

Estimation de la vitesse des courants marins à partir de séquences d'images satellitaires

Sébastien Beyou

Inria Rennes – Bretagne Atlantique

12 juillet 2013

- transition : illustration du problème

Contexte : illustration

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Illustration

Contexte : illustration

- objectif final
- images une fois par jour
- température de surface - MetOp AVHRR
- données manquantes
- assimilation de données : reconstruction du phénomène à partir d'un modèle+observations
→ objectif : gain en connaissance du phénomène, par ex en météo : meilleure initialisation
- transition : expérience synthétique

Contexte : illustration

Assimilation d'images représentant des phénomènes fluides

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Illustration

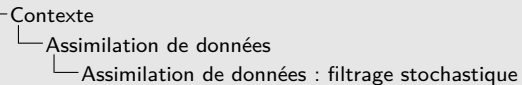
Contexte : illustration

- expérience synthétique : créée par simulation
- 2D incompressible
- déplacement d'un traceur passif
(pas d'influence sur le mouvement du fluide)

- transition : problème du filtrage

Assimilation de données : filtrage stochastique

- Estimation du processus stochastique $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$
à partir des observations $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 1}$
- Modèle :
 - Temps continu : $d\mathbf{x}_t = \mathcal{M}(\mathbf{x}_t)dt + \mathbf{Q}_t dB_t$
 - Temps discret : $\mathbf{x}_k = \mathcal{M}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{Q}_k w_k$
- Observations : $\mathbf{y}_k = \mathcal{N}(\mathcal{H}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}_k)$



- Estimation du processus stochastique $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$
à partir des observations $(\mathbf{y}_k)_{k \geq 1}$
- Modèle :
 - Temps continu : $d\mathbf{x}_t = \mathcal{M}(\mathbf{x}_t)dt + \mathbf{Q}_t dB_t$
 - Temps discret : $\mathbf{x}_k = \mathcal{M}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{Q}_k w_k$
- Observations : $\mathbf{y}_k = \mathcal{N}(\mathcal{H}(\mathbf{x}_k), \mathbf{R}_k)$

- Cadre du filtrage stochastique : processus, modèle, obs
- insister : le résultat cherché est un processus stochastique, i.e. une famille de v.a.

- transition : deux types de résolution, 1re : variationnelle

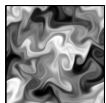
Assimilation de données : approche variationnelle

état prédit
(vorticité)
 $(x_k^f)_{k \geq 0}$

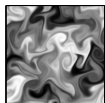
état assimilé
(vorticité)
 $(x_k^a)_{k \geq 0}$



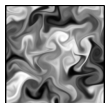
observation
(traceur passif)
 $(y_k)_{k \geq 1}$



k-1



k



k+1

k+2

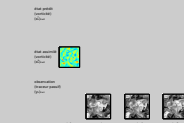
2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

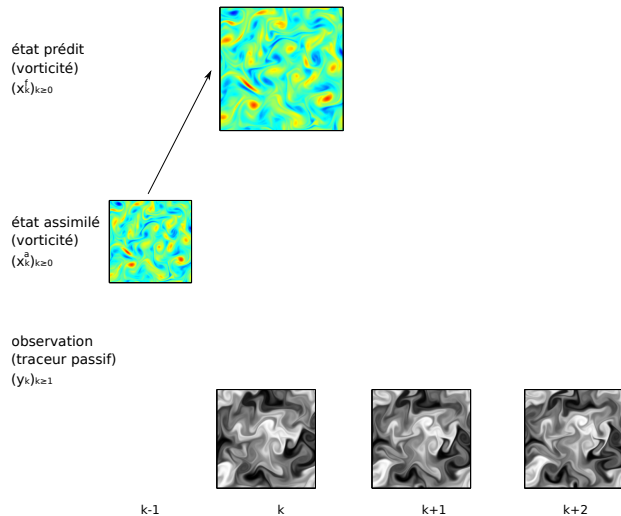
Contexte

Assimilation de données

Assimilation de données : approche variationnelle



Assimilation de données : approche variationnelle



2013-07-11

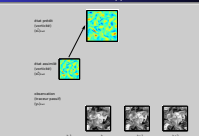
Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

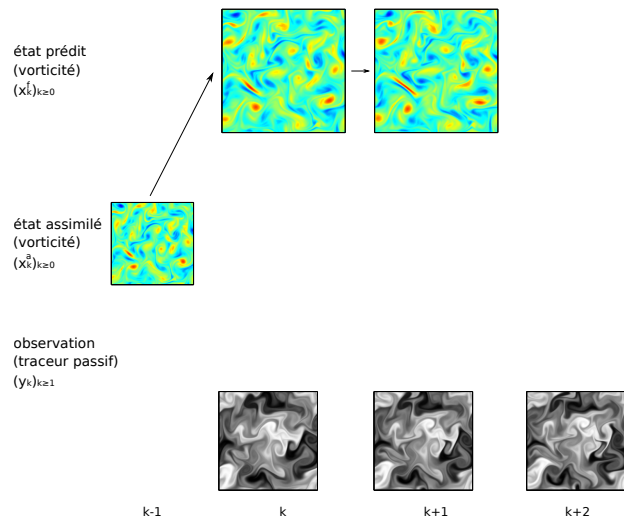
Assimilation de données

Assimilation de données : approche variationnelle

Assimilation de données - approche variationnelle



Assimilation de données : approche variationnelle



2013-07-11

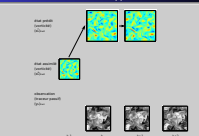
Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

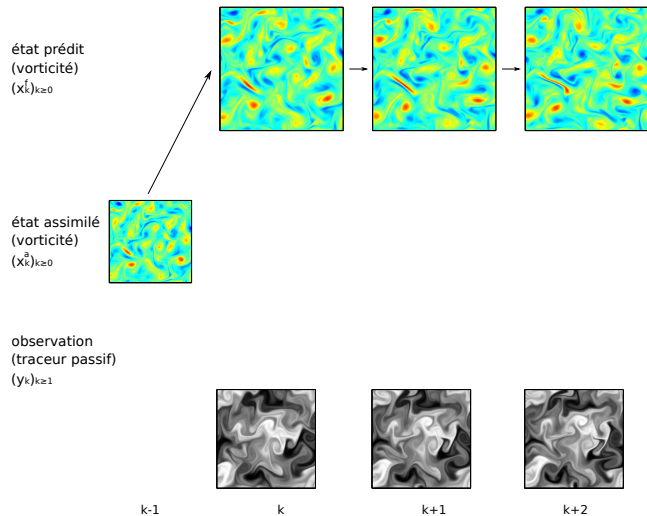
Assimilation de données

Assimilation de données : approche variationnelle

Assimilation de données - approche variationnelle



Assimilation de données : approche variationnelle



2013-07-11

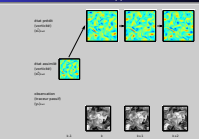
Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

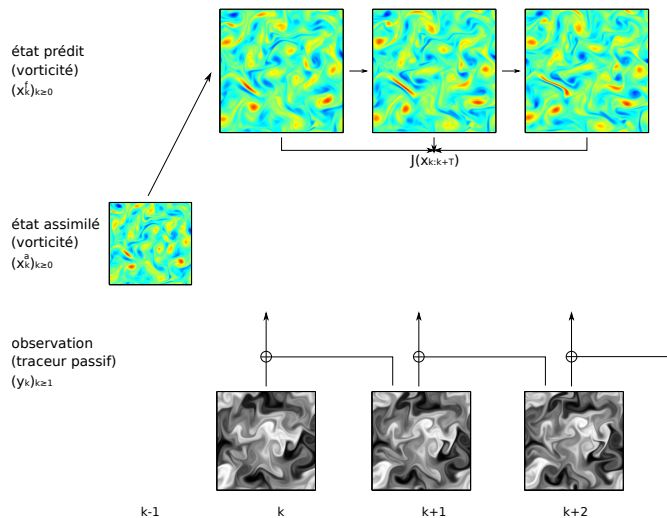
Assimilation de données

Assimilation de données : approche variationnelle

Assimilation de données - approche variationnelle



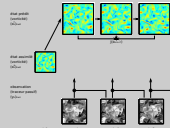
Assimilation de données : approche variationnelle



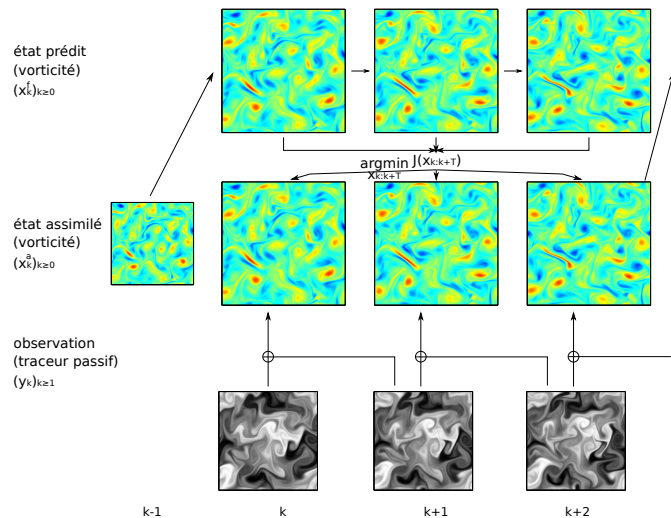
2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

- Contexte
 - Assimilation de données
 - Assimilation de données : approche variationnelle



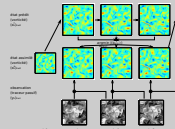
Assimilation de données : approche variationnelle



Assimilation de données images pour les fluides

2013-07-11

- Contexte
 - Assimilation de données
 - Assimilation de données : approche variationnelle



Assimilation de données : approche variationnelle

Sur une fenêtre temporelle $[0, T]$:

- Calcul de l'ébauche $\mathbf{x}_{k:k+T}^b$
- Assimilation : minimisation au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{x}_{k:k+T}^a = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_{k:k+T}} \underbrace{\sum_{j=0}^T \|\mathbf{y}_{k+j} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_{k+j})\|_{\mathbf{R}_{k+j}}^2 + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^b\|_{\mathbf{B}_k}^2}_{J(\mathbf{x}_{k:k+T})}$$

(Le Dimet et Talagrand, 1986)

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Assimilation de données

Assimilation de données : approche variationnelle

Assimilation de données : approche variationnelle

Sur une fenêtre temporelle $[0, T]$:

• Calcul de l'ébauche $\mathbf{x}_{k:k+T}^b$

• Assimilation : minimisation au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{x}_{k:k+T}^a = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_{k:k+T}} \sum_{j=0}^T \|\mathbf{y}_{k+j} - \mathbf{H}(\mathbf{x}_{k+j})\|_{\mathbf{R}_{k+j}}^2 + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^b\|_{\mathbf{B}_k}^2$$

(Le Dimet et Talagrand, 1986)

- modèle non-linéaire gaussien, obs non-linéaire gaussienne
- 4D-Var, utilisé opérationnellement dans plusieurs instituts météo

- transition : 2e type de résolution du filtrage : séquentiel, linéaire-gaussien d'abord

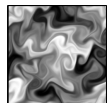
Assimilation de données : approche séquentielle

état prédit
(vorticité)
 $(x_k^f)_{k \geq 0}$

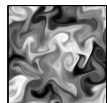
état assimilé
(vorticité)
 $(x_k^a)_{k \geq 0}$



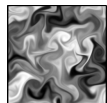
observation
(traceur passif)
 $(y_k)_{k \geq 1}$



k-1



k



k+1

k+2

2013-07-11

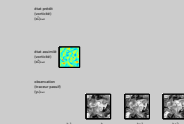
Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Assimilation de données

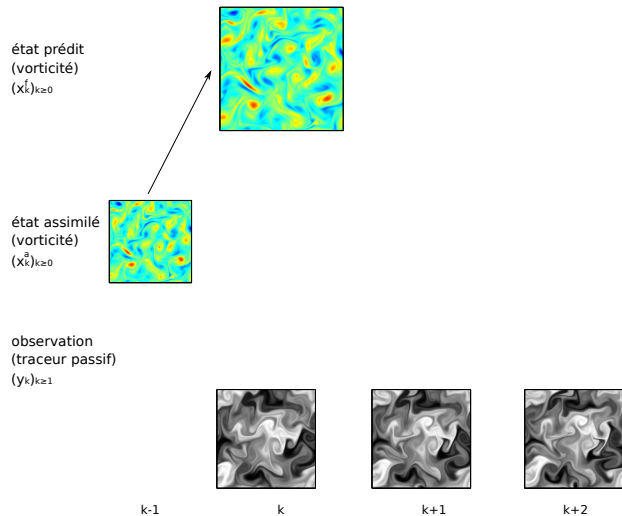
Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle



- transition : filtre bayésien optimal

Assimilation de données : approche séquentielle



2013-07-11

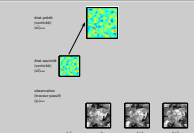
Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Assimilation de données

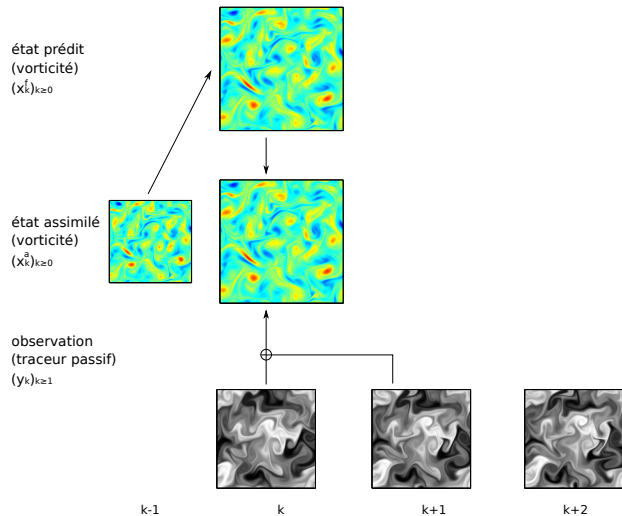
Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle



- transition : filtre bayésien optimal

Assimilation de données : approche séquentielle

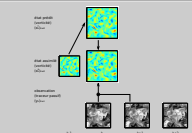


2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

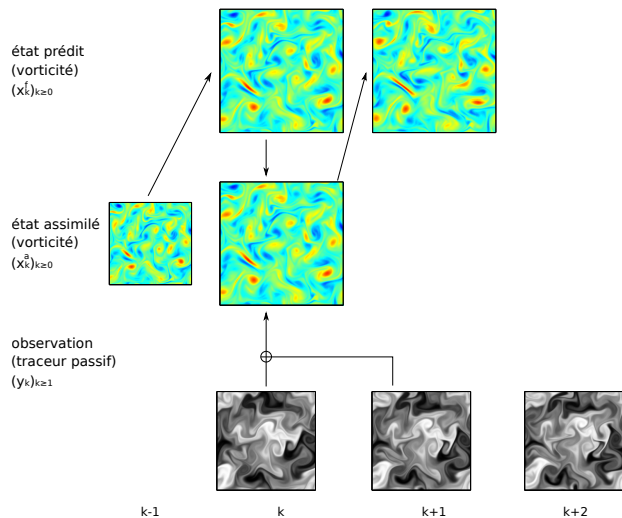
- Contexte
 - Assimilation de données
 - Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle



- transition : filtre bayésien optimal

Assimilation de données : approche séquentielle

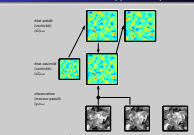


2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

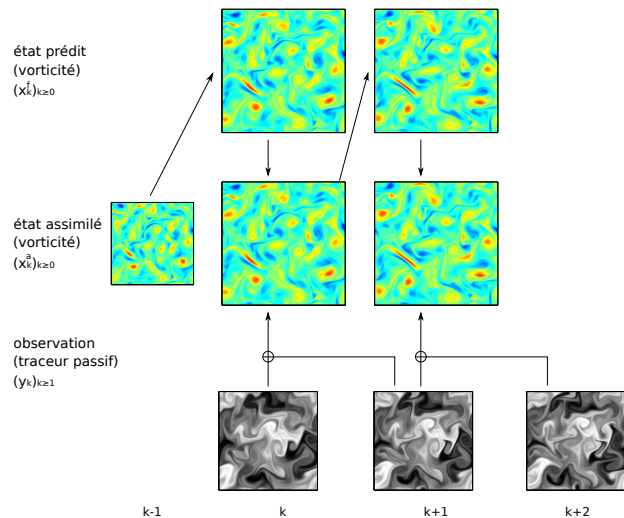
- Contexte
 - Assimilation de données
 - Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle



- transition : filtre bayésien optimal

Assimilation de données : approche séquentielle



2013-07-11

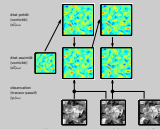
Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Assimilation de données

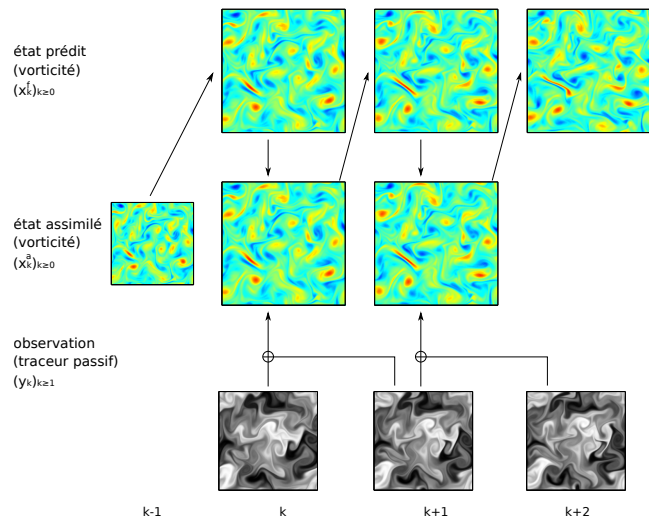
Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle



- transition : filtre bayésien optimal

Assimilation de données : approche séquentielle



2013-07-11

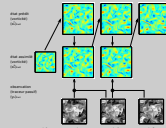
Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Assimilation de données

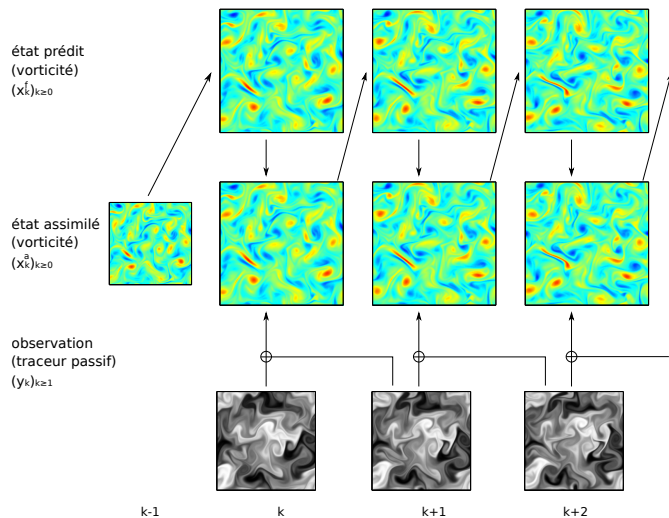
Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle



- transition : filtre bayésien optimal

Assimilation de données : approche séquentielle

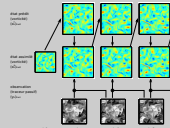


2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

- Contexte
 - Assimilation de données
 - Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle



- transition : filtre bayésien optimal

Assimilation de données : approche séquentielle

Filtre bayésien optimal :

$$p(\mathbf{x}_{0:k} | \mathbf{y}_{1:k}) \sim p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{0:k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1})$$

- transition : linéaire-gaussien

Assimilation de données : approche séquentielle

- Cas linéaire-gaussien : équations de Kalman (Kalman, 1960)

$$\text{Prédiction} \quad \begin{cases} \mu_k^f = \mathbf{M}_k \mu_{k-1}^a \\ \mathbf{P}_k^f = \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{cases}$$

$$\text{Analyse} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \mathbf{x}_k^a = \mu_k^f + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \mu_k^f) \\ \mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^f \end{cases}$$

- Cas linéaire-gaussien-grande dimension : EnKF (Evensen, 1994, 2003)
→ approximation par un ensemble de N particules :

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(N)}]$$

$$\mu_k \approx \frac{1}{N} \mathbf{x}_k \mathbf{1}_N \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_k \approx \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T$$

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Assimilation de données

Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données - approche séquentielle

• Cas linéaire-gaussien : équations de Kalman (Kalman, 1960)

$$\text{Prédiction} \quad \begin{cases} \mu_k^f = \mathbf{M}_k \mu_{k-1}^a \\ \mathbf{P}_k^f = \mathbf{M}_k \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{cases}$$

$$\text{Analyse} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \mathbf{x}_k^a = \mu_k^f + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \mu_k^f) \\ \mathbf{P}_k^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^f \end{cases}$$

• Cas linéaire-gaussien-grande dimension : EnKF (Evensen, 1994, 2003)
→ approximation par un ensemble de N particules :

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(N)}]$$

$$\mu_k \approx \frac{1}{N} \mathbf{x}_k \mathbf{1}_N \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_k \approx \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T$$

- approche séquentielle : cas modèle linéaire-opérateur d'obs linéaire-densités gaussiennes
- deux étapes
- matrices de covariance : pas possible en grande dimension (calcul et stockage) : approximation
- EnKF : +échantillonnage de l'obs $\mathbf{y}_k + \varepsilon_{k,i}$

- transition : ETKF

Assimilation de données : approche séquentielle

- Cas linéaire-gaussien : équations de Kalman
- Cas linéaire-gaussien-grande dimension : EnKF
→ approximation par un ensemble de N particules :

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(N)}]$$
$$\mu_k \approx \frac{1}{N} \mathbf{x}_k \mathbf{1}_N \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_k \approx \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T$$

- Variante de l'EnKF : ETKF (Tippett et al., 2003)
→ étape d'analyse déterministe
→ famille des filtres « racine carrée »

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Contexte

Assimilation de données

Assimilation de données : approche séquentielle

Assimilation de données : approche séquentielle

- Cas linéaire-gaussien : équations de Kalman
- Cas linéaire-gaussien-grande dimension : EnKF
→ approximation par un ensemble de N particules :
$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(N)}]$$
$$\mu_k \approx \frac{1}{N} \mathbf{x}_k \mathbf{1}_N \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_k \approx \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T$$
- Variante de l'EnKF : ETKF (Tippett et al., 2003)
→ étape d'analyse déterministe
→ famille des filtres « racine carrée »

- ETKF : analyse déterministe
→ s'affranchir de l'échantillonnage

- transition : filtre particulière : plus général, mais même approche avec des particules

Filtres particulaires

Filtres particulaires

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Filtres particulaires

└─ Filtres particulaires

Filtres particulaires

Filtres particulaires

Filtres particulaires : algorithme

Représentation des états par un système de particules pondérées :

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}$$

À chaque observation, deux ou trois étapes :

- 1 proposition : déplacement de chaque particule selon la loi de proposition π
- 2 pondération : calcul de la vraisemblance de chaque particule au regard des observations
- 3 rééchantillonnage : duplication des particules les plus vraisemblables

Assimilation de données images pour les fluides

Filtres particulaires

Algorithme

Filtres particulaires : algorithme

2013-07-11

Filtres particulaires : algorithme

Représentation des états par un système de particules pondérées :

$$\hat{p}(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}$$

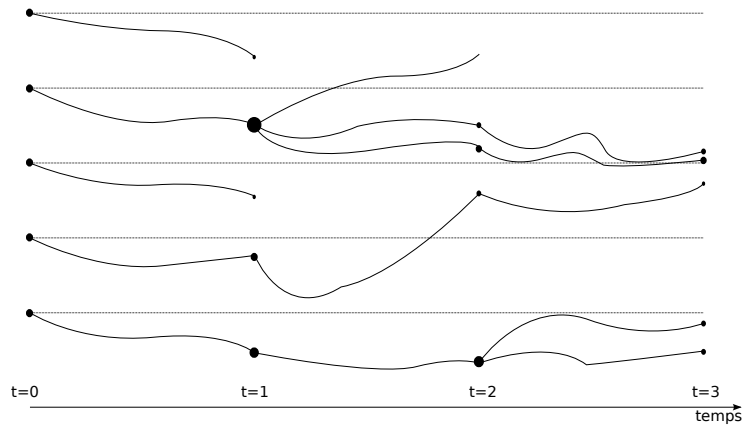
À chaque observation, deux ou trois étapes :

- 1 proposition : déplacement de chaque particule selon la loi de proposition π
- 2 pondération : calcul de la vraisemblance de chaque particule au regard des observations
- 3 rééchantillonnage : duplication des particules les plus vraisemblables

- \mathbf{x}_t : distributions de proposition et a posteriori

- transition : illustration filtre particulaire

Filtres particulaires : illustration



2013-07-11

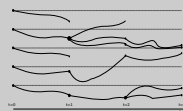
Assimilation de données images pour les fluides

└─ Filtres particulaires

└─ Illustration

└─ Filtres particulaires : illustration

Filtres particulaires : illustration



Filtres particulaires : équations générales

(Gordon et al., 1993)

1 proposition :

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}), i = 1 \dots N$$

2 pondération :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})}, i = 1 \dots N$$

3 rééchantillonnage : N indices des nouvelles particules tirés selon une loi multinomiale; les nouveaux poids sont tous $1/N$

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└ Filtres particulaires

└─ Équations générales

└─ Filtres particulaires : équations générales

Filtres particulaires : équations générales

(Gordon et al., 1993)

1 proposition :

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k}), i = 1 \dots N$$

2 pondération :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k})}, i = 1 \dots N$$

3 rééchantillonnage : N indices des nouvelles particules tirés selon une loi multinomiale; les nouveaux poids sont tous $1/N$

Filtres particulaires : exemple du filtre bootstrap

(Gordon et al., 1993)

1 proposition :

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), i = 1 \dots N$$

2 pondération :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}), i = 1 \dots N$$

3 rééchantillonnage : N indices des nouvelles particules tirés selon une loi multinomiale ; les nouveaux poids sont tous $1/N$

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Filtres particulaires

└─ Équations générales

└─ Filtres particulaires : exemple du filtre bootstrap

Filtres particulaires : exemple du filtre bootstrap

(Gordon et al., 1993)

1 proposition :

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), i = 1 \dots N$$

2 pondération :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}), i = 1 \dots N$$

3 rééchantillonnage : N indices des nouvelles particules tirés selon une loi multinomiale ; les nouveaux poids sont tous $1/N$

Filtres particulaires : filtre de Kalman d'ensemble pondéré

(Papadakis et al., 2010)

- 1 proposition par EnKF/ETKF :

$$\mathbf{x}_k^{f,(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), i = 1 \dots N$$

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(N)}] = \mu^a \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{A}_k$$

- 2 pondération :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}), i = 1 \dots N$$

- 3 rééchantillonnage : N indices des nouvelles particules tirés selon une loi multinomiale; les nouveaux poids sont tous $1/N$

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└ Filtres particulaires

└ Filtre de Kalman d'ensemble pondéré (WEnKF)

└ Filtres particulaires : filtre de Kalman d'ensemble pondéré

Filtres particulaires : filtre de Kalman d'ensemble pondéré

(Papadakis et al., 2010)

1 proposition par EnKF/ETKF :

$$\mathbf{x}_k^{f,(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), i = 1 \dots N$$

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{(N)}] = \mu^a \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{A}_k$$

2 pondération :

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}), i = 1 \dots N$$

3 rééchantillonnage : N indices des nouvelles particules tirés selon une loi multinomiale; les nouveaux poids sont tous $1/N$

Application aux fluides

Application au filtrage
de mouvements fluides
à partir d'images

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Application aux fluides

└─ Application aux fluides

Application aux fluides

- Modèle et bruit dynamiques
- Opérateurs d'observation
- Assimilation multi-échelles
- Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└ Application aux fluides

└ Application aux fluides

Application aux fluides

- ▾ Modèle et bruit dynamiques
- ▾ Opérateurs d'observation
- ▾ Assimilation multi-échelles
- ▾ Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

- présenter le plan

- transition : RMSE

Modèle dynamique

Modèle vorticité-vitesse :

→ transport de la vorticité ξ_t

→ obtention de la vitesse \mathbf{v}_t par résolution d'une équation de Poisson dans l'espace de Fourier

$$\partial_t \xi_t + \mathbf{v}_t \cdot \nabla \xi_t = \nu \Delta \xi_t$$

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└ Application aux fluides

└└ Modèle et bruit dynamiques

└└└ Modèle dynamique

Modèle dynamique

Modèle vorticité-vitesse :
→ transport de la vorticité ξ_t
→ obtention de la vitesse \mathbf{v}_t par résolution d'une équation de Poisson dans l'espace de Fourier

$$\partial_t \xi_t + \mathbf{v}_t \cdot \nabla \xi_t = \nu \Delta \xi_t$$

- modèle continu déterministe
- transport et diffusion de la vorticité

Bruit dynamique

Deux façons d'appliquer le bruit dynamique :

- 1 physique déterministe
- 2 physique stochastique

Deux formes spatiales de bruit dynamique :

- 1 bruit à covariance décroissante
- 2 bruit autosimilaire

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Application aux fluides

└─┬─ Modèle et bruit dynamiques

└─┬─┬─ Bruit dynamique

Bruit dynamique

Deux façons d'appliquer le bruit dynamique :

- 1 physique déterministe
- 2 physique stochastique

Deux formes spatiales de bruit dynamique :

- 1 bruit à covariance décroissante
- 2 bruit autosimilaire

Bruit dynamique : application du bruit

Deux façons d'appliquer le bruit dynamique :

- 1 physique déterministe : calcul déterministe par le modèle suivi d'une perturbation
- 2 physique stochastique : schéma d'Euler-Maruyama
→ introduction d'une petite perturbation à chaque temps dynamique

$$\partial_t \xi_t + \mathbf{v}_t \cdot \nabla \xi_t = \nu \Delta \xi_t + \sigma dB_t$$

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Modèle et bruit dynamiques

Bruit dynamique : application du bruit

Bruit dynamique : application du bruit

Deux façons d'appliquer le bruit dynamique :
1 physique déterministe : calcul déterministe par le modèle suivi d'une perturbation
2 physique stochastique : schéma d'Euler-Maruyama
→ introduction d'une petite perturbation à chaque temps dynamique

$$\partial_t \xi_t + \mathbf{v}_t \cdot \nabla \xi_t = \nu \Delta \xi_t + \sigma dB_t$$

- déterministe : on part de la position initiale de la particule ; modèle ; perturbation
- schéma d'Euler-Maruyama : on part de la position initiale de la particule ; modèle où une petite perturbation est appliquée à chaque itération

Bruit dynamique : application du bruit

Deux formes spatiales de bruit dynamique :

1 bruit à covariance décroissante

(Evensen, 2003)

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x_n, y_m) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \hat{q}(\kappa_l, \gamma_p) e^{i(\kappa_l x_n + \gamma_p y_m)} \Delta k \\ \hat{q}(\kappa_l, \gamma_p) = \frac{c}{\sqrt{\Delta k}} e^{-\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} e^{2\pi i \phi_{l,p}} \\ \phi_{l,p} \sim \mathcal{U}(0, 1) \end{array} \right.$$

2 bruit autosimilaire

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Modèle et bruit dynamiques

Bruit dynamique : application du bruit

2013-07-11

Bruit dynamique : application du bruit

Deux formes spatiales de bruit dynamique :
bruit à covariance décroissante (Evensen, 2003)

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x_n, y_m) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{M-1} \hat{q}(\kappa_l, \gamma_p) e^{i(\kappa_l x_n + \gamma_p y_m)} \Delta k \\ \hat{q}(\kappa_l, \gamma_p) = \frac{c}{\sqrt{\Delta k}} e^{-\left(\frac{\kappa_l}{\sigma_1}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_p}{\sigma_2}\right)^2} e^{2\pi i \phi_{l,p}} \\ \phi_{l,p} \sim \mathcal{U}(0, 1) \end{array} \right.$$

bruit autosimilaire

- bruit spécifié pour obtenir une covariance décroissante
- longueur de décorrélation paramétrable
- bruit non-gaussien

Bruit dynamique : application du bruit

Deux formes spatiales de bruit dynamique :

- 1 bruit à covariance décroissante
- 2 bruit autosimilaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, d\mathbf{Y}_t(\mathbf{x}) = \psi * d\mathbf{B}_t(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d \\ \psi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{\alpha/2} * \phi_{\kappa, \epsilon}(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{Z}_t = d\mathbf{Y}_t - \nabla G * \text{div}(d\mathbf{Y}_t) \\ = \underbrace{(\delta - \mathbf{H}(G))}_{\mathcal{P}_d} * d\mathbf{Y}_t \end{array} \right.$$

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Modèle et bruit dynamiques

Bruit dynamique : application du bruit

Bruit dynamique : application du bruit

Deux formes spatiales de bruit dynamique :

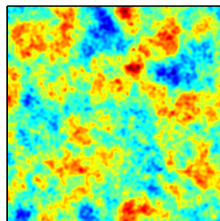
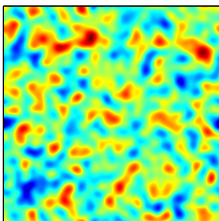
- 1 bruit à covariance décroissante
- 2 bruit autosimilaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, d\mathbf{Y}_t(\mathbf{x}) = \psi * d\mathbf{B}_t(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d \\ \psi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{\alpha/2} * \phi_{\kappa, \epsilon}(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{Z}_t = d\mathbf{Y}_t - \nabla G * \text{div}(d\mathbf{Y}_t) \\ = \underbrace{(\delta - \mathbf{H}(G))}_{\mathcal{P}_d} * d\mathbf{Y}_t \end{array} \right.$$

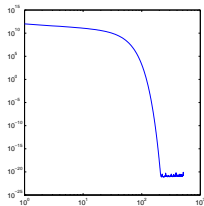
- bruit spécifié dans Fourier : bruit gaussien avec un spectre en loi de puissance dans une gamme d'échelles donnée
- objectif : mimer une cascade énergétique turbulente
- gamme d'échelles : grande et petite échelle

Bruit dynamique : spectres

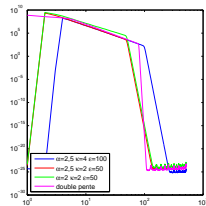
Exemples de réalisation



Spectres



Evensen 2003



Autosimilaire

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

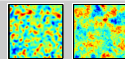
Application aux fluides

Modèle et bruit dynamiques

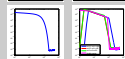
Bruit dynamique : spectres

Bruit dynamique : spectres

Exemples de réalisation



Spectres



Evensen 2003 Autosimilaire

- exemples de réalisation + spectres
- spectre AS : pente et gamme d'échelles spécifiées
- spectre AS : possibilité de combiner plusieurs bruits AS sur des gammes différentes

- transition : rappel du scénario, erreur, résultats

Aparté : séquence de test

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Application aux fluides

└─┬─ Modèle et bruit dynamiques

└─┬─┬─ Aparté : séquence de test

Aparté - séquence de test

Mesure d'erreur principale : erreur quadratique moyenne à partir de la vérité ξ_t^{true}

$$RMSE(\hat{\xi}_t) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\xi}_{t,i} - \xi_{t,i}^{\text{true}})^2}$$

Mesure d'erreur principale : erreur quadratique moyenne à partir de la vérité ξ_t^{true}

$$RMSE(\hat{\xi}_t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{\xi}_{t,i} - \xi_{t,i}^{\text{true}})^2}$$

- modèle : 2D incompressible, déterministe, code spectral, forçage inconnu
- notre modèle est spatial (advection), forçage différent, mais résolution à la même échelle
- introduire la RMSE
- mentionner : autre comparaison à la fin : en échelle

- transition : exemple de résultat

Bruit dynamique : résultat

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Application aux fluides

└─┬─ Modèle et bruit dynamiques

└─┬─┬─ Bruit dynamique : résultat

- RMSE

Bruit dynamique : résultats

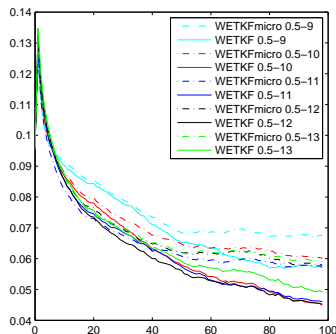


FIGURE: Comparaison des bruits micro (physique stochastique, pointillés) et macro (physique déterministe, traits pleins) pour différents bruits dynamiques.

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Modèle et bruit dynamiques

Bruit dynamique : résultats

Bruit dynamique : résultats



FIGURE: Comparaison des bruits micro (physique stochastique, pointillés) et macro (physique déterministe, traits pleins) pour différents bruits dynamiques.

- bruit micro = physique stochastique ; macro=physique déterministe
- ici, physique déterministe plus adaptée
- ici, différentes expériences modifiant la petite échelle du bruit dynamique

Bruit dynamique : résultats

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└ Application aux fluides

└└ Modèle et bruit dynamiques

└└└ Bruit dynamique : résultats

Bruit dynamique : résultats

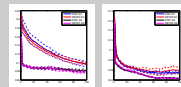


FIGURE: Comparaison des bruits d'Evensen et autosimilaire avec 50 particules (gauche) et 400 particules (droite).

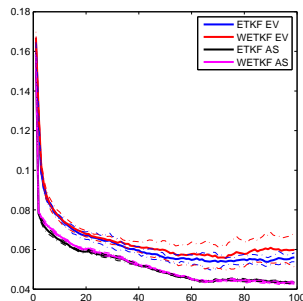
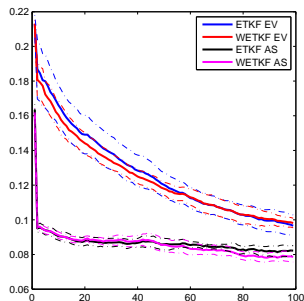


FIGURE: Comparaison des bruits d'Evensen et autosimilaire avec 50 particules (gauche) et 400 particules (droite).

- comparaison EV/AS : AS systématique en-dessous, en petit et grand nombre de particules

Opérateurs d'observation

- hypothèse de base : conservation de la luminance :

$$\forall \mathbf{x}, \quad \frac{dl_t(\mathbf{x})}{dt} = \partial_t l_t(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_t \cdot \nabla l_t(\mathbf{x}) = 0$$

- ajout d'une contrainte supplémentaire :
 - 1 résolution locale : méthode de Lucas-Kanade et méthodes de corrélations
 - 2 contrainte globale : méthodes de Horn et Schunk

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Application aux fluides

└─ Opérateurs d'observation

└─ Opérateurs d'observation

Opérateurs d'observation

- hypothèse de base : conservation de la luminance :

$$\forall \mathbf{x}, \quad \frac{dl_t(\mathbf{x})}{dt} = \partial_t l_t(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_t \cdot \nabla l_t(\mathbf{x}) = 0$$

- ajout d'une contrainte supplémentaire :
 - 1 résolution locale : méthode de Lucas-Kanade et méthodes de corrélations
 - 2 contrainte globale : méthodes de Horn et Schunk

Opérateurs d'observation

Deux alternatives testées :

- Estimation de mouvement par flot optique
- Recalage direct des images

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└─ Application aux fluides

└─ Opérateurs d'observation

└─ Opérateurs d'observation

Opérateurs d'observation

Deux alternatives testées :
• Estimation de mouvement par flot optique
• Recalage direct des images

Opérateurs d'observation

Deux alternatives testées :

- Estimation de mouvement par flot optique
 - Flot optique de Lucas-Kanade stochastique (Corpetti et Mémin, 2011)
 - Estimation de l'incertitude associée au mouvement estimé
 - Estimation multi-échelles
- Recalage direct des images

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Opérateurs d'observation

Opérateurs d'observation

Opérateurs d'observation

Deux alternatives testées :

- Estimation de mouvement par flot optique
 - Flot optique de Lucas-Kanade stochastique (Corpetti et Mémin, 2011)
 - Estimation de l'incertitude associée au mouvement estimé
 - Estimation multi-échelles
- Recalage direct des images

Opérateurs d'observation

Deux alternatives testées :

- Estimation de mouvement par flot optique
- Recalage direct des images
 - sous l'hypothèse de conservation de la luminance

$$I(x + d(x), t + \Delta t) - I(x, t) = 0$$

- l'assimilation cherchera le déplacement $d(x)$ qui minimise la différence entre l'image et l'image recalée

$$\min_{d(x)} I(x + d(x), t + \Delta t) - I(x, t)$$

- pas de méthode intermédiaire

Assimilation de données images pour les fluides

2013-07-11

Application aux fluides

Opérateurs d'observation

Opérateurs d'observation

Opérateurs d'observation

Deux alternatives testées :

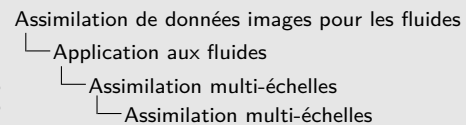
- Estimation de mouvement par flot optique
- Recalage direct des images
 - sous l'hypothèse de conservation de la luminance
$$I(x + d(x), t + \Delta t) - I(x, t) = 0$$
 - l'assimilation cherchera le déplacement $d(x)$ qui minimise la différence entre l'image et l'image recalée
$$\min_{d(x)} I(x + d(x), t + \Delta t) - I(x, t)$$
- pas de méthode intermédiaire

Assimilation multi-échelles

- Estimation incrémentale des échelles à chaque temps d'assimilation
- Après l'assimilation à la première échelle : assimilation de l'anomalie en s'appuyant sur l'image recalée

(Beyou et al., NMTMA, 2013)

2013-07-11

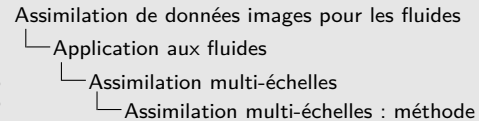


- Estimation incrémentale des échelles à chaque temps d'assimilation
- Après l'assimilation à la première échelle : assimilation de l'anomalie en s'appuyant sur l'image recalée

Assimilation multi-échelles : méthode

- 1 proposition par EnKF multi-échelles :
 - prédiction selon le modèle
 - assimilation par EnKF à partir d'une observation de vitesse
Lucas-Kanade grande échelle
 - étapes suivantes : recalage de l'image et assimilation de l'anomalie restante
- 2 pondération
- 3 rééchantillonnage

2013-07-11



- 1 proposition par EnKF multi-échelles :
 - prédiction selon le modèle
 - assimilation par EnKF à partir d'une observation de vitesse
Lucas-Kanade grande échelle
 - étapes suivantes : recalage de l'image et assimilation de l'anomalie restante
- 2 pondération
- 3 rééchantillonnage

Assimilation multi-échelles : résultat

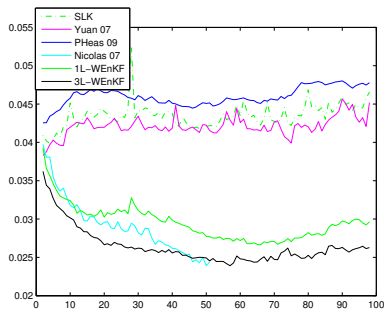


FIGURE: RMSE en vorticité (à gauche) et en vitesse (à droite) de différentes méthodes : Corpetti et Mémin (2011), Yuan et al. (2007), Héas et al. (2009), Papadakis et al. (2007), WEnKF-1L, WEnKF-3L.

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides
└─ Application aux fluides
 └─ Assimilation multi-échelles
 └─ Assimilation multi-échelles : résultat

Assimilation multi-échelles : résultat



FIGURE: RMSE en vorticité (à gauche) et en vitesse (à droite) de différentes méthodes : Corpetti et Mémin (2011), Yuan et al. (2007), Héas et al. (2009), Papadakis et al. (2007), WEnKF-1L, WEnKF-3L.

- deux groupes : flots optiques en haut, assimilations en bas
- cyan : assimilation variationnelle
- vert, noir : WEnKF 1L et 3L

- transition : film de savon

Assimilation multi-échelles : résultat

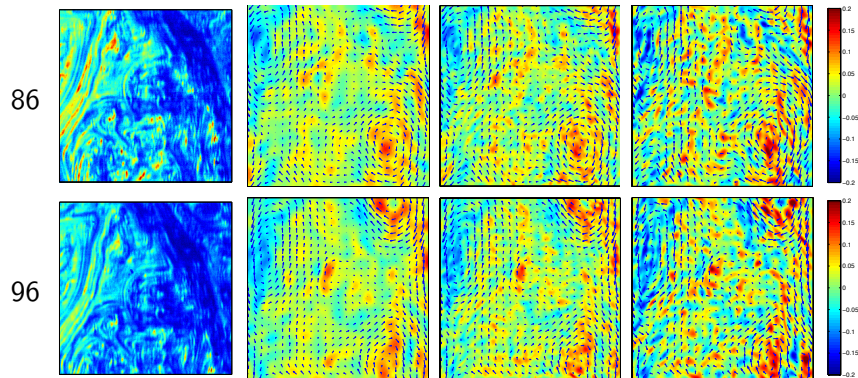


FIGURE: Images et cartes de vitesse et vorticité pour (a) SLK ; (b) WEnKF 1L ; (c) WEnKF 3L sur les images 86 et 96 (première et deuxième rang es respectivement).

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides
└ Application aux fluides
└ Assimilation multi-échelles
└ Assimilation multi-échelles : résultat

Assimilation multi-échelles : résultat

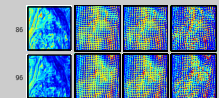


FIGURE: Images et cartes de vitesse et vorticité pour (a) SLK ; (b) WEnKF 1L ; (c) WEnKF 3L sur les images 86 et 96 (première et deuxième rang es respectivement).

Autres comparaisons : ETKF vs. WETKF

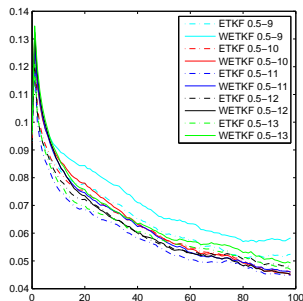


FIGURE: Comparaison des ETKF et WETKF pour différents bruits dynamiques.

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Autres comparaisons

Autres comparaisons : ETKF vs. WETKF

Autres comparaisons : ETKF vs. WETKF



FIGURE: Comparaison des ETKF et WETKF pour différents bruits dynamiques.

- WETKF proche de l'ETKF
- l'association WETKF+bruit autosimilaire est généralement meilleure ETKF+AS

Autres comparaisons : échelles reconstruites

2013-07-11

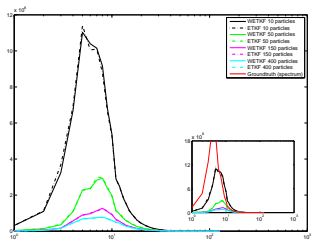
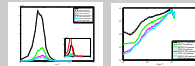
Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

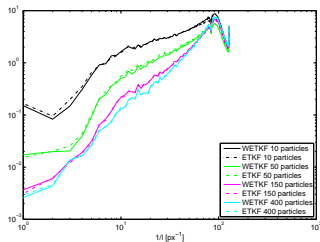
Autres comparaisons

Autres comparaisons : échelles reconstruites

Autres comparaisons : échelles reconstruites



Quantité d'énergie de l'erreur par
incrément logarithmique



Énergie relative de l'erreur entre
l'assimilation et la vérité selon les
échelles.

- 1er : distribution de l'énergie de l'erreur pour différents nb de particules (rouge=vérité)
- 2e : erreur relative de l'énergie de l'erreur par rapport à l'énergie de la vérité
→ à la barre 10% d'erreur relative : 50 particules=pas bon, à partir de 100=meilleur jusque dans les échelles moyennes

Autres comparaisons : séquence de température de surface dans le Pacifique

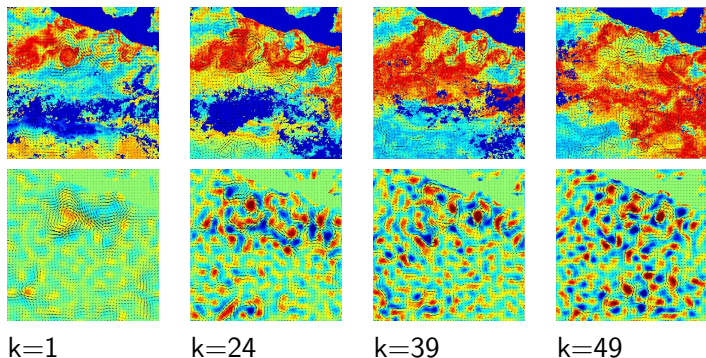


FIGURE: Assimilation des courants à partir d'une séquence satellite de la température de l'océan Pacifique près de l'Amérique centrale.

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

└ Application aux fluides

└─ Autres comparaisons

└─ Autres comparaisons : séquence de température de surface dans le Pacifique

Autres comparaisons : séquence de température de surface dans le Pacifique

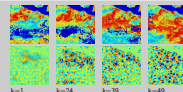


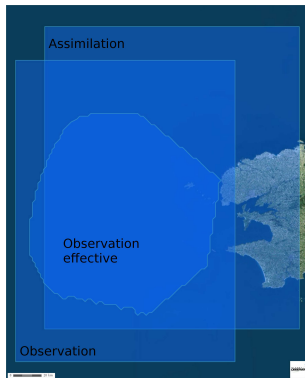
FIGURE: Assimilation des courants à partir d'une séquence satellite de la température de l'océan Pacifique près de l'Amérique centrale.

- observations satellite MetOp AVHRR (infrarouge) : SST
- modèle 2D vorticité-vitesse
- données manquantes : covariance d'erreur forte

- transition : Iroise

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

- Espace d'état 3D avec plusieurs variables océaniques (résolution 1,5km ; dimension : $2 \cdot 10^6$ points)
- Espace d'observation : vitesse 2D en surface donnée par deux radars côtiers (résolution 1,5km et 3,0km ; dimension : 17600 points) (société Actimar)
- Modèle dynamique : ROMS
- Schéma WETKF 100 particules
- Bruit dynamique de type autosimilaire sur la surface



© IGN 2012 - www.geoportail.gouv.fr/mentions-legales

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

- Espace d'état 3D avec plusieurs variables océaniques (résolution 1,5km ; dimension : $2 \cdot 10^6$ points)
- Espace d'observation : vitesse 2D en surface donnée par deux radars côtiers (résolution 1,5km et 3,0km ; dimension : 17600 points) (société Actimar)
- Modèle dynamique : ROMS
- Schéma WETKF 100 particules
- Bruit dynamique de type autosimilaire sur la surface



Expérimentation réaliste en mer d'Iroise : résultat

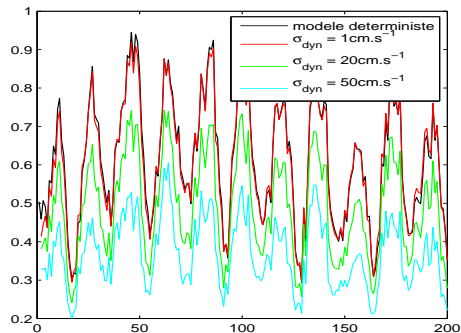


FIGURE: Erreur quadratique moyenne entre l'observation et l'assimilation pour la vitesse de surface.

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise : résultat

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise : résultat

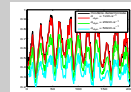


FIGURE: Erreur quadratique moyenne entre l'observation et l'assimilation pour la vitesse de surface.

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise : résultat

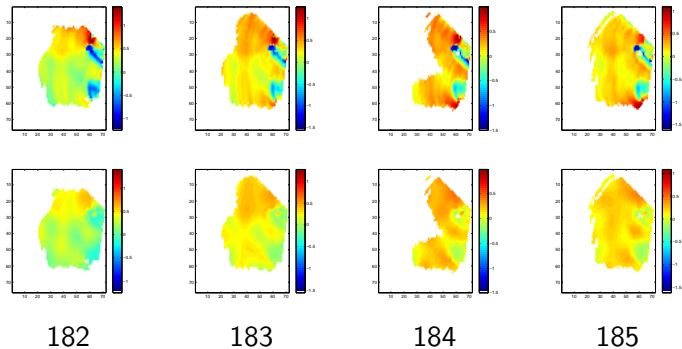


FIGURE: Suivi de l'assimilation entre les 182^e et 185^e temps d'assimilation (soit après 60 heures) avec un bruit d'observation fort ($50\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$) — composante est-ouest.

2013-07-11

Assimilation de données images pour les fluides

Application aux fluides

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise : résultat

Expérimentation réaliste en mer d'Iroise : résultat

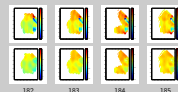


FIGURE: Suivi de l'assimilation entre les 182^e et 185^e temps d'assimilation (soit après 60 heures) avec un bruit d'observation fort ($50\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$) — composante est-ouest.

Conclusion

- Application réussie du filtre de Kalman d'ensemble pondéré aux images de fluides
- Préférence pour un opérateur d'observation donné par une différence d'images recalées
- Démonstration de la faisabilité de l'utilisation d'un WEnKF sur un exemple réel, de très grande dimension
- Plusieurs pistes explorées :
 - Bruit dynamique, et investigation d'un bruit autosimilaire
 - Rééchantillonnage dual
 - Assimilation multi-échelles
 - Quelques autres idées (non-mentionnées ici)

Merci !

Conclusion

- autres idées testées : modification de la vraisemblance, mesures intermédiaires

- Application réussie du filtre de Kalman d'ensemble pondéré aux images de fluides
- Préférence pour un opérateur d'observation donné par une différence d'images recalées
- Démonstration de la faisabilité de l'utilisation d'un WEnKF sur un exemple réel, de très grande dimension
- Plusieurs pistes explorées :
 - Bruit dynamique, et investigation d'un bruit autosimilaire
 - Rééchantillonnage dual
 - Assimilation multi-échelles
 - Quelques autres idées (non-mentionnées ici)

Appendices

Filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF)

1 Prédiction :

$$\mathbf{x}_k^{f,(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), i = 1 \dots N$$

$$\mathbf{x}_k^f = [\mathbf{x}_k^{f,(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{f,(N)}] = \mu_k^f \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'}$$

avec :

- $\mu_k^f = \mathbf{x}_k^f \mathbf{1}_N$ moyenne de \mathbf{x}_k^f ;
- $\mathbf{X}_k^{f'} = \mathbf{x}_k^f - \mu_k^f \mathbf{1}_N^T$ à moyenne nulle.

2 Analyse :

$$\mathbf{x}_k^a = \mu_k^a \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{A}_k$$

2013-07-11

└ Filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF)

- Prédiction :
 - $\mathbf{x}_k^{f,(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}), i = 1 \dots N$
 - $\mathbf{x}_k^f = [\mathbf{x}_k^{f,(1)}, \dots, \mathbf{x}_k^{f,(N)}] = \mu_k^f \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'}$
- avec :
 - $\mu_k^f = \mathbf{x}_k^f \mathbf{1}_N$ moyenne de \mathbf{x}_k^f ;
 - $\mathbf{X}_k^{f'} = \mathbf{x}_k^f - \mu_k^f \mathbf{1}_N^T$ à moyenne nulle.
- Analyse :
 - $\mathbf{x}_k^a = \mu_k^a \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{A}_k$

Filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF)

1 Prédiction :

$$\mathbf{x}_k^f = \mu_k^f \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'}$$

2 Analyse :

$$\mathbf{x}_k^a = \mu_k^a \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{A}_k$$

1 calcul de la transformation de la covariance :

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{I}_N + \frac{1}{N-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^{f'})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x}_k^{f'} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{D}_k^{-1/2} = \mathbf{U} \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{U}^T$$

2 calcul de la moyenne a posteriori :

$$\mu_k^a = \mu_k^f + \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{D}_k^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^{f'})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \mu_k^f)$$

└ Filtre de Kalman de transformation d'ensemble (ETKF)

- 1 Prédiction : $\mathbf{x}_k^f = \mu_k^f \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'}$
- 2 Analyse : $\mathbf{x}_k^a = \mu_k^a \mathbf{1}_N^T + \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{A}_k$
- 3 calcul de la transformation de la covariance :
 $\mathbf{D}_k = \mathbf{I}_N + \frac{1}{N-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^{f'})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x}_k^{f'} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T$
 $\mathbf{A}_k = \mathbf{D}_k^{-1/2} = \mathbf{U} \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{U}^T$
- 4 calcul de la moyenne a posteriori :
 $\mu_k^a = \mu_k^f + \frac{1}{N-1} \mathbf{x}_k^{f'} \mathbf{D}_k^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{x}_k^{f'})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \mu_k^f)$