

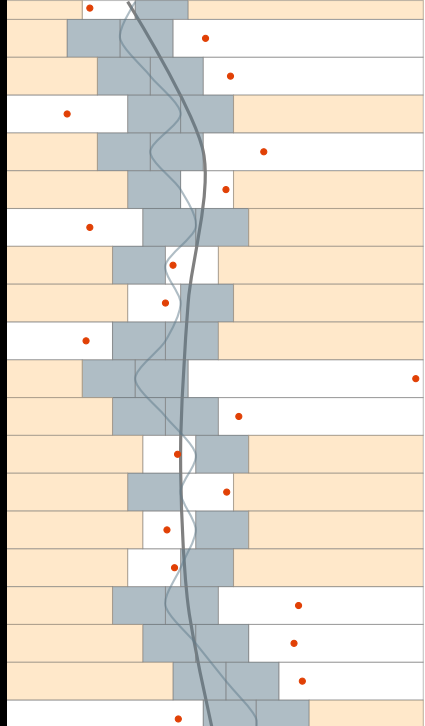
# Estimation sous contraintes de communication: algorithmes et performances asymptotiques

Rodrigo Cabral Farias

Directeur de thèse : Jean-Marc Brossier

**gipsa-lab**  
Université de Grenoble

17 juillet 2013



# Remerciements

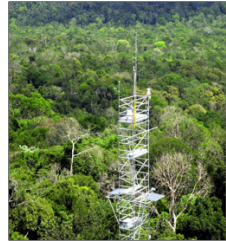


Erasmus  
Euro Brazilian Windows II

# Objectifs à long terme - les réseaux de capteurs



- Agriculture : mesures d'humidité dans un champ de pommes de terre <sup>1</sup>



- Environnement : bilan carbone <sup>2</sup>



- Militaire : localisation de tireurs d'élite <sup>3</sup>

1. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3231215/> [▶ Lien](#)

2. <http://geosensores.ccst.inpe.br/Geosensores> [▶ Lien](#) (en portugais)

3. <http://www.sciencedaily.com/releases/2009/03/090324141049.htm> [▶ Lien](#)

## ①—Introduction

Contraintes, position du problème

## ②—Problèmes de base

Signal constant et signal lentement variable, cas binaire et multibit

## ③—Approche adaptative

Approches à haute et basse complexités

## ④—Seuils asymptotiquement optimaux

Résultats et applications

## ⑤—Points principaux et conclusions

# Contraintes et problèmes d'inférence

## Tendances

- Nombre de capteurs ↑
- Taille des capteurs ↓
- Utilisation de batteries : énergie ↓

Coût fixé

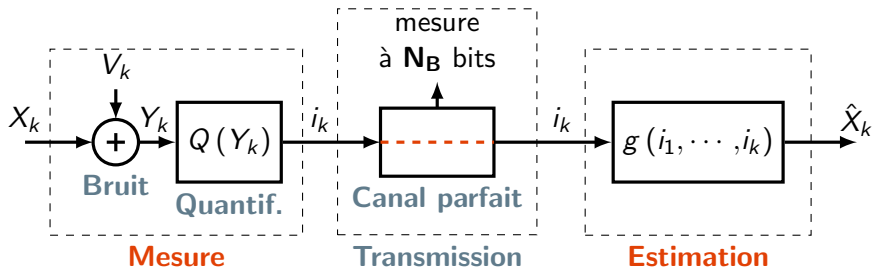
## Contraintes

- Bande de communication ↓
- Complexité ↓
- Mémoire ↓

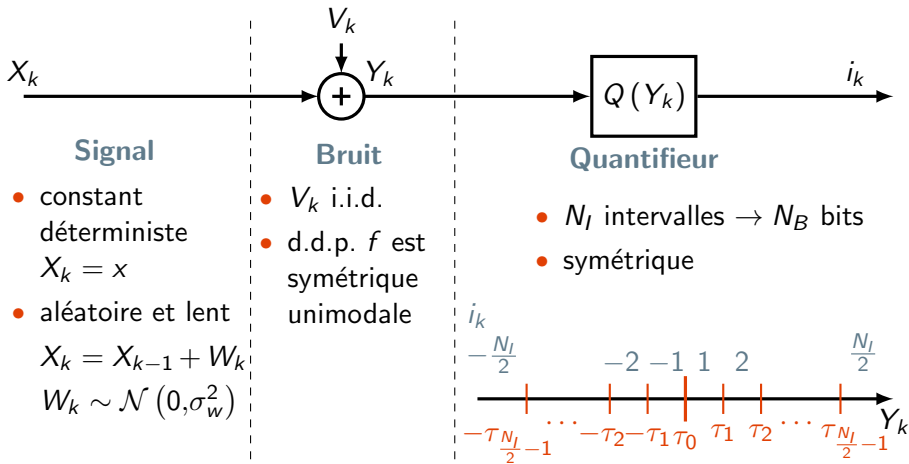
- Détection : quantité discrète
- Estimation : quantité continue ←

Etude d'un problème simplifié : un capteur et une quantité

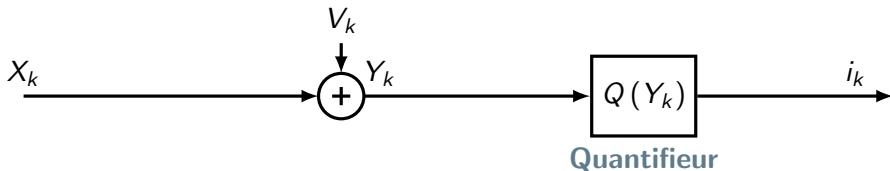
# Estimation à distance



# Hypothèses de travail



# Choix de la méthode



- Reconstruction de  $Y_k$ , puis estimation
- Bruit de quantification
- Estimer  $X_k$  directement à partir des  $i_k$  (information sur les intervalles)





# Objectifs

- Définir un estimateur.
  - Basse complexité
  - Peu de mémoire
  - Performant, si possible optimal
- Analyse de la performance (à définir)
  - Optimisation par rapport aux paramètres
  - Evaluer la perte par rapport au cas continu
  - Evaluer et optimiser la performance par rapport au quantifieur

# Plan

①—Introduction

②—Problèmes de base

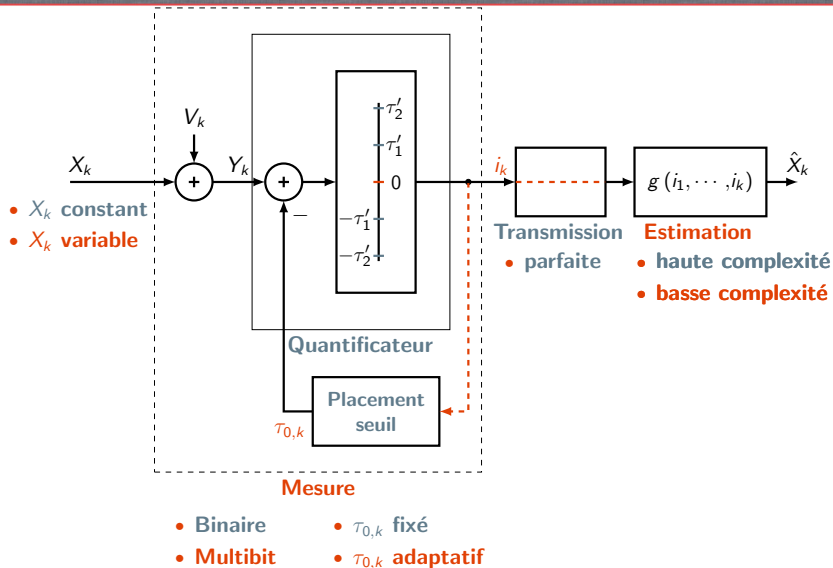
Signal constant et signal lentement variable, cas binaire et multibit

③—Approche adaptative

④—Seuils asymptotiquement optimaux

⑤—Points principaux et conclusions

# Plusieurs cas d'étude



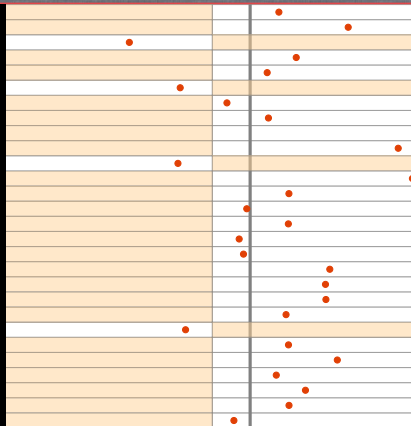
# Quantification binaire et signal constant

- Problème étudié par Ribeiro 2006 et Papadopoulos 2001
- Soit  $F(y)$  la fonction de répartition du bruit :

$$p = \mathbb{P}(i_k = -1) = F(\tau_0 - x)$$

- Si  $k$  est grand  $\mathbb{P}(i_k = -1) \approx \hat{p}$

$$\hat{X}_k = \tau_0 - F^{-1}(\hat{p})$$



$$\hat{X}_k = \tau_0 - F^{-1}(\hat{p}) = 0,7549$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-y^2]$$

# Performance

De façon non rigoureuse (rigoureuse=méthode delta) :

- Distribution de l'histogramme  $\sqrt{k}(\hat{p} - p) \underset{k \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, p(1-p))$

- Série de Taylor

$$\hat{X}(\hat{p}) = \hat{X}(p + \xi) = x - \xi \frac{dF^{-1}(p)}{dp} + \dots = x - \xi \frac{1}{f(\tau_0 - x)} + \dots$$

Pour  $k$  suffisamment grand :

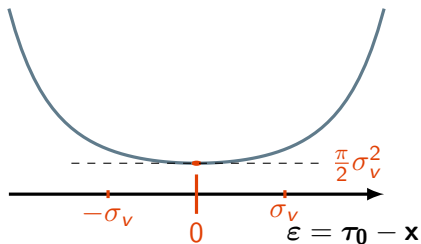
- Variance  $\text{Var}(\hat{X}_k - x) \approx \frac{1}{k} \frac{p(1-p)}{f^2(\tau_0 - x)} = \frac{1}{k} \frac{F(\tau_0 - x)[1 - F(\tau_0 - x)]}{f^2(\tau_0 - x)} = \frac{1}{k} B(\varepsilon)$ ,  
où  $\varepsilon = \tau_0 - x$

On peut montrer que :

- $\hat{X}_k$  – maximum de vraisemblance (MV)
- $\hat{X}_k$  – asymptotiquement non-biaisé
- $\frac{1}{k} B(\varepsilon)$  – borne de Cramér–Rao (BCR)

# Influence du seuil et perte



$B(\varepsilon)$  dans le cas Gaussien



- Seuil optimal  $\tau_0 = x$
- Perte relative au cas continu  $\frac{\pi}{2}$  (1.96dB)

- Cette thèse : plupart des d.d.p. (sous l'hypothèse de symétrie) utilisés :  
 $\tau_0 = x$  optimal (mais pas pour tous les modèles)
- Cette thèse : la perte est souvent petite pour un bit, si  $\tau_0 = x$
- **Problème** :  $x$  inconnu
- **Solution** : approche adaptative  
 $\tau_0 = \hat{X}_{k-1}$

# Performance : cas constant, binaire

Objectifs	$\tau_0$ fixé, $X_k = x$ et 1 bit
● Estimateur	Maximum de vraisemblance
● Complexité	
● Mémoire	
● Optimalité	Asymptotiquement optimal ( $\varepsilon$ )
● Analyse performance	BCR ( $\varepsilon$ )
● Optimisation paramètres	—
● Perte/continu	P ( $\varepsilon$ )
● Optimiser $\tau$	$\tau_0 = x$

# Quantification multi-bit et signal constant

Approche directe par MV

$$\hat{X}_{MV,k} = \underset{x}{\operatorname{argmax}} L(x; i_{1:k})$$

$$L(x; i_{1:N}) = \prod_{k=1}^N \mathbb{P}(i_k; x)$$

$$\mathbb{P}(i_k; x) = \begin{cases} F(\tau_{i_k} - x) - F(\tau_{i_k-1} - x), & \text{if } i_k > 0, \\ F(\tau_{i_k+1} - x) - F(\tau_{i_k} - x), & \text{if } i_k < 0. \end{cases}$$

Performance

- Le MV est asymptotiquement non-biaisé
- et atteint asymptotiquement la BCR

$$\text{BCR} \sim \frac{1}{k} \frac{1}{I_q(\varepsilon)}$$

- $I_q(\varepsilon)$  – information de Fisher

$$I_q(\varepsilon) = \mathbb{E} \left\{ \left[ \frac{\partial \log L(x; i_k)}{\partial x} \right]^2 \right\}$$



# Caractéristiques de l'info. de Fisher

$$I_q(\varepsilon)$$



- $I_q \leq I_c$  l'information de Fisher pour des mesures continues
- **croissante** quand on ajoute un seuil
- pour les modèles de bruit couramment utilisés  $\varepsilon = 0$  est un bon choix

**Conclusion** : approche adaptative pour  $\tau_0$

Questions pour la suite

- Converge-t-elle vers  $I_c$  ? A quelle vitesse ?
- Comment placer  $\tau'$  (les autres seuils) ?

# Performance : cas constant, multibit

Objectifs	$\tau_0$ fixé, $X_k = x$ et $N_B$ bit
● Estimateur	Maximum de vraisemblance
● Complexité	
● Mémoire	
● Optimalité	Asymptotiquement optimal ( $\varepsilon$ )
● Analyse performance	BCR ( $\varepsilon$ )
● Optimisation paramètres	—
● Perte/continu	P ( $\varepsilon$ )
● Optimiser $\tau$	$\tau_0 = x, \tau' ?$

# Quantification multi-bit et signal lent

Le signal est aléatoire et lent

- Critère de performance : **erreur quadratique moyenne** (EQM)

$$\text{EQM}_k = \mathbb{E} \left[ \left( \hat{X}_k - X_k \right)^2 \right]$$

- Estimateur qui minimise l'EQM **moyenne a posteriori**

$$\hat{X}_k = \int x_k p(x_k | i_{1:k}) dx_k$$

- **Problème** : évaluation analytique de  $p(x_k | i_{1:k})$  et de l'intégrale?
- **Solution** : méthode d'intégration numérique. Méthode de Monte-Carlo séquentielle ou filtrage particulaire

# Performance

- Estimateur non-biaisé
- Borne de Cramér–Rao Bayésienne (BCRB) :

$$\text{EQM}_k \geq \text{BCRB}_k = \frac{1}{J_k}$$

- Forme récursive

$$J_k = \frac{1}{\sigma_w^2} + \mathbb{E} [I_q(\varepsilon_k)] - \frac{1}{\sigma_w^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sigma_w^2} + J_{k-1}\right)}$$



- $J_k$  croît avec  $\mathbb{E} [I_q(\varepsilon_k)]$
- Encore une fois  
**approche adaptative**

$$\tau_{0,k} = \hat{X}_{k|k-1}$$

(prédiction du signal)

- Dans notre cas  $\hat{X}_{k|k-1} = \hat{X}_{k-1}$

# Performance : cas variable, multibit

Objectifs	$\tau_0$ fixé, $X_k$ variable et $N_B$ bit
● Estimateur	Filtrage particulière
● Complexité	
● Mémoire	
● Optimalité	Optimal ( $\varepsilon$ )
● Analyse de performance	BCRB ( $\varepsilon$ )
● Optimisation paramètres	—
● Perte/continu	$P(\varepsilon)$
● Optimiser $\tau$	$\tau_0 = x, \tau' ?$

# Plan

- ①—Introduction
- ②—Problèmes de base
- ③—Approche adaptative  
Approches à haute et basse complexités
- ④—Seuils asymptotiquement optimaux
- ⑤—Points principaux et conclusions

# Les approches complexes

## Signal constant

App. étudiée en Fang 2008 – cas binaire Gaussien

Déplacement de  $\tau_0$  avec le MV

$$\tau_{0,k} = \hat{X}_{MV,k-1},$$

## Signal variable

App. étudiée en Sukhavasi 2009 – cas Gaussien (modèle linéaire)

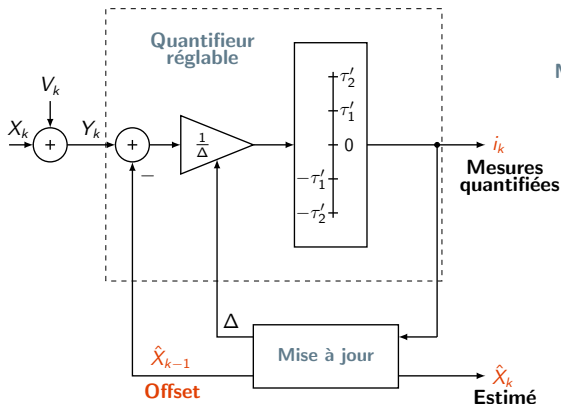
$\tau_{0,k}$  donné par le filtre particulaire

$$\tau_{0,k} = \hat{X}_{k-1},$$

**Problème :** approches très complexes

# L'approche à basse complexité

## Cette thèse



**Mise à jour** = estimation/centrage  
Alg. adaptatif – basse complexité

**Mise à jour** = Prédiction+**Correction**

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + \gamma_k \eta \left[ Q \left( \frac{Y_k - \hat{X}_k}{\Delta} \right) \right]$$

$\gamma_k$  pas de l'algorithme,  
 $\eta[i]$  coefficients correction

- $X_k$  constant –  $\gamma_k = \frac{\gamma_1}{k}$   
**pas décroissant**
- $X_k$  variable –  $\gamma_k = \gamma_2$   
**pas constant**
- $\eta[i] > 0$  si  $i > 0$  et impaire



# Etude du biais

## Approximation par EDO

Pour petit  $\gamma_k$ ,  $\mathbb{E}(\hat{X}_k) \approx \hat{x}(t_k)$

$\hat{x}(t)$  solution de l'EDO

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \mathbb{E} \left[ \eta \left( Q \left( \frac{x - \hat{x} + V}{\Delta} \right) \right) \right] = h(\hat{x})$$

$$t_k = \gamma_k, V \sim f(v)$$

## Biais

$$\varepsilon_k = \mathbb{E}(\hat{X}_k - X_k) \approx \varepsilon(t_k)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \tilde{h}(\varepsilon)$$

$$\tilde{h}(\varepsilon) = h(\varepsilon + x)$$

- Analyse de stabilité de l'EDO  
 $\varepsilon \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

Asymptotiquement  
non biaisé

# Cas constant - étude de la variance asymptotique

On utilise les résultats généraux de Benveniste 1990

Variance normalisée

$$\text{Var} \left[ \sqrt{k} \left( \hat{X}_k - x \right) \right]_{k \rightarrow \infty} = \sigma_{\infty}^2 (\gamma_1, \eta)$$

$$\sigma_{\infty}^2 (\gamma_1, \eta) \xrightarrow[\eta^* = \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{f}_d]{\gamma_1^* = \left( 2 \sum_{i=1}^{\frac{N_I}{2}} \frac{f_d^2 [i]}{F_d [i]} \right)^{-1}} \sigma_{\infty}^{2*} = \left( 2 \sum_{i=1}^{\frac{N_I}{2}} \frac{f_d^2 [i]}{F_d [i]} \right)^{-1} = \frac{1}{I_q(0)}$$

$$\eta = [\eta [1] \cdots \eta \left[ \frac{N_I}{2} \right]]^T$$

$$\mathbf{F}_d = \text{diag} [F_d [1], \dots, F_d \left[ \frac{N_I}{2} \right]], F_d [i] = \mathbb{P} \left( i_k = i | \hat{X}_k, X_k \right) \Big|_{\hat{X}_k = X_k}$$

$$\mathbf{f}_d = [f_d [1] \cdots f_d \left[ \frac{N_I}{2} \right]]^T, f_d [i] = \frac{\partial \mathbb{P}(i_k = i | \hat{X}_k, X_k)}{\partial \hat{X}_k} \Big|_{\hat{X}_k = X_k}$$

# Cas variable - étude de la variance asymptotique

On utilise encore les résultats de Benveniste 1990

EQM asymptotique

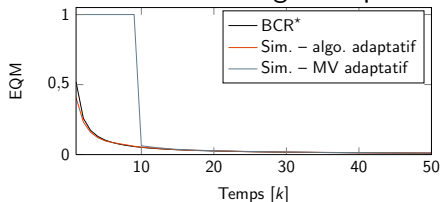
$$\mathbb{E} \left[ \left( \hat{X}_k - X_k \right)^2 \right]_{k \rightarrow \infty} = \text{EQM}_{\infty} (\gamma_2, \eta)$$

$$\begin{aligned} \text{EQM}_{\infty} (\gamma_2, \eta) &\xrightarrow[\eta^* = \mathbf{F}_d^{-1} \mathbf{f}_d]{\gamma_2^* = \sigma_w \left( 2 \sum_{i=1}^{\frac{N_I}{2}} \frac{f_d^2 [i]}{F_d [i]} \right)^{-\frac{1}{2}}} \text{EQM}_{\infty}^* = \sigma_w \left( 2 \sum_{i=1}^{\frac{N_I}{2}} \frac{f_d^2 [i]}{F_d [i]} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sigma_w}{\sqrt{I_q(0)}} \end{aligned}$$

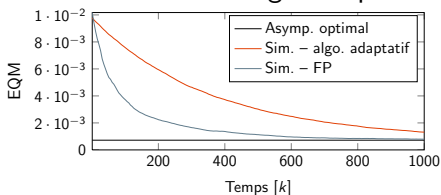
# Comparaison avec les algorithmes à haute complexité

## Quantification à 3 bits

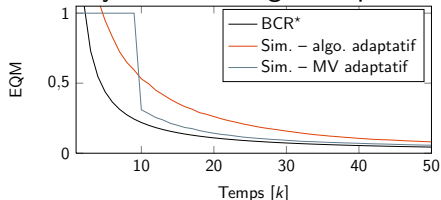
### Gaussien - MV vs. algo. adaptatif



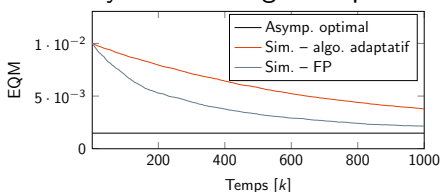
### Gaussien - FP vs. algo. adaptatif



### Cauchy - MV vs. algo. adaptatif



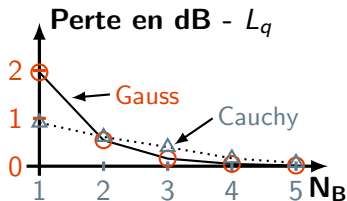
### Cauchy - FP vs. algo. adaptatif



# Perte provoquée par la quantification

Perte par rapport à  $\hat{X}_k$  optimal basé sur  $Y_k$




- Cas constant  $L_q$  : perte relative de l'**algorithme adaptatif** par rapport au MV avec  $Y_k$
- Cas signal lent  $L_q^W$  : perte relative de l'**algorithme adaptatif** par rapport à l'estimateur optimal avec  $Y_k$



$$L_q^W = \frac{1}{2}L_q$$

Dithering?

# Performance : algorithme adaptatif proposé

Objectifs	$\tau_0$ adaptatif, $X_k = x/\text{variable}$ et $N_B$ bit
● Estimateur	Algorithme adaptatif
● Complexité	
● Mémoire	
● Optimalité	Asymptotiquement optimal
● Analyse de performance	$\text{BCR}(0)/\text{EQM}_\infty^*$
● Optimisation paramètres	$\gamma^*, \eta^*$
● Perte/continu	
● Optimiser $\tau$	$\tau'?$

# Plan

- ①—Introduction
- ②—Problèmes de base
- ③—Approche adaptative
- ④—Seuils asymptotiquement optimaux  
Résultats et application
- ⑤—Points principaux et conclusions

# Approche asymptotique

Ce qu'il reste à faire : maximiser  $I_q(0)$  par rapport à  $\tau'$

- **Problème** : difficile pour  $N_B > 3$
  - **Solution** : aller à l'infini (ou presque)
  - Utiliser une solution asymptotique : grand  $N_B$ , détaillée en Poor 1988 pour le cas uniforme, dans cette thèse on détaille le non uniforme.
- ①—Décrire  $I_q$  en fonction du quantifieur pour petits  $\Delta$ ;
  - ②—Maximiser  $I_q$
  - ③—Obtenir  $I_q$  maximale



# Approche asymptotique

Evaluation de  $I_q$  quand  $N_I \rightarrow +\infty$ ,  $\Delta_i \rightarrow 0$

$$I_q \approx I_c - \frac{1}{12N_I^2} \int \frac{\left(\frac{\partial S_c(y;x)}{\partial y}\right)^2 f(y;x)}{\lambda^2(y)} dy$$

où  $S_c(y;x)$  – fonction score

$\lambda(y)$  – densité d'intervalles

Densité optimale

Information de Fisher maximale

$$\lambda^*(y) \propto \left(\frac{\partial S_c(y;x)}{\partial y}\right)^{\frac{2}{3}} f^{\frac{1}{3}}(y;x) \quad I_q^* \approx I_c - \frac{2^{-2N_B}}{12} \left[ \int \left(\frac{\partial S_c(y;x)}{\partial y}\right)^{\frac{2}{3}} f^{\frac{1}{3}}(y;x) dy \right]^3$$

# Estimation d'un paramètre de centrage

$$\text{Gaussien} - f(y; x) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{y-x}{\delta}\right)^2}$$

$$\lambda^* = \frac{1}{\delta\sqrt{3\pi}} e^{-\left(\frac{y-x}{\sqrt{3}\delta}\right)^2} \quad I_q^* \approx \frac{2}{\delta^2} [1 - \pi\sqrt{3} 2^{-(2N_B-1)}]$$

$N_B$	Optimale	Uniforme	Approx. non uni.
1	1,27323954 <sup>†</sup>	–	1,27323954
2	1,76503630 <sup>†</sup>	1,76503630	1,75128300
3	1,93090199 <sup>†</sup>	1,92837814	1,92740111
4	1,97874454 <sup>*</sup>	1,97841622	1,98038526
5	1,99468613 <sup>*</sup>	1,99353005	1,99489906
6	1,99867153 <sup>*</sup>	1,99807736	1,99869886
7	1,99966788 <sup>*</sup>	1,99943563	1,99967136
8	1,99991697 <sup>*</sup>	1,99983649	1,99991741

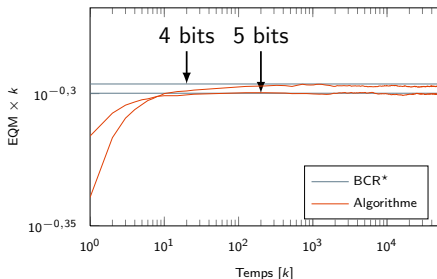
# Application de l'algorithme adaptatif

Approximation des seuils non uniformes –  $\tau_i^* = F_\lambda^{-1} \left( \frac{i}{N_l} \right)$

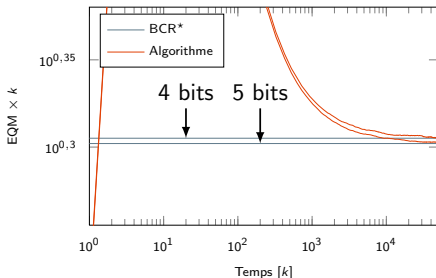
- **Problème** : dépendance en  $x$
- **Solution** :  $\hat{X}_k$  comme  $x$ .

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + \frac{1}{kl_q} \eta(i_k), \quad \eta(i) = \frac{f(\tau_{i-1}^*; x) - f(\tau_i^*; x)}{F(\tau_i^*; x) - F(\tau_{i-1}^*; x)}.$$

Gaussien



Cauchy



# Plan

- ①—Introduction
- ②—Problèmes de base
- ③—Approche adaptative
- ④—Seuils asymptotiquement optimaux
- ⑤—Points principaux et conclusions

# Points principaux et conclusions

## Points

- ①—Etude de la perf. d'estimation avec mesures bruitées et quantifiées
- ②—Proposition d'un algorithme adaptatif de basse complexité
- ③—La perte est très petite pour très peu de bits
- ④—L'infini peut être proche
- ⑤—L'uniforme peut être compétitif

## Conclusions

- ①—L'adaptativité est essentielle
- ③—Approche multi-capteurs/basse résolution largement supérieure à l'approche classique (un capteur à haute résolution), d'où l'intérêt des réseaux de capteurs
- ④—On peut trouver les seuils optimaux pour l'estimation
- ⑤—Mais il se peut que ça soit inutile

# Perspectives

① —  $Q(Y_k) \rightarrow Q(Y_k, \dots, Y_{k+M})$

② — Canaux

③ —  $f?$

④ —  $\sigma_w$  quelconque

⑤ — Problèmes distribués

⑥ — D'autres paramètres

⑦ —  $X_k \rightarrow X(t)$

# Publications

## Conférences

- Rodrigo C. Farias et Jean-Marc Brossier, « Adaptive Estimation Based on Quantized Measurements », IEEE International Conference on Communications (ICC), 2013, Hongrie, présentation orale.
- Rodrigo C. Farias et Jean-Marc Brossier, « Adjustable Quantizers for Joint Estimation of Location and Scale Parameters », IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2013, Canada, poster.
- Rodrigo C. Farias et Jean-Marc Brossier, « Asymptotic Approximation of Optimal Quantizers for Estimation », IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2013, Canada, poster.
- Rodrigo C. Farias et Jean-Marc Brossier, Quantification asymétrique optimale pour l'estimation d'un paramètre de centrage dans un bruit de loi symétrique, Colloque GRETSI, 2013, France, présentation orale (francophone).

## Journal

Rodrigo C. Farias et Jean-Marc Brossier, « Adaptive Quantizers for Estimation », Signal Processing, Elsevier, 2013, accès payant. Version ancienne avec libre accès : <http://arxiv.org/abs/1210.3583> [▶ Lien](#)



Version pdf – 2,5 Mo