

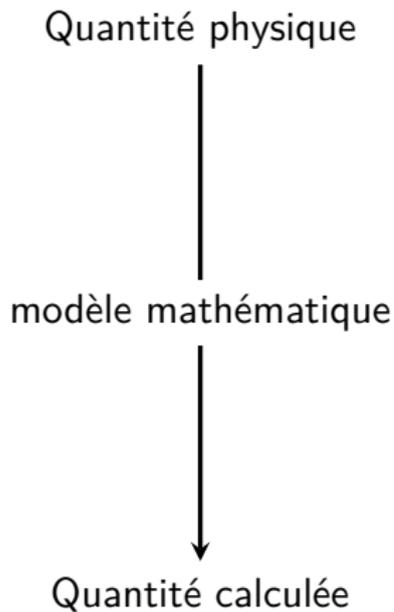
Problématiques d'analyse numérique et de modélisation pour écoulements de fluides environnementaux

Mathieu Cathala

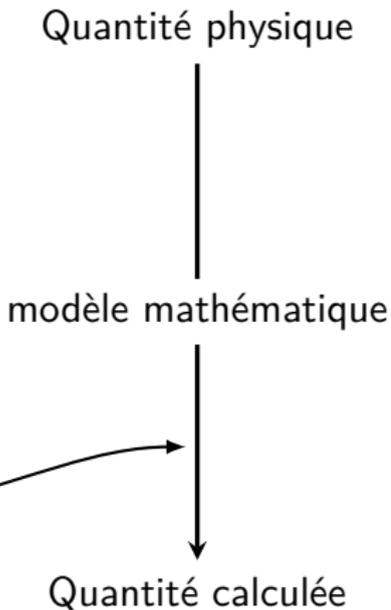
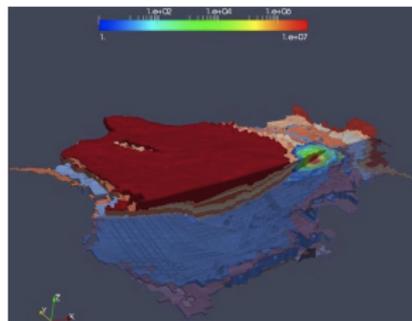
Université Montpellier 2

Soutenance de thèse du 18 Octobre 2013

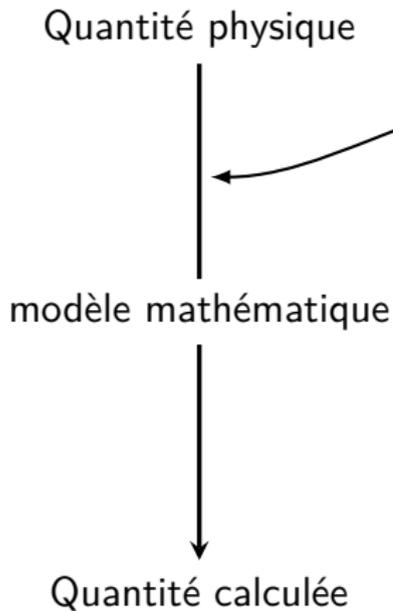
Des écoulements en équation



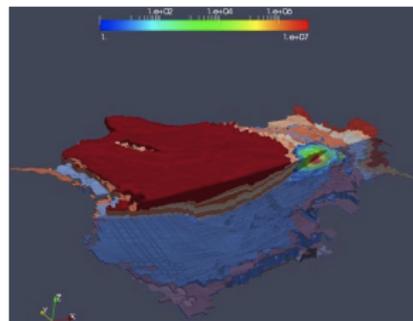
Des écoulements en équation



Des écoulements en équation



Partie I : écoulements en milieux poreux



Champ de pression
Concentration polluant

...

Modèle de Darcy
Eq. Transport-diffusion

Termes diffusifs

Pression, concentration
simulées

Partie I : écoulements en milieux poreux

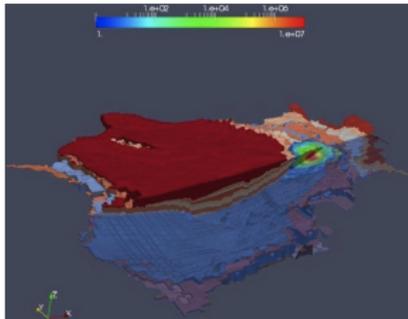
Champ de pression
Concentration polluant

...

Modèle de Darcy
Eq. Transport-diffusion

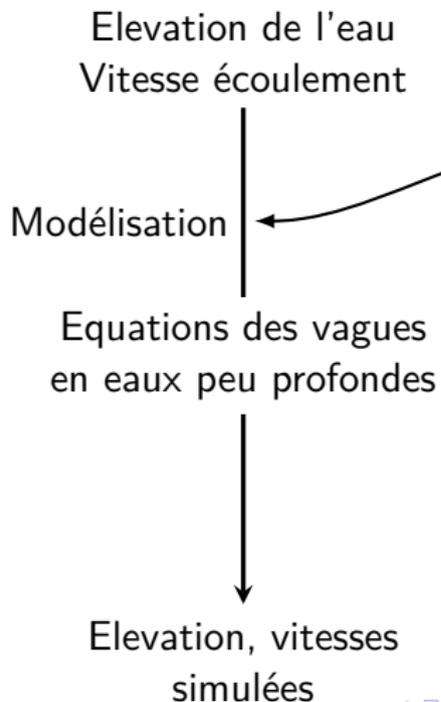
Termes diffusifs

Pression, concentration
simulées

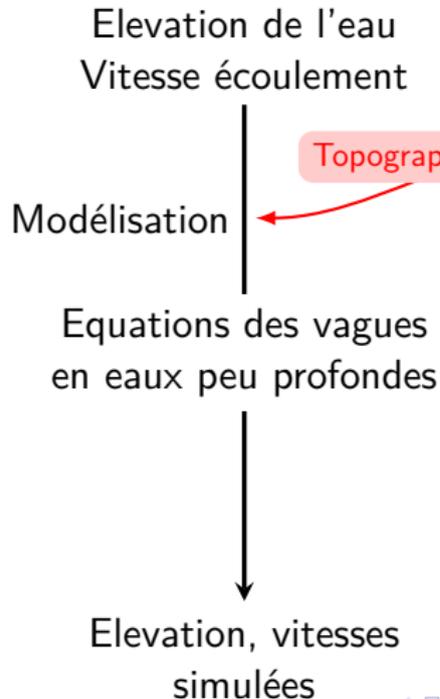


Principe du
maximum

Partie II : écoulements en eaux peu profondes



Partie II : écoulements en eaux peu profondes



Première partie

Principe du maximum discret pour des problèmes de diffusion anisotrope hétérogène

Sommaire

- 1 Introduction et problématique
- 2 Discrétisation de l'équation
- 3 Discrétisation et principe du maximum

Objectif de la discrétisation

Construire une approximation de la solution exacte \bar{u} du problème elliptique

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla \bar{u}) = f & \text{sur } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

où :

- Ω est un domaine polygonal de \mathbf{R}^d
- $D : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{d \times d}$ est un tenseur symétrique uniformément elliptique
- $f \in L^2(\Omega)$

Enjeux de la discrétisation

- Construire une approximation “précise” de la solution exacte \bar{u} .
- Préserver le principe du maximum : si $f \geq 0$ et si \bar{u} vérifie

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla \bar{u}) = f & \text{sur } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $\bar{u} \geq 0$.

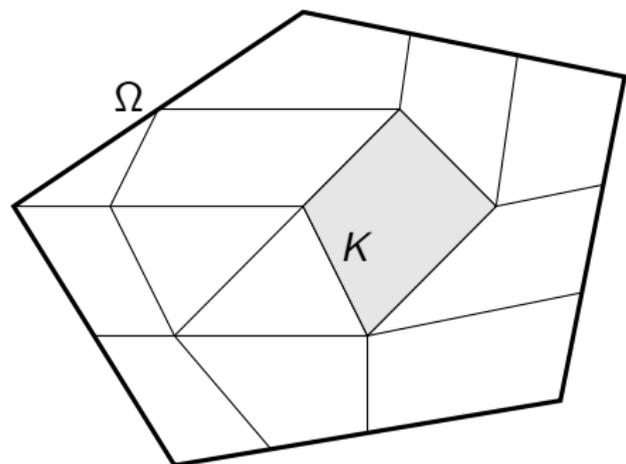
Objectif

- **Point de départ** : Un schéma de discrétisation générique
- **But** : Corriger ce schéma pour obtenir un principe du maximum discret

Sommaire

- 1 Introduction et problématique
- 2 Discrétisation de l'équation
- 3 Discrétisation et principe du maximum

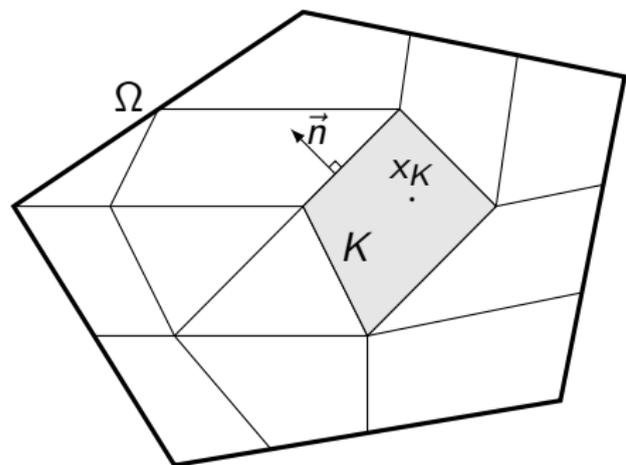
Bilan continu



- Solution exacte \bar{u}
- Bilan de conservation sur K :

$$-\int_K \nabla \cdot (D \nabla \bar{u}) = \int_K f$$

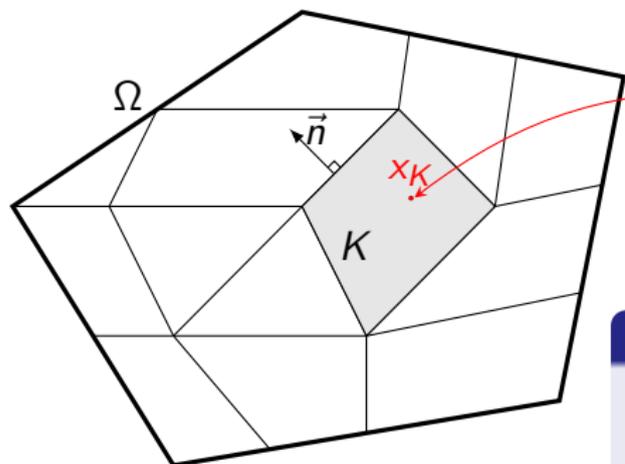
Bilan continu



- Solution exacte \bar{u}
- Bilan de conservation sur K :

$$-\int_{\partial K} D\nabla\bar{u} \cdot \vec{n} = \int_K f$$

Discrétisation

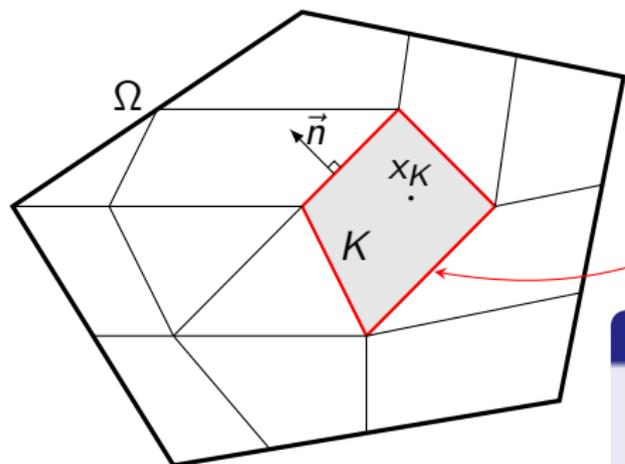


- Solution **approchée** $u = (u_K)_K$
 - $u_K \approx \bar{u}(x_K)$
- Approximation des flux :
 - $A_K(u) \approx \int_{\partial K} D\nabla \bar{u} \cdot \vec{n}$

Schéma de discrétisation

$$\forall K, -A_K(u) = \int_K f$$

Discrétisation

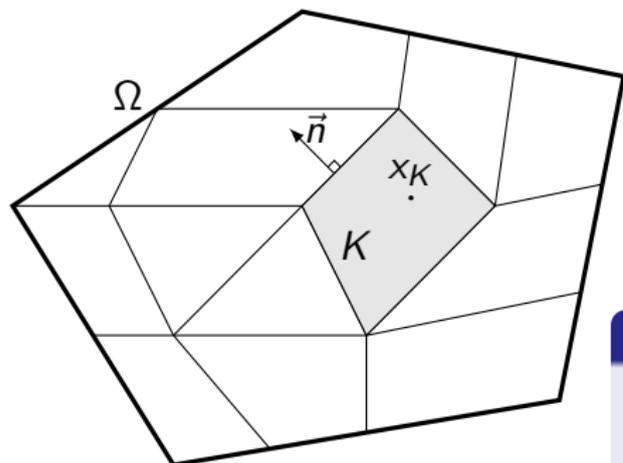


- Solution approchée $u = (u_K)_K$
 - $u_K \approx \bar{u}(x_K)$
- Approximation des flux :
 - $A_K(u) \approx \int_{\partial K} D\nabla \bar{u} \cdot \vec{n}$

Schéma de discrétisation

$$\forall K, -A_K(u) = \int_K f$$

Discrétisation



- Solution approchée $u = (u_K)_K$
 - $u_K \approx \bar{u}(x_K)$
- Approximation des flux :
 - $A_K(u) \approx \int_{\partial K} D\nabla \bar{u} \cdot \vec{n}$

Schéma de discrétisation

$$\forall K, -A_K(u) = \int_K f$$

- En général pas de principe du maximum : $f \geq 0 \not\Rightarrow u \geq 0$

Sommaire

- 1 Introduction et problématique
- 2 Discrétisation de l'équation
- 3 Discrétisation et principe du maximum**

Objectif

- **Point de départ** : Un schéma de discrétisation

$$\forall K, -A_K(u) = \int_K f$$

- **But** : Corriger ce schéma pour :
 - Obtenir un principe du maximum discret

Objectif

- **Point de départ** : Un schéma de discrétisation

$$\forall K, -A_K(u) + \text{Correction} = \int_K f$$

- **But** : Corriger ce schéma pour :
 - **Obtenir un principe du maximum discret**

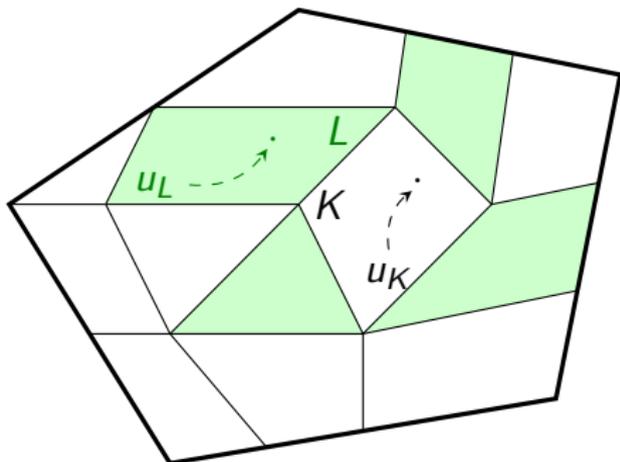
Objectif

- **Point de départ** : Un schéma de discrétisation

$$\forall K, -A_K(u) + \text{Correction} = \int_K f$$

- **But** : Corriger ce schéma pour :
 - Obtenir un principe du maximum discret
 - **Conserver les "bonnes" propriétés de A**

Monotonie



- Si les équations s'écrivent :

$$\sum_{L \text{ voisins de } K} \tau_{K,L} (u_K - u_L) = \int_K f$$

avec $\tau_{K,L} \geq 0$.

→ **principe du maximum**

Construction de la correction

► **Idée** : Corriger de façon monotone

- Schéma initial

$$-A_K(u) + \sum_{L \text{ voisins de } K} \beta_{K,L}(u)(u_K - u_L) = \int_K f$$

- Termes correctifs : $\beta_{K,L}(u)$?

Monotonie ?

- ① On évalue les “mauvaises” contributions de $A_K(u)$:

$$A_K(u) = \sum_{L \text{ voisins de } K} \frac{A_K(u) \operatorname{sgn}(u_L - u_K)}{N |u_L - u_K|} (u_L - u_K)$$

où N = nombre de voisins de K .

Monotonie ?

- ① On évalue les “mauvaises” contributions de $A_K(u)$:

$$A_K(u) = \sum_{L \text{ voisins de } K} \frac{A_K(u) \operatorname{sgn}(u_L - u_K)}{N |u_L - u_K|} (u_L - u_K)$$

où N = nombre de voisins de K .

- ② On compense ces contributions :

$$-A_K(u) + \sum_{L \text{ voisins de } K} \beta_{K,L}(u)(u_K - u_L) =$$

$$\sum_{L \text{ voisins de } K} \left[\frac{A_K(u) \operatorname{sgn}(u_L - u_K)}{N |u_L - u_K|} + \beta_{K,L}(u) \right] (u_K - u_L)$$

Monotonie ?

- ① On évalue les “mauvaises” contributions de $A_K(u)$:

$$A_K(u) = \sum_{L \text{ voisins de } K} \frac{A_K(u) \operatorname{sgn}(u_L - u_K)}{N |u_L - u_K|} (u_L - u_K)$$

où N = nombre de voisins de K .

- ② On compense ces contributions :

$$-A_K(u) + \sum_{L \text{ voisins de } K} \beta_{K,L}(u)(u_K - u_L) =$$

$$\sum_{L \text{ voisins de } K} \left[\frac{A_K(u) \operatorname{sgn}(u_L - u_K)}{N |u_L - u_K|} + \beta_{K,L}(u) \right] (u_K - u_L)$$

positif ?

Correction non-linéaire

Le schéma corrigé

$$-A_K(u) + \sum_{L \text{ voisins de } K} \beta_{K,L}(u)(u_K - u_L) = \int_K f$$

- Respecte le principe du maximum si $\beta_{K,L}(u) \geq \frac{|A_K(u)|}{N|u_L - u_K|}$

Correction non-linéaire

Le schéma corrigé

$$-A_K(u) + \sum_{L \text{ voisins de } K} \beta_{K,L}(u)(u_K - u_L) = \int_K f$$

- Respecte le principe du maximum si $\beta_{K,L}(u) \geq \frac{|A_K(u)|}{N|u_L - u_K|}$
- Conserve les bonnes propriétés du schéma initial A_K ?
 - Conservativité ?
 - Coercivité ?
 - Consistance ?

Correction non-linéaire

Le schéma corrigé

$$-A_K(u) + \sum_{L \text{ voisins de } K} \beta_{K,L}(u)(u_K - u_L) = \int_K f$$

- Respecte le principe du maximum si $\beta_{K,L}(u) \geq \frac{|A_K(u)|}{N|u_L - u_K|}$
- Conserve les bonnes propriétés du schéma initial A_K :
 - Conservativité si $\beta_{K,L} = \beta_{L,K}$
 - Coercivité si $\beta_{K,L} \geq 0$
 - Consistance si $A_K(u) = O(|K|)$

Un test numérique

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla \bar{u}) = f & \text{sur } \Omega =]0,0.5[^2, \\ \bar{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

avec :

- Diffusion anisotrope

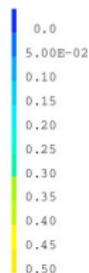
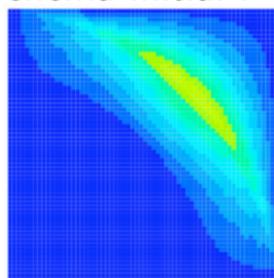
$$D(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} 10^{-6}x^2 + y^2 & (10^{-6} - 1)xy \\ (10^{-6} - 1)xy & x^2 + 10^{-6}y^2 \end{bmatrix}$$

- Terme source

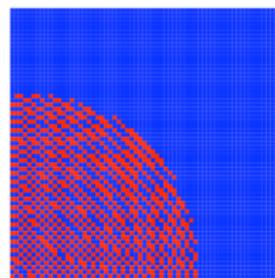
$$f = \begin{cases} 10 & \text{sur }]0.25,0.5[^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Maillage de 4096 carrés ($h = 1/128$).

- Schéma initial :

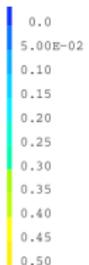
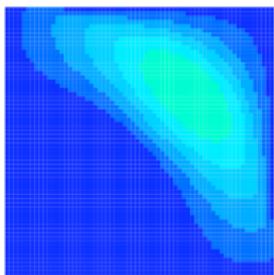


minimum : -4.71×10^{-3}

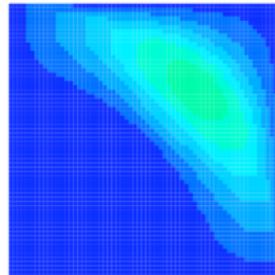


undershoots (20 %)

- Deux exemples de correction :



minimum : 1.82×10^{-15}



minimum : 7.95×10^{-10}

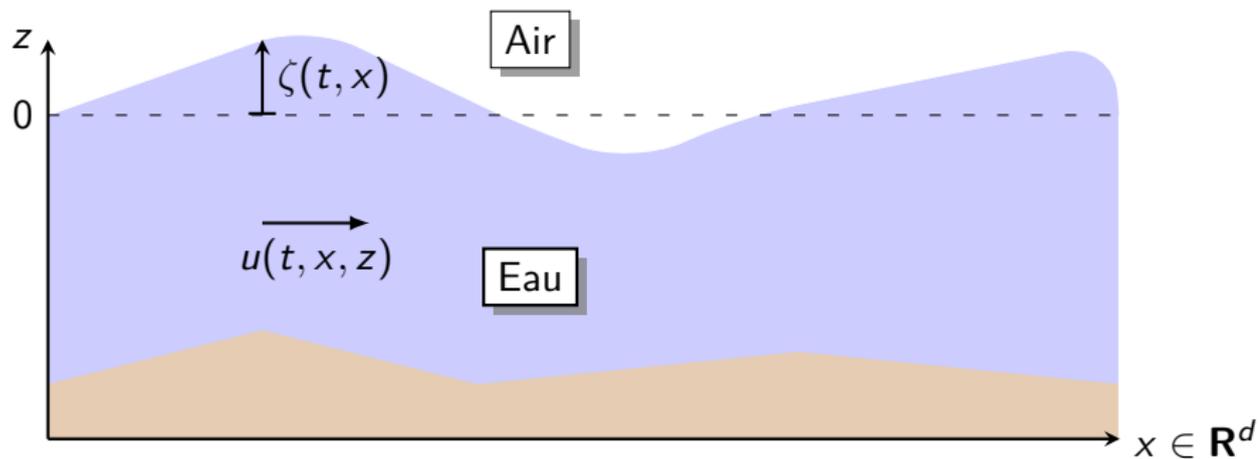
Deuxième partie

Prise en compte de topographies
irrégulières dans des modèles shallow water

Sommaire

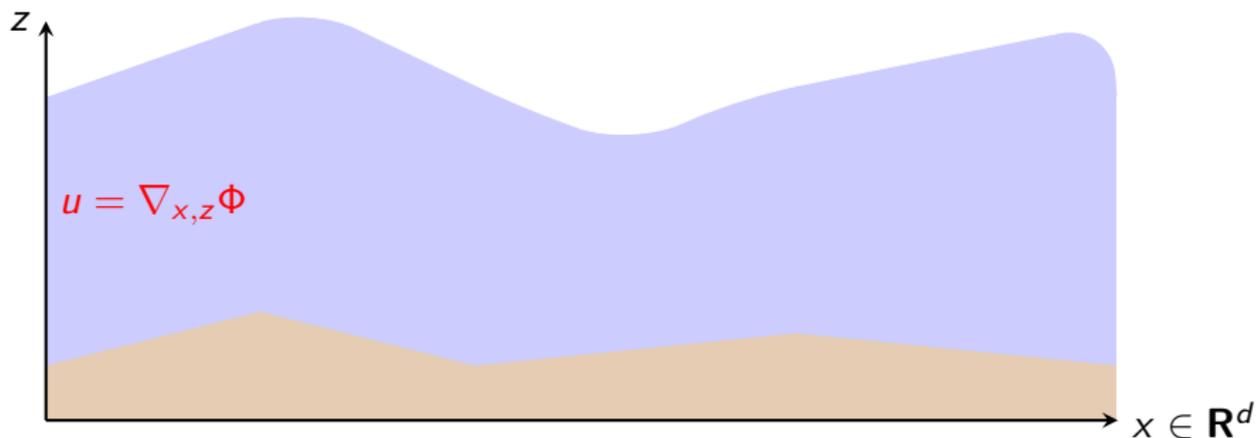
- 1 Les équations des vagues
- 2 Régime et modèles shallow water pour le problème des vagues
- 3 Prise en compte de la topographie

Écoulements à surface libre



Fluide

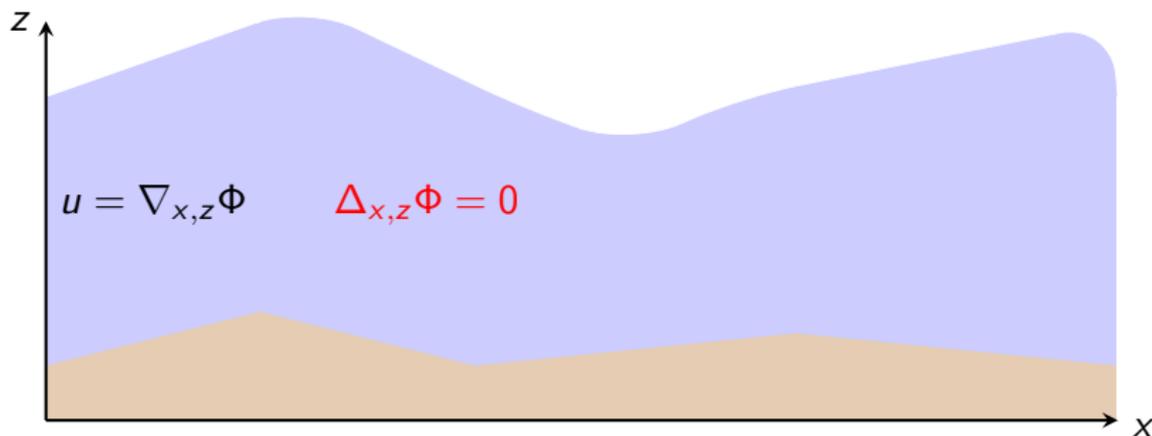
Écoulements à surface libre



Fluide

- Irrrotationnel

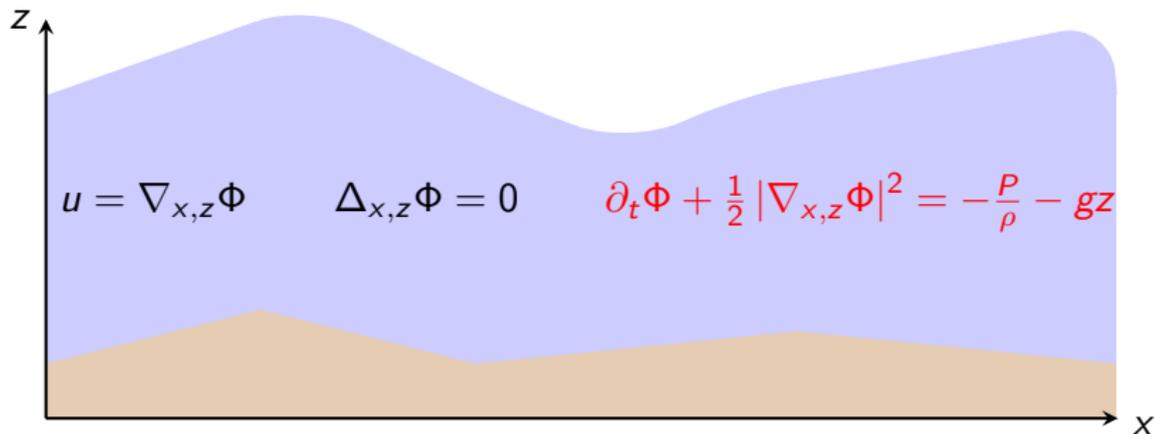
Écoulements à surface libre



Fluide

- Irrrotationnel
- **Incompressible**

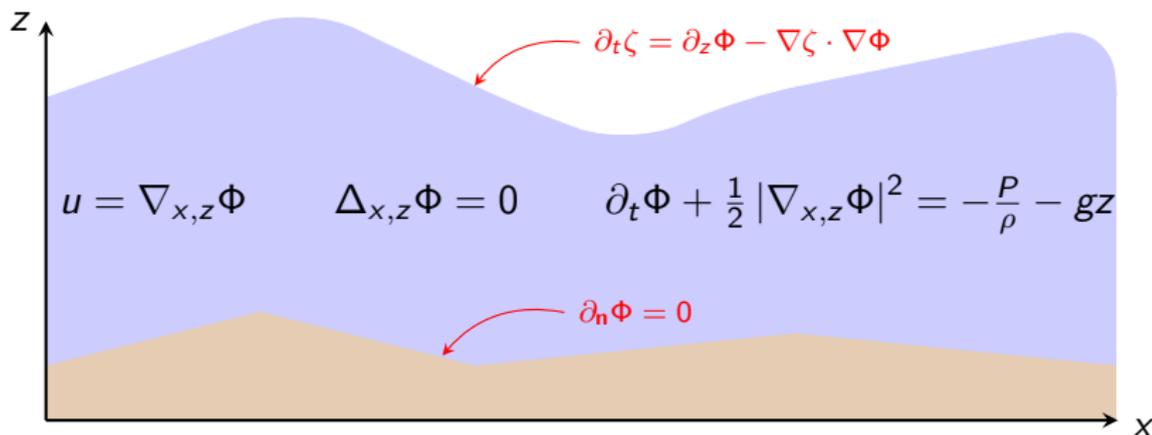
Écoulements à surface libre



Fluide

- Irrrotationnel
- Incompressible
- **Non-visqueux**

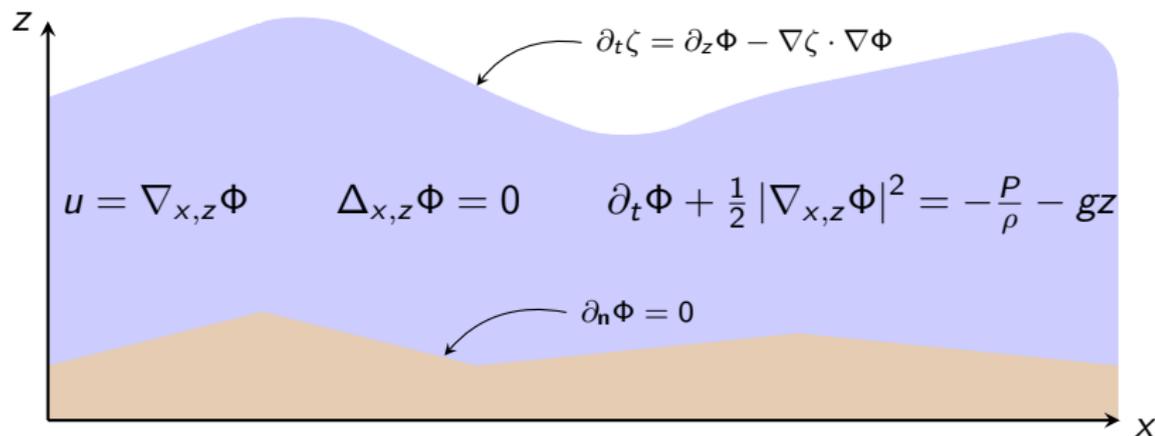
Écoulements à surface libre



Fluide + frontières

- Irrotationnel
- Incompressible
- Non-visqueux

Écoulements à surface libre

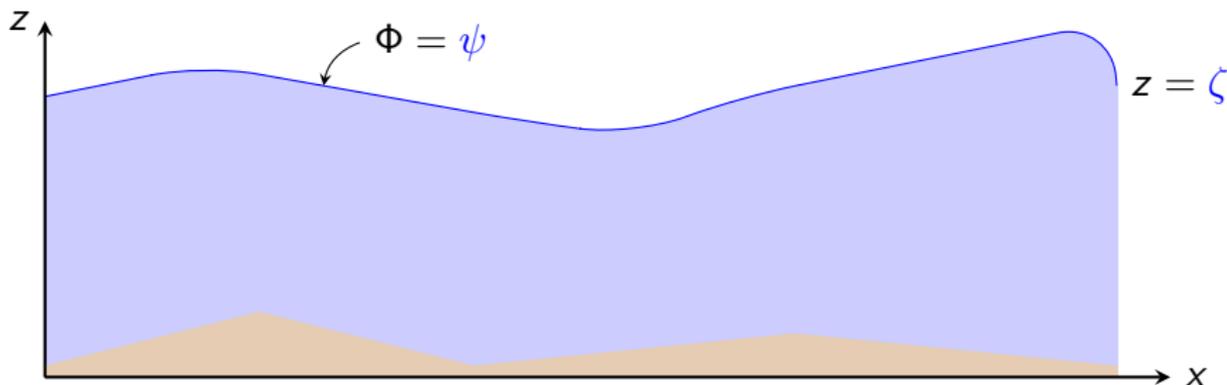


↪ **Problème compliqué !!**

On voit tout à la surface !

L'écoulement est déterminé par

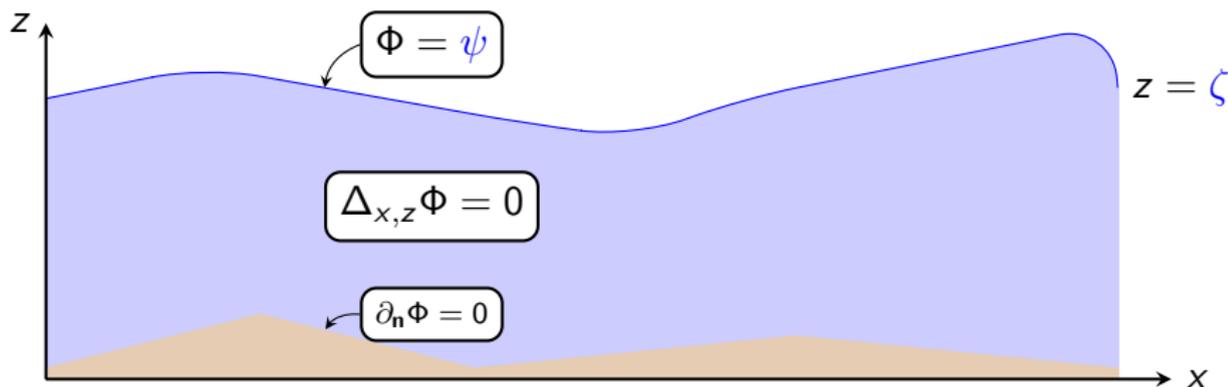
- L'élévation ζ
- Le potentiel à la surface $\psi := \Phi|_{z=\zeta}$



On voit tout à la surface !

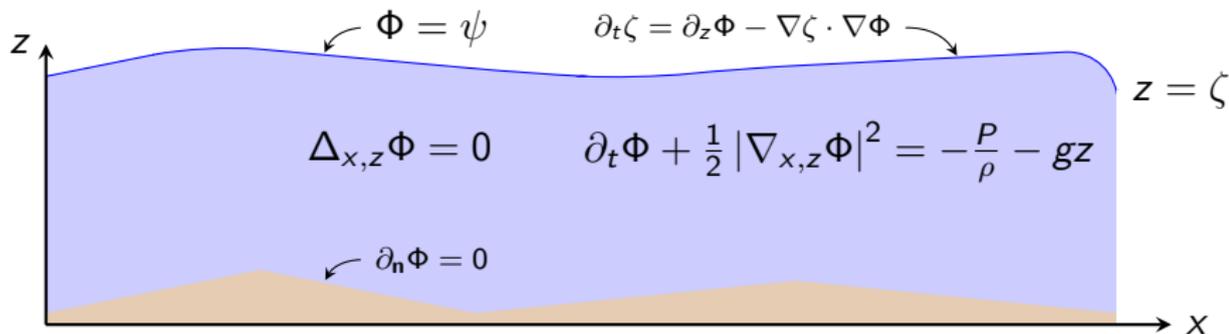
L'écoulement est déterminé par

- L'élévation ζ
- Le potentiel à la surface $\psi := \Phi|_{z=\zeta}$



Equations à la surface

$$\begin{cases} \partial_t \zeta(t, \mathbf{x}) + \dots = 0, & t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \\ \partial_t \psi(t, \mathbf{x}) + \dots = 0, & t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \end{cases}$$

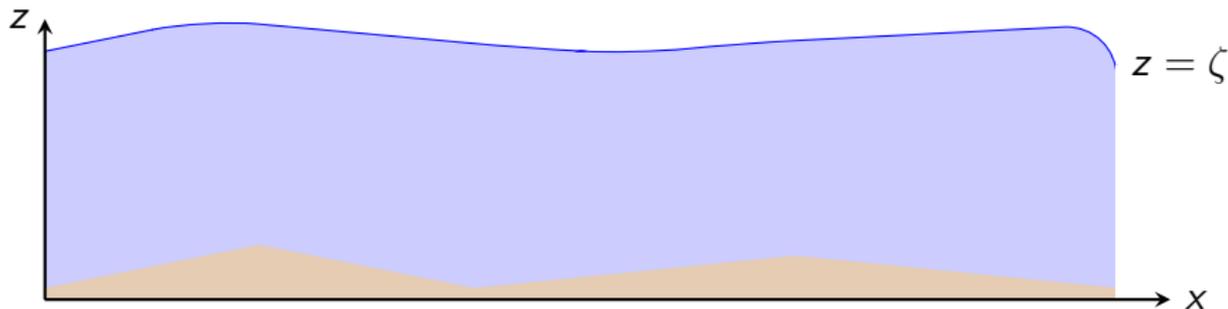


Equations à la surface

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G\psi = 0 \\ \partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{(G\psi + \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

Opérateur de Dirichlet-Neumann

$$G : \psi \mapsto (\partial_z \Phi - \nabla \zeta \cdot \nabla \Phi)_{|_{\text{surface}}}$$

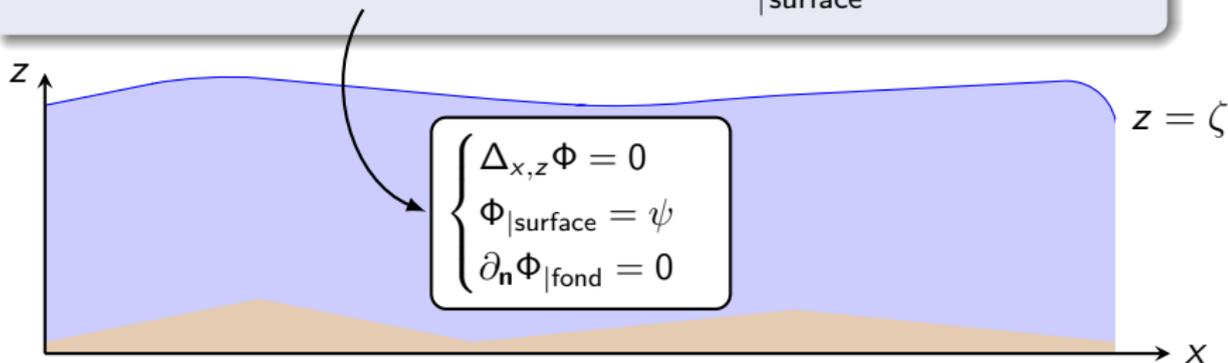


Equations à la surface

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G\psi = 0 \\ \partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{(G\psi + \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

Opérateur de Dirichlet-Neumann

$$G : \psi \mapsto (\partial_z \Phi - \nabla \zeta \cdot \nabla \Phi)_{|_{\text{surface}}}$$

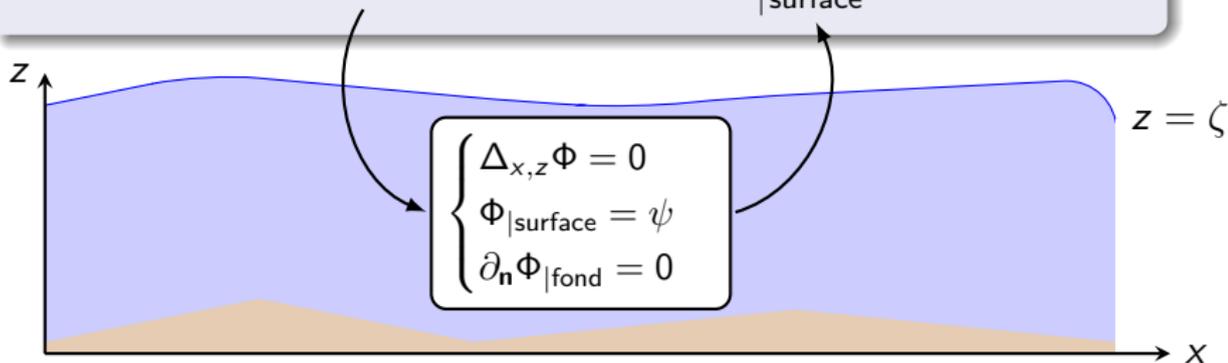


Equations à la surface

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G\psi = 0 \\ \partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{(G\psi + \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

Opérateur de Dirichlet-Neumann

$$G : \psi \mapsto (\partial_z \Phi - \nabla \zeta \cdot \nabla \Phi)_{|_{\text{surface}}}$$



Le problème des vagues

Évolution de ζ et ψ

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G\psi = 0 \\ \partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{(G\psi + \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

- Pas d'expression explicite de $\psi \mapsto G\psi$
- Modèles asymptotiques ?

Sommaire

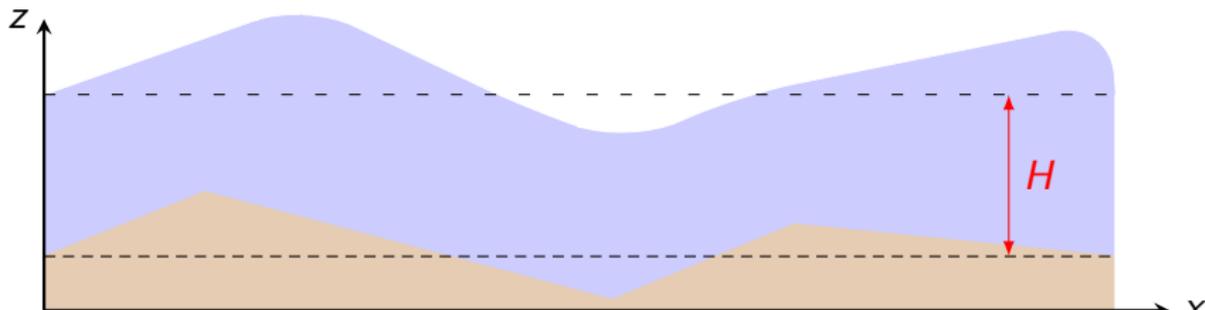
- 1 Les équations des vagues
- 2 Régime et modèles shallow water pour le problème des vagues
- 3 Prise en compte de la topographie

Paramètres du systèmes

Longueurs caractéristiques

- Profondeur moyenne : H

Paramètres sans dimensions



Paramètres du systèmes

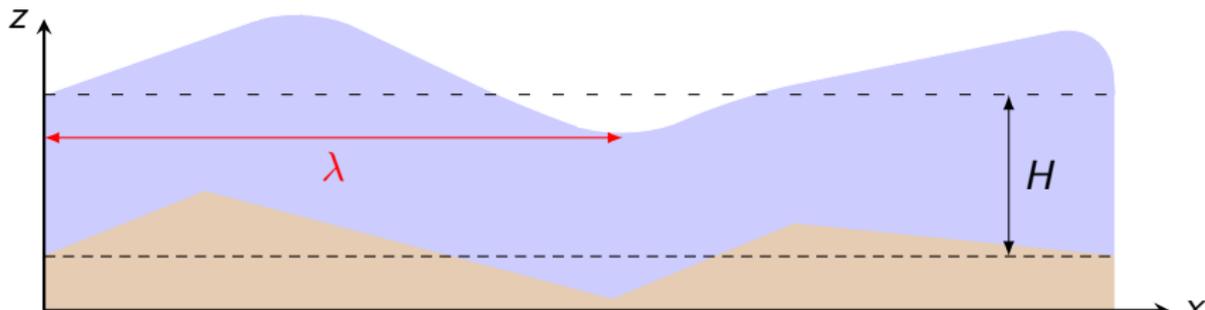
Longueurs caractéristiques

- Profondeur moyenne : H
- Longueur d'onde typique : λ

Paramètres sans dimensions

- Shallowness :

$$\mu = \frac{H^2}{\lambda^2}$$



Paramètres du systèmes

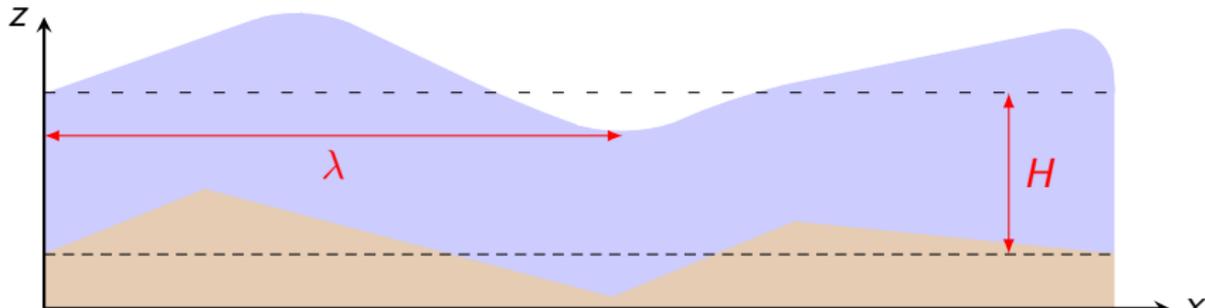
Longueurs caractéristiques

- Profondeur moyenne : H
- Longueur d'onde typique : λ

Paramètres sans dimensions

- Régime shallow water :

$$\mu = \frac{H^2}{\lambda^2} \ll 1$$



Paramètres du systèmes

Longueurs caractéristiques

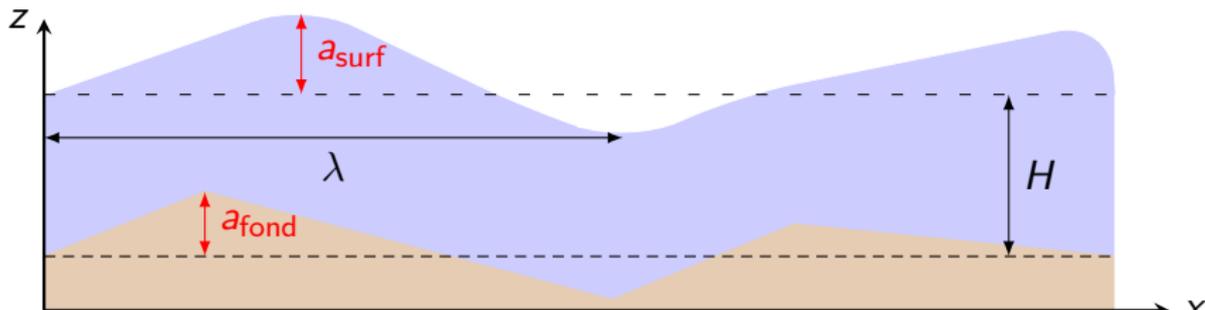
- Profondeur moyenne : H
- Longueur d'onde typique : λ
- Amplitudes
 - des vagues a_{surf}
 - du fond a_{fond}

Paramètres sans dimensions

- Régime shallow water :

$$\mu = \frac{H^2}{\lambda^2} \ll 1$$

- Variations des vagues : $\varepsilon = \frac{a_{\text{surf}}}{H}$
- Variations du fond : $\beta = \frac{a_{\text{fond}}}{H}$



Forme dimensionnelle

Grandeurs avec dimensions

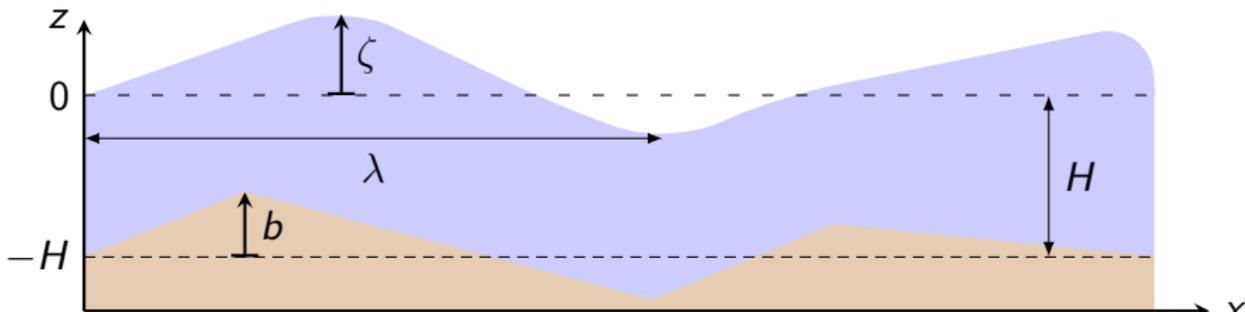
- Profondeur moyenne H
- Longueur d'onde typique λ
- Élévations :
 - des vagues $\zeta(t, x)$
 - du fond $b(x)$

Paramètres sans dimensions

- Régime shallow water :

$$\mu = \frac{H^2}{\lambda^2} \ll 1$$

- Variations des vagues : $\varepsilon = \frac{a_{\text{surf}}}{H}$
- Variations du fond : $\beta = \frac{a_{\text{fond}}}{H}$



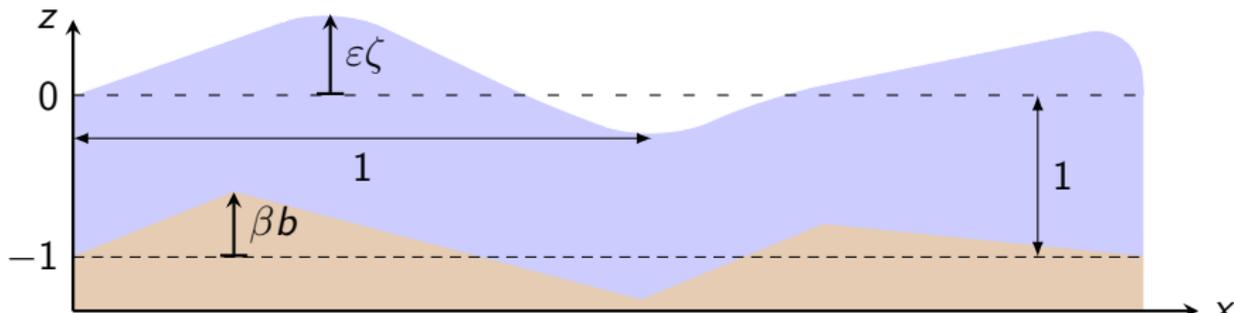
Forme non dimensionnelle

Grandeurs sans dimensions

- Profondeur moyenne 1
- Longueur d'onde typique $O(1)$
- Élévations :
 - des vagues $\varepsilon\zeta(t, x)$
 - du fond $\beta b(x)$

Paramètres sans dimensions

- Régime shallow water :
 $\mu \ll 1$
- Variations des vagues ε
- Variations du fond β



Écoulements en eaux peu profondes

Equations adimensionnées

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G_\mu \psi = 0 \\ \partial_t \psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi|^2 - \mu \varepsilon \frac{(G_\mu \psi + \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + \varepsilon^2 \mu |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

- **Régime** : shallow water $\mu \ll 1$
- **But** : Approcher les équations

Écoulements en eaux peu profondes

Equations adimensionnées

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G_\mu \psi = 0 \\ \partial_t \psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi|^2 - \mu \varepsilon \frac{(G_\mu \psi + \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1 + \varepsilon^2 \mu |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

- **Régime** : shallow water $\mu \ll 1$
- **But** : Approcher les équations
 - On néglige les termes d'ordre $O(\mu)$

Écoulements en eaux peu profondes

Equations adimensionnées

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G_\mu \psi = 0 \\ \partial_t \psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi|^2 = O(\mu) \end{cases}$$

- **Régime** : shallow water $\mu \ll 1$
- **But** : Approcher les équations
 - On néglige les termes d'ordre $O(\mu)$
 - Approximation de $G_\mu \psi$ à l'ordre $O(\mu)$?

Modèle de Saint-Venant

Evolution approchée de ζ et ψ

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \Delta \psi + \varepsilon \nabla \cdot (\zeta \nabla \psi) - \beta \nabla \cdot (b \nabla \psi) = O(\mu) \\ \partial_t \psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2} |\nabla \psi|^2 = O(\mu) \end{cases}$$

- **Régime** : shallow water $\mu \ll 1$
- **But** : Approcher les équations
 - On néglige les termes d'ordre $O(\mu)$
 - $G_\mu \psi = -\Delta \psi - \varepsilon \nabla \cdot (\zeta \nabla \psi) + \beta \nabla \cdot (b \nabla \psi) + O(\mu)$

Modèle de Saint-Venant

Evolution approchée de ζ et $V = \nabla\psi$

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot ((1 + \varepsilon \zeta - \beta b) V) = O(\mu) \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = O(\mu) \end{cases}$$

- **Régime** : shallow water $\mu \ll 1$
- **But** : Approcher les équations
 - On néglige les termes d'ordre $O(\mu)$
 - $G_\mu \psi = -\nabla \cdot V - \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) + \beta \nabla \cdot (bV) + O(\mu)$
où $V = \nabla\psi$

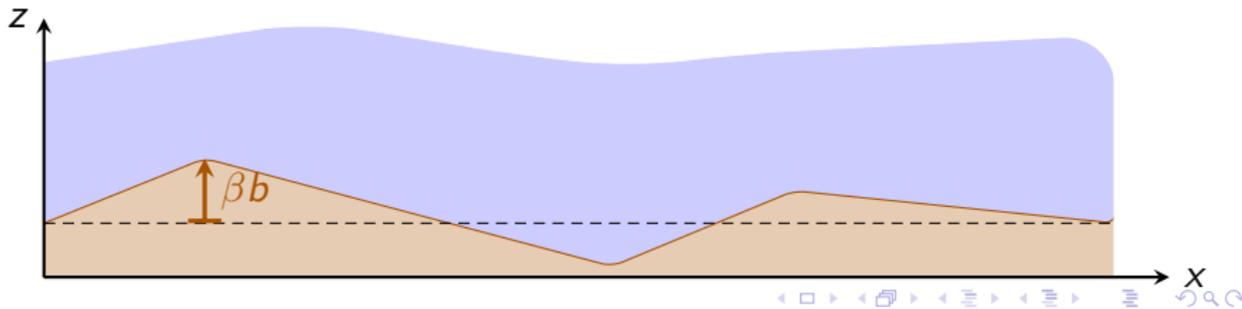
Influence du fond ?

Equations de Saint-Venant

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot ((1 + \varepsilon \zeta - \beta b) V) = 0 \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = 0 \end{cases}$$

- Approximation de $G_\mu \psi$

$$G_\mu \psi = -\nabla \cdot V - \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) + \beta \nabla \cdot (b V) + O(\mu)$$



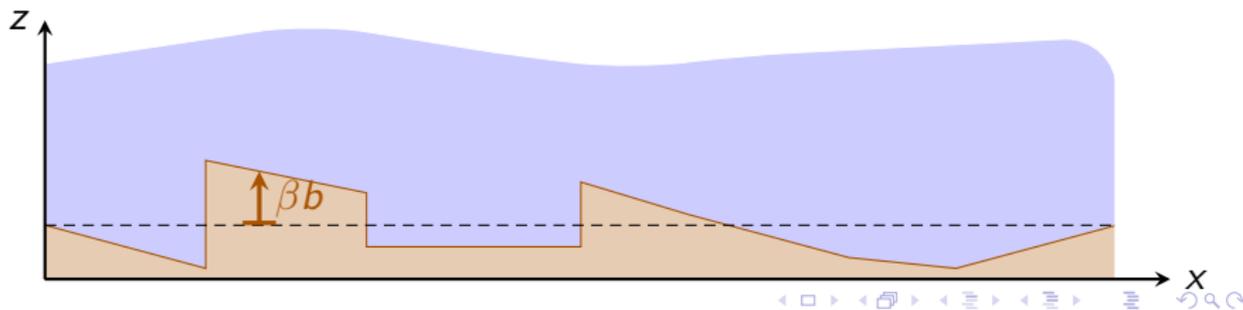
Influence du fond ?

Equations de Saint-Venant

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot ((1 + \varepsilon \zeta - \beta b) V) = 0 \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = 0 \end{cases}$$

- Approximation de $G_\mu \psi$

$$G_\mu \psi \stackrel{?}{=} -\nabla \cdot V - \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) + \beta \nabla \cdot (bV) + O(\mu)$$



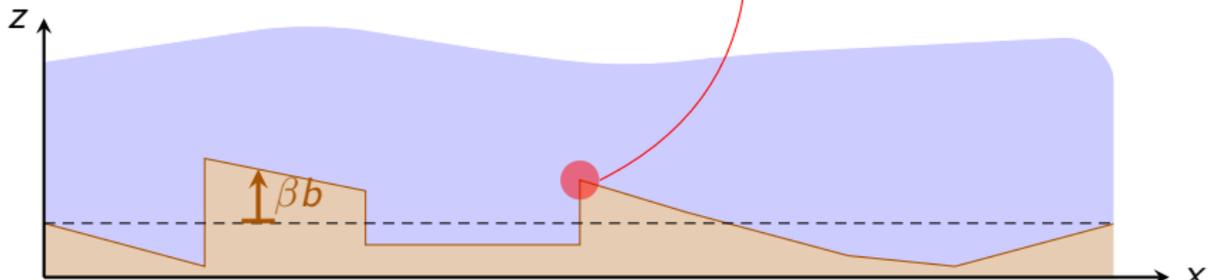
Influence du fond ?

Equations de Saint-Venant

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot ((1 + \varepsilon \zeta - \beta b) V) = 0 \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = 0 \end{cases}$$

- Approximation de $G_\mu \psi$

$$G_\mu \psi \approx -\nabla \cdot V - \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) + \beta \nabla \cdot (b V) + O(\mu)$$



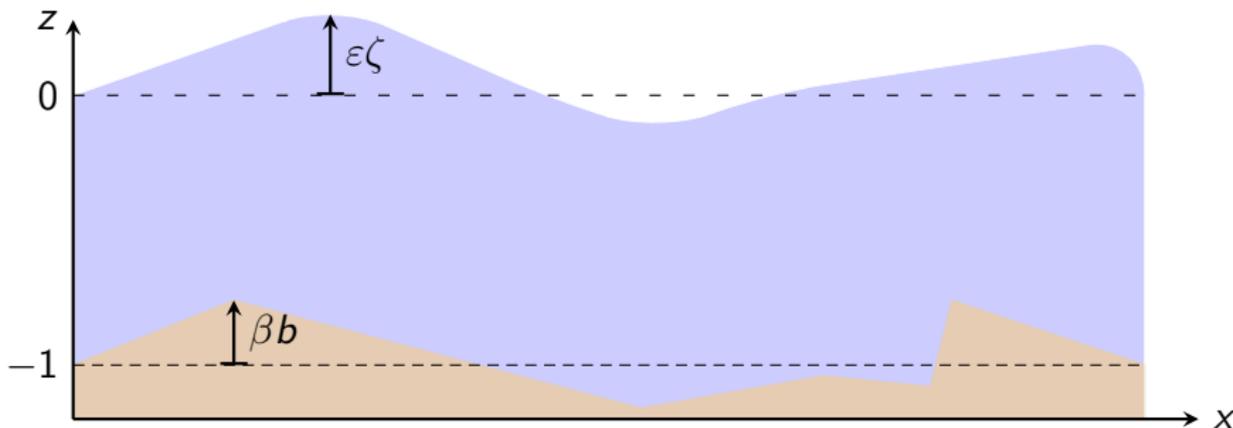
Sommaire

- 1 Les équations des vagues
- 2 Régime et modèles shallow water pour le problème des vagues
- 3 **Prise en compte de la topographie**
 - Influence du fond sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann
 - Fond et asymptotique de l'opérateur : première approche
 - Fond et asymptotique de l'opérateur : deuxième approche

Contributions du fond à l'opérateur G_μ

- ▶ L'opérateur G_μ dépend de l'élévation $\varepsilon\zeta$ et du fond βb

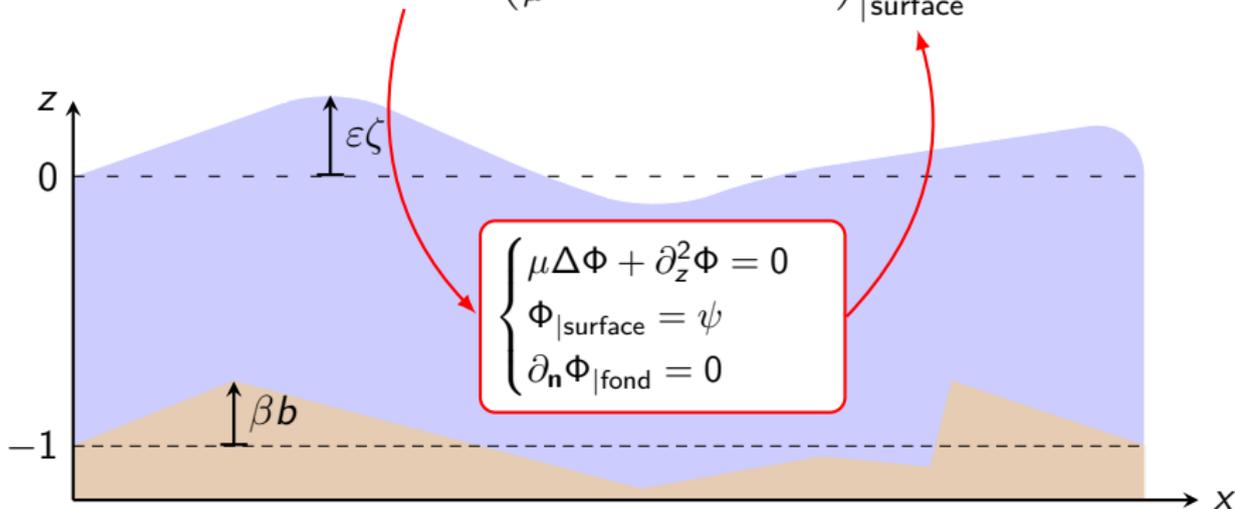
$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b] : \psi \mapsto \left(\frac{1}{\mu} \partial_z \Phi - \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \Phi \right) \Big|_{\text{surface}}$$



Contributions du fond à l'opérateur G_μ

- ▶ L'opérateur G_μ dépend de l'élévation $\varepsilon\zeta$ et du fond βb

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b] : \psi \mapsto \left(\frac{1}{\mu} \partial_z \Phi - \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \Phi \right) \Big|_{\text{surface}}$$



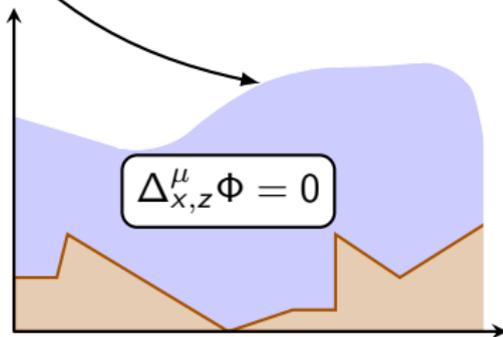
Sommaire

- 3 Prise en compte de la topographie
 - Influence du fond sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann
 - **Fond et asymptotique de l'opérateur : première approche**
 - Fond et asymptotique de l'opérateur : deuxième approche

Transport du problème de Laplace

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann :

$$G_{\mu}[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} \partial_n \Phi \Big|_{\text{surface}}$$

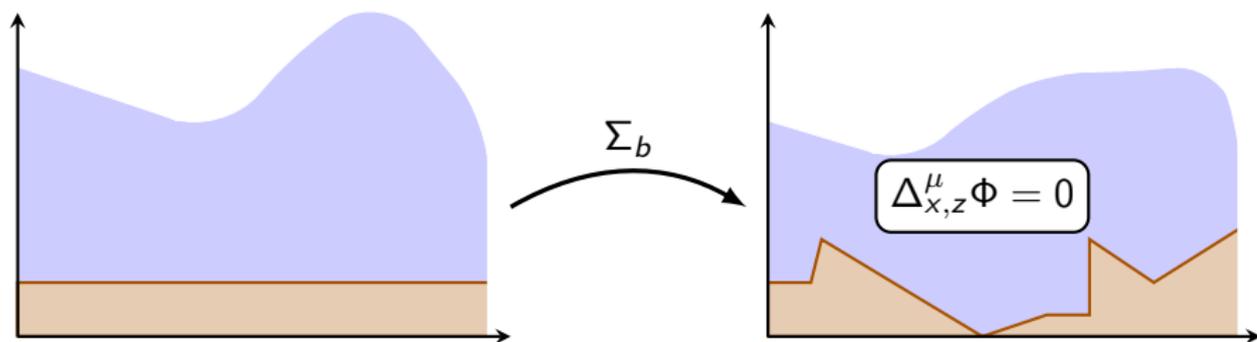


Transport du problème de Laplace

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} \partial_n \Phi \Big|_{\text{surface}}$$

- ▶ On redresse le fond via Σ_b^{-1}

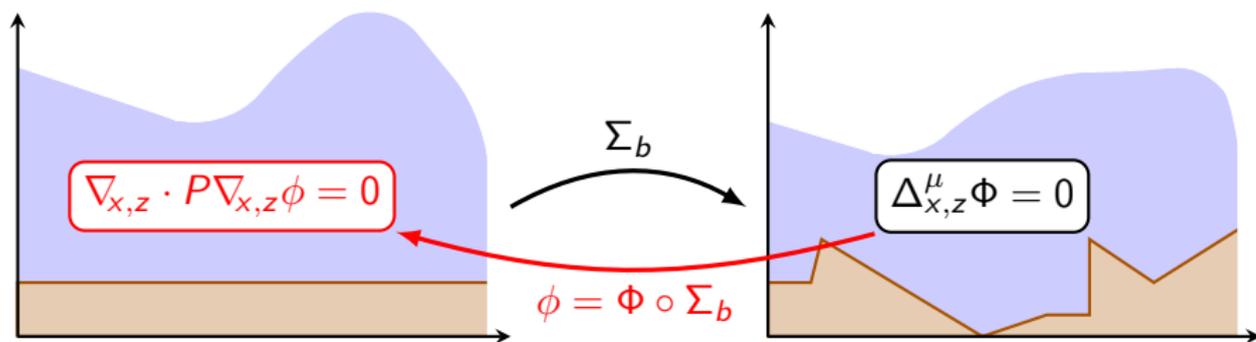


Transport du problème de Laplace

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} \partial_n \Phi \Big|_{\text{surface}}$$

- ▶ On redresse le fond via Σ_b^{-1}



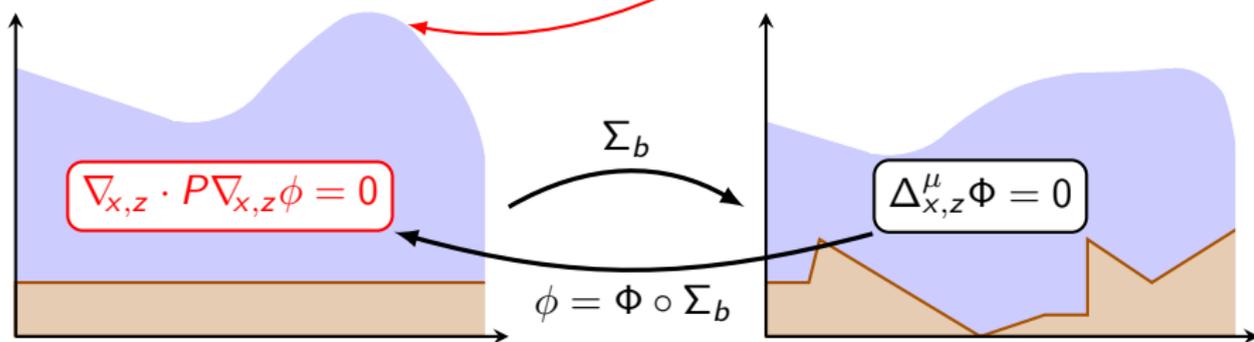
- Où P est dépend de μ et de la Jacobienne de Σ_b

Transport du problème de Laplace

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} \mathbf{n} \cdot P \nabla_{x,z} \phi \Big|_{\text{surface transformée}}$$

- ▶ On redresse le fond via Σ_b^{-1}



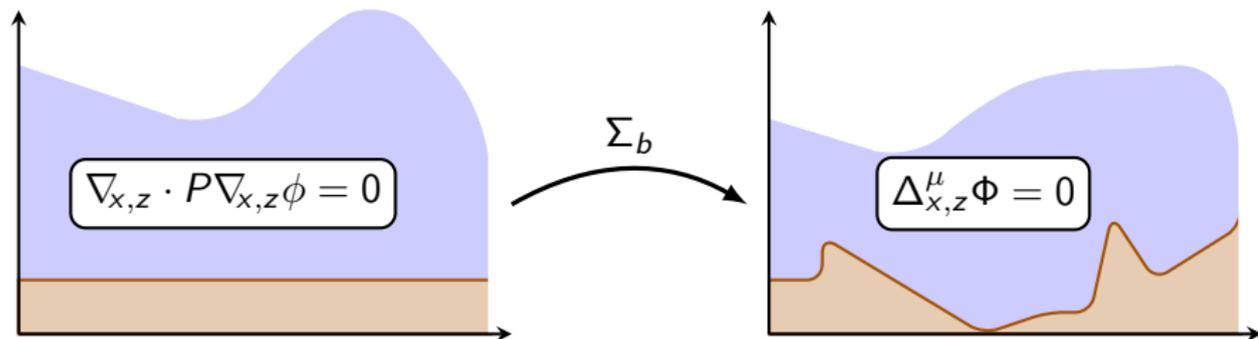
- Où P est dépend de μ et de la Jacobienne de Σ_b

Cas classique d'une topographie régulière

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} n \cdot P \nabla_{x,z} \phi|_{\text{surface transformée}}$$

- ▶ Difféomorphisme trivial $\Sigma_b(x, z) = (x, z(1 + b(x)))$



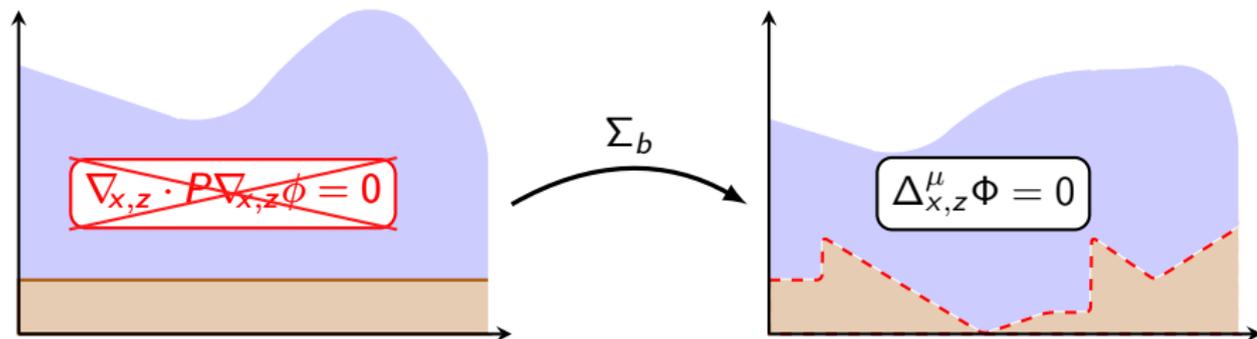
- Où P dépend de μ et de ∇b

Limites du cas classique

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi \not\sim \frac{1}{\mu} n \cdot P \nabla_{x,z} \phi|_{\text{surface transformée}}$$

- ▶ Difféomorphisme trivial $\Sigma_b(x, z) = (x, z(1 + b(x)))$

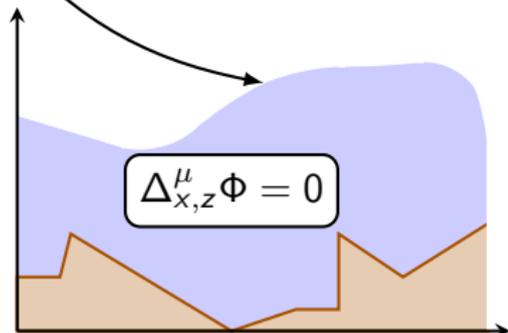


- Où P dépend de μ et de ∇b

Cas d'une topographie polygonale

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta\mathbf{b}]\psi = \frac{1}{\mu} \partial_n \Phi \Big|_{\text{surface}}$$

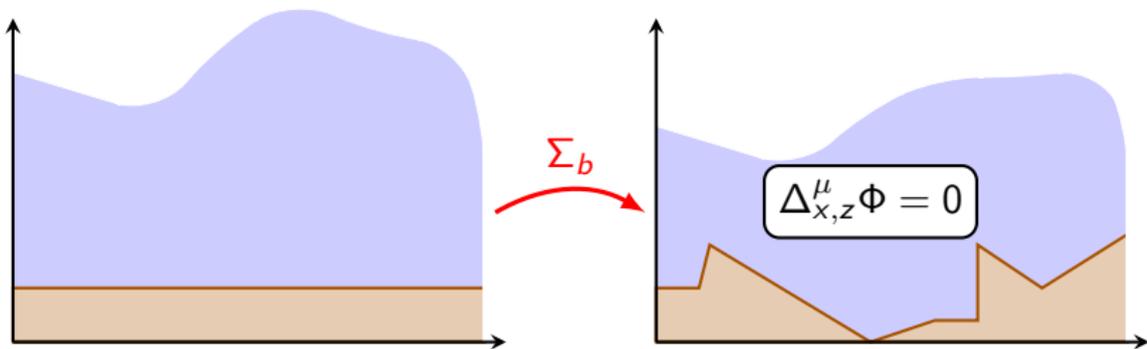


Cas d'une topographie polygonale

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} \partial_n \Phi|_{\text{surface}}$$

- ▶ On utilise une application conforme



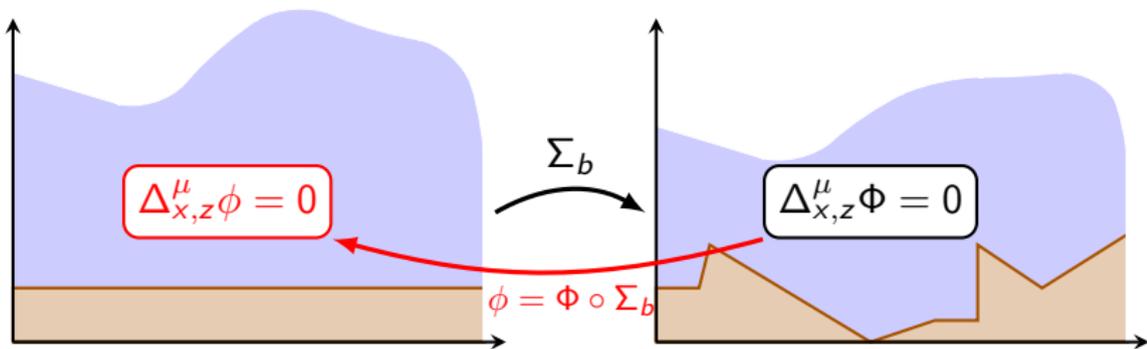
- Pas d'expression analytique pour Σ_b

Cas d'une topographie polygonale

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} \partial_n \phi|_{\text{surface transformée}}$$

- ▶ On utilise une application **conforme**



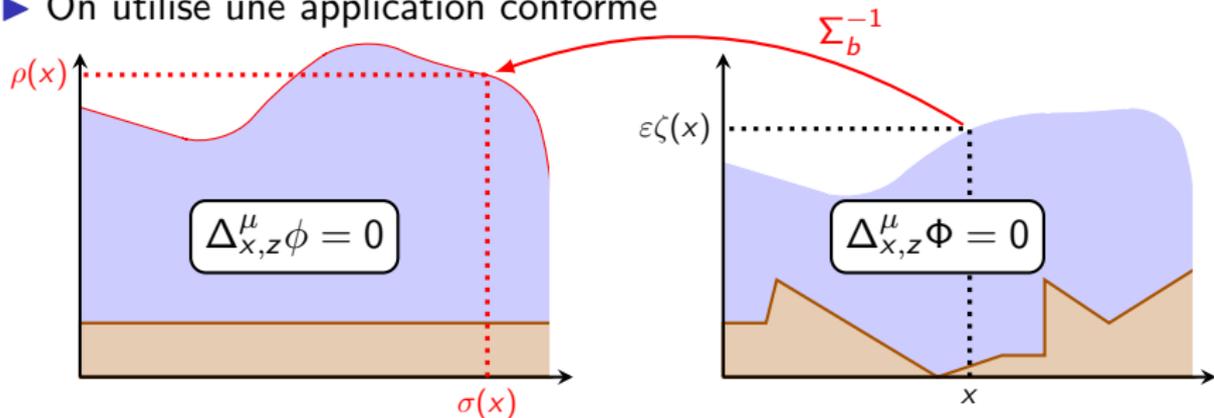
- Pas d'expression analytique pour Σ_b

Cas d'une topographie polygonale

- ▶ Opérateur de Dirichlet-Neumann sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = \frac{1}{\mu} \partial_n \phi \Big|_{\text{surface transformée}}$$

- ▶ On utilise une application conforme

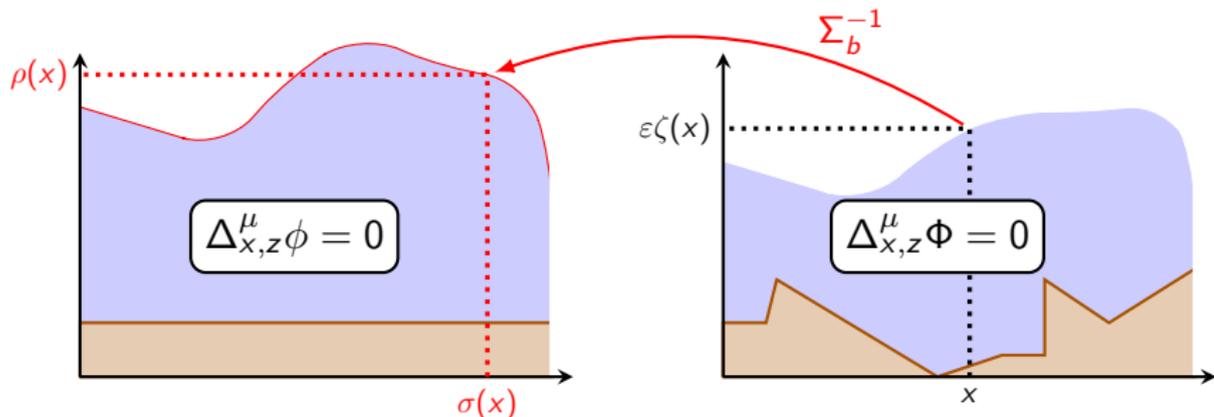


- Pas d'expression analytique pour la surface transformée

Cas d'une topographie polygonale

- Asymptotique sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = -\partial_x \left(\frac{1 + \rho}{\sigma'} \partial_x \psi \right) + O(\mu)$$



- Pas d'expression analytique pour la surface transformée

Modèle shallow water pour topographies polygonales

- Asymptotique sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = -\partial_x \left(\frac{1+\rho}{\sigma'} \partial_x \psi \right) + O(\mu)$$

Equations approchées sur fond polygonal

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x \left(\frac{1+\rho}{\sigma'} V \right) = 0 \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = 0 \end{cases}$$

Modèle shallow water pour topographies polygonales

- Asymptotique sur le domaine à fond plat :

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = -\partial_x \left(\frac{1+\rho}{\sigma'} \partial_x \psi \right) + O(\mu)$$

Equations approchées sur fond polygonal

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x \left(\frac{1+\rho}{\sigma'} V \right) = 0 \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = 0 \end{cases}$$

- Pas d'expression analytique pour la surface transformée (σ, ρ)

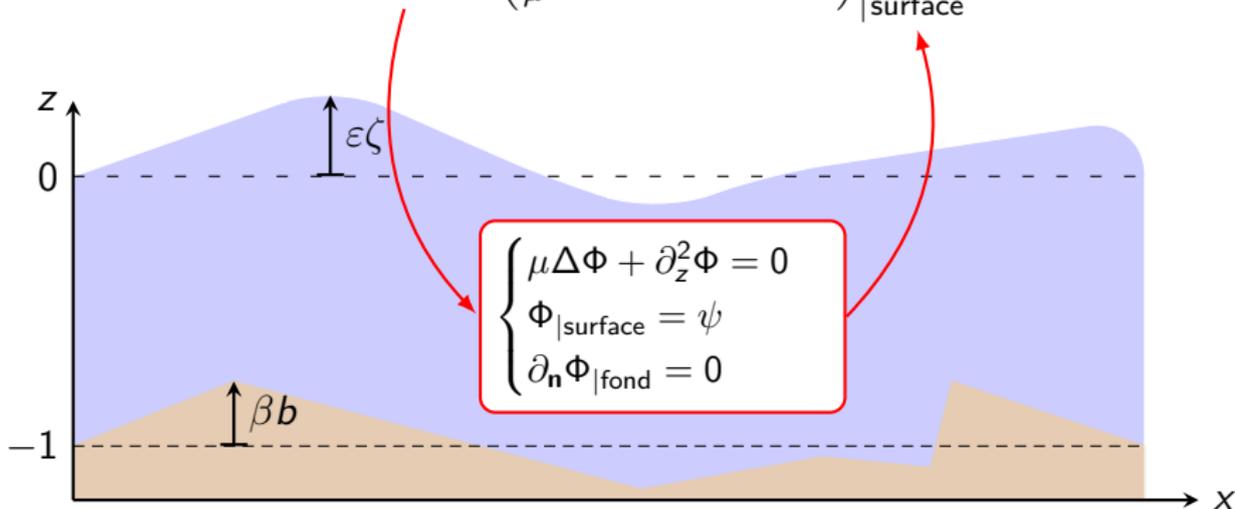
Sommaire

- 3 Prise en compte de la topographie
 - Influence du fond sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann
 - Fond et asymptotique de l'opérateur : première approche
 - Fond et asymptotique de l'opérateur : deuxième approche

Contributions du fond à l'opérateur G_μ

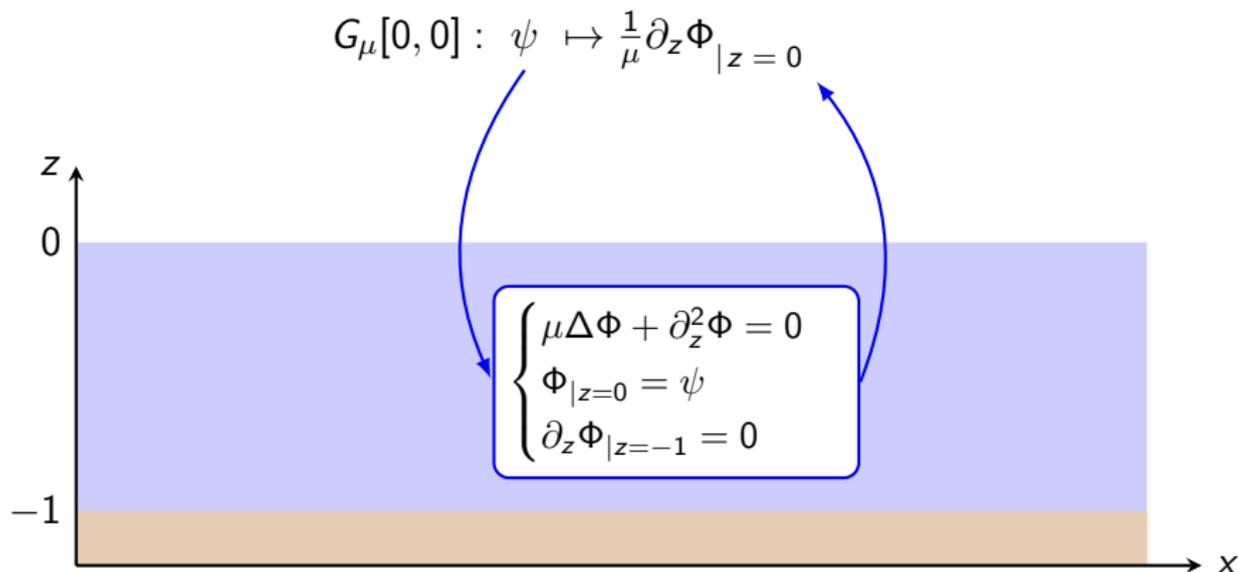
- ▶ L'opérateur G_μ dépend de l'élévation $\varepsilon\zeta$ et du fond βb

$$G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b] : \psi \mapsto \left(\frac{1}{\mu} \partial_z \Phi - \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \Phi \right) \Big|_{\text{surface}}$$



Le calme : $\zeta = 0$, $b = 0$

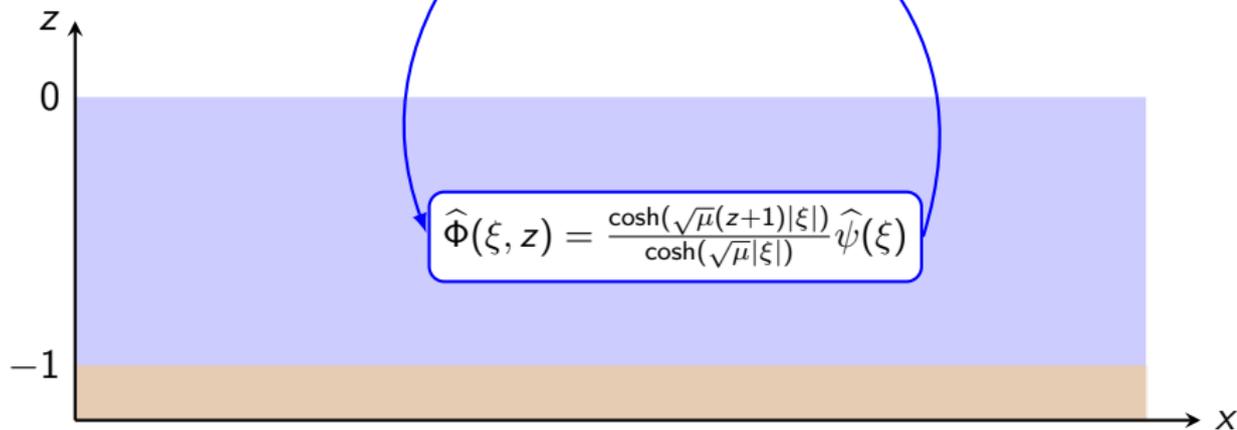
- La configuration au repos sur fond plat est connue :



Le calme : $\zeta = 0$, $b = 0$

- La configuration au repos sur fond plat est connue :

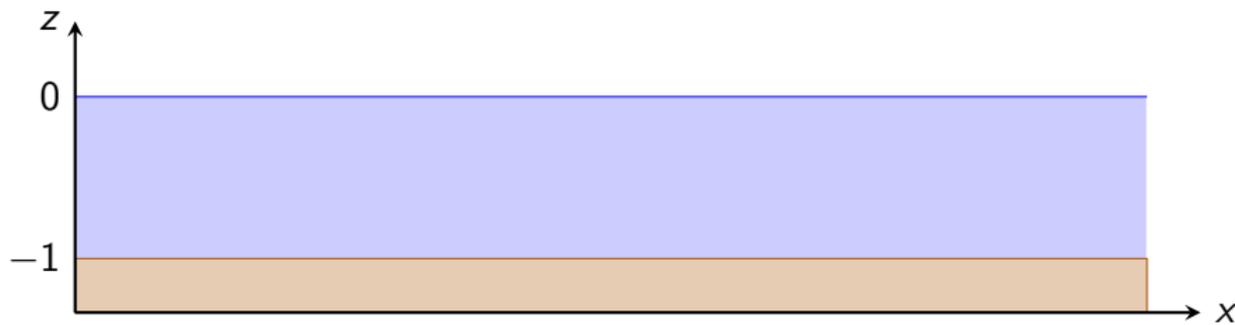
$$G_\mu[0,0] : \psi \mapsto \frac{|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)}{\sqrt{\mu}} \psi$$



Le calme avant la tempête

① Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$ connu

- $G_{\mu}^0 \psi = \frac{|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)}{\sqrt{\mu}} \psi$



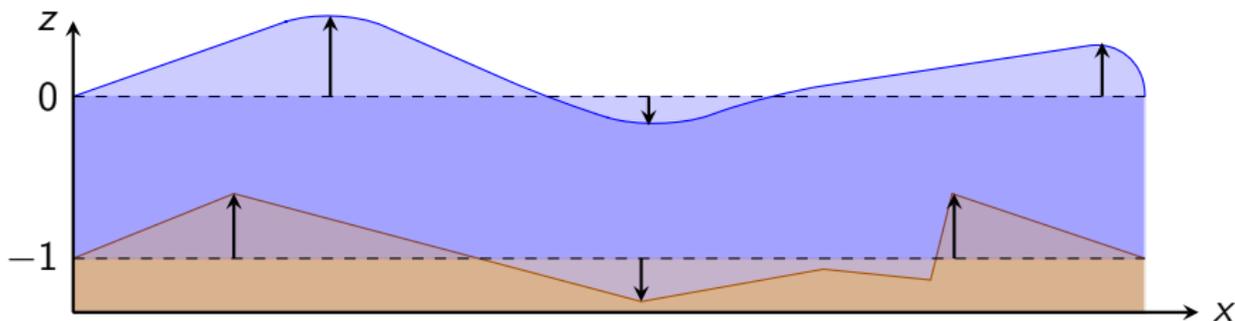
Le calme avant la tempête

① Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$ connu

- $G_\mu^0 \psi = \frac{|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)}{\sqrt{\mu}} \psi$

② Dérivée de forme de G_μ autour de $\zeta = 0$ et $b = 0$ connue

- $dG_\mu[0, 0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi =$
 $-\nabla \cdot (\varepsilon\zeta \nabla \psi) + \nabla \cdot \frac{1}{\cosh(\sqrt{\mu}|D|)} (\beta b \frac{1}{\cosh(\sqrt{\mu}|D|)} \nabla \psi) - \mu G_\mu^0(\varepsilon\zeta G_\mu^0 \psi)$



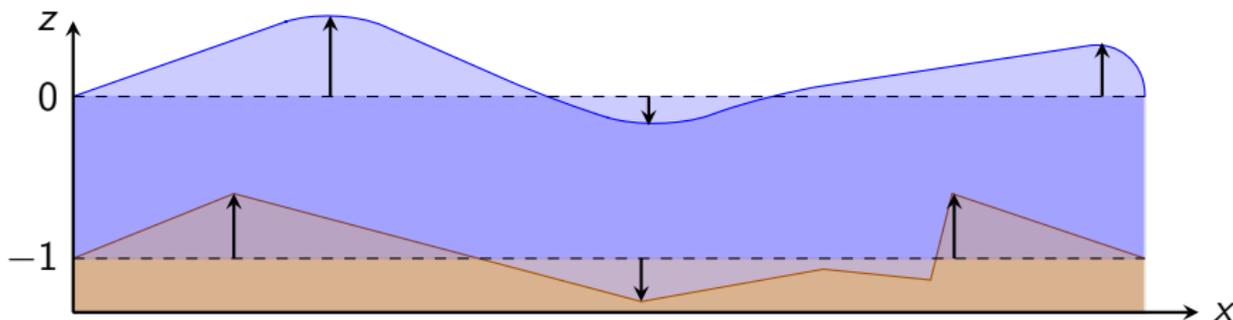
Le calme avant la tempête

① Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$ **connu**

- $G_\mu^0 \psi = \frac{|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)}{\sqrt{\mu}} \psi$

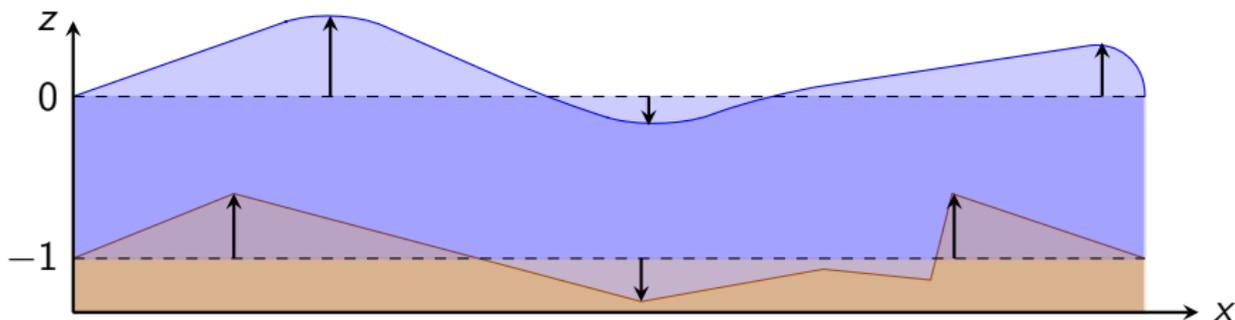
② Dérivée de forme de G_μ autour de $\zeta = 0$ et $b = 0$ **connue**

- $dG_\mu[0, 0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi = \checkmark$



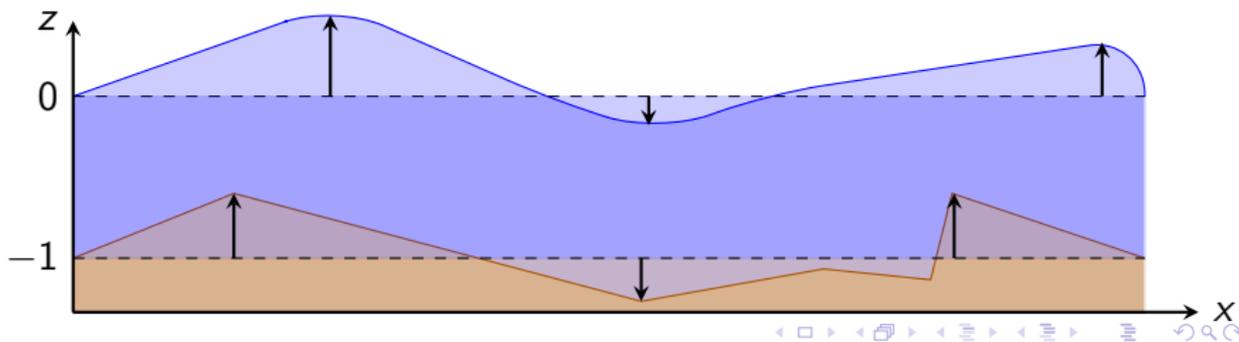
Le calme avant la tempête

- ① Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$ **connu**
 - $G_\mu^0 \psi = \frac{|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)}{\sqrt{\mu}} \psi$
- ② Dérivée de forme de G_μ autour de $\zeta = 0$ et $b = 0$ **connue**
 - $dG_\mu[0, 0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi = \checkmark$
- ③ Approximation **explicite** de $G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi$
 - $G_\mu[\varepsilon\zeta, \beta b]\psi = G_\mu^0 \psi + dG_\mu[0, 0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi + O(\varepsilon^2, \beta^2)$



Asymptotique de $G_\mu \psi$ lorsque $\mu \ll 1$

- 1 Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$
 - $G_\mu^0 \psi = \frac{|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|)}{\sqrt{\mu}} \psi$
- 2 Dérivée de forme de G_μ autour de $\zeta = 0$ et $b = 0$
 - $dG_\mu[0, 0](\varepsilon \zeta, \beta b) \psi = \checkmark$
- 3 Approximation **explicite** en $(\varepsilon \zeta, \beta b)$
 - $G_\mu \psi = G_\mu^0 \psi + dG_\mu[0, 0](\varepsilon \zeta, \beta b) \psi + O(\varepsilon^2, \beta^2)$



Asymptotique de $G_\mu\psi$ lorsque $\mu \ll 1$

① Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$

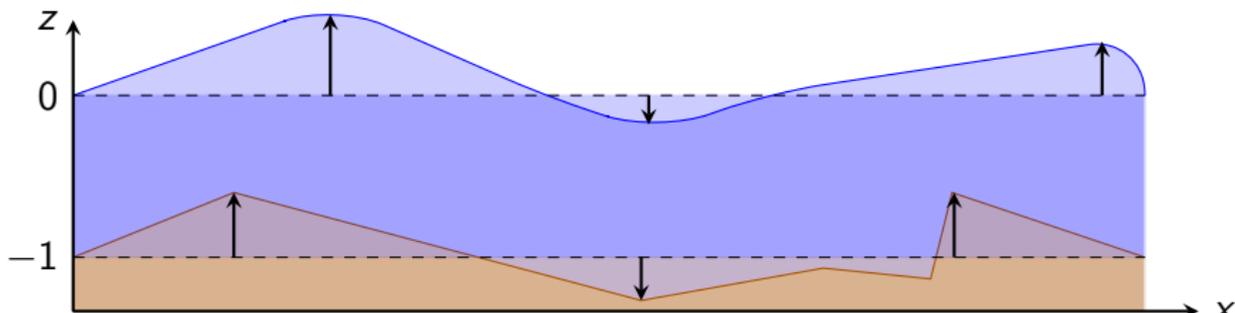
- $G_\mu^0\psi = -\nabla \cdot \mathbf{V} + O(\mu)$

② Dérivée de forme de G_μ autour de $\zeta = 0$ et $b = 0$

- $dG_\mu[0, 0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi = \checkmark$

③ Approximation **explicite** en $(\varepsilon\zeta, \beta b)$

- $G_\mu\psi = -\nabla \cdot \mathbf{V} + dG_\mu[0, 0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi + O(\mu, \varepsilon^2, \beta^2)$



Asymptotique de $G_\mu\psi$ lorsque $\mu \ll 1$

① Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$

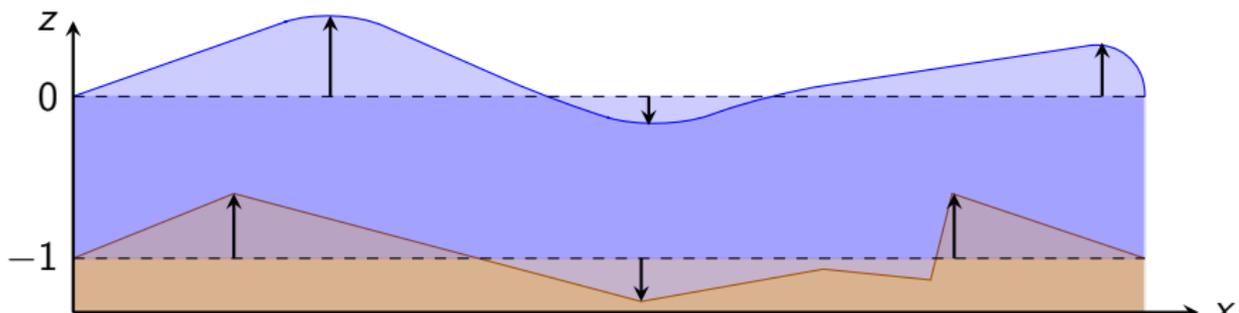
- $G_\mu^0\psi = -\nabla \cdot V + O(\mu)$

② Dérivée de forme de G_μ autour de $\zeta = 0$ et $b = 0$

- $dG_\mu[0,0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi = -\varepsilon\nabla \cdot (\zeta V) + \beta\nabla \cdot \frac{1}{\cosh(\frac{1}{\sqrt{\mu}D})}(bV) + O(\mu)$

③ Approximation **explicite** en $(\varepsilon\zeta, \beta b)$

- $G_\mu\psi = -\nabla \cdot V - \varepsilon\nabla \cdot (\zeta V) + \beta\nabla \cdot \frac{1}{\cosh(\frac{1}{\sqrt{\mu}D})}(bV) + O(\mu, \varepsilon^2, \beta^2)$



Asymptotique de $G_\mu\psi$ lorsque $\mu \ll 1$

① Opérateur à $\zeta = 0$ et $b = 0$

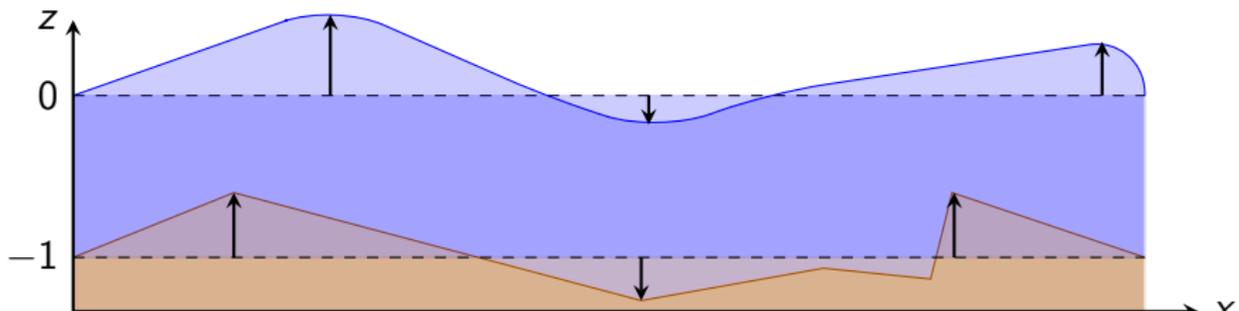
- $G_\mu^0\psi = -\nabla \cdot V + O(\mu)$

② Dérivée de forme de G_μ autour de $\zeta = 0$ et $b = 0$

- $dG_\mu[0,0](\varepsilon\zeta, \beta b)\psi = -\varepsilon\nabla \cdot (\zeta V) + \beta\nabla \cdot \frac{1}{\cosh(\frac{1}{\sqrt{\mu}}D)}(bV) + O(\mu)$

③ Approximation **explicite** en $(\varepsilon\zeta, \beta b)$

- $G_\mu\psi = -\nabla \cdot V - \varepsilon\nabla \cdot (\zeta V) + \beta\nabla \cdot B_\mu(V) + O(\mu, \varepsilon^2, \beta^2)$
régulier

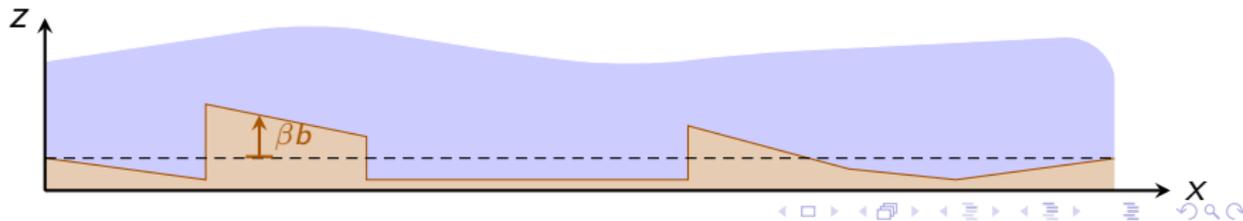


Un modèle alternatif

Equations approchées

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G_\mu \psi = 0 \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = O(\mu) \end{cases}$$

- Approximation de $G_\mu \psi$?



Un modèle alternatif

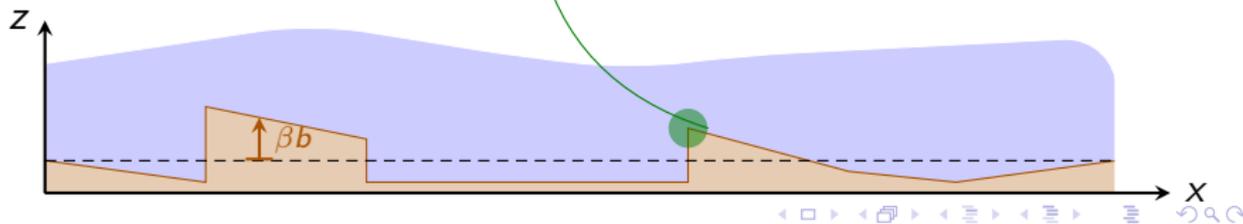
Equations approchées

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot V + \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) - \beta \nabla \cdot B_\mu(V) = O(\mu) \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = O(\mu) \end{cases}$$

- Approximation de $G_\mu \psi$

Alternative

$$\nabla \cdot V + \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) - \beta \nabla \cdot B_\mu(V)$$



Un modèle alternatif

Equations approchées

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot V + \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) - \beta \nabla \cdot B_\mu(V) = O(\mu) \\ \partial_t V + \nabla \zeta + \varepsilon (V \cdot \nabla) V = O(\mu) \end{cases}$$

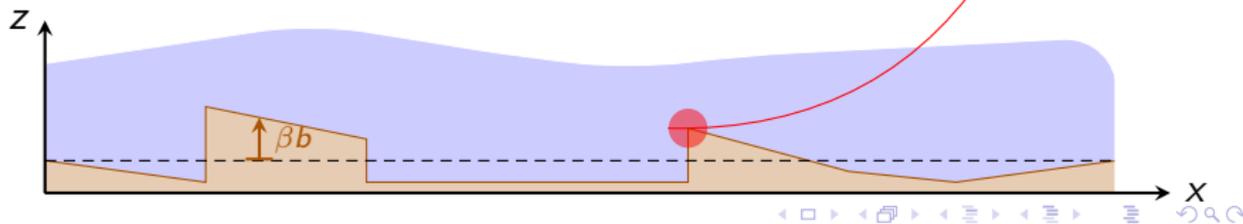
- Approximation de $G_\mu \psi$

Alternative

$$\nabla \cdot V + \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) - \beta \nabla \cdot B_\mu(V)$$

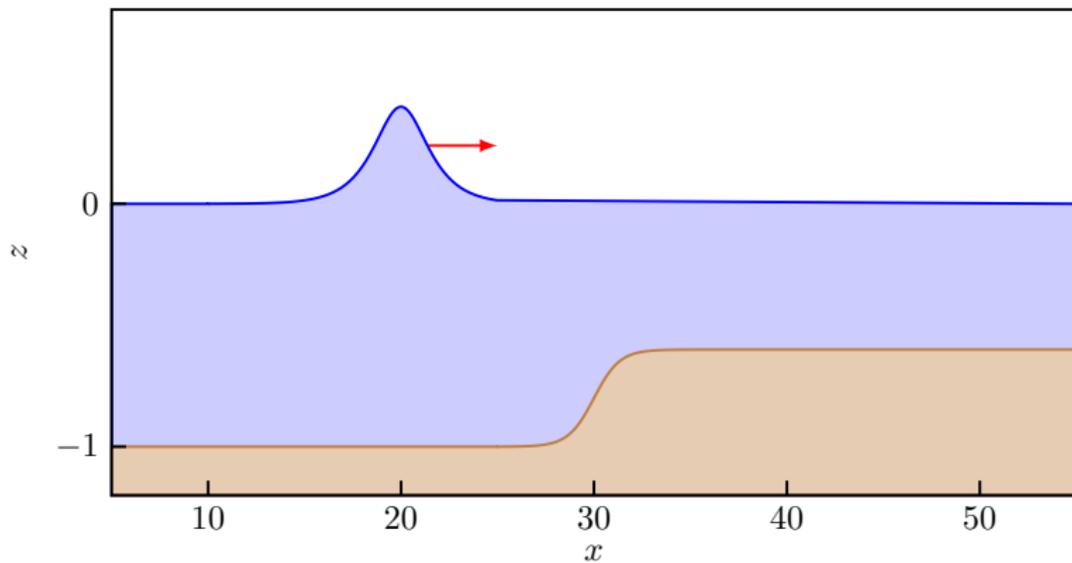
Classique

$$\nabla \cdot V + \varepsilon \nabla \cdot (\zeta V) - \beta \nabla \cdot (bV)$$

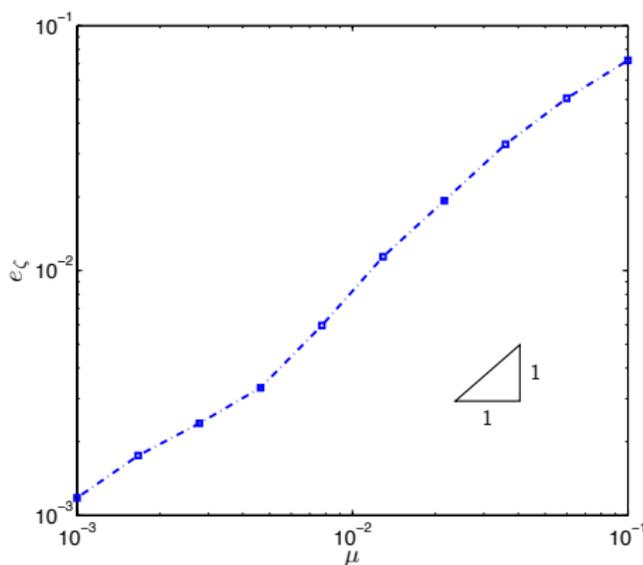


Quelques tests numériques

- Condition initiale : $\zeta_0(x) = V_0(x) = a \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-20}{2}\right)$

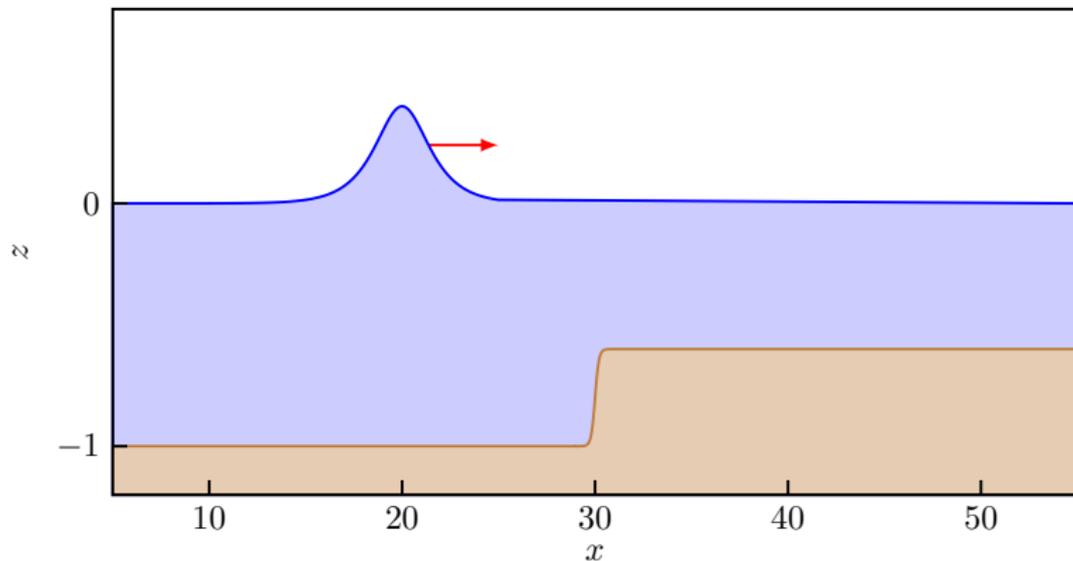


- Elevation calculée
 - avec le modèle de Saint-Venant : ζ_{SV}
 - avec le modèle alternatif : ζ_{Alt}
- Consistance : $e_{\zeta}(\mu) = \|\zeta_{SV} - \zeta_{Alt}\|_{\infty} \stackrel{?}{=} O(\mu)$

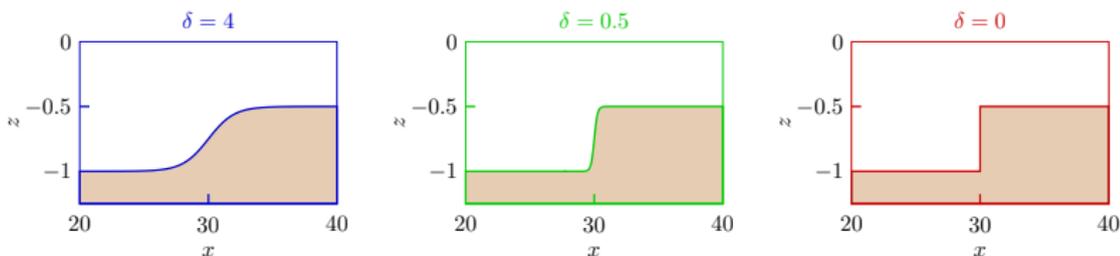


Variation brusque

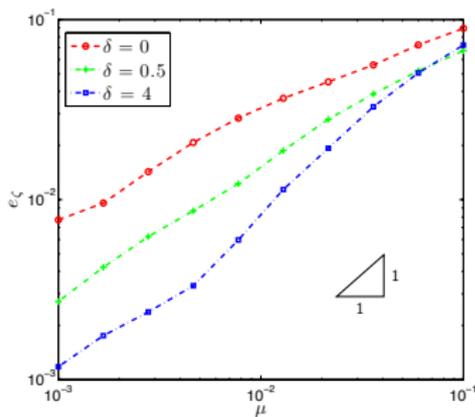
- Condition initiale : $\zeta_0(x) = V_0(x) = a \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-20}{2}\right)$



- Paramétrisations du fond : $b(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{2(x-30)}{\delta} \right) \right)$



- Consistance : $e_{\zeta}(\mu) = \|\zeta_{SV} - \zeta_{Alt}\|_{\infty} \stackrel{?}{=} O(\mu^{\alpha})$



δ	Ordre de consistance
4	0.96
0.5	0.71
0	0.54

Conclusion

Partie 1 Une méthode générale pour corriger un schéma volumes finis :

- Préservant la coercivité du schéma
- Assurant un principe du maximum discret
- **Le schéma corrigé consistant est toujours recherché**

Partie 2 Topographies irrégulières et régime shallow water :

- **Modèles plus simples dans le cas polygonal ?**
- Des modèles alternatifs pour des topographies peu régulières :
 - **quelle régularité minimale pour le fond ?**