HAL
open science

Fluctuations quantiques et effets non-linéaires dans les condensats de Bose-Einstein : des ondes de choc dispersives au rayonnement de Hawking acoustique

Pierre-Élie Larré

To cite this version:

Pierre-Élie Larré. Fluctuations quantiques et effets non-linéaires dans les condensats de Bose-Einstein : des ondes de choc dispersives au rayonnement de Hawking acoustique. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112158 . tel-00875349

HAL Id: tel-00875349

https://theses.hal.science/tel-00875349v1

Submitted on 21 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 11 — Orsay
École Doctorale de Physique de la Région Parisienne

Thèse
Présentée par
Pierre-Élie Larré
Pour obtenir le titre de docteur en sciences
Spécialité : physique théorique

Fluctuations quantiques et effets non-linéaires dans les condensats de Bose–Einstein

Des ondes de choc dispersives au rayonnement de Hawking acoustique

Soutenue le 20 septembre 2013 devant la commission d'examen composée de

Mme Jacqueline Bloch	Examinatrice
M. Cristiano Ciuti	Rapporteur
M. Victor Fleurov	Rapporteur
M. Renaud Parentani	Examinateur
M. Nicolas Pavloff	Directeur de thèse
M. Christoph Westbrook	Examinateur

Remerciements

Nicolas Pavloff a été mon directeur durant ces trois années de doctorat. Ce fut scientifiquement enrichissant et humainement plaisant de travailler à ses côtés. Je lui adresse toutes mes amitiés.

Je profite également de ces remerciements pour exprimer ma sympathie à Anatoly Kamchatnov dont la compétence et la jovialité ont rendu nos collaborations à la fois productives et agréables. Une partie de cette thèse résulte aussi d'une collaboration avec Iacopo Carusotto et Alessio Recati. J'ai pu bénéficier de leur dynamisme pour avancer dans mes propres recherches et je leur en sais gré. Je tiens enfin à remercier Alberto Amo, Jacqueline Bloch, Isabelle Bouchoule et Christoph Westbrook avec qui j'ai eu l'opportunité de discuter relativement fréquemment, ce qui m'a permis de donner une dimension expérimentale à la compréhension de mon travail.

J'aimerais d'autre part témoigner ma reconnaissance à Cristiano Ciuti et Victor Fleurov qui ont bien voulu se charger de rapporter ce manuscrit de thèse. J'exprime aussi ma gratitude à Renaud Parentani et, à nouveau, à Jacqueline Bloch et Christoph Westbrook d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques. Aussi, mes remerciements vont aux chercheurs permanents du laboratoire, à Claudine Le Vaou et à Vincent Degat pour leur accueil chaleureux et leur sollicitude. J'adresse bien sûr un clin d'œil fraternel et amical à tous mes compagnons de route.

Panayotis et Grégory ont ici toute leur place car ils ont pris le temps de lire mon manuscrit et d'y apporter des corrections judicieuses.

Je conclurai ces quelques lignes en remerciant chaleureusement mes parents, mon frère, mes grands-parents, mon oncle, ma chérie, ses parents et mes amis qui, pour des raisons évidentes, ont largement contribué au bon déroulement de cette thèse.

Table des matières

Remerciements **3**

Introduction **6**

1 Trous noirs acoustiques dans les condensats de Bose–Einstein **13**
1.1 Onde sonore en espace-temps courbe et trou noir acoustique 14
1.1.1 Ingrédients 14
1.1.2 Approximation acoustique 15
1.1.3 Vers une formulation covariante 16
1.1.4 Élément de ligne de Painlevé–Gullstrand 19
1.1.5 Écoulement conforme de Schwarzschild 20
1.1.6 Gravité de surface et rayonnement de Hawking 22
1.2 Rayonnement de Hawking dans les condensats de Bose–Einstein unidimensionnels 23
1.2.1 Introduction 23
1.2.2 Horizons acoustiques dans un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel 26
1.2.3 Théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires 32
1.2.4 Signal de Hawking à un corps 42
1.2.5 Signal de Hawking à deux corps dans l'espace réel 46
1.2.6 Signal de Hawking à deux corps dans l'espace des impulsions 55
1.2.7 Conclusion 59
1.2.8 P.-É. L., A. Recati, I. Carusotto et N. Pavloff, *Physical Review A* **85**, 013621 (2012) 60

2 Ondes dans l'écoulement d'un condensat de polaritons **77**
2.1 Condensation de polaritons en microcavité semi-conductrice 77
2.2 Superfluidité dans les condensats de polaritons 80
2.3 Profil d'onde généré par un obstacle localisé se déplaçant dans un condensat de polaritons scalaire unidimensionnel 83
2.3.1 Descriptif détaillé du modèle 83
2.3.2 Écoulement autour d'un petit obstacle : d'un régime de traînée visqueuse vers un régime de traînée d'onde 86

2.3.3 Onde de choc dispersive dans un condensat supersonique s'écoulant autour d'un obstacle étroit de forte amplitude 92
2.3.4 Synthèse des résultats 99
2.3.5 P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov, *Physical Review B* **86**, 165304 (2012) 100
2.4 Fluctuations de la polarisation dans un condensat de polaritons spinoriel unidimensionnel 119
2.4.1 Descriptif détaillé du modèle 119
2.4.2 Fluctuations de la densité et de la polarisation en présence d'une petite impureté 121
2.4.3 Synthèse des résultats 129
2.4.4 P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov, Prépublication 131

3 Rayonnement de Hawking dans un condensat à deux composantes 136
3.1 Introduction 136
3.2 Description rapide du modèle 137
3.3 Théorie de Bogoliubov des fluctuations 138
3.4 Horizon acoustique pour les phonons de polarisation et identification des modes de diffusion 140
3.5 Rayonnement de Hawking à deux corps : corrélations des fluctuations quantiques de la polarisation de part et d'autre de l'horizon 145
3.6 Conclusion 150
3.7 P.-É. L. et N. Pavloff, Prépublication 151

Conclusion 158

Annexe : Matrice densité à un corps dans un gaz de Bose unidimensionnel, dilué et homogène au zéro absolu 161

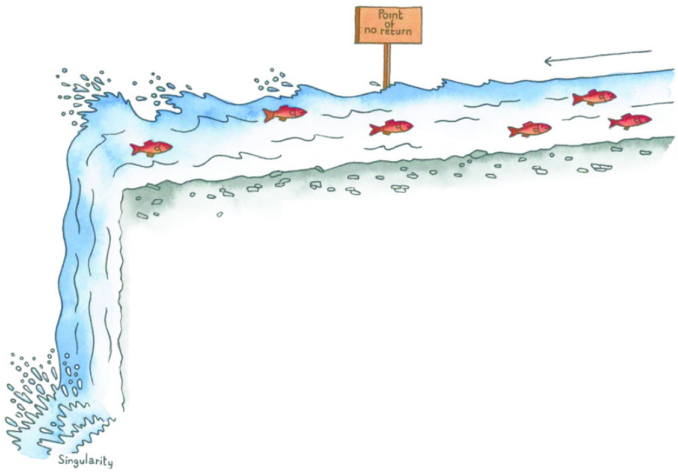
Bibliographie 166

Résumé 178

Introduction

La statistique de Bose–Einstein détermine le nombre moyen de particules occupant un état quantique d'énergie donnée d'un système de bosons identiques sans interaction. Cette distribution statistique fut introduite par Satyendra Nath Bose dans le cadre de la théorie des photons initiée par Albert Einstein ; elle fit l'objet d'un célèbre article qu'Einstein traduisit lui-même de l'anglais vers l'allemand et fit publier en 1924 dans le journal *Zeitschrift für Physik* [23]. La même année, Einstein étendit la découverte de Bose au cas des atomes [38] ; il démontra qu'une fraction macroscopique de bosons doit occuper l'état quantique de plus basse énergie d'un gaz parfait suffisamment froid, phénomène désormais connu sous le nom de condensation de Bose–Einstein. Ne pouvant à l'époque valider sa prédiction théorique *via* l'expérience, Einstein abandonna le travail qu'il entama sur ce sujet. C'est en 1938 que la prédiction d'Einstein fut remise au goût du jour avec les travaux de Fritz W. London [91] qui proposa un lien entre condensation de Bose–Einstein et superfluidité, état de la matière dans lequel un fluide ne présente aucune viscosité ; le phénomène de superfluidité venait alors d'être tout juste découvert dans la phase liquide d'un ensemble d'atomes d'hélium 4 ultra-froids par Pyotr L. Kapitza [67] (simultanément avec [13], semble-t-il, John F. Allen et A. Don Misener [1]). Il a fallu attendre les avancées théoriques de Nikolaï N. Bogoliubov en 1947 [22], d'Oliver Penrose et Lars Onsager en 1951 et 1956 [105, 106] puis d'Eugène P. Gross et Lev P. Pitaevskii en 1961 [52, 111] pour commencer à comprendre les liens intimes qu'entretiennent les phénomènes de condensation et de superfluidité. En 1995, les membres de l'équipe d'Eric A. Cornell et Carl E. Wieman synthétisèrent le premier condensat gazeux dans un système d'atomes de rubidium [7] et le groupe de Wolfgang Ketterle en produisit un second la même année dans un gaz d'atomes de sodium [34], concrétisant ainsi une trentaine d'années d'efforts dans le domaine du refroidissement atomique et ouvrant la voie à l'étude des gaz atomiques dilués ultra-froids.

En 1981, William G. Unruh réalisa qu'une onde sonore dans un fluide en mouvement se comporte comme une particule scalaire non-massive se propageant dans une géométrie lorentzienne courbe [125]. Lorsque l'écoulement du fluide connecte une région subsonique à une région supersonique, l'espace-temps courbe effectif dans lequel se propagent les ondes sonores correspond à l'espace-temps de Schwarzschild et la région dans laquelle l'écoulement est supersonique définit l'intérieur d'un trou noir dit « acoustique », duquel le son ne peut s'échapper ; l'analogue de l'horizon des évènements dans de telles configurations d'écoulement correspond au mur du son, c'est-à-dire l'endroit à partir duquel la vitesse



Le saumon est à la chute d'eau ce que l'onde sonore est à un écoulement en configuration de trou noir acoustique (crédit : Yan Nascimbene, photographe, peintre, cinéaste et illustrateur français). Lorsque la vitesse de l'eau dans le torrent devient plus grande que la vitesse de natation maximale d'un saumon [l'endroit où cela arrive est indiqué sur le dessin par le panneau « Point of no return » (« Point de non-retour »)], le poisson n'est plus dans la capacité de remonter les lignes de courant ; de même, lorsque la vitesse d'un fluide donné devient plus grande que la vitesse du son dans le fluide au repos, une onde sonore doit être irrémédiablement entraînée par l'écoulement.

du fluide devient plus grande que la vitesse des ondes sonores dans le fluide au repos (on se référera à la figure ci-dessus qui donne une vue d'artiste explicative de ce qu'est un trou noir acoustique). Les travaux du théoricien et cosmologiste britannique Stephen W. Hawking, basés sur un formalisme de théorie quantique des champs en espace-temps courbe, enseignent que les trous noirs gravitationnels émettent un faible rayonnement de corps noir [56, 57] et donc que ces objets astrophysiques ne sont pas complètement sombres, contrairement à ce que prédit la relativité générale, qui est, par nature, une théorie non-quantique ; comme le fit Hawking sept ans plus tôt dans un cadre purement relativiste, Unruh démontra que l'existence d'un horizon acoustique dans un écoulement fluide doit nécessairement s'accompagner de l'émission d'un rayonnement sous forme d'un bain thermique de quanta d'ondes sonores. Cependant, le rayonnement de Hawking acoustique est un phénomène négligeable qui semble être difficilement détectable compte tenu des fluctuations thermiques dont il est impossible de s'affranchir, ou, par exemple, de la génération éventuelle d'instabilités hydrodynamiques dans l'écoulement ; de même, il est probablement impossible que nous arrivions un jour à mesurer le rayonnement de Hawking des trous noirs gravitationnels puisque l'univers tout entier baigne dans le fond diffus cosmologique, dont la température est typiquement supérieure de huit ordres de grandeur à la température de Hawking d'un trou noir de masse stellaire.

Néanmoins, on réalisa que les condensats de Bose–Einstein jouissent de propriétés permettant la conception théorique et la réalisation expérimentale d'écoulements en configu-

ration de trou noir acoustique dont l'intérêt majeur tient dans la possibilité d'y détecter l'analogue du rayonnement de Hawking [48, 15, 16, 50, 17, 124, 138, 74]. Le premier trou noir acoustique réalisé dans l'écoulement d'un condensat de Bose–Einstein a été produit en 2010 par l'équipe de Jeff Steinhauer en accélérant un fluide ultra-froid d'atomes de rubidium à l'aide d'un potentiel extérieur localement en forme de marche [75]. Ce non-obstant, le rayonnement de Hawking spontané n'a pas encore été mesuré dans de telles configurations mais des méthodes de détection *a priori* prometteuses ont néanmoins été proposées par les théoriciens. En 2008, deux équipes italiennes de Bologne et de Trente suggérèrent de mesurer les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la densité afin de révéler l'effet Hawking dans l'écoulement d'un condensat de Bose–Einstein présentant un horizon acoustique [12, 30] ; leurs résultats numériques, établis dans le cas d'une configuration schématique de trou noir acoustique, montrent que le signal de Hawking apparaît sous forme de signaux de corrélation non-locaux résultant de l'émission de deux phonons corrélés, l'un fuyant l'horizon acoustique en remontant les lignes de courant dans la région où l'écoulement du gaz de Bose est subsonique, l'autre étant « happé » par le trou noir acoustique, s'engouffrant dans la région où l'écoulement est supersonique sans pouvoir faire volte-face. Il s'avère que ces signaux de corrélation à deux corps sont robustes vis-à-vis du bruit de fond thermique inhérent aux expériences typiques de manipulation d'atomes ultra-froids ; on montre d'ailleurs que leur amplitude s'accroît lorsqu'on augmente la température du gaz [117].

Dans le chapitre 1 de cette thèse, nous étudierons deux nouvelles configurations (dites de pic δ et de chute d'eau) d'intérêt expérimental permettant la réalisation de l'équivalent acoustique d'un trou noir gravitationnel dans l'écoulement d'un quasi-condensat de Bose–Einstein unidimensionnel. Dans chaque cas, nous donnerons une description analytique complète du profil de densité de l'écoulement, du spectre du rayonnement de Hawking à un corps et des fluctuations quantiques associées, traitées dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires [22] et en termes d'une matrice $\mathbf{S}(\omega)$ qui décrit les processus de diffusion à l'horizon. Nous mettrons en évidence que les corrélations à deux corps non-locales des fluctuations de la densité dans l'espace réel offrent une signature claire de l'effet Hawking dans ces configurations réalistes de pic δ et de chute d'eau, comme les auteurs des références [12], [30] et [117] l'ont montré quelques années plus tôt dans le cas d'une configuration schématique (dite, dans la suite, de profil plat). En démontrant une règle de somme vérifiée par la matrice densité à deux corps connexe, nous comprendrons également que les corrélations à longue portée (interprétées comme résultant de l'émission de deux quasi-particules de Hawking corrélées) doivent être intimement associées aux modifications diagonales de la matrice densité à deux corps lorsque le condensat présente l'analogue d'un horizon des évènements [45]. En collaboration avec le groupe expérimental de Denis Boiron et Christoph I. Westbrook du Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, nous nous sommes attachés à définir la meilleure configuration qui permettrait une démonstration expérimentale nette du rayonnement de Hawking spontané dans les condensats de Bose–Einstein ; sur la base des résultats expérimentaux obtenus en référence [61], nous clôturerons ce chapitre par une étude des corrélations dans

l'espace des impulsions permettant une analyse du rayonnement de Hawking à deux corps dans un quasi-condensat unidimensionnel en configuration de trou noir acoustique.

Les polaritons (excitoniques) sont des quasi-particules issues du couplage fort entre les photons et les excitons piégés (pour ces derniers dans des puits quantiques) à l'intérieur de microcavités semi-conductrices. Ils ont été étudiés de manière intensive depuis la découverte en 1992 du couplage fort entre lumière et matière dans ces systèmes [131]. Les polaritons sont des bosons composites qui ont la possibilité d'exhiber des propriétés de cohérence de phase quantique macroscopique à haute température ($\sim$ 300 à 500 K) du fait de leur très faible masse (à cause de leur nature partiellement photonique, les polaritons sont typiquement plus légers de quatre ordres de grandeur qu'un électron). Le premier condensat de polaritons a été obtenu en 2006 par deux équipes de l'Institut Néel de Grenoble et de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne [69]. Bien que les gaz de polaritons soient des systèmes fortement hors d'équilibre du fait de la faible durée de vie de leurs composants (de l'ordre, au maximum, de quelques dizaines de picosecondes), la transition d'un gaz de polaritons en microcavité semi-conductrice vers un état caractérisé par une cohérence temporelle et une cohérence spatiale à longue portée a clairement été démontrée : par exemple, les auteurs de la référence [118] ont mis en évidence l'apparition d'une cohérence spatiale et angulaire dans un gaz de polaritons en situation de pompage non-résonnant ; plus récemment, Yoshihisa Yamamoto (de l'Université de Stanford en Californie) *et al.* ont effectué une mesure de la matrice densité à un corps dans un gaz de polaritons bidimensionnel et montré qu'elle présentait (modulo les complications qu'entraîne la dissipation dans ces systèmes) le même comportement que celle qui caractérise un condensat de Bose–Einstein en dimension deux, avec possibilité d'existence d'une phase de Berezinskii–Kosterlitz–Thouless [120]. Dans les références [3] et [4], les auteurs disent avoir observé une propagation superfluide d'un fluide de polaritons créé par une excitation laser résonnante dans une microcavité semi-conductrice : aux faibles vitesses, le fluide qui s'écoule ne présente pas de diffusion de Rayleigh sur un défaut faisant obstacle à l'écoulement ; aux grandes vitesses par contre, un régime dissipatif de Cherenkov est clairement observé. Nous porterons dans cette thèse un regard critique sur ces résultats ; nous démontrerons qu'il est difficile d'évaluer la superfluidité d'un condensat de polaritons en analysant seulement la structure des profils de densité générés par la présence d'un petit obstacle localisé dans l'écoulement du fluide : nos résultats montrent en effet qu'une absence de diffusion à longue portée par un défaut n'est pas du tout liée à une absence de dissipation d'énergie dans le système. Comme dans les vapeurs atomiques ultra-froides, on observe dans les condensats de polaritons une riche variété de phénomènes tels que la nucléation de tourbillons quantifiés et la génération de solitons sombres dues aux interactions entre le condensat de polaritons et des défauts dans la microcavité semi-conductrice [5, 123].

Dans le chapitre 2, nous analyserons les caractéristiques superfluides et dissipatives d'un condensat de polaritons scalaire unidimensionnel en situation de pompage non-résonnant et en mouvement par rapport à un obstacle localisé. Tout d'abord, nous consi-

dérerons la réponse en densité du condensat dans la limite perturbative, c'est-à-dire dans la limite où l'obstacle est tel qu'il n'induit que de légères modifications dans les paramètres de l'écoulement ; nous discuterons à ce moment là de la validité de la théorie de la réponse linéaire appliquée à notre modèle. En évaluant analytiquement la force de traînée ressentie par l'obstacle, nous montrerons qu'il existe une transition douce entre un régime de basse vitesse où l'écoulement du gaz de polaritons est visqueux et un régime de grande vitesse où la résistance au mouvement s'explique par l'émission d'ondes linéaires de densité dans le fluide. Nous ferons également l'analyse détaillée d'une situation où le condensat de polaritons se meut à des vitesses supersoniques par rapport à un obstacle étroit de forte amplitude, c'est-à-dire d'amplitude telle que la théorie de la réponse linéaire ne peut plus être mise en application pour résoudre le problème. Dans ce cas, on montrera qu'une onde de choc dispersive se forme en amont de l'obstacle et que sa structure oscillatoire amortie est parfaitement décrite par la théorie des modulations de Whitham [133] ; on analysera les profils de densité et de vitesse en aval de l'obstacle dans le cadre de l'approximation hydraulique [64]. Une résolution numérique exacte du problème montrera la validité sans faille des descriptions analytiques discutées ci-avant. Nous établirons enfin l'existence d'un régime dissipatif dans lequel l'écoulement du condensat autour d'un obstacle piqué n'est pas stationnaire. Nous conclurons ce chapitre en incluant les effets dus au spin des polaritons excitoniques dans la description phénoménologique du condensat. Nous reproduirons alors l'analyse perturbative effectuée dans le cas scalaire et montrerons qu'en présence d'un champ magnétique extérieur, une onde de polarisation très faiblement amortie (comparativement aux ondes de densité) est éjectée sur des distances typiquement bien plus grandes que sa longueur d'onde lorsque le condensat s'écoule à vive allure autour de l'obstacle. Notons que nous développerons aussi un court interlude dans lequel nous donnerons une description théorique de la propagation d'ondes de densité et de polarisation faiblement non-linéaires et faiblement dispersives dans un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel à deux composantes de spin.

Dans le chapitre précédent, nous mettons en évidence une éjection d'ondes de polarisation faiblement amorties dans un condensat de polaritons à deux composantes lorsque le fluide, en présence d'un champ magnétique extérieur, s'écoule à grande vitesse autour d'un petit défaut localisé ; tirant parti du grand temps de vie de ces ondes, nous avancerons l'idée qu'il serait peut-être possible d'expérimenter l'effet Hawking dans un condensat de polaritons spinoriel *via* les fluctuations spontanées (donc purement quantiques) de la polarisation du gaz. Nous donnerons des éléments d'analyse dans le chapitre 3 de cette thèse. Par mesure de simplicité, nous nous placerons dans le cadre d'une description théorique du condensat négligeant les effets dus au temps de vie fini des polaritons et à la présence d'un éventuel champ magnétique extérieur. Nous proposerons alors une configuration schématique de trou noir acoustique caractérisée par un horizon dont la présence n'affecte que les modes de polarisation de grandes longueurs d'onde. Une étude analytique détaillée des fluctuations de la polarisation (et de la densité) dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des excitations et en termes d'une matrice de diffusion montrera que seule la fonction de corrélation des fluctuations quantiques de la polarisation est affectée par la présence

de l'horizon ; en particulier, nous verrons que des signaux non-locaux émergent du calcul (en plus du signal diagonal habituel qui caractérise le régime de quasi-condensation) : ces derniers résultent de la corrélation de deux fluctuations de polarisation émises de part et d'autre de l'horizon et sont dès lors signatures de l'occurrence d'un rayonnement de Hawking (à deux corps) d'ondes de polarisation dans le système.

Dans l'Annexe, enfin, nous montrerons que la théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires ne permet pas de prédire le bon comportement de la matrice densité à un corps dans un gaz de Bose unidimensionnel, dilué et homogène à température nulle, mais qu'il est tout de même possible d'obtenir une description analytique exacte de cette fonction de corrélation en s'inspirant des travaux de Victor N. Popov [114] et/ou de Christophe Mora et Yvan Castin [97]. Nous avons pris soin de rédiger cette appendice afin de mettre en lumière que le traitement des fluctuations quantiques dans le cadre de la théorie de Bogoliubov n'est en toute rigueur pas valide en dimension un et que son utilisation pour analyser un système de bosons unidimensionnel nécessite une vigilance toute particulière.

Liste des publications, prépublications et articles en cours de rédaction

1. P.-É. L., A. Recati, I. Carusotto et N. Pavloff
   « Quantum fluctuations around black hole horizons in Bose–Einstein condensates »
   Physical Review A **85**, 013621 (2012)
   Nota bene : Cette publication est incluse en sous-section 1.2.8 et sa synthèse va des sous-sections 1.2.2 à 1.2.5.
2. Auteurs à définir
   « Momentum correlations as signature of Hawking radiation in Bose–Einstein condensates »
   En cours de rédaction
   Nota bene : On trouvera une discussion relative à ce projet en sous-section 1.2.6.
3. P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov
   « Wave pattern induced by a localized obstacle in the flow of a one-dimensional polariton condensate »
   Physical Review B **86**, 165304 (2012)
   Nota bene : L'article est inclu en sous-section 2.3.5 et sa synthèse occupe les pages des sous-sections 2.3.1 à 2.3.4.
4. P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov
   « Polarization hydrodynamics in a one-dimensional polariton condensate »
   Prépublication
   Nota bene : Notre prépublication est incluse en sous-section 2.4.4 ; elle clôture une description détaillée correspondant aux sous-sections 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.3.
5. A. M. Kamchatnov, Y. V. Kartashov, P.-É. L. et N. Pavloff
   « Nonlinear waves of polarization in two-component Bose–Einstein condensates »
   En cours de rédaction
   Nota bene : Un cours descriptif calculatoire de ce travail est donné comme interlude en sous-section 2.4.3.
6. P.-É. L. et N. Pavloff
   « Hawking radiation in a two-component Bose–Einstein condensate »
   Prépublication
   Nota bene : Le détail des calculs fait l'objet du chapitre 3 et la prépublication correspondante figure en section 3.7.

— 1 —
Trous noirs acoustiques dans les condensats de Bose–Einstein

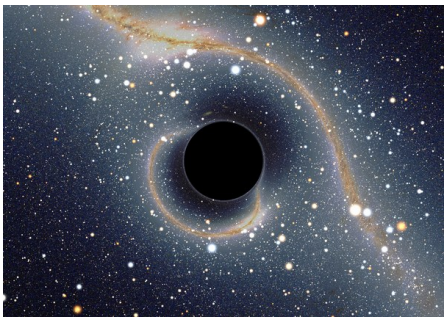


Figure 1.1 — Voûte céleste telle que la verrait un observateur proche d'un hypothétique trou noir gravitationnel situé devant le centre de notre galaxie : la lumière qui passe à proximité du trou noir est fortement défléchie, en conséquence de quoi l'image de fond est déformée (crédit : Alain Riazuelo, Institut d'Astrophysique de Paris) ; voici une *animation* (le lien apparaît dans la version numérique du document). En 1974, Stephen W. Hawking découvrit que les trous noirs n'étaient pas totalement sombres si l'on tenait compte des effets dus à la mécanique quantique [56, 57]. William G. Unruh (découvreur de l'effet Unruh) démontra en 1981 qu'un écoulement supersonique pouvait en théorie reproduire l'analogue acoustique de l'horizon d'un trou noir gravitationnel et qu'une sorte de rayonnement de Hawking en découlerait sous forme de quanta d'ondes sonores [125].

Sommaire

1.1 Onde sonore en espace-temps courbe et trou noir acoustique **14**

1.1.1 Ingrédients 14

1.1.2 Approximation acoustique 15

1.1.3 Vers une formulation covariante 16

1.1.4 Élément de ligne de Painlevé–Gullstrand 19

1.1.5 Écoulement conforme de Schwarzschild 20

1.1.6 Gravité de surface et rayonnement de Hawking 22

1.2 Rayonnement de Hawking dans les condensats de Bose–Einstein unidimensionnels 23
1.2.1 Introduction 23
1.2.2 Horizons acoustiques dans un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel 26
1.2.3 Théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires 32
1.2.4 Signal de Hawking à un corps 42
1.2.5 Signal de Hawking à deux corps dans l'espace réel 46
1.2.6 Signal de Hawking à deux corps dans l'espace des impulsions . 55
1.2.7 Conclusion 59
1.2.8 P.-É. L., A. Recati, I. Carusotto et N. Pavloff, *Physical Review A* **85**, 013621 (2012) 60

1.1 Onde sonore en espace-temps courbe et trou noir acoustique

1.1.1 Ingrédients

Donnons-nous un fluide non-relativiste, parfait [1] et barotrope. Sa dynamique est entièrement gouvernée par les équations [82]

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1a}$$

$$\text{et} \quad \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\, \nabla p, \tag{1.1b}$$

où $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ désigne la vitesse du fluide, $\rho(t, \mathbf{r})$ sa masse volumique et $p(t, \mathbf{r})$ le champ de pression. L'équation (1.1a) n'exprime rien d'autre que la conservation de la masse, (1.1b) étant l'équation d'Euler. Comme le fluide est barotrope, on clôt le système d'équations (1.1a)–(1.1b) en écrivant que la pression est une fonction (croissante) de la densité volumique (uniquement) :

$$p = p(\rho). \tag{1.2}$$

Pour peu que le fluide soit à un instant donné de vorticité nulle, l'hypothèse (1.2) entraîne que l'écoulement doit être irrotationnel à tout autre instant. Pour le voir, prenons le rotationnel de l'équation d'Euler (1.1b). En utilisant l'identité vectorielle de Bernoulli $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})$ et le fait que $\nabla \wedge (\frac{1}{\rho}\nabla p) = \nabla(\frac{1}{\rho}) \wedge \nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \wedge \nabla p = \nabla(\frac{1}{\rho}) \wedge \nabla p = 0$ puisque p n'est fonction que de ρ, il vient

$$\partial_t(\nabla \wedge \mathbf{v}) = \nabla \wedge [\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})]. \tag{1.3}$$

1. Supposer l'absence de viscosité est une simplification d'ordre technique. Nous ne le ferons pas mais on peut montrer que les contributions visqueuses à l'équation de Navier–Stokes brisent l'invariance de Lorentz acoustique introduite en sous-section 1.1.3. Néanmoins, lorsque le fluide est visqueux, cette invariance de Lorentz s'avère être approximativement vérifiée dans des limites de grandes longueurs d'onde et de faibles énergies [127].

Si $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dirige une ligne de courant (fermée) $\partial\Sigma$, alors $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\cdot[\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{v})]=0$ à tout instant et en tout point de $\partial\Sigma$, et de ce fait, en invoquant le théorème de Stokes et en se souvenant de l'équation (1.3),

$$0=\int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\cdot[\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{v})]=\int_{\Sigma}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma}\cdot\nabla\wedge[\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{v})]=\int_{\Sigma}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\Sigma}\cdot\partial_t(\nabla\wedge\mathbf{v}). \tag{1.4}$$

En faisant tendre l'aire de la surface orientée Σ (délimitée par la ligne de courant $\partial\Sigma$) vers zéro, on obtient qu'en tout point du fluide, $\partial_t(\nabla\wedge\mathbf{v})=0$, ce qui signifie que la vorticité $\nabla\wedge\mathbf{v}$ ne varie pas dans le temps. En imaginant qu'elle s'annule à un moment donné, il vient qu'elle vaut constamment zéro :

$$\nabla\wedge\mathbf{v}=0, \tag{1.5}$$

ce qui permet d'identifier [2] le champ des vitesses $\mathbf{v}(t,\mathbf{r})$ au gradient d'un champ scalaire $\psi(t,\mathbf{r})$ (le potentiel des vitesses) :

$$\mathbf{v}=\nabla\psi. \tag{1.6}$$

1.1.2 Approximation acoustique

Supposons maintenant que l'on ait trouvé une solution exacte (ψ_0,ρ_0,p_0) au système formé par les équations du mouvement (1.1a)–(1.1b) et l'équation d'état (1.2). On se propose alors d'établir le comportement de petites fluctuations linéaires venant se superposer à cette dernière. Pour ce faire, on cherche la solution générale (ψ,ρ,p) du problème sous la forme [82]

$$\begin{pmatrix}\psi(t,\mathbf{r})\\ \rho(t,\mathbf{r})\\ p(t,\mathbf{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_0(t,\mathbf{r})\\ \rho_0(t,\mathbf{r})\\ p_0(t,\mathbf{r})\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\psi_1(t,\mathbf{r})\\ \rho_1(t,\mathbf{r})\\ p_1(t,\mathbf{r})\end{pmatrix}\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{1.7}$$

où ε est un petit paramètre sans dimension qui ne dépend pas du temps et des coordonnées.

La linéarisation de l'équation de continuité (1.1a) et de l'équation d'état (1.2) par rapport à ε est aisée. On trouve respectivement

$$\partial_t\rho_1+\nabla\cdot(\rho_1\nabla\psi_0+\rho_0\nabla\psi_1)=0 \tag{1.8a}$$

$$\text{et}\quad p_1=c^2\rho_1, \tag{1.8b}$$

où $c^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0)>0$ est le carré de la vitesse locale des perturbations linéaires autour du champ de fond (ψ_0,ρ_0,p_0) (la vitesse locale du son en somme). La linéarisation de l'équation d'Euler (1.1b) demande un peu plus d'astuces. En utilisant $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2$ (puisque $\nabla\wedge\mathbf{v}=0$) et $\nabla p_0=\nabla p(\rho_0)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0)\nabla\rho_0=c^2\,\nabla\rho_0$, il vient

$$\nabla(\partial_t\psi_1+\nabla\psi_0\cdot\nabla\psi_1)=-\nabla\left(\frac{p_1}{\rho_0}\right), \tag{1.9}$$

2. Remarque foncièrement inutile pour un physicien... Si l'existence d'une fonction scalaire ψ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathbf{v}=\nabla\psi$ entraîne immédiatement que $\nabla\wedge\mathbf{v}=0$, la réciproque est en contrepartie plus subtile. Si $\nabla\wedge\mathbf{v}=0$, il n'existe un potentiel ψ tel que $\mathbf{v}=\nabla\psi$ que lorsque l'espace de définition des champs est connexe par arcs et simplement connexe. Par chance, $\mathbb{R}^3$ vérifie ces propriétés, donc tout va bien...

qui, après intégration sur le volume $\Omega(\mathbf{r}) = \Omega(x,y,z) =]-\infty,x] \times]-\infty,y] \times]-\infty,z]$, devient

$$\rho_0 \left(\partial_t \psi_1 + \nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_1\right) = -p_1. \tag{1.10}$$

Les équations différentielles (1.8a), (1.10) et (1.8b) peuvent être assemblées en une seule équation aux dérivées partielles du second ordre, et ceci, sans aucune perte d'information. On vérifie donc facilement que

$$\partial_t \left[\frac{\rho_0}{c^2}\left(\partial_t \psi_1 + \nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_1\right)\right] = \nabla \cdot \left[\rho_0 \nabla\psi_1 - \frac{\rho_0}{c^2}\nabla\psi_0 \left(\partial_t \psi_1 + \nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_1\right)\right], \tag{1.11}$$

qui est effectivement une équation différentielle du deuxième ordre [vérifiée par $\psi_1(t,\mathbf{r})$] dont les coefficients (variables dans le temps et l'espace) dépendent uniquement du champ de fond (ψ_0, ρ_0, p_0) autour duquel nous avons linéarisé les équations du mouvement et l'équation d'état [*cf.* équation (1.7)]. La résolution de (1.11) suffit à la détermination de $\rho_1(t,\mathbf{r})$ et $p_1(t,\mathbf{r})$ *via* les équations d'Euler et d'état linéarisées (1.9) et (1.8b), respectivement.

Quand le fluide ne s'écoule pas (c'est-à-dire quand $\nabla\psi_0 = 0$) et lorsque la densité volumique ρ_0 est stationnaire et homogène (ce qui entraîne que la vitesse du son est à tout instant et partout la même), on retrouve que les perturbations acoustiques du système se propagent à la vitesse c selon l'équation de d'Alembert [82]

$$\left(-\frac{1}{c^2}\,\partial_{tt} + \nabla^2\right)\psi_1 = 0. \tag{1.12}$$

1.1.3 Vers une formulation covariante

Le but de cette sous-section est de montrer qu'une onde sonore dans un fluide en mouvement — dont le comportement dans le temps et l'espace est gouverné par l'équation (1.11) — se propage à l'instar d'un champ scalaire non-massif dans un espace-temps courbe. Dans tout ce qui suit, nous utiliserons (sans les rappeler) les conventions d'écriture propres à la théorie de la relativité générale.

Introduisons le quadrivecteur position $x^\mu = (t,\mathbf{r})$ $(\mu = 0,1,2,3)$ et le tenseur symétrique 4×4 $g^{\mu,\nu}(t,\mathbf{r})$ défini par (voir [127] et les références qui y sont citées)

$$g^{\mu,\nu} = \frac{1}{c\,\rho_0}\begin{pmatrix} -1 & -V^j \\ -V^i & c^2\,\delta^{i,j} - V^i\,V^j \end{pmatrix} \tag{1.13a}$$

$$= \frac{1}{c\,\rho_0}\begin{pmatrix} -1 & -V^1 & -V^2 & -V^3 \\ -V^1 & c^2-(V^1)^2 & -V^1\,V^2 & -V^1\,V^3 \\ -V^2 & -V^2\,V^1 & c^2-(V^2)^2 & -V^2\,V^3 \\ -V^3 & -V^3\,V^1 & -V^3\,V^2 & c^2-(V^3)^2 \end{pmatrix}, \tag{1.13b}$$

où $\mathbf{V}$ est une notation pour $\nabla\psi_0$: $V^i = \partial^i\psi_0$ $(i = 1,2,3)$. L'équation du mouvement (1.11) se réécrit alors sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu,\nu}\,\partial_\nu\psi_1) = 0, \tag{1.14}$$

où $g = (\det g^{\mu,\nu})^{-1}$. Montrons-le. On commence pour cela par calculer le déterminant g. En effectuant des manipulations algébriques standards sur les lignes et les colonnes de $\det g^{\mu,\nu}$, on aboutit sans difficulté à $\det g^{\mu,\nu} = -c^2/\rho_0^4$, soit

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c^2}, \tag{1.15}$$

d'où $\sqrt{-g} = \rho_0^2/c$. Ceci étant, la suite est aisée. En effet, d'après (1.11), on a successivement

$$\begin{aligned}
&\partial_0\left[\frac{\rho_0^2}{c}\left(-\frac{1}{c\,\rho_0}\right)\partial_0\psi_1\right] + \partial_0\left[\frac{\rho_0^2}{c}\left(-\frac{V^j}{c\,\rho_0}\right)\partial_j\psi_1\right] + \partial_i\left[\frac{\rho_0^2}{c}\left(-\frac{V^i}{c\,\rho_0}\right)\partial_0\psi_1\right] \\
&\qquad\qquad + \partial_i\left[\frac{\rho_0^2}{c}\,\frac{c^2\,\delta^{i,j} - V^i\,V^j}{c\,\rho_0}\,\partial_j\psi_1\right] = 0, && (1.16a)\\
&\partial_0(\sqrt{-g}\,g^{0,0}\,\partial_0\psi_1) + \partial_0(\sqrt{-g}\,g^{0,j}\,\partial_j\psi_1) + \partial_i(\sqrt{-g}\,g^{i,0}\,\partial_0\psi_1) \\
&\qquad\qquad + \partial_i(\sqrt{-g}\,g^{i,j}\,\partial_j\psi_1) = 0, && (1.16b)\\
&\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu,\nu}\,\partial_\nu\psi_1) = 0, && (1.16c)
\end{aligned}$$

et par conséquent, en multipliant la dernière égalité par $1/\sqrt{-g}$, on obtient

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\psi_1 = 0, \quad \text{où} \quad \nabla_\mu\nabla^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu,\nu}\,\partial_\nu\,\cdot) \tag{1.17}$$

est l'opérateur de d'Alembert [129] défini par $g^{\mu,\nu}$, c'est-à-dire l'inverse du tenseur métrique 4×4 $g_{\mu,\nu}(t,\mathbf{r})$, construit de sorte que $g_{\mu,\rho}\,g^{\rho,\nu} = \delta_\mu{}^\nu$ [3] :

$$g_{\mu,\nu} = \frac{\rho_0}{c}\begin{pmatrix}\mathbf{V}^2 - c^2 & -V_j\\ -V_i & \delta_{i,j}\end{pmatrix} = \frac{\rho_0}{c}\begin{pmatrix}\mathbf{V}^2 - c^2 & -V_1 & -V_2 & -V_3\\ -V_1 & 1 & 0 & 0\\ -V_2 & 0 & 1 & 0\\ -V_3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Il s'ensuit que l'élément de ligne correspondant s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= g_{\mu,\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu && (1.20a)\\
&= g_{0,0}\,(\mathrm{d}x^0)^2 + g_{0,j}\,\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^j + g_{i,0}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^0 + g_{i,j}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \\
&= \frac{\rho_0}{c}\left[(V^i\,\delta_{i,j}\,V^j - c^2)\,\mathrm{d}t^2 - V^i\,\delta_{i,j}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x^j - V^j\,\delta_{i,j}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}t + \delta_{i,j}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\right] \\
\mathrm{d}s^2 &= \frac{\rho_0}{c}\left[-c^2\,\mathrm{d}t^2 + (V^i\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x^i)\,\delta_{i,j}\,(V^j\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x^j)\right]. && (1.20b)
\end{aligned}$$

3. Chercher les seize coefficients $g_{\mu,\nu}$ (les dix en réalité puisque $g_{\mu,\nu}$ est symétrique) tels que

$$\begin{pmatrix} g_{0,0} & g_{0,j} = g_{i,0}^\mathsf{T}\\ g_{i,0} & g_{i,j}\end{pmatrix} \times \frac{1}{c\,\rho_0}\begin{pmatrix}-1 & -V^j\\ -V^i & c^2\,\delta^{i,j} - V^i\,V^j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0^\mathsf{T}\\ 0 & \delta_i{}^j\end{pmatrix} \tag{1.18}$$

n'est pas difficile, mais long... Une façon de se convaincre que $g^{\mu,\nu}$ est bien l'inverse du tenseur $g_{\mu,\nu}$ est de contracter les identités (1.19) et (1.13a)–(1.13b), prises comme définitions, et de vérifier que cette opération conduit à l'identité.

On vient ainsi d'établir le théorème suivant. Si un fluide classique (c'est-à-dire non-relativiste) est non-visqueux et barotrope (ce qui entraîne, on le rappelle, l'irrotationnalité de l'écoulement pour peu que la vorticité s'annule au moins une fois dans le temps, *cf.* sous-section 1.1.1), alors le potentiel des vitesses $\psi_1(t,\mathbf{r})$ qui décrit les perturbations acoustiques de l'écoulement obéit à une équation de propagation identique à l'équation de d'Alembert du mouvement d'un champ scalaire non-massif se déplaçant dans une géométrie lorentzienne (3+1)-dimensionnelle [129] dont la métrique $g_{\mu,\nu}(t,\mathbf{r})$ — appelée métrique acoustique, étant données les circonstances — est définie par les équations (1.19). Cette dernière dépend algébriquement de la vitesse $\mathbf{V}(t,\mathbf{r}) = \nabla\psi_0(t,\mathbf{r})$ de l'écoulement, de la densité moyenne $\rho_0(t,\mathbf{r})$ du fluide et de la célérité locale $c(t,\mathbf{r})$ des ondes sonores. En général, quand le fluide est inhomogène et qu'il s'écoule, le tenseur de Riemann [4] (ou de courbure) acoustique n'est pas nul et l'espace-temps dont la géométrie est spécifiée par la métrique (1.19) est courbe. Enfin, il est intéressant de constater que bien que la description (1.1a)–(1.1b) de la dynamique du fluide soit newtonienne, s'incrivant donc dans un cadre décorrélant l'espace (plat) et le temps, le traitement des fluctuations acoustiques — qui évoluent dans un espace-temps (en général courbe) bien particulier — réconcilie les notions d'espace et de temps et montre que l'utilité des géométries lorentziennes dépasse les frontières de la gravité d'Einstein.

Avant de poursuivre, faisons encore quelques courtes remarques.

1. Il est important d'insister sur le fait qu'il existe deux métriques bien distinctes dans notre problème.
   - La métrique de l'espace-temps physique est simplement la métrique plate de Minkowski
   $$\eta_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} -c_0^2 & 0^\mathsf{T} \\ 0 & \delta_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.24}$$
   où c_0 désigne la vitesse de la lumière dans le vide. Les particules fluides vivent dans cette géométrie (bien que l'écoulement soit totalement non-relativiste : $|\mathbf{V}| \ll c_0$, et que la métrique euclidienne $\delta_{i,j}$ soit suffisante pour déterminer les longueurs).

4. Pour se rafraîchir les idées (relire l'ouvrage [78]), le tenseur de Riemann $R_{\mu,\nu,\rho,\sigma}$ d'une variété lorentzienne s'exprime en termes des symboles de Christoffel comme
$$R^\mu{}_{\nu,\rho,\sigma} = \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu,\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu,\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\sigma,\tau}\,\Gamma^\tau{}_{\nu,\rho} - \Gamma^\mu{}_{\rho,\tau}\,\Gamma^\tau{}_{\nu,\sigma}, \tag{1.21}$$
les connexions de Christoffel dérivant de la métrique :
$$\Gamma^\mu{}_{\nu,\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\mu,\sigma}\,(\partial_\nu g_{\sigma,\rho} + \partial_\rho g_{\sigma,\nu} - \partial_\sigma g_{\nu,\rho}). \tag{1.22}$$
À partir du tenseur de courbure de Riemann (1.21), on peut construire le tenseur de courbure de Ricci $R_{\mu,\nu}$ puis la courbure scalaire de Ricci $\mathscr{R}$ par deux réductions successives :
$$R_{\mu,\nu} = R^\rho{}_{\mu,\nu,\rho} \quad \text{puis} \quad \mathscr{R} = R_\mu{}^\mu. \tag{1.23}$$

– Les perturbations sonores de l'écoulement ne se couplent qu'à la métrique acoustique (1.19) et restent insensibles à la métrique $\eta_{\mu,\nu}$.

2. En relativité générale, les équations différentielles (non-linéaires) d'Einstein [5] décrivent comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Leur résolution est une étape incontournable pour qui souhaite exprimer la métrique de l'espace-temps comme une fonction de la distribution de matière. Dans notre cas, la dépendance de la métrique acoustique $g_{\mu,\nu}(t,\mathbf{r})$ en la distribution de masse $\rho_0(t,\mathbf{r})$ est tout simplement spécifiée par sa définition [*cf.* équation (1.19)].
3. Comme on le voit en (1.20b), la métrique $g_{\mu,\nu}$ est de signature $(-1,1,1,1)$, ce qui implique que son déterminant est négatif, soit $g = (\det g^{\mu,\nu})^{-1} = \det g_{\mu,\nu} < 0$, comme on le vérifie en se référant à l'équation (1.15).
4. Le temps propre acoustique τ, c'est-à-dire le temps mesuré dans le référentiel où l'onde sonore décrite par le champ scalaire $\psi_1(t,\mathbf{r})$ est immobile, est tel que $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2$, par définition même [129]. Il s'ensuit qu'en extrayant la racine positive, $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t = \sqrt{\rho_0[c^2-(\mathbf{V}-\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t)^2]/c} = \sqrt{c\,\rho_0}$, et donc que τ est une primitive de $\sqrt{c\,\rho_0}$,
$$\tau = \int \mathrm{d}t\,\sqrt{c\,\rho_0}, \tag{1.26}$$
et que la quadrivitesse s'écrit
$$V^\mu = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{(1,\mathbf{V})}{\sqrt{c\,\rho_0}}. \tag{1.27}$$

1.1.4 Élément de ligne de Painlevé–Gullstrand

Dans cette sous-section, donnons-nous l'espace-temps de Schwarzschild dont la métrique dans les coordonnées temporelle t et spatiales « sphériques » r, θ et φ peut s'écrire [78]
$$\mathrm{d}s_\mathrm{S}^2 = -c_0^2\left(1-\frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-r_\mathrm{g}/r} + r^2\,(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1.28}$$
Cette solution des équations d'Einstein détermine complètement le champ de gravitation dans le vide créé par n'importe quelle distribution de masse présentant une symétrie centrale. $r_\mathrm{g} = 2\,\mathcal{G}_\mathrm{N}M/c_0^2$ désigne le rayon gravitationnel [6] (ou de Schwarzschild) du corps

5. Si $g_{\mu,\nu}(t,\mathbf{r})$ et $T_{\mu,\nu}(t,\mathbf{r})$ désignent respectivement la métrique et le tenseur énergie-impulsion de la matière, alors les équations d'Einstein (ou équations du champ gravitationnel) s'écrivent (dans un cadre astrophysique) [78]
$$R_{\mu,\nu} - \frac{\mathscr{R}}{2}\,g_{\mu,\nu} = \frac{8\pi\,\mathcal{G}_\mathrm{N}}{c_0^4}\,T_{\mu,\nu} + \Lambda\,g_{\mu,\nu}, \tag{1.25}$$
où $R_{\mu,\nu}$ est le tenseur de Ricci, $\mathscr{R}$ la courbure scalaire [*cf.* équations (1.23)], $\mathcal{G}_\mathrm{N}$ la constante gravitationnelle de Newton et Λ la constante cosmologique.

6. La matière et les rayons de lumière ne peuvent traverser la sphère d'équation $r = r_\mathrm{g}$ (dite de Schwarzschild, mais plus communément appelée horizon des évènements) que dans un seul sens vers l'intérieur sans jamais pouvoir s'en échapper. Lorsque le rayon physique du corps devient inférieur ou égal au rayon gravitationnel, l'objet s'effondre sur lui-même et engendre un trou noir.

(de masse M) qui engendre la géométrie (1.28).

En raison de l'arbitraire dans le choix du référentiel en théorie de la relativité générale, on peut soumettre les coordonnées d'espace-temps à n'importe quelle transformation qui n'affecte pas la symétrie centrale de $\mathrm{d}s_{\mathrm{S}}^2$. On introduit la coordonnée $u = u(t, r)$ définie par

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}t + \frac{1}{c_0} \frac{\sqrt{r_{\mathrm{g}}/r}}{1 - r_{\mathrm{g}}/r} \mathrm{d}r. \tag{1.29}$$

On montre alors facilement que l'intervalle d'espace-temps (1.28) se transforme en [102, 53, 85, 59, 73]

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{S}}^2 = -c_0^2 \left(1 - \frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right) \mathrm{d}u^2 + 2\, c_0 \sqrt{\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}r + \mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2\right). \tag{1.30}$$

Dans le système de coordonnées $\{u, r, \theta, \varphi\}$, dit également de Painlevé–Gullstrand, on constate que les tranches spatiales à $u = \text{cste}$ sont plates ; en effet, $\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2\right)$ constitue la métrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dans les coordonnées sphéroïdales usuelles.

1.1.5 Écoulement conforme de Schwarzschild

Revenons à notre modèle hydrodynamique de fluide non-relativiste, parfait et barotrope dans l'approximation acoustique, et imaginons que l'écoulement soit stationnaire et à symétrie centrale. Le champ des vitesses $\mathbf{V}(t, \mathbf{r}) = \nabla\psi_0(t, \mathbf{r})$ ne doit alors dépendre que de la coordonnée radiale $r = |\mathbf{r}|$. On suppose en outre que ce dernier ne possède pas de composante angulaire. $\mathbf{V}(r)$ ne peut donc qu'être colinéaire au vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$. Étant données ces considérations, on effectue l'ansatz suivant [127] :

$$\mathbf{V}(r) = -c \sqrt{\frac{r_*}{r}}\, \hat{\mathbf{r}}. \tag{1.31}$$

On considère ici que la vitesse du son c est homogène de sorte que toute la dépendance de $\mathbf{V}$ en r est contenue sous le radical. Le vecteur vitesse $\mathbf{V}(r)$ ainsi défini est singulier en $r = 0$. De plus, comme $c > 0$, il pointe vers l'origine des coordonnées. Dans l'équation (1.31), r_* est le rayon de la sphère en dehors de laquelle l'écoulement est subsonique et à l'intérieur de laquelle il est supersonique :

$$|\mathbf{V}(r)| < c \quad \text{lorsque} \quad r > r_* \tag{1.32a}$$

$$\text{et} \quad |\mathbf{V}(r)| > c \quad \text{lorsque} \quad r < r_*. \tag{1.32b}$$

Cherchons maintenant la masse volumique moyenne $\rho_0(r)$ qui, étant donnée la définition (1.31), vérifie l'équation de conservation de la masse stationnaire $\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{V}) = \partial_r (r^2 \rho_0 \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{r}})/r^2 = 0$. L'intégration de cette équation est immédiate ; on trouve

$$\rho_0(r) = \varrho \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2}, \tag{1.33}$$

où ϱ est une constante positive homogène à une masse volumique. On en déduit que le champ de pression $p_0(r)$ correspondant dépend linéairement de la densité puisque $\mathrm{d}p_0(r) = c^2\,\mathrm{d}\rho_0(r)$ et que c est une constante :

$$p_0(r) = c^2\rho_0(r) + p_\infty = c^2\varrho\left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2} + p_\infty, \tag{1.34}$$

où p_∞ est la pression loin à l'extérieur de la boule de rayon r_*. L'élément de ligne acoustique (1.20a)–(1.20b) correspondant s'écrit alors comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \frac{\rho_0}{c}\left[-c^2\,\mathrm{d}t^2 + (\mathbf{V}\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}\mathbf{r})^2\right] && \text{(1.35a)}\\
&= f(r)\left[-c^2\,\mathrm{d}t^2 + c^2\,\frac{r_*}{r}\,\mathrm{d}t^2 + 2\,c\sqrt{\frac{r_*}{r}}\,\hat{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}^2\right]\\
\mathrm{d}s^2 &= f(r)\left[-c^2\left(1-\frac{r_*}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + 2\,c\sqrt{\frac{r_*}{r}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r + \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right], && \text{(1.35b)}
\end{aligned}$$

où l'on a posé $f(r) = \rho_0(r)/c = \varrho\,(r_*/r)^{3/2}/c$ et où l'on a écrit que $\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)$ étant donnée la symétrie centrale du problème.

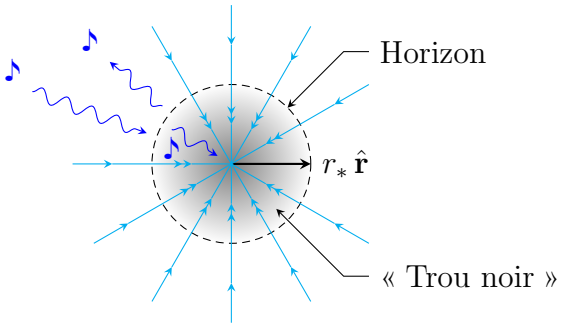


Figure 1.2 — Dans un fluide dont la vitesse est donnée par l'équation (1.31), les ondes sonores émises à l'intérieur de la sphère de rayon $r = r_*$ ne peuvent pas se propager à contre-courant, en conséquence de quoi la boule de rayon $r = r_*$ définit l'intérieur d'un trou noir acoustique.

À ce stade du jeu, force est de constater que la métrique acoustique (1.35a)–(1.35b) ressemble étonnamment — à un facteur conforme $f(r)$ près[7] — à la métrique de Schwarzschild (1.30) écrite dans le système de coordonnées de Painlevé–Gullstrand, t jouant le rôle de la coordonnée u définie par (1.29), c celui de c_0, et surtout r_*, celui du rayon gravitationnel r_g. À l'intérieur de la sphère de rayon r_*, là où l'écoulement est supersonique [*cf.* équations (1.31) et (1.32b)], les phonons (qui se propagent dans le référentiel entraîné à la vitesse du son $\pm\,c\,\hat{\mathbf{r}}$) ne peuvent remonter les lignes de courant car la composante radiale de leur vitesse de groupe $\mathbf{V}(r) \pm c\,\hat{\mathbf{r}}$ (dans le référentiel du laboratoire) y est négative ; les ondes sonores émises dans la boule de rayon r_* restent piégées dans cette région de même que les photons (de vitesse dans le vide c_0) ne peuvent s'échapper d'une boule de rayon r_g : la surface d'équation $r = r_*$ définit l'horizon en deçà duquel se trouve le « trou noir acoustique » (la figure 1.2 donne une vision schématique de la situation). Un capteur d'ondes sonores placé à l'extérieur de la sphère de rayon r_*, c'est-à-dire dans la région où l'écoulement est subsonique [*cf.* équations (1.31) et

7. Les complications qu'entraîne l'existence du facteur conforme $f(r)$ [127] peuvent être ignorées si l'on se concentre sur une région voisine de l'horizon ($r \simeq r_*$), là où ledit facteur est en bonne approximation constant [$f(r) = \varrho/c + \mathcal{O}(|1 - r/r_*|)$ lorsque $r \to r_*$].

(1.32a)], n'aura jamais l'occasion de détecter un phonon produit par un émetteur acoustique situé dans la région supersonique, en conséquence de quoi le capteur interprètera que l'émetteur, vu de l'extérieur, est muet. C'est la raison pour laquelle on parle parfois de « trou muet » au lieu de trou noir acoustique.

1.1.6 Gravité de surface et rayonnement de Hawking

La théorie quantique des champs en espace-temps courbe explique qu'un infime rayonnement de corps noir d'origine quantique émane de la surface des trous noirs et que ces derniers ne sont donc pas complètement sombres, contrairement à ce que prédit la théorie de la relativité générale, qui est une théorie intrinsèquement classique. L'existence de ce rayonnement a été théoriquement démontrée par Hawking dans les années 70 [56, 57] et est aujourd'hui considérée comme une découverte majeure.

Unruh suggéra en 1981 [125] que l'existence d'un horizon « des évènements » acoustique (tel que celui exhibé en sous-section 1.1.5) doit nécessairement s'accompagner de l'émission d'un rayonnement de Hawking sous forme d'un bain thermique de phonons dont la température est donnée par

$$k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{H}} = \frac{\hbar}{2\pi c}\, g_{\mathrm{h}}, \tag{1.36}$$

où k_{B} est la constante de Boltzmann, $\hbar = h/(2\pi)$ la constante de Planck réduite, c la vitesse locale des ondes sonores dans le fluide et g_{h} la gravité de surface (homogène à une accélération) définie par (*cf.* [127] et les références associées)

$$g_{\mathrm{h}} = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial(c^2 - V_\perp^2)}{\partial n}\right|_{\text{horizon}} = c\left|\frac{\partial(c - V_\perp)}{\partial n}\right|_{\text{horizon}}, \tag{1.37}$$

où $V_\perp\,\hat{\mathbf{n}}$ représente la composante de la vitesse $\mathbf{V}$ du fluide perpendiculaire à l'horizon acoustique ($V_\perp|_{\text{horizon}} = c$) et où $\partial/\partial n$ est la dérivée positionnelle le long de la direction portée par le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{n}}$. Dans le cas de la configuration schématique étudiée en sous-section 1.1.5, où l'horizon est localisé en $r = r_*$, on a $V_\perp(r) = c\sqrt{r_*/r}$, $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}$, $\partial/\partial n = \partial/\partial r$ [*cf.* équation (1.31)] et $c = \text{cste}$, ce qui conduit à

$$g_{\mathrm{h}} = \frac{c^2}{2\,r_*}, \quad \text{puis} \quad k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{H}} = \frac{\hbar\, c}{4\pi\, r_*}, \tag{1.38}$$

qui est le pendant acoustique de la formule donnant la température de Hawking d'un trou noir de Schwarzschild de masse M dont la géométrie est spécifiée par la métrique (1.28) [ou (1.30) dans le système de coordonnées de Painlevé–Gullstrand] (voir [129], par exemple) :

$$k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{H}}|_{\text{Schwarzschild}} = \frac{\hbar\, c_0^3}{8\pi\, \mathcal{G}_{\mathrm{N}} M} = \frac{\hbar\, c_0}{4\pi\, r_{\mathrm{g}}}. \tag{1.39}$$

Dans l'équation (1.39), c_0 est la vitesse des photons dans le vide et $r_{\mathrm{g}} = 2\,\mathcal{G}_{\mathrm{N}} M/c_0^2$ le rayon de Schwarzschild du corps de masse M.

1.2 Rayonnement de Hawking dans les condensats de Bose–Einstein unidimensionnels

1.2.1 Introduction

Reprenant les résultats établis en sous-section 1.1.6, un calcul d'ordre de grandeur [8] donne

$$T_{\mathrm{H}} \overset{(1.38)}{\simeq} (1{,}8 \times 10^{-7}\,\mathrm{K}) \times \frac{c}{300\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \times \frac{10^{-3}\,\mathrm{m}}{r_*} \tag{1.40a}$$

$$\text{et} \quad T_{\mathrm{H}}|_{\mathrm{Schwarzschild}} \overset{(1.39)}{\simeq} (6{,}1 \times 10^{-8}\,\mathrm{K}) \times \frac{M_\odot}{M}, \tag{1.40b}$$

où $M_\odot$ désigne la masse du Soleil. Les estimations (1.40a) et (1.40b) montrent que le rayonnement de Hawking acoustique, tout comme le rayonnement de Hawking des trous noirs gravitationnels, est un phénomène négligeable. Si l'on tient compte des effets dus aux fluctuations thermiques dans le fluide, de la génération éventuelle d'instabilités hydrodynamiques dans l'écoulement, etc., la détection du rayonnement de Hawking acoustique semble être *a priori* difficile, de même qu'étant donnée l'existence du fond diffus cosmologique — dont la température est de l'ordre de 2,7 K —, il semble impossible que nous arrivions un jour à mesurer le rayonnement de Hawking des trous noirs astrophysiques.

Néanmoins, au cours de la dernière décennie, on réalisa que les condensats de Bose–Einstein jouissent de propriétés qui permettraient la réalisation expérimentale de configurations de trous noirs acoustiques dans lesquelles une signature claire du rayonnement de Hawking émergerait. L'idée de mettre en œuvre l'analogie acoustique découverte par Unruh par la mise en mouvement d'un fluide de Bose–Einstein a été pour la première fois proposée par Garay *et al.* (consulter la référence [48], qui s'est suivie d'autres travaux sur le sujet [15, 16, 50, 17, 124, 138, 74]). Nous sommes maintenant arrivés à un stade où des réalisations expérimentales de trous muets sont possibles [75], en conséquence de quoi il est important de proposer des configurations réalistes de trous noirs acoustiques et des outils pour mesurer le rayonnement de Hawking dans les condensats de Bose–Einstein. D'autres pistes expérimentales sont empruntées pour observer l'analogue du rayonnement de Hawking. Elles sont basées sur l'utilisation de dispositifs d'optique non-linéaire [108, 44, 18, 40] ou sur l'étude de la propagation d'ondes à la surface de fluides en mouvement [121, 130]. Notons néanmoins que cette dernière option ne permet que de sonder un régime d'émission stimulée, c'est-à-dire un régime dans lequel l'analogue du rayonnement de Hawking résulte d'une perturbation extérieure au système.

Les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la densité ont été proposées dans les références [12] et [30] comme un outil permettant d'identifier le rayonnement de Hawking spontané et d'extraire le signal correspondant du bruit de fond thermique. L'image physique cachée derrière cette idée est la même que celle initialement proposée

8. On utilise $k_{\mathrm{B}} = 1{,}3(8) \times 10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, $\hbar = 1{,}0(5) \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$, $c_0 = 2{,}9(9) \times 10^{8}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $\mathcal{G}_{\mathrm{N}} = 6{,}6(7) \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et $M_\odot = 1{,}9(8) \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

par Hawking [56, 57]. Les fluctuations quantiques peuvent être vues comme l'émission spontanée et la réabsorption de particules virtuelles venant par paires. Ces paires sont brisées au voisinage de l'horizon des évènements (la figure 1.3 donne une vision simplifiée des fluctuations quantiques autour d'un trou noir gravitationnel) et les particules associées sont séparées par l'écoulement (qui est subsonique à l'extérieur du trou noir acoustique et supersonique à l'intérieur), ce qui donne naissance à des courants corrélés émis de part et d'autre de l'horizon (voir figure 1.4). Comme il n'est pas couplé à la géométrie courbe dans laquelle se propagent les phonons (relire la première des remarques qui concluent la sous-section 1.1.3), un expérimentateur est capable d'extraire de l'information de l'intérieur d'un trou noir acoustique. Il est ainsi possible de mettre en évidence le rayonnement de Hawking en mesurant le signal de corrélation entre les courants de particules émis à l'intérieur et à l'extérieur du trou noir. Ce signal de corrélation à deux corps s'avère être robuste vis-à-vis du bruit de fond thermique [117] et semble mettre en évidence l'effet Hawking plus efficacement que si l'on mesurait directement le flux de phonons de Hawking provenant de l'horizon (voir conclusion de la sous-section 1.2.4).

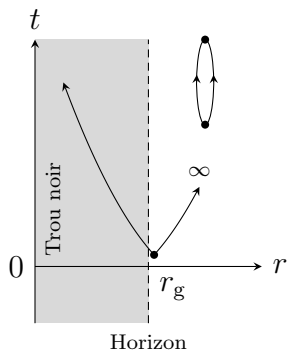


Figure 1.3 — Au voisinage de l'horizon d'un trou noir gravitationnel, il arrive que des paires de particules virtuelles ne se recombinent pas car l'une des deux particules est capturée par le trou noir. Celle qui s'en échappe emmène de l'énergie avec elle et le trou noir rayonne.

Dans l'écoulement sub/supersonique d'un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel (la figure 1.4 en donne une représentation schématique), il est possible d'obtenir une description détaillée des rayonnements de Hawking à un et deux corps en traitant les fluctuations quantiques du fluide de part et d'autre de l'horizon dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires. L'idée a été soulevée par Leonhardt *et al.* [87, 88] et fut pleinement exploitée dans les références [92], [93] et [117]. Les auteurs de l'article [117] ont étudié une configuration schématique de trou noir acoustique introduite pour la première fois dans les références [12] et [30]. Dans tout ce qui suit, nous la dénommerons « configuration de profil plat ». Elle consiste en l'écoulement d'un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel dans lequel la constante d'interaction à deux corps est spatialement modulée afin de modifier localement la vitesse du son dans le système — permettant la formation d'une région où l'écoulement est (en amont) subsonique et d'une autre où l'écoulement est (en aval) supersonique — tandis que la vitesse et la densité du fluide en mouvement restent uniformes. Ce type d'écoulement a l'avantage de permettre un traitement analytique simple des fluctuations quantiques mais est uniquement possible en présence d'un potentiel extérieur conçu de sorte que le potentiel chimique reste partout constant (*cf.* sous-section 1.2.2). Cela rend la réalisation expérimentale d'un tel système difficile.

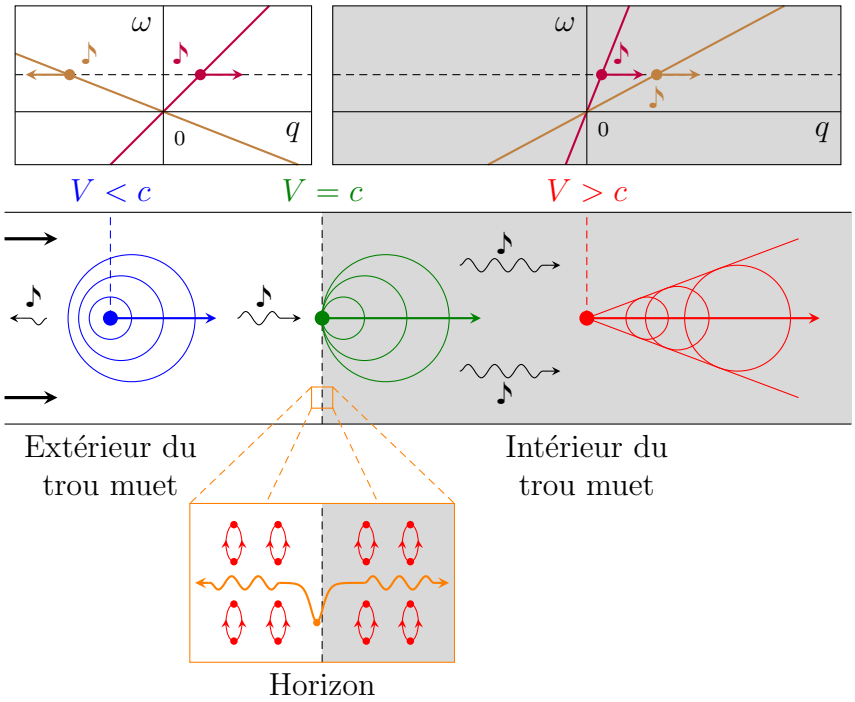


Figure 1.4 — Représentation schématique d'un trou noir acoustique (ou trou muet) unidimensionnel. Un condensat de Bose–Einstein s'écoule de la gauche vers la droite à la vitesse V. L'horizon acoustique ($V = c$) est matérialisé par la ligne verticale en pointillés noirs. À gauche (respectivement à droite) de l'horizon, l'écoulement du condensat est subsonique : $V < c$ (respectivement supersonique : $V > c$). La région grisée correspond à l'intérieur du trou noir acoustique : les ondes sonores y ont une vitesse de groupe $V \pm c$ positive et ne peuvent donc se propager à contre-courant, comme le montre le graphique donnant la relation de dispersion $\omega(q) = (V \pm c)\, q$ des phonons à l'intérieur du trou muet. Les fluctuations quantiques dans le fluide consistent en la génération spontanée de paires de particules virtuelles. Au voisinage de l'horizon, ces paires sont brisées et des courants corrélés sont émis de part et d'autre de l'horizon : c'est l'effet Hawking.

Dans ce chapitre, qui est une synthèse de l'article inclu en sous-section 1.2.8, nous étudierons des configurations de trous muets expérimentalement réalistes (voir sous-section 1.2.2) et dans le cadre desquelles un traitement analytique des fluctuations quantiques et de leurs corrélations est encore possible. Dans les limites de la théorie de Bogoliubov des fluctuations (détaillée en sous-section 1.2.3), nous calculerons le courant d'énergie associé à l'émission d'excitations élémentaires en provenance de l'horizon (*cf.* sous-section 1.2.4) et nous montrerons dans les sous-sections 1.2.5 et 1.2.6 que les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la densité mettent clairement en évidence l'existence du rayonnement de Hawking dans ces configurations d'intérêt expérimental. Nous discuterons également du travail récent de Franchini et Kravtsov [45] qui ont proposé une explication intéressante des particularités que présente la matrice densité à deux corps connexe $g^{(2)}$ en présence d'un horizon acoustique. Tirant parti des similarités que partage le corréla-

teur $g^{(2)}$ avec la fonction de corrélation à deux niveaux dans des ensembles de matrices aléatoires bien particuliers [28], on peut prétendre que les aspects non-locaux de $g^{(2)}$, qui sont signatures du rayonnement de Hawking, doivent être intimement associés à une modification de son comportement à courte portée. Notre étude analytique des fonctions d'onde des excitations montre que cette hypothèse est sans ambiguïté confirmée par la vérification d'une règle de somme de normalisation dont nous donnons les détails du calcul en sous-section 1.2.5.

1.2.2 Horizons acoustiques dans un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel

On considère un gaz de Bose ultra-froid confiné dans un potentiel harmonique transverse $V_\perp(y,z) = m\,\omega_\perp^2(y^2+z^2)/2$ de pulsation $\omega_\perp$ et en présence d'un potentiel extérieur longitudinal et indépendant du temps $U(x)$. Si les dimensions radiales du nuage bosonique sont telles que le temps d'ajustement du profil de densité transverse à son allure d'équilibre est petit devant le temps que met une impulsion dans le gaz pour passer d'un point à un autre dans la direction longitudinale, la dynamique des bosons est alors unidimensionnelle (le long de l'axe des x) [60, 83] ; si en plus le gaz est suffisamment dilué de sorte que les bosons n'interagissent entre eux que faiblement, le hamiltonien grand-canonique du système (dans le langage de la seconde quantification) s'écrit [79, 113]

$$\hat{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx} + U(x) + \frac{g\,\hat{n}}{2} - \mu \right] \hat{\Psi}. \tag{1.41}$$

Dans l'équation (1.41), $\hat{\Psi}(x,t) = \exp(\mathrm{i}\,\hat{\mathcal{H}}\,t/\hbar)\,\hat{\Psi}(x)\exp(-\mathrm{i}\,\hat{\mathcal{H}}\,t/\hbar)$ est l'opérateur de champ (dans la représentation de Heisenberg) qui décrit le nuage unidimensionnel ; en qualité de champ quantique bosonique, il vérifie les relations de commutation à temps égaux

$$[\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Psi}^\dagger(x',t)] = \delta(x-x') \tag{1.42a}$$

$$\text{et} \quad [\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Psi}(x',t)] = 0 = [\hat{\Psi}^\dagger(x,t), \hat{\Psi}^\dagger(x',t)]. \tag{1.42b}$$

On note également $\hat{n}(x,t) = \hat{\Psi}^\dagger(x,t)\,\hat{\Psi}(x,t)$ la densité longitudinale du gaz, m la masse des bosons, μ le potentiel chimique et $g = 2\,a_s\,\hbar\,\omega_\perp$ [100] la constante de couplage non-linéaire unidimensionnelle, où $a_s > 0$ est la longueur de diffusion de la collision élastique en onde s entre deux bosons dans l'espace à trois dimensions. L'équation d'évolution du champ $\hat{\Psi}(x,t)$ s'écrit [113]

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\hat{\Psi} = -[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\Psi}] \overset{(1.41)}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx}\hat{\Psi} + [U(x) + g\,\hat{n} - \mu]\,\hat{\Psi}. \tag{1.43}$$

Dans le régime de quasi-condensation [25] et dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des fluctuations quantiques [22, 113], l'opérateur de champ $\hat{\Psi}(x,t)$ peut s'exprimer comme la somme d'une contribution classique $\Psi(x,t)$ qui décrit le profil de densité moyen $n(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ et d'une correction quantique $\hat{\psi}(x,t)$ décrivant de petites oscillations autour

du champ classique $\Psi(x,t)$. Dans les configurations de trous noirs acoustiques que nous présentons ci-après, on considère que l'écoulement du condensat est stationnaire [ce qui veut dire que $\Psi(x,t)$ ne dépend pas du temps : $\Psi(x,t) = \Psi(x)$] et on écrit dans ce cas

$$\hat{\Psi}(x,t) = \Psi(x) + \hat{\psi}(x,t), \tag{1.44}$$

où $\Psi(x)$ obéit à l'équation de Gross–Pitaevskii stationnaire [52, 111, 113]

$$\mu\,\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx}\Psi + [U(x) + g\,n]\,\Psi, \tag{1.45}$$

qui est le pendant classique et indépendant du temps de l'équation (1.43).

Une configuration de trou noir acoustique dans l'écoulement d'un quasi-condensat de Bose se déplaçant de la gauche vers la droite (c'est-à-dire dans le sens des x positifs) correspond à la dissymétrie suivante : en amont de l'horizon acoustique (situé, disons, en $x = 0$) l'écoulement est subsonique et il est supersonique en aval de celui-ci. Les paramètres du fluide de Bose–Einstein seront dans la suite indicés par $\alpha = u$ (respectivement $\alpha = d$) lorsqu'ils seront évalués dans la région subsonique, c'est-à-dire dans le demi-espace $x < 0$ (respectivement dans la région supersonique, c'est-à-dire dans le demi-espace $x > 0$). On écrit la fonction d'onde du condensat sous la forme

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{n_u}\,\exp(\mathrm{i}k_u x)\,\phi_u(x) & (x < 0), \\ \sqrt{n_d}\,\exp(\mathrm{i}k_d x)\,\phi_d(x) & (x > 0), \end{cases} \tag{1.46}$$

où $|\phi_u(x)|$ et $|\phi_d(x)|$ sont voisins de 1 lorsque x est respectivement loin en amont ou en aval de l'horizon acoustique, de sorte que n_u et n_d correspondent aux densités du quasi-condensat loin de l'horizon à l'extérieur et à l'intérieur du trou noir, respectivement. Dans les équations (1.46), on note aussi $k_\alpha = mV_\alpha/\hbar$ (avec $V_\alpha > 0$) la vitesse (en unités de $\hbar/m$) de l'écoulement loin en amont de l'horizon ($\alpha = u$) ou loin en aval de ce dernier ($\alpha = d$). Les vitesses du son asymptotiques c_u et c_d sont définies par $c_\alpha = \sqrt{g_\alpha n_\alpha/m}$, où g_u et g_d sont les constantes de couplage loin de l'horizon à l'extérieur et à l'intérieur du trou noir acoustique (on garde la possibilité d'une dépendance en position des interactions entre bosons afin de traiter la configuration de profil plat des références [12] et [30]). À l'aide des vitesses du son c_α, on définit les longueurs de corrélation $\xi_\alpha = \hbar/(mc_\alpha)$ et les nombres de Mach asymptotiques $\mathscr{m}_\alpha = V_\alpha/c_\alpha$ (dans une configuration de trou muet, $\mathscr{m}_u < 1$ et $\mathscr{m}_d > 1$). Notant U_u et U_d les valeurs que prend le potentiel $U(x)$ lorsque x est très négatif ou très positif, on obtient en combinant (1.45) et (1.46)

$$\mu = \frac{mV_\alpha^2}{2} + U_\alpha + g_\alpha n_\alpha \quad \text{et} \quad n_u V_u = n_d V_d. \tag{1.47}$$

La première équation exprime une nécessité de la stationnarité de l'écoulement : les potentiels chimiques asymptotiques sont égaux. La seconde équation exprime la conservation du courant, qui elle aussi est requise dans une configuration d'écoulement stationnaire. L'allure précise du profil de l'écoulement est spécifiée par les fonctions $\phi_u(x)$ et $\phi_d(x)$,

qui dépendent de la configuration de trou muet que l'on considère. Dans chacune des configurations introduites ci-après, $\phi_d(x)$ est une constante complexe de la forme

$$\phi_d(x) = \exp(\mathrm{i}\beta_d) \quad (\beta_d \in \mathbb{R}), \tag{1.48}$$

ce qui signifie que le profil de densité en aval de l'horizon acoustique est plat et caractérisé par une vitesse $V(x)$ constante et égale à V_d [*cf.* équations (1.46)]. La valeur de β_d dépend de la configuration de trou noir considérée. La stationnarité de l'écoulement impose également que $\phi_u(x) \simeq \exp(\mathrm{i}\beta_u)$ ($\beta_u \in \mathbb{R}$) lorsque x est loin en amont de l'horizon acoustique.

Ayant défini les notations communes aux trois configurations de trous noirs acoustiques étudiées dans ce chapitre (configurations de profil plat, de pic δ et de chute d'eau), nous donnons maintenant les valeurs précises que prennent les paramètres de l'écoulement dans ces trois configurations.

Configuration de profil plat

Nous rappelons ici les valeurs des paramètres de l'écoulement du condensat dans la configuration de profil plat étudiée en références [12], [30] et [117]. Dans cette configuration, les fonctions $\phi_\alpha(x)$ des équations (1.46) sont très simples : $\phi_u(x) = \phi_d(x) = 1$ (et ainsi $\beta_u, \beta_d \equiv 0\,[2\pi]$). Le potentiel extérieur

$$U(x) = U_u\,\Theta(-x) + U_d\,\Theta(x) \quad (U_u, U_d \in \mathbb{R}) \tag{1.49}$$

et la constante de couplage non-linéaire

$$g(x) = g_u\,\Theta(-x) + g_d\,\Theta(x) \quad (g_u, g_d > 0), \tag{1.50}$$

où Θ désigne la fonction de Heaviside, sont choisis de sorte qu'un écoulement de vitesse $V_u = V_d = V_0 = \text{cste}$ (c'est-à-dire tel que $k_u = k_d = k_0 = \text{cste}$) et de densité $n_u = n_d = n_0 = \text{cste}$ soit solution des équations (1.45) et (1.47). Ceci étant, on montre que

$$\frac{c_u}{c_d} = \frac{\xi_d}{\xi_u} = \frac{m_d}{m_u} \tag{1.51a}$$

$$\text{et} \quad U_u + g_u\,n_0 = U_d + g_d\,n_0. \tag{1.51b}$$

Dans la configuration de profil plat, on a $c_d < V_d = V_u < c_u$.

Dans les simulations numériques effectuées en références [12], [30], [92] et [93], les auteurs généralisent cette configuration [dans laquelle les fonctions $U(x)$ et $g(x)$ sont discontinues en $x = 0$] en considérant que $U(x)$ et $g(x)$ sont régulières sur tout $\mathbb{R}$ et en les forçant à vérifier la contrainte $U(x) + g(x)\,n_0 = \text{cste}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ [qui est la version continue de l'équation (1.51b)]. L'approche théorique développée dans ces références est en réalité la même que celle mise en œuvre en référence [117], à ceci près que les équations de Bogoliubov–de Gennes (*cf.* sous-section 1.2.3) ne peuvent, dans ce cas, être résolues que numériquement tandis que la configuration discontinue caractérisée par les équations (1.49) et (1.50) offre la possibilité d'un traitement analytique des fluctuations quantiques.

La configuration de profil plat peut être générée dynamiquement au moyen de simulations numériques [12, 30]. Sa réalisation expérimentale s'avère être en contrepartie difficile car cette configuration de trou muet [caractérisée par une constante d'interaction à deux corps $g(x)$ spatialement variable] n'est possible qu'en présence d'un potentiel extérieur $U(x)$ conçu afin d'exactement contrecarrer les variations de $g(x)$ et ainsi assurer la constance du potentiel chimique $\mu = \hbar^2 k_0^2/(2m) + U(x) + g(x)\, n_0$. C'est pourquoi nous avons proposé deux nouvelles configurations d'horizons acoustiques qui pourraient être bien plus facilement mises en œuvre que la configuration de profil plat.

Configuration de pic δ

Dans cette configuration, le paramètre non-linéaire g est uniforme et le potentiel extérieur est représenté par un pic de Dirac répulsif : $U(x) = \Lambda\, \delta(x)$, où $\Lambda > 0$. Dans ce cas, une configuration de trou noir acoustique peut être générée car on montre qu'il est possible de trouver une solution stable de l'équation de Gross–Pitaevskii stationnaire (1.45) décrivant un écoulement qui, loin en amont (respectivement en aval) de $x = 0$, est subsonique (respectivement supersonique) [83, 104]. Le profil de densité à l'extérieur du trou muet correspond à une portion de soliton gris ; en effet, lorsque $x < 0$,

$$\phi_u(x) = \cos\theta \, \tanh\left(\cos\theta \, \frac{x - x_0}{\xi_u}\right) - \mathrm{i} \sin\theta, \tag{1.52}$$

où $\sin\theta = m_u$ (on peut se restreindre à $\theta \in [0, \pi/2]$, en conséquence de quoi $\beta_u = \theta + \pi$). Comme dans les autres configurations de trous noirs étudiées dans ce chapitre (profil plat et chute d'eau), le profil de densité en aval de l'horizon acoustique est homogène et l'écoulement y est caractérisé par une vitesse $V_d > c_d$ constante [*cf.* équations (1.48) et (1.46)]. Une représentation schématique de la configuration de pic δ est donnée à la figure 1.5. Une fois le nombre de Mach $m_u = V_u/c_u < 1$ fixé, tous les autres paramètres de l'écoulement sont déterminés à l'aide des équations (1.47). Définissant $y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8/m_u^2})$, on trouve

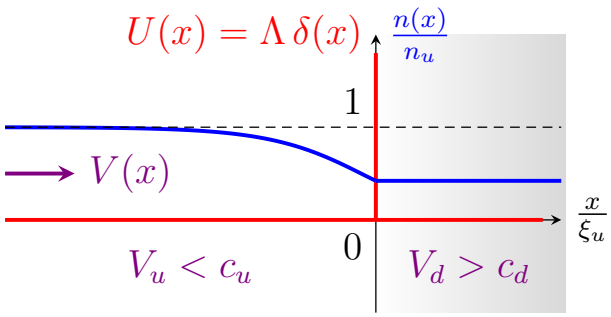


Figure 1.5 — Densité $n(x) = |\Psi(x)|^2$ (en bleu) d'un quasi-condensat unidimensionnel en configuration de pic δ. Le fluide s'écoule de la gauche vers la droite [sa vitesse $V(x)$ est matérialisée par la flèche violette]. Le potentiel répulsif $U(x) = \Lambda\, \delta(x)$ ($\Lambda > 0$) est représenté en rouge. La densité en amont de l'horizon ($x < 0$) est une portion de soliton gris (voir le texte) et l'écoulement y est subsonique. En aval de l'horizon ($x > 0$), la densité est uniforme et l'écoulement supersonique. Cette région est grisée afin de rappeler qu'elle correspond à l'intérieur du trou noir acoustique.

$$\frac{n_u}{n_d} = \frac{V_d}{V_u} = y, \quad \frac{c_u}{c_d} = \frac{\xi_d}{\xi_u} = \sqrt{y} \quad \text{et} \quad \frac{m_u}{m_d} = \frac{1}{y^{3/2}}. \tag{1.53}$$

Tirant parti de la continuité de la fonction d'onde du condensat $[\Psi(0) = \sqrt{n_d}\,\exp(\mathrm{i}\beta_d) = \sqrt{n_u}\,\phi_u(0)]$ et de la discontinuité de sa dérivée première $[\partial_x\Psi(0^+) - \partial_x\Psi(0^-) = 2\,m\,\Lambda\,\Psi(0)/\hbar^2]$ en $x = 0$, on obtient également

$$\sin\beta_d = -m_u\sqrt{y} \quad \text{et} \quad \frac{x_0}{\xi_u} = \frac{1}{\cos\theta}\,\tanh^{-1}\left(\tan\theta\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right), \tag{1.54}$$

ainsi que

$$\Lambda = \hbar\,c_u\,\lambda, \quad \text{où} \quad \lambda = m_u\left(\frac{y-1}{2}\right)^{3/2}. \tag{1.55}$$

Dans la configuration de pic δ, on a $V_u < c_d < c_u < V_d$.

Il semblerait que cette configuration de trou noir acoustique puisse être dynamiquement générée en envoyant un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel sur un obstacle localisé (représenté par exemple par un pic δ, mais pas nécessairement). Les auteurs de la référence [65] ont en effet montré qu'il existe une assez large gamme de paramètres pour lesquels le profil de densité du condensat tend vers celui dépeint à la figure 1.5 suite à un régime transitoire marqué par l'éjection d'une onde de choc dispersive dans la région subsonique.

Configuration de chute d'eau

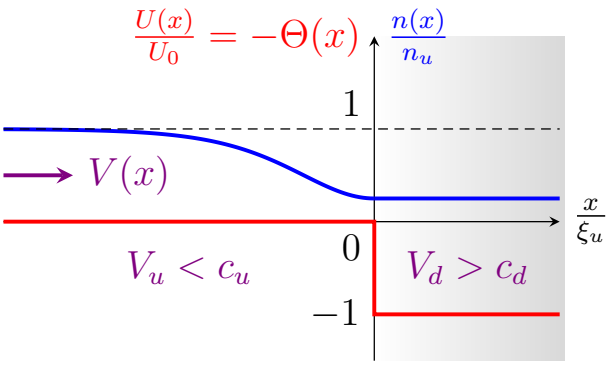


Figure 1.6 — Profil de densité $n(x)$ d'un condensat unidimensionnel en configuration de chute d'eau. Les symboles et les codes de couleurs utilisés sont les mêmes que ceux employés à la figure 1.5.

Dans cette configuration de trou noir acoustique, la constante d'interaction à deux corps g est constante (comme dans le cas de la configuration de pic δ dont le descriptif est donné ci-dessus) et le potentiel extérieur est représenté par une marche du type $U(x) = -U_0\,\Theta(x)$ $(U_0 > 0)$, où Θ est la fonction de Heaviside. Dans ce cas, un écoulement stationnaire caractérisé par une vitesse subsonique en amont et supersonique en aval de $x = 0$ a été identifié en référence [84]. La densité en amont de l'horizon acoustique est déterminée *via* l'équation (1.52) avec, ici, $x_0 = 0$, ce qui signifie que le profil de densité dans la région subsonique est exactement une moitié de soliton gris (voir figure 1.6). Les égalités (1.47) et la continuité du paramètre d'ordre à l'origine imposent

$$\frac{n_u}{n_d} = \frac{V_d}{V_u} = \left(\frac{c_u}{c_d}\right)^2 = \left(\frac{\xi_d}{\xi_u}\right)^2 = \frac{1}{m_u^2} = m_d, \tag{1.56}$$

$\exp(\mathrm{i}\beta_d) = -\mathrm{i}$ (c'est-à-dire $\beta_d \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$) et

$$\frac{U_0}{g\,n_u} = \frac{m_u^2}{2} + \frac{1}{2m_u^2} - 1. \tag{1.57}$$

Dans la configuration de chute d'eau, on a $V_u = c_d < c_u < V_d$.

Comme dans le cas de la configuration de pic δ (relire sa description et consulter la référence [65]), il est sûrement possible de générer dynamiquement la configuration stationnaire dépeinte à la figure 1.6. Les résultats expérimentaux de l'équipe de Jeff Steinhauer [75] soutiennent cette idée ; les membres du groupe ont en effet mis en œuvre une configuration de trou muet très similaire à la configuration de chute d'eau présentée ici (avec l'occurrence d'un horizon de trou blanc [9]) et montré qu'il n'existait pas de dépendance temporelle dramatique au voisinage de l'horizon de leur trou noir acoustique, ce qui laisse espérer que la configuration stationnaire de chute d'eau de la figure 1.6 est stable et expérimentalement atteignable.

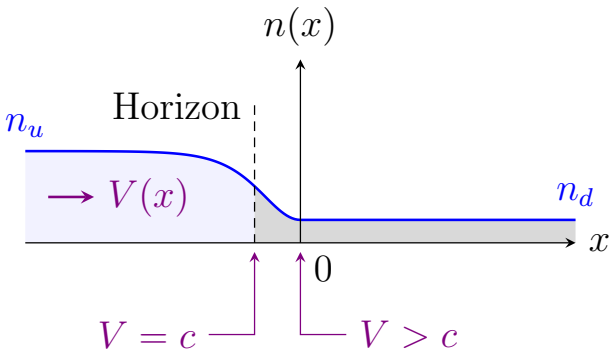


Figure 1.7 — Prenant comme définition de l'horizon acoustique l'endroit à partir duquel la vitesse de l'écoulement $V(x)$ devient plus grande que la vitesse du son $c(x)$, il vient que l'horizon d'un trou noir en configuration de chute d'eau doit être situé en amont de $x = 0$. Ce constat tient également dans le cas de la configuration de pic δ.

Faisons une dernière remarque tenant également pour la configuration de pic δ : la localisation précise de l'horizon acoustique n'est pas bien définie dans ces deux configurations inhomogènes (chute d'eau et pic δ). On trouve en effet que l'horizon du trou muet, défini comme l'endroit à partir duquel la vitesse $V(x)$ de l'écoulement dépasse la vitesse locale $c(x)$ des ondes sonores dans le fluide, est situé un peu en amont de l'origine des coordonnées. Par exemple, dans une configuration de chute d'eau, on trouve

$$\left.\frac{V(x)}{c(x)}\right|_{x=0} = \sqrt{\frac{2}{m_u^2} - 1}, \tag{1.58}$$

et alors $V > c$ en $x = 0$ puisque $m_u < 1$, ce qui signifie que l'horizon d'un trou noir en configuration de chute d'eau doit être localisé en amont de l'interface $x = 0$ (voir figure 1.7). Ceci dit, ce petit souci de définition ne nous gênera guère car ce qui importe dans les analyses du rayonnement de Hawking que nous détaillerons ci-après est que la vitesse de l'écoulement soit asymptotiquement (lorsque $x/\xi_u \to -\infty$) subsonique : $V_u < c_u$, ce qui est effectivement le cas dans nos configurations de chute d'eau et de pic δ.

9. Un trou blanc (ou fontaine blanche) acoustique est le symétrique d'un trou noir acoustique dans le sens où si le son ne peut pas s'échapper d'un trou muet, les phonons ne peuvent pas pénétrer dans une fontaine blanche acoustique.

1.2.3 Théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires

Dans cette sous-section, nous donnons une description détaillée des excitations élémentaires d'un quasi-condensat unidimensionnel en configuration de trou noir. Le gaz est décrit par le champ quantique $\hat{\Psi}(x,t)$ et sa dynamique obéit à l'équation d'évolution de Heisenberg (1.43). Nous nous plaçons naturellement dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des fluctuations en cherchant les solutions de (1.43) sous la forme (1.44) [$\hat{\Psi}(x,t) = \Psi(x) + \hat{\psi}(x,t)$, où $\Psi(x)$ est le paramètre d'ordre et $\hat{\psi}(x,t)$ une petite correction quantique qui décrit les excitations élémentaires du fluide de Bose]. Néanmoins, on montre (voir [97] et/ou figure 1.8) que la description basée sur l'équation (1.44) ne permet pas d'obtenir le comportement exact de la matrice densité à un corps [113]

$$\rho^{(1)}(x,x') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x,t)\, \hat{\Psi}(x',t) \rangle \tag{1.59}$$

dans un gaz de bosons ultra-froids unidimensionnel, dilué et homogène lorsque $|x-x'| \gg \xi$, où ξ est la longueur d'onde de de Broglie des phonons. La décomposition (1.44) permet tout de même une analyse qualitative du comportement des observables utilisées pour étudier les corrélations dans de tels systèmes. Par exemple, elle donne le bon comportement de la matrice densité à deux corps [113]

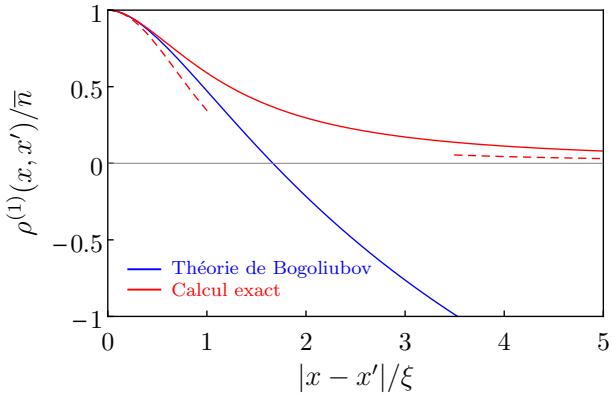


Figure 1.8 — Matrice densité à un corps (1.59) dans un gaz de Bose unidimensionnel, dilué et homogène (de densité moyenne $\overline{n}$) à température nulle. La courbe bleue correspond au résultat déduit de la théorie de Bogoliubov, qui diverge logarithmiquement lorsque $|x-x'| \gg \xi$. La courbe rouge correspond au résultat exact (voir Annexe et/ou références [114] et [97]). Les lignes en pointillés rouges représentent les asymptotiques du résultat exact lorsque $|x-x'| \ll \xi$ ou $|x-x'| \gg \xi$.

$$\rho^{(2)}(x,x') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x,t)\, \hat{\Psi}^\dagger(x',t)\, \hat{\Psi}(x,t)\, \hat{\Psi}(x',t) \rangle \tag{1.60}$$

dans un gaz dilué et homogène de bosons ultra-froids en dimension un [voir sous-section 1.2.5 dans laquelle on calcule la matrice densité à deux corps connexe $g^{(2)}(x,x') = \rho^{(2)}(x,x') - \rho^{(1)}(x,x)\,\rho^{(1)}(x',x')$ dans le cadre de la théorie de Bogoliubov]. La pertinence de la description (1.44) dépend en fait de la valeur de la longueur caractéristique des corrélations spatiales considérées. Si cette dernière est plus petite que la longueur de cohérence de phase [107]

$$\ell_\varphi = \xi \times \exp\left[\pi \left(\frac{\hbar^2\, \overline{n}}{m\, g}\right)^{1/2}\right] = \xi \times \exp\left[\pi \left(\frac{\hbar\, \overline{n}}{2\, m\, a_s\, \omega_\perp}\right)^{1/2}\right], \tag{1.61}$$

où $\overline{n} = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x,t)\, \hat{\Psi}(x,t) \rangle = \rho^{(1)}(x,x)$ est la densité longitudinale moyenne du gaz (considéré homogène, par mesure de simplicité), alors on peut sans trop faire d'erreur traiter

les fluctuations quantiques du gaz en considérant l'équation (1.44) comme point de départ de l'analyse — c'est-à-dire en considérant que le liquide de Bose peut être en bonne approximation décrit par le champ classique $\Psi(x) = \langle\hat{\Psi}(x,t)\rangle \neq 0$ (on parle alors de quasi-condensat [10]) —, bien qu'en vertu du théorème de Mermin–Wagner [94] (dit également de Mermin–Wagner–Hohenberg [58] ou, dans le cadre de la théorie quantique des champs, de Coleman [33]) et d'une extension de ce théorème au cas de température nulle, formulée par Pitaevskii et Stringari [112], l'occurrence d'une véritable condensation de Bose–Einstein ne peut se produire dans des systèmes bosoniques unidimensionnels infinis à température finie ou nulle. Dans un gaz unidimensionnel dilué au zéro absolu, on peut utiliser (1.44) pour décrire les corrélations à deux corps (1.60) : cette quantité est en effet non-triviale (c'est-à-dire $\neq \overline{n}^2$) sur des distances $|x - x'| \lesssim \xi$ bien plus petites que ℓ_φ.

La méthode la plus simple pour avoir accès aux excitations du quasi-condensat unidimensionnel en configuration de trou noir acoustique est de partir de la décomposition (1.44), où $\Psi(x)$ est donnée par les équations (1.46), et de traiter $\hat{\psi}(x,t)$ comme un petit champ classique dépendant du temps, que l'on note $\psi(x,t)$ dans cette sous-section ($|\psi| \ll |\Psi|$), avec $\Psi(x) + \psi(x,t)$ solution de la version classique de l'équation (1.43). On effectue l'ansatz de Bogoliubov

$$\psi(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha x}\left[\overline{u}_\alpha(x,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \overline{w}^*_\alpha(x,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right], \tag{1.62}$$

où, rappelons-le, $\alpha = u$ lorsque $x < 0$ et $\alpha = d$ quand $x > 0$. Ainsi défini, $\psi(x,t)$ décrit de petites oscillations d'énergie $\hbar\,\omega$ autour de l'état fondamental de fonction d'onde $\Psi(x)$. Définissant

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\hbar\,\omega}{mc_\alpha^2} \quad \text{et} \quad X_\alpha = \frac{x}{\xi_\alpha}, \tag{1.63}$$

la linéarisation du pendant classique de l'équation (1.43) par rapport à $\psi(x,t)$ conduit aux équations de Bogoliubov–de Gennes

$$(\varepsilon_\alpha + \mathrm{i}m_\alpha\,\partial_{X_\alpha})\begin{pmatrix}\overline{u}_\alpha\\ \overline{w}_\alpha\end{pmatrix} = \mathcal{L}_\alpha\begin{pmatrix}\overline{u}_\alpha\\ \overline{w}_\alpha\end{pmatrix}, \tag{1.64a}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{L}_\alpha = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\,\partial_{X_\alpha X_\alpha} + 2|\phi_\alpha|^2 - 1 & \phi_\alpha^2\\ -(\phi_\alpha^*)^2 & \frac{1}{2}\,\partial_{X_\alpha X_\alpha} - 2|\phi_\alpha|^2 + 1\end{pmatrix}. \tag{1.64b}$$

On cherche les fonctions propres du hamiltonien de Bogoliubov–de Gennes (1.64b) sous la forme

$$\begin{pmatrix}\overline{u}_\ell(x)\\ \overline{w}_\ell(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathcal{U}_\ell(x)\\ \mathcal{W}_\ell(x)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_\ell X_\alpha}, \tag{1.65}$$

où les amplitudes $\mathcal{U}_\ell$ et $\mathcal{W}_\ell$ sont les coefficients de Bogoliubov. Ces derniers ne dépendent pas de la position lorsque le trou noir est en configuration de profil plat car le profil de densité dans l'état fondamental est dans ce cas uniforme ; ils sont fonctions de x dans les configurations de pic δ et de chute d'eau (à l'extérieur du trou noir acoustique) car dans ce cas $|\Psi|^2 = n_\alpha\,|\phi_\alpha|^2$ dépend de la position (*cf.* figures 1.5 et 1.6). Dans l'équation (1.65),

10. Dans cette thèse, nous nous restreignons au régime de quasi-condensation. Néanmoins, il nous arrivera de parler (abusivement) de « condensat » au lieu de parler (rigoureusement) de « quasi-condensat ».

les $Q_\ell = \xi_\alpha\, q_\ell$ sont les nombres d'onde[11] (adimensionnés) des modes propres ℓ dans les référentiels asymptotiquement entraînés, c'est-à-dire dans les référentiels où le condensat est au repos loin en amont ($X_u = x/\xi_u \to -\infty$) ou en aval ($X_d = x/\xi_d \to +\infty$) de l'horizon acoustique. On montre qu'ils sont solutions de

$$E_\ell^2 = \omega_{\mathrm{B}}^2(Q_\ell), \quad \text{où} \quad \omega_{\mathrm{B}}(Q) = \sqrt{\frac{Q^2}{2}\left(\frac{Q^2}{2}+2\right)} \tag{1.66}$$

est la relation de dispersion de Bogoliubov (écrite sous une forme adimensionnée) dans un condensat au repos et où $E_\ell = \varepsilon_\alpha - m_\alpha Q_\ell$, valeur propre de $\mathcal{L}_\alpha$, est l'énergie d'un mode propre ℓ dans les référentiels asymptotiquement entraînés. L'indice $\alpha = u$ ou d dans l'équation (1.62) est remplacé par ℓ dans l'équation (1.65) afin d'identifier la branche des relations de dispersion $\varepsilon_\alpha(Q_\ell) = m_\alpha Q_\ell + E_\ell(Q_\ell)$ à laquelle l'excitation de Bogoliubov correspondante se rapporte. Pour être très précis, l'indice ℓ doit être vu comme un double indice car la valeur des nombres d'onde Q_ℓ dépend de α, c'est-à-dire de là où se situe la fluctuation de densité transportant l'impulsion $\hbar\, q_\ell$ [voir équation (1.66)]. On identifie huit modes ℓ dans les configurations de trous muets étudiées dans ce chapitre (profil plat, pic δ et chute d'eau). À l'extérieur du trou noir acoustique, là où x est négatif ($\alpha = u$), $\ell \in \{u|\mathrm{in}, u|\mathrm{out}, u|\mathrm{eva}\}$ et à l'intérieur du trou muet, là où x est positif ($\alpha = d$), deux cas se présentent suivant que la pulsation $\omega > 0$[12] des excitations est plus petite ou plus grande qu'un certain seuil Ω : si $\omega < \Omega$, $\ell \in \{d1|\mathrm{in}, d1|\mathrm{out}, d2|\mathrm{in}, d2|\mathrm{out}\}$ et si $\omega > \Omega$, $\ell \in \{d1|\mathrm{in}, d1|\mathrm{out}, d|\mathrm{eva}\}$. Ce seuil n'existe que dans un écoulement supersonique et vaut

$$\frac{\hbar\,\Omega}{mc_d^2} = m_d\,\xi_d\,q^* - \sqrt{\frac{(\xi_d\,q^*)^2}{2}\left[\frac{(\xi_d\,q^*)^2}{2}+2\right]}, \tag{1.67a}$$

$$\text{où} \quad \xi_d\,q^* = \sqrt{-2+\frac{m_d^2}{2}+\frac{m_d}{2}\sqrt{8+m_d^2}}. \tag{1.67b}$$

Les modes (réels, c'est-à-dire d'impulsion $\hbar\, q_\ell$ réelle) « in » (respectivement « out ») sont ceux dont la vitesse de groupe (dans le référentiel du laboratoire)

$$V_{\mathrm{g}}(Q_\ell) = \frac{\partial\omega}{\partial q_\ell} = c_\alpha\,\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial Q_\ell} = V_\alpha + c_\alpha\,\frac{Q_\ell(Q_\ell^2/2+1)}{E_\ell} \tag{1.68}$$

pointe vers l'horizon (respectivement vers $-\infty$ dans le demi-espace $x < 0$ et vers $+\infty$ dans le demi-espace $x > 0$). Les modes « eva » sont évanescents ; ils portent une impulsion complexe vérifiant $\mathrm{Im}(Q_\ell) < 0$ si $\ell = u|\mathrm{eva}$ [de sorte que $\exp(\mathrm{i}Q_\ell X_u) \to 0$ quand $X_u \to -\infty$, ce qui veut dire que l'onde $u|\mathrm{eva}$ est indétectable loin en amont de l'horizon acoustique]

11. On définit le nombre d'onde k par $k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde, et non comme $k = 1/\lambda$, qui est la définition employée en spectroscopie.

12. Il est facile de vérifier que si $(\overline{u}_\alpha\ \overline{w}_\alpha)^\mathsf{T}$ est une solution de l'équation (1.64a) associée à l'énergie ε_α alors $(\overline{w}_\alpha^*\ \overline{u}_\alpha^*)^\mathsf{T}$ est aussi une solution de l'équation (1.64a), cette fois-ci associée à l'énergie $-\varepsilon_\alpha$. Comme ces deux solutions décrivent les mêmes perturbations dans le quasi-condensat [*cf.* équation (1.62)], on peut choisir de ne considérer que les modes propres tels que $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}_+$ et donc tels que $\omega \in \mathbb{R}_+$.

et $\mathrm{Im}(Q_\ell) > 0$ si $\ell = d|\mathrm{eva}$ [de sorte que $\exp(\mathrm{i}Q_\ell X_d) \to 0$ quand $X_d \to +\infty$, ce qui signifie que l'onde $d|\mathrm{eva}$ est indétectable loin en aval de l'horizon acoustique]. Les modes $d2|\mathrm{in}$ et $d2|\mathrm{out}$ sont de norme négative : $|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2 < 0$, et en fait tels que $E_\ell < 0$ car on montre que $\mathrm{sgn}(E_\ell) = \mathrm{sgn}(|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2)$ lorsque $\ell \in \{d2|\mathrm{in}, d2|\mathrm{out}\}$; tous les autres modes réels sont de norme positive ($|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2, E_\ell > 0$ lorsque $\ell \in \{u|\mathrm{in}, u|\mathrm{out}, d1|\mathrm{in}, d1|\mathrm{out}\}$). On se référera à la figure 1.9 qui donne une représentation graphique des relations de dispersion $\varepsilon_\alpha(Q)$ des excitations élémentaires dans le référentiel du laboratoire loin de l'horizon acoustique à l'extérieur [$\varepsilon_u(Q)$] et à l'intérieur [$\varepsilon_d(Q)$] du trou muet.

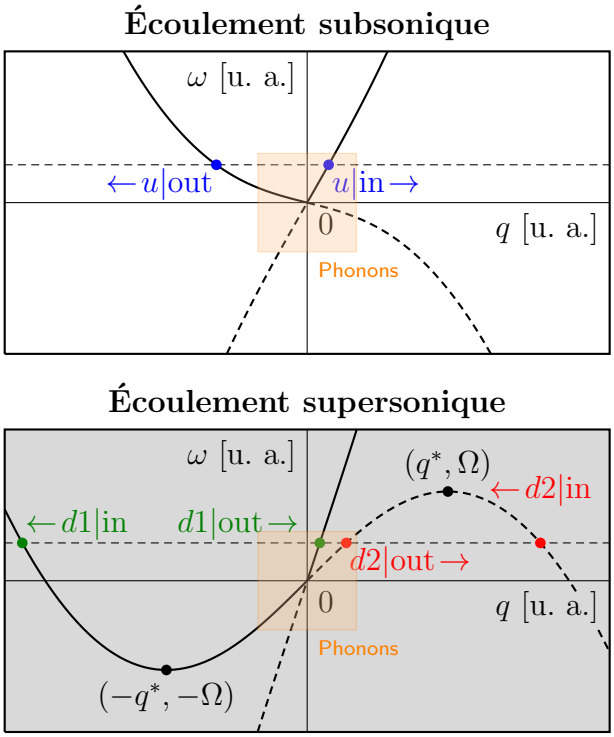


Figure 1.9 — Relations de dispersion des excitations élémentaires du condensat loin en amont de l'horizon acoustique dans la région subsonique (graphique du haut) et loin en aval de l'horizon dans la région supersonique (graphique du bas ; l'arrière-plan du graphe est grisé pour rappeler qu'il décrit la dispersion des excitations à l'intérieur du trou noir acoustique). La ligne horizontale en pointillés noirs fixe l'énergie $\hbar\omega$ (dans le référentiel du laboratoire) transportée par un mode de Bogoliubov ℓ. Les impulsions $\hbar q_\ell \in \mathbb{R}$ (dans les référentiels asymptotiquement entraînés) correspondent aux abscisses des points d'intersection de cette droite avec les relations de dispersion. La direction de propagation des modes réels ($\ell \in \{u|\mathrm{in}, u|\mathrm{out}\}$ à l'extérieur du trou noir et $\ell \in \{d1|\mathrm{in}, d1|\mathrm{out}, d2|\mathrm{in}, d2|\mathrm{out}\}$ à l'intérieur du trou noir) est indiquée par une flèche. Les portions de courbe en pointillés correspondent aux modes de Bogoliubov de norme négative (voir le texte). Les fenêtres orangées sélectionnent les petites impulsions et les petites énergies, limites dans lesquelles les relations de dispersion sont en bonne approximation linéaires et donc caractéristiques des phonons (voir figure 1.4).

Les amplitudes de Bogoliubov $\mathcal{U}_\ell(x)$ et $\mathcal{W}_\ell(x)$ qui apparaissent dans l'équation (1.65) dépendent de l'endroit où sont émises les fluctuations de densité [à l'intérieur ($x > 0$) ou à l'extérieur ($x < 0$) du trou muet] et diffèrent d'une configuration de trou noir acoustique à l'autre.

• **Fonctions $\mathcal{U}_\ell$ et $\mathcal{W}_\ell$ à l'intérieur du trou noir ($x > 0$).**— Dans la région où l'écoulement est supersonique, la fonction d'onde ϕ_d qui apparaît dans l'équation (1.64b) ne dépend pas de la position [et vaut $\exp(\mathrm{i}\beta_d)$, *cf.* équation (1.48)], en conséquence de quoi les amplitudes $\mathcal{U}_\ell$ et $\mathcal{W}_\ell$ sont homogènes. Elles s'écrivent dans ce cas

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_\ell \\ \mathcal{W}_\ell \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{C}_\ell} \begin{pmatrix} (Q_\ell^2/2 + E_\ell)\exp(\mathrm{i}\beta_d) \\ (Q_\ell^2/2 - E_\ell)\exp(-\mathrm{i}\beta_d) \end{pmatrix}, \tag{1.69}$$

où $E_\ell = \varepsilon_d - m_d Q_\ell$. Si ℓ désigne un mode de Bogoliubov réel (c'est-à-dire si $\ell = d1|\mathrm{in}$, $d1|\mathrm{out}$, $d2|\mathrm{in}$ ou $d2|\mathrm{out}$), la constante de normalisation $\mathcal{C}_\ell$ dans l'équation (1.69) est choisie de sorte que le courant (conservé)

$$J_\ell = c_d \left[(Q_\ell + m_d)\,|\mathcal{U}_\ell|^2 + (Q_\ell - m_d)\,|\mathcal{W}_\ell|^2\right] = V_\mathrm{g}(Q_\ell)\,(|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2) \tag{1.70}$$

transporté par l'onde réelle ℓ vaille ± 1 ; imposant $\mathcal{C}_\ell > 0$, on trouve sans difficulté $\mathcal{C}_\ell = \sqrt{2\,Q_\ell^2\,|E_\ell|\,|V_\mathrm{g}(Q_\ell)|}$. Lorsque $\omega > \Omega$, l'onde $d2|\mathrm{in}$ disparaît et le mode réel $d2|\mathrm{out}$ est remplacé par le mode évanescent $\ell = d|\mathrm{eva}$ (qui ne transporte aucun courant) ; dans ce cas, la constante $\mathcal{C}_\ell$ s'écrit

$$\mathcal{C}_\ell = \sqrt{2\,|\mathrm{Re}(Q_\ell^2\,E_\ell^*)|\,|V_\mathrm{g}(Q_\ell)|}, \tag{1.71}$$

mais on constate que cette dernière formule est valable pour tout $\ell = d1|\mathrm{in}$, $d1|\mathrm{out}$, $d2|\mathrm{in}$, $d2|\mathrm{out}$ ou $d|\mathrm{eva}$ car lorsque $\ell \neq d|\mathrm{eva}$, Q_ℓ et E_ℓ sont réels, et alors $\mathrm{Re}(Q_\ell^2\,E_\ell^*) = Q_\ell^2\,E_\ell$. Étant donnée (1.71) et d'après (1.70), les modes non-évanescents de norme positive ($|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2 > 0$) qui se propagent vers la droite [$V_\mathrm{g}(Q_\ell) > 0$] ou les modes non-évanescents de norme négative ($|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2 < 0$) qui se propagent vers la gauche [$V_\mathrm{g}(Q_\ell) < 0$] sont tels que $J_\ell = 1$ et les modes non-évanescents de norme négative se déplaçant vers la droite ou les modes non-évanescents de norme positive se déplaçant vers la gauche sont tels que $J_\ell = -1$. Plus précisément, on a $J_{d1|\mathrm{in}} = -J_{d1|\mathrm{out}} = -J_{d2|\mathrm{in}} = J_{d2|\mathrm{out}} = -1$.

• **Fonctions $\mathcal{U}_\ell(x)$ et $\mathcal{W}_\ell(x)$ à l'extérieur du trou noir ($x < 0$).**— Dans la région où x est négatif, là où l'écoulement est subsonique (dans la configuration de profil plat) ou asymptotiquement subsonique (dans les configurations de pic δ et de chute d'eau), les amplitudes de Bogoliubov $\mathcal{U}_\ell(x)$ et $\mathcal{W}_\ell(x)$ diffèrent d'une configuration de trou muet à l'autre. Lorsque le condensat est en configuration de profil plat, $\mathcal{U}_\ell$ et $\mathcal{W}_\ell$ sont homogènes [car alors $\phi_u(x) = \mathrm{cste}$ ($= 1$) pour tout $x \in \mathbb{R}_-$] et sont données par (1.69) (où $E_\ell = \varepsilon_u - m_u Q_\ell$ et où β_d est remplacé par $\beta_u = 0$). Lorsque le condensat est en configuration de pic δ ou de chute d'eau, le profil de densité dans le demi-espace $x < 0$ dépend de x (voir figures 1.5 et 1.6) et les fonctions $\mathcal{U}_\ell(x)$ et $\mathcal{W}_\ell(x)$ — qui décrivent l'amplitude de

petites modulations de densité venant s'ajouter au champ de fond décrit par la fonction d'onde $\phi_u(x)$ — sont alors inhomogènes ; définissant $\chi(X_u) = \cos\theta\,\tanh[\cos\theta\,(X_u - X_0)]$, où $X_0 = x_0/\xi_u$ ($x_0 = 0$ dans la configuration de chute d'eau), on montre (voir annexe A de la référence [21]) que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_\ell(x) \\ \mathcal{W}_\ell(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}_\ell} \begin{pmatrix} [Q_\ell/2 + \varepsilon_u/Q_\ell + \mathrm{i}\,\chi(X_u)]^2 \\ [Q_\ell/2 - \varepsilon_u/Q_\ell + \mathrm{i}\,\chi(X_u)]^2 \end{pmatrix}, \tag{1.72}$$

où

$$\mathcal{D}_\ell = \mathrm{sgn}(Q_\ell) \times \mathrm{i} \times \left|\frac{\varepsilon_u}{Q_\ell}\right| \sqrt{8\,|E_\ell|\,|V_\mathrm{g}(Q_\ell)|} \tag{1.73}$$

lorsque $\ell \in \{u|\mathrm{in}, u|\mathrm{out}\}$. Le choix de normalisation (1.73) a un intérêt double. Tout d'abord, il assure que le courant [conservé, donc tel que $J_\ell(X_u) = J_\ell(-\infty)$, $\forall X_u \in \mathbb{R}_-$]

$$\begin{aligned} J_\ell = c_u \left[(Q_\ell + m_u)\,|\mathcal{U}_\ell(x)|^2 + (Q_\ell - m_u)\,|\mathcal{W}_\ell(x)|^2\right] \\ + c_u\,\mathrm{Im}\big[\mathcal{U}_\ell^*(x)\,\partial_{X_u}\mathcal{U}_\ell(x) + \mathcal{W}_\ell^*(x)\,\partial_{X_u}\mathcal{W}_\ell(x)\big] \end{aligned} \tag{1.74}$$

transporté par l'onde non-évanescente $\ell = u|\mathrm{in}$ ou $u|\mathrm{out}$ vaut ± 1 ; plus précisément, on a $J_{u|\mathrm{in}} = -J_{u|\mathrm{out}} = 1$. D'autre part, choisir $\mathcal{D}_{u|\mathrm{in}}$ (respectivement $\mathcal{D}_{u|\mathrm{out}}$) sur l'axe imaginaire $\mathbb{R}\mathrm{i}$ car $\mathrm{sgn}(Q_{u|\mathrm{in}}) = 1$ [respectivement sur l'axe imaginaire $-\mathbb{R}\mathrm{i}$ car $\mathrm{sgn}(Q_{u|\mathrm{out}}) = -1$] assure que l'équivalent de la fonction d'onde (1.72) lorsque $X_u = x/\xi_u \to -\infty$ et $\varepsilon_u = \hbar\,\omega/(mc_u^2) \to 0$ possède la même phase que son pendant dans la configuration de profil plat ; ceci rend les formules (1.129) et (1.131) valables quelle que soit la configuration de trou noir acoustique considérée (profil plat, pic δ ou chute d'eau). Enfin, lorsque Q_ℓ est complexe, c'est-à-dire quand $\ell = u|\mathrm{eva}$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\ell = \sqrt{V_\mathrm{g}(Q_\ell)}\,\Bigg|8\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\varepsilon_u}{Q_\ell}\right)^2 E_\ell\right] + 4 \times \cos^2\theta \times \varepsilon_u\,\frac{(Q_\ell - Q_\ell^*)^2}{|Q_\ell|^2} \\ + 2\,\mathrm{i} \times \cos\theta \times \varepsilon_u\,\frac{Q_\ell - Q_\ell^*}{|Q_\ell|^2}\,[Q_\ell^2 + (Q_\ell^*)^2]\Bigg|^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.75}$$

On définit les vecteurs

$$\Xi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \overline{u}_\alpha(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\alpha X_\alpha} \\ \overline{w}_\alpha(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\alpha X_\alpha} \end{pmatrix} \tag{1.76a}$$

$$\text{et} \quad \Xi_\ell(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_\ell(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_\ell + m_\alpha)X_\alpha} \\ \mathcal{W}_\ell(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_\ell - m_\alpha)X_\alpha} \end{pmatrix}. \tag{1.76b}$$

Ξ_u décrit les excitations dans la région subsonique (c'est-à-dire à l'extérieur du trou noir acoustique) ; il s'exprime comme une combinaison linéaire de $\Xi_{u|\mathrm{in}}$, $\Xi_{u|\mathrm{out}}$ et $\Xi_{u|\mathrm{eva}}$. Le vecteur Ξ_d décrit quant à lui les excitations dans la région supersonique (c'est-à-dire à l'intérieur du trou noir acoustique) ; il s'exprime comme une combinaison linéaire de $\Xi_{d1|\mathrm{in}}$, $\Xi_{d1|\mathrm{out}}$, $\Xi_{d2|\mathrm{in}}$, $\Xi_{d2|\mathrm{out}}$ et $\Xi_{d|\mathrm{eva}}$. Parmi les modes $\Xi_\alpha(x)$, nous ne nous intéressons qu'aux modes de diffusion $\Xi_\alpha^L(x)$ initiés par les ondes entrantes $u|\mathrm{in}$, $d1|\mathrm{in}$ ou $d2|\mathrm{in}$: une onde de

Bogoliubov qui emprunte le canal d'incidence $u|\text{in}$ (respectivement $d1|\text{in}$, $d2|\text{in}$) initie le mode de diffusion $\Xi^U_{u,d}$ (respectivement $\Xi^{D1}_{u,d}$, $\Xi^{D2}_{u,d}$) ; chaque mode de diffusion consiste en une combinaison linéaire de l'excitation « in » qui le définit et des excitations réfléchies et transmises « out » correspondantes. On consultera avec profit la figure 1.10 pour se fixer les idées. Précisément, on a :

- **Mode de diffusion U (initié par l'onde $u|\text{in}$) :**

$$\Xi^U_u = \Xi_{u|\text{in}} + S_{u,u}\,\Xi_{u|\text{out}} + S^{\text{eva}}_{u,u}\,\Xi_{u|\text{eva}} \tag{1.77a}$$

$$\text{et}\quad \Xi^U_d = S_{d1,u}\,\Xi_{d1|\text{out}} + \Theta(\Omega-\omega)\,S_{d2,u}\,\Xi_{d2|\text{out}} + \Theta(\omega-\Omega)\,S^{\text{eva}}_{d,u}\,\Xi_{d|\text{eva}}. \tag{1.77b}$$

- **Mode de diffusion $D1$ (initié par l'onde $d1|\text{in}$) :**

$$\Xi^{D1}_u = S_{u,d1}\,\Xi_{u|\text{out}} + S^{\text{eva}}_{u,d1}\,\Xi_{u|\text{eva}} \tag{1.78a}$$

$$\text{et}\quad \Xi^{D1}_d = \Xi_{d1|\text{in}} + S_{d1,d1}\,\Xi_{d1|\text{out}} + \Theta(\Omega-\omega)\,S_{d2,d1}\,\Xi_{d2|\text{out}} + \Theta(\omega-\Omega)\,S^{\text{eva}}_{d,d1}\,\Xi_{d|\text{eva}}. \tag{1.78b}$$

- **Mode de diffusion $D2$ (initié par l'onde $d2|\text{in}$) :**

$$\Xi^{D2}_u = \Theta(\Omega-\omega)\,(S_{u,d2}\,\Xi_{u|\text{out}} + S^{\text{eva}}_{u,d2}\,\Xi_{u|\text{eva}}) \tag{1.79a}$$

$$\text{et}\quad \Xi^{D2}_d = \Theta(\Omega-\omega)\,(\Xi_{d2|\text{in}} + S_{d1,d2}\,\Xi_{d1|\text{out}} + S_{d2,d2}\,\Xi_{d2|\text{out}}). \tag{1.79b}$$

Les conditions de raccordement des fonctions d'onde (1.76a)–(1.76b) des excitations et de leurs dérivées premières à l'horizon s'écrivent, pour tout $L \in \{U, D1, D2\}$,

$$\Xi^L_d(0^+) = \Xi^L_u(0^-) \quad \text{et} \quad \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\xi_d}\frac{\mathrm{d}\Xi^L_d}{\mathrm{d}X_d}(0^+) - \frac{1}{\xi_u}\frac{\mathrm{d}\Xi^L_u}{\mathrm{d}X_u}(0^-)\right] = \Lambda\,\Xi^L_{u,d}(0), \tag{1.80}$$

où il faut prendre $\Lambda = 0$ lorsqu'on considère les configurations de profil plat et de chute d'eau. La résolution des trois systèmes linéaires 4×4 (1.80) est nécessaire à la détermination des coefficients $S_{u,u}$, $S^{\text{eva}}_{u,u}$, etc. apparaissant dans les équations (1.77a)–(1.77b), (1.78a)–(1.78b) et (1.79a)–(1.79b). Ces paramètres dépendent de l'énergie $\hbar\omega$ des excitations et des nombres de Mach asymptotiques m_u et m_d lorsque la configuration de trou noir considérée est la configuration de profil plat et seulement du nombre de Mach m_u lorsque le trou muet est en configuration de pic δ ou de chute d'eau. $|S_{i,j}(\omega)|^2$ correspond à la probabilité qu'une onde de Bogoliubov de pulsation ω subisse une diffusion élastique l'amenant dans l'état $i|\text{out}$ ($i \in \{u, d1, d2\}$) après qu'elle ait emprunté le canal $j|\text{in}$ ($j \in \{u, d1, d2\}$) ; les $|S_{i,j}(\omega)|^2$ représentent donc les coefficients de réflexion et de transmission à l'horizon du trou noir acoustique. L'analyse du spectre du rayonnement de Hawking (*cf.* sous-section 1.2.4), le calcul des corrélations des fluctuations de la densité et

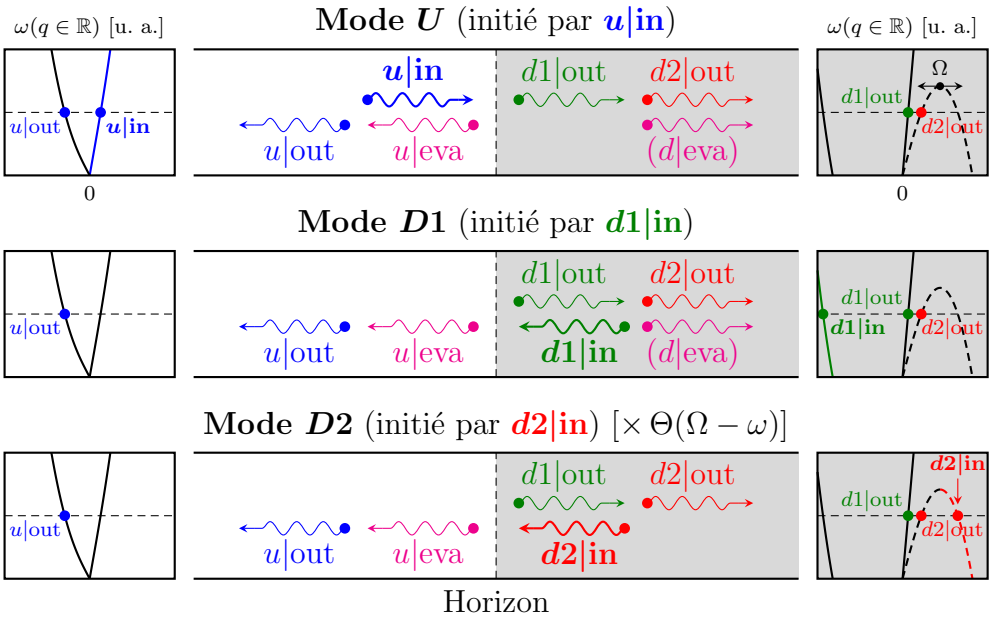


Figure 1.10 — Modes de diffusion $L = U, D1, D2$. Le mode U (respectivement $D1$, $D2$) est initié par l'onde $u|\text{in}$ (respectivement $d1|\text{in}$, $d2|\text{in}$) représentée par une épaisse flèche ondulée bleue (respectivement verte, rouge). Dans chaque cas, on indique par des pastilles colorées à quelles branches des relations de dispersion $\omega(q)$ loin en amont (à gauche) ou en aval (à droite) de l'horizon les excitations de Bogoliubov réelles (c'est-à-dire celles d'impulsion $\hbar q$ réelle) qui participent aux processus de diffusion appartiennent. Les flèches ondulées en magenta correspondent aux canaux évanescents $u|\text{eva}$ et $d|\text{eva}$. Lorsque $\omega > \Omega$, le mode de diffusion $D2$ disparaît et le canal $d2|\text{out}$ est remplacé par $d|\text{eva}$ sur les deux premiers schémas de la figure (ceux correspondant aux modes de diffusion U et $D1$). La région grisée correspond à l'intérieur du trou noir acoustique, c'est-à-dire là où l'écoulement du condensat est supersonique.

la vérification de la règle de somme de normalisation (1.107) (*cf.* sous-section 1.2.5) nécessitent de connaître les paramètres de diffusion $S_{i,j}(\omega)$ dans la limite des petites énergies ; lorsque $\varepsilon_u = \hbar\omega/(mc_u^2) \to 0^+$, nous avons montré que dans chaque configuration de trou muet (profil plat, pic δ ou chute d'eau) on a, pour tout $i \in \{u, d1, d2\}$,

$$S_{i,u}(\omega) = f_{i,u} + h_{i,u}\,\varepsilon_u + \mathcal{O}(\varepsilon_u^2), \tag{1.81a}$$

$$S_{i,d1}(\omega) = \frac{f_{i,d1}}{\sqrt{\varepsilon_u}} + h_{i,d1}\sqrt{\varepsilon_u} + \mathcal{O}(\varepsilon_u^{3/2}) \tag{1.81b}$$

$$\text{et} \quad S_{i,d2}(\omega) = \frac{f_{i,d2}}{\sqrt{\varepsilon_u}} + h_{i,d2}\sqrt{\varepsilon_u} + \mathcal{O}(\varepsilon_u^{3/2}). \tag{1.81c}$$

Dans les équations (1.81a), (1.81b) et (1.81c), les $f_{i,j}$ et $h_{i,j}$ $[(i,j) \in \{u, d1, d2\}^2]$ sont des fonctions complexes non-triviales de m_u et m_d dans la configuration de profil plat et seulement de m_u dans les configurations de pic δ et de chute d'eau. Elles vérifient les relations suivantes [les équations qui suivent servent à la détermination analytique de la température

de Hawking (1.101) et à la vérification de la règle de somme de compressibilité (1.107) ; nous ne donnons le résultat des développements à petite énergie (1.81a)–(1.81c) que dans le cas des configurations de profil plat et de chute d'eau car les formules concernant la configuration de pic δ sont trop longues] :

• **Paramètres de diffusion dans la configuration de profil plat :**

$$\mathrm{Re}(f^*_{u,d2}\, h_{u,d2}) = -\frac{m_u}{(1+m_u)^2}, \tag{1.82a}$$

$$|f_{u,d2}|^2 = 2\,\frac{m_u}{m_d}\,\frac{m_u^2}{m_d^2-m_u^2}\,\frac{1-m_u}{1+m_u}\,(m_d^2-1)^{3/2}, \tag{1.82b}$$

$$|f_{d1,d2}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^2\frac{m_d-m_u}{m_d+m_u}\,\frac{1-m_u}{1+m_u}\,(m_d^2-1)^{3/2}, \tag{1.82c}$$

$$|f_{d2,d2}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^2\frac{m_d+m_u}{m_d-m_u}\,\frac{1-m_u}{1+m_u}\,(m_d^2-1)^{3/2}, \tag{1.82d}$$

$$f^*_{u,d2}\, f_{d1,d2} = \left(\frac{m_u}{m_d}\right)^{3/2}\frac{m_u}{m_d+m_u}\,\frac{1-m_u}{1+m_u}\,(m_d^2-1)^{3/2}, \tag{1.82e}$$

$$f^*_{u,d2}\, f_{d2,d2} = -\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^{3/2}\frac{m_u}{m_d-m_u}\,\frac{1-m_u}{1+m_u}\,(m_d^2-1)^{3/2} \tag{1.82f}$$

et $$f^*_{d1,d2}\, f_{d2,d2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^2\frac{1-m_u}{1+m_u}\,(m_d^2-1)^{3/2}. \tag{1.82g}$$

• **Paramètres de diffusion dans la configuration de chute d'eau :**

$$\mathrm{Re}(f^*_{u,d2}\, h_{u,d2}) = -\frac{m_u\,(2+m_u^2)\,(1+2m_u^2)}{(1+m_u)^2\,(1+m_u+m_u^2)^2}, \tag{1.83a}$$

$$|f_{u,d2}|^2 = 2\,\frac{m_u\,(1-m_u)^{3/2}\,(1+m_u^2)^{3/2}}{(1+m_u)^{1/2}\,(1+m_u+m_u^2)^2}, \tag{1.83b}$$

$$|f_{d1,d2}|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(1-m_u)^{7/2}\,(1+m_u^2)^{3/2}}{(1+m_u)^{1/2}\,(1+m_u+m_u^2)^2}, \tag{1.83c}$$

$$|f_{d2,d2}|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(1-m_u^4)^{3/2}}{(1+m_u+m_u^2)^2}, \tag{1.83d}$$

$$f^*_{u,d2}\, f_{d1,d2} = -\frac{m_u^{1/2}\,(1-m_u)^{5/2}\,(1+m_u^2)^{3/2}}{(1+m_u)^{1/2}\,(1+m_u+m_u^2)^2}, \tag{1.83e}$$

$$f^*_{u,d2}\, f_{d2,d2} = -\frac{m_u^{1/2}\,(1+m_u)^{1/2}\,(1-m_u)^{3/2}\,(1+m_u^2)^{3/2}}{(1+m_u+m_u^2)^2} \tag{1.83f}$$

et $$f^*_{d1,d2}\, f_{d2,d2} = \frac{1}{2}\,\frac{(1+m_u)^{1/2}\,(1-m_u)^{5/2}\,(1+m_u^2)^{3/2}}{(1+m_u+m_u^2)^2}. \tag{1.83g}$$

Définissant la matrice de diffusion $\mathbf{S}(\omega)$ lorsque $\omega < \Omega$ par

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{u,u} & S_{u,d1} & S_{u,d2} \\ S_{d1,u} & S_{d1,d1} & S_{d1,d2} \\ S_{d2,u} & S_{d2,d1} & S_{d2,d2} \end{pmatrix}, \tag{1.84}$$

la conservation du courant $J_\ell = \pm 1$ transporté par les modes propres ℓ réels (c'est-à-dire ceux dont le nombre d'onde Q_ℓ appartient à $\mathbb{R}$) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{S}^\dagger \, \eta \, \mathbf{S} = \eta = \mathbf{S} \, \eta \, \mathbf{S}^\dagger, \quad \text{où} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.85}$$

Les $S^{\text{eva}}_{i,j}$ $[(i,j) \in \{u,d\} \times \{u, d1, d2\}]$ n'interviennent pas dans la définition (1.84) car les ondes qui empruntent les canaux évanescents $u|$eva et $d|$eva ne transportent aucun courant. Lorsque $\omega > \Omega$, le mode de diffusion $D2$ disparaît [*cf.* équations (1.79a) et (1.79b)], l'onde réelle $d2|$out est remplacée par l'onde évanescente $d|$eva dans les modes de diffusion U et $D1$ [*cf.* équations (1.77b) et (1.78b), respectivement] et la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ devient 2×2,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{u,u} & S_{u,d1} \\ S_{d1,u} & S_{d1,d1} \end{pmatrix}, \quad \text{et unitaire :} \quad \mathbf{S}^\dagger \, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \, \mathbf{S}^\dagger. \tag{1.86}$$

La petite fluctuation quantique $\hat{\psi}(x,t) = \hat{\Psi}(x,t) - \Psi(x)$ qui décrit (dans la représentation de Heisenberg) les excitations élémentaires du condensat de fonction d'onde $\Psi(x)$ se développe sur les modes de diffusion comme

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha x} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{L \in \{U, D1\}} \Big[\overline{u}_L(x,\omega) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \hat{a}_L(\omega) + \overline{w}^*_L(x,\omega) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \hat{a}^\dagger_L(\omega) \Big] \\ + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha x} \int_0^\Omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{2\pi}} \Big[\overline{u}_{D2}(x,\omega) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \hat{a}^\dagger_{D2}(\omega) + \overline{w}^*_{D2}(x,\omega) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \hat{a}_{D2}(\omega) \Big], \end{aligned} \tag{1.87}$$

où $\hat{a}_L(\omega)$ [respectivement $\hat{a}^\dagger_L(\omega)$] détruit (respectivement crée) une excitation de pulsation $\omega > 0$ dans l'un des trois modes de diffusion (U, $D1$ ou $D2$). Les opérateurs quasi-particulaires $\hat{a}_L(\omega)$ et $\hat{a}^\dagger_L(\omega)$ obéissent aux règles de commutation bosoniques

$$[\hat{a}_L(\omega), \hat{a}^\dagger_{L'}(\omega')] = \delta_{L,L'} \, \delta(\omega - \omega') \tag{1.88a}$$

$$\text{et} \quad [\hat{a}_L(\omega), \hat{a}_{L'}(\omega')] = 0 = [\hat{a}^\dagger_L(\omega), \hat{a}^\dagger_{L'}(\omega')]. \tag{1.88b}$$

Comparativement aux modes U et $D1$, le mode de diffusion $D2$ (généré par l'onde de norme négative $d2|$in) est quantifié d'une façon non-standard : dans ce cas, comme le montre l'équation (1.87), les rôles joués par les annihilateurs et les créateurs sont échangés ; on est obligé de faire ce choix de quantification pour que la fluctuation $\hat{\psi}(x,t)$ soit un opérateur bosonique, c'est-à-dire un opérateur tel que

$$[\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^\dagger(x',t)] = \delta(x - x') \tag{1.89a}$$

$$\text{et} \quad [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}(x',t)] = 0 = [\hat{\psi}^\dagger(x,t), \hat{\psi}^\dagger(x',t)]. \tag{1.89b}$$

1.2.4 Signal de Hawking à un corps

Le signal de Hawking correspond à l'émission d'un rayonnement dirigé de l'intérieur vers l'extérieur du trou noir [56, 57]. Dans un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel, le courant d'énergie associé à l'émission d'excitations élémentaires s'écrit [13]

$$\hat{\Pi}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_t\hat{\Psi}^\dagger(x,t)\,\partial_x\hat{\Psi}(x,t) + \text{c.h.}, \tag{1.93}$$

où « c.h. » désigne le conjugué hermitien du premier terme dans le membre de droite de l'équation (1.93). Dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des fluctuations quantiques et tirant parti de la décomposition (1.87), il est possible d'exprimer le courant moyen $\Pi(x) = \langle\hat{\Pi}(x,t)\rangle$ (qui est indépendant du temps dans les configurations stationnaires de trous noirs acoustiques étudiées dans ce chapitre) sous la forme

$$\Pi(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\hbar\,\omega\,J(x,\omega). \tag{1.94}$$

Dans l'équation (1.94), $J(x,\omega)$ [et donc $\Pi(x)$] peut s'écrire comme la somme d'une contribution $J_0(x,\omega)$ [$\Pi_0(x)$] non-nulle à température nulle [c'est-à-dire dans le cas où le nombre moyen $n_L(\omega) = \langle\hat{a}_L^\dagger(\omega)\,\hat{a}_L(\omega)\rangle$ de quasi-particules qui occupent le mode de diffusion L vaut zéro] et d'une contribution « thermique » $J_T(x,\omega)$ [$\Pi_T(x)$] qui s'annule au zéro absolu : $J(x,\omega) = J_0(x,\omega) + J_T(x,\omega)$ [$\Pi(x) = \Pi_0(x) + \Pi_T(x)$], où

$$\begin{aligned} J_0(x,\omega) = &-\frac{\hbar}{2m}\sum_{L\in\{U,D1\}}\overline{w}_L^*(x,\omega)\,(k_\alpha + \mathrm{i}\partial_x)\,\overline{w}_L(x,\omega) \\ &+ \Theta(\Omega-\omega)\,\frac{\hbar}{2m}\,\overline{u}_{D2}^*(x,\omega)\,(k_\alpha - \mathrm{i}\partial_x)\,\overline{u}_{D2}(x,\omega) + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{1.95a}$$

$$\text{et}\quad J_T(x,\omega) = \sum_{L\in\{U,D1\}} J_L(x,\omega)\,n_L(\omega) + \Theta(\Omega-\omega)\,J_{D2}(x,\omega)\,n_{D2}(\omega), \tag{1.95b}$$

et où, pour tout $L \in \{U, D1, D2\}$,

$$J_L(x,\omega) = \frac{\hbar}{2m}\Big[\overline{u}_L^*(x,\omega)\,(k_\alpha - \mathrm{i}\partial_x)\,\overline{u}_L(x,\omega) - \overline{w}_L^*(x,\omega)\,(k_\alpha + \mathrm{i}\partial_x)\,\overline{w}_L(x,\omega)\Big] + \text{c.c.} \tag{1.96}$$

13. La densité lagrangienne d'un gaz quasi-unidimensionnel dilué de bosons ultra-froids s'écrit

$$\mathscr{L}(x,t) = -\hbar\,\mathrm{Im}(\Psi^*\partial_t\Psi) - \frac{\hbar^2}{2m}|\partial_x\Psi|^2 - \frac{g}{2}|\Psi|^4. \tag{1.90}$$

Le courant d'énergie (1.93) correspond à la composante $(1,0)$ du tenseur énergie-impulsion

$$\mathscr{T}_{\mu,\nu}(x,t) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi^*)}\,\partial_\nu\Psi^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\,\partial_\nu\Psi - \delta_{\mu,\nu}\,\mathscr{L} \quad (\mu,\nu = 0,1 \text{ « = » } t,x). \tag{1.91}$$

En effet,

$$\mathscr{T}_{1,0}(x,t) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_x\Psi^*)}\,\partial_t\Psi^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_x\Psi)}\,\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_t\Psi^*\,\partial_x\Psi + \text{c.c.}, \tag{1.92}$$

qui est la version non-quantifiée de la formule (1.93).

Lorsque x est loin de l'horizon dans la région subsonique ($x/\xi_u \to -\infty$), les formules (1.77a)–(1.79b) et (1.95a) conduisent à

$$\begin{aligned} J_0(\omega) = {} & \frac{\hbar}{2m}\Big[(q_{u|\mathrm{in}} - k_u)\,|\mathcal{W}_{u|\mathrm{in}}|^2 + (q_{u|\mathrm{out}} - k_u)\,|\mathcal{W}_{u|\mathrm{out}}|^2\Big] \\ & + \Theta(\Omega-\omega)\,\frac{\hbar}{2m}\,|S_{u,d2}|^2\,\Big[(q_{u|\mathrm{out}} + k_u)\,|\mathcal{U}_{u|\mathrm{out}}|^2 + (q_{u|\mathrm{out}} - k_u)\,|\mathcal{W}_{u|\mathrm{out}}|^2\Big] \\ & + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{1.97}$$

De longs calculs montrent que les deux premiers monômes dans le membre de droite de l'équation (1.97) ne participent pas à l'évaluation de $\Pi_0 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\hbar\,\omega\,J_0(\omega)$ car leur intégrale sur $\omega \in \mathbb{R}_+$ s'annule. De plus, puisque $(q_{u|\mathrm{out}} + k_u)\,|\mathcal{U}_{u|\mathrm{out}}|^2 + (q_{u|\mathrm{out}} - k_u)\,|\mathcal{W}_{u|\mathrm{out}}|^2 = J_{u|\mathrm{out}}/(\xi_u c_u)$, $J_{u|\mathrm{out}} = -1$ et $\xi_u = \hbar/(mc_u)$, on aboutit finalement à

$$\Pi_0 = -\int_0^\Omega \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\hbar\,\omega\,|S_{u,d2}(\omega)|^2. \tag{1.98}$$

Le signe moins dans l'équation (1.98) indique que le courant d'énergie est dirigé vers $-\infty$. Si maintenant on considère que x est loin de l'horizon dans la région supersonique ($x/\xi_d \to +\infty$), on montre que l'on obtient le même résultat qu'en (1.98), ce qui concorde avec le fait que le flux d'énergie est conservé dans une configuration où l'écoulement est stationnaire. Notons d'emblée que le courant d'énergie Π_0 au zéro absolu s'annule en l'absence de trou noir puisqu'alors $S_{u,d2} = 0$. *A contrario*, en présence d'un horizon acoustique, l'intégrale (1.98) donne un résultat fini qui correspond au signal de Hawking : le trou noir acoustique rayonne de l'énergie, même lorsque la température du système est rigoureusement nulle. Cette remarque, en plus de la forme spécifique du flux Π_0 donné par l'équation (1.98), montre que l'on a besoin de deux ingrédients pour obtenir un rayonnement de Hawking au zéro absolu : (i) un mode $d2|\mathrm{in}$ et (ii) l'ouverture du canal de transmission $d2|\mathrm{in} \longrightarrow u|\mathrm{out}$, c'est-à-dire un coefficient de transmission $|S_{u,d2}|^2$ non-nul. La condition (i) n'est remplie que parce que la relation de dispersion des excitations élémentaires dans un écoulement supersonique s'infléchit quadratiquement des positifs vers $-\infty$ aux grandes impulsions (*cf.* sous-section 1.2.3). Le mode incident $d2|\mathrm{in}$ correspond à un canal de diffusion dans lequel les ondes ont une vitesse de groupe plus grande que V_d dans le référentiel où le condensat est au repos ; il n'est donc pas surprenant que le mode $d2|\mathrm{in}$ participe au rayonnement de Hawking puisqu'il est capable de s'échapper du trou noir en se propageant à contre-courant dans la région supersonique. De ce fait, l'analogie entre l'écoulement sub/supersonique d'un condensat de Bose et les trous noirs gravitationnels est limitée. En effet, le point (i) n'est certainement pas vérifié dans le cas gravitationnel puisque la vitesse de groupe des photons (la vitesse de la lumière) est une constante ; dans ce cas, les canaux entrants (« in ») et les canaux sortants (« out ») ne sont pas en nombre égal et alors on ne peut pas obtenir une description stationnaire du rayonnement de Hawking (on doit en fait tenir compte de la dynamique de la formation de l'horizon des évènements).

À l'aide des équations (1.77a)–(1.79b) et (1.95b)–(1.96), la contribution « thermique » à $J(x,\omega)$ peut être réécrite sous la forme (lorsque $x/\xi_u \to -\infty$ ou bien quand $x/\xi_d \to +\infty$)

$$J_T(\omega) = |S_{u,d1}|^2\,[n_U(\omega) - n_{D1}(\omega)] - \Theta(\Omega-\omega)\,|S_{u,d2}|^2\,[n_U(\omega) + n_{D2}(\omega)]. \tag{1.99}$$

En l'absence de trou noir, le terme proportionnel à $|S_{u,d2}|^2$ dans l'équation (1.99) disparaît. Par conséquent, à l'équilibre thermique, c'est-à-dire quand $n_U(\omega) = n_{D1}(\omega)$ est une loi de Bose de la forme $n_T(\omega) = [\mathrm{e}^{\hbar\omega/(k_\mathrm{B}T)} - 1]^{-1}$, on a $J_T = 0$. Ce résultat démontre qu'il n'existe aucun rayonnement de Hawking dans une configuration connectant deux régions asymptotiquement subsoniques à l'équilibre thermique. Dans le cas où un horizon acoustique est présent, une configuration à température finie peut être atteinte d'une manière dont les détails sont exposés en références [12] et [30] : on branche adiabatiquement la configuration de trou muet en partant d'un système initialement uniformément subsonique et à l'équilibre thermique ; la relation de dispersion des excitations dans la région supersonique s'en trouve modifiée mais les nombres d'occupation des modes de diffusion restent inchangés par la procédure (*cf.* références [93] et [117]). Dans ce cas, les occupations $n_{D1}(\omega)$ et $n_{D2}(\omega)$ sont régulières aux faibles énergies $\hbar\omega$ et alors, étant donnée l'équation (1.99), on trouve que la contribution thermique $\Pi_T = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\hbar\omega\,J_T(\omega)$ au flux dénergie (1.94) est finie.

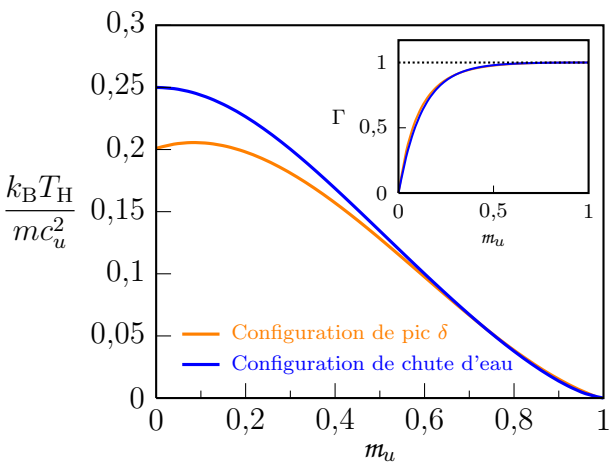


Figure 1.11 — Température de Hawking T_H (en unités de mc_u^2/k_B) en fonction du nombre de Mach $m_u = V_u/c_u$ de l'écoulement loin en amont de l'horizon dans les configurations de pic δ (en orange) et de chute d'eau (en bleu). L'encart représente le facteur de corps gris Γ en fonction de m_u dans ces deux configurations (on réutilise ici le code de couleurs du graphique principal).

L'équation (1.98) définit le flux d'excitations élémentaires Π_0 en provenance de l'horizon dans une configuration de trou noir acoustique à température nulle ; le spectre d'émission correspondant est clairement donné par le coefficient de transmission $|S_{u,d2}|^2$. Peut-on décrire ce spectre de rayonnement par une température effective ? Autrement dit, peut-on approximer $|S_{u,d2}(\omega)|^2$ par un spectre planckien (c'est-à-dire de corps noir) — ou plutôt quasi-planckien (c'est-à-dire de corps gris) — du type

$$\Gamma\, n_{T_\mathrm{H}}(\omega) = \frac{\Gamma}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{H}}\right) - 1}, \qquad (1.100)$$

où Γ serait le facteur de corps gris et T_H la température effective du bain de quasiparticules émises par le trou noir ? L'existence du facteur Γ est due au fait qu'on ne peut pas toujours ajuster $|S_{u,d2}|^2$ par un spectre purement planckien : dans la plupart des cas Γ est proche de 1 mais cela n'est pas toujours vrai, comme le montre l'encart de la figure 1.11. Bien évidemment, l'identification de $|S_{u,d2}|^2$ par une loi thermique ne peut qu'être approximative car $|S_{u,d2}(\omega)|^2$ est nul pour tout $\omega > \Omega$ tandis que $\Gamma\, n_{T_\mathrm{H}}(\omega)$ est fini sur tout $\mathbb{R}_+$. Néanmoins, on peut essayer d'établir la meilleure approximation possible en identifiant les coefficients du développement $\Gamma\, n_{T_\mathrm{H}}(\hbar\omega \ll mc_u^2) = \Gamma\,[k_\mathrm{B}T_\mathrm{H}/(\hbar\omega) - 1/2 + \mathcal{O}(\omega)]$ à ceux de $|S_{u,d2}(\hbar\omega \ll mc_u^2)|^2$ sachant que $S_{u,d2}(\hbar\omega \ll mc_u^2) = f_{u,d2}/\sqrt{\hbar\omega/(mc_u^2)} + h_{u,d2}\sqrt{\hbar\omega/(mc_u^2)} + \mathcal{O}(\omega^{3/2})$.

On trouve aisément

$$\Gamma = -4\,\mathrm{Re}(f_{u,d2}^{*}\,h_{u,d2}) \quad \text{et} \quad \frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{H}}{mc_u^2} = \frac{|f_{u,d2}|^2}{\Gamma}. \tag{1.101}$$

Les expressions analytiques de $\mathrm{Re}(f_{u,d2}^{*}\,h_{u,d2})$ et $|f_{u,d2}|^2$ sont données par les équations (1.82a)–(1.82b) (dans la configuration de profil plat) et (1.83a)–(1.83b) (dans la configuration de chute d'eau) ; en en tirant parti, on obtient les formules suivantes :

$$\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{H}}{mc_u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{m_u^2}{m_d}\,\dfrac{(1-m_u^2)(m_d^2-1)^{3/2}}{m_d^2-m_u^2} & \text{(configuration de profil plat)}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{(1-m_u^4)^{3/2}}{(2+m_u^2)(1+2m_u^2)} & \text{(configuration de chute d'eau)}. \end{cases} \tag{1.102}$$

L'expression analytique de la température de Hawking d'un trou noir acoustique en configuration de pic δ est trop lourde pour que nous l'écrivions en son entier. Comme dans le cas d'un trou muet en configuration de chute d'eau, cette dernière ne dépend que du nombre de Mach m_u loin en amont de l'horizon acoustique. Son allure en fonction de m_u est présentée à la figure 1.11 et est mise en comparaison avec celle que l'on obtient dans une configuration de chute d'eau. En examinant la figure, on remarque tout d'abord que $T_\mathrm{H} \to 0$ lorsque $m_u \to 1$; ce résultat est naturel puisque l'horizon disparaît quand m_u tend vers l'unité. On constate aussi que T_H reste finie lorsque $m_u \to 0$ mais cette limite est singulière dans le sens où elle correspond à un écoulement très particulier (et certainement inaccessible) ; par exemple, dans le cas d'une configuration de chute d'eau, on montre qu'un écoulement tel que $m_u = 0$ n'existe que si l'amplitude de la marche de potentiel est infinie ($U_0 = \infty$) et qu'il est dans ce cas caractérisé par une densité nulle ($n_d = 0$) et une vitesse infinie ($m_d = \infty$) en aval de l'horizon. On voit enfin que $\Gamma \to 0$ quand $m_u \to 0$, ce qui signifie que le trou noir ne rayonne pas d'énergie lorsque le fluide est au repos loin en amont de l'horizon. Étant données les équations (1.101), il ne reste plus qu'à vérifier le degré de précision de l'approximation de $|S_{u,d2}(\omega)|^2$ par la loi thermique $\Gamma\,n_{T_\mathrm{H}}(\omega)$ sur toute la fenêtre d'émission $[0,\Omega]$ (comme par exemple les auteurs des références [92] et [93] l'ont fait). Il

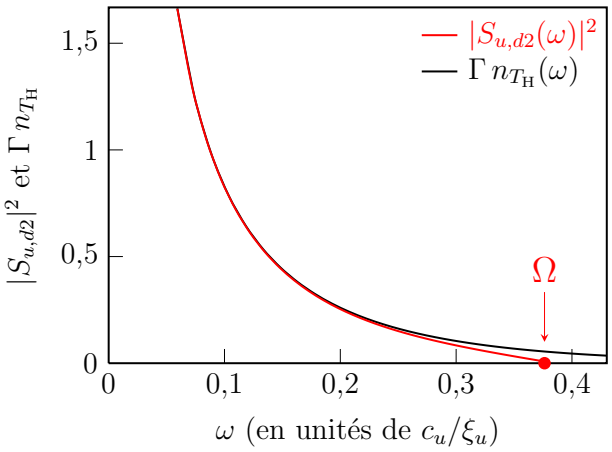


Figure 1.12 — Spectre du rayonnement de Hawking dans la configuration de pic δ. La courbe rouge (respectivement noire) représente le coefficient de transmission $|S_{u,d2}|^2$ (respectivement le spectre de corps gris $\Gamma\,n_{T_\mathrm{H}}$) en fonction de $(\xi_u/c_u) \times \omega$. Les tracés sont effectués lorsque $m_u = 0{,}5$. Dans ce cas, $\Gamma \simeq 0{,}977$ et $k_\mathrm{B}T_\mathrm{H}/(mc_u^2) \simeq 0{,}128$. L'écart $||S_{u,d2}(\omega)|^2 - \Gamma\,n_{T_\mathrm{H}}(\omega)|$ est maximal en $\omega = \Omega$ (là où $S_{u,d2}$ s'annule) et est dans ce cas voisin de 0,060 [$(\xi_u/c_u) \times \Omega \simeq 0{,}369$ quand $m_u = 0{,}5$].

s'avère que l'accord est relativement bon, comme le montre la figure 1.12, obtenue dans le cas d'une configuration de pic δ. On a vérifié que cette approximation est également raisonnablement bonne dans le cas des configurations de profil plat et de chute d'eau, ce qui légitime la définition d'une température de Hawking dans les trois configurations de trous noirs acoustiques étudiées dans ce chapitre.

On tire des équations (1.102) l'ordre de grandeur suivant : $k_\mathrm{B}T_\mathrm{H}/(mc_u^2) \sim 0{,}1$, soit, pour un condensat de Bose–Einstein typique, $T_\mathrm{H} \sim 10\,\mathrm{nK}$. Il s'ensuit que le signal de Hawking doit être masqué par le bruit thermique inhérent aux expériences typiques d'atomes ultra-froids, dont la température (*grosso modo* donnée par le potentiel chimique mc_u^2) est de l'ordre de 100 nK. C'est la raison pour laquelle les corrélations de densité ont été proposées dans les références [12] et [30] comme des outils permettant d'identifier clairement l'effet Hawking. L'étude des corrélations à deux corps des fluctuations quantiques de la densité autour d'horizons acoustiques occupera les pages de la sous-section suivante.

1.2.5 Signal de Hawking à deux corps dans l'espace réel

La matrice densité à deux corps connexe est définie par

$$\begin{aligned} g^{(2)}(x,x') = {} & \langle \hat\Psi^\dagger(x,t)\,\hat\Psi^\dagger(x',t)\,\hat\Psi(x,t)\,\hat\Psi(x',t)\rangle \\ & - \langle \hat\Psi^\dagger(x,t)\,\hat\Psi(x,t)\rangle\langle \hat\Psi^\dagger(x',t)\,\hat\Psi(x',t)\rangle. \end{aligned} \tag{1.103}$$

$g^{(2)}$ ne dépend pas du temps car l'écoulement du condensat de Bose–Einstein est stationnaire. Dans l'équation (1.103), l'opération $\langle\cdot\rangle$ désigne la moyenne dans l'état fondamental ou bien, par exemple, dans l'ensemble grand-canonique. Rappelons que $g^{(2)}$ est reliée aux corrélations à deux points de l'opérateur densité $\hat n(x,t) = \hat\Psi^\dagger(x,t)\,\hat\Psi(x,t)$. En effet, tirant parti de la règle de commutation bosonique à temps égaux $[\hat\Psi(x,t), \hat\Psi^\dagger(x',t)] = \delta(x-x')$, l'équation (1.103) peut être réécrite sous la forme

$$g^{(2)}(x,x') = \langle \hat n(x,t)\,\hat n(x',t)\rangle - \langle \hat n(x,t)\rangle\langle \hat n(x',t)\rangle - \delta(x-x')\,\langle \hat n(x,t)\rangle. \tag{1.104}$$

Le dernier terme dans le membre de droite de l'équation (1.104) témoigne de la non-pénétrabilité réciproque des particules du fluide de Bose, considéré comme une « assemblée compacte de boules solides » [81].

Dans le cas d'un système à l'équilibre thermique dans l'ensemble grand-canonique, la densité moyenne $\langle \hat n(x,t)\rangle$ se calcule comme

$$n(x) = \langle \hat n(x,t)\rangle = \frac{\mathsf{Tr}\big[\hat n(x,t)\,\mathrm{e}^{-(\hat H-\mu\hat N)/(k_\mathrm{B}T)}\big]}{\mathsf{Tr}\big[\mathrm{e}^{-(\hat H-\mu\hat N)/(k_\mathrm{B}T)}\big]}, \tag{1.105}$$

où $\hat H - \mu\hat N$ est le hamiltonien grand-canonique et $\hat N$ l'opérateur qui compte le nombre de bosons. Si l'on dérive l'expression (1.105) par rapport au potentiel chimique μ, on obtient

$$k_\mathrm{B}T\,\frac{\partial n(x)}{\partial\mu} = \langle \hat n(x,t)\,\hat N\rangle - \langle \hat n(x,t)\rangle\langle \hat N\rangle, \tag{1.106}$$

et puisque $\hat{N} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, \hat{n}(x',t)$, par définition même, l'équation (1.104) et l'identité (1.106) combinées conduisent à la règle de somme suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g^{(2)}(x,x') = -n(x) + k_{\mathrm{B}}T\, \frac{\partial n(x)}{\partial \mu}. \tag{1.107}$$

Lorsque le système est homogène (c'est-à-dire lorsque sa densité est uniforme), cette règle de somme est un résultat de thermodynamique bien connu [81] ; dans ce cas, on peut en effet montrer que l'équation (1.107) est équivalente à la règle de somme de compressibilité (dont la définition est par exemple donnée en référence [110]). La formule (1.107) est une généralisation de cette règle de somme aux systèmes inhomogènes ; elle a été utilisée en référence [8] afin de révéler la transition d'un gaz de Bose du régime de gaz parfait vers le régime de quasi-condensation et en référence [139] afin de proposer une thermométrie universelle pour les simulations quantiques. La vérification de la règle de somme (1.107) dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des fluctuations est gage de la validité de cette théorie et donc de la pertinence de sa mise en œuvre dans le cadre de notre étude de trous noirs artificiels dans les condensats unidimensionnels. Dans cette sous-section, nous calculerons les contributions dominantes au corrélateur $g^{(2)}$ et expliquerons comment nous en avons tiré parti pour montrer que la règle de somme (1.107) à température nulle est en effet vérifiée lorsque $x/\xi_u \to -\infty$ ou $x/\xi_d \to +\infty$ (c'est-à-dire lorsque x est loin de l'horizon à l'extérieur ou l'intérieur du trou muet, respectivement).

Utilisant la décomposition de Bogoliubov (1.44), on obtient à l'ordre dominant

$$g^{(2)}(x,x') = \Psi(x)\,\Psi^*(x')\,\langle \hat{\psi}^\dagger(x,t)\,\hat{\psi}(x',t)\rangle + \Psi(x)\,\Psi(x')\,\langle \hat{\psi}^\dagger(x,t)\,\hat{\psi}^\dagger(x',t)\rangle + \text{c.c.}, \tag{1.108}$$

où $\Psi(x) = \sqrt{n_\alpha}\exp(\mathrm{i}k_\alpha x)\,\phi_\alpha(x)$ est la fonction d'onde du condensat et $\hat{\psi}(x,t)$ le champ quantique qui décrit les fluctuations autour du paramètre d'ordre. On rappelle que $\alpha = u$ lorsque $x < 0$ et $\alpha = d$ quand $x > 0$. La fonction $\phi_u(x)$ vaut 1 dans la configuration de profil plat et est donnée par l'équation (1.52) dans les configurations de pic δ et de chute d'eau ; $\phi_d(x)$ est quant à elle donnée par l'équation (1.48). Tirant parti de la décomposition (1.87), on montre (comme en référence [117]) que l'équation (1.108) peut se réécrire sous la forme

$$g^{(2)}(x,x') = \sqrt{n_\alpha n_\beta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\gamma(x,x',\omega), \tag{1.109}$$

où $\alpha = \binom{u}{d}$ si $x \lesseqgtr 0$ et $\beta = \binom{u}{d}$ si $x' \lesseqgtr 0$, et où la fonction $\gamma(x,x',\omega)$ peut être exprimée comme la somme d'une contribution $\gamma_0(x,x',\omega)$ non-nulle au zéro absolu [c'est-à-dire dans le cas où $n_L(\omega) = \langle \hat{a}_L^\dagger(\omega)\,\hat{a}_L(\omega)\rangle = 0$] et d'une contribution « thermique » $\gamma_T(x,x',\omega)$ qui s'annule à température nulle,

$$\gamma(x,x',\omega) = \gamma_0(x,x',\omega) + \gamma_T(x,x',\omega), \tag{1.110}$$

en conséquence de quoi

$$g^{(2)}(x,x') = g_0^{(2)}(x,x') + g_T^{(2)}(x,x'), \tag{1.111a}$$

$$\text{où}\quad g_{0,T}^{(2)}(x,x') = \sqrt{n_\alpha n_\beta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\gamma_{0,T}(x,x',\omega). \tag{1.111b}$$

Définissant $\tilde{u}_L(x,\omega) = \phi_\alpha^*(x)\,\overline{u}_L(x,\omega)$, $\tilde{w}_L(x,\omega) = \phi_\alpha(x)\,\overline{w}_L(x,\omega)$ et $\tilde{r}_L(x,\omega) = \tilde{u}_L(x,\omega) + \tilde{w}_L(x,\omega)$, on montre que

$$\begin{aligned}\gamma_0(x,x',\omega) &= \sum_{L\in\{U,D1\}} \tilde{w}_L(x,\omega)\,\tilde{r}_L^*(x',\omega) \\ &\quad + \Theta(\Omega-\omega)\,\tilde{u}_{D2}(x,\omega)\,\tilde{r}_{D2}^*(x',\omega) + \text{c.c.} \qquad (1.112a)\\ \text{et}\quad \gamma_T(x,x',\omega) &= \sum_{L\in\{U,D1\}} \tilde{r}_L(x,\omega)\,\tilde{r}_L^*(x',\omega)\,n_L(\omega) \\ &\quad + \Theta(\Omega-\omega)\,\tilde{r}_{D2}(x,\omega)\,\tilde{r}_{D2}^*(x',\omega)\,n_{D2}(\omega) + \text{c.c.} \qquad (1.112b)\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, au lieu de calculer le corrélateur $g^{(2)}$, il nous arrivera d'établir les résultats pour la fonction de corrélation adimensionnée $G^{(2)}$ définie par

$$G^{(2)}(x,x') = \frac{g^{(2)}(x,x')}{\langle\hat{\Psi}^\dagger(x,t)\,\hat{\Psi}(x,t)\rangle\langle\hat{\Psi}^\dagger(x',t)\,\hat{\Psi}(x',t)\rangle}, \qquad (1.113)$$

qui, loin de l'horizon acoustique et dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires, se réduit à $G^{(2)}(x,x') = g^{(2)}(x,x')/(n_\alpha n_\beta)$, où $g^{(2)}$ est dans ce cas donnée par (1.108) et déterminée à l'aide des équations (1.111a)–(1.111b) et (1.112a)–(1.112b).

Avant que nous nous attaquions à la détermination analytique de $g_0^{(2)}(x,x')$ [14] dans le cas où l'écoulement du condensat présente un horizon acoustique, il est important (comme nous le verrons ensuite) de rappeler le résultat obtenu en l'absence d'horizon dans le cas où le condensat unidimensionnel est uniforme (de densité $n_u = \text{cste}$) et se déplace de la gauche vers la droite à vitesse constante $V_u < c_u$. En l'absence de trou noir, l'équation (1.112a) devient [15]

$$\begin{aligned}\gamma_0(x,x',\omega) &= \sum_{\ell\in\{u|\text{in},u|\text{out}\}} \tilde{w}_\ell(x,\omega)\,\tilde{r}_\ell^*(x',\omega) + \text{c.c.} \qquad (1.114)\\ &= \sum_{\ell\in\{u|\text{in},u|\text{out}\}} \frac{1}{2|V_\text{g}(Q_\ell)|}\left(\frac{Q_\ell^2}{2|E_\ell|}-1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_\ell(x-x')/\xi_u} + \text{c.c.}, \qquad (1.115)\end{aligned}$$

et alors

$$G_0^{(2)}(x,x') = \frac{1}{n_u}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\gamma_0(x,x',\omega) = \frac{1}{\xi_u n_u}\,F\left(\frac{x-x'}{\xi_u}\right), \qquad (1.116)$$

où

$$F(z) = -\frac{1}{\pi z}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{\sin(2z\,t)}{(t^2+1)^{3/2}} = I_1(2|z|) - \mathbf{L}_{-1}(2z). \qquad (1.117)$$

14. Nous focaliserons notre attention sur le calcul des corrélations à température nulle mais l'interprétation physique des résultats que nous présenterons bientôt ne change pas lorsque les effets de température finie sont pris en compte (bien que les calculs soient dans ce cas plus longs à mettre en œuvre).

15. Dans ce cas, les modes de Bogoliubov mis en jeu sont identiques aux modes $u|\text{in}$ et $u|\text{out}$ identifiés en sous-section 1.2.3 et la matrice de diffusion est l'identité d'ordre 2 : $\mathbf{S}(\omega) = \text{diag}(1,1)$.

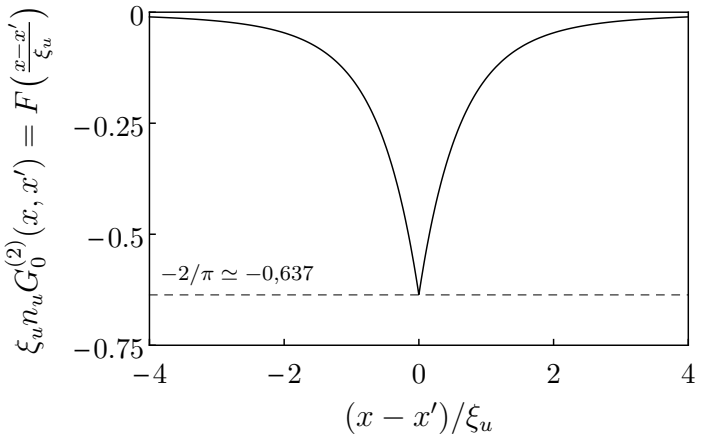


Figure 1.13 — Fonction de corrélation $\xi_u n_u G_0^{(2)}(x,x')$ telle que donnée par les équations (1.116) et (1.117). Dans un quasi-condensat unidimensionnel homogène au zéro absolu, les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la densité sont de courte portée : $G_0^{(2)}(x,x')$ devient négligeable lorsque la distance $|x-x'|$ séparant deux fluctuations de densité devient typiquement plus grande que ξ_u.

C'est le résultat escompté pour un condensat de Bose–Einstein quasi-unidimensionnel (*cf.*, par exemple, [35] et les références qui y sont citées) : $\xi_u n_u G_0^{(2)}(x,x')$ est une fonction universel de $(x-x')/\xi_u$ qui peut s'exprimer en termes de la fonction de Bessel modifiée de première espèce I_1 et de la fonction de Struve modifiée $\mathbf{L}_{-1}$; en particulier, $\xi_u n_u G_0^{(2)}(x,x'=x) = F(0) = -2/\pi$ [47]. La figure 1.13 donne une représentation graphique de la fonction spéciale F. Notons finalement que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z\, F(z) = -1$. Ceci mène à

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g_0^{(2)}(x,x') = -n_u, \tag{1.118}$$

formule qui concorde parfaitement avec la règle de somme (1.107) lorsque $T=0$. Dans les configurations de trous noirs acoustiques étudiées dans ce chapitre, le signal de corrélation principal est similaire au signal de courte portée dont la représentation graphique est donnée à la figure 1.13. Néanmoins, nous allons voir que (i) son allure est légèrement modifiée en présence d'un horizon acoustique et qu'en parallèle (ii) de nouveaux signaux de corrélation à longue portée apparaissent ; ces derniers s'interprètent comme résultant de l'émission de phonons corrélés [12, 30].

Dans ce paragraphe, nous établissons les formules donnant les corrélations à deux corps des fluctuations quantiques de la densité au zéro absolu lorsque l'écoulement du condensat présente un horizon acoustique. Par mesure de simplicité, nous ne considérons que le cas où x et x' sont loin de l'horizon : ceci permet (i) de ne pas tenir compte des contributions évanescentes aux équations (1.77a)–(1.79b) et (ii) d'éviter de traiter la dépendance en position de la densité moyenne dans les configurations de pic δ et de chute d'eau. Ces résultats ont déjà été en partie obtenus en référence [117] (quand x et x' sont loin l'un de l'autre) ; dans ce chapitre, nous généralisons les résultats de la référence [117] aux cas où $x, x' \ll -\xi_u$ (x et x' sont loin à l'extérieur du trou noir), $x \ll -\xi_u$ et $x' \gg \xi_d$ (x et x' sont

loin à l'extérieur et à l'intérieur du trou noir, respectivement), $x \gg \xi_d$ et $x' \ll -\xi_u$ (x et x' sont loin à l'intérieur et à l'extérieur du trou noir, respectivement), puis $x, x' \gg \xi_d$ (x et x' sont loin à l'intérieur du trou noir). Nous ne donnons ici que les contributions les plus importantes à γ_0, c'est-à-dire celles dont l'amplitude est la plus grande et utiles à la vérification de la règle de somme (1.107) lorsque $T = 0$ et quand x est loin de l'horizon à l'extérieur ou à l'intérieur du trou muet. Notons qu'une approche similaire a déjà été développée en référence [24] pour étudier les fluctuations de la phase dans un système analogue, avec une description des processus de diffusion cependant moins élaborée que celle présentée en sous-section 1.2.3. Afin de rendre les formules compactes, on introduit les notations $\widetilde{\mathcal{U}}_\ell$, $\widetilde{\mathcal{W}}_\ell$ et $\widetilde{\mathcal{R}}_\ell$ définies par

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_\ell(x,\omega) \\ \tilde{w}_\ell(x,\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{U}}_\ell(x,\omega) \\ \widetilde{\mathcal{W}}_\ell(x,\omega) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_\ell x} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{R}}_\ell = \widetilde{\mathcal{U}}_\ell + \widetilde{\mathcal{W}}_\ell, \tag{1.119}$$

où, rappelons-le, $\tilde{u}_\ell(x,\omega) = \phi_\alpha^*(x)\,\overline{u}_\ell(x,\omega)$ et $\tilde{w}_\ell(x,\omega) = \phi_\alpha(x)\,\overline{w}_\ell(x,\omega)$.

• $x/\xi_u \to -\infty$ et $x'/\xi_u \to -\infty$ (x et x' sont loin de l'horizon à l'extérieur du trou noir acoustique).— On considère tout d'abord le cas où x et x' sont tous les deux loin de l'horizon dans la région subsonique, c'est-à-dire loin à l'extérieur du trou noir acoustique. Utilisant les équations (1.77a)–(1.79b), on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_0(x,x',\omega) = {} & \widetilde{\mathcal{W}}_{u|\mathrm{in}}\,\widetilde{\mathcal{R}}^*_{u|\mathrm{in}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{u|\mathrm{in}}(x-x')} \\ & + \widetilde{\mathcal{W}}_{u|\mathrm{out}}\,\widetilde{\mathcal{R}}^*_{u|\mathrm{out}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{u|\mathrm{out}}(x-x')} \\ & + \Theta(\Omega-\omega)\,|S_{u,d2}|^2\,|\widetilde{\mathcal{R}}_{u|\mathrm{out}}|^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{u|\mathrm{out}}(x-x')} \\ & + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{1.120}$$

Le terme proportionnel au coefficient de transmission $|S_{u,d2}|^2$ disparaît en l'absence de trou noir. Dans ce cas, (1.120) est équivalente à l'équation (1.114), on retrouve le profil de corrélation (1.116) en l'absence d'horizon acoustique et l'équation (1.120) suffit à la vérification de la règle de somme (1.118). En présence d'un horizon, le terme proportionnel à $|S_{u,d2}|^2$ n'est pas nul, ce qui signifie que les corrélations à deux points au voisinage de la diagonale ($x' = x$) sont modifiées par l'existence du trou noir acoustique, à l'instar de ce qu'obtiennent les auteurs des références [28] et [45] dans des ensembles non-standards de matrices aléatoires. À $x/\xi_u \to -\infty$ fixé, (1.120) seule ne permet pas d'établir la règle de somme $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g^{(2)}(x,x') = -n_u$ à $T = 0$ et nous devrons prendre en compte les corrélations non-locales (1.121) entre deux quasi-particules de Hawking pour que cette règle de somme de normalisation soit vérifiée, comme ce qui a été suggéré en référence [45].

• ($x/\xi_u \to -\infty$ et $x'/\xi_d \to +\infty$) ou ($x/\xi_d \to +\infty$ et $x'/\xi_u \to -\infty$) [x et x' sont loin de l'horizon à l'extérieur (ou l'intérieur) et l'intérieur (ou l'extérieur) du trou noir acoustique, respectivement].— Dans le cas où x (respectivement x') est loin de l'horizon acoustique dans la région subsonique (respectivement supersonique), on

obtient

$$\begin{aligned}\gamma_0(x,x',\omega) = {}& \Theta(\Omega-\omega)\, S_{u,d2}\, S^*_{d1,d2}\, \widetilde{\mathcal{R}}_{u|\mathrm{out}}\, \widetilde{\mathcal{R}}^*_{d1|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_{u|\mathrm{out}}x - q_{d1|\mathrm{out}}x')} \\ & + \Theta(\Omega-\omega)\, S_{u,d2}\, S^*_{d2,d2}\, \widetilde{\mathcal{R}}_{u|\mathrm{out}}\, \widetilde{\mathcal{R}}^*_{d2|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_{u|\mathrm{out}}x - q_{d2|\mathrm{out}}x')} \\ & + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{1.121}$$

Si maintenant x repère une ondulation de densité située en profondeur dans le trou noir et que x' en repère une localisée loin en amont de l'horizon dans la région subsonique, il suffit d'échanger les rôles joués par x et x' dans la formule (1.121).

• **$x/\xi_d \to +\infty$ et $x'/\xi_d \to +\infty$ (x et x' sont loin de l'horizon à l'intérieur du trou noir acoustique).**— Ici, x et x' sont tous les deux loin en aval de l'horizon dans la région supersonique (c'est-à-dire à l'intérieur du trou noir acoustique). Les contributions dominantes à γ_0 peuvent être séparées en un bloc diagonal (qui ne dépend que de la différence $x - x'$) et un bloc non-diagonal. La partie diagonale s'écrit

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\mathrm{diag}}(x,x',\omega) = {}& \widetilde{\mathcal{W}}_{d1|\mathrm{in}}\, \widetilde{\mathcal{R}}^*_{d1|\mathrm{in}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{d1|\mathrm{in}}(x-x')} \\ & + \widetilde{\mathcal{W}}_{d1|\mathrm{out}}\, \widetilde{\mathcal{R}}^*_{d1|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{d1|\mathrm{out}}(x-x')} \\ & + \Theta(\Omega-\omega)\, \widetilde{\mathcal{U}}_{d2|\mathrm{in}}\, \widetilde{\mathcal{R}}^*_{d2|\mathrm{in}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{d2|\mathrm{in}}(x-x')} \\ & + \Theta(\Omega-\omega)\, \widetilde{\mathcal{U}}_{d2|\mathrm{out}}\, \widetilde{\mathcal{R}}^*_{d2|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{d2|\mathrm{out}}(x-x')} \\ & + \Theta(\Omega-\omega)\, |S_{d1,d2}|^2\, |\widetilde{\mathcal{R}}_{d1|\mathrm{out}}|^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{d1|\mathrm{out}}(x-x')} \\ & + \Theta(\Omega-\omega)\, (|S_{d2,u}|^2 + |S_{d2,d1}|^2)\, |\widetilde{\mathcal{R}}_{d2|\mathrm{out}}|^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_{d2|\mathrm{out}}(x-x')} \\ & + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{1.122}$$

En l'absence de trou noir, les termes proportionnels à $|S_{d1,d2}|^2$ et à $|S_{d2,u}|^2 + |S_{d2,d1}|^2$ disparaissent de l'équation (1.122) et alors on retrouve le signal de corrélation diagonal du quasi-condensat : $g_0^{(2)}(x,x') = (n_d/\xi_d) \times F[(x-x')/\xi_d]$, où F est définie par (1.117). La partie non-diagonale est seulement présente si un horizon existe et contribue à γ_0 lorsque $\omega < \Omega$; elle s'écrit

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{non-diag}}(x,x',\omega) = {}& \Theta(\Omega-\omega)\, S_{d1,d2}\, S^*_{d2,d2}\, \widetilde{\mathcal{R}}_{d1|\mathrm{out}}\, \widetilde{\mathcal{R}}^*_{d2|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q_{d1|\mathrm{out}}x - q_{d2|\mathrm{out}}x')} \\ & + (x \longleftrightarrow x') \\ & + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{1.123}$$

Les formules (1.120), (1.121) et (1.122)–(1.123) permettent de déterminer $g_0^{(2)}(x,x')$ (lorsque x et x' sont loin de l'horizon) *via* l'équation (1.111b). L'intégration sur $\omega \in \mathbb{R}_+$ est effectuée numériquement. Les résultats obtenus pour les configurations de pic δ et de chute d'eau sont présentés à la figure 1.14. Sur chaque figure, on remarquera que les corrélations ne sont tracées que dans le cas où les modules $|x|$ et $|x'|$ sont plus grands que quelques longueurs de corrélation car les formules (1.120)–(1.123) ne sont valables que dans les

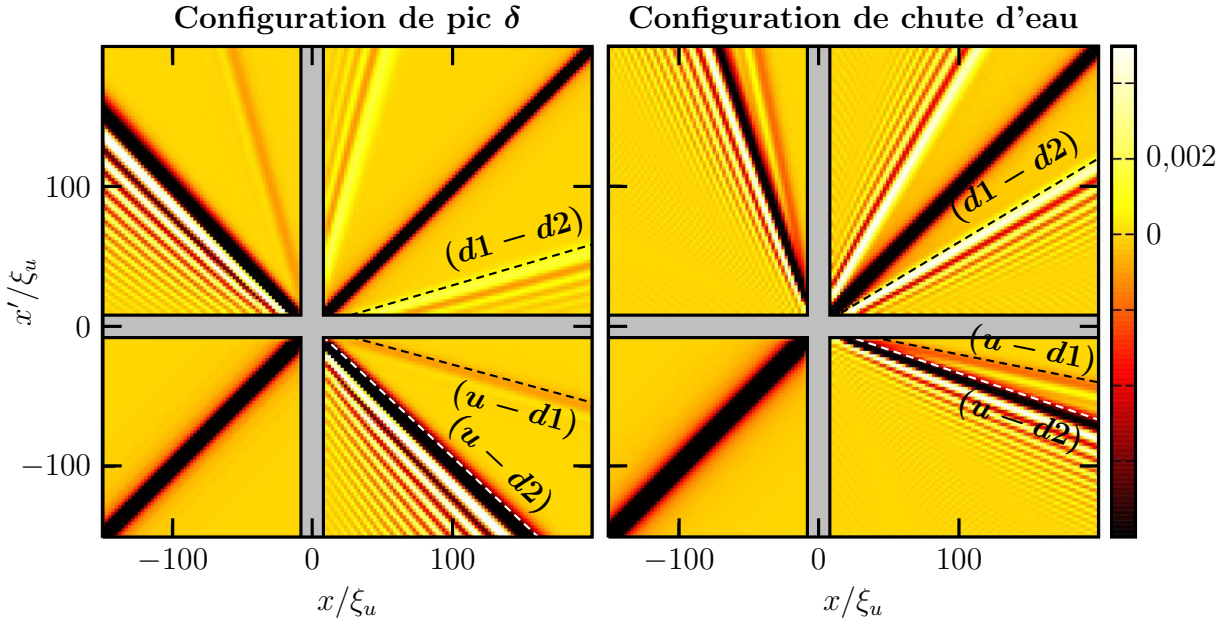


Figure 1.14 — Fonction de corrélation densité/densité $\xi_u n_u G_0^{(2)}(x, x')$ dans des configurations de pic δ (à gauche) et de chute d'eau (à droite) caractérisées par un nombre de Mach $m_u = 0{,}5$. L'aire grisée autour des axes du repère $\{x, x'\}$ correspond à un domaine où les valeurs absolues $|x|$ ou $|x'|$ sont plus petites que $10\,\xi_u$. Le corrélateur $\xi_u n_u G_0^{(2)}(x, x')$ est seulement calculé lorsque $|x|, |x'| > 10\,\xi_u$, c'est-à-dire dans des régions asymptotiques où les formules (1.120)–(1.123) donnant γ_0 sont applicables. Les lignes en pointillés correspondent aux signaux de corrélation non-locaux qui s'interprètent comme résultant de la corrélation de deux phonons de Hawking (voir le texte).

limites $|x|, |x'| \gg \xi_\alpha$ ($\alpha = u, d$). Sur ces figures, on trace également les lignes correspondant à l'interprétation heuristique de l'effet Hawking en termes de phonons corrélés fuyant l'horizon (relire l'introduction 1.2.1 et les références [12] et [30]) ; ce qui est frappant, c'est que ces lignes dirigent parfaitement les signaux non-diagonaux les plus prononcés de la matrice densité à deux corps... Dans les régions subsonique et supersonique (c'est-à-dire, respectivement, à l'extérieur et à l'intérieur du trou noir), des phonons sont émis en permanence, et ceux qui fuient l'horizon acoustique correspondent aux modes $u|\text{out}$, $d1|\text{out}$ et $d2|\text{out}$ identifiés en sous-section 1.2.3. Au bout d'un temps t après leur émission, ces phonons se situent respectivement en $x_{u|\text{out}}(t) = (V_u - c_u)\,t < 0$, $x_{d1|\text{out}}(t) = (V_d + c_d)\,t > 0$ et $x_{d2|\text{out}}(t) = (V_d - c_d)\,t > 0$ (ces lois horaires du mouvement sont valables dans des limites de grandes longueurs d'onde et de faibles énergies, là où les relations de dispersion de Bogoliubov sont linéaires et donc là où les excitations du condensat sont essentiellement des phonons). À supposer que l'idée de Hawking — selon laquelle ces modes de grandes longueurs d'onde émis de part et d'autre de l'horizon sont corrélés — soit juste, l'allure de n'importe quelle fonction de corrélation à deux corps [telle que la matrice densité $g^{(2)}(x, x')$] devrait être caractérisée par des signaux non-locaux alignés dans le plan

$\{x, x'\}$ le long des droites de pentes

$$\begin{cases} \left.\dfrac{x'}{x}\right|_{(u-d1)} = \dfrac{x_{u|\text{out}}(t)}{x_{d1|\text{out}}(t)} = \dfrac{V_u - c_u}{V_d + c_d} < 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{x_{d1|\text{out}}(t)}{x_{u|\text{out}}(t)} = \dfrac{V_d + c_d}{V_u - c_u} < 0, \\ \left.\dfrac{x'}{x}\right|_{(u-d2)} = \dfrac{x_{u|\text{out}}(t)}{x_{d2|\text{out}}(t)} = \dfrac{V_u - c_u}{V_d - c_d} < 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{x_{d2|\text{out}}(t)}{x_{u|\text{out}}(t)} = \dfrac{V_d - c_d}{V_u - c_u} < 0, \\ \left.\dfrac{x'}{x}\right|_{(d1-d2)} = \dfrac{x_{d1|\text{out}}(t)}{x_{d2|\text{out}}(t)} = \dfrac{V_d + c_d}{V_d - c_d} > 0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{x_{d2|\text{out}}(t)}{x_{d1|\text{out}}(t)} = \dfrac{V_d - c_d}{V_d + c_d} > 0. \end{cases} \tag{1.124}$$

C'est exactement ce que l'on constate en examinant la figure 1.14. Notons enfin que les résultats présentés ici sont très similaires à ceux que les auteurs des références [12], [30] et [117] obtiennent dans le cas de la configuration de profil plat, ce qui légitime l'emploi des corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la densité comme un outil permettant d'identifier le rayonnement de Hawking (à deux corps) dans les configurations réalistes de pic δ et de chute d'eau étudiées dans ce chapitre.

Sur chacun des graphiques de la figure 1.14, on voit que le signal dominant correspond aux anticorrélations le long de la diagonale ($x' = x$). En présence d'un horizon, ce signal est le pendant des corrélations de densité locales typiquement observées dans un quasi-condensat de Bose homogène (*cf.* figure 1.13). Néanmoins, l'existence du trou noir fait que son allure diffère légèrement de celle observée dans le cas où l'horizon n'est pas présent [on relira la discussion qui fait immédiatement suite à l'équation (1.120)]. Les changements de comportement du signal diagonal sont dus à la présence des signaux non-locaux, nécessaires à la vérification de la règle de somme

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g_0^{(2)}(x, x') = \begin{cases} -n_u & (x/\xi_u \to -\infty), \\ -n_d & (x/\xi_d \to +\infty), \end{cases} \tag{1.125}$$

qui n'est rien d'autre que l'équation (1.107) lorsque $T = 0$ et quand x est loin de l'horizon à l'extérieur ($x/\xi_u \to -\infty$) ou à l'intérieur ($x/\xi_d \to +\infty$) du trou muet [on trouvera ci-après une démonstration sommaire mais suffisante des équations (1.125)]. Remarquons qu'il est possible de comprendre différemment les conclusions de la référence [45] et argumenter (i) qu'en présence d'un trou noir, les nouveaux signaux de corrélation qui apparaissent correspondent à des corrélations de densité non-locales simplement comprises comme étant le produit de l'émission de phonons corrélés fuyant l'horizon acoustique et (ii) qu'à cause de la règle de somme (1.125), considérée comme universelle, ces corrélations à longue portée doivent être associées à des modifications du comportement à courte portée de la matrice densité à deux corps connexe. Néanmoins, expérimentalement parlant, ces modifications locales ne sont pas d'une importance capitale car elles sont masquées par le bruit thermique. Au contraire, les signaux non-diagonaux constituent des signatures efficaces du rayonnement de Hawking car ils sont clairement distinguables du bruit de fond thermique (les auteurs de la référence [117] ont en effet montré que leur amplitude est accrue à température finie).

Démonstration de la règle de somme de normalisation (1.125)

Nous démontrons ici que l'approche de Bogoliubov basée sur la décomposition (1.87) permet de vérifier les équations (1.125) qui correspondent à la règle de somme (1.107) lorsque $T = 0$ et lorsque x est loin en amont ou en aval de l'horizon acoustique, c'est-à-dire quand x est loin de l'horizon à l'extérieur ou à l'intérieur du trou noir, respectivement.

À x fixé [loin de l'horizon dans la région subsonique ($x \ll -\xi_u$) ou dans la région supersonique ($x \gg \xi_d$)], les termes qui contribuent à l'évaluation de $\gamma_0(x, x', \omega)$ dans les équations (1.120), (1.121) et (1.122)–(1.123) sont essentiellement nuls partout sauf dans les régions asymptotiques où $x' \ll -\xi_u$ ou $x' \gg \xi_d$. Par voie de conséquence, le domaine de définition de la variable x' dans les formules analytiques (1.120)–(1.123) peut être étendu à tout l'axe réel sans que cela introduise des erreurs dramatiques dans le calcul de l'intégrale de $\gamma_0(x, x', \omega)$ sur $x' \in \mathbb{R}$. Puisque les amplitudes de Bogoliubov $\widetilde{\mathcal{U}}_\ell$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_\ell$ ne dépendent pas de la position en aval et loin en amont de l'horizon acoustique, on voit que l'intégration de $\gamma_0(x, x', \omega)$ sur x' équivaut à l'évaluation de l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_\ell(\omega)x'} = \begin{cases} 0 & (\ell \in \{d1|\mathrm{in}, d2|\mathrm{in}\}), \\ |V_{\mathrm{g}}[q_\ell(0)]|\, \delta(\omega) & (\ell \in \{u|\mathrm{in}, u|\mathrm{out}, d1|\mathrm{out}, d2|\mathrm{out}\}), \end{cases} \tag{1.126}$$

où on a tiré parti du fait que les nombres d'onde $q_\ell(\omega)$ s'annulent en $\omega = 0$ sauf lorsque $\ell = d1|\mathrm{in}$ ou $\ell = d2|\mathrm{in}$.

Utilisant (1.120) et (1.126), on obtient

$$\lim_{x/\xi_u \to -\infty} \int_{\mathbb{R}_-} \mathrm{d}x'\, n_u \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \gamma_0(x, x', \omega) = -n_u + \frac{n_u}{2} \frac{|f_{u,d2}|^2}{1 - m_u}, \tag{1.127}$$

et avec (1.121),

$$\lim_{x/\xi_u \to -\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{d}x'\, \sqrt{n_u n_d} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \gamma_0(x, x', \omega) = \frac{n_u}{2} \sqrt{\frac{c_u}{c_d} \frac{n_d}{n_u}}\, \mathrm{Re}\left[\frac{f^*_{u,d2}}{1 - m_u} \left(f_{d1,d2} + f_{d2,d2}\right)\right]. \tag{1.128}$$

Combinant (1.127) et (1.128), on trouve finalement

$$\lim_{x/\xi_u \to -\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g_0^{(2)}(x, x') = -n_u + \frac{n_u}{2} \sqrt{\frac{c_u}{c_d} \frac{n_d}{n_u}}\, \mathrm{Re}\left(\frac{f^*_{u,d2}}{1 - m_u} \mathscr{F}\right), \tag{1.129}$$

où

$$\mathscr{F} = \sqrt{\frac{c_d}{c_u} \frac{n_u}{n_d}}\, f_{u,d2} + f_{d1,d2} + f_{d2,d2}. \tag{1.130}$$

À la lumière des équations (1.121) et (1.122)–(1.123), on montre de même que

$$\lim_{x/\xi_d \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g_0^{(2)}(x, x') = -n_d + \frac{n_d}{2} \left(\frac{c_u}{c_d}\right)^2 \mathrm{Re}\left[\left(\frac{f^*_{d1,d2}}{m_d + 1} + \frac{f^*_{d2,d2}}{m_d - 1}\right) \mathscr{F}\right]. \tag{1.131}$$

En utilisant l'expression analytique des coefficients complexes $f_{u,d2}$, $f_{d1,d2}$ et $f_{d2,d2}$ [définis par $S_{i,d2}(\varepsilon_u \to 0^+) = f_{i,d2}/\sqrt{\varepsilon_u} + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_u})$, $\forall i \in \{u, d1, d2\}$], on montre (modulo de lourdes manipulations algébriques) que $\mathscr{F}$ [*cf.* équation (1.130)] est rigoureusement nul dans les trois configurations de trous muets étudiées dans ce chapitre (profil plat, pic δ et chute d'eau), ce qui mène[16] aux équations (1.125) :

$$\lim_{x/\xi_u \to -\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g_0^{(2)}(x, x') = -n_u \quad \text{et} \quad \lim_{x/\xi_d \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, g_0^{(2)}(x, x') = -n_d. \tag{1.132}$$

1.2.6 Signal de Hawking à deux corps dans l'espace des impulsions

Dans la sous-section précédente, nous avons montré que l'occurrence de l'analogue du rayonnement de Hawking dans l'écoulement d'un quasi-condensat de Bose–Einstein unidimensionnel en configuration de trou noir acoustique peut être mise en évidence en étudiant les corrélations dans l'espace réel des fluctuations quantiques de la densité du fluide de part et d'autre de l'horizon. Comme dans la configuration de profil plat [12, 30, 117], les signaux non-diagonaux de la matrice densité à deux corps connexe $g^{(2)}(x, x')$ dans les configurations inhomogènes de pic δ et de chute d'eau (voir figure 1.14) introduites précédemment (*cf.* sous-section 1.2.2) sont révélateurs de l'effet Hawking dans ces modèles de trous muets car ils sont le fruit de l'émission de deux fluctuations quantiques corrélées fuyant l'horizon acoustique, l'une s'échappant du trou noir et emportant avec elle de l'énergie, l'autre s'y engouffrant sans retour possible en direction de l'extérieur du trou muet. Si nous nous sommes restreints à ne traiter que le cas de température nulle, c'est — outre le fait que le traitement des effets thermiques soit calculatoirement plus compliqué — parce que l'interprétation qualitative (à partir de résultats quantitatifs) des signatures non-locales de $g^{(2)}$ en termes de phonons de Hawking corrélés n'est en rien altérée par la prise en compte des effets dus à la température. Dans le cadre d'une étude seulement quantitative (et à visée expérimentale) de l'effet Hawking, le traitement du cas où la température du système est non-nulle a pour le coup un intérêt non-négligeable ; en effet, on montre que l'amplitude des corrélations non-diagonales est accrue dans une configuration où les effets thermiques sont présents [117].

Dans un condensat de Bose–Einstein, les corrélations à deux corps dans l'espace des impulsions sont tout aussi détectables que les corrélations de la densité dans l'espace des positions. C'est en mesurant les corrélations dans l'espace des moments que les auteurs de la référence [61] ont mis en évidence l'analogue de l'effet Casimir dynamique [96, 46, 36, 99] dans un condensat d'atomes d'hélium métastable modulé en densité *via* une modulation de la fréquence du potentiel de piégeage. Si la réalisation d'une configuration de trou noir acoustique était possible dans un tel système, il est évident que la piste à emprunter pour démontrer l'existence du rayonnement de Hawking dans les condensats de Bose–Einstein

16. On peut aussi tirer parti des expressions analytiques (1.82a)–(1.83g) (valables dans les configurations de profil plat et de chute d'eau) et de leurs équivalents dans le cas de la configuration de pic δ pour montrer que le second terme dans le membre de droite des équations (1.129) et (1.131) vaut zéro.

consisterait à mesurer les corrélations de paires de part et d'autre de l'horizon acoustique dans l'espace des impulsions.

Dans cette sous-section, nous présentons des résultats préliminaires déduits d'une étude des corrélations en impulsion dans un quasi-condensat atomique unidimensionnel en configuration de trou noir acoustique. Nous avons traité les fluctuations quantiques du gaz sur la base des résultats présentés en sous-section 1.2.3 (c'est-à-dire dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires et en termes d'une matrice de diffusion) et avons calculé les corrélations dans l'espace des moments d'une manière ressemblant aux démarches exposées en sous-section 1.2.5. Nous avons traité le cas de température nulle tout autant que celui de température finie. J'ai ici choisi de ne faire qu'une description qualitative de nos résultats analytiques car notre étude souffre encore de quelques limitations. En particulier, nous ne sommes pas encore en mesure d'affirmer que notre analyse de Fourier (voir ci-après) permet d'avoir accès à la totalité de la fonction de corrélation expérimentalement espérée dans une configuration de trou muet unidimensionnelle ; d'autre part, des divergences infrarouges demeurent, même si l'on sait qu'elles sont liées à notre description qui suppose l'existence d'une phase condensée, interdite en dimension un (relire l'introduction de la sous-section 1.2.3 et/ou consulter l'Annexe) ; enfin, notre analyse ne tient pas compte des excitations transverses dans le condensat mais il n'est pas dit qu'on puisse sonder expérimentalement des régimes dans lesquels elles ne jouent aucun rôle.

On considère que le corrélateur d'intérêt s'écrit

$$\chi^{(2)}(k,k') = \langle \hat{N}(k,t)\,\hat{N}(k',t)\rangle - \langle \hat{N}(k,t)\rangle\langle \hat{N}(k',t)\rangle, \tag{1.133}$$

où l'opérateur (dans la représentation de Heisenberg)

$$\hat{N}(k,t) = \hat{\Psi}^\dagger(k,t)\,\hat{\Psi}(k,t) \tag{1.134}$$

compte le nombre de bosons occupant l'état d'impulsion $\hbar\,k \lesseqgtr 0$. Dans l'équation (1.133), l'opération $\langle\cdot\rangle$ désigne la moyenne sur le vide de l'espace de Fock construit à partir des opérateurs $\hat{a}^\dagger_U(\omega)$, $\hat{a}^\dagger_{D1}(\omega)$ et $\hat{a}^\dagger_{D2}(\omega)$ créant des quasi-particules d'énergie $\hbar\,\omega > 0$ dans les modes de diffusion U, $D1$ et $D2$ (voir sous-section 1.2.3). Dans l'équation (1.134), $\hat{\Psi}(k,t)$ est une transformée de Fourier locale du champ bosonique $\hat{\Psi}(x,t)$, construite pour ne sélectionner que les modes ℓ de vitesse de groupe $V_{\mathrm{g}}(q_\ell)$ négative (respectivement positive) loin en amont (respectivement loin en aval) de l'horizon acoustique. Ceci permet

- d'étudier les corrélations en impulsion entre les modes réels $u|$out (qui est le seul mode de vitesse de groupe négative dans la région subsonique), $d1|$out et $d2|$out (qui sont les seuls modes de vitesse de groupe positive dans la région supersonique) (voir figures 1.9 et/ou 1.15),
- de faire fi des modes évanescents $u|$eva et $d|$eva puisque ces derniers ne contribuent pas aux modulations de densité loin en amont ou loin en aval de l'horizon,
- de ne pas tenir compte de la dépendance en position du profil de densité en amont de l'horizon dans les configurations de pic δ et de chute d'eau puisque la densité d'un condensat dans ces configurations est homogène loin à l'extérieur du trou muet (*cf.* figures 1.5 et 1.6).

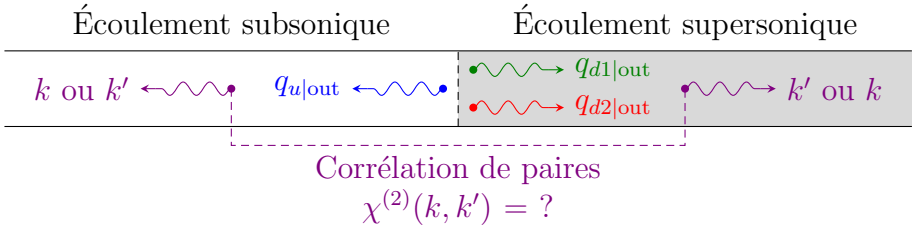


Figure 1.15 — Selon l'idée de Hawking, deux fluctuations quantiques émises de part et d'autre de l'horizon acoustique (l'une s'échappant du trou muet, l'autre s'engouffrant dans le trou noir acoustique) doivent être corrélées. Dans les configurations de trous noirs étudiées dans ce chapitre, on a noté $u|\mathrm{out}$, $d1|\mathrm{out}$ et $d2|\mathrm{out}$ les ondes de Bogoliubov non-évanescentes qui fuient l'horizon acoustique (voir figure 1.9). Leurs corrélations $(u-d1)$, $(u-d2)$ et $(d1-d2)$ [*cf.* équations (1.135a)–(1.135c)] émergent sous forme de signaux non-diagonaux ($k' \neq k$) et non-antidiagonaux ($k' \neq -k$) dans le tracé des fonctions de corrélation à deux corps dans l'espace des impulsions [rappelant les signaux de Hawking non-diagonaux ($x' \neq x$) observés dans l'espace des positions, *cf.* sous-section 1.2.5].

Si la vitesse de groupe $V_{\mathrm{g}}(q_\ell)$ d'une onde émise dans la région subsonique est négative, alors cette onde ne peut qu'emprunter le canal de diffusion $\ell = u|\mathrm{out}$; si celle-ci est émise dans la région supersonique avec une vitesse de groupe $V_{\mathrm{g}}(q_\ell)$ positive, alors elle ne peut que correspondre à l'onde $\ell = d1|\mathrm{out}$ ou l'onde $\ell = d2|\mathrm{out}$ (*cf.* figure 1.15). De notre choix de transformée de Fourier (voir ci-avant), il résulte que la fonction de corrélation $\chi^{(2)}$ doit être nulle partout sauf le long des courbes d'équations paramétriques

$$\begin{cases} k = q_{u|\mathrm{out}}(\omega) < 0 & \text{ou} \quad k = q_{d1|\mathrm{out}}(\omega) > 0 \\ k' = q_{d1|\mathrm{out}}(\omega) > 0 & \text{ou} \quad k' = q_{u|\mathrm{out}}(\omega) < 0 \end{cases}, \tag{1.135a}$$

$$\begin{cases} k = q_{u|\mathrm{out}}(\omega) < 0 & \text{ou} \quad k = q_{d2|\mathrm{out}}(\omega) > 0 \\ k' = q_{d2|\mathrm{out}}(\omega) > 0 & \text{ou} \quad k' = q_{u|\mathrm{out}}(\omega) < 0 \end{cases} \tag{1.135b}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} k = q_{d1|\mathrm{out}}(\omega) > 0 & \text{ou} \quad k = q_{d2|\mathrm{out}}(\omega) > 0 \\ k' = q_{d2|\mathrm{out}}(\omega) > 0 & \text{ou} \quad k' = q_{d1|\mathrm{out}}(\omega) > 0 \end{cases}, \tag{1.135c}$$

où $\omega > 0$ est la pulsation des excitations élémentaires du condensat. Lorsque $\omega > \Omega$ [où la pulsation Ω est définie par les équations (1.67a) et (1.67b)], on rappelle que l'onde $d2|\mathrm{in}$ disparaît (le mode de diffusion $D2$ disparaît alors lui aussi car il est initié par $d2|\mathrm{in}$) et que le mode réel $d2|\mathrm{out}$ est remplacé par le mode évanescent $d|\mathrm{eva}$ (*cf.* figure 1.10). Il s'ensuit que les lignes de corrélation $(u-d2)$ [*cf.* équation (1.135b)] et $(d1-d2)$ [*cf.* équation (1.135c)] dans le plan $\{k,k'\}$ doivent être de longueur finie, s'arrêtant à partir du moment où $\omega = \Omega$, c'est-à-dire à l'énergie pour laquelle $q_{d2|\mathrm{out}}(\omega)$ atteint son maximum (1.67b) (voir figure 1.9). C'est ce que l'on constate en examinant la figure 1.16 ; celle-ci donne l'allure qu'aurait la fonction de corrélation (1.133) si un quasi-condensat de Bose unidimensionnel était en configuration de chute d'eau (il est très facile d'obtenir le même genre de graphique dans les configurations de profil plat et de pic δ mais, par souci de concision, nous feront l'économie de leur présentation dans ce manuscrit).

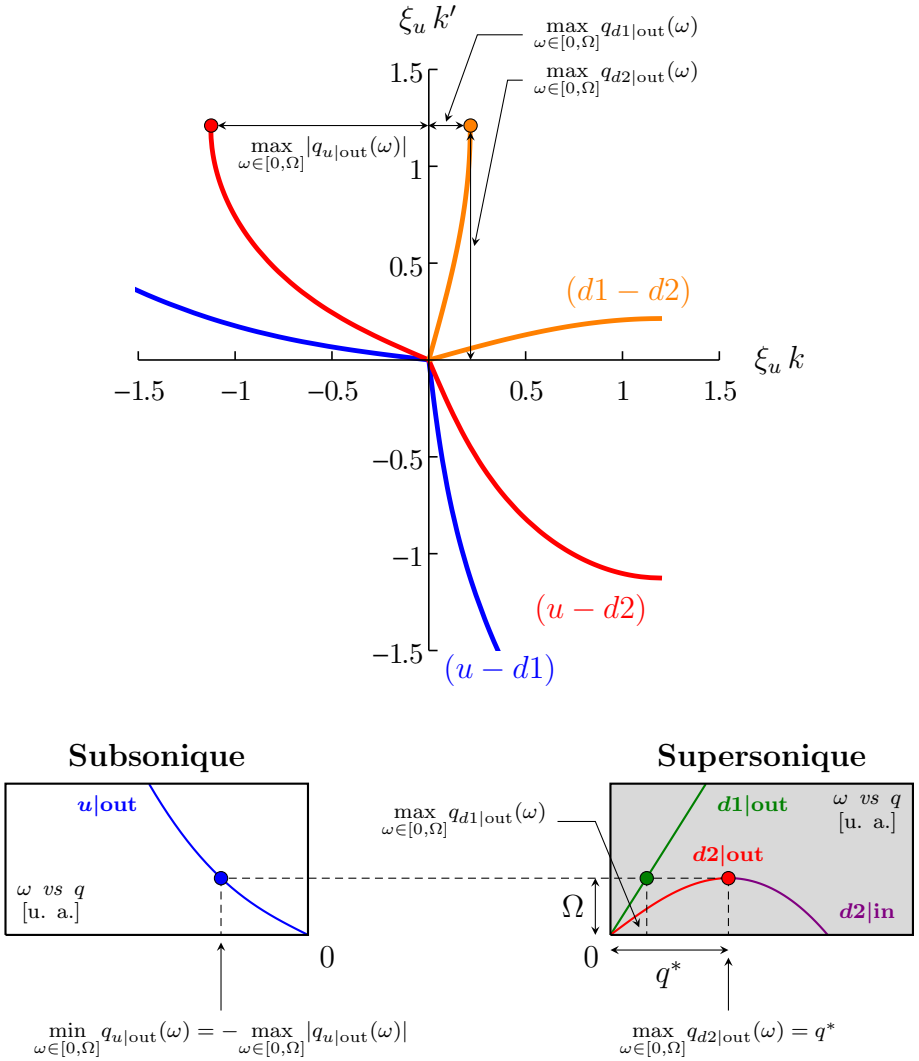


Figure 1.16 — Allure de la fonction de corrélation (1.133) dans une configuration de chute d'eau telle que $m_u = V_u/c_u = 0{,}75$. Les corrélations sont nulles partout sauf le long des lignes bleues [corrélations $(u-d1)$], rouges [corrélations $(u-d2)$] et oranges [corrélations $(d1-d2)$]. Ces lignes sont révélatrices de l'effet Hawking dans cette configuration de trou muet. Les courbes rouges et oranges mettent en jeu le mode de norme négative $d2|\mathrm{out}$: elles sont donc bornées dans le plan $\{k, k'\}$ car $q_{d2|\mathrm{out}} \in [0, q^*]$, où q^* est défini par (1.67b).

1.2.7 Conclusion

Dans cette longue section, nous avons étudié trois configurations de trous muets (configurations de profil plat, de pic δ et de chute d'eau) dans l'écoulement d'un quasi-condensat de Bose–Einstein unidimensionnel et avons donné dans chaque cas une description analytique complète des solutions de champ moyen et des fluctuations quantiques associées, ce qui nous a permis d'effectuer une analyse détaillée de l'analogue du rayonnement de Hawking (à un et deux corps) dans ces trois configurations.

L'étude du système en termes d'une matrice de diffusion nous a permis de décrire quantitativement le spectre du rayonnement de Hawking. En particulier, nous avons montré que le rayonnement de Hawking est absent dans une configuration sans horizon, c'est-à-dire dans une configuration connectant deux régions asymptotiquement subsoniques. Un rayonnement est présent dans une configuration avec horizon, c'est-à-dire dans une configuration connectant une région (asymptotiquement) subsonique à une région où l'écoulement est supersonique ; nous avons établi des formules analytiques donnant la température de Hawking en analysant quantitativement le spectre associé à l'émission d'excitations élémentaires en provenance de l'horizon acoustique.

Nous avons également focalisé notre attention sur les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la densité en présence d'un horizon acoustique et avons vérifié que l'interprétation des signatures non-diagonales en termes de phonons de Hawking corrélés tient tout autant dans le cas des configurations de pic δ et de chute d'eau que dans celui de la configuration schématique de profil plat des références [12], [30] et [117]. En étudiant une règle de somme vérifiée par la matrice densité à deux corps connexe, nous avons confirmé que la description de Bogoliubov des fluctuations quantiques permet d'obtenir une description rigoureuse des corrélations de densité dans l'écoulement d'un quasi-condensat de Bose unidimensionnel (en configuration de trou noir ou non) ; sur la base des travaux de Kravtsov *et al.* [28, 45], nous avons démontré que cette règle de somme permet d'interpréter les modifications diagonales de la matrice densité à deux corps en présence d'un horizon comme résultant de la corrélation de phonons fuyant l'horizon acoustique, les uns s'échappant du trou muet, les autres s'y engouffrant. Enfin, nous avons mis en évidence que le rayonnement de Hawking à deux corps peut tout aussi bien être révélé par une étude des corrélations dans l'espace des impulsions ; cette méthode semble d'ailleurs constituer une voie expérimentalement prometteuse.

Nous avons introduit deux nouvelles configurations de trous noirs acoustiques (pic δ et chute d'eau) motivées par leur éventuelle réalisation expérimentale et avons proposé (comme dans les références [12] et [30]) d'utiliser les corrélations non-locales de la densité comme un outil permettant de révéler le rayonnement de Hawking. Il reste maintenant à savoir si l'amplitude des signaux non-diagonaux dans de telles configurations est suffisamment importante pour qu'elle puisse être expérimentalement mesurée. Examinant la figure 1.14, on voit que le signal de Hawking à deux corps le plus prononcé correspond aux droites $(u - d2)$; l'amplitude maximale de $\xi_u n_u |G_0^{(2)}|_{(u-d2)}$ y est comprise entre $\simeq 0{,}01$ et $\simeq 0{,}02$. Dans les expériences typiques actuelles, la longueur de corrélation ξ_u est de l'ordre de quelques micromètres et on arrive à détecter des fluctuations de densité autour d'une densité moyenne n_u de l'ordre de 10 $\mu\mathrm{m}^{-1}$ (voir, par exemple, référence [8]), ce

qui donnerait $\max |G_0^{(2)}|_{(u-d2)} \sim 2 \times 10^{-3}$, nécessitant ainsi une précision dans la mesure de $G^{(2)}$ de l'ordre de 10^{-4} ; étant donné que $G^{(2)}$ correspond aux fluctuations relatives quadratiques de la densité, la détection des signaux $(u - d2)$ nécessiterait de mesurer les fluctuations de la densité avec une précision de l'ordre de 1 %, ce qui semble être *a priori* faisable au vu des techniques expérimentales actuelles.

1.2.8 P.-É. L., A. Recati, I. Carusotto et N. Pavloff, *Physical Review A* 85, 013621 (2012)

Quantum fluctuations around black hole horizons in Bose-Einstein condensates

P.-É. Larré,[1] A. Recati,[2] I. Carusotto,[2] and N. Pavloff[1]

[1]*Univ. Paris Sud, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, UMR8626, FR-91405 Orsay, France*

[2]*INO-CNR BEC Center and Dipartimento di Fisica, Università di Trento, via Sommarive 14, IT-38123 Povo, Trento, Italy*

(Received 18 October 2011; published 17 January 2012)

We study several realistic configurations making it possible to realize an acoustic horizon in the flow of a one-dimensional Bose-Einstein condensate. In each case we give an analytical description of the flow pattern, the spectrum of Hawking radiation, and the associated quantum fluctuations. Our calculations confirm that the nonlocal correlations of the density fluctuations previously studied in a simplified model provide a clear signature of Hawking radiation also in realistic configurations. In addition, we explain by direct computation how this nonlocal signal relates to short-range modifications of the density correlations.

DOI: 10.1103/PhysRevA.85.013621 PACS number(s): 03.75.Kk, 04.62.+v, 04.70.Dy

I. INTRODUCTION

During the last decade, it has been realized that Bose-Einstein condensates (BECs) were promising candidates for producing acoustic analogs of gravitational black holes, with a possible experimental signature of the elusive Hawking radiation. The acoustic analogy had been proposed on a general setting by Unruh in 1981 [1], and its specific implementation using BECs has been first proposed by Garay *et al.*, followed by many others [2]. We are now reaching a stage where experimental realizations and the study of these systems are possible [3] and it is important to propose realistic configurations of acoustic black holes and possible signatures of Hawking radiation in BECs. Other experimental routes for observing analog Hawking radiation effects are based on nonlinear optical devices [4] or surface waves on moving fluids [5]. Note that this last option is restricted to the *stimulated regime* where the Hawking radiation results from a disturbance external to the system.

In this line, density correlations have been proposed in Ref. [6] as a tool making it possible to identify the *spontaneous* Hawking signal and to extract it from thermal noise. The physical picture behind this idea is the same as the one initially proposed by Hawking [7,8]: Quantum fluctuations can be viewed as constant emission and reabsorption of virtual particles. These particles can tunnel out near the event horizon and are then separated by the background flow (which is subsonic outside the acoustic black hole and supersonic inside), giving rise to correlated currents emitted away from the region of the horizon. In contrast to the gravitational case, the experimentalist is able to extract information from the interior of an acoustic black hole. It is thus possible to get insight on the Hawking effect by measuring a correlation signal between the currents emitted inside and outside the black hole. This two-body correlation signal appears to be poorly affected by the thermal noise and seems to be a more efficient measure of the Hawking effect than the direct detection of Hawking phonons (see Ref. [9]).

In one-dimensional (1D) flows of BECs, following a suggestion by Leonhardt *et al.* [10], it is possible, within a Bogoliubov treatment of quantum fluctuations, to give a detailed account of the one- and two-body Hawking signals. This idea was fully developed in Refs. [9,11] to obtain physical predictions for specific configurations. Reference [9] focused on a schematic black hole configuration introduced in Ref. [6] and denoted as a "flat profile configuration" in the following: It consists of a uniform flow of a 1D BEC in which the two-body interaction is spatially modulated in order to locally modify the speed of sound in the system—forming a subsonic upstream region and a supersonic downstream one—although the velocity and the density of the flow remain constant. However, this type of flow, with a position-dependent two-body interaction allowing an easy theoretical treatment, is only possible in presence of an external potential specially tailored so that the local chemical potential remains constant everywhere (see details in Sec. II A). This makes the whole system quite difficult to realize experimentally.

In the present work we propose simpler sonic analogs of black holes for which a fully analytic theoretical treatment of the quantum correlations is still possible. We present a detailed account of the Bogoliubov treatment of quantum fluctuations in these settings and show that density correlations provide, also in these realistic configurations, good evidence of the Hawking effect. We also discuss the recent work of Franchini and Kravtsov [12] who proposed an interesting scenario for explaining the peculiarities of the two-body density matrix $g^{(2)}$ in presence of a horizon. Elaborating on the similarities of $g^{(2)}$ with the level correlation function of nonstandard ensembles of random matrices [13], one can argue that the nonlocal features of $g^{(2)}$ typical for Hawking radiation should be connected to a modification of its short-range behavior. We spend some time for precisely discussing this point in the framework of the Bogoliubov description of the fluctuations. Our analytical study of the wave functions of the excitations makes it possible to obtain a nonambiguous confirmation of this hypothesis.

The paper is organized as follows. In Sec. II we present three configurations allowing to realize an acoustic horizon in a 1D BEC. Then, in Sec. III, we discuss the practical implementation of the Bogoliubov approach to these nonuniform systems. It appears convenient to describe the behavior of the excitations in the system in terms of a S matrix, the properties of which are discussed in detail. This allows to describe the system using an approach valid for all possible black hole configurations. Within this framework, we study in Sec. IV the energy current associated to the Hawking effect and in Sec. V the density fluctuations pattern, putting special emphasis on its nonlocal aspects. As discussed above we consider in detail their

 ©2012 American Physical Society

connection to short-range modifications of the correlations. Finally, we present our conclusions in Sec. VI. Some technical points are given in the appendixes. In Appendix A we present the low-energy behavior of the components of the S matrix, in Appendix B we derive an expression for the energy current associated to the Hawking radiation, and in Appendix C we precisely check that the two-body density matrix fulfills a sum rule connecting the short- and long-range behavior of the correlations in the system.

II. THE DIFFERENT BLACK HOLE CONFIGURATIONS

We work in a regime which has been denoted as "1D mean field" in Ref. [14]. In this regime the system is described by a 1D Heisenberg field operator $\hat{\Psi}(x,t)$, solution of the Gross-Pitaevskii field equation. Writing $\hat{\Psi}(x,t) = \hat{\Phi}(x,t)\exp(-i\mu t/\hbar)$ this reads

$$i\hbar\,\partial_t\hat{\Phi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\hat{\Phi} + [U(x) + g\hat{n} - \mu]\hat{\Phi}. \tag{1}$$

In Eq. (1) μ is the chemical potential, fixed by boundary conditions at infinity; $\hat{n}(x,t) = \hat{\Phi}^\dagger\hat{\Phi}$ is the density operator and $U(x)$ is an external potential (its precise form depends on the black hole configuration considered). g is a nonlinear parameter which depends on the two-body interaction within the BEC and on the transverse confinement. Both are possibly position dependent. For a repulsive effective two-body interaction described by a positive 3D s-wave scattering length a and for a transverse harmonic trapping of pulsation $\omega_\perp$, one has $g = 2a\hbar\omega_\perp$ [15]. In the flat profile configuration of Ref. [6] g depends on the position x (see Sec. II A), whereas it is constant in the realistic configurations introduced below and respectively denoted as δ peak (Sec. II B) and waterfall (Sec. II C) configurations.

Within the Bogoliubov approach, in the quasicondensate regime, the quantum field operator $\hat{\Phi}$ is separated in a classical contribution Φ describing the background flow pattern plus a small quantum correction $\hat{\psi}$. In all the configurations we consider, the flow pattern is stationary and one thus writes

$$\hat{\Phi}(x,t) = \Phi(x) + \hat{\psi}(x,t), \tag{2}$$

$\Phi(x)$ being the solution of the classical stationary Gross-Pitaevskii equation

$$\mu\Phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Phi + [U(x) + g|\Phi|^2]\Phi. \tag{3}$$

A black hole configuration corresponds to a disymmetry between the upstream flow and the downstream one, separated by the event horizon. In the following we use a subscript "u" for upstream and "d" for downstream. The downstream region corresponds to $x > 0$ and is supersonic. The upstream region corresponds to $x < 0$ and is subsonic (see, however, the remark at the end of Sec. II C). We thus write

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{n_u}\exp(ik_u x)\phi_u(x) & \text{for } x < 0, \\ \sqrt{n_d}\exp(ik_d x)\phi_d(x) & \text{for } x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

In Eq. (4) $\lim_{x\to-\infty}|\phi_u(x)| = 1$ and $\lim_{x\to+\infty}|\phi_d(x)| = 1$, so that n_u and n_d are, respectively, the upstream and downstream asymptotic densities. Also $k_\alpha = mV_\alpha/\hbar$ ($\alpha = u$ or d), where V_u is the asymptotic upstream flow velocity and V_d the asymptotic downstream one (V_u and V_d are both positive).

In the following we denote the asymptotic velocities of sound as c_u and c_d with $mc_\alpha^2 = g_\alpha n_\alpha$, where $g_{u,d} = \lim_{x\to-\infty,+\infty} g(x)$ (we keep the possibility of a position dependent g coefficient in order to treat the flat profile configuration of Ref. [6]). We also introduce the healing lengths $\xi_\alpha = \hbar/(mc_\alpha)$ and the Mach numbers $m_\alpha = V_\alpha/c_\alpha$. In a black hole configuration $m_u < 1$ and $m_d > 1$.

Denoting $U_{u,d} = \lim_{x\to-\infty,+\infty} U(x)$ one gets from Eqs. (3) and (4)

$$\frac{\hbar^2k_\alpha^2}{2m} + U_\alpha + g_\alpha n_\alpha = \mu \quad \text{and} \quad n_u V_u = n_d V_d. \tag{5}$$

The first of these equations corresponds to the equality of the asymptotic chemical potentials and is required for a stationary flow; the second equation corresponds to current conservation in a stationary flow.

The precise form of the flow pattern is specified by the functions $\phi_u(x)$ and $\phi_d(x)$, which depend on the configuration considered. In all the configurations treated below $\phi_d(x)$ is a constant of the form

$$\phi_d(x) = \exp(i\beta_d), \tag{6}$$

meaning that the downstream flow pattern is flat with a constant density and velocity. The value of β_d depends on the configuration considered. As for the upstream flow pattern, the stationary flow condition imposes $\lim_{x\to-\infty}\phi_u(x) = \exp(i\beta_u)$, where β_u is a constant.

After having defined the notations and the common aspects of all the flow patterns, we now give the precise value of the configuration-dependent parameters.

A. Flat profile configuration

We recall here the value of the parameters in the flat profile configuration studied in Refs. [6,9]. In this case, the ϕ_α functions of Eq. (4) assume a very simple value: $\phi_u(x) = \phi_d(x) = 1$ (and thus $\beta_u = \beta_d = 0$). One has

$$U(x) = \begin{cases} U_u & \text{for } x < 0, \\ U_d & \text{for } x > 0, \end{cases} \tag{7}$$

and

$$g(x) = \begin{cases} g_u & \text{for } x < 0, \\ g_d & \text{for } x > 0, \end{cases} \tag{8}$$

chosen so that a flow with $V_u = V_d \equiv V_0$ and $n_u = n_d \equiv n_0$ is a solution of Eqs. (3) and (5); that is, Eq. (4) reduces to $\Phi(x) = \sqrt{n_0}\exp(ik_0x)$ for all x ($k_0 = mV_0/\hbar$). This imposes

$$\frac{c_d}{c_u} = \frac{m_u}{m_d} = \frac{\xi_u}{\xi_d}, \tag{9}$$

and

$$g_u n_0 + U_u = g_d n_0 + U_d. \tag{10}$$

We finally note that in the flat profile configuration one has $c_d < V_d = V_u < c_u$.

In the numerical simulations of Refs. [6,11], a generalization of this steplike configuration has been used; one considers smooth $U(x)$ and $g(x)$ functions imposing the continuous

version of Eq. (10): $g(x)n_0 + U(x) = C^{\rm st}$. The theoretical approach is the same as in Ref. [9] but the Bogoliubov-de Gennes equations [Eq. (19) below] have to be solved numerically whereas the steplike configuration characterized by Eqs. (7) and (8) allows for an analytical treatment.

The flat profile configuration can be numerically implemented in a dynamical way as explained in Ref. [6]. However, it is fair to say that the corresponding experiment seems rather difficult to realize. Moreover, the flat profile configuration is very sensitive to the total atom number, a quantity which is not easily controlled experimentally. Besides, a local monitoring of $g(x)$ has not yet been demonstrated. There are the reasons why in the following sections we introduce two new types of sonic horizon which can be implemented experimentally more easily.

B. δ peak configuration

In this configuration the nonlinear coefficient g is constant and the external potential is a repulsive δ peak: $U(x) = \Lambda\delta(x)$, with $\Lambda > 0$. It has been noticed in Ref. [16] that one can find in this case a stationary profile with a flow which is subsonic far upstream and supersonic downstream (i.e., a black hole configuration). The upstream flow corresponds to a portion of a dark soliton profile. More precisely, for $x < 0$, one has

$$\phi_u(x) = \cos\theta\,\tanh\left(\frac{x - x_0}{\xi_u}\cos\theta\right) - i\sin\theta, \qquad (11)$$

where $\sin\theta = m_u$, and one can restrict oneself to $\theta \in [0,\pi/2]$ (then $\beta_u = \pi + \theta$). As is also the case for the other configurations studied in the present work, the downstream flow has a constant density and velocity [cf. Eq. (6)]. The typical profile is displayed in Fig. 1.

Once $m_u = V_u/c_u$ is fixed (<1) all the other parameters of the flow are determined by Eqs. (5). Defining $y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8/m_u^2})$ one gets

$$\frac{n_u}{n_d} = \frac{V_d}{V_u} = y, \quad \frac{m_d}{m_u} = y^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{c_d}{c_u} = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{\xi_u}{\xi_d}. \qquad (12)$$

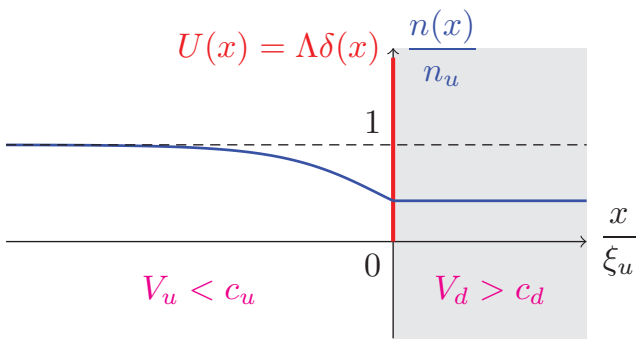


FIG. 1. (Color online) Density profile in the δ peak configuration. The flow is directed toward positive x. The δ potential is represented by a (red) vertical straight line. The density in the upstream region ($x < 0$) is a portion of a dark soliton (see the text). The region $x > 0$ is supersonic. It is shaded in the plot for recalling that it corresponds to the interior of the equivalent black hole. We keep this convention in Figs. 2, 3, and 4.

By imposing continuity of the wave function [$\Phi(0) = \sqrt{n_d}\exp(i\beta_d) = \sqrt{n_u}\,\phi_u(0)$] and the appropriate matching of its first derivative [$\partial_x\Phi(0^+) - \partial_x\Phi(0^-) = 2m\hbar^{-2}\Lambda\Phi(0)$] one gets

$$\sin\beta_d = -m_u\sqrt{y}, \qquad (13)$$

$$\frac{x_0}{\xi_u} = \frac{1}{\cos\theta}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\tan\theta\right), \qquad (14)$$

and also

$$\Lambda = \frac{\lambda\hbar^2}{m\xi_u} \quad \text{with} \quad \lambda = m_u\left(\frac{y-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (15)$$

In this configuration one has $V_u < c_d < c_u < V_d$, which corresponds to a black hole type of horizon. Related work for a double-barrier configuration recently appeared in Ref. [17].

Note that the flow depicted in Fig. 1 corresponds to a very specific case in the parameter space spanned by the intensity of the δ potential and the flow velocities, which is on the verge of becoming time dependent (see Ref. [16]). This is reflected by the fact that, for this configuration, m_u and m_d cannot be fixed independently (in contrast to what occurs for the flat profile case). One might thus legitimately expect to face a fine-tuning problem to experimentally fulfill all the required boundary conditions (12), (13), (14), and (15). One could also argue that a δ potential is nonstandard and that the specific structure of the flow pattern displayed in Fig. 1 would disappear for a more realistic potential. However, it is shown in Ref. [18] that this configuration can be rather easily obtained by launching a 1D condensate on a localized obstacle (not necessarily a δ peak). In this case, there exists a sizable range of parameters where, after ejection of an upstream dispersive shock wave, the long time flow pattern becomes of the type illustrated in Fig. 1.

C. Waterfall configuration

In this configuration the two-body interaction is constant and the external potential is a step function of the form $U(x) = -U_0\Theta(x)$, where Θ is the Heaviside function (and $U_0 > 0$). In this case, a stationary profile with a flow which is subsonic upstream and supersonic downstream, that is, a black hole configuration, has been identified in Ref. [19]. The upstream profile is, as for the δ peak configuration, of the form (11), with here $x_0 = 0$; that is, the upstream profile is exactly one half of a dark soliton. The corresponding density profile is displayed in Fig. 2.

The equalities (5) and the continuity of the order parameter at the origin impose here

$$\frac{V_d}{V_u} = \frac{n_u}{n_d} = \frac{1}{m_u^2} = m_d = \left(\frac{\xi_d}{\xi_u}\right)^2 = \left(\frac{c_u}{c_d}\right)^2, \qquad (16)$$

$\exp(i\beta_d) = -i$, and

$$\frac{U_0}{gn_u} = \frac{m_u^2}{2} + \frac{1}{2m_u^2} - 1. \qquad (17)$$

In this configuration one has $V_u = c_d < c_u < V_d$, which corresponds to a black hole type of horizon.

The remark given at the end of Sec. II B is here also in order: There might be a fine-tuning problem for verifying Eqs. (16) and (17). Although we did not perform here the

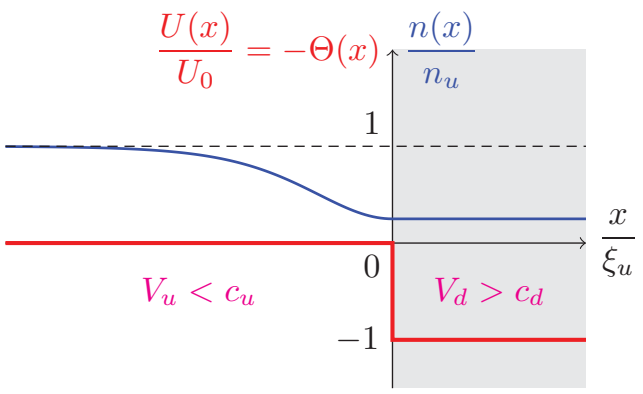


FIG. 2. (Color online) Same as Fig. 1 for the waterfall configuration.

time-dependent analysis done in Ref. [18] for the δ peak configuration, we believe that, also in the present case, it is possible to dynamically reach the stationary configuration depicted in Fig. 2. This is supported by the experimental results presented by the Technion group [3], who studied a very similar configuration (with the additional complication of the occurrence of a white hole horizon). These results show no important time-dependent features near the black hole horizon and we are thus led to consider that the stationary waterfall configuration of the type illustrated in Fig. 2 is stable and can be reached experimentally.

We make here a remark which is also relevant for the δ peak configuration: The precise location of the sonic horizon is not well defined. In both configurations (waterfall or δ peak) one may define a local sound velocity, and the point where the local flow velocity exceeds the local speed of sound can be chosen as the location of the sonic horizon. Then one finds that the sonic horizon is located slightly upstream of the interface $x = 0$ (in the waterfall configuration for instance, at $x = 0$ the local flow velocity is already m_u^{-2} times larger than the local sound velocity). However, the local sound velocity is an approximate concept, only rigorously valid in regimes where the BEC density varies over typical length scales much larger than the healing length. This is not the case in the waterfall and δ peak configurations near $x = 0$ and, as a result, the concept of sonic horizon is ill defined. In the fully quantum treatment presented below we do not use this concept: The important point for our analysis is simply that the upstream flow velocity is asymptotically (i.e., when $x \to -\infty$) larger than c_u. Hence, for preciseness, we do not state that the upstream flow is subsonic, but that it is *asymptotically* subsonic.

III. FLUCTUATIONS AROUND THE STATIONARY PROFILE

In this section we establish a basis set in each of the flow regions (upstream and downstream) which will be used in Sec. III F for describing the quantum fluctuations in the system. The simplest way to obtain this basis set is to start from expression (2), with $\Phi(x)$ given by Eq. (4), and to treat $\hat{\psi}(x,t)$ as a small time-dependent classical field, denoted as $\psi(x,t)$ in the present section, with $\Phi(x) + \psi(x,t)$ solution of the classical version of Eq. (1). One looks for a normal mode of the form

$$\psi(x,t) = e^{ik_\alpha x}[\bar{u}_\alpha(x,\omega)e^{-i\omega t} + \bar{w}_\alpha^*(x,\omega)e^{i\omega t}], \tag{18}$$

with $\alpha = u$ for $x < 0$ and $\alpha = d$ for $x > 0$. $\Phi(x,t)$ defined by Eqs. (2) and (18) describes small oscillations with pulsation ω of the order parameter around the ground state $\Phi(x)$. In the following we drop the ω-dependence of functions $\bar{u}_\alpha$ and $\bar{w}_\alpha$ for legibility. We also write $X_\alpha = x/\xi_\alpha$ (and then $k_\alpha x = m_\alpha X_\alpha$). Linearizing the Gross-Pitaevskii equation, one gets at first order in ψ:

$$\varepsilon_\alpha \begin{pmatrix} \bar{u}_\alpha \\ \bar{w}_\alpha \end{pmatrix} = \mathcal{L}_\alpha \begin{pmatrix} \bar{u}_\alpha \\ \bar{w}_\alpha \end{pmatrix}, \tag{19}$$

with

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{pmatrix} H_\alpha - i\, m_\alpha \partial_{X_\alpha} & \phi_\alpha^2 \\ -(\phi_\alpha^*)^2 & -H_\alpha - i\, m_\alpha \partial_{X_\alpha} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

where $\varepsilon_\alpha = \hbar\omega/(g_\alpha n_\alpha)$ and $H_\alpha = -\frac{1}{2}\partial_{X_\alpha}^2 + 2|\phi_\alpha|^2 - 1$. Hence, the column vector formed by $\bar{u}_\alpha$ and $\bar{w}_\alpha$ is an eigenvector of the so-called Bogoliubov-de Gennes Hamiltonian $\mathcal{L}_\alpha$.

The present section is organized as follows. We first consider solutions of Eq. (19) for $X_\alpha \in \mathbb{R}$ in Sec. III A. We give the expression of these solutions in Secs. III B and III C, specifying only what we need for the following step: That is, for $\alpha = d$, we only display the form of the solution when $x > 0$, and for $\alpha = u$, we only display the form of the solution when $x < 0$. The most general fluctuation of pulsation ω is a linear combination of eigenmodes for the upstream region glued at $x = 0$ with a linear combination of the downstream eigenmodes. We explain how this matching is done in Sec. III D. Finally, in Sec. III E, we specify the form of the scattering modes which are the appropriate modes used for quantizing the fluctuations in Sec. III F.

A. Properties of the eigenfunctions of the Bogoliubov-de Gennes equation

The relevant eigenfunctions of Eq. (19) are of the form

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_\ell(x) \\ \bar{w}_\ell(x) \end{pmatrix} = e^{iQ_\ell X_\alpha} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_\ell(x) \\ \mathcal{W}_\ell(x) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

where the functions $\mathcal{U}_\ell(x)$ and $\mathcal{W}_\ell(x)$ are constant for $|x| \to \infty$ (more precisely in the domain where ϕ_α is constant). Their exact form is specified later [Eqs. (27) and (32)]. In Eq. (21) the Q_ℓ's are the dimensionless wave vectors of the Bogoliubov modes, solutions of

$$(\varepsilon_\alpha - m_\alpha Q)^2 = \omega_{\mathrm{B}}^2(Q), \tag{22}$$

where

$$\omega_{\mathrm{B}}(Q) = Q\sqrt{1 + \frac{Q^2}{4}} \tag{23}$$

is the Bogoliubov dispersion relation in a condensate at rest (written in dimensionless form). Note that Q_ℓ—solution of Eq. (22)—is sometimes complex; this fact is taken into account in the following. In particular, for $\alpha = u$ ($\alpha = d$) one should discard values of the wave vector such that $\mathrm{Im}(Q_\ell) > 0$ [$\mathrm{Im}(Q_\ell) < 0$]. This corresponds to eliminating the evanescent channels in the region where they are divergent. For instance,

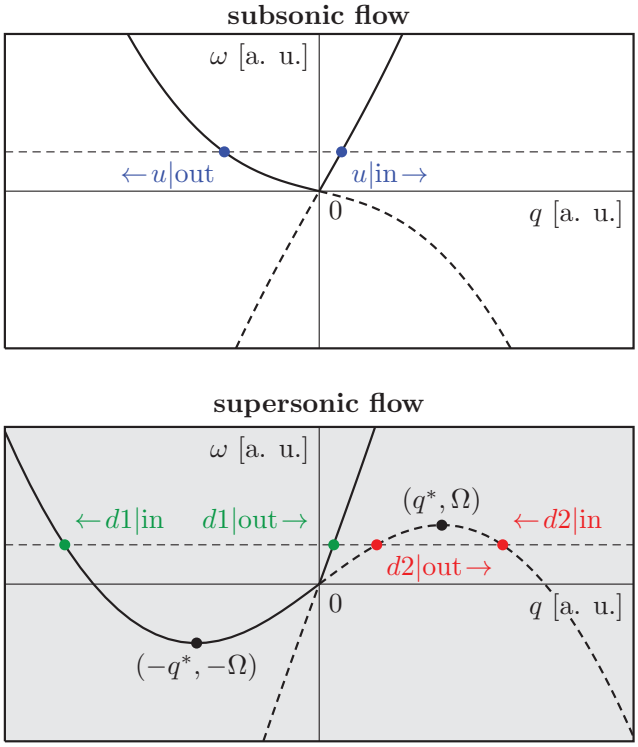


FIG. 3. (Color online) Dispersion relation (22). In each plot the horizontal dashed line is fixed by the chosen value of ω. The $q_\ell(\omega)$'s are the corresponding abscissas. Only the real eigenmodes are represented. Their denomination is explained in the text; their direction of propagation (left or right) is represented by an arrow. The part of the dispersion relation corresponding to negative norm states (see the text) is represented with a dashed line. The upper plot corresponds to a subsonic flow. The lower one corresponds to a supersonic flow; it is shaded in order to recall that it describes the situation inside the black hole.

a mode with $\mathrm{Im}(Q_\ell) < 0$ diverges when $x \to +\infty$, which corresponds to the supersonic region (labeled d) in the following, and we thus discard it. The dispersion relations and the different real wave vectors are displayed in Fig. 3.

The index α of Eq. (18) is specified to ℓ in Eq. (21) for identifying the branch of the dispersion relation to which the considered excitation pertains. For precise notations, ℓ is taken as a double index, because it is clear from Eq. (22) that the values of the wave vectors are not the same in the subsonic and supersonic regions; that is, they depend on α. Specifically, when $\alpha = u$, $\ell \in \{u|\mathrm{in}, u|\mathrm{out}, u|\mathrm{eva}\}$. When $\alpha = d$, there are two cases, depending if ω is lower or greater than a certain threshold Ω. If $\omega < \Omega$, $\ell \in \{d1|\mathrm{in}, d1|\mathrm{out}, d2|\mathrm{in}, d2|\mathrm{out}\}$ and when $\omega > \Omega$, $\ell \in \{d1|\mathrm{in}, d1|\mathrm{out}, d|\mathrm{eva}\}$.

We have chosen to label the real eigenmodes as "in" (such as $d1|\mathrm{in}$ for instance) or "out" (such as $u|\mathrm{out}$), depending on whether their group velocity [its explicit expression is given below, Eq. (29)] points toward the horizon (for the "in" modes) or away from the horizon (for the "out" modes) in a black hole configuration, that is, with a subsonic region at left of the horizon, the supersonic region being at the right. The wave vectors labeled $u|\mathrm{eva}$ and $d|\mathrm{eva}$ are complex and correspond to evanescent channels (as explained above, one selects the complex Q_ℓ's which describe waves decaying at infinity).

The threshold Ω appearing in the lower plot of Fig. 3 is reached only for a supersonic flow, for a wave vector q^* such that

$$q^*\xi_d = Q_d^* = \left(-2 + \frac{m_d^2}{2} + \frac{m_d}{2}\sqrt{8 + m_d^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

The existence of this threshold is a consequence of the behavior of the large momentum part of the dispersion relation $\omega_\mathrm{B}(Q)$ of a condensate at rest. More precisely, the part of the dispersion relation which shows a local maximum in the supersonic region corresponds to the particular solution of Eq. (22) where $\varepsilon_d - m_d Q = -\omega_\mathrm{B}(Q)$. At $Q = Q_d^*$ one has exactly $\partial\omega_\mathrm{B}/\partial Q = m_d$, and for $Q > Q_d^*$, one has $\partial\omega_\mathrm{B}/\partial Q > m_d$. Hence, the part of the spectrum with $Q > Q_d^*$ corresponds to excitations whose group velocity in the frame where the condensate is at rest ($\partial\omega_\mathrm{B}/\partial Q$) is larger than the flow velocity m_d (we use here dimensionless quantities). One can have $\partial\omega_\mathrm{B}/\partial Q > m_d > 1$ only because the dispersion relation (23) grows faster than linear at large Q. We see in Sec. IV that the corresponding waves play an important role in the zero-temperature Hawking signal.

It is easy to verify that, if $(\bar{u}_\alpha, \bar{w}_\alpha)$ is a solution of Eq. (19) associated to an eigenenergy ε_α, then $(\bar{w}_\alpha^*, \bar{u}_\alpha^*)$ is also a solution of Eq. (19), now associated to eigenenergy $-\varepsilon_\alpha$. Besides, from expression (18), one sees that both solutions describe the same perturbation of the condensate. As a result, one can always select eigenmodes with positive values of $\varepsilon_\alpha = \hbar\omega/(g_\alpha n_\alpha)$, and in all the following we chose $\omega \in \mathbb{R}^+$.

One may also notice that the above symmetry of the wave function is associated to the normalization of the eigenmodes. For instance, it is clear that the symmetry operation changes the sign of $|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2$ and one can show by simple algebraic manipulations that, for real Q_ℓ, the sign of $|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2$ is the same as the sign of $\varepsilon_\alpha - m_\alpha Q_\ell$. In the following we denote the eigenmodes for which $|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2 > 0$ as having a positive normalization (for a recent discussion of this point, see, for example, Ref. [20], as well as Refs. [21,22]). In Fig. 3 their dispersion relation is represented with a solid line, whereas the eigenmodes with negative normalization are represented with a dashed line. In particular, in the supersonic region, the $d2|\mathrm{in}$ and $d2|\mathrm{out}$ channels have negative norm for $0 < \omega < \Omega$.

It was shown in Ref. [23] that each eigenvector of Eq. (19) is associated with a conserved (i.e., x-independent) current J_ℓ. We show below (see Sec. IV) how J_ℓ relates to the energy current in the system. J_ℓ is zero for complex Q_ℓ (evanescent waves do not carry any current); this can be proven directly in our specific case, but we do not display the proof here. For real Q_ℓ one gets

$$\begin{aligned} J_\ell = {} & c_\alpha[(Q_\ell + m_\alpha)|\mathcal{U}_\ell|^2 + (Q_\ell - m_\alpha)|\mathcal{W}_\ell|^2] \\ & + c_\alpha \mathrm{Im}\big(\mathcal{U}_\ell^* \partial_{X_\alpha}\mathcal{U}_\ell + \mathcal{W}_\ell^* \partial_{X_\alpha}\mathcal{W}_\ell\big). \end{aligned} \tag{25}$$

Going back to dimensioned quantities and using the $\bar{u}_\ell$ and $\bar{w}_\ell$ functions, this reads

$$J_\ell = \frac{\hbar}{2m}[\bar{u}_\ell^*(k_\alpha - i\partial_x)\bar{u}_\ell - \bar{w}_\ell^*(k_\alpha + i\partial_x)\bar{w}_\ell] + \mathrm{c.c.}, \tag{26}$$

where "c.c." stands for "complex conjugate".

B. Downstream region: $x > 0$

We recall that in this region the flow is supersonic and that the eigenvectors are labeled with an index $\ell \in \{d1|\text{in}, d1|\text{out}, d2|\text{in}, d2|\text{out}\}$ when $\omega < \Omega$ and $\ell \in \{d1|\text{in}, d1|\text{out}, d|\text{eva}\}$ when $\omega > \Omega$.

Here ϕ_d^2 appearing in Eq. (20) does not depend on x and is equal to $\exp(2i\beta_d)$ [24]. This implies that the functions $\mathcal{U}_\ell$ and $\mathcal{W}_\ell$ are also x-independent. One finds

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_\ell \\ \mathcal{W}_\ell \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{C}_\ell} \begin{pmatrix} (Q_\ell^2/2 + E_\ell)e^{i\beta_d} \\ (Q_\ell^2/2 - E_\ell)e^{-i\beta_d} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

with $E_\ell = \varepsilon_d - m_d Q_\ell$ and $\mathcal{C}_\ell$ is a normalization constant which we always chose real and positive. The corresponding current is easily evaluated using Eq. (25). For real Q_ℓ one gets

$$J_\ell = V_g(Q_\ell)(|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2), \tag{28}$$

where

$$V_g(Q_\ell) = c_d \frac{\partial \varepsilon_d}{\partial Q_\ell} = \frac{\partial \omega}{\partial q_\ell} \tag{29}$$

is the group velocity in the laboratory frame and $q_\ell = Q_\ell/\xi_\alpha$ with here $\alpha = d$, but Eqs. (28) and (29) are valid also for $\alpha = u$.

A typical choice for the normalization constant is $\mathcal{C}_\ell = |2\,\mathrm{Re}(E_\ell^* Q_\ell^2)|^{1/2}$. This ensures that $|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2 = \pm 1$. For our case, it is more appropriate to multiply the previous expression of $\mathcal{C}_\ell$ by $|V_g(Q_\ell)|^{1/2}$, so that for real Q_ℓ one has $J_\ell = \pm 1$. Hence, we chose

$$\mathcal{C}_\ell = \left|2\,\mathrm{Re}\left(E_\ell^* Q_\ell^2\right) V_g(Q_\ell)\right|^{\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

which implies

$$|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2 = \frac{\pm 1}{|V_g(Q_\ell)|}. \tag{31}$$

The modes for which the factor $+1$ appears in the above expression are the positive norm modes previously discussed. The others are the negative norm modes. With the normalization (31), from Eq. (28), one sees that $J_\ell = 1$ either for nonevanescent modes of positive norm propagating to the right or for nonevanescent modes of negative norm propagating to the left. In the other nonevanescent cases (modes of positive norm propagating to the left or modes of negative norm propagating to the right) $J_\ell = -1$. More precisely, $J_{d1|\text{out}} = +1 = J_{d2|\text{in}}$ and $J_{d1|\text{in}} = -1 = J_{d2|\text{out}}$. We see below (Sec. IV) that $\hbar\omega J_\ell$ is the energy current associated to mode ℓ and thus negative norm modes can be interpreted as carrying negative energy.

C. Upstream region: $x < 0$

We recall that in this region the flow is asymptotically subsonic and that $\ell \in \{u|\text{in}, u|\text{out}, u|\text{eva}\}$. In the flat profile configuration one has $\phi_u(X_u) = 1$ and the functions $\mathcal{U}_\ell$ and $\mathcal{W}_\ell$ have the same form as the ones displayed in the previous section. Hence, in the remainder of the present section we concentrate on the δ peak and waterfall configurations where ϕ_u depends on X_u. In this case the functions $\mathcal{U}_\ell$ and $\mathcal{W}_\ell$ have a more complicated expression than in the downstream region (see, e.g., Appendix A of Ref. [25]). Defining $\chi(X_u) = \cos\theta \tanh[(X_u - X_0)\cos\theta)]$, where $X_0 = x_0/\xi_u$ (we recall that in the waterfall configuration $x_0 = 0$), one gets

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_\ell(x) \\ \mathcal{W}_\ell(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}_\ell} \begin{pmatrix} [Q_\ell/2 + \varepsilon_u/Q_\ell + i\chi(X_u)]^2 \\ [Q_\ell/2 - \varepsilon_u/Q_\ell + i\chi(X_u)]^2 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

where $\mathcal{D}_\ell$ is an arbitrary constant, the value of which is determined by the normalization (see below). The current (25) corresponding to $\mathcal{U}_\ell$ and $\mathcal{W}_\ell$ given in Eq. (32) is most easily evaluated at $X_u \to -\infty$, that is, in a region where $\mathcal{U}_\ell$ and $\mathcal{W}_\ell$ become independent of X_u. In this region one has

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_\ell \\ \mathcal{W}_\ell \end{pmatrix} \underset{X_u \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathcal{D}_\ell} \begin{pmatrix} [Q_\ell/2 + \varepsilon_u/Q_\ell - i\cos\theta]^2 \\ [Q_\ell/2 - \varepsilon_u/Q_\ell - i\cos\theta]^2 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Since ϕ_u tends to a constant $[\exp(i\beta_u)]$ when $X_u \to -\infty$, one could, in this region, use for the Bogoliubov modes an expression similar to Eq. (27), which is used in the downstream domain. Indeed, it is difficult to see it from the above formula, but we have checked that (33) is proportional to an expression similar to Eq. (27), where β_d is replaced by β_u. However, expression (33) is here more appropriate since its position-dependent version (32) is valid for all $X_u < 0$. From Eq. (33) one gets for real Q_ℓ

$$|\mathcal{U}_\ell|^2 - |\mathcal{W}_\ell|^2 \underset{X_u \to -\infty}{\longrightarrow} 8\,\frac{E_\ell}{|\mathcal{D}_\ell|^2}\left(\frac{\varepsilon_u}{Q_\ell}\right)^2, \tag{34}$$

where $E_\ell = \varepsilon_u - m_u Q_\ell$. In the following, the constant $\mathcal{D}_\ell$ is chosen such that $J_\ell = \pm 1$ for real Q_ℓ (see the discussion at the end of Sec. III B; one has here $J_{u|\text{out}} = -1$ and $J_{u|\text{in}} = +1$). Also, we chose $\mathcal{D}_{u|\text{in}}$ on the positive imaginary axis in the complex plane and $\mathcal{D}_{u|\text{out}}$ on the negative imaginary axis. This implies that, for real Q_ℓ,

$$\mathcal{D}_\ell = \sqrt{8}\,i\,\frac{Q_\ell}{|Q_\ell|}\,|E_\ell V_g(Q_\ell)|^{\frac{1}{2}}\left|\frac{\varepsilon_u}{Q_\ell}\right|. \tag{35}$$

The particular choice of phase in Eq. (35) is based on aesthetic grounds: It ensures that the $\omega \to 0$ limit of the eigenfunction (33) upstream the horizon in the waterfall and δ peak configurations has the same phase as its equivalent for the flat profile configuration. This makes it possible in Appendix C to obtain formulas valid for all three types of configurations [Eqs. (C4) and (C5)].

If Q_ℓ is complex, the expression is more complicated; we write it here for completeness. One takes

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\ell = |V_g(Q_\ell)|^{\frac{1}{2}} \Big| & 8\,\mathrm{Re}[E_\ell(\varepsilon_u/Q_\ell)^2] \\ & + 4\,\varepsilon_u \cos^2\theta\,\frac{(Q_\ell - Q_\ell^*)^2}{|Q_\ell|^2} \\ & + 2i\,\varepsilon_u \cos\theta\,\frac{Q_\ell - Q_\ell^*}{|Q_\ell|^2}\left[Q_\ell^2 + (Q_\ell^*)^2\right]\Big|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{36}$$

This expression is clearly real and it ensures that, as in the downstream region, the normalization (31) is fulfilled for all Q_ℓ.

D. Matching at $x = 0$

Let us denote

$$\Xi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \exp(i\, m_\alpha X_\alpha)\bar{u}_\alpha(x) \\ \exp(-i\, m_\alpha X_\alpha)\bar{w}_\alpha(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\alpha(x) \\ w_\alpha(x) \end{pmatrix}, \tag{37}$$

and

$$\Xi_\ell(x) = \begin{pmatrix} \exp\left(i(Q_\ell + m_\alpha)X_\alpha\right)\mathcal{U}_\ell(x) \\ \exp\left(i(Q_\ell - m_\alpha)X_\alpha\right)\mathcal{W}_\ell(x) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Remember that the index α is equal to either u or d, depending which side of the horizon one considers, whereas ℓ labels the eigenmodes of Eq. (19): $\ell \in \{u|\text{in}, u|\text{out}, u|\text{eva}, d1|\text{in}, d1|\text{out}, d2|\text{in}, d2|\text{out}, d|\text{eva}\}$. More precisely, Ξ_u describes the excitations in the subsonic region; it is a linear combination of $\Xi_{u|\text{in}}$, $\Xi_{u|\text{out}}$, and $\Xi_{u|\text{eva}}$. Ξ_d, which describes the same excitation in the supersonic region, is a linear combination of $\Xi_{d1|\text{in}}$, $\Xi_{d1|\text{out}}$, $\Xi_{d2|\text{in}}$, $\Xi_{d2|\text{out}}$, and $\Xi_{d|\text{eva}}$.

Then the matching conditions at the horizon read

$$\Xi_u(0) = \Xi_d(0), \tag{39}$$

and

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d\Xi_d}{dx}(0) - \frac{d\Xi_u}{dx}(0)\right] = \Lambda\, \Xi_u(0). \tag{40}$$

In the case of the flat profile or of the waterfall configuration, Eq. (40) also holds, but then $\Lambda = 0$.

E. The scattering modes

Among all the possible modes described in Sec. III D as linear combinations of the Ξ_ℓ's, we are primarily interested in the scattering modes. These are the three modes which are impinging on the horizon along one of the three possible ingoing channels: $u|\text{in}$, $d1|\text{in}$, or $d2|\text{in}$. Each of these ingoing waves gives rise to transmitted and reflected waves which, together with the initial ingoing component, form what we denote as a "scattering mode". It is natural to label these modes according to their incoming channels, but since each mode includes more than the ingoing wave that generates it, for avoiding confusion in the notations, we use capital letters and denote the scattering modes as Ξ^U, Ξ^{D1}, and Ξ^{D2}.

For concreteness, we now give the expression of each of the scattering modes. Each mode has a different analytical expression on each side of the horizon. According to our conventions we denote these expressions as $\Xi_u^U(x)$, $\Xi_u^{D1}(x)$, and $\Xi_u^{D2}(x)$ in the upstream region and $\Xi_d^U(x)$, $\Xi_d^{D1}(x)$, and $\Xi_d^{D2}(x)$ in the downstream one. Specifically, one has

$$\begin{aligned}
\Xi_u^U &= \Xi_{u|\text{in}} + S_{u,u}\,\Xi_{u|\text{out}} + S_{u,u}^{\text{eva}}\,\Xi_{u|\text{eva}}, \\
\Xi_d^U &= S_{d1,u}\,\Xi_{d1|\text{out}} + \Theta(\Omega-\omega)S_{d2,u}\,\Xi_{d2|\text{out}} \\
&\quad + \Theta(\omega-\Omega)S_{d,u}^{\text{eva}}\,\Xi_{d|\text{eva}}, \\
\Xi_u^{D1} &= S_{u,d1}\,\Xi_{u|\text{out}} + S_{u,d1}^{\text{eva}}\,\Xi_{u|\text{eva}},
\end{aligned}$$

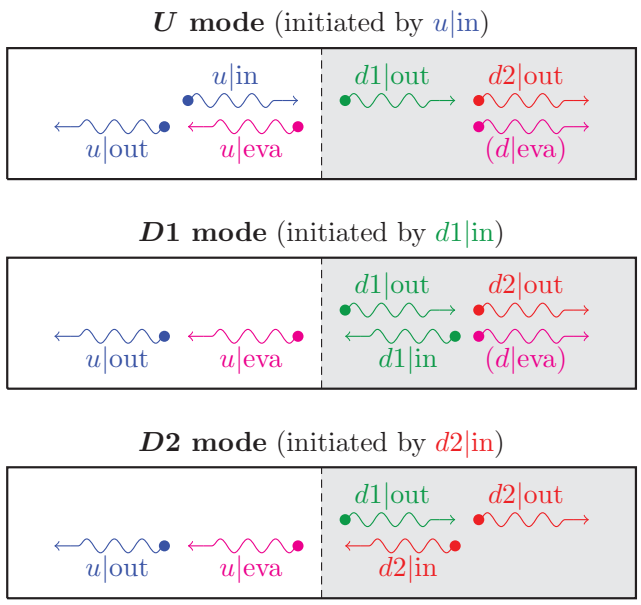


FIG. 4. (Color online) The scattering modes. The color code is the same as in Fig. 3. The additional purple wiggly lines correspond to evanescent channels. For $\omega > \Omega$, the $D2$ mode disappears and the channel $d2|\text{out}$ is replaced by $d|\text{eva}$ in the two upper panels (U and $D1$ modes). The region corresponding to the interior of the black hole is shaded as in the previous figures.

$$\begin{aligned}
\Xi_d^{D1} &= \Xi_{d1|\text{in}} + S_{d1,d1}\,\Xi_{d1|\text{out}} + \Theta(\Omega-\omega)S_{d2,d1}\,\Xi_{d2|\text{out}} \\
&\quad + \Theta(\omega-\Omega)S_{d,d1}^{\text{eva}}\,\Xi_{d|\text{eva}}, \\
\Xi_u^{D2} &= \Theta(\Omega-\omega)\left(S_{u,d2}\,\Xi_{u|\text{out}} + S_{u,d2}^{\text{eva}}\,\Xi_{u|\text{eva}}\right), \\
\Xi_d^{D2} &= \Theta(\Omega-\omega)(\Xi_{d2|\text{in}} + S_{d1,d2}\,\Xi_{d1|\text{out}} + S_{d2,d2}\,\Xi_{d2|\text{out}}).
\end{aligned} \tag{41}$$

For legibility, the x-dependence of the Ξ vectors has not been displayed in the equations. The three different modes are displayed in a pictorial way in Fig. 4 where the purple wiggly lines correspond to the evanescent modes $u|\text{eva}$ and $d|\text{eva}$ that cannot be represented in Fig. 3. Note that when $\omega > \Omega$, the outgoing $d2$ wave (involved in the U and $D1$ modes) becomes evanescent and the $D2$ mode disappears, because the incident seed for this mode (the propagating $d2|\text{in}$ wave) disappears. This is taken care of in formulas (41) by the Heaviside functions $\Theta(\Omega-\omega)$ and $\Theta(\omega-\Omega)$.

The S coefficients ($S_{u,u}$, $S_{u,u}^{\text{eva}}$, etc.) in Eqs. (41) are complex and do not depend on x (they do depend on ω though). For each of the three scattering modes, one has four such coefficients which, once the incident channel is fixed, are determined by solving the 4×4 system of linear equations (39) and (40): Hence, the S parameters depend on the configuration considered (flat profile, δ peak or waterfall). Physically, the square moduli $|S_{\nu',\nu}(\omega)|^2$ of the elements of the S matrix give the transmission or reflection coefficients for a ν-ingoing mode of energy $\hbar\omega$, which scatters into an ν'-outgoing mode at the same energy.

Current conservation can be written in a simple matrix form provided the normalization of the real modes is defined in such a way that $J_\ell = \pm 1$ (as done in Secs. III B and III C). Defining,

for $\omega < \Omega$, the S matrix as

$$S = \begin{pmatrix} S_{u,u} & S_{u,d1} & S_{u,d2} \\ S_{d1,u} & S_{d1,d1} & S_{d1,d2} \\ S_{d2,u} & S_{d2,d1} & S_{d2,d2} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

current conservation reads

$$S^\dagger \eta S = \eta = S\eta S^\dagger, \quad \text{where} \quad \eta = \text{diag}(1,1,-1). \tag{43}$$

The coefficients such as $S^{\text{eva}}_{d,u}$ are not involved in current conservation since the evanescent waves carry no current. Note that for $\omega > \Omega$, the S matrix is 2×2 because, the outgoing $d2$ mode—being evanescent in this case—is not involved in current conservation: One simply has the usual unitarity relation $S^\dagger S = \text{diag}(1,1)$. We have checked that our results for the scattering matrix indeed fulfill the η-unitarity condition (43) for $\omega < \Omega$ (and the unitarity condition for $\omega > \Omega$).

In the following we need to determine the low-ω behavior of the components of the S matrix. In the three configurations we considered, we always find that, for $\nu = u,d1,d2$, one has

$$\begin{aligned} S_{\nu,u} &= f_{\nu,u} + h_{\nu,u}\varepsilon_u + O\left(\varepsilon_u^2\right), \\ S_{\nu,d1} &= \frac{f_{\nu,d1}}{\sqrt{\varepsilon_u}} + h_{\nu,d1}\sqrt{\varepsilon_u} + O\left(\varepsilon_u^{3/2}\right), \\ S_{\nu,d2} &= \frac{f_{\nu,d2}}{\sqrt{\varepsilon_u}} + h_{\nu,d2}\sqrt{\varepsilon_u} + O\left(\varepsilon_u^{3/2}\right), \end{aligned} \tag{44}$$

where $\varepsilon_u = \hbar\omega/(mc_u^2)$ and the f's and the h's are dimensionless complex numbers. We determined them analytically in the three configurations we considered. The relevant formulas are given in Appendix A.

F. Quantization

The field operator $\hat\psi(x,t)$ associated in the Heisenberg representation to the elementary excitations on top of the background [as defined by Eq. (2)] is expanded over the scattering modes:

$$\begin{aligned} \hat\psi(x,t) = e^{ik_\alpha x}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{L\in\{U,D1\}} &[\bar u_L(x,\omega)e^{-i\omega t}\hat a_L(\omega) \\ &+ \bar w_L^*(x,\omega)e^{i\omega t}\hat a_L^\dagger(\omega)] \\ + e^{ik_\alpha x}\int_0^\Omega \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} &[\bar u_{D2}(x,\omega)e^{-i\omega t}\hat a_{D2}^\dagger(\omega) \\ &+ \bar w_{D2}^*(x,\omega)e^{i\omega t}\hat a_{D2}(\omega)], \end{aligned} \tag{45}$$

where we have written explicitly the ω-dependence. The $\hat a_L^\dagger(\omega)$'s create an excitation of energy $\hbar\omega$ in one of the three scattering modes (U, $D1$, or $D2$). They obey the following commutation relation:

$$[\hat a_L(\omega), \hat a_{L'}^\dagger(\omega')] = \delta_{L,L'}\delta(\omega-\omega'). \tag{46}$$

From expression (45) one sees that the $D2$ mode (which originates from the negative norm $d2|\text{in}$ channel) is quantized in a nonstandard way: The role of the creation and annihilation operators is exchanged compared to the U and $D1$ modes. Using the current conservation relation (43), one can show that this choice of quantization is necessary for fulfilling the appropriate Bose commutation relation of the $\hat\psi$ operator:

$$[\hat\psi(x,t), \hat\psi^\dagger(x',t)] = \delta(x-x'). \tag{47}$$

IV. RADIATION SPECTRUM

The Hawking signal corresponds to emission of radiation from the interior toward the exterior of the black hole [7]. In our specific case the energy current associated to emission of elementary excitations is (cf. [26])

$$\hat\Pi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_t\hat\Phi^\dagger(x,t)\,\partial_x\hat\Phi(x,t) + \text{H.c.}, \tag{48}$$

where "H.c." stands for "Hermitian conjugate". From expressions (2) and (45) one can write the average current $\Pi(x) = \langle\hat\Pi(x,t)\rangle$ under the form

$$\Pi(x) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\,\hbar\omega\, J(x,\omega), \tag{49}$$

where $J(x,\omega)$ [and accordingly $\Pi(x)$] can be separated in a zero-temperature part $J_0(x,\omega)$ [$\Pi_0(x)$] and a "thermal part" $J_T(x,\omega)$ [$\Pi_T(x)$], with

$$\begin{aligned} J_0(x,\omega) = \frac{\hbar}{2m}\Bigg[-\sum_{L\in\{U,D1\}} &\bar w_L^*(k_\alpha + i\partial_x)\bar w_L \\ &+ \Theta(\Omega-\omega)\bar u_{D2}^*(k_\alpha - i\partial_x)\bar u_{D2}\Bigg] + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{50}$$

and

$$J_T(x,\omega) = \sum_{L\in\{U,D1,D2\}} J_L(x,\omega)\,n_L(\omega), \tag{51}$$

where

$$J_L = \frac{\hbar}{2m}[\bar u_L^*(k_\alpha - i\partial_x)\bar u_L - \bar w_L^*(k_\alpha + i\partial_x)\bar w_L] + \text{c.c.}, \tag{52}$$

and $n_L(\omega) = \langle\hat a_L^\dagger(\omega)\hat a_L(\omega)\rangle$ is the occupation number of the mode L. Note that in expression (51) the $D2$ mode contributes only for $\omega < \Omega$. Comparing the expression (52) with Eq. (26) one sees that J_L is the conserved current carried by a scattering mode L; it is x-independent for the stationary flows we consider in the present work.

Note for avoiding confusion that what we call a "zero-temperature term" is the contribution to the Hawking signal that exists even when the system is at zero temperature. It is described below (Sec. IV B) by an effective radiation temperature T_{H} (the Hawking temperature) which is not the temperature of the BEC.

A. Energy current in a black hole configuration

For large and negative x (i.e., deep in the subsonic region) we show in Appendix B that formulas (41) and (50) yield the very natural result

$$\Pi_0 = -\int_0^\Omega \frac{d\omega}{2\pi}\,\hbar\omega\,|S_{u,d2}(\omega)|^2. \tag{53}$$

The minus sign in this equation indicates that the energy current is directed toward $-\infty$, as clearly seen from Appendix B. If one computes the energy current for a point deep in the

supersonic region (i.e., for x large and positive) one gets the same result as (53), in agreement with the conservation of the energy flux in a stationary configuration. Note that the zero-temperature radiation Π_0 vanishes in absence of black hole, as expected. In presence of a black hole, the integral gives a finite result, corresponding to a Hawking signal emitted even for $T = 0$. This remark, together with the specific form of Eq. (53), shows that one needs two ingredients for having a $T = 0$ Hawking radiation from a black hole: (i) a $d2|\text{in}$ mode and (ii) a $d2 \leftrightarrow u$ mode conversion, that is, a nonzero $S_{u,d2}$ coefficient. Remember that condition (i) is fulfilled only because the dispersion relation in a supersonic flow bends down at high q (see Fig. 3, bottom panel), which is a consequence of the nonlinear behavior of the Bogoliubov dispersion relation (23). As discussed in Sec. III A, the $d2$ incoming channel corresponds to waves whose group velocity in the frame of the condensate is larger than V_d. It is thus not surprising that these "fast" modes are involved in the Hawking radiation since they are able to overrun the flow of velocity V_d and thus to escape the black hole. This is clearly a flaw of the BEC analogy of gravitational black holes: Point (i) is certainly not fulfilled in the gravitational case since the group velocity of photons is a constant (the speed of light). As a result, the number of ingoing and outgoing channels are not equal for gravitational black holes and one cannot get a stationary description of the Hawking effect: One has to take into account the dynamics of the formation of the horizon.

From Eqs. (41) and (51), the term $J_T(x,\omega)$ can be rewritten as

$$\begin{aligned} J_T(x,\omega) &= \frac{2}{c_u\xi_u}[n_U(\omega)(1-|S_{u,u}|^2) \\ &\quad - n_{D1}(\omega)|S_{u,d1}|^2 - n_{D2}(\omega)|S_{u,d2}|^2] \\ &= \frac{2}{c_u\xi_u}\{[n_U(\omega)-n_{D1}(\omega)]|S_{u,d1}|^2 \\ &\quad - [n_U(\omega)+n_{D2}(\omega)]|S_{u,d2}|^2\}. \end{aligned} \tag{54}$$

In absence of black hole, the $S_{u,d2}$ term in Eq. (54) disappears. As a result, at thermal equilibrium, that is, when $n_U(\omega) = n_{D1}(\omega)$ is a thermal Bose occupation number of the form

$$n_T(\omega) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}, \tag{55}$$

one has $J_T(x,\omega) = 0$ [this is most easily seen from the last expression of J_T in Eq. (54)]. This is a very pleasant result demonstrating that at thermal equilibrium there is no Hawking radiation at all for any type of configuration connecting two asymptotically subsonic regions.

In the case where an acoustic horizon is present, a finite temperature configuration may be reached in the manner presented in Ref. [6]: One branches the black hole configuration adiabatically starting from a system initially uniformly subsonic at thermal equilibrium. This changes the dispersion relation in the supersonic part, but not the occupation number of the adiabatically modified modes (see the discussion in Ref. [9]). In this case (54) yields a finite value for the Π_T term (because $S_{u,u}$, n_{D1}, and n_{D2} are regular at low ω).

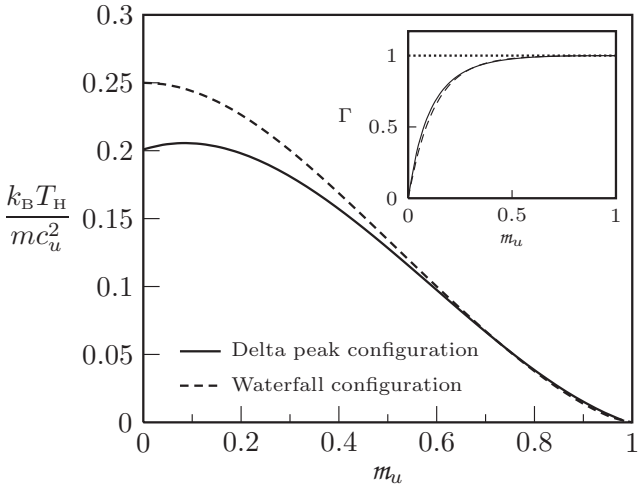


FIG. 5. Normalized Hawking temperature $k_B T_H/(mc_u^2)$ as a function of the upstream Mach number $m_u = V_u/c_u$ for the δ peak and waterfall configurations. The inset displays the grayness factor Γ as a function of m_u for these two configurations.

B. Hawking temperature

The zero-temperature radiation Π_0 as given by Eq. (53) corresponds to an emission spectrum given by $|S_{u,d2}(\omega)|^2$. Can this be described by an effective temperature; that is, can $|S_{u,d2}(\omega)|^2$ be approximated by a factor of the type $\Gamma \times n_{T_H}(\omega)$, where T_H is the effective temperature of radiation? We address this question in the present section.

One could first argue that the addition of the "grayness factor" Γ is an unnecessary complication of the fit of $|S_{u,d2}|^2$ by a thermal spectrum. Indeed, in most cases, Γ is found to be close to 1, but this is not generally true (see the discussion below and the inset of Fig. 5) and this is the reason why we keep a certain degree of "grayness" in the present analysis.

Obviously, the identification of $|S_{u,d2}|^2$ with a Bose thermal factor can only be approximate because, whereas a term such as $n_{T_H}(\omega)$ is finite for all $\omega \in \mathbb{R}^+$, $|S_{u,d2}|^2$ abruptly cancels for $\omega > \Omega$. Nonetheless, one can try to find the best possible approximation by comparing the low-ω expansion of $|S_{u,d2}|^2$ [from Eqs. (44)] with $\Gamma \times n_{T_H}(\omega) = \Gamma[k_B T_H/(\hbar\omega) - \frac{1}{2} + O(\omega)]$. This immediately yields

$$\Gamma = -4\,\mathrm{Re}(f_{u,d2}^* h_{u,d2}) \quad \text{and} \quad \frac{k_B T_H}{mc_u^2} = \frac{|f_{u,d2}|^2}{\Gamma}. \tag{56}$$

The analytical expressions obtained in Appendix A for $f_{u,d2}$ and $h_{u,d2}$ in the different configurations we consider yield the following estimates of the Hawking temperature:

$$\frac{k_B T_H}{mc_u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{m_u^2}{m_d}\dfrac{(1-m_u^2)(m_d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{m_d^2-m_u^2} & \text{(flat profile)}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{(1-m_u^4)^{\frac{3}{2}}}{(2+m_u^2)(1+2m_u^2)} & \text{(waterfall)}. \end{cases} \tag{57}$$

We do not display here the formula for the δ peak configuration because it is too cumbersome. Instead, we show in Fig. 5 the corresponding curve relating T_H to m_u in the δ peak configuration and compare it with the results of the waterfall

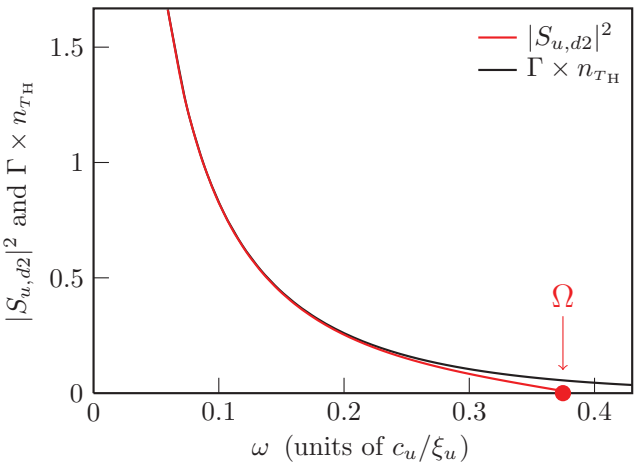


FIG. 6. (Color online) Radiation spectrum in the δ peak configuration. Red curve, $|S_{u,d2}|^2$ as a function of the dimensionless quantity $\omega\xi_u/c_u$; black curve, $\Gamma \times n_{T_H}(\omega)$. The plot is drawn for $m_u = 0.5$; in this case $k_B T_H/(mc_u^2) \simeq 0.128$ and $\Gamma \simeq 0.977$. The difference between $|S_{u,d2}|^2$ and $\Gamma \times n_{T_H}$ is maximum when $\omega = \Omega$ and is close to 0.06 in this case (for the chosen value of m_u one has $\Omega\xi_u/c_u \simeq 0.369$).

configuration. One first notices from the figure that $T_H \to 0$ when $m_u \to 1$: This is expected because in this case the horizon disappears. One sees also that T_H remains finite in the limit $m_u \to 0$ in both configurations. However, this limit is singular in the sense that it corresponds to a very peculiar flow. For instance, in the waterfall configuration, the analysis of Sec. II C shows that the flow with $m_u = 0$ is observed for a step with $U_0 \to \infty$ and has downstream a zero density and an infinite velocity: The corresponding flow pattern is most probably unreachable. Moreover, one sees from the inset of Fig. 5 (and also from the analytical expression given in Appendix A) that in this case $\Gamma \to 0$ and the expected signal disappears. In the remainder of this work we rather consider a typical setting with $m_u = 0.5$. For this value of m_u one gets $m_d \simeq 1.83$ and $\Gamma \simeq 0.977$ in the δ peak configuration, $m_d = 4$ and $\Gamma \simeq 0.980$ in the waterfall configuration.

Once T_H is determined through the above low-energy analysis, one should check, as done, for example, in Ref. [11], if the approximation of $|S_{u,d2}|^2$ with a thermal spectrum is accurate in the whole emission window $\omega \in [0,\Omega]$. This is done in Fig. 6 in the case of the δ peak configuration. One sees from the figure that the overall agreement is quite good. The same good agreement is obtained for the waterfall and flat profile configurations, and this legitimizes the definition of a Hawking temperature in the three configurations considered in the present work. This was not *a priori* obvious because the concept of Hawking temperature is of semiclassical origin (see, e.g., [27]) and the three configurations we consider being discontinuous, one could fear that a semiclassical analysis would fail. We see the relevance of the concept of Hawking temperature as a confirmation that the configurations considered here are typical for observing the Hawking effect. In the next section we draw the same conclusion from a study of the density correlations.

From Eq. (57) and Fig. 5 one gets an order of magnitude $k_B T_H/(mc_u^2) \sim 0.1$, that is, typically $T_H \sim 10$ nK. Since the temperature in typical experiments is rather of the order of the chemical potential mc_u^2 (i.e., around 100 nK), the Hawking radiation will be lost in the thermal noise and very difficult to identify. This is the reason why density correlations have been proposed in Ref. [6] as a tool for identifying the Hawking effect. We thus consider two-body correlations in the next section.

V. CORRELATIONS

The connected two-body density matrix is defined by (see Ref. [28])

$$g^{(2)}(x_1,x_2) = \langle \hat{\Phi}^\dagger(x_1,t)\hat{\Phi}^\dagger(x_2,t)\hat{\Phi}(x_1,t)\hat{\Phi}(x_2,t)\rangle - \langle \hat{\Phi}^\dagger(x_1,t)\hat{\Phi}(x_1,t)\rangle\langle \hat{\Phi}^\dagger(x_2,t)\hat{\Phi}(x_2,t)\rangle. \quad (58)$$

$g^{(2)}$ is time-independent because we work in a stationary configuration. In Eq. (58) the average is taken either on the ground state or over a statistical ensemble. $g^{(2)}$ is directly related to the density correlations in the system, this can be seen by rewriting Eq. (58) under the form

$$g^{(2)}(x_1,x_2) = \langle \hat{n}(x_1,t)\hat{n}(x_2,t)\rangle - \langle \hat{n}(x_1)\rangle\langle \hat{n}(x_2)\rangle - \delta(x_1 - x_2)\langle \hat{n}(x_1)\rangle. \quad (59)$$

The last term in the right-hand side (r.h.s.) of Eq. (59) is the Poissonian fluctuation term originating from the discreteness of the particles [29]. Written under this form, $g^{(2)}$ is sometimes denoted as the cluster function.

For a system at thermal equilibrium in the grand canonical ensemble, one has

$$n(x) = \langle \hat{n}(x)\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \mathrm{Tr}\left\{\hat{n}(x)\exp\left[-\frac{1}{k_B T}(\hat{H} - \mu\hat{N})\right]\right\}, \quad (60)$$

where $\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\{\exp[-(\hat{H} - \mu\hat{N})/(k_B T)]\}$ is the partition function. Deriving expression (60) with respect to μ, one gets

$$k_B T \frac{\partial n(x)}{\partial \mu} = \langle \hat{n}(x)\hat{N}\rangle - \langle \hat{n}(x)\rangle\langle \hat{N}\rangle. \quad (61)$$

Since $\hat{N} = \int_{\mathbb{R}} dx'\, \hat{n}(x')$, property (61) and expression (59) yield the following sum rule:

$$\int_{\mathbb{R}} dx'\, g^{(2)}(x,x') = -n(x) + k_B T \frac{\partial n(x)}{\partial \mu}. \quad (62)$$

For a homogeneous system, this sum rule is a standard thermodynamic result [29], which can be shown to be equivalent to the compressibility sum rule (whose definition is given, for instance, in Ref. [30]). Formula (62) is a generalization to inhomogeneous systems; it has been used in Ref. [31] for witnessing quasicondensation through a study of density fluctuations and in Ref. [32] to propose an universal thermometry for quantum simulations.

In the remainder of this section we concentrate on the $T = 0$ case, postponing the discussion of finite temperature to a future publication. Fulfillment of the sum rule (62) is a strong test of the validity of the Bogoliubov approach used in the present work. We give in Sec. V B the leading-order contributions to $g^{(2)}$ and explain in Appendix C how we use them in order to check that the $T = 0$ version of the sum rule (62) is indeed verified for $|x| \to \infty$ (i.e., far from the horizon).

From the Bogoliubov expansion (2), one gets at leading order

$$g^{(2)}(x_1,x_2) = \Phi(x_1)\Phi^*(x_2)\langle\hat{\psi}^\dagger(x_1,t)\hat{\psi}(x_2,t)\rangle + \Phi(x_1)\Phi(x_2)\langle\hat{\psi}^\dagger(x_1,t)\hat{\psi}^\dagger(x_2,t)\rangle + \text{c.c.} \quad (63)$$

For $i = 1$ or 2, we write $\Phi(x_i) = \sqrt{n_i}\exp(ik_ix_i)\phi_i(x_i)$, where $n_i = n_u$ (n_d), $k_i = k_u$ (k_d), and $\phi_i = \phi_u$ (ϕ_d) if $x_i < 0$ $(x_i > 0)$. We recall that ϕ_d is defined in Eq. (6) and ϕ_u is either equal to unity (flat profile configuration) or given by Eq. (11) (δ peak and waterfall configurations). Based on the decomposition (45), one can show (see Ref. [9]) that Eq. (63) yields

$$g^{(2)}(x_1,x_2) = \sqrt{n_1n_2}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\,\gamma(x_1,x_2,\omega), \quad (64)$$

where $\gamma(x_1,x_2,\omega)$ [and accordingly $g^{(2)}(x_1,x_2)$] is conveniently separated in a zero-temperature term γ_0 and a remaining term γ_T:

$$\gamma(x_1,x_2,\omega) = \gamma_0(x_1,x_2,\omega) + \gamma_T(x_1,x_2,\omega). \quad (65)$$

$g_0^{(2)}$ and γ_0 are the contributions evaluated from Eqs. (45) and (63) which remain finite even in the $T = 0$ case where $n_L(\omega) = \langle\hat{a}_L^\dagger(\omega)\hat{a}_L(\omega)\rangle = 0$. One has

$$\gamma_0(x_1,x_2,\omega) = \sum_{L\in\{U,D1\}}\tilde{w}_L^*(x_1)\tilde{r}_L(x_2) + \Theta(\Omega-\omega)\tilde{u}_{D2}^*(x_1)\tilde{r}_{D2}(x_2) + \text{c.c.}, \quad (66)$$

with

$$\tilde{u}_L(x_i) = \phi_i^*(x_i)\bar{u}_L(x_i), \quad \tilde{w}_L(x_i) = \phi_i(x_i)\bar{w}_L(x_i), \quad (67)$$

and

$$\tilde{r}_L(x_i) = \tilde{u}_L(x_i) + \tilde{w}_L(x_i). \quad (68)$$

The other contribution to Eq. (65) is

$$\gamma_T(x_1,x_2,\omega) = \sum_{L\in\{U,D1,D2\}}\tilde{r}_L^*(x_1)\tilde{r}_L(x_2)n_L(\omega) + \text{c.c.}, \quad (69)$$

where it should be understood that the $D2$ contribution is only present for $\omega < \Omega$.

We often display below the results not for $g^{(2)}$ but for the dimensionless quantity $G^{(2)}$ defined as

$$G^{(2)}(x_1,x_2) = \frac{g^{(2)}(x_1,x_2)}{n(x_1)n(x_2)}. \quad (70)$$

Also, we compute the correlations when x_1 and x_2 are both far from the horizon. In this case, $\phi_i(x_i) = \exp(i\beta_i)$ and $G^{(2)}(x_1,x_2) = g^{(2)}(x_1,x_2)/(n_1n_2)$.

A. No black hole

Before embarking in a general determination of $g^{(2)}$ for a black hole configuration, we recall here the result for a uniform fluid (density n_u) moving at constant subsonic velocity. One gets from the no black hole version of Eq. (66) [34]

$$\gamma_0(x,x',\omega) = \sum_{\ell\in\{u|\text{in},u|\text{out}\}}\tilde{w}_\ell^*(x)\tilde{r}_\ell(x') + \text{c.c.} \quad (71)$$

$$= \sum_{\ell\in\{u|\text{in},u|\text{out}\}}\frac{\frac{Q_\ell^2}{2|E_\ell|}-1}{2|V_g(Q_\ell)|}e^{iQ_\ell(X'_u-X_u)} + \text{c.c.} \quad (72)$$

This yields

$$G_0^{(2)}(x,x') = \frac{1}{n_u\xi_u}F\left(\frac{x-x'}{\xi_u}\right), \quad (73)$$

where

$$F(z) = -\frac{1}{\pi z}\int_0^\infty dt\,\frac{\sin(2tz)}{(1+t^2)^{3/2}}. \quad (74)$$

This is the expected correlation in a quasi-1D condensate (see, e.g., Ref. [35] and references therein): $n_u\xi_uG_0^{(2)}(x,x')$ is a universal function of $z = (x-x')/\xi_u$. In particular, $n_u\xi_uG_0^{(2)}(x,x) = F(0) = -2/\pi$ [36]. We evaluated the fluctuations around the uniform profile numerically by means of the truncated Wigner method for the Bose field [37,38] already used in Ref. [6] for studying the same observable in a black hole configuration. In Fig. 7 we compare the analytical form (73) with the results of the numerical computation along the cut displayed in the inset. The excellent agreement is a good test of the accuracy of the numerical method used in Ref. [6].

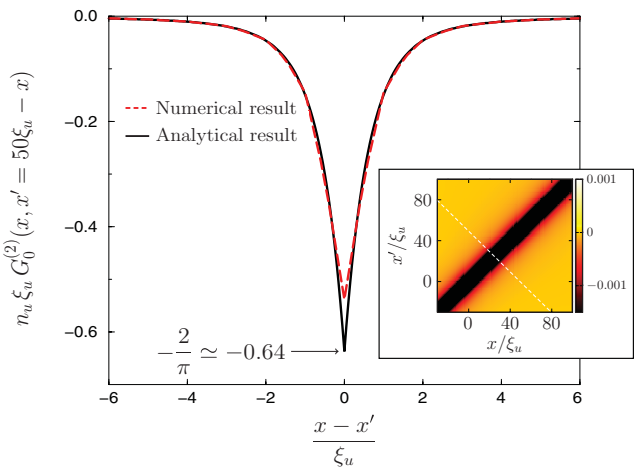


FIG. 7. (Color online) $\xi_un_uG_0^{(2)}(x,x')$ computed analytically from Eq. (73) (black solid line) compared with the numerics from the truncated Wigner method (red dashed line). The small discrepancy near $x - x' = 0$ is due to numerical uncertainty and to the plotting procedure which introduces a small amount of smoothing of the raw numerical data. The inset represents a color plot of the numerical results. The white dashed line is the line $x' = 50\xi_u - x$ along which we compare numerical and analytical results in the main plot.

We finally note here that $\int_{\mathbb{R}} dz\,F(z) = -1$. This yields

$$\int_{\mathbb{R}} dx'\,g_0^{(2)}(x,x') = -n_u, \quad (75)$$

which is a mere verification of the $T = 0$ version of the sum rule (62) in this simple uniform setting.

The main correlation signal in the black hole configurations to be studied soon is similar to the short-range antibunching displayed in Fig. 7. However, we see that (i) its precise shape is affected in presence of an acoustic horizon and moreover, (ii) new long-range correlations appear, which can be interpreted as emission of correlated phonons [6].

B. General formulas in presence of a black hole

We now turn to the study of zero-temperature density fluctuations around a sonic horizon. For simplicity, we only consider the case where x and x' are far from the horizon: This makes it possible (i) to drop the evanescent contributions to Eq. (66) and (ii) to avoid treating the position dependence of the background density in the δ peak and waterfall configurations. Part of these results were already obtained in Ref. [9] (the ones valid when x and x' are far one from the other) and here we generalize and correct some misprints [39]. We only display the most important contributions to γ_0 which are both the larger ones and the ones useful for fulfilling the $T = 0$ version of the sum rule (62) when x is far from the horizon [this version is written explicitly in Eq. (81)]. We note here that a similar approach has previously been used in Ref. [33] for studying phase fluctuations in a similar setting, with a description of the scattering less elaborate than the one presented in Sec. III E.

Finally, we introduce the notations $\tilde{\mathcal{U}}_\ell$ and $\tilde{\mathcal{W}}_\ell$ defined by

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_\ell(x) \\ \tilde{w}_\ell(x) \end{pmatrix} = e^{iq_\ell x} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}_\ell(x) \\ \tilde{\mathcal{W}}_\ell(x) \end{pmatrix}, \tag{76}$$

where $\tilde{u}_\ell(x)$ and $\tilde{w}_\ell(x)$ are defined in Eqs. (67). We also introduce $\tilde{\mathcal{R}}_\ell = \tilde{\mathcal{U}}_\ell + \tilde{\mathcal{W}}_\ell$.

1. Case x and $x' \to -\infty$

We first consider the case where x and x' are both deep in the subsonic region, that is, outside the black hole and far from the acoustic horizon. From Eq. (66), one gets in this case

$$\begin{aligned}\gamma_0(x,x',\omega) = {}& \tilde{\mathcal{W}}^*_{u|\text{in}}\tilde{\mathcal{R}}_{u|\text{in}}e^{iq_{u|\text{in}}(x'-x)} + \tilde{\mathcal{W}}^*_{u|\text{out}}\tilde{\mathcal{R}}_{u|\text{out}}e^{iq_{u|\text{out}}(x'-x)} \\ &+ \Theta(\Omega-\omega)|S_{u,d2}|^2|\tilde{\mathcal{R}}_{u|\text{out}}|^2 e^{iq_{u|\text{out}}(x'-x)} + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{77}$$

The contribution of the $S_{u,d2}$ term disappears when $\omega > \Omega$ and this is the reason for the Heaviside factor $\Theta(\Omega - \omega)$ in Eq. (77). If it were not for the $S_{u,d2}$ term, (77) would be exactly equal to Eq. (71), one would recover the same correlation as (73) obtained in absence of black hole and the contribution of Eq. (77) alone would be enough to verify the sum rule (75). Now the $S_{u,d2}$ term is not zero, and this means that the correlations in the vicinity of the diagonal $x = x'$ are modified by the existence of the black hole. This is similar to the results obtained by Kravtsov and co-workers for nonstandard ensembles of random matrices [12,13]. Indeed, for fixed x, (77) alone is not able to fulfill the sum rule. The addition of the nonlocal correlations (78) induced by the Hawking emission will be necessary to this end, as advocated in Ref. [12].

2. Cases ($x \to -\infty$ and $x' \to +\infty$) or ($x \to +\infty$ and $x' \to -\infty$)

In the case where x is deep in the upstream region and x' deep in the downstream one, we get

$$\begin{aligned}&\gamma_0(x,x',\omega) \\ &\quad = \Theta(\Omega-\omega)S^*_{u,d2}S_{d1,d2}\tilde{\mathcal{R}}^*_{u|\text{out}}\tilde{\mathcal{R}}_{d1|\text{out}}e^{i(q_{d1|\text{out}}x'-q_{u|\text{out}}x)} \\ &\qquad + \Theta(\Omega-\omega)S^*_{u,d2}S_{d2,d2}\tilde{\mathcal{R}}^*_{u|\text{out}}\tilde{\mathcal{R}}_{d2|\text{out}}e^{i(q_{d2|\text{out}}x'-q_{u|\text{out}}x)} \\ &\qquad + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{78}$$

If instead x is deep in the downstream supersonic region and x' deep in the upstream subsonic region, it suffices to exchange the roles of x and x' in the above formula.

3. Case x and $x' \to +\infty$

This is the case where x and x' are both deep in the downstream region (i.e., deep inside the black hole). The leading-order contribution to $g_0^{(2)}$ can be separated in a diagonal part which depends only on $x - x'$ and a nondiagonal part. The diagonal part reads

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{diag}}(x,x',\omega) = {}& \tilde{\mathcal{W}}^*_{d1|\text{in}}\tilde{\mathcal{R}}_{d1|\text{in}}e^{iq_{d1|\text{in}}(x'-x)} \\ &+ \tilde{\mathcal{W}}^*_{d1|\text{out}}\tilde{\mathcal{R}}_{d1|\text{out}}e^{iq_{d1|\text{out}}(x'-x)} \\ &+ \Theta(\Omega-\omega)\tilde{\mathcal{U}}^*_{d2|\text{in}}\tilde{\mathcal{R}}_{d2|\text{in}}e^{iq_{d2|\text{in}}(x'-x)} \\ &+ \Theta(\Omega-\omega)\tilde{\mathcal{U}}^*_{d2|\text{out}}\tilde{\mathcal{R}}_{d2|\text{out}}e^{iq_{d2|\text{out}}(x'-x)} \\ &+ \Theta(\Omega-\omega)|S_{d1,d2}|^2|\tilde{\mathcal{R}}_{d1|\text{out}}|^2 e^{iq_{d1|\text{out}}(x'-x)} \\ &+ \Theta(\Omega-\omega)(|S_{d2,u}|^2 + |S_{d2,d1}|^2) \\ &\times|\tilde{\mathcal{R}}_{d2|\text{out}}|^2 e^{iq_{d2|\text{out}}(x'-x)} + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{79}$$

In absence of a black hole, the terms involving coefficients of the S matrix disappear in Eq. (79) and this gives, after integration over $\omega \in \mathbb{R}^+$, the usual quasicondensate correlation signal: $g_0^{(2)}(x,x') = n_d F[(x - x')/\xi_d]/\xi_d$.

The nondiagonal part is only present if a horizon exists and only contributes for $\omega < \Omega$; it reads

$$\begin{aligned}\gamma_0^{\text{nondiag}}(x,x',\omega) = {}& \Theta(\Omega-\omega)S^*_{d1,d2}S_{d2,d2} \\ &\times\tilde{\mathcal{R}}^*_{d1|\text{out}}\tilde{\mathcal{R}}_{d2|\text{out}}e^{i(q_{d2|\text{out}}x'-q_{d1|\text{out}}x)} \\ &+ (x \longleftrightarrow x') + \text{c.c.}\end{aligned} \tag{80}$$

C. Results for the three configurations

Formulas (77)–(80) allow us to determine $g_0^{(2)}(x,x')$ through Eq. (64). We performed the corresponding integration over $\omega \in \mathbb{R}^+$ numerically. The results are shown in Fig. 8 for the δ peak configuration and in Fig. 9 for the waterfall configuration. In each of these figures we only display the correlations for $|x|$ and $|x'|$ larger than a few healing lengths, because we use formulas which are exact only in the limit $|x|$ and $|x'| \to \infty$.

In each plot, we also display the lines where the heuristic interpretation of the Hawking effect presented in the Introduction (see also Ref. [6]) leads to locate the more pronounced correlation signal: If correlated Hawking phonons are emitted along the $u|\text{out}$, $d1|\text{out}$, and $d2|\text{out}$ channels, at time t after their emission, these phonons are respectively located at $x_{u|\text{out}} = (V_u - c_u)t < 0$, $x_{d1|\text{out}} = (V_d + c_d)t > 0$,

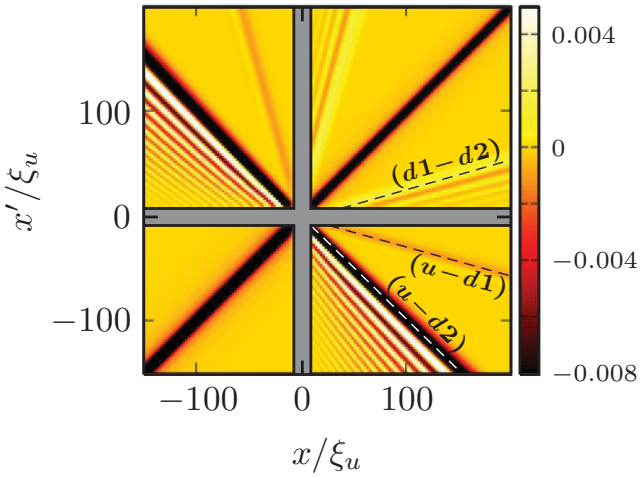


FIG. 8. (Color online) 2D plot of the numerical result for the quantity $\xi_u n_u G_0^{(2)}(x,x')$ in the case of a δ peak configuration with $m_u = 0.5$. The shaded area near the axis corresponds to the zone $|x|$ or $|x'| < 10\xi_u$. $G_0^{(2)}$ is only displayed for $|x|$ and $|x'| > 10\xi_u$, that is, in the asymptotic region where expressions (77)–(80) are valid. The dashed straight lines correspond to the correlation lines where a heuristic interpretation of the Hawking signal leads to expect the largest signal (see the text).

and $x_{d2|\text{out}} = (V_d - c_d)t > 0$ [40]. This induces a correlation signal along lines of slopes: $(V_u - c_u)/(V_d + c_d)$ (resulting from $u - d1$ correlations), $(V_u - c_u)/(V_d - c_d)$ ($u - d2$ correlations), and $(V_d - c_d)/(V_d + c_d)$ ($d1 - d2$ correlations). Of course, the lines with inverse slopes are also present (they correspond to the exchange $x \leftrightarrow x'$). Indeed, the main features of the computed $g_0^{(2)}$ perfectly match this interpretation of the Hawking effect.

These results are very similar to the ones obtained numerically for the flat profile configuration (already displayed in Refs. [6,9]). This legitimizes the use of density correlations as a tool for identifying Hawking radiation also in the realistic δ peak and waterfall configurations.

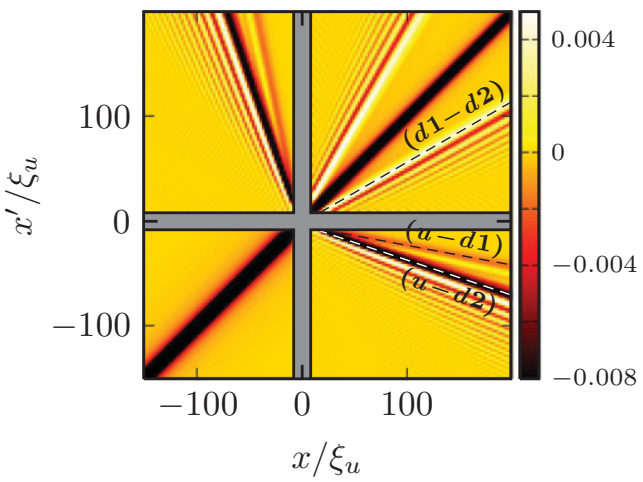


FIG. 9. (Color online) Same as Fig. 8 for a waterfall configuration with $m_u = 0.5$.

For each plot the dominant signal is the antibunching along the diagonal ($x = x'$). This corresponds to the typical local density correlation in a quasicondensate (cf. Fig. 7). However, this signal is modified compared to the one observed in a uniform system (see, e.g., the discussion in Sec. V B 1). This modification is connected to nonlocal features which are necessary to verify the sum rule

$$\int_{\mathbb{R}} dx'\, g_0^{(2)}(x,x') = \begin{cases} -n_u & \text{when} \quad x \to -\infty, \\ -n_d & \text{when} \quad x \to +\infty, \end{cases} \tag{81}$$

which is the $T = 0$ version of the sum rule (62) valid when x is far from the horizon. We checked this sum rule analytically in Appendix C on the basis of our Bogoliubov description of the quantum fluctuations and of the results of Secs. V B 1, V B 2 and V B 3.

By comparing Figs. 8 and 9 with the inset of Fig. 7, one can reverse the argument of Ref. [12] and argue that (i) in presence of an acoustic horizon, the main new features of $g_0^{(2)}$ are the nonlocal density correlations which are simply understood as resulting from the emission of correlated phonons and (ii) because of the sum rule (81), these long-range correlations have to be associated to modifications of the short-range behavior of $g_0^{(2)}$. However, these short-range modifications are not of great experimental relevance because they would be efficiently blurred by finite temperature effects. The nonlocal aspects instead are good signatures of the Hawking effect because they are easily distinguished from the thermal noise (being even reinforced at finite T as demonstrated in Ref. [9]).

VI. CONCLUSION AND DISCUSSION

In the present work we have introduced new and realistic acoustic analogs of black holes and have analyzed the associated Hawking radiation. We restricted ourself to simple configurations (flat profile, δ peak, waterfall) but our approach is easily applied to more complicated cases. For instance, in a waveguide with a constriction, one is in a mixed situation where there is an external potential step (as in the waterfall configuration), whereas the nonlinear parameter is position-dependent (as in the flat profile configuration) [19]. This case is interesting since it may be possible to realize it experimentally, but the analytical treatment is straightforward and we do not consider it here because this would bring no new insight on our theoretical method. One could also consider smooth potentials, and the eigenmodes (defined in Sec. III) should then be determined numerically, but the theoretical framework presented here remains, of course, valid in this situation. We note also that the present approach can be adapted to treat the creation of a black hole horizon in a Fermi gas, as suggested in Ref. [41].

The description of the system in terms of a S matrix allows for a simple description of the radiation spectrum and a clear identification of the characteristics of the system. In particular, we showed that Hawking radiation is absent for a "no black hole configuration" corresponding to a flow connecting two subsonic asymptotic regions. The spectrum of Hawking radiation has been computed in the case of a black hole connecting an upstream subsonic region to a downstream supersonic one, and the concept of Hawking temperature has been discussed quantitatively.

The main focus has been put on nonlocal density correlations. We verified that their interpretation in terms of emission of correlated phonons previously introduced in a model configuration [6,9] also holds in realistic settings. By studying a sum rule verified by the two-body density matrix, we showed that the Bogoliubov description of the quantum fluctuations around the stationary ground state of the system also provides an accurate description of the short-range density correlations.

In this work we introduced new acoustic black hole configurations motivated by their possible experimental realization and proposed—following Ref. [6]—nonlocal density correlations as practical signatures of Hawking radiation. It is thus important to discuss if the proposed signal is large enough for being detected experimentally. From Figs. 8 and 9, one sees that the prominent Hawking signal corresponds to $u-d2$ correlations. For each figure this corresponds to a line of negative correlation where the largest value of $\xi_u n_u G_0^{(2)}$ is between -0.01 and -0.02. In present-day experiments it is possible to measure density fluctuations around a mean density n_u of order 10 $\mu\mathrm{m}^{-1}$ in a setting where the healing length ξ_u is around a few μm (see, e.g., Ref. [31]). It is thus realistic to hope to reach a configuration where $|G_0^{(2)}|_{\max} \simeq 5\times 10^{-3}$, and for detecting a signal of this intensity a precision of around 10^{-4} is required on the determination of $G^{(2)}$. Noticing that $G^{(2)}$ is the *quadratic* relative density fluctuations, detecting this signal would correspond to measuring density fluctuations with a precision of order of 1%, which seems within reach of present-day experimental techniques.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank V. E. Kravtsov and C. I. Westbrook for fruitful discussions. This work was supported by the IFRAF Institute, by Grant No. ANR-08-BLAN-0165-01, and by ERC through the QGBE grant. A. R. acknowledges the kind hospitality of the LPTMS in Orsay.

APPENDIX A: LOW-ENERGY BEHAVIOR OF THE SCATTERING MATRIX

In this Appendix we display the analytical results for the low-ω behavior of combinations of the elements of the S matrix relevant for computations of the Hawking temperature and for the fulfillment of the sum rule (81). We only give results for the flat profile and waterfall configurations because those concerning the δ peak configuration are too long. Indeed, for the δ peak configuration, a numerical determination of the coefficients of the S matrix (which simply amounts to invert a 4×4 matrix) is more convenient than the analytical approach. We checked that both agreed to an extremely good accuracy.

A. Flat profile configuration

In this case, the scattering coefficients depend of the two Mach numbers m_u and m_d. The coefficients f and h defined in Eqs. (44) verify the following relations:

$$|f_{u,d2}|^2 = 2\frac{m_u}{m_d}\frac{m_u^2}{m_d^2-m_u^2}\frac{1-m_u}{1+m_u}\left(m_d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{A1}$$

$$|f_{d1,d2}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^2\frac{m_d-m_u}{m_d+m_u}\frac{1-m_u}{1+m_u}\left(m_d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{A2}$$

$$|f_{d2,d2}|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^2\frac{m_d+m_u}{m_d-m_u}\frac{1-m_u}{1+m_u}\left(m_d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{A3}$$

$$f_{u,d2}^* f_{d1,d2} = \left(\frac{m_u}{m_d}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{m_u}{m_d+m_u}\frac{1-m_u}{1+m_u}\left(m_d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{A4}$$

$$f_{u,d2}^* f_{d2,d2} = -\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{m_u}{m_d-m_u}\frac{1-m_u}{1+m_u}\left(m_d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{A5}$$

$$f_{d1,d2}^* f_{d2,d2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_u}{m_d}\right)^2\frac{1-m_u}{1+m_u}\left(m_d^2-1\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{A6}$$

$$\mathrm{Re}(f_{u,d2}^* h_{u,d2}) = -\frac{m_u}{(1+m_u)^2}. \tag{A7}$$

B. Waterfall configuration

In the case of the waterfall configuration, the elements of the S matrix depend on a unique parameter; we chose to express them as functions of the Mach number m_u.

$$|f_{u,d2}|^2 = 2\frac{m_u(1-m_u)^{\frac{3}{2}}\left(1+m_u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(1+m_u)^{\frac{1}{2}}\left(1+m_u+m_u^2\right)^2}, \tag{A8}$$

$$|f_{d1,d2}|^2 = \frac{1}{2}\frac{(1-m_u)^{\frac{7}{2}}\left(1+m_u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(1+m_u)^{\frac{1}{2}}\left(1+m_u+m_u^2\right)^2}, \tag{A9}$$

$$|f_{d2,d2}|^2 = \frac{1}{2}\frac{\left(1-m_u^4\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+m_u+m_u^2\right)^2}, \tag{A10}$$

$$f_{u,d2}^* f_{d1,d2} = -\frac{m_u^{\frac{1}{2}}(1-m_u)^{\frac{5}{2}}\left(1+m_u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(1+m_u)^{\frac{1}{2}}\left(1+m_u+m_u^2\right)^2}, \tag{A11}$$

$$f_{u,d2}^* f_{d2,d2} = -\frac{m_u^{\frac{1}{2}}(1+m_u)^{\frac{1}{2}}(1-m_u)^{\frac{3}{2}}\left(1+m_u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+m_u+m_u^2\right)^2}, \tag{A12}$$

$$f_{d1,d2}^* f_{d2,d2} = \frac{1}{2}\frac{(1+m_u)^{\frac{1}{2}}(1-m_u)^{\frac{5}{2}}\left(1+m_u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+m_u+m_u^2\right)^2}, \tag{A13}$$

$$\mathrm{Re}(f_{u,d2}^* h_{u,d2}) = -\frac{m_u\left(2+m_u^2\right)\left(1+2m_u^2\right)}{(1+m_u)^2\left(1+m_u+m_u^2\right)^2}. \tag{A14}$$

APPENDIX B: COMPUTATION OF THE ENERGY CURRENT

In this Appendix we briefly indicate how formula (53) is obtained from Eqs. (49) and (50). For a point x deep in the subsonic region, using the η-unitarity (43) of the S matrix,

one can write the relevant contributions to $J_0(x,\omega)$ in Eq. (50) under the form

$$J_0(x,\omega) = (q_{u|\mathrm{in}} - k_u)|\tilde{\mathcal{V}}_{u|\mathrm{in}}|^2 + (q_{u|\mathrm{out}} - k_u)|\tilde{\mathcal{V}}_{u|\mathrm{out}}|^2 + |S_{u,d2}|^2[(q_{u|\mathrm{out}} + k_u)|\tilde{\mathcal{U}}_{u|\mathrm{out}}|^2 + (q_{u|\mathrm{out}} - k_u)|\tilde{\mathcal{V}}_{u|\mathrm{out}}|^2]. \tag{B1}$$

A simple but lengthly computation shows that the contributions to Π_0 of the two first terms of the r.h.s. of Eq. (B1) cancel after integration over ω. This is very satisfactory because this shows that there is no Hawking radiation when $S_{u,d2} = 0$, that is, in absence of black hole.

Using Eq. (25) the remaining can be written as $|S_{u,d2}|^2 J_{u|\mathrm{out}}/\xi_u c_u$, and since $\hbar/(mc_u\xi_u) = 1$ this directly yields Eq. (53). The minus sign in this formula comes from the fact that $J_{u|\mathrm{out}} = -1$ and corresponds to the direction of propagation of the energy in the $u|$out mode.

APPENDIX C: VERIFICATION OF THE SUM RULE (62)

In this Appendix we check that the Bogoliubov approach based on expansion (45) indeed makes it possible to verify Eq. (81) which is the $T = 0$ version of the sum rule (62) when x is far from the sonic horizon, either upstream or downstream.

We start here with a technical remark. For fixed x, the contributions to $\gamma_0(x,x',\omega)$ displayed in Secs. V B 1, V B 2, and V B 3 are only noticeable for $x' \ll -\xi_u$ or $x' \gg \xi_d$. As a result, the analytical forms displayed in these sections can be extended for all $x' \in \mathbb{R}$ without introducing noticeable errors in the computation of the integral of $\gamma_0(x,x',\omega)$ over x'. Then, the integration of $\gamma_0(x,x',\omega)$ over x' just amounts to evaluating the following integral:

$$\int_{\mathbb{R}} dx'\, e^{iq_\ell(\omega)x'} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \in \{d1|\mathrm{in}, d2|\mathrm{in}\}, \\ |V_g(Q_\ell(0))|\delta(\omega) & \text{if } \ell \in \{u|\mathrm{in}, u|\mathrm{out}, d1|\mathrm{out}, d2|\mathrm{out}\}. \end{cases} \tag{C1}$$

In Eq. (C1) we used the fact that $q_{d1|\mathrm{in}}$ and $q_{d2|\mathrm{in}}$ never cancel, whereas the other q_ℓ's do for $\omega = 0$ (see Fig. 3). Using this prescription, for x large and negative, one gets from Eq. (77)

$$\int_{\mathbb{R}^-} dx'\, n_u \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\, \gamma_0(x,x',\omega) = -n_u + \frac{n_u}{2}\frac{|f_{u,d2}|^2}{1-m_u}, \tag{C2}$$

and from Eq. (78)

$$\int_{\mathbb{R}^+} dx'\, \sqrt{n_u n_d} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\, \gamma_0(x,x',\omega) = \frac{n_u}{2}\sqrt{\frac{c_u}{c_d}\frac{n_d}{n_u}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{f^*_{u,d2}}{1-m_u}(f_{d1,d2} + f_{d2,d2})\right]. \tag{C3}$$

Altogether this yields

$$\lim_{x\to-\infty} \int_{\mathbb{R}} dx'\, g_0(x,x') = -n_u + \frac{n_u}{2}\sqrt{\frac{c_u}{c_d}\frac{n_d}{n_u}}\,\mathrm{Re}\left(\frac{f^*_{u,d2}}{1-m_u}\mathcal{F}\right), \tag{C4}$$

where

$$\mathcal{F} = f_{u,d2}\sqrt{\frac{c_d}{c_u}\frac{n_u}{n_d}} + f_{d1,d2} + f_{d2,d2}. \tag{C5}$$

Similarly one gets [from Eqs. (78)–(80)]

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} dx'\, g_0^{(2)}(x,x') = -n_d + \frac{n_d}{2}\left(\frac{c_u}{c_d}\right)^2 \mathrm{Re}\left[\left(\frac{f^*_{d1,d2}}{m_d+1} + \frac{f^*_{d2,d2}}{m_d-1}\right)\mathcal{F}\right]. \tag{C6}$$

Using the analytical expressions for the combinations of coefficients $f_{u,d2}$, $f_{d1,d2}$, and $f_{d2,d2}$ displayed in Appendix A, one can easily verify that the second terms of the r.h.s. of Eqs. (C4) and (C6) cancel. This is due to the fact that $\mathcal{F}$ is identically null in the flat profile and waterfall configurations (this is more tedious to check but we confirmed it analytically). The same holds for the δ peak configuration. This shows that the sum rule (81) is fulfilled in these three cases. This is a strong confirmation of both the validity of the Bogoliubov approach and of the exactness of our analytical results.

[1] W. G. Unruh, Phys. Rev. Lett. **46**, 1351 (1981).

[2] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **85**, 4643 (2000); C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 3735 (2003); Phys. Rev. A **68**, 053613 (2003); S. Giovanazzi, C. Farrell, T. Kiss, and U. Leonhardt, *ibid.* **70**, 063602 (2004); C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser, Living. Rev. Relativity **8**, 12 (2005); R. Schützhold, Phys. Rev. Lett. **97**, 190405 (2006); S. Wüster and C. M. Savage, Phys. Rev. A **76**, 013608 (2007); Y. Kurita and T. Morinari, *ibid.* **76**, 053603 (2007).

[3] O. Lahav, A. Itah, A. Blumkin, C. Gordon, S. Rinott, A. Zayats, and J. Steinhauer, Phys. Rev. Lett. **105**, 240401 (2010).

[4] T. G. Philbin *et al.*, Science **319**, 1367 (2008); F. Belgiorno, S. L. Cacciatori, M. Clerici, V. Gorini, G. Ortenzi, L. Rizzi, E. Rubino, V. G. Sala, and D. Faccio, Phys. Rev. Lett. **105**, 203901 (2010); I. Fouxon, O. V. Farberovich, S. Bar-Ad, and V. Fleurov, Euro. Phys. Lett. **92**, 14002 (2010); M. Elazar, V. Fleurov, and S. Barad, *Nonlinear Optics: Materials, Fundamentals and Applications, OSA Technical Digest (CD)* (Optical Society of America, Washington, DC, 2011), paper NTuE6.

[5] G. Rousseaux *et al.*, New J. Phys. **12**, 095018 (2010); S. Weinfurtner, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh, and G. A. Lawrence, Phys. Rev. Lett. **106**, 021302 (2011).

[6] R. Balbinot, A. Fabbri, S. Fagnocchi, A. Recati, and I. Carusotto, Phys. Rev. A **78**, 021603 (2008); I. Carusotto, S. Fagnocchi, A. Recati, R. Balbinot, and A. Fabbri, New J. Phys. **10**, 103001 (2008).

[7] S. W. Hawking, Nature (London) **248**, 30 (1974); Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
[8] M. K. Parikh, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 2351 (2004).
[9] A. Recati, N. Pavloff, and I. Carusotto, Phys. Rev. A **80**, 043603 (2009).
[10] U. Leonhardt, T. Kiss, and P. Öhberg, J. Opt. B **5**, S42 (2003); Phys. Rev. A **67**, 033602 (2003).
[11] J. Macher and R. Parentani, Phys. Rev. A **80**, 043601 (2009); Phys. Rev. D **79**, 124008 (2009).
[12] F. Franchini and V. E. Kravtsov, Phys. Rev. Lett. **103**, 166401 (2009).
[13] C. M. Canali and V. E. Kravtsov, Phys. Rev. E **51**, 5185(R) (1995).
[14] C. Menotti and S. Stringari, Phys. Rev. A **66**, 043610 (2002).
[15] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
[16] P. Leboeuf and N. Pavloff, Phys. Rev. A **64**, 033602 (2001); N. Pavloff, *ibid.* **66**, 013610 (2002).
[17] I. Zapata, M. Albert, R. Parentani, and F. Sols, New. J. Phys. **13**, 063048 (2011).
[18] A. Kamchatnov and N. Pavloff, e-print arXiv:1111.5134.
[19] P. Leboeuf, N. Pavloff, and S. Sinha, Phys. Rev. A **68**, 063608 (2003).
[20] C. Barcelo, L. J. Garay, and G. Jannes, Phys. Rev. D **82**, 044042 (2010).
[21] J. P. Blaizot and G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems* (MIT Press, Cambridge, MA, 1986).
[22] A. L. Fetter, in *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, in *Proceedings of the International School "Enrico Fermi," Course CXL, 1998*, edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999), p. 201.
[23] F. Dalfovo, A. Fraccheti, A. Lastri, L. Pitaevskii, and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **104**, 367 (1996).
[24] Remember that the value of β_d depends on the configuration considered, for instance, $\beta_d = 0$ in the flat profile configuration.
[25] N. Bilas and N. Pavloff, Phys. Rev. A **72**, 033618 (2005).
[26] Yu. Kagan, D. L. Kovrizhin, and L. A. Maksimov, Phys. Rev. Lett. **90**, 130402 (2003).
[27] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, The International Series of Monographs on Physics, Vol. 117 (Oxford University Press, New York, 2009).
[28] For our study it is more appropriate to withdraw the disconnected terms in Eq. (58) and we thus do not follow the usual quantum optics notation.
[29] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Course of Theoretical Physics, Vol. 5 (Butterworth-Heinemann, London, 1980).
[30] D. Pines and P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids* (Benjamin, New York, 1966).
[31] J. Armijo, T. Jacqmin, K. Kheruntsyan, and I. Bouchoule, Phys. Rev. A **83**, 021605(R) (2011).
[32] Qi Zhou and Tin-Lun Ho, Phys. Rev. Lett. **106**, 225301 (2011).
[33] I. Bouchoule and K. Mølmer, Phys. Rev. A **67**, 011603(R) (2003).
[34] In this case one does not have the complicated scattering modes (41) relevant for a black hole configuration. One just has two free modes, propagating either to the left or to the right, which are exactly identical to the modes $u|$ in and $u|$ out identified in Sec. III A, and the S matrix is the 2×2 identity.
[35] P. Deuar, A. G. Sykes, D. M. Gangardt, M. J. Davis, P. D. Drummond, and K. V. Kheruntsyan, Phys. Rev. A **79**, 043619 (2009).
[36] D. M. Gangardt and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **90**, 010401 (2003).
[37] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer, Berlin, 1994).
[38] M. J. Steel, M. K. Olsen, L. I. Plimak, P. D. Drummond, S. M. Tan, M. J. Collett, D. F. Walls, and R. Graham, Phys. Rev. A **58**, 4824 (1998).
[39] In Eqs. (27), (29), (33), (36), (39), and (40) of Ref. [9] the prefactor should be $1/(2\pi)$ instead of $1/(4\pi)$. Also the argument of the exponential in formulas (27) and (33) has the wrong sign.
[40] This is obtained assuming linear dispersion relations along each branch of the dispersion relation, which is a long-wavelength approximation.
[41] S. Giovanazzi, Phys. Rev. Lett. **94**, 061302 (2005); J. Phys. B **39**, S109 (2006).

— 2 —
Ondes dans l'écoulement d'un condensat de polaritons

Sommaire

2.1 Condensation de polaritons en microcavité semi-conductrice **77**
2.2 Superfluidité dans les condensats de polaritons **80**
2.3 Profil d'onde généré par un obstacle localisé se déplaçant dans un condensat de polaritons scalaire unidimensionnel . . **83**
2.3.1 Descriptif détaillé du modèle 83
2.3.2 Écoulement autour d'un petit obstacle : d'un régime de traînée visqueuse vers un régime de traînée d'onde 86
2.3.3 Onde de choc dispersive dans un condensat supersonique s'écoulant autour d'un obstacle étroit de forte amplitude 92
2.3.4 Synthèse des résultats 99
2.3.5 P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov, *Physical Review B* **86**, 165304 (2012) 100
2.4 Fluctuations de la polarisation dans un condensat de polaritons spinoriel unidimensionnel **119**
2.4.1 Descriptif détaillé du modèle 119
2.4.2 Fluctuations de la densité et de la polarisation en présence d'une petite impureté 121
2.4.3 Synthèse des résultats 129
2.4.4 P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov, Prépublication . . . 131

2.1 Condensation de polaritons en microcavité semi-conductrice

Une microcavité est une cavité optique micrométrique dans laquelle de la lumière est susceptible d'être confinée grâce à des miroirs sur lesquels elle se réfléchit. La longueur d'onde des photons piégés est déterminée par la longueur de la microcavité. Si par exemple

une couche semi-conductrice réglée pour émettre et absorber à cette longueur d'onde est enfermée dans la cavité optique, l'énergie oscille alors constamment entre les photons confinés dans la microcavité et les excitons, qui sont issus du couplage coulombien entre les électrons excités et leurs trous dans la couche semi-conductrice (la figure 2.1 en donne une vue d'artiste). On perd la distinction entre lumière et matière lorsque cette oscillation devient plus rapide que n'importe quel autre processus dans le système. De nouvelles quasi-particules appelées polaritons sont alors générées. Une vision schématique d'un tel dispositif optique est donnée à la figure 2.2.

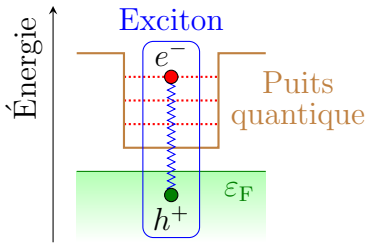


Figure 2.1 — Un exciton est une quasi-particule bosonique résultant du couplage coulombien entre un électron excité (occupant ici l'un des états d'énergie quantifiés d'un puits quantique dans la couche semi-conductrice) et son trou (dans la mer de Fermi).

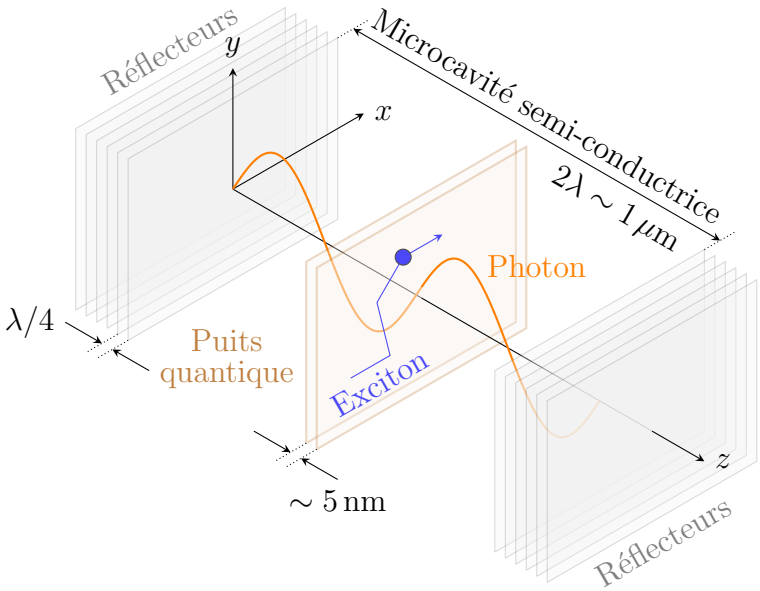


Figure 2.2 — Dans une microcavité semi-conductrice, les photons piégés dans la cavité optique et les excitons se couplent pour former des quasi-particules bosoniques appelées polaritons.

Les polaritons sont des bosons car ils résultent du couplage fort entre les photons confinés dans la microcavité et les excitons présents dans la couche semi-conductrice, qui, comme les photons, sont des bosons. À la figure 2.3 est présenté ce à quoi leur relation de dispersion ressemble. Celle-ci est divisée en deux branches : une branche supérieure et une branche inférieure (en noir sur le schéma de la figure 2.3) résultant du mélange entre la relation de dispersion des photons de cavité (en orange) et celle des excitons (en bleu). Aux faibles impulsions, la branche inférieure de la relation de dispersion des polaritons peut

être assimilée à une parabole de paramètre m définissant la masse effective des polaritons qui occupent l'état de plus faible énergie. Du fait de leur nature partiellement photonique, ces derniers sont faiblement massifs ; typiquement, $m \lesssim 10^{-4}\, m_{\mathrm{e}}$, où m_{e} désigne la masse d'un électron. Les polaritons de microcavité possèdent en outre un temps de vie très court $\tau \lesssim 50\,\mathrm{ps}$ car les miroirs qui délimitent la cavité optique ne sont pas parfaitement réfléchissants, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas en mesure de piéger pour toujours la lumière, et ainsi, la composante photonique des polaritons.

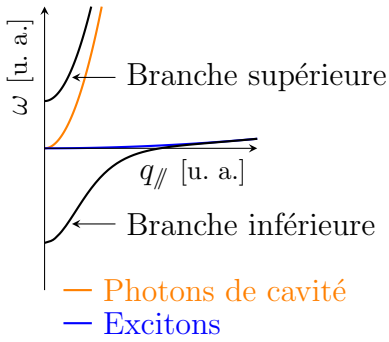


Figure 2.3 — Représentation schématique de la relation de dispersion des polaritons en microcavité semi-conductrice. Elle est divisée en deux branches (une branche supérieure et une branche inférieure, en noir sur le schéma) qui résultent d'un mélange entre le spectre des photons de cavité (en orange) et celui des excitons (en bleu).

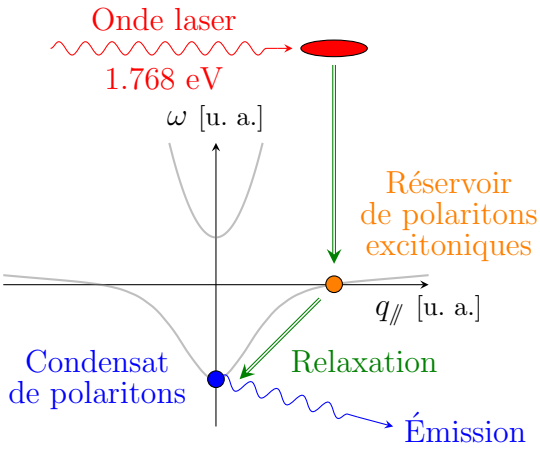


Figure 2.4 — Relaxation d'un gaz de polaritons excitoniques vers l'état d'impulsion nulle et de plus faible énergie. En s'accumulant de façon macroscopique dans l'état fondamental, les polaritons forment un fluide bosonique temporellement et spatialement cohérent, ou, dit différemment, un condensat de Bose–Einstein.

En qualité de bosons, les polaritons de microcavité sont des candidats potentiellement intéressants pour expérimenter la condensation de Bose–Einstein dans les semi-conducteurs, qui plus est à haute température ($\sim$ 300 à 500 K) étant donnée la très faible valeur de leur masse effective (approximativement 10^9 fois plus faible que la masse des atomes d'une vapeur de rubidium, par exemple). En 2006, deux équipes scientifiques de l'Institut Néel de Grenoble et de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne ont conjointement donné la première preuve expérimentale de la condensation de polaritons en microcavité semi-conductrice [69]. En injectant continûment des photons dans la cavité optique au moyen d'une pompe laser non-résonnante, ils ont observé qu'un gaz de polaritons excitoniques à 19 K relaxait à partir d'une certaine puissance d'excitation vers l'état d'impulsion nulle et de plus faible énergie, c'est-à-dire l'état correspondant au minimum de la branche inférieure de la relation de dispersion des polaritons de microcavité (une représentation de ce processus de relaxation est donnée à la figure 2.4). L'accumulation macroscopique des quasi-particules dans leur état fondamental s'accompagnait en outre d'une augmentation de la cohérence temporelle

et de la cohérence spatiale à longue portée au sein du fluide de polaritons, indiquant sans nul doute une transition vers un état quantique macroscopique, ou, en d'autres termes, la formation d'un condensat de polaritons. Ainsi, contre *a priori* toute attente, un fluide de polaritons dans son état fondamental — naturellement non-conservatif du fait du temps de vie limité de ses constituants, et ayant donc besoin d'être continûment approvisionné en polaritons pour durer — présenterait les mêmes propriétés de cohérence de phase que celles observées dans les condensats de Bose–Einstein conservatifs obtenus par exemple par refroidissement de vapeurs atomiques. On pourra à titre d'exemple se référer aux publications expérimentales [118] et [120] dans lesquelles la transition d'un gaz de polaritons en microcavité semi-conductrice vers un état à cohérence de phase quantique macroscopique est également démontrée.

Puisque les polaritons ont un temps de vie fini dû à la limitation du pouvoir réfléchissant des miroirs de la cavité optique, on peut directement avoir accès aux propriétés internes du fluide de polaritons par simple détection optique de la lumière émise par le gaz quand les photons de cavité et les excitons se découplent. C'est par cette méthode non-intrusive qu'est par exemple mesurée la relation de dispersion des polaritons de microcavité (*cf.* figures 2.5 et 2.6).

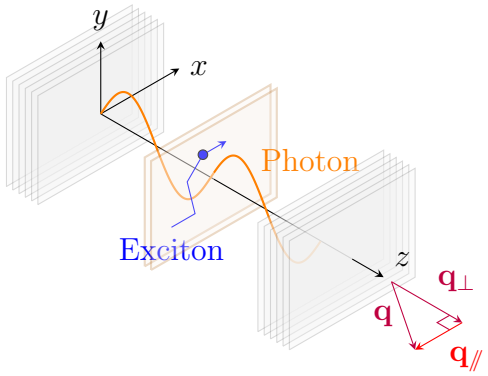


Figure 2.5 — Comme les miroirs de la cavité optique ne sont pas parfaitement réfléchissants, les polaritons ont nécessairement une durée de vie limitée. Lorsqu'ils meurent, de la lumière s'échappe de la cavité (de vecteur d'onde $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\perp + \mathbf{q}_{/\!/}$ sur le schéma). En la détectant de l'extérieur, on est capable de sonder non-intrusivement le gaz de polaritons.

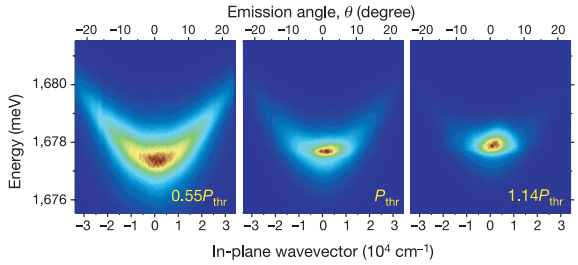


Figure 2.6 — Image tirée de la référence [69] montrant la relaxation des polaritons excitoniques vers leur état fondamental. La relaxation s'opère à partir d'une valeur critique de la puissance d'excitation de la pompe laser (notée ici P_{thr}) qui sert à « photo-créer » les paires électron/trou dans la couche semi-conductrice. L'image est obtenue par détection optique de la lumière émise par le gaz de polaritons lorsque les photons et les excitons se découplent dans la cavité.

2.2 Superfluidité dans les condensats de polaritons

Les condensats de polaritons en microcavité semi-conductrice sont des systèmes fortement hors d'équilibre du fait de la faible durée de vie de leurs composants. Comme

exposé en section 2.1, ils présentent cependant, comme les condensats de Bose–Einstein conservatifs, la propriété d'être temporellement et spatialement cohérents. Jouissent-ils d'autres propriétés propres aux condensats conservatifs ? Qu'en est-il, par exemple, de la superfluidité dans les condensats de polaritons ? De nombreux travaux expérimentaux et théoriques ont largement exploré le lien subtil existant entre la condensation de Bose–Einstein et la superfluidité, c'est-à-dire la capacité d'un fluide quantique de se déplacer par rapport à un obstacle sans dissiper la moindre énergie. Cette définition de la superfluidité est l'une des plus intuitives et des plus éloquentes. C'est la raison pour laquelle le mouvement de fluides quantiques donnés par rapport à un obstacle extérieur a été expérimentalement mis en œuvre pour sonder la superfluidité dans divers systèmes physiques tels que l'hélium 4 (voir par exemple les références [2] et [10]), l'hélium 3 [32], certaines vapeurs atomiques ultra-froides [115, 101, 95, 41, 37], ou plus récemment, les condensats de polaritons [3, 4, 98, 5, 123] [1].

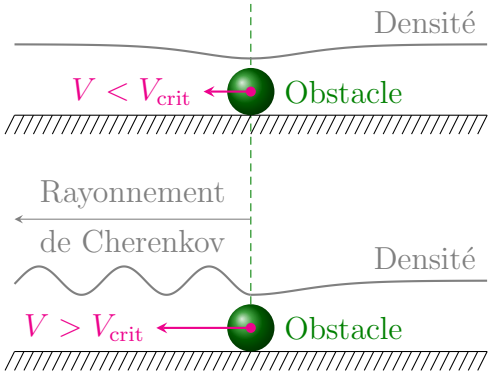


Figure 2.7 — Dans un fluide quantique conservatif à température nulle, si une « petite » impureté se déplace dans le fluide à une vitesse constante V plus petite que la vitesse critique V_{crit} prédite par le critère de Landau, aucune excitation n'est émise dans le liquide. Si par contre $V > V_{\text{crit}}$, une onde linéaire est éjectée en aval de l'obstacle ; celle-ci transporte de l'impulsion et l'obstacle ressent alors une force de traînée non-nulle.

Si un obstacle se déplace à vitesse constante V dans un fluide quantique conservatif à température nulle sans perturber de beaucoup les paramètres du fluide, le critère de Landau [76, 77] prédit l'existence d'une vitesse critique V_{crit} séparant deux régimes drastiquement différents (schématiquement discutés à la figure 2.7). Lorsque $V < V_{\text{crit}}$, l'obstacle ne ressent pas de traînée car il n'émet pas d'excitation dans le fluide quantique. Lorsque $V > V_{\text{crit}}$, un rayonnement de Cherenkov d'ondes linéaires est généré dans le fluide ; l'obstacle diffuse alors de l'impulsion dans le liquide et subit par conséquent une force de traînée non-nulle. Le premier régime est dit superfluide tandis que le second est qualifié de dissipatif [2]. Par exemple, dans le cas d'un condensat de Bose–Einstein atomique à température nulle, la vitesse critique prédite par le critère de Landau est la vitesse du son c_s dans le condensat : $V_{\text{crit}} = c_s$. Lorsque $V < c_s$, aucune perturbation élémentaire n'est excitée dans le fluide et l'obstacle ne ressent pas de traînée. Si par contre $V > c_s$, des excitations élémentaires sont générées dans le gaz sous forme d'ondes linéaires et l'obstacle subit alors une force de traînée (on se

1. On pourra consulter les articles [29] et [109] dans lesquels les auteurs exposent une description théorique des résultats expérimentaux présentés respectivement en références [4] et [5].

2. Dans de nombreux cas, la véritable valeur de V_{crit} est plus petite que celle prédite par le critère de Landau. Comme Feynman le suggéra en premier (*cf.* référence [42]), ceci est lié à l'émission de perturbations non-linéaires (telles que des tourbillons quantifiés) et non pas à l'émission d'excitations élémentaires comme l'impose le critère de Landau, qui est un critère intrinsèquement perturbatif.

reportera à la figure 2.8 et à sa légende pour s'en convaincre). Selon le critère de Landau, un condensat de Bose–Einstein conservatif à température nulle ne dissipe par conséquent aucune énergie — et est donc superfluide — si tant est qu'un « petit » obstacle s'y déplace à des vitesses subsoniques, ou, d'un autre point de vue, si le condensat lui-même se déplace par rapport à cet obstacle à des vitesses plus petites que la vitesse du son c_s.

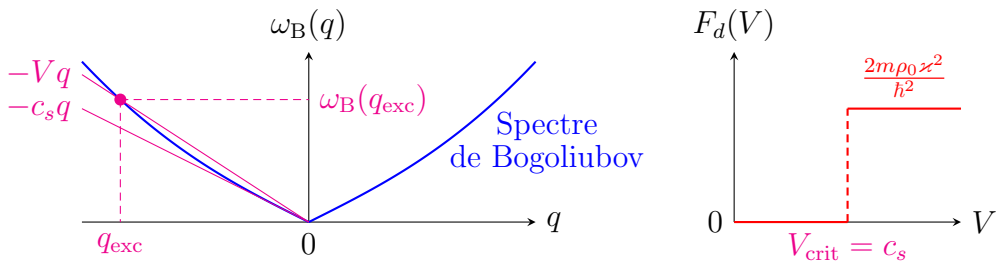


Figure 2.8 — Une impureté d'énergie potentielle $U_{\mathrm{ext}}(x,t) = \varkappa\,\delta(x+Vt)$ se déplace à vitesse constante $\mathbf{V} = -V\hat{\mathbf{x}}$, $V > 0$, dans un condensat atomique unidimensionnel au zéro absolu. On note ρ_0 la densité longitudinale du gaz en l'absence d'impureté (c'est-à-dire dans le cas où $\varkappa = 0$) et on la considère uniforme. On suppose en outre que si l'obstacle décrit par $U_{\mathrm{ext}}(x,t)$ perturbe les paramètres du condensat, comme par exemple sa densité, il ne le fait alors que faiblement. Lorsque V est plus petite que la vitesse du son c_s dans le condensat, aucune perturbation linéaire n'est émise dans le fluide. En se souvenant que l'énergie $\hbar\,\omega_{\mathrm{B}}(q) > 0$ des excitations élémentaires d'un condensat de Bose–Einstein uniforme s'écrit en fonction de l'impulsion $\hbar\,q = \hbar\,\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{x}}$ de ses excitations comme $\hbar\,\omega_{\mathrm{B}}(q) = c_s|\hbar\,q|\sqrt{1+[\hbar\,q/(2mc_s)]^2}$, où m est la masse des atomes, on voit en effet (analytiquement, ou plus simplement graphiquement) qu'il n'existe pas de solution non-triviale à l'équation $\hbar\,\omega_{\mathrm{B}}(q) = -V\hbar\,q$ lorsque $V < c_s$, où $-V\hbar\,q = \mathbf{V}\cdot\hbar\,\mathbf{q}$ est l'énergie que l'obstacle fournit au condensat pour exciter un mode de Bogoliubov d'impulsion $\hbar\,\mathbf{q}$. Dans ce cas, l'impureté ne subit aucune force de traînée : $\mathbf{F}_d = 0$. Si maintenant V est plus grande que c_s, l'équation $\hbar\,\omega_{\mathrm{B}}(q) = -V\hbar\,q$ admet une solution non-triviale $\hbar\,q_{\mathrm{exc}} < 0$. L'obstacle excite le condensat et diffuse de l'impulsion en aval. On montre alors qu'il subit une force de traînée $\mathbf{F}_d$ non-nulle dirigée dans le sens des x positifs et d'intensité $F_d = 2m\rho_0\varkappa^2/\hbar^2$. Pour de plus amples détails, on se référera aux articles théoriques [72], [83], [104] et [9] dans lesquels les auteurs exposent une étude perturbative de condensats de vapeurs atomiques.

L'existence d'une transition entre une phase superfluide et un état normal — clairement démontrée dans les condensats atomiques et succinctement discutée dans le paragraphe précédent — est nettement moins évidente dans les condensats de polaritons obtenus par pompage optique non-résonnant (voir section 2.1) car les perturbations qui se propagent dans ces liquides sont amorties à cause de la durée de vie finie des polaritons. Dans ces systèmes hors d'équilibre, cette transition est en fait remplacée par un « crossover » séparant deux régimes caractérisés par des structures distinctes de profils d'onde. Ces derniers sont localisés autour de l'obstacle lorsque celui-ci se déplace à « faible vitesse » ; ils s'étendent et acquièrent un comportement oscillatoire quand l'impureté se déplace au contraire à « grande vitesse ». La frontière entre ces deux régimes n'est pas abrupte ; juste

au-dessus du point de transition marquant l'éjection des ondes de Cherenkov, la longueur typique d'amortissement des ondes rayonnées par l'obstacle est plus petite que leur longueur d'onde, ce qui prouve que ces perturbations peuvent difficilement être distinguées des perturbations localisées. Par voie de conséquence, l'étude de la structure des profils d'onde générés par un obstacle dans un condensat de polaritons ne permet manifestement pas de faire clairement la distinction entre un régime qui serait purement superfluide et un autre qui serait totalement dissipatif. Néanmoins, le concept de superfluidité est souvent employé parce qu'il permet de discuter qualitativement des processus qui ont lieu dans l'écoulement d'un liquide de polaritons autour d'un obstacle.

L'étude des profils d'onde générés par un obstacle se déplaçant dans un condensat de polaritons unidimensionnel en situation de pompage non-résonnant fera l'objet des sections 2.3 et 2.4, qui elle-mêmes font l'objet d'une synthèse des articles inclus dans les sous-sections 2.3.5 et 2.4.4, respectivement. Nous montrerons, tout d'abord dans le cas simple où sont négligés les effets dus à la polarisation des modes lumineux de la microcavité semi-conductrice (section 2.3), que la transition entre une hypothétique phase superfluide et une phase normale est mieux comprise en termes d'un « crossover » de la force de traînée ressentie par l'obstacle d'un régime visqueux vers un régime de résistance d'onde, dominé par l'émission d'ondes de Cherenkov amorties. Ces résultats ne changeront qualitativement guère en section 2.4 où les degrés de liberté de spin des polaritons de microcavité seront pris en compte. Nous y montrerons qu'une onde de polarisation très faiblement amortie (comparativement aux ondes de densité) est éjectée loin de l'obstacle si ce dernier se meut dans le fluide de polaritons à d'« assez grandes » vitesses et si l'on applique un « faible » champ magnétique transverse au condensat.

2.3 Profil d'onde généré par un obstacle localisé se déplaçant dans un condensat de polaritons scalaire unidimensionnel

2.3.1 Descriptif détaillé du modèle

On étudie les propriétés d'un condensat de polaritons en présence d'un obstacle en mouvement sans se soucier des possibles effets de polarisation dus aux modes lumineux de la microcavité semi-conductrice. On considère en outre une configuration dans laquelle les excitons sont confinés dans un fil quantique. Le condensat de polaritons est alors décrit par un paramètre d'ordre scalaire $\psi(x,t)$ — x repérant un point de l'axe du fil quantique et t désignant le temps — dont la dynamique obéit à une équation de Gross–Pitaevskii de la forme [3]

$$\mathrm{i}\hbar\,\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi_{xx} + \left[U_{\mathrm{ext}}(x,t) + \alpha\rho\right]\psi + \mathrm{i}\,(\gamma - \Gamma\rho)\,\psi. \tag{2.1}$$

3. Afin d'être en accord avec les notations employées dans l'article de la sous-section 2.3.5, toute fonction indicée par x (ou t) représentera la dérivée de ladite fonction par rapport à x (ou t). Par exemple, dans l'équation (2.1), ψ_{xx} est une notation pour la dérivée seconde $\partial_{xx}\psi$ et $\psi_t = \partial_t\psi$.

2.3 Profil d'onde généré par un obstacle localisé se déplaçant dans un condensat de polaritons scalaire unidimensionnel

Dans l'équation (2.1), m est la masse effective des polaritons (définie comme le paramètre de la parabole approximant aux faibles impulsions la branche inférieure de la relation de dispersion des polaritons dans le « fond » de laquelle se forme le condensat, voir section 2.1), $U_{\text{ext}}(x,t)$ le potentiel d'un obstacle localisé pouvant se déplacer par rapport au gaz de polaritons et $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ la densité longitudinale du fluide. Les interactions répulsives entre polaritons sont décrites par un terme local effectif caractérisé par la constante de couplage non-linéaire $\alpha > 0$. Tout tend à montrer que les interactions effectives entre polaritons sont répulsives. L'une des manifestations les plus directes de cette répulsion est l'observation d'un décalage vers le bleu de l'énergie rayonnée par le gaz lorsque les polaritons condensent [69, 11, 126]. Comme les polaritons ont un temps de vie fini, le système a besoin d'être pompé, c'est-à-dire d'être constamment approvisionné en polaritons. Des expériences récentes [118, 119, 69] ont été réalisées sous pompage incohérent (ou non-résonnant), c'est-à-dire dans un cas où le gaz de polaritons n'hérite d'aucune cohérence en provenance de la pompe laser et/ou la cohérence est rapidement perdue durant le processus de relaxation vers l'état fondamental. S'inspirant des références [134], [135], [71], [90], [137] et [31], on décrit schématiquement la situation par le dernier terme de l'équation (2.1). Le terme $\hbar\,\psi_t = \gamma\,\psi$ tient phénoménologiquement compte des gains dus au pompage et des pertes dues au temps de vie fini des polaritons. Si γ est positif, c'est-à-dire s'il y a plus de gains que de pertes dans le système, la densité du condensat de polaritons s'accroît de manière exponentielle en fonction du temps. Cet accroissement est de manière effective contrecarré par le terme $\hbar\,\psi_t = -\Gamma\rho\,\psi$ ($\Gamma > 0$) ; celui-ci tient compte de la saturation du gain à grande densité et permet au système d'atteindre une configuration stationnaire et homogène — résultant d'un équilibre dynamique entre les gains et les pertes — caractérisée par une densité constante et uniforme $\rho_0 = \gamma/\Gamma$.

Des défauts structurels localisés sont naturellement présents dans les échantillons destinés aux expériences ; ils peuvent aussi être artificiellement créés grâce à des techniques de lithographie ou par l'envoi d'une onde laser continue dans le système. Si un obstacle est introduit dans le condensat de polaritons, l'état de densité uniforme ρ_0 est perturbé. On suppose que l'obstacle est décrit par un potentiel $U_{\text{ext}}(x,t)$ d'extension spatiale finie, c'est-à-dire tel que $U_{\text{ext}}(x,t) \to 0$ quand $|x| \to \infty$. Dans de nombreuses expériences, le condensat est mis en mouvement par rapport à l'obstacle par pompage résonnant. Ici, nous nous mettons plutôt dans une situation de pompage non-résonnant où la condensation peut d'elle-même avoir lieu dans un état d'impulsion donné en approvisionnant le système avec une impulsion de lumière cohérente (*cf.* section 2.1). Néanmoins, il semblerait que les conclusions de notre travail (*cf.* sous-sections 2.3.2 et 2.3.5) ne dépendent pas beaucoup de la technique utilisée pour mettre le fluide en mouvement, comme nous l'avons constaté en comparant nos résultats à ceux obtenus en référence [20], dans laquelle les auteurs rapportent l'observation d'une transition continue autour d'une vitesse critique (différente de la vitesse du son) dans le cas d'un fluide de polaritons bidimensionnel en situation de pompage résonnant.

Comme dit précédemment, dans les expériences typiques, l'obstacle ne bouge pas mais c'est le condensat lui-même qui est mis en mouvement par rapport à l'obstacle à une vitesse donnée V. Cependant, nous nous sommes dans la plupart des cas placés dans un

référentiel où le condensat est au repos (suffisamment loin de l'obstacle) et où l'impureté se déplace à vitesse constante $-V\hat{\mathbf{x}}$ (avec $V > 0$) : $U_{\text{ext}}(x,t) = f_{\text{ext}}(x+Vt)$. L'étude détaillée de ce problème peut être effectuée dans le cas où l'obstacle est représenté par un potentiel induisant de faibles modifications dans les paramètres de l'écoulement et donc dans le cadre de la théorie des perturbations présentée en sous-section 2.3.2 et détaillée dans l'article de la sous-section 2.3.5 ; ceci étend au cas de systèmes amortis les études perturbatives de vapeurs atomiques ultra-froides que l'on trouvera par exemple en références [72], [83], [104] et [9]. Notons également que la possibilité d'un traitement perturbatif du problème a déjà été mise en évidence dans les références [136] et [137]. Nous avons ensuite étudié le profil d'onde généré par l'écoulement supersonique d'un condensat de polaritons faiblement amorti à travers un obstacle décrit par un potentiel étroit de forte amplitude, c'est-à-dire d'amplitude telle qu'on ne peut plus appliquer la théorie des perturbations. Dans ce cas, le profil de densité en amont de l'obstacle est une fonction lentement croissante de la position qui peut être décrite par une approche négligeant les effets dispersifs appelée approximation hydraulique. Nous avons enfin montré qu'une onde non-linéaire, périodique et faiblement modulée est éjectée en aval de l'obstacle et qu'elle correspond en fait à une onde de choc dispersive amortie. De tels chocs peuvent être décrits à l'aide de la théorie de Whitham [132, 54, 55, 39]. En référence [64], l'analyse est effectuée pour un obstacle localisé de grande extension spatiale. Nous avons mené une étude similaire dans le cas d'une impureté représentée par une fonction de Dirac.

En l'absence de potentiel extérieur, c'est-à-dire lorsque $U_{\text{ext}}(x,t) = 0$, une solution homogène et stationnaire de l'équation (2.1) correspond à un paramètre d'ordre de la forme $\psi(x,t) = \sqrt{\rho_0}\exp(-\mathrm{i}\,\mu\,t/\hbar)$, où ρ_0 est la densité (uniforme et indépendante du temps) du condensat de polaritons et μ le potentiel chimique du gaz. Insérant cette expression dans l'équation (2.1), on trouve que $\rho_0 = \gamma/\Gamma$ (afin d'obtenir un potentiel chimique réel puisque la densité non-perturbée est indépendante du temps) et $\mu = \alpha\rho_0$. Avec le potentiel chimique μ, qui correspond à l'énergie caractéristique du condensat, on définit une vitesse et une longueur caractéristiques dans le fluide de polaritons : la vitesse du son[4] $c_s = \sqrt{\mu/m} = \sqrt{\alpha\rho_0/m}$ et la longueur de corrélation $\xi = \hbar/\sqrt{m\mu} = \hbar/(mc_s)$. Il s'avère que la structure des profils d'onde générés par l'obstacle décrit par le potentiel $U_{\text{ext}}(x,t) = f_{\text{ext}}(x+Vt)$ est contrôlée par deux paramètres adimensionnés : le nombre de Mach M et le paramètre d'amortissement η, définis respectivement par

$$M = \frac{V}{c_s} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\gamma}{\mu}. \tag{2.2}$$

Ayant identifié les paramètres pertinents du problème, il est maintenant possible de simplifier les notations en exprimant les temps en unités de ξ/c_s, les distances en unités de ξ, les densités en unités de ρ_0 et les énergies en unités de μ. Dans ce nouveau système d'unités (dans lequel nous nous plaçons désormais), l'équation (2.1) prend la forme

$$\mathrm{i}\,\psi_t = -\frac{1}{2}\,\psi_{xx} + [U_{\text{ext}}(x,t) + \rho]\,\psi + \mathrm{i}\eta\,(1-\rho)\,\psi. \tag{2.3}$$

4. L'utilisation de la dénomination « vitesse du son » pour désigner c_s n'est en réalité appropriée qu'en l'absence d'amortissement car les modes de grandes longueurs d'onde ne se propagent pas en présence d'amortissement. Nous utiliserons néanmoins cette dénomination par commodité.

2.3.2 Écoulement autour d'un petit obstacle : d'un régime de traînée visqueuse vers un régime de traînée d'onde

En l'absence d'obstacle, c'est-à-dire lorsque $U_{\text{ext}}(x,t) = 0$, l'équation (2.3) admet une solution stationnaire et homogène de la forme $\psi(x,t) = \exp(-\mathrm{i}\,t)$. Si maintenant on introduit dans le condensat un obstacle en mouvement dont le potentiel $U_{\text{ext}}(x,t) = f_{\text{ext}}(X = x + Mt)$ (où, rappelons-le, $M = V/c_s > 0$) est de faible amplitude, il est possible d'évaluer perturbativement le profil de densité du fluide de polaritons en cherchant une solution de l'équation de Gross–Pitaevskii amortie (2.3) sous la forme $\psi(x,t) = [1+\varphi(x,t)]\exp(-\mathrm{i}\,t)$, où $|\varphi(x,t)| \ll 1$. Notant $\hat{f}_{\text{ext}}(q) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}X\, f_{\text{ext}}(X)\exp(-\mathrm{i}qX)$ la transformée de Fourier de $f_{\text{ext}}(X)$, on montre que la modulation de densité $\delta\rho(x,t) = \rho(x,t) - 1$ induite par $U_{\text{ext}}(x,t)$ s'écrit à l'ordre linéaire comme

$$\delta\rho(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\,\chi(q)\,\hat{f}_{\text{ext}}(q)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}qX}, \quad \text{où} \quad \chi(q) = -\frac{4\,q}{q^3 + 4(1-M^2)q + 8\mathrm{i}\eta M} \tag{2.4}$$

est la fonction de réponse linéaire du système. Notons que la fluctuation de densité $\delta\rho(x,t)$ n'est fonction que de $X = x + Mt$: l'approche perturbative du problème prédit que les modulations de densité générées par un obstacle se déplaçant à vitesse constante M sont stationnaires dans le référentiel où l'obstacle est au repos. L'intégrale définie en (2.4) peut être évaluée à l'aide du théorème des résidus. On trouve alors que $\delta\rho(X)$ présente deux comportements dont la différence dépend de la valeur que prend la vitesse M, et, en fait, de la position que prennent les trois pôles (simples) $q_1(M)$, $q_2(M)$ et $q_3(M)$ de la fonction de réponse $\chi(q)$ dans le plan complexe $\{\mathrm{Re}\,q, \mathrm{Im}\,q\}$. Partant d'un régime de basse vitesse et augmentant M, la transition d'un comportement à l'autre a lieu lorsque deux des pôles de $\chi(q)$ (disons q_1 et q_2) acquièrent une partie réelle non-nulle (voir figure 2.9), c'est-à-dire lorsque le discriminant du dénominateur de $\chi(q)$ s'annule. Cette condition conduit directement à l'expression de la vitesse $M_{\text{crit}} = V_{\text{crit}}/c_s$ marquant la transition entre les deux régimes :

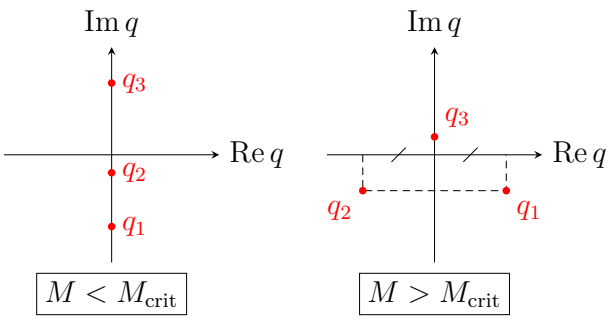


Figure 2.9 — Localisation des trois pôles q_1, q_2 et q_3 de la fonction de réponse linéaire $\chi(q)$ dans le plan complexe $\{\mathrm{Re}\,q, \mathrm{Im}\,q\}$. Lorsque $X = x + Mt$ est positif (respectivement négatif), on évalue l'intégrale (2.4) grâce au théorème des résidus en fermant le contour d'intégration par le haut (respectivement par le bas). Par conséquent, puisque q_1 et q_2 ont une partie réelle non-nulle lorsque $M > M_{\text{crit}}$, des oscillations (amorties) de densité sont générées en aval de l'obstacle (là où X est négatif) quand $M > M_{\text{crit}}$.

$$M_{\text{crit}} = \sqrt{1 - \frac{3}{2}\,\eta^{2/3}\left(\sqrt[3]{\sqrt{1+\eta^2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{1+\eta^2}-1}\right)}. \tag{2.5}$$

En l'absence d'amortissement, c'est-à-dire lorsque $\eta = \gamma/\mu$ tend vers zéro (limite qui doit s'accompagner, en unités dimensionnées, de la contrainte $\Gamma \to 0$ afin de garder la densité non-perturbée $\rho_0 = \gamma/\Gamma$ constante), on retrouve la vitesse critique que le critère de Landau prédit dans le cas d'un gaz de bosons atomiques en faible interaction : $M_{\text{crit}} = 1$, ou, en unités dimensionnées, $V_{\text{crit}} = c_s$ (voir section 2.2 et figure 2.8). Dans le cas où $\eta = 0$, le traitement perturbatif de l'équation de Gross–Pitaevskii (2.3) stipule en effet que l'écoulement du fluide quantique est superfluide lorsque $M < 1$ et dissipatif lorsque $M > 1$ (voir références [104] et [9]). Lorsque le paramètre d'amortissement η est différent de zéro, la vitesse critique M_{crit} est une fonction décroissante de η (*cf.* figure 2.10). Quand

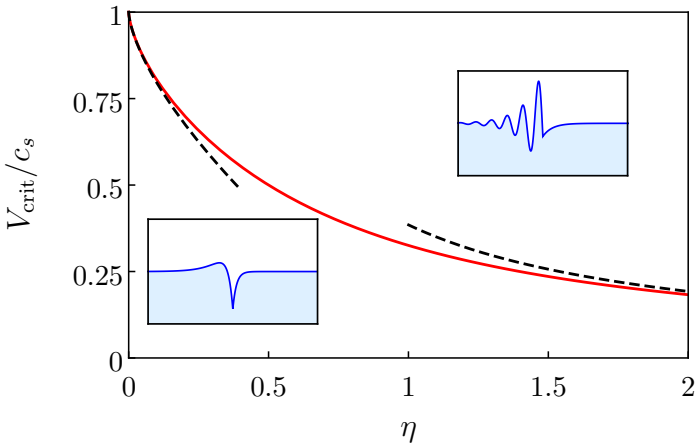


Figure 2.10 — Vitesse critique $M_{\text{crit}} = V_{\text{crit}}/c_s$ en fonction du paramètre d'amortissement $\eta = \gamma/\mu$, telle que donnée par l'équation (2.5). Les lignes en pointillés noirs correspondent aux expressions asymptotiques $M_{\text{crit}} \simeq 1 - \frac{3}{2}(\eta/2)^{2/3}$ ($\eta \ll 1$) et $M_{\text{crit}} \simeq 2/(3\sqrt{3}\,\eta)$ ($\eta \gg 1$). Les encarts représentent les profils de densité typiques obtenus en présence d'un obstacle répulsif dont le potentiel est une fonction de Dirac se déplaçant de la droite vers la gauche à une vitesse $M < M_{\text{crit}}$ (en bas, à gauche) et $M > M_{\text{crit}}$ (en haut, à droite).

$M < M_{\text{crit}}$, on n'observe pas de rayonnement de Cherenkov en aval de l'obstacle mais, comme on le verra très bientôt, la dissipation due à la durée de vie limitée des polaritons induit une force de traînée non-nulle sur l'obstacle et l'écoulement autour de ce dernier ne peut pas alors être rigoureusement qualifié de superfluide, conformément au critère de Landau. Lorsque $M > M_{\text{crit}}$, des ondes linéaires sont éjectées en aval de l'obstacle mais la dissipation entraîne que les oscillations de densité sont amorties. Les profils de densité correspondants sont représentés dans chaque cas ($M \lesseqgtr M_{\text{crit}}$) aux encarts de la figure 2.10 et à la figure 2.11. Le théorème des résidus en donne une expression analytique. Par exemple, dans le cas d'un potentiel extérieur de la forme $f_{\text{ext}}(X) = \varkappa\,\delta(X)$, on trouve aisément, quelle que soit la valeur de la vitesse M,

$$\delta\rho(X) = \mathrm{i}\varkappa \sum_{\ell\in\{1,2,3\}} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_\ell)\operatorname{Res}(q_\ell)\,\Theta[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_\ell)X]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_\ell X}, \tag{2.6}$$

de même que dans le cas d'un potentiel gaussien du type $f_{\text{ext}}(X) = \frac{\varkappa}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp(-X^2/\sigma^2)$, on

obtient, toujours pour tout M,

$$\delta\rho(X) = \frac{\mathrm{i}\varkappa}{2} \sum_{\ell\in\{1,2,3\}} \mathrm{Res}(q_\ell) \left[\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, q_\ell) + \mathrm{erf}\left(\frac{X}{\sigma} + \frac{\mathrm{i}\sigma q_\ell}{2}\right)\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_\ell X - \sigma^2 q_\ell^2/4}, \tag{2.7}$$

où Θ est la fonction de Heaviside et $\mathrm{Res}(q_\ell) = -4\, q_\ell/[3q_\ell^2 + 4(1-M^2)]$ le résidu de la fonction de réponse $\chi(q)$ au pôle q_ℓ ($\ell \in \{1,2,3\}$). On peut déduire le résultat (2.6) de l'équation (2.7) en prenant la limite $\sigma \to 0$, car, dans ce cas, $\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp(-X^2/\sigma^2) \to \delta(X)$.

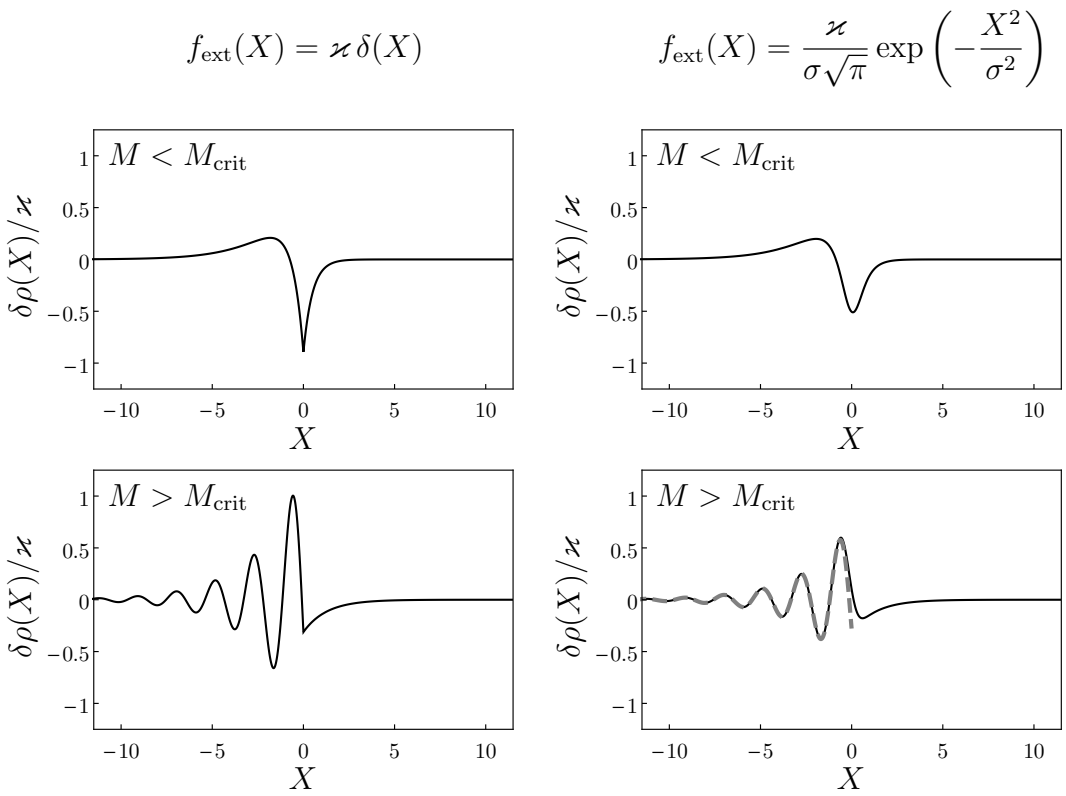


Figure 2.11 — Modulations de densité $\delta\rho(X = x + Mt)$ générées par un potentiel représenté par un pic de Dirac (graphiques de gauche) et un potentiel gaussien de largeur $\sigma = 0{,}5$ (graphiques de droite), comme données par les équations (2.6) et (2.7), respectivement. Les courbes sont tracées dans le cas où $\eta = 0{,}5$, ce qui donne un nombre de Mach critique $M_{\mathrm{crit}} = 0{,}5$. Les deux graphiques du haut correspondent à une vitesse de déplacement M plus petite que M_{crit} ($M = 0{,}4$) et les deux du bas à une vitesse plus grande que M_{crit} ($M = 1{,}75$). Sur le graphe d'en bas, à droite, la ligne en pointillés gris correspond à l'approximation $\delta\rho(X) \simeq 2\,\mathrm{Im}[\mathrm{Res}(q_1)\, \hat{f}_{\mathrm{ext}}(q_1) \exp(\mathrm{i}q_1 X)]$ lorsque $X \to -\infty$, qui est rigoureusement exacte pour tout $X < 0$ dans le cas où $f_{\mathrm{ext}}(X) = \varkappa\,\delta(X)$. Cette approximation décrit un profil d'onde de Cherenkov dont les oscillations sont caractérisées par un facteur d'amortissement proportionnel à $\exp[-\mathrm{Im}(q_1)X]$, en accord total avec les résultats obtenus en référence [64], à la fois numériquement et à l'aide de la théorie des modulations de Whitham [*cf.* équation (42) de cette référence].

Comme on le voit à la figure 2.11, l'amplitude de la modulation de densité $\delta\rho(x,t)$ est maximale au voisinage de $X = x + Mt = 0$, c'est-à-dire à la position de l'obstacle. Elle est également plus grande en $X = 0$ lorsque l'obstacle est décrit par un potentiel de la forme $U_{\text{ext}}(x,t) = \varkappa\,\delta(x + Mt)$ que dans le cas où ce dernier est du type $U_{\text{ext}}(x,t) = \frac{\varkappa}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp[-(x+Mt)^2/\sigma^2]$. Sur la base des exemples présentés à la figure 2.11, il est ainsi naturel de considérer qu'une estimation suffisante de $|\delta\rho(x,t)|$ est la valeur que prend cette quantité en $X = 0$ dans le cas où $f_{\text{ext}}(X) = \varkappa\,\delta(X)$. Une étude de la dépendance de $|\delta\rho(X=0)|$ en la vitesse M de l'impureté δ montre que (à $\varkappa$ et η fixés) $|\delta\rho(X=0)|$ atteint sa valeur maximale lorsque $M = M_{\text{crit}}$. On peut alors considérer que $|\delta\rho(X=0)|_{M=M_{\text{crit}}} = \sqrt{3}\,\varkappa/\sqrt{1-M_{\text{crit}}^2}$ est (à un facteur $\sqrt{3}$ près) le petit paramètre ϵ du développement à l'ordre linéaire de l'équation (2.3), dans le sens où si cette quantité est petite pour des valeurs de $\varkappa$ et η données, la théorie de la réponse linéaire est valable quelle que soit la vitesse M de l'obstacle. Cette condition s'écrit

$$\epsilon \ll 1, \quad \text{où} \quad \epsilon = \frac{\varkappa}{\sqrt{1-M_{\text{crit}}^2}}. \tag{2.8}$$

Lorsque $\eta \ll 1$, $\epsilon \propto \varkappa\,\eta^{-1/3}$ [car alors $M_{\text{crit}} \simeq 1 - \frac{3}{2}(\eta/2)^{2/3}$], tandis que $\epsilon \propto \varkappa$ quand $\eta \gg 1$ (car alors $M_{\text{crit}} \to 0$). Ainsi, on peut équivalemment définir le petit paramètre de la théorie de la réponse linéaire comme

$$\epsilon = \varkappa \times \max\{1, \eta^{-1/3}\}, \tag{2.9}$$

et il s'avère numériquement que la définition (2.9) fournit en fait une bonne estimation du maximum de $|\delta\rho(X)|$ pour tout $X \in \mathbb{R}$ et tout $M > 0$ à $\varkappa$ et η fixés.

Afin de discuter précisément de l'influence du temps de vie fini des polaritons sur la possible superfluidité de l'écoulement du condensat autour d'un « petit » obstacle localisé, il est intéressant de calculer la force de traînée F_d ressentie par l'obstacle. F_d est définie par [104]

$$F_d = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \rho(x,t)\, (U_{\text{ext}})_x(x,t). \tag{2.10}$$

Une façon naturelle de calculer F_d est d'insérer l'expression perturbative (2.4) donnant $\delta\rho(X) = \rho(x,t) - 1$ dans l'équation (2.10). Dans le cas où $f_{\text{ext}}(X) = \varkappa\,\delta(X)$, on peut directement tirer parti de l'expression analytique (2.6), ce qui mène à

$$F_d = -\frac{\varkappa^2}{2} \sum_{\ell\in\{1,2,3\}} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_\ell)\, q_\ell \operatorname{Res}(q_\ell). \tag{2.11}$$

Une représentation graphique de cette force de traînée en fonction de la vitesse M de l'obstacle est donnée à la figure 2.12 pour plusieurs valeurs du paramètre d'amortissement η. Il est intéressant de constater que $F_d/\varkappa^2 \simeq \eta M$ lorsque $M \ll 1$ (un comportement similaire a déjà été mis en évidence dans les références [137] et [20]). À faible vitesse, l'obstacle ressent une force de traînée comparable à la force de frottement visqueux qu'une particule subit dans un écoulement de Stokes. Elle est en effet proportionnelle à la vitesse M —

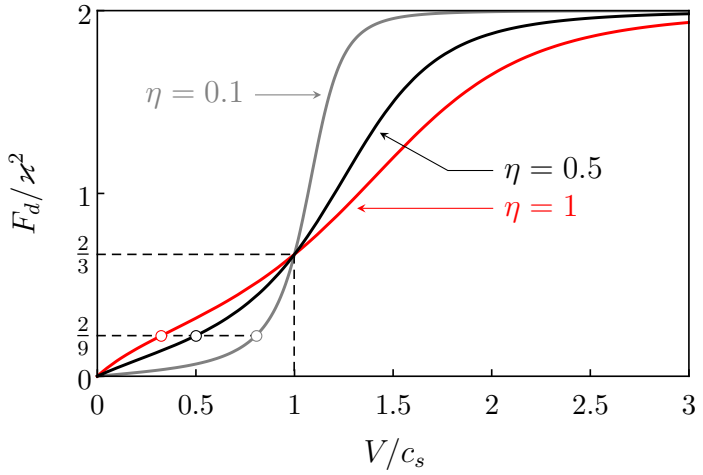


Figure 2.12 — $F_d/\varkappa^2$ en fonction de $M = V/c_s$ pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement η. Les courbes sont tracées dans le cas où l'obstacle est décrit par un potentiel de la forme $U_{\text{ext}}(x,t) = \varkappa\,\delta(x+Mt)$. Pour chaque valeur de η, la vitesse critique M_{crit} est exactement atteinte lorsque la force de traînée vaut $2\varkappa^2/9$. Les abscisses des points blancs de la figure donnent $M_{\text{crit}}(\eta)$ lorsque $\eta = 0{,}1$, $0{,}5$ puis 1. On constate aussi analytiquement que $F_d = 2\varkappa^2/3$ quel que soit η quand $M = 1$, ce que l'on vérifie ici graphiquement.

η jouant le rôle de la viscosité — et est par construction liée à la diffusion de l'impulsion dans le fluide de polaritons puisque les nombres d'onde q_1, q_2 et q_3 des excitations sont imaginaires purs lorsque $M < M_{\text{crit}}$ (voir figure 2.9). Quand M augmente et atteint la valeur critique M_{crit}, une traînée commence à être émise à la tête de l'obstacle. Elle correspond à un rayonnement de Cherenkov d'ondes sinusoïdales amorties et on pourrait alors dire, poursuivant l'analogie avec la mécanique des fluides, que le seuil de vitesse $M = M_{\text{crit}}$ marque le début de la résistance d'onde, c'est-à-dire la résistance engendrée par la perte d'énergie liée à l'émission des « vagues » de densité créées par l'obstacle en mouvement lorsque $M > M_{\text{crit}}$. On peut pousser l'analogie encore plus loin en confrontant nos résultats à ceux obtenus dans le cadre d'études expérimentales de la force de traînée s'exerçant sur des objets en mouvement à la surface de fluides visqueux. Dans de telles expériences, et comme à la figure 2.12, il est typiquement observé que la transition vers le régime de traînée d'onde est continue [27], mais aussi que F_d, considérée comme une fonction de la vitesse V, présente un comportement tendant vers la quasi-discontinuité lorsque la viscosité diminue [26]. Un comportement rigoureusement discontinu de la force de traînée est typiquement obtenu dans le cadre d'études perturbatives de superfluides (*cf.* figure 2.8 et référence [104]) mais également dans le cadre de la théorie de la résistance d'onde de Raphaël–de Gennes appliquée à l'étude d'ondes de capillarité/gravité se propageant à la surface de fluides dépourvus de viscosité [116]. Cette discontinuité disparaît en présence de viscosité [86]. Considérant les courbes de la figure 2.12 comme points de départ de la discussion, il est en outre intéressant de remarquer qu'on pourrait erronément imaginer (à l'instar de ce qui est parfois fait dans l'analyse des résultats tirés d'expériences

de mécanique des fluides) que le seuil pertinent marquant l'éjection des ondes de Cherenkov ne dépende pas de la viscosité (c'est-à-dire de η dans le cadre de notre modèle), qu'à viscosité non-nulle le comportement de $F_d(M)$ soit simplement lissé autour du résultat obtenu en l'absence de viscosité [$2\varkappa^2\Theta(M-1)$ dans notre cas], et donc finalement que $M_{\text{crit}}(\eta)$ vaille 1 quel que soit η. Notre étude analytique montre que le seuil d'entrée dans le régime de résistance d'onde correspond à une vitesse critique M_{crit} en réalité différente de $M_{\text{crit}}(\eta = 0) = 1$ et qu'il n'est pas possible de faire la distinction entre une force de nature visqueuse et une traînée d'onde lorsque M est proche de M_{crit} ou de 1. On le voit également clairement à la figure 2.12 où le seuil d'émission des ondes de Cherenkov est marqué par trois épais points blancs. À ces points, F_d est une fonction régulière de la vitesse ; elle l'est aussi autour de $M = 1$. Comme on le constate à la figure 2.12, toutes les courbes se croisent au point $(M, F_d/\varkappa^2) = (1, 2/3)$, et il est intriguant de remarquer que la force de traînée est une fonction décroissante du paramètre d'amortissement η lorsque $M > 1$. Cet effet contre-intuitif a déjà été observé dans une étude sur le mouvement de gouttes d'azote flottant à la surface d'un bain liquide [86]. Il s'explique par le fait que la viscosité réduit la portée de la traînée et diminue par conséquent la résistance d'onde qui est la source principale de traînée lorsque $M > 1$. À grande vitesse, toutes les courbes de la figure 2.12 convergent vers la même valeur constante : $F_d/\varkappa^2 \simeq 2$ lorsque $M \gg 1$, qui est le résultat obtenu pour tout $M > 1$ en l'absence d'amortissement, c'est-à-dire lorsque $\eta = 0$. Le fait que la force de traînée ressentie par l'obstacle soit approximativement constante lorsque ce dernier se déplace très vite dans le condensat de polaritons est un artéfact du potentiel extérieur $f_{\text{ext}}(X) = \varkappa\,\delta(X)$, comme le démontrent les résultats obtenus dans un cas plus standard où l'obstacle est décrit par un potentiel gaussien de la forme $f_{\text{ext}}(X) = \frac{\varkappa}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp(-X^2/\sigma^2)$. Dans ce cas, tirant parti de l'équation (2.7), on trouve

$$F_d = -\frac{\varkappa^2}{2}\sum_{\ell\in\{1,2,3\}} q_\ell \operatorname{Res}(q_\ell)\left[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_\ell) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mathrm{i}\sigma q_\ell}{\sqrt{2}}\right)\right]\mathrm{e}^{-\sigma^2 q_\ell^2/2}. \tag{2.12}$$

Les courbes correspondantes sont présentées à la figure 2.13. La dépendance contre-intuitive en η déjà observée dans le cas d'une impureté δ est ici bien plus frappante : le maximum de la force de traînée est d'autant plus grand que la viscosité effective η est petite. La ligne en pointillés noirs de la figure 2.13 correspond au développement asymptotique

$$F_d = 2|\hat{f}_{\text{ext}}(q_M)|^2\left\{1 + \mathcal{O}\left[\frac{\eta M}{(M^2-1)^{3/2}}\right]\right\} \quad \text{lorsque} \quad M \gg 1, \tag{2.13}$$

où $q_M = 2\sqrt{M^2-1}$ est la partie réelle du pôle $q_1(M)$ (ou de $-[q_2(M)]^*$) quand $M \to \infty$. Contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une impureté δ (voir la courbe en pointillés gris de la figure 2.13), la force de traînée ressentie par un obstacle gaussien tend vers zéro aux grandes vitesses car $\hat{f}_{\text{ext}}(q_M) \to 0$ quand $M \to \infty$: typiquement, lorsque la longueur d'onde de de Broglie $\hbar/(mV)$ ($1/M$ en unités adimensionnées) d'une onde de vitesse de phase $V_\varphi = V$ devient plus petite que la largeur caractéristique σ de l'obstacle, l'onde ne « fléchit » que légèrement autour de l'objet (presque comme s'il était absent) et la traînée qui s'exerce sur l'obstacle devient alors négligeable. Il est enfin intéressant de constater

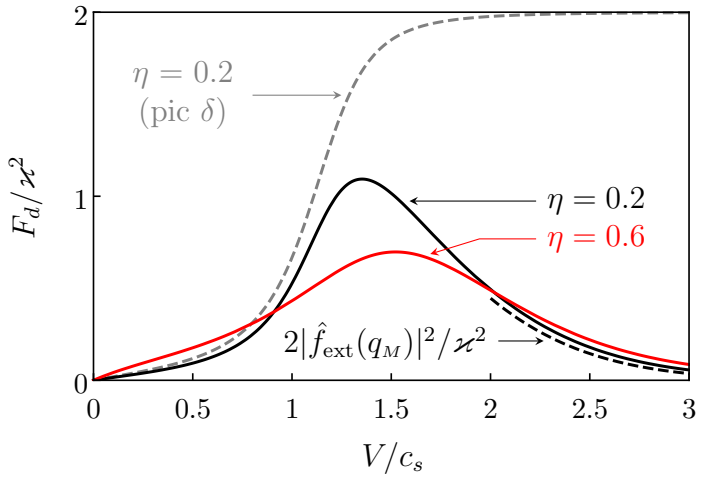


Figure 2.13 — $F_d/\varkappa^2$ en fonction de $M = V/c_s$ pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement η. Les courbes en trait plein sont tracées dans le cas où l'obstacle est décrit par un potentiel gaussien $U_{\text{ext}}(x,t) = \frac{\varkappa}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp[-(x+Mt)^2/\sigma^2]$ de largeur typique $\sigma = 0{,}5$. La ligne en pointillés noirs correspond au développement asymptotique (2.13) et celle en pointillés gris au résultat obtenu lorsque $U_{\text{ext}}(x,t) = \varkappa\,\delta(x+Mt)$, à titre de comparaison.

que le résultat asymptotique (2.13) ne dépend pas de η à l'ordre dominant, ce qui signifie que la traînée que subit l'obstacle gaussien lorsque celui-ci se déplace à grande vitesse est une pure traînée d'onde. Nous terminons l'exposé de l'étude perturbative de l'écoulement d'un condensat de polaritons scalaire autour d'un obstacle localisé en insistant sur le fait que la force de traînée est une grandeur dont l'intérêt est non seulement méthodologique mais aussi expérimental dans le sens où elle constitue une quantité mesurable. Cela est clair en hydrodynamique classique [26, 27]. C'est aussi partiellement vrai dans le cadre des expériences de condensation de Bose–Einstein où on peut avoir une connaissance indirecte de F_d en mesurant le taux d'énergie dissipée lors du travail de la force de traînée ressentie par l'obstacle [9, 103] : $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -MF_d$. Par exemple, l'expérience de Raman *et al.* [115] démontre l'existence d'une vitesse critique M_{crit} dans un gaz de bosons condensés, non pas *via* la détection de l'émission d'une traînée (qui est présente, mais non-mesurée) lorsque $M > M_{\text{crit}}$, mais *via* la mesure d'un accroissement de la fraction non-condensée thermique qui s'interprète comme étant dû à une dissipation liée au travail d'une force de traînée non-nulle.

2.3.3 Onde de choc dispersive dans un condensat supersonique s'écoulant autour d'un obstacle étroit de forte amplitude

Nous présentons ici des résultats obtenus dans des régimes où l'approche perturbative exposée dans les trois paragraphes précédents échoue, c'est-à-dire dans le cas où on ne peut plus considérer le paramètre ϵ défini par les équations (2.8) ou (2.9) comme une quantité suffisamment petite pour que l'on puisse mettre en œuvre la théorie de la ré-

ponse linéaire. Dans le cas où l'obstacle est décrit par un potentiel δ répulsif de « grande amplitude », les paramètres d'un condensat supersonique s'écoulant de la gauche vers la droite sont fortement perturbés à la position de l'obstacle (c'est-à-dire en $x = 0$), de sorte que l'amplitude $|\rho(0) - 1|$ de la densité relative en $x = 0$ n'est en effet pas négligeable. En aval de l'obstacle (c'est-à-dire dans la région où x est positif), l'amplitude des dérivées positionnelles de la densité $\rho(x)$ est contrôlée par le paramètre d'amortissement η défini par (2.2). Par conséquent, si $\eta \ll 1$, on peut raisonnablement décrire le profil de densité $\rho(x > 0)$ en ne conservant parmi les dérivées apparaissant dans les équations différentielles vérifiées par $\rho(x)$ que celles dont l'ordre est le plus bas et en éliminant toute puissance positive de ρ_x des équations. Cette démarche porte le nom d'approximation hydraulique (consulter par exemple la référence [64]). En amont de l'obstacle (c'est-à-dire dans la région où x est négatif), l'écoulement supersonique du condensat de polaritons génère des oscillations de densité amorties dont l'amplitude n'est typiquement pas faible, contrairement à ce qui est supposé dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire. Lorsque $\eta \ll 1$, la théorie des modulations de Whitham prédit que cette structure oscillatoire correspond à une onde non-linéaire faiblement modulée. C'est dans le cadre de ces deux approximations (approximation hydraulique et théorie de Whitham), valables dans la limite de faible amortissement, que sont obtenus les résultats présentés ci-après. Nous montrerons également que ces derniers sont en parfait accord avec la solution numérique exacte du problème. Nous considérons la version stationnaire [5] de l'équation de Gross–Pitaevskii amortie (2.3) en présence d'une impureté δ répulsive $[U_{\text{ext}}(x) = \varkappa\,\delta(x),\ \varkappa > 0]$ et dans un référentiel où l'obstacle est au repos tandis que le condensat s'écoule de la gauche vers la droite avec une densité et une vitesse valant respectivement 1 (c'est-à-dire ρ_0 en unités dimensionnées) et $M = V/c_s > 1$ en $x = \pm\infty$:

$$\left(\frac{M^2}{2} + 1\right)\psi = -\frac{1}{2}\,\psi_{xx} + [\varkappa\,\delta(x) + |\psi|^2]\,\psi + \mathrm{i}\eta\,(1 - |\psi|^2)\,\psi. \tag{2.14}$$

La transformation de Madelung

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}\exp\left[\mathrm{i}\int^x \mathrm{d}x'\,u(x')\right] \tag{2.15}$$

permet de réécrire — loin de portée du potentiel $U_{\text{ext}}(x)$, c'est-à-dire sur tout $\mathbb{R}^*$ puisqu'ici $U_{\text{ext}}(x) = \varkappa\,\delta(x)$ — l'équation de Gross–Pitaevskii (2.14) sous la forme d'un jeu d'équations différentielles vérifiées par la densité locale $\rho(x)$ $[\lim_{|x|\to\infty}\rho(x) = 1]$ du fluide et la vitesse locale $u(x) > 0$ $[\lim_{|x|\to\infty} u(x) = M]$ de l'écoulement :

$$(\rho\,u)_x = 2\eta\,\rho\,(1 - \rho), \tag{2.16a}$$

$$\frac{u^2}{2} + \rho + \frac{\rho_x^2}{8\rho^2} - \frac{\rho_{xx}}{4\rho} = \frac{M^2}{2} + 1. \tag{2.16b}$$

5. *A priori*, il n'est pas évident que l'équation stationnaire (2.14) admette une solution quelles que soient les valeurs de $\varkappa$, η et M, qui sont les trois paramètres caractérisant l'écoulement. Si une telle solution ne peut être trouvée, cela signifie que seul un écoulement dépendant du temps existe.

Ce sont ces équations vérifiées par les paramètres hydrodynamiques $\rho(x)$ et $u(x)$ que nous considérons désormais.

On se place dans le cadre de l'approximation hydraulique en aval de l'obstacle ; autrement dit, on néglige toutes les dérivées de ρ d'ordre $\geqslant 2$ et toute puissance $\geqslant 2$ de ρ_x dans les équations déterminant l'allure de la densité dans la région où x est positif. Puisque $|\rho_x(x>0)| = \mathcal{O}(\eta)$, cette approximation est légitime lorsque $\eta \ll 1$. En omettant les deux derniers termes du membre de gauche de l'équation (2.16b), on obtient $u^2/2 + \rho = M^2/2 + 1$, ce qui permet d'écrire la vitesse en fonction de la densité, et ainsi, en substituant l'expression trouvée à l'inconnue u dans l'équation (2.16a), il vient

$$\left[\rho\sqrt{M^2 + 2(1-\rho)}\right]_x = 2\eta\,\rho\,(1-\rho). \tag{2.17}$$

La solution de (2.17) peut être exprimée en termes de fonctions élémentaires. On trouve en effet, notant $\bar{\rho} = \rho(0)$,

$$\begin{aligned} 2\eta\,x = &\left(M - \frac{1}{M}\right) \ln \frac{(1-\bar{\rho})\left[M^2 + 1 - \rho + M\sqrt{M^2 + 2(1-\rho)}\right]}{(1-\rho)\left[M^2 + 1 - \bar{\rho} + M\sqrt{M^2 + 2(1-\bar{\rho})}\right]} \\ &- \sqrt{M^2+2}\,\ln \frac{\bar{\rho}\left[M^2 + 2 - \rho + \sqrt{(M^2+2)(M^2+2(1-\rho))}\right]}{\rho\left[M^2 + 2 - \bar{\rho} + \sqrt{(M^2+2)(M^2+2(1-\bar{\rho}))}\right]}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

qui définit implicitement la dépendance en position de la densité locale ρ en aval de l'obstacle. On vérifie que l'on a $\lim_{x\to+\infty} \rho(x) = 1^-$.

En amont de l'obstacle (là où x est négatif), l'écoulement supersonique du condensat génère une onde de choc dispersive dans le fluide de polaritons. Cette onde de choc est la version non-linéaire des oscillations de densité générées par un potentiel δ de faible amplitude se déplaçant de la droite vers la gauche à une vitesse $M > M_{\text{crit}}$ (*cf.* figure 2.11). Lorsque $\eta \ll 1$, les paramètres de l'onde de choc dispersive varient peu sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde et il est par conséquent possible de décrire la structure d'un tel profil d'onde dans le cadre de la théorie des modulations de Whitham [133]. En l'absence d'amortissement (c'est-à-dire quand $\eta = 0$), les solutions (non-linéaires) progressives et périodiques des équations couplées (2.16a) et (2.16b) peuvent s'écrire sous la forme (*cf.* références [62] et [89], par exemple)

$$\begin{aligned} \rho(x,t) = &\frac{1}{4}\,(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)^2 \\ &+ (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4) \times \operatorname{sn}^2\left[\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}\,(x - V_\varphi\,t), m\right] \end{aligned} \tag{2.19a}$$

$$\text{et} \quad u(x,t) = V_\varphi + \frac{j}{\rho(x,t)}, \tag{2.19b}$$

où sn est la fonction sinus elliptique de Jacobi,

$$V_\varphi = \frac{1}{2}\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \tag{2.20}$$

$$m = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} \tag{2.21}$$

$$\text{et} \quad j = \frac{1}{8}\,(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)\,(-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)\,(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4). \tag{2.22}$$

Les λ_i ($i \in \{1,2,3,4\}$), ordonnés de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$, sont les invariants de Riemann du problème. Ce sont des constantes dans le cas où l'onde est strictement périodique. Ils déterminent complètement les caractéristiques de l'onde comme la vitesse de phase V_φ [donnée par l'équation (2.20)], la densité de courant j dans le référentiel où l'onde est stationnaire [*cf.* équation (2.22)], l'amplitude des oscillations,

$$a = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4), \tag{2.23}$$

ainsi que leur longueur d'onde,

$$L = \frac{2\,\mathrm{K}(m)}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}}, \tag{2.24}$$

$\mathrm{K}(m) = \int_0^1 \mathrm{d}\theta/\sqrt{(1-\theta^2)(1-m\,\theta^2)}$ étant l'intégrale elliptique complète de première espèce. Lorsque $\eta \neq 0$, les invariants de Riemann qui déterminent les paramètres de l'onde de choc dispersive générée en amont de l'obstacle sont fonctions de la position et du temps. Cependant, le problème (2.16a)–(2.16b) que nous étudions est stationnaire ; ses solutions (si elles existent) ne dépendent donc pas du temps t et la vitesse de phase V_φ de l'onde de choc est nulle. Si $\eta \ll 1$, les $\lambda_i(x)$ varient peu sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde et sont dès lors solutions des équations de Whitham perturbées [6]

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{L}\,\frac{G_1\lambda_i + G_2}{\displaystyle\prod_{\substack{j\in\{1,2,3,4\}\\ j\neq i}} (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (i \in \{1,2,3,4\}), \tag{2.25}$$

où, définissant $G(\rho) = \eta\,(1-\rho)$,

$$G_1 = -\int_{\nu_1}^{\nu_2} \mathrm{d}\nu\,\frac{\nu\,G(\nu)}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}} \quad \text{et} \quad G_2 = -\frac{j}{2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} \mathrm{d}\nu\,\frac{G(\nu)}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}}. \tag{2.26}$$

Dans l'équation (2.26), $\mathcal{R}(\nu) = (\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2)(\nu - \nu_3)$ et

$$\nu_1 = \frac{1}{4}\,(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)^2, \tag{2.27}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{4}\,(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)^2, \tag{2.28}$$

$$\nu_3 = \frac{1}{4}\,(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2. \tag{2.29}$$

6. On trouvera une démonstration concise de ces quatre équations couplées dans l'appendice B de l'article de la sous-section 2.3.5 ou, avec plus de détails, en référence [63].

2.3 Profil d'onde généré par un obstacle localisé se déplaçant dans un condensat de polaritons scalaire unidimensionnel

Les équations de Whitham (2.25) constituent le nœud central du problème dans le sens où l'on ne peut connaître les paramètres de l'écoulement — comme la densité $\rho(x)$ du condensat [*cf.* équation (2.19a)] — qu'après les avoir résolues. On montre que le système formé des quatre équations (2.25) se simplifie en un système de deux équations différentielles du premier ordre couplées vérifiées par les enveloppes $\nu_1(x)$ et $\nu_2(x) > \nu_1(x)$ de l'onde de choc dispersive :

$$\frac{1}{2\sqrt{-\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2+2s_2)}}\,\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{F}(\nu_1,\nu_2)+2\nu_1\,\mathrm{F}'(\nu_1,\nu_2)}{(\nu_1-\nu_2)(2\nu_1+\nu_2+2s_2)}, \tag{2.30a}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-\nu_1\nu_2(\nu_1+\nu_2+2s_2)}}\,\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{F}(\nu_1,\nu_2)+2\nu_2\,\mathrm{F}'(\nu_1,\nu_2)}{(\nu_1-\nu_2)(\nu_1+2\nu_2+2s_2)}, \tag{2.30b}$$

où $s_2 = -M^2/2 - 1$ et, notant $\mathrm{E}(m) = \int_0^1 \mathrm{d}\theta\,\sqrt{(1-m\,\theta^2)/(1-\theta^2)}$ l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce [avec $m = (\nu_1-\nu_2)/(2\nu_1+\nu_2+2s_2)$],

$$\frac{\mathrm{F}}{2\eta} = \nu_1(\nu_1-1) + \frac{1}{3}\,(2\nu_1+\nu_2+2s_2)\left[-\nu_1+\nu_2+4s_2+3-(4s_2+3)\,\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right], \tag{2.31a}$$

$$\frac{\mathrm{F}'}{\eta} = \nu_1+\nu_2+2s_2+1-(2\nu_1+\nu_2+2s_2)\,\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}. \tag{2.31b}$$

En s'aidant de la continuité du courant en $x = 0$ — $j(0^-) = j(0^+)$ puisque l'équation (2.19b) combinée avec la contrainte $V_\varphi = 0$ et l'équation (2.16a) donne $j_x = 2\eta\,\rho\,(1-\rho)$ et puisque la densité est continue en $x = 0$ — et en tirant parti de la discontinuité de la dérivée de la densité à la position de l'obstacle — $\rho_x(0^-) = \rho_x(0^+) - 4\varkappa\rho(0) = \rho_x(0^+) - 4\varkappa\bar{\rho}$, où $\rho_x(0^+)$ se détermine grâce à (2.18) —, on arrive à trouver les valeurs que prennent les enveloppes $\nu_1(x)$ et $\nu_2(x)$ en $x = 0$, ce qui fixe les conditions aux limites du système (2.30a)–(2.30b), de la résolution duquel on déduit la densité $\rho(x < 0)$ du fluide puisqu'on a aussi, alternativement à l'équation (2.19a),

$$\rho(x) = \nu_1(x) - [\nu_1(x)-\nu_2(x)] \times \mathrm{sn}^2\left[\sqrt{-2\nu_1(x)-\nu_2(x)-2s_2}\;x, m(x)\right]. \tag{2.32}$$

Notons que la solution des équations de Whitham dépend (à $\varkappa$, η et M fixés) d'un seul paramètre : $\bar{\rho} = \rho(0)$. Ce dernier doit être correctement choisi afin d'assurer la convergence du profil de densité vers l'unité (ou bien ρ_0 en unités dimensionnées) lorsque x est suffisamment loin en amont de l'obstacle ; il doit donc être fixé de sorte que $\lim_{x\to-\infty}\nu_{1,2}(x) = 1$.

L'efficacité des approches analytiques présentées dans les deux paragraphes précédents est illustrée à la figure 2.14. Comme on le voit, l'accord entre le produit de l'intégration numérique exacte de l'équation (2.14) et les résultats respectivement tirés de la théorie de Whitham et de l'approche hydraulique est excellent. Notons que la méthode de Whitham fonctionne très bien dans un régime où la théorie des perturbations doit implacablement échouer : à la figure 2.14, on constate clairement que l'écart $|\rho(x) - 1|$ au voisinage de l'obstacle (c'est-à-dire autour de $x = 0$) n'est pas petit devant 1. En outre, nous avons choisi une valeur relativement grande de η ($\eta = 1$) car nous voulions travailler dans un régime où toutes les modulations du profil de densité en amont du pic δ apparaissent

distinctement, c'est-à-dire sur une longueur typiquement pas trop grande par rapport à la longueur d'onde des oscillations. Comme le montre la figure 2.14, même dans ce cas défavorable, l'accord des prédictions analytiques avec le résultat numérique reste vraiment très bon. Pour résoudre numériquement l'équation de Gross–Pitaevskii (2.14), nous avons utilisé une méthode de « shooting » en démarrant l'intégration numérique loin en aval de l'obstacle avec un profil de densité initial donné par les équations déduites de la théorie de la réponse linéaire.

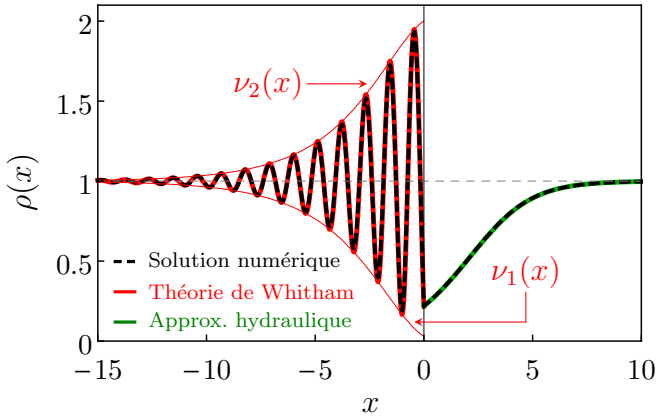


Figure 2.14 — Comparaison de la solution numérique exacte de l'équation de Gross–Pitaevskii stationnaire (2.14) avec les résultats analytiques obtenus dans le cadre de la théorie des modulations de Whitham et dans celui de l'approximation hydraulique. Les tracés ont été effectués dans le cas où $\varkappa = 4$, $\eta = 1$ et $M = 3$. La courbe obtenue par intégration numérique de l'équation (2.14) correspond à la ligne en pointillés noirs. L'onde de choc dispersive prédite par la théorie de Whitham en amont de l'obstacle (c'est-à-dire dans la région où x est négatif) correspond à la courbe en trait épais rouge. Les enveloppes $\nu_1(x)$ et $\nu_2(x)$ de la structure oscillatoire amortie sont représentées par de fines lignes rouges. Le résultat de l'approximation hydraulique en aval de l'obstacle (c'est-à-dire dans la région où x est positif) correspond à l'épaisse ligne verte du graphique.

On présente à la figure 2.15 le domaine d'existence des écoulements stationnaires dans le plan $\{\varkappa, M\}$. Ce domaine correspond à la région bleue de la figure principale ; nous l'avons déterminé numériquement dans le cas où $\eta = 0{,}05$. L'augmentation de l'aire du domaine stationnaire supercritique en présence d'amortissement est due à l'apparition d'une nouvelle classe de profils de densité quand $\eta \neq 0$. Ces profils présentent juste en amont de l'obstacle un plateau amorti qui se termine par une onde de choc dispersive lorsque $x \to -\infty$. Ils semblent correspondre à la version stationnaire d'un type de profil dépendant du temps étudié en référence [65] dans le cas où $\eta = 0$. Dans un système non-dissipatif, ce genre de structure d'onde ne peut pas être stationnaire si on impose les conditions aux limites $\lim_{x\to+\infty} \rho(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} \rho(x)$. Ici, le terme d'amortissement $\psi_t = \eta\,(1-\rho)\,\psi$ de l'équation (2.3) fournit un mécanisme permettant une relaxation de la densité en aval de $\rho(x = 0) < 1$ à $\rho(x = +\infty) = 1^-$, ainsi que la stabilisation du choc dispersif en amont de l'obstacle. L'encart de la figure 2.15 représente le domaine

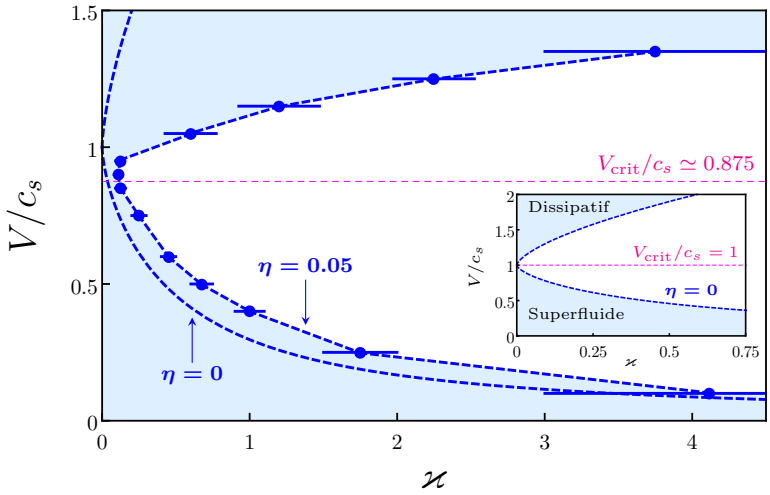


Figure 2.15 — Régimes d'écoulement autour d'un obstacle de potentiel $U_{\text{ext}}(x) = \varkappa\,\delta(x)$ dans le plan $\{\varkappa > 0, M = V/c_s\}$. Le graphique principal est obtenu dans le cas d'un système non-conservatif caractérisé par un coefficient d'amortissement $\eta = 0{,}05$. L'encart correspond à un système conservatif ($\eta = 0$). Sur chaque graphe, les régions bleues correspondent à des écoulements stationnaires, les régions blanches à des écoulements dépendant du temps et les lignes horizontales en magenta indiquent le seuil de vitesse ($V = V_{\text{crit}}$) qui sépare un régime d'excitations localisées autour de l'obstacle ($V < V_{\text{crit}}$) d'un régime d'émission de Cherenkov ($V > V_{\text{crit}}$), comme le prédit la théorie de la réponse linéaire. Dans l'encart, la région subsonique ($V < c_s$) bleue est superfluide et la région supersonique ($V > c_s$) bleue est dissipative ; l'équation $\varkappa = \varkappa(M)$ de la ligne (en pointillés bleus) qui sépare les domaines d'écoulement stationnaire et non-stationnaire est précisément donnée en (2.33). Sur la figure principale, les points accompagnés de barres d'erreur horizontales marquent la frontière (déterminée numériquement) entre les régimes d'écoulement stationnaire et non-stationnaire lorsque $\eta = 0{,}05$. Ils sont connectés entre eux par une ligne en pointillés bleus afin de guider l'œil. L'autre ligne en pointillés sur ce graphique montre, à titre de comparaison, le résultat obtenu lorsque $\eta = 0$.

exact d'existence des écoulements stationnaires dans le plan $\{\varkappa, M\}$ lorsque $\eta = 0$. On peut y identifier trois régimes que nous noterons $(\mathscr{R}_1)$, $(\mathscr{R}_2)$ et $(\mathscr{R}_3)$; $(\mathscr{R}_1)$ est subsonique ($M = V/c_s < 1$), stationnaire et superfluide, $(\mathscr{R}_2)$ est non-stationnaire et dissipatif, et $(\mathscr{R}_3)$ est supersonique ($M = V/c_s > 1$), stationnaire et dissipatif. Le régime $(\mathscr{R}_3)$ est séparé du régime $(\mathscr{R}_1)$ par la région dépendante du temps $(\mathscr{R}_2)$; on montre que l'équation de la séparatrice dans le plan $\{\varkappa > 0, M\}$ s'écrit [83]

$$\varkappa_{\text{séparatrice}}(M) = \begin{cases} \frac{1}{4M}\sqrt{(8M^2+1)^{3/2} - 8M^4 - 20M^2 + 1} & (M < 1), \\ \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{M(M^2+8)^{3/2} + M^4 - 20M^2 - 8} & (M > 1). \end{cases} \tag{2.33}$$

Cette caractéristique du cas $\eta = 0$ est partiellement en contradiction avec ce que prédit (à tort) la théorie des perturbations en l'absence d'amortissement. En effet, dans le cas où $\eta = 0$, la théorie de la réponse linéaire échoue toujours lorsque V est proche de la vitesse

du son c_s dans le condensat [83], et dans cette configuration, l'écoulement est en fait non-stationnaire. Lorsque $\eta \neq 0$, nous avons montré qu'on peut perturbativement prédire l'existence d'un profil d'écoulement stationnaire pour toute vitesse M si $\varkappa \lesssim \min\{1, \eta^{1/3}\}$ [*cf.* équation (2.9)]. Ceci est corroboré par les résultats numériques exposés à la figure 2.15 lorsque $\eta = 0{,}05$. Dans ce cas, $\min\{1, \eta^{1/3}\} = \eta^{1/3}$ car $\eta^{1/3} \simeq 0{,}37$, tandis que la plus grande valeur de $\varkappa$ pour laquelle un écoulement stationnaire existe quelle que soit la vitesse M est numériquement trouvée dans l'intervalle $]0{,}08, 0{,}14[$.

2.3.4 Synthèse des résultats

Nous avons analysé l'écoulement d'un condensat de polaritons unidimensionnel par rapport à un obstacle localisé en situation de pompage non-résonnant. Dans ce premier travail, nous avons par mesure de simplicité négligé tout effet dû à la polarisation des modes lumineux dans la cavité optique.

Nous avons tout d'abord résolu le problème perturbativement et dans ce cas montré qu'il existe un « crossover » régulier entre un régime d'écoulement visqueux (où les excitations du fluide restent localisées autour de l'obstacle) et un régime de résistance d'onde (caractérisé par un rayonnement de Cherenkov d'ondes linéaires amorties). La théorie de la réponse linéaire prédit que le seuil d'éjection des ondes de Cherenkov correspond à une vitesse critique $M_{\text{crit}}(\eta) = V_{\text{crit}}(\eta)/c_s \leqslant 1$ [*cf.* équation (2.5)] seulement fonction du coefficient d'amortissement η défini par (2.2) et que les profils d'onde stationnaires n'existent pour toute vitesse $M = V/c_s$ que lorsque l'intensité typique $\varkappa$ du potentiel répulsif représentant l'obstacle vérifie $\varkappa \lesssim \min\{1, \eta^{1/3}\}$ [voir l'équation (2.9) et la discussion associée]. Si cette condition est remplie, la théorie des perturbations s'applique et il existe une transition continue (pilotée par la vitesse M) d'un régime stationnaire de traînée visqueuse ($M < M_{\text{crit}}$) vers un régime stationnaire de traînée d'onde ($M > M_{\text{crit}}$).

Cependant, à la lumière des résultats exposés à la figure 2.15, nous avons été amenés à nuancer le caractère continu de cette transition entre un régime où la traînée est localisée au voisinage de l'obstacle et un régime d'émission d'ondes (amorties) de Cherenkov. Dans le cas d'un potentiel δ d'assez grande amplitude, on voit en effet que ces deux régimes d'écoulement stationnaire sont séparés par un régime d'écoulement dépendant du temps, comme ce qui est typiquement observé dans les vapeurs atomiques ultra-froides.

En dehors du cadre de validité de la théorie de la réponse linéaire, il est encore possible de trouver des profils d'onde stables décrits par l'équation de Gross–Pitaevskii stationnaire (2.14). La théorie des modulations de Whitham prédit qu'une onde de choc dispersive se développe à la tête d'un obstacle δ de forte amplitude se déplaçant plus vite que le son dans le condensat de polaritons. À la queue de l'obstacle, le profil de densité est bien décrit dans un cadre où sont négligés les effets dus à la dispersion (approximation hydraulique). Les résultats déduits de la théorie de Whitham et de l'approximation hydraulique sont en parfait accord avec le fruit de la résolution numérique exacte de l'équation (2.14), ce qui prouve l'efficacité de ces deux approches analytiques.

Expérimentalement parlant, le résultat le plus important de notre travail est la démonstration qu'il est difficile d'évaluer la superfluidité d'un condensat de polaritons en

analysant simplement la structure des profils de densité générés par un petit obstacle localisé se déplaçant dans le fluide. Nous avons en effet montré qu'une absence de diffusion à longue portée par un défaut n'est pas du tout liée à une absence de dissipation d'énergie dans le système [on pourra se référer à la discussion faisant suite à l'équation (2.11)].

En section 2.4, nous étendons une bonne partie de notre travail au cas où le spin des polaritons de microcavité est pris en compte. Nous y discuterons des effets dus à la présence possible d'un champ magnétique extérieur.

2.3.5 P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov, *Physical Review B* 86, 165304 (2012)

Wave pattern induced by a localized obstacle in the flow of a one-dimensional polariton condensate

P.-É. Larré,[1] N. Pavloff,[1] and A. M. Kamchatnov[2]
[1]*Univ. Paris-Sud, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, UMR8626, F-91405 Orsay, France*
[2]*Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow Region, 142190, Russia*
(Received 10 July 2012; revised manuscript received 19 September 2012; published 4 October 2012)

Motivated by recent experiments on generation of wave patterns by a polariton condensate incident on a localized obstacle, we study the characteristics of such flows under the condition that irreversible processes play a crucial role in the system. The dynamics of a nonresonantly pumped polariton condensate in a quasi-one-dimensional quantum wire is modeled by a Gross-Pitaevskii equation with additional phenomenological terms accounting for the dissipation and pumping processes. The response of the condensate flow to an external potential describing a localized obstacle is considered in the weak-perturbation limit and also in the nonlinear regime. The transition from a viscous drag to a regime of wave resistance is identified and studied in detail.

DOI: 10.1103/PhysRevB.86.165304 PACS number(s): 03.75.Kk, 71.36.+c

I. INTRODUCTION

The ability to move with respect to an obstacle without dissipating energy is one of the most intuitive and appealing definitions of superfluidity. This is the reason why the motion of quantum fluids with respect to obstacles has been used in several experiments aiming at revealing a superfluid behavior in different physical systems: ^{4}He (see, e.g., Refs. 1 and 2), ^{3}He (Ref. 3), ultracold atomic vapors,[4–8] and more recently polariton condensates.[9–13]

For a weakly perturbing impurity moving at constant velocity V in a conservative atomic Bose-Einstein condensed (BEC) system at zero temperature, the Landau criterion[14] predicts that there exists a critical velocity $V_{\rm crit}$ separating two different behaviors: (i) for $V < V_{\rm crit}$ no excitations are emitted away from the obstacle and, hence, there is no drag force; (ii) for $V > V_{\rm crit}$ a Cherenkov radiation of linear waves occurs; these waves carry momentum away from the impurity which is thus subject to a finite drag force. The first regime is superfluid and the second one is dissipative.[15]

In a pumped nonequilibrium polariton condensate, even when kinematically allowed, propagating disturbances are always damped due to the finite lifetime of the polaritons. As a result, the well-defined transition between superfluid and dissipative regimes transforms in these damped systems into a crossover characterized by different forms of wave patterns: localized for small enough flow velocity, oscillatory and extended for large enough flow velocity. The boundary between these two regimes is typically not abrupt: Just at the transition point the decay length of a propagating wave is less than its wavelength and this disturbance can hardly be distinguished from a localized perturbation. It might thus be difficult to separate a superfluid regime from a dissipative one by studying the wave pattern created by an obstacle. Nevertheless, the concept of superfluidity is often employed because it permits a simple qualitative discussion of the processes taking place in the flow of a polariton condensate.

In the present work we study in detail the wake of a polariton condensate past an obstacle and the associated drag force. We argue that, for low enough damping, the superfluid/dissipative transition is better understood in terms of a crossover of the force experienced by the obstacle from a viscous drag to wave resistance, in analogy to what is observed for capillary-gravity waves.

The paper is organized as follows. In Sec. II we present the phenomenological one-dimensional model we use and present our strategy for studying the specific features of typical flows. In Sec. III we set up a general perturbative analysis of the motion of the polariton gas past a weak obstacle and discuss the domain of validity of this approach. In Sec. IV we obtain nonperturbative results valid for a localized narrow impurity using several approximation schemes (the so-called hydraulic approximation in Sec. IV A and Whitham averaging method in Sec. IV B) and also numerical integration (Sec. IV C). Finally we present our conclusions in Sec. V. Some technical points are given in the appendices. In Appendix A we study the poles of the response function of the system and in Appendix B we present the perturbed Whitham theory we use in Sec. IV B of the main text.

II. THE MODEL

We study the flow of a polariton condensate past an obstacle disregarding possible effects of polarization of the light modes in the cavity. We consider a configuration in which excitons are confined in a one-dimensional quantum wire and, as a result, the polariton condensate is described by an order parameter $\psi(x,t)$ whose dynamics is modeled by a Gross-Pitaevskii equation of the form

$$i\hbar\,\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi_{xx} + (U_{\rm ext}(x,t) + \alpha\rho)\psi + i(\gamma - \Gamma\rho)\psi. \tag{1}$$

In Eq. (1) m is the polariton effective mass (in the parabolic dispersion approximation, valid at small momenta), $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ is the polariton density, and $U_{\rm ext}(x,t)$ describes the potential of a localized obstacle, possibly in motion relative to the polariton gas. Interaction effects are described by an effective local repulsive term characterized by the nonlinear coupling constant $\alpha > 0$. There is a whole body of evidence showing that the overall effective interaction between polaritons is repulsive. Some of the most direct manifestations of this repulsion are the observed emission

 ©2012 American Physical Society

blueshift[16–18] and the expulsion of the condensate from a pumping region.[19,20] Another consequence of repulsion, very important for the present study, is the absence of scattering from a defect—first observed in Refs. 9 and 10—and the related emission of nonlinear excitations[15] (solitons and vortices) whose generation is typically associated with a loss of superfluidity.[11–13,21]

Due to the finite lifetime of the polaritons, the system needs to be pumped. Following Refs. 22–26, we schematically describe this effect by the last term of Eq. (1): The term $\hbar\,\psi_t = \gamma\,\psi$ phenomenologically describes the combined effects of the pumping and decay processes.[27] For $\gamma > 0$ an overall gain leads, if not compensated, to an exponential increase of the density. This increase is counterbalanced by the term $\hbar\,\psi_t = -\Gamma\rho\,\psi$ (where $\Gamma > 0$) which accounts for a saturation of the gain at large density and allows one to reach a steady-state configuration—resulting from dynamical equilibrium between gain and losses—with a finite density $\rho_0 = \gamma/\Gamma$. Equation (1) corresponds to a situation where the pumping extends over all space. This models a system where an obstacle is present within a large reservoir, and simplifies the theoretical treatment because the stationary density in the absence of external potential is constant. Results where the obstacle is present outside of the pumping region will be presented in a forthcoming publication.[28]

Localized structural defects are naturally present in many samples; they can also be artificially created by means of lithographic techniques or by a continuous-wave laser. If an obstacle is introduced into the condensate, the state with uniform density ρ_0 is disturbed. We suppose that the obstacle is described by a potential $U_{\rm ext}(x,t)$ with a finite spatial extension [verifying $U_{\rm ext}(x,t) \to 0$ as $|x| \to \infty$]. In many experiments the condensate is put into motion with respect to the obstacle by resonant pumping. Here we rather describe a situation with nonresonant pumping, where condensation can be forced to occur in a finite-momentum state by seeding the system with a short coherent-light pulse.[26] However, we believe that the gross features of the theoretical study of the wave patterns and of the drag force are not essentially affected by the technique used for setting the fluid into motion. This is supported by a comparison of the results of the present work with the one of Ref. 29 where a continuous transition at a critical velocity (possibly different from the speed of sound) is also observed in a perturbative study of a resonantly driven polariton fluid.

As just discussed, in typical experiments with polariton condensates, the obstacle does not move and instead the condensate is put into motion with some velocity V. However we shall sometimes use for convenience a reference frame in which the condensate is at rest (far enough from the obstacle) and where the obstacle moves with velocity $-V$: $U_{\rm ext}(x,t) = f_{\rm ext}(x + Vt)$. A comprehensive study of this problem can be done in the case of an obstacle represented by a weak potential which induces a wave disturbance corresponding to small modifications of the parameters of the flow. In this configuration the problem can be treated in the framework of perturbation theory which is presented in Sec. III of the paper; this corresponds to the extension to damped systems of previous perturbative studies of BEC atomic vapors.[30–33] Note that the possibility of a perturbative treatment of Eq. (1) has already been foreseen in Refs. 26 and 34; this led to the identification of the relevant complex wave vectors involved in the perturbative analysis. In Sec. IV we consider the wave pattern generated by the flow of a polariton condensate past a *strong* obstacle potential, when perturbation theory no longer applies. In this case, it is appropriate to distinguish between *wide* and *narrow* obstacles depending on the ratio of their sizes to the healing length ξ (ξ is the de Broglie wavelength of polaritons moving with the sound velocity; see its definition in the next paragraph). When a narrow obstacle moves at supersonic speed the downstream profile has a rather smooth behavior which can be described by a dispersionless approach, the hydraulic approximation which we present in Sec. IV A. On the other hand, the upstream-wave structure can be represented (for small enough damping coefficient) as a weakly modulated nonlinear periodic wave which is a damped dispersive shock wave. Such shocks have been studied for the case of a wide obstacle with the use of Whitham modulation theory in Ref. 35. We present here a similar and more detailed study in the case of a δ impurity in Sec. IV B.

In the absence of external potential, a homogeneous and stationary solution of Eq. (1) corresponds to an order parameter of the form $\psi(x,t) = \sqrt{\rho_0}\exp(-i\mu t/\hbar)$, where ρ_0 is the uniform density and μ is the chemical potential. Inserting this expression in Eq. (1) one finds $\rho_0 = \gamma/\Gamma$ (necessary for obtaining a real μ corresponding to a time-independent density) and $\mu = \alpha\rho_0$. The characteristic density ρ_0 and energy μ are associated to characteristic velocity and distance, namely the speed of sound[36] $c_s = \sqrt{\alpha\rho_0/m}$ and the healing length $\xi = \hbar/(mc_s)$.

We will see below that, for a given obstacle potential $U_{\rm ext}(x,t)$, the flow pattern is monitored by only two dimensionless parameters: The Mach number M and the damping parameter η defined as

$$M = \frac{V}{c_s} \quad \text{and} \quad \eta = \frac{\gamma}{\mu}. \tag{2}$$

Having identified the relevant parameters of the problem one can simplify the notations by expressing densities in units of ρ_0, distances in units of ξ, times in units of ξ/c_s and energies in units of μ. In these new variables Eq. (1) takes the form

$$i\,\psi_t = -\tfrac{1}{2}\psi_{xx} + (U_{\rm ext}(x,t) + \rho)\psi + i\eta(1-\rho)\psi. \tag{3}$$

From now on, we shall use this dimensionless form of the damped Gross-Pitaevskii equation.

III. FLOW PAST A WEAK OBSTACLE

A. General linearized theory

In the absence of external potential Eq. (3) admits a uniform stationary solution of the form $\psi(x,t) = \exp(-i\,t)$. If the potential of the obstacle is weak, one can evaluate the density and the flow velocity profiles of the polariton condensate perturbatively. In this case one looks for a solution of Eq. (3) of the form

$$\psi(x,t) = [1 + \varphi(x,t)]\exp(-i\,t), \tag{4}$$

assuming that $|\varphi(x,t)| \ll 1$. Linearizing Eq. (3) with respect to $\varphi(x,t)$ and $U_{\rm ext}(x,t)$ and introducing the Fourier transforms

$$\begin{bmatrix} u(q,\omega) \\ v(q,\omega) \\ \hat{U}_{\rm ext}(q,\omega) \end{bmatrix} = \int_{\mathbb{R}^2} dx\, dt \begin{bmatrix} \varphi(x,t) \\ \varphi^*(x,t) \\ U_{\rm ext}(x,t) \end{bmatrix} e^{-i(qx-\omega t)}, \quad (5)$$

one finds that $u(q,\omega)$ and $v(q,\omega)$ satisfy the following linear system:

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} u(q,\omega) \\ v(q,\omega) \end{pmatrix} = -\hat{U}_{\rm ext}(q,\omega)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{2} - \omega + 1 - i\eta & 1 - i\eta \\ 1 + i\eta & \frac{q^2}{2} + \omega + 1 + i\eta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

When $\hat{U}_{\rm ext}(q,\omega) \equiv 0$, that is, in the absence of the external obstacle, nontrivial solutions $u(q,\omega)$ and $v(q,\omega)$ of the 2×2 system (6) exist only when the determinant

$$D(q,\omega) = q^2\left(1 + \frac{q^2}{4}\right) - \omega^2 - 2i\eta\,\omega \quad (8)$$

of the matrix $\mathcal{L}$ is identically null. The resolution of the characteristic equation $D(q,\omega) = 0$ yields the dispersion relation $\omega(q)$ of the elementary excitations propagating on top of a homogeneous and stationary profile. Let us first consider the case $\eta \to 0$ (and also in dimensional units $\Gamma \to 0$ in such a way that the density $\rho_0 = \gamma/\Gamma$ is kept constant). In this case one finds that the excitation spectrum is the Bogoliubov one, that is, one recovers the dispersion relation of elementary excitations of a weakly interacting atomic Bose gas: $\omega(q) = \pm\,\omega_{\rm B}(q)$, where

$$\omega_{\rm B}(q) = q\sqrt{1 + \frac{q^2}{4}}. \quad (9)$$

In the case where η is not zero one gets[22]

$$\omega(q) = \begin{cases} -i\eta \pm i\sqrt{\eta^2 - \omega_{\rm B}^2(q)} & \text{if } |q| < q_*, \\ -i\eta \pm \sqrt{\omega_{\rm B}^2(q) - \eta^2} & \text{if } |q| > q_*, \end{cases} \quad (10)$$

where

$$q_* = \left[2(\sqrt{1+\eta^2} - 1)\right]^{1/2}. \quad (11)$$

In the ideal case ($\eta = 0$ and then $q_* = 0$) long-wavelength perturbations ($|q| \ll 1$) correspond to sound waves with a linear dispersion $\omega_{\rm B}(q) \simeq q$ and with a sound velocity equal to unity in our dimensionless units. As announced in note 36, perturbations with $|q| < q^*$ do not propagate in the presence of finite damping ($\eta \neq 0$). However, for small η there exists a finite region of wave number ($q_* \ll |q| \ll 1$) for which the dispersion relation (10) can be approximated by the long-wavelength limit $\omega(q) \simeq q - i\eta$ describing weakly damped sound waves.

Let us now consider the general case where $U_{\rm ext}(x,t)$ is not zero: The linear waves are generated by the external potential and their Fourier components $u(q,\omega)$ and $v(q,\omega)$ can be expressed by means of Eq. (6) in terms of this potential. This yields the following expression for the first-order density modulation $\delta\rho = \varphi + \varphi^*$ induced by $U_{\rm ext}(x,t)$:

$$\delta\rho(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dq\, d\omega}{(2\pi)^2}\, \chi(q,\omega)\, \hat{U}_{\rm ext}(q,\omega)\, e^{i(qx-\omega t)}, \quad (12)$$

where

$$\chi(q,\omega) \equiv \frac{\delta\hat{\rho}(q,\omega)}{\hat{U}_{\rm ext}(q,\omega)} = -\frac{q^2}{D(q,\omega)} \quad (13)$$

is the linear response function of the system. A configuration of great experimental interest corresponds to the case where the condensate moves at constant velocity with respect to a static obstacle. In this case, in the frame where the condensate is at rest, the external potential is of the form

$$U_{\rm ext}(x,t) = f_{\rm ext}(x + Mt), \quad (14)$$

where M is, in our dimensionless units, the velocity of the obstacle with respect to the condensate. For being specific, we shall henceforth consider the case $M > 0$ which corresponds to an obstacle moving to the left in a frame where the condensate is at rest. Denoting by $\hat{f}_{\rm ext}$ the Fourier transform of $f_{\rm ext}$ [i.e., $\hat{f}_{\rm ext}(q) = \int_{\mathbb{R}} dz\, f_{\rm ext}(z)\exp(-iqz)$] the expression of $\delta\rho(x,t)$ in the case of an external potential of the form (14) reads

$$\begin{aligned} \delta\rho(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi}\, \chi(q,-Mq)\, \hat{f}_{\rm ext}(q)\, e^{iq(x+Mt)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dz\, K(x + Mt - z)\, f_{\rm ext}(z), \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$K(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi}\, \chi(q,-Mq)\, e^{iqX}. \quad (16)$$

One can first remark that $\delta\rho$ is a function of $x + Mt$ only: The perturbative approach predicts that the density modulations induced by an obstacle moving at constant velocity are stationary in the reference frame where the obstacle is at rest. Note however that, in the absence of damping, experiments performed on atomic condensates[7] and theory[31,32,37] show that there is a regime of time-dependent flows for impurity velocities close to the speed of sound. This is a nonlinear effect which is missed by the perturbative approach. In the presence of damping this time-dependent behavior also exits but, in a numerical study of nonlinear effects in the presence of a wide obstacle, it is observed in a smaller domain in the parameter space (Intensity of $U_{\rm ext}, V$) than when $\eta \equiv 0$.[35] This is confirmed in the case of a narrow obstacle by the numerical results of Sec. IV C below. In this respect, the perturbative result—being stationary—is thus more sound in the presence of damping since in this case the domain of time-dependent flows is reduced. We make this discussion quantitative at the end of Sec. III B by discussing the parameters governing the mathematical validity of perturbation theory.

A particular property of solution (15) comes from the conservation equation

$$\rho_t + j_x = 2\eta\,\rho\,(1 - \rho), \quad (17)$$

where $j = {\rm Im}(\psi^*\psi_x)$ is the particle current-density. Actually, Eq. (17) is a *bona fide* conservation equation only when $\eta = 0$. For nonzero η, the number of particles is not conserved and Eq. (17) should rather be called a "nonconservation"

equation for the current of particles. Equation (17) is a direct consequence of (1); in the stationary regime it implies[23,35]

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, \rho\,(1-\rho) = 0. \tag{18}$$

At the perturbative level this reads $\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta\rho = 0$ which is trivially verified by (15).

B. Perturbative flow past a δ impurity

It is instructive to discuss in greater details the characteristics of the wave pattern induced by a localized obstacle represented by the potential

$$U_{\text{ext}}(x,t) = \varkappa\,\delta(x+Mt). \tag{19}$$

Then one gets

$$\delta\rho(x,t) = \varkappa\, K(X = x+Mt), \tag{20}$$

where $K(X)$ is defined in Eq. (16). This density modulation is typical for the perturbations induced by a narrow obstacle moving in the polariton condensate. Besides, the solution of the δ-impurity problem is particularly interesting because $K(X)$ is the Green function from which the result for any potential is obtained by convolution [cf. Eq. (15)].

The integral (16) can be computed by the method of residues and $K(X)$ has different behaviors depending on the value of M and corresponding to different arrangements of the poles of $\chi(q,-Mq)$ in the complex q plane. The poles are the roots of the equation $D(q,-Mq)/q = 0$ which reads

$$q^3 + 4(1-M^2)q + 8i\eta M = 0. \tag{21}$$

The explicit expression of the three poles q_1, q_2, and q_3 as a function of η and M is given in Appendix A. One obtains the following generic expression (valid for all M):

$$K(X) = i\sum_{\ell=1}^{3} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_\ell)\operatorname{Res}(q_\ell)\,\Theta[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_\ell)X]\, e^{iq_\ell X}, \tag{22}$$

where Θ is the Heaviside step function and $\operatorname{Res}(q_\ell)$ is the residue of $\chi(q,-Mq)$ at q_ℓ ($\ell \in \{1,2,3\}$):

$$\operatorname{Res}(q_\ell) = \frac{-4\,q_\ell}{3q_\ell^2 + 4(1-M^2)}. \tag{23}$$

There exists a critical velocity M_{crit} below which the three poles of $\chi(q,-Mq)$ are all located on the imaginary axis (cf. Fig. 1 and also Appendix A) and in this case formula (22) shows that $K(X)$ exponentially goes to 0 when $|X| \to \infty$. A more transparent expression can be obtained by explicitly solving the third degree equation (21). For $M < M_{\text{crit}}$ this yields

$$\begin{aligned} K(X \leqslant 0) &= -\frac{2}{A}\left[\frac{A-B}{A-3B}\, e^{(A-B)X} - \frac{4AB}{A^2-9B^2}\, e^{2BX}\right], \\ K(X \geqslant 0) &= -\frac{2}{A}\,\frac{A+B}{A+3B}\, e^{-(A+B)X}, \end{aligned} \tag{24}$$

where A and B are positive real numbers ($A > B \geqslant 0$) depending on M and η, whose expressions are given in Appendix A [Eq. (A3)].

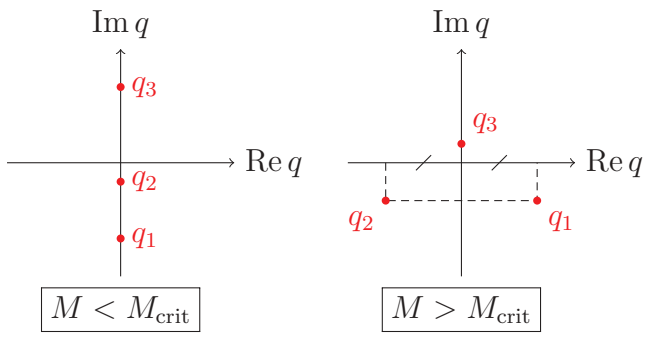


FIG. 1. (Color online) Location of the three poles q_1, q_2, and q_3 of $\chi(q,-Mq)$ in the complex q plane. For positive (negative) $X = x + Mt$ the integral in Eq. (16) is evaluated by closing the contour from above (below). As a result, for $M > M_{\text{crit}}$ (damped) density oscillations are observed upstream from the obstacle (i.e., for $X < 0$).

On the other hand, when $M > M_{\text{crit}}$, two of the poles acquire a real part and are symmetrically disposed with respect to the imaginary axis (cf. Fig. 1). In this case the wave pattern is given by the explicit formulas

$$\begin{aligned} K(X \leqslant 0) &= -\frac{4}{E}\operatorname{Im}\left(\frac{E-iF}{E-3iF}\, e^{iEX}\right) e^{FX}, \\ K(X \geqslant 0) &= -\frac{8F}{E^2+9F^2}\, e^{-2FX}, \end{aligned} \tag{25}$$

where the expression of the positive real numbers E and F is given in Eq. (A6).

The transition from one regime to the other takes place when two roots of Eq. (21) (namely q_1 and q_2) collide on the imaginary axis, that is, when the discriminant of this equation vanishes. This condition yields the expression of M_{crit}:

$$M_{\text{crit}}^2 = 1 - \frac{3}{2}\,\eta^{2/3}\left[(\sqrt{1+\eta^2}+1)^{1/3} - (\sqrt{1+\eta^2}-1)^{1/3}\right]. \tag{26}$$

When $\eta \to 0$, that is, in the absence of damping, one recovers the usual Landau threshold for emission of Cherenkov radiation in a weakly interacting Bose gas: $M_{\text{crit}} = 1$ (in dimensional units, $V_{\text{crit}} = c_s$). In this case, the perturbative treatment states that the flow is nondissipative for velocities below M_{crit} and dissipative above (see Refs. 32 and 33 and the computation of the drag in Sec. III D). This is identical to Landau's criterion since both approaches give the same value of velocity for the onset of dissipation and have the same physical content: Excitation of small nonlocalized perturbations is allowed only above M_{crit}.

In the presence of dissipation $\eta \neq 0$, and Eq. (26) shows that M_{crit} is a decreasing function of η (cf. Fig. 2). For $M < M_{\text{crit}}$ (subcritical velocities) there is no Cherenkov radiation but, as shown by the explicit computation of the drag force below, contrarily to the $\eta = 0$ case, the dissipative effects associated with the finite lifetime of polaritons induce a finite drag force on the obstacle and the flow is not strictly superfluid. For $M > M_{\text{crit}}$, Cherenkov radiation becomes possible but dissipation within the condensate induces decay of the associated density oscillations. The corresponding density patterns are represented in each case ($M \lesseqgtr M_{\text{crit}}$) in the insets of Fig. 2

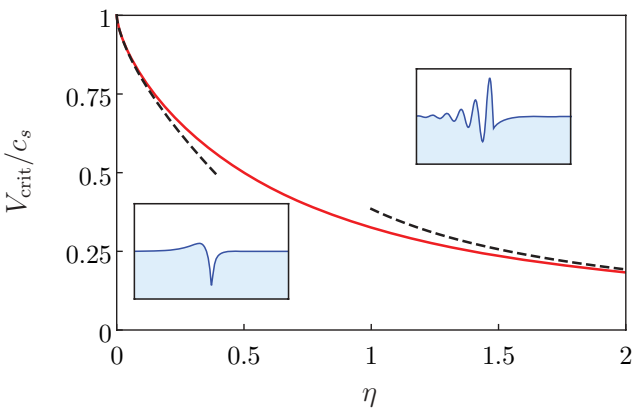


FIG. 2. (Color online) $M_{\rm crit} = V_{\rm crit}/c_s$ as a function of the dimensionless damping parameter η, such as given by Eq. (26). The dashed lines correspond to the asymptotic expressions $M_{\rm crit} \simeq 1 - \frac{3}{2}(\eta/2)^{2/3}$ (for low η) and $M_{\rm crit} \simeq 2/(3\sqrt{3}\,\eta)$ (for large η). The insets represent typical density profiles in the presence of a repulsive δ-peak impurity for $M < M_{\rm crit}$ (lower left inset) and $M > M_{\rm crit}$ (upper right inset).

and the relevant analytical expressions are given by Eqs. (24) and (25).

The fact that $M_{\rm crit}$ is modified by damping physically explains why perturbation theory is more accurate in the presence of damping. For a nondamped system, an obstacle moving at velocity close to $M_{\rm crit} = 1$ generates Bogoliubov excitations whose typical velocity is also close to $c_s = 1$. As a result, the perturbations accumulate in the vicinity of the obstacle (since they propagate at the same velocity), nonlinear effects cannot be neglected, and the perturbative approach fails.[38] In the presence of damping the critical velocity $M_{\rm crit}$ for radiating Cherenkov waves differs from the velocity of propagation of small amplitude perturbation and, moreover, the damping prevents large increases of the density. As a result there is no pile up of fluctuations in the vicinity of the obstacle, nonlinear effects may be neglected and the perturbative treatment is more likely to be valid.

This intuitive explanation of the increased accuracy of perturbation theory in the presence of damping is sustained by the mathematical reasoning we present now. In the absence of damping the amplitude of the relative density perturbation is of typical magnitude $\varkappa/|M^2-1|^{1/2}$ (i.e., perturbation theory indeed seriously fails when the velocity of the obstacle is close to the speed of sound[31] because the expression for $\delta\rho$ diverges). This problem is partially cured in the presence of damping: For a potential of the form (19) a possible estimate of the amplitude of $|\delta\rho(x,t)|$ is its value $\varkappa\,|K(0)|$ at the position of the obstacle. A study of the dependence of this quantity on the velocity and on the damping (i.e., on the dimensionless parameters M and η) shows that, for a fixed value of η, it typically reaches its largest value when $M = M_{\rm crit}$. The value of the quantity $\varkappa\,|K(0)|$ at $M = M_{\rm crit}$ is thus the small parameter ϵ of the perturbation expansion, in the sense that if this quantity is small for given $\varkappa$ and η, the perturbation theory is valid *for all velocities*. This condition reads [see formula (A10)] $\epsilon \equiv \varkappa/(1-M_{\rm crit}^2)^{1/2} \ll 1$. Hence ϵ is the small parameter of the perturbation theory in the presence of damping. It never diverges for finite η and this shows that perturbation theory is more sound with than without damping. We see that ϵ effectively decreases in the presence of damping because $M_{\rm crit}$ differs from 1, as advocated in the intuitive discussion of the previous paragraph. For small η, Eq. (A10) yields $\epsilon \propto \varkappa\,\eta^{-1/3}$ whereas for large η one finds $\epsilon \propto \varkappa$. One can thus equivalently define the small parameter of the theory as

$$\epsilon = \varkappa \times \max\{1,\eta^{-1/3}\}, \tag{27}$$

and indeed a numerical check shows that, at fixed η, ϵ as defined by (27) is a good estimate of the maximum value of $|\delta\rho(x)|$ for $x \in \mathbb{R}$ and $M \in \mathbb{R}_+$.

We stress that the condition $\epsilon \ll 1$ is a criterion of applicability of perturbation theory *for all* M at fixed η and $\varkappa$. It is a strong requirement: For given η and $\varkappa$ failing to fulfill the condition $\epsilon \ll 1$, there are still some velocities for which perturbation theory holds. For instance in the supersonic regime, when $\eta M(M^2-1)^{-3/2} \ll 1$, the condition of applicability of perturbation theory relies on the smallness of the upstream oscillations and reads $\varkappa/(M^2-1)^{1/2} \ll 1$ which is verified for large M even when ϵ is not small.

C. Generic flow pattern for a weak obstacle

For an obstacle of the generic form (14) the position of the poles of the response function and the critical velocity (26) play the same crucial role as for a δ impurity. Equation (15) yields the following explicit expression for the density oscillations:

$$\delta\rho(X) = i\int_{-\infty}^{X} dy\,\mathrm{Res}(q_3)\,f_{\rm ext}(y)\,e^{iq_3(X-y)} - i\int_{X}^{\infty} dy\sum_{\ell\in\{1,2\}}\mathrm{Res}(q_\ell)\,f_{\rm ext}(y)\,e^{iq_\ell(X-y)}, \tag{28}$$

where we recall that $\mathrm{Res}(q_\ell)$ is the residue of $\chi(q,-Mq)$ at q_ℓ ($\ell = 1, 2$ or 3) [see Eq. (23)]. Formula (28) is valid both below and above $M_{\rm crit}$. When $\eta = 0$ it reduces to the one already obtained in Ref. 31 in the absence of damping [Eq. (45) of this reference].

It is interesting to obtain from (28) the generic form of the long-distance wake which exists ahead of the obstacle when $M > M_{\rm crit}$. When X is negative and much larger than the range of the obstacle potential $f_{\rm ext}$, the first term in Eq. (28) can be neglected. If, furthermore, $f_{\rm ext}$ decreases rapidly enough at $-\infty$ so that $\hat{f}_{\rm ext}(q_{1,2})$ exists (typically when $f_{\rm ext}(x)$ decreases more rapidly than $\exp[-\mathrm{Im}(q_{1,2})\,x]$), one can approximate the second integral by a compact expression yielding

$$\delta\rho(X) \underset{X\to-\infty}{\simeq} 2\,\mathrm{Im}\big[\mathrm{Res}(q_1)\,\hat{f}_{\rm ext}(q_1)\,e^{iq_1X}\big]. \tag{29}$$

We recall that Eq. (29) is an approximation of formula (28) valid for $M > M_{\rm crit}$. It is of course exact for all $X \leqslant 0$ in the case of a δ impurity. It describes Cherenkov oscillations which are damped by a factor $\exp[-\mathrm{Im}(q_1)\,x]$, in complete agreement with the results obtained in Ref. 35 both numerically and also by means of Whitham averaging method [Eq. (42) of this reference].

Note that for large velocities ($M \gg M_{\rm crit}$) the imaginary parts of q_1 and q_2 tend to zero (cf. Appendix A) and the wake (29) thus extends far ahead from the obstacle: The effective damping of the Cherenkov radiation tends to zero. However,

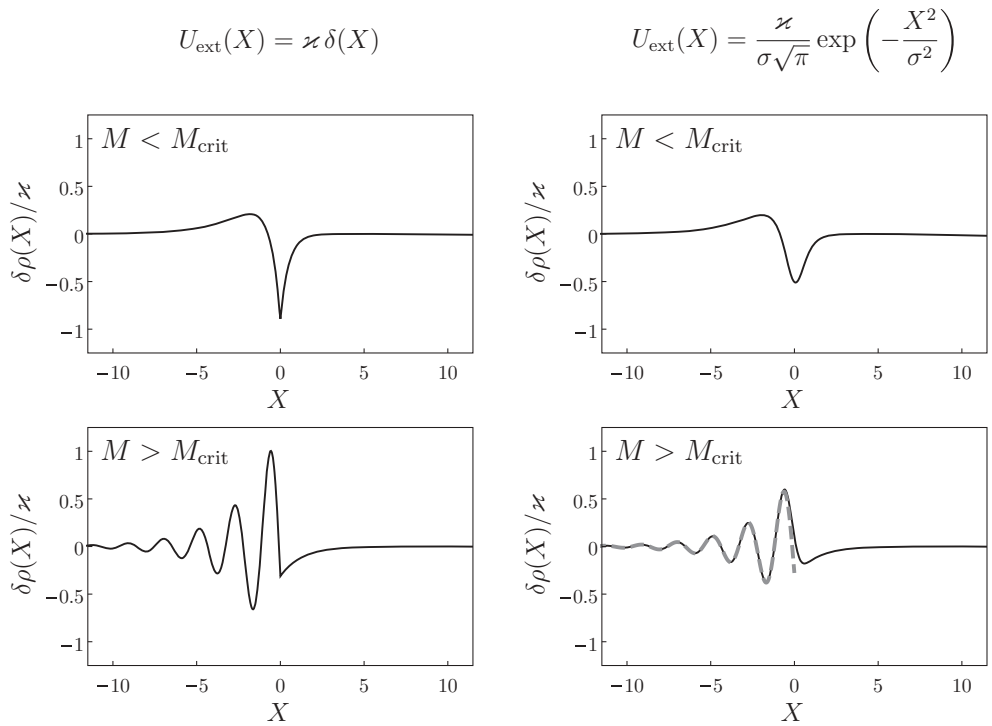


FIG. 3. $\delta\rho(X = x + Mt)$ for a δ-impurity potential (left panels) and a Gaussian potential (30) of width $\sigma = 0.5$ (right panels) as given by perturbation theory [Eq. (15)]. The plots are drawn for a system in which $\eta = 0.5$ and in this case $M_{\rm crit} = 0.5$. The two upper panels correspond to a velocity below $M_{\rm crit}$ ($M = 0.4$) and the two lower ones to a velocity above $M_{\rm crit}$ ($M = 1.75$). In the lower right panel the dashed gray line corresponds to the approximation (29).

in this limit, $|q_1|$ gets very large (cf. Appendix A) and for a generic potential $|\hat{f}_{\rm ext}(q_1)|$ becomes very small: The amplitude of the wake decreases uniformly at large velocity, not because of damping, but because the large kinetic energy of the flow with respect to the obstacle allows one to treat this obstacle as a small perturbation. The same effect had been predicted for BEC of ultracold vapors in Ref. 31 and has been observed experimentally in Refs. 7 and 8.

For being specific, we compare in Fig. 3 the density modulations obtained within perturbation theory for a δ-impurity obstacle (19) with the ones corresponding to a Gaussian potential of finite width σ:

$$U_{\rm ext}(x,t) = \frac{\varkappa}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(x+Mt)^2}{\sigma^2}\right]. \tag{30}$$

When $\sigma \to 0$ this potential tends to the δ-impurity potential (19). As just explained, when $M > M_{\rm crit}$ the damping of the oscillatory wake in front of the obstacle is more effective in the Gaussian case than for the δ impurity and is very well described by the asymptotic form (29) as shown in the lower right panel of Fig. 3.

D. Drag force

In order to discuss the precise influence of the finite lifetime of the polaritons on the possible superfluidity of the flow, it is interesting to compute the drag force F_d experienced by the obstacle. F_d is defined as[32]

$$F_d = \int_{\mathbb{R}} dx\, |\psi(x,t)|^2\, \partial_x U_{\rm ext}(x,t). \tag{31}$$

A natural way to compute F_d is to insert the perturbative expression (15) for $\delta\rho$ in Eq. (31) (see, e.g., Ref. 33). Another convenient way is to use the stress tensor $T(x,t)$ in a manner similar to what has been done in Ref. 32. The stress tensor is defined as

$$T(x,t) = -\mathrm{Im}(\psi^*\psi_t) + \tfrac{1}{2}|\psi_{xx}|^2 - \tfrac{1}{2}\rho^2 - \rho\, U_{\rm ext}. \tag{32}$$

It verifies the "nonconservation" equation

$$J_t + T_x + \rho(U_{\rm ext})_x = 2\eta\,(1-\rho)\,J, \tag{33}$$

where in dimensionless units the momentum current-density J coincides with the particle current-density: $J(x,t) \equiv j(x,t)$. In the presence of damping, in the stationary regime, integrating this expression over position, one gets

$$F_d = 2\eta \int_{\mathbb{R}} dx\,(1-\rho)\,J. \tag{34}$$

Within the perturbative approach one can show that $J(X = x + Mt) = -M\,\delta\rho(X) - 2\eta\int_{-\infty}^{X} dy\,\delta\rho(y)$, and using the result (18) this yields, for an obstacle of type (14),

$$\begin{aligned} F_d &= 2\eta\, M \int_{\mathbb{R}} dx\,[\delta\rho(x)]^2 \\ &= 2\eta\, M \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi}\,|\chi(q,-Mq)|^2\,|\hat{f}_{\rm ext}(q)|^2. \end{aligned} \tag{35}$$

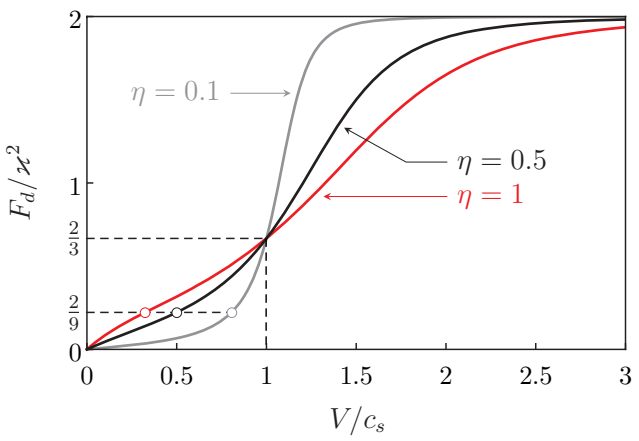


FIG. 4. (Color online) $F_d/\varkappa^2$ as a function of $M = V/c_s$ for different values of the dimensionless damping parameter η. The curves are drawn for the δ-impurity potential (19): $U_{\rm ext}(X) = \varkappa\,\delta(X)$. For each curve the abscissa of the white dot spots the value of $M_{\rm crit}(\eta)$. For each η this critical velocity is reached exactly when $F_d/\varkappa^2 = \frac{2}{9}$.

We emphasize that (31) is generally valid, that (34) is only valid for a stationary regime in the presence of damping for an obstacle moving at constant velocity, and that (35) is the perturbative evaluation of (34).

For concreteness we now give the explicit expression of the perturbative drag (35) in the case where the potential is a Dirac peak of the form (19). One gets

$$F_d = -\frac{\varkappa^2}{2} \sum_{\ell\in\{1,2,3\}} \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, q_\ell)\, q_\ell\, \mathrm{Res}(q_\ell). \tag{36}$$

Substitution of the explicit expressions for the poles yields

$$F_d = \frac{\varkappa^2 \eta\, M(1-M^2)^{-3/2}}{\cos\frac{\theta}{3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\theta}{3}\right)\left(\cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)}, \tag{37}$$

for $M < M_{\rm crit}$ and

$$F_d = \frac{8\,\varkappa^2 \eta\, M}{F(E^2 + 9F^2)} \tag{38}$$

for $M > M_{\rm crit}$ [in the above expressions θ, E, and F are given by Eqs. (A1) and (A6)]. The behavior of F_d as a function of M is displayed in Fig. 4 for several values of η. For each η the critical velocity $M_{\rm crit}$ is reached exactly when the drag is $F_d = 2\varkappa^2/9$. The corresponding points are shown as white dots in the figure. One can also show that for all η one has $F_d = 2\varkappa^2/3$ when $M = 1$.

From formulas (36), (37), and (38) one finds

$$F_d \simeq \varkappa^2 \times \begin{cases} \eta M & \text{when} \quad M \to 0, \\ 2 & \text{when} \quad M \to \infty, \end{cases} \tag{39}$$

in agreement with the main features of Fig. 4. It is interesting to notice that the drag force is proportional to ηM when $M \to 0$ (a similar behavior has already been observed in Refs. 26 and 29). This means that at low velocity the obstacle experiences a force which is similar to a viscous drag of Stokes type: (i) it is proportional to the velocity; (ii) it is linked to diffusion of momentum as shown in the polariton case by Eq. (33) and by the fact that the associated wave vector is imaginary.

When M increases and reaches the value $M = M_{\rm crit}$, a wake begins to be emitted ahead of the obstacle. It consists of (damped) Cherenkov radiations and one could say, pursuing the analogy with fluid mechanics, that this marks the onset of wave resistance. One can push the analogy one step further and compare the present results with the ones obtained in experimental studies of the drag force exerted on objects moving at the surface of several viscous fluids. In such experiments it is typically observed, as in Fig. 4, that the transition to the wave drag is continuous,[39] but also that F_d considered as a function of V has a quasidiscontinuous behavior for decreasing viscosity.[40] An exactly discontinuous behavior is typical for the perturbative drag in superfluids[32] and is also expected on the basis of Raphaël-de Gennes theory of wave resistance in the context of capillary-gravity waves at the surface of inviscid fluids.[41] This discontinuity disappears for finite viscosity.[42] Moreover, it is interesting to remark that from Fig. 4 one might erroneously guess (as is sometimes done in the analysis of fluid mechanics experiments) that the relevant critical velocity for the onset of wave drag does not depend on viscosity (i.e., on η in our case) and that at finite viscosity the behavior of $F_d(M)$ is just smoothed around the inviscid value [$2\varkappa^2\Theta(M-1)$ in our case]. From our analytical analysis we know that in reality the wave drag sets in at $M_{\rm crit}$ [which is not equal to the inviscid value $M_{\rm crit}(\eta = 0) = 1$] and that it is not possible, when $M \simeq M_{\rm crit}$ or 1, to disentangle in the expression of F_d a viscous component from a wave resistance. This is clear from Fig. 4 where the onset of wave drag is shown by thick white dots: At these points F_d remains a smooth function of M.

In Fig. 4 all curves merge at $M = 1$, and it is intriguing to remark that the drag for a fixed velocity M larger than unity decreases for increased damping. This counterintuitive effect has already been observed in a study of the motion of nitrogen drops floating at the surface of a liquid bath.[42] It is explained by the fact that viscous effects reduce the range of the wake and accordingly diminish the wave resistance which is the dominant source of drag when $M > 1$.[43]

At large velocity all curves in Fig. 4 tend to the same constant value, which is the result for the drag force in the absence of damping. The fact that the large velocity drag does not depend on M is an artifact of the δ-impurity potential, as demonstrated by the results obtained in the more standard case where the obstacle is described by a Gaussian potential of the form (30). In this case formula (31) or (35) leads to the expression

$$F_d = -\frac{\varkappa^2}{2} \sum_{\ell\in\{1,2,3\}} q_\ell\, \mathrm{Res}(q_\ell)\, e^{-\sigma^2 q_\ell^2/2} \times \left[\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\, q_\ell) + \mathrm{erf}\left(\frac{i\sigma q_\ell}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{40}$$

The corresponding curves are shown in Fig. 5. The counterintuitive η dependence already observed in the case of a δ-impurity potential is here even more striking: The maximum drag is larger at small η (compare the curves obtained for $\eta = 0.2$ and $\eta = 0.6$).

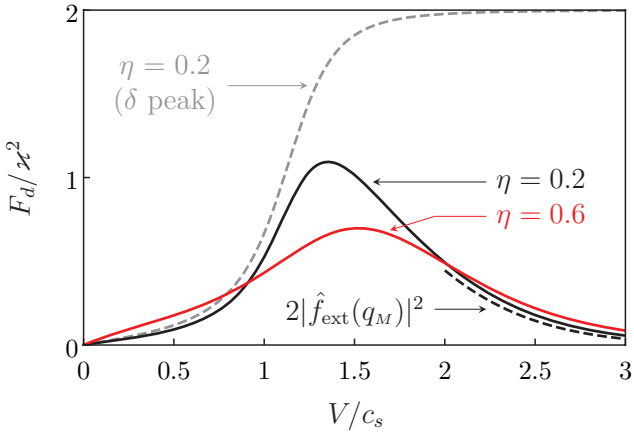


FIG. 5. (Color online) $F_d/\varkappa^2$ as a function of $M = V/c_s$ for different values of the dimensionless damping parameter η. The solid curves are drawn for a Gaussian-impurity potential of width $\sigma = 0.5$. The black dashed line is the corresponding asymptotic result (45). The gray dashed line is the result for a δ-impurity potential, shown for comparison.

In order to better understand the large-velocity behavior of the perturbative estimate of the drag force we now derive an explicit asymptotic expansion valid for any potential of the form (14) moving at large velocity. From expressions (15) and (31) one gets

$$F_d = -i \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi}\, q\, \chi(q, -Mq)\, |\hat{f}_{\rm ext}(q)|^2 = -i \int_{\mathbb{R}^2} dx\, \frac{dq}{2\pi}\, q\, \chi(q, -Mq)\, f_{\rm ext} \circ f_{\rm ext}(x)\, e^{-iqx}. \quad (41)$$

In Eq. (41) $f_{\rm ext} \circ f_{\rm ext}$ is the convolution of $f_{\rm ext}$ with itself. The integral over q in this formula can be evaluated by the method of residues. For positive (negative) x the contour has to be closed from below (above). Considering that when $M > M_{\rm crit}$ the poles q_1 and q_2 which lie in the lower half of the complex q plane verify $q_2 = -q_1^*$ and $\mathrm{Res}(q_2) = -[\mathrm{Res}(q_1)]^*$, one gets

$$F_d = -2\,\mathrm{Re}\left[q_1\,\mathrm{Res}(q_1) \int_0^{\infty} dx\, f_{\rm ext} \circ f_{\rm ext}(x)\, e^{-iq_1 x}\right] + q_3\,\mathrm{Res}(q_3) \int_{-\infty}^{0} dx\, f_{\rm ext} \circ f_{\rm ext}(x)\, e^{-iq_3 x}. \quad (42)$$

At large velocity one obtains, from Eqs. (23) and (A8),

$$q_1\,\mathrm{Res}(q_1) = -2 + O\left(\frac{\eta M}{(M^2-1)^{3/2}}\right), \qquad q_3\,\mathrm{Res}(q_3) = O\left(\frac{\eta M}{(M^2-1)^{3/2}}\right). \quad (43)$$

From this, and using the fact that $f_{\rm ext} \circ f_{\rm ext}$ is an even function of x, one can cast the leading-order contribution to F_d in Eq. (42) under the form

$$F_d = 2 \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{-i\mathrm{Re}(q_1)x}\, e^{\mathrm{Im}(q_1)|x|}\, f_{\rm ext} \circ f_{\rm ext}(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi}\, \frac{-2\,\mathrm{Im}\, q_1}{[\mathrm{Re}(q_1) - q]^2 + \mathrm{Im}^2 q_1}\, |\hat{f}_{\rm ext}(q)|^2. \quad (44)$$

The last expression in Eq. (44) is obtained using Parseval-Plancherel theorem. At large velocity the imaginary part of q_1 is of order $\eta M(M^2-1)^{-1}$, whereas its real part is $\mathrm{Re}\, q_1 \simeq q_M \equiv 2(M^2-1)^{1/2}$ [cf. Eq. (A8)]: The Lorentzian in Eq. (44) is thus a good approximation of the Dirac distribution $\delta(q - q_M)$. This directly yields the following large velocity result:

$$F_d = 2\,|\hat{f}_{\rm ext}(q_M)|^2 \left[1 + O\left(\frac{\eta M}{(M^2-1)^{3/2}}\right)\right]. \quad (45)$$

This means that the typical drag depends on velocity (through q_M) and tends to zero at large velocity[44] contrarily to what occurs for the δ-impurity obstacle. It is interesting to notice that the result (45) does not depend on η at leading order (i.e., that the large-velocity drag corresponds to pure wave resistance). Besides, as already remarked in Sec. III C [paragraph between Eqs. (29) and (30)], the obstacle can always be treated as a perturbation at large velocity and the associated drag force decreases (the large velocity limit was accordingly denoted as "quasiideal" in Ref. 45).

We end this section by noting that the drag force has not only a methodological interest, but that it is also a measurable quantity. This is clear in the context of classical hydrodynamics.[39,40] This is also partially true in the context of Bose condensation where one can have an indirect grasp on F_d by measuring the rate of the part of energy dissipation associated with the force experienced by the obstacle[33,46]: $dE/dt = -MF_d$. For instance, the experiment of Raman *et al.*[4] demonstrates breaking of Landau criterion, not through the emission of a wake (which is present, but not measured), but by an increase of the measured thermal noncondensed fraction. This increase is due to the dissipation of the work done by the finite drag force.

IV. NONLINEAR THEORY FOR A NARROW OBSTACLE

In this section we present results valid for strong obstacle potentials, in regimes where the perturbative approach of the previous section typically fails. In the limit of small damping ($\eta \ll 1$) one can expect that other approximations are valid. For example, in the case of an obstacle represented by a strong δ potential, one can assume that the condensate is strongly disturbed at the location of the obstacle, so that the difference $1 - \rho(0)$ is not small; however, the derivative of the distribution $\rho(x)$ downstream from the obstacle (for $x > 0$) is controlled by η and can be considered as small in the case of small damping. Hence we can develop for this region a so-called *hydraulic approximation* by neglecting higher order dispersive effects in our equations (see, e.g., Ref. 35). On the other hand, upstream from the obstacle (in the region $x < 0$) a supercritical flow generates a stationary oscillatory structure whose oscillation's amplitudes are not small, contrarily to what was assumed in the previous section. However, in the case of small η this oscillatory structure can be represented as a slowly modulated nonlinear wave and, hence, the *Whitham modulation theory* can be applied to its description. In this section we shall use these two approximate methods (hydraulic approximation and Whitham averaging technique) and compare their results with the exact numerical solution of the problem.

In all this section we restrict ourselves to the *stationary version* of Eq. (3) in the presence of a δ impurity. We find it more convenient to work in a reference frame where the obstacle is at rest while the condensate moves from left to right with an asymptotic velocity and density, respectively, equal to M and 1 at both infinities. The equation to be solved is the following:

$$\left(\frac{M^2}{2}+1\right)\psi = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + (\varkappa\,\delta(x)+\rho)\psi + i\eta(1-\rho)\psi. \tag{46}$$

Contrarily to the case of a weak obstacle, where one can show that a stationary solution always exists within perturbation theory (see Sec. III A), it is not *a priori* evident that Eq. (46) admits a solution. Hence, the assumption of existence of a stationary nonlinear regime has to be validated by exhibiting the corresponding solution and demonstration of its stability. If such a solution cannot be found, this means that only time-dependent flows exist for the chosen values of η, $\varkappa$, and M, which are the three parameters characterizing the flow.

By means of the substitution

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}\exp\left[i\int^x dx'\,u(x')\right], \tag{47}$$

the Gross-Pitaevskii equation (46) can be cast—outside the range of action of the obstacle potential—into a hydrodynamic form for the rescaled density $\rho(x)$ and flow velocity $u(x)$:

$$\begin{aligned}(\rho\,u)_x &= 2\eta\,\rho\,(1-\rho),\\ \frac{u^2}{2}+\rho+\frac{\rho_x^2}{8\rho^2}-\frac{\rho_{xx}}{4\rho} &= \frac{M^2}{2}+1.\end{aligned} \tag{48}$$

We shall use these hydrodynamic notations in this section.

A. Hydraulic approximation in the downstream region of a supersonic flow

In the hydraulic approximation the derivatives are supposed to be small; hence we can neglect the two last terms in the left-hand side of the second of Eqs. (48) to get $u^2/2+\rho = M^2/2+1$. Then $u(x)$ can be expressed in terms of $\rho(x)$ and substituted into the first of Eqs. (48) to give

$$\left[\rho\sqrt{M^2+2(1-\rho)}\right]_x = 2\eta\,\rho\,(1-\rho). \tag{49}$$

The solution of this equation, with the boundary condition

$$\rho(0)\equiv\bar\rho, \tag{50}$$

can be easily expressed in terms of elementary functions:

$$\begin{aligned}x = \frac{1}{2\eta}\Bigg\{&\left(M-\frac{1}{M}\right)\ln\frac{(1-\bar\rho)\left[M^2+1-\rho+M\sqrt{M^2+2(1-\rho)}\right]}{(1-\rho)\left[M^2+1-\bar\rho+M\sqrt{M^2+2(1-\bar\rho)}\right]}\\ &-\sqrt{M^2+2}\ln\frac{\bar\rho\left[M^2+2-\rho+\sqrt{(M^2+2)(M^2+2(1-\rho))}\right]}{\rho\left[M^2+2-\bar\rho+\sqrt{(M^2+2)(M^2+2(1-\bar\rho))}\right]}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{51}$$

This formula implicitly defines the dependence of the density ρ on x.

In the supersonic case, in the far downstream region, one has $1-\rho(x)\ll 1$ and one can linearize Eq. (49) with respect to $\delta\rho=\rho-1$. This yields[35]

$$|\delta\rho(x)| \propto \exp\left(-\frac{2\eta M}{M^2-1}\,x\right). \tag{52}$$

The perturbation theory used in the previous section predicts the same behavior when $\eta M(M^2-1)^{-3/2}\ll 1$ [$\delta\rho$ is found to be proportional to $\exp(iq_3x)$, where q_3 is given by (A8)]. However, the range of validity of Eq. (52) is different: The condition of smallness of the derivative yields the following condition of applicability of the hydraulic approximation:

$$\frac{\eta M}{M^2-1}\ll 1. \tag{53}$$

As a consequence of these different regimes of validity one can make the following remark: If $1-\bar\rho\ll 1$, the linearization of Eq. (49) can be extended down to $x=0$, yielding $\rho(x\geqslant 0)\simeq 1-(1-\bar\rho)\exp[-2\eta Mx/(M^2-1)]$. As we shall see in the numerical Sec. IV C, this approximation has a larger range of validity than the pure perturbation approach of Sec. III. This larger range of validity of the linearized version of (51) is a result of a drawback of the hydraulic approximation: The value of $\bar\rho=\rho(0)$ is not predicted by this method and has to be specified before comparison with numerical results. However, we will see in Sec. IV C that once this is done, Eq. (51) gives an excellent account of the downstream wave pattern with slow gradients in a supersonic flow.[47]

B. Whitham approximation in the upstream region of a supersonic flow

Upstream from the obstacle (when $x<0$) supercritical flows typically generate a dispersive shock wave which is the nonlinear version of the oscillatory wake observed in Sec. III. Now the amplitude of this wave cannot be considered as small, but for small η its parameters are poorly modified over one wavelength. Therefore we can describe such a flow within Whitham modulation theory which is a nonlinear adiabatic approach.[48]

In the absence of damping ($\eta=0$) the nonlinear progressive periodic wave solutions of (48) can be written in the form (see, e.g., Refs. 37 and 49):

$$\begin{aligned}\rho(x,t) = {}&\tfrac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4)^2+(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)\\ &\times\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}\,(x-V_\varphi\,t),m\right),\end{aligned} \tag{54}$$

and

$$u(x,t) = V_\varphi + \frac{j}{\rho(x,t)}, \tag{55}$$

where sn is the sine elliptic Jacobi function,

$$V_\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i, \quad m = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}, \tag{56}$$

and

$$\begin{aligned} j = {} & \tfrac{1}{8}(-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) \\ & \times(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4). \end{aligned} \tag{57}$$

The parameters $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4$ are called the Riemann invariants of the system. In the case of strictly periodic solutions they are constant and they determine characteristics of the wave such as the phase velocity V_φ [Eqs. (56)], the current j evaluated in the frame where the wave is standing [Eq. (57)], the amplitude of the oscillations,

$$a = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4), \tag{58}$$

and their wavelength,

$$L = \frac{2\,\mathrm{K}(m)}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}}, \tag{59}$$

$\mathrm{K}(m)$ being the complete elliptic integral of the first kind.

In the modulated dispersive shock wave occurring in the upstream region, the λ's become functions of position and time which vary weakly over one wavelength and one period. We consider here the stationary solution and in this case these parameters do not depend on time t and the phase velocity V_φ is equal to zero:

$$V_\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\lambda_i = 0. \tag{60}$$

However, because η is not strictly zero, in the upstream region, even if the λ's do not depend on time they are functions of position and their x dependence is determined by the perturbed Whitham equations (see Appendix B):

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = \frac{2}{L}\frac{G_1\lambda_i+G_2}{\prod_{m\neq i}(\lambda_i-\lambda_m)}, \quad i\in\{1,2,3,4\}, \tag{61}$$

where

$$\begin{aligned} G_1 &= -\eta\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\frac{\nu(1-\nu)}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}}, \\ G_2 &= -\frac{\eta\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3}}{2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\,\frac{1-\nu}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}}, \end{aligned} \tag{62}$$

$\mathcal{R}(\nu)$ and ν_1, ν_2, ν_3 being defined by Eqs. (B14) and (B15). According to Eq. (60), the system (61) admits the first integral $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i = 0$. We shall now show that it admits another integral and can thus be reduced to a set of two (coupled) differential equations. To this end, we shall use the Jacobi identities

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4}\frac{\lambda_i^k}{\prod_{m\neq i}(\lambda_i-\lambda_m)} = 0 \quad \text{for} \quad 0\leqslant k\leqslant 2, \quad \text{and} \\ &\sum_{i=1}^{4}\frac{\lambda_i^3}{\prod_{m\neq i}(\lambda_i-\lambda_m)} = 1, \end{aligned} \tag{63}$$

to obtain $\frac{ds_1}{dx} = 0 = \frac{ds_2}{dx}$ and

$$\frac{ds_3}{dx} = \frac{2G_1}{L}, \quad \frac{ds_4}{dx} = -\frac{2G_2}{L}, \tag{64}$$

where the s's are symmetric functions of the λ's:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_i \lambda_i, & s_2 &= \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j, \\ s_3 &= \sum_{i<j<k}\lambda_i\lambda_j\lambda_k, & s_4 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4. \end{aligned} \tag{65}$$

Here s_1 and s_2 are the integrals of our system. The value of s_1 is already known from Eq. (60): $s_1 = 0$. In order to determine the value of s_2 we calculate the asymptotic values of the Riemann invariants at $x \to -\infty$, where the flow is stationary with $\rho = \rho_0 = 1$ and $u = u_0 = M > 0$. The amplitude of the oscillations vanishes here; hence we find from (58) that $\lambda_1 = \lambda_2$ (another possible choice is $\lambda_3 = \lambda_4$; it corresponds to a flow with $M < 0$). Then, from Eq. (B15) we have the equation

$$\lim_{x\to-\infty}\rho(x) = \rho_0 = 1 = \nu_1 = \nu_2 = \tfrac{1}{4}(\lambda_3-\lambda_4)^2, \tag{66}$$

as well as the expression for the current density,

$$\lim_{x\to-\infty} j(x) = \rho_0 u_0 = M = \tfrac{1}{8}(\lambda_3-\lambda_4)^2(-2\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4), \tag{67}$$

from which we get another equation:

$$M = \tfrac{1}{2}(-2\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4). \tag{68}$$

With account of Eq. (60) (that is, $2\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 = 0$) we find, at $x \to -\infty$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{M}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{M}{2}-1, \quad \lambda_4 = \frac{M}{2}+1. \tag{69}$$

Hence,

$$s_2 = \mathrm{C}^{\mathrm{st}} = -\frac{M^2}{2}-1. \tag{70}$$

From the definition (65) of the s_i's it is clear that the λ_i's are the solutions of the fourth degree equation $\lambda^4 - s_1\lambda^3 + s_2\lambda^2 - s_3\lambda + s_4 = 0$. The two parameters s_1 and s_2 having just been determined [$s_1 = 0$ and the value of s_2 is given in Eq. (70)] we can define the functions $\lambda_i = \lambda_i(s_3,s_4)$ as being the roots of the equation

$$\lambda^4 - \left(\frac{M^2}{2}+1\right)\lambda^2 - s_3\lambda + s_4 = 0, \tag{71}$$

ordered according to $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4$. Substitution of these functions into (B15) and of the results into (64) yields the system of two differential equations for s_3 and s_4,

$$\frac{ds_3}{dx} = \frac{2G_1(s_3,s_4)}{L(s_3,s_4)}, \quad \frac{ds_4}{dx} = -\frac{2G_2(s_3,s_4)}{L(s_3,s_4)}. \tag{72}$$

We now have to find the initial conditions for this system, that is, to determine the values of s_3 and s_4 at $x = 0$. To this end, we take into account that Whitham theory implies that the parameters of the wave weakly change over a distance of about one wavelength. Therefore we can assume that, to the left of the obstacle and close enough to it, the wave can be approximated

by the cnoidal wave solution (54), (55) and to the right of the obstacle it is given by a hydraulic approximation parametrized by the value $\bar{\rho}$ of the density at the location of the δ obstacle.

It is known (see, e.g., Ref. 49) that a nonmodulated cnoidal wave solution $\rho(x)$ satisfies the equation

$$\rho_x = 2\sqrt{\mathcal{R}(\rho)}, \tag{73}$$

where the coefficients of the polynomial

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\nu) &= (\nu-\nu_1)(\nu-\nu_2)(\nu-\nu_3)\\ &= \nu^3 + 2s_2\nu^2 + \left(s_2^2 - 4s_4\right)\nu - s_3^2\end{aligned} \tag{74}$$

are expressed in terms of the symmetric functions s_2, s_3, and s_4. Then the solution (54), (55) (with $V_\varphi = 0$) can be expressed in terms of the zeros ν_1, ν_2, ν_3 of this polynomial as follows:

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \nu_1 + (\nu_2-\nu_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{\nu_3-\nu_1}\,x, m\right),\\ u(x) &= \frac{s_3}{\rho(x)},\end{aligned} \tag{75}$$

where

$$m = \frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_3-\nu_1} \quad \text{and} \quad L = \frac{2\,\mathrm{K}(m)}{\sqrt{\nu_3-\nu_1}}. \tag{76}$$

In the stationary modulated situation we consider that ν_1, ν_2, ν_3, s_3, m, and L do not depend on time in Eqs. (75) and (76), but they all depend on x.

It follows from Eq. (17) that the current of polaritons is preserved in transition through the δ potential: $j(0^-) = j(0^+)$. Then the second of Eqs. (75) yields (under the assumption that the hydraulic approximation is valid for $x \geqslant 0$ because $\eta \ll 1$) the value of $s_3(0)$:

$$s_3(0) = u(0)\rho(0) = \bar{\rho}\sqrt{M^2 + 2(1-\bar{\rho})}. \tag{77}$$

For calculating the value of $s_4(0)$ we use the matching condition at $x = 0$:

$$\rho_x(0^+) - \rho_x(0^-) = 4\varkappa\rho(0). \tag{78}$$

Pursuing the use of the downstream hydraulic approximation already used in Eq. (77) we write $\rho(0) = \bar{\rho}$ and, from Eq. (49),

$$\rho_x(0^+) = \frac{2\eta\,\bar{\rho}\,(1-\bar{\rho})\sqrt{M^2+2(1-\bar{\rho})}}{M^2+2-3\bar{\rho}}. \tag{79}$$

In the same spirit of a small-η approximation we have from Eq. (73) $\rho_x(0^-) = -2\sqrt{\mathcal{R}(\bar{\rho})}$, so that Eq. (78) reads

$$\mathcal{R}(\bar{\rho}) = \left[2\varkappa\bar{\rho} - \frac{\eta\,\bar{\rho}\,(1-\bar{\rho})\sqrt{M^2+2(1-\bar{\rho})}}{M^2+2-3\bar{\rho}}\right]^2. \tag{80}$$

This yields

$$\begin{aligned}&(\nu_1\nu_2+\nu_2\nu_3+\nu_3\nu_1)_{x=0}\\ &\quad = s_2^2 - 4s_4(0) = \frac{[4\varkappa\bar{\rho} - \rho_x(0^+)]^2}{4\bar{\rho}} + (2M^2+4-3\bar{\rho})\bar{\rho},\end{aligned} \tag{81}$$

and then

$$\begin{aligned}s_4(0) = \frac{1}{4}&\left[\frac{(M^2+2)^2}{4} - 2(M^2+2)\bar{\rho} + 3\bar{\rho}^2\right]\\ &-\bar{\rho}\left[\varkappa - \frac{\eta\,(1-\bar{\rho})\sqrt{M^2+2(1-\bar{\rho})}}{2(M^2+2-3\bar{\rho})}\right]^2.\end{aligned} \tag{82}$$

TABLE I. Values of $\bar{\rho}$ for different values of $\varkappa$ in the case $M = 3$ and $\eta = 0.05$. The row $\bar{\rho}$ (Whitham) corresponds to the value of $\bar{\rho} = \rho(0)$ found by solving Whitham Eqs. (83) and imposing the condition (85) (see the text). The row $\bar{\rho}$ (numerics) corresponds to the value of $\rho(0)$ found *via* a numerical resolution of Eq. (46).

$\varkappa$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\bar{\rho}$ (Whitham)	0.9370	0.7932	0.6384	0.5056	0.4011
$\bar{\rho}$ (numerics)	0.9352	0.7916	0.6377	0.5055	0.4013

We note here that for small values of η, the analytical expression (82) can be simplified by replacing Eq. (79) by the simple approximation $\rho_x(0^+) = 0$. This amounts to also replacing η by 0 in the expressions (80) and (82). This simple scheme is accurate when $\eta \lesssim 0.5$.

Equations (77) and (82) give the initial conditions for the system

$$\begin{aligned}\frac{ds_3}{dx} &= -\frac{2\,\eta}{L}\int_{\nu_1(s_3,s_4)}^{\nu_2(s_3,s_4)} d\nu\,\frac{\nu(1-\nu)}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}},\\ \frac{ds_4}{dx} &= \frac{\eta\,s_3}{L}\int_{\nu_1(s_3,s_4)}^{\nu_2(s_3,s_4)} d\nu\,\frac{1-\nu}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}},\end{aligned} \tag{83}$$

where $\nu_i(s_3,s_4)$ $(i = 1,2,3)$ are determined as being the roots of the equation $\mathcal{R}(\nu,s_3,s_4) = 0$, where

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\nu,s_3,s_4) \equiv\ &\nu^3 - (M^2+2)\nu^2\\ &+\left[\left(\frac{M^2}{2}+1\right)^2 - 4s_4\right]\nu - s_3^2.\end{aligned} \tag{84}$$

In Eqs. (83) L is also expressed in terms of the ν's [see Eq. (76)].

In the present application of Whitham modulation theory it is important to notice that for fixed values of $\varkappa$, η, and M, the solution of Whitham equations depends on a single parameter $\bar{\rho}$ which is also a function of the same set of physical parameters $(\varkappa, \eta, M)$ prescribed by the external potential and the boundary conditions of the Gross-Pitaevskii equation. Hence, the parameter $\bar{\rho}$ can be found from the condition that the solution of Whitham equations satisfies the correct boundary condition at $x \to -\infty$, namely that the envelopes of the density oscillations tend to the asymptotic value of the density:

$$\nu_1(x),\ \nu_2(x) \to 1 \quad \text{as} \quad x \to -\infty. \tag{85}$$

Some values of $\bar{\rho}$ calculated in this way are listed in the second row of Table I for $\eta = 0.05$, $M = 3$, and several values of $\varkappa$. We compare them with the values of $\bar{\rho}$ obtained by exact numerical solution of Eq. (46). As we see, the agreement is very good.

The $\varkappa$ dependence of $\bar{\rho} \equiv \rho(0)$ is shown in the right panel of Fig. 6 for several values of M. The η dependence of $\bar{\rho}$ is displayed in the left panel of the same figure for several values of $\varkappa$. This plot shows that $\bar{\rho}$ does not tend to unity in the limit $\eta \to 0$. This means that, in this limit, the flow pattern does not uniformly converge along the whole x axis to the exact solution found in Ref. 31 in the case $\eta \equiv 0$. Indeed, for the exact $\eta = 0$ solution, the downstream density is a constant [and then $\bar{\rho} = \rho(0) = \rho(+\infty) = 1$]. Rather, for small and finite η, the actual profile matches the exact $\eta = 0$ one in the large

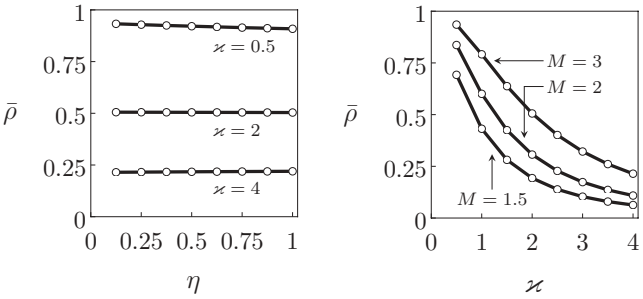


FIG. 6. $\bar{\rho} = \rho(0)$ as a function of η for $M = 3$ and different values of $\varkappa$ (left panel) and as a function of $\varkappa$ for $\eta = 0.05$ and several values of M (right panel).

region $-1/\eta \ll x \ll 1/\eta$ and then relaxes to the asymptotic density $[\rho(\pm\infty) = 1]$ at $|x| \gg 1/\eta$. This is confirmed by the numerical simulation performed in Sec. IV C.

A striking feature of the plot in the left panel of Fig. 6 is the extremely weak η dependence of $\bar{\rho}$. This important property of the theory can be explained by the simple fact that the space coordinate x and the parameter η enter into both the hydraulic approximation and Whitham equations only through the combination ηx [see Eqs. (51) and (83)]. As a result, η can be rescaled out of the exact relation (18) after averaging over fast oscillations in the dispersive shock region $x < 0$, so that we arrive to an equation which depends on η only through the small value of $\rho_x(0^+)$ [see Eqs. (79) and (82)]. If we neglect this term, then the resulting equation yields $\bar{\rho}$ as a function of M and $\varkappa$ only.

When $\bar{\rho}$ is found, all the parameters of the dispersive shock wave are determined, the functions $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, $\nu_3(x)$ can be computed by solving Eqs. (83), and their substitution into Eqs. (75) yields the oscillatory structure upstream from the obstacle. The same value of $\bar{\rho}$ determines the hydraulic solution downstream from the obstacle. Thus, we reach a complete description of the nonlinear wave generated by a supercritical flow past a δ obstacle.

The accuracy of the theory is illustrated by Fig. 7. As we see, the agreement between the results of the combined Whitham and hydraulic approaches and the numerical computations is excellent. Note that Whitham method is perfectly valid in a regime where the perturbative theory of Sec. III seriously fails ($|\rho(x) - 1|$ is not small in Fig. 7). For illustrative reasons we have chosen a relatively large value of η ($\eta = 1$): We wanted to work in a regime where the overall modulations of the oscillating pattern occur over a characteristic length which is not too large with respect to the wavelength of the oscillations. As we see, even in this unfavorable case the agreement with the exact numerical results is very good.

The solution of the system (83) exists, and the upstream pattern can be described as a slowly modulated cnoidal wave, as long as its initial conditions can be found, that is, as long as the equation $\mathcal{R}(\nu, s_3(0), s_4(0)) = 0$ has three real roots. If η is strictly zero, then, choosing the normalization $\bar{\rho} = 1$ of Ref. 31, this equation reads

$$\nu^3 + (M^2 + 2)\nu^2 + (1 + 2M^2 + 4\varkappa^2)\nu - M^2 = 0. \quad (86)$$

Two of the roots coalesce and go into the complex plane when the discriminant of Eq. (86) vanishes. This corresponds to a

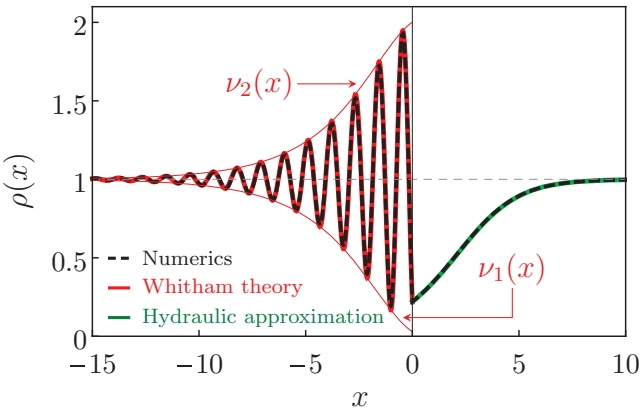


FIG. 7. (Color online) Comparison of the Whitham theory with the numerical solution of Eq. (46). The plot is drawn in the case $\eta = 1$, $M = 3$, and $\varkappa = 4$. The numerics corresponds to the dashed black line. Whitham envelopes are shown by thin red solid lines, and the upstream dispersive shock wave oscillatory structure obtained by substitution of the solution of the Whitham Eqs. (83) into Eqs. (75) is shown by a red solid line (for $x \leqslant 0$). The downstream ($x \geqslant 0$) hydraulic approximation is shown by a green solid line.

boundary between possible parameters in the plane $(\varkappa, M)$ determined by the condition

$$\varkappa_b^2 = \tfrac{1}{32}[M(M^2 + 8)^{3/2} + M^4 - 20M^2 - 8]. \quad (87)$$

The same boundary was already found in a different analytical form in Ref. 31 for a nondamped system. In our problem ($\eta \neq 0$, $\bar{\rho} \neq 1$), this boundary is changed and can be found by numerically determining when the discriminant of Eq. (84) vanishes. However, when $\eta \neq 0$, as we shall see in Sec. IV C, new stationary solutions appear when $\varkappa$ gets so large that the upstream flow is not described by a modulated cnoidal wave, making the determination of the domain of validity of Whitham approach less crucial than when $\eta = 0$.

C. Numerical results

In this section we present results of the full numerical solution of Eq. (46). We used a shooting method, starting the numerical integration from large and positive x with an initial behavior given by the prediction of perturbation theory. Typical results are displayed in Fig. 8.

The upper plots of this figure are drawn for $M = 3$ which is a velocity deep enough in the supersonic regime for Whitham theory of Sec. IV B to apply over a rather large range of values of $\varkappa$. The left plot of the upper row corresponds to $\varkappa = 0.5$. For this value of $\varkappa$, perturbation theory is valid upstream ($x < 0$) but fails for positive x, whereas the hydraulic approximation is quite accurate in this region, as shown by the dashed line in this plot. For $\varkappa = 4$ (right plot of the upper row of Fig. 8), the density profile shows the same features, but in this case perturbation theory seriously fails, whereas the downstream wave pattern being typical for a damped cnoidal wave is very well described by Whitham theory (not shown, because indistinguishable from the numerical result).

The two rows below the upper one correspond to $M = 1.2$ and $M = 1$. They are interesting because they show that, whereas perturbation theory fails in the absence of damping

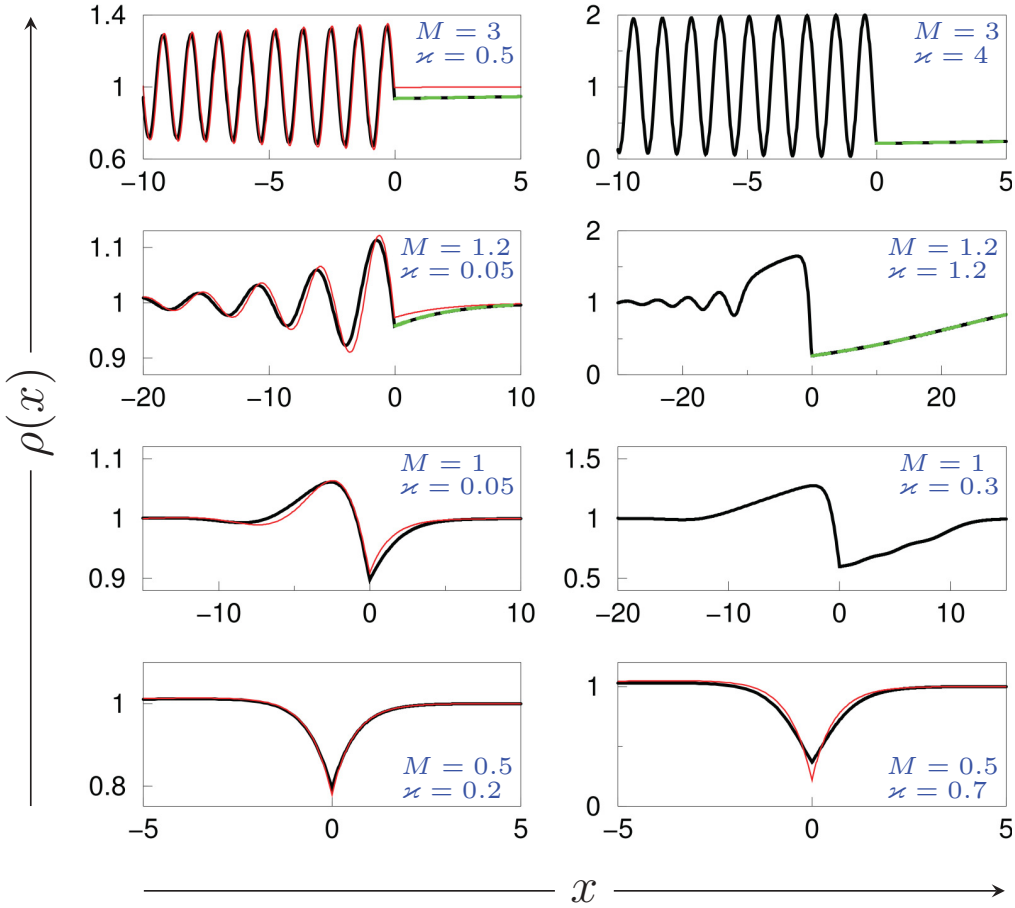


FIG. 8. (Color online) Different profiles $\rho(x)$ for flows past a δ-impurity potential of type (19). For all the profiles the damping parameter is $\eta = 0.05$. For the upper row $M = 3$, then $M = 1.2$ for the row below, $M = 1$ for the following one, and finally $M = 0.5$ for the lower row. The value of $\varkappa$ is indicated in each plot. In each plot the black solid line corresponds to the numerical solution of Eq. (46), the (red online) thin line to the perturbative result and the (green online) dashed line to the result of the hydraulic approximation which is only relevant for $x \geqslant 0$ (see Sec. IV A).

when $M \simeq 1$, for $\eta \neq 0$ it has a regime of validity even for velocities M close to unity. This is illustrated by the good agreement of the perturbative results with the numerics displayed in the two left plots of the central rows (which are both drawn in the case $\varkappa = 0.05$). It is also interesting to remark that for $M = 1$, no stationary solution exists when $\eta = 0$, whereas here we could find such solutions up to $\varkappa = 0.3$ (see the right plot of the third row). The values $M = 1$ and $\varkappa = 0.3$ are close to the boundary marking the end of the existence of stationary solutions when $\eta = 0.05$. In this case the downstream wave pattern shows small scale disturbances which were recognized in Ref. 35 as typically occurring near the end of the stationary regime.

The second upper row of Fig. 8 corresponds to $M = 1.2$. In this case, when $\eta = 0$, there is no stationary solution for $\varkappa \geqslant 0.0495$ [see Eq. (87) or Ref. 31]. As seen on the figure, when $\eta = 0.05$, one can find stationary solutions for much larger values of $\varkappa$ (up to $\varkappa \simeq 1.2$; see the corresponding plot). However, the density profile found in this case is very different from a damped cnoidal wave. It seems to be a stationary version of a type of time-dependent profiles studied in Ref. 50 for the case $\eta = 0$: A plateau develops just upstream from the obstacle which terminates when $x \to -\infty$ by a dispersive shock wave. Here, when $\eta \neq 0$, the plateau and the shock wave are damped because the specific form of the modified Gross-Pitaevskii Eq. (3) favors relaxation towards $\rho = 1$.

The lower row of Fig. 8 displays results corresponding to a subsonic obstacle ($M = 0.5$). For this value of the velocity, there is no stationary solution in the $\eta = 0$ case for $\varkappa \geqslant 0.59$.[31,51] As illustrated by the right plot of this row (drawn for $\varkappa = 0.7$) in the presence of damping, solutions exist for slightly larger values of $\varkappa$. However we find that, when η passes from 0 to 0.05, the range of values of $\varkappa$ allowing for a stationary solution does not increase in the subsonic case as much as it does in the supersonic region. This is illustrated by Fig. 9 where we represent the domain of existence of stationary flows in the $(\varkappa, M)$ plane. This domain corresponds to the shaded region in the figure and was numerically determined in the case $\eta = 0.05$. The large increase of the stationary domain for supersonic flows in the presence of damping is due to the occurrence, when $\eta \neq 0$, of a new class of profiles with an upstream plateau, as explained above and illustrated in the right plot of the second row from the left in Fig. 8 (corresponding to $M = 1.2$ and $\varkappa = 1.2$).

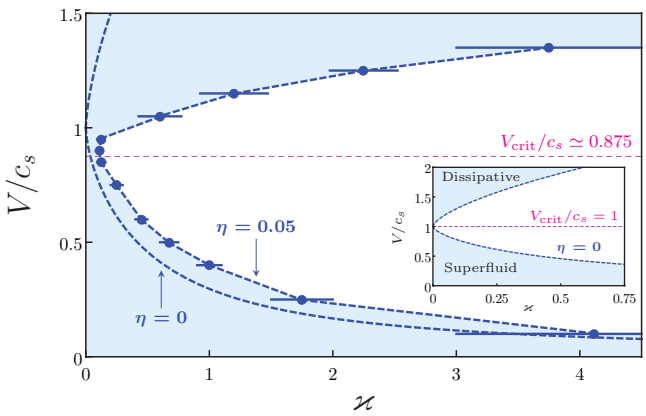


FIG. 9. (Color online) Different regimes of flow past a δ-impurity potential of type (19) in the $(\varkappa, M = V/c_s)$ plane. The main plot corresponds to the dissipative system (with $\eta = 0.05$). The inset is drawn for $\eta = 0$. In both plots the shaded regions correspond to stationary flows, the white ones to time-dependent and dissipative flows and the horizontal dashed line indicated the transition from a localized wake to a regime of Cherenkov emission as predicted by perturbation theory. In the inset, the subsonic ($M < 1$) shaded region is superfluid and the supersonic ($M > 1$) one is dissipative; the exact equation of the boundaries between the different domains is given in Ref. 31. In the main plot the dots with error bars represent the numerically determined boundary of the stationary domain. They are connected by a dashed line to guide the eye. The other dashed line in this plot represents the $\eta = 0$ result (shown for comparison).

This type of profile cannot be stationary with the boundary condition $\rho(x \to \pm\infty) = 1$ in a nondissipative system. Here, the damping term in Eq. (3) provides a mechanism allowing the downstream relaxation from $\rho(0) < 1$ to $\rho(x \to \infty) = 1$ and the upstream dispersive shock is stabilized by dissipation.

The inset in Fig. 9 represents the exact domain of stationary flows for $\eta = 0$, as analytically determined in Ref. 31. One can identify three regimes depending on the value of the parameters $\varkappa$ and $M = V/c_s$: (i) subsonic, stationary, and superfluid, (ii) dissipative and time dependent, (iii) dissipative, stationary, and supersonic. As seen in this inset, regimes (i) and (iii) are always separated by the time-dependent region (ii). This feature is also valid for a thick obstacle[37] and is in contradiction with the (wrong) prediction of perturbation theory for $\eta = 0$. Indeed, in the nondissipative case, perturbation theory always fails when V is close to c_s[31] and in this case the true flow gets time dependent. On the contrary, for finite $\eta \ll 1$ we showed in Sec. III that the perturbative prediction of existence of a stationary flow pattern *for all velocities* is valid until $\varkappa \sim \eta^{1/3}$. This is corroborated by the numerical results displayed in Fig. 9 for $\eta = 0.05$. In this case $\eta^{1/3} \simeq 0.3$ whereas the largest value of $\varkappa$ for which a stationary flow exists for all M is numerically found to be $\simeq 0.1$.

V. CONCLUSION

In the present work we have analyzed the flow of a one-dimensional polariton condensate in motion with respect to an obstacle in a situation of nonresonant pumping. We solved the problem perturbatively and showed that at this level there exists a smooth crossover from a viscous flow to a regime where the drag is mainly dominated by wave resistance. Perturbation theory predicts that this occurs at a velocity $M_{\rm crit}$ independent of the potential representing the obstacle. We argued that in the case of a δ impurity [represented by a potential of type (19)] the perturbative approach is valid *for all velocities* in the regime $\varkappa \times \max\{1, \eta^{-1/3}\} \ll 1$, where η is the dimensionless damping parameter defined in Eq. (2). As shown in the previous section this implies that stationary profiles indeed exist for all velocities if $\varkappa \lesssim \min\{1, \eta^{1/3}\}$. In this case there is a continuous transition from a dissipative drag to a regime dominated by the wave resistance.

However, from Fig. 9 we are led to refine this discussion of the transition between a regime where the wake is localized in the vicinity of the obstacle and a regime of (damped) Cherenkov radiation: We see on the example of the δ impurity that for a strong enough potential the two types of flows are separated by a time-dependent regime, as typically observed in BEC atomic vapors. In this case one cannot state that the crossover is smooth.

The comparison of our results with the ones of Ref. 29 leads to the conclusion that the gross features of the wave pattern discussed in the present work are quite independent of the technique used for setting the fluid into motion with respect to the obstacle. However, we use a specific model [Eq. (1)] with *nonresonant pumping* which is more relevant for the experiment presented in Ref. 9. In this experiment, a two-dimensional supersonic cloud of polaritons colliding with an obstacle was observed to induce a rather well defined wake, with oscillations having an apparently specified wavelength. The same feature was observed numerically in Ref. 26 (see also the discussion in Refs. 34 and 52). The perturbative results allow one to understand this phenomenon in a one-dimensional setting: The pattern of the upstream oscillatory wake in a supercritical flow ($V > V_{\rm crit}$) is governed by the complex wave vectors q_1 and q_2; see Sec. III. Also in the nonlinear approach (Whitham theory of Sec. IV B) does the wake keep a simple shape: Perturbation theory fails to properly account for the amplitude of the oscillations, but it still approximatively describes their wavelength.

An important result of our work is the demonstration that it is difficult to assess on the superfluidity of a polariton system just by studying the density perturbation past a localized obstacle. In particular, we showed that the absence of long-range wake cannot be used as a criterion for the absence of dissipation.

Finally, this work naturally calls for developments. One would first like to precisely determine the domain of time-dependent nonlinear flows in presence of damping. Secondly, one would like to extend the present work for taking into account polarization effects, and, thirdly, it is natural to apply the perturbative approach to higher dimensions. Works in these directions are in progress.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank A. Amo, J. Bloch, M. Rabaud, and M. Richard for fruitful discussions. A.M.K. thanks LPTMS (Université Paris-Sud and CNRS), where this work was done, for kind hospitality. This work was supported by the project NLQUAFLU of RTRA Triangle de la Physique.

APPENDIX A: POLES OF THE RESPONSE FUNCTION $\chi(q, -Mq)$

In this Appendix we determine—as a function of M—the location in the complex q plane of the poles of the response function (13) evaluated at $\omega = -Mq$. Considering the expression of χ one sees that these poles are the three zeros of $D(q, -Mq)/q$. We denote them as q_1, q_2, and q_3. They are solutions of Eq. (21). This equation has three imaginary solutions when its discriminant $\Delta = 256(1-M^2)^3/27 - 64\,\eta^2 M^2$ is positive. The condition $\Delta > 0$ is equivalent to $M < M_{\rm crit}$ where the expression of $M_{\rm crit}$ is given in Eq. (26). In this case, defining

$$\theta = \arctan\left(\frac{8\eta M}{\sqrt{\Delta}}\right), \tag{A1}$$

one finds

$$\begin{aligned} q_1 &= 4i\sqrt{\frac{1-M^2}{3}}\sin\left(\frac{\theta}{3}-\frac{\pi}{3}\right),\\ q_2 &= -4i\sqrt{\frac{1-M^2}{3}}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right),\\ q_3 &= 4i\sqrt{\frac{1-M^2}{3}}\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{A2}$$

Alternatively one can write $q_1 = i(-A+B)$, $q_2 = -2iB$, and $q_3 = i(A+B)$ with

$$\begin{bmatrix} A\\ B\end{bmatrix} = 2\sqrt{1-M^2}\begin{bmatrix}\cos(\theta/3)\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta/3)\end{bmatrix}. \tag{A3}$$

If $\Delta < 0$ (i.e., if $M > M_{\rm crit}$), defining

$$D_{(\pm)} = \left(4\eta M \pm \tfrac{1}{2}|\Delta|^{1/2}\right)^{1/3}, \tag{A4}$$

one finds

$$\begin{aligned} q_1 &= D_{(+)}\exp(-i\pi/6) - D_{(-)}\exp(i\pi/6),\\ q_2 &= -D_{(+)}\exp(i\pi/6) + D_{(-)}\exp(-i\pi/6),\\ q_3 &= i(D_{(+)} + D_{(-)}). \end{aligned} \tag{A5}$$

Alternatively, one can write $q_1 = E - iF$, $q_2 = -E - iF$, and $q_3 = 2iF$ with

$$E = \frac{\sqrt{3}}{2}(D_{(+)} - D_{(-)}), \quad F = \frac{1}{2}(D_{(+)} + D_{(-)}). \tag{A6}$$

One can verify that $\sum_{\ell=1}^{3} q_\ell = 0$ for all values of M, as already clear from the form of Eq. (21). A similar relation holds for the residues of $\chi(q, -Mq)$ whose expressions are given in Eq. (23): $\sum_{\ell=1}^{3}{\rm Res}(q_\ell) = 0$.

The typical M dependence of the position of the poles in the complex plane is illustrated in Fig. 10. When $M = 0$ one has $\theta = 0$, $q_2 = 0$, and $q_3 = -q_1 = 2i$. When M is increased from zero, q_1 and q_2 get closer on the imaginary axis until they collide (when $M = M_{\rm crit}$) and then acquire a finite real part. When $M \to \infty$, $q_3 \to i\,0^+$, and $q_{(1,2)} \to (+,-)\infty - i\,0^+$. A similar behavior has already been found in Refs. 26 and 34.

A useful approximation for the expression of the poles is obtained when $\eta M/|M^2-1|^{3/2} \ll 1$. In this case one obtains,

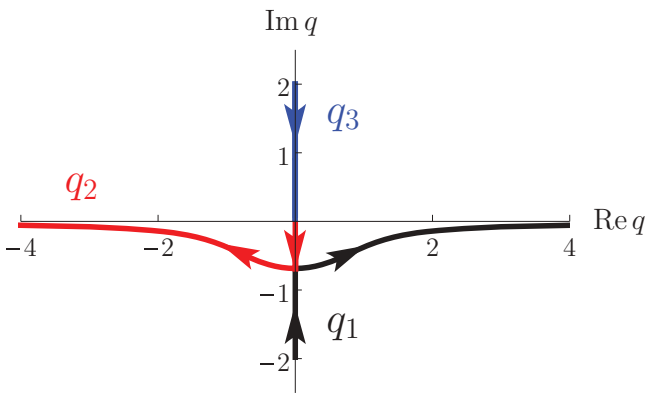


FIG. 10. (Color online) Position of q_1, q_2, and q_3 in the complex q plane. The figure is drawn in the case $\eta = 0.1$. The arrows indicate the direction of motion of the poles when M increases from 0 to ∞[53].

when $M < M_{\rm crit}$,

$$\begin{aligned} q_{(1,3)} &\simeq i\left[(-,+)2\sqrt{1-M^2} + \frac{\eta M}{1-M^2}\right],\\ q_2 &\simeq -2i\,\frac{\eta M}{1-M^2}, \end{aligned} \tag{A7}$$

and when $M > M_{\rm crit}$,

$$\begin{aligned} q_{(1,2)} &\simeq (+,-)2\sqrt{M^2-1} - i\,\frac{\eta M}{M^2-1},\\ q_3 &\simeq 2i\,\frac{\eta M}{M^2-1}. \end{aligned} \tag{A8}$$

The above expressions are valid up to corrections of relative order $\eta^2 M^2/|M^2-1|^3$. It is interesting to notice that expansions (A7) and (A8) are equally valid at large velocity and at small damping. Indeed, as discussed at the end of Sec. III D, at large velocity the effects of damping are negligible.

From the explicit expressions (A2) and (A5) of the q_ℓ's it is a simple matter to evaluate the integral (16) which permits one to compute the function $K(X)$. One gets

$$\begin{aligned} K(X \geqslant 0) &= i\,{\rm Res}(q_3)\,e^{iq_3X},\\ K(X \leqslant 0) &= -i[{\rm Res}(q_1)\,e^{iq_1X} + {\rm Res}(q_2)\,e^{iq_2X}]. \end{aligned} \tag{A9}$$

Formulas (A9) are valid for all M, but the explicit expressions for the q_ℓ's depend on M. For instance, when $M < M_{\rm crit}$ the q_ℓ's are all imaginary and K tends rapidly to zero when $|X| \to \infty$. On the other hand, when $M > M_{\rm crit}$ the exponential decrease of $K(X)$ gets weaker (because the imaginary part of the q_ℓ's is smaller) and $K(X \leqslant 0)$ oscillates (because q_1 and q_2 acquire a real part). The typical density perturbations associated with K [i.e., for a δ-peak potential of the form (19)] are sketched in the insets of Fig. 2. Note that the value of the q_ℓ's does not depend on η when $M = 0$ [i.e., within the theoretical description corresponding to Eq. (1)], the density perturbation induced by a motionless obstacle does not depend on the damping.

The expressions (A9) are equally valid in the absence of damping (i.e., when $\eta = 0$). In this case $M_{\rm crit} = 1$, $q_2 = 0$, and $q_3 = -q_1$ for $M < M_{\rm crit}$ and for $M > M_{\rm crit}$, $q_3 = 0$ whereas q_1 and q_2 are real and opposite [cf. Eqs. (A7) and (A8)]: For $M > M_{\rm crit}$ and $\eta = 0$ one observes undamped Cherenkov radiations ahead of the obstacle as discussed in the main text. For

$M > M_{\rm crit}$ and $\eta \neq 0$ these Cherenkov radiations are damped since in this case q_1 and q_2 have a nonzero imaginary part.

Finally, we need to evaluate the order of magnitude of the quantity $\varkappa\,|K(0)|$ at $M = M_{\rm crit}$ since, as argued in the main text (Sec. III B), this is the small parameter of perturbation theory for a δ-impurity obstacle. For $M = M_{\rm crit}$ one gets $\theta = \pi/2$, $q_1 = q_2 = -q_3/2 = -2i\sqrt{(1-M_{\rm crit}^2)/3}$ [cf. Eqs. (A2)] and this yields

$$\varkappa\,K(0) = \frac{i\,\varkappa\sqrt{3}}{\sqrt{1-M_{\rm crit}^2}} \quad \text{when} \quad M = M_{\rm crit}. \tag{A10}$$

From the expression (26) for $M_{\rm crit}$ one sees that $(1-M_{\rm crit}^2)^{-1/2} \simeq \frac{1}{\sqrt{3}}(2/\eta)^{1/3}$ when $\eta \ll 1$ and tends to unity at large η, from which one obtains the estimate (27).

APPENDIX B: DERIVATION OF PERTURBED WHITHAM EQUATIONS

The general method of derivation of the Whitham equations for perturbed integrable equations which in their nonperturbed form belong to the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur scheme was developed in Ref. 54 and it can be formulated as follows. Let the evolution equations of some field variables u_k have the form

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = K_k\left(u_m, \varepsilon\frac{\partial u_m}{\partial x}, \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}, \dots\right) + R_k\left(u_m, \varepsilon\frac{\partial u_m}{\partial x}, \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}, \dots\right), \tag{B1}$$

where a small parameter $\varepsilon \ll 1$ is introduced which measures the dispersion effects. It is supposed that a nonperturbed system,

$$\varepsilon\frac{\partial u_k}{\partial t} = K_k\left(u_m, \varepsilon\frac{\partial u_m}{\partial x}, \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}, \dots\right), \tag{B2}$$

can be represented as a compatibility condition of two linear equations,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\chi_{xx} &= \mathcal{A}\chi, \\ \chi_t &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{B}_x\chi + \mathcal{B}\chi_x, \end{aligned} \tag{B3}$$

where $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ depend on the u_k's, their space derivatives, and on the spectral parameter λ. It is assumed that the system (B2) has a periodic solution with wavelength $L \propto \varepsilon$ and it is parametrized by the constant parameters λ_i which appear in the finite-gap integration method in the following way. The second-order linear equations (B3) has two basis solutions $\chi_\pm$ and their product $g = \chi_+\chi_-$ satisfies a third-order differential equation which can be integrated once to give

$$\frac{\varepsilon^2}{2}gg_{xx} - \frac{\varepsilon^2}{4}g_x^2 - \mathcal{A}g^2 = \sigma P(\lambda), \tag{B4}$$

where σ is determined by the sign of the highest order term in $\mathcal{A}$ as a function of λ (i.e., $\mathcal{A} \sim -\sigma\lambda^r$ as $\lambda \to \infty$). Periodic solutions are distinguished by the condition that $P(\lambda)$ is a polynomial in λ and then λ_i are its zeros. We shall confine ourselves to the one-phase periodic solutions which physical variables depend on a single variable $x - V_\varphi t$ only.

In a modulated wave the parameters λ_i become slow functions of x and t whose evolution is described by the Whitham equations which in the case of (B1) and (B3) can be written in the form

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda_i}{\partial t} - \frac{\langle\mathcal{B}/g\rangle}{\langle 1/g\rangle}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\sigma}{\langle 1/g\rangle\prod_{m\neq i}(\lambda_i-\lambda_m)}\right. \\ &\quad\left.\times\sum_k\left\langle\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial u_k}R_k + \dots + \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial u_k^{(\ell_k)}}\frac{\partial^{(\ell_k)}R_k}{\partial x^{(\ell_k)}}\right)g\right\rangle\right\}, \end{aligned} \tag{B5}$$

where ℓ_k denotes the highest order of derivative of u_k entering in $\mathcal{A}$. The angle brackets denote the averaging over one wavelength:

$$\langle\mathcal{F}\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L dx\,\mathcal{F}. \tag{B6}$$

The spectral parameter λ should be put equal to λ_i after averaging.

We shall apply here this scheme to the perturbed nonlinear Schrödinger (NLS) equation,

$$i\varepsilon\,\psi_t + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\psi_{xx} - |\psi|^2\psi = iG(|\psi|^2)\psi, \tag{B7}$$

where $G(\rho)$ is a real function of the density $\rho = |\psi|^2$. Equation (3) pertains to this type [with $G(\rho) = \eta(1-\rho)$]. In the case of Eq. (B7) we have two field variables ψ, ψ^*, and, correspondingly, two terms of perturbation in Eq. (B1):

$$R_\psi = G(\rho)\psi/\varepsilon, \quad R_{\psi^*} = G(\rho)\psi^*/\varepsilon. \tag{B8}$$

For nonperturbed NLS equation the linear system (B3) is specified as

$$\mathcal{A} = -\lambda^2 - i\varepsilon\lambda\frac{\psi_x}{\psi} + \psi^*\psi - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\psi_{xx}}{\psi} + \frac{3\varepsilon^2}{4}\frac{\psi_x^2}{\psi^2}, \tag{B9}$$

$$\mathcal{B} = -\lambda + \frac{i\varepsilon}{2}\frac{\psi_x}{\psi}. \tag{B10}$$

Substitution of (B9) and (B10) into (B5) shows that, in the expression to be averaged [in the right-hand side of (B5)], the leading term in powers of ε is equal to $2\langle G\rho g\rangle/\varepsilon$. The averaging can be performed with the use of equations known from the theory of periodic solutions of the NLS equation (see, e.g., Ref. 49):

$$\begin{aligned} g &= \lambda - \mu_a, \quad \varepsilon\frac{d\mu_a}{dx} = 2\sqrt{-P(\mu_a)}, \\ -\frac{i\varepsilon}{2}\frac{\psi_x}{\psi} &= \frac{s_1}{2} - \mu_a, \qquad V_\varphi = \frac{s_1}{2}, \\ L &= \varepsilon\oint\frac{d\mu_a}{2\sqrt{-P(\mu_a)}}, \end{aligned} \tag{B11}$$

where $P(\mu_a) = \prod_i(\mu_a - \lambda_i)$ and $s_1 = \sum_i\lambda_i$. The quantity μ_a is known as the auxiliary eigenvalue in the finite-gap integration method. Hence, we obtain

$$\left\langle\frac{1}{g}\right\rangle = \left\langle\frac{1}{\lambda-\mu_a}\right\rangle = -\frac{2}{L}\frac{\partial L}{\partial\lambda_i}, \quad \left\langle\frac{\mathcal{B}}{g}\right\rangle = -1 + \frac{s_1}{L}\frac{\partial L}{\partial\lambda_i}. \tag{B12}$$

For calculating $\langle G\rho g\rangle$ we also take into account that μ_a can be expressed as a function of ρ in the following way (see Ref. 49):

$$\mu_a(\rho) = \frac{s_1}{4} + \frac{-j + i\sqrt{\mathcal{R}(\rho)}}{2\rho}, \tag{B13}$$

where

$$\mathcal{R}(\nu) = (\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2)(\nu - \nu_3), \quad j^2 = \nu_1\nu_2\nu_3, \tag{B14}$$

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \tfrac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)^2, \\ \nu_2 &= \tfrac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)^2, \\ \nu_3 &= \tfrac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)^2, \end{aligned} \tag{B15}$$

and

$$\varepsilon \frac{d\rho}{dx} = 2\sqrt{\mathcal{R}}. \tag{B16}$$

Then we obtain the Whitham equations for the Riemann invariants λ_i in the form,

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = -\frac{v_i - s_1/2}{\prod_{m\neq i}(\lambda_i - \lambda_m)} \times \frac{2}{L}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{G(\nu)[(\lambda_i - s_1/4)\nu + j/2]}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}}, \tag{B17}$$

with

$$v_i = \frac{s_1}{2} + \left(\frac{2}{L}\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right)^{-1}, \quad i \in \{1,2,3,4\}. \tag{B18}$$

In the stationary case (i.e., when $\partial\lambda_i/\partial t = 0$ and $s_1 = 2\,V_\varphi = 0$), the Whitham equations simplify to

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = \frac{2}{L}\frac{G_1\lambda_i + G_2}{\prod_{m\neq i}(\lambda_i - \lambda_m)}, \tag{B19}$$

where

$$\begin{aligned} G_1 &= -\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{\nu\, G(\nu)}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}}, \\ G_2 &= -\frac{j}{2}\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu \, \frac{G(\nu)}{\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}}. \end{aligned} \tag{B20}$$

For $G(\rho) = \eta(1-\rho)$ we arrive at Eqs. (61) and (62).

[1] D. R. Allum, P. V. E. McClintock, A. Phillips, and R. W. Bowley, Philos. Trans. R. Soc. London A **284**, 179 (1977).
[2] O. Avenel and E. Varoquaux, Phys. Rev. Lett. **55**, 2704 (1985).
[3] C. A. M. Castelijns, K. F. Coates, A. M. Guénault, S. G. Mussett, and G. R. Pickett, Phys. Rev. Lett. **56**, 69 (1986).
[4] C. Raman, M. Kohl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **83**, 2502 (1999).
[5] R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **85**, 2228 (2000).
[6] D. E. Miller, J. K. Chin, C. A. Stan, Y. Liu, W. Setiawan, C. Sanner, and W. Ketterle, Phys. Rev. lett. **99**, 070402 (2007).
[7] P. Engels and C. Atherton, Phys. Rev. Lett. **99**, 160405 (2007).
[8] D. Dries, S. E. Pollack, J. M. Hitchcock, and R. G. Hulet, Phys. Rev. A **82**, 033603 (2010).
[9] A. Amo *et al.*, Nature (London) **457**, 291 (2009).
[10] A. Amo *et al.*, Nat. Phys. **5**, 805 (2009).
[11] G. Nardin *et al.*, Nat. Phys. **7**, 635 (2011).
[12] A. Amo *et al.*, Science **332**, 1167 (2011).
[13] D. Sanvitto *et al.*, Nat. Phot. **5**, 610 (2011).
[14] L. D. Landau, J. Phys. (USSR) **5**, 71 (1940); **11**, 91 (1947); Reprinted by I. M. Khalatnikov, in *An Introduction to the Theory of Superfluidity* (Perseus Publishing, Cambridge, 2000).
[15] In many instances the actual value of $V_{\rm crit}$ is lower than Landau's expectation. As Feynman first suggested [in *Progress in Low Temperature Physics*, Vol. I, edited by C. J. Gorter (North-Holland, Amsterdam, 1955), p. 17] this is linked to the emission of nonlinear perturbations and not of elementary excitations as implied by Landau criterion which is intrinsically perturbative.
[16] J. Kasprzak *et al.*, Nature (London) **443**, 409 (2006).
[17] D. Bajoni, P. Senellart, E. Wertz, I. Sagnes, A. Miard, A. Lemaitre, and J. Bloch, Phys. Rev. Lett. **100**, 047401 (2008).
[18] S. Utsunomiya *et al.*, Nat. Phys. **4**, 700 (2008).
[19] E. Wertz *et al.*, Nat. Phot. **6**, 860 (2010).
[20] L. Ferrier, E. Wertz, R. Johne, D. D. Solnyshkov, P. Senellart, I. Sagnes, A. Lemaitre, G. Malpuech, and J. Bloch, Phys. Rev. Lett. **106**, 126401 (2011).
[21] G. Grosso, G. Nardin, F. Morier-Genoud, Y. Léger, and B. Deveaud-Plédran, Phys. Rev. Lett. **107**, 245301 (2011).
[22] M. Wouters and I. Carusotto, Phys. Rev. Lett. **99**, 140402 (2007).
[23] J. Keeling and N. G. Berloff, Phys. Rev. Lett. **100**, 250401 (2008).
[24] T. C. H. Liew, A. V. Kavokin, and I. A. Shelykh, Phys. Rev. Lett. **101**, 016402 (2008).
[25] M. Wouters, Phys. Rev. B **77**, 121302(R) (2008).
[26] M. Wouters and I. Carusotto, Phys. Rev. Lett. **105**, 020602 (2010).
[27] More satisfactory recent microscopic accounts of dissipative effects are given in I. G. Savenko, E. B. Magnusson, and I. A. Shelykh, Phys. Rev. B **83**, 165316 (2011); and in M. H. Szymanska, J. Keeling, P. B. Littlewood, arXiv:1206.1784.
[28] P.-É. Larré, N. Pavloff, and A. Kamchatnov (unpublished).
[29] A. Berceanu, E. Cancellieri, and F. M. Marchetti, J. Phys.: Condens. Matter **24**, 235802 (2012).
[30] D. L. Kovrizhin and L. A. Maksimov, Phys. Lett. A **282**, 421 (2001).
[31] P. Leboeuf and N. Pavloff, Phys. Rev. A **64**, 033602 (2001).
[32] N. Pavloff, Phys. Rev. A **66**, 013610 (2002).
[33] G. E. Astrakharchik and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. A **70**, 013608 (2004).
[34] M. Wouters and I. Carusotto, Superlattice. Microst. **43**, 524 (2008).
[35] A. M. Kamchatnov and Y. V. Kartashov, Europhys. Lett. **97**, 10006 (2012).
[36] We use the convenient denomination "speed of sound" for c_s although very long-wavelength modes do not propagate in the presence of damping and thus the sound velocity is only properly defined in the absence of damping [see, however, the remark after Eq. (11) in Sec. III A].
[37] A. M. Leszczyszyn, G. A. El, Yu. G. Gladush, and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. A **79**, 063608 (2009).
[38] It is interesting to note that nonlinear effects cannot be neglected either in capillary-gravity waves near the threshold for emission of the Kelvin wake; see, e.g., F. Dias and C. Kharif, Annu. Rev. Fluid Mech. **31**, 301 (1999).

[39]T. Burghelea and V. Steinberg, Phys. Rev. Lett. **86**, 2557 (2001).
[40]J. Browaeys, J.-C. Bacri, R. Perzynski, and M. I. Shliomis, Europhys. Lett. **53**, 209 (2001).
[41]E. Raphaël and P.-G. de Gennes, Phys. Rev. E **53**, 3448 (1996).
[42]M. Le Merrer, C. Clanet, D. Quéré, E. Raphaël, and F. Chevy, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **108**, 15064 (2011).
[43]As discussed in the paragraph below Eq. (45), the drag force is even totally dominated by the wave resistance when $M \to \infty$.
[44]This is because $\hat{f}_{\rm ext}(q_M \to \infty) = 0$. Roughly speaking, this means that the wave drag is negligible when the de Broglie wavelength $\hbar/(mV)$ gets smaller than the typical size of the potential.
[45]M. Albert, T. Paul, N. Pavloff, and P. Leboeuf, Phys. Rev. Lett. **100**, 250405 (2008).
[46]T. Paul, M. Albert, P. Schlagheck, P. Leboeuf, and N. Pavloff, Phys. Rev. A **80**, 033615 (2009).
[47]Note that the hydraulic approximation is also valid for describing the long-distance upstream wake in the subsonic case.[35]
[48]G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley–Interscience, New York, 1974).
[49]A. M. Kamchatnov, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations—An Introductory Course* (World Scientific, Singapore, 2000).
[50]A. M. Kamchatnov and N. Pavloff, Phys. Rev. A **85**, 033603 (2012).
[51]V. Hakim, Phys. Rev. E **55**, 2835 (1997).
[52]I. Carusotto and C. Ciuti, Rev. Mod. Phys. (to be published), arXiv:1205.6500.
[53]Note that q_3 initially slightly increases above $2i$ when $M \simeq 0$ [cf. Eqs. (A7)]. For legibility this small feature is not accounted for by the direction of the red arrow in Fig. 10.
[54]A. M. Kamchatnov, Physica D **188**, 247 (2004).

2.4 Fluctuations de la polarisation dans un condensat de polaritons spinoriel unidimensionnel

2.4.1 Descriptif détaillé du modèle

Le condensat de polaritons excitoniques est décrit par un paramètre d'ordre spinoriel $\boldsymbol{\psi} = (\psi_+ \, \psi_-)^\mathsf{T}$ qui tient compte du signe $\sigma = \pm 1$ des deux projections possibles du spin des excitons sur l'axe de quantification (l'axe des z, disons) (voir page 211 de la référence [70]). Les interactions entre polaritons peuvent être phénoménologiquement décrites par deux constantes de couplage non-linéaires α_1 et α_2 modélisant des interactions de contact entre polaritons de même projection de spin ($\alpha_1 = \alpha_{+,+} = \alpha_{-,-}$) et entre polaritons de projections de spin opposées ($\alpha_2 = \alpha_{+,-} = \alpha_{-,+}$). Il est admis que $\alpha_1 > 0$ et $|\alpha_2| < \alpha_1$, en accord avec, entre autres, l'observation d'une répulsion globale entre polaritons [voir la courte discussion faisant immédiatement suite au jeu d'équations (2.36a)–(2.36b)]. Notons que le signe de α_2 dépend de la structure du puits quantique dans la microcavité semi-conductrice et du désaccord entre les modes photoniques et excitoniques dans la cavité optique [128]. Dans la suite, nous considérerons que la constante de couplage α_2 est négative (mais toujours telle que $|\alpha_2| < \alpha_1$). Un champ magnétique n'a aucune influence sur les états photoniques de la cavité optique mais affecte en contrepartie les modes excitoniques dans la couche semi-conductrice. On peut noter trois effets dus à la présence possible d'un champ magnétique extérieur (*cf.* [70], p. 20) : une quantification de Landau des états excitoniques, une séparation des niveaux excitoniques par effet Zeeman, une modification de l'énergie de liaison électron/trou. En ce qui nous concerne, nous n'avons considéré que la séparation Zeeman des deux états polarisés ψ_+ et ψ_- lorsque le système est soumis à un champ magnétique extérieur $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}$ ($B > 0$) colinéaire à l'axe de quantification. Tout effet pris en compte (effets dus aux interactions entre polaritons et effet Zeeman dû à l'existence d'un champ magnétique extérieur), on peut écrire la densité d'énergie libre $\mathscr{F}(\rho_+^0, \rho_-^0)$ du système (supposé homogène) sous la forme [122]

$$\mathscr{F}(\rho_+^0, \rho_-^0) = \frac{\alpha_1}{2}\left[(\rho_+^0)^2 + (\rho_-^0)^2\right] + \alpha_2\,\rho_+^0\,\rho_-^0 - \hbar\,\Omega\,(\rho_+^0 - \rho_-^0) - \mu\,\rho^0, \tag{2.34}$$

où $\rho_\sigma^0 = |\psi_\sigma^0|^2$ est la densité (uniforme) des polaritons de spin $\sigma = \pm 1$, $\rho^0 = \rho_+^0 + \rho_-^0 = |\psi_+^0|^2 + |\psi_-^0|^2$ la densité (uniforme) totale du fluide de polaritons, $2 \times \hbar\,\Omega \propto B$ l'énergie de séparation Zeeman entre les états ψ_+^0 et ψ_-^0 et μ le potentiel chimique du gaz. Minimisant $\mathscr{F}(\rho_+^0, \rho_-^0)$ par rapport à ρ_+^0 et ρ_-^0, on montre très facilement l'existence de deux régimes dépendant de la valeur que prend le champ magnétique [122]. Lorsque B est suffisamment grand, c'est-à-dire, plus précisément, quand $\Omega > \Omega_{\text{crit}}$, où

$$\hbar\,\Omega_{\text{crit}} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\,\rho^0, \tag{2.35}$$

le système est polarisé circulairement avec $\rho_-^0 = 0$ et $\mu = \alpha_1\,\rho_+^0 - \hbar\,\Omega = \alpha_1\,\rho^0 - \hbar\,\Omega$. Lorsque B est suffisamment faible, c'est-à-dire quand $\Omega < \Omega_{\text{crit}}$, le système est polarisé

elliptiquement et on a dans ce cas

$$\rho_\sigma^0 = \frac{\rho^0}{2} + \sigma\,\frac{\hbar\,\Omega}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{\rho^0}{2}\left(1 + \sigma\,\frac{\Omega}{\Omega_{\text{crit}}}\right) \quad (\sigma = \pm 1) \tag{2.36a}$$

$$\text{et} \quad \mu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\,\rho^0. \tag{2.36b}$$

Dans le régime de polarisation elliptique (2.36a)–(2.36b), il est clair que $\mu > 0$ puisque $0 < -\alpha_2 < \alpha_1$: on observe un décalage vers le bleu de l'énergie rayonnée lorsque les polaritons condensent [69, 11, 126], preuve expérimentale du caractère (globalement) répulsif des interactions entre polaritons. En l'absence de champ magnétique, c'est-à-dire lorsque B est rigoureusement nul, on a $\rho_+^0 = \rho_-^0 = \rho^0/2$ et le système est alors linéairement polarisé [69, 14].

Dans ce qui suit, nous nous restreignons au domaine de polarisation elliptique (2.36a)–(2.36b) et nous étudions la dynamique du système en présence d'un obstacle localisé qui ne modifie que légèrement les paramètres du condensat de polaritons. On suppose que les excitons sont confinés dans un fil quantique porté par l'axe des x et on modélise la dynamique du paramètre d'ordre $\boldsymbol{\psi}(x,t) = [\psi_+(x,t)\,\psi_-(x,t)]^\mathsf{T}$ du condensat en considérant qu'il obéit à une équation de Gross–Pitaevskii de la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi_\sigma = &-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx}\psi_\sigma + U_{\text{ext}}(x,t)\,\psi_\sigma \\ &+ (\alpha_1\,\rho_\sigma + \alpha_2\,\rho_{-\sigma})\,\psi_\sigma - \sigma\,\hbar\,\Omega\,\psi_\sigma + \mathrm{i}\,(\gamma - \Gamma\rho)\,\psi_\sigma \quad (\sigma = \pm 1). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dans l'équation (2.37), m est la masse effective des polaritons qui occupent l'état fondamental, $\rho_\sigma(x,t) = |\psi_\sigma(x,t)|^2$ est la densité locale des polaritons de spin $\sigma = \pm 1$ et $\rho(x,t) = \rho_+(x,t) + \rho_-(x,t) = |\psi_+(x,t)|^2 + |\psi_-(x,t)|^2$ désigne la densité locale totale du condensat. $U_{\text{ext}}(x,t) = f_{\text{ext}}(x + Vt)$ est le potentiel d'un obstacle localisé [c'est-à-dire tel que $\lim_{|X|\to\infty} f_{\text{ext}}(X = x + Vt) = 0$] se déplaçant dans le fluide de polaritons à vitesse constante $-V\hat{\mathbf{x}}$ ($V > 0$). Conformément à la description (2.34), les interactions entre polaritons sont décrites par le terme local $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi_\pm = (\alpha_1\,|\psi_\pm|^2 + \alpha_2\,|\psi_\mp|^2)\,\psi_\pm$ et l'effet Zeeman dû à la présence du champ magnétique transverse $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}$ est pris en compte par le terme $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi_\pm = \mp\hbar\,\Omega\,\psi_\pm$. Comme discuté en sous-section 2.3.1 dans le cas d'un condensat de polaritons scalaire en situation de pompage non-résonnant, on modélise les effets liés à la durée de vie limitée des polaritons, au gain obtenu par pompage incohérent et à la saturation de ce dernier à grande densité par le terme phénoménologique $\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi_\pm = \mathrm{i}\,[\gamma - \Gamma\,(|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2)]\,\psi_\pm$ (où $\gamma, \Gamma > 0$), de sorte que lorsqu'un équilibre (dynamique) entre pertes et gains s'instaure, le système atteint une configuration stationnaire et homogène [en l'absence de perturbation extérieure, c'est-à-dire quand $U_{\text{ext}}(x,t) = 0$] caractérisée par une densité constante et uniforme $\rho^0 = |\psi_+^0|^2 + |\psi_-^0|^2 = \gamma/\Gamma$ finie. Lorsque $\Omega < \Omega_{\text{crit}}$, le paramètre d'ordre stationnaire et homogène correspondant s'écrit $\psi_\sigma^0(x,t) = \sqrt{\rho_\sigma^0}\exp(-\mathrm{i}\,\mu\,t/\hbar)$, où la densité uniforme ρ_σ^0 et le potentiel chimique μ sont respectivement donnés par les équations (2.36a) et (2.36b). On vérifie en effet qu'ainsi définie, la fonction $\psi_\pm^0$ est bien solution de l'équation de Gross–Pitaevskii (2.37).

2.4.2 Fluctuations de la densité et de la polarisation en présence d'une petite impureté

Lorsqu'un « petit » obstacle (localisé) de potentiel $U_{\text{ext}}(x,t) = f_{\text{ext}}(X = x + Vt)$ se déplace dans le condensat de polaritons, l'état uniforme de fonction d'onde $\boldsymbol{\psi}^0 = (\psi_+^0\, \psi_-^0)^\mathsf{T} = (\sqrt{\rho_+^0}\, \sqrt{\rho_-^0})^\mathsf{T} \exp(-\mathrm{i}\,\mu\, t/\hbar)$ est légèrement perturbé et on peut alors chercher les solutions de l'équation de Gross–Pitaevskii (2.37) sous la forme $\psi_\sigma(x,t) = \sqrt{\rho_\sigma^0}\,[1 + \varphi_\sigma(x,t)] \exp(-\mathrm{i}\,\mu\, t/\hbar)$ en supposant que $|\varphi_\sigma(x,t)| \ll 1$ ($\sigma = \pm 1$). Dès lors, on trouve que la modulation de densité $\delta\rho_\sigma(x,t) = \rho_\sigma(x,t) - \rho_\sigma^0$ induite par l'obstacle en mouvement s'écrit à l'ordre linéaire comme

$$\delta\rho_\sigma(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}q}{2\pi}\, \chi_\sigma(q)\, \hat{f}_{\text{ext}}(q)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}qX}, \tag{2.38a}$$

$$\text{où} \quad \chi_\sigma(q) = 2\,\rho_\sigma^0\, \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\, \frac{P_1(q,-Vq) + 2\,\sigma\,\hbar\,\Omega\, \frac{\hbar^2 q^2}{2m}}{P_1(q,-Vq)\, P_2(q,-Vq) + P_3(q,-Vq)} \tag{2.38b}$$

est la fonction de réponse linéaire du gaz de spin $\sigma = \pm 1$ et $\hat{f}_{\text{ext}}(q) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}X\, f_{\text{ext}}(X)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qX}$ la transformée de Fourier du potentiel extérieur. Dans l'équation (2.38b), les fonctions $P_1(q,\omega)$, $P_2(q,\omega)$ et $P_3(q,\omega)$ sont définies par

$$P_1(q,\omega) = \hbar^2\omega^2 - \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2\,\hbar\,\Omega_{\text{crit}}\right), \tag{2.39}$$

$$P_2(q,\omega) = \hbar\,\omega\,(\hbar\,\omega + 2\,\mathrm{i}\,\gamma) - \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + 2\,\mu\right) \tag{2.40}$$

$$\text{et} \quad P_3(q,\omega) = 4\,\frac{\hbar^2\Omega^2}{\hbar\,\Omega_{\text{crit}}}\, \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(\mathrm{i}\gamma\,\hbar\,\omega - \mu\,\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\right). \tag{2.41}$$

Introduisant la notation standard $\xi = \hbar/\sqrt{m\mu}$, l'annulation du polynôme $[P_1(q,\omega) \times P_2(q,\omega) + P_3(q,\omega)]/\mu^4$ se met sous la forme [7]

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left(\frac{\hbar\,\omega}{\mu}\right)^4 + \frac{2\,\mathrm{i}\,\gamma}{\mu}\left(\frac{\hbar\,\omega}{\mu}\right)^3 - \left(\frac{\xi^4 q^4}{2} + \frac{2}{1+\alpha_2/\alpha_1}\,\xi^2 q^2\right)\left(\frac{\hbar\,\omega}{\mu}\right)^2 \\ & - \frac{2\,\mathrm{i}\,\gamma}{\mu}\left(\frac{\xi^4 q^4}{4} + 4\,\frac{1-\alpha_2/\alpha_1}{1+\alpha_2/\alpha_1}\,\frac{\rho_+^0\,\rho_-^0}{(\rho^0)^2}\,\xi^2 q^2\right)\frac{\hbar\,\omega}{\mu} \\ & + \frac{\xi^8 q^8}{16} + \frac{\xi^6 q^6}{2(1+\alpha_2/\alpha_1)} + 4\,\frac{1-\alpha_2/\alpha_1}{1+\alpha_2/\alpha_1}\,\frac{\rho_+^0\,\rho_-^0}{(\rho^0)^2}\,\xi^4 q^4, \end{aligned} \tag{2.42}$$

équation de laquelle on tire la relation de dispersion $\omega = \omega(q) = \mathrm{Re}[\omega(q)] + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}[\omega(q)]$ des excitations du condensat uniforme et stationnaire décrit par la fonction d'onde $\psi_\pm^0$; une paire de solutions correspond au mode habituel de densité et l'autre à un mode de polarisation [8]. Les relations de dispersion typiques sont présentées à la figure 2.16. Dans la limite des grandes longueurs d'onde ($\xi|q| \ll 1$) et lorsque $\gamma = 0$ (c'est-à-dire

7. L'équation (2.42) a déjà été obtenue en référence [43] dans le cas d'un gaz de Bose à deux composantes (c'est-à-dire dans le cas où $\gamma = 0$) en l'absence de champ magnétique extérieur ($\Omega = 0$).

8. Cette identification n'est en toute rigueur valable qu'en l'absence de champ magnétique extérieur mais nous utiliserons cette terminologie par mesure de simplicité.

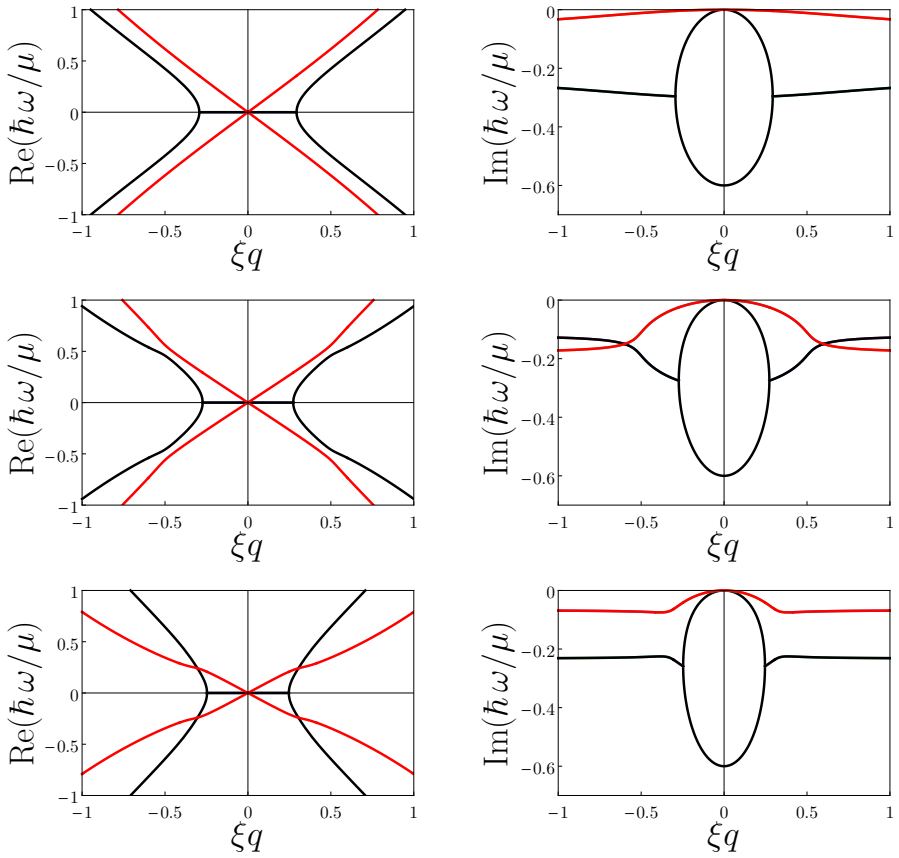


Figure 2.16 — Relations de dispersion des excitations du condensat homogène décrit par la fonction d'onde $\psi_\pm^0$. La colonne de gauche représente $\mathrm{Re}(\omega)$ en fonction de q et celle de droite figure $\mathrm{Im}(\omega)$ en fonction de q ($q \in \mathbb{R}$). Les courbes noires correspondent au mode qui consiste en des fluctuations $\delta\rho_+ + \delta\rho_-$ de la densité et les courbes rouges au mode consistant en des fluctuations $\delta\rho_+ - \delta\rho_-$ de la polarisation. Les tracés sont effectués dans le cas où $\alpha_2 = -0{,}2\,\alpha_1$ et $\gamma = 0{,}3\,\mu$. La paire de graphiques du haut est obtenue lorsque $\Omega = 0{,}2\,\Omega_{\mathrm{crit}}$, celle du milieu quand $\Omega = 0{,}5\,\Omega_{\mathrm{crit}}$ et celle du bas, enfin, lorsque $\Omega = 0{,}7\,\Omega_{\mathrm{crit}}$. Dans chaque cas, on a respectivement $c^{(\mathrm{p})}/\sqrt{\mu/m} = 1{,}2, 1{,}06(0), 0{,}87(4)$ [*cf.* équation (2.44)].

en l'absence d'amortissement), les relations de dispersion des modes de densité et de polarisation deviennent linéaires. Le système est alors caractérisé par deux types de son : un « son de densité » et un « son de polarisation ». Leurs vitesses $c^{(\mathrm{d})}$ et $c^{(\mathrm{p})} > c^{(\mathrm{d})}$ s'écrivent

$$\frac{c^{(\mathrm{d})}}{\sqrt{\mu/m}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2/\alpha_1}}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{\Omega^2}{\Omega_{\mathrm{crit}}^2}\right)}} \tag{2.43a}$$

et
$$\frac{c^{(\mathrm{p})}}{\sqrt{\mu/m}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2/\alpha_1}}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{\Omega^2}{\Omega_{\mathrm{crit}}^2}\right)}}. \tag{2.43b}$$

Notons que la vitesse (2.43a) des « phonons de densité » tend vers la vitesse usuelle du son $c_s = \sqrt{\mu/m}$ lorsque $\Omega/\Omega_{\text{crit}} \to 0$. Quand $\gamma \neq 0$ (c'est-à-dire en présence de dissipation), les perturbations de densité de (très) grandes longueurs d'onde sont suramorties : on ne peut dès lors définir un son de densité dans le régime où $\xi|q|$ est (très) proche de zéro. Cependant, le son de polarisation en présence d'amortissement reste définissable (les ondes de polarisation de grandes longueurs d'onde peuvent en effet se propager lorsque $\gamma \neq 0$) et on montre que $c^{(\text{p})}$ s'écrit dans ce cas

$$\frac{c^{(\text{p})}}{\sqrt{\mu/m}} = \sqrt{\frac{1-\alpha_2/\alpha_1}{1+\alpha_2/\alpha_1}\left(1-\frac{\Omega^2}{\Omega_{\text{crit}}^2}\right)}. \tag{2.44}$$

En se déplaçant dans le condensat de la droite vers la gauche à vitesse constante $V > 0$, l'obstacle excite des modes de densité et de polarisation dont l'impulsion $\hbar q$ est la partie réelle des solutions de l'équation $\hbar\omega(q) = -V \times \hbar q$, mais aussi la partie réelle des pôles de l'intégrande de l'intégrale (2.38a) définissant les fluctuations de densité engendrées par le déplacement de l'obstacle dans le fluide de spin $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$.

Menant les calculs, on démontre l'existence de trois régimes de vitesse dont la séparation est marquée par deux valeurs particulières $V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ et $V_{\text{crit}}^{(\text{p})} > V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ de la vitesse de l'obstacle. La figure 2.17 en donne une représentation graphique en fonction du paramètre d'amortissement γ/μ pour différentes valeurs du rapport $\Omega/\Omega_{\text{crit}} < 1$. La localisation des cinq pôles de la fonction de réponse linéaire (2.38b) dans le plan complexe $\{\text{Re}\, q, \text{Im}\, q\}$ diffère d'un régime à l'autre (*cf.* figure 2.18). Lorsque $V < V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$, tous les pôles de la fonction de réponse sont imaginaires purs, en conséquence de quoi les excitations correspondantes sont évanescentes et restent localisées autour de l'obstacle, c'est-à-dire au voisinage de

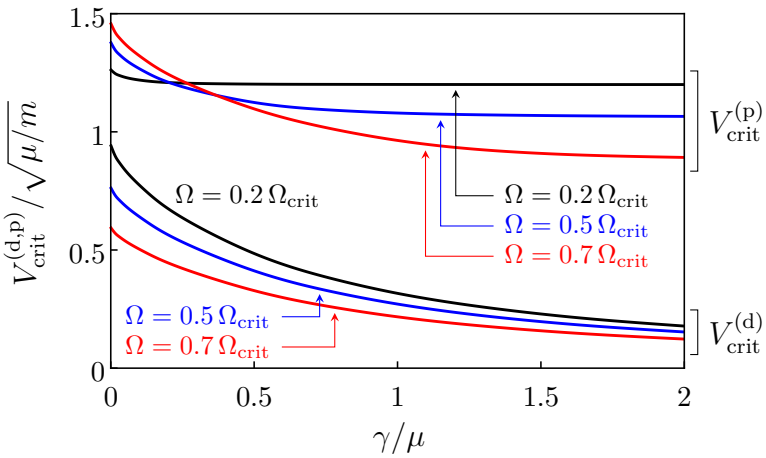


Figure 2.17 — Vitesses critiques $V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ et $V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$ en fonction du coefficient d'amortissement γ/μ pour différentes valeurs de $\Omega/\Omega_{\text{crit}}$. Les courbes noires, rouges et bleues sont tracées lorsque $\alpha_2 = -0{,}2\,\alpha_1$ et correspondent respectivement aux cas où $\Omega/\Omega_{\text{crit}} = 0{,}2$, $0{,}5$ et $0{,}7$. Lorsque $V > V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$, on observe un rayonnement de Cherenkov d'ondes de densité à la tête de l'obstacle. Quand $V > V_{\text{crit}}^{(\text{p})} > V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$, l'émission des ondes de densité s'accompagne d'un rayonnement d'ondes de polarisation.

$X = 0$. Lorsque $V_{\text{crit}}^{(\text{d})} < V < V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$, deux des cinq pôles acquièrent une partie réelle ; ils correspondent à l'impulsion transportée par des ondes de densité émises à la tête de l'obstacle. Enfin, lorsque $V > V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$, deux autres pôles de $\chi_\pm(q)$ acquièrent une partie réelle finie : en plus d'un rayonnement de Cherenkov d'ondes de densité (puisque $V_{\text{crit}}^{(\text{p})} > V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$), on observe en aval de l'obstacle l'éjection d'une onde de polarisation dont l'impulsion est donnée par la partie réelle de ces pôles. Les profils d'onde correspondant sont représentés à la figure 2.19 dans le cas où l'obstacle est d'une part décrit par un potentiel de la forme $f_{\text{ext}}(X) = \lambda\,\delta(X)$ et, d'autre part, par un potentiel gaussien $f_{\text{ext}}(X) = \frac{\lambda}{\ell\sqrt{\pi}}\exp(-X^2/\ell^2)$ de largeur typique ℓ. Les ondes de densité consiste en des fluctuations $\delta\rho_+(X) + \delta\rho_-(X)$ de la densité totale et les ondes de polarisation en des fluctuations $\delta\rho_+(X) - \delta\rho_-(X)$ de la polarisation. En mettant en œuvre le théorème des résidus, on détermine analytiquement l'intégrale (2.38a) qui définit (à l'ordre linéaire) les modulations de densité $\delta\rho_\sigma(X)$ engendrées par le déplacement de l'obstacle dans le fluide de spin $\sigma = \pm 1$. Les formules correspondantes sont très similaires aux équations (2.6) et (2.7) obtenues en sous-section 2.3.2 dans le cas où le condensat est décrit par un paramètre d'ordre scalaire. Lorsque $U_{\text{ext}}(x,t) = \lambda\,\delta(x + Vt)$, on trouve, quelle que soit la vitesse V de l'obstacle,

$$\delta\rho_\sigma(X) = \mathrm{i}\lambda \sum_{k\in\{1,2,3,4,5\}} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_k)\,\operatorname{Res}_\sigma(q_k)\,\Theta[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_k)X]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_k X}, \tag{2.45}$$

et quand $U_{\text{ext}}(x,t) = \frac{\lambda}{\ell\sqrt{\pi}}\exp[-(x+Vt)^2/\ell^2]$, on obtient, toujours pour toute vitesse V,

$$\delta\rho_\sigma(X) = \frac{\mathrm{i}\lambda}{2} \sum_{k\in\{1,2,3,4,5\}} \operatorname{Res}_\sigma(q_k)\left[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_k) + \operatorname{erf}\left(\frac{X}{\ell} + \frac{\mathrm{i}\ell q_k}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_k X - \ell^2 q_k^2/4}, \tag{2.46}$$

où Θ est la fonction de Heaviside et $\operatorname{Res}_\sigma(q_k)$ le résidu de la fonction de réponse linéaire $\chi_\sigma(q)$ au pôle $q_k(V)$ ($k \in \{1,2,3,4,5\}$). Les ondes linéaires de densité émises en aval de l'obstacle sont amorties du fait du temps de vie fini des polaritons, à l'instar de ce que l'on observe dans le cas d'un condensat de polaritons scalaire en situation de pompage non-résonnant (*cf.* sous-section 2.3.2). On constate cependant que l'onde de polarisation éjectée à la tête de l'obstacle lorsque $V > V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$ n'est que très faiblement amortie (comparativement aux fluctuations de la densité), comme on le voit très bien sur les deux graphiques du bas de la figure 2.19. La petitesse du facteur d'amortissement des ondes de polarisation dans le régime de vitesse $V > V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$ est valable dans le cas où l'intensité du champ magnétique extérieur est faible, c'est-à-dire lorsque $\Omega \ll \Omega_{\text{crit}}$ [9]. On pourra s'en convaincre en se référant à la figure 2.20.

Nous clôturons cette sous-section par l'évaluation de la force de traînée [104]

$$F_d = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\rho(x,t)\,\partial_x U_{\text{ext}}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,[\rho_+(x,t) + \rho_-(x,t)]\,\partial_x U_{\text{ext}}(x,t) \tag{2.47}$$

ressentie par l'obstacle de potentiel $U_{\text{ext}}(x,t)$ lorsque celui-ci se déplace dans le condensat de polaritons. Insérant dans l'équation (2.47) les formules perturbatives (2.45) ou (2.46)

9. C'est également vrai lorsque Ω est proche de Ω_{crit}^-, mais dans ce cas l'amplitude des ondes de polarisation est petite.

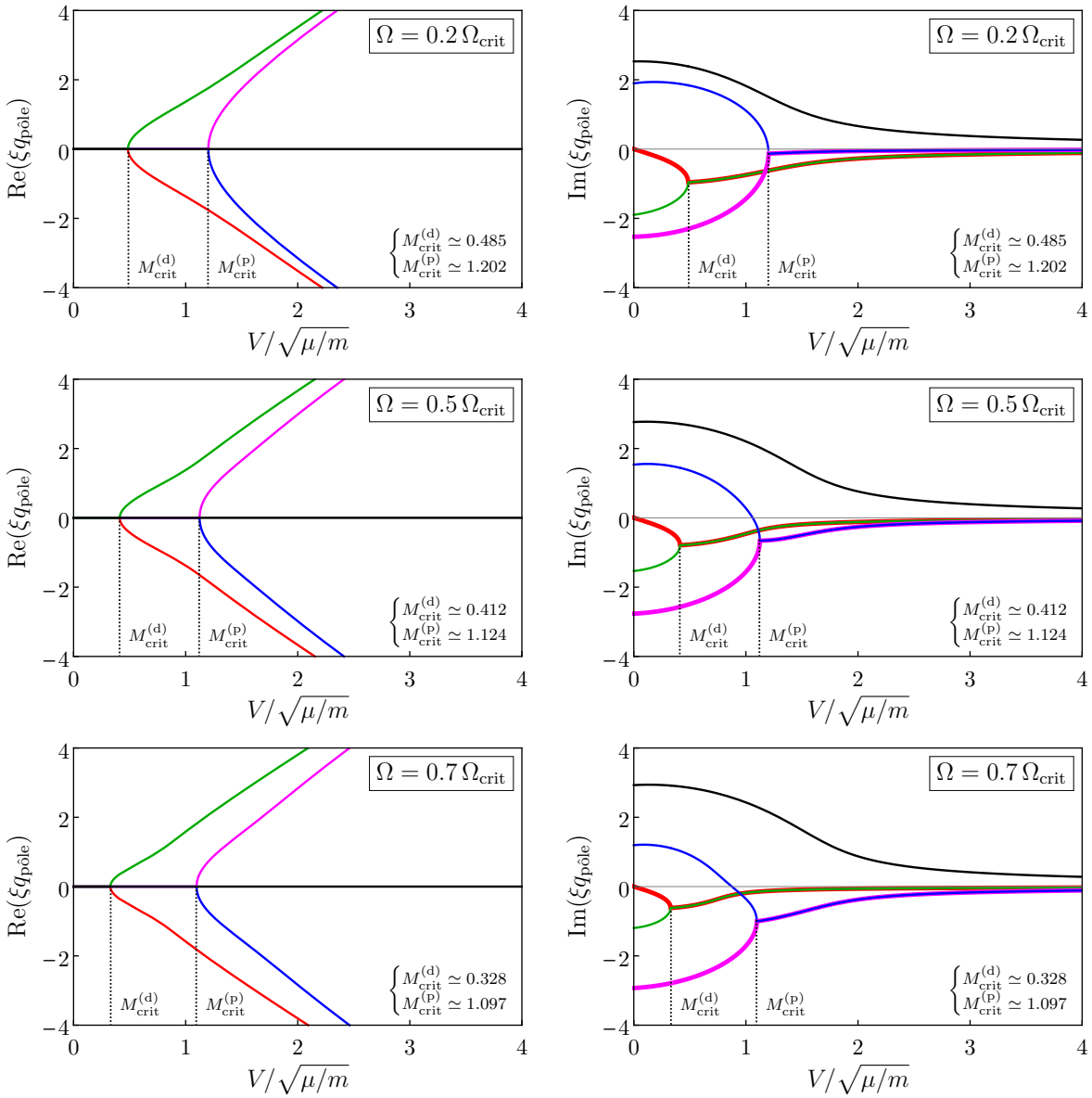


Figure 2.18 — Partie réelle $\text{Re}(q_{\text{pôle}})$ (colonne de gauche) et partie imaginaire $\text{Im}(q_{\text{pôle}})$ (colonne de droite) des cinq pôles de la fonction de réponse $\chi_{\pm}(q)$ en fonction de la vitesse $M = V/\sqrt{\mu/m}$ de l'obstacle pour différentes valeurs du rapport $\Omega/\Omega_{\text{crit}}$ (graphiques du haut : $\Omega = 0{,}2\,\Omega_{\text{crit}}$, du milieu : $\Omega = 0{,}5\,\Omega_{\text{crit}}$, du bas : $\Omega = 0{,}7\,\Omega_{\text{crit}}$). Les tracés sont obtenus dans le cas où $\alpha_2 = -0{,}2\,\alpha_1$ et $\gamma = 0{,}5\,\mu$. Lorsque $M < M_{\text{crit}}^{(\text{d})} = V_{\text{crit}}^{(\text{d})}/\sqrt{\mu/m}$, les pôles de $\chi_{\pm}(q)$ sont tous imaginaires purs : les excitations du fluide restent localisées autour de l'obstacle. Quand $M_{\text{crit}}^{(\text{d})} < M < M_{\text{crit}}^{(\text{p})} = V_{\text{crit}}^{(\text{p})}/\sqrt{\mu/m}$, deux des cinq pôles acquièrent une partie réelle finie et un rayonnement de Cherenkov d'ondes de densité est généré en aval de l'obstacle. Celui-ci s'accompagne d'une émission d'ondes de polarisation lorsque $M > M_{\text{crit}}^{(\text{p})} > M_{\text{crit}}^{(\text{d})}$, c'est-à-dire quand quatre des cinq pôles ont une partie réelle non-nulle. Les valeurs de $M_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ et $M_{\text{crit}}^{(\text{p})}$ sont repérées par de fines lignes verticales en pointillés noirs et sont numériquement données dans le coin inférieur droit de chacun des graphiques.

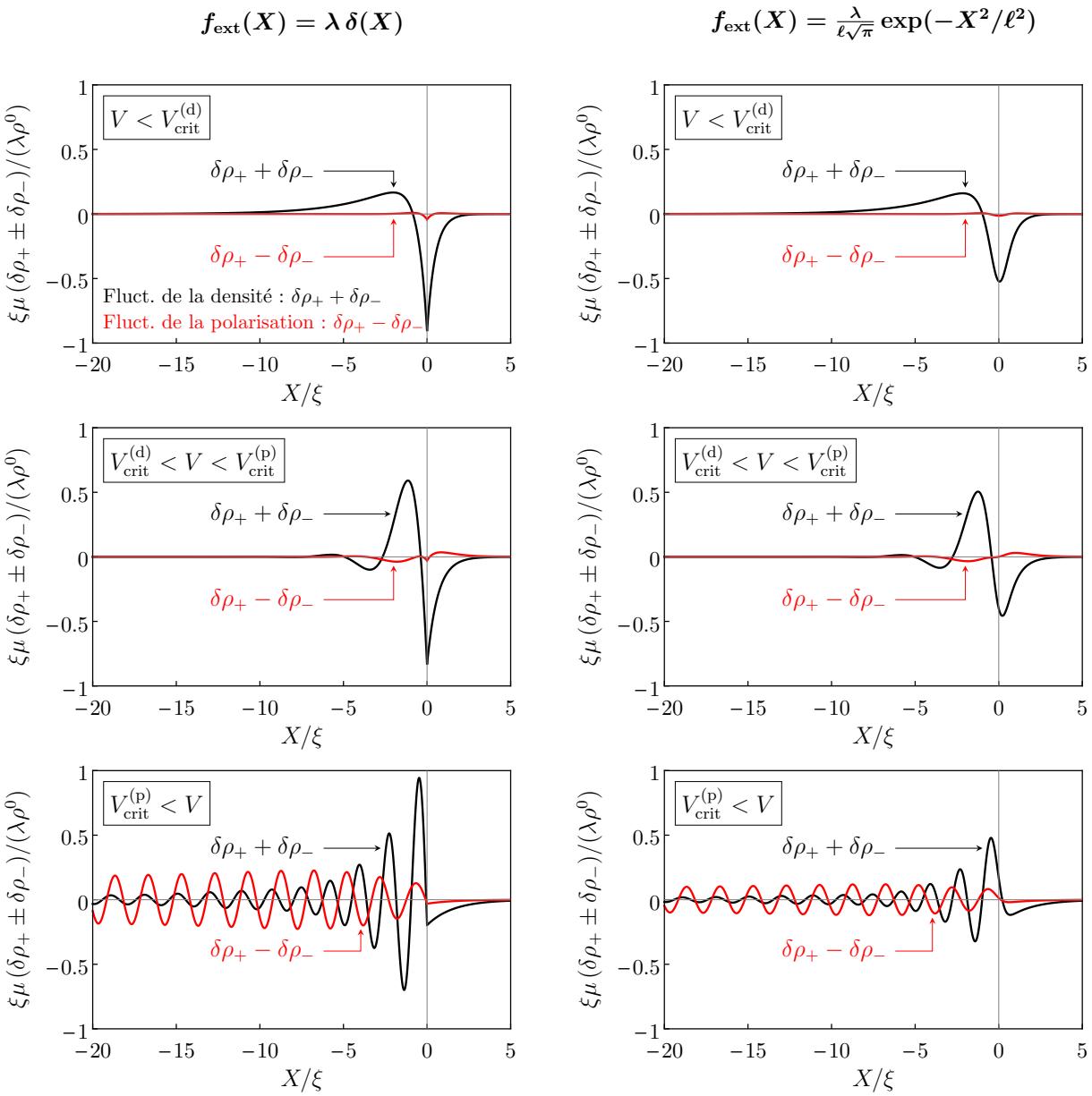


Figure 2.19 — Modulations de densité $\delta\rho_+(X = x + Vt) + \delta\rho_-(X)$ (en noir) et de polarisation $\delta\rho_+(X) - \delta\rho_-(X)$ (en rouge) générées par un petit potentiel δ (colonne de gauche) et par un petit potentiel gaussien de taille $\ell = 0{,}5\,\xi$ (colonne de droite) se déplaçant de la droite vers la gauche à vitesse constante $V > 0$. Les courbes sont tracées dans le cas où $\alpha_2 = -0{,}2\,\alpha_1$, $\Omega = 0{,}1\,\Omega_{\text{crit}}$ et $\gamma = 0{,}5\,\mu$, ce qui donne $V_{\text{crit}}^{(\text{d})} \simeq 0{,}496\,\sqrt{\mu/m}$ et $V_{\text{crit}}^{(\text{p})} \simeq 1{,}219\,\sqrt{\mu/m}$. Les deux graphiques du haut correspondent à une vitesse de déplacement plus petite que $V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ ($V = 0{,}3\,\sqrt{\mu/m}$), les deux du milieu à une vitesse intermédiaire entre $V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ et $V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$ ($V = \sqrt{\mu/m}$), et les deux du bas, enfin, à une vitesse plus grande que $V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$ ($V = 2\,\sqrt{\mu/m}$). Une onde de polarisation faiblement amortie (comparativement aux ondes de densité) est éjectée en aval de l'obstacle lorsque $V > V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$.

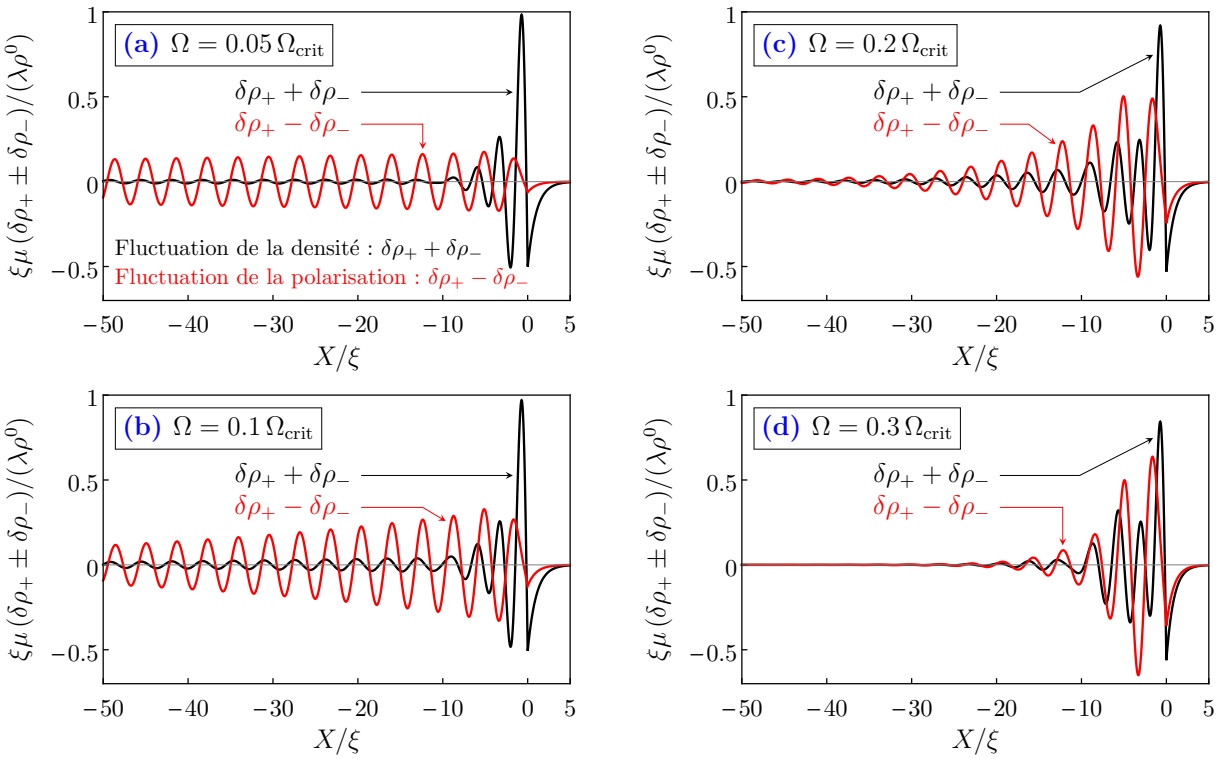


Figure 2.20 — Modulations de densité $\delta\rho_+(X = x + Vt) + \delta\rho_-(X)$ (en noir) et de polarisation $\delta\rho_+(X) - \delta\rho_-(X)$ (en rouge) engendrées par le déplacement d'une petite impureté de potentiel $U_{\rm ext}(x,t) = \lambda\,\delta(x + Vt)$. Les tracés sont effectués dans le cas où $V = 1{,}5\,\sqrt{\mu/m}$, $\alpha_2 = -0{,}2\,\alpha_1$, $\Omega/\Omega_{\rm crit} =$ **(a)** 0,05, **(b)** 0,1, **(c)** 0,2, **(d)** 0,3 et $\gamma = 0{,}5\,\mu$. La vitesse de l'obstacle est dans chaque cas supérieure au seuil d'éjection des ondes de polarisation car $V_{\rm crit}^{(\rm p)}(\Omega)/\sqrt{\mu/m} \simeq$ **(a)** 1,223, **(b)** 1,219, **(c)** 1,202, **(d)** 1,178. L'amortissement des ondes de polarisation est d'autant plus faible que l'intensité du champ magnétique extérieur est petite.

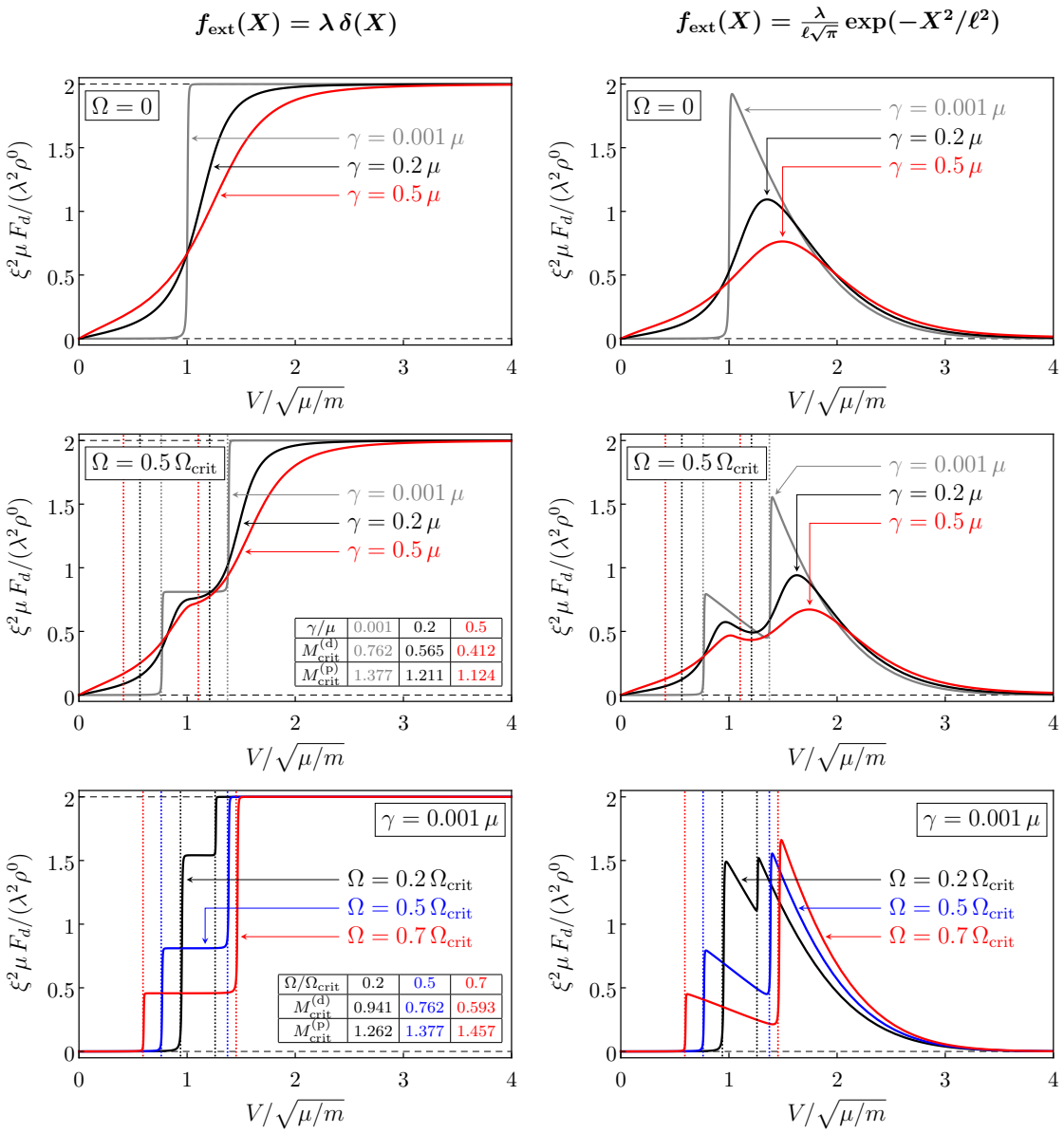


Figure 2.21 — Force de traînée $F_d(V)$ ressentie par une impureté δ (colonne de gauche) et par un obstacle gaussien de largeur typique $\ell = 0{,}5\,\xi$ (colonne de droite) se déplaçant de la droite vers la gauche dans le condensat et dont l'influence sur le fluide de polaritons est traitée dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire. Toutes les courbes sont tracées lorsque $\alpha_2 = -0{,}2\,\alpha_1$. Les deux graphiques du haut sont obtenus en l'absence de champ magnétique ($\Omega = 0$), c'est-à-dire dans le cas où le système est linéairement polarisé. Ceux du milieu correspondent à un système elliptiquement polarisé avec $\Omega = 0{,}5\,\Omega_{\text{crit}}$. Ceux du bas, enfin, correspondent à un système presque dépourvu de dissipation puisque les courbes sont dans ce cas tracées lorsque $\gamma = 0{,}001\,\mu$. Les valeurs des vitesses critiques $M_{\text{crit}}^{(\text{d})} = V_{\text{crit}}^{(\text{d})}/\sqrt{\mu/m}$ et $M_{\text{crit}}^{(\text{p})} = V_{\text{crit}}^{(\text{p})}/\sqrt{\mu/m} > M_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ sont repérées par de fines lignes verticales en pointillés colorés et numériquement données dans le coin inférieur droit des graphiques du milieu et du bas.

donnant la modulation de densité $\delta\rho_\pm(X) = \rho_\pm(x,t) - \rho_\pm^0$ engendrée par le déplacement d'une impureté δ ou d'un obstacle gaussien, on trouve très facilement

$$F_d = -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k\in\{1,2,3,4,5\}} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_k)\, q_k \left[\operatorname{Res}_+(q_k) + \operatorname{Res}_-(q_k)\right] \tag{2.48}$$

lorsque $f_{\text{ext}}(X) = \lambda\,\delta(X)$, et

$$F_d = -\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k\in\{1,2,3,4,5\}} q_k \left[\operatorname{Res}_+(q_k) + \operatorname{Res}_-(q_k)\right] \left[\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} q_k) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mathrm{i}\ell q_k}{\sqrt{2}}\right)\right] \mathrm{e}^{-\ell^2 q_k^2/2} \tag{2.49}$$

quand $f_{\text{ext}}(X) = \frac{\lambda}{\ell\sqrt{\pi}} \exp(-X^2/\ell^2)$. Les formules (2.48) et (2.49) sont valables quelle que soit la valeur de la vitesse de l'obstacle. Cependant, les forces de traînée (2.48) et (2.49) présentent des comportements qui diffèrent d'un régime de vitesse à l'autre ($V < V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$: régime de traînée localisée autour de l'obstacle, $V_{\text{crit}}^{(\text{d})} < V < V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$: régime d'émission d'ondes de densité, $V > V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$: régime d'émission d'ondes de densité et de polarisation) car la position dans le plan complexe $\{\operatorname{Re} q, \operatorname{Im} q\}$ des pôles q_k ($k \in \{1,2,3,4,5\}$) de la fonction de réponse $\chi_\pm(q)$ — qui sont des fonctions de V — change d'un régime à l'autre (voir figure 2.18). Les courbes correspondantes sont présentées à la figure 2.21. Lorsque le paramètre d'amortissement γ/μ est fini, on constate que la force de traînée $F_d(V)$ ne s'annule jamais, indiquant nécessairement une dissipation d'énergie dans le fluide, peu importe la vitesse de l'écoulement du gaz à deux composantes autour de l'obstacle. En présence d'un champ magnétique extérieur, c'est-à-dire quand $\Omega \neq 0$, la force de traînée change continûment — si tant est que γ soit différent de zéro — d'allure lorsque V franchit les seuils critiques $V = V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ et $V = V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$. Ces transitions sont clairement marquées dans le cas où le système présente très peu de dissipation (pour s'en convaincre, on se référera aux graphiques du bas de la figure 2.21). Aux grandes vitesses, c'est-à-dire quand $V \gg V_{\text{crit}}^{(\text{p})}(\Omega,\gamma)$, la force de traînée F_d ressentie par l'impureté δ tend vers une constante valant $2\times\lambda^2\rho^0/(\xi^2\mu)$, qui est un artéfact du potentiel δ. Dans le cas réaliste où le potentiel de l'obstacle est décrit par une gaussienne de largeur finie ℓ, la force de traînée tend vers zéro lorsque $V/V_{\text{crit}}^{(\text{p})} \to \infty$. Ceci s'explique naturellement par le fait que la longueur d'onde de de Broglie $\hbar/(mV)$ — représentant grossièrement l'ordre de grandeur typique de la longueur d'onde des excitations du condensat — est dans ce cas très petite devant la taille caractéristique ℓ du défaut et qu'alors l'obstacle est trop large pour que sa présence se fasse ressentir.

2.4.3 Synthèse des résultats

Nous avons étudié les propriétés d'un condensat unidimensionnel de polaritons en situation de pompage non-résonnant lorsque celui-ci s'écoule autour d'un défaut localisé qui ne perturbe les paramètres du fluide que faiblement. Contrairement au cas traité en section 2.3, nous avons ici tenu compte des projections possibles du spin des excitons sur l'axe de quantification et mis en évidence la polarisation des états correspondants par effet

Zeeman lorsque le système est soumis à un champ magnétique extérieur colinéaire à l'axe de quantification. Nous nous sommes placés dans un régime où le gaz de polaritons est polarisé elliptiquement [*cf.* équations (2.36a)–(2.36b)].

L'obstacle ne modifiant par hypothèse que légèrement les caractéristiques du condensat, nous avons naturellement résolu le problème (2.37) dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire. Nous avons alors montré l'existence de trois régimes d'écoulement séparés par deux valeurs particulières $V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ et $V_{\text{crit}}^{(\text{p})} > V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ de la vitesse du fluide, $V_{\text{crit}}^{(\text{d})}$ marquant le seuil d'émission d'ondes de densité en amont de l'écoulement et $V_{\text{crit}}^{(\text{p})}$ correspondant à la vitesse au-delà de laquelle on observe un rayonnement de Cherenkov d'ondes de polarisation. La dissipation liée à la durée de vie limitée des polaritons se traduit par le fait que les excitations du condensat ne peuvent se propager que sur des distances finies. Nous avons cependant mis en évidence que les ondes de polarisation sont extraordinairement peu amorties comparativement aux ondes de densité lorsque l'intensité du champ magnétique extérieur est suffisamment faible (dans un régime où la polarisation du gaz est quasiment linéaire).

Sur la base de ces nouveaux résultats, nous nous sommes demandé si ces ondes de polarisation extrêmement peu amorties ne pourraient pas être utilisées comme outils pour sonder l'analogue du rayonnement de Hawking dans l'écoulement d'un condensat de polaritons spinoriel présentant un horizon acoustique pour les « phonons de polarisation ». La réponse à cette question occupera les pages du chapitre suivant.

Interlude : Théorie non-linéaire des fluctuations de la densité et de la polarisation dans un condensat de Bose–Einstein à deux composantes

En collaboration avec Anatoly M. Kamchatnov, nous nous sommes aussi intéressés à étudier la propagation d'ondes de densité et de polarisation faiblement non-linéaires et faiblement dispersives dans un condensat de Bose à deux composantes en l'absence d'obstacle, en l'absence de champ magnétique, en l'absence de dissipation et de gain [c'est-à-dire quand $U_{\text{ext}}(x,t) = 0$, $\Omega = 0$ et $\gamma, \Gamma = 0$, respectivement] et dans lequel les interactions de contact effectives entre bosons de spin $\sigma = \pm 1$ sont caractérisées par les constantes de couplage non-linéaires

$$\alpha_{+,+} = \alpha_1 + \delta, \tag{2.50a}$$

$$\alpha_{-,-} = \alpha_1 - \delta \tag{2.50b}$$

$$\text{et} \quad \alpha_{+,-} = \alpha_{-,+} = \alpha_2, \tag{2.50c}$$

où $\alpha_{+,+} \geqslant \alpha_{-,-} > \alpha_2 > 0$. Paramétrisant la fonction d'onde du condensat comme [68]

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \sqrt{\rho}\, \exp(\mathrm{i}\Phi/2) \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\exp(-\mathrm{i}\phi/2) \\ \sin(\theta/2)\exp(\mathrm{i}\phi/2) \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

et supposant de faibles déviations $\varrho = \rho - \rho_0$ ($|\varrho| \ll \rho_0$) et $\vartheta = \theta - \pi/2$ ($|\vartheta| \ll 1$) autour d'un état de densité constante et uniforme ρ_0 linéairement polarisé (puisque lorsque

$\theta = \pi/2$, $|\psi_+|^2 - |\psi_-|^2 = \rho\cos\theta = 0$), nous avons montré que les champs $\varrho(x,t)$ et $\vartheta(x,t)$ obéissent respectivement aux équations de Korteweg–de Vries [10]

$$\varrho_t + c^{(\mathrm{d})}\varrho_x + \frac{3}{2}\,\frac{2\sqrt{\alpha_2^2+\delta^2}-\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2+\delta^2}}\,\frac{c^{(\mathrm{d})}}{\rho_0}\,\varrho\,\varrho_x - \frac{1}{8\,c^{(\mathrm{d})}}\,\varrho_{xxx} = 0 \tag{2.52}$$

et

$$\vartheta_t + c^{(\mathrm{p})}\,\vartheta_x + \frac{3}{2}\,\frac{\alpha_2^2+2\delta^2-\alpha_2\sqrt{\alpha_2^2+\delta^2}}{\delta\sqrt{\alpha_2^2+\delta^2}}\,c^{(\mathrm{p})}\,\vartheta\,\vartheta_x - \frac{1}{8\,c^{(\mathrm{p})}}\,\vartheta_{xxx} = 0, \tag{2.53}$$

où les vitesses $c^{(\mathrm{d})}$ et $c^{(\mathrm{p})}$ des « phonons de densité » et « de polarisation » sont ici données par

$$c^{(\mathrm{d})} = \sqrt{\frac{\rho_0}{2}\left(\alpha_1+\sqrt{\alpha_2^2+\delta^2}\right)} \quad \text{et} \quad c^{(\mathrm{p})} = \sqrt{\frac{\rho_0}{2}\left(\alpha_1-\sqrt{\alpha_2^2+\delta^2}\right)} < c^{(\mathrm{d})}. \tag{2.54}$$

Lorsque δ est rigoureusement nul, on montre que $\vartheta(x,t)$ vérifie l'équation de Korteweg–de Vries modifiée

$$\vartheta_t + c^{(\mathrm{p})}\,\vartheta_x + \frac{3}{8}\left(1-\frac{9\alpha_1}{\alpha_2}\right)c^{(\mathrm{p})}\,\vartheta^2\,\vartheta_x - \frac{1}{8\,c^{(\mathrm{p})}}\,\vartheta_{xxx} = 0, \tag{2.55}$$

où $c^{(\mathrm{p})}$ s'écrit maintenant $c^{(\mathrm{p})} = \sqrt{\rho_0(\alpha_1-\alpha_2)/2}$ puisque $\delta = 0$, de sorte que dans la limite $\delta \to 0$ et si $|\vartheta| \sim \delta$, $\vartheta(x,t)$ doit être solution de l'équation de Gardner

$$\vartheta_t + \left(c^{(\mathrm{p})} - \frac{\delta^2}{8\alpha_2}\,\frac{\rho_0}{c^{(\mathrm{p})}}\right)\vartheta_x + \frac{9\delta}{4\alpha_2}\,c^{(\mathrm{p})}\,\vartheta\,\vartheta_x + \frac{3}{8}\left(1-\frac{9\alpha_1}{\alpha_2}\right)c^{(\mathrm{p})}\,\vartheta^2\,\vartheta_x - \frac{1}{8\,c^{(\mathrm{p})}}\,\vartheta_{xxx} = 0. \tag{2.56}$$

Les équations (non-linéaires) de Korteweg–de Vries (2.52) et (2.53), de Korteweg–de Vries modifiée (2.55) et enfin de Gardner (2.56) admettent toute une zoologie de solutions analytiques théoriquement (et expérimentalement) intéressantes (*cf.*, par exemple, référence [66]). La synthèse de notre travail est en cours de rédaction et fera l'objet d'une très prochaine publication.

2.4.4 P.-É. L., N. Pavloff et A. M. Kamchatnov, Prépublication

10. Afin d'alléger les calculs, nous nous sommes placés dans un système d'unités où $\hbar, m = 1$. On rappelle aussi que f_t est une notation pour $\partial_t f$ et que f_x et f_{xxx} représentent les dérivées positionnelles $\partial_x f$ et $\partial_{xxx} f$, respectivement.

Polarization hydrodynamics in a one-dimensional polariton condensate

P.-É. Larré,[1] N. Pavloff,[1] and A. M. Kamchatnov[2]

[1] *Univ. Paris Sud, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques, UMR8626, F-91405 Orsay, France*
[2] *Institute of Spectroscopy, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, 142190, Russia*

We study the hydrodynamics of a nonresonantly-pumped polariton condensate in a quasi-one-dimensional quantum wire taking into account the spin degree of freedom. We clarify the relevance of the Landau criterion for superfluidity in this dissipative two-component system. Two Cherenkov-like critical velocities are identified corresponding to the opening of different channels of radiation: one of (damped) density fluctuations and another of (weakly damped) polarization fluctuations. We determine the drag force exerted onto an external obstacle and propose experimentally measurable consequences of the specific features of the fluctuations of polarization.

PACS numbers: 47.37.+q,03.75.Mn,71.36.+c

The condensation of exciton-polaritons in semiconductor microcavity[1–4] arouse a great interest directed towards the possible demonstration of superfluid dynamics in coupled light-matter waves. Beautiful experiments revealed suppression of back-scattering from an obstacle[5,6], nucleation of quantized vortices[7–10], and generation of effectively stable oblique solitons[11,12] (see also the review article 13 and references therein). Although the definition of a genuine superfluid behavior in these systems is still a matter of active debates (see, e.g., the exchange in Refs. 14), it makes no doubt that the coherent wave-mechanical flow of an exciton-polariton condensate offers the prospect of studying a rich variety of remarkable hydrodynamic effects. Among these, the specific features associated to the spin of the exciton-polaritons are of particular interest. In the hydrodynamic context they have been revealed by the observation of the optical spin Hall effect[15], of half vortices[16], and of half solitons[17].

In the present work we concentrate on linear spin effects; nonlinear effects are addressed in an other publication[18]. We describe the polariton condensate by a two-component order parameter $\psi_\pm$ accounting for the spin degree of freedom, corresponding to the two possible excitonic spin projections ± 1 onto the structure growth axis and to the right and left circular polarization of emitted photons. Interactions within the system can be described by two constants α_1 and α_2 corresponding to interactions between polaritons with parallel (α_1) or antiparallel (α_2) spins. It is accepted that $\alpha_1 > 0$ and that $|\alpha_2| < \alpha_1$ [see the discussion after Eqs. (2)]. In the following we always consider the standard situation where $0 < -\alpha_2 < \alpha_1$. In the presence of an external magnetic field applied parallel to the structure axis, there is a Zeeman splitting $2\hbar\Omega$ between the two circularly polarized states ψ_+ and ψ_- (we neglect the possible small residual splitting of linear polarization considered for instance in Ref. 19). Taking into account the effect of the external magnetic field and of the interactions amongst polaritons, one can write the energy density of the uniform system as[20]

$$E = -\hbar\Omega\,(\rho_+^0 - \rho_-^0) + \frac{\alpha_1}{2}\left[(\rho_+^0)^2 + (\rho_-^0)^2\right] + \alpha_2\,\rho_+^0\,\rho_-^0, \quad (1)$$

where $\rho_\pm^0 = |\psi_\pm^0|^2$ is the (uniform) density of polaritons with spin ± 1, and in the following we denote the total density of the polariton gas as $\rho^0 = \rho_+^0 + \rho_-^0$. Then, minimizing the free energy of the system, one finds two regimes[20]. For large magnetic field [$\hbar\Omega > \hbar\Omega_{\rm crit} = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\rho^0$] the system is circularly polarized with $\rho_-^0 = 0$, and the chemical potential reads $\mu = \alpha_1\rho^0 - \hbar\Omega$. For lower fields ($\hbar\Omega < \hbar\Omega_{\rm crit}$) the polarization gradually becomes linear when Ω decreases; in this case one has

$$\rho_\pm^0 = \tfrac{1}{2}\rho^0\,(1 \pm \Omega/\Omega_{\rm crit}) \quad \text{and} \quad \mu = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\,\rho^0, \quad (2)$$

from which it is clear that, in the absence of magnetic field (that is, when $\Omega = 0$), the system is linearly polarized[1,2], a feature that originates in the present phenomenological description from the positiveness of $\alpha_1 - \alpha_2$. The fact that $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ implies that $\mu > 0$, that the uniform polariton gas is stable, and that it corresponds to an emission blue shift[1,21,22].

A study of spin dynamics has been done in Ref. 23 in the case of a fully polarized ground state. In the present work we treat instead the weak magnetic field regime (2), and study the dynamics of the system in the presence of (i) an external potential representing an obstacle and/or of (ii) modulations of the uniform ground state. We consider a one-dimensional wire-shaped cavity structure in which the order parameter is of the form $\psi_\pm(x,t)$ and we model the dynamics of the system by the following Gross-Pitaevskii-type equation:

$$\begin{aligned} i\hbar\,\partial_t\psi_\pm = &-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2\psi_\pm + U_{\rm ext}(x+Vt)\,\psi_\pm \mp \hbar\,\Omega\,\psi_\pm \\ &+ (\alpha_1\rho_\pm + \alpha_2\rho_\mp)\,\psi_\pm + i\,(\gamma - \Gamma\rho)\,\psi_\pm, \quad (3) \end{aligned}$$

where m is the polariton effective mass (in the parabolic dispersion approximation, valid at small momenta) and $\rho_\pm(x,t) = |\psi_\pm(x,t)|^2$. $U_{\rm ext}(x+Vt)$ describes an obstacle in motion at velocity V with respect to the polariton fluid. In accordance with the description (1), the effect of the magnetic field is accounted for in Eq. (3) by the Zeeman term $\mp\hbar\,\Omega\,\psi_\pm$ and interaction effects are described by local terms proportional to α_1 and α_2. Due to the finite polariton-lifetime, the system needs to be pumped.

Following Refs. 24–27 we schematically describe this effect by the last term of Eq. (3): The term $i\,\gamma\,\psi_\pm$ describes the combined effects of the incoherent pumping and decay processes; $\gamma > 0$, indicating an overall gain counterbalanced by the term $-i\,\Gamma\rho\,\psi_\pm$ (where $\Gamma > 0$ and $\rho = \rho_+ + \rho_-$), which phenomenologically accounts for a saturation of the gain at large density and makes it possible to reach a steady-state configuration with a finite density $\rho^0 = \gamma/\Gamma$. Note that the saturation term is proportional to ρ. Arguing on weak cross-spin scattering, the authors of Ref. 28 used a different type of saturation of the gain, proportional to $\rho_\pm$: In this case the value of the stationary background densities ρ_+^0 and ρ_-^0 is fixed *a priori*, independently of the magnetic field. In the present work we follow Ref. 29 and use a model where the value of ρ_+^0 and ρ_-^0 is fixed by the thermodynamic equilibrium between the two spin components in the presence of a magnetic field [Eqs. (2)].

A small departure from the stationary configuration (2) is described by an order parameter of the form

$$\psi_\pm(x,t) = \psi_\pm^0\,[1+\varphi_\pm(x,t)]\exp(-i\,\mu\,t/\hbar), \qquad (4)$$

where $|\varphi_\pm(x,t)| \ll 1$. In the absence of external potential ($U_{\rm ext} = 0$), the $\varphi_\pm(x,t)$'s which are solutions of the linearized version of Eq. (3) are plane waves whose wavevector q and frequency ω are related by

$$\begin{aligned} 0 = {}& \omega^4 + 2\,i\,\gamma\,\omega^3 - \left(\frac{q^4}{2} + \frac{2}{1+\alpha}\,q^2\right)\omega^2 \\ & - 2\,i\,\gamma\left(\frac{q^4}{4} + 4\,\varrho_+^0\,\varrho_-^0\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,q^2\right)\omega \\ & + \frac{q^4}{4}\left(\frac{q^4}{4} + \frac{2}{1+\alpha}\,q^2 + 16\,\varrho_+^0\,\varrho_-^0\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right). \end{aligned} \qquad (5)$$

In this equation we note $\alpha = \alpha_2/\alpha_1$ ($-1 < \alpha < 0$), $\varrho_\pm^0 = \rho_\pm^0/\rho^0 = \frac{1}{2}(1 \pm \Omega/\Omega_{\rm crit})$, and we use dimensionless quantities: Energies are henceforth expressed in units of μ, lengths in units of ξ [where $\xi = \hbar/(m\,\mu)^{1/2}$], and velocities in units of $(\mu/m)^{1/2}$. Equation (5) has already been obtained in Ref. 30 in the case of a two-component Bose gas (i.e., in the absence of damping: $\gamma = 0$) without magnetic field.

Solving the fourth-degree equation (5) yields the dispersion relations $\omega = \omega(q)$. If $\omega(q)$ is a solution, then $-\omega^*(q)$ is also a solution. As a result, the solutions come into pairs having either the same zero real part or the same imaginary part and opposite real parts. Some typical dispersion relations are plotted in Fig. 1. In the limit of weak magnetic field one pair of solutions corresponds to the usual density-fluctuation mode (in which both components oscillate in phase), the other one to a polarization-fluctuation mode (with counterphase oscillations of the two components). We henceforth keep using the denominations "density mode" and "polarization mode" although the separation between the two types of fluctuations is less strict for finite magnetic field, as illustrated in the lower row of Fig. 1 where we plot the contribution of each mode to the static structure factor $S(q) = \int S(q,\omega)\,d\omega$, where $S(q,\omega)$ is the (zero temperature) dynamical structure factor[31]. The fact that one of the contributions can be negative originates in the non conservative nature of Eq. (3), but it is interesting to note that, despite its losses, the system keeps a constant density and still verifies the f-sum rule: $\int_0^\infty \omega\,S(q,\omega)\,d\omega = \rho_0\,q^2/2$.

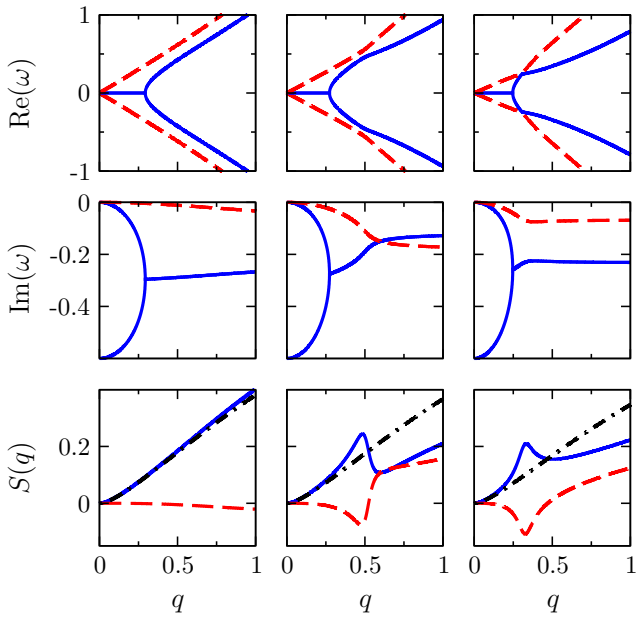


Figure 1. (Color online) Dispersion relations in the case $\alpha = -0.2$ and $\gamma = 0.3$[32]. The first (second) row displays Re(ω) [Im(ω)] as a function of q. The lower row displays the contribution of the density and polarization modes to the total density structure factor $S(q)$ (black dot-dashed line). In each plot the blue solid curve corresponds to the density mode and the red dashed curve to the polarization mode. The three columns are drawn in the cases (from left to right) $\Omega/\Omega_{\rm crit} = 0.2$, 0.5, and 0.7.

From Eq. (5) one can show that the polarization mode is undamped (i) when $\varrho_+^0 = \varrho_-^0 = \frac{1}{2}$, i.e., in the absence of magnetic field, and (ii) when $\varrho_-^0 = 0$, i.e., at the critical magnetic field. This is a first hint indicating that the damping of the polarization mode is weak. One can further show that this damping is zero up to order $O(\Omega^2)$ in the external magnetic field. A final evidence comes from the fact that the damping of the polarization mode is always zero in the long-wavelength limit as we discuss now. In the absence of damping and of magnetic field ($\gamma = 0$ and $\Omega = 0$, respectively) the long-wavelength behavior of both modes corresponds to a linear dispersion relation: The system exhibits two types of sound. One is the usual sound of velocity $c_{\rm d} = 1$. The other is the "polarization sound" of velocity $c_{\rm p} = [(1-\alpha)/(1+\alpha)]^{1/2}$. For nonzero γ the usual sound waves are damped; this is not the case for the polarization sound, as clearly seen in Fig. 1. In the general case where γ and Ω are

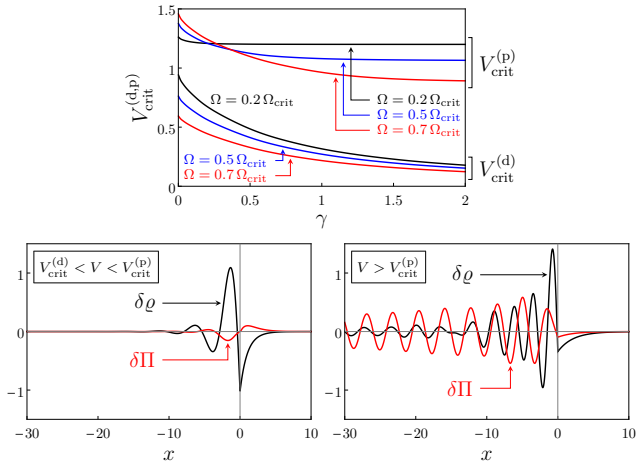


Figure 2. (Color online) Upper panel: Critical velocities $V_{\rm crit}^{(\rm d)}$ and $V_{\rm crit}^{(\rm p)}$ as a function of γ for different strengthes of the magnetic field. The plot is drawn when $\alpha = -0.2$. Lower panels: Rescaled fluctuations of the density [$\delta\varrho(x)/\varkappa$: black curves] and of the polarization [$\delta\Pi(x)/\varkappa$: red curves] induced by a δ-peak potential $\varkappa\,\delta(x+Vt)$. The modulation patterns are drawn for $\alpha = -0.2$, $\gamma = 0.2$, and $\Omega/\Omega_{\rm crit} = 0.1$. In this case, $V_{\rm crit}^{(\rm d)} = 0.69(4)$ and $V_{\rm crit}^{(\rm p)} = 1.21(9)$. The figures are drawn in the frame where the obstacle stays at rest at the origin and where the polariton fluid moves from left to right at velocity $V > 0$. For the lower left panel $V = 1.1$ and for the lower right panel $V = 1.5$.

nonzero, looking for a solution of Eq. (5) under the form $\omega(q) = c_{\rm p}\,q$, in the limit $|q| \ll 1$ and $c_{\rm p}|q| \ll \gamma$ one gets $c_{\rm p} = [(1-\Omega^2/\Omega_{\rm crit}^2)(1-\alpha)/(1+\alpha)]^{1/2}$.

From the knowledge of the dispersion relations one can compute the linear response function $\chi_\pm(q,\omega)$ which characterizes how the rescaled density $\varrho_\pm(x,t) = \rho_\pm(x,t)/\rho^0$ responds to a weak external scalar potential with wavevector q and pulsation ω. This makes it possible to determine the wake generated by a weakly perturbing obstacle moving at constant velocity V with respect to the polariton fluid. We do not detail the computation which has been presented in Ref. 33 in the case of a scalar order parameter. In the present case, there exist two particular velocities corresponding to the opening of channels of (damped) Cherenkov radiation: $V_{\rm crit}^{(\rm d)}$ is the threshold for emission of density waves and $V_{\rm crit}^{(\rm p)}$ is the threshold for emission of polarization waves. These velocities are functions of the losses in the system (i.e., of γ) and of the strength of the external magnetic field (i.e., of Ω). They are represented in Fig. 2.

The physical meaning of these velocities can be verified by inspecting the perturbations induced by the obstacle which are represented in Fig. 2 in the simplest case where the external potential is of the form $U_{\rm ext} = \varkappa\,\delta(x+Vt)$. The plots are drawn in the frame where the obstacle is at rest at the origin and where the polariton fluid moves from left to right at velocity $V > 0$. In this frame the perturbations are stationary. In Fig. 2 we do not display separately $\delta\varrho_+ = \varrho_+ - \varrho_+^0$ and $\delta\varrho_- = \varrho_- - \varrho_-^0$ but we rather plot the relevant physical observables: the fluctuations of the total density ($\delta\varrho = \delta\varrho_+ + \delta\varrho_-$) and of the polarization ($\delta\Pi = \delta\varrho_+ - \delta\varrho_-$). The critical velocity $V_{\rm crit}^{(\rm p)}$ being larger than $V_{\rm crit}^{(\rm d)}$, an obstacle whose velocity V relative to the condensate lies between these two critical velocities (such as considered in the lower left plot of Fig. 2) only emits density fluctuations[34]. On the contrary, when V is larger than both $V_{\rm crit}^{(\rm d)}$ and $V_{\rm crit}^{(\rm p)}$, the wake consists in both density and polarization fluctuations (see Fig. 2, lower right plot). We also note that a direct computation of the density patterns $\varrho_\pm$ for several intensities of the magnetic field shows that, as stated above, the polarization wave is weakly damped at low and at high field, facilitating the experimental observation of the polarization signal compared to that of density fluctuations.

The existence of two critical velocities has also an important effect on the behavior of the drag force F_d experienced by the obstacle. This is illustrated in Fig. 3 where F_d is plotted as a function of V for two types of obstacles: a point-like scatterer of intensity $\varkappa$, for which $U_{\rm ext} = \varkappa\,\delta(x+Vt)$, and a Gaussian potential of same intensity and of width ℓ, for which $U_{\rm ext} = \frac{\varkappa}{\ell\sqrt{\pi}}\exp[-(x+Vt)^2/\ell^2]$. One sees in Fig. 3 that, at very weak damping, F_d is negligible at small velocity and shows pronounced thresholds when V reaches the critical velocities $V_{\rm crit}^{(\rm d)}$ and $V_{\rm crit}^{(\rm p)}$, demonstrating that in the limit $\gamma \to 0$ the drag uniquely consists in wave resistance. This corresponds to the Landau criterion for the onset of dissipation: At each opening of a radiation channel (i.e., at $V = V_{\rm crit}^{(\rm d)}$ and $V_{\rm crit}^{(\rm p)}$) the drag is abruptly increased. This reflects the work imparted to the fluid and dissipated by generating the wave pattern which irreversibly radiates energy away from the obstacle. For finite values of γ instead, the flow is never truly superfluid: The obstacle experiences a finite force even at low velocity[27,35], which corresponds to diffusion of momentum, i.e., to a viscous drag. In this case there is no Landau criterion, but the system exhibits a smooth crossover from a drag dominated by viscous-like phenomena (at low velocity) to one dominated by wave resistance (at large velocity). Thus, it is more appropriate to term the velocities $V_{\rm crit}^{(\rm d)}$ and $V_{\rm crit}^{(\rm p)}$ Cherenkov- (or Mach-) rather than Landau-critical velocities.

We also note that in the absence of external magnetic field (in the case $\Omega = 0$, not shown in the figure) no step is seen in the drag, even for $\gamma \to 0$. This is due to the fact that, despite the opening of a new radiation channel at $V = V_{\rm crit}^{(\rm d)}$, the external scalar potential cannot excite polarization waves in this case for symmetry reasons, since no term in Eq. (3) can distinguish the spin-up from the spin-down component when $\Omega = 0$. This is reminiscent of what occurs for the first and second sound in superfluid HeII: The second sound which corresponds to a temperature (and entropy) wave cannot be excited by oscillations of the container wall, contrarily to the usual density waves associated with the first sound; see, e.g., Ref. 36.

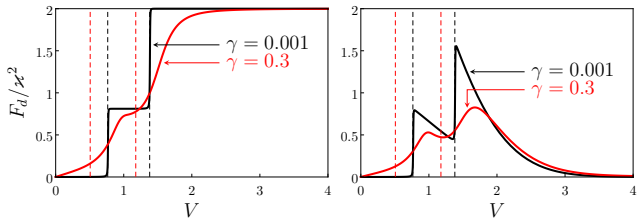


Figure 3. (Color online) Drag force $F_d/\varkappa^2$ as a function of the velocity V of the obstacle relative to the condensate for two damping parameters: $\gamma = 0.001$ (solid black curves) and $\gamma = 0.3$ (solid red curves). The left plot corresponds to a point-like obstacle and the right plot to a Gaussian potential of width $\ell = 0.5$. The computation is done for $\alpha = -0.2$ and $\Omega = 0.5\,\Omega_{\rm crit}$. In this case $V_{\rm crit}^{\rm (d)} = 0.76(2)$ and $V_{\rm crit}^{\rm (p)} = 1.37(7)$ when $\gamma = 0.001$, whereas $V_{\rm crit}^{\rm (d)} = 0.50(5)$ and $V_{\rm crit}^{\rm (p)} = 1.17(3)$ when $\gamma = 0.3$. All these threshold velocities are indicated by vertical colored dashed lines in the figure.

Finally we emphasize that another effect of the existence of the spin degree of freedom is revealed in the absence of obstacle by the quantum fluctuations of the polarization. One can show that in a homogeneous condensate in the absence of damping and of magnetic field, $g_{\rm p}^{(2)}(x,x') = \langle :\delta\hat{\Pi}(x)\,\delta\hat{\Pi}(x'):\rangle$ is a universal function of $c_{\rm p}|x-x'|$ which goes to zero when $|x-x'| \to \infty$. One gets $g_{\rm p}^{(2)}(x,x) = -\frac{2}{\pi}\,c_{\rm p} < 0$: This corresponds to local sub-Poissonian fluctuations of the polarization. These fluctuations are strongly modified in the presence of a (polarization) sonic horizon. They acquire nonlocal features associated to the correlated emission of analogous Hawking radiation, as first shown in Refs. 37 for density-density correlations. The present results suggest that in polariton systems the polarization-polarization correlation function $g_{\rm p}^{(2)}(x,x')$ should be a quite efficient observable for witnessing Hawking radiation, even in the absence of an external magnetic field[38].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank A. Amo, J. Bloch and S. Stringari for fruitful discussions. This work was supported by the French ANR under grant n° ANR-11-IDEX-0003-02 (Inter-Labex grant QEAGE).

[1] J. Kasprzak *et al.*, Nature (London) **443**, 409 (2006).
[2] R. Balili, V. Hartwell, D. Snoke, L. Pfeiffer, and K. West, Science **316**, 1007 (2007).
[3] C. W. Lai *et al.*, Nature (London) **450**, 529 (2007).
[4] S. Christopoulos *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 126405 (2007).
[5] A. Amo *et al.*, Nature (London) **457**, 291 (2009).
[6] A. Amo *et al.*, Nat. Phys. **5**, 805 (2009).
[7] K. G. Lagoudakis *et al.*, Nat. Phys. **4**, 706 (2008).
[8] G. Roumpos *et al.*, Nat. Phys. **7**, 129 (2011).
[9] G. Nardin *et al.*, Nat. Phys. **7**, 635 (2011).
[10] D. Sanvitto *et al.*, Nat. Phot. **5**, 610 (2011).
[11] A. Amo *et al.*, Science **332**, 1167 (2011).
[12] G. Grosso, G. Nardin, F. Morier-Genoud, Y. Léger, and B. Deveaud-Plédran, Phys. Rev. Lett. **107**, 245301 (2011).
[13] I. Carusotto and C. Ciuti, Rev. Mod. Phys. **85**, 299 (2013).
[14] L. V. Butov and A. V. Kavokin, Nat. Phot. **6**, 2 (2012); B. Deveaud-Plédran, Nat. Phot. **6**, 205 (2012).
[15] C. Leyder *et al.*, Nat. Phys. **3**, 628 (2007).
[16] K. G. Lagoudakis *et al.*, Science **326**, 974 (2009).
[17] R. Hivet *et al.*, Nat. Phys. **8**, 724 (2012).
[18] A. M. Kamchatnov, Y. V. Kartashov, P.-É. Larré and N. Pavloff, arXiv:1308.0784.
[19] I. A. Shelykh, Y. G. Rubo, and A. V. Kavokin, Superlattice. Microst. **41**, 313 (2007).
[20] Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, and I. A. Shelykh, Phys. Lett. A **358**, 227 (2006).
[21] D. Bajoni *et al.*, Phys. Rev. Lett. **100**, 047401 (2008).
[22] S. Utsunomiya *et al.*, Nat. Phys. **4**, 700 (2008).
[23] H. Flayac, H. Terças, D. D. Solnyshkov, and G. Malpuech, arXiv:1212.5894.
[24] M. Wouters and I. Carusotto, Phys. Rev. Lett. **99**, 140402 (2007).
[25] J. Keeling and N. G. Berloff, Phys. Rev. Lett. **100**, 250401 (2008).
[26] M. Wouters, Phys. Rev. B **77**, 121302(R) (2008).
[27] M. Wouters and I. Carusotto, Phys. Rev. Lett. **105**, 020602 (2010).
[28] M. O. Borgh, J. Keeling, and N. G. Berloff, Phys. Rev. B **81**, 235302 (2010).
[29] T. K. Paraïso, M. Wouters, Y. Léger, F. Morier-Genoud and B. Deveaud-Plédran, Nature Mater. **9**, 655 (2010).
[30] D. V. Fil and S. I. Shevchenko, Phys. Rev. A **72**, 013616 (2005).
[31] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003).
[32] This is a standard value for the dimensionless parameter γ which is typically of order $\hbar/(\tau\mu)$, τ being the lifetime of a polariton ($\tau \sim 10$ ps) and μ the chemical potential ($\mu \sim 0.5$ meV).
[33] P.-É. Larré, N. Pavloff, and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. B **86**, 165304 (2012).
[34] This is not quite true because, as explained above, the distinction between density and polarization modes is not sharp.
[35] A. Berceanu, E. Cancellieri, and F. M. Marchetti, J. Phys.: Condens. Matter **24**, 235802 (2012).
[36] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, 1959).
[37] R. Balbinot, A. Fabbri, S. Fagnocchi, A. Recati, and I. Carusotto, Phys. Rev. A **78**, 021603 (2008); I. Carusotto, S. Fagnocchi, A. Recati, R. Balbinot, and A. Fabbri, New J. Phys. **10**, 103001 (2008).
[38] P.-É. Larré and N. Pavloff, arXiv:1307.2843, to appear in EPL.

— 3 —
Rayonnement de Hawking dans un condensat à deux composantes

Sommaire

3.1 Introduction 136
3.2 Description rapide du modèle 137
3.3 Théorie de Bogoliubov des fluctuations 138
3.4 Horizon acoustique pour les phonons de polarisation et identification des modes de diffusion 140
3.5 Rayonnement de Hawking à deux corps : corrélations des fluctuations quantiques de la polarisation de part et d'autre de l'horizon 145
3.6 Conclusion 150
3.7 P.-É. L. et N. Pavloff, Prépublication 151

3.1 Introduction

Dans la section 2.4 du chapitre 2, nous avons mis en évidence que les ondes de polarisation générées dans un condensat de polaritons à deux composantes unidimensionnel lorsque le fluide s'écoule autour d'un petit défaut localisé pouvaient dans certains cas se propager en amont de l'écoulement sur des distances typiquement plus grandes que leur longueur d'onde sans être dramatiquement affectées par la courte durée de vie des polaritons, à l'inverse de ce que l'on observe pour les ondulations de densité. Nous avons alors émis l'idée (*cf.* sous-section 2.4.3) qu'en tirant parti du grand temps de vie de ces ondes, on pourrait peut-être tester l'effet Hawking dans un condensat de polaritons spinoriel dont l'écoulement présenterait l'analogue d'un horizon des évènements *via* les fluctuations spontanées (donc purement quantiques) de la polarisation du gaz.

Dans ce chapitre (dans lequel on détaille les calculs de la prépublication incluse en section 3.7), on étudie l'écoulement unidimensionnel d'un condensat de Bose–Einstein à deux niveaux dans lequel la constante de couplage non-linéaire entre bosons de spins

opposés est spatialement modulée de sorte qu'il est possible de créer un horizon acoustique pour les modes de polarisation de grandes longueurs d'onde. La présence de cet horizon engendre un rayonnement de Hawking d'ondes de polarisation dont l'existence est révélée par le caractère non-local des corrélations à deux corps des fluctuations quantiques de la polarisation.

3.2 Description rapide du modèle

Dans ce chapitre, nous considérons une configuration où l'on néglige les effets dus à la dissipation et à la présence possible d'un champ magnétique extérieur. On caractérise les interactions de contact effectives entre bosons de spin $\sigma = \pm 1$ par les deux constantes de couplage non-linéaires $g_1 = g_{+,+} = g_{-,-}$ et $g_2 = g_{+,-} = g_{-,+}$ ($g_1 > g_2 > 0$) et on considère que g_2 est une fonction discontinue de x que l'on définit sur tout $\mathbb{R}$ par

$$g_2(x) = g_{2,u}\,\Theta(-x) + g_{2,d}\,\Theta(x) \quad (g_{2,u}, g_{2,d} > 0), \tag{3.1}$$

où Θ désigne la fonction de Heaviside. Enfin, on soumet le condensat à une contrainte extérieure dont l'énergie potentielle est également discontinue et de la forme

$$U(x) = U_u\,\Theta(-x) + U_d\,\Theta(x) \quad (U_u, U_d \in \mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Le paramètre d'ordre $\psi_\sigma(x,t)$ du condensat unidimensionnel obéit alors à une équation de Gross–Pitaevskii à deux composantes du type

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\psi_\sigma = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_{xx}\psi_\sigma + U(x)\,\psi_\sigma + [g_1\,n_\sigma + g_2(x)\,n_{-\sigma}]\,\psi_\sigma - \mu\,\psi_\sigma, \tag{3.3}$$

où m est la masse des bosons, $n_\sigma(x,t) = |\psi_\sigma(x,t)|^2$ la densité des bosons de spin $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$ et μ le potentiel chimique, supposé par simplicité indépendant de σ.

On introduit la notation $\chi_\alpha = g_{2,\alpha}/g_1 \in\,]0,1[$, où $\alpha = u$ lorsque $x < 0$ et $\alpha = d$ quand $x > 0$. Si les constantes U_u, χ_u, U_d et χ_d vérifient l'équation de conservation

$$U_u + \frac{g_1 n_0}{2}\,\chi_u = U_d + \frac{g_1 n_0}{2}\,\chi_d, \tag{3.4}$$

alors le problème (3.3) admet une solution [1] homogène et stationnaire de la forme

$$\overline{\psi}_\sigma(x) = \sqrt{\frac{n_0}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}, \tag{3.5}$$

où $n_0 = |\overline{\psi}_+|^2 + |\overline{\psi}_-|^2$ est la densité (uniforme) du condensat et $k_0 = mV_0/\hbar$ la vitesse (en unités de $\hbar/m$) du gaz, mis en mouvement de la gauche vers la droite ($V_0 > 0$). Étant donnée l'équation (3.4), le potentiel chimique ne dépend pas de $\alpha = u$ ou d et il s'écrit

$$\mu = \frac{mV_0^2}{2} + U_\alpha + \frac{g_1 n_0}{2}\,(1 + \chi_\alpha). \tag{3.6}$$

1. La solution (3.5) n'est pas unique mais c'est en tout cas la plus simple que nous puissions écrire lorsque le condensat est mis en mouvement à la vitesse V_0. On voit en particulier que les densités uniformes des espèces de spin $\sigma = 1$ et $\sigma = -1$ sont dans ce cas considérées égales : $|\overline{\psi}_+|^2 = |\overline{\psi}_-|^2 = n_0/2$, ce qui implique que le gaz est linéairement polarisé : $|\overline{\psi}_+|^2 - |\overline{\psi}_-|^2 = 0$.

3.3 Théorie de Bogoliubov des fluctuations

Dans cette section, nous nous intéressons aux excitations élémentaires du condensat de Bose à deux composantes décrit par la fonction d'onde (3.5) et dont la dynamique obéit à l'équation de Gross–Pitaevskii (3.3). Nous nous plaçons naturellement dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des fluctuations en cherchant les solutions de (3.3) sous la forme $\psi_\sigma(x,t) = \overline{\psi}_\sigma(x) + \delta\psi_\sigma(x,t)$ $(\sigma = \pm 1)$, où

$$\delta\psi_\sigma(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}\left[\overline{u}_{\sigma,\alpha}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \overline{w}^*_{\sigma,\alpha}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] \tag{3.7}$$

décrit de petites oscillations d'énergie $\hbar\omega$ autour de l'état fondamental de fonction d'onde $\overline{\psi}_\sigma(x)$ $(|\delta\psi_\sigma| \ll |\overline{\psi}_\sigma|)$, avec, rappelons-le, $\alpha = u$ si $x < 0$ et $\alpha = d$ si $x > 0$. Définissant

$$c_\alpha^{(\mathrm{p})} = \sqrt{\frac{g_1 n_0}{2m}}\,\sqrt{1-\chi_\alpha} \quad \text{et} \quad \xi_\alpha = \frac{\hbar}{m c_\alpha^{(\mathrm{p})}}, \tag{3.8}$$

ainsi que les quantités adimensionnées

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\hbar\omega}{m c_\alpha^{(\mathrm{p})2}}, \quad m_\alpha = \frac{V_0}{c_\alpha^{(\mathrm{p})}} \quad \text{et} \quad X_\alpha = \frac{x}{\xi_\alpha}, \tag{3.9}$$

la linéarisation de l'équation à deux composantes (3.3) par rapport à $\delta\psi_\pm(x,t)$ conduit aux équations de Bogoliubov–de Gennes

$$(\varepsilon_\alpha + \mathrm{i} m_\alpha\,\partial_{X_\alpha})\begin{pmatrix}\overline{u}_{+,\alpha}\\ \overline{w}_{+,\alpha}\\ \overline{u}_{-,\alpha}\\ \overline{w}_{-,\alpha}\end{pmatrix} = \mathscr{L}_\alpha\begin{pmatrix}\overline{u}_{+,\alpha}\\ \overline{w}_{+,\alpha}\\ \overline{u}_{-,\alpha}\\ \overline{w}_{-,\alpha}\end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

où

$$\mathscr{L}_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\partial_{X_\alpha X_\alpha} + \frac{1}{1-\chi_\alpha} & \frac{1}{1-\chi_\alpha} & \frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} & \frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} \\ -\frac{1}{1-\chi_\alpha} & \frac{1}{2}\,\partial_{X_\alpha X_\alpha} - \frac{1}{1-\chi_\alpha} & -\frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} & -\frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} \\ \frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} & \frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} & -\frac{1}{2}\,\partial_{X_\alpha X_\alpha} + \frac{1}{1-\chi_\alpha} & \frac{1}{1-\chi_\alpha} \\ -\frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} & -\frac{\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha} & -\frac{1}{1-\chi_\alpha} & \frac{1}{2}\,\partial_{X_\alpha X_\alpha} - \frac{1}{1-\chi_\alpha} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

On cherche les fonctions propres du hamiltonien de Bogoliubov–de Gennes (3.11) sous la forme

$$\begin{pmatrix}\overline{u}_{+,\ell}(x)\\ \overline{w}_{+,\ell}(x)\\ \overline{u}_{-,\ell}(x)\\ \overline{w}_{-,\ell}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathscr{U}_{+,\ell}\\ \mathscr{W}_{+,\ell}\\ \mathscr{U}_{-,\ell}\\ \mathscr{W}_{-,\ell}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_\ell X_\alpha}, \tag{3.12}$$

où les amplitudes $\mathscr{U}_{\pm,\ell}$ et $\mathscr{W}_{\pm,\ell}$ sont les coefficients de Bogoliubov. Ces derniers ne dépendent pas de la position car le profil de densité dans l'état fondamental [*cf.* équation

(3.5)] est homogène. Dans l'équation (3.12), les $Q_\ell = \xi_\alpha\, q_\ell$ sont les nombres d'onde (adimensionnés) des modes de Bogoliubov ℓ dans le référentiel entraîné, c'est-à-dire dans le référentiel où le condensat est au repos. On montre qu'ils sont solutions de

$$E_\ell^2 = \frac{Q_\ell^2}{2}\left(\frac{Q_\ell^2}{2} + 2\right) \tag{3.13a}$$

$$\text{ou bien} \quad E_\ell^2 = \frac{Q_\ell^2}{2}\left(\frac{Q_\ell^2}{2} + 2\,\frac{1+\chi_\alpha}{1-\chi_\alpha}\right), \tag{3.13b}$$

où $E_\ell = \varepsilon_\alpha - m_\alpha Q_\ell$, valeur propre de $\mathscr{L}_\alpha$, est l'énergie d'un mode de Bogoliubov ℓ dans le référentiel entraîné. Les modes tels que $E_\ell^2 = Q_\ell^4/4 + Q_\ell^2$ consistent en des fluctuations de la polarisation $\pi(x,t) = |\psi_+(x,t)|^2 - |\psi_-(x,t)|^2$ du gaz de bosons et ceux tels que $E_\ell^2 = Q_\ell^4/4 + Q_\ell^2 \times (1+\chi_\alpha)/(1-\chi_\alpha)$ en des fluctuations de la densité totale $n(x,t) = |\psi_+(x,t)|^2 + |\psi_-(x,t)|^2$ du condensat [2]. Les amplitudes de Bogoliubov $\mathscr{U}_{\pm,\ell}$ et $\mathscr{W}_{\pm,\ell}$ correspondantes s'écrivent respectivement

$$\begin{pmatrix} \mathscr{U}_{+,\ell} \\ \mathscr{W}_{+,\ell} \\ \mathscr{U}_{-,\ell} \\ \mathscr{W}_{-,\ell} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathscr{C}_\ell}\begin{pmatrix} Q_\ell^2/2 + E_\ell \\ Q_\ell^2/2 - E_\ell \\ -(Q_\ell^2/2 + E_\ell) \\ -(Q_\ell^2/2 - E_\ell) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathscr{U}_{+,\ell} \\ \mathscr{W}_{+,\ell} \\ \mathscr{U}_{-,\ell} \\ \mathscr{W}_{-,\ell} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathscr{C}_\ell}\begin{pmatrix} Q_\ell^2/2 + E_\ell \\ Q_\ell^2/2 - E_\ell \\ Q_\ell^2/2 + E_\ell \\ Q_\ell^2/2 - E_\ell \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Si ℓ désigne un mode de Bogoliubov réel (c'est-à-dire un mode dont le nombre d'onde Q_ℓ est réel), la constante de normalisation $\mathscr{C}_\ell$ dans les équations (3.14) est déterminée de sorte que le courant (conservé)

$$J_\ell = c_\alpha^{(\mathrm{p})} \sum_{\sigma=\pm 1} \left[(Q_\ell + m_\alpha)\,|\mathscr{U}_{\sigma,\ell}|^2 + (Q_\ell - m_\alpha)\,|\mathscr{W}_{\sigma,\ell}|^2\right] \tag{3.15}$$

transporté par l'onde réelle ℓ vaille ± 1 ; imposant $\mathscr{C}_\ell \in \mathbb{R}_+$, on trouve très facilement

$$\mathscr{C}_\ell = 2\sqrt{Q_\ell^2\,|E_\ell|\,|V_{\mathrm{g}}(Q_\ell)|}, \tag{3.16}$$

où

$$V_{\mathrm{g}}(Q_\ell) = c_\alpha^{(\mathrm{p})}\,\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial Q_\ell} = V_0 + c_\alpha^{(\mathrm{p})}\,\frac{Q_\ell(Q_\ell^2/2+1)}{E_\ell} \tag{3.17}$$

est la vitesse de groupe d'un mode de Bogoliubov ℓ dans le référentiel du laboratoire, c'est-à-dire dans le référentiel où le condensat s'écoule à vitesse constante $V_0 > 0$ dans le sens des x positifs.

Dans la limite des grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire lorsque $|Q_\ell| \ll 1$, les relations de dispersion (3.13a)–(3.13b) deviennent linéaires :

$$E_\ell \simeq \pm\,\frac{c_\alpha^{(\mathrm{p,d})}}{c_\alpha^{(\mathrm{p})}}\,Q_\ell, \quad \text{où} \quad c_\alpha^{(\mathrm{d})} = \sqrt{\frac{g_1 n_0}{2m}}\,\sqrt{1+\chi_\alpha}. \tag{3.18}$$

$c_\alpha^{(\mathrm{p})}$ [*cf.* équations (3.8)] et $c_\alpha^{(\mathrm{d})} > c_\alpha^{(\mathrm{p})}$ sont respectivement les vitesses des « phonons de polarisation » et « de densité » en amont ($\alpha = u$, $x < 0$) et en aval ($\alpha = d$, $x > 0$) de l'écoulement (dans le référentiel où $V_0 = 0$).

2. Ici, l'identification des modes propres en termes de fluctuations de polarisation ou de densité est exacte car la description (3.3) ne tient pas compte de l'effet Zeeman discuté en section 2.4.

3.4 Horizon acoustique pour les phonons de polarisation et identification des modes de diffusion

Si $\chi_u = g_{2,u}/g_1$ et $\chi_d = g_{2,d}/g_1$ $(0 < \chi_{u,d} < 1)$ sont choisis tels que $\chi_u < \chi_d$, on voit en s'aidant des équations (3.8) et (3.18) que les vitesses du « son de polarisation » $c_{u,d}^{(\mathrm{p})}$ et du « son de densité » $c_{u,d}^{(\mathrm{d})}$ de part et d'autre de $x = 0$ vérifient la relation d'ordre $c_d^{(\mathrm{p})} < c_u^{(\mathrm{p})} < c_u^{(\mathrm{d})} < c_d^{(\mathrm{d})}$. Si maintenant on contraint la vitesse V_0 du condensat à s'intercaler entre $c_d^{(\mathrm{p})}$ et $c_u^{(\mathrm{p})}$, c'est-à-dire si la valeur de V_0 est prise telle que

$$c_d^{(\mathrm{p})} < V_0 < c_u^{(\mathrm{p})} < c_u^{(\mathrm{d})} < c_d^{(\mathrm{d})}, \tag{3.19}$$

on crée un horizon acoustique pour les phonons de polarisation (et seulement pour ces derniers) en $x = 0$ (voir figure 3.1). Dans la région où x est négatif $(\alpha = u)$, la vitesse V_0 du fluide est plus petite que la vitesse du son $c_u^{(\mathrm{p})}$ des ondes de polarisation dans cette région [ce qui s'écrit aussi $m_u < 1$ au regard des définitions (3.9)] : l'écoulement entraîne les phonons de polarisation mais certains arrivent quand même à remonter les lignes de courant dans le demi-espace $x < 0$. Dans la région où x est positif $(\alpha = d)$, V_0 est cette fois-ci plus grande que la vitesse du son de polarisation $c_d^{(\mathrm{p})}$ dans cette région $(m_d > 1)$: dans le demi-espace $x > 0$, les « ondes sonores de polarisation » ne peuvent plus se propager à contre-courant car elles sont toutes entraînées par l'écoulement. Dès lors, à supposer qu'on mesure la polarisation du gaz en amont de l'horizon, on ne pourra manifestement jamais recevoir une onde sonore de polarisation émise en aval de l'horizon si tant est que la condition (3.19) soit vérifiée : le demi-espace $x < 0$ (respectivement $x > 0$) définit l'extérieur (respectivement l'intérieur) d'un trou noir acoustique pour les phonons de polarisation.

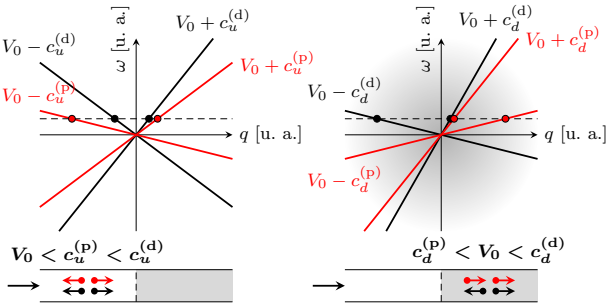


Figure 3.1 — Relations de dispersion (3.18) (dans le référentiel du laboratoire) des phonons de polarisation (en rouge) et de densité (en noir) étant donnée (3.19). Dans le demi-espace $x < 0$ $(\alpha = u)$, c'est-à-dire à l'extérieur du trou noir acoustique, les phonons de polarisation ont une vitesse de groupe $V_0 \pm c_u^{(\mathrm{p})} \gtrless 0$: ils se propagent dans le sens du courant mais aussi à contre-courant. Dans le demi-espace $x > 0$ $(\alpha = d)$, c'est-à-dire à l'intérieur du trou noir acoustique, les phonons de polarisation ont une vitesse de groupe $V_0 \pm c_d^{(\mathrm{p})} > 0$: tous se propagent dans le sens des x positifs et sont « happés » par le trou noir acoustique.

L'indice $\alpha = u, d$ dans l'équation (3.7) est remplacé par ℓ dans l'équation (3.12) afin d'identifier la branche des relations de dispersion $\varepsilon_\alpha(Q_\ell) = m_\alpha Q_\ell + E_\ell(Q_\ell)$ à laquelle l'excitation de Bogoliubov correspondante se rapporte. En fait, ℓ doit être interprété comme un double indice car la valeur des nombres d'onde Q_ℓ dépend de α [*cf.* équations (3.13a)–(3.13b)]. On identifie quatorze modes de Bogoliubov ℓ dans la configuration avec horizon

(3.19). En voici la liste [on se référera à la figure 3.2 qui donne une représentation graphique des relations de dispersion $\varepsilon_\alpha(Q)$ des excitations élémentaires dans le référentiel du laboratoire à l'extérieur et à l'intérieur du trou noir acoustique] :

1. À l'extérieur du trou noir acoustique ($\alpha = u$, $x < 0$) :
   - Modes de polarisation : $\ell \in \{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}, u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}, u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}\}$.
   - Modes de densité : $\ell \in \{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}, u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}, u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}\}$.
2. À l'intérieur du trou noir acoustique ($\alpha = d$, $x > 0$) :
   - Modes de polarisation : $\begin{cases} \ell \in \{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}, d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}, d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}, d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}\} & (\omega < \omega_*), \\ \ell \in \{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}, d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}, d^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}\} & (\omega > \omega_*). \end{cases}$
   - Modes de densité : $\ell \in \{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}, d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}, d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}\}$.

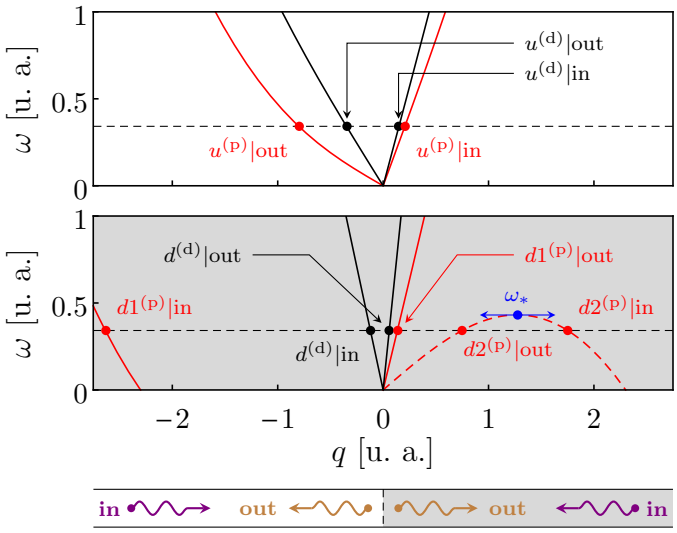


Figure 3.2 — Relation de dispersion des modes réels de polarisation (en rouge) et de densité (en noir) à l'extérieur (graphique du haut) et à l'intérieur (graphique du bas) du trou noir analogue [*cf.* équations (3.13a) et (3.13b)]. La ligne horizontale en pointillés noirs fixe l'énergie $\hbar\omega$ (dans le référentiel du laboratoire) transportée par un mode de Bogoliubov (de polarisation ou de densité) ℓ. Les nombres d'onde $q_\ell \in \mathbb{R}$ (dans le référentiel entraîné) correspondent aux abscisses des points d'intersection de cette droite avec les relations de dispersion. Le tronçon de courbe en pointillés rouges correspond aux modes propres de norme négative $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$ et $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}$ (voir le texte).

Les modes « in » (respectivement « out ») sont ceux dont la vitesse de groupe (dans le référentiel du laboratoire) $V_\mathrm{g}(Q_\ell)$ [*cf.* équation (3.17)] pointe vers l'horizon (respectivement vers $-\infty$ dans le demi-espace $x < 0$ et vers $+\infty$ dans le demi-espace $x > 0$). Les modes « eva » sont évanescents ; ils portent une impulsion complexe vérifiant $\mathrm{Im}(Q_\ell) < 0$ si $\ell = u^{(\mathrm{p,d})}|\mathrm{eva}$ [de sorte que $\exp(\mathrm{i}Q_\ell X_u) \to 0$ quand $X_u \to -\infty$] et $\mathrm{Im}(Q_\ell) > 0$ si $\ell = d^{(\mathrm{p,d})}|\mathrm{eva}$ [de sorte que $\exp(\mathrm{i}Q_\ell X_d) \to 0$ quand $X_d \to +\infty$]. Les modes $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$ et $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}$ sont de norme négative : $\sum_{\sigma=\pm1}(|\mathscr{U}_{\sigma,\ell}|^2 - |\mathscr{W}_{\sigma,\ell}|^2) < 0$ lorsque $\ell = d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}, \mathrm{out}$. Tous les autres sont de norme positive.

3.4 Horizon acoustique pour les phonons de polarisation et identification des modes de diffusion

On définit

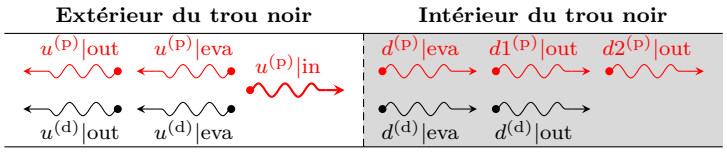
$$\Xi_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \overline{u}_{+,\alpha}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\alpha X_\alpha} \\ \overline{w}_{+,\alpha}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\alpha X_\alpha} \\ \overline{u}_{-,\alpha}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\alpha X_\alpha} \\ \overline{w}_{-,\alpha}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\alpha X_\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Xi_\ell(x) = \begin{pmatrix} \mathscr{U}_{+,\ell}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_\ell+m_\alpha)X_\alpha} \\ \mathscr{W}_{+,\ell}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_\ell-m_\alpha)X_\alpha} \\ \mathscr{U}_{-,\ell}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_\ell+m_\alpha)X_\alpha} \\ \mathscr{W}_{-,\ell}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_\ell-m_\alpha)X_\alpha} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Le vecteur Ξ_u décrit les excitations dans le demi-espace $x < 0$ (c'est-à-dire à l'extérieur du trou noir acoustique) ; il s'exprime comme une combinaison linéaire de $\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}$, $\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}$, $\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}}$, $\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}$, $\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}$ et $\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}$. Ξ_d décrit quant à lui les excitations dans le demi-espace $x > 0$ (c'est-à-dire à l'intérieur du trou noir acoustique) ; il s'exprime comme une combinaison linéaire de $\Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}$, $\Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}$, $\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}$, $\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}$, $\Xi_{d^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}}$, $\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}$, $\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}$ et $\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}$. Parmi tous les modes $\Xi_\alpha(x)$, nous focalisons notre attention sur les modes de diffusion $\Xi^L_\alpha(x)$. Une onde de Bogoliubov qui emprunte le canal d'incidence $u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$ (respectivement $d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$, $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$, $u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}$, $d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}$) initie le mode de diffusion $\Xi^{U^{(\mathrm{p})}}_{u,d}$ (respectivement $\Xi^{D1^{(\mathrm{p})}}_{u,d}$, $\Xi^{D2^{(\mathrm{p})}}_{u,d}$, $\Xi^{U^{(\mathrm{d})}}_{u,d}$, $\Xi^{D^{(\mathrm{d})}}_{u,d}$). Chaque mode de diffusion consiste en une combinaison linéaire de l'excitation « in » qui le définit et des excitations réfléchies et transmises « out » correspondantes :

- **Mode de diffusion $U^{(\mathrm{p})}$ (initié par l'onde $u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$) :**

$$\begin{aligned} \Xi^{U^{(\mathrm{p})}}_u &= \Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}} + S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} \\ &\quad + S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}, \end{aligned} \tag{3.21a}$$

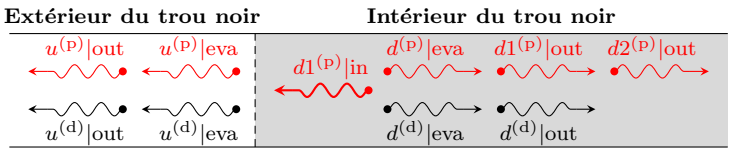
$$\begin{aligned} \Xi^{U^{(\mathrm{p})}}_d &= S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + \Theta(\omega_* - \omega)\,S_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + \Theta(\omega - \omega_*)\,S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} \\ &\quad + S_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}. \end{aligned} \tag{3.21b}$$



- **Mode de diffusion $D1^{(\mathrm{p})}$ (initié par l'onde $d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$) :**

$$\begin{aligned} \Xi^{D1^{(\mathrm{p})}}_u &= S_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} \\ &\quad + S_{u^{(\mathrm{d})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{d})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}, \end{aligned} \tag{3.22a}$$

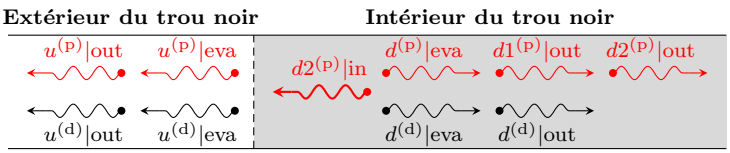
$$\begin{aligned} \Xi^{D1^{(\mathrm{p})}}_d &= \Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}} + S_{d1^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + \Theta(\omega_* - \omega)\,S_{d2^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} \\ &\quad + \Theta(\omega - \omega_*)\,S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} + S_{d^{(\mathrm{d})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{d})},d1^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}. \end{aligned} \tag{3.22b}$$



3.4 Horizon acoustique pour les phonons de polarisation et identification des modes de diffusion

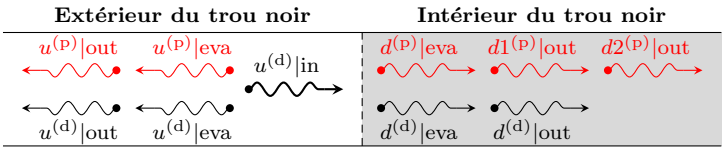
- **Mode de diffusion $D2^{(\mathrm{p})}$ (initié par l'onde $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$) :**

$$\begin{aligned}\Xi_u^{D2^{(\mathrm{p})}} &= \Theta(\omega_* - \omega)\,(S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} \\ &\quad + S_{u^{(\mathrm{d})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{d})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}), \qquad (3.23a)\\ \Xi_d^{D2^{(\mathrm{p})}} &= \Theta(\omega_* - \omega)\,(\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}} + S_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + S_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} \\ &\quad + S_{d^{(\mathrm{d})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{d})},d2^{(\mathrm{p})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}). \qquad (3.23b)\end{aligned}$$



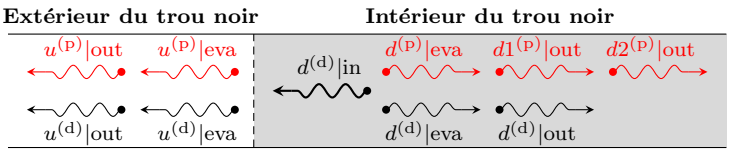
- **Mode de diffusion $U^{(\mathrm{d})}$ (initié par l'onde $u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}$) :**

$$\begin{aligned}\Xi_u^{U^{(\mathrm{d})}} &= \Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}} + S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} \\ &\quad + S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}, \qquad (3.24a)\\ \Xi_d^{U^{(\mathrm{d})}} &= S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + \Theta(\omega_* - \omega)\,S_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + \Theta(\omega - \omega_*)\,S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} \\ &\quad + S_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}. \qquad (3.24b)\end{aligned}$$



- **Mode de diffusion $D^{(\mathrm{d})}$ (initié par l'onde $d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}$) :**

$$\begin{aligned}\Xi_u^{D^{(\mathrm{d})}} &= S_{u^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} \\ &\quad + S_{u^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}, \qquad (3.25a)\\ \Xi_d^{D^{(\mathrm{d})}} &= \Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}} + S_{d1^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} + \Theta(\omega_* - \omega)\,S_{d2^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} \\ &\quad + \Theta(\omega - \omega_*)\,S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}} + S_{d^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}} + S^{\mathrm{eva}}_{d^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}}\,\Xi_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{eva}}. \qquad (3.25b)\end{aligned}$$



Les conditions de raccordement des fonctions d'onde (3.20) des excitations et de leurs dérivées premières à l'horizon s'écrivent ($L \in \{U^{(\mathrm{p})}, D1^{(\mathrm{p})}, D2^{(\mathrm{p})}, U^{(\mathrm{d})}, D^{(\mathrm{d})}\}$)

$$\Xi_u^L(0^-) = \Xi_d^L(0^+) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\xi_u}\frac{\mathrm{d}\Xi_u^L}{\mathrm{d}X_u}(0^-) = \frac{1}{\xi_d}\frac{\mathrm{d}\Xi_d^L}{\mathrm{d}X_d}(0^+). \qquad (3.26)$$

3.4 Horizon acoustique pour les phonons de polarisation et identification des modes de diffusion

La résolution des cinq systèmes linéaires 8×8 (3.26) permet de déterminer les coefficients $S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}$, $S^{\mathrm{eva}}_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}$, etc. apparaissant dans les équations (3.21a)–(3.25b). Ces paramètres dépendent de la pulsation ω des fluctuations et des constantes χ_α et m_α. Physiquement parlant, le module carré de $S_{i,j}(\omega)$ donne la probabilité qu'une onde de Bogoliubov $j|\mathrm{in}$ d'énergie $\hbar\omega$ subisse une diffusion élastique en $x = 0$ l'amenant dans l'état $i|\mathrm{out}$; les $|S_{i,j}(\omega)|^2$ correspondent donc aux coefficients de réflexion et de transmission à l'horizon du trou noir acoustique. Quelle que soit $\omega < \omega_*$, on montre que

$$\forall (i,j) \in \{u^{(\mathrm{d})}, d^{(\mathrm{d})}\} \times \{u^{(\mathrm{p})}, d1^{(\mathrm{p})}, d2^{(\mathrm{p})}\},\ S_{i,j}(\omega) = 0 = S_{j,i}(\omega), \tag{3.27}$$

et dans la limite des petites pulsations ($\varepsilon_u \to 0^+$), de longs calculs mènent à

$$\forall i \in \{u^{(\mathrm{p})}, d1^{(\mathrm{p})}, d2^{(\mathrm{p})}\},\ \begin{cases} S_{i,u^{(\mathrm{p})}}(\omega) = f_{i,u^{(\mathrm{p})}} + h_{i,u^{(\mathrm{p})}}\,\varepsilon_u + \mathcal{O}(\varepsilon_u^2), \\ S_{i,d1^{(\mathrm{p})}}(\omega) = \dfrac{f_{i,d1^{(\mathrm{p})}}}{\sqrt{\varepsilon_u}} + h_{i,d1^{(\mathrm{p})}}\sqrt{\varepsilon_u} + \mathcal{O}(\varepsilon_u^{3/2}), \\ S_{i,d2^{(\mathrm{p})}}(\omega) = \dfrac{f_{i,d2^{(\mathrm{p})}}}{\sqrt{\varepsilon_u}} + h_{i,d2^{(\mathrm{p})}}\sqrt{\varepsilon_u} + \mathcal{O}(\varepsilon_u^{3/2}), \end{cases} \tag{3.28a}$$

$$\text{et}\quad \forall (i,j) \in \{u^{(\mathrm{d})}, d^{(\mathrm{d})}\}^2,\ S_{i,j}(\omega) = f_{i,j} + h_{i,j}\,\varepsilon_u + \mathcal{O}(\varepsilon_u^2). \tag{3.28b}$$

Les identités (3.27) signifient que les modes incidents de polarisation (respectivement de densité) n'ont strictement aucune chance de se transformer en des modes sortants de densité (respectivement de polarisation). Dans les équations (3.28a) et (3.28b), les $f_{i,j}$ et $h_{i,j}$ sont des fonctions complexes non-triviales de χ_u, χ_d et m_u. Définissant la matrice de diffusion $\mathbf{S}(\omega < \omega_*)$ comme

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{ccc|cc} S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{u^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}} \\ S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{d1^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}} & S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{d1^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}} \\ S_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{d2^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}} & S_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{d2^{(\mathrm{p})},d^{(\mathrm{d})}} \\ \hline S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{d})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{d})},d2^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{u^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}} \\ S_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{d^{(\mathrm{d})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{d^{(\mathrm{d})},d2^{(\mathrm{p})}} & S_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{d^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}} \end{array}\right) \tag{3.29}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|cc} S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}} & 0 & 0 \\ S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{d1^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}} & 0 & 0 \\ S_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{d2^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & S_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{u^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}} \\ 0 & 0 & 0 & S_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{d^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}} \end{array}\right) \quad [\textit{cf.}\ (3.27)], \tag{3.30}$$

la conservation du courant transporté par les modes propres ℓ réels peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{S}^\dagger\,\eta\,\mathbf{S} = \eta = \mathbf{S}\,\eta\,\mathbf{S}^\dagger, \quad \text{où} \quad \eta = \mathrm{diag}(1,1,-1,1,1). \tag{3.31}$$

Les $S^{\mathrm{eva}}_{i,j}$ n'interviennent pas dans la définition (3.29)–(3.30) car les modes évanescents ne transportent aucun courant. Lorsque $\omega > \omega_*$, l'onde $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$ disparaît, l'onde réelle $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}$ est remplacée par l'onde évanescente $d^{(\mathrm{p})}|\mathrm{eva}$ et la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ devient dans ce

cas 4×4,

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{cc|cc} S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & 0 & 0 \\ S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} & S_{d1^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{u^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}} \\ 0 & 0 & S_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}} & S_{d^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}} \end{array}\right), \tag{3.32}$$

et unitaire :

$$\mathbf{S}^\dagger\,\mathbf{S} = \mathrm{diag}(1,1,1,1) = \mathbf{S}\,\mathbf{S}^\dagger. \tag{3.33}$$

3.5 Rayonnement de Hawking à deux corps : corrélations des fluctuations quantiques de la polarisation de part et d'autre de l'horizon

L'opérateur de champ $\delta\hat{\psi}_\sigma(x,t) = \hat{\psi}_\sigma(x,t) - \overline{\psi}_\sigma(x)$ qui décrit (dans la représentation de Heisenberg) les excitations élémentaires du condensat de fonction d'onde $\overline{\psi}_\sigma(x)$ ($\sigma = \pm 1$) se développe sur les modes de diffusion comme

$$\begin{aligned} &\delta\hat{\psi}_\sigma(x,t) = \\ &\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{L\in\{U^{(\mathrm{p})},D1^{(\mathrm{p})},U^{(\mathrm{d})},D^{(\mathrm{d})}\}} \left[\overline{u}_{\sigma,L}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\hat{a}_L(\omega) + \overline{w}^*_{\sigma,L}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\hat{a}^\dagger_L(\omega)\right] \\ &\quad + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x} \int_0^{\omega_*} \frac{\mathrm{d}\omega}{\sqrt{2\pi}} \left[\overline{u}_{\sigma,D2^{(\mathrm{p})}}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\hat{a}^\dagger_{D2^{(\mathrm{p})}}(\omega) + \overline{w}^*_{\sigma,D2^{(\mathrm{p})}}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\hat{a}_{D2^{(\mathrm{p})}}(\omega)\right], \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $\hat{a}^\dagger_L(\omega)$ crée une excitation d'énergie $\hbar\omega > 0$ dans l'un des cinq modes de diffusion ($U^{(\mathrm{p})}$, $D1^{(\mathrm{p})}$, $D2^{(\mathrm{p})}$, $U^{(\mathrm{d})}$ ou $D^{(\mathrm{d})}$). Les $\hat{a}_L(\omega)$ obéissent aux règles de commutation bosoniques

$$[\hat{a}_L(\omega), \hat{a}^\dagger_{L'}(\omega')] = \delta_{L,L'}\,\delta(\omega-\omega') \tag{3.35a}$$

$$\text{et} \quad [\hat{a}_L(\omega), \hat{a}_{L'}(\omega')] = 0 = [\hat{a}^\dagger_L(\omega), \hat{a}^\dagger_{L'}(\omega')], \tag{3.35b}$$

et vérifient

$$\langle \hat{a}^\dagger_L(\omega)\,\hat{a}_{L'}(\omega')\rangle = \delta_{L,L'}\,\delta(\omega-\omega')\,\mathscr{N}_L(\omega) \tag{3.36a}$$

$$\text{et} \quad \langle \hat{a}_L(\omega)\,\hat{a}^\dagger_{L'}(\omega')\rangle = \delta_{L,L'}\,\delta(\omega-\omega')\,[1+\mathscr{N}_L(\omega)], \tag{3.36b}$$

où

$$\mathscr{N}_L(\omega) = \langle \hat{a}^\dagger_L(\omega)\,\hat{a}_L(\omega)\rangle \tag{3.37}$$

est le nombre moyen de quasi-particules d'énergie $\hbar\omega$ dans le mode de diffusion L. Dans la suite, on se placera à température nulle, ce qui implique $\mathscr{N}_L(\omega) = 0$. Comparativement aux modes $U^{(\mathrm{p})}$, $D1^{(\mathrm{p})}$, $U^{(\mathrm{d})}$ et $D^{(\mathrm{d})}$, le mode de diffusion $D2^{(\mathrm{p})}$ (initié par l'onde de norme négative $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$) est quantifié d'une manière non-standard : comme on le voit à l'équation (3.34), les rôles joués par les créateurs et les annihilateurs sont dans ce cas échangés. Ce

choix de quantification est nécessaire pour que $\delta\hat{\psi}_\pm(x,t)$ soit un opérateur bosonique, c'est-à-dire un opérateur tel que

$$[\delta\hat{\psi}_\sigma(x,t), \delta\hat{\psi}^\dagger_{\sigma'}(x',t)] = \delta_{\sigma,\sigma'}\,\delta(x-x') \tag{3.38a}$$

$$\text{et}\quad [\delta\hat{\psi}_\sigma(x,t), \delta\hat{\psi}_{\sigma'}(x',t)] = 0 = [\delta\hat{\psi}^\dagger_\sigma(x,t), \delta\hat{\psi}^\dagger_{\sigma'}(x',t)]. \tag{3.38b}$$

On cherche maintenant à évaluer les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la polarisation $\hat{\pi}(x,t) = \sum_{\sigma=\pm1} \sigma\,\hat{\psi}^\dagger_\sigma(x,t)\,\hat{\psi}_\sigma(x,t)$. Pour ce faire, nous allons calculer le corrélateur à deux champs[3]

$$g^{(\mathrm{p})}(x,x') = \langle :\hat{\pi}(x,t)\,\hat{\pi}(x',t): \rangle = \langle \hat{\pi}(x,t)\,\hat{\pi}(x',t)\rangle - \delta(x-x')\,\langle \hat{n}(x,t)\rangle, \tag{3.39}$$

où $\hat{n}(x,t) = \sum_{\sigma=\pm1} \hat{\psi}^\dagger_\sigma(x,t)\,\hat{\psi}_\sigma(x,t)$ est l'opérateur densité. À l'ordre le plus bas, la fonction de corrélation (3.39) s'écrit

$$g^{(\mathrm{p})}(x,x') = \langle \delta\hat{\pi}(x,t)\,\delta\hat{\pi}(x',t)\rangle - \delta(x-x')\,n_0, \tag{3.40}$$

où le champ quantique

$$\delta\hat{\pi}(x,t) = \sqrt{\frac{n_0}{2}} \sum_{\sigma=\pm1} \sigma \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 x}\,\delta\hat{\psi}_\sigma(x,t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}\,\delta\hat{\psi}^\dagger_\sigma(x,t)\right] \tag{3.41}$$

décrit les fluctuations linéaires de la polarisation autour de l'état fondamental [dans lequel le système est linéairement polarisé, *cf.* équation (3.5) et la note de bas de page associée]. En s'aidant des définitions (3.34) et (3.41), on montre que le corrélateur $g^{(\mathrm{p})}(x,x')$ tel que donné par l'équation (3.40) s'écrit à température nulle sous la forme

$$g^{(\mathrm{p})}(x,x') = \frac{n_0}{2} \sum_{\sigma,\sigma'=\pm1} \sigma\,\sigma' \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega) - \delta(x-x')\,n_0, \tag{3.42}$$

où, définissant $\overline{r}_{\sigma,L}(x,\omega) = \overline{u}_{\sigma,L}(x,\omega) + \overline{w}_{\sigma,L}(x,\omega)$,

$$\begin{aligned} g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega) = &\sum_{L\in\{U^{(\mathrm{p})},D1^{(\mathrm{p})},U^{(\mathrm{d})},D^{(\mathrm{d})}\}} \overline{r}_{\sigma,L}(x,\omega)\,\overline{r}^*_{\sigma',L}(x',\omega) \\ &+ \Theta(\omega_* - \omega)\,\overline{r}^*_{\sigma,D2^{(\mathrm{p})}}(x,\omega)\,\overline{r}_{\sigma',D2^{(\mathrm{p})}}(x',\omega). \end{aligned} \tag{3.43}$$

De même, on montre que la fonction de corrélation à deux points

$$g^{(\mathrm{d})}(x,x') = \langle :\hat{n}(x,t)\,\hat{n}(x',t): \rangle = \langle \hat{n}(x,t)\,\hat{n}(x',t)\rangle - \delta(x-x')\,\langle \hat{n}(x,t)\rangle \tag{3.44}$$

$$= n_0^2 + \langle \delta\hat{n}(x,t)\,\delta\hat{n}(x',t)\rangle - \delta(x-x')\,n_0 \tag{3.45}$$

3. Nous avons pris soin de considérer l'ordre normal afin d'éliminer la divergence apparaissant dans l'évaluation du corrélateur « brut » $\langle \hat{\pi}(x,t)\,\hat{\pi}(x',t)\rangle$ lorsque x et x' sont arbitrairement voisins l'un de l'autre.

des fluctuations linéaires

$$\delta\hat{n}(x,t) = \sqrt{\frac{n_0}{2}} \sum_{\sigma=\pm 1} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 x}\, \delta\hat{\psi}_\sigma(x,t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}\, \delta\hat{\psi}^\dagger_\sigma(x,t) \right] \tag{3.46}$$

de la densité $\hat{n}(x,t)$ s'écrit à température nulle comme

$$g^{(\mathrm{d})}(x,x') = n_0^2 + \frac{n_0}{2} \sum_{\sigma,\sigma'=\pm 1} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega) - \delta(x-x')\, n_0. \tag{3.47}$$

Dans la suite, nous spécifions ce que vaut $g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega)$ [*cf.* équation (3.43)] dans le cas où $|x|, |x'| \gg \xi_\alpha$, c'est-à-dire dans le cas où x et x' sont loin de l'horizon à l'extérieur ($\alpha = u$) ou bien à l'intérieur ($\alpha = d$) du trou noir acoustique. Cela permet d'avoir une bonne estimation de $g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega)$ sans que l'on ait besoin de tenir compte des contributions évanescentes ; en effet, les modes de Bogoliubov qui transportent une impulsion complexe ne se propagent depuis l'horizon que sur des distances finies. Dans chaque cas ($x, x' \ll -\xi_u$, $x \ll -\xi_u$ et $x' \gg \xi_d$, $x \gg \xi_d$ et $x' \ll -\xi_u$, puis $x, x' \gg \xi_d$), nous précisons les identités déduites de l'η-unitarité (3.31) de la matrice $\mathbf{S}$ qui nous ont permis d'établir les formules (3.49), (3.51)–(3.52) et (3.54). On introduit la notation compacte $\mathscr{R}_{\sigma,\ell} = \mathscr{U}_{\sigma,\ell} + \mathscr{W}_{\sigma,\ell}$, où les amplitudes de Bogoliubov $\mathscr{U}_{\pm,\ell}$ et $\mathscr{W}_{\pm,\ell}$ sont données par les équations (3.14).

• $x \ll -\xi_u$ et $x' \ll -\xi_u$ (x et x' sont loin de l'horizon à l'extérieur du trou noir acoustique) :

$$\begin{cases} |S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}|^2 + |S_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}|^2 = 1 + \Theta(\omega_* - \omega)\, |S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}|^2, \\ |S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}}|^2 + |S_{u^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}}|^2 = 1. \end{cases} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned} g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega) = \\ & \mathscr{R}_{\sigma,u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}(X_u - X'_u)} \\ & + \mathscr{R}_{\sigma,u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}(X_u - X'_u)} \\ & + \mathscr{R}_{\sigma,u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}(X_u - X'_u)} \\ & + \mathscr{R}_{\sigma,u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}(X_u - X'_u)} \\ & + \left[\Theta(\omega_* - \omega)\, |S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}|^2\, \mathscr{R}_{\sigma,u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}(X_u - X'_u)} + \mathrm{c.c.} \right]. \end{aligned} \tag{3.49}$$

• $x \ll -\xi_u$ et $x' \gg \xi_d$ (x et x' sont loin de l'horizon respectivement à l'extérieur et à l'intérieur du trou noir acoustique) :

$$\begin{cases} S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} + S_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d1^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} = \Theta(\omega_* - \omega)\, S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}, \\ S_{u^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} + S_{u^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} = S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}, \\ S_{u^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}}\, S^*_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}} + S_{u^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}}\, S^*_{d^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}} = 0. \end{cases} \tag{3.50}$$

$$
\begin{aligned}
g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega) = \\
&\Theta(\omega_* - \omega)\, S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, \mathscr{R}_{\sigma,u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X_u - Q_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X'_d)} \\
&+ \Theta(\omega_* - \omega)\, S_{u^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, \mathscr{R}_{\sigma,u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_{u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X_u - Q_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X'_d)} \\
&+ \text{c.c.}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

• $x \gg \xi_d$ et $x' \ll -\xi_u$ (x et x' sont loin de l'horizon respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du trou noir acoustique) :

$$
g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega) = \text{équation (3.51)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_u \longleftrightarrow X'_u, \\ X'_d \longleftrightarrow X_d. \end{cases}
\tag{3.52}
$$

• $x \gg \xi_d$ et $x' \gg \xi_d$ (x et x' sont loin de l'horizon à l'intérieur du trou noir acoustique) :

$$
\begin{cases}
|S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}|^2 + |S_{d1^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}|^2 = 1 + \Theta(\omega_* - \omega)\, |S_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}|^2, \\
|S_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}|^2 + |S_{d2^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}|^2 = -1 + |S_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}|^2, \\
S_{d1^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},u^{(\mathrm{p})}} + S_{d1^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},d1^{(\mathrm{p})}} = S_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}, \\
|S_{d^{(\mathrm{d})},u^{(\mathrm{d})}}|^2 + |S_{d^{(\mathrm{d})},d^{(\mathrm{d})}}|^2 = 1.
\end{cases}
\tag{3.53}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\sigma,\sigma'}(x,x',\omega) = \\
&\mathscr{R}_{\sigma,d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}(X_d - X'_d)} \\
&+ \mathscr{R}_{\sigma,d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}(X_d - X'_d)} \\
&+ \Theta(\omega_* - \omega)\, \mathscr{R}^*_{\sigma,d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}\, \mathscr{R}_{\sigma',d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Q_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}}(X_d - X'_d)} \\
&- \Theta(\omega_* - \omega)\, \mathscr{R}_{\sigma,d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}(X_d - X'_d)} \\
&+ \mathscr{R}_{\sigma,d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}}(X_d - X'_d)} \\
&+ \mathscr{R}_{\sigma,d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}}(X_d - X'_d)} \\
&+ \Big[\Theta(\omega_* - \omega)\, |S_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}|^2\, \mathscr{R}_{\sigma,d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}(X_d - X'_d)} \\
&+ \Theta(\omega_* - \omega)\, |S_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}|^2\, \mathscr{R}_{\sigma,d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}(X_d - X'_d)} \\
&+ \Theta(\omega_* - \omega)\, S_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, \mathscr{R}_{\sigma,d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X_d - Q_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X'_d)} \\
&+ \Theta(\omega_* - \omega)\, S_{d2^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, S^*_{d1^{(\mathrm{p})},d2^{(\mathrm{p})}}\, \mathscr{R}_{\sigma,d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathscr{R}^*_{\sigma',d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q_{d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X_d - Q_{d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}} X'_d)} \\
&+ \text{c.c.}\Big].
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Tirant parti des équations (3.14), on voit que $\sum_{\sigma=\pm1}\sigma\,\mathscr{R}_{\sigma,\ell} = \mathscr{U}_{+,\ell} + \mathscr{W}_{+,\ell} - \mathscr{U}_{-,\ell} - \mathscr{W}_{-,\ell} = 0$ si ℓ désigne l'un des quatre modes réels de densité ($u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}$, $u^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}$, $d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{in}$ ou $d^{(\mathrm{d})}|\mathrm{out}$) et que $\sum_{\sigma=\pm1}\mathscr{R}_{\sigma,\ell} = \mathscr{U}_{+,\ell} + \mathscr{W}_{+,\ell} + \mathscr{U}_{-,\ell} + \mathscr{W}_{-,\ell} = 0$ si ℓ désigne l'un des six modes réels de polarisation ($u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$, $u^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}$, $d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$, $d1^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}$, $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{in}$ ou $d2^{(\mathrm{p})}|\mathrm{out}$). Ainsi, étant données (3.42) et (3.47), il vient que seuls les monômes indicés par l'appellation des modes de polarisation (respectivement de densité) dans les équations (3.49), (3.51)–(3.52) et (3.54) contribuent à l'évaluation du corrélateur $g^{(\mathrm{p})}(x,x')$ [respectivement $g^{(\mathrm{d})}(x,x')$] des fluctuations de la polarisation (respectivement de la densité) lorsque x et x' sont loin du même côté ou de part et d'autre de l'horizon. Partant de ce constat, on remarque que le signal qui décrit les corrélations à deux points des fluctuations de la densité est diagonal dans le plan $\{x,x'\}$ (c'est-à-dire homogène sur tout $\mathbb{R}^2$ sauf autour de la ligne d'équation $x'=x$, sur un domaine où $|x-x'| \lesssim \xi_\alpha$), comme ce que l'on a en l'absence d'horizon acoustique, c'est-à-dire dans une configuration où la constante de couplage $g_2(x) = g_{+,-}(x) = g_{-,+}(x)$ et le potentiel $U(x)$ sont uniformes sur tout $\mathbb{R}$; dans ce cas, on montre que le corrélateur densité/densité $g^{(\mathrm{d})}(x,x')$ peut en effet s'écrire sous la forme

$$g^{(\mathrm{d})}(x,x') = n_0^2 + \frac{n_0}{\xi}\sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}}\,F\left(\sqrt{\frac{1+\chi}{1-\chi}}\,\frac{x-x'}{\xi}\right), \tag{3.55}$$

où $\xi = \hbar/(mc^{(\mathrm{p})})$, $c^{(\mathrm{p})} = \sqrt{g_1 n_0(1-\chi)/(2m)}$, $\chi = g_2/g_1 = \mathrm{cste} \in \,]0,1[$ et où F s'exprime en fonction de la fonction de Bessel modifiée de première espèce I_1 et de la fonction de Struve modifiée $\mathbf{L}_{-1}$ [4] :

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}} - 1\right)\cos(z\,t) = I_1(2|z|) - \mathbf{L}_{-1}(2z). \tag{3.57}$$

Le fait que la fonction de corrélation densité/densité (3.47) soit — à l'instar du corrélateur (3.55) — diagonale est évident dans la mesure où les phonons de densité ne ressentent la présence d'aucun horizon acoustique, contrairement aux modes de polarisation de grandes longueurs d'onde [voir l'équation (3.19) et la discussion associée]. L'allure de la fonction de corrélation polarisation/polarisation

$$g^{(\mathrm{p})}(x,x') = \frac{n_0}{\xi}\,F\left(\frac{x-x'}{\xi}\right) \tag{3.58}$$

dans le cas où $g_2(x), U(x) = \mathrm{cstes}$ (*cf.* figure 3.3) est quant à elle profondément modifiée en présence de l'horizon acoustique (3.19). Les équations (3.49) et (3.54) montrent en effet que

4. La fonction F définie par l'équation (3.57) est la même que celle définie par l'équation (1.117). Cela se voit en comparant leur expression commune en termes des fonctions spéciales I_1 et $\mathbf{L}_{-1}$ ou bien en transformant la représentation intégrale de F dans l'équation (3.57) au moyen d'une intégration par parties et d'un changement de variable trivial :

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}} - 1\right)\cos(z\,t) = -\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{4}{(t^2+4)^{3/2}}\,\frac{\sin(z\,t)}{z} = -\frac{1}{z}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{\sin(z\times 2t)}{(t^2+1)^{3/2}}. \tag{3.56}$$

la présence de l'horizon modifie l'aspect du signal diagonal (3.58) tandis que les équations (3.51)–(3.52) révèlent l'existence de corrélations à deux corps non-locales ($|x - x'| > \xi_\alpha$) entre deux modes « out » de polarisation situés de part et d'autre de l'horizon. Ces signaux non-diagonaux témoignent d'un rayonnement de Hawking d'ondes de polarisation dans le système dans le sens où ils s'interprètent (dans la limite hydrodynamique) comme résultant de la corrélation de deux modes de polarisation de grandes longueurs d'onde fuyant l'horizon acoustique, l'un remontant les lignes de courant en amont de l'écoulement (x ou $x' < 0$), l'autre étant « happé » par le trou noir en aval de l'écoulement (x' ou $x > 0$, respectivement).

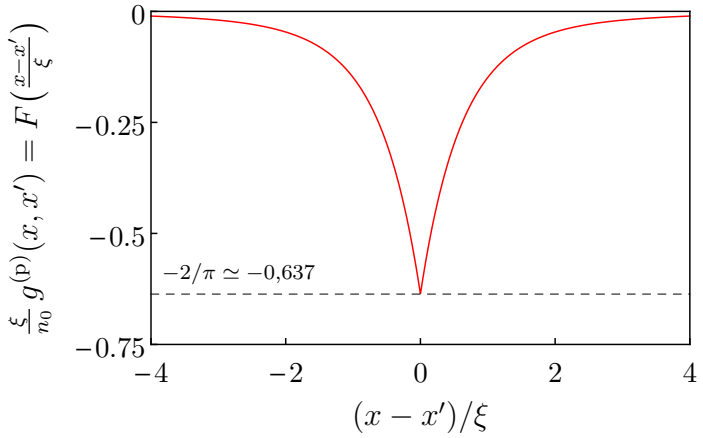


Figure 3.3 — Fonction de corrélation polarisation/polarisation (3.58) en l'absence d'horizon et à température nulle. Dans ce cas, les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la polarisation sont de courte portée : lorsque la séparation $|x - x'|$ devient typiquement plus grande que ξ, le corrélateur $g^{(\mathrm{p})}(x, x')$ devient négligeable.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une configuration permettant de réaliser un horizon acoustique pour les modes de polarisation de grandes longueurs d'onde dans l'écoulement d'un condensat de Bose–Einstein unidimensionnel à deux composantes de spin (relire la section 3.2 et le premier paragraphe de la section 3.4).

Comme nous venons de le montrer en section 3.5, les corrélations à deux points des fluctuations quantiques de la polarisation dans le condensat spinoriel sont fortement modifiées lorsque l'écoulement du fluide présente l'horizon acoustique (3.19). Si les corrélations polarisation/polarisation sont purement diagonales en l'absence d'horizon [*cf.* équation (3.58) et/ou figure 3.3], elles ne le sont plus exclusivement en présence d'horizon. Des signaux de corrélation à longue portée apparaissent dans ce cas. Ils sont associés à l'émission corrélée de deux « phonons de polarisation » de part et d'autre de l'horizon — l'un s'échappant du trou noir acoustique, l'autre s'y engouffrant —, et représentent donc des signatures directes d'un rayonnement de Hawking (d'ondes de polarisation) à deux corps.

Les résultats exposés en section 3.5 sont obtenus à température nulle mais leur interprétation physique ne change pas lorsque les effets thermiques sont pris en compte (bien que les calculs soient dans ce cas plus lourds à mettre en œuvre).

Nous avons pleinement conscience que la configuration de trou noir proposée dans ce chapitre est trop schématique pour qu'elle puisse être réalisée expérimentalement. En effet, elle nécessite l'existence d'un potentiel extérieur (3.2) dont l'intensité (discontinue) doit être réglée de sorte que le potentiel chimique (3.6) soit indépendant de la position. Néanmoins, la description 3.2, qui suppose une densité homogène en tout point du condensat, a l'avantage de permettre un traitement analytique simple des fluctuations quantiques de la polarisation et de la densité du gaz dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires. De plus, à la lumière du chapitre 1, nous savons que les résultats tirés de l'étude des corrélations à deux points des fluctuations — révélatrices du rayonnement de Hawking — dans des configurations de trous muets réalistes s'interprètent de la même façon que ceux obtenus dans le cadre de la configuration dite « de profil plat » (*cf.* sous-section 1.2.2 du chapitre 1), qui est le pendant pour un condensat scalaire de la configuration étudiée dans ce chapitre.

Comme dans les références [12] et [30] dans lesquelles les auteurs ont pour la première fois proposé de mettre en évidence le rayonnement de Hawking dans un condensat atomique non-polarisé *via* les corrélations des fluctuations quantiques de la densité, nous aurions très bien pu proposer une configuration de trou noir acoustique relative aux « phonons de densité ». Nous l'avons plutôt fait relativement aux modes de polarisation car nous avions en tête — et avons le projet — d'étendre les résultats présentés dans ce chapitre à des systèmes dissipatifs tels que les condensats de polaritons, dans lesquels l'amortissement dû au temps de vie fini de leurs constituants n'affecte que légèrement les ondes de polarisation, comme nous l'avons expliqué en section 2.4 du chapitre 2.

3.7 P.-É. L. et N. Pavloff, Prépublication

Hawking radiation in a two-component Bose-Einstein condensate

P.-É. Larré[1] and N. Pavloff[1]

[1] *Univ. Paris Sud, CNRS, L.P.T.M.S., UMR8626 - 91405 Orsay, France*

PACS 03.75.Mn – Multicomponent condensates
PACS 04.62.+v – Quantum fields in curved spacetime
PACS 04.70.Dy – Quantum aspects of black holes

Abstract – We consider a simple realization of an event horizon in the flow of a one-dimensional two-component Bose-Einstein condensate. Such a condensate has two types of quasiparticles; In the system we study, one corresponds to density fluctuations and the other to polarization fluctuations. We treat the case where a horizon occurs only for one type of quasiparticles (the polarization ones). We study the one- and two-body signal associated to the analog of spontaneous Hawking radiation and demonstrate by explicit computation that it consists only in the emission of polarization waves. We discuss the experimental consequences of the present results in the domain of atomic Bose-Einstein condensates and also for the physics of exciton-polaritons in semiconductor microcavities.

An intense research activity has been developed in the recent years aiming at identifying Hawking radiation in several analog models of gravity (see refs. [1, 2] for recent reviews). The possible black hole configurations realized in an analogous system all rely on the remark by Unruh [3] that if the flow of a fluid has, while remaining stationary, a transition from a subsonic upstream region to a supersonic downstream region, the interface between these two regions behaves as an event horizon for sound waves. The supersonic region mimics the interior of a black hole since no sound can escape from it (one speaks of "dumb hole"). This analogy is richer than a mere realization of a sonic event horizon: Quantum virtual particles can tunnel out near the horizon and are then separated by the background flow giving rise to correlated currents emitted away from the region of the horizon (both inside and outside of the black hole), in exact correspondence with the original scenario of Hawking radiation [4].

Among the prominent experimental configurations where a sonic horizon has been realized one can quote the use of ultrashort pulses moving in optical fibers [5] or in a dielectric medium [6], the study of the flow of a Bose-Einstein condensate (BEC) past an obstacle [7], of a laser propagating in a nonlinear luminous liquid [8], or of surface waves on moving water [9, 10]. Several recent theoretical works proposed other realizations of an artificial event horizon, using for instance an electromagnetic wave guide [11] (or more recently a SQUID array transmission line [12]), ring-shaped chain of trapped ions [13], graphene [14, 15], or edge modes of the filling fraction $\nu = 1$ quantum Hall system [16]. Among these theoretical proposals, the ones employing an exciton-polariton superfluid [17,18] deserve special attention because they could be realized in a near future. Such systems are specific because polaritons have an effective spin 1/2 and, as we will see below, this has important qualitative consequences on the expected Hawking signal.

In the present work we study the possible signatures of Hawking radiation in a generic two-component BEC system. Such a system is peculiar in the sense that it sustains two types of elementary excitations, with different long-wavelength velocities. This makes it possible to realize a unique configuration where an event horizon occurs for one type of excitations but not for the other. The associated artificial black hole could be experimentally implemented in a polariton condensate (such as proposed in ref. [18]), but also in a two-species BEC such as realized by considering for instance ^{87}Rb in two hyperfine states [19], or a mixture of two elements [20], or different isotopes of the same atom [21]. A general theory of such systems requires to consider a wide range of parameters and of different situations corresponding to possibly different masses of the two species, to different strengths and signs of intra- and inter-species interactions, to different types of external potentials (possibly species-dependent) and of coupling between the two components. In the present work we consider a

simple model which captures the essential physical ingredients and characteristics of the phenomenon: The order parameter of the two-component BEC is described by a one-dimensional (1D) two-component Heisenberg field operator $(\hat\psi_+(x,t), \hat\psi_-(x,t))$ obeying a set of coupled Gross-Pitaevskii equations:

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\hat\psi_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2\hat\psi_\pm + U(x)\,\hat\psi_\pm + \left[g_1\,\hat n_\pm + g_2(x)\,\hat n_\mp\right]\hat\psi_\pm - \mu\,\hat\psi_\pm\,. \tag{1}$$

In this equation $\hat n_\pm(x,t) = \hat\psi_\pm^\dagger(x,t)\,\hat\psi_\pm(x,t)$ is the density of the $(\pm)$-component, $U(x)$ is an external potential, μ is the chemical potential, and g_1 (g_2) is the intra-species (inter-species) contact-interaction coupling constant. We choose to work in a configuration where $0 < g_2 < g_1$. This is quite realistic for atomic condensates (provided one neglects the small difference of the interaction constant between $+/+$ and $-/-$ components). For excitonic polaritons it is accepted that $g_1 > 0$ and that $|g_2| < g_1$, in agreement with the observed overall repulsion between polaritons, but it is typically believed that $g_2 < 0$. However, depending on the detuning between the photon and the exciton modes (and on the proximity with the bi-exciton resonance), g_2 may be positive or negative, as observed in refs. [22, 23]. Our choice to consider the case of a positive g_2 parameter will make it possible to treat a setting where the event horizon occurs for a flow velocity inferior to the one of ordinary sound.

We consider an idealized model in which g_2 and the external potential U both depend on x in a way that ensures the existence of a homogeneous and stationary classical solution of eq. (1) of the form

$$\Psi_\pm(x) = \sqrt{n_0/2}\,\exp(\mathrm{i}k_0x)\,. \tag{2}$$

This can be realized by considering a step-like configuration for which $U(x) = U_u\,\Theta(-x) + U_d\,\Theta(x)$ and $g_2(x) = g_{2,u}\,\Theta(-x) + g_{2,d}\,\Theta(x)$ (where Θ is the Heaviside step function) with

$$U_u + g_{2,u}\,n_0/2 = U_d + g_{2,d}\,n_0/2\,. \tag{3}$$

The order parameter (2) describes a uniform flow in which both components have the same density $n_0/2$ and the same velocity $V_0 = \hbar k_0/m$. We consider the case $V_0 > 0$, and denote the $x < 0$ ($x > 0$) region as the upstream (downstream) region. In each of these regions the long-wavelength elementary excitations consist either in density or in polarization fluctuations with respective velocities denoted as $c_\alpha^{(d)}$ and $c_\alpha^{(p)}$ ($\alpha = u$ or d, depending if one considers the upstream or the downstream region). $c_\alpha^{(d)}$ is the usual speed of sound whereas $c_\alpha^{(p)}$ will be termed "polarization sound velocity"; Their precise definition will be given later [after Eqs. (6) and (7)]. As illustrated in fig. 1 we choose the parameters of the system in such a way that

$$c_d^{(p)} < V_0 < c_u^{(p)} < c_u^{(d)} < c_d^{(d)}\,. \tag{4}$$

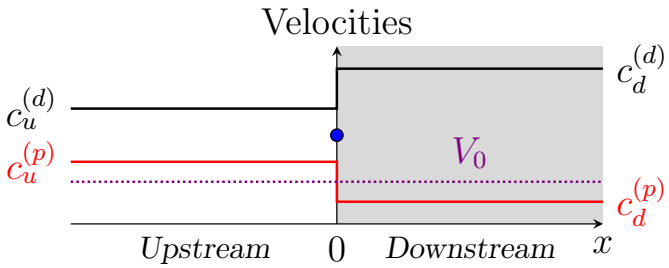


Fig. 1: Velocities of the ordinary sound $c^{(d)}$ (black solid line) and of the polarization sound $c^{(p)}$ (red solid line) as a function of x. The dotted horizontal line represents the constant velocity V_0 of the flow. The blue dot is the reference velocity $\sqrt{g_1 n_0/(2m)}$. The downstream region is shaded in order to recall that it corresponds to the interior of the black hole.

Then the point $x = 0$ is an event horizon for the fluctuations of polarization but not for the fluctuations of density (the usual sound).

Note that the configuration we consider is of the same type as the one considered in refs. [24, 25] for a one-component system, and seems rather awkward: It consists in a uniform flow of a 1D BEC in which the two-body interaction varies spatially (in order to locally modify the speed of polarization sound in the system) although the velocity and the density of the flow remain constant. This is only possible in the presence of an external potential specially tailored so that the local chemical potential remains constant everywhere [this is ensured by eq. (3)]. This makes the whole system quite difficult to realize experimentally. However, it was shown in refs. [26] and [18] that the Hawking radiation associated to this configuration has the same properties as others associated to more realistic realizations of an event horizon in a BEC or a polariton condensate.

The black hole configuration being fixed, we now characterize the spontaneous Hawking emission by studying the quantum Bogoliubov excitations of the system, in a manner similar to what has been done in refs. [27–29]. The most efficient way to characterize the different branches of the dispersion relation is to consider the classical (or more precisely first quantized) version of eq. (1). One writes the order parameter as $\psi_\pm(x,t) = \Psi_\pm(x) + \delta\psi_\pm(x,t)$ with $|\delta\psi_\pm| \ll |\Psi_\pm|$. In a region where $U(x)$ and $g_2(x)$ have the constant value U_α and $g_{2,\alpha}$ ($\alpha = u$ or d) the fluctuations with given pulsation ω on top of the background (2) are of the form

$$\delta\psi_\pm(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}\left[u_{\pm,\alpha}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + w_{\pm,\alpha}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right], \tag{5}$$

where the $u_{\pm,\alpha}$'s and the $w_{\pm,\alpha}$'s are plane waves of momentum $\hbar\,q$. The corresponding dispersion relations are represented in fig. 2. The curves corresponding to density fluctuations are represented in black in the figure. Their dispersion relation reads

$$(\omega - V_0\,q)^2 = [c_\alpha^{(d)}]^2q^2 + \frac{\hbar^2q^4}{4m^2}\,, \tag{6}$$

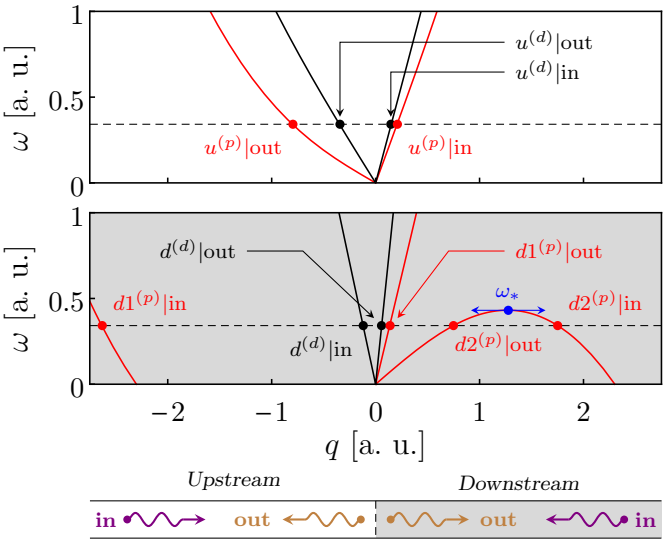


Fig. 2: Upstream (upper plot) and downstream (middle plot) dispersion relations. The red (black) curves correspond to polarization (density) modes. In each plot the horizontal dashed line is fixed by the chosen value of ω. The labeling of the different branches is explained in the text. The abscissae of the dots fix the values of the wavevector $q(\omega)$ corresponding to each branch. The lower diagram illustrates the terminology used in the main text for denoting the waves as outgoing or ingoing. As in fig. 1, the downstream region is shaded in order to recall that it corresponds to the interior of the black hole.

with $m[c_\alpha^{(d)}]^2 = \frac{1}{2}(g_1 + g_{2,\alpha})n_0$ ($\alpha = u$ or d). In the left-hand side of eq. (6) the term $-V_0\, q$ is a Doppler shift indicating that the dispersion relation is evaluated in the laboratory frame in which the flow has a constant and uniform velocity V_0. In the upstream region the different channels corresponding to (6) are denoted as $u^{(d)}$|in and $u^{(d)}$|out, where the u stands for "upstream", the (d) for "density" and the "in" (the "out") labels the wave whose group velocity is directed towards (away from) the horizon. What is considered as an ingoing or an outgoing wave is pictorially represented in the lower diagram of fig. 2. In the downstream region the channels are accordingly denoted as $d^{(d)}$|in and $d^{(d)}$|out (see fig. 2).

The curves corresponding to fluctuations of the polarization $[\pi(x,t) = n_+(x,t) - n_-(x,t)]$ are represented in red in figure 2. Their dispersion relation is

$$(\omega - V_0\, q)^2 = [c_\alpha^{(p)}]^2 q^2 + \frac{\hbar^2 q^4}{4m^2}\,, \tag{7}$$

with $m[c_\alpha^{(p)}]^2 = \frac{1}{2}(g_1 - g_{2,\alpha})n_0$. In the upstream region the corresponding channels are denoted as $u^{(p)}$|in and $u^{(p)}$|out. In the downstream region, $V_0 > c_d^{(p)}$, and new branches appear in the dispersion relation of polarization waves. Altogether in this region the branches are denoted as $d1^{(p)}$|in, $d1^{(p)}$|out, $d2^{(p)}$|in and $d2^{(p)}$|out (see fig. 2). In the following we refer to the quasiparticles corresponding to the dispersion relation (6) as density quasiparticles and to those corresponding to (7) as polarization quasiparticles.

The existence of the discontinuity in the parameters of the system at $x = 0$ prevents the channels we have just identified for an hypothetical homogeneous configuration to be the true eigenmodes of the system. The correct eigenmodes are linear combinations of the channels in the upstream region and channels in the downstream one, with appropriate matching at $x = 0$. Among all the possible combinations, we are primarily interested in the scattering modes which describe a plane-wave excitation originating from infinity – either upstream or downstream – on a well defined ingoing channel, impinging on the horizon, and then leaving again towards infinity as a superposition of the outgoing branches. When ω is lower than the threshold ω_* identified in fig. 2, there are 5 ingoing channels and 5 outgoing ones. The corresponding scattering amplitudes form a 5×5 S matrix which can be shown to be block diagonal:

$$S = \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & 0 \\ & S^{(p,p)} & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & S^{(d,d)} \end{array}\right), \tag{8}$$

with

$$S^{(p,p)} = \begin{pmatrix} S_{u^{(p)},u^{(p)}} & S_{u^{(p)},d1^{(p)}} & S_{u^{(p)},d2^{(p)}} \\ S_{d1^{(p)},u^{(p)}} & S_{d1^{(p)},d1^{(p)}} & S_{d1^{(p)},d2^{(p)}} \\ S_{d2^{(p)},u^{(p)}} & S_{d2^{(p)},d1^{(p)}} & S_{d2^{(p)},d2^{(p)}} \end{pmatrix}, \tag{9a}$$

$$S^{(d,d)} = \begin{pmatrix} S_{u^{(d)},u^{(d)}} & S_{u^{(d)},d^{(d)}} \\ S_{d^{(d)},u^{(d)}} & S_{d^{(d)},d^{(d)}} \end{pmatrix}. \tag{9b}$$

For instance the $S_{u^{(p)},d1^{(p)}}$ matrix element denotes the (complex and ω-dependent) scattering coefficient from the ingoing downstream channel $d1^{(p)}$|in towards the outgoing upstream channel $u^{(p)}$|out. As discussed in refs. [26,28,29], current conservation imposes a skew unitarity of the S matrix: $S^\dagger \eta S = \eta$, where here $\eta = \mathrm{diag}(1,1,-1,1,1)$. When ω is larger than the maximum ω_* of the $d2^{(p)}$ branches (see fig. 2) the $d2$|in and $d2$|out channels disappear, the $S^{(p,p)}$ submatrix becomes 2×2, and the now 4×4 S matrix obeys the usual unitarity condition $S^\dagger S = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$.

We computed the coefficients of the S matrix both analytically (in the low-ω region) and numerically (for unrestricted values of ω). We checked the excellent agreement between the two approaches in their common range of validity (i.e., at $\omega \to 0$) and also that the current conservation conditions are verified, exactly in the analytical approach, and with a high degree of accuracy in the numerical treatment (the error is always less than 10^{-7}). All the matrix coefficients of the form $S_{i,d1^{(p)}}$ and $S_{i,d2^{(p)}}$ with $i \in \{u^{(p)}, d1^{(p)}, d2^{(p)}\}$ (i.e., the two right most columns of $S^{(p,p)}$) diverge at low ω. This is connected to the fact that the associated Wigner time delay diverges: Low-energy polarization quasiparticles entering the system *via* the $d1^{(p)}$|in or the $d2^{(p)}$|in channels – i.e., from the interior of the black hole – remain blocked at the horizon forever:

This is a signature of the occurrence of an event horizon for the polarization modes. On the contrary, low-energy density quasiparticles entering the system from the downstream region can escape the black hole, since we work in a configuration where the horizon does not affect the density fluctuations (see fig. 1). Of course all quasiparticles entering the system from the upstream region can cross the horizon and penetrate into the black hole.

Within the present Bogoliubov analysis, the knowledge of the S matrix of the system makes it possible to characterize the Hawking signal which corresponds to emission of radiation from the interior toward the exterior of the black hole. In our specific case the energy current associated to emission of elementary excitations is (cf. [30])

$$Q(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{\sigma=\pm1}\left\langle \partial_t\hat\psi^\dagger_\sigma(x,t)\,\partial_x\hat\psi_\sigma(x,t)\right\rangle + \text{H.c.}\,, \quad (10)$$

where "H.c." stands for "Hermitian conjugate". $Q(x,t)$ is here time and position-independent in agreement with the conservation of the energy flux in a stationary configuration. Computing its expression far upstream ($x\to-\infty$) one can show, as expected, that the current is only carried by the $u^{(p)}|$out channel and is, at zero temperature, given by the formula

$$Q = -\int_0^{\omega_*}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\hbar\omega\left|S_{u^{(p)},d2^{(p)}}(\omega)\right|^2. \quad (11)$$

Hence the quantity $|S_{u^{(p)},d2^{(p)}}(\omega)|^2$ characterizes the emission spectrum of Hawking radiation. Although we consider a setting with step-like variations of the external parameters, resulting in an infinite effective surface gravity, the Hawking spectrum is still thermal like, i.e., approximately of the form

$$\left|S_{u^{(p)},d2^{(p)}}(\omega)\right|^2 \simeq \frac{\Gamma}{\exp\left(\frac{\hbar\,\omega}{k_{\rm B}T_{\rm H}}\right)-1}\,, \quad (12)$$

where $k_{\rm B}$ is the Boltzmann constant, Γ is denoted as the gray-body factor and $T_{\rm H}$ is the Hawking temperature. Since we have computed the explicit low-ω expression of the coefficients of the S matrix, we can determine $T_{\rm H}$ and Γ by a low-ω fit of expression (12). In particular one obtains the following explicit expressions for the reduced Hawking temperature $\mathcal{T}_{\rm H} = k_{\rm B}T_{\rm H}/m[c_u^{(p)}]^2$ and for the gray-body factor:

$$\mathcal{T}_{\rm H} = \frac{1}{2}\frac{m_u^2}{m_d}\frac{(1-m_u^2)(m_d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{m_d^2-m_u^2}\,, \quad \Gamma = \frac{4m_u}{(1+m_u)^2}\,, \quad (13)$$

where $m_\alpha = V_0/c_\alpha^{(p)}$ is the (polarization) Mach number in region α ($\alpha = u$ or d and $m_u < 1 < m_d$).

The numerically determined $|S_{u^{(p)},d2^{(p)}}|^2$ is compared in fig. (3) with the thermal spectrum (12) where $T_{\rm H}$ is given by (13). The plot is done in a configuration where $m_u = 0.7$, $m_d = 3$ and $g_{2,u}/g_1 = 0.2$. In the type of setting we consider, fixing these three parameters determines

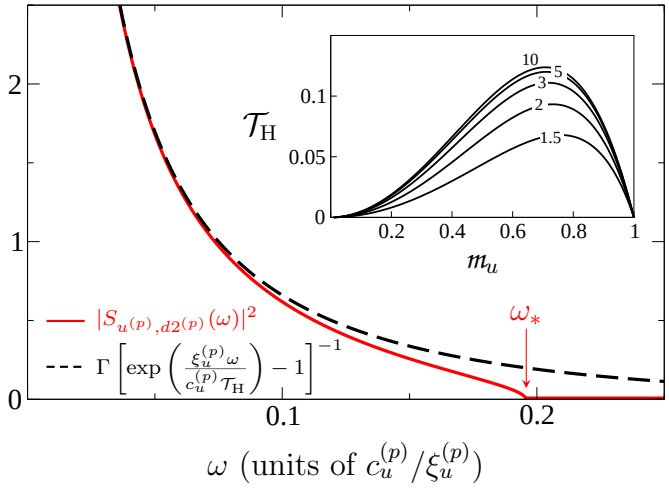


Fig. 3: $|S_{u^{(p)},d2^{(p)}}|^2$ (red solid line) and its approximation by eq. (12) (black dashed line) as a function of ω. We consider the case $m_u = 0.7$ and $m_d = 3$. With the present choice of parameters, $\Gamma \simeq 0.969$, $\mathcal{T}_{\rm H} \simeq 0.111$ and $\omega_*\xi_u^{(p)}/c_u^{(p)} \simeq 0.196$, where $\xi_u^{(p)} = \hbar/(mc_u^{(p)})$. The inset displays $\mathcal{T}_{\rm H}$ as a function of m_u for several values of m_d ($m_d = 1.5,\ldots,10$).

all the other relevant quantities of the system. In particular one has here $g_{2,d}/g_1 \simeq 0.956$, $V_0/c_u^{(d)} \simeq 0.572$ and $V_0/c_d^{(d)} \simeq 0.448$. As expected one sees in the figure that the (numerically) exact spectral density $|S_{u^{(p)},d2^{(p)}}|^2$ coincides with a thermal gray-body emission at low energy. Note however that $|S_{u^{(p)},d2^{(p)}}|^2$ is strictly zero for $\omega > \omega_*$ since above this threshold the $d2^{(p)}|$in and $d2^{(p)}|$out channels disappear and the S matrix becomes 4×4.

Formulas (13) show that the Hawking temperature is roughly of order of $m[c_u^{(p)}]^2$, which itself is of order of the chemical potential of the system. In atomic condensates the chemical potential is of order of the temperature of the system and the Hawking current will be hidden by the thermal noise. In polariton systems the chemical potential is typically of order of 0.5 meV and low temperature experiments could in principle distinguish the Hawking current from the thermal noise.

We now consider an other experimental observable which can reveal the Hawking phenomenon even in the presence of a realistic thermal noise. As first explicitly pointed out in refs. [24,25], in analog systems an external observer is able to measure correlations across the horizon revealing the existence of the Hawking current (see also refs. [26,28,29,31,32]). For the present setting we expect that these correlations are due to pair-wise emission of polarization quasiparticles on both sides of the horizon. The polarization density operator in our system is $\hat\pi(x,t) = \hat n_+(x,t) - \hat n_-(x,t)$. In the configuration we consider it has zero mean [$\langle\hat\pi(x,t)\rangle = 0$] and the corresponding correlation signal is time-independent:

$$\begin{aligned} g^{(p)}(x,x') &= \langle :\hat\pi(x,t)\,\hat\pi(x',t):\rangle \\ &= \langle\hat\pi(x,t)\,\hat\pi(x',t)\rangle - \delta(x-x')\,n_0\,. \end{aligned} \quad (14)$$

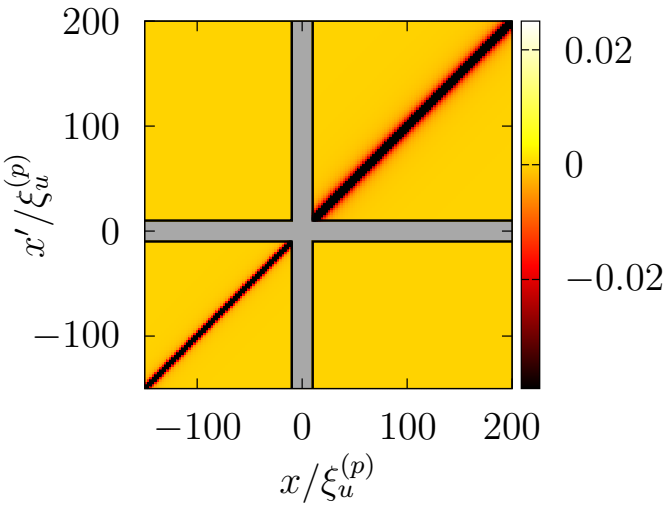


Fig. 4: 2D plot of the numerical result for the dimensionless quantity $\xi_u^{(p)} g^{(d)}(x,x')/n_0$ in the case where $g_{2,u}/g_1 = 0.2$, $m_u = 0.7$ and $m_d = 3$. The shaded area near the axis corresponds to the zone $|x|$ or $|x'| < 10\,\xi_u^{(p)}$.

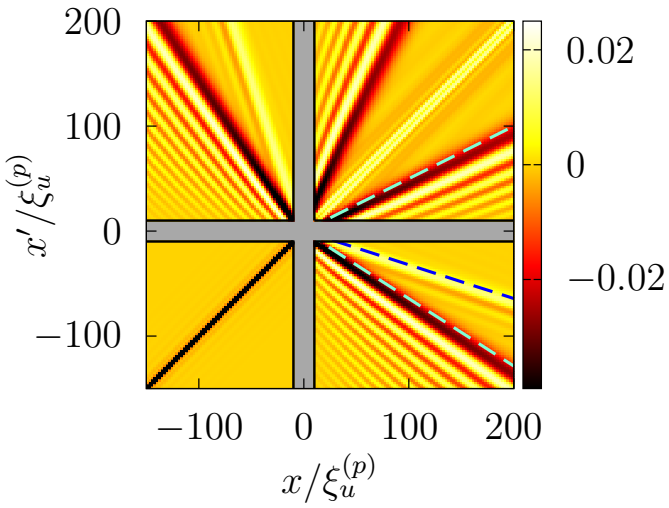


Fig. 5: Same as fig. 4 for the dimensionless quantity $\xi_u^{(p)} g^{(p)}(x,x')/n_0$. The dashed straight lines correspond to the correlation lines where a heuristic interpretation of the Hawking signal leads to expect the largest long-range signal (see the text).

It is also interesting to study the correlation of the density fluctuations

$$\begin{aligned} g^{(d)}(x,x') &= \langle : \delta\hat{n}(x,t)\,\delta\hat{n}(x',t) : \rangle \\ &= \langle \delta\hat{n}(x,t)\,\delta\hat{n}(x',t) \rangle - \delta(x-x')\,n_0\,, \end{aligned} \tag{15}$$

where $\delta\hat{n}(x,t) = \hat{n}_+(x,t) + \hat{n}_-(x,t) - n_0$.

In a hypothetical homogeneous configuration where $U(x)$ and $g_2(x)$ have constant uniform values, the correlators read

$$g^{(d,p)}(x,x') = \frac{n_0}{\xi^{(d,p)}}\, F\left(\frac{|x-x'|}{\xi^{(d,p)}}\right), \tag{16}$$

where $F(z) = -(\pi z)^{-1} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \sin(2\,t\,z)\,(1+t^2)^{-3/2}$ and $\xi^{(d,p)} = \hbar/mc^{(d,p)}$.

These correlation patterns are drastically modified in the presence of an event horizon. There is a first trivial modification due to the space dependence of the speeds of sound: Formulas (16) are modified upstream and downstream of the horizon because, in the region $x < 0$, the values of $\xi_u^{(d)}$ and $\xi_u^{(p)}$ are different from those of $\xi_d^{(d)}$ and $\xi_d^{(p)}$ in the region $x > 0$. The second modification corresponds to long-distance correlations and is more interesting: Quantum fluctuations generate correlated currents of polarization quasiparticles propagating away from the horizon in the $u^{(p)}|$out, $d1^{(p)}|$out and $d2^{(p)}|$out channels. This, in turn, induces long-range modifications of $g^{(p)}(x,x')$. No such long-distance correlations are expected for $g^{(d)}(x,x')$ since there is no horizon for the density quasiparticles.

The knowledge of the S matrix makes it possible to explicitly compute the quantities $g^{(p)}(x,x')$ and $g^{(d)}(x,x')$ if x and x' are not too close to the horizon[1]. We do not write down here the extensive explicit formulas (see ref. [33]) but rather display a plot of both quantities $g^{(d)}(x,x')$ (fig. 4) and $g^{(p)}(x,x')$ (fig. 5) in a black hole configuration with $g_{2,u}/g_1 = 0.2$, $m_u = 0.7$ and $m_d = 3$ (the same parameters for which fig. 3 has been drawn). As expected no track of Hawking radiation can be observed in the plot of $g^{(d)}(x,x')$. On the other hand, $g^{(p)}(x,x')$ displays long-range correlations along three special directions highlighted in fig. 5 by dashed straight lines. According to the standard scenario of Hawking radiation [4], if correlated low-energy Hawking quasiparticles are emitted along the $u^{(p)}|$out, $d1^{(p)}|$out and $d2^{(p)}|$out channels, at time t after their emission, these phonons are respectively located at positions $(V_0 - c_u^{(p)})\,t < 0$ [2], $(V_0 + c_d^{(d)})\,t > 0$, and $(V_0 - c_d^{(p)})\,t > 0$. This induces a correlation signal along the lines of slopes $(V_0 - c_u^{(p)})/(V_0 + c_d^{(p)})$ (resulting from correlations between phonons emitted along the $u^{(p)}$ and $d1^{(p)}$ outgoing channels), $(V_0 - c_u^{(p)})/(V_0 - c_d^{(p)})$ ($u^{(p)}|$out $- d2^{(p)}|$out correlations), and $(V_0 - c_d^{(p)})/(V_0 + c_d^{(p)})$ ($d1^{(p)}|$out $- d2^{(p)}|$out correlations). These are the three slopes marked by dashed lines in fig. 5. These large-distance correlation lines are accompanied by diffractive corrections building an oscillatory pattern in their vicinity (see, e.g., the discussion in ref. [29]). Of course the lines with inverse slopes are also present (they correspond to the exchange $x \leftrightarrow x'$ in fig. 5). The fact that, in the present setting, such a pattern is observed in the correla-

[1] In vicinity of the horizon one should take into account evanescent modes for accurately evaluating the correlation signal. This makes the computation cumbersome although poorly instructive. This is the reason why in figs. 4 and 5 we exclude the regions where $|x|$ or $|x'|$ are lower than $10\,\xi_u^{(p)}$

[2] As clear from eq. (7) and fig. 2, $V_0 - c_u^{(p)}$ is the $\omega \to 0$ limit of the group velocity of outgoing upstream polarization quasiparticles.

tion of polarization fluctuations but not in the correlation of density fluctuations is a strong demonstration that this signal is intrinsically connected to Hawking radiation and requires the occurrence of a horizon.

The experimental detection of the polarization signal described in the present work is simple in the case of a polariton condensate because the pseudo-spin of the decaying polaritons is commuted into right or left circular polarization of the emitted photons. Also, the high repetition rate achieved in this type of experiment should make it possible to obtain a good statistics leading to a precise evaluation of the correlation signal. For atomic condensates on the other hand, the imaging techniques may rely on Stern-Gerlach and time-of-flight analysis or dispersive optical measurements [34] (for a review, see, e.g., [35]).

Finally we note that the present treatment of vacuum fluctuations in a stationary configuration, which is valid for a stable/conservative atomic condensate, does not immediately apply for a nonequilibrium polariton condensate. Indeed polaritons have a finite lifetime and the vacuum fluctuations such as described in the present stationary situation strictly speaking disappear, because no ingoing mode issued from infinity is able to reach the horizon. The fluctuations of the system are now triggered by fluctuations inside the excitonic reservoir and by the losses. A related view concerns the dispersion relation plotted in fig. 2: Because of damping, the frequency of the normal modes typically acquire an imaginary part, and long-wavelength density modes even become completely diffusive (see, e.g., the review [36]). However, one can show, within a simple model of nonresonant pumping with gain and loss, that these damping effects which are indeed present in the density channel, only weakly affect the polarization mode [37] and we thus expect that the results of the present work should be also observable in future experiments on out-of-equilibrium polariton condensates.

* * *

It is a pleasure to thank A. Amo, I. Carusotto, S. Finazzi and A. Recati for stimulating discussions. This work was supported by the French ANR under grant n° ANR-11-IDEX-0003-02 (Inter-Labex grant QEAGE).

REFERENCES

[1] Barceló C., Liberati S. and Visser M., *Living Rev. Relativity*, **14** (2011) 3
[2] Robertson S. J., *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **45** (2012) 163001
[3] Unruh W. G., *Phys. Rev. Lett.*, **46** (1981) 1351
[4] Hawking S. W., *Commun. Math. Phys.*, **43** (1975) 199
[5] Philbin T. G., Kuklewicz C., Robertson S., Hill S., König F. and Leonhardt U., *Science*, **319** (2008) 1367
[6] Belgiorno T. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010) 203901
[7] Lahav O. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010) 240401
[8] Elazar M., Fleurov V., Bar-Ad S., *Phys. Rev. A*, **86** (2012) 063821
[9] Rousseaux G., Mathis C., Maïssa P., Philbin T. G. and Leonhardt U., *New J. Phys.*, **10** (2008) 053015
[10] Weinfurtner S., Tedford E. W., Penrice M. C. J., Unruh W. G. and Lawrence G. A., *Phys. Rev. Lett.*, **106** (2011) 021302
[11] Schützhold R. and Unruh W. G., *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005) 031301
[12] Nation P. D., Blencowe M. P., Rimberg A. J. and Buks E., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 087004
[13] Horstmann B., Reznik B., Fagnocchi S. and Cirac J. I., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 250403
[14] Ioro A. and Lambiase G., *Physics Letters B*, **716** (2012) 334
[15] Chen P. and Rosu H., *Mod. Phys. Lett. A*, **27** (2012) 1250218
[16] Stone M., *Class. Quantum Grav.*, **30** (2013) 085003
[17] Solnyshkov D. D., Flayac H. and Malpuech G., *Phys. Rev. B*, **84** (2011) 233405
[18] Gerace D. and Carusotto I., *Phys. Rev. B*, **86** (2012) 144505
[19] Hall D. S., Matthews M. R., Ensher J. R., Wieman C. E. and Cornell E. A., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1539
[20] Modugno G., Modugno M., Riboli F., Roati G. and Inguscio M., *Phys. Rev. Lett.*, **89** (2002) 190404
[21] Papp S. B., Pino J. M. and Wieman C. E., *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 040402
[22] Vladimirova M. *et al.*, *Phys. Rev. B*, **82** (2010) 075301
[23] Paraïso T. K., Wouters M., Léger Y., Morier-Genoud F. and Deveaud-Plédran B., *Nature Mater.*, **9** (2010) 655
[24] Balbinot R., Fabbri A., Fagnocchi S., Recati A. and Carusotto I., *Phys. Rev. A*, **78** (2008) 021603
[25] Carusotto I., Fagnocchi S., Recati A., Balbinot R. and Fabbri A., *New J. Phys.*, **10** (2008) 103001
[26] Larré P.-É., Recati A., Carusotto I. and Pavloff N., *Phys. Rev. A*, **85** (2012) 013621
[27] Leonhardt U., Kiss T. and Ohberg P., *J. Opt. B: Quantum Semiclassical. Opt.*, **5** (2003) S42
[28] Macher J. and Parentani R., *Phys. Rev. A*, **80** (2009) 043601
[29] Recati A., Pavloff N. and Carusotto I., *Phys. Rev. A*, **80** (2009) 043603
[30] Kagan Yu., Kovrizhin D. L. and Maksimov L. A., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 130402
[31] Schützhold R. and Unruh W. G., *Phys. Rev. D*, **81** (2010) 124033
[32] Parentani R., *Phys. Rev. D*, **82** (2010) 025008
[33] Larré P.-É., *Ph.D. thesis* (Université Paris-Sud, unpublished) 2013, sect. 3
[34] Carusotto I. and Mueller E. J., *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **37** (2004) S115
[35] Stamper-Kurn D. M. and Ueda M., *Rev. Mod. Phys.*, **85** (2013) 1191
[36] Carusotto I. and Ciuti C., *Rev. Mod. Phys.*, **85** (2013) 299
[37] Larré P.-É., Pavloff N. and Kamchatnov A. M., *in preparation*, (2013)

Conclusion

Cette thèse a été consacrée à l'étude des fluctuations quantiques et de leurs corrélations dans les fluides de Bose et, plus spécifiquement, à l'étude de l'analogue du rayonnement de Hawking dans des condensats de Bose–Einstein en configuration de trou noir acoustique. Ce manuscrit de thèse résulte également d'un travail d'analyse d'effets non-linéaires et dispersifs dans l'écoulement de condensats de polaritons. Il présente enfin une étude théorique donnant une perspective à l'introspection du rayonnement de Hawking dans des systèmes polaritoniques.

Dans le chapitre 1, nous avons étudié trois configurations de trous noirs acoustiques (profil plat, pic δ et chute d'eau) dans l'écoulement d'un quasi-condensat de Bose–Einstein unidimensionnel. Nous avons trouvé les solutions de champ moyen et donné à chaque fois une description analytique complète des fluctuations quantiques dans le cadre de la théorie de Bogoliubov et en termes d'une matrice de diffusion connectant les modes qui se dirigent vers l'horizon du trou noir analogue aux modes qui le fuient. Cela nous a permis d'évaluer la densité spectrale du rayonnement de Hawking et de vérifier qu'elle correspond à une émission de corps gris. L'étude des fluctuations quantiques nous a aussi donné l'opportunité de calculer les corrélations des fluctuations de la densité dans ces configurations avec horizon et de montrer que les signatures non-locales observées sur la carte des fonctions de corrélation témoignent d'un rayonnement de Hawking d'ondes de densité car elles résultent de l'émission de fluctuations corrélées fuyant l'horizon acoustique. La vérification de la règle de somme de compressibilité à température nulle lorsque l'écoulement du condensat présente un horizon a confirmé la solidité de notre traitement analytique des fluctuations et nous a permis de comprendre que les modifications diagonales de la matrice densité à deux corps connexe doivent nécessairement s'accompagner de l'émergence d'un signal non-diagonal, celui de Hawking. Nous avons enfin donné des éléments d'analyse du rayonnement de Hawking à deux corps dans l'espace des impulsions.

Dans le chapitre 2 de cette thèse, nous nous sommes intéressés à étudier les profils d'onde générés par le déplacement d'un obstacle localisé dans un condensat de polaritons unidimensionnel en situation de pompage non-résonnant. Négligeant dans un premier temps les effets dus à la polarisation des modes lumineux dans le guide où sont confinés les polaritons, nous avons traité la réponse du système dans la limite où l'obstacle ne perturbe le fluide que légèrement, mais aussi dans le cas où celui-ci est de forte amplitude. Dans le premier cas, nous avons montré qu'il existe une transition continue entre un

régime (de basse vitesse) dans lequel la traînée ressentie par l'obstacle est essentiellement visqueuse et un régime (de grande vitesse) dans lequel la source dominante de traînée est caractérisée par l'émission d'un rayonnement de Cherenkov d'ondes linéaires amorties. Dans le second cas, nous avons analysé le profil de densité du condensat dans le cadre de la théorie de Whitham et de l'approximation hydraulique et montré qu'une onde de choc dispersive — qui est la version non-linéaire des ondulations identifiées dans la limite perturbative — se forme à la tête de l'obstacle lorsque ce dernier se meut à des vitesses supersoniques dans le condensat ; l'intégration numérique exacte du problème a confirmé la validité des deux approches analytiques discutées à l'instant. Nous avons également révélé l'existence d'une large gamme de paramètres dans laquelle les solutions ne peuvent que dépendre du temps, à l'instar de ce que l'on observe dans des vapeurs atomiques ultra-froides.

Tenant compte des effets dus au spin des polaritons, nous avons montré que les ondes de polarisation générées par le déplacement d'un petit obstacle localisé dans un fluide de polaritons en situation de pompage non-résonnant peuvent dans certains cas ne presque pas dépendre du temps de vie des polaritons et, par conséquent, se propager sur des distances typiquement bien plus grandes que leurs longueurs d'onde. En l'absence d'obstacle extérieur et ne considérant que les fluctuations quantiques d'un écoulement avec horizon, on comprend alors que le rayonnement de Hawking dans un condensat de polaritons ne peut être pertinemment analysé qu'en sondant le canal de polarisation et non celui de densité. En effet, on ne peut espérer observer l'effet Hawking dans ces systèmes dissipatifs en analysant ce dernier canal puisqu'une fluctuation quantique de densité en provenance de l'infini serait incapable d'atteindre un horizon étant donnée sa forte dépendance en le temps de vie des polaritons. Dans le chapitre 3 de la thèse, nous nous sommes placés dans le cas d'une description schématique négligeant les effets dus à la dissipation, mais qui par contre s'applique très bien à l'étude d'un condensat atomique unidimensionnel à deux composantes. Nous avons étudié le signal à deux corps associé à l'analogue du rayonnement de Hawking spontané et démontré par un calcul explicite qu'il consiste en l'émission d'ondes de polarisation de part et d'autre d'un horizon n'affectant que les modes de polarisation de grandes longueurs d'onde.

Nous avons entamé une collaboration avec le groupe de Denis Boiron et Christoph Westbrook de l'Institut d'Optique visant à trouver les meilleures méthode et configuration expérimentales qui permettraient de sonder le rayonnement de Hawking acoustique dans un condensat de Bose–Einstein atomique. L'idée de mesurer les corrélations en impulsion autour d'un horizon de trou noir acoustique (par exemple en configuration de chute d'eau) semblerait être une piste expérimentalement prometteuse. Nous avons aussi proposé de sonder le rayonnement de Hawking dans les condensats de polaritons non pas *via* la mesure des corrélations des fluctuations de la densité mais *via* la mesure des corrélations des fluctuations quantiques de la polarisation dans un écoulement présentant l'analogue d'un horizon des évènements pour les ondes de polarisation de grandes longueurs d'onde. Il est évidemment important d'approfondir la recherche dans ces directions étant donné

l'intérêt non-négligeable que suscite la génération en laboratoire de la version acoustique d'un trou noir gravitationnel et la détection du rayonnement de Hawking spontané associé. Une première étape a été franchie en 2009 par Jeff Steinhauer et ses collègues qui réalisèrent une configuration de trou muet dans l'écoulement d'un condensat atomique [75]. D'autres équipes leur ont emboîté le pas et il est possible que leurs expériences fourniront prochainement la preuve tant attendue depuis près de quarante ans de l'existence d'un rayonnement de Hawking acoustique dans l'écoulement d'un fluide quantique présentant l'analogue d'un horizon des évènements.

— Annexe —
Matrice densité à un corps dans un gaz de Bose unidimensionnel, dilué et homogène au zéro absolu

Dans l'introduction de la sous-section 1.2.3 du chapitre 1, nous avons insisté sur le fait que la théorie de Bogoliubov des fluctuations quantiques — qui repose sur l'hypothèse d'existence d'un condensat ou, en d'autres termes, d'une occupation macroscopique d'un unique état quantique — ne permet pas d'obtenir une description analytique correcte de la matrice densité à un corps

$$\rho^{(1)}(x, x') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x)\, \hat{\Psi}(x') \rangle \tag{A.1}$$

dans un gaz de bosons unidimensionnel, dilué et homogène à température nulle. En effet, la théorie de Bogoliubov prévoit une divergence logarithmique de cette fonction de corrélation aux grandes séparations (on se référera à nouveau à la figure 1.8) alors qu'en présence d'un condensat de Bose–Einstein, la matrice densité à un corps devrait tendre vers une valeur finie correspondant à la densité linéique (homogène) n_0 dudit condensat lorsque la distance $|x - x'|$ devient beaucoup plus grande que la longueur d'onde de de Broglie des phonons :

$$\rho^{(1)}(x, x') \xrightarrow[|x-x'|/\xi \to \infty]{} n_0. \tag{A.2}$$

Ce comportement fut mentionné par Ginzburg, Landau et Lifshitz en 1950 et 1951 [49, 80, 6, 113] mais il fut rigoureusement établi en 1951 et 1956 par Penrose et Onsager [105, 106] qui cherchaient à construire une définition mathématique de la condensation de Bose–Einstein applicable aussi bien aux gaz parfaits qu'aux systèmes interagissant (tels que l'hélium liquide) en dimension trois. Sur la base des travaux de Beliaev [19], Gor'kov [51] comprit que le concept pouvait être étendu aux électrons dans les supraconducteurs. On dit que le critère (A.2) témoigne d'un ordre à longue portée hors-diagonal puisqu'il met en jeu les composantes non-diagonales ($x' \neq x$) de la matrice densité à un corps (A.1). La non-validité de la description de Bogoliubov des fluctuations quantiques pour calculer le corrélateur (A.1) tient au fait qu'il ne peut se produire de vraie condensation de Bose–Einstein en dimension un (consulter les travaux de Mermin, Wagner et Hohenberg [94, 58]).

Annexe : Matrice densité à un corps dans un gaz de Bose unidimensionnel, dilué et homogène au zéro absolu

Dans cette annexe, nous montrerons tout d'abord que l'approche (naïve) de Bogoliubov prévoit en effet un comportement divergent de la matrice densité à un corps, mais qu'il est malgré tout possible d'obtenir une description analytique exacte de la fonction de corrélation (A.1) en s'inspirant des travaux de Mora et Castin [97], qui eux-mêmes font échos à ceux de Popov [114].

Dans le cadre de la théorie de Bogoliubov des excitations élémentaires, le champ quantique $\hat{\Psi}(x)$ qui décrit un fluide de bosons ultra-froids unidimensionnel, dilué, uniforme et stationnaire admet la décomposition suivante :

$$\hat{\Psi}(x) = \sqrt{n_0} + \hat{\psi}(x). \tag{A.3}$$

L'équation (A.3) suppose l'existence d'un condensat, c'est-à-dire l'existence d'un état quantique macroscopiquement peuplé ; celui-ci est décrit par le champ classique $\sqrt{n_0}$, où n_0 est la densité (homogène) de la fraction condensée. Dans cette équation également, $\hat{\psi}(x)$ est une petite correction quantique qui décrit les excitations élémentaires du liquide de Bose. En supposant que le gaz est confiné dans une grande boîte (unidimensionnelle) de longueur L et en imposant les conditions aux limites périodiques, on peut écrire $\hat{\psi}(x)$ sous la forme [113]

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k \neq 0} \left(u_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, \hat{b}_k + v_k \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \hat{b}_k^\dagger \right), \tag{A.4}$$

où la somme porte sur tous les états d'impulsions (quantifiées) $\hbar\, k = \hbar\, 2\pi\, n/L$ non-nulles ($n \in \mathbb{Z}^*$), l'état d'impulsion nulle ($\hbar\, k = 0$) définissant le condensat. Dans l'équation (A.4), les $\hat{b}_k$ et $\hat{b}_k^\dagger$ sont les opérateurs (bosoniques) de destruction et de création quasi-particulaires et u_k et v_k sont les amplitudes de Bogoliubov définies par [113]

$$2\, u_k = \sqrt{\frac{E_k}{\varepsilon_k}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{E_k}} \quad \text{et} \quad 2\, v_k = \sqrt{\frac{E_k}{\varepsilon_k}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{E_k}}, \tag{A.5}$$

où $E_k = \hbar^2 k^2/(2m)$ est l'énergie cinétique d'un boson d'impulsion $\hbar\, k$ et de masse m et où on note $\varepsilon_k = \sqrt{E_k[E_k + 2\,\hbar^2/(m\,\xi^2)]}$ le spectre de Bogoliubov. Définissant l'opération $\langle\cdot\rangle$ comme la moyenne sur le vide des $\hat{b}_k$ (on se place à température nulle : $\langle \hat{b}_k^\dagger \, \hat{b}_{k'} \rangle = 0$ et donc $\langle \hat{b}_k \, \hat{b}_{k'}^\dagger \rangle = \delta_{k,k'}$ puisque $\hat{b}_k \, \hat{b}_{k'}^\dagger - \hat{b}_{k'}^\dagger \, \hat{b}_k = \delta_{k,k'}$), on trouve, posant $t = \xi\, k$,

$$\rho^{(1)}(x, x') = n_0 + \langle \hat{\psi}^\dagger(x) \, \hat{\psi}(x') \rangle \tag{A.6a}$$

$$= n_0 + \frac{1}{2\pi\,\xi} \int_0^\infty \mathrm{d}t \left(\frac{t^2+2}{t\,\sqrt{t^2+4}} - 1 \right) \cos\left(\frac{x - x'}{\xi}\, t \right). \tag{A.6b}$$

L'intégrale dans le membre de droite de l'équation (A.6b) diverge dans l'infrarouge car

$$\frac{t^2+2}{t\,\sqrt{t^2+4}} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}. \tag{A.7}$$

Cette singularité disparaît si l'on évalue

$$\rho^{(1)}(x, x') - \overline{n} = -\frac{1}{2\pi\,\xi} \int_0^\infty \mathrm{d}t \left(\frac{t^2+2}{t\,\sqrt{t^2+4}} - 1 \right) \left[1 - \cos\left(\frac{x - x'}{\xi}\, t \right) \right], \tag{A.8}$$

où $\overline{n} = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x)\,\hat{\Psi}(x)\rangle = \rho^{(1)}(x,x)$ est la densité moyenne (homogène) du gaz de bosons ; en effet,

$$\left(\frac{t^2+2}{t\sqrt{t^2+4}}-1\right)\left[1-\cos\left(\frac{x-x'}{\xi}\,t\right)\right] \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}\times\frac{1}{2}\,\frac{(x-x')^2}{\xi^2}\,t^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(x-x')^2}{\xi^2}\,t, \tag{A.9}$$

mais malheureusement,

$$\rho^{(1)}(x,x') - \overline{n} \underset{|x-x'|/\xi\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2\pi\,\xi}\ln\frac{|x-x'|}{\xi} \xrightarrow[|x-x'|/\xi\to\infty]{} -\infty. \tag{A.10}$$

Le critère de Penrose–Onsager (A.2) n'est donc pas vérifié, ce qui invalide l'approche de Bogoliubov et infirme alors l'hypothèse d'existence d'une phase condensée dans un gaz de bosons unidimensionnel, dilué et homogène au zéro absolu.

Si l'occurrence d'une véritable condensation de Bose–Einstein n'est pas possible dans de tels systèmes, il est nécessaire d'employer une autre approche que celle de Bogoliubov pour calculer la matrice densité à un corps (A.1) ; cette approche doit se passer de l'hypothétique existence d'un condensat. On commence pour cela par effectuer une transformation de Madelung du champ bosonique $\hat{\Psi}(x)$ en écrivant [107]

$$\hat{\Psi}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\varphi}(x)}\sqrt{\overline{n}+\delta\hat{n}(x)} \quad \text{et} \quad \hat{\Psi}^\dagger(x) = \sqrt{\overline{n}+\delta\hat{n}(x)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\varphi}(x)}, \tag{A.11}$$

où les opérateurs hermitiens $\delta\hat{n}(x)$ et $\hat{\varphi}(x)$ sont définis en termes des excitations élémentaires du gaz par [107]

$$\delta\hat{n}(x) = \sqrt{\frac{\overline{n}}{L}}\sum_k (u_k+v_k)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\hat{b}_k + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\hat{b}_k^\dagger\right) \tag{A.12a}$$

$$\text{et} \quad \hat{\varphi}(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{L\,\overline{n}}}\sum_k (u_k-v_k)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\hat{b}_k - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\hat{b}_k^\dagger\right). \tag{A.12b}$$

L'opérateur (A.12a) décrit les fluctuations quantiques de la densité du fluide (de densité moyenne $\overline{n}$) et le champ (A.12b) correspond à la phase de l'opérateur $\hat{\Psi}(x)$ qui, à un gradient près, définit l'opérateur vitesse. On montre que les fluctuations de la densité sont petites en dimension un tandis que les fluctuations de la phase divergent dans l'infrarouge [le gradient de $\hat{\varphi}(x)$ reste malgré tout un petit champ quantique] [113, 107]. À l'aide du théorème de Wick, on obtient [97]

$$\begin{aligned}\ln\frac{\rho^{(1)}(x,x')}{\overline{n}} = &-\frac{1}{8}\langle\Delta\hat{\rho}^2(x,x')\rangle - \frac{1}{2}\langle\Delta\hat{\varphi}^2(x,x')\rangle \\ &+\frac{1}{2}\Big[\langle\hat{\rho}(x)\,\mathrm{i}\Delta\hat{\varphi}(x,x')\rangle + \langle\mathrm{i}\Delta\hat{\varphi}(x,x')\,\hat{\rho}(x')\rangle - \frac{1}{4}\langle\hat{\rho}(x)\,\mathrm{i}\Delta\hat{\varphi}(x,x')\rangle^2 \\ &-\frac{1}{4}\langle\mathrm{i}\Delta\hat{\varphi}(x,x')\,\hat{\rho}(x')\rangle^2 + \frac{1}{2}\langle\hat{\rho}(x)\,\mathrm{i}\Delta\hat{\varphi}(x,x')\rangle\langle\mathrm{i}\Delta\hat{\varphi}(x,x')\,\hat{\rho}(x')\rangle\Big],\end{aligned} \tag{A.13}$$

où l'on a posé $\hat{\rho}(x) = \delta\hat{n}(x)/\overline{n}$, $\Delta\hat{\rho}(x,x') = \hat{\rho}(x') - \hat{\rho}(x)$ et $\Delta\hat{\varphi}(x,x') = \hat{\varphi}(x') - \hat{\varphi}(x)$. Certains termes dans l'équation (A.13) divergent dans l'ultraviolet. On les traite en effectuant

les sommations correspondantes sur un ouvert $]-1/\lambda, 1/\lambda[$ dont la taille est implicitement infinie ($\lambda \to 0^+$) ; nous allons immédiatement constater que la somme des termes divergents s'annule et donc que le résulat final (A.17a)–(A.17b) est en réalité indépendant du choix de la borne ultraviolette $1/\lambda > 0$. Les crochets $\frac{1}{2}[\cdot]$ dans le membre de droite de l'équation (A.13) divergent et s'écrivent

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{1}{2\pi\,\overline{n}}\,\frac{1-\operatorname{sinc}[(x-x')/\lambda]}{\lambda}, \tag{A.14}$$

où $\operatorname{sinc}(z) = \sin(z)/z$, et on montre en même temps que

$$\begin{aligned}\langle\Delta\hat{\rho}^2(x,x')\rangle = &\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{2}{\pi\,\overline{n}}\,\frac{1-\operatorname{sinc}[(x-x')/\lambda]}{\lambda}\\ &+\frac{2}{\pi\,\xi\,\overline{n}}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{t-\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}\left[1-\cos\left(\frac{x-x'}{\xi}\,t\right)\right]\end{aligned} \tag{A.15}$$

et

$$\begin{aligned}\langle\Delta\hat{\varphi}^2(x,x')\rangle = &\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{1}{2\pi\,\overline{n}}\,\frac{1-\operatorname{sinc}[(x-x')/\lambda]}{\lambda}\\ &+\frac{1}{2\pi\,\xi\,\overline{n}}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{\sqrt{t^2+4}-t}{t}\left[1-\cos\left(\frac{x-x'}{\xi}\,t\right)\right].\end{aligned} \tag{A.16}$$

Injectant les résultats (A.15), (A.16) et (A.14) dans l'équation (A.13), on constate que les termes qui dépendent de λ ($\lambda \to 0^+$) s'éliminent mutuellement et on obtient finalement

$$\frac{\rho^{(1)}(x,x')}{\overline{n}} = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi\,\xi\,\overline{n}}\int_0^\infty \mathrm{d}t\left(\frac{t^2+2}{t\sqrt{t^2+4}}-1\right)\left[1-\cos\left(\frac{x-x'}{\xi}\,t\right)\right]\right\} \tag{A.17a}$$

$$= \exp\left[\frac{\rho^{(1)}_{\text{Bogoliubov}}(x,x')}{\overline{n}}-1\right], \tag{A.17b}$$

où $\rho^{(1)}_{\text{Bogoliubov}}(x,x')$ est la matrice densité à un corps telle que prédite par la théorie de Bogoliubov [*cf.* équation (A.8)]. Sa représentation graphique en fonction de $|x-x'|/\xi$ correspond à la courbe bleue de la figure 1.8 tandis que la courbe en trait plein rouge sur cette figure correspond au résultat (A.17a)–(A.17b). De (A.17a), on tire les comportements asymptotiques suivants :

$$\frac{\rho^{(1)}(x,x')}{\overline{n}} \underset{|x-x'|/\xi\to 0}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{3\pi\,\xi\,\overline{n}}\,\frac{|x-x'|^2}{\xi^2}\right) \tag{A.18a}$$

$$\text{et}\quad \frac{\rho^{(1)}(x,x')}{\overline{n}} \underset{|x-x'|/\xi\to\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^\gamma}\,\frac{\xi}{|x-x'|}\right)^{1/(2\pi\,\xi\,\overline{n})}, \tag{A.18b}$$

où $\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^N 1/\nu - \ln N\right) = 0{,}57(7)$ est la constante d'Euler–Mascheroni. Les équivalents (A.18a) et (A.18b) sont représentés par des lignes en pointillés rouges à la figure 1.8. D'après (A.18b),

$$\frac{\rho^{(1)}(x,x')}{\overline{n}} \xrightarrow[|x-x'|/\xi\to\infty]{} 0, \tag{A.19}$$

ce qui prouve qu'il n'existe pas d'ordre à longue portée et donc de possibilité d'avoir une véritable phase condensée dans un gaz de bosons ultra-froids unidimensionnel, dilué et homogène.

Notons qu'il est possible d'arriver au résultat (A.17a)–(A.17b) établi par Mora et Castin [97] en s'inspirant d'une théorie des perturbations proposée par Popov dans les années 80 (voir référence [114]). L'idée de départ est de décomposer le champ quantique $\hat{\Psi}(x)$ sous forme d'une somme dont le premier monôme décrit les « modes d'oscillations lentes » (c'est-à-dire de grandes longueurs d'onde, ou équivalemment de faibles impulsions : $|\hbar\, k| < \hbar\, \overline{k}$, où $\overline{k} > 0$) et dont le second décrit les « modes d'oscillations rapides » (c'est-à-dire de courtes longueurs d'onde, ou équivalemment de grandes impulsions : $|\hbar\, k| > \hbar\, \overline{k}$) :

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{\Psi}_<(x) + \hat{\psi}_>(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\varphi}_<(x)} \sqrt{\overline{n} + \delta\hat{n}_<(x)} + \hat{\psi}_>(x). \tag{A.20}$$

Dans l'équation (A.20), on a exprimé le champ $\hat{\Psi}_<(x)$ en fonction de l'opérateur densité $\hat{n}_<(x) = \overline{n} + \delta\hat{n}_<(x)$ et de l'opérateur phase $\hat{\varphi}_<(x)$, définis en termes des excitations élémentaires de grandes longueurs d'onde par

$$\delta\hat{n}_<(x) = \sqrt{\frac{\overline{n}}{L}} \sum_{|k|<\overline{k}} (u_k + v_k) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \hat{b}_k + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \hat{b}_k^\dagger \right) \tag{A.21a}$$

$$\text{et} \quad \hat{\varphi}_<(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{L\,\overline{n}}} \sum_{|k|<\overline{k}} (u_k - v_k) \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \hat{b}_k - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \hat{b}_k^\dagger \right). \tag{A.21b}$$

Le terme restant dans le membre de droite de l'équation (A.20) s'exprime en termes des excitations élémentaires de courtes longueurs d'onde comme

$$\hat{\psi}_>(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{|k|>\overline{k}} \left(u_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \hat{b}_k + v_k\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \hat{b}_k^\dagger \right). \tag{A.22}$$

Combinant les descriptions (A.20), (A.21a)–(A.21b) et (A.22), on montre que $\rho^{(1)}(x, x') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x)\, \hat{\Psi}(x') \rangle$ ne dépend pas de la coupure $\overline{k}$ et on aboutit au résultat exact (A.17a)–(A.17b).

Bibliographie

[1] J. F. Allen et A. D. Misener
« Flow of liquid helium II »
Nature **141**, 75 (1938)

[2] D. R. Allum, P. V. E. McClintock et A. Phillips
« The breakdown of superfluidity in liquid ^{4}He: An experimental test of Landau's theory »
Philosophical Transactions of the Royal Society of London A **284**, 179 (1977)

[3] A. Amo, D. Sanvitto, F. P. Laussy, D. Ballarini, E. del Valle, M. D. Martin, A. Lemaître, J. Bloch, D. N. Krizhanovskii, M. S. Skolnick, C. Tejedor et L. Viña
« Collective fluid dynamics of a polariton condensate in a semiconductor microcavity »
Nature **457**, 291 (2009)

[4] A. Amo, J. Lefrère, S. Pigeon, C. Adrados, C. Ciuti, I. Carusotto, R. Houdré, E. Giacobino et A. Bramati
« Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities »
Nature Physics **5**, 805 (2009)

[5] A. Amo, S. Pigeon, D. Sanvitto, V. G. Sala, R. Hivet, I. Carusotto, F. Pisanello, G. Leménager, R. Houdré, E. Giacobino, C. Ciuti et A. Bramati
« Polariton superfluids reveal quantum hydrodynamic solitons »
Science **332**, 1167 (2011)

[6] P. W. Anderson
Basic Notions of Condensed Matter Physics
Frontiers in Physics, Benjamin/Cummings, Californie (1984)

[7] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman et E. A. Cornell
« Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor »
Science **269**, 198 (1995)

[8] J. Armijo, T. Jacqmin, K. Kheruntsyan et I. Bouchoule
« Mapping out the quasicondensate transition through the dimensional crossover from one to three dimensions »
Physical Review A **83**, 021605(R) (2011)

[9] G. E. Astrakharchik et L. P. Pitaevskii
« Motion of a heavy impurity through a Bose–Einstein condensate »
Physical Review A **70**, 013608 (2004)

[10] O. Avenel et E. Varoquaux
« Observation of singly quantized dissipation events obeying the Josephson frequency relation in the critical flow of superfluid ^{4}He through an aperture »
Physical Review Letters **55**, 2704 (1985)

[11] D. Bajoni, P. Senellart, E. Wertz, I. Sagnes, A. Miard, A. Lemaître et J. Bloch
« Polariton laser using single micropillar GaAs-GaAlAs semiconductor cavities »
Physical Review Letters **100**, 047401 (2008)

[12] R. Balbinot, A. Fabbri, S. Fagnocchi, A. Recati et I. Carusotto
« Nonlocal density correlations as a signature of Hawking radiation from acoustic black holes »
Physical Review A **78**, 021603(R) (2008)

[13] S. Balibar
« The discovery of superfluidity »
Journal of Low Temperature Physics **146**, 441 (2007)

[14] R. Balili, V. Hartwell, D. Snoke, L. Pfeiffer et K. West
« Bose–Einstein condensation of microcavity polaritons in a trap »
Science **316**, 1007 (2007)

[15] C. Barceló, S. Liberati et M. Visser
« Towards the observation of Hawking radiation in Bose–Einstein condensates »
International Journal of Modern Physics A **18**, 3735 (2003)

[16] C. Barceló, S. Liberati et M. Visser
« Probing semiclassical analog gravity in Bose–Einstein condensates with widely tunable interactions »
Physical Review A **68**, 053613 (2003)

[17] C. Barceló, S. Liberati et M. Visser
« Analogue gravity »
Living Reviews in Relativity **8**, 12 (2005)

[18] F. Belgiorno, S. L. Cacciatori, M. Clerici, V. Gorini, G. Ortenzi, L. Rizzi, E. Rubino, V. G. Sala et D. Faccio
« Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments »
Physical Review Letters **105**, 203901 (2010)

[19] S. T. Beliaev
Soviet Physics — Journal of Experimental and Theoretical Physics **7**, 289 (1958)

[20] A. Berceanu, E. Cancellieri et F. M. Marchetti
« Drag in a resonantly driven polariton fluid »
Journal of Physics: Condensed Matter **24**, 235802 (2012)

[21] N. Bilas et N. Pavloff
« Dark soliton past a finite-size obstacle »
Physical Review A **72**, 033618 (2005)

[22] N. N. Bogoliubov
« On the theory of superfluidity »
Journal of Physics (Union of Soviet Socialist Republics) **11**, 23 (1947)

[23] S. N. Bose
« Plancks gesetz und lichtquantenhypothese »
Zeitschrift für Physik **26**, 178 (1924)

[24] I. Bouchoule et K. Mølmer
« Interaction-induced phase fluctuations in a guided atom laser »
Physical Review A **67**, 011603(R) (2003)

[25] I. Bouchoule, N. J. van Druten et C. I. Westbrook
« Atom chips and one-dimensional Bose gases »
Chap. 11 de *Atom Chips*, édité par J. Reichel et V. Vuletic
Wiley-VCH, Berlin (2011)

[26] J. Browaeys, J.-C. Bacri, R. Perzynski et M. I. Shliomis
« Capillary-gravity wave resistance in ordinary and magnetic fluids »
Europhysics Letters **53**, 209 (2001)

[27] T. Burghelea et V. Steinberg
« Onset of wave drag due to generation of capillary-gravity waves by a moving object as a critical phenomenon »
Physical Review Letters **86**, 2557 (2001)

[28] C. M. Canali et V. E. Kravtsov
« Normalization sum rule and spontaneous breaking of $U(N)$ invariance in random matrix ensembles »
Physical Review E **51**, 5185(R) (1995)

[29] I. Carusotto et C. Ciuti
« Probing microcavity polariton superfluidity through resonant Rayleigh scattering »
Physical Review Letters **93**, 166401 (2004)

[30] I. Carusotto, S. Fagnocchi, A. Recati, R. Balbinot et A. Fabbri
« Numerical observation of Hawking radiation from acoustic black holes in atomic Bose–Einstein condensates »
New Journal of Physics **10**, 103001 (2008)

[31] I. Carusotto et C. Ciuti
« Quantum fluids of light »
Reviews of Modern Physics **85**, 299 (2013)

[32] C. A. M. Castelijns, K. F. Coates, A. M. Guénault, S. G. Mussett et G. R. Pickett
« Landau critical velocity for a macroscopic object moving in superfluid ^{3}He-B: Evidence for gap suppression at a moving surface »
Physical Review Letters **56**, 69 (1986)

[33] S. Coleman
« There are no Goldstone bosons in two dimensions »
Communications in Mathematical Physics **31**, 259 (1973)

[34] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn et W. Ketterle
« Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms »
Physical Review Letters **75**, 3969 (1995)

[35] P. Deuar, A. G. Sykes, D. M. Gangardt, M. J. Davis, P. D. Drummond et K. V. Kheruntsyan
« Nonlocal pair correlations in the one-dimensional Bose gas at finite temperature »
Physical Review A **79**, 043619 (2009)

[36] V. V. Dodonov
« Current status of the dynamical Casimir effect »
Physica Scripta **82**, 038105 (2010)

[37] D. Dries, S. E. Pollack, J. M. Hitchcock et R. G. Hulet
« Dissipative transport of a Bose–Einstein condensate »
Physical Review A **82**, 033603 (2010)

[38] A. Einstein
« Quantentheorie des einatomigen idealen gases »
Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften **Physikalisch–Mathematische Klasse**, 261 (1924)

[39] G. A. El', A. V. Gurevich, V. V. Khodorovskii et A. L. Krylov
« Modulational instability and formation of a nonlinear oscillatory structure in a "focusing" medium »
Physics Letters A **177**, 357 (1993)

[40] M. Elazar, V. Fleurov et S. Barad
« Transonic flow in an optical analogue of the Laval nozzle »
Nonlinear Optics: Materials, Fundamentals and Applications, paper NTuE6 (2011)

[41] P. Engels et C. Atherton
« Stationary and nonstationary fluid flow of a Bose–Einstein condensate through a penetrable barrier »
Physical Review Letters **99**, 160405 (2007)

[42] R. P. Feynman
Progress in Low Temperature Physics, Vol. 1, p. 17
Édité par C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam (1955)

[43] D. V. Fil et S. I. Shevchenko
« Nondissipative drag of superflow in a two-component Bose gas »
Physical Review A **72**, 013616 (2005)

[44] I. Fouxon, O. V. Farberovich, S. Bar-Ad et V. Fleurov
« Dynamics of fluctuations in an optical analogue of the Laval nozzle »
Europhysics Letters **92**, 14002 (2010)

[45] F. Franchini et V. E. Kravtsov
« Horizon in random matrix theory, the Hawking radiation, and flow of cold atoms »
Physical Review Letters **103**, 166401 (2009)

[46] S. A. Fulling et P. C. W. Davies
« Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: Conformal anomaly »
Proceedings of the Royal Society A **348**, 393 (1976)

[47] D. M. Gangardt et G. V. Shlyapnikov
« Stability and phase coherence of trapped 1D Bose gases »
Physical Review Letters **90**, 010401 (2003)

[48] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac et P. Zoller
« Sonic analog of gravitational black holes in Bose–Einstein condensates »
Physical Review Letters **85**, 4643 (2000)

[49] V. L. Ginzburg et L. D. Landau
« On the theory of superconductivity »
Soviet Physics — Journal of Experimental and Theoretical Physics **20**, 1064 (1950)

[50] S. Giovanazzi, C. Farrell, T. Kiss et U. Leonhardt
« Conditions for one-dimensional supersonic flow of quantum gases »
Physical Review A **70**, 063602 (2004)

[51] L. P. Gor'kov
« On the energy spectrum of superconductors »
Soviet Physics — Journal of Experimental and Theoretical Physics **7**, 505 (1958)

[52] E. P. Gross
« Structure of a quantized vortex in boson systems »
Nuovo Cimento **20**, 454 (1961)

[53] A. Gullstrand
« Allgemeine lösung des statischen einkörperproblems in der Einsteinschen gravitationstheorie »
Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **16** (8), 1 (1922)

[54] A. V. Gurevich et L. P. Pitaevskii
« Nonstationary structure of a collisionless shock wave »
Soviet Physics — Journal of Experimental and Theoretical Physics **38**, 291 (1974)

[55] A. V. Gurevich et A. L. Krylov
« Dissipationless shock waves in media with positive dispersion »
Soviet Physics — Journal of Experimental and Theoretical Physics **65**, 944 (1987)

[56] S. W. Hawking
« Black hole explosions? »
Nature **248**, 30 (1974)

[57] S. W. Hawking
« Particle creation by black holes »
Communications in Mathematical Physics **43**, 199 (1975)

[58] P. C. Hohenberg
« Existence of long-range order in one and two dimensions »
Physical Review **158**, 383 (1967)

[59] W. Israel
Three Hundred Years of Gravitation, p. 234
Cambridge University Press, Cambridge (1987)

[60] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis et C. J. Pethick
« Solitary waves in clouds of Bose–Einstein condensed atoms »
Physical Review A **58**, 2417 (1998)

[61] J.-C. Jaskula, G. B. Partridge, M. Bonneau, R. Lopes, J. Ruaudel, D. Boiron et C. I. Westbrook
« Acoustic analog to the dynamical Casimir effect in a Bose–Einstein condensate »
Physical Review Letters **109**, 220401 (2012)

[62] A. M. Kamchatnov
Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations — An Introductory Course
World Scientific, Singapour (2000)

[63] A. M. Kamchatnov
« On Whitham theory for perturbed integrable equations »
Physica D **188**, 247 (2004)

[64] A. M. Kamchatnov et Y. V. Kartashov
« Quasi-one-dimensional flow of polariton condensate past an obstacle »
Europhysics Letters **97**, 10006 (2012)

[65] A. M. Kamchatnov et N. Pavloff
« Generation of dispersive shock waves by the flow of a Bose–Einstein condensate past a narrow obstacle »
Physical Review A **85**, 033603 (2012)

[66] A. M. Kamchatnov, Y.-H. Kuo, T.-C. Lin, T.-L. Horng, S.-C. Gou, R. Clift, G. A. El et R. H. J. Grimshaw
« Undular bore theory for the Gardner equation »
Physical Review E **86**, 036605 (2012)

[67] P. L. Kapitza
« Viscosity of liquid helium below the λ-point »
Nature **141**, 71 (1938)

[68] K. Kasamatsu, M. Tsubota et M. Ueda
« Spin textures in rotating two-component Bose–Einstein condensates »
Physical Review A **71**, 043611 (2005)

[69] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud et Le Si Dang
« Bose–Einstein condensation of exciton polaritons »
Nature **443**, 409 (2006)

[70] A. V. Kavokin et G. Malpuech
Cavity Polaritons
Elsevier/Academic Press, Amsterdam (2003)

[71] J. Keeling et N. G. Berloff
« Spontaneous rotating vortex lattices in a pumped decaying condensate »
Physical Review Letters **100**, 250401 (2008)

[72] D. L. Kovrizhin et L. A. Maksimov
« "Cherenkov radiation" of a sound in a Bose condensed gas »
Physics Letters A **282**, 421 (2001)

[73] P. Kraus et F. Wilczek
« Some applications of a simple stationary line element for the Schwarzschild geometry »
Modern Physics Letters A **9**, 3713 (1994)

[74] Y. Kurita et T. Morinari
« Formation of a sonic horizon in isotropically expanding Bose–Einstein condensates »
Physical Review A **76**, 053603 (2007)

[75] O. Lahav, A. Itah, A. Blumkin, C. Gordon, S. Rinott, A. Zayats et J. Steinhauer
« Realization of a sonic black hole analog in a Bose–Einstein condensate »
Physical Review Letters **105**, 240401 (2010)

[76] L. D. Landau
« The theory of superfluidity of helium II »
Journal of Physics (Union of Soviet Socialist Republics) **5**, 71 (1941)

[77] L. D. Landau
« On the theory of superfluidity of helium II »
Journal of Physics (Union of Soviet Socialist Republics) **11**, 91 (1947)

[78] L. D. Landau et E. M. Lifshitz
Théorie des Champs, Physique Théorique, Vol. 2
Éditions Mir, quatrième édition, imprimée en Union Soviétique (1989)

[79] L. D. Landau et E. M. Lifshitz
Mécanique Quantique — Théorie non-relativiste, Physique Théorique, Vol. 3
Éditions Mir, deuxième édition, imprimée en Union Soviétique (1967)

[80] L. D. Landau et E. M. Lifshitz
Statisticheskai Fizika
Fizatgiz, Moscou (1951)

[81] L. D. Landau et E. M. Lifshitz
Physique Statistique, Physique Théorique, Vol. 5
Éditions Mir, deuxième édition, imprimée en Union Soviétique (1967)

[82] L. D. Landau et E. M. Lifshitz
Mécanique des Fluides, Physique Théorique, Vol. 6
Éditions Librairie du Globe & Éditions Mir, deuxième édition, imprimée en Union Soviétique (1989)

[83] P. Lebœuf et N. Pavloff
« Bose–Einstein beams: Coherent propagation through a guide »
Physical Review A **64**, 033602 (2001)

[84] P. Lebœuf, N. Pavloff et S. Sinha
« Solitonic transmission of Bose–Einstein matter waves »
Physical Review A **68**, 063608 (2003)

[85] G. Lemaître
« L'Univers en expansion »
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A **53**, 51 (1933)

[86] M. Le Merrer, C. Clanet, D. Quéré, É. Raphaël et F. Chevy
« Wave drag on floating bodies »
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **108**, 15064 (2011)

[87] U. Leonhardt, T. Kiss et P. Öhberg
« Theory of elementary excitations in unstable Bose–Einstein condensates and the instability of sonic horizons »
Physical Review A **67**, 033602 (2003)

[88] U. Leonhardt, T. Kiss et P. Öhberg
« Bogoliubov theory of the Hawking effect in Bose–Einstein condensates »
Journal of Optics B **5**, S42 (2003)

[89] A. M. Leszczyszyn, G. A. El, Yu. G. Gladush et A. M. Kamchatnov
« Transcritical flow of a Bose–Einstein condensate through a penetrable barrier »
Physical Review A **79**, 063608 (2009)

[90] T. C. H. Liew, A. V. Kavokin et I. A. Shelykh
« Optical circuits based on polariton neurons in semiconductor microcavities »
Physical Review Letters **101**, 016402 (2008)

[91] F. W. London
« The λ-phenomenon of liquid helium and the Bose–Einstein degeneracy »
Nature **141**, 643 (1938)

[92] J. Macher et R. Parentani
« Black/white hole radiation from dispersive theories »
Physical Review D **79**, 124008 (2009)

[93] J. Macher et R. Parentani
« Black-hole radiation in Bose–Einstein condensates »
Physical Review A **80**, 043601 (2009)

[94] N. D. Mermin et H. Wagner
« Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models »
Physical Review Letters **17**, 1133 (1966)

[95] D. E. Miller, J. K. Chin, C. A. Stan, Y. Liu, W. Setiawan, C. Sanner et W. Ketterle
« Critical velocity for superfluid flow across the BEC-BCS crossover »
Physical Review Letters **99**, 070402 (2007)

[96] G. T. Moore
« Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity »
Journal of Mathematical Physics **11**, 2679 (1970)

[97] C. Mora et Y. Castin
« Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates »
Physical Review A **67**, 053615 (2003)

[98] G. Nardin, G. Grosso, Y. Léger, B. Piętka, F. Morier–Genoud et B. Deveaud–Plédran
« Hydrodynamic nucleation of quantized vortex pairs in a polariton quantum fluid »
Nature Physics **7**, 635 (2011)

[99] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe et F. Nori
« *Colloquium*: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits »
Reviews of Modern Physics **84**, 1 (2012)

[100] M. Olshanii
« Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons »
Physical Review Letters **81**, 938 (1998)

[101] R. Onofrio, C. Raman, J. M. Vogels, J. R. Abo–Shaeer, A. P. Chikkatur et W. Ketterle
« Observation of superfluid flow in a Bose–Einstein condensed gas »
Physical Review Letters **85**, 2228 (2000)

[102] P. Painlevé
« La mécanique classique et la théorie de la relativité »
Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **173**, 677 (1921)

[103] T. Paul, M. Albert, P. Schlagheck, P. Lebœuf et N. Pavloff
« Anderson localization of a weakly interacting one-dimensional Bose gas »
Physical Review A **80**, 033615 (2009)

[104] N. Pavloff
« Breakdown of superfluidity of an atom laser past an obstacle »
Physical Review A **66**, 013610 (2002)

[105] O. Penrose
« On the quantum mechanics of helium II »
Philosophical Magazine **42**, 1373 (1951)

[106] O. Penrose et L. Onsager
« Bose–Einstein condensation and liquid helium »
Physical Review **104**, 576 (1956)

[107] D. S. Petrov, D. M. Gangardt et G. V. Shlyapnikov
« Low-dimensional trapped gases »
Journal de Physique IV France **116**, 5 (2004)

[108] T. G. Philbin, C. Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. König et U. Leonhardt
« Fiber-optical analog of the event horizon »
Science **319**, 1367 (2008)

[109] S. Pigeon, I. Carusotto et C. Ciuti
« Hydrodynamic nucleation of vortices and solitons in a resonantly excited polariton superfluid »
Physical Review B **83**, 144513 (2011)

[110] D. Pines et P. Nozières
The Theory of Quantum Liquids
Benjamin, New York (1966)

[111] L. P. Pitaevskii
« Vortex lines in an imperfect Bose gas »
Soviet Physics — Journal of Experimental and Theoretical Physics **13**, 451 (1961)

[112] L. P. Pitaevskii et S. Stringari
« Uncertainty principle, quantum fluctuations, and broken symmetries »
Journal of Low Temperature Physics **85**, 377 (1991)

[113] L. P. Pitaevskii et S. Stringari
Bose–Einstein Condensation
Clarendon Press, Oxford (2003)

[114] V. N. Popov
Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics
D. Reidel Pub., Dordrecht (1983)

[115] C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic et W. Ketterle
« Evidence for a critical velocity in a Bose–Einstein condensed gas »
Physical Review Letters **83**, 2502 (1999)

[116] É. Raphaël et P.-G. de Gennes
« Capillary gravity waves caused by a moving disturbance: Wave resistance »
Physical Review E **53**, 3448 (1996)

[117] A. Recati, N. Pavloff et I. Carusotto
« Bogoliubov theory of acoustic Hawking radiation in Bose–Einstein condensates »
Physical Review A **80**, 043603 (2009)

[118] M. Richard, J. Kasprzak, R. Romestain, R. André et Le Si Dang
« Spontaneous coherent phase transition of polaritons in CdTe microcavities »
Physical Review Letters **94**, 187401 (2005)

[119] M. Richard, J. Kasprzak, R. André, R. Romestain, Le Si Dang, G. Malpuech et A. Kavokin
« Experimental evidence for nonequilibrium Bose condensation of exciton polaritons »
Physical Review B **72**, 201301(R) (2005)

[120] G. Roumpos, M. Lohse, W. H. Nitsche, J. Keeling, M. H. Szymańska, P. B. Littlewood, A. Löffler, S. Höfling, L. Worschech, A. Forchel et Y. Yamamoto
« Power-law decay of the spatial correlation function in exciton-polariton condensates »
Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **109**, 6467 (2012)

[121] G. Rousseaux, P. Maïssa, C. Mathis, P. Coullet, T. G. Philbin et U. Leonhardt
« Horizon effects with surface waves on moving water »
New Journal of Physics **12**, 095018 (2010)

[122] Y. G. Rubo, A. V. Kavokin et I. A. Shelykh
« Suppression of superfluidity of exciton-polaritons by magnetic field »
Physics Letters A **358**, 227 (2006)

[123] D. Sanvitto, S. Pigeon, A. Amo, D. Ballarini, M. de Giorgi, I. Carusotto, R. Hivet, F. Pisanello, V. G. Sala, P. S. S. Guimaraes, R. Houdré, E. Giacobino, C. Ciuti, A. Bramati et G. Gigli
« All-optical control of the quantum flow of a polariton condensate »
Nature Photonics **5**, 610 (2011)

[124] R. Schützhold
« Detection scheme for acoustic quantum radiation in Bose–Einstein condensates »
Physical Review Letters **97**, 190405 (2006)

[125] W. G. Unruh
« Experimental black-hole evaporation? »
Physical Review Letters **46**, 1351 (1981)

[126] S. Utsunomiya, L. Tian, G. Roumpos, C. W. Lai, N. Kumada, T. Fujisawa, M. Kuwata–Gonokami, A. Löffler, S. Höfling, A. Forchel et Y. Yamamoto
« Observation of Bogoliubov excitations in exciton-polariton condensates »
Nature Physics **4**, 700 (2008)

[127] M. Visser
« Acoustic black holes: Horizons, ergospheres and Hawking radiation »
Classical and Quantum Gravity **15**, 1767 (1998)

[128] M. Vladimirova, S. Cronenberger, D. Scalbert, K. V. Kavokin, A. Miard, A. Lemaître, J. Bloch, D. Solnyshkov, G. Malpuech et A. V. Kavokin
« Polariton-polariton interaction constants in microcavities »
Physical Review B **82**, 075301 (2010)

[129] R. M. Wald
General Relativity
University of Chicago Press, Chicago (1984)

[130] S. Weinfurtner, E. W. Tedford, M. C. J. Penrice, W. G. Unruh et G. A. Lawrence
« Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system »
Physical Review Letters **106**, 021302 (2011)

[131] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa et Y. Arakawa
« Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity »
Physical Review Letters **69**, 3314 (1992)

[132] G. B. Whitham
« Non-linear dispersive waves »
Proceedings of the Royal Society A **283**, 238 (1965)

[133] G. B. Whitham
Linear and Nonlinear Waves
Wiley Interscience, New York (1974)

[134] M. Wouters et I. Carusotto
« Excitations in a nonequilibrium Bose–Einstein condensate of exciton polaritons »
Physical Review Letters **99**, 140402 (2007)

[135] M. Wouters
« Synchronized and desynchronized phases of coupled nonequilibrium exciton-polariton condensates »
Physical Review B **77**, 121302(R) (2008)

[136] M. Wouters et I. Carusotto
« Excitations and superfluidity in non-equilibrium Bose–Einstein condensates of exciton-polaritons »
Superlattices and Microstructures **43**, 524 (2008)

[137] M. Wouters et I. Carusotto
« Superfluidity and critical velocities in nonequilibrium Bose–Einstein condensates »
Physical Review Letters **105**, 020602 (2010)

[138] S. Wüster et C. M. Savage
« Limits to the analog Hawking temperature in a Bose–Einstein condensate »
Physical Review A **76**, 013608 (2007)

[139] Q. Zhou et T.-L. Ho
« Universal thermometry for quantum simulation »
Physical Review Letters **106**, 225301 (2011)

Fluctuations quantiques et effets non-linéaires dans les condensats de Bose–Einstein : des ondes de choc dispersives au rayonnement de Hawking acoustique

Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude de l'analogue du rayonnement de Hawking dans les condensats de Bose–Einstein. Le premier chapitre présente de nouvelles configurations d'intérêt expérimental permettant de réaliser l'équivalent acoustique d'un trou noir gravitationnel dans l'écoulement d'un condensat atomique unidimensionnel. Nous donnons dans chaque cas une description analytique du profil de l'écoulement, des fluctuations quantiques associées et du spectre du rayonnement de Hawking. L'analyse des corrélations à deux corps de la densité dans l'espace des positions et des impulsions met en évidence l'émergence de signaux révélant l'effet Hawking dans nos systèmes. En démontrant une règle de somme vérifiée par la matrice densité à deux corps connexe, on montre que les corrélations à longue portée de la densité doivent être associées aux modifications diagonales de la matrice densité à deux corps lorsque l'écoulement du condensat présente un horizon acoustique. Motivés par des études expérimentales récentes de profils d'onde générés dans des condensats de polaritons en microcavité semi-conductrice, nous analysons dans un second chapitre les caractéristiques superfluides et dissipatives de l'écoulement autour d'un obstacle localisé d'un condensat de polaritons unidimensionnel obtenu par pompage incohérent. Nous examinons la réponse du condensat dans la limite des faibles perturbations et au moyen de la théorie de Whitham dans le régime non-linéaire. On identifie un régime dépendant du temps séparant deux types d'écoulement stationnaire et dissipatif : un principalement visqueux à faible vitesse et un autre caractérisé par un rayonnement de Cherenkov d'ondes de densité à grande vitesse. Nous présentons enfin des effets de polarisation obtenus en incluant le spin des polaritons dans la description du condensat et montrons dans le troisième chapitre que des effets similaires en présence d'un horizon acoustique pourraient être utilisés pour démontrer expérimentalement le rayonnement de Hawking dans les condensats de polaritons.

Mots clefs

Condensats de Bose–Einstein atomiques, solitons, fluctuations quantiques, corrélations, polaritons en microcavité semi-conductrice, condensats hors équilibre, condensats polarisés, superfluidité, ondes de choc dispersives, théorie de Whitham, trous noirs acoustiques, rayonnement de Hawking acoustique.

Quantum fluctuations and nonlinear effects in Bose–Einstein condensates: From dispersive shock waves to acoustic Hawking radiation

Abstract

This thesis is devoted to the study of the analogue of Hawking radiation in Bose–Einstein condensates. The first chapter presents new configurations of experimental interest making it possible to realize the acoustic equivalent of a gravitational black hole in the flow of a one-dimensional atomic condensate. In each case we give an analytical description of the flow pattern, the associated quantum fluctuations, and the spectrum of Hawking radiation. Analysis of the two-body density correlations in position and momentum space emphasizes the occurrence of signals revealing the Hawking effect in our systems. By demonstrating a sum rule verified by the connected two-body density matrix we show that the long-range density correlations have to be associated to the diagonal modifications of the two-body density matrix when the flow of the condensate presents an acoustic horizon. Motivated by recent experimental studies of wave patterns generated in semiconductor microcavity polariton condensates we analyze in a second chapter superfluid and dissipative characteristics of the flow of a nonresonantly pumped one-dimensional polariton condensate past a localized obstacle. We examine the response of the condensate in the weak-perturbation limit and by means of Whitham theory in the nonlinear regime. We identify a time-dependent regime separating two types of stationary and dissipative flow: a mostly viscous one at low velocity and another one characterized by Cherenkov radiation of density waves at large velocity. Finally we present polarization effects obtained by including the spin of polaritons in the description of the condensate and show in the third chapter that similar effects in the presence of an acoustic horizon could be used to experimentally demonstrate Hawking radiation in polariton condensates.

Keywords

Atomic Bose–Einstein condensates, solitons, quantum fluctuations, correlations, semiconductor microcavity polaritons, out-of-equilibrium condensates, polarized condensates, superfluidity, dispersive shock waves, Whitham theory, acoustic black holes, acoustic Hawking radiation.