



Transport turbulent d'éléments chimiques dans les zones radiatives stellaires

Vincent Prat

► To cite this version:

Vincent Prat. Transport turbulent d'éléments chimiques dans les zones radiatives stellaires. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2013. Français. NNT: . tel-00873153

HAL Id: tel-00873153

<https://theses.hal.science/tel-00873153>

Submitted on 15 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *27 septembre 2013* par :

VINCENT PRAT

**Transport turbulent d'éléments chimiques dans les zones radiatives
stellaires**

JURY

PASCALE GARAUD
GEOFFROY LESUR
FRANÇOIS LIGNIÈRES
GEORGES MEYNET
MICHEL RIEUTORD
JEAN-PAUL ZAHN

Professeure
Chargé de recherche
Directeur de recherche
Professeur
Professeur
Astronome émérite

Rapportrice
Examineur
Directeur de thèse
Examineur
Président du jury
Rapporteur

École doctorale et spécialité :

SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de Recherche :

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur de Thèse :

François Lignières

Rapporteurs :

Pascale Garaud et Jean-Paul Zahn

*À Jean-Marie,
qui a su déceler et cultiver mon goût pour la physique.*

Remerciements

La rédaction des remerciements est un passage obligé de la thèse, à la fois très attendu et très redouté. Très attendu parce qu’une fois la thèse rédigée et soutenue, il est agréable de passer en revue toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, au succès de cette entreprise, ainsi que tous les bons souvenirs associés à ces personnes. Très redouté également, car il s’agit d’essayer de n’oublier personne et de trouver les mots justes pour chacun. Dans l’idéal, cela nécessiterait d’écrire un chapitre entier, mais ici il me faut faire court. Que ceux qui ne figurent pas dans les paragraphes qui vont suivre ne m’en tiennent donc pas rigueur, cela ne veut pas dire que je ne les apprécie pas.

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à François Lignières, qui m’a encadré durant ces trois années de thèse ainsi que durant mon stage de M2R. Merci pour sa patience, pour sa confiance, qui m’a permis d’acquérir progressivement une certaine autonomie, pour son exigence, jamais décourageante mais toujours constructive, et pour son caractère profondément humain, qui a sans aucun doute grandement contribué au bon déroulement de ma thèse. J’espère que l’avenir lui montrera qu’il a eu raison de miser sur moi et que tout ce qu’il m’a appris a porté ses fruits.

Je tiens à remercier Pascale Garaud et Jean-Paul Zahn pour avoir accepté d’être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie particulièrement Pascale, qui est venue spécialement de Santa-Cruz en Californie pour assister à ma soutenance et dont les questions judicieuses m’ont permis de progresser dans la compréhension de mon sujet. Je remercie Michel Rieutord d’avoir présidé mon jury de thèse, pour les commentaires constructifs sur celle-ci et pour l’enseignement dispensé en M2R. Je remercie également mes examinateurs Georges Meynet et Geoffroy Lesur d’avoir fait le déplacement et pour l’intérêt qu’ils ont montré pour mon travail.

Un grand merci aux membres de l’équipe de Physique du Soleil et des Étoiles de l’Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, que j’ai côtoyé pendant ces trois ans et qui m’ont toujours traité comme l’un des leurs. Merci en particulier à Thierry Roudier, pour sa bonne humeur et ses conseils pleins de bienveillance et de sagesse. Merci à François Rincon, pour les discussions scientifiques sur la dynamique des fluides et les simulations numériques. Merci à Boris Dintrans, pour son aide concernant les simulations numériques ainsi que pour un voyage Aussois–Toulouse dont je me souviendrai encore longtemps. Merci à Pascal Fouqué, pour m’avoir initié au jeu du bridge et encouragé à jouer. Merci à Jérôme Ballot, pour m’avoir co-encadré durant mon stage de M2R, pour le modèle de thèse qu’il m’a gentiment fourni et pour les discussions sur le bridge. Merci à Laurène Jouve, Frédéric Paletou, Jérôme et François d’avoir accepté d’assister à ma répétition de soutenance et ainsi contribué par leurs remarques à la qualité de la soutenance elle-même.

Je tiens également à remercier les thésards avec lesquels j’ai eu l’occasion de sympathiser, à commencer par ceux avec qui j’ai partagé mon bureau et de très bons moments. Merci à Simon Nicolas, pour les centres d’intérêt communs que nous nous sommes trouvés et qui continuent de nous lier, pour les partages d’expérience sur Python, l’enseignement, la vulgarisation scientifique, *etc.* Merci à Bic, alias Mickaël Pasek, pour les longues discussions philosophiques et scientifiques du vendredi après-midi. Merci à Antoine Riols-Fonclare, pour ses phrases mythiques qui resteront à jamais gravées dans ma mémoire, pour les discussions professionnelles et personnelles. Merci

à Delphine Hypolite, pour avoir apporté une touche de féminité (et de poney) dans ce bureau de brutes. Merci à Giovanni Mirouh, pour son humour acerbe et sa finesse légendaire, ainsi que pour les discussions sur nos centres d'intérêt communs.

Je remercie chaleureusement tous les amis qui ont partagé ma joie dans les bons moments et qui m'ont soutenu dans les moments difficiles. Un immense merci à Régis et à Rosemond, pour tous les moments passés ensemble. Un immense merci également à Maxime, pour sa fidélité à notre musique contre vents et marées, pour la musique qu'il m'a fait découvrir, et pour tout le reste. Merci à Mathilde, pour les longues discussions qui m'ont aidé à mieux me connaître moi-même. Merci à Clément, Thierry, Vincent, Philippe, Fabrice, Benoît, Justine et Émilie pour la musique que nous avons jouée et chantée ensemble. Merci à Simon, Olivier, Mathieu et Maxime pour les soirées conviviales passées à jouer avec notre imagination et nos dés. Merci à tous les autres que je ne nomme pas mais que j'apprécie tout autant.

Pour finir, je ne remercierai jamais assez les membres de ma famille, à commencer par mes parents, Jean-Paul et Dominique, qui m'ont permis de devenir celui que je suis maintenant. Merci à mes deux grandes sœurs, Emmanuelle et Cécile, pour la complicité qui nous unit. Un merci spécial à Cécile pour ses petits plats qui ont fait le bonheur de nos dimanches après-midi.

Résumé

Un des enjeux majeurs de la théorie de l'évolution stellaire est de comprendre l'influence des processus de transport liés aux mouvements macroscopiques engendrés par la rotation sur la structure interne et l'évolution des étoiles. En particulier, le transport turbulent des éléments chimiques dû à la rotation différentielle dans les zones radiatives des étoiles est actuellement pris en compte dans de nombreux codes d'évolution stellaire comme un processus diffusif dont le coefficient est déterminé à partir d'arguments phénoménologiques.

Le but de cette thèse est de contraindre l'un de ces coefficients, le coefficient de diffusion radiale induit par la rotation différentielle radiale, à l'aide de simulations numériques directes décrivant les mouvements turbulents engendrés par un cisaillement forcé localement dans une zone radiative d'étoile. L'exploration du domaine des très fortes diffusivités thermiques — ou, de manière équivalente, des petits nombres de Péclet — typiques des intérieurs stellaires a été rendue possible par l'utilisation d'un développement asymptotique des équations de Boussinesq adapté.

Le principal résultat de cette thèse est que nos simulations numériques sont en accord avec la forme du coefficient de diffusion proposée par J.-P. Zahn dans le régime des nombres de Péclet turbulents inférieurs à un. Les résultats obtenus pour des nombres de Péclet supérieurs à un sont en accord avec le modèle de [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#) proposé dans un contexte géophysique. Les simulations réalisées en prenant en compte l'effet dynamique de la stratification chimique nous ont également permis de valider un des modèles utilisés dans les codes d'évolution stellaire et d'en éliminer un autre.

Mots-clés : évolution stellaire – hydrodynamique – simulations numériques – transport – turbulence

Abstract

One of the key issues of stellar evolution theory is the influence of transport processes related to macroscopic motions driven by rotation on the internal structure and evolution of stars. In particular, turbulent mixing of chemical elements due to differential rotation in stellar radiative zones is currently taken into account in many stellar evolution codes as a diffusive process whose coefficient is determined from phenomenological arguments.

The purpose of this thesis is to constrain one of these coefficients, the radial diffusion coefficient driven by radial differential rotation through local direct numerical simulations describing turbulent motions induced by a locally forced shear in a stellar radiative zone. The exploration of the domain of very large thermal diffusivities — or equivalently of small Péclet numbers — typical of stellar interiors was made possible thanks to a suitable asymptotic expansion of the Boussinesq equations.

The main result of this thesis is that our numerical simulations are in agreement with the form of the vertical turbulent diffusion coefficient proposed by J.-P. Zahn in the regime of turbulent Péclet numbers smaller than one. The results obtained for Péclet numbers greater than one are in agreement with the model of [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#) proposed in a geophysical context. The simulations taking into account the dynamical effect of chemical stratification also allowed us to validate one of the models used in stellar evolution codes and to eliminate another one.

Keywords: hydrodynamics – numerical simulations – stellar evolution – transport – turbulence

Sommaire

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xv
Introduction	1
I Influence du transport sur l'évolution stellaire	5
1 Contraintes observationnelles	7
1.1 Abondances chimiques de surface	8
1.1.1 Cycle CNO et mélange profond dans les étoiles massives	9
1.1.2 Éléments légers comme indicateurs d'un mélange peu profond	10
1.1.3 Grandes campagnes de mesure d'abondances	12
1.2 Structure interne et astérosismologie	13
1.2.1 Vitesse du son et distribution des éléments chimiques	13
1.2.2 Rotation interne	15
2 Modélisation du transport induit par la rotation dans les codes d'évolution stellaire	19
2.1 Modèles 1D <i>vs.</i> 2D	21
2.1.1 Modèles 1D	21
2.1.2 Modèles 2D	24
2.2 Instabilités hydrodynamiques liées à la rotation	24
2.2.1 Instabilités baroclines	25
2.2.2 Instabilités centrifuge et de cisaillement	26
2.3 Comparaison entre les modèles et les observations	27
2.3.1 Étoiles massives	28
2.3.2 Étoiles froides	29
2.3.3 Astérosismologie des géantes rouges	30
II Transport et turbulence	31
3 Modèles de transport turbulent	33
3.1 Transport turbulent diffusif/non diffusif	34
3.1.1 Hypothèse de diffusion	34
3.1.2 Approximations communes de transport diffusif	36

3.2	Modèles de transport dans un écoulement cisailé stratifié de manière stable . . .	39
3.2.1	Modèles issus de la littérature géophysique	39
3.2.2	Modèle de Zahn	43
4	Simulations numériques locales de turbulence stratifiée de manière stable	45
4.1	Simulations d'un écoulement cisailé stratifié de manière stable	46
4.1.1	Équations à résoudre dans les simulations numériques	46
4.1.2	Types de simulations	48
4.1.3	Forçage, conditions aux limites et conditions initiales	50
4.2	Vers un test du modèle de Zahn	52
4.2.1	Obtention d'un état stationnaire	53
4.2.2	Domaine des petits nombres de Péclet	54
III	Résultats	57
5	Travaux préliminaires	59
5.1	Détermination des paramètres optimaux	60
5.1.1	Description du code numérique utilisé	60
5.1.2	Taux de croissance en fonction des conditions initiales	62
5.1.3	Nombre de Richardson stationnaire	66
5.1.4	Dimensions du domaine numérique	66
5.2	Comparaison entre approches lagrangienne et eulérienne	70
5.2.1	Suivi de particules fluides	70
5.2.2	Diffusion d'un profil gaussien de température	72
5.2.3	Approche du gradient moyen	74
6	Analyse des simulations numériques	77
6.1	Domaine des petits nombres de Péclet	77
6.1.1	Test du modèle de Zahn	78
6.1.2	Discussion	79
6.2	Domaine des grands nombres de Péclet	82
6.2.1	Comparaison avec Lindborg & Brethouwer (2008)	82
6.2.2	Comparaison avec Maeder (1995)	84
6.3	Effet dynamique de la stratification chimique	86
6.3.1	Test du modèle de Maeder & Meynet (1996)	87
6.3.2	Comparaison avec d'autres modèles	89
	Conclusion et perspectives	91
	Annexe : publication	95
	Bibliographie	101

Table des figures

1.1	Spectres d'étoiles de différents types spectraux	8
1.2	Cycles CNO	10
1.3	Abondances de lithium dans l'amas M67	11
1.4	Exemple de mesures d'abondances effectuées par FLAMES	12
1.5	Carré de la vitesse du son à l'intérieur du Soleil par comparaison aux modèles	14
1.6	Profil de rotation du Soleil obtenus par inversion	16
1.7	Profil de rotation de l'étoile sous-géante KIC 7341231	17
2.1	Schéma de la circulation méridienne dans une étoile en rotation	20
2.2	Exemple de loi de rotation calculée par le modèle ESTER	25
2.3	Diagramme H-R d'une population synthétique d'étoiles	28
2.4	Distribution d'étoiles en fonction de l'abondance en azote et de la vitesse équatoriale	29
3.1	Dispersion verticale quadratique moyenne de particules en fonction du temps	42
4.1	Conditions aux limites périodiques par rapport au cisaillement	51
4.2	Nombre de Richardson stationnaire en fonction du nombre de cisaillement initial	53
4.3	Nombre de Richardson stationnaire en fonction du nombre de Reynolds initial	54
5.1	Schéma de l'écoulement	61
5.2	Taux de croissance en fonction du nombre de cisaillement	64
5.3	Schéma du mécanisme d'auto-entretien	65
5.4	Intensité relative de deux modes horizontaux au cours du temps	65
5.5	Évolution temporelle de l'énergie cinétique en fonction du nombre de Richardson	67
5.6	Fluctuations de vitesse verticale et de température dans une coupe longitudinale	68
5.7	Spectre horizontal de l'énergie cinétique turbulente	69
5.8	Spectre horizontal de l'énergie potentielle thermique	69
5.9	Trajectoires de particules dans un champ de vitesse test	71
5.10	Déplacement quadratique moyen en fonction du temps	71
5.11	Limite de l'approche lagrangienne	72
5.12	Évolution temporelle du profil vertical moyen de concentration	73
5.13	Largeur du profil vertical moyen de concentration en fonction du temps	74
6.1	$D_t/(\kappa Ri^{-1})$ en fonction du nombre de Péclet turbulent ($Pe_\ell < 25$)	80
6.2	$D_t/(\kappa Ri^{-1})$ en fonction du nombre de Péclet turbulent (toutes simulations)	82
6.3	$D_t/(\varepsilon_P N^{-2})$ en fonction du nombre de Péclet turbulent	83
6.4	Rapport entre les différents modèles de transport et le transport total mesuré	84
6.5	κ/D_t en fonction du nombre de Richardson	86

6.6	$D_t/(\kappa Ri_T^{-1})$ en fonction du nombre de Richardson chimique	88
-----	---	----

Liste des tableaux

6.1	Résultats des simulations à différents nombres de Péclet turbulents	79
6.2	Resultats des simulations à différents nombres de Richardson chimiques	88

Introduction

« Dites aux gens qu'il existe un milliard d'étoiles dans la galaxie et ils vous croiront. Dites-leur qu'il y a de la peinture fraîche sur une chaise et ils auront besoin d'y toucher pour se convaincre. »

K. Garbutt

La théorie de l'évolution stellaire est à la base d'une grande partie de l'astrophysique. En effet, de nombreuses mesures de distance, de vitesse, d'âge, *etc.*, d'importance capitale pour l'étude des galaxies et la cosmologie notamment, sont basées sur des modèles d'étoiles, comme les céphéïdes ou les supernovae. Pour satisfaire les exigences sans cesse accrues en précision sur ces modèles, par exemple afin de progresser dans la compréhension de la formation et l'évolution des galaxies ou des systèmes planétaires, ces modèles doivent en permanence être améliorés. Pour atteindre la précision désirée, la théorie de l'évolution stellaire se doit de prendre en compte une multitude de processus physiques, aussi bien microscopiques que macroscopiques, à l'œuvre à l'intérieur des étoiles. Parmi ces processus, le moteur de l'évolution stellaire est l'ensemble des réactions nucléaires qui ont lieu en son sein et qui font évoluer sa composition chimique, sa température et sa taille, entre autres. De nombreux autres processus microscopiques sont également présents comme la diffusion moléculaire, la pression radiative due au rayonnement émis lors des réactions nucléaires, les effets de l'ionisation de la matière sur la propagation du rayonnement, *etc.* Même si certaines zones d'ombre subsistent dans la compréhension de ces processus microscopiques, ces derniers sont malgré tout relativement bien connus d'un point de vue théorique.

En revanche, on ne peut pas en dire autant des processus macroscopiques présents dans les étoiles. En particulier, la rotation des étoiles induit de nombreux mouvements aussi bien à grande échelle, avec la rotation différentielle et la circulation méridienne, qu'à petite échelle, avec les mouvements turbulents générés par des instabilités hydrodynamiques ou magnétohydrodynamiques. Ces mouvements sont à l'origine de mécanismes de transport des éléments chimiques et du moment cinétique qui ont une influence considérable sur l'évolution des étoiles et qui doivent par conséquent être pris en compte dans les modèles d'évolution stellaire. En témoignent l'observation d'anomalies chimiques, notamment de lithium ou d'azote et de carbone, à la surface des étoiles. Les mouvements à grande échelle peuvent être soit directement calculés dans des modèles 2D d'évolution stellaire soit modélisés dans des modèles 1D, tandis que les processus de transport associés aux mouvements turbulents, de nature fondamentalement tridimensionnelle, ne peuvent pas être calculés dans des modèles d'évolution 3D du fait de la trop grande séparation entre les échelles de temps de ces mouvements et ceux de l'évolution chimique. Leurs effets doivent donc être modélisés et inclus dans les codes d'évolution 1D ou 2D. Les modèles de transport actuellement utilisés dans les codes d'évolution stellaire ont été élaborés à partir d'arguments phénoménologiques et une faiblesse des codes d'évolution actuels est justement que dans la plupart des cas, il n'existe pas de vérification expérimentale ou numérique de ces modèles de transport.

Pour contraindre ces modèles, nous pouvons d’abord tirer profit de nouveaux moyens observationnels, notamment grâce aux progrès de la spectropolarimétrie, qui donne accès aux propriétés physiques et chimiques de la surface des étoiles ; de l’astrométrie, notamment grâce à la mission Gaia à venir, qui permet de déterminer avec précision les paramètres fondamentaux des étoiles que sont la masse, le rayon, *etc.* ; ainsi que de l’astérosismologie, désormais capable par l’étude des oscillations des étoiles non seulement d’estimer ces mêmes paramètres fondamentaux, mais également de sonder les propriétés physiques des intérieurs stellaires comme la vitesse de rotation ou le poids moléculaire moyen, apportant ainsi des contraintes observationnelles inédites sur les processus de transport. D’autre part, les simulations numériques permettent d’explorer des domaines de paramètres physiques qui sont totalement inaccessibles en laboratoire. De plus, elles peuvent nous aider à comprendre qualitativement certains processus physiques mis en jeu en en négligeant d’autres, ainsi que quantitativement, en calibrant certaines relations présentant des paramètres laissés libres par la théorie. Cependant, le domaine d’application et la précision des simulations numériques sont également limités par la puissance de calcul à notre disposition et sont le plus souvent des approximations de ce qu’il se passe dans la réalité. Plutôt qu’une résolution numérique des équations régissant les mouvements du fluide stellaire, il est plus juste de parler d’expérience numérique dont l’objectif est de comprendre et de modéliser si possible les processus de transport hydrodynamiques ou magnétohydrodynamiques, puis éventuellement d’extrapoler ces modèles au cas stellaire.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au transport turbulent radial d’éléments chimiques qui a lieu dans les zones radiatives des étoiles, c’est-à-dire les zones où l’énergie émise par les réactions nucléaires se transmet par rayonnement plutôt que par mouvement de matière. Nous chercherons à contraindre les modèles existants au moyen de simulations numériques. Alors que les simulations globales ont pour but de décrire le comportement de l’étoile toute entière, nous considérerons des simulations locales à géométrie plane parallèle, configurées pour l’étude de ces processus de transport qui ont lieu à de petites échelles spatiales. Pour tenter de confirmer ou d’infirmer les modèles phénoménologiques existants, qui s’expriment en fonctions des gradients locaux de vitesse et d’entropie, des simulations locales présentant des gradients uniformes semblent les plus adaptées. En outre, ce choix permet de s’assurer du caractère générique des résultats obtenus.

De telles simulations numériques locales de turbulence cisailée et/ou stratifiée de manière stable sont largement utilisées en géophysique, notamment pour l’étude de l’atmosphère et des océans. La différence principale entre les conditions géophysiques et les conditions astrophysiques est liée à la très grande valeur de la diffusivité thermique dans les intérieurs stellaires. Cette très forte diffusivité pose d’ailleurs un problème numérique important : l’échelle de temps caractéristique de la diffusion est très petite devant le temps dynamique lié au cisaillement, ce qui augmente démesurément le temps de calcul nécessaire pour réaliser des simulations numériques dans des conditions réalistes.

L’exposé sera divisé en trois parties. La partie **I** traitera de l’importance des processus de transport dans la théorie de l’évolution stellaire. Nous commencerons par passer en revue au chapitre 1 les contraintes observationnelles disponibles pour contraindre les modèles d’évolution stellaire prenant en compte ces processus. Nous examinerons ensuite au chapitre 2 comment les processus de transport liés à la rotation des étoiles sont modélisés dans les codes d’évolution stellaire. La partie **II** portera sur l’étude du transport turbulent en géophysique comme en astrophysique. Plus précisément, nous nous intéresserons dans un premier temps au chapitre 3 aux modèles de transport turbulent ainsi qu’à leur justification physique. Dans un deuxième temps,

nous montrerons au chapitre 4 comment les simulations numériques de transport turbulent dans un écoulement cisaillé et stratifié de manière stable réalisées jusqu'à présent peuvent nous indiquer la marche à suivre pour tester les modèles existants en astrophysique. La partie III sera consacrée aux résultats obtenus durant cette thèse. Nous présenterons tout d'abord au chapitre 5 les travaux préliminaires que nous avons réalisés dans le but de déterminer les meilleurs jeux de paramètres, avant d'analyser au chapitre 6 les résultats de nos simulations numériques et leurs conséquences sur les modèles de transport turbulent utilisés dans les codes d'évolution stellaire.

I

Influence du transport sur l'évolution stellaire

1

Contraintes observationnelles

« Ce qui est admirable, ce n'est pas que le champ des étoiles soit si vaste, c'est que l'homme l'ait mesuré. »

Anatole FRANCE, *Le jardin d'Épiqueure*, 1894.

Sommaire

1.1	Abondances chimiques de surface	8
1.1.1	Cycle CNO et mélange profond dans les étoiles massives	9
1.1.2	Éléments légers comme indicateurs d'un mélange peu profond	10
1.1.3	Grandes campagnes de mesure d'abondances	12
1.2	Structure interne et astérosismologie	13
1.2.1	Vitesse du son et distribution des éléments chimiques	13
1.2.2	Rotation interne	15

L'évolution des étoiles se déroule sur des millions — voire des milliards — d'années, ce qui rend bien évidemment impossible toute observation directe de l'évolution d'une étoile. En revanche, l'observation d'une importante population d'étoiles à un instant donné permet de disposer d'un échantillon représentatif des différents stades évolutifs. Comparer ces observations aux prédictions des modèles d'évolution stellaire (dont nous parlerons plus longuement au chapitre 2) nous offre alors la possibilité de contraindre la théorie de l'évolution stellaire.

Le « modèle standard » actuel de l'évolution stellaire décrit l'évolution d'étoiles sans rotation avec la convection comme unique processus de transport macroscopique. Pourtant, nous verrons que les observations indiquent qu'il est nécessaire de prendre en compte les effets de la rotation ainsi que d'autres processus de mélange non classiques comme par exemple la convection thermohaline ou la semi-convection.

Depuis que nous observons les étoiles, toutes les informations que nous avons sur elles (mis à part le Soleil) proviennent de la lumière qu'elles émettent. Or, les étoiles étant opaques, la lumière qui parvient jusqu'à nous est principalement issue de la photosphère, qui est une couche superficielle des étoiles. Cela a pour conséquence que la majorité des informations exploitables ne nous renseigne que sur les conditions physiques qui règnent à leur surface. Par exemple, leur couleur nous indique leur température de surface ; la présence et l'intensité de raies d'absorption, la composition chimique de leur atmosphère ; et la polarisation de la lumière, le champ magnétique de surface. Tout l'enjeu est d'arriver à exploiter ces mesures de surface pour en extraire des informations utiles sur ce qui se passe à l'intérieur.

Depuis quelques dizaines d'années, l'astérosismologie, qui consiste en l'étude des pulsations des étoiles à partir des variations temporelles de leur lumière, permet de sonder l'intérieur des

étoiles de la même manière que la sismologie terrestre nous permet de connaître l'intérieur de notre planète. L'astérosismologie nous fournit ainsi des contraintes inédites sur la structure interne des étoiles et en particulier sur leur rotation.

Parmi les différentes observations citées précédemment, il en est deux qui sont particulièrement sensibles aux processus de transport à l'œuvre à l'intérieur des étoiles : la mesure des abondances de surface des différents éléments chimiques par spectrophotométrie (analyse des raies d'absorptions) et la détermination de la structure et de la dynamique internes des étoiles grâce à l'astérosismologie. Durant cette thèse, nous nous sommes intéressés au transport des éléments chimiques lié à l'instabilité de cisaillement générée par la rotation différentielle radiale dans les zones radiatives stellaires. Dans la suite, nous rappellerons donc le principe des deux méthodes citées plus haut ainsi que la nature des contraintes qu'elles nous fournissent, à la fois sur le transport et sur le cisaillement dans les étoiles. Nous montrerons en particulier qu'il y a effectivement du transport et du cisaillement dans les zones radiatives des étoiles.

1.1 Abondances chimiques de surface

L'observation de spectres d'étoiles tels que ceux de la figure 1.1 mettent en évidence l'existence de raies d'absorption dans l'atmosphère des étoiles. La longueur d'onde correspondant à une

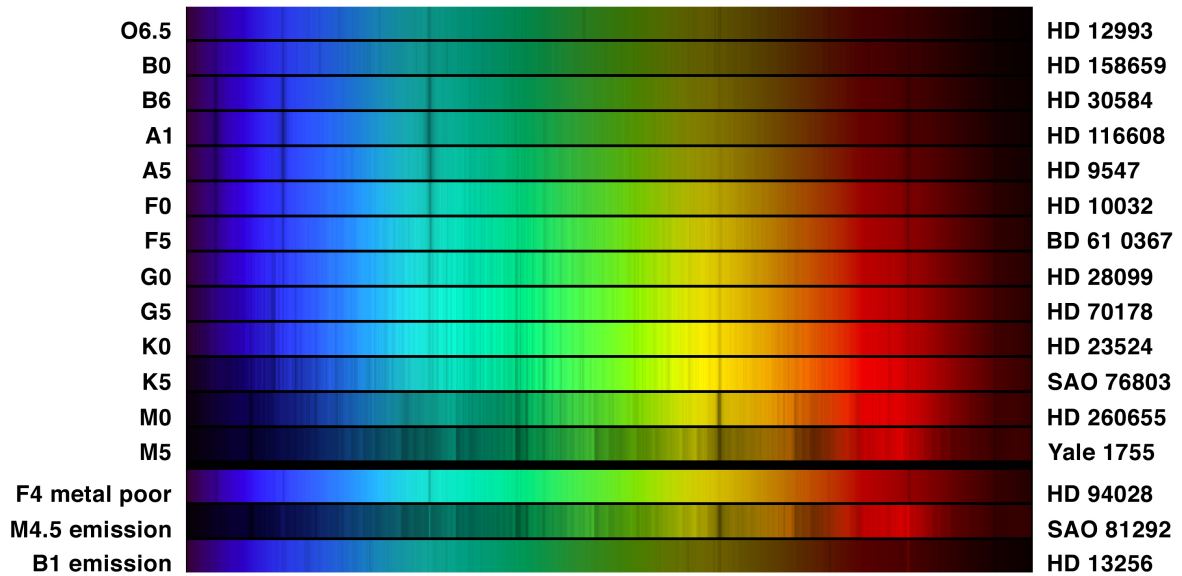


FIGURE 1.1 – Spectres d'étoiles de différents types spectraux montrant des raies d'absorption, fournis par l'observatoire américain NOAO

raie est caractéristique d'un élément (et parfois d'un état d'ionisation) tandis que l'intensité de l'absorption (la profondeur de la raie) peut être reliée à la concentration de l'élément en question dans l'atmosphère stellaire grâce à des modèles de transfert de rayonnement.

La comparaison des abondances d'une étoile avec celles d'étoiles « standards »¹ de même type

¹Par étoile standard, on entend une étoile respectant le modèle standard de l'évolution stellaire, c'est-à-dire une étoile sans rotation dont le seul mécanisme de mélange macroscopique est la convection. Pour une revue plus

spectral permet de déceler des anomalies chimiques — c’est-à-dire des sous- ou sur-abondances de certains éléments (généralement par rapport à l’hydrogène) à la surface de l’étoile observée. De telles anomalies dénotent donc un écart par rapport au modèle standard de l’évolution stellaire et sont par conséquent des indices privilégiés de l’existence de processus de redistribution, création ou destruction des éléments chimiques non pris en compte dans ce modèle standard.

Parmi ces anomalies, nous allons présenter deux catégories qui sont d’une importance considérable pour l’étude des mécanismes de transport dans les étoiles : les anomalies liées aux produits du cycle de réactions nucléaires CNO qui domine dans les étoiles massives (§ 1.1.1), et celles dues à la destruction des éléments légers dans les intérieurs stellaires, y compris ceux des étoiles froides (§ 1.1.2). Nous terminerons au § 1.1.3 par un aperçu des possibilités offertes par les grandes campagnes de mesure d’abondances à la surface d’étoiles de notre galaxie et de galaxies voisines.

1.1.1 Cycle CNO et mélange profond dans les étoiles massives

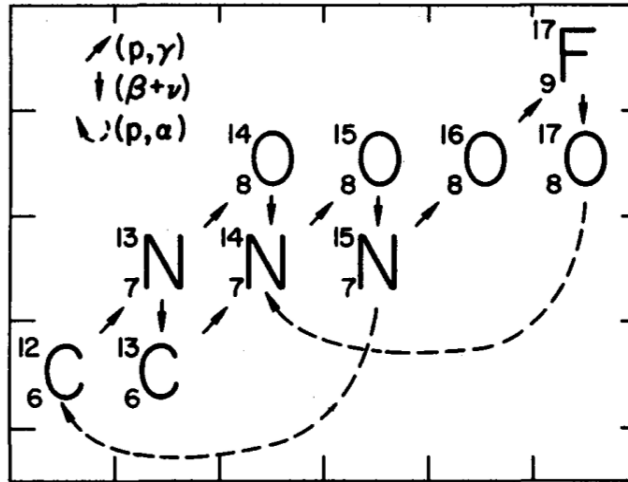
Mis à part les raies de l’hydrogène et de l’hélium, les raies des ions de carbone, d’azote et d’oxygène font partie des plus visibles du spectre des étoiles massives. Parmi les premières anomalies détectées par spectrophotométrie à la surface d’étoiles massives jeunes il n’est donc pas étonnant que figurent l’azote et le carbone (voir par exemple Walborn, 1970, 1976) ainsi que l’hélium (Norris, 1971; Nissen, 1976). Ces anomalies ne pouvaient être expliquées par la théorie de l’évolution stellaire de l’époque, qui négligeaient la possibilité de mélange dans les zones radiatives, même en considérant une éventuelle perte de masse (Chiosi & Maeder, 1986), c’est-à-dire l’expulsion continue par l’étoile d’une partie de ses couches superficielles mettant ainsi à nu des couches de composition chimique différente. Diverses hypothèses furent avancées pour tenter d’expliquer ces anomalies, les principales étant : des conditions particulières lors de la formation de ces étoiles, des effets de l’évolution dus au mélange, ou encore des échanges de matériaux entre compagnons d’un système binaire (Bolton & Rogers, 1978).

Certaines observations et analyses comme celle de Lyubimkov (1984, 1988) sur des étoiles B jeunes ont mis en évidence une évolution de ces anomalies — notamment d’azote et d’hélium — avec l’âge des étoiles observées, ce qui indiquait un processus agissant tout au long de la vie des étoiles. Le mélange des éléments chimiques entre le cœur de l’étoile et son atmosphère semblait donc être le candidat idéal. Dès lors, il a fallu proposer des modèles de mélange à intégrer aux modèles d’évolution afin de pouvoir expliquer quantitativement les abondances obtenues.

Dans les étoiles de la séquence principale, la fusion de l’hydrogène en hélium peut s’effectuer de plusieurs manières : soit en passant par un ensemble de réactions basées sur la catalyse à l’aide de noyaux de carbone, d’azote, d’oxygène et parfois de fluor appelé « cycle CNO » et représenté sur la figure 1.2 ; soit par des collisions directes entre noyaux d’hydrogène, ce que l’on appelle la « chaîne proton-proton ». La dépendance de l’efficacité des réactions du cycle CNO vis-à-vis de la température est beaucoup plus importante que celle des réactions de la chaîne proton-proton. Dans les étoiles massives, qui sont également les plus chaudes, c’est le cycle CNO qui domine.

Au cours de ce cycle, le nombre total de noyaux CNO servant à la catalyse est conservé, mais pour autant, les proportions relatives évoluent au cours de la vie de l’étoile. En particulier, l’azote-14 a tendance à devenir prédominant. La présence de mélange entre les couches internes riches en produits du cycle CNO et les couches externes d’une étoile massive se traduit par un

complète sur le modèle standard et les problèmes posés par les anomalies d’abondances, voir Pinsonneault (1997).

FIGURE 1.2 – Différents cycles CNO (Starrfield *et al.*, 1972)

enrichissement en ces mêmes éléments (hélium et azote) et un appauvrissement en carbone, la proportion d'oxygène restant relativement constante.

De telles anomalies ont effectivement été mesurées à la surface d'étoiles (Gies & Lambert, 1992; Herrero *et al.*, 1992, 1999; Venn, 1999; Lyubimkov *et al.*, 2000, 2004) et semblent indiquer la présence de mécanismes de mélange non standards. À l'extrême, Martins *et al.* (2009, 2013) ont récemment mis en évidence l'existence d'étoiles massives chimiquement homogènes, ce qui nécessite un mélange très efficace. Les anomalies apportent donc également des contraintes sur les modèles d'évolution stellaire et en particulier sur les modèles de mélange. Du fait que les réactions du cycle CNO ne sont efficaces que dans les étoiles chaudes, il est nécessaire de s'intéresser à d'autres éléments si l'on désire obtenir des contraintes similaires sur des étoiles plus froides.

1.1.2 Éléments légers comme indicateurs d'un mélange peu profond

Les noyaux de lithium, de béryllium et de bore présentent la propriété remarquable d'être très sensibles à la température du milieu. Au-delà d'une certaine température (autour de $2,4 \cdot 10^6$ K pour le lithium, $3,2 \cdot 10^6$ K pour le béryllium et $6 \cdot 10^6$ K pour le bore), ils sont en effet détruits par spallation, c'est-à-dire par collision avec un proton, en donnant des noyaux d'hélium. Plus on se rapproche du cœur de l'étoile, plus la température augmente et moins le milieu est riche en ces éléments. Une abondance inférieure à la normale (voir par exemple Wallerstein *et al.*, 1965) traduit donc l'existence d'un mécanisme de mélange entre la matière des couches externes et des couches plus internes où ces éléments sont détruits.

Un mélange peu profond n'aura pour effet qu'un appauvrissement (déplétion) continu de ces éléments en surface. À l'opposé, un mélange profond aura pour effet supplémentaire d'apporter des produits des réactions nucléaires se produisant dans le cœur, comme l'hélium et l'azote dans le cycle CNO. On observera alors à la fois un appauvrissement en éléments légers et un enrichissement en azote. La comparaison entre la déplétion en éléments légers et l'enrichissement

en azote d'étoiles massives permet donc de savoir si le mélange dans les étoiles considérées se produit en profondeur ou plutôt dans les couches externes (Fliegner *et al.*, 1996).

Du fait de la température de destruction du lithium et du béryllium, qui est particulièrement basse, ces deux éléments sont complètement détruits dans les étoiles les plus chaudes et donc les plus massives. En ce qui concerne le bore, diverses études dont (Venn *et al.*, 2002; Mendel *et al.*, 2006) ont été menées sur des étoiles massives. Ces études montrent entre autres l'existence d'étoiles appauvries en éléments légers sans être significativement enrichies en éléments plus lourds (dont l'azote), indiquant par là-même la présence de mélange peu profond.

Dans les étoiles de faible masse, les éléments chimiques sont mélangés efficacement par la convection dans l'enveloppe convective. Si cette zone convective s'étend suffisamment profondément à l'intérieur de l'étoile, le lithium est détruit, ce qui entraîne une déplétion progressive en cet élément, comme suggéré par Vauclair (1972). Comme le montre la figure 1.3, le lithium

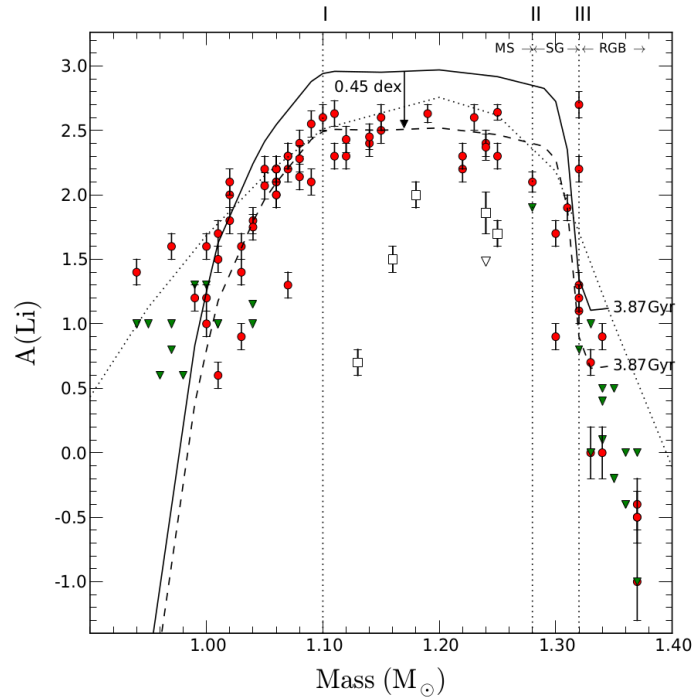


FIGURE 1.3 – Abondance de lithium dans les étoiles de l’amas M67 (Pace *et al.*, 2012). Les ronds rouges et les carrés vides correspondent à des abondances mesurées, tandis que les triangles verts correspondent à des bornes supérieures.

ne peut par conséquent être détecté que pour une étroite fourchette de masse (Balachandran, 1995).

Dans le cas du Soleil, l’abondance en lithium mesurée est incompatible avec le modèle standard dans lequel seule la convection est capable de transporter le lithium jusque dans une zone où il est détruit. Pour rendre compte de cette anomalie, plusieurs explications ont été avancées, notamment la diffusion moléculaire, la circulation méridienne et le transport de moment cinétique par ondes gravito-inertielles (Talon & Charbonnel, 2005).

1.1.3 Grandes campagnes de mesure d'abondances

Les progrès effectués dans le domaine de l'instrumentation spectroscopique, tant dans l'espace — avec les spectrographes (FOS et GHRS, puis STIS et NICMOS) embarqués sur le télescope Hubble de la NASA — qu'au sol — avec entre autres le spectrographe FLAMES installé sur le VLT de l'ESO — ont permis de mesurer de plus en plus précisément les abondances de nombreux éléments à la surface d'un nombre considérable d'étoiles. Le projet VLT-FLAMES décrit par [Evans *et al.* \(2005, 2006\)](#) a notamment pour but de déterminer de manière systématique les abondances des étoiles dans certains amas de la Voie Lactée et de galaxies voisines, telles que les Nuages de Magellan (voir par exemple [Hunter *et al.*, 2008, 2009](#)). Un tel échantillon d'étoiles offre la possibilité de distinguer différentes populations d'étoiles comme sur la figure 1.4.

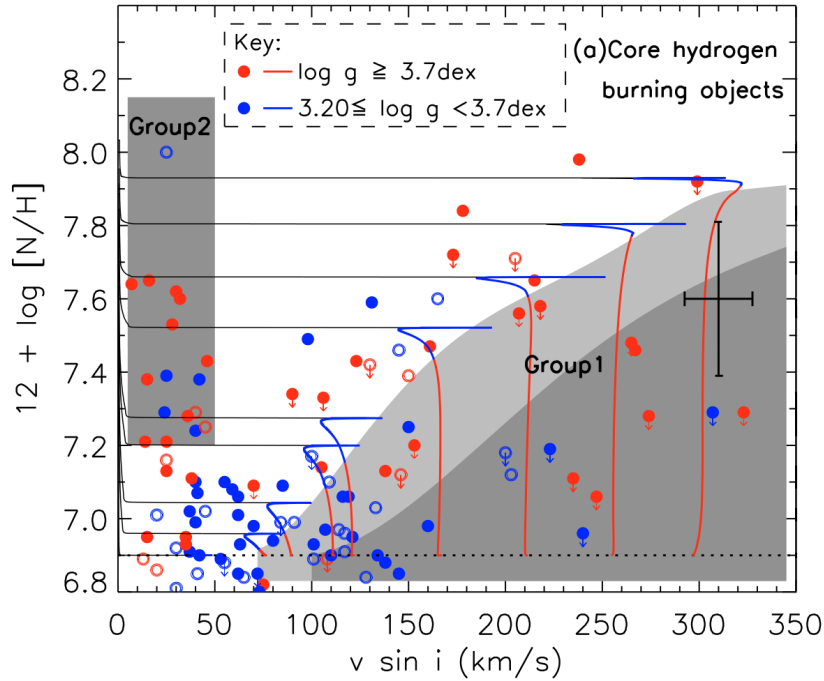


FIGURE 1.4 – Exemple de mesures d'abondance effectuées par l'instrument FLAMES ([Hunter *et al.*, 2009](#)). Le groupe 1 est constitué de rotateurs rapides anormalement peu enrichis en azote, tandis que le groupe 2 regroupe au contraire des rotateurs lents très enrichis.

Néanmoins, malgré ces progrès, la théorie de l'évolution stellaire reste sous-contrainte, en particulier au niveau de la structure interne et de la rotation des étoiles, qui conditionnent l'efficacité de la plupart des mécanismes de mélange pris en compte aujourd'hui dans les modèles. C'est tout l'intérêt de l'astérosismologie, qui permet de tester ces modèles en apportant des contraintes supplémentaires sur les mécanismes à l'œuvre dans les intérieurs stellaires, notamment le transport de moment cinétique et d'éléments chimiques.

1.2 Structure interne et astérosismologie

Depuis le XVI^e siècle, les astronomes observent des étoiles dites « pulsantes » dont la luminosité oscille de manière régulière. Avec le progrès des techniques d’observations, de plus en plus d’étoiles pulsantes ont été découvertes et étudiées. De la même manière que les fréquences des notes de musique émises par un instrument de musique dépendent de grandeurs physiques telles que la longueur et la masse linéique des cordes ou la forme et les dimensions de la caisse de résonance, les différentes fréquences d’oscillation d’une étoile dépendent de sa structure interne. L’observation et l’analyse de ces oscillations en terme de contraintes sur les propriétés physiques des intérieurs stellaires est l’objet de l’astérosismologie. Dans le cas particulier du Soleil, on parle d’héliosismologie.

Comme son nom l’indique, l’astérosismologie est basée sur le même principe que la sismologie terrestre et lunaire. Il existe toutefois quelques différences majeures. La première est qu’étant donné la chaleur intense qu’elles génèrent et l’absence de surface solide des étoiles, il est impossible de placer des stations sismiques dessus. On doit donc se contenter d’observer les variations de la lumière qu’elles émettent. La deuxième est le fait que les étoiles autres que le Soleil sont si lointaines que l’on ne résoud pas — ou très difficilement, par interférométrie — leur surface (elles sont vues comme des points).

Les pulsations peuvent être mesurées par plusieurs méthodes. D’une part, la surface des étoiles se déplace lors de telles oscillations, ce qui a pour effet de décaler leur spectre (en particulier les raies d’absorptions) alternativement vers le rouge et vers le bleu par effet Doppler. En mesurant ce décalage par spectroscopie, on en déduit la vitesse radiale de la surface de l’étoile. D’autre part, le déplacement de la surface se traduit par des variations de luminosité. En effet, si une étoile se dilate, la surface visible est plus importante et donc la luminosité également, ce que l’on peut mesurer. Dans les deux méthodes, le calcul du spectre des variations temporelles de la vitesse radiale ou de la luminosité permet de mettre en évidence les fréquences d’oscillation.

L’intérêt de l’astérosismologie par rapport aux autres types d’observations est double. D’une part, elle donne accès à de nouveaux paramètres globaux, apportant ainsi des contraintes supplémentaires sur les valeurs des paramètres fondamentaux des étoiles comme la masse, la métallicité et l’âge, en combinaison avec des données photométriques, spectroscopiques et astrométriques. Connaître ces paramètres avec précision permet en effet une comparaison fine des observations avec les modèles d’étoiles, en particulier ceux incluant la rotation. D’autre part, l’astérosismologie peut fournir des indications directes sur certaines propriétés internes des étoiles comme la distribution des éléments chimiques et le profil de rotation, deux informations essentielles pour contraindre le mélange des éléments chimiques induit par la rotation. Dans la suite, nous nous focaliserons sur cet aspect. Nous examinerons ainsi au § 1.2.1 comment la détermination du profil de vitesse du son à l’intérieur des étoiles permet de contraindre la distribution des éléments chimiques et par conséquent leur transport. Nous nous intéresserons ensuite au § 1.2.2 à la possibilité qu’offre l’astérosismologie d’estimer le profil de rotation interne.

1.2.1 Vitesse du son et distribution des éléments chimiques

Les modes propres d’oscillation des étoiles sont de différents types. On distingue les modes de pression (modes p) également appelés « modes acoustiques » qui sont des ondes sonores dont la force de rappel est la force de pression, et les modes de gravité (modes g) dont la force de rappel est la force d’Archimède (liée à la gravité). Dans les étoiles possédant une zone convective, les

modes g sont piégés dans la zone radiative et ne peuvent être détectés que lorsqu'ils interagissent avec des modes p de même degré visibles à la surface, comme décrit par [Aizenman *et al.* \(1977\)](#). Ce sont alors des modes mixtes. Selon leur fréquence, les modes peuvent se propager dans des zones différentes des étoiles. En comparant les fréquences de modes propres possédant des domaines de propagation différents, il est possible d'extraire des informations sur les propriétés physiques des milieux traversés. Dans le cas des modes p, cela nous renseigne essentiellement sur la vitesse du son c_s , reliée à la dérivée de la pression P du fluide par rapport à sa masse volumique ρ à entropie S constante :

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S. \quad (1.1)$$

Pour contraindre la structure interne des étoiles, il existe deux types de méthodes : les méthodes directes, qui consistent à faire correspondre les observations à un modèle donné en ajustant certains paramètres libres de celui-ci ; et les méthodes inverses — ou inversions — qui fournissent des informations sur les intérieurs stellaires à partir des données sans dépendre d'un modèle. En héliosismologie, les méthodes inverses ont notamment permis de calculer la vitesse du son et la pression à l'intérieur du Soleil (voir par exemple [Christensen-Dalsgaard *et al.*, 1985](#); [Vorontsov & Shibahashi, 1991](#); [Gough *et al.*, 1996](#); [Basu *et al.*, 1997](#)). Or, la vitesse du son dépend du poids moléculaire moyen ($\mu = \mathcal{M}/m_u$ où $\mathcal{M}$ désigne la masse molaire moyenne du fluide et m_u l'unité de masse atomique) qui est relié à la distribution des éléments chimiques à l'intérieur de l'étoile. Le profil de vitesse du son fournit donc des contraintes sur la distribution des éléments chimiques comme l'abondance d'hélium ([Däppen *et al.*, 1991](#); [Antia & Basu, 1994](#)). Cette distribution permet ensuite de contraindre les processus de mélange à l'œuvre dans les étoiles. Sur la figure 1.5 est représentée la différence relative de la vitesse du son au carré entre le profil tiré des données héliosismiques d'une part et des modèles solaires d'autre part. Elle

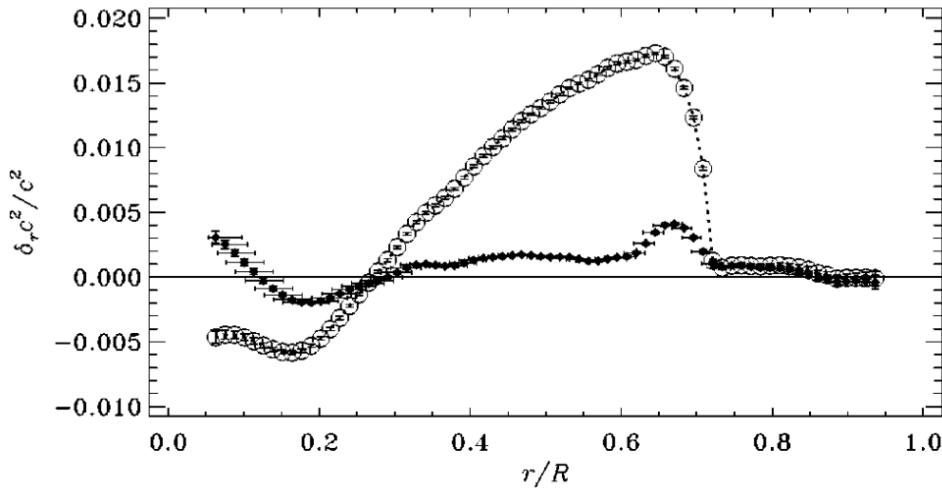


FIGURE 1.5 – Différence relative du carré de la vitesse du son à l'intérieur du Soleil entre les données héliosismiques et deux modèles solaires. Les cercles vides correspondent à un modèle ne prenant en compte ni la diffusion atomique ni la séparation gravitationnelle, contrairement au modèle décrit par les points noirs. D'après [Christensen-Dalsgaard \(2002\)](#).

montre que la prise en compte de certains mécanismes de transport permet aux modèles d'être en meilleur accord avec le profil héliosismique.

1.2.2 Rotation interne

L'étude théorique d'un modèle simple d'étoile sphérique sans rotation, effectuée notamment par [Pekeris \(1938\)](#) et [Cowling \(1941\)](#), a établi que la dépendance angulaire des modes propres est celle de fonctions appelées « harmoniques sphériques » caractérisées par deux entiers : leur « degré » ℓ et leur « ordre azimutal » m tels que $-\ell \leq m \leq \ell$. La dépendance radiale quant à elle est caractérisée par un entier positif correspondant au nombre de nœuds radiaux : « l'ordre radial » n . Une autre propriété importante des modes propres d'étoiles sans rotation est que leur fréquence, notée $\nu_{n\ell m}$, ne dépend pas de m ($\nu_{n\ell m} = \nu_{n\ell}$). Un des effets remarquables de la rotation sur les fréquences d'oscillation des étoiles est de lever la dégénérescence des modes de n et ℓ identiques mais de m différents. On définit alors un « *splitting* rotationnel » comme la différence de fréquence entre le mode de m considéré et le mode axisymétrique ($m = 0$) correspondant :

$$\Delta\nu_{n\ell m} = \nu_{n\ell m} - \nu_{n\ell 0}. \quad (1.2)$$

Cette levée de dégénérescence a été prédite de manière théorique dans un premier temps dans le cas d'une rotation uniforme par [Cowling & Newing \(1949\)](#) et [Ledoux & Walraven \(1958\)](#), puis en présence de rotation différentielle ([Hansen *et al.*, 1977](#); [Gough, 1981](#); [Christensen-Dalsgaard & Berthomieu, 1991](#)).

Au premier ordre (c'est-à-dire pour des vitesses de rotation suffisamment faibles ; voir par exemple [Dziembowski & Goode 1992](#) pour l'ordre deux), les *splittings* rotationnels dépendent linéairement du profil de rotation de l'étoile, ce qui peut se mettre sous la forme générale

$$\Delta\nu_{n\ell m} = \int_0^R \int_0^\pi K_{n\ell m}(r, \theta) \Omega(r, \theta) r \, d\theta \, dr, \quad (1.3)$$

en notant respectivement r et θ les coordonnées radiale et orthoradiale, $\Omega(r, \theta)$ la vitesse angulaire de rotation et $K_{n\ell m}(r, \theta)$ le « noyau rotationnel » indiquant pour chaque mode (n, ℓ, m), à quel point la rotation dans une zone donnée de l'étoile influe sur la fréquence du mode. Les différents noyaux peuvent être calculés à partir d'un modèle d'étoile sans rotation ([Schou *et al.*, 1994](#)). Connaissant le profil de rotation, on peut donc en déduire les *splittings* rotationnels. Pour déterminer le profil de rotation à partir des modes observés, il est nécessaire de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire trouver les fonctions $f_{n\ell m}(r, \theta)$ telles que

$$\Omega(r, \theta) = \sum_{n, \ell, m} f_{n\ell m}(r, \theta) \Delta\nu_{n\ell m}. \quad (1.4)$$

Différentes méthodes d'inversion appliquées à la rotation existent, aussi bien en 1D ([Christensen-Dalsgaard *et al.*, 1990](#)) qu'en 2D ([Schou *et al.*, 1994](#)).

La première étoile dont le profil de rotation a été déterminé de cette manière est le Soleil ([Duvall *et al.*, 1984](#); [Christensen-Dalsgaard & Schou, 1988](#); [Brown *et al.*, 1989](#); [Dziembowski *et al.*, 1989](#); [Thompson *et al.*, 1996](#); [Schou *et al.*, 1998](#)), jusqu'à une certaine distance du cœur ([Tomczyk *et al.*, 1995](#); [Charbonneau *et al.*, 1998](#); [Chaplin *et al.*, 1999](#)). La figure 1.6 présente le résultat de telles inversions. Par la suite, des méthodes similaires ont pu être appliquées à d'autres étoiles pour lesquelles les modes p ne se propagent pas suffisamment profondément

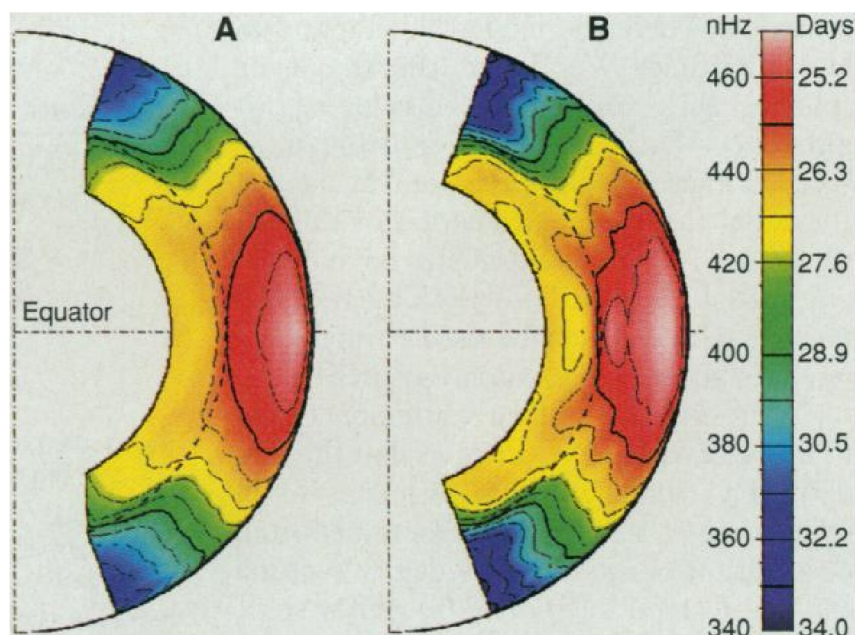


FIGURE 1.6 – Profils de rotation dans le Soleil obtenus par deux méthodes d’inversions différentes. Les couleurs représentent la fréquence de rotation (voir l’échelle à droite). La ligne pointillée correspond à la limite de la zone convective. Tiré de [Thompson *et al.* \(1996\)](#).

pour permettre de contraindre le profil de rotation. Cela a été fait notamment pour des naines blanches à l’aide de modes g ([Kawaler *et al.*, 1999](#)) ainsi que pour des sous-géantes² et géantes présentant des modes mixtes ([Deheuvels *et al.*, 2012](#), voir figure 1.7).

Que l’on considère le Soleil ou les sous-géantes, on peut voir sur les figures 1.6 et 1.7 qu’il existe des gradients de vitesse de rotation dans les étoiles. En créant du cisaillement, ces gradients sont susceptibles de générer du mélange et donc de redistribuer les éléments chimiques. Grâce aux informations inédites apportées par l’astérosismologie sur la répartition des éléments chimiques et sur la rotation à l’intérieur des étoiles, il devient possible de contraindre à la fois les causes du mélange, comme la rotation, et ses effets, comme la distribution interne des éléments chimiques, à comparer avec les abondances de surfaces observées par spectroscopie. Ce travail est en cours, notamment pour les géantes rouges observées par CoRoT et surtout Kepler. Les modèles de transport inclus dans les codes d’évolution stellaire, dont il sera question dans le chapitre suivant, vont par conséquent pouvoir être testés avec précision. Il reste à pouvoir généraliser ces techniques, aujourd’hui essentiellement applicables aux étoiles présentant des oscillations de type solaire et en particulier aux géantes rouges, à un nombre plus important d’étoiles.

²Les sous-géantes sont des étoiles qui ont quitté la séquence principale et qui sont en cours de migration vers la branche des géantes. La fusion de l’hydrogène a donc cessé dans leur cœur et la contraction du noyau a permis la fusion de l’hydrogène dans les couches autour du cœur. En revanche, leurs couches externes ne sont pas encore aussi dilatées et refroidies que celles des géantes.

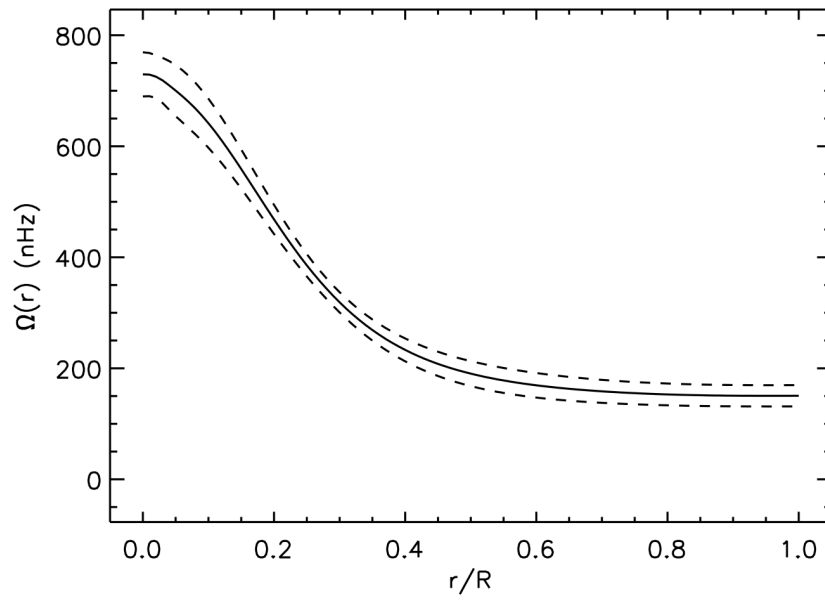


FIGURE 1.7 – Profil de rotation de l'étoile sous-géante KIC 7341231 en fonction du rayon (Deheuvels *et al.*, 2012). Les lignes pointillées représentent les erreurs à 1σ .

2

Modélisation du transport induit par la rotation dans les codes d'évolution stellaire

« Ce qui est simple est toujours faux. Ce qui ne l'est pas est inutilisable. »

Paul VALÉRY, *Mauvaises pensées et autres*, 1942.

Sommaire

2.1	Modèles 1D vs. 2D	21
2.1.1	Modèles 1D	21
2.1.2	Modèles 2D	24
2.2	Instabilités hydrodynamiques liées à la rotation	24
2.2.1	Instabilités baroclines	25
2.2.2	Instabilités centrifuge et de cisaillement	26
2.3	Comparaison entre les modèles et les observations	27
2.3.1	Étoiles massives	28
2.3.2	Étoiles froides	29
2.3.3	Astérosismologie des géantes rouges	30

En modifiant en permanence la composition chimique des intérieurs stellaires et en les chauffant grâce à l'énergie libérée, les réactions nucléaires qui se produisent à l'intérieur des étoiles constituent le moteur principal de l'évolution stellaire. Il y a cependant bien d'autres processus à l'œuvre qu'il convient de prendre en compte, notamment les processus de transport macroscopiques engendrés par la rotation ou la convection turbulente. La difficulté principale réside dans le fait que les échelles temporelles et spatiales de ces processus de transport sont beaucoup plus petites que celles de l'évolution stellaire, ce qui nous empêche de résoudre le problème complet. L'approximation couramment utilisée dans les modèles d'évolution stellaire est de supposer qu'à chaque pas de temps l'étoile est dans un état quasi-stationnaire donné par la résolution des équations de structure stellaire. Pour l'avancement en temps, on fait alors évoluer la composition chimique en tenant compte des réactions nucléaires et de l'effet à long terme des processus de mélange.

Dans le modèle standard de l'évolution stellaire, le seul processus de mélange macroscopique pris en compte est la convection turbulente. Devant l'incapacité du modèle standard à expliquer

certaines observations, il est naturel de chercher de nouveaux ingrédients physiques susceptibles de jouer un rôle dans l'évolution des étoiles en apportant des sources de mélange supplémentaires ou en modulant des sources déjà existantes. Dans ce chapitre, nous allons considérer les modèles décrivant le transport engendré par la rotation de l'étoile. Ces modèles sont en effet à l'origine de notre étude puisqu'ils ont identifié le transport turbulent provoqué par les instabilités de cisaillement local elles-mêmes entretenues par la rotation différentielle comme l'un des principaux processus de transport induits par la rotation.

Dans une étoile en rotation, la force centrifuge est nulle aux pôles et maximale à l'équateur. Comme elle est de signe opposée à la gravité, cela a pour effet de diminuer la gravité effective (qui regroupe la gravité et la force centrifuge) et donc la pression et la température à l'équateur par rapport aux pôles. La conséquence, connue comme le « paradoxe de von Zeipel » ([von Zeipel, 1924](#)), est qu'une étoile en rotation uniforme ne peut être à la fois en équilibre hydrostatique et en équilibre radiatif.

Pour éliminer ce paradoxe, [Eddington \(1925\)](#) et [Vogt \(1925\)](#) ont été les premiers à supposer l'existence de courants macroscopiques de matière tels que ceux représentés sur la figure 2.1 dans les étoiles afin de rétablir un équilibre stationnaire. Ces mouvements axisymétriques se produisant dans un plan méridien, ils sont appelés « courants méridiens » ou « circulation méridienne ». Le formalisme communément utilisé pour décrire ces mouvements, développé notamment par

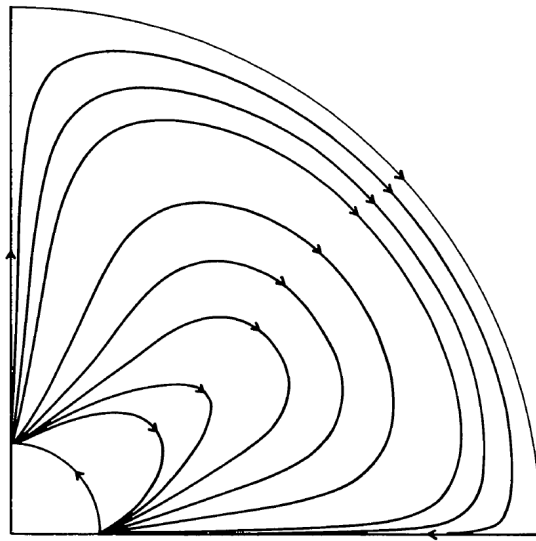


FIGURE 2.1 – Schéma de la circulation méridienne dans une étoile en rotation ([Tassoul & Tassoul, 1982](#)). Le fluide plus chaud au pôle se déplace vers l'équateur où il se refroidit.

[Sweet \(1950\)](#) et [Mestel \(1953\)](#), est basé sur le calcul du champ de vitesse nécessaire pour compenser le déséquilibre thermique. Mais ces solutions sont incomplètes parce qu'elles n'assurent pas la conservation du moment cinétique. [Busse \(1981, 1982\)](#) a montré qu'en l'absence de viscosité, une circulation méridienne ne pouvait apparaître qu'en régime transitoire, l'état final étant un écoulement en rotation différentielle sans circulation méridienne tel que ceux découverts par [Schwarzschild \(1947\)](#) et [Roxburgh \(1964\)](#). Dans un modèle axisymétrique, une circulation méridienne persistente ne peut donc exister que grâce à la viscosité, l'advection de moment cinétique

par la circulation méridienne étant alors compensée exactement par les contraintes visqueuses engendrée par la rotation différentielle (Randers, 1941).

En pratique, on s'attend à ce que les mouvements turbulents induits par diverses instabilités et tridimensionnels par nature dominent l'effet de la viscosité et compensent l'advection du moment cinétique (voir par exemple Tassoul & Tassoul, 1982). Ces mouvements turbulents sont susceptibles de transporter également des éléments chimiques et de contribuer ainsi au mélange dans les zones radiatives, où le transport convectif est absent. Les instabilités qui en sont à l'origine étant nourries par la circulation méridienne et la rotation différentielle, il est primordial de connaître les caractéristiques de ces dernières si l'on veut estimer l'importance du mélange lié à ces instabilités.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au § 2.1 aux techniques utilisées pour intégrer les effets de la circulation méridienne et de la rotation différentielle dans les modèles 1D et 2D. Dans un second temps, nous examinerons au § 2.2 les différentes instabilités hydrodynamiques engendrées par la rotation différentielle et la circulation méridienne et capables de générer du transport par la turbulence dans les zones radiatives. Enfin, nous expliquerons au § 2.3 dans quelle mesure les modèles d'évolution stellaire actuels permettent de rendre compte des données observationnelles disponibles.

2.1 Modèles 1D vs. 2D

Historiquement, les premiers modèles d'évolution stellaire étaient des modèles unidimensionnels à symétrie sphérique sans rotation. Dans le cas d'étoiles en rotation, le problème à résoudre est bidimensionnel (en supposant qu'il reste axisymétrique). Néanmoins, les modèles 1D continuent à être largement utilisés, principalement du fait de leur simplicité relative et de leur faible coût en temps de calcul, généralement au prix d'un certain degré d'approximation.

2.1.1 Modèles 1D

Dans le cas sans rotation, tous les paramètres physiques (pression, densité, température, *etc.*) peuvent être exprimés en fonction du potentiel gravitationnel du fait de la symétrie sphérique. De la même manière, si le profil de rotation est tel que la force centrifuge dérive d'un potentiel (rotation cylindrique), les paramètres physiques peuvent également être exprimés en fonction d'un potentiel qui est la somme des potentiels gravitationnel et centrifuge. Comme montré par Kippenhahn & Thomas (1970) (voir aussi Endal & Sofia, 1976), le problème à résoudre est alors de nouveau unidimensionnel, pour peu que l'on prenne en compte le fait que les équipotentiels ne sont plus sphériques.

Cependant, il s'agit là d'un type de rotation bien particulier qui n'a aucune raison particulière de correspondre à la réalité. Il existe d'autres lois de rotation plus générales pour lesquelles on peut encore se ramener à la résolution d'un problème 1D : la rotation « coquillaire » (*shellular* en anglais), telle que la vitesse de rotation est constante sur les isobares (Zahn, 1992). À cause de la stratification stable présente dans les zones radiatives stellaires, on s'attend à ce que le transport turbulent soit plus efficace dans la direction horizontale que dans la direction verticale, ce qui a pour effet d'homogénéiser la vitesse de rotation horizontalement. Cet argument est à la base du modèle de transport du moment cinétique proposé par Zahn (1992). Contrairement au cas de la rotation cylindrique, les grandeurs physiques autres que la pression ne sont pas nécessairement constantes le long des isobares. Dans le modèle, on considère donc les grandeurs

moyennées sur les isobares (Meynet & Maeder, 1997), les écarts à la moyenne étant supposés être de faible amplitude.

Circulation méridienne La circulation méridienne est un phénomène fondamentalement advectif. Étant donné qu'elle n'est constante ni sur les équipotentielles ni sur les isobares, elle doit être modélisée pour être intégrée dans des modèles 1D. Pour prendre en compte à la fois le caractère advectif de la circulation méridienne et le caractère diffusif des processus de mélange associés (en particulier la turbulence horizontale ; voir Chaboyer & Zahn, 1992), Zahn (1992) a proposé dans le cadre de la rotation coquillaire un formalisme basé sur la linéarisation des équations de structure 2D le long des isobares, ce qui permet d'exprimer la vitesse de la circulation méridienne en prenant en compte les effets de la baroclinicité. Il généralise ainsi le travail effectué notamment par Baker & Kippenhahn (1959) pour une loi barotrope. Une fois obtenue la composante radiale U de la vitesse de circulation, le transport de moment cinétique est donné par une équation d'advection par la circulation méridienne et de diffusion par la turbulence qui s'écrit en coordonnées sphériques (si l'on néglige la déformation centrifuge)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 \Omega) = \frac{1}{5r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^4 \Omega U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \nu_t r^4 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right), \quad (2.1)$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide stellaire, Ω la vitesse angulaire de rotation de l'étoile et ν_t la viscosité turbulente. Le transport des éléments chimiques est quant à lui décrit par une équation de diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D_t r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad (2.2)$$

où c désigne la fraction massique de l'élément considéré et D_t le coefficient de diffusion turbulente, qui se décompose en un terme D_v dû à la turbulence verticale et un terme D_{eff} résultant de l'interaction entre la circulation méridienne et la turbulence horizontale (décrite par un coefficient de diffusion D_h) donné par la formule

$$D_{\text{eff}} = \frac{|rU|^2}{30D_h}. \quad (2.3)$$

Cette approche a été généralisée par la suite par Maeder & Zahn (1998) puis Mathis & Zahn (2004) en présence d'un gradient de poids moléculaire et dans le cas non-stationnaire ainsi que par Vauclair & Théado (2003) en prenant en compte la séparation gravitationnelle des éléments chimiques. Ce formalisme est couramment utilisé dans des codes d'évolution stellaire (voir par exemple Meynet & Maeder, 1997, 2000; Denissenkov *et al.*, 1999; Palacios *et al.*, 2003, 2006; Eggenberger *et al.*, 2008; Marques *et al.*, 2013). Un des points faibles de ce type de modèle est qu'il dépend de la valeur du coefficient de diffusion horizontale D_h , qui est assez mal connue et pour laquelle différentes prescriptions existent (Zahn, 1992; Maeder, 2003; Mathis *et al.*, 2004).

Il existe d'autres modèles de type coquillaire dans lesquels l'équation du moment cinétique est purement diffusive. L'advection du moment cinétique est donc traitée comme un phénomène diffusif dont le coefficient de diffusion s'ajoute à celui de chacune des instabilités prises en considération. C'est la méthode proposée par Endal & Sofia (1978), également adoptée par Pinsonneault *et al.* (1989) et Heger *et al.* (2000). Cette méthode possède l'avantage d'être simple. En revanche, le coefficient de diffusion associé à la circulation méridienne est fixé de manière plus ou moins arbitraire.

Effets du champ magnétique sur la rotation Le modèle de Zahn (1992), que nous venons de présenter et qui a pour conséquence l'existence de cisaillement ayant un effet considérable sur le transport, ne tient pas compte des champs magnétiques. Or, dans les intérieurs stellaires, les températures extrêmes font que la matière se trouve sous forme de plasma, c'est-à-dire que les électrons sont séparés des noyaux des atomes. Cela a pour conséquence que le fluide stellaire est conducteur d'électricité. Les mouvements de matière, en particulier ceux dûs à la rotation ou à la convection, peuvent donc conduire à l'apparition de courants électriques dans le plasma. Par induction, ces courants vont alors créer un champ magnétique à l'intérieur de l'étoile. En pratique, les modèles qui décrivent la présence de champs magnétiques dans les zones radiatives sont incertains, qu'il s'agisse de champs fossiles ou de champs générés par un mécanisme de dynamo comme celui de Tayler-Spruit (Spruit, 2002). De plus, il n'y a pas de preuve directe de la présence d'un champ magnétique dans les intérieurs radiatifs des étoiles de type solaire et on ne détecte des champs que dans une petite proportion (5 à 10 %) des étoiles chaudes à enveloppe radiative (il s'agit des Ap/Bp). La présence de champs très faibles (inférieurs à 1 G) à la surface de Véga et de Sirius laisse toutefois à penser que toutes les étoiles de masse intermédiaire pourraient posséder un champ de cet ordre de grandeur.

Si des champs magnétiques sont présents dans les zones radiatives, ils peuvent avoir un effet important sur le transport de moment cinétique et donc la présence de gradients de vitesse susceptibles de contribuer au mélange des éléments chimiques. En effet, il est connu depuis longtemps que l'action d'un champ magnétique méridien dans les intérieurs stellaires tend à redistribuer le moment cinétique de manière à les stabiliser dans un état de rotation quasi-uniforme (voir par exemple Ferraro, 1937; Mestel, 1953). Cela semble cohérent avec ce que l'on observe à la surface des étoiles à champ fort Ap/Bp (Braithwaite & Spruit, 2004), mais pas avec les profils de rotation de la tachocline¹ solaire et des géantes rouges obtenus grâce à l'hélio- et l'astérosismologie (voir le § 1.2.2). Un autre effet du champ magnétique est de faire perdre en permanence du moment cinétique aux étoiles par différents processus comme les vents magnétiques (Kawaler *et al.*, 1999; Woosley & Heger, 2004). Un tel freinage permet d'obtenir des modèles d'étoiles dont le cœur tourne beaucoup moins vite que sans champ magnétique et qui présentent donc un cisaillement beaucoup moins important, diminuant ainsi l'efficacité du mélange profond et les abondances de surfaces en azote et en hélium qui en découlent, notamment.

D'un autre côté, les champs magnétiques stellaires sont sujets à diverses instabilités (passées en revue par Spruit, 1999) qui sont susceptibles de détruire la structure du champ à grande échelle et de limiter ses effets sur le transport. Parmi ces instabilités magnétiques figure notamment l'instabilité magnéto-rotationnelle, ou MRI (voir par exemple Balbus & Hawley, 1994, pour une application dans les zones radiatives stellaires), qui se produit lorsque la vitesse de rotation décroît avec la distance à l'axe et que le moment cinétique, lui, augmente. L'instabilité de flottabilité magnétique (Parker, 1955), qui joue un rôle important dans la dynamo de la zone convective des étoiles de type solaire, apparaît en présence d'un gradient radial de champ magnétique. Enfin, Tayler (1973) a montré qu'un champ purement toroïdal dans une étoile sans rotation était instable quelle que soit son amplitude, résultat étendu par la suite au cas avec rotation (Pitts & Tayler, 1985). D'après Spruit (1999), c'est cette instabilité, qu'il nomme « instabilité de Tayler », qui est la plus efficace dans les zones radiatives d'étoiles.

¹Dans les étoiles de type solaire, c'est-à-dire possédant une zone radiative interne en rotation quasi-uniforme et une enveloppe convective en rotation différentielle, l'interface entre ces deux zones, appelée « tachocline » (Spiegel & Zahn, 1992), est caractérisée par un cisaillement important.

Maeder & Meynet (2005) proposent un autre mécanisme résultant de l'interaction entre le champ magnétique et la circulation méridienne, qui permettrait d'atténuer l'effet inhibiteur du champ magnétique sur le mélange rotationnel. L'idée en est que la rotation quasi-uniforme imposée par le champ amplifié par la dynamo aurait pour effet d'augmenter le déséquilibre thermique entre les pôles et l'équateur et ainsi de renforcer de manière importante la circulation méridienne. Celle-ci serait alors en mesure d'advecter suffisamment de moment cinétique pour régénérer la rotation différentielle à l'origine de la création du champ magnétique. Lors de l'évolution d'une étoile, la valeur de la rotation différentielle serait donc le résultat de l'équilibre entre le couplage magnétique et le forçage par la circulation méridienne.

Hormis dans le cas des étoiles à champ fort Ap/Bp, de tels modèles ainsi que les observations prédisent toujours l'existence de gradients de vitesse, même si ces derniers sont plus faibles qu'en l'absence de champ magnétique. Par conséquent, le mélange lié à l'instabilité de cisaillement joue toujours un rôle important.

2.1.2 Modèles 2D

La particularité des modèles 1D de circulation méridienne est qu'ils dépendent d'hypothèses sur le type de loi de rotation choisi. Si l'on veut se passer de telles hypothèses, il est nécessaire d'utiliser un modèle bidimensionnel d'étoile donnant à la fois la rotation différentielle (*a priori* ni cylindrique ni coquillaire) et la circulation méridienne. De tels modèles de structure existent depuis une vingtaine d'années (Deupree, 1990, par exemple). En revanche, en raison de la plus grande complexité des codes et surtout du fait qu'ils sont pour la plupart encore incapables de déterminer l'évolution temporelle des étoiles, ils sont encore relativement peu utilisés.

En résolvant les équations de structure en deux dimensions, ces codes peuvent apporter un éclairage intéressant sur la validité de certaines hypothèses communément utilisées par les codes 1D, comme celle de la rotation coquillaire (Espinosa Lara & Rieutord, 2013). La figure 2.2 montre par exemple un modèle d'étoile en rotation rapide qui n'est clairement pas coquillaire. Ils permettent également de modéliser des étoiles en rotation rapide, donc très déformées, pour lesquelles les approximations des modèles 1D sont le plus discutables. En particulier, le calcul de la dépendance des grandeurs physique comme la température et la gravité effectives vis-à-vis de la colatitude permet de réviser la loi de von Zeipel $T_{\text{eff}} \propto g_{\text{eff}}^{1/4}$ (voir Lovekin *et al.*, 2006; Espinosa Lara & Rieutord, 2011). De telles prédictions peuvent ensuite être vérifiées par l'observations d'étoiles en rotation rapide grâce à l'interférométrie, notamment par Monnier *et al.* (2007).

Avec le progrès des moyens de calcul, les modèles 2D sont de plus en plus accessibles et incluent de plus en plus d'ingrédients physiques en compte, comme le champ magnétique (Li *et al.*, 2006, par exemple). À terme, ils constituent vraisemblablement l'avenir de la théorie de l'évolution stellaire en s'affranchissant de certaines hypothèses des modèles 1D. Cependant, au vu de la différence considérable de complexité entre les modèles 1D et 2D, les deux approches resteront probablement encore longtemps complémentaires l'une de l'autre.

2.2 Instabilités hydrodynamiques liées à la rotation

La circulation méridienne et la rotation différentielle donnent naissance à diverses instabilités hydrodynamiques qui à leur tour vont pouvoir générer de la turbulence. D'une part, cette turbulence peut contribuer au mélange des éléments chimiques. D'autre part, la viscosité turbulente ainsi induite est susceptible de modifier le profil de rotation et de circulation méridienne à l'état

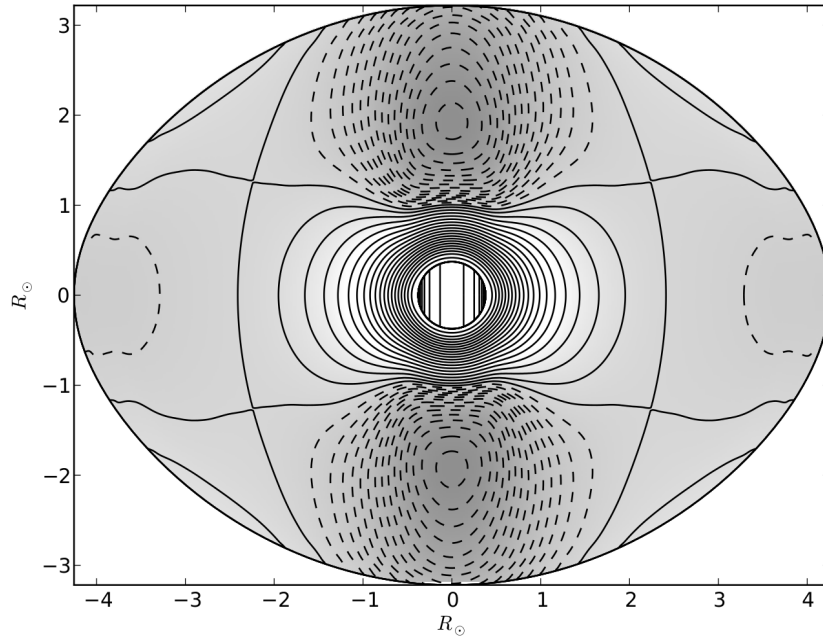


FIGURE 2.2 – Exemple de loi de rotation calculée par le modèle ESTER (Espinosa Lara & Rieutord, 2013). Les zones foncées et les iso-contours en pointillés indiquent des vitesses de rotation plus faibles tandis que les zones claires et les iso-contours en traits pleins indiquent des vitesses de rotation plus élevées. On voit que la vitesse de rotation dépend de la latitude, notamment à la surface.

stationnaire. Nous distinguerons les instabilités baroclines, qui seront brièvement présentées au § 2.2.1, et les instabilités liées à des différences de vitesse (angulaire ou linéaire) comme l'instabilité centrifuge et celle de cisaillement (§ 2.2.2).

2.2.1 Instabilités baroclines

Par définition, ce type d'instabilités apparaît quand l'étoile se trouve dans des conditions baroclines, c'est-à-dire quand la gravité effective n'est pas constante sur les surfaces isobares. La stabilité d'un écoulement en rotation vis-à-vis de ces instabilités est donnée par le critère de Solberg-Høiland (voir par exemple Wasiutynski, 1946). De telles instabilités se retrouvent aussi bien en géophysique (Tritton & Davies, 1985) qu'en physique des disques d'accrétion (Klahr & Bodenheimer, 2003; Lesur & Papaloizou, 2010).

Parmi ces instabilités, la première à avoir été étudiée dans le contexte de l'évolution stellaire est l'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke (notée GSF) (Goldreich & Schubert, 1967; Fricke, 1968). En l'absence de viscosité et de diffusion thermique, cette instabilité apparaît lorsque la vitesse de rotation d'une étoile dépend de la coordonnée parallèle à l'axe de rotation z , c'est-à-dire quand

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} \neq 0. \quad (2.4)$$

Elle tend alors à ramener l'étoile dans un état de rotation tel que la force centrifuge dérive d'un

potentiel, ce qui correspond à une rotation à symétrie cylindrique du type

$$\Omega = \Omega(s), \quad (2.5)$$

où s désigne la distance à l'axe de rotation. En cela, elle s'oppose à l'advection de moment cinétique par la circulation méridienne (Osaki, 1972), influençant ainsi le profil de rotation à l'équilibre.

Dans les zones des étoiles stratifiées de manière stable, Knobloch & Spruit (1982) ont suggéré que les instabilités baroclines pouvaient être inhibées efficacement par la poussée d'Archimède, même en présence d'une forte turbulence horizontale. Par conséquent, l'effet de l'instabilité GSF est généralement considéré comme négligeable pour les étoiles de la séquence principale et donc rarement prise en compte dans les modèles d'évolution stellaire. En revanche, elle pourrait jouer un rôle dans l'évolution d'étoiles plus évoluées (Heger *et al.*, 2000). Plus récemment, Hirschi & Maeder (2010) ont montré que dans les derniers stades d'évolution, en présence de l'instabilité centrifuge (*cf.* § 2.2.2), l'instabilité GSF pouvait exister malgré la stratification et transporter le moment cinétique ainsi que les éléments chimiques de manière efficace dans certaines zones des étoiles. Cependant, en raison de la petitesse de ces zones et de la courte durée où cela pourrait se produire, d'après les auteurs, l'effet final de l'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke sur l'évolution des étoiles reste négligeable.

2.2.2 Instabilités centrifuge et de cisaillement

L'instabilité centrifuge (liée à l'instabilité de Taylor-Couette) est un cas particulier de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Cette dernière se produit à l'interface de deux fluides dont le plus dense est situé au-dessus tandis que l'instabilité centrifuge se déclenche à densité égale lorsque le fluide supérieur possède une gravité effective plus importante du fait d'une différence de vitesse de rotation. L'instabilité est alors déterminée par le critère de Rayleigh

$$\frac{d(s^2\Omega)}{ds} < 0, \quad (2.6)$$

qui montre que cette instabilité se déclenche quand le moment cinétique $s^2\Omega$ décroît avec la distance à l'axe de rotation.

L'instabilité de cisaillement (Chandrasekhar, 1961) est quant à elle souvent invoquée comme principale source de transport turbulent dans les zones radiatives stellaires (Knobloch & Spruit, 1982; Zahn, 1992, par exemple). En l'absence d'effets diffusifs, l'analyse linéaire de l'évolution des petites perturbations montre qu'une condition nécessaire d'instabilité est que le cisaillement de vitesse soit suffisamment important pour contrecarrer la stratification stable, selon le critère de Richardson

$$Ri < 1/4, \quad (2.7)$$

où Ri est le nombre de Richardson défini par

$$Ri = \frac{N^2}{S^2}, \quad (2.8)$$

en notant $S = dU/dz$ le taux de cisaillement. Or, dans les zones radiatives stellaires, le nombre de Richardson est en général élevé. En effet, on a

$$S = r \frac{d\Omega}{dr}, \quad (2.9)$$

avec à l'échelle stellaire $r \sim R$ et $d\Omega/dr \sim \Omega/R$, en notant R le rayon de l'étoile. On en déduit une estimation grossière du nombre de Richardson :

$$Ri \sim \frac{N^2}{\Omega^2}, \quad (2.10)$$

qui est généralement très grande devant 1. Si l'on s'en tenait là, les intérieurs stellaires seraient le plus souvent stables vis-à-vis de l'instabilité de cisaillement.

Il se trouve que la très forte diffusivité thermique d'origine radiative réduit significativement l'effet stabilisateur de la stratification d'entropie (Spiegel & Zahn, 1970). En effet, la diffusion thermique lisse les fluctuations de température et donc de densité, diminuant ainsi l'amplitude de la force d'Archimède qui joue le rôle de force de rappel. Une plus faible rotation différentielle est alors à même de déclencher cette instabilité. On parle parfois de l'instabilité de cisaillement « séculaire », par opposition au cas sans pertes radiatives, où l'instabilité est qualifiée de « dynamique ». Le coefficient de transport radial correspondant à cette instabilité a été estimé par Zahn (1992) en supposant que l'écoulement reste marginalement stable vis-à-vis de l'instabilité. Depuis, de nombreuses variantes ont été développées afin de prendre en compte divers ingrédients comme la stratification en poids moléculaire (Maeder, 1995; Talon & Zahn, 1997), l'interaction avec la semi-convection (Maeder & Meynet, 1996; Maeder, 1997) ainsi que la diffusion horizontale liée au transport turbulent horizontal (Talon & Zahn, 1997; Maeder, 2003; Mathis *et al.*, 2004). Certaines configurations de champ magnétique pourraient également avoir un effet déstabilisateur sur l'écoulement, comme le suggère l'étude linéaire de stabilité de LeCoanet *et al.* (2010). Les mouvements turbulents radiaux seraient ainsi favorisés, augmentant le mélange engendré par l'instabilité de cisaillement. C'est sur cette instabilité, et plus précisément sur le test des coefficients de transport associés qu'a porté mon travail de thèse qui sera présenté dans la partie III.

Pour une revue plus complète sur les différentes instabilités jouant un rôle dans les étoiles, voir par exemple Knobloch & Spruit (1982) ou Heger *et al.* (2000). Récemment, Maeder *et al.* (2013) semblent indiquer que ces différentes instabilités ne devraient pas être considérées indépendantes les unes des autres, mais au contraire en interaction, du moins pour certaines d'entre elles comme l'instabilité de cisaillement et l'instabilité centrifuge.

2.3 Comparaison entre les modèles et les observations

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, certaines observations diffèrent notablement de ce qui serait attendu en suivant le modèle standard de l'évolution stellaire. Cela conduit naturellement à s'interroger sur ce qui est à l'origine de ces différences et à proposer de nouveaux modèles comme ceux présentés au paragraphe § 2.1. Les résultats donnés par ces modèles doivent à leur tour être comparés aux contraintes observationnelles afin de déterminer quelles sont les explications physiques les plus valables. Nous allons donc examiner dans quelle mesure les modèles actuels de transport dans les étoiles rendent compte des données observationnelles. Pour cela, nous reprendrons globalement la même structure que le chapitre sur les observations en commençant par les abondances chimiques à la surface des étoiles massives (§ 2.3.1) puis des étoiles plus froides (§ 2.3.2) avant de finir par l'astérosismologie des géantes rouges (§ 2.3.3).

2.3.1 Étoiles massives

Alors que le modèle standard de l'évolution stellaire s'avère incapable de rendre compte de certaines abondances de surface et conduit à des estimations de masse en désaccord avec les observations spectroscopiques (Herrero *et al.*, 1992), des modèles 1D incluant des effets de mélange rotationnel parviennent à de meilleurs résultats, aussi bien pour les abondances chimiques de produits du cycle CNO (Heger & Langer, 2000; Meynet & Maeder, 2000; Maeder & Meynet, 2001, par exemple) que pour celles du bore (Fliegner *et al.*, 1996; Mendel *et al.*, 2006). Parallèlement au développement de grandes campagnes d'observation telles que celles évoquées au § 1.1.3, les codes d'évolution stellaire se sont eux aussi améliorés, et il est devenu possible de générer des grilles de modèles (Brott *et al.*, 2011a; Ekström *et al.*, 2012) ou même des populations synthétiques complètes d'étoiles (Brott *et al.*, 2011b; Potter *et al.*, 2012) à partir d'une certaine distribution de conditions initiales, telles que la métallicité, la vitesse de rotation, la masse, *etc.* La figure 2.3 montre par exemple que la distribution dans le diagramme H-R d'étoiles observées dans le Grand Nuage de Magellan est cohérente avec celle de la population synthétique correspondante réalisée par Brott *et al.* (2011b). On peut également comparer les abondances

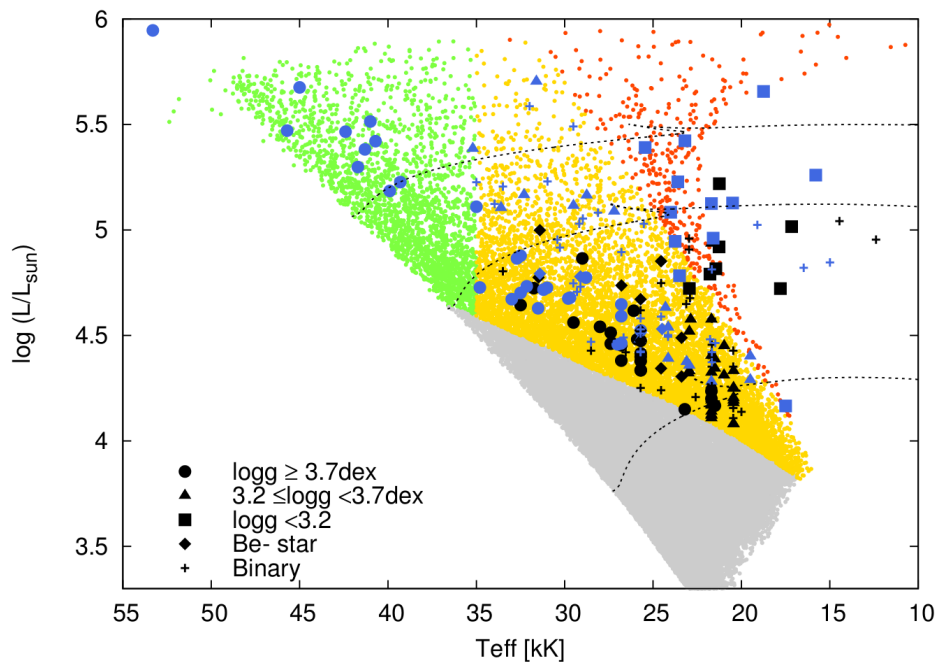


FIGURE 2.3 – Diagramme H-R d'une population synthétique représentative du Grand Nuage de Magellan (Brott *et al.*, 2011b). Chaque point représente un modèle d'étoile. Les autres symboles correspondent à des étoiles observées par Hunter *et al.* (2009).

obtenues grâce à ces modèles avec celles mesurées dans des échantillons d'étoiles suffisamment importants afin de tester les différents ingrédients physiques intégrés aux modèles, en particulier les différents types de mélange et leur dépendance par rapport aux paramètres fondamentaux des étoiles. Si Brott *et al.* (2011b) et Potter *et al.* (2012) parviennent à expliquer la distribution observée pour le principal groupe d'étoiles de leur échantillon, certaines étoiles en rotation lente mais fortement enrichies en azote ne sont pas prévues par les modèles, comme l'illustre la fi-

gure 2.4. La présence d'un champ magnétique dans ces étoiles permettrait peut-être d'expliquer

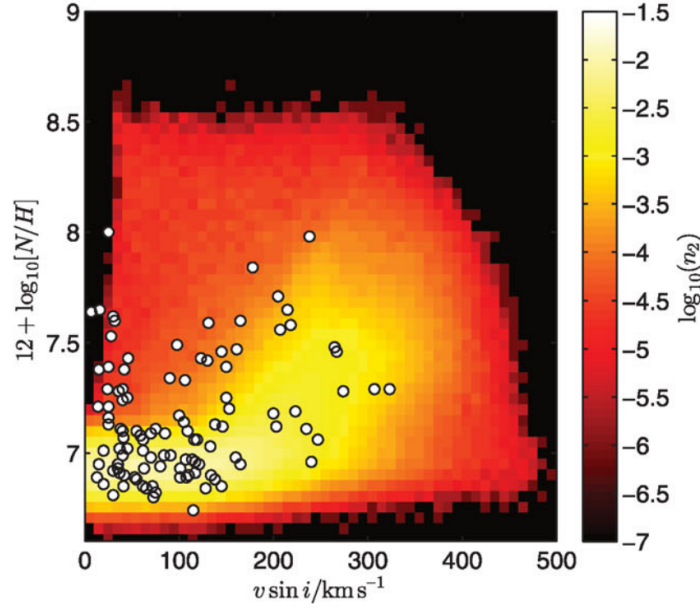


FIGURE 2.4 – Distribution d'étoiles en fonction de l'abondance en azote et de la vitesse équatoriale projetée (Potter *et al.*, 2012). Les ronds blancs correspondent à des étoiles observées par Hunter *et al.* (2009).

leur faible vitesse de rotation.

Plus récemment encore, Meynet *et al.* (2013) ont effectué une analyse de l'instabilité de cisaillement — à laquelle nous nous intéressons dans cette thèse — comparant différentes observables avec les résultats obtenus par leur code d'évolution stellaire en utilisant différentes prescriptions pour les coefficients de diffusion D_h et D_v du formalisme de Zahn (1992). En se restreignant aux observables qui ne dépendent pas de la modélisation d'autres phénomènes, les auteurs parviennent à déterminer les modélisations de l'instabilité de cisaillement qui donnent les résultats les plus proches des observations : Maeder (1997) pour le transport radial et Zahn (1992) pour le transport horizontal.

2.3.2 Étoiles froides

En ce qui concerne la destruction des éléments légers dans les étoiles froides, l'hypothèse de l'existence d'un mécanisme de mélange supplémentaire par rapport à la convection a été validée dans un premier temps dans des modèles sans rotation mais avec la possibilité d'étendre la zone de mélange en dessous de la zone convective, comme dans le cas de l'*overshoot*². Par exemple, D'Antona & Mazzitelli (1984) ont montré que les abondances de lithium observées dans les Pléiades pouvaient être obtenues en faisant varier artificiellement l'étendue de cette zone et donc l'efficacité du mélange supplémentaire. En revanche, d'après Balachandran (1995),

²L'*overshoot* (dépassement en français) désigne le mécanisme par lequel de la matière en mouvement de la zone convective peut pénétrer superficiellement dans la zone radiative malgré la stabilité de celle-ci, étendant le mélange en dehors de la zone convective.

ni la prise en compte de la diffusion microscopique et de la perte de masse ni celle du mélange rotationnel dans des modèles d'évolution stellaire ne permettent de retrouver l'abondance de lithium à la surface des étoiles de certains amas. Des modélisations récentes semblent confirmer cet état de fait, même si les écarts aux observations sont moins importants (Xiong & Deng, 2009; Do Nascimento *et al.*, 2009; Pace *et al.*, 2012). Cela conduit naturellement à introduire des ingrédients physiques supplémentaires pour tenter d'expliquer ces écarts. C'est ainsi que Montalbán & Schatzman (2000) et Charbonnel & Talon (2005) ont montré que des ondes internes de gravité générées à la base de la zone convective permettent de retrouver les abondances de lithium observées à la surface d'étoiles de type solaire.

2.3.3 Astérosismologie des géantes rouges

Les nouvelles observables astérosismiques disponibles pour les géantes rouges suscitent un vif intérêt pour l'étude de la rotation interne et du mélange qui en découle. Afin de contraindre les modèles d'évolution stellaire à l'aide de telles observables plus facilement, il est possible d'utiliser les modèles stellaires issus de codes d'évolution dans des codes d'oscillation (White *et al.*, 2011; Bildsten *et al.*, 2012; Eggenberger *et al.*, 2012; Marques *et al.*, 2013). Y compris — comme Miglio *et al.* (2009) — pour une population synthétique d'étoiles. C'est par cette méthode que Eggenberger *et al.* (2012) ont essayé de reproduire les *splittings* rotationnels observés par Beck *et al.* (2012), en concluant que le transport de moment cinétique était insuffisant dans les modèles existants. Ce résultat a été confirmé par Ceillier *et al.* (2012), qui n'ont pas réussi à reproduire avec leur modèle le profil de rotation déterminé par Deheuvels *et al.* (2012). Plus généralement, Marques *et al.* (2013) ont étudié l'effet de la modification de certains paramètres des modèles de transport sur la vitesse de rotation du cœur des géantes rouges par rapport à leur enveloppe et sur les *splittings* rotationnels. Ils ont ainsi observé que des modifications qui favorisent le transport de moment cinétique conduisent à des profils de rotation et à des *splittings* plus proches des observations (Deheuvels *et al.*, 2012; Beck *et al.*, 2012; Mosser *et al.*, 2012) même si le cœur tourne toujours beaucoup trop vite.

Ces résultats semblent indiquer soit qu'il faille trouver un ou des mécanismes de transport supplémentaires, soit que les prescriptions phénoménologiques utilisées actuellement doivent être révisées. Les modèles existants prédisent qu'il existe des gradients de vitesse de rotation dans les étoiles et que dans différentes régions du diagramme H-R, le transport d'éléments chimiques engendré par ces gradients joue un rôle significatif et parfois même prépondérant dans la théorie de l'évolution. Il apparaît par conséquent crucial de contraindre de manière plus directe ces modèles par des simulations numériques de turbulence 3D.

II

Transport et turbulence

3

Modèles de transport turbulent

« La science de la réalité ne se contente plus du comment phénoménologique ; elle cherche le pourquoi mathématique. »

Gaston BACHELARD, *La formation de l'esprit scientifique*, 1938

Sommaire

3.1	Transport turbulent diffusif/non diffusif	34
3.1.1	Hypothèse de diffusion	34
3.1.2	Approximations communes de transport diffusif	36
3.2	Modèles de transport dans un écoulement cisailé stratifié de manière stable	39
3.2.1	Modèles issus de la littérature géophysique	39
3.2.2	Modèle de Zahn	43

Dans la partie précédente, nous avons passé en revue les différents modèles de transport utilisés dans les modèles d'évolution stellaire ainsi que les observables permettant de les contraindre. Le temps est venu maintenant de nous intéresser aux fondements théoriques de ces modèles dans le cadre de l'étude de la turbulence. En dépit de la recherche menée sur le sujet depuis de nombreuses années, il manque toujours une théorie complète et cohérente de la turbulence. Pour estimer l'importance du transport turbulent, il est donc nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices plus ou moins justifiées et de faire appel à des arguments phénoménologiques censés décrire le comportement d'un écoulement donné. De tels hypothèses et arguments sont à la base du modèle de transport turbulent proposé par Zahn (1992) ainsi que des nombreuses variantes qui en dérivent (Maeder, 1995; Maeder & Meynet, 1996; Maeder, 1997; Talon & Zahn, 1997).

Dans ce chapitre, nous allons examiner différents modèles de transport turbulent — valables uniquement dans le cas d'un scalaire passif ou plus généraux — ainsi que leur justification physique et les hypothèses sous-jacentes. Au § 3.1, nous discuterons de l'hypothèse de diffusion couramment utilisée pour l'étude du transport turbulent ainsi que des approximations usuelles effectuées pour modéliser ce transport. Nous présenterons ensuite au § 3.2 des modèles importants de transport dans un milieu cisailé et stratifié de manière stable.

3.1 Transport turbulent diffusif/non diffusif

De nombreux modèles de transport turbulent utilisés dans les modèles d'océans, d'atmosphère ou d'évolution stellaire supposent que le transport en question est de type diffusif. Cette hypothèse, qui permet de simplifier la modélisation du transport, n'est pourtant pas rigoureusement vérifiée dans tous les cas.

Nous allons commencer par rappeler au § 3.1.1 sous quelles hypothèses le transport turbulent peut être considéré comme diffusif puis nous présenterons quelques exemples d'approximations couramment utilisées dans l'étude du transport turbulent au § 3.1.2.

3.1.1 Hypothèse de diffusion

Pour comprendre quelle est l'origine de l'hypothèse que le transport turbulent est de type diffusif, nous allons étudier le déplacement d'une particule passive sous l'action d'un champ de vitesse turbulent en examinant quelles sont les conditions pour que cette hypothèse soit vérifiée. Pour cela, le point de vue lagrangien est particulièrement adapté. En effet, il permet de suivre ce déplacement grâce à la relation

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(0) = \int_0^t \vec{v}(t') dt', \quad (3.1)$$

où $\vec{x}(t)$ désigne la position de la particule à l'instant t et $\vec{v}(t)$ sa vitesse. Un des problèmes posé par la turbulence est qu'il s'agit d'un phénomène chaotique dans le sens où l'évolution de la vitesse en un point d'un écoulement turbulent est imprévisible à plus ou moins long terme. Au-delà d'un certain temps, les grandeurs de l'écoulement sont complètement décorréliées de celles de l'écoulement initial. Cette propriété caractéristique de la turbulence complique grandement son étude théorique mais offre également la possibilité de considérer l'évolution d'un écoulement turbulent comme un processus pseudo-aléatoire similaire au mouvement brownien. Comme pour tous les processus aléatoires, il est alors possible d'effectuer des analyses statistiques afin de déterminer les caractéristiques du mélange induit par la turbulence.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas d'une turbulence homogène d'un point de vue lagrangien, c'est-à-dire telle que les propriétés statistiques sont les mêmes tout au long du déplacement de la particule considérée. On peut montrer que dans ce cas, le transport turbulent d'un scalaire passif est de type diffusif. Nous présenterons ensuite quelques exemples de modèles de transport turbulent non diffusif.

Turbulence homogène d'un point de vue lagrangien Le modèle de transport turbulent de Taylor (1921) est basé sur le découpage de l'intégrale (3.1) sur des intervalles de durée constante T suffisamment longue pour que le champ de vitesse à l'instant t soit statistiquement décorrélié de celui à l'instant $t + T$. En projetant le long d'une direction donnée, on peut écrire

$$x(nT) - x(0) = \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)T}^{iT} v(t') dt'. \quad (3.2)$$

Du fait de la décorrélation, les intégrales $\int_{(i-1)T}^{iT} v(t') dt'$ peuvent alors être considérées comme des variables aléatoires X_i indépendantes les unes des autres. C'est à ce moment qu'intervient l'hypothèse d'homogénéité lagrangienne. En effet, celle-ci implique que les X_i suivent toutes

la même loi de probabilité. Pour des temps longs — c'est-à-dire des n grands — le théorème central limite s'applique, et la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^n X_i$ suit une distribution gaussienne de moyenne $n\langle X_i \rangle$ et de variance $n\text{Var}(X_i)$ en notant $\langle X_i \rangle$ la moyenne statistique de X_i et $\text{Var}(X_i)$ sa variance. La moyenne $\langle \rangle$ est ici définie comme une moyenne d'ensemble sur toutes les réalisations possibles pour une particule, mais peut également être vue comme une moyenne sur les particules. Comme le temps t est égal à nT , le fait que la variance de X soit proportionnelle à n indique qu'elle est également proportionnelle à t . Cette propriété est caractéristique du transport diffusif. Le coefficient de diffusion D est alors défini par la relation

$$\text{Var}[x(t) - x(0)] = 2Dt. \quad (3.3)$$

Une autre façon d'aborder le problème est d'écrire

$$\frac{d}{dt} \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = 2 \int_0^t \langle v(t)v(t') \rangle dt'. \quad (3.4)$$

L'homogénéité lagrangienne permet alors d'exprimer $\langle v(t)v(t') \rangle$ uniquement en fonction de la différence de temps $\tau = t - t'$:

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \langle v(0)v(\tau) \rangle. \quad (3.5)$$

En raison de la décorrélation progressive du champ de vitesse due à la turbulence, l'intégrale de l'équation (3.4) converge vers une valeur finie pour les temps longs. On a donc

$$\frac{d}{dt} \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = 2 \int_0^{+\infty} \langle v(0)v(\tau) \rangle d\tau, \quad (3.6)$$

qui après comparaison avec l'équation (3.3) nous donne finalement

$$D = \int_0^{+\infty} \langle v(0)v(\tau) \rangle d\tau, \quad (3.7)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$D = \langle v^2 \rangle T_L, \quad (3.8)$$

en notant T_L le temps de corrélation lagrangien défini par

$$T_L = \frac{1}{\langle v^2 \rangle} \int_0^{+\infty} \langle v(0)v(\tau) \rangle d\tau. \quad (3.9)$$

Exemples de modèles de transport turbulent non diffusif L'homogénéité lagrangienne de l'écoulement, nécessaire à l'obtention des résultats précédents, peut être vérifiée pour une turbulence à la fois homogène de manière eulérienne et stationnaire. Examinons maintenant ce qu'il se passe lorsque la turbulence n'est plus homogène de manière lagrangienne, soit à cause d'une hétérogénéité eulérienne ou de la non-stationnarité de l'écoulement.

Le découpage temporel effectué au paragraphe précédent est toujours valable, à savoir :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (3.10)$$

avec des variables aléatoires X_i toujours indépendantes, mais suivant des lois différentes. Il n'est donc plus possible d'utiliser le théorème central limite pour déterminer la dispersion temporelle

due au transport turbulent. En revanche, dans le cas stationnaire, X peut être vu comme un processus de Markov, pour lequel la loi régissant la variable aléatoire X_i ne dépend que de la position au temps $(i-1)T$. La variance de X n'est en général pas linéaire en temps, et le transport n'est *a priori* pas diffusif. Comme décrit par [Durbin \(1980\)](#), on peut néanmoins encore caractériser le transport analytiquement, notamment quand le champ de vitesse est statistiquement homogène, mais pas le temps de corrélation lagrangien. On a alors

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle v^2 \rangle \left\langle \frac{dT_L}{dx} \right\rangle. \quad (3.11)$$

Il existe également d'autres modèles basés sur le formalisme de Langevin qui génère le transport à l'aide d'une force aléatoire $\vec{\eta}(t)$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \vec{\eta}(t), \quad (3.12)$$

où $\vec{f}$ regroupe les forces massiques déterministes qui s'appliquent à la particule considérée. On utilise alors cette équation pour déterminer les équations que doivent vérifier les lois de probabilité des grandeurs physiques comme la position et la vitesse de la particule en fonction de la loi de la force aléatoire (voir par exemple [Chandrasekhar, 1943](#), pour plus de détails). Une méthode similaire a notamment été utilisée par [Pearson et al. \(1983\)](#) pour exprimer la dispersion de particules de fluide dans un écoulement cisailé et stratifié de manière stable en fonction du spectre du gradient de pression.

3.1.2 Approximations communes de transport diffusif

Le modèle de [Taylor \(1921\)](#) nous indique que sous certaines hypothèses le transport turbulent est de type diffusif et exprime le coefficient de diffusion à partir de la corrélation du champ de vitesse lagrangien. En pratique, il n'y a pas de façon simple de déterminer le temps de corrélation lagrangien du champ de vitesse. Ceci est vrai en particulier dans le cas des modèles d'évolution stellaire, où seules les vitesses et les propriétés thermodynamiques moyennes sont considérées comme connues et où il faut donc disposer de modèles de diffusion s'exprimant en fonction de ces quantités.

Approximation du gradient moyen Boussinesq fut le premier à introduire la notion de viscosité turbulente (*eddy viscosity* en anglais) pour relier les flux turbulents aux propriétés de l'écoulement moyen. Afin de comprendre l'intérêt de ce concept, prenons l'exemple de l'équation de conservation de la quantité de mouvement incompressible, qui s'écrit

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (3.13)$$

en notant respectivement p , ρ et ν la pression, la densité et la viscosité moléculaire du fluide. Intéressons-nous à l'effet de la turbulence sur l'écoulement moyen. Pour cela, décomposons la vitesse et la pression en une partie moyenne et une partie fluctuante de moyenne nulle :

$$\vec{v} = \vec{U} + \vec{v}' \quad \text{et} \quad p = P + p'. \quad (3.14)$$

La moyenne de l'équation (3.13) donne alors

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} + \langle (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \rangle = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \nu \Delta \vec{U}. \quad (3.15)$$

Il apparaît que le troisième terme du membre de gauche de l'équation précédente est le seul faisant intervenir les fluctuations. Pour décrire l'évolution de l'écoulement moyen, il faut donc décrire ce terme d'ordre 2 en v' que l'on peut également mettre sous la forme $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}' \otimes \vec{v}' \rangle$, où $\otimes$ désigne le produit tensoriel¹. Il est bien entendu possible d'écrire une équation d'évolution de ce terme en multipliant l'équation de départ par $\vec{v}$ avant d'en prendre la moyenne. Le problème est que cette équation fait alors intervenir des termes d'ordre 3 en v' et ainsi de suite. D'où l'intérêt de disposer de relations de fermeture des équations, qui consistent à exprimer les termes d'ordre n en fonction de termes d'ordre inférieur.

La relation de fermeture proposée par Boussinesq relie les termes d'ordre 2 au gradient moyen de vitesse à l'aide d'un coefficient ν_t appelé « viscosité turbulente ». En notation indicielle pour $i \neq j$, cela donne

$$-\langle v'_i v'_j \rangle = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.16)$$

En reportant l'expression précédente dans l'équation moyenne (3.15), on obtient

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \nu_e \Delta \vec{U}, \quad (3.17)$$

où la viscosité moléculaire de l'équation de départ est remplacée par une viscosité équivalente $\nu_e = \nu + \nu_t$, ce qui justifie l'appellation de viscosité turbulente.

Ce raisonnement peut être appliqué également au transport de grandeurs scalaires, comme l'énergie thermique ou la quantité d'éléments chimiques. On définit ainsi la diffusivité thermique turbulente κ_t à l'aide de la relation

$$-\langle v'_i \theta \rangle = \kappa_t \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.18)$$

où T et θ désignent le profil moyen et les fluctuations de température, respectivement. Cette approximation, dite du « gradient moyen », repose sur un certain nombre d'hypothèses discutées notamment par Corrsin (1974). En particulier, elle suppose l'existence d'une séparation d'échelle entre les échelles caractéristiques du gradient moyen et les échelles de la turbulence qui effectuent le transport, ce qui n'est pas vérifié en général.

Dans le cas d'une turbulence anisotrope, c'est-à-dire dont les propriétés statistiques dépendent de la direction de l'espace choisie, les relations du type de (3.18) sont incorrectes. Comme l'a montré notamment Calder (1965), la diffusivité doit être modélisée par un tenseur κ d'ordre 2 vérifiant

$$-\langle v'_i \theta \rangle = \kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (3.19)$$

en adoptant la convention de sommation des indices répétés d'Einstein.

¹Le produit tensoriel $\vec{a} \otimes \vec{b}$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de composantes respectives a_i et b_i est défini comme le tenseur d'ordre deux de composantes $(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j$.

L'hypothèse précédente permet de calculer une viscosité ou une diffusivité turbulente à partir de mesures ou de simulations d'un écoulement, mais elle ne nous donne pas une formule prête à l'emploi exprimant la viscosité ou la diffusivité directement en fonction des grandeurs moyennes de l'écoulement. Pour y remédier, différents modèles semi-empiriques ont été élaborés, notamment en géophysique, par exemple à partir de relations de fermeture pour les moments d'ordre 3 (Freeman, 1977; Tsarenko & Yaglom, 1991) ou de méthodes du groupe de renormalisation (Rubinstein & Barton, 1991).

Modèle de la longueur de mélange Le modèle de la longueur de mélange — car il s'agit bien d'un modèle et non d'une théorie à proprement parler — se base, lui, sur l'analogie avec la viscosité microscopique, qui s'exprime au voisinage de l'équilibre thermodynamique en fonction du libre parcours moyen λ et de la vitesse thermique v_{th} par la relation

$$\nu = \frac{1}{3} \lambda v_{th}. \quad (3.20)$$

En généralisant ce résultat à une particule fluide dans un écoulement de vitesse moyenne v dont le déplacement moyen ℓ_m est appelé « longueur de mélange », on obtient

$$\nu_t = \ell_m v \quad (3.21)$$

ce qui peut également s'écrire, dans le cas d'une couche limite initialement considéré par Prandtl (1925),

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{dU}{dz} \right|, \quad (3.22)$$

en notant dU/dz le cisaillement moyen.

L'intérêt de cette approche tient dans sa simplicité. En revanche, sa validité est plus que limitée : d'une part, comme mis en exergue par Tennekes & Lumley (1972), l'analogie avec la viscosité moléculaire est discutable, principalement du fait que le libre parcours moyen d'une molécule est dans la limite fluide très petit devant les échelles caractéristiques de l'écoulement, tandis que la longueur de mélange est *a priori* du même ordre de grandeur. De même, le flux moyen de vitesse $\langle v_i v_j \rangle$ microscopique que l'on cherche à modéliser est en pratique très petit devant la vitesse quadratique moyenne, contrairement à ce que l'on trouve dans un écoulement turbulent. D'autre part, cette *théorie* est incomplète puisque ℓ_m et v ne sont pas donnés et sont en général très difficiles à déterminer pour des écoulements complexes. Toutefois, il existe un cas où l'approximation de la longueur de mélange fonctionne relativement bien : celui d'écoulements turbulents caractérisés par une seule échelle de temps et une seule échelle turbulente de longueur. Le modèle de la longueur de mélange peut alors être vu comme le résultat d'une analyse dimensionnelle. De ce fait, l'équation (3.22) ne peut être utilisée qu'en ordre de grandeur, faisant apparaître un coefficient de proportionnalité qui est loin d'être universel. C'est ce que l'on constate notamment pour les écoulements cisailés dans un fluide incompressible, où la comparaison avec les résultats expérimentaux indique que

$$\nu_t = C \delta^2 \left| \frac{dU}{dz} \right|, \quad (3.23)$$

où δ , définie comme l'échelle caractéristique des variations de l'écoulement moyen, et C varient suivant le type d'écoulement considéré.

En astrophysique, le modèle de la longueur de mélange est beaucoup utilisé, dans une version modifiée, pour l'étude du transport dans les zones convectives des étoiles depuis Vitense (1953). Diverses améliorations ont été apportées à cette théorie depuis (Spiegel, 1963; Gough, 1977, par exemple) et des simulations numériques 2D ou 3D ont été réalisées afin de tester et calibrer les modèles (Chan & Sofia, 1987; Ludwig *et al.*, 1999). Récemment, Lesaffre *et al.* (2013) ont construit un modèle 2D basé sur le principe de la longueur de mélange susceptible d'être utilisé pour décrire le transport dans les zones convectives d'étoiles en rotation.

3.2 Modèles de transport dans un écoulement cisailé stratifié de manière stable

Recentrons-nous maintenant sur le cas qui nous intéresse : celui de la turbulence cisailée dans les zones radiatives des étoiles, qui sont stratifiées de manière stable. L'influence de la stratification stable sur le transport turbulent a été étudiée principalement en géophysique, afin d'améliorer notre compréhension de la dynamique des océans et de l'atmosphère. Depuis quelques années, le transport turbulent dans les disques d'accrétion fait de plus en plus l'objet d'études théoriques et numériques. Nous nous restreindrons cependant ici au cas où le gradient stable est dans la même direction que le cisaillement, ce qui n'est pas le cas dans les disques. Malgré de fortes ressemblances avec les modèles géophysiques, ceux utilisés en physique stellaire — comme celui de Zahn (1974, 1992) — se distinguent par un ingrédient essentiel qui est la très forte diffusivité thermique d'origine radiative.

Afin de se faire une idée claire des types de modèles de transport par une turbulence cisailée stratifiée de manière stable existants, nous commencerons par présenter au § 3.2.1 des modèles issus de la littérature géophysique, avant de nous tourner au § 3.2.2 vers le modèle de Zahn qui est à la base de la majorité des modèles de transport utilisés en physique des intérieurs stellaires.

3.2.1 Modèles issus de la littérature géophysique

En géophysique, la question du transport est cruciale, notamment dans le cadre de l'étude de la dispersion d'un polluant dans l'atmosphère ou les océans. De ce fait, de nombreux modèles de transport turbulent ont été élaborés dans ce domaine. Certains utilisent un point de vue eulérien, pour lequel l'approximation du gradient moyen peut être appliquée, tandis que d'autres sont basés sur une approche lagrangienne, en suivant le déplacement d'une particule fluide comme au § 3.1.1. Les modèles que nous allons étudier ici nous permettront d'aborder les deux approches.

Modèle d'Osborn & Cox Une des applications de l'approximation du gradient moyen est le modèle d'Osborn & Cox qui exprime les viscosité et diffusivité thermiques en fonction du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente à l'aide de l'hypothèse de stationarité statistique (Osborn & Cox, 1972). Le principe est d'écrire les équations d'évolution de l'énergie cinétique turbulente $E_K = \langle (\vec{v}')^2 \rangle / 2$ et de l'énergie potentielle thermique² $E_P = \langle b^2 \rangle / 2$ spécifiques (par unité de masse), où $b = \alpha g \theta / N$ est une variable proportionnelle aux fluctuations de température et homogène à une vitesse, avec α le coefficient de dilatation thermique, g l'intensité

²Il s'agit de l'énergie potentielle dont dérive la force d'Archimède. L'intensité de celle-ci étant liée aux fluctuations de température, cette énergie potentielle est qualifiée de thermique.

de la pesanteur et N la fréquence de Brunt-Väisälä définie ici par

$$N^2 = \alpha g \frac{dT}{dz}, \quad (3.24)$$

en notant dT/dz le gradient moyen de température. Le nom de la variable b vient de l'anglais *buoyancy*, qui signifie « flottabilité ». Pour une turbulence homogène d'un point de vue eulérien, on obtient

$$\frac{dE_K}{dt} = -S\langle v'_y v'_z \rangle + N\langle b v'_z \rangle - \varepsilon_K, \quad (3.25)$$

$$\frac{dE_P}{dt} = -N\langle b v'_z \rangle - \varepsilon_P, \quad (3.26)$$

en notant $S = dU/dz$ le taux de cisaillement moyen, $\varepsilon_K = \nu \langle (\vec{\nabla} \vec{v}')^2 \rangle$ et $\varepsilon_P = \kappa \langle (\vec{\nabla} b)^2 \rangle$ les taux spécifiques de dissipation d'énergie cinétique turbulente et d'énergie potentielle thermique, respectivement. En régime stationnaire, les termes de gauche s'annulent et en définissant $\nu_t = -\langle v'_y v'_z \rangle / S$ et $\kappa_t = -\langle b v'_z \rangle / N$ les viscosité et diffusivité thermiques turbulentes, il vient

$$0 = S^2 \nu_t - N^2 \kappa_t - \varepsilon_K, \quad (3.27)$$

$$0 = N^2 \kappa_t - \varepsilon_P. \quad (3.28)$$

On peut en déduire la valeur des coefficients turbulents

$$\kappa_t = \frac{\varepsilon_P}{N^2}, \quad (3.29)$$

$$\nu_t = \frac{\varepsilon_K + \varepsilon_P}{S^2}. \quad (3.30)$$

L'expression ainsi trouvée pour la diffusivité thermique turbulente présente l'avantage de ne comporter aucun paramètre libre.

Un autre élément essentiel du modèle d'Osborn & Cox, basé sur [Osborn \(1980\)](#), est l'hypothèse que le nombre de Richardson de flux, défini par

$$Ri_f = \frac{N\langle b v'_z \rangle}{S\langle v'_y v'_z \rangle} = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_K + \varepsilon_P}, \quad (3.31)$$

a toujours la même valeur, autour de 0,15. La diffusivité thermique turbulente peut alors être exprimée en fonction du taux de dissipation de l'énergie cinétique en faisant apparaître « l'efficacité de mélange » $\Gamma = \varepsilon_P / \varepsilon_K = Ri_f / (1 - Ri_f) \simeq 0,2$:

$$\kappa_t = \frac{\Gamma \varepsilon_K}{N^2}. \quad (3.32)$$

Un des intérêts de telles formules est de pouvoir calculer la diffusivité thermique turbulente à partir du champ de vitesse turbulent *via* la dissipation d'énergie cinétique turbulente. Cela évite ainsi de devoir mesurer le flux thermique pour déterminer le transport. [Osborn \(1980\)](#) a par exemple utilisé ce modèle pour estimer l'efficacité du transport turbulent dans les océans à partir de mesures *in situ* de microstructure de la vitesse et de la température telle que décrites par [Osborn & Bilodeau \(1980\)](#). Pour autant, un modèle de la dissipation d'énergie cinétique turbulente en fonction des propriétés de l'écoulement moyen est toujours nécessaire pour pouvoir prédire la valeur de la diffusivité turbulente dans un écoulement (voir par exemple [Hunt et al., 1988](#)).

Approches lagrangiennes Parmi les études lagrangiennes du transport turbulent en milieu cisailé et stratifié de manière stable, celle de [Pearson *et al.* \(1983\)](#) est particulièrement intéressante. En partant des équations de mouvement d'une particule de fluide et en traitant le gradient de pression comme une force aléatoire, ils ont exprimé entre autres le déplacement quadratique moyen en fonction du temps. Ils ont ainsi montré que lorsqu'il n'y avait pas d'échanges thermiques entre les particules de fluide et leur environnement, les particules arrêtaient de se disperser après un temps fini. Cela se comprend par le fait qu'une particule gardant toujours la même température a besoin d'une énergie cinétique verticale toujours croissante au fur et à mesure qu'elle s'éloigne de sa position d'équilibre. On ne peut donc pas imaginer que la dispersion verticale d'un ensemble de particules croisse indéfiniment dans une turbulence où l'énergie cinétique disponible est stationnaire. On n'a donc pas un comportement diffusif. Au contraire, s'il y a des échanges thermiques, alors le déplacement quadratique moyen des particules est linéaire en temps, ce qui est caractéristique de la diffusion.

Des conclusions similaires mais obtenues sans faire l'hypothèse d'une force aléatoire pour le gradient de pression ont été présentées par [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#). Les auteurs partent de l'équation régissant l'évolution langrangienne des perturbation de flottabilité :

$$\frac{db}{dt} + Nv_z = \kappa\Delta b. \quad (3.33)$$

En intégrant cette équation par rapport au temps, on obtient

$$\delta b(t) + N\delta z(t) = \kappa \int_0^t \Delta b(t') dt', \quad (3.34)$$

en notant δb et δz les variations entre 0 et t de la flottabilité et de l'altitude d'un élément fluide. La moyenne sur les particules de l'équation précédente multipliée par $v_z(t)$ aboutit à l'expression suivante pour l'évolution temporelle de la dispersion quadratique moyenne :

$$\frac{N}{2} \frac{d\langle \delta z^2 \rangle}{dt} = \kappa \int_0^t \langle \Delta b(t') v_z(t) \rangle dt' - \langle \delta b(t) v_z(t) \rangle. \quad (3.35)$$

Du fait de la présence de l'opérateur laplacien dans la corrélation $\langle \Delta b(t') v_z(t) \rangle$, les auteurs ont supposé que le temps de corrélation correspondant devait être de l'ordre du temps de Kolmogorov $\tau = \sqrt{\nu/\varepsilon_K}$, qui est très petit devant le temps dynamique, permettant ainsi de négliger le premier terme du membre de droite de l'équation (3.35). En ne gardant que les termes dominants du second terme, les auteurs obtiennent finalement

$$\langle \delta z^2 \rangle = \frac{\langle \delta b^2 \rangle}{N^2} + 2 \frac{\varepsilon_P}{N^2} t, \quad (3.36)$$

où le premier terme peut être identifié au transport adiabatique, c'est-à-dire en l'absence d'échanges thermiques entre les particules et le milieu environnant, contrairement au deuxième terme, qui suppose l'existence d'échanges par diffusion thermique comme le montre la présence de la dissipation d'énergie potentielle thermique ε_P .

Sur des temps longs ($t \gg N^{-1}$), le premier terme atteint la valeur finie $4E_P/N^2$, tandis que le deuxième terme croît linéairement en temps, en supposant que ε_P soit constant. On retrouve ainsi le résultat obtenu par [Pearson *et al.* \(1983\)](#) qui stipule que le transport adiabatique n'est

pas diffusif. À l’opposé, le transport diabatique, décrit par le second terme, est de type diffusif et le coefficient de diffusion turbulente correspondant vaut

$$D_t = \frac{\varepsilon_P}{N^2}, \quad (3.37)$$

qui est exactement la même expression que celle écrite par [Osborn & Cox \(1972\)](#) pour la diffusivité thermique turbulente à l’aide d’une approche radicalement différente. Cette expression a notamment été testée numériquement avec succès dans le cas d’un scalaire passif par [Lindborg & Fedina \(2009\)](#). Notons à ce sujet que contrairement à celui d’Osborn & Cox, ce modèle n’induit pas un transport différent entre des espèces chimiques présentant des gradients moyens de concentration différents.

[Brethouwer & Lindborg \(2009\)](#) ont également réalisé des simulations numériques dans le but d’explorer la dépendance du modèle en fonction de différents paramètres. La figure 3.1 représente l’évolution de la dispersion verticale quadratique moyenne de particules au cours du temps. Lorsque la turbulence est très affectée par la stratification, comme sur la figure 3.1(a),

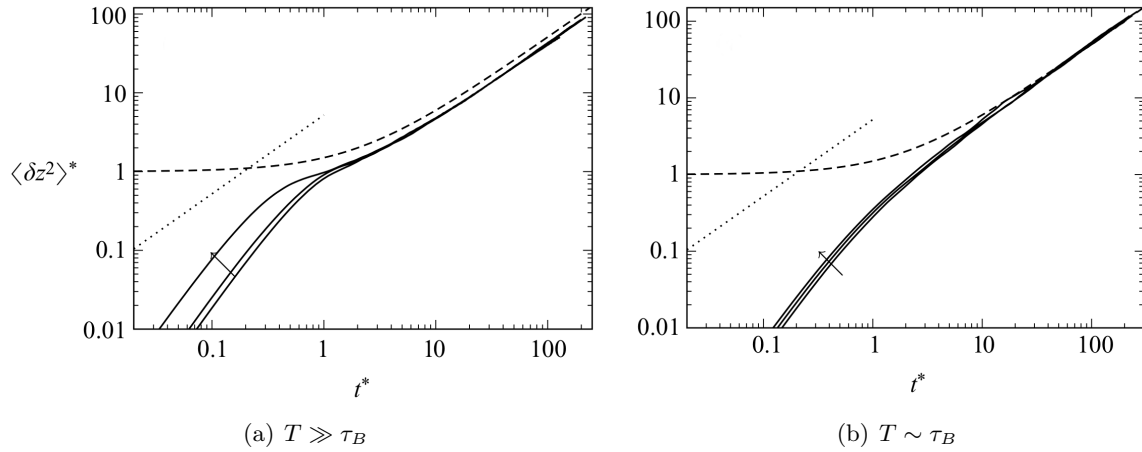


FIGURE 3.1 – Dispersion verticale quadratique moyenne de particules en fonction du temps (d’après [Brethouwer & Lindborg, 2009](#)). Les courbes pleines correspondent aux résultats de simulations réalisées pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (la flèche en bas à droite indique le sens des nombres de Reynolds croissants). Le comportement attendu sur les temps courts est représenté par la droite en pointillés et celui attendu sur les temps longs par la courbe en tirets. Le graphe de gauche correspond au cas où le temps de retournement de la turbulence T est grand devant le temps caractéristique de la poussée d’Archimède τ_B , c’est-à-dire où la turbulence est fortement affectée par la stratification. Le graphe de droite correspond au cas où les deux temps sont du même ordre de grandeur.

on distingue trois phases : une première phase de croissance purement advective, puis une phase de saturation, et enfin la phase diffusif qui nous intéresse. On voit sur la figure 3.1(b) que la phase de saturation est absente lorsque le temps de retournement de la turbulence est de l’ordre du temps caractéristique de la stratification. Les auteurs ont également montré que la diffusivité thermique moléculaire κ n’avait pas d’influence sur l’efficacité de la diffusion d’un scalaire passif pour des nombres de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ compris entre 0,7 et 22. Ce résultat est compréhensible

dans la mesure où la dissipation d'énergie potentielle thermique ne dépend pas du processus qui effectue la diffusion, mais du taux de transfert d'énergie entre les grandes et les petites échelles. Il en va autrement dans les zones radiatives des étoiles, où l'échelle de diffusion thermique est de l'ordre de l'échelle d'injection. Il y a donc besoin de modèles dédiés de transport turbulent.

3.2.2 Modèle de Zahn

Le modèle de Zahn (1974, 1992) de transport turbulent radial dû à la rotation différentielle radiale est à la base de nombreux modèles dérivés prenant en compte notamment la stratification en poids moléculaire moyen et la diffusion turbulente horizontale et inclus dans des codes d'évolution stellaire. Tous ces modèles reposent donc sur certaines hypothèses communes que nous allons préciser ici.

Tout d'abord, le modèle de Zahn reprend l'hypothèse de la longueur de mélange, à savoir que la diffusivité est proportionnelle à $S\ell^2$. En définissant le nombre de Péclet turbulent Pe_ℓ tel que

$$Pe_\ell = \frac{S\ell^2}{\kappa}, \quad (3.38)$$

on peut écrire

$$D_t \propto \kappa Pe_\ell. \quad (3.39)$$

Comme nous l'avons déjà vu au § 3.1.2, l'approximation de la longueur de mélange ne nous fournit pas d'indications sur la valeur de la longueur de mélange à utiliser. Pour estimer la valeur du nombre de Péclet turbulent, Zahn a utilisé une hypothèse supplémentaire, celle qu'un écoulement turbulent a tendance à évoluer de manière à se trouver dans un état de stabilité marginale vis-à-vis de l'instabilité qui l'a généré. C'est le cas notamment de la convection turbulente, qui tend à transformer un profil d'entropie initialement instable en un profil isentropique marginalement stable vis-à-vis de l'instabilité convective. Dans le cas d'un écoulement stratifié de manière stable soumis à l'instabilité de cisaillement, le critère de stabilité standard est le critère de Richardson

$$Ri > Ri_c, \quad (3.40)$$

déjà rencontré au § 2.2.2. Or il se trouve que ce critère ne prend pas en compte les effets de la diffusion thermique, qui est très importante dans les zones radiatives des étoiles en raison de la très forte diffusivité thermique d'origine radiative. L'effet principal considéré par Zahn est la diminution de l'amplitude de la poussée d'Archimède du fait de la diminution des fluctuations de température par diffusion thermique. Pour que cet effet devienne important, il est nécessaire que la poussée d'Archimède joue un rôle dans la dynamique de l'écoulement, ce qui se traduit par

$$\tau_S > \tau_B, \quad (3.41)$$

où $\tau_S = S^{-1}$ désigne le temps de cisaillement et $\tau_B = N^{-1}$ le temps caractéristique de la poussée d'Archimède. Cette inégalité s'écrit simplement

$$Ri > 1. \quad (3.42)$$

Une autre condition nécessaire est que la diffusion thermique affecte la flottabilité, ce qui se produit quand

$$\tau_\kappa < \tau_B, \quad (3.43)$$

où $\tau_\kappa = \ell^2/\kappa$ désigne le temps diffusif. En combinant les inégalités (3.41) et (3.43), il vient

$$\tau_\kappa < \tau_S, \quad (3.44)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$Pe_\ell < 1. \quad (3.45)$$

Ce raisonnement, tiré de [Lignières et al. \(1999\)](#), montre donc que pour que l'effet de la diffusion thermique sur la stabilité des écoulements stratifiés de manière stable soit important, les deux conditions $Ri > 1$ et $Pe_\ell < 1$ doivent être réunies.

En s'inspirant de [Townsend \(1958\)](#), [Zahn \(1974\)](#) a modifié le critère de Richardson de manière à intégrer cet effet déstabilisateur de la diffusion thermique en multipliant le nombre de Richardson par un nombre de Péclet. Le nouveau critère de stabilité s'écrit alors

$$RiPe > Ri_c. \quad (3.46)$$

L'étape suivante du raisonnement est de supposer que le nombre de Péclet pertinent à utiliser dans le critère ci-dessus est le nombre de Péclet turbulent basé sur la longueur de mélange défini plus haut. L'hypothèse de stabilité marginale vis-à-vis de l'instabilité de cisaillement conduit ensuite à écrire

$$RiPe_\ell = Ri_c, \quad (3.47)$$

ce qui donne

$$Pe_\ell = \frac{Ri_c}{Ri}. \quad (3.48)$$

En reportant cette expression dans l'équation (3.39), on obtient finalement

$$D_t \propto \kappa \frac{Ri_c}{Ri}. \quad (3.49)$$

Le modèle décrit ici permet de connaître qualitativement la dépendance du coefficient de diffusion vis-à-vis de la diffusivité thermique moléculaire et de la stratification stable. En revanche, comme tous les modèles basés sur la longueur de mélange, il ne donne aucune information quantitative, en particulier sur le coefficient de proportionnalité. De plus, la valeur du nombre de Richardson critique est elle-même sujette à caution. La valeur 1/4 communément utilisée est issue de l'analyse de stabilité linéaire dans le cas inviscide (voir [Chandrasekhar, 1961](#), par exemple). Or, dans un écoulement turbulent, la viscosité et les interactions non-linéaires jouent un rôle important, ce qui peut amener à modifier cette valeur, comme suggéré notamment par [Canuto \(2002\)](#). De plus, l'analyse de stabilité linéaire pour $Pe_\ell < 1$ montre bien que le nombre important est $RiPe$. Par conséquent, c'est plutôt un nombre de Richardson-Péclet critique $(RiPe_\ell)_c$ qu'il faudrait considérer, et celui-ci n'est pas vraiment égal à 1/4 ([Lignières et al., 1999](#)). Un des moyens de résoudre ce genre de problème est de réaliser des simulations numériques afin de tester ce modèle.

Une dernière remarque concerne le fait qu'il peut paraître physiquement étrange que le coefficient de diffusion turbulente soit proportionnel à la diffusivité thermique. En effet, la diffusion thermique a un deuxième effet notable sur les mouvements en plus de celui sur la poussée d'Archimède, qui a déjà été évoqué : elle les limite en contribuant à la dissipation de l'énergie cinétique turbulente transformée en énergie potentielle thermique. Nous tenterons d'expliquer cette apparente contradiction au § 6.1.2.

4

Simulations numériques locales de turbulence stratifiée de manière stable

« L’observation recueille les faits ; la réflexion les combine ; l’expérience vérifie le résultat de la combinaison. »

Denis DIDEROT, *De l’interprétation de la nature*, 1754.

Sommaire

4.1	Simulations d’un écoulement cisailé stratifié de manière stable . . .	46
4.1.1	Équations à résoudre dans les simulations numériques	46
4.1.2	Types de simulations	48
4.1.3	Forçage, conditions aux limites et conditions initiales	50
4.2	Vers un test du modèle de Zahn	52
4.2.1	Obtention d’un état stationnaire	53
4.2.2	Domaine des petits nombres de Péclet	54

Le but de cette thèse est de tester les coefficients de diffusion turbulente utilisés dans les codes d’évolution stellaire pour décrire le transport des éléments chimiques. Ces coefficients proviennent de modélisations qui font un certain nombre d’hypothèses. Les plus importantes d’entre elles sont les suivantes :

1. les coefficients de transport turbulent s’expriment en fonction des gradients locaux de température, de composition chimique et de vitesse ;
2. la turbulence est statistiquement stationnaire ;
3. les échelles considérées sont suffisamment petites pour que l’effet de la sphéricité ne rentre pas en ligne de compte.

Nous n’allons pas discuter ces hypothèses, raisonnables par ailleurs. Au contraire, nous allons nous placer dans des conditions où ces hypothèses sont vérifiées afin de pouvoir tester si les autres hypothèses portant sur la physique du transport turbulent le sont également. Une configuration adaptée est celle d’un écoulement cisailé homogène stratifié de manière stable, déjà utilisée en géophysique et qui présente l’avantage d’être la plus générique possible tout en prenant en

compte les ingrédients physiques essentiels que sont le cisaillement de vitesse et la stratification stable.

Nous allons dans un premier temps aborder au § 4.1 la question des méthodes utilisées pour simuler des écoulements cisailés et stratifiés de manière stable puis nous nous demanderons au § 4.2 comment ce genre de simulations peuvent nous aider à tester le modèle de Zahn.

4.1 Simulations d'un écoulement cisailé stratifié de manière stable

La science progresse souvent de la simplicité vers la complexité. Il en est ainsi pour l'étude de la turbulence à l'aide de simulations numériques. En effet, les premières simulations de turbulence (dont Orszag & Patterson, 1972) avaient pour but de reproduire des écoulements turbulents homogènes et isotropes, c'est-à-dire dont les propriétés statistiques sont les mêmes quels que soient le point et la direction de l'espace considérés. Puis apparurent les simulations de turbulence cisailée (Rogallo, 1981, par exemple), dans lesquelles l'isotropie était éliminée du fait de l'existence de directions privilégiées. Afin de conserver l'homogénéité et ainsi rester le plus générique possible, il est nécessaire que le gradient de vitesse soit uniforme. On aboutit autrement à une turbulence anisotrope et hétérogène, comme celle simulée par Brethouwer (1999). Le dernier ingrédient est la stratification stable, ajoutée pour la première fois dans les simulations par Gerz *et al.* (1989). Là encore il est nécessaire de prendre un gradient constant de masse volumique, de température ou d'entropie pour conserver l'homogénéité statistique de la turbulence.

Nous allons tout d'abord examiner au § 4.1.1 quelles sont les équations résolues pour déterminer le transport turbulent dans ces simulations avant de nous intéresser aux différents types de simulations au § 4.1.2 ainsi qu'à l'influence du forçage, des conditions aux limites et des conditions initiales sur ces simulations numériques (§ 4.1.3).

4.1.1 Équations à résoudre dans les simulations numériques

Dans la majorité des simulations numériques de turbulence sans stratification, les équations résolues sont celles d'un fluide incompressible, c'est-à-dire dont la masse volumique ρ est la même dans tout le fluide et n'évolue pas. Ces équations s'écrivent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (4.2)$$

Dans le cas de l'étude d'écoulements stratifiés, il est nécessaire de prendre en compte les fluctuations de densité qui génèrent la poussée d'Archimède $\rho'/\rho \vec{g}$. On utilise alors l'approximation de Boussinesq, où les fluctuations de densité n'interviennent que dans le terme d'Archimède. En exprimant ces fluctuations de densité en fonction des fluctuations de température grâce à la relation

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\alpha \theta, \quad (4.3)$$

où ρ' désigne les fluctuations de densité, α le coefficient de dilatation thermique et θ les fluctuations de température, on obtient les équations de Boussinesq :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \alpha \theta \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T, \quad (4.5)$$

où T désigne la température.

Cette approximation n'est valable que sous certaines conditions : que les vitesses considérées soient faibles devant la vitesse du son dans le milieu considéré, et que les échelles spatiales de la turbulence soient petites devant l'échelle de hauteur de pression. Ces conditions sont vérifiées dans les zones radiatives stellaires, où l'échelle spatiale caractéristique de la turbulence ℓ est limitée par la stratification stable. En effet, quand la diffusion thermique joue un rôle dans la dynamique, le temps diffusif est plus petit que le temps caractéristique de l'effet de la poussée d'Archimède :

$$\frac{\ell^2}{\kappa} < \frac{1}{N}, \quad (4.6)$$

ce qui peut s'écrire

$$\ell < \sqrt{\frac{\kappa}{N}}, \quad (4.7)$$

où le membre de droite est généralement petit devant l'échelle de hauteur de pression.

Approche lagrangienne vs. approche eulérienne Pour étudier le transport d'un scalaire passif, en plus de la résolution des équations d'évolution de l'écoulement, une méthode dite de « suivi des particules lagrangiennes » consiste à déterminer la trajectoire de particules fluides au cours du temps afin d'effectuer des analyses statistiques similaires à celles, théoriques, du chapitre 3. C'est le cas par exemple de [Yeung & Pope \(1989\)](#) et [Brethouwer *et al.* \(2003\)](#) pour la turbulence isotrope, [Sawford & Yeung \(2001\)](#) pour la turbulence cisailée, et [Brethouwer & Lindborg \(2009\)](#) pour la turbulence stratifiée. Concrètement, cette approche lagrangienne consiste à résoudre pour chaque particule une équation du type

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(t), \quad (4.8)$$

où $\vec{x}(t)$ est la position de la particule considérée à l'instant t et $\vec{v}(t)$ la vitesse du fluide à la position de la particule à l'instant t .

L'autre méthode pour déterminer le transport est de résoudre une équation d'advection et de diffusion pour un champ scalaire c telle que

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c = D \Delta c. \quad (4.9)$$

En présence d'un gradient moyen de ce scalaire passif (par exemple selon la direction z), il est alors possible de calculer la diffusivité turbulente dans le cadre l'approximation du gradient moyen, décrite au § 3.1.2, grâce à la relation

$$D_t = -\frac{\langle v'_z c \rangle}{dC/dz}, \quad (4.10)$$

en notant $C(z)$ le profil moyen du scalaire passif, ou plus généralement

$$\langle v'_i c \rangle = -(D_t)_{ij} \frac{dC}{dx_j}. \quad (4.11)$$

C'est cette approche qui a été utilisée notamment par [Rogers et al. \(1989\)](#) pour un écoulement cisailé sans stratification et avec stratification par [Kaltenbach et al. \(1994\)](#).

4.1.2 Types de simulations

Outre le problème physique à résoudre et les équations correspondantes que nous venons d'aborder, un autre point d'intérêt est les méthodes utilisées pour ce faire.

DNS et LES Une première distinction importante a lieu entre les simulations numériques dites « directes » (ou DNS pour l'anglais *Direct Numerical Simulations*) et les LES (pour *Large-Eddy Simulations*, ou simulations de grands tourbillons). Les DNS ont pour but de résoudre numériquement toutes les échelles pertinentes de l'écoulement, des grandes échelles jusqu'à l'échelle de dissipation. Ce sont en quelque sorte les simulations numériques classiques. À l'opposé, les LES ne résolvent que les grandes échelles — d'où leur nom — tandis que les petites échelles sont décrites à l'aide d'un modèle dit de « sous-maille ».

L'intérêt des LES est lié au fait que la taille des plus petites échelles de la turbulence est conditionnée par le nombre de Reynolds Re de l'écoulement, défini par

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (4.12)$$

en notant U et L des échelles caractéristiques de vitesse et de longueur, respectivement. En effet, plus le nombre de Reynolds est élevé, plus les échelles qu'il est nécessaire de résoudre dans une DNS sont petites, ce qui limite fortement les nombres de Reynolds que l'on peut obtenir dans de telles simulations à une résolution spatiale donnée. Ces petites échelles n'étant pas résolues dans une LES, le nombre de Reynolds n'est donc virtuellement plus limité par la résolution spatiale, ce qui permet de réaliser des simulations à plus haut nombre de Reynolds qu'une DNS pour un temps de calcul équivalent.

En dépit de cet intérêt indéniable, les LES ne sont encore utilisées que de manière marginale en physique stellaire, une des raisons étant le manque de modèles de sous-maille adaptés aux spécificités du fluide stellaire, qui est un plasma compressible à grande diffusivité thermique. Dans un contexte géophysique, [Kaltenbach et al. \(1994\)](#) comparent les résultats issus de LES à ceux de DNS équivalentes et montrent que les deux types de simulations donnent des résultats équivalents dans une large gamme de paramètres. Malgré tout, quelques différences notables persistent, en particulier quand la stratification est importante.

Boîtes cisailantes Dans les simulations de turbulence homogène et isotrope, les méthodes numériques spectrales semblent appropriées. En revanche, dès lors que l'on introduit un écoulement moyen, il n'y a plus aucune raison de chercher des solutions périodiques dans la direction du cisaillement. Afin de pouvoir continuer à utiliser les méthodes spectrales y compris dans cette direction, l'idée utilisée initialement par [Rogallo \(1981\)](#) est d'adopter un point de vue pseudo-lagrangien dans lequel le domaine de simulation suit le cisaillement moyen.

Pour cela, le champ de vitesse est décomposé en le cisaillement moyen d'un côté, et les fluctuations de l'autre. Typiquement :

$$\vec{v} = \vec{U}(z) + \vec{v}' = Sz\vec{e}_y + \vec{v}', \quad (4.13)$$

en notant $\vec{e}_y$ le vecteur unitaire pointant dans la direction y . L'équation (4.2) devient par exemple

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + Sz \frac{\partial \vec{v}'}{\partial y} + Sv'_z \vec{e}_y + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}'. \quad (4.14)$$

On effectue alors le changement de coordonnées

$$y \rightarrow y - Szt, \quad (4.15)$$

afin de se placer dans un repère qui est déformé par le cisaillement moyen. Ce repère porte le nom de *shearing box*, c'est-à-dire « boîte cisailante ». En notant T , X , Y et Z les nouvelles coordonnées, on a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} - SZ \frac{\partial}{\partial Y}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z} - ST \frac{\partial}{\partial Y}, \quad (4.17)$$

ce qui modifie les équations de l'écoulement. À titre d'exemple, l'équation (4.14) s'écrit dans le nouveau repère

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial T} + Sv'_z \vec{e}_y + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' - ST v'_z \frac{\partial \vec{v}'}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho} \left(\vec{\nabla} p - ST \frac{\partial p}{\partial Y} \right) + \nu \left[\Delta \vec{v}' - 2ST \frac{\partial^2 \vec{v}'}{\partial Y \partial Z} + (ST)^2 \frac{\partial^2 \vec{v}'}{\partial Y^2} \right]. \quad (4.18)$$

Ces équations peuvent ensuite être résolues pour les fluctuations par des méthodes spectrales.

Depuis Rogallo (1981), cette technique est couramment utilisée dans des simulations de turbulence cisailée (voir par exemple Rogers & Moin, 1987; Rogers *et al.*, 1989; Pumir, 1996; Sawford & Yeung, 2001; Gualtieri *et al.*, 2002; Ishihara *et al.*, 2002) y compris dans le cas stratifié (Holt *et al.*, 1992; Jacobitz *et al.*, 1997; Hirabayashi & Sato, 2010; Chung & Matheou, 2012). Bien qu'il paraisse justifié de suivre le cisaillement moyen, cela a pour conséquence que le domaine de simulation se déforme de plus en plus, ce qui aboutit à un problème numérique : certains modes résolus dans les simulations finissent par ne plus être pertinents pour la physique du problème tandis que des modes pertinents ne sont au contraire plus résolus. Pour remédier à ce problème, une technique de remaillage utilisant la périodicité doit être appliquée à intervalles réguliers afin de redresser la boîte, ce qui a plusieurs effets négatifs. D'une part, la procédure en elle-même introduit des erreurs d'interpolation. D'autre part, certains modes présents dans la boîte avant le remaillage peuvent se retrouver après le remaillage avec des nombres d'ondes trop élevés et sont alors éliminés, engendrant ainsi une perte d'énergie de l'écoulement. Pour limiter cet effet, des simulations récentes ont été réalisées en remaillant après chaque pas de temps (Hirabayashi & Sato, 2010; Chung & Matheou, 2012).

D'autres simulations existent cependant où le cisaillement est pris en compte tout en gardant une boîte cartésienne indéformable, soit en résolvant des équations pour les perturbations du type de (4.14) en présence de champs moyens (Gerz *et al.*, 1989; Kaltenbach *et al.*, 1994), soit en

résolvant directement les équations pour les champs complets (Schumacher & Eckhardt, 2000; Schumacher, 2001, 2004). Plus récemment, Brucker *et al.* (2007) ont proposé un algorithme permettant de tirer parti des méthodes spectrales tout en évitant de devoir remailler le domaine de simulation régulièrement. Le principe est de modifier la transformée de Fourier afin de prendre en compte la périodicité par rapport au cisaillement.

4.1.3 Forçage, conditions aux limites et conditions initiales

Quelles que soient les équations que l'on ait à résoudre et les paramètres physiques utilisés, le résultat final obtenu peut dépendre d'autres facteurs que sont le forçage, les conditions aux limites de l'écoulement où encore les conditions initiales. Comme nous allons le voir maintenant, ces facteurs peuvent parfois avoir une influence considérable sur la vigueur de la turbulence, la forme de l'écoulement, *etc.*

Forçage Le forçage désigne la manière dont de l'énergie est injectée dans l'écoulement pour nourrir la turbulence. Dans le cas de la turbulence homogène et isotrope, il est nécessaire d'introduire artificiellement des fluctuations (Yeung & Pope, 1989; Brethouwer *et al.*, 2003; Schumacher *et al.*, 2005) pour que la turbulence ne meure pas au bout d'un certain temps (Riley & Patterson, 1974). Au contraire, dans les écoulements cisailés, le cisaillement lui-même peut-être considéré comme le forçage. Il faut donc s'assurer que le cisaillement reste constant au cours du temps.

Dans les approches où le cisaillement moyen est directement fixé dans les équations (*cf.* § 4.1.2), aucun forçage n'est *a priori* nécessaire pour maintenir le cisaillement. Dans les autres approches, le cisaillement a tendance à disparaître s'il n'est pas régénéré régulièrement. C'est le cas notamment de Schumacher & Eckhardt (2000) et Schumacher (2001, 2004), qui appliquent à l'écoulement une force volumique calculée à chaque pas de temps de façon à ce que le profil moyen de vitesse soit maintenu constant. Schumacher & Eckhardt (2000) suggèrent qu'il serait plus facile d'atteindre un état stationnaire avec leur technique, arguant que les fluctuations de l'énergie turbulente qu'ils obtiennent sont de moindre amplitude que celles observées dans des simulations utilisant une boîte cisailante avec la procédure de remaillage.

Il est à noter que Schumacher (2004) ajoute à ce forçage moyen un terme aléatoire censé induire un effet similaire à celui d'une grille au travers de laquelle passerait l'écoulement afin d'augmenter artificiellement l'amplitude des fluctuations et donc le nombre de Reynolds turbulent pour un cisaillement donné.

Conditions aux limites Les conditions aux limites appliquées aux bords du domaine de simulation sont comme le forçage fortement liées aux méthodes numériques utilisées. Par exemple, l'emploi dans des codes numériques de méthodes spectrales qui donnent des solutions périodiques des équations conduit naturellement à appliquer des conditions aux limites périodiques. Ainsi, puisque les simulations numériques dans une boîte cisailante permettent d'utiliser des méthodes spectrales dans les trois directions de l'espace, les conditions aux limites peuvent être également périodiques dans les trois directions.

Pour les simulations telles que Gerz *et al.* (1989) et Kaltenbach *et al.* (1994) où l'effet du cisaillement moyen est inclus dans les équations, les conditions aux limites doivent porter sur les fluctuations. Un type de conditions aux limites particulier, décrit notamment par Schumann (1985), permet de faire en sorte que ces fluctuations soient périodiques par rapport au cisaillement (*shear-periodic* en anglais), comme l'illustre la figure 4.1.

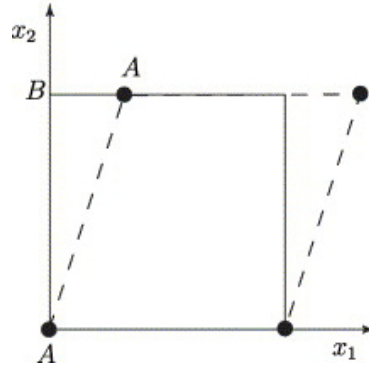


FIGURE 4.1 – Schéma explicatif des conditions aux limites périodiques par rapport au cisaillement (tiré de [Brucker et al., 2007](#)). Les conditions aux limites s’appliquent aux points noirs, qui sont tous équivalents.

Considérons maintenant les conditions aux limites utilisées par [Schumacher & Eckhardt \(2000\)](#) et [Schumacher \(2001, 2004\)](#). Alors que dans les directions horizontales des conditions périodiques sont imposées comme pour la majorité des autres simulations, les conditions aux limites verticales sont particulières. La vitesse verticale est fixée à zéro aux bords du domaine, ce qui correspond à une surface impénétrable. En ce qui concerne les vitesses horizontales, des conditions de glissement libre sont utilisées. Pour résumer, on a

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad (4.19)$$

$$v_z = 0. \quad (4.20)$$

Fait important, la condition sur v_y est incompatible avec la présence d’un cisaillement moyen uniforme. C’est pourquoi les auteurs ont choisi un cisaillement moyen quasiment uniforme excepté aux bords du domaine où il s’annule pour vérifier la condition aux limites en question. Il en résulte que la turbulence n’est pas rigoureusement homogène. Une couche limite se forme en effet près des bords. Au fur et à mesure que l’on s’en éloigne, l’écoulement retrouve son caractère homogène.

Conditions initiales Un écoulement visqueux présentant un profil de cisaillement linéaire est stable vis-à-vis des petites perturbations. Cela signifie que le cisaillement ne suffit pas à déclencher la turbulence. En revanche, le même écoulement est instable vis-à-vis de certaines perturbations d’amplitude finie. Il est donc nécessaire de générer de telles perturbations pour servir de conditions initiales aux codes de simulations numériques. Les conditions initiales peuvent également servir à paramétrer l’évolution future de l’écoulement en fonction d’éventuels paramètres de ces conditions initiales. Prenons l’exemple d’un champ de vitesse dont le spectre d’énergie cinétique turbulente présente un pic, comme celui proposé par [Schumann \(1985\)](#) :

$$E(k) = E_0 k^4 e^{-2(k/k_0)^2}, \quad (4.21)$$

où k désigne la norme du vecteur d’onde et k_0 la position du pic dans le spectre. Faire varier k_0 peut servir à obtenir des valeurs initiales différentes pour certains paramètres physiques.

Autant il est relativement aisé de générer des conditions initiales pour un écoulement incompressible, isotrope et homogène avec un spectre en énergie donnée (Orszag, 1969, par exemple), autant cela est plus compliqué lorsque l'écoulement est anisotrope. La méthode la plus répandue est d'utiliser malgré tout des conditions initiales isotropes. Étant donné que les champs ainsi générés ne sont pas adaptés au type d'écoulement considéré, il en résulte un temps de relaxation pendant lequel l'énergie cinétique turbulente décroît avant de croître pour atteindre un état de turbulence développée (Gerz *et al.*, 1989; Holt *et al.*, 1992). Cet état transitoire peut gêner la paramétrisation de l'écoulement en fonction des conditions initiales dans le sens où la valeur des paramètres physiques obtenue initialement n'est pas représentative de la valeur une fois l'état transitoire terminé.

Pour y remédier, Jacobitz *et al.* (1997) ont déduit de l'étude du spectre de simulations calculé juste après le régime transitoire la formule suivante pour le spectre initial :

$$E(k) = E_0 k^2 e^{-2k/k_0}, \quad (4.22)$$

ce qui a pour effet d'atténuer le régime transitoire et ainsi d'améliorer la paramétrisation par rapport à d'autres formes de spectre comme

$$E(k) = \begin{cases} E_0 & \text{si } k_1 < k < k_2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.23)$$

utilisée notamment par Holt *et al.* (1992), ou celle de l'équation (4.21), utilisée notamment par Sarkar (1995). Cela leur a permis d'étudier la dépendance de l'évolution de l'écoulement vis-à-vis de la valeur initiale de paramètres physiques comme le nombre de Reynolds de Taylor

$$Re_\lambda = \frac{q\lambda}{\nu}, \quad (4.24)$$

basé sur la vitesse quadratique moyenne q et l'échelle de Taylor λ vérifiant

$$\varepsilon = 5\nu \frac{q^2}{\lambda^2}, \quad (4.25)$$

en notant ε le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente, ainsi que le nombre de cisaillement SK/ε , en notant $K = q^2/2$ l'énergie cinétique turbulente par unité de masse.

4.2 Vers un test du modèle de Zahn

N'oublions pas notre but : contraindre le modèle de transport turbulent de Zahn (1974, 1992) à l'aide de simulations numériques. Il importe maintenant de recenser les avancées qui ont été faites dans ce sens, à commencer par la tentative de Brüggem & Hillebrandt (2001), qui ont étudié l'efficacité du mélange en fonction du nombre de Richardson

$$Ri = \left(\frac{N}{S} \right)^2 \quad (4.26)$$

comparant l'effet de la stratification et celui du cisaillement. L'inconvénient majeur de cette étude est qu'elle utilise le code ZEUS dont la viscosité et la diffusion thermique sont purement numériques et dépendent par conséquent de la résolution des simulations. Il n'est donc pas

possible de contrôler l'effet de la diffusion thermique sur la stratification, alors même qu'on s'attend à qu'il soit important dans les zones radiatives stellaires.

Une des hypothèses sous-tendant le modèle de Zahn est qu'un écoulement turbulent tend à se placer dans un état de stabilité marginale vis-à-vis de l'instabilité qui l'a généré. Un tel état de stabilité marginale se traduit logiquement par un état statistiquement stationnaire, c'est-à-dire tel que les propriétés statistiques de la turbulence sont stationnaires. Nous allons donc passer maintenant en revue les différentes méthodes qui existent pour atteindre un état statistiquement stationnaire dans des simulations de turbulence cisailée et stratifiée (§ 4.2.1) avant de nous intéresser au § 4.2.2 à la spécificité du domaine des petits nombres de Péclet, dans lequel l'effet dynamique de la diffusion thermique devient prépondérant.

4.2.1 Obtention d'un état stationnaire

Holt *et al.* (1992) ont été parmi les premiers à étudier numériquement l'influence du nombre de Richardson sur l'évolution de l'écoulement. Ils ont ainsi montré l'existence d'un nombre de Richardson « stationnaire » Ri_s tel que l'énergie cinétique turbulent croît pour des valeurs inférieures du nombre de Richardson et décroît pour des valeurs supérieures. À la limite entre les deux régimes, c'est-à-dire à lorsque $Ri = Ri_s$, l'énergie cinétique turbulente varie autour d'une valeur moyenne. Il est important de préciser que les auteurs font la distinction entre ce nombre de Richardson stationnaire, qui est relativement éloigné de la valeur $1/4$ du critère de stabilité linéaire inviscide, et un nombre de Richardson « de transition », proche de cette valeur, qui sépare le domaine où la turbulence est dominée par le cisaillement de celui où elle est dominée par la stratification. Les auteurs se sont également intéressés à l'influence de certains paramètres sans dimension sur la valeur du nombre de Richardson stationnaire, montrant notamment que ce dernier augmente avec le nombre de Reynolds pour de faibles nombres de cisaillement.

Cette étude a ensuite été étendue par Jacobitz *et al.* (1997), qui ont confirmé l'existence de ce nombre de Richardson stationnaire et exploré une plus large gamme de paramètres. Notamment, ils ont montré que le nombre de Richardson stationnaire dépend du nombre de cisaillement $S^* = SK/\varepsilon$ initial de manière non monotone, comme on peut le voir sur la figure 4.2. En

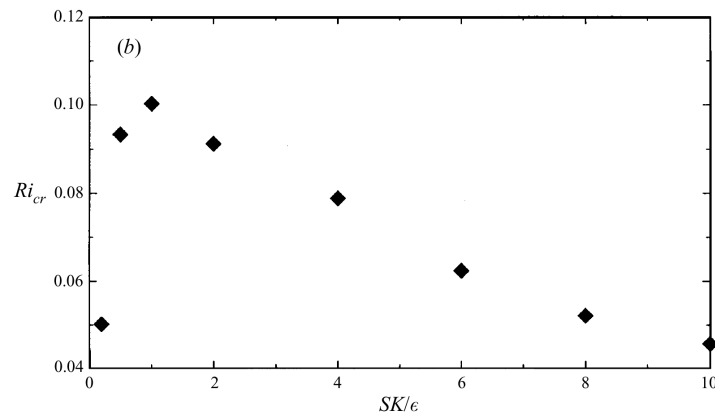


FIGURE 4.2 – Nombre de Richardson stationnaire en fonction du nombre de cisaillement initial pour un nombre de Reynolds initial $Re_\lambda = 22.36$ (Jacobitz *et al.*, 1997)

ce qui concerne l'influence du nombre de Reynolds, les auteurs ont estimé la valeur théorique

du nombre de Richardson stationnaire en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de cisaillement à partir de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente. À faible nombre de Reynolds, cette valeur croît linéairement avec le nombre de Reynolds, tandis qu'à nombre de Reynolds élevé, elle n'en dépend plus. Sur la figure 4.3, on observe en effet numériquement une croissance rapide suivie d'une décroissance lente (contrairement au résultat de [Holt et al. 1992](#)) qui semble mener à une valeur constante, indiquant qu'au delà d'une certaine valeur, le nombre de Reynolds n'a plus d'influence sur l'effet stabilisateur de la stratification.

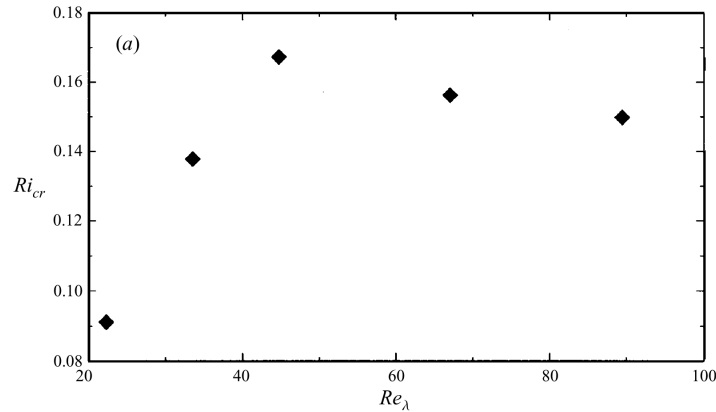


FIGURE 4.3 – Nombre de Richardson stationnaire en fonction du nombre de Reynolds initial pour un nombre de cisaillement initial $SK/\varepsilon = 2$ ([Jacobitz et al., 1997](#))

Plus récemment, [Hirabayashi & Sato \(2010\)](#) ont proposé une autre méthode pour atteindre un état stationnaire. En se fixant un taux de dissipation désiré ε_0 , ils calculent à chaque pas de temps, toujours à l'aide de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente, le taux de cisaillement à appliquer à l'écoulement pour que la dérivée de l'énergie cinétique turbulente en prenant ε_0 comme taux de dissipation s'annule. D'après [Chung & Matheou \(2012\)](#), cette méthode permet de s'affranchir de la dépendance de l'écoulement vis-à-vis des conditions initiales, en menant à un état statistiquement stationnaire caractérisé uniquement par le cisaillement moyen et le gradient de température (ou de densité) pour un taux de dissipation donné. Les simulations donnent alors accès à l'énergie cinétique turbulente, au nombre de Richardson et au nombre de cisaillement S^* moyens.

4.2.2 Domaine des petits nombres de Péclet

La plupart des simulations dont il a été question jusqu'ici ont été réalisées avec des nombres de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ de l'ordre de 1. Dans les étoiles, le nombre de Prandtl est typiquement de l'ordre de 10^{-6} . Une telle valeur est actuellement inaccessible aux simulations classiques. En effet, si l'on note ℓ l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence, le temps diffusif τ_κ s'écrit

$$\tau_\kappa = \frac{\ell^2}{\kappa}, \quad (4.27)$$

et devient très court par rapport au temps dynamique (de l'ordre de S^{-1}) quand la diffusivité thermique devient très grande. Cela impose de prendre un pas de temps numérique extrêmement

faible pour rendre compte des effets diffusifs, augmentant ainsi démesurément le temps de calcul nécessaire pour simuler des effets dynamiques.

L'importance de l'effet de la diffusion thermique sur la dynamique est caractérisée par le rapport entre le temps diffusif et le temps dynamique, qui définit le nombre de Péclet turbulent

$$Pe_\ell = \frac{S\ell^2}{\kappa}. \quad (4.28)$$

La version adimensionnalisée des équations (4.4) et (4.5) est

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + Ri\theta \vec{e}_z + \frac{1}{Re_\ell} \Delta \vec{v}, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \theta + v_z = \frac{1}{Pe_\ell} \Delta \theta, \quad (4.30)$$

en prenant $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ et respectivement comme échelle de temps, de longueur, de vitesse et de température S^{-1} , ℓ , $S\ell$ et $\ell dT_0/dz$, où $Re_\ell = S\ell^2/\nu$ désigne le nombre de Reynolds turbulent et $T_0(z)$ le profil moyen de température tel que $T = T_0 + \theta$. Lorsque le nombre de Péclet turbulent devient très petit, l'équation précédente de la température devient singulière. Pour s'en sortir, [Lignières \(1999\)](#) a proposé d'effectuer un développement limité des différentes variables par rapport au nombre de Péclet en se basant sur une approche similaire utilisée par [Thual \(1992\)](#) dans le cas de la convection à faible nombre de Prandtl. Dans les deux cas, on étudie les fluctuations de température par rapport à un profil moyen. Or, si dans les zones radiatives, les modifications du profil moyen de température dues au transport convectif sont négligeables, c'est loin d'être le cas pour la convection, où le profil moyen évolue vers un profil isentropique marginalement stable vis-à-vis de l'instabilité convective.

Revenons à notre cas et posons

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + Pe_\ell \vec{v}_1 + \dots, \quad (4.31)$$

$$p = p_0 + Pe_\ell p_1 + \dots, \quad (4.32)$$

$$\theta = \theta_0 + Pe_\ell \theta_1 + \dots, \quad (4.33)$$

où les $\vec{v}_i$, les p_i et les θ_i ne dépendent pas de Pe_ℓ . L'équation (4.30) entraîne $\theta_0 = 0$ et l'équation en θ_1 s'écrit

$$v_{0z} = \Delta \theta_1, \quad (4.34)$$

avec $\vec{v}_0$ qui vérifie

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = -\vec{\nabla} p_0 + RiPe_\ell \theta_1 \vec{e}_z + \frac{1}{Re_\ell} \Delta \vec{v}_0. \quad (4.35)$$

Le lecteur averti aura remarqué que le terme de poussée d'Archimède a été conservé, bien qu'il contienne du Pe_ℓ . La raison en est que si le nombre de Richardson reste fini quand le nombre de Péclet tend vers zéro, alors ce terme tend vers zéro également, ce qui a pour conséquence de supprimer toute rétroaction de la température sur le champ de vitesse. Tout se passe alors comme s'il n'y avait pas de stratification. Si au contraire le nombre de Richardson tend vers l'infini de telle façon que $RiPe_\ell$ tende vers une valeur finie, la poussée d'Archimède est du même ordre que les autres termes et doit donc être conservée. Cela montre que pour que la diffusion thermique joue un rôle dans la dynamique, il faut non seulement que $\tau_\kappa \ll S^{-1}$, mais également

que le temps caractéristique de la poussée d'Archimède $\tau_B = N^{-1}$ soit petit devant le temps dynamique.

Finalement, les équations à résoudre peuvent s'exprimer en fonction de $\psi = \theta/Pe_\ell$ et de $R_\ell = RiPe_\ell$, qui peut être appelé le nombre de Richardson-Péclet, conduisant à

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + R_\ell \psi \vec{e}_z + \frac{1}{Re_\ell} \Delta \vec{v}, \quad (4.36)$$

$$v_z = \Delta \psi. \quad (4.37)$$

On voit clairement que l'équation de la température n'est plus singulière quand le nombre de Péclet tend vers zéro. La contrainte numérique sur le pas de temps évoquée plus haut ne s'applique donc plus, permettant ainsi d'explorer un domaine de paramètres inaccessible jusqu'alors. De plus, l'effet de la stratification et celui de la diffusion thermique sont regroupés en un seul effet physique dont le temps caractéristique τ_R vaut (Lignières *et al.*, 1999)

$$\tau_R = \frac{\tau_B^2}{\tau_\kappa} = \frac{\kappa}{N^2 \ell^2}. \quad (4.38)$$

La stabilité de l'écoulement, précédemment déterminée par la valeur du nombre de Richardson en fonction du nombre de Péclet, est *a priori* déterminée désormais par celle du nombre de Richardson-Péclet, ce qui est compatible avec l'hypothèse de Zahn (1974). La validité mathématique de cette approximation, et en particulier sa compatibilité avec l'approximation de Boussinesq, a été étudiée par Feireisl & Novotný (2010). L'approximation précédente, appelée « approximation des petits nombres de Péclet » ou APNP (SPNA en anglais, pour *small-Péclet-number approximation*), a été validée dans le cas de la stabilité linéaire (Lignières *et al.*, 1999) où il a été constaté qu'elle fournit une bonne approximation dès $Pe \sim 10^{-1}$. En revanche, elle n'avait jamais été appliquée à un problème non-linéaire comme cela a été le cas durant cette thèse.

III

Résultats

5

Travaux préliminaires

“The most exciting phrase to hear in science, the one that heralds new discoveries, is not ‘Eureka’ (I found it) but rather, ‘Hmm... that’s funny...’ ”

« La phrase la plus excitante à entendre en science, celle qui annonce de nouvelles découvertes, n’est pas “*Eurêka*” (j’ai trouvé), mais plutôt “Tiens, c’est marrant...” »

Isaac ASIMOV

Sommaire

5.1 Détermination des paramètres optimaux	60
5.1.1 Description du code numérique utilisé	60
5.1.2 Taux de croissance en fonction des conditions initiales	62
5.1.3 Nombre de Richardson stationnaire	66
5.1.4 Dimensions du domaine numérique	66
5.2 Comparaison entre approches lagrangienne et eulérienne	70
5.2.1 Suivi de particules fluides	70
5.2.2 Diffusion d’un profil gaussien de température	72
5.2.3 Approche du gradient moyen	74

Avant d’être capable de réaliser des simulations numériques fiables et pertinentes pour étudier un phénomène donné comme le transport, un long travail en amont est nécessaire. Cela est particulièrement important pour les simulations numériques de grande ampleur, gourmandes en temps de calcul. Il convient donc de bien réfléchir à ce que l’on cherche à observer et aux méthodes d’analyse à utiliser, au risque sinon d’obtenir des simulations inexploitable. La première étape est la prise en main du code numérique, dans le but de connaître aussi bien ses capacités que ses limites. En particulier, la compréhension de l’influence des différents paramètres d’entrée — les paramètres physiques, mais aussi les paramètres numériques — sur le déroulement des simulations est un élément indispensable au dépouillement des résultats de ces simulations. Nous aborderons tout ceci au § 5.1. Ensuite, différentes méthodes d’étude du transport sont possibles et complémentaires. On distingue les méthodes lagrangiennes et les méthodes eulériennes. Ces méthodes doivent être testées et validées sur des cas simples avant de pouvoir être appliquées au problème complet. Au § 5.2, nous présenterons donc les différentes approches utilisées pour étudier le transport turbulent dans nos simulations.

5.1 Détermination des paramètres optimaux

De manière générale, un phénomène physique comme le transport turbulent peut ne se produire que dans un certain domaine de paramètres physiques et être absent en dehors. Si l'on veut observer ce phénomène, il faut donc déterminer préalablement dans quel domaine il a le plus de chances de se produire et s'y placer. En pratique, il convient également de prendre en compte les contraintes numériques, notamment sur le pas de temps maximal utilisable à une résolution spatiale donnée, associées au choix des paramètres physiques tels que le nombre de Péclet ou le nombre de Reynolds. De telles contraintes peuvent limiter considérablement le domaine de paramètres physiques accessible aux simulations numériques, comme nous l'avons vu pour le nombre de Péclet au § 4.2.2. Il est donc souvent nécessaire de trouver un compromis entre le domaine de paramètres physiques qui nous intéresse et celui qui est à notre portée avec les moyens de calcul actuels. Nous allons commencer par décrire au § 5.1.1 le code numérique avec lequel ont été réalisées les simulations numériques utilisées pour étudier le transport turbulent. Nous examinerons ensuite l'influence des conditions initiales sur le taux de croissance de l'énergie cinétique turbulente au § 5.1.2. La méthode d'obtention d'un état statistiquement stationnaire sera présentée au § 5.1.3 et nous terminerons au § 5.1.4 par la détermination des dimensions du domaine numérique et de la résolution nécessaires pour notre étude.

5.1.1 Description du code numérique utilisé

Le code numérique que nous avons utilisé pour réaliser nos simulations se nomme Balaïtous. Initialement développé par F. Califano et A. Mangeney, il a ensuite été maintenu et développé par F. Lignières puis par F. Rincon, en particulier pour sa version compressible. Il s'agit d'un code versatile, dans le sens où il permet de résoudre différents problèmes hydrodynamiques ou magnétohydrodynamiques, qu'il s'agisse de l'étude de mécanismes de dynamo, de la convection, de la double diffusion, *etc.*, aussi bien en incompressible que dans l'approximation de Boussinesq ou même complètement compressible.

Aspects numériques Balaïtous résout les équations fluides dans un domaine cartésien à géométrie plane parallèle. Dans la direction verticale, la méthode de discrétisation utilisée est basée sur les différences finies compactes, qui offrent une précision quasi-spectrale tout en étant moins coûteuses en temps de calcul que les méthodes spectrales à résolution égale (Lele, 1992). L'intérêt principal des différences finies est de pouvoir se passer des conditions aux limites périodiques, qui ne sont pas physiques. Dans les deux directions horizontales, le domaine est discrétisé dans l'espace de Fourier à l'aide de l'algorithme FFTW. L'avancement en temps est assuré par un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 à pas fixe. En raison de la méthode numérique spectrale utilisée, le domaine numérique est périodique dans les directions horizontales. Dans la direction verticale, différentes conditions aux limites peuvent être imposées. Au choix de l'utilisateur, la valeur de chaque champ ou de sa dérivée peut être imposée, ou les deux peuvent être laissées libres.

Il a été choisi de résoudre les équations vérifiées par le champ de vitesse complet, c'est-à-dire comprenant à la fois l'écoulement moyen et les fluctuations autour de cet écoulement moyen, comme Schumacher & Eckhardt (2000), notamment. Il en est de même pour les autres champs éventuels comme la température. Les conditions aux limites choisies dans la direction verticale sont cependant quelque peu différentes de celles utilisées par ces auteurs. Plutôt que d'imposer

des conditions de glissement libre sur les limites inférieure et supérieure du domaine, nous avons décidé d'imposer le cisaillement moyen, c'est-à-dire, en prenant z la direction du cisaillement, y la direction du champ de vitesse moyen $U(z)\vec{e}_y$ et x la direction transverse, comme indiqué sur la figure 5.1,

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{dU}{dz}, \quad (5.2)$$

$$v_z = 0. \quad (5.3)$$

Ces conditions aux limites sont compatibles avec un cisaillement moyen constant y compris aux

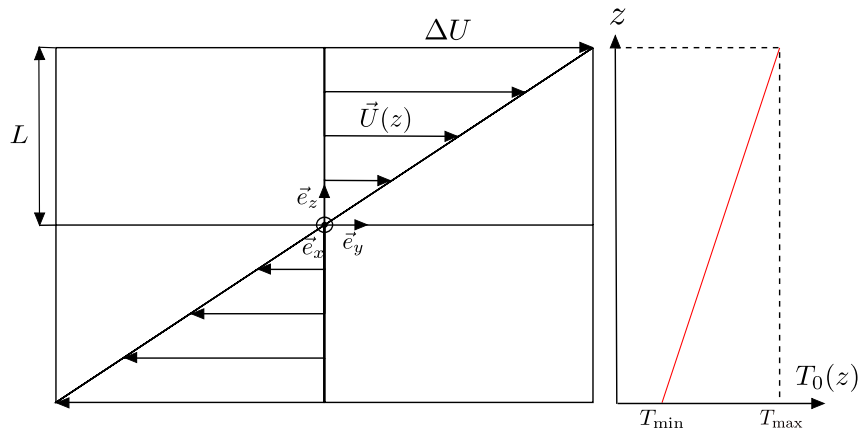


FIGURE 5.1 – Schéma de l'écoulement représentant le champ de vitesse moyen $U(z)\vec{e}_y$ et le profil moyen de température $T_0(z)$.

bornes du domaine. En ce qui concerne la température, nous avons imposé sa valeur aux bornes. Les profils moyens de vitesse et de température sont imposés à chaque pas de temps comme dans [Schumacher & Eckhardt \(2000\)](#).

Équations Le point de départ de la résolution numérique sont les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \alpha \theta g \vec{e}_z + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}_v, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \Delta T + f_T, \quad (5.6)$$

en notant $\vec{v}$, P , ρ , T , α , ν et κ la vitesse, la pression, la masse volumique, la température et le coefficient de dilatation thermique, la viscosité et la diffusivité thermique du fluide, $\theta = T - T_0$ l'écart de température par rapport au profil moyen $T_0(z)$, g l'intensité de la pesanteur et $\vec{f}_v$ et f_T les forçages du champ de vitesse et du champ de température, respectivement. Ces derniers

sont donnés par

$$\vec{f}_v = \frac{\vec{U}(z) - \bar{v}_y \vec{e}_y}{\Delta t}, \quad (5.7)$$

$$f_T = \frac{T_0(z) - \bar{T}}{\Delta t}, \quad (5.8)$$

où $\bar{v}_y$ désigne la moyenne horizontale de la composante de la vitesse parallèle à l'écoulement moyen, $\bar{T}$ celle de la température et Δt le pas de temps numérique. Dans le code, les grandeurs physiques sont adimensionnalisées en prenant comme grandeurs de référence la longueur L définie sur la figure 5.1, le temps de cisaillement défini comme $S^{-1} = (dU/dz)^{-1}$, la vitesse $\Delta U = SL$, la pression $\Delta U^2 \rho$ et la température $\Delta T = LdT_0/dz$. Les équations précédentes s'écrivent alors

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{v} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + Ri \tilde{\theta} \vec{e}_z + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} \tilde{v} + \tilde{f}_v, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = \frac{1}{Pe} \tilde{\Delta} \tilde{T} + \tilde{f}_T, \quad (5.11)$$

en notant les grandeurs adimensionnalisées avec un tilde, et où Ri , Re et Pe désignent respectivement le nombre de Richardson, le nombre de Reynolds et le nombre de Péclet définis par

$$Ri = \frac{\alpha g \Delta T}{S^2 L} = \left(\frac{N}{S} \right)^2, \quad (5.12)$$

$$Re = \frac{SL^2}{\nu}, \quad (5.13)$$

$$Pe = \frac{SL^2}{\kappa}, \quad (5.14)$$

où N désigne la fréquence de Brunt-Väisälä. Contrairement aux deux autres, l'équation de continuité (5.9) n'est pas résolue en tant que telle par le code numérique mais est utilisée pour éliminer le terme de pression de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.10).

En suivant la procédure décrite au § 4.2.2 pour se placer dans l'approximation des petits nombres de Péclet (Lignières, 1999), on obtient

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + Ri Pe \tilde{\psi} \vec{e}_z + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} \tilde{v} + \tilde{f}_v, \quad (5.15)$$

$$\tilde{v}_z = \Delta \tilde{\psi}, \quad (5.16)$$

où $\tilde{\psi} = \tilde{\theta}/Pe$. Concrètement, $\tilde{\psi}$ est calculé à chaque pas de temps grâce à l'équation de Poisson (5.16) et est utilisé pour déterminer le nouveau champ de vitesse. Nous disposons donc de deux jeux d'équations : les équations de Boussinesq complètes (5.10) et (5.11), et les équations aux petits nombres de Péclet (5.15) et (5.16).

5.1.2 Taux de croissance en fonction des conditions initiales

Nous avons déjà évoqué au § 4.1.3 le fait que les écoulements stratifiés de manière stable présentant un cisaillement moyen linéaire sont stables vis-à-vis des petites perturbations. Il est donc

nécessaire de disposer de conditions initiales présentant des perturbations d'amplitude finie. Comme l'on fait notamment [Holt et al. \(1992\)](#) et [Jacobitz et al. \(1997\)](#), nous partons pour le champ de vitesse de conditions initiales caractérisées par une forme de spectre et une amplitude et générées à l'aide de la méthode décrite par [Orszag \(1969\)](#). La forme du spectre d'énergie cinétique turbulente est celle proposée par [Jacobitz et al. \(1997\)](#) et donnée par l'équation (4.22). Ces perturbations sont superposées initialement au champ moyen. Le champ de vitesse initial est à divergence nulle mais ne vérifie pas les équations de Navier-Stokes. Il y a donc initialement un ajustement de l'écoulement. En ce qui concerne la température, nous la fixons égale au profil moyen.

Il y a donc deux paramètres sur lesquels il est possible de jouer pour étudier l'effet des conditions initiales sur l'écoulement : la position k_0 du pic dans le spectre d'énergie cinétique turbulente $E(k)$, et l'amplitude des perturbations. Afin de travailler avec des paramètres sans dimension, nous avons introduit le nombre de Reynolds turbulent

$$Re_\ell = \frac{q\ell}{\nu} = Re\tilde{q}\tilde{\ell}, \quad (5.17)$$

ainsi que le nombre de cisaillement

$$S' = \frac{S\ell}{q} = \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{q}}, \quad (5.18)$$

basés sur l'échelle intégrale horizontale

$$\ell = 2\pi \frac{\int_0^{+\infty} \frac{E(k)}{k} dk}{\int_0^{+\infty} E(k) dk} \quad (5.19)$$

et l'échelle de vitesse turbulente $q = \sqrt{2E_K}$, en notant k la norme de la composante horizontale du vecteur d'onde et $E_K = (\vec{v} - \vec{U})^2/2$ l'énergie cinétique turbulente par unité de masse. La valeur initiale de q ne dépendant que de l'amplitude choisie pour les fluctuations initiales, contrairement à celle de ℓ , elle peut être ajustée pour obtenir une valeur fixe du nombre de Reynolds turbulent initial et ainsi étudier la dépendance vis-à-vis du nombre de cisaillement initial.

C'est ce que nous avons fait en réalisant tout d'abord de courtes simulations sans stratification ($Ri = 0$). Dans les premiers temps de l'écoulement, on observe juste après la décroissance due à la relaxation des conditions initiales que l'énergie cinétique turbulente croît de manière exponentielle. Il est donc possible de calculer le taux de croissance de l'énergie cinétique turbulente γ défini par

$$\gamma = \frac{1}{SE_K} \frac{dE_K}{dt}. \quad (5.20)$$

La figure 5.2 montre l'évolution du taux de croissance en fonction du nombre de cisaillement initial pour $Re_\ell(t=0) = 170$ et $Re_\ell(t=0) = 900$. Pour $Re_\ell(t=0) = 170$, le taux de croissance de l'énergie cinétique turbulente croît jusqu'à $S'(t=0) = 3,6$, décroît ensuite puis croît de nouveau à partir de $S'(t=0) = 7$. Tant que le nombre de cisaillement initial est plus petit que 7, cette évolution est en accord avec celle obtenue par [Jacobitz et al. \(1997\)](#), mais elle diffère considérablement au-delà (voir la figure 4.2, qui ne va que jusqu'à $S'(t=0) \sim S^*(t=0) = 10$). Dans le cas $Re_\ell(t=0) = 900$, la différence est encore plus flagrante, le taux de croissance présentant un léger pic autour de $S'(t=0) = 2,2$ puis croissant à partir de $S'(t=0) = 3,6$ avant de décroître légèrement à haut $S'(t=0)$.

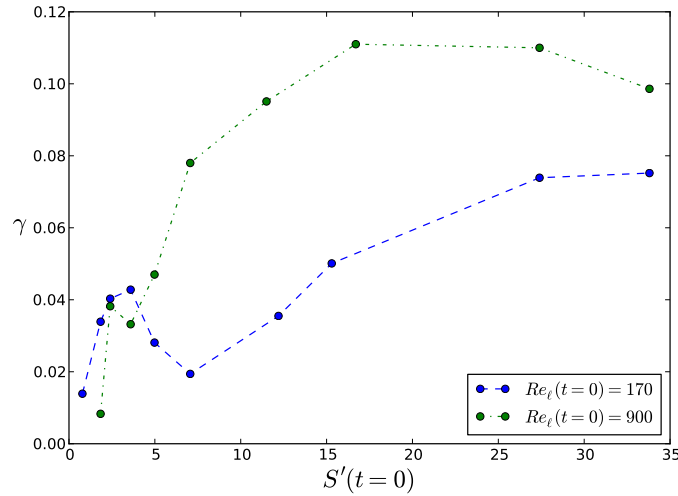


FIGURE 5.2 – Taux de croissance de l'énergie cinétique turbulente en fonction du nombre de cisaillement initial pour deux valeurs du nombre de Reynolds turbulent initial.

Mécanisme d'auto-entretien En explorant plus en détail les simulations à nombre de cisaillement élevé, il est apparu que les forts taux de croissance correspondent à des cas où de larges structures parallèles au champ de vitesse moyen apparaissent. À $Re_\ell(t=0) = 170$, les structures générées initialement disparaissent progressivement et ne réapparaissent pas, la turbulence ne parvenant pas à se maintenir. À $Re_\ell(t=0) = 900$, ces structures disparaissent également mais réapparaissent à intervalles réguliers. Cette périodicité est caractéristique d'un mécanisme d'auto-entretien de la turbulence, comme observé notamment par [Waleffe \(1997\)](#). Le fonctionnement d'un tel mécanisme, illustré sur la figure 5.3, est le suivant :

1. des stries longitudinales se forment dans l'écoulement par advection de l'écoulement moyen ;
2. une instabilité linéaire détruit les stries au profit de modes oscillants ;
3. ces modes génèrent à leur tour des rouleaux longitudinaux par des interactions non-linéaires ;
4. les rouleaux reforment les stries, et le cycle recommence.

De par sa nature cyclique, un tel mécanisme génère des fluctuations importantes de l'énergie cinétique turbulente. En revanche, il présente l'avantage d'être relativement insensible aux conditions aux limites ([Waleffe, 1997](#)) ainsi qu'à la taille du domaine numérique ([Yakhot, 2003](#)). Étant donné le caractère générique de ce mécanisme, nous avons considéré qu'il était préférable de se placer dans un tel régime.

Pour nous assurer que nous sommes bien en présence d'un mécanisme d'auto-entretien, nous avons calculé pour $Re_\ell(t=0) = 900$ l'évolution de l'intensité relative de différents modes au cours du temps. Sur la figure 5.4 est représentée l'intensité de deux modes horizontaux, un dans la direction de l'écoulement moyen correspondant aux rouleaux longitudinaux et un dans la direction transverse correspondant aux stries longitudinales. On y voit clairement que ces deux

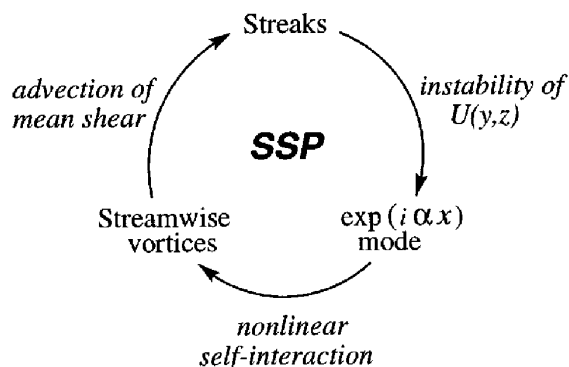
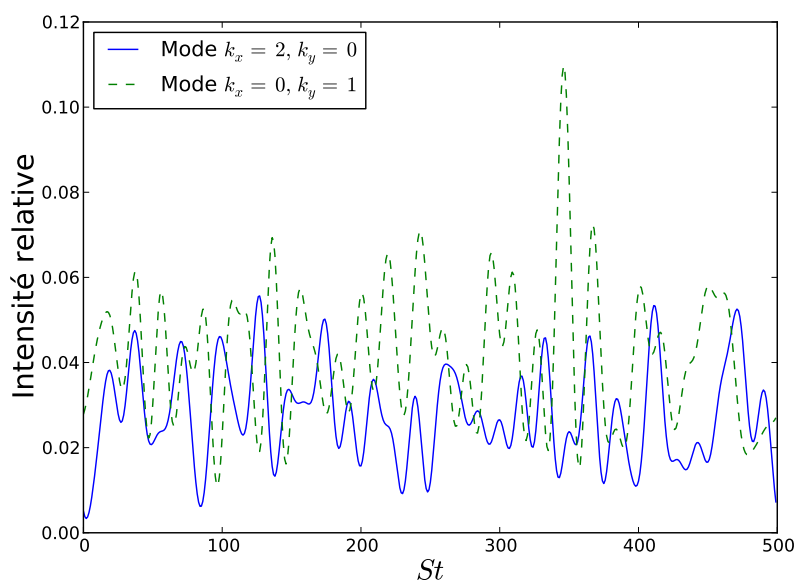


FIGURE 5.3 – Schéma du mécanisme d'auto-entretien (Waleffe, 1997).

FIGURE 5.4 – Intensité relative de deux modes horizontaux au cours du temps avec $S'(t=0) = 16,7$ et $Re_\ell(t=0) = 900$.

modes sont la plupart du temps en opposition de phase, démontrant l'existence d'un cycle entre les rouleaux et les stries, et donc d'un mécanisme d'auto-entretien.

Le taux de croissance de l'énergie cinétique turbulente nous renseigne sur l'instabilité des différentes configurations de l'écoulement. En faisant l'hypothèse que le transport turbulent est d'autant plus efficace que l'instabilité qui lui a donné naissance est forte, il paraît logique de se placer dans la configuration conduisant au taux de croissance de l'énergie cinétique turbulente maximal, en l'occurrence $S'(t=0) = 16,7$ et $Re_\ell(t=0) = 900$, ce que nous ferons par la suite. Il est à noter que S' et Re_ℓ évoluent par la suite vers des valeurs de l'ordre de 1 et entre 150 et 400, respectivement. Leur valeur initiale n'est donc pas représentative de leur valeur finale.

5.1.3 Nombre de Richardson stationnaire

Comme nous l'avons vu au § 3.2.2, la dérivation du modèle de Zahn repose en partie sur l'hypothèse qu'un écoulement turbulent tend vers un état statistiquement stationnaire. Dans l'optique de tester ce modèle, nous avons choisi de nous placer dans un tel état. Cela nous permet également de pouvoir étudier le mélange sur des temps longs et ainsi de disposer d'un échantillon statistique le plus grand possible. Pour obtenir un tel état stationnaire, nous avons déterminé le nombre de Richardson stationnaire pour chacune nos simulations.

La recherche de ce nombre est basée sur le principe essai/erreur, c'est-à-dire que plusieurs simulations avec des nombres de Richardson différents sont nécessaires. Afin de converger plus rapidement, nous avons établi une méthode permettant de déterminer une valeur approchée du nombre de Richardson stationnaire à chaque itération. L'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente (3.25) s'écrit sous sa forme adimensionnée

$$\frac{d\tilde{E}_K}{d\tilde{t}} = -\langle \tilde{v}'_y \tilde{v}'_z \rangle + Ri \langle \tilde{\theta} \tilde{v}'_z \rangle - \tilde{\varepsilon}_K. \quad (5.21)$$

En régime stationnaire, le terme de gauche s'annule en moyenne, et on peut donc exprimer le nombre de Richardson stationnaire en fonction des flux moyens et du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente :

$$Ri_s = \frac{\langle \tilde{v}'_y \tilde{v}'_z \rangle + \tilde{\varepsilon}_K}{\langle \tilde{\theta} \tilde{v}'_z \rangle}. \quad (5.22)$$

La valeur moyenne temporelle de ce nombre calculée pour une simulation donne une estimation qui sera utilisée comme valeur du nombre de Richardson dans la simulation suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne un état statistiquement stationnaire satisfaisant. En pratique, cette méthode n'est pas très précise du fait des fluctuations temporelles de l'écoulement, mais elle permet d'obtenir assez rapidement une valeur approchée suffisante du nombre de Richardson stationnaire. Comme illustré sur la figure 5.5, ce dernier correspond bien à une valeur critique en dessous de laquelle l'énergie cinétique turbulent croît et au dessus de laquelle celle-ci décroît, conformément à [Holt *et al.* \(1992\)](#) et [Jacobitz *et al.* \(1997\)](#).

Les résultats précédents peuvent être étendus au domaine des petits nombres de Péclet, pour lequel l'équation (5.21) devient

$$\frac{d\tilde{E}_K}{d\tilde{t}} = -\langle \tilde{v}'_y \tilde{v}'_z \rangle + RiPe \langle \tilde{\psi} \tilde{v}'_z \rangle - \tilde{\varepsilon}_K, \quad (5.23)$$

ce qui en régime stationnaire conduit à l'expression

$$(RiPe)_s = \frac{\langle \tilde{v}'_y \tilde{v}'_z \rangle + \tilde{\varepsilon}_K}{\langle \tilde{\psi} \tilde{v}'_z \rangle}. \quad (5.24)$$

Nous avons montré dans nos simulations qu'il existe bien un tel nombre de Richardson-Péclet stationnaire jouant le même rôle que le nombre de Richardson stationnaire dans le problème complet.

5.1.4 Dimensions du domaine numérique

La turbulence est un phénomène dont on ne peut décrire les propriétés que de manière statistique. De plus, pour qu'une analyse statistique soit fiable, il faut qu'elle porte sur un échantillon

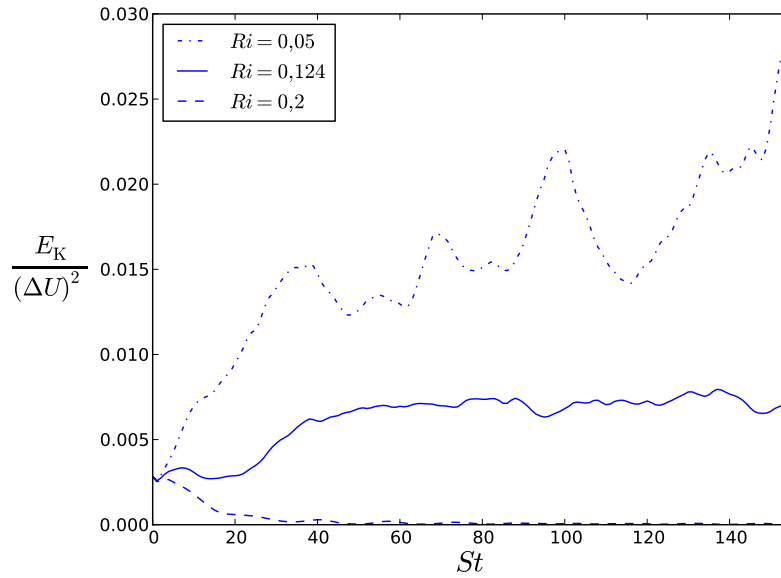


FIGURE 5.5 – Évolution temporelle de l'énergie cinétique turbulente pour trois valeurs du nombre de Richardson. Une fois le régime transitoire terminé, l'énergie cinétique turbulente reste statistiquement stationnaire pour $Ri = Ri_s = 0,124$, croît pour $Ri < Ri_s$ et décroît pour $Ri > Ri_s$.

suffisamment grand. Dans notre cas, le domaine de simulation doit donc contenir plusieurs des grandes structures qui font le transport pour que les résultats de nos simulations soient représentatifs du transport qui a lieu dans les zones radiatives stellaires. Plus le domaine numérique est grand, meilleure est la précision sur la détermination des résultats. En revanche, sa taille est limitée par les capacités de calcul disponibles. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre le nombre de structures présentes dans l'écoulement et le temps de calcul requis pour la résolution utilisée, ce qui peut parfois être difficile.

La taille horizontale des grandes structures qui effectuent le mélange est typiquement de l'ordre de l'échelle intégrale ℓ . Dans la direction verticale, on s'attend à ce que la stratification réduise la hauteur des structures, alors plus petite que ℓ . Les dimensions du domaine numérique doivent par conséquent être grandes devant l'échelle intégrale. Dans nos simulations, cette dernière est généralement comprise entre $0,21L$ et $0,33L$. Pour un domaine dont les dimensions sont $L_x = L_y = \pi L/2$ et $L_z = 2L$, cela correspond à entre 4 et 8 structures dans les directions horizontales et au moins 6 dans la direction verticale, ce qui semble suffisant. À titre d'exemple, la figure 5.6 représente les fluctuations de vitesse verticale et de température dans une coupe longitudinale du domaine numérique et montre qu'on a à peu près le nombre de structures prévu par l'estimation donnée par ℓ/L_y et ℓ/L_z .

En ce qui concerne la résolution numérique, celle-ci doit être suffisante pour pouvoir résoudre toutes les échelles de la turbulence jusqu'à l'échelle de dissipation visqueuse. Celle-ci peut-être estimée à l'aide de l'échelle de Kolmogorov η définie par

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon_K} \right)^{1/4}. \quad (5.25)$$

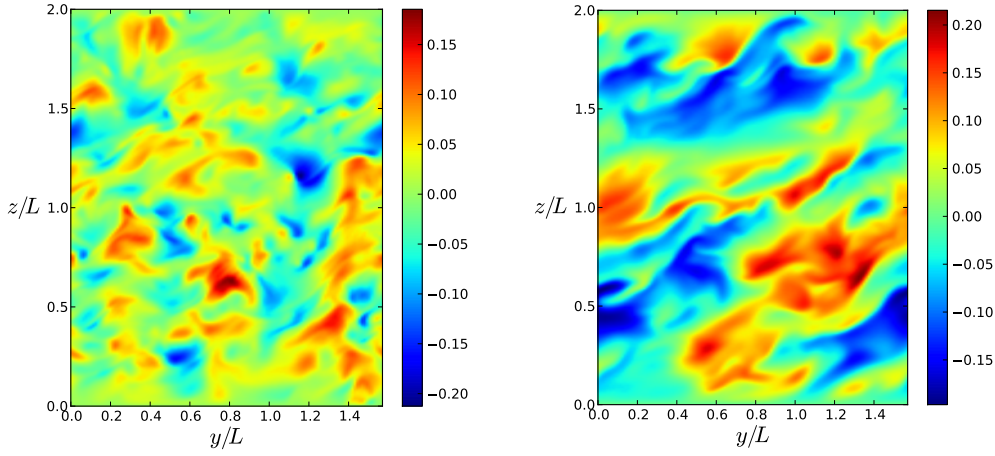


FIGURE 5.6 – Fluctuations de vitesse verticale (à gauche) et de température (à droite), normalisées respectivement par ΔU et ΔT , dans le plan yOz (coupe longitudinale). Les fluctuations de vitesses montrent des échelles plus petites que celles de température.

Dans le cadre de l'étude du transport turbulent dans un milieu homogène et isotrope, un critère communément accepté pour avoir des simulations bien résolues avec un code spectral est $k_{\max}\eta > 1$ (Eswaran & Pope, 1988), où $k_{\max}$ désigne le plus grand nombre d'onde significatif que l'on peut trouver, qui s'écrit

$$k_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3} N_p k_0, \quad (5.26)$$

en notant N_p le nombre de points dans chaque direction spectrale et k_0 le plus petit nombre d'onde présent dans la simulation tel que $L_h = 2\pi/k_0$. Le facteur $\sqrt{2}/3$ est dû au processus anti-repliement qui élimine les modes possédant des vecteurs d'onde trop grands. Dans notre cas, la configuration standard est $N_p = 128$ et $k_0 = 4/L$ dans les deux directions horizontales, ce qui nous donne un $k_{\max} \simeq 240/L$. Or, nous avons observé dans nos simulations que l'échelle de dissipation est toujours telle que $\eta/L > 4.2 \cdot 10^{-3}$, ce qui implique que $k_{\max}\eta > 1$. Nos simulations sont donc suffisamment résolues dans les directions horizontales. Ceci est confirmé par l'allure du spectre tracé sur la figure 5.7. On y voit que loin de l'échelle de dissipation, le spectre suit la loi classique de Kolmogorov en $k^{-5/3}$ puis chute rapidement aux échelles plus petites que l'échelle de dissipation de telle sorte que l'énergie cinétique turbulente cumulée à $k > k_{\max}$ ne représente généralement guère plus de quelques millièmes de l'énergie cinétique turbulente totale. Il en va de même du spectre d'énergie potentielle thermique $E_\theta(k)$ représenté sur la figure 5.8. La loi en $k^{-11/3}$ observée provient du fait que dans le domaine des petits nombres de Péclet, l'équation de Poisson (5.16) entraîne dans le domaine spectral

$$E(k) \sim k^2 E_\theta(k), \quad (5.27)$$

avec $E(k) \sim k^{-5/3}$. L'énergie potentielle cumulée à $k > k_{\max}$ est de l'ordre de 10^{-5} fois l'énergie potentielle totale. Des simulations réalisées à plus haute résolution (257×256^2) ont montré que le transport n'était pas affecté de manière significative (différence relative de l'ordre de 5 %), confirmant ainsi que la résolution utilisée est suffisante.

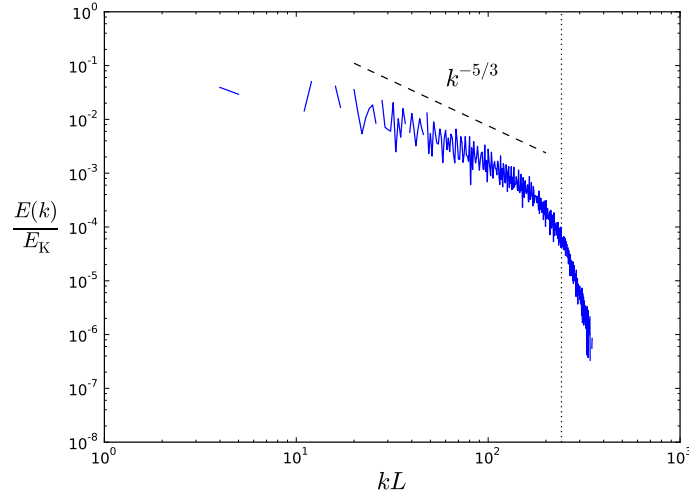


FIGURE 5.7 – Spectre horizontal de l'énergie cinétique turbulente. Le segment en tirets correspond à la loi classique en $k^{-5/3}$ de Kolmogorov et la droite en pointillés la limite $k = k_{\max}$.

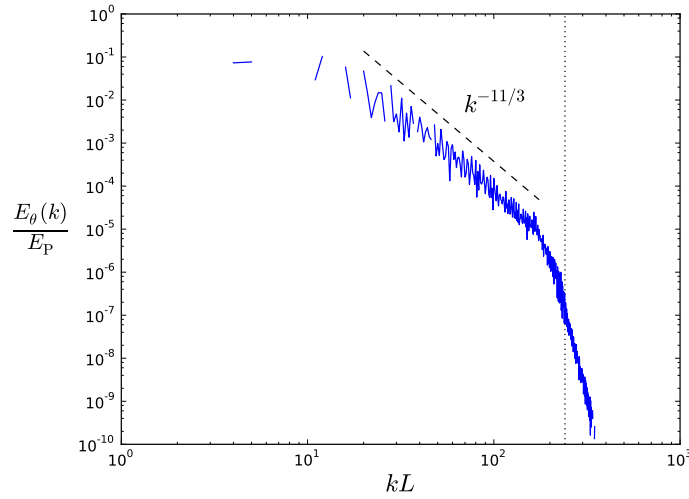


FIGURE 5.8 – Spectre horizontal de l'énergie potentielle thermique. Le segment en tirets correspond à une loi en $k^{-11/3}$ et la droite en pointillés la limite $k = k_{\max}$.

Pour nous assurer que nos simulations soient suffisamment résolues dans la direction verticale, nous avons choisi une résolution de 257 points pour une taille $L_z = 2L$. Bien qu'il n'existe pas de critère similaire à celui utilisé pour les méthodes spectrales dans le cas des différences finies compactes, celles-ci assurent une précision quasi-spectrale. Il n'est donc pas totalement dénué de sens d'appliquer malgré tout le critère précédent, ce qui donne un nombre d'onde maximal de l'ordre de $380/L$. Cette valeur présente une marge considérable par rapport à la valeur dans les directions horizontales. Pour résumer ce paragraphe, nos simulations ont en grande majorité

été réalisées avec une résolution de 257×128^2 pour un domaine numérique de rapport d'aspect $L_v/L_h = 4/\pi$. Dans cette configuration, un pas de temps numérique nécessite en moyenne 3 secondes de temps de calcul sur 16 processeurs.

5.2 Comparaison entre approches lagrangienne et eulérienne

Une fois un écoulement turbulent statistiquement stationnaire obtenu et caractérisé, il reste à étudier le transport lui-même. Pour cela, il existe plusieurs approches, comme nous l'avons entrevu au § 4.1.1. Parmi ces approches, nous en avons testé plusieurs afin de déterminer celle qui est la plus efficace. Nous commencerons par nous intéresser à l'approche lagrangienne qui consiste à suivre la trajectoire de particules soumises au champ de vitesse de l'écoulement au § 5.2.1. Nous décrirons ensuite au § 5.2.2 l'étude de l'élargissement d'un profil gaussien d'un champ eulérien de concentration. Enfin, nous présenterons au § 5.2.3 la méthode basée sur l'approximation du gradient moyen qui a été choisie pour la suite.

5.2.1 Suivi de particules fluides

Puisque la quantité transportée est ici considérée comme passive, c'est-à-dire sans rétroaction sur l'écoulement, il est possible d'étudier le transport en suivant le déplacement d'un certain nombre de particules au cours du temps sous l'effet du champ de vitesse. En raison des conditions aux limites particulières imposées aux bornes inférieure et supérieure du domaine, notre écoulement n'est pas rigoureusement homogène. Toutefois, comme pour [Schumacher & Eckhardt \(2000\)](#), l'homogénéité est dans les faits vérifiée loin de ces bornes. Cette homogénéité approchée combinée à la stationnarité statistique de l'écoulement est suffisante pour assurer l'homogénéité lagrangienne de la turbulence loin des bornes inférieure et supérieure du domaine. La théorie de [Taylor \(1921\)](#) présentée au § 3.1.1 est donc applicable. On en déduit que le transport est de type diffusif et le coefficient de transport turbulent D_t peut-être calculé soit en revenant à la définition grâce à la formule

$$D_t = \frac{\langle [z(t) - z(0)]^2 \rangle}{2t}, \quad (5.28)$$

soit en appliquant directement la relation

$$D_t = \int_0^{+\infty} \langle v_z(0)v_z(t) \rangle dt, \quad (5.29)$$

où $\langle \rangle$ désigne la moyenne sur les particules.

Dans le code Balaïtous, il a fallu implémenter le suivi des particules. Les particules n'étant pas nécessairement situées sur des points de la grille, où l'on connaît la vitesse, la vitesse des particules est calculée à chaque pas de temps à l'aide d'une interpolation linéaire de la vitesse aux huit points de grille les plus proches. La vitesse est ensuite intégrée au cours du temps avec le même algorithme de Runge-Kutta que celui utilisé pour les champs. Pour tester cette méthode d'intégration, nous avons placé des particules dans un champ de vitesse simple dans lequel les particules sont censées suivre des trajectoires circulaires. La figure 5.9 montre les trajectoires calculées numériquement. Ces trajectoires sont relativement circulaires et après un tour complet, leur rayon varie généralement de moins de 2 %. Cela montre que les erreurs liées aux interpolations du champ de vitesse sont acceptables.

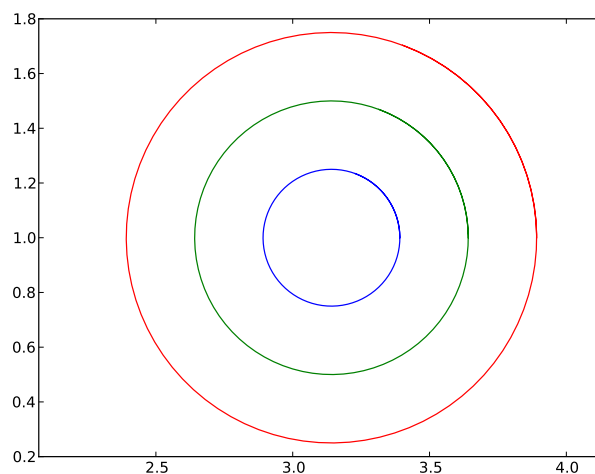


FIGURE 5.9 – Trajectoires de particules dans un champ de vitesse test

La figure 5.10 représente le déplacement quadratique moyen en fonction du temps issu d'une simulation. Il s'agit d'une fonction affine du temps pour les temps longs devant le temps de corrélation de la turbulence, conformément à la théorie de Taylor (1921). Le principal inconvénient

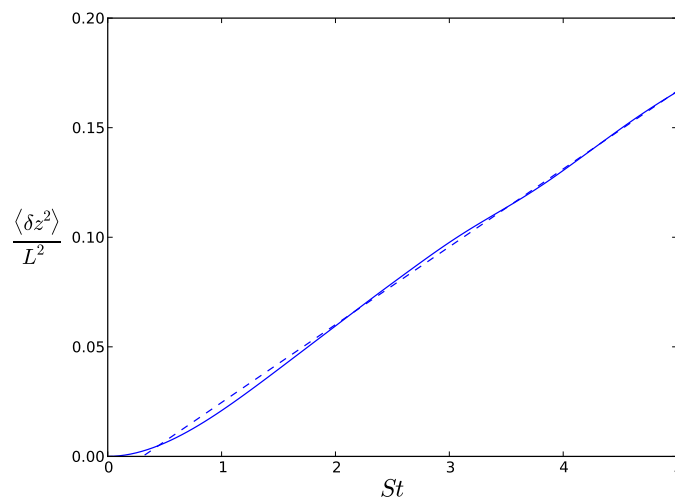


FIGURE 5.10 – Déplacement quadratique moyen des particules en fonction du temps. La courbe en trait plein correspond aux données de la simulation et la courbe en tirets à la régression linéaire dont la pente est le double du coefficient de diffusion turbulente.

de cette méthode est que le suivi des particules devient de moins en moins significatif au fur et à mesure que les particules se rapprochent des bords inférieur et supérieur du domaine. En effet, les mouvements verticaux étant moins importants du fait de la condition d'imperméabilité, les particules près des bords contribuent moins à la dispersion moyenne. On voit sur la figure 5.11

que la linéarité de la courbe du déplacement quadratique moyen en fonction du temps se dégrade progressivement au fil du temps. Il en résulte que le temps sur lequel on peut étudier le

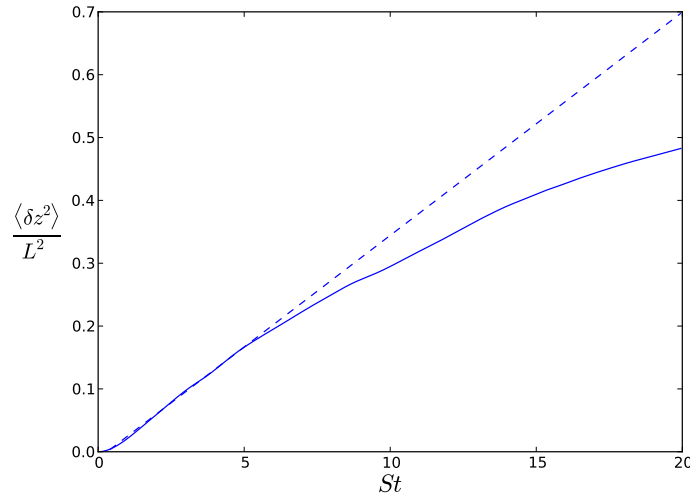


FIGURE 5.11 – Limite de l’approche lagrangienne. La légende est la même que la figure 5.10. La régression linéaire est de moins en moins fidèle aux données quand le temps augmente.

transport est limité, au maximum de l’ordre de la dizaine de temps de cisaillement. Ce temps est relativement court par rapport au temps caractéristique des variations temporelles de l’énergie cinétique turbulente, généralement de l’ordre de la cinquantaine de temps de cisaillement. L’amplitude de ces variations joue sur la précision avec laquelle on peut déterminer le coefficient de transport. Ici, on arrive à une précision relative qui peut atteindre 15 %.

5.2.2 Diffusion d’un profil gaussien de température

Pour éviter d’avoir à utiliser une approche lagrangienne, qui nécessite le suivi de particules et une analyse statistique potentiellement fastidieuse, une approche eulérienne semble être intéressante. Une telle approche consiste à ajouter aux équations aux différentes composantes de la vitesse et à la température un champ de concentration c qui vérifie une équation d’advection/diffusion telle que (4.9) dont la version adimensionnalisée est

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{c} = \frac{1}{Pe_c} \tilde{\Delta} \tilde{c}, \quad (5.30)$$

en notant Pe_c le nombre de Péclet chimique défini à l’aide de la diffusivité moléculaire D_m par

$$Pe_c = \frac{SL^2}{D_m}. \quad (5.31)$$

La première méthode eulérienne à être implémentée consiste à partir d’une condition initiale où l’élément chimique est concentré autour du plan $z = L$ et à mesurer l’élargissement au cours du temps du profil vertical moyen de concentration. En effet, du fait que le transport turbulent

peut être considéré comme diffusif, tout se passe en moyenne comme si le champ de concentration vérifiait

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{\text{eq}} \Delta c, \quad (5.32)$$

où $D_{\text{eq}} = D_m + D_t$ désigne la diffusivité équivalente. Une des propriétés de cette équation est qu'un profil initialement gaussien le reste au cours du temps. Cette propriété est illustrée par la figure 5.12 qui représente l'évolution d'un tel profil. En considérant un profil vertical moyen de

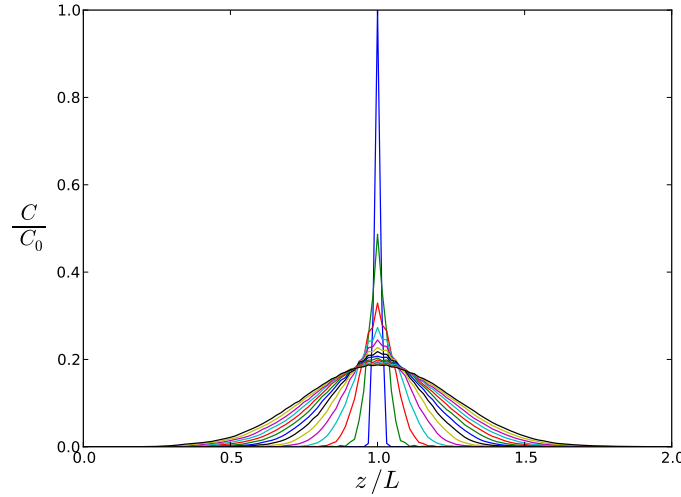


FIGURE 5.12 – Évolution temporelle du profil vertical moyen de concentration. Les différentes courbes représentent le profil vertical moyen à intervalles réguliers de $0,375S^{-1}$, de la plus étroite à la plus aplatie.

concentration C gaussien

$$C(z, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma(t)^2}}, \quad (5.33)$$

l'équation précédente conduit à la relation

$$D_{\text{eq}} = \sigma(t)\sigma'(t), \quad (5.34)$$

en notant $'$ la dérivée par rapport au temps. Cette relation peut se mettre sous la forme

$$\sigma(t)^2 = \sigma(0)^2 + 2D_{\text{eq}}t, \quad (5.35)$$

qui n'est pas sans rappeler l'équation (3.3) de la théorie lagrangienne. Comme dans l'approche lagrangienne du paragraphe précédent, on peut donc déterminer la valeur du coefficient de diffusion équivalent en effectuant une régression linéaire de σ^2 , comme l'illustre la figure 5.13.

La limitation temporelle évoquée au paragraphe précédent s'applique également à la présente approche, non pas à cause des conditions aux limites, mais du fait de la finitude de la dimension verticale du domaine. En effet, lorsque les ailes de la gaussienne atteignent les bords inférieur et supérieur du domaine, quelles que soient les conditions aux limites, la méthode ne fonctionne plus, le profil vertical moyen perdant sa forme gaussienne et évoluant peu à peu vers une distribution uniforme. Le temps de calcul est donc nécessairement limité, comme pour le suivi de

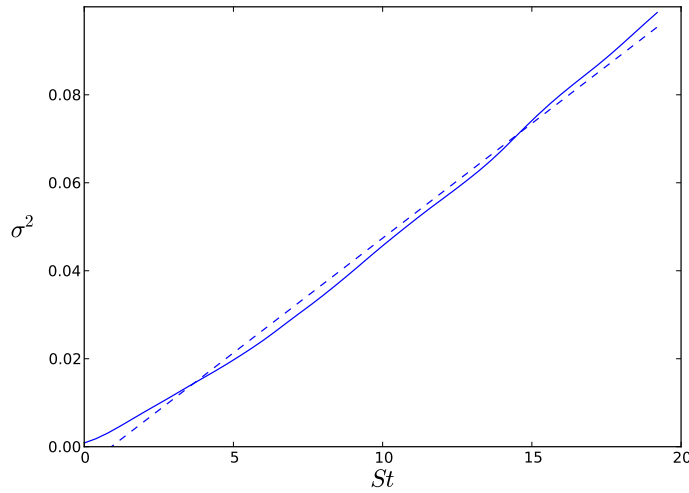


FIGURE 5.13 – Largeur quadratique du profil vertical moyen de concentration en fonction du temps. La courbe en trait plein correspond aux données et la courbe en tirets à la régression linéaire avec une pente de $2D_{\text{eq}} = 5,22 \cdot 10^{-3} SL^2$.

particules, limitant ainsi la précision. De plus, cette méthode ne permet de mesurer que la diffusion équivalente, qui contient non seulement la diffusion turbulente, mais également la diffusion moléculaire. Il importe donc de bien distinguer les deux effets, par exemple en choisissant une diffusivité moléculaire faible par rapport à la turbulente.

5.2.3 Approche du gradient moyen

Afin de se soustraire à la limitation temporelle inhérente aux deux approches précédentes, l'idée que nous avons finalement retenue est d'étudier le transport turbulent d'un champ de concentration présentant un gradient vertical moyen uniforme et stationnaire à l'aide de l'approximation du gradient moyen abordée au § 3.1.2. Cette approximation permet d'exprimer la diffusivité turbulente en fonction du flux vertical des fluctuations de concentration c' et du gradient moyen dC/dz :

$$D_t = -\frac{\langle c' v'_z \rangle}{dC/dz}. \quad (5.36)$$

Pour que le gradient moyen reste constant, nous avons choisi de l'imposer à chaque pas de temps comme pour le cisaillement et la température moyens à l'aide d'un terme de forçage $\tilde{f}_c$ qu'il est nécessaire d'ajouter à l'équation (5.30).

La comparaison des résultats obtenus par les trois méthodes présentées ici montre qu'ils sont généralement du même ordre de grandeur. Il peut cependant apparaître une dispersion significative (de l'ordre de 15 %) entre les différentes méthodes du fait des fluctuations temporelles de l'écoulement. De ce point de vue, le cas du gradient moyen de concentration se distingue des deux autres. En effet, du fait de la stationnarité statistique, il est possible de calculer le coefficient de diffusion turbulente sur des intervalles de temps grands devant l'échelle temporelle caractéristiques des variations de l'énergie cinétique turbulente. Les fluctuations temporelles de

l'écoulement sont alors moyennées, ce qui réduit considérablement l'incertitude sur le coefficient de transport par rapport aux deux premières méthodes. C'est donc naturellement cette méthode que nous avons retenue pour la suite et qui a servi à obtenir les résultats qui seront présentés dans le prochain chapitre.

6

Analyse des simulations numériques

« Plus on diminue le nombre des principes d’une science, plus on leur donne d’étendue, puisque, l’objet d’une science étant nécessairement déterminé, les principes appliqués à cet objet seront d’autant plus féconds qu’ils seront en plus petit nombre. »

Jean LE ROND D’ALEMBERT, *Discours préliminaire à l’Encyclopédie*, 1751.

Sommaire

6.1	Domaine des petits nombres de Péclet	77
6.1.1	Test du modèle de Zahn	78
6.1.2	Discussion	79
6.2	Domaine des grands nombres de Péclet	82
6.2.1	Comparaison avec Lindborg & Brethouwer (2008)	82
6.2.2	Comparaison avec Maeder (1995)	84
6.3	Effet dynamique de la stratification chimique	86
6.3.1	Test du modèle de Maeder & Meynet (1996)	87
6.3.2	Comparaison avec d’autres modèles	89

Une fois les paramètres optimaux choisis et les méthodes de post-traitement développées et testées, l’analyse des résultats des simulations numériques en vue de progresser dans la compréhension de la physique peut enfin commencer. Durant cette thèse, nous avons considéré le transport vertical des éléments chimiques par un écoulement turbulent cisailé et stratifié de façon stable statistiquement stationnaire. Nous avons étudié la dépendance du coefficient de transport vertical en fonction de deux paramètres physiques cruciaux que sont le nombre de Péclet turbulent et le nombre de Richardson chimique, qui mesure l’effet dynamique de la stratification de poids moléculaire. Nous présenterons tout d’abord au § 6.1 des simulations numériques dans le domaine des petits nombres de Péclet qui nous ont permis de tester le modèle de Zahn. Nous analyserons ensuite au § 6.2 comment évolue le coefficient de transport dans le domaine des grands nombres de Péclet. Nous étudierons finalement au § 6.3 la dépendance du transport par rapport à la stratification en poids moléculaire dans le domaine des petits nombres de Péclet.

6.1 Domaine des petits nombres de Péclet

Comme nous l’avons vu au § 3.2.2, le modèle de Zahn (1974, 1992) repose sur quatre hypothèses principales, que nous rappelons ici :

1. dans un état statistiquement stationnaire, l'écoulement turbulent moyen tend à se placer dans un état de stabilité marginale vis-à-vis de l'instabilité qui l'a généré ;
2. dans les conditions stellaires, la stabilité marginale d'un écoulement cisailé et stratifié de manière stable n'est plus donné par $Ri = Ri_c$, mais par $RiPe = Ri_c$, avec $Ri_c = 1/4$;
3. le nombre de Péclet pertinent à utiliser dans le critère précédent est le nombre de Péclet turbulent Pe_ℓ ;
4. le coefficient de transport est proportionnel à $u\ell$ où u et ℓ sont les échelles turbulentes de vitesse et de longueur.

Nous n'avons pas cherché à tester le fait que l'on ait un état statistiquement stationnaire. Au contraire, nous avons choisi de nous placer délibérément dans un tel état en ajustant systématiquement le nombre de Richardson (ou le nombre de Richardson-Péclet) de la manière décrite au § 5.1.3. L'écoulement moyen étant imposé à chaque pas de temps, il nous est également impossible de tester la première hypothèse. Nous allons dans un premier temps présenter les résultats des simulations et les conclusions que l'on peut en tirer sur le modèle de Zahn au § 6.1.1. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Astronomy & Astrophysics*, Prat & Lignières (2013), reproduite en annexe. Dans un second temps, nous tenterons au § 6.1.2 d'apporter un éclairage nouveau sur ce modèle en proposant une interprétation physique originale.

6.1.1 Test du modèle de Zahn

Pour étudier la dépendance du coefficient de diffusion turbulente vis-à-vis du nombre de Péclet turbulent, nous avons réalisé plusieurs simulations en résolvant les équations de Boussinesq complètes pour différentes valeurs du nombre de Péclet turbulent Pe_ℓ entre 0,34 et 437 en gardant un nombre de Reynolds numérique Re fixé à 10^4 . Une simulation dans l'approximation des petits nombres de Péclet (APNP) a également été réalisée. Les valeurs de différents paramètres physiques importants sont regroupés dans la table 6.1. Nous nous intéressons ici au domaine des petits nombres de Péclet (voir § 6.2 pour celui des grands nombres de Péclet). Le premier résultat remarquable est que la simulation à $Pe_\ell = 0,34$ et celle utilisant l'APNP sont très proches. En effet, le nombre de Richardson stationnaire multiplié par le nombre de Péclet turbulent $Pe_\ell = 0,34$ donne une valeur de 0,432 alors que dans l'APNP le nombre de Richardson-Péclet stationnaire $(RiPe_\ell)_s$ donne 0,427, soit une différence relative de seulement 1,2 %. Cela semble indiquer que conformément à l'hypothèse du modèle de Zahn, l'état de stabilité marginale est bien caractérisé par $(RiPe_\ell)_s$. De même, le nombre β défini comme

$$\beta = \frac{D_t}{q\ell}, \quad (6.1)$$

vaut 0,139 à $Pe_\ell = 0,34$ et 0,133 à petits nombres de Péclet, ce qui correspond à une différence relative de 4,4 %. Ce résultat montre que dans le domaine des petits nombres de Péclet, c'est-à-dire dès que $Pe_\ell \leq 0,34$, l'hypothèse $D_t \propto q\ell$ est compatible avec nos simulations.

Le coefficient de transport turbulent peut s'écrire, d'après la relation (6.1),

$$D_t = \beta q\ell, \quad (6.2)$$

Pe_ℓ	Re_ℓ	Ri_s	$(RiPe_\ell)_s$	Ri_sPe_ℓ	$\beta = D_t/(q\ell)$	$\varepsilon_P/(L^2S^{-3})$
$\ll 1$	336	—	0,427	—	0,133	$2,32 \cdot 10^{-4}$
0,34	340	1,27	—	0,432	0,139	$2,74 \cdot 10^{-4}$
0,54	272	1,17	—	0,636	0,110	$2,32 \cdot 10^{-4}$
0,72	241	1,07	—	0,773	$9,29 \cdot 10^{-2}$	$2,16 \cdot 10^{-4}$
0,90	150	1,10	—	0,990	$4,01 \cdot 10^{-2}$	$6,92 \cdot 10^{-5}$
2,29	191	0,497	—	1,14	$6,23 \cdot 10^{-2}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$
5,62	225	0,250	—	1,41	$7,76 \cdot 10^{-2}$	$2,10 \cdot 10^{-4}$
10,8	217	0,199	—	2,15	$7,03 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-4}$
24,4	244	0,15	—	3,65	$8,07 \cdot 10^{-2}$	$2,33 \cdot 10^{-4}$
52	260	0,124	—	6,45	0,104	$2,54 \cdot 10^{-4}$
152	304	0,10	—	15,2	0,109	$2,87 \cdot 10^{-4}$
437	437	$5,0 \cdot 10^{-2}$	—	21,9	0,151	$2,94 \cdot 10^{-4}$

TABLE 6.1 – Résultats des simulations à différents nombres de Péclet turbulents. Le nombre $(RiPe_\ell)_s$ est défini comme $(RiPe)_s Re_\ell / Re$.

où l'on peut faire apparaître le nombre de Péclet turbulent $Pe_\ell = q\ell/\kappa$:

$$D_t = \beta \kappa Pe_\ell. \quad (6.3)$$

Cette dernière équation peut aussi être mise sous la forme

$$\frac{D_t}{\kappa Ri^{-1}} = \beta RiPe_\ell. \quad (6.4)$$

Nous constatons dans les simulations que le membre de droite de l'équation précédente tend vers une valeur constante quand le nombre de Péclet devient petit, comme on peut le voir sur la figure 6.1. Cela prouve que le coefficient de diffusion turbulente est proportionnel au rapport entre la diffusivité thermique et le nombre de Richardson, conformément à Zahn (1992). On a finalement

$$D_t = \beta \kappa \frac{(RiPe_\ell)_s}{Ri} = \alpha \kappa Ri^{-1}, \quad (6.5)$$

en notant $\alpha = \beta(RiPe_\ell)_s$. De plus, le fait que les résultats de la simulation à $Pe_\ell = 0,34$ et de celle utilisant l'APNP soient proches montre que cette approximation est valide, y compris pour des nombres de Péclet qui ne sont pas très petits, confirmant ainsi le résultat de Lignières *et al.* (1999), obtenue dans le cas de la stabilité linéaire. L'APNP possède donc un grand domaine de validité.

6.1.2 Discussion

Nous allons ici proposer une interprétation alternative à celle utilisée par Zahn (1974, 1992), à partir du modèle de la longueur de mélange

$$D_t \sim S\ell^2. \quad (6.6)$$

Toute la difficulté est de déterminer l'échelle ℓ qui intervient dans cette relation. Pour y parvenir, il est possible d'utiliser la condition suivante : pour qu'il y ait de la turbulence et donc du

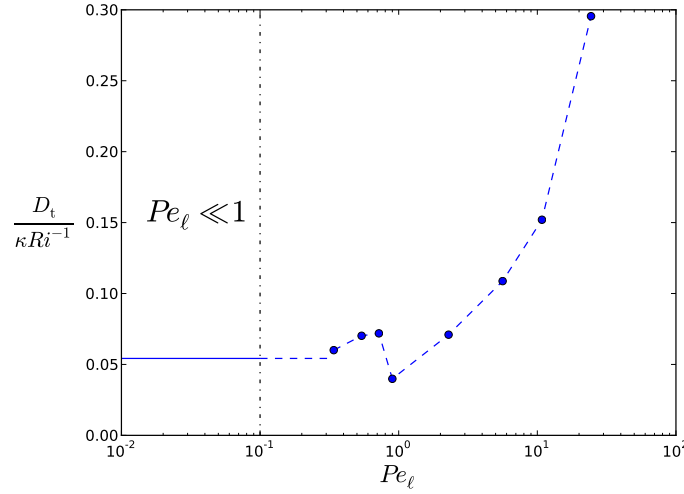


FIGURE 6.1 – $D_t/(\kappa Ri^{-1})$ en fonction du nombre de Péclet turbulent. Les simulations utilisant les équations de Boussinesq complètes sont représentées par les points. La ligne pleine correspond à la simulation à petits nombres de Péclet.

transport, il faut que le temps dynamique soit plus petit que l'échelle de temps caractéristique du processus qui tend à inhiber la dynamique, ici la poussée d'Archimède due à la stratification. Le transport étant plus efficace aux plus grandes échelles, nous considérerons la plus grande échelle permise par cette condition, c'est-à-dire celle que l'on obtient en égalisant ces deux temps caractéristiques. Le temps dynamique est de l'ordre de S^{-1} . Le temps caractérisant l'effet de la force d'Archimède dans le régime des petits nombres de Péclet est $\tau = \kappa/(N^2 \ell^2)$ (voir le § 4.2.2). On a donc

$$\frac{1}{S} \sim \frac{\kappa}{N^2 \ell^2}, \quad (6.7)$$

ce qui donne

$$\ell^2 \sim \frac{\kappa S}{N^2}. \quad (6.8)$$

Une fois cette expression reportée dans l'équation (6.6), on obtient bien le résultat escompté, à savoir

$$D_t \sim \frac{\kappa}{Ri}. \quad (6.9)$$

Nous verrons au § 6.2.2 qu'un tel raisonnement ne fonctionne pas dans le régime des grands nombres de Péclet.

Cette dérivation, basée sur des ordres de grandeur, se distingue de Zahn (1974, 1992) principalement par deux aspects. Le premier est que l'on n'utilise pas la condition de stabilité marginale mais, de manière plus ou moins équivalente, une égalité de temps caractéristiques. Le deuxième est que l'on n'a pas besoin d'introduire le nombre de Péclet turbulent dans la condition de stabilité marginale, l'effet de la diffusion thermique étant pris en compte dans le temps caractéristique de la poussée d'Archimède. À ce propos, nous avons évoqué au § 3.2.2 le fait que la diffusion thermique pouvait avoir deux effets sur les mouvements verticaux : un effet favorable lié à la diminution de l'amplitude de la force d'Archimède, mais également un effet inhibiteur

dû à la dissipation de l'énergie potentielle thermique. Alors que l'effet sur la poussée d'Archimède est pris en compte dans la dérivation précédente, l'effet dissipatif ne semble pas intervenir. Ceci peut s'expliquer par le fait que lorsque l'on augmente la diffusivité thermique, on finit par atteindre un régime où toute l'énergie cinétique turbulente convertie en énergie potentielle est instantanément perdue par diffusion thermique. Cette propriété est rigoureusement vérifiée dans le régime où l'APNP est valide, comme l'a montré [Lignières \(1999\)](#). Dès lors, augmenter encore la diffusivité thermique ne permet pas de dissiper plus tandis que l'amplitude de la poussée d'Archimède continue à diminuer. L'effet résultant est de favoriser les mouvements verticaux, et donc d'augmenter l'efficacité du transport turbulent.

Il existe encore une autre manière moins directe de retrouver la forme du coefficient de transport permettant de le relier à la théorie de Taylor (§ 3.1.1). Le résultat principal de cette théorie est que le coefficient de diffusion turbulente peut s'écrire

$$D_t = v_z^2 \tau_L, \quad (6.10)$$

où v_z désigne la vitesse verticale quadratique moyenne et τ_L le temps de corrélation lagrangien, caractéristique de la turbulence. Supposons que l'on puisse identifier — au moins en ordre de grandeur — ce temps au temps caractéristique de la poussée d'Archimède modifiée par la diffusion thermique :

$$\tau_L \sim \frac{\kappa}{N^2 \ell^2}. \quad (6.11)$$

En prenant comme échelle de longueur l'échelle de Corrsin

$$\ell_C = \left(\frac{\varepsilon_K}{S^3} \right)^{1/2}, \quad (6.12)$$

en dessous de laquelle l'anisotropie due au cisaillement ne se fait plus sentir, on obtient

$$\tau_L \sim \frac{\kappa S^3}{N^2 \varepsilon_K}. \quad (6.13)$$

En suivant [Hunt *et al.* \(1988\)](#) et [Schumann & Gerz \(1995\)](#), on peut supposer que $\varepsilon_K \sim v_z^2 S$, ce qui donne

$$\tau_L \sim \frac{\kappa S^2}{N^2 v_z^2} = \frac{\kappa}{Ri v_z^2}. \quad (6.14)$$

Une fois cette expression reportée dans l'équation de départ (6.10), il vient finalement

$$D_t \sim \frac{\kappa}{Ri}, \quad (6.15)$$

qui est l'expression attendue. Il est donc possible de relier le modèle de Zahn à la théorie de Taylor en choisissant les échelles caractéristiques appropriées. Cependant, cela se fait au prix d'hypothèses supplémentaires, comme le fait que le temps de corrélation lagrangien soit assimilable au temps de la flottabilité modifié, le rôle de l'échelle de Corrsin, ou encore la relation entre le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente, la vitesse verticale quadratique moyenne et le taux de cisaillement. Il est nécessaire de tester numériquement ces hypothèses pour conclure sur la validité de cette approche. Les premiers pas dans cette direction ne s'avèrent d'ores et déjà guère convaincants.

6.2 Domaine des grands nombres de Péclet

Le modèle de Zahn n'est *a priori* valable que dans les écoulements où à la fois le nombre de Péclet turbulent est petit et le nombre de Richardson est grand. Dans les étoiles, il existe des situations où ces conditions ne sont pas vérifiées. [Hirschi et al. \(2004\)](#) ont montré notamment que lors de l'évolution des étoiles massives, de forts gradients de vitesse angulaire peuvent apparaître, engendrant des écoulements où l'on a $Ri < Ri_c$, c'est-à-dire instables vis-à-vis de l'instabilité de cisaillement dite « dynamique ». Cette instabilité présente la particularité d'intervenir à des échelles plus grandes que l'instabilité dite « séculaire » à laquelle nous nous sommes intéressés jusqu'à présent, pouvant conduire à des nombres de Péclet turbulents supérieurs à 1. D'après ces auteurs, cette instabilité est capable de réduire localement les gradients de vitesse angulaire qui en sont à l'origine, mais ne génère aucun transport de moment cinétique ou d'éléments chimiques à grande échelle. Néanmoins, les modèles de transport utilisés dans ce domaine sont d'origine phénoménologiques et n'ont jamais été véritablement testés. Nous commencerons par présenter au § 6.2.1 les résultats des simulations numériques réalisées dans ce domaine de paramètres et comment cela nous permet de faire le lien avec les modèles trouvés dans la littérature géophysiques tels que celui de [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#). Nous comparerons ensuite au § 6.2.2 ces résultats au modèle de [Maeder \(1995\)](#) utilisé en théorie de l'évolution stellaire.

6.2.1 Comparaison avec [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#)

Une nouvelle série de simulations numériques avec des nombres de Péclet turbulents allant jusqu'à 437 a été réalisée. La figure 6.2, représentant la grandeur $D_t/(\kappa Ri^{-1})$ en incluant ces simulations, montre clairement que le modèle de Zahn n'est plus valable en dehors du régime des petits nombres de Péclet. Le domaine des grands nombres de Péclet ayant été beaucoup

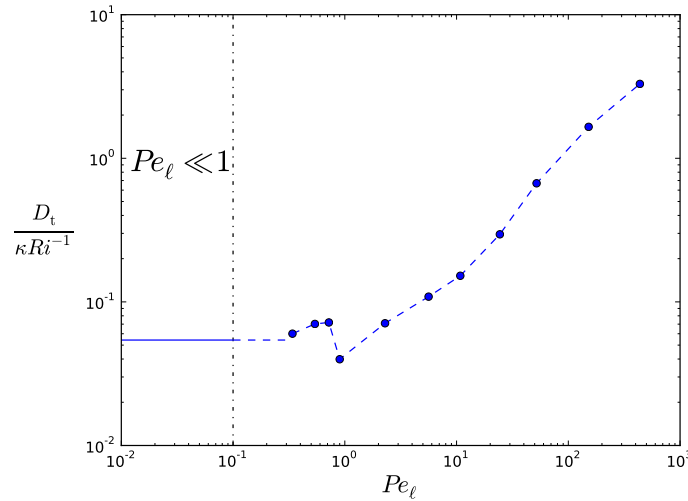


FIGURE 6.2 – $D_t/(\kappa Ri^{-1})$ en fonction du nombre de Péclet turbulent, y compris dans le domaine des grands nombres de Péclet. La légende est la même que celle de la figure 6.1.

étudié en géophysique, nous avons cherché à comparer les résultats obtenus avec des modèles existants. Nous avons considéré le modèle de [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#) car il est fiable

(voir le § 3.2.1). Ce modèle prédit que

$$D_t = \frac{\varepsilon_P}{N^2}. \quad (6.16)$$

Pour tester cette relation, nous avons calculé le rapport $D_t/(\varepsilon_P N^{-2})$ dans nos simulations. La dépendance de ce rapport en fonction du nombre de Péclet turbulent est tracée sur la figure 6.3. Il apparaît nettement que le rapport entre le transport mesuré et le modèle tend vers une valeur

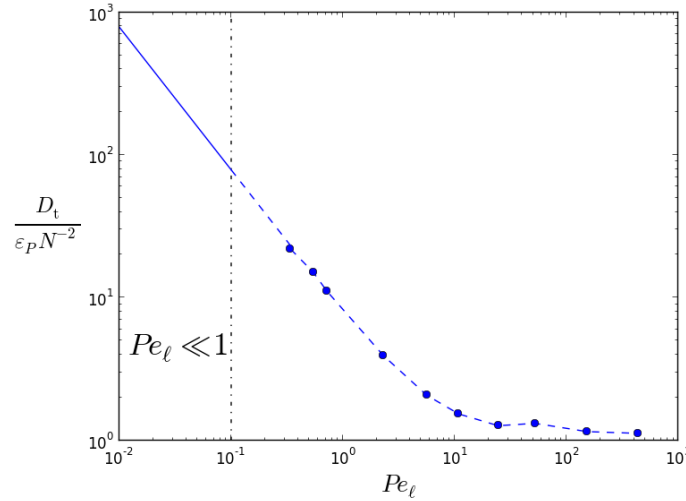


FIGURE 6.3 – $D_t/(\varepsilon_P N^{-2})$ en fonction du nombre de Péclet turbulent. La légende est la même que celle de la figure 6.1.

proche de 1 (1,12 pour la simulation à $Pe_\ell = 437$), indiquant ainsi que nos simulations sont en accord avec ce modèle pour les grands nombres de Péclet.

Dans le domaine des petits nombres de Péclet, on voit également que le modèle de [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#) ne permet pas de rendre compte du transport observé dans nos simulations. On dispose donc de deux modèles valables chacun dans un domaine particulier. On peut légitimement se poser la question de l'existence d'un modèle plus général valable dans les deux domaines. Pour y répondre, reprenons la dérivation du modèle de Lindborg & Brethouwer décrite au § 3.2.1. L'équation (3.35) décrivant l'évolution de la dispersion moyenne au cours du temps comporte deux termes. Le deuxième,

$$- \langle \delta b(t) v_z(t) \rangle, \quad (6.17)$$

est celui qui aboutit à l'équation (6.16). Le premier,

$$\kappa \int_0^t \langle \Delta b(t') v_z(t) \rangle dt', \quad (6.18)$$

est négligé dans le modèle de [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#). Or, dans le cadre de l'APNP, la dérivée par rapport au temps dans l'équation d'évolution des fluctuations de température (3.33) disparaît, ce qui a pour conséquence de faire disparaître également le terme (6.17). C'est par conséquent le terme (6.18) qui est responsable du transport pour les petits nombres de Péclet. On

comprend donc pourquoi le modèle de Lindborg & Brethouwer ne marche pas dans le domaine des petits nombres de Péclet.

Pour finir, le coefficient de transport turbulent général peut être vu comme la somme de deux termes : celui de Zahn (1992), qui domine aux petits nombres de Péclet ; et celui de Lindborg & Brethouwer (2008), qui est prépondérant aux grands nombres de Péclet. Cet état de fait est illustré sur la figure 6.4 qui représente le rapport entre chacun des deux modèles et le transport total mesuré dans les simulations. Le point essentiel est que le rapport entre la somme des deux

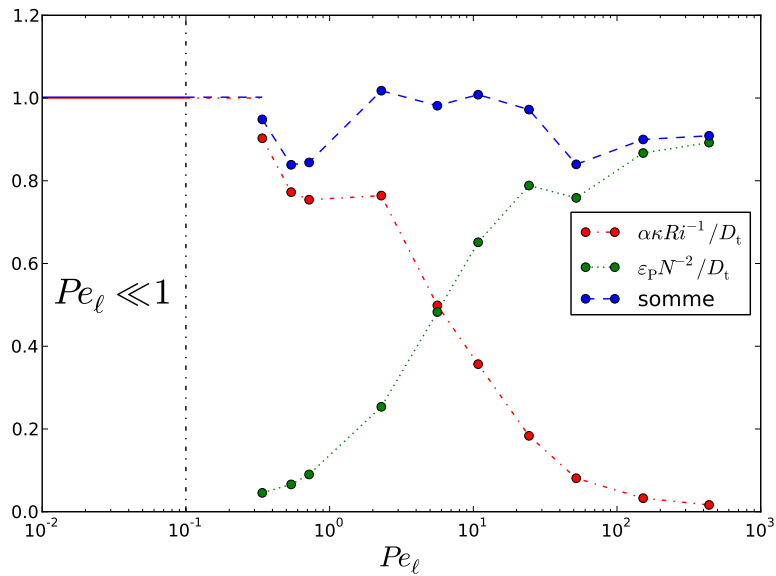


FIGURE 6.4 – Rapport entre les différents modèles de transport (Zahn 1992 et Lindborg & Brethouwer 2008) et le transport total mesuré, ainsi que la somme des deux. Les traits pleins représentent la valeur 1 obtenue pour le modèle de Zahn et la somme des deux modèles dans l’approximation des petits nombres de Péclet.

modèles et le transport mesuré est proche de 1 dans tout le domaine de paramètres étudié. On peut donc écrire

$$D_t = \alpha\kappa Ri^{-1} + \frac{\varepsilon_P}{N^2} = \left(\alpha\kappa + \frac{\varepsilon_P}{S^2} \right) Ri^{-1}. \quad (6.19)$$

Le problème majeur de cette expression est qu’elle n’est pas applicable telle quelle dans des modèles d’évolution stellaire du fait de la présence du taux de dissipation d’énergie potentielle ε_P , pour laquelle il n’existe pas d’expression générale en fonction des gradients moyens de l’écoulement.

6.2.2 Comparaison avec Maeder (1995)

Qu’en est-il dans les modèles utilisés en astrophysique ? Reprenons l’argument invoqué au § 6.1.2 pour déterminer l’échelle intervenant dans le modèle de la longueur de mélange : le temps dynamique doit être égal au temps caractéristique de l’effet de la poussée d’Archimède. Or, dans le domaine des grands nombres de Péclet, la flottabilité n’est plus affectée par la diffusion

thermique. Le temps caractéristique recherché est donc simplement l'inverse de la fréquence de Brunt-Väisälä. L'égalité des temps caractéristiques s'écrit alors

$$\frac{1}{S} \sim \frac{1}{N}, \quad (6.20)$$

ce qui entraîne

$$Ri \sim 1, \quad (6.21)$$

mais ne nous renseigne en rien sur l'échelle caractéristique de la turbulence et donc sur le transport. L'approche utilisée par Maeder (1995) est basée sur le choix d'une version généralisée du critère de stabilité marginale de Richardson qui serait valable à la fois dans le domaine des petits nombres de Péclet, où il devient

$$RiPe_\ell = Ri_c, \quad (6.22)$$

et dans celui des grands nombres de Péclet, où il prend la forme classique

$$Ri = Ri_c. \quad (6.23)$$

Sur le principe, cette version généralisée s'écrit

$$Ri \frac{Pe_\ell}{Pe_\ell + 1} = Ri_c, \quad (6.24)$$

qui redonne bien les deux critères précédents pour $Pe_\ell \ll 1$ et $Pe_\ell \gg 1$. En isolant le nombre de Péclet turbulent dans l'équation précédente, il vient

$$Pe_\ell = \frac{Ri_c}{Ri - Ri_c}. \quad (6.25)$$

En procédant de la même manière que pour la dérivation du modèle de Zahn au § 3.2.2, cela nous fournit l'expression suivante pour le coefficient de diffusion turbulente :

$$D_t \propto \frac{\kappa Ri_c}{Ri - Ri_c}. \quad (6.26)$$

Dans le cadre de l'approximation des petits nombres de Péclet, le nombre de Richardson est très grand et constitue donc le terme dominant du dénominateur de l'équation précédente. On retrouve alors la forme du coefficient dérivée par Zahn, et le coefficient de proportionnalité est le même dans les deux cas.

Pour tester la forme de ce coefficient, il est intéressant de noter que la quantité

$$\frac{\kappa}{D_t} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{Ri}{Ri_c} - 1 \right) \quad (6.27)$$

est une fonction affine du nombre de Richardson. La figure 6.5, représentant cette quantité en fonction du nombre de Richardson, met en évidence que nos simulations sont en accord avec le modèle de Maeder (1995) pour $Ri > 0,15$, c'est-à-dire pour les nombres de Péclet petits et modérés ($Pe_\ell < 25$), mais en désaccord pour les petits nombres de Richardson, c'est-à-dire dans le domaine des grands nombres de Péclet, pour lequel ce modèle a été développé. En particulier, nous obtenons des nombres de Richardson stationnaires nettement inférieurs à la valeur critique

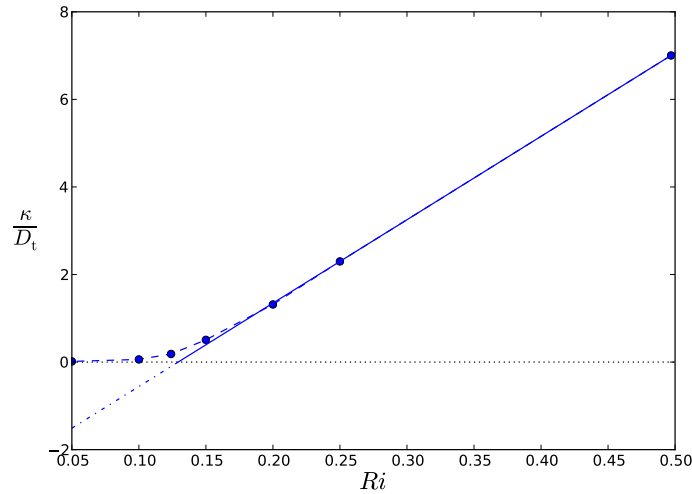


FIGURE 6.5 – κ/D_t en fonction du nombre de Richardson. Les points correspondent aux simulations, tandis que la ligne pleine correspond au modèle de Maeder (1995).

prédite par le modèle calibré dans le domaine des nombres de Péclet modérés. Pour comprendre l'origine de ce désaccord, notons que la forme du nouveau critère de stabilité proposé par Maeder (1995) suppose que le nombre de Péclet turbulent joue encore un rôle dans la stabilité marginale à grands nombres de Péclet. Or, cela n'est pas observé dans les études de stabilité linéaire. De fait, la diffusion thermique joue un rôle dans le transport, comme l'ont bien montré les modèles et les simulations numériques de Lindborg & Brethouwer (2008) et Brethouwer & Lindborg (2009), mais dans Maeder (1995), cet effet est introduit dans le critère de stabilité sans que cela soit justifié physiquement. Ce modèle n'a donc pas de raison de reproduire les résultats de nos simulations.

6.3 Effet dynamique de la stratification chimique

Jusqu'ici, nous avons considéré le transport d'éléments chimiques dans un milieu de poids moléculaire moyen μ — défini comme le rapport entre la masse et le nombre de particules d'un échantillon exprimé en unités de masse atomique — homogène, ce qui avait pour conséquence que le gradient moyen de concentration n'avait aucun effet sur la dynamique. Nous allons maintenant nous intéresser au cas où le milieu est stratifié de manière stable en poids moléculaire moyen. Ce gradient de poids moléculaire va alors s'opposer aux mouvements verticaux, diminuant l'efficacité du transport. Nous allons présenter dans un premier temps comment nos simulations numériques nous ont permis d'étudier cet effet au § 6.3.1 et de tester la forme d'un modèle de transport proposé par Maeder & Meynet (1996). Nous comparerons ensuite au § 6.3.2 ce résultat à d'autres modèles de transport comme ceux de Maeder (1997) et Talon & Zahn (1997).

6.3.1 Test du modèle de Maeder & Meynet (1996)

Les fluctuations de densité ne s'expriment plus uniquement en fonction des fluctuations de températures, comme l'équation (4.3), mais également en fonction des fluctuations μ' du poids moléculaire moyen à l'aide d'une relation du type de

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\alpha_T \theta + \alpha_\mu \mu', \quad (6.28)$$

où α_T désigne le coefficient de dilatation thermique et $\alpha_\mu = (\partial \ln \rho / \partial \mu)_T$. Considérons la concentration relative c d'un élément chimique telle que les fluctuations de poids moléculaire moyen μ' soient proportionnelles aux fluctuations de concentration c' . L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\alpha_T \theta - \alpha_c c', \quad (6.29)$$

en définissant α_c tel que $\alpha_c c' = -\alpha_\mu \mu'$. L'équation de conservation de la quantité de mouvement (5.5) devient alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + (\alpha_T \theta + \alpha_c c') g \vec{e}_z + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}_v, \quad (6.30)$$

en notant c' les fluctuations de concentration par rapport au profil moyen. On peut encore l'écrire sous sa forme adimensionnalisée

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + (Ri_T \tilde{\theta} + Ri_\mu \tilde{c}') \vec{e}_z + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} \tilde{v} + \tilde{f}_v, \quad (6.31)$$

en ajoutant l'indice T au nombre de Richardson thermique pour le distinguer du nombre de Richardson chimique Ri_μ défini par

$$Ri_\mu = \frac{\alpha_c g}{S^2} \frac{dC}{dz} = \frac{N_\mu^2}{S^2}. \quad (6.32)$$

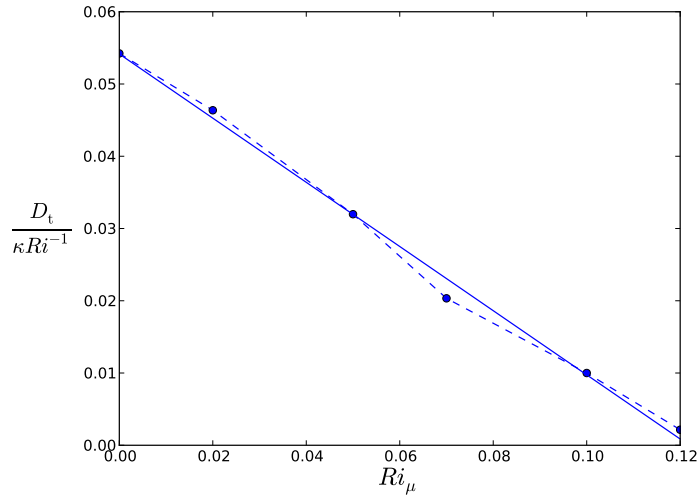
Comme l'APNP a donné de bons résultats dans le cas sans gradient de poids moléculaire, nous avons choisi d'étudier la dépendance du transport vis-à-vis de la stratification chimique dans le cadre de cette approximation. En effet, elle apparaît plus appropriée pour décrire les écoulements à faible nombre de Péclet des zones radiatives stellaires et elle est beaucoup moins exigeante en temps de calcul que les simulations dans l'approximation de Boussinesq complète à petits nombres de Péclet. L'équation de conservation de la quantité de mouvement à résoudre est donc

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{v} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v} = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + (Ri_T Pe \tilde{\psi} + Ri_\mu \tilde{c}') \vec{e}_z + \frac{1}{Re} \tilde{\Delta} \tilde{v} + \tilde{f}_v. \quad (6.33)$$

Pour étudier l'effet de la stratification en poids moléculaire moyen, nous avons réalisé des simulations à différentes valeurs de Ri_μ . Pour chacune de ces valeurs, nous avons déterminé le nombre de Richardson-Péclet stationnaire permettant d'obtenir un état statistiquement stationnaire. La table 6.2 regroupe les valeurs obtenues dans nos simulations de divers paramètres physiques importants dont le coefficient de transport turbulent. Nous avons représenté sur la figure 6.6 le coefficient de transport normalisé par κRi_T^{-1} en fonction du nombre de Richardson chimique. Il apparaît clairement que $D_t / (\kappa Ri_T^{-1})$ est une fonction affine de Ri_μ . Plus précisé-

Ri_μ	$(Ri_T Pe)_s$	$(Ri_T Pe_\ell)_s$	Re_ℓ	$D_t/(SL^2)$
0	12,7	0,427	336	$4,27 \cdot 10^{-3}$
0,02	13,4	0,393	293	$3,46 \cdot 10^{-3}$
0,05	13,0	0,335	258	$2,46 \cdot 10^{-3}$
0,07	8,2	0,219	267	$2,48 \cdot 10^{-3}$
0,1	5,0	0,123	245	$2,00 \cdot 10^{-3}$
0,12	1,0	$2,59 \cdot 10^{-2}$	260	$2,15 \cdot 10^{-3}$

TABLE 6.2 – Resultats des simulations à différents nombres de Richardson chimiques

FIGURE 6.6 – $D_t/(\kappa Ri_T^{-1})$ en fonction du nombre de Richardson chimique Ri_μ . Les points correspondent aux simulations et la droite en trait plein à la régression linéaire.

ment,

$$\frac{D_t}{\kappa Ri_T^{-1}} = \beta(Ri_c - Ri_\mu), \quad (6.34)$$

avec $\beta = 0,45$ et $Ri_c = 0,12$. On a donc au final

$$D_t = \beta \kappa \frac{Ri_c - Ri_\mu}{Ri_T}. \quad (6.35)$$

Cette expression est de la même forme que celle obtenue par [Maeder & Meynet \(1996\)](#) dans le domaine des petits nombres de Péclet à partir d'arguments phénoménologiques similaires à ceux proposés par Zahn dans le cas $Ri_\mu = 0$. Il faut toutefois préciser que la forme générale proposée par les auteurs souffre du même problème que le modèle de [Maeder \(1995\)](#) pour les grands nombres de Péclet.

En présence d'un gradient stable de poids moléculaire, le critère de stabilité marginale s'écrit

$$Ri_T Pe_t + Ri_\mu = Ri_c, \quad (6.36)$$

en introduisant le nombre de Péclet turbulent Pe_t défini par

$$Pe_t = \frac{D_t}{\beta \kappa}. \quad (6.37)$$

Ici, la valeur de Ri_c peut être vue comme une valeur critique du Ri_μ au-delà de laquelle le transport est inexistant, quelle que soit la valeur du nombre de Péclet. En effet, la stratification chimique n'est pas affectée par la très forte diffusion thermique et continue donc à stabiliser l'écoulement même si le nombre de Péclet est très faible. Il en résulte que contrairement au cas sans stratification de poids moléculaire (§ 6.1.1) où β et $(RiPe_\ell)_s$ dépendent de la définition du nombre de Péclet turbulent, β et Ri_c sont ici déterminés de manière univoque, et le nombre de Péclet turbulent pertinent est fixé par l'équation (6.37). Les valeurs proposées par Maeder & Meynet (1996), $\beta = 2$ et $Ri_c = 1/4$, sont significativement différentes de celles obtenues dans nos simulations. Leur modèle est donc quantitativement incompatible avec nos résultats.

6.3.2 Comparaison avec d'autres modèles

D'autres modèles de transports turbulent prenant en compte la stratification en poids moléculaire ont été proposés. Nous allons ici comparer nos résultats à deux de ces modèles, celui de Maeder (1997) d'une part et celui de Talon & Zahn (1997) d'autre part.

Modèle de Maeder (1997) La forme du coefficient de diffusion turbulente proposée dans ce modèle est

$$D_t = \beta \kappa \frac{Ri_c}{Ri_T + Ri_\mu}. \quad (6.38)$$

Contrairement à l'expression (6.35), on peut voir ici que quelle que soit la valeur du nombre de Richardson chimique Ri_μ , on peut choisir une valeur de la diffusivité thermique κ telle que le transport est efficace. Cela est dû à l'hypothèse de départ utilisée par Maeder (1997) qui est qu'une partie de l'énergie du cisaillement peut être utilisée pour modifier le gradient stable d'entropie. D'après l'auteur, il en résulte dans le cas présent que le gradient de poids moléculaire est modifié par le mélange turbulent à partir du moment où la stabilité thermique est surmontée. Le critère de stabilité est donc le même que celui de Zahn (1974) et le transport ne peut pas être inhibé par la stratification chimique. L'influence de cette hypothèse sur le mélange est considérable, le rendant possible dans des zones fortement stratifiées chimiquement, où il est inexistant dans d'autres modèles. Il apparaît dans des études récentes que ce coefficient est celui qui permet de mieux rendre compte des observations (Meynet *et al.*, 2013). Pourtant, dans le cadre de l'approximation des petits nombres de Péclet, on voit clairement dans l'équation (6.33) que la diffusion thermique n'a pas d'effet sur la stratification chimique, qui reste donc efficace même à petit nombre de Péclet. On s'attend donc à ce que modèle ne soit pas valide dans ce domaine de paramètres. À faible Péclet, le nombre de Richardson thermique devient très grand tandis que le nombre de Richardson chimique reste fini. L'équation (6.38) se simplifie donc en

$$D_t = \beta \kappa \frac{Ri_c}{Ri_T}, \quad (6.39)$$

qui est la forme proposée par Zahn (1992) en l'absence de stratification chimique. Tout se passerait donc comme si le gradient de poids moléculaire n'avait aucun effet sur le transport, ce qui n'est pas ce que nous avons observé dans nos simulations présentées au paragraphe

précédent. Conformément aux arguments développés ci-dessus, les résultats de nos simulations sont en désaccord avec le modèle de Maeder (1997) dans le domaine des petits nombres de Péclet.

Modèle de Talon & Zahn (1997) Dans ce modèle, un autre ingrédient physique est invoqué pour réduire l'effet inhibiteur de la stratification chimique sur le transport : la diffusion turbulente horizontale, supposée très efficace du fait qu'à l'opposé des mouvements verticaux, les mouvements horizontaux ne sont pas limités par la stratification. Le coefficient vertical de diffusion turbulente s'écrit alors

$$D_t = \beta \frac{Ri_c}{\frac{Ri_T}{\kappa + D_h} + \frac{Ri_\mu}{D_h}}, \quad (6.40)$$

en notant D_h le coefficient horizontal de diffusion turbulente. Dans nos simulations, le cisaillement moyen étant purement vertical, la turbulence horizontale n'est pas forcée directement et il nous est donc impossible d'obtenir un écoulement turbulent avec $D_h \gg D_t$. De manière générale, le rapport entre les coefficients de diffusion transverse et vertical reste de l'ordre de 3. Pour parvenir à tester ce modèle, on pourrait ajouter un cisaillement horizontal représentant l'effet local de la rotation différentielle horizontale et susceptible d'entretenir efficacement la turbulence horizontale, comme nous le verrons dans les perspectives.

En guise de conclusion de ce chapitre, il est bon de noter que les simulations présentées ici ont toutes été réalisées avec le même nombre de Reynolds numérique et la même condition initiale. Bien que ces derniers aient été choisis de manière à obtenir les résultats les plus génériques possibles, une étude plus complète de leur influence est nécessaire.

Conclusion et perspectives

« La recherche est un processus sans fin dont on ne peut jamais dire comment il évoluera. L'imprévisible est dans la nature même de la science. »

François JACOB

Synthèse des résultats et discussion

Le résultat principal de cette thèse est d'avoir retrouvé la forme du coefficient radial de diffusion turbulente des éléments chimiques dû à la rotation différentielle radiale, proposée par Zahn il y a une vingtaine d'années et jamais véritablement testée depuis, à l'aide de simulations numériques locales de turbulence cisailée et stratifiée de manière stable. Ce résultat est particulièrement important car il existe de nombreux modèles dérivés à partir des mêmes arguments phénoménologiques et basés sur les mêmes hypothèses, couramment utilisés dans les codes d'évolution stellaire actuels. Les simulations numériques réalisées nous ont fourni de surcroît une première estimation quantitative de ce coefficient, qui n'est donné par le modèle qu'en ordre de grandeur. Nous avons également proposé une dérivation du coefficient de transport de Zahn basée sur des arguments phénoménologiques plus classiques et peut-être plus simples que ceux avancés initialement par Zahn. Cette dérivation a aussi l'intérêt de montrer que les mêmes arguments ne permettent pas de déterminer un coefficient de transport dans le cas des grands nombres de Péclet, pour des raisons liées aux dimensions des quantités physiques qui interviennent dans les temps caractéristiques en jeu.

Nous nous sommes ensuite intéressés au devenir de ce coefficient en dehors du domaine des petits nombres de Péclet, le domaine d'application du modèle de Zahn. Nous avons montré par des simulations numériques à différents nombres de Péclet que la prescription de Zahn n'est plus valable pour les grands nombres de Péclet. Dans ce domaine de paramètres, il est apparu que le transport turbulent d'éléments chimiques est bien décrit par le modèle d'[Osborn & Cox \(1972\)](#), redérivé par [Lindborg & Brethouwer \(2008\)](#). Lorsque l'on se place dans le régime des petits nombres de Péclet, c'est justement un terme négligé par ces derniers auteurs qui effectue le transport. Dans le cas général, le coefficient de transport turbulent est donc la somme de ces deux contributions. Ce résultat est en contradiction avec les tentatives de généralisation du formalisme de Zahn pour les grands nombre de Péclet, notamment par [Maeder \(1995\)](#). L'exploration de ce domaine nous permet en outre de considérer un régime de paramètres correspondant à des situations géophysiques pour lesquelles de nombreuses études numériques et théoriques ont déjà été menées et en quelque sorte de valider les résultats de nos simulations dans ce domaine de paramètres.

Par la suite, nous avons étudié l'influence de la stratification stable de poids moléculaire sur le transport turbulent dans le domaine des petits nombres de Péclet, ce qui se traduit par l'ajout dans nos simulations d'un nouveau paramètre sans dimension, le nombre de Richardson chimique

Ri_μ . En faisant varier ce paramètre, nous avons montré que le coefficient de diffusion turbulente en dépendait de manière affine, mettant en évidence un nombre de Richardson chimique critique au-delà duquel aucun transport ne peut avoir lieu, contrairement au nombre de Richardson thermique pour lequel il existe toujours une échelle instable. La comparaison de la forme obtenue du coefficient de diffusion turbulente avec des prescriptions existantes nous a permis de valider le modèle dérivé par Maeder & Meynet (1996) et d’invalider au contraire celui proposé par Maeder (1997).

Un autre résultat de cette thèse est la validation de l’utilisation de l’approximation des petits nombres de Péclet dans le cadre de l’étude de la dynamique des intérieurs stellaires. Il s’agit de la première application de cette approximation dans le domaine non-linéaire et nous avons pu montrer que les simulations réalisées dans l’approximation de Boussinesq convergent à faible nombre de Péclet vers celles réalisées dans l’approximation des petits nombres de Péclet. Le gain en temps de calcul permis par cette approximation est considérable (un facteur de l’ordre de 40 pour un nombre de Péclet turbulent de 0,34). Cette première application montre donc clairement l’intérêt d’une telle approximation pour l’étude des mouvements dans les zones radiatives d’étoiles.

Tous ces résultats sont encourageants, mais il reste encore beaucoup à faire, à commencer par étudier de manière exhaustive l’influence de certains paramètres de nos simulations comme le nombre de Reynolds, le nombre de cisaillement S^* initial, ainsi que les rapports d’aspect du domaine numérique, afin de déterminer dans quelle mesure les résultats que nous avons obtenus sont génériques. En ce qui concerne le nombre de Reynolds, les valeurs du nombre de Reynolds turbulent que nous avons obtenues dans nos simulations sont de l’ordre de la centaine, ce qui est compatible avec des estimations du nombre de Reynolds effectif dans les intérieurs stellaires (Michaud & Zahn, 1998). De plus, nos résultats préliminaires semblent montrer qu’au delà d’une certaine valeur du nombre de Reynolds, le coefficient de transport n’en dépend plus, ce qui est en accord avec une hypothèse similaire énoncée par Zahn (1992). Cependant, il est nécessaire de réaliser des simulations avec des nombres de Reynolds plus élevés que ceux considérés jusqu’à présent pour le vérifier.

Ensuite, la présente étude est insuffisante pour conclure quant aux modèles prenant en compte l’effet d’une très forte diffusion horizontale due à un cisaillement horizontal, comme celui de Talon & Zahn (1997). Dans de tels modèles, la diffusion horizontale permet de passer outre l’effet stabilisateur de la stratification chimique. Or, il est difficile de représenter un tel transport turbulent avec une diffusion horizontale beaucoup plus efficace que la diffusion verticale dans nos simulations. Idéalement, il faudrait ajouter un cisaillement horizontal, ce qui n’est pas possible dans l’état actuel des choses avec le code utilisé jusqu’à présent, qui emploie dans les directions horizontales une méthode spectrale associée à des conditions aux limites périodiques. Une première étape pourrait être d’étudier l’effet d’une forte diffusion horizontale en l’introduisant sous la forme d’une diffusivité chimique moléculaire anisotrope.

Perspectives

Parmi les autres améliorations envisagées, certaines sont importantes, comme la comparaison entre la diffusivité et la viscosité turbulentes, souvent considérées comme équivalentes dans les modèles phénoménologiques. Par ailleurs, dans le but de pouvoir utiliser ces coefficients de transport dans des modèles 2D d’étoiles, dans lesquels le gradient de vitesse peut ne pas être

colinéaire au gradient de température (ou d'entropie), il est nécessaire d'étudier numériquement de telles configurations et en particulier la dépendance des coefficients de diffusion vis-à-vis de l'angle entre les deux gradients. Ce problème est lié à celui de la modélisation du coefficient de diffusion turbulente horizontale D_h initialement introduit par Zahn (1992) et qui est encore très mal connu. D'autres doivent en toute rigueur être étudiées, même si leur effet est supposé faible en pratique. Par exemple, si l'on veut prendre en compte les effets de la rotation sur l'écoulement de manière plus complète, il faut inclure la force de Coriolis dans les équations. De même, il peut être utile d'effectuer une étude compressible ou anélastique (c'est-à-dire en négligeant les ondes sonores) de l'instabilité de cisaillement pour pouvoir appliquer les modèles ainsi obtenus dans des zones où l'échelle caractéristique des variations spatiales du milieu n'est pas nécessairement grande devant l'échelle de la turbulence.

D'après Meynet *et al.* (2013), la forme du coefficient de diffusion qui semble obtenir les résultats les plus proches des observations une fois intégré dans les codes d'évolution stellaire est celui dérivé par Maeder (1997), dont nous avons montré qu'il n'était pas compatible avec nos simulations dans le domaine des petits nombres de Péclet. Ce résultat est en faveur de l'existence d'effets non encore pris en compte dans les modèles actuels, comme celui d'un éventuel champ magnétique, ou de processus de mélange supplémentaires, ce que semblent confirmer des études astérosismiques récentes telles que Ceillier *et al.* (2012), Eggenberger *et al.* (2012) ou Marques *et al.* (2013). En ce qui concerne le champ magnétique, la pertinence du mécanisme de dynamo de Taylor-Spruit (Spruit, 2002) dans les zones radiatives stellaires reste encore à confirmer numériquement. Un tel mécanisme pourrait modifier l'efficacité du transport turbulent associé (Maeder & Meynet, 2004). Une autre possibilité est que le champ magnétique aide à destabiliser des écoulements cisailés qui seraient stables en son absence. Lecoanet *et al.* (2010) ont démontré l'existence d'un tel effet sur le critère de stabilité linéaire. Il reste à déterminer si cet effet persiste dans le régime turbulent et quelle est son influence sur le transport. Enfin, l'instabilité magnétorotationnelle pourrait être à l'œuvre dans les zones radiatives des étoiles et contribuer au transport, comme le suggèrent notamment Balbus & Hawley (1994) et Menou & Le Mer (2006). À moyen terme, on perçoit donc qu'une prochaine grande étape dans la contrainte des coefficients de transport est de réaliser des simulations magnétohydrodynamiques dans le même esprit que ce que nous avons fait jusqu'à maintenant afin d'observer l'effet du champ magnétique sur le transport.

Parmi les autres processus de transport méritant d'être contraints de la même manière, nous pouvons citer la convection thermohaline, qui apparaît lorsqu'un écoulement est stable d'un point de vue du gradient thermique, mais instable du point de vue du gradient de poids moléculaire. Des simulations numériques décrivant ce phénomène ont été réalisées, notamment par Brown *et al.* (2013). De plus, une étude du transport thermohaline utilisant l'approximation des petits nombres de Péclet dans le but de se rapprocher des conditions stellaires a été initiée par N. Lagarde et F. Lignières. Plus largement encore, le transport dû à la convection et à la semi-convection (le cas inverse de la convection thermohaline ; voir par exemple les simulations numériques de Wood *et al.* 2013 et Zaussinger & Spruit 2013) en présence d'une forte diffusivité thermique et de cisaillement demanderait à être mieux connu. Des approximations similaires à celle des petits nombres de Péclet ont été proposées dans le cas de la convection, notamment par Thual (1992). Cependant, il convient d'être prudent car ce genre d'approximation suppose que le profil moyen de température reste inchangé par les mouvements, c'est-à-dire que le transport convectif de la chaleur est négligeable par rapport au transport diffusif. Cela ne pose pas de problème dans le cas d'un gradient stable, mais pour la convection et la semi-convection, le

gradient instable de température a tendance à s'ajuster en permanence pour rester isentropique, suivant l'hypothèse qu'un écoulement turbulent tend vers un état de stabilité marginale vis-à-vis de l'instabilité qui l'a généré, qui est ici justement due au gradient de température.

Pour conclure, j'ajouterais que l'approche locale que nous avons utilisée a encore de beaux jours devant elle, mais qu'elle ne doit pas non plus nous faire oublier que ses résultats sont destinés *in fine* à être appliqués dans des modèles d'étoiles. Il serait donc profitable de comparer les modèles de transport issus de simulations locales avec ce qui observé dans des simulations globales afin de déterminer quels peuvent être les effets de la non-localité. Plus généralement, une fois les modèles de transport inclus dans les codes d'évolution stellaire, les résultats de ces derniers devront être confrontés aux données issues de l'astérosismologie, de l'astrométrie, de l'interférométrie et de la spectropolarimétrie. Cette confrontation pourra mettre en évidence des différences notables entre la théorie et les contraintes observationnelles et ainsi entraîner une révision de la théorie, en l'occurrence l'élaboration de nouveaux modèles de transport, et ainsi de suite.

Annexe : publication

LETTER TO THE EDITOR

Turbulent transport in radiative zones of stars

V. Prat and F. Lignières

¹ CNRS; IRAP; 14, avenue Édouard Belin, F-31400 Toulouse, France² Université de Toulouse; UPS-OMP; IRAP; Toulouse, France

Received 18 October 2012 / Accepted 17 January 2013

ABSTRACT

Context. In stellar interiors, rotation is able to drive turbulent motions, and the related transport processes have a significant influence on the evolution of stars. Turbulent mixing in the radiative zones is currently taken into account in stellar evolution models through a set of diffusion coefficients that are generally poorly constrained.

Aims. We want to constrain the form of one of them, the radial diffusion coefficient of chemical elements due to the turbulence driven by radial differential rotation, derived by Zahn (1974, 1992) on phenomenological grounds and largely used since.

Methods. We performed local, direct numerical simulations of stably stratified homogeneous sheared turbulence using the Boussinesq approximation. The domain of low Péclet numbers found in stellar interiors is currently inaccessible to numerical simulations without approximation. It is explored here thanks to a suitable asymptotic form of the Boussinesq equations. The turbulent transport of a passive scalar is determined in statistical steady states.

Results. We provide a first quantitative determination of the turbulent diffusion coefficient and find that the form proposed by Zahn is in good agreement with the results of the numerical simulations.

Key words. Diffusion - Hydrodynamics - Turbulence - Stars: interiors - Stars: rotation

1. Introduction

As many astrophysical measures are calibrated on stellar evolution theory, realistic stellar evolution models are crucial for astrophysics. One of the major issues is the influence of the macroscopic motions induced by the rotation of a star on its internal structure (see the recent review of Maeder & Meynet 2012). In particular, chemical mixing can significantly extend the lifetime of the stars by continuously providing fresh combustible matter to the core, thus feeding nuclear reactions for a longer time.

A key point of these stellar evolution models is the radial turbulent mixing of chemical species induced by radial differential rotation. According to Zahn's model (Zahn 1974), this turbulent mixing is described by a diffusion coefficient that reads as

$$D_t = \frac{Ri_{cr}}{3} \kappa \left(\frac{r \sin \theta}{N_T} \frac{d\Omega}{dr} \right)^2, \quad (1)$$

where κ is the thermal diffusivity, Ri_{cr} the critical value of the Richardson number, N_T the Brunt-Väisälä frequency, and $r \sin \theta d\Omega/dr$ the shear associated with radial differential rotation. This expression is taken from Eq. (2.14) of Zahn (1992). While other versions of this diffusion coefficient exist in the literature, notably those accounting for additional effects like the μ -gradient (Maeder & Meynet 1996; Talon & Zahn 1997; Mathis et al. 2004), Zahn's prescription is the basis of most implementations of the turbulent mixing driven by differential rotation in stellar evolution codes (Endal & Sofia 1978; Pinsonneault et al. 1989; Heger et al. 2000, see a detailed discussion in Meynet & Maeder 2000). Moreover, this mixing plays a significant role as compared to other transport processes, such as the meridional circulation combined with horizontal turbulence, especially for

massive stars (Meynet & Maeder 1997, 2000; Denissenkov et al. 1999) and low-mass stars with strong μ -gradients (Palacios et al. 2003, 2006). It thus has a direct impact on the confrontations of stellar evolution models with observations. While chemical abundances at the star surface have been widely used for such confrontations (Michaud & Zahn 1998; Brott et al. 2011; Potter et al. 2012), asteroseismology is now providing direct constraints on these processes, especially for subgiant and giant stars (Deheuvels et al. 2012; Eggenberger et al. 2012).

The derivation of Zahn's prescription is based on the hypothesis that turbulent flows are statistically stationary and that this is achieved when the mean shear flow is close to the linear marginal stability criterion. Following Townsend (1958), Zahn modified Richardson's instability criterion to take the destabilizing effect of thermal diffusivity into account in such a way that marginal stability is controlled by $RiPe \sim 1$, where the Péclet number Pe compares the diffusive time scale with the dynamical one (as later confirmed through numerical linear stability analyses, e.g. Lignières et al. 1999). Then, he assumed that, in a turbulent state, the relevant Péclet number in the expression $RiPe \sim 1$ is the turbulent one $Pe_t = \frac{u\ell}{\kappa}$, defined with the turbulent scales of velocity and length (u and ℓ , respectively). The diffusion coefficient is then estimated through the relation $D = u\ell/3$, which finally leads to Eq. (1).

The purpose of our present work is to use local 3D direct numerical simulations (DNS) to test Zahn's modeling of turbulent mixing. Previous numerical simulations performed in a geophysical context have shown that a steady stably stratified homogeneous sheared turbulence can be obtained by imposing both a uniform mean shear and a uniform stratification and by tuning the Richardson number to reach statistical stationarity (Jacobitz et al. 1997). Such a flow is well adapted to studying chemical turbulent transport and enables one to relate the transport to the

Send offprint requests to: V. Prat

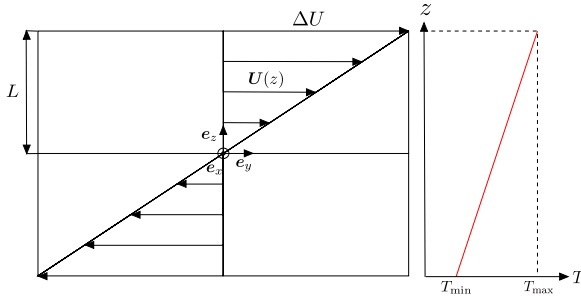


Fig. 1. Sketch of the flow configuration.

local gradients of velocity and entropy as in Zahn's criterion. Imposing the shear and the stratification amounts to an assumption of scale separation between the variations in the mean and turbulent flows. The main difficulty of performing such numerical simulations in a stellar context is the very low Prandtl number of the stellar fluid. Indeed, this introduces a huge gap between the dynamical time scale and the diffusive one, which forces use of a large number of numerical time steps to accurately compute the effect of thermal diffusion on a dynamical time. This would require a prohibitive amount of computation time for DNS, where the whole range of scales of turbulence down to the dissipative scales are resolved. An attempt to test Zahn's prescription was made by Brüggén & Hillebrandt (2001), but in this case the simulations relied on the numerical diffusivity of the ZEUS code that is strongly dependent on the grid size (Fromang & Papaloizou 2007). Fortunately, an asymptotic form of the Boussinesq equations in the limit of the small Péclet numbers exists, where the numerical constraint associated with the dynamical effect of the high thermal diffusivity disappears (Lignières 1999).

In this paper, we perform DNS of 3D steady, stably stratified, homogeneous sheared turbulence at decreasing Péclet numbers and use both the Boussinesq equations and the so-called small-Péclet-number approximation (SPNA) to explore the asymptotic $Pe \ll 1$ regime. The mathematical model of the considered turbulent flow is presented in Sect. 2, followed by the numerical simulations (Sect. 3) and the methods used to study the turbulent transport (Sect. 4). Then, in Sect. 5, constraints on the diffusion coefficient obtained from our numerical simulations are described and compared to Zahn's prescription. The results are discussed in Sect. 6.

2. Mathematical model of the flow

To obtain results that are as generic as possible, we consider the simplest flow likely to produce stably stratified, homogeneous, sheared turbulence. Its characteristics are a uniform vertical shear of horizontal velocity and a uniform vertical temperature gradient, as shown in Fig. 1. The governing equations of the flow are presented in Sect. 2.1, and the boundary conditions along with the forcing and the initial conditions in Sect. 2.2.

2.1. Governing equations

We use the Boussinesq equations in which density fluctuations are neglected, except in the buoyancy term. For the usually low Mach-number flows inside stars, this approximation is justified as long as the motion vertical length scale is smaller than the pressure scale height. Using L , ΔU , and $\Delta T = (T_{\max} - T_{\min})/2$

as length, velocity, and temperature units (see Fig. 1), their non-dimensional form reads as

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + Ri \tilde{\theta} \mathbf{e}_z + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}_v, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\theta} + \tilde{w} = \frac{1}{Pe} \Delta \tilde{\theta} + \tilde{f}_T, \quad (4)$$

where $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u} \mathbf{e}_x + \tilde{v} \mathbf{e}_y + \tilde{w} \mathbf{e}_z$ is the velocity, $\tilde{p}$ the pressure deviation from hydrostatic equilibrium, $\tilde{\theta}$ the temperature deviation from the mean profile, and $\tilde{\mathbf{f}}_v$ and $\tilde{f}_T$ forcing terms (see Sect. 2.2).

These equations show three non-dimensional parameters: (i) the Richardson number $Ri = (N_T/S)^2$, noting $S = dU/dz = \Delta U/L$ the shear rate, $N_T^2 = \alpha g \Delta T/L$ the Brunt-Väisälä frequency, and α the thermal expansion coefficient, (ii) the “macroscopic” Reynolds number $Re = L \Delta U/\nu = S L^2/\nu$, where ν is the molecular viscosity, and (iii) the “macroscopic” Péclet number $Pe = L \Delta U/\kappa = S L^2/\kappa$.

To explore the regime of very low Péclet numbers, we use the SPNA (Lignières 1999). The basic principle of this approximation is to Taylor-expand all variables up to first order in Pe . Thus, Eqs. (3) and (4) become

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + Ri Pe \tilde{\psi} \mathbf{e}_z + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{f}}_v, \quad (5)$$

$$\tilde{w} = \Delta \tilde{\psi}, \quad (6)$$

with $\tilde{\psi} = \tilde{\theta}/Pe$. The background thermal stratification remains fixed because temperature deviations become infinitely small as Pe approaches zero. There are two non-dimensional parameters left: the Reynolds number and the “Richardson-Péclet” number $RiPe$, which compares the effect of the stratification modified by the thermal diffusion (with a time scale of τ_B^2/τ_κ , where $\tau_B = 1/N_T$ and $\tau_\kappa = L^2/\kappa$ are the buoyancy and diffusive time scales, respectively) to that of the shear. This number is known to control the linear stability of shear flows at low Péclet number (Lignières et al. 1999, and references herein).

An expansion similar to the SPNA has been proposed for an unstable thermal stratification (Thual 1992). However, it does not allow the feedback of the convective turbulent motions on the stratification, as observed in the solar convective zone.

The numerical code uses a Fourier collocation method in the horizontal directions, compact finite differences in the vertical, and a projection method plus Runge-Kutta for time advancing.

2.2. Boundary conditions, forcing, and initial conditions

Periodic boundary conditions apply in the horizontal directions, whereas in the vertical direction the fluid is bounded by two horizontal surfaces that are impenetrable ($w = 0$), stress-free in the spanwise direction ($\partial_z u = 0$), uniformly sheared in the streamwise direction ($\partial_z v = S$), and thermally controlled ($\theta = 0$). The mean shear profile $U(z)$ is imposed thanks to a body force $\mathbf{f}_v = [U(z) - \bar{v} \mathbf{e}_y]/\Delta t$ applied at every time step Δt , where $\bar{v}$ is the horizontal average of the streamwise velocity. The mean vertical temperature profile is imposed in the same way. With such a set-up, turbulence is not rigorously homogeneous in the vertical direction. Nevertheless, as already found in Schumacher & Eckhardt (2000) using similar forcing and boundary conditions, non-homogeneity is limited to thin layers ($\sim 10\%$ of the domain vertical extent) close to the upper and lower boundaries.

As initial conditions, we construct a statistically homogeneous and isotropic Gaussian random velocity fluctuation

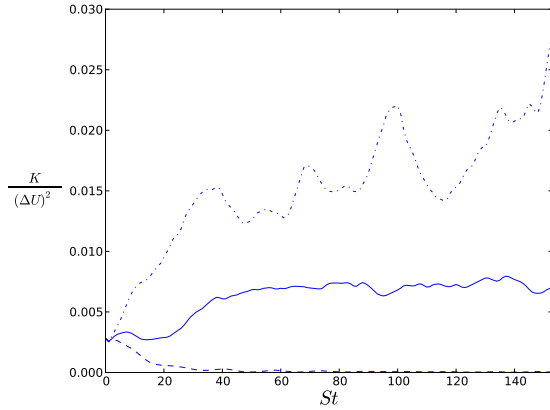


Fig. 2. Evolution of the turbulent kinetic energy K for three different Richardson numbers at turbulent Péclet number $Pe_t = 52$. After a transient regime, the turbulent kinetic energy is stationary for $Ri = 0.124$, increases for $Ri = 0.05$ and decreases for $Ri = 0.2$.

field (Orszag 1969) with an energy spectrum proportional to $k^2 e^{-k^2/k_0^2}$, where k is the norm of the wave vector and k_0 corresponds to the maximum of the spectrum (Jacobitz et al. 1997). The initial temperature deviation θ is set to zero.

3. Numerical simulations

For each value of the Péclet number, the Richardson number can be tuned to obtain statistical steady-state flows. In the regime where thermal diffusivity has no dynamical effect, various studies (Holt et al. 1992; Jacobitz et al. 1997) had already shown there is a critical Richardson number such that the turbulent kinetic energy increases if $Ri < Ri_{cr}$ and decreases if $Ri > Ri_{cr}$, as illustrated in Fig. 2. We could also find such critical Richardson numbers in the low-Péclet-number regime.

Moreover, to obtain reliable statistics of the turbulent transport, the simulation domain must contain several correlation length scales of the turbulence and the duration of the simulation must be long compared to its correlation time scale. Denoting ℓ as the horizontal integral length scale defined by

$$\ell = 2\pi \frac{\int_0^{+\infty} \frac{E(k_h)}{k_h} dk_h}{\int_0^{+\infty} E(k_h) dk_h}, \quad (7)$$

where $E(k_h)$ is the horizontal spectrum of the turbulent kinetic energy averaged over the vertical direction, we find that the ratio ℓ/L_h never exceeds 0.16 in our simulations. This indicates that there are several large structures in the simulated domain. For illustration, Fig. 3 displays 2D snapshots of the temperature fluctuations and of the vertical velocity.

To properly resolve all scales of turbulence, we use a resolution of $128^2 \times 257$ and an aspect ratio $L_h/L_v = \pi/4$. We have verified that in our simulation $k_{\max}\eta > 1$, where $k_{\max}$ is the largest wavevector present in the flow, $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ the Kolmogorov dissipation scale, and ε the dissipation rate. This criterion, which states that all scales down to the dissipation scale are resolved, has been found to be adapted for the study of turbulent transport in isotropic turbulence simulations (Gotoh et al. 2002). In addition, simulations performed at a higher resolution have confirmed that our resolution is sufficient.

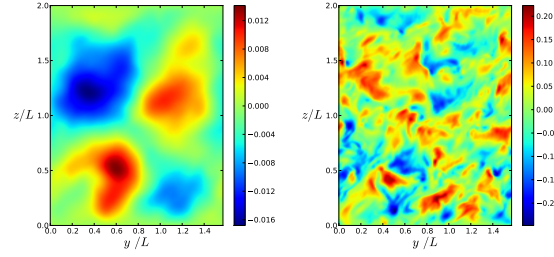


Fig. 3. Snapshots of temperature fluctuations scaled by ΔT (left) and vertical velocity scaled by ΔU (right) in the yOz plane at $Pe_t = 0.34$. Vertical velocity presents smaller scales than temperature fluctuations; both are anti-correlated.

4. Turbulent transport

The passive scalar is introduced once a statistical steady state is reached. We then consider and compare two complementary approaches to determine its vertical turbulent transport: one Lagrangian, by following fluid particles; the other Eulerian, by solving an advection/diffusion equation for a concentration field.

Owing to the stationarity and the spatial homogeneity of the turbulence, a fluid particle encounters statistically homogeneous conditions as it moves with the flow (as long as it keeps away from the upper and lower boundaries). The turbulence is thus homogeneous from a Lagrangian point of view. This is an important property because it enables us to apply Taylor's turbulent transport theory (Taylor 1921). Accordingly, the transport is diffusive, and the vertical turbulent diffusion coefficient D_t reads as

$$D_t = \int_0^{+\infty} \langle w(t)w(t+\tau) \rangle d\tau = \langle w^2 \rangle T_L, \quad (8)$$

where T_L is the Lagrangian correlation time and $\langle \rangle$ the ensemble average over the particles. If $z(t)$ denotes the vertical position of a particle, the vertical dispersion is then given by

$$\langle [z(t) - z(0)]^2 \rangle = 2D_t t. \quad (9)$$

We computed the turbulent diffusivity D_t using either Eq. (8) or a linear regression of the mean square displacement $\langle [z(t) - z(0)]^2 \rangle$. In both cases the main source of error is the temporal fluctuations of the averaged turbulent quantities. Then, depending on the starting point of the time average, this creates a significant dispersion (up to 20%) in the values of D_t . We favor the turbulent diffusivity D_t obtained with Eq. (8) because in this case the dispersion is generally lower than using the linear regression of the mean square displacement.

In the Eulerian approach, the concentration field c is governed by the equation

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D_m \Delta c, \quad (10)$$

where the molecular diffusivity D_m is such that $Pe_c = L\Delta U/D_m = 10^4$. To determine D_t , we impose a mean concentration gradient dC/dz and compute

$$D_t = -\frac{\langle c'w \rangle}{dC/dz}, \quad (11)$$

where c' refers to the concentration deviation from the mean profile $C(z)$.

Table 1. Results of the different runs

Pe_ℓ	Re_ℓ	Ri_{cr}	$(RiPe_\ell)_{cr}$	$Ri_{cr}Pe_\ell$	$\beta = D_t/(u\ell)$
52	260	0.124	–	6.45	0.104
0.90	150	1.10	–	0.990	4.01×10^{-2}
0.72	240	1.07	–	0.773	9.29×10^{-2}
0.34	340	1.27	–	0.432	0.138
$\ll 1$	335	–	0.426	–	0.131

We found that the relative difference between D_t computed from the Lagrangian approach (Eq. 8) and the Eulerian one does not exceed 15%. This difference is partly due to molecular diffusion, which is present in the Eulerian approach but not in the Lagrangian one. Nevertheless, this effect is limited because D_m/D_t remains always less than 5%. Again, the difference is mostly due to temporal fluctuations of the turbulent quantities that generate dispersion in the time averages. A way to reduce this dispersion is to average over a longer time. While it is not possible in the Lagrangian approach since the displacements of particles are limited by the upper and lower boundaries of the domain, a much longer integration time can be used in the Eulerian one. We have thus used the Eulerian determination of the turbulent diffusion coefficient, keeping the error linked to the time average to a value lower than 5%.

5. Results

We present the results of five simulations corresponding to five different values of the turbulent Péclet number, $Pe_\ell = 52, 0.90, 0.72, 0.34$, and $\ll 1$ (the last using the SPNA). Table 1 displays the turbulent diffusion coefficients, together with other relevant physical parameters.

The most striking feature is that the full computation at $Pe_\ell = 0.34$ and the SPNA computation give similar results. Indeed, at $Pe_\ell = 0.34$ the critical Richardson number multiplied by the turbulent Péclet number is very close to the critical “Richardson-Péclet” number of the SPNA computation. This is strong evidence that at small Péclet number, the steady, stably stratified, sheared turbulence is characterized by a critical “Richardson-Péclet” number $(RiPe_\ell)_{cr}$ independent of the Péclet number. This regime has not been reached in the simulations from $Pe_\ell = 52$ to $Pe_\ell = 0.7$ where $Ri_{cr}Pe_\ell > (RiPe_\ell)_{cr}$.

Table 1 further shows the parameter $\beta = D_t/(u\ell)$, which in the regime where $RiPe_\ell = (RiPe_\ell)_{cr}$, verifies

$$D_t = \beta \kappa Ri^{-1} (RiPe_\ell)_{cr}. \quad (12)$$

This parameter clearly has the same value for $Pe = 0.34$ and $Pe \ll 1$. Thus, in the small-Péclet-number regime, the turbulent diffusion coefficient can be written in the form of (12) with a constant β . As a consequence, D_t is proportional to κRi^{-1} .

It is obvious that the final expression found for the vertical turbulent diffusion coefficient D_t (see Eq. 12) has the same form as Zahn’s prescription given in Eq. (1), thus validating in the $Pe \leq 0.34$ range the hypotheses made to derive it. The present numerical simulations also provide a quantitative determination of the critical turbulent “Richardson-Péclet” number $(RiPe_\ell)_{cr} = 0.426$ and of the coefficient $\beta = D_t/(u\ell) \approx 0.131$. This has to be compared with the order of magnitude estimates proposed by Zahn (1992), namely $Ri_c \lesssim 1/4$ and $\beta = 1/3 \approx 0.333$. Nevertheless, it is the proportionality constant between D_t and κRi^{-1} ,

i.e. the product of β and $(RiPe_\ell)_{cr}$, which is relevant in practice in stellar evolution codes. We find a value of 5.58×10^{-2} for this quantity, whereas Zahn’s prescription leads to 8.33×10^{-2} , which is a relative difference of 33%.

6. Conclusion and discussion

We thus conclude that the results of our DNS agree with the form of Zahn’s prescription and provide a first quantitative determination of D_t beyond Zahn’s order of magnitude estimate. In general, the main drawback of numerical simulations of turbulent flows is the unrealistically low value of the Reynolds number. While it may be interesting to test the dependence of our results on the Reynolds number, we note that estimates of effective turbulent Reynolds numbers associated with the radial diffusion of chemicals in stars lead to surprisingly low values $Re_\ell \sim 100$ (Michaud & Zahn 1998), which are comparable to the values obtained in the present work.

Other relevant issues can be addressed numerically. In particular, the concentration field is considered here as a passive scalar so that the mean gradient has no effect on the flow, whereas in reality such a stratification would enhance the effect of temperature stratification. This effect is considered differently by Maeder & Meynet (1996) and Talon & Zahn (1997), and simulations might help in deciding between them. Another important aspect of the models of rotationally-induced mixing is the magnitude of the horizontal turbulent transport driven by the horizontal differential rotation. It controls the efficiency of the meridional circulation transport and the departure from shellular rotation (Zahn 1992). Again, the turbulent transport can be investigated with DNS similar to the present ones by varying the angle between the velocity and temperature gradients.

To study the turbulent transport in less idealized flow configurations would require a better understanding of the shear flows induced by the large-scale motions driven by rotation.

Acknowledgements. This work was granted access to the HPC resources of CALMIP under the allocation 2012–P0507.

References

- Brott, I., Evans, C. J., & Hunter, I. e. a. 2011, *A&A*, 530, A116
- Brüggen, M. & Hillebrandt, W. 2001, *MNRAS*, 320, 73
- Deheuvels, S., Garcia, R. A., & Chaplin, W. J. e. a. 2012, *ApJ*, 756, 19
- Denissenkov, P. A., Ivanova, N. S., & Weiss, A. 1999, *A&A*, 341, 181
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, 544, L4
- Endal, A. S. & Sofia, S. 1978, *ApJ*, 220, 279
- Fromang, S. & Papaloizou, J. 2007, *A&A*, 476, 1113
- Gotoh, T., Fukayama, D., & Nakano, T. 2002, *Phys. Fluids*, 14, 1065
- Heger, A., Langer, N., & Woosley, S. E. 2000, *ApJ*, 528, 368
- Holt, S. E., Koseff, J. R., & Ferziger, J. H. 1992, *J. Fluid Mech.*, 237, 499
- Jacobitz, F. G., Sarkar, S., & van Atta, C. W. 1997, *J. Fluid Mech.*, 342, 231
- Lignières, F. 1999, *A&A*, 348, 933
- Lignières, F., Califano, F., & Mangeney, A. 1999, *A&A*, 349, 1027
- Maeder, A. & Meynet, G. 1996, *A&A*, 313, 140
- Maeder, A. & Meynet, G. 2012, *Rev. Mod. Phys.*, 84, 25
- Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J.-P. 2004, *A&A*, 425, 243
- Meynet, G. & Maeder, A. 1997, *A&A*, 321, 465
- Meynet, G. & Maeder, A. 2000, *A&A*, 361, 101
- Michaud, G. & Zahn, J.-P. 1998, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 11, 183
- Orszag, S. A. 1969, *Phys. Fluids*, 12, 250
- Palacios, A., Charbonnel, C., Talon, S., & Siess, L. 2006, *A&A*, 453, 261
- Palacios, A., Talon, S., Charbonnel, C., & Forestini, M. 2003, *A&A*, 399, 603
- Pinsonneault, M. H., Kawaler, S. D., Sofia, S., & Demarque, P. 1989, *ApJ*, 338, 424
- Potter, A. T., Tout, C. A., & Brott, I. 2012, *MNRAS*, 423, 1221
- Schumacher, J. & Eckhardt, B. 2000, *Europhys. Lett.*, 52, 627
- Talon, S. & Zahn, J.-P. 1997, *A&A*, 317, 749
- Taylor, G. I. 1921, in *Proc. London Math. Soc.*, 196–212
- Thual, O. 1992, *J. Fluid Mech.*, 240, 229
- Townsend, A. A. 1958, *J. Fluid Mech.*, 4, 361
- Zahn, J.-P. 1974, in *IAU Symposium*, Vol. 59, *Stellar Instability and Evolution*, ed. P. Ledoux, A. Noels, & A. W. Rodgers, 185–194
- Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 265, 115

Bibliographie

- [1] M. AIZENMAN, P. SMEYERS et A. WEIGERT. *Avoided Crossing of Modes of Non-radial Stellar Oscillations*. **A&A** **58**, p. 41–46, juin 1977.
- [2] H. M. ANTIA et S. BASU. *Measuring the helium abundance in the solar envelope : The role of the equation of state*. **ApJ** **426**, p. 801–811, mai 1994.
- [3] N. BAKER et R. KIPPENHAHN. *Untersuchungen über rotierende Sterne. III. Meridionale Zirkulation bei nichtstarrer Rotation*. **ZAp** **48**, p. 140–154, 1959.
- [4] S. BALACHANDRAN. *The Lithium Dip in M67 : Comparison with the Hyades, Praesepe, and NGC 752 Clusters*. **ApJ** **446**, p. 203–227, juin 1995.
- [5] S. A. BALBUS et J. F. HAWLEY. *The Stability of Differentially Rotating Weakly Magnetized Stellar Radiative Zones*. **MNRAS** **266**, p. 769–774, fév. 1994.
- [6] S. BASU, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, W. J. CHAPLIN, Y. ELSWORTH, G. R. ISAAK, R. NEW, J. SCHOU, M. J. THOMPSON et S. TOMCZYK. *Solar internal sound speed as inferred from combined BiSON and LOWL oscillation frequencies*. **MNRAS** **292**, p. 243–251, déc. 1997.
- [7] P. G. BECK, J. MONTALBAN, T. KALLINGER, J. DE RIDDER, C. AERTS, R. A. GARCÍA, S. HEKKER, M.-A. DUPRET, B. MOSSER, P. EGGENBERGER, D. STELLO, Y. ELSWORTH, S. FRANDSEN, F. CARRIER, M. HILLEN, M. GRUBERBAUER, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, A. MIGLIO, M. VALENTINI, T. R. BEDDING, H. KJELDSSEN, F. R. GIROUARD, J. R. HALL et K. A. IBRAHIM. *Fast core rotation in red-giant stars as revealed by gravity-dominated mixed modes*. **Nature** **481**, p. 55–57, jan. 2012.
- [8] L. BILDSTEN, B. PAXTON, K. MOORE et P. J. MACIAS. *Acoustic Signatures of the Helium Core Flash*. **ApJ** **744**, p. L6–L10, jan. 2012.
- [9] C. T. BOLTON et G. L. ROGERS. *The binary frequency of the OBN and OBC stars*. **ApJ** **222**, p. 234–245, mai 1978.
- [10] J. BRAITHWAITE et H. C. SPRUIT. *A fossil origin for the magnetic field in A stars and white dwarfs*. **Nature** **431**, p. 819–821, oct. 2004.
- [11] G. BRETHOUWER. *Direct numerical simulation of turbulent mixing of a passive scalar in pipe flow*. **Eur. J. Mech. B Fluids** **18**, p. 739–756, juil. 1999.
- [12] G. BRETHOUWER, J. C. R. HUNT et F. T. M. NIEUWSTADT. *Micro-structure and Lagrangian statistics of the scalar field with a mean gradient in isotropic turbulence*. **J. Fluid. Mech.** **474**, p. 193–225, jan. 2003.

- [13] G. BRETHOUWER et E. LINDBORG. *Numerical study of vertical dispersion by stratified turbulence*. **J. Fluid. Mech.** **631**, p. 149–163, 6 2009.
- [14] I. BROTT, S. E. DE MINK, M. CANTIELLO, N. LANGER, A. DE KOTER, C. J. EVANS, I. HUNTER, C. TRUNDLE et J. S. VINK. *Rotating massive main-sequence stars. I. Grids of evolutionary models and isochrones*. **A&A** **530**, A115, juin 2011a.
- [15] I. BROTT, C. J. EVANS, I. HUNTER, A. DE KOTER, N. LANGER, P. L. DUFTON, M. CANTIELLO, C. TRUNDLE, D. J. LENNON, S. E. DE MINK, S.-C. YOON et P. ANDERS. *Rotating massive main-sequence stars. II. Simulating a population of LMC early B-type stars as a test of rotational mixing*. **A&A** **530**, A116, juin 2011b.
- [16] J. M. BROWN, P. GARAUD et S. STELLMACH. *Chemical Transport and Spontaneous Layer Formation in Fingering Convection in Astrophysics*. **ApJ** **768**, 34, mai 2013.
- [17] T. M. BROWN, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, W. A. DZIEMBOWSKI, P. GOODE, D. O. GOUGH et C. A. MORROW. *Inferring the sun’s internal angular velocity from observed p-mode frequency splittings*. **ApJ** **343**, p. 526–546, août 1989.
- [18] K. A. BRUCKER, J. C. ISAZA, T. VAITHIANATHAN et L. R. COLLINS. *Efficient algorithm for simulating homogeneous turbulent shear flow without remeshing*. **J. Comput. Phys.** **225**, p. 20–32, juil. 2007.
- [19] M. BRÜGGEN et W. HILLEBRANDT. *Mixing through shear instabilities*. **MNRAS** **320**, p. 73–82, jan. 2001.
- [20] F. H. BUSSE. *Do Eddington-Sweet circulations exist*. **Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.** **17**, p. 215–235, 1981.
- [21] F. H. BUSSE. *On the problem of stellar rotation*. **ApJ** **259**, p. 759–766, août 1982.
- [22] K. L. CALDER. *On the equation of atmospheric diffusion*. **Quart. J. Roy. Meteor. Soc.** **91**, p. 514–517, oct. 1965.
- [23] V. M. CANUTO. *Critical Richardson numbers and gravity waves*. **A&A** **384**, p. 1119–1123, mars 2002.
- [24] T. CEILLIER, P. EGGENBERGER, R. A. GARCÍA et S. MATHIS. *Attempts to reproduce the rotation profile of the red giant KIC 7341231 observed by Kepler*. **Astronom. Nachr.** **333**, p. 971–974, déc. 2012.
- [25] B. CHABOYER et J.-P. ZAHN. *Effect of horizontal turbulent diffusion on transport by meridional circulation*. **A&A** **253**, p. 173–177, jan. 1992.
- [26] K. L. CHAN et S. SOFIA. *Validity tests of the mixing-length theory of deep convection*. **Science** **235**, p. 465–467, jan. 1987.
- [27] S. CHANDRASEKHAR. *Stochastic Problems in Physics and Astronomy*. **Rev. Mod. Phys.** **15**, p. 1–89, jan. 1943.
- [28] S. CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press, 1961.

- [29] W. J. CHAPLIN, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, Y. ELSWORTH, R. HOWE, G. R. ISAAK, R. M. LARSEN, R. NEW, J. SCHOU, M. J. THOMPSON et S. TOMCZYK. *Rotation of the solar core from BiSON and LOWL frequency observations*. **MNRAS** **308**, p. 405–414, sept. 1999.
- [30] P. CHARBONNEAU, S. TOMCZYK, J. SCHOU et M. J. THOMPSON. *The Rotation of the Solar Core Inferred by Genetic Forward Modeling*. **ApJ** **496**, p. 1015–1030, mars 1998.
- [31] C. CHARBONNEL et S. TALON. *Influence of Gravity Waves on the Internal Rotation and Li Abundance of Solar-Type Stars*. **Science** **309**, p. 2189–2191, sept. 2005.
- [32] C. CHIOSI et A. MAEDER. *The evolution of massive stars with mass loss*. **ARA&A** **24**, p. 329–375, 1986.
- [33] J. CHRISTENSEN-DALSGAARD. *Helioseismology*. **Reviews of Modern Physics** **74**, p. 1073–1129, nov. 2002.
- [34] J. CHRISTENSEN-DALSGAARD et G. BERTHOMIEU. « *Theory of solar oscillations* » . In A. N. Cox, W. C. Livingston et M. S. Matthews (eds.), *Solar Interior and Atmosphere*, p. 401–478. University Arizona Press, 1991.
- [35] J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, T. L. DUVAL, JR., D. O. GOUGH, J. W. HARVEY et E. J. RHODES, JR. *Speed of sound in the solar interior*. **Nature** **315**, p. 378–382, mai 1985.
- [36] J. CHRISTENSEN-DALSGAARD et J. SCHOU. « *Differential rotation in the solar interior* » . In E. J. Rolfe (ed.), *Seismology of the Sun and Sun-Like Stars*, volume 286 sur *ESA Special Publication*, p. 149–153, déc. 1988.
- [37] J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. SCHOU et M. J. THOMPSON. *A comparison of methods for inverting helioseismic data*. **MNRAS** **242**, p. 353–369, fév. 1990.
- [38] D. CHUNG et G. MATHEOU. *Direct numerical simulation of stationary homogeneous stratified sheared turbulence*. **J. Fluid. Mech.** **696**, p. 434–467, avr. 2012.
- [39] S. CORRISIN. *Limitations of Gradient Transport Models in Random Walks and in Turbulence*. **Adv. Geophys.** **18**, A25, 1974.
- [40] T. G. COWLING. *The non-radial oscillations of polytropic stars*. **MNRAS** **101**, p. 367–375, 1941.
- [41] T. G. COWLING et R. A. NEWING. *The Oscillations of a Rotating Star*. **ApJ** **109**, p. 149–158, jan. 1949.
- [42] F. D’ANTONA et I. MAZZITELLI. *Lithium depletion in stars - Pre-main sequence burning and extra-mixing*. **A&A** **138**, p. 431–442, sept. 1984.
- [43] W. DÄPPEN, D. O. GOUGH, A. G. KOSOVICHEV et M. J. THOMPSON. « *A New Inversion for the Hydrostatic Stratification of the Sun* » . In D. Gough et J. Toomre (eds.), *Challenges to Theories of the Structure of Moderate-Mass Stars*, volume 388 sur *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, p. 111–120, 1991.

- [44] S. DEHEUVELS, R. A. GARCÍA, W. J. CHAPLIN, S. BASU, H. M. ANTIA, T. APPOURCHAUX, O. BENOMAR, G. R. DAVIES, Y. ELSWORTH, L. GIZON, M. J. GOUPIL, D. R. REESE, C. REGULO, J. SCHOU, T. STAHN, L. CASAGRANDE, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, D. FISCHER, S. HEKKER, H. KJELDSSEN, S. MATHUR, B. MOSSER, M. PINSONNEAULT, J. VALENTI, J. L. CHRISTIANSEN, K. KINEMUCHI et F. MULLALLY. *Seismic Evidence for a Rapidly Rotating Core in a Lower-giant-branch Star Observed with Kepler*. **ApJ** **756**, p. 19–34, sept. 2012.
- [45] P. A. DENISSENKOV, N. S. IVANOVA et A. WEISS. *Main-sequence stars of 10 and 30 $M_{\odot}$: approaching the steady-state rotation*. **A&A** **341**, p. 181–189, jan. 1999.
- [46] R. G. DEUPREE. *Stellar evolution with arbitrary rotation laws. I - Mathematical techniques and test cases*. **ApJ** **357**, p. 175–187, juil. 1990.
- [47] J. D. DO NASCIMENTO, JR., M. CASTRO, J. MELÉNDEZ, M. BAZOT, S. THÉADO, G. F. PORTO DE MELLO et J. R. DE MEDEIROS. *Age and mass of solar twins constrained by lithium abundance*. **A&A** **501**, p. 687–694, juil. 2009.
- [48] P. A. DURBIN. *A random flight model of inhomogeneous turbulent dispersion*. **Phys. Fluids** **23**, p. 2151–2153, nov. 1980.
- [49] T. L. DUVALL, JR., W. A. DZIEMBOWSKI, P. R. GOODE, D. O. GOUGH, J. W. HARVEY et J. W. LEIBACHER. *Internal rotation of the sun*. **Nature** **310**, p. 22–25, juil. 1984.
- [50] W. A. DZIEMBOWSKI et P. R. GOODE. *Effects of differential rotation on stellar oscillations - A second-order theory*. **ApJ** **394**, p. 670–687, août 1992.
- [51] W. A. DZIEMBOWSKI, P. R. GOODE et K. G. LIBBRECHT. *The radial gradient in the sun's rotation*. **ApJ** **337**, p. L53–L57, fév. 1989.
- [52] A. S. EDDINGTON. *Circulating currents in rotating stars*. **The Observatory** **48**, p. 73–75, mars 1925.
- [53] P. EGGENBERGER, G. MEYNET, A. MAEDER, R. HIRSCHI, C. CHARBONNEL, S. TALON et S. EKSTRÖM. *The Geneva stellar evolution code*. **Ap&SS** **316**, p. 43–54, août 2008.
- [54] P. EGGENBERGER, J. MONTALBÁN et A. MIGLIO. *Angular momentum transport in stellar interiors constrained by rotational splittings of mixed modes in red giants*. **A&A** **544**, L4, août 2012.
- [55] S. EKSTRÖM, C. GEORGY, P. EGGENBERGER, G. MEYNET, N. MOWLAVI, A. WYTTENBACH, A. GRANADA, T. DECRESSIN, R. HIRSCHI, U. FRISCHKNECHT, C. CHARBONNEL et A. MAEDER. *Grids of stellar models with rotation. I. Models from 0.8 to 120 $M_{\odot}$ at solar metallicity ($Z = 0.014$)*. **A&A** **537**, A146, jan. 2012.
- [56] A. S. ENDAL et S. SOFIA. *The evolution of rotating stars. I - Method and exploratory calculations for a 7-solar-mass star*. **ApJ** **210**, p. 184–198, nov. 1976.
- [57] A. S. ENDAL et S. SOFIA. *The evolution of rotating stars. II - Calculations with time-dependent redistribution of angular momentum for 7- and 10-solar-mass stars*. **ApJ** **220**, p. 279–290, fév. 1978.

- [58] F. ESPINOSA LARA et M. RIEUTORD. *Gravity darkening in rotating stars*. **A&A** **533**, A43, sept. 2011.
- [59] F. ESPINOSA LARA et M. RIEUTORD. *Self-consistent 2D models of fast-rotating early-type stars*. **A&A** **552**, A35, avr. 2013.
- [60] V. ESWARAN et S. B. POPE. *Direct numerical simulations of the turbulent mixing of a passive scalar*. **Phys. Fluids** **31**, p. 506–520, mars 1988.
- [61] C. J. EVANS, D. J. LENNON, S. J. SMARTT et C. TRUNDLE. *The VLT-FLAMES survey of massive stars : observations centered on the Magellanic Cloud clusters NGC 330, NGC 346, NGC 2004, and the N11 region*. **A&A** **456**, p. 623–638, sept. 2006.
- [62] C. J. EVANS, S. J. SMARTT, J.-K. LEE, D. J. LENNON, A. KAUFER, P. L. DUFTON, C. TRUNDLE, A. HERRERO, S. SIMÓN-DÍAZ, A. DE KOTER, W.-R. HAMANN, M. A. HENDRY, I. HUNTER, M. J. IRWIN, A. J. KORN, R.-P. KUDRITZKI, N. LANGER, M. R. MOKIEM, F. NAJARRO, A. W. A. PAULDRACH, N. PRZYBILLA, J. PULS, R. S. I. RYANS, M. A. URBANEJA, K. A. VENN et M. R. VILLAMARIZ. *The VLT-FLAMES survey of massive stars : Observations in the Galactic clusters NGC 3293, NGC 4755 and NGC 6611*. **A&A** **437**, p. 467–482, juil. 2005.
- [63] E. FEIREISL et A. NOVOTNÝ. « *Small pécelet number approximation as a singular limit of the full navier-stokes-fourier system with radiation* » . In A. V. Fursikov, G. P. Galdi et V. V. Pukhnachev (eds.), *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, p. 123–152. Birkhäuser Basel, 2010.
- [64] V. C. A. FERRARO. *The non-uniform rotation of the Sun and its magnetic field*. **MNRAS** **97**, p. 458–472, avr. 1937.
- [65] J. FLIEGNER, N. LANGER et K. A. VENN. *Boron in main sequence B stars : a critical test for rotational mixing*. **A&A** **308**, p. L13–L16, avr. 1996.
- [66] B. E. FREEMAN. *Tensor Diffusivity of a Trace Constituent in a Stratified Boundary Layer*. **J. Atmospheric Sci.** **34**, p. 124–136, jan. 1977.
- [67] K. FRICKE. *Instabilität stationärer Rotation in Sternen*. **ZAp** **68**, p. 317–344, 1968.
- [68] T. GERZ, U. SCHUMANN et S. E. ELGHOBASHI. *Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows*. **J. Fluid. Mech.** **200**, p. 563–594, mars 1989.
- [69] D. R. GIES et D. L. LAMBERT. *Carbon, nitrogen, and oxygen abundances in early B-type stars*. **ApJ** **387**, p. 673–700, mars 1992.
- [70] P. GOLDREICH et G. SCHUBERT. *Differential Rotation in Stars*. **ApJ** **150**, p. 571–587, nov. 1967.
- [71] D. O. GOUGH. *Mixing-length theory for pulsating stars*. **ApJ** **214**, p. 196–213, mai 1977.
- [72] D. O. GOUGH. *A new measure of the solar rotation*. **MNRAS** **196**, p. 731–745, sept. 1981.

- [73] D. O. GOUGH, A. G. KOSOVICHEV, J. TOOMRE, E. ANDERSON, H. M. ANTIA, S. BASU, B. CHABOYER, S. M. CHITRE, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, W. A. DZIEMBOWSKI, A. EFF-DARWICH, J. R. ELLIOTT, P. M. GILES, P. R. GOODE, J. A. GUZIK, J. W. HARVEY, F. HILL, J. W. LEIBACHER, M. J. P. F. G. MONTEIRO, O. RICHARD, T. SEKII, H. SHIBAHASHI, M. TAKATA, M. J. THOMPSON, S. VAUCLAIR et S. V. VORONTSOV. *The Seismic Structure of the Sun*. **Science** **272**, p. 1296–1300, mai 1996.
- [74] P. GUALTIERI, C. M. CASCIOLA, R. BENZI, G. AMATI et R. PIVA. *Scaling laws and intermittency in homogeneous shear flow*. **Phys. Fluids** **14**, p. 583–596, fév. 2002.
- [75] C. J. HANSEN, J. P. COX et H. M. VAN HORN. *The effects of differential rotation on the splitting of nonradial modes of stellar oscillation*. **ApJ** **217**, p. 151–159, oct. 1977.
- [76] A. HEGER et N. LANGER. *Presupernova Evolution of Rotating Massive Stars. II. Evolution of the Surface Properties*. **ApJ** **544**, p. 1016–1035, déc. 2000.
- [77] A. HEGER, N. LANGER et S. E. WOOSLEY. *Presupernova Evolution of Rotating Massive Stars. I. Numerical Method and Evolution of the Internal Stellar Structure*. **ApJ** **528**, p. 368–396, jan. 2000.
- [78] A. HERRERO, L. J. CORRAL, M. R. VILLAMARIZ et E. L. MARTÍN. *Fundamental parameters of galactic luminous OB stars. III. Spectroscopic analysis of O stars in Cygnus OB2*. **A&A** **348**, p. 542–552, août 1999.
- [79] A. HERRERO, R. P. KUDRITZKI, J. M. VILCHEZ, D. KUNZE, K. BUTLER et S. HASER. *Intrinsic parameters of galactic luminous OB stars*. **A&A** **261**, p. 209–234, juil. 1992.
- [80] S. HIRABAYASHI et T. SATO. *A novel numerical forcing for homogeneous stratified turbulence in full energy equilibrium*. **Comput. & Fluids** **39**(10), p. 1789–1795, déc. 2010.
- [81] R. HIRSCHI et A. MAEDER. *The GSF instability and turbulence do not account for the relatively low rotation rate of pulsars*. **A&A** **519**, A16, sept. 2010.
- [82] R. HIRSCHI, G. MEYNET et A. MAEDER. *Stellar evolution with rotation. XII. Pre-supernova models*. **A&A** **425**, p. 649–670, oct. 2004.
- [83] S. E. HOLT, J. R. KOSEFF et J. H. FERZIGER. *A numerical study of the evolution and structure of homogeneous stably stratified sheared turbulence*. **J. Fluid. Mech.** **237**, p. 499–539, avr. 1992.
- [84] J. C. R. HUNT, D. D. STRETCH et R. E. BRITTER. « *Length scales in stably stratified turbulent flows and their use in turbulence models* ». In J. S. Puttock (ed.), *Stably stratified flows and dense gas dispersion*, p. 285–321. Clarendon Press, 1988.
- [85] I. HUNTER, I. BROTT, N. LANGER, D. J. LENNON, P. L. DUFTON, I. D. HOWARTH, R. S. I. RYANS, C. TRUNDLE, C. J. EVANS, A. DE KOTER et S. J. SMARTT. *The VLT-FLAMES survey of massive stars : constraints on stellar evolution from the chemical compositions of rapidly rotating Galactic and Magellanic Cloud B-type stars*. **A&A** **496**, p. 841–853, mars 2009.

- [86] I. HUNTER, I. BROTT, D. J. LENNON, N. LANGER, P. L. DUFTON, C. TRUNDLE, S. J. SMARTT, A. DE KOTER, C. J. EVANS et R. S. I. RYANS. *The VLT FLAMES Survey of Massive Stars : Rotation and Nitrogen Enrichment as the Key to Understanding Massive Star Evolution*. **ApJ** **676**, p. L29–L32, mars 2008.
- [87] T. ISHIHARA, K. YOSHIDA et Y. KANEDA. *Anisotropic Velocity Correlation Spectrum at Small Scales in a Homogeneous Turbulent Shear Flow*. **Phys. Rev. Lett.** **88**(15), 154501, avr. 2002.
- [88] F. G. JACOBITZ, S. SARKAR et C. W. VAN ATTA. *Direct numerical simulations of the turbulence evolution in a uniformly sheared and stably stratified flow*. **J. Fluid. Mech.** **342**, p. 231–261, juil. 1997.
- [89] H.-J. KALTENBACH, T. GERZ et U. SCHUMANN. *Large-eddy simulation of homogeneous turbulence and diffusion in stably stratified shear flow*. **J. Fluid. Mech.** **280**, p. 1–40, 1994.
- [90] S. D. KAWALER, T. SEKII et D. GOUGH. *Prospects for Measuring Differential Rotation in White Dwarfs through Asteroseismology*. **ApJ** **516**, p. 349–365, mai 1999.
- [91] R. KIPPENHAHN et H.-C. THOMAS. « *A Simple Method for the Solution of the Stellar Structure Equations Including Rotation and Tidal Forces* ». In A. Slettebak (ed.), *IAU Colloq. 4 : Stellar Rotation*, p. 20–29, 1970.
- [92] H. H. KLAHR et P. BODENHEIMER. *Turbulence in Accretion Disks : Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability*. **ApJ** **582**, p. 869–892, jan. 2003.
- [93] E. KNOBLOCH et H. C. SPRUIT. *Stability of differential rotation in stars*. **A&A** **113**, p. 261–268, sept. 1982.
- [94] D. LECOANET, E. G. ZWEIBEL, R. H. D. TOWNSEND et Y.-M. HUANG. *Violation of Richardson’s Criterion Via Introduction of a Magnetic Field*. **ApJ** **712**, p. 1116–1128, avr. 2010.
- [95] P. LEDOUX et T. WALRAVEN. *Variable Stars*. **Handbuch der Physik** **51**, p. 353–604, 1958.
- [96] S. K. LELE. *Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution*. **J. Comput. Phys.** **103**, p. 16–42, nov. 1992.
- [97] P. LESAFFRE, S. M. CHITRE, A. T. POTTER et C. A. TOUT. *A two-dimensional mixing length theory of convective transport*. **MNRAS** **431**, p. 2200–2208, mai 2013.
- [98] G. LESUR et J. C. B. PAPALOIZOU. *The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models*. **A&A** **513**, A60, avr. 2010.
- [99] L. H. LI, P. VENTURA, S. BASU, S. SOFIA et P. DEMARQUE. *Two-dimensional Stellar Evolution Code Including Arbitrary Magnetic Fields. I. Mathematical Techniques and Test Cases*. **ApJS** **164**, p. 215–254, mai 2006.
- [100] F. LIGNIÈRES. *The small-Péclet-number approximation in stellar radiative zones*. **A&A** **348**, p. 933–939, août 1999.

- [101] F. LIGNIÈRES, F. CALIFANO et A. MANGENEY. *Shear layer instability in a highly diffusive stably stratified atmosphere*. **A&A** **349**, p. 1027–1036, sept. 1999.
- [102] E. LINDBORG et G. BRETHOUWER. *Vertical dispersion by stratified turbulence*. **J. Fluid. Mech.** **614**, p. 303–314, oct. 2008.
- [103] E. LINDBORG et E. FEDINA. *Vertical turbulent diffusion in stably stratified flows*. **Geophys. Res. Lett.** **36**, 1605, jan. 2009.
- [104] C. C. LOVEKIN, R. G. DEUPREE et C. I. SHORT. *Surface Temperature and Synthetic Spectral Energy Distributions for Rotationally Deformed Stars*. **ApJ** **643**, p. 460–470, mai 2006.
- [105] H.-G. LUDWIG, B. FREYTAG et M. STEFFEN. *A calibration of the mixing-length for solar-type stars based on hydrodynamical simulations. I. Methodical aspects and results for solar metallicity*. **A&A** **346**, p. 111–124, juin 1999.
- [106] L. S. LYUBIMKOV. *Evolutionary Increase in the Nitrogen Abundance in the Atmospheres of Early B-Stars*. **Astrophysics** **20**, p. 255–266, mai 1984.
- [107] L. S. LYUBIMKOV. *Correlation between the helium abundances in the atmospheres of early B stars and their ages and masses*. **Astrophysics** **29**, p. 704–713, nov. 1988.
- [108] L. S. LYUBIMKOV, D. L. LAMBERT, T. M. RACHKOVSKAYA, S. I. ROSTOPCHIN, A. E. TARASOV, D. B. POKLAD, V. M. LARIONOV et L. V. LARIONOVA. *Surface abundances of light elements for a large sample of early B-type stars - I. Spectral observations of 123 stars; measurements of hydrogen and helium lines; infrared photometry*. **MNRAS** **316**, p. 19–32, juil. 2000.
- [109] L. S. LYUBIMKOV, S. I. ROSTOPCHIN et D. L. LAMBERT. *Surface abundances of light elements for a large sample of early B-type stars - III. An analysis of helium lines in spectra of 102 stars*. **MNRAS** **351**, p. 745–767, juin 2004.
- [110] A. MAEDER. *On the Richardson criterion for shear instabilities in rotating stars*. **A&A** **299**, p. 84–88, juil. 1995.
- [111] A. MAEDER. *Stellar evolution with rotation. II. A new approach for shear mixing*. **A&A** **321**, p. 134–144, mai 1997.
- [112] A. MAEDER. *Stellar rotation : Evidence for a large horizontal turbulence and its effects on evolution*. **A&A** **399**, p. 263–269, fév. 2003.
- [113] A. MAEDER et G. MEYNET. *Diffusive mixing by shears in rotating stars*. **A&A** **313**, p. 140–144, sept. 1996.
- [114] A. MAEDER et G. MEYNET. *Stellar evolution with rotation. VII. Low metallicity models and the blue to red supergiant ratio in the SMC*. **A&A** **373**, p. 555–571, juil. 2001.
- [115] A. MAEDER et G. MEYNET. *Stellar evolution with rotation and magnetic fields. II. General equations for the transport by Tayler-Spruit dynamo*. **A&A** **422**, p. 225–237, juil. 2004.
- [116] A. MAEDER et G. MEYNET. *Stellar evolution with rotation and magnetic fields. III. The interplay of circulation and dynamo*. **A&A** **440**, p. 1041–1049, sept. 2005.

- [117] A. MAEDER, G. MEYNET, N. LAGARDE et C. CHARBONNEL. *The thermohaline, Richardson, Rayleigh-Taylor, Solberg-Høiland, and GSF criteria in rotating stars*. **A&A** **553**, A1, mai 2013.
- [118] A. MAEDER et J.-P. ZAHN. *Stellar evolution with rotation. III. Meridional circulation with μ -gradients and non-stationarity*. **A&A** **334**, p. 1000–1006, juin 1998.
- [119] J. P. MARQUES, M. J. GOUPIL, Y. LEBRETON, S. TALON, A. PALACIOS, K. BELKACEM, R.-M. OUAZZANI, B. MOSSER, A. MOYA, P. MOREL, B. PICHON, S. MATHIS, J.-P. ZAHN, S. TURCK-CHIÈZE et P. A. P. NGHIEM. *Seismic diagnostics for transport of angular momentum in stars. I. Rotational splittings from the pre-main sequence to the red-giant branch*. **A&A** **549**, A74, jan. 2013.
- [120] F. MARTINS, E. DEPAGNE, D. RUSSEIL et L. MAHY. *Evidence for quasi-chemically homogeneous evolution of massive stars up to solar metallicity*. **ArXiv e-prints** 1304.3337, avr. 2013.
- [121] F. MARTINS, D. J. HILLIER, J. C. BOURET, E. DEPAGNE, C. FOELLM, S. MARCHENKO et A. F. MOFFAT. *Properties of WNH stars in the Small Magellanic Cloud : evidence for homogeneous evolution*. **A&A** **495**, p. 257–270, fév. 2009.
- [122] S. MATHIS, A. PALACIOS et J.-P. ZAHN. *On shear-induced turbulence in rotating stars*. **A&A** **425**, p. 243–247, oct. 2004.
- [123] S. MATHIS et J.-P. ZAHN. *Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. I. Hydrodynamical processes*. **A&A** **425**, p. 229–242, oct. 2004.
- [124] J. T. MENDEL, K. A. VENN, C. R. PROFFITT, A. M. BROOKS et D. L. LAMBERT. *Testing Rotational Mixing Predictions with New Boron Abundances in Main-Sequence B-Type Stars*. **ApJ** **640**, p. 1039–1050, avr. 2006.
- [125] K. MENOU et J. LE MER. *Magnetorotational Transport in the Early Sun*. **ApJ** **650**, p. 1208–1216, oct. 2006.
- [126] L. MESTEL. *Rotation and stellar evolution*. **MNRAS** **113**, p. 716–745, 1953.
- [127] G. MEYNET, S. EKSTROM, A. MAEDER, P. EGGENBERGER, H. SAIO, V. CHOMIENNE et L. HAEMMERLÉ. « *Models of Rotating Massive Stars : Impacts of Various Prescriptions* » . In *Lecture Notes in Physics*, volume 865, p. 3–642, 2013.
- [128] G. MEYNET et A. MAEDER. *Stellar evolution with rotation. I. The computational method and the inhibiting effect of the μ -gradient*. **A&A** **321**, p. 465–476, mai 1997.
- [129] G. MEYNET et A. MAEDER. *Stellar evolution with rotation. V. Changes in all the outputs of massive star models*. **A&A** **361**, p. 101–120, sept. 2000.
- [130] G. MICHAUD et J.-P. ZAHN. *Turbulent Transport in Stellar Interiors*. **Theoret. Comput. Fluid Dynam.** **11**, p. 183–193, 1998.
- [131] A. MIGLIO, J. MONTALBÁN, F. BAUDIN, P. EGGENBERGER, A. NOELS, S. HEKKER, J. DE RIDDER, W. WEISS et A. BAGLIN. *Probing populations of red giants in the galactic disk with CoRoT*. **A&A** **503**, p. L21–L24, sept. 2009.

- [132] J. D. MONNIER, M. ZHAO, E. PEDRETTI, N. THUREAU, M. IRELAND, P. MUIRHEAD, J.-P. BERGER, R. MILLAN-GABET, G. VAN BELLE, T. TEN BRUMMELAAR, H. MCALISTER, S. RIDGWAY, N. TURNER, L. STURMANN, J. STURMANN et D. BERGER. *Imaging the Surface of Altair*. **Science** **317**, p. 342–345, juil. 2007.
- [133] J. MONTALBÁN et E. SCHATZMAN. *Mixing by internal waves. III. Li and Be abundance dependence on spectral type, age and rotation*. **A&A** **354**, p. 943–959, fév. 2000.
- [134] B. MOSSER, M. J. GOUPIL, K. BELKACEM, J. P. MARQUES, P. G. BECK, S. BLOEMEN, J. DE RIDDER, C. BARBAN, S. DEHEUVELS, Y. ELSWORTH, S. HEKKER, T. KALLINGER, R. M. OUAZZANI, M. PINSONNEAULT, R. SAMADI, D. STELLO, R. A. GARCÍA, T. C. KLAUS, J. LI, S. MATHUR et R. L. MORRIS. *Spin down of the core rotation in red giants*. **A&A** **548**, A10, déc. 2012.
- [135] P. E. NISSEN. *Evidence of helium abundance differences between young groups of stars*. **A&A** **50**, p. 343–352, août 1976.
- [136] J. NORRIS. *Neutral-Helium Line Strengths. V. The Weak-Helium Stars of Population I*. **ApJS** **23**, p. 213–233, juil. 1971.
- [137] S. A. ORSZAG. *Numerical Methods for the Simulation of Turbulence*. **Phys. Fluids** **12**, p. 250–257, jan. 1969.
- [138] S. A. ORSZAG et G. S. PATTERSON. *Numerical Simulation of Three-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence*. **Phys. Rev. Lett.** **28**, p. 76–79, jan. 1972.
- [139] Y. OSAKI. *Meridional Circulation in a Rotating Star*. **PASJ** **24**, p. 509–516, 1972.
- [140] T. R. OSBORN. *Estimates of the Local Rate of Vertical Diffusion from Dissipation Measurements*. **J. Phys. Oceanogr.** **10**, p. 83–89, jan. 1980.
- [141] T. R. OSBORN et L. E. BILODEAU. *Temperature Microstructure in the Equatorial Atlantic*. **J. Phys. Oceanogr.** **10**, p. 66–82, jan. 1980.
- [142] T. R. OSBORN et C. S. COX. *Oceanic fine structure*. **Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.** **3**, p. 321–345, 1972.
- [143] G. PACE, M. CASTRO, J. MELÉNDEZ, S. THÉADO et J.-D. DO NASCIMENTO, JR. *Lithium in M 67 : From the main sequence to the red giant branch*. **A&A** **541**, A150, mai 2012.
- [144] A. PALACIOS, C. CHARBONNEL, S. TALON et L. SIESS. *Rotational mixing in low-mass stars. II. Self-consistent models of Pop II RGB stars*. **A&A** **453**, p. 261–278, juil. 2006.
- [145] A. PALACIOS, S. TALON, C. CHARBONNEL et M. FORESTINI. *Rotational mixing in low-mass stars. I. Effect of the μ -gradients in main sequence and subgiant Pop I stars*. **A&A** **399**, p. 603–616, fév. 2003.
- [146] E. N. PARKER. *The Formation of Sunspots from the Solar Toroidal Field*. **ApJ** **121**, p. 491–507, mars 1955.

- [147] H. J. PEARSON, J. S. PUTTOCK et J. C. R. HUNT. *A statistical model of fluid-element motions and vertical diffusion in a homogeneous stratified turbulent flow*. **J. Fluid. Mech.** **129**, p. 219–249, avr. 1983.
- [148] C. L. PEKERIS. *Nonradial Oscillations of Stars*. **ApJ** **88**, p. 189–199, sept. 1938.
- [149] M. PINSONNEAULT. *Mixing in Stars*. **ARA&A** **35**, p. 557–605, 1997.
- [150] M. H. PINSONNEAULT, S. D. KAWALER, S. SOFIA et P. DEMARQUE. *Evolutionary models of the rotating sun*. **ApJ** **338**, p. 424–452, mars 1989.
- [151] E. PITTS et R. J. TAYLER. *The adiabatic stability of stars containing magnetic fields. IV - The influence of rotation*. **MNRAS** **216**, p. 139–154, sept. 1985.
- [152] A. T. POTTER, C. A. TOUT et I. BROTT. *Towards a unified model of stellar rotation - II. Model-dependent characteristics of stellar populations*. **MNRAS** **423**, p. 1221–1233, juin 2012.
- [153] L. PRANDTL. *Über die ausgebildete turbulenz (investigations on turbulent flow)*. **Z. Angew. Math. Mech.** **5**, p. 136–139, 1925.
- [154] V. PRAT et F. LIGNIÈRES. *Turbulent transport in radiative zones of stars*. **A&A** **551**, L3, mars 2013.
- [155] A. PUMIR. *Turbulence in homogeneous shear flows*. **Phys. Fluids** **8**, p. 3112–3127, nov. 1996.
- [156] G. RANDERS. *Large-Scale Motion in Stars*. **ApJ** **94**, p. 109–123, juil. 1941.
- [157] J. J. RILEY et G. S. PATTERSON, JR. *Diffusion experiments with numerically integrated isotropic turbulence*. **Phys. Fluids** **17**, p. 292–297, fév. 1974.
- [158] R. S. ROGALLO. *Numerical experiments in homogeneous turbulence*. **NASA STI/Recon Technical Report N 81**, 31508, sept. 1981.
- [159] M. M. ROGERS, N. N. MANSOUR et W. C. REYNOLDS. *An algebraic model for the turbulent flux of a passive scalar*. **J. Fluid. Mech.** **203**, p. 77–101, juin 1989.
- [160] M. M. ROGERS et P. MOIN. *The structure of the vorticity field in homogeneous turbulent flows*. **J. Fluid. Mech.** **176**, p. 33–66, mars 1987.
- [161] I. W. ROXBURGH. *On stellar rotation, I. The rotation of upper main-sequence stars*. **MNRAS** **128**, p. 157–171, 1964.
- [162] R. RUBINSTEIN et J. M. BARTON. *Renormalization group analysis of anisotropic diffusion in turbulent shear flows*. **Phys. Fluids** **3**, p. 415–421, mars 1991.
- [163] S. SARKAR. *The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow*. **J. Fluid. Mech.** **282**, p. 163–186, 1995.
- [164] B. L. SAWFORD et P. K. YEUNG. *Lagrangian statistics in uniform shear flow : Direct numerical simulation and Lagrangian stochastic models*. **Phys. Fluids** **13**, p. 2627–2634, sept. 2001.

- [165] J. SCHOU, H. M. ANTIA, S. BASU, R. S. BOGART, R. I. BUSH, S. M. CHITRE, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, M. P. DI MAURO, W. A. DZIEMBOWSKI, A. EFF-DARWICH, D. O. GOUGH, D. A. HABER, J. T. HOEKSEMA, R. HOWE, S. G. KORZENNIK, A. G. KO-SOVICHEV, R. M. LARSEN, F. P. PIJPERS, P. H. SCHERRER, T. SEKII, T. D. TARBELL, A. M. TITLE, M. J. THOMPSON et J. TOOMRE. *Helioseismic Studies of Differential Rotation in the Solar Envelope by the Solar Oscillations Investigation Using the Michelson Doppler Imager*. **ApJ** **505**, p. 390–417, sept. 1998.
- [166] J. SCHOU, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD et M. J. THOMPSON. *On comparing helioseismic two-dimensional inversion methods*. **ApJ** **433**, p. 389–416, sept. 1994.
- [167] J. SCHUMACHER. *Derivative moments in stationary homogeneous shear turbulence*. **J. Fluid. Mech.** **441**, p. 109–118, août 2001.
- [168] J. SCHUMACHER. *Relation between shear parameter and Reynolds number in statistically stationary turbulent shear flows*. **Phys. Fluids** **16**, p. 3094–3102, août 2004.
- [169] J. SCHUMACHER et B. ECKHARDT. *On statistically stationary homogeneous shear turbulence*. **Europhys. Lett.** **52**, p. 627–632, déc. 2000.
- [170] J. SCHUMACHER, K. R. SREENIVASAN et P. K. YEUNG. *Very fine structures in scalar mixing*. **J. Fluid. Mech.** **531**, p. 113–122, mai 2005.
- [171] U. SCHUMANN. « *Algorithms for direct numerical simulation of shear-periodic turbulence* ». In Soubbaramayer et J. P. Boujot (eds.), *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, volume 218 sur *Lecture Notes in Physics*, p. 492–496. Berlin Springer Verlag, 1985.
- [172] U. SCHUMANN et T. GERZ. *Turbulent Mixing in Stably Stratified Shear Flows*. **J. Appl. Meteor.** **34**, p. 33–48, jan. 1995.
- [173] M. SCHWARZSCHILD. *On Stellar Rotation. II*. **ApJ** **106**, p. 427–456, nov. 1947.
- [174] E. A. SPIEGEL. *A Generalization of the Mixing-Length Theory of Turbulent Convection*. **ApJ** **138**, p. 216–225, juil. 1963.
- [175] E. A. SPIEGEL et J.-P. ZAHN. *Instabilities of Differential Rotation*. **Comments Astrophys. Space Phys.** **2**, p. 178–183, sept. 1970.
- [176] E. A. SPIEGEL et J.-P. ZAHN. *The solar tachocline*. **A&A** **265**, p. 106–114, nov. 1992.
- [177] H. C. SPRUIT. *Differential rotation and magnetic fields in stellar interiors*. **A&A** **349**, p. 189–202, sept. 1999.
- [178] H. C. SPRUIT. *Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior*. **A&A** **381**, p. 923–932, jan. 2002.
- [179] S. STARRFIELD, J. W. TRURAN, W. M. SPARKS et G. S. KUTTER. *CNO Abundances and Hydrodynamic Models of the Nova Outburst*. **ApJ** **176**, p. 169–176, août 1972.
- [180] P. A. SWEET. *The importance of rotation in stellar evolution*. **MNRAS** **110**, p. 548–558, 1950.

- [181] S. TALON et C. CHARBONNEL. *Hydrodynamical stellar models including rotation, internal gravity waves, and atomic diffusion. I. Formalism and tests on Pop I dwarfs*. **A&A** **440**, p. 981–994, sept. 2005.
- [182] S. TALON et J.-P. ZAHN. *Anisotropic diffusion and shear instabilities*. **A&A** **317**, p. 749–751, fév. 1997.
- [183] J.-L. TASSOUL et M. TASSOUL. *Meridional circulation in rotating stars - I. A boundary layer analysis of mean steady motions in early-type stars*. **ApJS** **49**, p. 317–350, juin 1982.
- [184] R. J. TAYLER. *The adiabatic stability of stars containing magnetic fields - I. Toroidal fields*. **MNRAS** **161**, p. 365–380, 1973.
- [185] G. I. TAYLOR. « *Diffusion by continuous movements* » . In *Proc. London Math. Soc.*, p. 196–212, juin 1921.
- [186] H. TENNEKES et J. L. LUMLEY. *First Course in Turbulence*. Cambridge : MIT Press, 1972.
- [187] M. J. THOMPSON, J. TOOMRE, E. R. ANDERSON, H. M. ANTIA, G. BERTHOMIEU, D. BURTONCLAY, S. M. CHITRE, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, T. CORBARD, M. DE ROSA, C. R. GENOVESE, D. O. GOUGH, D. A. HABER, J. W. HARVEY, F. HILL, R. HOWE, S. G. KORZENNIK, A. G. KOSOVICHEV, J. W. LEIBACHER, F. P. PIJPERS, J. PROVOST, E. J. RHODES, JR., J. SCHOU, T. SEKII, P. B. STARK et P. R. WILSON. *Differential Rotation and Dynamics of the Solar Interior*. **Science** **272**, p. 1300–1305, mai 1996.
- [188] O. THUAL. *Zero-Prandtl-number convection*. **J. Fluid. Mech.** **240**, p. 229–258, 1992.
- [189] S. TOMCZYK, J. SCHOU et M. J. THOMPSON. *Measurement of the Rotation Rate in the Deep Solar Interior*. **ApJ** **448**, p. L57–L60, juil. 1995.
- [190] A. A. TOWNSEND. *The effects of radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid*. **J. Fluid. Mech.** **4**, p. 361–375, 1958.
- [191] D. J. TRITTON et P. A. DAVIES. *Instabilities in geophysical fluid dynamics*, p. 229–270. 1985.
- [192] V. M. TSARENKO et A. M. YAGLOM. *Semiempirical theories of turbulent diffusion in a neutrally stratified atmospheric surface layer*. **Phys. Fluids** **3**, p. 2199–2206, sept. 1991.
- [193] S. VAUCLAIR. « *Lithium as a Stellar Age Indicator* » . In G. Cayrel de Strobel et A. M. Delplace (eds.), *IAU Colloq. 17 : Age des Etoiles* 38, 1972.
- [194] S. VAUCLAIR et S. THÉADO. *On the Coupling between Helium Settling and Rotation-induced Mixing in Stellar Radiative Zones. I. Analytical Approach*. **ApJ** **587**, p. 777–783, avr. 2003.
- [195] K. A. VENN. *A-Type Supergiant Abundances in the Small Magellanic Cloud : Probes of Evolution*. **ApJ** **518**, p. 405–421, juin 1999.
- [196] K. A. VENN, A. M. BROOKS, D. L. LAMBERT, M. LEMKE, N. LANGER, D. J. LENNON et F. P. KEENAN. *Boron Abundances in B-Type Stars : A Test of Rotational Depletion during Main-Sequence Evolution*. **ApJ** **565**, p. 571–586, jan. 2002.

- [197] E. VITENSE. *Die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne*. **ZAp** **32**, p. 135–164, 1953.
- [198] H. VOGT. *Zum Strahlungsgleichgewicht der Sterne*. **Astronom. Nachr.** **223**, p. 229–232, jan. 1925.
- [199] H. VON ZEIPEL. *The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses*. **MNRAS** **84**, p. 665–683, juin 1924.
- [200] S. V. VORONTSOV et H. SHIBAHASHI. *Asymptotic inversion of the solar oscillation frequencies - Sound speed in the solar interior*. **PASJ** **43**, p. 739–753, oct. 1991.
- [201] N. R. WALBORN. *Some Spectroscopic Characteristics of the OB Stars : a Nitrogen Anomaly*. **ApJ** **161**, p. L149–L152, août 1970.
- [202] N. R. WALBORN. *The OBN and OBC stars*. **ApJ** **205**, p. 419–425, avr. 1976.
- [203] F. WALEFFE. *On a self-sustaining process in shear flows*. **Phys. Fluids** **9**, p. 883–900, avr. 1997.
- [204] G. WALLERSTEIN, G. H. HERBIG et P. S. CONTI. *Observations of the Lithium Content of Main-Sequence Stars in the Hyades*. **ApJ** **141**, p. 610–616, fév. 1965.
- [205] J. WASIUTYNSKI. *Studies in Hydrodynamics and Structure of Stars and Planets*. **Astrophys. Nor.** **4**, p. 1–497, 1946.
- [206] T. R. WHITE, T. R. BEDDING, D. STELLO, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD, D. HUBER et H. KJELDSSEN. *Calculating Asteroseismic Diagrams for Solar-like Oscillations*. **ApJ** **743**, 161, déc. 2011.
- [207] T. S. WOOD, P. GARAUD et S. STELLMACH. *A New Model for Mixing by Double-diffusive Convection (Semi-convection). II. The Transport of Heat and Composition through Layers*. **ApJ** **768**, 157, mai 2013.
- [208] S. E. WOOSLEY et A. HEGER. « *Supernovae, Gamma-Ray Bursts and Stellar Rotation (Invited Review)* » . In A. Maeder et P. Eenens (eds.), *Stellar Rotation*, volume 215 sur *IAU Symposium*, p. 601–612, juin 2004.
- [209] D. R. XIONG et L. DENG. *Lithium depletion in late-type dwarfs*. **MNRAS** **395**, p. 2013–2028, juin 2009.
- [210] V. YAKHOT. *A simple model for self-sustained oscillations in homogeneous shear flow*. **Phys. Fluids** **15**, p. L17–L20, fév. 2003.
- [211] P. K. YEUNG et S. B. POPE. *Lagrangian statistics from direct numerical simulations of isotropic turbulence*. **J. Fluid. Mech.** **207**, p. 531–586, oct. 1989.
- [212] J.-P. ZAHN. « *Rotational instabilities and stellar evolution* » . In P. Ledoux, A. Noels et A. W. Rodgers (eds.), *Stellar Instability and Evolution*, volume 59 sur *IAU Symposium*, p. 185–194, 1974.
- [213] J.-P. ZAHN. *Circulation and turbulence in rotating stars*. **A&A** **265**, p. 115–132, nov. 1992.
- [214] F. ZAUSSINGER et H. C. SPRUIT. *Semiconvection : numerical simulations*. **A&A** **554**, A119, juin 2013.