



**HAL**  
open science

# Exploration acoustique d'une suspension non-colloïdale perturbée. Mesure des grandeurs caractéristiques du système.

Jérôme Martin

► **To cite this version:**

Jérôme Martin. Exploration acoustique d'une suspension non-colloïdale perturbée. Mesure des grandeurs caractéristiques du système.. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1995. Français. NNT: . tel-00865785

**HAL Id: tel-00865785**

**<https://theses.hal.science/tel-00865785>**

Submitted on 25 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE de DOCTORAT de l'UNIVERSITE PARIS 6**

Spécialité:

**PHYSIQUE DES LIQUIDES**

Présentée par

**Monsieur JEROME MARTIN**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6**

Sujet de la thèse:

**EXPLORATION ACOUSTIQUE D'UNE  
SUSPENSION NON-COLLOIDALE PERTURBEE.  
MESURE DES GRANDEURS  
CARACTERISTIQUES DU SYSTEME.**

soutenue le 27 juin 1995

devant le jury composé de:

**Mme E. Guazzelli**

**Mr. J.-P. Hulin**

**Mr. D. Lhuillier.....Rapporteur**

**Mr. J. Pantaloni.....Président**

**Mr. L. Petit.....Rapporteur**

**Mr. D. Salin.....Directeur de Thèse**

*à mon père,*

## REMERCIEMENTS

*Cette thèse a été effectuée en grande partie au laboratoire A.O.M.C. de l'université Pierre et Marie Curie, dont je tiens à remercier ici l'ensemble de ses membres, et en premier lieu son directeur Jacques Duran, pour leur accueil et leur disponibilité.*

*Mes remerciements vont également aux membres du laboratoire F.A.S.T. à Orsay, où cette thèse a été achevée. Tous ont fait preuve de beaucoup de gentillesse, dans une période de rédaction qui ne me rendait peut-être pas très avenant.*

*Dominique Salin a dirigé cette thèse avec beaucoup d'enthousiasme et de présence, tout en encourageant les initiatives et les discussions souvent fructueuses. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et de toute la satisfaction que m'a procuré l'apprentissage de la recherche sous sa direction.*

*Daniel Lhuillier et Luc Petit ont accepté d'être rapporteurs. Je les remercie pour le temps consacré à la lecture attentive de ce manuscrit, et pour les critiques constructives dont ils m'ont fait part.*

*Je remercie également Jacques Pantaloni qui a présidé le jury, ainsi qu'Elisabeth Guazzelli et Jean-Pierre Hulin qui ont accepté d'en faire partie.*

*Enfin, je voudrais adresser toute mon amitié à Pierre Legros, Alain Levelut, et tout particulièrement à Christian Frénois, pour leur disponibilité et leurs conseils éclairés, qui m'ont permis tout au long de ce travail, non seulement de ne pas perdre mon coup droit, mais aussi d'améliorer mon revers.*

# TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION .....	1
I GENERALITES SUR LES SUSPENSIONS SOLIDE / LIQUIDE .....	3
I-1 Introduction .....	3
I-2 Sédimentation d'une particule dans un milieu infini .....	3
I-3 Vitesses moyennes dans une suspension homogène .....	6
I-4 Lit fluidisé stable .....	10
I-5 Calculs et mesures de la vitesse de sédimentation .....	16
I-6 Diffusion hydrodynamique .....	24
I-7 Description des lits fluidisés à nombre de Reynolds quelconque .....	28
II MONTAGE ET TECHNIQUES EXPERIMENTALES .....	34
II-1 Caractéristiques des suspensions étudiées .....	34
II-2 Description du lit fluidisé .....	35
II-3 Mesure de la concentration par une technique acoustique .....	36
II-4 Validation des mesures acoustiques .....	41
II-5 Caractérisation de la fluidisation .....	43
III PROPAGATION DE FRONTS .....	46
III-1 Introduction .....	46
III-2 Vitesse de propagation d'une concentration dans un profil .....	48
III-3 Effet local du flux convectif aux temps courts .....	49
III-4 Effet global du flux convectif aux temps longs-Définition des chocs .....	51
III-5 Influence du flux diffusif .....	54
III-6 Fronts stationnaires .....	56
III-7 Fronts convectifs .....	60
III-8 Fronts mixtes .....	62
III-9 Fronts de faible amplitude .....	65
IV RESULTATS EXPERIMENTAUX .....	72
IV-1 Flux et vitesse de sédimentation .....	72
IV-2 Courbe de flux dans un lit fluidisé .....	76
IV-3 Coefficient de diffusion hydrodynamique .....	84
IV-4 Comportement du lit lors d'une augmentation de débit .....	95
IV-5 Réponse à une oscillation sinusoïdale de débit .....	107
CONCLUSION .....	111
BIBLIOGRAPHIE .....	114

## **INTRODUCTION**

Il est fascinant de constater que la physique du 20<sup>ème</sup> siècle, de plus en plus complexe et pointue, ne parvient pas encore à décrire de manière satisfaisante certains systèmes, qui semblent pourtant simples, parce que très familiers.

Un des exemples les plus frappants est le sable que tout enfant a un jour, utilisé comme matériau pour construire en dur les fruits de son imagination, ou jeté dans l'eau par poignées, pour regarder ces grains susceptibles de tomber ou être emmenés par les flots.

Les lacunes qui restent à combler pour décrire correctement les systèmes relevant du domaine des granulaires ou des suspensions représentent cependant un enjeu important. En effet, ceux-ci sont de plus en plus utilisés dans l'industrie, que ce soit dans le domaine des cosmétiques, des industries agro-alimentaires, ou pour l'élaboration de matériaux nouveaux ou encore dans différents procédés industriels.

En ce qui concerne les suspensions macroscopiques (tailles supérieures au micron) de particules solides immergées dans un liquide (suspensions solide/liquide non-colloïdales) qui font l'objet de l'étude présentée dans ce mémoire, la compréhension de leur comportement peut trouver une motivation dans des domaines variés. Pour l'environnement, l'un des enjeux est la description des phénomènes de sédimentation dans les estuaires ou en amont des barrages. Pour l'industrie, l'une des applications de ces systèmes diphasiques est l'utilisation de lits fluidisés dans les procédés de réactions chimiques en phase liquide catalysée par une phase solide. Le mélange réactif liquide est injecté par le bas d'une cuve contenant les particules de catalyseur et le produit de la réaction est récupéré par le haut de la cuve. Les particules solides de catalyseur sont alors maintenues en suspension par le courant ascendant du fluide (la friction exercée par le fluide compense le poids des particules). Cette technique présente deux avantages: la réaction, réalisée en circuit ouvert, permet à l'installation de fonctionner en continu, et le phénomène de dispersion hydrodynamique pour les particules solides en suspension contribue à améliorer l'efficacité de la catalyse. Une autre application de ces systèmes, tant dans le domaine de l'industrie que dans celui de l'environnement, concerne la ségrégation des particules solides fondée sur l'exploitation des différences entre les vitesses de sédimentation pour les particules ne présentant pas la même forme ou la même densité. Cette caractéristique est utilisée depuis longtemps dans les bassins de décantation ou dans les laboratoires avec la mesure de distribution de tailles des particules solides par la technique de "la pipette d'Andersen".

Toutefois, ces différentes applications ne reposent encore pour la plupart que sur des fondements empiriques souvent approximatifs. Le besoin d'une description plus rigoureuse

des suspensions solide/liquide se fait ressentir, à la fois pour améliorer l'utilisation déjà existante de ces systèmes, et pour permettre de l'élargir.

Dans le but de déterminer les régimes d'instabilités des suspensions monodisperses placées dans des lits fluidisés, Batchelor a proposé en 1988, un modèle théorique introduisant différentes grandeurs physiques caractéristiques du système, et notamment une élasticité de la suspension. Cependant, des mesures des différentes grandeurs introduites font encore défaut, et cette approche théorique, qui repose sur certaines conjectures, n'a pas pu être validée expérimentalement.

Ce mémoire apporte une contribution dans ce sens, en présentant quelques résultats expérimentaux obtenus dans des situations simples, permettant des mesures de quelques unes de ces grandeurs. Les expériences ont été réalisées dans un lit fluidisé stable permettant de générer différents types de fronts de concentrations. La suspension est composée de particules solides de tailles sensiblement identiques (quasi-monodisperses) placées dans un fluide Newtonien. Les profils de concentration sont déterminés par une technique acoustique (mesure de la vitesse du son) qui présente la caractéristique d'être d'autant plus précise que la concentration est élevée. L'analyse de ces profils par une adaptation de la théorie de Kynch prenant en compte la dispersion hydrodynamique permet de mesurer cette dernière pour des conditions expérimentales correctement choisies.

Les différentes grandeurs intervenant dans les suspensions sont définies dans le chapitre I de ce mémoire, ainsi qu'une présentation non-exhaustive des approches et des résultats théoriques existant à ce jour. Les caractéristiques du montage expérimental sont données dans le chapitre II. La théorie de Kynch, adaptée, est détaillée dans le chapitre III et les résultats expérimentaux obtenus sont présentés dans le dernier chapitre.

# I GENERALITES SUR LES SUSPENSIONS SOLIDE / LIQUIDE

## I-1 Introduction

Les **suspensions solide / liquide** peuvent faire appel à différentes "physiques", selon qu'il s'agisse de suspensions browniennes, iso-densité, ou bien encore selon la distribution de "formes" de la phase solide, ou les propriétés rhéologiques du fluide...Autant de facteurs permettant de compliquer ces systèmes à l'infini, et rendant vaines toutes les tentatives de dégager des généralités sur des systèmes aussi mal définis!

Pour ces raisons, il est indispensable, pour préciser la description de ces suspensions, de se limiter à des systèmes simples. Et nous ne nous intéresserons ici qu'à des suspensions de **particules sphériques**, toutes de tailles identiques (**monodisperses de rayon a**) dispersées dans un **fluide newtonien incompressible**.

Les caractéristiques du fluide et des particules sphériques seront désignées avec les notations suivantes:

$\eta$  : viscosité du fluide

$\rho_f$  : densité du fluide

$\nu = \eta / \rho_f$  : viscosité cinématique du fluide

$\rho_p$  : densité des particules solides

$a$  : rayon des particules

$m$  : masse d'une particule

$d = \rho_p / \rho_f$  : rapport de densité entre solide et fluide

Dans ce chapitre, les différentes grandeurs susceptibles de caractériser de tels systèmes, comme le nombre de Reynolds, le nombre de Froude, la vitesse de sédimentation et le coefficient de dispersion hydrodynamique seront définis. Enfin, une présentation succincte de la description des suspensions proposée par Batchelor [Batchelor 1] sera donnée, dans le but de définir les différents termes pouvant intervenir, et donner une idée des conditions à vérifier pour pouvoir se placer expérimentalement dans des situations simples et facilement analysables.

## I-2 Sédimentation d'une particule dans un milieu infini

Une sphère solide seule, plongée dans un fluide incompressible infini initialement au repos, sédimente avec une vitesse limite  $U^\circ$  (vitesse constante après un régime transitoire). Cette vitesse correspond à l'égalité des trois forces appliquées à la sphère: son poids, la poussée d'Archimède et la friction visqueuse (ou force de traînée). Cette force de traînée a été calculée, à bas nombre de Reynolds, par Stokes et vaut:

$$\vec{F}_h = -6\pi\eta a \vec{U}^\circ \quad (1-1)$$

Les forces non-hydrodynamiques peuvent être ici facilement sommées en une résultante que nous noterons  $F_{ext}$ :

$$\vec{F}_{ext} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_p - \rho_f) \vec{g} = m \vec{g}_e \quad (1-2)$$

Avec  $g_e$  la "gravité effective":

$$\vec{g}_e = \left(\frac{d-1}{d}\right) \cdot \vec{g} \quad (1-3)$$

Et la vitesse limite  $U^\circ$  de la particule à bas nombre de Reynolds, appelée vitesse de Stokes peut être calculée:

$$\vec{U}^\circ = \frac{\vec{F}_{ext}}{6\pi\eta a} \quad (1-4)$$

Soit:

$$\vec{U}^\circ = \frac{2 a^2 (d-1)}{9 \nu} \vec{g} \quad (1-5)$$

La vitesse limite de la particule, d'après l'expression (1-4), est proportionnelle à la "force extérieure" appliquée à la particule. Cela conduit naturellement à définir la mobilité  $\mu^\circ$  d'une sphère seule dans un liquide au repos à l'infini:

$$\mu^\circ = \frac{U^\circ}{F_{ext}} = \frac{1}{6\pi\eta a} \quad (1-6)$$

Le nombre de Reynolds  $Re^\circ$  pour l'écoulement considéré, qui ne possède qu'une échelle de longueur ( $2a$ ) vaut:

$$Re^\circ = \frac{2aU^\circ}{\nu} = \frac{4}{9} \frac{(d-1)a^3 g}{\nu^2} \quad (1-7)$$

Et le nombre de Froude  $Fr^\circ$  (rapport inertie/gravité) vaut:

$$Fr^\circ = \frac{(U^\circ)^2}{2a \cdot g_e} = \frac{d \cdot Re^\circ}{18} \quad (1-8)$$

Quant au nombre de Péclet (rapport forces extérieures/agitation thermique), il pourrait s'écrire ici (pour une particule seule en milieu infini):

$$Pe^\circ = \frac{mg_e}{kT/a} = \frac{4\pi(\rho_p - \rho_f)g}{3kT} a^4 \quad (1-9)$$

Pour des masses volumiques usuelles de phases denses ( $\rho_p \sim \rho_f \sim 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) et à la température ambiante, on trouve  $Pe^\circ \sim 1$  pour  $a \sim 1 \mu\text{m}$ . Cet ordre de grandeur très classique est aussi très robuste, puisque pour gagner un ordre de grandeur sur  $a$  à  $Pe^\circ$  constant, il faut faire varier les autres facteurs (densité ou température) de quatre ordres de grandeur! Excepté pour des conditions "exotiques" (comme des suspensions "iso-densité":  $d=1$ ), les particules cessent donc d'être browniennes dès que leur taille dépasse le micron.

Dans nos expériences, nous nous intéresserons à la propagation de profils de concentration volumique (notée  $C$ ) dans des suspensions de billes de verre de rayon  $a=34 \mu\text{m}$  ( $\Rightarrow Pe^\circ \gg 1$ ). De plus pour les profils étudiés dans lesquels la concentration varie autour de  $C$  d'une valeur  $\Delta C$  sur une longueur caractéristique  $\ell \gg a$ , la force d'origine thermique s'écrit  $kT(\text{grad}C)/C \sim kT \Delta C/(\ell C)$ , et le nombre de Péclet devient  $Pe = Pe^\circ (\ell/a)(C/\Delta C)$ . Le nombre de Péclet sera donc très grand devant l'unité dans toutes nos expériences, et **nous ignorerons par la suite la diffusion moléculaire des particules.**

Outre le mouvement propre de la particule, il est intéressant de considérer la convection au sein du fluide que cette particule génère dans sa chute.

En un point  $\vec{x}$  à  $\vec{r}$  de la particule repérée par  $\vec{R}$  ( $\vec{x} = \vec{R} + \vec{r}$ ), et en notant  $\vec{n} = \vec{r}/r$ , le champ de vitesse  $\vec{u}(\vec{x})$  s'écrit:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{3}{4} \left( \frac{a}{r} \right) (\vec{I} + \vec{nn}) \cdot \vec{U}^\circ + \frac{1}{4} \left( \frac{a}{r} \right)^3 (\vec{I} - 3\vec{nn}) \cdot \vec{U}^\circ \quad (1-10)$$

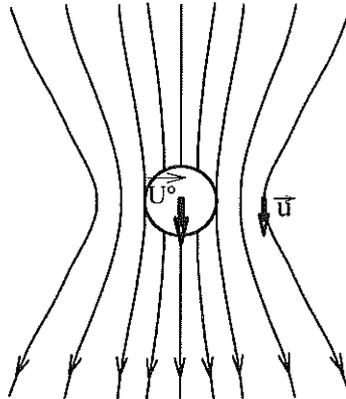
$\vec{I}$  est le tenseur unité et  $\vec{nn}$  est le tenseur diadique construit à partir de  $\vec{n}$ . Le champ de vitesse  $\vec{u}(\vec{x})$  est la solution de l'équation de Stokes satisfaisant aux conditions aux limites ( $\vec{u} = \vec{0}$  en  $r \rightarrow \infty$  et non-glissement à la surface de la particule sphérique).

On peut également exprimer le champ de vitesse dans le fluide en fonction de la force  $F_{\text{ext}}$  exercée sur la particule et transmise au fluide par celle-ci:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \left( \vec{T} + \frac{a^2}{6} \nabla^2 \vec{T} \right) \cdot \vec{F}_{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad \vec{T} = \frac{(\vec{I} + \vec{nn})}{8\pi\eta \cdot r} \quad (1-11)$$

Où  $\vec{T}$  est le tenseur d'Oseen et  $\vec{T} \cdot \vec{F}_{\text{ext}}$  est le champ de vitesse ("stokelet") engendré par une force ponctuelle appliquée au fluide ( $a \rightarrow 0$ ).

Les expressions (1-10) et (1-11) montrent que le champ de vitesse dans le fluide décroît très lentement lorsqu'on s'éloigne de la particule (décroissance en  $1/r$ ). Et d'après (1-11), on peut dire que le fluide ne cessera de "voir" la particule que pour des distances supérieures à  $10a$ !



Allure de l'écoulement autour d'une sphère sédimentant dans un milieu infini

**Figure I-1**

Dans le cas des suspensions, il est clair que pour des fractions volumiques en particules de l'ordre de 0.1%, les particules ne pourront plus être considérées loin les unes des autres (la distance moyenne entre particules est alors de l'ordre de  $\frac{a}{\sqrt[3]{C}}=10a$ ). La vitesse de sédimentation d'une particule donnée sera donc affectée par la présence des particules voisines qui modifieront le champ de vitesse dans le fluide avoisinant cette particule.

Toutefois, dans le cas des suspensions monodisperses, aucune dimension supplémentaire n'est introduite, et les grandeurs adimensionnées trouvées dans la situation simple d'une particule dans un fluide infini restent pertinentes. On peut même ajouter que, dans le cas des suspensions l'effet d'écrantage hydrodynamique des particules permet de justifier le fait qu'on néglige la dimension du récipient de taille finie... approximation plus délicate à justifier dans le cas d'une particule isolée!

### **I-3 Vitesses moyennes dans une suspension homogène**

Une suspension homogène introduit une variable adimensionnée supplémentaire: la fraction volumique des particules  $C$ , que nous appellerons abusivement la concentration.

Dans le cas d'une particule dans un fluide infini ( $C=0$ ), il n'existe pas de contre-courant ("back flow"): le volume de fluide déplacé par la particule étant négligeable, la vitesse moyenne du fluide est nulle.

En ce qui concerne les suspensions homogènes ( $C \neq 0$ ) dans un fluide incompressible sédimentant dans une cuve de taille finie, il est clair qu'au cours de la sédimentation, les particules chassent le fluide vers le haut. Le fluide possède alors une vitesse moyenne

$\langle \vec{V}_f \rangle \neq \vec{0}$ . De même, les particules auront a priori différentes vitesses  $\vec{V}_p$ , et il convient de préciser ici la **définition de la vitesse de sédimentation**:

Considérons un volume  $\mathcal{V}$  de dimension  $L^3$  possédant un grand nombre de particules dans lequel la suspension est homogène (concentration moyenne  $C$  dans tout volume  $l^3$ ) à une échelle  $l$  telle que  $a \ll l \ll L$ .

De manière générale, trois vitesses moyennes (moyennées sur les volumes des particules ou du fluide) caractéristiques de  $C$  peuvent être définies sur  $\mathcal{V}$ :

$\langle \vec{V}_f \rangle$  : vitesse moyenne du fluide

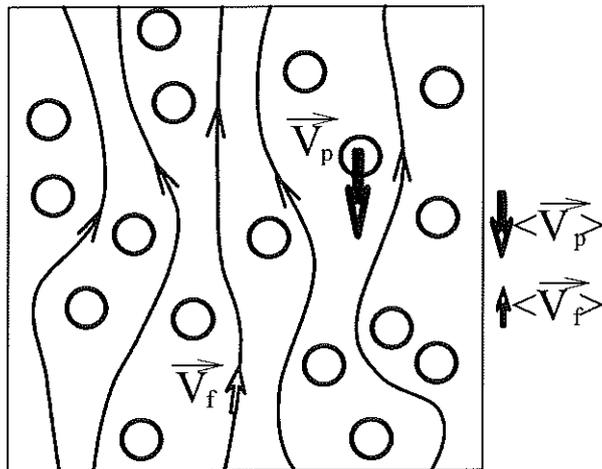
$\langle \vec{V}_p \rangle$  : vitesse moyenne des particules

$\vec{V}_c = C \langle \vec{V}_p \rangle + (1-C) \langle \vec{V}_f \rangle$  : vitesse moyenne dans le volume  $\mathcal{V}$

Où  $\vec{V}_c$ , vitesse du barycentre des volumes, est appelée vitesse de convection de la suspension [Noetinger 1].

La vitesse de sédimentation  $\vec{U}(C)$  est définie comme la différence entre la vitesse moyenne des particules et la vitesse moyenne de la suspension soumise aux seules forces de gravité:

$$\vec{U}(C) = \langle \vec{V}_p \rangle - \vec{V}_c = (1-C)(\langle \vec{V}_p \rangle - \langle \vec{V}_f \rangle) \quad (1-12)$$



Suspension "homogène" en sédimentation

Figure I-2

Cette vitesse de sédimentation, ou vitesse relative (à la suspension) moyenne d'une particule, caractérise la friction entre les particules et le fluide. En effet, la force de friction exercée sur une particule, à bas nombre de Reynolds doit varier linéairement avec la vitesse de la particule  $\vec{V}_p$ , et doit s'annuler lorsque la particule possède la même vitesse que le milieu dans lequel elle se déplace ( $\vec{V}_p = \vec{V}_c$ ). La force de friction exercée sur une particule s'écrit donc:

$$\vec{F}_h = -6\pi\eta a M(C) (\vec{V}_p - \vec{V}_c) \quad (1-13)$$

Où  $M(C)$  est le coefficient correctif de la friction traduisant les effets de concentration.  $M(C)$  est une fonction croissante de la concentration.

Et en écrivant que la somme des forces exercées sur une particule est nulle en moyenne (c'est-à-dire nulle pour  $\vec{V}_p = \langle \vec{V}_p \rangle$ ), on montre que:

$$\bar{U}(C) = \frac{\bar{U}^0}{M(C)} \quad (1-14)$$

La vitesse de sédimentation,  $\bar{U}(C)$ , traduit donc l'équilibre entre la résultante des forces non hydrodynamiques,  $F_{ext}$ , et la force de friction moyenne,  $F_h$ , exercées sur une particule, lorsque celle-ci se déplace à la vitesse relative moyenne.

Les équations (1-13) et (1-14) sont généralisables pour des nombres de Reynolds Re quelconques, mais alors le coefficient correctif de friction dépendra à la fois de Re et du rapport de densité d:  $M(C; Re; d)$ .

Il est à noter que dans une expérience de sédimentation classique (suspension homogène sédimentant dans une cuve de génératrices verticales), la vitesse de convection  $\vec{V}_c$  est nulle et l'équation (1-12) se réduit à:

$$\bar{U}(C) = \langle \vec{V}_p \rangle \quad (1-15)$$

La vitesse de sédimentation  $\bar{U}(C)$ , caractéristique de la friction, se confond donc avec la vitesse  $\langle \vec{V}_p \rangle$ , décrivant la convection des particules. Or, en général, ces deux vitesses ne sont pas identiques, et surtout les phénomènes dont elles relèvent sont totalement différents!

Pour preuve il suffit de citer les travaux théoriques de Beenakker et Mazur [Beenakker et Mazur 1], qui sur l'exemple de la sédimentation d'une suspension homogène dans une cuve sphérique, ont, d'une part, validé la conjecture de Batchelor [Batchelor 2] selon laquelle:

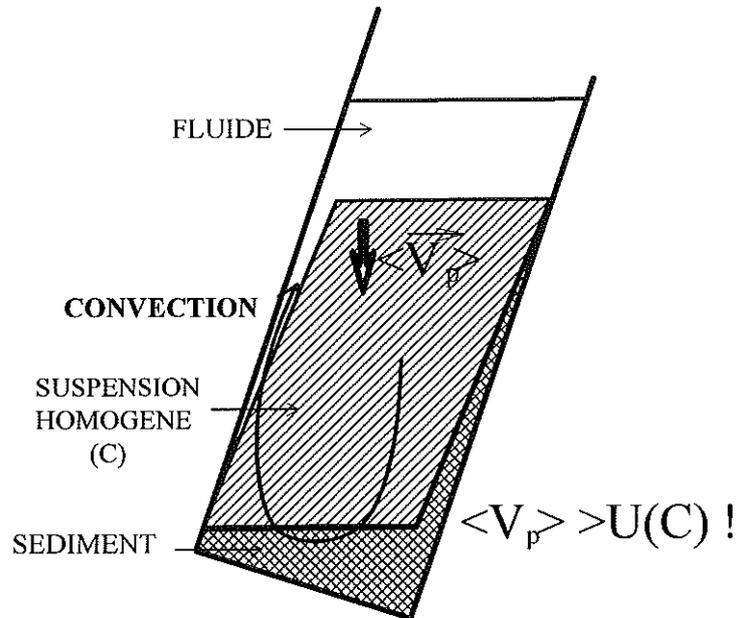
$\bar{U}(C)$  ne dépend pas de la forme de la cuve considérée.

Et d'autre part, ils ont pu montré que dans leur exemple, la vitesse de convection locale  $\vec{V}_c$  n'était pas nulle, et par conséquent, la vitesse moyenne locale des particules  $\langle \vec{V}_p \rangle$ , n'était pas égale à la vitesse de sédimentation, même si dans leur cas, la vitesse de convection moyennée sur toute la cuve est nulle. Ils ont à cette occasion insisté sur le fait que leurs conclusions étaient généralisables aux cuves de génératrices verticales (parallèles à g) dès lors que l'invariance par translation sur les plans horizontaux était mise en défaut (= cuve de dimensions finies).

De manière générale, **la vitesse de sédimentation  $\bar{U}(C)$  ne dépend que des caractéristiques de la suspension** et la vitesse de convection  $\vec{V}_c$  dépend, elle, des conditions aux limites imposées. En conséquence, les vitesses locales moyennes des particules et du

fluide,  $\langle \vec{V}_p \rangle$  et  $\langle \vec{V}_f \rangle$ , seront, elles aussi, affectées par les conditions aux limites imposées à la suspension.

Ces caractéristiques sont très bien illustrées par les expériences de sédimentation dans une cuve inclinée ([Acrivos et Herbolzheimer],[Schaflinger]): Dans une telle géométrie, dès que la sédimentation a fait apparaître une couche de "fluide clair" au voisinage de la paroi supérieure, l'effet Boycott (découvert par Boycott en 1920) se manifeste: le fluide chassé par les particules préfère remonter le long de la paroi supérieure plutôt que de remonter à contre-courant au sein de la suspension. La vitesse du fluide dans la suspension n'est alors plus ascendante mais descendante (le fluide "accompagne" les particules), et comme  $\bar{U}(C)$  est constante, la vitesse de chute des particules est augmentée (cf (1-12)). Ce type d'expériences permet donc d'accélérer le compactage d'une suspension initialement homogène en imposant aux particules, en plus de la vitesse de sédimentation  $\bar{U}(C)$ , une vitesse de convection  $V_c$  orientée dans le même sens que  $\bar{U}(C)$ .



Effet Boycott

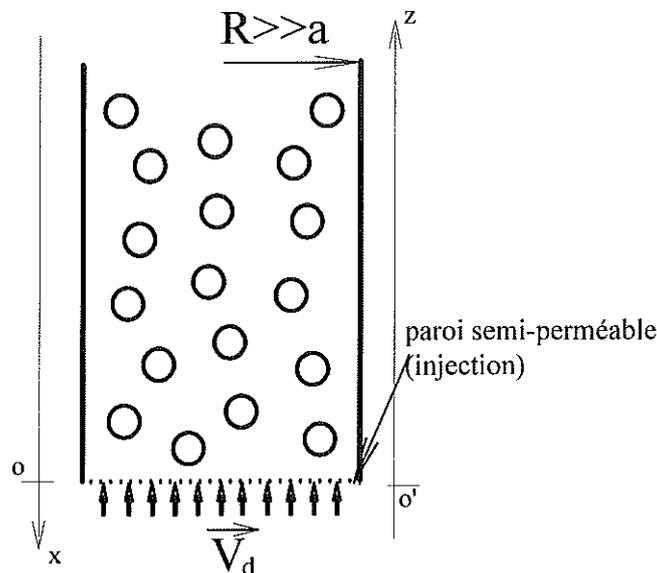
Figure I-3

En présence de l'effet Boycott, les particules se déplacent vers le sédiment avec une vitesse plus importante (plusieurs fois  $\bar{U}(C)!$ ), même si leur vitesse de sédimentation telle qu'elle a été définie demeure, quant à elle, inchangée!

## I-4 Lit fluidisé stable

En ce qui concerne les expériences rapportées dans cette thèse, elles ont été réalisées dans un lit fluidisé (décrit dans le chapitre II) qui présente les caractéristiques suivantes:

- (a): les parois sont verticales et de hauteur  $H$  très grande devant la dimension des particules ( $H \gg a$ )
- (b): la section ( $S = \pi.R^2$  ou  $L \times l$ ) est très grande devant les dimensions des particules ( $R; l > 500a$ )
- (c): un écoulement de fluide ascendant est imposé à la base de la cuve (injection), avec une vitesse débitante  $V_d$  uniforme sur toute la section  $S$  de la paroi semi-perméable (poreux) de l'injection..



Lit fluidisé stable

**Figure I-4**

Les "contraintes" imposées à la suspension placée dans un lit fluidisé ayant ces caractéristiques, sont toutes dirigées suivant  $(Oz)$  où  $(Oz)$  est l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise à la base de la cuve (= injection). En effet les parois sont verticales ( $a$ ) et leur influence peut être négligée ( $R \gg a \Rightarrow$  les parois peuvent être considérées à l'infini), les seules "contraintes" à prendre en compte sont donc la gravité (poids des particules et poussée d'Archimède) et la vitesse débitante  $V_d$ , toutes deux dirigées selon  $(Oz)$ .

Un tel système conserve donc une invariance par translation dans tous les plans horizontaux et peut donc être étudié avec une seule coordonnée d'espace  $z$ . Les différentes vitesses précédemment définies ( $\langle \vec{V}_f \rangle, \langle \vec{V}_p \rangle, \vec{V}_c$  et  $\vec{U}(C)$ ) sont toutes colinéaires à  $\vec{z}$ , et pourraient donc être décrites par leurs composantes dans la base  $\vec{z}$ . L'orientation de  $\vec{z}$ , (de bas vers le haut), est naturelle pour la description du lit car la vitesse débitante est toujours imposée dans ce sens et la composante  $V_d$  dans cette base est toujours positive. Pour les

expériences de sédimentations, au contraire, il est plus naturel de projeter les différents vecteurs vitesses sur la base  $\vec{x}$ , orientée de haut vers le bas dans le sens de la gravité), car alors la vitesse de sédimentation des particules  $\vec{U}(C)$  a toujours une composante positive dans cette base. Comme en ce qui nous concerne, la description de la suspension utilisera alternativement les conventions d'orientations des expériences en sédimentation et en lit fluidisé, nous adopterons la convention suivante:

- $U_\alpha$  désignera toujours la composante du vecteur  $\vec{U}_\alpha$  dans la base  $\vec{x}$  orientée vers le bas

- $V_\alpha$  désignera toujours la composante du vecteur  $\vec{V}_\alpha$  dans la base  $\vec{z}$  orientée vers le haut

Ainsi, la lettre U ou V dans  $U_\alpha$  ou  $V_\alpha$  indiquera simplement l'orientation de la base choisie pour projeter la vitesse considérée, et qui sera simplement définie par l'indice  $\alpha$ . Seule la vitesse de sédimentation U sera notée sans indice.

Lorsque l'on coupe le débit d'injection du lit fluidisé ( $V_d=0$ ), on se retrouve strictement dans les mêmes conditions que pour une expérience de sédimentation classique. Les conditions (a) et (b) permettent alors de décrire correctement une suspension homogène placée dans la cuve en supposant le système "infini" et invariant par translation. La vitesse de convection est alors uniformément nulle dans la cuve. Et les particules comme le fluide possèdent des vitesses moyennes données par  $U(C_0)$ , caractéristique de la suspension homogène à la concentration notée  $C_0$ :

$$\langle U_p \rangle = U(C_0) \quad (1-15 \text{ bis})$$

$$\langle U_f \rangle = -[C_0/(1-C_0)] U(C_0) \quad (1-16)$$

Et si on considère maintenant la même suspension dans le lit fluidisé auquel on impose une vitesse débitante  $V_d$  ascendante ( $V_d > 0$ ), la conservation du volume dans la suspension se traduit par la relation:

$$V_c = V_d \quad (1-17)$$

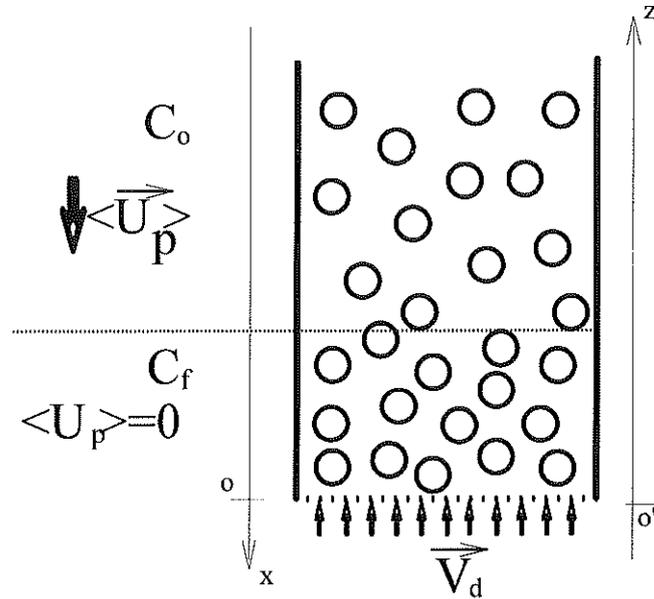
Imposer à la base du lit une vitesse débitante  $V_d$  revient donc à imposer à la suspension homogène une vitesse de convection  $V_c = V_d$  et les vitesses respectives des particules et du fluide deviennent:

$$\langle U_p \rangle = U(C_0) - V_d \quad (1-18)$$

$$\langle U_f \rangle = -[C_0/(1-C_0)] U(C_0) - V_d \quad (1-19)$$

Deux cas peuvent alors se présenter:

-cas 1:  $V_d < U(C_0)$



$V_d < U(C_0)$

**Figure I-5**

Les particules ont une vitesse moyenne positive  $\langle U_p \rangle$  (cf (1-18)); la force de friction exercée par le fluide ne suffit pas à compenser le poids des particules, et celles-ci "tombent" et s'accumulent au niveau de l'injection avec une concentration plus élevée. Mais plus les particules se compactent, moins elles laissent de place à l'écoulement ascendant du fluide. Pour conserver son débit, le fluide va donc plus vite et la friction visqueuse sur les particules augmente, donc les particules ralentissent. Pour des vitesses débitantes pas trop petites, il existe une concentration  $C_f$  telle que la friction visqueuse sur les particules compense la gravité, et lorsque cette concentration est atteinte, les particules cessent alors de descendre et la suspension cesse d'évoluer. La concentration  $C_f$  est donnée par la relation (1-18) avec  $\langle U_p \rangle = 0$ :

$$U(C_f) = V_d \quad (1-20)$$

Dans ce cas, la suspension, à l'état final, est donc une suspension homogène à la concentration  $C_f$ , supérieure à la concentration initiale, et fixée par la vitesse débitante imposée dans le lit fluidisé.

Toutefois, si la vitesse débitante est trop faible, la friction visqueuse sur les particules restera toujours inférieure au poids, et les particules ne cesseront de tomber que lorsqu'elles auront touché le fond de la cuve. Elles s'accumuleront donc sous forme de sédiment à la concentration  $C_{sed}$  ( $C_{sed} \sim 57\%$  en sédimentation classique; les variations de  $C_{sed}$  avec les

conditions de formation du sédiment seront étudiées en IV-2 ). Il est à noter qu'un tel sédiment constitue un poreux non-consolidé, mais ne peut plus être considéré comme une suspension! En effet, même si on néglige les interactions de surfaces susceptibles d'apparaître entre les particules, une force supplémentaire doit de toute façon être prise en compte dans le calcul de la résultante des forces non-hydrodynamiques (  $F_{ext}$  ): la réaction de la paroi semi-perméable de l'injection, que les particules se transmettent les unes aux autres. La vitesse de sédimentation, traduisant l'équilibre entre les forces hydrodynamiques et la gravité, n'est donc plus définie.

Par application du principe de l'action et la réaction, la force  $F_i$  exercée par une particule (i) du sédiment sur le fluide vaut ( cf (1-13) avec  $U_p=0$ ):

$$\vec{F}_i = -6\pi\eta a M(C_{sed}) \vec{V}_c \quad (1-21)$$

Dans un volume  $\mathcal{V}$  du système diphasique, la force totale exercée par les particules sur le fluide est  $N.F_i$ , où  $N=C.\mathcal{V}/(4/3 \pi.a^3)$  est le nombre de particules dans le volume  $\mathcal{V}$ . Et la force volumique moyenne sur le fluide vaut donc  $N.F_i/[(1-C)\mathcal{V}]$ . En écrivant que la somme des forces de pression et de gravité, et des forces exercées par les particules, appliquées au fluide, est nulle puisque celui-ci conserve une vitesse moyenne  $\langle U_f \rangle$  constante, on établit la relation:

$$\vec{V}_c = -\frac{2a^2(1-C_{sed})}{9C_{sed}M(C_{sed})\eta} (\vec{\nabla}P - \rho_f \vec{g}) \quad (1-22)$$

On retrouve donc l'équation phénoménologique de Darcy, avec pour perméabilité K:

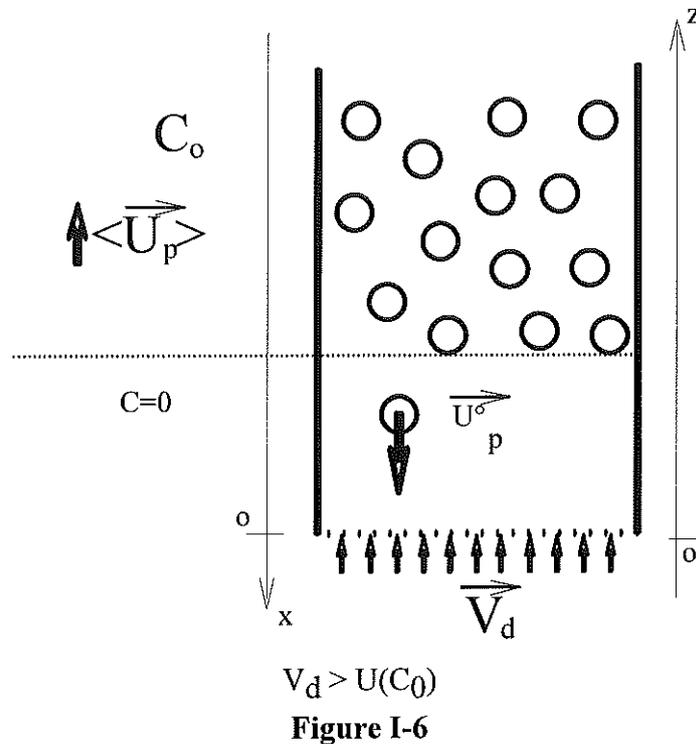
$$K = \frac{2a^2(1-C_{sed})}{9C_{sed}M(C_{sed})} \quad (1-23)$$

La transition pour ce système diphasique entre poreux non-consolidé et suspension a lieu lorsque la vitesse débitante  $V_d (=V_c)$  est telle que la friction visqueuse exercée par le fluide sur les particules sédimentées compense exactement la gravité. La réaction de la paroi semi-perméable d'injection s'annule alors et la vitesse de sédimentation  $U(C_{sed})$  est définie. On appelle **vitesse minimum de fluidisation** ( notée  $U_{mf}$  ) la valeur de la vitesse débitante correspondante, et la relation (1-20) appliquée en  $C=C_{sed}$  donne la relation:

$$U_{mf} = U(C_{sed}) \quad (1-24)$$

-cas 2:  $V_d > U(C_0)$

D'après la relation (1-18), la vitesse moyenne des particules  $\langle U_p \rangle$  est négative, et les particules ont donc dans l'ensemble un mouvement de translation uniforme vers le haut de la cuve.



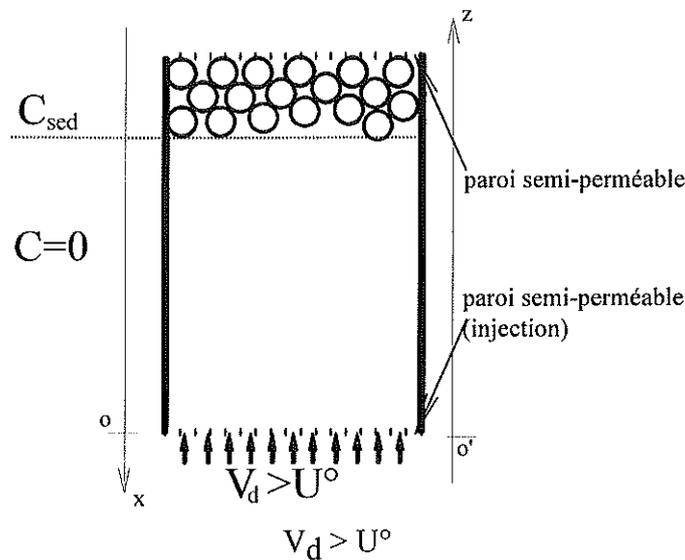
Tout comme en haut d'une suspension en sédimentation, on pourrait s'attendre à l'apparition d'un front entre la suspension homogène à la concentration  $C_0$  et une zone de fluide clair ( $C=0$ ) s'élargissant en bas de la suspension, entre celle-ci et le fond de la cuve (cf figure I-6). Cependant, à la différence du front apparaissant dans une expérience de sédimentation, ce front suspension / fluide est instable! En effet, si une particule visite la zone de fluide clair (se détache du front), sa vitesse de sédimentation sera  $U^\circ > U(C_0)$ , et sa vitesse sera donc  $U_p^\circ = U^\circ - V_d$  qui sera positive pour  $V_d < U^\circ$ . Et dans ce cas, cette particule isolée aura donc tendance à s'éloigner du front et "tombera" sur la paroi semi-perméable de l'injection. En fait (cf chapitre II), ce ne sont pas des particules isolées qui "tomberont de la suspension", mais il se produira des sortes d'avalanches, qui auront toutes la caractéristique de donner lieu à des zones de suspension de moindre concentration sous le front instable. Et ces avalanches pourront se produire tant qu'il existera des zones, de concentration  $C$  supérieure à la concentration finale d'équilibre, ascendantes, puisque ce sont de telles zones qui, en montant, libèrent de la place pour ces avalanches. En utilisant de nouveau la notation  $C_f$  pour la concentration définie par (1-20), on a alors pour les zones de concentration  $C$  les différentes possibilités d'évolution suivantes:

- $C > C_f$ : La zone est instable et conduit à des avalanches établissant (pour les lits stables) des zones de concentration inférieure  $\Rightarrow C$  décroît.

- $C < C_f$ : même situation que pour le cas 1, la zone de concentration  $C$  "sédimente" pour établir une suspension homogène de concentration  $C_f$ .

En conclusion, la suspension après un régime transitoire mal défini, s'homogénéisera à la concentration  $C_f$  si le lit est stable, et si les caractéristiques de la suspension sont telles que le lit est instable, la suspension ne s'homogénéisera jamais et des gradients de concentration continueront d'exister (cf paragraphe I-5 et I-6).

Dans le cas où  $V_d > U^o$ , la relation (1-18) montre que pour de telles vitesses débitantes, les particules ont une vitesse négative (ascendante) quelle que soit leur concentration.



**Figure I-7**

Dans ce cas les particules sortiraient donc du lit fluidisé, ou si celui-ci est fermé par une paroi semi-perméable, alors les particules s'accumuleront en haut de la cuve et formeront un sédiment stable surmontant une zone de fluide clair. Et tout comme pour le cas,  $V_d < U_{mf}$ , le système diphasique présent dans la cuve ne peut plus être considéré comme une suspension, et  $U(C)$  n'est plus définie.

En conclusion, lorsqu'une vitesse débitante  $V_d$  constante est imposée dans un lit stable, trois cas peuvent se présenter après le régime transitoire:

- $V_d > U^o$ : les particules ne sont plus en suspension et forment un "empilement" compact (concentration  $C_{sed}$ ) en haut de la cuve.

- $U^o > V_d > U_{mf}$ : les particules sont en suspension, à une concentration homogène donnée par la relation (1-20):  $U(C) = V_d$

- $V_d < U_{mf}$ : les particules ne sont plus en suspension et forment un "empilement" compact (concentration  $C_{sed}$ ) en bas de la cuve.

Dans cette description succincte d'un lit fluidisé stable, il apparaît que l'emploi d'un tel système permet d'obtenir une suspension homogène de concentration contrôlable par la vitesse débitante imposée. Cette vitesse débitante constitue une vitesse de convection imposée uniformément dans la suspension.

De plus, la concentration en fonction du débit est simplement donnée par la vitesse de sédimentation:

$$U(C)=V_d \quad (1-20)$$

Il a été montré qualitativement que la concentration dans le lit fluidisé diminuait lorsque la vitesse débitante  $V_d$  était augmentée, on retrouve donc avec (1-20) la propriété classique de la vitesse de sédimentation:  **$U(C)$  est une fonction décroissante de  $C$ .**

La connaissance de la vitesse de sédimentation en suspension homogène et en milieu "infini", est donc primordiale: elle permet de décrire à elle seule le comportement, en régime permanent, d'une suspension placée dans un lit fluidisé stable.

## I-5 Calculs et mesures de la vitesse de sédimentation

La vitesse de sédimentation permet de décrire un lit fluidisé stable en régime permanent, mais aussi les expériences de sédimentation...C'est en fait la fonction caractérisant au premier ordre une suspension non-colloïdale.

Comme cette grandeur  $U(C)$  n'a pas encore pu être définitivement établie pour toute la gamme de concentration, même à faible nombre de Reynolds, on comprend l'intérêt particulier qu'elle a pu suscité chez les hydrodynamiciens ces vingt dernières années!

Ce paragraphe ne dressera pas une liste exhaustive des différents travaux menés sur ce sujet. Son but est de souligner les difficultés que présente l'estimation théorique de  $U(C)$  et de justifier le fait que, malgré les progrès théoriques réalisés, une corrélation expérimentale présente encore à ce jour des avantages suffisant à emporter les faveurs d'un expérimentateur.

Il a été signalé dans le paragraphe I-2 que pour des concentrations supérieures à 0.1%, les particules "voient" leurs voisines via le fluide. On parle alors d'interactions hydrodynamiques: Une particule (1) modifie le champ de vitesse du fluide, et les forces exercées par le fluide sur une particule (2) voisine sont donc altérées par la présence de la particule (1); la vitesse de la particule (2) sera alors modifiée au 1<sup>er</sup> ordre. De même les forces exercées par le fluide sur la particule (1) sont modifiées par la présence de la particule (2). En tenant compte de la vitesse modifiée au 1<sup>er</sup> ordre de la particule (2), la vitesse de particule (1) sera également modifiée au 1<sup>er</sup> ordre. En itérant le même raisonnement, on pourrait estimer la modification des vitesses au n<sup>ème</sup> ordre pour ces deux particules. On parlera dans cet exemple d'interactions de paires, estimées par la méthode des réflexions [Brenner et Happel].

Pour N particules dans un milieu infini, l'expression (1-4) obtenue pour une particule seule peut être généralisée, en tenant compte de l'influence des forces  $F_j$  qu'exercent les autres particules (j) sur le fluide. En utilisant la linéarité de l'équation de Stokes, la vitesse d'une particule (i) s'exprime linéairement en fonction des forces  $F_j$ :

$$U_i = \sum \mu_{ij} F_j \quad (1-25)$$

Où les  $\mu_{ij}$  sont des matrices de mobilité  $3 \times 3$ , généralisant la mobilité donnée par (1-6). Si l'équation (1-25) permet de calculer la vitesse des N particules dans une configuration donnée, elle ne permet pas pour autant un calcul simple de la vitesse de sédimentation  $U(C)$ . En effet pour calculer  $U(C)$ , il faudra d'une part calculer la vitesse  $U_i$  moyennée sur le temps. Et comme la configuration des particules change dans le temps, il faudra faire une moyenne pondérée sur toutes les configurations possibles des particules. De plus, il faudra distribuer ces N particules sur un volume fini ( $C \neq 0$ ), puis extrapoler pour un système infini. Et dans ce cas, il sera nécessaire de retrancher la vitesse de convection à la vitesse moyenne des particules pour obtenir la vitesse de sédimentation.

Si on ne prend pas garde aux problèmes que soulève le passage à  $C \neq 0$ , il est tentant de chercher à évaluer  $U(C)$  aux faibles concentrations, en sommant les interactions de paires pour une distribution spatiale uniforme des particules dans un fluide infini. En notant  $\Delta U(r) = \mu_{ij} F_j$ , la vitesse supplémentaire de la particule-test (i) due à la présence d'une particule (j) située à la distance r et  $p(r).dr$  la probabilité de trouver une particule à cette distance, on aurait pour expression de  $U(C)$ :

$$U(C) = U^0 + \int \Delta U(r).p(r).dr \quad (1-26)$$

Mais comme  $p(r)$  tend vers une constante pour  $r \rightarrow \infty$  et  $\Delta U(r)$  varie en  $1/r$ , l'intégrale diverge et on trouverait avec ces hypothèses:  $U(C) \rightarrow \infty$  pour  $C \neq 0$  !

Bien entendu, ce résultat non physique s'explique par le fait que les conditions aux limites ( vitesse du fluide nulle à l'infini) correctes dans le cas d'une particule seule, ne peuvent plus être appliquées dès que C est non nulle. Et comme il a été signalé en I-3, la vitesse de sédimentation n'est donnée par la vitesse des particules que lorsque l'on se place dans les conditions des expériences de sédimentation ( $V_c = 0$  !). Or, dans le calcul précédent, il est clair que la vitesse de convection n'est pas nulle, et c'est en réalité elle qui diverge vers l'infini, et non la vitesse de sédimentation telle qu'elle a été définie. En fait, l'équation (1-25) est établie en calculant la vitesse d'une suspension sous l'action des forces appliquées aux particules ( $F_{ext}$ ), mais sans traduire les forces pouvant les compenser (réaction du fond de la cuve dans le cas d'une expérience de sédimentation, ou de manière générales les forces de pression générées dans le fluide du fait de l'incompressibilité du système).

Ainsi, même si le nombre de Reynolds est négligeable devant l'unité, le calcul de  $U(C)$ , solution de l'équation de Stokes, ne peut pas être traduit par une somme infinie des effets d'une particule isolée. En effet, la solution d'une particule seule dans un liquide au repos à l'infini est correcte parce que le volume déplacé par la chute de la particule sera toujours négligeable devant le "volume infini de fluide au repos", et la vitesse de convection dans un tel système est mathématiquement nulle même si la vitesse en tout point de la suspension est non-nulle et toujours orientée dans le même sens, celui de la gravité. On comprend alors que dans une suspension homogène, le fait de trouver des particules à l'infini interdit la condition de fluide au repos, et fait diverger la vitesse de convection.

En appliquant une méthode dite de "renormalisation", qui maintient nulle la vitesse de convection, Batchelor a calculé la vitesse de sédimentation des suspensions en ne prenant en compte que les interactions de paires estimées par la méthode des réflexions [Batchelor 2]. Il a pu établir l'expression suivante:

$$U(C) = U^0 [1 - 6.55 C] \quad (1-27)$$

où  $U^0$  est la vitesse de Stokes donnée en I-2.

Une expression très voisine (1-28) a été obtenue par Hinch en utilisant une méthode dite de "hiérarchie d'équations". Cette approche consiste à décrire le fluide à l'extérieur d'une particule test en itérant sur des probabilités conditionnelles de configurations. La particule test fixée, le fluide est décrit en faisant apparaître un terme dont la moyenne est obtenue en maintenant deux particules fixes. Sans se limiter aux seules interactions de paires, Hinch obtient aux faibles concentrations un résultat comparable à celui de Batchelor [Hinch]:

$$U(C) = U^0 [1 - (845/128) C] \cong U^0 [1 - 6.6 C] \quad (1-28)$$

Cette expression n'est bien sûr valable qu'aux faibles concentrations ( $C < 1\%$ ), et considérer les seules interactions de paires ne permet d'établir qu'un développement d'ordre 1 en  $C$  pour  $U(C)$ . Pour des concentrations supérieures, les interactions entre  $N$  particules doivent être prises en compte.

Pour rendre compte des interactions hydrodynamiques entre  $N$  particules, Beenaker, Mazur et Van Saarloos ont développé une méthode des forces induites généralisant la méthode des réflexions (interactions de paires), en formulant la force hydrodynamique  $F_j^m$  produite par une particule ( $j$ ) via  $(m-1)$  particules ( la particule ( $j$ ) interagit avec une particule (1) qui interagit avec une particule (2)...jusqu'à  $(m-1)$  susceptible d'interagir avec une particule ( $i$ )). Ils ont pu ainsi établir les expressions de "connecteurs" reliant la vitesse d'une particule aux moments multipolaires de rang  $m$ ,  $F_j^m$ , qui lui sont appliqués, pour un système de  $N$  particules sphériques dans un fluide infini.

Ces connecteurs ont été calculés jusqu'à l'ordre 7 en  $1/r$  [Mazur et van Saarloos]. Et le calcul de Batchelor a été confirmé par ce modèle: lorsque la concentration tend vers zéro, les

dipôles (interactions de paires) suffisent à décrire le système, et les multipôles de rang supérieurs à deux deviennent négligeables.

En utilisant une technique de resommation basée sur un développement en puissance des fluctuations de densité de particules, Mazur et al ont pu calculer la vitesse de sédimentation d'une suspension "homogène" jusqu'à des concentrations de 45% [Beenakker et Mazur 2].

Noetinger a complété ce formalisme en y introduisant le modèle à deux fluides proposé par Nozières [Nozières 1]. Les forces appliquées au système sont décomposées en deux parties, une partie appliquée de façon homogène sur tout le volume de la suspension, et une autre égale à l'excès de force appliquées sur les particules, qui compensée par la friction visqueuse rend compte de la sédimentation. Ce modèle a permis à Nozières, puis à Noetinger [Noetinger 2], de coupler les équations des deux champs de vitesses, de convection et de sédimentation, et ainsi d'étudier l'influence de la forme de la cuve sur la vitesse de sédimentation. Ces études intéressantes du point de vue fondamental, traduisent toutefois l'influence des parois par une modification locale qualitative de la distribution des particules. Leurs travaux ont conclu à l'influence des parois sur une expérience de sédimentation, tout en mettant en avant l'importance de l'écrantage hydrodynamique, lorsque la concentration n'est pas trop faible. La création de vitesse locale de convection reste donc négligeable pour des tailles de cuve grandes devant le diamètre des particules  $a$  (ce qui est le cas qui nous intéresse ici). D'ailleurs, les résultats obtenus par Mazur et al, en milieu infini, s'accordent suffisamment bien avec les résultats expérimentaux (figure I-8) pour confirmer cette conjecture.

Cependant, le formalisme de Mazur et al, s'il est valable sur une grande gamme de concentration, ne prend pas en compte les forces de lubrification qui ne pourront plus être négligées si la concentration devient trop élevée. En effet, si la concentration est telle que des particules peuvent se rapprocher jusqu'à des distances très petites devant leur diamètre, les forces de lubrification les "colleront" l'une à l'autre et elles formeront un "doublet" de particules sédimentant ensemble. Ces forces de lubrification, qui n'interviennent qu'à forte concentration, rompent l'ergodicité du système et ne peuvent donc pas être prises en compte dans l'approche statistique de Mazur et al.

Brady et al ont pu tenir compte de toutes les forces existant dans une suspension homogène désordonnée, représentée par un nombre fini de particules (quelques dizaines) placées dans une boîte reproduite de manière périodique. Leurs simulations, dites de "Dynamique Stokesienne", sont en fait une version adaptée de la dynamique moléculaire. Il est à noter toutefois que s'ils prennent en compte toutes les forces exercées sur les particules, ils utilisent les simplifications suivantes: les interactions hydrodynamiques sont approximées par des interactions à très longue portée (en supposant que les interactions à courte portée sont contenues dans le terme de lubrification) et les valeurs mesurées sont des moyennes des

résultats obtenus à partir de distributions aléatoires de sphères dures pour les particules. En analysant leurs résultats pour la vitesse de sédimentation [Philips et al], ils ont pu établir que l'évaluation de  $U(C)$  restait pratiquement inchangée si les forces de lubrification étaient négligées, mais également si on négligeait les "stresslets" (partie symétrique du 1<sup>o</sup> moment de la force volumique dans le fluide intégrée sur la surface de la particule). Ils ont ainsi montré qu'une très bonne estimation de  $U(C)$  pouvait être obtenue dans le cadre de l'approximation pourtant simpliste de Rotne-Prager, c'est-à-dire en ne tenant compte que des interactions de paires à très longue portée (chaque particule donne à la particule test, une vitesse supplémentaire égale à la vitesse qu'elle aurait généré dans le fluide si elle avait été seule dans un fluide infini). Dans le cadre de cette approximation [Brady et L.Durlofsky], ils ont alors pu établir une expression analytique pour  $U(C)$ :

$$U(C) = U^o \frac{(1-C)^3}{1+2C} \quad (1-29)$$

Il est remarquable que cette expression fondée sur des simplifications extrêmes des interactions hydrodynamiques donne finalement une bonne évaluation de la vitesse de sédimentation (cf figure I-8). On peut noter que même lorsque la concentration tend vers zéro, cette formule s'accorde mieux avec les mesures expérimentales que la formule de Batchelor (1-27), alors que ce dernier avait pourtant évalué tous les termes des interactions de paires, en tenant compte des "réflexions". A ce propos, Brady a signalé que le "stresslet" est justement compensé par les termes induits dans les interactions hydrodynamiques pour une suspension en sédimentation. Négliger simultanément ces deux types d'interactions produit au bout du compte une meilleure approximation que la prise en compte des interactions de paires dans leur totalité. Comme corollaire de cette remarque, on peut ajouter qu'une suspension en sédimentation ne peut en aucun cas être décrite comme un milieu effectif (viscosité effective), puisque son comportement ne peut pas être décrit par les "stresslets". A l'opposée, on peut signaler que dans le cas d'une particule test sédimentant dans une suspension iso-densité, les interactions hydrodynamiques seront totalement dominés par les "stresslets" induits et la suspension pourra dans ce cas être décrite comme un milieu effectif. Ces comportements radicalement différents entre suspensions en sédimentation, et suspensions iso-densité se comprennent assez bien qualitativement. Dans une suspension iso-densité non-perturbée, le fluide comme les particules sont au repos et les contraintes sont uniformément nulles (à la pression hydrostatique près). L'approximation de Rotne-Prager donnerait une vitesse de sédimentation nulle pour la particule test! C'est donc l'introduction de cette particule test (plus dense) qui crée les contraintes, et ces dernières ne différeront des contraintes existant dans un fluide pur que dans la mesure où les particules iso-densité empêchent tout cisaillement dans leur volume. On comprend donc qu'elles interagissent avec la particule test par le biais des

"stresslets" induits, et s'opposant au cisaillement, leur présence pourra être traduite par une augmentation de la viscosité effective.

Cette petite digression présente l'intérêt de dégager les termes dominants dans les interactions hydrodynamiques intervenant dans le processus de sédimentation.

Plus récemment, J.C. Ladd a mené des calculs numériques de type Brady et al en affinant leurs approximations de deux manières: D'une part il a réduit l'approximation des interactions hydrodynamiques à longue portée, en utilisant un développement limité d'ordre  $p$  en multipôles d'ordre croissant, et en extrapolant à  $p \rightarrow \infty$  [Ladd 1] (Ladd(extrapolation) sur la figure I-8). D'autre part, il a suivi l'évolution temporelle de différentes configurations de particules [Ladd 2], et il a ainsi pu montrer que les forces de lubrifications génèrent au cours du temps une distribution différente de la distribution des sphères dures. Les particules proches ont tendance à se "coller" ( $d=2a$ ) et évoluer comme des doublets sur des distances égales à plusieurs centaines de fois leur rayon, et en contrepartie il se crée un appauvrissement en particules pour des distances de séparation  $d$  comprises entre  $2,5a$  et  $3a$ . Cet effet, qui est d'autant plus important que la concentration est élevée, conduit à des vitesses de sédimentation plus élevées que dans le cas d'une distribution de sphères dures (Ladd (dynamique) sur la figure I-8).

En conclusion, les résultats obtenus par la théorie et les simulations numériques, s'ils ne cessent de concourir à une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu dans la sédimentation, ne peuvent pas encore prétendre à apporter une description définitive des expériences. En effet, si l'on excepte les plus récents travaux de Ladd (1993), ils utilisent tous une distribution aléatoire de type sphères dures (d'où les qualificatifs utilisés dans la littérature: "random dispersion" ou "freely mobile particles"), qui vient justement d'être mise en défaut par les dernières simulations de Ladd. De plus, même si on considère des conditions expérimentales autorisant à négliger l'influence des parois (qui est loin d'être totalement comprise), il n'en reste pas moins que les expériences, quelles qu'elles soient, ne pourront jamais utiliser des particules rigoureusement monodisperses, tout au plus pourra-t-on affiner leur distribution de tailles!

C'est pourquoi il est souvent préférable d'avoir recours à une loi de corrélation, et en la matière la loi qui a obtenu le plus de faveur est la **corrélation empirique de Richardson-Zaki** [Richardson et Zaki]:

$$U(C) = U^0 (1 - C)^p \quad (1-30)$$

où  $p$  est un exposant variant de 5,5 pour les bas nombres de Reynolds à 2,5 pour les nombres de Reynolds élevés.

VITESSE DE SEDIMENTATION NORMALISEE :  $U(C) / U^{\circ}$

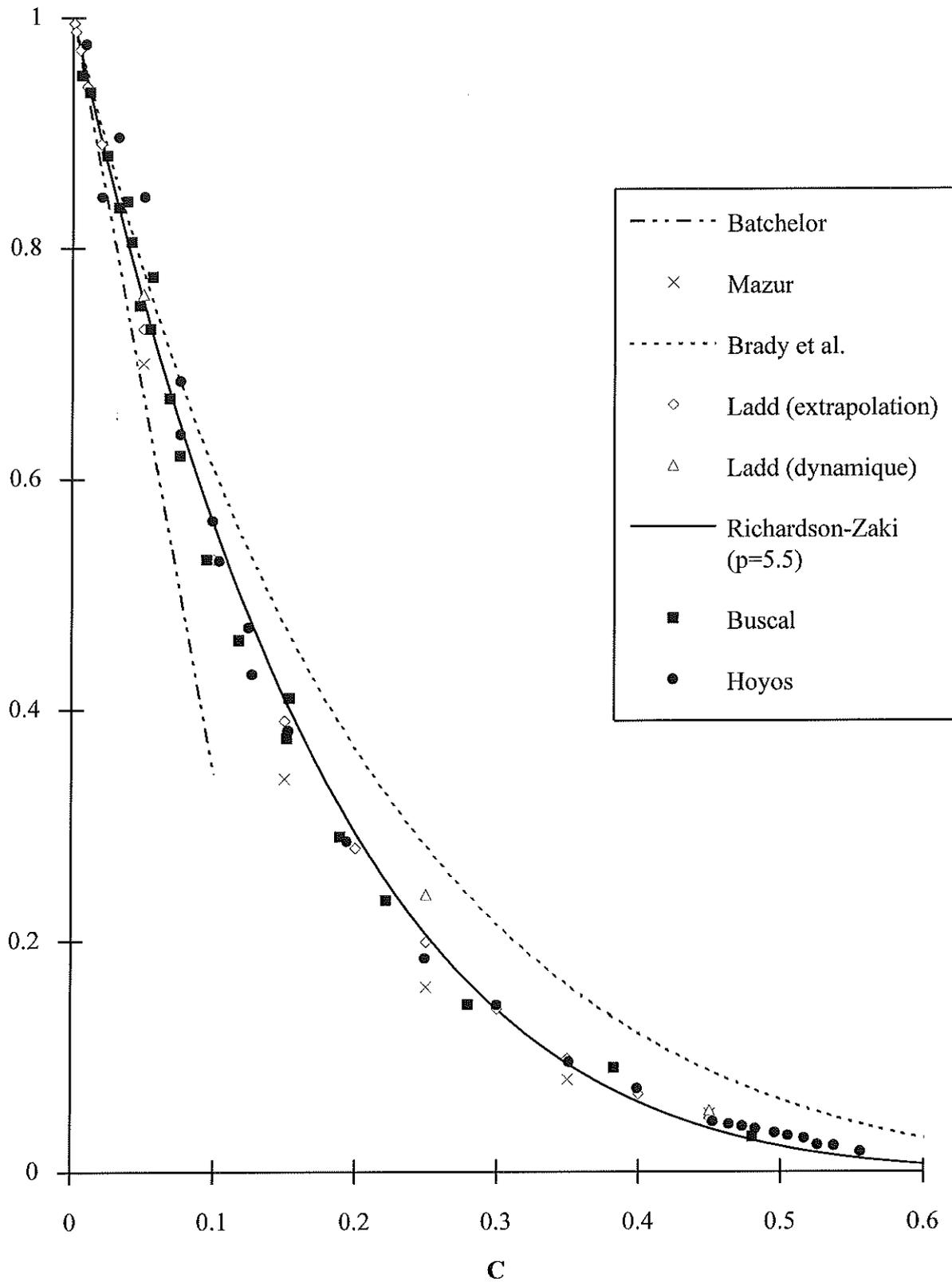


Figure I-8

La loi de Richardson-Zaki s'accorde très bien avec les mesures de  $U(C)$  (cf figure I-8) qui ont été réalisées, à bas nombre de Reynolds, pour des concentrations  $C$  allant de 1% à 57%, par Buscall et al, et Hoyos ([Buscall et al],[Hoyos]). Et il sera montré au chapitre IV que, de manière très surprenante, cette loi de corrélation pour  $U(C)$  donne également de très bons résultats pour l'estimation de la dérivée de la courbe de flux  $C.U(C)$ , qui joue un rôle très important dans certaines expériences que nous avons réalisées.

Dans ce paragraphe, une approche de  $U(C)$  qui n'a pas été mentionnée, est celle qui consiste à considérer la suspension comme un poreux non-consolidé. Ce raisonnement peut apparaître naturel lorsque la suspension est placée dans un lit fluidisé (cf I-4). En effet, les particules sont alors immobiles en moyenne, et en appliquant le principe de l'action et de la réaction, et la loi de Darcy, on peut exprimer  $U(C)$  en fonction de la perméabilité  $K(C)$  de la suspension (cf (1-14) et (1-23)):

$$U(C) = U^o \frac{9}{2a^2} \left[ \frac{CK(C)}{(1-C)} \right] \quad (1-31)$$

La perméabilité  $K(C)$  a été calculée pour différents types d' "empilements", mais l'expression déduite pour  $U(C)$ , même dans le cas d'un "empilement aléatoire, n'est pas satisfaisante [Zick et Homsy].

En fait, la relation (1-31) n'est pas valable pour une suspension!

$U(C)$  traduit la friction moyenne entre les particules et le fluide en maintenant la force exercée par chaque particule constante. La perméabilité est quant à elle calculée en maintenant les particules fixes, la force exercée par le fluide sur celles-ci compensant ou non leur poids. Ceci implique que l'on suppose dans ce calcul qu'une hypothétique force extérieure compense l'excès ou le déficit de friction visqueuse pour maintenir chaque particule immobile. Ainsi,  $U(C)$  résulte de la moyenne des matrices de mobilité sur toutes les configurations de particules, alors que  $K(C)$  exprime une moyenne des matrices de résistance, et les résultats obtenus ne sont pas équivalents.

En conclusion, on peut traduire cette ambiguïté en constatant que la suspension est un poreux à géométrie variante et non un poreux à géométrie variable!

## I-6 Diffusion hydrodynamique

Les fluctuations de vitesse des particules autour de leur vitesse moyenne constituent une caractéristique importante des suspensions.

En effet, si ce phénomène, appelé **pseudo-turbulence**, n'existait pas, cela signifierait d'une part que la description en terme de poreux serait valide, et d'autre part que les approches statistiques utilisant des probabilités de configurations n'auraient aucun sens. On peut remarquer que pour que chaque particule garde une vitesse constante au cours du temps, il faudrait que la force exercée par le fluide reste constante. Cela suppose que la configuration du système n'évolue pas, donc que toutes les particules possèdent la même vitesse. Cela implique que la force hydrodynamique est la même sur chaque particule de la suspension monodisperse, ou encore que les positions des particules sont toutes équivalentes. La seule possibilité pour qu'il n'existe pas de fluctuations de vitesses des particules est donc que celles-ci forment un réseau cristallin infini!

En pratique, la suspension n'est pas infinie et n'est de toute façon jamais rigoureusement monodisperse. Ces raisons suffisent à expliquer qu'à chaque instant les particules prennent une configuration différente, ou encore que la vitesse d'une particule varie à chaque instant.

Cette dispersion hydrodynamique a été observée et mesurée au cours d'expériences de sédimentation par diverses équipes [Ham et Homsy],[Nicolai et al]. Il a été établi que le mouvement d'une particule décrit dans le référentiel la laissant immobile en moyenne (référentiel d'un lit fluidisé), pouvait être interprété comme une marche au hasard dont l'amplitude dans la direction privilégiée de la pesanteur (direction de  $U(C)$ ) était plus importante. A partir de ces expériences, un **coefficient de diffusion hydrodynamique anisotrope** a pu être mesuré, dont les deux composantes  $D_{//}^{\infty}$  et  $D_{\perp}^{\infty}$  rendent compte du processus de diffusion respectivement parallèlement et orthogonalement à la direction de sédimentation par la loi:

$$[x(t)-x(0)]^2 = 2 D t \quad (1-32)$$

En pratique, plusieurs coefficients de diffusion peuvent être définis. La valeur asymptotique de la pente de  $[x(t)-x(0)]^2$  lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini donnera le **coefficient d'auto-diffusion aux temps longs  $D^{\infty}$** , que l'on vient de mentionner. La valeur asymptotique de la pente de  $[x(t)-x(0)]^2$  lorsque le temps  $t$  tend vers zéro donnera le **coefficient d'auto-diffusion aux temps courts  $D^{\circ}$** . Et le coefficient de proportionnalité entre le flux de particules et le gradient macroscopique de concentration défini par la loi de Fick sera le **coefficient de diffusion collectif  $D$** .

En l'absence d'interactions hydrodynamiques (limite  $C \rightarrow 0$ ), ces trois coefficients de diffusion sont égaux et sont donnés par la relation d'Einstein:

$$D_0 = kT/(6\pi\eta a) \quad (1-33)$$

Dans une suspension non-colloïdale de concentration non-nulle, les processus de diffusion ne sont plus gouvernés par l'agitation thermique mais par les interactions hydrodynamiques. Les trois coefficients de diffusion précédemment définis sont alors différents.  $D^\circ$  traduit le mouvement aléatoire d'une particule qui ne quitte pas sa "cage hydrodynamique", c'est à dire le mouvement résultant des fluctuations de la configuration des particules (la particule conserve ici les mêmes voisines).  $D^\infty$  traduit quant à lui le mouvement d'une particule, lorsque celle-ci explore différentes configurations.

Tous les théoriciens ayant travaillé sur la vitesse de sédimentation d'une suspension homogène, ont également cherché à déterminer les coefficients d'auto-diffusion, en estimant la variance de  $V_p$ . Les travaux les plus récents ont montré qu'une loi de probabilité uniforme menait à une variance infinie si les dimensions de la cuve n'étaient pas prises en compte [Catfish et Luke]. Mais Koch et Shaqfeh ont établi, à faible concentration, qu'il existait un déficit de probabilité de présence au voisinage de chaque particule, à l'origine d'un écrantage hydrodynamique ( $l_h \sim a/C$ ) menant à une variance finie de la vitesse de sédimentation (d'où un coefficient de diffusion fini), même en milieu infini [Koch et Shaqfeh].

En ce qui nous concerne, les expériences que nous avons faites font intervenir le coefficient de diffusion collectif  $D$ , qui présente un intérêt particulier, puisqu'il s'agit du type de diffusion responsable de la stabilité éventuelle de la suspension (cf I-7).

On peut montrer que, pour un rapport de densité  $d = \rho_p / \rho_f$  donné, différentes lois d'échelle peuvent être envisagées pour  $D$  suivant les valeurs du nombre de Reynolds.

La modification de la vitesse moyenne des particules en présence d'un petit gradient de concentration (dans la direction de la gravité) peut être donnée par l'équation:

$$-\frac{9\eta}{2a^2} CM(C) [U_p - U_c] + C(\rho_p - \rho_f)g - E \cdot \text{grad}(C) = 0 \quad (1-34)$$

Où  $M(C; d; Re)$  est le "coefficient correctif de friction" introduit dans (1-13) pour le régime bas nombre de Reynolds, généralisé à tous les régimes en introduisant une dépendance en  $Re$  (qui permet de rendre compte d'une force de traînée en  $U^2$  pour les  $Re$  élevés). Le terme en  $E \cdot \text{grad}(C)$ , où  $E$  a les dimensions d'une énergie volumique (contrainte), rend compte à une dimension, et de façon très formelle, de toutes les forces volumiques moyennes exercées sur la phase solide qui apparaissent avec le gradient de concentration, et qui s'écrivent de manière générale comme la divergence d'un tenseur de contraintes, susceptibles d'introduire des termes de dérivées spatiales d'ordres supérieurs.

Quoi qu'il en soit, l'équation (1-34) qui redonne la vitesse de sédimentation  $U(C)$  en suspension homogène permet d'introduire le coefficient de diffusion collectif donné par le formalisme de Fick, en présence d'un gradient uniforme et faible, dans le cas où l'accélération moyenne des particules peut être négligée:

$$D = \frac{2a^2}{9\eta} \frac{E}{M(C)} \quad (1-35)$$

Ce formalisme donne différents cas particuliers suivant la nature de  $E$ :

$$-E = kT F(C)/(4/3 \pi a^3) \quad \rightarrow \quad \text{diffusion brownienne}$$

$$-E = \eta \gamma \quad \rightarrow \quad \text{diffusion sous cisaillement } \gamma \text{ [Leighton et Acrivos]}$$

Pour ce qui est des suspensions en sédimentation, l'énergie volumique  $E$  trouve son origine dans l' "énergie cinétique de configurations" [Lhuillier]:

$$1/2 C \rho_p \langle \Delta U_p^2 \rangle + 1/2 (1-C) \rho_f \langle \Delta U_f^2 \rangle$$

dont les potentiels chimiques associés sont pour chaque phase:

$$\mu_p = 1/2 \langle \Delta U_p^2 \rangle \text{ et } \mu_f = 1/2 \langle \Delta U_f^2 \rangle$$

En utilisant la description d'un mélange binaire, le mouvement relatif entre les deux phases se traduit par une force supplémentaire proportionnelle au gradient de la différence de potentiel chimique entre les deux phases ( $f \propto -\nabla(\mu_p - \mu_f)$ ). Pour la différence de potentiel chimique ( $\langle \Delta U_p^2 \rangle - \langle \Delta U_f^2 \rangle$ ), on peut envisager a priori une loi d'échelle en  $U^2$  ou en  $U$  ( $\propto U^2/Re$ ) respectivement à fort et faible nombre de Reynolds  $Re$  (à rapport de densité  $d$  constant). Pour discuter les différentes lois d'échelles pour  $D$ , on adoptera pour  $E$  une expression traduisant ces deux régimes:

$$E = \rho_f (h_1 + h_2/Re) U^2 \quad (1-36)$$

où  $U=U(C)$  est la vitesse de sédimentation en suspension homogène à la concentration considérée, et  $h_1$  et  $h_2$  sont des paramètres dépendant a priori de  $d$  et  $C$ .

De plus, pour les mêmes arguments dimensionnels, le coefficient correctif de friction  $M(C;d;Re)$  doit être proportionnel au nombre de Reynolds  $Re$  lorsque celui-ci devient élevé, pour traduire le régime inertiel, et l'expression la plus simple envisageable pour  $M$  est:

$$M(C;d;Re) = m_1 + m_2 Re \quad (1-37)$$

où  $m_1 = M(C) = U^0/U(C)$  pour  $Re \rightarrow 0$  est la fonction de la concentration  $C$  définie par (1-13) et  $m_2$  est une fonction dépendant a priori de  $d$  et  $C$ .

En reportant les expressions (1-36) et (1-37) dans (1-35), on obtient, pour le coefficient de diffusion collectif, l'expression:

$$D = aU \left( \frac{h_1 Re + h_2}{m_1 + m_2 Re} \right) \quad (1-38)$$

Cette expression laisse envisager la possibilité de trois régimes différents suivant la valeur du nombre de Reynolds  $Re = a U / \nu$ , avec un régime intermédiaire dépendant des valeurs respectives des rapports  $h_2/h_1$  et  $m_1/m_2$  :

-régime 1:	$Re \ll m_1/m_2$ et $Re \ll h_2/h_1$ :	$D = (h_2/m_1) a U$
-régime 2:	$h_2/h_1 \ll Re \ll m_1/m_2$	$D = (h_1/m_1) a^2 U^2 / \nu$
ou		ou
-régime 2':	$m_1/m_2 \ll Re \ll h_2/h_1$	$D = (h_2/m_2) \nu$
-régime 3:	$Re \gg m_1/m_2$ et $Re \gg h_2/h_1$ :	$D = (h_1/m_2) a U$

Ce modèle laisse prévoir le même type de normalisation pour  $D$  en régime purement visqueux ( $Re \rightarrow 0$ ) et en régime purement inertiel ( $Re \rightarrow \infty$ ):

$$D = D_n a U(C) \quad (1-39)$$

où  $D_n$ , **coefficient de diffusion normalisé**, dépend de  $C$  et du rapport de densité  $d$ .

On adoptera par la suite cette normalisation a priori, en sachant que pour un rapport de densité  $d$  fixé, le coefficient de diffusion ainsi normalisé,  $D_n$ , dépendra du nombre de Reynolds en régime intermédiaire. Lorsque la friction est d'origine visqueuse mais les fluctuations de vitesses d'origine inertielle (régime 2),  $D_n \propto Re$  ; si la friction entre les deux phases est d'origine inertielle mais les fluctuations de vitesses sont d'origine visqueuse (régime 2'),  $D_n \propto 1/Re$ .

Expérimentalement, la plupart des mesures de  $D$  ont été pratiquées pour des Reynolds très faibles ([Davis et Hassen]; [Lee et al]), de l'ordre de  $10^{-4}$ , et un coefficient normalisé de l'ordre de 20 a été mesuré dans le régime 1. Toutefois, Ham et al. ont déduit de l'estimation du seuil d'instabilité dans un lit fluidisé à  $Re$  proche de 1 ( $0.1 < Re < 1$ ), des mesures de  $D_n$  présentant un comportement proportionnel à  $Re$ , propre au régime 2 [Ham et al].

Dans la pratique, on s'attend à ce que ces différents régimes ne soient pas aussi clairement définis. Outre le fait que l'équation (1-34) donne une expression très simplifiée du comportement des particules en présence de gradient, on sait également que la force de traînée est une fonction de  $Re$  un peu plus complexe que (1-37) et a fortiori l'expression (1-36) donne sûrement une loi de comportement un peu trop simplificatrice pour la grandeur  $E$ , que l'on pourrait qualifier de grandeur phénoménologique. Cette discussion a néanmoins permis d'introduire une normalisation acceptable pour  $D$ , tout en insistant sur le fait que la loi d'échelle choisie (a priori correcte à bas nombre de Reynolds) n'est pas la seule possible. Cette normalisation peut donc cesser d'être judicieuse (dans le régime intermédiaire), pour des ordres de grandeurs de  $Re$  non-définis a priori.

## I-7 Description des lits fluidisés à nombre de Reynolds quelconque

Dans ce paragraphe, la description générale locale des suspensions que Batchelor a proposée pour rendre compte des régimes instables observés dans les lits fluidisés [Batchelor 1], sera brièvement présentée. Cette description ne sera que très partiellement utilisée dans la suite de ce travail; mais elle permettra de conserver une idée des termes qui auront été négligés dans notre cadre expérimental de bas nombre de Reynolds et de suspension stable.

Pour établir l'évolution d'une suspension de concentration homogène  $C^\circ$  faiblement perturbée, Batchelor s'est placé dans l'hypothèse d'une suspension "infinie", décrite dans son référentiel de sédimentation, complètement invariante par translation dans les directions orthogonales à la gravité (y compris au niveau des perturbations). Les équations sont donc exprimées dans le repère (Ox) de sédimentation, et la vitesse de convection de la suspension est supposée uniforme (nulle dans Ox) dans la suspension perturbée. En notant  $U_p$  la vitesse moyenne locale des particules ( $\langle U_p \rangle$ ), on a donc pour la concentration homogène non-perturbée (homogène à tout instant t), la relation établie en I-3:

$$U_p = U(C^\circ) \quad \text{pour } C = C^\circ \quad (1-15 \text{ bis})$$

où  $U(C^\circ)$  est la vitesse de sédimentation en suspension homogène (cf I-5)

Et pour la suspension perturbée:

$$U_p(x;t) \neq U(C^\circ) \quad , \quad C(x;t) \neq C^\circ$$

L'équation d'évolution est obtenue en écrivant la relation fondamentale de la dynamique pour le système ouvert des particules contenues dans un petit volume de contrôle  $\mathcal{V} = S \times (x_2 - x_1)$ :

(1) dérivée temporelle de l'impulsion des particules dans  $\mathcal{V} =$

(2) flux rentrant d'impulsion

+ (3) forces de gravité (poids - Archimède)

+ (4) forces hydrodynamiques en volume (forces exercées par le fluide)

+ (5) "forces hydrodynamiques de surface (interactions hydrodynamiques avec

les particules extérieures à  $\mathcal{V}$ )

(1-40)

Et les différents termes sont estimés de la manière suivante:

$$(1) = S \int_{x_1}^{x_2} \left[ \rho_p \frac{\partial (C U_p)}{\partial t} \right] dx \quad (1-41)$$

$$(2) = -S \int_{x_1}^{x_2} \rho_p \frac{\partial}{\partial x} \left[ C (U_p^2 + \langle u^2 \rangle) \right] dx \quad (1-42)$$

où  $\langle u^2 \rangle$  est la variance de la vitesse que l'on peut écrire:

$$\langle u^2 \rangle = H(C)U^2 - \eta'' \frac{\partial U_p}{\partial x} - \eta''' U \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1-43)$$

où  $H(C) U(C)^2$  est la variance de la vitesse en suspension homogène (H doit être nulle pour  $C \rightarrow 0$  et  $C \rightarrow C_{sed}$ , et de l'ordre de l'unité pour les concentrations intermédiaires), et  $\eta''$  et  $\eta'''$ , homogènes à des diffusivités, rendent compte de l'influence de l'état inhomogène de la suspension sur les fluctuations de vitesses.

$$(3) = S \int_{x_1}^{x_2} [C \rho_p g_e] dx \quad (1-44)$$

où  $g_e$  est la "gravité effective" définie par (1-3)

$$(4) = S \int_{x_1}^{x_2} \left[ n F_h(U_p; C) - C \rho_f \zeta \left( \frac{\partial U_p}{\partial t} + V \frac{\partial U_p}{\partial x} \right) + C^2 \rho_f \zeta' U_p \frac{\partial U_p}{\partial x} - \frac{D'}{B} \frac{\partial n}{\partial x} \right] dx \quad (1-45)$$

où  $n$  est la concentration en nombre de particules ( $n = C / (4/3 \pi a^3)$ );  $F_h(U_p; C)$  est la force de friction sur les particules;  $\zeta(C)$  est le coefficient de masse ajoutée ( $\zeta = (C + 0.5) / (1 - C)$  [Zuber]);  $\zeta' = d\zeta/dC$ ; et  $B$  est la mobilité.

En tenant compte que la force de friction est proportionnelle à  $U_p$  et à  $U_p^2$  respectivement à bas et haut nombre de Reynolds, on peut définir une fonction  $\gamma$  sans dimension et dépendant peu de  $Re$  ( $\gamma$  varie de 1 à 2 pour  $Re$  variant de 0 à l'infini) par:

$$\gamma = U_p \frac{\left( \frac{\partial F_h}{\partial U_p} \right)}{F_h} \quad (1-46)$$

Et avec un développement limité de  $F_h$  en  $U$ , en utilisant  $F_h(U) = -m g_e$  (conséquence de la définition de la vitesse de sédimentation  $U$ ), on obtient:

$$n F_h(U_p; C) = -C \rho_p g_e \left( 1 + \gamma \frac{U_p - U}{U} \right) \quad (1-47)$$

Les deuxième et troisième termes de l'expression (1-45) représentent l'effet de l'inertie du fluide sur les changements de vitesse des particules. Le dernier terme, proportionnel à un coefficient de diffusion  $D'$ , est analogue au terme en  $E \text{ grad}(C)$  introduit en (1-34) et justifié par Batchelor de la manière suivante:

En partant de l'expression du vecteur flux de Fick ( $j = -D' \text{grad}(n)$ ) comme définition de  $D'$ , on peut définir  $v$  la vitesse moyenne supplémentaire que les particules acquièrent en présence du gradient de concentration et on a alors pour expression du vecteur flux:  $j = n v$ . De plus, en utilisant la définition de la mobilité des particules  $B$ , cet incrément moyen de vitesse  $v$  causé par le gradient de concentration peut se traduire par une force moyenne exercée sur chaque particule:  $F_D = v/B$ . On peut en déduire alors l'expression, introduite dans (1-45), où  $B$  peut également s'écrire:

$$B = \frac{-1}{\left( \frac{\partial F_b}{\partial U_p} \right)_{U_p=U}} = \frac{U}{\gamma m g_e} \quad (1-48)$$

Il est à noter que Batchelor ne justifie pas à proprement parler l'introduction du terme en  $D'$ . Mais sachant que ce terme existe, cf [Davis et Hassen], il le prend en compte.

Pour ce qui est de la dernière contribution (5) intervenant dans (1-40), elle rend compte des forces de lubrification susceptibles d'intervenir à forte concentration. En présence d'un gradient de  $U_p$ , les particules qui se rapprochent les unes des autres vont subir une force de répulsion importante. Cette force peut être traduite comme une "pression" exercée sur les particules:

$$P = C \rho_f \eta' \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (1-49)$$

où  $\eta'$  peut être interprété comme une élasticité.

Ces "forces de pression" exercées en surface peuvent être traduite par une force en volume -grad  $P$ :

$$(5) = S \int_{x_1}^{x_2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ C \rho_f \eta' \frac{\partial U_p}{\partial x} \right] dx \quad (1-50)$$

Batchelor introduit  $\eta_p = \eta'' + \eta'/d$ , définie comme la diffusivité visqueuse des particules, néglige  $\eta''$  et utilise la conservation du volume des particules:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial (C U_p)}{\partial x} \quad (1-51)$$

Il déduit alors de (1-40) l'équation:

$$C \left( 1 + \frac{\zeta}{d} \right) \left( \frac{\partial U_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \right) - C^2 \frac{\zeta'}{d} U_p \frac{\partial U_p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ C \eta_p \frac{\partial U_p}{\partial x} - C H U^2 \right] - \frac{\gamma g_e}{U} \left[ C (U_p - U) + D' \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (1-52)$$

Pour plus de clarté, on note  $F(dU_p/dt)$  les termes d'origine inertielle (membre de gauche dans (1-52)) et  $Q$ , le terme appelé "élasticité de la suspension" par Batchelor:

$$F(dU_p / dt) = C(1 + \frac{\zeta}{d}) \left( \frac{\partial U_p}{\partial t} + U_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \right) - C^2 \frac{\zeta'}{d} U_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (1-53)$$

$$Q = \frac{\gamma g_e}{U} D' + \frac{d}{dC} (CHU^2) \quad (1-54)$$

d'où une forme condensée de (1-52) exprimant le vecteur flux  $CU_p$  de volume de particules:

$$CU_p = CU(C) - \frac{U}{\gamma g_e} \left[ Q \frac{\partial C}{\partial x} + F(dU_p / dt) - \frac{\partial}{\partial x} \left( C \eta_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \right) \right] \quad (1-55)$$

On peut remarquer que le coefficient de diffusion collectif  $D$  défini par le flux de Fick, n'est pas le coefficient  $D'$  que Batchelor a introduit en tant que tel (en le posant égal à  $D_n'aU$  avec  $D_n'$  indépendant de  $Re$ ), mais  $D$  dans ce formalisme est donné par:

$$D = D' + \frac{U}{\gamma g_e} \frac{d(CHU^2)}{dC} \quad (1-56)$$

Le terme provenant des fluctuations de vitesses selon Batchelor doit bien figurer dans le coefficient de diffusion collectif, puisque ce sont ces fluctuations qui ont permis de justifier l'existence d'un  $D$  aussi élevé, de plusieurs ordres de grandeur supérieur au coefficient de diffusion brownienne. En fait, l'expression (1-56) définissant  $D$  redonne les régimes 1;2 et 3 dans le formalisme du paragraphe précédent (avec  $E=(\rho_p/\gamma)Q$ ). Cependant on peut noter que la seule contribution dans  $D$  que Batchelor attribue explicitement aux fluctuations des particules est donnée par:

$$\frac{U}{\gamma g_e} \frac{d(CHU^2)}{dC} = D_n'' \frac{a^2 U^2}{\nu} \quad (1-57)$$

Dans ce formalisme, les fluctuations de vitesse des particules n'interviendraient donc que dans le régime intermédiaire (régime 2)! Toutefois, le coefficient de diffusion  $D'$  a été introduit de manière très heuristique, pour rendre compte d'un effet existant, mais sans justification quant à son origine physique, dont il n'est donc pas exclus qu'elle soit encore les fluctuations de vitesses. Cette remarque montre à quel point il est difficile d'explicitier simplement les origines physiques de  $D$ , et la démarche de Batchelor, sous des dehors plus rigoureux, redonne pour  $D$  les lois d'échelles définies au paragraphe précédent, avec des justifications physiques qui ne sont sans doute pas plus convaincantes.

A partir de l'expression d'évolution de la suspension perturbée (1-55) établie par Batchelor, il est intéressant de remarquer que si l'on s'intéresse à la description d'un profil de concentration de largeur caractéristique  $\ell$  assez grande et à un nombre de Reynolds  $Re$  pas trop élevé, l'équation (1-55) se simplifie et devient avec la notation (1-56):

$$CU_p = CU(C) - D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1-58)$$

dés lors que les conditions suivantes sont satisfaites, avec  $D_n$  défini par (1-39):

$$\frac{Re}{C} \ll \frac{\gamma}{d} D_n \quad (1-59)$$

$$\ell \gg \frac{\eta_p}{\nu} \frac{d}{\gamma D_n} a \quad (1-60)$$

Ces conditions expriment le fait que la vitesse moyenne des particules ne peut être donnée par une relation locale indépendante du temps (1-58) que si les termes d'inertie sont négligeables (1-59). De plus les termes de lubrification, associés à  $\eta_p$ , ne pourront être négligés que si le gradient n'est pas trop fort. Ou en d'autres termes, (1-58) ne sera applicable que dans le cas où les particules n'ont pas à changer de concentration trop violemment.

De plus le critère de stabilité (linéaire) du lit fluidisé s'écrit:

$$\frac{\left[ C \left( 1 + \frac{\zeta}{d} \right) \left( \frac{dU}{dC} \right) + \frac{C \zeta'}{2d} U \right]^2}{\left( 1 + \frac{\zeta}{d} \right) Q + \left( \frac{C \zeta'}{2d} U \right)^2} < 1 \quad (1-61)$$

Et en utilisant la corrélation de Richardson-Zaki d'exposant  $p$  pour  $U(C)$  (cf (1-30)), la formule de Zuber pour  $\zeta$  ( $\zeta = (C+0.5)/(1-C)$ ), l'inégalité (1-61) prend la forme:

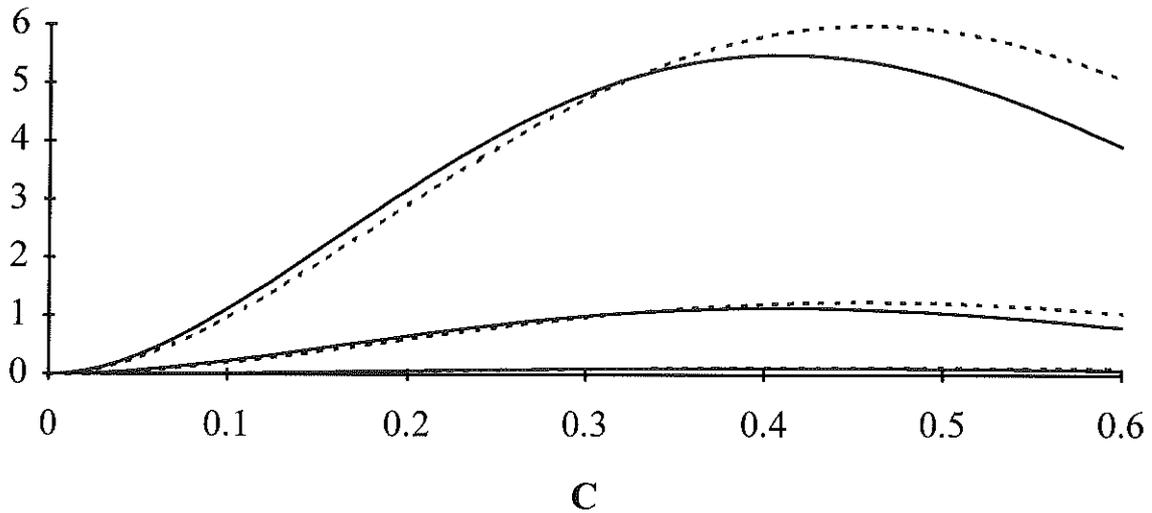
$$D_n > \frac{Re}{\gamma} p C^2 [2p(2d(1-C) + (1+2C)) - 3] (1-C)^{p-3} \quad (1-62)$$

où  $\gamma$  peut être donné par la loi phénoménologique:

$$\gamma = 1 + \left( 1 + \frac{4.9}{0.63 \sqrt{Re}} \right)^{-1} \quad (1-63)$$

Pour les expériences que nous avons réalisées, nous avons travaillé à densité  $d$  constante ( $d=2.4$ ) et à faible nombre de Reynolds  $Re$ . La stabilité de la suspension pour cette valeur de  $d$ , dépendra alors de la valeur de  $D_n(C)$  pour chaque concentration considérée. La valeur de  $D_n$  au-delà de laquelle la suspension est stable a été tracée pour des valeurs de  $Re$  et de  $p$  situées dans les gammes utilisées expérimentalement figure I-9:

### Dn(C) AU SEUIL D'INSTABILITE



**Légende:**    --:p=5.5  
              --:p=5  
              Re=10<sup>-2</sup> ; 0.1 ; 0.5 dans l'ordre croissant des courbes

**Figure I-9**

Dans la suite de ce travail, nous supposons que le lit fluidisé utilisé est stable, et la condition (1-62) sera vérifiée a posteriori avec les valeurs de Dn mesurées. De plus, l'équation (1-58) sera utilisée pour exprimer la vitesse moyenne des particules. Et les conditions (1-59) et (1-60) seront elles aussi discutées a posteriori à la lumière des mesures expérimentales.

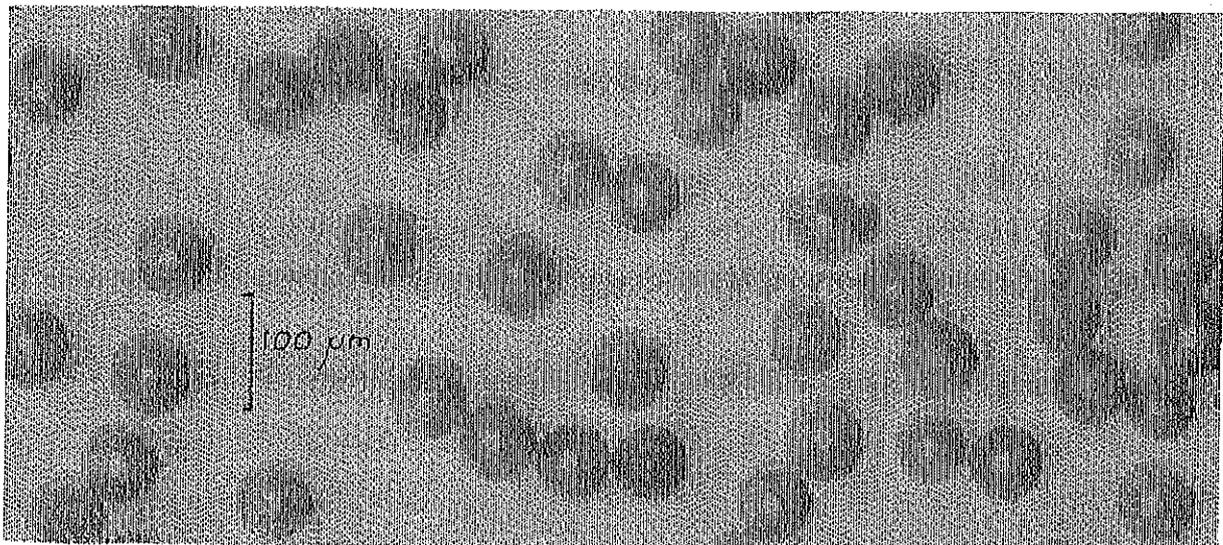
## II MONTAGE ET TECHNIQUES EXPERIMENTALES

### II-1 Caractéristiques des suspensions étudiées

Les études expérimentales ont été menées sur des suspensions composées de billes sphériques de verre, immergées dans un fluide newtonien de viscosité variable.

Les billes de verre proviennent de la FERRO CORPORATION (microbeads type I classV), et présentent les caractéristiques suivantes:

- densité:  $\rho_p=2.42 \text{ g/cm}^3$
- diamètre moyen:  $2a=68.5 \mu\text{m}$
- distribution de tailles: 95% des particules dans la gamme  $31,5\mu\text{m} < a < 37\mu\text{m}$
- sphéricité: 90% des particules sont des vraies sphères



Photographie des billes utilisées

**Figure II-1**

Le fluide est une solution eau/glycérol dont le pourcentage massique en glycérol a permis de faire varier la viscosité (donc le nombre de Reynolds) tout en gardant une densité sensiblement constante

SUSPENSION	n°1	n°2	n°3
concentration massique en glycérol	0 %	20 %	40 %
$\eta_f$ (cP)	1,005	1,74	3,66
$\rho_f$ (g/cm <sup>3</sup> )	1	1,05	1,10
$U^\circ$ (cm/s)	0,36	0,20	0,09
$Re^\circ = 2aU^\circ/\nu$	0,25	0,08	0,02

**Tableau 1**

Les valeurs de la viscosité, la densité, la vitesse de Stokes et le nombre de Reynolds particulaire  $Re^{\circ}$  sont donnés tableau 1 (pour une température de 20°C et pour le rayon des particules). Il est à noter que  $Re^{\circ}$  est le nombre de Reynolds pour une particule seule dans un milieu infini. Dans le cas des suspensions à concentration non-nulle, le nombre de Reynolds  $Re$  est défini à partir de la vitesse  $U(C)$ , plus faible que  $U^{\circ}$ .  $Re^{\circ}$  est donc un majorant du nombre de Reynolds caractéristique des expériences ( à titre d'exemple  $Re \sim Re^{\circ}/10$  pour  $C \sim 40\%$ )

Comme la majeure partie des expériences que nous avons réalisées ont utilisé le mélange eau/glycérol à 20% massique pour fluide suspensé (suspension n°2), on ne précisera la nature du fluide utilisé que s'il s'agit d'un autre mélange.

## II-2 Description du lit fluidisé

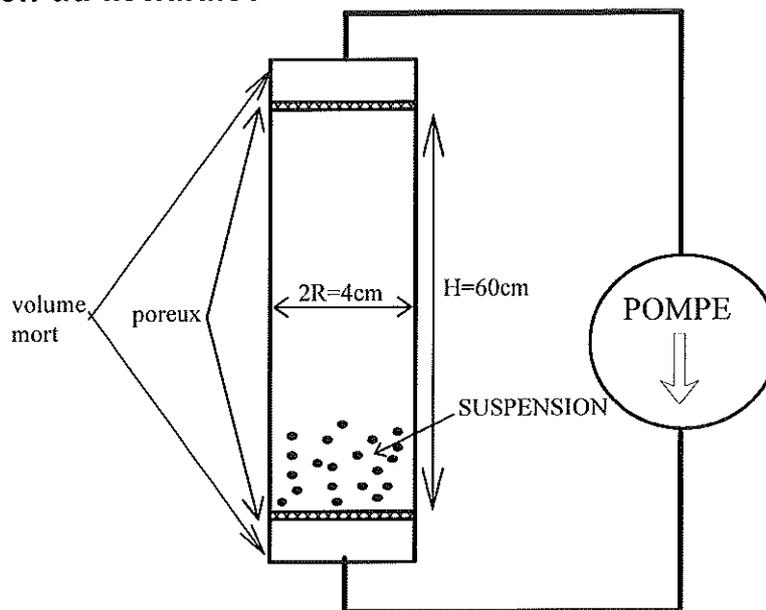


Schéma du lit fluidisé

**Figure II-2.**

Le lit fluidisé qui a été utilisé pour l'essentiel des expériences est représenté schématiquement figure II-2. Les caractéristiques des différents éléments sont les suivantes:

- cuve: cylindre de plexiglass de longueur  $H=60\text{cm}$  et de rayon intérieur  $R=2\text{cm}$  ( $S \sim 12,5 \text{ cm}^2$ ).

Le rayon extérieur est de 2,5cm mais deux méplats se faisant face ont été usinés sur la surface extérieure de la cuve ( largeur: 1,5cm sur toute la longueur)

- poreux: disque d'alliage fritté inox de rayon 2,1cm; d'épaisseur 2mm dont le diamètre des pores est de l'ordre de  $1\mu\text{m}$  (poral IC 42-20-03)

- pompe: bi-seringues à débit constant fonctionnant par un moteur pas-à-pas pilotable ( $2,2 \mu\text{l/pas}$ ); de débit maximum  $D_{\text{max}}=100\text{ml/mn}$ ; supportant jusqu'à 20atm en pression (PHARMACIA P-6000).

Avec une telle cuve, le rapport d'aspect  $R/a$  est **supérieur à 500**, et on pourra donc supposer que les effets de bord sont négligeables, et que la vitesse de convection  $V_d$  imposée par la pompe est uniforme dans toute la cuve.

La valeur maximum de  $V_d$  que l'on peut obtenir avec ce montage est:

$$(V_d)_{\max} \sim 0,13 \text{ cm/s}$$

Cette valeur permet d'obtenir dans le lit fluidisé une concentration minimum de l'ordre de 7% pour le mélanges à 20% en glycérol (avec  $V_d=U(C)$ ).

### II-3 Mesure de la concentration par une technique acoustique

La vitesse de propagation d'une onde acoustique dans un milieu diphasique dépend en général de la concentration de chaque phase.

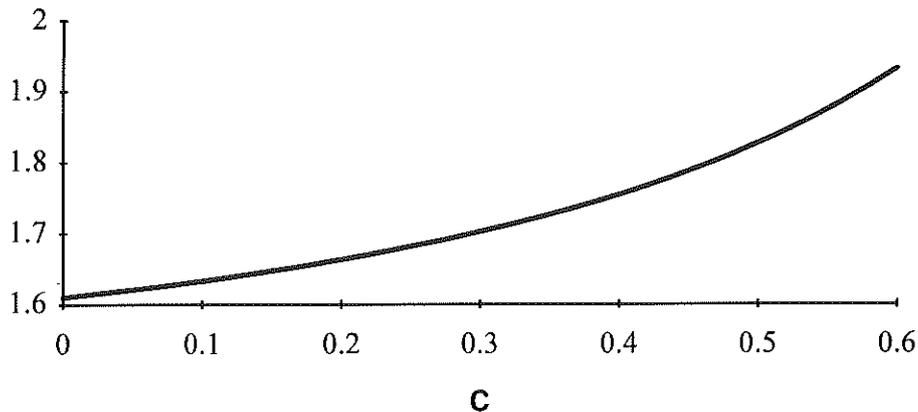
En généralisant la théorie de Biot sur la propagation du son dans un milieu poreux [Biot], il est possible de montrer [Bacri et al], que la vitesse de propagation  $v$  d'une onde acoustique dans une suspension présente deux régimes en fréquences, départagés par une fréquence critique  $\omega_c = v/a^2$  ( $\sim 25$  kHz). A haute fréquence ( $\omega \gg \omega_c \Rightarrow \lambda \gg a$ ), le milieu diphasique présente les propriétés acoustiques d'un milieu effectif dans lequel les compressibilités  $K$  de chaque phase sont associées en parallèle et les densités sont associées en série. Pour ce qui est des densités, la tortuosité de la suspension ( introduite par Biot dans les milieux poreux) rend compte des effets inertiels (masse ajoutée) qui dépendent de la densité et de la concentration. La vitesse de propagation  $v$  dans ce milieu effectif est alors donnée par l'expression suivante:

$$v(C) = \sqrt{\frac{K_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{K_{\text{eff}}} = (1-C)/K_f + C/K_p \\ \rho_{\text{eff}} = \rho_f \frac{(2-C)\rho_p + (1-C)\rho_f}{2(1-C)^2\rho_p + [1+2C(1-C)]\rho_f} \end{array} \right. \quad (2-1)$$

où  $K_f$  et  $K_p$  sont respectivement les modules élastiques du fluide et des particules.

Dans le régime haute fréquence,  $v(C)$  est une fonction monotone de  $C$  et sa dérivée augmente avec la concentration (figure II-3). La mesure de  $v(C)$  permet donc d'obtenir la concentration dans la suspension, avec une précision d'autant meilleure que la concentration est élevée. Il s'agit là d'une caractéristique des mesures de concentrations par acoustique; les autres méthodes couramment utilisées ( mesure de transmission d'un faisceau optique ou de rayons X ) perdent toutes leur efficacité à forte concentration.

$v(C)$  en km/s (pour 20% en glycérol)



Vitesse de propagation du son dans la suspension

**Figure II-3**

Le montage expérimental que nous avons utilisé est représenté figure II-15. Il permet de mesurer le temps de vol d'une onde acoustique haute fréquence ( $f = 350$  kHz) traversant les parois de la cuve et la suspension à une cote  $z$  donnée.

L'onde acoustique de compression est générée par un transducteur piézoélectrique (de fréquence de résonance 350 kHz). Un transducteur identique placé en vis à vis de l'émetteur joue le rôle de récepteur. Un compteur (intervallomètre) est déclenché lors de l'excitation de l'émetteur et arrêté par le signal amplifié du récepteur. Ce compteur mesure ainsi le temps de vol  $t_v$  de l'onde sur le parcours effectué. Cette opération itérée 100 fois sur la même paire de transducteur permet de faire une mesure moyenne de  $t_v$ , que le compteur transmet alors à l'ordinateur.

La disposition de plusieurs paires de transducteurs le long de la cuve permet la mesure de  $t_v$  à différentes cotes ( $t_v(t; z_i)$  à des  $z_i$  fixés). Un commutateur branchant alternativement les différentes paires de transducteurs est alors géré par l'ordinateur (figure II-5). Une autre technique, que nous avons également utilisée, consiste à utiliser une seule paire de transducteurs, que l'on déplace automatiquement le long de la cuve par un moteur pas-à-pas géré par ordinateur (**scanner acoustique**). Cet instrument a été utilisé pour l'étude du lit fluidisé en régime permanent. Il permet alors une exploration spatiale (en  $z$ ) quasi-continue (en pratique tous les mm). Pour des phénomènes ne dépendant pas du temps, cette technique permet donc de mesurer les  $t_v(z)$  en tout  $z$ . Pour que le contact mécanique soit réalisé entre les transducteurs et la colonne du lit, il est nécessaire alors de plonger ceux-ci dans une cuve d'eau afin qu'une mince épaisseur de liquide assure une adaptation d'impédance suffisante. Toutefois, avec cette technique, la précision de la partie utile des mesures de  $t_v(z)$ , à savoir la durée de la propagation dans la suspension, est altérée par l'ajout des temps de vol dans la couche de fluide dont l'épaisseur est mal définie (tout comme l'épaisseur des parois

susceptibles de varier avec la cote z). Et si dans le cas de phénomènes indépendants du temps, une amélioration de la précision des mesures de  $t_v(z)$  peut être obtenue par le moyennage d'un grand nombre de mesures, les valeurs de la concentration tirées de ces mesures resteront de toute façon moins précises que celles obtenues avec des transducteurs fixes. De plus, le passage d'une cote de mesure à une autre nécessite un temps beaucoup plus important avec le scanner qu'avec le commutateur; c'est pourquoi ce dernier a été utilisé pour la plus grande partie des expériences, qui consistaient à étudier des phénomènes dépendants du temps.

Les différents éléments représentés figure II-5, ainsi que leurs caractéristiques sont les suivants:

-ORDINATEUR : PC

-GENERATEUR : RACAL-DANA MODEL 737

Signal émis: 1 sinusoïde à 350 kHz

fréquence de répétition: 1 kHz

-COMMUTATEUR : KEITHLEY 705 SCANNER (10 voies)

-TRANSDUCTEURS : céramiques piézoélectriques (quartz)

dimensions 1.5cm×2mm×2mm

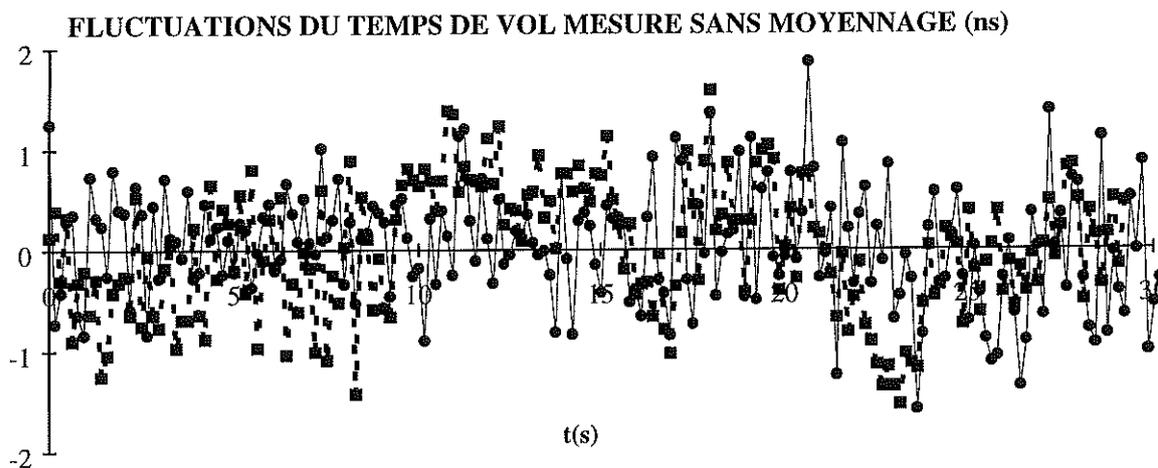
fréquence de résonance: 350 kHz

-AMPLIFICATEUR : gain: 60 db bande passante: 0-1MHz

-COMPTEUR : RACAL-DANA 1990 SERIES UNIVERSAL SYSTEMS COUNTER

précision: 0.1 ns

Sur la figure II-4, les fluctuations des mesures de temps de vol ( $t_v(t) - \langle t_v \rangle$ ) sont représentées pour deux exemples ( $C=0$  et  $C=0.3$ ).



**Légende:** ■:  $(t_v(t) - \langle t_v \rangle)$  dans le fluide pur

●:  $(t_v(t) - \langle t_v \rangle)$  dans une suspension de concentration  $C=30\%$

**Figure II-4**

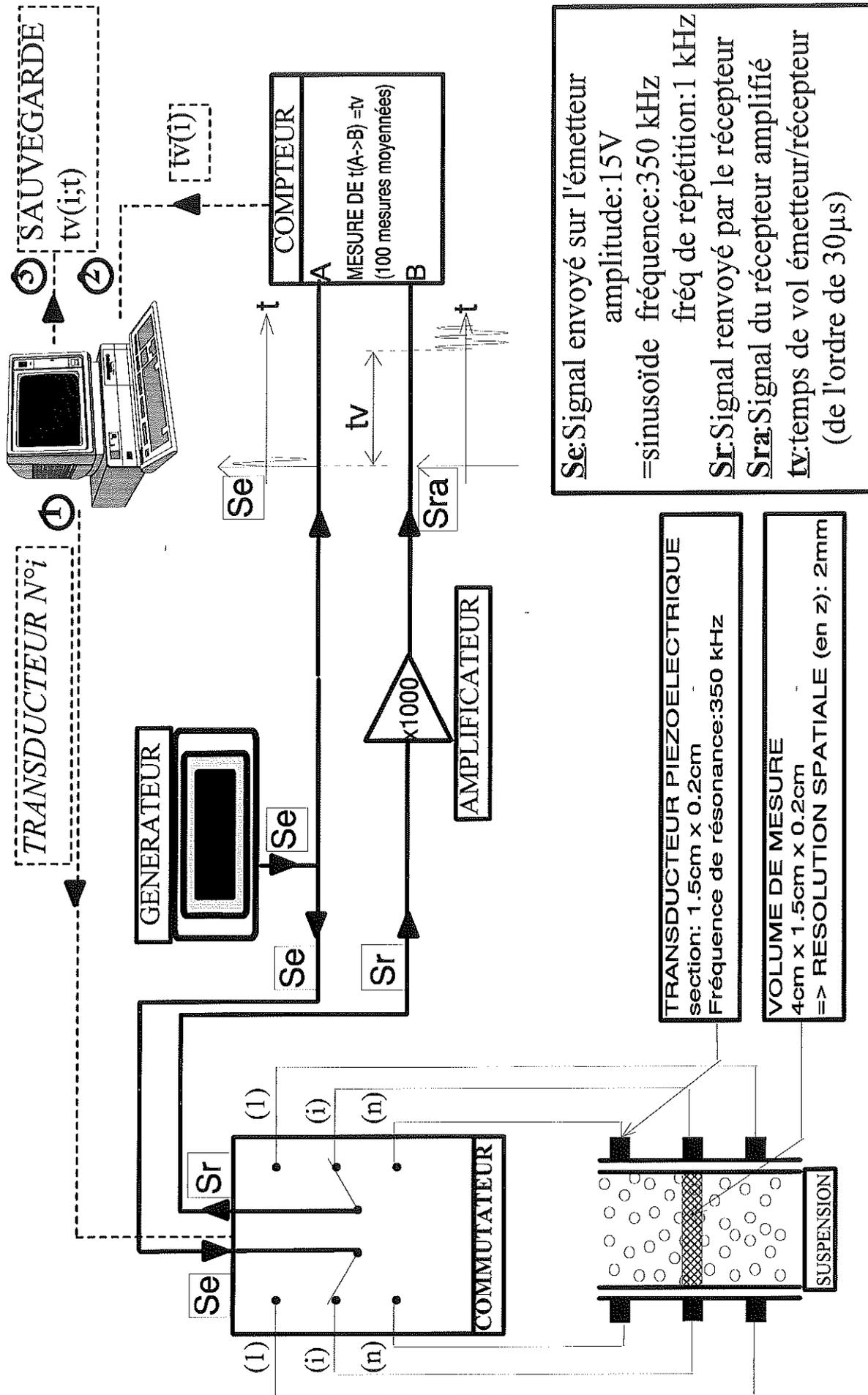


Figure II-5

Il est à noter que les fluctuations des mesures de  $t_v$ , effectuées sans prendre de moyenne, sont qualitativement semblables, qu'il s'agisse des mesures dans le liquide pur ou dans la suspension. Ces fluctuations peuvent être attribuées en grande partie au bruit électronique générant les composantes haute fréquence; mais également aux inhomogénéités éventuelles de température susceptibles de générer des composantes basse fréquence. Afin de supprimer les composantes haute fréquence du bruit, les mesures de  $t_v$  utilisées expérimentalement sont obtenues par moyenne de cent mesures consécutives, effectué par le compteur. Compte tenu du montage et de la procédure de mesures utilisés, les caractéristiques des mesures sont alors les suivantes:

- nombre de mesures moyennées pour un temps de vol  $t_v$ : 100
- durée d'obtention d'une mesure  $t_v$  (moyennée): 1 s
- incertitude absolue sur le temps de vol  $t_v$  :  $\Delta t_v \sim 1 \text{ ns}$
- résolution spatiale :  $\Delta z = 2 \text{ mm}$

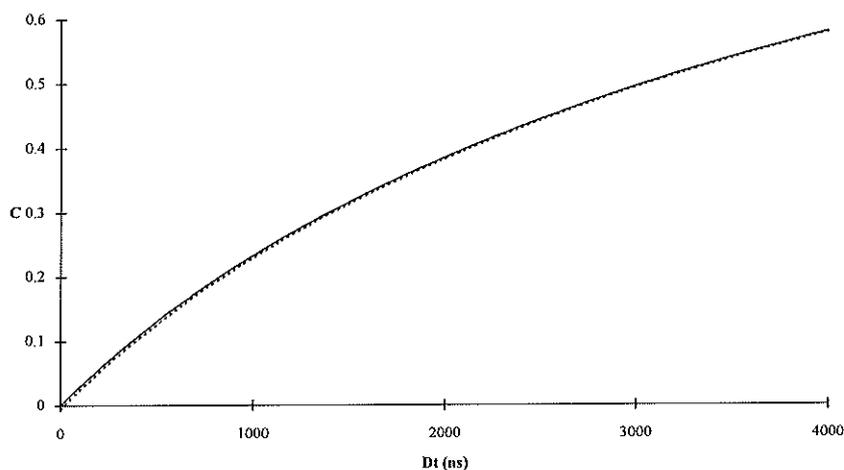
Pour obtenir une mesure de  $C$  à partir de  $t_v(C)$ , le temps de vol  $t_v(C)$  est comparé à  $t_v(C=0)$ . Les valeurs de références  $t_v(C=0)$  sont obtenues pour chaque paire de transducteurs lors de mesures de calibration dans le fluide seul (avant introduction des billes). On calcule alors la différence de temps de vol  $Dt$  définie par:

$$Dt(C) = t_v(C=0) - t_v(C) \quad (2-2)$$

En notant  $l$  la distance parcourue dans la suspension, on a:

$$Dt(C) = l [1/v(C=0) - 1/v(C)] \quad (2-3)$$

Pour la cuve cylindrique (figure II-2), la distance parcourue dans la suspension est  $l=4\text{cm}$  et  $Dt(C)$  peut être calculée en utilisant l'expression (2-1).



**Légende:** — :  $T = 20^\circ\text{C}$   
 -- :  $T = 19^\circ\text{C}$  pour la référence ( $v(C=0)$  pris pour  $T=19^\circ\text{C}$ )

**Figure II-6**

Un exemple de courbe  $Dt(C)$  est donné figure II-6 pour le fluide à 20% massique en glycérol, la pente à l'origine est de  $3.10^{-4}/ns$  pour la courbe à 20°C. Compte tenu des incertitudes sur les mesures de  $t_v$ , on en déduit une incertitude absolue (maximum) de  $6.10^{-4}$  sur  $C$ , du point de vue des mesures acoustiques. La température ne modifie pratiquement pas  $Dt(C)$ , mais une incertitude supplémentaire peut provenir d'une différence de température pour les mesures  $t_v(C)$  et les mesures de calibrations  $t_v(C=0)$ , l'erreur produite sur le  $Dt$  calculé est alors d'autant plus importante que la concentration est faible (cf figure II-6).

Quoi qu'il en soit, on peut estimer l'incertitude absolue sur les mesures de  $C$ , en tenant compte du fait que la température n'est connue qu'à quelques dixièmes de degrés près:

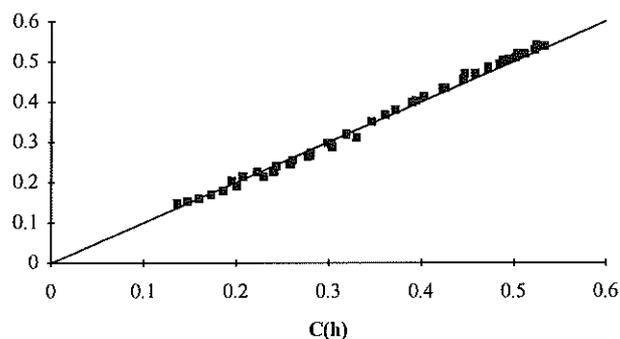
$$\Delta C \sim 0.1\%$$

Cependant, il est à noter que les incertitudes les plus limitatrices intervenant dans les expériences proviennent essentiellement de la résolution spatiale de la technique (2mm) qui peut même devenir moins bonne en présence de forts gradients de concentration. Un gradient de  $v(C)$  important peut en effet donner lieu à un phénomène analogue à l'effet mirage: l'onde sonore est dévié vers les régions de grande vitesse ; le parcours est alors plus long mais le temps de vol plus petit que pour un parcours rectiligne.

Toutefois, l'incertitude sur les concentrations, dans les conditions expérimentales que nous avons utilisées (faibles gradients), est toujours inférieure aux incertitudes provenant des paramètres intervenant dans les analyses des mesures, tels que le rayon des particules (= rayon moyen?) et la viscosité dont la valeur est imprécise en raison de l'incertitude sur la température.

## II-4 Validation des mesures acoustiques

Pour valider les mesures acoustiques de concentration, celles-ci ont été comparées avec les mesures  $C(h)$  déduites de la hauteur de la suspension  $h$  dans le lit fluidisé pour différents débits.



**Légende:**      ●:concentration mesurée par acoustique  
                   —: y=x

**Figure II-7**

Le volume total de particules  $\mathcal{V}_p$  est donné par la masse de billes  $M_p$  introduite dans le lit:  $\mathcal{V}_b = m_p / \rho_p = \text{cm}^3$ . D'où la concentration de la suspension:

$$C(h) = \mathcal{V}_b / (S h) \quad (2-4)$$

où  $S$  est la section de la cuve.

L'accord entre  $C(h)$  et la mesure de  $C$  par acoustique est correct (cf figure II-7), dans la mesure où l'expression de  $C(h)$ , qui semble pourtant donné par la définition même de  $C$ , conduit à des estimations très imprécises de  $C$ . En effet, la mesure  $C(h)$  est fondée sur les deux hypothèses suivantes:

- la suspension est homogène dans tout son volume.
- le volume de particules est constant dans la suspension.

Or, aucune de ces deux hypothèses n'est rigoureusement vérifiée dans les expériences que nous avons faites dans le lit fluidisé en régime permanent (débit constant). Tout d'abord, lorsque la fluidisation dure depuis longtemps, des billes ont tendance à "adhérer" aux parois de la cuve. Pour tenir compte de ce phénomène, il faudrait, en toute rigueur, exclure ces particules dans le bilan volumique de la suspension, et donc considérer un volume plus faible de particules dans une cuve de section moins importante en moyenne. Mais cela ne donnerait qu'une correction extrêmement faible à  $C(h)$ . La source d'incertitude sur  $C(h)$  provient en fait principalement de l'inhomogénéité de la suspension. Une cause en est la non-monodispersité des particules utilisées. Compte tenu de la vitesse de sédimentation croissante avec la taille des particules, une suspension donne lieu à un phénomène de ségrégation. Les grosses particules ont tendance à aller dans le fond du lit fluidisé et les petites en haut. Un gradient de concentration apparaît donc (il a été constaté dans nos expériences) et la concentration décroît du bas vers le haut de la cuve. Ce phénomène, s'il a été étudié pour des durées relativement courtes (expériences de sédimentation) et pour des tailles de particules très différentes (voir [Hoyos et al] pour des suspensions bidisperses), est encore très mal décrit quantitativement en ce qui concerne l'état de ségrégation permanent aux temps longs dans des suspensions faiblement polydisperses.

Pour que ce **gradient de polydispersité** ne soit pas la source des différences entre  $C(h)$  et  $C$  mesurée par acoustique à une cote  $z$ , les valeurs portées figure II-7 ont été mesurées à la cote  $z=h/2$  et donnent donc une bonne estimation de la concentration moyenne (ou concentration correspondant à la taille moyenne des particules) existant dans le lit fluidisé. Toutefois, la polydispersité ( qui provient des imperfections des conditions expérimentales) n'est pas la seule cause d'inhomogénéité dans le lit fluidisé, un gradient de concentration localisé essentiellement en haut de la suspension (front suspension/liquide pur) existe de toute façon: il traduit le flux diffusif dans le front de concentration, équilibré par un flux convectif donnant lieu à un profil stationnaire (cf chapitre III et IV). Sans s'attarder sur la nature et la géométrie exacte de ce front qui seront développés ultérieurement, il est cependant important de signaler ici que ce front séparant la partie homogène (à la polydispersité près) de la

suspension et le fluide pur présente une largeur caractéristique finie, non-nulle. Cette largeur est d'autant plus importante que la concentration de la partie homogène de la suspension est faible. Par conséquent, à faible concentration, la hauteur  $h$  de la suspension ne peut pas être déterminée avec précision, car le front en question étant très étendu, la concentration passe imperceptiblement de la "valeur en homogène" à zéro, et l'interface entre la suspension et le liquide est floue. Les mesures de  $h$  utilisées pour la figure II-7, sont dans le cas des faibles concentrations ( $C < 20\%$ ) une simple estimation de la cote à laquelle la suspension cesse d'être "translucide". Or, pour que la valeur de  $C(h)$  soit significative de la concentration moyenne dans la suspension, il aurait fallu, à peu de chose près, que  $h$  représente la hauteur à laquelle était située la tranche de concentration moitié (concentration égale à la moitié de la concentration moyenne de la suspension homogène). Compte tenu de ces considérations, il est possible d'estimer que la valeur  $C(h)$ , dans les conditions d'expériences que nous avons adoptées, est une estimation correcte de la concentration moyenne dans la suspension à 5% près dans le cas des faibles concentrations ( $C < 20\%$ ) et à 1% près pour les concentrations plus élevées.

En prenant en compte l'incertitude de la mesure de  $C(h)$ , la figure II-7 permet de valider les mesures de la concentration par acoustique. Toutefois, au cours de toutes les expériences qui ont été menées, la valeur de  $h$  a toujours été consignée. Et pour des régimes permanents différents, la relation  $C_1/C_2 = h_2/h_1$  a servi de garde-fou pour nos mesures de concentrations.

## II-5 Caractérisation de la fluidisation

Les caractéristiques recherchées pour la fluidisation sont les suivantes:

- 1: injection uniforme
- 2: lit fluidisé stable
- 3: effets inertiels négligeables

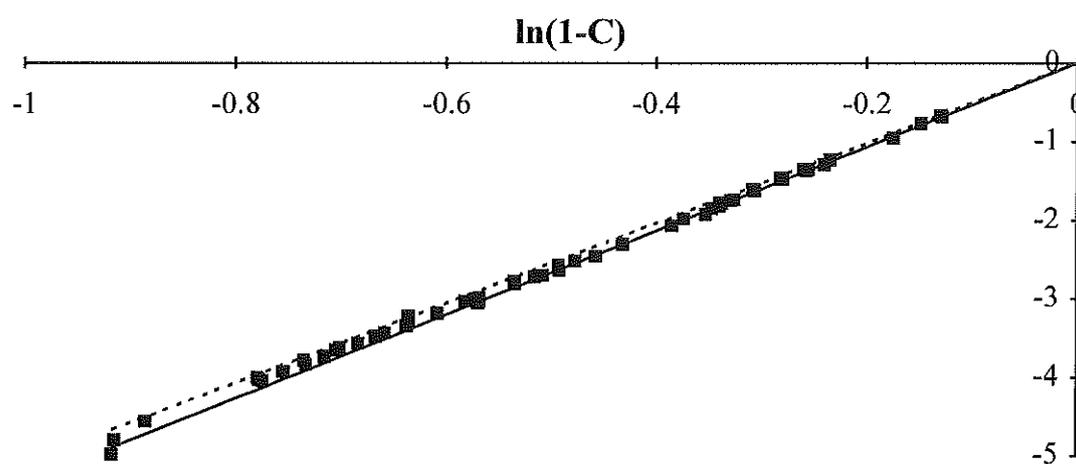
Pour vérifier les conditions 1 et 2, le temps de vol de l'onde acoustique  $t_v(z)$  a été mesurée sans moyennage à différentes cotes et pour différentes concentrations moyennes dans le lit (différents débits). Les résultats obtenus (exemple figure II-4) montrent un bruit blanc de faible amplitude qui correspondrait à des fluctuations de concentration d'amplitude  $\Delta C \sim 0.001$ . Si à ces considérations, on ajoute le bruit électronique, on peut conclure que la suspension est stable en régime permanent de débit. Et le fait que la concentration ne subit pas de fluctuations notables prouve également que l'injection peut être considérée comme uniforme.

En ce qui concerne l'absence d'effets inertiels, qui sera une hypothèse importante lors du dépouillement de certaines expériences; des preuves tangibles sont difficiles à établir et pour les expériences en question, la validité de cette hypothèse sera discutée de manière spécifique. Toutefois, à bas nombre de Reynolds, on s'attend à ce que la vitesse de

sédimentation  $U(C)$  vérifie la corrélation empirique de Richardson-Zaki,  $U(C)=U^0(1-C)^p$ , avec un exposant  $p \approx 5,5$  (cf I-5, formule (1-30)). De plus, la description du lit fluidisé stable suppose que la vitesse de convection  $V_c$  est uniforme dans toute la suspension, et que par conséquent, la relation, établie en I-4, entre la vitesse débitante  $V_d$  et la concentration de la partie homogène du lit est (1-20):  $U(C)=V_d$ . Le lit fluidisé présentera donc le comportement souhaité, s'il vérifie la relation:

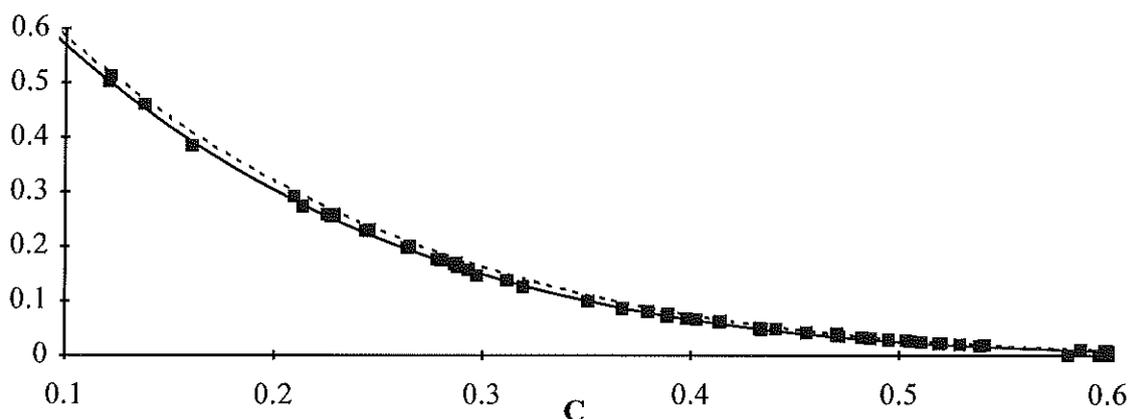
$$V_d = U^0(1-C)^p \quad (2-5)$$

Avec  $p \approx 5,5$ .



**Légende:** ■:  $\ln(V_d/U^0)$   
 —:  $5.35 \ln(1-C)$   
 --:  $5.1 \ln(1-C)$

**Figure II-8**



**Légende:** ■:  $(V_d/U^0)$   
 —:  $(1-C)^{5.35}$   
 --:  $(1-C)^{5.1}$

**Figure II-9**

Le tracé de  $\ln(V_d/U^\circ)=f(\ln(1-C))$ , donne effectivement une droite de pente comprise entre 5.1 et 5.35 (figure II-8). Des expériences, décrites dans le chapitre IV, mieux adaptées pour tester la validité de la corrélation de Richardson-Zaki, ont permis d'établir que pour la suspension n°3, la valeur  $p=5.35$  présentait une fiabilité étonnante à forte concentration ( $C>30\%$ ), comme le montre déjà la figure II-9, donnant une représentation directe de la relation (2-5). Cette valeur de  $p$  correspond à l'ordre de grandeur attendu ( $p\sim 5.5$ ) pour les suspensions à faible nombre de Reynolds.

En conclusion, les différents tests effectués sur le montage expérimental tendent tous à prouver que la suspension fluidisée se comporte comme une suspension stable, dont la vitesse de sédimentation obéit à la corrélation de Richardson-Zaki pour les faibles nombres de Reynolds. Et la relation entre la vitesse débitante et la concentration en régime permanent est donnée par (2-5):

$$V_d = U^\circ(1-C)^p \quad \text{avec } p\sim 5.35$$

## III PROPAGATION DE FRONTS

### III-1 Introduction

Du point de vue expérimental, une suspension non-colloïdale de concentration homogène ( $C_0$ ) placée dans une cuve de sédimentation donne toujours lieu à la propagation de deux types de fronts: un front qui apparaît au bas de la cuve entre le sédiment ( $C_{sed}$ ) et la concentration initiale  $C_0$ ; et un autre surmontant la suspension, entre  $C_0$  et le liquide pur ( $C=0$ ).

Un lit fluidisé permet d'observer des fronts entre deux concentrations homogènes quelconques  $C_1$  et  $C_2$  (cf figure III-1). Les fronts auxquels nous nous référerons dans ce chapitre sont définis, dans le référentiel de sédimentation ((Ox): référentiel lié au centre des volumes) orienté du haut vers le bas, par les trois conditions suivantes:

- (1):  $x \rightarrow +\infty$ ,  $C \rightarrow C_2$  et  $\text{grad}(C) \rightarrow 0$
- (2):  $x \rightarrow -\infty$ ,  $C \rightarrow C_1$  et  $\text{grad}(C) \rightarrow 0$
- (3):  $\forall x$ ,  $C_1 < C < C_2$  et  $\text{grad}(C) \geq 0$

Cette définition comporte certains aspects réducteurs, mais a le mérite de correspondre aux expériences réalisables avec un lit fluidisé. En effet, elle décrit exactement les expériences de diminutions monotones de débit. Lorsque l'on passe d'une vitesse débitante  $V_d$  à une vitesse débitante  $V_d' < V_d$ , par une rampe de débit de durée quelconque (éventuellement nulle dans le cas d'un "échelon"), les billes initialement au repos à la concentration  $C_1$  sédimentent à la vitesse ( $V_d - V_d'$ ) et une partie homogène de concentration  $C_2$  (tq  $U(C_2) = V_d'$ ) se développe à la base du lit (cf figure III-1). La zone de concentration intermédiaire qui se propage alors vers le haut dans le référentiel du laboratoire ( $O'z$ ), répond à la définition de front énoncée.

Dans ce type d'expériences, durant l'observation du front, la vitesse débitante  $V_d'$  est positive dans le référentiel du laboratoire ( $O'z$ ) orienté de bas en haut ( $V_d' = U(C_2)$ ), et un front se propageant à la vitesse  $V_f$  positive dans ( $O'z$ ), aura dans le référentiel de sédimentation (Ox), une vitesse  $U_f = V_d' - V_f$  qui pourra être soit positive soit négative suivant les valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  ( $U_f > 0$  dans l'exemple figure III-1 : le front se propage vers le bas dans le référentiel de sédimentation!).

Cependant, dans ce type d'expériences, le gradient de concentration (et donc le gradient de densité) est toujours dans le même sens que la pesanteur, et les résultats obtenus pour les fronts ainsi définis perdront donc une certaine généralité. Toutefois, cette définition présente l'avantage de clarifier les choses et la limitation qu'elle introduit n'est pas gênante dans la mesure où les expériences d'augmentations de débit créant des gradients opposés ne

donnent pas naissance, dans les expériences que nous avons réalisées, à une partie homogène de basse concentration à la base du lit. La suspension, dans ce cas (qui sera étudié expérimentalement au paragraphe IV-4), semble s'expandre en masse, et le phénomène ne peut assurément pas être décrit en termes de propagation de front!

### PROPAGATION D'UN FRONT PAR DIMINUTION DE DEBIT

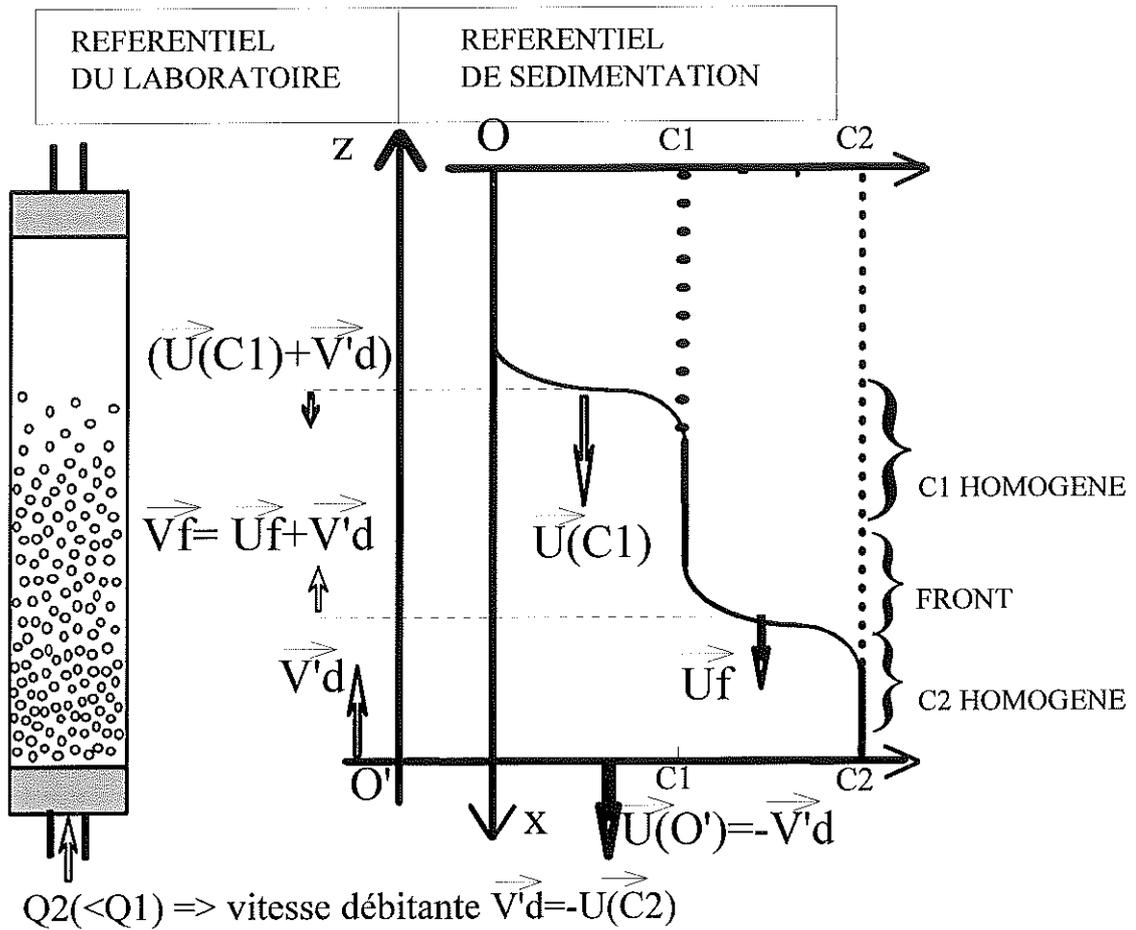


Figure III-1

L'objet de ce chapitre est de calculer la forme des fronts, ainsi définis, à partir de l'équation de conservation de volume:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial (C \cdot U_p)}{\partial x}\right)_t = 0 \quad (3-1)$$

avec:

$$C \cdot U_p = C \cdot U(C) - D \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t \quad (3-2)$$

où  $U_p$  est la vitesse moyenne des particules dans le référentiel de sédimentation.

Comme Einstein l'avait fait pour les suspensions colloïdales [Einstein], le flux volumique de particules ( $C U_p$ ), est décomposé en une somme d'un flux convectif ( $C U(C)$ ) et d'un flux de type diffusif ( $-D \text{grad}(C)$ ).

Pour prévoir la nature et la forme d'un front entre deux concentrations quelconques  $C_1$  et  $C_2$ , on ne s'intéressera, dans un premier temps, qu'à l'effet de la partie convective du flux. On gardera en mémoire que le **flux diffusif négligé**, qui tend à uniformiser la suspension, a de toute façon toujours le même effet: **élargir les fronts**.

Dans ce chapitre, toutes les équations seront écrites dans le référentiel lié au centre des volumes, qui se présente comme le référentiel le plus naturel lié à la suspension étudiée. Ce référentiel se confondant avec le référentiel du laboratoire dans le cas des expériences de sédimentation, il sera abusivement appelé "référentiel de sédimentation". Cet abus de langage ne doit pas porter à confusion: une grande partie des fronts qui vont être décrits dans le "référentiel de sédimentation" ne peuvent pas expérimentalement être générés dans une cuve de sédimentation ( $C_1 > 0$  et  $C_2 < C_{\text{sed}}$ ) et ne peuvent être observés que dans des lits fluidisés!

### III-2 Vitesse de propagation d'une concentration dans un profil

Le flux diffusif négligé, l'équation de conservation de volume (3-1) s'écrit:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_t = 0 \quad \text{avec } F(C) = C U(C)$$

C'est sur cette équation de conservation simplifiée que **Kynch** a fondé sa théorie de la sédimentation [Kynch], sur laquelle s'appuieront les paragraphes III-2 et III-3 de ce chapitre.

La fonction  $F(C)$  est abusivement appelée **fonction de flux**; mais si elle ne rend compte que du **flux convectif de sédimentation**, elle présente l'avantage de ne dépendre que de la concentration.

La vitesse de propagation  $W(C)$ , d'une concentration  $C$  appartenant à un front de profil  $C(x,t)$  différentiable, s'écrit:

$$W(C) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_C = -\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x / \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t \quad (3-3)$$

Or

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_t = -\frac{dF}{dC} \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t \quad (3-4)$$

D'où

$$W(C) = \frac{dF}{dC} = F' \quad (3-5)$$

La vitesse de propagation d'une concentration  $C$  donnée dans un front,  $W(C)$ , est donc égale à la pente de la tangente à la "courbe de flux"  $F(C)$ , à la concentration considérée (cf figure III-2)

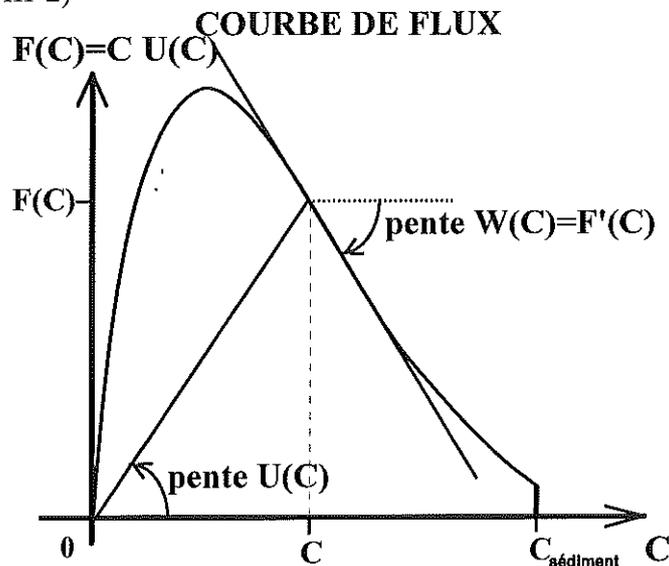


Figure III-2

Notons que le calcul de  $W(C)$  peut être fait, de manière analogue, sans négliger la diffusion et l'expression de  $W(C)$  devient:

$$W(C) = F' - \frac{dD}{dC} \cdot \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_t - D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_t / \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_t \quad (3-6)$$

Il va de soi que  $W(C)$  perd toute signification lorsque l'on s'intéresse à la concentration d'une partie homogène de la suspension (cf (3-3):  $W(C)$  n'est plus définie dans un gradient de concentration nul). Dans ce cas, on a vu que la vitesse à considérer, dans le référentiel de sédimentation qui nous intéresse ici, était  $U(C)$  qui est donnée, sur la courbe de flux par la pente de la corde joignant le point d'abscisse  $C$  à l'origine (cf figure III-2). Cette vitesse  $U(C)$  est la vitesse moyenne des billes à la concentration homogène  $C$ , alors que  $W(C)$  n'a de sens que macroscopique; elle représente la "vitesse de propagation" d'une grandeur physique, la concentration, et non d'une "particule matérielle".  $W(C)$  se réfère à la vitesse d'une "wavelet" introduite par Kynch dans sa théorie de la sédimentation.  $W(C)$  est aussi la vitesse de l'onde cinématique correspondant à la concentration  $C$ .

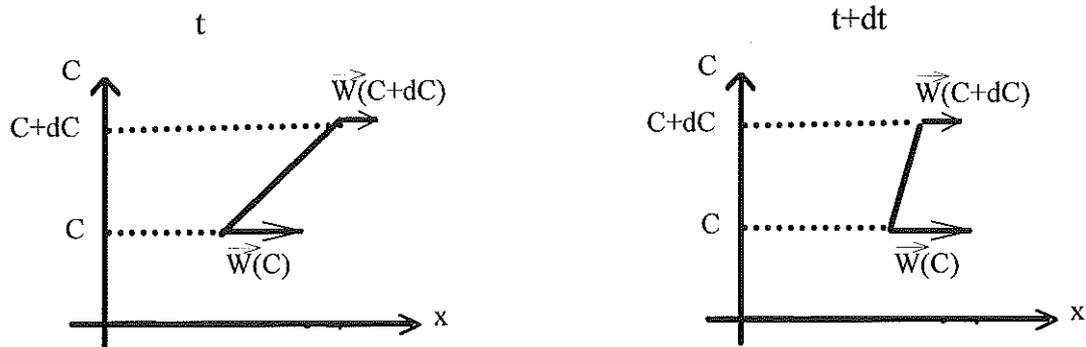
### III-3 Effet local du flux convectif aux temps courts

Grâce à l'expression de  $W(C)$  obtenue précédemment, il est maintenant possible de prévoir l'évolution locale d'un profil. Pour cela, on peut considérer une petite partie du profil

entre  $C$  et  $C+dC$ , et conformément à la définition des fronts, on supposera que la "tranche" de suspension de concentration ( $C$ ) se trouve au-dessus de la tranche ( $C+dC$ ). Avec le sens de l'axe choisi ( $Ox$ ), le gradient de concentration est positif, et la tranche ( $C$ ) se trouve "derrière" la tranche ( $C+dC$ ). Deux cas peuvent alors se produire:

**-cas 1:  $W(C) > W(C+dC)$**

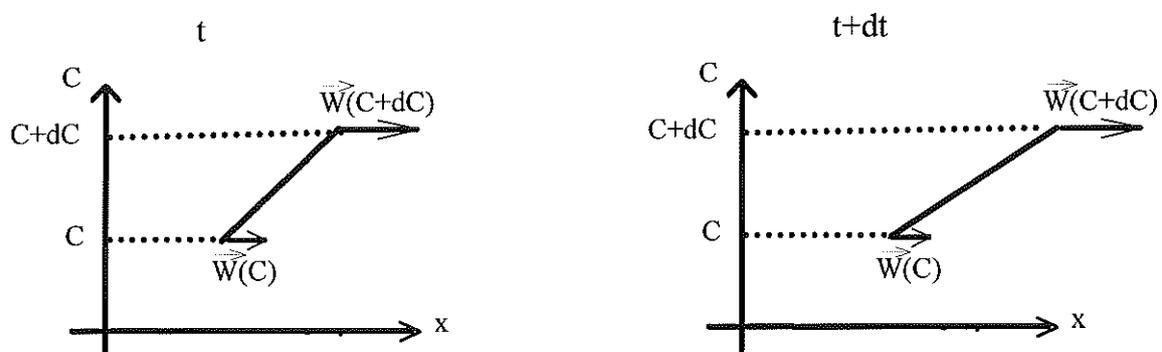
La tranche ( $C$ ) rattrape alors la tranche ( $C+dC$ ) et il y a augmentation du gradient de concentration. On parlera alors d' "**auto-raidissement** du front" ("self-sharpening" en anglais).



**Figure III-3**

**-cas 2:  $W(C) < W(C+dC)$**

La tranche ( $C+dC$ ) va plus vite que la tranche ( $C$ ) et il y a diminution du gradient de concentration. On parlera alors d' "**auto-étalement** du front" (ou "self-spreading").



**Figure III-4**

De plus, dans ce cas, la tranche ( $C+dC$ ) s'éloigne de la tranche ( $C$ ) à la vitesse  $[W(C+dC)-W(C)]$ , le gradient de concentration diminuera donc proportionnellement au temps.

En utilisant l'expression (3-5) de  $W(C)$ , on trouve:

$$W(C+dC)-W(C) = F'' \cdot dC \quad (3-7)$$

Et les conditions décrivant les deux cas trouvés s'écrivent:

-cas 1: "**auto-raidissement**" pour  $F'' < 0$

-cas 2: "**auto-étalement**" pour  $F'' > 0$

On voit donc que l'évolution locale d'un profil, en ce qui concerne la convection dépend de la concavité de la courbe de flux. L'auto-raïdissement a lieu lorsque la concavité de la courbe de flux est tournée vers le bas ( $F'' < 0$ ); dans le cas contraire, il y a auto-étalement.

En utilisant pour  $U(C)$  la corrélation empirique de Richardson-Zaki d'exposant  $p$ , la seconde dérivée de la fonction de flux s'écrit:

$$F''(C) = p[(p+1)C-2]U/(1-C)^2 \quad (3-8)$$

La dérivée seconde de la fonction de flux s'annule donc pour  $C = 2/(p+1)$  ( $C=0.315$  pour  $p=5.35$ ) et la nature locale des profils en fonction de la concentration est la suivante:

$$\begin{aligned} -0 < C < 2/(p+1) & : \text{Auto-raïdissement} \\ -2/(p+1) < C < C_{\text{sed}} & : \text{Auto-étalement} \end{aligned}$$

### III-4 Effet global du flux convectif aux temps longs-Définition des chocs

Dans le paragraphe précédent, l'effet de la convection n'a été considéré qu'à un instant donné et sur un profil  $C(x;t)$  supposé différentiable. Ce type d'analyse est suffisant dans le cas d'un profil entre  $C_1$  et  $C_2$ , pour lequel  $F''$  est positive à toutes les concentrations. En effet le raisonnement tenu en III-3, dans le cas de l'auto-étalement, est alors valable pour toutes les concentrations du profil; et comme le seul effet de la convection est de diminuer le gradient de concentration, le profil reste différentiable aux temps supérieurs et le raisonnement demeure toujours applicable.

Par contre, s'il existe dans un profil, des concentrations pour lesquelles  $F''$  est négative, les considérations locales deviennent "insuffisantes" avec le temps, car le profil évolue alors vers un profil non-différentiable.

En effet, dans la situation représentée figure III-1, il va exister un instant auquel la tranche de concentration  $C$  aura "rattrapé" la tranche  $(C+dC)$ . A cet instant le gradient de concentration sera infini entre  $C$  et  $C+dC$ , ce qui signifie que les concentrations entre  $C$  et  $C+dC$  "cesseront d'exister": l'épaisseur de la tranche de suspension, dans laquelle la concentration est comprise entre  $C$  et  $C+dC$ , sera devenue rigoureusement nulle. Le profil  $C(x;t)$  ne sera plus, dès lors, différentiable, et le "raisonnement local" cessera d'être valide car la vitesse de propagation  $W(C)$  ne sera plus définie sur le profil.

Pour des temps supérieurs, il est donc nécessaire de considérer la propagation d'un échelon de concentration entre  $C$  et  $C+dC$ . Plus globalement, si l'on considère un front entre les concentrations  $C_1$  et  $C_2$ , telles qu'il existe un intervalle de concentrations  $[C_-, C_+]$ , contenu dans  $[C_1; C_2]$ , sur lequel la dérivée seconde du flux  $F''$  soit négative (auto-raïdissement), un échelon de concentration se formera entre  $C_-$  et  $C_+$ . La vitesse de propagation  $W(C)$  perdra

alors son sens sur l'intervalle  $[C_-;C_+]$  et devra être remplacée par la vitesse de propagation de l'échelon correspondant, notée  $We(C_-;C_+)$ .

Tout comme  $W(C)$ , la vitesse de propagation d'un échelon  $We(C_-;C_+)$  peut être calculée, en l'absence de diffusion, en écrivant la conservation du volume des particules.

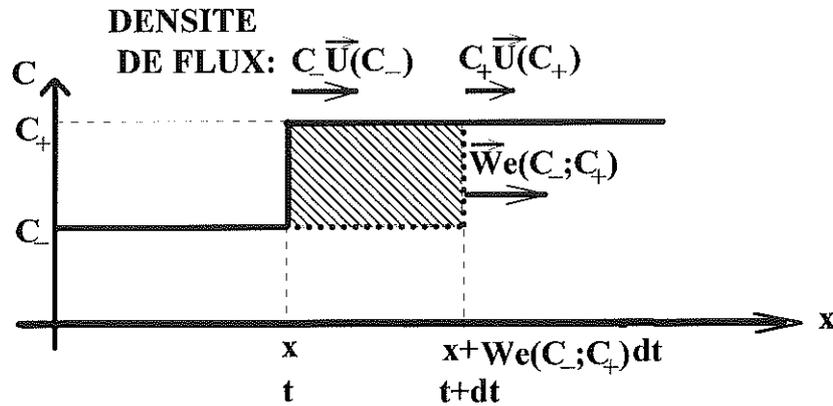


Figure III-5

Par définition de  $We(C_-;C_+)$ , si l'échelon entre  $C_-$  et  $C_+$  se trouve en  $x$  à l'instant  $t$ , sa position à  $t+dt$  sera  $x+We(C_-;C_+).dt$  (cf figure III-5). En écrivant que le volume des particules dans la surface de contrôle définie par les plans coupant orthogonalement l'axe (Ox) respectivement en  $x$  et  $x+dx$  (volume hachuré sur la figure), augmente proportionnellement au flux entrant de volume de particules, on obtient:

$$C_- \cdot U(C_-) \cdot dt - C_+ \cdot U(C_+) \cdot dt = (C_- - C_+) \cdot We(C_-;C_+) \cdot dt$$

$$\Rightarrow We(C_-;C_+) = [F(C_+) - F(C_-)] / (C_+ - C_-) \quad (3-9)$$

**Sur la courbe de flux, la vitesse  $We(C_-;C_+)$  est donc donnée par la pente de la corde  $(C_-;C_+)$ , et la condition d'existence de cet échelon,  $F'' < 0$  sur  $[C_-;C_+]$ , implique que la courbe de flux se trouve au dessus de cette corde entre  $C_-$  et  $C_+$  (cf figure III-6).**

Maintenant que la vitesse de propagation de l'échelon entre  $C_-$  et  $C_+$  est connue, l'étude locale de l'effet de la convection sur la forme d'un profil (cf figure III-3) peut être reconsidérée, de part et d'autre de  $C_-$  et  $C_+$ , en tenant compte du fait que la vitesse de propagation de  $C_-$  et  $C_+$  n'est plus donnée par  $F'$  mais par l'expression de  $We(C_-;C_+)$ .

Ainsi, la condition d'auto-raïdissement entre, par exemple,  $C_+$  et  $C_++dC$  devient (cf figure III-3), avec  $W(C_+) = We(C_-;C_+)$  et  $W(C_++dC) = F'(C_++dC)$ :

$$We(C_-;C_+) > F'(C_++dC) \quad (3-10)$$

Si cette condition d'auto-raïdissement est remplie, le profil de concentration évoluera alors vers un échelon entre  $C_-$  et  $C_++dC$ .

Cette nouvelle condition d'auto-raïdissement (3-10), traduite graphiquement sur la courbe de flux (cf figure III-6), signifie que la pente de la corde ( $C_-;C_+$ ) est supérieure à la pente de la tangente à la courbe en  $C_++dC$ , ou plus simplement, que le point de la courbe de flux correspondant à la concentration  $C_++dC$  se trouve au-dessous de la droite prolongeant la corde ( $C_-;C_+$ ). En d'autres termes, cette condition est réalisée si la courbe de flux est située au-dessus de la corde ( $C_-;C_++dC$ ), et dans ce cas, un échelon se "développe" alors entre les concentrations  $C_-$  et  $C_++dC$ .

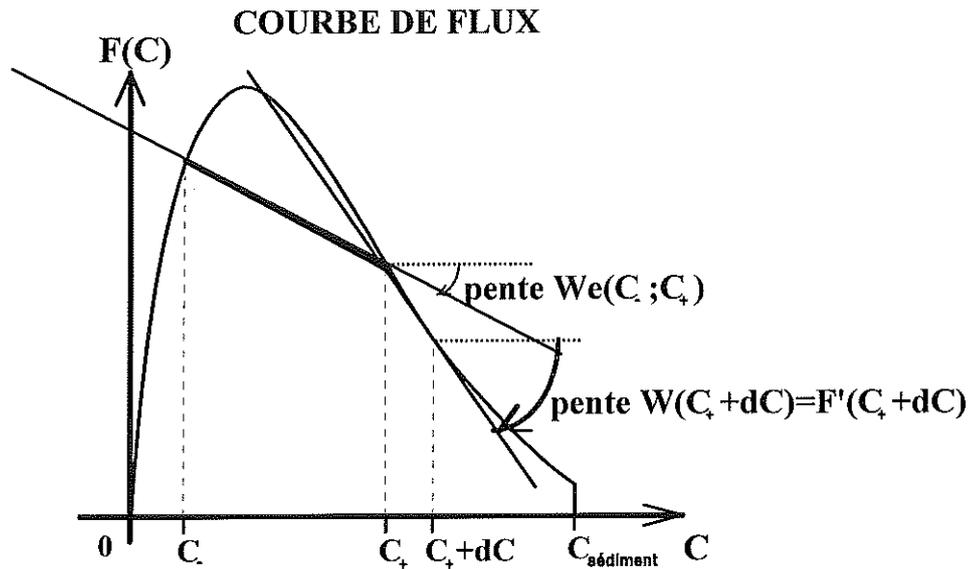


Figure III-6

Le même type de raisonnement peut alors être tenu entre le nouvel échelon et la concentration voisine  $C_++2.dC$ ; par itération il est possible de montrer que tant que la courbe de flux reste au-dessus de la corde, le profil évolue vers un échelon. De plus, l'étude locale en deçà de  $C_-$  conduit à la même conclusion:

En conclusion, si la corde correspondant à deux concentrations d'un front se trouve entièrement au-dessous de la courbe de flux, le profil de concentration, en l'absence de diffusion, évolue vers un échelon entre ces deux concentrations. La vitesse de propagation de cet échelon est alors donnée par la pente de la corde considérée. Pour reprendre le vocabulaire de Kynch, on appellera **choc** ce type d'échelon prévu par l'analyse de l'effet convectif en absence de diffusion [Kynch]; par extension on conservera cette appellation pour désigner les profils obtenus en réalité, lorsque la diffusion entre en ligne de compte.

### III-5 Influence du flux diffusif

Comme on l'avait signalé en III-1, le flux de nature diffusif tient toujours le même rôle, il tend à élargir les fronts (c'est-à-dire à diminuer le gradient de concentration). Dans ce paragraphe, son effet, aux temps longs, sur la forme des profils de concentrations sera analysé qualitativement, respectivement sur les chocs et sur les fronts ne présentant que l'effet convectif d'auto-étalement.

#### -cas 1: "choc"

La convection tend ici à raidir le profil pour créer un échelon de concentration.

Si on suppose que l'effet convectif est dominant et impose la forme du profil (échelon), le gradient de concentration devient donc infini ( $\text{grad}(C) \rightarrow +\infty$ ). L'effet de la diffusion (proportionnel au gradient) est alors, lui aussi, "infini" et ne peut donc pas être dominé par l'effet convectif (indépendant du gradient).

En revanche, si on suppose que c'est l'étalement diffusif qui domine, le gradient de concentration tend alors vers zéro. L'effet diffusif, proportionnel au gradient, ne peut donc pas rester dominant devant le raidissement convectif indépendant du gradient.

Aucun des effets, convectif et diffusif, ne peut être dominant aux temps longs! Localement, le profil ne peut évoluer que vers une forme pour laquelle ces deux effets s'équilibrent.

Le raidissement convectif est indépendant du gradient, et l'étalement diffusif est nul lorsque le gradient est nul et infini lorsque le gradient est infini. Il existe donc une valeur du gradient  $g(C)$  pour laquelle ces deux effets opposés se compensent exactement. En d'autres termes,  $g(C)$  se définit comme la valeur du gradient pour laquelle le profil cesse d'évoluer localement. De plus, si le gradient est inférieur à  $g(C)$ , le raidissement convectif domine et le gradient augmente vers  $g(C)$ , et si le gradient est supérieur à  $g(C)$ , l'étalement diffusif domine et le gradient diminue vers  $g(C)$ .

On a donc la propriété:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \text{grad}(C) \rightarrow g(C)$$

où  $g(C)$  est une fonction de la concentration seule.

Ce raisonnement n'est certes pas tout à fait rigoureux dans le cas général des chocs, puisque l'évolution de ceux-ci vers un échelon a été montrée en prenant en compte le fait que le profil cesse d'être différentiable (d'où un auto-raidissement possible pour des concentrations telles que  $F''(C) < 0$ ). Or, en présence de diffusion, l'effet diffusif interdit la création d'échelon de concentration et le profil reste différentiable à toutes les concentrations.

Toutefois, le raisonnement est applicable dans le cas d'un choc ne mettant en jeu que des concentrations pour lesquelles  $F''$  est négative. Le profil évolue dans ce cas, en présence de la diffusion vers une forme d'"équilibre" pour laquelle les effets convectifs et diffusifs se

compensent, et un tel choc se propagera donc, aux temps longs, sans déformations (=fronts stationnaires). De plus, la vitesse de propagation de tels fronts stationnaires peut être calculée de la même façon que pour les échelons (cf III-4), en écrivant la conservation du volume des particules entre deux plans situés de part et d'autre du front (en utilisant le fait que le front est "encadré" par deux parties de concentration homogène). La vitesse de propagation trouvée, qui ne dépend pas de la forme du profil stationnaire, est alors la même que dans le cas de la propagation d'un échelon.

Comme la notion de choc ne fait intervenir que la vitesse de propagation des échelons  $W_e$ , les raisonnements utilisés lors de leur définition peuvent être reconduits de la même façon en considérant non plus des choc mais des profils stationnaires.

En effet, si l'on considère de nouveau l'intervalle des concentrations du choc  $[C_-, C_+]$ , sur lequel  $F''$  est négative, il est possible de montrer qu'il y a forcément, aux temps longs, un effet d'auto-raïdissement pour les concentrations du choc n'appartenant pas à cet intervalle. Car si tel n'était pas le cas, le gradient de concentration tendrait vers zéro à cause de la diffusion, et la suspension deviendrait "homogène" à ces différentes concentrations (à une échelle de temps tendant vers l'infini). Les hypothèses nécessaires au calcul de la vitesse de propagation du front stationnaire entre  $C_-$  et  $C_+$  seraient alors vérifiées, et cette vitesse imposerait là encore l'existence d'un effet d'auto-raïdissement pour les concentrations du choc n'appartenant pas au profil stationnaire.

La notion de choc reste donc valable en présence de diffusion, elle définit encore les concentrations pour lesquelles il y a auto-raïdissement d'origine convective. Le front évoluera donc, dans le cas d'un choc, vers un équilibre entre cet auto-raïdissement et l'étalement diffusif pour donner un profil stationnaire aux temps longs se propageant à la vitesse  $We(C_1; C_2)$  de l'échelon  $(C_1; C_2)$  correspondant. On appellera **fronts stationnaires** ces profils se propageant sans déformation, et on notera  $U_f$  leur vitesse de propagation  $We(C_1; C_2)$  mesurée dans le référentiel de sédimentation.

#### -cas 2: "Auto étalement" ( $F'' > 0$ )

Dans ce cas, les effets diffusif et convectif vont dans le même sens: l'élargissement du front. Le gradient de concentration va donc tendre vers zéro, tout comme le flux diffusif. Rapidement, l'effet convectif va donc dominer, et l'élargissement du front sera proportionnel au temps. Il est intéressant de remarquer que dans ce cas (aux temps longs), chaque concentration aura sa vitesse propre  $W(C)$  calculée en III-2 et donnée par la courbe de flux.

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow W(C) \rightarrow F'$$

Ces fronts, dont l'évolution aux temps longs est totalement décrite par l'étude locale de la convection, seront appelés **fronts convectifs**. Ils ne mettent en jeu que des concentrations auxquelles  $F''$  est positive, et présentent des processus diffusifs négligeables aux temps longs.

### III-6 Fronts stationnaires

Dans le cas d'un choc, le front entre  $C_1$  et  $C_2$  doit évoluer vers un front stationnaire se propageant à la vitesse constante  $U_f = W_e(C_1; C_2)$ . L'équation (3-1) peut donc être écrite dans le "référentiel du front" (cf figure III-7), c'est-à-dire dans le repère en translation uniforme ( $O_f, X$ ) se déplaçant à la vitesse du front, et dans lequel le profil est immobile:

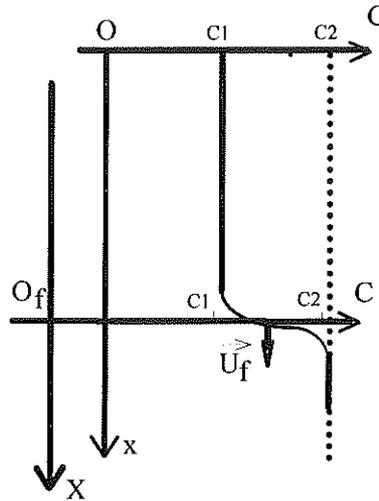


Figure III-7

Avec la nouvelle variable de position  $X = x - U_f t$ , l'équation (3-1) s'écrit:

$$\left( \frac{\partial C}{\partial t} \right)_x + \left( \frac{\partial (C(U - U_f))}{\partial X} \right)_t = \frac{\partial}{\partial X} \left( D \frac{\partial C}{\partial X} \right)_t \quad (3-11)$$

Comme la solution cherchée pour le profil de concentration doit être indépendante du temps dans ce référentiel, l'équation se simplifie:

$$\frac{d}{dX} (C(U - U_f)) = \frac{d}{dX} \left( D \frac{dC}{dX} \right) \quad (3-12)$$

$$\Rightarrow C[U(C) - U_f] - F^0 = D \frac{dC}{dX} \quad (3-13)$$

Les conditions aux limites (1) et (2) (formulées p.46) permettent de calculer aisément  $U_f$  et la constante d'intégration ( $-F^0$ ):

$$U_f = (C_2 \cdot U_2 - C_1 \cdot U_1) / (C_2 - C_1) \quad (3-14)$$

$$F^0 = - C_1 \cdot C_2 \cdot (U_2 - U_1) / (C_2 - C_1) \quad (3-15)$$

La vitesse du front est donc bien entendu la même que la vitesse calculée en III-5, mais ici encore, le plus intéressant est l'analyse graphique du résultat sur la courbe de flux.

Pour plus de clarté, définissons la fonction  $F_c(C)$  par la relation:

$$F_c(C) = C.[U(C)-U_f] - F^o \quad (3-16)$$

Cette fonction représente la valeur du flux convectif dans le référentiel du front.

A l'aide de la fonction  $F_c$ , l'équation d'un front stationnaire (3-12) devient:

$$D \frac{dC}{dX} = F_c(C) \quad (3-17)$$

$$\Rightarrow X = \int \frac{D(C)}{F_c(C)} dC \quad (3-18)$$

Les conditions aux limites (1) et (2), données p.46, s'écrivent simplement:

$$F_c(C_1) = F_c(C_2) = 0$$

Le profil stationnaire de concentration peut donc être obtenu sous forme implicite  $X(C)$  par un simple calcul de primitive (3-18), dès lors que la fonction de flux  $F(C)$  et le coefficient de diffusion  $D(C)$  sont connus.

Graphiquement, cette fonction  $F_c(C)$  est la différence entre la courbe de flux  $C.U(C)$  et la droite d'équation  $F^o + U_f.C$  (cf figure III-8). Les conditions aux limites imposent simplement que cette droite coupe la courbe de flux aux points d'abscisses  $C_1$  et  $C_2$ . Cette droite est donc la corde évoquée en III-5.

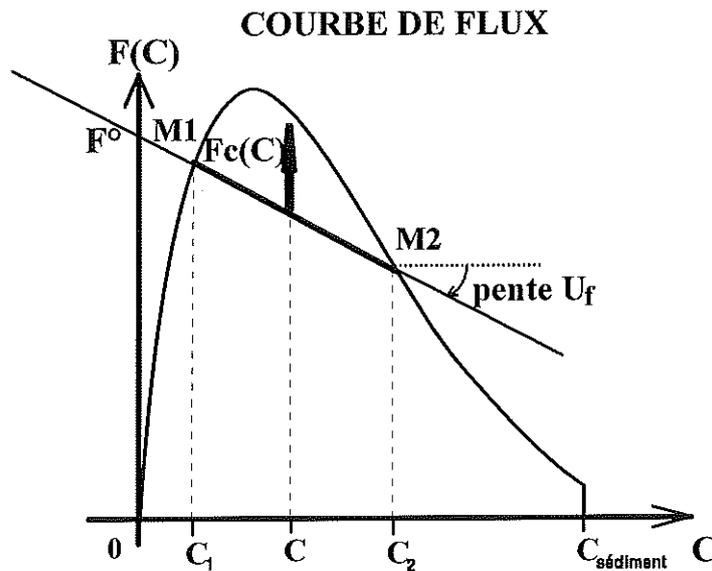


Figure III-8

$F_c(C)$  est donc totalement définie par les conditions aux limites, sous réserve que la fonction de flux soit connue. La seule condition que la solution décrite par l'équation (3-15) doive en plus remplir pour être correcte est la condition (3) de la définition des fronts:

$$(3): \forall x, \quad C_1 < C < C_2 \text{ et } \text{grad}(C) \geq 0$$

En tenant compte de l'équation (3-15), cette condition devient:

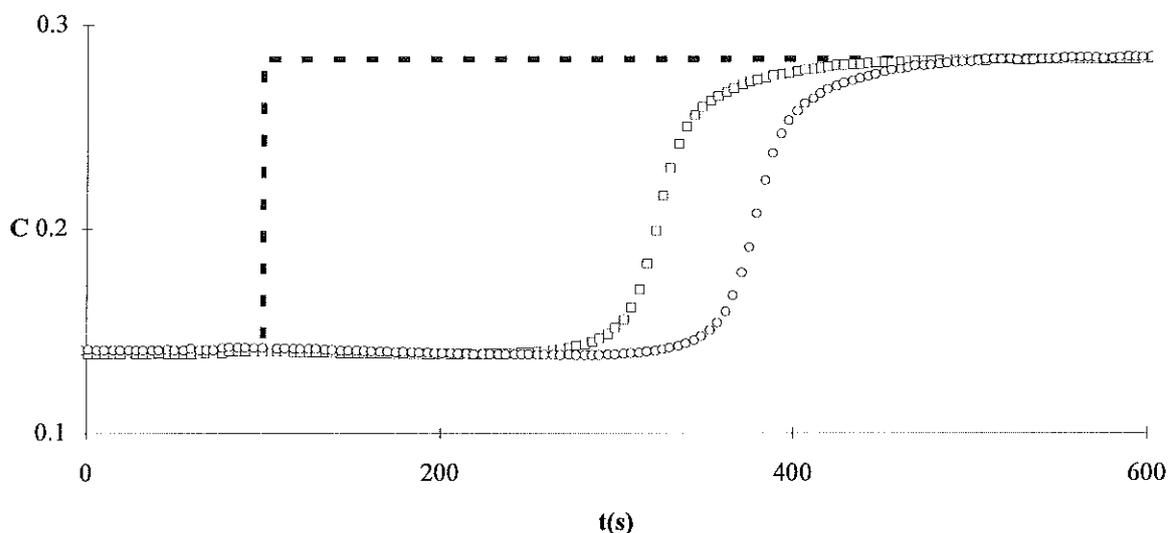
$$\forall C \in [C_1; C_2], \quad F_c(C) \geq 0$$

Il suffit donc que la courbe de flux soit au dessus de la corde  $[M_1; M_2]$  pour que la solution de front stationnaire définie par l'équation (3-15) puisse exister (cf figure III-8). On retrouve donc la définition donnée pour des **chocs**. Un front stationnaire peut donc exister entre  $C_1$  et  $C_2$  même si la condition  $F''(C) < 0$  n'est pas vérifiée sur toute la gamme  $[C_1; C_2]$ .

Pour mettre en évidence, expérimentalement, ces fronts stationnaires, le "même front" ( $C_1=13.8\%; C_2=28.5\%$ ) a été généré en imposant à l'injection ( $z=0$ ) deux profils de concentration différents. Les profils correspondant ont été mesurés à des distances suffisamment grandes de l'injection ( $z \sim 15\text{cm}$ ) pour que le régime transitoire des fronts soit achevé.

D'une part, un échelon de concentration a été généré par une diminution brutale de débit à  $t^\circ=100\text{s}$ , (cf figure III-9), et les profils ont été mesurés à 14cm et 17cm de l'injection.

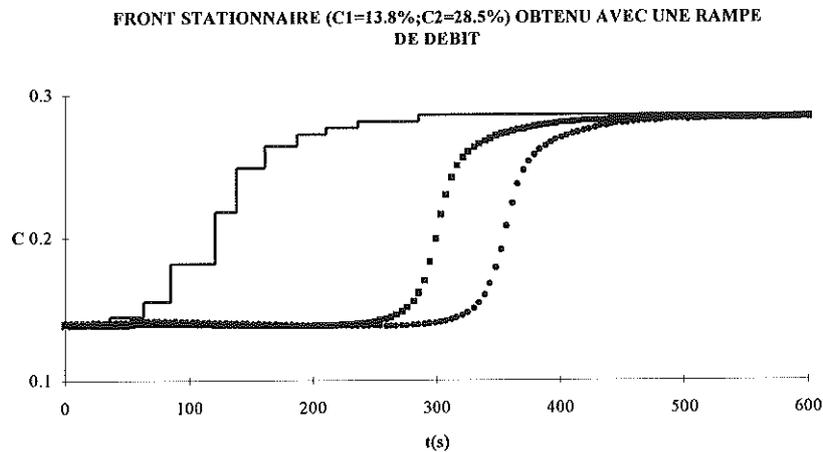
**FRONT STATIONNAIRE ( $C_1=13.8\%; C_2=28.5\%$ ) OBTENU AVEC UN ECHELON DE DEBIT**



**Légende:** ---:  $C(t)$  imposée en  $z=0$      $\square$ :  $C(t)$  mesurée en  $z=14\text{cm}$      $\circ$ :  $C(t)$  mesurée en  $z=17\text{cm}$

**Figure III-9**

D'autre part, ce même front a été obtenu en imposant une diminution de débit en escalier (sur 200s) conduisant à un profil de concentration à l'injection plus étendu que le front stationnaire attendu (cf figure III-10).

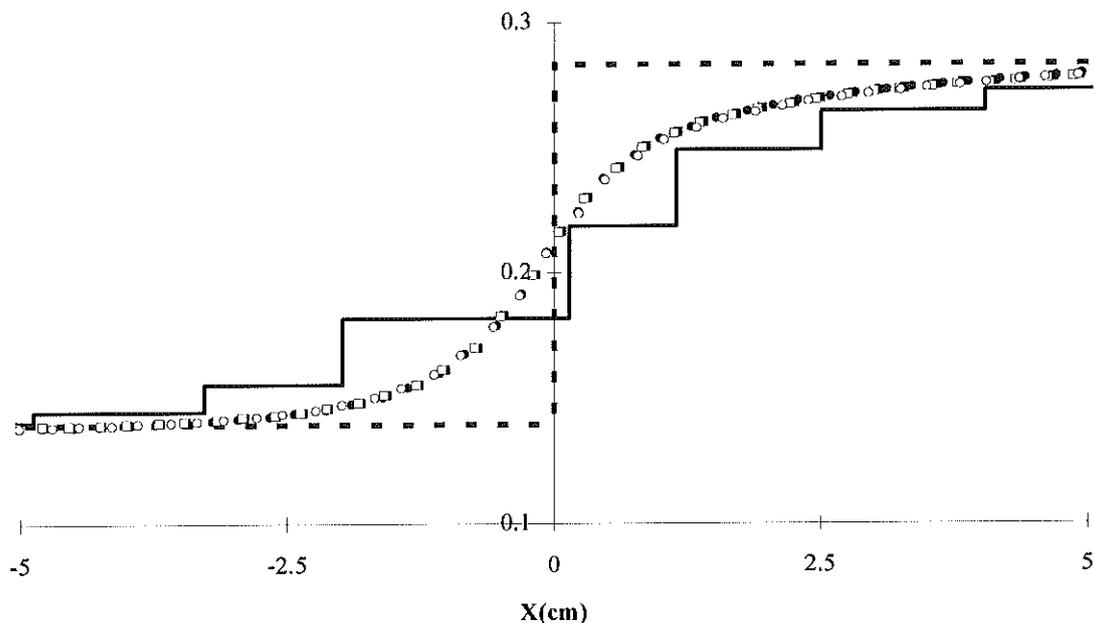


**Légende:** —:C(t) imposée en z=0    ■:C(t) mesurée en z=14cm    ●:C(t) mesurée en z=17cm

**Figure III-10**

Ces différents profils ont été tracés (figure III-11) dans leur référentiel propre  $X=x-U_f(t-t^0)$ , soit avec z la cote mesurée dans le référentiel du laboratoire et  $-U_2$  la vitesse débitante durant l'expérience  $X=-z+(U_f-U_2)(t-t^0)$ . La valeur de  $t^0$  dans le cas de la rampe de débit a pu être ajustée pour obtenir une superposition des courbes C(X).

**PROFILS STATIONNAIRES DANS LE REFERENTIEL PROPRE DU FRONT**



**Légende:**

front 1: --:C(X) imposée en z=0; ■:C(X) mesurée en z=14cm; o:C(X) mesurée en z=17cm  
 front 2: —:C(X) imposée en z=0; ■:C(X) mesurée en z=14cm; ●:C(X) mesurée en z=17cm

**Figure III-11**

L'expérience décrite figure III-9 montre que la diffusion, dominante dans l'échelon de concentration initial, conduit au profil stationnaire. L'expérience décrite figure III-10 prouve non seulement qu'un profil initialement "trop étalé" est réduit par l'effet convectif au profil stationnaire, mais aussi que ce profil obtenu aux temps longs n'est pas influencé par les détails du profil initial (ici, marches d'escalier) qui sont localement "gommés" par diffusion.

**Ces profils observés aux temps longs sont donc effectivement des fronts stationnaires: ils se propagent sans déformation à vitesse constante, et leur forme comme leur vitesse ne dépendent que des conditions aux limites  $C_1$  et  $C_2$ , dès lors que celles-ci définissent un choc.**

### III-7 Fronts convectifs

Sur les plages de concentration où la dérivée seconde de la fonction de flux  $F''(C)$  est positive, l'analyse qualitative laisse prévoir aux temps longs, des fronts convectifs, s'étalant proportionnellement au temps, et pour lesquels la diffusion est devenue négligeable devant la convection.

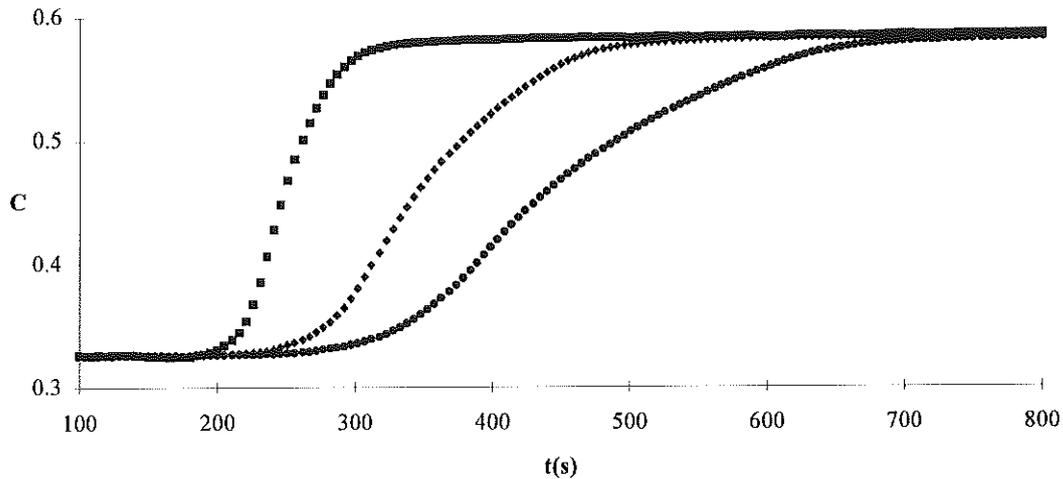
Considérons un front entre les concentrations  $C_1$  et  $C_2$  telles que la condition  $F''(C) > 0$  soit remplie sur toute la gamme de concentrations mises en jeu  $[C_1; C_2]$ . Les arguments développés en III-3 dans le cas de l'auto-étalement local sont alors valables sur le profil entier, et la diffusion devrait effectivement devenir négligeable, aux temps longs, sur tout le profil. Dans ce cas, s'il est impossible de donner une équation du front (qui dépendrait des conditions initiales), l'évolution temporelle du profil est, quant à elle, connue: le front, pour des temps suffisamment grands s'étalera proportionnellement au temps et la vitesse de chaque concentration sera constante et égale à la dérivée de la fonction de flux à la concentration considérée,  $W(C) = F'(C)$  pour  $t \rightarrow \infty$ .

Il est à remarquer, ici, que contrairement aux fronts stationnaires, la condition  $F''(C) > 0$  doit être remplie sur tout l'intervalle de concentration considéré; c'est une condition nécessaire et suffisante pour avoir des fronts convectifs s'étalant proportionnellement au temps. Graphiquement, la corde correspondant au front sur la courbe de flux sera bien sûr toujours au-dessus de la courbe mais il ne s'agira dans ce cas que d'une condition nécessaire et non plus suffisante.

En effet, l'auto-étalement convectif est un phénomène complètement local et ne fait pas intervenir les conditions aux limites; il est donc naturel que la condition de son existence soit elle aussi locale et ne fasse intervenir les concentrations  $C_1$  et  $C_2$  qu'en tant que bornes de l'intervalle d'étude.

Un exemple de front convectif ( $C_1 = 33\%; C_2 = 59\%$ ) obtenu par une diminution brutale de débit (échelon de concentration) a été mesuré en trois cotes différentes (figure III-12).

**FRONT CONVECTIF (C1=33%;C2=59%) OBTENU AVEC UN ECHELON DE DEBIT**

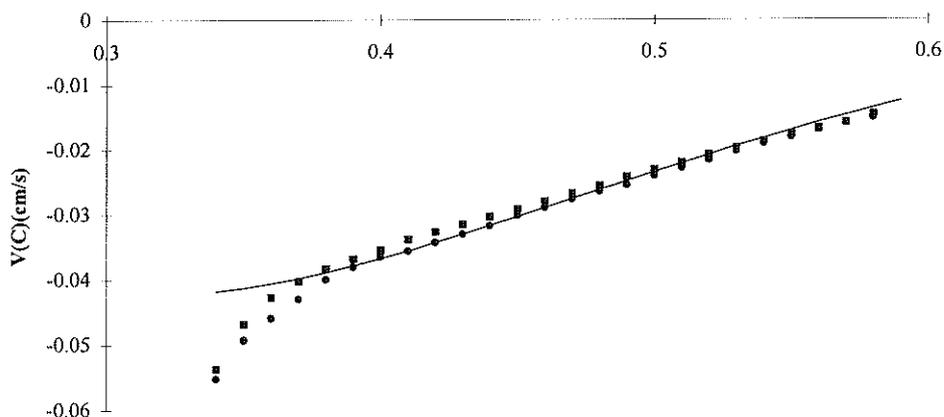


**Légende:** ■:C(t) mesurée en  $z_1=2\text{cm}$  ◆:C(t) mesurée en  $z_2=5\text{cm}$  ●:C(t) mesurée en  $z_3=8\text{cm}$

**Figure III-12**

Pour tester la nature de ce profil mesuré, la vitesse  $W(C)$  a été mesurée tous les 1% en concentration. Pour chaque valeur de  $C$  considérée, les instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ , pour lesquels  $C$  se trouve respectivement aux cotes  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ , ont été mesurés (en approximant chaque profil mesuré par une ligne polygonale joignant les points expérimentaux). La vitesse de la concentration dans le référentiel du laboratoire est alors égale à  $(z_2-z_1)/(t_2-t_1)$  et dans le référentiel de sédimentation à  $W(C) = - (z_2-z_1)/(t_2-t_1) - U_2$ , ( $-U_2$ ) étant la vitesse débitante durant l'expérience. La figure III-13 montre les mesures de  $W(C)$  obtenues.

**DEPENDANCE DE LA VITESSE AVEC LA CONCENTRATION DANS UN FRONT CONVECTIF**



**Légende:** —:F'(C) calculée par Richardson-Zaki ( $p=5.35$ )  
 ■:W(C) calculée entre  $z_1$  et  $z_2$  ●:W(C) calculée entre  $z_2$  et  $z_3$

**Figure III-13**

Cette figure montre clairement une dépendance de la vitesse avec la concentration, contrairement au cas du front stationnaire. De plus les vitesses calculées à deux cotes différentes (c'est-à-dire à deux instants différents) sont les mêmes et correspondent bien à la dérivée de la fonction de flux  $F'$ . La légère différence qui apparaît toutefois aux faibles concentrations peut s'expliquer par le fait qu'à ces concentrations la vitesse est calculée à des temps relativement courts, pour lesquels le régime convectif n'est pas encore tout à fait établi. De plus, les incertitudes de mesures de  $W(C)$  sont d'autant plus importantes, expérimentalement, que le gradient de concentration tend vers zéro, c'est-à-dire pour les concentrations proches des concentrations limites  $C_1$  et  $C_2$ . Pour de telles mesures, il est donc nécessaire de trouver un compromis pour les valeurs du gradient afin que les mesures soient exploitables tout en s'assurant que la diffusion est effectivement négligeable.

### III-8 Fronts mixtes

Dans le paragraphe III-6, il a été montré qu'un front stationnaire pouvait se développer entre une concentration  $C_1$  et une concentration  $C_2$  supérieure à la concentration du point d'inflexion de la courbe de flux. Il suffisait pour cela que la corde correspondant au front soit complètement au-dessous de la courbe de flux (choc).

Dans le cas où cette corde coupe la courbe de flux (ce qui suppose que  $C_1$  et  $C_2$  soient de part et d'autre du point d'inflexion), la nature du front reste indéterminée, celui-ci ne satisfaisant ni aux critères des fronts stationnaires, ni à ceux des fronts convectifs. Il est cependant possible d'envisager, aux temps longs, un profil décomposable en un front stationnaire ( $C_1 < C < C_0$ ) et un front convectif ( $C_0 < C < C_2$ ).

Dans l'hypothèse d'une telle solution, on peut imaginer que si  $C_0$  appartient à la fois à un front stationnaire et un front convectif, la vitesse de déplacement de cette concentration doit être la même dans l'un et l'autre des fronts, et on a en  $C_0$  la condition suivante:

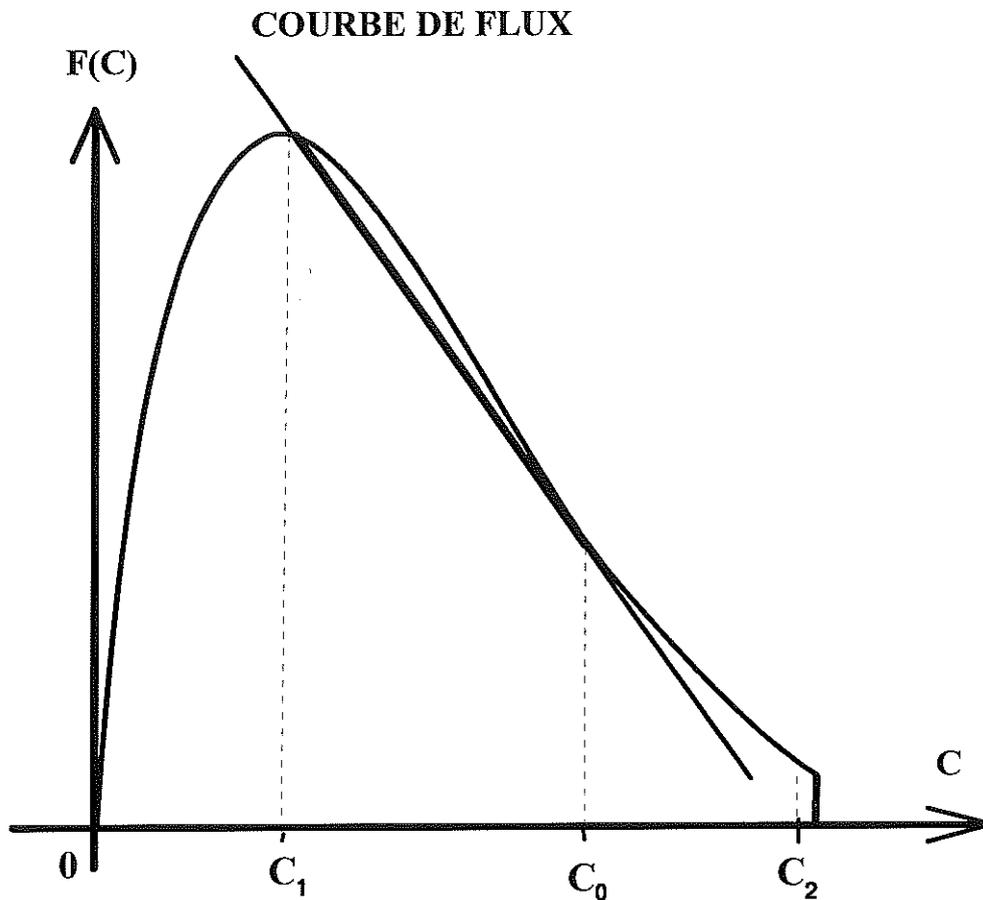
$$W(C_0) = U_f \Leftrightarrow F'(C_0) = (C_0 \cdot U(C_0) - C_1 \cdot U_1) / (C_0 - C_1) \quad (3-19)$$

Graphiquement, la condition (3-19) signifie que  $C_0$  est la concentration pour laquelle la corde de la courbe de flux  $[C_1; C_0]$  est tangente à la courbe en  $C_0$  (cf figure III-14)

Si l'on suppose que le front stationnaire s'arrête à une concentration  $C^- < C_0$ , alors sa vitesse  $U_f^-$  est supérieure à  $F'(C_0^-)$  et pour  $dC > 0$  suffisamment petit, on a également  $U_f^- > F'(C_0^- + dC)$ . La tranche de concentration  $C_0^-$  faisant partie du front stationnaire rattrape donc la tranche  $(C_0^- + dC)$  du front convectif et on a localement, un effet d'auto-raïdissement entre  $C_0^-$  et  $C_0^- + dC$ , ce qui revient à dire que  $C_0^- + dC$  est intégrée au front stationnaire.

De plus ce front stationnaire ne peut pas inclure des concentrations supérieures à  $C_0$ , car alors, la corde correspondante ne serait plus entièrement au dessous de la courbe de flux et la condition nécessaire et suffisante d'existence du front stationnaire ne serait plus vérifiée. En d'autres termes, toutes les concentrations supérieures à  $C_0$  ne sont pas soumises à une fonction

d'auto-raïdissement de type  $F_c(C)$ , et comme pour ces concentrations, la dérivée seconde de la fonction de flux est positive, elles ne peuvent donner lieu qu'à un profil de type convectif.



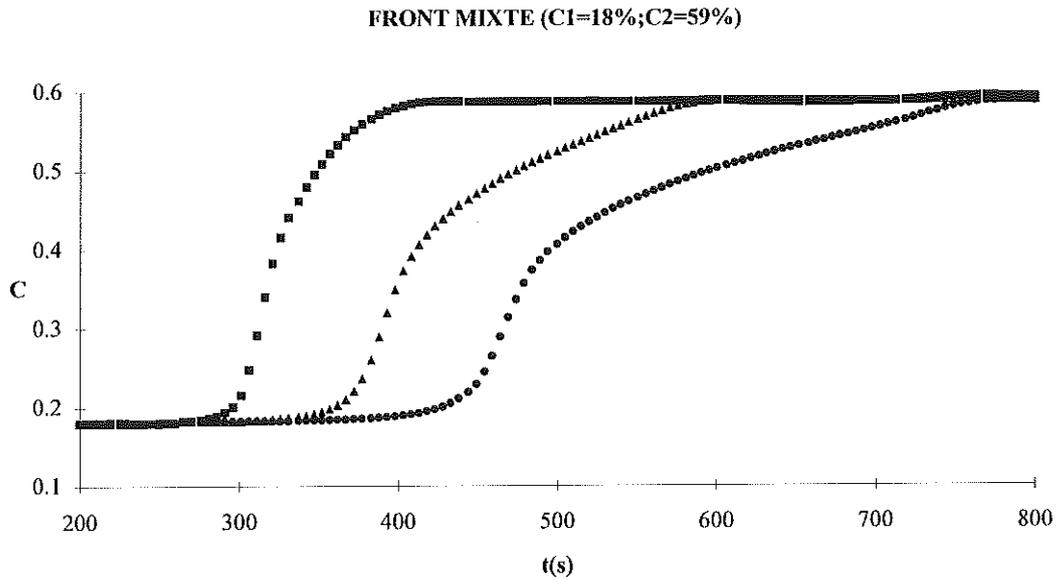
**Figure III-14**

De plus, aux temps longs  $C_0$  faisant partie d'un front convectif, le gradient de concentration en  $C_0$  doit tendre vers 0 aux temps longs. Et ceci est compatible avec l'équation d'un front stationnaire entre  $C_1$  et  $C_0$ .

Enfin, il a été montré (cf III-4) que les concentrations telles que  $F''(C) < 0$  ne peuvent évoluer localement que vers un profil stationnaire, et on sait que le seul profil stationnaire pouvant exister est le front entre les concentrations  $C_1$  et  $C_0$ , qui permet le développement d'un front convectif entre  $C_0$  et  $C_2$ .

Ceci suffit donc à montrer que le profil se développant entre deux concentrations  $C_1$  et  $C_2$  définissant une corde coupant la courbe de flux, est un **front mixte** aux temps longs, décomposable en un front stationnaire ( $C_1; C_0$ ) et un front convectif ( $C_0; C_2$ ), où  $C_0$  est la concentration pour laquelle la corde  $[C_1; C_0]$  tangente la courbe de flux en  $C_0$ .

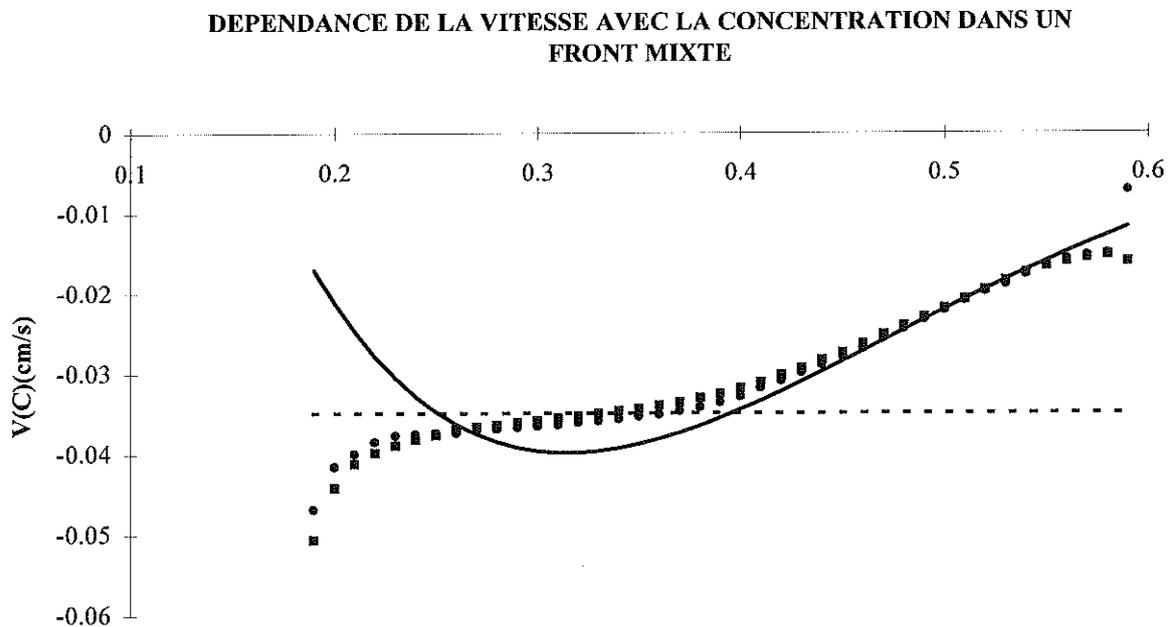
Le front mixte correspondant à la figure III-14 ( $C_1=18\%; C_2=59\%$ ) a été mesuré en trois cotes différentes (figure III-15).



**Légende:** ■:C(t) en z1= 2cm      ◆:C(t) en z2= 5cm      ●:C(t) en z3= 8cm

**Figure III-15**

De la même manière que pour le front convectif en III-6, les vitesses  $W(C)$  ont été mesurées et portées figure III-16.



**Légende:** —:  $W(C)$  calculée par Richardson-Zaki ( $p=5.35$ )  
 ---:  $U_f$  vitesse de propagation du front stationnaire ( $C1=18\%;C0=40\%$ )  
 ■:  $W(C)$  calculée entre z1 et z2      ●:  $W(C)$  calculée entre z2 et z3

**Figure III-16**

Ici encore, les vitesses  $W(C)$  sont en bon accord avec les valeurs attendues, calculées avec la corrélation de Richardson-Zaki pour  $p=5.35$  :

$$-W(C) \approx U_f \text{ pour } C_1 < C < C_0, \text{ avec } C_0=40\% \text{ (cf figure III-13),}$$

$$\text{et } U_f = [C_0 U(C_0) - C_1 U(C_1)] / (C_0 - C_1)$$

$$-W(C) \approx F' \text{ pour } C_0 < C < C_2$$

De la même façon que dans l'exemple de front convectif (cf III-7), les écarts entre les courbes et les points expérimentaux surviennent pour les concentrations auxquelles le flux diffusif n'est pas encore tout à fait négligeable, et pour lesquelles en toute rigueur,  $W(C)$  devrait être comparée avec son expression (3-6).

### III-9 Fronts de faible amplitude

Pour des sauts de concentration suffisamment faibles, il est possible de faire des approximations simplificatrices permettant de décrire les fronts à tout instant.

L'approximation conduisant au résultat le plus classique consiste à ne retenir que l'ordre 0 en  $C$  pour les différentes grandeurs intervenant dans l'équation (3-1), qui s'écrit:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x + \frac{dF}{dC} \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_t \quad (3-20)$$

Pour un front entre les concentrations  $C_0 - \Delta C$  et  $C_0 + \Delta C$ , les valeurs de  $F'$  et  $D$  peuvent être considérées comme constantes dès lors que l'amplitude du front ( $2\Delta C$ ) est faible, et l'équation (3-20) devient:

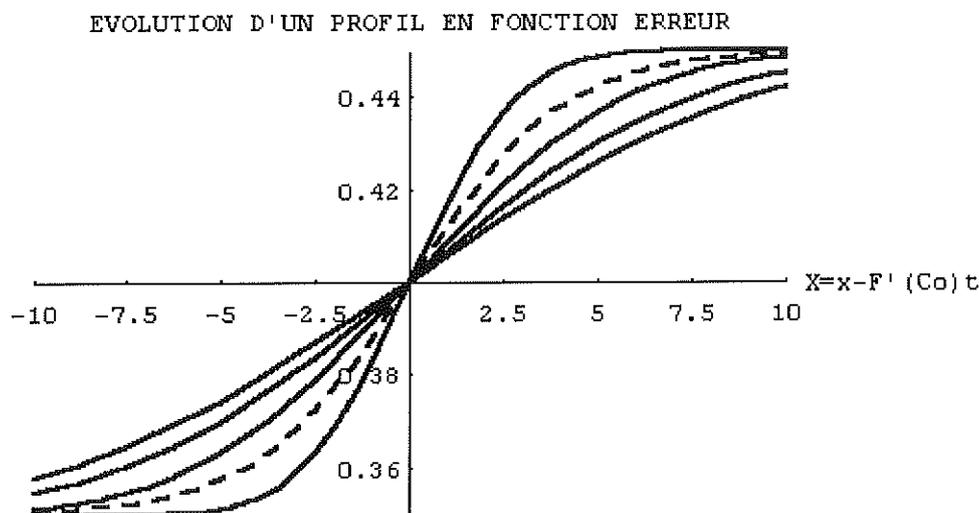
$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x + F'(C_0) \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t = D(C_0) \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_t \quad (3-21)$$

L'équation (3-21) est une équation de diffusion-convection à coefficients constants, la réponse à un échelon est le profil en fonction erreur classique:

$$C(x;t) = C_0 + \Delta C \cdot \text{erf} \left[ (x - F'(C_0)t) / \sqrt{4D(C_0)t} \right] \quad (3-22)$$

Toutefois, cette solution, si elle a le mérite d'être familière, ne donne pas une très bonne description du phénomène physique. En effet, elle décrit le front, à tout instant, comme un profil se déplaçant à une vitesse  $F'(C_0)$  et s'étalant proportionnellement à la racine carrée du temps (exemple représenté à différents instants dans le référentiel du front figure III-17). Or, il a été montré en III-6 que si la concentration  $C_0$  était inférieure à la concentration du

point d'inflexion de la courbe de flux, le front évoluait alors vers un profil stationnaire (tracé en pointillés sur la figure III-17).



**Légende:** —:  $C(X;t)$  en fonction erreur (3-22) tracée pour  $t=50+n150$  ( $n=0;1;2;3$ )  
 ---: front stationnaire (3-25)  
 Pour:  $C_0=0.4$ ;  $\Delta C=0.05$ ;  $F'(C_0)=-0.15$ ;  $F''(C_0)=-0.5$ ;  $D=0.05$

**Figure III-17**

Dans le profil considéré, le gradient en  $C_0$  ne tend pas vers zéro comme dans la solution en **erf** mais vers une constante calculable par l'équation (3-17):

$$\text{en } C=C_0, \quad \text{grad}(C) \rightarrow F_c(C_0)/D(C_0) \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty$$

Où  $F_c(C_0)$  est la différence entre la courbe de flux et sa corde  $[C_0-\Delta C ; C_0+\Delta C]$ .

Or, en considérant  $F'$  constante sur l'intervalle de concentrations du front, la corde a précisément été confondue avec la tangente: Ceci revient en fait à négliger les phénomènes d'auto-étalement et d'auto-raïdissement! Pour en rendre compte, il est donc nécessaire d'aller à un ordre supérieur pour approximer  $F'$  dans (3-20) et faire intervenir la dérivée seconde de la fonction de flux:

$$F'(C) = F'(C_0) + F''(C_0) (C - C_0) \quad (3-23)$$

L'équation (3-20) s'écrit alors:

$$\left( \frac{\partial C}{\partial t} \right)_x + [F'(C_0) + F''(C_0) \cdot (C - C_0)] \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_t = D(C_0) \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right)_t \quad (3-24)$$

C'est maintenant d'une **équation de Burger** [Whitham] dont il s'agit!

Pour  $F''(C_0) < 0$ , on peut aisément calculer et inverser la primitive (3-18); le profil stationnaire aux temps longs, déjà trouvé par Taylor en 1910, est alors une tangente hyperbolique:

$$C(x;t) = C_0 + \Delta C \cdot \text{th} \left[ -\frac{F''(C_0) \cdot \Delta C}{2 \cdot D(C_0)} (x - x_0 - F'(C_0) \cdot t) \right] \quad (3-25)$$

Dans le cadre de cette approximation  $F'(C_0)$  est la vitesse de propagation du front stationnaire  $U_f$  définie en III-6.

Mais plus encore, l'équation (3-24) est également intégrable, et la réponse temporelle à un échelon de concentration, conduisant à (3-25) dans la limite des temps longs, peut être calculée à tout instant  $t$  !

Pour effectuer ce calcul, il convient d'effectuer successivement dans (3-24) les changements de variables suivants:

$$\begin{aligned} 1- \quad \varphi &= (C-C_0)F''(C_0)+F'(C_0) \\ (3-25) \Leftrightarrow \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x + \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t &= D(C_0) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_t \end{aligned} \quad (3-26)$$

$$\begin{aligned} 2- \quad \varphi &= \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t \\ (3-26) \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi_t + \frac{1}{2} \psi_x^2 - D \psi_{xx} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3-27)$$

Avec les notations  $D=D(C_0)$  et  $\psi_\alpha = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)$

Comme  $\psi$  a été définie à une fonction de  $t$  près, la constante d'intégration  $f(t)$  de (3-27) peut être omise (ou réinjectée dans  $\psi_t$ ) et l'équation (3-27) devient:

$$\psi_t + \frac{1}{2} \psi_x^2 - D \psi_{xx} = 0 \quad (3-28)$$

$$\begin{aligned} 3- \quad \psi &= -2D \ln(\xi) \\ (3-28) \Leftrightarrow \quad \xi_t &= D \cdot \xi_{xx} \end{aligned} \quad (3-29)$$

Les changements de variables 2 et 3, permettant de transformer l'équation de Burger (3-26) en équation de la chaleur (3-29) sont connus sous le nom de transformation de Cole-Hopf [Whitham]. En utilisant les résultats de la résolution de l'équation de la chaleur, il est

possible de calculer l'évolution temporelle d'un profil de concentration en fonction du profil initial:

$$C = C^{\circ}(x) \quad \text{à } t = 0$$

Pour les conditions initiales  $\xi^{\circ}(x)$  à  $t=0$ , la résolution de l'équation de la chaleur (3-29) donne:

$$\xi(x; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{\circ}(\alpha) \cdot \exp\left[-\frac{(x-\alpha)^2}{4Dt}\right] \cdot d\alpha \quad (3-30)$$

Ce qui donne pour  $C(x;t)$  l'expression:

$$C(x; t) = C_0 + \frac{1}{F''(C_0)} \left[ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\alpha)}{t} \exp[-G(\alpha)/(2D)] \cdot d\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-G(\alpha)/(2D)] \cdot d\alpha} - F'(C_0) \right] \quad (3-31)$$

Avec:

$$G(\alpha) = \frac{(x-\alpha)^2}{2t} + [F'(C_0) - C_0 \cdot F''(C_0)]\alpha + F''(C_0) \int_0^{\alpha} C^{\circ}(x) \cdot dx \quad (3-32)$$

Ainsi, la réponse à un échelon entre les concentrations  $C_0 - \Delta C$  et  $C_0 + \Delta C$  imposé en  $x=0$  à  $t=0$  est donnée par (3-31) et peut s'écrire après simplifications:

$$C(x; t) = C_0 + \Delta C \left[ 1 - \frac{2}{1 + h(x; t) \cdot \exp\left[-\frac{F''(C_0) \cdot \Delta C}{D} (x - F'(C_0) \cdot t)\right]} \right] \quad (3-33)$$

Avec:

$$h(x; t) = \frac{\int_{-u_1}^{+\infty} \exp(-u^2) \cdot du}{\int_{u_2}^{+\infty} \exp(-u^2) \cdot du} = \frac{1 + \operatorname{erf}(u_1)}{1 - \operatorname{erf}(u_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_1 = \frac{x - (F'(C_0) + F''(C_0) \cdot \Delta C) \cdot t}{\sqrt{4Dt}} \\ u_2 = \frac{x - (F'(C_0) - F''(C_0) \cdot \Delta C) \cdot t}{\sqrt{4Dt}} \end{cases} \quad (3-34)$$

L'expression (3-33) peut également s'écrire:

$$C(x;t) = C_0 + \Delta C. \operatorname{th} \left[ -\frac{F''(C_0) \cdot \Delta C}{2D} (x - F'(C_0) \cdot t) + g(x;t) \right] \quad (3-35)$$

Avec:

$$g(x;t) = \frac{1}{4} \ln[h(x;t)] \quad (3-36)$$

Pour des fronts de faible amplitude, le profil  $C(x;t)$ , généré par un échelon de concentration en  $x=0$  à  $t=0$ , peut donc être calculé, quel que soit le signe de  $F''(C_0)$ , et on obtient ainsi l'évolution des profils aux temps courts vers des fronts stationnaires ou des fronts convectifs.

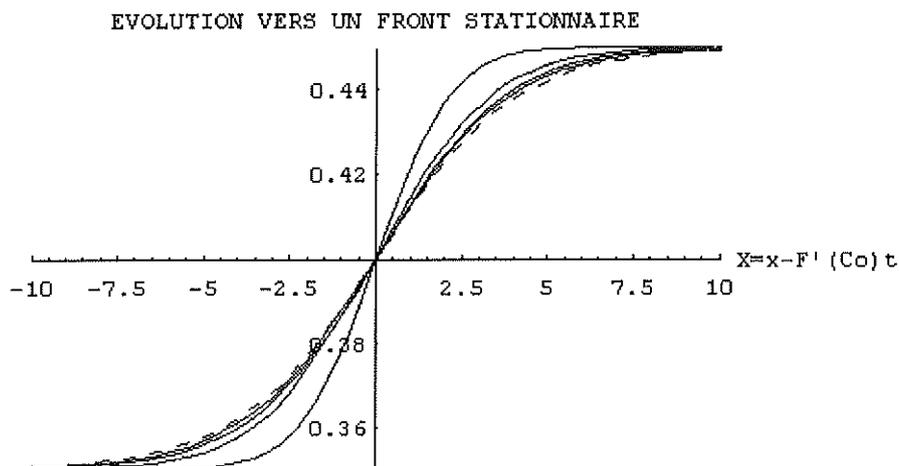
De plus, l'équation (3-34) fait apparaître l'échelle de temps caractéristique  $t_c$  de l'évolution des profils:

$$t_c = \frac{4D}{(F''(C_0) \cdot \Delta C)^2} \quad (3-37)$$

Les descriptions des fronts aux "temps longs" (front stationnaire ou front convectif) sont donc applicables pour des temps  $t \gg t_c$ . Le temps caractéristique  $t_c$  sera d'autant plus faible que l'amplitude des fronts sera importante. Pour être plus précis, ce temps caractéristique varie comme l'inverse du carré des effets de raidissement (ou d'étalement) convectifs (= amplitude de la fonction  $F_C$ ).

On peut vérifier que pour  $F''(C_0) < 0$ ,  $g \rightarrow 0$  quand  $t \gg t_c$ , et on retrouve bien qu'alors, le profil tend vers la forme stationnaire donnée par (3-25).

L'évolution du profil donnée par (3-35) est représentée figure III-18, pour les mêmes paramètres que dans l'exemple donné figure III-17.



**Légende:** ---:  $C(X;t)$  donnée par (3-35) tracée pour  $t=50+n150$  ( $n=0;1;2;3$ )

---: front stationnaire (3-25)

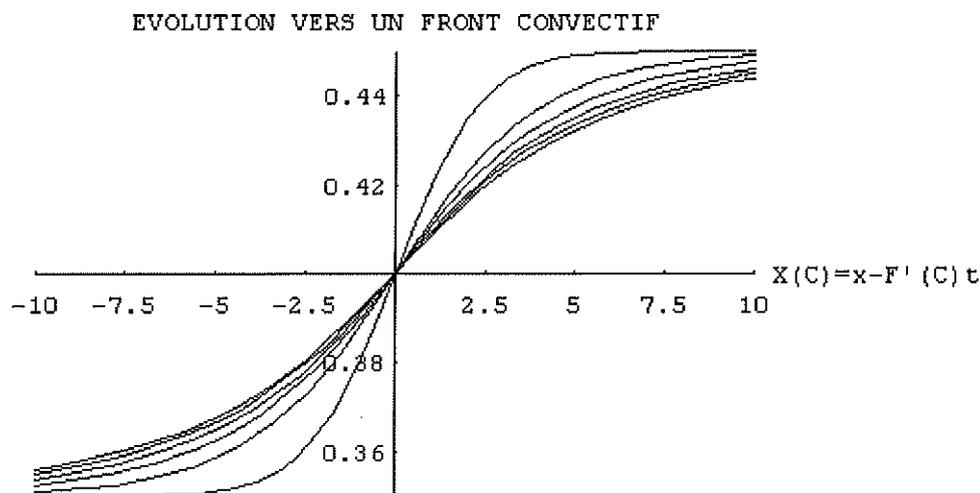
Pour:  $C_0=0.4$ ;  $\Delta C=0.05$ ;  $F'(C_0)=-0.15$ ;  $F''(C_0)=-0.5$ ;  $D=0.05$

**Figure III-18**

Pour le front de la figure III-18, le temps caractéristique est de l'ordre 400, et le profil stationnaire est déjà pratiquement atteint pour  $t=350$ . Dans le cas des fronts stationnaires, le régime transitoire des profils est donc rapide, et  $t_c$  donne une bonne estimation de sa durée.

Il est à noter que les formes des fronts, obtenues avec la solution en fonction erreur ou avec l'équation (3-35) tenant compte de l'effet d'auto-raïdissement convectif, sont assez similaires (figures III-17 et III-18). Expérimentalement, l'évolution aux temps courts d'un choc généré par un échelon peut être décrite par l'équation (3-22) de façon satisfaisante si l'on sous-estime le coefficient de diffusion. C'est l'erreur qui avait été commise lors des premières analyses de l'élargissement du front surmontant la suspension dans des expériences de sédimentation [Davis et Hassen]. Les mesures du coefficient de dispersion hydrodynamique qui en avaient été déduites avaient alors été sous-estimées d'un facteur de l'ordre de cinq [Martin et al 1].

Pour  $F''(C_0) > 0$ , le comportement aux temps longs ( $t \gg t_c$ ) du profil donné par l'équation (3-35) est beaucoup moins évident que dans le cas des chocs. Sur la figure III-19, un tel profil (mêmes paramètres que dans l'exemple précédent, au signe de  $F''(C_0)$  près) a été représenté à différents instants en fonction de la variable de position  $X(C) = x - F'(C)t$  avec  $F'(C) = F'(C_0) + F''(C_0)(C - C_0)$ .



**Légende:** —:  $C(X(C);t)$  donnée par (3-35) tracée pour  $t=50+n150$  ( $n= 0; 1; 2; 3; 4; 5$ )  
 Pour:  $C_0=0.4; \Delta C=0.05; F'(C_0)=0.15; F''(C_0)=-0.5; D=0.05$

**Figure III-19**

En fonction de la variable  $X(C)$ , le profil tend vers un profil "pseudo-stationnaire" (car la vitesse de propagation  $W(C)$  de chaque concentration  $C$  tend vers  $F'(C)$ ). Pour une échelle de temps  $T$  donnée, il existe un temps au bout duquel l'évolution du profil à l'échelle de temps  $T$  est correctement décrite par un front convectif. Par exemple, à l'échelle de temps  $T=150$ , l'approximation par un front convectif du profil de la figure III-19 est correcte pour  $t > 650$  (les profils  $C(X(C);t)$  à  $t=650$  et  $t=800$  peuvent être considérés comme confondus).

Cependant, le profil asymptotique de  $C(X(C);t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , est le profil uniforme  $C(X(C);t=\infty) = C_0$ .

Les fronts convectifs ne décrivent donc correctement l'évolution du profil que sur une échelle de temps donnée, à partir d'un temps donné. En effet, l'élargissement diffusif existe toujours, et même s'il tend vers zéro, intégré sur une durée infinie, son effet devient infini!

Il n'en reste pas moins que la relation  $W(C) = F'(C)$  est valable avec une très bonne précision pour  $t \gg t_c$ .

## IV RESULTATS EXPERIMENTAUX

### **IV-1 Flux et vitesse de sédimentation**

Des mesures de la vitesse de sédimentation  $U(C)$ , ont été obtenues en mesurant la concentration en régime permanent pour différentes vitesses débitantes  $V_d$  imposées dans le lit fluidisé. D'après la relation (1-20),  $U(C) = V_d$ , la vitesse de sédimentation peut être donnée par la courbe  $V_d(C)$ , déjà présentée dans le chapitre II (figure II-9). Il est à noter que  $U(C)$  a également été mesurée par la vitesse de chute du front situé en haut de la suspension lorsque l'on coupe le débit (expérience de sédimentation classique dont l'état initial est contrôlé par le lit fluidisé). Les mesures directes de  $U(C)$  ainsi obtenues redonnent la valeur de la vitesse débitante initialement imposée dans le lit, ce qui justifie la relation (1-20), mais qui confirme surtout que la vitesse des parois dans le référentiel de sédimentation (nulle dans les expériences de sédimentation et non-nulle dans un lit fluidisé) n'a pas d'influence sur le comportement de la suspension, en tout cas en ce qui concerne la vitesse de sédimentation.

Cependant, il apparaît au chapitre III que la description des fronts susceptibles de se propager dans les suspensions ne fait pas appel à la courbe  $U(C)$  mais à la courbe de flux  $F(C)=C U(C)$ . Or, la loi de corrélation empirique de Richardson-Zaki a été établie pour  $U(C)$ , et ne donnera donc pas forcément une très bonne estimation de  $F(C)$ , et encore moins de  $F'$  et  $F''$ , dont dépend pourtant la nature des profils de concentration.

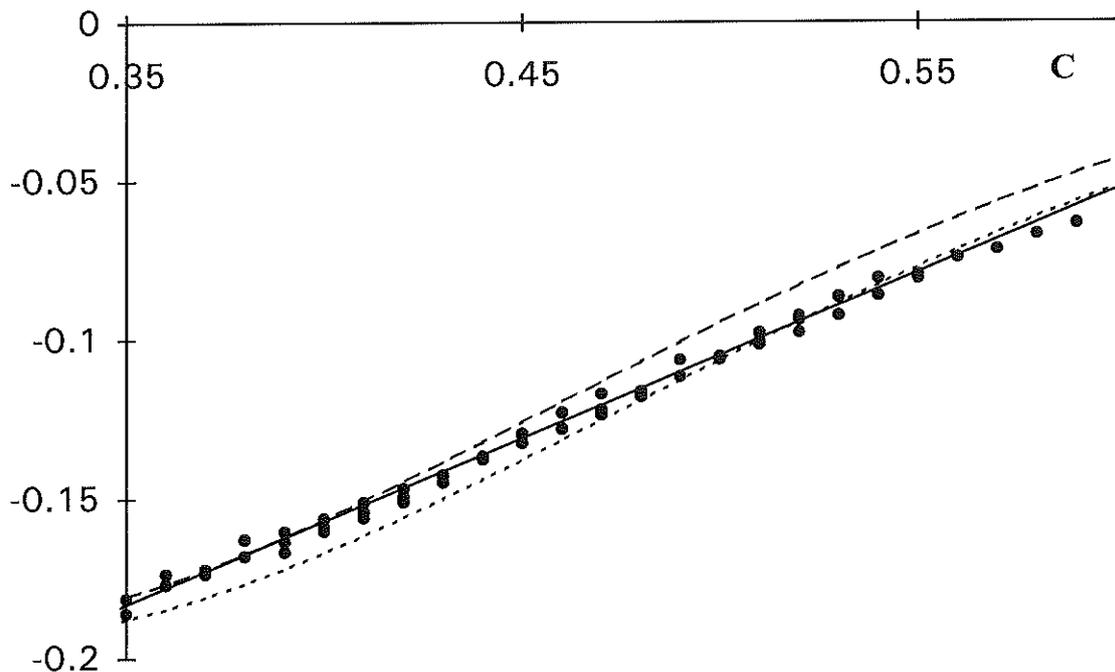
La robustesse de la loi de Richardson-Zaki appliquée à l'estimation de  $F(C)$  peut être testée par une étude des "fronts convectifs" et des "fronts mixtes" définis en III-7 et III-8. L'étude des profils convectifs permet en effet de mesurer  $F'(C)$  sur toute la partie convexe de la courbe de flux (pour des concentrations comprises entre le point d'inflexion de  $F(C)$ ,  $C_i$ , et la concentration de sédiment) [Martin et al 2].

En pratique, il est très difficile de mesurer  $F'$  en  $C_i$  et en  $C_{sed}$  puisqu'il faudrait pour cela générer des fronts convectifs en partant d'une vitesse débitante exactement égale à  $U(C_i)$  et en choisissant une vitesse débitante finale exactement égale à la vitesse minimum de fluidisation  $U(C_{sed})$ . Or la concentration du sédiment varie suivant les conditions initiales (cf IV-2), et la concentration dans le lit fluidisé n'est pas rigoureusement uniforme dans la partie homogène de la suspension en raison de la polydispersité, même faible, des particules. Aucune condition portant sur la concentration moyenne dans le lit fluidisé ne peut donc être rigoureusement réalisée sur l'ensemble de la suspension.

Cependant, la mesure de la vitesse de propagation de chaque concentration dans les fronts convectifs a tout de même permis d'estimer la dérivée du flux  $F'(C)$  avec une très bonne précision sur la gamme de concentration 35%-55% (figure IV-1).  $f(C)$  désigne la dérivée de

la fonction de flux normalisée par la vitesse de Stokes  $U^0$  ( $f(C) = F(C)/U^0$ ). Cette normalisation présente bien sûr l'avantage de tracer une courbe indépendante de la suspension utilisée, mais permet également de s'affranchir des effets de température ( la vitesse de Stokes  $U^0$  est calculée avec la viscosité du fluide à la température de l'expérience).

### Dérivée de la courbe de flux normalisée (f')



- Légende:**
- : mesures de  $f'$  dans des fronts convectifs
  - :  $f'$  par Richardson-Zaki avec  $p=5.6$
  - .-:  $f'$  par Richardson-Zaki avec  $p=5.35$
  - : droite:  $0.52 C - 0.365$

**Figure IV-1**

Les mesures de  $f'(C)$  réalisées pour la gamme de concentration 35%-55% font apparaître un comportement linéaire de  $f'$ :

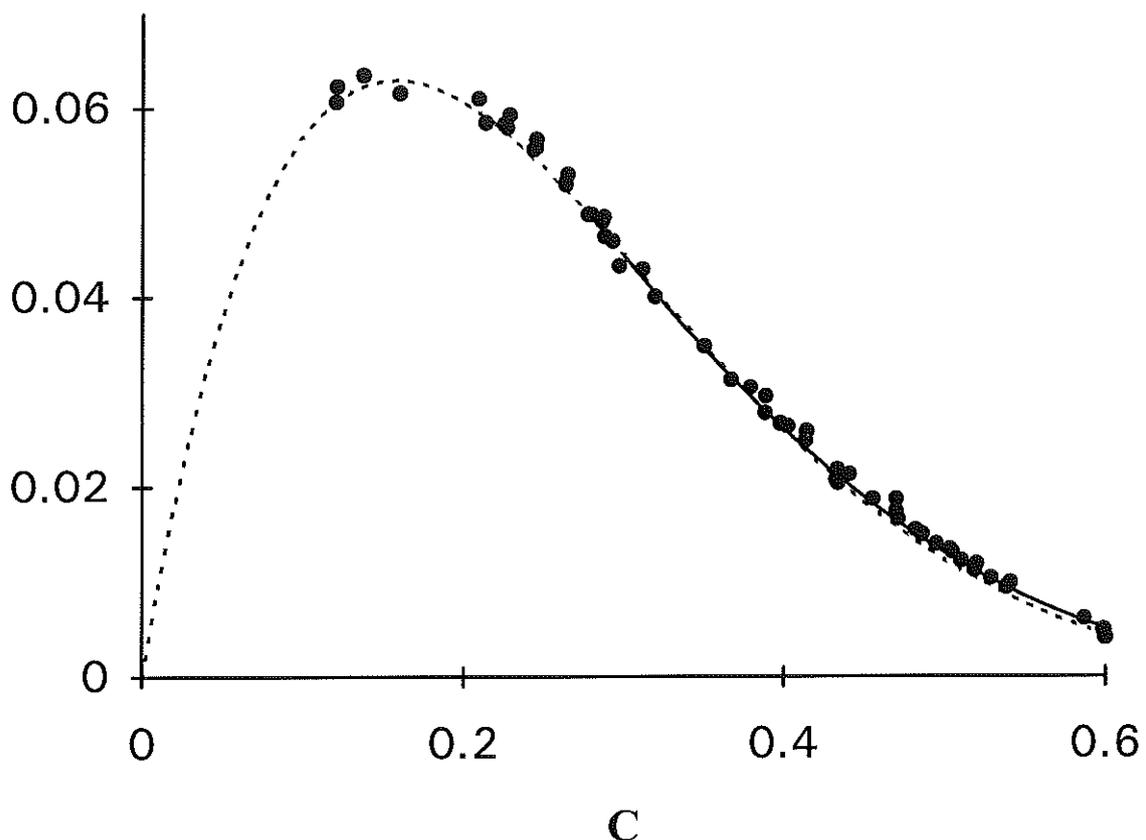
$$f'(C) = 0.52 C - 0.365 \quad \text{pour } C \in [0.35 ; 0.55] \quad (4-1)$$

On en déduit alors l'expression de  $f$  avec une constante d'intégration ajustée:

$$f(C) = 0.26 C^2 - 0.365 C + 0.1305 \quad \text{pour } C \in [0.35 ; 0.55] \quad (4-2)$$

Cette expression est en très bon accord avec les points expérimentaux  $C V_d/U^\circ$  obtenus à partir des couples  $(C ; V_d)$  mesurés en régime permanent dans le lit fluidisé (cf figure IV-2). Il est noté que pour la courbe de flux, seul l'exposant  $p=5.35$  dans la loi de Richardson-Zaki donne un accord correct avec les valeurs mesurées. Et avec cet exposant, la corrélation de Richardson-Zaki est certes moins bonne que notre corrélation déduite des mesures de  $f'$  sur la gamme  $[0.35 ; 0.60]$  mais présente le grand avantage de s'appliquer à toutes les concentrations en présentant un accord raisonnablement acceptable.

### Flux de sédimentation normalisé $f(C)$



**Légende:**      •: mesures  $C V_d / U^\circ$   
 ---:  $f$  par Richardson-Zaki avec  $p=5.35$   
 —:  $0.26 C^2 - 0.365 C + 0.1305$

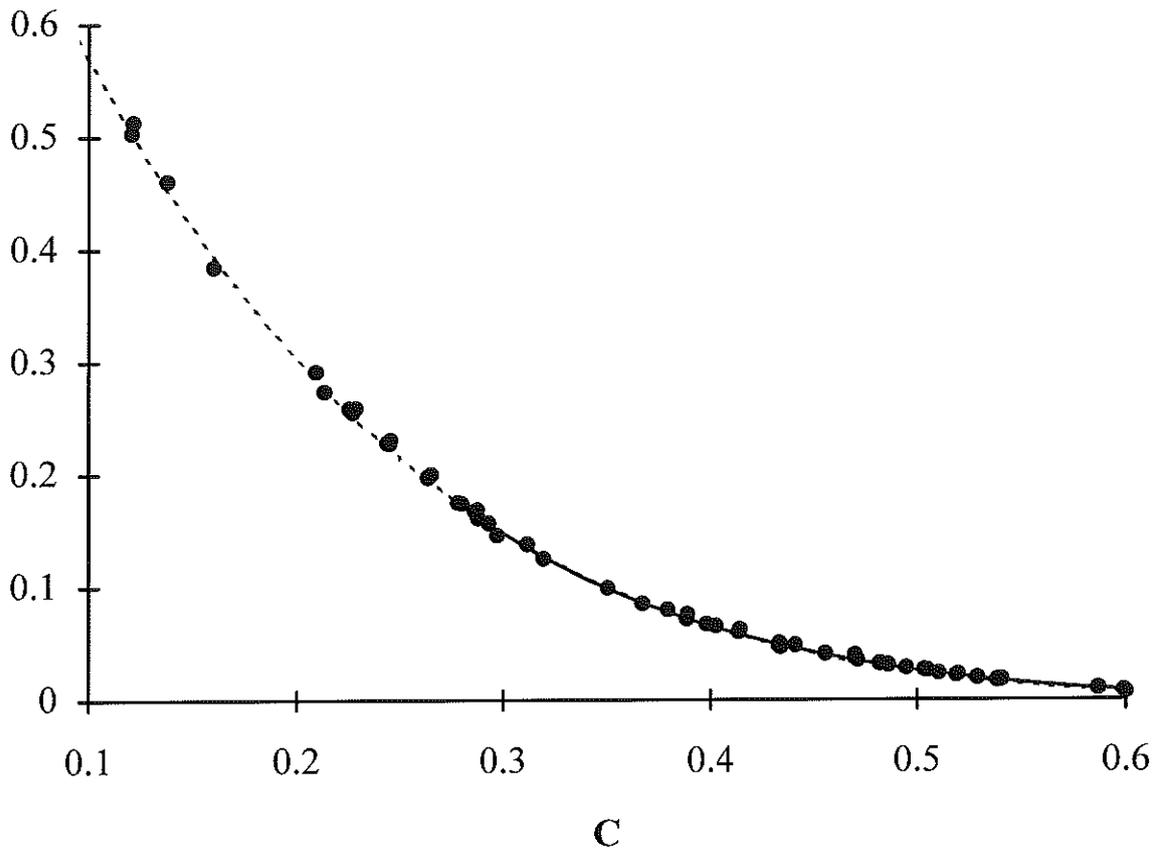
**Figure IV-2**

De la même façon que sur la figure IV-2, où l'expression de  $f'$  déduite d'une loi de corrélation empirique de  $U(C)/U^\circ$  est comparée à des mesures de  $f'$ , il est tentant de calculer

$U(C)/U^\circ$  à partir de la corrélation des mesures de  $f$ , et de comparer l'expression obtenue à la loi de Richardson-Zaki. L'expression de  $U(C)/U^\circ$  déduite de (4-2) est:

$$U(C)/U^\circ = 0.26 C - 0.365 + 0.1305/C \quad \text{pour } C \in [0.35 ; 0.55] \quad (4-3)$$

### Vitesse de sédimentation normalisée: $U(C)/U^\circ$



**Légende:**     •: mesures  $V_d / U^\circ$   
 ---: Richardson-Zaki avec  $p=5.35$   
 —:  $0.26 C - 0.365 + 0.1305 / C$

**Figure IV-3**

La démarche que nous avons adoptée ici, qui consiste à ignorer la loi de Richardson-Zaki, et de trouver une expression corrélant au mieux les mesures de  $f$  sur l'intervalle des concentrations explorées donne des résultats tout-à-fait surprenant!

Certes, il est indéniable que les valeurs de  $f$  mesurées entre 35% et 55% sont mieux corrélées par une droite que par l'expression de Richardson-Zaki (figure IV-1). Cependant, il

est absolument remarquable que la loi de Richardson-Zaki (avec l'exposant  $p=5.35$ ) donne toutefois une expression tout-à-fait satisfaisante non seulement pour  $U(C)/U^0$  mais aussi pour  $f$  et  $f'$  (cf figures IV-3, IV-2 et IV-1). De plus, l'étude de la transition entre les fronts convectifs et les fronts mixtes lorsque l'on fait croître la concentration initiale, qui a lieu pour la concentration  $C_i$  du point d'inflexion de  $f(C)$ , n'a pas permis de mettre en défaut cette loi de Richardson-Zaki qui prévoit dans notre cas  $C_i = 2/(p+1) \approx 31.5 \%$ .

En conclusion, la fonction de corrélation proposée par Richardson-Zaki pour la vitesse de sédimentation,  $U(C) = U^0 (1-C)^p$ , donne, dans le régime que nous avons étudié (bas nombre de Reynolds), une forme de la courbe de flux présentant un accord tout-à-fait remarquable avec l'étude expérimentale locale ( $C > 30\%$ ) que nous avons faite. Cette corrélation empirique de  $U(C)$  reste en effet robuste non seulement pour l'estimation de la dérivée première de la courbe de flux, mais aussi pour l'estimation qu'elle donne de la dérivée seconde (point d'inflexion).

## IV-2 Courbe de flux dans un lit fluidisé

Il est clair que le flux des particules dans un lit fluidisé stable, exprimé dans le "référentiel de sédimentation" (référentiel dans lequel le flux volumique total de la suspension, de la phase solide et de la phase liquide, est nul) est égal au "flux de sédimentation",  $C U(C)$ , tant que la concentration considérée est inférieure à la concentration de sédiment. La nature des fronts de concentrations générés par des diminutions de débit pourra donc être discutée et prévue à partir de la courbe de flux représentée figure IV-2, à la condition que la vitesse débitante finale imposée reste supérieure à  $U(C_{sed}) = U_{mf}$ .

Pour les expériences où cette condition n'est pas réalisée, l'étude de la nature du front proposée au chapitre précédent, qui n'est fondé que sur des notions de conservation de volume, reste valable, mais suppose alors une extension de la courbe de flux pour la concentration finale du front ( $C_{sed}$ ).

Dans une telle expérience (vitesse débitante  $U_2 < U_{mf}$ ), la partie homogène de la "suspension" (qui n'en est plus une!), qui se développe à partir de l'injection dans le lit, est un sédiment immobile dans le référentiel du laboratoire (cf figure IV-4). Par définition du référentiel de sédimentation, la valeur du flux des particules dans ce référentiel est:

$$F = C_{sed} V_d \quad (4-4)$$

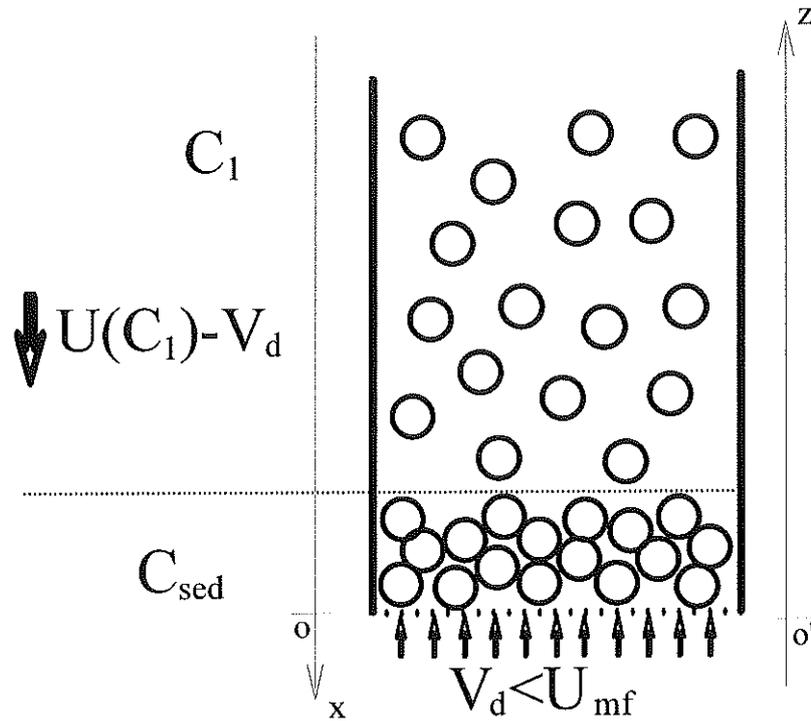


Figure IV-4

La partie manquante de la courbe de flux de la figure IV-2 est donc le segment vertical en  $C=C_{sed}$  représenté figure IV-5. Pour la concentration de sédiment, il n'y a donc pas unicité de la fonction de flux, et celui-ci dépend de la vitesse débitante. Il est à noter que pour les expériences de sédimentation classique ( $V_d = 0$ ), la valeur du flux dans le sédiment est toujours nulle et correspond donc au point situé sur l'axe des  $C$  figure IV-5.

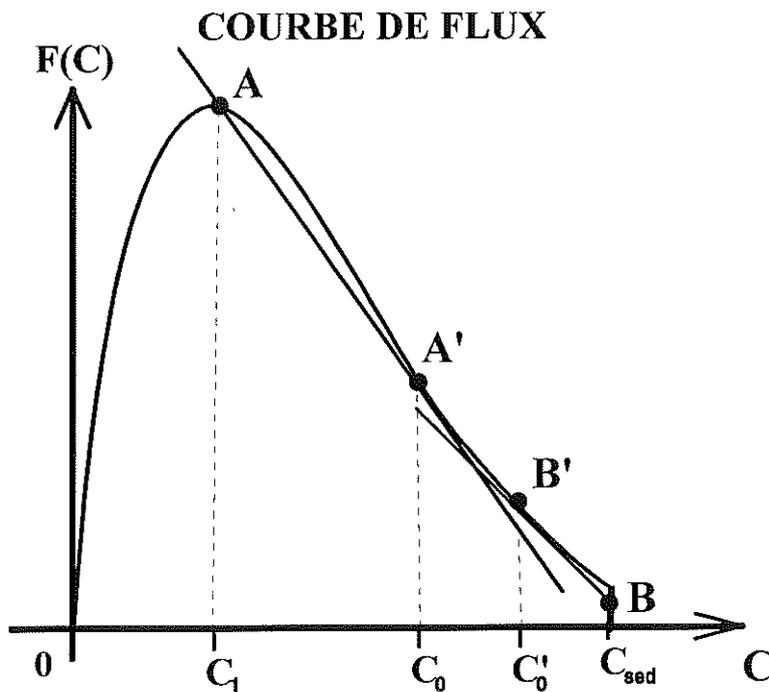


Figure IV-5

A partir de cette courbe de flux complétée, on peut prévoir la nature du front mixte entre les concentrations  $C_1 < C_i$  au point A ( $C_i$  concentration du point d'inflexion de la courbe de flux) et  $C_2 = C_{sed}$  au point B d'ordonnée  $C_{sed} V_d'$ . La construction correspondante représentée figure IV-5 laisse prévoir un front convectif entre les concentrations  $C_0$  et  $C'_0$  et deux fronts stationnaires respectivement entre les concentrations  $C_1$  et  $C_0$ , et  $C'_0$  et  $C_{sed}$ .

Afin d'obtenir des précisions sur la forme locale de la courbe de flux au voisinage du point correspondant à  $C_{sed} U_{mf}$ , nous avons étudié trois profils entre  $C_1$  et  $C_{sed}$ , générés à partir des mêmes conditions initiales (même point A), par des diminutions de débit d'amplitudes décroissantes (augmentation de la vitesse débitante finale  $V_d'$  en maintenant la condition  $V_d' \leq U_{mf}$ ). Pour le front 3, nous avons pu observer la disparition du front stationnaire entre  $C'_0$  et  $C_{sed}$ . Ainsi nous pouvions vérifier si la partie manquante de la courbe de flux était bien un segment (décrit par B lors de ces trois expériences) et nous pouvions également mesurer  $U_{mf}$  avec précision: c'est la vitesse débitante  $V_d'$  pour laquelle  $C'_0$  et  $C_{sed}$  sont confondus, et il y a disparition du second front stationnaire.

Les vitesses débitantes  $V_d$  (imposant la concentration initiale  $C_1 = 19.2\%$ ) et  $V_d'$ , correspondant à ces trois expériences, sont données dans le tableau 2 en valeurs normalisées par  $U^\circ$ .

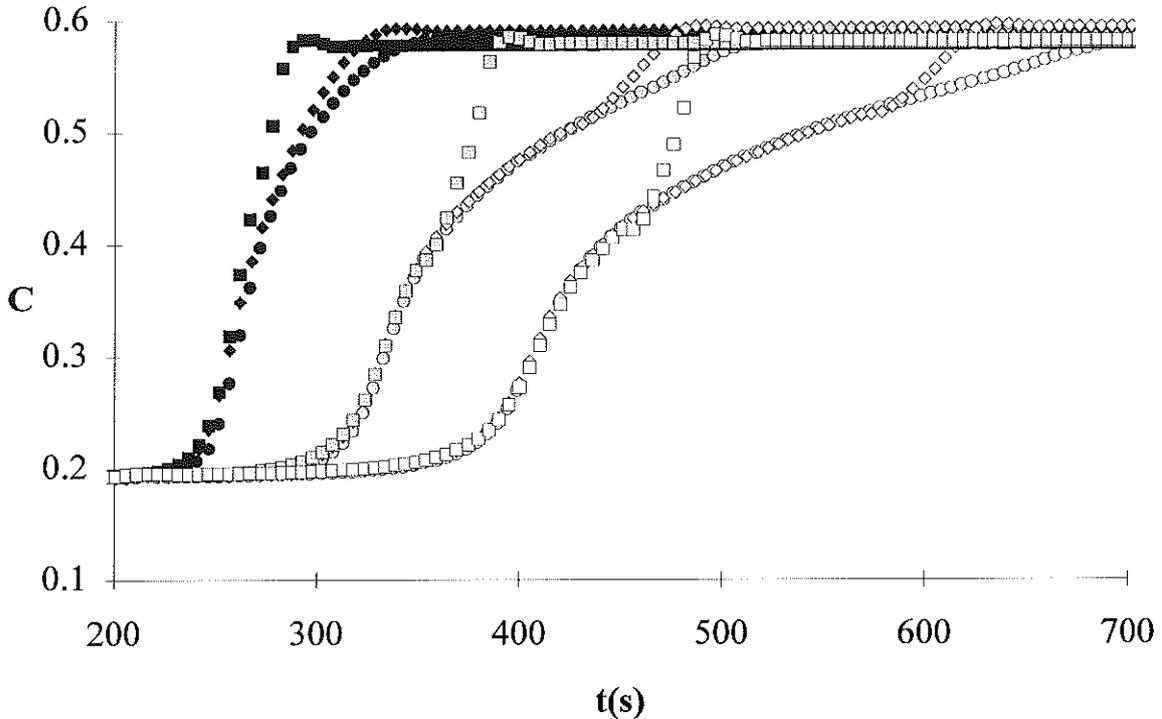
	$V_d/U^\circ$	$V_d'/U^\circ$
<b>Front 1</b>	0.322	0.0028
<b>Front 2</b>	0.322	0.0075
<b>Front 3</b>	0.322	0.0093

**Tableau 2**

Dans chacune des trois expériences, le débit a été coupé une fois la propagation des fronts achevée, et aucune propagation de front n'a pu être observée à la suite de cette opération; de plus la cote supérieure de la suspension n'a pas diminuée. Cela prouve bien que les concentrations finales de ces trois expériences sont des concentrations de sédiment, et que le point B correspondant (figure IV-5) est bien situé sur le segment vertical ajouté à la courbe de flux de sédimentation.

Ces trois fronts ont été mesurés à trois cotes différentes représentés figure IV-6 (noir:  $z=2\text{cm}$ ; gris  $z=5\text{cm}$ ; blanc:  $z=8\text{cm}$ ). Il apparaît que les profils stationnaires entre  $C_1$  et  $C_0$  ne sont pas encore tout-à-fait établis (les profils sont mesurés relativement près de l'injection), mais en revanche, le deuxième profil stationnaire entre  $C'_0$  et  $C_{sed}$  est lui parfaitement observable pour les fronts 1 et 2, et semble inexistant pour le front 3.

### Fronts mixtes



**Légende:**    ■: Front 1    ◆: Front 2    ●: Front 3

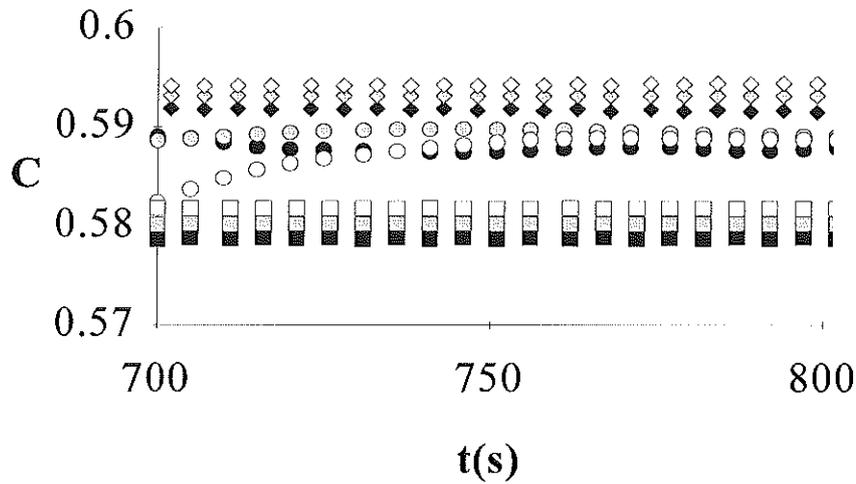
(symboles noirs, gris, blancs respectivement pour les mesures en  $z=2$ cm,  $z=5$ cm et  $z=8$ cm)

**Figure IV-6**

Mais les informations les plus intéressantes, données par ces expériences, concernent l'état final de la "suspension" après la propagation de ces différents fronts. Les concentrations obtenues dans le sédiment sont représentées sur la figure IV-7, où pour chacun des différents fronts, la concentration la plus basse correspond à la cote  $z$  de mesure la plus élevée (la plus éloignée du fond de la cuve).

Cette caractéristique du sédiment peut s'expliquer par un phénomène de tassement sous l'effet du poids des particules, qui sera d'autant plus important que l'on considérera une couche de sédiment située en profondeur. Cette explication implique, dans le cas auquel nous nous intéressons, que cet effet doit être minimisé par une friction visqueuse s'opposant à la gravité. L'effet de tassement devrait donc être d'autant moins important que la vitesse débitante  $V_d' < U_{mf}$  est élevée, ce qui semble vérifié dans notre cas. Toutefois, il est à noter que cet effet de tassement devrait également avoir lieu lorsque l'on coupe le débit  $V_d'$ , ce qui n'a pas été observé.

## Concentrations de sédiment



**Légende:**    ■: Front 1    ◆: Front 2    ●: Front 3

(symboles noirs, gris, blancs respectivement pour les mesures en  $z=2\text{cm}$ ,  $z=5\text{cm}$  et  $z=8\text{cm}$ )

**Figure IV-7**

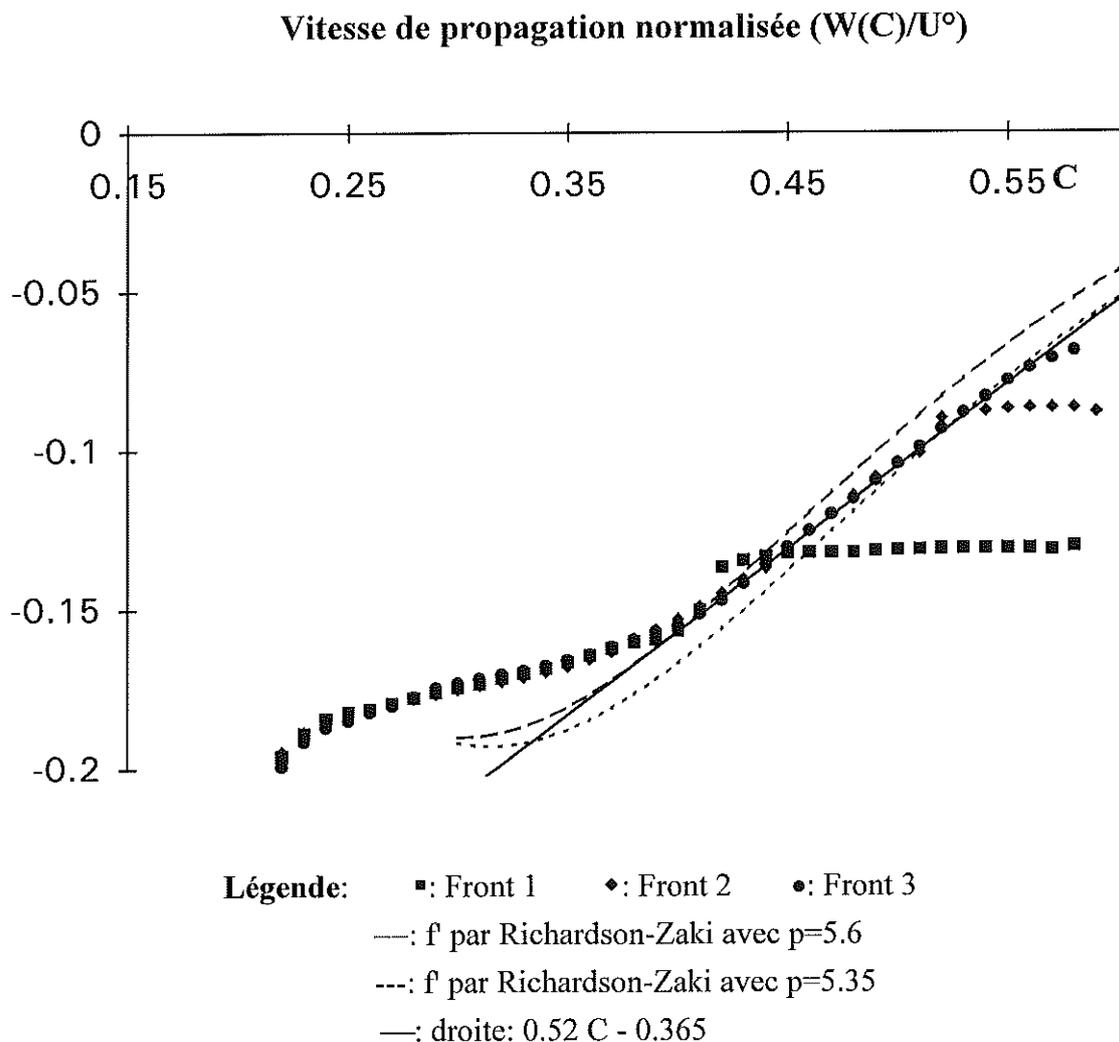
Quoi qu'il en soit, les mesures de la concentration par acoustique ne sont pas tout-à-fait aussi précises dans le sédiment; l'expression de la vitesse de propagation du son que nous avons utilisée peut être modifiée par l'apparition de l'élasticité du squelette formé par les particules. De plus, la concentration moyenne mesurée par la hauteur de la suspension présente elle une précision de l'ordre de 0.5%. Il est donc clair que le gradient de concentration dans le sédiment, s'il a pu être observé, ne peut pas être correctement analysé avec les mesures dont nous disposons. Et il pourrait simplement être dû à un état de polydispersité différent dans les différentes couches de la suspension, qui entraînerait donc un état de compactage différent dans le sédiment correspondant.

La caractéristique la plus intéressante des concentrations de sédiment représentées figure IV-7 est la différence notoire de compactage selon les vitesses débitantes  $V_d'$  imposées au lit dans l'état final. **Il n'y a pas unicité de la concentration de sédiment**; celle-ci dépend des conditions dans lesquelles le sédiment a été déposé!

Lors d'expérience de "sédimentation" classique ( $\rightarrow$  lorsque l'on coupe le débit en partant d'une suspension homogène obtenue avec  $V_d > U_{mf}$ ), la concentration obtenue dans le sédiment a toujours été de l'ordre de 57%. Ici, en ralentissant la vitesse à laquelle les particules doivent se déposer dans le sédiment ( $V_d' \neq 0$ ), on observe une augmentation de la concentration de sédiment qui a tendance à augmenter lorsque  $V_d'$  augmente (même si la concentration finale mesurée pour le front 3 est cependant très légèrement inférieure à celle du front 2). Cette tendance peut s'expliquer par le fait que pour des valeurs de  $V_d'$  plus élevées les particules ont plus de temps et moins de contraintes pour s'engencer de manière

plus compacte dans le sédiment. Toutefois cet argument va à l'encontre de l'explication précédente qui justifiait un tassement du sédiment sous le poids des particules. On peut donc imaginer que ces deux effets qui se contrarient peuvent donner un sédiment plus compacté pour une vitesse débitante  $V_d'$  qui ne sera pas forcément la vitesse minimum de fluidisation correspondante  $U_{mf}$ . Ceci expliquerait d'ailleurs que la concentration finale du front 2 est supérieure à celle du front 1! Quoi qu'il en soit, on sait maintenant qu'il n'existe pas une seule courbe de flux dans le lit fluidisé mais plusieurs, et la courbe de flux de sédimentation devra donc être complétée par plusieurs segments verticaux correspondant aux différentes valeurs possible de la concentration de sédiment.

Cette caractéristique est très bien illustrée par l'exemple des trois fronts étudiés. La vitesse de propagation  $W(C)$  de chaque concentration a été calculée pour ces trois fronts, et portée en valeur normalisée ( $W(C)/U^0$ ) sur la figure IV-8.



**Figure IV-8**

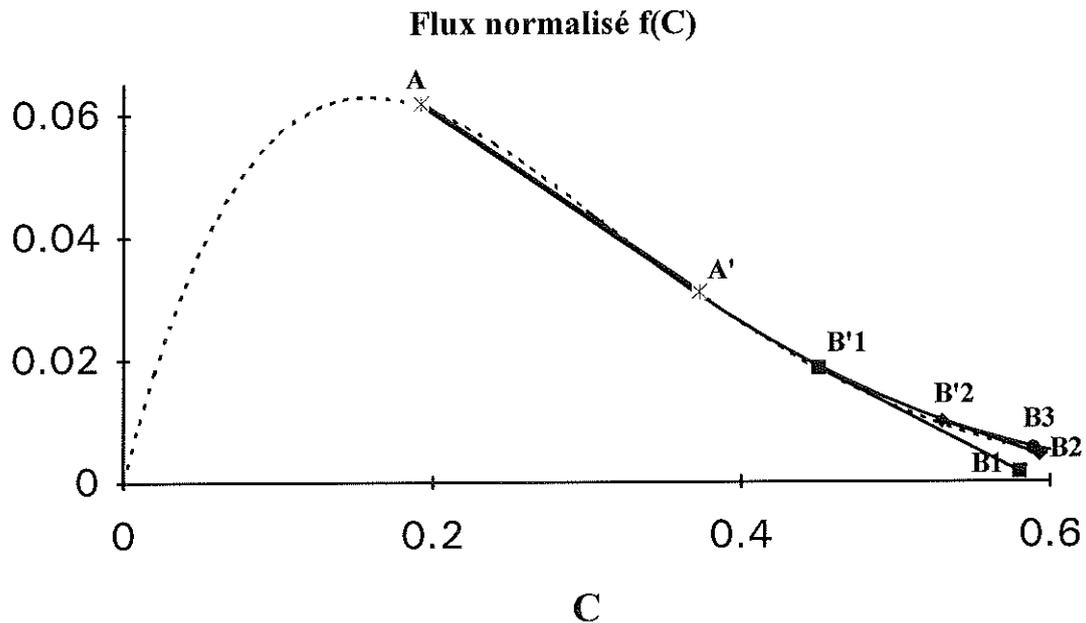
La vitesse normalisée de propagation,  $U_f/U^0$ , des différents profils stationnaires a été mesurée sur la figure IV-8 (c'est la valeur de l'ordonnée des paliers qui apparaissent dans les

courbes  $W(C)/U^\circ$ ). Les vitesses correspondant aux profils stationnaires ( $C_1 \rightarrow C_0$ ) et ( $C'_0 \rightarrow C_{sed}$ ) sont notées respectivement  $u_f$  et  $u'_f$ . De plus, les concentrations  $C_0$  et  $C'_0$  correspondantes ont également été mesurées (ce sont les valeurs des abscisses des points d'intersection entre les paliers et la courbe  $f(C)$ ). Les différentes valeurs obtenues ont été reportées dans le tableau 3, ainsi que les concentrations  $C_1$  et  $C_2$  mesurées dans l'état initial et l'état final et les valeurs du flux normalisé correspondantes  $f_1 = C_1 V_d/U^\circ$  et  $f_2 = C_2 V_d/U^\circ$ .

	$f_1$	$f_2$	$C_1$	$C_2$	$C_0$	$C'_0$	$u_f$	$u'_f$
<b>Front 1</b>	0.063	0.00164	19.2%	58%	37.3%	45%	-0.17	-0.13
<b>Front 2</b>	0.063	0.00445	19.2%	58.9%	37.3%	53%	-0.17	-0.086
<b>Front 3</b>	0.063	0.00546	19.2%	59.3%	37.3%	?	-0.17	

**Tableau 3**

Ces différentes valeurs permettent de tracer les cordes de la courbe de flux correspondant aux profils stationnaires observés. Les extrémités de ces cordes sont données par les points A ( $C_1 ; f_1$ ) et A' ( $C_0 ; f_1 + u_f(C_0 - C_1)$ ) et par les points B ( $C_2 ; f_2$ ) et B' ( $C'_0 ; f_2 + u'_f(C'_0 - C_2)$ ) et correspondent à la construction de la figure IV-5. Les cordes obtenues expérimentalement sont tracées sur la courbe de flux figure IV-9.



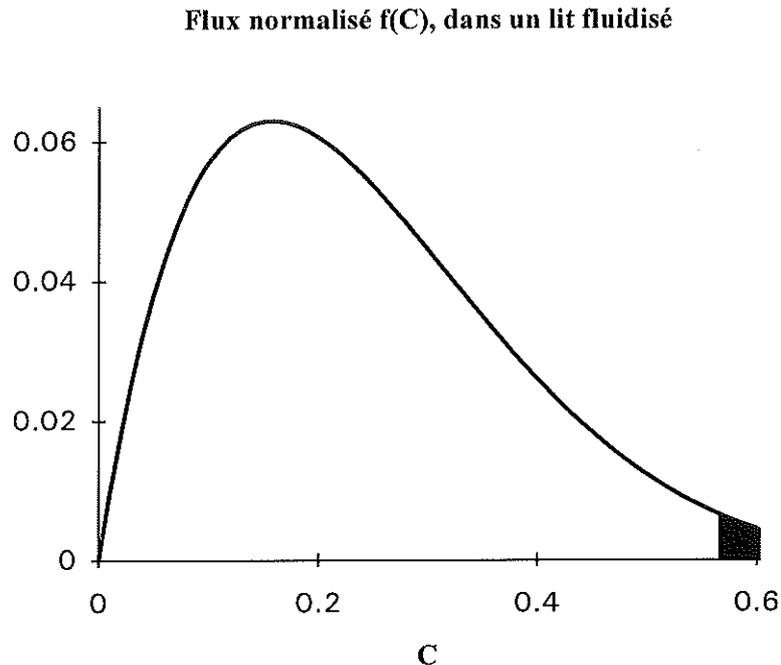
**Légende:**    ■: Front 1    ◆: Front 2    ●: Front 3  
 ---:  $f$  par Richardson-Zaki avec  $p=5.35$   
 —:  $0.26 C^2 - 0.365 C + 0.1305$

**Figure IV-9**

On retrouve sur la figure IV-9 la propriété des fronts mixtes, les cordes sont tangentes à la courbe de flux aux points A' et B' qui appartiennent à la fois à un profil stationnaire et un profil convectif. Cette construction faite a posteriori confirme donc l'analyse de la nature des

profils à partir de la courbe de flux, et cela même si la construction fait intervenir des points (B) qui n'appartiennent pas à la courbe de flux de sédimentation proprement dite.

On peut remarquer que si les points B correspondant aux trois fronts étudiés avaient été placés sur la même verticale (même concentration de sédiment), la construction des cordes n'aurait pas alors donné des points B' situés sur la courbe de flux! Ceci confirme donc que nos mesures de concentrations de sédiment étaient correctes.



**Figure IV-10**

La courbe de flux des particules dans le lit fluidisé exprimé dans le référentiel du centre des volumes (référentiel de sédimentation) est représentée figure IV-10. La plage de concentrations de sédiment que nous avons pu explorer est comprise entre 57 et 60%. L'expérience montre que le sédiment est d'autant plus compact que sa vitesse de formation est ralentie. Toutefois, le comportement du sédiment en fonction de la vitesse débitante imposée au lit est loin d'être tout-à-fait clair. Nous n'avons pas pu mesurer avec précision les vitesses minimum de fluidisation pour les différentes concentrations de sédiment.

La façon la plus simple de mesurer la vitesse minimum de fluidisation  $U_{mf}$  pour un sédiment donné est d'imposer des débits croissants dans le lit, et mesurer la vitesse débitante à partir de laquelle le niveau de la suspension commence à monter. Or pour les sédiments faiblement compactés obtenus par sédimentation classique ( $C_{sed} \sim 57\%$ ), nous avons observé des phénomènes de recompactage lors de l'application de ce type de procédure. Ainsi dans ce type d'expérience, on observe d'abord une baisse du niveau du sédiment pour une vitesse  $V_d < U_{mf}$ , et la vitesse de fluidisation que nous mesurons ensuite ne correspond donc plus au sédiment de départ.

Sur la courbe de flux représentée figure IV-10, ce changement de concentration au-dessous du seuil de fluidisation correspond à un déplacement horizontal inattendu dans la zone pleine de la "courbe", limitée par la courbe  $C_{sed}U_{mf}$ , qui est, on l'a dit mal définie.

Le comportement du système au dessous du seuil de fluidisation est donc encore très mal connu, et demanderait une étude très spécifique allant au-delà de nos expériences qui ont cependant permis de montrer qu'un sédiment ne pouvait pas être complètement décrit comme un simple poreux, puisque sa structure pouvait être modifiée par un écoulement.

### IV-3 Coefficient de diffusion hydrodynamique

Dans le chapitre précédent, il a été montré que l'équation des fronts stationnaires pouvait être analysée comme un équilibre entre un flux diffusif (de type Fickien) et un flux convectif noté  $F_c$ . Nous avons de plus montré en IV-1 que les fonctions relatives à la convection (définies à partir de la vitesse de sédimentation  $U(C)$ ) sont correctement décrites avec la loi de corrélation empirique de Richardson-Zaki ( $U(C)=U^0 (1-C)^p$ ) avec un exposant ajusté expérimentalement  $p=5.35$ . Grâce à cette fonction de corrélation, nous pouvons calculer le flux convectif  $F_c$  dans le référentiel d'un front stationnaire, et la mesure du profil correspondant permettra alors d'accéder aux valeurs du coefficient de diffusion hydrodynamique  $D$  [Martin et al 3].

Dans le cas général des fronts stationnaires se propageant au sein de la suspension lors d'une expérience de diminution de débit ( $V_d=U_1 \rightarrow V_d=U_2$ ), il a été montré au chapitre III (cf (3-14) à (3-17) et figure III-8) que le profil stationnaire décrit dans le référentiel du front ( $X=x-U_f t$  où  $U_f$  est la vitesse de propagation dans le référentiel de sédimentation ( $x$ )) répondait à l'équation:

$$D \frac{dC}{dX} = F_c(C) \quad (4-5)$$

avec:

$$F_c(C) = C.[U(C)-U_f] - F^0 \quad (4-6)$$

$$U_f = (C_2.U_2 - C_1.U_1)/(C_2 - C_1) \quad (4-7)$$

$$F^0 = - C_1.C_2.(U_2 - U_1)/(C_2 - C_1) \quad (4-8)$$

Et la vitesse de propagation de ce front dans le référentiel du lit fluidisé ( $z$ ) doit tenir compte de la vitesse débitante dans le lit durant la propagation ( $V_d=U_2$ ) et est donnée par:

$$V_f = U_2 - U_f \quad (4-9)$$

Pour mesurer  $D$ , nous avons commencé par étudier un front stationnaire particulier: le front surmontant la suspension dans le lit fluidisé en régime permanent. Ce front a la caractéristique d'être immobile dans le lit; il correspond à  $C_1=0$  et  $C_2$  représente simplement

la concentration de la partie homogène de la suspension obtenue par une vitesse débitante constante  $V_d' = U_2$ . Avec ces caractéristiques, les équations (4-7);(4-8) et (4-9) deviennent:

$$U_f = U_2 \quad (4-10)$$

$$F^o = 0 \quad (4-11)$$

On retrouve bien  $V_f = 0$  : ces fronts ne se propagent pas dans le lit. L'équation (4-5) se simplifie également:

$$D \frac{dC}{dX} = C[U(C) - U_2] \quad (4-12)$$

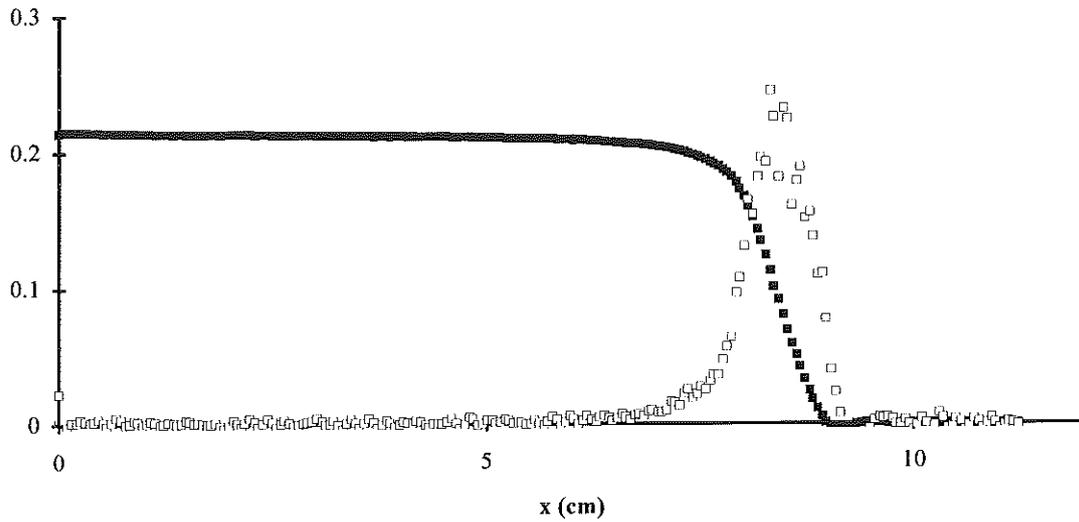
Ici, X représente simplement la coordonnées de position dans le référentiel du lit (ou du laboratoire) rapportée à un axe orienté vers le bas. En utilisant la loi de Richardson-Zaki pour  $U(C)$  et en notant  $C_0$  la concentration  $C_2$  de la partie homogène du lit, on obtient pour le coefficient de diffusion normalisé ( $D_n = D/[a U(C)]$ ) l'expression:

$$D_n(C) = \frac{C(X)}{a \frac{dC}{dX}} \left[ 1 - \left( \frac{1 - C_0}{1 - C(X)} \right)^p \right] \quad (4-13)$$

La mesure du profil  $C(X)$  et le calcul de sa dérivée permet donc de mesurer  $D_n$  sur l'intervalle de concentrations  $[0 ; C_0]$ .

Ces profils ont été mesurés de manière directe, en régime permanent, avec le scanner acoustique évoqué en II-3. Toutefois, comme cela a été signalé en II-4, cette technique de mesures n'est pas aussi performante que les mesures de concentrations par des transducteurs fixes. Aussi, nous avons également mesuré ces profils avec cette dernière technique, en lui imposant une vitesse de propagation dans le lit contrôlée par une diminution de débit. Pour cela, une fois le régime permanent établi avec une vitesse débitante  $V_d$ , nous avons diminué le débit en imposant une vitesse débitante  $V_d' < V_d$ . La suspension n'ayant pas d'inertie (nombre de Reynolds faible), le front auparavant immobile dans le lit se déplace alors, en conservant son profil, vers le bas de la cuve avec la vitesse  $V_d - V_d'$ . En mesurant  $C(t)$  par une paire de transducteurs fixes située au départ "sous le front" (au niveau de la suspension homogène), on obtient la mesure de  $C(X)$  avec la relation  $X = -(V_d - V_d') t$ .

### Front stationnaire surmontant la suspension



**Légende:**    ■:  $C(X)$     □:  $\frac{dC}{dX}$  ( $\text{cm}^{-1}$ )

**Figure IV-11**

Un tel profil  $C(X)$  mesuré avec une paire de transducteurs fixes est représenté figure IV-11, à partir de ces mesures et du gradient de concentration calculé, on accède à des mesures de  $D_n(C)$  pour des concentrations comprises entre 0 et 20%. Trois limites apparaissent cependant concernant cette méthode de mesures:

-Tout d'abord il y a toujours un faible gradient de concentration dans la zone homogène de la suspension, dû à la petite polydispersité des billes utilisées. En conséquence, la valeur de la concentration  $C_0$  de cette partie "homogène" que l'on doit prendre en compte dans l'équation (4-13) n'est pas connue avec une très grande précision. Cette imprécision se fera surtout sentir pour le calcul de  $D_n$  aux concentrations proches des extrémités de l'intervalle de mesures, et en pratique les valeurs que l'on pourra retenir pour  $D_n$  à partir de l'expérience représentée figure IV-11 se limiteront à l'intervalle de concentrations 5%-15%.

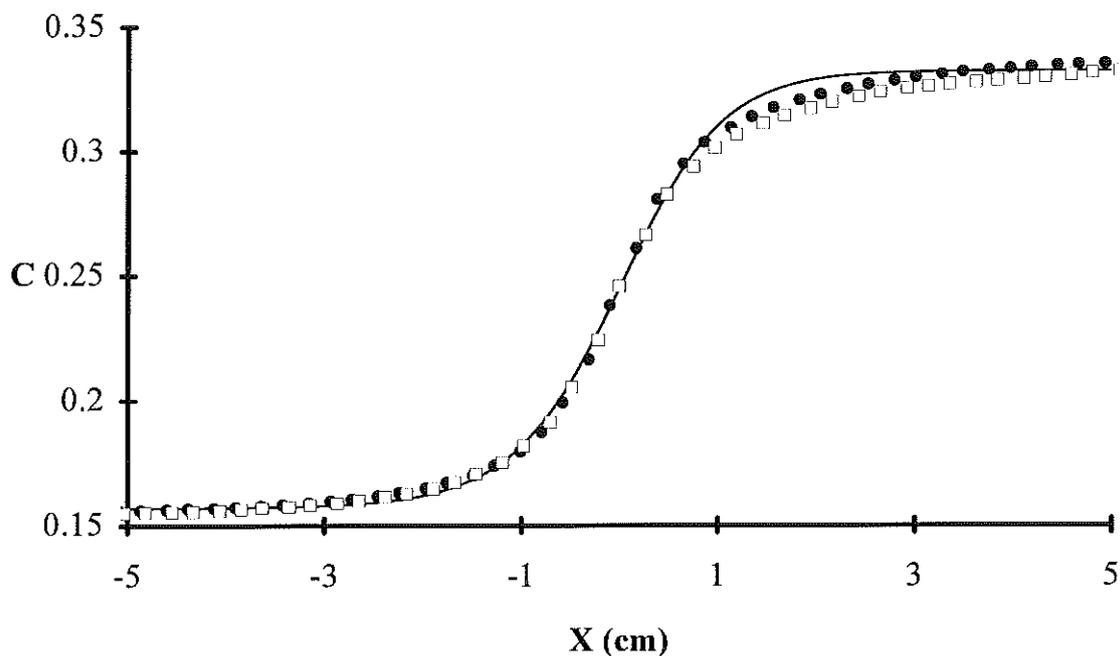
-Cette polydispersité même faible donne lieu à un phénomène de ségrégation (les petites particules ont tendance à occuper le haut de la suspension), et les particules qui participent à ce type de front stationnaire, sont composées en partie de la queue de la gaussienne de distribution de tailles, et peuvent donc sur-représenter une partie marginale de la population des particules. Pour éviter en partie ces problèmes, que nous avons rencontré dans nos premières expériences, nous avons ôté le quart supérieur et le quart inférieur de la suspension placée initialement dans le lit fluidisé. Nous avons ainsi éliminé les régions de "fort" gradient de polydispersité, et nous avons alors mesuré des profils moins étalés pour les fronts stationnaires surmontant la suspension.

-Une limite plus cruciale de la gamme de concentrations explorable par cette méthode concerne la largeur de ce type de front stationnaire. En effet, pour augmenter la gamme de mesures, il faut augmenter la concentration  $C_0$ , mais alors le raidissement convectif augmente et la largeur du front diminue. En pratique, compte tenu de notre résolution spatiale, qui est de l'ordre de 2mm, on ne peut mesurer correctement les profils que s'ils ont une largeur de l'ordre de quelques centimètres.

En fait, la figure IV-11 donne le profil le plus étroit (et donc pour la gamme de concentrations la plus élevée) que l'on peut exploiter avec cette méthode. Et pour mesurer le coefficient  $D_n$  à plus forte concentration, nous avons mesuré des profils de fronts stationnaires se propageant dans la suspension (décrits en III-6). A partir des profils  $C(X)$  expérimentaux (figure IV-12), les valeurs de  $D_n$  sont données par l'équation (4-5):

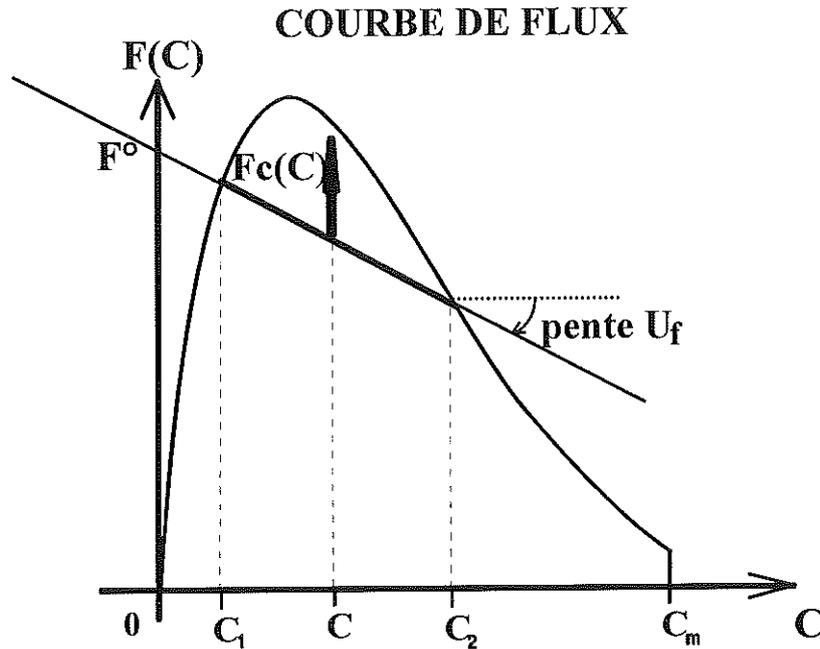
$$D_n(C) = \frac{1}{a} \frac{dC}{dX} \left[ \frac{Fc(C)}{U(C)} \right] \quad (4-14)$$

### Profils stationnaires



**Légende:**    ■:  $C(X)$  mesuré en  $z = 10\text{cm}$   
                   ○:  $C(X)$  mesuré en  $z = 13\text{cm}$   
                   —:  $C(X)$  calculé avec  $D_n=62$

**Figure IV-12**



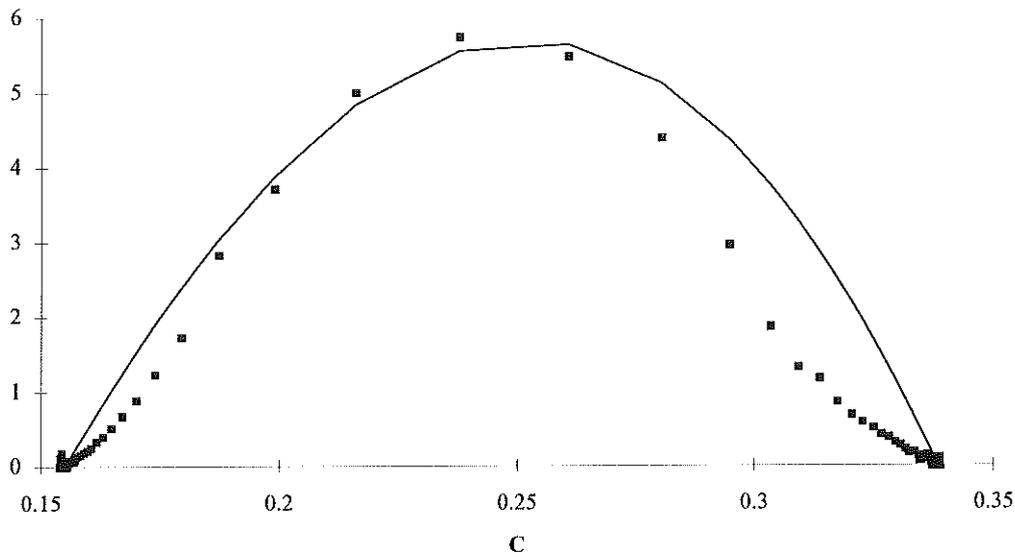
**Figure IV-13**

On a vu que  $F_c(C)$  était égal à la différence entre la courbe de flux et la corde joignant les points correspondant à la concentration initiale  $C_1$  et à la concentration finale  $C_2$  (figure IV-13). Pour ce type de fronts on pourra donc choisir les concentrations  $C_1$  et  $C_2$  (contrôlées par le débit imposé) pour obtenir la largeur de front optimum pour les mesures du profil. En effet, si on réduit le saut de concentration, la fonction  $F_c(C)$  devient plus faible, et la largeur du profil est augmentée, et l'effet opposé est obtenu en augmentant l'amplitude du saut de concentration. Ainsi, on pourra générer des fronts stationnaires dont la largeur est grande devant notre résolution spatiale, mais suffisamment faible pour que l'état stationnaire soit rapidement établi et pour que le front soit effectivement précédé et suivi par deux suspensions homogènes (respectivement aux concentrations  $C_1$  et  $C_2$ ) pouvant être considérées comme infinies.

On peut vérifier la validité de la description des fronts que nous avons adoptée, en considérant l'équation (4-14) sous la forme:

$$D_n(C) \frac{dC}{dX} = \frac{1}{a} \left[ \frac{F_c(C)}{U(C)} \right] \quad (4-15)$$

Comme le coefficient de diffusion normalisé est supposé peu varier dans la zone de concentrations moyennes mises en jeu dans le front de la figure IV-12, la fonction du membre de droite de l'équation (4-15) a été comparée au gradient de concentration (multiplié par une constante ajustée  $k=62$  tenant compte de  $D_n$ ), sur la figure IV-14.



Légende:    ■:  $62 \frac{dC}{dX}$   
                   —:  $\frac{1}{a} \left[ \frac{Fc(C)}{U(C)} \right]$

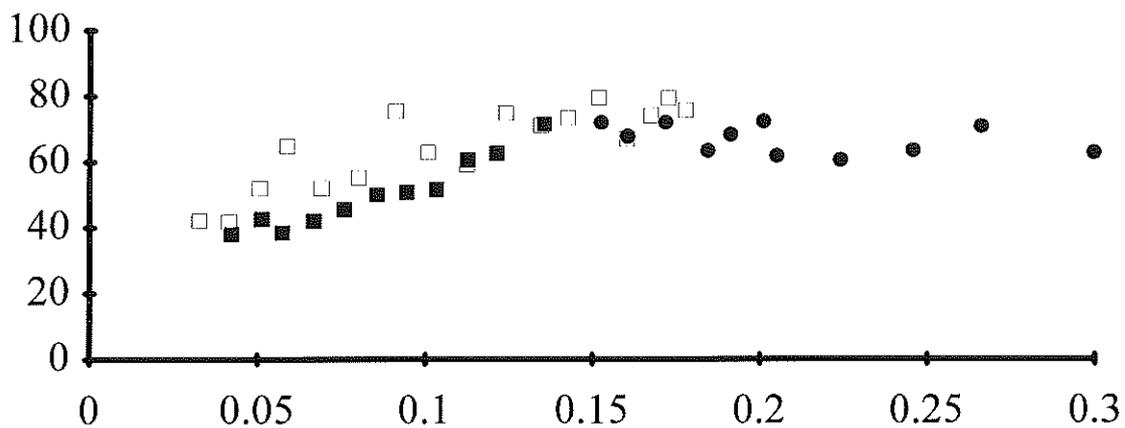
**Figure IV-14**

La relation (4-15) est correctement vérifiée expérimentalement et confirme la validité de notre description, déjà justifiée par la stationnarité des profils aux temps longs. Toutefois une caractéristique apparaît sur la figure IV-14, qui est systématique dans tous les profils stationnaires que nous avons mesurés: le gradient pour les concentrations proches de la concentration finale est anormalement faible; ou en d'autres termes le front possède une queue plus longue que prévu. L'aspect systématique de cette queue quel que soit la valeur choisie de  $C_2$  exclut l'hypothèse d'un  $D_n$  très grand au voisinage de la concentration finale  $C_2 \sim 30\%$  considérée dans la figure IV-14 (c'est le résultat que donnerait (4-14) si elle était appliquée aux concentrations proches de  $C_2$ !). Ceci constitue donc une limite à notre modèle qui ne tient compte des gradients de concentrations qu'à travers la simple considération d'un flux de type Fickien. Une explication de cette longue queue pourrait être le temps important nécessaire à la suspension pour adopter une nouvelle configuration adaptée à sa nouvelle concentration  $C_2$ . En effet, on peut imaginer que les particules au passage du front n'ont de mouvement relatif les unes par rapport aux autres que limité et prendront donc un certain temps après le passage du front pour se réarranger. En régime permanent pour le nouveau débit imposé au lit, l'état de ségrégation, par exemple, peut être différent, et on peut imaginer qu'une durée importante sera nécessaire pour qu'un nombre suffisant de configurations ait été exploré afin que les statistiques de présence des différentes tailles de particules cessent d'évoluer.

On peut noter que le gradient de concentration est plus faible que prévu au voisinage des deux concentrations extrêmes ( $C_1$  et  $C_2$ ). Ce phénomène pourrait donc également être expliqué en partie par le terme figurant dans l'équation de Batchelor (1-55) proportionnel à la viscosité des particules  $\eta_p$  que nous avons choisi de négliger sans savoir si la condition (1-60) était effectivement vérifiée. Ce terme de viscosité introduirait dans l'expression de  $D_{n\text{calc}}$  ( $D_n$  tel qu'il est calculé dans nos hypothèses) des termes correctifs en  $\frac{\partial C}{\partial X}$  et  $\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} / \frac{\partial C}{\partial X}$ , et ce dernier terme pourrait être la cause d'une valeur de  $D_{n\text{calc}}$  anormalement grande au voisinage de  $C_1$  et  $C_2$ . Mais cette explication impliquerait également que  $D_{n\text{calc}}$  varie avec  $\frac{\partial C}{\partial X}$ , or les mesures expérimentales n'ont pas montré de dépendance de ce type, et confortent donc l'hypothèse adoptée consistant à négliger les termes provenant de  $\eta_p$  dans l'expression de la vitesse des particules  $U_p$ .

Quoi qu'il en soit, le modèle simple que nous avons adopté donne une description tout à fait acceptable des fronts stationnaires (cf comparaison profil expérimental / profil calculé figure IV-12), car la valeur de  $D_n$  déduite des profils pour les concentrations pas trop proches des concentrations extrêmes  $C_1$  et  $C_2$  s'avère reproductible pour des fronts de largeurs différentes.

### Coefficient de diffusion normalisé $D_n$



#### Légende:

- : mesures par le front surmontant la suspension (scanner)
- ▣: mesures par le front surmontant la suspension, en translation (transducteurs fixes)
- : mesures par les profils stationnaires au sein de la suspension

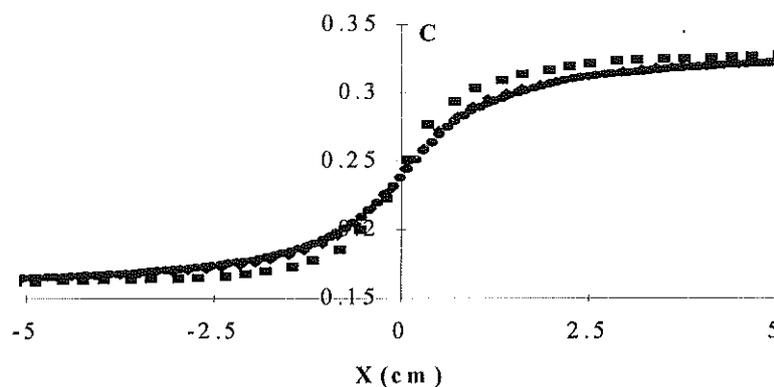
Figure IV-15

Avec l'étude de différents fronts stationnaires, nous avons mesuré  $D_n$  sur la gamme de concentrations [5% ; 30%] (figure IV-15). La limite supérieure de cette gamme de mesures s'explique par le fait que pour obtenir des fronts stationnaires mettant en jeu des concentrations supérieures à la concentration du point d'inflexion  $C_1$  de la courbe de flux, il faut nécessairement partir d'une concentration initiale  $C_1$  suffisamment faible pour que la corde correspondant au front considéré se trouve entièrement au dessous de la courbe de flux (cf figure IV-13). Mais lorsque cette condition est vérifiée, la fonction de raidissement convectif  $F_c(C)$  pour le profil considéré devient trop importante pour assurer une largeur de front suffisante pour une mesure correcte du profil.

Comme cela avait déjà été observé expérimentalement, les valeurs du coefficient de diffusion collectif normalisé,  $D_n$ , que nous avons mesurées sont beaucoup plus grandes que la valeur de coefficient normalisé d'auto-diffusion aux temps longs  $D^\infty/(aU(C))$  qui est inférieur à 10 (cf [Ham et Homsy];[Nicolai et al]et[Xue et al]). Mais nos mesures de  $D_n$  sont également supérieures aux mesures déduites de l'élargissement du front surmontant la suspension dans une expérience de sédimentation. En effet, de telles mesures, tenant compte de l'effet de raidissement convectif du front, ont donné un coefficient  $D_n$  constant de l'ordre de 20 sur la gamme [2%;13%] [Lee et al], alors que nous obtenons  $D_n \sim .50$  sur cette gamme.

Les expériences de Lee et al ont été faites pour un nombre de Reynolds particulière  $Re^\circ$  de l'ordre de  $7.10^{-5}$ , soit mille fois inférieur à celui de la suspension n°2 que nous avons utilisée. Pour vérifier que cette différence de  $Re^\circ$ , bien qu'à priori notre suspension se situe dans le même régime visqueux, n'est pas la source des différents ordres de grandeurs de  $D_n$  trouvés, nous avons étudié l'influence de  $Re^\circ$  sur nos mesures de  $D_n$ .

#### FRONT STATIONNAIRE POUR DIFFERENTS NOMBRES DE REYNOLDS



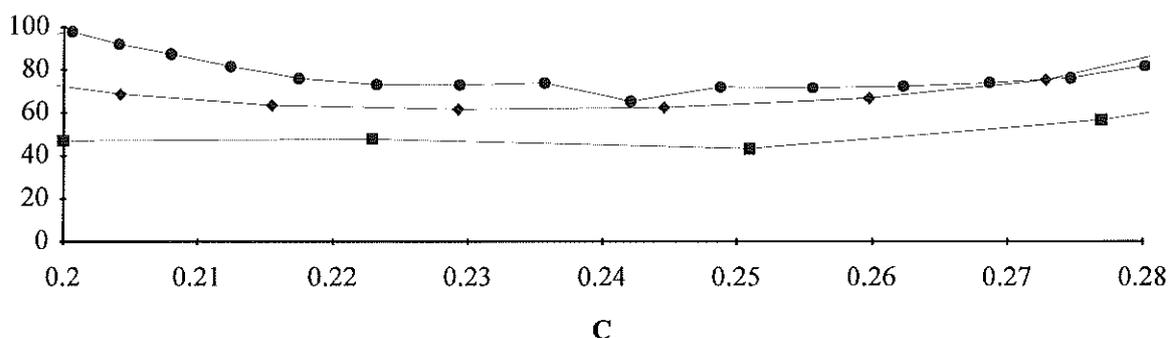
**Légende:**   ▪: profil n°1 ( $Re^\circ=0.25$ )  
               ♦: profil n°2 ( $Re^\circ=0.08$ )  
               •: profil n°3 ( $Re^\circ=0.02$ )

**Figure IV-16**

Pour cela nous avons mesuré un même profil stationnaire ( $C_1$  et  $C_2$  identiques) pour des suspensions contenant les mêmes particules dans des fluides différents (suspensions n° 1; 2 et 3 du tableau 1). Pour ces trois suspensions,  $Re^\circ$  vaut respectivement 0.25; 0.08 et 0.02. Les profils stationnaires ( $C_1=17\%$ ;  $C_2=33\%$ ), désignés par le numéro de la suspension correspondante sont représentés figure IV-16.

Les profils n°2 et 3 peuvent être considérés comme identiques, alors que le profil n°1 est quant à lui plus raide. En conséquence, le coefficient de diffusion normalisé, calculé directement à partir des profils et représenté figure IV-17, est comparable dans les suspensions n°2 et 3, et plus petit pour la suspension n°1 ( $D_n \sim 70$  pour  $Re^\circ < 0.1$  et  $D_n \sim 45$  pour  $Re^\circ=0.25$ ).

#### COEFFICIENT DE DIFFUSION NORMALISE $D_n$ POUR DIFFERENTS NOMBRES DE REYNOLDS



**Légende:**   ▪: suspension n°1 ( $Re^\circ=0.25$ )  
               ♦: suspension n°2 ( $Re^\circ=0.08$ )  
               •: suspension n°3 ( $Re^\circ=0.02$ )

**Figure IV-17**

Pour la dépendance de  $D_n$  avec  $Re^\circ$ , les quatre régimes évoqués en I-6 laissent envisager  $D_n \sim Re^\circ$  (régime 2) ou  $D_n \sim 1/Re^\circ$  (régime 3) pour les régimes intermédiaires et  $D_n$  indépendant de  $Re^\circ$  à fort et faible nombre de Reynolds. Nos mesures montrent clairement que pour  $Re^\circ < 0.1$ , le régime purement visqueux (régime 1) peut être considéré comme établi puisque  $D_n$  ne dépend plus de  $Re^\circ$ . En ce qui concerne la suspension n°1 ( $Re^\circ=0.25$ ),  $D_n$  semble inférieur à la valeur du régime visqueux, et on peut donc supposer que le régime intermédiaire commence à s'établir. On a vu en I-6 qu'un seul de ces régimes intermédiaires pouvait exister si les particules et la concentration restaient les mêmes et si le rapport de densité  $d$  entre les particules et le fluide était maintenu constant. Dans notre cas, ce rapport varie extrêmement peu pour les trois suspensions considérées, et on peut donc raisonnablement supposer qu'un seul des régimes intermédiaires (régime 2 ou régime 2') existe.

Si on suppose que le régime intermédiaire est le régime 2 (déjà mis en évidence dans [Ham et al]), à la transition entre le régime 1 et le régime 2, en notant  $D_n^i$  le coefficient  $D_n$  dans le régime  $i$ , on trouve d'après (1-38)  $D_n$  de la forme:

$$D_n = D_n^1 + D_n^2 \quad (4-16)$$

avec  $D_n^2 \propto Re$

Dans cette hypothèse, le coefficient  $D_n$  devrait donc devenir supérieur à  $D_n^1$  lors de la transition du régime 1 vers le régime 2, ce qui est en désaccord avec les observations expérimentales.

En revanche si on suppose que le régime intermédiaire est le régime 2',  $D_n$  à la transition devient:

$$D_n = (1/D_n^1 + 1/D_n^3)^{-1} \quad (4-17)$$

avec  $D_n^3 \propto 1/Re$

Et dans ce cas,  $D_n$  chute à la transition conformément à la valeur mesurée pour la suspension 1.

Cette étude succincte semble donc montrer que dans le régime intermédiaire, le coefficient de diffusion hydrodynamique est proportionnel à la viscosité. Ce comportement en contradiction avec les observations de Ham et al peut s'expliquer par leur gamme de concentrations de mesures ( $54\% < C < 59\%$ ). Les mesures de fluctuations de vitesse des particules ([Nicolai et al][Xue et al]) ont montré un changement de comportement aux temps longs pour les concentrations élevées. Ce changement de comportement apparaît à partir des concentrations ( $C \sim 35\%$ ) au-delà desquelles, chaque particule ne peut plus s'échapper de sa cage (elle conserve les mêmes voisines). En conséquence, le coefficient de diffusion collectif auquel nous nous intéressons, peut, en toute vraisemblance, changer de comportement au-delà de ces concentrations. Il est à noter que les mesures de  $D_n$  que nous avons pu effectuer concernent uniquement la gamme de concentrations dans laquelle cet effet de cage n'apparaît pas encore. Le changement vraisemblable de comportement pour  $D_n$  à forte concentration (dont on s'attend à ce qu'il chute) aurait été intéressant à étudier. En tout état de cause, les comportements de  $D_n$  à forte et faible concentration ne sont pas a priori comparables; et notre apparent désaccord avec les observations de Ham et al ne présente donc pas d'incohérence.

Cependant, maintenant que nous nous sommes persuadé que les suspensions n°2 et 3 se situent dans un régime purement visqueux, le désaccord entre nos mesures de  $D_n$  et celles de Lee et al reste un problème non-résolu. Une explication peut être l'influence de la polydispersité sur les fluctuations de vitesses. En effet, Lee et al ont tenu compte de la polydispersité en utilisant le modèle de [Davis et Hassen]. Ils ont soustrait à l'étalement du front de concentration qui surmonte la suspension, un étalement provenant de la polydispersité, proportionnel au temps. Ce modèle extrapolé aux temps longs (cas du lit fluidisé) donnerait une ségrégation totale des particules. Or, l'inspection au microscope de

particules prélevées dans différentes couches du lit fluidisé ont montré que la ségrégation était partielle (et dans le cas de la couche supérieure de la suspension, on a pu observer la présence de quelques grosses particules dans une population en moyenne plus petite que dans les couches intermédiaires de la suspension). Ce modèle ne peut donc rendre compte que partiellement du processus de ségrégation. Mais plus fondamentalement, il serait intéressant de connaître les variations du coefficient de diffusion en fonction de la distribution de tailles des particules. Les mesures de la largeur du front surmontant la suspension sont critiquables pour différentes raisons selon qu'elles sont faites en lit fluidisé ou en sédimentation. En lit fluidisé, ces fronts concernent une partie marginale de la population des particules. S'il existe un très petit nombre de particules de très petite taille, on peut envisager que pour elles, la ségrégation puisse être totale. On aura alors pour chaque couche du front une population de particules différente. Cela a pour effet de rendre peu fiable l'estimation du flux convectif ( $U^o$  est différente dans chaque couche), mais surtout, le phénomène de diffusion hydrodynamique a toute les chances d'être affecté par cette stratification. Pour les expériences de sédimentation classique, dans lesquelles on s'intéresse à l'élargissement temporel aux temps courts, l'uniformité initiale de la distribution des particules de différentes tailles dans la suspension est au contraire très "artificielle". Et le processus de ségrégation qui se développe et introduit des différences entre les vitesses moyennes des différentes populations risque de modifier considérablement, lui aussi, le processus de diffusion. Pour ces différentes raisons, il est très difficile de comparer ces deux types d'expériences.

Il est cependant à noter que les mesures de  $D_n$  à partir des profils stationnaires de concentration se propageant au sein de la suspension ne présentent pas le type de problèmes que l'on vient d'évoquer pour les fronts surmontant la suspension. En effet, au sein de la suspension, l'état de ségrégation n'est pas contrôlé artificiellement, et est tel que la population des particules peut être considérée comme uniforme dans tout le front. Cependant, même dans ce cas, des mesures précises sont très difficiles à réaliser, et les résultats expérimentaux que nous avons obtenus (figure IV-15) ne donnent que l'ordre de grandeur de  $D_n$  pour la suspension que nous avons étudiée en régime purement visqueux.

Nous avons vu que pour  $Re < 0.5$ , la théorie de Batchelor prévoyait un lit fluidisé stable pour  $D_n > 6$  (cf I-7). Les mesures de  $D_n$  que nous avons obtenues pour  $5\% < C < 30\%$ , confirment donc le régime stable de notre lit fluidisé sur cette gamme de concentrations pour les trois suspensions utilisées.

#### IV-4 Comportement du lit lors d'une augmentation de débit

Dans le chapitre III, nous avons décrit la propagation des fronts de concentration, générés par des diminutions de débit dans le lit fluidisé. Ce type d'expériences est très similaire aux expériences de sédimentation dans une cuve. Elle consiste fondamentalement à former un "sédiment" dont la concentration ne correspond pas au compactage des particules, mais est une concentration intermédiaire fixée par le débit final dans le lit.

Dans le principe, à bas nombre de Reynolds, varier le débit dans le lit fluidisé consiste simplement à changer la vitesse de convection de la suspension dans le référentiel du laboratoire. Les phénomènes observés (propagation de front) sont dus à la condition aux limites traduisant l'absence de flux de particules à travers le poreux d'injection. Comme décrit en I-4, les conséquences de cette condition sur la suspension peuvent être aisément comprises lors d'une diminution de débit. Les particules viennent s'accumuler au niveau de l'injection jusqu'à ce qu'elles atteignent la concentration correspondant au nouveau débit imposé. Il est clair que dans ces conditions, une zone de concentration homogène (à la concentration finale  $C_2$ ) se forme d'abord en bas du lit, et envahit progressivement la suspension initiale en donnant naissance à un front de concentration.

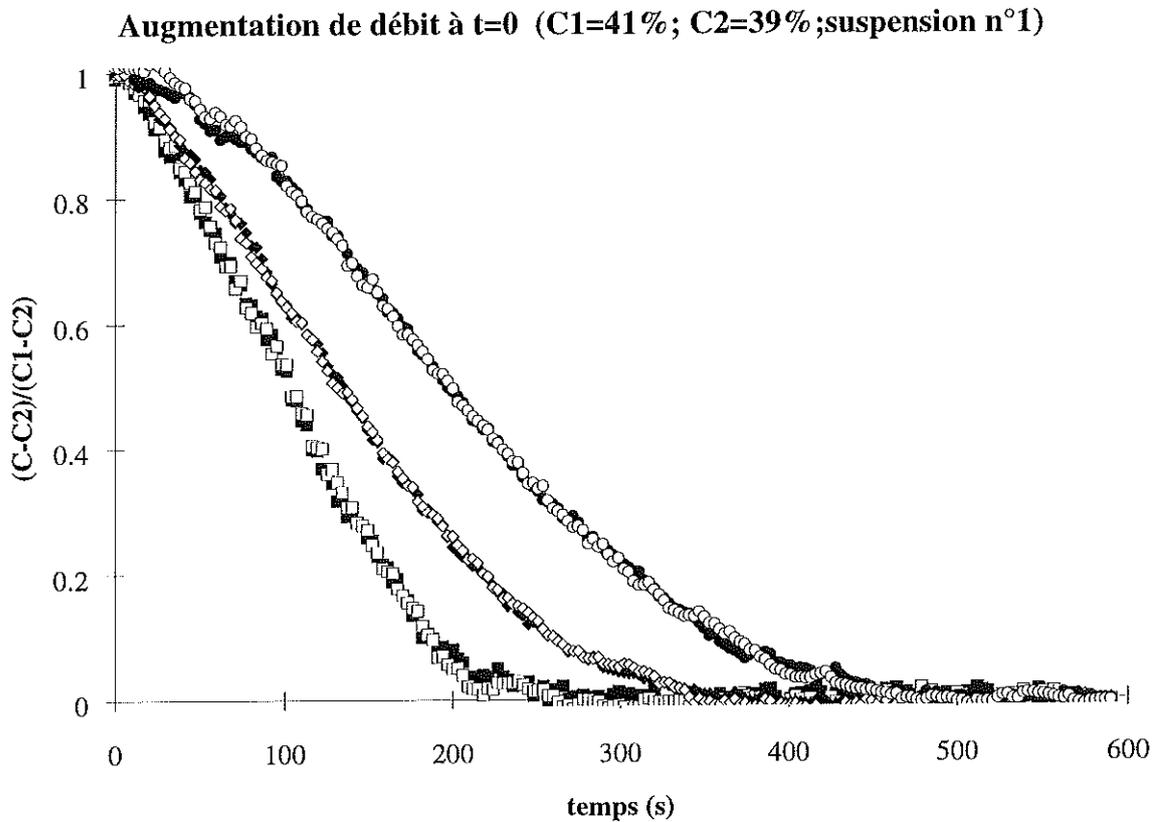
Lors des expériences d'augmentations de débit, la variation de vitesse de convection de la suspension est orientée vers le haut de la cuve. La suspension monte alors avec une vitesse  $U_2 - U_1$  et les particules s'éloignent donc de l'injection. On a vu en I-4 que le front qui se formerait alors entre la suspension à la concentration initiale  $C_1$  et le fluide clair apparaissant au dessus du poreux d'injection est instable (cf figure I-6). La suspension va donc nécessairement évoluer et "recoller" au poreux d'injection; et la condition aux limites impose alors qu'elle ne peut évoluer localement (au niveau de l'injection) que vers la concentration correspondant au nouveau débit imposé ( $C_2$ ) et de proche en proche, la suspension entière devra se trouver à l'état final à la concentration homogène  $C_2$ .

Si l'instabilité se développe suffisamment rapidement, la suspension reste à tout instant en contact avec le poreux d'injection. Le volume "dégagé" par la vitesse de convection imposée (entre le poreux d'injection et la suspension initiale) est alors à tout instant comblé par les particules qui s'adaptent à la concentration  $C_2$ , et la conséquence de la condition aux limites en bas du lit s'exprime simplement: une zone de concentration homogène  $C_2$  existe pour  $t > 0$  (en  $x \rightarrow +\infty$ ,  $C = C_2$  et  $\text{grad}(C) = 0$ ). Dans ces conditions, toutes les hypothèses nécessaires pour que le comportement de la suspension puisse être analysé en termes de propagation de front sont réunies (cf chapitre III). Un front se propagera donc entre les concentrations  $C_1$  et  $C_2 < C_1$ , et leur description dans le référentiel de sédimentation ( $Ox$ ) ne différera fondamentalement des fronts étudiés dans le chapitre III ( $C_2 > C_1$ ) que par le signe du gradient de concentration. Dans ce nouveau type de fronts, la vitesse de propagation d'une concentration  $W(C)$  dans un front convectif sera toujours donnée par la pente  $F'(C)$  de la

courbe de flux, et la vitesse d'un front stationnaire sera toujours égale à la pente de la corde correspondante de cette même courbe. Par contre le critère donnant la nature du profil sera inversé, et un front sera stationnaire si la corde se trouve au dessus de la courbe de flux (comme le gradient change de signe, le front ne peut être stationnaire que si  $F_c(C) < 0$ ).

Ce type de fronts obtenus par augmentations de débit a déjà été observé [Didwania et Homsy] pour des petites augmentations de débit ( $C_1 - C_2 \sim 2$  à  $4\%$ ) avec deux suspensions de billes de verre à la fois plus grosses et plus lourdes que celles que nous avons utilisées, fluidisées par de l'eau ( $Re^\circ \sim 200$  et  $1600$ ). On comprend tout l'intérêt que présenterait pour nous l'étude de ce type de fronts: il nous permettrait d'étudier des profils stationnaires pour des concentrations supérieures à la concentration d'inflexion de la courbe de flux  $C_i$ , et nous pourrions mesurer ainsi le coefficient de diffusion hydrodynamique  $D$  aux fortes concentrations.

Un exemple de profils mesurés expérimentalement à différentes cotes pour une augmentation de débit correspondant à un saut de concentration similaire à ceux des expériences de Didwania et Homsy (ici  $C_1 = 41\%$  ;  $C_2 = 39\%$ ) est représenté figure IV-18 (en ordonnée la diminution de concentration a été normalisée par l'amplitude de l'échelon de concentration  $C_1 - C_2$ ).



**Légende:** ■:  $z = 6.4\text{cm}$    ♦:  $z=9.4\text{cm}$    ●:  $z=13.9\text{cm}$   
(symboles évidés: mesures lors de la reproduction de la même expérience)

**Figure IV-18**

Il est clair que les profils expérimentaux représentés sur la figure IV-18 ne correspondent pas à un front évoluant vers un profil stationnaire. En effet, avec la vitesse de propagation  $V_f$  attendue (dans le lit :  $V_f = U_2 - (C_1 U_1 - C_2 U_2) / (C_1 - C_2) = 0.23 \text{ cm/s}$ ), le temps séparant le profil en  $z=9.4 \text{ cm}$  du profil en  $z=13.9 \text{ cm}$  aurait dû être d'environ 54s (contre  $\sim 35 \text{ s}$  sur la figure IV-18 !). Contrairement aux expériences de Didwania et Homsy (faites à beaucoup plus grand nombre de Reynolds), les profils observés pour des petits sauts de concentration ne semblent pas traduire un phénomène de nature propagative. En fait, lorsqu'une zone de concentration  $C_2$  apparaît dans le lit, la concentration initiale  $C_1$  n'existe déjà plus et les conditions nécessaires pour observer la propagation d'un front (gradient de concentration entre deux zones de concentration homogène) ne sont donc jamais réalisées. On peut noter que les deux premiers profils ( $z=9.4 \text{ cm}$  et  $z=13.9 \text{ cm}$ ) traduisent une baisse de concentration pratiquement instantanée lors de l'augmentation de débit, et semblent évoluer vers la concentration finale  $C_2$ , non pas l'un après l'autre, mais en même temps avec des constantes de temps néanmoins différentes.

On peut penser à rapprocher le comportement observé expérimentalement du comportement que Didwania et Homsy avaient observé pour des expériences de forte augmentation de débit et qu'ils ont décrit en termes d'instabilités de Rayleigh-Taylor (instabilités de gravité) en milieu infini.

Une telle approche décrit le comportement d'une interface instable (interface entre  $C_1$  et  $C=0$  apparaissant au niveau de l'injection), qui se déplace vers le haut du lit avec une vitesse  $U_2 - U_1$  ( $= 4.10^{-3} \text{ cm/s}$  pour l'expérience figure IV-18). Etant donné la faible valeur de  $U_2 - U_1$ , l'interface va toujours rester très près de l'injection, et on observera au niveau de nos cotes de mesures, le développement de la partie supérieure de l'interface instable (ce qui correspondrait qualitativement assez bien aux profils expérimentaux observés). Toutefois, le modèle proposé par Didwania et Homsy ne peut s'appliquer que partiellement à nos expériences, puisque le milieu, limité par le poreux d'injection ne peut assurément pas être considéré comme infini.

Dans le meilleur des cas, on peut donc supposer que les profils mesurés correspondent au développement d'une interface instable dans un milieu semi-infini, et on s'attend à ce que ce développement soit ralenti par le confinement dû au poreux d'injection. En effet, pour que des doigts instables de faible concentration se propagent vers le haut du lit à travers la suspension initialement homogène à la concentration  $C_1$ , il faut également que des doigts de concentration élevée se propagent vers le bas au dessous de l'interface (conservation du volume de particules). Et il est clair que ces doigts de forte concentration ne peuvent se développer que dans la limite du volume libéré sous l'interface, qui n'augmente qu'à la vitesse  $U_2 - U_1$  et constitue donc une limite au développement des instabilités. Cette description est représentée schématiquement sur la figure IV-19. Il est évident que la situation représentant le début du développement des instabilités (forte concentration  $C_1$  et faible concentration  $C=0$ )

n'est absolument pas représentative d'une situation réelle possible. Dès le début du développement des instabilités, le système n'a plus rien d'un système diphasique et les doigts représentés seront en fait des zones de mélange de concentration variable.

DEVELOPPEMENT D'INSTABILITES DE RAYLEIGH-TAYLOR

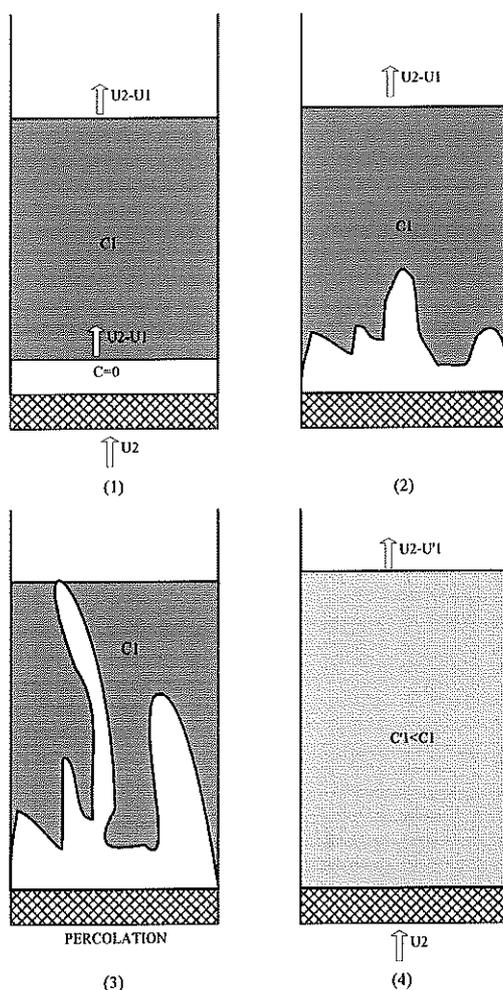
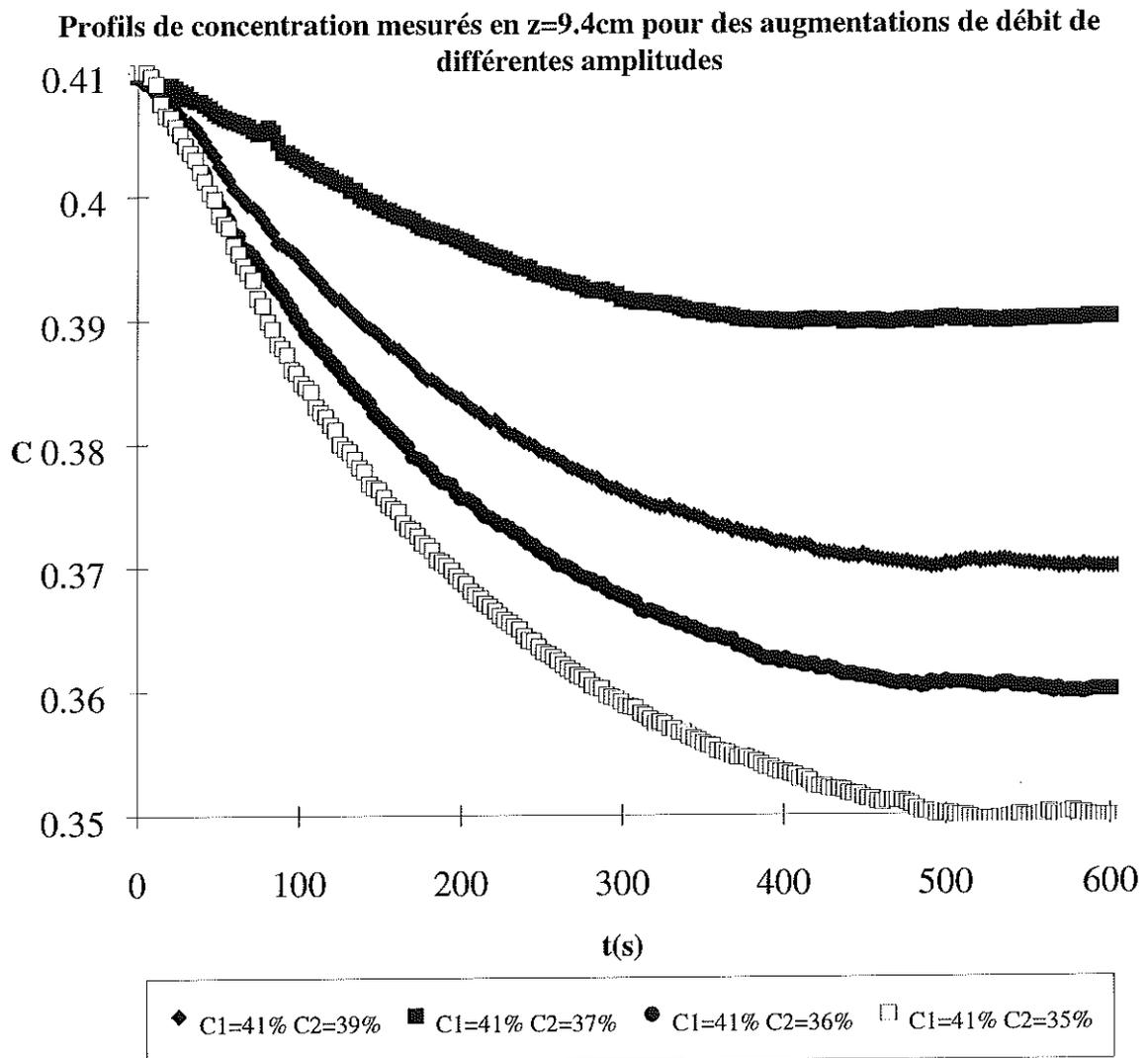


Figure IV-19

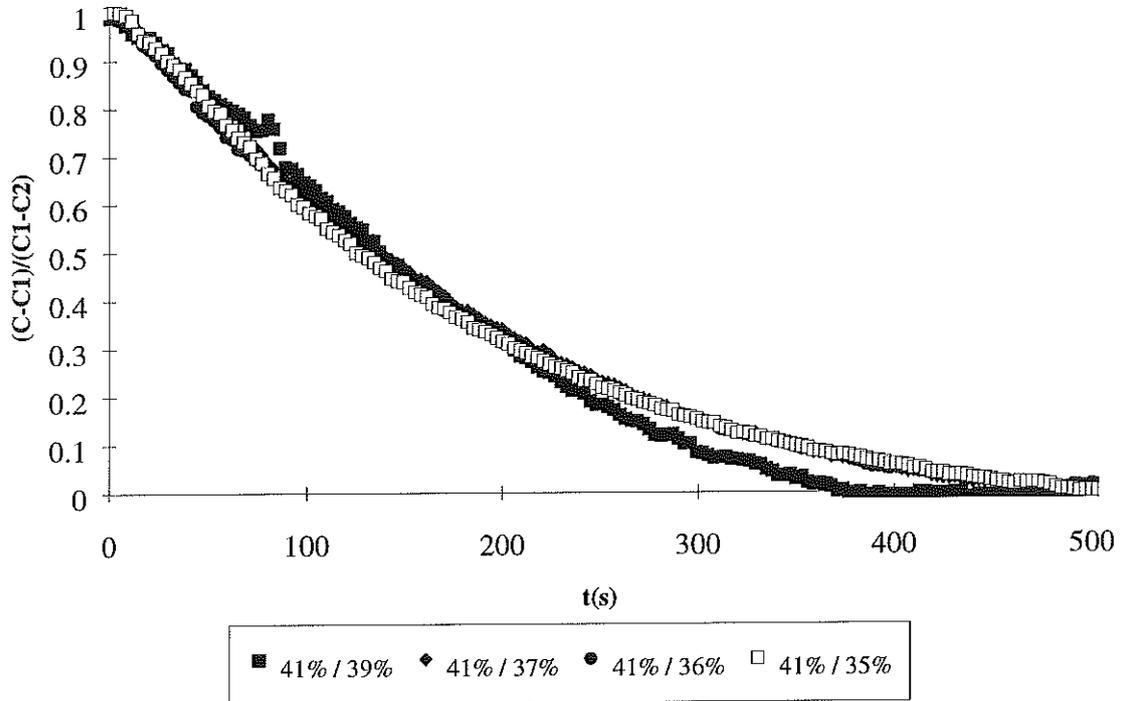
Si une telle description est applicable, le volume de particules (ou plus exactement la hauteur de suspension dans le lit) ne doit pas intervenir tant que les doigts de faible concentration n'ont pas atteint le haut de la suspension (percolation). Avec un tel modèle, on s'attend donc à deux types de comportement différents (avant et après la percolation). Et pour des hauteurs de suspensions différentes (mais pour la même concentration), le comportement doit être identique aux temps courts (avant la percolation), et le comportement aux temps longs doit apparaître d'autant plus tôt que la hauteur de suspension est faible. De plus, comme le volume libéré sous la suspension croît à la vitesse  $U_2 - U_1$ , l'amplitude des instabilités à un instant donné pourra être d'autant plus grande que  $U_2 - U_1$  (et donc  $C_1 - C_2$ ) est élevé. En d'autres termes, aux temps courts, la diminution de la concentration à une cote donnée devrait être d'autant plus rapide que l'échelon de concentration est important (du moins tant que le volume libéré sous la suspension limite effectivement l'amplitude des instabilités).

La figure IV-20 représente l'évolution temporelle de la concentration à une cote donnée, pour des diminutions de débit de différentes amplitudes et une concentration initiale constante ( $C_1=41\%$ ) pour la suspension n°1 (fluide suspendant: eau). Cette figure montre clairement que la concentration varie d'autant plus vite que l'échelon de concentration est important. Ceci semble donc conforter l'hypothèse selon laquelle le développement des instabilités est limité par le volume libéré (milieu semi-infini). En fait, la normalisation de la variation de concentration ( $C-C_2$ ) par l'amplitude de l'échelon ( $C_1-C_2$ ) permet de superposer les profils pour tous les sauts de concentrations supérieurs à 4% (cf figure IV-21).



**Figure IV-20**

(C-C1)/(C1-C2) mesuré en z=9.4cm pour des augmentations de débit d'amplitudes différentes (pour la même concentration initiale C1=41%)

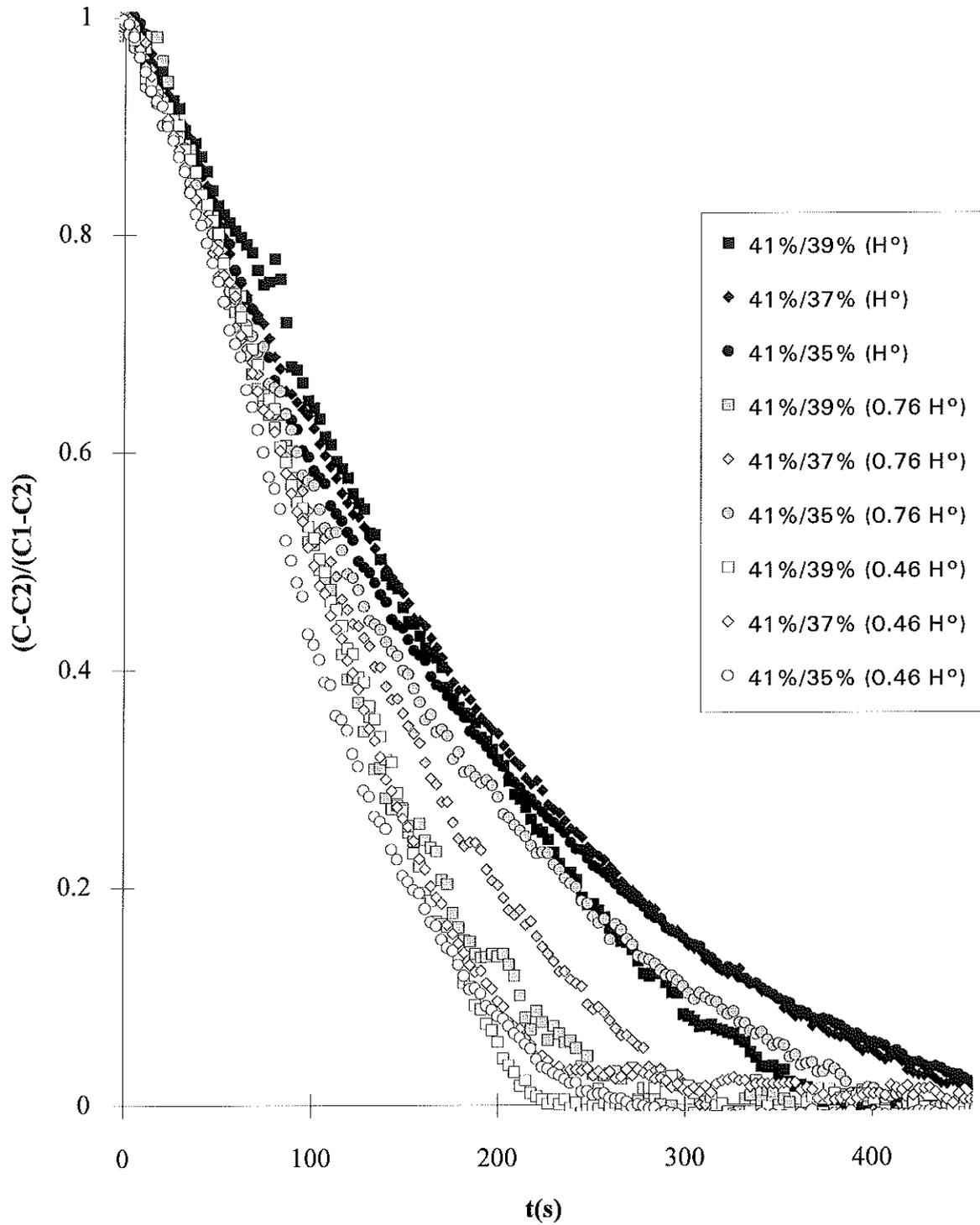


**Figure IV-21**

On note  $H$  = (volume des particules/section du lit) la longueur mesurant le volume des particules, et  $h$  la hauteur de la suspension dans le lit (pour une concentration homogène  $C$ , on a la relation  $H = h C$ ). Sauf précision, toutes les expériences présentées dans ce paragraphe ont été réalisées avec le paramètre de volume  $H^\circ = 8.7\text{cm}$  et avec de l'eau comme fluide suspensif (suspension n°1).

Pour étudier l'effet du volume total de particules, les expériences réalisées avec  $H^\circ$  ont été comparées avec les résultats obtenus pour un volume de billes diminué de 25% et 50%. Les figures IV-22 et IV-23 donnent les différents profils mesurés à la même cote pour des augmentations de débit de diverses amplitudes à partir d'une même concentration initiale (respectivement  $C_1=41\%$  et  $C_1=35\%$ ). Pour les deux concentrations initiales considérées, il est très difficile de savoir si le comportement aux temps courts est indépendant du volume (si ce comportement existe, il est de courte durée et à une échelle de temps en tout cas trop petite pour pouvoir conclure à partir des profils expérimentaux présentés). En revanche, pour la suspension de petit volume ( $H = 0.46 H^\circ$ ), le temps d'établissement de la concentration finale  $C_2$  est raccourci de façon très nette. Cependant, pour la suspension de volume intermédiaire ( $H = 0.76 H^\circ$ ), l'effet de la baisse de volume est visible lorsque  $C_1=41\%$  (et le temps caractéristique dépend alors fortement de l'amplitude du saut de concentration) et semble inexistant lorsque  $C_1=35\%$ .

**Evolution temporelle de la concentration en  $z=9.4\text{cm}$  pour  
des volumes de particules différents**



**Figure IV-22**

### Evolution temporelle de la concentration en $z=9.4\text{cm}$ pour des volumes de particules différents

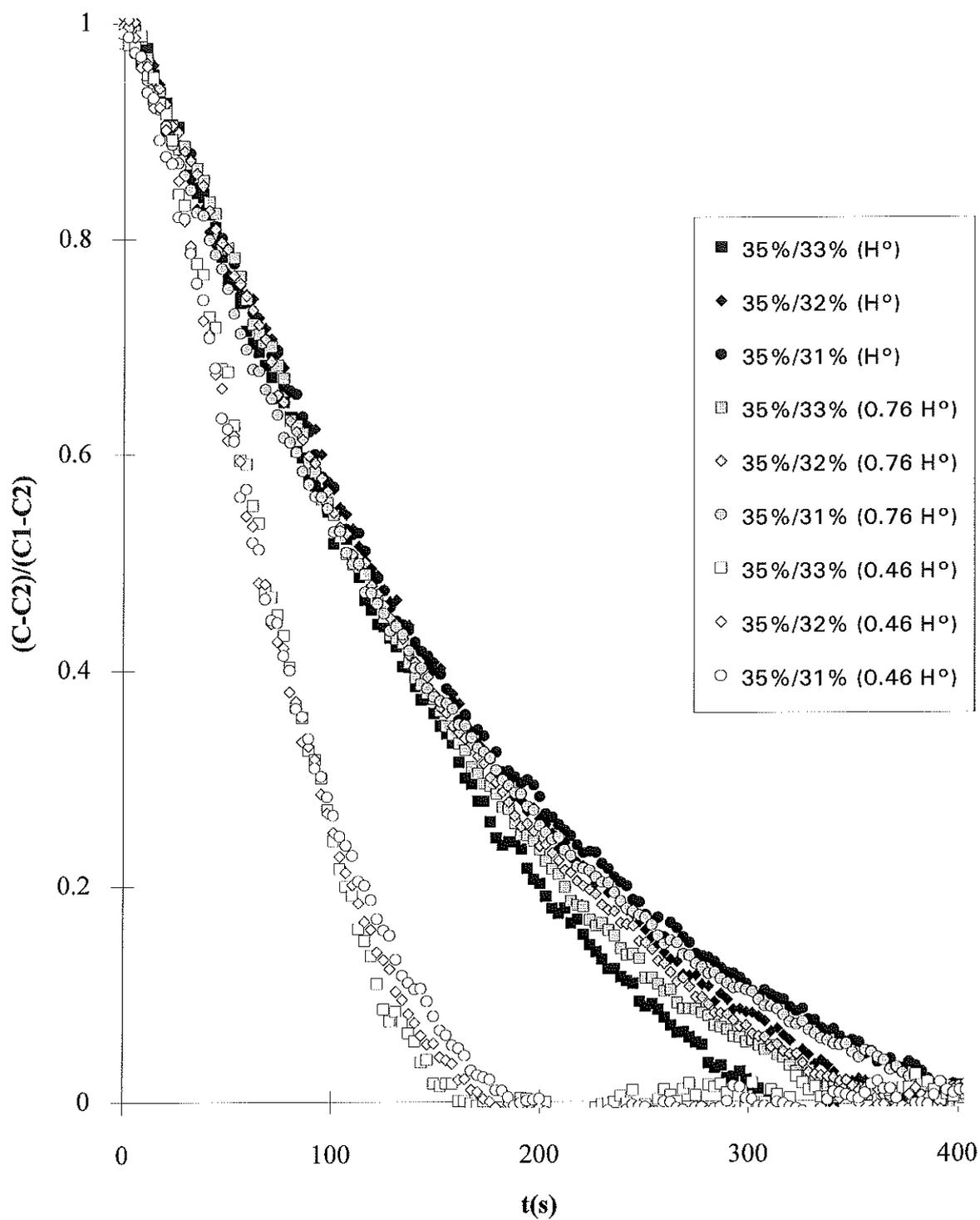


Figure IV-23

Que le régime aux temps courts (avant percolation) n'apparaisse pas clairement n'est en fait pas très surprenant. Didwania et Homsy avaient relevé un temps caractéristique de l'ordre de quelques secondes pour le développement des instabilités qu'ils avaient observées (avec des particules certes beaucoup plus lourdes).

Toutefois il est intéressant de considérer l'allure qu'auraient les profils si les instabilités se développaient de façon quasi-instantanée. Il suffit d'imaginer pour cela qu'elles se développent entre deux concentrations suffisamment proches pour que le volume libéré au niveau de l'injection suffise à leur développement complet dans tout le volume de la suspension. Le processus représenté figure IV-19, réalisé et itéré en un temps très court, impliquerait alors que la suspension soit approximativement homogène à tout instant. D'ailleurs, les concentrations  $C_1$  et  $C_2$  n'étant jamais simultanément présentes dans notre système, le gradient moyen de concentration reste toujours inférieur à  $(C_1 - C_2)/h$ , ce qui justifie la considération de cette hypothèse, certes grossière, d'homogénéité de la suspension.

On peut alors calculer  $C(t)$ , notée  $C$ , la concentration de la suspension homogène, en écrivant la conservation du volume de particules:

$$h C = H \quad (4-18)$$

Et la hauteur de la suspension  $h(t)$  croît à une vitesse dépendant de la vitesse débitante ( $U_2$ ) et de  $U(C)$  notée  $U$  (cf figure IV-19, étape (4)):

$$\frac{dh}{dt} = U_2 - U \quad (4-19)$$

En éliminant  $h$  de (4-18) et (4-19), on obtient:

$$-\frac{H}{C^2} \frac{dC}{dt} = U_2 - U(C) \quad (4-20)$$

Si on considère une petite augmentation de débit ( $C_1 - C_2 \ll C_2$ ), en introduisant la fonction de variation normalisée de la concentration ( $f(t) = (C - C_2)/(C_1 - C_2)$ ) déjà utilisée pour les représentations graphiques,  $C$  s'écrit alors:

$$C = C_2 + (C_1 - C_2) f(t) \quad (4-21)$$

où  $(C_1 - C_2) f(t) \ll C_2$

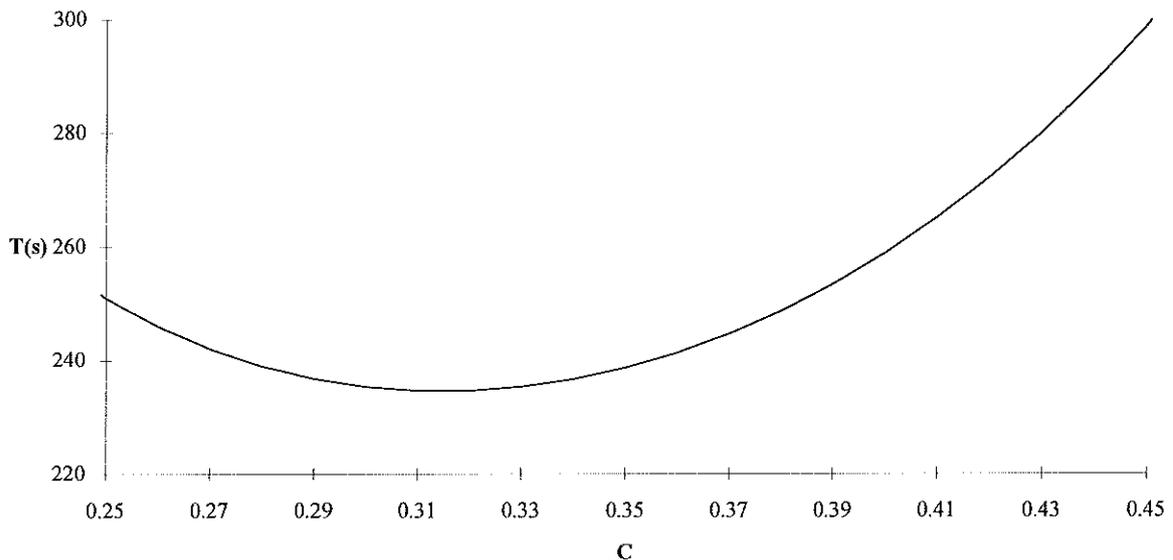
Et la solution de l'équation différentielle obtenue par le développement limité au 1<sup>o</sup> ordre en  $(C_1 - C_2) f(t)$  de (4-40) donne:

$$\frac{C - C_2}{C_1 - C_2} = \exp(-t/T) \quad \text{avec } T = \frac{1}{p(C_2)^2 (1 - C_2)^{(p-1)} U^o} H \quad (4-22)$$

Cette solution, qui traduit le bilan global de volume de particules dans la suspension, ne contient aucune information sur le phénomène physique mis en jeu dans l'expansion de la suspension. Si elle s'avérait correcte, elle présenterait bien sûr l'avantage de permettre de prédire le temps nécessaire à l'établissement de la concentration finale  $C_2$ . Mais en

contrepartie, cela signifierait également que l'étude des profils expérimentaux ne présente aucun intérêt physique.

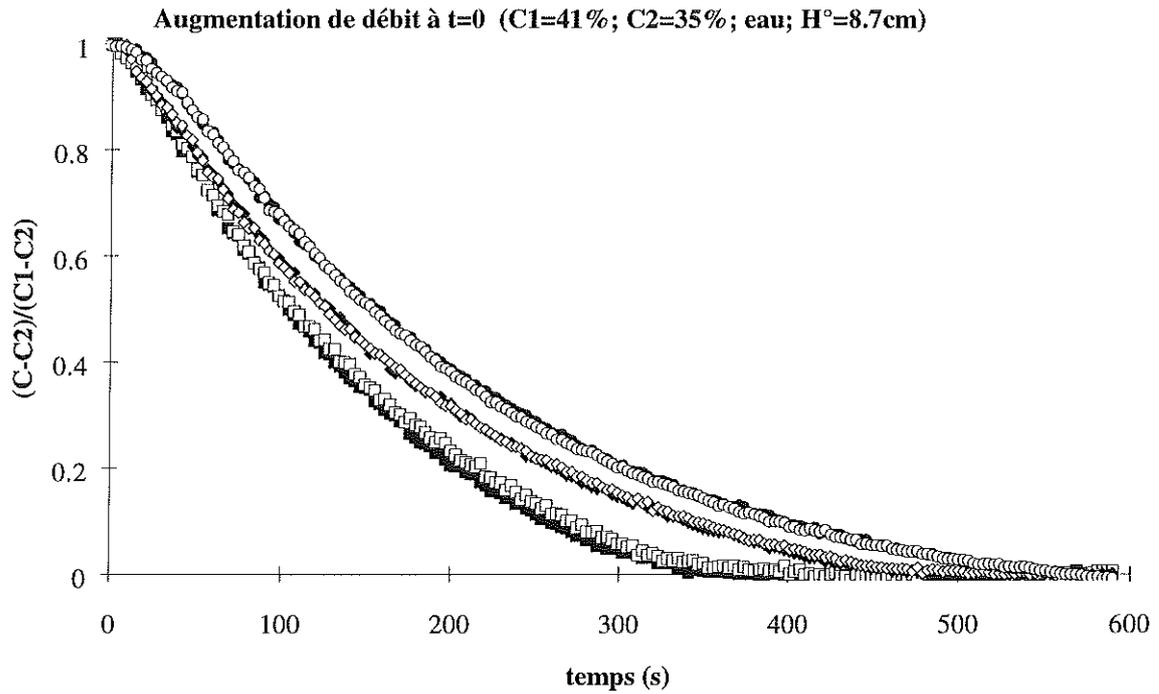
**T(s) pour la suspension n°1 (eau) et  $H^0=8.7\text{cm}$**



**Figure IV-24**

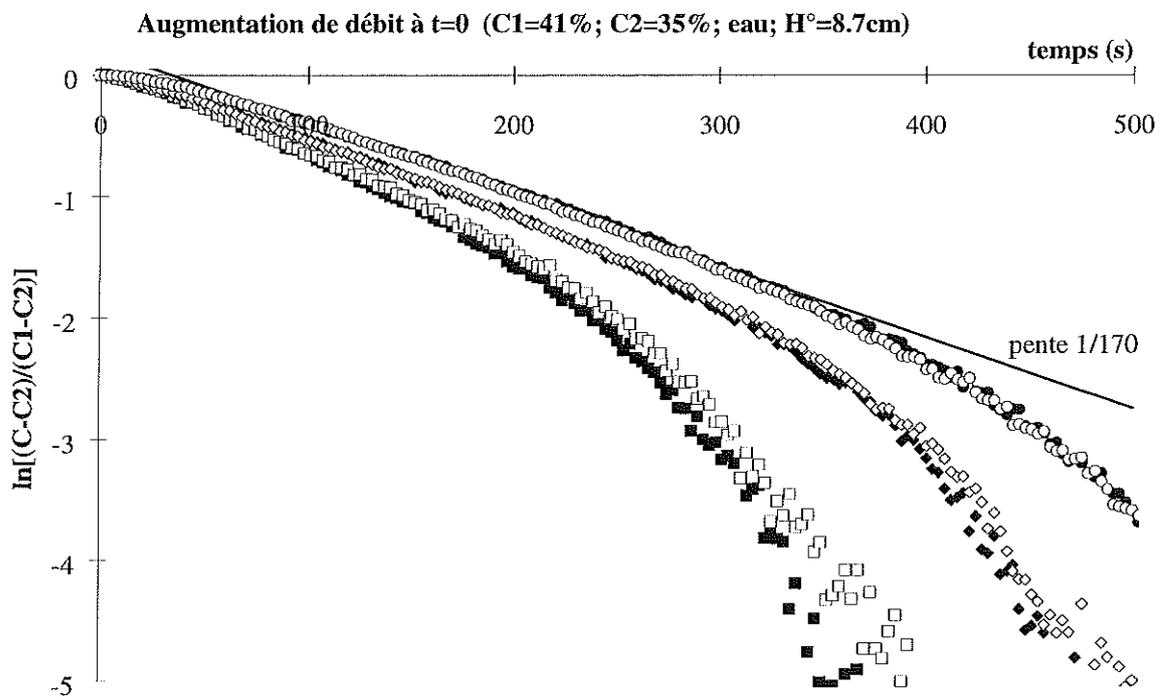
Un bon nombre des caractéristiques des différents profils expérimentaux sont correctement traduits par l'équation (4-22). On retrouve la normalisation par l'amplitude de l'échelon de concentration et le temps caractéristique  $T$  augmente avec la concentration de la suspension (figure IV-24) à partir de 33% en accord avec les observations faites lors de la comparaison entre les profils expérimentaux pour  $C_1=35\%$  et  $C_1=41\%$  (figure IV-22 et figure IV-23). Toutefois, les profils obtenus pour différentes valeurs de  $(C_1-C_2)$  ne ressemblent à des exponentielles que pour des échelons de concentration assez grands (cf figure IV-22 et IV-23), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du calcul de (4-22).

Cependant, on peut noter que ce modèle simple donne une borne supérieure du temps caractéristique d'établissement de  $C_2$ . En effet, on sait que la suspension n'est pas réellement homogène pendant le processus et la concentration en haut de la suspension  $C(h)$  est toujours supérieure à la concentration moyenne. En conséquence la vitesse d'augmentation du volume de la suspension ( $U_2-U(C(h))$ ) a été sous-estimée dans (4-18), et l'établissement de  $C_2$  est donc plus rapide que la prédiction (4-22). Il reste alors à vérifier si ce modèle décrit correctement les profils ayant les temps caractéristiques les plus longs, et qui correspondent donc aux échelons  $(C_1-C_2)$  les plus élevés.



Légende:  $\blacksquare$ :  $z = 6.4\text{cm}$   $\blacklozenge$ :  $z=9.4\text{cm}$   $\bullet$ :  $z=13.9\text{cm}$   
 (symboles évidés: mesures lors de la reproduction de la même expérience)

Figure IV-25

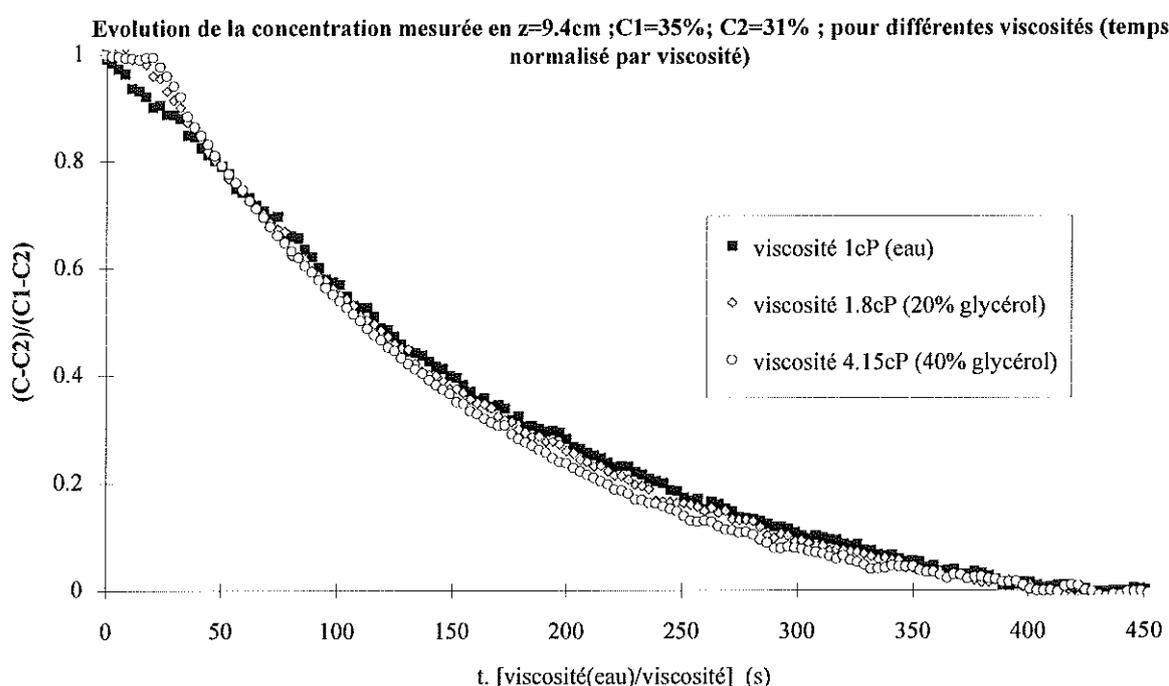


Légende:  $\blacksquare$ :  $z = 6.4\text{cm}$   $\blacklozenge$ :  $z=9.4\text{cm}$   $\bullet$ :  $z=13.9\text{cm}$   
 (symboles évidés: mesures lors de la reproduction de la même expérience)

Figure IV-26

La figure IV-26 montre que les profils correspondant à l'échelon  $C_1=41\%$ ;  $C_2=35\%$  (figure IV-25) sont correctement décrits par une exponentielle pour des temps suffisamment courts. Le temps caractéristique  $T_c$  le plus élevé (en  $z=13.9\text{cm}$ ,  $T_c=170\text{s}$ ) est cependant petit devant le temps caractéristique de (4-22) ( $T(C_2=35\%)=240\text{s}$ ), même si l'ordre de grandeur est néanmoins correct. En conclusion, l'équation (4-22) ne décrit correctement aucun des profils expérimentaux, et ne permet pas non plus de rendre compte de l'effet du volume de particules observé sur les figures IV-22 et IV-23. Et si l'influence de  $H$  sur  $T_c$  reste mal définie, ces figures sembleraient tout de même indiquer les régimes suivants:

- 1-  $H > H_1(C_1)$  :  $(C(t)-C_2)/(C_1-C_2)$  ne dépend pas de  $H$  et de  $(C_1-C_2)$
- 2-  $H_2(C_1) < H < H_1(C_1)$  :  $(C(t)-C_2)/(C_1-C_2)$  dépend de  $H$  et de  $(C_1-C_2)$
- 3-  $H < H_2(C_1)$  :  $(C(t)-C_2)/(C_1-C_2)$  ne dépend pas de  $H$  mais dépend de  $(C_1-C_2)$



**Figure IV-27**

De plus en comparant des expériences d'augmentations de débit pour les mêmes concentrations  $C_1$  et  $C_2$  mais avec des fluides suspendants différents (suspensions n°1; 2; 3), on a pu vérifier le temps caractéristique  $T_c$  était proportionnel à la viscosité (figure IV-27). Ceci est compatible avec (4-22) et correspond à la loi d'échelle attendue (l'expansion du lit traduit une compétition entre la gravité et la viscosité):

$$T_c \propto L/U^0$$

Où la longueur caractéristique  $L$ , qui dépend a priori des grandeurs adimensionnées  $C_1$ ,  $C_2$  et  $d$  (densité des billes par rapport au fluide), peut faire intervenir aussi bien le rayon des particules  $a$  que les différentes longueurs macroscopiques du système ( $H$ , cote  $z$ , largeur de la cuve  $l$ ).

En guise de conclusion, les expériences d'augmentations de débit sont encore très mal comprises. Malheureusement, dans notre système expérimental, elles ne donnent pas lieu à des phénomènes de propagation de fronts, mais à une expansion en volume inhomogène. Il est peut-être possible de décrire cette expansion par le développement d'instabilités de Rayleigh-Taylor comme l'ont proposé Didwania et Homsy, mais il est indéniable que dans nos conditions expérimentales, les conditions aux limites jouent alors un rôle prédominant. De toute façon, il est clair qu'au cours de ce processus d'expansion, les instabilités gravitationnelles introduisent dans la suspension des inhomogénéités de vitesses de convection dans les trois directions de l'espace. Une description réaliste nécessiterait donc la connaissance, entre autre, du comportement de la suspension sous cisaillement (viscosité effective?; diffusion induite ...) et ferait appel à des notions beaucoup trop compliquées pour l'état actuel de nos connaissances.

Du point de vue expérimental, on peut simplement noter que le temps nécessaire pour obtenir une concentration finale  $C_2$  homogène lors d'une augmentation de débit peut être relativement long même pour les viscosités modérées que nous avons utilisées. A titre indicatif, l'établissement de  $C_2=31\%$  à partir de  $C_1=35\%$  nécessite environ une demi-heure pour la suspension n°3 ( $\eta \sim 4\text{cP}$ ) (cf figure IV-27).

#### IV-5 Réponse à une oscillation sinusoïdale de débit

Batchelor, dans sa théorie sur l'instabilité d'un lit fluidisé uniforme [Batchelor 1] a fait remarquer que l'étude de la propagation d'ondes sinusoïdales dans une suspension à bas nombre de Reynolds permettrait de mesurer le coefficient de diffusion hydrodynamique à partir de la mesure du facteur d'atténuation  $\sigma$ .

L'équation de conservation (3-1) et l'expression du flux volumique des particules dans le référentiel de sédimentation (3-2), permettent d'établir l'équation:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial [CU(C)]}{\partial x}\right)_t = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_t \right) \quad (4-23)$$

lorsqu'on considère une oscillation sinusoïdale, de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $\Delta C$  générée en  $x=0$  autour de la concentration moyenne  $C^\circ$ , l'équation (4-23) permet d'établir pour les faibles amplitudes d'oscillations ( $\Delta C \ll C^\circ$ ) l'équation d'évolution de l'onde:

$$C(x;t) = C^\circ + \Delta C \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{F'(C^\circ)} \right) \right] \exp \left[ - \frac{D\omega^2}{F'(C^\circ)^3} x \right] \quad (4-24)$$

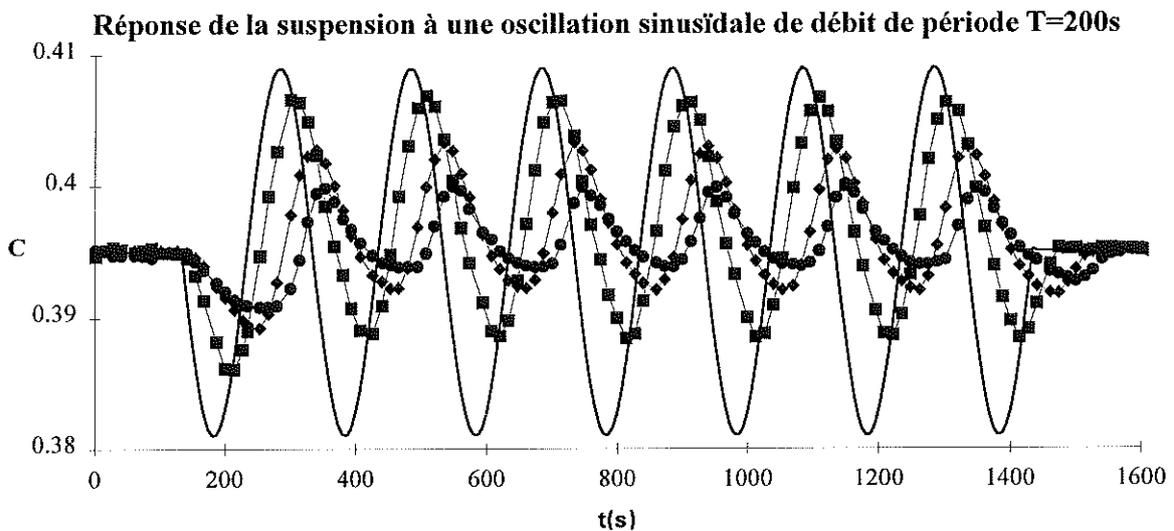
On retrouve pour cette onde de concentration autour de  $C^\circ$  la même vitesse de propagation  $F'(C^\circ)$  que la vitesse de propagation  $W(C^\circ)$  définie dans un gradient (cf (3-5)), ce qui justifie l'appellation de Kynch ("wavelet velocity"). L'équation (4-24) permet d'établir entre la vitesse de propagation de l'onde  $F'(C^\circ)$  et le coefficient d'atténuation  $\sigma$ , la relation:

$$F'(C^\circ)^3 \sigma = D\omega^2 \quad (4-25)$$

On comprend tout l'intérêt que peut présenter l'étude de la relation de dispersion de ce type d'ondes. La vitesse de propagation permet d'obtenir la valeur de la dérivée du flux en  $C^\circ$ . Mais surtout le tracé de  $F'(C^\circ)^3 \sigma$  en fonction de  $\omega^2$  permet à la fois de tester la validité de la description et d'obtenir la valeur du coefficient de diffusion hydrodynamique  $D(C^\circ)$ .

Le lit fluidisé doit permettre a priori de générer des oscillations sinusoïdales de concentration: il suffit pour cela d'imposer une faible variation sinusoïdale du débit autour d'une valeur moyenne donnée. En supposant que la concentration  $C(t)$  au niveau de l'injection ( $z=0$ ) est imposée par la vitesse débitante  $V_d(t)$ , on déduit des relations (1-20) et (1-30):

$$C(t) = 1 - \left( \frac{V_d(t)}{U^\circ} \right)^{1/p} \quad (4-26)$$



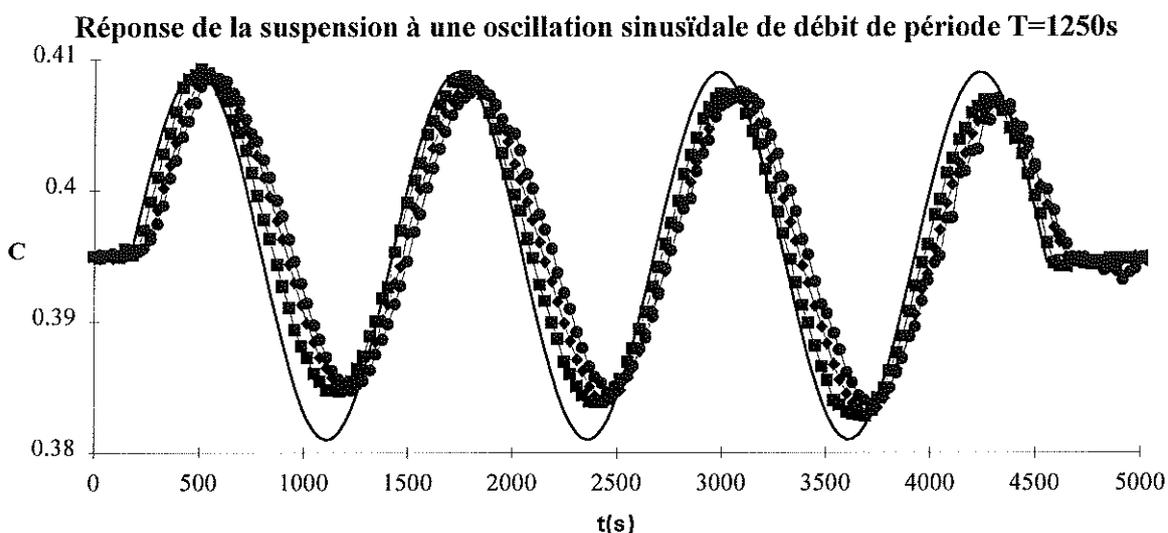
**Légende:**  $\square$ :  $z = 2.3\text{cm}$     $\blacklozenge$ :  $z = 5.3\text{cm}$     $\bullet$ :  $z = 8.3\text{cm}$

—:  $C(t)$  théorique en  $z=0$  calculée par (4-26), pour la vitesse débitante  $V_d(t)$  imposée

**Figure IV-28**

Lors d'une variation sinusoïdale du débit, de faible amplitude, la concentration varie effectivement sinusoïdalement à une cote donnée, et l'amplitude décroît dans le sens de la "propagation" (cf figure IV-28). Toutefois la relation (4-25) entre la vitesse de propagation et le coefficient d'atténuation qui ont été mesurés pour différentes fréquences n'est absolument pas vérifiée.

Ceci s'explique par le comportement de la suspension dans le lit lors d'une augmentation de débit même de faible amplitude. On a vu dans le paragraphe précédent qu'alors la condition aux limites au niveau de l'injection (absence de flux de particules), ne pouvait pas être aussi simplement formulée que par la relation (4-26). Lorsque le débit est augmenté, la suspension s'expand en grande partie en volume avec un temps caractéristique  $T_c$ . Ainsi, pour des périodes d'oscillations  $T$  grandes devant  $T_c$ , la suspension a le temps de s'expandre dans tout son volume, mais dans ce cas, il se trouve que la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi F'(C^\circ)/\omega$  devient grande devant la hauteur de suspension dans le lit. La concentration est alors sensiblement homogène à tout instant et la relation (4-26) est vérifiée pour toutes les cotes de mesures disponibles (cf figure IV-29).

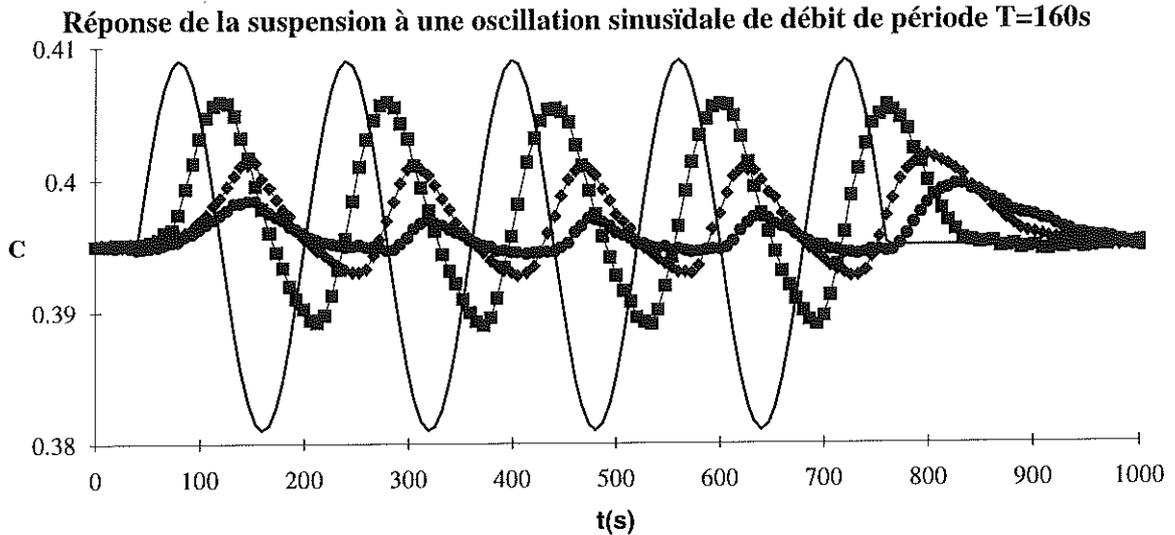


**Légende:** ■:  $z = 2.3cm$    ◆:  $z = 5.3cm$    ●:  $z = 8.3cm$

—:  $C(t)$  théorique en  $z=0$  calculée par (4-26), pour la vitesse débitante  $V_d(t)$  imposée

**Figure IV-29**

Pour des périodes d'oscillations de l'ordre de  $T_c$  (figure IV-28), l'expansion n'est plus totale (et devient très faible pour  $T < T_c$  figure IV-30), et au moment où le débit commence à décroître, il existe un léger gradient dans la suspension comparable au gradient que l'on a pu observer lors des augmentations de débit en échelon. A ce moment, la concentration est donc moins faible aux cotes plus élevées, ce qui ressemble à l'effet d'une atténuation de type  $\sigma$ . Et au cours de la demi-période suivante (lorsque le débit décroît), un phénomène propagatif s'établit effectivement (à rapprocher de la propagation des fronts décrits dans le chapitre III). Dans ce processus, les concentrations plus élevées visitent les différentes cotes de mesures les unes après les autres. Mais lorsque le débit recommence à nouveau à croître ce phénomène inachevé de propagation est fortement contrarié par l'expansion de la suspension qui se fait ressentir de façon quasi-instantanée dans tout le volume. En conséquence, plus la cote sera élevée, moins la concentration maximum sera grande, ce qui produit là encore un effet similaire à l'atténuation  $\sigma$ .



**Légende:** ■:  $z = 2.3cm$    ♦:  $z=5.3cm$    ●:  $z=8.3cm$

—:  $C(t)$  théorique en  $z=0$  calculée par (4-26), pour la vitesse débitante  $V_d(t)$  imposée

**Figure IV-30**

Ainsi les oscillations de concentration autour de la concentration moyenne en une cote donnée peut sembler représentative de la description donnée par (4-22). Pourtant le phénomène est de nature assurément différente puisque d'une part les oscillations ne se font pas autour de la valeur moyenne correspondant au débit moyen et d'autre part il n'existe pas de véritable vitesse de propagation: les courbes correspondant aux cotes les plus élevées sur les figures IV-28 et IV-30 passent par la concentration moyenne à peu près au même instant en phase descendante.

Ce type d'expériences, ne permet donc pas d'accéder à des mesures de  $D$  puisque le comportement de la suspension est dominé par la réponse aux augmentations de débit.

## **CONCLUSION**

Ce travail a montré l'intérêt de l'utilisation d'un lit fluidisé pour étudier des suspensions monodisperses non-colloïdales stables (bas nombre de Reynolds). Cette technique permet d'éviter les phénomènes de ségrégation dynamique susceptibles de perturber le comportement de la suspension, et de s'affranchir des conditions initiales délicates à qualifier lors d'expériences de sédimentation classique en cuve, comme l'homogénéité en concentration, ou l'absence de vitesse de convection à grande échelle. Elle permet également d'imposer à la suspension différents types de perturbations générées et contrôlées par le débit d'injection. Toutefois, il est vrai que l'état stationnaire de ségrégation existant dans un lit fluidisé introduit un gradient de concentration dans la partie théoriquement homogène de la suspension (homogène pour des suspensions monodisperses), qui est également susceptible de perturber le comportement de la suspension s'il devient trop important (suspension localement polydisperse). Cependant, les mesures de concentration par une technique acoustique (précision absolue de l'ordre de  $10^{-3}$  sur toute la gamme de concentrations) ont montré que ce gradient de polydispersité est resté suffisamment faible pour être négligé dans les suspensions que nous avons étudiées.

Le lit fluidisé en régime permanent (débit d'injection constant) place la suspension dans l'état qu'elle aurait après un temps infini lors d'une sédimentation classique ( $\Rightarrow$  cuve infinie) avec une concentration fixée par le débit choisi. Cette caractéristique a été vérifiée par la mesure de la vitesse du front du haut de la suspension lorsque le débit est coupé: cette vitesse (= vitesse de sédimentation au sens commun du terme) est alors exactement égale à la vitesse débitante initiale. Ce résultat, attendu, montre que la dimension transversale du lit est suffisamment grande devant la dimension des particules, pour que son influence puisse être négligée dans la description de la suspension. En effet dans la partie homogène de la suspension, décrite dans le référentiel du centre des volumes, la seule différence entre une sédimentation classique (=débit d'injection nul) et un lit fluidisé est la vitesse des parois. Le fait qu'expérimentalement cette vitesse n'affecte pas la vitesse de sédimentation montre donc que les parois ne jouent aucun rôle dans notre système. Le lit fluidisé en régime permanent ne diffère donc d'une expérience de sédimentation classique que par une simple vitesse de convection uniforme dans toute la suspension.

Il a été montré que la diminution de la vitesse débitante entre deux valeurs très proches et situées de part et d'autre de la vitesse minimum de fluidisation permet d'obtenir le compactage des particules dans le sédiment formé, jusqu'à des concentrations de l'ordre de 60% (à comparer avec 57% environ dans les sédimentations à vitesse de convection nulle).

La propagation des fronts de concentration dans lesquels le gradient de concentration est dans le même sens que la gravité peut être correctement décrite par un modèle, adapté de la théorie de la sédimentation de Kynch, prenant en compte la diffusion hydrodynamique. Ce modèle prévoit, selon les conditions aux limites imposées, des profils de deux natures différentes: des "fronts convectifs", s'étalant proportionnellement au temps et des "fronts stationnaires" se propageant sans déformation, dont le profil résulte d'un équilibre entre un étalement de nature diffusive et un raidissement de nature convective.

Les mesures précises de la vitesse de sédimentation  $U(C)$  pour des concentrations comprises entre 15% et 60% ont montré une bonne concordance avec la loi empirique de Richardson-Zaki pour un exposant  $p$  de l'ordre de 5.5. Elles ont été complétées par des mesures de vitesses d'élargissement de fronts convectifs, qui permettent de mesurer la dérivée de la fonction de flux ( $C U(C)$ ). Ces mesures ont montré que la corrélation de  $U(C)$  proposée par Richardson-Zaki (affinée avec  $p=5.35$ ) permet également, contre toute espérance avouable, de décrire de façon acceptable jusqu'à la dérivée seconde de la courbe de flux. Et notamment, le point d'inflexion de la courbe de flux que cette corrélation implique pour une concentration de l'ordre de 30% a été effectivement mis en évidence expérimentalement pour ce type de valeur de la concentration.

Le front, immobile, surmontant la partie homogène de la suspension dans le lit fluidisé en régime permanent est un cas particulier des fronts stationnaires (vitesse de propagation nulle dans le référentiel du laboratoire). La description des fronts stationnaires proposée permet de justifier la relation entre la largeur de ce front et la concentration dans la partie homogène de la suspension. De plus, la mesure du profil de concentration permet d'accéder au coefficient de diffusion hydrodynamique  $D$ . Cette procédure, complétée par l'étude des fronts stationnaires se propageant au sein de la suspension après une diminution de débit, a permis de mesurer  $D$  pour des concentrations comprises entre 5% et 30%. La normalisation de  $D$  par  $aU(C)$ , communément employée, semble appropriée, même si les valeurs normalisées obtenues sont environ quatre fois supérieures aux valeurs existantes, mesurées par la cinétique d'élargissement du front surmontant la suspension dans une sédimentation classique.

En ce qui concerne les expériences d'augmentation ou de variation sinusoïdale de débit, il a été montré que les phénomènes intervenant dans la suspension ne présentent pas de nature propagative à proprement parler. Tout porte à croire que chaque fois qu'un gradient de concentration de sens opposé à la gravité est introduit dans le système, cette situation instable par gravité évolue très rapidement et introduit des inhomogénéités de concentration et de vitesse de convection dans tout le volume de la suspension. La technique acoustique que nous avons employée, qui mesure une concentration moyennée sur la tranche à une cote donnée, n'est sans doute pas la plus appropriée pour l'étude de ces phénomènes, à rapprocher des instabilités de Rayleigh-Taylor.

La contribution de ce mémoire à la connaissance des suspensions non-colloïdales à bas nombre de Reynolds, se prolonge en partie par de nouvelles questions. L'intérêt de l'utilisation d'un lit fluidisé pour l'étude de ces systèmes a été démontré et la description des fronts de concentration générés par des diminutions de débit semble satisfaisante. Néanmoins, les valeurs mesurées du coefficient de diffusion hydrodynamique, ou le comportement de la suspension lors des augmentations de débit sont loin de clore le sujet. Il serait sans doute très intéressant de compléter cette étude macroscopique par une étude locale. La connaissance de la dispersion des vitesses de particules tant dans les fronts stationnaires que lors du processus d'expansion du lit pourrait permettre d'améliorer notre compréhension de ces phénomènes. De plus, l'influence de la polydispersité des particules utilisées expérimentalement mérite peut-être plus d'attention que l'on veut bien lui porter. En cela, l'amélioration de nos connaissances sur les suspensions polydisperses et les processus de ségrégation pourrait peut-être nous éclairer également sur les suspensions "monodisperses" expérimentales.

## **BIBLIOGRAPHIE**

[Acrivos et Herbolzheimer]: A. Acrivos and E. Herbolzheimer, "Enhanced sedimentation in settling tanks with inclined walls", *J. Fluid. Mech.* **92**, 435 (1979)

[Bacri et al]: J-C. Bacri, M. Hoyos, N. Rakotomalala, D.Salin, M. Bourlion, G. Daccord, R. Lenormand and A. Soucemarianadin, "Ultrasonic diagnostic in porous media and suspensions", *J. Phys.(France) III* **1**, 1455 (1991) .

[Batchelor 1]: G.K. Batchelor, "A new theory of the instability of a uniform fluidized bed", *J.Fluid Mech.* **193**, 75 (1988) .

[Batchelor 2]: G.K. Batchelor, "Sedimentation in a dilute dispersion of spheres", *J.Fluid Mech.* **52**, 245 (1972) .

[Beenakker et Mazur 1]: C.W.J. Beenakker and P. Mazur, "Is sedimentation container-shape dependent?"*Phys.Fluids* **28**, 3203 (1985) .

[Beenakker et Mazur 2]: C.W.J. Beenakker and P. Mazur, "Diffusion of spheres in a concentrated suspension II," *Physica A* **126**, 349 (1984) .

[Biot]: M.A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous medium," *J. Acous. Soc. Am.* **28**, 168 (1956) .

[Brady et L.Durlofsky]: J.Brady and L.Durlofsky , "The sedimentation rate of disordered suspensions", *Phys.Fluids*, **31**, 717 (1988)

[Brenner et Happel]:H. Brenner and J. Happel, "Low Reynolds number hydrodynamics", Prentice-Hall (1967).

[Buscall et al]: R. Buscall, J. W. Goodwin, R. H. Ottewill and F. Tadros, "The settling of particles through newtonian and non-newtonian media", *J. Col. Int. Sc.***85**, 78 (1982)

[Catfish et Luke]: R. E. Catfish and J. H. C. Luke, "Variance in the sedimentation speed of a suspension", *Phys. Fluids.* **28**, 759 (1985).

[Davis et Hassen]: R. H. Davis and M. A. Hassen, "Spreading of the interface of the top of a slightly polydisperse sedimenting suspension", *J. Fluid. Mech.* **196**, 107 (1988).

[Didwania et Homsy]: A. K. Didwania and G. M. Homsy, "Rayleigh-Taylor instabilities in fluidized beds", *I&EC Fundamentals* **20**, 318 (1981).

[Einstein]: A. Einstein, "Zur Theorie der Brownschen Bewegung", *Ann. d. Phys.* **19**, 371 (1906).

[Ham et al]: J. Ham, S. Thomas, E. Guazzelli, G. M. Homsy and M. C. Anselmet, "An experimental study of the stability of liquid-fluidized beds", *Int.J.Multiphase Flows* **16**, 171 (1990)

[Ham et Homsy]: J. Ham and G. M. Homsy, "Hindered settling and hydrodynamic dispersion in quiescent sedimenting suspension", *Int. J. Multiphase. Flow* **14**, 533 (1988).

[Hinch]: E. J. Hinch, "An averaged-equation approach to particle interactions in a fluid suspension", *J.Fluid Mech.* **83**, 695 (1977) .

[Hoyos]: M. Hoyos, "Etude des suspensions par acoustique: sédimentation et viscosité," Thèse de Doctorat, Université Paris VII, (1989) .

[Hoyos et al]: M. Hoyos, J. C. Bacri, J. Martin and D. Salin, "A study of the sedimentation of non-colloidal bidisperse, concentrated suspension by an acoustic technique", *Phys. Fluids* **6**, 38909 (1994).

[Koch et Shaqfeh]: D. L. Koch and E.S.G. Shaqfeh, "Screening in sedimenting suspensions", *J. Fluid. Mech.* **224**, 275 (1991)

[Kynch]: G.J.Kynch, "Theory of sedimentation," *Trans. Faraday Soc.* **48**, 166 (1952) .

[Ladd 1]: A.J.C.Ladd, "Hydrodynamic transport coefficient of random dispersion of hard spheres" *J.Chem Phys*, **93**, 3484 (1990)

[Ladd 2]: A.J.C. Ladd, "Dynamical simulations of sedimenting spheres", *Phys.Fluids A* **5**, 299 (1993)

[Lee et al]: S. Lee, Y. Jang, C. Choi and T. Lee, "Combined effect of sedimentation velocity fluctuation and self-sharpening on interface broadening," *Phys. Fluids A* **4**, 2601 (1992) .

[Lhuillier]: D. Lhuillier, "From molecular mixtures to suspensions of particles", J. Phys. II France **5**, 19 (1995)

[Leighton et Acrivos]: D. Leighton and A. Acrivos, "Measurement of the shear-induced coefficient of self-diffusion in concentrated suspensions of solid spheres", J. Fluid. Mech. **177**, 109 (1987); *ibid*, "The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions", J. Fluid. Mech. **181**, 415 (1987)

[Martin et al 1]: J.Martin, N.Rakotomalala and D.Salin, "Hydrodynamic dispersion broadening of sedimentation front", Phys Fluids Lett. **6**, 3215 (1994).

[Martin et al 2]: J.Martin, N.Rakotomalala and D.Salin, "Accurate determination of the sedimentation flux of concentrated suspensions", soumis à Physics of Fluids en Mars 1995.

[Martin et al 3]: J.Martin, N.Rakotomalala and D.Salin, "Hydrodynamic dispersion of noncolloidal suspensions: measurement from Einstein's argument", Phys. Rev. Lett. **74**, 1347 (1995).

[Mazur et van Saarloos]: P. Mazur and W. van Saarloos, "Many-sphere hydrodynamic interactions and mobilities in a suspension", Physica A **115**, 21 (1982) .

[Nicolai et al]: H. Nicolai, B. Herzhaft, E.J. Hinch, L. Oger and E. Guazzelli, "Particle velocity fluctuations and hydrodynamic self-diffusion of sedimenting non-Brownian spheres", Phys. Fluids **7**, 12 (1995)

[Noetinger 1]: B. Noetinger, "Sedimentation et transport de particules dans un fluide visqueux," Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie(1989) .

[Noetinger 2]: B. Noetinger, "A two fluid model for sedimentation phenomena", Physica A **157**, 1139 (1989) .

[Nozières 1]: P. Nozières, "A local coupling between sedimentation and convection: application to the Beenakker-Mazur effect", Physica A **147**, 219 (1987) .

[Philips et al]: R.J. Philips, J. Brady and G. Bossis, "Hydrodynamic transport properties of hard-sphere dispersions.I. Suspensions of freely mobile particles", Phys.Fluids **31**, 3462 (1988) .

[Richardson et Zaki]: J.F. Richardson and W.N. Zaki, "Sedimentation and fluidisation: part 1", Trans. Instn. Chem. Engrs. **32**, 35 (1954) .

[Schaflinger]: U Schaflinger, "Experiments on sedimentation beneath downward-facing inclined walls", J.Multiphase Flow **11**, 189 (1985)

[Whitham]: G. B. Whitham, "Linear and non-linear waves", Edited by John Wiley and Sons, New York (U.S.A), (1974).

[Xue et al]: J.Z. Xue, E. Herbolzheimer, M.A. Rutgers, W.B. Russel and P.M Chaikin, "Diffusion, dispersion in settling of hard spheres, Phys. Rev. Lett. **69**, 1715 (1992).

[Zick et Homsy]: A. Zick and G. H. Homsy, "Stokes flow through periodic arrays of spheres", J.Fluid Mech. **115**, 13 (1982) .

[Zuber]: N. Zuber, "On the dispersed two-phase flow in the laminar regime", Chem. Engng Sci. **19**,897 (1964)

**TITRE: Exploration acoustique d'une suspension non-colloïdale perturbée.  
Mesure des grandeurs caractéristiques du système.**

**RESUME:** La prédiction de la stabilité des lits fluidisés (Batchelor, 1988) a nécessité l'introduction de nouvelles grandeurs physiques pour décrire les suspensions non-colloïdales, telles la dispersion hydrodynamique et l'élasticité de la suspension.

Dans cette thèse, ces grandeurs ont été mesurées pour des suspensions solide/liquide modèles (billes de verre quasi-monodisperses dans des liquides "proches" de l'eau) en se plaçant dans des situations expérimentales simplificatrices.

Les expériences sont réalisées dans un lit fluidisé (suspension stabilisée par contre-courant), qui permet le contrôle de la concentration par le débit du liquide injecté. La concentration est déterminée par une technique acoustique (mesure de la vitesse du son), avec une précision de l'ordre de 0.1% sur toute la gamme ( $0 < C < 60\%$ ).

Ce dispositif expérimental a permis d'observer la propagation de fronts entre deux concentrations homogènes, résultant de la somme d'un flux convectif et d'un flux diffusif (dispersion hydrodynamique). Il a été montré que ces flux étaient susceptibles de s'équilibrer pour produire des fronts stationnaires, conduisant à une mesure aisée du **coefficient de dispersion hydrodynamique**.

Pour des conditions expérimentales différentes, un autre type de front peut se propager; et l'analyse de l'évolution temporelle de son profil de concentration, complètement décrite par les phénomènes convectifs a permis une mesure directe de la **dérivée de la courbe de flux** de sédimentation.

Par ailleurs, la faisabilité de propagation d'ondes sinusoïdales de concentration a également été étudiée, et le comportement de la suspension à une variation sinusoïdale de débit a été interprété à l'aide de l'étude expérimentale de la réaction de la suspension à un incrément de débit.

**MOTS-CLES:** suspension ; diffusion hydrodynamique ; sédimentation ; lit fluidisé ; propagation.

**TITLE: Acoustic investigation of a perturbed noncolloidal suspension.  
Measure of the characteristics of the system.**

**ABSTRACT:** The prediction of the stability of fluidized beds (Batchelor, 1988) has required the use of new physical characteristics, such as the hydrodynamic dispersion coefficient and the elasticity of the suspension.

In this thesis, those characteristics have been measured on model solid-liquid suspensions (quasi-monodisperse glass beads in "water-like" liquids), in simplified experimental conditions.

The experiments have been performed in a fluidized bed (a suspension stabilized by a counterflow), allowing the control of the concentration by the flow-rate of the injected fluid. The concentration has been determined by an acoustic technique (based on the measurement of the sound velocity), with an accuracy of about 0.1% on the whole range ( $0 < C < 60\%$ ).

The experimental set up has enabled us to observe the propagation of fronts between two homogeneous concentrations, resulting from the combination of a convective and a diffusive flux (hydrodynamic dispersion).

Those propagating phenomena have been analysed using Kynch's theory and adapting it (to take into account the diffusion), and have given access either to the **hydrodynamic dispersion coefficient** or to the **derivative of the flux curve**, depending on the experimental conditions.

Furthermore we have addressed the issue of the propagation of concentration sine waves, and the behaviour of the suspension with a sine variation of the flow-rate has been analysed with the help of the experimental study of the suspension response to a flow-rate jump.

**KEY-WORDS:** suspension ; hydrodynamic diffusion ; sedimentation ; fluidized bed ; propagation.