



HAL
open science

Estimation de la vitesse des courants marins à partir de séquences d'images satellitaires

Sébastien Beyou

► **To cite this version:**

Sébastien Beyou. Estimation de la vitesse des courants marins à partir de séquences d'images satellitaires. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Rennes 1, 2013. Français. NNT : . tel-00870722v1

HAL Id: tel-00870722

<https://theses.hal.science/tel-00870722v1>

Submitted on 7 Oct 2013 (v1), last revised 11 Oct 2013 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1
Mention : Traitement du signal et télécommunications

École doctorale Matisse
présentée par

Sébastien Beyou

préparée à l'unité de recherche Inria
Centre Inria Rennes — Bretagne Atlantique
Université de Rennes 1

**Estimation de la
vitesse des courants
marins à partir de
séquences d'images
satellitaires**

Thèse soutenue à Rennes
le 12 juillet 2013

devant le jury composé de :

Éric BLAYO

Professeur, Laboratoire J. Kuntzmann / rapporteur

Ronan FABLET

Professeur, Télécom Bretagne / rapporteur

Stéphane RAYNAUD

Ingénieur, Actimar / examinateur

Valérie MONBET

Professeur, Université de Rennes 1 / examinatrice

Anne CUZOL

Enseignant-chercheur, Université de
Bretagne Sud / examinatrice

Étienne MÉMIN

Directeur de recherche, Inria / directeur de thèse

*Mais tout ce qui m'arrive d'important,
et tout ce qui donne à ma vie son merveilleux contenu...*

Nichts gibt so sehr das Gefühl der Unendlichkeit als wie die Dummheit. Ödön von Horváth

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Étienne pour m'avoir suivi pendant ces années de préparation de ma thèse. Merci également aux membres du jury pour leur évaluation de mon travail et en particulier aux rapporteurs, Éric Blayo et Ronan Fablet, pour leur relecture attentive de mon tapuscrit. Merci à l'Inria, au projet ANR Prévassemble, à la société Actimar, à l'Ifremer, à l'IRSTEA, à l'équipe MOISE et aux communautés d'assimilation de données, d'océanographie et de météorologie. Merci aux professeurs de mathématique qui m'ont fait apprécier cet autre monde.

Je remercie infiniment tous ceux qui m'ont soutenu et en premier lieu mes parents, Dominique et Valérie, et ma sœur, Émilie, ainsi que la famille plus généralement et toutes les merveilleuses personnes rencontrées au gré de la vie.

Une pensée également à mon grand-père et à la ville dont il faudra un jour que j'apprenne la langue. Une pensée aussi aux marins.

Remerciements aussi aux membres de l'équipe Fluminance pour tous les moments passés ensemble : Véronique, Pierre, Alejandro, Ioana, Sai, Benoît, Tudor, Cordelia, Yin, Quy, Christophe, Patrick, Anne, Cédric, Dominique, Christophe, ainsi qu'aux doctorants et post-doctorants de l'équipe Serpico : Philippe, Denis, Pierre, Tristan, Antoine, Solène, Sophie, Thierry. Merci aussi à Huguette pour le support dans l'administration de l'équipe.

Kiitos.

Table des matières

Notations	xi
Introduction générale	1
I Assimilation de données	5
1 Principes généraux de l'assimilation de données	7
1.1 Présentation	7
1.1.1 Cadre de travail	8
1.1.2 Énoncé du problème mathématique	10
1.1.3 Domaines de recherche connexes et applications	11
1.2 Cas linéaire-gaussien	12
1.3 Méthodes de résolution dans le cas général	14
1.3.1 Assimilation variationnelle	14
1.3.2 Méthodes de filtrage	15
1.4 Conclusion	16
2 Méthodes de filtrage	17
2.1 Historique	18
2.2 Vocabulaire	19
2.3 Les filtres particuliers	20
2.3.1 Méthode théorique générale	20
2.3.2 Filtres particuliers remarquables	22
2.3.3 Dégénérescence des poids	23
2.3.4 Algorithme	24
2.3.5 Propriétés théoriques	24
2.4 Le filtre de Kalman d'ensemble	26
2.4.1 Principe	26
2.4.2 Algorithme	27
2.4.3 Propriétés théoriques	28
2.5 Les Ensemble Square Root Filters	29
2.5.1 Principe	29
2.5.2 Algorithme	32
2.6 Notes d'implémentation	33
2.7 Filtre de Kalman d'ensemble pondéré	34
2.7.1 Principe	35
2.7.2 Algorithme	37
2.8 Conclusion	37

II	Assimilation d'images d'écoulements fluides	39
3	Assimilation d'images d'écoulements fluides	43
3.1	Modèle dynamique vorticité-vitesse	43
3.1.1	Modèle déterministe	43
3.1.2	Modèle stochastique	47
3.2	Mesures images	48
3.2.1	Estimateur de Lucas-Kanade	49
3.2.2	Différences d'images déplacées	50
3.3	Schéma d'assimilation et implémentation	51
3.3.1	Initialisation	53
3.3.2	Pondération	53
3.3.3	Rééchantillonnage	53
3.3.4	Données manquantes	54
3.3.5	Code	54
4	Bruit dynamique	57
4.1	Bruit d'Evensen	58
4.1.1	Construction	58
4.1.2	Propriétés	60
4.2	Bruit autosimilaire	60
4.2.1	Construction théorique	62
4.2.2	Propriétés	63
4.2.3	Mise en œuvre	64
4.2.4	Algorithme	66
4.3	Synthèse des résultats	67
4.4	Conclusion	69
5	Assimilation multi-échelles	71
5.1	Introduction	71
5.2	Flot optique de Lucas-Kanade stochastique	71
5.3	Schéma d'assimilation	75
5.4	Résultats	77
5.5	Perspectives et conclusion	77
6	Résultats	79
6.1	Qualification des erreurs	79
6.1.1	Erreur quadratique moyenne	79
6.1.2	Analyse fréquentielle	80
6.2	Chaîne d'obtention des résultats	81
6.3	Séquence synthétique	83
6.4	Bruit autosimilaire	83
6.5	Rééchantillonnage mixte	85
6.6	Assimilation multi-échelles	91
6.7	Nombre de particules et appréciation par échelles	93
6.8	Film de savon expérimental	96
6.9	Données manquantes	98
6.10	Images réelles de SST	99

III	Application en mer d'Iroise	103
7	Application avec un modèle océanique réaliste	105
7.1	Introduction	105
7.2	Description du contexte d'assimilation	106
7.2.1	Géographie étudiée	106
7.2.2	ROMS	107
7.2.3	Observation	107
7.3	Description de la méthode d'assimilation	108
7.4	Résultats	111
7.5	Conclusion	116
IV	Design et perspectives	117
8	Design de filtres particulières pour les fluides	119
8.1	Méthodologie informatique	119
8.2	Choix du filtre	120
8.3	Modèles en jeu	121
8.4	Dimensionnement et calibration	121
8.5	Conclusion	122
9	Pistes d'améliorations	123
9.1	Mesures intermédiaires	123
9.1.1	Construction	123
9.1.2	Résultats	124
9.2	Spécialisation de la vraisemblance	126
9.3	<i>A priori</i> en mélange de gaussiennes	128
9.4	Filtre de Kalman de transformation d'ensemble récursif	129
9.4.1	Filtre de Kalman d'ensemble itératif	129
9.4.2	Idée de filtre de Kalman d'ensemble récursif	130
	Conclusion générale	133
A	Conservation des poids entre $p(\mathbf{x}_{0:k} \mathbf{y}_{1:k})$ et $p(\mathbf{x}_k \mathbf{y}_{1:k})$	135
B	Calcul et indépendance de $\mathcal{N}(\mathbf{x}; 0, \mathbf{x}\mathbf{x}^T)$	137
C	Convergence du bruit d'Evensen vers une loi normale	139
	Publications et interventions	141
	Table des figures	143
	Liste des algorithmes	145
	Bibliographie	149

Notations

Les notations suivantes ont été choisies autant que possible pour être en accord avec les notations habituelles du domaine, en particulier celles indiquées dans Ide et al. [1997].

Mécanique des fluides	
t	Indice de temps continu
k	Indice de temps discret
$\mathbf{x} = (x, y)$	Point dans \mathbb{R}^2
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	Vitesse du fluide au point \mathbf{x} et au temps t
$\xi(\mathbf{x}, t)$	Vorticité au point \mathbf{x} et au temps t
$\zeta(\mathbf{x}, t)$	Divergence au point \mathbf{x} et au temps t
∇^\perp	$\nabla^\perp = (-\partial_y, \partial_x)$ [noter : $\nabla^\perp \xi = (\nabla \xi)^\perp$, $\nabla^\perp \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}^\perp$]
Espaces	
\mathcal{X}	Espace d'état, de taille \mathbb{R}^n
\mathcal{O}	Espace d'observation, de taille \mathbb{R}^m
Opérateurs et matrices	
\mathbf{H}, \mathbf{H}_k	Opérateur d'observation, éventuellement souscrit par un indice temporel
\mathbf{K}, \mathbf{K}_k	Gain de Kalman, éventuellement souscrit par un indice temporel
\mathbf{M}, \mathbf{M}_k	Modèle dynamique, éventuellement souscrit par un indice temporel
Statistiques	
Les processus aléatoires spécifiques seront spécifiés en début de chapitre.	
\mathbf{x}_k	Processus aléatoire discret dans l'espace d'état ou sa réalisation
\mathbf{y}_k	Processus aléatoire discret dans l'espace d'observation ou sa réalisation
$\mathbf{x}_k^{(i)}$	Réalisation (ou particule) i dans l'espace d'état au temps k
μ	Espérance d'une variable aléatoire
Σ	Matrice de covariance, normalement suscrite pour désigner son type
$w_i \propto p(\mathbf{x})$	$w_i \ll \text{proportionnel à} \gg p(\mathbf{x})$, i.e. $\exists C \neq 0, w_i = Cp(\mathbf{x})$ (et généralement il y a la contrainte $\int_{\mathbb{R}} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$)
$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \mathbf{V})$	Évaluation en \mathbf{x} de la loi $\mathcal{N}(\mu; \mathbf{V})$
\mathbf{A}^+	Inverse généralisé de la matrice \mathbf{A}
Assimilation	
N	Nombre de particules
$\mathbf{x}, \{\mathbf{x}^{(i)}; i = 1 \dots N\}$	Ensemble de particules
$\mathbf{x}^{(i)}$	Particule i , $1 \leq i \leq N$
\mathbf{y}_k	Observation au temps k
η, η_t, η_k	Erreur modèle, éventuellement souscrite par un indice temporel
$\varepsilon, \varepsilon_t, \varepsilon_k$	Erreur d'observation, éventuellement souscrite par un indice temporel
\mathbf{d}	Vecteur innovation
Indices suscrits	
• ^t	caractérise l'état vrai (<i>true</i>)
• ^f	caractérise l'état de prédiction (<i>forecast</i>)
• ^a	caractérise l'état après assimilation (<i>analysed</i>)

Abréviations

Français	Anglais	Signification
DID	DFD	Différence d'images déplacées <i>Displaced Frame Difference</i>
ECMA	OFCE	Équation de conservation du mouvement apparent <i>Optical Flow Constraint Equation</i>
(S)LK		[Méthode de] Lucas-Kanade (stochastique) <i>(Stochastic) Lucas-Kanade</i>
DNS		Simulation numérique directe <i>Direct Numerical Simulation</i>
ROMS		[Modèle] <i>Regional Ocean Modeling System</i>
SST		Température de surface de l'océan <i>Sea Surface Temperature</i>
KF		Filtre de Kalman <i>Kalman Filter</i>
EKF		Filtre de Kalman étendu <i>Extended Kalman Filter</i>
UKF		Filtre de Kalman inodore <i>Unscented Kalman Filter</i>
EnKF		Filtre de Kalman d'ensemble <i>Ensemble Kalman Filter</i>
ETKF		Filtre de Kalman de transformation d'ensemble <i>Ensemble Transform Kalman Filter</i>
EAKF		<i>Ensemble Adjustment Kalman Filter</i>
EnSRF		<i>Ensemble Square Root Filter</i>
WEnKF/WETKF		Filtre de Kalman (de transformation) d'ensemble pondéré <i>Weighted Ensemble (Transform) Kalman Filter</i>
FP	PF	Filtre particulaire <i>Particle Filter</i>
SIS		<i>Sequential Importance Sampling</i>
SIR		<i>Sequential Importance Resampling</i>

Introduction générale

La météorologie et l'océanographie ont longtemps fait appel uniquement à la connaissance des météorologues et océanologues pour la description et la prévision des phénomènes observés. On peut citer en océanographie l'établissement de cartes des grands courants marins qui régissent la circulation océanique mondiale, destinées en priorité aux navigateurs. Par la suite, l'introduction de l'ordinateur dans la seconde moitié du XX^e siècle a permis l'apparition de modèles de prévision numérique efficaces reposant sur la modélisation physique des phénomènes météorologiques et océanographiques. Ces modèles et leur mise en œuvre sont depuis sans cesse améliorés au fur et à mesure de l'évolution de la compréhension des phénomènes mis en jeu et de l'augmentation de la puissance de calcul disponible. Ces modèles sont définis à différentes échelles spatiales, régionales ou bien globales par exemple. Les modèles globaux s'appuient sur un certain nombre de simplifications où des termes négligeables aux échelles considérées peuvent être éliminés des équations de bilan. Les modèles locaux à l'opposé doivent inclure des phénomènes physiques qui, à petite échelle, ont une importance capitale. Ces phénomènes recouvrent par exemple la turbulence de couche limite, l'influence du relief, les phénomènes convectifs ou les échanges radiatifs, qui sont extrêmement coûteux à modéliser précisément.

En parallèle de l'amélioration des modèles, pour pallier d'une part à l'imparfaite connaissance des phénomènes physiques ou biologiques mis en jeu, à leur extrême complexité et d'autre part en raison d'une puissance de calcul limitée, une méthode d'enrichissement complémentaire consiste à utiliser des observations du phénomène réel pour préciser ou définir un certain nombre de paramètres du modèle : ce processus s'appelle l'*assimilation de données*. Ainsi, plus notre connaissance du phénomène à l'instant courant sera bonne, plus l'estimation future a des chances d'être proche d'un état futur du phénomène.

Historiquement, en météorologie et océanographie, les observations furent dans un premier temps uniquement des observations *in situ*, c'est-à-dire produites par des sondes locales immergées dans l'écoulement à étudier ; les données issues de ces sondes sont très localisées spatialement et inégalement réparties sur l'ensemble de la géographie étudiée. On peut citer comme mesures *in situ* les mesures de pression, température, hygrométrie, vitesse du vent, etc. localisées dans des stations météorologiques, des ballons-sonde ou plus récemment sur des avions ; ou pour l'océanographie, ce sont des bouées dérivantes ou fixes, ou des bateaux, mesurant la vitesse et l'orientation du vent de surface, la vitesse et l'orientation des courants de surface, la température, la salinité, etc. Les zones non observées sont qualifiées de déserts météorologiques et sont quantitativement importantes.

L'introduction de mesures *in situ* dans un modèle couvrant une géographie vaste, dense et manipulant de nombreuses variables physiques n'apporte que peu d'informations au regard de ce qu'il serait nécessaire pour valider ou corriger un état du modèle. Pour travailler sur de telles géographies, il est raisonnable de supposer que l'assimilation de données sera d'autant plus précise que les données seront fréquentes, spatialement denses, de bonne qualité et bien décrites par un modèle donné.

Depuis quelques dizaines d'années, les radars et le développement des satellites artificiels permettent d'obtenir ce type d'observations puisque les radars et radiomètres embarqués sur les satellites ou au sol couvrent de larges zones géographiques de façon dense tant spatialement que temporellement. En revanche, pour ce type d'appareillage, l'accès aux mesures physiques ne se fait que de façon indirecte par des relations reliant les ondes électromagnétiques aux quantités physiques d'intérêt ; de plus, sur les satellites, les mesures délivrent un signal comprenant l'ensemble de la colonne d'air et du sol, ce qui oblige à déconvoluer le signal pour obtenir les grandeurs physiques localisées dans l'espace ; et enfin, de part l'éloignement des satellites, les grandeurs sont intrinsèquement moyennées dans les dimensions horizontales. Toutes ces difficultés obligent à adapter des méthodes initialement proposées dans le cadre d'observations directes *in situ* et en partie à passer par le domaine du traitement d'images 2D ou 3D.

L'objectif de cette thèse est d'apporter une contribution à une meilleure prise en compte de données image dans les processus d'assimilation de données. Dans cette thèse, nous nous intéresserons spécifiquement à des séquences d'images représentant l'évolution de fluides non compressibles, pour des applications de reconstruction des courants de surface de l'océan ou de visualisation en mécanique des fluides expérimentale. Afin de coupler des mesures bruitées à une dynamique elle aussi définie à un bruit près, le cadre méthodologique de cette étude sera celui du filtrage stochastique.

Les techniques de filtrage stochastique cherchent à recouvrer la distribution d'un processus caché connaissant la loi d'une série de mesures. Ce problème ne peut être résolu exactement et mis en œuvre que dans certains cas très spécifiques, dont le cas linéaire gaussien de petite dimension. Cependant, un certain nombre de techniques reposant sur des approches de Monte Carlo ont été proposées depuis un certain nombre d'années. C'est sur ce type d'approches que nous nous focaliserons : l'état du système sera ici décrit par un ensemble d'échantillons aléatoires décrivant des états possibles du phénomène observé.

Deux grandes familles de telles méthodes existent : une interprétation de type Monte Carlo du filtre de Kalman et une interprétation de type Monte Carlo issue des problématiques d'estimation bayésienne. C'est une combinaison de ces deux approches que nous utiliserons dans la suite pour améliorer les résultats (dénommé *filtre de Kalman d'ensemble pondéré*).

Dans cette thèse ont été particulièrement étudiés : le cadre général de l'utilisation du filtre particulière sus-mentionné pour l'assimilation de mouvements fluides couplés à un opérateur d'observation image, l'influence du bruit dynamique sur l'assimilation et en particulier sa forme spatiale, les aspects multi-échelles avec en particulier la proposition d'un filtre de Kalman d'ensemble (pondéré) multi-échelles et enfin l'utilisation du filtre de Kalman d'ensemble pondéré sur une application de très grande dimension en mer d'Iroise avec le modèle océanique ROMS.

Description du document

Partie I : Assimilation de données

Cette partie introduit la problématique générale de l'assimilation de données. Le premier chapitre décrit en détails le problème posé et donne un aperçu des méthodes de résolution théorique et pratique. Le deuxième chapitre se concentre sur les méthodes d'ensemble qui résolvent le problème de l'assimilation de données par des techniques

d'échantillonnage probabiliste, dans le cadre général des filtres particulières.

Partie II : Assimilation d'images d'écoulements fluides

Cette partie est le cœur du document et traite de l'assimilation de fluides par des méthodes de filtrage. Le premier chapitre décrit le cadre général qui sera utilisé, avec en particulier le modèle dynamique, les opérateurs d'observation, ainsi que quelques points mineurs utilisés dans la méthode. Le deuxième chapitre détaille les bruits dynamiques utilisés, dont un conçu pour incorporer des caractéristiques spectrales des écoulements turbulents ciblés. Le troisième chapitre traite d'un schéma d'assimilation multi-échelles dans lequel l'assimilation se fait en partant d'une échelle grossière puis se raffine en fonction d'une observation donnée à l'échelle correspondante. Le dernier chapitre de cette partie détaille les résultats qui n'auront été qu'évoqués dans les chapitres précédents. Quatre séquences sont présentées : une simulation DNS avec des observations de type « particules ensemencées » et de type « scalaire passif », une séquence de température de surface de l'océan Pacifique donnée par le radiomètre AVHRR sur le satellite MetOp-A, et une séquence 2D expérimentale d'un film de savon.

Partie III : Application en mer d'Iroise

Cette partie avec un unique chapitre décrit une assimilation des courants de surface en mer d'Iroise, à la pointe de la Bretagne. Les observations de courants de surface sont données par deux radars terrestres et le modèle dynamique utilisé est bâti à partir du modèle de circulation océanique régionale ROMS.

Partie IV : Perspectives et designs

Cette partie commence par un chapitre qui tente de dresser un panorama des différents leviers d'action possibles pour l'assimilation d'images d'écoulements fluides par des méthodes d'ensemble, récapitulant en grande partie les travaux entrepris dans le cadre de cette thèse. Enfin, le dernier chapitre décrit des améliorations possibles de la méthode, avec en particulier une spécification de la vraisemblance et un *a priori* en mélange de gaussiennes. Quelques tests rapides sont présentés.

Première partie

Assimilation de données

Chapitre 1

Principes généraux de l'assimilation de données

1.1 Présentation

L'assimilation de données a pour but de reconstruire l'évolution temporelle d'un phénomène dont on n'a qu'une connaissance imparfaite, en s'appuyant sur des observations issues de ce phénomène. Ces observations sont souvent elles-mêmes bruitées et ne caractérisent que partiellement le phénomène étudié. En exagérant un peu les choses, il s'agit de reconstruire l'état d'un système en couplant d'une part des observations incomplètes et bruitées et d'autre part une dynamique inexacte ou imparfaite de ce système. On se retrouve donc face à deux extrêmes où les données seules n'offrent qu'une vue parcelaire du problème tandis que le modèle dynamique, souvent simplifié, ne permet pas d'appréhender à lui seul toute la variabilité du système. Cela peut se résumer par le postulat suivant : les données sans modèle ne permettent de caractériser que partiellement un système, et un modèle sans données pourra ne pas être suffisamment proche du phénomène pour ne pas dévier dudit phénomène au cours du temps.

Étant donné l'ensemble de ces sources d'incertitudes, le phénomène en question sera naturellement modélisé dans un contexte d'estimation statistique afin de prendre en compte correctement la nature probabiliste du problème. Le résultat sera alors exprimé sous forme d'un processus stochastique ou d'une moyenne.

Pour fixer les idées, donnons tout de suite deux exemples :

- un mobile se déplace dans un environnement en deux ou trois dimensions, il s'agit de connaître le plus précisément possible sa position uniquement à partir d'images filmant ce mobile — le mobile en question peut être par exemple un objet volant ou un véhicule roulant observé au-dessus de lui ;
- un fluide s'écoule en deux dimensions ; il s'agit de trouver avec la meilleure précision possible sa vitesse en visionnant un film imageant le transport de particules ou d'un scalaire passif par cet écoulement.

Dans les deux cas, il s'agira de donner sur l'ensemble du domaine une estimation *plus complète* que ce que pourrait apporter un capteur physique ou une méthode d'estimation à partir de deux images comme les méthodes de flot optique, ceci avec la connaissance supplémentaire de la dynamique du phénomène, même si celle-ci est grossièrement simplifiée.

1.1.1 Cadre de travail

Le phénomène que l'on cherche à reconstruire est modélisé par un premier processus stochastique, c'est-à-dire une famille de variables aléatoires indicées par un index soit continu, $t \in \mathbb{R}$, soit discret, $k \in \mathbb{N}$. L'index représente généralement le temps et on en emploie donc fréquemment un vocabulaire temporel, par exemple en parlant d'*instants*. On peut également considérer et représenter ce phénomène comme un système dynamique et utiliser alors les résultats mathématiques relatifs à ce domaine. On suppose également avoir à disposition des données bruitées issues de l'observation de ce phénomène. Ces observations seront représentées par un deuxième processus stochastique. Dans la suite, les images étant données à des instants discrets, nous travaillerons le plus souvent en temps discret.

Ces deux processus seront notés :

- $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$ pour le système dynamique représentant le phénomène ; ce processus prend ses valeurs dans l'*espace d'état* et est appelé *processus d'état* ;
- $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 1}$ pour l'observation du phénomène à travers des procédés de mesures ; ce processus prend ses valeurs dans l'*espace d'observation* et est appelé *processus d'observation* ; on confondra souvent dans la pratique ce processus avec ses réalisations.

Les états et observations peuvent être des scalaires, des vecteurs, des champs scalaires ou vectoriels, voire parfois des objets mathématiques plus exotiques comme des graphes ou des variétés riemanniennes (voir par exemple Snoussi [2011]). En météorologie et océanographie, les espaces considérés sont généralement un produit cartésien de plusieurs variables physiques discrétisées sur une grille, variables qui peuvent être la vitesse du fluide, sa pression, sa température, sa salinité, la concentration de certaines espèces chimiques, un champ magnétique, etc. Dans les cas qui nous intéresseront dans la suite, ces espaces étant des produits cartésiens de variables physiques discrétisées, l'espace d'état sera considéré comme isomorphe à \mathbb{R}^n et l'espace d'observation isomorphe à \mathbb{R}^m .

Deux hypothèses sont posées sur ces processus :

1. Le processus $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$ vérifie la propriété de Markov, c'est-à-dire que seul le dernier instant compte pour calculer la probabilité de l'état à l'instant courant :

$$\forall k \geq 1, p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}).$$

De plus ce processus n'étant pas directement observable, on parlera de chaîne de Markov cachée. Il est possible de supposer sans perte de généralité que l'ordre du processus de Markov est 1, c'est-à-dire que la dépendance ne se fait que d'un pas de temps en arrière (si le processus de Markov est d'ordre supérieur, on peut se ramener par un changement de variable à un processus de Markov d'ordre 1). Ce processus $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$ étant indépendant des observations $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 0}$, on a donc :

$$\forall k \geq 1, p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}).$$

2. Les observations \mathbf{y}_k ne dépendent que de l'état courant \mathbf{x}_k et sont conditionnellement indépendantes de l'état. On aura donc l'égalité suivante :

$$\forall k \geq 1, p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k).$$

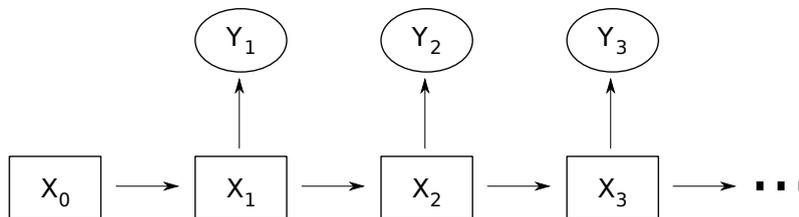


FIGURE 1.1 – Graphe des dépendances entre les processus stochastiques.

Les deux processus $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$ et $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 0}$ sont régis par les opérateurs suivants :

- un *modèle dynamique* ;
- un *opérateur d'observation*.

Le modèle dynamique correspond, dans le vocabulaire probabiliste, à un *noyau de transition*. Son action permet de passer de la mesure de probabilité au temps k à la mesure de probabilité au temps $k + 1$. Ce noyau de transition est *souvent* défini comme étant la somme d'un opérateur déterministe \mathbf{M}_k appelé *modèle dynamique* et d'un bruit gaussien $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$ appelé *bruit de modèle* ou *bruit dynamique*. On emploiera dans ce cas le terme de *bruit additif gaussien* :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_k) + \eta_k.$$

Mathématiquement, le modèle dynamique est un opérateur de l'espace d'état dans lui-même. Cet opérateur peut être linéaire ou non, et peut être issu, lorsque le phénomène est naturellement exprimé dans un contexte continu, de la modélisation du phénomène par un jeu d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui seront discrétisées par un schéma numérique. D'autre part, le modèle dynamique peut également être donné par un jeu d'équations différentielles stochastiques ou d'équations aux dérivées partielles stochastiques. En météorologie et océanographie, il s'agit d'un modèle numérique de prévision du temps ou de la dynamique océanique. Ce modèle est constitué au moyen d'une discrétisation en temps et en espace des équations physiques régissant le déplacement des fluides ou l'évolution de variables chimiques ou biologiques. Il est à noter que le modèle dynamique peut avoir une paramétrisation variable dans le temps, et un indice temporel doit alors être précisé ; par exemple, l'évolution des marées dépend entre autres des planètes (Lune, Soleil), et un modèle océanique prenant en compte la marée peut donc nécessiter une date précise.

L'opérateur d'observation relie l'état du système dynamique \mathbf{x}_k à son observation \mathbf{y}_k à travers un procédé de mesure donné. Mathématiquement, ce procédé peut être traduit par un opérateur, linéaire ou non, allant de l'espace d'état vers l'espace d'observation. Celui-ci peut être par exemple l'identité si on observe directement l'espace d'état, ou une projection sur un sous-espace vectoriel observé si on n'en observe qu'une partie. D'autre part, un processus d'observation résultant d'un traitement ne permettant de mesurer qu'une quantité indirecte d'une variable d'état pourra conduire à des opérateurs non linéaires complexes. Tout comme le modèle dynamique, l'opérateur d'observation est *généralement* décrit comme la somme d'un opérateur déterministe et d'un bruit gaussien $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k) + \varepsilon_k.$$

Et tout comme le modèle dynamique, l'opérateur d'observation peut varier dans le temps, par exemple si le capteur bouge et n'observe pas toujours la même zone géographique,

ou qu'un masque variable dans le temps est appliqué. Deux grandes familles de capteurs peuvent en général être considérées : ceux produisant une mesure locale et ceux conduisant à une mesure quasi dense en espace. Notons que les capteurs ponctuels permettent une mesure temporelle quasi continue tandis que les mesures denses fournissent une série discrète de mesures dans le temps, avec un temps entre observations qui peut être important.

Les mesures locales proviennent souvent de sondes *in situ* qui renseignent sur la température, l'humidité, la pression, la pluviométrie, les vitesse et direction du vent, etc. Celles-ci sont appareillées dans des stations au sol fixes, sur des bouées météorologiques fixes ou dérivantes, sur des avions ou sur des ballons-sonde ; les bouées météorologiques mesurent aussi des quantités relatives à l'état local de l'océan comme la hauteur et la direction des vagues ou la température. Ce type de sondes locales a l'avantage de permettre directement un accès aux quantités physiques utilisées en géosciences, mais ne donne cependant cette mesure que de façon assez localisée en espace.

Certains appareils procurent des cartes de mesures spatialement denses, comme les radiomètres ou radars. Ceux-ci peuvent se trouver au sol, dans des avions ou sur des satellites stationnaires ou défilants. Dans la terminologie relative aux observations par satellite, on parle d'observations de niveau 1 pour les données brutes issues de ces capteurs. Ensuite, à partir des observations issues de ces radiomètres ou radars, on peut extraire, après traitement, d'autres types d'observations comme la pression atmosphérique, l'humidité, la concentration de certaines espèces chimiques, la température de surface de l'océan (*Sea Surface Temperature*, SST), la hauteur de la surface de l'océan (*Sea Surface Height*, SSH), etc. Ces traitements permettent donc d'obtenir des quantités physiques plus facilement utilisables dans les modèles que les observations de niveau 1 : on qualifie ces observations de niveau 2. Ensuite, à partir des observations de niveau 2, d'autres variables de niveau supérieurs sont successivement dérivées au moyen de traitements successifs. Comme exemples d'observations de niveau 2 ou supérieur, on peut citer la création de masques de nuages (utilisés pour savoir un autre procédé de mesure observant la surface terrestre l'observe réellement ou si sa mesure est faussée par un nuage), la reconnaissance de la végétation ou des autres types d'utilisation de surface terrestre, le déplacement des masses d'air ou d'eau. Ces traitements successifs depuis le niveau 1, numériques et issus de modélisations de la physique ou autre, peuvent introduire des erreurs liées, outre le processus de mesure lui-même, aux interpolations spatio-temporelles, à la non-compréhension complète des physiques impliquées ou aux hypothèses de modélisation faites (en particulier dans les observations de niveau 2 ou plus).

1.1.2 Énoncé du problème mathématique

Dans toute sa généralité, le problème d'estimation statistique posé ici consiste à estimer la distribution de probabilité de $\mathbf{x}_{0:k}$ connaissant toutes les observations passées $\mathbf{y}_{1:k}$, c'est-à-dire la distribution $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$. Cette distribution est appelée *distribution a posteriori*. La *distribution de filtrage* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ peut être obtenue à partir de la distribution a posteriori (voir l'annexe A). Notons que c'est souvent la marginale $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ qui constitue la distribution d'intérêt en assimilation de données, et que l'appellation de distribution a posteriori ou distribution de filtrage est souvent étendue à cette marginale $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \int p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})d\mathbf{x}_{0:k-1}$. Dans le cas d'une approximation particulière il est simple de passer de la loi de filtrage complète à sa marginale.

Grâce à l'hypothèse markovienne posée sur le processus $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$ et à l'hypothèse

d'indépendance conditionnelle des observations vis-à-vis de l'état, il est possible d'exprimer la distribution a posteriori de façon récursive en fonction uniquement de la distribution à l'instant précédent. Cette solution exacte connue sous le nom de *filtre bayésien optimal* procède en deux étapes :

1. une étape de prédiction : la distribution $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k-1})$ est calculée à partir du résultat au temps précédent en faisant agir le modèle dynamique :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) \\ &= p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

2. une étape de correction : la nouvelle observation est introduite grâce au théorème de Bayes :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) &= \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{0:k}} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{0:k}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ce résultat, bien que donnant une forme explicite de la solution recherchée, n'est généralement pas utilisable en pratique pour diverses raisons : on ne peut pas représenter les distributions manipulées par des formules analytiques (simples), ou leur représentation complète est trop coûteuse en termes de temps de calcul ou de mémoire.

Dans quelques cas particuliers, on peut toutefois obtenir des formules analytiques comme c'est le cas avec le très-connu filtre de Kalman pour la résolution d'un problème linéaire-gaussien. Nous le détaillons dans une section suivante puisqu'il sert de référence théorique à un certain nombre de schémas d'assimilation.

1.1.3 Domaines de recherche connexes et applications

L'assimilation de données se retrouve dans un grand nombre d'applications, dès lors qu'on essaye de corriger un modèle physique au moyen de données réelles. Le terme d'« assimilation de données » est lui-même souvent associé aux géosciences et en particulier à la météorologie ou à l'océanographie. En comprenant la notion d'assimilation de données plus largement comme étant les méthodes étendant les principes du filtre de Kalman à des systèmes plus complexes non-linéaires ou non-gaussiens et en faisant usage d'une prédiction par un modèle et d'observations réelles, on peut faire émerger de nombreuses connexions avec une multitude de problèmes ou d'applications.

Dans le domaine mathématique et statistique tout d'abord, l'assimilation s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'estimation et en particulier de l'estimation bayésienne ; l'assimilation de données modélise spécifiquement l'estimation de processus de Markov cachés. Elle utilise également le cadre général des probabilités pour modéliser de façon naturelle cette problématique et exprimer des résultats de convergence théorique associés. L'assimilation fait aussi usage des concepts probabilistes de chaînes de Markov ainsi que des processus de diffusion dans le cas des dynamiques continues. Du point de vue de l'implémentation numérique des méthodes d'assimilation, elle peut utiliser les méthodes numériques de type Monte Carlo, en particulier dans les filtres particuliers, ou faire grand usage des méthodes d'optimisation pour les minimisations de fonctionnelles provenant de problèmes d'estimation aux moindres carrés.

Dans les domaines de la physique et du traitement du signal, l'assimilation se rapproche des problématiques de résolution de problèmes inverses puisque elle est elle-même une forme de problème inverse : retrouver un phénomène à partir d'observations de ce phénomène ; des problèmes inverses ne rentrant pas exactement dans le cadre de l'assimilation de données sont par exemple la déconvolution de signaux ou l'estimation de bruit. Pour certaines applications, l'assimilation de données peut avoir des liens avec l'estimation de mouvement en traitement d'images, pouvant compléter les approches de flot optique ou de régularisation dans les flots optiques de Horn et Shunk. La fusion de données, cherchant à réconcilier des données provenant de différentes sources dans une représentation unifiée, est également proche de l'assimilation qui cherche, elle, à réunifier les observations, possiblement de nature différente, avec le modèle. Enfin, l'assimilation de données a un besoin crucial de bonnes caractérisations des statistiques d'erreur sur les modèles dynamiques et opérateurs d'observation, ce qui impliquera un usage intensif de méthodes statistiques et de modèles de la physique statistique.

Dans le domaine informatique, l'apprentissage automatique peut être, dans certains cas, une alternative à l'assimilation de données lorsqu'une base de données des phénomènes passés peut être constituée, afin d'y rechercher des phénomènes similaires et cela peut donc remplacer, en un sens, le besoin d'un modèle. L'assimilation de données fait aussi souvent usage des outils de différentiation automatique et de calcul automatique de modèles adjoints requis par les approches variationnelles (voir la section 1.3.1 ci-après).

Plusieurs domaines applicatifs utilisent en partie l'assimilation de données. Le filtre de Kalman est un outil central en automatique puisqu'il s'agit du domaine de recherche historique où celui-ci a vu le jour. Celui-ci est en général utilisé dans la boucle de contrôle d'un système. La modélisation hydrologique peut faire usage de l'assimilation de données, en particulier pour la prévision de crues (Thirel [2009]). Tong et al. [2012] estiment le champ de conductivité hydraulique et la charge d'un domaine en observant la charge en certains points de ce domaine, et cela permet ainsi de retrouver le champ de perméabilité du domaine ; la méthode utilisée dans ce cas est un filtre de Kalman d'ensemble localisé. Heidari et al. [2012] cherchent à quantifier les réserves en pétrole d'un gisement. Bocquel et al. [2011] font du suivi de cibles, possiblement cachées par moments, à partir d'un signal radar. En revenant en géophysique mais dans un domaine autre que la météorologie ou l'océanographie, on trouve l'assimilation de hauteur de calottes glaciaires sur des échelles géologiques (Bonan et al. [2012]). La qualité de l'air fait aussi l'objet d'études d'assimilation de données (voir par exemple Wang et al. [2011]) et, sur un sujet proche, l'assimilation de données peut aussi être utilisée pour retrouver la source d'une pollution, par exemple d'origine nucléaire (Quélo et al. [2005]). De façon plus exotique, Manandhar et al. [2012] utilisent un filtre de Kalman pour la détection d'attaques et de défaillances sur un système critique (en l'occurrence ici un réseau de distribution d'eau potable). Et en théorie des nombres, Donoghue [2012] étudie le comportement asymptotique du filtre de Kalman pour un système dynamique consistant en une suite de Fibonacci complexe. Enfin, l'assimilation de données peut aussi être source de questions théologiques (voir [Simon, 2006, annexe C]).

1.2 Cas linéaire-gaussien

En 1960, Rudolf Kálmán¹ publiait un article sur la solution optimale à l'assimilation de données lorsque toutes les distributions de probabilités sont supposées gaussiennes,

1. Rudolf Emil Kálmán (1930-), mathématicien et automaticien américain d'origine hongroise.

les opérateurs linéaires et les bruits additifs (Kálmán [1960]), l'optimalité étant entendue au sens de l'erreur quadratique moyenne. Ces équations donnent des formules sur l'espérance et la covariance de la distribution de filtrage gaussienne, la caractérisant ainsi complètement.

L'algorithme 1 détaille le filtre de Kalman en temps discret. Lorsque les équations d'état et d'observation sont exprimées en temps continu, l'algorithme est connu sous le nom de filtre de Kalman-Bucy.

Algorithme 1 Algorithme du filtre de Kalman en temps discret

Paramètres :

- μ_0, Σ_0 : espérance et covariance à l'instant initial ;
- $\mathbf{M}_k, \mathbf{Q}_k$: modèle dynamique et erreur modèle associée pour les temps $k \geq 1$;
- $\mathbf{H}_k, \mathbf{R}_k$: opérateur d'observation et erreur d'observation associée pour les temps $k \geq 1$;
- \mathbf{y}_k : données observées aux temps $k \geq 1$.

Algorithme :

1. **Initialisation :**

- $(\mu_0^a, \Sigma_0^a) = (\mu_0, \Sigma_0)$

2. **Assimilation :** pour $k \geq 1$:

• **Prédiction :**

$$\begin{aligned}\mu_k^f &= \mathbf{M}_k \mu_{k-1}^a \\ \Sigma_k^f &= \mathbf{M}_k \Sigma_{k-1}^a \mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

• **Correction :**

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \Sigma_k^f \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \Sigma_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \\ \mu_k^a &= \mu_k^f + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mu_k^f) \\ \Sigma_k^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \Sigma_k^f \\ \Rightarrow \mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k} &\sim \mathcal{N}(\mu_k^a, \Sigma_k^a)\end{aligned}$$

Ces équations ont été très largement utilisées dans un grand nombre de domaines applicatifs et sont au cœur de très nombreux systèmes de guidage opérationnels (voir la section 1.1.3). Elles constituent un système optimal d'assimilation dans le cas linéaire-gaussien. Elles sont utilisables en pratique dès lors que les trois conditions suivantes sont rencontrées :

1. les opérateurs dynamique et d'observation sont linéaires ;
2. les distributions d'état et d'observation sont supposées gaussiennes ;
3. les espaces d'état et d'observation sont de faible dimension car le stockage et le calcul des matrices de covariance entières devient rapidement trop important.

Un certain nombre de méthodes et de variantes du filtre de Kalman ont été proposées afin d'assouplir un ou plusieurs des points précédents.

La première variante classique et immédiate (apparu quasiment en même temps que le filtre de Kalman) est le *filtre de Kalman étendu* (*Extended Kalman Filter*, EKF) qui relaxe la contrainte de linéarité du filtre de Kalman. La méthode consiste simplement à substituer au modèle dynamique non-linéaire son opérateur tangent. Une opération similaire de linéarisation peut être opérée sur l'opérateur d'observation lorsque celui-ci est non-linéaire.

L'utilisation du filtre de Kalman étendu est en pratique valide lorsque les non-linéarités ne sont pas trop importantes.

Le filtre de Kalman inodore (*Unscented Kalman Filter* — UKF, Julier and Uhlmann [1997], Julier and Uhlmann [2004]) relaxe la contrainte de linéarité du modèle dynamique et de l'opérateur d'observation et assure l'exactitude des deux premiers moments de la distribution de filtrage ; l'algorithme s'appuie sur un ensemble de points choisis de façon déterministe et propage ces points directement via les opérateurs non-linéaires, à l'image de la transformation *unscented* en statistiques.

Dans le cas des espaces d'état de très grande dimension, il n'est plus possible de manipuler les matrices de covariance, tant pour des questions de stockage que de temps de calcul. Pour contourner cette difficulté, d'autres méthodes à base d'un échantillonnage statistique de l'espace d'état ont été formulées : l'*Ensemble Kalman Filter* (EnKF) ainsi que des variations de celui-ci. Celles-ci seront présentées plus en détails dans le chapitre 2 et en particulier les sections 2.4 et suivantes.

1.3 Méthodes de résolution dans le cas général

Pour faire face aux problématiques induites par le cas général, c'est-à-dire en cas de non-linéarités, de non-gaussianité ou en grande dimension, deux grandes familles de méthodes ont été proposées. Il s'agit d'une part de l'*assimilation variationnelle* où le problème est résolu à l'aide de techniques issues du contrôle optimal. Notons que celles-ci peuvent également être interprétées dans un sens statistique comme des techniques visant à mettre en œuvre une estimation au sens du maximum a posteriori. D'autre part, l'autre ensemble de méthodes regroupe les techniques de filtrage stochastique qui sont mises en œuvre au moyen des techniques de Monte-Carlo. Celles-ci se scindent en deux sous-groupes : les méthodes d'ensemble dérivées du filtre de Kalman et les méthodes particulières qui reposent sur une approximation particulière du filtre bayésien optimal.

Dans le cas linéaire-gaussien, ces deux grandes familles de méthodes convergent toutes les deux vers la même solution (quand le nombre de réalisations des filtres stochastiques tend vers l'infini), décrite par les équations du filtre de Kalman. Dans le cas général, et dès que le nombre de particules est fini, il n'y a pas forcément équivalence et les résultats des deux méthodes peuvent être différents — ce qui implique d'ailleurs quelques difficultés lorsqu'on cherche à comparer de façon judicieuse ces deux approches.

1.3.1 Assimilation variationnelle

Cette section décrit brièvement le principe de l'assimilation variationnelle afin de mieux comprendre les parallèles entre les méthodes de filtrage et l'assimilation variationnelle. La thèse se focalisera ensuite sur les méthodes de filtrage. Pour plus de détails sur les méthodes variationnelles, on pourra se référer à l'article fondateur de Le Dimet and Talagrand [1986], à la thèse récente consacrée à l'assimilation d'images par des techniques variationnelles de Souopgui [2010], à la thèse de Papadakis [2007] ou au cours de Bocquet [2004-2013]. Dans le cas linéaire-gaussien, l'assimilation variationnelle donnera la même solution que le filtre de Kalman ; contrairement à ce dernier toutefois, l'assimilation variationnelle pourra manipuler les espaces d'état de grande dimension.

L'assimilation variationnelle consiste à minimiser une fonctionnelle de coût en prenant en compte à la fois un état initial donné par un modèle, un état initial \mathbf{x}_k^b appelé ébauche

(*background*), et la ou les observations disponibles. Dans sa version la plus simple, le 3D-Var, la fonctionnelle de coût est composée de l'état du modèle à un instant, k , et des observations au même instant :

$$J(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^b)^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^b) + \frac{1}{2} (\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k) - \mathbf{y}_k).$$

On lui préfère généralement le 4D-Var prenant les L observations disponibles sur une période donnée, appelée fenêtre d'assimilation. Sur cette fenêtre d'assimilation, dont l'étendue est fixée suivant l'application, la fonction coût du 4D-Var est donnée par :

$$J(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^b)^T \mathbf{Q}_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^b) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^L (\mathbf{H}_l(\mathbf{x}_l) - \mathbf{y}_l^o)^T \mathbf{R}_l^{-1} (\mathbf{H}_l(\mathbf{x}_l) - \mathbf{y}_l^o).$$

L'état assimilé $\tilde{\mathbf{x}}_0$ est alors un minimiseur de cette fonctionnelle J :

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \min_{\mathbf{x}_0} J(\mathbf{x}_0),$$

où le problème posé est l'estimation de la condition initiale résultante de l'écart à un état initial dit d'ébauche (*background*) et de l'écart aux observations des variables d'état intégrées à partir de la condition initiale.

Afin de mener à bien cette opération de minimisation, une solution élégante et de charge calculatoire accessible consiste à s'appuyer sur une variable adjointe. Le calcul de la dynamique adjointe à partir du modèle direct est une opération assez compliquée qui demande une grande maîtrise et l'utilisation de codes de différentiation automatique tels que Tapenade (logiciel développé par l'INRIA) ou TAF (logiciel commercial). Des versions du 4D-Var ne demandant pas d'utiliser le modèle adjoint ont également été développées, en utilisant à la place les tangents linéaires du modèle dynamique et de l'opérateur d'observation, comme c'est le cas dans le 4D-Var incrémental.

Récemment, des méthodes d'assimilation variationnelle s'inspirant des méthodes d'ensemble ont été proposées. Ces techniques introduisent une expression empirique des matrices de covariance de background sur une base d'échantillons. Ces méthodes sont appelées EnVar (*Ensemble Variational Assimilation*) ou EDA (*Ensemble Data Assimilation*) (voir par exemple Pereira and Berre [2006]). Elles ont l'avantage de ne pas nécessiter d'adjoint. Le gradient peut être directement exprimé dans le sous-espace des échantillons.

1.3.2 Méthodes de filtrage

À côté des méthodes variationnelles qui opèrent sur tout l'intervalle d'une fenêtre d'assimilation et font appel aux techniques d'optimisation, d'autres techniques s'appuient sur une représentation des distributions manipulées par des échantillons, tirés aléatoirement ou selon des règles particulières (modes propres par exemple). Cette deuxième famille se repose soit directement sur les équations de Kalman, soit sur les équations générales du filtre bayésien optimal ; et peuvent, selon les méthodes, agir soit séquentiellement, c'est-à-dire que les distributions de filtrage ne sont calculées qu'en fonction du temps précédent, soit dans un mode de lissage, c'est-à-dire que les distributions de filtrage prennent en compte l'ensemble des observations passées et futures sur une fenêtre temporelle fixée (ce

mode permet des comparaisons plus justes avec l'assimilation variationnelle 4D-Var qui opère naturellement dans ce cadre).

Les méthodes fondées sur un échantillon obtenu par réduction de dimension (modes propres principaux / modèles réduits) peuvent être complètement déterministes ou comporter une part d'aléa. Cette famille, se concentrant sur des modèles réduits et ne traitant que les modes principaux de la dynamique, comprend les méthodes de filtre de Kalman de rang réduit (Reduced-Rank Kalman Filter), avec par exemple le filtre RRSQRT qui consiste à représenter la matrice de covariance par ses modes principaux, le filtre SEEK (Sequential Evolutive Extended Kalman — Pham et al. [1998]) qui fait évoluer les modes principaux selon un filtre de Kalman étendu, et le filtre SEIK (Sequential Evolutive Interpolated Kalman — Pham [2001]) qui consiste en une transformation *unscented* sur les modes principaux.

Dans les méthodes aléatoires, on trouve le filtre de Kalman d'ensemble consistant en une approximation statistique des équations de Kalman, et qui représente la distribution d'état par une somme d'échantillons aléatoires; ceux-ci permettent ensuite de retrouver la moyenne et la covariance. De façon proche du filtre de Kalman d'ensemble, on trouve également les filtres particuliers qui représentent également la distribution d'état par un échantillon aléatoire. Par contre, ceux-ci ont l'avantage de pouvoir représenter n'importe quelle distribution et de pouvoir travailler nativement avec des opérateurs non linéaires, tout en assurant la convergence vers le filtre bayésien lorsque le nombre de particules tend vers l'infini. Ces deux types de méthodes probabilistes sont traitées en détails dans le chapitre suivant.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a posé le problème de l'assimilation de données, accompagné de quelques exemples d'utilisation, et introduit les principales familles de méthodes pour sa résolution : la formule théorique, les formules résolues dans le cas linéaire-gaussien, l'assimilation variationnelle, les méthodes de filtrage, ainsi que quelques autres méthodes difficilement classables dans ces catégories. Le chapitre suivant se focalisera sur les méthodes de filtrage issues d'approximations de Monte Carlo qui seront utilisées dans la suite du document.

Chapitre 2

Méthodes de filtrage

Les filtres particulaires (*Particle Filters*, PF) et filtres de Kalman d'ensemble (*Ensemble Kalman Filters*, EnKF) correspondent à des mises en œuvre de type Monte Carlo du problème de filtrage stochastique. Leur caractéristique principale est de représenter les densités de probabilité par un ensemble d'échantillons, appelés particules. Au-delà de cette caractéristique commune, de très nombreuses variations existent.

D'un point de vue général, chacune des particules manipulées représente un état possible du système et, dans la plupart des méthodes, se voit attribuer un poids proportionnel à la « qualité » potentielle de l'échantillon vis-à-vis de la distribution de filtrage recherchée. La densité de probabilité recherchée répondant au problème du filtrage est alors la somme pondérée des masses de Dirac centrées sur ces particules, et d'autres quantités telles que la moyenne ou la variance peuvent ensuite être déduites immédiatement de cette distribution.

Deux grandes familles de méthodes d'ensemble se distinguent. La première regroupe les variantes du filtre de Kalman d'ensemble. Ces méthodes correspondent à une mise en œuvre de Monte Carlo des équations de Kalman. La convergence vers le filtre bayésien optimal est démontrée uniquement dans le cas linéaire-gaussien quand le nombre de particules tend vers l'infini (Le Gland et al. [2009]); les filtres de Kalman d'ensemble tendent dans ce cas vers le filtre bayésien optimal (voir la section 1.3). La seconde famille de méthodes est constituée des filtres particulaires. Ces filtres bâtis en considérant une approximation de Monte Carlo de la densité de filtrage ont l'avantage de converger vers la distribution optimale dans un cas très général — c'est-à-dire y compris quand les distributions sont non gaussiennes ou les opérateurs non linéaires — quand le nombre de particules tend vers l'infini. En revanche, ceci se fait en pratique au prix d'un nombre de particules beaucoup plus important que dans le cas du filtre de Kalman d'ensemble. Ces méthodes sont donc associées à un coût calculatoire beaucoup plus important. Ce coût de calcul très important des filtres particulaires, parfois au-delà du réaliste pour les applications en très grande dimension comme on en trouve en géophysique, a fait émerger des directions de recherche visant à privilégier des méthodes reposant sur un très faible nombre de particules. On pourra consulter avec profit van Leeuwen [2009] ou Arnaud [2004] pour des aperçus respectivement des filtres particulaires en géophysique et des méthodes probabilistes appliquées au suivi.

Conceptuellement, on peut imaginer la population de particules comme un ensemble d'individus explorant un territoire et s'adaptant en fonction des contraintes de ce territoire; et on peut ainsi réfléchir en faisant des parallèles avec la théorie de l'évolution en génétique des populations. Ainsi, dans la plupart des filtres particulaires, les particules

évoluent indépendamment puis, en fonction de l'observation, meurent pour une partie et se reproduisent pour une autre partie. Les généalogies survivantes constituent les trajectoires des individus représentant le mieux la réalité du phénomène observé.

Nous commençons par donner dans ce chapitre un bref aperçu du développement historique des différentes méthodes d'assimilation d'ensemble et des différents vocabulaires utilisés dans la littérature. Puis nous exposons la théorie générale de résolution du problème du filtrage avec les filtres particuliers en détaillant les aspects théoriques généraux, les implémentations théoriques et l'algorithme pratique. Le filtre de Kalman d'ensemble est ensuite présenté, suivi par une variation appelée Ensemble Square Root Filters qui utilise une étape d'analyse déterministe contrairement au filtre de Kalman d'ensemble classique. Enfin, nous présentons le filtre de Kalman d'ensemble pondéré qui sera spécifiquement l'objet d'étude central de cette thèse. Ce dernier est conçu pour prendre en compte le meilleur des deux méthodes présentées : la vitesse de convergence des filtres de Kalman d'ensemble et la faculté théorique de convergence des filtres particuliers.

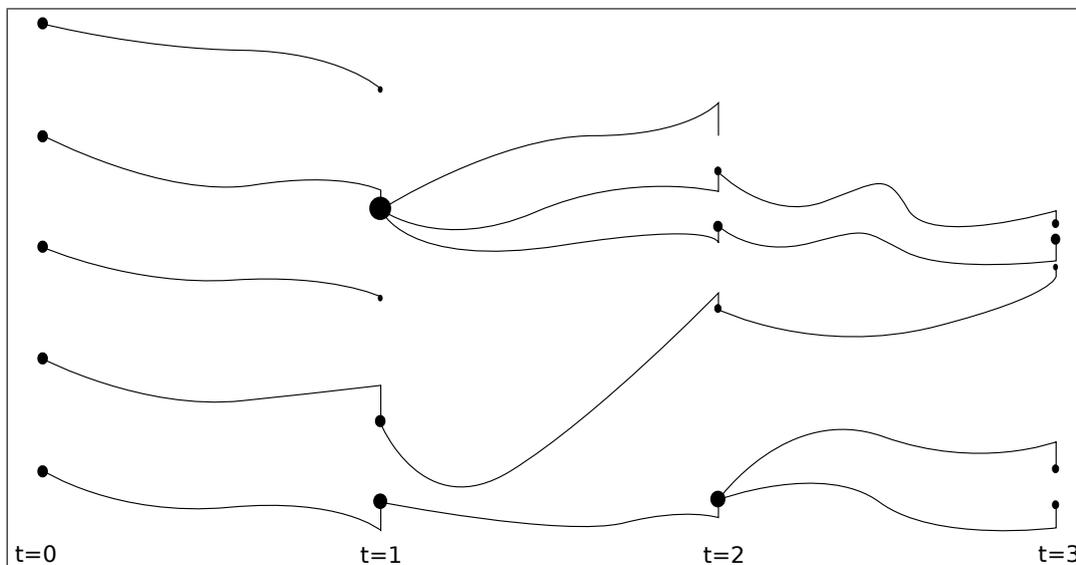


FIGURE 2.1 – Généalogie d'une population de cinq particules : chaque particule évolue, s'adapte, puis meurt ou engendre une descendance.

2.1 Historique

Outre les méthodes variationnelles qui se développent vers la fin des années 1980 (présentées brièvement dans la section 1.3.1), on trouve parmi les méthodes probabilistes deux grandes familles de méthodes :

1. les filtres particuliers ;
2. les filtres de Kalman d'ensemble.

Les filtres particuliers se développent depuis le milieu des années 1990 et sont initialement plutôt utilisés dans la communauté du traitement du signal. Un des premiers articles sur les filtres particuliers est celui de Gordon et al. [1993]. Ces méthodes développent un cadre théorique et pratique permettant de résoudre le problème du filtrage pour des

opérateurs non-linéaires et pour des distributions quelconques. Elles s'appuient sur un échantillonnage des distributions par un nombre N fini d'échantillons appelés particules. Le résultat important, donné par la loi forte des grands nombres, est que lorsque N tend vers l'infini, la distribution représentée par ces particules tend presque sûrement vers la distribution de filtrage. Les résultats sont concluants pour de nombreux problèmes mais l'obstacle majeur de ces méthodes est que le nombre de particules doit en pratique être relativement important, généralement de l'ordre du millier voire plus, ce qui amène un coût en puissance de calcul et en stockage important, et limite de fait leur utilisation à des espaces de petites dimension ou à des modèles dynamiques peu coûteux (par exemple simplifiés par rapport à une version complète du modèle). Les recherches portent sur une meilleure représentativité de chacune des particules afin d'en réduire le nombre. De nombreuses variantes du filtre particulaire ont été proposées ; on peut avoir un résumé en particulier pour les méthodes appliquées à la géophysique dans van Leeuwen [2009].

Le filtre de Kalman d'ensemble a été introduit par Evensen [1994] et est plutôt utilisé par les géophysiciens en tant qu'alternative ou complément aux méthodes variationnelles. Celui-ci s'appuie sur une représentation des deux premiers moments de la distribution de filtrage par un ensemble fini d'échantillons (notion similaire aux particules des filtres particulaires) et dérive alors les équations du filtre de Kalman en substituant les espérance et covariance par les moyenne et covariance empiriques calculées à l'aide de ces échantillons. L'avantage principal est le nombre réduit d'échantillons requis en pratique, de l'ordre de la dizaine ou de la centaine. En revanche, à part dans le cas où les opérateurs sont linéaires et les distributions gaussiennes, peu de résultats théoriques sont connus sur cette méthode. Le Gland et al. [2011] montrent même qu'il existe des cas où la distribution donnée par le filtre de Kalman d'ensemble est différente de celle du filtre bayésien optimal, en exhibant le cas d'une distribution bimodale de gaussiennes avant analyse, où le résultat après analyse par le filtre de Kalman d'ensemble est différent de celui du filtre bayésien. Plusieurs variantes du filtre de Kalman d'ensemble existent, comme le filtre de Kalman de transformation d'ensemble (*Ensemble Transform Kalman Filter* — ETKF) décrit par Bishop et al. [2001] ou le *Ensemble Adjustment Kalman Filter* (EAKF) décrit par Anderson [2001].

Aujourd'hui, en géophysique, des méthodes basées sur le filtre de Kalman d'ensemble sont utilisées de façon opérationnelle à Environnement Canada (Houtekamer and Mitchell [2005]) ; plusieurs services météorologiques utilisent plutôt de l'assimilation variationnelle 4D-Var de façon opérationnelle. Dans les activités de recherche en revanche, on trouve plusieurs projets basés sur le filtre de Kalman d'ensemble : le centre européen de prévision météorologique à moyen terme (CEPMMT, aussi connu sous l'appellation anglaise de ECMWF — *European Center for Medium-Range Weather Forecasting*), le NERSC (*Nansen Environmental and Remote Sensing Center*) avec le projet eVITA, ou le projet Prévassemble regroupant Météo-France, le Laboratoire de Météorologie Dynamique et les équipes ASPI et Fluminance de l'INRIA. Plusieurs projets ponctuels l'utilisent aussi, on pourra se référer au paragraphe 1.1.3 pour trouver certains exemples.

2.2 Vocabulaire

Avant d'aller plus loin, précisons un peu le vocabulaire utilisé dans le contexte des filtres particulaires (PF) et filtres de Kalman d'ensemble (EnKF). Bien que les concepts sous-jacents soient souvent assez proches, le vocabulaire différent nuit parfois à la compréhension des choses en premier abord. Le lexique ci-dessous met en lumière ces différences de voca-

bulaire :

- *membre de l'ensemble (ensemble member) (EnKF) - particule (PF)* : ces deux notions désignent une réalisation du système étudié, notée $\mathbf{x}^{(i)}$, éventuellement associé à un poids $w^{(i)}$ dans les filtres particuliers; plus formellement on peut voir ça comme une distribution de Dirac $\delta_{\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x})$;
- *ensemble (EnKF) - nuage de particules (PF) - échantillon (statistiques)* : l'ensemble des vecteurs d'état $\mathbf{x}^{(i)}$, généralement noté comme une matrice \mathbf{x} dont les colonnes sont les points $\mathbf{x}^{(i)}$ dans l'espace d'état;
- *modèle dynamique (EnKF) - noyau de transition (PF)* : le noyau de transition (d'une chaîne de Markov) est un concept plus général qui permet la transformation d'une mesure en une autre d'un temps à un autre, le modèle dynamique est plus généralement utilisé pour désigner un opérateur déterministe qui sert à porter l'état d'un temps à un autre et auquel est souvent lié à un bruit additif gaussien représentant l'erreur associée au modèle déterministe (on qualifie cette erreur d'*erreur modèle*);
- *prédiction (EnKF)* : ces deux notions désignent la distribution $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ donnée par le modèle dynamique avant utilisation des observations;
- *dynamique* : étape d'application du modèle dynamique à la distribution donnée au temps précédent;
- *distribution après analyse (EnKF) - distribution de filtrage (PF)* : ces deux notions désignent souvent la distribution $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$; mais dans la mesure où celle-ci est la marginale de la *distribution a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$, une certaine confusion existe parfois dans la désignation de la distribution de filtrage;
- *analyse* : étape d'application des équations de Kalman, correspond approximativement à la pondération des filtres particuliers, bien que cette dernière ne déplace pas les particules contrairement à l'EnKF; par métonymie, on parle aussi d'*analyse* pour désigner le résultat de l'analyse, c'est-à-dire pour la distribution résultat donnée après cette étape.

Par souci de simplicité, nous emploierons dans la suite les termes de *particules* et parfois d'*échantillons*, même si la littérature emploie souvent le terme de *membres de l'ensemble (ensemble members)* pour le filtre de Kalman d'ensemble. Noter que le terme de *particule* sera ici toujours employé dans le sens d'*échantillon statistique* et non de *particule fluide*.

2.3 Les filtres particuliers

Les filtres particuliers sont une famille de méthodes permettant d'implémenter le problème du filtrage dans toute sa généralité (voir la section 1.1.2), c'est-à-dire sans aucune limitation ni sur la linéarité des opérateurs ni sur les distributions manipulées. Nous décrivons ci-après quelques versions couramment utilisées en pratique; mais de nombreuses variantes existent, tant au niveau théorique qu'au niveau des méthodes utilisées en pratique. Pour une discussion plus théorique, on pourra se référer à Crisan [2001]; un aperçu assez complet des méthodes de filtrage stochastique est donnée dans Arnaud [2004].

2.3.1 Méthode théorique générale

Le but de la méthode est de retrouver la trajectoire complète $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ du système dynamique, où $\mathbf{x}_{0:k}$ désigne la concaténation des états depuis l'instant 0 jusqu'à l'instant

$k : \mathbf{x}_{0:k} = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$. On s'intéressera aussi à la distribution de filtrage $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$.

La distribution $p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$ est approchée par une somme finie pondérée de distributions de Dirac centrées en des trajectoires $\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}$ de l'espace d'état. Cette approximation est notée $\hat{p}(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$:

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) \approx \hat{p}(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{0:k}). \quad (2.1)$$

Étant donné qu'on ne sait en général pas simuler des échantillons selon cette loi *a priori* inconnue — parce que sa densité est trop complexe ou parce que l'espace d'état est beaucoup trop grand pour qu'on puisse représenter la densité complète — la technique de l'échantillonnage d'importance est utilisée. À chaque instant, la première étape sera donc de tirer des particules $\mathbf{x}_k^{(i)}$ selon une *loi de proposition* spécifiée $\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k})$, qui devra satisfaire aux deux contraintes suivantes :

- le support de $\pi(\mathbf{x})$ devra contenir le support de $p(\mathbf{x}) : \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, p(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow \pi(\mathbf{x}) > 0$ (dp doit être absolument continue par rapport à $d\pi$) ;
- la loi $\pi(\mathbf{x})$ doit satisfaire la propriété de récursivité suivante :

$$\pi(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) = \pi(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}).$$

La première contrainte est propre à la technique statistique de l'échantillonnage d'importance, tandis que la deuxième autorisera une utilisation récursive de cette loi dans le temps.

Une fois que les particules $\mathbf{x}_k^{(i)}$ à l'instant courant k ont été simulées suivant la loi de proposition $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}, \mathbf{x}_{0:k-1})$, la trajectoire est actualisée à l'instant courant : $\mathbf{x}_{0:k}^{(i)} = [\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(i)}]$. La deuxième étape consiste à exprimer les poids de ces particules à partir des équations du filtre bayésien optimal mentionné en (1.1) et (1.2) en suivant la technique de l'échantillonnage d'importance. Les poids optimaux sont donnés par l'équation récursive suivante :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})}. \quad (2.2)$$

La formule de ces poids optimaux s'obtient par le rapport entre la distribution a posteriori et celle de la loi de proposition.

Dans le cadre des filtres particulières, cette formule s'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
w_k^{(i)} &\propto \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})} && \text{[échantillonnage d'importance]} \\
&\propto \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})\pi(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})} && \text{[théorème de Bayes]} \\
&\propto \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})} && \text{[indépendance] \& } \\
&&& \text{[terme constant pour tous les poids]} \\
&\propto \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})} && \text{[probabilité conditionnelle]} \\
&\propto \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})p(\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})} && \text{[indépendance conditionnelle]} \\
&&& \text{\&} \\
&&& \text{[markovianité]} \\
&\propto \frac{p(\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k-1})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k-1})} \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})} && \text{[récursivité de } \pi(\mathbf{x})\text{]} \\
&\propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})} && \text{[expression de } w_{k-1}^{(i)}\text{]}
\end{aligned}$$

La distribution de la loi a posteriori $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ est approchée par la somme pondérée (2.1) avec la mise à jour des poids selon (2.2) :

$$\hat{p}(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{0:k}).$$

On peut également démontrer que la distribution de la loi de filtrage approchée s'obtient directement à partir de ces mêmes échantillons et de ces mêmes poids (voir l'annexe A) :

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}(\mathbf{x}_k).$$

2.3.2 Filtres particulières remarquables

Comme mentionné précédemment, le choix de la distribution d'importance est relativement flexible. Il existe cependant deux choix particuliers qui conduisent à des filtres remarquables. Ces filtres sont dénommés dans la littérature comme :

- le filtre bootstrap ;
- le filtre d'importance optimale.

Nous dérivons l'expression de ces deux filtres particuliers dans les deux paragraphes suivants.

Le *filtre bootstrap* (Gordon et al. [1993]) est la version originelle du filtre particulier. Il s'agit également de la version la plus simple de ce filtre. Ce filtre définit la loi de proposition

comme la dynamique elle-même :

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}). \quad (2.3)$$

Ainsi, d'après la formule (2.2), la mise à jour des poids est alors directement donnée par la vraisemblance par rapport à l'observation :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}). \quad (2.4)$$

Ce filtre fait l'hypothèse forte que l'on sait échantillonner selon la dynamique, c'est-à-dire que l'on connaît toujours *a priori* le noyau de transition. Réduire la fonction de proposition à la dynamique est extrêmement restrictif, puisque l'on ignore les observations passées et la mesure présente. Pour prendre une image, on serait dans la position du chasseur qui tire dans le noir au hasard sans avoir la moindre idée de la position de sa proie.

Le *filtre d'importance optimale* (Doucet et al. [2000]) présente comme propriété de minimiser la variance des poids conditionnellement à $\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}$ et $\mathbf{y}_{1:k}$. Il utilise comme loi de proposition :

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k). \quad (2.5)$$

Et la mise à jour des poids est alors directement donnée par la distribution de vraisemblance prédite :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}). \quad (2.6)$$

Ce filtre requiert néanmoins de savoir calculer la vraisemblance prédite $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$. Dans le cas d'un espace d'état discret avec une dynamique linéaire et une vraisemblance modélisée par un mélange de gaussiennes, on peut obtenir une expression analytique (voir Arnaud and Mémin [2007]). En revanche, dans le cas d'une dynamique continue en temps, cela demande de calculer les vraisemblances intermédiaires $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)})$ pour $k \leq t \leq k+1$ à l'aide d'une équation de Kolmogorov rétrograde (voir Papadakis et al. [2010]), ce qui n'est pas faisable pour les modèles complexes tels que trouvés en géophysique.

2.3.3 Dégénérescence des poids

En pratique, on constate que les poids ont tendance à tous devenir proches de 0 sauf quelques-uns ; ce phénomène est appelé *dégénérescence des poids* ou *réduction de la taille effective de l'échantillon*. Cela peut se mesurer en calculant la taille effective de l'échantillon (*Effective Sample Size* — ESS) donnée par :

$$ESS = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w^{(i)})^2}. \quad (2.7)$$

Ce nombre varie entre 1 et N . Il est maximal lorsque tous les poids sont égaux (à $1/N$), ce qui se traduit par le fait qu'aucune des particules n'est plus vraisemblable que les autres et le nuage de particules est équiréparti et reflète *a priori* bien la distribution a posteriori. L'ESS est minimal lorsque tous les poids sont nuls sauf un, ce qui signifie qu'une seule des particules est significative par rapport à la densité de probabilité que l'on cherche à estimer, toutes les autres étant dans des états très peu probables.

Pour contrer au problème de dégénérescence des poids ou d'effondrement (on trouve en anglais le terme de *collapse*), une étape de rééchantillonnage est introduite après l'étape

de pondération afin de « recentrer » le nuage de particules autour des particules les plus vraisemblables. Ceci est généralement fait en utilisant un rééchantillonnage multinomial, mais d'autres types de rééchantillonnage existent aussi. Après un rééchantillonnage multinomial, tous les poids sont réinitialisés à $1/N$.

La loi binomiale modélise le résultat de n tirages avec remise parmi J résultats possibles de poids respectifs w_j (ceux-ci doivent être normalisés à 1). La probabilité que le résultat $N = (N_1, N_2, \dots, N_J)$ des n tirages soit (n_1, n_2, \dots, n_J) (avec $\sum_{j=1}^J n_j = n$) est :

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_J = n_J) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_J!} w_1^{n_1} w_2^{n_2} \cdot \dots \cdot w_J^{n_J}.$$

L'espérance de chaque N_j est nw_j . Dans notre cas, les w_j seront les poids des particules $w^{(i)}$, et nous aurons N tirages pour conserver un même nombre de particules après rééchantillonnage. Une particule $\mathbf{x}^{(i)}$ apparaîtra alors N_i fois après rééchantillonnage.

En revanche, cette solution introduit un autre problème : après le rééchantillonnage, une même particule apparaît souvent plusieurs fois étant donné son poids fort, et cela diminue d'autant le potentiel d'exploration du nuage de particules. Un moyen d'éviter cela est de redéplacer très faiblement et de façon aléatoire chaque particule après l'étape de rééchantillonnage afin que chaque particule reparte au temps suivant de positions différentes ; dans le cas de systèmes dynamiques fortement chaotiques, ce déplacement permet de mieux explorer l'espace d'état au temps suivant. Cette étape est appelé *régularisation* dans la littérature (Musso et al. [2001]). La distribution résultante correspond à la convolution de la distribution initiale et de la distribution de la perturbation, puisqu'il s'agit de deux variables aléatoires indépendantes.

2.3.4 Algorithme

Même si les filtres particuliers présentent de nombreuses variantes, l'algorithme 2 du filtre SIR (*Sequential Importance Resampling*), aussi appelé filtre bootstrap (cf section 2.3.2), constitue la structure de base des filtres particuliers. Il correspond au filtre le plus simple et est donc massivement utilisé. Le filtre SIS (*Sequential Importance Sampling*) est identique au SIR à la différence que celui-ci ne comporte pas d'étape de rééchantillonnage.

2.3.5 Propriétés théoriques

Lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, la loi forte des grands nombres permet d'obtenir la convergence presque sûre vers la loi du filtre bayésien optimal, les échantillons étant tirés indépendamment selon un même loi. De plus, le théorème central limite donne une vitesse de convergence de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (voir Del Moral and Miclo [2000]).

En réexprimant le problème dans des termes plus généraux de mesures aléatoires, on peut obtenir des résultats de convergence similaires dans l'espace des mesures aléatoires (voir par exemple Crisan [2001]).

Algorithme 2 Algorithme du filtre particulaire *Sequential Importance Resampling* (SIR)

Paramètres :

- la distribution estimée au temps initial p_0 ;
- les noyaux de transition $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ pour $k \geq 1$;
- les fonctions de vraisemblance $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$ pour $k \geq 1$.

Algorithme :

0. Initialisation : Au départ, la distribution $p(\mathbf{x}_0)$ est supposée être donnée (par exemple avec tous les poids égaux et les échantillons tirés selon une loi donnée) :

$$p_0(x) = \sum_{i=1}^N w_0^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_0^{(i)}}(x)$$

Pour les temps suivants $k \geq 1$, les étapes suivantes sont appliquées.

I. Échantillonnage selon la prédiction : À chaque nouveau pas de temps, chaque particule est portée au temps suivant selon le modèle dynamique :

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$$

Et on pose $\mathbf{x}_{0:k}^{(i)} = [\mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(i)}]$.

II. Pondération : Le calcul de la densité a posteriori $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ se fait en pondérant les particules selon leur vraisemblance :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})$$

Le résultat du filtrage à l'étape k est celui donné après cette étape de pondération :

$$p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}}(x)$$

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}(x)$$

III. Rééchantillonnage : Les N particules qui seront utilisées au temps suivant sont tirées selon une loi multinomiale donnée par les poids $(w_k^{(i)})_{i=1\dots N}$ des particules. Les poids sont ensuite tous fixés à $1/N$

2.4 Le filtre de Kalman d'ensemble

Le filtre de Kalman d'ensemble et ses dérivés interprètent les équations de Kalman (voir la section 1.2) dans un cadre d'estimation statistique. Cependant, même si la méthode générale est assez proche des filtres particuliers, ils s'en éloignent du fait que l'étape de pondération est remplacée par un déplacement des particules.

La méthode du filtre de Kalman d'ensemble est décrite en détails dans Evensen [2003] ; la première publication le décrivant, Evensen [1994], discute plutôt de son application à un contexte océanique.

2.4.1 Principe

Le problème résolu par le filtre de Kalman d'ensemble correspond à un filtrage sous hypothèse linéaire-gaussienne, même s'il est aussi utilisé en pratique dans le cas d'un opérateur dynamique non-linéaire.

Notons $\mathbf{x}_k = \{\mathbf{x}_k^{(i)}; i = 1 \dots N\}$ l'ensemble des particules représentatif de la densité de probabilité dans l'espace d'état. Les particules n'étant pas pondérées, cette densité sera donc $p(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}(\mathbf{x})$, où les $\delta_a(\mathbf{x}_k)$ sont des mesures de Dirac.

À l'instar du filtre de Kalman, l'assimilation se déroule en deux étapes successives : une première étape, aussi appelée prédiction, où chaque particule est portée au temps suivant par le modèle dynamique et est bruitée, puis une seconde étape, appelée correction, où les particules sont déplacées de façon à ce que leurs moyenne et covariance empiriques soient régies par les équations de Kalman sur la moyenne et la covariance. L'intérêt premier est de ne pas manipuler directement les matrices de covariance mises en jeu mais uniquement leur représentation empirique de rang faible à travers un ensemble d'échantillons.

L'étape de prédiction donne un nuage de particules, identifiées par l'exposant \bullet^f , prédites par le modèle dynamique :

$$\mathbf{x}_k^{f,(i)} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) + \eta_k^{(i)}, i = 1 \dots N,$$

où $\eta_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$ sont des échantillons du bruit dynamique associé au modèle \mathbf{M}_k . L'ensemble de ces particules $\{\mathbf{x}_k^{f,(i)}\}_{i=1 \dots N}$ sera rangé dans une matrice \mathbf{x}_k^f de taille $n \times N$ dont les colonnes correspondront à ces particules :

$$\mathbf{x}_k^f = [\mathbf{x}_k^{f,(1)}, \mathbf{x}_k^{f,(2)}, \dots, \mathbf{x}_k^{f,(N)}].$$

On calculera également la matrice $\mathbf{x}_k^{f'}$, appelée usuellement *matrice des perturbations*, obtenue à partir de \mathbf{x}_k^f en soustrayant à cette dernière la moyenne des particules, donnée par $\bar{\mathbf{x}}_k^f = \mathbf{x}_k^f \mathbf{1}_N$:

$$\mathbf{x}_k^{f'} = [\mathbf{x}_k^{f,(1)} - \bar{\mathbf{x}}_k^f, \mathbf{x}_k^{f,(2)} - \bar{\mathbf{x}}_k^f, \dots, \mathbf{x}_k^{f,(N)} - \bar{\mathbf{x}}_k^f] = \mathbf{x}_k^f - \bar{\mathbf{x}}_k^f \mathbf{1}_N^T.$$

L'étape d'analyse, dont les particules sont identifiées par l'exposant \bullet^a , peut être représentée pour le nuage de particules par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{a,(i)} &= \mathbf{x}_k^{f,(i)} + \mathbf{K}_k^N (\mathbf{y}_k + \varepsilon_k^{(i)} - \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k^{f,(i)})), \\ \text{avec } \mathbf{K}_k^N &= \mathbf{x}_k^{f'} (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'})^T \left((\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'}) (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'})^T + \frac{1}{N-1} \varepsilon_k \varepsilon_k^T \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $\varepsilon_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$ sont des échantillons du bruit d'observations et sont rassemblés dans une matrice ε_k de taille $m \times N$ dont les colonnes sont ces échantillons. Le fait de créer un échantillon $\{\mathbf{y}_k + \varepsilon_k^{(i)}\}_{i=1\dots N}$ centré autour de l'observation et bruité selon la covariance d'observation permet de séparer les « particules observées » de leur moyenne \mathbf{y}_k , et cela constitue le principal changement par rapport aux méthodes de filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF) qui seront explicitées dans la section suivante, où les moyenne et covariance *a posteriori* seront calculées séparément.

La matrice \mathbf{K}_k^N est l'approximation du gain de Kalman sur la base des particules $\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)}$ (cf les équations de Kalman dans l'algorithme 1).

2.4.2 Algorithme

L'algorithme complet issu de cette méthodologie est donné par l'algorithme 3.

Algorithme 3 Algorithme du filtre de Kalman d'ensemble

Paramètres :

- $\{\mathbf{x}_0^{(i)}\}_{i=1\dots N}$: échantillonnage initial gaussien ;
- $\mathbf{M}_k, \{\eta_k^i\}_{i=1\dots N}$: modèle dynamique et échantillons de l'erreur modèle associée pour les temps $k \geq 1$;
- $\mathbf{H}_k, \{\varepsilon_k^i\}_{i=1\dots N}$: opérateur d'observation et échantillons de l'erreur d'observation associée pour les temps $k \geq 1$;
- \mathbf{y}_k : données observées aux temps $k \geq 1$.

Algorithme :

(toutes les distributions sont supposées gaussiennes.)

1. Initialisation :

- $\mathbf{x}_0^{\text{a},(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)}$
- $$\Rightarrow p(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_0^{\text{a},(i)}}(\mathbf{x}_0)$$

2. Assimilation : pour $k \geq 1$:

• Prédiction :

$$\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) + \eta_k^{(i)}, i = 1 \dots N$$

avec $\eta_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$

$$\Rightarrow p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)}}(\mathbf{x}_k)$$

• Correction :

$$\mathbf{x}_k^{\text{f}'} = \frac{1}{\sqrt{N-1}}(\mathbf{x}_k^{\text{f}} - \bar{\mathbf{x}}_k^{\text{f}} \mathbf{1}_N)$$

$$d_k^{(i)} = \mathbf{y}_k + \varepsilon_k^{(i)} - \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)}), i = 1 \dots N$$

avec $\varepsilon_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$

$$\mathbf{x}_k^{\text{a}} = \mathbf{x}_k^{\text{f}'} + \mathbf{x}_k^{\text{f}'} (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}'})^T ((\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}'}) (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}'})^T + \frac{1}{N-1} \varepsilon_k \varepsilon_k^T)^{-1} d_k$$

$$\Rightarrow p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_k^{\text{a},(i)}}(\mathbf{x}_k)$$

En pratique, quelques hypothèses et optimisations peuvent être faites sur cet algorithme. Tout d'abord, du fait de l'indépendance des bruits d'observation et de la dynamique $\mathbb{E}[(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'}) \varepsilon_k^T] = 0$, et avec une version forte de cette hypothèse vérifiée sur les échantillons eux-mêmes $(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'}) \varepsilon_k^T = 0$, Evensen [2003] propose de calculer l'inverse (généralisé) dans le gain de Kalman (de taille m^2) par la décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition*) de la matrice

$$\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'} + \varepsilon_k = \mathbf{USV}^T,$$

avec $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ diagonale, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ orthogonale pour obtenir :

$$\begin{aligned} ((\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'}) (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'})^T + \varepsilon_k \varepsilon_k^T)^+ &= ((\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'} + \varepsilon_k) (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'} + \varepsilon_k)^T)^+ \\ &= (\mathbf{USV}^T \mathbf{VS}^T \mathbf{U}^T)^+ \\ &= (\mathbf{USS}^T \mathbf{U}^T)^+ \\ &= \mathbf{U} (\mathbf{SS}^T)^+ \mathbf{U}^T \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ensuite, on s'arrangera pour n'effectuer que des multiplications de matrices de taille $n \times N$, ou $m \times N$ ou $N \times N$, essentiellement en partant de la droite pour le calcul de \mathbf{x}_k^a et en effectuant les multiplications à la suite.

Dans l'équation ci-dessus, il faut bien remarquer que la matrice $(\mathbf{SS}^T)^+$ doit être comprise comme un inverse généralisé de (\mathbf{SS}^T) puisque cette matrice peut contenir des éléments diagonaux nuls — en particulier, puisque la moyenne des échantillons est nulle, le rang de \mathbf{S} sera au plus $N - 1$ et au moins une coordonnée diagonale sera nulle. Pour cette raison et pour économiser du temps de calcul et de la place mémoire, on préférera utiliser la décomposition en valeurs singulières réduite (*Thin SVD*) qui consiste à tronquer les matrices \mathbf{U} et \mathbf{S} ; dans le cas d'un faible nombre de particules, les matrices manipulées seront donc de tailles $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Rappelons que l'inverse généralisé d'une matrice réelle \mathbf{A} quelconque de taille $z_1 \times z_2$ est la matrice \mathbf{A}^+ de taille $z_2 \times z_1$ définie de manière unique de manière à satisfaire les propriétés :

$$\begin{aligned} \mathbf{AA}^+ \mathbf{A} &= \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^+ \mathbf{AA}^+ &= \mathbf{A}^+, \\ (\mathbf{AA}^+)^T &= \mathbf{A}^+ \mathbf{A}, \\ (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T &= \mathbf{AA}^+. \end{aligned}$$

De plus, lorsque \mathbf{A} est décomposée au moyen d'une SVD $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$ ($\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{z_1 \times z_1}$ orthogonale, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{z_1 \times z_2}$ diagonale, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{z_2 \times z_2}$ orthogonale), l'inverse généralisé \mathbf{A}^+ s'exprime sous la forme $\mathbf{A}^+ = \mathbf{US}^+ \mathbf{V}^T$ où

$$\mathbf{S}_{ii}^+ = \begin{cases} 1/S_{ii} & \text{si } S_{ii} \neq 0 \\ 0 & \text{si } S_{ii} = 0 \end{cases}$$

2.4.3 Propriétés théoriques

Malgré son énorme succès dans les sciences environnementales, relativement peu d'études théoriques ont été faites sur le filtre de Kalman d'ensemble. Dans Le Gland et al. [2009], dans le cas linéaire-gaussien et sous l'hypothèse que la distribution *a priori* (la prédiction) soit représentée par un échantillonnage tiré de façon aléatoire, il est montré que la distribution après analyse, représentée par la somme des échantillons tirés, converge effectivement

vers la distribution a posteriori à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{N}}$ lorsque le nombre d'échantillons tend vers l'infini.

Dans le cas général, lorsque le modèle dynamique ou l'opérateur d'observation n'est pas linéaire, ou que les distributions ne sont pas gaussiennes, aucun résultat théorique n'est établi à notre connaissance. On peut même identifier des exemples ne convergeant pas vers la distribution optimale. Le Gland et al. ajoutent que ce défaut théorique peut être surmonté par la pondération des particules à la manière d'un filtre particulaire, et que ceci assure la convergence théorique vers la distribution a posteriori lorsque le nombre de particules tend vers l'infini. Ce type de filtre, appelé filtre de Kalman d'ensemble pondéré, sera détaillé dans la section 2.7.

2.5 Les Ensemble Square Root Filters

Le filtre d'ensemble précédent met en jeu une approximation de rang faible de la matrice de covariance d'observation. Cette approximation, pour un faible nombre de particules, peut s'avérer d'assez mauvaise qualité. C'est pour s'affranchir de cette difficulté que sont introduits les filtres « racine carrée ».

Les *Ensemble Square Root Filters* (EnSRF) sont une variante du filtre de Kalman d'ensemble et résolvent donc également le problème du filtrage linéaire-gaussien ; ils en diffèrent seulement dans l'étape d'analyse qui, en substance, consiste à prendre la racine carrée d'une matrice dérivée de la covariance. Les EnSRF sont identiques dans la méthode aux filtres de Kalman de rang réduit RRSQRT (voir le cours de Marc Bocquet [Bocquet, 2004-2013, chapitre 6]), la seule différence conceptuelle étant que les filtres RRSQRT travaillent sur les modes principaux et sont donc déterministes, alors que les filtres EnSRF travaillent sur des échantillons aléatoires.

Contrairement au filtre de Kalman d'ensemble classique, l'étape d'analyse des EnSRF ne repose pas sur un échantillonnage du bruit d'observation mais utilise directement la matrice de covariance du bruit d'observation : l'étape d'analyse est en conséquence déterministe — mais l'étape de prédiction reste stochastique — ce qui est un petit avantage par rapport à l'EnKF puisque cela supprime le biais d'échantillonnage introduit par le nombre fini d'échantillons du bruit d'observation et, pragmatiquement, cela peut s'avérer plus pratique pour le rejeu de l'étape d'analyse qui, par définition, sera identique contrairement à l'EnKF. La contrepartie importante est qu'on suppose connue l'inverse de la matrice de covariance du bruit d'observation ; en pratique on aura donc la contrainte de se limiter à une matrice simple à inverser ou à rechercher des formes de matrices d'observation dont on sait calculer spécifiquement l'inverse.

2.5.1 Principe

On utilisera abondamment dans la suite la formule de Woodbury, donnée ici dans sa forme générale. On la trouve aussi dans la littérature sous les noms de « formule de Sherman-Morison » ou « formule de Sherman-Morison-Woodbury ».

Proposition 1 (Formule de Woodbury). *Pour des matrices $B \in \mathbb{R}^{z_1 \times z_1}$, $C \in \mathbb{R}^{z_2 \times z_2}$, $U \in \mathbb{R}^{z_1 \times z_2}$ et $V \in \mathbb{R}^{z_2 \times z_1}$, dont les matrices B et C sont inversibles, et l'une ou l'autre des matrices $(B + UCV)$ et $(C^{-1} + VB^{-1}U)$ est inversible, on a l'égalité suivante :*

$$(B + UCV)^{-1} = B^{-1} - B^{-1}U(C^{-1} + VB^{-1}U)^{-1}VB^{-1}.$$

Démonstration. Si B , C et $(C^{-1} + VB^{-1}U)$ sont inversibles, multiplier $(B + UCV)$ et $(B^{-1} - B^{-1}U(C^{-1} + VB^{-1}U)^{-1}VB^{-1})$ pour montrer l'égalité, et cela montre également que $(B + UCV)$ est inversible.

Si B , C et $(B + UCV)$ sont inversibles, effectuer le même calcul en remplaçant C^{-1} par B , B^{-1} par C , et en échangeant U et V , ce qui montre que $(C^{-1} + VB^{-1}U)$ est inversible. \square

L'étape de prédiction est strictement similaire à celle de l'EnKF. Les échantillons prédits sont ensuite décomposés en isolant la moyenne de la covariance de l'ensemble :

$$\mu_k^f + \mathbf{x}_k^f \text{ avec } \bar{\mathbf{x}}_k^f = 0. \quad (2.10)$$

Dans l'étape de correction, la moyenne a posteriori sera calculée séparément de la mise à jour de la covariance de l'ensemble.

L'ensemble a posteriori est calculé par une transformation linéaire de l'ensemble *a priori* (à moyenne nulle), et cette transformation linéaire peut être faite à gauche ou à droite de l'ensemble *a priori*. Lorsqu'elle est faite à gauche, on parlera d'EAKF (*Ensemble Adjustment Kalman Filter*) (Anderson [2001]) ; lorsqu'elle est faite à droite, on parlera d'ETKF (*Ensemble Transform Kalman Filter*). Nous détaillons ici le deuxième type. On pourra se référer à Tippett et al. [2003] pour plus de détails sur les EnSRF, appellation qui regroupe ces deux types de filtres.

Dans l'ETKF, l'ensemble a posteriori \mathbf{x}_k^a est donné sous la forme

$$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f \mathbf{A}_k, \quad (2.11)$$

avec une matrice $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{N \times N}$ donnée de façon à ce que la matrice de covariance a posteriori $P_k^a = \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^a (\mathbf{x}_k^a)^T$ corresponde aux équations de Kalman.

En partant de l'expression de la matrice de covariance a posteriori empirique, et en introduisant également un facteur d'inflation de la covariance *a priori* $\alpha > 1$ dont on précisera le rôle ultérieurement, on aura :

$$\begin{aligned} P_k^a &= \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^a (\mathbf{x}_k^a)^T \\ &= \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^f \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T (\mathbf{x}_k^f)^T \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \alpha P_k^f \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f (\mathbf{x}_k^f)^T \\ &= \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f \left(\mathbf{I}_N - \frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f)^T \left(\frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f) (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f)^T + \mathbf{R} \right)^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f) \right) (\mathbf{x}_k^f)^T \\ &= \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f \left(\mathbf{I}_N - (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f)^T \left((\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f) (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f)^T + \frac{N-1}{\alpha} \mathbf{R} \right)^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f) \right) (\mathbf{x}_k^f)^T \\ &= \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f \left(\mathbf{I}_N + \frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f) \right)^{-1} (\mathbf{x}_k^f)^T \\ &= \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^f \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \frac{1}{N-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f) \right)^{-1} (\mathbf{x}_k^f)^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

La partie non triviale de la matrice centrale est ensuite décomposée selon une décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{N-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^f) = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T, \quad (2.13)$$

où \mathbf{U} est une matrice orthogonale de taille $n \times n$ et $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale de taille $n \times n$ où les éléments diagonaux sont positifs ou nuls. En pratique, en remarquant que $(\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)$ est de rang au plus N et donc que les $n - N$ derniers éléments diagonaux de $\mathbf{\Lambda}$ sont nuls, on utilisera la décomposition en valeurs singulières réduite (*thin SVD*) qui exprime \mathbf{D} sous la même forme mais avec une matrice \mathbf{U} de taille $n \times N$ et $\mathbf{\Lambda}$ de taille $N \times N$.

On déduit des équations (2.11), (2.12) et (2.13) que toute matrice \mathbf{A}_k de la forme

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \mathbf{U} \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \mathbf{\Lambda} \right)^{-1/2} \mathbf{V}^T \quad (2.14)$$

est une racine carrée de l'inverse (généralisé) de la matrice $(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \mathbf{D})$ pour un choix quelconque de matrice orthogonale $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Plusieurs choix de matrices \mathbf{V} ont été testés par différents auteurs : l'ETKF original de Bishop et al. [2001] utilise $\mathbf{V} = \mathbf{I}_N$, puis Evensen [2004] et Leeuwenburgh et al. [2005] prennent une matrice \mathbf{V} orthogonale aléatoire, et Sakov and Oke [2008] préconisent $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ et montrent que cela est préférable sur deux expérimentations. Ce dernier choix, correspondant à la matrice racine carrée symétrique de $(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \mathbf{D})^{-1}$, a la propriété de conserver la moyenne de l'échantillon, c'est-à-dire $\bar{\mathbf{x}}_k^f = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}_k^a = 0$ (cela se montre en remarquant que $\mathbf{1}_N$ est un vecteur propre de \mathbf{A}_k). On peut aussi voir cette conservation de la moyenne nulle de l'échantillon comme une contrainte initialement faite sur \mathbf{x}_k^a de par la définition d'une matrice de covariance empirique (l'échantillon doit être centré).

Nous utiliserons dans la suite le choix $\mathbf{V} = \mathbf{U}$, soit :

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \mathbf{U} \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \mathbf{\Lambda} \right)^{-1/2} \mathbf{U}^T. \quad (2.15)$$

La moyenne a posteriori μ_k^a est donnée par :

$$\mu_k^a = \mu_k^f + \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^f (\mathbf{U} (\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{U}^T) (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mu_k^f). \quad (2.16)$$

Elle est calculée en appliquant deux fois de suite la formule de Woodbury :

$$\begin{aligned} \mu_k^a &= \mu_k^f + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mu_k^f) \\ &= \mu_k^f + \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \left(\mathbf{R} + \frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f) (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \right)^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mu_k^f) \\ &= \mu_k^f + \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \\ &\quad \times \left(\mathbf{R}^{-1} - \left(\frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f) (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f) (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} \right) \\ &\quad \times (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mu_k^f) \\ &= \mu_k^f + \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f \\ &\quad \times \left(\mathbf{I}_N - \frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \left(\frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f) (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T + \mathbf{R} \right)^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f) \right) \\ &\quad \times (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mu_k^f) \\ &= \mu_k^f + \frac{\alpha}{N-1} \mathbf{x}_k^f \left(\mathbf{I}_N + \frac{\alpha}{N-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f) \right)^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mu_k^f) \\ &= \mu_k^f + \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^f (\mathbf{U} (\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{U}^T) (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mu_k^f) \end{aligned}$$

De façon résumé, l'étape d'analyse peut être représentée pour le nuage de particules par l'équations suivante :

$$\mathbf{x}_k^{a,(i)} = \mu_k^a + \mathbf{x}_k^{f,(i)} \mathbf{A}_k, \quad (2.17)$$

où \mathbf{A}_k et μ_k^a sont donnés par les équations (2.13), (2.15) et (2.16).

2.5.2 Algorithme

Algorithme 4 Algorithme du filtre de transformation de Kalman d'ensemble

Paramètres :

- $\{\mathbf{x}_0^{(i)}\}_{i=1\dots N}$: échantillonnage initial gaussien ;
- $\mathbf{M}_k, \{\eta_k^i\}_{i=1\dots N}$: modèle dynamique et échantillons de l'erreur modèle associée pour les temps $k \geq 1$;
- $\mathbf{H}_k, \{\varepsilon_k^i\}_{i=1\dots N}$: opérateur d'observation et échantillons de l'erreur d'observation associée pour les temps $k \geq 1$;
- \mathbf{y}_k : données observées aux temps $k \geq 1$;
- α : coefficient d'inflation.

Algorithme :

(toutes les distributions sont supposées gaussiennes.)

1. **Initialisation :**

- $\mathbf{x}_0^{a,(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)}$
- $$\Rightarrow p(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_0^{a,(i)}}(\mathbf{x}_0)$$

2. **Assimilation :** pour $k \geq 1$:

• **Prédiction :**

$$\mathbf{x}_k^{f,(i)} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) + \eta_k^{(i)} \text{ avec } \eta_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k), i = 1 \dots N$$

• **Correction :**

$$\mathbf{x}_k^{f'} = \mathbf{x}_k^f - \overline{\mathbf{x}_k^f}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{I} + (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'})^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'})$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^T \text{ [décomposition en valeurs sigulières : } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times N}]$$

$$\mu_k = \overline{\mathbf{x}_k^f} + \mathbf{x}_k^{f'} (\mathbf{U} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}^T) (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{f'}) \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k(\overline{\mathbf{x}_k^f}))$$

$$\mathbf{x}_k = \mu_k + \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{U} \mathbf{A}^{-1/2}$$

2.6 Notes d'implémentation

Un souci constant dans l'implémentation des filtres d'ensemble est de réduire au maximum le nombre d'opérations et la place mémoire occupée. Par exemple, il est hors de question d'avoir à stocker une matrice de covariance pleine à un quelconque moment du calcul. Pour donner un ordre de grandeur, on manipule souvent en géophysique des vecteurs d'état de taille de l'ordre de 10^8 , ce qui donnerait des matrices de covariance de taille $10^8 \times 10^8 = 10^{16}$, soit une place mémoire de 80Po (1Po = 1 pétaoctet = 10^{15} octets), ce qui avoisine l'ordre de grandeur de la mémoire vive totale contenue dans les plus puissants supercalculateurs actuels, autrement dit on cherchera à éviter à tout prix une telle dépense. On peut aussi s'intéresser à minimiser le nombre d'opérations ou la place mémoire en changeant l'ordre des opérations selon les ordres de grandeur des dimensions des matrices (voir le paragraphe 4.3 de Evensen [2003]).

Ainsi, comme Evensen [2003] l'explique, une matrice de covariance de taille $n \times n$ est tout d'abord décomposée comme une matrice de covariance empirique \mathbf{xx}^T où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ sont les échantillons, puis les opérations sont effectuées de façon à ne jamais faire une multiplication du type $(\mathbf{xx}^T)a$ où $a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est un vecteur, mais on procède en effectuant $\mathbf{x}(\mathbf{x}^T a)$, ce qui donne une occupation mémoire en $\mathcal{O}(n \times N)$ au lieu de $\mathcal{O}(n^2)$ et un nombre d'opérations en $\mathcal{O}(n \times N)$ au lieu de $\mathcal{O}(n^2)$.

Ensuite, dans le filtre de Kalman d'ensemble comme dans le filtre de Kalman de transformation d'ensemble, et à l'instar des filtres de Kalman réduits, une décomposition en valeurs singulières réduite est utilisée. Seules les vecteurs propres correspondants à des valeurs propres non nulles sont calculés. Les matrices manipulées étant de rang au plus N , la décomposition en valeurs singulières réduite donne une matrice de vecteurs propres de taille $n \times N$.

D'autre part, on peut remarquer les deux astuces suivantes peuvent souvent être utilisées avec profit.

Proposition 2. *Si toutes les particules ont une même valeur en une coordonnée donnée, alors la correction de Kalman donnera en résultat cette valeur, indépendamment de tous les autres paramètres.*

Démonstration. La moyenne après analyse est donnée par

$$\mu^a = \mu^f + X'(HX')^T R^{-1}(\mathbf{y} - H\mu^f)$$

Aussi si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}$ sans perte de généralité (en prenant $N = 2$, et après permutation des coordonnées de l'espace d'état, $a, b \in \mathbb{R}^{k_1}$, $c \in \mathbb{R}^{k_2}$), alors

$$X' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^a = X'A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} c' & d' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mu^a = \begin{pmatrix} \mu_{k_1}^f \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times (\dots) = \begin{pmatrix} \mu_{k_1}^f \\ c \end{pmatrix}$$

□

Proposition 3. *Si toutes les particules projetées dans l'espace d'observation ont une même valeur en une coordonnée donnée et que cette coordonnée n'est corrélée avec aucune autre coordonnée, alors cette coordonnée peut être retirée de l'espace d'observation et de la matrice d'observation R .*

Démonstration. La moyenne après assimilation est donnée par

$$\mu^a = \mu^f + X'(HX')^T R^{-1}(\mathbf{y} - H\mu^f)$$

Aussi si $HX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}$ sans perte de généralité (en prenant $N = 2$, et après permutation des coordonnées de l'espace d'état, $a, b \in \mathbb{R}^{k_1}$, $c \in \mathbb{R}^{k_2}$), alors

$$\mu^a = \begin{pmatrix} \gamma \\ \kappa \end{pmatrix} + X' \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} R^{-1} \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H\mu_{k_1}^f \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \gamma \\ \kappa \end{pmatrix} + X' \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \widetilde{R}^{-1} \left((y_1) - (H\mu_{k_1}^f) \right)$$

où \widetilde{R}^{-1} est le bloc $k_1 \times k_1$ en haut à gauche de matrice R^{-1} , sans les k_2 dernières coordonnées. En effet, les k_2 dernières colonnes de la matrice $X' \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix}$ vaudront 0, aussi les k_2 dernières lignes de R^{-1} peuvent être quelconques puisque non prises en compte. Puisque de plus les k_2 dernières coordonnées sont décorréées des autres coordonnées, les deux cadrans anti-diagonaux de R^{-1} sont nuls, et la valeur de $y_2 - c$ ne sera pas donc prise en compte, et il n'est pas alors pas nécessaire de la calculer.

De même pour la covariance, on peut ignorer les k_2 dernières coordonnées :

$$\begin{aligned} X^a &= X'A = X' \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \frac{1}{N-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{x}_k^f) \right)^{-1/2} \\ &= X' \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{R}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1/2} \\ &= X' \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_N + \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \widetilde{R}^{-1} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

□

Cette dernière remarque est pratique en particulier lorsque on sait que l'observation n'a pas de valeur en un point donné (occultation du point, point rejeté du fait d'une mesure considérée abérante) et donc que l'opérateur d'observation a une même valeur indéfinie en ce point. Cette remarque servira dans le cas océanique dans la partie III.

2.7 Filtre de Kalman d'ensemble pondéré

Dans les sections précédentes, nous avons décrit deux types de filtres d'ensemble différents : les filtres particuliers et les filtres de Kalman d'ensemble. Chacun possède ses avantages et ses inconvénients : d'un côté les filtres particuliers sont très gourmands en ressources mais ont la propriété de converger vers le filtre bayésien optimal dans le cas général, tandis que les filtres de Kalman d'ensemble sont plus économes en ressources mais peuvent ne pas converger vers la bonne distribution dans le cas général.

Le filtre de Kalman d'ensemble pondéré (WEnKF, *Weighted Ensemble Kalman Filter*) est conçu pour utiliser les avantages de ces deux types de filtres d'ensemble : l'économie des ressources et la convergence vers le filtre bayésien. Il a été introduit dans Papadakis et al.

[2010], et Le Gland et al. [2011] le propose comme une alternative à la non-convergence dans le cas général du filtre de Kalman d'ensemble.

Le filtre de Kalman d'ensemble pondéré se présente comme un filtre particulière, dont la distribution de proposition est donnée par les échantillons d'un filtre de Kalman d'ensemble. Cela signifie que, à chaque étape d'assimilation, les particules seront dans un premier temps prédites et analysées selon un filtre de Kalman d'ensemble classique — cela constituera la distribution de proposition — puis dans un second temps les particules seront pondérées et rééchantillonnées comme dans un filtre particulière.

On notera que l'étape de Kalman d'ensemble peut être remplacée par une des variantes de ce filtre, dont le filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF) présenté à la section précédente.

L'introduction d'une étape de Kalman dans un filtre particulière aura l'avantage de déplacer les particules vers l'observation, ce qui améliorera sensiblement l'estimation à nombre de particules fixé et permettra à ce filtre particulière de revenir à un nombre de particules raisonnable par rapport aux filtres particuliers classiques. Le filtre résultant étant un filtre particulière, la convergence vers la distribution de filtrage lorsque N tend vers l'infini est assurée par la loi des grands nombres (Le Gland et al. [2011]).

2.7.1 Principe

Dans ce filtre particulière, la loi de proposition est la principale caractéristique; elle est détaillée dans la sous-section suivante. Ensuite, le calcul des poids pourra faire l'objet de simplification dans la deuxième sous-section.

Loi de proposition

Dans ce filtre particulière, la loi de proposition $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{1:k})$ peut être donnée soit par un EnKF, soit par un ETKF. Dans tous les cas, une étape de prédiction de chacune des particules est d'abord effectuée :

$$\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) + \eta_k^{(i)}, \quad i = 1 \dots N. \quad (2.18)$$

Ensuite, dans le premier cas où l'analyse est faite par un EnKF, le filtre résultant portera le nom de *filtre de Kalman d'ensemble pondéré* (WEnKF, *Weighted Ensemble Kalman Filter*). En reprenant l'équation de l'analyse EnKF :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{\text{a},(i)} &= \mathbf{x}_k^{\text{f},(i)} + \mathbf{K}_k^N (\mathbf{y}_k + \varepsilon_k^{(i)} - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f},(i)}) \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k^N \mathbf{H}_k) \mathbf{x}_k^{\text{f},(i)} + \mathbf{K}_k^N \mathbf{y}_k + \mathbf{K}_k^N \varepsilon_k^{(i)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

les échantillons $\mathbf{x}_k^{\text{a},(i)}$ suivront une loi supposée gaussienne :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{\text{a},(i)} &\sim \mathcal{N}(\mu_k^{(i)}, \mathbf{V}_k) \\ \text{avec } \begin{cases} \mu_k^{(i)} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k^N \mathbf{H}_k) \mathbf{x}_k^{\text{f},(i)} + \mathbf{K}_k^N \mathbf{y}_k \\ \mathbf{V}_k = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k^N \mathbf{H}_k) \mathbf{Q}_k (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k^N \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k^N \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Alternativement, dans le second cas où l'analyse est faite par un ETKF, le filtre résultat sera appelé *filtre de Kalman de transformation d'ensemble pondéré* (WETKF, *Weighted Ensemble Transform Kalman Filter*). En reprenant les matrices \mathbf{U} et \mathbf{A}_k et le vecteur μ_k^a issus de l'analyse ETKF (donnés par les équations (2.13), (2.15) et (2.16)) et en posant $\mathbf{W} = \mathbf{U} \mathbf{A}_k^{-1/2} \mathbf{U}^T$, les échantillons sont donnés par :

$$\mathbf{x}_k^{a,(i)} = \mu_k^a + (\mathbf{x}_k^f - \bar{\mathbf{x}}_k^f) \mathbf{W}_i, \quad (2.21)$$

où \mathbf{W}_i est la i^e colonne de \mathbf{W} . La loi, supposée gaussienne, des échantillons $\mathbf{x}_k^{a,(i)}$ sera :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{a,(i)} &\sim \mathcal{N}(\mu_k^{(i)}, \mathbf{V}_k) \\ \text{avec } \begin{cases} \mu_k^{(i)} = \mu_k^a + (\mathbf{x}_k^f - \bar{\mathbf{x}}_k^f) \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_k = (\mathbf{x}_k^f - \bar{\mathbf{x}}_k^f) \mathbf{W} \mathbf{W}^T (\mathbf{x}_k^f - \bar{\mathbf{x}}_k^f)^T \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Finalement, la loi de proposition $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})$ est donnée par une des deux analyses (2.20) ou (2.22) :

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mu_k^{(i)}, \mathbf{V}_k) \quad (2.23)$$

Le support de cette loi est \mathbb{R}^n tout entier et couvre donc le support de la loi a posteriori.

Calcul des poids

Comme tout filtre particulière, les poids sont donnés par la formule (2.2) :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})}.$$

Dans notre cas, la loi de proposition est donnée :

$$\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^{(i)}; \mu_k^{(i)}, \mathbf{V}_k),$$

et la dynamique $p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$ par :

$$p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^{(i)}; \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), \mathbf{Q}_k).$$

Aussi, l'expression des poids devient :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^{(i)}; \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), \mathbf{Q}_k)}{\mathcal{N}(\mathbf{x}_k^{(i)}; \mu_k^{(i)}, \mathbf{V}_k)}.$$

Pour les deux lois normales utilisées dans le calcul des poids, le seul moyen de les évaluer serait d'utiliser la covariance empirique sur leurs échantillons. Cependant, on peut montrer qu'il serait inutile d'effectuer un tel calcul. En effet, comme montré dans l'annexe B, pour un ensemble d'échantillons $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ de moyenne empirique nulle, l'évaluation de $\mathcal{N}(\mathbf{x}^{(i)}; 0, \frac{1}{N-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)$ donne le même résultat pour toutes les échantillons sous l'hypothèse que les échantillons forment une famille libre de \mathbb{R}^n (au sens de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de relation linéaire entre les échantillons), hypothèse que l'on peut

supposer satisfaite dans le cas où le nombre d'échantillons est faible au regard de la dimension de l'espace d'état. Aussi, comme ces deux lois normales répondent à ces hypothèses, il n'est pas besoin de les calculer puisque les poids sont normalisés, ce qui annule alors l'effet de ces évaluations. On notera que la vraisemblance $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})$ n'est pas concernée par ce résultat puisque les points évalués \mathbf{y}_k ne sont pas les mêmes que ceux $\mathbf{x}_k^{(i)}$ qui forment la moyenne et covariance empiriques.

Ainsi, la pondération d'un WEnKF ou d'un WETKF se simplifie en :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (2.24)$$

De plus, dans le cas où un rééchantillonnage systématique est effectué (et donc que tous les poids sont identiques), la pondération devient :

$$w_k^{(i)} \propto p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (2.25)$$

2.7.2 Algorithme

Un processus d'assimilation par WEnKF ou WETKF est détaillé par l'algorithme 5. Cet algorithme reprend la base des filtres particuliers classiques SIR, mais il est tout à fait possible d'en dériver des variantes issues de la pratique générale des filtres particuliers, par exemple des méthodes de pré-sélection de particules avec un filtre particulier guidé ou d'autres types de rééchantillonnage.

2.8 Conclusion

Ce chapitre a donné un aperçu des principales méthodes de filtrage pour le problème de l'assimilation de données à travers une approximation de Monte Carlo des distributions manipulées : les méthodes particulières, avec leurs nombreuses variations et déclinaisons, coûteuses mais utilisables dans le cas général ; les méthodes de Kalman d'ensemble, peu coûteuses mais à utiliser de préférence pour les problèmes linéaire-gaussien ; et la méthode hybride du filtre de Kalman d'ensemble pondéré, combinant les avantages des deux méthodes.

Algorithme 5 Filtre de Kalman d'ensemble pondéré

Paramètres :

- $\{\mathbf{x}_0^{(i)}\}_{i=1\dots N}$: échantillonnage initial gaussien ;
- $\mathbf{M}_k, \{\eta_k^i\}_{i=1\dots N}$: modèle dynamique et échantillons de l'erreur modèle associée pour les temps $k \geq 1$;
- $\mathbf{H}_k, \{\varepsilon_k^i\}_{i=1\dots N}$: opérateur d'observation et échantillons de l'erreur d'observation associée pour les temps $k \geq 1$;
- \mathbf{y}_k : données observées aux temps $k \geq 1$.

Algorithme :

(toutes les distributions sont supposées gaussiennes.)

1. **Initialisation :**

- $\mathbf{x}_0^{\text{a},(i)} = \mathbf{x}_0^{(i)}$
- $$\Rightarrow p(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_0^{\text{a},(i)}}(\mathbf{x}_0)$$

2. **Assimilation :** pour $k \geq 1$:

1. Prédiction : Chaque particule est portée au temps suivant à travers le modèle dynamique puis un bruit gaussien lui est appliqué.

$$\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) + \eta_k^{(i)}$$

2. Correction de Kalman : Les particules sont déplacées selon une correction de Kalman ; soit par filtre de Kalman d'ensemble (EnKF), soit par filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF). Nous obtenons la distribution de proposition $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=0}^N \delta_{\mathbf{x}_k^{\text{a},(i)}}(\mathbf{x}_k)$.

EnKF :

$$\begin{aligned} d_k^{(i)} &= \mathbf{y}_k + \varepsilon_k^{(i)} - \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)}) \text{ avec } \varepsilon_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k), i = 1 \dots N \\ \mathbf{x}_k^{\text{f}' } &= \mathbf{x}_k^{\text{f}} - \bar{\mathbf{x}}_k^{\text{f}} \mathbf{1}_N \\ \mathbf{x}_k^{\text{a}} &= \mathbf{x}_k^{\text{f}} + \mathbf{x}_k^{\text{f}' } (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}' })^T ((\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}' }) (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}' })^T + \varepsilon_k \varepsilon_k^T)^{-1} d_k \end{aligned}$$

ETKF :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{\text{f}' } &= \mathbf{x}_k^{\text{f}} - \bar{\mathbf{x}}_k^{\text{f}} \mathbf{1}_N \\ \mathbf{D} &= (\mathbf{I} + (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}' })^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{\text{f}' })^{-1} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^T \\ \mu_k^{\text{a}} &= \bar{\mathbf{x}}_k^{\text{f}} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k(\bar{\mathbf{x}}_k^{\text{f}})) \\ \mathbf{x}_k^{\text{a}} &= \mu_k^{\text{a}} + \mathbf{x}_k^{\text{f}' } \mathbf{A} \end{aligned}$$

3. Pondération : Chaque particule est pondérée selon sa vraisemblance $w_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{\text{a},(i)})$.

4. Rééchantillonnage : Les particules sont rééchantillonnées afin de recentrer le nuage dans les zones d'intérêt.

Deuxième partie

**Assimilation d'images
d'écoulements fluides**

Les séquences d'images contiennent intrinsèquement une grande quantité d'information. D'une part elles présentent une densité spatiale d'information importante à chaque instant et d'autre part elles exhibent une forte corrélation temporelle. Contrairement aux séquences représentant des objets rigides, qui peuvent être représentés par un ensemble fini de modèles affines (et donc associés à une paramétrisation de faible dimension), les mouvements fluides, de part leur nature, induisent des changements globaux sur l'image, associés à une déformation vivante dans un espace de grande dimension. Il n'est par conséquent pas possible d'assimiler uniquement le déplacement de quelques points représentatifs d'un objet, mais il est nécessaire d'assimiler l'ensemble du domaine sous-jacent à l'image. Il s'agit donc d'exploiter au mieux la grande quantité d'information présente tant spatialement que temporellement tout en restant dans des limites raisonnables en termes de temps de calcul et de mémoire.

Un des problèmes classiques en vision par ordinateur concerne l'estimation du déplacement apparent d'une scène à partir de deux images successives I_t et $I_{t+\delta t}$. C'est l'estimation de cette variable de déplacement qui nous intéressera par la suite, ou de façon équivalente le champ des vitesses d'une image à l'autre. Le problème est en général mal posé du fait de ce qu'on appelle le problème de l'ouverture et requiert alors l'introduction d'une contrainte supplémentaire pour permettre sa résolution. À la différence de ces méthodes de flot optique, l'assimilation de données s'appuiera sur l'ensemble des images passées — et pas seulement les deux dernières — et accumulera ainsi une « connaissance » de la séquence d'images. L'assimilation de données se reposera à cette fin sur un modèle dynamique explicatif de l'évolution temporelle du système d'intérêt. Cela permettra également d'introduire une cohérence temporelle dans l'estimation d'images successives.

Dans la continuité des techniques de filtrage initialement proposées dans la thèse de Nicolas Papadakis pour l'assimilation de données image, nous nous proposons dans cette partie d'explorer l'influence de différents choix et paramètres. Le premier chapitre décrit les choix généraux faits dans le cadre de cette thèse (modèle dynamique et opérateur d'observation) ainsi que quelques techniques relatives au rééchantillonnage ou à la gestion des données manquantes. Le deuxième chapitre se focalisera sur la forme du bruit dynamique, et le troisième sur une assimilation multi-échelles. Tout au long de ces trois chapitres, on donnera des explications des choix faits au regard des résultats ainsi que des conclusions partielles. Enfin, cette partie se conclura par l'exposé détaillé des résultats, avec des commentaires et interprétations de ces résultats.

Chapitre 3

Assimilation d'images d'écoulements fluides

Ce chapitre introduit les modèles et les choix généraux qui ont été fait pour l'assimilation des séquences fluides, en l'occurrence pour des fluides 2D incompressibles.

Nous introduisons le modèle dynamique vorticité-vitesse, d'abord dans sa version déterministe classique, et auquel sera plus tard ajouté un bruit pour obtenir l'étape de prédiction de l'assimilation (ce qui correspond à une assimilation dont la dynamique est discrète), puis dans sa version stochastique continue, comme une représentation de la dynamique continue. Nous abordons ensuite deux opérateurs d'observation de fluides : un opérateur de flot optique formulé au moyen d'une version stochastique de l'estimateur de Lucas-Kanade, et l'opérateur de différence d'images déplacées.

Après cela, nous discutons du schéma d'assimilation global, avec en particulier des modifications mineures testées pour améliorer la convergence du schéma, en particulier le rééchantillonnage. Dans les deux chapitres suivants seront exposées des modifications plus importantes en terme de méthode.

Dans ce chapitre, les résultats afférents à une méthode sont seulement résumés et il est renvoyé au chapitre 6 pour des résultats plus précis.

3.1 Modèle dynamique vorticité-vitesse

Le modèle dynamique est un élément central du processus d'assimilation (avec l'opérateur d'observation), dans la mesure où l'assimilation peut être vue globalement comme une pondération entre le modèle dynamique et l'observation. Dans les approches séquentielles, le modèle dynamique permet d'obtenir une approximation de l'état du système à partir de son passé et influe donc directement sur la qualité de la distribution *a priori* (avant assimilation). Un modèle de bonne facture donne alors une bonne distribution *a priori* qui permet à son tour de donner un bon résultat *a posteriori* (après assimilation).

Nous détaillons dans cette section le modèle dynamique utilisé selon deux points de vue différents : le premier est un modèle déterministe auquel sera ajouté le bruit dynamique, ce qui suppose une dynamique discrète en temps, alors que le second, bien que bâti à partir du même modèle, correspond à une équation différentielle stochastique continue non linéaire.

3.1.1 Modèle déterministe

La dynamique des fluides peut être décrite de deux façons selon que l'on s'attache à suivre les particules fluides (description lagrangienne) ou la vitesse du fluide en chaque

point du domaine (description eulérienne). Il est souvent plus commode de travailler dans la configuration eulérienne dès lors que l'on s'intéresse au mouvement global du fluide, ce qui sera le cas ici. Dans ce cadre eulérien, la dynamique des fluides est décrite par les équations de Navier-Stokes qui retranscrivent dans le cas spécifique des fluides les principes physiques généraux de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Dans le cas d'un fluide incompressible évoluant dans un espace de dimension $d = 2$ ou $d = 3$ sans forces extérieures autres que la gravité et de densité constante, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \end{cases} \quad (3.1)$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ est la variable d'espace (unité : [L]),
- $t \in \mathbb{R}_+$ est le temps (unité : [T]),
- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d$ est le champ de vecteurs supposé suffisamment régulier de la vitesse (unité : [L.T⁻¹]),
- $p(\mathbf{x}, t)$ est la pression du fluide (unité : [M.L⁻¹.T⁻²]),
- ρ est la masse volumique du fluide (unité : [M.L⁻³]),
- ν sa viscosité cinématique (unité : [L².T⁻¹]).

Décomposition des champs

Pour un champ vectoriel 2D suffisamment régulier et qui s'annule en l'infini ou qui est périodique, la décomposition de Helmholtz permet d'écrire ce champ \mathbf{u} comme une somme de deux composantes orthogonales : un champ à rotationnel nul, dit irrotationnel, \mathbf{u}_{irr} , et un champ à divergence nulle \mathbf{u}_{sol} , aussi appelé champ solénoïdal.

En notant l'opérateur différentiel 2D $(-\partial_y, \partial_x)$ par ∇^\perp , ces deux champs peuvent être exprimés au moyen de deux fonctions de potentiel :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{irr} = \nabla \phi \\ \mathbf{u}_{sol} = \nabla^\perp \psi \end{cases} \quad (3.2)$$

On a alors la décomposition suivante du champ \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{sol} + \mathbf{u}_{irr} \\ \text{avec } \begin{cases} \operatorname{curl} \mathbf{u}_{irr} = \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}_{irr} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_{sol} = \nabla \cdot \mathbf{u}_{sol} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Réciproquement, il est possible d'inverser ces relations et de reconstruire le champ irrotationnel à partir de la divergence et le champ solénoïdal à partir de la vorticit e.

En notant que $\Delta \phi = \operatorname{div} \mathbf{u}_{irr}$ et $\Delta \psi = \operatorname{curl} \mathbf{u}_{sol}$, on peut exprimer ϕ et ψ en utilisant la fonction de Green, G , associ ee au Laplacien :

$$\phi = G * \operatorname{div} \mathbf{u}_{irr}$$

$$\psi = G * \text{curl } \mathbf{u}_{sol}$$

Et les champs irrotationnel et solénoïdal sont alors exprimés comme :

$$\mathbf{u}_{irr} = \nabla G * \text{div } \mathbf{u}_{irr}$$

$$\mathbf{u}_{sol} = \nabla^\perp G * \text{curl } \mathbf{u}_{sol}$$

Les convolutions de l'espace physique se transforment, dans l'espace de Fourier, en de simples multiplications. Ainsi, dans le cas 2D, il est possible de calculer le champ irrotationnel \mathbf{u}_{irr} correspondant à une vorticité ξ , ou le champ solénoïdal \mathbf{u}_{sol} correspondant à une divergence ζ :

$$\mathbf{u}_{irr} = \frac{-i}{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \mathcal{F}(\zeta) \right) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_{sol} = \frac{-i}{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathbf{k}^\perp}{|\mathbf{k}|^2} \mathcal{F}(\xi) \right) \quad (3.5)$$

La première égalité provient du fait que :

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \text{div } \mathbf{u}_{irr} = \zeta &\Rightarrow (\partial_1^2 + \dots + \partial_d^2)\phi = \zeta \\ &\Rightarrow -4\pi^2(k_1^2 + \dots + k_d^2)\hat{\phi} = \hat{\zeta} \\ &\Rightarrow \hat{\phi} = \frac{1}{-4\pi^2|\mathbf{k}|^2} \hat{\zeta} \\ &\Rightarrow \widehat{\nabla}\phi = \frac{-i\mathbf{k}}{2\pi|\mathbf{k}|^2} \hat{\zeta} \\ &\Rightarrow \widehat{\mathbf{u}_{irr}} = \frac{-i\mathbf{k}}{2\pi|\mathbf{k}|^2} \hat{\zeta} \end{aligned}$$

Dans le cas 2D, une égalité similaire se trouve sur la vorticité. Dans le cas de la dimension d , seule la première égalité reste valable ; la deuxième doit être revue avec une définition adéquate du rotationnel.

Une méthode numérique efficace est d'utiliser ces équations en faisant les transformations à l'aide d'une transformée de Fourier rapide.

Dans le cas des fluides 2D incompressible, l'équation de Navier-Stokes (3.1) peut s'exprimer à l'aide de la vorticité (et l'équation de divergence devient sans effet puisque la divergence reste nulle en raison de l'incompressibilité de l'écoulement) :

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi = \nu \Delta \xi} \quad (3.6)$$

Le modèle dynamique utilisé dans la suite reposera sur cette dernière équation.

Implémentation numérique

Nous décrivons ci-dessous le schéma numérique utilisé pour simuler cette dynamique. Les différentes quantités sont discrétisées sur une grille cartésienne $[1, n_1] \times [1, n_2]$:

$$\xi(x_i, y_j, t) = \xi_{i,j}(t), \quad i = 1 \dots n_1, \quad j = 1 \dots n_2 \quad (3.7)$$

L'équation dynamique (3.6) est discrétisée avec un terme advectif proposé par Kurganov and Levy [2000] :

$$\partial_t \xi_{i,j}(t) = -\frac{H_{i+\frac{1}{2},j}^x(t) - H_{i-\frac{1}{2},j}^x(t)}{\Delta x} - \frac{H_{i,j+\frac{1}{2}}^y(t) - H_{i,j-\frac{1}{2}}^y(t)}{\Delta y} + \nu_\xi D_{i,j}(t)$$

avec :

$$H_{i+\frac{1}{2},j}^x(t) = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}(t)}{2} \left(\xi_{i+\frac{1}{2},j}^+ + \xi_{i+\frac{1}{2},j}^- \right) - \frac{|u_{i+\frac{1}{2},j}(t)|}{2} \left(\xi_{i+\frac{1}{2},j}^+ - \xi_{i+\frac{1}{2},j}^- \right)$$

$$H_{i,j+\frac{1}{2}}^x(t) = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}(t)}{2} \left(\xi_{i,j+\frac{1}{2}}^+ + \xi_{i,j+\frac{1}{2}}^- \right) - \frac{|u_{i,j+\frac{1}{2}}(t)|}{2} \left(\xi_{i,j+\frac{1}{2}}^+ - \xi_{i,j+\frac{1}{2}}^- \right)$$

Les valeurs aux demi-points sont calculées par une moyenne d'ordre 4 :

$$u_{i+\frac{1}{2},j}(t) = \frac{-u_{i+2,j}(t) + 9u_{i+1,j}(t) + 9u_{i,j}(t) - u_{i-1,j}(t)}{16}$$

$$u_{i,j+\frac{1}{2}}(t) = \frac{-u_{i,j+2}(t) + 9u_{i,j+1}(t) + 9u_{i,j}(t) - u_{i,j-1}(t)}{16}$$

Les valeurs $\xi_{i+\frac{1}{2},j}^\pm$ et $\xi_{i,j+\frac{1}{2}}^\pm$ sont obtenues à partir de dérivées de pente minimale $(\xi_x)_{i,j}$ et $(\xi_y)_{i,j}$ permettant de limiter les effets d'amplification liés aux discontinuités spatiales :

$$\xi_{i+\frac{1}{2},j}^+ = \xi_{i+1,j} - \frac{\Delta x}{2} (\xi_x)_{i+1,j} \quad \xi_{i+\frac{1}{2},j}^- = \xi_{i+1,j} + \frac{\Delta x}{2} (\xi_x)_{i,j}$$

$$(\xi_x)_{i,j} = \min\text{mod} \left(2 \frac{\xi_{i,j} - \xi_{i-1,j}}{\Delta x}, \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}}{2\Delta x}, 2 \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}}{\Delta x} \right)$$

$$\min\text{mod}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \inf(x_i) & \text{si } x_i \geq 0 \forall i \\ \sup(x_i) & \text{si } x_i \leq 0 \forall i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le Laplacien est calculé par différences finies du quatrième ordre (Abramowitz and Stegun [1964], formule 25.3.24) :

$$D_{i,j}(t) = \frac{-\xi_{i-2,j} + 16\xi_{i-1,j} - 30\xi_{i,j} + 16\xi_{i+1,j} - \xi_{i+2,j}}{12\Delta x^2}$$

$$+ \frac{-\xi_{i,j-2} + 16\xi_{i,j-1} - 30\xi_{i,j} + 16\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j+2}}{12\Delta y^2}$$

Le schéma d'intégration temporelle est un schéma de Runge-Kutta du troisième ordre. En notant l'opérateur \mathbb{M} tel que $\frac{\xi_{i,j}(t+\delta t) - \xi_{i,j}(t)}{\delta t} = \mathbb{M}(\xi_{i,j}(t))$, l'intégration temporelle se fait par :

$$\begin{aligned} \xi_{i,j}^1 &= \xi_{i,j}(t) + \delta t \mathbb{M}(\xi_{i,j}(t)) \\ \xi_{i,j}^2 &= \frac{3}{4}\xi_{i,j}(t) + \frac{1}{4}\xi_{i,j}^1 + \frac{1}{4}\delta t \mathbb{M}(\xi_{i,j}^1) \\ \xi_{i,j}(t + \delta t) &= \frac{1}{3}\xi_{i,j}(t) + \frac{2}{3}\xi_{i,j}^2 + \frac{2}{3}\delta t \mathbb{M}(\xi_{i,j}^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

où δt est choisi maximal dans la limite de la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) :

$$\delta t \leq \frac{1}{2 \max_{x \in \Omega} (|\mathbf{u}(x)|)}.$$

Dans cette implémentation, la vitesse est calculée à partir de la vorticité en passant dans l'espace de Fourier (introduisant ainsi une condition de bord périodique, ce qui n'est pas limitant et même souhaité dans la principale séquence de test), en utilisant la formule (3.5).

3.1.2 Modèle stochastique

Dans la section précédente, le modèle dynamique était supposé déterministe. Dans le processus d'assimilation, lorsqu'on suppose la dynamique intrinsèquement discrète en temps, c'est ce modèle dynamique déterministe qu'on utilisera, auquel on rajoutera alors un bruit additif dans l'étape de prédiction pour rentrer dans le cadre de l'assimilation d'ensemble.

En revanche, lorsque la dynamique est continue en temps, il apparaît plus réaliste de remplacer cette équation différentielle par une équation différentielle stochastique. Exprimé dans le contexte du filtrage stochastique, cela s'exprime comme le filtrage d'une dynamique continue en temps avec des observations discrètes en temps. L'équation dynamique (3.6) se voit rajouter un terme de dérive stochastique dB_t par rapport à son équivalent déterministe :

$$d\xi(x, t) = (-\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla \xi(x, t) + \Delta \xi(x, t))dt + \sigma dB_t = \mathbb{M}(\xi(\cdot, t))dt + \sigma dB_t, \quad (3.9)$$

où B_t est un mouvement brownien, c'est-à-dire un processus stochastique dont les incréments sont gaussiens, de moyenne nulle et de variance égale au temps écoulé entre les deux instants, dont les réalisations sont presque partout continues, et dont deux instants différents sont indépendants.

Dans ce contexte, la discrétisation en temps se devra de s'adapter au caractère stochastique de l'équation. À l'image des schémas numériques déterministes de résolution en temps, on retrouve des schémas proches pour les équations différentielles stochastiques, comme le schéma d'Euler-Maruyama¹ ou les méthodes de Runge-Kutta pour les équations différentielles stochastiques.

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit une équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} X_0 = Y \\ dX_t = m(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \end{cases} \quad (3.10)$$

où $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique adapté à une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , $m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ une fonction mesurable à valeurs dans l'espace des formes bilinéaires définies positives, et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^d . Pour une discrétisation en temps $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ avec $t_{n+1} - t_n = \Delta t$, le schéma d'Euler-Maruyama donne le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} X_0 = Y \\ X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + m(X_{t_n})\Delta t + \sigma(\mathbf{x}_{t_n})\sqrt{\Delta t}\Delta B_t, \text{ avec } \Delta B_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{cases} \quad (3.11)$$

Ce schéma est donc implémenté dans notre cas en rajoutant un bruit gaussien centré de variance Δt à chaque pas de temps dynamique. Dans les expériences, cela portera la dénomination « microbruit » (puisque le bruit ajouté est de variance plus petite que lorsque le bruit n'est ajouté qu'aux temps image).

Les résultats avec ce schéma « stochastique » et leur comparaison avec le schéma « déterministe plus bruit » sont présentés au chapitre 6 à la section 6.4. Il ressort comme conclusion de ces expériences que l'assimilation de vorticité 2D incompressible telle qu'elle a à  te faite, que le schéma d'Euler-Maruyama donne de moins bons résultats que le schéma d'Euler déterministe complété par une perturbation gaussienne finale. Pour un opérateur linéaire, les deux méthodes donneraient les mêmes résultats.

1. Gishir  Maruyama (1916-1986), mathématicien probabiliste japonais

3.2 Mesures images

Un des problèmes classiques en vision par ordinateur est d'estimer la vitesse $v(x, t)$ entre deux images successives I_t et $I_{t+\delta t}$, avec \mathbf{x} dans le domaine image Ω . Il s'agit d'un problème inverse puisque l'on cherche à obtenir un paramètre (la vitesse) à partir d'une observation du résultat. Ce problème d'estimation de la vitesse a été d'abord étudié dans le cas de séquences d'images représentant le déplacement d'entités solides. On pourra se référer à Baker et al. [2011], Barron et al. [1994] et Galvin et al. [1998] pour l'état de l'art dans ce domaine. Pour l'application à l'estimation de mouvements fluides, Heitz et al. [2010] donne un panorama des méthodes actuelles, et on pourra trouver quelques travaux récents dans Corpetti et al. [2009], Corpetti and Mémin [2011], Dérian [2012], ainsi que Mémin [2003].

L'équation de base utilisée pour traiter ce problème est l'équation de conservation de la luminance, aussi appelée équation de contrainte du mouvement apparent (ECMA) ; la luminance étant une mesure de l'intensité lumineuse sur une surface donnée, par exemple la surface représentée par un pixel de l'image. Lorsque la fonction de luminance $I(x, t)$ est supposée évoluer de façon continue dans le temps et dans l'espace, l'ECMA s'écrit :

$$\frac{dI(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla I(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.12)$$

traduisant l'absence de changement d'illumination le long de la trajectoire d'un point matériel, et $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le champ de vecteurs transportant I , c'est-à-dire la vitesse de ce point matériel. Physiquement, cela sous-entend que le phénomène observé ne subit pas d'occultation par rapport à la caméra (en océanographie ou météorologie, cela correspond à supposer que les fluides restent dans la zone de vision de la caméra et qu'il n'y a pas de phénomène d'advection verticale) et que le capteur n'introduit pas de biais lors de son acquisition temporelle. En pratique, cette hypothèse de conservation de la luminance n'est pas toujours vérifiée à cause de changements de l'intensité lumineuse entre les images ou de phénomènes d'occultations, fréquent dans les scènes réelles. Il est alors nécessaire d'appliquer des pré-traitements afin de revenir à cette condition ou de prendre en compte directement ces dérivations dans la méthode.

Lorsque la luminance est donnée uniquement à certains instants, ce qui est le cas pour les séquences d'images dans la réalité, l'ECMA se traduit par l'équation suivante, appelée *différence d'images déplacées* ou *différence inter-images déplacée* (DID, en anglais DFD — *Displaced Frame Difference*) :

$$I(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t + \Delta t) - I(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.13)$$

ou, dans sa version linéarisée, est appelée équation de contrainte du flot optique (OFCE, *Optical Flow Constraint Equation*) :

$$I(\mathbf{x}, t + \Delta t) - I(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t) \Delta t \approx 0. \quad (3.14)$$

Ce problème, à partir de cette seule équation, est généralement mal posé à cause du problème de l'ouverture : le mouvement apparent ne permet pas, en général, de retrouver le mouvement réel. En termes mathématiques, le problème a deux fois plus d'inconnues (2 inconnues par pixel) que de données (1 donnée par pixel). On peut visualiser cet effet par l'illustration ci-dessous.

Pour rendre le problème bien posé, il faut ajouter une contrainte supplémentaire sur la vitesse. Il y a deux types d'approches :

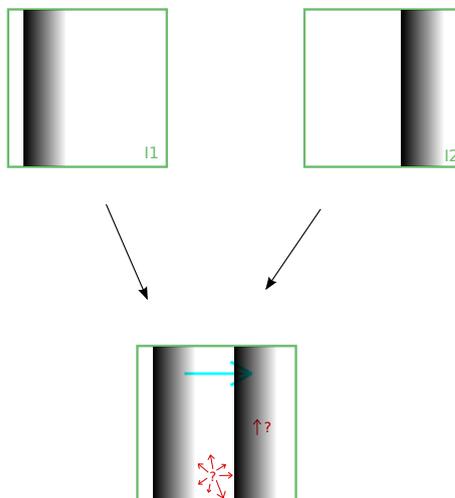


FIGURE 3.1 – Illustration du problème de l'ouverture

En supposant que la caméra ne bouge pas et que l'objet noir est le même sur les deux images I1 et I2, on ne peut pas voir si l'objet est monté ou descendu car son gradient dans la direction verticale est nul. En revanche, du fait que son gradient horizontal n'est pas nul, cela permet d'affirmer qu'il s'est déplacé sur la droite. Sur le fond blanc de gradient uniformément blanc, avec un gradient nul dans les deux directions, on ne peut en aucun cas affirmer s'il s'est déplacé ni dans quelle direction si c'était le cas.

- les méthodes globales qui imposent une contrainte globale sur le champ de vecteur ; le prototype de cette approche est la méthode de Horn et Shunk qui consiste à minimiser une fonctionnelle définie sur le domaine entier comprenant un terme d'attache aux données et un terme de régularisation globale du champ de vecteurs, les deux termes étant pondérés l'un par rapport à l'autre par un coefficient ;
- les approches locales qui consistent à résoudre localement le problème ; on trouve les méthodes de corrélations ainsi que la méthode de Lucas et Kanade consistant à choisir la solution qui minimise l'erreur au sens des moindres carrés sur une fenêtre locale.

3.2.1 Estimateur de Lucas-Kanade

L'estimateur de Lucas-Kanade, introduit dans Lucas and Kanade [1981], consiste à minimiser une fonctionnelle de type moindres carrés sur une fenêtre locale.

En notant $J_{\mathbf{u},t}$ la fonctionnelle

$$J_{\mathbf{u},t}(\mathbf{x}) = (\partial_t I(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I(\mathbf{x}, t))^2,$$

la vitesse donnée par l'estimateur de Lucas-Kanade sur une fenêtre locale V , avec \mathbf{u} constant sur cette fenêtre, est donnée par :

$$\forall \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}_t(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u}_t(\mathbf{x})} \int_{\Omega \cap V} g_\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}') J_{\mathbf{u},t}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

où Ω est le domaine image et g_λ est une fonction gaussienne centrée d'écart-type λ . Une minimisation au sens des moindres carrés donne la solution suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_t &= - \left(g_\lambda * \begin{pmatrix} (\partial_x I_t)^2 & (\partial_x I_t)(\partial_y I_t) \\ (\partial_y I_t)(\partial_x I_t) & (\partial_y I_t)^2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(g_\lambda * \begin{pmatrix} (\partial_x I_t)(\partial_t I_t) \\ (\partial_y I_t)(\partial_t I_t) \end{pmatrix} \right) \\ &= -(g_\lambda * (\nabla I_t \nabla I_t^T))^{-1} (g_\lambda * (\nabla I_t \partial_t I_t))\end{aligned}\quad (3.15)$$

Cet estimateur de flot optique peut être décliné en un flot optique stochastique multi-échelles (Corpetti and Mémin [2011]) qui sera utilisé dans le chapitre 5 comme base d'observation dans le cadre d'une assimilation multi-échelles : l'OFCE sera réinterprétée avec un terme stochastique et l'estimation sera intégrée dans un cadre multi-échelles en estimant à une échelle donnée puis en raffinant l'estimation à des échelles inférieures.

3.2.2 Différences d'images déplacées

L'opérateur “différence d'images déplacées” (DID, ou en anglais *Displaced Frame Difference* — DFD) est la version discrète non-linéaire de l'ECMA (3.12). Dans la suite, dans le contexte de l'assimilation de données image, la DID ne servira pas à résoudre le problème de l'estimation de mouvement entre deux images, mais servira à évaluer la qualité d'une estimation de mouvement donnée. Pour une image en dimension n (image 2D, 3D, etc.) et un déplacement $d_t(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de l'image entre les instants t et $t + \delta t$, la DID est exprimée comme

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{DID}_t(d_t(\mathbf{x})) &= I_{t+\delta t}(\mathbf{x} + d_t(\mathbf{x})) - I_t(\mathbf{x}) \\ \Leftrightarrow \text{DID}_t(\mathbf{u}_t(\mathbf{x})\delta t) &= I_{t+\delta t}(\mathbf{x} + \mathbf{u}_t(\mathbf{x})\delta t) - I_t(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Tel qu'exprimé ci-dessus, la variable d'espace \mathbf{x} peut être supposée appartenir à \mathbb{R}^n ou à un domaine périodique. Sinon il faudra utiliser des conditions de bord ; dans nos expériences avec des images finies, nous utiliserons une condition de bord assez grossière consistant à borner tout déplacement à l'image : si $\mathbf{x} + d(\mathbf{x})$ est en-dehors de l'image, le point choisi sera celui projeté sur le bord de l'image ; ceci est possible dans le cas de petits déplacements.

L'ECMA sera donc vérifiée pour un déplacement $d(\mathbf{x})$ lorsque

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x}, \text{DID}_t(d_t(\mathbf{x})) &= 0 \\ \text{ou de façon équivalente } \forall \mathbf{x}, \text{DID}_t(\mathbf{u}_t(\mathbf{x})\delta t) &= 0\end{aligned}\quad (3.17)$$

3.3 Schéma d'assimilation et implémentation

Le processus d'assimilation qui sera utilisé dans la suite se déroule selon le schéma standard de filtrage particulaire décrit dans la section 2.7.2, avec un filtre de Kalman d'ensemble pondéré. L'algorithme 5 du WETKF est repris graphiquement ci-dessous en mettant en lumière les différents blocs fonctionnels.

Les sections suivantes décrivent les points spécifiques utilisés pour l'assimilation des images d'écoulements fluides, ainsi que les séquences qui seront présentées au chapitre 6 des résultats, c'est-à-dire une séquence synthétique 2D où l'on observe l'évolution d'un scalaire passif, une séquence réelle où l'on observe la température de surface de l'océan Pacifique et une séquence réelle de turbulence expérimentale 2D générée au moyen d'un film de savon.

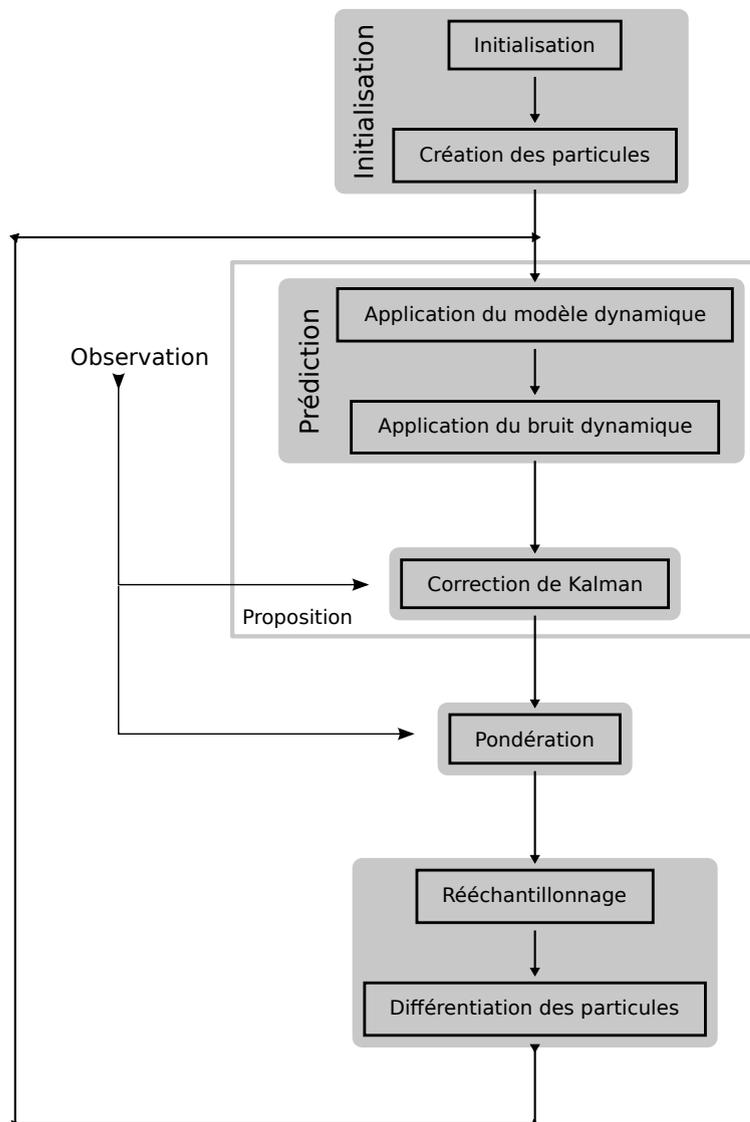


FIGURE 3.2 – Schéma d'une assimilation par WETKF.

Algorithme 6 Implémentation du filtre de Kalman d'ensemble pondéré pour les séquences d'écoulements fluides

Paramètres :

- séquence d'images ;
- estimation de la vitesse initiale ;
- amplitude et autres paramètres liés au bruit initial ;
- modèle dynamique, méthode d'application du bruit dynamique ;
- amplitude du bruit dynamique, type du bruit (d'Evensen ou autosimilaire), et autres paramètres liés ;
- type de correction de Kalman (EnKF ou ETKF) ;
- modèle d'observation ;
- type de rééchantillonnage et paramètres liés ;
- amplitude du bruit de régularisation, type, et autres paramètres liés.

Algorithme :

1. Initialisation :

- l'estimation de la vitesse initiale se fait à partir d'un flot optique ;
- les particules initiales sont l'addition de la vitesse initiale et d'un bruit gaussien (d'Evensen).

2. Assimilation : pour $k \geq 1$:

1. Prédiction : selon l'un des deux modèles :

- modèle déterministe (section 3.1.1) : chaque particule est portée au temps suivant à travers le modèle dynamique puis un bruit gaussien (d'Evensen ou autosimilaire) lui est ajouté ; ou
- modèle stochastique (section 3.1.2) : chaque particule est portée au temps suivant et un bruit est ajouté à chacun des pas de la dynamique.

2. Correction de Kalman : les particules sont déplacées selon une correction de Kalman (EnKF ou ETKF) avec l'un des deux opérateurs d'observation :

- différence d'images déplacées (section 3.2.2) ; ou
 - identité lorsque la vitesse est donnée directement (par un flot optique ou autre).
- avec une éventuelle estimation du bruit, particulièrement dans le cas de données manquantes.

3. Pondération : chaque particule est pondérée selon sa vraisemblance ; le résultat de l'étape est donné par la somme pondérée des particules à cette étape.

4. Rééchantillonnage : les particules sont rééchantillonnées selon :

- un rééchantillonnage multinomial ; ou
 - un rééchantillonnage dual (section 3.3.3) ;
- et une régularisation (de la loi de probabilité) est effectuée en ajoutant un bruit (d'Evensen ou autosimilaire) de faible variance à chaque particule.
-

3.3.1 Initialisation

L'étape d'initialisation consiste à créer les échantillons. Dans les séquences traitées, nous utilisons un flot optique de Lucas-Kanade stochastique (qui sera décrit dans la section 5.2) qui donne une estimation de la vitesse entre les deux images initiales. Ce champ de vitesse est ensuite bruité par un champ de bruit gaussien.

De façon générale, la variance du bruit introduit dans cette étape d'initialisation sera d'un ordre de grandeur d'environ 5 à 10 fois supérieur au bruit dynamique. Cela permet de bien différencier les particules les unes des autres pour avoir suffisamment de variabilité, et les premières étapes d'assimilation se chargeront d'inhiber ce fort bruit initial.

3.3.2 Pondération

La pondération des particules dans le filtre de Kalman d'ensemble pondéré se réduit, comme vu à la section 2.7.1, à la vraisemblance vis-à-vis de l'observation.

Dans la suite, cette vraisemblance sera supposée distribuée selon un loi gaussienne de moyenne nulle et de covariance donnée par la variance des observations :

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) = \mathcal{N}(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k^{(i)}); \mathbf{y}_k, \mathbf{R}_k). \quad (3.18)$$

3.3.3 Rééchantillonnage

Le rééchantillonnage est une étape importante des filtres particulaires qui évite que des particules très éloignées de l'observation ne soient conservées. Si l'on fait un parallèle avec la théorie de l'évolution, cela correspondrait à un processus de sélection naturelle (utilitaire) qui défavorise les individus les moins adaptés au milieu.

La version de WETKF utilisée dans les expériences de cette thèse utilise la méthode classique du rééchantillonnage multinomial, qui consiste à tirer N particules parmi les N particules (le nombre de particules ne change pas), chaque particule pouvant être tirée avec une probabilité égale à son poids.

La probabilité que la répartition du nuage de particules soit constituée de (n_1, n_2, \dots, n_N) particules de l'ancien nuage (avec $\sum_{i=1}^N n_i = N$) est :

$$p((n_1, n_2, \dots, n_N)) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_N!} w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_N^{n_N}.$$

En effectuant un rééchantillonnage multinomial, l'espérance du nombre de nouvelles particules correspondant à une ancienne particule $\mathbf{x}^{(i)}$ donnée est de Nw_i .

Régularisation

Les filtres particulaires avec rééchantillonnage souffrent du problème bien connu d'appauvrissement du nuage : l'essentiel du nouveau nuage est en pratique souvent constitué que d'un petit nombre de particules différentes. Une des solutions possibles consiste à différencier artificiellement les particules les unes des autres après rééchantillonnage en les perturbant un peu. Cette étape est appelée régularisation dans la littérature sur les filtres particulaires. Musso et al. [2001] donne un résumé de ces méthodes.

Dans les résultats présentés, cette technique est toujours utilisée. La différenciation se fait en appliquant un bruit similaire à celui du bruit dynamique avec un écart-type généralement 10 fois inférieur à celui du bruit dynamique.

Rééchantillonnage mixte multinomial-uniforme

Afin d'encourager encore plus à conserver un certain nombre de particules différentes après rééchantillonnage, un rééchantillonnage mixte multinomial-uniforme a été testé. Cela consiste à tirer une partie des particules selon un rééchantillonnage multinomial et une autre partie de façon aléatoire (selon la loi uniforme), la proportion entre les particules « multinomiales » et les particules « aléatoires » étant fixée par un paramètre. Lorsque ce mode de rééchantillonnage est choisi, le petit déplacement des particules est effectué après ce rééchantillonnage.

Cette technique a été testée avec les proportions 50 %-50 % et 80 %-20 %, et comparée au cas 100 %-0 % (« multinomial pur »). Comme montré par les résultats en section 6.5, il semble qu'une proportion de 80 %-20 % donne des résultats assez proches de ce que l'on obtient avec 100 %-0 %. En revanche, une proportion 50 %-50 % semble être légèrement négative sur les résultats. Ce type de rééchantillonnage ne semble pas conduire à une amélioration des résultats.

3.3.4 Données manquantes

Dans l'application où on recherchera les courants de surface à partir des données image de température de surface (voir la section 6.10), la couverture nuageuse cache une partie des données. Au lieu de retirer de l'espace d'observation ces zones d'observation, on cherchera à compléter l'espace d'observation pour mieux gérer les transitions entre données présentes et données temporairement absentes.

Dans ces zones de données temporairement manquantes, on imposera une forte variance d'observation afin de laisser une grande plage de valeurs acceptables dans cette zone. Dans ces zones, la variance sera dérivée de la variance empirique sur l'échantillon prédit :

$$\mathbf{R}(x, x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (I(x + d^{(i)}(x), t+1) - I(x, t))^2. \quad (3.19)$$

Afin de lisser les irrégularités de la variance résultante, un petit lissage gaussien est appliqué.

Ce type de variance (dans l'application d'images de SST) sera utilisé dans le filtre de Kalman ainsi que dans l'étape de pondération.

3.3.5 Code

Dans le cadre de cette thèse et avec la coopération de Benoît Combès, un code relativement générique de filtres particuliers avec loi de proposition par un filtre de Kalman (WEnKF/WETKF) a été créé et utilisé pour les expériences menées dans cette thèse. Le code est principalement en langage Matlab, avec quelques portions en C via l'interfaçage C/Matlab.

L'intérêt du langage Matlab est la grande quantité de fonctions disponibles nativement ou via des boîtes à outils, ainsi que la facilité d'utilisation des entrées-sorties et du post-traitement (création de graphiques, images, etc.). Dans ce code, il est également utilisé une « surcharge » de fonctions où les fonctions génériques (entrées-sorties, mesures d'erreurs, etc.) peuvent être spécialisées pour chaque implémentation spécifique.

Le code est architecturé de la façon suivante :

- un schéma d'assimilation de filtre particulaire avec proposition de Kalman sert de programme principal et orchestre le déroulement temporel de l'assimilation en appelant les différents composants (voir l'algorithme 6) ;
- mis à part les modèle dynamique et opérateur d'observation qui doivent être absolument spécifiés pour chaque problème, les autres fonctions comportent une version générique (analyses de Kalman, pondération, rééchantillonnage, entrées-sorties, mesures d'erreur) ;
- pour chaque problème (au sens large), des *implémentations* spécifient les modèle dynamique et opérateur d'observation, spécialisent à volonté les autres fonctions et appellent le schéma d'assimilation qu'elles souhaitent utiliser ;
- des *contextes* permettent de passer des ensembles de paramètres à chaque sous-partie du programme : contexte global, contexte sur la méthode d'assimilation, contexte d'observation ;
- quelques modèles dynamiques sont implémentés (dont le modèle vorticité-vitesse décrit plus haut) ainsi que plusieurs opérateurs d'observations ;
- des entrées-sorties sont disponibles principalement via les fichiers MAT spécifiques à Matlab, via des fichiers CSV pour les résultats, via le format NetCDF (via l'implémentation Matlab disponible dans les versions R2011b et supérieures).

Lors d'une première utilisation du code pour un problème spécifique, les étapes à effectuer sont :

1. créer une implémentation spécifique (copie de l'implémentation minimale) ;
2. spécifier les modèle dynamique et opérateur d'observation, soit en réutilisant ceux disponibles, soit en les créant ;
3. créer, à partir d'un modèle de base, le fichier initial permettant d'initialiser les contextes et d'appeler le schéma d'assimilation ;
4. si besoin, spécialiser les fonctions (voire le schéma d'assimilation même s'il est préférable de garder un schéma standard pour compatibilité ascendante du code).

Chapitre 4

Bruit dynamique

Dans les méthodes d'assimilation particulières, la principale source d'aléa qui permet de différencier les particules les unes des autres se situe dans l'étape de proposition. Dans un filtre de Kalman d'ensemble, c'est le bruit dynamique qui introduit cette différenciation des particules. Il est important de spécifier au mieux ce bruit afin qu'il agite les particules tout en restant « en accord » avec la nature des particules. Par exemple, si on bruite avec un bruit gaussien indépendant en chaque pixel, une particule représentant un état fluide, celle-ci ne correspondra plus à un état physiquement plausible de l'écoulement.

Dans un filtre de Kalman d'ensemble, le bruit sur les particules est introduit dans l'étape de prédiction donnée par une équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{M}(\mathbf{x}_t)dt + \eta_t d\mathbf{B}_t.$$

Le bruit $\mathbf{B}_t \in \mathbb{R}^n$ est un mouvement brownien dans les hypothèses du filtre de Kalman, c'est-à-dire un processus à moyenne nulle, dont les trajectoires sont presque partout continues, dont les incréments sont indépendants et de distribution gaussienne centrée de variance égale à leur éloignement temporel (i.e. pour $0 \leq s < t$, $\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_s \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_n, (t-s)\mathbf{\Sigma})$ avec $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ constant).

En discrétisant dans le temps, il s'agira de spécifier ce bruit selon :

- sa distribution, qui est généralement supposée gaussienne ;
- sa variance, qui conditionnera l'éloignement des particules entre elles ;
- sa forme spatiale, autrement dit sa covariance.

La forme spatiale la plus simple est de tirer des échantillons aléatoires indépendants en chaque dimension de l'espace d'état, c'est-à-dire en supposant la matrice de covariance diagonale. Ce type de bruit, dans le cas de fluides, serait potentiellement assez brutal car il introduirait de fortes variabilités d'un point de grille à un autre et serait contraire à la nature continue du phénomène.

Cette section présente deux bruits qui seront comparés dans le contexte de l'assimilation d'images d'écoulements fluides. Tous deux sont homogènes (la distribution est la même pour tous les pixels), isotropes (pas de direction privilégiée, autrement dit la covariance entre deux points ne dépend que de leur éloignement) et stationnaires (la distribution ne change pas dans le temps). Ces deux bruits se distinguent essentiellement par la forme de leurs matrices de covariance respectives :

- un bruit quasi-gaussien dont la covariance décroît strictement avec l'éloignement (ce bruit peut aussi être anisotrope selon les paramètres spécifiés),
- un bruit gaussien dont le spectre est spécifié de façon à respecter une relation entre les échelles, mimant les lois phénoménologiques simples de la turbulence.

Nous présentons tout d'abord la construction de chacun des deux bruits, puis donnons quelques résultats d'assimilation caractéristiques des deux approches.

4.1 Bruit d'Evensen

Cette forme de bruit est décrite dans Evensen [2003], et sera par la suite identifiée comme *bruit d'Evensen*. Il s'agit de champs scalaires de taille $N \times M$, périodiques, de moyenne nulle, et de variance unitaire, qui sont caractérisées par :

- une résolution spatiale dans les deux directions du domaine spatial : $\Delta x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta y \in \mathbb{R}_+^*$;
- deux longueurs de décorrélation spatiale dans les deux directions : $r_x \in]0, \frac{N\Delta x}{2}]$ et $r_y \in]0, \frac{M\Delta y}{2}]$;
- une orientation $\theta \in [0, \pi[$ qui permettra d'effectuer une rotation de la direction préférentielle dans le cas d'une décorrélation anisotrope ($r_x \neq r_y$).

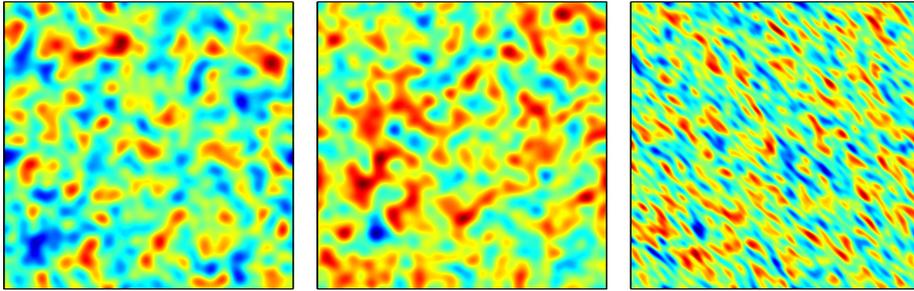


FIGURE 4.1 – Exemples de réalisation du bruit d'Evensen. Les deux premières ont une décorrélation spatiale isotrope, contrairement à la dernière qui a une décorrélation anisotrope orientée de $3/4\pi$ radians.

4.1.1 Construction

Ce bruit est construit en spécifiant les coefficients de corrélation dans l'espace de Fourier de façon à obtenir une décroissance de la covariance exponentielle avec l'éloignement (équations (4.1) et (4.2)). À partir de cette forme générale, les coefficients de décorrélation dans l'espace de Fourier sont obtenus à partir des coefficients de décorrélation spatiaux, ceci en résolvant les équations (4.4). Le paramètre de variance est calculé de façon à fixer celle-ci à 1, grâce à l'équation (4.5). Nous décrivons cette construction en deux dimensions, mais le passage en dimension d est immédiat, sauf si l'on souhaite continuer à utiliser des paramètres d'orientation des axes différents des axes canoniques.

Pour une image $N \times M$, on définit les quantités suivantes : $x_n = n\Delta x$; $y_m = m\Delta y$; $\kappa_l = \frac{2\pi l}{N\Delta x}$; $\gamma_p = \frac{2\pi p}{M\Delta y}$ avec $n, l = 0 \dots N - 1$ et $m, p = 0 \dots M - 1$ et $\Delta k = \Delta \kappa \Delta \gamma = \frac{(2\pi)^2}{NM\Delta x \Delta y}$.

Le champ de bruit $q(x_n, y_m)$ est alors exprimé par en spécifiant les coefficients d'une transformée de Fourier discrète :

$$q(x_n, y_m) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \hat{q}(\kappa_l, \gamma_p) e^{i(\kappa_l x_n + \gamma_p y_m)} \Delta k, \quad (4.1)$$

avec

$$\hat{q}(\kappa_l, \gamma_p) = \frac{c}{\sqrt{\Delta k}} e^{-\left(\frac{\cos^2(\theta)}{\sigma_1^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{\sigma_2^2}\right) \kappa_l^2 - \left(\frac{\sin^2(\theta)}{\sigma_1^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{\sigma_2^2}\right) \gamma_p^2 + 2\left(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) \kappa_l \gamma_p} e^{2\pi i \phi_{l,p}}, \quad (4.2)$$

où $\phi_{l,p}$ sont des coefficients tirés selon une loi uniforme sur $]0, 1]$ ($\phi_{l,p} \sim \mathcal{U}(0, 1)$). Lorsque θ est nul ou lorsque $r_x = r_y$, cette expression se réduit à :

$$\hat{q}(\kappa_l, \gamma_p) = \frac{c}{\sqrt{\Delta k}} e^{-\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} e^{2\pi i \phi_{l,p}} \quad (4.3)$$

Le paramètre σ_1 (resp. σ_2) est fixé de façon à ce que la covariance entre deux points distants de r_x (resp. r_y) dans la direction x (resp. y) ait une valeur de e^{-1} (choix fait dans Evensen [2003]; on notera que l'on pourrait choisir une autre valeur que e^{-1} si l'on voulait spécifier une vitesse de décroissance différente). Pour imposer cette condition, il faut résoudre les deux équations suivantes en σ_1 et σ_2 issues du calcul de la covariance (voir Evensen [2003] pour les détails, ainsi que la proposition 4 ci-après pour la simplification des équations d'Evensen) :

$$\begin{cases} e^{-1} \sum_l e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2} = \sum_l e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2} \cos(\kappa_l r_x) \\ e^{-1} \sum_p e^{-2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} = \sum_p e^{-2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} \cos(\gamma_p r_y) \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans notre implémentation comme dans l'implémentation originale d'Evensen, la résolution de ce système se fait par une méthode de Newton 2D (grâce à la proposition 4, on aurait aussi pu utiliser deux méthodes de Newton 1D). Enfin le paramètre c est fixé de façon à contraindre la variance à 1 :

$$1 = \Delta k c^2 \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l^2}{\sigma_1^2} + \frac{\gamma_p^2}{\sigma_2^2}\right)} \quad (4.5)$$

Proposition 4. *Les équations de contrainte sur σ_1 et σ_2 en fonction de r_x et r_y , issues du calcul de la covariance du bruit d'Evensen (4.1) et (4.2), données par*

$$\begin{cases} e^{-1} \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} = \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} \cos(\kappa_l r_x) \\ e^{-1} \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} = \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} \cos(\gamma_p r_y) \end{cases} \quad (4.6)$$

sont équivalentes aux équations (4.4).

Démonstration. En reprenant les notations de cette section et pour une solution (σ_1, σ_2) du système d'équations (4.6), la première équation de (4.6) est équivalente à la première équation de (4.4) :

$$\begin{aligned}
& e^{-1} \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} = \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} \cos(\kappa_l r_x) \\
\Leftrightarrow & \sum_{l,p} e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - 2\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} (\cos(\kappa_l r_x) - e^{-1}) = 0 \\
\Leftrightarrow & e^{-2\left(\frac{\gamma_0}{\sigma_2}\right)^2} \sum_l e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2} (\cos(\kappa_l r_x) - e^{-1}) + \dots \\
& \dots + e^{-2\left(\frac{\gamma_{M-1}}{\sigma_2}\right)^2} \sum_l e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2} (\cos(\kappa_l r_x) - e^{-1}) = 0 \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\left(e^{-2\left(\frac{\gamma_0}{\sigma_2}\right)^2} + e^{-2\left(\frac{\gamma_1}{\sigma_2}\right)^2} + \dots + e^{-2\left(\frac{\gamma_{M-1}}{\sigma_2}\right)^2} \right)}_{\neq 0} \sum_l e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2} (\cos(\kappa_l r_x) - e^{-1}) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_l e^{-2\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2} (\cos(\kappa_l r_x) - e^{-1}) = 0
\end{aligned}$$

De façon similaire, on a l'équivalence sur la deuxième équation du système. Réciproquement, pour une solution (σ_1, σ_2) des équations (4.4), les mêmes chaînes d'équivalences peuvent être reprises dans l'autre sens. Cela confirme que les coefficients de corrélations sont indépendants dans chaque direction, et cela permet de généraliser aisément les équations à des dimensions supérieures à 2. \square

4.1.2 Propriétés

Ce bruit n'est pas gaussien, puisque le support de sa distribution est compact, mais vu sa construction comme une somme de $N \times M$ variables indépendantes, le théorème central limite nous indique cependant qu'il tend vers une distribution gaussienne quand $N \times M \rightarrow +\infty$. Ici, on utilisera le théorème central limite pour une somme de variables indépendantes mais de variance différente, et il faut alors vérifier la condition de Lyapounov pour arriver au résultat. L'annexe C détaille ce résultat. Vu les tailles utilisées de l'ordre de 256×256 , on pourra donc considérer que ce bruit est quasi-gaussien, comme cela peut se constater empiriquement.

On peut vérifier que dans le cas isotrope la covariance entre un point et un autre diminue (strictement) lorsque ces deux points s'éloignent, dans la limite du fait que l'image est périodique. La covariance minimale est donc atteinte en $\frac{N\Delta x}{2}$. Cette fonction de covariance est illustrée sur la figure 4.2.

Lorsque ce bruit est interprété comme une vorticité, le spectre d'énergie est donné sur la figure 4.3.

4.2 Bruit autosimilaire

Dans le modèle de turbulence initialement proposé par Kraichnan [1968], il existe une relation reliant l'énergie des différentes échelles du fluide : c'est le modèle de cascades de Kolmogorov-Richardson. De façon plus précise, le spectre de la vitesse est donné par une loi de puissance $a.k^b$ sur une gamme d'échelles donnée $[\kappa, \epsilon]$, appelée plage inertielle. Le bruit explicité dans cette section est construit sur ce principe afin de perturber les particules de

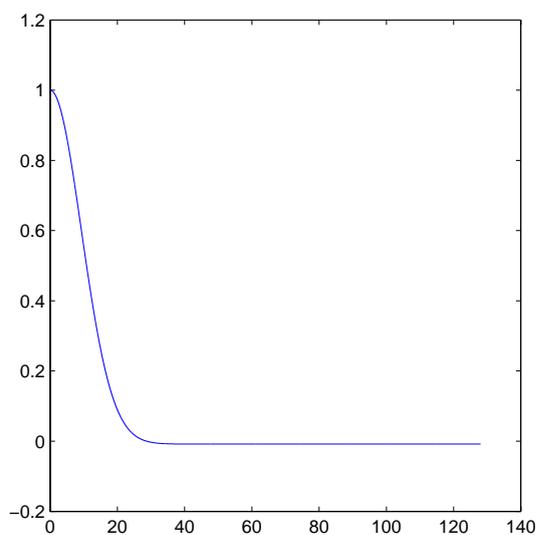


FIGURE 4.2 – Profil de décroissance de la covariance (isotrope) pour le bruit d'Evensen, ici $r_x = 13$, sur une image de 256×256 pixels, avec les paramètres usuels utilisés lors de l'assimilation.

Ce bruit a une covariance qui tend exponentiellement vers 0 (avant de remonter exponentiellement dans la demi-image suivante du fait de la périodicité).

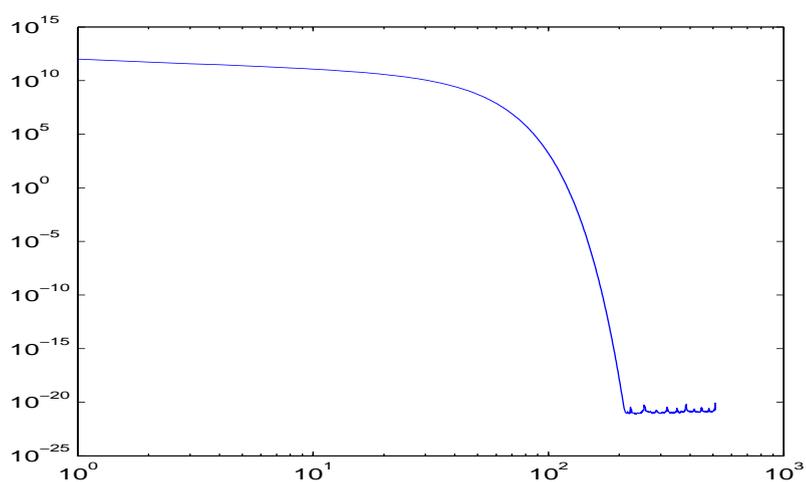


FIGURE 4.3 – Spectre d'énergie du bruit d'Evensen lorsque celui est interprété comme une vorticité.

façon cohérente avec un modèle turbulent. C'est donc un bruit gaussien centré — puisque somme de bruits gaussiens centrés — et périodique dont la forme spatiale respecte cette loi de puissance.

Comme on le montrera dans les expériences et dans le chapitre relatif à l'assimilation de courants de surface en Iroise, les trois paramètres propres à ce bruit, à savoir le coefficient entre les échelles et les deux échelles de coupure, sont relativement simples à fixer et seul le coefficient de variance reste (difficile) à fixer.

Nous présentons tout d'abord la construction théorique de ce bruit dans \mathbb{R}^d , puis discutons des aspects théoriques de son implémentation, donnons quelques propriétés sur ce bruit et enfin exposons des résultats obtenus.

4.2.1 Construction théorique

La construction est donnée ici dans \mathbb{R}^d , mais elle peut également être faite dans un espace périodique de dimension d . Les paramètres propres à ce bruit sont :

- α : coefficient de puissance entre les échelles ;
- κ, ϵ : respectivement grande et petite échelles de coupure ($\kappa < \epsilon$) ; ces échelles de coupure correspondent d'une part à $\kappa = 1/L$, l'échelle intégrale à laquelle le forçage prend place et à $\epsilon = 1/l_0$, l'échelle dissipative ; on a $l_0 < L$.

Soit $\mathbf{Y}_t(\mathbf{x})$ le processus gaussien défini sur \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R}^d représentant un champ de vitesse dont les incréments sont formellement définis par :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, d\mathbf{Y}_t(\mathbf{x}) = \psi * d\mathbf{B}_t(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d.$$

$d\mathbf{B}_t(\mathbf{x})$ sont les incréments d'un mouvement brownien et sont donc distribués par un loi gaussienne centrée réduite à valeurs dans \mathbb{R}^d . La convolution $\psi * d\mathbf{B}_t(\mathbf{x})$ n'est qu'une écriture formelle et est construite à partir de la limite d'un champ aléatoire discret défini comme $d\widehat{\mathbf{B}}_t(\mathbf{x}) = 1/\sqrt{n} \sum_{i=1}^n \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{B}_t(\mathbf{x}_i)$ où ϕ est une fonction de lissage (gaussienne par exemple). La convolution $\psi * (\phi * d\widehat{\mathbf{B}}_t)$ est ensuite bien définie, ainsi que sa limite lorsque n tend vers l'infini.

La fonction ψ a la forme :

$$\psi(\mathbf{x}) = f * \phi_{\kappa, \epsilon}(\mathbf{x}),$$

où $\phi_{\kappa, \epsilon}$ est un filtre passe-bande, et $f(\mathbf{x})$ est une fonction en loi de puissance qui donne la relation entre les échelles :

$$f(x) = C \|\mathbf{x}\|^{\alpha/2}.$$

Le processus gaussien $\mathbf{Z}_t(\mathbf{x})$ est ensuite défini comme la projection de $\mathbf{Y}_t(\mathbf{x})$ sur les champs à divergence nulle. L'opérateur de projection sur les champs à divergence nulle est appelé opérateur de Leray, \mathcal{P}_d , (on notera que $\mathcal{P}_d \circ \mathcal{P}_d = \mathcal{P}_d$). On a la représentation suivante de $d\mathbf{Z}_t$:

$$d\mathbf{Z}_t = d\mathbf{Y}_t - \nabla G * \operatorname{div}(d\mathbf{Y}_t) = (\delta - \mathbf{H}(G)) * d\mathbf{Y}_t = \mathcal{P}_d * d\mathbf{Y}_t$$

où G est le noyau de Green du Laplacien et $H(G)$ est sa matrice hessienne.

Transposé dans le domaine de Fourier, l'opérateur de Leray a la propriété $\widehat{\mathcal{P}}_d \widehat{\mathcal{P}}_d = \widehat{\mathcal{P}}_d$ (c'est un projecteur) et est défini par :

$$\widehat{\mathcal{P}}_d(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|k|^2}.$$

En reprenant les notations de la section 3.1.1, cette expression de l'opérateur de Leray dans l'espace de Fourier provient du fait que :

$$\begin{aligned}
\Delta\phi = \operatorname{div} d\mathbf{Y}_t &\Rightarrow (\partial_1^2 + \dots + \partial_d^2)\phi = \operatorname{div} d\mathbf{Y}_t \\
&\Rightarrow -4\pi^2(k_1^2 + \dots + k_d^2)\hat{\phi} = 2\pi i(k_1 d\widehat{\mathbf{Y}}_{t,1} + \dots + k_d d\widehat{\mathbf{Y}}_{t,d}) \\
&\Rightarrow \hat{\phi} = \frac{-i}{2\pi|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k} \cdot d\widehat{\mathbf{Y}}_t \\
&\Rightarrow \widehat{\nabla}\phi = \frac{\mathbf{k}}{2\pi|\mathbf{k}|^2} \mathbf{k} \cdot d\widehat{\mathbf{Y}}_t \\
&\Rightarrow \nabla G * \widehat{\operatorname{div}}(d\mathbf{Y}_t) = \widehat{\nabla}\phi = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{2\pi|\mathbf{k}|^2} d\widehat{\mathbf{Y}}_t
\end{aligned}$$

D'après la représentation de processus gaussiens dans le domaine de Fourier, le processus $d\mathbf{Z}_t$ peut s'exprimer sous la forme :

$$d\mathbf{Z}_t(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbf{Q}}^{1/2}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{B}_t(k) \quad (4.7)$$

$$\widehat{\mathbf{Q}}_{i,j}(k) = C|k|^{-d-\alpha} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|k|^2} \right) \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(|k|) \quad (4.8)$$

4.2.2 Propriétés

Proposition 5. *L'énergie, en fonction de l'échelle, du bruit autosimilaire est :*

$$S(k_r) = \int_{k_r=|k|} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{Q}}(k)) dk = C(d-1) \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(k_r) k_r^{-\alpha-1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
S(k_r) &= \int_{k_r=|k|} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{Q}}(k)) dk \\
&= \int_{k_r=|k|} \frac{1}{2} C|k|^{-d-\alpha} \sum_{i=1}^d \left(\delta_{ii} - \frac{k_i^2}{|k|^2} \right) \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(|k|) dk \\
&= \int_{k_r=|k|} \frac{1}{2} C k_r^{-d-\alpha} \sum_{i=1}^d \left(1 - \frac{k_i^2}{|k|^2} \right) \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(k_r) dk \\
&= \frac{1}{2} C k_r^{-d-\alpha} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(k_r) \int_{k_r=|k|} \left(d - \frac{|k|^2}{|k|^2} \right) dk \\
&= \frac{d-1}{2} C k_r^{-d-\alpha} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(k_r) \int_{k_r=|k|} dk \\
&= \frac{d-1}{2} C k_r^{-d-\alpha} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(k_r) \frac{2\pi^{d/2} k_r^{d-1}}{\Gamma(d/2)} \quad [\text{surface de la sphère} \\
&\hspace{15em} \text{en dimension } d] \\
&= C(d-1) \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(k_r) k_r^{-\alpha-1}
\end{aligned}$$

□

Et l'énergie totale est donc donnée par la formule suivante, si l'on suppose que le filtre passe-bande est parfait (sa transformée de Fourier vaut 1 sur la bande fréquentielle choisie et 0 ailleurs) :

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^\infty S(k_r) dk_r \\
&= C(d-1) \frac{\pi^{d/2}}{\alpha\Gamma(d/2)} (\kappa^{-\alpha} - \epsilon^{-\alpha}) \\
&= C(d-1) \frac{\pi^{d/2}}{\alpha\Gamma(d/2)} (L^\alpha - l_0^\alpha)
\end{aligned} \quad (4.9)$$

On observe que l'énergie de ce bruit dépend directement de l'échelle d'injection portée à la puissance α . Cette échelle peut être spécifiée à partir de la taille du plus gros vortex dans l'image.

En dimension 2, la densité spectrale et l'énergie sont respectivement données par :

$$S(k_r) = C\pi\hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}^2(k_r)k_r^{-\alpha-1}$$

$$E = C\frac{\pi}{\alpha}(\kappa^{-\alpha} - \epsilon^{-\alpha}) = C\frac{\pi}{\alpha}(L^\alpha - l_0^\alpha)$$

Les spectres de vitesse pour les trois exemples donnés dans la figure 4.4 sont affichés sur la figure 4.5.

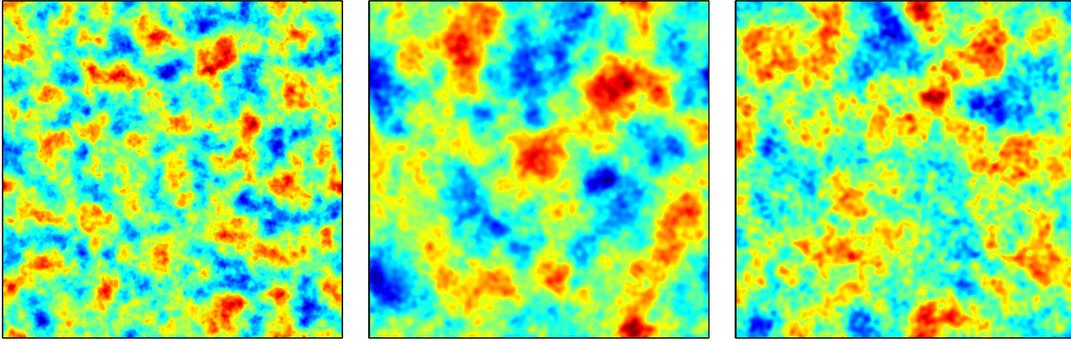


FIGURE 4.4 – Exemples de réalisations de la vorticité de ce type de bruit sur des images 1024×1024 .

De gauche à droite, les paramètres sont : (i) $\alpha = 2, 5$, $\kappa = 4$, $\epsilon = 100$; (ii) $\alpha = 2, 5$, $\kappa = 2$, $\epsilon = 50$; (iii) $\alpha = 2$, $\kappa = 2$, $\epsilon = 50$.

4.2.3 Mise en œuvre

Dans le cas qui nous intéressera de la dimension 2 pour des champs périodiques, il est possible de calculer le champ de vorticité puis de reconstituer le champ de vitesse à partir du noyau de Green du Laplacien. Cela présente comme avantages de n'avoir à calculer qu'une seule transformée de Fourier inverse au lieu de deux, ainsi que de garantir par construction que le champ est à vorticité nulle. Des tests ont été faits avec l'utilisation de l'opérateur de Leray (tel que présenté dans la construction pour rendre le champ à divergence nulle), mais en pratique les champs résultants n'étaient pas, pour une raison inconnue, à divergence nulle (du même ordre de grandeur que la vorticité).

Proposition 6. *Dans ce cas $2D$, la vorticité résultant de ce bruit est donnée par :*

$$\xi_t(x) = C \int_{\mathbb{R}^2} |k|^{-d-\alpha+1} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}(|k|) e^{ik \cdot x} dB_t(k).$$

Démonstration. Les deux composantes de la vitesse $U(x_1, x_2)$ et $V(x_1, x_2)$ sont données par :

$$U(x_1, x_2) = C \int_{\mathbb{R}^2} e^{ik \cdot x} \frac{|k|^{-d-\alpha}}{|k|^2} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}(|k|) (k_2^2 dB_t(k_1) - k_1 k_2 dB_t(k_2))$$

$$V(x_1, x_2) = C \int_{\mathbb{R}^2} e^{ik \cdot x} \frac{|k|^{-d-\alpha}}{|k|^2} \hat{\phi}_{\kappa,\epsilon}(|k|) (k_1^2 dB_t(k_2) - k_1 k_2 dB_t(k_1))$$

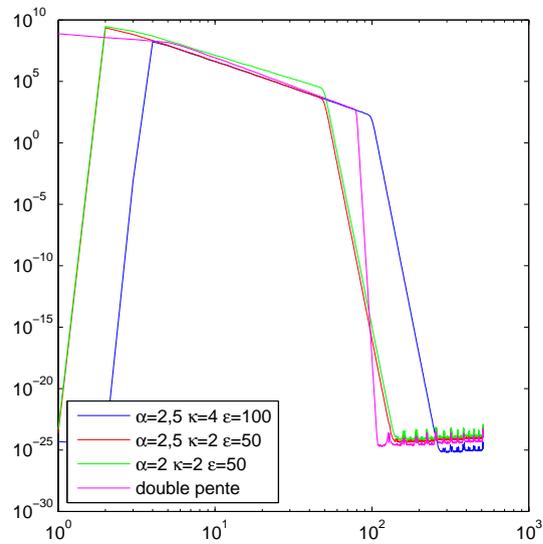


FIGURE 4.5 – Spectres de vitesse du bruit auto-similaire pour les réalisations affichées sur la figure 4.4.

Ces spectres sont réalisés par une moyenne sur 30 échantillons.

Le bruit en double pente est réalisé par l'addition de deux bruits autosimilaires avec des plages fréquentielles qui se rejoignent ici à $\kappa = 5$; la vitesse de décroissance est plus forte ici pour ce type de bruit que pour les autres, comme cela se remarque à la coupure petites échelles.

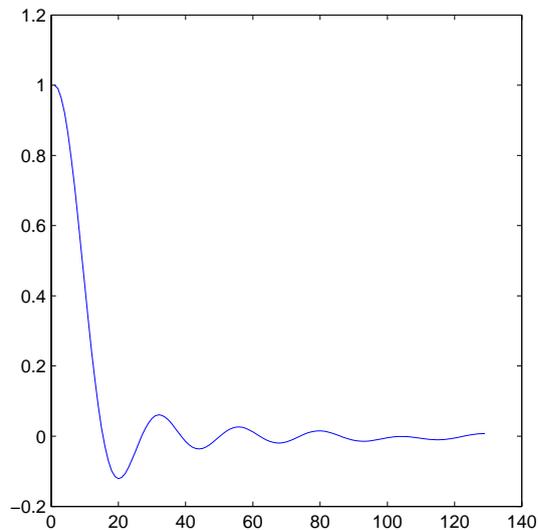


FIGURE 4.6 – Profil de la covariance en fonction de l'éloignement (en pixels); l'image fait ici 256 pixels, et les paramètres utilisés sont les meilleurs qu'il a été trouvé dans un cadre d'assimilation sur une séquence synthétique.

En comparant au bruit d'Evensen (voir le graphique 4.2), la covariance tend à peu près à la même vitesse vers 0 dans les grandes échelles (20 % de la variance initiale autour de 18 pixels), mais ce bruit-ci présente ensuite un caractère oscillant amorti.

Partant, on obtient la vorticité :

$$\begin{aligned}
\xi_t(x_1, x_2) &= -\partial_y U(x_1, x_2) + \partial_x V(x_1, x_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{ik \cdot x} (-k_2 \widehat{U}(k_1, k_2) + k_1 \widehat{V}(k_1, k_2)) dk \\
&= C \int_{\mathbb{R}^2} e^{ik \cdot x} |k|^{-d-\alpha-2} \hat{\phi}_{\kappa, \epsilon}(|k|) (-k_2^2 (k_2 dB_t(k_1) - k_1 dB_t(k_2)) \\
&\quad + k_1^2 (k_1 dB_t(k_2) - k_2 dB_t(k_1))) \\
&= C \int_{\mathbb{R}^2} e^{ik \cdot x} |k|^{-d-\alpha-2} \hat{\phi}_{\kappa, \epsilon}(|k|) (k_1 |k|^2 dB_t(k_2) - k_2 |k|^2 dB_t(k_1)) \\
&= C \int_{\mathbb{R}^2} e^{ik \cdot x} |k|^{-d-\alpha} \hat{\phi}_{\kappa, \epsilon}(|k|) (k_1 dB_t(k_2) - k_2 dB_t(k_1)) \\
&= C \int_{\mathbb{R}^2} e^{ik \cdot x} |k|^{-d-\alpha+1} \hat{\phi}_{\kappa, \epsilon}(|k|) dB_t(k)
\end{aligned}$$

puisque $(k_1 dB_t(k_2) - k_2 dB_t(k_1)) \sim \mathcal{N}(0, k_1^2 + k_2^2)$, ce qui équivaut à $|k| dB_t(k) \sim \mathcal{N}(0, |k|^2)$, où $dB_t(k) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est un champ brownien scalaire. \square

Il est possible d'étendre le résultat précédent en 3D, la vorticité est alors un champ vectoriel.

Plusieurs filtres passe-bande ont été testés. En pratique, c'  st le filtre de Butterworth qui s'  st avéré le plus commode dans la mesure où ce filtre présente une décroissance rapide du spectre au-delà des fréquences de coupures, caractérisées par deux paramètres internes spécifiant la vitesse de décroissance de part et d'autre de la bande de fréquence choisie. La transformée de Fourier discrète a été utilisée comme approximation de la transformée de Fourier continue.

4.2.4 Algorithme

La méthode pratique d'échantillonnage d'un champ gaussien autosimilaire est résumée ici.

Pour une image $N \times M$, on pose $x_n = n\Delta x$, $y_m = m\Delta y$, $\kappa_l = \frac{2\pi l}{N\Delta x}$ et $\gamma_p = \frac{2\pi p}{M\Delta y}$ avec $n, l = 0 \dots N-1$ et $m, p = 0 \dots M-1$ et $\Delta k = \Delta \kappa \Delta \gamma = \frac{(2\pi)^2}{NM\Delta x \Delta y}$, et le champ de vorticité $\xi_t(x_n, y_m)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\xi_t(x_n, y_m) &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \hat{\xi}_t(\kappa_l, \gamma_p) e^{i(\kappa_l x_n + \gamma_p y_m)} \Delta k \\
\hat{\xi}_t(\kappa_l, \gamma_p) &= |(\kappa_l, \gamma_p)|^{-\alpha-1} \hat{\phi}_{\kappa, \epsilon}(|(\kappa_l, \gamma_p)|) \eta_{t, l, p}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

avec $\eta_{t, l, p} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et en imposant les conditions de symétrie sur ξ_t afin d'obtenir un champ réel, à savoir $(\kappa_l, \gamma_p) = (\kappa_{N-l}, \gamma_{M-p})$, ainsi que $\hat{\xi}_t(0, 0) = 0$ pour obtenir un champ à moyenne nulle.

4.3 Synthèse des résultats

Le bruit d'Evensen a été testé sur une séquence 2D simulée dont on observe un traceur passif transporté par le fluide (voir la section 6.3 et la figure 6.2), ainsi que sur une expérience d'un film de savon 2D (voir la section 6.8 et la figure 6.11). Le bruit autosimilaire a été testé sur la séquence avec le traceur passif ainsi que dans l'assimilation en mer d'Iroise détaillée au chapitre 7.

De façon générale, en conclusion des différentes expériences d'assimilation menées, nous verrons que le bruit autosimilaire est beaucoup plus facile à spécifier que le bruit d'Evensen puisque plus proche de la réalité de la physique sous-jacente.

Sur la séquence synthétique scalaire, les paramètres de coupure de la plage inertielle et le paramètre de décroissance de l'énergie ont été calqués sur la vérité terrain. Deux types de spectres ont été testés : un premier en $a_1.k_1^b$ allant des petites échelles jusqu'à l'échelle d'injection, et un deuxième en $a_2.k^{b_2}$ allant des petites échelles à l'échelle d'injection puis en $a_3.k^{b_3}$ de l'échelle d'injection jusqu'aux grandes échelles. Ce dernier cas mime le profil réel des données.

La figure 4.7 montre les spectres des différents bruits à côté de celui de la vérité de la séquence synthétique 2D qui servira à tester la méthode (voir la section 6.3 pour plus de détails), puis la figure 4.9 montre le profil de décroissance de la RMSE au cours de l'assimilation avec les deux bruits et le tableau 4.8 compare plus précisément ces résultats.

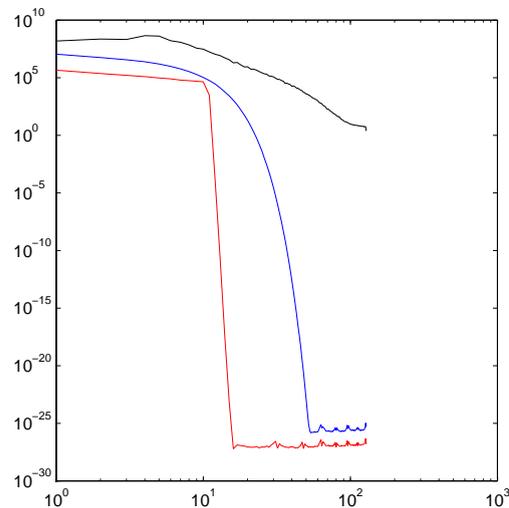


FIGURE 4.7 – Comparaison des spectres pour les bruits d'Evensen (bleu) et autosimilaire (rouge) avec la vérité (noir).

Le spectre de la vérité présentée ici est celui de l'expérience synthétique 2D incompressible qui sera présentée en détails à la section 6.3. Notons que le spectre de la vérité représente la distribution de l'ensemble de l'énergie de l'écoulement alors que les bruits ajoutent, lors du processus d'assimilation, de l'énergie supplémentaire sur les échelles spécifiées ; il faut alors voir les spectres de bruit comme les spectres de l'« anomalie » ajoutée. Cela signifie entre autres que la répartition de l'énergie du bruit n'a pas forcément à suivre la répartition de la vérité, mais plutôt être positionnée aux échelles qui doivent être agitées dans le cadre de l'assimilation.

Type	Nombre de particules	RMSE 98	RMSE 60-98
ETKF EV	50	$0,0966 \pm 0,0062$	$0,1037 \pm 0,0054$
WETKF EV	50	$0,0981 \pm 0,0028$	$0,1042 \pm 0,0044$
ETKF AS	50	$0,0822 \pm 0,0028$	$0,0834 \pm 0,0017$
WETKF AS	50	$0,0786 \pm 0,0030$	$0,0805 \pm 0,0020$
ETKF EV	400	$0,0561 \pm 0,0022$	$0,0547 \pm 0,0019$
WETKF EV	400	$0,0598 \pm 0,0087$	$0,0584 \pm 0,0058$
ETKF AS	400	$0,0433 \pm 0,0005$	$0,0442 \pm 0,0004$
WETKF AS	400	$0,0432 \pm 0,0008$	$0,0440 \pm 0,0006$

FIGURE 4.8 – Résultats pour la séquence scalaire sur la comparaison des bruits d’Evensen et autosimilaire.

Ce résultat présente la moyenne et l’écart-type sur 6 exécutions dans chaque catégorie, respectivement pour la RMSE instantanée au dernier pas de temps d’assimilation (le 98^e) et la RMSE moyennée sur les 39 derniers pas de temps. On remarque assez clairement l’apport du bruit autosimilaire sur les deux méthodes ETKF et WETKF et dans les deux classes de nombre de particules.

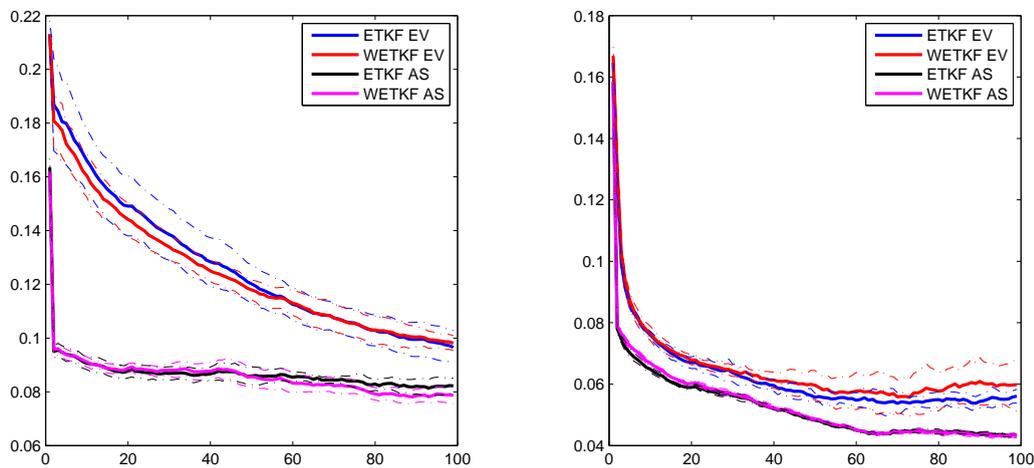


FIGURE 4.9 – Comparaison des bruits d’Evensen et autosimilaire en 50 particules (gauche) et 400 particules (droite).

Ces résultats sont issus de 6 exécutions identiques pour chaque catégorie. Le trait fort donne la RMSE moyenne de ces exécutions et les pointillés donnent l’écart-type autour de la moyenne. Outre le moyen résultat moyen des assimilations utilisant le bruit autosimilaire, on remarque également un plus faible écart-type entre les exécutions. On peut avancer comme explication que le bruit autosimilaire est plus en adéquation avec l’écoulement que le bruit d’Evensen, ce qui se ressent fortement en faible nombre de particules.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a exposé différentes techniques permettant de créer des champs aléatoires utilisés comme bruit du modèle dynamique. La première méthode, décrite par Evensen [2003], a la particularité d'avoir une covariance spatiale exponentiellement décroissante. Nous avons répertorié plusieurs propriétés théoriques sur ce type de champ aléatoire : quasi-gaussianité, décroissance stricte de la covariance, séparation des dimensions dans les équations liant la décorrélation entre les espaces spatial et de Fourier. Initialement proposé en 2D, la propriété de séparation des dimensions permet de généraliser aisément ce bruit à des dimensions supérieures. La deuxième méthode est conçue de sorte à mimer les lois de la turbulence et est donc dédiée aux phénomènes fluides ; en particulier, ses paramètres ont un sens physique facile à appréhender et à spécifier, y compris à partir d'observations. Des propriétés de base sont montrées sur ce type de champ aléatoire : gaussianité, spectre d'énergie, énergie totale, calcul de la vortacité 2D. Ce bruit est initialement spécifié dans \mathbb{R}^d avec d quelconque, mais la mise en œuvre est facilitée lorsque $d = 2$, ce qui correspond aux expérimentations menées dans cette étude.

Les résultats expérimentaux montrent que l'utilisation du bruit autosimilaire pour le bruit de modèle peut conduire à de meilleurs résultats que ceux obtenus dans le cas du bruit d'Evensen. D'autre part, de part sa nature calquée sur les lois phénoménologiques de la turbulence, le bruit autosimilaire peut être facilement paramétré en fonction des paramètres physiques connus ou supposés : les échelles de coupure et la relation d'énergie entre les échelles.

Chapitre 5

Assimilation multi-échelles

5.1 Introduction

La dynamique des fluides peut être étudiée en décomposant le problème sur plusieurs échelles et en tenant compte des relations d'énergie entre échelles adjacentes. De même, sur les images, il est possible de visualiser différentes choses selon l'échelle à laquelle on se place : depuis les grandes régions de couleur proche jusqu'aux détails saillants de petite échelle.

Partant de ces constatations, on peut imaginer créer un schéma d'assimilation qui assimile des observations à différentes échelles les unes après les autres en partant de l'échelle la plus grossière jusqu'à l'échelle la plus fine. C'est ce qui est fait dans ce chapitre où, à chaque temps, des observations multi-échelles sont assimilées les unes après les autres de façon à raffiner l'estimation. Afin d'obtenir des observations à différentes échelles, on utilisera un observateur de Lucas-Kanade multi-échelles qui a également la propriété d'être pensé de façon stochastique ; il donnera alors en plus une estimation de l'incertitude sur le résultat qu'il fournit.

Dans ce type d'assimilation multi-échelles, du fait de l'utilisation d'une méthode de flot optique, l'observation sera, du point de vue de l'assimilation, donnée directement par le déplacement entre les deux images et l'opérateur d'observation sera donc simplement défini comme l'identité. Il serait cependant tout à fait possible d'utiliser un autre opérateur d'observation (comme une différence d'images déplacées) pourvu qu'une décomposition sur plusieurs échelles de l'opérateur en question soit possible.

Nous débuterons ce chapitre avec la description de l'opérateur de Lucas-Kanade stochastique, puis nous présenterons le schéma d'assimilation multi-échelles, et nous terminerons par un résumé des résultats utilisant cette méthode.

Ce chapitre est une adaptation de l'article Beyou et al. [2013a] publié dans *Numerical Mathematics : Theory, Methods and Applications*.

5.2 Flot optique de Lucas-Kanade stochastique

La méthode de flot optique de type Lucas-Kanade stochastique est une réinterprétation de l'équation de conservation de la luminance dans un cadre stochastique. De plus, le schéma d'estimation est intégré dans un schéma multi-résolution. Cette méthode a été proposée par Corpetti and Mémin [2011]. Nous décrivons brièvement dans cette section les grandes lignes de cette technique.

Pour une image 2D comportant un total de n pixels, le mouvement apparent de l'image à une incertitude gaussienne près, $X_t \in \mathbb{R}^{2n}$, est donné sous forme stochastique par :

$$dX_t = \mathbf{u}(X_t)dt + \Sigma^{1/2}(X_t)dB_t, \quad (5.1)$$

c'est-à-dire que la position de chaque point entre deux images est donnée par :

$$X_t = X_{t-1} + \int_{t-1}^t \mathbf{u}(s)ds + \int_{t-1}^t \Sigma^{1/2}(s)dB_s, \quad (5.2)$$

où $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est la vitesse du processus $(X_t)_{t \geq 0}$, $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^{2n} et Σ est une fonction de \mathbb{R}_+ à valeurs dans l'espace des matrices semi-définies positives de taille $2n \times 2n$. La deuxième intégrale est définie par l'intégration stochastique d'Itô¹ (voir par exemple Øksendal [2003]). L'incertitude associée à ce déplacement modélise une erreur d'estimation engendrée par le bruit sur les données et par la discrétisation du plan image.

La fonction de luminance $I(x, t)$ discrétisée sur la grille de l'image, qui associe à chaque point son intensité lumineuse, est ici exprimée comme une fonction de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{R}^n et est supposée être deux fois différentiable. L'équation de flot optique correspondante s'obtient par la composition de cette fonction de luminance et du processus stochastique $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ en utilisant la formule d'Itô qui rajoute, à la formule déterministe de différentiation d'une fonction composée, un terme de diffusion :

$$dI(X_t, t) = \partial_t I(X_t, t)dt + \nabla I(X_t, t) \cdot dX_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 I(X_t, t)}{\partial X_t^i \partial X_t^j} d \langle X_t^i, X_t^j \rangle. \quad (5.3)$$

Le terme $\langle X_t^i, X_t^j \rangle$ est la variation quadratique jointe des deux composantes du mouvement, définie comme la limite en probabilité sur l'ensemble des partitions $\{t_0, \dots, t_m\}$ de $[0, t]$ avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ et où, en notant $\delta t_k = t_k - t_{k-1}$ la résolution de la partition, celle-ci est telle que $|\delta_m| = \max_k \delta t_k \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$:

$$\langle X_t^i, X_t^j \rangle = \lim_{|\delta_m| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m (X_{t_{k-1}}^i - X_{t_k}^i)(X_{t_{k-1}}^j - X_{t_k}^j).$$

Bien qu'il soit possible de définir un modèle d'incertitude *a priori* quelconque sur le mouvement que l'on cherche à reconstruire, nous utiliserons ici uniquement un modèle d'incertitude isotrope par pixel (l'incertitude est identique dans les directions parallèle et tangente au gradient de la luminance) et dont les pixels sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire que $\Sigma^{1/2}(X_t, t)$ est égale à une fonction de variance $\sigma(X_t, t) : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^n$:

$$\Sigma^{1/2}(X_t, t)dB_t = \text{diag}(\sqrt{\sigma}(X_t, t)) \otimes \mathbb{I}_2 dB_t, \quad (5.4)$$

où \mathbb{I}_2 désigne la matrice diagonale de taille 2×2 et \otimes est le produit de Kronecker ; c'est-à-dire que la matrice résultat (de taille $2n \times 2n$ est ici diagonale (par bloc), où chacun des n blocs 2×2 est une matrice diagonale de termes identiques donnés par l'écart-type du bruit en ce point du domaine image.

1. Kiyoshi Itô (1915-2008), mathématicien probabiliste japonais.

En appliquant ce modèle d'incertitude à la formule (5.3), on obtient

$$dI(X_t, t) = \left(\partial_t I(X_t, t) + \nabla I(X_t, t) \cdot \mathbf{u}(X_t, t) + \frac{1}{2} \sigma(X_t, t) \Delta I(X_t, t) \right) dt + \sqrt{\sigma}(X_t, t) \nabla I(X_t, t) \cdot dB_t \quad (5.5)$$

On remarquera que cette expression se réduit bien à l'expression déterministe classique lorsque $\sigma \equiv 0$. En passant dans un cadre stochastique, l'ajout de ce σ permet d'adoucir la contrainte faite sur la luminance. À partir de là, la conservation de la luminance s'exprime par l'intermédiaire de l'espérance conditionnellement à la position précédente X_{t-1} :

$$\mathbb{E}[dI(X_t, t) | X_{t-1}] = 0. \quad (5.6)$$

Proposition 7. Soient un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mathbf{u}(X_t) dt + \Sigma^{1/2}(X_t) dB_t, \quad (5.7)$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ mouvement brownien standard, et une fonction $\psi(\cdot, t)$ mesurable. Après intégration numérique de X_t par un schéma d'Euler-Maruyama sur une partition de résolution constante δt , en notant $\tilde{\psi}_t(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}\delta t, t)$ et $g_{\mu, \Sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma)$, l'espérance de $\psi(X_t, t)$ conditionnellement à $X_{t-\delta t}$ est :

$$\mathbb{E}[\psi(X_t, t) | X_{t-\delta t}] = \tilde{\psi}_t * g_{0, \Sigma \delta t}(X_{t-\delta t}) \quad (5.8)$$

Démonstration. En discrétisant l'équation différentielle stochastique (5.7) par un schéma d'Euler-Maruyama sur une partition d'un seul intervalle de taille δt , on a :

$$X_t = X_{t-\delta t} + \mathbf{u}\delta t + \Sigma^{1/2}(B_t - B_{t-\delta t}).$$

L'espérance conditionnelle de $\psi(X_t)$ par rapport à $X_{t-\delta t}$ avec ψ mesurable, dont (5.6) est un cas particulier, est donnée par

$$\mathbb{E}[\psi(X_t, t) | X_{t-\delta t}] = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(X_t, t) p(X_t | X_{t-\delta t}) dX_t.$$

Comme $\Sigma^{1/2}B_t$ est un mouvement brownien, $p(X_t | X_{t-\delta t})$ est une fonction gaussienne centrée en $X_{t-\delta t} + \mathbf{u}\delta t$ et de variance $\Sigma \delta t$:

$$\mathbb{E}[\psi(X_t, t) | X_{t-\delta t}] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma) \delta t}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(X_t, t) \exp\left(-\frac{1}{2} |X_t - \mathbf{u}\delta t - X_{t-\delta t}|_{(\Sigma \delta t)^{-1}}^2\right) dX_t,$$

en notant $|\bullet|_A^2$ la norme 2 sur \mathbb{R}^n pondérée par la matrice A : $|x|_A^2 = x^T A x$. Puis par le changement de variable $Z_t = X_t - \mathbf{u}\delta t$, on obtient :

$$\mathbb{E}[\psi(X_t, t) | X_{t-\delta t}] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma) \delta t}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(Z_t + \mathbf{u}\delta t, t) \exp\left(-\frac{1}{2} |Z_t - X_{t-\delta t}|_{(\Sigma \delta t)^{-1}}^2\right) dZ_t.$$

Ce qui donne, en posant $\tilde{\psi}_t(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}\delta t, t)$ et $g_{\mu, \Sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma)$:

$$\mathbb{E}[\psi(X_t, t) | X_{t-\delta t}] = \tilde{\psi}_t * g_{0, \Sigma \delta t}(X_{t-\delta t}).$$

□

Ainsi, en posant $\tilde{I}_t(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x} + \mathbf{u}, t)$ et $g_\sigma(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; 0, \sigma^2 \mathbb{I}_n)$ et en choisissant le modèle d'incertitude donné par l'équation (5.4), l'OFCE stochastique (5.3) devient :

$$\mathbb{E}[dI(X_t, t)|X_{t-1}] = 0 = g_\sigma * (\partial_t \tilde{I}_t + \nabla \tilde{I}_t \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sigma \Delta \tilde{I}_t)(X_t). \quad (5.9)$$

L'incertitude sur le mouvement estimé est évaluée à partir des relations

$$d \langle I(X_t), I(X_t) \rangle = \sigma(X_t, t) \|\nabla I(X_t, t)\|^2$$

et

$$d \langle I(X_t), I(X_t) \rangle \approx (I(X_t, t) - I(X_{t-1}, t-1))^2,$$

ce qui donne, en prenant l'espérance de $d \langle I(X_t), I(X_t) \rangle$, une estimation de la variance d'incertitude comme étant :

$$\sigma(X_t, t) = \frac{\mathbb{E}[(I(X_t, t) - I(X_{t-1}, t-1))^2]}{\mathbb{E}[\|\nabla I(X_t, t)\|^2]} \quad (5.10)$$

Cette estimation par flot optique est intégrée dans un cadre multi-échelles : une première estimation grande échelle est faite avec un fort paramètre de lissage gaussien qui donne un premier déplacement estimé de l'image, puis l'estimation suivante est faite à une plus petite échelle après recalage de l'image par ce déplacement et estime donc l'anomalie de déplacement après le recalage de l'image.

À une échelle de lissage λ donné, l'estimation du déplacement résiduel par l'estimateur de l'estimateur de Lucas-Kanade se fait par minimisation de la fonctionnelle

$$\min_{\mathbf{u}} g_\lambda * g_\sigma * \left(\nabla I \cdot \mathbf{u} + \partial_t I + \frac{1}{2} \sigma \Delta I \right)^2. \quad (5.11)$$

appliqué à l'image recalée à la même échelle.

Comme pour l'estimateur de Lucas-Kanade classique, cela mène, en minimisant au sens des moindres carrés, à la relation :

$$\left(g_\lambda * g_\sigma * \begin{bmatrix} I_x I_x & I_x I_y \\ I_y I_x & I_y I_y \end{bmatrix} \right) \mathbf{u} = -g_\lambda * g_\sigma * \left(\frac{1}{2} \sigma \Delta I + \partial_t I \right) \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

L'algorithme de flot optique de Lucas-Kanade stochastique est donné par l'algorithme 7.

Algorithme 7 Flot optique de Lucas-Kanade stochastique

1. Initialisation :

- Résolution initiale : $l = L$ et $\lambda^l = \lambda^L$;
- $\tilde{I}(X_{t-1}, t) = I(X_{t-1}, t)$;
- $\mathbf{u} = 0$.

2. Estimation à l'échelle l :

- (a) initialisation : $n = 1$, $\mathbf{u}^n = 0$, fixer l'incertitude initiale σ^0 ;
- (b) estimer l'incertitude σ^n par la formule 5.10 ;
- (c) estimer l'anomalie de vitesse \mathbf{u}^n par inversion du système 5.12 à l'échelle λ^l ;
- (d) mettre à jour le déplacement global estimé : $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^n$;
- (e) recalculer l'image $I(X_t, t) : \tilde{I}(X_{t-1}, t) = I(X_{t-1} + \mathbf{u}, t)$;
- (f) incrémenter n et reprendre au (b) jusqu'à convergence de cette échelle ($|\mathbf{u}^n| < \epsilon$).

3. Passer à l'échelle inférieure : $\lambda^l = \alpha\lambda^{l+1}$ où α est le pas (géométrique) entre deux échelles successives.

4. Continuer : tant que l'échelle λ^l est plus grande que l'échelle minimale spécifiée par l'utilisateur.

5.3 Schéma d'assimilation

Le schéma d'assimilation présenté ici s'appuie sur un filtre particulière similaire au WEnKF. Cependant la loi de proposition sera donnée ici par plusieurs filtres de Kalman d'ensemble dont le rôle sera d'incorporer par le biais d'analyses à des échelles de plus en plus précises l'anomalie de vitesse par rapport à l'échelle précédente. Le cadre multi-échelles de l'assimilation est similaire à celui effectué par la méthode de flot optique de Lucas-Kanade stochastique.

Plus précisément, après l'étape de prédiction pour chaque particule, une boucle d'assimilation est mise en place en effectuant une étape de Kalman d'ensemble sur les anomalies par rapport à l'échelle précédente, en injectant avec une observation représentant l'anomalie de vitesse entre l'image de référence et l'image recalculée par toutes les analyses déjà réalisées à cette échelle. Notons que dans la mesure où à chaque échelle une observation différente est introduite, le gain de Kalman associé dépend également de l'échelle considérée.

Une pondération et un rééchantillonnage classiques interviennent après cette étape d'analyse de Kalman multi-échelles.

L'algorithme 8 donne le déroulement précis d'une étape d'assimilation multi-échelles selon ce procédé, et le schéma 5.1 illustre les différentes étapes de la méthode.

Algorithme 8 Filtre de Kalman d'ensemble pondéré multi-échelles

1. Prédiction : Chaque particule est portée au temps suivant à travers le modèle dynamique puis un bruit gaussien lui est appliqué.

$$\mathbf{x}_k^{\text{f},(i)} = \mathbf{M}_k(\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) + \eta_k$$

2. Corrections de Kalman :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_k^{\text{a},L+1} &= 0; \\ \mathbf{x}_k^{\text{f},L+1} &= \mathbf{x}_k^{\text{f}}; \end{aligned}$$

for $l = L \rightarrow l_0$:

- calculer l'image recalée $\tilde{I}_k^l(X_{k-1}) = I(X_{k-1} + \mathbf{u}(\bar{\xi}_k^{\text{a},l+1}), k)$;
- obtenir l'anomalie de vitesse donnée par l'estimateur de Lucas-Kanade stochastique entre les images I_{k-1} et \tilde{I}_k^l et calculer la vorticité correspondante $\tilde{\xi}_k^l$;
- obtenir la matrice de covariance d'observation \mathbf{R}^l à l'échelle l ;
- tirer N échantillons de bruit $\varepsilon_k^l \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}^l)$;
- calculer l'anomalie de l'ensemble à l'échelle l :
 - $\xi_k^{\text{f},l} = \xi_k^{\text{f},l+1} - \bar{\xi}_k^{\text{a},l+1}$;
 - $\xi_k^{\text{a},l} = \xi_k^{\text{a},l+1} + \xi_k^{\text{f},l} + \mathbf{K}_k^l(\tilde{\xi}_k^l + \varepsilon_k^l - \mathbf{H}_k \xi_k^{\text{f},l})$;
 - $\bar{\xi}_k^{\text{a},l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_k^{\text{a},l}$;

end for

$$\mathbf{x}_k^{\text{a}} = \xi_k^{\text{a},l_0}$$

3. Pondération : Chaque particule est pondérée selon sa vraisemblance $w_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{\text{a},(i)})$.

4. Rééchantillonnage : Les particules sont rééchantillonnées afin de recentrer le nuage dans les zones d'intérêt.

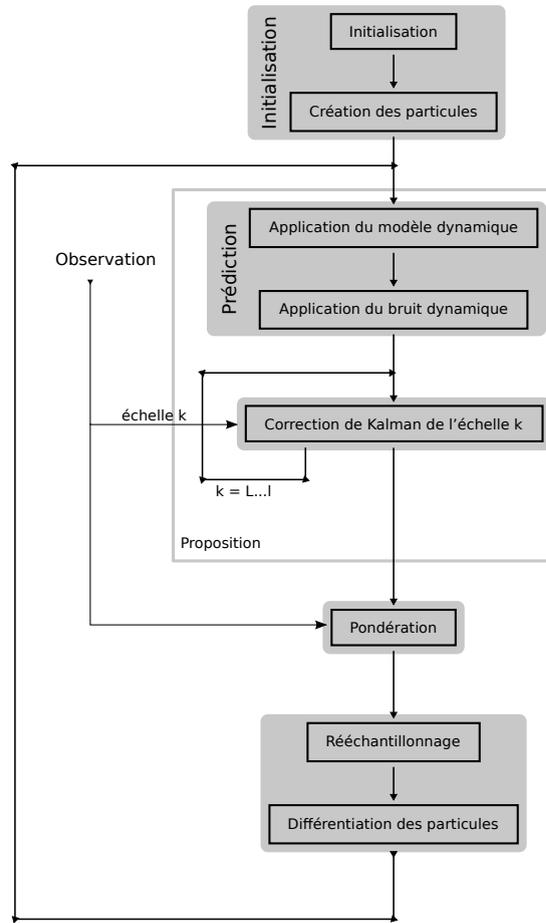


FIGURE 5.1 – Schéma de l'assimilation multi-résolution

5.4 Résultats

Le chapitre 6 présentera les résultats de cette méthode ; les résultats ici se basent sur la séquence 2D synthétique de test décrite en section 6.3. Sur la figure 5.2 donnant l'erreur quadratique moyenne de différentes méthodes, on remarque que le caractère multi-échelles améliore sensiblement les résultats par rapport à l'assimilation mono-échelle sur une séquence d'images synthétiques d'un écoulement généré par simulation numérique directe et permettant de tester avec une vérité terrain. À titre de comparaison, d'autres méthodes sont également présentées sur cette figure : les flots optiques de Yuan et al. [2007], de Héas et al. [2009], et de Lucas-Kanade stochastique multi-échelles présenté dans la section 5.2 de ce chapitre, ainsi que l'assimilation variationnelle effectuée par Papadakis and Mémin [2007] (assimilation non-multi-échelles).

5.5 Perspectives et conclusion

Ce schéma d'assimilation introduit dans ce chapitre illustre un couplage par échelle de l'opérateur d'observation et de l'étape d'analyse de Kalman. Sur une séquence de test de particules ensemençées, cette stratégie abaisse significativement l'erreur quadratique

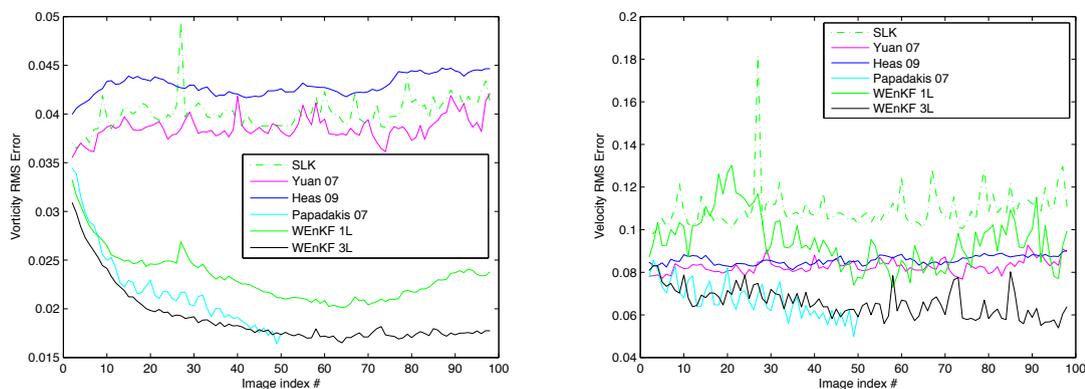


FIGURE 5.2 – RMSEs de comparaison des assimilations 1L et 3L avec l’assimilation de Papadakis and Mémin [2007] et les flots optiques de Yuan et al. [2007], Héas et al. [2009] et Corpetti and Mémin [2011].

moyenne de reconstruction. Des tests sur une expérience réelle montrent qualitativement un gain significatif sur le nombre d’échelles reconstruites.

Cette technique pourrait probablement révéler encore plus ses avantages sur des images à fine résolution d’écoulements fortement turbulents. Une autre piste de recherche serait de repenser ce schéma en travaillant nativement dans des espaces multi-résolutions, comme par exemple les ondelettes. Et ce schéma pourrait également être un peu modifié en intégrant l’étape de pondération à chaque échelle, avec une pondération adaptée à l’échelle en question (cela sera présenté dans un contexte différent dans la section 9.2).

Chapitre 6

Résultats

Ce chapitre présente les résultats détaillés correspondant aux mécanismes décrits dans les chapitres précédents. Nous commençons par préciser les mesures d'erreur, tant quantitatives que qualitatives sur lesquelles nous nous appuyerons. Nous présentons ensuite la séquence synthétique utilisée pour une grande partie des caractéristiques testées dans cette thèse. Ces caractéristiques sont présentées dans les sections suivantes : bruit auto-similaire, rééchantillonnage mixte, assimilation multi-échelles, données manquantes. Sont ensuite présentées deux séquences réelles : un film issu d'une modélisation expérimentale d'un film de savon 2D et un film de température de surface de l'océan issu du satellite MetOp.

6.1 Qualification des erreurs

L'estimation de la qualité d'un résultat obtenu n'est pas évidente, et l'observation de différents indicateurs donne une vision complémentaire des différentes facettes d'un résultat.

Dans la suite, les résultats seront estimés contre des mesures quantitatives et qualitatives. Parmi les mesures quantitatives, on utilisera : la Root Mean Square Error (RMSE) à un temps donné ou moyennée sur plusieurs temps pour une même exécution, la RMSE moyenne sur plusieurs exécutions identiques ainsi que l'écart-type sur plusieurs exécutions de la RMSE. Dans les mesures qualitatives, on aura le spectre d'énergie et ses dérivés comme le spectre d'erreur de l'énergie.

6.1.1 Erreur quadratique moyenne

Soit $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_i^l)_{i=1\dots n}^{l=1\dots d}$ un champ de vecteurs de dimension d discretisé en n points et estimant une vérité terrain \mathbf{G} de même nature. La Root Mean Square Error (RMSE) de l'estimation \mathbf{S} par rapport à la vérité terrain \mathbf{G} est définie par :

$$RMSE(\mathbf{S}) = \sqrt{\sum_{l=1}^d \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{S}_i^l - \mathbf{G}_i^l)^2}.$$

Dans le cas qui nous intéressera par la suite d'une estimation probabiliste, le vecteur \mathbf{S}_i sera la moyenne des particules (pondérée le cas échéant). Appliquée à des images d'écoulements fluides, cette mesure d'erreur prend surtout en compte les grandes échelles

du fluide et les petites échelles ne contribuent que très peu en proportion dans cette mesure : l'énergie est proportionnellement beaucoup plus importante aux grandes échelles qu'aux petites échelles. Une RMSE faible indiquera donc que les grandes échelles du fluide sont correctement reconstruites, mais ne dit rien sur la reconstruction des petites échelles.

Lorsque la vérité terrain n'est pas connue, on pourra la remplacer par la meilleure approximation qu'on en a, à savoir les observations. Dans ce cas, la RMSE obtenue n'est pas à considérer comme absolue, mais seulement comme un indicateur. La RMSE par rapport à l'observation sera utilisée dans le cas des séquences réelles, à savoir la SST dans l'océan Pacifique et la vitesse de surface en mer d'Iroise dans le prochain chapitre.

6.1.2 Analyse fréquentielle

Pour des fluides, où les différentes échelles sont très liées entre elles, il est important de connaître la contribution de chaque échelle dans le résultat. Le spectre d'énergie permet de visualiser la répartition de l'énergie selon les échelles.

À partir de la vitesse $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ du fluide et de sa transformé de Fourier $\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{k})$, le spectre d'énergie est donné par

$$E_{\mathbf{u}(t)}(k_r) = \frac{1}{2} \int_{\|\mathbf{k}\|=k_r} \|\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{k})\|^2 d\mathbf{k} \quad (6.1)$$

et donne l'énergie moyenne par échelle. Cette information caractérise complètement la répartition de l'énergie dans le cas isotrope, contrairement au cas anisotrope où l'information d'orientation est perdue dans l'opération d'intégration. L'énergie totale de l'écoulement est ensuite donnée par l'intégrale sur toutes les échelles :

$$E_{\mathbf{u}(t)} = \int_0^\infty E_{\mathbf{u}(t)}(k_r) dk_r = \int_0^\infty E_{\mathbf{u}(t)}(k_r) k_r d(\log k_r). \quad (6.2)$$

La quantité $E_{\mathbf{u}(t)}(k_r) k_r$ est appelée « quantité d'énergie par incrément logarithmique », et la deuxième représentation est appelée « représentation en mode échelle » du spectre. On affichera le spectre d'énergie ainsi que les autres spectres d'énergie dans un repère log-log.

De façon connexe au spectre d'énergie, on s'intéressera également au spectre d'erreur (d'énergie) où l'on compare la vitesse obtenue \mathbf{u} à la vitesse vraie \mathbf{u}^t :

$$E_{\mathbf{u}(t), \mathbf{u}^t(t)}(k_r) = \int_{\|\mathbf{k}\|=k_r} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{u}}(t, \mathbf{k}) - \hat{\mathbf{u}}^t(t, \mathbf{k})\|^2 d\mathbf{k}. \quad (6.3)$$

On utilisera également le « spectre d'erreur normalisé » pour visualiser l'erreur en énergie à chaque échelle relativement à la vérité terrain :

$$E_{\mathbf{u}(t), \mathbf{u}^t(t)}^{\text{norm}}(k_r) = \frac{E_{\mathbf{u}(t), \mathbf{u}^t(t)}(k_r)}{E_{\mathbf{u}^t(t)}(k_r)}. \quad (6.4)$$

Avec cette dernière mesure, on pourra apprécier la qualité de la reconstruction. Ce type de mesure n'a été toutefois que peu utilisé et est présenté sur la figure 6.10 montrant de façon fine l'influence du nombre de particules sur la qualité de reconstruction.

6.2 Chaîne d'obtention des résultats

Un certain nombre de résultats devant être obtenus, il a été nécessaire d'organiser le processus de production de résultats. De plus, chacune des méthodes testées a ses propres spécificités et paramètres qu'il convient, bien sûr, d'intégrer dans le code, mais aussi de permettre les changements et évolutions possibles des méthodes et paramètres. Il est par ailleurs souhaitable de visualiser et comparer assez rapidement les différents résultats.

Dans cette optique, les données d'entrées et résultats caractéristiques de sortie ont été centralisés dans une *feuille de calcul* d'un tableur (OpenOffice.org/LibreOffice). La feuille se présente sous la forme où chaque ligne (sauf en-tête) représente une exécution et où les colonnes représentent :

- soit des paramètres d'entrée, qui peuvent être des nombres ou des chaînes de caractères, et qui sont nommés et explicités dans les lignes d'en-tête,
- soit des résultats de sortie (RMSE, temps d'exécution, etc.),
- soit des métadonnées ou calculs divers, par exemple des indications que plusieurs exécutions doivent être regroupées ou des moyennes et autres statistiques sur des jeux d'exécutions similaires.

Ensuite, la plupart des résultats devant être exécutés sur la *grille de calcul* du centre Inria Rennes, nommée *igrida*, il est nécessaire de convertir les données d'entrées dans un format lisible par Matlab. Cela a été fait par un script Matlab qui lit la feuille de calcul et les enregistre dans un fichier Matlab, fichier qui sera ensuite transféré sur la grille de calcul et qui servira de fichier de paramètres pour le code. De part l'architecture d'igrida, plusieurs résultats peuvent être exécutés en parallèle, dans la limite de la charge attribuée à l'utilisateur.

Les résultats sont ensuite écrits dans un *fichier de résultat* NetCDF qui comprend en outre les paramètres d'entrée, y compris la graine (*seed*) utilisée par Matlab et la version du code utilisée, pour permettre un suivi et une concordance dans l'archivage des résultats ainsi qu'une possible ré-exécution future. L'inscription des paramètres dans le fichier de résultat permet également de déboguer plus facilement le code. Enfin, la centralisation des résultats dans la feuille de calcul se fait au moyen de macros OpenOffice.org/LibreOffice en Python et Basic qui récupèrent les résultats et paramètres inscrits dans le fichier de résultat (les paramètres sont lus dans un but de cohérence des résultats dans la feuille de calcul), puis les affiche ligne par ligne (1 exécution équivaut à une ligne) avec un lien menant vers la séquence résultat pour visualisation ; lorsque plusieurs exécutions sont identiques, il est possible d'utiliser les fonctions du tableur pour obtenir des statistiques.

6.3 Séquence synthétique

La suite de ce chapitre se concentrera sur deux séquences d'images que nous présentons ci-après pour mieux visionner la dynamique que l'on cherchera à reconstruire, même si des images statiques sont assez peu parlantes par rapport à une séquence vidéo. Ces deux séquences sont issues d'une simulation DNS (*Direct Numerical Simulation*) périodique en espace d'un fluide en deux dimensions avec un forçage extérieur (inconnu du point de vue de l'assimilation) et permettant de maintenir la turbulence ; on aura donc à disposition le champ de vitesse vrai et il sera possible de comparer les résultats obtenus par assimilation à cette référence. L'utilisation d'une DNS permet de simuler correctement une large gamme d'échelles du fluide.

À partir de cette simulation ont été créées deux visualisations : la première est ensemencée de particules déplacées par le fluide et la seconde montre l'évolution d'un traceur passif scalaire. La séquence de particules ensemencées est plus facile à reconstruire car il est plus facile de suivre de petites particules, alors que la séquence scalaire comporte de plus grandes zones où le gradient de l'image est nul, ce qui empêche d'extraire de l'information provenant de ces zones. Le phénomène est très marqué sur les 20 premières images de la séquence, aussi celles-ci ont été écartées puisque l'assimilation n'aurait pas beaucoup amélioré l'estimation. La grande majorité des résultats présentés provient de l'assimilation de la séquence scalaire, celle-ci étant plus proche des séquences vidéo trouvées dans un scénario réel.

6.4 Bruit autosimilaire

Sur la séquence scalaire, l'influence par rapport à l'échelle de coupure est présentée sur le tableau 6.1 et sur la figure 6.4.

La première observation que l'on fait est que le « microbruit » (voir la section 3.1.2 sur le modèle dynamique stochastique) a un effet systématiquement négatif sur cette assimilation. La raison sous-jacente à cette observation n'a pas pu être précisément élucidée, mais l'explication suivante a été avancée : la dynamique de référence avec un forçage (inconnu) est probablement mieux captée par un modèle discret conditionnellement gaussien que par un modèle continu non gaussien, du fait que la séquence a été créée de façon déterministe et la composante stochastique ne « sert » qu'à prendre en compte et à compenser le forçage inconnu de la séquence. De plus, ce mode nécessitant beaucoup plus de tirages aléatoires (en moyenne d'un facteur de 10), le temps de calcul est significativement augmenté (d'un facteur de 3). En conséquence, ce mode n'a pas été très utilisé.

En seconde observation, dans chaque catégorie d'expériences présentées dans le tableau et sur les graphiques, on remarque que la RMSE est plus forte pour les assimilations bruitées dans les plages (0,5 - 9), (0,5 - 12) et (0,5 - 13) que dans les plages (0,5 - 10) et (0,5 - 11). La plupart des autres assimilations auront donc un bruit dynamique spécifié dans la plage (0,5 - 11). Pour résumer cette observation, on peut dire dans ce cas que « descendre la perturbation aléatoire fortement vers les petites échelles est négatif, mais ne pas la descendre suffisamment l'est également ».

En troisième observation, un écart-type de bruit dynamique de 0,001 donne des résultats sensiblement moins bons que ceux dont l'écart-type est 0,01. Cela est probablement dû à un rapport beaucoup trop faible entre les écarts-type du bruit dynamique et du bruit d'observation (ce dernier est fixé à 1). Une perturbation trop peu importante engendre une trop faible variabilité dans les particules proposées à l'issue de l'étape de prédiction.

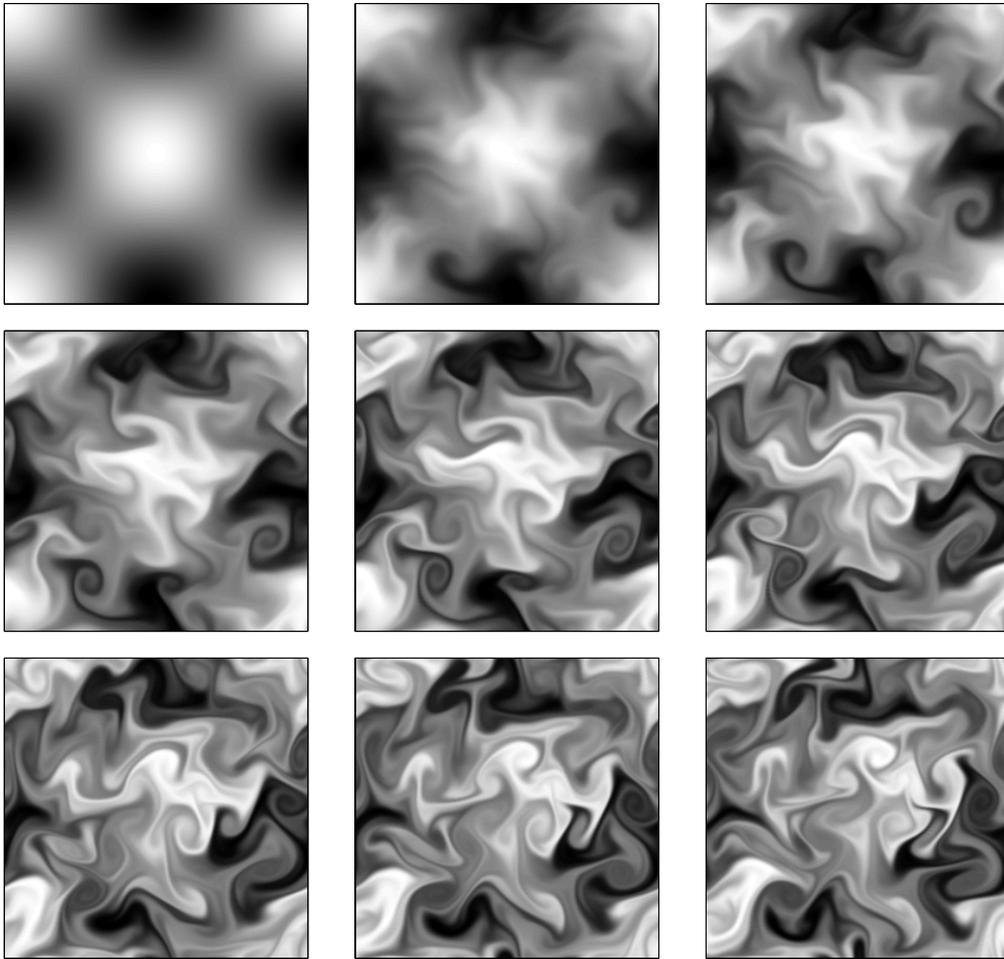


FIGURE 6.2 – Simulation DNS 2D du déplacement d'un traceur scalaire passif distribué initialement selon la figure en haut à gauche ($t = 0$).

Il est affiché ici une image sur dix, de $t = 0$ à $t = 81$. Cette séquence servira de référence pour l'assimilation sur une centaine de pas de temps.

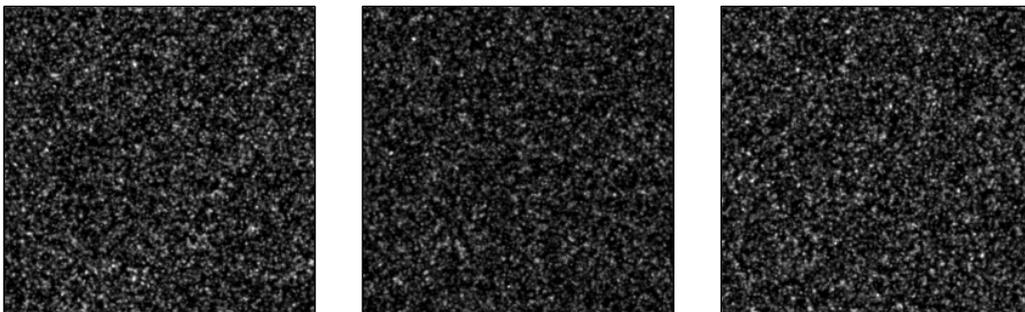


FIGURE 6.3 – Simulation DNS 2D; le fluide est iciensemencé de particules de petite taille pour tracer le mouvement ($t = 0, 50, 100$).

Une telle représentation statique des images ne permet pas de visualiser facilement le mouvement, mais une vidéo illustre clairement le déplacement de chaque particule blanche (mis à part le fait qu'il est difficile à l'œil nu de suivre le grand nombre de particules).

Enfin, un bruit dont le spectre comporte deux pentes différentes (3^e section du tableau) n'est pas meilleur (dans les réglages testés) qu'un bruit dont le spectre comporte une seule pente, même si le bruit « à double pente » présente un spectre plus proche de la vérité terrain. On peut émettre comme hypothèse à cela que l'assimilation corrige suffisamment les grandes échelles et qu'il est donc indifférent de les bruiteur ou pas ; en ce sens, on cherchera plutôt à bruiteur les échelles moyennes afin d'offrir à l'assimilation une variabilité assez forte afin qu'elle puisse mieux corriger ces échelles. Dans l'idéal, on aimerait descendre vers des échelles beaucoup plus fines mais, à ces échelles, l'assimilation se heurte au problème de l'ouverture et manque donc de données pertinentes.

Les résultats relatifs au bruit autosimilaire sont donnés en pages 86 et 87 et un exemple des résultats d'assimilation est donné en page 90.

6.5 Rééchantillonnage mixte

Le rééchantillonnage mixte a été présenté dans la section 3.3.3. Pour rappel : lors du rééchantillonnage, $x\%$ de particules sont tirées selon un tirage multinomial et $(100 - x)\%$ selon une loi uniforme.

Le tableau 6.2 présente les résultats de l'assimilation sur la séquence de scalaire passif présentée dans la section 6.3 en fonction du degré de mixité du rééchantillonnage, du nombre de particules, ainsi que de la méthode (WETKF vs ETKF d'une part, et bruit autosimilaire vs bruit corrélé d'autre part). Le schéma d'assimilation est le WETKF mono-échelle. La figure 6.5 illustre le profil de décroissance de la RMSE selon ces mêmes critères. Enfin, la figure 6.6 montre l'assimilation de la séquence à certains instants, illustrant visuellement l'influence de l'assimilation au cours du temps.

On peut constater que le rééchantillonnage mixte a une petite influence, bien qu'il soit difficile de dégager de réelles observations systématiques pour conclure à un avantage positif ou négatif de la méthode.

Son influence semble plus bénéfique pour le bruit d'Evensen, sans toutefois atteindre les niveaux de performance obtenus pour le bruit autosimilaire quelque soit le type de rééchantillonnage considéré.

Les résultats relatifs au rééchantillonnage dual sont donnés en pages 88 et 89 et un exemple des résultats d'assimilation est donné en page 90 (extrait du jeu de tests fait autour du rééchantillonnage dual).

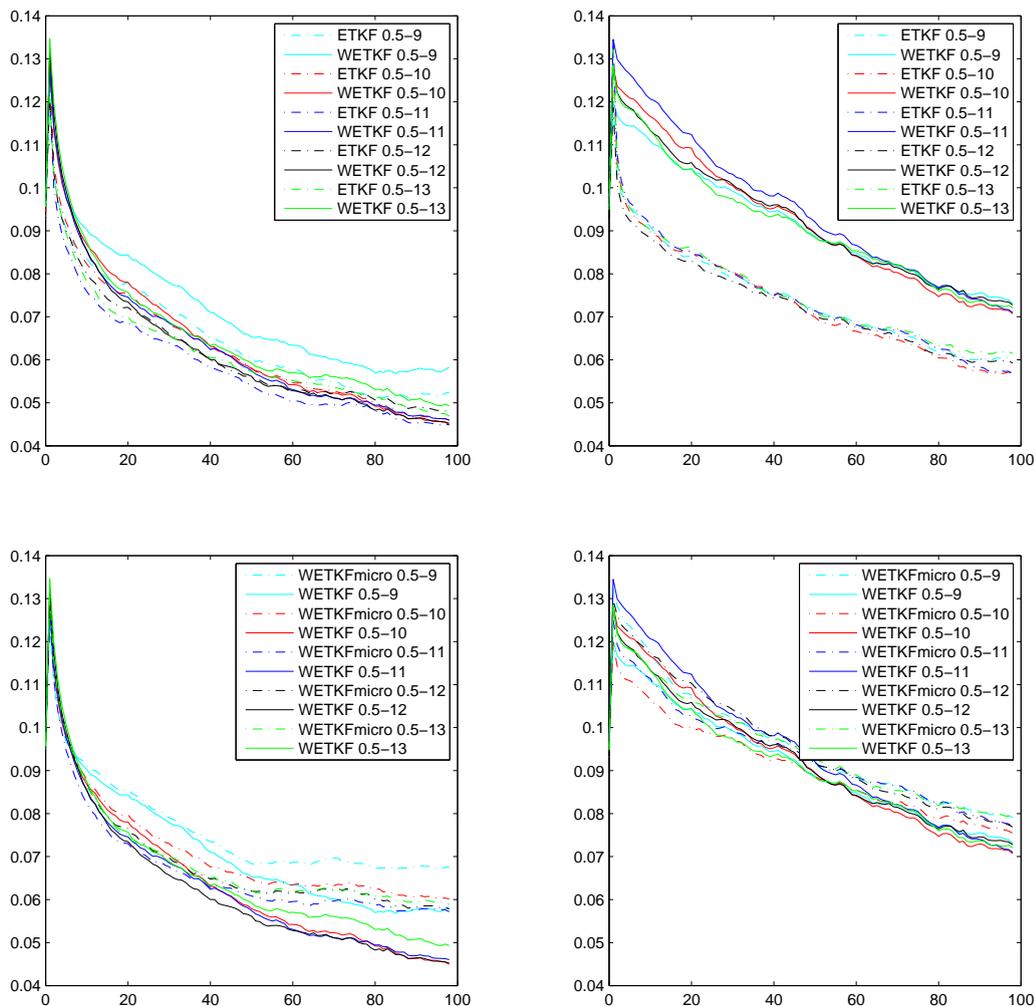


FIGURE 6.4 – Graphique des RMSEs de comparaison de l’influence du bruit dynamique, lié au tableau 6.1, comparant les échelles de coupure, le mode d’application du bruit (à chaque pas de temps dynamique ou à chaque pas de temps d’assimilation) et la méthode (ETKF ou WETKF).

Les graphiques de gauche correspondent à un bruit autosimilaire à une seule pente, ceux de droite à un bruit autosimilaire à deux pentes. Ceux du haut comparent des assimilations par ETKF et WETKF (rééchantillonnage dual 80 %), tandis que ceux du bas comparent des WETKF avec bruit à chaque temps d’assimilation par rapport à un bruit à chaque pas dynamique (bruit « micro »). On remarque que l’application à chaque pas dynamique n’est pas bénéfique sur le résultat, et qu’un bruit à double pente non plus, même si ce dernier correspond parfaitement aux données réelles. Pour les échelles de coupure, les échelles médianes sont préférables. Dans le meilleur mode (haut gauche — pente simple, bruit aux temps d’assimilation), le WETKF et l’ETKF ne se distinguent pas vraiment.

Type	Écart-type	Échelles de coupure	RMSE 98
ETKF AS	0,01	0,5 - 9	0,0525
WETKF AS	0,01	0,5 - 9	0,0585
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 9	0,0696
ETKF AS	0,01	0,5 - 10	0,0464
WETKF AS	0,01	0,5 - 10	0,0455
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 10	0,0622
ETKF AS	0,01	0,5 - 11	0,0452
WETKF AS	0,01	0,5 - 11	0,0462
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 11	0,0591
ETKF AS	0,01	0,5 - 12	0,0475
WETKF AS	0,01	0,5 - 12	0,0453
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 12	0,0593
ETKF AS	0,01	0,5 - 13	0,0473
WETKF AS	0,01	0,5 - 13	0,0499
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 13	0,0602
ETKF AS	0,001	0,5 - 9	0,0613
WETKF AS	0,001	0,5 - 9	0,0760
WETKF AS micro	0,001	0,5 - 9	0,0822
ETKF AS	0,001	0,5 - 10	0,0587
WETKF AS	0,001	0,5 - 10	0,0739
WETKF AS micro	0,001	0,5 - 10	0,0794
ETKF AS	0,001	0,5 - 11	0,0589
WETKF AS	0,001	0,5 - 11	0,0743
WETKF AS micro	0,001	0,5 - 11	0,0805
ETKF AS	0,001	0,5 - 12	0,0605
WETKF AS	0,001	0,5 - 12	0,0757
WETKF AS micro	0,001	0,5 - 12	0,0808
ETKF AS	0,001	0,5 - 13	0,0630
WETKF AS	0,001	0,5 - 13	0,0749
WETKF AS micro	0,001	0,5 - 13	0,0819
ETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 9	0,0534
WETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 9	0,0563
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 5 - 9	0,0696
ETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 10	0,0473
WETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 10	0,0486
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 5 - 10	0,0614
ETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 11	0,0468
WETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 11	0,0469
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 5 - 11	0,0500
ETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 12	0,0491
WETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 12	0,0479
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 5 - 12	0,0607
ETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 13	0,0476
WETKF AS	0,01	0,5 - 5 - 13	0,0476
WETKF AS micro	0,01	0,5 - 5 - 13	0,0615

TABLE 6.1 – Test du bruit autosimilaire sur la séquence scalaire avec 400 particules pour différentes valeurs de variance et d'échelles de coupure et deux modes de bruit. Le critère d'erreur est la RMSE à la 98^e assimilation.

L'échantillonnage initial a été fait avec le bruit d'Evensen d'écart-type 1. Dans le cas du WETKF, le rééchantillonnage est fait avec un rééchantillonnage dual à 80 % et un déplacement des particules par un bruit autosimilaire d'écart-type 0,001. Le bruit d'observation a un écart-type de 1. Le terme « micro » signifie que le bruit a été rajouté à chaque pas de temps dynamique, voir la section 3.1.2 sur le modèle dynamique stochastique. L'échelle de coupure indiquée correspond à une fraction d'image en partant de 0 (5 signifie $1/(5 + 1)^e$ d'image).

Type	Nombre de particules	RMSE 98 AS	RMSE 98 EV
ETKF	10	0,1441	0,1972
WETKF 60 %	10	0,1420	-
WETKF 80 %	10	0,1454	0,2074
WETKF 100 %	10	0,1437	-
ETKF	40	0,1062	0,1143
WETKF 50 %	40	0,1021	0,1053
WETKF 80 %	40	0,1071	0,1074
WETKF 100 %	40	0,1019	0,1114
ETKF	100	0,0623	0,0844
WETKF 50 %	100	0,0632	0,0700
WETKF 80 %	100	0,0649	0,0719
WETKF 100 %	100	0,0647	0,0734
ETKF	200	0,0496	0,0739
WETKF 50 %	200	0,0500	0,0627
WETKF 80 %	200	0,0486	0,0720
WETKF 100 %	200	0,0527	0,0627
ETKF	400	0,0466	0,0562
WETKF 50 %	400	0,0464	0,0600
WETKF 80 %	400	0,0458	0,0547
WETKF 100 %	400	0,0455	0,0559

TABLE 6.2 – Test du rééchantillonnage dual : x % de particules issues d'un rééchantillonnage multinomial et $(100 - x)$ % particules issues d'un tirage aléatoire indépendant du poids de la particule. Dans le cas d'un ETKF simple, il n'y a pas de rééchantillonnage. Le critère d'erreur est la RMSE à la 98^e assimilation.

L'échantillonnage initial a été fait avec le bruit d'Evensen d'écart-type 1. Dans le cas du WETKF, le déplacement des particules durant la phase de rééchantillonnage se fait par un bruit autosimilaire d'écart-type 0,001. Le bruit d'observation a un écart-type de 1 et le bruit dynamique un écart-type de 0,01.

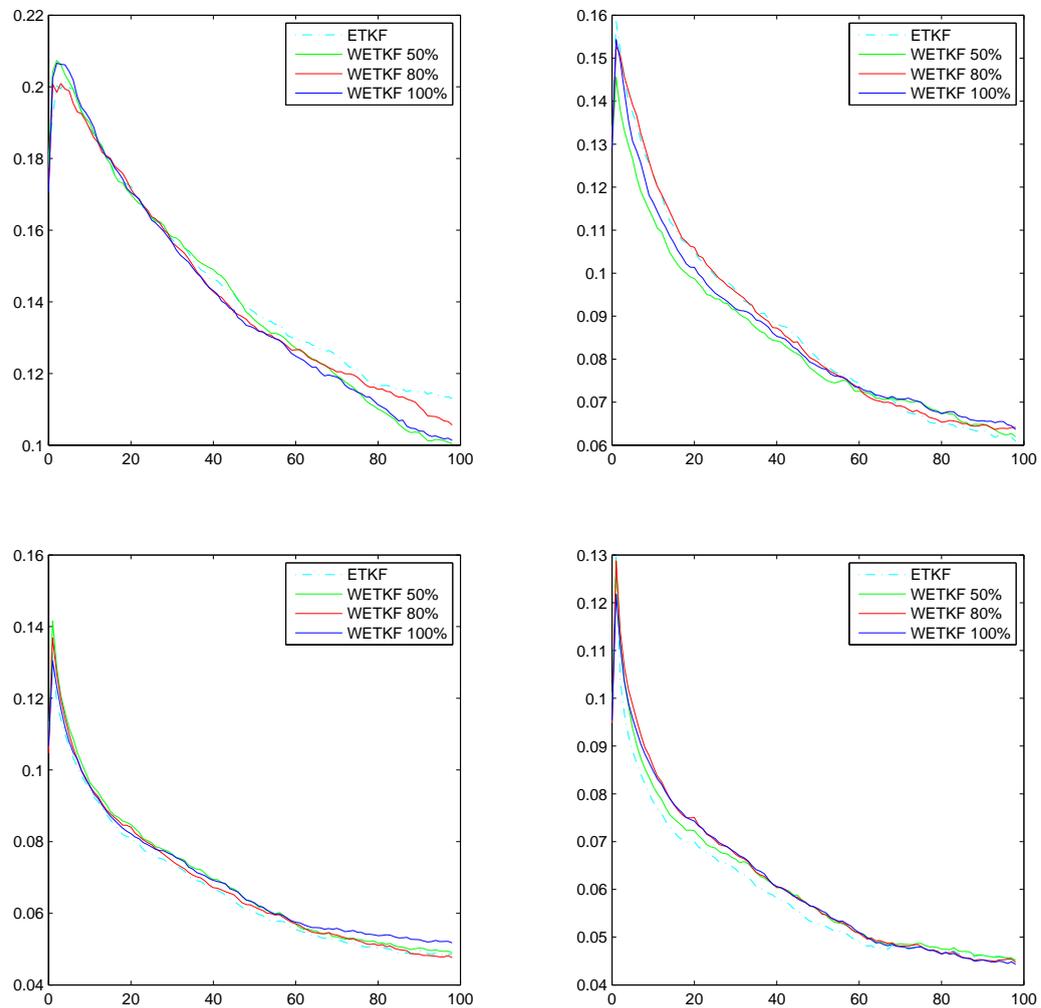


FIGURE 6.5 – RMSEs de l'influence de la proportion du rééchantillonnage mixte (la proportion indiquée est celle du rééchantillonnage multinomial) sur la séquence scalaire avec différents nombres de particules : 40, 100, 200, 400.

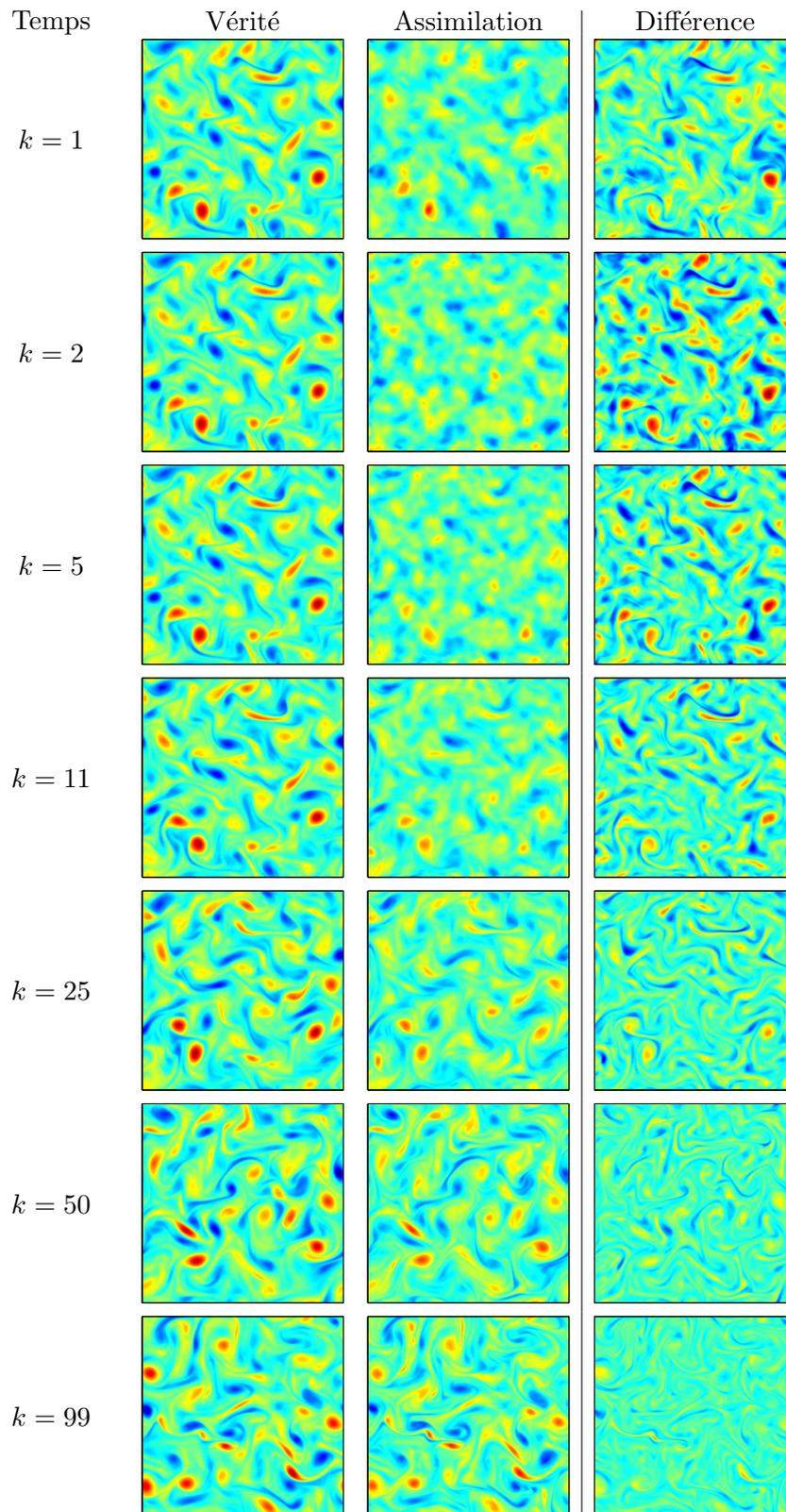


FIGURE 6.6 – Assimilation de la séquence DNS scalaire.

Cette séquence correspond aux paramètres WETKF 200 particules, bruit autosimilaire, rééchantillonnage à 80 % issu du jeu de test de l'influence du rééchantillonnage dual (tableau 6.2).

6.6 Assimilation multi-échelles

La figure 6.8 présente, pour la séquence d'écoulement turbulent DNS 2D ensemencé de particules, une comparaison visuelle des résultats de l'assimilation multi-échelles avec ceux obtenus par différentes méthodes : Yuan et al. [2007] (flot optique), Héas et al. [2009] (flot optique), le flot optique de Lucas-Kanade stochastique multi-échelles de Corpetti and Mémin [2011], Papadakis and Mémin [2007] (assimilation variationnelle). Le graphique 6.7 présente la RMSE associée à ce résultat comparé aux autres méthodes pré-citées.

On peut noter que la méthode multi-échelles est d'un niveau de performance comparable à une technique d'assimilation variationnelle proposée dans la thèse de Nicolas Papadakis. Cette technique incorpore directement la donnée image et ne s'appuie pas sur une mesure intermédiaire comme dans notre cas. Comparé à une assimilation mono-échelle (courbe verte en trait plein sur la figure 6.7, il est notable que c'est le caractère multi-échelles qui permet d'atteindre un niveau comparable à cette assimilation variationnelle. On remarque également que l'assimilation permet d'abaisser nettement la RMSE des observations en vorticité.

En observant les résultats en vitesse (figure 6.7 à droite), on voit que l'assimilation n'améliore qu'à la marge les observations de mouvement. Une assimilation multi-échelles permet d'améliorer significativement les résultats d'assimilation que ce soit en vitesse ou en vorticité en introduisant des observations de l'anomalie de vitesse entre deux échelles consécutives. Ces observations vivent à des échelles plus fines que celles obtenues à un niveau unique d'échelles. Les mesures image permettent d'accéder directement à ces fines échelles avec cependant une difficulté supplémentaire liée au traitement des zones d'intensité lumineuse homogène. On peut remarquer également que l'estimateur local de Lucas et Kanade stochastique délivre des résultats de vorticité d'excellente facture puisque ceux-ci sont à un niveau de performance comparable à deux méthodes d'estimation dense spécifiquement dédiées aux écoulements fluides. Ces méthodes ont des performances de meilleure qualité en vitesse mais au prix d'un effort calculatoire nettement plus conséquent.

Ces bons résultats sur la séquence synthétique nous ont encouragé à tester cette méthode sur une séquence réelle. La section 6.8 présente les résultats obtenus sur une séquence expérimentale réelle.

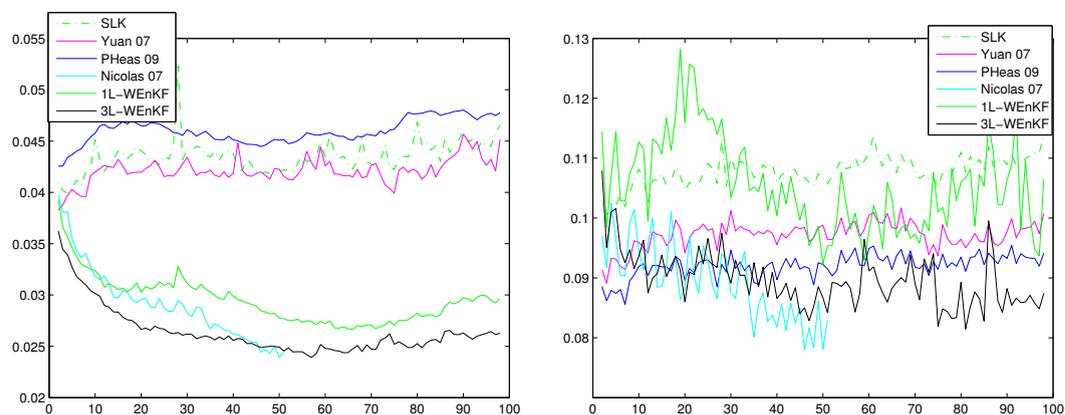


FIGURE 6.7 – RMSE en vorticité (  gauche) et en vitesse (  droite) de différentes méthodes : Corpetti and Mémin [2011], Yuan et al. [2007], Héas et al. [2009], Papadakis and Mémin [2007], WEnKF-1L et WEnKF-3L.

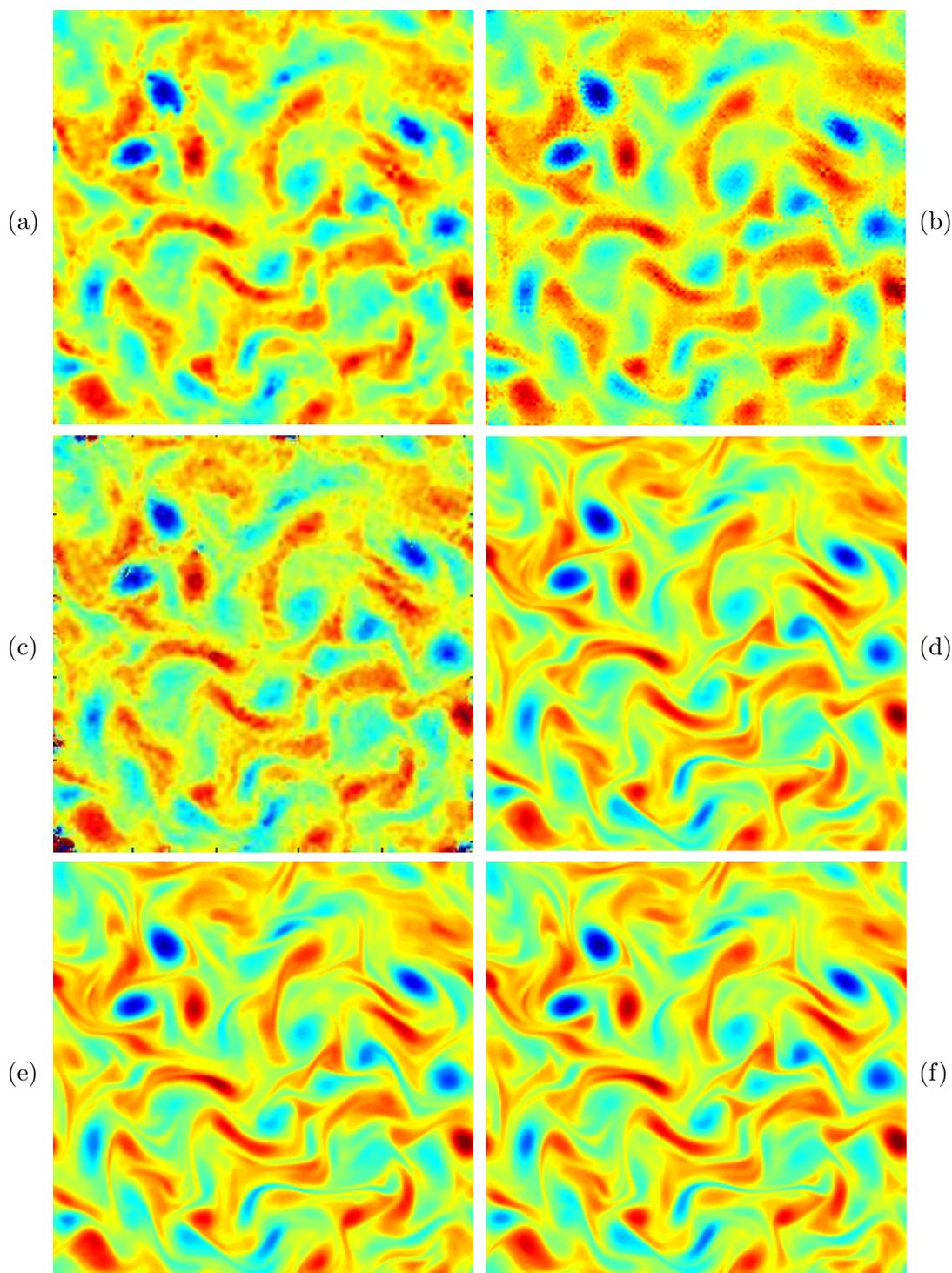


FIGURE 6.8 – Vorticité de la 50^e image de la séquence de simulation numérique d'écoulement turbulent 2D ensemencé de particules, pour différentes méthodes de flot optique et d'assimilation, dont les WEnKF 1L et 3L.

Les méthodes sont :

- flot optique : (a) Yuan et al. [2007]; (b) Héas et al. [2009]; (c) Corpetti and Mémin [2011];
- assimilation : (d) Papadakis and Mémin [2007]; (e) assimilation 1L; (f) assimilation 3L.

Notons que les méthodes (a) et (b) sont des méthodes globales assez onéreuses tandis que la méthode (c) est une méthode locale beaucoup plus rapide.

6.7 Nombre de particules et appréciation par échelles

Le nombre de particules utilisées au cours des expériences a oscillé entre 10 et 400 particules. Les résultats avec 400 particules peuvent être considérés comme relativement fiables (dans l'échelle de grandeur des assimilations par EnKF), mais leur calcul prend évidemment beaucoup de temps, de l'ordre de quelques dizaines d'heures de calcul. D'un autre côté, les résultats à 40 ou 50 particules sont de qualité relativement faible selon plusieurs indicateurs comme la RMSE ou le spectre d'énergie et peuvent être considérés comme le nombre de particules minimum pour un résultat acceptable pour la séquence scalaire. Les résultats à 100 ou 150 particules apparaissent comme un bon compromis entre la qualité de résultat et le temps de calcul.

Pour évaluer plus précisément la qualité du résultat et l'influence du nombre de particules dans le cas des séquences d'écoulements fluides, les graphiques 6.9 et 6.10 illustrent l'influence du nombre de particules sur la reconstruction par échelles du résultat. Ils illustrent respectivement la différence d'énergie par échelles entre la vérité et l'assimilation, ainsi que cette même différence normalisée par l'énergie de la vérité à chaque échelle.

Le premier graphique (6.9) montre tout d'abord que les assimilations à 10 particules sont de très mauvaise qualité, tant pour l'ETKF que pour le WETKF, puisque l'énergie de l'erreur est de l'ordre de deux tiers de l'énergie totale aux grandes échelles et ces assimilations ont une énergie de l'erreur supérieure à celle de la vérité sur une petite bande fréquentielle aux échelles moyennes. En comparaison, les résultats à 50 particules paraissent beaucoup plus acceptables et ceux à 150 et 400 particules semblent bons.

Le graphique 6.10 permet de visualiser plus en détails les résultats aux petites échelles en particulier. Ce graphique confirme que le résultat à 10 particules est assez mauvais, mais précise surtout que les résultats à 150 et 400 particules d'une part donnent de bons résultats aux grandes échelles et d'autre part que leur limite de reconstruction de l'énergie globale (pour un rapport de l'erreur relative de reconstruction de 10 %) se situe aux environs de $1/10^e$ ou $1/20^e$ d'image, soit entre 25 et 12 pixels, ce qu'on peut estimer comme étant proche de la taille moyenne du problème de l'ouverture sur cette séquence. On remarque que l'augmentation du nombre de particules contribue à augmenter la précision en nombre d'échelles correctement reconstruites, mais le niveau de plus petite échelle correctement reconstruite semble stagner autour de $1/10^e$, et un gain sur cette plus petite échelle pourrait demander une augmentation inenvisageable du nombre de particules, à moins peut-être de passer à des techniques de localisation.

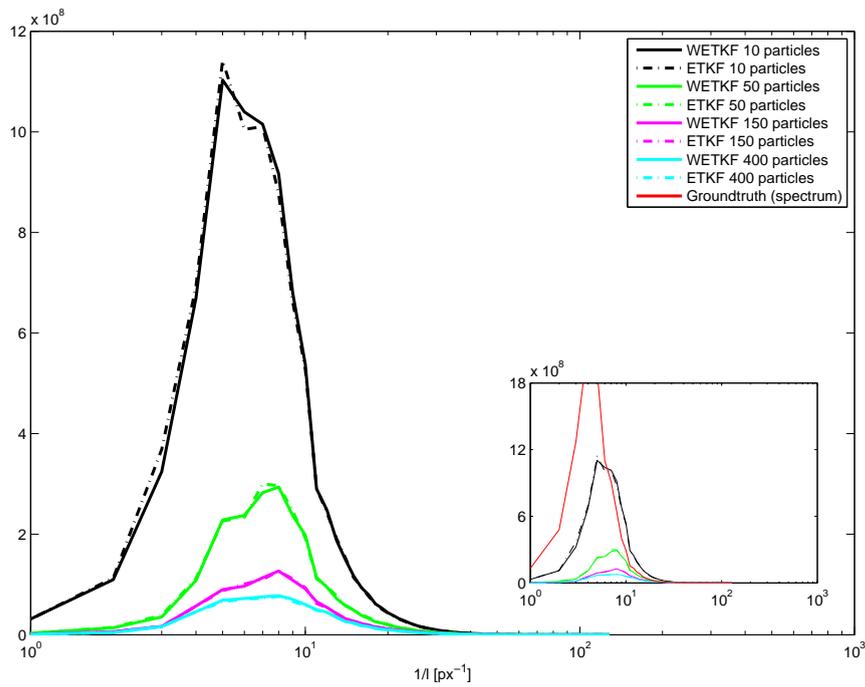


FIGURE 6.9 – Quantité d'énergie de l'erreur par incrément logarithmique (autrement dit $y = kE_{\mathbf{u},\mathbf{u}^t}(k)$, où $E_{\mathbf{u},\mathbf{u}^t}(k)$ est donné par la formule 6.3), entre l'assimilation et la vérité, en fonction du nombre de particules et de la méthode.

La courbe rouge montre à titre de comparaison l'énergie de la vérité par échelles. On peut constater sur ce graphique que mis à part les résultats à 10 particules, l'erreur perd ensuite une grande partie de son énergie. Toutefois, le graphique 6.10 permet une comparaison plus fine aux petites échelles en normalisant l'énergie de chaque échelle par l'énergie de la vérité à cette échelle pour obtenir une erreur relative.

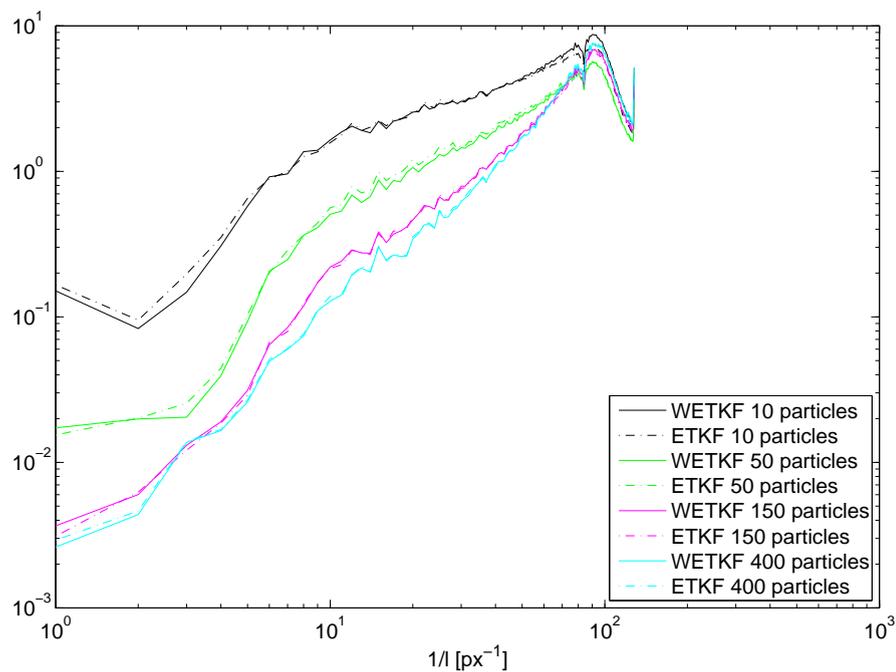


FIGURE 6.10 – Énergie relative de l'erreur entre l'assimilation et la vérité selon les échelles. Ce graphique est construit par la formule 6.4.

Par construction, ce graphique est une erreur relative par échelle. Les grandes échelles sont bien reconstruites, voire très bien à partir de 150 particules, et si l'on prend le seuil de 10 % d'erreur relative, on peut considérer que les échelles sont bien reconstruites jusqu'à $1/10^e$ d'image à partir de 150 particules, soit jusqu'à une vingtaine de pixels, que l'on peut estimer comme étant l'ordre de grandeur moyen du problème de l'ouverture. L'incorporation d'un plus grand nombre de particules permet de réduire cette échelle. Cependant, il semble qu'une réduction drastique de cette échelle de précision nécessiterait une augmentation inenvisageable du nombre de particules.

6.8 Film de savon expérimental

Cette séquence est issue d'une expérience réelle ; le fluide est du savon et la vidéo est prise à la sortie d'un peigne, utilisé pour générer une turbulence bidimensionnelle (à l'épaisseur près du film de savon). La séquence est obtenue par imagerie Schlieren. Cette technique consiste à visualiser les gradients de densité en utilisant le fait qu'un changement de la densité du fluide conduit à une variation de l'indice de réfraction lorsque des rayons lumineux traversent le fluide. La fréquence d'acquisition est de 2500 images par seconde. Les images de cette expérience provient du laboratoire de dynamique des fluides de l'Université de Buenos Aires en Argentine. La figure 6.11 illustre quelques images de la séquence représentée en fausses couleurs.

Nous comparons ici les résultats donnés par : un flot optique de Lucas-Kanade stochastique (SLK), un WEnKF simple (WEnKF-1L) et un WEnKF à 3 niveaux d'assimilation (WEnKF-3L, voir le chapitre 5). Quelques instants du résultat d'assimilation sont présentés sur la figure 6.12.

On peut remarquer que le WEnKF-1L apporte une meilleure finesse en échelles que le flot optique de Lucas-Kanade stochastique. Cette finesse est donc apportée par le modèle dynamique, ainsi que, indirectement, par l'histoire de l'assimilation. La finesse apportée par le WEnKF-3L ne peut en comparaison venir que de l'observation puisque les deux assimilations sont bâties sur des modèles dynamiques strictement identiques. Ainsi, on voit ici clairement l'apport de l'assimilation multi-échelles et le bénéfice sous-jacent d'une mesure de flot optique multi-échelles.

Les différents résultats restent similaires aux grandes échelles comme cela peut être vérifié sur les différents champs de vitesse de la figure 6.12. Les résultats diffèrent essentiellement dans les plus petites échelles, ce qui est plus clairement illustré par les cartes de vorticité. Les améliorations successives apportées par les deux assimilations semblent coh erentes avec les structures observées comme les filaments de vorticité ou les petits vortex.

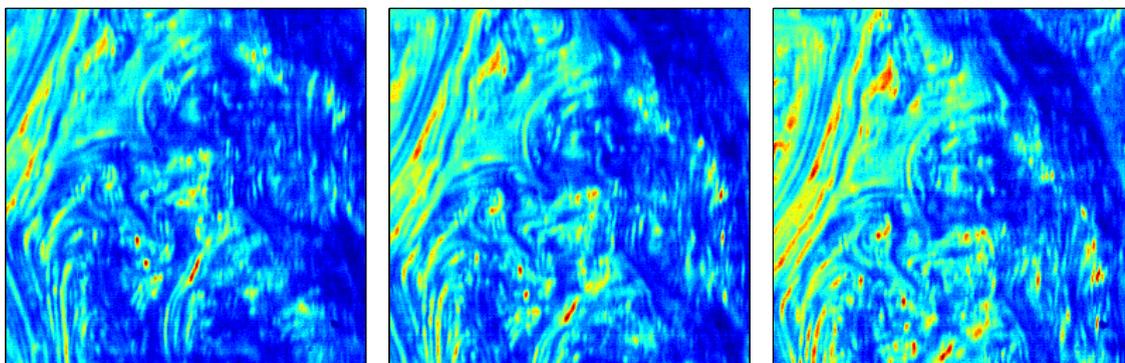


FIGURE 6.11 – Quelques images de la séquence en fausses couleurs (images 66, 76, 86).

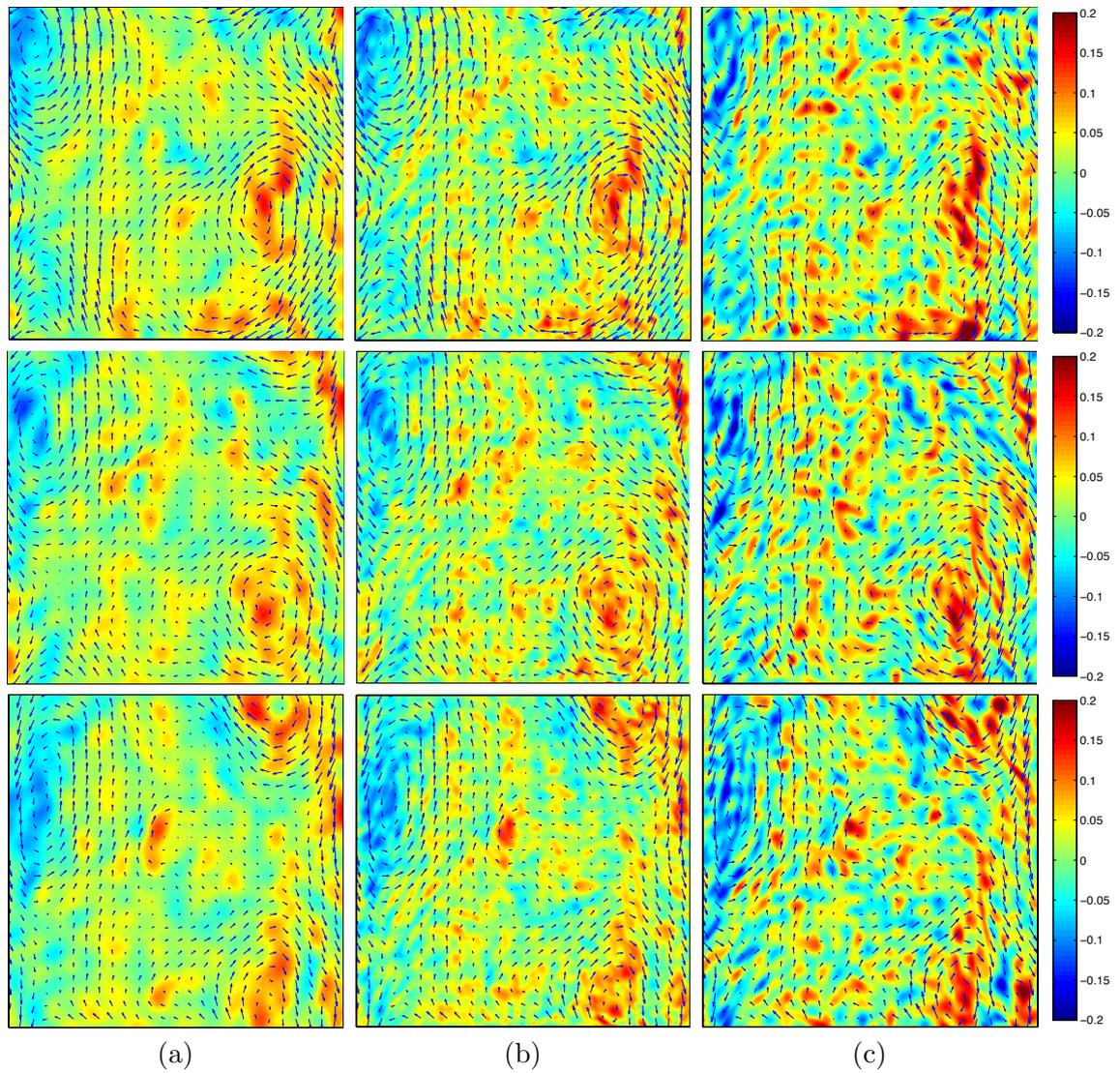


FIGURE 6.12 – Cartes de vitesse et vorticité pour (a) SLK ; (b) WEnKF 1L ; (c) WEnKF 3L sur les images 76, 86 et 96 (première, deuxième et troisième rangées respectivement).

6.9 Données manquantes

Afin de vérifier le comportement du filtre lorsqu'une partie des données est absente, comme cela sera le cas dans les assimilations de séquences océanographiques réelles où une partie des données peut être occultée par la couverture nuageuse, des expériences jumelles sont faites pour apprécier l'influence de l'occultation.

L'expérience sans occultation consistera en la simulation arrière par le modèle dynamique de la vorticité 2D présenté en section 3.1.1 en partant d'un extrait de l'image de température de surface de l'océan Pacifique. Il est rajouté à cette simulation des « trous » où aucune donnée ne sera fournie lors de l'assimilation ; ceux-ci se déplacent de façon aléatoire avec une fréquence de déplacement moitié de celle des images.

La figure 6.13 donne deux images typiques de la séquence créée avec des trous ainsi que la reconstruction par assimilation WETKF du champ de vorticité. La figure 6.14 donne la RMSE obtenue sur cette séquence jumelle. Il apparaît clairement que notre stratégie de prise en compte des zones de données manquantes permet de garder des résultats de bonne qualité. La différence de RMSE en vitesse reste très proche de celle obtenue pour des observations complètes. Les cartes de vorticité restent globalement très similaires, même si localement des différences notables peuvent être remarquées.

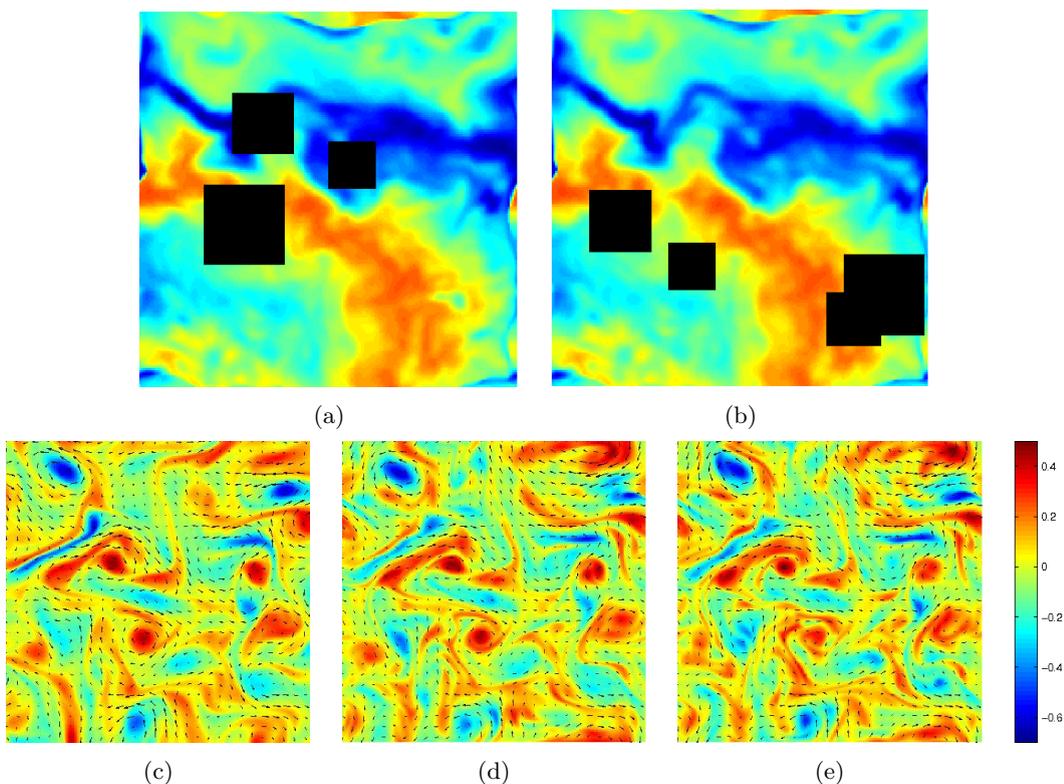


FIGURE 6.13 – Séquence océanique synthétique avec données manquantes.

(a) Image au temps k ; (b) Image au temps $k + 1$; (c) Vorticité et vitesse vraies ; (d) Vorticité et vitesse moyennes estimées par assimilation WETKF pour les images sans données manquantes ; (e) Vorticité et vitesse moyennes estimées par assimilation WETKF pour les images avec données manquantes (images présentées en (a)-(b)).

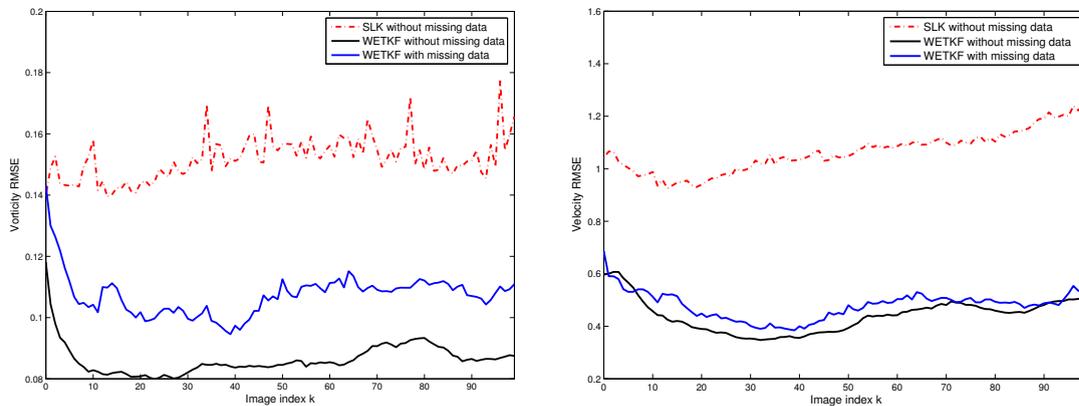


FIGURE 6.14 – RMSEs en vorticité (gauche) et en vitesse (droite) des expériences jumelles avec données manquantes.

6.10 Images réelles de SST

Cette séquence de SST (*Sea Surface Temperature*, température de surface de la mer) a été fournie par le laboratoire CERSAT de l'IFREMER et est issue du radiomètre AVHRR du satellite MetOp. Elle présente la température de surface (Sea Surface Temperature — SST) de l'océan Pacifique durant le mois de janvier et février 2008 sur une zone située au large de l'isthme de Panama.

La taille totale des images est de 1100×400 pixels et la séquence a une fréquence d'une image par jour durant 54 jours (5 janvier au 29 février 2008). Notons que 7 % de la surface de l'image sont des terres et 20 % de la surface océanique est occultée par la couverture nuageuse (en moyenne sur l'ensemble de la séquence).

Cette séquence, étant issue de données réelles, n'a pas de vérité terrain ; il n'est donc pas possible d'établir des résultats quantitatifs. Toutefois, la comparaison visuelle de la séquence d'images avec le résultat de l'assimilation fait apparaître une bonne concordance entre les deux, lorsque l'on suit les structures cohérentes (vortex) visibles sur la séquence.

Le modèle utilisé est le même que précédemment, c'est-à-dire le modèle 2D incompressible ; il est évident que celui-ci n'est pas réaliste, mais il présente l'avantage d'être simple et rapide. Bien entendu, en utilisant un modèle plus complet et réaliste, il serait possible d'obtenir de meilleurs résultats ; mais il faut aussi garder à l'esprit que le caractère rapide du calcul permet de manipuler un plus grand nombre de particules. Le schéma d'assimilation utilisé est le même que précédemment, c'est-à-dire le WETKF, avec rééchantillonnage dual, et un opérateur d'observation donné par la différence d'images déplacées couplé à un modèle d'incertitude estimée (voir la section 3.3.4).

L'accroissement au cours du temps du caractère turbulent provient bien sûr en partie du filtrage, mais également du fait de l'intensification du phénomène El Niño au cours de la séquence. D'autre part, les zones de données manquantes ne semblent pas avoir d'influence notable sur la reconstruction (cette caractéristique est souhaitable pour une assimilation de bonne qualité) : on n'observe pas de traitement particulier dans ces zones, comme un affaïssement ou au contraire un renforcement de la vorticité dans ces zones.

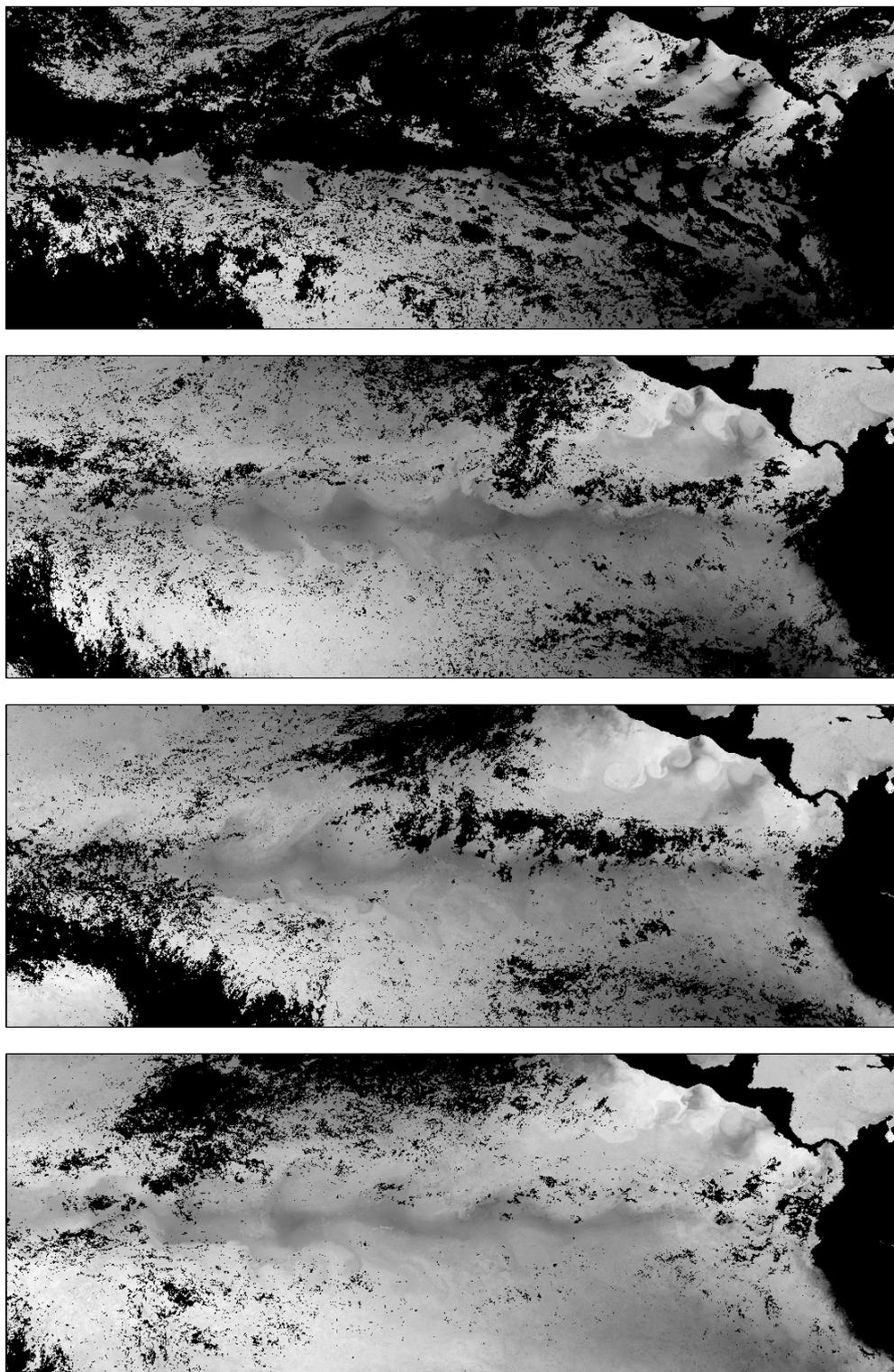


FIGURE 6.15 – Température de surface (SST) dans le Pacifique durant janvier-février 2008. Une image sur 10 est affichée ici.

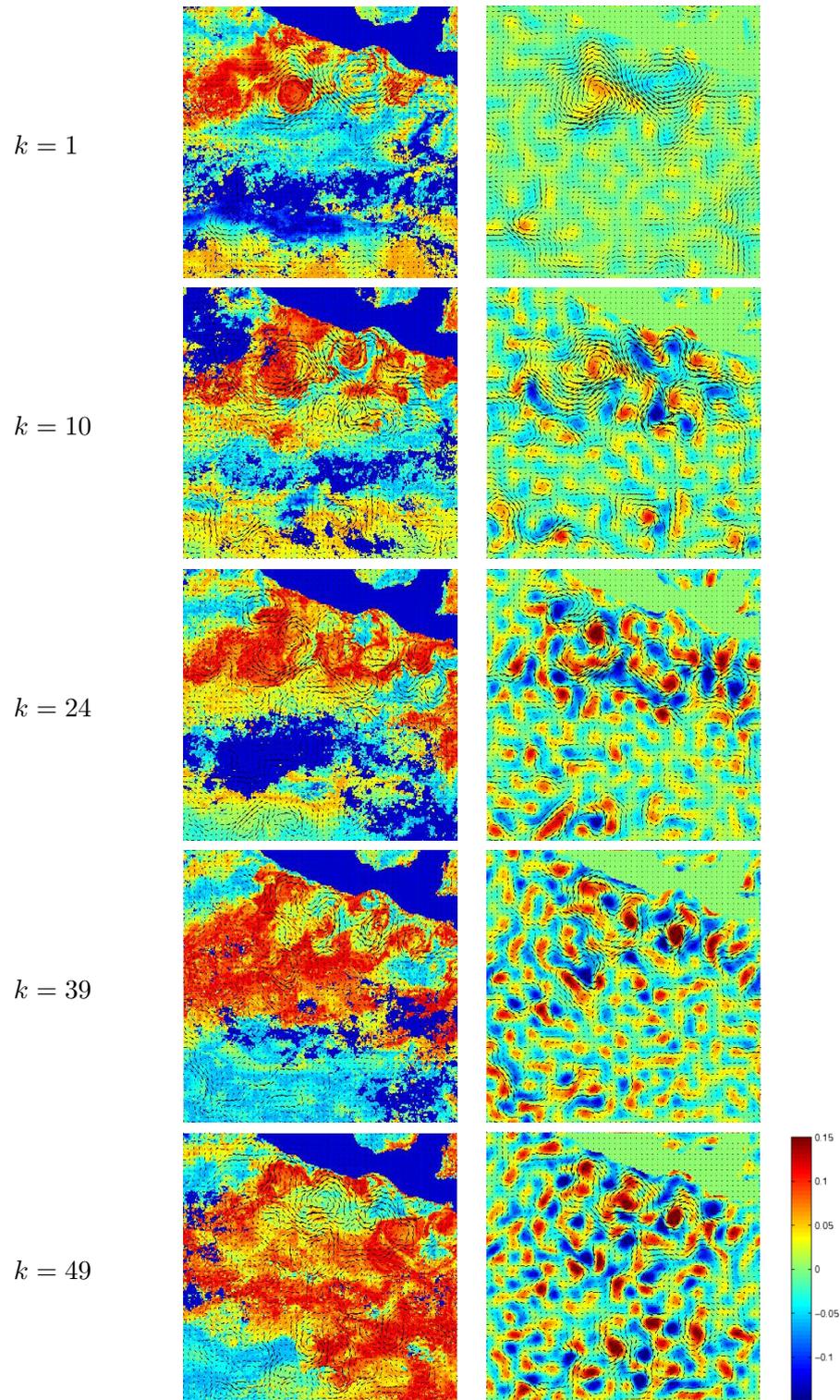


FIGURE 6.16 – Assimilation des courants à partir de la séquence satellite à de la température de l'océan Pacifique près de l'Amérique centrale.

Les surfaces en bleu indiquent les surfaces de non-données (terres) et de données manquantes (à cause de la couverture nuageuse). La première colonne illustre les images de SST à différents temps avec la vitesse estimée superposée; la deuxième colonne comporte la vitesse et vorticité estimées par WETKF.

Troisième partie

Application en mer d'Iroise

Chapitre 7

Application avec un modèle océanique réaliste

7.1 Introduction

Ce chapitre traite de la mise en œuvre d’une assimilation par WETKF dans la mer d’Iroise, au large de Brest, dans le sud-est de la mer Celtique. La zone concerne une région centrée autour des îles de Ouessant et Molène au nord et de l’île de Sein au sud. Cette région présente de forts courants dûs aux interactions entre ces îles et la marée qui “rentre” et “sort” de la Manche. Plus au large, le rail d’Ouessant est l’un des passages maritimes les plus fréquentés au monde.

Le but principal de cette expérimentation est de tester le filtre WETKF et le bruit autosimilaire sur un scénario réel. Cette assimilation a été effectuée en utilisant un modèle de circulation océanique complet, le modèle ROMS, dédié à la simulation aux échelles régionales. L’observation est quant à elle composée des deux composantes de la vitesse de surface de la mer données par deux radars côtiers situés au nord et au sud de la rade de Brest ; ceux-ci sont opérés par la société Actimar basée à Brest. Cette assimilation utilise donc des observations assez “conventionnelles” par rapport aux séquences précédentes puisque celles-ci sont des quantités physiques directement reliées à des quantités de l’espace d’état, en l’occurrence la vitesse de surface.

Contrairement aux séquences précédentes également, le domaine d’état est ici tridimensionnel et comporte plusieurs variables d’état (vitesse, pression, température, salinité, etc.) alors que l’espace d’observation reste bidimensionnel et regroupe seulement les deux composantes de la vitesse de surface. Aussi le nombre d’observations par rapport à la taille de l’espace d’état est fortement diminué par rapport aux expériences précédentes, d’un rapport de 500 en moyenne, mais l’objectif n’est pas prioritairement d’assimiler la totalité du volume sur toutes les variables mais plutôt de se concentrer sur la vitesse de surface, sur laquelle il doit être possible d’interagir par le biais des données.

Nous commencerons par présenter la zone géographique assimilée, puis nous décrirons le modèle dynamique ROMS ainsi que les observations disponibles. La section suivante reprendra le schéma d’assimilation utilisé en mettant l’accent sur le bruit dynamique adapté à l’assimilation spécifique des courants de surface, et nous finirons en donnant une analyse de quelques résultats.

7.2 Description du contexte d'assimilation

7.2.1 Géographie étudiée

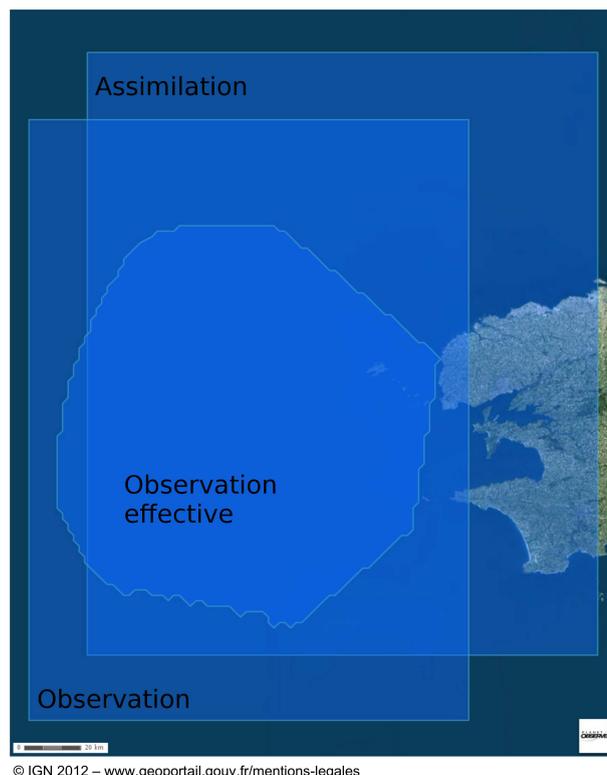


FIGURE 7.1 – Zone observée et zone assimilée en mer d'Iroise à la pointe de la Bretagne.

La zone d'observation effective est définie comme l'ensemble des points de l'espace où nous disposons d'au moins une donnée au cours du mois d'août 2008.

La surface de cette zone est de 5000 pixels; chaque pixel n'apparaît en moyenne qu'une fois sur deux sur l'ensemble du mois d'août 2008, mais cette répartition est très inégale : les pixels proches des radars sont très souvent présents alors que ceux éloignés sont très souvent absents (voir les statistiques sur la figure 7.4).

L'espace d'état correspond à la zone d'assimilation englobant la pointe bretonne, jusqu'à environ 150 km vers l'ouest et 100 km vers le nord au large de la Bretagne (voir la carte 7.1). La zone couverte par l'espace d'état est comprise entre les longitudes 6,50 et 4,02 degrés ouest et les latitudes 47,52 et 49,48 degrés nord. La résolution est de 1,24'' en longitude (1,6 km) et de 0,82'' en latitude (1,5 km).

L'espace d'observation quant à lui se situe sur une zone allant jusqu'à 160 km au large de la Bretagne vers l'ouest et sur environ 100 km dans la direction nord-sud. La zone couverte par l'observation est comprise entre les longitudes 6,78 et 4,65 degrés ouest et les latitudes 47,30 et 49,27 degrés nord, avec une résolution de 1,07'' en longitude (1,4 km) et de 1,60'' en latitude (3,0 km).

Sur cette zone géographique, la principale zone d'intérêt est autour de Ouessant où le courant est beaucoup plus fort qu'aux alentours, en particulier dans le passage du Fromveur entre Ouessant et Bannec, la dernière petite île avant Ouessant depuis Molène. Notons cependant que cette zone autour de Ouessant et Molène est moins bien observée par les radars du fait des interférences avec les terres.

Dans cette zone, la profondeur varie entre 80 m et 140 m, sauf entre la Bretagne continentale et les îles des Ouessant et Sein où la profondeur n'excède pas 60 m.

7.2.2 ROMS

ROMS (*Regional Ocean Modeling System*) est un modèle de simulation de la circulation océanique aux échelles régionales. Il implémente donc les équations primitives de l'océan. En plus de la circulation océanique physique, ROMS comprend des modèles de biogéochimie, de sédimentologie et de déplacement des glaces. ROMS est développé conjointement par l'Université de Californie — Los Angeles, l'Université Rutgers dans le New Jersey et l'Institut de Recherche et Développement (IRD) en France.

La description qui suit ne donne que les équations fondamentales de la dynamique. Les équations dynamiques de ROMS, les conditions aux limites, le système de coordonnées et les algorithmes numériques mis en œuvre sont détaillés dans le *Scrum manuel* Hedström [1997] ainsi que dans Shchepetkin and McWilliams [2005].

ROMS utilise l'approximation de Boussinesq pour le calcul de la circulation océanique, c'est-à-dire que le terme vertical de la pression est supposé ne varier qu'en fonction de la profondeur, soit en fonction de la densité de l'eau. Les équations suivantes sont donc celles utilisées par ROMS :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u - fv = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathcal{F}_u + \mathcal{D}_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + fu = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathcal{F}_v + \mathcal{D}_v \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \mathcal{F}_T + \mathcal{D}_T \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = \mathcal{F}_S + \mathcal{D}_S \\ \rho = \rho(T, S, P) \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\rho g}{\rho_0} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (7.1)$$

La vitesse horizontale $\mathbf{u}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z))$ est définie comme étant la vitesse moyennée verticalement sur une couche donnée, un certain nombre de couches étant définies sur la profondeur (une trentaine dans notre cas). T est la température (3D), S la salinité (3D), ρ la densité, P la pression, ρ_0 la densité moyenne de l'eau de mer, f la vitesse de rotation de la Terre, $\phi = \frac{P}{\rho_0}$ la pression dynamique, \mathcal{F}_\bullet les forces externes sur la variable indiquée, \mathcal{D}_\bullet la diffusion sur la variable indiquée.

Pour cette assimilation, le choix quant à la perturbation du modèle qui a été fait est de bruite les trois premières couches de la surface par un bruit autosimilaire (voir la section 4.2) dont le spectre sera fixé d'après la série d'observations disponibles. Le choix du type de bruit dynamique a été fait par rapport aux bons résultats obtenus par le bruit autosimilaire sur la séquence synthétique (voir 6.4) ainsi que pour sa facilité de paramétrage (paramètres physiques). Le fait d'appliquer le bruit uniquement sur la surface provient du fait que la zone d'intérêt est principalement la surface, aussi c'est celle-ci qu'on cherchera à bruite en premier lieu.

7.2.3 Observation

L'observation de vitesse de surface de l'océan est fournie par deux radars situés à la pointe de Garchine, à Porspoder, et à la pointe de Brézellec, à Cléden-Cap-Sizun. Le système est opéré par la société Actimar.

Chaque radar émet un signal vers la mer dont la longueur d'onde rétrodiffusée sera proportionnelle au mouvement de surface de l'eau (rétrodiffusion de Braggs). Chaque fenêtre d'acquisition dure 8 minutes 52 secondes et envoie 2048 rampes de fréquences, chacune durant 0,26 secondes. Les paramètres océanographiques de l'état de surface de la mer sont ensuite extraits de l'analyse fréquentielle du signal rétrodiffusé. En particulier, on peut extraire la vitesse et direction du vent ainsi que la vitesse des courants dans la direction radiale d'émission du signal. À partir des deux radars, il est alors possible de retrouver les deux composantes du courant de surface. Il faut garder à l'esprit que par construction, la mesure résultat est l'état de surface de la mer moyenné pendant 8 minutes 52 secondes. Une statistique de l'erreur est également fournie avec l'estimation de vitesse des courants océanique, donnée par une variance autour de la valeur moyenne estimée. Quelques statistiques sur l'observation sont montrées sur la figure 7.4, montrant notamment la répartition géographique des mesures présentes ainsi que la variance d'erreur.

Pour cette assimilation, nous serons intéressés par les mesures de vitesse de l'océan ainsi que par la variance des observations autour de leur valeur moyenne ; ces deux valeurs, moyenne et variance, modéliseront l'observation par une variable gaussienne dans l'assimilation.

Le spectre du bruit dynamique (autosimilaire) a été fixé en partie à partir des observations : sur la zone peu bruitée au centre de l'observation, les spectres ont été calculés et la pente du bruit autosimilaire a été spécifiée à partir de cela.

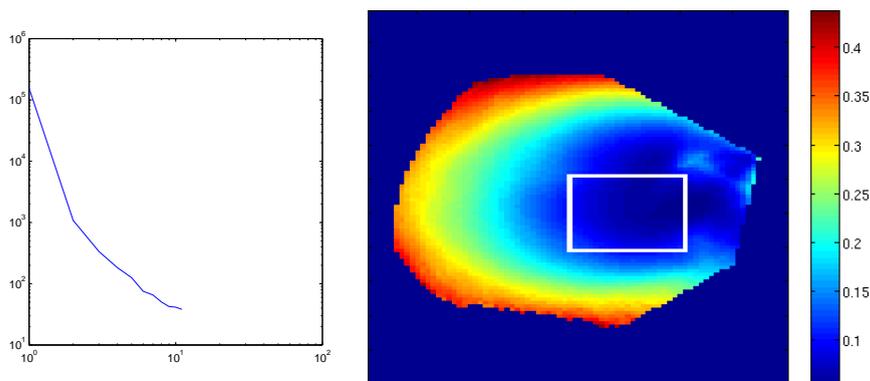


FIGURE 7.2 – Spectre des vitesses obtenu à partir des observations sur une zone de faible bruit sans données manquantes.

La région de capture, indiquée par le carré blanc, mesure 21×21 pixels de large, soit une trentaine de kilomètres de côté. Le fond de carte est l'addition des erreurs moyennes sur les deux composantes estimée par les mesures radar.

7.3 Description de la méthode d'assimilation

Nous utiliserons le schéma général du filtre WETKF, en s'adaptant aux spécificités des données en jeu ici. Ainsi l'espace d'état comprend l'ensemble des variables d'état de ROMS, à savoir la vitesse barotrope et barocline, la salinité, la température et l'élévation de la surface, ce qui fait un peu plus de 2 millions de points dans l'espace d'état. L'espace d'observation ne comprend que les deux composantes de la vitesse de surface donnée par les radars, soit 17600 points.

Bien que les variables de l'espace d'état sont directement reliées à celles de l'espace

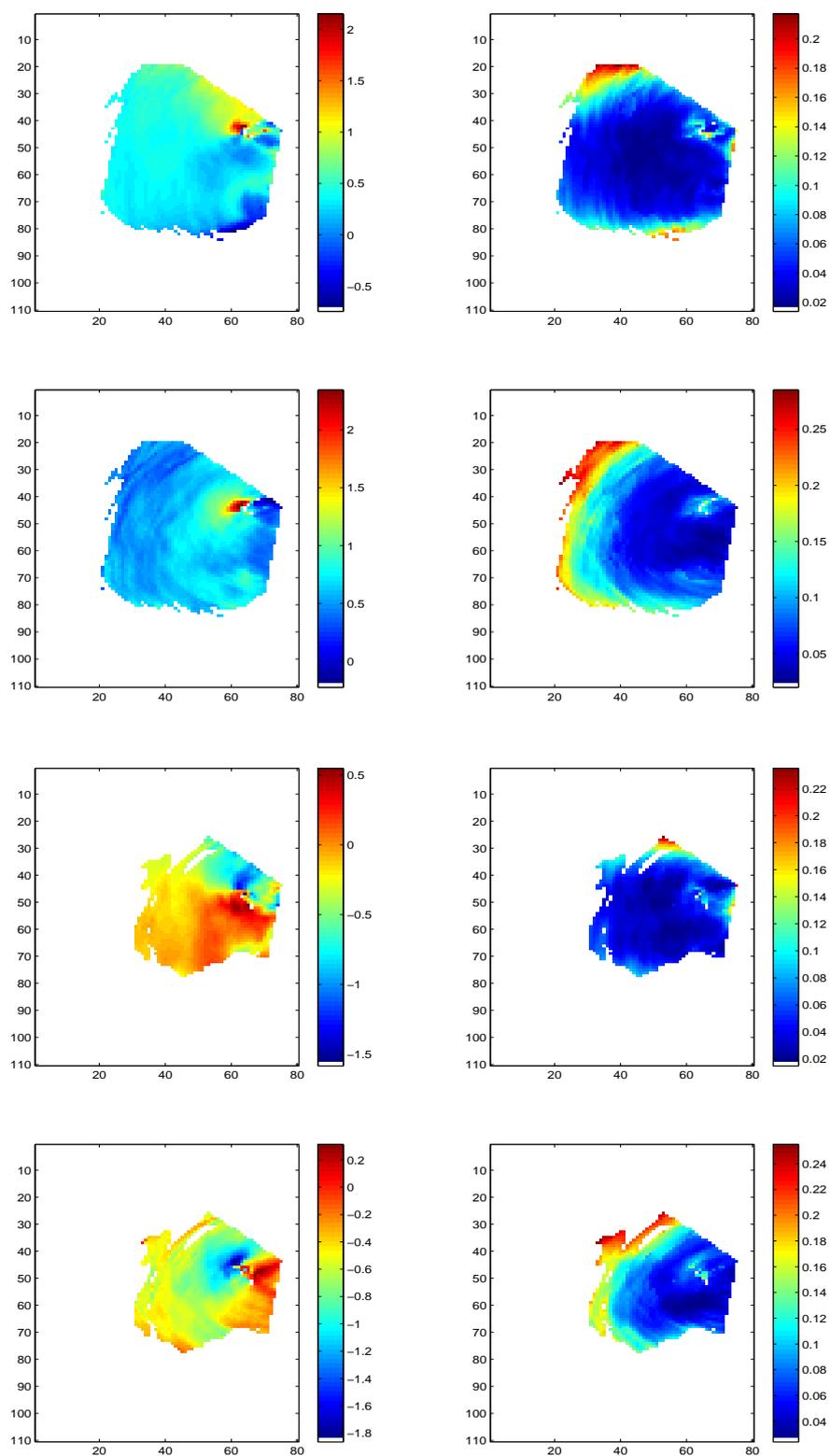


FIGURE 7.3 – Observations à différents instants durant le mois d'août 2008

Les instants 7 (quatre images du haut) et 28 (4 du bas). La première colonne comporte l'observation elle-même et la deuxième colonne représente l'erreur fournie sur cette mesure. La première ligne de chaque instant est la composante est-ouest, et la deuxième la composante nord-sud.

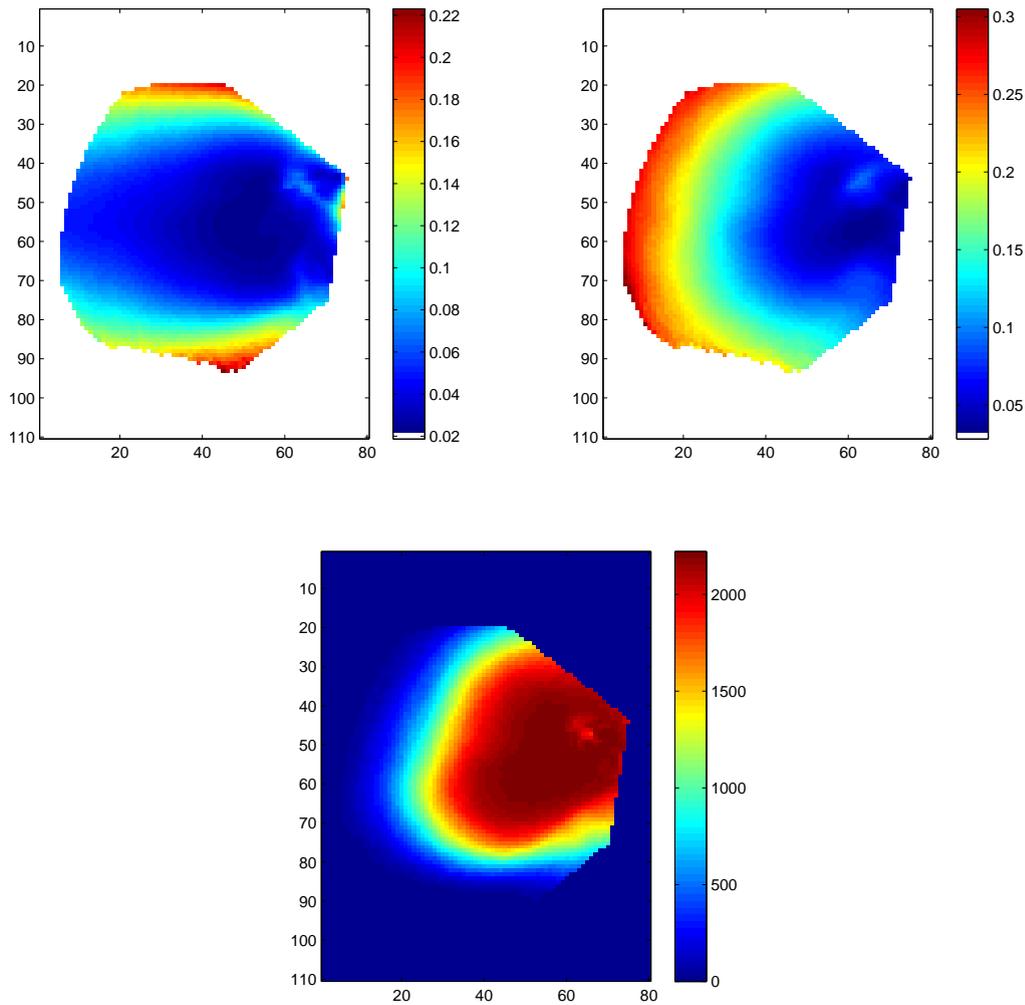


FIGURE 7.4 – Quelques statistiques sur les observations.

Deux premières images : moyenne sur le mois d'août 2008 des erreurs fournies sur les deux composantes de la vitesse observée (en $m.s^{-1}$).

Image du bas : nombre d'observations par pixel sur l'ensemble de la séquence d'août 2008.

On remarque que la zone centrale est la mieux estimée en moyenne. Elle correspond à la région qui comprend le plus d'observation; c'est dans cette zone que le spectre des vitesses présenté à la figure 7.2 a été calculé. Autour de Ouessant, l'erreur estimée augmente un peu et le nombre de mesures est un peu plus faible; sur la vidéo, on remarque que les points manquants bougent assez souvent d'une image à l'autre.

d'observation, celles-ci ne vivent pas sur la même grille et sont définies à des échelles différentes, il est donc nécessaire d'effectuer une interpolation entre les vitesses ; celle-ci sera faite au moyen d'une interpolation bilinéaire.

Le rééchantillonnage utilisé dans ce contexte sera de 80 % multinomial et 20 % uniforme (voir la section 3.3.3).

Le bruit dynamique sera un bruit autosimilaire (voir la section 4.2) sur les trois premières couches de la surface avec des écarts-types décroissants en allant vers le fond ; de façon arbitraire, l'écart-type de la deuxième couche a été fixé à 80 % de celui de la première, et celui de la troisième à 40 % de celui de la première. La perturbation est donc fortement atténuée lorsqu'on descend en profondeur. Ce choix de perturbation de la surface peut se justifier en considérant que l'incertitude la plus forte, ou celle à prendre le plus en compte, est sur la surface. D'un autre côté, les observations n'étant que sur la surface, c'est à cet endroit que l'assimilation aura le plus d'impact, d'où l'intérêt de bruite spécifiquement cet endroit. Un autre choix aurait pu être fait de bruite des conditions au bord ou des coefficients, ce qui aurait donné des particules d'une plus grande variété sur l'ensemble du volume 3D mais peut-être avec moins de différences significatives sur la surface (autrement dit, « plus puissamment modifiées mais peut-être moins réactives dans l'étape d'assimilation »).

Pour le bruit d'observation, on fait l'hypothèse classique d'un bruit gaussien centré avec un écart-type spécifié par l'estimation de l'erreur fournie par les mesures radar.

Étant donné la taille de l'espace d'état d'environ 2 millions de points, nous serons impérativement limité à quelques dizaines de particules, le maximum testé étant de 100 particules.

Notons que ROMS dispose d'un système permettant de prendre graduellement en compte les effets de marée, système appelé *rampe de marée*. Avec ce système, les effets de marée atteignent 95 % de leur valeur nominale environ 24 heures après l'initialisation, aussi la première assimilation a lieu 24 heures après le temps d'initialisation — dans la pratique, le modèle déterministe a été lancé une fois et l'initialisation de fait du processus d'assimilation est prise dans ce fichier déterministe au bon indice temporel.

De plus, l'instant initial donné à ROMS (issu du modèle HYCOM) ne semblait pas correspondre aux observations. Aussi il a été choisi d'initialiser avec l'instant le plus vraisemblable vis-à-vis des observations, ce qui donne un offset de 3 heures.

7.4 Résultats

La séquence ayant servi de test couvre tout le mois d'août 2008. L'assimilation a été effectuée avec des observations toutes les 20 minutes pour un total de 200 observations, soit une durée totale d'assimilation de 200×20 minutes = 66,7 heures = 2 jours 18 heures.

La première chose visible sur le graphique de RMSE (figure 7.5, comparant le résultat d'assimilation avec l'observation et non avec une vérité terrain) est l'oscillation très forte et périodique de l'erreur. Ce phénomène est également présent dans une exécution purement déterministe du modèle. Les causes de cette forte oscillation périodique ont été recherchées ; l'hypothèse principale a été que ces oscillations, de période proche d'une marée, seraient dûes à un décalage de date entre les observations et le modèle. Après études, il est apparu que le fait de décaler les observations et le modèle menait à des oscillations similaires de la RMSE, quoique avec des niveaux variables. Il a donc été choisi de décaler les observations de 3 heures, ce qui correspond à un niveau global de RMSE abaissé, même si cette

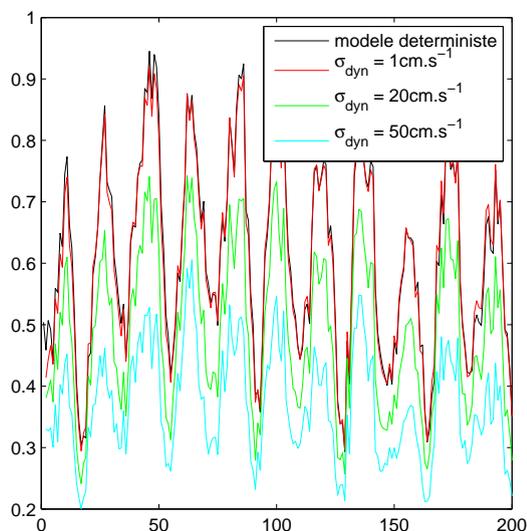


FIGURE 7.5 – RMSE comparé avec l’observation en mer d’Iroise avec, à bruit d’observation constant, un bruit dynamique d’écart-type 1 cm.s^{-1} (rouge), 20 cm.s^{-1} (vert), 50 cm.s^{-1} (cyan). Le bleu foncé est la RMSE entre le modèle déterministe et l’observation.

solution n’est pas satisfaisante intellectuellement et mène possiblement à des erreurs d’interprétation.

La figure 7.5 illustre également que l’amplitude du bruit dynamique a une forte répercussion sur les résultats. On remarque clairement que l’augmentation de l’amplitude du bruit dynamique (en laissant fixe le bruit d’observation) tend à rapprocher les particules des observations. Cela se constate également sur la figure 7.6, où l’assimilation ayant le plus fort bruit dynamique (2^e ligne) est la plus proche des observations. Ce phénomène est tout à fait normal pour l’assimilation (la confiance dans le modèle diminue), mais contribue à diminuer la cohérence physique interne des particules puisqu’elles sont forcées par l’étape de correction de Kalman qui peut introduire un forçage non physique. Le chapitre 9 consacré aux pistes d’améliorations discutera brièvement dans la section 9.3 d’une idée permettant de pénaliser les particules fortement déplacées par l’étape de Kalman et donc peu enclines à être physiquement plausibles.

À l’inverse un bruit dynamique trop faible introduit une confiance trop importante dans le modèle. Il est clair par exemple que ROMS semble avoir ici quelques difficultés à simuler précisément l’effet des marées sur le courant de surface. Nous avons donc opté pour le choix d’un bruit intermédiaire entre un bruit incorporant peu les observations et un bruit conduisant à une solution bruitée trop proche des observations.

Les figures 7.7 et 7.8 illustrent l’évolution de l’assimilation par rapport à l’observation entre les temps d’observation 182 et 185 (soit environ 60 heures après l’initialisation), avec le bruit de forte amplitude. Avec ce choix de bruit, l’assimilation retrouve bien les grandes structures présentes dans l’observation, ainsi que certains détails autour de Ouessant. La solution produite est en phase avec les observations de vitesse données par les deux radars côtiers. De plus, certains artefacts visibles sur ces observations (corrélations circulaires à même distance radiale des radars) sont bien éliminés dans le résultat d’assimilation.

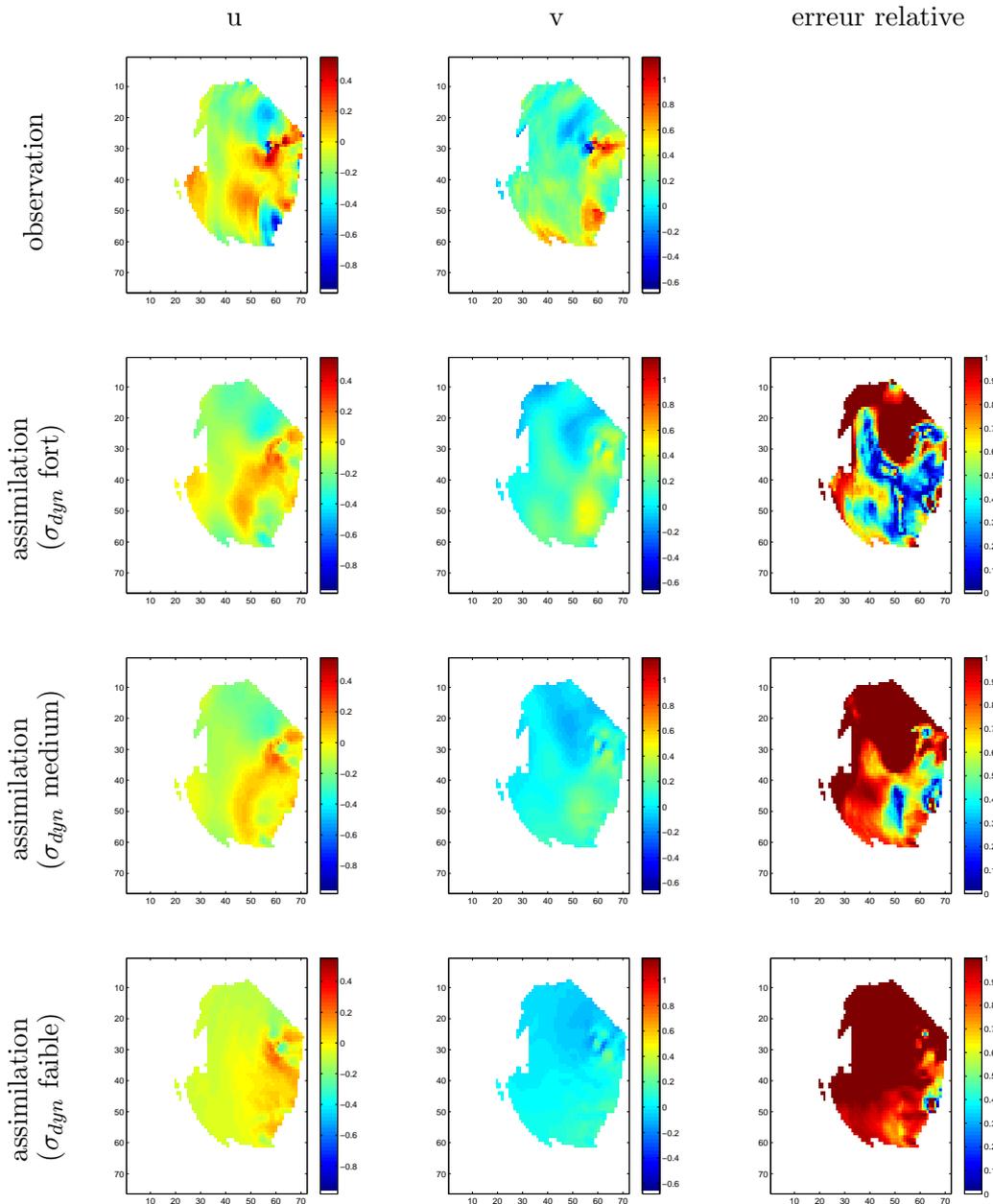


FIGURE 7.6 – Assimilations en mer d’Iroise avec différentes amplitudes de bruit dynamique après 165 cycles d’assimilation (soit 55 heures).

La colonne de gauche est la composante est-ouest, celle du centre la composante nord-sud, et celle de droite est l’erreur relative entre l’observation et l’assimilation. La première ligne est l’observation, les suivantes sont des assimilations avec des amplitudes dynamiques de 50, 20, et 1 $cm.s^{-1}$.

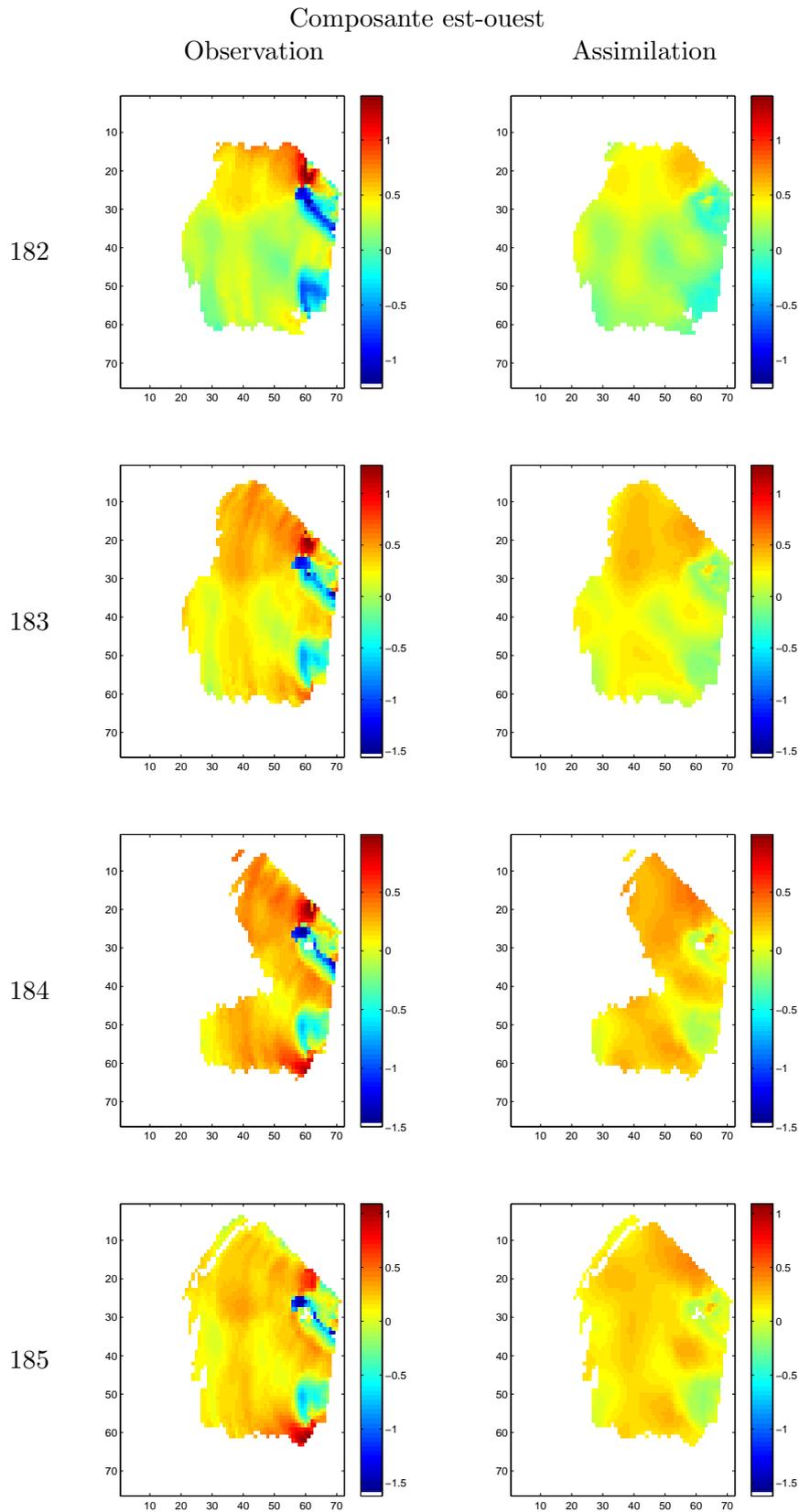


FIGURE 7.7 – Suivi de l’assimilation entre les 182^e et 185^e temps d’assimilation (soit après 60 heures) avec un bruit d’observation fort ($50\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$) — composante est-ouest.

On remarque en particulier une sous-estimation systématique des courants forts dans la zone d’Ouessant.

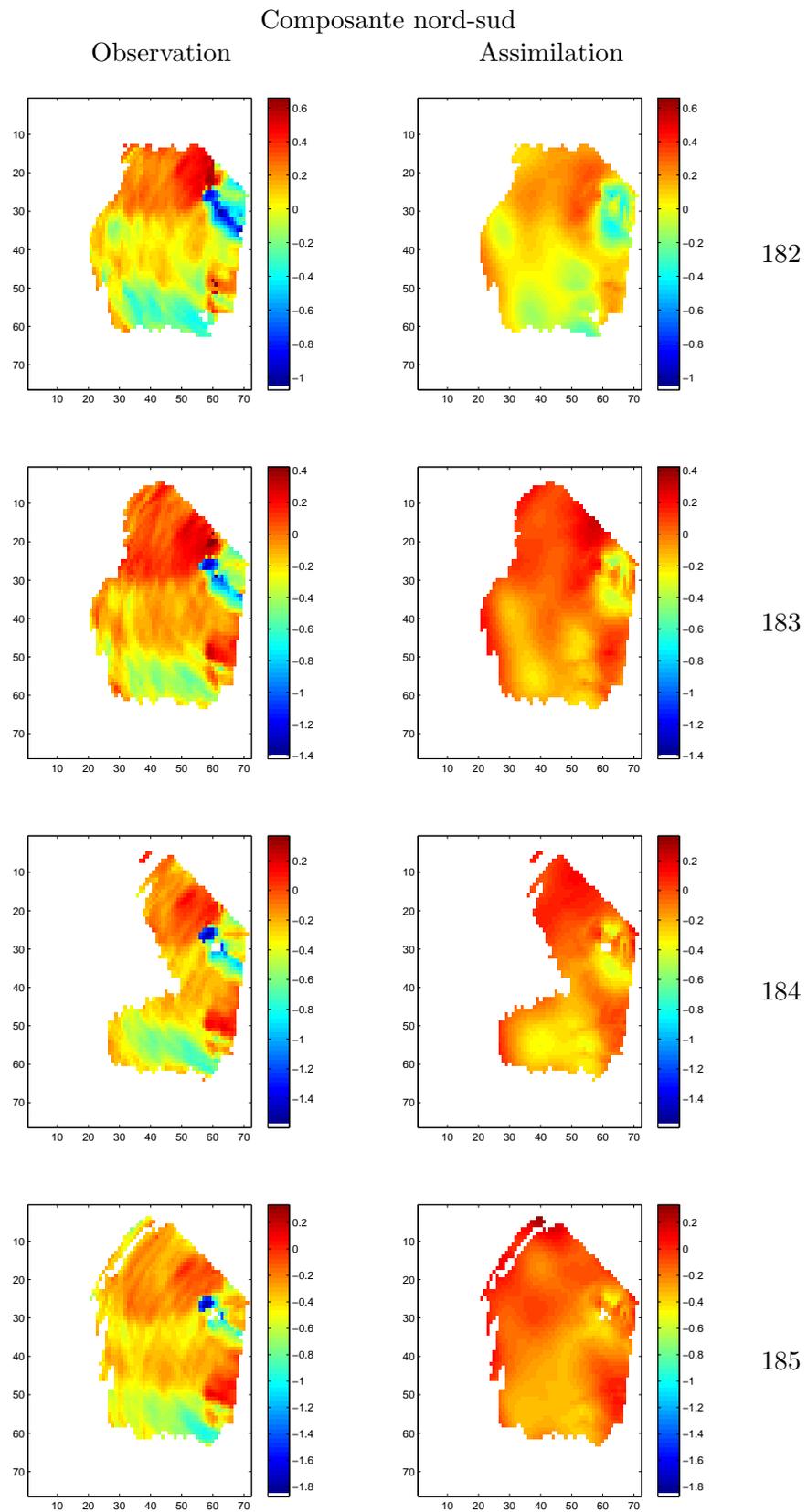


FIGURE 7.8 – Suivi de l'assimilation entre les 182^e et 185^e temps d'assimilation (soit après 60 heures) avec un bruit d'observation fort ($50\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$) — composante nord-sud.

7.5 Conclusion

Par rapport aux expériences précédemment menées durant cette thèse, cette expérience d'assimilation se distingue par plusieurs aspects : le type de modèle dynamique est beaucoup plus complexe, les observations sont directement reliées aux variables d'état contrairement à des observations image, et l'espace d'état est de dimension bien supérieure à l'espace d'observation.

Bien qu'il soit possible qu'il subsiste un problème de synchronisation entre le modèle et les observations, cette expérience a permis de confronter le WETKF à un contexte réel d'assimilation et les résultats montrent certaines qualités attendues d'une assimilation : suivi temporel correct, suppression d'artefacts de l'observation.

Quatrième partie

Design et perspectives

Chapitre 8

Design de filtres particulières pour les fluides

Ce chapitre va tenter de synthétiser les enseignements tirés lors de cette thèse sur les filtres particuliers en particulier lorsqu’appliqués aux images d’écoulements fluides. Toutefois, cela est issu de l’expérience de cette thèse et ne relève pas d’une vérité absolue ; en conséquence certains avis méthodologiques peuvent tout à fait être discutés voire discutables.

Le fil directeur d’un tel design serait, à notre avis, de spécialiser les opérateurs quand cela est possible ainsi que d’effectuer des choix toujours balancés entre gains en précision, gains en vitesse d’exécution, gains en robustesse et gains en facilité d’utilisation. D’autre part, les divers gains doivent être mesurés contre des mesures les plus significatives possibles. Toutefois, il n’est pas forcément facile ni même possible de tirer des conclusions sur l’influence supposée de certains paramètres à partir de résultats d’expériences ; et de plus il est probable que certains paramètres interagissent entre eux.

Par exemple, une régularisation des particules dans l’étape de rééchantillonnage est-elle réellement globalement bénéfique et dans quelles conditions ? L’alternative opposée est de ne pas l’appliquer et mène à l’économie d’un certain nombre d’exécutions du modèle dynamique (déterministe) au temps suivant puisque partant alors de la même condition initiale. Autre exemple : faut-il utiliser un modèle stochastique, plus apte théoriquement à représenter la réalité du phénomène, ou un modèle déterministe qui dans notre cas donnait de meilleurs résultats ?

Ce chapitre discutera de la méthodologie informatique pour la mise en œuvre d’un problème d’assimilation, du choix du filtre (et de ses variations), des modèles en jeu (dynamique et observation), et du dimensionnement et de la calibration des paramètres.

8.1 Méthodologie informatique

Après l’étude initiale d’un nouveau problème vient rapidement la question de la mise en œuvre informatique. Lorsqu’il est décidé d’utiliser un filtre particulière, il peut être très facile d’écrire un code de filtre particulière en partant de rien (*from scratch*), ce qui peut être fait en quelques dizaines de lignes dans la plupart des langages, et en particulier les langages dotés de bibliothèques numériques comme C/C++, Python, Matlab. En revanche, cette solution peut rapidement devenir limitante lors du test de nouvelles méthodes, de nouveaux modèles, ou lors d’une opération d’abstraction du code initial dans

le but de le rendre plus générique.

Si l'ambition est d'emblée de tester plusieurs méthodes, ce qui peut être bien *a priori* si aucune méthode n'est privilégiée ou si on n'a qu'une connaissance limitée des performances des différentes méthodes appliquées au problème spécifique (c'est-à-dire souvent), il peut être bien d'investir directement dans l'étude des quelques codes génériques d'assimilation de données. Parmi ces codes figurent :

- SMCTC (Johansen [2009]), en C++, qui est une petite bibliothèque orientée filtre particulaire ;
- OpenDA (Ope), en Java, qui implémente plusieurs méthodes d'assimilation (des méthodes de Kalman d'ensemble et filtres particulières, et des méthodes variationnelles en projet) ;
- Verdandi (Ver), en C++, qui abstrait les espaces et modèles, et implémente plusieurs méthodes d'assimilation (essentiellement les méthodes variationnelles, les méthodes de Kalman, et quelques filtres particuliers pour l'instant).

Pour l'assimilation par filtre particulaire d'écoulements fluide (ou d'autres problèmes de grande dimension), les modèles dynamiques étant assez coûteux et la nature des filtres particuliers demandant d'exécuter plusieurs fois le modèle dynamique, il est préférable d'avoir à disposition une puissance de calcul relativement importante. Cela est en particulier vrai pour les tests sur les méthodes, où il est préférable d'exécuter plusieurs fois les mêmes assimilations pour estimer la variabilité entre exécutions. Une organisation méthodique des tests peut également être intéressante (voir la section 6.2).

8.2 Choix du filtre

Pour les espaces d'état de taille importantes, comme ceux manipulés pour les écoulements fluides, les filtres particuliers basiques (*bootstrap* avec ou sans rééchantillonnage) sont exclus car ils divergeraient avec un nombre de particules d'un ordre de grandeur raisonnable. Les choix restants de filtres susceptibles de fonctionner sont alors les filtres particuliers avancés, avec des méthodes de rééchantillonnage adaptées ou des techniques de retour dans le passé en cas de divergence (voir van Leeuwen [2009]), ainsi que les filtres particuliers à base de loi de proposition préalablement orientées vers les observations comme les EnKF (ou ETKF) et les WEnKF (ou WETKF). Les EnKF ont été longuement testés, en particulier dans des applications géophysiques, et sont souvent « une valeur sûre ». Les WEnKF peuvent *a priori* se substituer aux EnKF sans gros changement dans la méthode et ont l'avantage d'apporter une garantie de convergence lorsque le nombre de particules augmente. À nombre de particules fixé, les WEnKF donnent des résultats proches des EnKF, quoique généralement légèrement positif (d'après les expériences réalisées au cours de cette thèse).

Parmi les variations de méthodes testées au cours de cette thèse, le rééchantillonnage dual n'a pas été très convainquant, mais n'est pas non plus néfaste sur les résultats. Il peut être en revanche plus rassurant d'imposer une certaine proportion de particules aléatoires afin de prévenir un effondrement du nombre de particules, même si la distribution de proposition donnée par l'EnKF apporte une garantie préalable sur la qualité des particules. L'introduction d'une assimilation à plusieurs échelles, comme présenté au chapitre 5, permet, pour les assimilations d'écoulements fluides, un gain significatif sur le nombre d'échelles reconstruites.

La localisation (Petrie [2008]) n'a pas été testée au cours de cette thèse, mais cela apporterait très probablement un gain important en temps de calcul ou en précision, d'autant que cela pourrait être couplé au caractère local des observations (pour des opérateurs de flot optique de type Lucas-Kanade ou de différence d'images déplacées).

8.3 Modèles en jeu

La forte complexité calculatoire des modèles dynamiques d'écoulements fluides est un frein important à l'utilisation d'un grand nombre de particules. À partir de là peut se poser la question de la nécessité d'utiliser un modèle dynamique très puissant avec un coût calculatoire important ou alors un modèle dynamique moins précis et moins coûteux avec un nombre de particules plus important. La réponse dépend probablement du problème et de la méthode. Par exemple, dans les travaux menés au cours de cette thèse, il a été choisi d'utiliser un modèle 2D avec 400 particules dans l'application de température de surface de l'océan Pacifique (section 6.10) pour un bon résultat ; en comparaison, il a été choisi d'utiliser un modèle 3D multi-variables physiques avec 50 ou 100 particules en mer d'Iroise (chapitre 6) pour un résultat a priori moins bon que le précédent.

Parmi les autres expériences menées au cours de cette thèse, l'essai d'un modèle dynamique stochastique s'est avéré globalement moins bon qu'un modèle dynamique déterministe, quoique cela pourrait être différent avec une méthode numérique de résolution stochastique plus fine comme un schéma de Runge-Kutta d'ordre plus élevé.

Enfin, plusieurs comparaisons dans cette thèse (sections 4.3 et 6.4) montrent l'importance de la forme spatiale du bruit dynamique, et en particulier que le bruit autosimilaire (section 4.2) donne des résultats d'assimilation généralement meilleurs que le bruit d'Evenssen (section 4.1). Cela peut se comprendre dans la mesure qu'une assimilation avec un faible nombre de particules tirera profit d'un bruit vivant dans un espace d'état proche de l'espace d'état du phénomène (autrement dit un bruit le plus réaliste possible par rapport au phénomène).

8.4 Dimensionnement et calibration

D'après les expériences faites au cours de cette thèse, deux classes semblent se distinguer par rapport au nombre de particules utilisées :

- les expériences en faible nombre de particules : entre 10 et 70 particules ;
- les expériences en grand nombre de particules : plus de 70 particules.

Les résultats d'expériences dans une classe sont difficilement interprétables dans l'autre classe : par exemple les expériences en faible nombre de particules sont (logiquement) plus instables que celles en grand nombre de particules et peuvent avoir tendance à diverger dans certaines conditions sur les autres paramètres (par exemple le type de bruit dans les expériences de mesures intermédiaires — tableau 9.1) ou alors l'influence du rééchantillonnage dual. Aussi, la transition depuis un grand nombre vers un plus faible nombre peut faire l'objet d'un changement soudain dans le profil de d'erreur, et les faibles nombres de particules (qui sont souhaités dans un but d'économie calculatoire) peuvent demander la mise en place de techniques plus fines de sélection des particules et de qualité du modèle dynamique.

À part à quelques occasions, nous n'avons pas fait d'estimation en ligne des paramètres et la calibration des paramètres s'est faite manuellement. Pour retenir quelques grands principes qui ont guidé cette calibration dans la plupart des expériences :

- l'amplitude du bruit dynamique doit (ou devrait) être de plusieurs ordres de grandeur inférieur à l'amplitude du bruit d'observation : le modèle dynamique est le seul à assurer le suivi temporel du phénomène, aussi une assimilation avec un modèle dynamique peu fiable conduira à régulièrement rapprocher les particules de l'observation et la cohérence temporelle globale en sera fortement diminuée.
- dans le cas d'images d'écoulements fluides, les grandes échelles du fluide sont généralement très bien reconstruites en l'espace de quelques cycles d'assimilation ; en revanche les échelles moyennes à petites demandent une attention spéciale et demandent à choisir des « justes milieux » dans les paramètres, entre forçage (par le bruit dynamique (tableau 4.8)) et apport de l'observation pour les échelles moyennes (par le filtrage de la vraisemblance (9.1)).
- à part le nombre de particules, le type de bruit dynamique et l'amplitude relative des bruits dynamique et d'observation, la plupart des autres paramètres testés au cours de cette thèse n'ont globalement qu'une influence limitée sur l'erreur quadratique moyenne.

8.5 Conclusion

L'assimilation étant essentiellement une pondération de deux sources de données (modèle et observations avec leurs incertitudes respectives), il s'agit de trouver les meilleures méthodes permettant d'en extraire un résultat plus proche de la réalité que chacune des deux sources seules. En théorie ce meilleur résultat existe ; la difficulté est la pratique qui doit tenir compte des ressources finies (temps et moyens de calcul).

Ainsi il est toujours possible de demander une précision supplémentaire au prix généralement de ressources supplémentaires, et il est toujours possible de rajouter des variations à la méthode permettant de réduire ces ressources en se plaçant dans des cas particuliers ou en faisant en sorte d'atteindre un optimum sur un caractère précis, mais cela se fait souvent en rajoutant des paramètres à l'assimilation, paramètres qui se doivent également d'être évalués ou fixés.

Ainsi l'assimilation peut être vue comme une « science du compromis » entre deux sources de données, et dont les résultats dépendent aussi des attentes de l'utilisateur, des méthodes de comparaison utilisées et de la connaissance des problèmes sous-jacents traités.

Chapitre 9

Pistes d'améliorations

Nous évoquons dans ce chapitre quelques idées qui pourraient contribuer à améliorer les résultats d'assimilations d'écoulements fluides par filtrage particulaire, et présentons quelques résultats préliminaires. Les quatre pistes d'amélioration listées ci-dessous sont brièvement décrites. Il s'agit :

- des mesures intermédiaires permettant de guider les particules en l'absence d'observations image,
- d'une spécialisation de la fonction de vraisemblance pour limiter l'assimilation à certaines bandes fréquentielles,
- d'un filtre particulaire dont la distribution *a priori* est un mélange de variables gaussiennes au lieu d'un mélange de masses de Dirac,
- d'un filtre de Kalman d'ensemble récursif sur le nombre de particules.

9.1 Mesures intermédiaires

Dans le contexte de l'assimilation où l'on cherche à rapprocher — dans une certaine mesure — les particules de l'observation, certaines méthodes de filtres particuliers permettent dans une certaine mesure de guider les particules vers l'observation comme le filtre particulaire auxiliaire (Pitt and Shephard [2001]) ou le filtre particulaire guidé (van Leeuwen [2009]).

La méthode proposée ici s'apparente en partie au filtre particulaire guidé, dans le sens où on va accompagner les particules vers l'observation, même si on ne dispose pas de celle-ci pendant des temps intermédiaires.

9.1.1 Construction

Soit deux images I_0 et I_{dT} données avec $dT > 1$ entier, on cherche à assimiler le déplacement entre les deux. L'équation de flot optique s'écrit

$$I(\mathbf{x} + \mathbf{d}_{int}(\mathbf{x}, \alpha dT), \alpha dT) - I(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (9.1)$$

où $\mathbf{d}_{int}(\mathbf{x}, T)$ est le déplacement du point \mathbf{x} intégré depuis $t = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{int}(\mathbf{x}, 0) = 0 \\ \mathbf{d}_{int}(\mathbf{x}, T + dt) = \mathbf{d}_{int}(\mathbf{x}, T) + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{d}_{int}(\mathbf{x}, T), T + dt)dt, \text{ avec } dt \leq dT. \end{cases} \quad (9.2)$$

Puisque l'on cherche à assimiler des instants où il n'y a pas d'image, on prendra en compte le déplacement actuel déjà assimilé et on extrapolera le déplacement restant jusqu'à

l'image suivante selon une fonction linéaire du dernier pas de temps :

$$d_{tot}(x, T) = d_{int}(x, T) + \mathbf{u}(x + d_{int}(x, T), T)(dT - T), \quad (9.3)$$

et on cherchera alors à assimiler les temps intermédiaires en minimisant l'équation de type flot optique suivante, valable pour tous les temps intermédiaires :

$$\min_{d_{tot}(\cdot, \alpha dT)} |I(x + d_{tot}(x, \alpha dT), dT) - I(x, 0)|, \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (9.4)$$

Cette équation donne une estimation de type flot optique qui coïncide avec la vraie équation de flot optique lorsque $\alpha = 1$ et qui guide les estimations lors des assimilations faites aux temps intermédiaires, ceci sous l'hypothèse que l'extrapolation linéaire est relativement correcte pour le phénomène étudié.

Cette extrapolation linéaire a de grandes chances d'être peu efficace lorsque le phénomène sous-jacent est fortement non-linéaire et il faudrait alors recourir à un autre type d'extrapolation. Dans notre cas, pour la séquence de suivi d'un scalaire passif (voir la section 6.3), pour des intervalles entres images assez petits, cette extrapolation linéaire convient et peut permettre de baisser un peu la fréquence des images (ou d'augmenter la fréquence d'assimilation). Pour cette raison, nous avons appelé cette méthode « micro-assimilation ». Sous un autre angle, cette méthode peut être vue comme une assimilation classique avec des états intermédiaires provenant d'observations extrapolées (on trouve parfois le terme de *pseudo-observation* pour ce type d'observations dérivées d'autres quantités observées ou estimées).

Du point de vue de l'assimilation proprement dite, il est possible de dériver plusieurs variantes de la méthode WETKF : faut-il effectuer une étape de pondération et rééchantillonnage à chaque « assimilation virtuelle » ou non ? Les deux variantes ont été testées et sont dénommées ci-après *micro-assimilation partielle* et *micro-assimilation totale* : une micro-assimilation partielle n'effectue les étapes de pondération et rééchantillonnage qu'aux temps où une paire d'images est effectivement présente (la convergence théorique vers le filtre bayésien ne se fait alors qu'à ces instants) et une seule étape de Kalman est opérée aux autres instants, alors qu'une micro-assimilation totale effectue toutes les étapes du WETKF à chaque instant (étape de Kalman, pondération, rééchantillonnage).

On notera qu'on peut avoir un raisonnement similaire pour ce qui concerne l'assimilation multi-échelles présentée au chapitre 5 : effectue-t-on une étape de pondération (voire rééchantillonnage) après une étape de Kalman à une échelle donnée ? Cela n'a pas été testé dans le cadre de cette thèse ; en revanche, l'étape de pondération étant l'étape qui essentiellement assure la convergence vers le filtre bayésien, introduire une étape de pondération déporte la convergence vers le filtre bayésien sur un axe d'évolution autre que le temps : celui des échelles. À partir de là, il faut se poser la question théorique de l'espace des indices d'évolution (auparavant uniquement le temps) dans lequel évolution l'assimilation, afin de faire cohabiter proprement ces deux axes d'assimilation. On pourrait se poser la question dans un contexte plus général où il y aurait d dimensions d'évolution de l'assimilation.

9.1.2 Résultats

Le tableau 9.1 présente quelques résultats préliminaires pour des assimilations avec mesures intermédiaires, pour des fréquences d'assimilation d'une image sur 2, 3, et 4 dans l'idée d'essayer de réduire le nombre d'assimilations tout en gardant une erreur raisonnable.

Type	Fréquence	Nombre de particules	RMSE 98 (partiel)	RMSE 98 (total)	RMSE 98 (fréquence=1)
ETKF EV	1/2	50	0,1000	0,0942	0,0966
ETKF AS	1/2	50	0,0814	0,0784	0,0822
ETKF EV	1/2	150	0,0682	0,0662	-
ETKF AS	1/2	150	0,0522	0,0508	-
ETKF EV	1/2	400	0,0623	0,0784	0,0561
ETKF AS	1/2	400	0,0492	0,0494	0,0433
ETKF EV	1/3	50	0,2574	0,2813	0,0966
ETKF AS	1/3	50	0,0820	0,0876	0,0822
ETKF EV	1/3	150	0,0690	0,0767	-
ETKF AS	1/3	150	0,0525	0,0521	-
ETKF EV	1/3	400	0,0686	0,0614	0,0561
ETKF AS	1/3	400	0,0469	0,0492	0,0433
ETKF EV	1/4	50	0,5637	0,6963	0,0966
ETKF AS	1/4	50	0,0824	0,0887	0,0822
ETKF EV	1/4	150	0,0703	0,0672	-
ETKF AS	1/4	150	0,0516	0,0550	-
ETKF EV	1/4	400	0,0608	0,0581	0,0561
ETKF AS	1/4	400	0,0501	0,0482	0,0433
WETKF EV	1/2	50	0,0975	0,0971	0,0981
WETKF AS	1/2	50	0,0763	0,0821	0,0786
WETKF EV	1/2	150	0,0694	0,0645	-
WETKF AS	1/2	150	0,0511	0,0514	-
WETKF EV	1/2	400	0,0594	0,0614	0,0598
WETKF AS	1/2	400	0,0480	0,0481	0,0432
WETKF EV	1/3	50	0,4125	0,2582	0,0981
WETKF AS	1/3	50	0,0805	0,0817	0,0786
WETKF EV	1/3	150	0,0711	0,0787	-
WETKF AS	1/3	150	0,0529	0,0524	-
WETKF EV	1/3	400	0,0656	0,0613	0,0598
WETKF AS	1/3	400	0,0520	0,0512	0,0432
WETKF EV	1/4	50	0,4735	0,6482	0,0981
WETKF AS	1/4	50	0,0763	0,0741	0,0786
WETKF EV	1/4	150	0,1108	0,0721	-
WETKF AS	1/4	150	0,0562	0,0574	-
WETKF EV	1/4	400	0,0756	0,0720	0,0598
WETKF AS	1/4	400	0,0578	0,0580	0,0432

TABLE 9.1 – Test sur des assimilations image à une fréquence supérieure à celle des images, avec une ou plusieurs assimilations « virtuelles » intercalaires, avec pondération et rééchantillonnage soit durant toutes les assimilations (micro-assimilation totale), soit uniquement pendant les vrais temps image (micro-assimilation partielle).

Ces tests ne sont issus que d'une réalisation à chaque fois et sont donc à prendre avec précaution (sauf pour les résultats de référence dans la dernière colonne issus de 6 réalisations). L'échantillonnage initial a été fait avec le bruit d'Evensen d'écart-type 1. Dans le cas du WETKF, le déplacement des particules durant la phase de rééchantillonnage se fait par un bruit autosimilaire d'écart-type 0,001. Le bruit d'observation a un écart-type de 1 et le bruit dynamique un écart-type de 0,01.

Plusieurs observations peuvent être effectuées d'après ces résultats (tout en gardant à l'esprit que ces résultats ne sont issus que d'une exécution). Tout d'abord la RMSE augmente « raisonnablement » lorsque la fréquence d'assimilation diminue et ce dans la plupart des catégories, hormis les ETKF/WETKF à 50 particules avec bruit d'Evensen qui divergent à partir d'une image sur trois. En comparaison, les ETKF/WETKF à 50 particules avec bruit autosimilaire sont étonnement stables jusqu'à un image sur quatre.

La comparaison entre micro-assimilations partielles et micro-assimilations totales est difficile à établir ; il semble que les micro-assimilations partielles l'emportent de peu en faible nombre de particules et que la tendance s'inverse pour un plus grand nombre de particules. Cette observation serait à confirmer sur un plus grand nombre de cas.

9.2 Spécialisation de la vraisemblance

Le schéma d'assimilation particulière WETKF se décompose en deux grandes étapes : correction de Kalman et pondération. Dans un premier temps, on peut naturellement poser comme fonction de vraisemblance une fonction gaussienne centrée en l'observation et de covariance égale à la covariance d'observation supposée ou estimée :

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) = \mathcal{N}(\mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k^{(i)}); \mathbf{y}_k, \mathbf{R}_k),$$

en projetant les particules dans l'espace d'observation en utilisant le même opérateur d'observation que dans l'étape du filtre de Kalman d'ensemble. D'une certaine façon, cette méthode « re-sélectionne » donc les particules que l'étape de Kalman a déjà sélectionnées comme étant les meilleures dans le cadre de l'approximation gaussienne. Si on met de côté le bénéfice théorique de cette étape, la pratique montre que le bénéfice réel de cette étape est faible — même si généralement légèrement positif.

Aussi, une idée est de profiter de cette deuxième confrontation à l'observation pour spécifier une vraisemblance différente qui soit, soit plus complète en confrontant cette vraisemblance à des observations complémentaires, soit moins complète en dégradant l'observation si l'on cherche à concentrer le résultat sur un aspect plus précis. La convergence du filtre particulière sera alors au sens de cette vraisemblance.

Exprimée comme telle, cette possibilité peut s'appliquer de façon générale aux problèmes traités avec un filtre de Kalman d'ensemble pondéré. Dans le contexte d'assimilation de fluide, cette latitude peut être utilisée dans un cadre multi-échelles. Par exemple, on peut imaginer utiliser l'étape de Kalman pour assimiler les grandes échelles, puis enrichir l'observation lors de cette étape de vraisemblance en descendant dans les échelles. Inversement, si l'étape de Kalman a utilisé un opérateur d'observation "riche" comme l'est l'opérateur d'images recalées ou l'assimilation multi-échelles du chapitre 5, l'étape de vraisemblance peut se concentrer sur des observations grandes et moyennes échelles afin d'obtenir un résultat meilleur à ces échelles au détriment des petites échelles.

En pratique, l'enrichissement de la vraisemblance va « élargir » l'espace de recherche et donc risque de contracter fortement la vraisemblance, ce qui peut avoir comme conséquence de renforcer de façon prépondérante les quelques particules les moins éloignées de cette observation enrichie et donc de mener à un possible effondrement du nombre de particules actives. Ceci devra alors être contourné, soit par l'augmentation du nombre de particules, soit par d'autres techniques évitant cet effondrement.

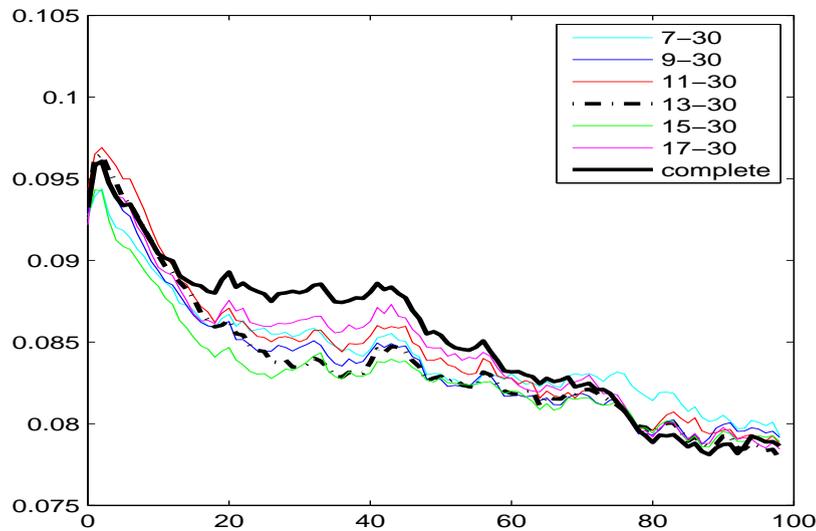


FIGURE 9.1 – RMSE pour un filtrage par WETKF dont la vraisemblance, donnée par une différence d’images déplacées, est filtrée. La coupure grande échelle de ce filtrage varie.

L’abscisse correspond aux pas d’assimilation. Les indices indiqués dans la légende correspondent aux fréquences de coupure du filtrage exprimées en fractions d’image ($\ll 7 \gg = \ll 1/7 \text{ d’image} \gg$). Le filtrage est effectué dans l’espace de Fourier.

Dans l’autre cas, un appauvrissement ou un lissage de la vraisemblance est plus facile à traiter et a fait l’objet de quelques tests détaillés dans cette section. Pragmatiquement, la dégradation de la vraisemblance peut conduire à la dispersion des particules. On est ici dans l’opération inverse de l’effondrement où les différentes particules, dans un cas extrême, se différencient peu les unes des autres. À la limite, si l’ensemble des caractères vus par la vraisemblance est vide, l’étape de pondération attribuera alors des poids identiques et cela se réduira alors à un filtre de Kalman d’ensemble classique. Cette version du filtre particulière — en appauvrissant la vraisemblance — peut donc être vue comme une méthode intermédiaire entre le filtre de Kalman d’ensemble classique et le filtre de Kalman d’ensemble pondéré que l’on peut alors nommer *filtre de Kalman d’ensemble α -pondéré*.

Mise en œuvre

Dans les séquences fluides d’écoulements traitées, nous avons vu que les grandes échelles de l’écoulement sont en général assez bien reconstruites avec le WETKF mais que la qualité de reconstruction baissait sur les petites échelles. Dans ce contexte, les petites échelles de l’image ne correspondent peut-être pas aux éléments les plus prépondérants mis en jeu dans le processus d’assimilation. Il peut donc être profitable de sélectionner des échelles intermédiaires ciblées de l’observation en délaissant les petites échelles peu énergétiques de l’écoulement. Ce faisant, le bruit que les petites échelles peuvent apporter dans le calcul de la vraisemblance sera complètement ignoré, d’autant que les trop petites échelles ne peuvent être fidèlement reconstruites au moyen de l’observation à cause du problème de l’ouverture.

Nous avons ainsi expérimenté l’utilisation d’une vraisemblance ne prenant en compte qu’une partie des échelles de l’écoulement. Ce choix a été fait après avoir remarqué que les petites échelles avaient du mal à être reconstruites avec la vraisemblance complète, et que

par conséquent on pouvait les exclure afin de ne donner du poids qu'aux particules ayant de bonnes qualités aux grandes échelles et aux échelles intermédiaires (jusqu'à l'échelle de coupure de la vraisemblance).

Le schéma d'assimilation reste identique à celui décrit dans la section 3.3. Seule la vraisemblance est modifiée en filtrant la différence $\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k$ dans un intervalle fréquentiel compris entre une haute et une basse fréquence donnée en paramètres.

Résultats

Quelques assimilations complètes ont été réalisées avec un filtrage dans l'espace de Fourier, comme illustré sur la figure 9.1. Sur ce graphique, où les échelles sont exprimées en fraction de l'image, la coupure imposée à la vraisemblance aux grandes échelles varie et la coupure petites échelles reste fixe. Ce choix de regarder l'influence de la coupure grande échelles dans la pondération fait suite à l'hypothèse (vérifiée au cours de cette thèse) que les grandes échelles sont bien reconstruites, mais que les petites échelles restent encore difficiles à reconstruire ; en conséquence, la pondération ne tenant pas compte des grandes échelles, la discrimination entre particules est ici effectuée sur une plage d'échelles intermédiaires.

Ce graphique illustre quelques différences dans la décroissance de la RMSE (complète, non-restreinte à certaines échelles). On observe que toutes ces réalisations, qui diffèrent les unes des autres par un filtrage passe-bande de la vraisemblance, atteignent des niveaux d'erreur comparables. Par contre, certains choix de plages fréquentielles semblent conduire à des décroissances plus rapides de la RMSE. La décroissance la plus rapide est obtenue pour un filtrage de la vraisemblance compris entre 8 et 20 pixels. Ce résultat mériterait d'être vérifié plus avant sur d'autres séquences.

9.3 *A priori* en mélange de gaussiennes

La distribution de filtrage *a priori* dans un filtre particulaire est généralement formulée sous la forme d'une somme pondérée de masses de Diracs. L'idée proposée ici est d'enrichir ceci en spécifiant la distribution *a priori* sous la forme d'une somme pondérée de distributions gaussiennes centrées autour des positions échantillonnées par le modèle dynamique. Cela est donc formulé comme un mélange de gaussiennes :

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \propto \sum_{i=1}^N e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{f,(i)})^T \Sigma_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{f,(i)})}, \quad (9.5)$$

où la matrice Σ_k , commune à toutes les particules est spécifiée à partir de la matrice de covariance empirique du nuage de particules.

L'étape de pondération devient alors

$$w^{(i)} \propto p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}). \quad (9.6)$$

L'idée sous-jacente de cet étalement de la distribution *a priori* (par rapport à une somme de masses de Dirac) est de pouvoir étudier la pertinence du déplacement des particules effectué lors de l'étape de Kalman et de favoriser les particules peu déplacées par cette étape ou déplacées vers une autre position correspondant à une des positions échantillonnées par le modèle dynamique stochastique. En effet, compte tenu de la non-linéarité du modèle dynamique, il est souhaitable que, tout en restant proche des observations, les particules soient les plus proches possibles d'un état généré par le modèle

dynamique car le déplacement des particules par l'étape de Kalman ne correspond pas nécessairement à une réalité physique ; de telles particules seront alors de très bonne qualité et plus propices à engager l'assimilation vers une restitution réaliste du phénomène.

Cela a été testé sur la séquence scalaire, mais il est apparu en pratique que l'*a priori* ainsi formé avait au final un ordre de grandeur beaucoup trop faible devant la vraisemblance, et que par conséquent cette étape s'avérait en pratique inutile. En conséquence, cela a conduit à introduire la modification de la vraisemblance telle que décrite précédemment afin de réduire une trop grande selectivité de la vraisemblance. Il est tout à fait possible d'adopter des stratégies du même type pour la distribution *a priori* en organisant le mélange de gaussiennes autour d'une décomposition multi-échelles ou d'une décomposition modale. En tous états de cause, il s'agit de permettre d'évaluer la pertinence vis-à-vis du modèle dynamique des échantillons proposés par le filtre de Kalman d'ensemble.

9.4 Filtre de Kalman de transformation d'ensemble récursif

Cette section n'est qu'une idée et n'est absolument pas au stade de méthode finalisée. Cela concerne les filtres de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF), indépendamment de toute introduction dans un contexte de filtre particulière comme cela a été exposé dans les chapitres précédents (WETKF). Les échantillons à la base de l'ensemble peuvent être choisis aléatoirement (famille des filtres de Kalman d'ensemble) ou non (échantillons correspondants à des modes propres par exemple, comme dans la famille des filtres de Kalman réduits).

Dans Niño Ruiz et al. [2013], les auteurs exposent un filtre de Kalman suivant la méthodologie du filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF) qui réutilise plusieurs fois de suite la formule de Woodbury (autant de fois qu'il y a d'échantillons) pour calculer le gain de Kalman de façon itérative sur les échantillons, *une fois* les échantillons de prédiction construits, centrés autour de leur moyenne empirique et normalisés par le nombre d'échantillons.

9.4.1 Filtre de Kalman d'ensemble itératif

Nous résumons ici les grands principes décrits dans Niño Ruiz et al. [2013]. Soient $\{\mathbf{x}_i^N\}_{i=1\dots N}$ des échantillons prédits par le modèle dynamique, avec $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. On notera $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]$ la matrice dont les colonnes sont ces N échantillons. Les indices suscrits n'indiquent ici que des indices, les seules exponentiations sont des inversions de matrices (\bullet^{-1}).

Ces N échantillons sont d'abord centrés autour de leur moyenne empirique $\mu^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$ pour donner $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1\dots N} \in \mathbb{R}^{n \times N} : \mathbf{s}_i = \frac{1}{\sqrt{N}}(\mathbf{x}_i - \mu^N)$ pour $i = 1 \dots N$. À partir de là, le gain de Kalman empirique sur la base de échantillons appliqué à la différence entre l'observation et les échantillons prédits est exprimé par

$$\mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \mathbf{sv}^T(\mathbf{vv}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \mathbf{sv}^T\mathbf{z} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathbf{v} &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N] = \mathbf{H}\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{m \times N}, \\ \mathbf{z}^N &= (\mathbf{vv}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times N}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on cherchera à résoudre l'équation

$$(\mathbf{R} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{z}^N = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \mathbf{d} \quad (9.8)$$

La première astuce de calcul importante est l'expression de la matrice de gauche comme somme récursive :

$$\mathbf{W}^N = \mathbf{R} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T = \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T = \mathbf{W}^{N-1} + \mathbf{v}_N\mathbf{v}_N^T. \quad (9.9)$$

La deuxième astuce de calcul importante est d'utiliser la formule de Woodbury (voir la proposition 1) pour inverser l'expression de \mathbf{W}^N et ainsi exprimer une récurrence dans la résolution de (9.8) :

$$(\mathbf{W}^N)^{-1}\mathbf{d} = (\mathbf{W}^{N-1})^{-1}\mathbf{d} - (\mathbf{W}^{N-1})^{-1}\mathbf{v}_N(1 + \mathbf{v}_N^T(\mathbf{W}^{N-1})^{-1}\mathbf{v}_N)^{-1}\mathbf{v}_N^T(\mathbf{W}^{N-1})^{-1}\mathbf{d}. \quad (9.10)$$

On reconnaît dans cette formule deux inversions particulières :

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}^{N-1})^{-1}\mathbf{d} &= \mathbf{z}^{N-1} \\ (\mathbf{W}^{N-1})^{-1}\mathbf{v}_N &= \mathbf{b}^{N-1} \end{aligned}$$

On peut alors itérer la formule (9.10) pour n'avoir finalement à inverser que la matrice \mathbf{R} dans les équations

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}^0)^{-1}\mathbf{d} &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{z}^0 \\ (\mathbf{W}^0)^{-1}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}^0 \end{aligned}$$

Partant, on pourra remonter la récurrence en n'effectuant que des multiplications. Cela peut être fait en optimisant les calculs et éviter des calculs redondants. On se référera à l'article original Niño Ruiz et al. [2013] pour plus de détails.

9.4.2 Idée de filtre de Kalman d'ensemble récursif

Maintenant, la formule (9.9) peut être mise en relief avec la formule de récurrence d'une somme de carrés centrés qui peut être trouvée dans Welford [1962], exprimée dans la proposition suivante.

Proposition 8. *Soit $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1\dots\infty}$ un ensemble de points quelconques de \mathbb{R}^m . Alors la moyenne empirique $m^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$ des N premiers points peut être calculée de façon récursive par la formule*

$$m^{N+1} = \frac{N}{N+1}m^N + \frac{\mathbf{x}_{N+1}}{N+1} = m^N + \frac{\mathbf{x}_{N+1} - m^N}{N+1}. \quad (9.11)$$

De plus, la matrice des somme des produits croisés centrés sur la moyenne empirique $C^N = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - m^N)(\mathbf{x}_i - m^N)^T$ des N premiers points peut être calculée de façon récursive par la formule

$$C^{N+1} = C^N + \frac{N}{N+1}(\mathbf{x}_{N+1} - m^N)(\mathbf{x}_{N+1} - m^N)^T \quad (9.12)$$

La matrice \mathbf{W}^N de la formule (9.9) pourrait se voir remplacés ses \mathbf{v} par :

$$\mathbf{v}_N = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}(\mathbf{x}_N - \mu^{N-1}) \quad (9.13)$$

pour donner

$$\mathbf{W}^N = \mathbf{R} + (\mathbf{x}^N - \mu^N)(\mathbf{x}^N - \mu^N)^T = \mathbf{R} + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T = \mathbf{W}^{N-1} + \mathbf{v}_N \mathbf{v}_N^T. \quad (9.14)$$

Cela pourrait permettre d'introduire un filtre de Kalman d'ensemble récursif sur le nombre de particules. Par exemple, en supposant qu'il est facile d'obtenir des échantillons prédits, des échantillons pourraient être rajoutés au besoin dans l'étape d'analyse en fonction d'un critère de convergence donné et sans qu'il soit nécessaire de recalculer l'ensemble des calculs de l'étape d'analyse du filtre de Kalman d'ensemble pour ce jeu de particules.

Il faut cependant réaliser que la formule (9.12) ne correspond à l'expression d'une matrice de covariance empirique qu'après multiplication par un facteur $\frac{1}{N-1}$. En répercutant ce facteur dans l'équation (9.9), celui-ci influe : soit l'ensemble des équations (9.10) en remplaçant le scalaire « 1 » par « $N - 1$ » (sauf erreur de calcul), soit sur la matrice \mathbf{R} qui devient $(N - 1)\mathbf{R}$. Dans les deux cas, il semble que cela empêche une réelle récurrence sur le nombre d'échantillons puisque le nombre d'échantillons doit être fixé *a priori* et, semble-t-il, sans moyen de le changer sans recalculer une part significative de ce qui a déjà été calculé.

Conclusion générale

Au cours de ce document, nous avons présenté un cadre utilisé pour des assimilations de données image relatives à des phénomènes fluides, ceci au moyen de filtres particuliers spécifiques. Tandis que les filtres particuliers sont généralement connus pour leur fort coût calculatoire, et qu'à l'inverse les filtres de Kalman d'ensemble sont connus pour leur faible coût, la méthode employée, le filtre de Kalman d'ensemble pondéré, est à l'interface entre les deux et se montre adapté au traitement de telles problématiques. Au-delà de la méthode globale, nous avons utilisé des composants adaptés au traitement des phénomènes fluides : le modèle dynamique, tantôt une dynamique vorticité-vitesse 2D tantôt le modèle océanique ROMS ; le bruit dynamique, conçu pour mimer les lois de la turbulence, et donnant de bons résultats par rapport à un bruit plus générique. Une stratégie de rééchantillonnage autre que le rééchantillonnage multinomial a été testé, le rééchantillonnage dual, quoi qu'il n'ai pas donné de résultats aussi bons qu'espéré.

Lors du traitement des phénomènes fluides, contrairement aux phénomènes de mouvements de solides, les questions de découpage par échelles et de relations entre les échelles apparaissent rapidement. Nous avons proposé un schéma d'assimilation multi-échelles qui permet d'assimiler incrémentalement les échelles du fluide observé, ce à partir d'un observateur de flot optique lui-même multi-échelles. Les résultats obtenus par cette technique sont encourageants, tant quantitativement sur la séquence synthétique que qualitativement sur l'expérience de film de savon.

Ces méthodes ont été systématiquement testées sur une séquence synthétique et peuvent donc être comparées les uns aux autres de façon cohérente afin de dégager les grandes tendances sur les méthodes ayant le plus de potentiel pour l'assimilation d'images d'écoulements fluides. En outre, nous avons comparé l'énergie de l'erreur et l'erreur relative de énergie ; la deuxième mesure explicite bien le degré de reconstruction des échelles par rapport à ce qui est attendu.

Enfin, plusieurs pistes d'améliorations ont été explorées qui pourraient permettre de gagner en souplesse d'utilisation, avec des mesures intermédiaires, ou en précision, avec une distribution *a priori* gaussienne ou en spécialisant la vraisemblance. La dernière piste pourrait déboucher sur une formule récursive du filtre de Kalman d'ensemble ; cela ne constituerait probablement pas un gain global en performance, mais une belle formule pourrait sortir de cette méthode.

Annexe A

Conservation des poids entre $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ et $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$

Cette annexe est présente pour rendre le document plus autonome, mais reprend essentiellement l'annexe A de Arnaud [2004].

La méthode générale des filtres particulaires se concentre sur la distribution $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ (voir la section 2.3.1), mais on peut être intéressé par sa marginale $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$.

Proposition 9. *Dans un filtre particulaire donnant une approximation de $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ par*

$$p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}}(\mathbf{x}_{0:k}),$$

avec des poids $w_k^{(i)}$ donnés par la formule (2.2) et des particules $\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}$ distribués selon $\pi(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ (voir la section 2.3.1), la marginale $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ est donnée par

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}(\mathbf{x}_k).$$

Démonstration. L'espérance d'une fonction mesurable $\phi(\mathbf{x}_k)$ conditionnellement à des observations $\mathbf{y}_{1:k}$ est :

$$\begin{aligned} I(\phi(\mathbf{x}_k)) &= \mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})}[\phi(\mathbf{x}_k)|\mathbf{y}_{1:k}] \\ &= \int \phi(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \\ &= \int \phi(\mathbf{x}_k) \int p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k-1} d\mathbf{x}_k \\ &= \int \phi(\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} \\ &= \int \phi(\mathbf{x}_k) \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})} \pi(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} \\ &= \int \phi(\mathbf{x}_k) w_k \pi(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_{0:k} \\ \text{où } w_k &= \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\{\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}\}_{i=1\dots N}$ sont N échantillons indépendants et identiquement distribués selon la loi $\pi(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$ et que l'on sait calculer $\pi(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$, $I_N(\phi(\mathbf{x}_k))$ est un estimateur de $I(\phi(\mathbf{x}_k))$, où :

$$I_N(\phi(\mathbf{x}_k)) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \phi(\mathbf{x}_k^{(i)}) \quad \text{où } w^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})}{\pi(\mathbf{x}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:k})}$$

$$\text{et } \tilde{w}^{(i)} = \frac{w^{(i)}}{\sum_{i=1}^N w^{(i)}}$$

Dans un filtre particulière, la densité de la distribution marginale $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ peut donc être estimée à partir des poids $w_k^{(i)}$, même si ceux-ci étaient initialement calculés pour la distribution a posteriori $p(\mathbf{x}_{0:k}|\mathbf{y}_{1:k})$:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}(\mathbf{x}_k).$$

□

Annexe B

Calcul et indépendance de $\mathcal{N}(\mathbf{x}; 0, \mathbf{xx}^T)$

Dans le calcul du filtre de Kalman d'ensemble pondéré, l'évaluation des poids fait intervenir des évaluations selon deux distributions de la forme $\mathcal{N}(\mathbf{x}^{(i)}; 0, \frac{1}{N-1}\mathbf{xx}^T)$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ matrice dont les vecteurs colonne sont des échantillons aléatoires $\{\mathbf{x}^{(i)}\}_{i=1\dots N}$ et dont la moyenne des échantillons est nulle, autrement dit $\mathbf{1}_N$ est dans le noyau de \mathbf{x} .

Cette annexe, reprenant l'annexe A de Papadakis et al. [2010], montre que l'évaluation de cette densité en ces points donne un résultat identique pour tous les échantillons $\mathbf{x}^{(i)}$. Aussi, lorsque cette évaluation se fait pour des quantités définies uniquement à une constante de proportionnalité près (comme c'est le cas dans le WEnKF), il est inutile d'effectuer ce calcul.

La seule hypothèse à vérifier pour prétendre que ces évaluations donnent le même résultat est que la famille des particules soit de rang $N - 1$ (au sens de l'algèbre linéaire). Dans le cas du WEnKF, cette hypothèse peut être faite (et en toute rigueur il faudrait la vérifier à chaque fois) car les particules de prédiction sont tirées aléatoirement dans un espace de dimension $n \gg N$ (il y a donc peu de chance qu'ils soient linéairement liés – la probabilité est nulle) et l'étape de Kalman conserve le rang de l'échantillon.

Soit donc $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}] \in \mathbb{R}^{n \times N}$, où $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ et $\sum_{i=1}^N \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{0}_n$.

En notant A^+ le pseudo-inverse de la matrice A , la quantité $\mathcal{N}(\mathbf{x}^{(i)}; 0, \frac{1}{N-1}\mathbf{xx}^T)$ vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{x}^{(i)}; 0, \frac{1}{N-1}\mathbf{xx}^T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\det(\frac{1}{N-1}\mathbf{xx}^T)|}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{(i)T}(\frac{1}{N-1}\mathbf{xx}^T)^+ \mathbf{x}^{(i)}} \\ &= \frac{\sqrt{N-1}^n}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\det(\mathbf{xx}^T)|}} e^{-\frac{N-1}{2}\mathbf{x}^{(i)T}(\mathbf{xx}^T)^+ \mathbf{x}^{(i)}} \\ &= \sqrt{\frac{(N-1)^n}{(2\pi)^n |\det(\mathbf{xx}^T)|}} e^{\gamma_i} \\ &\text{avec } \gamma_i = -\frac{N-1}{2}\mathbf{x}^{(i)T}(\mathbf{xx}^T)^+ \mathbf{x}^{(i)} \end{aligned}$$

\mathbf{x} est décomposée par une décomposition en valeurs singulières réduite $\mathbf{x} = \mathbf{USV}^T$, avec $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice orthogonale, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ matrice diagonale, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ matrice orthogonale.

L'exposant γ_i de l'exponentielle peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= -\frac{N-1}{2} \mathbf{x}^{(i)T} (\mathbf{x}\mathbf{x}^T) \mathbf{x}^{(i)} \\
&= -\frac{N-1}{2} \mathbf{x}^{(i)T} (USV^T V S^T U^T) \mathbf{x}^{(i)} \\
&= -\frac{N-1}{2} \mathbf{x}^{(i)T} (USS^T U^T) \mathbf{x}^{(i)} \\
&= -\frac{N-1}{2} V_i S^T U^T (USS^T U^T) + U S V_i^T \text{ avec } V_i = \text{ ligne } i \text{ de } V \\
&= -\frac{N-1}{2} V_i S^T U^T U S^+ S^+ U^T U S V_i^T \\
&= -\frac{N-1}{2} V_i (S^+ S)^T (S^+ S) V_i^T
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse que la famille des points $\mathbf{x} \in R^n$ soit de rang $N - 1$, autrement dit que seule la moyenne nulle des échantillons permet de lier linéairement les échantillons, alors $SS^+ = \mathbf{1}_N^{N-1}$ en notant $\mathbf{1}_N^m$ la matrice diagonale de taille $N \times N$ dont les m premières valeurs sont 1 et les $N - m$ dernières sont 0.

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= -\frac{N-1}{2} V_i (S^+ S)^T (S^+ S) V_i^T \\
&= -\frac{N-1}{2} V_i \mathbf{1}_N^{N-1} V_i^T \\
&= -\frac{N-1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} V_{ij}^2 \\
&= -\frac{N-1}{2} (1 - V_{iN}^2) \text{ [car les colonnes de } V \text{ sont orthonormées]}
\end{aligned}$$

Or, puisque \mathbf{x} est exactement de rang $N - 1$ et puisque le vecteur $\mathbf{1}_N$ est dans le noyau de V de part la moyenne nulle des échantillons, on en déduit que le sous-espace propre associé à la valeur 0 est exactement $\text{Vect}(\mathbf{1}_N)$. De plus, puisque les colonnes de V sont normalisées, on a $V_{iN} = 1/N$ et $V_{iN}^2 = 1/N^2$.

Finalement, pour tout $i, j \in [1, N]$, on a $\gamma_i = \gamma_j$, ce qui entraîne

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}^{(i)}; 0, \frac{1}{N-1} \mathbf{x}\mathbf{x}^T) = \mathcal{N}(\mathbf{x}^{(j)}; 0, \frac{1}{N-1} \mathbf{x}\mathbf{x}^T)$$

et, lorsque ces probabilités sont appelées à être normalisées, il n'est alors plus utile de calculer ces quantités.

Annexe C

Convergence du bruit d'Evensen vers une loi normale

Nous montrons dans cette annexe que le bruit d'Evensen (voir la section 4.1), bien que n'étant pas gaussien, converge vers une distribution gaussienne lorsque le nombre de points tend vers l'infini. Nous nous limitons à un bruit d'Evensen en dimension 1, puisqu'il suffit d'une dimension qui tende vers l'infini pour que la distribution en chaque point spatial tende vers une distribution gaussienne.

Pour une image de dimension N , de résolution Δx et de longueur de décorrélation spectrale σ_1 , le terme général du bruit d'Evensen est donné par

$$q(x_n) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{l=0}^{N-1} e^{-\frac{2(\frac{2\pi l}{N\Delta x})^2}{\sigma_1^2}}}} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-\frac{(\frac{2\pi l}{N\Delta x})^2}{\sigma_1^2}} e^{2\pi i \frac{n}{N} l} \cos(2\pi \phi_l) \quad (\text{C.1})$$

avec $\phi_l \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $\forall l = 0 \dots N - 1$.

Dans la suite, on fixe la constante $\beta = \left(\frac{2\pi}{\Delta x \sigma_1}\right)^2$ et on définit les variables aléatoires réelles $X_{l,n,N}$ par :

$$\begin{cases} s_{l,n,N} = \frac{e^{-\beta \frac{l^2}{N^2}} e^{2\pi i \frac{n}{N} l}}{\left(\sum_{p=0}^{N-1} e^{-2\beta \frac{p^2}{N^2}}\right)^{1/2}} \\ X_{l,n,N} = s_{l,n,N} \cos(2\pi \phi_l) \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

On cherchera à montrer que pour n fixé (quand $N > n$), la somme

$$S_{n,N} = \sum_{l=0}^{N-1} X_{l,n,N} \quad (\text{C.3})$$

tend vers une variable aléatoire normale. Cependant, bien que les variables ϕ_l soient indépendantes et donc que les variables $X_{l,n,N}$ soient indépendantes, les variables $X_{l,n,N}$ n'ont pas la même variance et ne sont donc pas identiques, bien que identiques à un facteur près dépendant de l et N . Pour démontrer que $S_{n,N}$ tend bien vers une variable normale, on utilisera donc le théorème central limite pour des variables aléatoires indépendantes mais identiques uniquement à un facteur près dépendant de l et N (théorème 2.7.3 de Lehmann [1999]).

Proposition 10 (Théorème central limite pour des variables indépendantes et identiques à un facteur près dépendant de N). Soient $(Y_i)_{i=1,\dots}$ des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle, de variance finie $\mathbb{E}[|Y_i|^2] = \sigma^2$ et de troisième moment fini $\mathbb{E}[|Y_i|^3] = \gamma$. Soient $X_{ni} = d_{ni}Y_i$ des variables issues des Y_i . Supposons que les coefficients d_{ni} satisfont à la condition

$$\frac{\sum_{n=0}^N |d_{ni}|^3}{\left(\sum_{n=0}^N |d_{ni}|^2\right)^{3/2}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{C.4})$$

Alors $\frac{\sum_{n=0}^N d_{ni}Y_i}{\sigma \sqrt{\sum_{n=0}^N d_{ni}^2}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$ en loi.

Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\sum_{l=0}^{N-1} |s_{l,n,N}|^\delta = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{e^{-\delta \beta \frac{l^2}{N^2}}}{\left(\sum_{p=0}^{N-1} e^{-2\beta \frac{p^2}{N^2}}\right)^{\delta/2}}$$

L'expression (C.4) appliquée aux coefficients $s_{l,n,N}$ de (C.2) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{l=0}^{N-1} |s_{l,n,N}|^3}{\left(\sum_{l=0}^{N-1} |s_{l,n,N}|^2\right)^{3/2}} &= \frac{\sum_{l=0}^{N-1} e^{-3\beta \frac{l^2}{N^2}} \left(\sum_{p=0}^{N-1} e^{-2\beta \frac{p^2}{N^2}}\right)^{2/2}}{\left(\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\beta \frac{l^2}{N^2}}\right) \left(\sum_{p=0}^{N-1} e^{-2\beta \frac{p^2}{N^2}}\right)^{3/2}} \\ &\leq \frac{N}{\left(N \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-2\beta \frac{l^2}{N^2}}\right)^{3/2}} \\ &\leq \frac{N}{N^{3/2} \left(\prod_{l=0}^{N-1} e^{-2\beta \frac{l^2}{N^2}}\right)^{\frac{3}{2N}}} \quad [\text{inégalité arithmético-géométrique}] \\ &\leq N^{-1/2} \left(\prod_{l=0}^{N-1} e^{-2\beta \frac{l^2}{N^2}}\right)^{-\frac{3}{2N}} \\ &\leq N^{-1/2} e^{\frac{3\beta}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} l^2} \\ &\leq N^{-1/2} e^{\frac{3\beta}{N^2} \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}} \quad \left[\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &\leq N^{-1/2} e^{3\beta \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}\right)} \\ &\leq N^{-1/2} \quad \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2} \leq 0\right] \end{aligned}$$

Ainsi, la dernière expression tend vers 0 quand N tend vers l'infini, et tous les moments des variables aléatoires $\cos(2\pi\phi)$ avec $\phi \sim \mathcal{U}(0, 1)$ sont finis. Ce qui montre le théorème et permet d'affirmer que le bruit d'Evensen tend vers une distribution gaussienne.

Publications et interventions

Publications

Conférences

- Sai S. Gorthi, Sébastien Beyou, and Étienne Mémin. Analysis of SST images by Weighted Ensemble Transform Kalman Filter. In *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2011 IEEE International*, pages 4172–4175, july 2011. ISBN 2153-6996. doi: 10.1109/IGARSS.2011.6050049. URL <http://dx.doi.org/10.1109/IGARSS.2011.6050049>
- Sébastien Beyou, Anne Cuzol, Sai S. Gorthi, and Étienne Mémin. Assimilation de température de surface par filtre de Kalman de transformation d'ensemble pondéré. In *GRETSI*, september 2011. URL <http://hal.inria.fr/hal-00694780>
- Sai Gorthi, Sébastien Beyou, Thomas Corpetti, and Etienne Mémin. Multiscale Weighted Ensemble Kalman Filter for Fluid Flow Estimation. In Alfred Bruckstein, Bart ter Haar Romeny, Alexander Bronstein, and Michael Bronstein, editors, *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, volume 6667 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 749–760. Springer Berlin / Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-24784-2. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-24785-9_63. 10.1007/978-3-642-24785-9_63

Journaux

- Sébastien Beyou, Thomas Corpetti, Sai Gorthi, and Etienne Mémin. Fluid Flow Estimation with Multiscale Ensemble Filters Based on Motion Measurements Under Location Uncertainty. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 6:21–46, 2013a
- Sébastien Beyou, Anne Cuzol, Sai Subrahmanyam Gorthi, and Etienne Mémin. Weighted Eensemble Transform Kalman Filter for Image Assimilation. *Tellus A*, 65, 2013b. URL <http://www.tellusa.net/index.php/tellusa/article/view/18803>

Interventions

- Présentation orale à la réunion d'avancement Prevassemble le 14 mars 2011 à Toulouse
- Présentation orale à la journée Inversion et Assimilation d'Images du GdR ISIS le 16 juin 2011 à Paris
- Présentation orale au colloque IGARSS 2011 à Vancouver (Colombie-Britannique, Canada)
- Présentation poster au colloque GRETSI 2011 à Bordeaux
- Présentation poster au Colloque national d'assimilation 2012 à Nice

Table des figures

1.1	Graphe des dépendances entre les processus stochastiques.	9
2.1	Généalogie d'une population de cinq particules : chaque particule évolue, s'adapte, puis meurt ou engendre une descendance.	18
3.1	Illustration du problème de l'ouverture	49
3.2	Schéma d'une assimilation par WETKF.	51
4.1	Exemples de réalisation du bruit d'Evensen. Les deux premières ont une décorrélation spatiale isotrope, contrairement à la dernière qui a une décorrélation anisotrope orientée de $3/4\pi$ radians.	58
4.2	Profil de décroissance de la covariance (isotrope) pour le bruit d'Evensen, ici $r_x = 13$, sur une image de 256×256 pixels, avec les paramètres usuels utilisés lors de l'assimilation.	61
4.3	Spectre d'énergie du bruit d'Evensen lorsque celui est interprété comme une vorticité.	61
4.4	Exemples de réalisations de la vorticité de ce type de bruit sur des images 1024×1024	64
4.5	Spectres de vitesse du bruit auto-similaire pour les réalisations affichées sur la figure 4.4.	65
4.6	Profil de la covariance en fonction de l'éloignement (en pixels) ; l'image fait ici 256 pixels, et les paramètres utilisés sont les meilleurs qu'il a été trouvé dans un cadre d'assimilation sur une séquence synthétique.	65
4.7	Comparaison des spectres pour les bruits d'Evensen (bleu) et autosimilaire (rouge) avec la vérité (noir).	67
4.8	Résultats pour la séquence scalaire sur la comparaison des bruits d'Evensen et autosimilaire.	68
4.9	Comparaison des bruits d'Evensen et autosimilaire en 50 particules (gauche) et 400 particules (droite).	68
5.1	Schéma de l'assimilation multi-résolution	77
5.2	RMSEs de comparaison des assimilations 1L et 3L avec l'assimilation de Papadakis and Mémin [2007] et les flots optiques de Yuan et al. [2007], Héas et al. [2009] et Corpetti and Mémin [2011].	78
6.1	Capture d'écran de la feuille de calcul contenant la synthèse des résultats.	82
6.2	Simulation DNS 2D du déplacement d'un traceur scalaire passif distribué initialement selon la figure en haut à gauche ($t = 0$).	84
6.3	Simulation DNS 2D ; le fluide est ici ensemencé de particules de petite taille pour tracer le mouvement ($t = 0, 50, 100$).	84

6.4	Graphique des RMSEs de comparaison de l'influence du bruit dynamique, lié au tableau 6.1, comparant les échelles de coupure, le mode d'application du bruit (à chaque pas de temps dynamique ou à chaque pas de temps d'assimilation) et la méthode (ETKF ou WETKF).	86
6.5	RMSEs de l'influence de la proportion du rééchantillonnage mixte (la proportion indiquée est celle du rééchantillonnage multinomial) sur la séquence scalaire avec différents nombres de particules : 40, 100, 200, 400.	89
6.6	Assimilation de la séquence DNS scalaire.	90
6.7	RMSE en vorticité (à gauche) et en vitesse (à droite) de différentes méthodes : Corpetti and Mémin [2011], Yuan et al. [2007], Héas et al. [2009], Papadakis and Mémin [2007], WEnKF-1L et WEnKF-3L.	91
6.8	Vorticité de la 50 ^e image de la séquence de simulation numérique d'écoulement turbulent 2D ensemencé de particules, pour différentes méthodes de flot optique et d'assimilation, dont les WEnKF 1L et 3L.	92
6.9	Quantité d'énergie de l'erreur par incrément logarithmique (autrement dit $y = kE_{\mathbf{u},\mathbf{u}^t}(k)$, où $E_{\mathbf{u},\mathbf{u}^t}(k)$ est donné par la formule 6.3), entre l'assimilation et la vérité, en fonction du nombre de particules et de la méthode.	94
6.10	Énergie relative de l'erreur entre l'assimilation et la vérité selon les échelles. Ce graphique est construit par la formule 6.4.	95
6.11	Quelques images de la séquence en fausses couleurs (images 66, 76, 86).	96
6.12	Cartes de vitesse et vorticité pour (a) SLK ; (b) WEnKF 1L ; (c) WEnKF 3L sur les images 76, 86 et 96 (première, deuxième et troisième rangées respectivement).	97
6.13	Séquence océanique synthétique avec données manquantes.	98
6.14	RMSEs en vorticité (gauche) et en vitesse (droite) des expériences jumelles avec données manquantes.	99
6.15	Température de surface (SST) dans le Pacifique durant janvier-février 2008. Une image sur 10 est affichée ici.	100
6.16	Assimilation des courants à partir de la séquence satellite à de la température de l'océan Pacifique près de l'Amérique centrale.	101
7.1	Zone observée et zone assimilée en mer d'Iroise à la pointe de la Bretagne.	106
7.2	Spectre des vitesses obtenu à partir des observations sur une zone de faible bruit sans données manquantes.	108
7.3	Observations à différents instants durant le mois d'août 2008	109
7.4	Quelques statistiques sur les observations.	110
7.5	RMSE comparé avec l'observation en mer d'Iroise avec, à bruit d'observation constant, un bruit dynamique d'écart-type 1 cm.s^{-1} (rouge), 20 cm.s^{-1} (vert), 50 cm.s^{-1} (cyan). Le bleu foncé est la RMSE entre le modèle déterministe et l'observation.	112
7.6	Assimilations en mer d'Iroise avec différentes amplitudes de bruit dynamique après 165 cycles d'assimilation (soit 55 heures).	113
7.7	Suivi de l'assimilation entre les 182 ^e et 185 ^e temps d'assimilation (soit après 60 heures) avec un bruit d'observation fort (50 cm.s^{-1}) — composante est-ouest.	114
7.8	Suivi de l'assimilation entre les 182 ^e et 185 ^e temps d'assimilation (soit après 60 heures) avec un bruit d'observation fort (50 cm.s^{-1}) — composante nord-sud.	115

9.1 RMSE pour un filtrage par WETKF dont la vraisemblance, donnée par une différence d'images déplacées, est filtrée. La coupure grande échelle de ce filtrage varie. 127

Liste des algorithmes

1	Algorithme du filtre de Kalman en temps discret	13
2	Algorithme du filtre particulaire <i>Sequential Importance Resampling</i> (SIR) .	25
3	Algorithme du filtre de Kalman d'ensemble	27
4	Algorithme du filtre de transformation de Kalman d'ensemble	32
5	Filtre de Kalman d'ensemble pondéré	38
6	Implémentation du filtre de Kalman d'ensemble pondéré pour les séquences d'écoulements fluides	52
7	Flot optique de Lucas-Kanade stochastique	75
8	Filtre de Kalman d'ensemble pondéré multi-échelles	76

Bibliographie

URL <http://www.openda.org>.

URL <http://verdandi.sourceforge.net>.

Milton Abramowitz and Irene Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964. ISBN 0-486-61272-4.

Jeffrey L. Anderson. An Ensemble Adjustment Kalman Filter for Data Assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, 129(12) :2884–2903, 12 2001. URL [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0493\(2001\)129<2884:AEAKFF>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0493(2001)129<2884:AEAKFF>2.0.CO;2). doi : 10.1175/1520-0493(2001)129;2884 :AEAKFF;2.0.CO ;2.

Elise Arnaud. *Méthodes de filtrage pour du suivi dans des séquences d'images - Application au suivi de points caractéristiques*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2004.

Elise Arnaud and Etienne Mémin. Partial Linear Gaussian Models for Tracking in Image Sequences Using Sequential Monte Carlo Methods. 74(1) :75–102, 2007. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11263-006-0003-2>.

Simon Baker, Daniel Scharstein, J. P. Lewis, Stefan Roth, Michael J. Black, and Richard Szeliski. A Database and Evaluation Methodology for Optical Flow. *International Journal of Computer Vision*, 92 :1–31, 2011. doi: 10.1007/s11263-010-0390-2. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11263-010-0390-2>.

J. L. Barron, D. J. Fleet, and S. S. Beauchemin. Performance of optical flow techniques. *INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION*, 12 :43–77, 1994.

Sébastien Beyou, Anne Cuzol, Sai S. Gorthi, and Étienne Mémin. Assimilation de température de surface par filtre de Kalman de transformation d'ensemble pondéré. In *GRETSI*, september 2011. URL <http://hal.inria.fr/hal-00694780>.

Sébastien Beyou, Thomas Corpetti, Sai Gorthi, and Etienne Mémin. Fluid Flow Estimation with Multiscale Ensemble Filters Based on Motion Measurements Under Location Uncertainty. *Numerical Mathematics : Theory, Methods and Applications*, 6 :21–46, 2013a.

Sébastien Beyou, Anne Cuzol, Sai Subrahmanyam Gorthi, and Etienne Mémin. Weighted Ensemble Transform Kalman Filter for Image Assimilation. *Tellus A*, 65, 2013b. URL <http://www.tellusa.net/index.php/tellusa/article/view/18803>.

Craig H. Bishop, Brian J. Etherton, and Sharanya J. Majumdar. Adaptive Sampling with the Ensemble Transform Kalman Filter. Part I : Theoretical Aspects. *Monthly Weather Review*, 129(3) :420–436, 2001. doi: 10.1175/1520-0493(2001)129<0420:

- ASWTET)2.0.CO;2. URL <http://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/1520-0493%282001%29129%3C0420%3AASWTET%3E2.0.CO%3B2>.
- Mélanie Bocquet, Alexandre Lepoutre, Olivier Rabaste, and François Le Gland. Optimisation d'un filtre particulaire en contexte Track-Before-Detect. In *GRETSI*, 2011.
- Marc Bocquet. Introduction aux principes et méthodes de l'assimilation de données en géophysique, 2004-2013. URL <http://cerea.enpc.fr/HomePages/bocquet/teaching.html>.
- Bertrand Bonan, Maëlle Nodet, Olivier Ozenda, and Catherine Ritz. Data assimilation in glaciology. In *Advanced Data Assimilation for Geosciences*, Les Houches, France, 2012. URL <http://hal.inria.fr/hal-00715832>.
- Thomas Corpetti and Étienne Mémin. Stochastic uncertainty models for the luminance consistency assumption. *Image Processing, IEEE Transactions on*, PP(99) :1, 2011. doi: 10.1109/TIP.2011.2162742.
- Thomas Corpetti, Patrick Héas, Étienne Mémin, and Nicolas Papadakis. Pressure image assimilation for atmospheric motion estimation. *Tellus A*, 61(1) :160–178, 2009. doi: 10.1111/j.1600-0870.2008.00370.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1600-0870.2008.00370.x>.
- Dan Crisan. Particle Filters — A Theoretical Perspective. In *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, chapter 1. Springer, 2001.
- Pierre Del Moral and Laurent Miclo. *Branching and interacting particle systems approximations of Feynman-Kac formulae with applications to non-linear filtering*, volume 1729 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–145. Springer Berlin Heidelberg, 2000. ISBN 978-3-540-67314-9. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0103798>.
- Pierre Dérian. *Ondelettes et Estimation de Mouvements de Fluide*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2012. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00761919>.
- John Donoghue. The Kalman Filter for Complex Fibonacci Systems. *ISRN Signal Processing*, 2012 :5, 2012. URL <http://dx.doi.org/10.5402/2012/631873>.
- Arnaud Doucet, Simon Godsill, and Christophe Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10 :197–208, 2000. doi: 10.1023/A:1008935410038. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1008935410038>.
- Geir Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res*, 99(C5) :10143–10162, 1994. URL <http://dx.doi.org/10.1029/94JC00572>.
- Geir Evensen. The Ensemble Kalman Filter : theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, 53 :343–367, 2003. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10236-003-0036-9>. 10.1007/s10236-003-0036-9.
- Geir Evensen. Sampling strategies and square root analysis schemes for the EnKF. *Ocean Dynamics*, 54 :539–560, 2004. doi: 10.1007/s10236-004-0099-2. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10236-004-0099-2>.

- B. Galvin, B. Mccane, K. Novins, D. Mason, and S. Mills. Recovering motion fields : An evaluation of eight optical flow algorithms. In *British Machine Vision Conference*, pages 195–204, 1998.
- N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F*, 140(2) :107–113, apr 1993.
- Sai Gorthi, Sébastien Beyou, Thomas Corpetti, and Etienne Mémin. Multiscale Weighted Ensemble Kalman Filter for Fluid Flow Estimation. In Alfred Bruckstein, Bart ter Haar Romeny, Alexander Bronstein, and Michael Bronstein, editors, *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, volume 6667 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 749–760. Springer Berlin / Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-24784-2. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-24785-9_63. 10.1007/978-3-642-24785-9_63.
- Sai S. Gorthi, Sébastien Beyou, and Étienne Mémin. Analysis of SST images by Weighted Ensemble Transform Kalman Filter. In *Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2011 IEEE International*, pages 4172–4175, july 2011. ISBN 2153-6996. doi: 10.1109/IGARSS.2011.6050049. URL <http://dx.doi.org/10.1109/IGARSS.2011.6050049>.
- K. S. Hedström. Scrum manuel. 1997. URL http://marine.rutgers.edu/po/models/scrum/Downloads/scrum_manual.ps.gz.
- Leila Heidari, Véronique Gervais, Mickaële Le Ravalec, and Hans Wackernagel. History matching of petroleum reservoir models by the ensemble kalman filter and parameterization methods. *Computers & Geosciences*, pages –, 2012. doi: 10.1016/j.cageo.2012.06.006. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300412002014?v=s5>.
- Dominique Heitz, Étienne Mémin, and Christoph Schnörr. Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Experiments in Fluids*, 48 :369–393, 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00348-009-0778-3>. 10.1007/s00348-009-0778-3.
- P. L. Houtekamer and Herschel L. Mitchell. Ensemble kalman filtering. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 131(613) :3269–3289, 2005. doi: 10.1256/qj.05.135. URL <http://dx.doi.org/10.1256/qj.05.135>.
- Patrick Héas, Étienne Mémin, Dominique Heitz, and P. D. Mininni. Bayesian selection of scaling laws for motion modeling in images. In *Computer Vision, 2009 IEEE 12th International Conference on*, pages 971–978, 29 2009-oct. 2 2009. ISBN 1550-5499. doi: 10.1109/ICCV.2009.5459353.
- Kayo Ide, Philippe Courtier, Michael Ghil, and Andrew C. Lorenc. Unified Notation for Data Assimilation : Operational, Sequential and Variational. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 75(1B) :181–189, 1997. URL <http://www.journalarchive.jst.go.jp/jnlpdf.php?cdjournal=jmsj1965&cdvol=75&noissue=1B&startpage=181>.
- Adam M Johansen. SMCTC : Sequential Monte Carlo in C++. *Journal of Statistical Software*, 30(6) :1–41, 4 2009. URL <http://www.jstatsoft.org/v30/i06>.

- S. J. Julier and J. K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3) :401 – 422, mar 2004. doi: 10.1109/JPROC.2003.823141.
- Simon J. Julier and Jeffrey K. Uhlmann. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. In *Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simul. and Controls*, pages 182–193, 1997. URL http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/media/pdf/Julier1997_SPIE_KF.pdf.
- Rudolph Emil Kálmán. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering*, 82(Series D) :35–45, 1960.
- Robert H. Kraichnan. Small-Scale Structure of a Scalar Field Convected by Turbulence. *Physics of Fluids*, 11(5) :945–953, 1968. doi: 10.1063/1.1692063. URL <http://link.aip.org/link/?PFL/11/945/1>.
- Alexander Kurganov and Doron Levy. A Third-Order Semidiscrete Central Scheme for Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(4) : 1461–1488, 2000. doi: 10.1137/S1064827599360236. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827599360236>.
- François Le Dimet and Olivier Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus A*, 38(2), 1986. doi: DOI10.1111/j.1600-0870.1986.tb00459.x. URL <http://www.tellusa.net/index.php/tellusa/article/view/11706>.
- François Le Gland, Valérie Monbet, and Vu-Duc Tran. Large Sample Asymptotics for the Ensemble Kalman Filter. Technical Report RR-7014, INRIA, 2009. URL <http://hal.inria.fr/inria-00409060/PDF/RR-7014.pdf>.
- François Le Gland, Valérie Monbet, and Vu-Duc Tran. Large sample asymptotics for the ensemble Kalman filter. In Boris Rozovskii Dan Crisan, editor, *The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering*, pages 598–631. Oxford University Press, 2011. ISBN 978-0199532902. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00744737>.
- Olwijn Leeuwenburgh, Geir Evensen, and Laurent Bertino. The impact of ensemble filter definition on the assimilation of temperature profiles in the tropical Pacific. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 131(613) :3291–3300, 2005. doi: 10.1256/qj.05.90. URL <http://dx.doi.org/10.1256/qj.05.90>.
- Erich L. Lehmann. *Elements of Large-Sample Theory*. Springer Texts in Statistics. Springer New York, 1999. ISBN 978-0-387-98595-4. URL <http://dx.doi.org/10.1007/b98855>.
- Bruce D. Lucas and Takeo Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. *Proceedings of Imaging Understanding Workshop*, pages 121–130, 1981.
- Kebina Manandhar, Xiaojun Cao, and Fei Hu. Attack detection in Water Supply Systems using Kalman filter estimator. In *Sarnoff Symposium (SARNOFF), 2012 35th IEEE*, pages 1 –6, may 2012. doi: 10.1109/SARNOF.2012.6222737.
- Étienne Mémin. *Estimation du flot optique : contribution et panorama de différentes approches*. PhD thesis, Université de Rennes 1, July 2003.

- Christian Musso, Nadia Oudjane, and Francois Gland. Improving Regularised Particle Filters. In Arnaud Doucet, Nando Freitas, and Neil Gordon, editors, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Statistics for Engineering and Information Science, pages 247–271. Springer New York, 2001. ISBN 978-1-4419-2887-0. doi: 10.1007/978-1-4757-3437-9_12. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3437-9_12.
- Elias David Niño Ruiz, Adrian Sandu, and Jeffrey L. Anderson. An Efficient Implementation of the Ensemble Kalman Filter Based on an Iterative Sherman-Morrison Formula. *CoRR*, abs/1302.3876, 2013.
- Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations*, volume 0 of *Universitext*. Springer Berlin Heidelberg, 2003. ISBN 978-3-642-14394-6. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6_5. 10.1007/978-3-642-14394-6.5.
- Nicolas Papadakis. *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2007. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00655898>.
- Nicolas Papadakis and Étienne Mémin. Variational assimilation of fluid motion from image sequence. In *SIAM J. Imag. Sci.*, volume 1, pages 343–363, 2007.
- Nicolas Papadakis, Étienne Mémin, Anne Cuzol, and Nicolas Gengembre. Data assimilation with the weighted ensemble Kalman filter. *Tellus A*, 62(5) :673–697, 2010. doi: 10.1111/j.1600-0870.2010.00461.x. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1600-0870.2010.00461.x>.
- Margarida Belo Pereira and Loïk Berre. The Use of an Ensemble Approach to Study the Background Error Covariances in a Global NWP Model. *Mon. Wea. Rev.*, 134(9) :2466–2489, 09 2006. URL <http://dx.doi.org/10.1175/MWR3189.1>. doi : 10.1175/MWR3189.1.
- Ruth Elizabeth Petrie. Localization in the ensemble Kalman Filter, 2008. URL <http://www.met.reading.ac.uk/~wx019276/phd/files/PhDThesis.pdf>.
- Dinh Tuan Pham. Stochastic Methods for Sequential Data Assimilation in Strongly Nonlinear Systems. *Mon. Wea. Rev.*, 129(5) :1194–1207, 05 2001. URL [http://dx.doi.org/10.1175/1520-0493\(2001\)129<1194:SMFSDA>2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1175/1520-0493(2001)129<1194:SMFSDA>2.0.CO;2). doi : 10.1175/1520-0493(2001)129;1194 :SMFSDA;2.0.CO ;2.
- Dinh Tuan Pham, Jacques Verron, and Marie Christine Roubaud. A Singular Evolutive Extended Kalman Filter For Data Assimilation In Oceanography. *Journal of Marine Systems*, 16 :323–340, 1998.
- Michael K. Pitt and Neil Shephard. Auxiliary Variable Based Particle Filters. In Arnaud Doucet, Nando Freitas, and Neil Gordon, editors, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Statistics for Engineering and Information Science, pages 273–293. Springer New York, 2001. ISBN 978-1-4419-2887-0. doi: 10.1007/978-1-4757-3437-9_13. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3437-9_13.
- Denis Quélo, Bruno Sportisse, and Olivier Isnard. Data assimilation for short range atmospheric dispersion of radionuclides : a case study of second-order sensitivity. *Journal of Environmental Radioactivity*, 84(3) :393–408, 2005. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0265931X05001463>.

- Pavel Sakov and Peter R. Oke. Implications of the Form of the Ensemble Transformation in the Ensemble Square Root Filters. *Monthly Weather Review*, 136(3) :1042–1053, 03 2008. URL <http://dx.doi.org/10.1175/2007MWR2021.1>. doi : 10.1175/2007MWR2021.1.
- Alexander F. Shchepetkin and James C. McWilliams. The regional oceanic modeling system (ROMS) : a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. *Ocean Modelling*, 9(4) :347 – 404, 2005. doi: 10.1016/j.ocemod.2004.08.002. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1463500304000484>.
- Dan Simon. *Appendix C : State Estimation and the Meaning of Life*, pages 493–499. John Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN 9780470045343. doi: 10.1002/0470045345.app3. URL <http://dx.doi.org/10.1002/0470045345.app3>.
- Hichem Snoussi. Filtrage particulaire sur les variétés riemanniennes. In *Gretsi*, 2011.
- Innocent Souopgui. *Assimilation d'images pour les fluides géophysiques*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2010. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00539626>.
- Guillaume Thirel. *Amélioration des prévisions d'ensemble des débits sur la France de SAFRAN-ISBA-MODCOU*. PhD thesis, Université de Toulouse III - Paul Sabatier, 2009. URL http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/46/06/45/PDF/2009_these_thirel_sans_articles.pdf.
- Michael K. Tippett, Jeffrey L. Anderson, Craig H. Bishop, Thomas M. Hamill, and Jeffrey S. Whitaker. Ensemble Square Root Filters. *Monthly Weather Review*, 131(7) :1485–1490, 2003. doi: 10.1175/1520-0493(2003)131<1485:ESRF>2.0.CO;2. URL <http://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/1520-0493%282003%29131%3C1485%3AESRF%3E2.0.CO%3B2>.
- Juxiu Tong, Bill Hu, and Jinzhong Yang. Assimilating transient groundwater flow data via a localized ensemble Kalman filter to calibrate a heterogeneous conductivity field. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 26 :467–478, 2012. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00477-011-0534-0>. 10.1007/s00477-011-0534-0.
- Peter Jan van Leeuwen. Particle Filtering in Geophysical Systems. *Monthly Weather Review*, 137(12) :4089–4114, 2009. doi: 10.1175/2009MWR2835.1. URL <http://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/2009MWR2835.1>.
- Xiaoni Wang, Vivien Mallet, Jean-Paul Berroir, and Isabelle Herlin. Assimilation of OMI NO2 retrievals into a regional chemistry-transport model for improving air quality forecasts over Europe. *Atmospheric Environment*, 45(2) :485–492, 1 2011. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1352231010008034>.
- B. P. Welford. Note on a Method for Calculating Corrected Sums of Squares and Products. *Technometrics*, 4(3) :419–420, 1962. URL <http://www.jstor.org/stable/1266577>.
- Jing Yuan, Christoph Schnörr, and Étienne Mémin. Discrete Orthogonal Decomposition and Variational Fluid Flow Estimation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 28 :67–80, 2007. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-007-0014-9>. 10.1007/s10851-007-0014-9.

Résumé :

Cette thèse applique les méthodes d'assimilation de données par filtrage particulaire à l'estimation d'écoulements fluides observés au travers de séquences d'images. Nous nous appuyons sur un filtre particulaire spécifique dont la distribution de proposition est donnée par un filtre de Kalman d'ensemble, nommé filtre de Kalman d'ensemble pondéré. Deux variations à celui-ci sont introduites et étudiées. La première consiste à utiliser un bruit dynamique (permettant de modéliser l'incertitude du modèle et de séparer les particules entre elles) dont la forme spatiale suit une loi de puissance, cohérente avec la théorie phénoménologique de la turbulence. La deuxième variation repose sur un schéma d'assimilation multi-échelles introduisant un mécanisme de raffinements successifs à partir d'observations à des échelles de plus en plus petites. Ces deux méthodes ont été testées sur des séquences synthétiques et expérimentales d'écoulements 2D incompressibles. Ces résultats montrent un gain important sur l'erreur quadratique moyenne. Elles ont ensuite été testées sur des séquences d'images satellite réelles. Sur les images réelles, une bonne cohérence temporelle est observée, ainsi qu'un bon suivi des structures de vortex. L'assimilation multi-échelles montre un gain visible sur le nombre d'échelles reconstruites. Quelques variations additionnelles sont aussi présentées et testées afin de s'affranchir de problèmes importants rencontrés dans un contexte satellitaire réel. Il s'agit notamment de la prise en compte de données manquantes sur les images de température de surface de l'océan. En dernier lieu, une expérience d'un filtre de Kalman d'ensemble pondéré avec un modèle océanique complet est présentée pour une assimilation de champs de courants de surface en mer d'Iroise, à l'embouchure de la Manche. Quelques autres pistes d'amélioration sont également esquissées et testées.

Mots-clés : assimilation de données (géophysique), filtrage de Kalman, dynamique des fluides, vision par ordinateur, méthode de Monte-Carlo, télédétection spatiale, analyse multiéchelles

Abstract:

This thesis studies fluid flows estimation with particle filtering-based assimilation methods imaged using digital cameras. We rely on a specific particle filter, of which the proposal distribution is given by an Ensemble Kalman Filter, namely the Weighted Ensemble Kalman Filter. Two variations of this method are introduced and tested. The first consists in using a dynamical noise (which modelizes the model uncertainty and separates the particles from each others); its spatial form obeys to a power law stemming from the phenomenological theory of the turbulence. The second variation relies on a multiscale assimilation scheme introducing successive refinements from observations at smaller and smaller scales. These two methods are tested on synthetic and experimental sequences of 2D incompressible flows. Results show an important gain on the Root Mean Square Error. They are then tested on real satellite images. A good temporal coherence and a good tracking of vortex structures are observed on the real images. The multiscale assimilation shows a visible gain on the number of reconstructed scales. Some additional variations are also presented and tested in order to take into account important problems in a real satellite context. The main contribution is the management of missing data areas in the Sea Surface Temperature sequence. Lastly an experiment involving a Weighted Ensemble Kalman Filter with a complete oceanic model is presented for a surface currents fields assimilation in Iroise Sea near the English Channel mouth. Some other improvements are also drawn and tested.

Keywords: data assimilation (geophysics), Kalman filtering, fluid dynamics, computer vision, aerospace telemetry, Monte Carlo method, multiscale analysis

