pour $n = 3$ et $\ell = 2$, on a 6 murs GIT qui sont donnés par les équations suivantes :*

$$h = 0, H_1 - 2h = 0, H_1 - h = 0, H_1 = 0, H_1 + h = 0, H_1 + 2h = 0.$$



Chambres GIT pour $G(2, 1, 3)$

En comparant avec la figure du paragraphe 7.4.2, on voit bien sur cet exemple que les \mathbf{c} -chambres raffinent les chambres GIT.

8.3 \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathcal{X}_\theta(n)$ et $\mathcal{M}_\theta(n)$

On peut définir une action de \mathbb{C}^* sur la variété $R(\mathbf{d}')$ de la manière suivante : pour $\eta \in \mathbb{C}^*$ et $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) \in R(\mathbf{d}')$,

$$\eta \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = (\eta\mathbf{X}, \eta^{-1}\mathbf{Y}; v, w).$$

Cette action induit une action de \mathbb{C}^* sur les variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$ et le morphisme

$$\pi_{\theta, \theta'} : \mathcal{M}_\theta(n) \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(n)$$

construit au paragraphe 8.2.6 est \mathbb{C}^* -équivariant.

De plus, on obtient de la même manière une action de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{X}_\theta(n)$ et une action de $\mathbf{U}(1)$ sur $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\frac{\theta}{2}) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)/\mathbf{U}(\mathbf{d})$ et $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})/\mathbf{U}(\mathbf{d})$ qui sont telles que les homéomorphismes construits au lemme 8.2.1 sont $\mathbf{U}(1)$ -équivariants.

Proposition 8.3.1 (Gordon). *L'homéomorphisme entre $\mathcal{M}_\theta(n)$ et $\mathcal{X}_{\frac{\theta}{2}}(n)$ décrit à la proposition 8.2.2 est invariant sous l'action de $\mathbf{U}(1)$.*

Démonstration. Grâce aux homéomorphismes du lemme 8.2.1, il suffit de montrer que $\Psi : \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})/\mathbf{U}(\mathbf{d}) \rightarrow \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\frac{\theta}{2}) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)/\mathbf{U}(\mathbf{d})$ qui consiste en la

multiplication par $\frac{-i-k}{\sqrt{2}}$ est $\mathbf{U}(1)$ -équivariant. Soit $\eta \in \mathbf{U}(1)$,

$$\begin{aligned}
 \eta \cdot \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) &= \eta \cdot \left(\frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} (\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger, \mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger; v + w^\dagger, w - v^\dagger) \right) \\
 &= \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} (\eta(\mathbf{X} + \mathbf{Y}^\dagger), \eta^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger); v + w^\dagger, w - v^\dagger) \\
 &= \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} (\eta\mathbf{X} + \eta\mathbf{Y}^\dagger, \eta^{-1}\mathbf{Y} - \eta^{-1}\mathbf{X}^\dagger; v + w^\dagger, w - v^\dagger) \\
 &= \frac{-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} (\eta\mathbf{X} + (\eta^{-1}\mathbf{Y})^\dagger, \eta^{-1}\mathbf{Y} - (\eta\mathbf{X})^\dagger; v + w^\dagger, w - v^\dagger) \\
 &= \Psi(\eta \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w)).
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 8.3.2 (Gordon). *Les \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathcal{M}_\theta(n)$ sont en bijection avec ceux de $\mathcal{X}_{\frac{\theta}{2}}(n)$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, les $\mathbf{U}(1)$ -points fixes de $\mathcal{M}_\theta(n)$ sont en bijection avec ceux de $\mathcal{X}_{\frac{\theta}{2}}(n)$. Il suffit donc de montrer qu'un point fixe x sous l'action de $\mathbf{U}(1)$ est fixe sous celle de \mathbb{C}^* . Soit f_x la fonction qui à $\eta \in \mathbb{C}^*$, associe $\eta \cdot x$, elle est continue pour la topologie de Zariski et elle est constante sur $\mathbf{U}(1)$ qui est dense dans \mathbb{C}^* pour cette topologie. Donc f_x est constante et x est un point fixe pour l'action de \mathbb{C}^* . □

8.3.1 Alcôves et murs

Le nombre de points fixes de $\mathcal{M}_\theta(n)$ (et donc de $\mathcal{X}_\theta(n)$) dépend fortement de la position de θ dans l'espace des paramètres. Si θ se trouve à l'intérieur d'une chambre GIT et θ' sur un mur bordant cette chambre, on a une projection \mathbb{C}^* -équivariante

$$\pi_{\theta, \theta'} : \mathcal{M}_\theta(n) \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(n),$$

et donc $\text{card}((\mathcal{M}_{\theta'}(n))^{\mathbb{C}^*}) \leq \text{card}((\mathcal{M}_\theta(n))^{\mathbb{C}^*})$.

Pour décrire combinatoirement les \mathbb{C}^* -points fixes, commençons donc par décrire combinatoirement les chambres GIT, grâce aux alcôves, d'après [Gor08, §7].

Description des alcôves

On va s'intéresser dorénavant à l'ensemble de paramètres $\Theta := \{\theta \in \mathbb{Q}^\ell, \theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1} = 1\}$. Comme $\sum_{i=0}^{\ell-1} \theta_i = -h$, pour un paramètre hors du mur GIT d'équation $h = 0$, étudier les variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$ pour $\theta \in \Theta$ revient à étudier toutes les variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$ car

- si θ est tel que $\sum_{i=0}^{\ell-1} \theta_i > 0$ alors il suffit de diviser par cette somme pour retomber dans Θ et comme elle est strictement positive, on va rester dans la même chambre et les variétés seront isomorphes d'après le théorème 8.2.13.

- si $\sum_{i=0}^{\ell-1} \theta_i < 0$ alors le paramètre $\bar{\theta} = (-\theta_0, -\theta_{\ell-1}, \dots, -\theta_1)$ vérifie $\sum_{i=0}^{\ell-1} \bar{\theta}_i > 0$ et d'après [Gor08, 7.1], il existe un isomorphisme ϕ entre $\mathcal{M}_\theta(n)$ et $\mathcal{M}_{\bar{\theta}}(n)$ qui est \mathbb{C}^* -équivariant et qui met en bijection les points fixes.

Remarque 8.3.3. De la même manière que θ est relié à $\mathbf{h} = (h, H_1, \dots, H_{\ell-1})$ par la formule $\theta = (-h + H_0, H_1, \dots, H_{\ell-1})$, $\bar{\theta}$ est relié au paramètre $\bar{\mathbf{h}} = (-h, -H_{\ell-1}, \dots, -H_1)$ et d'après le lemme 8.2.23, on a $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}} \iff \bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$.

D'après [Gor08, 7.2], on peut définir une action du groupe symétrique affine

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{S}}_{\ell} &= \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{\ell-1}, \sigma_i^2 = 1, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1 \\ &\text{et } \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ pour } 0 \leq i \leq \ell - 1 \rangle \end{aligned}$$

sur l'espace Θ de la manière suivante, pour $0 \leq i \leq \ell - 1$ et en considérant les indices modulo ℓ :

$$\sigma_i \cdot (\theta_0, \dots, \theta_{\ell-1}) = (\theta_0, \dots, \theta_{i-1} + \theta_i, -\theta_i, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_{\ell-1}).$$

Les hyperplans de réflexions de cette action sont déterminés, comme les murs GIT, par l'ensemble \widetilde{R}_+ des racines positives de $\widetilde{A}_{\ell-1}$:

$$\{\theta \in \Theta, \theta \cdot \beta = m, \text{ pour } \beta \in \widetilde{R}_+ \text{ et } m \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition 8.3.4. Les composantes connexes de l'ensemble $\Theta \otimes \mathbb{R}$ privé des hyperplans de réflexions sont appelées alcôves.

On appelle alcôve fondamentale celle qui contient le ℓ -uplet $\mathbf{1} = \left(\frac{1}{\ell}, \dots, \frac{1}{\ell}\right)$ et on la note A_0 .

Exemple 8.3.5. D'après [Bou68, chap. 6, §2, prop. 5], l'alcôve fondamentale est bordée de ℓ murs qui ont pour équation :

$$\theta_i = 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq \ell - 1 \text{ et } \theta_1 + \dots + \theta_{\ell-1} = 1.$$

Les équations $\theta_i = 0$, pour $1 \leq i \leq \ell - 1$ proviennent de l'équation $\theta \cdot \alpha_i = 0$, où $(\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1})$ est la base des racines simples de $A_{\ell-1}$ et l'équation $\theta_1 + \dots + \theta_{\ell-1} = 1$ provient de $\theta \cdot \tilde{\alpha} = 1$, où $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{\ell-1}$ est la plus grande racine. De plus, elle est équivalente à $\theta_0 = 0$ car $\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1} = 1$. L'alcôve fondamentale peut donc être décrite par

$$A_0 = \{\theta \in \Theta : 0 < \theta_i < 1, \forall 0 \leq i \leq \ell - 1\}.$$

Par définition (cf. définition 8.2.11), les murs GIT dans Θ forment donc un sous-ensemble de l'ensemble des hyperplans de réflexions et donc les alcôves partitionnent l'intersection des chambres GIT avec Θ . De plus, l'action de $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\ell}$ est transitive sur les alcôves, on peut donc définir une application surjective, d'après [Gor08, 7.12] :

$$\alpha : \mathbb{Z}_0^{\ell} \times \mathfrak{S}_{\ell} \times \{\pm\} \rightarrow \{\text{alcôves}\}$$

qui envoie $(\mathbf{s}, w, +)$ sur l'alcôve qui contient $w^{-1}(\mathbf{1} + (s_0 - s_{\ell-1}, s_1 - s_0, \dots, s_{\ell-1} - s_{\ell-2}))$ et $(\mathbf{s}, w, -)$ sur l'alcôve qui contient $w^{-1}(-\mathbf{1} + (s_{\ell-1} - s_0, s_{\ell-2} - s_{\ell-1}, \dots, s_0 - s_1))$.

Remarque 8.3.6. L'action de \mathfrak{S}_{ℓ} que l'on a définie à la proposition 1.2.19 était naturelle dans le sens où elle correspond à celle sur Θ de \mathfrak{S}_{ℓ} , vu comme sous-groupe de $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\ell}$. En effet, si $\theta = \mathbf{1} + (s_0 - s_{\ell-1}, s_1 - s_0, \dots, s_{\ell-1} - s_{\ell-2})$ et $\sigma_k = (k, k + 1)$, alors $\sigma_k(\theta) = \mathbf{1} + (s'_0 - s'_{\ell-1}, s'_1 - s'_0, \dots, s'_{\ell-1} - s'_{\ell-2})$, où pour $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq k \leq \ell - 1$, $s'_{i-1} = s_{\sigma_k(i)-1} + \frac{\sigma_k(i)-i}{\ell}$. Ainsi, les alcôves $\alpha(w' \cdot \mathbf{s}, w' w, \pm)$ et $\alpha(\mathbf{s}, w, \pm)$ sont confondues.

On sait donc comment se déplacer au sein des alcôves positives (i.e. de la forme $\alpha(\mathbf{s}, w, +)$) ou au sein des alcôves négatives (celles qui sont paramétrées par un $-$). Pour passer d'une alcôve positive à une alcôve négative, on va utiliser l'involution $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_{\ell-1}) \mapsto \bar{\theta} = (-\theta_0, -\theta_{\ell-1}, \dots, -\theta_1)$.

Proposition 8.3.7. $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, id, +) \iff \bar{\theta} \in \alpha(\mathbf{s}, id, -)$

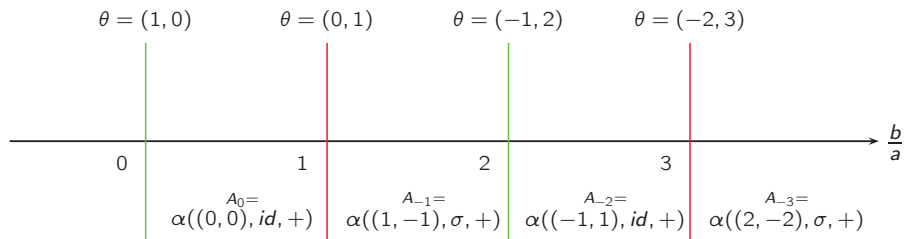
Démonstration. Si $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, id, +)$ alors il est dans la même alcôve que $\mathbf{1} + (s_0 - s_{\ell-1}, s_1 - s_0, \dots, s_{\ell-1} - s_{\ell-2})$. D'après la description des hyperplans de l'alcôve fondamentale à l'exemple 8.3.5, il est clair alors que $\bar{\theta}$ va être dans la même alcôve que $\bar{\mathbf{1}} + (s_0 - s_{\ell-1}, s_1 - s_0, \dots, s_{\ell-1} - s_{\ell-2}) = -\mathbf{1} + (s_{\ell-1} - s_0, s_{\ell-2} - s_{\ell-1}, \dots, s_0 - s_1)$. \square

Exemple 8.3.8. Les alcôves sont décrites très simplement pour B_n dans la partie 3 de [GM09]. Soit $H_{\mathbf{h}}(B_n)$ l'algèbre de Cherednik associée au groupe de réflexions de type B_n et au paramètre $\mathbf{h} = (h, H_1)$. On note $a = h$ et $b = H_0 = -H_1$. On a alors, d'après les formules du paragraphe 8.2.8, $\theta_0 = -a + b$ et $\theta_1 = -b$, et, en divisant par $-a$, on obtient $\theta_0 = 1 - \frac{b}{a}$ et $\theta_1 = \frac{b}{a}$. L'alcôve fondamentale $0 < \theta_0 < 1$ et $0 < \theta_1 < 1$ est donc décrite par $0 < \frac{b}{a} < 1$. On note A_i l'alcôve $\{(d, -d + 1), i < d < i + 1\}$ et σ la transposition (01). Alors :

- si i est pair, A_i est de type $\alpha((\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}), id, +)$
- et sinon $A_i = \alpha((\frac{1-i}{2}, \frac{i-1}{2}), \sigma, +)$.

Au paramètre $\theta = (1 - \frac{b}{a}, \frac{b}{a})$, avec le changement de paramètre $r = h$ et $m^i = \frac{H_1 + \dots + H_i}{h}$, on associe les paramètres $\mathbf{m} = (0, \frac{-b}{a})$ et $r = -1$. Mais quand on va s'intéresser à l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ (qui est invariant par translation sur \mathbf{m} d'après la remarque 1.2.12), on considérera en général le paramètre $\mathbf{m} = (\frac{b}{a}, 0)$.

On a représenté sur la figure suivante les quatre premières alcôves en fonction de la valeur de $\frac{b}{a}$.



Type d'un mur

Le sous-groupe de $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\ell}$ qui fixe un paramètre θ se trouvant dans l'adhérence de l'alcôve A_0 est engendré par $\{\sigma_j, j \in J\}$, où $J \subset \{0, \dots, \ell - 1\}$. Plus précisément : $j \in J \iff \theta$ se trouve sur le mur d'équation $\theta_j = 0$. On dit alors que θ est de type J .

Définition 8.3.9. Le type d'un mur bordant une alcôve est un sous-ensemble J de $\{0, \dots, \ell - 1\}$ qui est défini comme le type des éléments se trouvant sur le mur de l'alcôve fondamentale correspondant à ce mur par l'action transitive de $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\ell}$.

Exemple 8.3.10. Revenons à l'exemple 8.3.8 pour décrire les murs dans le cas $\ell = 2$. L'alcôve fondamentale est bordée par le mur d'équation $\frac{b}{a} = 1$, qui correspond à $\theta_0 = 0$ et qui est donc de type $\{0\}$, et le mur d'équation $\frac{b}{a} = 0$ qui est de type $\{1\}$. L'action de

\mathfrak{S}_2 nous donne tous les murs de type $\{0\}$ de la forme $\frac{b}{a} \in 2\mathbb{Z} + 1$, qui sont représentés en rouge sur la figure de l'exemple précédent et les murs de type $\{1\}$ par $\frac{b}{a} \in 2\mathbb{Z}$, en vert sur la figure.

La notion d'alcôve que nous venons de présenter va permettre de décrire concrètement la représentation du carquois $\overline{Q_\infty}$ qui correspond au point fixe $x_\theta(\lambda)$ grâce aux partitions $\tau_s(w \cdot {}^t \lambda)$ définies au paragraphe 1.2.4. Nous allons présenter la construction faite par I. Gordon de la bijection $x_\theta(\lambda) \mapsto \tau_s(w \cdot {}^t \lambda)$ définie à partir de l'alcôve dans laquelle se trouve θ . Puis en utilisant le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$, nous pourrions transférer cette description faite dans le cas lisse au cas non lisse, en utilisant le type du mur sur lequel se trouve θ' . Pour cela, nous nous baserons sur [Gor08, §8]. Dans cet article, les points fixes ont été décrits dans le cas non lisse sans utiliser $\pi_{\theta, \theta'}$, nous réécrivons la preuve principale avec ce morphisme afin d'obtenir des informations supplémentaires.

8.3.2 Cas lisse : variétés $\mathcal{M}_\theta(n)$ et schémas de Hilbert

Cet exposé est inspiré de [Gor08, §7].

Définition 8.3.11. *Le schéma de Hilbert de N points sur le plan affine $\text{Hilb}^N \mathbb{C}^2$ est décrit de manière ensembliste par les idéaux I de $\mathbb{C}[X, Y]$ tels que $\dim(\mathbb{C}[X, Y]/I) = N$.*

C'est une variété lisse, connexe, de dimension $2N$ (cf. [Fog68]).

Proposition 8.3.12 (th. 1.14 de [Nak99]).

$\text{Hilb}^N \mathbb{C}^2 = \{(A, B; v) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{C}^N, [A, B] = 0, \text{ vérifiant : } \\ \text{il n'existe pas de sous-espace } S \subset \mathbb{C}^N \text{ stable par } A \text{ et } B \text{ et tel que } v \in S\} / \text{GL}_N(\mathbb{C})$

où l'action de $\text{GL}_N(\mathbb{C})$ est définie par $g \cdot (A, B; v) = (gAg^{-1}, gBg^{-1}, gv)$.

Décrivons cette bijection : soit I un idéal de $\mathbb{C}[X, Y]$ tel que $V = \mathbb{C}[X, Y]/I$ est de dimension N sur \mathbb{C} . On définit A et B comme les matrices de multiplication par X et Y . Ce choix dépend du choix d'une base de V mais comme on quotiente par $\text{GL}_N(\mathbb{C})$, cela n'a pas d'importance. On construit $v \in V$ tel que $v = 1 + I$. Alors à I on associe $(A, B; v)$.

Réciproquement, à $(A, B; v)$ tels que $[A, B] = 0$ on associe l'idéal de $\mathbb{C}[X, Y]$ qui est le noyau du morphisme de modules surjectif

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X, Y] & \rightarrow & \mathbb{C}^N \\ f & \mapsto & f(A, B)(v) \end{array}$$

L'action de \mathbb{C}^* définie sur un élément $(A, B; v) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^{\oplus 2} \oplus \mathbb{C}^N$ par, pour $\eta \in \mathbb{C}^*$, $\eta \cdot (A, B; v) = (\eta A, \eta^{-1} B; v)$ se transporte donc sur $\text{Hilb}^N \mathbb{C}^2$ et correspond à l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}[X, Y]$ définie par $\eta \cdot (X, Y) = (\eta X, \eta^{-1} Y)$.

Proposition 8.3.13 (Gordon). *Les \mathbb{C}^* -points fixes de $\text{Hilb}^N \mathbb{C}^2$ sont les idéaux de la forme $I_\rho = \langle X^p Y^q, (p, q) \text{ n'est pas une boîte de } [\rho] \rangle$, où $\rho \in \mathcal{P}(N)$. De plus, ils sont associés aux représentations de μ_ℓ de la forme $\mathbb{C}[X, Y]/I_\rho$, qui ont pour caractère*

$\sum_{i=0}^{\ell-1} N_i(\rho) \alpha_i$, où, pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, $N_i(\rho) = \text{card}\{(p, q) \in [\rho], \text{cont}(p, q) \equiv i[\ell]\}$ et

α_i est le caractère irréductible de μ_ℓ défini par $\alpha_i(\zeta_\ell) = \zeta_\ell^i$.

Démonstration. Les idéaux fixes sous l'action de \mathbb{C}^* sont les idéaux I homogènes pour cette action et tels que $\dim \mathbb{C}[X, Y]/I = N$. Mais par construction, ces idéaux sont nécessairement de la forme I_ρ , $\rho \in \mathcal{P}(N)$.

Le groupe $\mu_\ell \subset \mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{C}[X, Y]$ et donc sur $\text{Hilb}^N \mathbb{C}^2$ par la même action que \mathbb{C}^* . On peut donc voir $\mathbb{C}[X, Y]/I_\rho$ comme une représentation de μ_ℓ de dimension N . De plus, ζ_ℓ agit sur $X^p Y^q$ par $\zeta_\ell^{\text{cont}(\rho, q)}$ donc, pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, il agit par α_i sur toutes les boîtes dont le contenu est congru à i modulo ℓ . Donc $\mathbb{C}[X, Y]/I_\rho$ a pour caractère

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} N_i(\rho) \alpha_i.$$

□

Corollaire 8.3.14 (Gordon). *Soient $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, id, +)$, $\nu_{\mathbf{s}}$ le ℓ -cœur correspondant à \mathbf{s} et $N = \ell n + |\nu_{\mathbf{s}}|$. On a une bijection naturelle entre $(\mathcal{M}_\theta(n))^{\mathbb{C}^*}$ et $\mathcal{P}_{\nu_{\mathbf{s}}}(N)$ qui est de la forme $x_\theta(\lambda) \mapsto \tau_{\mathbf{s}}({}^t \lambda)$.*

Démonstration. D'après le lemme 7.8 et la proposition 7.10 de [Gor08], quand $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, id, +)$, les \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathcal{M}_\theta(n)$ sont en bijection avec ceux de $\text{Hilb}^n(\nu_{\mathbf{s}})$, qui est une composante de $(\text{Hilb}^N \mathbb{C}^2)^{\mu_\ell}$. Ils sont donc décrits par les idéaux I_ρ , $\rho \in \mathcal{P}_{\nu_{\mathbf{s}}}(N)$. Cette bijection est de la forme

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_\theta(n))^{\mathbb{C}^*} &\longleftrightarrow \mathcal{P}_{\nu_{\mathbf{s}}}(N) \\ x_\theta(\lambda) &\longleftrightarrow \tau_{\mathbf{s}}({}^t \lambda) \end{aligned}$$

et elle est construite en plaçant au sommet ∞ du carquois $\overline{\mathcal{Q}_\infty}$ une représentation de dimension 1 et, pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, à chaque sommet i , la $i^{\text{ième}}$ composante μ_ℓ -isotypique de la représentation correspondant au noyau de la projection :

$$\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}({}^t \lambda)} \twoheadrightarrow \mathbb{C}[X, Y]/I_{\nu_{\mathbf{s}}}$$

(on a alors bien une représentation de dimension n car $N_i(\tau_{\mathbf{s}}({}^t \lambda)) = n + N_i(\nu_{\mathbf{s}})$).

□

Par la suite, on notera encore $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}({}^t \lambda)}$ la représentation de $\overline{\mathcal{Q}_\infty}$ que l'on vient de définir afin d'alléger les notations.

8.3.3 Cas non lisse : J -classes

Soient $J \subset \{0, \dots, \ell - 1\}$ et N un entier.

Définition 8.3.15.

(i) Pour $j \in J$, une boîte γ d'un diagramme de Young d'une partition ρ de N est dite j -supprimable si son contenu (cf. définition 1.1.6) est congru à j modulo ℓ et si quand on l'enlève du diagramme de Young, on a encore le diagramme de Young d'une partition, appelée prédécesseure de ρ .

(ii) Pour une partition ρ , on définit son J -cœur ρ_J comme la partition obtenue en enlevant toutes les boîtes j -supprimables, pour $j \in J$, du diagramme de Young de ρ et de ses prédécesseures.

(iii) Un sous-ensemble de $\mathcal{P}(N)$ constitué de partitions ayant le même J -cœur est appelé une J -classe. On notera $\bar{\rho}^J$ la J -classe contenant ρ .

Le lien entre les alcôves et les partitions $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ tient dans la proposition [Gor08, 8.3] que nous présentons ici comme un théorème car c'est un résultat qui est fondamental pour tout ce qui va suivre.

Théorème 8.3.16 (Gordon). Soient θ' un paramètre se trouvant sur un mur GIT de type J , θ vivant dans l'alcôve $\alpha(\mathbf{s}, w, +)$ qui borde ce mur et $N = \ell n + |\nu_{\mathbf{s}}|$. Les \mathbb{C}^* -points fixes de $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ sont en bijection avec les J -classes de $\mathcal{P}_{\nu_{\mathbf{s}}}(N)$ par l'application qui à $\pi_{\theta, \theta'}(x_{\theta}(\lambda))$ fait correspondre la J -classe de $\tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \lambda)$.

Remarque 8.3.17. (i) Ce résultat englobe le corollaire 8.3.14 car un paramètre à l'intérieur d'une alcôve est de type $J = \emptyset$ et alors les J -classes sont des singletons.
 (ii) On ne démontrera ce résultat que pour les alcôves de la forme $\alpha(\mathbf{s}, id, +)$, la remarque 8.3.6 nous permettant de conclure pour toutes les alcôves positives. Pour une alcôve négative, on aura un résultat semblable en remplaçant λ par $\bar{\lambda}$ d'après la proposition 8.3.7 et [Gor08, 7.1] (cf. l'explication précédant la remarque 8.3.3).

Démonstration. Afin de décrire combinatoirement le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$, on va réécrire la démonstration de [Gor08, 8.3] en utilisant que $(\mathcal{M}_{\theta'}(n))^{\mathbb{C}^*} = \pi_{\theta, \theta'}((\mathcal{M}_{\theta}(n))^{\mathbb{C}^*})$ ainsi que la description de $(\mathcal{M}_{\theta}(n))^{\mathbb{C}^*}$ par les représentations $\{\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}({}^t \lambda)}, \lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)\}$ du carquois \overline{Q}_{∞} (cf. paragraphe précédent).

Appliquons d'abord une translation sur les paramètres pour se retrouver dans l'alcôve fondamentale. On peut donc supposer que $\theta = \mathbf{1}$ et que θ' se trouve sur un mur de l'alcôve fondamentale. Ainsi, d'après les équations de cette alcôve, θ' vérifie : $\theta'_i \geq 0$ pour tout i et $J = \{0 \leq j \leq \ell - 1, \theta'_j = 0\}$. Par construction (cf. §8.2.6), $\pi_{\theta, \theta'}$ envoie $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)}$, vue comme une représentation $\mathbf{1}$ -stable sur $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)}$ qui est une représentation θ' -semistable.

Lemme 8.3.18. $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)}$ et $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\mu)}$ ont la même image par $\pi_{\theta, \theta'}$ si et seulement si $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ et $\tau_{\mathbf{s}}(\mu)$ sont dans la même J -classe.

Preuve. D'après le théorème 8.2.9, $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)}$ et $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\mu)}$ ont la même image par $\pi_{\theta, \theta'}$ si et seulement si elles ont les mêmes facteurs de composition dans leur filtration de Jordan-Hölder. Montrons que celle-ci est liée au J -cœur de $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$.

Notons V_i l'espace vectoriel correspondant au sommet i , pour $1 \leq i \leq \ell - 1$ et W celui du sommet ∞ . On choisit un paramètre θ'_{∞} tel que

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} n\theta'_i + \theta'_{\infty} = 0.$$

Alors $\mu_{\theta'}(V, W) = 0$.

On veut construire la filtration de Jordan-Hölder de $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)}$, c'est à dire une suite $\tilde{V}_0 = V \supset \tilde{V}_1 \supset \tilde{V}_2 \supset \dots \supset \tilde{V}_k = \{0\}$ de sous-représentations de $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)}$ telles que pour tout i :

- la représentation $\tilde{V}_i/\tilde{V}_{i+1}$ est stable
- $\mu_{\theta'}(\tilde{V}_i/\tilde{V}_{i+1}, W) = \mu_{\theta'}(V, W) = 0$.

On va commencer par construire \tilde{V}_{k-1} qui doit être une représentation stable et de pente nulle. On voit que pour ne pas changer la pente, il suffit d'intervenir sur les sommets i tels que $\theta'_i = 0$, c'est à dire $i \in J$. Or le sommet i est relié par la représentation $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)}$ aux boîtes du diagramme de Young de $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ dont le contenu est congru à i modulo ℓ . De plus, si (p, q) est une boîte supprimable alors le module engendré par $X^p Y^q$ est simple car X et Y vont agir par 0 sur $X^p Y^q$. Ainsi, si l'on pose $\tilde{V}_{k-1} = \mathbb{C}[X, Y] \cdot X^p Y^q$, où (p, q) est une boîte supprimable dont le contenu est congru à i modulo ℓ avec $i \in J$, alors \tilde{V}_{k-1} est stable et de pente nulle. En enlevant une par une les boîtes J -supprimables, on construit une suite $\tilde{V}_{k-1} \subset \tilde{V}_{k-2} \subset \dots \subset \tilde{V}_1$ telle que les quotients sont tous stables et la pente est constante. La dernière représentation \tilde{V}_1 est

donc engendrée par toutes les boîtes J -supprimables, ainsi $V/\tilde{V}_1 = \mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s(\lambda)_J}$. Cette représentation est aussi de pente nulle, voyons si elle est stable. Soit V' une sous-représentation stricte et non nulle de $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s(\lambda)_J}$, alors

$$\begin{aligned} \mu_{\theta'}(V', W) &= \frac{\sum_{i \notin J} \theta'_i \dim V'_i + \theta'_\infty}{\sum \dim V_{i+1}} \\ &= \frac{\mu_{\theta'}(V, W) + \sum_{i \notin J} \theta'_i (\dim V'_i - \dim V_i)}{\sum \dim V_{i+1}} \\ &< 0 \end{aligned}$$

car $\theta'_i \geq 0$ pour tout $0 \leq i \leq \ell - 1$. Donc la suite de Jordan-Hölder de $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s(\lambda)}$ est déterminée par l'ensemble des boîtes J -supprimables de $\tau_s(\lambda)$ et par son J -cœur. Ainsi :

$\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s(\lambda)}$ et $\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s(\mu)}$ ont la même image par $\pi_{\theta, \theta'}$
 \iff elles ont les mêmes facteurs de composition dans leur filtration de Jordan-Hölder
 $\iff \tau_s(\lambda)$ et $\tau_s(\mu)$ ont le même nombre de boîtes J -supprimables et le même J -cœur.

Mais par définition de τ_s , ces deux partitions ont le même ℓ -cœur ν_s et donc pour tout i , $N_i(\tau_s(\lambda)) = N_i(\tau_s(\mu))$. Donc si elles ont le même J -cœur alors elles ont le même nombre de boîtes J -supprimables. On a donc montré que

$$\pi_{\theta, \theta'}(\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s(\lambda)}) = \pi_{\theta, \theta'}(\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s(\mu)}) \iff \tau_s(\lambda)_J = \tau_s(\mu)_J$$

ce qui démontre le lemme. \square

De plus, d'après le paragraphe précédent, le point fixe $x_\theta(\lambda)$ est associé à la partition $\tau_s({}^t\lambda)$, donc :

$$\begin{aligned} \pi_{\theta, \theta'}(x_\theta(\lambda)) &= \pi_{\theta, \theta'}(x_\theta(\mu)) \\ \iff \pi_{\theta, \theta'}(\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s({}^t\lambda)}) &= \pi_{\theta, \theta'}(\mathbb{C}[X, Y]/I_{\tau_s({}^t\mu)}) \\ \iff \tau_s({}^t\lambda) \text{ et } \tau_s({}^t\mu) &\text{ ont le même } J\text{-cœur, ce qui démontre le théorème.} \end{aligned}$$

\square

Corollaire 8.3.19. *Soit θ' un paramètre se trouvant sur un mur de type J bordant une alcôve du type $\alpha(\mathbf{s}, id, +)$ dans laquelle se trouve θ . Soit ν_s le ℓ -cœur correspondant à \mathbf{s} et $N = |\nu_s| + \ell n$. Alors la restriction de $\pi_{\theta, \theta'}$ aux points fixes peut être décrite comme une application de $\mathcal{P}(\ell, n)$ dans l'ensemble des J -classes de $\mathcal{P}_{\nu_s}(N)$ qui à λ associe la J -classe de $\tau_s({}^t\lambda)$.*

Ordres sur les blocs de Calogero-Moser

Dans ce chapitre, on va tout d'abord chercher à caractériser les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$ (cf. paragraphe 4.3.6 pour la définition), en les décrivant de manière géométrique, puis combinatoire. On pourra alors déterminer facilement si deux éléments sont dans le même bloc.

Ces différentes descriptions vont nous permettre ensuite de construire plusieurs ordres sur l'ensemble des blocs : des ordres algébriques (les ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions), un ordre combinatoire et enfin l'ordre géométrique. On comparera ensuite ces différents ordres afin d'interpréter combinatoirement ou géométriquement les \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions. Pour finir, dans le cas des groupes de type B_n , on reliera les blocs aux classes d'équivalence de l'ordre combinatoire.

Hypothèse. Dans tout ce chapitre, on considérera que les paramètres \mathbf{h} , θ , \mathbf{m} et r sont reliés par les formules de la remarque 7.4.4 et de l'hypothèse du paragraphe 8.2.8 :

$$\begin{aligned} \theta &= (-h + H_0, H_1, \dots, H_{\ell-1}), \\ r = h, \quad m^0 &= 0 \text{ et } rm^i = H_1 + \dots + H_i \text{ pour } 1 \leq i \leq \ell - 1. \end{aligned}$$

9.1 Différentes descriptions de $CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$

L'objectif de ce paragraphe est la description des blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$ de différentes manières, d'après [Gor08]. Tout d'abord, géométriquement, grâce aux \mathbb{C}^* -points fixes des variétés $\mathcal{M}_{\theta}(n)$, puis combinatoirement, grâce aux partitions $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$ définies au paragraphe 1.2.4. Nous terminerons en présentant une autre description combinatoire de $CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$, qui découle des précédentes : par les résidus et les contenus, d'après [Mar10] et [BK02].

9.1.1 Description géométrique des blocs

Différentes \mathbb{C}^* -actions

On a défini au paragraphe 8.3 une action de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ et $\mathcal{X}_{\theta}(n)$ qui est telle que

$$(\mathcal{M}_{\theta}(n))^{\mathbb{C}^*} \leftrightarrow (\mathcal{X}_{\theta}(n))^{\mathbb{C}^*}.$$

Définissons aussi une action hyperbolique de \mathbb{C}^* sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ par

$$\eta \cdot (x, y) = (\eta x, \eta^{-1} y).$$

Elle induit une action de \mathbb{C}^* sur $\mathfrak{h}/G(\ell, 1, n) \times \mathfrak{h}^*/G(\ell, 1, n)$ et sur l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)$, donc sur $\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$, qui sont telles que le morphisme

$$\Upsilon_{\mathbf{h}} : \text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)) \longrightarrow \mathfrak{h}/G(\ell, 1, n) \times \mathfrak{h}^*/G(\ell, 1, n),$$

construit au paragraphe 4.3.2, est \mathbb{C}^* -équivariant.

Le théorème 1.4 de [Mar08] permet de relier ces deux actions de \mathbb{C}^* .

Théorème 9.1.1 (Etingof-Ginzburg, Martino). *Il existe un isomorphisme entre les variétés $\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$ et $\mathcal{X}_{\theta}(n)$ qui est invariant sous l'action de \mathbb{C}^* .*

Grâce à ce théorème et au corollaire 8.3.2, il suffit d'étudier les points fixes de $\text{Specm } Z_{\frac{\mathbf{h}}{2}}(G(\ell, 1, n))$ pour connaître ceux de $\mathcal{M}_{\theta}(n)$.

\mathbb{C}^* -points fixes de $\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$ et de $\mathcal{M}_{\theta}(n)$

Par définition, les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$ sont en bijection avec l'ensemble $\Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0)$. Pour relier les points fixes de $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ à $CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$, il faut donc commencer par comparer cet ensemble avec $(\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)))^{\mathbb{C}^*}$. Nous allons pour cela utiliser le lemme 5.1 de [Gor08] qui est énoncé dans le cas lisse uniquement mais la démonstration s'applique aussi au cas non lisse.

Lemme 9.1.2 (Gordon). $(\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)))^{\mathbb{C}^*} = \Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0)$

Preuve du lemme. L'action de \mathbb{C}^* sur $\mathfrak{h}/G(\ell, 1, n) \times \mathfrak{h}^*/G(\ell, 1, n)$ a 0 pour seul point fixe. Ainsi $(\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)))^{\mathbb{C}^*} \subset \Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0)$. Or \mathbb{C}^* est connexe et il agit continûment sur $\Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0)$ qui est finie, il fixe donc tous les points de $\Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0)$ et $\Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0) = (\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)))^{\mathbb{C}^*}$. \square

On en déduit alors le théorème suivant :

Théorème 9.1.3 (Gordon). *Les \mathbb{C}^* -points fixes de la variété $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ sont en bijection avec les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$.*

Démonstration. Cela vient directement des résultats énoncés précédemment :

$$CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)) \leftrightarrow \Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0) = (\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n)))^{\mathbb{C}^*} \leftrightarrow (\mathcal{M}_{2\theta}(n))^{\mathbb{C}^*} \leftrightarrow (\mathcal{M}_{\theta}(n))^{\mathbb{C}^*}$$

car d'après le théorème 8.2.13, les variétés $\mathcal{M}_{2\theta}(n)$ et $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ sont isomorphes. \square

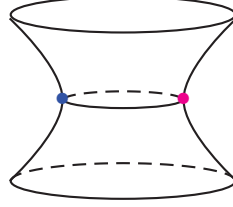
Corollaire 9.1.4 (Gordon). *Si $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$ alors les ensembles $(\mathcal{M}_{\theta}(n))^{\mathbb{C}^*}$ et $\mathcal{P}(\ell, n)$ sont en bijection.*

Remarque 9.1.5. *Cette correspondance est naturelle dans le sens où, si l'on note $x_{\theta}(\lambda)$ le point fixe de $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ associé à la multipartition λ dans le corollaire 8.3.14 alors ce point, vu dans $\text{Specm } Z_{\frac{\mathbf{h}}{2}}(G(\ell, 1, n))$ par les différents isomorphismes entre les variétés, représente le module simple $L_{\frac{\mathbf{h}}{2}}(\chi_{\lambda})$, comme dans la proposition 4.3.8.*

De plus, d'après [Gor08, 7.1], l'isomorphisme ϕ entre $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ et $\mathcal{M}_{\bar{\theta}}(n)$ mentionné au paragraphe 8.3.1 vérifie $\phi(x_{\theta}(\lambda)) = x_{\bar{\theta}}(\bar{\lambda})$.

Démonstration. Si $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$ alors $\mathcal{M}_{2\theta}(n)$ et $\mathcal{X}_{\theta}(n)$ sont lisses. Donc d'après le théorème 9.1.1, $\text{Specm } Z_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$ l'est aussi. Alors le corollaire 4.3.23 affirme que $\Upsilon_{\mathbf{h}}^{-1}(0)$ est en bijection avec $\text{Irr } G(\ell, 1, n)$ qui a été décrit par les ℓ -multipartitions de n au théorème 7.1.5. \square

Exemple 9.1.6. Revenons à l'exemple 8.2.22, pour $\ell = 2$ et $n = 1$. On a deux 2-multipartitions de 1 : $((1); \emptyset)$ et $(\emptyset; (1))$, la variété $\mathcal{M}_\theta(1)$ doit donc avoir deux points fixes dans le cas lisse. Ils sont représentés sur la figure suivante, cf. annexe C pour les calculs.



Les deux points fixes de $\mathcal{M}_\theta(1)$, pour $\theta_1 \neq 0$

9.1.2 Description combinatoire des blocs

En combinant les théorèmes 8.3.16 et 9.1.3, on peut décrire combinatoirement les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$, c'est l'objet du théorème 2.5 de [GM09] :

Théorème 9.1.7 (Gordon-Martino). *Si θ se trouve dans la clôture d'une alcôve de la forme $\alpha(\mathbf{s}, w, +)$ et est de type J , alors, pour λ et $\mu \in \mathcal{P}(\ell, n)$:*

$$\lambda \sim_{CM_h} \mu \iff \tau_s(w \cdot {}^t \lambda) \text{ et } \tau_s(w \cdot {}^t \mu) \text{ ont le même } J\text{-cœur,}$$

où $\lambda \sim_{CM_h} \mu$ signifie que λ et μ sont dans le même bloc de $CM_h(G(\ell, 1, n))$.

Remarque 9.1.8. Cette description des blocs de $G(\ell, 1, n)$ par les alcôves suppose que $h \neq 0$ (cf. §8.3.1), le cas $h = 0$ est traité dans [Bel10].

Ce théorème a permis à M. Martino de donner une autre caractérisation combinatoire des blocs de Calogero-Moser (cf. [Mar10, 3.13]). En la couplant à [BK02, 3.4], on obtient une description des blocs par les résidus et les contenus des symboles des multipartitions (cf. paragraphe 1.2 pour les définitions).

Théorème 9.1.9 (Martino, Broué-Kim). *Soient $\mathbf{h} = (-1, H_1, \dots, H_{\ell-1})$, $m^i = -\sum_{j=1}^i H_j$*

pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, s un entier tel que $s \geq \max\{hc^\lambda, hc^\mu\} + 1$ et $d \in \mathbb{Z}$ tel que $d\tilde{\mathbf{h}} = (0, dH_1, \dots, dH_1 + \dots + dH_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$ alors :

$$\begin{aligned} \lambda \sim_{CM_h} \mu &\iff \text{Res}_\lambda^{d\tilde{\mathbf{h}}}(x^d) = \text{Res}_\mu^{d\tilde{\mathbf{h}}}(x^d) \\ &\iff \text{cont}(\mathfrak{B}_m^s(\lambda)) = \text{cont}(\mathfrak{B}_m^s(\mu)). \end{aligned}$$

Cette caractérisation nous permet d'obtenir, dans le cas $G(\ell, 1, n)$, un résultat similaire au corollaire 4.3.28 pour les \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions.

Corollaire 9.1.10. *Les \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions sont constantes à l'intérieur d'un bloc de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$.*

Démonstration. Si $\lambda \sim_{CM_h} \mu$ alors les symboles $\mathfrak{B}_m^s(\lambda)$ et $\mathfrak{B}_m^s(\mu)$ ont le même contenu, ce qui signifie que les partitions $\kappa_m^s(\lambda)$ et $\kappa_m^s(\mu)$ sont égales et donc $\mathbf{a}_{m,r}(\lambda) = \mathbf{a}_{m,r}(\mu)$ et $\mathbf{A}_{m,r}(\lambda) = \mathbf{A}_{m,r}(\mu)$, d'après les formules données au théorème 7.3.3. \square

9.2 Différents ordres sur $CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$

9.2.1 Ordres algébriques

Définitions

Les corollaires 4.3.28 et 9.1.10 affirment que les fonctions \mathbf{c} et \mathbf{a} sont constantes sur les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$. On peut donc définir la valeur de ces fonctions sur les blocs.

Définition 9.2.1. Soit B un bloc de $CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$, on pose $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(B) := \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$ et $\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(B) := \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$, pour $\lambda \in B$.

Remarque 9.2.2. Les paramètres (\mathbf{m}, r) et \mathbf{h} étant reliés (cf. hypothèse de début de chapitre), on notera indifféremment $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}$ ou $\mathbf{a}_{\mathbf{h}}$ et $\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}$ ou $\mathbf{c}_{\mathbf{h}}$.

Ces fonctions définissent des ordres partiels sur les blocs de la manière suivante : pour $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ et $B, B' \in CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$,

$$B \leq_{\mathbf{c}} B' \iff \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(B) > \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(B') \text{ ou } B = B'$$

$$B \leq_{\mathbf{a}} B' \iff \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(B) < \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(B') \text{ ou } B = B'.$$

Dans le cas où $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$, d'après le corollaire 9.1.4, ces ordres sont des ordres sur les ℓ -multipartitions de n .

Par la suite, on va souvent utiliser l'application $\mathbf{h} = (h, H_1, \dots, H_{\ell-1}) \mapsto \bar{\mathbf{h}} = (-h, -H_{\ell-1}, \dots, -H_1)$ et $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^{\ell}) \mapsto \bar{\lambda} = ({}^t\lambda^{\ell}, \dots, {}^t\lambda^1)$. Voyons si ces ordres sont compatibles avec cette involution. D'après [Gor08, preuve du lemme 7.1],

$$\mathbf{c}_{\bar{\mathbf{h}}}(\bar{\lambda}) = \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) + n(n-1)h + nH_0,$$

on a donc

$$\lambda <_{\mathbf{c}_{\mathbf{h}}} \mu \iff \bar{\lambda} <_{\mathbf{c}_{\bar{\mathbf{h}}}} \bar{\mu}.$$

De plus, d'après la formule donnant le lien entre les paramètres, si l'on note (\mathbf{m}, r) les paramètres correspondant à \mathbf{h} , alors les paramètres $(\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{r})$ associés à $\bar{\mathbf{h}}$ sont de la forme $\tilde{r} = -h = -r$, $\tilde{m}^0 = 0$ et pour $1 \leq i \leq \ell - 1$,

$$\tilde{m}^i = \frac{-H_{\ell-1} - \dots - H_{\ell-i}}{-h} = m^{\ell-1} - m^{\ell-i-1}.$$

Donc si l'on note $\bar{m}^i = -m^{\ell-i-1}$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, on a $\tilde{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{m}} + m^{\ell-1}$. Comme l'ordre de la \mathbf{a} -fonction et l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ sont invariants par translation sur les paramètres, on pourra considérer que les paramètres associés à $\bar{\mathbf{h}}$ s'écrivent de la manière suivante en fonction de (\mathbf{m}, r) : $(\bar{\mathbf{m}}, -r)$, avec $\bar{\mathbf{m}} = (-m^{\ell-1}, -m^{\ell-2}, \dots, -m^1, -m^0)$. On a donc, d'après le corollaire 7.3.6, $\mathbf{a}_{\bar{\mathbf{h}}}(\bar{\lambda}) = \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\lambda)$ et l'ordre de la \mathbf{a} -fonction est aussi compatible avec l'involution $\bar{\cdot}$.

Lien avec l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$

Les formules du théorème 7.3.3 et de la proposition 7.4.1 nous permettent de relier l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ (cf. remarque 1.2.12) aux ordres algébriques définis sur $\mathcal{P}(\ell, n)$ pour $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$.

Proposition 9.2.3. Soient $\mathbf{m} \in \mathbb{Q}^\ell$, s un entier tel que $s \geq \max\{hc^\lambda, hc^\mu\} + 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

1. [GJ11, 5.5.16] Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ alors $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu)$.
2. Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ alors $\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu)$.

Démonstration.

1. Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ alors $n_{\mathbf{m}}^s(\lambda) > n_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ d'après la proposition 1.1.5.
2. Il suffit de montrer que si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ alors $N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) < N_{\mathbf{m}}^s(\mu)$. Plaçons nous dans le cas où il n'existe pas de partition $\tilde{\kappa}$ telle que $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \tilde{\kappa} \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$. Alors, d'après [JK81, 1.4.10], les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ ne diffèrent que de deux éléments (le résultat de [JK81, 1.4.10] ne concerne que les partitions d'entiers mais, quitte à multiplier les partitions de rationnels par le plus grand dénominateur présent dans les deux partitions, on peut se ramener à ce cas). Donc il existe $j > i$ tels que : $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = (\kappa_1, \dots, \kappa_i, \dots, \kappa_j, \dots, \kappa_t)$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) = (\kappa_1, \dots, \kappa'_j, \dots, \kappa'_i, \dots, \kappa_t)$, avec $\kappa'_j = \kappa_j + \alpha$ et $\kappa'_i = \kappa_i - \alpha$, où $\alpha > 0$. Et alors

$$\frac{N_{\mathbf{m}}^s(\mu) - N_{\mathbf{m}}^s(\lambda)}{\ell} = f_\alpha(\kappa_i) - f_\alpha(\kappa'_j),$$

où $f_\alpha : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{[x+\alpha]-[x]}{2}(2x+2\alpha-[x+\alpha]-[x]-1) + \alpha x$ est une fonction affine par morceaux, à coefficients directeurs strictement positifs et continue donc strictement croissante. Or $\kappa'_j < \kappa_j \leq \kappa_i$, donc $N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) < N_{\mathbf{m}}^s(\mu)$. □

Remarque 9.2.4. Dans le cas où tous les paramètres sont entiers, on a une preuve plus directe. En effet, $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ sont alors des partitions d'entiers et on peut utiliser la proposition 1.1.5 :

$$\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \implies {}^t(\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)) \triangleright {}^t(\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)) \implies n({}^t(\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda))) < n({}^t(\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu))).$$

Or, sur le même principe qu'à la démonstration du lemme 1.1.10, on a :

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) &= \ell \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^{\kappa_i} j \\ &= \ell \left(\sum_{i=1}^t \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_i + n({}^t(\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda))) \right). \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 1.2.11, $\sum_{i=1}^t \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_i = \sum_{i=1}^t \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_i$, on a donc bien $N_{\mathbf{m}}^s(\lambda) < N_{\mathbf{m}}^s(\mu)$.

Comportement des ordres algébriques à l'intérieur d'une alcôve

Dans ce paragraphe, on va montrer que les ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions ainsi que l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ ne sont pas constants à l'intérieur d'une alcôve. Nous allons voir que les ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions peuvent se renverser à l'intérieur d'une même alcôve, ce qui n'est pas le cas pour l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ mais par contre deux partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ peuvent être comparables puis incomparables dans une même alcôve et l'ordre se renverse alors sur

le mur.

Intéressons-nous d'abord aux ordres des \mathbf{c} et \mathbf{a} -fonctions. Pour l'alcôve $A_0 = \alpha((0,0), id, +)$, qui correspond aux paramètres $\mathbf{m} = (0, -\frac{b}{a})$, avec $0 < \frac{b}{a} < 1$ et $r = -1$, on a $\mathbf{a}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\lambda) = \mathbf{a}_{(\frac{1}{2}, 0), 1}(\bar{\lambda})$. Donc pour les partitions calculées à l'exemple 1.2.13, $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$ qui vérifient $\bar{\lambda} = \mu$, on a :

$$\mathbf{a}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\mu) = \mathbf{a}_{(\frac{1}{2}, 0), 1}(\lambda) = 32, 5 < 34 = \mathbf{a}_{(\frac{1}{2}, 0), 1}(\mu) = \mathbf{a}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\lambda)$$

alors que

$$\mathbf{a}_{(0, -1), -1}(\mu) = \mathbf{a}_{(1, 0), 1}(\lambda) = 40 > 39 = \mathbf{a}_{(1, 0), 1}(\mu) = \mathbf{a}_{(0, -1), -1}(\lambda)$$

(on calcule ici les \mathbf{a} -fonctions en enlevant toutes les constantes, c'est à dire qu'on calcule $n(\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda))$ car seul l'ordre nous intéresse). Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ordre de la \mathbf{a} -fonction est constant dans l'alcôve A_0 , i.e. $\mathbf{a}_{(\epsilon, 0), 1}(\lambda) < \mathbf{a}_{(\epsilon, 0), 1}(\mu)$ pour tout $0 < \epsilon < 1$, alors, par continuité de la \mathbf{a} -fonction en les paramètres (cf. remarque 7.3.4), on aurait $\mathbf{a}_{(1, 0), 1}(\lambda) \leq \mathbf{a}_{(1, 0), 1}(\mu)$, ce qui n'est pas le cas. Donc il existe $0 < \epsilon < 1$ tel que $(0, -\epsilon)$ est dans la même alcôve que $(0, -\frac{1}{2})$ et $\mathbf{a}_{(0, -\epsilon), -1}(\mu) = \mathbf{a}_{(\epsilon, 0), 1}(\lambda) > \mathbf{a}_{(\epsilon, 0), 1}(\mu) = \mathbf{a}_{(0, -\epsilon), -1}(\lambda)$.

De même, on a $\mathbf{c}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\mu) = \mathbf{c}_{(\frac{1}{2}, 0), 1}(\lambda) = 94 > 91 = \mathbf{c}_{(\frac{1}{2}, 0), 1}(\mu) = \mathbf{c}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\lambda)$ alors que $\mathbf{c}_{(0, -1), -1}(\mu) = \mathbf{c}_{(1, 0), 1}(\lambda) = 104 < 106 = \mathbf{c}_{(1, 0), 1}(\mu) = \mathbf{c}_{(0, -1), -1}(\lambda)$.

Par contre, l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ ne va pas se renverser de cette manière à l'intérieur d'une alcôve, au moins pour $\ell = 2$. En effet, si $\mathbf{m} = (\frac{b}{a}, 0)$, avec $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}$ alors pour $\epsilon \in]0, 1[$ tel que $[\frac{b}{a}] < \frac{b}{a} + \epsilon < [\frac{b}{a}] + 1$ ou $[\frac{b}{a}] < \frac{b}{a} - \epsilon < [\frac{b}{a}] + 1$, on ne peut pas avoir $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ et $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)$ ou $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)$. Pour montrer cela, on peut supposer que $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 \neq \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1$; cela revient à considérer le premier indice i tel que $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_i \neq \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_i$ car alors

$$\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \iff \forall j \geq i, \sum_{k=i}^j \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_k \leq \sum_{k=i}^j \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_k,$$

et si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_j = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_j$, comme $\mathbf{m} \notin \mathbb{Z}$, aucun élément de la première ligne du symbole n'est entier alors que tous ceux de la deuxième ligne le sont, donc ces éléments correspondent forcément à la même ligne du symbole et alors

$$\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu) \iff \forall j \geq i, \sum_{k=i}^j \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_k \leq \sum_{k=i}^j \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_k.$$

Supposons donc $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1$ et quatre cas s'imposent alors :

- Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 \in \mathbb{Z}$: comme ce sont des éléments de la deuxième ligne du symbole associé, $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_1 = \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1$ et $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_1 = \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1$ et donc $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_1$ et $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)_1$.
- Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 \in \mathbb{Z}$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 \notin \mathbb{Z}$: alors $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1$ et $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 + \epsilon$, donc $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_1$. Pour $\mathbf{m} - \epsilon$, il faut voir que

$$\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 \leq [\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1] < \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 - \epsilon = \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)_1$$

car $[\frac{b}{a}] < \frac{b}{a} - \epsilon$.

- Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 \notin \mathbb{Z}$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 \in \mathbb{Z}$: on a clairement $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)_1$ et pour $\mathbf{m} + \epsilon$, on raisonne comme dans le cas précédent pour $\mathbf{m} - \epsilon$.
- Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 \notin \mathbb{Z}$ et $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 \notin \mathbb{Z}$: alors $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 + \epsilon$, $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)_1 - \epsilon$, $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 + \epsilon$ et $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)_1 = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)_1 - \epsilon$, on voit donc très facilement que $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_1$ et $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)_1$.

Donc dans tous les cas on a $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)_1$ et $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda)_1 < \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)_1$ et donc on ne peut pas avoir $\kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\lambda) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}+\epsilon}^s(\mu)$ ou $\kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\lambda) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}-\epsilon}^s(\mu)$.

Mais les partitions peuvent devenir incomparables, comme par exemple, pour les mêmes données qu'à l'exemple 1.2.13, c'est à dire $\ell = 2$, $n = 5$, $s = 4$, $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$:

$$\begin{aligned} \kappa_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}^s(\lambda) &= (6 ; 4 ; 3, 5 ; 2, 5 ; 1, 5 ; 1 ; 0, 5 ; 0) \\ &\triangleright (5, 5 ; 4, 5 ; 3 ; 2, 5 ; 2 ; 1 ; 0, 5 ; 0) = \kappa_{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}^s(\mu) \end{aligned}$$

alors que $\kappa_{\left(\frac{9}{10}, 0\right)}^s(\lambda) = (6 ; 4 ; 3, 9 ; 2, 9 ; 1, 9 ; 1 ; 0, 9 ; 0)$ et $\kappa_{\left(\frac{9}{10}, 0\right)}^s(\mu) = (5, 9 ; 4, 9 ; 3 ; 2, 9 ; 2 ; 1 ; 0, 9 ; 0)$ ne sont pas comparables et sur le mur l'ordre s'inverse :

$$\begin{aligned} \kappa_{(1,0)}^s(\lambda) &= (6 ; 4 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0) \\ &\triangleleft (6 ; 5 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0) = \kappa_{(1,0)}^s(\mu). \end{aligned}$$

9.2.2 Ordre combinatoire

Grâce à la description combinatoire des blocs de $G(\ell, 1, n)$ faite au paragraphe 9.1.2, on va pouvoir définir un ordre combinatoire sur $CM_{\mathbf{h}}(G(\ell, 1, n))$. Dans le cas lisse (où θ est à l'intérieur d'une alcôve), c'est un ordre sur $\mathcal{P}(\ell, n)$ défini grâce aux partitions $\tau_s({}^t\lambda)$ qui a été construit dans [Gor08, §7]. Pour un paramètre θ' sur un mur, on va définir un pré-ordre sur les blocs.

Ordre à l'intérieur d'une alcôve

Dans [Gor08, §7], I. Gordon a défini un ordre partiel sur $\mathcal{P}(\ell, n)$ que l'on appellera ordre combinatoire et qui est défini par l'alcôve dans laquelle se trouve le paramètre θ de la manière suivante :

- pour $\theta \in \alpha(s, w, +)$,

$$\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \iff \tau_s(w \cdot {}^t\mu) \triangleleft \tau_s(w \cdot {}^t\lambda)$$

- pour $\theta \in \alpha(s, w, -)$,

$$\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \iff \tau_s(w \cdot {}^t\bar{\mu}) \triangleleft \tau_s(w \cdot {}^t\bar{\lambda}).$$

Remarque 9.2.5. Par définition et d'après la proposition 8.3.7, on a clairement

$$\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \iff \bar{\lambda} \triangleleft_{\bar{\theta}} \bar{\mu}.$$

Pré-ordres sur un mur

Définissons maintenant un ordre combinatoire sur un mur, en utilisant les ordres combinatoires définis dans les chambres bordant ce mur. On a vu que l'on pouvait facilement passer des alcôves positives aux alcôves négatives par l'involution $\bar{\cdot}$. On peut

donc se restreindre à l'étude du cas positif.

Géométriquement, ce qu'il se passe sur un mur est essentiellement lié à ce qu'il se passe sur une des alcôves le bordant. C'est dans cet esprit que I. Gordon a construit, dans [Gor08, §8], un pré-ordre combinatoire pour un paramètre θ' se trouvant sur un mur GIT qui borde une alcôve $\alpha(\mathbf{s}, w, +)$ et qui est de type J , en espérant (cf. [Gor08, rem. 8.3]) que l'ordre combinatoire se comporte de la même manière que l'ordre géométrique. Malheureusement, ce n'est pas le cas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 9.2.6. Pour $\ell = 2$ et $n = 5$, les multipartitions $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$ vérifient

$$\tau_{(0,0)}({}^t\lambda) = (4, 3, 1, 1, 1) \triangleleft (5, 2, 2, 1) = \tau_{(0,0)}({}^t\mu)$$

$$\text{et } \tau_{(1,-1)}({}^t\sigma \cdot \lambda) = (5, 4, 1, 1) \triangleright (4, 2, 2, 2, 1) = \tau_{(1,-1)}({}^t\sigma \cdot \mu),$$

soit, pour $\theta \in \alpha((0, 0), id, +)$ et $\tilde{\theta} \in \alpha((1, -1), \sigma, +)$, $\lambda \triangleright_{\theta} \mu$ et $\lambda \triangleleft_{\tilde{\theta}} \mu$.

Mais ces deux multipartitions ne sont pas dans le même bloc sur le mur $\theta_0 = 0$ qui sépare ces deux alcôves car la partition $\tau_{(0,0)}({}^t\lambda) = (4, 3, 1, 1, 1)$ a pour $\{0\}$ -cœur $(4, 3, 1, 1)$ alors que $\tau_{(0,0)}({}^t\mu) = (5, 2, 2, 1)$ a pour $\{0\}$ -cœur $(4, 2, 2, 1)$, comme on le voit sur leurs diagrammes de Young respectifs, dans lesquels sont représentés les contenus des boîtes modulo 2 :

0	1	0	1
1	0	1	
0			
1			
0			

0	1	0	1	0
1	0			
0	1			
1				

Il faut donc prendre en compte toutes les alcôves bordant un mur.

Dans le cas $\ell = 2$, les alcôves calculées au paragraphe 8.3.1 correspondent aux alcôves pour les cellules de Kazhdan-Lusztig. Une conjecture de C. Bonnafé (cf. [Bon09]) prédit que la partition en cellules obéit à une propriété de semi-continuité, c'est à dire que l'on devine ce qu'il se passe sur les murs en étudiant les alcôves environnantes. Dans cette optique, on peut définir un autre ordre combinatoire pour un paramètre θ' sur un mur qui est entouré par les alcôves A_1, \dots, A_q :

$$\lambda \triangleleft_{\theta'} \mu \iff \exists \lambda_0 = \lambda, \dots, \lambda_p = \mu \text{ telles que pour tout } 0 \leq i \leq p-1 : \\ \text{il existe } 1 \leq j \leq q \text{ tel que, pour } \theta_j \in A_j, \lambda_i \triangleleft_{\theta_j} \lambda_{i+1}.$$

Le pré-ordre sur les blocs associé est défini par, soient B et B' deux blocs de $CM_{\mathfrak{H}'}(G(\ell, 1, n))$:

$$B \triangleleft_{\theta'} B' \iff \exists \lambda \in B \text{ et } \mu \in B', \text{ telles que } \lambda \triangleleft_{\theta'} \mu.$$

Par construction, on a clairement pour θ à l'intérieur d'une alcôve bordant le mur sur lequel se trouve θ' , $\lambda \in B$ et $\lambda' \in B'$, $\lambda \triangleleft_{\theta} \lambda' \Rightarrow B \triangleleft_{\theta'} B'$. L'implication inverse n'est pas forcément vérifiée, mais on a quand même le résultat suivant.

Lemme 9.2.7. *Si B et B' sont deux blocs tels que $B \triangleleft_{\theta'} B'$ et qu'il n'existe pas de bloc B'' tel que $B \triangleleft_{\theta'} B'' \triangleleft_{\theta'} B'$ alors*

il existe $\lambda \in B$, $\lambda' \in B'$ et $1 \leq j \leq q$ tels que, pour $\theta_j \in A_j$, $\lambda \triangleleft_{\theta_j} \lambda'$.

Démonstration. Par définition, comme $B \triangleleft_{\theta'} B'$, il existe $\lambda_0 \in B$, $\lambda_p \in B'$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathcal{P}(\ell, n)$ telles que pour tout $1 \leq i \leq p-1$, il existe $1 \leq j \leq q$ tel que, pour $\theta_j \in A_j$, $\lambda_i \triangleleft_{\theta_j} \lambda_{i+1}$.

Alors les λ_i sont forcément dans B ou B' car si l'on note B_i le bloc dans lequel se trouve λ_i alors on a $B_0 = B \triangleleft_{\theta'} B_1 \triangleleft_{\theta'} \dots \triangleleft_{\theta'} B_{p-1} \triangleleft_{\theta'} B' = B_p$. Or on a supposé qu'il n'existait pas de bloc B'' tel que $B \triangleleft_{\theta'} B'' \triangleleft_{\theta'} B'$ donc les blocs B_i sont égaux à B ou à B' et donc on peut trouver $0 \leq q < p$ tel que $\lambda_q \in B$ et $\lambda_{q+1} \in B'$. On a alors démontré le résultat avec $\lambda = \lambda_q$ et $\lambda' = \lambda_{q+1}$. \square

Montrons pour finir que le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$ est compatible avec les ordres combinatoires \triangleleft_{θ} et $\triangleleft_{\theta'}$. Si θ est un paramètre dans une alcôve $\alpha(\mathbf{s}, w, +)$ voisine du mur de type J où se trouve θ' , on a construit une application

$$\begin{aligned} \pi_{\theta, \theta'} : \mathcal{P}(\ell, n) &\rightarrow \overline{\mathcal{P}}^J \\ \lambda &\mapsto \overline{\tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \lambda)}^J. \end{aligned}$$

Or comme les J -classes des $\tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \lambda)$ décrivent les blocs de Calogero-Moser pour θ' , l'application $\pi_{\theta, \theta'}$ associe à λ le bloc $B(\lambda)$ dans lequel se trouve λ pour θ' . Or l'ordre \triangleleft_{θ} est un ordre sur les blocs pour θ et par construction de $\triangleleft_{\theta'}$ on a évidemment $\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \Rightarrow B(\lambda) \triangleleft_{\theta'} B(\mu)$, soit $\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \Rightarrow \pi_{\theta, \theta'}(\lambda) \triangleleft_{\theta'} \pi_{\theta, \theta'}(\mu)$. Donc $\pi_{\theta, \theta'}$ conserve l'ordre combinatoire.

9.2.3 Ordre géométrique

On va maintenant chercher à interpréter géométriquement ces ordres combinatoires et algébriques sur les blocs. En effet, on a vu, au théorème 9.1.3, que les blocs étaient décrits géométriquement par les \mathbb{C}^* -points fixes de la variété $\mathcal{M}_{\theta}(n)$. Mais au paragraphe 3.3, on a défini un ordre sur les \mathbb{C}^* -points fixes d'une variété quasi-projective normale. Cet ordre va se transporter sur les blocs et on l'appellera "ordre géométrique".

Cet ordre géométrique sur les blocs a été défini dans le cas lisse (c'est à dire pour $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$) par I. Gordon dans [Gor08, 5.4] puis relié aux ordres combinatoire et algébriques. On va présenter ici cette construction puis on la généralisera au cas non lisse grâce aux propriétés que l'on a démontrées au paragraphe 3.3. Ensuite, nous relierons l'ordre géométrique dans le cas non lisse à celui construit par I. Gordon.

Définition pour \mathbf{H}^{reg}

D'après le paragraphe 3.3, pour définir un pré-ordre géométrique, on a besoin d'une variété

- quasi-projective

- munie d'une action de \mathbb{C}^*
- qui a un nombre fini de \mathbb{C}^* -points fixes.

De plus, si la variété est lisse (ou normale), on a vu que la relation est antisymétrique et donc définit un ordre. Enfin, si elle est projective, on a la décomposition de Bialynicki-Birula et l'ordre est plus intéressant.

Notre variété $\mathcal{M}_\theta(n)$ pour $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$ est quasi-projective, lisse et elle a un nombre fini de points fixes. De plus, il existe un morphisme projectif et \mathbb{C}^* -équivariant

$$\pi_{\theta,0} : \mathcal{M}_\theta(n) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_0(n) \simeq (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$$

d'après le paragraphe 8.2.8.

Or l'action de \mathbb{C}^* sur $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$ est de la forme $\eta \cdot (x, y) = (\eta x, \eta^{-1} y)$ et n'a qu'un seul point fixe qui est 0. Donc

$$(\mathcal{M}_\theta(n))^{\mathbb{C}^*} \subset \pi_{\theta,0}^{-1}(0).$$

Cette variété est projective mais il serait plus intéressant de faire la décomposition de Bialynicki-Birula sur une variété plus grande. Pour des raisons d'existence de limite quand η tend vers 0, on ne peut pas la faire sur $\mathcal{M}_\theta(n)$ en entier mais sur

$$\mathcal{Z}_\theta(n) := \pi_{\theta,0}^{-1}\left((\mathfrak{h} \times \{0\})/G(\ell, 1, n)\right).$$

Elle n'est pas projective mais comme elle se contracte, sous l'action de \mathbb{C}^* , en la variété projective $\pi_{\theta,0}^{-1}(0)$, la limite existe toujours et on a :

$$\mathcal{Z}_\theta(n) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)} \mathcal{Z}_\theta(n)_{x_\theta(\lambda)},$$

où $\mathcal{Z}_\theta(n)_{x_\theta(\lambda)} := \{z \in \mathcal{Z}_\theta(n), \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \cdot z = x_\theta(\lambda)\}$ est l'ensemble attractif de $x_\theta(\lambda)$, le point fixe de $\mathcal{M}_\theta(n)$ associé à la multipartition λ (voir la démonstration de [Gor08, 5.4] pour plus de détails).

On peut donc ordonner l'ensemble $(\mathcal{M}_\theta(n))^{\mathbb{C}^*}$ en posant, comme au paragraphe 3.3,

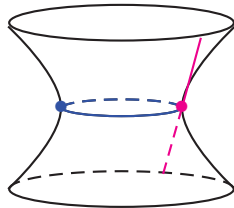
$$x_\theta(\lambda) \preceq_\theta x_\theta(\mu) \iff \text{il existe } x_1, \dots, x_r \in (\mathcal{M}_\theta(n))^{\mathbb{C}^*} \text{ tels que } x_1 = x_\theta(\lambda), x_r = x_\theta(\mu) \text{ et quel que soit } 1 \leq i \leq r-1, \overline{\mathcal{Z}_\theta(n)_{x_i}} \cap \mathcal{Z}_\theta(n)_{x_{i+1}} \neq \emptyset.$$

Et on transporte cet ordre sur $\mathcal{P}(\ell, n)$, en posant

$$\lambda \preceq_\theta \mu \iff x_\theta(\lambda) \preceq_\theta x_\theta(\mu).$$

On notera $\lambda \prec_\theta \mu$ si $\lambda \preceq_\theta \mu$ et $\lambda \neq \mu$.

Exemple 9.2.8. Étudions l'ordre géométrique dans le cas $\ell = 2$ et $n = 1$. Les ensembles attractifs des deux points ont été étudiés à l'annexe C et sont représentés sur la figure suivante.



Ensembles attractifs des deux points fixes de $\mathcal{M}_{(\theta_0, \theta_1)}(1)$, pour $\theta_1 \neq 0$

On voit bien sur cette figure que l'adhérence de l'ensemble attractif bleu rencontre l'ensemble attractif rose et pas l'inverse, on a donc *point bleu* \prec_θ *point rose*.

Définition pour H

L'objectif de la partie 4 est de généraliser la construction de cet ordre géométrique aux groupes de réflexions $G(\ell, e, n)$. Pour cela, on va relier les algèbres de Cherednik de $G(\ell, e, n)$ à celles de $G(\ell, 1, n)$, en utilisant que $G(\ell, e, n)$ est un sous-groupe distingué de $G(\ell, 1, n)$. Mais on a vu au paragraphe 5.1 qu'il fallait alors choisir correctement le paramètre c des algèbres. On verra par la suite que ce choix impose au paramètre θ de se trouver sur un mur GIT.

Il faut donc commencer par généraliser la construction de l'ordre géométrique faite par I. Gordon au cas non lisse.

Pour θ' sur un mur, on a vu à la proposition 8.2.15 que la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ était normale. Donc, d'après le théorème 3.3.3, on peut ordonner l'ensemble $(\mathcal{M}_{\theta'}(n))^{\mathbb{C}^*}$ de la même manière que dans le cas lisse. On transporte alors cet ordre sur $\mathcal{CM}_{\mathbf{H}'}(G(\ell, 1, n))$ en posant :

$$B \prec_{\theta'} B' \iff X_{\theta'}(B) \prec_{\theta'} X_{\theta'}(B'),$$

où $X_{\theta'}(B)$ est le point fixe de $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ correspondant au bloc B par le théorème 9.1.3.

Ordres géométriques et morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$

Le morphisme $\pi_{\theta, \theta'}$ de $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ sur $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ étant \mathbb{C}^* -équivariant, surjectif et projectif (cf. §8.2.6), on va pouvoir utiliser les résultats que l'on a montrés au paragraphe 3.4 pour montrer qu'il conserve aussi l'ordre géométrique. On pourra ainsi exploiter les propriétés de \prec_{θ} pour étudier $\prec_{\theta'}$. D'après les corollaires 3.4.6 et 3.4.8, on a :

$$B \prec_{\theta'} B' \iff \begin{array}{l} \text{il existe } \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots, \lambda_m \in \mathcal{P}(\ell, n) \text{ telles que } \lambda_1 \in B, \\ \lambda_m \in B', \text{ pour tout } 2 \leq i \leq m-1, \lambda_i \text{ et } \lambda'_i \text{ sont dans le même} \\ \text{bloc et pour } 1 \leq i \leq m-1, \lambda_i \prec_{\theta} \lambda_{i+1} \text{ si } i \text{ est impair} \\ \text{et } \lambda'_i \prec_{\theta} \lambda'_{i+1} \text{ si } i \text{ est pair.} \end{array}$$

Donc, en particulier, $\lambda \prec_{\theta} \mu \implies \pi_{\theta, \theta'}(\lambda) \prec_{\theta'} \pi_{\theta, \theta'}(\mu)$.

9.3 Liens entre les différents ordres

Dans l'idée d'interpréter géométriquement les ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions, I. Gordon a montré dans [Gor08] que les ordres algébriques, ainsi que l'ordre combinatoire, sont plus fins que l'ordre géométrique dans le cas lisse. Nous allons étendre le résultat sur les ordres algébriques au cas non lisse et pour le cas lisse, nous montrerons que l'ordre combinatoire est équivalent à l'ordre de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ pour un paramètre particulier. Cela nous permet de relier l'ordre combinatoire aux ordres algébriques, grâce à la proposition 9.2.3.

Enfin, nous présenterons dans le cas des groupes de type B_n , une description des blocs par l'ordre combinatoire et nous en déduirons que le pré-ordre combinatoire est plus fin que l'ordre géométrique sur un mur dans ce cas.

Concrètement, nous allons montrer les liens suivants entre tous les ordres :

- Pour $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, w, -)$:

$$\lambda \prec_{\theta} \mu \implies \lambda \triangleleft_{\theta} \mu \xleftrightarrow[\frac{-s_{\ell-1-i}-\frac{i}{\ell}}{(w \cdot \mathbf{m})^i =}]{\kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)} \xrightarrow{r > 0} \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\mu)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\mu)$$

- Pour $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, w, +)$:

$$\lambda \prec_{\theta} \mu \implies \lambda \triangleleft_{\theta} \mu \xleftrightarrow[\frac{-s_i - \frac{i}{\ell}}{(w \cdot \mathbf{m})^i =}]{\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)} \xrightarrow{r < 0} \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\mu)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\mu)$$

- Pour θ' sur un mur et ℓ quelconque : $B \prec_{\theta'} B' \implies \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{h}'}(B) \leq \mathbf{a}_{\mathbf{h}'}(B') \\ \mathbf{c}_{\mathbf{h}'}(B) \geq \mathbf{c}_{\mathbf{h}'}(B') \end{cases}$.
- Pour θ' sur un mur et $\ell = 2$: $B \prec_{\theta'} B' \implies B \triangleleft_{\theta'} B'$.

9.3.1 Ordres algébriques et combinatoires

À l'intérieur d'une alcôve

La proposition 1.2.23 relie les ordres de dominance sur les partitions $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$. Elle va donc nous permettre de comparer l'ordre de dominance sur les $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ à l'ordre combinatoire que l'on a défini au paragraphe 9.2.2.

Proposition 9.3.1. Soient $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^{\ell}$ et $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(\ell, n)$.

- Si $\mathbf{m} \in \mathbb{Q}^{\ell}$ est défini par $(w \cdot \mathbf{m})^i = -s_i - \frac{i}{\ell}$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$ alors pour s un entier tel que $s \geq \max\{hc^{\lambda}, hc^{\mu}\} + 1$ et $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, w, +)$, on a :

$$\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \iff \tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \mu) \triangleleft \tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \lambda) \iff \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu).$$

- Si $\mathbf{m} \in \mathbb{Q}^{\ell}$ est défini par $(w \cdot \mathbf{m})^i = s_{\ell-1-i} - \frac{i}{\ell}$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, alors pour s un entier tel que $s \geq \max\{hc^{\lambda}, hc^{\mu}\} + 1$ et $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, w, -)$, on a :

$$\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \iff \tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \bar{\mu}) \triangleleft \tau_{\mathbf{s}}(w \cdot {}^t \bar{\lambda}) \iff \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda).$$

Démonstration. La proposition 1.2.23 règle le cas des alcôves $\alpha(\mathbf{s}, id, +)$. Le lemme 1.2.14 nous permet d'étendre ce résultat à toutes les alcôves positives.

Pour un alcôve négative de la forme $\alpha(\mathbf{s}, id, -)$, on utilise que $\tau_{\mathbf{s}}({}^t \bar{\lambda}) = \tau_{\mathbf{s}}(w_0 \cdot \lambda)$, où w_0 est le mot de longueur maximale. De plus, le paramètre \mathbf{m} est choisi de manière à ce que $s_{i-1} + \frac{i}{\ell} = m^{\ell-i} + 1 = (w_0 \cdot \mathbf{m})^{i-1} + 1$, donc dans ce cas, l'ensemble \mathcal{T}_i vérifie

$$\frac{\mathcal{T}_i}{\ell} - 1 + s = \tilde{\mathfrak{B}}^{w_0(i)-1}$$

et on conclut comme dans le cas positif. \square

Remarque 9.3.2. (i) Si on relie les paramètres θ et \mathbf{m} avec les formules de changement de paramètres $h = r$ et $H_i = r(m^i - m^{i-1})$,

- pour $m^i = -s_i - \frac{i}{\ell}$ et $r = -1$ (car on est dans une alcôve positive donc $\sum_i \theta_i = -h > 0$), on obtient : $\theta = \mathbf{1} + (s_0 - s_{\ell-1}, s_1 - s_0, \dots, s_{\ell-1} - s_{\ell-2})$,

- pour $m^i = s_{\ell-1-i} - \frac{i}{\ell}$ et $r = 1$, on obtient : $\theta = -\mathbf{1} + (s_{\ell-1} - s_0, s_{\ell-2} - s_{\ell-1}, \dots, s_0 - s_1)$.

(ii) Cette dissymétrie entre les alcôves positives et négatives pour le choix des paramètres et pour l'ordre sur les κ qui est inversé s'expliquera quand on va s'intéresser à la \mathbf{a} -fonction car il est facile de voir que les ℓ -uplets $(-s_i - \frac{i}{\ell})_i$ et $(s_{\ell-1-i} - \frac{i}{\ell})_i$ sont reliés par la transformation $\mathbf{m} \mapsto \bar{\mathbf{m}} = (-m^{\ell-1}, \dots, -m^0)$ à une constante près. De plus, l'ordre de dominance sur les $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ est invariant par translation sur les m^i , et la \mathbf{a} -fonction est invariante par cette transformation, d'après le corollaire 7.3.6 et le paragraphe 9.2.1.

Exploitions cette proposition pour relier l'ordre combinatoire aux ordres algébriques. En général, un paramètre θ relié à (\mathbf{m}, r) , avec $r > 0$, par les formules données au début du chapitre est de la forme

$$\begin{cases} \theta_0 &= -r(1 + m^{\ell-1} - m^0) \\ \theta_1 &= r(m^1 - m^0) \\ \vdots & \vdots \\ \theta_{\ell-1} &= r(m^{\ell-1} - m^{\ell-2}) \end{cases}$$

Il vérifie donc $\sum_i \theta_i = -r < 0$ et se trouve donc dans une alcôve négative. Posons alors $m^i = s_{\ell-1-i} - \frac{i}{\ell}$, cela revient à prendre la spécialisation $h_{(C_{1,0})} \mapsto r$, $h_{(C_{1,1})} \mapsto 0$ et $h_{(C_{2,j})} \mapsto r(s_{\ell-1-i} - \frac{i}{\ell})$ avec $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_0^\ell$. On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{\theta_0}{r} &= s_{\ell-1} - s_0 - \frac{1}{\ell} \\ \frac{\theta_1}{r} &= s_{\ell-2} - s_{\ell-1} - \frac{1}{\ell} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\theta_{\ell-1}}{r} &= s_0 - s_1 - \frac{1}{\ell} \end{cases}$$

Et $\frac{\theta}{r} \in \alpha(\mathbf{s}, id, -)$. Mais comme $r > 0$, θ et $\frac{\theta}{r}$ sont dans la même alcôve donc pour λ et $\mu \in \mathcal{P}(\ell, n)$, on a, d'après les propositions 9.3.1 et 9.2.3 :

$$\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \iff \lambda \triangleleft_{\frac{\theta}{r}} \mu \iff \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \implies \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu) \end{cases}$$

Le modèle que l'on vient d'étudier correspond aux paramètres se trouvant dans des alcôves négatives, pour traiter le cas des alcôves positives, il faudrait considérer $r < 0$, ce qui n'est pas pratique pour l'étude de la \mathbf{a} -fonction, on va donc se ramener au cas positif en considérant $\bar{\theta}$. Le paramètre \mathbf{h} que l'on considère ici est décrit par

$$\begin{cases} h &= r < 0 \\ H_j &= r(m^j - m^{j-1}) \end{cases}$$

et donc $\bar{\mathbf{h}}$ vérifie

$$\begin{cases} \bar{h} &= -r > 0 \\ \bar{H}_j &= -r(\bar{m}_j - \bar{m}_{j-1}) \end{cases}$$

On peut donc appliquer ce que l'on vient de voir en remplaçant r par $-r$ et \mathbf{m} par $\bar{\mathbf{m}}$. On devra donc définir $\forall 0 \leq i \leq \ell-1$, $\bar{m}_i = s_{\ell-1-i} - \frac{i}{\ell}$, ce qui revient à poser $m^i = -(s_i + \frac{i}{\ell}) + \ell - 1$, $\forall 0 \leq i \leq \ell-1$ et on obtient alors $\bar{\theta} \in \alpha(\mathbf{s}, id, -)$ ce qui est équivalent à $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, id, +)$ d'après la proposition 8.3.7. Et alors, pour λ et $\mu \in \mathcal{P}(\ell, n)$, d'après la remarque 9.2.5 et le paragraphe 9.2.1, on a :

$$\lambda \triangleleft_{\theta} \mu \iff \bar{\lambda} \triangleleft_{\bar{\theta}} \bar{\mu} \implies \begin{cases} \mathbf{a}_{\bar{\mathbf{m}},-r}(\bar{\lambda}) < \mathbf{a}_{\bar{\mathbf{m}},-r}(\bar{\mu}) \\ \mathbf{c}_{\bar{\mathbf{h}}}(\bar{\lambda}) > \mathbf{c}_{\bar{\mathbf{h}}}(\bar{\mu}) \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\mu) \end{cases}$$

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

Théorème 9.3.3. Soit $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}_0^\ell$.

- Les paramètres \mathbf{m} et \mathbf{h} définis par pour tout $0 \leq i \leq \ell-1$, $(w \cdot \mathbf{m})^i = s_{\ell-1-i} - \frac{i}{\ell}$,

$$\begin{cases} h = r > 0 \\ H_j = r(m^j - m^{j-1}) \text{ pour } 1 \leq j \leq \ell-1 \end{cases}$$

vérifient $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, w, -)$ et pour un entier $s \geq \max\{hc^\lambda, hc^\mu\} + 1$, on a :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{P}(\ell, n), \lambda \triangleleft_\theta \mu \iff \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu). \end{cases}$$

- Les paramètres \mathbf{m} et \mathbf{h} définis par pour tout $0 \leq i \leq \ell-1$, $(w \cdot \mathbf{m})^i = -s_i - \frac{i}{\ell}$,

$$\begin{cases} h = r < 0 \\ H_j = r(m^j - m^{j-1}) \text{ pour } 1 \leq j \leq \ell-1 \end{cases}$$

vérifient $\theta \in \alpha(\mathbf{s}, w, +)$ et pour un entier $s \geq \max\{hc^\lambda, hc^\mu\} + 1$, on a :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathcal{P}(\ell, n), \lambda \triangleleft_\theta \mu \iff \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\mu). \end{cases}$$

Remarque 9.3.4. Dans ce résultat, on relie l'ordre \triangleleft_θ aux ordres liés à $\kappa_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}$ et $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}$ alors que les paramètres (\mathbf{m}, r) sont fixés par l'alcôve et non par θ . Ils sont reliés par les formules du début du chapitre seulement au paramètre $\theta_0 = \mathbf{1} + (s_0 - s_{\ell-1}, s_1 - s_0, \dots, s_{\ell-1} - s_{\ell-2})$ dans le cas positif. Mais on ne pouvait espérer mieux car l'ordre combinatoire n'est défini que par l'alcôve (et non par θ) alors que les ordres liés à $\kappa_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}$ et $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}$ ne sont pas constants à l'intérieur d'une alcôve, comme on l'a montré au paragraphe 9.2.1.

Exemple 9.3.5. Dans l'exemple de ce paragraphe, on se trouvait dans le cas de l'alcôve $A_0 = \alpha(\mathbf{s}, \text{id}, +)$ pour $\ell = 2$, avec $\mathbf{s} = (0, 0)$, donc pour illustrer ce résultat, il faut prendre le paramètre $\mathbf{m} = (s_0 - \frac{0}{2}, s_1 - \frac{1}{2}) = (0, -\frac{1}{2})$ ou $\mathbf{m} = (\frac{1}{2}, 0)$ quand on regarde l'ordre sur les partitions κ . On a donc, quel que soit $\theta \in A_0$ et pour toutes multipartitions λ et μ :

$$\lambda \triangleleft_\theta \mu \iff \kappa_{(0, -\frac{1}{2})}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{(0, -\frac{1}{2})}^s(\mu) \iff \kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu).$$

Or on a vu à l'exemple 1.2.24 et au paragraphe 9.2.1 que pour $n = 5$, $s = 4$, $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1), \emptyset)$, on avait : $\tau_{(0,0)}({}^t\lambda) \triangleleft \tau_{(0,0)}({}^t\mu)$, soit $\mu \triangleleft_\theta \lambda$ et $\kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda) \triangleright \kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu)$, $\mathbf{a}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\mu) < \mathbf{a}_{(0, -\frac{1}{2})}(\lambda)$ et $\mathbf{c}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\lambda) < \mathbf{c}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\mu)$, alors que $\kappa_{(\frac{9}{10}, 0)}^s(\lambda)$ et $\kappa_{(\frac{9}{10}, 0)}^s(\mu)$ ne sont pas comparables et qu'il existe $\epsilon_1, \epsilon_2 \in]0, 1[$ tels que $\mathbf{a}_{(0, -\epsilon_1), -1}(\lambda) < \mathbf{a}_{(0, -\epsilon_1), -1}(\mu)$, $\mathbf{c}_{(0, -\epsilon_2), -1}(\lambda) > \mathbf{c}_{(0, -\epsilon_2), -1}(\mu)$. Cet exemple nous montre donc bien que l'on ne peut pas relier l'ordre \triangleleft_θ aux autres ordres dans toute l'alcôve.

Sur un mur

Le théorème 9.3.3 et le lemme 9.2.7 nous donnent un lien entre les ordres algébriques et le pré-ordre combinatoire sur un mur mais ce résultat n'est pas très satisfaisant.

Proposition 9.3.6. *Si B et B' sont deux blocs tels que $B \triangleleft_{\theta'} B'$ et qu'il n'existe pas de bloc B'' tel que $B \triangleleft_{\theta'} B'' \triangleleft_{\theta'} B'$ alors*

$$B \triangleleft_{\theta'} B' \Rightarrow \text{il existe } 1 \leq j \leq q \text{ tel que, si } A_j = \alpha(\mathbf{s}^j, w^j, +) \text{ alors, pour } (w^j \cdot \mathbf{m})^i = -s_i^j - \frac{i}{\ell} \text{ et } r < 0, \text{ on ait } \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(B) < \mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(B') \text{ et } \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(B') < \mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(B).$$

Si notre résultat du théorème 9.3.3 avait été plus général on aurait pu s'affranchir de l'hypothèse "il n'existe pas de bloc B'' tel que $B \triangleleft_{\theta'} B'' \triangleleft_{\theta'} B'$ " qui n'est pas très pratique, grâce à la continuité en les paramètres des fonctions \mathbf{a} et \mathbf{c} , comme on le fera plus tard pour l'ordre géométrique (cf. démonstration du théorème 9.3.10).

9.3.2 Ordre géométrique et autres ordres

Pour $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$

L'ordre géométrique est constant à l'intérieur d'une chambre GIT car les variétés $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ sont alors isomorphes. Mais comme il est défini pour chaque paramètre θ (contrairement à l'ordre combinatoire), I. Gordon a pu le relier aux fonctions \mathbf{a} et \mathbf{c} , dans [Gor08, 5.4 et 9.3].

Théorème 9.3.7 (Gordon). *Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(\ell, n)$ et $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$ alors*

$$\lambda \prec_{\theta} \mu \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\lambda) < \mathbf{a}_{\mathbf{h}}(\mu) \\ \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda) > \mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\mu). \end{cases}$$

Enfin, il l'a relié à l'ordre combinatoire \triangleleft_{θ} dans [Gor08, 7.12] :

Théorème 9.3.8 (Gordon). *Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(\ell, n)$ et $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\text{reg}}$ alors*

$$\lambda \prec_{\theta} \mu \Rightarrow \lambda \triangleleft_{\theta} \mu.$$

Remarque 9.3.9. (i) *L'énoncé du théorème [Gor08, 7.12] affirme que ces deux ordres sont équivalents. Nous remercions I. Gordon de nous avoir envoyé depuis un contre-exemple pour B_2 qui montre que la réciproque est fautive. Sachant que l'ordre géométrique est très difficile à calculer, ce contre-exemple n'est pas facile d'accès. Plus simplement, on a montré au paragraphe 9.2.1, qu'il existait $0 < \epsilon < 1$ tel que, pour $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$, on ait $\mathbf{a}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\mu) < \mathbf{a}_{(0, -\frac{1}{2}), -1}(\lambda)$ et $\mathbf{a}_{(0, -\epsilon), -1}(\lambda) < \mathbf{a}_{(0, -\epsilon), -1}(\mu)$. D'après le théorème 9.3.7, cela montre que ces deux multipartitions ne sont pas comparables pour l'ordre géométrique dans l'alcôve $\alpha((0, 0), id, +)$, par contre elles le sont pour l'ordre combinatoire d'après l'exemple 9.2.6. Ces deux ordres sont donc différents.*

(ii) *Mais I. Gordon avait utilisé l'implication qui est finalement fautive pour relier l'ordre combinatoire qu'il a construit sur les blocs dans le cas non lisse aux ordres des \mathbf{a} et \mathbf{c} -fonctions (cf. [Gor08, 8.3 et 9.4]). Tout comme pour l'ordre combinatoire $\triangleleft_{\theta'}$ que l'on a construit, on n'a donc pas de liens satisfaisants entre l'ordre combinatoire sur les blocs et les ordres algébriques.*

Pour $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$

Grâce au théorème 9.3.7 et au lien entre \prec_θ et $\prec_{\theta'}$ (cf. §9.2.3), on va pouvoir relier l'ordre géométrique dans le cas non lisse aux ordres des \mathbf{c} et \mathbf{a} -fonctions. En effet :

$$\begin{aligned}
 B \prec_{\theta'} B' &\iff \text{il existe } \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots, \lambda_m \in \mathcal{P}(\ell, n) \text{ telles que } \lambda_1 \in B, \lambda_m \in B', \\
 &\quad \text{pour tout } 2 \leq i \leq m-1, \lambda_i \text{ et } \lambda'_i \text{ sont dans le même bloc et} \\
 &\quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-1, \lambda_i \prec_\theta \lambda_{i+1} \text{ si } i \text{ est impair} \\
 &\quad \text{et } \lambda'_i \prec_\theta \lambda'_{i+1} \text{ si } i \text{ est pair} \\
 &\implies \text{il existe } \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots, \lambda_m \in \mathcal{P}(\ell, n) \text{ telles que } \lambda_1 \in B, \lambda_m \in B', \\
 &\quad \text{pour tout } 2 \leq i \leq m-1, \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_i) = \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_i) \\
 &\quad \text{et pour } 1 \leq i \leq m-1, \mathbf{a}_\theta(\lambda_i) < \mathbf{a}_\theta(\lambda_{i+1}) \text{ si } i \text{ est impair} \\
 &\quad \text{et } \mathbf{a}_\theta(\lambda'_i) < \mathbf{a}_\theta(\lambda'_{i+1}) \text{ si } i \text{ est pair,}
 \end{aligned}$$

d'après le corollaire 9.1.10 et le théorème 9.3.7. Or les propriétés $\mathbf{a}_\theta(\lambda_i) < \mathbf{a}_\theta(\lambda_{i+1})$ et $\mathbf{a}_\theta(\lambda'_i) < \mathbf{a}_\theta(\lambda'_{i+1})$ sont valables quel que soit θ à l'intérieur de la chambre, donc, par continuité de la fonction \mathbf{a} en les paramètres (cf. remarque 7.3.4), quand on fait tendre θ vers θ' sur le mur, on obtient $\mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_i) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_{i+1})$ et $\mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_i) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_{i+1})$. On a donc

$$\begin{aligned}
 B \prec_{\theta'} B' &\implies \text{il existe } \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots, \lambda_m \in \mathcal{P}(\ell, n) \text{ telles que } \lambda_1 \in B, \lambda_m \in B', \\
 &\quad \text{pour tout } 2 \leq i \leq m-1, \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_i) = \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_i) \\
 &\quad \text{et pour } 1 \leq i \leq m-1, \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_i) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_{i+1}) \text{ si } i \text{ est impair} \\
 &\quad \text{et } \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_i) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_{i+1}) \text{ si } i \text{ est pair} \\
 &\implies \text{il existe } \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots, \lambda_m \in \mathcal{P}(\ell, n) \text{ telles que } \lambda_1 \in B, \lambda_m \in B' \\
 &\quad \text{et } \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_1) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_2) = \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_2) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda'_3) = \dots \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_m) \\
 &\implies \text{il existe } \lambda_1, \lambda_m \in \mathcal{P}(\ell, n) \text{ telles que } \lambda_1 \in B, \lambda_m \in B', \\
 &\quad \text{et } \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_1) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\lambda_m) \\
 &\implies \mathbf{a}_{\theta'}(B) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(B').
 \end{aligned}$$

La fonction \mathbf{c} ayant les mêmes propriétés que la fonction \mathbf{a} , on a donc démontré un résultat similaire au théorème 9.3.7.

Théorème 9.3.10. Soient $\mathbf{h}' \in \mathbf{H}$ et B, B' deux blocs de $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, 1, n))$ alors

$$B \prec_{\theta'} B' \implies \begin{cases} \mathbf{a}_{\theta'}(B) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(B') \\ \mathbf{c}_{\theta'}(B) \geq \mathbf{c}_{\theta'}(B'). \end{cases}$$

9.4 Cas $\ell = 2$

9.4.1 Blocs et classes d'équivalence pour B_n

La description des blocs par les symboles du théorème 9.1.9 va nous permettre de relier les blocs de Calogero-Moser aux classes d'équivalence du pré-ordre combinatoire que nous avons construit, pour $\ell = 2$, c'est à dire pour le cas des groupes de Weyl de type B.

Lemme 9.4.1. Soient $\mathbf{m} = (\frac{b}{a}, 0)$ avec $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{m} \pm \frac{1}{2} = (\frac{b}{a} \pm \frac{1}{2}, 0)$, on a, pour λ et $\mu \in \mathcal{P}(2, n)$ et $s \geq n+1$:

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) &\implies \exists \lambda_0 = \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_p = \mu \text{ telles que } \forall 0 \leq i \leq p-1 : \\
 &\quad \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda_i) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \text{ et } \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda_i) \text{ ou} \\
 &\quad \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda_i) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \text{ et } \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda_i).
 \end{aligned}$$

Remarque 9.4.2. On considère un entier $s \geq n + 1$ pour être sûr que $s \geq hc^\lambda + 1$ quelle que soit la 2-multipartition de n que l'on étudie.

Preuve : Si $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ alors les symboles $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ et $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ ne diffèrent que par des permutations de leurs éléments. On va donc supposer que $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ ne diffère de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ que par une permutation de deux termes et montrer qu'alors $\kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\mu)$ et $\kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda)$ ou $\kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\mu)$ et $\kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\mu) \triangleright \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda)$. Dans un cas plus général, la suite de multipartitions $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ sera construite pas à pas, en passant de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ à $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ en permutant les termes deux à deux.

Le \mathbf{m} -symbole décalé associé à λ est de la forme :

$$\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = \begin{pmatrix} x_1, & \dots & \dots, & x_{s+\frac{b}{a}} \\ y_1, & \dots, & y_s \end{pmatrix}$$

où pour $1 \leq k \leq s - h(\lambda^1) + \frac{b}{a}$, $x_k = k - 1$ et pour $1 \leq k \leq h(\lambda^1)$, $x_{s+\frac{b}{a}+1-k} = \lambda_k^1 - k + s + \frac{b}{a}$ vérifient $x_1 < x_2 < \dots < x_{s+\frac{b}{a}}$,

et pour $1 \leq k \leq s - h(\lambda^2)$, $y_k = k - 1$ et pour $1 \leq k \leq h(\lambda^2)$, $y_{s+1-k} = \lambda_k^2 - k + s$ vérifient $y_1 < y_2 < \dots < y_s$.

Supposons que $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ ne diffère de ce symbole que par un échange du type $x_i \leftrightarrow y_j$. Cela implique qu'il n'y a aucun élément x_k de la première ligne de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ qui est égal à y_j (sinon $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\mu)$ aurait deux éléments égaux dans sa première ligne) et de même, cela implique que $\forall 1 \leq k \leq s$, $y_k \neq x_i$.

Nous allons traiter le cas où $x_i < y_j$ et on comprendra facilement ce qu'il se passe dans le cas $x_i > y_j$. On peut alors découper la partition $\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ de la manière suivante :

$$\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = (\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_{s_1} > \kappa_{s_1+1} > \kappa_{s_1+2} \geq \dots \geq \kappa_{s_2} > \kappa_{s_2+1} > \kappa_{s_2+2} \geq \dots \geq \kappa_{2s+\frac{b}{a}}),$$

où les indices s_i sont tels que $\kappa_{s_1+1} = y_j$, $\kappa_{s_2+1} = x_i$ et $\kappa_{2s+\frac{b}{a}-1} = \kappa_{2s+\frac{b}{a}} = 0$.

Par construction, comme $[s - h(\lambda^1) + \frac{b}{a} - \frac{1}{2}] = s - h(\lambda^1) + \frac{b}{a} - 1$, on a $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda) = (\mathfrak{B}^0, \mathfrak{B}^1)$, où $\mathfrak{B}^0 = (x_2 - \frac{1}{2}, \dots, x_{s+\frac{b}{a}} - \frac{1}{2})$ est de taille $s + \frac{b}{a} - 1$ et $\mathfrak{B}^1 = (y_1, \dots, y_s)$ est de taille s . Par contre, le symbole $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda)$ est de la même taille que $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$; il s'obtient à partir de $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ en ajoutant $\frac{1}{2}$ à tous les termes de la première ligne. Les κ_i étant des entiers, ajouter $\frac{1}{2}$ à certains d'entre eux ne change pas leur ordre, on a alors :

$$\kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda) = (\kappa'_1 \geq \dots \geq \kappa'_{s_1} > \kappa_{s_1+1} > \kappa'_{s_1+2} \geq \dots \geq \kappa'_{s_2} > \kappa_{s_2+1} + \frac{1}{2} > \kappa'_{s_2+2} \geq \dots \geq \kappa'_{2s+\frac{b}{a}}),$$

où $\kappa'_i = \begin{cases} \kappa_i + \frac{1}{2} & \text{s'il correspond à un élément de la première ligne de } \mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda) \\ \kappa_i & \text{sinon} \end{cases}$ et

$$\kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\mu) = (\kappa'_1 \geq \dots \geq \kappa'_{s_1} > \kappa_{s_1+1} + \frac{1}{2} > \kappa'_{s_1+2} \geq \dots \geq \kappa'_{s_2} > \kappa_{s_2+1} > \kappa'_{s_2+2} \geq \dots \geq \kappa'_t).$$

Il est alors clair que $\kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\mu)$ et que $\kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda)$.

Pour le cas $x_i > y_j$, on voit par symétrie qu'alors $\kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\mu) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda)$ et $\kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\mu)$. \square

Remarque 9.4.3. (i) Cette démonstration reste valable si on remplace $\frac{1}{2}$ par n'importe quel $\epsilon \in]0, 1[$.

(ii) La réciproque de ce résultat est fautive puisque pour $n = 5$, $\mathbf{m} = (1, 0)$, $s = 4$, les multipartitions $\lambda = (\emptyset; (3, 2))$ et $\mu = ((2, 2, 1); \emptyset)$ vérifient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \mathfrak{B}_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{B}_{(1, 0)}^s(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \mathfrak{B}_{(1, 0)}^s(\mu) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{B}_{(\frac{3}{2}, 0)}^s(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} & \mathfrak{B}_{(\frac{3}{2}, 0)}^s(\mu) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{11}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\lambda) &= (6; 4; 3, 5; 2, 5; 1, 5; 1; 0, 5; 0) \\ &\triangleright (5, 5; 4, 5; 3; 2, 5; 2; 1; 0, 5; 0) = \kappa_{(\frac{1}{2}, 0)}^s(\mu) \end{aligned}$$

$$\kappa_{(1, 0)}^s(\lambda) = (6; 4; 4; 3; 2; 1; 1; 0; 0) \neq (6; 5; 3; 3; 2; 1; 1; 0; 0) = \kappa_{(1, 0)}^s(\mu)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{(\frac{3}{2}, 0)}^s(\lambda) &= (6; 4, 5; 4; 3, 5; 2, 5; 1, 5; 1; 0, 5; 0) \\ &\triangleleft (6, 5; 5, 5; 3, 5; 3; 2; 1, 5; 1; 0, 5; 0) = \kappa_{(\frac{3}{2}, 0)}^s(\mu). \end{aligned}$$

On va maintenant décrire les blocs de Calogero-Moser pour B_n en utilisant l'ordre combinatoire. On supposera donc que θ' se trouve sur un mur qui est bordé par deux alcôves et on notera θ et $\tilde{\theta}$ des éléments pris à l'intérieur de chacune de ces deux alcôves.

Proposition 9.4.4. Si deux multipartitions λ et μ sont dans le même bloc de Calogero-Moser pour θ' alors il existe $\lambda_0 = \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_p = \mu$ telles que pour tout $1 \leq i \leq p-1$:

$$(\lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1} \text{ ou } \lambda_i \triangleleft_{\tilde{\theta}} \lambda_{i+1}) \text{ et } (\lambda_{i+1} \triangleleft_{\theta} \lambda_i \text{ ou } \lambda_{i+1} \triangleleft_{\tilde{\theta}} \lambda_i).$$

Démonstration. On ne va traiter que le cas d'un mur $\frac{b}{a} = r+1$, avec r pair, le cas $\frac{b}{a}$ pair se traitant de la même manière. Le paramètre $\theta' = (-r, r+1)$ se trouve alors sur le mur bordé à gauche par l'alcôve $A_{-r} = \alpha((-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}), id, +)$ et à droite par l'alcôve $A_{-r-1} = \alpha((\frac{r}{2} + 1, -\frac{r}{2} - 1), \sigma, +)$.

Appliquons le lemme 9.4.1, avec $\mathbf{m} = (\frac{b}{a}, 0)$:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ et } \mu \text{ sont dans le même bloc} &\iff \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda) = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\mu) \\ &\implies \exists \lambda_0 = \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_p = \mu \text{ telles que } \forall i : \\ &[\kappa_{\mathbf{m} + \frac{1}{2}}^s(\lambda_i) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m} + \frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \\ &\text{ et } \kappa_{\mathbf{m} - \frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m} - \frac{1}{2}}^s(\lambda_i)] \text{ ou} \\ &[\kappa_{\mathbf{m} + \frac{1}{2}}^s(\lambda_i) \triangleright \kappa_{\mathbf{m} + \frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \\ &\text{ et } \kappa_{\mathbf{m} - \frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \triangleright \kappa_{\mathbf{m} - \frac{1}{2}}^s(\lambda_i)]. \end{aligned}$$

Le paramètre $\mathbf{m} - \frac{1}{2}$ correspond, par les formules de début de chapitre, à un paramètre θ dans l'alcôve $A_{-r} = \alpha((-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}), id, +)$, il faut donc relier $\kappa_{\mathbf{m} - \frac{1}{2}}^s(\lambda_i)$ et $\tau_{(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})}(\lambda_i)$.

Mais $\mathbf{m} - \frac{1}{2} = (r + 1 - \frac{1}{2}, 0)$ et comme l'ordre de dominance sur les $\kappa_{\mathbf{m}}^s$ est conservé par translation sur \mathbf{m} , on peut appliquer une translation de $-\frac{r}{2} - \frac{1}{2}$ sur \mathbf{m} pour obtenir :

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}-\frac{1}{2}}^s(\lambda_i) &\iff \kappa_{(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}-\frac{1}{2})}^s(\lambda_{i+1}) \triangleleft \kappa_{(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}-\frac{1}{2})}^s(\lambda_i) \\ &\iff \tau_{(\frac{-r}{2}, \frac{r}{2})}({}^t\lambda_i) \triangleleft \tau_{(\frac{-r}{2}, \frac{r}{2})}({}^t\lambda_{i+1}) \\ &\iff \lambda_{i+1} \triangleleft_{\theta} \lambda_i, \end{aligned}$$

d'après la proposition 9.3.1 car $\mathbf{s} = (\frac{-r}{2}, \frac{r}{2})$ et $\mathbf{m} = (\frac{r}{2}, -\frac{r}{2} - \frac{1}{2})$ vérifient $m^i = -s_i - \frac{i}{2}$. De même, le paramètre $\mathbf{m} + \frac{1}{2}$ correspond à un paramètre θ dans l'alcôve $A_{-r-1} = \alpha((\frac{r}{2} + 1, -\frac{r}{2} - 1), \sigma, +)$, et, en opérant une translation de $-\frac{r}{2} - 1$ sur \mathbf{m} et en utilisant le fait que $\kappa_{\sigma \cdot \mathbf{m}}^s(\sigma \cdot \lambda) = \kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$ (cf. lemme 1.2.14), on montre que :

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda_i) \triangleleft \kappa_{\mathbf{m}+\frac{1}{2}}^s(\lambda_{i+1}) &\iff \kappa_{(0, r+\frac{3}{2})}^s(\sigma \cdot \lambda_i) \triangleleft \kappa_{(0, r+\frac{3}{2})}^s(\sigma \cdot \lambda_{i+1}) \\ &\iff \kappa_{(-\frac{r}{2}-1, \frac{r}{2}+\frac{1}{2})}^s(\sigma \cdot \lambda_i) \triangleleft \kappa_{(-\frac{r}{2}-1, \frac{r}{2}+\frac{1}{2})}^s(\sigma \cdot \lambda_{i+1}) \\ &\iff \tau_{(\frac{r}{2}+1, -\frac{r}{2}-1)}({}^t\sigma \cdot \lambda_{i+1}) \triangleleft \tau_{(\frac{r}{2}+1, -\frac{r}{2}-1)}({}^t\sigma \cdot \lambda_i) \\ &\iff \lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ et } \mu \text{ sont dans le même bloc} &\implies \exists \lambda_0 = \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_p = \mu \text{ telles que } \forall i : \\ &\quad (\lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1} \text{ et } \lambda_{i+1} \triangleleft_{\theta} \lambda_i) \\ &\quad \text{ou } (\lambda_{i+1} \triangleleft_{\theta} \lambda_i \text{ et } \lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1}) \\ &\iff \exists \lambda_0 = \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_p = \mu \text{ telles que } \forall i : \\ &\quad (\lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1} \text{ ou } \lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1}) \text{ et} \\ &\quad (\lambda_{i+1} \triangleleft_{\theta} \lambda_i \text{ ou } \lambda_{i+1} \triangleleft_{\theta} \lambda_i) \end{aligned}$$

car si $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$, on ne peut pas avoir $\lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1}$ et $\lambda_{i+1} \triangleleft_{\theta} \lambda_i$. □

Par définition du pré-ordre $\triangleleft_{\theta'}$, on obtient alors :

Corollaire 9.4.5. *Si λ et μ sont dans le même bloc de Calogero-Moser pour un paramètre θ' sur un mur alors $\lambda \triangleleft_{\theta'} \mu$ et $\mu \triangleleft_{\theta'} \lambda$.*

L'exemple 9.2.6 montre que la réciproque de ce corollaire est fautive. Les blocs pour un paramètre sur un mur ne peuvent donc pas être décrits par les classes d'équivalence de l'ordre engendré $\triangleleft_{\theta'}$.

On pourra se référer à l'annexe D pour un calcul complet et un classement pour l'ordre combinatoire des blocs pour $n = 4$.

Enfin, ce résultat améliore la définition du pré-ordre combinatoire sur les blocs, pour $\ell = 2$.

Corollaire 9.4.6. *Soient B et B' deux blocs distincts de $CM_{\mathbf{h}'}(G(2, 1, n))$,*

$$B \triangleleft_{\theta'} B' \iff \forall \lambda \in B \text{ et } \forall \mu \in B', \lambda \triangleleft_{\theta'} \mu.$$

9.4.2 Lien entre l'ordre géométrique et le pré-ordre combinatoire pour B_n

Le corollaire 9.4.5 va nous permettre de relier l'ordre géométrique au pré-ordre combinatoire sur un mur pour $\ell = 2$.

Proposition 9.4.7. *Soient $\mathbf{h}' \in \mathbf{H}$ et B, B' deux blocs de $CM_{\mathbf{h}'}(G(2, 1, n))$ alors*

$$B \prec_{\theta'} B' \implies B \triangleleft_{\theta'} B'.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} B \prec_{\theta'} B' &\iff \exists \lambda_1 \in B, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots \text{ et } \lambda_m \in B' \text{ telles que :} \\ &\lambda_i \text{ et } \lambda'_i \text{ sont dans le même bloc pour tout } i > 1 \\ &\lambda_i \prec_{\theta} \lambda_{i+1} \text{ pour } i \text{ impair} \\ &\lambda'_i \prec_{\theta} \lambda'_{i+1} \text{ pour } i \text{ pair.} \end{aligned}$$

Or d'après le théorème 9.3.8, $\lambda_i \prec_{\theta} \lambda_{i+1} \implies \lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1}$. Donc, en utilisant le corollaire 9.4.5, on obtient :

$$\begin{aligned} X_B \prec X_{B'} &\implies \exists \lambda_1 \in B, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots \text{ et } \lambda_m \in B' \text{ telles que :} \\ &\lambda_i \triangleleft_{\theta'} \lambda'_i \text{ et } \lambda'_i \triangleleft_{\theta'} \lambda_i \text{ pour tout } i > 1 \\ &\lambda_i \triangleleft_{\theta} \lambda_{i+1} \text{ pour } i \text{ impair} \\ &\lambda'_i \triangleleft_{\theta} \lambda'_{i+1} \text{ pour } i \text{ pair.} \\ &\implies \exists \lambda_1 \in B, \lambda_2, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots \text{ et } \lambda_m \in B' \text{ telles que :} \\ &\lambda_1 \triangleleft_{\theta} \lambda_2 \triangleleft_{\theta'} \lambda'_2 \triangleleft_{\theta} \lambda'_3 \triangleleft_{\theta'} \dots \triangleleft_{\theta'} \lambda_m \\ &\implies \exists \lambda_1 \in B, \lambda_m \in B' \text{ telles que } \lambda_1 \triangleleft_{\theta'} \lambda_m \\ &\implies B \triangleleft_{\theta'} B'. \end{aligned}$$

□

Le corollaire 9.4.5 nous a donc permis de relier l'ordre géométrique au pré-ordre combinatoire sur un mur pour $\ell = 2$. Il serait donc intéressant de généraliser ce résultat à ℓ quelconque mais la difficulté réside dans la description simple des alcôves en général. De plus, la démonstration de la proposition 9.4.4 repose sur le fait que, pour $\ell = 2$, le paramètre $\mathbf{m} \pm \frac{1}{2}$, avec \mathbf{m} sur un mur, est relié au ℓ -uplet $(-s_i - \frac{i}{2})_{0 \leq i \leq \ell-1}$ par une translation, ce qui n'est pas le cas pour ℓ quelconque.

Quatrième partie

Construction des différents ordres sur les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, e, n)$

Introduction

Dans cette dernière partie de la thèse, en utilisant les parties précédentes, nous allons chercher à généraliser à tous les groupes imprimitifs les résultats concernant les groupes de la forme $G(\ell, 1, n)$ que nous avons présentés ou obtenus à la partie 3.

Nous verrons au paragraphe 10.2 que le paramètre c tel que $H_c(G(\ell, e, n))$ soit une sous-algèbre de $H_c(G(\ell, 1, n))$ est associé à $\mathfrak{h}' \notin \mathbf{H}^{\text{reg}}$. Puis on montrera au corollaire 10.3.3, grâce à la description des blocs faite dans [Bel] et aux résultats de M. Chlouveraki énoncés au paragraphe 2.2.2, que la \mathfrak{a} -fonction est constante sur les blocs de $G(\ell, e, n)$.

De plus, le théorème de G. Bellamy concernant les blocs de $G(\ell, e, n)$ montre que si $e \nmid n$ alors les partitions $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, 1, n))$ et $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, e, n))$ sont en bijection. On construira donc, à partir de $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$, une variété irréductible $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ qui vit au dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$ et dont les points fixes paramètrent $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, e, n))$ pour $e \nmid n$. Dans ce cas, on pourra généraliser les résultats du chapitre 9 à $G(\ell, e, n)$ (cf. théorème 11.1.2), en utilisant le théorème 11.1.1 qui relie les ordres géométriques de $G(\ell, 1, n)$ et $G(\ell, e, n)$.

Lorsque $e \mid n$, le groupe $G(\ell, e, n)$ a a priori plus de blocs que $G(\ell, 1, n)$. Il faut donc construire, à partir de $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$, une variété qui aurait plus de points fixes. La normalisation de $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ nous paraît être un bon candidat. Dans ce sens, nous montrerons au paragraphe 11.3 que, sous une hypothèse plausible, c'est le cas pour $G(2, 2, 2)$.

Algèbres et variété associées à $G(\ell, e, n)$

10.1 Le groupe $G(\ell, e, n)$ et ses représentations

Soient des entiers positifs ℓ, e, n tels que $e \mid \ell$. Notons alors $p = \frac{\ell}{e}$. Le groupe $G(\ell, e, n)$ a été décrit au théorème 4.1.4 comme le groupe composé de matrices monomiales de taille n telles que :

- le seul terme non nul sur chaque colonne est une racine $\ell^{\text{ième}}$ de l'unité
- le produit de tous les termes non nuls est une racine $\frac{\ell}{e}^{\text{ième}}$ de l'unité.

Notons ρ l'application qui à un élément de $G(\ell, 1, n)$ associe le produit de ses coefficients non nuls, c'est un morphisme de groupes et $G(\ell, e, n) = \rho^{-1}(\mu_{\frac{\ell}{e}})$. C'est donc un sous-groupe distingué de $G(\ell, 1, n)$ qui est tel que le quotient $G(\ell, 1, n)/G(\ell, e, n)$ est un groupe cyclique d'ordre e .

Le quotient étant abélien, on va pouvoir appliquer le corollaire 2.1.8 pour décrire $\text{Irr } G(\ell, e, n)$ grâce à $\text{Irr } G(\ell, 1, n)$, comme cela a été fait dans [Bel, 5.5].

Notons C_e le groupe cyclique à e éléments et \hat{C}_e son groupe des caractères, il est engendré par $\delta = \rho^p$. On a vu au chapitre 6, qu'il agissait sur $\text{Irr } G(\ell, 1, n)$, cette action se transporte donc sur $\mathcal{P}(\ell, n)$ et est de la forme :

$$\delta \cdot (\lambda^1, \dots, \lambda^\ell) = (\lambda^{\ell+1-p}, \lambda^{\ell+2-p}, \dots, \lambda^\ell, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{\ell-p}).$$

Si l'on regroupe la partition λ en e paquets de p parts : $\lambda = (\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_e)$, avec $\underline{\lambda}_i = (\lambda^{(i-1)p+1}, \dots, \lambda^{ip})$, alors l'action de \hat{C}_e peut être exprimée plus simplement :

$$\delta \cdot (\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_e) = (\underline{\lambda}_e, \underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_{e-1}).$$

Définition 10.1.1. Une multipartition λ qui vérifie $\underline{\lambda}_i = \underline{\lambda}_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq e$ est appelée *e-bégayante*.

Remarque 10.1.2. Si $\mathcal{P}(\ell, n)$ contient une partition *e-bégayante* λ , on a

$$\begin{aligned} n &= |\lambda| \\ &= \sum_{i=1}^e |\underline{\lambda}_i| \\ &= e|\underline{\lambda}_1| \end{aligned}$$

et alors e divise n .

Pour $\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)$, notons $\{\lambda\}$ l'orbite de λ sous l'action de \hat{C}_e et \hat{C}_λ le stabilisateur de λ . On retrouve alors le résultat suivant, qui est bien connu, cf. par exemple [Ari95].

Proposition 10.1.3. $\text{Irr } G(\ell, e, n) \leftrightarrow \bigcup_{\lambda \in \mathcal{P}(\ell, n)} \bigsqcup_{\epsilon \in \hat{C}_\lambda} \{\{\lambda\}, \epsilon\}$

Exemple 10.1.4. Illustrons cette propriété pour $n = \ell = e = 2$. Comme $G(2, 2, 2) \simeq C_2 \times C_2$, il a quatre caractères irréductibles $\{\mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes \epsilon, \epsilon \otimes \mathbf{1}, \epsilon \otimes \epsilon\}$, où ϵ est le caractère irréductible non trivial de C_2 .

Or \hat{C}_2 agit sur $\mathcal{P}(2, 2) = \{(2; \emptyset), (11; \emptyset), (1; 1), (\emptyset; 11), (\emptyset; 2)\}$ en échangeant les parts et cette action a trois orbites : $\{(1; 1)\}$ qui n'a qu'un élément, $\{(2; \emptyset)\}$ qui contient $(2; \emptyset)$ et $(\emptyset; 2)$ et $\{(11; \emptyset)\}$ regroupant $(11; \emptyset)$ et $(\emptyset; 11)$. De plus, elles sont telles que $\hat{C}_{(2; \emptyset)} = \hat{C}_{(11; \emptyset)} = \{1\}$ et $\hat{C}_{(1; 1)} = \hat{C}_2$. La description précédente nous donne donc bien quatre caractères irréductibles pour $G(2, 2, 2)$ qui sont décrits par $\{\{(2; \emptyset)\}, 1\}$, $\{\{(11; \emptyset)\}, 1\}$, $\{\{(1; 1)\}, 1\}$ et $\{\{(1; 1)\}, \delta\}$. Mais

$$\text{Res}_{G(2,2,2)}^{G(2,1,2)} \chi_{(2; \emptyset)} = \text{Res}_{G(2,2,2)}^{G(2,1,2)} \chi_{(\emptyset, 2)} = \mathbf{1}$$

$$\text{Res}_{G(2,2,2)}^{G(2,1,2)} \chi_{(11; \emptyset)} = \text{Res}_{G(2,2,2)}^{G(2,1,2)} \chi_{(\emptyset, 11)} = \epsilon \otimes \epsilon$$

$$\text{et } \text{Res}_{G(2,2,2)}^{G(2,1,2)} \chi_{(1; 1)} = (\epsilon \otimes \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \otimes \epsilon).$$

Donc $\{\{(2; \emptyset)\}, 1\}$ décrit le caractère $\mathbf{1}$, $\{\{(11; \emptyset)\}, 1\}$ décrit $\epsilon \otimes \epsilon$ et, par exemple, $\{\{(1; 1)\}, 1\}$ décrit $\epsilon \otimes \mathbf{1}$ et $\{\{(1; 1)\}, \delta\}$ décrit $\mathbf{1} \otimes \epsilon$.

Reprenons les notations du paragraphe 7.1.2 pour décrire les réflexions de $G(\ell, e, n)$. D'après [Bel, 5.2], si $n > 2$ ou si $n = 2$ et e est impair, l'ensemble des pseudo-réflexions de $G(\ell, e, n)$ a p classes de conjugaison :

$$\mathcal{S}_{G(\ell, e, n)} = \tilde{\mathcal{S}}_0 \sqcup \tilde{\mathcal{S}}_1 \sqcup \cdots \sqcup \tilde{\mathcal{S}}_{p-1}$$

où $\tilde{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{S}_0 = \{s_{i,j} \sigma_i^r \sigma_j^{-r}, 1 \leq i \neq j \leq n \text{ et } 0 \leq r \leq \ell - 1\}$ et pour $1 \leq t \leq p - 1$, $\tilde{\mathcal{S}}_t = \mathcal{S}_{te} = \{\sigma_i^{te}, 1 \leq i \leq n\}$. Si $n = 2$ et e est pair alors \mathcal{S}_0 se scinde en deux classes de conjugaison : $\mathcal{S}_+ = \{s_{1,2} \sigma_1^r \sigma_2^{-r}, 0 \leq r \leq \ell - 1, r \text{ pair}\}$ et $\mathcal{S}_- = \{s_{1,2} \sigma_1^r \sigma_2^{-r}, 0 \leq r \leq \ell - 1, r \text{ impair}\}$ et donc $\mathcal{S}_{G(\ell, e, n)}$ a $p + 1$ classes de conjugaison.

Comme pour $G(\ell, 1, n)$, dans le cas où $n > 2$ ou si $n = 2$ et e est impair, l'ensemble des hyperplans liés à ces réflexions a deux orbites sous l'action de $G(\ell, e, n)$:

$$\mathcal{C}_1 = \{H_{p,q,t}, 1 \leq p \neq q \leq n \text{ et } 0 \leq t \leq \ell - 1\}$$

qui vérifie $e_{\mathcal{C}_1} = 2$ et

$$\mathcal{C}_2 = \{H_{j,e}, 1 \leq j \leq p\}$$

avec $e_{\mathcal{C}_2} = p$. Pour le cas $n = 2$ et e pair, l'orbite \mathcal{C}_1 se scinde en deux orbites et le stabilisateur des hyperplans de ces orbites est d'ordre 2.

10.2 Algèbre de Cherednik et blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, e, n)$

D'après le paragraphe 5.1 et ce que l'on vient de voir, si le paramètre c vérifie $c_i = 0$ pour tout i non divisible par e alors l'algèbre de Cherednik associée à $G(\ell, e, n)$ est une sous-algèbre de $H_c(G(\ell, 1, n))$ telle que :

$$H_c(G(\ell, 1, n)) \simeq (H_c(G(\ell, e, n)) \rtimes C_e).$$

Les formules suivantes reliant les paramètres c et \mathbf{h}

$$H_j = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell-1} \zeta_\ell^{ij} c_i, \text{ pour } 1 \leq j \leq \ell - 1$$

que l'on a données au paragraphe 7.2.1 permettent de décrire la condition " $c_i = 0$ pour tout i non divisible par e " avec le paramètre \mathbf{h} . D'après [Bel, 6.6], on a alors

$$H_{j+p} = H_j, \forall 0 \leq j \leq \ell - 1,$$

les indices étant considérés modulo ℓ .

Mais alors

$$\begin{aligned} e(H_1 + \cdots + H_p) &= (H_1 + H_{p+1} + \cdots + H_{(e-1)p+1}) + \cdots + (H_p + \cdots + H_{pe}) \\ &= H_0 + H_1 + \cdots + H_{\ell-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et le paramètre \mathbf{h} se trouve donc sur un mur GIT (cf. lemme 8.2.23).

Hypothèse. Dans toute la suite, on va considérer un paramètre $c \in \mathbb{C}^\ell$ tel que $c_i = 0$ pour tout i non divisible par e , soit un paramètre \mathbf{h}' correspondant qui vérifie $H'_{j+p} = H'_j, \forall 0 \leq j \leq \ell - 1$.

Concernant les blocs de Calogero-Moser, on a vu au théorème 6.1.4 que, dans le cas où $K \triangleleft W$ sont deux groupes de réflexions tels que le quotient $W/K \simeq \Gamma$ est abélien, on a une bijection

$$CM_{\mathbf{h}'}(W) \leftrightarrow CM_{\mathbf{h}'}(K)/\Gamma.$$

G. Bellamy [Bel, th. 6.10] est allé plus loin dans cette description pour le cas qui nous intéresse ici : $W = G(\ell, 1, n)$ et $K = G(\ell, e, n)$.

Théorème 10.2.1 (Bellamy).

Soient $\mathbf{h}' \in \mathbb{Q}^\ell$ un paramètre comme dans l'hypothèse et tel que $h' \neq 0$, $B \in CM_{\mathbf{h}'}(W)$ et $\Gamma(B) := \{F \in \text{Irr } \mathbb{C}[K], \text{ il existe } E \in B \text{ tel que } F | \text{Res}_{G(\ell, e, n)}^W E\}$. Alors :

- (i) si $B = \{\lambda\}$ et que λ est une multipartition e -bégayante alors $\Gamma(B)$ se partitionne en $|\hat{C}_\lambda|$ blocs singletons de $G(\ell, e, n)$:

$$\Gamma(B) = \bigsqcup_{\epsilon \in \hat{C}_\lambda} \{\{\lambda\}, \epsilon\}.$$

- (ii) sinon $\Gamma(B)$ est un bloc de $G(\ell, e, n)$.

La démonstration de ce théorème utilise notamment la description des blocs par les résidus que nous avons énoncée au théorème 9.1.9.

Exemple 10.2.2. Utilisons de nouveau l'exemple $G(2, 2, 2) \triangleleft G(2, 1, 2)$ pour illustrer ce résultat. Le paramètre $\mathbf{h}' = (h', H'_1)$ vérifie $h' \neq 0$ et $H'_1 = 0$. D'après les calculs faits en annexe A.7, $\text{Irr } G(2, 1, 2)$ a alors trois blocs $\{(2; \emptyset), (\emptyset; 2)\}$, $\{(11; \emptyset), (\emptyset; 11)\}$ et $\{(1; 1)\}$. Mais la 2-multipartition $(1; 1)$ est 2-bégayante donc on obtient, d'après la description que l'on a faite à l'exemple 10.1.4, quatre blocs singletons pour $G(2, 2, 2)$, le bloc $\{\mathbf{1}\}$ correspondant au bloc $\{(2; \emptyset), (\emptyset; 2)\}$ de $G(2, 1, 2)$, le bloc $\{\epsilon \otimes \epsilon\}$ correspondant au bloc $\{(11; \emptyset), (\emptyset; 11)\}$ et les deux blocs $\{\epsilon \otimes \mathbf{1}\}$ et $\{\mathbf{1} \otimes \epsilon\}$ qui correspondent au bloc $\{(1; 1)\}$.

10.3 Algèbre de Hecke et α -fonction pour $G(\ell, e, n)$

On a vu au corollaire 9.1.10, que les α et \mathbf{A} -fonctions étaient constantes à l'intérieur des blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, 1, n)$. Étant donné que les blocs de $G(\ell, e, n)$ sont décrits à partir de ceux de $G(\ell, 1, n)$, on peut espérer obtenir le même résultat pour les blocs de $G(\ell, e, n)$.

D'après la définition des α et \mathbf{A} -fonctions (cf. définition 4.2.4), il faut comparer les éléments de Schur des algèbres de Hecke cyclotomiques associées à $G(\ell, 1, n)$ et $G(\ell, e, n)$.

Commençons par décrire l'algèbre de Hecke cyclotomique associée à $G(\ell, e, n)$. Pour les cas $n > 2$ ou $n = 2$ et e est impair, on a deux orbites d'hyperplans qui vérifient $e_1 = 2$ et $e_2 = p$, on a donc un paramètre $\mathbf{n} = ((\mathbf{n}_{(c_1,0)}, \mathbf{n}_{(c_1,1)}), (\mathbf{n}_{(c_2,0)}, \dots, \mathbf{n}_{(c_2,p-1)}))$ et, d'après [Ch109, 5.5.1], l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{n}}(G(\ell, e, n))$ a $n + 1$ générateurs a_0, a_1, \dots, a_n qui vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 a_3 a_1 &= a_3 a_1 a_3, \\ a_j a_{j+1} a_j &= a_{j+1} a_j a_{j+1} \text{ pour } 2 \leq j \leq n-1, \\ a_1 a_2 a_3 a_1 a_2 a_3 &= a_3 a_1 a_2 a_3 a_1 a_2, \\ a_1 a_j &= a_j a_1 \text{ pour } 4 \leq j \leq n, \\ a_i a_j &= a_j a_i \text{ pour } 2 \leq i \leq j \leq n \text{ et } j - i > 1, \\ a_0 a_j &= a_j a_0 \text{ pour } 3 \leq j \leq n, \\ a_0 a_1 a_2 &= a_1 a_2 a_0, \\ a_2 a_0 a_1 a_2 a_1 a_2 \cdots &= a_0 a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 a_2 \cdots \text{ avec } e + 1 \text{ facteurs,} \\ \prod_{j=0}^{p-1} (a_0 - \zeta_p^j \mathbf{q}^{n(c_2,j)}) &= 0, \\ (a_i - \mathbf{q}^{n(c_1,0)})(a_i - \mathbf{q}^{n(c_1,1)}) &= 0. \end{aligned}$$

Le cas $n = 2$ et e pair se traite de la même manière, cf [Ch109, 5.5.2].

En ce qui concerne l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(G(\ell, 1, n))$, le lien entre les paramètre \mathbf{m} et \mathbf{h} et l'hypothèse faite sur les c_i impose que $\mathbf{m}_{(c_2,j)} = \mathbf{m}_{(c_2,j+p)}$, $\forall 1 \leq j \leq \ell - 1$. On peut donc poser pour tout j :

$$\mathbf{m}_{(c_2,j)} = \frac{\mathbf{n}_{(c_2,j \bmod p)}}{e}.$$

Et alors, comme $\zeta_e^{\lfloor j/p \rfloor} \times (\zeta_p^{j \bmod p})^{\frac{1}{e}} = \zeta_e^j$, la spécialisation que l'on vient de donner correspond exactement aux hypothèses du lemme A.7.1 de [Ch109] et donc, d'après ce lemme, l'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(G(\ell, 1, n))$ est l'algèbre symétrique tordue de C_e sur $\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{n}}(G(\ell, e, n))$. Le lemme A.7.3 de [Ch109] affirme que c'est le cas aussi pour $n = 2$ et e pair. On va donc pouvoir appliquer les résultats du paragraphe 2.2.2.

Proposition 10.3.1. *Si $n \geq 2$, $B \in CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, 1, n))$ et $\bar{B} \in CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, e, n))$ sont tels que $C \cdot \bar{B} = \Gamma(B)$, alors $\forall F \in \bar{B}$:*

$$\alpha_n(F) = \alpha_m(B) \text{ et } \mathbf{A}_n(F) = \mathbf{A}_m(B).$$

Démonstration. Notons $A = \mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(G(\ell, 1, n))$ et $\bar{A} = \mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{n}}(G(\ell, e, n))$. Soient $F \in \bar{B}$ et $E \in B$ tel que $F | \text{Res}_{G(\ell,e,n)}^{G(\ell,1,n)} E$. D'après les résultats du paragraphe 4.2.2, on peut associer aux modules simples E et F des modules $V_F \in \text{Irr}(\mathbb{C}(\mathbf{z})\bar{A})$ et $V_E \in \text{Irr}(\mathbb{C}(\mathbf{z})A)$,

où \mathbf{z} est une racine de \mathbf{q} bien choisie. Les \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions sont alors définies de la manière suivante :

$$\mathbf{a}_n(F) = -\text{val}_{\mathbf{q}}(s_F), \quad \mathbf{a}_m(E) = -\text{val}_{\mathbf{q}}(s_E),$$

$$\mathbf{A}_n(F) = \text{deg}_{\mathbf{q}}(s_F) \text{ et } \mathbf{A}_m(E) = \text{deg}_{\mathbf{q}}(s_E)$$

où s_F (respectivement s_E) est l'élément de Schur associé à V_F (respectivement V_E).

Lemme 10.3.2. *Si $F \mid \text{Res}_{G(\ell, e, n)}^{G(\ell, 1, n)} E$ alors $V_F \mid \text{Res}_{\mathbb{C}(\mathbf{z})\bar{A}}^{\mathbb{C}(\mathbf{z})A} V_E$.*

Preuve du lemme. Par construction, si on a $\text{Res}_{\mathbb{C}(\mathbf{z})\bar{A}}^{\mathbb{C}(\mathbf{z})A} V_E = \bigoplus_{i=1}^r V_{F_i}$, alors en spécialisant à $\mathbf{q} = 1$, on obtient $\text{Res}_{G(\ell, e, n)}^{G(\ell, 1, n)} E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$. On conclut par unicité de cette décomposition à isomorphisme près. \square

Ainsi, si l'on note $\bar{\Omega}$ l'orbite de V_F sous C_e alors V_E est dans l'orbite Ω qui correspond à $\bar{\Omega}$ par la bijection de la proposition 2.2.2 et on a $s_E = \text{card}(\Omega)s_F$, ce qui implique

$$\mathbf{a}_n(F) = \mathbf{a}_m(E) = \mathbf{a}_m(B) \text{ et } \mathbf{A}_n(F) = \mathbf{A}_m(E) = \mathbf{A}_m(B).$$

\square

Corollaire 10.3.3. *Les \mathbf{a} et \mathbf{A} -fonctions sont constantes à l'intérieur des blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, e, n)$.*

Démonstration. Pour $n \geq 2$, cela vient de la proposition précédente et pour $n = 1$, comme $G(\ell, e, 1) \simeq G(\frac{\ell}{e}, 1, 1)$, cela a déjà été montré au corollaire 9.1.10. \square

Ceci va nous permettre de parler d'ordre de la \mathbf{a} -fonction sur les blocs de $G(\ell, e, n)$, comme nous l'avons fait précédemment pour $G(\ell, 1, n)$.

10.4 Construction et propriétés de la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$

Au chapitre 8, on a construit une variété irréductible $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ qui vit au-dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$ et dont les \mathbb{C}^* -points fixes paramètrent $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, 1, n))$. On voudrait donc, de la même manière, construire une variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ qui serait irréductible, qui vivrait au dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$ et qui serait munie d'une action de \mathbb{C}^* telle que $(\mathcal{M}_{\theta'}(e, n))^{\mathbb{C}^*}$ décrive les blocs de $G(\ell, e, n)$. Mais d'après la remarque 10.1.2, au moins pour $e \nmid n$, les partitions $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, 1, n))$ et $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, e, n))$ sont en bijection, car dans ce cas, $\mathcal{P}(\ell, n)$ ne contient pas de multipartition e -bégayante. On va donc chercher à construire une variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ telle que $(\mathcal{M}_{\theta'}(e, n))^{\mathbb{C}^*}$ soit en bijection avec $(\mathcal{M}_{\theta'}(n))^{\mathbb{C}^*}$, ce qui nous permettra de traiter le cas $e \nmid n$, en utilisant ce que l'on a vu au chapitre 9 dans le cas non lisse (car d'après ce que l'on a vu au chapitre précédent, le paramètre \mathbf{h}' tel que $c_{\{\mathcal{S}_{G(\ell, 1, n)} - \mathcal{S}_{G(\ell, e, n)}\}} = 0$ se trouve sur un mur GIT).

Considérons donc un entier e quelconque et un paramètre θ' sur un mur, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_{\theta'}(n) & & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n) \\
 & \searrow \pi_{\theta',0} & \swarrow p \\
 & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n) &
 \end{array}$$

où la projection p correspond au quotient par C_e . On peut donc définir la variété réduite associée au produit fibré de $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ par $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$ au-dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\theta'}(e, n) &:= \mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n) \\
 &= \{(m, x) \in \mathcal{M}_{\theta'}(n) \times (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n), \text{ tels que } \pi_{\theta',0}(m) = p(x)\}.
 \end{aligned}$$

Cette variété vérifie

$$\mathcal{M}_{\theta'}(n) = \mathcal{M}_{\theta'}(e, n)/C_e$$

et se projette sur $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$ par la deuxième projection $p_2 : (m, x) \mapsto x$. Elle est de plus munie de l'action de \mathbb{C}^* définie par $\eta \cdot (m, x) = (\eta \cdot m, \eta \cdot x)$, où l'action de \mathbb{C}^* sur $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$ vient de celle sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ et n'a donc qu'un seul point fixe 0. On a donc bien

$$(\mathcal{M}_{\theta'}(e, n))^{\mathbb{C}^*} \leftrightarrow (\mathcal{M}_{\theta'}(n))^{\mathbb{C}^*}.$$

Proposition 10.4.1. *La variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ est irréductible.*

Démonstration. Sachant que l'on a un morphisme surjectif de $\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)$ sur $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)$ est irréductible pour montrer l'irréductibilité de $\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$. Or on a vu au paragraphe 8.2.6, qu'il existait un ouvert V de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)$ tel que

$$\pi_{\theta',0} : \pi_{\theta',0}^{-1}(V) \longrightarrow V$$

est un isomorphisme. Notons $U = \pi_{\theta',0}^{-1}(V)$ et f la projection

$$\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(n).$$

On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) & \\
 & \swarrow f & \searrow \\
 \mathcal{M}_{\theta'}(n) & & \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^* \\
 & \searrow \pi_{\theta',0} & \swarrow p_{G(\ell, 1, n)} \\
 & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n) &
 \end{array}$$

Comme U est un ouvert non vide de $\underline{\mathcal{M}_{\theta'}(n)}$ qui est irréductible d'après la proposition 8.2.21, on a $\overline{U} = \mathcal{M}_{\theta'}(n)$ et $f^{-1}(U)$ est une composante irréductible de $\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)$. En effet, par construction de U et V ,

$$f^{-1}(U) = \{(m, x), \pi_{\theta',0}(m) = p_{G(\ell, 1, n)}(x) \text{ et } m \in U\}$$

est isomorphe à $p_{G(\ell, 1, n)}^{-1}(V)$ par la deuxième projection. Or $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ est irréductible donc l'ouvert $p_{G(\ell, 1, n)}^{-1}(V)$ aussi. Ainsi, $f^{-1}(U)$ est irréductible.

Le groupe $G(\ell, 1, n)$ agit sur $\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)$ de la manière suivante :

$$w \cdot (m, x) = (m, w \cdot x)$$

et par propriété du produit fibré, on a :

$$\exists w \in G(\ell, 1, n) \text{ tel que } (m, x) = w \cdot (m', x') \iff m = m'.$$

Donc $(\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)) / G(\ell, 1, n) \simeq \mathcal{M}_{\theta'}(n)$ et les variétés $\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)$ et $\mathcal{M}_{\theta'}(n)$ ont la même dimension. L'ensemble $\overline{f^{-1}(U)}$ est donc une composante irréductible de $\mathcal{M}_{\theta'}(n) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)$ de dimension maximale. On va montrer que c'est la seule.

Lemme 10.4.2. *On considère une variété irréductible \mathcal{M} , un groupe fini W agissant sur une variété \mathcal{P} de sorte que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{P}/W$. Soit \mathcal{P}_0 une composante irréductible de \mathcal{P} de dimension maximale, alors*

$$\mathcal{P} = \bigcup_{w \in W} w \cdot \mathcal{P}_0$$

et les composantes irréductibles de \mathcal{P} sont de la forme $w \cdot \mathcal{P}_0$.

Preuve. Le morphisme $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ étant fini, l'image de \mathcal{P}_0 est une composante irréductible de \mathcal{M} de dimension maximale, et les deux variétés ont même dimension donc \mathcal{M} est égale à l'image de \mathcal{P}_0 et

$$\mathcal{P} = \bigcup_{w \in W} w \cdot \mathcal{P}_0.$$

On conclut par unicité de la décomposition d'une variété en composantes irréductibles. \square

Ici, on a $\mathcal{P}_0 = \overline{f^{-1}(U)}$. Mais par construction de l'action de $G(\ell, 1, n)$, $f^{-1}(U)$ est stable sous cette action et \mathcal{P}_0 aussi. Donc $\mathcal{M}_{\theta'} \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, 1, n)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) = \mathcal{P}_0$ est irréductible. \square

Remarque 10.4.3. *Les propriétés de $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ que l'on vient d'énoncer sont valables pour θ quelconque mais on va s'intéresser à cette variété seulement pour θ' sur un mur.*

\mathbb{C}^* -points fixes et ordres sur les blocs de $G(\ell, e, n)$

D'après ce que nous avons démontré au chapitre 9, il suffit de décrire les blocs de $G(\ell, e, n)$ par les \mathbb{C}^* -points fixes d'une variété bien choisie pour construire un ordre géométrique sur les blocs de $G(\ell, e, n)$ et le comparer aux ordres algébriques et combinatoires.

Mais, selon le théorème 10.2.1, les blocs de $G(\ell, e, n)$ seront considérablement différents suivant si $\mathcal{P}(\ell, n)$ admet ou non des multipartitions e -bégayantes. Dans le cas où il n'y en a pas, on a une bijection entre $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, 1, n))$ et $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, e, n))$, sinon, certains blocs singletons de $G(\ell, 1, n)$ peuvent se scinder en plusieurs blocs pour $G(\ell, e, n)$.

11.1 Cas $e \nmid n$

Comme nous l'avons vu au paragraphe 10.4, la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ est la bonne variété à considérer pour décrire géométriquement les blocs de Calogero-Moser de $G(\ell, e, n)$ quand e ne divise pas n .

On voudrait donc construire, grâce à la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$, un ordre géométrique sur les blocs de $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, e, n))$, que l'on va noter $\{\Gamma(B), B \in CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, 1, n))\}$. On ne sait pas si cette variété est normale donc, a priori, la relation donnée à la définition 3.3.1 ne permet de construire qu'un pré-ordre sur $(\mathcal{M}_{\theta'}(e, n))^{\mathbb{C}^*}$. Mais le fait que la projection $p_1 : \mathcal{M}_{\theta'}(e, n) \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(n)$ corresponde au quotient par le groupe fini C_e qui agit trivialement sur les points fixes implique qu'on a en fait une relation d'ordre sur $(\mathcal{M}_{\theta'}(e, n))^{\mathbb{C}^*}$ qui est équivalente à l'ordre sur $(\mathcal{M}_{\theta'}(n))^{\mathbb{C}^*}$, d'après la remarque 3.4.15. On peut donc définir un ordre géométrique sur $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, e, n))$ en posant, pour $\Gamma(B), \Gamma(B')$ deux blocs de $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, e, n))$:

$$\Gamma(B) \prec_{\theta', e} \Gamma(B') \iff X_{\theta', e}(B) \prec X_{\theta', e}(B'),$$

où $X_{\theta', e}(B)$ est le \mathbb{C}^* -point fixe de $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ correspondant au bloc $\Gamma(B)$. De plus, les deux relations d'ordre sur $(\mathcal{M}_{\theta'}(e, n))^{\mathbb{C}^*}$ et $(\mathcal{M}_{\theta'}(n))^{\mathbb{C}^*}$ étant équivalentes, on a le résultat suivant.

Théorème 11.1.1. *Pour B, B' deux blocs de $CM_{\mathbf{h}'}(G(\ell, 1, n))$, on a*

$$B \prec_{\theta'} B' \iff \Gamma(B) \prec_{\theta', e} \Gamma(B').$$

On peut aussi définir un ordre combinatoire sur $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, e, n))$ en posant pour B, B' deux blocs de $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, 1, n))$:

$$\Gamma(B) \triangleleft_{\theta', e} \Gamma(B') \iff B \triangleleft_{\theta'} B'.$$

Ces ordres ainsi définis vérifient par construction un résultat similaire au théorème 9.3.10 et à la proposition 9.4.7 :

Théorème 11.1.2. *Soient $\Gamma(B), \Gamma(B')$ deux blocs de $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, e, n))$ alors*

$$\Gamma(B) \prec_{\theta', e} \Gamma(B') \implies \begin{cases} \mathbf{a}_{\theta'}(\Gamma(B)) \leq \mathbf{a}_{\theta'}(\Gamma(B')) \\ \mathbf{c}_{\theta'}(\Gamma(B)) \geq \mathbf{c}_{\theta'}(\Gamma(B')). \end{cases}$$

et pour $\ell = 2$:

$$\Gamma(B) \prec_{\theta', e} \Gamma(B') \implies \Gamma(B) \triangleleft_{\theta', e} \Gamma(B').$$

11.2 Cas $e \mid n$: perspectives de recherche

Quand $e \mid n$, l'ensemble $\mathcal{P}(\ell, n)$ peut contenir des multipartitions e -bégayantes et donc $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, e, n))$ a, en général, plus de blocs que $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, 1, n))$, comme on le voit sur l'exemple 10.2.2, puisque $G(2, 2, 2)$ a quatre blocs alors que $G(2, 1, 2)$ n'en a que trois. On ne peut donc pas utiliser la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ pour décrire $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, e, n))$ car elle n'a pas assez de points fixes. Il faut en fait rajouter $|\hat{C}_\lambda|$ points fixes à cette variété pour chaque point fixe qui correspond à un bloc singleton $\{\lambda\}$ de $G(\ell, 1, n)$, où λ est une multipartition e -bégayante. L'idée est donc d'éclater ces points fixes.

De plus, G. Bellamy a montré dans [Bel09] que, si $e \neq 1$, la variété $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$ n'admet pas de désingularisation. On ne peut donc pas espérer construire de variété lisse au-dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(\ell, e, n)$, mais, d'après le paragraphe 3.3, l'hypothèse de normalité est suffisante pour pouvoir construire un ordre sur les \mathbb{C}^* -points fixes. On peut donc se demander si la normalisation de $\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$ ne serait pas un bon candidat pour décrire géométriquement $CM_{\mathfrak{h}'}(G(\ell, e, n))$.

Dans le paragraphe suivant, on va étayer cette hypothèse en montrant que, pour le groupe $G(2, 2, 2)$ et sous une certaine hypothèse, la normalisation de $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$ permet de décrire $CM_{\mathfrak{h}'}(G(2, 2, 2))$.

11.3 Exemple de $G(2, 2, 2)$

Étudions l'exemple $G(2, 2, 2) \triangleleft G(2, 1, 2)$. Pour $\theta' = (0, 1)$, la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$ n'a que trois points fixes alors que $G(2, 2, 2)$ a quatre blocs. On va donc chercher à construire une variété \mathcal{M} qui vit au-dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ et qui a quatre \mathbb{C}^* -points fixes puis à la relier à $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$.

11.3.1 Variétés $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ et $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$

On a $G(2, 2, 2) = \langle s \rangle \times \langle s\sigma_1\sigma_2 \rangle \simeq C_2 \times C_2$, où $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $s\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si l'on note (y_1, y_2) la base canonique de $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^2$ et (x_1, x_2) la base duale associée, on peut construire une autre base de $\mathfrak{h} : (x, y)$, avec $x = y_1 + y_2$ et $y = y_1 - y_2$ et on note (X, Y) la base duale associée. On a alors

$$\begin{aligned} s(x) &= x & s(X) &= X \\ s(y) &= -y & s(Y) &= -Y \\ s\sigma_1\sigma_2(x) &= -x & s\sigma_1\sigma_2(X) &= -X \\ s\sigma_1\sigma_2(y) &= y & s\sigma_1\sigma_2(Y) &= Y. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*]^{G(2,2,2)} &= \mathbb{C}[x^2, y^2, xX, yY, X^2, Y^2] \\ &\simeq \mathbb{C}[A, B, C, A', B', C'] / \langle A^2 - BC, A'^2 - B'C' \rangle, \end{aligned}$$

en posant $A = xX$, $B = x^2$, $C = X^2$, $A' = yY$, $B' = y^2$ et $C' = Y^2$. Donc

$$(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 2, 2) = \{(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{A}^6(\mathbb{C}), a^2 = bc, a'^2 = b'c'\}$$

est un produit de deux cônes.

Le groupe $\langle \sigma_1 \rangle \simeq C_2$ agit sur $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 2, 2)$ en permutant les deux cônes, en effet $\sigma_1(x) = -y$ et $\sigma_1(X) = -Y$ et

$$(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 1, 2) \simeq ((\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 2, 2)) / C_2.$$

On trouvera au théorème 15 de [AF09], une présentation de $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*]^{G(2,1,2)}$ de laquelle on peut déduire les équations suivantes pour $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 1, 2)$:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 1, 2) &= \{(\sigma, \pi, \Sigma, \Pi, eu_0, eu'_0, eu''_0, \delta_0) \in \mathbb{A}^8(\mathbb{C}), eu_0 eu'_0 = \sigma\Pi + \Sigma\delta_0, \\ &eu_0 eu''_0 = \Sigma\pi + \sigma\delta_0, \delta_0 eu'_0 = \Pi eu''_0, \delta_0 eu''_0 = \pi eu'_0, \\ &\delta_0^2 = \pi\Pi, eu_0'^2 = \Pi(4\delta_0 + \sigma\Sigma - eu_0^2), \\ &eu''_0^2 = \pi(4\delta_0 + \sigma\Sigma - eu_0^2), \\ &eu'_0 eu''_0 = 4\pi\Pi + \sigma\Sigma\delta_0 - \delta_0 eu_0^2, \\ &eu_0(4\delta_0 + \sigma\Sigma - eu_0^2) = \sigma eu'_0 + \Sigma eu''_0\}, \end{aligned}$$

où $\sigma = x^2 + y^2$, $\pi = x^2 y^2$, $\Sigma = X^2 + Y^2$, $\Pi = X^2 Y^2$, $eu_0 = xX + yY$, $eu'_0 = (xY + yX)XY$, $eu''_0 = xy(xY + yX)$ et $\delta_0 = xyXY$. Le morphisme $p : (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 2, 2) \rightarrow (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*) / G(2, 1, 2)$ est donc décrit par

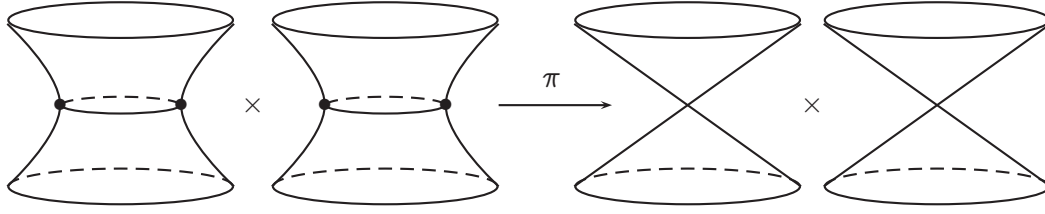
$$p((a, b, c), (a', b', c')) = (b + b', bb', c + c', cc', a + a', ac' + a'c, ab' + a'b, aa').$$

11.3.2 Résolution crépante

Afin de décrire géométriquement $CM_{\mathfrak{h}'}(G(2, 2, 2))$, il nous faut construire une variété qui vit au-dessus du produit de deux cônes et qui a quatre \mathbb{C}^* -points fixes. Mais si l'on regarde l'exemple 8.2.22, on a construit la variété $\mathcal{M}_{(0,1)}(1)$ qui vit au-dessus du cône et qui a deux \mathbb{C}^* -points fixes d'après l'exemple 9.1.6. Le produit

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(0,1)}(1) \times \mathcal{M}_{(0,1)}(1)$$

est donc la variété que l'on cherche. C'est la résolution crépante du produit des deux cônes.



\mathcal{M} a 4 points fixes et se projette sur $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2) & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{M}_{\theta'}(2) \\
 & \downarrow p_2 & & \downarrow \pi_{\theta', 0} \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{?} & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) & \xrightarrow{p} & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)
 \end{array}$$

où $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2) = \mathcal{M}_{\theta'}(2) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$. Et on voudrait montrer que \mathcal{M} correspond à un éclatement de $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$ selon certains points. Commençons par construire le morphisme en pointillé.

11.3.3 Différents éclatements de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ selon son lieu singulier

Le lieu singulier de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ est $\mathcal{L} = \{(a, b, c, a', b', c') \in (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) \text{ tels que } (a, b, c) = 0 \text{ ou } (a', b', c') = 0\}$.

Lemme 11.3.1. *Le morphisme p envoie un point singulier sur un point singulier.*

Preuve. La différentielle des équations de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$ en un point $p((a, b, c), (a', b', c'))$ est de la forme

$$\begin{pmatrix}
 -cc' & 0 & -aa' & -b - b' & ac' + a'c & a + a' & 0 & -c - c' \\
 -aa' & -c - c' & -bb' & 0 & ab' + a'b & 0 & a + a' & -b - b' \\
 0 & 0 & 0 & -ab' - a'b & 0 & aa' & -cc' & ac' + a'c \\
 0 & -ac' - a'c & 0 & 0 & 0 & -bb' & aa' & ab' + a'b \\
 0 & -cc' & 0 & -bb' & 0 & 0 & 0 & 2aa' \\
 -cc'(c+c') & 0 & -cc'(b+b') & \beta & 2cc'(a+a') & 2(ac'+a'c) & 0 & -4cc' \\
 -bb'(c+c') & \beta & -bb'(b+b') & 0 & 2bb'(a+a') & 0 & 2(ab'+a'b) & -4bb' \\
 -aa'(c+c') & -4cc' & -aa'(b+b') & -4bb' & 2aa'(a+a') & ab'+a'b & ac'+a'c & \gamma \\
 ac+a'c' & 0 & ab+a'b' & 0 & \alpha & -b - b' & -c - c' & 4(a + a')
 \end{pmatrix}$$

où $\alpha = -2aa' + bc' + b'c - 2(a^2 + a'^2)$, $\beta = -2aa' - bc' - b'c$, $\gamma = 2aa' - bc' - b'c$.

Le point $p((a, b, c), (a', b', c'))$ est lisse si et seulement si le noyau de cette matrice est de la même dimension que la variété $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$, c'est à dire 4. La matrice étant symétrique en $(a, b, c), (a', b', c')$, on peut supposer que $(a', b', c') = 0$. Alors la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b & 0 & a & 0 & -c \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2a^2 & -b & -c & 4a \end{pmatrix}$$

et son noyau est de dimension au moins 5 donc le point $p((a, b, c), (0, 0, 0))$ est singulier.

□

Remarque 11.3.2. *Les groupes $G(2, 1, 2)$ et $G(2, 2, 2)$ agissent sur $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ sans aucune réflexion. Les points lisses des variétés $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ et $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$ correspondent donc aux images des points de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ qui ont un stabilisateur trivial. Or un point de $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ qui a un stabilisateur trivial sous $G(2, 1, 2)$ a forcément un stabilisateur trivial sous $G(2, 2, 2)$. On retrouve donc qu'un point lisse de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$ est l'image par p d'un point lisse de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$.*

L'idéal le plus gros qui décrit ce lieu singulier est $I = \langle A, B, C \rangle \cdot \langle A', B', C' \rangle$. Comme le point fixe de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ se trouve dans son lieu singulier, on va chercher à éclater cette variété selon ce lieu.

Définition 11.3.3 ([Har77], p. 163). *Soit X une variété, Y une sous-variété de X décrite par un idéal I de \mathcal{O}_X . Soit $S = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$, où I^d est la puissance $d^{\text{ième}}$ de l'idéal I et $I^0 = \mathcal{O}_X$. On peut alors définir $\tilde{X} = \text{Proj}_{\mathcal{O}_X} S$ et cette variété est appelée l'éclatement de X selon Y (ou selon I).*

Proposition 11.3.4. *La variété \mathcal{M} est isomorphe à l'éclatement de la variété $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ selon l'idéal $I = \langle A, B, C \rangle \cdot \langle A', B', C' \rangle$.*

Démonstration. D'après l'exemple 8.2.22, la variété \mathcal{M} est décrite par

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \{ & ((a, b, c), (a', b', c'), [\alpha : \beta : \gamma : \delta]) \in (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) \times \mathbb{P}^3(\mathbb{C}), \\ & a\gamma = c\alpha, \quad a\delta = c\beta, \quad a\alpha = b\gamma, \quad a\beta = b\delta, \quad a'\delta = c'\gamma, \quad a'\beta = c'\alpha, \\ & a'\alpha = b'\beta, \quad a'\gamma = b'\delta, \quad \alpha\delta = \beta\gamma \}. \end{aligned}$$

Calculons l'éclatement $\tilde{\mathcal{M}}$ de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ selon l'idéal $I = \langle AA', AB', AC', A'B, BB', BC', A'C, B'C, CC' \rangle$. Par définition, $\tilde{\mathcal{M}} = \text{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} I^d$. Notons $A = \mathbb{C}[A, B, C, A', B', C'] / \langle A^2 - BC, A'^2 - B'C' \rangle$. Alors on définit un morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : A[E_1, \dots, E_9] & \rightarrow S = \bigoplus_{d \geq 0} I^d \\ E_1 & \mapsto BB' \\ E_2 & \mapsto BC' \\ E_3 & \mapsto BA' \\ E_4 & \mapsto B'C \\ E_5 & \mapsto CC' \\ E_6 & \mapsto CA' \\ E_7 & \mapsto B'A \\ E_8 & \mapsto C'A \\ E_9 & \mapsto AA', \end{aligned}$$

on calcule son noyau et on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}} = \{ & ((a, b, c), (a', b', c'), [e_1 : \cdots : e_9]) \in (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) \times \mathbb{P}^8(\mathbb{C}), \\ & be_4 = ae_7 = ce_1, ae_9 = ce_3 = be_6, a'e_3 = c'e_1 = b'e_2, \\ & a'e_9 = b'e_8 = c'e_7, ae_8 = ce_2 = be_5, a'e_6 = c'e_4 = b'e_5, b'e_3 = a'e_1, \\ & be_4 = ce_1, be_7 = ae_1, c'e_3 = a'e_2, be_8 = ae_2, be_6 = ce_3, be_9 = ae_3, \\ & b'e_6 = a'e_4, ce_7 = ae_4, c'e_6 = a'e_5, ce_8 = ae_5, ce_9 = ae_6, b'e_8 = c'e_7, \\ & b'e_9 = a'e_7, c'e_9 = a'e_8, e_1e_9 = e_3e_7, e_5e_9 = e_6e_8, e_1e_6 = e_7e_9 = e_3e_4, \\ & e_1e_8 = e_3e_9 = e_2e_7, e_2e_6 = e_8e_9 = e_3e_5, e_4e_8 = e_6e_9 = e_5e_7, e_3^2 = e_1e_2 \\ & e_2^2 = e_1e_5 = e_2e_4 = e_7e_8 = e_3e_6, e_8^2 = e_2e_5, e_6^2 = e_4e_5, e_7^2 = e_1e_4, \}. \end{aligned}$$

On peut donc construire un isomorphisme :

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{M} & \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} \\ ((a, b, c), (a', b', c'), [\alpha : \beta : \gamma : \delta]) & \mapsto ((a, b, c), (a', b', c'), [\alpha^2 : \beta^2 : \alpha\beta : \gamma^2 : \delta^2 : \gamma\delta : \alpha\gamma : \beta\delta : \alpha\delta]). \end{cases}$$

□

Ainsi, si l'on montre que $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$ est aussi un éclatement de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ selon un idéal qui décrit le lieu singulier \mathcal{L} , alors comme \mathcal{M} est l'éclatée selon le plus gros idéal qui décrit ce lieu, on aura construit un morphisme de \mathcal{M} vers $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$. Pour cela, il nous faut une hypothèse que malheureusement, nous n'avons pas pu vérifier, malgré plusieurs tentatives de décrire la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(2)$ grâce à des logiciels comme Magma. On sait déjà que $\pi_{\theta', 0}$ est un isomorphisme au dessus de l'ouvert lisse de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$ qui est contenu dans $p(\mathcal{L}^c)$ d'après le lemme 11.3.1, mais par la suite, on supposera que :

Hypothèse (H). Le morphisme $\pi_{\theta', 0} : \mathcal{M}_{\theta'}(2) \rightarrow (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$ est un isomorphisme au-dessus de $p(\mathcal{L}^c)$.

A priori, cette hypothèse peut paraître fantaisiste car on ne voit pas de lien entre $\pi_{\theta', 0}$, p et \mathcal{L} . Mais ce lien existe car le paramètre θ' est fixé par le groupe $G(2, 2, 2)$.

Sous l'hypothèse **(H)**, le morphisme $p_2 : \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2) \rightarrow (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ est aussi un isomorphisme au dessus de l'ouvert lisse car si $x \in \mathcal{L}^c$, alors il existe un unique $m \in \mathcal{M}_{\theta'}(n)$ tel que $\pi_{\theta', 0}(m) = p(x)$ et donc $p_2(m, x) = x$. De plus, il est projectif car p (qui est fini) et $\pi_{\theta', 0}$ sont projectifs. Donc d'après [Har77, 7.17],

Proposition 11.3.5. *Sous l'hypothèse (H), $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$ peut être vue comme un éclatement de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ selon un idéal J .*

Corollaire 11.3.6. *Sous l'hypothèse (H), il existe un morphisme de variétés $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$, qui est surjectif, projectif et \mathbb{C}^* -équivariant.*

Démonstration du corollaire. L'existence de Φ vient du fait que l'on peut faire le choix $J \subset I$ car les variétés sont isomorphes au-dessus de l'ouvert lisse. De plus, Φ est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2) \\ & \searrow \pi & \swarrow p_2 \\ & & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) \end{array}$$

commute. Et donc, comme π et p_2 sont projectifs, Φ l'est aussi. Il est donc fermé et comme son image contient un ouvert et que $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$ est irréductible, il est surjectif. Enfin, la variété \mathcal{M} est munie de l'action de \mathbb{C}^* issue du produit des deux actions et le morphisme π est \mathbb{C}^* -équivariant et donc Φ l'est aussi par commutativité du diagramme et parce que l'on quotiente par un idéal homogène. \square

11.3.4 Isomorphisme entre \mathcal{M}/C_2 et $\mathcal{M}_{\theta'}(2)$

Les variétés \mathcal{M}/C_2 et $\mathcal{M}_{\theta'}(2)$ vivent toutes les deux au-dessus de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$ et ont chacune trois points fixes sous l'action de \mathbb{C}^* . En effet, la variété \mathcal{M} a quatre points fixes $m_1 = ((0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), [1 : 0 : 0 : 0])$, $m_2 = ((0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), [0 : 1 : 0 : 0])$, $m_3 = ((0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), [0 : 0 : 1 : 0])$ et $m_4 = ((0, 0, 0), (0, 0, 0, 0), [0 : 0 : 0 : 1])$ et l'action de C_2 , qui consiste à permuter β et γ sur la partie projective, échange les points m_2 et m_3 . On va donc chercher à montrer que ces deux variétés sont isomorphes.

Proposition 11.3.7. *Sous l'hypothèse (H), il existe un isomorphisme $\tilde{\Phi} : \mathcal{M}/C_2 \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)/C_2 \simeq \mathcal{M}_{\theta'}(2)$ qui est \mathbb{C}^* -équivariant et projectif.*

Démonstration. On vient de construire un morphisme $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$ qui est \mathbb{C}^* -équivariant et projectif. Le morphisme

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{M}/C_2 \rightarrow \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)/C_2 \simeq \mathcal{M}_{\theta'}(2)$$

a donc les mêmes propriétés. De plus, par construction Φ est un isomorphisme au dessus de \mathcal{L}^c et donc

Lemme 11.3.8. *$\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme au-dessus de $p(\mathcal{L}^c)$.*

Preuve. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M}_{\theta'}(2, 2) \\ \downarrow \bar{p} & \searrow \pi & \swarrow p_2 \\ & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) & \\ \mathcal{M}/C_2 & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{M}_{\theta'}(2) \\ & & \downarrow p_1 \end{array}$$

Or Φ est un isomorphisme entre $\pi^{-1}(\mathcal{L}^c)$ et $p_2^{-1}(\mathcal{L}^c)$, on a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{L}^c) & \xrightarrow[\tilde{\Phi}]{\sim} & p_2^{-1}(\mathcal{L}^c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{p}(\pi^{-1}(\mathcal{L}^c)) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & p_1(p_2^{-1}(\mathcal{L}^c)) \\ & \searrow \bar{\pi} & \swarrow \pi_{\theta', 0} \\ & p(\mathcal{L}^c) & \end{array}$$

Montrons que $\tilde{\Phi}|_{\bar{p}(\pi^{-1}(\mathcal{L}^c))}$, que l'on note encore $\tilde{\Phi}$, est un isomorphisme sur $p_1(p_2^{-1}(\mathcal{L}^c))$. Soient $m \in p_1(p_2^{-1}(\mathcal{L}^c))$ et $x \in \mathcal{L}^c$ tel que $\pi_{\theta', 0}(m) = p(x)$. Alors $m = p_1(m, x)$

et il existe un unique $z \in \pi^{-1}(\mathcal{L}^c)$ tel que $\Phi(z) = (m, x)$. Alors $\tilde{\Phi}(\bar{p}(z)) = \pi \circ \Phi(z) = m$. Ici z n'est pas uniquement déterminé par m car il dépend de x . Mais si l'on prend un autre x' tel que $\pi_{\theta',0}(m) = p(x) = p(x')$, alors le z' correspondant au couple (m, x') vérifiera $\bar{p}(z') = \bar{p}(z)$ car les morphismes commutent avec les actions de C_2 . Ainsi $\bar{p}(z)$ est déterminé de manière unique par m et $\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme au dessus de $p(\mathcal{L}^c)$. \square

Donc, comme l'ouvert lisse de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$, que l'on note V , est inclus dans $p(\mathcal{L}^c)$, $\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme au-dessus de V . Mais $\pi_{\theta',0}^{-1}(V)$ est dense dans la variété irréductible $\mathcal{M}_{\theta'}(2)$ donc $\tilde{\Phi}$ est surjectif. Il reste donc à montrer que $\tilde{\Phi}$ est injectif au dessus de $p(\mathcal{L})$ qui est inclus dans $(\mathfrak{h} \times \{0\})/G(2, 1, 2) \cup (\{0\} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)$. Commençons d'abord par regarder les \mathbb{C}^* -points fixes.

Lemme 11.3.9. $\tilde{\Phi}$ met en bijection les points fixes de ces deux variétés.

Preuve. Soient $x \in (\mathcal{M}_{\theta'}(2))^{\mathbb{C}^*}$ et $z \in \tilde{\Phi}^{-1}(x)$. Sachant que $\tilde{\Phi}$ est un morphisme projectif, cette variété est projective et donc $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \cdot z$ existe et appartient à $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$. Donc $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$ contient un point fixe et comme les deux variétés ont le même nombre de points fixes, elle n'en contient qu'un.

Supposons maintenant que $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$ contienne un point z qui n'est pas fixe, alors $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$ va contenir toute la droite $\{\eta \cdot z, \eta \in \mathbb{C}^*\}$ et donc les deux limites $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \cdot z$ et $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \eta \cdot z$. Mais si z n'est pas fixe alors ces deux limites sont différentes. On peut le voir en plongeant la variété projective dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et l'action de \mathbb{C}^* sera alors de la forme $\eta \cdot (x_0 : \dots : x_N) = (\eta^{w_0} x_0 : \dots : \eta^{w_N} x_N)$, avec $w_0 \leq \dots \leq w_N$ car c'est la seule façon de plonger \mathbb{C}^* dans $\text{PGL}_N(\mathbb{C})$. Et on peut montrer, en étudiant les points fixes sous cette action (cf. exemple 3.2.2), que si $z = (x_0 : \dots : x_N)$ n'est pas fixe alors il existe $i < j$ tels que $x_i x_j \neq 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \cdot z = (0 : \dots : 0 : x_i : y_{i+1} : \dots : y_{j-1} : 0 : \dots : 0) \neq \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \eta \cdot z = (0 : \dots : 0 : z_{i+1} : \dots : z_{j-1} : x_j : 0 : \dots : 0)$. Mais alors $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$ contiendrait deux points fixes distincts, ce qui n'est pas possible. Donc $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$ est réduit à un seul point qui est fixe et $\tilde{\Phi}$ met en bijection les trois points fixes. \square

Soit maintenant $x \in \pi_{\theta',0}^{-1}(p(\mathcal{L}))$ qui est non fixe, on va montrer que la fibre $\tilde{\Phi}^{-1}(x)$ est finie et on pourra conclure par normalité des deux variétés. Supposons que $\dim \tilde{\Phi}^{-1}(x) \geq 1$ alors, comme $x \in \pi_{\theta',0}^{-1}((\mathfrak{h} \times \{0\})/G(2, 1, 2) \cup (\{0\} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2))$, par les mêmes arguments que pour la variété $\mathcal{Z}_{\theta'}(n)$ au paragraphe 9.2.3, une des deux limites $\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \cdot x$ et $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \eta \cdot x$ va exister et va appartenir au fermé $\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{M}_{\theta'}(2), \dim \tilde{\Phi}^{-1}(z) \geq 1\}$ (cf. corollaire 10.3 du chapitre AG de [Bor91]). Or cette limite est un point fixe donc ceci contredit le lemme 11.3.9. \square

11.3.5 \mathcal{M} est la normalisation de $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$

Définition 11.3.10. Soit X une variété. Pour un ouvert affine $U = \text{Specm}(A)$ de X , on note \bar{A} la clôture intégrale de A dans son corps des fractions et $\bar{U} = \text{Specm}(\bar{A})$. Alors on peut recoller tous les ouverts \bar{U} (cf. [Har77, p. 91]) pour obtenir une variété \bar{X} qui est normale. Elle est appelée la normalisation de X .

Théorème 11.3.11. Sous l'hypothèse **(H)**, la variété \mathcal{M} est la normalisation de la variété $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$.

Démonstration. D'après la proposition 11.3.7 et la définition de $\mathcal{M}_{\theta'}(2, 2)$, il suffit de montrer que \mathcal{M} est la normalisation de $(\mathcal{M}/\mathbb{C}_2) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2,1,2)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{M} & \\
 \Phi \swarrow & & \searrow \bar{p} \\
 (\mathcal{M}/\mathbb{C}_2) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2,1,2)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) & \xrightarrow{\bar{p}_1} & \mathcal{M}/\mathbb{C}_2 \\
 \bar{p}_2 \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\
 (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2) & \xrightarrow{p} & (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 1, 2)
 \end{array}$$

Le morphisme p étant de degré 2, \bar{p}_1 l'est aussi. Et donc, si, localement, on note A l'anneau correspondant à \mathcal{M}/\mathbb{C}_2 , B celui correspondant à $(\mathcal{M}/\mathbb{C}_2) \times_{(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2,1,2)} (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$ et C celui de \mathcal{M} , alors $\text{Frac } B$ et $\text{Frac } C$ sont des extensions de degré 2 de $\text{Frac}(A)$. Mais comme Φ est surjectif, on a $B \subset C$ et donc $\text{Frac}(B) = \text{Frac}(C)$. Sachant que \mathcal{M} est normale, C est intégralement clos, on a donc $B \subset C \subset \text{Frac}(B) = \text{Frac}(C)$, qui implique $\bar{B} \subset C$. Montrons l'autre inclusion : si $x \in C$, alors $x \in \text{Frac}(B)$, or $P = \prod_{\sigma \in C_2} (X - \sigma \cdot x) \in C^{C_2}[X] = A[X] \subset B[X]$ et $p(x) = 0$ donc x est entier sur B et $\bar{B} = C$. \square

Cinquième partie

Annexes

Description des bébés modules de Verma pour $G(2, 1, 2)$

A.1 Algèbre de Cherednik associée à $G(2, 1, 2)$

Le groupe $W = G(2, 1, 2)$ agit naturellement sur l'espace vectoriel $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^2$ et il est engendré par les matrices $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. L'ensemble des réflexions de W est partitionné en deux classes de conjugaison $\mathcal{S}_W = \{s, st^2\} \sqcup \{st, st^3\}$. On considère (x_1, x_2) la base canonique de \mathfrak{h}^* et (y_1, y_2) sa base antéduale. L'algèbre de Cherednik associée à W et aux paramètres $t = 0$ et $\mathbf{h} = (h, H_1) \in \mathbb{Q}^2$ est l'espace $H_{\mathbf{h}} := H_{\mathbf{h}}(W) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ quotienté par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 x_2 = x_2 x_1 \\ y_1 y_2 = y_2 y_1 \\ x_1 y_1 - y_1 x_1 = h(s + st^2) - 2H_1 st \\ x_2 y_2 - y_2 x_2 = h(s + st^2) - 2H_1 st^3 \\ x_1 y_2 - y_2 x_1 = h(st^2 - s) \\ x_2 y_1 - y_1 x_2 = h(st^2 - s) \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

et les relations $\begin{cases} wx = w(x)w \\ wy = w(y)w \end{cases} \quad \forall w \in W, x \in \mathfrak{h}^* \text{ et } y \in \mathfrak{h}.$

A.2 Algèbre des invariants

L'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ est constituée de polynômes en les éléments de \mathfrak{h}^* , on a donc $\mathbb{C}[\mathfrak{h}] = \mathbb{C}[x_1, x_2]$. De plus, le groupe W agit sur $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} s(x_1) = x_2 \\ s(x_2) = x_1 \\ t(x_1) = -x_2 \\ t(x_2) = x_1 \end{array} \right.$$

on a donc $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W = \mathbb{C}[x_1^2 + x_2^2, x_1^2 x_2^2]$.

ANNEXE A. DESCRIPTION DES BÉBÉS MODULES DE VERMA POUR
 $G(2, 1, 2)$

De plus on sait par le théorème de Chevalley-Shephard-Todd (théorème 4.1.5) que $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W}$ est une algèbre de dimension $|W| = 8$. C'est une algèbre \mathbb{Z} -graduée donc elle a un nombre fini de composantes homogènes et d'après [Che55], le polynôme :

$$\sum_{i \geq 0} (\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_i^{\text{co}W}) t^i$$

est de degré $|S_W| = 4$ donc il n'y a pas d'éléments de degré supérieur ou égal à 5 dans cette algèbre.

Les éléments de degré 0 constituent le $\mathbb{C}W$ -module \mathbb{C} .

Comme s et t échangent $\mathbb{C}x_1$ et $\mathbb{C}x_2$, les éléments de degré 1 constituent le $\mathbb{C}W$ -module $\mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_2$.

Concernant les éléments de degré 2 dans $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W}$ on a les classes de x_1^2 , de x_2^2 et de x_1x_2 mais $\mathbb{C}x_1x_2$ et $\mathbb{C}(x_1^2 - x_2^2)$ sont stables par l'action de W et comme $x_1^2 + x_2^2 = 0$, on obtient deux $\mathbb{C}W$ -modules correspondant aux éléments de degré 2 : $\mathbb{C}x_1x_2$ et $\mathbb{C}(x_1^2 - x_2^2)$.

Les éléments de degré 3 dans $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W}$ sont les combinaisons linéaires de x_1^3 , $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$ et x_2^3 . Mais $x_1^2x_2 + x_2^3 = x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0$ et $x_1x_2^2 + x_1^3 = 0$ et comme s et t échangent $\mathbb{C}x_1^3$ et $\mathbb{C}x_2^3$, on a un $\mathbb{C}W$ -module $\mathbb{C}x_1^3 \oplus \mathbb{C}x_2^3$.

$$\text{Dans la composante de degré 4 on a } \begin{cases} x_1^2x_2^2 = 0 \\ x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 0 \\ x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

donc les éléments de degré 4 constituent le $\mathbb{C}W$ -module $\mathbb{C}(x_1x_2^3 - x_1^3x_2)$.

On a donc, par filtration des degrés :

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} = \mathbb{C} \oplus [\mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_2] \oplus \mathbb{C}(x_1x_2) \oplus \mathbb{C}(x_1^2 - x_2^2) \oplus [\mathbb{C}x_1^3 \oplus \mathbb{C}x_2^3] \oplus \mathbb{C}(x_1x_2^3 - x_1^3x_2). \quad (\text{A.2})$$

A.3 Caractères irréductibles de $G(2, 1, 2)$

Les $\mathbb{C}W$ -modules simples sont paramétrés par les 2-partitions de 2. Or $|\mathcal{P}(2, 2)| = 5$, le groupe W a donc 5 caractères irréductibles : $\chi_{(2;\emptyset)}$, $\chi_{(\emptyset;2)}$, $\chi_{(11;\emptyset)}$, $\chi_{(\emptyset;11)}$ et $\chi_{(1;1)}$. De plus, W est le groupe diédral D_4 à 8 éléments et il a 4 caractères irréductibles qui correspondent à des représentations de dimension 1 et un caractère correspondant à une représentation V de dimension 2 :

	1	-1	st	s	t
1	1	1	1	1	1
ϵ	1	1	-1	-1	1
γ	1	1	-1	1	-1
$\epsilon\gamma$	1	1	1	-1	-1
χ_V	2	-2	0	0	0

Avec les notations de l'exemple 7.1.9, on voit que $\mathbf{1} = \epsilon_1 = \chi_{(2;\emptyset)}$, $\epsilon = \tilde{\epsilon}_2 = \chi_{(\emptyset;11)}$, $\gamma = \epsilon_2 = \chi_{(\emptyset;2)}$, $\epsilon\gamma = \tilde{\epsilon}_1 = \chi_{(11;\emptyset)}$ et donc $\chi_V = \chi_{(1;1)}$.

On sait d'après le théorème de Chevalley que $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W}$ est isomorphe à la représentation régulière donc sa décomposition en somme directe de $\mathbb{C}W$ -modules simples

voit apparaître tous les modules simples correspondant à ces caractères. On peut donc identifier les représentations irréductibles dans l'égalité (A.2) : le $\mathbb{C}W$ -module \mathbb{C} correspond bien entendu au caractère $\mathbf{1}$ (on le notera maintenant \mathbb{C}_1). Le caractère ϵ envoie s sur -1 et t sur 1 , de plus on a $s(x_1x_2^3 - x_1^3x_2) = -(x_1x_2^3 - x_1^3x_2)$ et $t(x_1x_2^3 - x_1^3x_2) = (x_1x_2^3 - x_1^3x_2)$ donc $\mathbb{C}_\epsilon = \mathbb{C}(x_1x_2^3 - x_1^3x_2)$. On a de la même façon $\mathbb{C}_\gamma = \mathbb{C}(x_1x_2)$, $\mathbb{C}_{\epsilon\gamma} = \mathbb{C}(x_1^2 - x_2^2)$ et $V = \mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_2 \simeq \mathbb{C}x_1^3 \oplus \mathbb{C}x_2^3$. La décomposition de la représentation régulière est donc :

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} = \mathbb{C}_1 \oplus V \oplus \mathbb{C}_\gamma \oplus \mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \oplus V \oplus \mathbb{C}_\epsilon.$$

Cette écriture de l'algèbre des invariants va nous aider à calculer les bébés modules de Verma.

A.4 Description des bébés modules de Verma

Chaque $\mathbb{C}W$ -module irréductible S permet de définir un $\overline{H_{\mathfrak{h}}}$ -module :

$$M_{\mathfrak{h}}(S) = \overline{H_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} S,$$

où $\overline{H_{\mathfrak{h}}}$ est la sous algèbre de $\overline{H_{\mathfrak{h}}}$ isomorphe à $\mathbb{C}W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^{\text{co}W}$. Le \mathbb{C} -espace vectoriel $M_{\mathfrak{h}}(S)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} S$ et il est de dimension $8\dim_{\mathbb{C}} S$.

On va maintenant décrire les 5 bébés modules de Verma correspondant aux caractères irréductibles de W ainsi que leur unique quotient simple $L_{\mathfrak{h}}(S)$ et déterminer la matrice de décomposition de W .

Commençons par décrire $M_{\mathfrak{h}}(\gamma)$, on a :

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{h}}(\gamma) &= \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\gamma \\ &= (\mathbb{C}_1 \oplus V[1] \oplus \mathbb{C}_\gamma \oplus \mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \oplus V[1] \oplus \mathbb{C}_\epsilon) \otimes \mathbb{C}_\gamma \\ &= (\mathbb{C}_1 \otimes \mathbb{C}_\gamma) \oplus (V[1] \otimes \mathbb{C}_\gamma) \oplus (\mathbb{C}_\gamma \otimes \mathbb{C}_\gamma) \oplus (\mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \otimes \mathbb{C}_\gamma) \oplus (V \otimes \mathbb{C}_\gamma) \\ &\quad \oplus (\mathbb{C}_\epsilon \otimes \mathbb{C}_\gamma) \end{aligned}$$

Or le caractère associé à la représentation $\mathbb{C}_1 \otimes \mathbb{C}_\gamma$ est $\mathbf{1} \cdot \gamma = \gamma$ donc $\mathbb{C}_1 \otimes \mathbb{C}_\gamma = \mathbb{C}_\gamma$, on a aussi $\chi_V \cdot \gamma = \chi_V$ donc $V \otimes \mathbb{C}_\gamma = V$, $\gamma \cdot \gamma = \mathbf{1}$ donc $\mathbb{C}_\gamma \otimes \mathbb{C}_\gamma = \mathbb{C}_1$ et $\mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \otimes \mathbb{C}_\gamma = \mathbb{C}_\epsilon$ et enfin $\mathbb{C}_\epsilon \otimes \mathbb{C}_\gamma = \mathbb{C}_{\epsilon\gamma}$. Ainsi, en tenant compte des degrés, on obtient :

$$M(\gamma) = \mathbb{C}_\gamma \oplus V[1] \oplus (\mathbb{C}_\epsilon \oplus \mathbb{C}_1)[2] \oplus V[3] \oplus \mathbb{C}_{\epsilon\gamma}[4].$$

Par les mêmes considérations, on a :

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{h}}(\epsilon\gamma) &= \mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \oplus V[1] \oplus (\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_\epsilon)[2] \oplus V[3] \oplus \mathbb{C}_\gamma[4] \\ M_{\mathfrak{h}}(\epsilon) &= \mathbb{C}_\epsilon \oplus V[1] \oplus (\mathbb{C}_\gamma \oplus \mathbb{C}_{\epsilon\gamma})[2] \oplus V[3] \oplus \mathbb{C}_1[4] \\ M_{\mathfrak{h}}(\mathbf{1}) &= \mathbb{C}_1 \oplus V[1] \oplus (\mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \oplus \mathbb{C}_\gamma)[2] \oplus V[3] \oplus \mathbb{C}_\epsilon[4] \\ M_{\mathfrak{h}}(V) &= V \oplus (\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_\epsilon \oplus \mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \oplus \mathbb{C}_\gamma)[1] \oplus (V \oplus V)[2] \\ &\quad \oplus (\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_\epsilon \oplus \mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \oplus \mathbb{C}_\gamma)[3] \oplus V[4] \end{aligned}$$

Les facteurs qui apparaissent dans ces sommes ne sont pas des sous modules, pour étudier les sous modules des bébés modules de Verma, et donc leur unique quotient simple, on a besoin de déterminer des bases adéquates de ces espaces vectoriels.

A.5 Bases des bébés modules de Verma

A.5.1 $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$

Par définition, on a $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{coW} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_1$ où \mathbb{C}_1 est un $\overline{H_{\mathbf{h}}}$ -module engendré par un élément v_1 , l'action de $\overline{H_{\mathbf{h}}}$ étant définie par :

$$\begin{cases} s \cdot v_1 = v_1 \\ t \cdot v_1 = v_1 \\ y_i \cdot v_1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, d'après l'égalité (A.2) l'espace vectoriel $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ a pour base sur \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} e_1^1 &= 1 \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1, e_2^1 = x_1 \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1, e_3^1 = x_2 \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1, e_4^1 = (x_1^2 - x_2^2) \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1, e_5^1 = x_1 x_2 \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1, \\ e_6^1 &= x_1^3 \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1, e_7^1 = x_2^3 \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1, e_8^1 = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) \otimes_{\overline{H_{\mathbf{h}}}} v_1. \end{aligned}$$

On cherche à déterminer l'unique quotient simple de $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$, on va donc chercher le plus grand sous-espace stable par l'action de $\overline{H_{\mathbf{h}}}$ en déterminant les matrices correspondant à l'action de s, t, x_1, x_2, y_1 et y_2 sur la base (e_1^1, \dots, e_8^1) . Après calculs on obtient :

$$\text{Mat}_{e^1}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{e^1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{e^1}(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{e^1}(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque A.5.1. Les éléments x_1 et x_2 agissent par multiplication à gauche sur la partie $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ des éléments, les matrices correspondant à leur action sur la base e^χ seront donc égales quelque soit χ caractère irréductible de dimension 1.

Pour ce qui est de l'action de s et t , les matrices seront aussi égales à un facteur ± 1 près, suivant l'action de ces éléments sur v_χ . Tandis que les actions de y_1 et y_2 varieront selon χ .

$$\text{Mat}_{e^1}(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2(h - H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(h - H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{e^1}(y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(h - H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4(h - H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.5.2 $M_{\mathfrak{h}}(\epsilon)$

Par définition, on a $M(\epsilon) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\epsilon$ où \mathbb{C}_ϵ est un $\overline{H_{\mathfrak{h}}}$ -module engendré par un élément v_ϵ , l'action de $\overline{H_{\mathfrak{h}}}$ étant définie par :

$$\begin{cases} s \cdot v_\epsilon = -v_\epsilon \\ t \cdot v_\epsilon = v_\epsilon \\ y_i \cdot v_\epsilon = 0 \end{cases}$$

$M_{\mathfrak{h}}(\epsilon)$ a pour base sur \mathbb{C} : $e_1^\epsilon = 1 \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$, $e_2^\epsilon = x_1 \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$, $e_3^\epsilon = x_2 \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$,
 $e_4^\epsilon = (x_1^2 - x_2^2) \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$, $e_5^\epsilon = x_1 x_2 \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$, $e_6^\epsilon = x_1^3 \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$, $e_7^\epsilon = x_2^3 \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$,
 $e_8^\epsilon = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) \otimes_{\overline{H_{\mathfrak{h}}}} v_\epsilon$.

Pour le caractère irréductible ϵ , on a $\text{Mat}_{e^\epsilon}(s) = -\text{Mat}_{e^1}(s)$ et $\text{Mat}_{e^\epsilon}(t) = \text{Mat}_{e^1}(t)$. Concernant l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ on a les matrices suivantes :

$$\text{Mat}_{e^\epsilon}(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2(h - H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4(h - H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{e^\epsilon}(y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(h - H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(h - H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.5.3 $M_h(\gamma)$

En utilisant les mêmes notations que pour les deux cas précédents on définit une base $(e_1^\gamma, \dots, e_8^\gamma)$ du \mathbb{C} -espace vectoriel $M_h(\gamma)$ et on a $\text{Mat}_{e^\gamma}(s) = \text{Mat}_{e^1}(s)$ et $\text{Mat}_{e^\gamma}(t) = -\text{Mat}_{e^1}(t)$. En ce qui concerne l'action des éléments y_1 et y_2 , on obtient :

$$\text{Mat}_{e^\gamma}(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2(h + H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(h + H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{e^\gamma}(y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(h + H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4(h + H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.5.4 $M_h(\epsilon\gamma)$

On définit toujours de la même manière la base $(e_1^{\epsilon\gamma}, \dots, e_8^{\epsilon\gamma})$ et après calculs on obtient $\text{Mat}_{e^{\epsilon\gamma}}(s) = -\text{Mat}_{e^1}(s)$ et $\text{Mat}_{e^{\epsilon\gamma}}(t) = -\text{Mat}_{e^1}(t)$ et

$$\text{Mat}_{e^{\epsilon\gamma}}(y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2(h + H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4(h + H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{e^{\epsilon\gamma}}(y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(h + H_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(h + H_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.5.5 $M_h(V)$

Dans ce cas plus compliqué que les autres, on va construire une base pour la filtration par le degré pour simplifier l'écriture des matrices. Comme V est de dimension 2, il est engendré par deux éléments v_V et w_V qui vérifient :

$$\begin{cases} s \cdot v_V = w_V \\ t \cdot v_V = -w_V \\ y_i \cdot v_V = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} s \cdot w_V = v_V \\ t \cdot w_V = -v_V \\ y_i \cdot w_V = 0 \end{cases}$$

Le \mathbb{C} -espace vectoriel $M_h(V)$ est donc de dimension 16 et a pour base :

$$f_1 = 1 \otimes v_V, f_2 = 1 \otimes w_V,$$

$$f_3 = x_1 \otimes v_V + x_2 \otimes w_V, f_4 = x_2 \otimes v_V - x_1 \otimes w_V, f_5 = x_2 \otimes v_V + x_1 \otimes w_V, \\ f_6 = x_1 \otimes v_V - x_2 \otimes w_V,$$

$$f_7 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \otimes v_V + x_1 x_2 \otimes w_V, f_8 = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \otimes w_V - x_1 x_2 \otimes v_V, f_9 = \\ \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \otimes v_V - x_1 x_2 \otimes w_V, f_{10} = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \otimes w_V + x_1 x_2 \otimes v_V,$$

$$f_{11} = x_1^3 \otimes v_V + x_2^3 \otimes w_V, f_{12} = x_1^3 \otimes w_V - x_2^3 \otimes v_V, f_{13} = x_1^3 \otimes w_V + x_2^3 \otimes v_V, \\ f_{14} = x_1^3 \otimes v_V - x_2^3 \otimes w_V,$$

$$f_{15} = \frac{1}{2}x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) \otimes v_V \text{ et } f_{16} = \frac{1}{2}x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) \otimes w_V.$$

On a alors :

$$\text{Mat}_f(s) = \left(\begin{array}{cccccccc} \boxed{\begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix}} & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} & -1 \\ -1 & \end{matrix}} & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} & -1 \\ -1 & \end{matrix}} & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} & -1 \\ -1 & \end{matrix}} \end{array} \right)$$

$$\text{Mat}_f(t) = \left(\begin{array}{cccccccc} \boxed{\begin{matrix} & 1 \\ -1 & \end{matrix}} & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} & -1 \\ 1 & \end{matrix}} & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} & -1 \\ -1 & \end{matrix}} & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} & 1 \\ -1 & \end{matrix}} \end{array} \right)$$

$$\text{Mat}_f(x_1) = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} & & & \\ & -\frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & & & \end{matrix}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{matrix}} & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{matrix}} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{matrix}} & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} & 1 & -1 \\ -1 & & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{array} \right)$$

$$\text{Mat}_f(x_2) = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ \boxed{\begin{matrix} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} \end{matrix}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} & -1 \\ -1 & \\ & -1 \\ & & 1 \end{matrix}} & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \\ & 1 & \end{matrix}} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ & 1 & & \end{matrix}} & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{array} \right)$$

L'action de y_1 est donnée par : $y_1 f_1 = y_1 f_2 = 0$, $y_1 f_3 = 2(h - H_1)f_1$, $y_1 f_4 = 2(h - H_1)f_2$, $y_1 f_5 = 2(h + H_1)f_2$, $y_1 f_6 = -2(h + H_1)f_1$, $y_1 f_7 = (h - H_1)(f_6 - f_3)$, $y_1 f_8 = -(h - H_1)(f_4 + f_5)$, $y_1 f_9 = -(h + H_1)(f_3 - f_6)$, $y_1 f_{10} = -(h + H_1)(f_4 + f_5)$, $y_1 f_{11} = y_1 f_{14} = -H_1(x_1^2 - x_2^2) \otimes v_V - 2hx_1 x_2 \otimes w_V$, $y_1 f_{12} = y_1 f_{13} = H_1(x_1^2 - x_2^2) \otimes w_V - 2hx_1 x_2 \otimes v_V$, $y_1 f_{15} = 2hx_1^3 \otimes w_V + 2H_1 x_2^3 \otimes v_V$ et $y_1 f_{16} = 2hx_1^3 \otimes v_V - 2H_1 x_2^3 \otimes w_V$.

Et celle de y_2 par : $y_2 f_1 = y_2 f_2 = 0$, $y_2 f_3 = 2(h - H_1)f_2$, $y_2 f_4 = -2(h - H_1)f_1$, $y_2 f_5 = -2(h + H_1)f_1$, $y_2 f_6 = 2(h + H_1)f_2$, $y_2 f_7 = (h - H_1)(f_5 - f_4)$, $y_2 f_8 = (h - H_1)(f_3 + f_6)$, $y_2 f_9 = (h + H_1)(f_5 - f_4)$, $y_2 f_{10} = (h + H_1)(f_6 + f_3)$, $y_2 f_{11} = -y_2 f_{14} = H_1(x_1^2 - x_2^2) \otimes w_V - 2hx_1 x_2 \otimes v_V$, $y_2 f_{12} = -y_2 f_{13} = H_1(x_1^2 - x_2^2) \otimes v_V + 2hx_1 x_2 \otimes w_V$, $y_2 f_{15} = -2hx_2^3 \otimes w_V + 2H_1 x_1^3 \otimes v_V$ et $y_2 f_{16} = -2hx_2^3 \otimes v_V - 2H_1 x_1^3 \otimes w_V$.

A.6 Sur les murs $h = H_1 \neq 0$ et $h = -H_1 \neq 0$

Si l'on suppose plus généralement h et $H_1 \neq 0$, on voit, d'après le paragraphe A.5, que les modules $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ et $M_{\mathbf{h}}(\epsilon)$ ont des sous-espaces stables si et seulement si $h = H_1$. Dans ce cas, $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ admet un sous-espace stable de dimension 1 engendré par e_8^1 et un sous-espace stable de dimension 7 engendré par e_2^1, \dots, e_8^1 . On le note $N_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$, c'est l'unique sous-module maximal de $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ et on a $L_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}) = M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})/N_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$. Et $M_{\mathbf{h}}(\epsilon)$ a un sous-espace stable de dimension 1 engendré par e_8^ϵ et un sous-espace stable de dimension 7 engendré par $e_2^\epsilon, \dots, e_8^\epsilon$. On le note $N_{\mathbf{h}}(\epsilon)$, c'est l'unique sous-module maximal de $M_{\mathbf{h}}(\epsilon)$ et on a $L_{\mathbf{h}}(\epsilon) = M_{\mathbf{h}}(\epsilon)/N_{\mathbf{h}}(\epsilon)$.

De même $M_{\mathbf{h}}(\gamma)$ et $M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$ ont des sous-espaces stables si et seulement si $h = -H_1$. Dans ce cas, $M_{\mathbf{h}}(\gamma)$ a deux sous-espaces stables $\langle e_8^\gamma \rangle$ et $N_{\mathbf{h}}(\gamma) = \langle e_2^\gamma, \dots, e_8^\gamma \rangle$ qui est de dimension 7 donc maximal, ce qui donne $L_{\mathbf{h}}(\gamma) = M_{\mathbf{h}}(\gamma)/N_{\mathbf{h}}(\gamma)$. Et $M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$ a deux sous-espaces stables $\langle e_8^{\epsilon\gamma} \rangle$ et $N_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma) = \langle e_2^{\epsilon\gamma}, \dots, e_8^{\epsilon\gamma} \rangle$ qui est de dimension 7 donc maximal, ce qui donne $L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma) = M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)/N_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$.

On voit qu'on a deux cas symétriques $h = H_1$ et $h = -H_1$, pour faciliter les calculs, **on va maintenant supposer $h = -H_1 \neq 0$** , on comprend facilement que les résultats seront semblables dans le cas symétrique.

D'après ce que l'on vient de voir, les modules $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ et $M_{\mathbf{h}}(\epsilon)$ sont simples donc $L_{\mathbf{h}}(\mathbf{1}) = M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ et $L_{\mathbf{h}}(\epsilon) = M_{\mathbf{h}}(\epsilon)$ sont de dimension 8. Le module $M_{\mathbf{h}}(\gamma)$ (respectivement $M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$) a un unique sous module simple $S_{\mathbf{h}}(\gamma)$ (respectivement $S_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$) de dimension 1 qui est inclus dans un unique sous module maximal $N_{\mathbf{h}}(\gamma)$ (respectivement $N_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$) de dimension 7 tel que $L_{\mathbf{h}}(\gamma) = M_{\mathbf{h}}(\gamma)/N_{\mathbf{h}}(\gamma)$ (respectivement $L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma) = M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)/N_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$) est de dimension 1. On a décrit les générateurs de ces modules et en comparant leur structure on voit que $S_{\mathbf{h}}(\gamma) \simeq L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$ et $S_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma) \simeq L_{\mathbf{h}}(\gamma)$. On a donc

$$L_{\mathbf{h}}(\gamma) \simeq \mathbb{C}_{\epsilon\gamma} \text{ et } L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma) \simeq \mathbb{C}_\epsilon.$$

Afin d'étudier les sous-modules de $M_{\mathbf{h}}(V)$, on va réécrire les matrices des actions de y_1 et de y_2 sur la base f .

$$\text{Mat}_f(y_1) = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 4h & \\ \hline & 4h \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ & & \begin{array}{|c|c|} \hline -2h & \\ \hline & -2h \\ \hline & 2h \\ \hline & 2h \\ \hline \end{array} \\ \\ & & & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ & & & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2h & & 2h \\ \hline & -2h & -2h \\ \hline \end{array} \\ \\ & & & & & \begin{array}{|c|} \hline 2h \\ \hline 2h \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

$$\text{Mat}_f(y_2) = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline -4h & \\ \hline & 4h \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ & & \begin{array}{|c|c|} \hline 2h & \\ \hline -2h & \\ \hline 2h & \\ \hline 2h & \\ \hline \end{array} \\ \\ & & & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \\ & & & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2h & 2h & \\ \hline -2h & & 2h \\ \hline \end{array} \\ \\ & & & & & \begin{array}{|c|} \hline -2h \\ \hline 2h \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

Étudions maintenant les sous-espaces stables par les six actions, $M_{\mathfrak{h}}(V)$ a :

- un sous-module $S_{\mathfrak{h}}(V) = \langle f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{15}, f_{16} \rangle$ de dimension 6
- quatre sous-modules de dimension 7
- quatre sous-modules de dimension 8
- quatre sous-modules de dimension 9
- et un sous-module $N_{\mathfrak{h}}(V) = \langle f_5, f_6, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16} \rangle$ de dimension 10.

$N_{\mathfrak{h}}(V)$ est donc l'unique sous-module maximal de $M_{\mathfrak{h}}(V)$ et $L_{\mathfrak{h}}(V) = M_{\mathfrak{h}}(V)/N_{\mathfrak{h}}(V)$ est donc de dimension 6. Tous les sous-modules de $M_{\mathfrak{h}}(V)$ contiennent $S_{\mathfrak{h}}(V)$, c'est donc le seul sous module simple de $M_{\mathfrak{h}}(V)$. Donc, sachant que $\text{Irr} \overline{H_{\mathfrak{h}}} = \{L_{\mathfrak{h}}(S), S \in$

$\text{Irr}W\}$, et que $L_{\mathbf{h}}(V)$ est le seul de dimension 6, $S_{\mathbf{h}}(V)$ est isomorphe à $L_{\mathbf{h}}(V)$ et

$$L_{\mathbf{h}}(V) \simeq V \oplus (\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_\epsilon) \oplus V.$$

Déterminons maintenant les suites de composition des bébés modules de Verma en fonction des $L_{\mathbf{h}}(S)$.

Le module $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ (resp $M_{\mathbf{h}}(\epsilon)$) étant simple, sa suite de composition n'est constituée que d'un élément $L_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$ (resp $L_{\mathbf{h}}(\epsilon)$).

$N_{\mathbf{h}}(\gamma)/S_{\mathbf{h}}(\gamma)$ est un module de dimension 6 et on peut montrer qu'il est isomorphe à $L_{\mathbf{h}}(V)$, de même pour $\epsilon\gamma$.

La suite de composition de $M_{\mathbf{h}}(\gamma)$ est donc $S_{\mathbf{h}}(\gamma) \subset N_{\mathbf{h}}(\gamma) \subset M_{\mathbf{h}}(\gamma)$ et ses facteurs de composition sont $L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$, $L_{\mathbf{h}}(V)$ et $L_{\mathbf{h}}(\gamma)$.

De même, la suite de composition de $M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$ est $S_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma) \subset N_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma) \subset M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$ et ses facteurs de composition sont $L_{\mathbf{h}}(\gamma)$, $L_{\mathbf{h}}(V)$ et $L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$.

Concernant $M_{\mathbf{h}}(V)$, on peut montrer que sa suite de composition est

$$0 \subset S_{\mathbf{h}}(V) \subset N_7(V) \subset N_8(V) \subset N_9(V) \subset N_{\mathbf{h}}(V) \subset M_{\mathbf{h}}(V)$$

où $N_7(V)$ est un des sous modules de dimension 7 qui vérifie $N_7(V)/S_{\mathbf{h}}(V) \simeq L_{\mathbf{h}}(\gamma)$, $N_8(V)$ est un des sous modules de dimension 8 qui vérifie $N_8(V)/N_7(V) \simeq L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$, $N_9(V)$ est un des sous modules de dimension 9 qui vérifie $N_9(V)/N_8(V) \simeq L_{\mathbf{h}}(\gamma)$ et $N_{\mathbf{h}}(V)$ vérifie $N_{\mathbf{h}}(V)/N_9(V) \simeq L_{\mathbf{h}}(\gamma)$ et $M_{\mathbf{h}}(V)/N_{\mathbf{h}}(V) = L_{\mathbf{h}}(V)$.

Les facteurs de composition de $M_{\mathbf{h}}(V)$ sont donc $L_{\mathbf{h}}(V)$, $L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$ et $L_{\mathbf{h}}(\gamma)$ et ils apparaissent chacun deux fois dans la suite de composition de $M_{\mathbf{h}}(V)$.

On obtient donc la matrice de décomposition suivante :

	$M_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$	$M_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$	$M_{\mathbf{h}}(\gamma)$	$M_{\mathbf{h}}(V)$	$M_{\mathbf{h}}(\epsilon)$
$L_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})$	1	0	0	0	0
$L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma)$	0	1	1	2	0
$L_{\mathbf{h}}(\gamma)$	0	1	1	2	0
$L_{\mathbf{h}}(V)$	0	1	1	2	0
$L_{\mathbf{h}}(\epsilon)$	0	0	0	0	1

et les blocs de $\overline{H_{\mathbf{h}}}$ pour la partition de Calogero-Moser sont :

$$\text{Irr } \overline{H_{\mathbf{h}}} = \{L_{\mathbf{h}}(\mathbf{1})\} \sqcup \{L_{\mathbf{h}}(\epsilon\gamma), L_{\mathbf{h}}(\gamma), L_{\mathbf{h}}(V)\} \sqcup \{L_{\mathbf{h}}(\epsilon)\}.$$

A.7 Sur le mur $H_1 = 0$ et $h \neq 0$

D'après les calculs faits au paragraphe A.5.5, on montre que, pour $H_1 = 0$ et $h \neq 0$, les matrices des actions de y_1 et y_2 sur la base f de $M_{\mathbf{h}}(V)$ sont de la forme :

$$\text{Mat}_f(y_1) = \left(\begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 2h & & -2h \\ & 2h & 2h \end{matrix}} \\ \quad \quad \quad \boxed{\begin{matrix} -h & & -h \\ & -h & -h \\ & -h & -h \\ h & & h \end{matrix}} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{\begin{matrix} -h & & -h \\ & h & h \\ h & & h \\ & -h & -h \end{matrix}} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{\begin{matrix} h \\ h \\ h \\ h \end{matrix}} \end{array} \right)$$

$$\text{Mat}_f(y_2) = \left(\begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} -2h & -2h \\ 2h & 2h \end{matrix}} \\ \quad \quad \quad \boxed{\begin{matrix} h & & h \\ -h & & -h \\ h & & h \\ h & & h \end{matrix}} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{\begin{matrix} h & -h \\ h & & -h \\ -h & & h \\ -h & & h \end{matrix}} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \boxed{\begin{matrix} -h \\ h \\ -h \\ h \end{matrix}} \end{array} \right)$$

On montre alors que, dans ce cas, les modules $M_{\mathfrak{h}}(\gamma)$, $M_{\mathfrak{h}}(\mathbf{1})$, $M_{\mathfrak{h}}(\epsilon\gamma)$ et $M_{\mathfrak{h}}(\epsilon)$ ont chacun un unique sous module qui est de dimension 4 noté respectivement $N_{\mathfrak{h}}(\gamma)$, $N_{\mathfrak{h}}(\mathbf{1})$, $N_{\mathfrak{h}}(\epsilon\gamma)$ et $N_{\mathfrak{h}}(\epsilon)$. On peut montrer aussi que $N_{\mathfrak{h}}(\gamma) \simeq L_{\mathfrak{h}}(\mathbf{1})$, $N_{\mathfrak{h}}(\mathbf{1}) \simeq L_{\mathfrak{h}}(\gamma)$, $N_{\mathfrak{h}}(\epsilon\gamma) \simeq L_{\mathfrak{h}}(\epsilon)$ et $N_{\mathfrak{h}}(\epsilon) \simeq L_{\mathfrak{h}}(\epsilon\gamma)$.

Quant au module $M_{\mathfrak{h}}(V)$, il n'a aussi qu'un seul sous module qui est de dimension 8, il est donc isomorphe à $L_{\mathfrak{h}}(V)$ pour des raisons de dimension.

L'algèbre $\overline{H}_{\mathfrak{h}}$ a donc trois blocs :

$$\text{Irr } \overline{H}_{\mathfrak{h}} = \{L_{\mathfrak{h}}(\gamma), L_{\mathfrak{h}}(\mathbf{1})\} \sqcup \{L_{\mathfrak{h}}(\epsilon\gamma), L_{\mathfrak{h}}(\epsilon)\} \sqcup \{L_{\mathfrak{h}}(V)\}$$

et la partition de Calogero-Moser de $\mathcal{P}(2, 2)$ associée est :

$$\{(2; \emptyset), (\emptyset; 2)\} \sqcup \{(11; \emptyset), (\emptyset; 11)\} \sqcup \{(1; 1)\}.$$

Application moment $\mu_{\mathbb{C}}$

Dans cette annexe, on va démontrer le deuxième point de la proposition 8.1.3.

Remarque B.0.1. Pour bien comprendre $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, il faut voir \mathbf{X} et \mathbf{Y} comme des applications linéaires de $\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{C}^{d_i}$ dans $\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{C}^{d_i}$ et $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ comme l'application $\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$. Donc $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = (X_{i-1}Y_{i-1} - Y_iX_i)_{0 \leq i \leq \ell-1}$ en considérant les indices modulo ℓ .

Démonstration. Commençons par remarquer que $\omega_{\mathbb{R}}$ est fixe sous l'action de $\mathbf{U}(\mathbf{d})$ et $\omega_{\mathbb{C}}$ est fixe sous celle de $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ puis notons $m_{\mathbb{C}}$ l'application $m_{\mathbb{C}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + vw$. Pour montrer que $\mu_{\mathbb{C}} = m_{\mathbb{C}}$, on doit montrer que $m_{\mathbb{C}}$ est $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ -invariante et que pour tout z dans $R(\mathbf{d}')$, u dans $\text{Lie}(\mathbf{G}(\mathbf{d}))$ et h dans l'espace tangent de $R(\mathbf{d}')$ en z ,

$$d \langle m_{\mathbb{C}}(z), u \rangle \cdot h = \omega_{\mathbb{C}}(u_z^*, h) = \omega_{\mathbb{C}}(z, u_h)$$

où $u_h = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tu) \cdot h)$.

Montrons que $m_{\mathbb{C}}$ est $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ -invariante i.e. que $m_{\mathbb{C}}(g \cdot z) = g \cdot m_{\mathbb{C}}(z)$. Soit $g = (g_0, \dots, g_{\ell-1})$ et $z = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w)$,

$$\begin{aligned} m_{\mathbb{C}}(g \cdot z) &= (g_i X_{i-1} g_{i-1}^{-1} g_{i-1}^{-1} Y_{i-1} g_i^{-1} - g_i Y_i g_{i+1}^{-1} g_{i+1} X_i g_i^{-1})_{0 \leq i \leq \ell-1} + g_0 v w g_0^{-1} \\ &= (g_i X_{i-1} Y_{i-1} g_i^{-1} - g_i Y_i X_i g_i^{-1}) + g_0 v w g_0^{-1} \\ &= g \cdot ((X_{i-1} Y_{i-1} - Y_i X_i)_{0 \leq i \leq \ell-1} + vw) \\ &= g \cdot m_{\mathbb{C}}(z) \end{aligned}$$

De plus,

$$d m_{\mathbb{C}}(z) \cdot h = (X_{i-1} \Psi_{i-1} - \Psi_i X_i + \Phi_{i-1} Y_{i-1} - Y_i \Phi_i)_{0 \leq i \leq \ell-1} + v\beta + \alpha w \in (\text{Lie}(\mathbf{G}(\mathbf{d})))^*$$

Donc, en identifiant $\text{Lie}(\mathbf{G}(\mathbf{d}))$ avec son dual par la forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée $(A, B) \rightarrow \text{Tr}(AB)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (d m_{\mathbb{C}}(z) \cdot h) \cdot u &= \sum_{r=0}^{\ell-1} \text{Tr}((X_{r-1} \Psi_{r-1} - \Psi_r X_r + \Phi_{r-1} Y_{r-1} - Y_r \Phi_r) u_r) \\ &\quad + \text{Tr}((v\beta + \alpha w) u_0) \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\omega_{\mathbb{C}}(z, u_h)$:

soit $u = (u_0, \dots, u_{\ell-1})$ et $h = (\Phi, \Psi, \alpha, \beta)$,

comme $\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tu_1)\Phi_0 \exp(-tu_0) = u_1\Phi_0 - \Phi_0u_0$ et que $\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tu_0)\alpha = u_0\alpha$,

$$u_h = (u_1\Phi_0 - \Phi_0u_0, \dots, u_0\Phi_{\ell-1} - \Phi_{\ell-1}u_{\ell-1}, u_0\Psi_0 - \Psi_0u_1, \dots, u_{\ell-1}\Psi_{\ell-1} - \Psi_{\ell-1}u_0; u_0\alpha, -\beta u_0)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}}(z, u_h) &= \omega_j(z, u_h) + \sqrt{-1}\omega_k(z, u_h) \\ &= g(j \cdot z, u_h) + \sqrt{-1}g(ij \cdot z, u_h) \\ &= g((\mathbf{Y}^\dagger, -\mathbf{X}^\dagger; w^\dagger, -v^\dagger), u_h) + \sqrt{-1}g(i \cdot (\mathbf{Y}^\dagger, -\mathbf{X}^\dagger; w^\dagger, v^\dagger), u_h) \end{aligned}$$

mais comme

$$\begin{aligned} g((\mathbf{Y}^\dagger, -\mathbf{X}^\dagger; w^\dagger, -v^\dagger), u_h) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{r=0}^{\ell-1} (\operatorname{Tr}(Y_r^\dagger(u_{r+1}\Phi_r - \Phi_r u_r)^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Tr}(-X_r^\dagger(u_r\Psi_r - \Psi_r u_{r+1}))^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Tr}(w^\dagger(u_0\alpha)^\dagger) + \operatorname{Tr}(-v^\dagger(-\beta u_0)^\dagger) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{r=0}^{\ell-1} \operatorname{Tr}(((u_{r+1}\Phi_r - \Phi_r u_r)Y_r)^\dagger \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Tr}((u_r\Psi_r - \Psi_r u_{r+1})X_r)^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Tr}(u_0\alpha w)^\dagger - \operatorname{Tr}(-\beta u_0 v)^\dagger) \right) \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} g(i \cdot (\mathbf{Y}^\dagger, -\mathbf{X}^\dagger; w^\dagger, -v^\dagger), h) &= \operatorname{Re} \left(\sqrt{-1} \left(\sum_{r=0}^{\ell-1} (\operatorname{Tr}(Y_r^\dagger(u_{r+1}\Phi_r - \Phi_r u_r)^\dagger) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{Tr}(X_r^\dagger(u_r\Psi_r - \Psi_r u_{r+1}))^\dagger) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Tr}(w^\dagger(u_0\alpha)^\dagger) - \operatorname{Tr}(v^\dagger(-\beta u_0)^\dagger) \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sqrt{-1} \left(\sum_{r=0}^{\ell-1} (\operatorname{Tr}((u_{r+1}\Phi_r - \Phi_r u_r)Y_r)^\dagger - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \operatorname{Tr}((u_r\Psi_r - \Psi_r u_{r+1})X_r)^\dagger) + \operatorname{Tr}(u_0\alpha w)^\dagger \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{Tr}(-\beta u_0 v)^\dagger) \right) \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\sum_{r=0}^{\ell-1} (\operatorname{Tr}((u_{r+1}\Phi_r - \Phi_r u_r)Y_r)^\dagger \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Tr}((u_r\Psi_r - \Psi_r u_{r+1})X_r)^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Tr}(u_0\alpha w)^\dagger - \operatorname{Tr}(-\beta u_0 v)^\dagger) \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \omega_{\mathbb{C}}(z, u_h) &= \frac{\sum_{r=0}^{\ell-1} (\text{Tr}((u_{r+1}\Phi_r - \Phi_r u_r)Y_r)^\dagger - \text{Tr}((u_r\Psi_r - \Psi_r u_{r+1})X_r)^\dagger)}{\text{Tr}(u_0\alpha w)^\dagger + \text{Tr}(\beta u_0 v)^\dagger} \\
 &= \frac{\sum_{r=0}^{\ell-1} (\text{Tr}((u_{r+1}\Phi_r - \Phi_r u_r)Y_r) - \text{Tr}((u_r\Psi_r - \Psi_r u_{r+1})X_r))}{\text{Tr}(u_0\alpha w) + \text{Tr}(\beta u_0 v)} \\
 &= \frac{\sum_{r=0}^{\ell-1} (\text{Tr}(u_{r+1}\Phi_r Y_r) + \text{Tr}(\Psi_r u_{r+1} X_r) - \text{Tr}(\Phi_r u_r Y_r) - \text{Tr}(u_r \Psi_r X_r))}{\text{Tr}(u_0\alpha w) + \text{Tr}(\beta u_0 v)} \\
 &= \frac{\sum_{r=0}^{\ell-1} (\text{Tr}(u_r \Phi_{r-1} Y_{r-1}) + \text{Tr}(\Psi_{r-1} u_r X_{r-1}))}{\sum_{r=0}^{\ell-1} (\text{Tr}(\Phi_r u_r Y_r) + \text{Tr}(u_r \Psi_r X_r)) + \text{Tr}(u_0\alpha w) + \text{Tr}(\beta u_0 v)} \\
 &= \sum_{r=0}^{\ell-1} \text{Tr}((\Phi_{r-1} Y_{r-1} + X_{r-1} \Psi_{r-1} - Y_r \Phi_r - \Psi_r X_r) u_r) + \text{Tr}((\alpha w + v\beta) u_0) \\
 &= (d m(z) \cdot h) \cdot u
 \end{aligned}$$

Donc on a bien

$$\mu_{\mathbb{C}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + vw.$$

□

Étude de la variété $\mathcal{M}_\theta(n)$ dans le cas d'un groupe cyclique

C.1 Équation des variétés quotients

On se place ici dans le cas cyclique, c'est à dire $G(\ell, 1, 1)$. Le vecteur dimension de la variété de carquois est donc $\mathbf{d} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^\ell$ et $R(\mathbf{d}') = \mathbb{C}^\ell \oplus \mathbb{C}^\ell \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Pour $(g_0, \dots, g_{\ell-1}) \in \mathbf{G}(\mathbf{d}) = (\mathbb{C}^*)^\ell$, on pose $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_{\ell-2}) \in (\mathbb{C}^*)^{\ell-1}$ défini par $\eta_i = g_i^{-1} g_{i+1}$. L'action de $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ sur $R(\mathbf{d}')$ est alors de la forme :

$$(\eta, g_0) \cdot (X, Y; v, w) = (\eta_0 x_0, \dots, \eta_{\ell-2} x_{\ell-2}, (\eta_0 \cdots \eta_{\ell-2})^{-1} x_{\ell-1}, \eta_0^{-1} y_0, \dots, \eta_{\ell-2}^{-1} y_{\ell-2}, (\eta_0 \cdots \eta_{\ell-2}) y_{\ell-1}; g_0 v, w g_0).$$

C.1.1 Quotient symplectique

Soit $\theta = (\theta_0, \dots, \theta_{\ell-1}) \in \mathbb{Q}^\ell$, déterminons la variété $\mathcal{X}_\theta(1) = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta) // \mathbf{G}(\mathbf{d})$. On a

$$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta) = \{x_{\ell-1} y_{\ell-1} = x_0 y_0 - vw + \theta_0; x_0 y_0 = x_1 y_1 + \theta_1, \dots, x_{\ell-2} y_{\ell-2} = x_{\ell-1} y_{\ell-1} + \theta_{\ell-1}\}.$$

De plus, on voit que d'un côté g_0 agit sur $\mathcal{X}_1 = \{vw = \theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}\}$ et d'un autre η agit sur $\mathcal{X}_2 = \{x_0 y_0 = x_1 y_1 + \theta_1, \dots, x_{\ell-2} y_{\ell-2} = x_{\ell-1} y_{\ell-1} + \theta_{\ell-1}\}$ et ce de manière indépendante. Donc $\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\theta)]^{(\mathbb{C}^*)^\ell} = \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{(\mathbb{C}^*)} \otimes \mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{(\mathbb{C}^*)^{\ell-1}}$ et

$$\mathcal{X}_\theta(1) = \mathcal{X}_1 // \mathbb{C}^* \times \mathcal{X}_2 // (\mathbb{C}^*)^{\ell-1}$$

Étudions d'abord le quotient de \mathcal{X}_1 par \mathbb{C}^* .

- Si $\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1} = 0$, alors \mathcal{X}_1 est représentée par deux droites $D_1 : \{v = 0\}$ et $D_2 : \{w = 0\}$ sécantes en 0 et l'action de \mathbb{C}^* a trois orbites $D_1 - \{0\}$, $D_2 - \{0\}$ et $\{0\}$. Donc les fonctions dans $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]$ constantes sur les trois orbites sont les constantes. Par conséquent $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{(\mathbb{C}^*)} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{X}_1 // \mathbb{C}^*$ est réduite à un point.
- Sinon, \mathcal{X}_1 est une hyperbole isomorphe à \mathbb{C}^* par la projection $(v, w) \in \mathcal{X}_1 \mapsto v$ donc l'action de \mathbb{C}^* , qui correspond à la translation sur \mathbb{C}^* , n'a qu'une orbite. Donc dans ce cas aussi la variété quotient est réduite à un point.

Ainsi, quelle que soit la valeur de θ_0 , la variété $\mathcal{X}_\theta(1)$ est isomorphe à la variété $\mathcal{X}_2 // (\mathbb{C}^*)^{\ell-1}$, qui ne dépend que de $(\theta_1, \dots, \theta_{\ell-1})$.

Étudions maintenant le quotient de \mathcal{X}_2 par $(\mathbb{C}^*)^{\ell-1}$. L'action de $(\mathbb{C}^*)^{\ell-1}$ sur cette variété est de la forme

$$\eta \cdot (x_0, \dots, x_{\ell-1}, y_0, \dots, y_{\ell-1}) = (\eta_0 x_0, \dots, \eta_{\ell-2} x_{\ell-2}, (\eta_0 \cdots \eta_{\ell-2})^{-1} x_{\ell-1}, \eta_0^{-1} y_0, \dots, \eta_{\ell-2}^{-1} y_{\ell-2}, (\eta_0 \cdots \eta_{\ell-2}) y_{\ell-1})$$

ANNEXE C. ÉTUDE DE LA VARIÉTÉ $\mathcal{M}_\theta(N)$ DANS LE CAS D'UN GROUPE CYCLIQUE

On trouve tout de suite $\ell + 2$ invariants évidents : $E_0 = X_0 Y_0, \dots, E_{\ell-1} = X_{\ell-1} Y_{\ell-1}$, $F = X_0 \cdots X_{\ell-1}$, $G = Y_0 \cdots Y_{\ell-1}$ qui vérifient $E_i = E_{i+1} + \theta_{i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq \ell - 2$ et $FG = \prod_{i=0}^{\ell-1} E_i$.

Proposition C.1.1. *Les seuls invariants sont des combinaisons linéaires de puissances des E_i , F et G .*

Démonstration. On va présenter la démonstration dans le cas où $\ell = 2$ et $(\theta_1, \dots, \theta_{\ell-1}) = 0$, la démonstration générale étant la même, en plus fastidieuse ! Dans ce cas, on a trois invariants évidents $E = X_0 Y_0 = X_1 Y_1$, $F = X_0 X_1$ et $G = Y_0 Y_1$, qui vérifient $E^2 = FG$.

Étudions l'action de \mathbb{C}^* sur une composante homogène :

$$\lambda \cdot (X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1}) = \lambda^{\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_0 + \beta_1} X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1}.$$

Donc pour que cette composante homogène soit invariante, il faut que $\alpha_0 - \alpha_1 - \beta_0 + \beta_1 = 0$ soit $\alpha_0 - \alpha_1 = \beta_0 - \beta_1$. Quitte à échanger X_0 et X_1 , on peut supposer que cette valeur commune est positive et la noter γ . Donc $\alpha_0 = \alpha_1 + \gamma$ et $\beta_0 = \beta_1 + \gamma$. On a donc

$$\begin{aligned} X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1} &= X_0^{\alpha_1 + \gamma} Y_0^{\beta_1 + \gamma} X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1} \\ &= (X_0 X_1)^{\alpha_1} (Y_0 Y_1)^{\beta_1} (X_0 Y_0)^\gamma \\ &= E^\gamma F^{\alpha_1} G^{\beta_1} \end{aligned}$$

De plus, l'action de \mathbb{C}^* sur les fonctions de \mathcal{X}_2 transforme une composante homogène en une composante homogène de même degré. Donc par unicité de la décomposition d'un polynôme en ses composantes homogènes, un polynôme en X_0, X_1, Y_0 et Y_1 est invariant si et seulement si toutes ses composantes homogènes sont invariantes si et seulement si c'est un polynôme en E, F , et G d'après ce que l'on vient de voir. \square

Par conséquent,

$$\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{(\mathbb{C}^*)^{\ell-1}} = \mathbb{C}[E_0, \dots, E_{\ell-1}, F, G] / (E_i - E_{i+1} - \theta_{i+1}, 0 \leq i \leq \ell - 2, FG - \prod_{i=0}^{\ell-1} E_i)$$

et $\mathcal{X}_2 // \mathbb{C}^* = \{(e_0, \dots, e_{\ell-1}, f, g) \in \mathbf{A}(\mathbb{C})^{\ell+2}, e_i = e_{i+1} + \theta_{i+1}, 0 \leq i \leq \ell - 2, fg = \prod_{i=0}^{\ell-1} e_i\}$. Dans le cas particulier où $(\theta_1, \dots, \theta_{\ell-1}) = 0$, $\mathcal{X}_2 // \mathbb{C}^*$ a pour équation $e^\ell = fg$,

on retrouve l'équation d'un cône pour $\ell = 2$ et dans le cas $\ell = 2$ et $\theta_1 \neq 0$, l'équation de $\mathcal{X}_2 // \mathbb{C}^*$ est $fg = e^2 - \theta_1 e = (e - \frac{\theta_1}{2})^2 - \frac{\theta_1^2}{4}$ et en posant le changement de variable $x = \frac{2}{\theta} e - 1$, $z - y = \frac{2}{\theta} f$ et $z + y = \frac{2}{\theta} g$, on retrouve l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ d'un hyperboloïde à une nappe. Donc, pour $\ell = 2$, $\mathcal{X}_{(\theta_0, \theta_1)}(1)$ est un cône si $\theta_1 = 0$ et un hyperboloïde sinon.

C.1.2 Quotient GIT

Calculons maintenant $\mathcal{M}_\theta(1) = \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) //_{\theta} \mathbf{G}(\mathbf{d})$. Cette variété est définie par

$$\mathcal{M}_\theta(n) := \text{Proj} \bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{X_i^\theta},$$

où χ_θ est le caractère de $\mathbf{G}(\mathbf{d})$ défini par $\chi_\theta(g) = \prod (\det g_i)^{\theta_i}$ et

$$f \in \mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\chi_\theta^i} \Leftrightarrow \forall g \in \mathbf{G}(\mathbf{d}), g \cdot f = \chi_\theta^i(g)f.$$

On pose de plus $\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\chi_\theta^i} = 0$ si $i\theta \notin \mathbb{Z}^\ell$.

Comme précédemment, $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, où $\mathcal{X}_1 = \{(v, w) \in \mathbf{A}^2(\mathbb{C}), vw = 0\}$ et $\mathcal{X}_2 = \{(x_0, \dots, x_{\ell-1}, y_0, \dots, y_{\ell-1}) \in \mathbf{A}^{2\ell}(\mathbb{C}), x_0y_0 = x_1y_1 = \dots = x_{\ell-1}y_{\ell-1}\}$ et

$$\mathcal{M}_\theta(1) = \mathcal{X}_1 //_{\theta} \mathbb{C}^* \times \mathcal{X}_2 //_{\theta} (\mathbb{C}^*)^{\ell-1},$$

de plus, si $g = (g_0, \eta)$, alors $\chi_\theta(g) = g_0^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}} \prod_{i=0}^{\ell-2} \eta_i^{\theta_{i+1} + \dots + \theta_{\ell-1}}$.

On supposera par la suite que, pour tout $0 \leq i \leq \ell - 1$, $\theta_i + \dots + \theta_{\ell-1} > 0$.

Etude de $\mathcal{X}_1 //_{\theta} \mathbb{C}^*$

Soit $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_\theta} = \{f \in \mathbb{C}[\mathcal{X}_1], \forall g_0 \in \mathbb{C}^*, g_0 \cdot f = g_0^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}} f\}$. On voit facilement que $V^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}} \in \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_\theta}$, on a même :

Proposition C.1.2. $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_\theta}$ est un $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\mathbb{C}^*}$ -module engendré par $V^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}}$.

Démonstration. Comme $g_0 \cdot (V^\alpha W^\beta) = g_0^{\alpha - \beta} V^\alpha W^\beta$, pour que la composante homogène $V^\alpha W^\beta$ soit θ -semi-invariante, il faut que $\alpha - \beta = \theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}$ soit $\alpha = \theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1} + \beta$ mais on a alors $V^\alpha W^\beta = V^\beta W^\beta V^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}} \in \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\mathbb{C}^*} V^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}}$. Ce qui prouve la proposition car l'inclusion inverse est immédiate. \square

Remarque C.1.3. Si $\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1} < 0$, on a $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_\theta} = \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\mathbb{C}^*} W^{-(\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1})}$.

Corollaire C.1.4. $\bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_\theta^k}$ est une algèbre sur $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\mathbb{C}^*}$ engendrée par $V^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}}$.

Démonstration. $\mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_\theta^k} = \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_{k\theta}} = \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\mathbb{C}^*} V^{k(\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1})}$ d'après la proposition précédente. Donc

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\chi_\theta^k} &= \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\mathbb{C}^*} V^{k(\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1})} \\ &= \mathbb{C}[\mathcal{X}_1]^{\mathbb{C}^*} [V^{\theta_0 + \dots + \theta_{\ell-1}}] \end{aligned}$$

en tant qu'algèbres. \square

On voit donc que $\mathcal{X}_1 //_{\theta} \mathbb{C}^*$ est réduite à un point.

Etude de $\mathcal{X}_2 //_{\theta} (\mathbb{C}^*)^{\ell-1}$

Soit $\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\chi_\theta} = \{f \in \mathbb{C}[\mathcal{X}_2], \forall \eta \in \mathbb{C}^*, \eta \cdot f = \eta_0^{\theta_1 + \dots + \theta_{\ell-1}} \dots \eta_{\ell-2}^{\theta_{\ell-1}} f\}$. Un rapide calcul nous donne les composantes θ -semi-invariantes suivantes : $U_0 = \prod_{i=0}^{\ell-1} X_i^{\theta_{i+1} + \dots + \theta_{\ell-1}}$

et, pour $1 \leq k \leq \ell - 1$ et $\theta_{k+1} + \dots + \theta_{\ell-1} + 1 \leq i \leq \theta_k + \theta_{k+1} + \dots + \theta_{\ell-1}$,

$$U_i = \left(\prod_{j=0}^{k-1} X_j^{\theta_{j+1} + \dots + \theta_{\ell-1} - i} \right) \times \left(\prod_{j=k}^{\ell-1} Y_j^{i - \theta_{j+1} - \dots - \theta_{\ell-1}} \right).$$

Proposition C.1.5. Soit A l'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{(\mathbb{C}^*)^{\ell-1}} \simeq \mathbb{C}[E, F, G]/(E^\ell - FG)$ des invariants. Alors $\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_\theta}$ est un A -module engendré par U_i , pour $0 \leq i \leq \theta_1 + \dots + \theta_{\ell-1}$.

Démonstration. On va de nouveau présenter la démonstration dans le cas $\ell = 2$, les générateurs seront alors de la forme $X_0^{\theta_1-i} Y_1^i$, avec $0 \leq i \leq \theta_1$.

Pour que la composante homogène $Z = X_0^{\alpha_0} Y_0^{\beta_0} X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1}$ soit θ -semi-invariante il faut que

$$\begin{aligned} \eta \cdot Z &= (\eta_0 X_0)^{\alpha_0} (\eta_0^{-1} Y_0)^{\beta_0} (\eta_0^{-1} X_1)^{\alpha_1} (\eta_0 Y_1)^{\beta_1} \\ &= \eta_0^{\alpha_0 - \beta_0 - \alpha_1 + \beta_1} X_0^{\alpha_0} Y_0^{\beta_0} X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1} \\ &= \eta_0^{\theta_1} X_0^{\alpha_0} Y_0^{\beta_0} X_1^{\alpha_1} Y_1^{\beta_1} \end{aligned}$$

soit $\alpha_0 - \beta_0 - \alpha_1 + \beta_1 = \theta_1$.

Si $\alpha_0 \geq \theta_1$ alors $Z = (X_0^{\alpha_0 - \theta_1} X_1^{\alpha_1} Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1}) X_0^{\theta_1}$ et dans ce cas, comme $\alpha_0 - \theta_1 - \alpha_1 - \beta_0 + \beta_1 = 0$, $X_0^{\alpha_0 - \theta_1} X_1^{\alpha_1} Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1} \in A$ et $Z \in AX_0^{\theta_1}$.

Si $0 \leq \alpha_0 < \theta_1$, soit $i = \theta_1 - \alpha_0$ alors $\beta_1 = \theta_1 - \alpha_0 + \beta_0 + \alpha_1 \geq \theta_1 - \alpha_0 = i$ donc $Z = (X_1^{\alpha_1} Y_0^{\beta_0} Y_1^{\beta_1 - i}) X_0^{\theta_1 - i} Y_1^i \in AX_0^{\theta_1 - i} Y_1^i$ car $-\alpha_1 - \beta_0 + \beta_1 - \theta_1 + \alpha_0 = 0$.

De plus, une fonction $f = \sum_k Z_k$ sur \mathcal{X}_2 est θ -semi-invariante si et seulement si ses composantes homogènes Z_k le sont toutes. Mais ceci équivaut au fait que pour tous les k , il existe $a_k \in A$ et $0 \leq i_k \leq \theta_1$ tels que $Z_k = a_k X_0^{\theta_1 - i_k} Y_1^{i_k}$. Ce qui revient à $f = \sum_k a_k X_0^{\theta_1 - i_k} Y_1^{i_k} \in \sum_i AX_0^{\theta_1 - i} Y_1^i$. Donc

$$\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_\theta} = \sum_{i=0}^{\theta_1} AX_0^{\theta_1 - i} Y_1^i.$$

□

Remarque C.1.6. Comme pour la remarque C.1.3, si l'une des sommes $\theta_i + \dots + \theta_{\ell-1}$ était négative, on pourrait conclure grâce au cas où tout est positif. Par exemple, pour $\ell = 2$, si $\theta_1 < 0$, on a

$$\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_\theta} = \sum_{i=0}^{-\theta_1} AY_0^{-\theta_1 - i} X_1^i.$$

Corollaire C.1.7. $\bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_\theta^k}$ est une A -algèbre engendrée par U_i , pour $0 \leq i \leq \theta_1 + \dots + \theta_{\ell-1}$.

Démonstration. (dans le cas $\ell = 2$)

$\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_\theta^k} = \mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_{k\theta}}$ est un A -module engendré par les éléments $X_0^{k\theta_1 - i} Y_1^i$ pour $0 \leq i \leq k\theta_1$ d'après la précédente proposition. Donc $\bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_\theta^k}$ est un A -module engendré par les éléments $X_0^{k\theta_1 - i} Y_1^i$ pour $k \geq 0$ et $0 \leq i \leq k\theta_1$.

Raisonnons par récurrence pour montrer que pour tout $k \geq 0$ et pour tout $0 \leq i \leq k\theta_1$, $X_0^{k\theta_1 - i} Y_1^i \in \sum_{j=0}^{\theta_1} AX_0^{\theta_1 - j} Y_1^j$:

pour $k = 0$ c'est réglé car $\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\mathcal{X}_\theta^0} = A$.

supposons que pour un $k-1 \geq 0$ donné, on ait montré que pour tout $0 \leq i \leq (k-1)\theta_1$, $X_0^{(k-1)\theta_1 - i} Y_1^i \in \sum_{j=0}^{\theta_1} AX_0^{\theta_1 - j} Y_1^j$ alors soit $0 \leq i \leq k\theta_1$, $i = l\theta_1 + r$ avec $0 \leq r < \theta_1$.

On a nécessairement $0 \leq l \leq k$. Si $k = l$ alors $r = 0$ et

$$\begin{aligned} X_0^{k\theta_1 - i} Y_1^i &= Y_1^{k\theta_1} \\ &= Y_1^{(k-1)\theta_1} Y_1^{\theta_1} \\ &\in \sum_{j=0}^{\theta_1} AX_0^{\theta_1 - j} Y_1^j \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Donc on peut supposer $0 \leq l < k$ et on a

$$\begin{aligned} X_0^{k\theta_1-i} Y_1^i &= X_0^{(k-l)\theta_1-r} Y_1^{\theta_1 l+r} \\ &= X_0^{(k-1)\theta_1-\theta_1 l} Y_1^{\theta_1 l} X_0^{\theta_1-r} Y_1^r \\ &\in \sum_{i=0}^{\theta_1} A X_0^{\theta_1-i} Y_1^i \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Par le principe de récurrence, on a donc, pour tout $0 \leq i \leq (k-1)\theta_1$, $X_0^{(k-1)\theta_1-i} Y_1^i \in \sum_{i=0}^{\theta_1} A X_0^{\theta_1-i} Y_1^i$ et donc on a montré le corollaire. \square

Donc $B = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\times k}$ est une A -algèbre graduée et engendrée par $\mathbb{C}[\mathcal{X}_2]^{\times \theta_1}$ qui est un A -module de type fini. Si on note $A = \frac{\mathbb{C}[E, F, G]}{(E^\ell - FG)}$, alors

$$\varphi : A[T_0, \dots, T_{\theta_1+\dots+\theta_{\ell-1}}] \twoheadrightarrow B$$

$$A \xrightarrow{id} A$$

$$T_i \xrightarrow{\quad} U_i$$

est surjective et

$$\begin{aligned} \ker \varphi = & \langle E^\ell - FG, \text{ pour } 1 \leq k \leq \ell-1, \theta_{k+1} + \dots + \theta_{\ell-1} + 1 \leq i \leq \theta_k + \theta_{k+1} \\ & + \dots + \theta_{\ell-1}, E^k U_i - G U_{i-1}, F U_i - E^{\ell-k} U_{i-1}, \text{ et } U_i U_j = U_{i+s} U_{j-s}, \\ & \text{pour } \theta_{k+1} + \dots + \theta_{\ell-1} + 1 \leq i, j, i+s, j-s \leq \theta_k + \theta_{k+1} + \dots \\ & + \theta_{\ell-1} \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathcal{M}_\theta(1) &= \mathcal{X}_2 / \theta \mathbb{C}^* \\ &= \{((e, f, g), [u_0 : \dots : u_{\theta_1+\dots+\theta_{\ell-1}}]) \in \mathbf{A}^3(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\theta_1+\dots+\theta_{\ell-1}}(\mathbb{C}), \\ & \quad e^\ell = fg, \text{ pour } 1 \leq k \leq \ell-1, \theta_{k+1} + \dots + \theta_{\ell-1} + 1 \leq i \leq \theta_k + \\ & \quad \theta_{k+1} + \dots + \theta_{\ell-1}, e^k u_i = g u_{i-1}, f u_i = e^{\ell-k} u_{i-1} \text{ et pour } \\ & \quad \theta_{k+1} + \dots + \theta_{\ell-1} + 1 \leq i, j, i+s, j-s \leq \theta_k + \theta_{k+1} + \dots + \\ & \quad \theta_{\ell-1}, u_i u_j = u_{i+s} u_{j-s}\} \end{aligned}$$

est projective sur $\mathcal{X}_0(1)$.

En effet

$$\pi_{\theta,0} : \mathcal{M}_\theta(1) \longrightarrow \mathcal{X}_0(1)$$

$$((e, f, g), [u_0 : \dots : u_{\theta_1+\dots+\theta_{\ell-1}}]) \longmapsto (e, f, g)$$

vérifie : si $x = (e, f, g) \neq (0, 0, 0)$ alors la fibre $\pi_{\theta,0}^{-1}(x)$ est réduite à un point car dans ce cas, les égalités $e^k u_i = g u_{i-1}$, $f u_i = e^{\ell-k} u_{i-1}$ et $u_i u_j = u_{i+s} u_{j-s}$ permettent d'écrire tous les u_i à partir de u_0 ou $u_{\theta_1+\dots+\theta_{\ell-1}}$.

ANNEXE C. ÉTUDE DE LA VARIÉTÉ $\mathcal{M}_\theta(N)$ DANS LE CAS D'UN GROUPE CYCLIQUE

De plus, $\pi_{\theta,0}^{-1}(0)$ est projective. Dans le cas $\ell = 2$ par exemple, $\pi_{\theta,0}^{-1}(0)$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par l'application :

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\phi} \pi_{\theta,0}^{-1}(0)$$

$$[u_0 : u_1] \longmapsto ((0, 0, 0, 0), [u_0^{\theta_1} : u_0^{\theta_1-1}u_1 : \dots : u_0u_1^{\theta_1-1} : u_1^{\theta_1}]).$$

En effet, montrons que ϕ est injective : si $\phi([u_0 : u_1]) = \phi([v_0 : v_1])$ alors en particulier, $u_0^{\theta_1} = v_0^{\theta_1}$ et $u_0^{\theta_1-1}u_1 = v_0^{\theta_1-1}v_1$. Si $u_0 = 0$ alors $v_0 = 0$ et $[u_0 : u_1] = [v_0 : v_1] = [0 : 1]$. Si $u_0 \neq 0$, alors $\lambda = \frac{v_0}{u_0}$ est une racine $\theta_1^{\text{ième}}$ de l'unité et alors l'égalité $u_0^{\theta_1-1}u_1 = v_0^{\theta_1-1}v_1$ implique $u_0^{\theta_1-1}u_1 = (\lambda u_0)^{\theta_1-1}v_1$ et donc $v_1 = \frac{u_1}{\lambda^{\theta_1-1}} = \lambda u_1$ donc $[u_0 : u_1] = [v_0 : v_1]$ et ϕ est injective.

Montrons la surjectivité : soit $[x_0 : \dots : x_{\theta_1}] \in \mathbb{P}^{\theta_1}(\mathbb{C})$ tel que $x_i x_j = x_{i+k} x_{j-k}$ pour tous i, j, k tels que ces égalités soient bien définies. Alors si $x_0 = 0$, comme $x_0 x_2 = x_1^2$, $x_1 = 0$ et comme $x_1 x_3 = x_2^2$, $x_2 = 0$ et on montre ainsi que pour $0 \leq i \leq \theta_1 - 1$, $x_i = 0$. Mais alors $[x_0 : \dots : x_{\theta_1}] = [0 : \dots : 0 : 1] = \phi([0 : 1])$. Supposons maintenant que $x_0 \neq 0$ alors $u_0 \neq 0$ et soit $u_1 = \frac{x_1}{u_0^{\theta_1-1}}$ alors $x_1 = u_0^{\theta_1-1}u_1$ et comme $x_0 x_2 = x_1^2$ on obtient $x_2 = u_0^{\theta_1-2}u_1^2$ et par réitération, en utilisant les formules $x_i x_{i+2} = x_{i+1}^2$ on démontre que pour tout $0 \leq i \leq \theta_1$, $x_i = u_0^{\theta_1-i}u_1^i$ et donc $[x_0 : \dots : x_{\theta_1}] = \phi([u_0 : u_1])$.



$\mathcal{M}_{(\theta_0, \theta_1)}(1)$ qui se projette sur $\mathcal{X}_0(1) \simeq \mathbb{C}^2/\mu_2$, pour $\theta_1 \neq 0$

C.2 \mathbb{C}^* -points fixes pour $\ell = 2$

Dans ce paragraphe, on va décrire les points fixes de $\mathcal{X}_\theta(1)$ et $\mathcal{M}_\theta(1)$ sous l'action de \mathbb{C}^* afin d'illustrer le corollaire 8.3.2 et la construction de l'ordre géométrique du paragraphe 9.2.3.

Il y a deux 2-multipartitions de 1 : $((1); \emptyset)$ et $(\emptyset; (1))$ donc on doit trouver deux points fixes de $\mathcal{M}_\theta(n)$ sous \mathbb{C}^* . Cette action est induite par celle sur $R(\mathbf{d}')$ donnée par, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\lambda \cdot (\mathbf{X}, \mathbf{Y}; v, w) = (\lambda \mathbf{X}, \lambda^{-1} \mathbf{Y}; v, w)$$

grâce aux l'homéomorphismes entre $\mathcal{M}_\theta(1)$ et $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(\frac{\sqrt{-1}\theta}{2})/\mathbf{U}(1, 1)$ et entre $\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\frac{\theta}{2}) \cap \mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0)/\mathbf{U}(1, 1)$ et $\mathcal{X}_{\frac{\theta}{2}}(1)$.

C.2.1 Points fixes de $\mathcal{X}_\theta(1)$

Pour le cas $n = 1$ et $\ell = 2$, on a $\mathcal{X}_\theta(1) = \{(e, f, g) \in \mathbf{A}^3(\mathbb{C}), fg = e^2 - \theta_1 e\}$ et l'action de \mathbb{C}^* est définie par

$$\lambda \cdot (e, f, g) = (e, \lambda^2 f, \lambda^{-2} g).$$

Donc $x = (e, f, g)$ est fixe si et seulement si $f = g = 0$. La variété $\mathcal{X}_\theta(1)$ a donc deux points fixes : $x_1 = (0, 0, 0)$ et $x_2 = (\theta_1, 0, 0)$.

C.2.2 Points fixes de $\mathcal{M}_\theta(1)$

Pour le cas $n = 1$ et $\ell = 2$, on a

$$\mathcal{M}_\theta(1) = \{((e, f, g), [u_0 : \cdots : u_{\theta_1}]) \in \mathbf{A}^3(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{\theta_1}(\mathbb{C}), fg = e^2, u_i u_j = u_{i+s} u_{j-s}, \\ eu_i = g u_{i-1} \text{ et } f u_i = e u_{i-1}\}$$

et l'action de \mathbb{C}^* est définie par

$$\lambda \cdot ((e, f, g), [u_0 : \cdots : u_{\theta_1}]) = ((e, \lambda^2 f, \lambda^{-2} g), [u_0 : \lambda^{-2} u_1 : \cdots : \lambda^{-2\theta_1} u_{\theta_1}]).$$

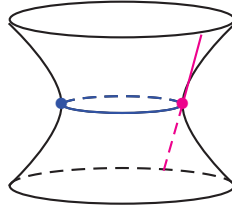
Ainsi, pour que $x = ((e, f, g, h), [u_0 : \cdots : u_{\theta_1}])$ soit un point fixe, il faut nécessairement que $f = g = 0$ mais alors $e = h = 0$ d'après les relations liant ces coordonnées. Alors $[u_0 : \cdots : u_{\theta_1}] \in \pi_{\theta,0}^{-1}(0)$ mais on a vu que la fibre $\pi_{\theta,0}^{-1}(0)$ était isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par l'application $[u_0, u_1] \mapsto [u_0^{\theta_1} : u_0^{\theta_1-1} u_1 : \cdots : u_1^{\theta_1}]$. Et l'action de \mathbb{C}^* est ainsi transportée sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en $\lambda \cdot [u_0 : u_1] = [u_0 : \lambda^{-2} u_1] = [\lambda^2 u_0 : u_1]$. Donc les deux points fixes de $\pi_{\theta,0}^{-1}(\mathbb{C})$ pour cette action sont $[0 : 1]$ et $[1 : 0]$. On a donc bien deux points fixes : $x_1 = ((0, 0, 0, 0), [0 : \cdots : 0 : 1])$ et $x_2 = ((0, 0, 0, 0), [1 : 0 : \cdots : 0])$.

Recherchons maintenant les ensembles attractifs correspondant à ces deux points. Soit $x = ((e, f, g, h), [u_0 : \cdots : u_{\theta_1}])$, on a

$$\begin{aligned} \lambda \cdot x &= ((e, \lambda^2 f, \lambda^{-2} g, h), [u_0 : \lambda^{-2} u_1 : \cdots : \lambda^{-2\theta_1} u_{\theta_1}]) \\ &= ((e, \lambda^2 f, \lambda^{-2} g, h), [\lambda^{2\theta_1} u_0 : \lambda^{2(\theta_1-1)} u_1 : \cdots : u_{\theta_1}]). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot x = x_1$, il faut que $g = 0$, $h = 0$, $e = 0$ et $u_{\theta_1} \neq 0$. Mais ceci implique aussi $f = 0$ et donc $\mathcal{M}_{\theta,\lambda_1}(n)$ correspond au cercle privé du point x_2 .

De même, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \cdot x = x_2$ si et seulement si $g = e = h = 0$ et $u_1 = \cdots = u_{\theta_1} = 0$ et donc $\mathcal{M}_{\theta,\lambda_2}(1)$ est la droite $\{((0, f, 0, 0), [1 : 0 : \cdots : 0]), f \in \mathbb{C}\}$.



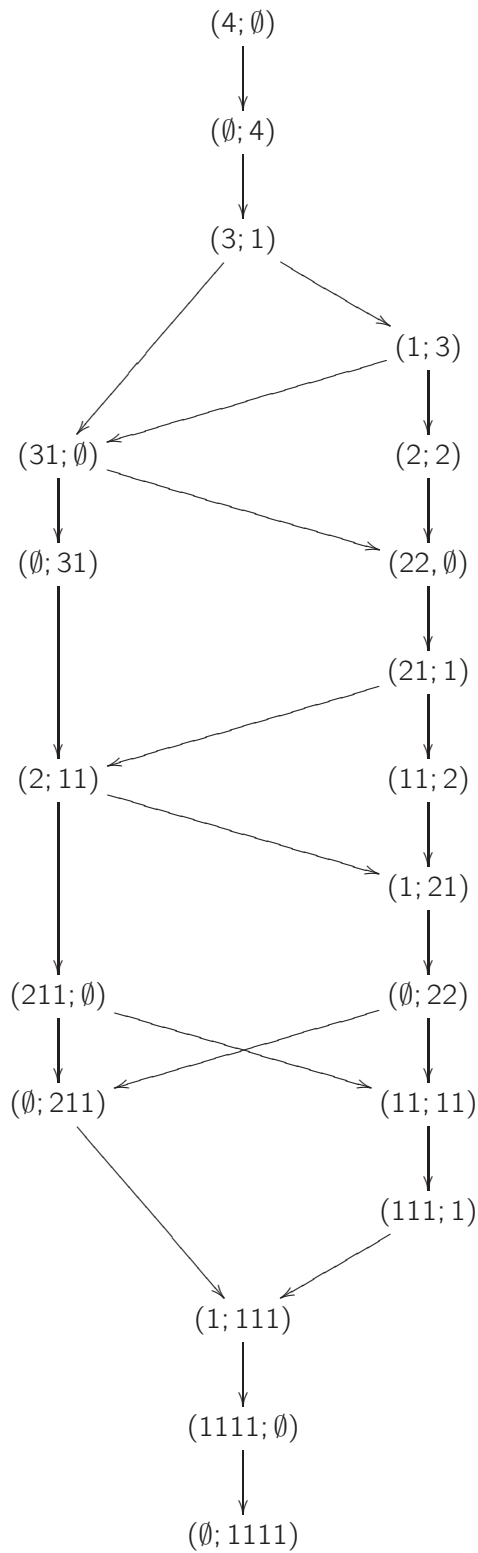
Ensembles attractifs des deux points fixes de $\mathcal{M}_\theta(1)$, pour $\theta_1 \neq 0$

ANNEXE D

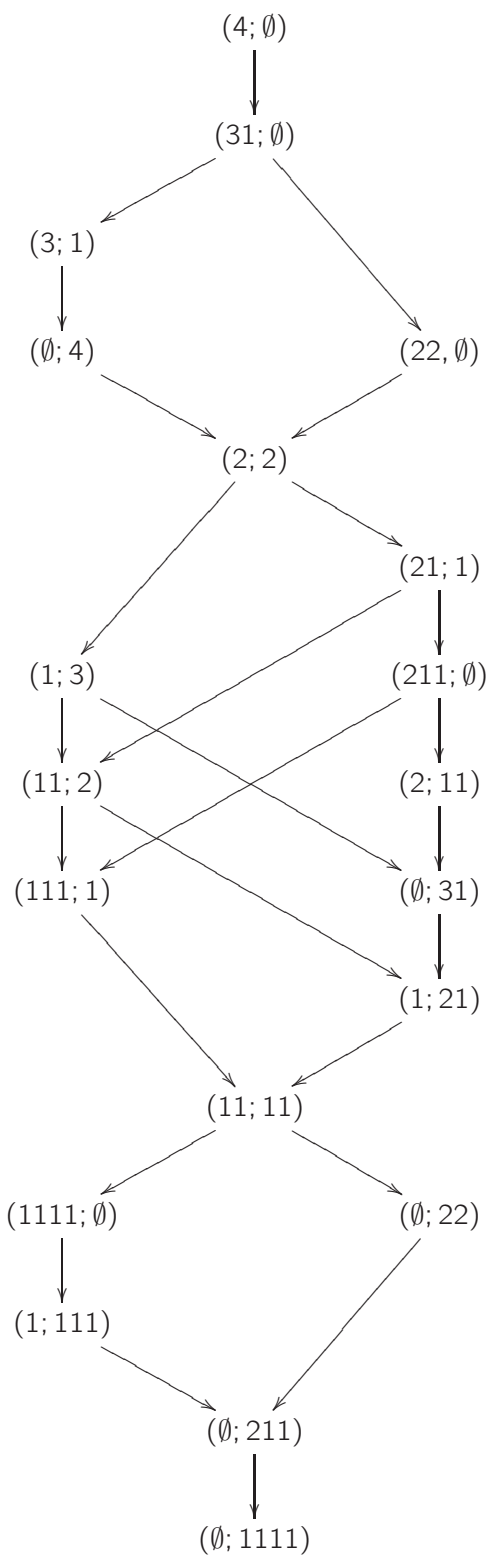
Calcul des blocs de B_4

Dans cette annexe, on étudie le cas du groupe $B_4 = G(2, 1, 4)$. On va commencer par ordonner les multipartitions de $\mathcal{P}(2, 4)$ dans les 4 alcôves par l'ordre combinatoire puis on va calculer les classes d'équivalence pour l'ordre engendré sur chaque mur et vérifier avec la description combinatoire des blocs par les résidus que ces classes décrivent bien les blocs pour $n = 4$.

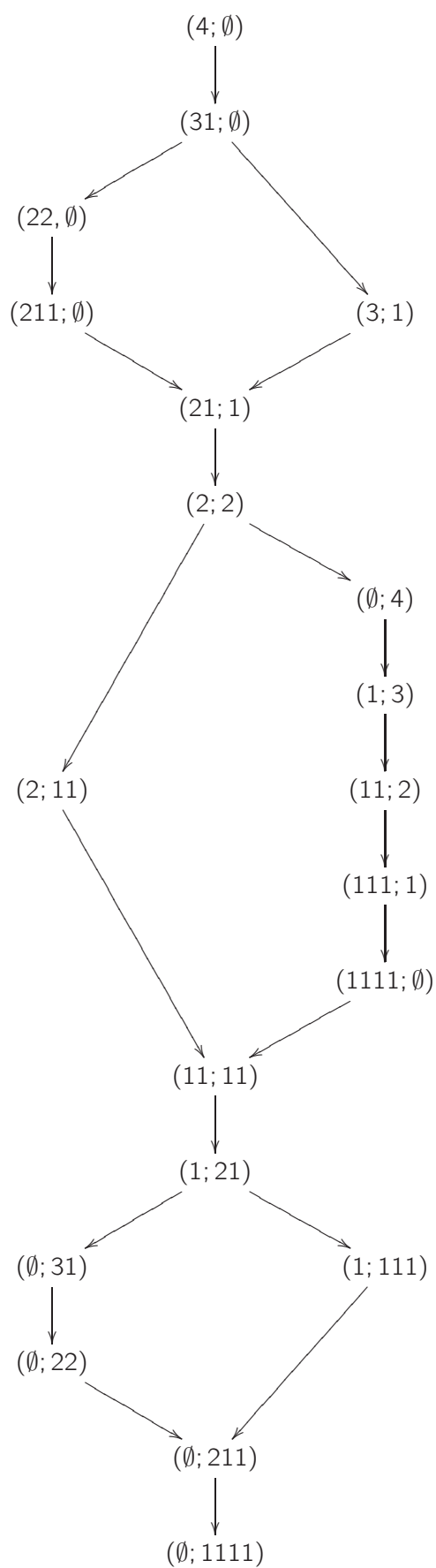
1. Pour $0 < \frac{b}{a} < 1$: on se trouve dans l'alcôve $\alpha((0, 0), id, +)$, et les partitions $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda) \in \mathcal{P}_{\emptyset}(8)$, on obtient :



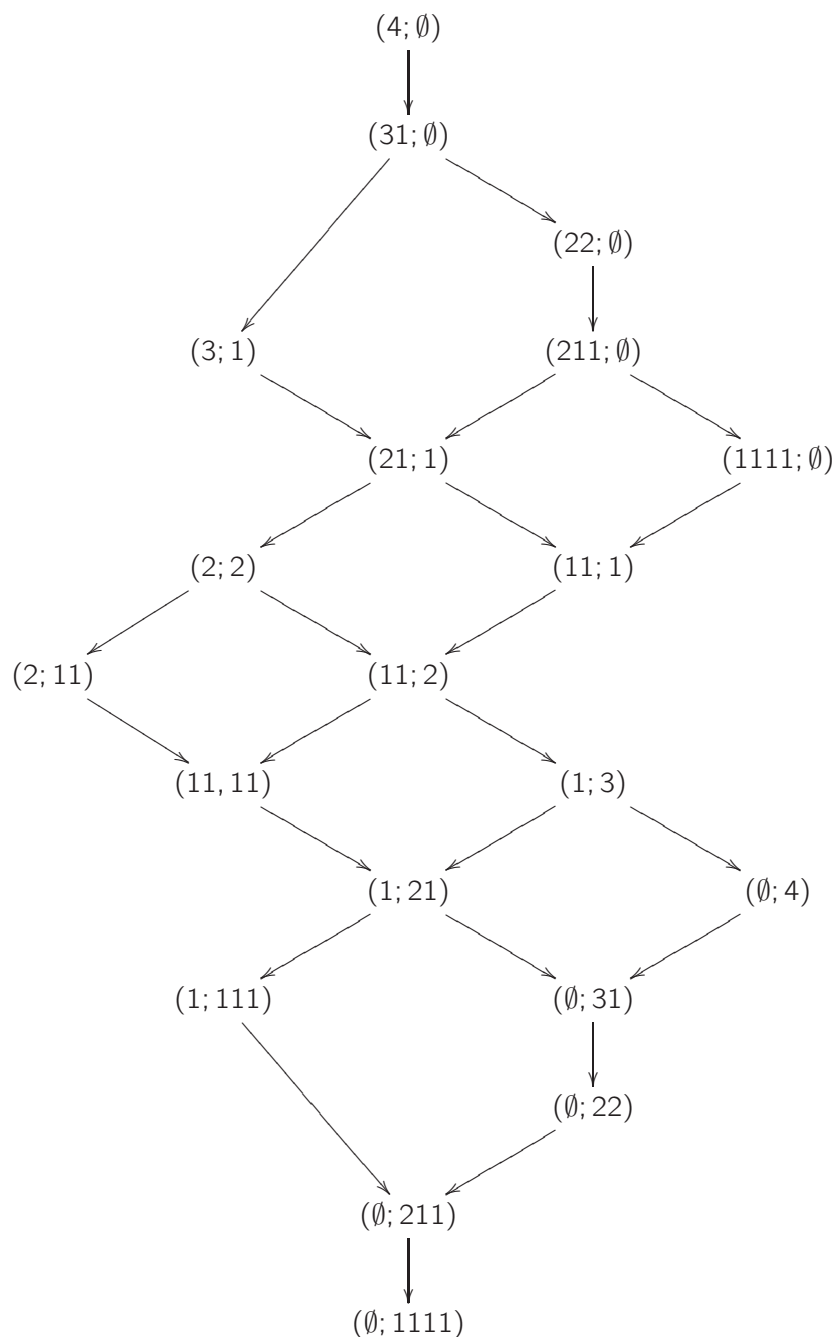
2. Pour $1 < \frac{b}{a} < 2$: on se trouve dans l'alcôve $\alpha((1, -1), \sigma, +)$, et les partitions $\tau_s(t(\sigma \cdot \lambda)) \in \mathcal{P}_{(1)}(9)$, on obtient :



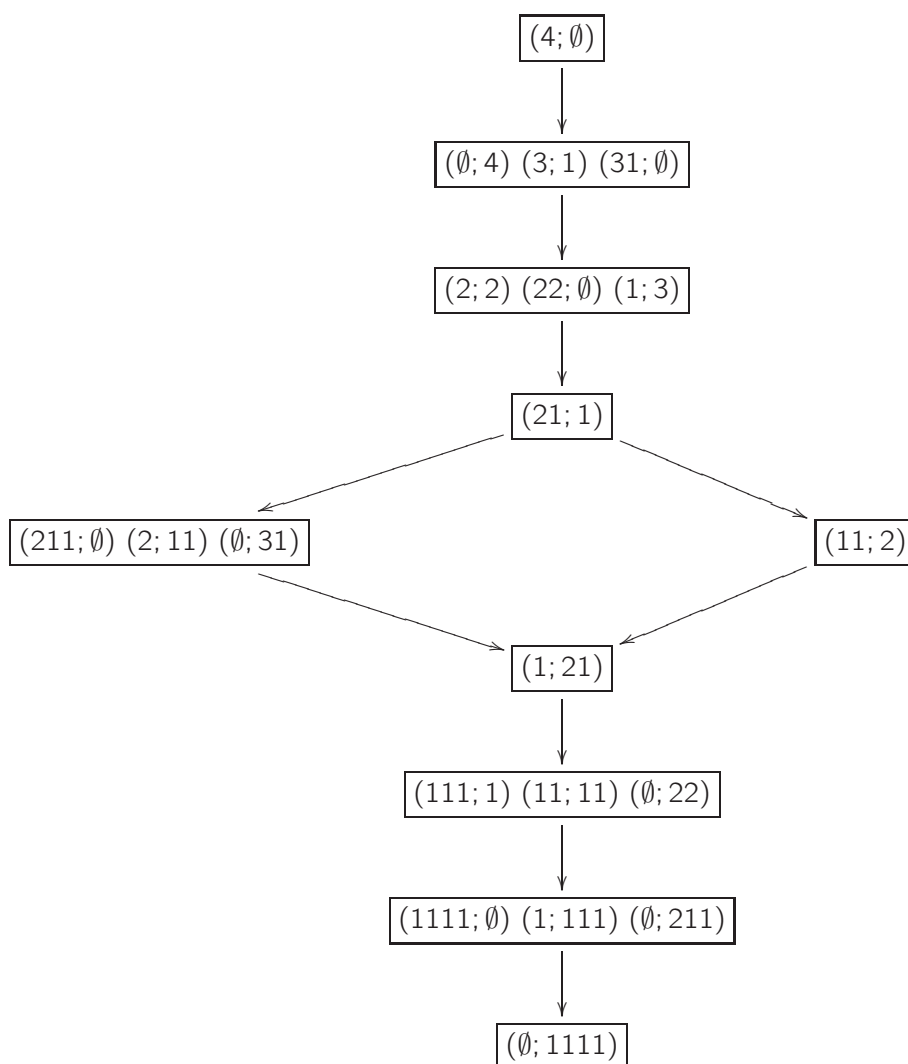
3. Pour $2 < \frac{b}{a} < 3$: on se trouve dans l'alcôve $\alpha((-1, 1), id, +)$, et les partitions $\tau_s^t(\lambda) \in \mathcal{P}_{(2,1)}(11)$, on obtient :



4. Enfin pour $3 < \frac{b}{a} < 4$: on se trouve dans l'alcôve $\alpha((2, -2), \sigma, +)$, et les partitions $\tau_s({}^t(\sigma \cdot \lambda)) \in \mathcal{P}_{(3,2,1)}(14)$, on obtient :



5. Sur le mur $\frac{b}{a} = 1$, en calculant les classes d'équivalence de l'ordre engendré par les deux ordres combinatoires des chambres avoisinantes, on obtient :

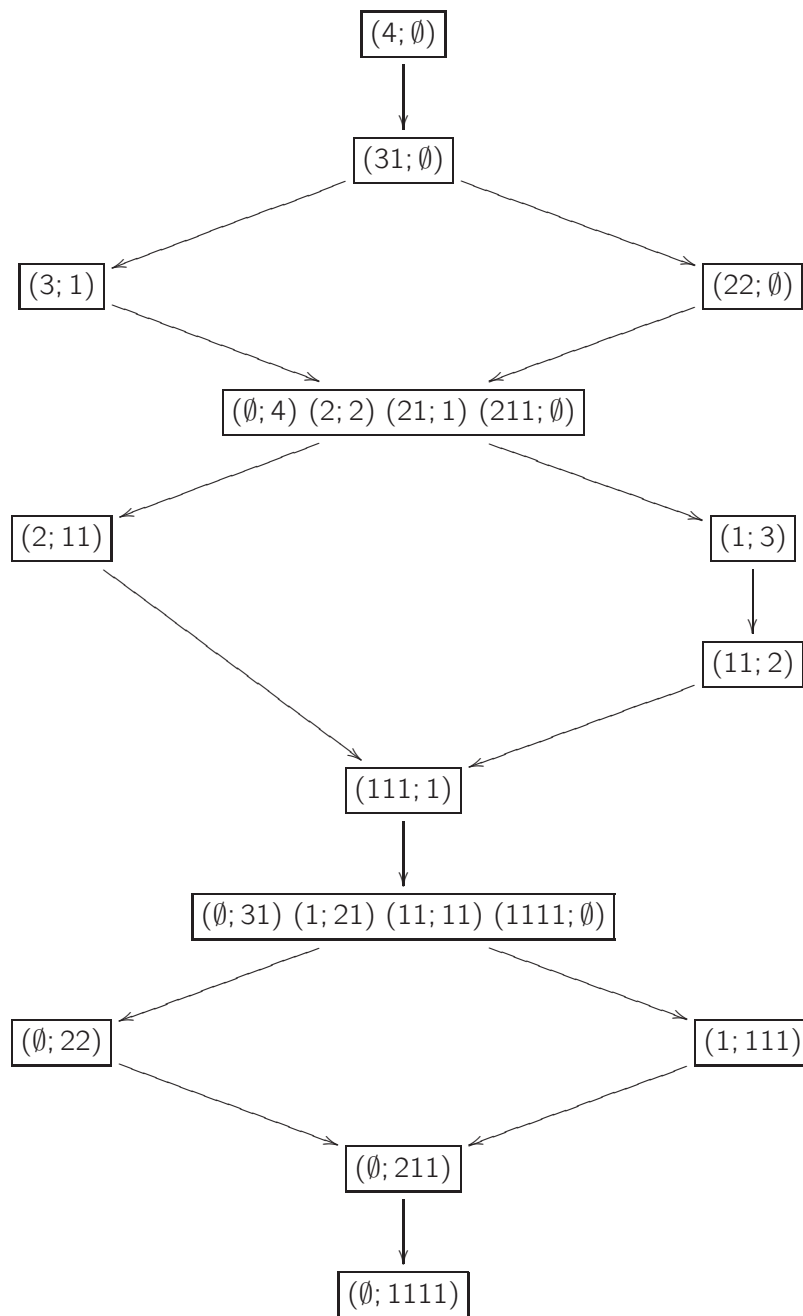


Et avec les notations du théorème 9.1.9, on obtient $\mathbf{h} = (-1, -1)$, $d = 1$ et $d\tilde{\mathbf{h}} = (0, -1)$, ce qui nous donne les résidus suivants :

Bloc	Résidu
(4; \emptyset)	$1 + x + x^2 + x^3$
$\{(\emptyset; 4) (3; 1) (31; \emptyset)\}$	$x^{-1} + 1 + x + x^2$
$\{(2; 2) (22; \emptyset) (1; 3)\}$	$x^{-1} + 2 + x$
(21; 1)	$2x^{-1} + 1 + x$
$\{(211; \emptyset) (2; 11) (\emptyset; 31)\}$	$x^{-2} + x^{-1} + 1 + x$
(11; 2)	$2x^{-1} + 2$
(1; 21)	$x^{-2} + x^{-1} + 2$
$\{(111; 1) (11; 11) (\emptyset; 22)\}$	$x^{-2} + 2x^{-1} + 1$
$\{(1111; \emptyset) (1; 111) (\emptyset; 211)\}$	$x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1$
(\emptyset ; 1111)	$x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$

Dans ce cas, les classes d'équivalence correspondent donc aux blocs.

6. Sur le mur $\frac{b}{a} = 2$, les classes d'équivalence sont :

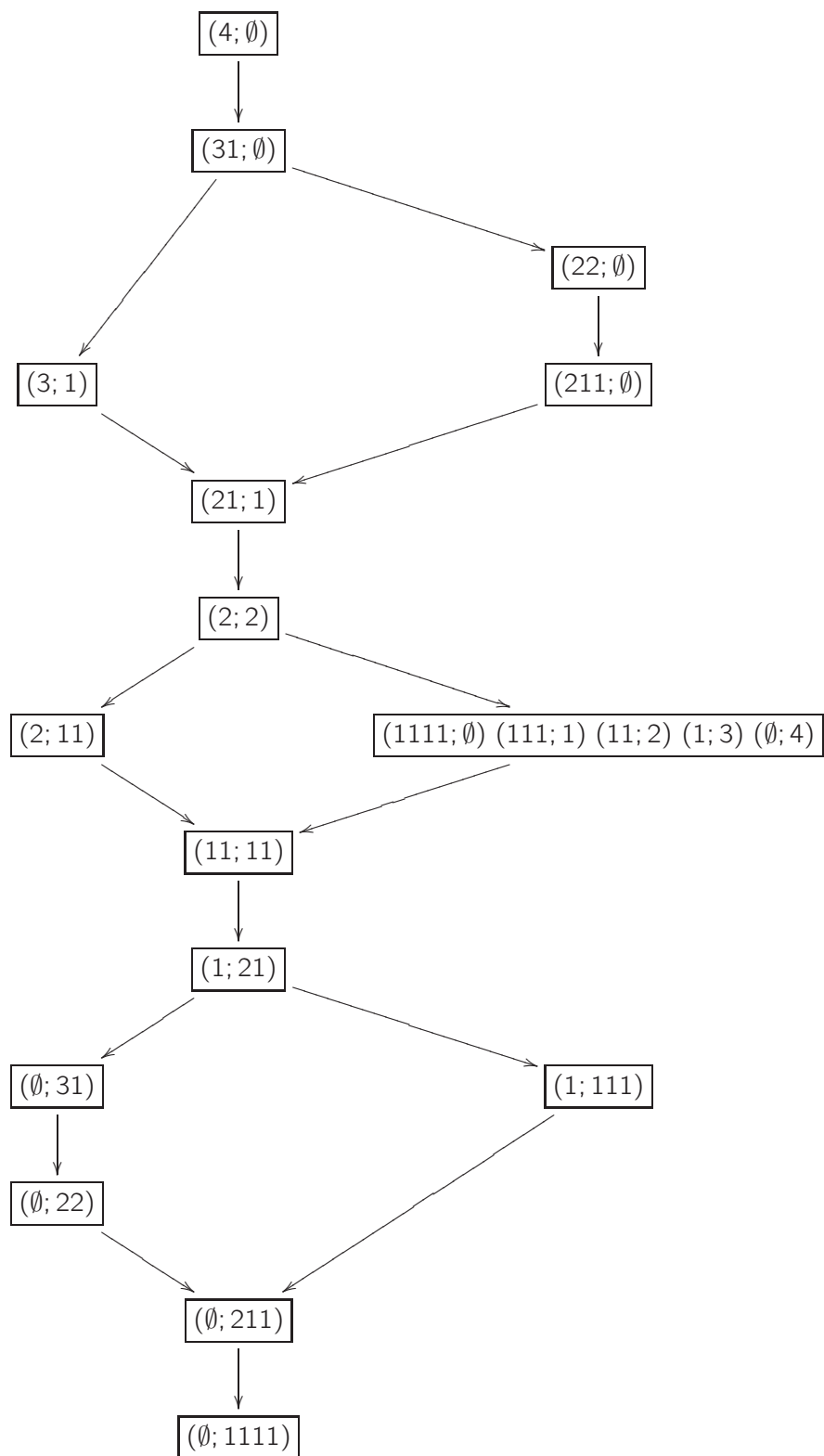


Et pour $\mathbf{h} = (-1, -2)$, $d = 1$ et $d\tilde{\mathbf{h}} = (0, -2)$, on a les résidus suivants :

Bloc	Résidu
$(4; \emptyset)$	$1 + x + x^2 + x^3$
$(31; \emptyset)$	$x^{-1} + 1 + x + x^2$
$(3; 1)$	$x^{-2} + 1 + x + x^2$
$(22; \emptyset)$	$2x^{-1} + 2$
$\{(\emptyset; 4) (2; 2) (21; 1) (211; \emptyset)\}$	$x^{-2} + x^{-1} + 1 + x$
$(2; 11)$	$x^{-3} + x^{-2} + 1 + x$
$(11; 2)$	$x^{-2} + 2x^{-1} + 1$
$(111; 1)$	$2x^{-2} + x^{-1} + 1$
$\{(\emptyset; 31) (1; 21) (11; 11) (1111; \emptyset)\}$	$x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1$
$(\emptyset; 22)$	$x^{-3} + 2x^{-2} + x^{-1}$
$(1; 111)$	$x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + 1$
$(\emptyset; 211)$	$x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$
$(\emptyset; 1111)$	$x^{-5} + x^{-4} + x^{-3} + x^{-2}$

On retrouve encore les classes d'équivalence.

7. Sur le mur $\frac{b}{a} = 3$, les classes d'équivalence de l'ordre combinatoire sont :



Sur ce mur, on a $\mathbf{h} = (-1, -3)$, $d = 1$ et $d\tilde{\mathbf{h}} = (0, -3)$, ce qui nous donne les résidus suivants :

Bloc	Résidu
$(4; \emptyset)$	$1 + x + x^2 + x^3$
$(31; \emptyset)$	$x^{-1} + 1 + x + x^2$
$(22; \emptyset)$	$x^{-1} + 2 + x$
$(3; 1)$	$x^{-3} + 1 + x + x^2$
$(211; \emptyset)$	$x^{-2} + 2x^{-1} + 1$
$(21; 1)$	$x^{-3} + x^{-1} + 1 + x$
$(2; 2)$	$x^{-3} + x^{-2} + 1 + x$
$(2; 11)$	$x^{-4} + x^{-3} + 1 + x$
$\{(1111; \emptyset) (111; 1) (11; 2) (1; 3) (\emptyset; 4)\}$	$x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1$
$(11; 11)$	$x^{-4} + x^{-3} + x^{-1} + 1$
$(1; 21)$	$x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + 1$
$(\emptyset; 31)$	$x^{-4} + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$
$(1; 111)$	$x^{-5} + x^{-4} + x^{-3} + 1$
$(\emptyset; 22)$	$x^{-4} + 2x^{-3} + x^{-2}$
$(\emptyset; 211)$	$x^{-5} + x^{-4} + x^{-3} + x^{-2}$
$(\emptyset; 1111)$	$x^{-6} + x^{-5} + x^{-4} + x^{-3}$

Et les blocs sont exactement les classes d'équivalence données plus haut.

Remarque D.0.1. En général, pour B_n , on ne s'intéresse qu'aux murs d'équations $\frac{b}{a} = r$, avec $1 \leq r \leq n-1$ car on décrit ce qu'il se passe pour les $r < 0$ grâce à l'involution $\theta \mapsto \bar{\theta}$ et pour $r \geq n$, l'ordre est constant car on peut montrer que le 2-coeur associé à l'alcôve A_{-r} est $\delta_r = (r, r-1, \dots, 1)$ (cf. par exemple [BGIL10]). Donc pour $r \geq n$, le 2-coeur est tellement gros qu'on n'a pas le choix pour placer les 2-crochets frontières.

Index

- $[M : L]$, 86
 $[\cdot]$: partie entière, 28
 Θ_c , 71
 Υ_c , 66
- A_0 : alcôve fondamentale, 119
A et **a**-fonctions, 63
 $\mathbf{A}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$, 102
 $\mathbf{a}_{\mathbf{h}}$, 128
 $\mathbf{a}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$, 102
 $\alpha(\mathbf{s}, w, \pm)$: alcôves, 119
 α_s , 59
 \mathcal{A}_W : ensemble des hyperplans de réflexions de W , 60
- $\beta_s(\lambda)$, 21
 $\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$: **m**-symbole décalé de λ , 28
B : symbole ordinaire d'une multipartition, 28
 $\text{Bl}(A)$: blocs de l'algèbre finie A , 36
- $\text{cont}(\mathfrak{B}_{\mathbf{m}}^s(\lambda))$: contenu **m**-chargé de λ , 29
 $\langle \mathbb{C}[\mathfrak{h}]_+^G \rangle$, 61
 $CM_c(W)$: partition de Calogero-Moser de W , 71
 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^G$, 60
 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{\text{co}W}$, 66
 $\mathbb{C}[\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(0)]^{\mathcal{X}_{j\theta}}$, 110
 $\Gamma(B)$, 85
 $\chi(\lambda^1, \dots, \lambda^\ell)$: caractère de $G(\ell, 1, n)$ associé à λ , 97
c-fonction, 67
 $\mathbf{c}_{\mathbf{h}}(\lambda)$, 105
 $\mathbf{c}_{\mathbf{m},r}(\lambda)$, 103
 \mathcal{C} : orbite d'hyperplans sous l'action de W , 60
 $\text{cont}_{\mathbf{m}}$: **m**-contenu d'une multipartition, 27
 $c_0, \dots, c_{\ell-1}$, 97
Contenu d'une partition, 20
- $[\lambda]$: Diagramme de Young de λ , 20
- E^- : le $\overline{H_{\mathbb{C}}^-}(W)$ -module obtenu à partir de E , 68
 \mathcal{E}/G : variété quotient, 45
 $e_{\mathcal{C}}$: ordre du fixateur de l'orbite \mathcal{C} , 60

eu et eu_0 : les éléments d'Euler, 67

Formules reliant θ , \mathbf{h} et \mathbf{m} , 105, 115, 125

$G(\ell, e, n)$, 60

$\mathbf{G}(\mathbf{d})$, 108

$\hat{\Gamma}$: groupe des caractères du groupe abélien Γ , 36

$H_c(K)$, 73

$H_c(W)$: algèbre de Cherednik associée à W en $t = 0$, 67

$H_h(G(\ell, 1, n))$: algèbre de Cherednik de $G(\ell, 1, n)$, 99

$H_{t,c}(W)$: algèbre de Cherednik associée à W , 63

\mathbf{H}^{reg} : l'espace \mathbf{H} privé des murs GIT, 116

$\bar{\mathbf{h}}$, 119

$\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(G(\ell, 1, n))$: algèbre de Hecke cyclotomique de $G(\ell, 1, n)$, 99

$\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(W)$: algèbre de Hecke cyclotomique de W , 62

$\mathcal{H}_{\mathbf{q},\mathbf{n}}(G(\ell, e, n))$: algèbre de Hecke cyclotomique de $G(\ell, e, n)$, 152

$\overline{H_c(K)}$, 73

$\overline{H_c(W)}$: algèbre de Cherednik restreinte, 67

$\widetilde{H_c(W)}$ et $H_c^+(W)$, 68

$H_c(K)$, 74

$\bar{\rho}^J$: J -classe de ρ , 122

ρ_J : J -cœur de ρ , 122

$\kappa_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$, 29

$L_c(E)$, 69

L_c^K et $\widetilde{L_c^K}$, 76

ℓ -abaque associé à une partition, 22

ℓ -cœur, 25

ℓ -crochet frontière, 24

\mathcal{L} : lieu singulier de $(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*)/G(2, 2, 2)$, 160

$\bar{\lambda}$, 32

$M_c(E)$: bébé module de Verma associé à E , 69

M_c^K et $\widetilde{M_c^K}$, 76

$\mathcal{M}_\theta(n)$, 115, 125

$\mathcal{M}_{\theta'}(e, n)$, 154

$\mathcal{M}_\theta(\mathbf{d})$, 110

$\mu_{\mathbb{C}}$, 109

$\mu_\theta(V, W)$: pente de (V, W) , 111

$\bar{\mathbf{m}}$, 128

N , 122

$N_i(\rho)$, 121

$N_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$, 101

$\nu_{\mathbf{s}}$: ℓ -cœur associé à \mathbf{s} , 25

$n(\lambda)$ et $n^*(\lambda)$, 20

$n_{\mathbf{m}}^s(\lambda)$, 101

- $\triangleleft_{\theta', e}$: ordre combinatoire pour $G(\ell, e, n)$, 158
 \prec : ordre sur les \mathbb{C}^* -points fixes d'une variété quasi-projective normale, 48
 $\prec_{\theta', e}$: ordre géométrique pour $G(\ell, e, n)$, 157
 Ordre combinatoire \triangleleft_{θ} , 131
 Ordre de dominance sur les partitions \triangleleft , 19
 Ordre de la \mathbf{c} -fonction, 67
 Ordre géométrique \prec_{θ} , 134
 Ordre géométrique sur un mur $\prec_{\theta'}$, 135
 Ordres des \mathbf{A} et \mathbf{a} -fonctions, 63

 $\mathcal{P}_{\nu_{\mathbf{s}}}(N)$: ensemble des partitions de l'entier N qui ont pour ℓ -cœur $\nu_{\mathbf{s}}$, 31
 $\pi_{\theta, \theta'}$, 114
 $p : H_c(K) \rightarrow \overline{H_c(K)}$, 74
 Partition e -bégayante, 149
 Pré-ordre combinatoire $\triangleleft_{\theta'}$, 132

 $R(\mathbf{d}')$: variété des représentations du carquois $\overline{Q_{\infty}}$, 108
 $\text{rad}(B)$: radical de Jacobson de l'anneau B , 38
 $\text{Res}_{\lambda}^r(x)$: r -résidu translaté de λ , 27
 Représentations stables, semistables et polystables, 111

 \mathcal{S}_W : ensemble des pseudo-réflexions de W , 60
 $\widetilde{\mathfrak{S}}_{\ell}$, 119
 s_{χ} : élément de schur associé à χ , 41

 Θ , 118
 $\bar{\theta}$, 118
 $\tau_{\mathbf{s}}(\lambda)$, 31
 $\theta(V, W)$, 111
 ${}^t\lambda$: Transposée de la partition λ , 20
 Type d'un mur, 120

 $U = \bigsqcup_{C \in \mathcal{A}_W/W} \text{Irr}(W_C)$, 60

 $\nu_{\mathbf{s}}$, 59

 w_0 , 33

 X_{x_0} : ensemble attractif du point fixe x_0 , 46
 $\mathcal{X}_{\theta}(\mathbf{d})$, 109
 $x_{\theta}(\lambda)$: \mathbb{C}^* -point fixe de $\mathcal{M}_{\theta}(n)$ associé à la multipartition λ , 122

 $Z_c(W)$: centre de l'algèbre de Cherednik associée à W en $t = 0$, 67
 \mathbb{Z}_0^{ℓ} , 25

Bibliographie

- [AF09] Jacques Alev and Loïc Foissy. Le groupe des traces de Poisson de certaines algèbres d'invariants. Comm. Algebra, 37(1) :368–388, 2009.
- [Ari95] Susumu Ariki. Representation theory of a Hecke algebra of $G(r, p, n)$. J. Algebra, 177(1) :164–185, 1995.
- [Ass97] Ibrahim Assem. Algèbres et modules. Les Presses de l'Université d'Ottawa. Masson, Paris, 1997.
- [BB73] A. Białynicki-Birula. Some theorems on actions of algebraic groups. Ann. of Math. (2), 98 :480–497, 1973.
- [BB76] A. Białynicki-Birula. Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 24(9) :667–674, 1976.
- [BBR02] David Bessis, Cédric Bonnafé, and Raphaël Rouquier. Quotients et extensions de groupes de réflexion. Math. Ann., 323(3) :405–436, 2002.
- [Bel] Gwyn Bellamy. The Calogero-Moser Partition for $G(m, d, n)$. Disponible sur <http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/gwyn.bellamy/index.htm>.
- [Bel09] Gwyn Bellamy. On singular Calogero-Moser spaces. Bull. Lond. Math. Soc., 41(2) :315–326, 2009.
- [Bel10] Gwyn Bellamy. Generalized Calogero-Moser spaces and rational Cherednik algebras. 2010. Thèse de doctorat, Université d'Édimbourg.
- [BG01] Kenneth A. Brown and Iain Gordon. The ramification of centres : Lie algebras in positive characteristic and quantised enveloping algebras. Math. Z., 238(4) :733–779, 2001.
- [BGIL10] Cédric Bonnafé, Meinolf Geck, Lacrimioara Iancu, and Thomas Lam. On domino insertion and Kazhdan-Lusztig cells in type B_n . In Representation theory of algebraic groups and quantum groups, volume 284 of Progr. Math., pages 33–54. Birkhäuser/Springer, New York, 2010.
- [BK02] Michel Broué and SungSoon Kim. Familles de caractères des algèbres de Hecke cyclotomiques. Adv. Math., 172(1) :53–136, 2002.
- [BM04] David Bessis and Jean Michel. Explicit presentations for exceptional braid groups. Experiment. Math., 13(3) :257–266, 2004.
- [BMM99] M. Broué, G. Malle, and J. Michel. Towards spetses. I. Transform. Groups, 4(2-3) :157–218, 1999. Dedicated to the memory of Claude Chevalley.

- [BMR98] Michel Broué, Gunter Malle, and Raphaël Rouquier. Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras. J. Reine Angew. Math., 500 :127–190, 1998.
- [Bon09] Cédric Bonnafé. Semicontinuity properties of Kazhdan-Lusztig cells. New Zealand J. Math., 39 :171–192, 2009.
- [Bor70] Armand Borel. Properties and linear representations of Chevalley groups. In Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131, pages 1–55. Springer, Berlin, 1970.
- [Bor91] Armand Borel. Linear algebraic groups, volume 126 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [Bou68] N. Bourbaki. Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [BS02] Michel Brion and Gerald W. Schwartz. Théorie des invariants et géométrie des variétés quotients. Hermann, 2002.
- [CB01] William Crawley-Boevey. Geometry of the moment map for representations of quivers. Compositio Math., 126(3) :257–293, 2001.
- [CB02] William Crawley-Boevey. Decomposition of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers. Compositio Math., 130(2) :225–239, 2002.
- [CB03] William Crawley-Boevey. Normality of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers. Math. Ann., 325(1) :55–79, 2003.
- [CG10] Neil Chriss and Victor Ginzburg. Representation theory and complex geometry. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010. Reprint of the 1997 edition.
- [CGG12] Maria Chlouveraki, Iain Gordon, and Stephen Griffeth. Cell modules and canonical basic sets for Hecke algebras from Cherednik algebras. In New trends in noncommutative algebra, volume 562 of Contemp. Math., pages 77–89. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- [Che55] Claude Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. Amer. J. Math., 77 :778–782, 1955.
- [Che91] Ivan Cherednik. A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras. Invent. Math., 106(2) :411–431, 1991.
- [Che92] Ivan Cherednik. Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald’s operators. Internat. Math. Res. Notices, (9) :171–180, 1992.
- [Chl09] Maria Chlouveraki. Blocks and families for cyclotomic Hecke algebras, volume 1981 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [CJ11] Maria Chlouveraki and Nicolas Jacon. Schur elements and basic sets for cyclotomic Hecke algebras. J. Algebra Appl., 10(5) :979–993, 2011.
- [CJ12] Maria Chlouveraki and Nicolas Jacon. Schur elements for the Ariki-Koike algebra and applications. Journal of Algebraic Combinatorics, 35(2) :291–311, 2012. The paper contains the results of arXiv :1101.1465.

- [CR81] Charles W. Curtis and Irving Reiner. Methods of representation theory. Vol. I. John Wiley & Sons Inc., New York, 1981. With applications to finite groups and orders, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.
- [EG02] Pavel Etingof and Victor Ginzburg. Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism. Invent. Math., 147(2) :243–348, 2002.
- [EM] Pavel Etingof and Xiaoguang Ma. Lecture notes on Cherednik algebras. arXiv :1001.0432.
- [Fog68] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. Amer. J. Math., 90 :511–521, 1968.
- [GGOR03] Victor Ginzburg, Nicolas Guay, Eric Opdam, and Raphaël Rouquier. On the category \mathcal{O} for rational Cherednik algebras. Invent. Math., 154(3) :617–651, 2003.
- [GI] Meinolf Geck and Lacrimioara Iancu. Ordering Lusztig's families in type B_n . arXiv :1205.3762.
- [GIM00] Meinolf Geck, Lacrimioara Iancu, and Gunter Malle. Weights of Markov traces and generic degrees. Indag. Math. (N.S.), 11(3) :379–397, 2000.
- [Gio62] I. Giorgiutti. Groupes de Grothendieck. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (4), 26 :151–207 (1964), 1962.
- [GJ11] Meinolf Geck and Nicolas Jacon. Representations of Hecke algebras at roots of unity, volume 15 of Algebra and Applications. Springer-Verlag London Ltd., London, 2011.
- [GM09] Iain Gordon and Maurizio Martino. Calogero-Moser space, restricted rational Cherednik algebras and two-sided cells. Math. Res. Lett., 16(2) :255–262, 2009.
- [Gor03] Iain Gordon. Baby Verma modules for rational Cherednik algebras. Bull. London Math. Soc., 35(3) :321–336, 2003.
- [Gor08] Iain Gordon. Quiver varieties, category \mathcal{O} for rational Cherednik algebras, and Hecke algebras. Int. Math. Res. Pap. IMRP, (3) :Art. ID rpn006, 69, 2008.
- [GP00] Meinolf Geck and Götz Pfeiffer. Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras, volume 21 of London Mathematical Society Monographs. New Series. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [Har77] Robin Hartshorne. Algebraic geometry. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [HN91] Randall R. Holmes and Daniel K. Nakano. Brauer-type reciprocity for a class of graded associative algebras. J. Algebra, 144(1) :117–126, 1991.
- [Isa76] I. Martin Isaacs. Character theory of finite groups. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976. Pure and Applied Mathematics, No. 69.
- [Jac45] N. Jacobson. The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. American Journal of Mathematics, 67(2) :300–320, 1945.

- [JK81] Gordon James and Adalbert Kerber. The representation theory of the symmetric group, volume 16 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981. With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson.
- [Kac83] Victor G. Kac. Infinite-dimensional Lie algebras, volume 44 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983. An introduction.
- [Kin94] A. D. King. Moduli of representations of finite-dimensional algebras. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 45(180) :515–530, 1994.
- [Lei99] Séverine Leidwanger. Basic representations of $A_{n-1}^{(1)}$ and $A_{2n}^{(2)}$ and the combinatorics of partitions. Adv. Math., 141(1) :119–154, 1999.
- [Lus84] George Lusztig. Characters of reductive groups over a finite field, volume 107 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.
- [Lus03] G. Lusztig. Hecke algebras with unequal parameters, volume 18 of CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Mar] Maurizio Martino. Blocks of restricted rational Cherednik algebras for $G(m, d, n)$. Disponible sur <http://www.math.uni-bonn.de/mmartino/pubs.html>.
- [Mar08] Maurizio Martino. Stratifications of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers and deformations of symplectic quotient singularities. Math. Z., 258(1) :1–28, 2008.
- [Mar10] Maurizio Martino. The Calogero-Moser partition and Rouquier families for complex reflection groups. J. Algebra, 323(1) :193–205, 2010.
- [Mat04] Andrew Mathas. Matrix units and generic degrees for the Ariki-Koike algebras. J. Algebra, 281(2) :695–730, 2004.
- [MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. Geometric invariant theory, volume 34 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.
- [Mon80] Susan Montgomery. Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings, volume 818 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, 1980.
- [Mül76] Bruno J. Müller. Localization in non-commutative Noetherian rings. Canad. J. Math., 28(3) :600–610, 1976.
- [Nak94] Hiraku Nakajima. Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras. Duke Math. J., 76(2) :365–416, 1994.
- [Nak99] Hiraku Nakajima. Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces, volume 18 of University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [Nak09] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and branching. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 5 :Paper 003, 37, 2009.
- [Rei08] Markus Reineke. Moduli of representations of quivers. In Trends in representation theory of algebras and related topics, EMS Ser. Congr. Rep., pages 589–637. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.

- [Rou08] Raphaël Rouquier. q -Schur algebras and complex reflection groups. Mosc. Math. J., 8(1) :119–158, 184, 2008.
- [Rud97] Alexei Rudakov. Stability for an abelian category. J. Algebra, 197(1) :231–245, 1997.
- [ST54] G. C. Shephard and J. A. Todd. Finite unitary reflection groups. Canadian J. Math., 6 :274–304, 1954.
- [Ste89] John R. Stembridge. On the eigenvalues of representations of reflection groups and wreath products. Pacific J. Math., 140(2) :353–396, 1989.
- [Sum74] Hideyasu Sumihiro. Equivariant completion. J. Math. Kyoto Univ., 14 :1–28, 1974.
- [Ver00] Misha Verbitsky. Holomorphic symplectic geometry and orbifold singularities. Asian J. Math., 4(3) :553–563, 2000.

Résumé

Cette thèse présente quelques résultats de la théorie des représentations des algèbres de Cherednik rationnelles en $t=0$ et traite en particulier des différents ordres construits sur la partition de Calogero-Moser des groupes imprimitifs.

On commence par généraliser au cas abélien certains résultats obtenus par M. Chlouveraki concernant les blocs d'algèbres en système de Clifford pour un groupe cyclique, puis on construit un ordre sur les \mathbf{C}^* -points fixes d'une variété complexe quasi-projective normale, en utilisant la décomposition de Bialynicki-Birula.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à la description des partitions de Calogero-Moser de deux groupes de réflexions complexes K et W quand K est un sous-groupe distingué de W et on généralise au cas abélien les résultats obtenus par G. Bellamy dans le cas d'un quotient W/K cyclique.

Dans la troisième partie, on présente les différents ordres, construits par I. Gordon, sur la partition de Calogero-Moser des groupes $G(l,1,n)$ pour certains paramètres : les ordres des a et c -fonctions, un ordre combinatoire et l'ordre géométrique, qui est défini grâce aux \mathbf{C}^* -points fixes de certaines variétés de carquois, ces points fixes paramétrant les blocs de la partition de Calogero-Moser de $G(l,1,n)$. On donne ensuite les relations entre ces ordres, puis on étend ces constructions ainsi que ces liens à l'ensemble des paramètres.

Enfin, dans la dernière partie, on tente de généraliser ces propriétés aux groupes $G(l,e,n)$. On cherche alors, pour construire l'ordre géométrique sur la partition de Calogero-Moser de $G(l,e,n)$, une variété dont les \mathbf{C}^* -points fixes décrivent les blocs de la partition de $G(l,e,n)$. Dans le cas où e ne divise pas n , on construit la variété qui nous permet de définir l'ordre géométrique et de le relier aux autres ordres. Pour le cas e divise n , on propose une variété qui pourrait décrire par ses points fixes les blocs de Calogero-Moser de $G(l,e,n)$ et nous permettre de construire l'ordre géométrique.

Mots Clefs

Représentations des groupes de réflexions complexes, algèbres de Cherednik, algèbres de Hecke, variétés de carquois, combinatoire algébrique.

Abstract

This work is a contribution to the representation theory of Rational Cherednik Algebras for $t=0$ and deals in particular with different orders on the Calogero-Moser partition of imprimitive reflection groups.

In the first part, we generalize to the abelian case some results about blocs of algebras in Clifford system obtained by M. Chlouveraki in the cyclic case, and then we build an order on the \mathbf{C}^* -fixed points of a complex, quasi-projective and normal variety, using the Bialynicki-Birula decomposition.

The second part deals with the Calogero-Moser partition of two groups K and W , when K is a normal subgroup of W , and generalize to the abelian case the results that G. Bellamy obtained when the quotient W/K is cyclic.

In the third part, we present the different orders that I. Gordon built in the Calogero-Moser partition of the groups $G(l,1,n)$ and for some parameters : the orders of the a and c -functions, a combinatorial order and the geometric order, defined using the \mathbf{C}^* -fixed points of some quiver varieties which parametrise the blocs of the Calogero-Moser partition of $G(l,1,n)$. Then we give some relations between these orders and we extend these constructions and these links for all parameters.

Finally, in the last part, we try to generalize these properties for the groups $G(l,e,n)$. We are looking for a variety whose \mathbf{C}^* -fixed points describe blocs of $G(l,e,n)$ to construct the geometric order on the Calogero-Moser partition of $G(l,e,n)$. When n is not divided by e , we build this variety that enables us to define the geometric order and to show all the links with the other orders. When e don't divide n , we suggest a variety which could describe the blocs of $G(l,e,n)$ and allow us to build the geometric order.

Keywords

Complex reflection groups, Cherednik algebras, Hecke algebras, quiver varieties, algebraic combinatorics.

Classification AMS : 16S38, 16S99, 20C08, 16G20, 05E10.