



**HAL**  
open science

# Stabilisation et régulation de robots mobiles opérant en groupe

Mohamed Anouar El Kamel

► **To cite this version:**

Mohamed Anouar El Kamel. Stabilisation et régulation de robots mobiles opérant en groupe. Automatique / Robotique. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2012. Français. NNT : 2012EVRY0015 . tel-00876452

**HAL Id: tel-00876452**

**<https://theses.hal.science/tel-00876452v1>**

Submitted on 24 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

préparée au :

**Laboratoire d'Ingénierie Mathématiques de l'Ecole  
Polytechnique de Tunisie**

Institue d'accueil :

**Université d'Evry Val d'Essonne**

Pour l'obtention du grade de :

**Docteur de l'UEVE & l'EPT**

Spécialité : **MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

Présentée et soutenue par

**Mohamed Anouar EL KAMEL**

---

## **Stabilisation et régulation de robots mobiles opérant en groupe**

---

Soutenance : 30 Mai 2012

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Philippe MARTINET	Pr., Ecole Centrale de Nantes, CNRS UMR 6597.
	Jean-Baptiste POMET	HDR, Chargé de recherches, INRIA Sophia Antipolis Méditerranée.
<i>Examineurs :</i>	Philippe BIDAUD	Pr., Université Pierre et Marie Curie, ISIR UMR 7222.
	Simon LACROIX	Directeur de recherches au LAAS, Toulouse.
<i>Directeurs :</i>	Lotfi BEJI	MCF, HDR, Université d'Evry.
	Azgal ABICHOU	Pr., Ecole Polytechnique de Tunisie.



## Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans le cadre de cotutelle entre le laboratoire LIM de l'Ecole Polytechnique de Tunisie et le laboratoire IBISC de l'Université d'Evry Val d'Essonne.

Mes remerciements vont en premier lieu à mes deux directeurs de thèse dans les deux laboratoires Mr Lotfi BEJI MCF, HDR, Université d'Evry et Mr Azgal ABICHOU professeur à l'Ecole Polytechnique de Tunisie pour la confiance qu'il m'ont témoigné et leur encadrement tout au long de ces années.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse Mr Jean-Baptiste POMET, HDR, Chargé de recherches à INRIA Sophia Antipolis Méditerranée, et Mr Philippe MARTINET Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leurs précieuses remarques qui ont permis d'améliorer considérablement le manuscrit.

J'associe à ces remerciements Mr Philippe BIDAUD, professeur ISIR, Mr Simon LACROIX HDR, Chargé de recherches au LAAS, pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je souhaite également remercier tous mes collègues des deux laboratoires LIM et IBISC et particulièrement les membres des équipes de contrôle au sein du LIM-EPT et VASCO à IBISC-UEVE pour tous les échanges scientifiques partagés et les bons moments passés ensemble.

Enfin je remercie mes parents Habib et Ghayet-El-Mouna, ma soeur Eya et ma femme Asma pour leur soutien au cours de ces longues années d'études et sans lesquels je n'en serai pas là aujourd'hui.

## Résumé

Pour les systèmes de commande sous la forme de  $\dot{x} = f(x, u)$ , dans la littérature, les chercheurs s'intéressaient à la stabilisation de ce système de différentes manières : asymptotique, uniformément asymptotique, partielle, en temps fini, etc. Pour aboutir à ces résultats, les méthodes utilisées font appel aux techniques suivantes : Lyapunov, LaSalle, Barbalat, surface glissante, etc.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à une autre fonctionnalité de la commande, dite *commande repulsive stabilisante*. Les résultats ont été généralisés au cas d'un système avec dérive et sans dérive. Comme résultat, l'approche de commande qu'on propose assure la stabilité du système autour d'une position désirée et la répulsion de celui-ci par rapport à un ensemble indésirable, construit dans l'espace de navigation. Toute forme d'application sera concernée par nos résultats théoriques, on peut citer, la navigation terrestre et aérienne dans un environnement peu ou pas connu. De même, la commande qu'on propose preserve la communication inter-agent, une fois planifiées.

En terme d'application, on a considéré le modèle d'un véhicule à roues type unicycle, sans tenir compte de l'orientation (cas non holonôme) et dans le cas où l'environnement contient un ou plusieurs obstacle(s). Contrairement aux résultats de la littérature, qui sont basés sur une commande à structure variable pour l'évitement d'un obstacle, la commande *repulsive-stabilisante* trouvée est une commande continue sur l'espace de navigation. La deuxième partie de cette thèse traite le problème de stabilité d'une formation d'agents (système multi-véhicules) qui évolue dans un environnement hostile tout en préservant la communication entre les agents. Pour réussir la formation, la décentralisation de la commande par rapport aux agents est rendue robuste à travers des graphes de communication. Ces graphes relèvent de la stratégie et objectifs de la formation. Nos résultats de stabilité ont fait l'objet d'une implementation rigoureuse sur un simulateur réalisé sous Matlab.

**Mots clés** : Véhicules en formation, Système multi-agents, Evitement

de collision, Invariance de LaSalle, Graphes de communication.

## Abstract

For control systems in the form  $\dot{x} = f(x, u)$ , in the literature, researchers were interested in stabilizing the system in different ways : asymptotic, uniformly asymptotic, partial, in finite time, etc. To achieve these results, the methods involve the following techniques : Lyapunov, LaSalle, Barbalat, sliding surface, etc.

In this thesis, we became interested in another feature form of the controller, called *repulsive stabilizing controller*. The results were generalized to the case of a system with drift and without drift. As a result, the proposed control approach ensures the system stability around a desired position and the repulsion of the latter over a set junk, built in the navigation space. Any form of application will be concerned by our theoretical results including, terrestrial and aerial navigations in a little known or not known environment. Similarly, the proposed control law, once planned, preserves the inter-agent communication.

In terms of application, we considered the model of a unicycle-type wheeled vehicle, regardless of orientation (non-holonomic case) and where the environment contains one or more obstacle(s) . Contrary to the results of the literature, which are based on a switching control structure for avoidance of an obstacle, the *stabilizing repulsive* found is a smooth and continuous controller on the navigation space. The second part of this thesis addresses the stability problem of a formation of agents (multi-vehicle) operating in a hostile environment while maintaining the communication between agents. To successfully the strategy of the formation, the decentralized controller over agents is made robust through communication graphs. These graphs are performed according to the formation strategy and objectives. Our stability results have been implemented in a simulator made in Matlab.

**Keywords** : Lyapunov stability, wheeled vehicle, collision avoidance, multi-agent system, formation control, graph theory.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Réseau coopératif . . . . .	1
1.2	Système multi-véhicules/multi-agents . . . . .	2
1.3	Commande d'un(e) formation/système multi-agents . . . . .	3
1.4	Projet de recherche élaboré . . . . .	7
1.5	Contributions . . . . .	9
1.6	Conclusion . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Notions générales</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Comportement des trajectoires . . . . .	14
2.2.1	Systèmes commandés . . . . .	16
2.3	Stabilité et stabilisation . . . . .	16
2.3.1	Systèmes commandés . . . . .	19
2.4	Commandabilité . . . . .	20
2.5	Théorie des graphes . . . . .	20
2.6	Conclusion . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Navigation d'un véhicule holonôme</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	27
3.2	Stabilisation et régulation de la cinématique . . . . .	28
3.2.1	Problème de stabilisation et régulation des systèmes de commande . . . . .	28
3.2.2	Condition sur la fonction régulatrice pour l'évitement d'un ensemble de points . . . . .	35
3.3	Application au système agent/véhicule . . . . .	38
3.3.1	Localisation et évitement d'un obstacle . . . . .	39
3.3.2	Cas de plusieurs obstacles . . . . .	50
3.3.3	Analyse des résultats . . . . .	55
3.4	Stabilisation et régulation de la dynamique . . . . .	59



---

3.4.1	Modèle équivalent . . . . .	60
3.4.2	Problème de stabilisation et de régulations des systèmes de commande du second ordre . . . . .	62
3.4.3	Construction d'une commande régulatrice stabilisante	63
3.4.4	Conjecture : l'évitement d'obstacle . . . . .	64
3.4.5	Analyse des résultats . . . . .	65
3.5	Conclusion . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Navigation d'une formation de véhicules holonomes</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Stabilisation et régulation des trajectoires d'une formation d'agents . . . . .	70
4.3	Commande décentralisée pour un problème de rendez-vous .	73
4.3.1	Commande décentralisée pour entourer une cible . . .	74
4.3.2	Construction de la commande répulsive . . . . .	77
4.3.3	Analyse des résultats . . . . .	81
4.4	Graphe de connexion associé à la navigation d'une formation d'agents . . . . .	82
4.4.1	Communication agents-cibles . . . . .	85
4.4.2	Analyse des résultats . . . . .	91
4.4.3	Navigation hiérarchique . . . . .	92
4.5	Analyse des résultats . . . . .	95
4.6	Conclusion . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Navigation d'une formation de véhicules non-holonômes</b>	<b>99</b>
5.1	Introduction . . . . .	99
5.2	Contournement d'une cible par une formation de véhicules terrestres non holonomes . . . . .	100
5.2.1	Position du problème . . . . .	101
5.2.2	Analyse de la commande . . . . .	103
5.3	Extension de la commande à l'évitement d'obstacle . . . . .	109
5.4	Simulations . . . . .	112
5.5	Conclusion . . . . .	113

<b>6 Conclusion générale</b>	<b>i</b>
<b>A Modélisation d'un véhicule à roues</b>	<b>v</b>
A.1 Introduction . . . . .	v
A.2 Roulement sans glissement . . . . .	vi
A.3 Contraintes non holonomes . . . . .	vii
A.4 Modélisation de l'unicycle . . . . .	ix
A.5 Modèle pour la commande . . . . .	xi
A.6 Conclusion . . . . .	xii
<b>Bibliographie</b>	<b>xiii</b>



# Table des figures

2.1	Exemple de graphe . . . . .	21
2.2	Exemple de graphe orienté . . . . .	23
2.3	Exemple de graphe non-orienté . . . . .	23
3.1	Un véhicule à l'encontre d'un obstacle . . . . .	40
3.2	Les angles $\theta$ et $\alpha$ . . . . .	44
3.3	les ensembles invariants K et H . . . . .	49
3.4	Navigation d'un véhicule dans un plan qui contient un obstacle	56
3.5	Les variations de la fonction régulatrice $\nu$ et de la commande $u$ en fonction du temps . . . . .	57
3.6	Les champs de vecteurs issus des points voisins de l'obstacle	58
3.7	Trajectoires issues de 4 positions initiales différentes pour un véhicule . . . . .	58
3.8	La fonction régulatrice $\nu$ en fonction du temps dans le cas $q_0(-100, 55)$ . . . . .	59
3.9	Navigation d'un véhicule de modèle dynamique dans un plan	66
4.1	Simulation de la formation avec une commande décentralisée	81
4.2	Le graphe "unit-depth" . . . . .	86
4.3	Le graphe "un seul niveau de profondeur et un parent" . . .	86
4.4	Distance entre les différents véhicules et le centre du cercle qui entoure l'obstacle au cours du temps . . . . .	91
4.5	Simulation de navigation de la formation avec communica- tions vers une configuration hexagonale . . . . .	92
4.6	Simulation de navigation de la formation avec communica- tions vers une configuration linéaire . . . . .	93
4.7	Navigation de 4 agent en présence d'un obstacle . . . . .	96
4.8	Navigation de 4 agent sans présence d'obstacle . . . . .	97
5.1	Figure explicative du théorème de LaSalle . . . . .	101

---

5.2	Position et orientation de la $i^{\text{ème}}$ véhicule . . . . .	102
5.3	l'angle compris entre l'axe horizontal et le vecteur $q_i A$ . . . .	103
5.4	Déplacement de 3 véhicules pour atteindre des positions au voisinage de la cible. . . . .	113
5.5	Déplacement de 3 véhicules pour atteindre des positions au voisinage de la cible. . . . .	114
5.6	Déplacement de 6 véhicules pour atteindre des positions au voisinage de la cible. . . . .	114
5.7	Déplacement de 2 sous formations de véhicules pour at- teindre des positions au voisinage de deux cibles. . . . .	115
A.1	Roulement sans glissement de la roue . . . . .	vii

# Introduction

---

Dans ce chapitre nous allons introduire le cadre de cette thèse. Après introduction des notions liées à un réseau coopératif, le système multi-véhicules et le système multi-agents, nous analysons les commandes associées à chaque système et les résultats théoriques et pratiques présentés dans la littérature.

## 1.1 Réseau coopératif

On peut définir un réseau coopératif comme étant un ensemble d'acteurs et d'organisations qui sont en concurrence pour produire, s'organiser et échanger une information à travers chaque membre du réseau. Ainsi, l'accumulation de plus d'informations possibles sur chaque membre du réseau et sur l'environnement permet d'en retirer un avantage dans l'évolution coopérative du réseau. Par conséquent, les membres du réseau communiquent et interagissent entre eux de manière à accroître leurs profits individuels et le profit du réseau. En terme d'application et afin de faire coopérer plusieurs utilisateurs, par exemple sur internet, les informaticiens ont tiré beaucoup profit à travers la théorie de graphe appliquée au réseaux informatiques. Il semble que le meilleur moyen de comprendre les phénomènes de don et de coopération sur Internet est de partir des principes d'organisation technique du réseau. Tous se repose sur une architecture informatique " client/serveur ". L'adaptation de ces notions à la commande des systèmes en formation tels que les robots mobiles a vu le jour dans les années 1990 à travers la référence de Wang et al. [46]. Nous rappelons par la suite les principaux résultats de la littérature et quelques définitions d'un système multi-véhicules/multi-agents.

## 1.2 Système multi-véhicules/multi-agents

Un système coopératif des véhicules, où chaque véhicule/agent est équipé à l'aide d'un ou plusieurs capteur(s), a le potentiel d'exécuter efficacement une tâche tout comme le système d'essaim d'animaux. Un groupe de poissons, par exemple, monte efficacement le courant d'eau pour trouver la source la plus proche et dense pour se nourrir. Ce groupe utilise des règles relativement simples, propres à chaque poisson, afin de répondre aux signaux se trouvant dans un petit voisinage. Les biologistes ont développé un certain nombre de modèles pour régler la circulation qui régissent les poissons et d'autres groupe d'animaux (voir, par exemple, [46], [47], [48], et les références associées). Cependant, les règles établies par les biologistes pour un groupe d'animaux peuvent avoir des contraintes très différentes en les associant directement au groupe de véhicules. A titre d'exemple, pour un groupe de véhicules on peut librement adapter l'espacement entre les véhicules, tandis que les poissons maintiennent un certain espacement pour les besoins, cela inclue la reproduction et la gestion des déchets [49].

Dans la littérature, un système multi-agents a été associé à un nombre important de robots mobiles autonomes et où la communication est nécessaire pour qu'ils arrivent à atteindre leur but. Généralement, dans le cas des robots mobiles, chaque agent est capable de suivre la position des autres agents tout en restant dans une région de détection, généralement, centrée par rapport à la position actuelle de l'agent. Le problème de *rendez-vous* entre les agents, initialement étudiée dans [55], reste le plus commun à plusieurs travaux de recherche. L'étude d'un agent type véhicule en formation consiste à prendre en compte les faits suivants :

- un agent type véhicule en formation est une entité autonome, mais fortement dépendante des autres,
- un agent type véhicule en formation peut communiquer avec les autres à l'aide d'un échange des informations. Dans ce cas, on peut distinguer deux types d'informations : les informations envoyés à plusieurs véhicules et les informations envoyés à un seul véhicule,
- un agent type véhicule en formation ne peut pas refuser de faire ce

qu'on lui dit de faire, les véhicules évoluent dans un Système dit Multi Agent (SMA). Ils collaborent au sein de ce SMA pour atteindre un objectif commun,

- enfin, les agents type véhicule en formation peuvent se déplacer volontairement ou pas et évoluer d'un SMA à un autre.

Nous allons aborder par la suite, les résultats sur la commande d'un système multi-véhicules en formation ou SMA.

## **1.3 Commande d'un(e) formation/système multi-agents**

Le système en formation qu'on étudie est composé de  $n > 1$  véhicules autonomes. La commande d'un ensemble de véhicules <sup>1</sup> en formation est une tâche difficile du moment que la commande varie selon le nombre d'agents dites *actifs* et les objectifs à atteindre. La généralisation de la commande à un large groupe de véhicules en formation est un problème qui s'avère ouvert. Nous apportons dans cette thèse une solution à ce problème que ce soit de point de vue convergence vers la cible et la régulation en présence d'obstacles. Afin de situer notre travail, nous rappelons à présent les résultats obtenus dans la littérature.

La commande de formation des véhicules multiples a suscité beaucoup d'attention de la communauté scientifique. Cette commande inclue la coordination des robots mobiles, des véhicules aériens ou sous marins, des satellites et des vaisseaux spatiaux. Par exemple, on s'attend à ce qu'un réseau mobile coopératif terrestre, où chaque robot sert de capteur mobile, surpasse un véhicule simple grand en taille et équipé de plusieurs capteurs. Le véhicule simple fortement équipé peut nécessiter une puissance considérable en actionnement. De même et comme conséquence, la manque de robustesse est un échec du fait que son adaptation à une configuration est difficile. Un véhicule indépendant avec un seul capteur peut être défaillant dans le rassemblement des données tout comme dans d'autres tâches exi-

---

1. aériens/terrestres, cas homogène/hétérogène



geantes d'une intervention en formation. Dans des missions militaires, un groupe de véhicules autonomes sont nécessaires pour assurer une couverture de la zone du combat et la reconnaissance. Sur une route automatisée, le réseau du trafic de transport peut être considérablement rendu fluide si les véhicules évoluent à une vitesse désirée tout en gardant une distance spécifique. La recherche sur la commande de formation aide également des personnes à comprendre mieux quelques comportements sociaux biologiques, tels que l'essaim des insectes et le comportement des oiseaux.

Dans la littérature, il y'a eu trois approches qui ont été proposée pour la commande d'une formation de véhicules : leader-suiveur, comportementale et structure virtuelle. Chaque approche a ses propres avantages et inconvénients.

Dans l'approche *leader-suiveur*, quelques véhicules sont considérés comme leaders, alors que le reste de robots dans le groupe agissent en tant que suiveurs [46], [47], [48], [49]. La trajectoire de référence du leader est prédéfinie, tandis que l'évolution des suiveurs est réduite aux états de leurs voisins plus proches selon les configurations données. Un avantage de l'approche leader-suiveur est qu'il est facile à mettre en application. En outre, la formation peut encore être maintenue même si le leader est perturbé. Cependant, un inconvénient est qu'il n'y a aucun retour d'état explicite de la commande au reste de la formation. De même, si un suiveur est perturbé, la formation ne peut pas être maintenue. En outre, le leader est l'unique responsable à l'échec de la formation.

Dans l'approche *comportementale* [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], le comportement désiré de chaque véhicule ne prend pas en charge l'évitement de collision/obstacle et la réussite du groupe est calculée par rapport à la qualité comportementale prescrite relativement pour chaque véhicule. La commande de la formation est calculée à partir d'une pondération d'importance relative à chaque comportement. Les avantages de cette approche sont : la dérivation d'une stratégie de commande explicite quand les véhicules ont des objectifs de concurrence multiples incluant la communication entre les véhicules voisins. Alors que l'inconvénient est principalement lié au comportement de la formation qui ne peut pas être

défini. Ainsi, il est difficile de trouver mathématiquement une commande garantissant la stabilité du groupe.

Dans l'approche *structure virtuelle*, la formation entière est traitée comme étant une seule entité [60], [61], [62], [63]. Mécaniquement, la structure est considérée comme étant un corps solide (structure virtuelle rigide) ou déformable (structure virtuelle déformable) [6]. Quand la structure se déplace, elle trace la trajectoire désirée pour chaque robot appartenant au groupe. Les avantages de cette approche sont : la facilité de prescrire le comportement pour le groupe et la formation peut être maintenue pendant les manœuvres, c.-à-d. la structure virtuelle peut évoluer dans son ensemble dans une direction donnée avec une orientation donnée et maintenir un rapport géométrique rigide entre les véhicules. Toutefois, le fait que la formation agit en tant qu'une seule structure virtuelle, limite les applications potentielles et où la formation nécessite une variation de forme dans le temps. En conclusion, les deux approches structure virtuelle et leader-suiveur exigent que les informations sur le leader et la structure soient communiquées à chaque agent de la formation [6]. En revanche, l'approche comportementale est décentralisée et peut être mise en application avec 'moins' de communication.

Dans [63], une architecture de coordination pour la commande de formation de vaisseau spatial est présentée pour incorporer les approches multi-robots de type leader-suiveur, comportementale et structure virtuelle. Pour une classe des robots dont la dynamique est représentée par un double intégrateur, dans [65], l'étude de stabilisation de la formation a été faite moyennant la fonction de Lyapunov et la commande de mouvement contraint le système à un problème de stabilisation et où un retour d'état sur les erreurs est incorporée à travers la trajectoire paramétrée du leader. En termes d'informations issues des robots dans le groupe et qui sont utilisées pour calculer la commande de chaque robot, on distingue deux approches principales pour résoudre le problème de la commande du groupe : la centralisation et la décentralisation de la commande. Dans l'approche centralisée (voir par exemple [63]), un seul contrôleur est conçu dans la zone du travail à partir des trajectoires libres de collision. L'inconvénient de l'approche centralisée

sée est dans la complexité de calcul, mais on a la garantie d'une solution analytique complète. La commande décentralisée [68] est locale et est dépendante de chaque membre du groupe. La fonction potentielle permettant une navigation sans collision a été couramment proposée [59], [69], [70]. Le problème principal avec la commande décentralisée est qu'elle est incapable de prévoir les minima locaux. Par conséquent, sous une commande donnée, le groupe peut se retrouver avec plusieurs points d'équilibre autre que les points désirés. Ces points peuvent être instables et la commande sera incapable à remédier à l'instabilité du groupe. Par conséquent, pour le groupe, il est plutôt difficile de concevoir un contrôleur tels que tous les points d'équilibre, excepté l'équilibre désiré, sont instables ou appartenant aux minima locaux. Les quelques remèdes sur ce point moyennant une commande centralisée (voir les résultats dans [71], [72], [73], [74]), l'ajustement des paramètres de la commande est extrêmement difficile à obtenir dans la pratique, qui sont cruciaux pour garantir que les seuls points d'équilibre désirés sont stables asymptotiquement et que les autres points *critiques* sont instables.

Dans la plupart de papiers cités ci-dessus, les agents sont considérés comme des points matériels avec une dynamique représentée par un intégrateur simple ou double ([59], [69], [74]) ou des véhicules entièrement actionnés [64], amené en double intégrateur à l'aide d'une linéarisation par retour d'état. Le cas d'un véhicule autonome sous des contraintes non holonomes a été étudié dans [50]. En outre, dans la commande de trajectoire des robots mobiles non holonomes (voir par exemple [75], [76], [77]), les erreurs de poursuite sont souvent transformées en une formulation complexe, utilisant plusieurs transformations non triviales. Si ces techniques sont appliquées à la commande de formation d'un groupe de robots mobiles non holonome, il est extrêmement difficile d'incorporer l'évitement de collision entre les robots.

Afin d'assurer un évitement d'obstacles tout au long d'une navigation, comme outil de commande, les fonctions artificielles telles que les *fonctions potentielles* ont été présentées dans l'étude d'une formation des véhicules [50], [51]. Généralement, ces fonctions sont utilisées pour modéliser les in-

teractions entre les agents. Dans les travaux [52] [53] [54], les auteurs ont étudié la stabilité d'essaim sous divers profils des fonctions potentielles.

## 1.4 Projet de recherche élaboré

Cette thèse s'intègre dans le cadre du projet CIRTA<sup>2</sup> : *Coopération Intelligente entre une formation de Robots Terrestres et Aériens* qui s'intègre dans l'axe 3D de l'activité de l'équipe VASCO du laboratoire IBISC. Après avoir accordé un intérêt à l'autonomie d'une entité évoluant seule, récemment une nouvelle voie vers la commande de plusieurs entités autonomes s'ouvre, ce sont les systèmes dits en *formation* ou en *coordination*. Pendant une décennie, les scientifiques issus de disciplines assez diverses, notamment le comportement des animaux, la physique et de biophysique, sciences social et l'informatique ont été fascinés par l'émergence de ce domaine de recherche et surtout par le comportement et l'interaction locale entre les différents agents du groupe, pour ce fait on peut citer [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]. Cet intérêt vient du fait que l'utilité d'étudier les systèmes en formation touche plusieurs domaines, notamment médicales, animales, industriels et militaires. Cette coopération entre différentes entités est naturelle et très importante même dans notre vie quotidienne. A titre d'exemple, il faut plusieurs personnes qui s'entraident pour transporter une montagne de sable d'un lieu à un autre. Ainsi, une coopération est nécessaire entre ces différents agents qui doivent agir en formation afin d'achever le travail tout en réalisant une économie de point de vue énergie et de gain de temps. C'est pourquoi les industriels ont eu recours à diviser un travail en plusieurs tâches [91] et le distribuer entre plusieurs robots évoluant en formation et assurant un temps de délivrance synchronisé [90].

Notre travail consiste à commander un groupe de  $n > 1$  robots mobiles terrestres vers un objectif donné et dans un environnement contenant plusieurs obstacles. Dans nos démarches, nous nous sommes confrontés à

---

2. Ce projet a été soumis à une demande d'ANR qui va être renouvelée.

quatre problèmes auxquels nous apportons les schémas suivants :

- **P1** Le premier problème consiste à faire converger un ensemble de robots vers un ensemble attractif (objectif), voisin de la cible. Cet ensemble est construit sous l'hypothèse que tous les robots admettent la même expression de commande.
- **P2** Sachant que l'environnement où se trouve la formation est hostile, la commande élaborée pour la formation devrait prendre en compte les contraintes environnementales.
- **P3** Lors d'une navigation autonome, une commande intégrante d'une stratégie de communication entre les différents robots devrait faire en sorte que les membres du groupe communique d'une manière assez continue. Ceci permettrait de garantir le déplacement de toute la formation vers l'objectif tout en ayant une stratégie de réussite.
- **P4** La convergence de la formation vers un objectif ne peut avoir lieu sans la conception d'une fonction de régulation qui sera intégrée dans la commande. Cette dernière permet l'évitement de collision entre les membres de la formation et d'éviter que les intérêts se chevauchent.

Dans la littérature, plusieurs travaux ont été réalisés et plusieurs méthodes analytiques ont été employées pour traiter le cas de la commande d'une formation de véhicules. La plupart des chercheurs dans le domaine de la théorie de contrôle ont pour but principal de construire une loi de commande qui fait converger asymptotiquement les solutions vers une position désirée. Néanmoins, peu de chercheurs s'intéressaient au comportement des trajectoires entre le temps initial  $t_0$  et le temps de la convergence  $T$ . Au cours de cette période le robot doit éviter un ensemble d'obstacles et converger vers la cible. Le but est d'établir un raccordement entre ces deux comportements de la solution. Ce raccordement a été traité par *D. E. Chang* [8] par un algorithme (I) du type :

- **1)** Utiliser une première loi de commande,
- **2)** *Si* l'obstacle est dans l'espace de navigation, *Alors* utiliser une deuxième loi de commande, *Si non* aller à l'étape 1

où il a utilisé les forces gyroscopiques pour qu'un système multi-agents évite des obstacles dans l'espace de navigation. Une autre technique qui est

utilisée dans [9], est basée sur l'approche de fonction de navigation avec un commutateur analytique entre les différents cas due à la zone de détection limitée des UAV. Pour le guidage et la surveillance, un multiple d'UAV en formation a été étudié dans [66, 92]

Dans [10, 11], une commande optimale réduisant au minimum la distance entre des véhicules aériens a été considérée. *Dimos et al.* résolvent, dans [12], le problème de la convergence vers une configuration désirée d'une formation de robots de cinématiques qui correspondent au gradient négatif d'un champ potentiel et qui est la somme d'un terme attractif et un terme répulsif utilisant le théorème de *Dual Lyapunov de Rantzer*, car les techniques traditionnelles de Lyapunov ne peuvent pas garantir la convergence à la configuration désirée. Mais le problème qui surgit dans tous ces travaux est que l'implémentation du programme employant les lois de commandes correspondantes utilisent l'algorithme du type (I) c.-à-d. un test (Si...Alors...Sinon) ou font intervenir la commande optimale, qui sont tous deux très coûteux du point de vue exécution.

## 1.5 Contributions

La principale contribution de cette thèse est d'avoir fourni un travail important sur l'étude et l'utilisation d'une nouvelle approche de commande des systèmes holonomes (sans orientation du véhicule mobile) et non-holonomes (avec orientation du véhicule mobile). Plus précisément, les principales contributions portent sur les points suivants :

- Une approche conceptuelle de la commande, appliquée au cas d'un mono-robot et au cas d'une formation d'agents.
- Elaboration d'une fonction régulatrice rendant robuste l'application de la commande à un système perturbé par son environnement. Cette dernière agissant comme étant une nouvelle commande pour modifier les solutions du système ainsi ses trajectoires au court du temps.
- Assurer une liberté suffisante pour le choix de cette fonction de régulation afin d'améliorer le comportement de la trajectoire que ce soit

d'un agent ou de la formation.

- Assurer la convergence de la formation vers la cible mais sans procéder à un changement dans la forme de la commande afin d'assurer une continuité de cette dernière tout au long de la mission. Ceci revient à dire que, si on considère  $\mathcal{O}$  comme ensemble de points à éviter et  $M$  la variété où se trouve les solutions, la loi de commande élaborée doit être régulière sur  $M/\mathcal{O}$ .

Hormis ce premier chapitre d'introduction, destiné à définir les objectifs de l'étude, à mentionner les contributions et à présenter l'organisation du document, ce manuscrit est structuré en cinq grandes parties, organisés comme suites :

- **Chapitre 2.** Ce chapitre rappelle tous les théorèmes qu'on a pu utiliser au cours de ce travail. Dans un premier temps, on présente les équations différentielles ordinaires et les conditions de l'existence et l'unicité de la solution. Dans la deuxième partie, on rapporte les résultats sur la stabilité et la commandabilité d'un système de commande du type  $\dot{q} = f(q, u)$ . On achève ce chapitre par un résumé sur la théorie de graphe.
- **Chapitre 3.** Une étude théorique a été établie dans cette partie. Le but étant de donner une condition suffisante dans l'évitement d'un ensemble de point dans l'espace de navigation. Comme exemple, on a pris le cas de l'unicycle en tant qu'un mono-robot, sous les deux aspects cinématique et dynamique et sans tenir compte de son orientation. Selon une approche exposée dans ce chapitre, on a pu construire une commande assurant la stabilité du système au voisinage du point désiré/atteindre et qui permet aussi de contrôler la trajectoire de l'unicycle au cours du temps. On présente des résultats généraux de régulation à travers une fonction dite *régulatrice* dans le cas d'une navigation dans un environnement présentant un où plusieurs obstacles.
- **Chapitre 4.** L'évolution d'un système composé de plusieurs robots mobiles dans un environnement hostile tout en préservant les com-

munications entre les agents est présenté dans ce chapitre. On étend l'approche développée dans le chapitre précédent pour le cas d'une formation en assurant sa stabilité vers la cible et sa régulation vis-à-vis de l'environnement. Comme outil de communication on s'est basé sur la théorie de graphe et en agissant sur la distance entre les véhicules pour le cas de déplacement hiérarchique et décentralisé.

- **Chapitre 5.** Ce chapitre traite le problème de la convergence d'une formation de véhicules non-holonomes type unicycle en tenant compte de différentes orientations. Etant donné un objectif, on montre qu'à partir de n'importe quelle condition initiale de l'agent, la stabilisation classique assure sa convergence vers un point cible. Néanmoins, pour commander une formation, il faut que chaque agent converge vers un point voisin de la cible. Pour cela, on a proposé une stratégie coopérative de commande pour atteindre une cible tout en régularisant l'angle d'orientation. En deuxième lieu, on a développé une approche constructive de la commande permettant le déplacement des véhicules dans un environnement hostile.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, qui a servi comme une introduction à la thèse, on a rappelé les résultats de la littérature et les motivations de ce travail de recherche. On a situé aussi les objectifs de cette thèse par rapport aux besoins de l'équipe et ceux du laboratoire IBISC. La contribution de la thèse a été exposée d'une manière succincte à travers le contenu des différents chapitres. Avant de détailler notre contribution, nous allons introduire les outils mathématiques en rapport avec nos démarches et nos résultats.





# Notions générales

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter quelques résultats mathématiques sur les équations différentielles ordinaires et les systèmes commandés, qui seront utile tout au long de notre travail.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux résultats qui se trouvent dans la littérature se ramenant à la stabilité, la stabilisation et l'étude du comportement des trajectoires issues des équations différentielles ordinaires au cours du temps. Au niveau de comportement des trajectoires, nous allons présenter des résultats notamment de A. L. Cauchy sur l'unicité et l'existence des solutions et quelques théorèmes dans la géométrie différentielle qui nous donnent des résultats sur l'allure des trajectoires au cours du temps. Pour la stabilité, on présentera ce qu'a fait A.M. Lyapunov qui garantissait l'existence des fonctions, aujourd'hui appelées fonctions de Lyapunov, assurant la stabilité pour les équations différentielles ordinaires continues, nous donnerons les principaux théorèmes qui en découlent, et nous finirons cette première partie par l'étude de la commandabilité des systèmes.

Dans un deuxième temps, nous ferons un bref rappel sur la théorie des graphes, et on présentera des études qui relient cette théorie aux systèmes d'équations différentielles ordinaires.

## 2.2 Comportement des trajectoires

On considère les systèmes d'équations différentielles autonomes et non-autonomes suivants :

$$\dot{q} = X(q) \quad (2.1)$$

$$\dot{q} = f(t, q) \quad (2.2)$$

où  $X$  et  $f$  sont définies de  $O \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

On commence tout d'abord par présenter le théorème d'existence et d'unicité. Il existe plusieurs manières d'exprimer ce théorème connu sous le nom de Cauchy-Lipchitz, dont la forme suivante :

**Théorème 1** (*Cauchy Lipchitz*)

*Soit  $E$  un espace de Banach,  $M$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$  (resp.  $O$  un ouvert de  $E$ ). On considère le système (2.2) (resp. le système (2.1)), avec la condition de Cauchy  $C : q(t_0) = q_0$ , où le couple  $(t_0, q_0)$  est un élément de  $M$  (resp.  $q_0$  est un élément de  $O$ ), et  $f$  une fonction continue de  $M$  dans  $E$  (resp.  $X$  est continue de  $O$  dans  $E$ ).*

*Si la fonction  $f$  (resp.  $X$ ) est localement lipchitzienne par rapport à la deuxième variable, il existe une et une seule solution maximale à l'équation (2.2) (resp.(2.1)) respectant la condition de Cauchy  $C$ .□*

Comme on le constate le théorème de Cauchy Lipchitz est basé sur la supposition que  $f(t, q(t))$  soit localement lipchitzienne par rapport à la deuxième variable, on trouve deux lemmes dans la littérature qui assurent cette propriété.

**Lemme 1** *Soit le système (2.2). On suppose que  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial q}$  continue sur  $M = [a, b] \times D$  pour tout  $q$  dans  $D \subset \mathbb{R}^n$  alors localement lipchitzien en  $q$  sur  $[a, b] \times D$ .*

On passe à un corollaire qui assure que la trajectoire est définie dans  $\mathbb{R}$ , sous certaines conditions.

**Corollaire 1** *Si  $X$  du système (2.1) est de classe  $C^1$  et pour tout compact  $K$ , il existe des constantes  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  tel que  $\forall t \in K$  on a :*

$$\forall q \in \mathbb{R}^n; \quad \|X(q)\| \leq \alpha \|q\| + \beta \quad (2.3)$$

*alors les solutions maximales de(2.1) sont définies sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$*

(ce corollaire reste vrai pour le système (2.2))

La proposition suivante nous donne un résultat sur l'invariance d'un ensemble par rapport au trajectoires du système ((2.1), (2.2)). On définira tout d'abord la notion d'invariance.

**Définition 1** *(Ensemble invariant).  $\Omega$  est un ensemble invariant pour le système (2.2) si chaque trajectoire  $x(t)$  qui a pour condition initiale dans  $\Omega$  reste au cours du temps dans  $\Omega$ .  $\square$*

**Proposition 1** *Soit  $g$  une fonction  $C^1$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $F = \{q/g(q) \leq 0\}$ , et  $f(t, q)$  donner par le système (2.2) définie pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $x$  au voisinage de  $F$ . Supposons que  $dg(q)f(t, q) < 0$  sur  $g^{-1}(0)$ . Alors  $F$  est invariante par rapport au système (2.2).  $\square$*

(La définition et la proposition précédente restent vrais pour le système (2.1)).

A partir de l'appartenance du champ de vecteur à un fibré tangent et la condition initiale de (2.1) le corollaire et la proposition suivants assurent que la trajectoire sera contenue dans une sous-variété pour un temps petit ou pour la totalité du temps.

**Corollaire 2** *[93] Soient le système différentielle (2.1) sur  $M$  et  $N \subset M$  une sous-variété de  $M$  tels que, pour tout  $q \in N$ ,  $X(q) \in T_q N$ . Alors la courbe intégrale de  $X$  issue d'un point  $p \in N$  est incluse dans  $N$  pour  $t$  suffisamment petit.  $\square$*

**Proposition 2** Soit  $K$  une sous variété fermée de  $\mathbb{R}^n$  et la fonction  $X$  de (2.2) tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall q \in K, X(t, q) \in T_q K$$

Si  $q$  est une solution de (2.2) définie sur un intervalle  $[0, s]$  tel que  $q_0 \in K$  alors  $q([0, s])$  reste dans  $K$ .  $\square$

### 2.2.1 Systèmes commandés

Pour les systèmes commandés un résultat apparaît dans la littérature sur l'unicité de solution, dont l'énoncé est comme suit :

Donnons-nous une variété  $M$ , connexe, de classe  $C_1$ , de dimension  $n$ , et un système commandé de la forme,

$$\dot{q} = f(q, u) = \sum_{i=1}^m u_i f_i(q) \quad (2.4)$$

où  $f_1, \dots, f_m$  sont des champs de vecteurs de classe  $C_1$  sur  $M$  et où la commande (aussi appelée contrôle)  $u = (u_1, \dots, u_m)$  appartient à  $\overline{B}_m$ , la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^m$ . Rappelons que pour chaque point  $x \in M$  et pour chaque contrôle  $u(\cdot) \in L^\infty([0, 1], \overline{B}_m)$ , le système commandé (2.4) donne lieu à une unique trajectoire maximale  $q(\cdot) : [0, T) \rightarrow M$  (avec  $T \in \mathbb{R} \cup \infty$ ), notée  $q(\cdot; q, u(\cdot))$ , solution du problème de Cauchy,

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T), \quad q(0) = q. \quad (2.5)$$

## 2.3 Stabilité et stabilisation

On suppose que  $\bar{q}$  est le point d'équilibre du système (2.1), d'où

$$X(\bar{q}) = 0$$

. Le but de cette partie est d'étudier la stabilité en  $\bar{q}$ . Les théorèmes que nous évoquons sont conçus pour le point d'équilibre  $\bar{q} = 0$ . Si le point d'équilibre n'est pas l'origine, on peut considérer le changement de variable suivant  $y = q - \bar{q}$ , ce qui nous ramène à écrire

$$\dot{y} = X(y + \bar{q}) = g(y); \quad \text{où } g(0) = 0$$

On commence par définir mathématiquement la stabilité des systèmes d'équations différentielles

**Définition 2** *L'équilibre  $\bar{q} = 0$  du système (2.1) est :*

– *stable, si pour  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que*

$$\|q(0)\| < \delta \Rightarrow \|q(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

– *instable s'il n'est pas stable.*

– *asymptotiquement stable, s'il est stable et  $\delta$  peut être choisi tel que*

$$\|q(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$$

□

L'un des théorèmes qui garantit la stabilité des systèmes est le théorème de Lyapunov, dont l'énoncé est le suivant.

**Théorème 2** *(Lyapunov pour les systèmes autonomes (2.1))*

*Soit  $q = 0$  un point d'équilibre du système (2.1). Soit une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue différentiable tel que*

1.  *$V$  est définie positive sur  $D$ .*
2.  *$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|q\| = \infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} V(q) = \infty$*
3.  *$\dot{V} < 0$  pour  $q \neq 0$ .*

*alors,  $q = 0$  est globalement asymptotiquement stable.* □

Un autre théorème de convergences des solution pour les systèmes (2.1), connu sous le nom de théorème de LaSalle, dont l'énoncé est le suivant :

**Théorème 3** *(Théorème de LaSalle)*

*Soit  $\Omega \subset D$  un ensemble compacte et invariant par rapport au système (2.1). Soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue différentiable et telle que  $\dot{V}(q) \leq 0$  sur  $\Omega$ . Soit  $E$  une ensemble de point de  $\Omega$  tel que  $\dot{V}(q) = 0$ . Soit  $M$  le plus grand ensemble de  $E$ , alors chaque solution qui commence dans  $\Omega$  approche  $M$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .* □

Pour le cas non-autonome, le système (2.2), un autre énoncé du théorème de Lyapunov est donné dans [81].

**Théorème 4** (de Lyapunov pour les systèmes non-autonomes (2.2))

Soit  $q = 0$  un point d'équilibre du système (2.1) et  $D \subset \mathbb{R}^n$  une ensemble qui contient l'origine. Soit une fonction  $V : [0, +\infty[ \times D \rightarrow \mathbb{R}$  continue différentiable tel que

1.  $W_1(q) \leq V(t, q) \leq W_2(q)$ .
2.  $\dot{V} \leq -W_3$ .

$\forall t \geq 0$  et  $q \in D$ , où  $W_1(q)$ ,  $W_2(q)$  et  $W_3(q)$  sont deux fonctions continues définies positives sur  $D$ . alors,  $q = 0$  est uniformément asymptotiquement stable.  $\square$

Plus tard en 1963 J. Kurzweil a démontré dans [80] l'équivalence entre l'existence des fonctions de Lyapunov et la stabilité pour les équations différentielles ordinaires continues.

**Théorème 5** (théorème de Kurzweil)

Soit  $X$  un champ de vecteur continue sur  $M$ . Si le système dynamique (2.1) est GAS au point  $O$  sur la variété  $M$ , alors il admet une fonction de Lyapunov au point  $O$ .

Hormis le résultat de Lyapunov, il existe un autre résultat, connue sous le nom de lemme de Barbalat, qui assure sous certaines hypothèses la convergence des trajectoires vers l'origine.

**Lemme 2** (Lemme de Barbalat)

Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ . On suppose que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$  existe et finie, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0$$

$\square$

**Lemme 3** *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\dot{r} = -\alpha r \quad (2.6)$$

où  $r$  est une fonction scalaire et  $\alpha$  est un scalaire positive.

Si  $r \in L^\infty \cap L^2$  et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0 \quad (2.7)$$

alors  $r$  et  $\dot{r}$  convergent asymptotiquement vers 0.  $\square$

### 2.3.1 Systèmes commandés

Pour les systèmes commandés, on parlera de la stabilisation et non plus de notion de stabilité.

On considère le système de commande suivant

$$\dot{q} = f(q, u) \quad (2.8)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$  est la commande.

Un premier résultat apparaît, sur le type de commande choisit pour un système, donné par le théorème de Brockett, dont l'énoncé est le suivant :

**Théorème 6** (*Théorème de Brockett*)

*Le système (2.8) est localement asymptotiquement stable par une commande continue stationnaire, alors l'image de chaque voisinage de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  est un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$*

Pour les systèmes sans dérive donnés par (2.9) il y a un résultat de Jean-Baptiste Pomet, qui laisse les conditions du théorème de Brockett insatisfaisantes.

**Proposition 3** (*Théorème de Pomet*)

*On considère le système de commande suivant*

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m f_i(q)u_i \quad (2.9)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$  est la commande. Si  $m < n$  et  $\{f_1(0), \dots, f_m(0)\}$  sont linéairement indépendant, alors il n'existe pas de commande stationnaire.  $\square$



## 2.4 Commandabilité

Si on considère le système (2.8), étant donnés deux états  $q_i \in \mathbb{R}^n$  et  $q_f \in \mathbb{R}^n$  et  $T > 0$ , s'il existe  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui permet de passer l'état  $q$  de (2.8) de  $q_i$  à  $q_f$ , alors on dit que le système est commandable. D'où la commandabilité implique l'existence d'une commande. L'inverse est faux, c'est à dire, si le système n'est pas commandable, on ne peut rien dire.

On a un résultat important sur la commandabilité des systèmes sans dérive qui nous sera utile dans notre travail.

**Théorème 7** (*Commandabilité d'un robot mobile non holonome*)

On note  $B(q) = (b_1(q) b_2(q) \dots b_m(q))$  la matrice du modèle cinématique  $\dot{q} = B(q)u$ , de dimension  $n \times m$ . Un robot mobile est commandable si les colonnes de  $B(q)$  et leurs crochets de Lie successifs forment un ensemble de  $n$  colonnes indépendantes.  $\square$

Comme la commandabilité d'un système linéaire est très facile à vérifier à partir de critère de Kalman, le théorème suivant nous assure Le lien de commandabilité entre les systèmes non-linéaires et leur linéarisés tangents.

**Théorème 8** *Si le linéarisé au point d'équilibre  $(\bar{q}, \bar{u})$  du système (2.8) est commandable, alors le système (2.8) est localement commandable au point d'équilibre  $(\bar{q}, \bar{u})$ .  $\square$*

## 2.5 Théorie des graphes

Nous commençons par rappeler quelques notions et définitions de base de la théorie des graphes qui seront utilisés par la suite. Pour plus de détail on peut se référer à [16], [17], [15], etc..

Un graphe de configuration des liens qu'on note  $G(\nu, \varepsilon)$  est défini par deux ensembles :

Le premier est l'ensemble des indexes des  $N$  nœuds, noté par :

$$\nu = \{1, \dots, N\}$$

Le deuxième est l'ensemble d'arêtes qui relie deux nœuds, noté par :

$$\varepsilon = \{(i, j) \in \nu \times \nu, j \in N_i\}$$

Où  $N_i$  est l'ensemble des indexes des nœuds en liaison avec le  $i^{\text{eme}}$  nœud. La notation  $(i, j)$  veut dire une arête ou connexion entre  $i$  et  $j$ , et que  $j \in N(i)$  et  $i$  n'appartient pas nécessairement à  $N_j$ , ce qui implique que  $(i, j)$  et  $(j, i)$  ne présentent pas nécessairement la même arête.

Ces connexions établies entre les nœuds sont regroupés dans une matrice  $A = (a_{ij})$ , quand appelle matrice de liaison ou matrice Adjacente. C'est une matrice binaire, tel que si le  $i^{\text{eme}}$  nœud prend une information de  $j^{\text{eme}}$  nœud, c'est à dire  $j \in N_i$  alors  $a_{ij} = 1$  et sinon 0.

On note par  $\Delta$  la matrice diagonale tel que son  $i^{\text{eme}}$  terme diagonal correspond au nombre de liaisons que peut établir le  $i^{\text{eme}}$  agent avec les autres. On définit la matrice Laplacienne  $L$  comme suite :

$$L = \Delta - A \quad (2.10)$$

*Exemple :*

On considère le graphe  $G(\nu, \varepsilon)$ , présenté par la figure 2.1, de 5 nœuds et 6 arêtes ou connexions. Les matrices Adjacente et Laplacienne associées

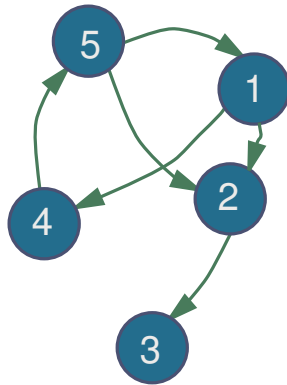


FIGURE 2.1 – Exemple de graphe

sont les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \mathfrak{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe deux types de graphes :

Le graphe non-orienté, c'est le graphe tel que la connexion entre deux nœuds est réciproque, c'est à dire que  $j \in N_i$  et  $i \in N_j$ , ce qui nous ramène à dire  $(i, j)$  et  $(j, i)$  présentent la même chose. La matrice Adjacente associée est une matrice symétrique puisque  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Le deuxième type de graphe est le graphe orienté. C'est le graphe où la connexion n'est pas nécessairement réciproque. La matrice Adjacente associée est une matrice qui n'est pas nécessairement symétrique. Comme on peut le remarquer à partir de la définition de ces deux graphes, que tout graphe non-orienté est graphe orienté, et le contraire est faux.

Etant donné un graphe  $G(\nu, \eta)$ , et  $A = (a_{ij})$  sa matrice Adjacente associée. Le degré-entrant et degré-sortant du  $k^{\text{ème}}$  nœud, sont respectivement  $deg_{entrant}(k) = \sum_{i=1}^n a_{ik}$  et  $deg_{sortant} = \sum_{j=1}^n a_{kj}$ . On remarque bien que  $deg_{sortant}(k)$  représente le  $k^{\text{ème}}$  terme diagonale de  $\Delta$  et il est aussi le  $card(N_k)$ .

*Exemple :*

On donne deux exemples de graphes de type orienté et non-orienté :

Les matrices adjacentes respectives sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le graphe associé à la matrice adjacente  $A_1$ , on a  $deg_{sortant}(1) = 2$ ,

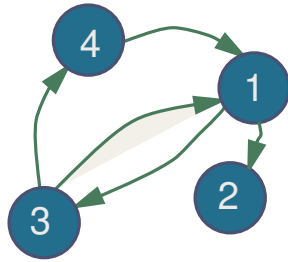


FIGURE 2.2 – Exemple de graphe orienté

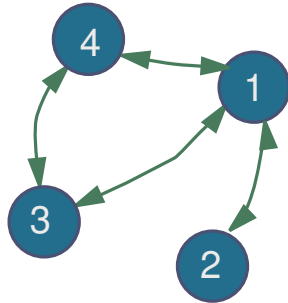


FIGURE 2.3 – Exemple de graphe non-orienté

$deg_{sortant}(3) = 1$ , etc.. Pour le degré entrant on a  $deg_{entrant}(1) = 2$  et  $deg_{sortant}(3) = 2$ , etc..

On remarque bien que la matrice associée au graphe non-orienté est toujours symétrique, ce qui implique que  $deg_{sortant}() = deg_{entrant}()$ .

La matrice Laplacienne est la matrice clé dans la stabilisation des systèmes en formation. En effet si on considère un graphe  $G(\nu, \eta)$ , et  $A$  sa matrice Adjacente associée, on peut extraire une matrice Laplacienne  $L$  de  $G$ .

Et si on considère le système différentiel suivant :

$$\dot{x} = u = -Lx \quad (2.11)$$

tel que  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ .

On remarque que, si on prend chaque  $u_i$  à part, elle s'écrira comme suit

$$u_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j) \quad (2.12)$$

c'est pourquoi si on prend  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  comme solution de (2.11), les  $s_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  se suivront selon les connexions données par la matrice  $A$ . Donc la matrice Laplacienne  $L$  assure que les  $x_i$  de (2.11) aient une certaine communication pré-définie dès le départ.

L'un des principaux graphe l'arbre couvrant. C'est un graphe orienté qui comporte un nœud qui ne prend une information d'aucun autre nœud du groupe, c'est à dire si c'était le  $k^{me}$  nœud alors la  $k^{me}$  ligne de la matrice adjacente est nulle. Des résultats ont été donnés par Wei Ren[15] sur ce type de graphe qui sont les suivants :

**Lemme 4** *On considère le graphe  $G(\nu, \eta), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $L$  la matrice Laplacienne associée à  $G$  alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$G$  est un arbre couvrant et le  $k^{me}$  nœud n'a pas de connexion avec les autres nœuds.*
2.  *$G$  est un arbre couvrant et la  $k^{me}$  ligne de la matrice  $L$  est nulle.*
3. *Les composantes  $s_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  de  $s$  solution de (2.11) convergent asymptotiquement tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s_i(t) = s_k(0)$ .*
4. *Le  $k^{ème}$  nœud est le seul nœud tel que  $K \in N_i, \forall i \in \nu$ .*

On considère  $p$  nœuds. On veut que ses nœuds établissent une certaine connexion prédéfinie entre eux et convergent vers une position désirée. On considère que cette position désirée et le  $(p + 1)^{ème}$  nœud. Le théorème suivant donné par Wei Ren [15], énoncera la convergence asymptotique

**Théorème 9** *Soit  $G(\nu, \eta)$  un graphe et  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  sa matrice Adjacente, tel que  $a_{i(p+1)} = 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, p + 1\}$ , alors les  $s_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$   $p$  premières composantes de  $s$  solution de (2.11) pour  $x \in \mathbb{R}^{(n+1)}$  convergent asymptotiquement vers une position de référence  $s_r$  si et seulement si  $G$  est un arbre couvrant.*

**Proposition 4** (*Matrix Form of Disagreement*)[17]

Soit le graphe direct  $G$  d'ordre  $n$ , la fonction "disagreement"  $\Phi_G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme quadratique associée à la matrice symétrique semi-définie positive

$$P(G) = \frac{1}{2}(D_{out}(G) + D_{in}(G) - A(G) - A(G)^T). \quad (2.13)$$

De plus,  $P(G)$  est la matrice du graphe miroir  $\hat{G}$ , est,

$$P(G) = L(\hat{G}) = \frac{1}{2}(L(G) + L(\tilde{G})). \quad (2.14)$$

**Proposition 5** [17] Soit  $G$  un graphe acyclique d'ordre  $n$  avec  $n_0$  "sinks" et on suppose que ses sommets sont indexés selon leur profondeur.

Si  $G$  admet une profondeur unique alors  $\Phi_G$  est décroissante le long de la trajectoire de  $\dot{q} = L(G)q$

## 2.6 Conclusion

On a réussi dans ce chapitre à introduire les outils mathématiques, liés essentiellement à la stabilité et à la stabilisation d'un système de commande et la notion de commandabilité pour un système sans dérive. La commandabilité locale au sens de Kalman a été également introduite pour le linéarisé tangent d'un système non linéaire. La complémentarité à ces outils pour l'étude de stabilité, on a introduit la notion de graphe de connexion initialement utilisé dans l'échange des informations dans les réseaux informatiques. Etant donné que chaque agent sera considéré sous forme de nœud, nous avons donné quelques exemples d'application sur la connexion de plusieurs nœuds via la matrice Laplacienne.



# Navigation d'un véhicule holonôme

---

## 3.1 Introduction

Les techniques que l'on considère ici consistent à stabiliser la position du robot par rapport à une position de référence, sans chercher à stabiliser l'orientation du robot. Conceptuellement, comme il est indiqué dans [21] cela revient à donner au véhicule à commander les propriétés d'une remorque "accrochée" de façon immatérielle au véhicule de référence. Cette approche est classiquement utilisée dans le cas d'applications de type convoi de véhicules, où le véhicule de tête suit une trajectoire sans point de rebroussement. La commande du véhicule sous le modèle (A.21) sera considérée et a fait l'objet de nombreuses recherches dont on peut citer [21, 22, 1, 4].

Même en l'absence d'obstacle, commander un système non holonome pour l'amener d'une configuration de départ à une configuration d'arrivée n'est pas un problème aisée. En effet, il n'existe pas aujourd'hui de méthode générale permettant de résoudre le problème pour n'importe quel système non holonome [2]. Des méthodes analytiques sont connues seulement pour certaines classes de systèmes (voir [23] et [24] par exemple). Pour les autres, on ne dispose que de méthodes numériques. En outre, la présence d'obstacles rend les méthodes analytiques inapplicables à des systèmes non holonomes [25] [26].

Le but de ce chapitre est de construire une commande qui fait déplacer un véhicule de sa position initiale jusqu'à sa position finale, sans tenir compte de son orientation, sur une surface contenant des obstacles. On notera  $\mathcal{O}$ , l'ensemble des obstacles.



Notre apport consiste à trouver une commande régulière sur la surface de navigation privée de  $\mathcal{O}$ . Cette commande joue un double rôle. Elle est constituée d'une partie "attractive" qui assure la convergence vers le point désiré et d'une partie répulsive pour éviter l'ensemble  $\mathcal{O}$ , tout ceci, sans passer par des fonctions tests qui changent de forme de la commande chaque fois que le véhicule détecte un obstacle et sans suivre des trajectoires de références prédéfinies.

Dans ce chapitre, on développe une approche analytique générale, pour étendre toute commande qui fait converger la position vers le point désiré, en tenant compte de l'ensemble  $\mathcal{O}$ . On prolongera cette approche pour le cas d'un système dynamique.

## 3.2 Stabilisation et régulation de la cinématique

Notre objectif est d'étendre le problème de stabilisation pour inclure la régulation en présence d'une perturbation. Ceci est nécessaire pour la navigation en présence d'un obstacle.

Dans ce travail nous proposons une approche analytique pour les systèmes commandés, qui se base sur la théorie du Lyapunov. Nous allons concevoir une fonction qu'on appellera "fonction régulatrice", qui assure la contrôle des trajectoires au cours du temps avant la convergence vers le point désiré.

Dans la suite on va travailler sur  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 2$ .

### 3.2.1 Problème de stabilisation et régulation des systèmes de commande

Dans la littérature deux types de systèmes commandés se distinguent, les systèmes avec et sans dérivées[43].

### 3.2.1.1 Régulation des systèmes de commande sans dérives

Les systèmes sans dérives sont des systèmes linéaires en commande et s'écrivent en général sous la forme suivante :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m f_i(q)u_i \quad (3.1)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  et  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , représentent respectivement l'état et la commande du système.

En considérant  $P$  une matrice tel que ses colonnes sont formées par les fonctions  $f_i$ , le système (3.1) s'écrira alors sous la forme compacte :

$$\dot{q} = P(q)u \quad (3.2)$$

Plusieurs travaux dans la littérature se sont intéressés au problème de stabilisation de ce type de système de commande, dont notamment le résultat de Pomet [44]. Ce résultat assure que, si les vecteurs  $f_1(0), f_2(0), f_3(0), \dots, f_m(0)$  sont linéairement indépendants alors le système (3.2) ne vérifie pas les conditions du théorème de *Brockett* (Théorème 6), ce qui implique qu'on peut pas avoir un retour d'état stationnaire, pour la stabilisation asymptotique du système. Cette condition donnée par *Pomet* est vérifiée par la plus part des systèmes commandés sans dérives. Ainsi, on va s'intéresser en premier lieu par une classe des systèmes sans dérives qui sont stabilisable par un retour d'état instationnaire.

La loi de commande que nous avons développée est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 10** *Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble qui contient l'équilibre. On considère  $q$  une solution du système (3.2) et  $V : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de Lyapunov associée à la fonction  $u_a(q, t) \in \mathbb{R}^m$ , qui satisfait les inégalités suivantes :*

$$\alpha_1(q) \leq V(q, t) \leq \alpha_2(q) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q} P(q)u_a(q, t) \leq -\alpha_3(q)$$

tel que pour tout  $(q, t) \in D \times [0, +\infty[$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont trois fonctions continues définies positives sur  $D$ .

Alors pour n'importe quelle fonction  $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $D$ , la loi de commande

$$u = u_a(q, t) + \nu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \right]^{\perp} \quad (3.4)$$

rend le système (3.2) uniformément asymptotiquement stable en un point cible.  $\square$

**Notation** Soit  $S \in \mathbb{R}^n$ .

$(S)^{\perp}$  et  $(S)^t$  désignent respectivement un vecteur orthogonal à  $S$  et le transposé de  $S$ .

**Preuve** Etant donné que la fonction de *Lyapunov*  $V$  vérifie les conditions (3.3), alors la commande  $u_a$  rend le système

$$\dot{q} = P(q)u_a(q, t)$$

uniformément asymptotiquement stable.

En utilisant la même fonction de *Lyapunov* pour le système (3.2) avec la loi de commande (3.4) proposée par le *théorème 10*, sous l'hypothèse que  $P(q)P^T(q)$  est inversible pour tous  $q \in \mathbb{R}^n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q)u \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \left[ u_a + \nu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \right]^{\perp} \right] \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q} P(q)u_a \end{aligned} \quad (3.5)$$

qui vérifie la deuxième partie des inégalités dans (3.3).

D'où pour  $q$  solution du système (3.2), sous la commande (3.4), la fonction proposée  $V$  vérifie les inégalités :

$$\alpha_1(q) \leq V(q, t) \leq \alpha_2(q) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q} P(q) \left( u_a(q, t) + \nu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \right]^{\perp} \right) \leq -\alpha_3(q)$$

D'où, le système (3.2) sous la commande (3.4) est alors uniformément asymptotiquement stable. ■

Aussi, pour le cas d'existence d'un retour d'état stationnaire, on propose un résultat similaire, donné par le théorème suivant :

**Théorème 11** *Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble qui contient l'équilibre. On considère  $u_a(q)$  une commande stationnaire qui stabilise le système (3.2) autour du point d'équilibre et  $V$  la fonction de Lyapunov associée à  $\dot{q} = P(q)u_a$ . Alors pour n'importe quelle fonction  $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $D$ , la loi de commande*

$$u = u_a + \nu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \right]^{\perp} \quad (3.7)$$

*fait converger asymptotiquement les solutions du système (3.2) vers l'équilibre. □*

**Preuve** D'après les données du *théorème 11* le système (3.2) est asymptotiquement stable par la loi de commande  $u_a$ . Alors d'après le théorème de Kurzweil (Théorème 5) , il existe une fonction de Lyapunov  $V$  associée au système  $\dot{q} = P(q)u_a$ .

Ceci nous donne que

$$\dot{V} = \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right) P(q) u_a < 0.$$

En utilisant la même fonction de Lyapunov pour le système (3.2) associé à la loi de commande (3.7), proposée dans le *théorème 11*, sous l'hypothèse que  $P(q)P^T(q)$  est inversible, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial q} P(q) u \\ &= \frac{\partial V}{\partial q} P(q) [u_a + \nu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \right]^{\perp}] \\ &= \frac{\partial V}{\partial q} P(q) u_a < 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

D'où d'après le théorème de *Lyapunov*, les solutions de (3.2), sous la commande (3.2), convergent vers la position désirée. ■

Comme exemple pour ce théorème on peut prendre le système d'unicycle donnée par (A.17), après un changement de variable et un bouclage sur la commande le système on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2\end{aligned}\tag{3.9}$$

C'est un système sans dérive qui s'écrit sous la forme  $\dot{q} = P(q)u$ , où  $q = (x_1, x_2, x_3)^t$ ,  $u = (u_1, u_2)^t$  et

$$P(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}\tag{3.10}$$

Ce système d'unicycle est uniformément asymptotiquement stabilisable, selon Pomet [44], moyennant un feedback instationnaire  $u_a(q, t) = (u_1, u_2)$

$$\begin{aligned}u_1 &= x_2 \sin t - (x_1 + x_3 \cos t) \\ u_2 &= -(x_1 + x_2 \cos t)x_1 \cos t - (x_1 x_2 + x_3)\end{aligned}\tag{3.11}$$

qui est associé à la fonction de Lyapunov  $V$  pour le cas non-autonome suivante

$$V(t, q) = \frac{1}{2}(x_1 + h(t, x_2, x_3))^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2\tag{3.12}$$

avec  $h(t, x_2, x_3) = x_2 \cos t$

Alors le théorème 10, affirme que sous la loi de commande suivante

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= x_2 \sin t - (x_1 + x_3 \cos t) - \nu(q, t)(x_2(1 + \cos^2 t + x_3) + x_1) \\ \tilde{u}_2 &= -(x_1 + x_2 \cos t)x_1 \cos t - (x_1 x_2 + x_3) + \nu(q, t)(x_1 + x_2 \cos t)\end{aligned}\tag{3.13}$$

le système (3.9) reste uniformément asymptotiquement stable à l'équilibre, Pour n'importe quelle fonction scalaire  $\nu$ . La fonction régulatrice, peut être stationnaire ou instationnaire, comme on l'a vu dans la démonstration

du théorème considéré.

On étend, dans la sous section suivante, ces résultats pour les systèmes commandés avec dérivées.

### 3.2.1.2 Régulation des systèmes de commande avec dérivées

Les systèmes avec dérivées, sont des systèmes qui sont affines en contrôle et qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m f_i(q)u_i + g(q) \quad (3.14)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  et  $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ , représentent respectivement l'état et la commande du système.

Analogiquement aux cas des systèmes de commande sans dérivées, on considère  $P$  une matrice tel que ses colonnes sont formées par les fonctions  $f_i$ , le système (3.14) s'écrit alors sous la forme compacte suivante :

$$\dot{q} = P(q)u + g(q) \quad (3.15)$$

Dans le cas où ce système est stabilisable par une commande instationnaire, le résultat suivant est similaire à ce qu'on a fait précédemment.

**Théorème 12** Soient  $q$  une solution du système (3.15),  $V : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de Lyapunov associée à la fonction  $u_a(q, t) \in \mathbb{R}^m$ , qui satisfait les inégalités suivantes :

$$\alpha_1(q) \leq V(q, t) \leq \alpha_2(q) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q} (P(q)u_a(q, t) + g(q)) \leq -\alpha_3(q)$$

tel que pour tout  $(q, t) \in D \times [0, +\infty[$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont trois fonctions continues définies positives sur  $D$ .

Alors pour n'importe quelle fonction  $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la loi de commande

$$u = u_a(q, t) + \nu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \right]^{\perp} \quad (3.17)$$

rend le système (3.15) uniformément asymptotiquement stable en un point cible.  $\square$

**Preuve** La preuve est la même que celle du théorème 10, juste on change le système (3.2) par (3.15), et la deuxième condition de (3.3) par celle de (3.16).  $\blacksquare$

Pour le cas de la stabilisation du système (3.15) par une commande stationnaire  $u_a$  tel que  $V$  est la fonction de *Lyapunov* associée, le résultat reste le même que celui du théorème 11. C'est à dire que la commande (3.7) stabilisera asymptotiquement (3.15).

### 3.2.1.3 Interprétation des lois de commandes trouvées

Les commandes données par les théorèmes (10,11,12) assurent la possibilité de changer le comportement des solutions de (3.2) et (3.15) tout en gardant la convergence vers la position désirée.

Dans les théorèmes précédents, on aperçoit que ces lois de commandes se décomposent en un terme attractif qu'on note  $u_a$  et un terme régulateur, donné par

$$u_r = \nu \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)^t P(q) \right]^{\perp}$$

A noté aussi que ce terme  $u_r$  est le produit d'une expression issue de la dérivée partielle de la fonction de *Lyapunov* et d'une fonction qu'on appellera dans la suite du manuscrit "*Fonction régulatrice*". Cette dernière permet de contrôler le comportement des trajectoires du système du type (3.2) et (3.15), tout en conservant la convergence vers la position désirée. C'est à dire que la propriété de convergence est obtenue indépendamment du terme  $u_r$ .

Dans la littérature, la plupart de travaux sont destinés à construire une commande  $u_a$  qui assure la stabilité du système autour d'une position désirée. Dans notre cas, on suppose que la stabilisation est garantie par le premier terme  $u_a$ , et on ne s'intéressera qu'au contrôle des trajectoires au cours du temps. Cette nouvelle commande va être assurée par la *Fonction*

*régulatrice*  $\nu$ .

Rappelons à présent la forme du système :

$$\dot{q} = \mathcal{X}(q, \nu) \quad (3.18)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  et la fonction scalaire  $\nu$  est la *fonction régulatrice*.

Pour les systèmes sans dérivées, d'après les théorèmes (10,11), on a :

$$\dot{q} = P(q)[u_a(q) + \nu\left[\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^t P(q)\right]^{\perp}] = \mathcal{X}(q, \nu) \quad (3.19)$$

où  $u_a$  est une commande de stabilisation donnée. Pour le cas instationnaire  $\mathcal{X}$  sera en fonction de  $(q, \nu, t)$ .

Aussi pour les systèmes avec dérivées, d'après le théorème 10 on a :

$$\dot{q} = P(q)[u_a(q) + \nu\left[\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^t P(q)\right]^{\perp}] + g(q) = \mathcal{X}(q, \nu) \quad (3.20)$$

Comme on le constate, ces nouveaux systèmes sont en fonction de l'état  $q$  et la *Fonction régulatrice*  $\nu$  qui sert à contrôler le comportement des solutions au cours du temps.

### 3.2.2 Condition sur la fonction régulatrice pour l'évitement d'un ensemble de points

Dans cette section, on donne une condition sur la *fonction régulatrice*  $\nu$ , pour que les trajectoires du système (3.18) évitent un ensemble de points  $\mathcal{O}$  pour n'importe quelle condition initiale choisi.



**Proposition 6** *On considère le système (3.18), qui évolue dans  $\mathbb{R}^n$ .*

*Pour  $\varphi : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F \subset \mathbb{R}$  continue et  $A$  un ensemble compact, on définit l'ensemble des points à éviter :*

$$\mathcal{O} = \{c \in \mathbb{R}^n / \varphi(c) \in A\} = \varphi^{-1}(A)$$

*Si pour un ensemble  $N$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$  "entourant  $\mathcal{O}$ ", c'est à dire pour un élément  $x$  de  $\partial\mathcal{O}$  on a  $\forall U \in V_x$  inter  $N$  est non vide, il existe une fonction  $\nu$  tel que*

$$\varphi(b + \tau\mathcal{X}(b, \nu)) \in C_F(A^\circ) \quad (3.21)$$

*pour tout  $b \in N \cup \mathcal{O}$  et tout  $\tau \in [0, 1]$*

*alors on a,*

1. *Toutes les courbes intégrales  $q(t)$  de  $\mathcal{X}(q, \nu)$  issue de  $q_0 = q(t_0) \in N \cup \partial\mathcal{O}$  évite  $\mathcal{O}^\circ$*
2. *si  $\mathcal{X}$  est localement-lipschitzienne seulement sur  $N \cup \partial\mathcal{O}$ , alors la courbe intégrale de  $\mathcal{X}(q, \nu)$  issue de  $q_0 = q(t_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}^\circ$  reste dans  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}^\circ$ .*

□

### Preuve

Si on veut étudier la valeur de la solution en tout réel  $T > 0$ , on suppose qu'on travaille sur un intervalle  $[0, T]$  qu'on subdivise en sous-intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  de longueur commune  $h = \frac{T}{n}$  pour tout entier  $n > 0$ , avec  $t_k = kh$  pour  $k = 0, \dots, n$ , et  $t_0 = 0$ . On considère une suite finie  $(y_k)_{k=0, \dots, n}$  définie par la relation de récurrence :  $y_{k+1} = y_k + \lambda h \mathcal{X}(y_k, \nu_k)$  pour  $k = 0, \dots, n-1$  et  $y_0 = q_0 \in N \cup \partial\mathcal{O}$ , et on appelle  $q_n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction affine par morceau tel que  $q_n(t_k) = y_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  (i.e  $q_n(t_k + \lambda h) = y_k + \lambda h \mathcal{X}(y_k, \nu_k)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ).

Démontrons par récurrence que la suite  $(y_k)$  évite  $\mathcal{O}^\circ$  pour  $k = 0, \dots, n-1$  : On a  $y_0 \in N \cup \partial\mathcal{O}$  alors d'après l'hypothèse de la proposition, il existe une application  $\nu$  qui vérifie

$$\varphi(y_0 + \lambda h \mathcal{X}(y_0, \nu_0)) \in C_F A^\circ$$

où  $\nu(y_k) = \nu_k$  pour  $k = 0, \dots, n-1$

d'où

$$\varphi(y_1) \in C_F A^\circ \Rightarrow y_1 \in C\mathcal{O}^\circ$$

On a  $y_1 \in C\mathcal{O}^\circ$  alors

$$\begin{cases} y_1 \in N \cup \partial\mathcal{O} \\ \text{ou} \\ y_1 \in C(N \cup \mathcal{O}) \end{cases}$$

Si on est dans le premier cas où  $y_1 \in N \cup \partial\mathcal{O}$  alors d'après la proposition précédente on a  $y_2 \in C\mathcal{O}^\circ$ . Si on est dans le deuxième cas alors  $y_2 = y_1 + \lambda h\mathcal{X}(y_1, \nu_1)$  où  $h \ll 1$  reste dans  $C(N \cup \mathcal{O})$  ou entre dans  $N \cup \partial\mathcal{O}$ , ce qui implique que  $y_2$  reste aussi dans  $C\mathcal{O}^\circ$ . Ceci est dû au fait que si on suppose par l'absurde que  $y_2 \in \mathcal{O}^\circ$  alors il existe un  $r > 0$  tel que  $B(y_2, r) \subset \mathcal{O}^\circ$ . Or si on considère un  $y \in B(y_2, r)$  on aura :

$$\|y - y_2\| = \|y - y_1 - \lambda h\mathcal{X}(y_1, \nu_1)\| < r$$

En passant à la limite quand  $\lambda \rightarrow 0$  et suite à la continuité de la norme, on obtient  $\|y - y_1\| \leq r$  ce qui implique que  $B(y_2, r) \subset \bar{B}(y_1, r)$  et donc  $B(y_2, r) \subset B(y_1, r)$ . Or comme ces deux boules sont de même rayon elles ne peuvent être que confondues donc ceci implique que  $y_1 \in \mathcal{O}^\circ$  ce qui contredit l'hypothèse du second cas.

On suppose que  $y_k \in C\mathcal{O}^\circ$ , montrons que  $y_{k+1} \in C\mathcal{O}^\circ$  :

On a  $y_k \in C\mathcal{O}^\circ$  alors

$$\begin{cases} y_k \in N \cup \partial\mathcal{O} \\ \text{ou} \\ y_k \in C(N \cup \mathcal{O}) \end{cases}$$

Si on est dans le premier cas où  $y_k \in N \cup \partial\mathcal{O}$  alors d'après la proposition précédente on a  $y_{k+1} \in C\mathcal{O}^\circ$ . Si on est dans le deuxième cas alors  $y_{k+1} = y_k + \lambda h\mathcal{X}(y_k, \nu_k)$  où  $h \ll 1$  reste dans  $C(N \cup \mathcal{O})$  ou entre dans  $N \cup \partial\mathcal{O}$  (comme ce qui précède), ce qui implique que  $y_{k+1}$  reste aussi dans  $C\mathcal{O}^\circ$ .

D'où la suite  $(y_k) \subset C\mathcal{O}^\circ$  et  $q_n(t) \in C\mathcal{O}^\circ$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Ceci est vrai pour tout  $n$  et il est bien connue (d'après le schéma d'Euler) que la suite  $(q_n(\cdot))$  converge uniformément sur  $[0, T]$  vers la solution du système (3.18) issue de  $q_0 \in N \cup \partial\mathcal{O}$  c'est à dire  $t \rightarrow q(t)$ .

Comme  $C\mathcal{O}^\circ$  est fermé alors il reste vrai à la limite que  $q(t) \in C\mathcal{O}^\circ$  pour tout  $t \in [0, T]$ . Ceci est vrai pour tout  $T > 0$ , d'où la courbe intégrale du système (3.18) évite  $\mathcal{O}^\circ$ .

Maintenant si en plus le champ de vecteur  $\mathcal{X}(q, \nu)$  est localement lipchitzien sur  $N \cup \partial\mathcal{O}$ , d'après le théorème 1 de Cauchy Lipchitz la solution est unique dans  $N \cup \partial\mathcal{O}$ . D'où, si une courbe intégrale  $\gamma(t)$  de  $\mathcal{X}(q, \nu)$ , issue de  $q(t_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}^\circ$ , coupe  $N$  alors  $\gamma(t)$  restreinte dans  $N$ , va être confondu avec l'une des courbes issues de  $N \cup \partial\mathcal{O}$ , ce qui implique que  $\gamma(t)$  reste dans  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}^\circ$ . ■

Dans un premier temps, nous verrons comment une application quasi-directe de l'approche présentée dans le théorème 11 nous permet de fournir une première famille de lois de commande permettant d'atteindre cet objectif.

### 3.3 Application au système agent/véhicule

Comme application à ce qui précède, dans cette section on va considérer le modèle (A.21) du véhicule, sans l'orientation en premier temps. Ceci permet alors d'assimiler le système cinématique de l'unicycle à un modèle linéaire relié à la position du véhicule. D'où l'appellation qu'on retrouve dans la littérature où l'on parle souvent d'*agent*.

Le modèle de l'agent est donnée par l'écriture suivante :

$$\dot{q} = u \tag{3.22}$$

avec  $q = (x, y)$  et  $u = (v, w)$  sont dans  $\mathbb{R}^2$ .

Le but est de construire une commande qui fait déplacer le véhicule représenté par le modèle cinématique (3.22) dans un environnement plein d'obstacles. Plusieurs travaux ont été réalisés dans cette directive pour résoudre le problème dont on peut citer [18]. Les travaux qui ont été réalisés traitant l'existence de ce type de commande sont très récents, datant de 2005, et sont principalement réalisés par *Ludovic Rifford* dans [19]. Notre apport consiste à construire une commande qui résout les 4 problèmes suivants :

1. Faire converger le système vers la position désirée.
2. Éviter un ensemble de points qui représente physiquement des obstacles dans le plan.
3. Contrôler le comportement de la trajectoire en face de l'obstacle, de façon qu'elle minimise la trajectoire d'évitement. Ceci fera l'objet d'une étude plus détaillée ultérieurement.
4. Construire une commande qui n'est pas définie par intervalles, c'est à dire qui ne change pas de forme chaque fois que notre système avance dans le plan. La commande devrait être régulière dans l'espace qui ne contient pas l'obstacle.

Dans ce qui suit on va traiter par le cas simple d'un seul obstacle, ensuite les résultats seront généralisés dans le cas de plusieurs obstacles. Ces derniers sont considérés fixes dans le plan.

### 3.3.1 Localisation et évitement d'un obstacle

#### 3.3.1.1 Localisation d'un obstacle

Dans cette section on va définir l'ensemble des points que le véhicule doit éviter. On suppose que l'obstacle est dans le plan et peut être entouré par un cercle centré en un point  $O$ , de rayon  $r$ . On note l'ensemble des points à éviter par

$$\mathcal{O} = \{c \in \mathbb{R}^2 / \|c - O\| \leq r\}$$

L'obstacle peut se déplacer à l'intérieur du cercle supposé fixe. Dire que le véhicule approche l'obstacle implique aussi que la position  $q$  approche un point qu'on le notera  $O_q$  comme l'illustre la figure (3.1).  $O_q$  représente le point d'intersection entre le cercle et la droite qui jointe  $O$  à  $q$ . Ce qui explique que  $O_q$  dépendra des coordonnées du véhicule, d'où :

$$O_q = O + r \frac{q - O}{\|q - O\|} \quad (3.23)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

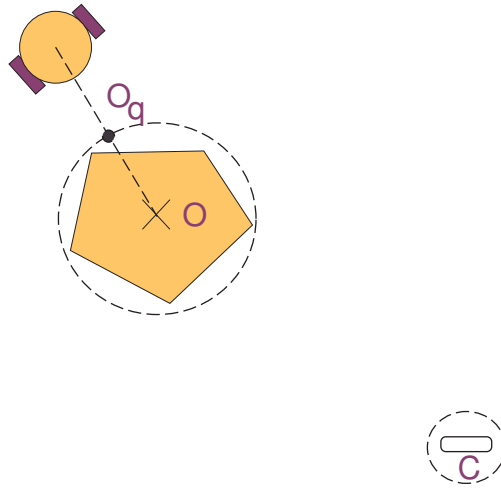


FIGURE 3.1 – Un véhicule à l'encontre d'un obstacle

Ainsi  $O_q$  est la projection de  $q$  sur le cercle centré en  $O$ . Quand  $q$  se déplace,  $O_q$  se déplace aussi tout en restant sur le cercle. Afin d'assurer une navigation sans collision avec l'obstacle, le véhicule devra éviter  $O_q$  au cours du temps.

#### Notation

Dans la suite la notation  $(\cdot)^\perp$  est définie comme suit :

si on prend  $A \in \mathbb{R}^2$  de composante  $(a, b)$  alors  $(A)^\perp \in \mathbb{R}^2$  de composante  $(-b, a)$ .

### 3.3.1.2 Évitement d'un obstacle

Rappelons que le théorème 11 assure la décomposition de la commande du système (3.22) selon :

$$u = u_a + u_r \quad (3.24)$$

où  $u_a = (v_a, w_a)$  est une commande qui assure la convergence asymptotique des solutions du système (3.22) vers la position désirée et

$$u_r = \nu(\nabla V)^\perp$$

est la partie qui intègre la fonction régulatrice. Cette dernière peut intervenir pour éviter un ensemble de points.

Dans ce chapitre, on considère la partie  $u_a$  comme étant le gradient d'une fonction potentielle  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , définie positive, précédée du signe moins. En fait, si on choisie  $V$  comme fonction de Lyapunov pour le système *flot gradient* :

$$\dot{q} = -\lambda \nabla V(q) \quad (3.25)$$

tel que  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , on a alors la convergence asymptotique à l'origine pour  $\nabla V(q) \neq 0$  et  $\forall q \neq 0$ . Ce qui prouve que  $u_a = -\lambda \nabla V(q)$  rend le système (3.22) asymptotiquement stable au voisinage de l'origine.

Le système avec la fonction régulatrice s'écrira alors :

$$\dot{q} = -\lambda \nabla V(q) + \nu(\nabla V(q))^\perp = \mathcal{X}(q, \nu) \quad (3.26)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , définie positif tel que  $\forall q \neq 0$  on a  $\nabla V(q) \neq 0$  pour .

D'après le théorème 11, ce système est asymptotiquement stable à l'origine.

Dans le reste du travail on considère, le système (3.26). Pour le choix adéquat de la fonction régulatrice  $\nu$ , on propose le théorème suivant.

**Théorème 13** Soient  $q$  une solution du système (3.26) issue de  $q_0(x_0, y_0)$ ,  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$  et  $L$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  tel que sa courbe représentative est la droite qui passe par les deux centres  $C$  et  $O$  respectivement de la cible et de l'obstacle.

Alors pour

$$\nu = -\frac{\text{sign}([y_0 - L(x_0)][C_x - O_x])}{\|q - O_q\|} \quad (3.27)$$

La solution  $q$  vérifie les deux assertions suivantes :

1.  $q$  évite  $O_q$
2.  $q$  converge asymptotiquement vers  $C$ .

□

Ce théorème assure que le véhicule évite l'obstacle de centre  $O$ , tout en conservant une distance de sécurité que l'on précise en introduisant une valeur de  $r$ , et atteint la cible  $C$ .

Pour démontrer ce théorème on a besoin d'introduire quatre lemmes ci dessous.

**Lemme 5** Soit le système (3.26,3.27) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$ .

Sa transformation en coordonnées polaires est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\lambda\rho \\ \dot{\theta} &= -\frac{\text{sign}([y_0 - L(x_0)][C_x - O_x])}{|\sqrt{(\rho \cos \theta - O_x)^2 + (\rho \sin \theta - O_y)^2} - r|} \end{aligned} \quad (3.28)$$

□

**Preuve** Le système (3.26,3.27) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x + \frac{\text{sign}([y_0 - L(x_0)][C_x - O_x])}{\|q - O_p\|} y \\ \dot{y} &= -\lambda y - \frac{\text{sign}([y_0 - L(x_0)][C_x - O_x])}{\|q - O_p\|} x \end{aligned} \quad (3.29)$$

En prenant les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  telles que :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

et en les dérivant par rapport à  $t$  on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\dot{\theta}\rho \sin \theta + \dot{\rho} \cos \theta \\ \dot{y} &= \dot{\theta}\rho \cos \theta + \dot{\rho} \sin \theta\end{aligned}$$

Ce qui implique qu'il existe une matrice inversible qu'on note  $F$  entre  $(\dot{x}, \dot{y})$  et  $(\dot{\rho}, \dot{\theta})$ . En multipliant  $F^{-1}$  par  $\dot{q}$  et en changeant les coordonnées cartésiennes en polaires, on obtient le système (3.28). Ce qu'il fallait démontrer. ■

**Lemme 6** Soient  $q$  une solution du système (3.26,3.27) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$  issue de  $q_0$  et  $C(C_x, C_y)$  est l'origine du repère. Alors

$$(y_0 - L(x_0))O_x = \langle q_0/O^\perp \rangle \quad (3.30)$$

et

$$\text{sign}\langle q_0/O^\perp \rangle = \text{sign}\langle q/O^\perp \rangle \quad (3.31)$$

□

### Preuve

On commence par démontrer  $(y_0 - L(x_0))O_x = \langle q_0/O^\perp \rangle$ .

On a

$$\begin{aligned}\langle q_0/O^\perp \rangle &= -x_0 O_y + y_0 O_x \\ &= O_x(y_0 - \frac{O_y}{O_x} x_0)\end{aligned}$$

Sachant que  $L$  est la fonction associée à la droite qui joigne  $O(O_x, O_y)$  à l'origine  $C$ , alors  $L(x) = \frac{O_y}{O_x} x$ . On en déduit que  $\langle q_0/O^\perp \rangle = O_x(y_0 - L(x_0))$ .

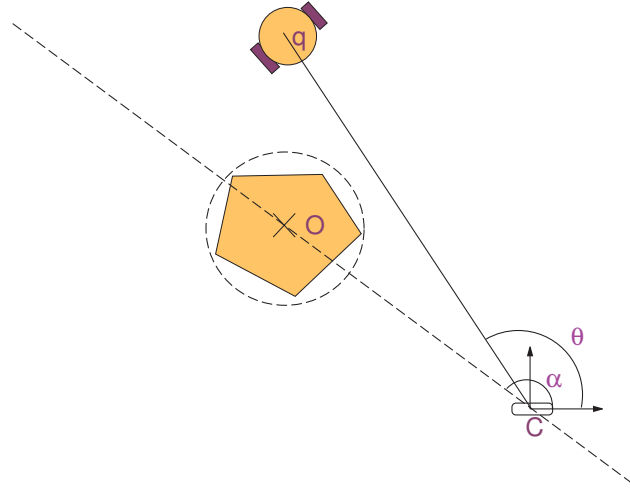
On passe maintenant pour démontrer la deuxième partie du lemme.

Si on considère le système équivalent à (3.28) donnée par le lemme 5, on remarque que  $\theta$ , qui est l'angle que fait  $q$  avec l'horizontale, et qui peut être croissante ou décroissante, cela dépend de la condition initiale  $q(t_0)$ .

On considère  $\alpha$  l'angle entre la droite  $L$ , qui relie  $O$  à  $C$  (origine du repère), et l'axe horizontale (voir la figure 3.2) et  $\theta_0$  la valeur de  $\theta$  à  $t_0$ .

D'après la cinématique donnée par le lemme 5, on remarque qu'il y a 4



FIGURE 3.2 – Les angles  $\theta$  et  $\alpha$ 

cas possibles selon la variation de  $\theta$

-1<sup>er</sup> CAS si  $C_x \geq O_x$

Deux cas se distinguent :

1. Si  $y_0 \geq L(x_0)$ ,

$$\dot{\theta} = \frac{-1}{|\sqrt{(\rho \cos \theta - o_x)^2 + (\rho \sin \theta - o_y)^2} - r|} \leq 0, \text{ alors } \theta \leq \theta_0.$$

Or on est dans le cas où  $y_0 \geq L(x_0)$  ce qui implique que  $\theta \leq \theta_0 \leq \alpha$ .

D'où pour tout instant  $t$  l'état  $q(t)$  est au dessus de  $L$ , ce qui prouve que  $y \geq L(x)$ .

2. Si  $y_0 \leq L(x_0)$ ,

$$\dot{\theta} \geq 0 \text{ alors } \theta \geq \theta_0, \text{ or } y_0 \leq L(x_0)$$

ce qui implique que  $\theta \geq \theta_0 \geq \alpha$  ce qui prouve que  $q$  est au dessous de  $L$  s'ensuit  $y \leq L(x)$ .

-2<sup>eme</sup> CAS si  $C_x \leq O_x$

De même, deux cas se présentent :

1. Si  $y_0 \geq L(x_0)$ ,

$\dot{\theta} \leq 0$  et en utilisant la même démonstration utilisée par 1<sup>er</sup> CAS 1/ on trouve que  $y \geq L(x)$ .

2. Si  $y_0 \leq L(x_0)$ ,  
 en suivant la même démarche que celle utilisée pour le 2<sup>ème</sup> CAS 2/  
 on obtient  $y \leq L(x)$ .

Ces quatre cas étudiés permettent de conclure que si la condition initiale vérifie,  $y_0 \geq L(x_0)$ , le comportement de la solution sera conservé au cours du temps. C'est à dire  $y \geq L(x)$ , sinon  $y \leq L(x)$ . Cela prouve que

$$\text{sign}(\langle q_0/O^\perp \rangle) = \text{sign}(\langle q/O^\perp \rangle)$$

■

**Lemme 7** On considère  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \|O\|$  et  $q$  une solution du système (3.26,3.27).

On a

$$\langle q/O \rangle > 0 \quad (3.32)$$

pour  $q$  appartenant à la couronne

$$N = \{q \in \mathbb{R}^2 / r < \|q - O\| < \varepsilon\}$$

□

**Preuve**

On a  $q \in N$  d'où

$$\begin{aligned} r &< \|q - O\| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow r^2 &< \|q\|^2 - 2\langle q/O \rangle + \|O\|^2 < \varepsilon^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\|q\|^2 + \|O\|^2 - r^2}{2} &> \langle q/O \rangle > \frac{\|q\|^2 + \|O\|^2 - \varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

or  $\varepsilon < \|O\|$ , d'où  $\langle q/O \rangle > 0$

■

**Lemme 8** Le champ de vecteurs  $f$ , définie par :

$$f(q) = \mathcal{X}(q, \nu(q)) = -q + \frac{\text{sign}(\langle q_0/O \rangle)}{\|q - O_q\|} q^\perp \quad (3.33)$$

est lipschitzien sur  $N = \{q \in \mathbb{R}^2 / \text{pour } \varepsilon < \|O\| \text{ on a } r < \|q - O\| < \varepsilon\}$  où  $r$  et  $\varepsilon$  sont des scalaires strictement positifs. □

**Preuve**

La dérivé de  $f$  par rapport à  $q$  est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial q} = I + A(q)$$

où

$$A(q) = \frac{\text{sign}(\langle q_0/O^\perp \rangle)}{(\|q - O\| - r)^2} \begin{pmatrix} \frac{y(x - O_x)}{\|q - O\|} & -(\|q - O\| - r) + \frac{y(y - O_y)}{\|q - O\|} \\ (\|q - O\| - r) - \frac{x(x - O_x)}{\|q - O\|} & -\frac{x(y - O_y)}{\|q - O\|} \end{pmatrix}$$

et  $I$  est une matrice identité ( $2 \times 2$ ), donc  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial q}$  sont continues pour tout  $q \in N$ , ce qui implique que  $f$  est localement Lipchitzienne sur  $N$ .

■

Revenons maintenant à la demonstration du théorème 13 ;

**Preuve** Le choix relativement simple de la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{\|q\|^2}{2}$$

prouve la stabilité asymptotiquement le système (3.26) au point  $C(0, 0)$ , si on pose

$$u = u_a = -q$$

En utilisant la même fonction de lyapunov  $V$ , le théorème 13 montre que le système étendue suivant :

$$\dot{q} = -q + \nu(\nabla q)^\perp = -q + \nu q^\perp = \mathcal{X}(q, \nu)$$

stabilise asymptotiquement aussi le système (3.26) au point  $C(0, 0)$ , pour quelque soit la fonction scalaire  $\nu$ .

On passe maintenant à montrer que le choix de  $\nu$  assure l'évitement de l'obstacle.

Dans un premier temps il faut montrer que pour tout  $q$  appartenant à la couronne  $N = \{q \in \mathbb{R}^2 / r < \|q - O\| < \varepsilon\}$ ,  $q$  vérifie l'inégalité suivante

$$\|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\| > r$$

On a

$$\|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\|^2 = \|q - O\|^2 + \tau^2 \|\mathcal{X}(q, \nu)\|^2 + 2\tau \langle q - O, \mathcal{X}(q, \nu) \rangle$$

sachant que  $\|\mathcal{X}(q, \nu)\|^2 = (1 + \nu^2)\|q\|^2$

et que

$$\begin{aligned} \langle q - O, \mathcal{X}(q, \nu) \rangle &= \langle q - O, -q + \nu q^\perp \rangle \\ &= -\|q\|^2 + \langle O, q \rangle - \nu \langle O, q^\perp \rangle \\ &= -\|q\|^2 + \langle O, q \rangle - \frac{\text{sign}(\langle O^\perp, q_0 \rangle)}{\|q - O_q\|} \langle O, q^\perp \rangle \\ &= -\|q\|^2 + \langle O, q \rangle + \frac{|\langle O^\perp, q \rangle|}{\|q - O_q\|} \quad (\text{d'après le lemme6}) \\ &\geq -\|q\|^2 \quad (\text{d'après le lemme7}) \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\|^2 \geq \|q - O\|^2 + [\tau^2(1 + \nu^2) - 2\tau]\|q\|^2$$

On constate deux cas, selon le signe de  $\tau^2(1 + \nu^2) - 2\tau$  :

Si  $\tau^2(1 + \nu^2) - 2\tau \geq 0$  c'est à dire  $\tau \geq \frac{2}{1 + \nu^2}$ , alors

$$\begin{aligned} \|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\|^2 &\geq \|q - O\|^2 > r^2 \\ \Leftrightarrow \|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\| &> r \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si  $\tau^2(1 + \nu^2) - 2\tau \leq 0$  c'est à dire que  $\tau \leq \frac{2}{1 + \nu^2}$ , alors

$$\begin{aligned} \|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\| &\geq \|q - O\| - \tau \|\mathcal{X}(q, \nu)\| \\ &\geq \|q - O\| - \frac{2}{1 + \nu^2} \|\mathcal{X}(q, \nu)\| \end{aligned}$$

On sait que  $q \in N$  alors

$$r < \|q - O\| < \varepsilon$$

d'où il existe  $0 < \delta < \varepsilon - r$  tel que

$$\begin{aligned}
r &< \|q - O\| &&\leq \varepsilon - \delta \\
\Leftrightarrow 0 &< \|q - O\| - r &&\leq \varepsilon - \delta - r = \varepsilon_1 \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\| \|q - O\| - r \|^2} &&> \frac{1}{\varepsilon_1^2} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\|q - O_q\|^2} &&> \frac{1}{\varepsilon_1^2} \\
\Leftrightarrow &\nu^2 &&> \frac{1}{\varepsilon_1^2} = \varepsilon_2 \\
\Leftrightarrow &\frac{2}{1 + \nu^2} &&< \frac{2}{1 + \varepsilon_2} = \varepsilon_3
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\| &&\geq \|q - O\| - \varepsilon_3 \|\mathcal{X}(q, \nu)\| \\
\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\| &&\geq \lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \|q - O\| - \varepsilon_3 \|\mathcal{X}(q, \nu)\| \\
\Leftrightarrow \|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\| &&\geq \|q - O\| > r
\end{aligned}$$

ce qui nous ramène à écrire que  $\|q - O + \tau \mathcal{X}(q, \nu)\| > r$ , pour tout  $\tau \in [0, 1]$  et pour tout  $q \in N$  tel que  $\varepsilon \sim r + \delta$ .

On a

$$\|q + \tau \mathcal{X}(q, \nu) - O\| > r$$

alors pour  $\forall P \in \mathcal{O}$  qui présente le disque de centre  $O$  et de rayon  $r$

$$\begin{aligned}
P &\neq q + \tau \mathcal{X}(q, \nu) \\
\Leftrightarrow q - P &\neq -\tau \mathcal{X}(q, \nu)
\end{aligned}$$

d'où d'après la proposition 6 la fonction  $\nu$  donnée par (3.27) assure que la courbe intégrale de  $\mathcal{X}(q, \nu)$  issue de  $q(t_0) \in N$  est dans  $N$  en temps suffisamment petit, puis elle retourne dans la variété  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ . En plus, d'après le lemme 8, on a  $\mathcal{X}(q, \nu)$  est lipchitzienne sur  $N$ , d'où la proposition 6, assure aussi que toute courbe intégrale de  $\mathcal{X}(q, \nu)$  issue de  $q(t_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$  reste dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$ . ■

L'étape suivante consiste à vérifier le comportement du véhicule au voisinage de l'obstacle. Ce dernier va être traité dans la proposition suivante et sera suivie d'une explication détaillée.

**Proposition 1** Les deux ensembles  $K$  et  $H$  définies par :

$$K = \{q(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \|q - O\| > r\} \cap \{q(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq L(x)\}$$

$$H = \{q(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \|q - O\| > r\} \cap \{q(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < L(x)\}$$

sont invariants par rapport au système (3.26,3.27) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$ .

$L$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  tel que sa courbe représentative est la droite qui passe par les deux centres  $C$  et  $O$  respectivement de la cible et de l'obstacle,  $r$  est le rayon du cercle centré en  $O$ , qui entoure l'obstacle.  $\square$

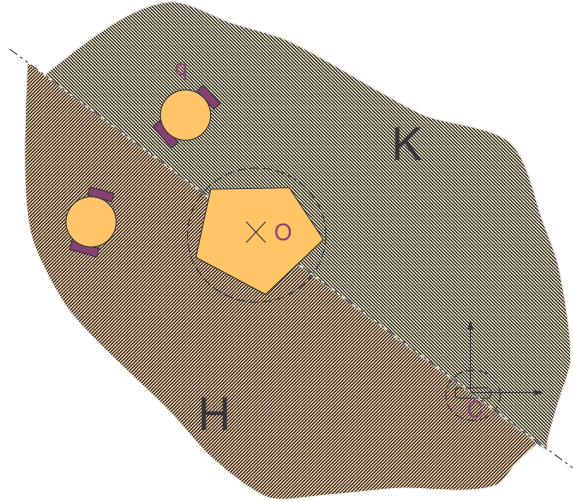


FIGURE 3.3 – les ensembles invariants  $K$  et  $H$

**Preuve** On a

$$\langle q_0/O \rangle = (y_0 - \frac{O_y}{O_x} x_0) O_x = (y_0 - L(x_0)) O_x$$

d'après le lemme6 On a

$$\text{sign}(\langle q_0/O \rangle) = \text{sign}(\langle q/O \rangle)$$

d'où si  $y_0 \geq L(x_0)$  à  $t_0$  alors  $y \geq L(x)$  pour  $\forall t \geq t_0$ , (respectivement si  $y_0 < L(x_0)$  alors  $y < L(x)$ ).

Aussi le théorème 13 affirme que la solution  $q$  de notre système évitera un cercle, qui entoure l'obstacle, de centre  $O$  et de rayon  $r$ , ce qui confirme que  $\|q - O\| > r$  reste vrai au cours du temps. Ce qu'il fallait démontrer. ■

Cette proposition affirme que les agents, à l'encontre de l'obstacle et selon leurs positions initiales, choisissent un chemin pour l'éviter tout en convergeant vers la cible. C'est à dire que si l'agent est à droite de la ligne passant par le centre de l'obstacle et la cible, il reste toujours à droite. Respectivement, dans le cas contraire, il reste à gauche.

### 3.3.2 Cas de plusieurs obstacles

Dans cette partie on cherche à généraliser les résultats donnés plus haut dans le cas où le véhicule se déplace dans un environnement contenant plusieurs obstacles.

On suppose que ces obstacles sont suffisamment espacés pour que les véhicules puissent se faufiler entre ces derniers. On rappelle que chaque obstacle est entouré par un cercle qui lui est circonscrit.

On note par  $O_i$  le  $i^{\text{ème}}$  centre du cercle circonscrit qui entoure le  $i^{\text{ème}}$  obstacle.  $p$  est le nombre d'obstacles dans l'espace de navigation.

$L_i$  est la fonction associée à la droite qui relie le centre  $C$  de la cible, supposée l'origine du repère terrestre, et le point  $O_i$ .

On considère une fonction  $\varphi_i$  définie comme suite :

$$\begin{aligned} \varphi_i : E = \mathbb{R}^2 &\mapsto F = [0, +\infty[ \\ c &\rightarrow \|c - O_i\| \end{aligned}$$

On définit le  $i^{\text{ème}}$  ensemble à éviter par

$$\mathcal{O}_i = \varphi_i^{-1}(A = [0; r_i])$$

Afin de réguler les trajectoires au voisinage des obstacles et garantir la convergence de la formation nous avons le résultat suivant.

**Théorème 14** On considère le système (3.26) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$ , alors sous la fonction régulatrice suivante :

$$\nu = \sum_{i=1}^p \frac{\psi([y - L_i(x)][O_{ix} - C_x])}{\|q - O_{iq}\|} \quad (3.34)$$

où  $\psi(p) = \frac{p}{|p|+1}$  pour tout  $p \in \mathbb{R}$  et  $L_i$  est la fonction associée à la droite qui joint le centre  $C$  de la cible et le centre  $O_i$  du  $i^{\text{ème}}$  obstacle, la solution  $q$  vérifie les deux propriétés suivantes :

1.  $\|q - O_i\| > r_i, \forall i \in 1, \dots, p$  et  $\forall q_0$  hors les obstacles.
2.  $q$  converge asymptotiquement vers  $C$ .

□

On va introduire deux lemmes pour démontrer ce théorème.

**Lemme 9** On considère le système (3.26) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$ , et  $\beta$  l'angle entre  $\mathcal{X}(q, \nu)$  et  $q^\perp$ , on a

$$\frac{\nu}{\sqrt{1 + \nu^2}} = \cos(\beta) \quad (3.35)$$

□

**Preuve** Le système (3.26) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$  nous donne l'équation suivante

$$\dot{q} = -q + \nu q^\perp = \mathcal{X}(q, \nu)$$

où  $\nu$  est donnée par (3.34).

On a

$$\|\mathcal{X}(q, \nu)\| = \sqrt{1 + \nu^2} \|q\| \quad (3.36)$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathcal{X}(q, \nu) / q^\perp \rangle}{\|q\|^2} &= \nu \\ \Leftrightarrow \frac{\|\mathcal{X}(q, \nu)\|}{\|q\|} \cos \beta &= \nu \end{aligned} \quad (3.37)$$



où  $\beta$  est l'angle entre  $\mathcal{X}(q, \nu)$  et  $q^\perp$ . Par conséquent d'après (3.36) et (3.37), on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{\nu}{\sqrt{1 + \nu^2}} = \cos(\beta) \quad (3.38)$$

■

**Lemme 10** *On considère le système (3.26) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$ , et  $\beta$  l'angle entre  $\mathcal{X}(q, \nu)$  et  $q^\perp$ , alors il existe un ensemble  $N$  entourant  $O_i$  tel que pour tout  $q \in N$  on a*

- Si  $\langle q/O_i^\perp \rangle > 0$  alors

$$\mathcal{X}(q, \nu) \sim \varpi(q)q^\perp$$

- Si  $\langle q/O_i^\perp \rangle < 0$  alors

$$\mathcal{X}(q, \nu) \sim -\varpi(q)q^\perp$$

où  $\varpi(q) = \sqrt{1 + \nu^2} \square$

**Preuve** En se rapprochant du *ième* obstacle on aura

$$\begin{aligned} \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \nu &= \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \sum_{j=1}^p \frac{\psi(\langle q/O_j^\perp \rangle)}{\|q - O_{jq}\|} \\ &= \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \left[ \sum_{j \neq i}^p \frac{\psi(\langle q/O_j^\perp \rangle)}{\|q - O_{jq}\|} \right] + \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \frac{\psi(\langle q/O_i^\perp \rangle)}{\|q - O_{iq}\|} \end{aligned}$$

D'après ce qui précède on constate trois cas qui se réfèrent à la position du véhicule par rapport à la droite  $L_i$  :

- Si pour  $\|q - O_i\| \rightarrow r_i$  on a  $\langle q/O_i^\perp \rangle > 0$  alors

$$\begin{aligned} \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \nu &= \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \psi(\langle q/O_i^\perp \rangle) \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \frac{1}{\|q - O_{iq}\|} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Ce qui implique d'après le lemme 9 que

$$\lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \cos(\beta) = \lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \frac{\nu}{\sqrt{1 + \nu^2}} = 1$$

D'où

$$\lim_{\|q-O_i\| \rightarrow r_i} \beta = 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

d'une autre manière on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_1 > 0 \text{ tel que } \left| \|q - O_i\| - r_i \right| < \eta_1 \text{ alors } |\beta - 2k\pi| < \varepsilon$$

d'où l'existence de

$$N_1 = \{q \in \mathbb{R}^2 / r_i < \|q - O_i\| < r_i + \eta_1\}$$

Comme  $\beta$  est l'angle entre  $\mathcal{X}(q, \nu)$  et  $q^\perp$  alors d'après ce qui précède, il existe une fonction réelle  $\varpi$  positive tel que

$$\lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \|\mathcal{X}(q, \nu) - \varpi(q)q^\perp\| = 0$$

Déterminons maintenant  $\varpi$ , on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \|\mathcal{X}(q, \nu) - \varpi(q)q^\perp\|^2 && = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \|\mathcal{X}(q, \nu)\|^2 + \varpi(q)^2 \|q^\perp\|^2 - 2\varpi(q) \|q^\perp\| \|\mathcal{X}(q, \nu)\| \cos \beta && = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} [(1 + \nu^2) + \varpi(q)^2 - 2\varpi(q) \sqrt{1 + \nu^2}] \|q\|^2 && = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} (\varpi(q) - \sqrt{1 + \nu^2}) \|q\|^2 && = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

d'où  $\varpi(q) = \sqrt{1 + \nu^2}$  quand  $q \in N_1$ . Ce qui nous ramène à écrire que pour tout  $q \in N_1$

$$\mathcal{X}(q, \nu) \sim \varpi(q)q^\perp$$

- Si pour  $\|q - O_i\| \rightarrow r_i$  on a  $\langle q / O_i^\perp \rangle < 0$ , alors avec la même procédure utiliser ultérieurement, on trouvera

$$\lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \cos(\beta) = \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \frac{\nu}{\sqrt{1 + \nu^2}} = -1$$

D'où

$$\lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \beta = (2k + 1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

En suivant les même étapes que le premier cas on aura qu'il existe  $\eta_2 > 0$  tel que pour tout  $q \in N_2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O} / r_i < \|q - O_i\| < r_i + \eta_2\}$ , on a

$$\mathcal{X}(q, \nu) \sim -\varpi(q)q^\perp$$

- Si pour  $\|q - O_i\| \rightarrow r_i$  on a  $\langle q/O_i^\perp \rangle = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \nu &= \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \left[ \sum_{j \neq i}^p \frac{\psi(\langle q/O_j^\perp \rangle)}{\|q - O_{jq}\|} \right] + \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \frac{\psi(\langle q/O_i^\perp \rangle)}{\|q - O_{iq}\|} \\ &= \lim_{\|q - O_i\| \rightarrow r_i} \left[ \sum_{j \neq i}^p \frac{\psi(\langle q/O_j^\perp \rangle)}{\|q - O_{jq}\|} \right] \end{aligned}$$

Pour ces deux cas on posera  $N = \{q \in \mathbb{R}^2 \setminus r_i < \|q - O_i\| < r_i + \min(\eta_1, \eta_2)\}$ , le domaine qui entoure  $O_i$ . ■

On passe maintenant à la démonstration du théorème 14.

**Preuve** On considère le système (3.26) tel que  $V = \frac{\|q\|^2}{2}$ , alors la convergence asymptotique est assurée.

On considère  $q \in N$ ,  $N$  un ensemble définie par le lemme 10. Dans notre travail 3 cas se distinguent

- Si  $\langle q/O_i^\perp \rangle > 0$  alors d'après le lemme 10

$$\mathcal{X}(q, \nu) \sim \varpi(q)q^\perp$$

comme on travail dans  $N$ , alors au lieu d'utiliser  $\mathcal{X}$  on utilisera  $\varpi(q)q^\perp$ .

On considère  $\tau \in [0, 1[$ , ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(q + \tau\varpi(q)q^\perp)^2 &= \|q - O_i + \tau\varpi(q)q^\perp\|^2 \\ &= \|q - O_i\|^2 + \tau^2\varpi(q)^2\|q\|^2 + 2\tau\varpi(q)\langle q - O_i/q^\perp \rangle \\ &= \|q - O_i\|^2 + \tau^2\varpi(q)^2\|q\|^2 + 2\tau\varpi(q)\langle O_i^\perp/q \rangle \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\varphi(q + \tau\varpi(q)q^\perp)^2 > r_i^2$  puisque  $\tau\varpi(q)\langle O_i^\perp/q \rangle > 0$ .

Alors

$$\varphi(q + \tau\varpi(q)q^\perp) \in C_{FA} = [r, +\infty[$$

pour  $q \in N$  et  $\langle q/O_i^\perp \rangle > 0$  d'où d'après la proposition 6 on a  $q$  évite tout les  $O_i$ .

- Si  $\langle q/O_i^\perp \rangle < 0$  alors d'après le lemme 10

$$\mathcal{X}(q, \nu) \sim -\varpi(q)q^\perp$$

comme on travail dans  $N$ , alors au lieu d'utiliser  $\mathcal{X}$  on utilisera  $-\varpi(q)q^\perp$ .

On considère  $\tau \in [0, 1[$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi(q - \tau\varpi(q)q^\perp)^2 &= \|q - O_i - \tau\varpi(q)q^\perp\|^2 \\ &= \|q - O_i\|^2 + \tau^2\varpi(q)^2\|q\|^2 - 2\tau\varpi(q)\langle q - O_i/q^\perp \rangle \\ &= \|q - O_i\|^2 + \tau^2\varpi(q)^2\|q\|^2 - 2\tau\varpi(q)\langle O_i^\perp/q \rangle \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\varphi(q + \tau\varpi(q)q^\perp)^2 > r_i^2$  puisque  $-2\tau\varpi(q)\langle O_i^\perp/q \rangle > 0$ .

Alors

$$\varphi(q + \tau\varpi(q)q^\perp) \in C_{FA} = ]r_i, +\infty[$$

pour  $q \in N$  et  $\langle q/O_i^\perp \rangle < 0$ .

Par conséquent pour  $q \in N$  et  $\langle q/O_i^\perp \rangle \in \mathbb{R}^*$ , d'après la proposition 6 on a  $q$  évite tout les  $\mathcal{O}_i$

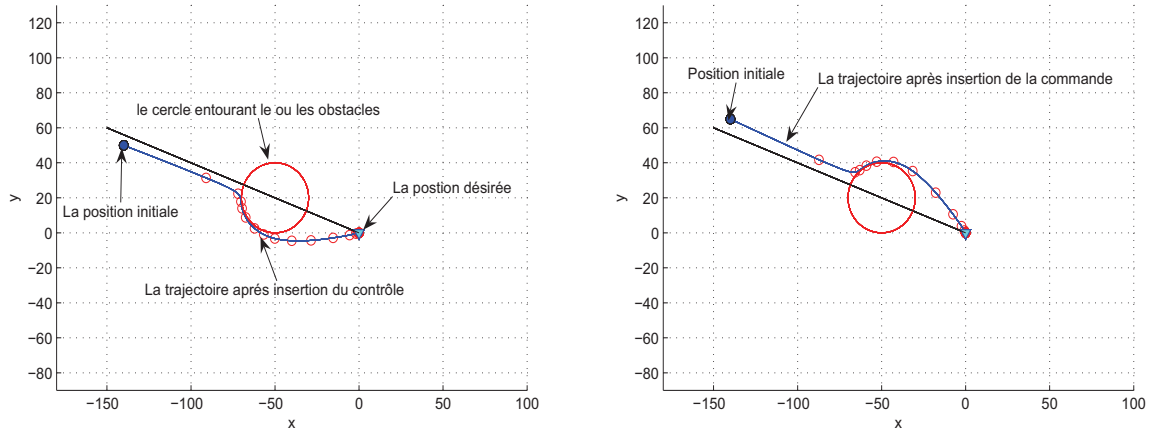
### 3.3.3 Analyse des résultats

Dans cette section, les simulations présentées illustrent les résultats précédents, moyennant le logiciel Matlab.

Pour les trois premières simulations sur les figures (3.4a,3.4b,3.4c), on considère un véhicule de modèle (A.21), qui circule dans un plan, contenant un obstacle circulaire centré en  $O(-50, 20)$  et une cible  $C$  qui représente l'origine du repère. En effet, sans tenir compte de l'orientation, ces simulations représentent les trajectoires du véhicule soumis à la commande donnée par le théorème 13, issue respectivement des positions initiales  $q_{10}(-140, 50)$ ,  $q_{20}(-140, 65)$  et  $q_{30}(50, 60)$ . Ces trois points représentent les positions respectivement à droite et à gauche de la ligne d'équation  $L(x) = \frac{O_y}{O_x}x = -\frac{2}{5}x$ , et la troisième, est un point assez lointain de l'obstacle.

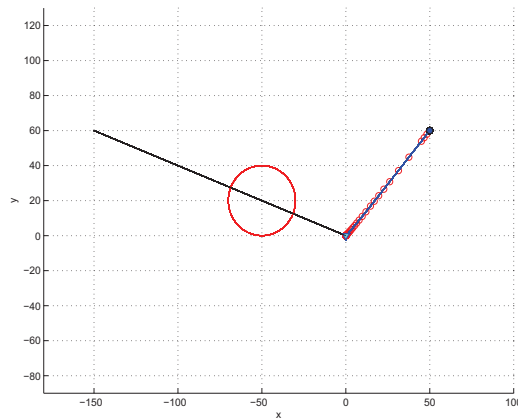
Ces trois figures (3.4a,3.4b,3.4c) montrent bien que les trajectoires du véhicule, sous la commande proposée, évitent l'obstacle tout en convergeant vers la position désirée. Les deux premières (3.9a et 3.9b), affirment l'invariance des deux parties à droite et à gauche de la ligne joignant l'obstacle et la cible.

Les trois figures (3.5a,3.5b,3.5c) représentent la commande  $u$  et la fonction



(a)  $q_{10}$  à droite de la ligne  $L$

(b)  $q_{20}$  à gauche de la ligne  $L$

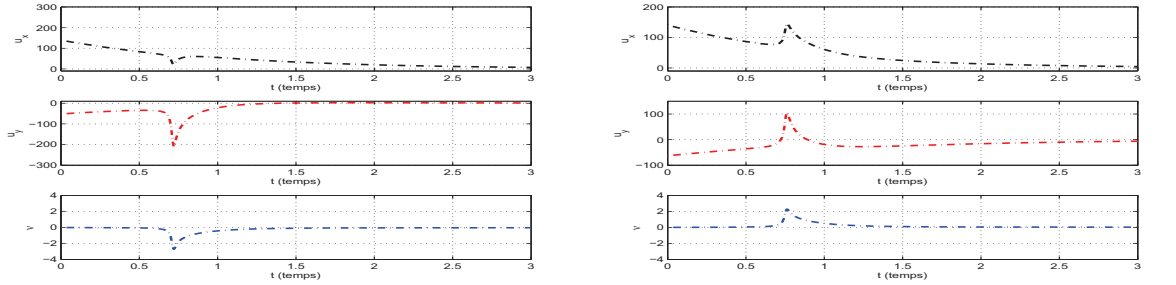


(c)  $q_{30}$  loin de l'obstacle

FIGURE 3.4 – Navigation d'un véhicule dans un plan qui contient un obstacle

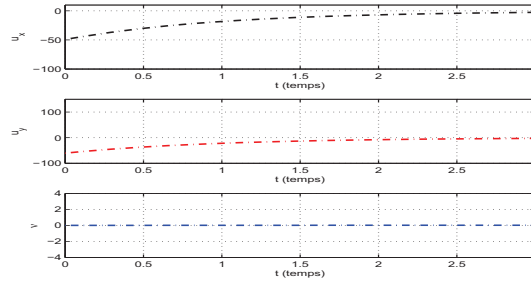
régulatrice  $\nu$  donnée par (3.27) en fonction du temps, respectivement pour les trois positions initiales  $q_{10}$ ,  $q_{20}$  et  $q_{30}$ . Comme on le constate la variation de  $\nu$  reste presque nulle quand le véhicule est loin de l'obstacle, mais quand le véhicule se rapproche de l'obstacle, on remarque une perturbation de la fonction, qui reste bornée, et ce la assure l'évitement de l'obstacle.

A noté que cette approche est basé sur le comportement du champs de



(a)  $(u_x, u_y, \nu)$  pour  $q_{10}$  à droite de la ligne  $L$

(b)  $(u_x, u_y, \nu)$  pour  $q_{20}$  à gauche de la ligne  $L$



(c)  $(u_x, u_y, \nu)$  pour  $q_{30}$  loin de l'obstacle

FIGURE 3.5 – Les variations de la fonction régulatrice  $\nu$  et de la commande  $u$  en fonction du temps

vecteur vis-à-vis de l'obstacle, les figures (3.6a,3.6b) simulent les champs de vecteur issus des points voisins de l'obstacle. On remarque bien que ce champs de vecteurs ne coupent pas l'obstacle.

Pour les simulations (3.7a,3.7b), on a considéré six obstacles éparpillés dans le plan et quatre agents de positions initiales différentes. Ceci permet de tester la fiabilité de la commande donnée par le théorème 14. On constate que les véhicules choisissent de quel côté dont ils vont éviter l'obstacle par rapport à la droite qui joint le point désiré au centre de l'obstacle concerné. Enfin, ils convergent vers la position désirée.

Pour le cas où la position initiales  $q_0$  est de coordonné  $(-100, 55)$ , on a simuler dans la figure (3.8) la fonction régulatrice associée en fonction du temps. On constate la variation de cette fonction en présence des obstacles

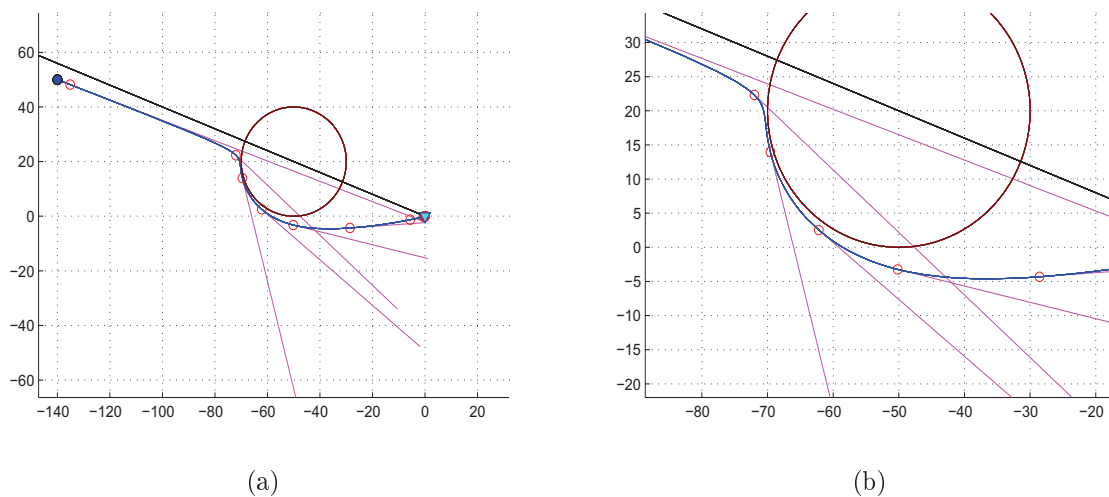


FIGURE 3.6 – Les champs de vecteurs issus des points voisins de l'obstacle

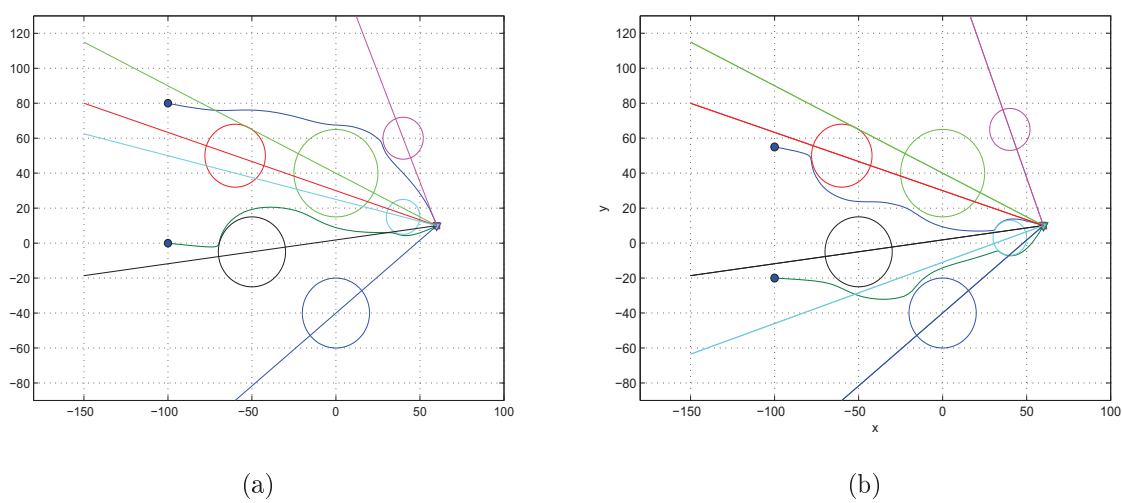


FIGURE 3.7 – Trajectoires issues de 4 positions initiales différentes pour un véhicule

et le sens qu'elle prend pour l'éviter.

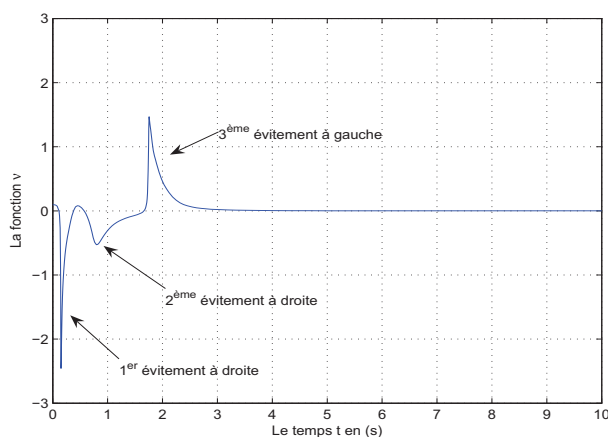


FIGURE 3.8 – La fonction régulatrice  $\nu$  en fonction du temps dans le cas  $q_0(-100, 55)$

### 3.4 Stabilisation et régulation de la dynamique

Le modèle cinématique permet de contrôler les vitesses pour atteindre une vitesse désirée. Mais quand la vitesse du véhicule est très grande, ce type de modèle ne suffit plus, c'est pourquoi on a recours au modèle dynamique, qui contrairement au modèle cinématique, ses commandes sont des forces ou des accélérations.

Dans cette section, on va analyser le contrôle d'une formation constituée d'agents régis par un modèle dynamique. Ceci est intéressant à réaliser car l'un des problèmes pour les systèmes dynamiques est qu'il est difficile de trouver une loi de contrôle en fonction de la condition initiale qui permet aux solutions du système d'éviter les collisions avec un obstacle fixe tout en convergeant vers la position désirée.



### 3.4.1 Modèle équivalent

Pour les systèmes de contrôle du deuxième ordre on a généralement recours à l'intégrateur double pour transformer le problème dynamique en un problème cinématique qui est plus facile à manipuler vu le nombre de théories appliquées à ce type de systèmes.

Le problème rencontré en utilisant l'intégrateur double est que si on a un système dynamique totalement actionné, il devient sous actionné c'est à dire que le nombre d'états sera supérieur aux actionneurs et si on l'utilise pour un système sous actionné le degré de sous actionnement va s'approfondir. De plus, le nombre d'états du système sera multiplié par deux ce qui complique la recherche d'une loi de contrôle. C'est pour cela qu'on a eu recours à une autre méthode qui préserve le nombre d'états et d'actionneurs tout en transformant notre système d'un système d'ordre *deux* en un système d'ordre *un*.

Notre travail est basé sur le lemme suivant :

**Lemme 11** *Soit l'équation de contrôle suivante :*

$$\ddot{e} = f(e, \dot{e}, u) \quad (3.40)$$

où  $e$  est un scalaire qui représente l'état et  $u$  le contrôle.

*S'il existe  $u$  qui fait converger asymptotiquement vers 0 la solution de l'équation suivante :*

$$\dot{r} = f(e, \dot{e}, u) + \alpha \dot{e} \quad \text{avec } r_0 = \dot{e}_0 + \alpha e_0 \quad (3.41)$$

*Tel que  $r \in L^\infty \cap L^2$ , alors  $e$  et  $\dot{e}$  convergent asymptotiquement vers 0.*

□

**Preuve** On a  $\dot{r} = f(e, \dot{e}, u) + \alpha \dot{e}$  avec  $r_0 = \dot{e}_0 + \alpha e_0$

En intégrant cette équation par rapport à au temps  $t$  on obtient :

$$r = \dot{e} + \alpha e + r_0 - (\dot{e}_0 + \alpha e_0)$$

D'où

$$r = \dot{e} + \alpha e$$

s'il existe une loi de contrôle  $u$  qui fait converger  $r$  vers 0 tel que  $r \in L^\infty \cap L^2$  alors d'après le lemme 3, on a  $e$  et  $\dot{e}$  convergent asymptotiquement vers 0.

■

Ce dernier lemme nous sert à transformer le système dynamique en un système cinématique avec le même nombre d'états et d'actionneurs.

L'exemple suivant illustre le lemme précédent :

### 3.4.1.1 Exemple

Soit l'équation de contrôle de deuxième ordre suivante :

$$\ddot{x} = (\dot{x} + \beta x)u - \beta \dot{x} = f(x, \dot{x}, u)$$

Où  $\beta$  est strictement positive. D'après le lemme 11, on considère l'équation de premier ordre suivante :

$$\dot{r} = f(x, \dot{x}, u) + \beta \dot{x} = [(\dot{x} + \beta x)u - \beta \dot{x}] + \beta \dot{x}$$

où  $r_0 = \dot{x}_0 + \beta x_0$

Tout calcul fait, on obtient

$$\dot{r} = ru$$

Si on prend la fonction de Lyapunov suivante

$$V = r^2/2$$

Sa dérivée par rapport à  $t$  est

$$\dot{V} = r^2 u$$

En prenant  $u = -1$ , d'après le théorème de stabilité de Lyapunov on déduit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0.$$

de plus on a  $\int_0^{+\infty} r^2(s) ds = - \int_0^{+\infty} \dot{V} ds < +\infty$

d'où  $r \in L_2$ , d'autre part on a  $\dot{V}$  est positive décroissante donc  $0 \leq V \leq V(t_0)$  ce qui implique que  $r \in L_\infty$ .

D'après le lemme précédent on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

### 3.4.2 Problème de stabilisation et de régulations des systèmes de commande du second ordre

Comme on l'a fait pour les systèmes cinématiques, dans cette section on va étendre le problème de stabilisation des systèmes dynamiques, au problème de stabilisation et de régulation des trajectoires. On considère le système de commande suivant :

$$\ddot{q} = A(\dot{q}, q) + B(q)u \quad (3.42)$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^t \in \mathbb{R}^m$ .

Nos résultats se résument dans ce théorème :

**Théorème 15** *Soit  $q$  solution de (3.42), on considère le système de contrôle du premier ordre :*

$$\begin{aligned} \dot{R} &= A(\dot{q}, q) + B(q)u + \alpha\dot{q} \\ R_0 &= \dot{q}_0 + \alpha q_0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

avec  $R(r_1, r_2, \dots, r_n)^t \in \mathbb{R}^n$ ,  $q(x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(u_1, u_2, \dots, u_n)^t \in \mathbb{R}^m$  est la commande et  $\alpha > 0$ .

Soit  $V$  est la fonction de Lyapunov associée à la commande  $u = u_a$  telle que

$$\begin{aligned} k_1 \|R\|^2 &\leq V(R, t) \leq k_2 \|R\|^2 \\ \dot{V}(R, t) &\leq -k_2 \|R\|^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Alors, pour toute fonction scalaire  $\nu$ , la commande :

$$u(R, t) = u_a(R, t) + \nu(R, t) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^t B(q) \right]^{\perp} \quad (3.45)$$

rend le système (3.42) uniformément asymptotiquement stable à l'origine.

□

**Preuve** Sous la commande  $u = u_a$  et les conditions (3.44) soumises à la fonction de Lyapunov associée  $V$ , le système (3.43) est uniformément asymptotiquement stable à l'origine.

D'où, d'après le théorème (12),

$$u(R, t) = u_a(R, t) + \nu(R, t) \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^t B(q) \right]^{\perp}$$

rend le système (3.46) uniformément asymptotiquement stable à l'origine. De plus, d'après les conditions (3.44) on a  $V$  est décroissant, d'où

$$V(q, t) \leq V(q_0, t_0)$$

et on a  $k_1 \|R\|^2 \leq V(q, t)$  ce qui implique

$$\|R\|^2 \leq \frac{V(q_0, t_0)}{k_1}$$

par conséquent,  $R \in L_\infty$ . Alors

$$r_i = \dot{x}_i + \alpha x_i \in L_\infty \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

On a aussi  $\dot{V} \leq -k_2 \|R\|^2$  alors

$$\int_{t_0}^{+\infty} |r_i|^2 \leq \int_{t_0}^{+\infty} \|R\|^2 \leq \frac{1}{k_2} (V(t_0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)) < \infty$$

Alors

$$r_i \in L_2 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

En résumé, on a trouvé que

$$r_i \in L_2 \cap L_\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

alors d'après le lemme 11, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q = 0$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

### 3.4.3 Construction d'une commande régulatrice stabilisante

Soit un véhicule modélisé par un système du second ordre (modèle dynamique) du type :

$$\ddot{q} = u \tag{3.46}$$

où  $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  est la position et  $u \in \mathbb{R}^2$  la loi de contrôle qui correspond à la somme des forces exercées sur le système.

On considère que ce véhicule circule dans un environnement qui comporte un seul obstacle, on note sa position initiale en temps  $t = t_0$  par  $q_0$  et on considère que la position finale est l'origine du repère terrestre.

Pour se déplacer d'une position initiale  $q_0$  à une position finale  $q_f$ , il existe une infinité de trajectoires, ayant des comportements différents au cours du déplacement. Ainsi il est très difficile de contrôler un véhicule sous un modèle dynamique pour faire déplacer le véhicule entre deux positions tout en respectant quelques critères sur le comportement entre l'instant  $t_0$  et  $t_f$ .

### 3.4.4 Conjecture : l'évitement d'obstacle

Cette section vise à construire un contrôle pour que le modèle dynamique puisse converger en évitant un obstacle fixe connu d'avance dans un espace  $2D$ .

Nos résultats sont présentés par le théorème suivant.

**Théorème 16** *On considère le système de second ordre (3.46) tel que  $q_0 = (x_0, y_0)$  est la condition initiale. Soit  $L(x)$  l'équation de la droite qui passe par le centre de la cible  $C = (C_x, C_y)$  et l'obstacle  $O = (O_x, O_y)$ .*

*Le contrôle suivant :*

$$u = -(b + \alpha)\dot{q} - \alpha bq + \nu(\dot{q} + \alpha q)^\perp \quad (3.47)$$

*où  $\nu$  est une fonction réelle et  $b$  un paramètre bien choisi, fait converger  $q$  asymptotiquement vers  $C$  (L'origine du repère).*

□

**Preuve** On considère le système

$$\dot{R} = u + \alpha\dot{q} \quad \text{avec } \alpha > 0 \quad (3.48)$$

la commande

$$u = u_a = -bR - \alpha\dot{q} \quad \text{avec } b > 0$$

rend ce dernier système asymptotiquement stable à l'origine, on prend comme fonction de Lyapunov associée

$$V = \frac{\|R\|^2}{2}$$

Cette fonction vérifie les conditions (3.44), alors d'après le théorème 15 la commande

$$u = -bR - \alpha\dot{q} + \nu\left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^\perp = -(b + \alpha)\dot{q} - \alpha bq + \nu(\dot{q} + \alpha q)^\perp$$

fait converger l'état de notre système vers le point cible.

■

En plus de la convergence, On propose la conjecture suivante relative à l'évitement de l'obstacle.

**Conjecture** Sous les mêmes hypothèses données par le théorème 16 et avec le même contrôle :

$$u = -(b + \alpha)\dot{q} - \alpha bq + \nu(\dot{q} + \alpha q)^\perp \quad (3.49)$$

Où

$$\nu = -\frac{\text{sign}([y_0 - L(x_0)][C_x - O_x])}{\|q - O_q\|} \quad (3.50)$$

$b$  est un paramètre bien choisi.

On a  $q \neq O_q, \forall t \geq 0$ .

□

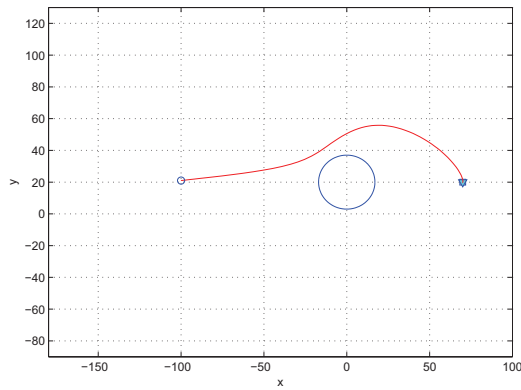
Cette conjecture va être appuyée par des simulations numériques qui seront présentées dans la section suivante.

### 3.4.5 Analyse des résultats

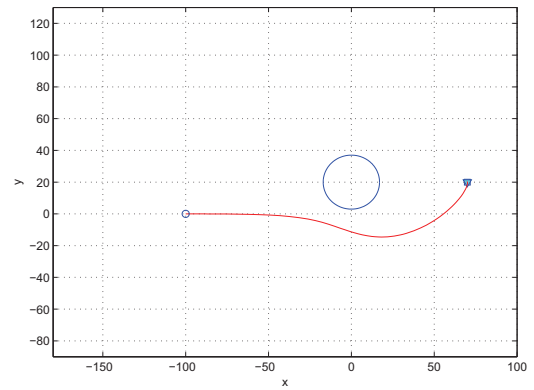
Dans cette section on va implémenter la loi de contrôle (3.49,3.50) dans le système (3.46), et on va prendre différentes positions initiales dans l'espace  $2D$ . On constate que les simulations illustrent que dans n'importe

quelle position dans le plan les trajectoires évitent toujours les obstacles. En effet, on a considéré trois positions initiales, une au dessus de la ligne (figure 3.9a ), une en dessous (figure 3.9b ) et une dernière assez lointaine de la position de l'obstacle (figure 3.9c ).

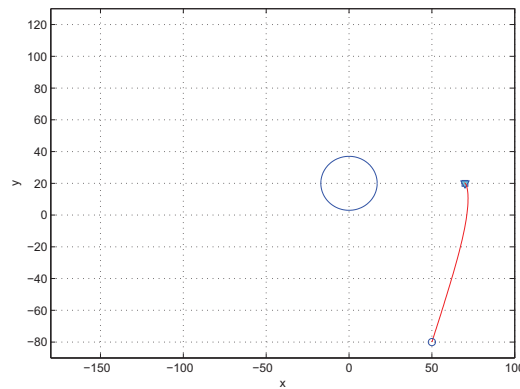
La dernière figure montre qu'on utilisant la même loi de contrôle que celle utilisée dans les deux autres figures et en partant d'une zone éloignée de l'obstacle, on garde la convergence ainsi qu'un comportement qui ne s'affecte pas trop par la partie répulsive du contrôle.



(a) Navigation à gauche de l'obstacle



(b) Navigation à droite de l'obstacle



(c) Navigation loin de de l'obstacle

FIGURE 3.9 – Navigation d'un véhicule de modèle dynamique dans un plan

## 3.5 Conclusion

Dans ce travail on a donné une nouvelle approche de construction d'une commande répulsive stabilisante. Une approche basée sur les théorèmes (10, 11, 3.14) et la proposition 6. Les théorèmes élaborés montrent que la commande étendue préserve la stabilisabilité du système. Cette commande intègre une fonction scalaire, appelée aussi *fonction régulatrice*, qui sera traitée comme étant une nouvelle entrée au système. Pour que les solutions du système bouclé évite un ensemble donné dans l'espace de navigation, dans la proposition 6, on a pu donner des conditions géométriques sur l'ensemble à éviter et des conditions analytiques sur la nouvelle entrée  $\nu$ . On a appliqué cette approche pour concevoir une commande à double fonction pour le cas d'un mono-robot type "unicycle". En effet, la loi de commande conçue est la somme d'un terme attractif  $u_a$  qui fait déplacer le robot vers l'objectif et d'un terme répulsif  $u_r$  qui lui permet d'éviter l'obstacle.

La partie  $u_r$  est une fonction dépendante de la fonction de Lyapunov et de la nouvelle entrée  $\nu$  qui n'est pas changeante par rapport au zone où se trouve le véhicule. Ainsi, la commande conçue est continue sur tout l'espace de navigation qui n'inclut pas l'obstacle. Cette "*fonction régulatrice*" modifie la trajectoire de sorte que le robot évite un ensemble de point vérifiant la condition géométrique de la proposition. Aussi la loi de commande que nous proposons ne marque pas un point d'arrêt devant l'obstacle, c.-à-d. en considérant la droite  $L$  qui passe par le centre de la cible et de l'obstacle, les deux ensembles de part et d'autre de cette droite sont invariants. Si le véhicule démarre à gauche de la droite il se déplacera toujours à gauche de  $L$ . De la même manière on a construit des commandes stabilisantes répulsives pour le cas où il y a plusieurs obstacles et on a proposé une conjecture dans le cas d'un modèle reflétant la dynamique de l'unicycle sans tenir compte de l'orientation.





# Navigation d'une formation de véhicules holonomes

---

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étend l'approche développée dans le chapitre précédent pour le cas d'un système multi-robots mobiles en formation. La différence entre ces deux types de systèmes est que la commande d'une formation traite un système composé de plusieurs sous systèmes. Contrairement au cas d'un mono robot, la convergence de la formation doit être vers un ensemble de points et cela complique la tâche de la commande. Nos résultats seront basés sur le Principe d'invariance de LaSalle, permettant à l'ensemble des véhicules de converger vers une configuration désirée, construite autour de la cible et doit éviter l'ensemble  $\mathcal{O}$ .

Comme application de cette approche nous sommes basés sur deux stratégies :

La première stratégie traite la communication entre les véhicules de la formation. En effet, définir une formation de robots en coopération revient à définir la communication entre les différents agents pour réaliser une tâche et éviter les collisions inter-agents. Dans notre travail on ne s'intéressera pas aux outils de communication mais seulement à l'existence des liens. Ces liens doivent être suffisamment solides de sorte qu'il n'apparaîtra pas une coupure d'informations au cours du temps même en présence d'un obstacle qui sépare les véhicules.

Ainsi, comment peut-on disposer les liens inter-agents et les limiter au minimum ? Le but étant de faire atteindre la formation un but bien précis ; généralement la convergence vers un point ou vers une configuration géomé-

trique ? La réponse à cette question se trouve dans la théorie des graphes. Cette théorie est largement utilisée dans plusieurs domaines notamment dans le domaine informatique et tout ce qui est en relation avec l'étude des réseaux. Cette technique a vu le jour ces dernières années en robotique et dans la commande d'une formation. Des résultats en relation avec cette technique se trouvent dans [13], [14], [15], [16] et [17]. Dans ce sens, notre apport consiste à adapter la théorie des graphes toute en la fusionnant avec le problème de stabilité du système multi-agents [3] [?].

La deuxième stratégie traite le cas de déplacement décentralisé d'une formation. Ce type de déplacement fait intervenir la distance entre les véhicules. On a pu construire une commande qui fait entourer la cible par une formation d'agents avec l'évitement d'un obstacle dans le plan et d'éviter les collisions entre les véhicules.

A présent, on considère  $n$  véhicules qui naviguent dans un plan et où la cinématique du *ime* véhicule est décrit par :

$$\dot{q}_i = u_i, \quad i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\} \quad (4.1)$$

avec  $q_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  représente la position et  $u_i = (u_{x_i}, u_{y_i}) \in \mathbb{R}^2$  est la vitesse qui est aussi l'entrée de commande de l'agent  $i$ .

## 4.2 Stabilisation et régulation des trajectoires d'une formation d'agents

On rappelle que le système du premier ordre qui regroupe la cinématique de  $n$  véhicules s'exprime par :

$$\dot{q} = u \quad (4.2)$$

où  $q \in \mathbb{R}^{2n}$  est l'état et  $u \in \mathbb{R}^{2n}$  est la loi de contrôle.

L'approche proposée au cas d'un mono-robot, traduisant la stabilisation et la régulation vers une cible, sera étendue par la suite pour le cas d'un système multi-agents. De même nous allons prendre en compte la navigation

## 4.2. Stabilisation et régulation des trajectoires d'une formation d'agents 71

de la formation dans un environnement perturbé par la présence d'obstacles et la prise en compte de collisions entre les agents. Par conséquent, la commande stabilisante sera augmentée par d'autres termes qui assurent la régulation et préserve la stabilisation de la formation.

La notion d'invariance rappelée ci-dessous sera exploitée dans la suite de nos investigations.

**Définition 3** (*Ensemble invariant*).  $\Omega$  est un ensemble invariant pour le système  $\dot{x} = f(x)$  si chaque trajectoire  $x(t)$  qui a pour condition initiale dans  $\Omega$  reste au cours du temps dans  $\Omega$ .

**Théorème 17** Soit  $q \in \Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ .

On considère le système différentiel du premier ordre (4.2).

On suppose que pour  $u = u_a$ ,

$$\Omega = \{q \in \mathbb{R}^{2n} / 0 \leq V(q) \leq p\}$$

est un ensemble invariant par rapport  $\dot{q} = u_a$ ,

où  $V : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$  est telle que  $\frac{\partial V}{\partial q} u_a \leq 0$ .

La commande suivante :

$$u = u_a - \begin{pmatrix} \nu_1(q) & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \nu_n(q) \end{pmatrix} \otimes I_2 \begin{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial q} \\ \frac{\partial V}{\partial q} \end{pmatrix}_{x_1} \right)^\perp \\ \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial q} \\ \frac{\partial V}{\partial q} \end{pmatrix}_{y_1} \right)^\perp \\ \vdots \\ \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial q} \\ \frac{\partial V}{\partial q} \end{pmatrix}_{x_n} \right)^\perp \\ \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial q} \\ \frac{\partial V}{\partial q} \end{pmatrix}_{y_n} \right)^\perp \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

assure que les états de (4.2) et du système  $\dot{q} = u_a$  qui ont pour conditions initiales dans  $\Omega$  convergent vers le même ensemble.

$\otimes$  représente le produit de Kronecker,  $I_2$  la matrice identité  $\in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $\nu_i$  est une fonction de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}$  et

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{x_1}, \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{y_1}, \dots, \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{x_n}, \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right)_{y_n} \right] \quad (4.4)$$

□

**Preuve** Par hypothèse,  $\Omega = \{q \in \mathbb{R}^{2n} / 0 \leq V(q) \leq p\}$  est invariant pour  $\dot{q} = u_a$ .

De plus,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q} u_a \leq 0$$

D'après le *théorème LaSalle* [81], les solutions du système défini auparavant convergent vers le plus grand ensemble invariant de

$$E = \{q \in \mathbb{R}^{2n} / \dot{V} = 0\}$$

On utilise la même fonction  $V$  pour le système (4.2, 4.3), sa différentielle par rapport à  $t$  devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial q} \dot{q} \\ &= \frac{\partial V}{\partial q} u_a - \frac{\partial V}{\partial q} \mathfrak{M} \otimes I_2 \begin{pmatrix} F_1^\perp \\ \vdots \\ F_n^\perp \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

où  $F_i = \begin{pmatrix} (\frac{\partial V}{\partial q})_{x_i} \\ (\frac{\partial V}{\partial q})_{y_i} \end{pmatrix}$ .

$\mathfrak{M}$  est une matrice diagonale dont les termes sont les composantes de  $\nu = [\nu_1(q), \nu_2(q), \dots, \nu_n(q)]$ .

La matrice correspondante à  $\mathfrak{M} \otimes I_2$  est donnée par :

$$\mathfrak{M} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \mathfrak{a}_n \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \mathfrak{a}_i = \begin{pmatrix} \nu_i & 0 \\ 0 & \nu_i \end{pmatrix}$$

La quantité

$$\frac{\partial V}{\partial q} \mathfrak{M} \otimes I_2 \begin{pmatrix} F_1^\perp \\ \vdots \\ F_n^\perp \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n F_i^t \mathfrak{a}_i F_i^\perp = \nu_i F_i^t F_i^\perp = 0$$

### 4.3. Commande décentralisée pour un problème de rendez-vous

Par conséquent :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q} u_a \leq 0$$

D'où

$$\Omega = \{q \in \mathbb{R}^{2n} / 0 \leq V(q) \leq V(q_0)\}$$

est invariant pour les solutions de (4.2,4.3).

Ce qui implique que les états du système (4.2,4.3) convergent vers le plus grand ensemble invariant de  $E$ . ■

Ce théorème est une généralisation du théorème caractérisé par la division de la loi de contrôle en somme de deux parties. La première partie « attractive » et la seconde représente une nouvelle entrée du système. En changeant  $\nu = [\nu_1(q), \nu_2(q), \dots, \nu_n(q)]$  le comportement de la trajectoire changera tout en conservant la stabilisation asymptotique du système.

## 4.3 Commande décentralisée pour un problème de rendez-vous

Dans cette section nous nous intéressons à  $n$  robots ou agents qui naviguent, dans un plan  $2D$ , vers une cible  $C = (C_x, C_y)$  qui est supposée fixe et qu'on considère comme origine du repère terrestre, en présence d'un obstacle  $O = (O_x, O_y)$ . la cinématique du  $i^{me}$  robot-mobile /agent est donné par (4.1).

Pour une formation on écrit :

$$\dot{q} = u \tag{4.6}$$

avec  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n] \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{2n}$ .

En se basant sur le *théorème 1*, notre objectif est de trouver le contrôle  $u_a$  qui stabilise la formation et trouver la fonction de régulation  $\nu$  qui nous permet d'éviter un obstacle localisé.

### 4.3.1 Commande décentralisée pour entourer une cible

Tout d'abord on va commencer par la construction d'une commande stabilisante

$$u_a = (u_{a1}, u_{a2}, \dots, u_{an})$$

pour le système (4.6), qui a pour but d'entourer une cible  $C$  fixe par  $n$  agents de modèles les sous systèmes (4.1).

**Proposition 7** *On considère  $n$  agents avec la cinématique donnée par le système (4.6), alors la loi de contrôle suivante :*

$$u_i = u_{ai} \quad (4.7)$$

où

$$u_{ai} = -(\|q_i - C\|^2 - l^2)(q_i - C) \quad (4.8)$$

pour toute condition initiale dans  $\Omega$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$  :

$$\Omega = \{q \in \mathbb{R}^{2n} / l \leq \|q_i - C\| \leq K\}$$

fait converger les solutions du système (4.6, 4.8) vers l'ensemble  $M$  où

$$M = \{q \in \Omega / \|q_i - C\| = l\}$$

et  $K \geq \|q_{i0} - C\|$ .

■

La démonstration de la proposition 7 est basée sur le théorème de LaSalle. Il est nécessaire d'introduire quelques lemmes pour faciliter la tâche. Dans le lemme 12, nous démontrons que  $\Omega$  est un ensemble invariant pour le système (4.6,4.8). Le lemme 13 montre la manière de trouver la fonction décroissante adéquate à notre problème. Finalement, le lemme 14 nous détermine le plus grand ensemble invariant  $M$ , qui est l'ensemble d'équilibre de notre système.

### 4.3. Commande décentralisée pour un problème de rendez-vous

**Lemme 12** *Soit*

$$\Omega = \{q \in \mathbb{R}^{2n} / l \leq \|q_i - C\| \leq K\}$$

*Chaque solution de (4.6,4.8) qui commence dans  $\Omega$  reste au cours du temps dans  $\Omega$ , c.à.d.  $\Omega$  est un ensemble invariant pour le système (4.6,4.8). En plus, l'ensemble  $\Omega$  est compact. ■*

**Preuve** On suppose que  $q_0 \in \Omega$  et considérons la fonction

$$S(q_i) = (\|q_i - C\|^2 - l^2) \quad (4.9)$$

La dérivée de  $S(q_i)$  tout au long de la trajectoire (4.6,4.8) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{S}(q_i) &= 2 \langle \dot{q}_i, q_i - C \rangle = 2 \langle u_i, q_i - C \rangle \\ &= -2(\|q_i - C\|^2 - l^2) \|q_i - C\|^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

alors

$$\dot{S}(q_i) = -2S(q_i)(S(q_i) + l^2) \quad (4.11)$$

par conséquent

$$\frac{S(q_i)}{S(q_i) + l^2} = \frac{S(q_{i0})}{S(q_{i0}) + l^2} \exp(-2l^2(t - t_0)) \quad (4.12)$$

Comme  $S(q_{i0}) = \|q_{i0} - C\|^2 - l^2 \geq 0$  est cela parce que  $q_{i0} \in \Omega$  alors

$$S(q_i) = \|q_i - C\|^2 - l^2 \geq 0 \Leftrightarrow \|q_i - C\| \geq l. \quad (4.13)$$

D'autre part, soit  $F(q_i)$  telle que :

$$F(q_i) = \|q_i - C\|^2 \quad (4.14)$$

La différentielle de  $F$  par rapport à  $t$  est :

$$\begin{aligned} \dot{F}(q_i) &= 2 \langle \dot{q}_i, q_i - C \rangle = 2 \langle u_i, q_i - C \rangle \\ &= -2(\|q_i - C\|^2 - l^2) \|q_i - C\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

alors  $F$  est décroissante par rapport à  $t$ ,

d'où

$$\|q_i - C\| \leq \|q_{i0} - C\| \leq k \quad (4.16)$$



alors , si  $q_0 \in \Omega$  alors  $q \in \Omega$ , ce qui implique que  $\Omega$  est invariant par rapport au système cinématique (4.6,4.8).  $\square$

**Lemme 13** *On suppose que  $q$  de composantes les solutions de (4.6,4.8) et on pose la fonction candidate suivante :*

$$V(q) = \sum_{i=1}^n (\|q_i - C\|^2 - l^2) \quad (4.17)$$

*La différentielle de  $V$  par rapport à  $t$  est négative sur  $\Omega$ .*

**Preuve** La dérivée de  $V$  tout au long de la trajectoire du système (4.6) avec la loi de contrôle donné par la Proposition 7 est comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V}(q) &= \sum_{i=1}^n \langle \dot{q}_i, q_i - C \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n (\|q_i - C\|^2 - l^2) \|q_i - C\|^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

on a  $q_0 \in \Omega$ , d'après le lemme 12  $\Omega$  est un ensemble invariant par rapport à l'équation (4.6,4.8), alors  $q \in \Omega$  d'où  $(\|q_i - C\|^2 - l^2) \geq 0$  ce qui implique

$$\dot{V}(q) \leq 0 \quad (4.19)$$

$\square$

**Lemme 14** *On suppose que  $q$  de composantes les solutions de (4.6,4.8) alors*

$$M = \{q \in \Omega / \|q_i - C\| = l\}$$

*est le plus grand ensemble invariant dans  $E = \{q \in \Omega / \dot{V} = 0\}$*

**Preuve** on a

$$\dot{V}(q) = - \sum_{i=1}^n (\|q_i - C\|^2 - l^2) \|q_i - C\|^2 = 0$$

### 4.3. Commande décentralisée pour un problème de rendez-vous

alors

$$E = \{\| q_i - C \| = l\} = M \quad (4.20)$$

puisque  $q \in \Omega$

Soit  $q_0 \in M$  et  $S(q_i) = \| q_i - C \|^2 - l^2$ , d'après la preuve du lemme 12 alors

$$\frac{S(q_i)}{S(q_i) + l^2} = \frac{S(q_{i_0})}{S(q_{i_0}) + l^2} \exp(-2l^2(t - t_0)) \quad (4.21)$$

comme  $q_0 \in M$  alors  $S(q_{i_0}) = 0$  ce qui implique  $S(q_i) = \| q_i - C \|^2 - l^2 = 0$  d'où,

$$q \in M$$

Par conséquent  $M$  est le plus grand ensemble invariant de  $E$ .  $\square$

Maintenant nous avons tous les outils pour démontrer les résultats de la Proposition 7.

**Preuve (Proposition 7)** Selon les résultats donnés par le Lemme 12, Lemme 13, Lemme 14,  $\Omega$  est invariant par rapport (4.6,4.8) et  $\dot{V} \leq 0$  sur  $\Omega$  alors selon le théorème de LaSalle, chaque solution qui admet pour condition initiale dans  $\Omega$  converge vers  $M$  quand  $t \rightarrow \infty$ , avec  $M$  définie par le Lemme 14, le plus grand ensemble invariant de  $E = \{q \in \Omega / \dot{V} = 0\}$ .  $\square$

En conclusion, on a donné dans cette partie une commande  $u_a = [u_{a_1}, u_{a_2}, \dots, u_{a_n}]$ , donnée par la Proposition 7, qui fait converger chaque agent de la formation vers un cercle traduisant l'objectif et qui entoure la cible, et ceci étant sans aucune information sur les coordonnées de leurs positions.

Par la suite on va passer à l'élaboration de la commande répulsive stabilisante.

#### 4.3.2 Construction de la commande répulsive

Comme on l'a précisé dans le début de ce chapitre, le fait de trouver la commande stabilisante, permet d'être étendue dans la conception de la

fonction régulatrice.

Dans le théorème suivant nous donnons une commande qui assure la convergence de chaque agent vers un point du cercle, considéré comme un ensemble attractif, centré par la cible, et d'éviter un obstacle dans le plan.

**Théorème 18** *Soit l'ensemble*

$$\Omega = \{q \in \mathbb{R}^{2n} / l \leq \|q_i - C\| \leq K\}$$

*On considère  $n$  agents modélisés par le système (4.6), définie dans  $\Omega$ . Soit  $q_0 = (x_0, y_0)$  est la position initiale à  $t = t_0$ , et on considère  $L$  la fonction associée à la droite joignant le centre de la cible  $C$  à  $O$ .  $O$  est le centre du cercle qui entoure l'obstacle. Alors la commande suivante*

$$u_i = u_{ai} + \nu_i (q_i - C)^\perp \quad (4.22)$$

où

$$u_{ai} = -(\|q_i - C\|^2 - l^2)(q_i - C) \quad (4.23)$$

et

$$\nu_i = -\frac{\text{sign}([y_{i0} - L(x_{i0})][C_x - O_x])}{\|q_i - O_{q_i}\|} (\|q_i - C\|^2 - l^2) \quad (4.24)$$

*pour toute condition initiale dans  $\Omega$ , fait converger les solutions de (4.6, 4.22, 4.23, 4.24) vers  $M$  où*

$$M = \{q \in \Omega / \|q_i - C\| = l\}$$

*et  $K \geq \|q_{i0} - C\|$ . Et le  $i^{\text{ème}}$  agent évite le point dynamique  $O_{q_i}$ .*

■

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \Omega &= \{q \in \mathbb{R}^{2n} / l \leq \|q_i\| \leq K\} \\ &= \{q \in \mathbb{R}^{2n} / 0 \leq \|q_i\|^2 - l^2 \leq K^2 - l^2\} \\ &= \{q \in \mathbb{R}^{2n} / 0 \leq V(q) \leq p\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

### 4.3. Commande décentralisée pour un problème de rendez-vous

D'après le lemme12 et lemme13  $\Omega$  est invariant et  $\dot{V} \leq 0$  par rapport (4.6,4.8) et  $\frac{\partial V}{\partial q} = q - C$  suite au théorème 17 les solutions des systèmes (4.6,4.22,4.23,4.24) et (4.6,4.8) approchent le même ensemble, d'autre part d'après la proposition 7 la solution de (4.6,4.8) converge vers  $M$  alors le système (4.6,4.22,4.23,4.24) converge vers  $M$ , qui n'est autre que le cercle de centre  $C$  et de rayon  $r$ .

Sachant qu'on manipule des modèles d'agents qui ne tiennent pas comptes des autres agents de la formations, la justification de la fiabilité de la commande répulsive  $\nu$  donnée par (4.24) est la même que celle donnée par la démonstration du théorème 13 du CHAPITRE 4. ■

Après injection de la commande introduite par le théorème précédent, les trajectoires du système (4.6) obéissent à un principe énoncé par le corollaire suivant :

**Corollaire 3** *On définit les deux ensembles  $K$  et  $H$  par*

$$K = \{q \in \Omega / y \geq L(x)\}$$

$$H = \{q \in \Omega / y < L(x)\}$$

où  $L(x)$  est définie ultérieurement. Ces ensembles sont invariants par rapport au système (4.6,4.22,4.23,4.24). □

**Preuve.** Après intégration de la commande stabilisante dans le modèle (4.6), la cinématique de l'agent  $i$  s'écrit comme suit :

$$\dot{q}_i = (\|q_i\|^2 - l^2)(-q_i + \nu_i q_i^\perp) \quad (4.26)$$

où  $\nu_i$  est donnée par (4.24).

En utilisant les coordonnées polaires  $(\rho_i, \theta_i)$ , pour le système précédent, on obtient le système différentielle suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_i &= -(\rho_i^2 - l^2)\rho_i \\ \dot{\theta}_i &= \nu_i \end{aligned} \quad (4.27)$$

où l'état  $\theta_i$  représente l'angle entre  $\overrightarrow{Cq_i}$  et l'horizontale.

Comme on le constate dans (4.27) le comportement de  $\theta_i$  dépend du signe de la quantité  $[y_{i0} - L(x_{i0})][C_x - O_x]$ .

On introduit aussi le réel  $\alpha$ , qui représente l'angle entre  $L$  et l'horizontale.

On constate 4 cas :

-1<sup>er</sup>CAS si  $C_x \geq O_x$ , on obtient 2 cas

1/ si  $y_{i0} \geq L(x_{i0})$

$$\dot{\theta}_i = -\frac{\rho_i^2 - l^2}{|\sqrt{(\rho_i \cos \theta_i - O_x)^2 + (\rho_i \sin \theta_i - O_y)^2} - r|} \leq 0, \text{ alors } \theta_i \leq \theta_{i0}.$$

D'autre part, comme  $y_{i0} \geq L(x_{i0})$ , ce qui implique que  $\theta_i \leq \theta_{i0} \leq \alpha$ , alors  $\forall t$ , l'état  $q(t)$  reste dans le plan supérieur définie par  $L$  ce qui montre que  $y_i \geq L(x_i)$ .

2/ si  $y_{i0} \leq L(x_{i0})$  alors  $\dot{\theta}_i \geq 0$ , par conséquent  $\theta_i \geq \theta_{i0}$ , en plus  $y_{i0} \leq L(x_{i0})$  ce qui implique que  $\theta_i \geq \theta_{i0} \geq \alpha$  c.à.d  $q$  reste dans la partie inférieure définie par  $L$  ce qui montre  $y \leq L(x)$ .

-2<sup>me</sup>CAS si  $C_x \leq O_x$

Similairement, on a deux cas.

3/ si  $y_{i0} \geq L(x_{i0})$ ,  $\dot{\theta}_i \leq 0$  et on utilise la même preuve donnée par 1/ of 1<sup>er</sup>CAS, on trouve que  $y_i \geq L(x_i)$ .

4/ si  $y_{i0} \leq L(x_{i0})$  sous la même analyse de 2/-1<sup>er</sup>CAS, alors  $y_i \leq L(x_i)$ .

Ces 4 cas d'études, affirment que si  $y_{i0} \geq L(x_{i0})$  (resp.  $y_{i0} < L(x_{i0})$ ) alors  $y_i \geq L(x_i)$  (resp.  $y_i < L(x_i)$ ) Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .

Finalement, on conclut que  $K$  et  $H$  sont invariants par rapport au système (4.6,4.22,4.23,4.24).

■

Le corollaire précédent assure qu'en utilisant la commande adéquate donnée par le théorème 20 chaque véhicule de la formation évitera l'obstacle du bon côté.

### 4.3.3 Analyse des résultats

Comme confirmation des résultats théoriques données ultérieurement, on simule sous Matlab les trajectoires issue de (4.6), après injection de la loi de contrôle (4.22,4.23,4.24). Pour cela on considère une formation de 6 agents initialement éparpillés dans le plan, qui naviguent dans un espace contenant un obstacle.

La simulation est donnée par la figure 4.1. Dans cette simulation on constate bien que les 6 agents évitent l'obstacle, tout en convergent vers une position au voisinage de la cible. Cela montre bien l'efficacité du résultat donné par le théorème 20. Aussi on remarque que chaque véhicule évite l'obstacle selon sa position initial par rapport à la droite reliant le centre de l'obstacle circulaire et la cible, les comportements confirment les résultats donnés par le corollaire 3.

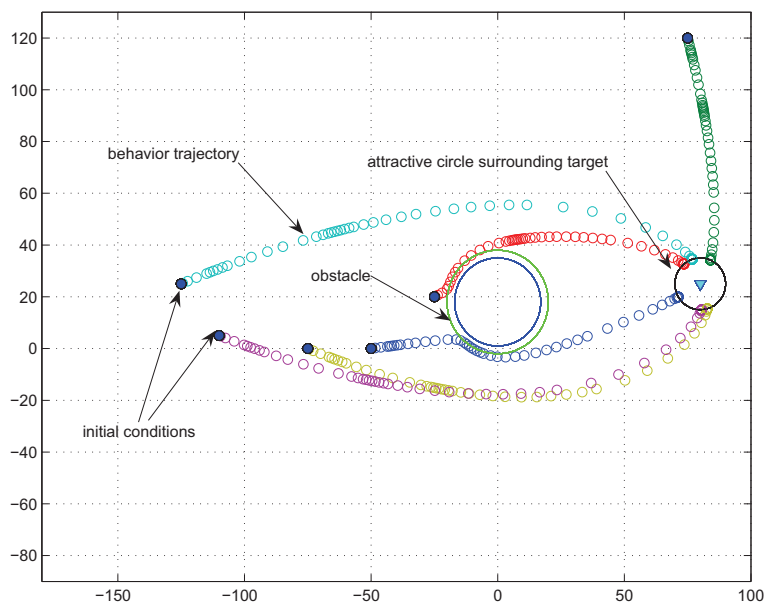


FIGURE 4.1 – Simulation de la formation avec une commande décentralisée

Comme on a plusieurs véhicules à la fois qui circulent dans l'espace, dans cette partie on a pu donner une commande répulsive par rapport

à un obstacle, et qui fait converger tous les agents de la formation vers un ensemble entourant la cible, ici on l'a pris un cercle centré en  $C$ . Cela a facilité la tâche autrement on sera amené à déterminer la position de convergence pour chaque véhicule. Par conséquent, la complexité du problème croît selon le nombre d'agents.

L'ambiguïté qui reste est d'en tenir compte des interactions entre les agents, ce qui cause un problème de synchronisation et d'évitement de collision entre les différents agents de la formation. La réussite de la formation suscite un échange d'informations. Nous évoquerons ce problème, par la suite, et les solutions associées à l'évitement de collision et l'échange d'informations entre les agents du même groupe.

## 4.4 Graphe de connexion associé à la navigation d'une formation d'agents

L'interaction entre les robots et la présence de contraintes communes telles que l'évitement de collisions ou le maintien de formation nécessite la prise en compte des communications entre les différents véhicules. La topologie des graphes de communication est très importante pour la stabilisation et/ou le contrôle d'une formation. Dans la plupart des situations, les échanges d'informations sont nécessaires aux contrôleurs locaux pour obtenir des informations des robots voisins, voire des informations globales liées à la formation. Généralement, on suppose une communication parfaite sans perte ni délai. Dans ce travail on ne s'intéressera pas aux outils de communications mais seulement à l'existence des liens. Ces liens doivent être aussi solides de façon qu'il n'y ait pas de coupure d'informations au cours du temps même en présence d'un obstacle qui sépare les agents.

La question qu'on se pose dans ce type de problème est la suivante : comment peut-on disposer les liens inter-agents et les limiter au minimum,

pour atteindre un but bien précis? Généralement une convergence vers un point ou vers une configuration géométrique.

La réponse à cette question fait appel à la théorie des graphes. Cette théorie est très utilisée dans plusieurs domaines notamment dans le domaine d'informatique et tout ce qui est en relation avec l'étude des réseaux. Cette technique a vu le jour ces dernières années en robotique et plus précisément dans la communauté traitant la commande de formations.

En effet, la théorie des graphes est un outil important dans l'analyse de stabilité d'une formation. Elle permet de représenter les interconnexions entre des robots et en particulier les échanges d'informations. La topologie d'un graphe permet d'étudier la stabilité, mais aussi la commandabilité du système. Il est également possible d'utiliser cette théorie pour choisir un contrôleur approprié à la configuration de la formation, s'il existe. Dans la littérature, on peut trouver plusieurs exemples d'application de la théorie des graphes pour la formation . Dans [27], un graphe orienté représente une formation d'agents dont les dynamiques sont données par des systèmes (identiques) linéaires à temps invariant. Un critère est développé à partir des valeurs propres du Laplacien du graphe pour déterminer l'effet de la topologie des communications sur la stabilité. Dans [28], les véhicules échangent des informations selon un graphe non orienté, spécifié à l'avance. La preuve montre qu'une stabilisation par retour d'état est toujours possible si le graphe de communication est connecté. De plus, le taux de convergence vers la formation est défini par la plus petite valeur propre positive du Laplacien du graphe. Il est également possible d'étudier le problème de coordination dans le cadre des fonctions de Lyapounov [29]. L'hypothèse principale est que chaque robot a individuellement une fonction de Lyapounov. Des conditions suffisantes sont alors déduites pour qu'il existe toujours une fonction de contrôle de Lyapounov pour la formation de robots. Cette fonction est une somme pondérée des fonctions individuelles de chaque robot.

Les théories établies dans ce sens nous aideront et nous serviront



à établir des liens entre les véhicules tout en évitant les obstacles et atteignant l'objectif sans collisions.

Dans cette partie, on considère une formation de  $n$  agents qui circule dans un espace contenant un obstacle.

On suppose que chaque véhicule de la formation est holonome et sa cinématique s'exprime comme suit :

$$\dot{q}_i = u_i \quad (4.28)$$

où  $q_i = (x_i, y_i)$  et  $u_i = (v_i, w_i)$ .

Pour une formation de véhicules le système devient :

$$\dot{q} = u \quad (4.29)$$

où  $q = [q_1, q_2, \dots, q_N] \in \mathbb{R}^{2N}$  et  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^{2n}$

Le même problème que dans le cas d'un seul véhicule se pose ici mais en nombre plus grand.

Comment construire une loi de contrôle qui fait converger une formation vers une position désirée ou dans notre cas une configuration désirée tout en évitant les obstacles, et établissant une communications entre les différents agents de la formation ?

Dans notre cas on va établir une communication agent-agent et agent-obstacle. Plusieurs travaux ont été établis dans ce sens on peut citer [20],... Dans ce contexte ils utilisent les deux types du graphe, orienté et non-orienté. Ce dernier est destiné pour une connexion sans sens c'est pourquoi dans les démonstrations, les connexions sont les distances entres les agents. On note aussi ce type de connexion est très utilisée puisque sa matrice Laplacienne est symétrique et positive d'après le théorème du cercle de Gersgorin [82]. Donc on peut facilement extraire la fonction de Lyapunov. Pour le graph orienté peut de travaux qui s'intéressent à ce type de connexion puisque, contrairement au graph non-orienté, sa matrice Laplacienne n'est

pas symétrique, on l'utilise surtout pour un déplacement comportant un leader ou un déplacement hiérarchisé. Par conséquent il y a un ordre pour le suivi de leader, ex : si on a 3 agents, l'agent 1 est le leader le suivi va se faire sous forme de "platoon" le 2 suit 3 et le trois suit 1, on appelle cela un déplacement hiérarchique.

Dans notre travail on va s'intéresser au déplacement d'une formation qui établie un graph orienté. Notre apport est de combiner ce type de déplacement avec l'évitement d'obstacle et converger vers une position et une configuration désirées.

Dans la section suivante on s'intéresse au cas où les agents établissent une communication avec l'objectif seulement. Comment ils peuvent se déplacer dans un environnement hostile, se positionner et produire une forme géométrique autour de la cible ?

#### 4.4.1 Communication agents-cibles

Il s'agit de trouver une loi de commande distribuée  $u$  qui stabilise chaque agent tout en évitant l'obstacle. D'autre part, quand la formation approche la cible, il faut qu'elle respecte une configuration désirée autour de l'objectif. La configuration finale dépend de l'application que doit réaliser le groupe d'agents. Notre approche se base aussi sur la théorie des graphes pour établir la connexion entre les agents. Un exemple d'interconnexion entre les agents est donné par la figure 4.2 qui illustre le graphe "unit-depth" (pour plus de détail on peut consulter [17]). La figure 4.3 montre un graphe "unit-depth with one sink". C'est ce dernier qui est pris en considération pour résoudre le problème d'interconnexion entre les éléments de la formation.

La réponse à cette question est basée sur le théorème suivant :

**Théorème 19** *Soit  $G(\eta, \epsilon)$  un graphe-orienté cyclique qui admet "unit depth with one sink", où  $\eta = \{1, \dots, n, r\}$  est l'ensemble de noeuds et  $\epsilon = \{(i, j) \in \eta \times \eta / i \in \mathcal{N}_j\}$  est l'ensemble d'arêtes. On suppose que  $L$  est la matrice Laplacienne associée à  $G$  et  $\mathfrak{L}$  la quantité  $L \otimes I_2$ .*

*On considère la cinématique suivante :*

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{u} \tag{4.30}$$

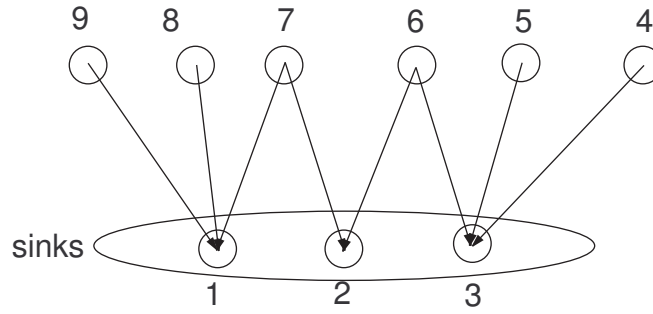


FIGURE 4.2 – Le graphe "unit-depth"

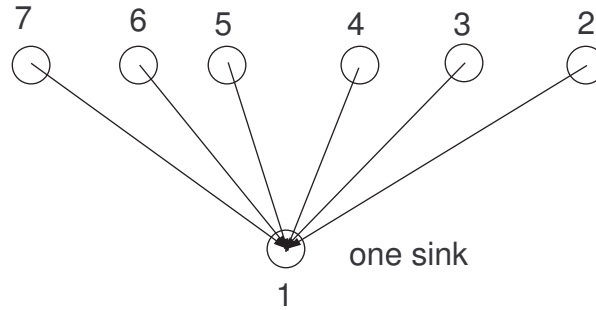


FIGURE 4.3 – Le graphe "un seul niveau de profondeur et un parent"

où  $\tilde{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n, q_r] \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$  est le vecteur qui contient les positions de tous les véhicules. Et soit  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n, 0)$  tel que  $k_{ij} = k_i - k_j$  est la configuration de  $q_i - q_j$ .

La loi de commande suivante :

$$\tilde{u}_i = -\mathfrak{L}(\tilde{q} - k) - \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & 0 & h_r \end{pmatrix} \otimes I_2 \begin{pmatrix} \left( (P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k))_{x_1} \right)^\perp \\ \left( (P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k))_{y_1} \right) \\ \vdots \\ \left( (P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k))_{x_r} \right)^\perp \\ \left( (P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k))_{y_r} \right) \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

, où  $h_i = \frac{\text{sign}([y_{i0} - L_i(x_{i0})][C_{ix} - O_x])}{\|q_i - O_{q_i}\|}$  et  $P(G)$  la Matricce "Disagreement" given on Proposition 7, fait converger les états vers la configuration

désirée au voisinage de la cible  $C$  tout en évitant  $O_{q_i}$ .  $\square$

Pour démontrer ce théorème on va introduire quelques résultats.

On considère le système cinématique avec les mêmes conditions du *Théorème 20* comme suit :

$$\dot{\tilde{q}} = -\mathfrak{L}(G)(\tilde{q} - k) \quad (4.32)$$

On peut subdiviser le système en deux parties :

$$\dot{\tilde{q}}_x = L(\tilde{q}_x - k_x) \quad \dot{\tilde{q}}_y = L(\tilde{q}_y - k_y) \quad (4.33)$$

où  $\tilde{q}_x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_r)$ ,  $\tilde{q}_y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_r)$ ,  $k_x = (k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_n}, 0)$  et  $k_y = (k_{y_1}, k_{y_2}, \dots, k_{y_n}, 0)$ .

**Proposition 8** *Soit*

$$V = (\tilde{q} - k)^t P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k) \quad (4.34)$$

où  $P(G)$  est la Matrice de "Disagreement" donnée par la (*Proposition 7*).  
La solution de (4.32) converge vers le plus grand ensemble invariant de

$$\begin{aligned} E &= \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \dot{V} = 0\} \\ &= \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \mathfrak{L}(G)(\tilde{q} - k) = 0\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$\square$

**Preuve** Au regard de la *proposition 7*, la matrice

$$P(G) = \frac{1}{2}(L(G) + L(\tilde{G})) \quad (4.36)$$

est semi-définie positive.

On considère la fonction quadratique suivante :

$$V = (\tilde{q} - k)^t P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k) \quad (4.37)$$

alors

$$\begin{aligned} V &= (\tilde{q}_x - k_x)^t P(G)(\tilde{q}_x - k_x) + (\tilde{q}_y - k_y)^t P(G)(\tilde{q}_y - k_y) \\ &= V_x + V_y \end{aligned} \quad (4.38)$$

la différentielle de  $V_x$  par rapport à  $t$  est

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= -(\tilde{q}_x - k_x)^t (L(G)^t P(G) + P(G)L(G))(\tilde{q}_x - k_x) \\ &= -(\tilde{q}_x - k_x)^t L(G)^t L(G)(\tilde{q}_x - k_x) - \\ &\quad (\tilde{q}_x - k_x)^t L(G)^t L(\tilde{G})(\tilde{q}_x - k_x) \\ &= -(\tilde{q}_x - k_x)^t L(G)^t L(G)(\tilde{q}_x - k_x) \\ &= -\|L(G)(\tilde{q}_x - k_x)\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

en tenant compte de la propriété  $L(G)^t L(\tilde{G}) = 0$  d'après [17].

Alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_x + \dot{V}_y \\ &= -\|L(G)(\tilde{q}_x - k_x)\|^2 - \|L(G)(\tilde{q}_y - k_y)\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

ce qui implique que  $0 \leq V(\tilde{q}) \leq V(\tilde{q}_0)$  donc l'ensemble

$$\Omega = \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / V(\tilde{q}) \leq V(\tilde{q}_0)\} \quad (4.41)$$

est le plus grand ensemble invariant par rapport au système (4.32). D'après le *théorème de LaSalle*, la solution de (4.32) converge vers le plus grand ensemble invariant de

$$\begin{aligned} E &= \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \dot{V} = 0\} \\ &= \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \|L(\tilde{q}_x - k_x)\|^2 = \|L(\tilde{q}_y - k_y)\|^2 = 0\} \\ &= \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \mathcal{L}(\tilde{q} - k) = 0\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

■

**Lemme 15** *On suppose que le graphe direct  $G$  admet un "unit depth with one sink" alors la matrice Laplacienne  $L(G)$  associée à  $G$  admet zéro comme valeur propre simple et son vecteur propre associé est  $1_n$ , et toutes les autres valeurs propres sont positives. □*

**Preuve** Le graphe direct  $G$  admet un "one sink" dans le  $j^{\text{ème}}$  neoud alors chaque entree de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $L$  est zéro. En d'autre terme  $G$  admet un "unit depth" alors la matrice Laplacienne  $L$  prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -1 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Le polynôme caractéristique est comme suit :

$$R(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)^{n-1}$$

alors 0 est une valeur propre simple. Le vecteur propre  $X = (X_1, \dots, X_n)$  associer à 0 vérifie l'équation suivante :

$$LX = 0$$

ce qui implique

$$\begin{cases} X_1 = X_j \\ \vdots \\ X_n = X_j \end{cases}$$

alors  $1_n$  est le vecteur propre associé à 0

■

**Preuve** Pour l'équation

$$\dot{\tilde{q}} = \mathfrak{L}(\tilde{q} - k) \quad (4.44)$$

D'après la *Proposition 8*, les solutions de l'équation précédente convergent vers le plus grand ensemble invariant de

$$E = \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \dot{V} = 0\} \quad (4.45)$$

où

$$V = (\tilde{q} - k)^t P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k) \quad (4.46)$$

Puisque

$$\frac{\partial V}{\partial \tilde{q}} = P(G) \otimes I_2(\tilde{q} - k) \quad (4.47)$$

alors d'après le *théorème 17* la loi de commande (4.3) fait converger le système vers :

$$\begin{aligned} E &= \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \dot{V} = 0\} \\ &= \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \mathfrak{L}(\tilde{q} - k) = 0\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Quand  $\mathfrak{L}(\tilde{q} - k) = 0$  alors  $L(\tilde{q}_x - k_x) = 0$  et  $L(\tilde{q}_y - k_y) = 0$ . D'après le *lemme 15*, le fait que le graphe de  $L$  admet un "unit depth with one sink" implique que  $L$  admet zéro une valeur propre simple et  $1_n$  comme vecteur propre associé. cela garanti que  $(q_x - k_x)$  et  $(q_y - k_y)$  sont des vecteurs propre de  $L$  associé à 0 ce qui implique qu'ils sont engendré par  $\{1_n\}$ . Donc

$$\tilde{q}_i = Cst \quad \forall i \quad \text{alors} \quad q_i - q_j = k_{ij} \quad \forall j \in N_i \quad (4.49)$$

d'où  $q = [q_1, \dots, q_n, q_r]$  converge vers la configuration désirée.

D'autre part en injectant la loi de commande (4.31) dans notre équation en obtient

$$\dot{q}_r = 0$$

alors

$$q_r = q_{r0}$$

et

$$\dot{q}_i = - \begin{pmatrix} x_i - x_r - (k_{x_i} - k_{x_r}) \\ y_i - y_r - (k_{y_i} - k_{y_r}) \end{pmatrix} - \nu_i \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{x_i} \\ \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_{y_i} \end{pmatrix}^\perp$$

d'après le *théorème 11*  $q_i$  évite  $O_{q_i}$ . Ce qu'il fallait démontrer. ■

### 4.4.2 Analyse des résultats

Dans cette section on a simulé sous Matlab la navigation de six agents communiquant avec la cible considérée comme le 7<sup>ème</sup> agent du groupe. Dans les figures 4.5 et 4.6, on constate que les différents agents évitent du bon côté à la rencontre d'un obstacle. Cela est confirmé par la simulation donnée la figure 4.4 qui présente les différentes distances entre les agents et le centre de l'obstacle au cours du temps. La ligne en rouge présente la valeur minimale que peut atteindre la distance entre un agent de la formation et le centre de l'obstacle. La commande donnée par le théorème 19 assure, en plus de l'évitement d'obstacle, la convergence vers une position et une configuration désirées. On peut voir cela dans la figure 4.5 et 4.6, où on a simulé deux exemples de configurations désirées respectivement un hexagonale et une ligne.

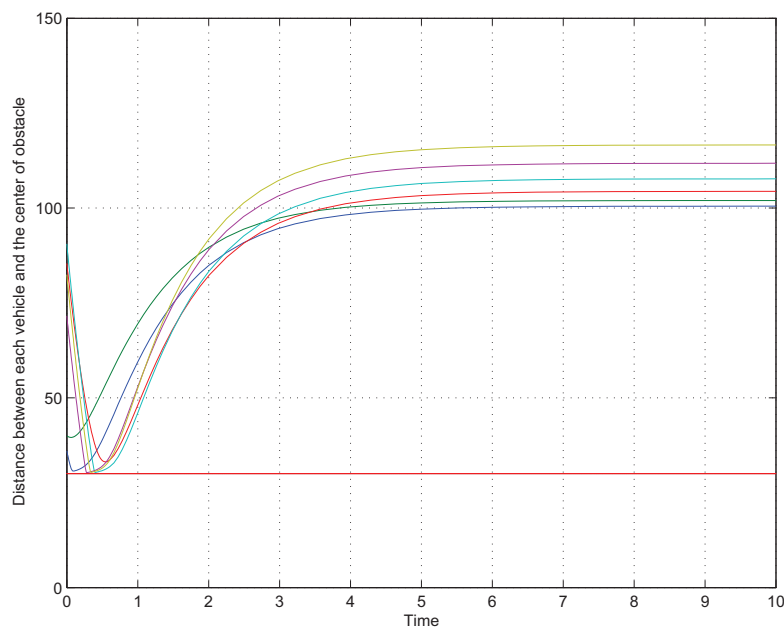


FIGURE 4.4 – Distance entre les différents véhicules et le centre du cercle qui entoure l'obstacle au cours du temps



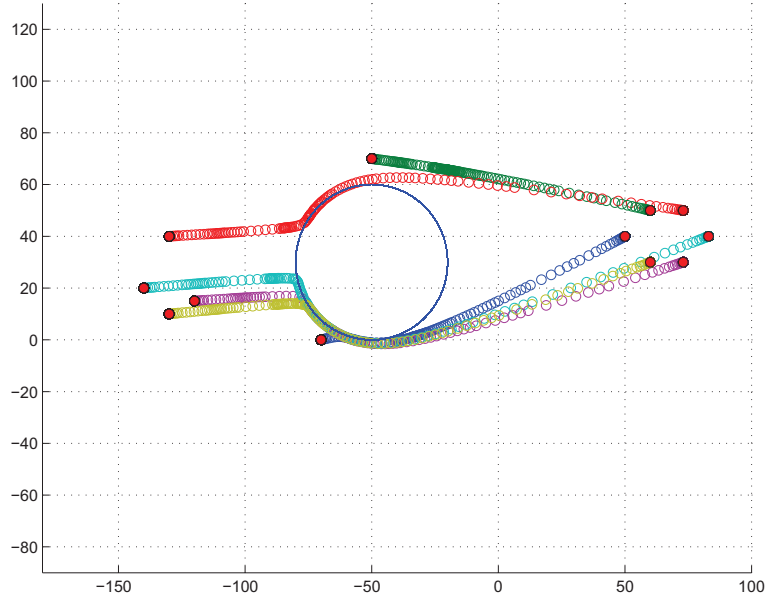


FIGURE 4.5 – Simulation de navigation de la formation avec communications vers une configuration hexagonale

### 4.4.3 Navigation hiérarchique

Le contrôle d'une formation consiste à trouver un contrôle distribué  $u$ , ce qui stabilise chaque agent tout en atteignant l'objectif et éviter l'obstacle. Par ailleurs, en convergeant vers la cible, la formation doit respecter une configuration prédéfinie autour de l'objectif. La configuration finale dépend de l'application. Théoriquement, chaque commande d'un agent mobile devrait être subdivisée en deux parties telles que la formation permet d'éviter un obstacle existant dans son environnement et la capture de la cible. Nous pouvons résumer ce travail dans le théorème suivant.

**Théorème 20** *Soit  $G(\eta, \epsilon)$  un graph orienté, où  $\eta = \{1, \dots, n, n+1\}$ . On considère  $L = (l_{ij})_{ij}$  la matrice Laplacienne associée à  $G$ , qui admet un arbre couvrant orienté telque  $l_{(n+1)r} = 0 \forall r \in \eta$ , et  $\mathfrak{L}$  la quantité  $L \otimes I_2$ . Soit  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n, 0)$  tel que  $k_{ij} = k_i - k_j$  est la configuration désirée de*

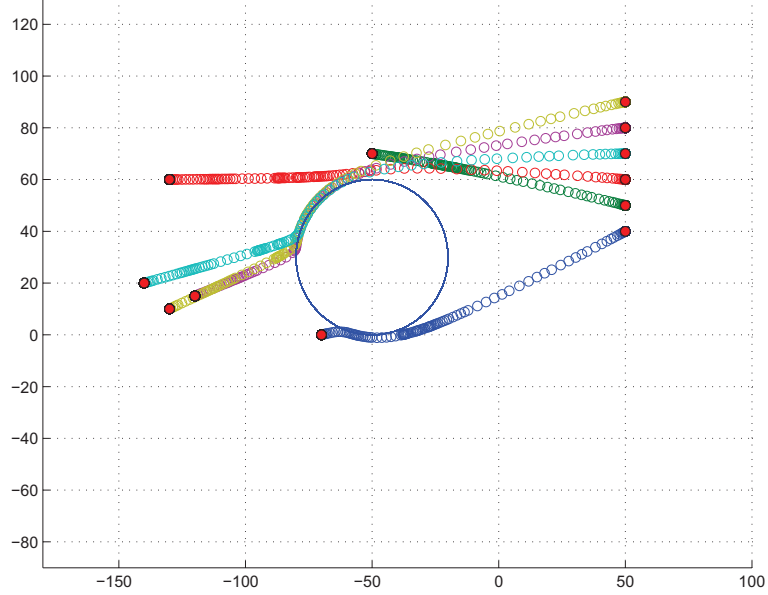


FIGURE 4.6 – Simulation de navigation de la formation avec communications vers une configuration linéaire

$q_i - q_j$ . Les commandes suivantes :

$$u_i = - \sum_{j=1}^n l_{ij}(q_i - q_j - k_{ij}) - l_{i(n+1)}(q_i - C - k_i) - h_i(q_i - k_i)^\perp \quad (4.50)$$

$$\text{où } h_i = \frac{\text{sign}([y_{i0} - D(x_{i0})][C_x - O_x])}{\|q_i - O_{q_i}\|} \text{ and } h_{n+1} = 0 \quad (4.51)$$

font converger les états de (4.6) vers la configuration d'équilibre au voisinage de la cible  $C$  tout en évitant  $O_{q_i}$ .  $\square$

**Preuve** On considère  $\tilde{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1} = C] = [q, C] \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$  le vecteur qui contient les composantes de la position de chaque véhicule et la cible  $C$ .

On suppose que le système suivant

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{u} \quad (4.52)$$

Pour  $\tilde{u} = -\mathfrak{L}(\tilde{q} - k)$  on considère la fonction de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}\|\tilde{q} - k\|^2$ , sa différentiel par rapport au temps  $t$  est

$$\dot{V} = -(\tilde{q} - k)^t \mathfrak{L}(\tilde{q} - k) = -(\tilde{q} - k)^t \frac{(\mathfrak{L}^t + \mathfrak{L})}{2} (\tilde{q} - k) \leq -\|\tilde{q} - k\|^2 \min_{i \in \eta} \lambda_i$$

où  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $\frac{L + L^t}{2}$  d'après le théorème de *Courant - Fisher*.

On sait que  $\frac{L + L^t}{2}$  et  $L$  ont les mêmes valeurs propres qui vérifient la propriété suivante :

$$|\lambda_i - l_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} |l_{ij}|$$

alors

$$0 \leq \lambda_i \leq 2l_{ii}$$

car  $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} |l_{ij}|$ .

Par conséquent  $\dot{V} \leq 0$ .

D'autre part si on injecte la loi de contrôle (4.50) dans le système (4.52) on obtient :

$$\tilde{u} = -\mathfrak{L}(\tilde{q} - k) - \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & 0 & h_{n+1} \end{pmatrix} \otimes I_2(\tilde{q} - k)^\perp \quad (4.53)$$

où  $\frac{\partial V}{\partial \tilde{q}} = \tilde{q} - k$  alors le théorème 17 affirme que les solutions des deux systèmes (4.52) et (4.2,4.50,4.51) convergent vers  $M$  le plus grand ensemble invariant de

$$E = \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \dot{V} = 0\} = \{\tilde{q} \in \mathbb{R}^{2(n+1)} / \mathfrak{L}(\tilde{q} - k) = 0\} \quad (4.54)$$

quand  $\mathfrak{L}(\tilde{q} - k) = 0$  alors  $L(\tilde{q}_x - k_x) = 0$  et  $L(\tilde{q}_y - k_y) = 0$ .

$L$  admet un arbre orienté alors d'après le *lemme* de [13] la matrice  $L$  a un zero comme valeur propre simple associé au vecteur propre  $1_{n+1}$  et tous les autres valeurs propres sont à parties réelle positive. Ce qui garanti que

$(\tilde{q}_x - k_x)$  et  $(\tilde{q}_y - k_y)$  sont des vecteurs propres de  $L$  qui est engendré par  $\{1_n\}$ . Alors

$$\tilde{q}_i - k = Cst \quad \forall i \quad \text{alors} \quad q_i - q_j = k_{ij} \quad \forall j \in \mathcal{N}_i \quad (4.55)$$

ce qui implique que  $\tilde{q} = [q_1, \dots, q_n, q_{n+1} = C]$  converge vers la configuration désirée.

D'autre part, si on injecte la commande (4.50,4.51) dans le système (4.2), on obtient

$$\dot{q}_{n+1} = 0 \quad \text{then} \quad q_{n+1} = C$$

alors la formation converge vers un ensemble voisin de la cible  $C$ . ■

## 4.5 Analyse des résultats

Cette section regroupe les résultats de simulations. Notre but est de mettre en œuvre les lois de contrôles présentés dans ce chapitre.

Les simulations effectuées, présentent des scénarios élémentaires permettant d'observer les différents comportements du système, à savoir convergence et évitement de l'obstacle.

On considère un graphe  $G(\varepsilon, \eta)$  de quatre nœuds/véhicules indexés par  $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4\}$ . Les véhicules bleu foncé, vert, rouge et bleu ciel sont respectivement indexés par 1, 2, 3 et 4. La matrice Adjacente associée à  $G$  est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Laplacienne associée est

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la simulation obtenue représentée par la figure 4.7, montre bien que les agents se suivent selon la matrice de connexion ou Adjacente donnée. On voit bien aussi que les trajectoires obtenues après injection de la commande stabilisante répulsive donnée par le théorème 20 présentent un comportement semblable à celui d'un fluide en présence d'obstacle. Finalement les véhicules convergent vers une position et configuration désirés. Pour tester la fiabilité du contrôle construit pour une navigation sans obstacles, on a fait éloigner les obstacles des véhicules. Le résultat obtenu par la figure 4.8 montre que la fonction  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ , a un effet négligeable, en absence d'obstacle.

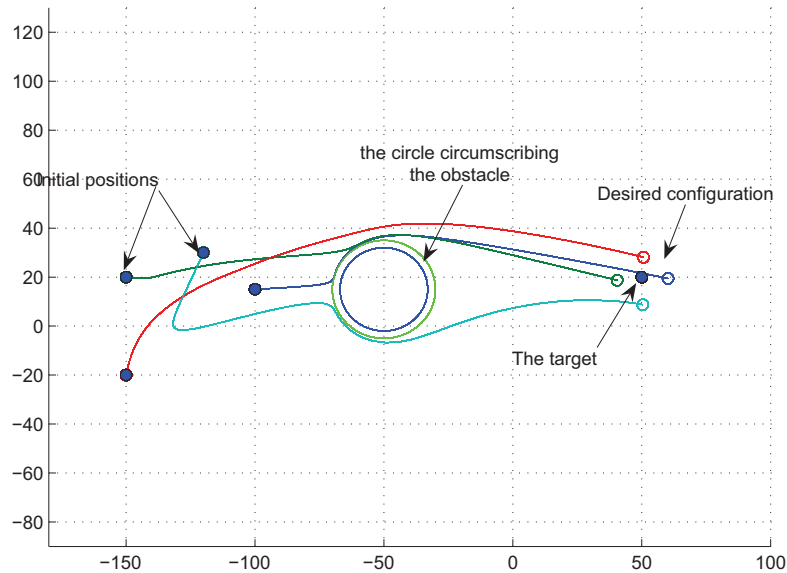


FIGURE 4.7 – Navigation de 4 agent en présence d'un obstacle

## 4.6 Conclusion

Pour une formation composée de plusieurs agents en mouvement, une nouvelle méthodologie de commande a été développée. Dans ce chapitre, on a donné un résultat sur l'extension de la commande qui fait converger

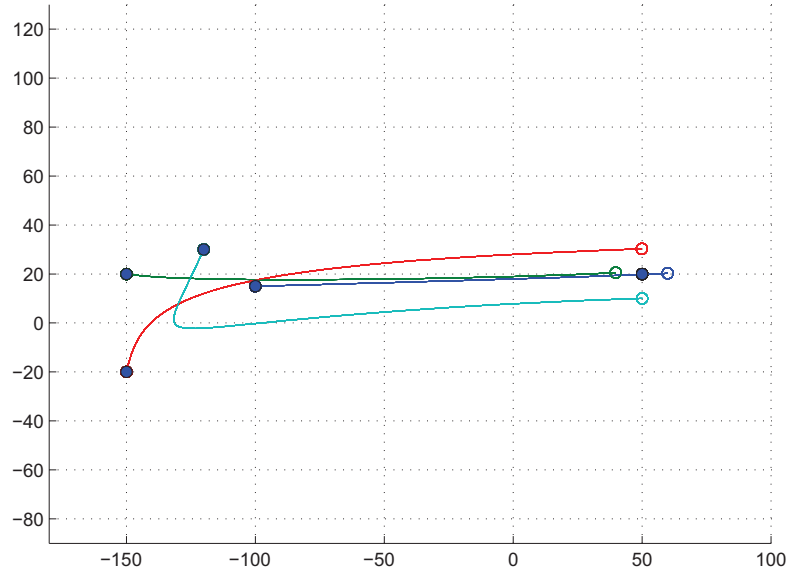


FIGURE 4.8 – Navigation de 4 agent sans présence d'obstacle

les éléments d'une formation vers un ensemble désiré. La commande additive considéré comporte des fonctions scalaires  $\nu_i$ , qui sont au nombre d'agents du groupe. Cette partie permet aux agents d'éviter un obstacle et les collisions entre eux. On a considéré plusieurs stratégies de navigation. La première est la navigation décentralisée. On a donné une commande qui fait converger les agents du groupe vers un cercle attractif entourant la cible. Cette commande stabilisante a été étendue en utilisant l'approche proposé dans ce chapitre, pour que chaque agent évite l'obstacle tout en convergent vers un voisinage de la cible. La deuxième stratégie qu'on a considérée, est d'établir une connexion/communication entre les agents. Cette connexion a été modélisée en utilisant la théorie des graphes. On a pris en considérations deux types de communications : communication avec le leader (qui est la cible à atteindre) et communication hiérarchique. En plus de la communication, le contrôle construit fait converger les agents de la formation vers une cible donnée tout en établissant une configuration géométrique désirée. En établissant notre approche de commande répulsive,

on a pu, en plus de la convergence, faire éviter tout le groupe un obstacle. Les commandes conçues dans ce chapitre sont continues sur leur espace de navigation.

# Navigation d'une formation de véhicules non-holonômes

---

## 5.1 Introduction

La stabilisation simultanée de la position et l'orientation implique la commande de l'évolution de l'état complet d'un agent. La commande d'un système multi-agents, en particulier le système de véhicules non holonomes, est un domaine de recherche actif parce que les véhicules sur roues sont aujourd'hui le principal mode de transport personnel. Je cite les chariots de manutention dans les usines [90], les convois de véhicules sur les autoroutes, l'optimisation sous forme d'agent intelligent des systèmes de transport urbain [89] [78]. Les applications nécessitent la coordination de plusieurs véhicules et ont donné lieu des nouveaux problèmes en matière de la commande [79] [13] [5]. Une autre raison plus technique est que les équations qui régissent des véhicules en mouvement non holonomes sont fortement non linéaires et sont d'un intérêt théorique dans le domaine de la théorie de commande non linéaire. En revanche, et afin de résoudre le problème de la stabilité, l'étude de la commande d'une formation de robots est inspirée de l'évolution des essaims dans la nature. Ainsi, dès la croissance de l'industrie et des objectifs militaires, l'idée d'utiliser un groupe de véhicules plus petits au lieu d'un grand, de point de vue taille, a été manifestée. Par rapport à un seul robot, les robots évoluant en équipes sont une alternative à l'exécution des tâches complexes et qui peuvent s'avérer plus économique en dépense énergétique. Ils sont, en outre, capable de réaliser une mission plus efficacement. A partir des travaux de [83] et [84], plusieurs cadres théoriques ont été proposés pour analyser le mouvement collectif d'un sys-



tème multi-agents. Un but commun à ces approches est de formuler une commande décentralisé pour faire converger le groupe d'agents vers une configuration d'équilibre pré-spécifié. Même si une analyse rigoureuse de la stabilité des systèmes multi-agents non holonomes est généralement une tâche très difficile, Néanmoins, des résultats théoriques ont été obtenus dans le cas des modèles linéaires. L'analyse de la stabilité devient plus difficile lorsque les contraintes cinématiques sont prises en compte, comme dans le cas des véhicules à roues. On cite, l'analyse de stabilité d'un mouvement circulaire collectif pour un système à véhicules non holonomes en groupe dans [85], l'étude au sein d'équipe d'agents non holonomes collaborative dans [86], la structure virtuelle pour la commande d'une formation d'un système multi-véhicules non holonomes dans [87, 67], la formation basée sur des groupes non holonomes de robot mobile, proposée par [88] et la stratégie de commande d'un groupe des unicycles mais ne comprenant pas l'évitement d'obstacles dans [2].

Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle méthodologie pour réussir une formation des unicycles non holonomes. La convergence de la formation par rapport aux objectifs utilise le principe d'invariance de LaSalle. Ce principe permettrait aussi de caractériser le domaine de stabilité. En outre, une entrée de commande de régulation est proposée de telle sorte que la trajectoire de chaque agent (en boucle fermée) peut être ajustée pour éviter des obstacles et sans une planification de mouvement.

## **5.2 Contournement d'une cible par une formation de véhicules terrestres non holonomes**

Pour résoudre le premier problème l'idée est de faire déplacer les véhicules vers un cercle qui entoure la cible. La loi de contrôle qu'on va construire n'est pas basée sur le principe de stabilisation car chaque véhicule va converger vers un point du cercle qui change selon la condition

initiale de chaque véhicule.

Pour cela on va utiliser le théorème du Principe d'Invariance de LaSalle. Ce théorème nous assure que si on est dans un ensemble  $\Omega$  invariant par rapport à notre système cinématique relatif à la formation de véhicules et s'il existe une fonction  $V$  continûment différentiable tel que sa dérivée par rapport à  $t$  est négative pour toute solution de notre système dans  $\Omega$ , alors toute solution qui a pour condition initiale  $q_0$  dans  $\Omega$  converge vers le plus grand ensemble invariant de

$$E = \{q \in \Omega / \dot{V}(x) = 0\}$$

La figure 5.1 suivante explique le théorème de LaSalle.

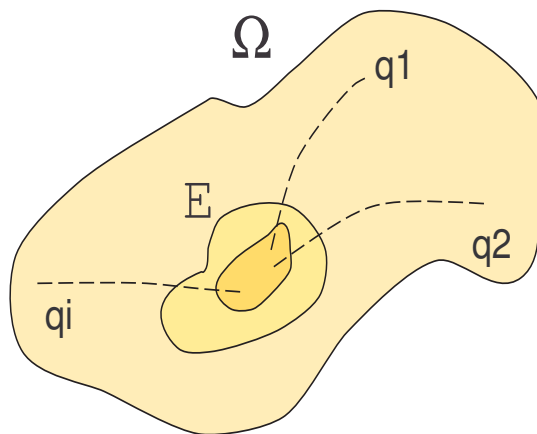


FIGURE 5.1 – Figure explicative du théorème de LaSalle

### 5.2.1 Position du problème

Soient une cible de position  $A(a, b)$  dans un espace de dimension 2, on définit un cercle centré en  $A$  et de rayon  $l$  assez grand pour que tous les véhicules puissent se positionner dessus et peut englober la cible.

Dans ce qui suit on donne une description mathématique de notre formation de véhicules qui va entourer la cible.

### 5.2.1.1 Description du système

Notre système est un ensemble de  $n$  véhicules à deux roues comme le montre la figure 5.2.

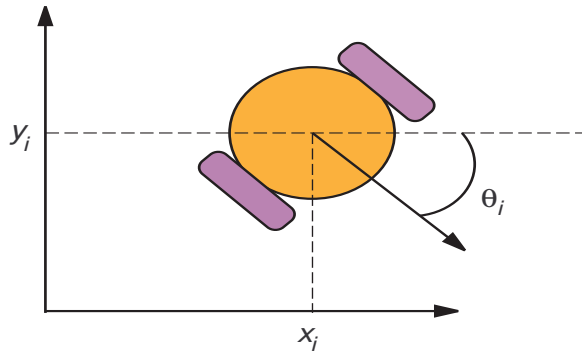


FIGURE 5.2 – Position et orientation de la  $i$ ème véhicule

qui circulent dans un environnement lisse sans obstacles. Chacun d'eux est caractérisé par sa position  $q_i = (x_i, y_i)$  et son angle d'orientation  $\theta_i$ ,  $i$  représente la  $i$ ème véhicule.

On rappelle la cinématique du  $i$ ème véhicule comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i = u_i \sin \theta_i \\ \dot{\theta}_i = w_i \end{cases}, I = \{1..N\} \quad (5.1)$$

Comme on peut le distinguer dans ce système il ne suffit pas de faire converger la position de chaque véhicule à un cercle qui entoure la cible mais aussi il faut l'orienter vers cette dernière pour avoir une bonne allure de la trajectoire. Dans le cas contraire on va trouver une trajectoire sous forme spirale. Pour cela on considère l'équation d'erreur de l'orientation suivante :

$$e_i = \theta_i - \theta_{id} \quad (5.2)$$

## 5.2. Contournement d'une cible par une formation de véhicules terrestres non holonomes 103

avec  $\theta_{id} = \arctan\left(\frac{y_i - b}{x_i - a}\right)$  est l'angle compris entre l'axe horizontal et le vecteur  $\vec{q_i A}$  comme on le montre dans la figure 5.3

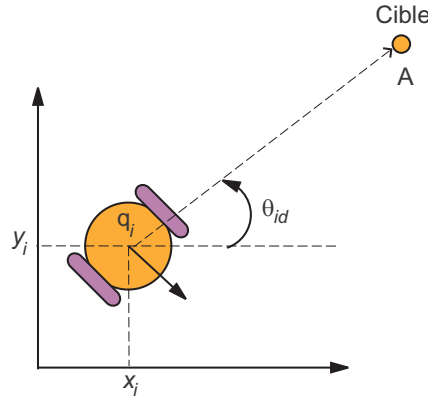


FIGURE 5.3 – l'angle compris entre l'axe horizontal et le vecteur  $q_i A$

Notre système devient

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i = u_i \sin \theta_i \\ \dot{e}_i = w_i - \dot{\theta}_{id} \end{cases}, I = \{1..N\} \quad (5.3)$$

Si on arrive à trouver une loi de contrôle qui fait tendre  $e_i$  vers  $\pi$  et la trajectoire de ce derniers vers un cercle qui englobe la cible alors le véhicule va se déplacer en se dirigeant et s'approchant jusqu'à une distance bien déterminée de la cible. Ca sera le but de la section suivante.

### 5.2.2 Analyse de la commande

Avant tout on définit quelques notations. Soient  $q_i \in \mathbb{R}^2$  la position du  $i^{\text{ème}}$  véhicule et  $e_i \in \mathbb{R}$  l'équation d'erreur de l'orientation. On considère les notations suivantes :  $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  et  $e = (e_1, e_2, \dots, e_N)$ .

Le principal résultat de cette partie est proposé par le théorème suivant et qui sera analysé par la suite.

**Théorème 21** *Soit  $\Omega$  l'ensemble compact suivant*

$$\Omega = \{(q, e) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^N / l \leq \|q_i - A\| \leq k, |e_i| \leq c\}$$

*On considère  $N$  unicycle avec la cinématique (5.3)*

*Alors*

1.  $\Omega$  est invariant par rapport à (5.3)
2. La loi de contrôle suivante :

$$\begin{aligned} u_i &= -(\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos e_i \\ w_i &= -e_i + \dot{\theta}_{id} \end{aligned} \quad (5.4)$$

*ramène toute solution ayant comme condition initiale dans  $\Omega$  à*

$$M = \{(q, e) \in \Omega / \|q_i - A\| = l, e = 0_{\mathbb{R}^N}\}$$

*avec  $0_{\mathbb{R}^N} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$*

□

**Remarque 1** *Le théorème ci dessus assure deux résultats :*

- $\|q_i - A\| \rightarrow l$  quand  $t \rightarrow \infty$ , c'est à dire chaque  $q_i$  converge vers un point du cercle centré en  $A$  et de rayon  $l$ , et que  $e_i \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  c'est à dire  $\|\theta_i - \theta_{id}\| \rightarrow 0$  ce qui implique que chaque véhicule s'oriente correctement au cours du temps vers l'objectif.
- toute solution de (5.3) reste toujours dans l'anneau  $\Omega$ , c'est à dire, elle ne passe pas sur la cible quand elle converge vers un point du "cercle attractif" qui entoure cette dernière.

La démonstration du théorème se base sur le *principe d'invariance de La-Salle*, pour cela il est nécessaire d'énoncer et de démontrer les trois lemmes suivants :

**Lemme 16** *Soit*

$$\Omega = \{(q, e) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^N / l \leq \|q_i - A\| \leq k, |e_i| \leq c\}$$

## 5.2. Contournement d'une cible par une formation de véhicules terrestres non holonomes 105

Toute solution de (5.3) de condition initial dans  $\Omega$  reste au cours du temps dans  $\Omega$ , c'est à dire que  $\Omega$  est invariant par rapport au système cinématique non-holonyme (5.3).

□

### Preuve

On considère  $(q_0, e_0) \in \Omega$  et  $S(q_i) = \|q_i - A\|$ , sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{S}(q_i) &= -\frac{\langle \dot{q}_i, A - q_i \rangle}{S} \\ &= -\frac{u_i((a - x_i) \cos(\theta_i) + (b - y_i) \sin(\theta_i))}{S} \\ &= -\frac{u_i \langle A - q_i, \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \rangle}{S} \end{aligned}$$

comme  $\theta_{id}$  est l'angle que fait  $\overrightarrow{q_i A}$  avec l'horizontal alors l'angle entre les deux vecteurs du produit scalaire précédent n'est que  $e_i$ , d'où on a

$$\begin{aligned} \dot{S}(q_i) &= -\frac{u_i S \cos e_i}{S} \\ &= -u_i \cos e_i \end{aligned}$$

en injectant la loi de contrôle donnée par le théorème 21 on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{S}(q_i) &= -(\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos^2 e_i \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{S}(q_i)}{S(q_i)^2 - l^2} &= -\cos^2 e_i \end{aligned} \tag{5.5}$$

en intégrant cette équation entre  $t$  et  $t_0$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{S_0}^S \frac{dh}{h^2 - l^2} &= \int_{t_0}^t -\cos^2 e_i ds \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{S-l}{S+l}\right) &= \ln\left(\frac{S_0-l}{S_0+l}\right) + \int_{t_0}^t -2l \cos^2 e_i ds \\ \Leftrightarrow \frac{S-l}{S+l} &= \frac{S_0-l}{S_0+l} \exp\left(\int_{t_0}^t -2l \cos^2 e_i ds\right) \end{aligned}$$

avec  $S = S(q_i)$  et  $S_0 = S(q_{i0})$

et comme  $(q_0, e_0) \in \Omega$  alors  $S_0 - l \geq 0$  d'où  $S(q_i) \geq l$  ce qui implique que

$$\|q_i - A\| \geq l$$

D'autre part  $S(q_i) \geq l$  implique que

$$\dot{S}(q_i) \leq 0$$

d'où  $S$  est décroissante par rapport au temps alors

$$\|q_i - A\| \leq \|q_{i0} - A\| \leq k$$

Cela nous ramène à écrire

$$l \leq \|q_i - A\| \leq k$$

D'autre part en injectant notre loi de contrôle  $w_i$  dans l'équation d'erreur de l'orientation, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= -e_i \\ \Leftrightarrow e_i &= e_{i0} \exp(t_0 - t) \quad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

d'où  $|e_i| \leq |e_{i0}| \leq c$ .

Finalement  $(q, e) \in \Omega$ . Alors on peut conclure que  $\Omega$  est invariant par rapport à (5.3). ■

On passe maintenant à l'énoncé et la preuve du deuxième lemme

**Lemme 17** *On suppose que  $(q, e)$  est solution (5.3) de condition initiale  $(q_0, e_0) \in \Omega$ . On considère la fonction candidate suivante :*

$$V(q, e) = \sum_{i=1}^n \|q_i - A\| + \frac{1}{2} e_i^2$$

la différentielle de  $V(q, e)$  par rapport au temps  $t$  est négative sur  $\Omega$

□

**Preuve**

La dérivée par rapport à  $t$  de  $V(q, e)$  est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, e) &= \sum_{i=1}^n \frac{\langle \dot{q}_i, q_i - A \rangle}{\|q_i - A\|} + (w_i + \dot{\theta}_{id})e_i \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \cos e + (w_i + \dot{\theta}_{id})e_i \end{aligned}$$

en remplaçant  $u_i$  et  $w_i$  par leurs expressions respectives on obtient :

$$\dot{V}(q, e) = - \sum_{i=1}^n (\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos^2 e_i + e_i^2 \leq 0$$

d'où le résultat. ■

**Lemme 18** *On suppose que  $(q, e)$  est solution de (5.3). L'ensemble*

$$M = \{(q, e) \in \Omega / \|q_i - A\| = l, e = 0_{\mathbb{R}^N}\}$$

*est un ensemble invariant par rapport à (5.3)*

□

**Preuve**

Soient  $(q_0, e_0) \in M$  et  $H(q_i) = S(q_i) - l$  avec  $S(q_i)$  une fonction définie dans lemme16.

La dérivée de  $H(q_i)$  par rapport à  $t$  est donnée par :

$$\dot{H}(q_i) = \dot{S}(q_i) = -(\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos^2 e_i \leq 0$$

d'où  $H$  est décroissante ce qui implique que

$$0 \leq \|q_i - A\| - l \leq \|q_{i0} - A\| - l = 0$$

alors

$$\|q_i - A\| - l = 0$$

D'autre part on

$$e_i = e_{i0} \exp(t_0 - t) \quad \forall t \geq t_0$$



comme  $(q_0, e_0) \in M$  alors  $e_{i0} = 0$  d'où

$$|e_i| = 0$$

Finalement on conclue que si  $(q_0, e_0) \in M$  alors  $(q, e) \in M$  ce qui implique que  $M$  est un ensemble invariant par rapport au système différentiel (5.3). ■

L'énoncé de ces trois lemmes ainsi que leurs preuves vont servir à la démonstration du théorème 21.

**Preuve( du Théorème 21)**

D'après les Lemme 16 et 17, le Principe d'Invariance de LaSalle nous affirme que toute solution de (5.3) qui démarre de  $\Omega$  converge vers le plus grand ensemble invariant de  $E = \{(q, e) \in \Omega / \dot{V} = 0\}$ .

Or on constate que, dans notre cas,  $E$  n'est autre que :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{array}{l} (\| q_i - A \| - l = 0) \vee \\ (\cos e_i = 0) \end{array} \right\} \wedge (e_i = 0) \\ &= (\| q_i - A \| - l = 0) \wedge (e_i = 0) = M \end{aligned}$$

D'après le Lemme 18 on conclue que  $M$  est le plus grand ensemble invariant de  $E$  par rapport à notre système d'équations différentielles dans  $E$ . ■

L'utilisation du principe d'invariance de LaSalle assure la convergence de chaque entité de la formation vers un point du cercle entourant la cible, tout en s'orientant vers l'objectif. La méthode ne nécessite pas la planification de mouvement, ni même la construction des positions de convergence de chaque véhicule du groupe. Par conséquent, la convergence est assurée seulement par la commande. Aussi la loi de commande proposée fait que la trajectoire soit contenue dans un anneau centré en  $A$ , qui correspond à la position de la cible. Ceci assure la minimisation de la distance à parcourir, de plus, une fois la convergence est atteinte, les véhicules ne rentrent pas en collision avec la cible.

Il reste maintenant à élaborer une commande répulsive stabilisante qui assure la convergence de la formation vers la configuration désirée ainsi que l'évitement d'un obstacle dans le plan. Dans la section suivante, on propose une extension de l'expression de la commande donnée par le théorème 21.

### 5.3 Extension de la commande à l'évitement d'obstacle

Dans le cadre de commande d'une formation de véhicules non-holonomes, peu de travaux de recherche se sont investis pour construire une commande qui assure simultanément la convergence et l'évitement des obstacles. Pour les systèmes non holonomes et dans le cas d'un mono véhicule évoluant en 2D, récemment des résultats ont été élaborés par Rifford [19] traduisant l'existence un retour d'état stabilisant régulier. Notre objectif consiste à trouver une méthode constructive d'une commande répulsive stabilisante et continue pour un système multi-véhicules opérant en groupe et dont la cinématique est non holonome.

Afin d'étendre les résultats sur la commande répulsive stabilisante obtenus aux chapitres 4 et 5, nous allons prendre en compte l'orientation de chaque véhicule (équation 5.1). A présent, rappelons le système qui intègre l'erreur en orientation :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = u_i \cos \theta_i \\ \dot{y}_i = u_i \sin \theta_i \\ \dot{e}_i = w_i - \dot{\theta}_{id} \end{cases}, i = \{1..N\} \quad (5.6)$$

où

$$\theta_{id} = \arctan(y_i - b, x_i - a)$$

Un premier résultat sur l'extension de la commande attractive est donné par le théorème suivant :

**Théorème 22** *Soit  $\Omega$  l'ensemble compact suivant*

$$\Omega = \{(q, e) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^N / V_i = \frac{1}{2}[\|q_i - A\|^2 + e_i^2] \leq \frac{1}{2}k^2, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$

On considère  $N$  unicycles selon la cinématique (5.3).

Alors

1.  $\Gamma = \{(q, e) \in \Omega \times \mathbb{R}^N / l \leq \|q_i - A\| \leq k, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$  est invariant par rapport à (5.3)
2. La loi de commande suivante :

$$\begin{aligned} u_i &= (1 - \nu_i(q_i)e_i^2) \frac{(\|q_i - A\|^2 - l^2)}{\|q_i - A\|} \cos e_i \\ w_i &= -e_i + \dot{\theta}_{id} - \nu_i(q_i)e_i(\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos^2 e_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

pour toute fonction scalaire  $\nu_i$ , qui n'est pas en fonction de  $\|q_i - A\|^2 - l^2$ , et tel que  $\int_{t_0}^t -(1 - \nu_i) \cos^2 e_i ds$  est convergente, ramène toute solution qui a pour condition initiale dans  $\Omega$  à

$$M = \{(q, e) \in \Omega / \|q_i - A\| = l, e = 0_{\mathbb{R}^N}\}$$

avec  $0_{\mathbb{R}^N} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ .

□

### Preuve

Visiblement  $\Omega$  est un compact, car  $\Omega = V_i^{-1}([0, \frac{1}{2}k^2])$  et  $V_i$  est continue sur  $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^N$ .

On va montrer tout d'abord que  $\Omega$  est invariant.

On considère  $(q_0, e_0) \in \Omega$  et  $V$  donnée par le théorème qui est définie par

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\|q_i - A\|^2 + e_i^2] = \sum_{i=1}^N V_i(q_i, e_i)$$

Sa dérivée par rapport à  $t$  est :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N -u_i \|q_i - A\| \cos e_i + (w - \dot{\theta}_d) e_i \\ &= \sum_{i=1}^N -(1 - \nu_i(q_i)e_i^2)(\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos^2 e_i - e_i^2 - \nu_i(q_i)e_i^2(\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos^2 e_i \\ &= \sum_{i=1}^N -(\|q_i - A\|^2 - l^2) \cos e_i^2 - e_i^2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Montrons que  $(\|q_i - A\|^2 - l^2) \geq 0$ .

Soit

$$S = \|q_i - A\|^2 - l^2$$

Sa dérivée par rapport à  $t$  est

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -u_i \|q_i - A\| \cos e \\ &= -(1 - \nu_i e_i^2) S \cos^2 e_i \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si  $\nu_i$  n'est pas en fonction de  $S$  alors notre système différentielle est à variable séparable, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{S}}{S} &= -(1 - \nu_i e_i^2) \cos^2 e_i \\ \text{alors } S &= S_0 \exp\left(\int_{t_0}^t -(1 - \nu_i e_i^2) \cos^2 e_i ds\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

bien évidemment il faut que  $\int_{t_0}^t -(1 - \nu_i e_i^2) \cos^2 e_i ds$  soit finie.

Ce la nous ramène à conclure que la dérivée de  $V_i$  par rapport à  $t$  car  $(q_0, e_0) \in \Omega$ . Alors

$$V_i(q) \leq V_i(q_0) \leq \frac{1}{2}k^2$$

pour  $\forall (q_0, e_0) \in \Omega$ .

Montrons que  $\Gamma \subset \Omega$  pour notre système.

Soit  $(q_0, e_0) \in \Gamma$ . D'après ce qui précède on a  $V_i(q) = \frac{1}{2}[\|q_i - A\|^2 + e_i^2] \leq \frac{1}{2}k^2$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  et  $\forall (q_0, e_0) \in \Gamma \subset \Omega$ , d'où  $\frac{1}{2}\|q_i - A\|^2 \leq \frac{1}{2}k^2$ , alors

$$\|q_i - A\| \leq k$$

On a aussi, comme on l'a montré précédemment,  $S = \|q_i - A\|^2 - l^2$  est positive pour tout  $(q_0, e_0) \in \Gamma \subset \Omega$ , d'où

$$\|q_i - A\| \geq l$$

donc  $\Gamma$  est invariant. Montrons que toute les solutions se ramène à

$$M = \{(q, e) \in \Omega / \|q_i - A\| = l, e = 0_{\mathbb{R}^N}\}$$

On applique le théorème de LaSalle.

On a  $\Omega$  est compacte et invariant par rapport à notre système. La dérivée de  $V$  considérée précédemment est négative par rapport au temps sur  $\Omega$ . Alors toute solution qui commence dans  $\Omega$  approche le plus grand ensemble invariant de  $E = \{(q, e) \in \Omega / \dot{V} = 0\} = M$

## 5.4 Simulations

Pour confirmer nos résultats on a réalisé dans cette section plusieurs essais numériques avec le programme de Matlab. On choisi un nombre fini de robots mobiles non-holonomes. Rappelons que la stabilité de la formation dans ce travail, est subdivisée en trois étapes. Dans la première, on a été appelé à identifier un ou plusieurs objectif (s) et de créer un ensemble attractif autour de chaque cible. Dans le second, on a identifié la position et l'orientation initial de chaque entité de la formation. Dans la dernière étape, on applique à la formation, le contrôle décentralisé développé dans le théorème 21. En conséquence, la formation doit atteindre chaque cible avec la bonne direction, et cela sans planification du mouvement. On constate que la convergence vers l'orientation désirée se fait au même temps que la convergence vers le cercle entourant l'objectif. Les figures 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 démontrent l'efficacité de notre stratégie de contrôle. La figure 5.4 montre la convergence de la formation, composé de trois robots mobiles non holonomes. L'objectif est situé à  $200m$  dans la direction  $x$  et à  $100m$  dans la direction des  $y$  de la position initiale de la formation. On construit un cercle de  $40m$  de diamètre, qui représente un ensemble attractif pour la formation. Ainsi, les trois robots mobiles convergent à cet ensemble tout en achevant leurs courses avec la bonne direction. La figure 5.5 présente le comportement de trois robots mobiles assez éloignés les uns des autres avec convergence de l'orientation par rapport à la cible. La figure 5.6 présente six robots mobiles, répartis de manière aléatoire dans l'espace  $2D$ . Dans ce cas,

la cible est entourée par un cercle et l'orientation de chaque entité converge vers la cible. Dans la figure 5.7, on teste l'efficacité de la commande proposée en considérant deux cibles environnantes avec une distribution prédéfinie relativement à chaque cible. Les six robots mobiles sont divisés sur deux sous-groupes où chaque sous-groupe est composé de trois entités. La stabilité de chaque division est obtenue quand elle atteint le cercle entourant la cible voulue. On constate que les contrôleurs proposés dans les vitesses, sont limités en amplitude (bornés). Toutefois, la limitation dépend fortement de la distance robot-mobile.

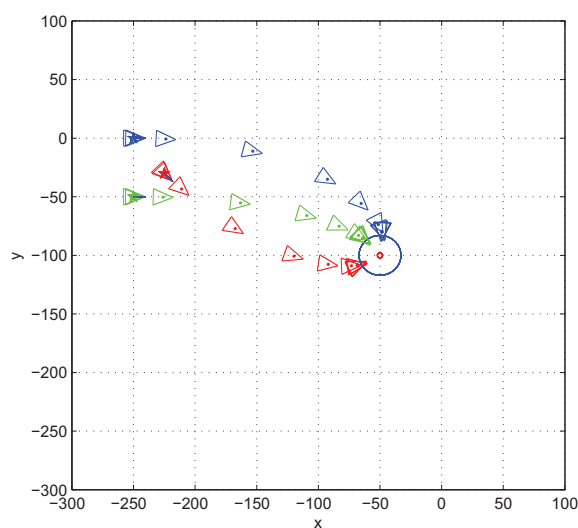


FIGURE 5.4 – Déplacement de 3 véhicules pour atteindre des positions au voisinage de la cible.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la stabilité de la formation est subdivisée en trois étapes. Dans la première étape, on a pu identifier une ou plusieurs cible(s) et créer un ensemble attractif autour de chacune. Dans la seconde, on a défini la position et l'orientation initiales de chaque entité de la formation.

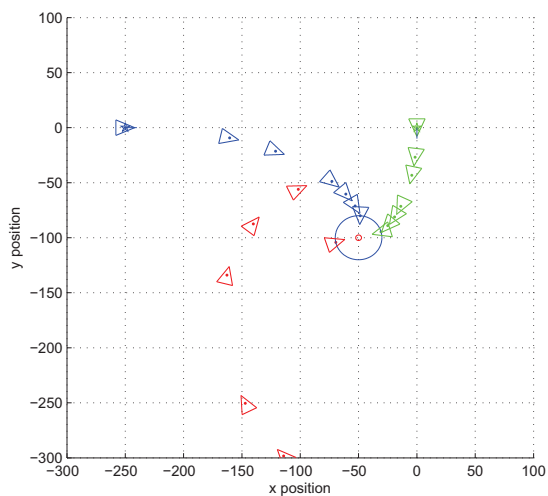


FIGURE 5.5 – Déplacement de 3 véhicules pour atteindre des positions au voisinage de la cible.

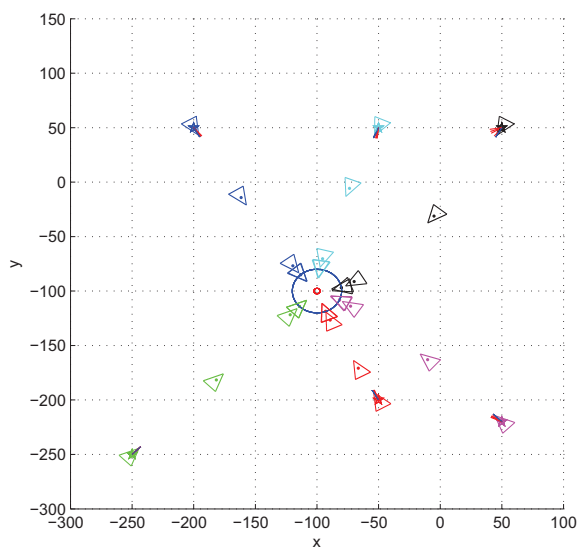


FIGURE 5.6 – Déplacement de 6 véhicules pour atteindre des positions au voisinage de la cible.

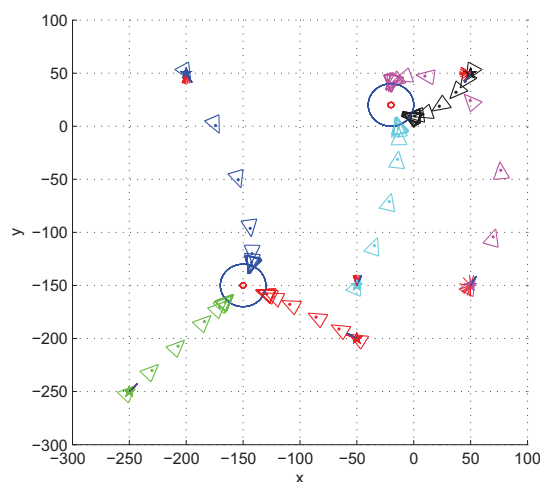


FIGURE 5.7 – Déplacement de 2 sous formations de véhicules pour atteindre des positions au voisinage de deux cibles.

Dans la dernière étape, on a appliqué à la formation le contrôleur décentralisée trouvée. En conséquence, la convergence de la formation consiste à atteindre chaque cible dans la bonne direction et sans aucune planification de mouvement. On constate que la convergence de l'angle de direction est affirmée au même temps que le cercle qui entoure l'objectif est atteint. En outre, nous avons modifié l'expression de la commande de sorte qu'elle inclue une nouvelle expression scalaire de régulation  $\nu$ . Nous avons évoqué une grande flexibilité dans la conception de  $\nu$  de sorte que le comportement de chaque trajectoire du véhicule pourrait être adapté alors que la convergence vers la cible est maintenue. Notre point de vue sur l'existence de cette fonction a été prouvé. A l'image d'un système multi-véhicules holonome en formation, il reste à établir une forme explicite à  $\nu$  qui permet d'éviter tous les obstacles dans la zone de navigation et garantit qu'aucune collision ne se produit entre les véhicules.



# Conclusion générale

---

Pour réussir la convergence d'un système de robots mobiles opérant en groupe, les travaux exposés portent sur la construction d'une commande qui permet à la fois, la stabilisation du groupe autour d'une position désirée, la répulsion de chaque robot par rapport à un obstacle représenté par un ensemble convexe et compact dans l'espace de navigation et la non collision entre ces entités intelligentes jusqu'à ce que les cibles soient atteintes.

Un exemple motivant sur la stabilisation de l'unicycle (cinématique sans dérive) a été étudié par Pomet [44] et où la stabilisation asymptotique uniforme est possible par une commande instationnaire. L'augmentation de cette commande par une fonction de régulation instationnaire aussi, ne modifie pas les résultats de la commande. Alors que cette dernière permet de modifier la trajectoire de l'unicycle afin d'éviter les points indésirables dans l'espace de navigation. Nous avons généralisé un résultat identique au cas d'un système avec dérive.

Ainsi, dans le but de construire une commande répulsive stabilisante, une étude théorique a été établie sur les systèmes avec dérive et sans dérive et les systèmes d'ordre deux affines en commande. On a proposé et prouvé des résultats généraux sur la commande de ce type de système. A savoir, une commande étendue comportant une nouvelle entrée  $\nu$  prise comme étant une *fonction régulatrice* de la trajectoire d'un tel système en boucle fermée. Le résultat de stabilisation est du type asymptotique et uniformément asymptotique. Des conditions géométriques et analytiques ont été achevées pour que la nouvelle entrée assure la répulsion par rapport à un ensemble convexe et compact inclue dans  $\mathbb{R}^n$ . Ces conditions sont suffisantes mais non nécessaires pour éviter un ensemble appartenant à un espace.

Afin d'étudier un système multi-robots en formation, on a traité le cas d'un mono-robot mobile identique à l'unicycle sous ces deux formes, cinématique et dynamique. De point de vue théorique et afin de réduire la complexité du problème d'identification de la forme de la commande répulsive, le modèle est pris sans l'angle de direction (cinématique holonome). Le principe d'invariance de Lasalle a permis de valider l'approche d'une commande intégrante une fonction de régulation pour contrôler la stabilité du système au voisinage d'un point désiré, et aussi de contrôler la trajectoire au cours de navigation. Pour vérifier la condition géométrique prise par la proposition concernant l'évitement, on a pris comme ensemble de points à éviter un cercle construit de l'obstacle. Cet ensemble est convexe et compact. Même si le cercle construit n'est pas optimale pour n'importe quelle géométrie de l'obstacle, il reste un bon candidat pour notre travail. On a détaillé une étude sur le comportement des trajectoires en utilisant la commande répulsive. Les solutions/trajectoires obtenues évitent l'obstacle de part et d'autre d'une droite qui passe par les deux centres respectifs du cercle entourant l'obstacle et la cible.

Ce travail a été étendu pour le cas de plusieurs obstacles moyennant la fonction de régulation associée. Ayant rencontré le  $i^{\text{ème}}$  obstacle, l'agent selon sa position, il choisi de l'éviter à gauche ou à droite.

En troisième lieu, on a traité le cas d'une formation d'agents qui navigue dans un environnement hostile. Dans cette partie, on a prolongé l'approche développée pour le cas d'une formation de robots mobiles. Deux cas de navigations ont été présentés. Le premier cas traite la navigation décentralisée où on a pu établir la non collision entre les robots en formation. En présence d'obstacles, la convergence vers un ensemble attractif voisin de la cible a été assurée. Le second cas fait appel à une étude d'un algorithme de communication entre les agents, considéré inhérent à la convergence. Ayant pris l'inter-distance entre les agents comme étant une perturbation, la fonction de régulation intègre bien cette stratégie au cours de navigation dont un agent est un meneur de la formation. Les autres agents sont des suiveurs. Pour le cas d'un déplacement hiérarchique, on a présenté des résultats de stabilité et où la théorie des graphes répondait bien à ce besoin.

Finalement, on a traité le problème de convergence d'une formation de véhicules non-holonomes type unicycle tout en tenant compte de leur orientations. La stabilisation d'un seul système nous assure qu'à partir de n'importe quelle condition initiale, la trajectoire du véhicule converge vers un point cible. Cependant, en traitant un système multi-agents en formation, il faut que chaque agent converge vers un point voisin de la cible. Ce qui justifie la construction d'un ensemble attractif renfermant la cible. Pour cela, on a proposé une stratégie coopérative de commande pour que chaque robot atteigne un voisinage de la cible tout avec l'angle de direction souhaité. Vis-à-vis d'un environnement hostile, la navigation du système multi-robots, à cinématiques non holonomes, est assurée par une commande de stabilisation étendue.

Pour assurer la robustesse, en automatique, même si la régulation reste un problème classique, son intégration dans la commande reste une tâche difficile. Le problème devient un challenge quand on s'intéresse à des robots qui opèrent en groupe. On a pu apporter une solution à travers la notion dite *commande répulsive stabilisante*. La fonction scalaire jouant ce rôle reste ouverte pour qu'elle intègre d'autre stratégie de navigation telle que la dynamique d'un environnement. A l'issue de cette thèse, plusieurs travaux restent en perspective. On peut citer, la construction de commande répulsive stabilisante satisfaisant les conditions données par le chapitre 4 et pour différents modèles de robots mobiles. Trouver un ensemble convexe compact plus optimal pour un ensemble de points à éviter avec une géométrie complexe. Trouver une condition sur la fonction régulatrice pour que l'évitement de l'obstacle suive la géométrie de l'ensemble à éviter. Pour le cas d'une formation de robots non holonomes, construire une commande répulsive stabilisante assurant la non collision entre les différents agents sous un graphe orienté.



# Modélisation d'un véhicule à roues

---

## A.1 Introduction

Les stratégies de commande des véhicules à roues est un domaine très actif et constitue aujourd'hui l'un des principaux axes de recherche de la robotique. Les raisons qui se cachent derrière sont multiples, a commencé par le fait que les véhicules à roues constituent de nos jours le moyen de transport individuel principal. De plus leur utilisation franchit les murs des laboratoires pour des applications grand public tels que les systèmes transport urbain intelligent, etc. . Ces applications nécessitent la coordination des plusieurs robots et ouvrent ainsi de nouvelles perspectives de recherche. De plus, les systèmes issus de ce type de véhicules sont qualifiés de "systèmes critiques" ou "systèmes fortement non-linéaires", c'est à dire que le linéarisé tangent n'est pas commandable (ni même asymptotiquement stabilisables), et revêtent un intérêt théorique particulier dans le domaine de l'automatique non-linéaire. Souvent, ils sont reconnus sous le nom des véhicules non holonomes et liés à l'existence de contraintes non intégrables.

A cause de la complexité de ce système nous nous intéresserons tout au long de notre travail à un type de véhicules qui est l'"unicycle".

Le travail qui se trouve dans cette partie est un résumé de ce qui a été fait par Artus [21] et Bayle [45].

On va commencer par définir le mouvement d'un roue qui roule sur un plan.

## A.2 Roulement sans glissement

Considérons une roue verticale d'orientation  $\theta$ , qui roule sans glissement sur un sol plan tel que la surface de contact est un point qu'on le note  $I(x, y)$  (voir figure A.1), et les roues sont indéformables. Ces hypothèses définissent le roulement sans glissement de la roue. On considère aussi un repère  $\mathcal{R}_1 = (\vec{i}_1, \vec{j}_1)$  lié au point  $I$  et  $\phi$  l'angle que fait un point de la roue par rapport à  $\vec{i}_1$ , d'où la vitesse est nulle au point  $I$  dans le repère  $\mathcal{R}_1$ . Cela se traduit comme suit :

$$\begin{aligned} V(I)_{/\mathcal{R}_1} = 0 &= V(I)_{/\mathcal{R}_0} + w_{1/0} \wedge \vec{O}_1 I \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + (\dot{\theta}\vec{k} + \dot{\phi}(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j})) \wedge (-r\vec{k}) \\ &= (\dot{x} + r\dot{\phi}\cos(\theta))\vec{i} + (\dot{y} + r\dot{\phi}\sin(\theta))\vec{j} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où  $\phi$  est l'angle que fait un point de la roue par rapport à l'axe des abscisse du repère  $\mathcal{R}_1$ .

Ce qui nous ramène à écrire :

$$\begin{cases} \dot{x} + r\dot{\phi}\cos(\theta) = 0 \\ \dot{y} + r\dot{\phi}\sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

une autre manière d'écrire ces équation est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}\cos(\theta) + \dot{y}\sin(\theta) = -r\dot{\phi} \\ -\dot{x}\sin(\theta) + \dot{y}\cos(\theta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

On remarque que ce système différentiel s'écrit sous la forme de

$$A^T(q)\dot{q} = 0 \quad (\text{A.4})$$

tel que

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & -r \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

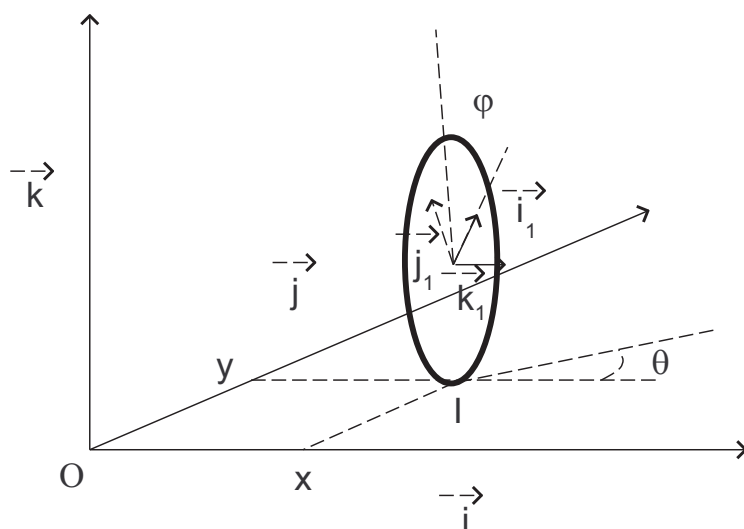


FIGURE A.1 – Roulement sans glissement de la roue

ce qui nous ramène à dire que notre système est soumis à des contraintes indépendantes sur les vitesses. Dans la section suivante on va s'intéresser à la nature de ces contraintes.

### A.3 Contraintes non holonômes

**Définition 4** *Soit un système de configuration  $q$  soumis à des contraintes indépendantes sur les vitesses*

$$A^T(q)\dot{q} = 0.$$

*s'il n'est pas possible d'intégrer l'une de ces contraintes, elle est dite non intégrable ou non holonôme.*

D'après cette définition les contraintes non holonômes impliquent que certains mouvements sont instantanément interdits. Alors la question qui se pose est comment savoir si les contraintes sont intégrables ou non? Le théorème de Frobenius répond à cette question.

**Théorème 23** (Fronenius) *Soit un système de configuration  $q$ , de dimension  $n$ , tel que.  $A^T(q)\dot{q} = 0$  et  $B(q)$  de rang plein  $m$ , orthogonale à  $A(q)$ . Soit l'algèbre de Lie*

$$\mathfrak{Lie}\{b_1(q), b_2(q), \dots, b_m(q), \dots, b_p(q)\}$$

*de dimension  $p$ , avec  $m \leq p \leq n$ . Alors,  $n - p$  contraintes sont intégrables.*

On rappelle que l'algèbre de Lie est engendrée par les colonnes et les crochets de Lie issues de ces colonnes.

Le crochet de Lie se calcule de la manière suivante :

Si on prend deux vecteurs  $b_i$  et  $b_j$  alors le crochet de Lie de  $b_i$  et  $b_j$  est

$$[b_i, b_j] = \frac{\partial b_j}{\partial q} b_i - \frac{\partial b_i}{\partial q} b_j$$

Maintenant on va appliquer le théorème de Frobenius sur le véhicule à roues. La matrice  $A^T$  est donnée par (A.5) et la matrice orthogonale est donnée par l'écriture suivante :

$$B(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

On note par  $b_1(q)$  et  $b_2(q)$ , respectivement, la première et la deuxième colonne de la matrice  $B$ . Les crochets de Lie issues de ces colonnes sont :

$$\begin{aligned} b_3 &= [b_1, b_2] &= (\sin \theta, -\cos \theta, 0, 0)^T \\ [b_1, [b_1, b_2]] &= 0 \\ b_4 &= [b_2, [b_1, b_2]] &= (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0)^T \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

On vérifie que  $\mathfrak{Lie}\{b_1(q), b_2(q), b_3(q), b_4(q)\}$  est une algèbre de Lie de dimension 4, égale à celle de  $q$ . Comme  $n = 4$  et  $p = 4$ , d'après le théorème de Frobenius, il n'existe pas de contrainte intégrable ce qui implique que le système est non-holônome.

Si on prend,

$$\begin{aligned} u_1 &= r\dot{\varphi} \\ u_2 &= \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$



alors on obtient le modèle de commande suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \dot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u_2 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

tel que  $q = (x, y, \theta)^T$  présente l'état qui se compose de la position et de l'angle d'orientation et  $(u_1, u_2)$  sont les commandes qui sont respectivement la vitesse linéaire et angulaire de la roue.

Comme l'ensemble des véhicules se base sur le mouvement des roues alors on va étendre le travail pour le système *unicycle*.

## A.4 Modélisation de l'unicycle

**Définition 5** (*Unicycle*) Robot actionné par deux roues indépendantes et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant sa stabilité.

On note  $(x_m, y_m)$  l'abscisse et l'ordonnée du point  $P_m$  situé au milieu de l'axe des roues arrières,  $\theta$  l'orientation du robot,  $r$  le rayon des roues, et  $R$  la distance de  $P_m$  à chaque roue. En reprenant les équations (A.2), de la section 2.1, on montre aisément que les contraintes de roulement sans glissement de chacune des roues commandées s'écrivent :

-pour la roue gauche

$$\begin{cases} \overbrace{x_m - R \sin \theta}^{\dot{\quad}} - r \dot{\varphi}_1 \cos \theta = 0 \\ \overbrace{y_m + R \cos \theta}^{\dot{\quad}} - r \dot{\varphi}_1 \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

-pour la roue droite

$$\begin{cases} \overbrace{x_m + R \sin \theta}^{\dot{\quad}} - r \dot{\varphi}_2 \cos \theta = 0 \\ \overbrace{y_m - R \cos \theta}^{\dot{\quad}} - r \dot{\varphi}_2 \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

ce qui nous donne le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_m - R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\varphi}_1 \sin \theta = 0 \\ \dot{y}_m - R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\varphi}_1 \cos \theta = 0 \\ \dot{x}_m + R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\varphi}_2 \sin \theta = 0 \\ \dot{y}_m + R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\varphi}_2 \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

On remarque que ces quatre contraintes ne sont pas indépendantes puisque la différence des membres de gauche de la première et la troisième équation est proportionnelle à celle associée à la deuxième et la quatrième équation. On peut donc omettre, par exemple, la dernière contrainte. On remarque aussi l'existence d'une contrainte complètement intégrable. En effet, Les deux premières et les deux dernières équations de (A.12) nous donnent respectivement :

$$\begin{aligned} \dot{x}_m \cos \theta + \dot{y}_m \sin \theta - R\dot{\theta} &= r\dot{\varphi}_1 \\ \dot{x}_m \cos \theta + \dot{y}_m \sin \theta + R\dot{\theta} &= r\dot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

d'où

$$2R\dot{\theta}_m = r(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \Rightarrow \theta_m = \frac{r}{2R}(\varphi_2 - \varphi_1) + cste \quad (\text{A.14})$$

ceci nous ramène à éliminer, par exemple, la variable  $\varphi_2$ , il ne reste donc que deux contraintes indépendantes qui sont les deux premières équations de (A.12). En posant

$$\begin{aligned} u &= \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1) \\ w &= \frac{r}{2R}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_m = u \cos \theta \\ \dot{y}_m = u \sin \theta \\ \dot{\theta} = w \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{r}u - \frac{R}{r}w \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

comme la commande de  $\varphi_1$  n'a pas un grand intérêt dans la pratique alors on peut éliminer la dernière ligne qui correspond à cet état, ce qui nous

ramène à écrire le système différentiel comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_m &= u \cos \theta \\ \dot{y}_m &= u \sin \theta \\ \dot{\theta} &= w \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

le fait que ce modèle est le même que celui d'une seule roue cela justifie l'appellation de ce système par *unicycle*.

## A.5 Modèle pour la commande

On considère un point  $P(x, y)$  sur l'axe perpendiculaire à l'axe des roues, passant par le point  $P_m(x_m, y_m)$  tel que :

$$\begin{aligned} x &= x_m + d \cos \theta \\ y &= y_m + d \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$d$  est la distance qui sépare les deux points. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \theta - dw \sin \theta \\ \dot{y} &= u \sin \theta + dw \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

en prenant un premier bouclage,

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{d} \sin \theta & \frac{1}{d} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

on obtient le système linéaire de commande en position

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{y} &= u_2 \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{d} u_1 \sin \theta + \frac{1}{d} u_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Le système de commande en position issue du premier bouclage linéarisant, en éliminant la dernière équation en orientation, présente un caractère holonome. Ce modèle de commande holonome a retenu l'attention de plusieurs chercheurs [ref] et les références associées. Afin d'aborder le problème

de la commande d'une formation, nous présentons dans le chapitre suivant, le cas d'un mono-robot holonome. La prise en compte de l'orientation traduisant la non holonomie naturelle du modèle sera traitée au chapitre 3.

## A.6 Conclusion

Ce chapitre propose une vision d'ensemble de caractéristiques de modélisation associées aux systèmes non-holonomes. La simplicité apparente des équations régissant le mouvement des robots mobiles sur roues masque la complexité des problèmes de commande. En particulier, il n'existe pas de solution globale au problème de stabilisation asymptotique du point d'équilibre. Ces considérations conduisent à envisager un objectif de stabilisation moins contraignant.

# Bibliographie

- [1] M.A.El Kamel L.Beji A.Abichou. A Strategy For Unicycle's Formation Control Based on Invariance Principle. *1st Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation (Cisa'08)*, Annaba, Algeria, 2008. 27
- [2] M.A.El Kamel L.Beji A.Abichou. Nonholomic Mobile Robots Cooperative Control for Target Capturing. *Indicon 2008,IEEE Conference&Exhibition on Control, Communication And Automation*, Kanpur, India, 2008. 27, 100
- [3] M.A.El Kamel L.Beji A.Abichou S. Mammam. A Novel Obstacle Avoidance Approach For Multi-Agent Systems Including Target Capturing, *2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation(Cisa'09)*, Zarzis, Tunisia, 2009. 70
- [4] M.A.El Kamel L.Beji A.Abichou Multi-Vehicle Consensus With Target Capturing And Collision Avoidance *12th Int. Conf. on Climbing and Walking Robots and the support technologies for mobile machines*, Istanbul, Turkey, 2009. 27
- [5] M.A.El Kamel L.Beji A.Abichou A Decentralized Formation Control Method Including Self-Organization Around A Target, *9th Int. IFAC Symposium on Robot Control*, Gifu, Japan, 2009. 99
- [6] A.Essghaier L.Beji M.A.El Kamel A.Abichou J. Lerbet Co-leaders and a flexible virtual structure based formation motion control, *Int. J. Vehicle Autonomous Systems*, Vol. 9, Nos. 1/2, 2011. 5
- [7] M.A.El Kamel, L.Beji and A.Abichou, Regulation control-input for multi-vehicle formation, *Int. J. Vehicle Autonomous Systems*, submitted in 2011.
- [8] Dong Eui Chang, Shawn C. Shadden, Jerrold E. Marsden and Reza Olfati-Saber. Collision Avoidance for Multiple Agent Systems. *Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii USA, 2003. 8

- 
- [9] Jian Chen, Darren M. Dawson, Mohammad Salah and Timothy Burg. Cooperative control of multiple vehicles with limited sensing, *Int. Journal of Adaptive Control Signal Processing*, 21 :115-131, 2007. 9
- [10] Yutaka Ikeda, Jacob Kay. An Optimal Control Problem For Automatic Air Collision Avoidance. *Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii USA, 2003. 9
- [11] Arik Melikyan, Naira Hovakimyan, Yutaka Ikeda. Dynamic Programming Approach to a Minimum Distance Optimal Control Problem. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control* Maui, Hawaii USA, December 2003. 9
- [12] Dimos V. Dimarogonas and Karl H. Johansson. Analysis of Robot Navigation Schemes using Rantzer's Dual Lyapunov Theorem. *American Control Conference*, Seattle, WA, USA, pp. 201-206, June 2008. 9
- [13] Wei Ren, Nathan Sorensen. Distributed coordination architecture for multi-robot formation control. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 56 , Issue 4, Pp. 324-333, 2008. 70, 94, 99
- [14] R. Olfati-Saber, J.A. Fax, R.M. Murray. Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 95, Issue 1 ,Pp. 215-233, 2007. 70
- [15] Wei Ren. Multi-vehicle consensus with time varying reference state. *Systems & Control letters*, Vol. 56 , Pp. 474-483, 2007. 20, 24, 70
- [16] Reza Olfati-Saber and Richard M. Murray. Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays. *IEEE Transactions On Automatic Control*, VOL. 49, NO. 9, September 2004. 20, 70
- [17] Chunkai Gao, Jorge Cortés, Francesco Bullo. Notes on averaging over acyclic digraphs and discrete coverage control. *Automatica*, Vol. 44, No. 9, Pp. 2120-2127, 2008. 20, 25, 70, 85, 88

- 
- [18] W. Kowalczyk and K. Kozłowski Artificial Potential Based Control for a Large Scale Formation of Mobile Robots. *Climbing and Walking Robots, Springer Berlin Heidelberg*, pp.191–199, 2005. 39
- [19] Ludovic Rifford The stabilization problem on surfaces. *Rend. Semin. Mat. Torino*, pp.55–61, 2006. 39, 109
- [20] Dimos V. Dimarogonas and Karl H. Johansson On the Stability of Distance-based Formation Control *47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico*, pp. 1200-1205, 2008. 84
- [21] G. Artus Application de l'approche par fonctions transverses à la commande de véhicules non-holonomes manoeuvrants Thèse présentée à l'École nationale supérieure des mines de paris-sophia antipolis, 2005. 27, v
- [22] Pascal Morin Stabilisation de systèmes non linéaires critiques et application à la commande de véhicules *habilitation à diriger des recherches, Présentée à l'Université de Nice-Sophia Antipolis*, 2004. 27
- [23] Lafferiere, G. et Sussmann, H., A differential geometric approach to motion planning. Dans adnd J. Canny, Z. L., editor, Nonholonomic motion planning *International series in engineering and computer science. Kluwer*, 1992 27
- [24] Jacob, G., Lyndon discretization and exact motion planning. *European control conference*, 1991. 27
- [25] Schwartz, J. T. et Sharir, M., A survey of motion planning and related geometric algorithms. *Artificial Intelligence*, 37 : 157-169. 1998. 27
- [26] LaValle, S. M. Planning Algorithms. *Cambridge University Press*, Cambridge. 2006. 27
- [27] Fax, J. et Murray, R. (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9) :1465-1476. 83
- [28] Lafferiere, G., Caughman, J. et Williams, A., Graph theoretic methods in the stability of vehicle formations. *In Proceedings of the American Control Conference*, volume 4, pages 3729-3734. 83

- 
- [29] Ogren, P., Egerstedt, M. et Hu, X., A control lyapunov function approach to multiagent coordination. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(5) :847-851, 2002. 83
- [30] D. Helbing, I. Farkas, and T. Vicsek. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407 :487-490, 2000. 7
- [31] A. Mogilner and L. Edelstein-Keshet. A non-local model for a swarm. *J. Math. Biology*, 38 :534-570, 1999. 7
- [32] A. Okubo. Dynamical aspects of animal grouping : swarms, schools, flocks. and herds. *Adv. Biophysics*, 22 :1-94, 1986 7
- [33] J. K. Parrish, S. V. Viscido, and D. Grunbaum. Self-organized fish schools : an examination of emergent properties. *Biol.Bull.*, 202 :296-305, 2002. 7
- [34] B. L. Partridge. The structure and function of fish schools. *Scientific American*, 246(6) :114-123, 1982. 7
- [35] B. L. Partridge. The chorus-line hypothesis of maneuver in avian flocks. *Nature*, 309 :344-345, 1984. 7
- [36] T. J. Pitcher, B. L. Partridge, and C. S. Wardle. A blind fish can school. *Scientific American*, 194(4268) :963-965, 1976. 7
- [37] C. W. Reynolds. Flocks, herds, and schools : a distributed behavioral model. *Computer Graphics (ACM SIGGRAPH '87 Conference Proceedings)*, 21(4) :25-34, July 1987. 7
- [38] E. Shaw. Fish in schools. *Natural History*, 84(8) :40-45, 1975. 7
- [39] N. Shimoyama, K. Sugawara, T. Mizuguchi, Y. Hayakawa, and M. Sano. Collective motion in a system of motile elements. *Physical Review Letters*, 76(20) :3870-3873, 1996. 7
- [40] J. Toner and Y. Tu. Flocks, herds, and schools : A quantitative theory of flocking. *Physical Review E*, 58(4) :4828-4858, October 1998. 7
- [41] T. Vicsek. A question of scale. *Nature*, 411 :421-421, May 2001. 7
- [42] T. Vicsek, A. Czirook, E. Ben-Jacob, and O. Cohen, I. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-derived particles. *Physical Review Letters*, 75(6) :1226-1229, August, 1995. 7



- [43] J.M. Coron. On the stabilization of some nonlinear control systems : results, tools, and applications. *NATO advanced Study Institute, Nonlinear analysis, differential equations, and control*, eds F.H. Clarke et R.J. Stern, Kluwer Academic Publishers, Hollande, 1999, p. 307-367. 28
- [44] J.B. Pomet. Explicit design of time varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift . *Systems & control letters*, 1992, p. 147-158. 29, 32, i
- [45] Bernard BAYLE Robotique mobile polycopé de *Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg*, année 2005-2006 v
- [46] P. K. C.Wang. Navigation Strategies for Multiple Autonomous Mobile Robots Moving in Formation, *J. Robot. Syst.*, Vol. 8, No. 2, pp. 177-195, 1991. 1, 2, 4
- [47] P. K. C. Wang and F. Y. Hadaegh. Coordination and Control of Multiple Microspacecraft Moving in Formation, *J. Astronautical Sci.*, Vol. 44, No. 3, pp. 315-355, 1996. 2, 4
- [48] J. P. Desai, J. Ostrowski, and V. Kumar. Controlling Formations of Multiple Mobile Robots, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, pp. 2864-2869, 1998. 2, 4
- [49] M. Mesbahi and F. Y. Hadaegh. Formation Flying Control of Multiple Spacecraft via Graphs, Matrix Inequalities, and Switching, *AIAA J. Guidance, Control, Dynam.*, Vol. 24, no. 2, pp. 369-377, 2000. 2, 4
- [50] R. T. Jonathan, R. W. Beard and B. J. Young. A Decentralized Approach to Formation Maneuvers, *IEEE Trans. Robot. and Automat.*, Vol. 19, pp. 933-941, 2003. 4, 6
- [51] T. D. Barfoot and C. M. Clark. Motion Planning for Formations of Mobile Robots, *Robot. Auton. Syst.*, vol. 46, pp. 65-78, 2004. 4, 6
- [52] H. Yamaguchi. Adaptive Formation Control for Distributed Autonomous Mobile Robot Groups, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Albuquerque, NM, pp. 2300-2305, 1997. 4, 7

- 
- [53] T. Balch and R. C. Arkin. Behavior-Based Formation Control for Multirobot Teams, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 14, pp. 926-939, 1998. 4, 7
- [54] M. Schneider-Fontan and M. J. Mataric. Territorial Multirobot Task Division, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 14, pp. 815-822, 1998. 4, 7
- [55] Q. Chen and J. Y. S. Luh. Coordination and Control of a Group of Small Mobile Robots, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 2315-2320, 1994. 2, 4
- [56] M. Veloso, P. Stone, and K. Han. The CMUnited-97 Robotic Soccer Team : Perception and Multiagent Control, *Robot. Auton. Syst.*, Vol. 29, pp. 133-143, 1999. 4
- [57] L. E. Parker. ALLIANCE : An Architecture for Fault-tolerant Multirobot Cooperation, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 14, pp. 220-240, 1998. 4
- [58] K. Sugihara and I. Suzuki, Distributed Algorithms for Formation of Geometric Patterns with Many Mobile Robots, *J. Robot. Syst.*, Vol. 13, no. 3, pp. 127-139, 1996. 4
- [59] N. E. Leonard and E. Fiorelli. Virtual Leaders, Artificial Potentials and Coordinated Control of Groups, *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, Orlando, FL, pp. 2968-2973, 2001. 4, 6
- [60] W. Kang, N. Xi, and A. Sparks. Formation Control of Autonomous Agents in 3DWorkspace, *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, San Francisco, CA, pp. 1755-1760, 2000. 5
- [61] M. A. Lewis and K.-H. Tan. High Precision Formation Control of Mobile Robots Using Virtual Structures, *Auton. Robots*, Vol. 4, pp. 387-403, 1997. 5
- [62] W. Kang and H.-H. Yeh. Coordinated Attitude Control of Multisatellite Systems, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol.12, pp. 185-205, 2002. 5

- 
- [63] R. W. Beard, J. Lawton, and F. Y. Hadaegh. A Coordination Architecture for Formation Control, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, Vol. 9, pp. 777-790, 2002. 5
- [64] R. Skjetne, S. Moi and T. I. Fossen. Nonlinear Formation Control of Marine Craft, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, NV, pp. 1699-1704, 2002. 6
- [65] P. Ogren, M. Egerstedt and X. Hu. A Control Lyapunov Function Approach to Multiagent Coordination, *IEEE Trans. Robot. Autom.*, Vol.18, pp. 847-851, 2002. 5
- [66] W. Ren and R. W. Beard. Formation Feedback Control for Multiple Spacecraft via Virtual Structures. *IEE Proceedings-Control Theory Application*, Vol. 151, pp. 357-368, 2004. 9
- [67] E. W. Jush and P. S. Krishnaprasad. Equilibria and Steering Laws for Planar Formations, *Syst. Contr. Letters*, Vol. 52, pp. 25-38, 2004. 100
- [68] D. M. Stipanovica, G. Inalhana, R. Teo and C. J. Tomlina. Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles, *Automatica*, vol. 40, pp. 1285-1296, 2004. 6
- [69] S. S. Ge and Y. J. Cui. New Potential Functions for Mobile Robot Path Planning, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 16, pp. 615-620, 2000. 6
- [70] S. S. Ge and Y. J. Cui. Dynamics Motion Planning for Mobile Robots using Potential Field Method, *Auton. Robots*, Vol. 13, pp. 207-222, 2000. 6
- [71] E. Rimon and D.E. Koditschek. Exact Robot Navigation Using Artificial Potential Functions, *IEEE Trans. Robot. and Automat.*, Vol. 8, no. 5, pp. 501-518, 1992. 6
- [72] E. Rimon and D.E. Koditschek. Robot Navigation Functions on Manifolds with Boundary, *Advances in Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 412-442, 1990. 6

- 
- [73] H. G. Tanner, S. G. Loizou and K. J. Kyriakopoulos. Nonholonomic Navigation and Control of Multiple Mobile Robot Manipulators, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 19, no. 1, pp. 53-64, 2003. 6
- [74] H.G. Tanner and A. Kumar. Towards Decentralization of Multi-robot Navigation Functions, *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, pp 4143-4148, 2005. 6
- [75] W. E. Dixon, D. M. Dawson, E. Zergeroglu and A. Behal. Nonlinear Control of Wheeled Mobile Robots, *Springer*, London, 2001. 6
- [76] K. D. Do, Z. P. Jiang and J. Pan. A Global Output-feedback Controller for Simultaneous Tracking and Stabilization of Mobile Robots, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol.20, pp. 589-584, 2004. 6
- [77] T. Fukao, H. Nakagawa, and N. Adachi. Adaptive tracking control of nonholonomic mobile robot, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 16, pp. 609-615, 2000. 6
- [78] P. Avanzini, B. Thuilot, E. Royer and P. Martinet. A global decentralized control strategy for urban vehicle platooning relying solely on monocular vision. *Workshop Robotics and Intelligent Transportation Systems at IEEE ICRA10*, Anchorage (USA), May, 2010. 99
- [79] A. Benzerrouk, L. Adouane, L. Lequievre and P. Martinet. Navigation of Multi-Robot Formation in Unstructured Environment Using Dynamical Virtual Structures. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS10)*, Taipei, Taiwan, 2010. 99
- [80] J. Kurzweil. On the Inversion of Liapunov's Second Theorem on Stability of Motion. *Amer. Math. Soc. Transl.*, vol. 24, pages 19-77, 1963. 18
- [81] H. K. Khalil. Non linear systems.(Third edition), *Prentice Hall*, 2002. 18, 72
- [82] Feingold, D. G. and Varga, R. S. Block Diagonally Dominant Matrices and Generalizations of the Gerschgorin Circle Theorem. *Pacific J. Math.*, 12, 1241-1250, 1962. 84

- [83] Reynolds F., Flocks, birds, and schools : a distributed behavioral model. *Computer Graphics*, 21 :25-34, 1987. 99
- [84] Vicsek T., Jacob E.B., Cohen I., and Schochet O., Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 75 :1226-1229, 1995. 99
- [85] Ceccarelli N., Di Marco M., Garulli A. and Giannitrapani A., Stability analysis of collective circular motion for nonholonomic multi-vehicle systems. *Technical report*, Università di Siena, Italy, 2005. 100
- [86] Tanner H.G., Jadbabaie A. and Pappas G.J., Flocking in teams of nonholonomic agents. *Cooperative Control, LNCIS 309*, pp. 229-239, 2005. 100
- [87] Yoshioka C. and Namerikawa T., Formation control of nonholonomic multi-vehicle systems based on virtual structure. *Proc. of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control* Seoul, Korea, 2008. 100
- [88] Yamaguchi H., Kanbo Y. and Kawakami A., Formation vector control of nonholonomic mobile robot groups and its experimental verification. *Int. J. Vehicle Autonomous Systems*, vol.9, Nos.1/2, 2011. 100
- [89] Blum J.J., Mathew T.V., Intelligent agent optimization of urban bus transit system design. *Journal of Computing in Civil Engineering*, to appear, 2011. 99
- [90] Olmi R., Secchi C. and Fantussi C., Coordination of industrial AGVs. *Int. J. Vehicle Autonomous Systems*, vol.9, Nos.1/2, 2011. 7, 99
- [91] D. Herrero-Perez and H. Martinez-Barbera. Coordination of AGVs in an industrial environment, *7th int. joint conf. on Autonomous agents and multiagent systems*, Estoril, Portugal, 2008. 7
- [92] M.L. Cummings, S. Bruni, S. Mercier and P.J. Mitchell. Automation Architecture for Single Operator, Multiple UAV Command and Control, *The International C2 Journal*, vol.1, no.2, pp. 1-24, 2007. 9

- [93] Frédéric Jean, Géométrie Différentielle Appliquée, Notes de cours, Edition 2007/2008. 15