HAL
open science

Analyse de la non-linéarité acoustique de contact pour l' évaluation et le contrôle non destructif

Philippe Blanloeuil

To cite this version:

Philippe Blanloeuil. Analyse de la non-linéarité acoustique de contact pour l' évaluation et le contrôle non destructif. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. Français. NNT : 2013BOR14852 . tel-00879225

HAL Id: tel-00879225

https://theses.hal.science/tel-00879225

Submitted on 2 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4852

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Philippe BLANLOEUIL**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mécanique et Ingénierie**

Analyse de la non-linéarité acoustique de contact pour l'Evaluation et le Contrôle Non Destructif

---

Soutenue le : 04/10/2013

Après avis de :

M.	L. Baillet, Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble	**Rapporteurs**
M.	V. Tournat, Chargé de recherche CNRS, LAUM, Le Mans	**Rapporteurs**

Devant la commission d'examen formée de :

M.	O. Bou Matar, Professeur, IEMN, Villeneuve d'Asq	**Président**
M.	L. Baillet, Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble	**Rapporteurs**
M.	V. Tournat, Chargé de recherche CNRS, LAUM, Le Mans	**Rapporteurs**
M.	C. Bacon, Professeur, Université de Bordeaux	**Directeur de thèse**
Mme.	A. Meziane, Maitre de conférence, Université de Bordeaux	**Co-directrice de thèse**

- 2013 -

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département d'Acoustique Physique (APY) de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M) de Bordeaux. Je tiens donc à remercier en premier lieu Mr Eric Arquis, directeur de l'I2M, de m'avoir accueilli dans son laboratoire. Mes remerciements vont aussi à Marc Deschamp et Olivier Poncelet, ancien et actuel directeurs du département APY.

Je remercie Messieurs Laurent Baillet (Professeur à l'université de Grenoble) et Vincent Tournat (Chargé de recherche CNRS) d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit durant ces mois d'été. Merci aussi à Monsieur Olivier Bou Matar (Professeur à l'IEMN) d'avoir présidé le jury de thèse.

J'adresse bien sûr des remerciements particuliers à Christophe Bacon et Anissa Meziane qui m'ont encadré durant ces trois ans. Merci donc à Christophe pour ses relectures et ses remarques précises et constructives. Merci à Anissa, qui m'a remarquablement encadré et m'a accordé sa confiance. Ses conseils et son soutient ont su m'apporter l'aide dont j'avais besoin pour conduire ce travail. Ce fut très agréable de travailler avec une personne aussi sympathique et enthousiaste. Merci, et ne changes rien !

Merci à Anthony Croxford (Université de Bristol) pour avoir participé au volet expérimental de ce travail. Ses connaissances pointues ont contribué à l'avancement de ce projet.

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants chercheurs, maîtres de conférence et ingénieurs de recherche du département APY qui m'ont témoigné leur sympathie et avec qui j'ai pu échanger.

Je remercie évidemment l'ensemble des thésards, anciens et actuels, ainsi que des post-docs qui ont rendus ces trois années agréables entre travail, sorties plus ou moins culturelles, et visites des tavernes de Bordeaux. Merci donc à Edith, Jerôme, Alban et Masha pour leur bonne humeur dans ce bureau, mais aussi à Benoit et Samuel. Merci à Allaoua, Thierry, Daniel, Jeremy, Mathieu, Djoudi, Dima, Guillaume, Samuel, Maroun, Pierric, Julien, Lazhar, Jeremy, Benjamin, Anis, Feng. Enfin, merci à Sandrine et Béatrice qui font un travail formidable.

Mes remerciements vont aussi aux membres de l'association KMGO33 avec qui j'ai passé des super moments, stages et entrainements. Merci pour ce grand défouloir. Enfin, un grand merci aux amis charentais, qui ont toujours étaient là, et à mes parents qui m'ont soutenu.

Table des matières

Remerciements i

Table des matières **iii**

Introduction générale **3**

1 Etat de l'art - Acoustique non-linéaire et modélisation **7**

1.1 Introduction 7

1.2 L'acoustique non-linéaire 8

1.2.1 Non-linéarités acoustiques classiques 9

1.2.2 Non-linéarités acoustiques non-classiques 15

Non-linéarité non-classique de matériau 15

Non-linéarité de contact : CAN 18

1.3 Méthodes de CND non-linéaires 21

1.3.1 Spectroscopie par résonance non-linéaire 21

1.3.2 Harmoniques supérieurs 22

1.3.3 Spectroscopie non-linéaire par modulation d'ondes 25

1.3.4 Sous-harmoniques 27

1.4 Modélisation des interfaces de contact en acoustique non-linéaire 29

1.4.1 Modèles bi-modulaires 30

1.4.2 Modèles ressorts 31

1.4.3 Modèles masse-ressorts 32

1.4.4 Modèles avec lois de contact 33

1.5 Conclusion 36

2 Modèle 1D de l'interaction entre une onde plane et une interface de contact unilatéral avec frottement **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Définition du problème et mise en équations 40

2.2.1 Onde plane longitudinale 41

2.2.2 Onde plane transverse. 42

2.3 Résolution numérique par Différences Finies 43

2.3.1 Onde longitudinale 44

2.3.2 Onde transverse 45

2.3.3 Etude de convergence 47
2.4 Résultats numériques 1D - Analyse physique du contact 49
2.4.1 Onde plane longitudinale 49
2.4.2 Onde plane transverse 50
2.5 Conclusion 53

3 Modélisation de l'interaction entre une onde acoustique et une interface de contact 55
3.1 Introduction 55
3.2 Modèles en dimension 2 - Résolution par Eléments Finis 56
3.2.1 Le code Eléments Finis Plast2D 57
Equations de la mécanique 57
Lois de contact unilatéral avec frottement de Coulomb et pré-contrainte 60
3.2.2 Modèle EF pour l'interaction entre une onde et une interface solide-solide . . 65
Description du modèle 65
Equivalence du calcul direct et du calcul avec reprise 66
Etude de convergence avec pré-contrainte 68
3.2.3 Modèle EF pour l'interaction entre une onde plane et une fissure de longueur finie et d'orientation variable 70
Description du modèle 70
Etude de convergence - raffinage en pointe de fissure 70
3.3 Conclusion 76

4 Interaction non-linéaire entre une onde acoustique et une interface de contact 77
4.1 Introduction 77
4.2 Onde sous incidence normale et interface solide-solide 78
4.2.1 Evolution de l'amplitude des harmoniques supérieurs en fonction de l'état de compression pour une onde longitudinale 78
4.2.2 Evolution de l'amplitude des harmoniques supérieurs en fonction de l'état de compression pour une onde transverse 81
4.3 Validation expérimentale de l'interaction entre une onde transverse et une interface de contact avec frottement 83
4.4 Interaction entre une onde et une fissure d'orientation variable 89
4.4.1 Diffusion de l'onde par une fissure fermée 89
Calcul du champ diffusé par la fissure 89
Onde longitudinale 91
Onde transverse 93
4.4.2 Evolution des contraintes générées sur la fissure 96
4.4.3 Evolution des harmoniques supérieurs pour une onde longitudinale 99
Effet de l'angle d'incidence 99
Effet de l'amplitude de la source. 101

4.4.4 Evolution des harmoniques supérieurs pour une onde transverse 102
Effet de l'angle d'incidence 102
Effet de l'amplitude de la source 106
4.5 Conclusion 109

5 Application de la technique du mixage d'ondes non-colinéaire 111
5.1 Introduction 111
5.2 Méthode de mixage non-colinéaire et interface de contact solide-solide 112
5.2.1 Théorie de la méthode dans le cadre de l'acoustique non-linéaire classique . . 112
5.2.2 Description du modèle 115
5.2.3 Résultats numériques 116
5.2.4 Mécanismes conduisant à la génération de l'onde longitudinale 119
5.2.5 Comparaison avec une étude expérimentale 122
5.3 Méthode de mixage non-colinéaire et fissure fermée 125
5.3.1 Description du modèle 125
5.3.2 Résultats numériques 126
Determination de la position de la fissure 126
Caractéristiques de la fissure 127
Imagerie de la fissure 133
5.4 Conclusion 135

Conclusion générale et perspectives 137

Bibliographie 143

Annexes 157

A Construction du modèle EF dans le cas d'une fissure orientable 159

B Interaction entre une onde et une fissure linéaire 163
B.1 Onde longitudinale 163
B.2 Onde transverse 165

C Interaction entre une onde et une fissure fermée - Effet de la compression 167
C.1 Onde longitudinale 167
C.2 Onde transverse 168

D Géométrie du montage expérimental pour le mixage d'ondes non-colinéaire 171

E Application du modèle numérique à la modulation d'ondes non-linéaire 173

Introduction générale

Le contrôle non-destructif (CND) et l'évaluation non-destructive (END) naissent avec l'émergence de la physique moderne et la découverte des rayons X, des courants de Foucault ou encore de la piezo-électricité. Ces techniques ont connu leur essor au cours des dernières décennies en réponse aux besoins croissants des industries aéronautiques, aérospatiales, nucléaires ou pétrolières, mais aussi grâce aux progrès des moyens électroniques et informatiques.

De par sa définition, le CND présente le principal avantage de renseigner quant à la santé d'un matériau ou d'une structure sans qu'il en résulte des altérations préjudiciables. Ces contrôles occasionnels, périodiques ou continus (pendant le service de la structure) apportent un gain évident en terme de sécurité mais aussi économique, puisqu'ils épargnent ainsi un remplacement systématique et arbitraire des composants.

L'évaluation de la santé d'une pièce mécanique consiste à mettre en évidence toute défectuosité susceptible d'altérer son fonctionnement. Quel que soit le secteur industriel considéré, les pièces mécaniques sont soumises à des sollicitations cycliques ou accidentelles et répondent à un compromis difficile entre poids, performance, sécurité, durée de vie et coût. Ces sollicitations mécaniques, éventuellement associées à un environnement agressif, entraînent l'apparition de défauts au sein de la structure mécanique. Parmi ces défauts, on distingue les hétérogénéités de surface ou de volume. Les premières sont accessibles par une observation directe, bien que souvent invisible à l'oeil nu. Les secondes, de formes et de natures variées, sont localisées dans le volume du matériau. Certains de ces défauts sont ponctuels, qu'il s'agisse de criques, piqûres ou fissures, et sont généralement les plus "nocifs" puisqu'ils provoquent à terme la rupture de la pièce. Devant la grande diversité des défauts rencontrés, de nombreuses méthodes de contrôle ont été développées. On peut citer les méthodes de ressuage, la magnétoscopie, les méthodes par rayonnements ionisants (radiographie, tomographie), les méthodes thermiques (thermographie infrarouge), les méthodes acoustiques (ultrasons, émission acoustique), les méthodes électromagnétiques ou encore les méthodes d'étanchéité.

Parmi les techniques de CND, les méthodes ultrasonores sont un excellent moyen d'inspection, et leur emploi est aujourd'hui très largement répandu. Elles présentent, en effet, l'avantage de se propager le long d'une surface ou dans un volume, et éventuellement sur une grande distance. Elles reposent généralement sur les principes de l'acoustique linéaire dont la théorie est aujourd'hui bien étoffée, et qui permet de décrire la réflexion, la diffusion, la transmission, l'atténuation ou l'absorption d'une onde acoustique. La présence d'une hétérogénéité structurelle ou matérielle se traduit par des modifications de phase ou d'amplitude sur le signal reçu. L'analyse de ces propriétés et du temps de vol des ondes permet la détection du défaut. Il s'agit de la résolution du problème

inverse. La fréquence du signal, elle, reste identique à celle de l'onde incidente. Cependant, un défaut de petite dimension qui n'affecte pas de façon notable l'amplitude ou la phase de l'onde reste hors de portée pour les méthodes linéaires classiques.

Il est primordial de pouvoir détecter l'endommagement le plus précocement possible afin d'apporter une modification ou une réparation à une pièce mécanique et ainsi éviter son remplacement, ou pire, sa détérioration. Cependant, les techniques classiques n'indiquent l'apparition d'un défaut qu'à partir de 80 ou 90 % de la durée de vie en fatigue. Il est alors trop tard pour intervenir.

L'endommagement est souvent précédé par des modifications locales des caractéristiques mécaniques du matériau, ce qui accroît ses propriétés non-linéaires. Lors de la propagation, le spectre de l'onde s'enrichit de nouvelles fréquences. On parle d'acoustique non-linéaire. La non-linéarité acoustique se manifeste communément par la génération d'harmoniques, c'est à dire de composantes fréquentielles multiples de la fréquence incidente. Ce phénomène, théorisé dans les années 70, a pu être utilisé pour évaluer les propriétés mécaniques non-linéaires des matériaux, ou suivre certains types d'endommagement comme la plasticité.

Une fissure fermée peut être vue comme une hétérogénéité de volume nul. Par conséquent, il est difficile de la détecter à partir des méthodes conventionnelles puisqu'elle entraîne peu de variation de phase ou d'amplitude. Pourtant, qu'elle soit ouverte ou fermée, une fissure détériore les propriétés mécaniques d'une structure. Une fissure fermée peut cependant engendrer une non-linéarité acoustique. Celle-ci provient de la dynamique de contact entre les faces de la fissure, lesquelles sont activées par le passage de l'onde. Là encore, cette non-linéarité est synonyme d'enrichissement spectral, avec par exemple l'apparition d'harmoniques supérieurs ou inférieurs. Ayant été mis en évidence expérimentalement, ces phénomènes sont peu exploités dans les méthodes de CND industrielles. La raison à cela réside dans l'existence de plusieurs verrous techniques. Premièrement, l'activation des phénomènes non-linéaires requiert des ondes de fortes amplitudes. Dans ce cas, le système électronique est fortement sollicité et possède lui même un comportement non-linéaire, source d'harmoniques supérieurs. Il est alors difficile de différencier l'origine de la non-linéarité. Deuxièmement, l'amplitude de ces nouvelles composantes fréquentielles est souvent faible et il est parfois difficile d'en extraire la valeur par rapport au bruit de la mesure.

L' acoustique non-linéaire possède le potentiel pour permettre la détection et la caractérisation de fissures fermées. L'enjeu est de mettre en place une méthode sensible à ce type de défauts (pour les détecter et les caractériser) tout en étant peu dépendant des autres non-linéarités du système (matériau, amplification électronique...). Dans cet objectif, une compréhension fine des phénomènes physiques mis en jeu permet d'augmenter les chances d'obtenir des signatures non-linéaires spécifiques pouvant être exploitées dans une méthode de CND. Ce travail de thèse porte sur l'étude de l'interaction entre une onde acoustique et une fissure fermée. L'objectif central est de comprendre les mécanismes à l'origine de la non-linéarité acoustique générée par une fissure fermée, pour à terme, être capable de proposer une méthode de CND exploitant ces effets au maximum. La non-linéarité est portée par des phénomènes de contact, dynamiques et couplés, qui rendent complexe l'interprétation des résultats. L'approche retenue passe par la modélisation numérique. Un modèle Eléments Finis capable de gérer soigneusement les problèmes de contact est mis en

place. Ce modèle utilise une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb pour prendre en compte ces phénomènes. En première approche, une interface de contact entre deux solides est considérée, afin de se concentrer sur la non-linéarité engendrée par le contact. Cela permet d'une part, de valider le modèle numérique en comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature, et d'autre part, de donner des premiers éléments de compréhension quant à la relation entre la dynamique de contact et la non-linéarité acoustique. Les résultats sont appuyés par une étude expérimentale réalisée pour l'analyse de l'interaction entre une onde de cisaillement et une interface de contact. Absente de la littérature, cette réalisation expérimentale est l'un des apports de cette thèse. Un second modèle est ensuite proposé pour traiter l'interaction entre une onde et une fissure fermée d'orientation variable. Couplé à une méthode de propagation analytique, ce modèle permet d'étudier la diffusion non-linéaire de la fissure fermée en champ lointain, ce qui à notre connaissance, n'a pas encore été présenté dans la littérature. L'évolution des harmoniques supérieurs est analysée en fonction de divers paramètres influents, et en fonction de la dynamique de contact. Enfin, l'obtention de ces résultats et la compréhension des phénomènes physiques permet de proposer une méthode originale affichant des performances prometteuses pour la détection et la caractérisation d'une fissure fermée.

Le premier chapitre délimite le cadre de l'acoustique non-linéaire. On y décrit la différence entre la non-linéarité acoustique classique et non-classique, en prenant soin d'expliquer l'origine de celles-ci. Ces effets non-linéaires ont de multiples conséquences sur la propagation acoustique, parmi lesquelles on retrouve la distorsion du signal et la génération de nouvelles fréquences dans le spectre de l'onde. Ces modifications peuvent être utilisées pour identifier l'origine de la non-linéarité et donc l'endommagement. Différentes techniques de CND en acoustique non-linéaire sont également détaillées. L'objectif de cette thèse étant la mise en place d'outils permettant l'étude de l'interaction onde - fissures fermées, on insistera sur la notion de contact acoustique non-linéaire (CAN), terme général utilisé pour décrire les phénomènes de contact ayant lieu le long d'une interface de contact excitée acoustiquement. La dernière partie du premier chapitre est par conséquent dédiée à la modélisation du CAN. L'analyse des méthodes existantes permet de dégager les pré-requis quant aux caractéristiques d'un outil numérique adapté.

Le second chapitre présente un premier modèle 1D pour l'étude du CAN. Ce modèle permet l'étude de la réflexion d'une onde sur une interface de contact semi-rigide. Les équations du problème traité sont présentées et la résolution est effectuée par la méthode des différences finies. L'analyse de l'onde réfléchie permet de mettre en évidence les effets du CAN sur le contenu fréquentiel de l'onde. On explique en particulier comment l'ouverture ou le glissement de l'interface lors de l'interaction avec l'onde incidente, modifient le spectre du signal reçu.

L'interaction entre une onde et une interface de contact, ou une fissure, est un phénomène complexe. Deux modèles éléments finis 2D sont présentés dans le troisième chapitre. Le premier permet l'étude de l'interaction entre une onde et une interface de contact formée par deux solides en contact, le second pour une fissure fermée d'orientation quelconque. Une attention particulière est accordée à l'étude de la convergence de ces modèles. En effet, ce point est primordial pour assurer la validité des résultats obtenus.

Les modèles numériques sont exploités dans le quatrième chapitre. Les résultats obtenus dans le cas d'une interface de contact formée par deux solides sont présentés, et comparés aux données fournies par la littérature. Un protocole expérimental est proposé pour étudier la non-linéarité acoustique créée par l'interaction entre une onde de cisaillement et une interface de contact. Le reste du chapitre est dédié à l'interaction entre une onde et une fissure. Le modèle numérique est couplé à une méthode analytique pour déterminer la diffusion de l'onde par la fissure. Les effets non-linéaires sont étudiés en détails, en fonction de l'orientation de la fissure ou de l'amplitude de l'onde incidente. Les résultats sont reliés à la dynamique de contact.

Le cinquième chapitre tire parti des résultats recueillis dans les chapitres précédents pour étudier une méthode de CND permettant la détection et la caractérisation de fissures fermées, indépendamment de la non-linéarité du système électronique. Il s'agit de la méthode du mixage d'ondes non-colinéaire, qui est appliquée ici pour la première fois à une interface de contact et une fissure. Les résultats numériques sont encourageants et des premiers éléments expérimentaux confirment une partie des résultats obtenus. Enfin, la compréhension des interactions entre les ondes incidentes et l'interface de contact permet de fournir des pistes d'optimisation de la méthode mise en place.

Enfin, le dernier chapitre dresse le bilan du travail accompli pendant cette thèse. Il y est aussi présenté des pistes pour poursuivre l'étude de certains points, et notamment en ce qui concerne le mixage d'ondes non-colinéaire.

Chapitre 1

Etat de l'art - Acoustique non-linéaire et modélisation

1.1 Introduction

Puisque les caractéristiques de la propagation des ondes acoustiques sont directement reliées aux propriétés du matériau, les méthodes ultrasonores comptent parmi les méthodes de contrôle non-destructif (CND) les plus efficaces pour évaluer l'état de santé d'un matériau. Traditionnellement, les méthodes de CND ultrasonores reposent sur la théorie de l'élasticité linéaire. Dans ce cas, le matériau testé propage une onde dont l'amplitude varie linéairement avec l'amplitude de l'excitation, conformément à la loi de Hooke. La plupart des phénomènes acoustiques dans les matériaux est associée aux propriétés élastiques linéaires. Les méthodes de CND classiques consistent alors à mesurer l'évolution d'un paramètre, comme la vitesse de propagation, l'atténuation, ou encore les coefficients de transmission et de réflexion des ondes renvoyées par une interface, afin de déterminer les propriétés mécaniques du matériau, d'une interface, ou de détecter la présence d'un défaut. Un défaut va modifier la phase ou l'amplitude du signal mesuré et ainsi être détecté. Cependant, si la zone endommagée ne fait pas suffisamment obstacle à la propagation acoustique, comme ce peut être le cas pour une distribution de micro-fissures ou une fissure fermée, les méthodes CND linéaires ne sont plus efficaces. Pourtant, une fissure fermée est tout aussi fragilisante qu'une fissure ouverte. Un moyen de dépasser cette limite est de recourir aux méthodes acoustiques non-linéaires. Contrairement aux méthodes linéaires qui s'appuient sur des effets d'amplitude ou de phase, les méthodes non-linéaires sont basées sur des modifications du contenu fréquentiel de l'onde acoustique lors de sa propagation. La modification de la fréquence du signal, voire l'apparition de nouvelles fréquences dans le spectre, sont le résultat de l'interaction entre une onde de forte amplitude et des hétérogénéités, comme une zone de déformation plastique, une fissure ou une interface de contact ayant un comportement mécanique non-linéaire.

Lorsqu'on évoque une méthode de CND, l'objectif est de détecter la présence d'un défaut, mais aussi d'en donner les caractéristiques, comme la position ou la dimension. Cette thèse concerne la détection et la caractérisation de fissures fermées dans des matériaux métalliques par des méthodes acoustiques non-linéaires. Pour cela, notre approche consiste d'abord à analyser l'interaction entre

une onde et une fissure, pour ensuite passer à l'étude d'une méthode de CND. Les non-linéarités acoustiques sont multiples et les mécanismes à leur origine sont différents selon le type de matériau ou d'endommagement. Un de ces mécanismes concerne en particulier les fissures fermées : c'est le contact acoustique non-linéaire (CAN). Ce premier chapitre introduit donc les différents types de non-linéarité acoustique que l'on peut rencontrer dans un solide, et en particulier le CAN. Plusieurs méthodes de CND ont été développées à partir de ces effets non-linéaires, pour suivre l'endommagement d'un solide, ou révéler la présence d'un défaut. Concernant les fissures fermées, des travaux expérimentaux [1] ont démontré la possibilité de détecter une fissure ou une interface fermée, cependant, l'accès à ses caractéristiques reste pour l'instant limité. La seconde partie de ce chapitre passe en revue les méthodes de CND non-linéaires existantes. L'interaction entre une onde et une interface de contact est un phénomène complexe qu'il est difficile de traiter analytiquement. Dans ce travail, on souhaite mettre en place un modèle numérique qui permette l'analyse et la compréhension des phénomènes non-linéaires crées par une interface de contact. L'objectif à terme est d'étudier la faisabilité de nouvelles techniques de CND ou d'optimiser celles qui existent. La dernière partie de ce chapitre est donc dédiée à la modélisation des interfaces de contact en acoustique.

1.2 L'acoustique non-linéaire

Bien que les premières manifestations de phénomènes non-linéaires aient été observées au XVIIIème siècle, le champ de l'acoustique non-linéaire ne s'est fortement développé qu'à partir des années 60. Jusqu'alors, l'acoustique linéaire répondait largement aux besoins d'analyse de la plupart des phénomènes physiques. D'autre part, l'acoustique non-linéaire requiert un cadre mathématique qui n'a été mis en place que relativement récemment.

Avant de décrire les mécanismes de l'acoustique non-linéaire, il est important de rappeler ce que l'on entend par non-linéarité. Un système acoustique est dit linéaire si, pour un signal d'entrée sinusoïdal pur, le signal de sortie est lui-même sinusoïdal pur, et de même fréquence. Une des propriétés essentielles d'un système linéaire est donc de conserver le nombre de composantes fréquentielles contenu dans un signal. Cette caractéristique est perdue pour un système non-linéaire. Le signal de sortie peut présenter des distorsions, un comportement pseudo-périodique, voire chaotique. Dans le cas des solides, on peut classer les mécanismes à l'origine de la perte de linéarité en trois catégories : les non-linéarités du matériau, les non-linéarités de contact et les non-linéarités géométriques.

Pour les non-linéarités du matériau, la relation entre les contraintes et les déformations, appelée loi de comportement, est non-linéaire. Par exemple, pour les matériaux élasto-plastiques, le passage des déformations élastiques aux déformations plastiques correspond à une relation contrainte-déformation irréversible, ce qui caractérise bien un comportement non-linéaire. D'autres matériaux, comme les élastomères, sont totalement élastiques mais leurs lois de comportement ne sont pas linéaires. Les non-linéarités de contact sont des non-linéarités qui apparaissent à l'interface entre deux solides d'un système. On peut citer par exemple le frottement sec qui conduit à des alternances d'adhérence et de glissement, ou encore le contact intermittent qui s'apparente à des chocs

entre deux constituants du système. Les non-linéarités géométriques sont généralement associées aux grandes déformations. On ne les rencontrera pas dans dans le cadre de l'acoustique, qui s'inscrit dans les hypothèses des petites déformations. Un matériau présentant une ou plusieurs de ces caractéristiques constituera un système non-linéaire vis à vis de la propagation acoustique. On parle alors d'acoustique non-linéaire.

Avant de décrire comment ces phénomènes affectent la propagation d'une onde, il convient de marquer la différence entre les non-linéarités acoustiques classiques et non-classiques. Les premières font généralement référence à des comportements d'élasticité non-linéaire. Les secondes englobent les comportements inélastiques que peuvent être l'hystérésis ou le contact. Le concept de CAN a été introduit pour retranscrire le comportement d'une fissure ou d'une interface de contact lors de l'interaction avec une onde acoustique de forte amplitude [2]. Les phénomènes liés à la dynamique de contact engendrent des distorsions de forte amplitude, en général supérieures à celles issues de la non-linéarité classique.

Enfin, quel que soit le type de non-linéarité mis en jeu, les principes de l'acoustique linéaire ne sont plus valables. Il existe en effet une dépendance entre l'amplitude de l'excitation et les caractéristiques de la réponse acoustique. De même, le principe de superposition n'est plus applicable et deux ondes peuvent interagir entre elles.

1.2.1 Non-linéarités acoustiques classiques

Les matériaux courants ont un comportement intrinsèquement non-linéaire du fait d'hétérogénéités structurelles présentes au niveau microscopique ou nanoscopique, comme des irrégularités dans le réseau cristallin, des décohésions à l'échelle des grains du matériau ou des dislocations. Ces défauts diffus au sein du matériau sont de petite taille devant la longueur d'onde et ont donc habituellement un effet négligeable sur la propagation des ondes acoustiques [3]. Toutefois, il existe des matériaux où cette non-linéarité volumique intrinsèque ne peut être négligée. Il s'agit principalement de matériaux géologiques ou granulaires [4, 5, 6] et des matériaux biologiques [7, 8]. En règle générale, l'endommagement est synonyme d'augmentation du nombre d'hétérogénéités et élève donc le niveau de non-linéarité. C'est aussi le cas pour les matériaux métalliques [9, 10]. Lors d'un processus de fatigue mécanique, les dislocations vont se rejoindre par coalescence pour finalement créer une fissure de fatigue, laquelle va entrainer la ruine de la structure lors de sa propagation. Malgré la faible dimension des dislocations par rapport à la longueur d'onde, les méthodes acoustiques non-linéaires sont sensibles à l'augmentation de la densité de dislocations, et permettent donc d'anticiper la rupture de la pièce mécanique.

Les équations de l'acoustique linéaire reposent sur la théorie de l'élasticité et la loi de Hooke. Cette dernière est en réalité une théorie approchée. Elle est basée sur le développement limité de l'énergie élastique par rapport au tenseur des déformations, ce développement étant arrêté aux termes du second ordre. Par conséquent, les composantes du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires des composantes du tenseur des déformations et les équations du mouvement sont linéaires. Le principe de superposition en est une conséquence. Pour prendre en compte les effets non-linéaires, il est nécessaire de développer la loi de comportement élastique aux ordres

supérieurs. On se limitera ici aux termes du troisième ordre [11].

Soit $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ le vecteur déplacement, où $\boldsymbol{x}$ correspond aux coordonnées de l'état déformé alors que $\boldsymbol{a}$ correspond aux coordonnées de l'état initial. Le tenseur gradient de la transformation est défini par :

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{I} + \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{a}}, \tag{1.1}$$

où $\boldsymbol{I}$ est le tenseur identité. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$ est donné par la relation :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})$$

soit :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial a_j} + \frac{\partial U_j}{\partial a_i} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i}\frac{\partial U_k}{\partial a_j}\right). \tag{1.2}$$

Pour exprimer l'équation de conservation d'équilibre dans une description Lagrangienne, les déplacements sont donnés par rapport à l'état initial. On introduit le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\boldsymbol{P} = (\rho_0/\rho)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}$, où ρ et ρ_0 sont respectivement les masses volumiques au repos et à l'état déformé, et $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. L'équation d'équilibre est alors donnée par :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = \nabla_a \cdot \boldsymbol{P}, \tag{1.3}$$

où l'opérateur gradient ∇_a est écrit par rapport aux coordonnées matérielles $\boldsymbol{a}$. Il reste maintenant à exprimer le tenseur des contraintes en fonction des déplacements.

L'énergie de déformation interne W ne dépendant que des composantes du tenseur des déformations [12], les constantes matérielles du solide sont définies à partir du développement de l'énergie $W(\boldsymbol{E})$ par rapport au tenseur des déformations :

$$\rho_0 W = \frac{1}{2}C_{ijkl}E_{ij}E_{kl} + \frac{1}{3!}C_{ijklmn}E_{ij}E_{kl}E_{mn} + \cdots . \tag{1.4}$$

Les termes C_{ijkl} et C_{ijklmn} sont les modules d'élasticité de second et de troisième ordre [13]. Le lien avec le tenseur des contraintes est fourni par la relation [12] :

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial(\partial U_i/\partial a_j)}. \tag{1.5}$$

A partir des équations (1.4) et (1.5) on obtient le tenseur des contraintes [11] :

$$P_{ij} = C_{ijkl}\frac{\partial U_k}{\partial a_l} + \frac{1}{2}M_{ijklmn}\frac{\partial U_k}{\partial a_l}\frac{\partial U_m}{\partial a_n} + \cdots \tag{1.6}$$

où

$$M_{ijklmn} = C_{ijklmn} + C_{ijln}\delta_{km} + C_{jnkl}\delta_{im} + C_{jlmn}\delta_{ik}. \tag{1.7}$$

La notation δ_{ij} correspond au symbole de Kronecker. Dans le cas général, on compte donc respectivement 21 et 56 coefficients distincts pour chacun de ces tenseurs $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{M}$. Cependant, le nombre de coefficients distincts peut être réduit par des considérations de symétrie au sein du matériau.

En remplaçant l'équation (1.6) dans l'équation d'équilibre (1.3), on obtient finalement l'équation non-linéaire du mouvement avec la précision désirée selon l'ordre du développement effectué :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_j \partial a_l}\left(C_{ijkl} + M_{ijklmn}\frac{\partial U_m}{\partial a_n} + \cdots\right). \tag{1.8}$$

Pour comprendre comment cette formulation non-linéaire va agir sur la propagation d'une onde élastique, on considère le cas unidimensionnel d'une onde longitudinale se propageant dans un solide isotrope. Les déplacements se réduisent à une composante : $\boldsymbol{U} = (u(a_1,t),0,0)$. En se limitant aux termes du troisième ordre, et en utilisant la notation de Voigt pour la contraction des indices, l'équation du mouvement (1.8) devient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial a_1^2} \left(C_{11} + (C_{111} + 3C_{11}) \frac{\partial u}{\partial a_1} \right). \tag{1.9}$$

Le terme $C_{111} = C_{111111}$ est ici la seule constante d'élasticité du troisième ordre. La vitesse de propagation d'une onde longitudinale dans un solide isotrope étant $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$ (dans le cas des petites déformations), et sachant que $C_{11} = \lambda + 2\mu$, on arrive finalement à l'équation d'onde non-linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial a_1^2} \left(1 + \left(3 + \frac{C_{111}}{\rho_0 c_L^2} \right) \frac{\partial u}{\partial a_1} \right). \tag{1.10}$$

On définit le coefficient non-linéaire du solide par :

$$\beta = -\left(\frac{3}{2} + \frac{C_{111}}{2\rho_0 c_L^2} \right) \tag{1.11}$$

Ce coefficient quantifie le niveau de non-linéarité du matériau et est relié aux constantes élastiques d'ordre supérieur. L'équation des ondes s'écrit finalement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \left(1 - 2\beta \frac{\partial u}{\partial a_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial a_1^2} \tag{1.12}$$

On peut trouver dans la littérature d'autres formulations pour le coefficient de non-linéarité β [6, 11], en fonction des constantes d'élasticité de Landau [12] $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ ou de Murnaghan [14] l,m,n :

$$\beta = -\left(\frac{3}{2} + \frac{\mathcal{A} + 3\mathcal{B} + \mathcal{C}}{\rho_0 c_l^2} \right) = -\left(\frac{3}{2} + \frac{l + 2m}{\rho_0 c_l^2} \right). \tag{1.13}$$

Le coefficient de non linéarité est de l'ordre de l'unité pour les métaux sains, avec par exemple $\beta = 4{,}4$ pour l'acier, et de plusieurs ordres supérieurs pour les roches $\beta \simeq 1000 - 10000$ [15].

Comme cela a été dit au début de ce chapitre, la non-linéarité du matériau va engendrer des distorsions sur le signal lors de sa propagation, lesquelles se manifestent par l'apparition d'harmoniques supérieurs dans le spectre. Le phénomène est illustré par la figure 1.1. Pour mettre en évidence la génération des harmoniques supérieurs, l'équation d'onde non-linéaire (1.12) est résolue par la méthode des perturbations, comme cela est proposé par Zarembo et Krasil'nikov [13]. Cette démarche est reprise dans de nombreux travaux de la littérature [15, 16, 17].

Le déplacement u est écrit comme la somme des déplacements d'ordre 1, 2, etc :

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots, \tag{1.14}$$

où $u^{(1)}$ est la solution de l'équation d'onde linéaire :

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial a_1^2}. \tag{1.15}$$

La solution $u^{(1)}$ est une onde progressive d'amplitude A_1, de nombre d'onde k et de pulsation ω :

$$u^{(1)} = A_1 \cos(kx - \omega t). \tag{1.16}$$

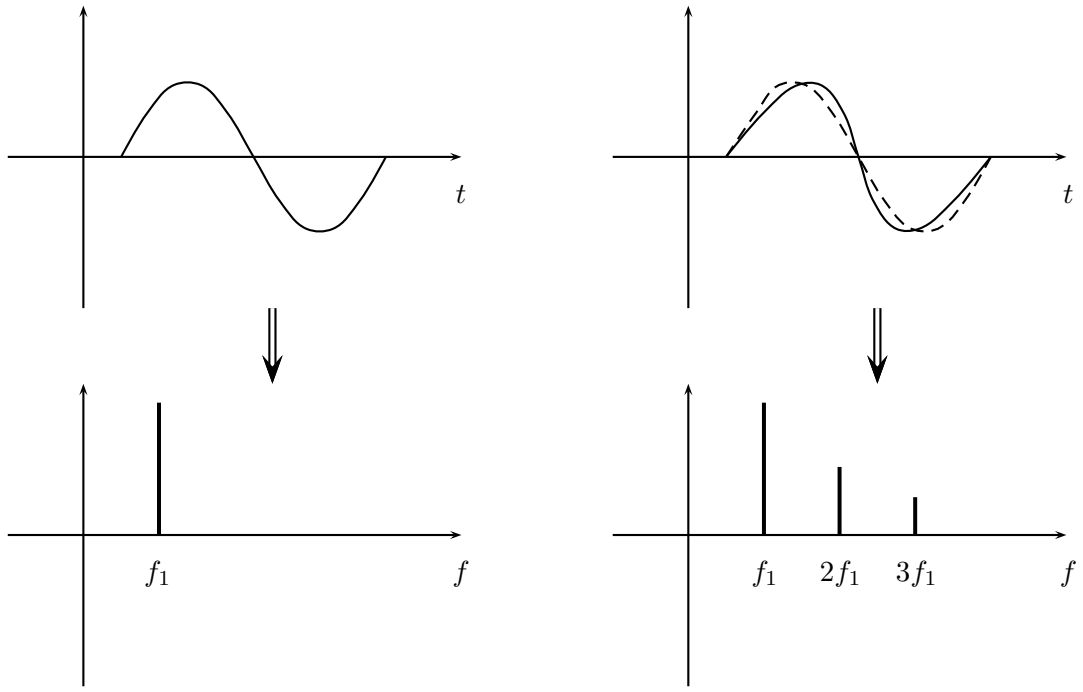


Figure 1.1 – Distorsion non-linéaire du signal temporel et enrichissement du spectre associé lors de la propagation dans un milieu non-linéaire. Apparition des harmoniques supérieurs.

Le développement (1.14) est limité à l'ordre 2 puis introduit dans l'équation (1.12). Les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 sont négligés. Puisque $u^{(1)}$ est la solution de l'équation (1.15), l'équation portant sur les perturbations de second ordre est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial a_1^2} - 2c^2\beta \frac{\partial u^{(1)}}{\partial a_1}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial a_1^2}. \tag{1.17}$$

Connaissant l'expression de $u^{(1)}$, on aboutit à l'équation d'onde du second ordre :

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial a_1^2} - c^2\beta A_1^2 k^3 \sin(2(ka_1 - \omega t)) \tag{1.18}$$

La résolution de cette dernière équation est réalisée en supposant que la solution à l'ordre 2 prend la forme générale suivante [17] :

$$u^{(2)} = f(a_1)\sin(2(ka_1 - \omega t)) + g(a_1)\cos(2(ka_1 - \omega t)). \tag{1.19}$$

La solution finalement obtenue pour l'équation d'onde non-linéaire (1.12) est alors [11, 17] :

$$u = A_1 \cos(ka_1 - \omega t) - \frac{1}{4}\beta A_1^2 k^2 a_1 \cos(2(ka_1 - \omega t)) \tag{1.20}$$

La solution (1.20) fait apparaitre un second harmonique dont on note l'amplitude A_2. Ce second harmonique présente deux caractéristiques intéressantes. Premièrement, son amplitude dépend du carré de l'amplitude de l'harmonique fondamental. Cette propriété a été démontrée expérimentalement [9, 10, 18]. On peut alors définir le paramètre non-linéaire β à partir du rapport des amplitudes A_1 et A_2. En effet, si A_2 est l'amplitude du second harmonique,

$$\beta = \frac{4A_2}{A_1^2 k^2 a_1}. \tag{1.21}$$

Puisque A_2 est proportionnel à A_1^2, le paramètre β ainsi défini doit être indépendant de l'amplitude de l'excitation. Lors de mesures, a_1 et k étant fixés, on a l'habitude de définir plus simplement :

$$\beta^\star = \frac{A_2}{A_1^2}. \tag{1.22}$$

Cette dernière définition de $\beta^\star$ est très largement utilisée en pratique pour quantifier et suivre la non-linéarité d'un matériau [10, 19].

Deuxièmement, la dépendance linéaire de l'amplitude A_2 par rapport à la distance de propagation a_1. La non-linéarité considérée étant répartie dans le volume du matériau, les distorsions vont s'accumuler au cours de la propagation. Cet effet cumulatif entraine l'augmentation du second harmonique. Cette dépendance est rappelée dans des travaux expérimentaux [9, 19].

Lors de la propagation d'une onde dans un milieu non-linéaire, le signal est distordu, ce qui se traduit donc par l'apparition de nouveaux harmoniques dans le domaine fréquentiel. Le travail précédent, qui concernait la génération du second harmonique, peut être étendu à l'onde de cisaillement. Pour cela, il est nécessaire de faire intervenir les constantes élastiques du quatrième ordre dans l'équation (1.6). Le développement des calculs n'est pas présenté ici. La dépendance du troisième harmonique par rapport à l'harmonique fondamental est alors cubique [20]. Le second paramètre non-linéaire δ est alors défini de la manière suivante :

$$\delta = \frac{16A_3}{A_1^3 k^4 a_1^2}. \tag{1.23}$$

L'amplitude du troisième harmonique A_3 présente aussi un caractère cumulatif. On définit communément ce paramètre non-linéaire par :

$$\delta^\star = \frac{A_3}{A_1^3}. \tag{1.24}$$

Outre la création de nouveaux harmoniques, les non-linéarités du matériau se manifestent aussi par des variations de la vitesse de propagation des ondes, en particulier lorsqu'un chargement statique est appliqué sur le solide. Ce phénomène est appelé effet acousto-élastique. Ces variations de vitesse peuvent être reliées aux coefficients élastiques de troisième ordre. De fait, l'utilisation de l'effet acousto-élastique est la méthode la plus répandue pour mesurer les constantes élastiques du troisième ordre. Cette méthode suppose cependant des moyens de mesure des vitesses de propagation extrêmement précis, puisque les variations sont relativement faibles ($\sim 10^{-5}$ m.s^{-1}MPa^{-1} pour l'aluminium).

La théorie sur laquelle sont basées les méthodes acousto-élastiques a été développé par Hughes et Kelly [21] dans le cas de matériaux élastiques isotropes, étendue par Toupin et Bernstein [22] pour les solides purement élastiques de symétrie quelconque, et par Johnson [23] pour les solides élasto-plastiques.

Le matériau testé étant contraint et déformé, il faut donc distinguer trois états différents, chacun ayant son système de coordonnées. L'état naturel correspond au solide préalablement à toutes déformations ; ses coordonnées sont notées $\boldsymbol{a}$. L'état initial, noté $\boldsymbol{X}$, correspond au solide déformé une fois le chargement statique appliqué. Enfin, l'état actuel est caractérisé par les coordonnées $\boldsymbol{x}$ et correspond au solide déformé dans lequel une onde acoustique se propage.

Pour des raisons de simplicité, on considère un matériau isotrope. L'état de contrainte et de déformation est supposé uniforme et correspond aux déplacements statiques $\boldsymbol{U}^s$, tels que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{U}^s$. L'onde utilisée pour mettre en évidence l'effet acousto-élastique entraine des petits déplacements $\boldsymbol{U}^d$ tels que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}^d$. Les équations du mouvement sont à nouveau obtenues à partir des équations (1.3) et (1.6), développées uniquement à l'ordre 2 et linéarisées par rapport aux coordonnées $\boldsymbol{a}$. L'équation (1.8) est réécrite avec les coordonnées initiales $\boldsymbol{X}$ qui coïncident avec les coordonnées instantanées $\boldsymbol{x}$ du fait du caractère infinitésimal de $\boldsymbol{U}^d$:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i^d}{\partial t^2} = B_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k^d}{\partial X_j \partial X_l}, \tag{1.25}$$

où $\boldsymbol{B}$ est le tenseur effectif des rigidités dont les coefficients sont constants puisque les champs de contraintes et de déformations initiaux sont supposés constants [11] :

$$\begin{aligned} B_{ijkl} = C_{ijkl} + C_{ijklmn}\frac{\partial U_m^s}{\partial X_n} + C_{ijqr}\delta_{ik}\frac{\partial U_q^s}{\partial X_r} + C_{rjkl}\frac{\partial U_i^s}{\partial X_r} \\ + C_{irkl}\frac{\partial U_j^s}{\partial X_r} + C_{ijrl}\frac{\partial U_k^s}{\partial X_r} + C_{ijkr}\frac{\partial U_l^s}{\partial X_r}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Pour une onde plane progressive se propageant dans la direction $\boldsymbol{n}$, l'équation (1.25) conduit au système d'équations

$$(\Gamma_{il} - \rho_0 v^2 \delta_{il}) U_l^d = 0, \tag{1.27}$$

où $\Gamma_{il} = B_{ijkl} n_j n_k$ est le tenseur de Christoffel généralisé. En choisissant la direction de propagation $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1$, on obtient les relations entre les vitesses des ondes longitudinales v_L et transverses v_T d'une part, et les contraintes et les déformations d'autre part [21] :

$$\begin{cases} \rho_0 v_L^2 = \rho_0 c_L^2 + \sigma_{11}^s + (4\rho_0 c_L^2 + C_{111})\varepsilon_{11}^s + C_{112}(\varepsilon_{22}^s + \varepsilon_{33}^s) \\ \rho_0 v_{T1}^2 = \rho_0 c_T^2 + \sigma_{11}^s + (2\rho_0 c_T^2 + C_{166})(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{22}^s) + C_{144}\varepsilon_{33}^s \\ \rho_0 v_{T2}^2 = \rho_0 c_T^2 + \sigma_{11}^s + (2\rho_0 c_T^2 + C_{166})(\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{33}^s) + C_{144}\varepsilon_{22}^s \end{cases} \tag{1.28}$$

où $\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i^s}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j^s}{\partial X_i}\right)$ et $\sigma_{ij}^s = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^s$ sont les déformations et les contraintes statiques linéaires engendrées par le chargement statique. En faisant varier le chargement appliqué au solide, on peut donc remonter aux constantes élastiques du troisième ordre à partir des mesures de vitesses de propagation [21, 24]. Puisque la vitesse de propagation est liée à l'état de contrainte, des méthodes basées sur l'acousto-élasticité permettent aussi de mesurer l'état de contrainte existant dans une pièce, et ainsi d'évaluer la valeur d'éventuelles contraintes résiduelles [25, 26]. Enfin, l'endommagement ayant un impact sur les constantes élastiques d'ordre supérieur, les méthodes acousto-élastiques permettent aussi de suivre le processus de fatigue d'une pièce mécanique [27].

L'acoustique non-linéaire classique traduit les comportements acoustiques liés aux non-linéarités du matériau. Ces dernières sont prises en compte dans les équations de la mécanique par l'introduction des constantes élastiques d'ordre supérieur. On est alors capable d'expliquer la génération d'harmoniques supérieurs dont les amplitudes sont reliées aux paramètres non-linéaires β et δ. Cette non-linéarité volumique se manifeste par un caractère cumulatif lors de la propagation acoustique. Par ailleurs, les paramètres non-linéaires sont sensibles à l'endommagement. La génération d'harmoniques supérieurs peut être utilisée comme technique de CND pour suivre l'état de santé d'une pièce mécanique.

La non-linéarité considérée jusqu'à présent est liée aux micro-défauts répartis dans le volume du matériau. Toutefois, les harmoniques supérieurs générés dans certains matériaux peuvent présenter des comportements différents de ceux que leur prête la théorie non-linéaire classique. C'est en particulier le cas pour les matériaux géologiques, où les lois d'évolution quadratiques et cubiques des harmoniques supérieurs peuvent ne plus être valides. D'autre part, les harmoniques supérieurs peuvent aussi être générés par des défauts localisés comme par exemple les fissures. Les effets non-linéaires sont de forte amplitude et montrent des effets de seuil et d'hystérésis. Ces phénomènes sont regroupés sous le terme de non-linéarité non-classique.

1.2.2 Non-linéarités acoustiques non-classiques

Certains matériaux présentent un fort comportement non-linéaire vis-à-vis de la propagation acoustique. Des phénomènes particuliers viennent s'ajouter à ceux décrits dans la partie précédente. On présente maintenant ces comportements en faisant notamment la distinction entre les non-linéarités volumiques d'une part, et les non-linéarités localisées comme le contact acoustique non-linéaire (CAN) d'autre part.

Non-linéarité non-classique de matériau

En voulant déterminer la courbe contrainte-déformation de matériaux géologiques à partir d'essais quasi-statiques, Johnson et Rasolofosaon ont montré que ces matériaux ont un comportement non-linéaire hystérétique [4]. Un protocole de chargement en contrainte analogue à celui présenté dans la figure 1.2.(a) conduit à la courbe contrainte-déformation 1.2.(b). Cette dernière met en évidence une forte non-linéarité qui se traduit par l'apparition de boucles d'hystérésis multi-échelles. On remarque aussi sur la figure 1.2.(b) que lorsque la contrainte passe par le niveau de contrainte A pour la seconde fois, la trajectoire décrite par la courbe revient sur la trajectoire qui précédait la boucle interne AB ; on parle de "mémoire discrète" [28, 29]. Le comportement du matériau est donc sensible à l'historique de chargement. Les phénomènes d'hystérésis et de mémoire sont attribués à des mécanismes de friction ou de décohésion entre les grains du matériau, dans les régions d'un réseau cristallin perturbé par des dislocations ou des micro-fissures. Ces comportements ne sont pas observés sur des échantillons non-fissurés ou non-granulaires. On parle alors de comportement "non-linéaire non-classique", en opposition à la non-linéarité classique issue du développement aux ordres supérieurs de la relation contrainte-déformation.

Lorsqu'une onde acoustique se propage dans un milieu ayant ce type de comportement, la réponse acoustique non-linéaire, comme l'amplitude d'un harmonique supérieur, montre des phénomènes d'hystérésis lorsque le niveau d'excitation ou de chargement varie [29, 30]. Bien que la non-linéarité soit volumique et cumulative, la théorie de l'acoustique non-linéaire classique ne suffit pas pour décrire l'évolution de ces réponses non-linéaires. Il est donc nécessaire de modifier le modèle de loi de comportement si l'on souhaite prendre en compte les comportements hystérétiques.

Un autre phénomène concerne la modification de la fréquence de résonance. C'est en particulier vrai pour ces matériaux fortement non-linéaires comme les matériaux géologiques. Lorsque l'amplitude de l'excitation augmente, ces matériaux font preuve d'un adoucissement non-linéaire de leur

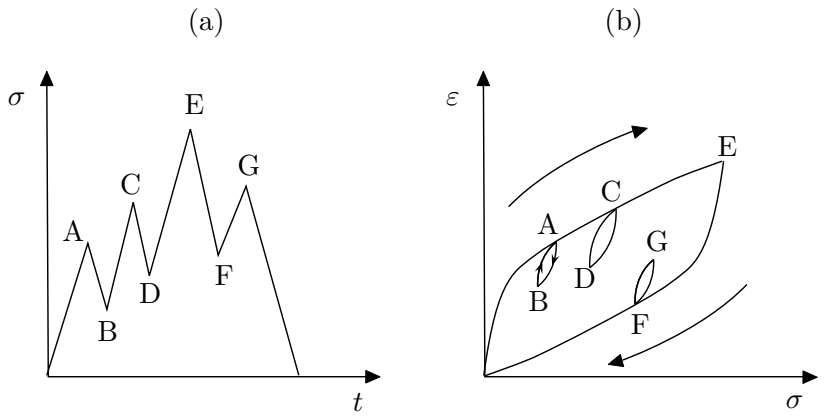


Figure 1.2 – Représentation dun protocole de chargement en contrainte (a) appliqué à un matériau géologique impliquant une courbe de contrainte-déformation avec des boucles d'hystérésis (b). Ces graphes schématisent les résultats expérimentaux [28, 29].

module d'élasticité, même pour de faibles niveaux de déformation. Il en résulte une réduction de la fréquence de résonance [6, 28]. Ce décalage de la fréquence de résonance varie avec l'amplitude des déformations selon des lois linéaires ou quadratiques en fonction du type de matériau rencontré [31]. Encore une fois, un modèle spécifique doit être adopté pour prendre en compte ce type de phénomène.

Si l'on considère un modèle en contrainte uniaxiale, la loi de Hooke linéaire s'écrit $\sigma = E\varepsilon$ où E est le module d'Young. Lorsque l'on passe dans la théorie de l'acoustique non-linéaire classique, cette relation devient $\sigma = E\varepsilon(1 - \beta\varepsilon - \cdots)$ où β est le paramètre non-linéaire défini par l'équation (1.2.1). Pour expliquer les phénomènes d'hystérésis ou de modification des propriétés de résonance, un nouveau modèle est donc introduit et la loi de comportement prend alors la forme suivante :

$$\sigma(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = E\left(\varepsilon - f(\varepsilon,\dot{\varepsilon})\right), \tag{1.29}$$

où $\dot{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation et f est une fonction continue telle que $|f(\varepsilon,\dot{\varepsilon})| \ll 1$.

Nazarov et al. ont proposé deux types de modèles hystérétiques, le premier est inélastique tandis que le second est élastique [31]. Pour le premier cas, la fonction non-linéaire f prend la forme suivante (figure 1.3.(a)) :

$$f(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \alpha\varepsilon_m\varepsilon + \begin{cases} \dfrac{\beta_1}{2}\varepsilon^2 - \dfrac{\beta_1+\beta_2}{4}\varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0 \\ -\dfrac{\beta_2}{2}\varepsilon^2 + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{4}\varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \tag{1.30}$$

où $|\alpha|\varepsilon_m \ll 1$, $|\beta_{1-2}|\varepsilon_m \ll 1$, et $|\beta_{1-2}| \gg 1$. Le terme ε_m n'est pas une caractéristique propre au matériau mais correspond à la valeur maximale des déformations créées. Cette équation fait intervenir trois paramètres non-linéaires indépendants, α et β_{1-2}, qui représentent la modification du module élastique et l'atténuation non-linéaire. On remarque que pour $\alpha = 0$ et $\beta_1 + \beta_2 = 0$, l'équation (1.30) décrit une non-linéarité quadratique identique à celle obtenue par la théorie non-linéaire classique. Aussi, lorsque $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$, une contrainte (déformation) nulle conduit à une

valeur non nulle de déformation (contrainte). Dans ce cas, ces déformations et ces contraintes non-nulles sont respectivement appelées déformations micro-plastiques et contraintes résiduelles. Ce modèle décrit un comportement inélastique dont la courbe contrainte-déformation est donnée par la figure 1.3.(a).

Le second modèle est élastique et la fonction f prend la forme suivante [31, 32] (figure 1.3.(b)) :

$$f(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{2}\varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \quad \dot{\varepsilon} > 0 \\ -\frac{\gamma_2}{2}\varepsilon^2 + \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\varepsilon_m^+\varepsilon, & \varepsilon > 0, \quad \dot{\varepsilon} < 0 \\ -\frac{\gamma_3}{2}\varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \quad \dot{\varepsilon} < 0 \\ \frac{\gamma_4}{2}\varepsilon^2 - \frac{\gamma_3+\gamma_4}{2}\varepsilon_m^-\varepsilon, & \varepsilon < 0, \quad \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \tag{1.31}$$

où $|\gamma_{1-2}\varepsilon_m^+| \ll 1$, $|\gamma_{3-4}\varepsilon_m^-| \ll 1$, $|\gamma_{1-4}| \gg 1$, $\varepsilon_m^+ > 0$ et $\varepsilon_m^- < 0$. Les termes ε_m^+ et ε_m^- correspondent à nouveau aux valeurs maximales et minimales de déformation. Quatre paramètres non-linéaires γ_{1-4} interviennent dans ce modèle. En prenant $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ et $\gamma_3 + \gamma_4 = 0$ tels que $\gamma_1 = -\gamma_3$, on retombe à nouveau sur le modèle non-linéaire classique. La figure 1.3.(b) donne un exemple de la courbe contrainte-déformation que l'on peut obtenir avec ce type de modèle élastique.

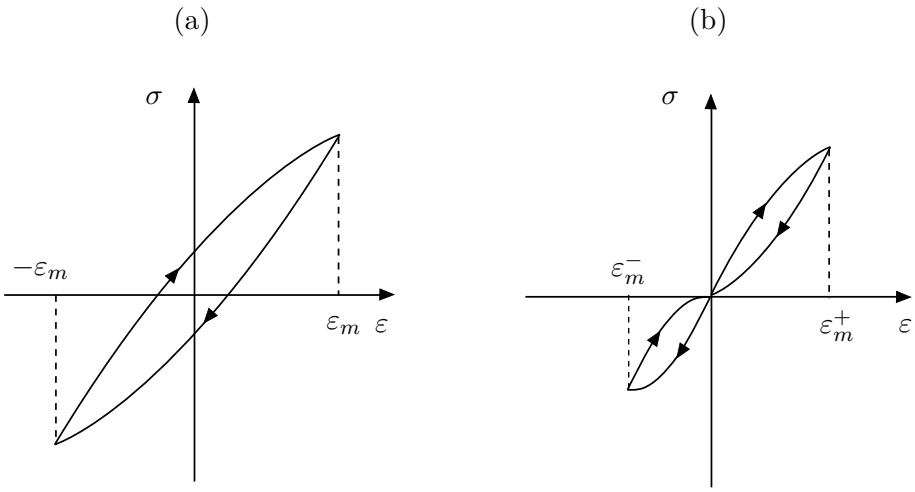


Figure 1.3 – Représentation de la courbe contrainte-déformation pour un solide au comportement hystérétique, avec un modèle inélastique (a) et élastique (b) [31].

Ces deux modèles permettent de décrire une large classe de comportements hystérétiques en choisissant correctement les différents paramètres. Une fois ces modèles introduits dans l'équation du mouvement, on peut étudier la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu non-linéaire hystérétique [31, 33, 34]. Les trains d'ondes présentent des distorsions et le décalage de la fréquence de résonance en fonction de l'amplitude la source est mis en évidence. Nazarov et Kolpakov ont montré un bon accord entre les résultats donnés par ces modèles et des mesures expérimentales réalisées sur des échantillons de zinc [32].

Une autre approche consiste à décrire le comportement hystérétique global d'un matériau comme la somme d'un grand nombre d'éléments mésoscopiques ayant chacun un comportement hystérétique complexe [35, 36]. Le cadre théorique proposé permet de déterminer les propriétés mécaniques

macroscopiques à partir d'une distribution de ces unités hystérétiques (HEU : Hysteretic Element Units). Cette théorie repose sur les espaces de Preisach-Mayergoyz (espace PM) [37, 38] qui fournissent une infinité de relations d'état à partir du comportement de chaque HEU. Ces dernières réagissent indépendamment en fonction de l'excitation et de l'historique de chargement. Un des paramètres le plus important dans ce modèle est la densité des HEU, qui permet d'assurer la validité de la réponse macroscopique. La densité est définie à partir de la loi contrainte-déformation statique classique. Ensuite, chaque HEU est caractérisée par deux paramètres de contraintes P_o et P_c qui correspondent aux seuils de transitions entre un état fermé et un état ouvert lorsque la contrainte varie au sein de l'élément. A chacun de ces états correspond une longueur d'équilibre l_o et l_c. Ce type de modèle est intéressant d'un point de vue numérique, puisque le domaine peut être discrétisé à l'aide de ces éléments spéciaux [39, 40]. Les HEU représentent les liens entre les grains du matériau géologique. Les grains, eux, ont un comportement élastique. La propagation de l'onde s'accompagne de nouveaux harmoniques et de boucles d'hystérésis. Le second et le troisième harmoniques présentent une évolution quadratique par rapport à l'amplitude de l'excitation. Ce résultat témoigne d'une non-linéarité non-classique [4]. Dans ces deux travaux [39, 40], le décalage de la fréquence de résonance avec l'augmentation de l'excitation est observé.

Notons enfin pour être plus complet, que ces phénomènes hystérétiques dans les matériaux fortement non-linéaires, s'accompagnent d'effets de dynamique lente ou de relaxation [4]. Deux excitations identiques appliquées successivement au même échantillon ne vont pas conduire au même résultat. Une période de "repos" est nécessaire pour revenir à l'état initial. Des modèles plus complexes et toujours basés sur les espaces de Preisach-Mayergoyz ont été mis en place pour rendre compte de ces phénomènes [41]. Les effets non-linéaires que l'on vient de décrire peuvent aussi être rencontrés dans les matériaux métalliques lorsqu'ils sont endommagés.

Non-linéarité de contact : CAN

L'accumulation de micro-défauts peut mener à l'apparition d'une fissure qui peut éventuellement se propager. Le défaut n'est plus volumique mais localisé, et ses dimensions ne sont pas forcément microscopiques. Lors d'une excitation acoustique suffisamment puissante, une fissure va montrer un comportement non-linéaire lié à l'interaction entre ses deux faces opposées. On parle de contact acoustique non-linéaire (CAN). Parmi les conséquences de cette interaction, on peut citer la génération de nouvelles composantes fréquentielles ou l'apparition d'effets d'hystérésis. Mis en évidence pour la première fois par Buck et al. [42], le CAN concerne les interfaces imparfaites qui autorisent les décohésions. Il fait donc l'objet d'un intérêt grandissant au regard des possibilités offertes pour la détection des fissures fermées et des imperfections d'adhésion lors d'un collage structurel.

Le CAN vient d'une alternance d'ouvertures et de fermetures de la fissure lors de la sollicitation acoustique. On a l'habitude de faire référence à ce phénomène sous le terme de "clapping". Lorsque l'onde incidente atteint une interface de contact imparfaite, la partie en compression est transmise alors que la partie en traction ouvre la fissure et est réfléchie. Le principe mécanique est donné par la figure 1.4. Une fissure peut être présentée comme une inclusion dont la rigidité est plus

importante en compression qu'en traction. Lorsque la fissure est fermée, la rigidité du solide est égale à celle du matériau sain, alors qu'elle est plus faible lorsque la fissure est ouverte. Cette dissymétrie de rigidité a pour conséquence de moduler le signal lors de son passage à travers la fissure. Des harmoniques supérieurs, multiples de la fréquence de l'onde incidente f_0, viennent enrichir le spectre de l'onde. Bien sûr, cela suppose que l'amplitude de l'onde soit suffisante pour ouvrir partiellement la fissure, générant ainsi un effet de seuil [43, 44]. En dessous d'une certaine amplitude, aucun effet non-linéaire n'est mesuré.

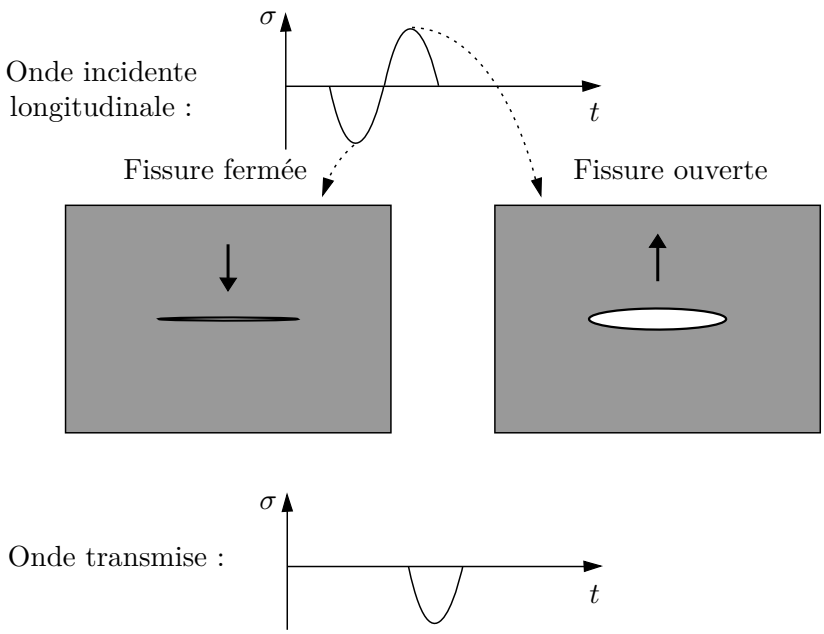


Figure 1.4 – Principe du CAN pour une fissure et une onde longitudinale sous incidence normale : seules les compressions sont transmises à travers l'interface de contact.

Une autre conséquence de la dissymétrie de rigidité d'une interface de contact est la "rectification" du signal. Ce dernier est transmis uniquement durant les phases de compression, on parle alors d'effet diode [45]. Le signal perd sa symétrie par rapport à sa valeur moyenne initiale (figure 1.5). Cette rectification se traduit aussi par l'apparition d'une composante basse fréquence continue dans le spectre, qui peut s'apparenter à une démodulation d'amplitude par rapport à l'enveloppe du signal.

Des expériences réalisées sur une fissure montrent que des sous-harmoniques de fréquence $nf_0/2$ sont générés lorsque l'amplitude de la source augmente [44, 46]. La différence de rigidité introduite par la fissure ne suffit pas pour décrire l'apparition de ces sous-harmoniques. Certains auteurs attribuent la génération des sous-harmoniques à des effets d'inertie entre les faces de la fissure. Pour une fréquence élevée, lorsque l'amplitude de l'onde incidente augmente, les déplacements imposés sur une face de la fissure ne permettent pas à la seconde de suivre le mouvement. Le contact n'a plus lieu à chaque période mais toutes les n périodes. Ces retards entre les deux faces d'une fissure seraient à l'origine des sous-harmoniques. Suivant ce principe, Kolosov et Yamanaka ont proposé un modèle masse-ressort 1D qui permet d'expliquer la génération des sous-harmoniques dans un

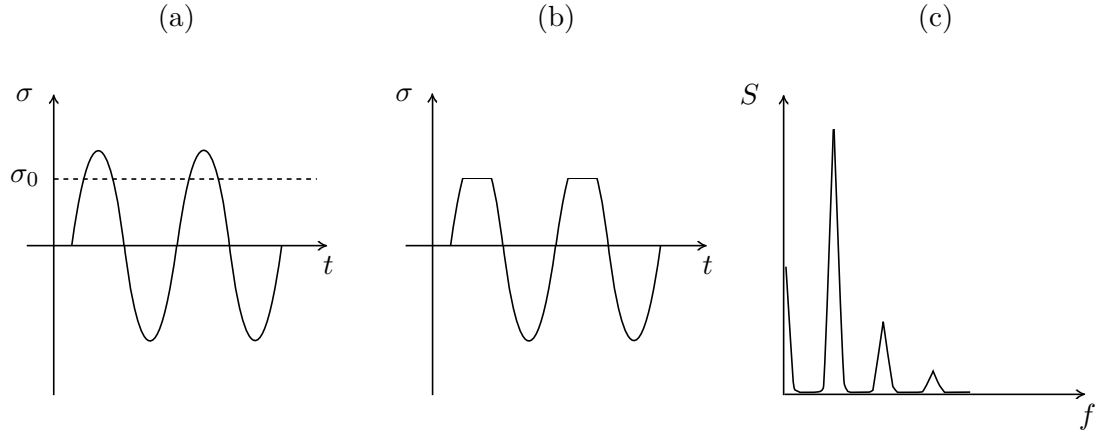


Figure 1.5 – Signal d'excitation et seuil d'ouverture de la fissure σ_0 (a). Le signal est rectifié lorsque l'effort de traction est suffisant pour ouvrir la fissure (b). Le spectre (c) fait apparaitre une composante continue et des harmoniques supérieurs.

microscope à force acoustique [47]. Ce modèle a été repris et appliqué au cas d'une fissure, et les résultats sont en accord avec les mesures expérimentales [48]. Pour d'autres auteurs en revanche, les sous-harmoniques sont attribués à des phénomènes de résonance [44]. Le ou les phénomènes à l'origine des sous-harmoniques ne sont donc pas clairement identifiés et le problème reste ouvert. La génération des sous-harmoniques existe aussi pour les matériaux granulaires non consolidés de type agglomérat de grains [49]. Les phénomènes de contact intermittents entre les éléments les moins contraints mécaniquement sont à l'origine des sous-harmoniques lors de la propagation acoustique. Lorsque l'amplitude de l'excitation augmente, le nombre de sous-harmoniques et leurs amplitudes augmentent aussi, tout comme le niveau de bruit [49].

Enfin, l'amplitude des harmoniques supérieurs générés par une interface de contact montre aussi des phénomènes d'hystérésis et de mémoire lorsque l'amplitude de la source varie [43, 44]. On entend par effet mémoire, le fait qu'un temps de relaxation soit nécessaire pour que l'échantillon retrouve ses propriétés initiales et qu'une nouvelle mesure reproduise la première. Ces boucles d'hystérésis et ces effets mémoires sont attribués à des mécanismes de micro-contact et dépendent aussi des conditions ambiantes (température, humidité, pression...). Par exemple, Korshak et al. ont montré que le temps de relaxation augmentait avec la durée d'excitation. L'évolution du temps de relaxation dû à l'excitation acoustique est comparée au temps de relaxation induit par un échauffement local de la fissure. La similarité des résultats donne à penser qu'une des raisons de l'effet mémoire est liée à une relaxation thermique [44].

Dans cette partie, on a vu qu'un matériau pouvait répondre de manière non-linéaire à une sollicitation acoustique. La première cause est liée aux micro-défauts répartis dans le volume du matériau, et / ou à sa non-linéarité intrinsèque. On parle de non-linéarité classique, que l'on relie aux constantes d'élasticité d'ordre supérieur. Ces micro-défauts peuvent aussi générer des phénomènes d'hystérésis et de mémoire. On parle alors de non-linéarité non-classique. En marge de ces non-linéarités volumiques, une fissure ou une interface de contact constitue une source de non-linéarité

localisée. Ces non-linéarités sont donc particulièrement intéressantes dans l'objectif de détecter et de caractériser une fissure. Parmi elles, certaines sont communes à celles produites par les non-linéarités volumiques, comme la génération d'harmoniques supérieurs ou les phénomènes d'hystérésis. Le comportement non-linéaire d'une fissure est relié à l'interaction entre les faces de la fissure : c'est le CAN. La dynamique de contact mise en jeu est complexe et multi-échelles. Une fissure peut s'ouvrir et se fermer, mais ses faces peuvent aussi glisser l'une par rapport à l'autre. Les effets micro-mécaniques, comme la déformation des aspérités, peuvent aussi expliquer certains phénomènes d'hystérésis. Il est donc nécessaire de comprendre comment ces comportements contribuent à la réponse non-linéaire. Dans la partie suivante sont présentées les travaux expérimentaux et les méthodes de CND qui tirent parti des différents effets non-linéaires.

1.3 Méthodes de CND non-linéaires

Pour déterminer la présence de défauts, les méthodes conventionnelles (linéaires) reposent sur une modification de l'amplitude ou de la phase, entre l'onde émise et l'onde réfléchie ou transmise. Dans le cas d'une fissure fermée ou d'une micro-fissure, le changement d'amplitude est généralement très faible et les méthodes classiques sont donc peu efficaces. Guidées par les besoins industriels pour améliorer la détectabilité des défauts, les méthodes de contrôle non-linéaires ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Ces méthodes peuvent être rassemblées sous le sigle NEWS (Nonlinear Elastic Wave Spectroscopy) [34, 50]. Elles se différencient notamment par le phénomène non-linéaire utilisé.

1.3.1 Spectroscopie par résonance non-linéaire

Un des phénomènes non-linéaires entraîné par la présence d'hétérogénéités microscopiques et de défauts répartis dans le volume d'un matériau, est la variation de la fréquence de résonance lorsque l'amplitude de l'excitation augmente [6]. Puisque ce phénomène est directement relié à la présence d'hétérogénéités, il peut donc être employé pour quantifier le niveau d'endommagement global d'un matériau. Cette méthode est référencée sous l'appellation de spectroscopie par résonance non-linéaire (NRUS : nonlinear resonance ultrasound spectroscopy) [34, 51]. La méthode consiste à exciter l'échantillon autour d'une de ses fréquences de résonance, tout d'abord à faible amplitude. Peu à peu, le niveau d'excitation est augmenté, et pour chaque itération, un balayage en fréquence est effectué afin de répertorier la nouvelle fréquence de résonance. Un décalage de la fréquence de résonance indique la présence d'endommagement. Van Den Abeele et al. ont appliqué la technique sur des plaques en ardoise artificielle [51], progressivement endommagées par des impacts successifs localisés au centre de la plaque. Le décalage de la fréquence de résonance est observé lorsque l'excitation augmente et est bien supérieur dans le cas d'un échantillon endommagé. La figure 1.6 donne un exemple de résultat expérimental. Le décalage de la fréquence est caractérisé par une pente α qui tient lieu de paramètre non-linéaire dans cette méthode. En effet, la pente α augmente avec la sévérité de l'endommagement. La méthode permet donc de quantifier l'endommagement global d'un matériau et elle a été appliquée sur le béton [52], l'os [7] ou encore les matériaux

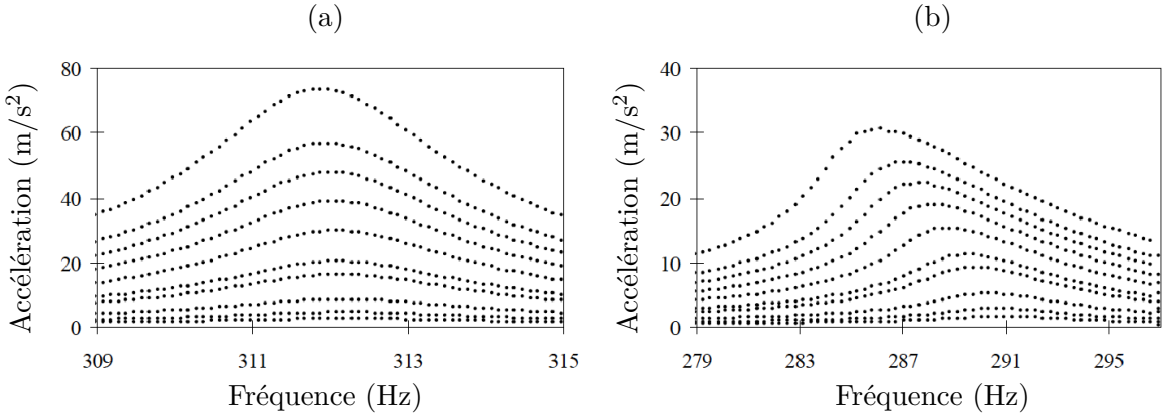


Figure 1.6 – Courbes de résonance pour en fonction de l'amplitude pour un matériau sain (a) et endommagé (b) [51].

composites [53]. Cette méthode nécessite cependant de nombreuses mesures.

1.3.2 Harmoniques supérieurs

Comme cela a été introduit dans la première partie de ce chapitre, les non-linéarités d'un matériau endommagé, qu'elles aient un comportement classique ou non, vont générer des harmoniques supérieurs lors de la propagation acoustique. On a vu par exemple que le paramètre non-linéaire β est relié à la fois aux constantes élastiques de troisième ordre (Eq. (1.2.1)) et aux harmoniques supérieurs (Eq. (1.22)). Une application directe de ces relations permet de déterminer les propriétés mécaniques de troisième ordre à partir de la mesure du second harmonique généré lors de la propagation d'une onde longitudinale. La méthode a été mise en place la première fois par Breazeale et Thompson sur de l'aluminium [18]. Les coefficients élastiques de troisième ordre ont été obtenus par cette technique pour de nombreux matériaux : le cuivre [54, 55], le germanium [56], le verre [57]...

L'endommagement d'un matériau métallique par l'apparition de dislocations notamment, augmente considérablement sa non-linéarité. Par conséquent, le niveau des harmoniques supérieurs augmente. L'évaluation et le suivi de l'endommagement peut donc être réalisé à partir de la mesure des harmoniques supérieurs et des paramètres $\beta^\star = A_2/A_1^2$ ou $\delta^\star = A_3/A_1^3$. Na et al. ont effectué la mesure de β lors d'un essai de fatigue sur des éprouvettes en acier [58]. L'accumulation des cycles de fatigue engendre une croissance monotone du paramètre β. Ce dernier affiche une augmentation de 60% après 10^7 cycles alors que la constante élastique de deuxième ordre C_{11} n'a diminué que de 0.14%. Cela démontre bien la grande sensibilité de la méthode non-linéaire par rapport à son homologue linéaire. Toujours pour des essais de fatigue, des travaux réalisés sur des éprouvettes d'alliage de nickel conduisent aux mêmes conclusions [10]. L'amplitude des harmoniques supérieurs peut être faible et donc difficile à obtenir. Par ailleurs le système électronique de mesure peut aussi être la source d'harmoniques supérieurs. Kim et al. ont recourt à la méthode d'inversion des signaux [59] (pulse inversion technique) pour extraire le second harmonique [10]. Le principe est le suivant : deux ondes en opposition de phase sont envoyées séparément dans le solide et les réponses obtenues sont sommées. A cause du déphasage de 180°, la somme des signaux est destructive pour

l'harmonique fondamental. Par contre, le déphasage entre les deux signaux prend une valeur de 360° pour le second harmonique et leur somme est donc constructive. L'amplitude du second harmonique est doublée. Jhang propose un autre moyen d'évaluer le paramètre β avec plus de précision [19]. Le traitement du signal employé fait intervenir un coefficient d'auto-corrélation de troisième ordre, qui a pour propriété de supprimer le bruit gaussien contenu dans le signal et de faire ressortir les composantes fréquentielles multiples les unes des autres. La mesure du second harmonique est plus précise et il en va de même pour β. La méthode est utilisée pour suivre l'endommagement sur des barreaux d'acier soumis à différents niveaux de déformation plastique lors d'un essai de traction. L'amplitude du second harmonique et du paramètre β augmente avec le chargement, contrairement à l'atténuation ou la vitesse de propagation qui restent constantes. L'effet d'un endommagement thermique sur des éprouvettes d'acier CR-MO et aussi examiné [19]. Le paramètre β augmente avec la durée de la sollicitation thermique et retranscrit bien la dégradation du matériau, puisque les résultats sont corrélés par des essais mécaniques de type Charpy. Herrmann et al. ont eux aussi travaillé sur un alliage de nickel soumis à des essais de fatigue [9]. En utilisant des ondes de Rayleigh, ils retrouvent bien l'augmentation de β avec le nombre de cycles de fatigue. Toujours dans un souci d'évaluer l'endommagement par déformation plastique, la mesure du second harmonique a été étendue aux ondes de Lamb pour ausculter une plaque fine d'aluminium [60]. Les résultats obtenus ne sont cependant pas très précis et des travaux doivent être réalisés pour utiliser les ondes guidées en acoustique non-linéaire. Dans certains des travaux cités ici, la dépendance quadratique entre l'amplitude du second harmonique A_2 et l'amplitude de l'harmonique fondamental A_1 est vérifiée expérimentalement [9, 10], indiquant bien l'indépendance de β par rapport à l'amplitude de la source.

Les matériaux géologiques sont naturellement très non-linéaires, de par les hétérogénéités qu'ils contiennent. Cependant, leur endommagement se traduit aussi par une plus forte génération des harmoniques supérieurs. Par exemple, Shah et Ribakov ont effectué des essais de compression sur des blocs de béton [17]. Après chaque pas de chargement, les échantillons sont testés par ultrasons. Pour les trois types de béton testés, les harmoniques supérieurs ainsi que les paramètres β et δ affichent une hausse importante lorsque la compression augmente. Cependant, les paramètres non-linéaires augmentent aussi avec l'amplitude de l'excitation, ce qui traduit le caractère non-classique de la non-linéarité rencontrée dans les matériaux géologiques.

Les harmoniques supérieurs sont aussi utilisés dans l'imagerie médicale. Les agents de contraste injectés dans le sang présentent des modes de vibration dont la fréquence est le double de celle de l'onde incidente [61]. La méthode d'inversion des signaux peut alors être utilisée pour accroitre les valeurs du second harmonique [59, 62].

Le CAN crée des distorsions sur le signal et génère donc aussi des harmoniques supérieurs, à la fois pour l'onde transmise et réfléchie. En général, les effets non-linéaires engendrés par le CAN sont dominant devant les effets de la non-linéarité volumique. Bien que la définition du paramètre non-linéaire $\beta = A_2/A_1^2$ provienne de la théorie de l'acoustique non-linéaire classique, cette définition est aussi utilisée pour quantifier la non-linéarité engendrée par une interface de contact. Pour comprendre comment une interface de contact modifie le contenu fréquentiel d'une onde, de

nombreux travaux expérimentaux ont étudié la propagation d'une onde longitudinale à travers une interface constituée par deux solides mis en contact l'un avec l'autre. Les premiers travaux de Buck et al. et Richardson ont étudié l'effet d'une compression exercée sur l'interface [42, 63]. L'onde transmise est ensuite analysée par traitement de Fourier afin d'extraire les harmoniques supérieurs. Le second harmonique décroit lorsque la contrainte de compression augmente et entraîne une décroissance exponentielle de β. Lorsque la contrainte normale augmente, l'ouverture de l'interface est réduite d'autant, limitant ainsi la modulation du signal incident. Pour une contrainte modérée, la non linéarité générée est bien supérieure à celle obtenue pour un matériau sain. Les mêmes résultats ont été obtenus par Biwa et al., toujours sur des blocs d'aluminium [64]. L'évolution du second harmonique lors de la mise en contrainte de l'interface, puis lors de sa relaxation, montre un léger effet d'hystérésis [64]. Nam et al. ont effectué le même type d'expérience en utilisant une onde longitudinale en incidence oblique. L'onde réfléchie est analysée en fonction de la contrainte normale appliquée. Pour les deux angles d'incidence testés (22,5° et 45°), l'amplitude du second harmonique passe par un maximum [65].

Morris et al. ont travaillé sur une éprouvette fine d'aluminium haute résistance dans laquelle un réseau de micro-fissures est créé lors d'un chargement cyclique [66]. Un chargement extérieur est appliqué à l'éprouvette selon la direction perpendiculaire aux fissures, en traction ou en compression. Une onde de surface est utilisée pour réaliser les essais acoustiques. Les fissures étant partiellement fermées lorsqu'aucun chargement extérieur n'est appliqué, l'onde est modulée par les phénomènes de CAN et s'enrichie de nouveaux harmoniques. L'amplitude du second harmonique atteint un maximum lorsque la contrainte appliquée sur les fissures par le chargement extérieur est proche de zéro [66]. En effet, pour un effort de traction les fissures vont progressivement s'ouvrir et les faces de la fissure ne vont plus entrer en contact. Pour une compression, elles vont se fermer et l'onde ne sera pas en mesure d'activer le phénomène de clapping. L'état de contrainte est donc un paramètre primordial. Lee et Jhang ont étudié la génération des harmoniques supérieurs pour une fissure de fatigue créée dans une éprouvette d'aluminium [1]. Une pression constante est maintenue sur les transducteurs par un système pneumatique asservi afin d'assurer une mesure stable et reproductible. Un chargement en compression est appliqué sur la fissure et l'onde transmise est analysée. Pour une charge fixée, le paramètre β est mesuré le long de la fissure. Il diminue à mesure que l'on approche de la pointe de la fissure, et devient constant une fois la pointe de la fissure dépassée. En approchant du fond de fissure, la fissure se referme et la rigidité d'interface augmente, ce qui limite le "clapping" et donc la non-linéarité de l'interface. Pour une position donnée, le paramètre β décroit exponentiellement lorsque la charge appliquée augmente. La sollicitation acoustique d'échantillons fissurés de Plexiglas et de grès montre une dépendance quadratique entre l'amplitude du second harmonique et celle de l'harmonique fondamental [50]. Le troisième harmonique suit quant à lui une évolution cubique dans le cas du Plexiglas et quadratique dans le cas du grès. Ces lois évolutions ne représentent cependant pas une règle générale. Par exemple, Solodov et al. ne dégagent pas de relation particulière entre l'amplitude des harmoniques supérieurs et l'amplitude de la source dans le cas de la propagation à travers une interface verre-Si [43].

Dans le cas d'une fissure de surface, les harmoniques supérieurs générés par le CAN vont émettre

dans l'air environnant. Dans ce cas, la détection de la fissure peut être réalisée avec une méthode par couplage par air [67]. Les phénomènes non-linéaires liés au CAN peuvent être utilisés dans une logique industrielle de SHM (Structural Health Monitoring). Le dispositif est permanent et doit permettre de détecter l'apparition de fissures au cours de l'exploitation de la pièce. Dutta et al. ont proposé une méthode utilisant des pastilles PZT [68]. La présence de fissures est révélée par deux caractéristiques : l'apparition d'un second harmonique, et l'évolution non-linéaire de ce dernier par rapport à l'amplitude d'excitation. Les résultats obtenus sont concluants dans le cas d'une poutre en aluminium, moins dans le cas d'une poutre en acier. Les phénomènes de CAN peuvent aussi s'exprimer pour des ruptures d'adhésion entre un adhésif et un substrat. On parle alors de "kissing bonds". Le collage étant un moyen d'assemblage de plus en plus courant dans l'aéronautique, la détection des défauts d'adhésion (décohésion, contamination de particules diverses lors de l'assemblage) représente un enjeu considérable. La génération d'harmoniques supérieurs pour ce type de défaut a été démontré [69, 70] et peut donc servir de moyen d'évaluation non-destructive des joints collés. Toujours en rapport avec l'évaluation d'un assemblage, Ohara et al. ont étudié la qualité d'un soudage par diffusion entre deux barres d'acier [71]. Une corrélation entre la température de soudage, la résistance de l'assemblage et l'amplitude du second harmonique est obtenue. Une faible température de soudage est synonyme d'une faible résistance, qui se traduit par un plus haut niveau du second harmonique.

Une onde peut aussi se propager le long de l'interface créée par deux solides ou le long d'une fissure. Les premiers travaux allant dans cette direction sont ceux de Mao et al. [72]. La propagation d'une onde de Rayleigh généralisée le long d'une interface verre-acier donne lieu à un second harmonique, dont l'amplitude augmente de manière quadratique avec l'harmonique fondamental. Les ondes de Rayleigh sont générées par des ondes de cisaillement sous incidence oblique. L'amplitude du second harmonique est maximale pour l'angle d'incidence critique [72]. Pyrak-Nolte et al. ont montré théoriquement qu'une interface représentée par des ressorts permet la propagation des deux ondes d'interface, de mode symétrique et anti-symétrique, chacune étant reliée aux rigidités d'interface [74]. Biwa et al. ont déterminé la rigidité tangentielle d'une interface faite de deux blocs de Plexiglas à partir de la vitesse de propagation d'une onde d'interface [75]. Lorsque la pression appliquée sur l'interface augmente, la vitesse de propagation passe de la vitesse des ondes de Rayleigh à une valeur proche de la vitesse de propagation des ondes volumiques transverses [76]. La rigidité d'interface est un paramètre qui indique la perte ou l'augmentation globale de rigidité d'un solide comportant une interface. Les rigidités d'interface sont des paramètres nécessaires dans les modèles théoriques et numériques mis en place par certains auteurs pour traiter le CAN et évaluer la génération des harmoniques supérieurs. On reviendra plus en détail sur ce concept dans la partie 1.4.

1.3.3 Spectroscopie non-linéaire par modulation d'ondes

Dans un matériau non-linéaire, au sens classique ou non, le principe de superposition de l'acoustique linéaire n'est plus valable et deux ondes peuvent interagir [77]. La spectroscopie non-linéaire par modulation d'ondes (NWMS : Nonlinear Wave Modulation Spectroscopy) repose sur cette idée.

Deux ondes acoustiques sont générées simultanément dans le solide à tester, la première est souvent de fréquence élevée f_1 (onde sonde) tandis que l'autre a une fréquence plus basse f_2 (onde pompe). Dans un matériau sain, ces deux ondes n'interagissent pas et l'onde transmise ne comporte que ces deux composantes. Au contraire, pour un matériau endommagé, l'onde basse fréquence module l'onde haute fréquence. Le spectre de l'onde transmise ou de l'onde réfléchie comporte les composantes fréquentielles somme ($f_+ = f_1 + f_2$) et différence ($f_- = f_1 - f_2$) [16, 50, 78]. Ces combinaisons dans le spectre du signal mesuré indiquent la présence d'un défaut. Un avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite qu'une seule mesure pour indiquer la présence d'un endommagement, qu'il soit volumique ou localisé. De plus, ces combinaisons fréquentielles ne sont pas générées par le système électronique si les excitations sont indépendantes.

Pour comprendre le principe de fonctionnement, on considère un solide contenant une fissure, et dans lequel sont envoyées simultanément les deux ondes. Si l'amplitude de l'onde pompe est suffisante, la fissure va se fermer lors des phases de compression et s'ouvrir durant les phases de traction. Lorsque la fissure s'ouvre, l'onde sonde est moins transmise et son amplitude diminue. Il y a donc une modulation de l'onde haute fréquence par l'onde basse fréquence. Le principe est donné par la figure 1.7. Cette description est simplifiée mais permet de saisir le principe de la méthode dans le cas d'une fissure. En réalité, la non-linéarité intrinsèque d'un matériau, qu'elle soit classique ou non, engendre aussi la modulation des ondes.

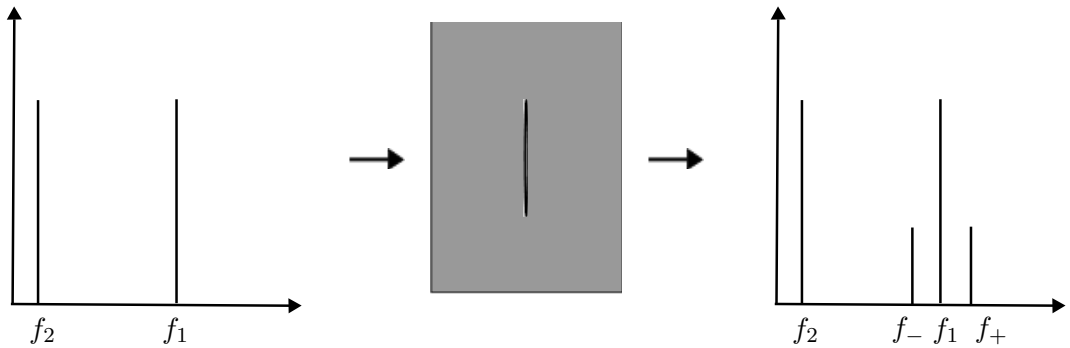


Figure 1.7 – Principe de la méthode par modulation d'ondes. En présence de défauts, l'onde haute fréquence est modulée par l'onde basse fréquence. En sortie, le spectre contient les fréquences $f_- = f_1 - f_2$ et $f_+ = f_1 + f_2$.

Van Den Abeele et al. ont appliqué cette méthode sur des échantillons de Plexiglas et de grès [50]. Les matériaux sains ne font apparaître que les deux composantes initiales dans le spectre de l'onde transmise alors que les composantes somme et différence apparaissent dans le cas d'un échantillon fissuré. L'amplitude des composantes fréquentielles f_+ et f_- augmente linéairement avec l'amplitude d'excitation de l'onde pompe [50, 79]. Appliquée à une bielle de moteur, la méthode est efficace et met en évidence la présence d'une fissure [50]. De même, la modulation non-linéaire a été utilisée pour suivre des essais de fatigue et la propagation d'une fissure, sur des éprouvettes en acier [78, 79] ou en aluminium [80, 81], sollicitées en flexion. Zaitsev et al. ont appliqué la méthode à un cylindre de verre au sein duquel une fissure a été générée par un choc thermique [82]. On trouve aussi des applications à des matériaux biologiques comme de l'os [83]. A chaque fois, il est

montré que le niveau des composantes f_+ et f_- permet de suivre le niveau d'endommagement. Les travaux de Kim et al. ont la particularité d'utiliser des ondes de surface [81]. Au cours de l'essai de fatigue, les mesures sont effectuées en appliquant à la barre un chargement statique de flexion. Il est montré que l'amplitude des composantes somme et différence passe par un maximum lorsque le chargement varie. Dans le cas d'une fissure, la modulation non-linéaire dépend donc de l'état de contrainte appliqué. Notons enfin, que dans certaines des études citées précédemment, l'excitation basse fréquence est réalisée à l'aide d'un marteau ou d'un pot vibrant [78, 79, 84] ; on parle alors de méthodes vibro-acoustiques. La technique de modulation non-linéaire a été associée à une méthode de couplage par air [67]. Appliquée en transmission sur une plaque de polystyrène fissurée, elle permet de réaliser facilement des examens de type *A-scan* ou *B-scan* et ainsi de localiser l'emplacement de la fissure [85]. Goursolle et al. ont associé la méthode de modulation avec des techniques de retournement temporel [86]. La rétro-propagation par calcul Eléments Finis de f_+ et f_- permet d'imager le défaut. Utilisé en pré-traitement, le retournement temporel permet de focaliser les ondes incidentes sur la zone endommagée. Enfin, la mesure du taux de modulation et de la vitesse de propagation de l'onde basse fréquence ont permis à Vila et al. de remonter au paramètre non-linéaire β d'un matériau [87]. La méthode est réalisée en contact et repose sur un protocole d'étalonnage particulier. Appliquée à un échantillon de verre, la valeur et le signe de β sont en accord avec les valeurs de la littérature.

Dans une approche différente, on peut citer la méthode de mixage d'ondes non-colinéaire. Elle consiste à tirer parti de l'interaction de deux ondes, rendue possible par les propriétés mécaniques non-linéaires d'un matériau. Une approche possible est d'utiliser deux ondes de cisaillement. Le principe de la méthode est donné par la figure 1.8. Si la zone d'interaction des ondes de cisaillement est endommagée, une onde longitudinale est générée, et sa fréquence est égale à deux fois celle des ondes incidentes. La méthode est appliquée à la détection et au suivi d'une zone plastifiée [88]. Comme le prévoit la théorie [77], l'amplitude de l'onde générée augmente avec le volume d'interaction des ondes et les constantes élastiques du troisième ordre. On reviendra plus en détail sur cette méthode par la suite, puisque dans ce travail de thèse, elle fera l'objet d'une application au cas d'une fissure.

1.3.4 Sous-harmoniques

Le CAN entraîne la génération de fréquences inférieures à la fréquence incidente. La rectification du signal causée par la dissymétrie de rigidité se manifeste par l'apparition d'une composante continue dans le spectre. Passé un certain seuil d'excitation, des sous-harmoniques de fréquence $nf_0/2$ apparaissent à mesure que l'amplitude de la source augmente [43, 89, 90]. Les sous-harmoniques sont bien adaptés à la détection de fissures fermées puisqu'ils ne sont générés que par une interface de contact, contrairement aux harmoniques supérieurs ou aux composantes sommes et différences issues de la modulation, qui sont aussi générés par la non-linéarité volumique du matériau. De plus, le système électronique de mesure ne génère pas de sous-harmoniques. Il faut cependant s'assurer qu'il n'y a pas de clapping entre le transducteur et le solide testé.

Des recherches ont donc porté sur l'évaluation de fissures fermées à l'aide des sous-harmoniques.

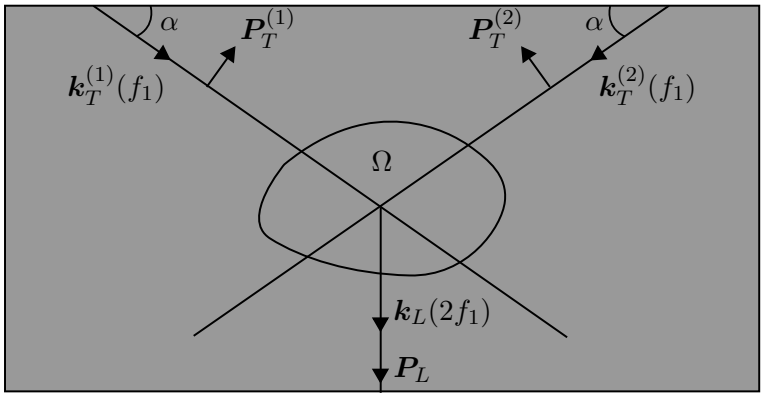


Figure 1.8 – Principe de la méthode de mixage d'ondes non-colinéaire. Deux ondes de cisaillement de fréquence f_1 sont générées avec le même angle d'incidence α de manière à interagir dans un volume endommagé Ω. Une onde longitudinale de fréquence $2f_1$ est alors générée.

Ohara et al. ont mesuré l'évolution des sous-harmoniques sur une poutre fissurée et soumise à une flexion trois points [46]. La mise en flexion permet de faire varier l'état de compression appliqué sur la fissure. Il est montré que l'amplitude des sous-harmoniques augmente avec le chargement en flexion. Toutefois, un chargement trop élevé ouvre la fissure et celle-ci n'est alors plus détectable par les moyens non-linéaires [91]. Dans ce dernier travail, les sous-harmoniques augmentent linéairement avec l'amplitude d'excitation sur la plage de valeur utilisée. Les différents seuils et paliers d'amplitude mis en évidence par Korshak et al. [44] ou Solodov et al. [89] ne sont pas observés.

Actuellement Ohara et al. orientent leurs recherches sur l'utilisation de systèmes multi-éléments, afin de réaliser une focalisation en réception et ainsi de localiser l'origine des sous-harmoniques. A partir d'une méthode de type SAFT (Synthetic Aperture Focusing Technique) [92, 93], il est possible de construire une image de la fissure. La méthode est appliquée à des fissures de fatigue dans des éprouvettes d'aluminium. Les sous-harmoniques sont générés par la partie fermée de la fissure. Le fond de fissure est mis en évidence, ce qui permet d'évaluer la taille de la fissure [91]. L'effet d'un chargement extérieur de traction est étudié [94]. A mesure que le chargement augmente, la fissure s'ouvre et la partie imagée se réduit. La fissure traversant l'éprouvette de part en part, sa longueur est estimée en différents points à partir d'un scan effectué selon la profondeur de l'éprouvette [94]. La méthode d'imagerie a été améliorée en soustrayant des images obtenues pour des chargements différents [95]. La réponse non-linéaire renvoyée par la fissure change selon la charge appliquée. En revanche, les réponses données par les hétérogénéités linéaires ne varient pas. En soustrayant deux images faites à des chargements différents, les réponses linéaires disparaissent et les artefacts (hétérogénéité dans un cordon de soudure, écho renvoyé par fond de l'éprouvette) sont diminués. La résolution de l'image est donc améliorée.

Les sous-harmoniques pourraient aussi avoir des applications dans l'imagerie médicale afin de visualiser des agents de contraste injectés dans les vaisseaux sanguins. En effet, il a été montré que les capsules utilisées comme agent de contraste engendrent à la fois des sous-harmoniques et des harmoniques supérieurs lorsqu'elles sont excitées [96, 97].

Méthode / Non-linéarité	Résonance	Harmoniques supérieurs	Modulation d'ondes	Sous harmoniques
Electronique		✓		
Volumique	✓	✓	✓	
Contact	(✓[1])	✓	✓	✓

Tableau 1.1 – Récapitulatif des méthodes et des non-linéarités auxquelles elles sont sensibles.

Les non-linéarités d'un matériau, qu'elles soient volumiques ou localisées vont modifier la propagation d'une onde acoustique. Cette dernière renferme donc les informations indiquant la présence de défauts. Les méthodes de CND associées aux différents types de non-linéarité ont été présentées dans cette partie. Le tableau 1.1 récapitule les capacités des principales méthodes par rapport aux différentes sources de non-linéarité. Expérimentalement, des facteurs extérieurs comme la non-linéarité électronique peuvent être limitants. Ces travaux expérimentaux ont cherché à étudier l'effet de paramètres influant sur la génération des nouvelles composantes fréquentielles, comme l'amplitude de l'onde incidente, sa fréquence, ou le chargement extérieur appliqué au système. Bien que la plupart des méthodes permettent de mettre en évidence la présence d'un défaut, peu d'informations sont obtenues sur les caractéristiques de ce dernier. Ces méthodes sont aujourd'hui encore en développement et des efforts doivent être faits pour aboutir à des méthodes de CND concrètement applicables. Pour améliorer les performances des méthodes non-linéaires, il est nécessaire d'étudier les mécanismes mis en jeu. Pour cela, de nombreux travaux ont recours à la modélisation. Dans la partie suivante, on présente les différentes méthodes de modélisation du CAN, puisque ce phénomène concerne directement la réponse d'une fissure lors d'un éclairage acoustique.

1.4 Modélisation des interfaces de contact en acoustique non-linéaire

Un des objectifs du CND est de détecter les fissures le plus précocement possible. Une fissure peut être vue comme une interface de contact de taille finie dont le comportement mécanique est non-linéaire et complexe. Par ailleurs, le CAN est responsable de plusieurs phénomènes acoustiques non-linéaires, comme la génération d'harmoniques supérieurs et inférieurs, les effets d'hystérésis et la modulation d'amplitude si deux ondes se rencontrent au niveau de l'interface. Les phénomènes de contact sont complexes, et les comportements normaux et tangentiels sont non-linéaires. Dans cette partie, on présente les différentes approches utilisées pour décrire l'interaction entre une onde et une interface de contact. Certains modèles présentés ici s'inscrivent dans une approche semi-analytique, alors que d'autres sont purement numériques. Parmi les méthodes numériques fréquemment rencontrées, on peut citer les Différences Finies (DF) [98], les Eléments Finis (EF) [99, 100], les Domaines Fictifs [101] et les Eléments Frontières (BEM : Boundary Element Method) [102, 103]. Différentes solutions sont utilisées dans ces méthodes de résolution pour modéliser les interfaces

1. S'il existe un grand nombre d'interfaces de contact

de contact.

1.4.1 Modèles bi-modulaires

Comme cela a été introduit plus haut, une fissure peut être vue comme une interface de contact qui présente une asymétrie de raideur pour la compression et la traction. Une manière simple de modéliser une fissure consiste à introduire une zone dont la relation contrainte-déformation est asymétrique, et diffère de la loi de comportement appliquée au reste du solide. On parle de modèle bi-modulaire. La loi de comportement utilisée pour la fissure est continue par morceaux (figure 1.9) :

$$\sigma = E\varepsilon \left(1 - H(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\Delta E}{E}\right), \tag{1.32}$$

où H est la fonction Heaviside, ε_0 est la déformation statique initiale et $\Delta E = (E - (d\sigma/d\varepsilon)_{\varepsilon>0})$ est la perte de rigidité. Pour un état de compression ($\varepsilon < 0$), la rigidité de l'interface est celle du matériau sain E. Dans la phase de traction, le module d'élasticité est noté E_+.

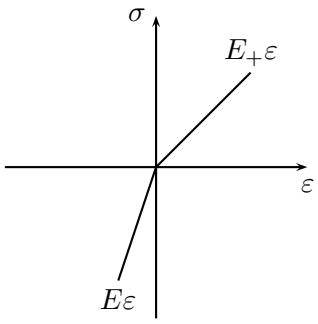


Figure 1.9 – Courbe contrainte-déformation du modèle bi-modulaire.

Lorsque ce type de loi est introduit dans les équations de la mécanique, seuls les harmoniques supérieurs pairs sont générés [68, 104]. L'amplitude de ces harmoniques varie linéairement avec l'amplitude de l'excitation [68], ce qui va à l'encontre des observations expérimentales. Les modèles bi-modulaires ont néanmoins été utilisés en pratique dans des modèles numériques. Pour simuler l'effet d'une fissure sur la réponse d'une poutre lors d'une excitation périodique, une possibilité est d'introduire dans un modèle EF des éléments spéciaux dont la rigidité adopte une loi différente de celle des autres éléments [68, 105]. Avec ce type de modèle, Kawashima et al. ont étudié l'interaction entre une onde de Rayleigh et une fissure de surface [106]. L'onde de Rayleigh a la particularité d'avoir une composante longitudinale et transverse. Le modèle bi-modulaire adopté tient compte des efforts tangentiels : les contraintes tangentielles sont parfaitement transmises lorsque la fissure est fermée, c'est à dire lorsque la fissure est dans un état de compression. Le modèle tient aussi compte de l'ouverture initiale de la fissure. Les résultats numériques prévoient une augmentation de A_2/A_1 quand la longueur de la fissure augmente. Krawzuk propose un algorithme itératif pour traiter le problème inverse consistant à retrouver l'emplacement des fissures [107]. La méthode consiste à minimiser la fonction différence entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. Un modèle EF est utilisé, et le défaut est modélisé par une loi bi-modulaire. Sa position est modifiée

selon un algorithme génétique, tant que la fonction de minimisation ne vérifie pas un critère de convergence.

1.4.2 Modèles ressorts

Une interface a toutefois un comportement plus complexe que le simple passage d'une valeur de rigidité à une autre. Cela s'explique notamment par la mise en contact et la déformation progressive des aspérités présentes sur les faces impliquées dans le contact. Les modèles développés se basent notamment sur des travaux de tribologie, dont on peut trouver un résumé dans [108]. Greenwood et Williamson établirent que la surface réelle de contact entre deux solides est proportionnelle au chargement et non à la surface apparente [109]. A partir d'une répartition statistique d'aspérités dont les déformations élastiques sont décrites par un contact Hertzien, ils mettent en évidence une variable qui relie la surface en contact et le chargement appliqué : c'est la dureté d'interface [109]. Kendall et Tabor ont étudié la propagation d'une onde à travers une interface statique d'une part, et à travers une interface dans un mouvement de glissement d'autre part [110]. Il ont montré que le coefficient de transmission de l'onde à travers l'interface est directement en lien avec la raideur d'interface. Cette dernière est modélisée par des ressorts dont la raideur est déterminée par une mesure statique de compression de deux solides. L'évolution des coefficients de transmission-réflexion donnée par le modèle s'accorde avec les mesures expérimentales. La rigidité d'interface peut être vue comme une modification de rigidité apportée par l'introduction d'une interface. Si une contrainte de traction (ou de compression) σ est appliquée à un solide contenant une interface, les déplacements mesurés entre deux points éloignés de l'interface peuvent s'écrire comme la somme du déplacement Δ_p, qui aurait été mesuré si l'interface était parfaite (pas de défaut), et du déplacement Δ_I, dû aux déformations locales de l'interface. La rigidité de l'interface K est alors définie par [111] :

$$K = \frac{\sigma}{\Delta_I}. \tag{1.33}$$

Haines a étendu les travaux de Kendall et Tabor pour prendre en compte les déformations élasto-plastiques des aspérités dans la définition de la rigidité de l'interface [112]. Drinkwater et al. ont utilisé des ressorts pour étudier la variation du coefficient de réflexion d'une onde en fonction de la fréquence, pour deux blocs d'aluminium mis en compression [113]. Les modèles élastiques ou élasto-plastiques montrent un bon accord avec les résultats expérimentaux dans le cadre d'une approximation quasi-statique, c'est à dire pour des longueurs d'onde grandes devant la taille des aspérités. En associant ces modèles de ressorts avec une méthode numérique de type DF, Delsanto et Scalerandi ont construit un modèle appelé LISA (Local Interaction Simulation Approach) pour étudier la propagation d'une onde à travers une interface de contact non-parfaite [114]. Dans cette approche, les cellules de la grille DF contiennent une raideur normale et tangentielle regroupées dans un tenseur. En faisant varier les valeurs de ce tenseur, les auteurs ont pu modéliser différents types de défauts (délaminage, trou...) en dimension 1 et 2. La diffraction d'une onde plane par l'un de ces défauts est donnée en exemple [114]. Ce modèle a été repris par la suite pour étudier les effets non-linéaires non-classiques comme les effets d'hystérésis ou de dynamiques lentes [39]. Le comportement des ressorts a été enrichi par des amortisseurs visqueux, afin de donner un comportement hystérétique à certaines cellules qui représentent les contacts inter-granulaires d'un matériau.

La distribution de cellules purement élastiques et de cellules hystérétiques permet de modéliser un matériau fortement non-linéaire de type géologique. Un tel modèle s'inscrit alors dans la théorie des espaces de Preisach-Mayergoyz. Les expériences numériques sont concluantes puisqu'elles montrent bien un comportement hystérétique. Ce modèle permet de reproduire le phénomène de décalage de la fréquence de résonance, et l'évolution quadratique du second et du troisième harmonique en fonction de l'amplitude de la source [39].

Les raideurs d'interfaces, ou celles des ressorts utilisés dans les modèles, doivent être déterminées expérimentalement. La mesure du coefficient de réflexion (ou de transmission) d'une onde pour différents niveaux de charge permet de calculer ces raideurs. Une onde longitudinale ou une onde transverse sont respectivement utilisées pour évaluer la raideur normale et la raideur tangentielle. Biwa et al. ont réalisé ce type de mesure pour des blocs mis en compression, en aluminium [64, 115] ou en Plexiglas [75, 76]. En notant respectivement R_L et R_T le coefficient de réflexion d'un onde longitudinale et d'une onde transverse, les raideurs sont données par [75] :

$$K_n = \frac{\rho c_L \omega \sqrt{1 - R_L^2}}{2R_L}, \quad K_t = \frac{\rho c_T \omega \sqrt{1 - R_T^2}}{2R_T}, \tag{1.34}$$

où ρ, c_L et c_T sont la masse volumique, la vitesse des ondes longitudinales et transverses et ω la pulsation. La rigidité tangentielle peut aussi être déterminée à partir de la vitesse de propagation d'une onde d'interface se propageant le long de la surface de contact [75, 76]. Biwa et al. ont remarqué que pour de faibles niveaux de contrainte, la raideur normale pouvait s'écrire en fonction de la charge appliquée selon une loi de puissance de la forme $K_n = C^2 p_0^m$, où C et m sont des constantes déterminées à partir de l'expérience [115]. A partir des rigidités d'interface, il est possible d'exprimer une relation approchée donnant l'amplitude du second harmonique en fonction de la contrainte appliquée [115]. Cette relation est valable pour des chargement de l'ordre du MPa. En utilisant cette loi puissance, Nam et al. ont développé un modèle permettant de traiter le cas d'une incidence oblique sur l'interface et la conversion de mode. Quatre raideurs (K_n, K_t, K_{nt},K_{tn}) sont nécessaires et doivent être mesurées expérimentalement. Pour des angles d'incidence de 25° et 45°, l'évolution du second harmonique en fonction de la charge suit relativement bien le résultat expérimental [65].

1.4.3 Modèles masse-ressorts

Une extension logique du modèle avec ressorts est le modèle masse-ressorts. L'introduction de masses permet de prendre en compte des changements de densité créés par l'existence de pores ou d'inclusions à l'interface. Par exemple, les pores vont être dotés de masses négatives alors que les inclusions correspondent à des masses positives. Les termes de masses doivent être pris en compte lorsque le nombre des imperfections devient grand. La masse associée à un réseau plan de fissures lisses réparties sur une interface est négligeable [111]. Dans le cadre de l'approximation quasi-statique, Baik et Thompson ont étudié la réflexion et la transmission d'une onde plane à travers une interface comprenant différents types de défaut (réseau de fissures, faible densité d'inclusions ou de fissures cylindriques de faible épaisseur) [111]. Dans ce modèle, la longueur d'onde est grande devant les imperfections et les contraintes générées ne modifient pas la dimension de la zone de

contact. Il n'y a donc pas d'effets non-linéaires. Le modèle quasi-statique a été étendu par Margetan et al. pour tenir compte des efforts tangentiels et traiter la réflexion et la transmission d'une onde avec une incidence oblique [116]. Les résultats expérimentaux sont en accord avec le modèle tant que la fréquence reste suffisamment faible [117].

L'approximation quasi-statique est redéveloppée par Pecorari dans une démarche similaire à celle de Greenwood et Williamson, mais avec une distribution des aspérités obéissant à une loi statistique inverse χ^2 plus réaliste que la loi gaussienne [118]. Par ailleurs, des conditions limites sont proposées pour permettre de traiter l'interface comme une frontière non-linéaire. Le modèle permet ainsi d'étudier la génération des harmoniques supérieurs en fonction de la raideur d'interface et de l'angle d'incidence entre l'onde et l'interface. Le modèle développé est ensuite appliqué au cas d'une fissure de surface sollicitée par une onde de Rayleigh [119]. Le second harmonique a une intensité maximale lorsque l'onde incidence est générée avec un angle d'incidence proche de l'angle critique, ce qui est en accord avec les observations de Mao et al. [72]. Kim et al. ont utilisé un modèle similaire prenant en compte les déformations plastiques des aspérités afin de décrire les phénomènes d'hystérésis observés sur les coefficients de réflexion-transmission lors du premier cycle de chargement-relaxation de l'interface [120]. Les résultats théoriques et expérimentaux sont cohérents. Aleshin et Abeele proposent un modèle capable de traiter le cas d'un solide contenant un grand nombre de fissures réparties et orientées aléatoirement [41]. Le solide est décrit par les espaces de Preisach-Mayergoyz et le comportement des fissures est obtenu à partir de lois micro-mécaniques proches des travaux exposés précédemment. La réponse macroscopique reproduit les effets d'hystérésis, de dynamique lente, de décalage de la fréquence de résonance et de génération de différents harmoniques.

L'introduction de masses dans les modèles ressorts permet selon certains auteurs d'expliquer la génération des sous-harmoniques [46, 48]. L'interface est modélisée par des ressorts reliant la face d'entrée A (celle rencontrée par l'onde incidente) et la face de sortie B. Une masse est associée à la face B de la fissure pour prendre en compte les effets d'inertie dus au matériau contenant la fissure. Lors d'une excitation haute fréquence, la face B ne peut pas suivre les déplacements de la face A. Ces retards sont à l'origine des sous-harmoniques $nf_0/2$. Ohara et al. ont pris en compte dans ce modèle d'éventuels effets d'adhésion entre les faces de la fissure pour expliquer le seuil observé pour la génération des sous harmoniques [46]. Cette adhésion peut être vue comme le résultat de mécanismes de micro-contact ou plus simplement comme l'effet d'une contrainte résiduelle maintenant la fissure fermée. Trois paramètres principaux sont utilisés : la raideur du ressort, la masse associée une face de la fissure et la force d'adhésion.

1.4.4 Modèles avec lois de contact

Le phénomène de clapping d'une interface est un comportement dynamique. L'ouverture et la fermeture rapide de la fissure induit des changements brusques de la vitesse et des contraintes. Une manière de gérer ce type de comportement consiste à utiliser des lois de contact. Par exemple, le contact unilatéral autorise la séparation géométrique des faces. Des conditions de contrainte libre sont alors imposées. Pendant les phases de contact la non-interpénétration des faces est assurée,

tandis que seule une contrainte de compression peut être transmise. Cette loi est utilisée dans un certain nombre de modèles et sera détaillée dans le chapitre suivant. Les lois de contact rendent le problème difficile à résoudre analytiquement et requièrent l'utilisation de méthodes numériques. L'interface peut être partiellement fermée et il est nécessaire d'appliquer les conditions aux limites appropriées uniquement sur la partie en contact. La section de l'interface impliquée dans le contact à un instant donné est donc une inconnue supplémentaire.

Mendelsohn et Doong ont mis en place un modèle numérique de type BEM pour traiter l'interaction d'une onde SH avec une interface de contact [121]. Dans ce modèle 2D, seule l'interface est discrétisée et une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb est utilisée. La loi de frottement permet de prendre en compte les efforts tangentiels. La résolution est effectuée dans le domaine temporel et un algorithme itératif est utilisé pour déterminer quelles zones sont ouvertes, en contact, ou glissantes. Enfin, une contrainte normale est appliquée sur l'interface. Les résultats donnent l'évolution de la distance maximale de glissement et du facteur d'intensité des contraintes (FIC) en pointe de fissure lors du passage de l'onde. Hirose et Achenbach reprennent le travail de Mendelsohn et Doong sur le cas d'une fissure 2D soumise à une onde plane longitudinale [122]. Le frottement n'est pas pris en compte. La solution pour l'onde transmise est calculée à partir des déplacements de l'interface en utilisant les fonctions de Green. L'analyse de l'onde transmise montre l'existence d'un second harmonique qui décroit avec la contrainte normale, conformément aux observations expérimentales. Le frottement est ajouté dans un second travail [123]. Trois cas sont abordés en régime permanent : (i) la fissure est initialement ouverte et soumise à une onde longitudinale sous incidence normale, (ii) la fissure est fermée et soumise à une onde longitudinale ou transverse sous incidence normale, et enfin, (iii) la fissure est fermée et soumise à une onde transverse sous incidence oblique. L'évolution des harmoniques est donnée en fonction de la compression pour les cas sous incidence normale. Le troisième harmonique montre un maximum dans le cas de l'onde transverse. Sous incidence oblique, seule la réponse temporelle de l'interface est proposée. Le même type de modèle est aussi utilisé par Menshykov et al. dans une logique plus orientée vers la mécanique de la rupture. Les FIC sont calculés pour plusieurs angles d'incidence [124]. Stavroulakis et al. ont utilisé cette résolution et ont comparé les déplacements de l'interface avec et sans loi de contact. La prise en compte du contact se traduit par une transmission partielle de l'onde à travers l'interface [125]. Récemment, Tan et al. ont étendu le modèle BEM pour un matériau homogène anisotrope [126]. Une attention particulière est apportée au calcul des ondes diffusées dans ce type de matériau. La méthode BEM est efficace pour résoudre le problème de contact puisque seule l'interface est discrétisée. Cependant, le calcul des champs transmis et réfléchis nécessite la connaissance des fonctions de Green dans le domaine temporel. Ces fonctions ne sont connues que pour certaines géométries. D'autre part, la méthode conduit à l'évaluation d'intégrales singulières qui nécessitent des méthodes d'intégration complexes.

Ces lois de contact sont aussi implémentées dans des modèles EF par l'intermédiaire de diverses techniques qui seront détaillées dans le chapitre 3. L'utilisation des EF et des lois de contact est maintenant très répandue dans les modélisations mécaniques car ils présentent l'avantage d'être flexibles, notamment en terme de géométrie, et robustes. En acoustique, on recense peu de modèles

EF intégrant des lois de contact unilatéral avec ou sans frottement. Kögl et al. ont mis en place un modèle EF comportant une ou plusieurs fissures modélisées par une loi de contact unilatéral sans frottement [127]. L'orientation des fissures peut être facilement modifiée. Pour tenir compte des singularités de contrainte en pointe de fissure ($\sigma \propto 1/\sqrt{r}$), des éléments dégénérés (quarter-point elements [128, 129]) sont placés autour de ces zones. Ces éléments initialement développés dans le cadre de la mécanique de la rupture, ont la particularité d'avoir des fonctions de forme qui évoluent en $\sqrt{r}$ et permettent donc de gérer les singularités de contraintes. Le solide est excité de manière continue à une fréquence de 20 kHz. Pour différentes orientations de fissure, l'amplitude des harmoniques supérieurs est relevée aux noeuds du maillages, ce qui permet de réaliser des images de champs et ainsi de visualiser les fissures. Cependant, pour certaines orientations de fissure, aucun harmonique supérieur n'est détecté. Cela est dû au fait que le frottement n'est pas pris en compte dans le modèle.

La méthode des domaines fictifs développée plus récemment, combine les avantages d'une discrétisation régulière de type DF et la flexibilité géométrique des méthodes EF et BEM. Le calcul est généralement réalisé sur un domaine rectangulaire maillé par une grille uniforme, sur lequel on vient superposer un maillage linéique qui représente de manière précise les interfaces géométriques du domaine (obstacle, fissure). Les sauts de la solution entre les deux maillages constituent une inconnue supplémentaire qu'il faut relier au maillage principal, en utilisant des multiplicateurs de Lagrange par exemple. Cette méthode a été utilisée en acoustique pour l'étude de la diffusion d'une onde par un obstacle. Par exemple, Zhang a appliqué cette méthode pour la diffusion d'une onde par un disque [130]. Bécache et al. ont travaillé sur la diffusion d'une onde par une fissure linéaire représentée par des conditions limites de type contraintes libres [131]. Le modèle a été étendu par la suite pour prendre en compte une loi de contact unilatéral [132, 133]. Cette méthode est aujourd'hui encore en cours de développement et les travaux apportent une étude de convergence et d'estimation de l'erreur numérique. Haslinger et Renard ont récemment proposé une méthode avec stabilisation afin d'améliorer la convergence de la méthode [134].

Le CAN, phénomène non-linéaire associé au comportement d'une fissure lors d'une excitation acoustique, peut être modélisé par différentes approches. L'approche la plus simple consiste à considérer la fissure comme une inclusion moins rigide en traction que le reste du matériau. Les modèles bi-modulaires sont la traduction directe de cette approche et permettent de simuler des sources d'harmoniques supérieurs, bien que la réponse ne soit pas en accord avec les résultats expérimentaux. Pour reproduire avec le plus de réalité possible le comportement d'une interface, des modèles ont été développés à partir des comportements micro-mécaniques. Une gamme de modèles plus ou moins pointus utilisant des ressorts et des masses permet de modéliser la raideur de l'interface. Bien que les différents comportements non-linéaires puissent être reproduits par les modèles les plus complexes, cette approche nécessite la connaissance de la raideur de l'interface qui doit être mesurée expérimentalement. La connaissance de la rugosité est aussi parfois nécessaire. Au contraire, les modèles numériques utilisant des lois de contact ne nécessitent que la mesure du coefficient de frottement. Les lois de contact peuvent être utilisées dans plusieurs types de

résolution (BEM, EF, DF ou les domaines fictifs) et le frottement est pris en compte par des lois de type Coulomb ou Tresca par exemple. La génération de nouvelles fréquences est obtenue par ces modèles. Cependant, certains phénomènes non-linéaires comme les effets de dynamique lente ne sont pas reproduit par ces modèles.

1.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, les différents types de non-linéarité rencontrés lors de la propagation d'une onde dans un matériau ont été exposés. Les non-linéarités classiques, souvent volumiques, sont engendrées par la non-linéarité intrinsèque du matériau et sont expliquées par les constantes élastiques d'ordre supérieur qui rendent la loi de Hooke non-linéaire. L'endommagement de type plasticité est aussi un exemple de non-linéarité classique. Une des conséquences est la génération d'harmoniques supérieurs. Certains matériaux, comme les matériaux géologiques, sont fortement non-linéaires et présentent des phénomènes d'hystérésis. On parle alors de non-linéarité non-classique. Une fissure est à l'origine de plusieurs phénomènes non-linéaires, comme la génération d'harmoniques supérieurs, de sous-harmoniques et d'hystérésis. Le comportement non-linéaire d'une fissure est associé au terme de Contact Acoustique Non-linéaire (CAN). A partir de ces différents effets non-linéaires, plusieurs méthodes expérimentales ont pu être développées. Pour la détection de fissure, le CAN est exploité, et notamment la génération de nouvelles composantes fréquentielles. Les effets d'hystérésis et de dynamique lente ne sont pas utilisés en pratique pour la détection d'une fissure. L'approche la plus élémentaire consiste à utiliser la génération des harmoniques supérieurs. Pour dépasser des limitations expérimentales, comme la faible valeur des harmoniques, la présence de non-linéarité électronique ou des effets non-linéaire communs à plusieurs types de défaut, d'autres méthodes ont été successivement mises en place. Ces méthodes sont capables de mettre en évidence la présence d'une fissure mais ne donnent généralement pas ses caractéristiques. La dernière partie de ce chapitre fait état des différentes approches de modélisation du CAN. L'objectif de la modélisation est de comprendre les phénomènes physiques actifs au niveau d'une interface de contact et de tester la faisabilité de méthodes de CND basées sur les effets non-linéaires. C'est aussi un moyen d'améliorer les techniques existantes. Plusieurs approches existent et donnent des résultats plus ou moins en accord avec les observations physiques. Les modèles utilisant le concept de raideur d'interface ont été développés à partir de modèles micro-mécaniques. Les modèles les plus poussés permettent de reproduire la plupart des phénomènes physiques. Cependant certains paramètres utilisés dans ces modèles doivent être déterminés expérimentalement. Notre approche consiste à utiliser des lois de contact et une résolution purement numérique. Peu de paramètres physiques sont requis, et les méthodes numériques de type EF ou BEM sont aujourd'hui largement éprouvées. Dans ce travail de thèse, l'objectif est d'étudier l'interaction non-linéaire entre une onde acoustique et une fissure, pour à terme, proposer une méthode de CND efficace pour la détection et la caractérisation de fissures fermées. Le travail d'investigation se fera à l'aide d'outils numériques et le CAN sera donc au centre de l'attention. Le matériau considéré est homogène et isotrope de type métallique. Son comportement est linéaire et la non-linéarité est confinée à la fissure puisque les effets du CAN sont largement supérieurs à la non-linéarité intrinsèque du métal sain. De même,

l'effet d'une éventuelle zone plastifiée n'est pas pris en compte en pointe de fissure. Concernant la modélisation de la fissure, l'approche retenue est celle des lois de contact qui permettent de générer les effets non-linéaires utilisés par les méthodes de CND. Une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb sera prise en compte. L'utilisation des EF permet de créer une modélisation générique avec peu de paramètre, robuste et flexible en terme de géométrie, et donnant accès à de nombreuses informations, comme les contraintes et les déplacements au niveau de l'interface de contact ou en tout point du solide. La mise en place de ce type de modèle est aujourd'hui possible avec le développement des capacités informatiques. La démarche du travail sera la suivante : l'interaction entre une onde et une interface de contact entre deux solides est considéré en première approche dans le but de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux de la littérature. Ensuite, le cas d'une fissure fermée sera étudié, avant de passer à l'analyse d'une méthode de CND originale.

Chapitre 2

Modèle 1D de l'interaction entre une onde plane et une interface de contact unilatéral avec frottement

2.1 Introduction

L'interaction entre une onde acoustique et une fissure fermée engendre un comportement dynamique non-linéaire de contact au niveau de l'interface. Ce phénomène est à l'origine des non-linéarités acoustiques ; il s'agit du CAN. On a indiqué dans le chapitre précédent que les effets du CAN sont dominants par rapport à la non-linéarité du matériau, notamment pour les métaux. Des méthodes de CND reposant sur ces effets non-linéaires sont envisageables pour la détection et la caractérisation des fissures fermées. Cependant, les comportements dynamiques impliqués dans le contact sont complexes. Notre approche pour mieux comprendre ces phénomènes non-linéaires s'appuie sur la modélisation.

Un premier modèle simplifié du problème est proposé, où un solide déformable semi-infini est en contact avec une surface rigide. Une onde qui se propage dans ce solide selon la direction normale à l'interface va être réfléchie par celle-ci. En fonction des conditions mécaniques appliquées à l'interface une onde de compression va éventuellement occasionner des décollements entre le solide et la surface rigide. Pour sa part, une onde de cisaillement peut déclencher des phases de glissement. Comme cela a été annoncé dans le chapitre 1, chacun de ces comportements est modélisé par une loi de contact, à savoir le contact unilatéral selon la direction normale à l'interface et le frottement de Coulomb selon la direction tangentielle.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à ce problème de réflexion sur une interface de contact dont une des faces est indéformable. L'objectif de ce chapitre est de relier les phénomènes physiques que sont le clapping et le glissement avec frottement à la génération de nouvelles composantes fréquentielles dans le spectre de l'onde réfléchie. C'est aussi l'occasion d'introduire les lois de contact utilisées pour chaque comportement non-linéaire dans le cas d'un modèle simple et unidimensionnel. On verra que le problème de contact possède une unique solution, ce qui permettra d'obtenir les informations nécessaire à la mise en place des modèles 2D plus complexes.

Le problème considéré est défini dans la première partie de ce chapitre. La mise en équation permet d'obtenir une solution semi-analytique du problème de contact. Une résolution numérique par différences finies (DF) est ensuite proposée. La convergence du schéma numérique est démontrée. Enfin dans la dernière partie, des exemples pour une onde longitudinale ou transverse sont présentés. On montre alors que les effets non-linéaires peuvent être reliés à la dynamique de contact.

2.2 Définition du problème et mise en équations

En première approche, on souhaite étudier la réflexion d'une onde longitudinale ou transverse sur une interface de contact formée par un solide semi-infini en contact avec une paroi rigide et indéformable. On considère donc un solide Ω homogène et isotrope, en contact avec une surface rigide Γ en $x = 0$. Le système considéré est donné par la figure 2.1. Les surfaces en contact sont supposées planes et parfaitement lisses. Le solide exerce éventuellement un effort de compression sur le plan rigide, ce qui crée alors une contrainte normale $\sigma_0 < 0$ au niveau de l'interface. La source acoustique est située en $x = -L$ et génère une onde longitudinale ou transverse dont la direction de propagation est colinéaire à l'axe $\boldsymbol{x}$. Une frontière transparente est introduite en $x = -L$ afin de limiter la dimension du domaine d'étude sans engendrer de réflexion parasite sur une seconde interface. Le matériau utilisé est l'acier et ses propriétés sont les suivantes : module d'Young $E =$ 200 GPa, coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$, et masse volumique $\rho = 7800$ kg.m^{-3}.

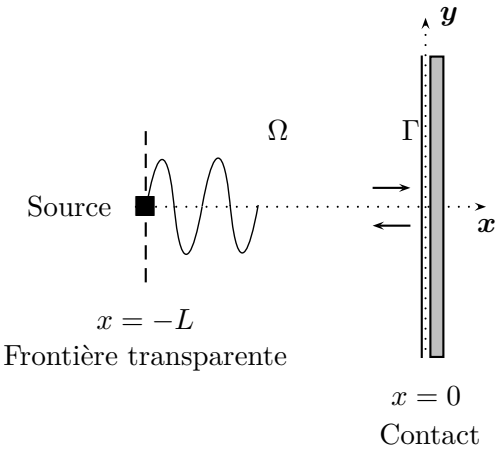


Figure 2.1 – Réflexion d'une onde se propageant dans un solide en contact avec une surface rigide.

Sous les hypothèses choisies, une formulation 1D peut être adoptée. La propagation des ondes est gouvernée par l'équation d'onde 1D qui prend la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.1}$$

où u correspond aux déplacements u_x ou u_y, respectivement pour une onde longitudinale et une onde transverse. De même, la vitesse de propagation c est respectivement égale à la vitesse de l'onde longitudinale c_L ou de l'onde transverse c_T, en fonction de la polarisation de l'onde incidente. La solution en déplacement est la somme de l'onde incidente u^+ et de l'onde réfléchie u^- :

$$u(x,t) = u^+(t - x/c) + u^-(t + x/c). \tag{2.2}$$

D'après l'équation (2.2) et la loi de Hooke, la contrainte générée dans le solide est définie par :

$$\sigma(x,t) = K\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{K}{c}\left(-u'_+(t-x/c) + u'_-(t+x/c)\right) = \sigma^+(t,x) + \sigma^-(x,t), \tag{2.3}$$

où K est égal au module d'Young E dans le cas d'une onde longitudinale, et est égal au module de cisaillement $G = E/(2(1+\nu))$ dans le cas d'une onde transverse. De même, σ correspond à la contrainte de compression σ_{xx} ou à la contrainte de cisaillement σ_{xy}. Les dérivées et les contraintes s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} u'_+(x,t) = \dfrac{1}{2}(\dot{u}(x,t) - \dfrac{c}{K}\sigma(x,t)), & \sigma^+(x,t) = -\dfrac{K}{c}u'_+(x,t) \\ u'_-(x,t) = \dfrac{1}{2}(\dot{u}(x,t) + \dfrac{c}{K}\sigma(x,t)), & \sigma^-(x,t) = \dfrac{K}{c}u'_-(x,t), \end{cases} \tag{2.4}$$

où $\dot{u}$ est la dérivée de u par rapport au temps. Dans ce qui suit, le caractère propagatif ou rétrograde de ces quantités, *i.e.* le dépendance en $t \pm x/c$, n'est précisé que par les signes $+$ et $-$. Il reste à expliciter le comportement de l'onde au niveau de l'interface. Dans le cas d'une onde de compression, des décollements peuvent être occasionnés. Pour prendre en compte ce phénomène de clapping, notre approche consiste à modéliser l'interface par une loi de contact unilatéral. Dans le cas d'une onde transverse, les glissements sont pris en compte par une loi de Coulomb. La résolution du problème est détaillée ici dans une formulation exprimée en contrainte et en vitesse, bien adaptée pour travailler avec les lois de contact.

2.2.1 Onde plane longitudinale

L'onde incidente génère une contrainte de compression $\sigma_{xx}(x,t)$ qui crée à son tour une contrainte normale $\sigma_n(t)$ au niveau de l'interface. Pour simplifier, on suppose ici qu'aucun chargement n'est appliqué sur le solide. La contrainte normale statique σ_0 est donc nulle et $\sigma_n(t) = \sigma_{xx}(0,t)$. La loi de contact unilatéral (ou loi de Signorini) s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_x(0,t) \leq 0 \\ \sigma_n(t) \leq 0 \\ u_x(0,t)\sigma_n(t) = 0 \end{cases}, \text{ sur } \Gamma. \tag{2.5}$$

La première ligne de cette équation assure la non-pénétration du solide à travers la surface rigide. Lorsque $u < 0$, l'interface est ouverte. La seconde équation indique que seule une contrainte de compression peut exister à l'interface. Lorsqu'il y a décollement, la contrainte en $x = 0$ est nulle. Enfin, la troisième ligne est appelée équation de complémentarité. Elle assure le fait que l'interface est soit ouverte, soit fermée.

Contact. Pendant une phase de contact, la vitesse et le déplacement sont nuls et on peut donc écrire :

$$\begin{cases} u(0,t) = u_+(0,t) + u_-(0,t) = 0 \\ \dot{u}(0,t) = u'_+(0,t) + u'_-(0,t) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

La contrainte normale est définie à partir de l'équation (2.3) par :

$$\sigma_n(t) = \sigma_{xx}(0,t) = \frac{E}{c_L}\left(-u'_+(0,t) + u'_-(0,t)\right) = 2\sigma^+_{xx}(0,t). \tag{2.7}$$

Conformément à la loi de contact unilatéral, il y a contact tant que $\sigma_n < 0$. En supposant que l'interface est initialement fermée, il y a décollement quand la contrainte normale σ_n s'annule. Connaissant son expression, on peut chercher l'instant t_1 pour lequel elle s'annule. Dès lors, l'interface est ouverte.

Décollement. Si la contrainte générée par l'onde incidente est suffisante, alors elle peut ouvrir l'interface. Dans ce cas, la contrainte est nulle sur la surface libre du solide. D'après l'équation (2.3), cela implique que $u'_-(0,t) = u'_+(0,t)$. On peut alors en déduire $u_-(0,t)$ en intégrant entre un instant t et le dernier instant de contact t_1 :

$$u_-(0,t) = u_+(0,t) - u_+(0,t_1) + u_-(0,t_1) = u_+(0,t) - 2u_+(0,t_1). \tag{2.8}$$

Le déplacement final de l'interface est alors donné par l'équation (2.2) :

$$u(0,t) = 2u_+(0,t) - 2u_+(0,t_1). \tag{2.9}$$

Cela reste vrai tant que le déplacement est négatif. Lorsqu'il s'annule il y a de nouveau contact. Connaissant l'expression du déplacement, on peut donc chercher l'instant t_2 qui correspond à la nouvelle phase de contact.

Il est donc possible d'obtenir la solution du problème de contact de manière semi-analytique, en construisant la solution par morceaux. Cela passe par la recherche de zéros de fonctions, qui peut être réalisée à l'aide d'un outil numérique du type Maple. Cependant, la recherche des instants des transition entre les phases de contact et de décollement peut être couteux lorsque le nombre de cycles augmente, on s'orientera donc vers une résolution numérique.

2.2.2 Onde plane transverse.

Le même travail est réalisé pour une onde de cisaillement. On suppose qu'il existe une contrainte normale σ_0 sur l'interface. Le coefficient de frottement est noté μ. L'onde se propage dans le solide et crée une contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(x,t)$. En notant $\tau(t)$ la contrainte tangentielle à l'interface et $\dot{u}_y(x,t)$ la vitesse particulaire, la loi de Coulomb est donnée par les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} \mid \tau(t) \mid \leq \mu \mid \sigma_0 \mid \\ \text{Si} \mid \tau(t) \mid < \mu \mid \sigma_0 \mid \quad \Rightarrow \text{ adhérence : } \dot{u}_y(0,t) = 0, \quad \tau(t) = \sigma_{xy}(0,t) \\ \text{Si} \mid \tau(t) \mid = \mu \mid \sigma_0 \mid \quad \Rightarrow \text{ glissement : } \tau(t)\dot{u}_y(0,t) \leq 0, \quad \tau(t) = \pm\mu \mid \sigma_0 \mid \end{cases} \text{, sur } \Gamma. \tag{2.10}$$

Si la contrainte tangentielle $|\tau|$ est inférieure à $\mu|\sigma_0|$, alors aucun glissement n'est généré. La vitesse relative $\dot{u}_y(0,t)$ entre le solide et la surface rigide est nulle. Au contraire, lorsque $|\tau|$ devient égale à $\mu|\sigma_0|$ le glissement est déclenché. Dans ce cas, la contrainte tangentielle τ prend une valeur constante égale à $\pm\mu|\sigma_0|$, tant que le glissement est possible.

Adhérence. On suppose que l'interface est initialement dans un état adhérent. La vitesse de glissement à l'interface est nulle :

$$\dot{u}(0,t) = u'_+(0,t) + u'_-(0,t) = 0. \tag{2.11}$$

Par conséquent, la contrainte donnée par l'équation (2.3) est réécrite de la façon suivante :

$$\tau(t) = -2\frac{G}{c_T}u'_+(0,t) = 2\sigma^+_{xy}(0,t). \tag{2.12}$$

D'après la loi de Coulomb (Eq. 2.10), il y a adhérence tant que $|\tau(t)| = |2\sigma^+_{xy}(0,t)| < \mu|\sigma_0|$. Comme pour l'onde de compression, on peut chercher l'instant t_1 pour lequel il y a glissement.

Glissement. Lorsque la contrainte de cisaillement devient suffisante, le glissement est déclenché. La contrainte tangentielle τ est alors fixée par la loi de Coulomb (Eq. 2.10) et de signe opposé à la vitesse.

$$\tau(t) = -\mu \mid \sigma_0 \mid \operatorname{sgn} \dot{u}(0,t) \tag{2.13}$$

Malgré la dépendance en temps de cette équation, la contrainte tangentielle est bien égale à une constante durant la phase de glissement. Dans la suite, on note γ la quantité $-\mu \mid \sigma_0 \mid \operatorname{sgn} \dot{u}(0,t)$. Les équations (2.3) et (2.13) donnent accès à $u'_-(0,t)$. Il est finalement possible de connaitre la vitesse de glissement $\dot{u}(0,t) = u'_+(0,t) + u'_-(0,t)$:

$$\dot{u}(0,t) = \frac{c_T\alpha}{G} + 2u'_+(0,t) = \frac{c_T}{G}(\gamma - 2\sigma^+_{xy}(0,t)). \tag{2.14}$$

Tant que la vitesse ne s'annule pas, il y a glissement. Connaissant la vitesse, on peut remonter aux déplacements en intégrant par rapport au temps. On a donc ici une expression analytique de la vitesse et de la contrainte au niveau de l'interface, pour chaque phase du mouvement. Il est donc possible d'obtenir une résolution analytique par morceaux en recherchant les instants de passage t_1 et t_2 entre l'adhérence et le glissement, et inversement. Cela revient à chercher les instants qui vérifient les conditions données par la loi de Coulomb. Cette solution semi-analytique a été obtenue avec Maple. Ce type de résolution est inspiré des travaux de O'Neill et al. pour l'étude de la transmission d'une onde de cisaillement entre deux demi-espaces en contact [135].

2.3 Résolution numérique par Différences Finies

Le problème présenté dans la partie précédente est résolu en tout point du domaine en utilisant un schéma numérique de type Différences Finies (DF), centré du second ordre, en espace et en temps. Le pas de temps est noté δt et le pas d'espace δx. Les exposants m correspondent à la discrétisation en temps alors que les indices k correspondent à la discrétisation en espace. L'équation d'onde (2.1) est discrétisée dans le domaine $\Omega \setminus \{\Gamma\}$ avec le schéma d'Euler de second ordre :

$$\frac{u_k^{m+1} - 2u_k^m + u_k^{m-1}}{\delta t^2} - c^2\frac{u_{k+1}^m - 2u_k^m + u_{k-1}^m}{\delta x^2} = 0, \quad \forall k \in [1,n-2]. \tag{2.15}$$

Ce schéma général est explicite en temps, et est soumis à la condition de stabilité de Courant-FriedrichsLewy (CFL). Celle-ci impose au pas de temps d'être inférieur au temps nécessaire à une onde longitudinale pour parcourir un pas d'espace : $c\delta t/\delta x < 1$. Le schéma reste identique sur le domaine $\Omega \setminus \{\Gamma\}$ quelle que soit la polarisation de l'onde utilisée, u étant égal à u_x ou u_y selon l'onde considérée. L'expression (2.15) donne alors la valeur du déplacement pour le nouveau pas de

temps :

$$\begin{cases} u_k^{m+1} = \alpha u_{k+1}^m + 2(1-\alpha)u_k^m + \alpha u_{k-1}^n - u_k^{m-1} \\ u_k^m = u_k^m \end{cases}, \quad \forall k \in [1,n-2], \tag{2.16}$$

où $\alpha = c^2\delta t^2/\delta x^2$ pour alléger l'expression.

Afin de limiter la taille du domaine d'étude, une frontière transparente est introduite en $x = -L$. Elle est définie par :

$$u'_+(-L,t) = f(t), \tag{2.17}$$

où u'_+ est donnée par l'équation (2.4) et $f(t)$ est le terme source, qui est homogène à une vitesse. L'equation (2.17) signifie que seule l'onde incidente est prise en compte en $x = -L$. L'onde rétrograde n'est affectée par aucune condition et par conséquent, elle n'est pas réfléchie en $x = -L$. Pour une onde longitudinale le terme $f(t)$ se décompose éventuellement comme la somme $f(t) = v_0 + f^*(t)$, où v_0 est une constante et $f^*(t)$ est le signal harmonique correspondant à l'onde incidente. Dans ce cas, v_0 permet d'appliquer une compression statique au système. On note alors cette contrainte normale σ_0. L'expression (2.17) est convertie en terme de déformation :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) - \frac{\dot{u}(-L,t)}{c} = -\frac{2f(t)}{c}, \tag{2.18}$$

qui peut alors être discrétisée de la manière suivante :

$$\frac{-3u_0^m + 4u_1^m - u_2^m}{2\delta x} - \frac{1}{c}\frac{u_0^{m+1} - u_0^m}{\delta t} = -\frac{2f(t)}{c}. \tag{2.19}$$

Après une simple ré-écriture, cette dernière expression donne u_0^{m+1} :

$$u_0^{m+1} = \frac{\delta t}{2\delta x}(-3u_0^m + 4u_1^m - u_2^m) + 2\delta t f(t). \tag{2.20}$$

Les expressions (2.16) et (2.20) permettent d'obtenir la solution au pas de temps suivant en effectuant un produit matrice-vecteur de la forme $U^{m+1} = AU^m + B$, où $A \in \mathcal{M}_{2(n+1)}(\mathbb{R})$, $U^m = [u_0^m,...,u_n^m,u_0^{m-1},...,u_n^{m-1}]$, et B contient entre autres le terme source. Afin de compléter l'écriture de la matrice A, il reste maintenant à définir la discrétisation en $x = 0$ selon le type d'onde et la condition au limite de contact.

2.3.1 Onde longitudinale

Le schéma général et la discrétisation effectuée pour la condition limite transparente ne sont pas modifiés. Seules les deux dernières lignes de la matrice sont liées au contact. Elles vont donc être différentes selon le type d'onde employée. D'après la loi de contact unilatéral, l'onde de compression peut ouvrir l'interface et la contrainte normale totale est alors nulle. On distingue donc le cas du contact et le cas du décollement.

Contact. A l'état initial, on suppose qu'il y a effectivement contact. Dans ce cas, le déplacement en $x = 0$ est nul, et on a $u_n^m = 0$. La discrétisation (2.16) s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_{n-1}^{m+1} = 2(1-\alpha)u_{n-1}^m + \alpha u_{n-2}^m - u_{n-1}^{m-1} \\ u_n^m = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

La contrainte est calculée par différences finies à gauche où l'on fixe $u_n^m = 0$:

$$\sigma_n = E\frac{-4u_{n-1}^m + u_{n-2}^m}{2\delta x}. \tag{2.22}$$

Décollement. Lorsque σ_n s'annule ou devient supérieure à 0, il y a décollement. La contrainte normale doit être corrigée pour satisfaire la loi de contact unilatéral. Elle est donc fixée à zéro. Connaissant la valeur de la contrainte, on a accès au déplacement u_n^m que l'on peut utiliser dans le schéma général. On obtient finalement les deux dernières valeurs :

$$\begin{cases} u_{n-1}^{m+1} = 2(1-\dfrac{\alpha}{3})u_{n-1}^m + \dfrac{2}{3}\alpha u_{n-2}^m - u_{n-1}^{m-1} \\ u_n^m = \dfrac{4u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{3} \end{cases}. \tag{2.23}$$

A partir des équations (2.16), (2.20), (2.21) et enfin (2.23), on peut construire deux matrices A_1 et A_2 se différenciant uniquement par leurs deux dernières lignes, la première étant définie pour une condition de contact, tandis que la seconde est obtenue pour une condition de décollement. La solution au pas de temps suivant est donc donnée par un produit matrice-vecteur $U^{m+1} = A_{1,2}U^m + B$. Le vecteur B contient le terme source et éventuellement un déplacement constant qui permet d'appliquer une compression sur l'interface. Le choix de la matrice à employer se fait à chaque pas de temps en accord avec les conditions de Signorini. L'algorithme de résolution utilisé dans cette méthode DF est donné par la figure 2.2.

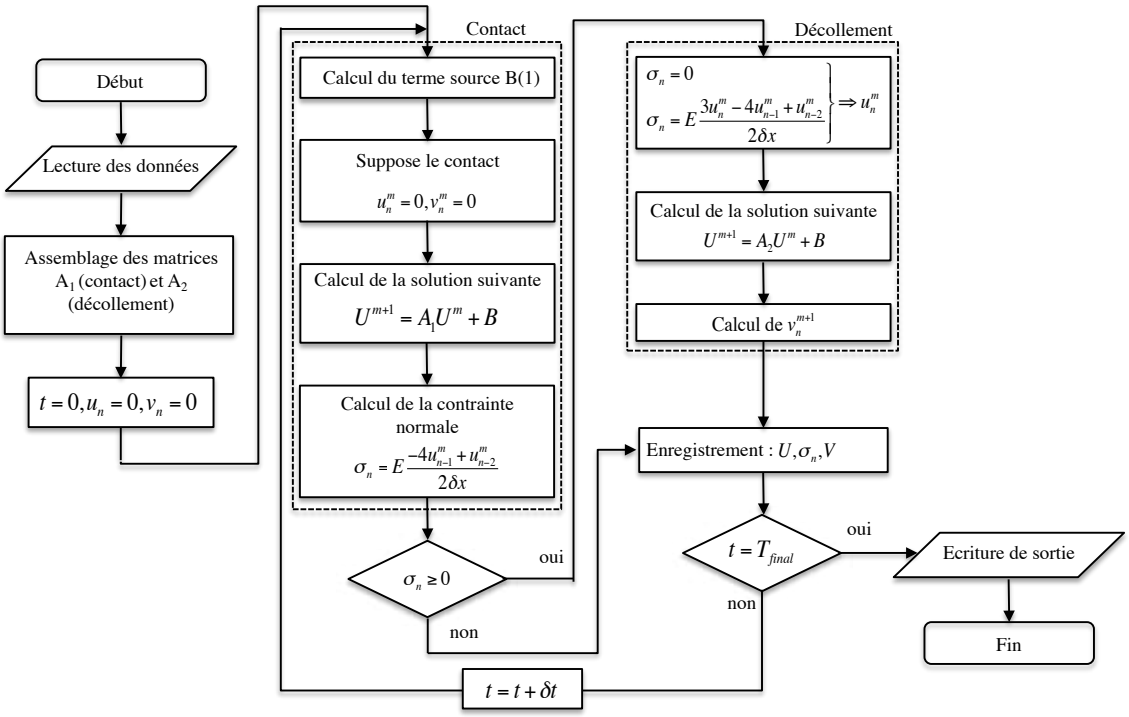


Figure 2.2 – Algorithme de résolution pour le schéma DF pour une onde de compression.

2.3.2 Onde transverse

Une onde transverse peut créer des glissements au niveau de l'interface. Les conditions aux limites sont celles données par la loi de Coulomb (2.10), et il faut différencier le cas adhérent et le

cas glissant.

Adhérence. On part du principe qu'il y a initialement adhérence. Lorsqu'on est dans une phase adhérente, la vitesse est nulle et la position en $x = 0$ est identique à celle du pas de temps précédent. On a donc $u_n^m = u_n^{m-1}$. En remplaçant cette valeur dans l'équation (2.16), on obtient finalement les nouvelles valeurs pour les deux derniers points du maillage :

$$\begin{cases} u_{n-1}^{m+1} = \alpha u_n^{m-1} + 2(1-\alpha)u_{n-1}^m + \alpha u_{n-2}^m - u_{n-1}^{m-1} \\ u_n^m = u_n^{m-1} \end{cases}. \tag{2.24}$$

La contrainte tangentielle n'est pas nulle et elle est obtenue par différence finie à gauche en remplaçant u_n^m par la valeur au pas de temps précédent :

$$\tau = G\frac{3u_n^{m-1} - 4u_{n-1}^m + u_{n-2}^m}{2\delta x}. \tag{2.25}$$

Nous avons donc obtenu les valeurs pour les deux derniers noeuds. Si la valeur de la contrainte tangentielle τ créée par l'onde incidente devient suffisante, le glissement apparaît, conformément à la loi de Coulomb.

Glissement. Pendant la phase de glissement, la vitesse n'est désormais plus nulle. La contrainte est fixée à $\tau = \pm\mu\sigma_0$, le signe étant celui obtenu lors de la phase d'adhérence. Connaissant la valeur de la contrainte, on peut alors écrire que

$$\tau = G\frac{3u_n^m - 4u_{n-1}^m + u_{n-2}^m}{2\delta x} = \pm\mu\sigma_0, \tag{2.26}$$

dont on peut déduire l'expression de u_n^m. Cette dernière valeur est alors remplacée dans le schéma général. On obtient alors :

$$\begin{cases} u_{n-1}^{m+1} = \pm\dfrac{2\alpha\mu\sigma_0\delta x}{3G} + 2\left(1 - \dfrac{\alpha}{3}\right)u_{n-1}^m + \dfrac{2\alpha}{3}u_{n-2}^m - u_{n-1}^{m-1} \\ u_n^m = \pm\dfrac{2\delta x\mu\sigma_0}{3G} + \dfrac{4u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{3} \end{cases}. \tag{2.27}$$

On a donc maintenant deux nouvelles expressions pour les déplacements des noeuds $n-1$ et n.

Finalement, on peut à nouveau construire deux matrices A_1 et A_2 à partir des équations (2.16), (2.20), (2.24) et enfin (2.27), la première correspondant à l'adhérence et l'autre au glissement. Elles diffèrent uniquement par leurs deux dernières lignes. Comme pour l'onde de compression, on obtient la solution au pas de temps suivant par un produit matrice-vecteur du type : $U^{m+1} = A_{1,2}U^m + B$. A chaque pas de temps une boucle est faite pour savoir si l'on est dans une phase de contact ou de décollement et ainsi choisir la bonne matrice. L'algorithme de résolution est analogue à celui présenté pour l'onde longitudinale et est donné par la figure 2.3.

Le schéma numérique défini dans cette partie a été implémenté avec Matlab. Pour être utilisé, la convergence du modèle doit être démontrée.

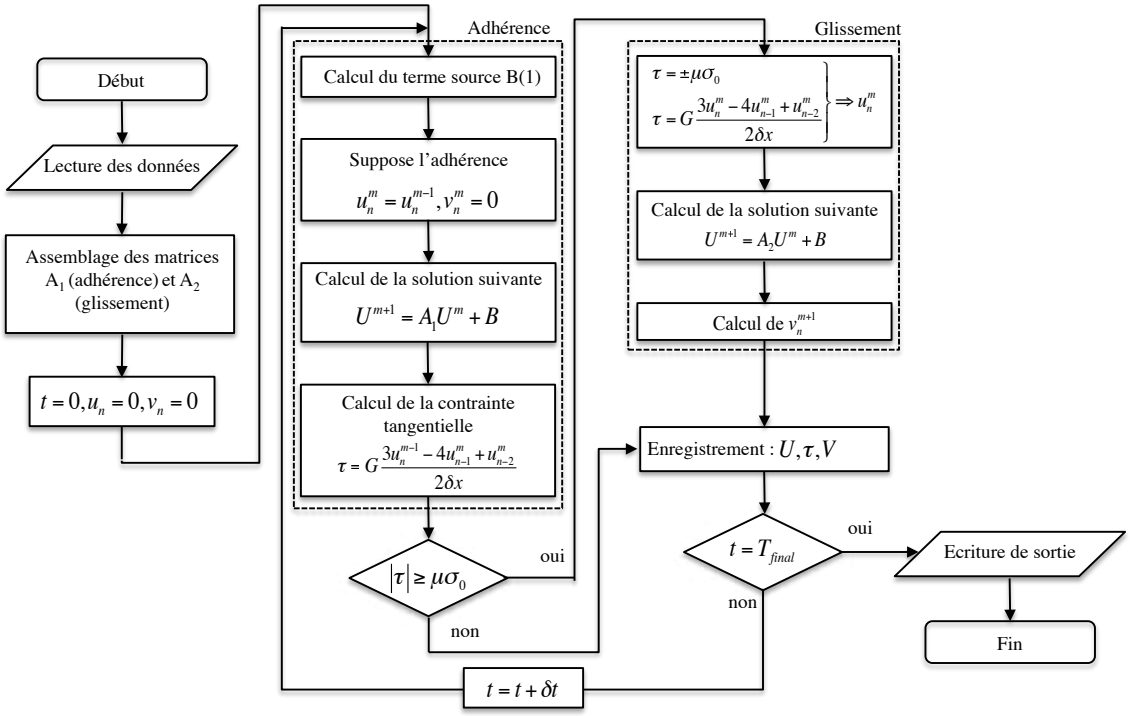


Figure 2.3 – Algorithme de résolution pour le schéma DF pour une onde de cisaillement.

2.3.3 Etude de convergence

La solution par morceaux obtenue par la résolution semi-analytique sert à valider la solution numérique. Lors de l'étude de convergence, cette solution est prise comme référence et on compare les solutions données par les deux approches, pour une onde de compression ou une onde de cisaillement. Ces deux ondes ont une fréquence de 1 MHz. Dans cet exemple, la pré-contrainte σ_0 est nulle pour l'onde de compression et est égale à $-0{,}5$ MPa pour l'onde de cisaillement. La résolution spatiale du schéma est telle que la longueur d'onde est discrétisée par 32 pas d'espace. Enfin, les calculs sont réalisés sur un domaine de longueur $L = 5$ cm. La figure 2.4 donne les déplacements calculés en $x = 0$ par la méthode semi-analytique d'une part, et la méthode numérique d'autre part. La figure 2.4.(a) correspond à l'onde longitudinale alors que la figure 2.4.(b) correspond à l'onde transverse. On constate que la superposition des deux solutions est très bonne. Dans ce cas, les paramètres numériques assurent la convergence du calcul.

Pour étudier la convergence du modèle DF, la solution numérique est calculée pour des discrétisations en espace et en temps de plus en plus fines. Comme expliqué précédemment, la solution semi-analytique sert de référence pour valider la solution numérique. Pour un pas d'espace donné, le pas de temps est choisi tel que $\delta t = 0{,}8\delta x/c$. La condition CFL est donc respectée, et le rapport $c\delta t/\delta x = 0{,}8$ est constant. L'erreur relative entre les résultats numériques et le résultat de référence est donnée par la figure 2.5, pour l'onde de compression et pour l'onde de cisaillement. L'erreur est calculée sur le déplacement maximal.

On observe le bon accord entre les solutions numériques et la solution de référence puisque l'erreur est inférieure à 1% pour les deux ondes. Lorsque la finesse du maillage augmente, l'erreur diminue. Le schéma numérique converge effectivement.

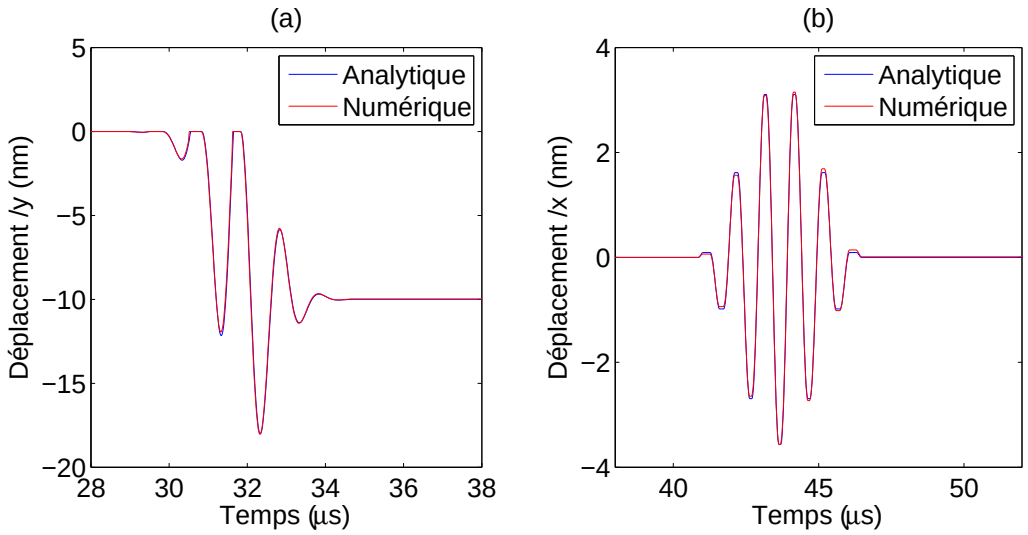


Figure 2.4 – Comparaison de la solution numérique et de la solution semi-analytique pour le problème de contact. (a) Onde de compression. (b) Onde de cisaillement.

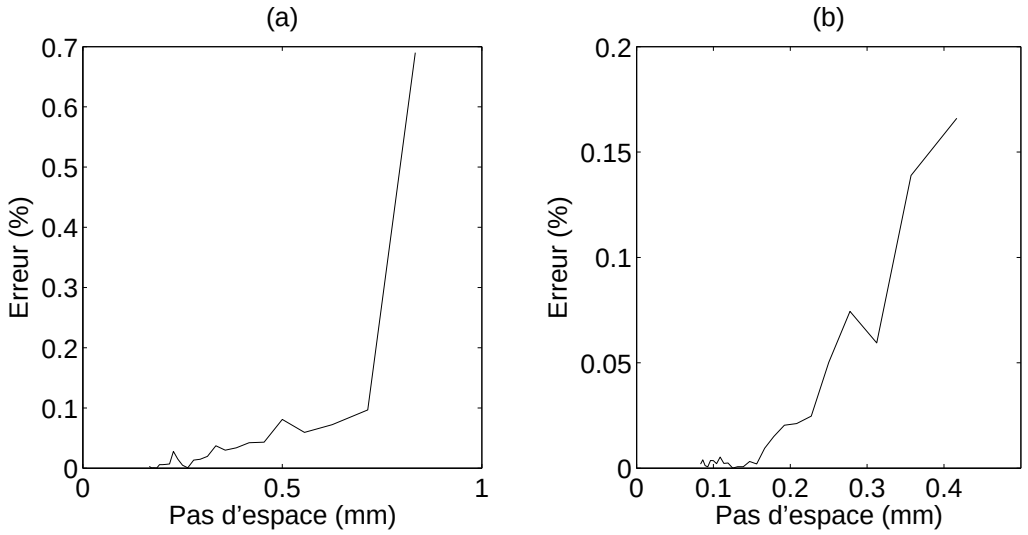


Figure 2.5 – Erreur relative entre les solutions numériques et la solution semi-analytique en fonction du pas d'espace. (a) Onde longitudinale, dont la longueur d'onde est $\lambda_L = 6$ mm. (b) Onde de cisaillement, dont la longueur d'onde est $\lambda_L = 3$ mm.

Nous avons mis en place un modèle numérique unidimensionnel permettant d'étudier la réflexion d'une onde longitudinale ou transverse sur une interface de contact formée par un solide et une surface indéformable. La convergence a été démontrée par rapport à la solution semi-analytique de référence. Dans ce qui suit, on utilise ce modèle numérique 1D pour étudier l'interaction entre une onde et ce type d'interface de contact, et ainsi obtenir des renseignements sur les phénomènes physiques non-linéaires liés au contact.

2.4 Résultats numériques 1D - Analyse physique du contact

2.4.1 Onde plane longitudinale

Le cas de l'onde longitudinale est d'abord considéré. La dynamique de contact va modifier les caractéristiques de l'onde incidente, en conséquence de quoi, l'onde réfléchie par l'interface va présenter de nouvelles composantes fréquentielles. Dans le cas d'une onde longitudinale, et pour le modèle utilisé, le paramètre qui agit sur le comportement mécanique de l'interface est la contrainte normale appliquée σ_0. Comme cela est indiqué dans la partie 2.3, la contrainte normale statique σ_0 est créée par un déplacement constant ajouté dans la définition du terme source. La solution obtenue par différences finies conduit donc à un état d'équilibre contraint dans lequel une onde longitudinale est ensuite générée. La figure 2.6.(a) donne la solution temporelle obtenue en un point proche de la source ($x = -0.045$ mm) pour une onde de compression d'amplitude $A = 9$ nm, et de fréquence $f = 1$ MHz. Dans cet exemple, la contrainte normale statique prend une valeur $\sigma_0 = -1$ MPa. L'augmentation linéaire du déplacement observé sur la figure 2.6.(a) correspond à la phase de compression du système. L'onde est générée lorsque l'état d'équilibre est atteint. On observe alors deux ondes. La première est l'onde incidente, tandis que la seconde correspond à l'onde réfléchie, qui montre des distorsions. La figure 2.6.(b) donne les spectres de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Pour cette dernière, le spectre présente de nouvelles composantes dont la fréquence est un multiple de la fréquence de l'onde incidente. Une composante continue vient aussi s'ajouter au spectre de l'onde réfléchie.

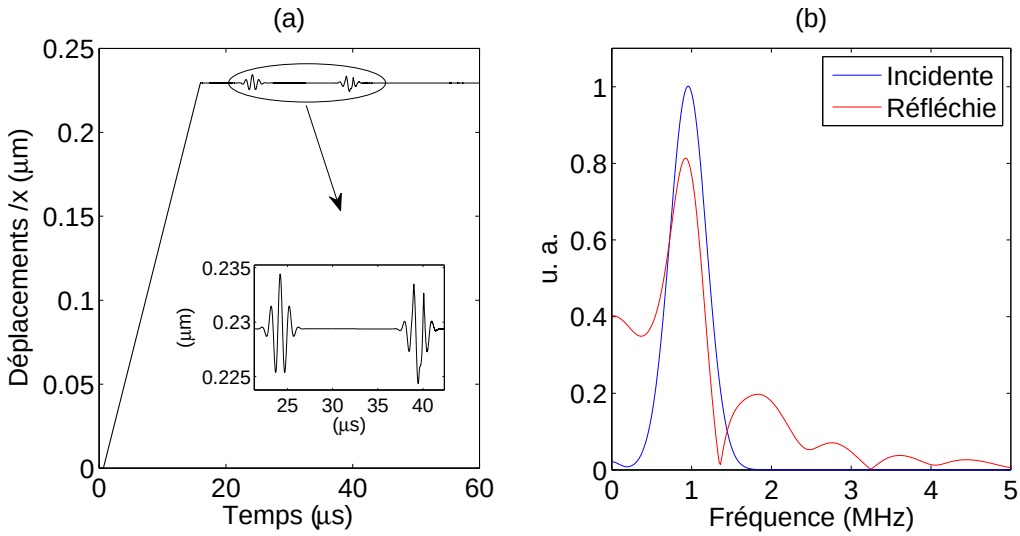


Figure 2.6 – (a) Solution temporelle en $x = -0.045$ mm pour une onde longitudinale et un niveau de compression de $\sigma_0 = -1$ MPa. (b) Spectres de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

Pour comprendre l'origine de ces nouveaux harmoniques, il est intéressant d'étudier la manière dont le contact unilatéral modifie l'onde au niveau de l'interface. L'onde incidente est un pulse sinusoïdale de 5 cycles. On considère, en dehors de toute résolution numérique ou analytique, un pulse de 5 cycles pour la contrainte de compression incidente σ_{xx}, auquel on ajoute la contrainte statique $\sigma_0 = -1$ MPa. Ce signal est tracé sur la figure 2.7.(a) et sa fréquence est égale à 1 MHz. Comme le prévoit la loi de contact unilatéral, aucune traction ne peut être exercée sur l'interface.

Par conséquent, le passage par la valeur nulle est synonyme de décollement. La contrainte doit être nulle durant toute la période de décollement. Lorsqu'on applique la loi de contact unilatéral au signal de la figure 2.7.(a), on aboutit au résultat de la figure 2.7.(b). On a alors une approximation de la contrainte normale de contact. Cette courbe n'est pas issue de la résolution numérique du problème. Les valeurs positives de σ_{xx} sont simplement remplacées manuellement par la valeur nulle afin d'avoir un aperçu de l'effet du contact unilatéral. Le signal perd sa symétrie et possède des plateaux à valeurs nulles qui correspondent aux phases de décollement. La transformée de Fourier du signal donnée par la figure 2.7.(b) est donnée par la figure 2.7.(d). On observe alors la présence des harmoniques supérieurs, pairs et impairs. Le contact unilatéral engendre bien de nouveaux harmoniques lorsqu'il est activé. Cette approche qui consiste à appliquer une loi de contact sur un signal pris pour la contrainte incidente permet d'obtenir la résolution dans le cas simplifié 1D. Elle sera ré-utilisée dans le chapitre 4 pour évaluer séparément la non-linéarité introduite par le clapping et le glissement avec frottement.

La figure 2.8.(a) donne la contrainte normale au contact obtenue par la résolution numérique 1D. Le résultat correspond bien à celui introduit par la figure 2.7.(b). Les phases de décollement sont repérées en rouge. Les déplacements correspondants au niveau de l'interface sont donnés par la figure 2.8.(b). Cette solution au niveau du contact contient elle aussi les harmoniques supérieurs. D'après l'équation (2.2), le déplacement associé à l'onde réfléchie au niveau de l'interface est donné par $u_-(0,t) = u(0,t) - u_+(0,t)$. C'est la différence entre le déplacement total et le déplacement créé par l'onde incidente. La réponse non-linéaire obtenue au niveau du contact contient les différents harmoniques supérieurs, il en va donc de même pour l'onde réfléchie.

2.4.2 Onde plane transverse

Nous considérons maintenant le cas d'une onde incidente transverse. L'interface est caractérisée par la contrainte normale appliquée σ_0 et le coefficient de frottement μ. Ces deux paramètres sont pris en compte par la loi de Coulomb (2.10). Une onde de cisaillement d'amplitude $A = 2{,}5$ nm et de fréquence $f = 1$ MHz est générée dans le solide. Le coefficient de frottement quant à lui est fixé à $\mu = 0{,}3$. La solution fournie par la résolution numérique est donnée par la figure 2.9.(a) pour $\sigma_0 = -1.5$ MPa. L'onde réfléchie par l'interface est déformée et cela s'exprime dans le domaine fréquentiel par la présence des harmoniques supérieurs impairs. En effet, la figure 2.9.(b) indique la présence du troisième harmonique, dont la fréquence est le triple de la fréquence fondamentale. Le second harmonique n'est pas généré. Ce résultat a déjà été mis en avant dans la litérature [135, 136].

Les effets non-linéaires peuvent être reliés à la dynamique de contact. Pour comprendre comment la loi de Coulomb modifie le signal, on considère un pulse de 5 cycles et de fréquence $f = 1$ MHz pour la contrainte de cisaillement σ_{xy} générée par l'onde incidente. Ce signal est donné par la figure 2.10.(a). Comme dans le cas de l'onde longitudinale, on souhaite mettre en évidence l'action de la loi de Coulomb sur un signal de contrainte quelconque. Les seuils $\pm\mu\sigma_0$ qui correspondent aux limites de glissement ont été ajoutées sur la figure 2.10.(a). Le loi de Coulomb prévoit que la contrainte tangentielle au niveau de l'interface n'excède pas cette valeur $\pm\mu\sigma_0$. Dans ce cas,

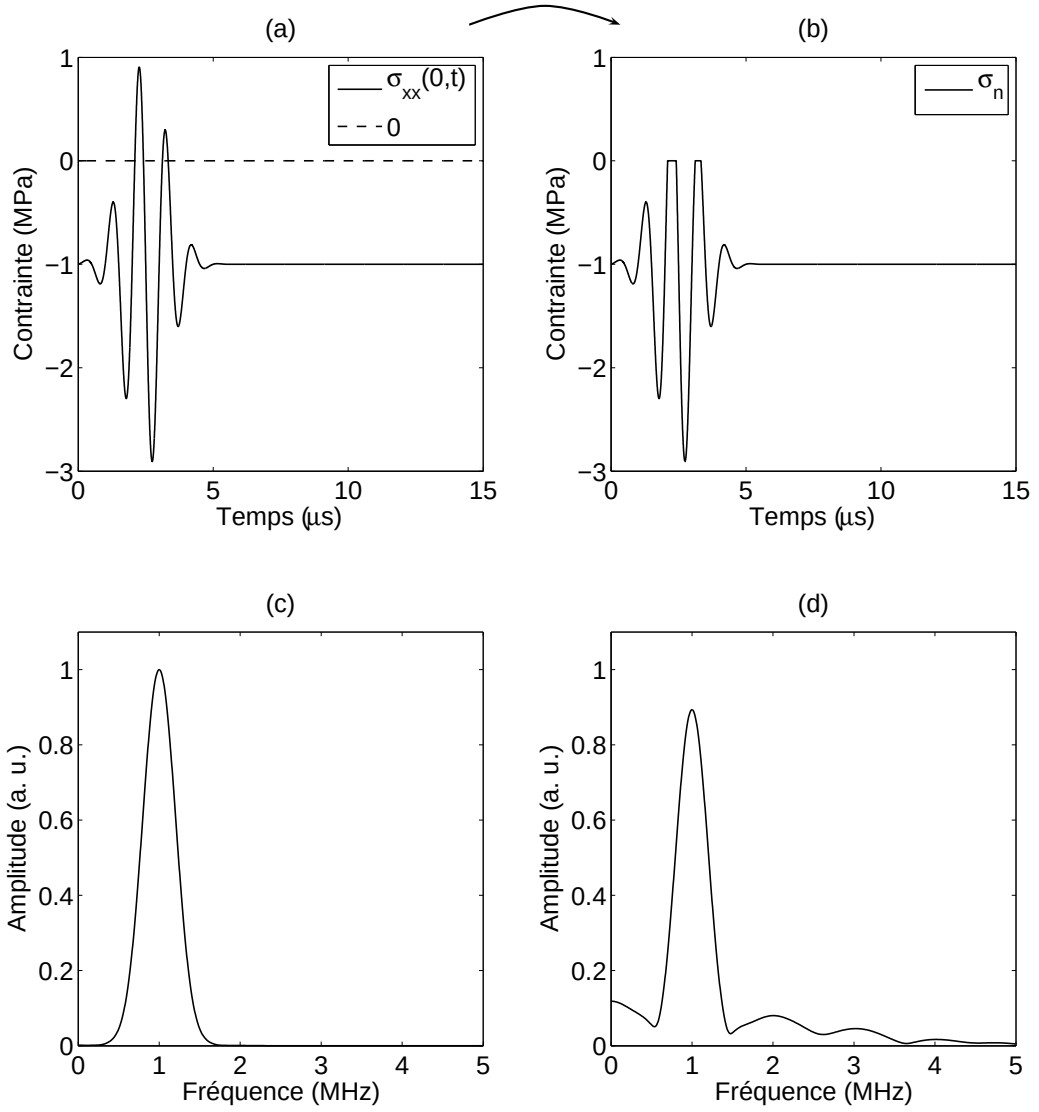


Figure 2.7 – Effet du contact unilatéral sur un signal de contrainte de compression. (a) Contrainte de compression incidente. (b) Contrainte normale de contact, après application de la loi de contact unilatéral. (c) Spectre du signal de la contrainte de compression incidente (a). (d) Spectre du signal de la contrainte normale (b).

il y a glissement et la contrainte tangentielle conserve cette valeur $\pm\mu\sigma_0$ durant toute la phase de glissement. En tenant compte de ces remarques concernant la loi de Coulomb, on peut donc obtenir la solution pour la contrainte tangentielle en appliquant la loi de Coulomb sur le signal de la contrainte incidente. Le résultat est alors donné par la figure 2.10.(b). On observe des plateaux lors des phases de glissement. L'analyse de ce signal par transformée de Fourier fait apparaître le troisième harmonique, comme le montre la figure 2.10.(d). Le second harmonique n'est pas généré. Les modifications apportées au niveau du contact sur la contrainte tangentielle permettent d'expliquer la génération du troisième harmonique.

La figure 2.11.(a) donne la contrainte tangentielle au contact obtenue par la résolution numé-

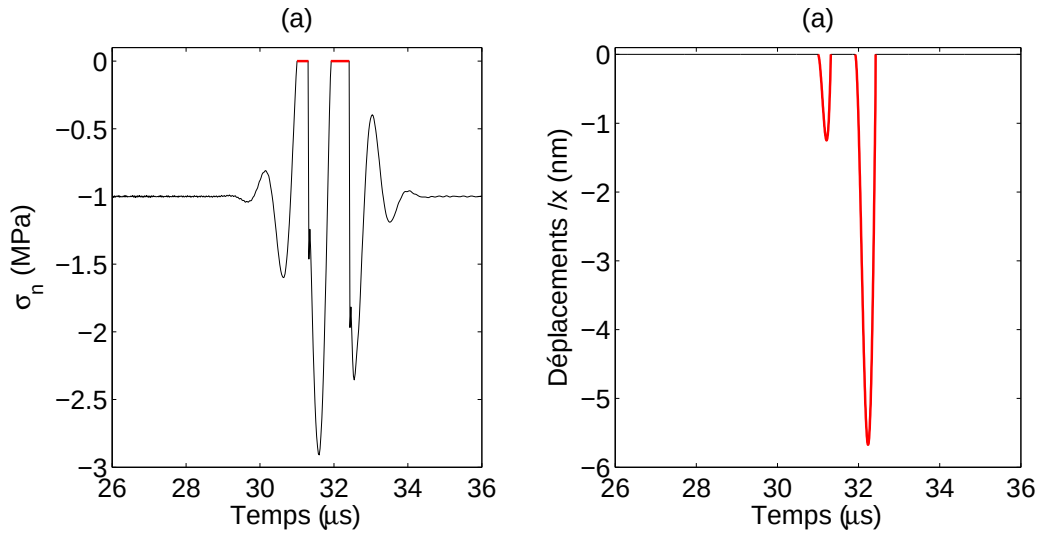


Figure 2.8 – (a) Solution numérique 1D pour la contrainte nomale de contact. (b) Déplacement temporel en $x = -0.045$ mm pour une onde longitudinale et un niveau de compression de $\sigma_0 = -1$ MPa.

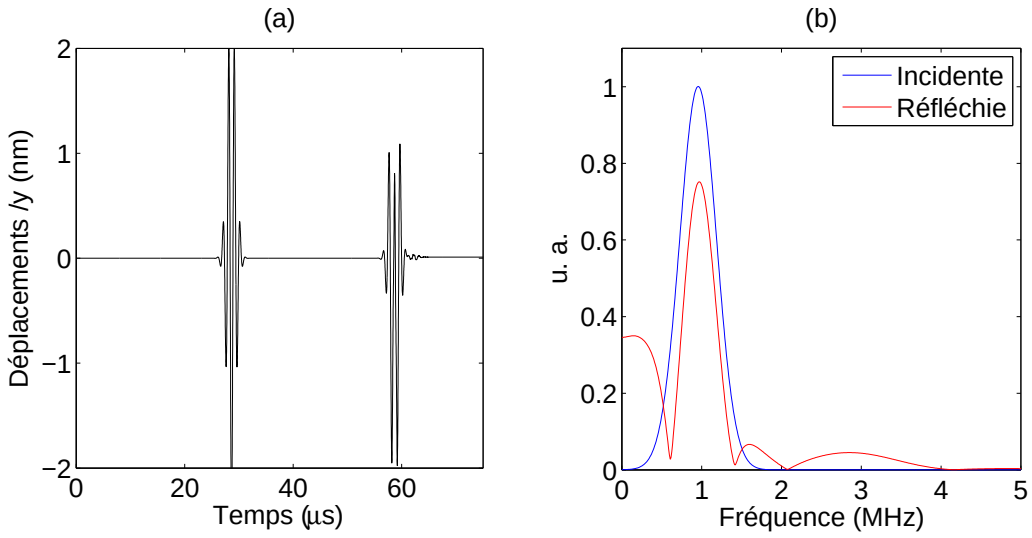


Figure 2.9 – (a) Solution temporelle en $x = -0.045$ mm pour une onde transverse et un niveau de compression de $\sigma_0 = -1.5$ MPa. (b) Spectres de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

rique 1D. Les phases de glissement déclenchées lorsque $\tau = \pm\mu\sigma_0$ sont repérées en rouge et les déplacements associés sont donnés par la figure 2.11.(b). Ce déplacement à l'interface contient uniquement les harmoniques impairs. L'onde réfléchie au niveau de l'interface est donné par $u_-(0,t) = u(0,t) - u_+(0,t)$ et va donc contenir la réponse non-linéaire créée au niveau de l'interface de contact.

Il est donc possible de relier les harmoniques supérieurs générés lors de l'interaction entre une onde et une interface de contact avec les dynamiques de contact. Nous avons mis en évidence l'action du contact unilatéral d'une part et l'action du glissement avec frottement de Coulomb d'autre part. Chacune de ces lois modifie l'onde incidente et les caractéristiques de l'onde réfléchie sont directement en relation avec les phénomènes physiques du contact.

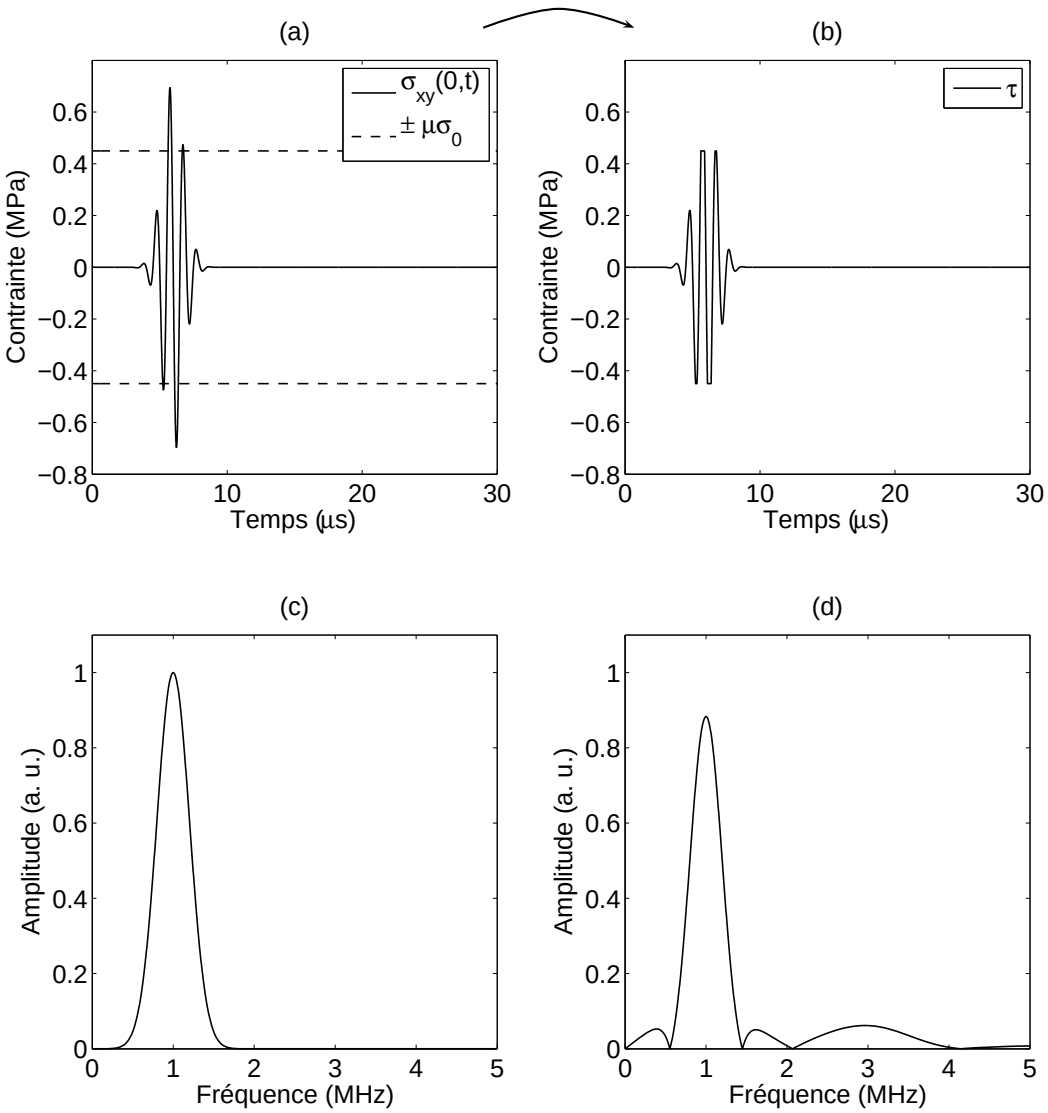


Figure 2.10 – Effet du frottement de Coulomb sur un signal de contrainte de cisaillement. (a) Contrainte de cisaillement incidente. (b) Contrainte tangentielle de contact, après application de la loi de Coulomb. (c) Spectre du signal de la contrainte de cisaillement incidente (a). (d) Spectre du signal de la contrainte tangentielle (b).

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le cas d'une interface de contact constituée d'un solide déformable et d'une paroi rigide, soumise à une excitation acoustique, est étudié. Cette première approche permet d'étudier l'interaction entre une onde et une interface de contact dans un cas unidimensionnel simple. Le problème de contact peut d'ailleurs être résolu de manière semi-analytique. L'objectif étant à terme de considérer une fissure fermée, notre approche s'oriente vers la modélisation numérique. La résolution 1D par Différences Finies permet d'étudier l'onde réfléchie par l'interface ainsi que les phénomènes physiques mis en jeux dans la dynamique de contact. Le clapping est géré par le contact unilatéral. La contrainte normale ne peut être positive, ce qui a pour conséquence de gé-

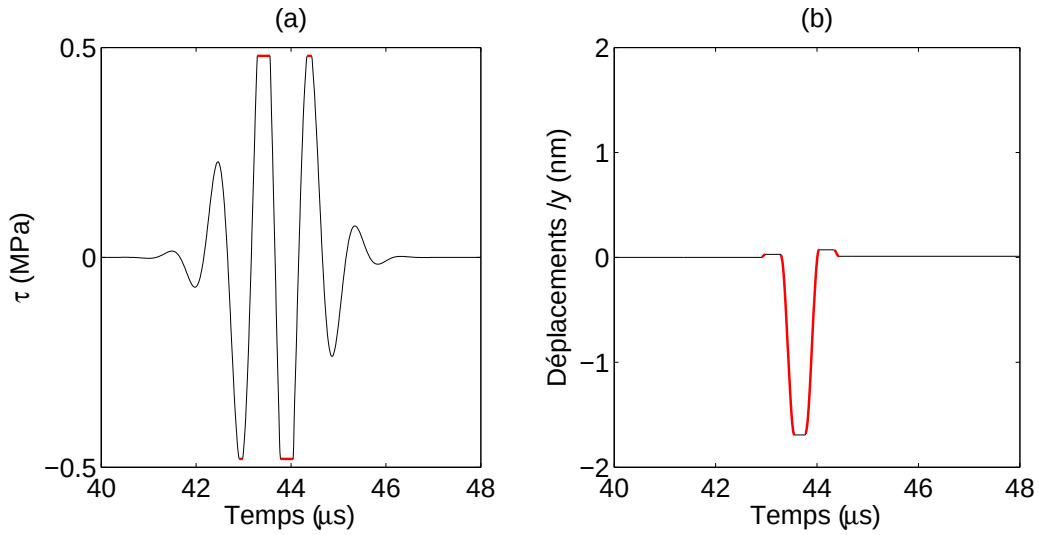


Figure 2.11 – (a) Solution temporelle en $x = -0.045$ mm pour une onde de cisaillement et un niveau de compression de $\sigma_0 = -1{,}5$ MPa. Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$. (b) Déplacement temporel en $x = -0.045$ mm pour une onde transverse.

nérer des harmoniques supérieurs pairs et impairs. Les phénomènes de glissement avec frottement sont pris en compte par la loi de Coulomb. Les modifications apportées à la contrainte de contact tangentielle se traduisent par la génération des harmoniques supérieurs impairs uniquement.

Malgré sa simplicité, ce modèle 1D fournit des premiers éléments pour relier la création des harmoniques supérieurs à la dynamique de contact. On a pu expliquer comment le contact unilatéral et le frottement agissait séparément lors de l'interaction entre l'onde et l'interface. Dans le cas d'une fissure, ou pour une incidence oblique, les comportements normaux et tangentiels sont couplés au niveau du contact. Par exemple, une zone d'ouverture de l'interface peut être précédée d'une zone de glissement [137]. Par ailleurs, une partie de l'onde sera transmise à travers l'interface et une partie seulement sera réfléchie. Dans le chapitre suivant des modèles 2D sont mis en place dans le but d'étudier l'interaction entre une onde et une interface de contact puis une fissure fermée.

Chapitre 3

Modélisation de l'interaction entre une onde acoustique et une interface de contact

3.1 Introduction

Lorsque l'on considère une fissure fermée, l'interaction avec une onde acoustique engendre un comportement dynamique non-linéaire de contact au niveau de l'interface. Ce phénomène physique, aussi appelé contact acoustique non-linéaire (CAN), est à l'origine de la non-linéarité acoustique qui s'exprime entre autres par la génération de nouveaux harmoniques. Cependant, les comportements dynamiques impliqués dans le contact sont complexes. Notre approche consiste à modéliser les phénomènes physiques par une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. Nous avons vu dans le chapitre précédent que ce type de loi entrainait la génération des harmoniques supérieurs et qu'il était possible de relier ces harmoniques aux modifications des contraintes de contact.

Une fissure peut être vue comme une interface de contact de taille finie qui va éventuellement diffuser l'onde incidente dans toutes les directions. Il est donc nécessaire de mettre un place un modèle numérique plus complexe. Les Eléments Finis (EF) ont été retenus pour leur robustesse et leur flexibilité. Deux verrous rendent la modélisation difficile. Le premier concerne la gestion du contact unilatéral avec frottement qui doit être traité avec soin pour assurer la précision de la réponse non-linéaire. L'algorithme de contact doit donc être performant et assurer la convergence du modèle eu égards aux harmoniques supérieurs. L'autre point concerne les pointes de fissures, qui sont le lieux de singularités de contrainte et dégradent donc la précision de la méthode des EF. Une stratégie doit être adoptée pour tenir compte de ces singularités de contrainte et assurer la précision du modèle.

Le code Plast2D [138] utilisé pour la résolution est présenté dans la première partie de ce chapitre. Les lois de contact sont modifiées pour prendre en compte l'existence d'une contrainte normale de compression sur l'interface de contact. Vient ensuite un premier modèle comprenant une interface de contact formée par deux solides de dimension finie. Ce modèle permettra alors de valider la solution dynamique de l'interface de contact, notamment en terme de convergence

numérique. Enfin, la dernière partie de ce chapitre est dédiée à la modélisation de l'interaction entre une onde et une fissure fermée. Le maillage est raffiné au voisinage des pointes de fissure pour tenir compte des singularités de contrainte et ne pas dégrader la précision de la solution.

3.2 Modèles en dimension 2 - Résolution par Eléments Finis

L'interaction entre une onde et une fissure est traitée en dimension 2 par une résolution EF, la fissure étant modélisée par les lois de contact unilatéral avec frottement de Coulomb introduites par les équations (2.5) et (2.10). Les lois de contact forment des conditions aux limites différentes des conditions classiques de Dirichlet ou de Neumann puisque se sont des inégalités et que leur évolution est non-régulière [139]. D'autre part, leur domaine d'application fait aussi partie des inconnues du problème. Les résultats concernant l'existence et l'unicité d'une solution continue d'un problème dynamique de contact ne sont que partiels. Par exemple, Cocou a démontré l'existence de la solution d'un problème de contact unilatéral dynamique avec frottement non local, pour un matériau viscoélastique de Kelvin-Voigt [140]. La démonstration a été étendue par la suite au cas d'un solide viscoélastique fissuré [141]. Le problème reste par exemple ouvert pour un matériau purement élastique comme cela est rappelé dans [141].

De nombreux travaux ont néanmoins permis de porter ces lois de contact dans une approche EF, tout d'abord pour les problèmes statiques puis pour les problèmes dynamiques, et il existe aujourd'hui un grand nombre d'algorithmes de contact [142, 143]. Mathématiquement, un problème de contact peut être interprété comme un problème de minimisation sous contraintes d'inégalité de la forme : trouver $x^* \in \Omega$ tel que $x^* = \min f(x)$ sous les contraintes $\phi_i(x) \leq 0$. L'équation à minimiser est issue des équations de la mécanique (principe des travaux virtuels par exemple), et les contraintes d'optimisation sont données par les inéquations de contact. Lors de la mise en place de la résolution EF, ces contraintes sont prises en compte dans les équations variationnelles via des facteurs de pénalisation ou des multiplicateurs de Lagrange, qui forment les deux grandes familles de résolution des problèmes de contact.

Dans la méthode de pénalisation [144, 145], les forces normales de contact sont proportionnelles à l'inter-pénétration des faces, affectée par des coefficients dits de pénalisation. Le problème pénalisé est résolu par itérations successives, les coefficients de pénalisation étant augmentés à chaque itération, jusqu'à convergence vers une solution qui assure la non-pénétration des faces. Le principal désavantage dont souffre la méthode de pénalisation, est d'être sensible au choix des paramètres de pénalisation, choix arbitrairement fait par l'utilisateur et dont dépend la convergence de la méthode.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange [146, 147, 148] introduit des forces de contact directement dans les équations du problème discrétisé, ce qui a pour conséquence d'assurer strictement les conditions de contact telles que la non-interpénétration des faces. Dans cette formulation, ces forces de contact qui assurent le respect des contraintes d'optimisation sont les multiplicateurs de Lagrange. Cependant, les multiplicateurs de Lagrange forment un jeu d'inconnues supplémentaires à déterminer à chaque étape de la résolution, ce qui augmente le coût de la méthode.

Il existe aussi des méthodes mixtes qui font un compromis entre les deux approches, comme la

méthode du Lagrangien augmenté [149, 150, 151] ou les méthodes de complémentarité [152].

Les méthodes diffèrent aussi par leur schéma d'intégration en temps, explicite ou implicite. Les résolutions implicites sont bien adaptées aux problèmes statiques, puisque inconditionnellement stables et permettant l'utilisation de pas de temps plus grands. Les méthodes explicites sont bien adaptées aux problèmes dynamiques, les faibles pas de temps permettant de représenter des phénomènes rapides. On fait aussi une distinction parmi ces différentes méthodes selon le choix de la configuration de référence. Si celle-ci correspond à la configuration initiale, il s'agit d'une méthode de Lagrangien total. Si au contraire, la solution obtenue au pas de temps précédent est choisie comme état de référence pour le calcul en cours, il s'agit d'une méthode de Lagrangien actualisé. Cette dernière approche est particulièrement intéressante pour les problèmes de dynamique rapide ou de grandes déformations, puisque les quantités, comme les normales aux surfaces, sont recalculées à chaque pas de temps.

Le contact entre deux corps est un problème non-régulier difficile à gérer et il convient de choisir la méthode la mieux adaptée au problème traité. Un panorama des algorithmes et des méthodes de contact peut être trouvé dans [143]. L'interaction des faces d'une fissure lors d'une excitation acoustique puissante est un phénomène de dynamique rapide et intermittent où le contact doit être strictement respecté durant chaque phase du mouvement. Par conséquent, une résolution explicite associée à la méthode des multiplicateurs de Lagrange est bien adaptée.

3.2.1 Le code Eléments Finis Plast2D

Le code Plast2D est utilisé pour la modélisation de l'interaction entre une onde et une interface de contact par EF. Plast2D a été développé pour résoudre des problèmes dynamiques de contact en grandes déformations [138, 153] et est basé sur une description Lagrangienne actualisée. La résolution temporelle est explicite et a recours à un schéma de Newmark de type β_2 [154]. A chaque pas de temps, on résout alors un problème stationnaire en utilisant des Eléments Finis de type quadrangle. Le contact est géré par la méthode des multiplicateurs de Lagrange à pas avant proposée par Carpenter et al. qui permet de rendre la méthode compatible avec une intégration explicite en temps [148]. La gestion du contact fait alors intervenir une surface esclave et une surface maître, un noeud appartenant à la surface esclave ne pouvant pénétrer la surface maître. Ces caractéristiques font de Plast2D un outil adapté pour traiter l'interaction entre une onde et une interface de contact. En effet, la résolution temporelle explicite et la description Lagrangienne actualisée sont très bien adaptées aux problèmes de dynamique. La méthode des multiplicateurs de Lagrange quant à elle, assure le respect des lois de contact à chaque instant. Plast2D n'est cependant pas un code d'acoustique dans le sens où la résolution ne porte pas sur l'équation des ondes mais sur les équations de la mécanique.

Equations de la mécanique

On considére deux solides $\Omega^i, i = 1{,}2$ de masse volumique ρ^i et de frontières Γ^i. Chacune de ces frontières est divisée en trois parties exclusives : $\Gamma^i = \Gamma^i_u \cup \Gamma^i_g \cup \Gamma^i_c$. Le problème de contact entre deux corps déformables est représenté sur la figure 3.1. Des forces et des déplacements sont

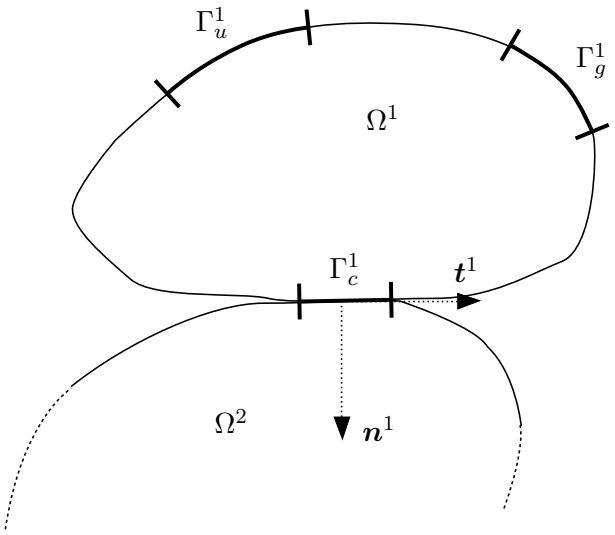


Figure 3.1 – Corps déformables en contact unilatéral avec frottement. Γ_c^i est la zone de contact. La normale sortante pour le corps Ω^i est noté $\boldsymbol{n}^i$ et la tangente au contact est notée $\boldsymbol{t}^i$.

respectivement imposés sur les surfaces Γ_g^i et Γ_u^i. Les corps sont soumis à une force volumique $\boldsymbol{f}^i$ et sont supposés initialement en contact via leur frontière commune $\Gamma_c^1 = \Gamma_c^2 = \Gamma_c$. Le problème dynamique de contact avec frottement est gouverné par les équations en déplacement $\boldsymbol{u}^i$ suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^i) = \boldsymbol{C}^i \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^i) \quad \text{dans } \Omega^i & (3.1a) \\ \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^i)) + \boldsymbol{f}^i = \rho^i \ddot{\boldsymbol{u}}^i \quad \text{dans } \Omega^i & (3.1b) \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^i)\boldsymbol{n}^i = \boldsymbol{g}^i \quad \text{sur } \Gamma_g^i & (3.1c) \\ \boldsymbol{u}^i = \overline{\boldsymbol{u}}^i \quad \text{sur } \Gamma_u^i & (3.1d) \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\sigma}^i$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ sont respectivement le tenseur des contraintes et des déformations. Ces deux tenseurs sont reliés par l'équation (3.1a) où $\boldsymbol{C} = C_{ijkl}$ est le tenseur d'élasticité linéaire. Le terme $\ddot{\boldsymbol{u}}^i$ correspond à l'accélération. On ne prend pas en compte les non-linéarités du matériau. L'équation (3.1b) est l'équation d'équilibre que l'on veut résoudre. Enfin, les équations (3.1c) et (3.1d) sont les conditions limites de Neumann et de Dirichlet qui permettent d'imposer les efforts $\boldsymbol{g}^i$ et les déplacements $\overline{\boldsymbol{u}}^i$. La normale sortante sur le corps Ω^i est notée $\boldsymbol{n}^i$. Initialement, les deux corps sont supposés en contact et leurs normales coïncident ($\boldsymbol{n}^1 = -\boldsymbol{n}^2$). Pour un point $x_c \in \Gamma_c$ appartenant à l'interface de contact, le vecteur contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^i)\boldsymbol{n}^i$ est décomposé en une contrainte normale $\sigma_n(\boldsymbol{u}^i)$ et en une contrainte tangentielle $\tau(\boldsymbol{u}^i)$ tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^i(x_c))\boldsymbol{n}^i = \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c))\boldsymbol{n}^i + \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c))\boldsymbol{t}^i, \quad \forall x_c \in \Gamma_c.$$

On définit le saut de déplacement normal $[u_n]$ entre les deux zones de contact :

$$[u_n] = \boldsymbol{u}^1(x_c)\boldsymbol{n}^1 + \boldsymbol{u}^1(x_c)\boldsymbol{n}^2 = \left(\boldsymbol{u}^1(x_c) - \boldsymbol{u}^2(x_c)\right)\boldsymbol{n}^1.$$

La loi de contact unilatéral est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} [u_n] \leq 0 \\ \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \leq 0 \\ \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c))[u_n] = 0 \end{cases} , \quad \forall x_c \in \Gamma_c. \tag{3.2}$$

Comme cela a été introduit dans l'équation (2.5), la première équation indique qu'il ne peut y avoir que décollement ou non-interpénétration des faces. D'après la seconde équation, les efforts normaux ne peuvent correspondre qu'à de la compression. La dernière équation, dite de complémentarité, assure le fait que l'interface est soit ouverte, soit fermée. Lorsqu'il y a contact, le saut de déplacement est nul alors que la contrainte normale est négative. Inversement, lorsque l'interface est ouverte, la contrainte normale est nulle et un saut de déplacement existe entre les deux faces.

Le frottement est pris en compte par l'intermédiaire du coefficient de frottement μ et de la loi de Coulomb qui est rappelée ici en terme de déplacements et de contraintes :

$$\begin{cases} \quad \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \mid \leq \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \mid \\ \text{Si} \ \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \mid < \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \mid \ \Rightarrow \ \text{adhérence} : [u_t] = 0 \\ \text{Si} \ \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \mid = \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \mid \ \Rightarrow \begin{cases} \text{glissement} : \exists \alpha > 0; [u_t] = -\alpha \tau(\boldsymbol{u}^i) \\ \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) = \pm \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \mid \end{cases} \end{cases} ,\forall x_c \in \Gamma_c, \tag{3.3}$$

où $[u_t]$ correspond au saut de déplacement tangentiel. Tant que la contrainte tangentielle τ est inférieure à $\mu|\sigma_n|$, il y a adhérence et le saut de déplacement tangentiel est nul. Pendant les phases de glissement, la contrainte tangentielle est égale à $\pm\mu\sigma_n$.

A partir des équations (3.1), (3.2) et (3.3), on peut écrire la formulation variationnelle du problème [138, 153]. Le point crucial réside dans le choix des espaces fonctionnels qui doivent prendre en compte les conditions aux limites. Cette formulation variationnelle fait apparaître le problème de contact comme un problème de minimisation sous contrainte d'inégalité. Sous réserve d'hypothèses de coercivité et de linéarité, l'existence et l'unicité de ce problème de point-selle a été établie dans [155]. Cette formulation variationnelle est approchée par éléments finis. Le point critique porte sur la discrétisation de l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange afin d'obtenir un problème discret bien posé ainsi qu'une bonne convergence. Ces espaces sont donnés dans [156] et ne sont pas rappelés ici. L'existence et l'unicité de la solution de cette formulation discrète est donnée dans [156, 157]. On trouve aussi dans ces deux articles, une analyse de l'erreur sur la solution approchée.

En utilisant ensuite la décomposition de la solution approchée sur les fonctions de base des éléments, on aboutit au système matriciel à résoudre. Lorsqu'on prend en compte les équations en régime dynamique, on obtient à l'instant $t^n = n\delta t$ le système suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}^n + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}^n + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}^n + \boldsymbol{G}^{n+1^T}\boldsymbol{\lambda}^n = \boldsymbol{F}^n \\ \boldsymbol{G}^{n+1}(\boldsymbol{X}^n + \boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n) \leq 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{K}$ sont des matrices symétriques définies positives, $\boldsymbol{M}$ étant la matrice de masse et $\boldsymbol{K}$ la matrice de raideur du système. La matrice d'amortissement $\boldsymbol{D}$ est écrite sous la forme de Rayleigh :

$\boldsymbol{D} = (\alpha \boldsymbol{M} + \ \beta \boldsymbol{K})$. Le vecteur $\boldsymbol{X}^n$ correspond aux coordonnées au temps t^n et les vecteurs $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}$ sont respectivement les vecteurs des déplacements, vitesses et accélérations aux noeuds du maillage. $\boldsymbol{F}$ est le vecteur des forces extérieures et $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_n \lambda_t]^T$ contient les multiplicateurs de Lagrange aux noeuds appartenant à la surface de contact. Enfin, $\boldsymbol{G}^T = [\boldsymbol{G}_n^T \boldsymbol{G}_t^T]$ est la matrice globale de couplage entre les déplacements et les multiplicateurs de Lagrange, entre la surface esclave et la surface maître. La construction de ces matrices est donnée dans [153]. On remarque qu'elles sont définies au temps $n+1$, d'où le qualificatif de méthode de multiplicateur de Lagrange à pas avant. Le contact est donc géré de manière implicite.

Le systeme (3.4) est intégré en temps en utilisant le schéma de Newmark de type β_2. Les déplacements, vitesses et accélérations sont calculées à chaque pas de temps de la manière suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{u}^{n-1} + \delta t \boldsymbol{u}^{n-1} + \dfrac{\delta t^2}{2} \ddot{\boldsymbol{u}}^{n-1}, \\ \dot{\boldsymbol{u}}^n = \dot{\boldsymbol{u}}^{n-1} + \delta t \ddot{\boldsymbol{u}}^{n+1} + \delta t \beta_2 \left(\ddot{\boldsymbol{u}}^n - \ddot{\boldsymbol{u}}^{n-1} \right), \\ \ddot{\boldsymbol{u}}^n = \dfrac{2}{\delta t^2} \left(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n - \delta t \dot{\boldsymbol{u}}^n \right), \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\beta_2 \in [0{,}5; 1]$ correspond à un amortissement numérique. Dans notre étude, $\beta_2 = 0{,}5$ et le schéma d'intégration est alors identique à un schéma de différences finies centrées. Ce schéma d'intégration est stable sous la condition Courant-Friedrichs-Lewy qui impose une valeur maximale au pas de temps δt :

$$\delta t < \frac{a_{min}}{c_L}, \tag{3.6}$$

où a_{min} est le plus petit élément du maillage et c_L est la vitesse de l'onde longitudinale dans le matériau.

La résolution du problème de contact est réalisée par un algorithme itératif. La solution en déplacement ${}^*\boldsymbol{u}^{n+1}$ des noeuds appartenant à une surface de contact est initialement calculée en prenant $\boldsymbol{\lambda}^n = \boldsymbol{0}$. Pour $\beta_2 = 0{,}5$ on a :

$${}^*\boldsymbol{u}^{n+1} = \Delta t^2 \boldsymbol{M}^{-1} (\boldsymbol{F}^n - \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}^n) + 2\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-1}. \tag{3.7}$$

Si certains noeuds esclaves ont pénétré les surfaces esclaves, la matrice $\boldsymbol{G}^{n+1}$ est alors construite. Les surfaces maîtres sont approchées par des splines bi-cubiques [153]. Les nouveaux multiplicateurs de Lagrange et la nouvelle solution en déplacement est ensuite calculée :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}^n = (\Delta t^2 \boldsymbol{G}^{n+1} \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{G}^{n+1^T})^{-1} \boldsymbol{G}^{n+1} ({}^*\boldsymbol{u}^{n+1}) \\ \boldsymbol{u}^{n+1} = \ {}^*\boldsymbol{u}^{n+1} - (\Delta t^2 \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{G}^{n+1^T} \boldsymbol{\lambda}^n). \end{cases} \tag{3.8}$$

Le système d'équations (3.8) est résolu par une méthode de Gauss-Seidel. A chaque itération, les conditions de contact de chaque noeud esclave sont testées pour savoir s'il y a contact et glissement. Le code Plast2D est utilisé dans ce travail de thèse pour étudier l'interaction entre une onde et une fissure fermée, avec l'objectif d'analyser la dynamique de contact de la fissure.

Lois de contact unilatéral avec frottement de Coulomb et pré-contrainte

Comme cela a été exposé dans le chapitre 1, un des paramètres importants lors de l'interaction entre une onde et une interface de contact est l'état de compression appliqué à l'interface. On

souhaite pouvoir prendre en compte facilement l'effet d'une compression de l'interface. Pour cela, une pré-contrainte normale de compression ($\sigma_0 < 0$) est directement intégrée dans les lois de contact. La loi de contact unilatéral (3.2) est modifiée dans ce sens :

$$\begin{cases} [u_n] \leq 0 \\ \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \leq 0 \\ \left(\sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0\right)[u_n] = 0 \end{cases} , \quad \forall x_c \in \Gamma_c. \tag{3.9}$$

Comme pour l'équation (3.2), le saut de déplacement normal est noté $[u_n]$ et la condition de non-interpénétration reste inchangée. La contrainte normale totale est la somme de la contrainte normale dynamique σ_n et de la pré-contrainte σ_0. La contrainte normale totale ne peut correspondre qu'à de la compression. Cependant, σ_n peut être positive, et tant que $\sigma_n \leq -\sigma_0$, il y a contact. L'équation de complémentarité porte sur la contrainte normale totale. La figure 3.2 donne une représentation de cette loi de contact.

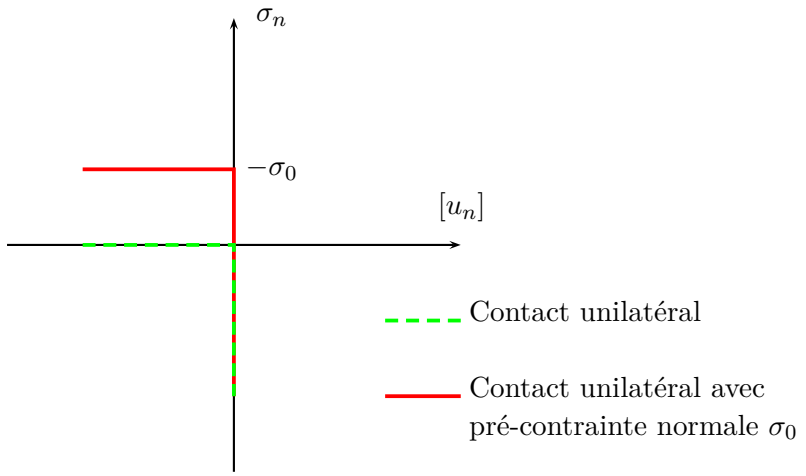


Figure 3.2 – Représentation de la loi de contact unilatéral classique et avec pré-contrainte.

La loi de Coulomb (3.3) fait intervenir la contrainte normale et est donc aussi modifiée pour intégrer la pré-contrainte normale. La compression de l'interface peut donner lieu à l'existence contrainte tangentielle non-négligeable. On suppose donc qu'il existe initialement une contrainte tangentielle τ_0 au niveau de l'interface. La loi de Coulomb avec pré-contraintes est donc donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \quad \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \tau_0 \mid \leq \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \\ \text{Si} \quad \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \tau_0 \mid < \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \quad \Rightarrow \text{adhérence :} \quad [u_t] = 0 \\ \text{Si} \quad \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \tau_0 \mid = \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \quad \Rightarrow \text{glissement :} \\ \qquad \begin{cases} \exists \alpha > 0; [u_t] = -\alpha\tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \\ \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) = \pm\mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \end{cases} \end{cases} , \quad \forall x_c \in \Gamma_c. \tag{3.10}$$

L'introduction de la pré-contrainte σ_0 a pour conséquence d'augmenter le seuil de déclenchement du glissement. La contrainte tangentielle doit en effet être égale à $\mu|\sigma_n + \sigma_0|$ pour entrainer le glissement. Dans ce cas, elle prend la valeur $\tau = \pm\mu|\sigma_n + \sigma_0|$, le signe étant opposé à celui de la

vitesse de glissement. La représentation graphique de cette loi de frottement est illustrée par la figure 3.3, pour $\tau_0 = 0$.

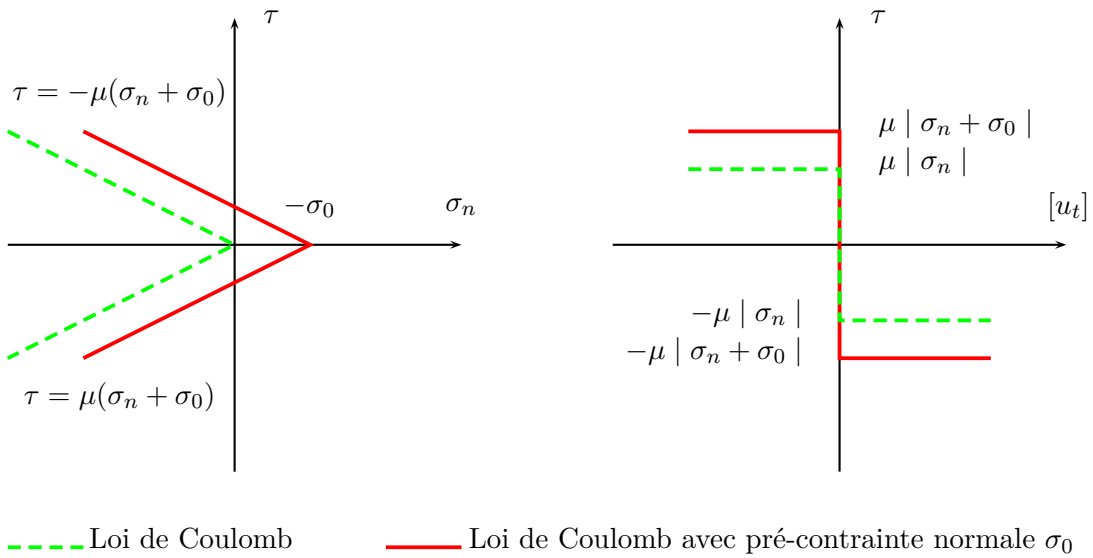


Figure 3.3 – Représentation de la loi de frottement de Coulomb classique et avec une pré-contrainte normale $\sigma_0 < 0$. On ne prend pas en compte la pré-contrainte tangentielle τ_0. Le cône de Coulomb est décalé vers la droite.

Les lois de contact proposées dans les équations (3.9) et (3.10) ont été implémentées dans Plast2D. Cette approche n'est valable que si la compression que l'on veut représenter correspond à une répartition de contrainte quasi-constante. L'introduction d'une pré-contrainte normale dans les lois de contact doit permettre de simuler le comportement dynamique d'une interface soumise à un état de compression. Cette pré-contrainte peut être vue comme un seuil de contrainte nécessaire à l'ouverture ou au glissement de l'interface. Pour valider les lois de contact, on utilise un modèle où l'interface de contact est simplement formée par deux éléments. Ce modèle est donné par la figure 3.4. Le coefficient de frottement est 0.2 et le pas de temps est $dt = 2.10^{-7}$ s.

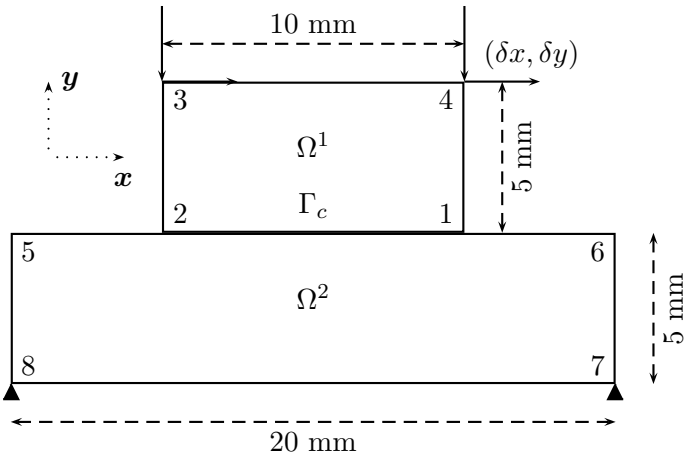


Figure 3.4 – Modèle à deux éléments. La base du corps Ω_2 est encastrée. Des déplacements sont imposés sur la face supérieure du corps Ω_1. Γ_c est l'interface de contact dont le coefficient de frottement est $\mu = 0.2$.

Le calcul de référence est réalisé en deux étapes. Premièrement, on effectue une compression des

deux éléments en imposant un déplacement vertical constant $\delta y = -0.8$ μm sur la face supérieure. Le résultat de cette phase de compression donne une contrainte normale $\sigma_0 = -0.51$ MPa et une contrainte tangentielle $\tau_0 = \pm 0.075$ MPa. Ce résultat est repris comme état initial pour un second calcul, et de nouveaux déplacements sont imposés selon $\boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{y}$. Dans la suite, on fera référence à ce calcul de référence sous le terme de "Calcul avec reprise". Le résultat final est comparé à celui obtenu directement avec la nouvelle loi de contact, prenant en compte une contrainte normale $\sigma_0 = -0.51$ MPa et tangentielle $\tau_0 = \pm 0.075$ MPa selon le noeud considéré. Dans cet exemple, la variation de la contrainte tangentielle τ_0 due à la compression n'est pas négligeable, et elle est donc prise en compte. Dans la suite, le calcul utilisant la loi de contact avec pré-contrainte est appelé "Calcul direct".

Déplacements selon $\boldsymbol{y}$. Pour valider la loi de contact unilatéral avec pré-contrainte, une vitesse est imposée selon $-\boldsymbol{y}$ puis relâchée. La séquence de chargement donnée par la figure 3.5 est utilisée pour le calcul avec reprise et le calcul direct.

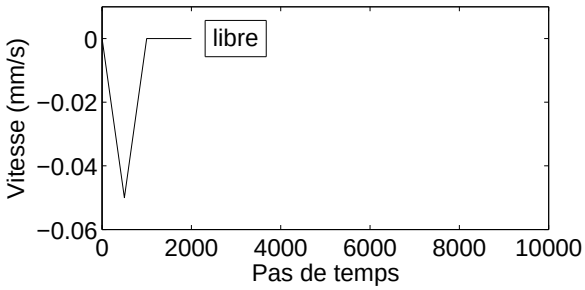


Figure 3.5 – Vitesses imposées selon $\boldsymbol{y}$ au cours du calcul direct ou en reprise. Le système est comprimé puis relâché au pas 2000.

La figure 3.6 présente les résultats enregistrés au noeud 1 pour les deux méthodes de calcul. On distingue une première phase lorsqu'on impose les vitesses selon $-\boldsymbol{y}$, puis une seconde lorsqu'on laisse libre le solide supérieur. Pendant la compression, les deux solides sont en contact, ce qui est caractérisé par un statut de contact égal à 1. Les déplacements ainsi que le contraintes normales et tangentielles sont identiques pour les deux méthodes de calcul. L'introduction de la pré-contrainte dans les équations de contact conduit donc au même résultat que le calcul avec reprise lorsque ce déplacement est imposé. Lorsque les déplacements imposés sont supprimés, la nouvelle loi agit comme une loi adhésive et maintient le contact. Les contraintes retrouvent leurs valeurs initiales après un régime transitoire. Dans le cas du calcul avec reprise, l'énergie élastique emmagasinée est restituée et le contact est perdu. Les contraintes sont alors nulles et le statut de contact est égal à 3.

Déplacements selon $\boldsymbol{x}$. Deuxièmement, pour valider la loi de Coulomb avec pré-contrainte, une vitesse suffisamment importante pour déclencher le glissement est imposée selon $\boldsymbol{x}$. Le solide (1) est laissé libre, puis, la même vitesse est imposée selon $-\boldsymbol{x}$. Ce protocole est détaillé dans la figure 3.7.

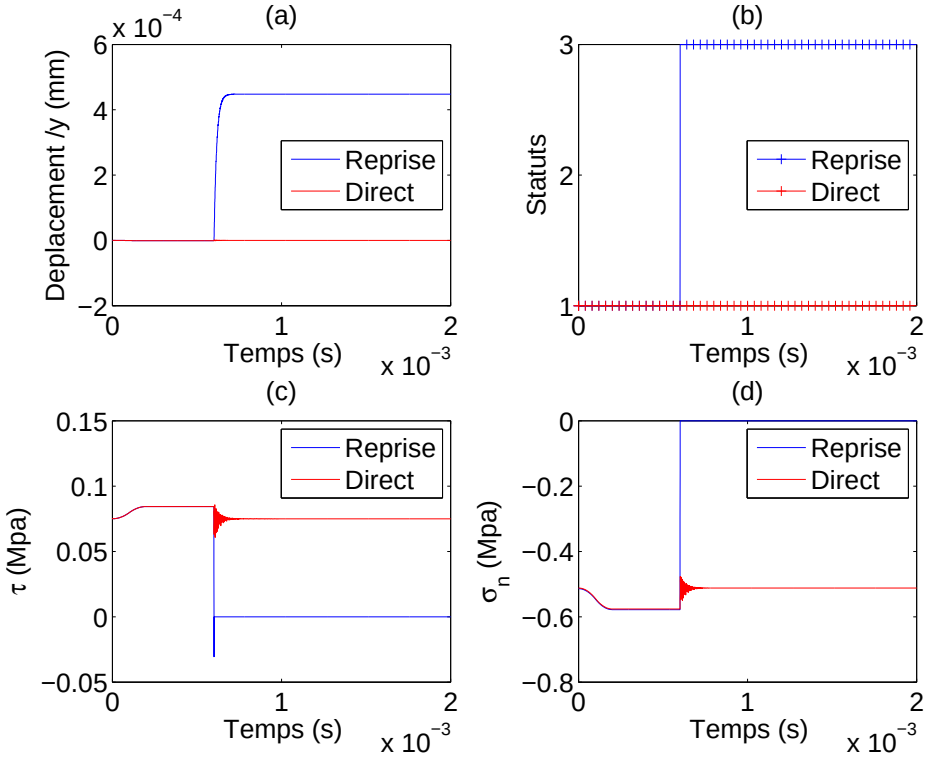


Figure 3.6 – Résultats des calculs avec reprise et direct enregistré au noeud 1. (a) déplacements, (b) statuts du contact (1=contact, 2=glissement, 3=décollement), (c) contrainte tangentielle et (d) contrainte normale.

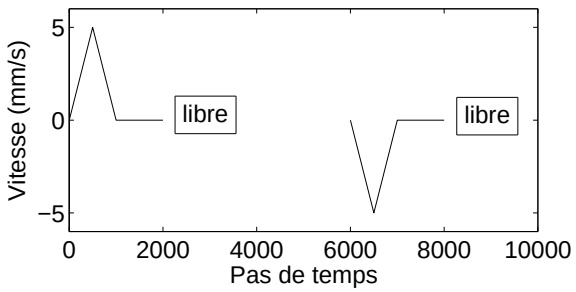


Figure 3.7 – Vitesses imposées selon $\boldsymbol{x}$ au cours du calcul direct ou en reprise. Un premier déplacement est imposé selon $\boldsymbol{x}$, le solide 1 est ensuite laissé libre. Enfin, le même déplacement est imposé selon $-\boldsymbol{x}$.

Les résultats obtenus sont donnés dans la figure 3.8. Chaque séquence de vitesse imposée entraîne une phase de glissement, repérée par un statut de contact égal à 2, comme le montre la figure 3.8.(b). Les déplacements tangentiels obtenus par les deux processus de calcul sont identiques. Concernant les statuts du contact, le passage entre l'adhérence 1 et le glissement 2 est bien synchronisé. Les contraintes tangentielles sont identiques. Enfin, les contraintes normales ont la même évolution, mais un léger écart persiste tout au long du calcul. L'erreur commise reste toutefois inférieure à 0.5 %. Cet erreur est attribuée à la déformation élastique du solide 1, qui n'est pas prise en compte dans le calcul direct.

Ce modèle composé de deux éléments permet de valider la nouvelle loi de contact sur un cas simple. Le comportement de l'interface de contact obtenu avec les lois de contact modifiées coïncide

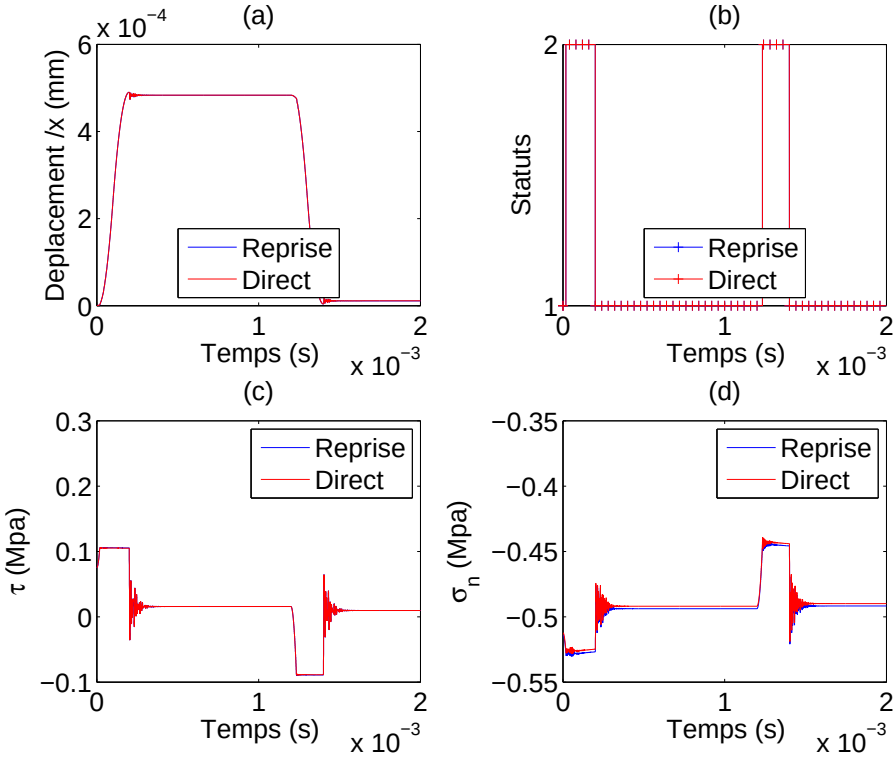


Figure 3.8 – Résultats des calculs avec reprise et direct enregistré au noeud 1. (a) déplacements, (b) statuts du contact (1=contact, 2=glissement, 3=décollement), (c) contrainte tangentielle et (d) contrainte normale.

avec les résultats donnés par le calcul de reprise. Les deux formulations peuvent être considérées comme identiques à condition que les déformations élastiques des solides en contact jouent un rôle négligeable dans les phénomènes physiques mis en jeu. Pour adopter ces lois de contact avec pré-contrainte lors d'un calcul de propagation acoustique à travers une interface, il faudra vérifier que les déformations élastiques des solides en contact ont peu d'influence sur la propagation. L'équivalence entre les deux formulations sera donc vérifiée pour les modèles présentés dans la suite.

3.2.2 Modèle EF pour l'interaction entre une onde et une interface solide-solide

Description du modèle

Le premier modèle EF mis en place dans ce travail de thèse a pour objectif de traiter l'interaction entre une onde et une interface de contact formée par deux solides mis en contact. Le système étudié est donné par la figure 3.9.(a). Les solides sont homogènes et isotropes et le matériau utilisé est l'aluminium. Le module d'Young est $E = 69$ GPa et le coefficient de Poisson est $\nu = 0{,}3$. Les faces en contact sont planes et lisses. Une onde longitudinale ou transverse est générée au centre de la face supérieure, celle-ci étant par ailleurs bloquée en déplacement. Des conditions aux limites transitoires sont utilisées pour assurer la continuité des déplacements imposés entre la partie encastrée et la partie où l'onde est générée. L'onde longitudinale utilisée a une fréquence de 1 MHz et l'onde transverse une fréquence de 0.5 MHz.

Le maillage est uniforme, de résolution a. Le choix du maillage doit être suffisamment fin

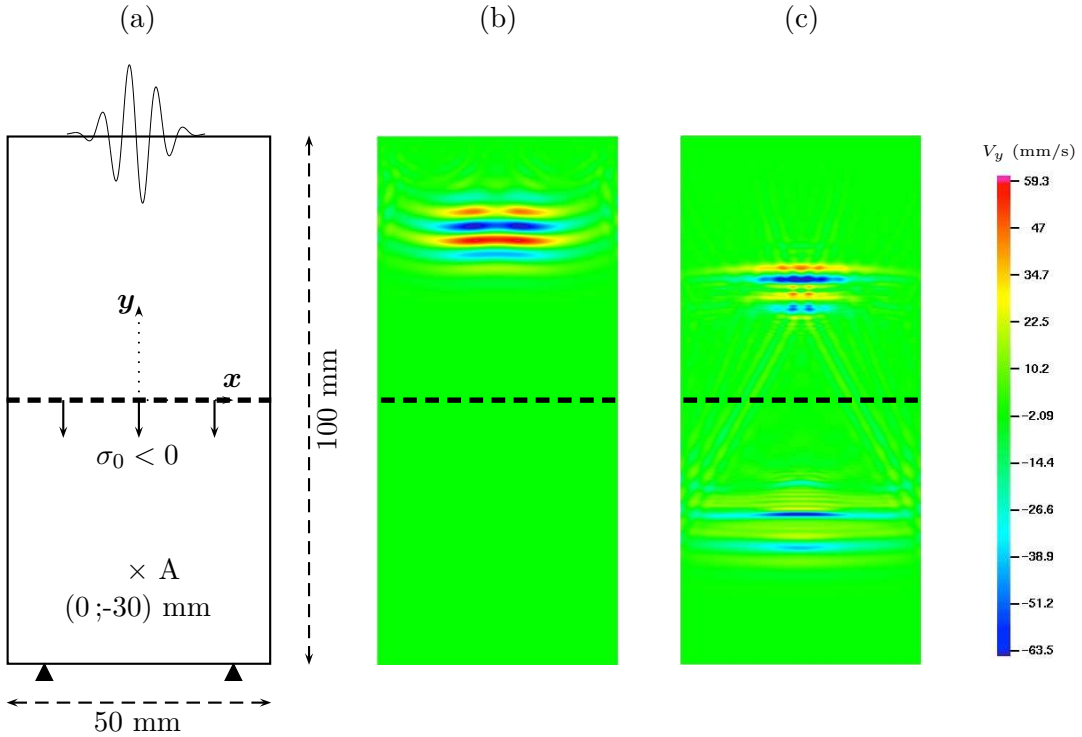


Figure 3.9 – (a) Modèle utilisé pour l'interaction entre une onde et une interface de contact non-bornée. Une pré-contrainte σ_0 est appliquée sur l'interface. (b) Résultat numérique, onde incidente de compression. (c) Résultat numérique, onde réfléchie et onde transmise par l'interface.

pour assurer une bonne précision du résultat. Toutefois, un maillage trop fin devient couteux en temps de calcul. Il est commun d'utiliser un maillage permettant de diviser la longueur d'onde en une dizaine d'éléments. En acoustique non-linéaire, on s'intéresse par exemple aux harmoniques supérieurs. Puisque leurs longueurs d'onde sont plus petites, il faut veiller à ce que la longueur d'onde du plus grand harmonique considéré soit suffisamment discrétisée. En ce qui concerne les harmoniques supérieurs, on s'intéressera au second et au troisième harmonique. Dans un premier temps, la résolution du maillage est $a = 0.2$ mm. Cette discrétisation assure au moins 10 éléments par longueur d'onde pour le troisième harmonique, quelle que soit l'onde utilisée. Le pas de temps est égal à $\delta t = 25$ ns. La première étape de validation concerne les nouvelles lois de contact. Les résultats obtenus par le calcul direct sont donc comparés à ceux issus d'un calcul prenant comme état initial le résultat d'un calcul de compression. L'étape de compression conduit à une contrainte normale $\sigma_0 = -0{,}42$ MPa. Cette valeur est donc utilisée pour σ_0 dans le calcul direct. La contrainte de cisaillement τ_0 est inférieure à 0,001 MPa et est donc négligée.

Equivalence du calcul direct et du calcul avec reprise

Onde de compression. Une onde de compression de 5 cycles, de fréquence $f = 1$ MHz et d'amplitude $A = 9$ nm est générée dans le solide supérieur comme le montre la figure 3.9.(b). L'onde transmise est analysée à partir des vitesses enregistrées au point A (0 ;-30) mm. La figure 3.10 donne les résultats obtenus par les deux méthodes (direct et avec reprise) pour l'onde transmise. La figure 3.10 indique que les réponses données par chacune des méthodes de calcul se super-

posent. L'écart sur l'amplitude maximale des vitesses est inférieure à 1%. Le signal temporel de la figure 3.10.(a) est perturbé à cause de la dynamique de contact. Son spectre est donné dans la figure 3.10.(b). Il contient les harmoniques supérieurs pairs et impairs. Les spectres sont adimensionnés par l'amplitude de l'harmonique fondamental. On peut donc conclure à une équivalence entre le calcul avec reprise et le calcul direct.

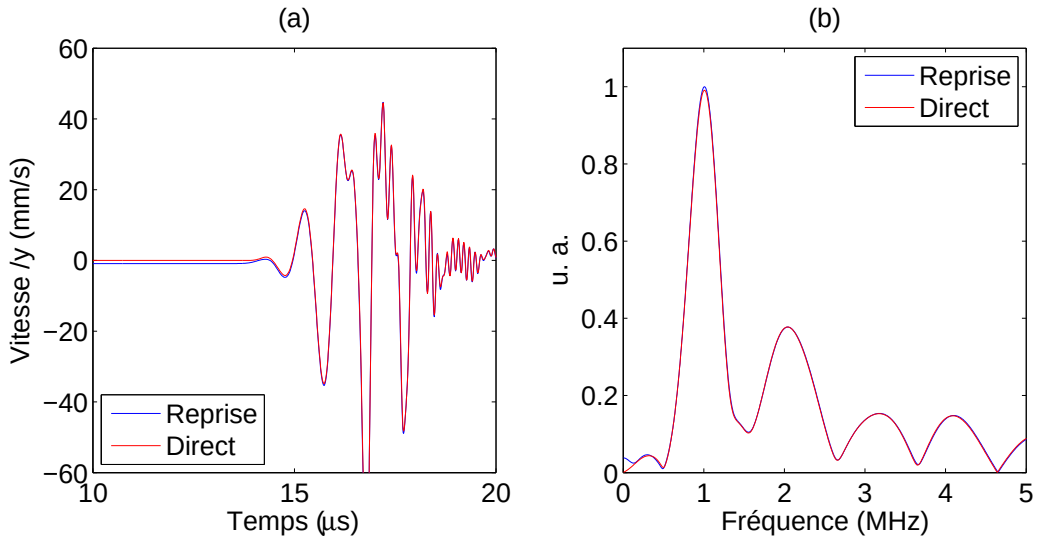


Figure 3.10 – Comparaison des résultats donnés par la méthode directe utilisant la loi de contact avec pré-contrainte avec ceux donnés par le calcul avec reprise. (a) vitesses / $\boldsymbol{y}$, (b) spectre associé, au point A (0 ;30) mm.

Onde de cisaillement. Le même travail est effectué pour une onde de cisaillement. Celle-ci a une fréquence $f = 0.5$ MHz et une amplitude de 10 nm. Comme précédemment, l'onde transmise est analysée. On travaille à partir des vitesses et la figure 3.11 donne les résultats pour les deux méthodes de calcul. Les résultats se superposent et l'écart sur le déplacement maximal est inférieur à 1%. Les spectres concordent parfaitement, l'erreur sur le troisième harmonique est de 0,1%. On remarque au passage que la réponse fréquentielle ne comporte que les harmoniques impairs.

Pour de faibles niveaux de contrainte, la prise en compte d'une pré-contrainte dans les lois de contact est équivalente à un calcul reprenant le résultat d'un calcul de compression. Les déformations élastiques des solides n'ont pas d'impact direct sur le comportement dynamique de l'interface pour ces niveaux de chargement. Un des avantages de l'approche retenue est de supprimer cette étape de compression pour simuler l'effet d'un chargement sur l'interface. En effet, un calcul de compression quasi-statique est très couteux pour un code explicite. Par exemple, pour le maillage utilisé ici, le calcul de compression dure près de 24 heures alors que le calcul de propagation ne dure qu'une heure environ. Les lois de contact modifiées sont donc adoptées. Dans la suite, on s'intéresse à la convergence de ce modèle EF.

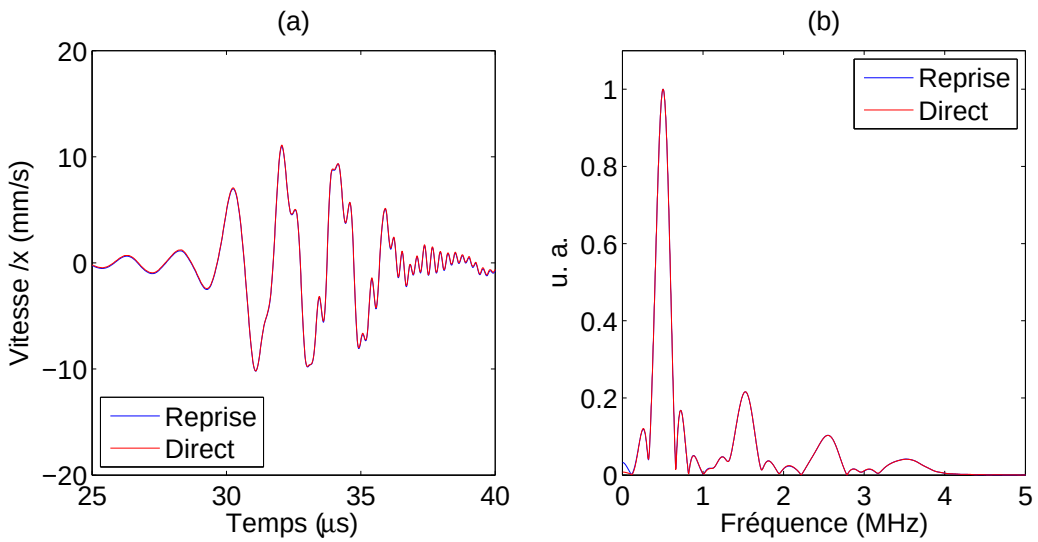


Figure 3.11 – Comparaison des résultats donnés par la méthode directe utilisant la loi de contact avec pré-contrainte avec ceux donnés par le calcul avec reprise. (a) vitesses / $\boldsymbol{x}$, (b) spectre associé, au point A (0 ;-30) mm.

Etude de convergence avec pré-contrainte

Le comportement non-linéaire d'une interface de contact se manifeste par la génération d'harmoniques supérieurs pour une onde incidente mono-fréquentielle. On s'intéresse maintenant à la convergence du modèle, en maillage et en temps. Cette étude permet de valider le modèle, mais aussi de déterminer la discrétisation adéquate assurant une bonne précision pour les harmoniques qui nous intéressent, le tout à un coût raisonnable. Pour six maillages uniformes et réguliers de résolution $a \in \{0{,}1; 0{,}15; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5\}$ mm, la même onde est générée dans le solide. Le maillage le plus fin fait office de référence. Le pas de temps est choisi tel que $\delta t = 0{,}8a/c$ de manière à respecter la condition CFL. Le rapport entre le pas de temps et le pas d'espace est identique pour les différents maillages testés. Les conditions de contact sont identiques ($\sigma_0 = -0{,}42, \mu = 0{,}2$) et les lois de contact avec pré-contrainte sont utilisées. Comme auparavant, les vitesses sont enregistrées au point A (0 ;-30) mm. Une transformée de Fourier permet de convertir ces données dans le domaine fréquentiel. On distingue le cas de l'onde de compression et celui de l'onde de cisaillement.

Onde de compression. Pour chacun des maillages, une onde de compression de fréquence $f =$ 1 MHz est générée. Son amplitude est de 9 nm. La figure 3.12 donne les spectres obtenus pour chacun des maillages, ainsi que l'évolution de l'erreur relative commise sur le premier et le second harmonique par rapport au résultat de référence. On constate que pour un maillage grossier, seul le second harmonique est généré. Lorsque la discrétisation s'affine, le nombre d'harmoniques supérieurs augmente et les courbes viennent se superposer. La figure 3.12.(b) montre que l'erreur commise sur l'amplitude du premier et du second harmonique diminue, ce qui indique bien que le modèle converge. La convergence en temps a aussi été vérifiée mais n'est pas présentée ici.

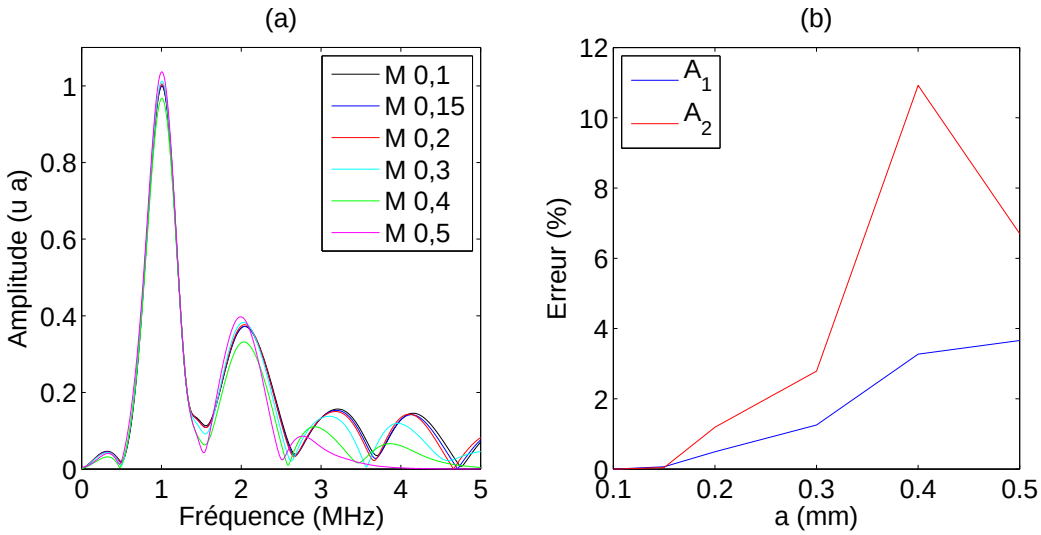


Figure 3.12 – (a) Spectres de l'onde de compression transmise pour six maillages. (b) Evolution de l'erreur pour le premier et le second harmonique par rapport au résultat obtenu avec un maillage de 0,1 mm. La longueur d'onde de l'onde incidente est $\lambda_L = 6$ mm.

Onde de cisaillement. La figure 3.13 donne les résultats de convergence pour une onde transverse. Celle-ci a une amplitude de 10 nm et sa fréquence est de nouveau égale à $f = 0{,}5$ MHz. Les propriétés de l'interface restent inchangées. La figure 3.13.(a) montre que le nombre d'harmoniques

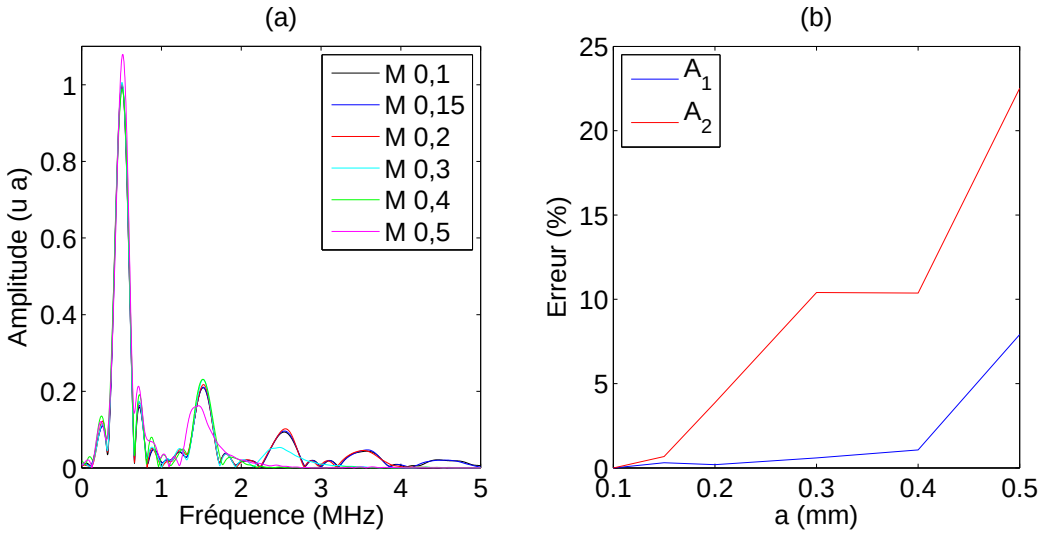


Figure 3.13 – (a) Spectres de l'onde de cisaillement transmise pour six maillages. (b) Evolution de l'erreur pour le premier et le troisième harmonique par rapport au résultat obtenu avec un maillage de 0,1 mm. La longueur d'onde de l'onde incidente est $\lambda_T = 6$ mm.

supérieurs augmente avec la résolution du maillage, pour atteindre le neuvième harmonique dans le cas des maillages les plus fins. Pour $a = 0{,}2$ mm, on observe déjà une bonne correspondance jusqu'au cinquième harmonique. L'évolution de l'erreur pour le premier et le troisième harmonique est donnée par la figure 3.13.(b). L'erreur diminue pour chacun des harmoniques démontrant ainsi la convergence du modèle.

Le modèle EF présenté dans cette partie permet l'étude de l'interaction entre une interface de contact formée par deux blocs en contact et une onde. Les lois de contact utilisées intègrent une pré-contrainte de compression. Cette approche est équivalente avec un calcul comprenant une phase initiale de compression. Ces nouvelles lois de contact sont adoptées et une étude de convergence a montré la validité du modèle d'un point de vue numérique. Un maillage de résolution $a = 0{,}2$ mm assure une bonne précision au moins jusqu'au troisième harmonique. Ce maillage est retenu pour ce modèle et celui mis en place dans la partie suivante.

3.2.3 Modèle EF pour l'interaction entre une onde plane et une fissure de longueur finie et d'orientation variable

Description du modèle

On étudie la propagation d'une onde à travers une fissure de dimension finie à l'aide du code Plast2D [156]. Le solide est isotrope et homogène et il contient en son centre une fissure de longueur d, inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. La fissure est modélisée par une zone de contact unilatéral frottant. La figure 3.14.(a) montre la configuration du système étudié. Une contrainte normale de compression $\sigma_0 < 0$ est imposée à l'interface par l'intermédiaire des lois de contact intégrant une pré-contrainte. Le matériau utilisé est l'aluminium, dont le module d'Young est $E = 69$ GPa, le coefficient de Poisson $\nu = 0.33$ et la densité $\rho = 2700$ kg.m^{-3}. Des PML (Perfectly Matched Layers) sont utilisées sur chaque coté du solide afin de modéliser un solide semi-infini [158]. Une onde plane de cinq cycles est générée sur la face supérieure du solide. La construction du modèle est détaillée en annexe A.

L'intérêt de cette approche est d'avoir un chargement de l'interface identique quelle que soit l'orientation de la fissure. Par conséquent, en faisant varier θ, il est possible d'étudier l'interaction sous incidence oblique entre une onde et une fissure fermée. De cette manière, l'angle θ est simplement un des paramètres du modèle. Un exemple de résultat numérique est fourni par la figure 3.14.(b), pour une onde de compression et une fissure orientée de 25°. Une partie de l'onde est réfléchie créant ainsi une onde longitudinale et une onde transverse. Deux ondes sphériques sont aussi générées depuis les pointes de la fissure. Les ondes réfléchies et transmises transportent les informations liées aux effets non-linéaires créés par la fissure.

Etude de convergence - raffinage en pointe de fissure

Dans la partie précédente, on a vu que l'interaction entre une onde et une interface de contact non-bornée est un problème dynamique qui peut être correctement traité, pour les fréquences considérées, par un modèle EF dont le maillage uniforme a une résolution $a = 0{,}2$ mm. Une fissure est une interface de contact de taille finie. Par ailleurs, l'ouverture (mode I) ou le glissement dans le plan (mode II) de la fissure, se traduit par la génération d'une sur-contrainte en pointe de fissure que l'on peut associer à la géométrie via le facteur d'intensité des contraintes (FIC) K. Il a été montré [159] que le champ de contrainte évolue en $r^{-1/2}$ en fond de fissure, où r est la distance radiale en coordonnées cylindriques avec l'origine située en fond de fissure. En élasticité pure, la contrainte devient infinie. Pour un matériau fragile, l'augmentation de la contrainte entraine la

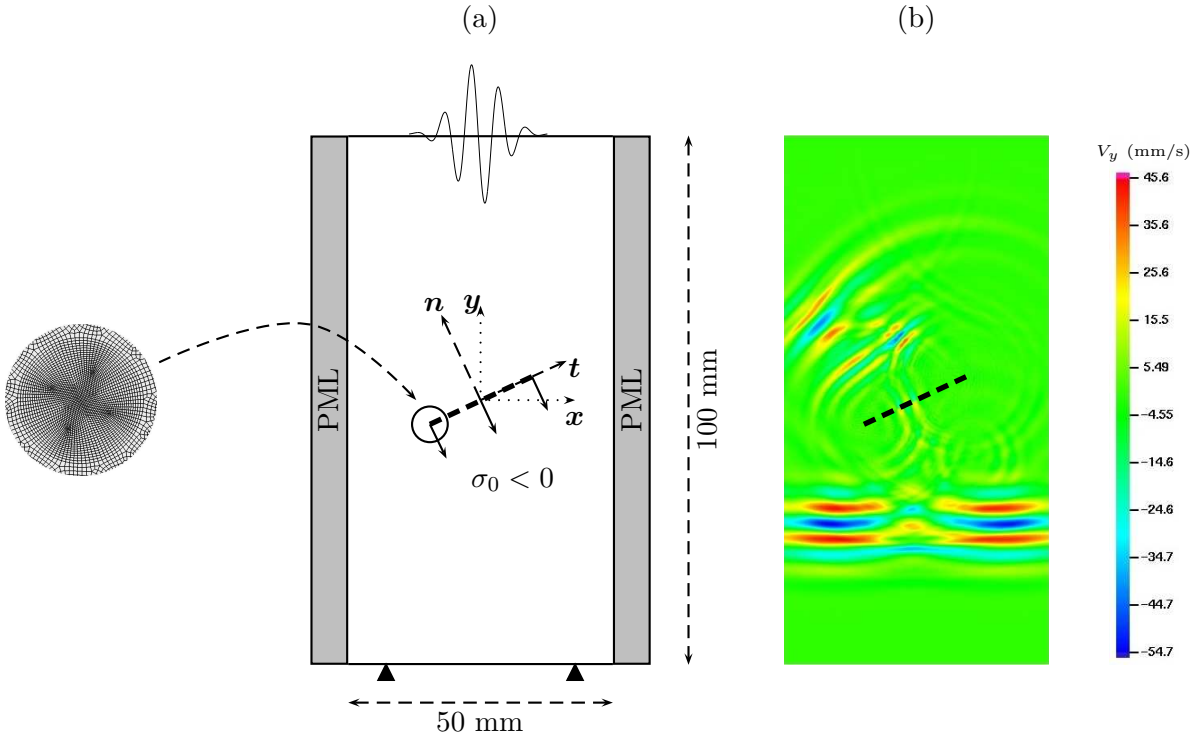


Figure 3.14 – (a) Modèle utilisé pour l'interaction entre une onde et une fissure orientée d'un angle θ. La fissure est représentée par la ligne discontinue. Le maillage est raffiné autour des pointes de fissure et une pré-contrainte σ_0 est appliquée sur l'interface. (b) Résultat numérique pour une onde de compression, après interaction avec une fissure orientée à 25°. Les zones PML ne sont pas représentées.

propagation de la fissure. Pour un matériau élasto-plastique, la contrainte est maintenue finie par déformation plastique en amont du fond de fissure.

La présence d'une fissure introduit une singularité qui diminue la régularité des solutions, ce qui affecte la précision de la méthode des EF. Plusieurs méthodes sont envisageables pour améliorer la convergence pour ce type de problème. La première découle de la définition des EF. Elle consiste à définir de nouveaux éléments dont les fonctions de base tiennent compte de la singularité du problème, soit $r^{-1/2}$ dans le cas d'une fissure. Soit de nouvelles fonctions sont définies [128], soit le support des fonctions (c'est à dire la position des noeuds, pour un élément quadratique) est modifié. Dans le second cas, on parle alors d'éléments dégénérés (Quarter-Point Element) [160]. On peut trouver une comparaison des résultats obtenus avec ce type d'éléments par rapport aux éléments classiques dans [129]. Ces éléments sont utilisés autour des points de singularité, le reste du domaine étant discrétisé à l'aide des éléments usuels. Une autre possibilité pour améliorer la convergence consiste à raffiner le maillage au voisinage des points de singularité. Cette approche a aussi fait l'objet de nombreux travaux et il est démontré que l'on rend la convergence optimale en choisissant un bon raffinement [161].

La méthode retenue est celle du raffinement du maillage qui permet d'assurer la convergence du modèle sans apporter de modifications au code. De plus, les aspects de propagation de fissures ne font pas partie des objectifs de cette étude. Le maillage doit donc permettre de représenter au mieux le comportement en pointe de fissure, et doit surtout assurer la bonne précision de la solution lors de la propagation de l'onde. Quatre maillages sont testés. Les mailles ont une dimension maximale

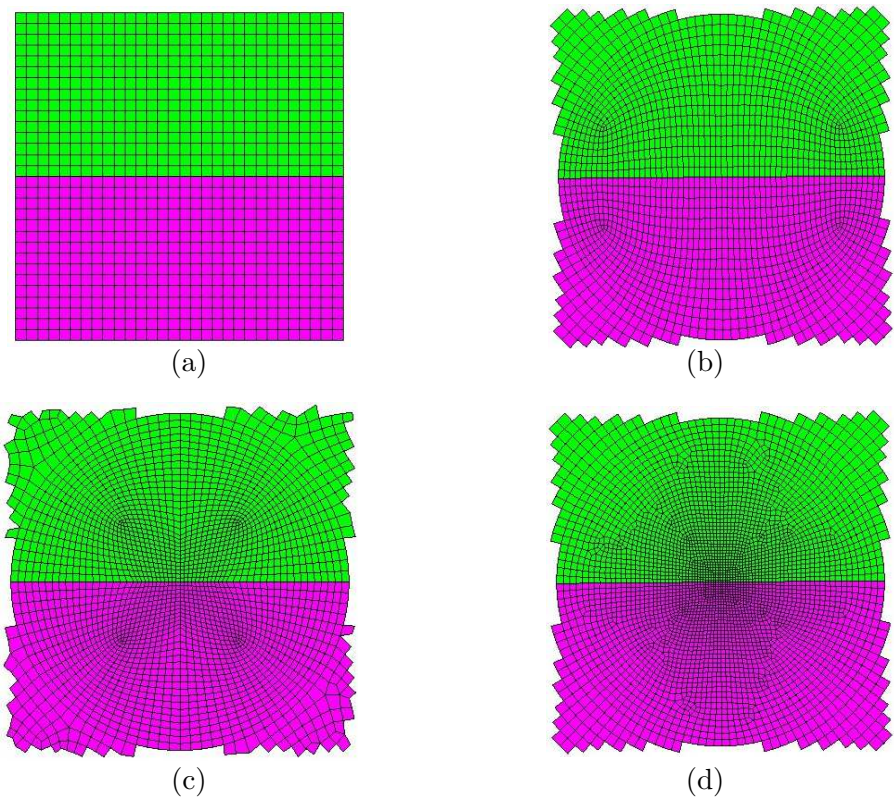


Figure 3.15 – Maillages utilisés en fond de fissure. (a) Maillage uniforme de résolution $a = 0.2$ mm. (b) Maillage 2, $a_{min} = 0.1$ mm. (c) Maillage 3, $a_{min} = 0.07$ mm. (d) Maillage 4, $a_{min} = 0.04$ mm.

de $a = 0{,}2$ mm sur l'ensemble du solide, excepté autour des pointes de fissures où les dimensions sont inférieures. La figure 3.15 montre les quatre maillages utilisés autour des pointes de fissure.

Pour savoir si la singularité de contrainte est bien prise en compte, une simulation de traction sur le solide fissuré est d'abord effectuée. Bien que ce ne soit pas l'objet de ce travail, les FIC sont calculés pour chacun des maillages et comparés à la valeur théorique. Un déplacement $dy = 1$ μm est donc imposé sur la face supérieure du bloc d'aluminium. Les PML sont momentanément supprimées puisqu'elles gèrent mal les sollicitations statiques. Le solide a une largeur de 50 mm.

La sollicitation de traction active le mode I d'ouverture de la fissure, et les expressions du FIC K_I sont les suivantes selon la contrainte utilisée [159] :

$$\begin{cases} K_I = \sigma_{xx}\sqrt{2\pi r}\dfrac{1}{cos(\frac{\theta}{2})(1 - sin(\frac{\theta}{2})sin(\frac{3\theta}{2}))} & (3.11a) \\ K_I = \sigma_{yy}\sqrt{2\pi r}\dfrac{1}{cos(\frac{\theta}{2})(1 + sin(\frac{\theta}{2})sin(\frac{3\theta}{2}))} & (3.11b) \\ K_I = \sigma_{xy}\sqrt{2\pi r}\dfrac{1}{cos(\frac{\theta}{2})sin(\frac{\theta}{2})sin(\frac{3\theta}{2})} & (3.11c) \end{cases}$$

Ici, r et θ sont les coordonnées cylindriques où l'origine est fixée en fond de fissure. Ces expressions ne sont valables qu'au voisinage du fond de fissure. Tavares et al. ont dressé un récapitulatif des différentes méthodes utilisées pour déterminer les FIC en post-traitement de calculs par éléments finis [162]. Pour estimer le FIC, on trace K_I en fonction de r pour θ donné, à partir de l'équation (3.11b). Pour cela, les valeurs de σ_{yy} sont tirées du calcul EF.

La figure 3.16 représente l'évolution de K_I adimensionné par $\sigma_\infty\sqrt{d'}$, en fonction de r/d', où

σ_∞ est la contrainte de traction σ_{yy} au sein du matériau et loin de la fissure, et d' est la demi-longueur de la fissure. Le solide est en aluminium, de module d'élasticité $E = 69$ GPa, et a une longueur de 100 mm. Le déplacement imposé de traction étant de 1 μm, on obtient la contrainte $\sigma_\infty = 0{,}69$ MPa. Si les valeurs exactes des contraintes étaient utilisées, la valeur exacte de K_I serait obtenue à l'intersection de la courbe avec l'axe $r = 0$. Les EF classiques ne prennent pas en compte la singularité de contrainte en $r = 0$ et la valeur des contraintes est sous-estimée. Lorsqu'on s'éloigne un peu du fond de fissure, la courbe 3.16 montre une pente constante. En suivant la méthode proposée par Chan et al. [163], la valeur de K_I est estimée en extrapolant cette droite en $r = 0$. On trouve dans notre cas une valeur de $K_I/(\sigma_\infty\sqrt{d'}) = 1{,}85$ avec le maillage 2.

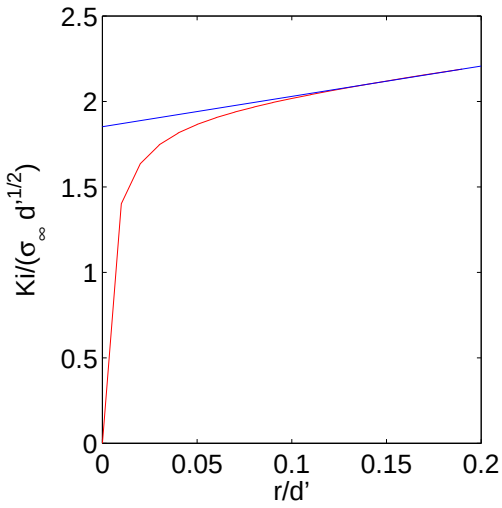


Figure 3.16 – Intensité de contrainte en fond de fissure en fonction de la distance, pour le maillage de la figure 3.15.(b).

La valeur théorique du FIC pour une fissure incluse dans un solide infini est donnée par [159] :

$$K_I^{th} = \sigma_\infty\sqrt{\pi d'}. \tag{3.12}$$

Lorsque la longueur d' de la fissure n'est plus négligeable par rapport à la largeur w du solide, cette expression doit être corrigée [159] :

$$K_I^{th} = \sigma_\infty\sqrt{\pi d'}\sqrt{1/cos\frac{\pi d'}{w}}. \tag{3.13}$$

La fissure mesure ici 20 mm ($d' = 10$ mm) et l'échantillon a une largeur de 50 mm ($w = 50$ mm), ce qui conduit finalement à :

$$K_I^{th} = 1{,}11\sigma_\infty\sqrt{\pi d'}, \tag{3.14}$$

ou encore,

$$K_I^{th}/\sigma_\infty\sqrt{d'} = 1{,}11\sqrt{\pi} = 1{,}96. \tag{3.15}$$

Le tableau 3.2.3 donne les différents FIC calculés à partir des résultats numériques par cette méthode, et les erreurs par rapport à la valeur théorique donnée par l'équation (3.15). Dès que

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
$K_I/\sigma_\infty\sqrt{d'}$	1,67	1,85	1,9	1,92
Erreur relative (%)	15	6,0	3,4	2,4

Tableau 3.1 – Facteurs d'intensité de contrainte adimensionnés et erreur relative par rapport à la valeur théorique $K_I^{th}/\sigma_\infty\sqrt{d'} = 1{,}96$ pour les différents maillages utilisés.

l'on raffine le maillage, l'erreur diminue. Pour le maillage 3, l'erreur n'est que de 3,4% ce qui est convenable vu la méthode employée et l'intérêt relatif que l'on accorde aux FIC.

L'ouverture théorique de la fissure (COD : Crack Opening Displacement) est donnée par l'expression suivante :

$$COD = \frac{4\sigma_\infty}{E}\sqrt{d'^2 - x^2}, \tag{3.16}$$

où x est la distance par rapport au centre de la fissure. L'ouverture est maximale au centre et a pour valeur $COD^{Max} = 4\sigma_\infty d'/E = 4.10^{-7}$ m. Numériquement, on mesure $COD^{Max} = 3{,}93.10^{-7}$ m pour les quatre maillages, soit un écart inférieur à 2 %.

Enfin, dans le cas où le matériau est élasto-plastique, le rayon de la zone plastique r_p peut être approché de la façon suivante :

$$r_p = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_{ys}^2} = \frac{\sigma_\infty^2 d'}{2\sigma_{ys}^2}, \tag{3.17}$$

où σ_{ys} est la limite d'élasticité. Pour l'aluminium, $\sigma_{ys} \simeq 100$ MPa, ce qui donne un rayon de zone plastique de l'ordre de 0,2 μm. Même s'il existe une zone plastifiée en fond de fissure pour ce niveau de contrainte, sa dimension très réduite aura un effet négligeable sur la propagation de l'onde. On conservera donc une loi de comportement élastique pour le matériau.

Le raffinement du maillage permet donc d'approcher le facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure. Il reste à montrer que les effets dynamiques sont bien traités lors d'une excitation acoustique. Pour les quatre maillages de pointe de fissure donnés par la figure 3.15, une onde longitudinale ou transverse est générée dans le solide et les résultats sont comparés dans le domaine fréquentiel. Les déplacements imposés viennent activer les fonds de fissure. On est donc dans le cas le plus défavorable en terme de convergence numérique. Le maillage le plus fin sert de référence. Le pas de temps est à nouveau défini par $\delta t = 0{,}8a_{min}/c$, où a_{min} est le plus petit élément du maillage. La valeur de la pré-contrainte est fixée à $\sigma = 0{,}42$ MPa et le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}2$. Les courbes sont données par la figure 3.17 dans le cas de l'onde de compression.

Pour le premier harmonique, les valeurs sont très proches et l'erreur relative est inférieure à 1% quel que soit le maillage. Le calcul a convergé et les concentrations de contrainte créées en pointe de fissure n'ont pas d'influence notable sur la propagation de l'onde. Pour les harmoniques supérieurs, la superposition des spectres s'améliore avec la finesse du maillage et l'erreur diminue. Pour le second harmonique l'erreur est faible et inférieure à 1% pour le maillage de résolution maximale $a = 0{,}07$ mm.

Pour l'onde de cisaillement, la dépendance avec le maillage de pointe de fissure est plus prononcée. La figure 3.18 montre que pour le maillage uniforme de 0,2 mm, l'amplitude des différents harmoniques est éloignée du calcul de référence. Lorsque l'on raffine le maillage en pointe de fissure,

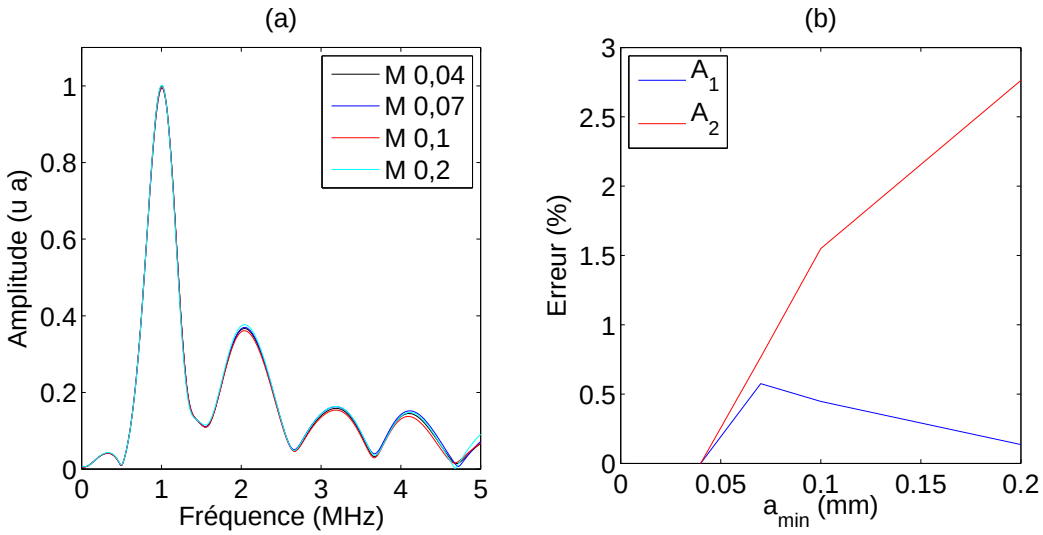


Figure 3.17 – (a) Spectres de l'onde de compression transmise pour 4 maillages de pointe de fissure. (b) Evolution de l'erreur pour le premier et le second harmonique par rapport au résultat obtenu avec un maillage de 0,04 mm autour de la fissure.

les spectres se superposent et l'erreur diminue. Pour le troisième maillage, dont la résolution maximale est de 0,07 mm, l'erreur sur le premier et le troisième harmonique est de 2,5% par rapport au maillage le plus fin.

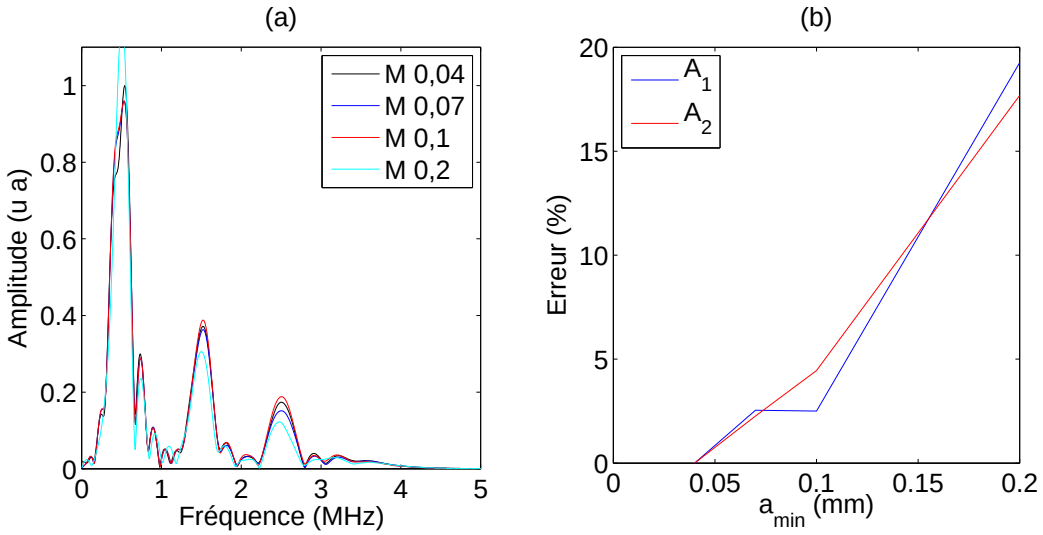


Figure 3.18 – (a) Spectres de l'onde de cisaillement transmise pour 4 maillages de pointe de fissure. (b) Evolution de l'erreur pour le premier et le second harmonique par rapport au résultat obtenu avec un maillage de 0,04 mm autour de la fissure.

Le modèle EF proposé ici permet de traiter l'interaction entre une onde et une fissure. L'ouverture ou le cisaillement de la fissure conduit à des singularités de contraintes en pointe de fissure. Le raffinement du maillage permet de gérer cette singularité de contrainte. Lors de la propagation d'une onde, la finesse du maillage en pointe de fissure a aussi son importance, notamment pour l'onde de cisaillement. Finalement, le maillage retenu est constitué d'éléments dont la dimension

maximale est de 0.2 mm sur l'ensemble du solide. Autour des pointes de fissure, c'est le maillage de résolution maximale de 0,07 mm (figure 3.15.(c)) qui est adopté.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, des modèles éléments finis 2D ont été mis en place pour étudier l'interaction entre une onde acoustique et une interface de contact. Le cas d'une interface constituée par deux solides mis en contact est d'abord traité. L'interface est modélisée par des lois de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. Les lois de contact ont été modifiées pour prendre en compte directement un effort de compression, sans avoir recours à un calcul de compression. Ces lois avec pré-contrainte sont valables pour de faibles niveaux de compression, et à condition que la répartition de contrainte que l'on souhaite représenter soit quasi-constante. Cette approche permet de s'affranchir d'un calcul de compression couteux.

L'étude de convergence permet de valider numériquement le modèle, et de choisir la résolution du maillage assurant une bonne précision pour un coût de calcul raisonnable. Ce maillage est utilisé ensuite pour le modèle final comportant une fissure. Celle-ci est placée au centre du solide et a une orientation quelconque dans le plan. L'utilisation des lois de contact avec pré-contrainte permet de modéliser une incidence oblique entre l'onde et la fissure. Les pointes de fissures sont le lieux de singularités de contraintes lors de l'ouverture ou du cisaillement de la fissure. Le maillage est raffiné dans ces régions pour maintenir la précision des solutions numériques. Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés pour quatre maillages de pointe de fissure. Pour une résolution maximale $a_{min} = 0{,}07$ mm, l'écart par rapport à la valeur théorique n'est que de 3,4%. De plus, ce maillage assure une bonne précision lors de la propagation d'une onde. C'est finalement ce maillage qui est retenu et associé au maillage extérieur d'une résolution minimale de 0,2 mm. Les différents modèles numériques présentés dans ce chapitre ont été validés du point de vue numérique et ils seront employés dans les chapitres suivants pour l'étude du CAN, d'abord pour une interface infinie, puis pour une fissure. Les données, telles que les contraintes de contact ou les déplacements permettront alors d'obtenir des renseignements sur le comportement dynamique de la fissure et sur le fonctionnement des mécanismes non-linéaires.

Chapitre 4

Interaction non-linéaire entre une onde acoustique et une interface de contact

4.1 Introduction

Pour appréhender les phénomènes physiques issus de l'interaction entre une onde et une interface de contact, notre approche repose sur la modélisation par Eléments Finis. Plusieurs modèles numériques ont été mis en place dans le chapitre 3 pour traiter l'interaction entre une onde acoustique et une interface de contact. Validés numériquement, les modèles Eléments Finis permettent d'obtenir la réponse acoustique après l'interaction avec une interface, et ainsi d'examiner l'influence de divers paramètres sur la non-linéarité générée. Ces modèles sont utilisés dans ce chapitre pour étudier la réponse non-linéaire créée par deux blocs en contact, puis par une fissure. Le cas échéant, les résultats sont comparés aux résultats expérimentaux ou numériques déjà obtenus dans la littérature. De nombreux travaux expérimentaux concernent la réponse acoustique non-linéaire renvoyée par une interface de contact dont les dimensions sont grandes par rapport à la longueur d'onde, et pour une onde longitudinale. Cette interface est généralement constituée par deux solides mis en contact [42, 63, 64]. Bien que des études numériques [123, 136] ou analytique [135] aient été réalisées pour ce type de problème, il n'existe pas, à notre connaissance, de travaux expérimentaux équivalents pour les ondes de cisaillement.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des phénomènes physiques créés par l'interaction entre une onde acoustique et une interface constituée par deux blocs. Il sera notamment question de l'effet du chargement appliqué sur l'interface. Dans la seconde partie, on présente une étude expérimentale mise en place dans ce travail pour démontrer l'effet du frottement sur la génération des harmoniques supérieurs et ainsi valider les résultats numériques. Enfin, la dernière partie est dédiée au cas d'une fissure fermée. Les effets du chargement, de l'amplitude de l'onde incidente ou de l'angle d'incidence entre la fissure et l'onde incidente seront inventoriés. L'évolution des harmoniques supérieurs en fonction de ces paramètres présente des traits caractéristiques qu'il est possible d'expliquer par des considérations sur les contraintes mécaniques de contact.

4.2 Onde sous incidence normale et interface solide-solide

Le modèle 2D par éléments finis (EF) présenté dans la partie 3.2.2 met simultanément en application le contact unilatéral et le contact frottant, et permet de travailler aussi bien sur l'onde réfléchie que sur l'onde transmise par l'interface de contact. De nombreux travaux ont démontré la dépendance entre la génération du second harmonique et l'état de contrainte au niveau de l'interface [42, 63, 64], comme cela a été rappelé au chapitre 1. On s'intéresse ici à l'influence de l'état de compression sur l'interaction non-linéaire entre une onde et une interface de contact entre deux solides. Pour chaque état de compression, l'onde transmise est analysée par traitement de Fourier. L'analyse est effectuée sur les vitesses, qui sont enregistrées au point A $(0; -30)$ mm. L'onde incidente est un pulse de 5 cycles modulé par une fenêtre gaussienne, d'amplitude $A = 10$ nm et de fréquence $f = 1$ MHz pour l'onde longitudinale et $f = 0{,}5$ MHz pour l'onde transverse. Ces fréquences sont choisies afin d'utiliser le même modèle EF pour les deux cas.

4.2.1 Evolution de l'amplitude des harmoniques supérieurs en fonction de l'état de compression pour une onde longitudinale

On s'intéresse, en premier lieu, aux phénomènes non-linéaires de contact qui modifient une onde longitudinale lors de sa propagation à travers l'interface. Une pré-contrainte est prise en compte directement dans la loi de contact avec frottement (équations (3.9) et (3.10)). L'onde transmise est analysée en fonction de la pré-contrainte normale σ_0. La figure 4.1.(a) donne un exemple de signal temporel reçu pour l'onde transmise et pour $\sigma_0 = -0{,}2$ MPa. Son spectre est donné par la figure 4.1.(b). Les harmoniques supérieurs, de fréquence f_i =2, 3 ou 4 MHz, viennent s'ajouter à l'harmonique fondamental. On observe aussi deux composantes fréquentielles intermédiaires autour de 0,3 MHz et 1,4 MHz. Ces fréquences sont reliées au nombre de cycles contenus dans l'onde

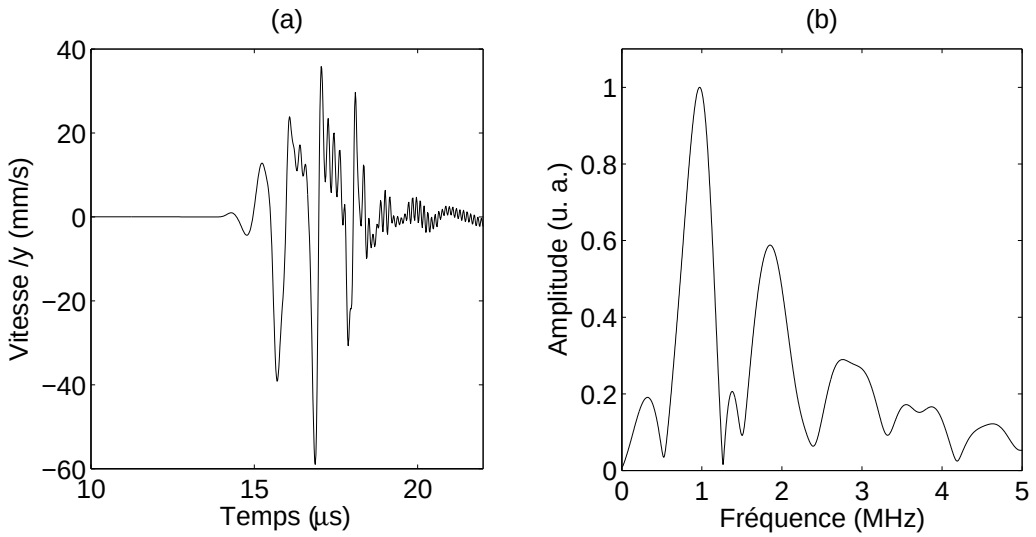


Figure 4.1 – Onde de compression avec une pré-contrainte normale $\sigma_0 = -0{,}2$ MPa. (a) Signal temporel de la vitesse selon $\boldsymbol{y}$ mesurée en A $(0; -30)$ mm. (b) Spectre associé. Apparition des harmoniques supérieurs mais aussi des composantes d'auto-démodulation aux fréquences 0,3 MHz et 1,4 MHz.

incidente, autrement dit, à sa largeur de bande. La figure 4.2 donne les spectres de l'onde transmise pour 5, 7 et 9 cycles. Les propriétés mécaniques de l'interface sont identiques à celles utilisées pour le calcul précédent, donné par la figure 4.1. La largeur de bande de l'harmonique fondamental diminue avec le nombre de cycles. La position de ces composantes fréquentielles intermédiaires évolue vers les basses fréquences à mesure que le nombre de cycles augmente. Il s'agit d'un phénomène d'auto-démodulation d'amplitude. Lorsque le nombre de cycles devient assez grand, on peut distinguer les

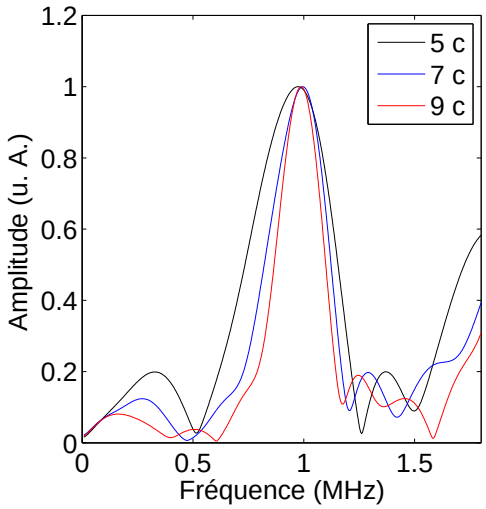


Figure 4.2 – Spectre autour de la fréquence fondamentale pour l'onde longitudinale transmise, pour $\sigma_0 = -0{,}2$ MPa, $\mu = 0{,}3$ et pour différents nombres de cycles (5, 7, et 9) formant le pulse de l'onde incidente.

sous-harmoniques $f_{1/2}$ et $f_{3/2}$ en plus des composantes d'auto-démodulation. Les sous-harmoniques n'ont pas été exploités dans le cadre de cette thèse. Ohara et al. ont néanmoins obtenu des résultats intéressants à partir des sous-harmoniques [91, 94]. L'étude des sous-harmoniques pourra faire l'objet d'une étude future.

Afin de suivre et de comparer l'amplitude des harmoniques supérieurs, on introduit un paramètre adimensionnel ξ_L, dont la définition est la suivante :

$$\xi_L = \frac{\mid \sigma_0 \mid}{\max(\sigma_{yy}^{\text{inc}})}, \tag{4.1}$$

où σ_{yy}^{inc} est la contrainte de compression créée par l'onde incidente dans le solide. Pour une onde dont l'amplitude est $A = 10$ nm, la valeur maximale de cette contrainte est $\max(\sigma_{yy}^{\text{inc}}) = 1{,}08$ MPa. Le paramètre ξ_L est donc le rapport entre la pré-contrainte normale σ_0, et l'amplitude maximale de la contrainte de compression dynamique créée par l'onde incidente au niveau de l'interface. Dans le cas présent, l'onde incidente reste identique et seule la valeur de σ_0 est modifiée.

La figure 4.3.(a) donne l'amplitude des trois premiers harmoniques en fonction du paramètre ξ_L défini par l'équation (4.1). L'harmonique fondamental augmente avec la compression. La transmission de l'onde augmente car il devient de plus en plus difficle d'ouvrir la fissure lorsque la compression augmente. Ce résultat est en accord avec les travaux expérimentaux concernant l'évolution du coefficient de réflexion sur une interface constituée par deux blocs d'aluminium [115]. Dans le cas de la réflexion, l'amplitude de l'onde réfléchie diminue avec le chargement appliqué,

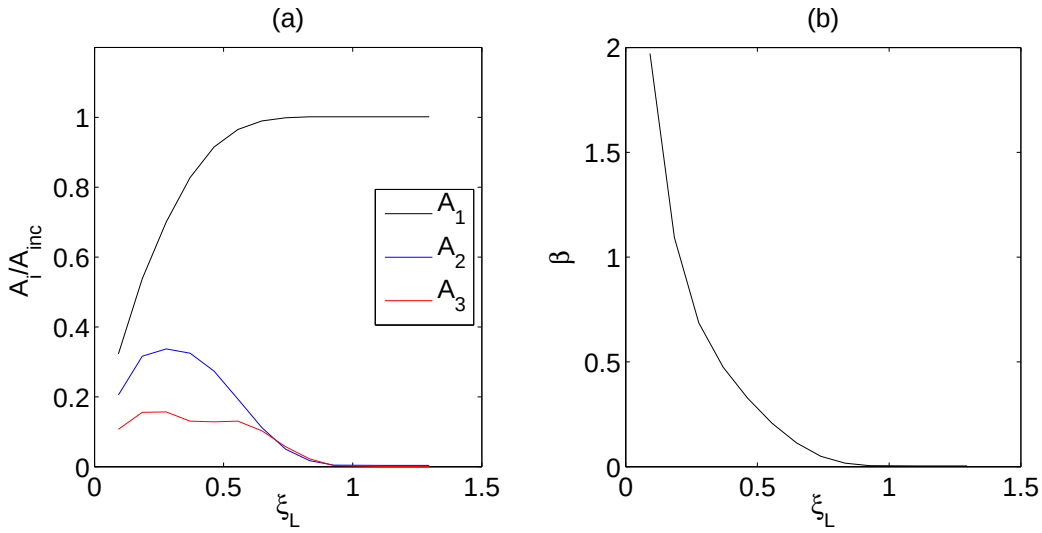


Figure 4.3 – (a) Evolution de l'amplitude des trois premiers harmoniques en fonction de ξ_L. (b) Evolution du paramètre non-linéaire $\beta = A_2/A_1^2$ en fonction de ξ_L.

et finit par s'annuler. Comme indiqué dans les chapitres précédents, le clapping génère à la fois les harmoniques supérieurs pairs et impairs. Le second harmonique passe par une valeur maximale pour $\xi_L = 0{,}3$ puis décroit rapidement. Un résultat analogue a été obtenu numériquement par Hirose [123]. De fait, le paramètre non-linéaire $\beta = A_2/A_1^2$ présente une décroissance exponentielle, en accord avec les observations expérimentales [42, 115]. L'évolution de β est donnée par la figure 4.3.(b). Le troisième harmonique, quant à lui, conserve une valeur quasi-constante pour $\xi_L \in [0{,}2; 0{,}6]$ puis décroit. Conformément à la définition de ξ_L, et d'après la loi de contact unilatéral, lorsque $\xi_L = 1$ l'onde incidente ne permet pas l'ouverture de la fissure. Le clapping n'est pas activé et aucun effet non-linéaire n'est observé. L'onde est entièrement transmise et la fissure n'est pas détectée. En revanche, on remarque que pour $\xi_L \simeq 0{,}6$ par exemple, l'amplitude de l'harmonique fondamental est quasiment égale à celle de l'onde incidente. Une méthode linéaire basée sur la variation de l'amplitude de l'onde transmise ne sera donc pas sensible à la présence de la fissure lorsque celle-ci est fermée. En revanche, pour $\xi_L \simeq 0{,}6$, l'amplitude du second harmonique est différente de zéro et indique bien l'existence de la fissure.

Le post-traitement est effectué sur les vitesses par rapport à $\boldsymbol{y}$. Cela a pour conséquence de mettre en valeur les hautes fréquences et de diminuer l'amplitude des basses fréquences. En effet, si $f(t)$ est une fonction à valeurs réelles et $\hat{f}(\omega)$ sa transformée de Fourier, alors la transformée de Fourier de la vitesse $f'(t)$ vérifie la relation suivante :

$$\hat{f}'(\omega) = (i\omega)\hat{f}(\omega). \tag{4.2}$$

L'amplitude spectrale est donc proportionnelle à la fréquence et les hautes fréquences sont donc amplifiées. Travailler avec les vitesses est donc bien adapté pour extraire l'amplitude des harmoniques supérieurs. L'effet inverse est obtenu en utilisant les déplacements. Ce sont alors les basses fréquences qui sont mises en valeur. Malgré tout, les variations des harmoniques supérieurs ou inférieurs sont strictement identiques, quelles que soient les données choisies pour le post-traitement. Seules les amplitudes des harmoniques changent.

4.2.2 Evolution de l'amplitude des harmoniques supérieurs en fonction de l'état de compression pour une onde transverse

Le cas d'une onde de cisaillement est maintenant examiné. L'onde incidente a une fréquence $f = 0{,}5$ MHz et une amplitude de 10 nm. La figure 4.4.(a) donne un exemple de signal transmis pour une pré-contrainte $\sigma_0 = -0{,}2$ MPa. Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$. On observe clairement les distorsions du signal. Ce résultat est converti dans le domaine fréquentiel et le spectre est donné par la figure 4.4.(b). On retrouve le fait que l'interaction sous incidence normale, entre une onde de cisaillement et une interface de contact frottant, conduit à la génération des harmoniques supérieurs impairs uniquement.

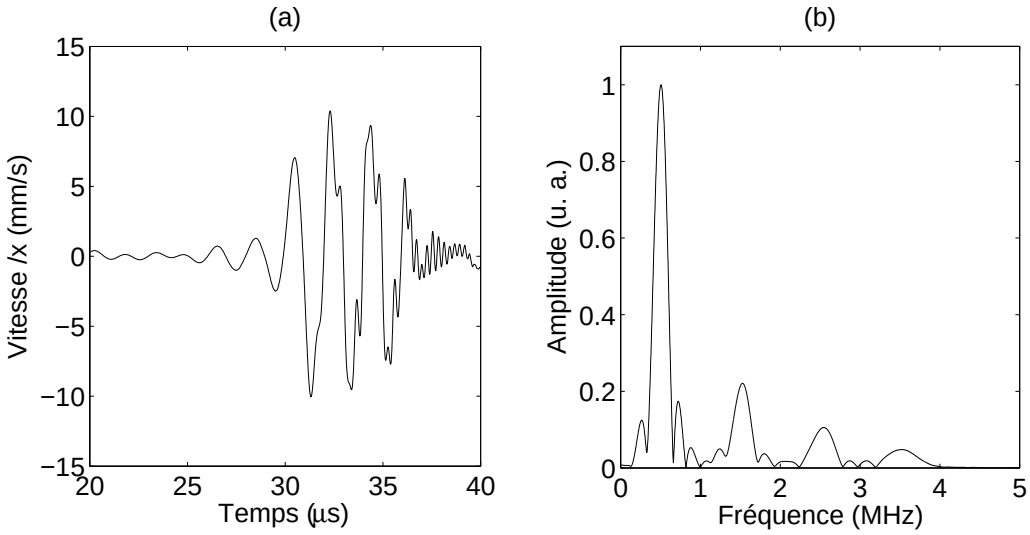


Figure 4.4 – Onde de cisaillement avec une pré-contrainte normale $\sigma_0 = -0{,}2$ MPa. (a) Signal temporel de la vitesse selon $\boldsymbol{x}$ mesurée en $(0; -30)$ mm. (b) Spectre associé.

On s'intéresse à l'évolution de ces harmoniques supérieurs en fonction du chargement appliqué sur l'interface. Comme pour l'onde longitudinale, on définit un paramètre qui permet de suivre l'amplitude des harmoniques supérieurs en fonction du chargement. Pour une onde transverse, le paramètre adimensionnel ξ_T est défini de la manière suivante :

$$\xi_T = \frac{\mu \mid \sigma_0 \mid}{\max(\sigma_{xy}^{\text{inc}})}, \tag{4.3}$$

où σ_{xy}^{inc} est la contrainte de cisaillement générée par l'onde incidente. Pour une onde dont l'amplitude est $A = 10$ nm, la valeur maximale de cette contrainte est $\max(\sigma_{xy}^{\text{inc}}) = 0.25$ MPa.

La figure 4.5 donne l'évolution des trois premiers harmoniques en fonction de ξ_T. Le coefficient de frottement conserve sa valeur $\mu = 0{,}3$. Lorsque la compression augmente, le glissement est plus difficilement activé et la transmission de l'onde à travers l'interface augmente. Par conséquent, l'amplitude de l'harmonique fondamental augmente progressivement et devient égale à celle contenue dans l'onde incidente. Comme attendu, le second harmonique est quasi-nul quel que soit l'effort appliqué. Le troisième harmonique passe par un maximum pour $\xi_T = 0{,}45$ et s'annule pour $\xi_T = 1$. Ce maximum a été mis en évidence avec un modèle numérique d'éléments frontière [123] ou par éléments finis [136]. D'après la loi de Coulomb (2.10), si la contrainte tangentielle devient

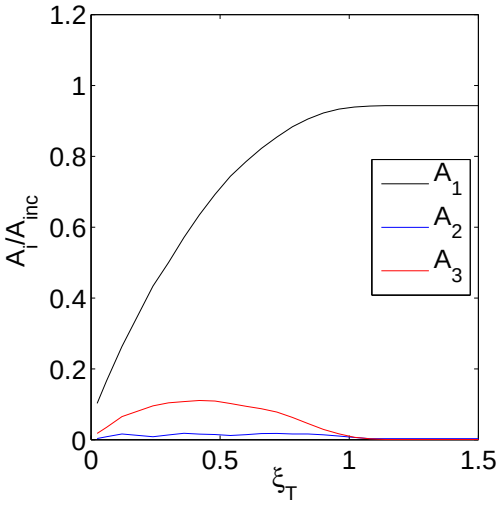


Figure 4.5 – Evolution de l'amplitude des trois premiers harmoniques en fonction de ξ_T pour une onde de cisaillement.

égale à $\mu|\sigma_0|$ alors le glissement est déclenché. Par conséquent, une valeur de ξ_T inférieure à 1 est synonyme de glissement est donc de non-linéarité. Au contraire, $\xi_T > 1$ indique que la contrainte tangentielle ne permet pas le glissement de l'interface. L'amplitude du troisième harmonique est donc logiquement nulle pour les valeurs de ξ_T supérieures à l'unité.

On définit la dissipation d'énergie par frottement de la manière suivante :

$$D = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \tau(t)\dot{u}(t)dt. \tag{4.4}$$

Cette énergie est calculée numériquement en post-traitement par la méthode des trapèzes. L'évolution du troisième harmonique, ainsi que l'énergie dissipée, sont tracées sur la figure 4.6 en fonction de ξ_T pour différents coefficients de frottement. L'énergie dissipée est adimensionnée par l'énergie contenue dans l'onde incidente. Les courbes se superposent et le troisième harmonique est maximal pour $\xi_T = 0{,}45$. Pour une même valeur de ξ_T, on obtient la même non-linéarité. Ce paramètre permet de suivre la non-linéarité. Les courbes de l'énergie dissipée se superposent aussi, quel que soit le coefficient de frottement. Le maximum d'énergie dissipée est obtenu pour une valeur de $\xi_T = 0{,}25$. Le maximum du troisième harmonique provient d'une compétition entre les phases de glissement et d'adhérence qui distordent le signal. Pour une faible compression, l'interface glisse presque librement et l'onde est réfléchie sans qu'il y ait dissipation d'énergie par frottement. Pour un fort niveau de compression, l'adhérence devient dominante et les phases de dissipation d'énergie sont plus rares. Cependant, la relation mathématique entre l'évolution de l'énergie dissipée et celle du troisième harmonique n'est pas établie à ce jour.

Les effets non-linéaires créés par une interface de contact peuvent être étudiés avec un système composé de deux solides en contact. Ce type de système a d'ailleurs fait l'objet d'études expérimentales par le passé. Un des paramètres influents, facilement contrôlable, est le chargement appliqué sur l'interface. Lorsque ce dernier augmente, le second harmonique généré par une onde de compression diminue rapidement. Pour une onde transverse, les études numériques prédisent une

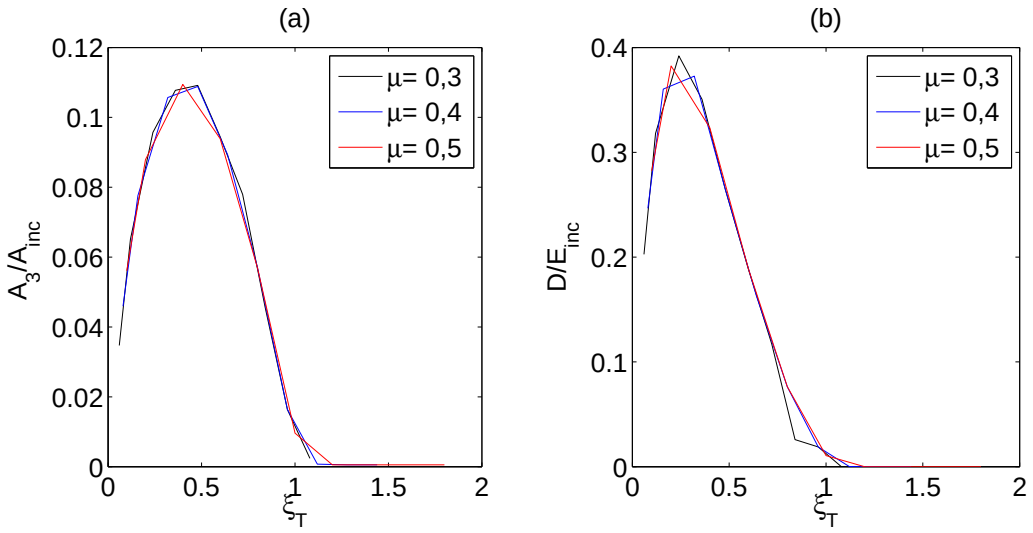


Figure 4.6 – Evolution du troisième harmonique (a) et de l'énergie dissipée (b) pour différents coefficient de frottement μ pour une onde de cisaillement.

amplitude maximale pour $\xi_T \simeq 0{,}5$.

4.3 Validation expérimentale de l'interaction entre une onde transverse et une interface de contact avec frottement

De nombreux travaux expérimentaux de la littérature font état de la génération d'un second harmonique pour une onde longitudinale rencontrant sous incidence normale une interface de contact formée par deux solides [42, 76, 115]. Lorsque le chargement normal appliqué sur l'interface de contact augmente, l'amplitude du second harmonique diminue rapidement, comme cela a été obtenu dans la partie précédente.

A ce jour, l'étude expérimentale des effets du frottement lors de la propagation d'une onde de cisaillement à travers une interface de contact est à notre connaissance, absente de la littérature. L'interaction entre une onde transverse et une interface de contact avec frottement se traduit par la génération d'un troisième harmonique.

On présente ici un protocole expérimental permettant l'étude du troisième harmonique généré au niveau d'une interface composée par deux blocs d'acier. Ce travail, réalisé en collaboration avec A. J. Croxford [1], a fait l'objet d'une publication [164]. Le dispositif expérimental est schématisé par la figure 4.7. Deux blocs d'acier sont mis en contact et un effort de compression peut être appliqué sur ces derniers par l'intermédiaire d'un système vis-écrou. La force appliquée est alors mesurée par une cellule extensométrique. Un transducteur large-bande de diamètre 1″ (V152, Panametrics, Waltham, MA, USA) de fréquence nominale $f_1 = 1$ MHz génère l'onde incidente, et un transducteur de diamètre 1/2″ (V155, Panametrics, Waltham, MA, USA) de fréquence $f_2 = 5$ MHz est utilisé en réception. Les données reçues par l'oscilloscope (LT224, Lecroy, Chestnut Ridge, NY, USA) sont

1. Deparment of Mechanical Engineering, University of Bristol, Queens Building, University Walk, Bristol BS8 1TR, UK.

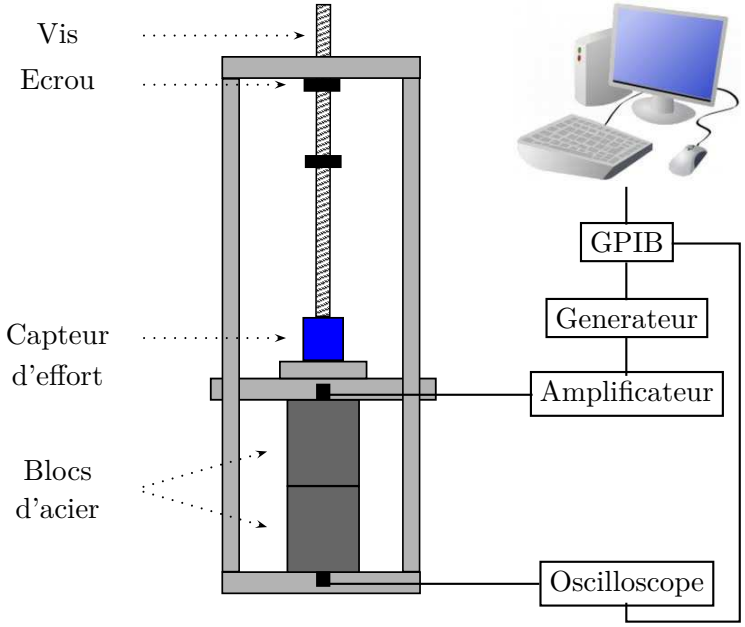


Figure 4.7 – Système expérimental pour l'étude de la transmission d'une onde de volume transverse à travers une interface de contact. Un chargement est appliqué sur l'interface par l'intermédiaire d'une vis. Le système est en position horizontale.

transférées vers un ordinateur grâce à une interface GPIB. L'onde incidente est un pulse de 15 cycles modulé par une fenêtre de Hanning, ce qui permet de réduire l'amplitude des lobes secondaires dus au fenêtrage [165]. Le signal est amplifié (GA-2500A, Ritec Inc., Warwick, RI, USA) avant d'être envoyé au transducteur. Les blocs utilisés ont une dimension de $46 \times 46 \times 55$ mm^3 et ont été usinés pour assurer le parallélisme des faces. La tolérance d'usinage est estimée à $^4/_{10}$ mm. Les faces mises en contact ont été polies avec du papier de verre P80 puis P180 afin d'obtenir un état de surface dont la rugosité moyenne est $R_a = 0{,}4$ μm.

L'amplitude de l'onde incidente ainsi que le niveau de la contrainte de cisaillement générée au niveau de l'interface doit être déterminée avec précision si l'on souhaite utiliser le paramètre ξ_T défini par l'équation (4.3). Pour cela, une onde de cisaillement est générée dans un seul bloc d'acier et les déplacements sont mesurés sur la face opposée par un vibromètre Laser à effet Doppler (OFV 353, Polytec, Waldbronn, Germany). La mesure est réalisée avec un angle d'incidence de 45° afin d'avoir une bonne sensibilité aux ondes transverses. L'amplitude de l'onde est ensuite calculée par projection pour tenir compte de l'angle de mesure. Cette calibration est effectuée pour chacun des transducteurs, respectivement pour une fréquence de 1 MHz pour l'émetteur et de 3 MHz pour le récepteur. De cette manière, on s'assure que les valeurs mesurées sont directement converties en déplacements au niveau de l'interface, sans avoir à prendre en compte l'atténuation ou la diffusion de l'onde. Le même processus est répété pour calibrer l'amplitude de l'onde incidente générée pour différents niveaux d'amplification. Ces derniers sont caractérisés par les graduations de l'amplificateur. Les résultats sont donnés par le tableau 4.1.

Bien que les surfaces en contact soient polies, il existe toujours des aspérités qui peuvent inter-

Ritec	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
A (nm)	0,12	0,14	0,17	0,25	0,47	0,72	1,23
Ritec	6,5	7	7,5	8	8,5	9	
A (nm)	2,10	3,39	5,17	7,09	9,02	10,9	

Tableau 4.1 – Amplitudes des déplacements incidents au niveau de l'interface de contact pour différents niveaux d'amplification données par les graduations de l'amplificateur Ritec.

férer dans le mécanisme de contact lorsque les deux blocs sont mis en contact pour la première fois. Pour améliorer la reproductibilité des mesures, trois cycles de chargement sont effectués préalablement aux différentes campagnes de mesure. Enfin, l'environnement du laboratoire étant constant par rapport à la durée d'une mesure, un moyennage sur 1000 signaux est réalisé afin d'améliorer le rapport signal sur bruit.

L'évolution du troisième harmonique est évaluée en fonction du paramètre ξ_T, en prenant soin d'obtenir suffisamment de valeurs entre 0 et 1, puisque par définition du paramètre ξ_T, c'est dans cette gamme de valeur que la non-linéarité est attendue. L'étude numérique de la partie précédente permet alors d'avoir une indication quant à l'amplitude de l'onde incidente ou du chargement nécessaire pour obtenir les valeurs désirées de ξ_T. Pour parcourir l'espace des ξ_T, la procédure consiste dans un premier temps à augmenter le chargement tout en maintenant l'amplitude de l'excitation à son plus haut niveau, c'est à dire 10,9 nm. Le chargement appliqué passe de 0,6 kN à 9,5 kN en 24 pas, ce qui implique une contrainte normale σ_0 comprise entre 0,3 et 4,5 MPa. La contrainte normale est calculée comme le rapport entre la force appliquée et la surface de contact, en adoptant l'hypothèse simplificatrice qui consiste à considérer la surface de contact égale à la surface du solide. Ce chargement maximum est ensuite maintenu et l'amplitude de l'onde incidente est diminuée. Elle prend les valeurs données par le tableau 4.1. On obtient ainsi 36 valeurs croissantes de ξ_T, pour lesquelles on extrait l'amplitude du premier et du troisième harmonique.

La figure 4.8 donne un exemple de signal temporel enregistré, dans lequel trois ondes apparaissent. La première correspond à l'onde longitudinale générée au niveau de la source. La seconde est l'onde longitudinale générée par conversion de mode au niveau de l'interface. Enfin, la troisième est l'onde transverse de volume étudiée.

Un filtrage passe-bande est appliqué lors de chaque mesure autour de la fréquence fondamentale et du troisième harmonique. Pour cela un fenêtrage temporel est appliqué sur le signal considéré, puis le tout est converti dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier. Chaque harmonique est sélectionné et reconverti dans le domaine temporel. L'amplitude maximale de ces signaux donne l'amplitude des différents harmoniques. L'amplitude du signal en dehors de la fenêtre temporelle donne le niveau de bruit. Enfin, ces valeurs de voltage sont converties en déplacement grâce au calibrage décrit plus haut. Pour pouvoir utiliser le paramètre ξ_T défini par l'équation (4.3), il est nécessaire de connaître le coefficient de frottement μ. Ce dernier est estimé en mesurant l'angle par rapport à l'horizontal pour lequel les deux blocs commencent à glisser. La loi de Coulomb donne alors la valeur du coefficient de μ. Bien que cette méthode soit assez élémentaire, elle donne un écart inférieur à 1° sur 10 répétitions. Finalement, la valeur du coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$.

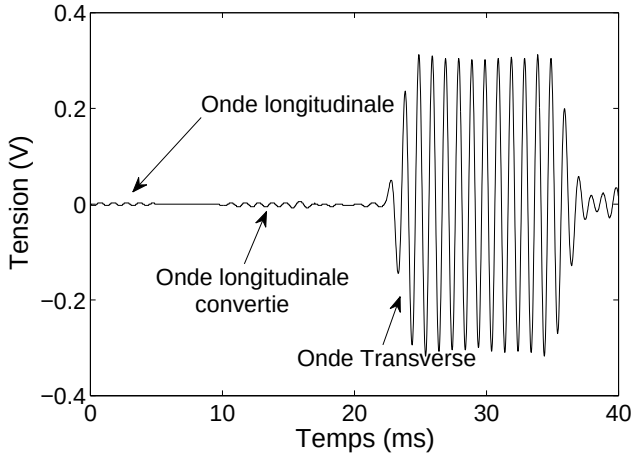


Figure 4.8 – Signal transmis pour un chargement de 6,5 kN et une amplitude de 10,9 nm au niveau de l'interface.

Pour chaque incrément de chargement, la valeur de ξ_T est calculée. La contrainte normale est le rapport entre la force et la surface de contact. La contrainte de cisaillement incidente est calculée à partir de l'impédance du milieu et des déplacements évalués lors de l'étape de calibration. Le coefficient de frottement est égal à $\mu = 0{,}3$.

Le niveau de non-linéarité introduit dans le système augmente avec l'amplitude de l'excitation. L'effet de la non-linéarité électronique doit être supprimé pour faire apparaître l'évolution de la non-linéarité créée par l'interface. Nous utilisons pour cela les données obtenues pour des valeurs de $\xi_T > 2{,}5$ où la non-linéarité de l'interface est absente. Le système d'excitation et de mesure est alors la seule source de non-linéarité. Pour ces valeurs de ξ_T, on calcule un coefficient α qui minimise l'écart entre A_1/A_1^{max} et A_3/A_3^{max} pour les données mesurées. Ce coefficient permet de relier la non-linéarité du système à l'amplitude de l'onde incidente :

$$\underbrace{\left.\frac{A_3}{A_3^{max}}\right|_{\xi_T>2.5}}_{\text{mesuré}} = \underbrace{\left.\frac{A_3}{A_3^{max}}\right|_{\xi_T>2.5}}_{\text{système}} = \alpha \left.\frac{A_1}{A_1^{max}}\right|_{\xi_T>2.5}. \tag{4.5}$$

La valeur estimée de la non-linéarité électronique est déduite de la valeur du troisième harmonique. L'amplitude du troisième harmonique est finalement donnée par :

$$A_3^{\text{corrigé}} = \left(\frac{A_3}{A_3^{max}} - \alpha\frac{A_1}{A_1^{max}}\right) A_3^{max}. \tag{4.6}$$

La non-linéarité de contact est distincte de la non-linéarité électronique et elle n'est donc pas supprimée par cette correction. Ce traitement est appliqué pour chaque amplitude de l'onde incidente, le paramètre ξ_T variant avec la contrainte normale appliquée. Lorsque l'amplitude de l'onde incidente est faible, $A = 0{,}47$ nm par exemple, il n'y a pas d'écart entre αA_1 et A_3 comme le montre la figure 4.9. Par conséquent, la valeur du troisième harmonique après correction est nulle : $A_3^{\text{corrigé}} = 0$. La non-linéarité n'est pas active car l'amplitude de l'onde incidente ne permet pas de déclencher le glissement.

En revanche, pour l'onde d'amplitude la plus élevée, on constate que les valeurs de A_3 sont égales à celles de αA_1 pour des valeurs de $\xi_T > 2$, comme le montre la figure 4.10. Pour des valeurs

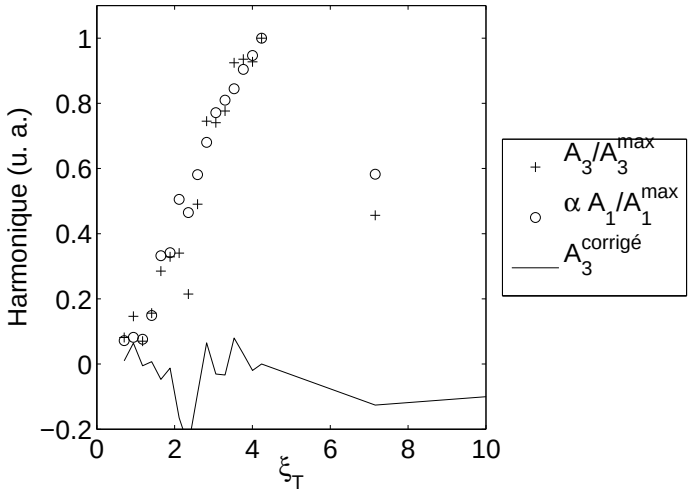


Figure 4.9 – Correction de A_3 par soustraction de l'évolution de A_1 pour une amplitude initiale à l'interface de 0,47 nm. L'onde incidente n'est pas assez puissante pour activer le glissement de l'interface.

de ξ_T comprises entre 0 et 1 une différence existe. Après correction, on observe clairement une augmentation de l'amplitude du troisième harmonique pour $0 \leq \xi_T \leq 1$. Le troisième harmonique est plus grand que la non-linéarité du système (électronique et matériau) et est donc dû aux effets non-linéaires du contact frottant.

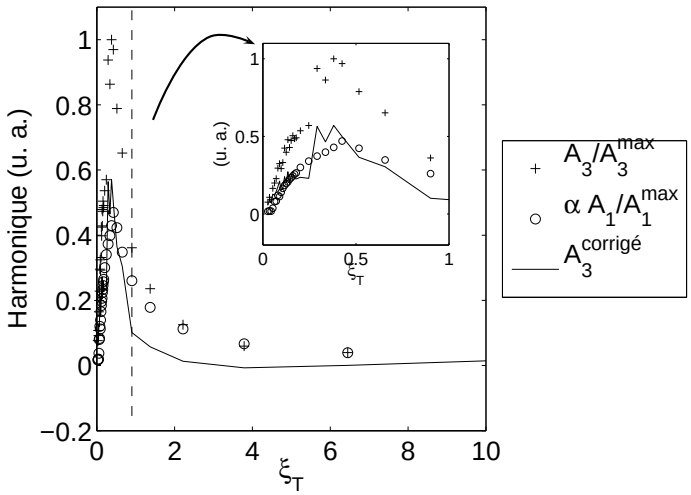


Figure 4.10 – Correction de A_3 par soustraction de l'évolution de A_1 pour une amplitude initiale à l'interface de 10,9 nm. L'amplitude du troisième harmonique n'est pas nulle pour $\xi_T \in [0; 1]$.

On compare maintenant l'évolution du troisième harmonique défini par l'équation (4.6) obtenu expérimentalement avec le résultat numérique obtenu dans la partie précédente pour deux solides en contact. Les paramètres utilisés dans la résolution numérique (amplitude de l'onde incidente, contrainte normale appliquée, coefficient de frottement) sont identiques aux paramètres expérimentaux. Les courbes sont données par la figure 4.11, où le troisième harmonique est adimensionné par

la valeur maximale de l'harmonique fondamental de l'onde transmise. Le résultat numérique est divisé par un facteur constant de l'ordre de 10^2 de manière à faire correspondre les amplitudes maximales du troisième harmonique obtenues expérimentalement et numériquement. L'amplitude du troisième harmonique est plus faible expérimentalement, mais on retrouve par ailleurs un bon accord qualitatif, avec dans les deux cas, un maximum du troisième harmonique pour $\xi_T \simeq 0{,}5$. L'écart d'amplitude s'explique en partie par la différence entre la surface de contact géométrique et la surface de contact réelle. Bien que la surface soit polie, les aspérités existent toujours et font que seule une fraction de l'interface glisse et génère la non-linéarité.

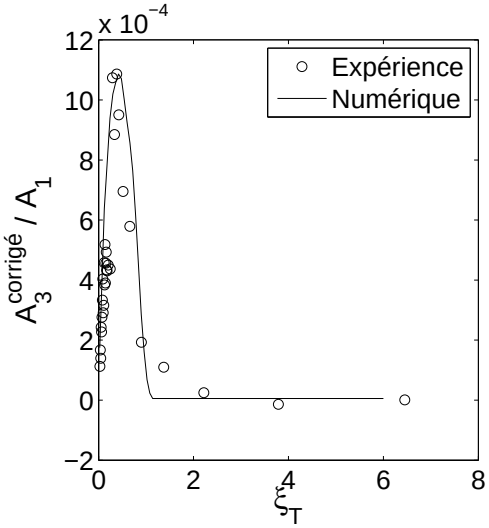


Figure 4.11 – Résultats expérimentaux et numériques donnant l'évolution du troisième harmonique adimensionné par la valeur maximale de l'harmonique fondamental transmis, en fonction de ξ_T. L'amplitude du résultat numérique est divisée par une constante pour faire correspondre les amplitudes des résultats.

La propagation d'une onde de cisaillement à travers une interface de contact a été étudiée expérimentalement. Le protocole proposé permet de recueillir suffisamment de données pour couvrir une large plage de valeurs pour le paramètre ξ_T. Le post-traitement proposé permet de supprimer la non-linéarité du système, qu'elle provienne de l'électronique ou du matériau. Si l'amplitude de l'onde incidente est suffisante, alors le glissement est activé au niveau de l'interface et le troisième harmonique est généré. Son amplitude atteint un maximum pour $\xi_T = 0{,}5$. L'évolution de ce troisième harmonique est donc en accord avec les résultats numériques. La loi de Coulomb classique fournit donc une description qui permet de décrire les interactions non-linéaire entre une onde de cisaillement et une interface.

L'utilisation d'ondes de cisaillement permet d'activer la non-linéarité de l'interface et peut donc potentiellement être intéressante dans une logique de CND. Cependant, cette approche expérimentale soulève plusieurs difficultés d'ordre pratique. Premièrement, une excitation de forte amplitude est nécessaire pour activer la non-linéarité de l'interface, et l'on atteint rapidement les capacités maximales des transducteurs. Deuxièmement, lorsque le coefficient de frottement est plus élevé, il est difficile d'activer le frottement au niveau de l'interface. Dans la suite, l'interface de contact étudiée est une fissure fermée.

4.4 Interaction entre une onde et une fissure d'orientation variable

On considère maintenant une fissure fermée inclue dans un solide, et dont l'orientation peut être modifiée. La principale différence avec l'étude des deux blocs en contact concerne bien évidemment la dimension finie de la fissure, et donc l'existence des pointes de fissure. Qui plus est, la fissure peut être de faible dimension. Par conséquent, des phénomènes de diffusion vont apparaître. Enfin, l'orientation de la fissure va entraîner des conversions de mode ainsi que des couplages entre les comportements normaux et tangentiels. Dans un premier temps, la diffusion non-linéaire générée par la fissure est calculée. Ensuite, l'évolution des harmoniques supérieurs est analysée dans une logique de CND, en fonction des paramètres de l'onde incidente et de la fissure. Le modèle de fissure présenté dans la partie 3.2.3 est utilisé dans ce qui suit.

4.4.1 Diffusion de l'onde par une fissure fermée

Calcul du champ diffusé par la fissure

Nous avons choisi d'aborder l'interaction entre une onde acoustique et une fissure par une approche numérique. Un modèle EF a été construit pour traiter ce problème. La fissure est modélisée par une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb, et elle introduit une source de non-linéarité dans le système. Le calcul EF permet d'obtenir la solution dans un domaine relativement proche du défaut, faute de quoi le coût du calcul deviendrait trop important. Pour connaître la réponse macroscopique renvoyée par la fissure, on souhaite obtenir l'amplitude de l'onde diffusée par celle-ci dans une direction quelconque, et établir les diagrammes de directivité correspondants. Pour cela, la résolution numérique est couplée avec une méthode de propagation analytique pour déterminer la solution en champ lointain. La méthode proposée est similaire à celle utilisée par Hunt et al. pour calculer le champ rayonné par une structure dans un domaine fluide [166, 167].

Le modèle EF permet d'obtenir la solution temporelle en champ proche autour de la fissure. Les déplacements sont enregistrés sur un cercle de rayon $R = 15$ mm auxquels on soustrait les déplacements du champ incident, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de fissure. On obtient ainsi le champ diffusé par la fissure. Cette dernière est alors considérée comme une source secondaire rayonnant à priori dans toutes les directions. Les champs de déplacements temporels sont convertis dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier. A partir de ces données, il est possible de connaître le champ diffusé pour $r > R$ à partir d'équations intégrales écrites en $r = R$. Dans le cas où le champ diffusé est connu en $r = R$, l'approche analytique s'effectue dans le domaine fréquentiel et ne requiert que la connaissance des déplacements.

La solution est supposée harmonique en temps, avec la convention $e^{i\omega t}$. Les déplacements sont réécrits en coordonnées cylindriques dans le domaine fréquentiel :

$$\hat{\boldsymbol{u}}(r,\theta) = \hat{u}_r \boldsymbol{e}_r + \hat{u}_\theta \boldsymbol{e}_\theta = \nabla\phi + \nabla \wedge \psi \boldsymbol{e}_z, \quad r \geq R, \tag{4.7}$$

où ϕ et ψ sont respectivement les potentiels de vitesse de l'onde longitudinale et transverse. On obtient alors :

$$\hat{\boldsymbol{u}}(r,\theta) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{4.8}$$

Les potentiels de vitesse respectent l'équation de Helmholtz :

$$\begin{aligned}(\Delta + k_L^2)\phi = 0,\\ (\Delta + k_T^2)\psi = 0,\end{aligned} \tag{4.9}$$

où $k_L = \omega/c_L$ et $k_T = \omega/c_T$ sont respectivement les nombres d'onde des ondes longitudinales et transverses. Puisque l'on considère les ondes diffusées par un objet centré sur l'origine du repère, les potentiels peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \phi = \sum_n \frac{A_n}{k_L} H_n^{(1)}(k_L r)e^{in\theta} + \frac{C_n}{k_L} H_n^{(2)}(k_L r)e^{in\theta} \\ \psi = \sum_n \frac{B_n}{k_T} H_n^{(1)}(k_T r)e^{in\theta} + \frac{D_n}{k_T} H_n^{(2)}(k_T r)e^{in\theta}, \end{cases} \tag{4.10}$$

où la notation $\sum_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ est utilisée pour alléger l'écriture. Ces ondes diffusées doivent respecter la condition de radiation de Sommerfeld qui indique que l'énergie rayonnée doit être nulle à l'infini. Avec une dépendance en temps de la forme $e^{i\omega t}$ et pour un espace à deux dimensions, cette condition s'écrit :

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} - ik\right)\boldsymbol{u}(r,\theta) = 0. \tag{4.11}$$

Cette condition est respectée lorsque $C_n = 0$, $D_n = 0$, $\forall n$. En remplaçant l'expression des potentiels dans l'équation (4.8), on obtient les déplacements radiaux et tangentiels :

$$\begin{cases} \hat{u}_r(r,\theta) = \sum_n A_n H_n^{(1)'}(k_L r)e^{in\theta} + \frac{in}{r}\sum_n \frac{B_n}{k_T} H_n^{(1)}(k_T r)e^{in\theta} \\ \hat{u}_\theta(r,\theta) = \frac{in}{r}\sum_n \frac{A_n}{k_L} H_n^{(1)}(k_L r)e^{in\theta} - \sum_n B_n H_n^{(1)'}(k_T r)e^{in\theta}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients A_n et B_n. Pour cela, on cherche à exprimer ces coefficients sous forme d'une intégrale en $r = R$ où les déplacements sont connus. Chacun des membres de l'équation (4.12) est multiplié par $e^{-im\theta}$ et ensuite intégré sur le contour du domaine circulaire. Par orthogonalité des fonctions $e^{in\theta}$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta)d\theta$, on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \hat{u}_r(R,\theta)e^{-im\theta}d\theta = 2\pi\left(A_m H_m^{(1)'}(k_L R) + \frac{im}{k_T R} B_m H_m^{(1)}(k_T R)\right) \\ \int_0^{2\pi} \hat{u}_\theta(R,\theta)e^{-im\theta}d\theta = 2\pi\left(\frac{im}{k_L R} A_m H_m^{(1)}(k_L R) - B_m H_m^{(1)'}(k_T R)\right) \end{cases}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$

A ce stade, on peut donc déterminer les coefficient A_n et B_n en inversant le système linéaire donné par l'équation (4.13). On introduit la matrice suivante :

$$\boldsymbol{M}_n(r) = \begin{pmatrix} H_n^{(1)'}(k_L r) & \frac{in}{k_T r} H_n^{(1)}(k_T r) \\ \frac{in}{k_L r} H_n^{(1)}(k_L r) & -H_n^{(1)'}(k_T r) \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Les coefficients A_n et B_n sont alors donnés par :

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_n^{-1}(R) \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{u}_r(R,\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{u}_\theta(R,\theta)e^{-in\theta}d\theta \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

où l'inverse de la matrice est facilement obtenue en utilisant la transposée de la co-matrice. Au final, le champ de déplacement est obtenu en tout point du domaine extérieur à partir des équations (4.12) et (4.15) :

$$\hat{\boldsymbol{u}}(r,\theta) = \sum_n \boldsymbol{M}_n(r)\boldsymbol{M}_n^{-1}(R)\frac{e^{in\theta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\hat{\boldsymbol{u}}(R,\theta)e^{-in\theta'}d\theta' \quad ,r \geq R, \forall\theta. \tag{4.16}$$

Cette solution fréquentielle est valable pour une fréquence donnée. Pour revenir dans le domaine temporel, il est nécessaire de calculer les solutions à différentes fréquences afin de pouvoir effectuer une transformée de Fourier inverse. Il faut alors veiller à respecter les hypothèses d'échantillonnage de Shannon.

Pour une distance $r = 60$ mm suffisamment grande pour vérifier la condition de champ lointain ($r \simeq 10\lambda$), on trace l'amplitude des déplacements radiaux et tangentiels en fonction de l'angle θ pour une fréquence donnée. Ces tracés, appelés diagrammes de directivité, sont effectués pour la fréquence fondamentale (celle de l'onde incidente) et pour le second et le troisième harmonique. Les amplitudes des déplacements sont adimensionnées par rapport au déplacement maximal obtenu sur le cercle de référence de rayon $R = 15$ mm dans le cas d'un calcul linéaire, c'est-à-dire avec des conditions de surface libre appliquées sur la fissure. Les résultats linéaires sont donnés en annexe B. On note alors ces déplacements u_r^* et u_θ^*. Si l'onde incidente est transverse, le déplacement tangentiel maximal est choisi comme référence, et inversement, si l'onde incidente est longitudinale, l'adimensionnement utilise le déplacement radial maximal. La fissure a ici une longueur de 10 mm.

Onde longitudinale

Le premier cas traité est celui d'une onde incidente longitudinale. La figure 4.12 montre les diagrammes de directivité pour les trois premiers harmoniques, A_1, A_2 et A_3. La direction 0° correspond à l'axe $\boldsymbol{x}$ du modèle EF. Les paramètres mécaniques utilisés dans le calcul non-linéaire sont $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa pour la pré-contrainte et $\mu = 0{,}8$ pour le coefficient de frottement. Dans chaque cas, les diagrammes de directivité sont donnés pour les déplacements radiaux et tangentiels, pour trois angles d'incidence, $\theta = 0°$, 25°, 45°, respectivement tracés en noir, bleu et rouge. Les déplacements radiaux correspondent aux ondes de compression alors que les déplacements tangentiels correspondent aux ondes de cisaillement.

Harmonique fondamental. Sous incidence normale, seule l'onde longitudinale est transmise et réfléchie, dans la même direction que l'onde incidente. Il n'y a pas de conversion de mode. En effet, l'amplitude de l'harmonique fondamental des déplacements tangentiels est faible par rapport aux déplacements radiaux et est quasi-constante en fonction de l'angle d'incidence.

Sous incidence oblique, l'onde longitudinale est toujours transmise selon la direction de l'onde incidente. L'onde longitudinale est aussi réfléchie selon une direction qui forme un angle avec la normale à l'interface égal à l'angle d'incidence. Par exemple, pour une fissure inclinée de $\theta = 25°$, la normale est positionnée à 115°, d'où une réflexion selon un angle égale à $115° + 25° = 140°$, comme le montre la figure 4.12.(a). Les différentes directions de propagation sont repérées par les lignes discontinues. Une onde transverse est aussi réfléchie par l'interface dans le cas d'une incidence

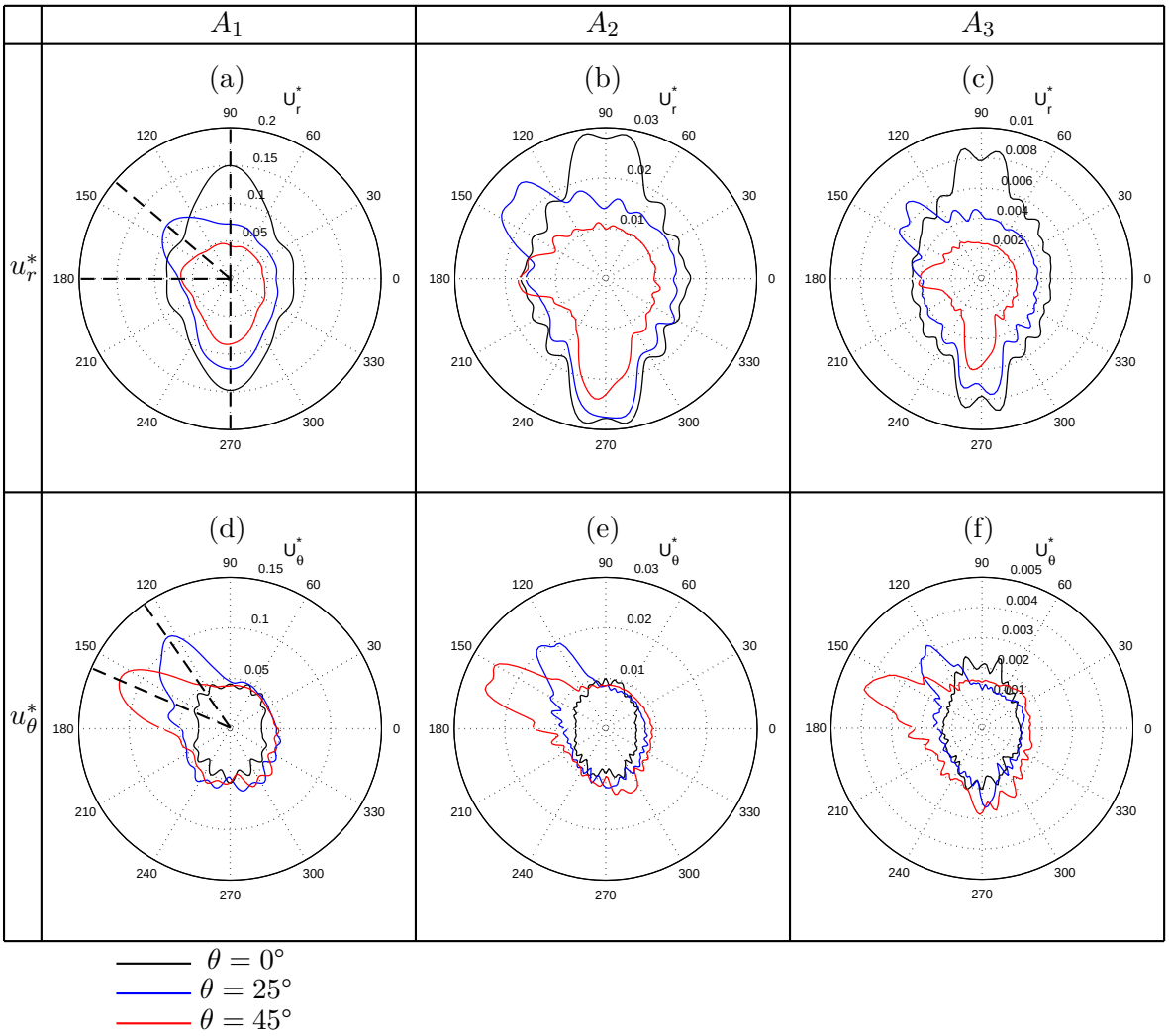


Figure 4.12 – Diagrammes de directivité pour une onde incidente longitudinale pour trois angles d'incidence $\theta = 0°$, $25°$ et $45°$. (a), (b) et (c) donnent les déplacements radiaux $\boldsymbol{u}_r^*$, respectivement pour les trois premiers harmoniques A_1, A_2, et A_3. (d), (e) et (f) donnent les déplacements tangentiels $\boldsymbol{u}_\theta^*$, pour les trois premiers harmoniques A_1, A_2, et A_3. La pré-contrainte est $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa et le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}8$. Le calcul est réalisé en champ lointain : $r \simeq 10\lambda$.

oblique. Comme le montre la figure 4.12.(d), ces ondes transverses se propagent dans des directions égales à 127° et 156°, respectivement pour des orientations de fissure égales à $\theta = 25°$ et $\theta = 45°$. Il existe donc une conversion de modes en réflexion. On n'observe pas d'onde transmise transverse.

Le clapping est activé puisque l'onde incidente est diffractée par la fissure initialement fermée. Lorsque la fissure est dans une phase fermée, l'onde incidente est totalement transmise à travers la fissure. L'onde longitudinale transmise a donc la même direction que l'onde incidente et aucune conversion de mode n'a lieu. En revanche, lorsque la fissure est ouverte, l'onde incidente est réfléchie sur la face libre de la fissure en accord avec la loi de Snell-Descartes :

$$k_\alpha^I \sin\theta_\alpha^I = k_\alpha^R \sin\theta_\alpha^R = k_\alpha^T \sin\theta_\alpha^T, \quad \alpha = L,T, \tag{4.17}$$

où l'indice $\alpha = L$, T indique que l'onde considérée est respectivement longitudinale ou transverse, alors que les exposants I, R, T correspondent respectivement à l'onde incidente, réfléchie et trans-

mise. Enfin, $k_\alpha^\beta = \omega/c_\alpha$ est le nombre d'onde de l'onde considérée. Cette loi prévoit à la fois la réflexion d'une onde longitudinale et d'une onde transverse. Les directions de propagation calculées sont celles effectivement obtenues sur la figure 4.12. L'intermittence du contact, entre phase fermée et ouverte, fait que non seulement toutes ces ondes sont générées, mais aussi que chacune d'entre elles contient la non-linéarité introduite par le clapping.

La diffusion par une fissure modélisée par des conditions de surface libre (calcul linéaire), est donnée en annexe B. Aucun effet non-linéaire n'est produit et les harmoniques supérieurs ne sont pas générés. Les diagrammes de directivité pour l'harmonique fondamental possèdent la même forme que ceux obtenus par le modèle non-linéaire. L'amplitude du fondamental est cependant plus importante dans le cas linéaire, comme cela est expliqué en annexe.

Harmoniques supérieurs. Les phénomènes non-linéaires sont activés, ce qui a pour conséquence de générer des harmoniques supérieurs, comme le montrent les figures 4.12.(b), (c), (e) et (f). Le clapping est à l'origine des harmoniques pairs et impairs, qui sont effectivement générés dans ce cas. Ces harmoniques sont contenus dans les différentes ondes générées, comme l'attestent les diagrammes de directivité où les directions de propagation privilégiées sont identiques à celles obtenues pour l'harmonique fondamental. L'amplitude des harmoniques supérieurs contenus dans les ondes converties, c'est-à-dire les ondes transverses, augmentent avec l'angle d'incidence. En contrepartie, l'amplitude des harmoniques supérieurs des ondes longitudinales diminuent. La conversion de mode devient plus prononcée avec l'angle d'incidence et l'énergie est transférée vers les composantes transverses.

Onde transverse

L'onde incidente est maintenant une onde transverse. La figure 4.13 montre les diagrammes de directivité pour trois angles d'incidence, $\theta = 0°$, $25°$, $45°$ et pour les trois premiers harmoniques. Les résultats sont donnés pour une pré-contrainte, $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa et un coefficient de frottement fixé à $\mu = 0{,}3$.

Harmonique fondamental. Les diagrammes de directivité pour l'harmonique fondamental sont donnés par les figure 4.13.(a) et (d). Sous incidence normale, l'onde transverse est transmise et réfléchie dans la direction de l'onde incidente. Les déplacements radiaux sont dus à la diffusion par les pointes de fissure qui génèrent deux ondes sphériques, mais aussi à cause des sur-contraintes générées en pointe de fissure lors de la sollicitation en mode II. Sous incidence oblique, l'onde transverse est à nouveau transmise selon la direction de l'onde incidente, mais aussi réfléchie dans une direction proche de 140° dans le cas où la fissure est orientée à $\theta = 25°$. Cette direction correspond à la réflexion prévue par la loi classique de Snell-Descartes. On observe aussi une onde longitudinale réfléchie autour de 170° et transmise autour de 235°, toujours dans le cas d'une fissure orientée à $\theta = 25°$. Il y a donc conversion de mode en réflexion et en transmission. L'amplitude du fondamental est plus faible que dans le cas de l'incidence normale, mais les déplacements radiaux et tangentiels sont du même ordre de grandeur. Pour une incidence $\theta = 45°$, l'amplitude de l'harmonique fondamental est de l'ordre de 10^{-5} dans toutes les directions. Il n'y a pas d'onde diffusée. L'onde

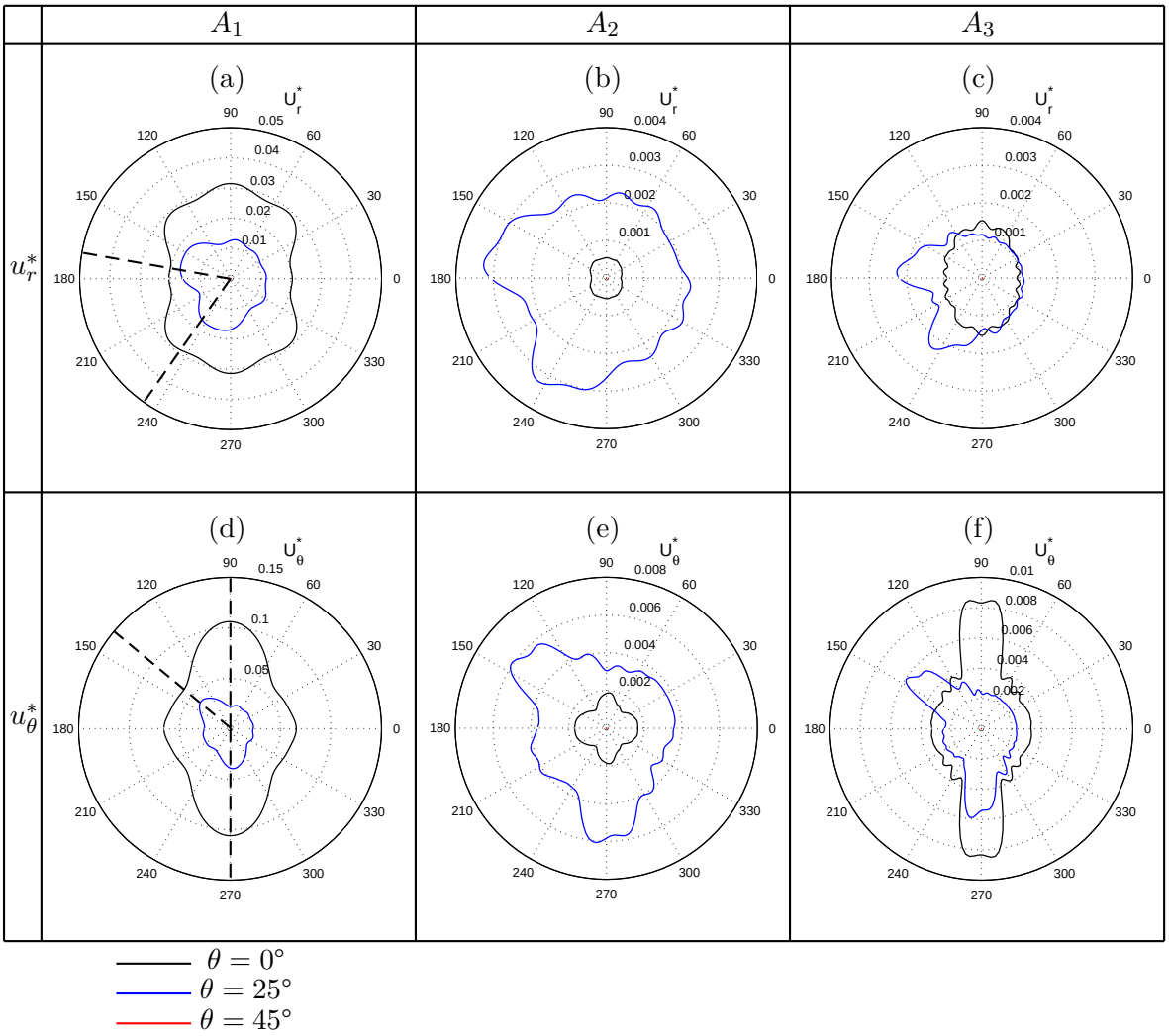


Figure 4.13 – Diagrammes de directivité pour une onde incidente transverse pour trois angles d'incidence $\theta = 0°$, 25° et 45°. (a), (b) et (c) pour les déplacements radiaux $\boldsymbol{u}_r^*$ et respectivement pour les trois premiers harmoniques A_1, A_2, et A_3. (d), (e) et (f) pour les déplacements tangentiels $\boldsymbol{u}_\theta^*$ et pour les trois premiers harmoniques A_1, A_2, et A_3. La pré-contrainte est $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa et le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$. Le calcul est réalisé en champ lointain : $r \simeq 10\lambda$.

incidente transverse est parfaitement transmise à travers la fissure et aucun effet non-linéaire n'est activé.

Lors d'une phase d'adhérence la transmission est totale à travers la fissure et l'onde se propage selon la direction de l'onde incidente. Pendant le glissement, il y a réflexion à l'interface. Les directions suivent celles données par la loi de Snell-Decartes bien qu'il n'y ait pas de condition de surface libre sur les faces de la fissure. Des déplacements sont aussi transmis pendant le glissement, d'où l'onde transmise longitudinale.

La diffusion d'une onde de cisaillement par une fissure modélisée par des conditions de surface libre est donnée en annexe B. La principale différence tient à la présence de l'harmonique fondamental pour une incidence de 45°. Dans le cas linéaire, la diffusion a lieu pour tous les angles d'incidence. L'amplitude de l'harmonique fondamental de l'onde diffusée est supérieur dans le cas linéaire. Les détails sont donnés en annexe B.

Harmoniques supérieurs. Les diagrammes de directivité sont aussi tracés pour les harmoniques supérieurs pour une onde incidente transverse. Les figures 4.13.(b), (c), (e) et (f) donnent ces diagrammes pour les déplacements radiaux et tangentiels. Comme dans le cas de l'onde longitudinale, les diagrammes de directivité conservent la même forme que ceux obtenus pour l'harmonique fondamental. La directivité des harmoniques supérieurs est plus accentuée que pour l'harmonique fondamental. Sous incidence normale, le troisième harmonique est généré avec une amplitude plus importante que celle du second harmonique. C'est un résultat classique de l'interaction entre une onde de cisaillement et une interface de contact avec frottement.

On constate que le second harmonique est généré de manière non négligeable sous incidence oblique ($\theta = 25°$) et que son amplitude est du même ordre de grandeur que celle du troisième harmonique. Nous verrons dans la suite quelle explication donner à la génération de ce second harmonique. Comme pour l'harmonique fondamental, aucun harmonique supérieur n'est généré pour $\theta = 45°$ puisque qu'aucune onde n'est diffusée par la fissure. Là aussi, nous reviendrons sur ce point dans les parties suivantes.

L'interaction onde-fissure engendre une diffusion qui s'accompagne de conversions de mode sous incidence oblique. Ces ondes se propagent selon les directions prévues par la loi de Snell-Decartes, comme le résume la figure 4.14. Les ondes contiennent les harmoniques supérieurs générés par le CAN. On constate cependant des résultats différents de ceux obtenus classiquement en incidence normale. Par exemple, l'onde transverse engendre aussi le second harmonique pour une incidence de 25°, alors qu'aucune diffraction n'a lieu pour une incidence de 45°. Les caractéristiques des diagrammes de directivité seront donc différentes dès que l'un des paramètres de la fissure est modifié. Ces phénomènes seront détaillés et expliqués dans les parties suivantes.

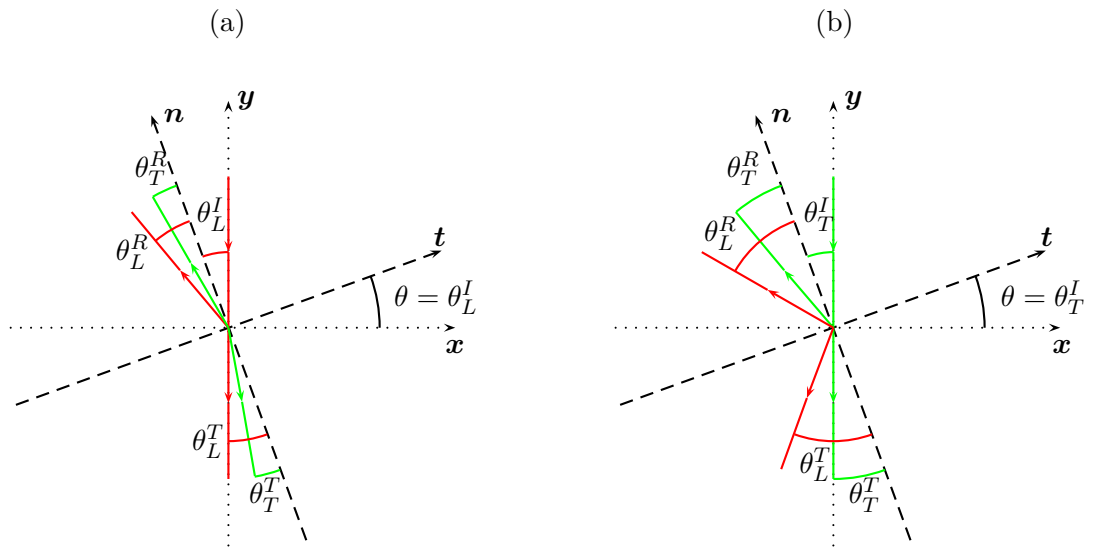


Figure 4.14 – Conversions de modes possibles lorsque une onde plane interagit sous incidence oblique avec une interface. Les ondes longitudinales sont représentées par les rayons rouges alors que les ondes transverses sont représentées par les rayons verts. Le cas (a) est celui d'une onde incidente longitudinale, et (b) correspond au cas d'une onde incidente transverse.

4.4.2 Evolution des contraintes générées sur la fissure

Les diagrammes de directivité décrivent la diffusion de l'onde par la fissure. En cas de non-linéarité, le niveau de contrainte et l'angle d'incidence sont des paramètres qui influencent directement la génération des harmoniques supérieurs. Pour analyser l'évolution des harmoniques supérieurs, il est nécessaire de connaître comment varient les contraintes générées par l'onde incidente sur la fissure en fonction de son orientation.

On considère d'abord le cas d'une onde plane longitudinale. En omettant la dépendance du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par rapport aux déplacements $\boldsymbol{u}^i$, on écrit le tenseur des contraintes produit par l'onde incidente :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{inc}}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Les termes non nuls de ce tenseur sont ceux créés par l'onde incidente. Pour une onde dont l'amplitude est de 10 nm, les valeurs maximales de σ_{xx} et σ_{yy} sont respectivement $\sigma_{xx}^M = 0{,}45$ MPa et $\sigma_{yy}^M = 0{,}9$ MPa. La contrainte normale et la contrainte tangentielle dans le repère local de l'interface de contact sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_n^{\text{inc}}(t) = \left(\boldsymbol{\sigma}^{\text{inc}}(t)\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} \\ \tau^{\text{inc}}(t) = \left(\boldsymbol{\sigma}^{\text{inc}}(t)\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{t}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{t}$ sont ensuite projetés sur le repère $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$. L'expression des contraintes normales et tangentielles créées par l'onde incidente sur l'interface inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale est alors :

$$\begin{cases} \sigma_n^{\text{inc}}(t) = \sigma_{xx}(t)\sin^2\theta + \sigma_{yy}(t)\cos^2\theta \\ \tau^{\text{inc}}(t) = \cos\theta\sin\theta(\sigma_{yy}(t) - \sigma_{xx}(t)). \end{cases} \tag{4.20}$$

Pour une onde plane transverse, seules les composantes extra-diagonales du tenseur de Cauchy sont non nulles :

$$\boldsymbol{\sigma}^{inc}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy}(t) \\ \sigma_{xy}(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Dans les calculs présentés, la contrainte de cisaillement σ_{xy} générée dans le solide a une amplitude maximale $\sigma_{xy}^M = 0{,}23$ MPa pour une onde dont l'amplitude est de 10 nm. Les contraintes générées selon la normale et la tangente à l'interface sont données par l'équation (4.19). La fissure étant inclinée d'un angle θ, les contraintes sont calculées en fonction de θ :

$$\begin{cases} \sigma_n^{\text{inc}}(t) = -\sigma_{xy}(t)\sin 2\theta \\ \tau^{\text{inc}}(t) = \sigma_{xy}(t)\cos 2\theta. \end{cases} \tag{4.22}$$

Les contraintes générées sur l'interface par l'onde incidente, qu'elle soit longitudinale ou transverse. Ces contraintes ne sont toutefois pas les contraintes de contact, puisque les lois de contact vont apporter des modifications à ces valeurs. Cependant, on peut d'ores et déjà noter que pour $\theta = 45°$, aucune contrainte tangentielle n'est créée par l'onde de cisaillement. Si la contrainte normale générée ne permet pas l'ouverture de la fissure, il n'y a pas de clapping, ni de glissement pour une incidence à 45°, et donc aucun effet non-linéaire n'est attendu. On explique ainsi l'absence d'harmoniques supérieurs mis en évidence par la figure 4.13 pour cet angle d'incidence.

Le comportement normal de l'interface est régit par la loi de contact unilatéral, dont la forme prenant en compte une avec pré-contrainte σ_0 est rappelée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} [u_n] \leq 0 \\ \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \leq 0 \\ \left(\sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0\right)[u_n] = 0 \end{cases} , \quad \forall x_c \in \Gamma_c. \tag{4.23}$$

Comme dans la partie 4.2, on peut relier l'apparition du clapping à un paramètre adimensionnel ξ_L. En prenant en compte la pré-contrainte σ_0, ce paramètre s'écrit de la manière suivante :

$$\xi_L = \frac{\mid \sigma_0 \mid}{\max(\sigma_n^{\text{inc}})}. \tag{4.24}$$

Si la contrainte normale incidente, qui dépend de l'angle d'incidence θ, est supérieure à la pré-contrainte σ_0, alors $\xi_L \in [0;1]$ et l'onde est suffisamment puissante pour ouvrir l'interface et générer du clapping.

Le comportement tangentiel de l'interface est pris en compte par la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \tau_0 \mid \leq \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \\ \text{Si } \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \tau_0 \mid < \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \quad \Rightarrow \text{adhérence :} \quad [u_t] = 0 \\ \text{Si } \mid \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \tau_0 \mid = \mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \quad \Rightarrow \text{glissement :} \\ \qquad \begin{cases} \exists \alpha > 0; [u_t] = -\alpha\tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) \\ \tau(\boldsymbol{u}^i(x_c)) = \pm\mu \mid \sigma_n(\boldsymbol{u}^i(x_c)) + \sigma_0 \mid \end{cases} \end{cases} , \quad \forall x_c \in \Gamma_c. \tag{4.25}$$

De la même manière, le déclenchement du glissement peut être caractérisé par la valeur prise par le paramètre ξ_T défini par :

$$\xi_T = \frac{\mu \mid \sigma_0 + \max(\sigma_n^{\text{inc}}) \mid}{\max(\tau^{\text{inc}})}. \tag{4.26}$$

Si la contrainte tangentielle incidente est supérieure à $\mu|\sigma_0 + \max(\sigma_n^{\text{inc}})|$, alors $\xi_T \in [0;1]$ et le glissement est déclenché. Ces paramètres ξ permettent d'anticiper quelle sera la non-linéarité activée par l'onde.

La figure 4.15 donne l'évolution de ξ_L et ξ_T en fonction de l'angle d'incidence θ pour l'onde longitudinale. Les valeurs maximales des contraintes incidentes sont calculées à partir de l'équation (4.20) en prenant les valeurs $\sigma_{xx}^M = 0{,}45$ MPa et $\sigma_{yy}^M = 0{,}9$ MPa. La pré-contrainte normale est $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa et le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}8$. On constate sur la figure 4.15 que seul ξ_L est inclus dans $[0;1]$ quel que soit l'angle d'incidence. Dans ces conditions, le clapping est donc le seul effet non-linéaire activé à l'interface.

La figure 4.16 donne l'évolution de ξ_L et ξ_T pour une onde transverse qui crée une contrainte de cisaillement maximale $\sigma_{xy}^M = 0{,}23$ MPa. La pré-contrainte est respectivement égale à $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa et $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa pour les figures 4.16.(a) et (b). Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$. La figure 4.16.(a) indique que seul ξ_T est inférieur à 1, excepté autour de 45° puisque la contrainte incidente de cisaillement s'annule pour cet angle. Dans ce cas, seul le glissement est activé et il n'y a aucun effet non-linéaire pour $\theta = 45°$.

Lorsque la pré-contrainte diminue et devient égale à $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa par exemple, plusieurs situations sont possibles. La figure 4.16.(b) indique que ξ_L est inférieur à 1 pour $\theta \in [15°; 75°]$. Pour

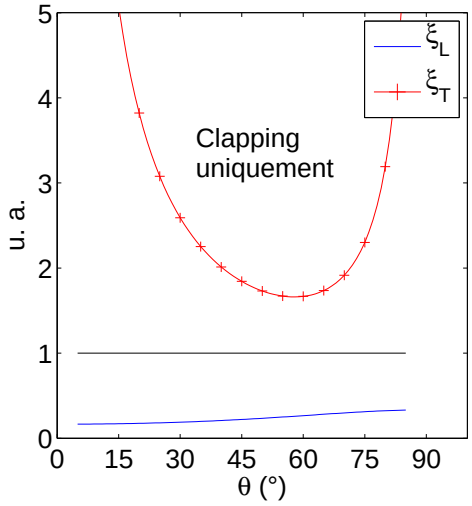


Figure 4.15 – Evolution de ξ_L et ξ_T en fonction de l'angle d'incidence. $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa, $\mu = 0{,}8$.

ces angles d'incidence, la contrainte normale créée par l'onde incidente est suffisante pour ouvrir l'interface, il y a donc activation du clapping. Pour ces valeurs de θ, ξ_T est aussi inférieur à 1, excepté autour de 45°. Le glissement est aussi possible et les deux non-linéarités de contact sont en concurrence. Pour $\theta \in [0°; 90°] \setminus [15°; 75°]$, seul le glissement est activé par l'onde transverse.

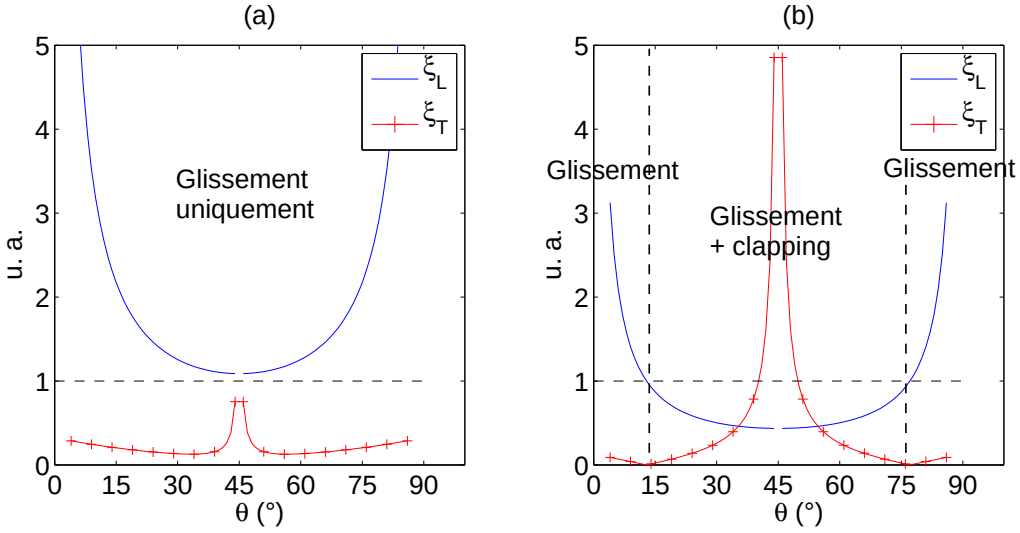


Figure 4.16 – Evolution de ξ_L et ξ_T en fonction de l'angle d'incidence. (a) $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa, $\mu = 0{,}3$, (b) $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa, $\mu = 0{,}3$.

La projection des contraintes générées par l'onde incidente sur la surface de contact, la définition des lois de contact et les paramètres ξ, permettent d'anticiper quels sont les phénomènes de contact activés lors de l'interaction entre l'onde incidente et la fissure. Dans les parties suivantes, on s'intéresse à l'évolution des harmoniques supérieurs en fonction de l'amplitude de l'onde incidente, de l'angle d'incidence et de la pré-contrainte, pour les trois cas d'étude donnés par les figures 4.15, 4.16.(a) et 4.16.(b).

4.4.3 Evolution des harmoniques supérieurs pour une onde longitudinale

Dans cette partie, on présente plus en détail les conséquences de l'interaction non-linéaire entre une onde longitudinale et une fissure fermée, notamment pour les harmoniques supérieurs. L'onde transmise longitudinale est analysée, puisqu'elle est toujours présente et générée dans la même direction, comme l'ont montré les diagrammes de directivité. L'analyse des résultats est effectuée à partir des vitesses, qui sont enregistrées aux noeuds appartenant au segment $[(-10;-30);(10;-30)]$ mm. La moyenne de ces signaux est calculée et une transformée de Fourier est ensuite appliquée pour obtenir l'amplitude des trois premiers harmoniques. On s'intéressera ici aux valeurs de ces harmoniques selon l'effet de différents paramètres, comme l'amplitude de l'onde incidente, ou l'angle d'incidence. L'effet de la contrainte normale est similaire aux résultats de la partie 4.2 et est présenté en annexe C. Sauf précisé autrement, la fissure a une longueur $d = 20$ mm.

Effet de l'angle d'incidence

Résultats numériques. L'amplitude de l'onde incidente est fixée à 10 nm et les paramètres mécaniques appliqués à l'interface sont toujours $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa et $\mu = 0{,}8$. La figure 4.17 donne l'évolution des trois premiers harmoniques en fonction de l'angle d'incidence θ. Le second

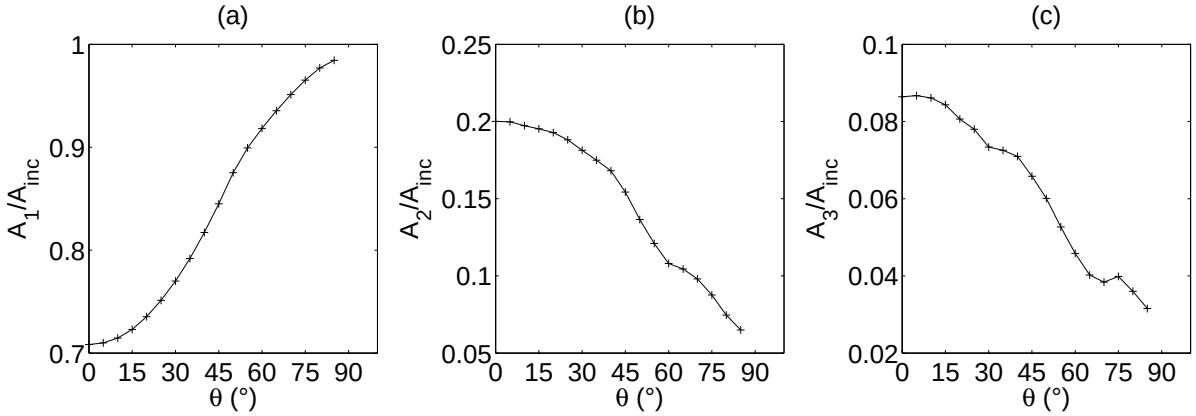


Figure 4.17 – Evolution du premier (a), second (b) et du troisième (c) harmonique en fonction de l'angle d'incidence pour une onde longitudinale. Les paramètres de calculs sont : $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa, $\mu = 0{,}8$.

et le troisième harmonique décroissent de manière monotone lorsque l'angle d'incidence augmente. L'amplitude du second harmonique est d'un ordre supérieur à celle du troisième harmonique. Au contraire, l'harmonique fondamental augmente régulièrement pour finalement atteindre l'amplitude de l'onde incidente lorsque θ approche 90°.

Analyse de la dynamique de contact. La figure 4.18 montre les contraintes de contact calculées numériquement par le modèle EF pour $\theta = 0°$ et $\theta = 25°$. Pour une incidence normale, la contrainte tangentielle est nulle et seule la contrainte normale est modifiée par la loi de contact unilatéral donnée par l'équation (4.23). En effet, la contrainte normale totale ne peut être positive et s'annule pendant les phases de décollement. Comme cela a été expliqué dans la partie 2.4, ce signal contient l'ensemble des harmoniques supérieurs. Sous incidence oblique, la contrainte tangen-

tielle n'est plus nulle mais est insuffisante pour déclencher le glissement ($\xi_T > 1$). Lorsque la fissure s'ouvre, c'est-à-dire quand $\sigma_n + \sigma_0 = 0$ MPa, la contrainte tangentielle s'annule également pour respecter la condition de surface libre. Enfin, en accord avec l'équation (4.20), l'amplitude de la contrainte normale diminue lorsque l'angle d'incidence augmente. Cette réduction de la contrainte normale générée par l'onde incidente a un impact direct sur l'amplitude des harmoniques supérieurs.

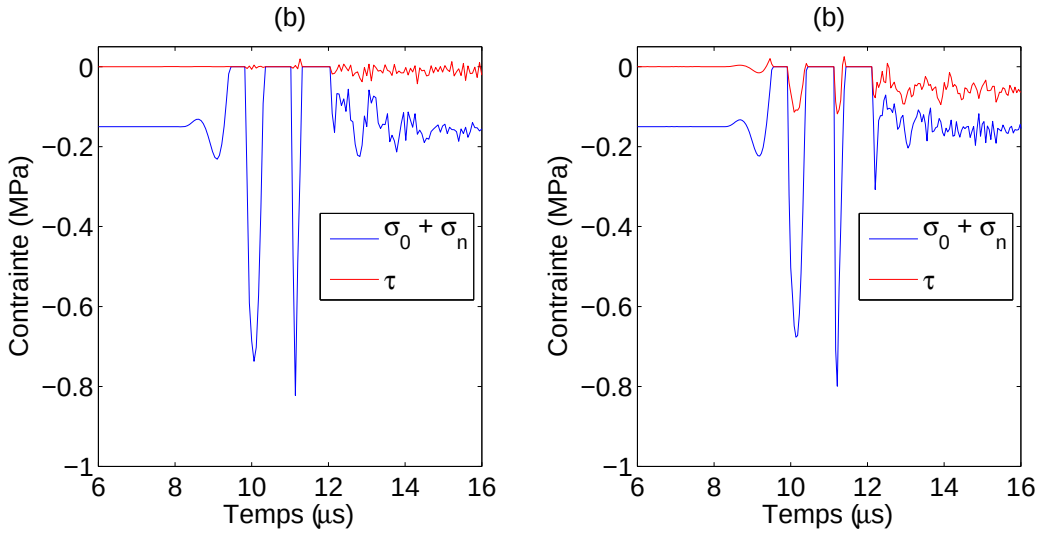


Figure 4.18 – Résultat temporel obtenu numériquement pour les contraintes normales et tangentielles au centre de la fissure, pour $\theta = 0°$ (a) et $\theta = 25°$ (b). Paramètres de calcul : fissure de 20 mm, $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa, $\mu = 0{,}8$.

Comme cela a été fait dans la partie 2.4 (figures 2.7 et 2.10), on peut évaluer la non-linéarité générée au contact en analysant le contenu fréquentiel des contraintes de contact. On peut travailler de manière approchée, en appliquant les lois de contact aux signaux analytiques donnés par l'équation (4.20) et ensuite extraire l'amplitude des différents harmoniques. Il est alors possible de travailler séparément avec σ_n ou τ afin d'identifier quel signal affiche une non-linéarité conforme à celle de l'onde transmise calculée numériquement.

La figure 4.19 donne l'évolution des harmoniques A_2 et A_3 obtenus à partir de la contrainte normale. On constate que le contenu fréquentiel tiré de la contrainte normale suit le résultat numérique de la figure 4.17. La décroissance de la contrainte normale incidente avec l'angle d'incidence se traduit par une diminution des harmoniques supérieurs.

Jusqu'à présent, l'onde longitudinale interagit avec une interface de contact dont le coefficient de frottement est relativement élevé. Le glissement n'intervient pas dans la génération des harmoniques. Des tests ont été effectués avec des coefficients de frottement plus faibles sans qu'il ne s'en suive des modifications importantes sur l'évolution des harmoniques supérieurs. Le glissement a peu d'effet et le clapping est la source principale des harmoniques supérieurs.

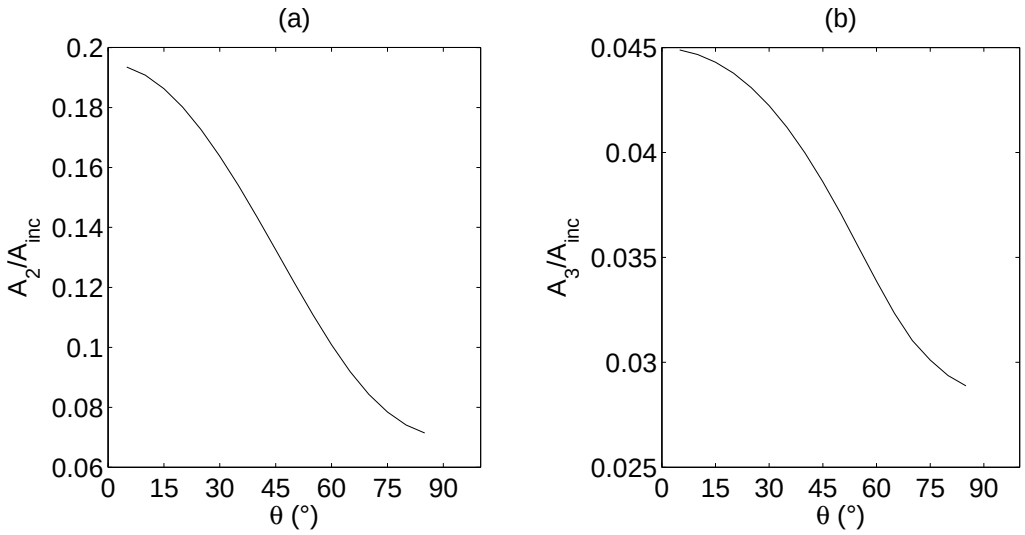


Figure 4.19 – Evolution du second (a) et du troisième (b) harmonique en fonction de l'angle d'incidence. Courbes obtenues avec l'analyse présentée par les figures 2.7 et 2.10. Ici, le contact unilatéral est appliqué au signal de la contrainte de compression incidente, pour différentes valeur de θ. Une FFT donne alors l'amplitude de A_2 et A_3.

Effet de l'amplitude de la source.

Pour trois orientations de fissure et une pré-contrainte $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa, on trace l'évolution des harmoniques en fonction de l'amplitude de l'onde incidente. Le coefficient de frottement est fixé à 0,8 et les amplitudes des harmoniques sont normalisées par l'harmonique fondamental de l'onde incidente. Dans ces conditions, l'évolution des harmoniques est donnée en figure 4.20. Pour l'excitation la plus faible, le CAN n'est pas activé et aucun harmonique supérieur n'apparaît. L'onde n'est pas affectée par la fissure et le coefficient de transmission, équivalent au rapport entre l'amplitude de l'onde incidente et celle de l'onde transmise, est égal à 1, comme le montre la figure 4.20.(a). En augmentant l'excitation, la non-linéarité de contact est activée puisque les harmoniques supérieurs sont générés. On retrouve la notion de seuil d'activation [43, 44]. Mis à part les différences quantitatives, l'évolution de chacun des trois premiers harmoniques est analogue, quelle que soit l'orientation de la fissure. L'évolution des harmoniques en fonction de l'amplitude d'excitation peut être expliquée par l'évolution des contraintes normales de contact. Quel que soit l'angle d'incidence, on a vu dans la partie 4.4.2 que le clapping est l'unique phénomène activé à l'interface. Par conséquent, le comportement de chaque harmonique est semblable lorsque l'angle d'incidence change. De plus, la diminution de la contrainte normale avec l'angle d'incidence entraîne la diminution des harmoniques supérieurs. En ce qui concerne le premier harmonique, les effets d'amplitude observés pour ces trois orientations de fissure sont directement liés à la longueur apparente de la fissure. Plus l'angle θ est grand, plus la longueur apparente $d_a = d\cos\theta$ diminue. La dimension de l'obstacle à la propagation de l'onde diminue, d'où les valeurs supérieurs de A_1.

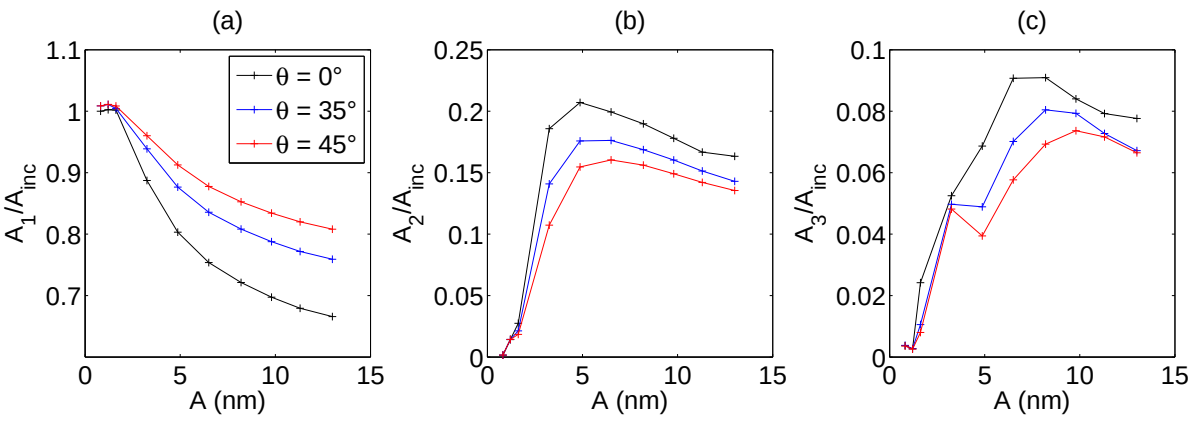


Figure 4.20 – Evolution du premier (a), second (b) et troisième (c) harmonique en fonction de l'amplitude de l'excitation pour trois orientations de fissure. Paramètres de calcul : fissure de 20 mm, $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa, $\mu = 0{,}8$.

4.4.4 Evolution des harmoniques supérieurs pour une onde transverse

Il est maintenant question des harmoniques supérieurs générés par l'interaction entre une onde transverse et une fissure fermée. Pour les mêmes raisons que pour l'onde longitudinale, l'onde de cisaillement transmise est étudiée à partir des vitesses des noeuds appartenant au segment $[(-10;-30);(10;-30)]$ mm. La moyenne de ces signaux est effectuée et une transformée de Fourier est ensuite appliquée pour obtenir l'amplitude des trois premiers harmoniques. L'effet de la contrainte normale est présenté en annexe C. La fissure conserve une longueur $d = 20$ mm.

Effet de l'angle d'incidence

Résultats numériques. L'onde incidente a une amplitude fixée à 10 nm, le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$. Des simulations sont effectuées pour différents angles d'incidence, entre 0° et 85°. Pour chaque simulation, l'amplitude des trois premiers harmoniques est relevée, et leurs évolutions sont données par la figure 4.21, d'abord pour $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa, puis pour $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa.

Pour le premier cas, la pré-contrainte est égale à $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa. L'harmonique fondamental augmente et atteint une valeur maximale pour $\theta = 45°$. Son amplitude est alors égale à celle de l'onde incidente, en d'autres termes, l'onde est entièrement transmise. Les harmoniques supérieurs, eux, possèdent un minimum d'amplitude pour $\theta = 45°$. Les valeurs sont proches de zéro et il n'y a pas d'effets non-linéaires. On retrouve le résultat introduit par les diagrammes de directivité obtenus pour $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa (figure 4.13). Ce résultat est conforme avec celui établit plus tôt par Pecorari [118]. Le second harmonique possède deux maxima locaux pour $\theta = 25°$ et $\theta = 75°$. De plus, son amplitude est du même ordre de grandeur que celle du troisième harmonique.

Si la contrainte normale appliquée diminue, les effets non-linéaires produits peuvent être très différents. On considère maintenant les résultats obtenus pour $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa, les autres paramètres restant inchangés. Les trois harmoniques montrent désormais un maximum d'amplitude autour de $\theta = 45°$. L'harmonique fondamental a une évolution proche de celle obtenue pour $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa. La transmission à travers la fissure reste élevée, puisque l'amplitude de l'harmo-

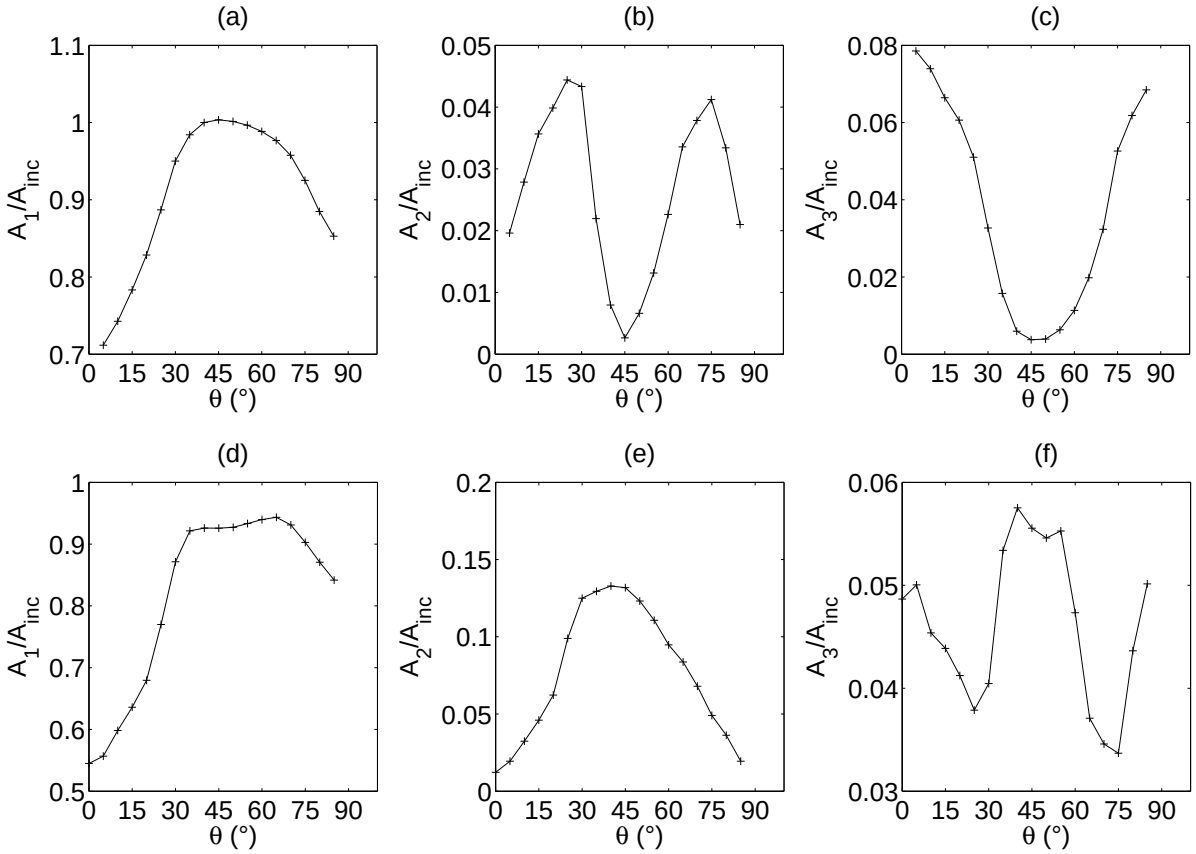


Figure 4.21 – Evolution du premier, du second et du troisième harmonique en fonction de l'angle d'incidence pour une onde transverse. (a), (b) et (c) correspondent à $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa et (d), (e) et (f) correspondent à $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa. Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$.

nique fondamental vaut plus de 90% de l'amplitude de l'onde incidente, mais est inférieure à celle obtenue précédemment. Le comportement général de l'harmonique fondamental varie peu selon l'état de pré-contrainte. Le second harmonique est un ordre au dessus du troisième harmonique en terme d'amplitude. Ce dernier possède deux minima locaux autour de $\theta = 15°$ et $\theta = 75°$. Les effets non-linéaires sont différents selon le niveau de compression appliqué à la fissure et l'orientation de celle-ci. Contrairement au cas de l'incidence normale [135, 136], le second harmonique est aussi généré pour une incidence oblique. L'évolution des harmoniques est affectée par la dynamique de contact. Afin de clarifier ces effets, une analyse est proposée.

Analyse de la dynamique de contact pour le cas où $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa. Comme pour l'onde longitudinale, l'étude des contraintes de contact donne les informations nécessaires pour expliquer les phénomènes non-linéaires. On commence par le cas où la pré-contrainte σ_0 est fixée à $-0{,}25$ MPa. D'après la figure 4.16, il s'agit donc du cas où seul le glissement est activé quel que soit l'angle d'incidence.

La génération des harmoniques impairs est un résultat connu pour l'interaction sous incidence normale entre une onde de cisaillement et une interface de contact [135, 136]. Le second harmonique est pourtant lui aussi généré. Les figures 4.22.(a) et (b) donnent les contraintes normales et tangentielles obtenues numériquement au centre de la fissure au cours du temps, pour $\theta = 0°$ et

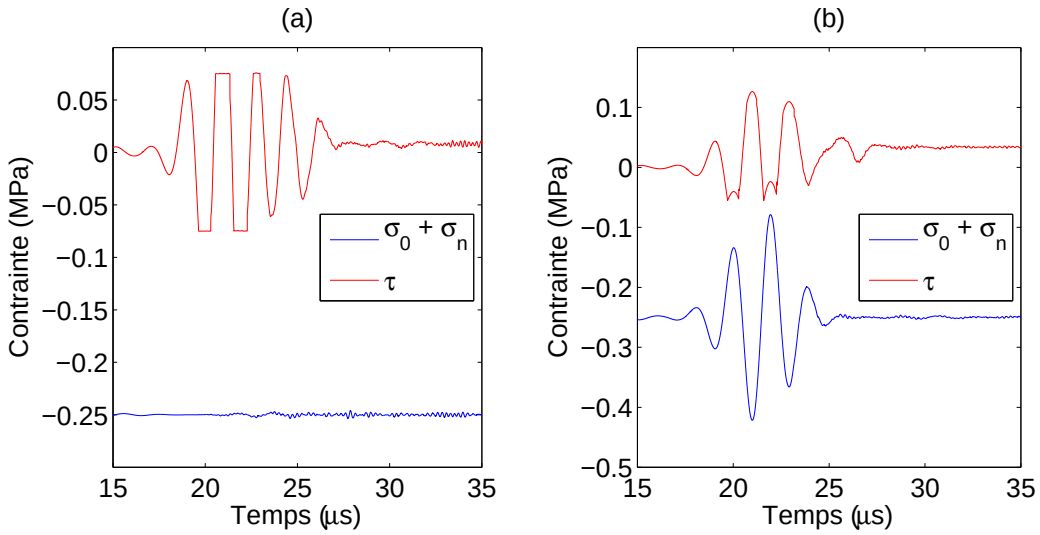


Figure 4.22 – Résultats numériques pour les contraintes de contact normales et tangentielle au centre de la fissure, pour une incidence de $\theta = 0°$ (a) et $\theta = 25°$ (b). $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa, $\mu = 0{,}3$.

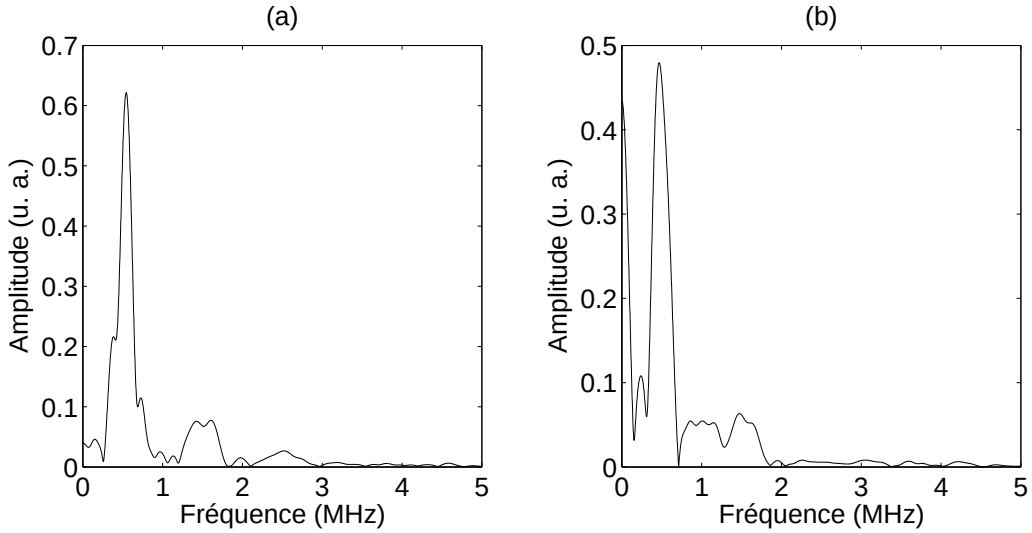


Figure 4.23 – (a) FFT du signal de contrainte tangentielle pour $\theta = 0°$ donné par la figure 4.22 (a). (b) FFT du signal de contrainte tangentielle pour $\theta = 25°$ donné par la figure 4.22 (b).

$\theta = 25°$. La contrainte normale est la somme de la pré-contrainte σ_0 et de la contrainte normale créée par l'onde incidente. Sous incidence normale, seule la contrainte tangentielle est modifiée selon les termes de la loi de Coulomb. La contrainte normale reste égale à σ_0. D'après l'équation (3.10), quand $|\tau| = \mu|\sigma_n + \sigma_0|$ le glissement est activé et la contrainte tangentielle est fixée par $\tau = \pm\mu|\sigma_n + \sigma_0| = \pm\mu|\sigma_0|$ pour une incidence normale. La contrainte tangentielle est donc constante durant le glissement. Cette distorsion se traduit par la génération des harmoniques supérieurs impairs, comme cela a été rappelé dans la partie 2.4. Le spectre de ce signal est donné par la figure 4.23.(a) et il contient uniquement les harmoniques impairs.

Sous incidence oblique, la contrainte normale totale évolue au cours du temps car σ_n n'est plus nulle. La contrainte normale totale $|\sigma_n + \sigma_0|$ n'est plus constante mais ne s'annule jamais. Il n'y a pas de clapping. Pendant le glissement, la loi de Coulomb impose que τ soit égal à $\pm\mu|\sigma_n + \sigma_0|$,

ce qui implique que la contrainte tangentielle est directement reliée à l'évolution temporelle de la contrainte normale, comme le montre la figure 4.22.(b). La distorsion du signal τ entraîne une perte de symétrie et les plateaux à valeur constante disparaissent. La transformée de Fourier de ce signal est donnée par la figure 4.23.(b). On constate alors la présence du second et du troisième harmonique. L'origine du second harmonique sous incidence oblique vient du couplage entre la contrainte normale et la contrainte tangentielle.

Puisqu'il n'y a pas de clapping, la non-linéarité est introduite par les modifications opérées sur la contrainte tangentielle. Comme pour l'onde longitudinale, et comme cela a été fait dans la partie 2.4, il est possible d'estimer la non-linéarité produite à l'interface par le glissement en analysant le contenu fréquentiel de ces signaux de la contrainte tangentielle. L'étude décrite par les figures 2.7 et 2.10 est effectuée pour différents angles d'incidence. A chaque fois, l'amplitude des harmoniques supérieurs est relevée. Le résultat est donné par la figure 4.24. Les variations des harmoniques sont conformes aux résultats numériques de la figure 4.21.(b) et (c). On retrouve un minimum pour $\theta = 45°$ et deux maxima autour de 25° et 65° pour A_2. Dans le cas du frottement pur, le contenu fréquentiel du signal transmis (ou réfléchi) est directement piloté par la non-linéarité de glissement avec frottement.

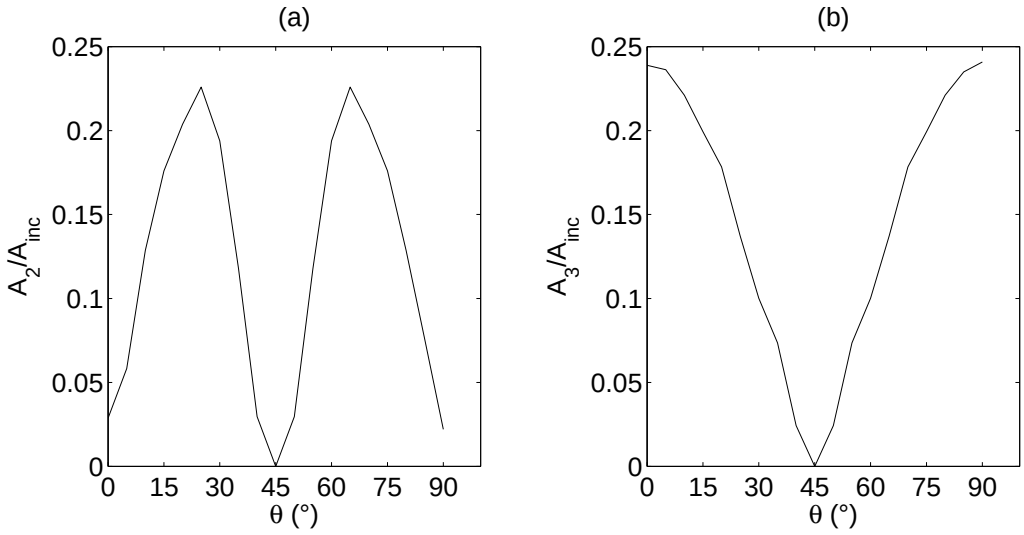


Figure 4.24 – Evolution du second (a) et du troisième (b) harmonique en fonction de l'angle d'incidence. Courbes obtenues avec l'analyse présentée par les figures 2.7 et 2.10. Ici, la loi de Coulomb est appliqué au signal de la contrainte de cisaillement incidente, pour différentes valeur de θ. Une FFT donne alors l'amplitude de A_2 et A_3.

Analyse de la dynamique de contact pour le cas où $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa. Pour un chargement égal $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa, le glissement et / ou le clapping sont activés selon l'angle d'incidence. La figure 4.25 donne les signaux temporels issus de la résolution numérique pour la contrainte normale totale et la contrainte tangentielle, respectivement pour $\theta = 0°$ et $\theta = 25°$.

Pour une incidence normale, le comportement est le même que celui observé avec $\sigma_0 = -0{,}25$ MPa. Le signal de la contrainte tangentielle est symétrique par rapport à sa valeur moyenne et possède des plateaux à valeur constante, conformément à la loi de Coulomb. Cependant, sous incidence

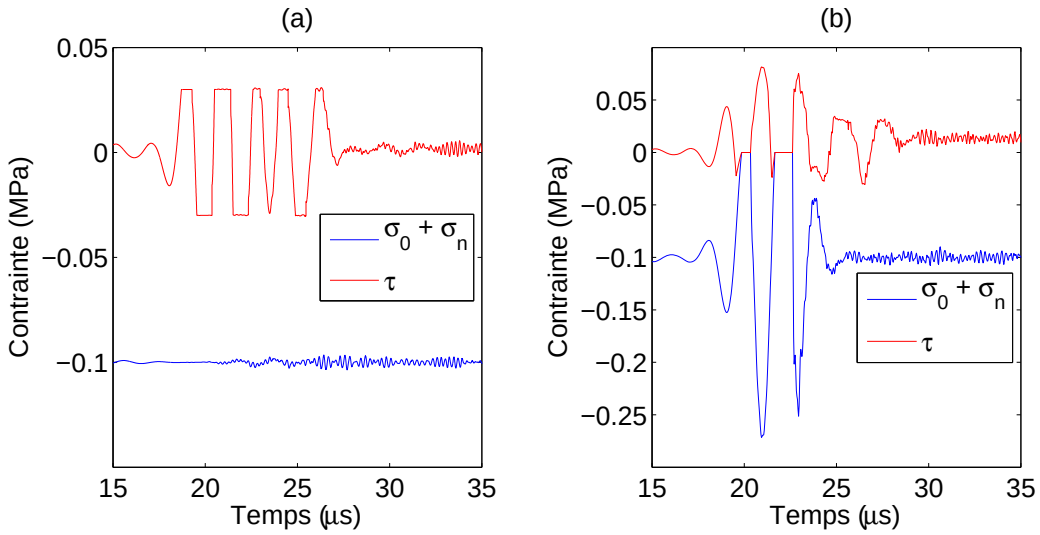


Figure 4.25 – Résultats numériques pour les contraintes de contact normales et tangentielles au centre de la fissure, pour une incidence de $\theta = 0°$ (a) et $\theta = 25°$ (b). $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa, $\mu = 0{,}3$.

oblique, la figure 4.25.(b) montre clairement que les deux signaux sont modifiés. L'annulation de la contrainte normale correspond à un décollement de l'interface. Le phénomène de clapping est donc actif pour $\theta = 25°$, comme cela a été prédit par l'étude de ξ_L sur la figure 4.16.(a). La contrainte tangentielle est modifiée à la fois par le contact unilatéral, puisqu'elle s'annule lors des décollement, et par la loi de Coulomb lors du glissement.

Pour savoir quelle est la contribution du clapping et du glissement aux harmoniques supérieurs, les lois de contact sont appliquées sur un signal analytique, comme cela a été fait dans la partie 2.4. Les amplitudes approchées des harmoniques supérieurs sont ainsi obtenues pour différents angles d'incidence. On a donc une indication qualitative de leurs évolutions en fonction de l'angle d'incidence. Les résultats issus du travail sur la contrainte normale sont donnés par la figure 4.26. La figure 4.26 reproduit les caractéristiques principales de l'évolution des harmoniques supérieurs donnée par la figure 4.21. On retrouve les maxima d'amplitude pour $\theta = 45°$. Ce résultat indique que si le clapping et le glissement sont présents, ce qui est le cas pour $\theta \in [15°; 75°]$, le clapping est le phénomène dominant. Cela s'explique notamment par le fait que le frottement ne peut intervenir que lorsque la fissure est fermée. Son effet est donc réduit par le clapping qui vient ouvrir la fissure. D'autre part, le frottement dissipe de l'énergie ce qui diminue l'amplitude des harmoniques générés. Pour $\theta \in [0; 15] \bigcup [75; 90]$, la non-linéarité de contact unilatéral n'est pas active. Seule la non-linéarité de frottement est présente et tend vers 0 pour $\theta = 15°$ et $\theta = 75°$ comme le montre la figure 4.16.(a). Sur ces intervalles, les harmoniques supérieurs donnés par la figure 4.21.(e) et (f), proviennent du glissement avec frottement.

Effet de l'amplitude de la source

Résultats numériques. Pour les trois orientations de fissure $\theta = 0°$, 35° et 45°, l'amplitude des harmoniques est relevée en fonction de l'amplitude l'onde incidente. La pré-contrainte σ_0 est fixée à -0,1 MPa et le coefficient de frottement à 0,3. Les courbes sont données par la figure 4.27.

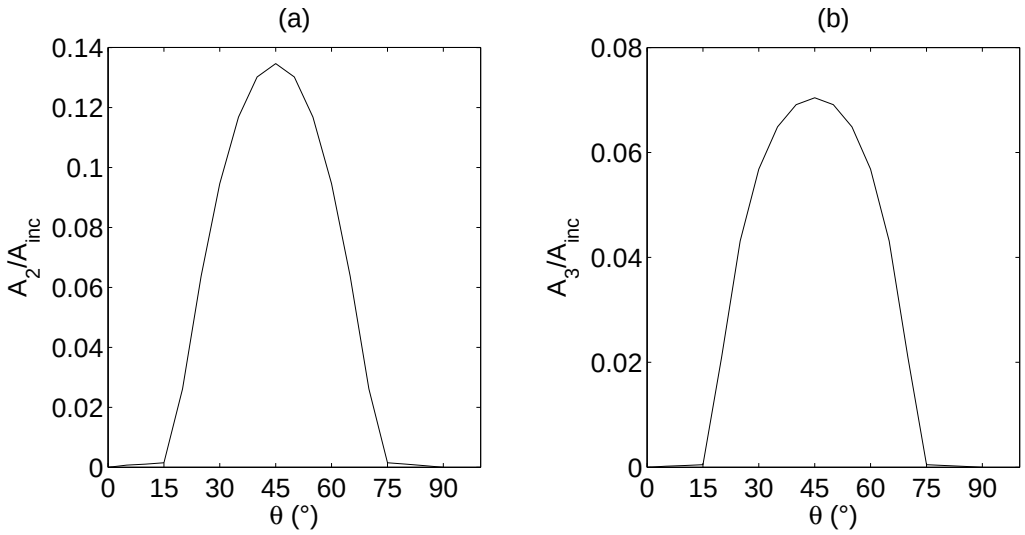


Figure 4.26 – Evolution du second (a) et du troisième (b) harmonique en fonction de l'angle d'incidence.Courbes obtenues avec l'analyse présentée par les figures 2.7 et 2.10. Ici, le contact unilatéral est appliqué au signal de la contrainte de compression incidente, pour différentes valeur de θ. Une FFT donne alors l'amplitude de A_2 et A_3.

Premièrement, on remarque des comportements différents selon l'orientation de la fissure. Sous incidence normale, l'amplitude du second harmonique est faible. Le troisième harmonique atteint un maximum pour une excitation de 3 nm. On retrouve le résultat de la partie 4.2. En effet, pour ce niveau d'excitation, la valeur de ξ_T est de 0,40, soit une valeur très proche de la valeur optimale du troisième harmonique. Sous incidence oblique en revanche, le second harmonique est généré avec une amplitude non négligeable et du même ordre de grandeur que l'amplitude du troisième harmonique. Ce résultat a déjà été mis en évidence par les diagrammes de directivité de la figure 4.13. Par ailleurs, on observe des changements de pente dans l'évolution du second et troisième harmonique qui correspondent à des seuils d'activation des non-linéarités de contact. A faible amplitude d'excitation, la non-linéarité n'est pas activée et la fissure reste donc fermée. Par conséquent, le premier harmonique conserve sa valeur maximale et l'onde est entièrement transmise. Lorsque l'amplitude devient suffisante, le glissement et/ou le clapping apparaissent. Les ruptures de pente repérées par les symboles ◯ et □ sur la figure 4.27 sont liées au type de CAN activé au niveau de la fissure. Enfin, on note que sous incidence oblique en particulier, la génération des harmoniques supérieurs, permet de détecter la présence d'une fissure alors qu'il est plus difficile d'obtenir l'information à partir de l'harmonique fondamental qui varie peu.

Analyse de la dynamique de contact. Comme cela a été annoncé, les différents comportements sont reliés au type de non-linéairité activée à l'interface, selon l'amplitude de l'excitation et de l'angle d'incidence. Sous incidence normale, le glissement génère préférentiellement le troisième harmonique. Ce dernier possède une valeur maximale pour un niveau d'excitation qui correspond à une valeur de $\xi_T = 0{,}45$. Avec l'angle d'incidence, la contrainte normale créée par l'onde va augmenter. Pour $\theta = 35°$, l'augmentation de l'excitation déclenche d'abord le glissement, marqué par le premier cercle ◯ sur la figure 4.27.(b). Puis, lorsque la contrainte normale est suffisante pour

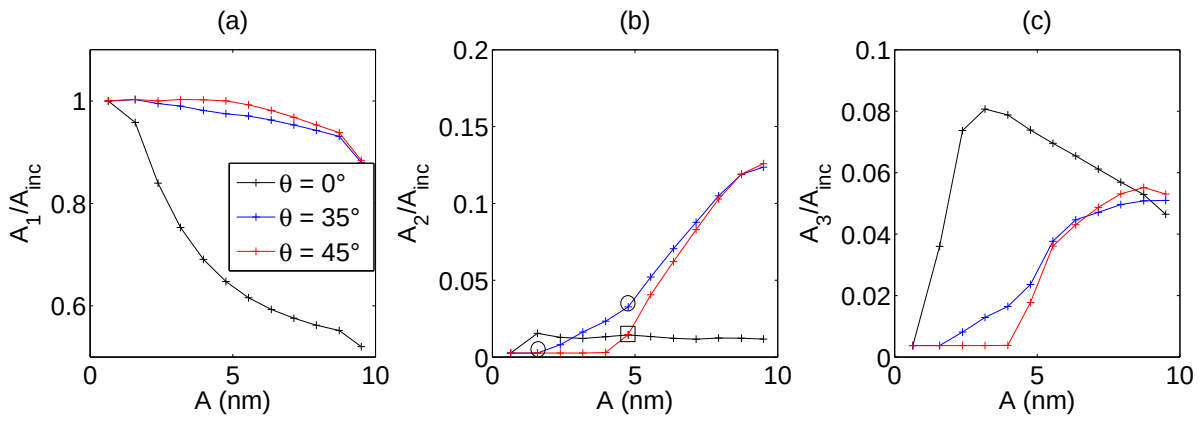


Figure 4.27 – Evolution du premier (a), second (b) et troisième (c) harmonique en fonction de l'amplitude de l'excitation pour trois orientations de fissure. ◯ et □ marquent le changement de pente correspondant au changement de non linéarité de contact. Paramètres de calcul : fissure de 20 mm, $\sigma_0 = -0{,}1$ MPa, $\mu = 0{,}3$.

ouvrir la fissure, le clapping apparaît. Il est repéré par le second cercle ◯. La pente de la courbe augmente alors puisque la non-linéarité créée par le clapping est supérieure à celle du glissement. Pour $\theta = 45°$, on a vu qu'aucune contrainte tangentielle n'est générée par l'onde incidente. Il faut donc attendre que l'amplitude de l'onde incidente soit suffisante pour que la contrainte normale déclenche le clapping, qui est repéré par le carré □ sur la figure 4.27.(b). La pente de la courbe rejoint alors celle obtenue pour $\theta = 35°$. Les mêmes remarques et analyses peuvent être faites pour le troisième harmonique.

L'étude des paramètres ξ est utile pour distinguer et prévoir quel phénomène de contact est activé. De plus, l'étude des contraintes de contact permet de différencier les comportements non-linéaires et permet d'identifier celui qui apporte la non-linéarité dans l'onde transmise. Les résultats présentés dans cette partie ainsi que l'analyse qui en est faite, ont fait l'objet de deux publications [168, 169]. Le tableau 4.2 résume les différentes situations rencontrées, indiquant quel phénomène de contact est activé et dominant et quels harmoniques supérieurs sont générés.

Onde L	CAN	Harmoniques	Phénomène principal
$\theta = 0°$	Clapping	A_2, A_3	Clapping
$\theta \neq 0°$	Clapping	A_2, A_3	Clapping
Onde T	CAN	Harmoniques	Phénomène principal
$\theta = 0°$	Sliding	A_3, A_5	Sliding
$\theta \neq 0°$	Sliding	A_2, A_3	Sliding avec effet sur la contrainte normale
$\theta \neq 0°$	Sliding & Clapping	A_2, A_3	Clapping

Tableau 4.2 – Phénomènes de contact activés lors de l'interaction entre une onde longitudinale ou transverse et une fissure fermée, et harmoniques supérieurs associés.

4.5 Conclusion

Les modèles 2D mis en place dans le chapitre 3 sont utilisés pour étudier l'interaction entre une onde et une interface de contact formée par deux blocs métalliques, puis avec une fissure fermée contenue dans un solide métallique. A chaque fois, une pré-contrainte est prise en compte sur l'interface de contact. La première partie est consacrée à l'étude de l'influence de cette compression sur la génération des harmoniques supérieurs pour l'interface composée par les deux solides, pour une onde longitudinale tout d'abord, puis pour une onde transverse. Les résultats numériques obtenus pour l'onde longitudinale sont en accord avec les observations expérimentales et numériques de la littérature. Dans le cas de l'onde transverse, le troisième harmonique est principalement généré et possède un maximum d'amplitude lorsque la compression augmente.

La deuxième partie de ce chapitre présente des résultats expérimentaux à propos de la propagation d'une onde transverse à travers une interface formée par deux blocs d'acier en contact. L'état de compression est modifié et le post-traitement proposé permet d'extraire l'amplitude du troisième harmonique indépendamment de la non-linéarité du système de mesure. L'évolution de ce troisième harmonique montre un accord qualitatif avec le résultat numérique. Outre l'observation du comportement du troisième harmonique, c'est aussi une justification de l'emploi de la loi de Coulomb dans les modèles numériques.

La dernière partie de ce chapitre concerne l'interaction entre une onde et une fissure fermée d'orientation quelconque. Pour les ondes longitudinales et transverses, l'amplitude des harmoniques supérieurs est étudiée en fonction de l'amplitude de l'excitation et de l'angle d'incidence. Sous incidence oblique, les comportements normaux et tangentiels sont couplés. Il est montré que l'évolution des composantes fréquentielles non-linéaires peuvent être expliquées par une analyse de la dynamique de contact. L'étude de contraintes permet d'analyser quel phénomène non-linéaire, du clapping ou du glissement, gouverne la non-linéarité acoustique. Ainsi, lorsque les deux phénomènes sont actifs, le clapping introduit une non-linéarité supérieure. Il est donc avantageux de chercher à générer et à exploiter cette dynamique de contact dans une logique de CND ultrasonore non-linéaire.

Le modèle numérique permet l'analyse des phénomènes physiques et apporte des explications sur l'interaction entre une onde acoustique et une fissure fermée. C'est aussi un moyen de tester et d'optimiser de nouvelles méthodes potentiellement intéressantes pour la détection et la caractérisation de fissures fermées. Dans la suite, on présente une application utilisant un harmonique supérieur résultant de l'interaction sous incidence oblique de deux ondes sur une fissure.

Chapitre 5

Application de la technique du mixage d'ondes non-colinéaire

5.1 Introduction

La détection de fissures fermées par une méthode d'acoustique non-linéaire doit tirer parti de l'interaction non-linéaire entre une onde et la fissure. Une des conséquences de cette interaction est la génération de nouvelles composantes fréquentielles. L'utilisation des harmoniques supérieurs, bien qu'attrayante par sa simplicité, est difficilement applicable en pratique car cette méthode souffre d'inconvénients majeurs. Premièrement, il est nécessaire d'utiliser des ondes de fortes amplitudes. Le système d'amplification électronique, ou le couplage entre le transducteur et l'échantillon, a alors un comportement non-linéaire et il devient difficile de séparer l'origine des harmoniques supérieurs. Les travaux de recherche visent donc à développer des méthodes dans lesquelles les effets non-linéaires ne sont attribuables qu'à la fissure. C'est pour cette raison que les techniques de modulation d'ondes [50, 78, 79], ou l'utilisation des sous-harmoniques [46, 91] ont été développées. Alliées à des techniques d'imagerie, ces méthodes permettent la localisation et la caractérisation partielle de la fissure.

On propose ici une méthode alternative utilisant l'interaction entre deux ondes transverses sous incidence oblique. L'interaction non-colinéaire de ces deux ondes sur une zone endommagée entraîne la génération d'une troisième onde, longitudinale, dont la fréquence est le double de la fréquence incidente. Cette onde ne dépend ni du système électronique, ni du couplage avec le solide. La méthode est présentée dans ce chapitre. La modélisation de la méthode est d'abord effectuée pour une interface de contact entre deux solides, puis pour une fissure fermée. L'effet de divers paramètres est étudié, et il est montré que cette méthode peut apporter de précieux renseignements sur la présence et les caractéristiques d'une fissure fermée.

5.2 Méthode de mixage non-colinéaire et interface de contact solide-solide

Comme cela a été dit au chapitre 1, deux ondes acoustiques peuvent mutuellement interagir si la zone d'interaction présente des propriétés mécaniques non-linéaires. Ce peut être le cas pour certains défauts, comme par exemple une déformation plastique. En choisissant correctement les deux ondes incidentes, une troisième onde est alors diffusée par le défaut. Cette onde peut donc être exploitée pour mettre en place une méthode de CND. Dans cette partie, on rappelle la théorie qui décrit les conditions nécessaires à la diffusion de l'onde longitudinale. Bien qu'il s'agisse de la théorie non-linéaire classique, les paramètres de fonctionnement de la méthode sont utilisés pour l'appliquer au cas d'une interface de contact formée par deux solides.

5.2.1 Théorie de la méthode dans le cadre de l'acoustique non-linéaire classique

La méthode du mixage d'ondes non-colinéaire consiste à faire interagir deux ondes se propageant dans des directions différentes. Cette interaction est possible si le lieu d'intersection des faisceaux incidents possède des propriétés mécaniques non-linéaires.

L'acoustique non-linéaire classique est basée sur le développement aux ordres supérieurs de l'énergie élastique par rapport au tenseur des déformations, comme cela a été formulé dans le chapitre 1. A l'équation d'onde linéaire s'ajoute alors des termes cubiques associés à des constantes de rigidité du troisième ordre :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - C_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_j \partial a_l} = M_{ijklmn} \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_j \partial a_l} \frac{\partial U_m}{\partial a_n} + \cdots . \tag{5.1}$$

Les termes C_{ijkl} et C_{ijklmn} sont les modules d'élasticité de second et de troisième ordre [13]. La méthode des petites perturbations est une manière de résoudre cette équation d'onde. On décompose alors la solution comme la somme $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}^{(1)} + \boldsymbol{u}^{(2)}$, où $\boldsymbol{u}^{(1)}$ est la solution de l'équation linéaire, et avec $u^{(1)} \gg u^{(2)}$k. Dans ce cas, $\boldsymbol{u}^{(1)}$ annule le membre de gauche de l'équation (5.1). Puisque la méthode du mixage d'ondes non-colinéaire requiert deux ondes incidentes, on peut écrire la solution linéaire comme la superposition de deux ondes monochromatiques de fréquence ω_1 et ω_2 [77] :

$$\boldsymbol{U}^{(1)} = \boldsymbol{P}^{(1)} \cos(\omega_1 t - \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}^{(2)} \cos(\omega_2 t - \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{r}). \tag{5.2}$$

Les vecteurs de polarisation $\boldsymbol{P}^{(1)}$ et $\boldsymbol{P}^{(2)}$ peuvent être colinéaires ou orthogonaux aux vecteurs d'onde $\boldsymbol{k}_1$ et $\boldsymbol{k}_2$, respectivement pour des ondes incidentes longitudinales ou transverses. Le vecteur $\boldsymbol{r}$ correspond aux coordonnées spatiales.

En remplaçant $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}^{(1)} + \boldsymbol{u}^{(2)}$ dans l'équation d'onde non-linéaire (5.1), et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient l'équation d'onde du second ordre portant sur la perturbation $\boldsymbol{u}^{(2)}$. Dans le cas d'un matériau isotrope, cette équation peut être écrite de la manière suivante :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial a_k^2} - \left(K + \frac{G}{3} \right) \frac{\partial^2 u_l^{(2)}}{\partial a_l \partial a_i} = p_i, \tag{5.3}$$

où G est le module de cisaillement et K le module de compression isostatique. Le vecteur $\boldsymbol{p}$ est obtenu en remplaçant $\boldsymbol{u}^{(1)}$ dans le second membre de l'équation (5.1) et représente l'interaction

des ondes incidentes. En ne prenant en compte que les termes correspondant à l'interaction entre les deux ondes incidentes, c'est à dire en ne tenant pas compte de l'interaction d'une onde avec elle-même, le vecteur $\boldsymbol{p}$ peut s'écrire de la manière suivante [77] :

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{I}^{+}\sin\left((\omega_1+\omega_2)t-(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{I}^{-}\sin\left((\omega_1-\omega_2)t-(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{r}\right). \tag{5.4}$$

Les amplitudes $\boldsymbol{I}^{\pm}$ sont la combinaison linéaire de produits impliquant les vecteurs de polarisation, les vecteurs d'onde, et les constantes élastiques du troisième ordre. Le vecteur $\boldsymbol{p}$ peut ainsi être vu comme un terme source pour l'équation (5.3), et dont la valeur est non nulle uniquement sur la région où a lieu l'intersection des ondes incidentes. On note V cette zone d'interaction. Pour obtenir la solution $\boldsymbol{u}^{(2)}$, l'équation (5.3) est convertie dans le domaine fréquentiel. On note $\hat{\boldsymbol{u}}^{(2)}(\boldsymbol{r},\omega)$ la transformée de Fourier de $\boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{r},t)$.

En supposant que la solution $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},\omega)$ décroisse au moins en $1/r$ pour r suffisamment grand, alors la solution dans un domaine infini est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(2)}(\boldsymbol{r},\omega) = \int_V \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}',\omega)dV, \tag{5.5}$$

où $\boldsymbol{G}$ est le tenseur construit à partir des fonctions de Green et $\boldsymbol{r}'$ décrit le volume V.

Le tenseur $\boldsymbol{G}$ est connu et peut être simplifié en supposant $\boldsymbol{r} \gg \boldsymbol{r}'$. Connaissant le terme source, il est alors possible d'obtenir la solution pour $\hat{\boldsymbol{u}}^{(2)}$ [77] :

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{u}}^{(2)}(\boldsymbol{r},\omega) = {} & \frac{(\boldsymbol{I}^{+}\boldsymbol{r}^{*})}{4\pi c_L^2\rho_0}\frac{\boldsymbol{r}^{*}}{\boldsymbol{r}}\int_V \sin\left(\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{c_L}\boldsymbol{r}^{*}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2\right)\boldsymbol{r}'-(\omega_1+\omega_2)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{c_L}-t\right)\right)dV \\
& +\frac{(\boldsymbol{I}^{-}\boldsymbol{r}^{*})}{4\pi c_L^2\rho_0}\frac{\boldsymbol{r}^{*}}{\boldsymbol{r}}\int_V \sin\left(\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{c_L}\boldsymbol{r}^{*}-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2\right)\boldsymbol{r}'-(\omega_1-\omega_2)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{c_L}-t\right)\right)dV \\
& +\frac{\boldsymbol{I}^{+}-(\boldsymbol{r}^{*}\boldsymbol{I}^{+})}{4\pi c_T^2\rho_0}\frac{\boldsymbol{r}^{*}}{\boldsymbol{r}}\int_V \sin\left(\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{c_T}\boldsymbol{r}^{*}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2\right)\boldsymbol{r}'-(\omega_1+\omega_2)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{c_T}-t\right)\right)dV \\
& +\frac{\boldsymbol{I}^{-}-(\boldsymbol{r}^{*}\boldsymbol{I}^{-})}{4\pi c_T^2\rho_0}\frac{\boldsymbol{r}^{*}}{\boldsymbol{r}}\int_V \sin\left(\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{c_T}\boldsymbol{r}^{*}-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2\right)\boldsymbol{r}'-(\omega_1-\omega_2)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{c_T}-t\right)\right)dV,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

où $\boldsymbol{r}^{*}$ est le vecteur unitaire $\boldsymbol{r}^{*} = \boldsymbol{r}/r$. Les deux premiers termes correspondent à des ondes longitudinales de fréquences égales à la somme et à différence de ω_1 et ω_2, et les deux derniers termes correspondent à des ondes transverses, elles aussi de fréquences égales à la somme et la différence des fréquences incidentes.

Si l'on considère la première intégrale, le terme inclu dans le sinus et facteur de $\boldsymbol{r}/c-t$ ne varie pas lors de l'intégration par rapport à $\boldsymbol{r}'$. En revanche, lors de cette intégration par rapport à $\boldsymbol{r}'$, l'intégrande oscille à la fréquence donnée par $((\omega_1+\omega_2)/c)\,\boldsymbol{r}^{*}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2$. Lorsque le volume V augmente, le résultat de l'intégration oscille entre des valeurs fixes, à moins que l'on puisse trouver une direction $\boldsymbol{r}_d^{*}$ pour laquelle on ait

$$((\omega_1+\omega_2)/c_L)\,\boldsymbol{r}_d^{*}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2 = 0. \tag{5.7}$$

Dans ce cas, l'intégrande est constante pour la direction $\boldsymbol{r}_d^{*}$ et l'amplitude de l'onde croît avec le volume d'interaction. Dans les autres directions, l'amplitude oscille et reste bornée. En d'autres termes, il existe une direction où l'onde est préférentiellement générée et pour laquelle l'amplitude

augmente avec le volume d'interaction. Cette onde est qualifiée d'onde "diffusée" par l'interaction non-linéaire entre les ondes incidentes.

L'équation (5.7) est appelée condition de résonance pour la génération d'une onde longitudinale de fréquence égale à la somme des fréquences incidentes, et pour deux ondes incidentes transverses. Les autres termes de l'équation (5.6) facteurs de $\boldsymbol{r}'$ donnent trois autres conditions de résonance, selon que l'on utilise des ondes longitudinales ou transverses et selon la fréquence recherchée. Ces conditions sont respectivement :

$$\begin{aligned}
((\omega_1 - \omega_2)/c_L)\, \boldsymbol{r}_d^* - \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 &= 0 \\
((\omega_1 + \omega_2)/c_T)\, \boldsymbol{r}_d^* - \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 &= 0 \\
((\omega_1 - \omega_2)/c_T)\, \boldsymbol{r}_d^* - \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

On choisit d'utiliser deux ondes incidentes transverses. Dans ce cas on a la relation suivante :

$$\boldsymbol{P}^{(1)}\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{P}^{(2)}\boldsymbol{k}_2 = 0. \tag{5.9}$$

Pour vérifier la condition de résonance (5.7), on doit avoir

$$((\omega_1 + \omega_2)/c_L)^2 = k_1 + k_2 + 2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2, \tag{5.10}$$

qui peut être réécrit de la manière suivante :

$$((\omega_1 + \omega_2)/c_L)^2 = \frac{\omega_1^2}{c_T^2} + \frac{\omega_2^2}{c_T^2} + 2\frac{\omega_1\omega_2}{c_T^2}\cos\phi, \tag{5.11}$$

où ϕ est l'angle entre les deux vecteurs d'onde incidents (voir figure 5.1). Ainsi, pour satisfaire la condition (5.7) et assurer la génération de l'onde diffusée dans une direction fixe, l'angle entre les vecteurs d'onde incident doit être égal à :

$$\cos\phi = \frac{c_T^2}{c_L^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{c_T^2}{c_L^2} - 1\right)\left(\frac{f_1}{f_2} + \frac{f_2}{f_1}\right). \tag{5.12}$$

Cette dernière relation impose alors des restrictions sur les fréquences utilisées pour les ondes incidentes. Le rapport entre ces fréquences doit vérifier :

$$\frac{1 - c_T/c_L}{1 + c_T/c_L} < \frac{\omega_1}{\omega_2} < \frac{1 + c_T/c_L}{1 - c_T/c_L}. \tag{5.13}$$

Si l'on choisit de vérifier la condition de résonance (5.7), il n'est pas possible de vérifier simultanément les trois autres conditions données par l'équation (5.8). Seule l'onde longitudinale de fréquence égale à la somme des fréquences incidentes est générée, et sa direction de propagation est donnée par la vecteur d'onde $\boldsymbol{k}_L = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$ qui est colinéaire au vecteur unitaire $\boldsymbol{r}_L^*$. L'équation (5.13) indique qu'il est aussi possible de travailler avec des fréquences incidentes identiques, ce qui facilite la mise en place de la méthode.

En utilisant des fréquences égales, l'angle $= \phi$ est égal à 118° pour un solide en aluminium dont les propriétés sont $E = 69$ GPa et $\nu = 0{,}33$. Si l'angle d'incidence de chaque source acoustique est identique, alors $\theta_I = \phi/2 = 59°$. L'onde longitudinale est alors générée dans la direction $-\boldsymbol{y}$, comme le montre la figure 5.1.

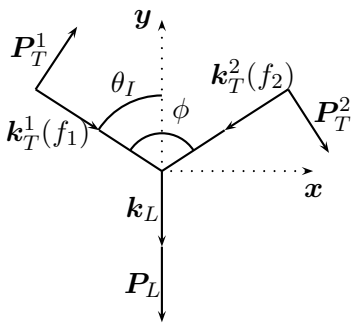


Figure 5.1 – Définition de l'interaction entre deux ondes sous incidence oblique.

L'amplitude de l'onde diffusée dépend du volume d'interaction entre les deux ondes et des constantes élastiques du troisième ordre [77]. L'onde longitudinale diffusée par la non-linéarité d'un matériau lors de l'interaction entre deux ondes a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois par Rollins [170]. Par la suite, cette méthode a pu être appliquée au suivi de l'endommagement par déformation plastique [88]. L'augmentation de l'endommagement est directement reliée à l'augmentation des constantes élastiques du troisième ordre, qui à son tour, accroît l'amplitude de l'onde diffusée longitudinale. Les auteurs ont démontré expérimentalement le potentiel de la méthode pour suivre l'endommagement par plastification. Par exemple, 3% de déformation plastique entraîne une augmentation de plus de 25% de l'amplitude de l'onde longitudinale. On souhaite appliquer cette méthode au cas de la fissure fermée afin d'évaluer son potentiel en terme de détection et de caractérisation. Dans un premier temps, une interface de contact formée par deux solides est considérée.

5.2.2 Description du modèle

La non-linéarité est ici une interface de contact avec frottement. Bien que la théorie du mixage d'ondes non-colinéaire ait été développée dans le cadre de l'acoustique non-linéaire classique, les paramètres obtenus au chapitre précédent, l'angle d'incidence θ_I en particulier, sont utilisés dans le cas d'une interface de contact où la non-linéarité est du type CAN. Dans un premier temps, l'interface est formée par deux solides mis en contact. La configuration adoptée est similaire à celle proposée par Croxford et al. pour l'interaction non-colinéaire de deux ondes transverses [88]. Le système étudié est représenté par la figure 5.2.

La dimension de l'interface de contact est limitée à 20 mm et une pré-contrainte σ_0 est appliquée sur celle-ci par l'intermédiaire des lois de contact (3.9) et (3.10). Les ondes A et B sont générées sur un segment de 2 cm de large. L'angle d'incidence est de 57° par rapport à la normale à l'interface et les ondes utilisées ont une polarisation transverse dans le plan. Cet angle doit assurer la génération de l'onde longitudinale en cas de non-linéarité puisqu'il est proche de la valeur calculée à partir de l'équation (5.12). Il s'agit aussi de la valeur utilisée pour obtenir les résultats expérimentaux présentés dans la partie 5.2.5.

L'espacement des deux sources est de 120 mm, ce qui assure une intersection des deux faisceaux incidents au niveau de l'interface de contact. Chacune de ces ondes a une fréquence $f_1 = 1{,}5$ MHz

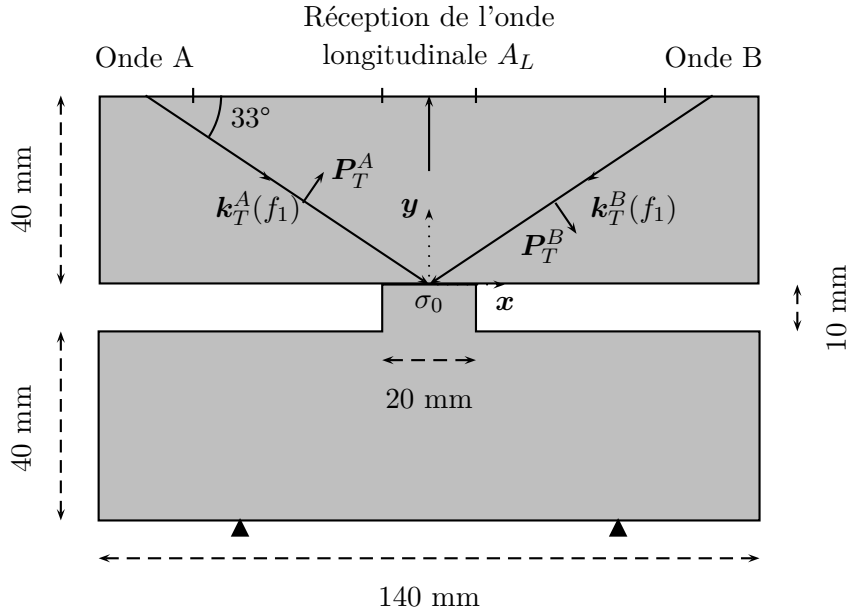


Figure 5.2 – Géométrie du modèle utilisé pour l'étude de l'interaction non-colinéaire entre deux ondes de cisaillement sur une interface de contact.

et une amplitude de 15 nm. Ce sont des pulses de 10 cycles obtenus avec une fenêtre de Hanning. L'utilisation de fréquences identiques simplifie la méthode (numériquement et expérimentalement), et permet une détection plus aisée de l'onde longitudinale puisque celle-ci se propage parallèlement à l'axe $\boldsymbol{y}$. Ce ne serait plus vrai avec des fréquences incidentes différentes. Selon les conditions mécaniques appliquées à l'interface, l'onde longitudinale va être éventuellement être générée.

Le modèle numérique est obtenu en discrétisant la géométrie proposée par la figure 5.2. La résolution est effectuée par Elément Finis en utilisant les résultats obtenus dans le chapitre 3. Le maillage est uniforme et possède une résolution $a = 0{,}15$ mm, ce qui assure au moins 13 éléments par longueur d'onde $\lambda_L \simeq \lambda_T \simeq 2$ mm. La base du solide inférieur reçoit des conditions aux limites de type encastrement. Les vitesses particulaires générées par l'onde longitudinale sont enregistrées au centre de la surface supérieure du solide sur un segment de 2 cm, comme indiqué sur la figure 5.2. Le post-traitement consiste alors à effectuer la moyenne des signaux reçus afin d'obtenir l'onde diffusée. Un filtrage passe-bande est réalisé autour de la fréquence principale de l'onde longitudinale, c'est à dire autour de 3 MHz pour les ondes utilisées ici. L'amplitude de l'onde ainsi filtrée est notée A_L.

5.2.3 Résultats numériques

L'angle d'incidence et l'espacement entre les deux sources acoustiques permettent l'interaction des deux ondes transverses au niveau de l'interface de contact. Si les effets non-linéaires que sont le clapping et le glissement sont activés sur cette interface, alors les deux ondes vont interagir et donner naissance à une troisième onde longitudinale. La figure 5.3 donne une image du champ de vitesse juste après l'interaction des ondes sur l'interface.

Les vitesses normales enregistrées au cours du temps sur la face supérieure sont données par la figure 5.4, avant filtrage, dans le cas où $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$. On dénombre trois paquets

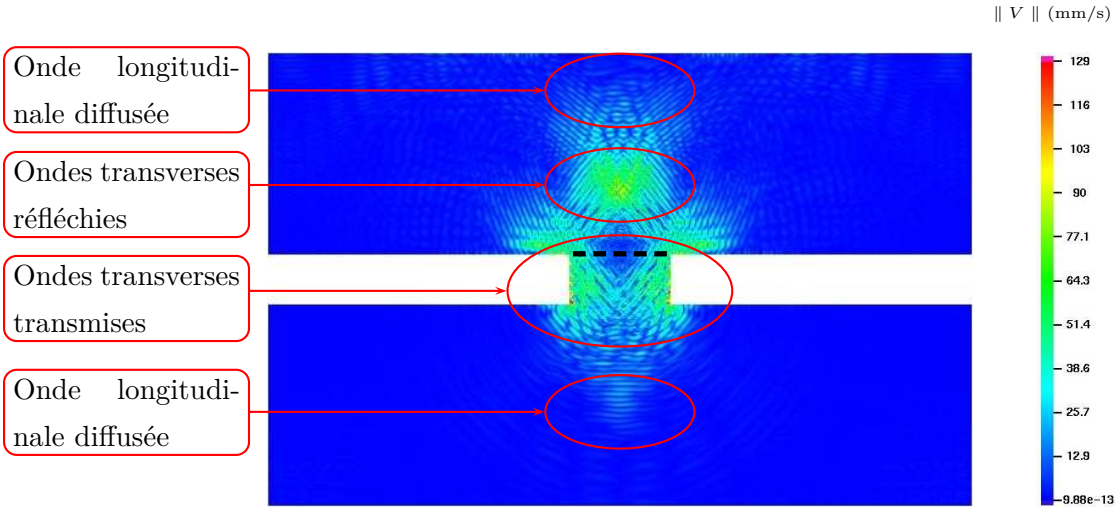


Figure 5.3 – Champ de vitesse instantané à $t = 34{,}4$ μs obtenu après l'interaction entre les deux ondes incidentes transverses et l'interface de contact matérialisée par la ligne discontinue. Les ondes transverses sont partiellement réfléchies et transmises, et une onde longitudinale est diffusée dans chacun des solides.

d'onde. La première impulsion provient de la diffusion directe de l'onde longitudinale par l'interface selon l'axe $\boldsymbol{y}$. La seconde impulsion est diffusée selon $-\boldsymbol{y}$ puis réfléchie sur la face inférieure avant d'atteindre la face supérieure. Le troisième signal est réfléchi deux fois, d'abord sur la face supérieure puis sur la face inférieure. Ces trajets sont résumés sur la figure 5.5.

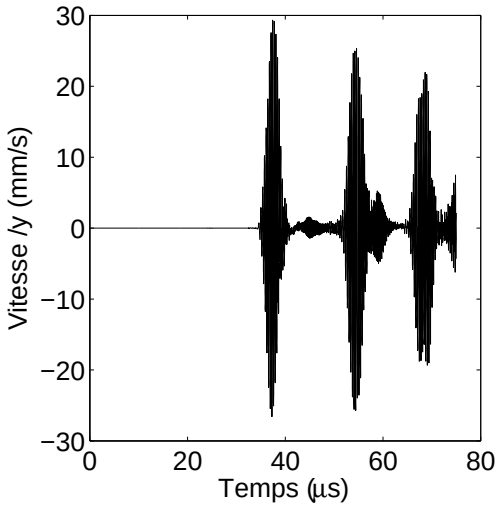


Figure 5.4 – Vitesses enregistrées selon $\boldsymbol{y}$ sur la face supérieure pour $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

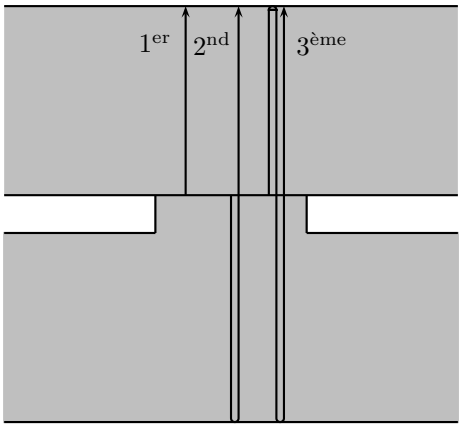


Figure 5.5 – Trajet et réflexions de l'onde longitudinale.

La théorie [77] développée dans le cadre de l'acoustique non-linéaire classique prévoit une diffusion selon $\boldsymbol{k}_L = \boldsymbol{k}_T^1 + \boldsymbol{k}_T^2$, c'est à dire selon $-\boldsymbol{y}$. Seul le second paquet d'onde devrait être présent. Ici, la non-linéarité est issue des phénomènes de contact au niveau de l'interface. Chacune des faces impliquées dans le contact est animée de déplacements qui lui sont propres. Par conséquent, ces

déplacements sont à l'origine des ondes générées dans les deux solides, selon $\boldsymbol{y}$ et $-\boldsymbol{y}$. Appliquée à une interface de contact, la méthode du mixage non-colinéaire permet de travailler aussi bien en réflexion qu'en transmission. Il est donc possible d'appliquer cette technique même lorsqu'une seule face du solide est accessible, ce qui est souvent un prérequis pour une méthode de CND.

L'analyse par traitement de Fourier d'un de ces paquets d'onde, par exemple le premier, conduit au spectre donné par la figure 5.6. Les ondes incidentes ont une fréquence égale à 1,5 MHz. La composante spectrale principale de l'onde longitudinale correspond à une fréquence de 3 MHz, soit deux fois la fréquence de l'onde incidente. La fréquence de l'onde incidente n'apparaît par dans ce spectre. En revanche, il existe une composante fréquentielle autour de 6 MHz. L'origine de ce contenu fréquentiel sera expliqué dans la partie suivante. La composante fréquentielle située à 3 MHz est sélectionnée par une fenêtre de Hanning, puis est reconvertie dans le domaine temporel, donnant ainsi l'amplitude de l'onde longitudinale A_L.

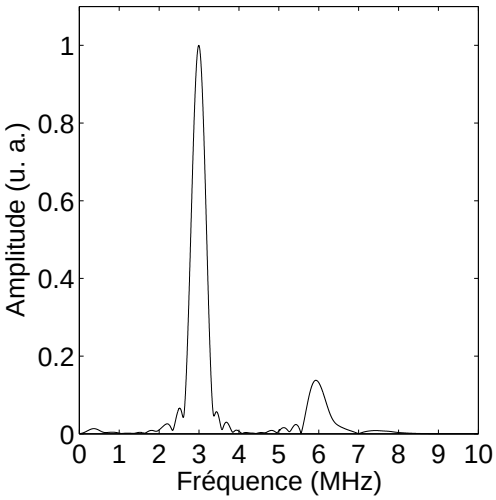


Figure 5.6 – Spectre du premier paquet d'onde reçu sur la face supérieure de l'échantillon. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

On s'intéresse maintenant au rôle joué par l'état de contrainte sur la diffusion de cette onde longitudinale. Ainsi, pour divers chargements de compression, on relève l'amplitude A_L de l'onde longitudinale. Les valeurs de σ_0 s'étalent de 0,02 MPa à 1,2 MPa. Le résultat est donné par la figure 5.7 en fonction de $\xi_L = \sigma_0/\sigma_n$, où σ_n est ici la contrainte normale maximale générée à l'interface par les deux ondes incidentes.

L'amplitude de l'onde longitudinale possède un maximum lorsque le niveau de compression augmente. L'évolution de A_L est proche de celle du second harmonique obtenu pour l'interaction entre une seule onde longitudinale et une interface de contact ou une fissure (voir figures 4.3.(a) et C.1). Une forte valeur de la pré-contrainte σ_0 limite l'ouverture ou le glissement de l'interface ce qui explique la diminution de A_L lorsque ξ_L tend vers 1.

On a montré que la méthode du mixage non-colinéaire d'ondes de cisaillement appliquée à une interface de contact conduisait à la génération d'une onde longitudinale, comme dans le cas d'une non-linéarité classique. La différence principale porte sur la direction de propagation, qui a lieu à la fois selon $\boldsymbol{y}$ et $-\boldsymbol{y}$. Il est donc possible d'appliquer cette technique alors qu'une seule face de la

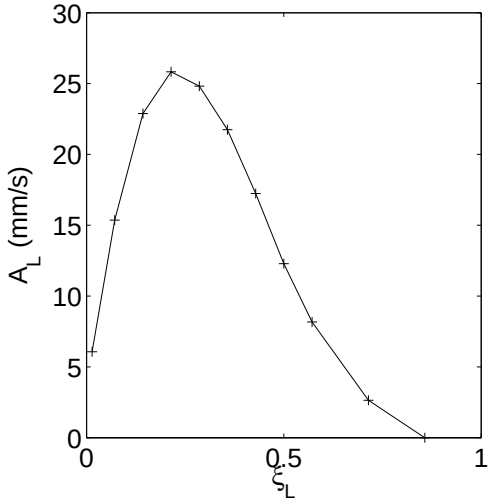


Figure 5.7 – Evolution de l'amplitude de l'onde longitudinale A_L de fréquence $f = 3$ MHz en fonction de la compression appliquée sur l'interface. Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}3$.

pièce à tester est accessible, ce qui est généralement rencontré en pratique. Dans la partie suivante, on s'intéresse aux mécanismes impliqués dans la génération de l'onde longitudinale.

5.2.4 Mécanismes conduisant à la génération de l'onde longitudinale

Pour identifier l'origine de cette onde longitudinale, on s'intéresse à la dynamique de contact de l'interface. Pour commencer, on étudie les statuts du contact pour savoir quel type de phénomène non-linéaire est activé. Il s'agit d'une sortie du calcul EF, qui attribut à chaque noeud et à chaque instant exclusivement les valeurs 1, 2 et 3, respectivement pour indiquer l'adhérence, le glissement et le décollement. L'évolution du statut au cours du temps pour un noeud appartenant à l'interface est donnée par la figure 5.8. On constate donc que le glissement et le clapping sont activés.

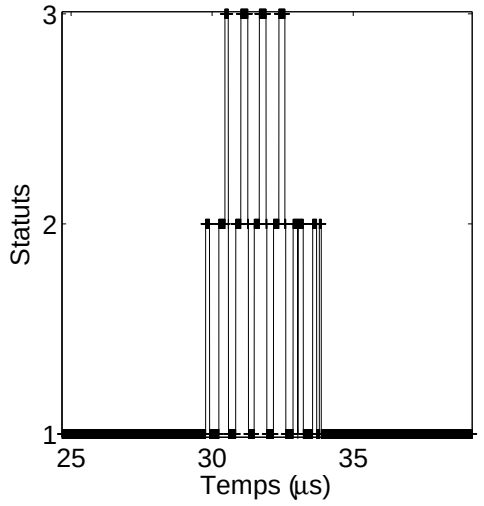


Figure 5.8 – Evolution temporelle de statut de contact pour un noeud de l'interface de coordonnée $(-1{,}0)$ mm. Les valeurs sont 1 pour l'adhérence, 2 pour le glissement et 3 pour le décollement.

En l'absence de fissure, les deux ondes incidentes sont entièrement transmises sans modification de leurs propriétés. En présence d'une interface "linéaire", comme une interface parfaite entre deux milieux, chacune des ondes est réfléchie et transmise sans que la superposition des deux signaux n'engendre une onde longitudinale de fréquence différente de celle des ondes incidentes.

Dans le cas d'une non-linéarité classique, les deux ondes transmises contiennent les harmoniques supérieurs. L'interaction qui s'effectue sur la zone endommagée conduit alors à la génération d'une onde longitudinale. Cette onde se propage dans la direction donnée par le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}_L = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$. Dans le cas d'une interface de contact, si la non-linéarité de type clapping est activée alors les ondes transmises contiennent les harmoniques supérieurs. Cependant, c'est aussi le cas des ondes réfléchies, comme cela a été mis en évidence par les diagrammes de directivité donnés dans la partie 4.4.1. La non-linéarité de contact rompt le principe de superposition et permet l'interaction des ondes. Comme pour la non-linéarité classique, cette interaction se traduit par la génération d'une onde longitudinale transmise dont la fréquence principale est le double de la fréquence incidente. La direction de propagation de cette onde est donnée par le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}_L^{\mathrm{tr}} = \boldsymbol{k}_1^{\mathrm{tr}} + \boldsymbol{k}_2^{\mathrm{tr}}$ où $\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{tr}}$ et $\boldsymbol{k}_2^{\mathrm{tr}}$ sont les vecteurs d'onde de chaque onde transmise. A la différence de la non-linéarité classique, l'existence des ondes réfléchies fait qu'il existe aussi une onde longitudinale réfléchie de fréquence double. Elle peut être vue comme le résultat de l'interaction des ondes réfléchies, et de fait, l'onde longitudinale réfléchie se propage selon le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}_L^{\mathrm{ref}} = \boldsymbol{k}_1^{\mathrm{ref}} + \boldsymbol{k}_2^{\mathrm{ref}}$ somme des vecteurs d'onde des ondes réfléchies. La situation est résumée par la figure 5.9.

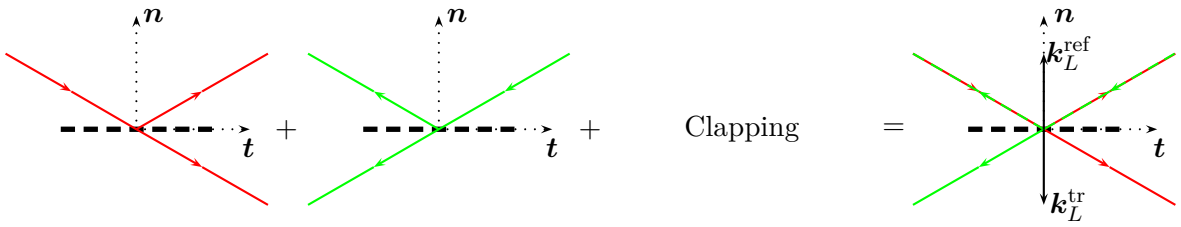


Figure 5.9 – Génération de l'onde longitudinale. L'interaction des deux ondes incidentes active le clapping à l'origine de la génération de l'onde longitudinale de vecteurs d'onde $\boldsymbol{k}_L$.

Le fonctionnement explicite de cette interaction n'est pas clairement identifié à ce jour. Comme le montre la figure 5.10, l'action conjointe des ondes incidentes entraîne des déplacements des faces de la fissure selon les axes $\pm\boldsymbol{y}$. Les vecteurs bleus et rouges représentent respectivement les déplacements des noeuds appartenant à la surface esclave et à la surface maître. Pour une position fixée sur l'interface, les différences entre les vecteurs de déplacement pour le noeud de la surface esclave et le noeud de la surface maître indique l'ouverture de l'interface. Une explication possible pour la génération de l'onde longitudinale consiste à attribuer la diffusion de l'onde à ces déplacements verticaux. Le mouvement indépendant de chaque face rayonne ainsi dans chaque solide.

Il a été montré au chapitre précédent que lorsque les deux phénomènes non-linéaires sont activés, le clapping a un effet dominant sur la non-linéarité générée au contact. De plus, cette non-linéarité entraîne la génération de tous les harmoniques supérieurs. Cependant, la figure 5.6 indique que le spectre de l'onde longitudinale reçue ne comporte que les multiples pairs de la fréquence incidente.

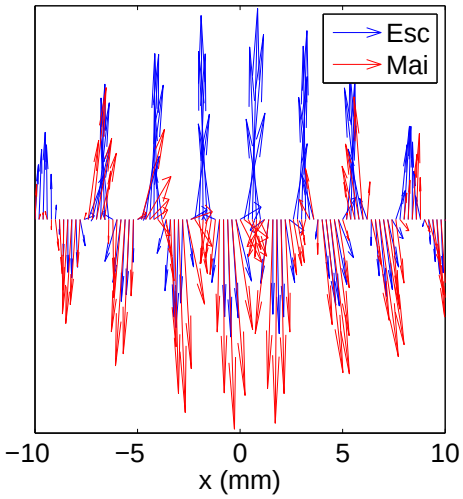


Figure 5.10 – Vecteurs déplacements des noeuds appartenant à l'interface de contact à instant $t = 32$ μs, en bleu pour la surface esclave et en rouge pour la surface maître. Les paramètres utilisés sont $\sigma_0 = -0.3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

En particulier, la fréquence fondamentale a disparu, ce qui tranche avec les résultats obtenus dans le chapitre 4 pour l'interaction entre une onde seule et une fissure.

Le contenu fréquentiel de l'onde longitudinale est différent de celui attendu pour un phénomène de clapping. La composition spectrale s'explique notamment par des considérations de symétrie. La figure 5.11.(a) donne les vitesses de deux points de l'interface symétriquement espacés du centre de la fissure, en $x = -1$ mm et $x = 1$ mm. On constate un déphasage de π entre ces deux signaux. Le spectre du signal obtenu en $x = -1$ mm est donné par la figure 5.11.(b). Les déplacements créés par les ondes incidentes activent le CAN. Les signaux générés contiennent alors l'ensemble des harmoniques supérieurs ainsi que l'harmonique fondamental, résultat cohérent avec celui obtenu pour l'interaction entre une onde seule et une interface de contact.

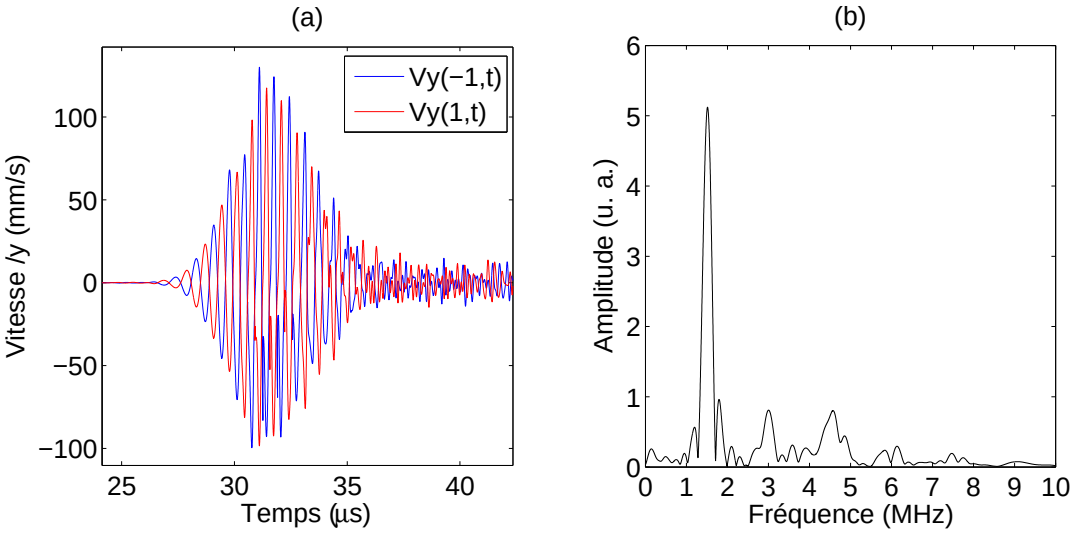


Figure 5.11 – (a) Signaux des vitesses par rapport à $\boldsymbol{y}$ pour deux noeuds de l'interface, en $x \pm 1$ mm. (b) Spectre du signal de vitesse obtenu en $x = -1$ mm.

L'onde diffusée résulte en réalité de la diffusion de chacun des points composant l'interface. En d'autres termes, elle peut être vue comme la somme des déplacements produits à l'interface. La sommation de signaux en opposition de phase conduit à la suppression des harmoniques impairs, et notamment de l'harmonique fondamental. C'est ce principe qui est utilisé dans la méthode d'inversion des pulses pour extraire le second harmonique d'un signal avec une meilleure efficacité [59, 71].

La somme de signaux mono-fréquentiels déphasés de π donne un signal nul comme le montre la figure 5.12.(c). En revanche, dans un cas non-linéaire, les signaux comportent aussi les harmoniques supérieurs. Par exemple, soient A_1 et A_2 les amplitudes respectives du premier et du second harmonique. On considère un premier signal A :

$$\boldsymbol{u}^A = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t. \tag{5.14}$$

On considère ensuite un second signal, identique au premier, mais dans lequel est introduit un déphasage de π (ou $T/2$ en notant T la période) :

$$\boldsymbol{u}^B = A_1 \sin \omega \left(t + \frac{T}{2} \right) + A_2 \sin 2\omega \left(t + \frac{T}{2} \right). \tag{5.15}$$

Ces signaux sont tracés sur la figure 5.12.(b). Ils peuvent correspondre par exemple à ceux de la figure 5.11.(a). La somme de ces signaux se réduit à :

$$\boldsymbol{u}^{A+B} = A_2 \sin 2\omega t + A_2 \sin 2\omega \left(t + \frac{T}{2} \right) = 2A_2 \sin 2\omega t. \tag{5.16}$$

L'harmonique fondamental est supprimé par le déphasage alors que l'amplitude du second harmonique est doublé. Le principe est résumé par la figure 5.12.

D'une part la dynamique de contact qu'est le clapping génère l'ensemble des harmoniques supérieurs sur des déplacements normaux à l'interface, d'autre part, la symétrie du système et le déphasage des signaux générés par rapport à l'axe $\boldsymbol{y}$, entraînent la suppression des harmoniques impairs, y compris l'harmonique fondamental. L'onde longitudinale résultant du clapping est donc composée des harmoniques pairs des ondes incidentes, ce qui explique le contenu fréquentiel de la figure 5.6.

En utilisant des fréquences différentes, l'onde longitudinale n'est plus générée selon l'axe $\pm\boldsymbol{y}$ et son spectre contient la somme $f_1 + f_2$ et la différence $f_1 - f_2$. La symétrie du système n'étant plus assurée, l'harmonique fondamental n'est pas supprimé. A ce stade, il pourrait être intéressant de reformuler la théorie du mixage d'ondes non-colinéaires dans le cas d'une interface de contact.

5.2.5 Comparaison avec une étude expérimentale

L'étude numérique réalisée dans la partie précédente montre que la technique du mixage d'ondes non-colinéaires est applicable sur une interface de contact. La faisabilité de la méthode doit cependant être établie expérimentalement. L'équipe de A. J. Croxford [1] travaille actuellement sur la mise en place de ce procédé sur une interface de contact formée par deux solides. Un chargement est

1. Deparment of Mechanical Engineering, University of Bristol, Queens Building, University Walk, Bristol BS8 1TR, UK.

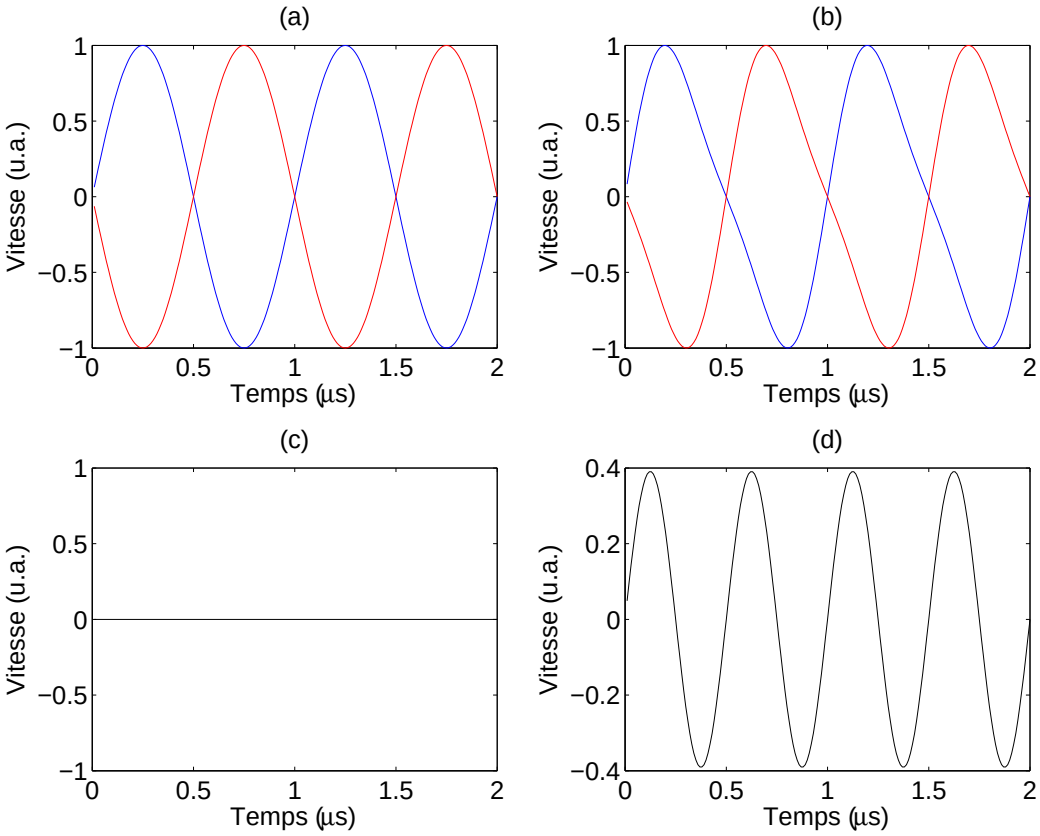


Figure 5.12 – Principe de l'inversion de pulse qui permet d'isoler le second harmonique à partir de deux signaux en opposition de phase. (a) Signaux mono-fréquentiels déphasés de π. (b) Signaux non-linéaires contenant l'harmonique fondamental et le second harmonique, et déphasés de π. (c) Somme des signaux linéaires. (d) Somme des signaux non-linéaires.

appliqué sur l'interface ainsi formée. La géométrie du système, donnée en annexe D, est proche de celle donnée par la figure 5.2. Les ondes de cisaillement sont générées avec un angle d'incidence de 57° par rapport à la normale à l'interface. Leur fréquence est cependant plus élevée, et égale à 5 MHz. Cette fréquence est trop élevée pour l'étude numérique, car la diminution de la longueur d'onde implique une réduction du pas d'espace et du pas de temps, d'où un temps de calcul trop important. Un test numérique a montré que la variation de fréquence utilisée ne modifiait pas les tendances. Expérimentalement, l'onde longitudinale a une fréquence de 10 MHz.

Le protocole expérimental requiert des étapes supplémentaires pour extraire l'amplitude de l'onde longitudinale générée par l'interface de contact. Pour un chargement donné, une première mesure est effectuée en excitant simultanément les deux transducteurs. Le signal enregistré sur la face supérieure est noté "AB". Ensuite, un seul des transducteurs est activé, par exemple celui de gauche, et le signal reçu sur la face supérieure est noté "A". Le même travail est fait pour le second transducteur, donnant ainsi un signal "B". Pour un matériau parfaitement linéaire, le signal généré lorsque les deux transducteurs sont excités est égal à la somme des signaux reçus pour chacun des transducteurs : $AB = A + B$. C'est le principe de superposition. Cette loi n'est plus valable en cas

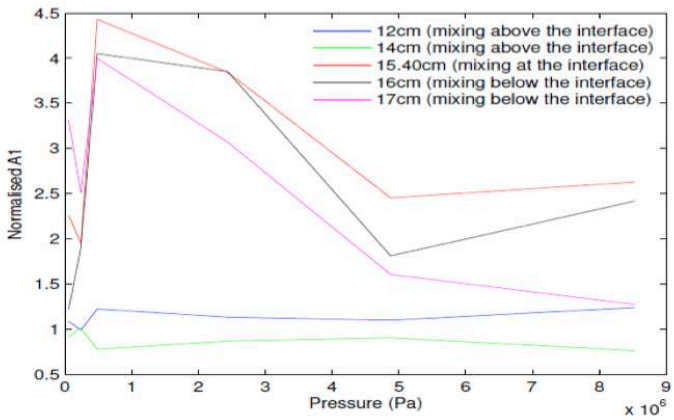


Figure 5.13 – Résultat expérimental donnant l'évolution de l'amplitude de l'onde longitudinale en fonction de la charge appliquée sur l'interface, pour différentes positions de l'interaction entre les deux ondes incidentes.

de non-linéarité. Un quatrième signal, noté "C" est alors défini :

$$C = AB - (A + B). \tag{5.17}$$

Ce traitement permet de supprimer la non-linéarité générée par le matériau et par le système électronique. Le contenu fréquentiel de l'onde longitudinale ne dépend donc que de la non-linéarité créée à l'interface. Ces étapes supplémentaires ne sont pas nécessaires numériquement, puisque le matériau est parfaitement linéaire en dehors de l'interface de contact, et les sources sont mono-fréquentielles.

La figure 5.13 donne un premier résultat concernant l'évolution de l'amplitude de l'onde longitudinale en fonction du chargement, pour différentes positions d'interaction suivant l'axe $\boldsymbol{y}$. Lorsque l'interaction a lieu au niveau de l'interface, l'onde longitudinale est générée. Un maximum d'amplitude apparaît lorsque le niveau de compression évolue. Ce résultat est donc en accord avec le résultat numérique. Ces tendances sont encourageantes et confirment le potentiel de la méthode. L'étude expérimentale doit être poursuivie pour confirmer avec plus de précision le comportement de l'onde longitudinale.

Dans cette partie, le principe de la méthode du mixage d'ondes non-colinéaires a été décrit. L'interaction sous incidence oblique de deux ondes de cisaillement non-colinéaires conduit à la génération d'une onde longitudinale si la zone d'interaction possède des propriétés mécaniques non-linéaires. La méthode fonctionne lorsque cette zone non-linéaire est une interface de contact. L'amplitude de l'onde longitudinale passe par une valeur maximale lorsque le niveau de contrainte appliquée sur l'interface augmente. Ce résultat est confirmé qualitativement par des résultats expérimentaux. Jusqu'à présent, cette interface de contact est formée par deux solides. Dans la suite, on applique le mixage d'ondes non-colinéaires à une fissure fermée.

5.3 Méthode de mixage non-colinéaire et fissure fermée

5.3.1 Description du modèle

La technique du mixage non-colinéaire est maintenant appliquée au cas d'une fissure fermée. Les caractéristiques des ondes incidentes (angle d'incidence, polarisation, amplitude) sont identiques au cas précédent. Ici, l'interface de contact formée par deux solides est remplacée par une fissure fermée. La loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb et pré-contrainte est prise en compte au niveau des lèvres de la fissure. Le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}5$. La fissure est située au centre d'un bloc d'aluminium dont les dimensions sont 80×140 mm^2 ou 80×180 mm^2 selon les besoins de l'étude. Le système considéré est celui donné par la figure 5.14.

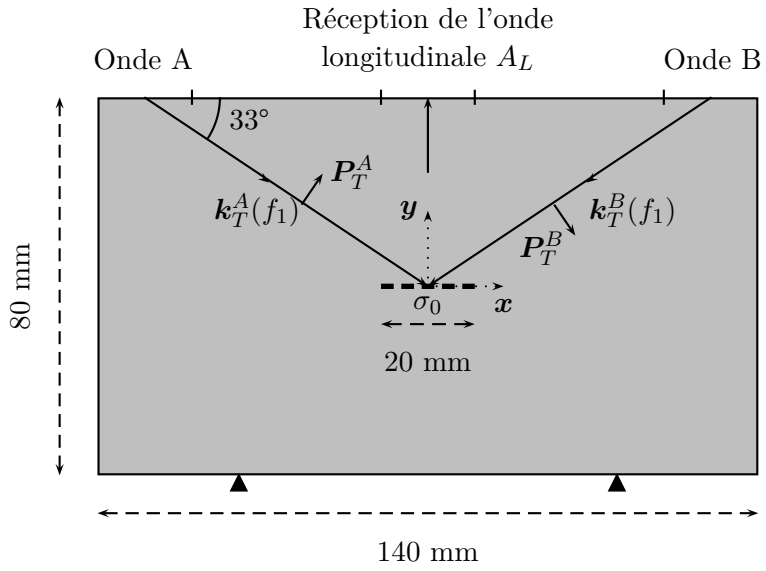


Figure 5.14 – Géométrie du modèle utilisé pour l'étude de l'interaction non-colinéaire entre deux ondes de cisaillement et une fissure fermée de longueur $d = 20$ mm.

L'approche retenue pour l'étude de l'interaction entre les deux ondes incidentes et la fissure fermée passe par la modélisation. Les informations fournies par le chapitre 3 sont ré-employées ici. La géométrie est discrétisée par des éléments dont la taille maximale est $a = 0{,}15$ mm. La présence de la fissure introduit des singularités de contraintes qui sont gérées par un raffinement du maillage autour des pointes de fissure. D'après l'étude faite au chapitre 3, c'est le maillage donné par la figure 3.15.(c) qui est appliqué en pointe de fissure. La convergence du modèle numérique a été vérifiée, mais n'est pas présentée ici.

Lorsque l'onde longitudinale est générée, les vitesses sont enregistrées sur un segment de 2 cm situé à égale distance des deux sources. Le post-traitement est le même que celui utilisé dans le cas d'une interface composée par deux solides en contact. Le signal moyen est calculé à partir des données enregistrées en chaque point, puis filtré autour de 3 MHz. L'effet de la contrainte normale σ_0 sur l'amplitude de l'onde longitudinale A_L est très proche du résultat obtenu pour les deux solides en contact et n'est pas rappelé ici. Dans ce qui suit, l'effet d'autres paramètres comme la disposition des sources acoustiques ou l'orientation de la fissure, est examiné dans le but de

déterminer les capacités de la méthode du mixage d'ondes non-colinéaires en terme de CND, pour la détection et la caractérisation d'une fissure fermée.

5.3.2 Résultats numériques

La génération de l'onde longitudinale n'apparaissant qu'en présence d'une non-linéarité mécanique, elle permet la détection d'une fissure fermée si les phénomènes non-linéaires comme le CAN sont activés. Il est cependant nécessaire de pouvoir localiser la fissure dans l'espace et aussi d'en donner ses caractéristiques, comme sa dimension, sa forme et son orientation.

Determination de la position de la fissure

Si les deux ondes incidentes convergent au niveau de la fissure avec suffisamment d'amplitude, alors l'onde longitudinale de fréquence $f_L = 2f_1$ est diffusée. On souhaite connaître quelle est la variation de l'amplitude de cette onde lorsque le lieu d'interaction des ondes incidentes se déplace autour de la fissure. Dans un premier temps, on étudie le comportement de la réponse non-linéaire en fonction de la position de l'intersection des ondes incidentes le long de l'axe $\boldsymbol{y}$.

Pour faire varier la position de la zone d'interaction des ondes selon l'axe $\boldsymbol{y}$, il suffit de modifier l'espacement des transducteurs, tout en maintenant chaque source à distance égale du centre du solide. Plus l'écart entre les transducteurs est faible, plus les ondes se croisent près de la surface supérieure. Pour permettre un espacement suffisant entre les transducteurs et ainsi obtenir différentes de positions d'intersection, le solide a ici une largeur de 180 mm. L'angle d'incidence n'est pas modifié. Il serait néanmoins possible de contrôler la position de la convergence des rayons à partir de l'angle d'incidence, tout en maintenant les transducteurs fixes. Cependant, pour une onde d'amplitude donnée, les contraintes normales et tangentielles créées sur l'interface seraient différentes, ce qui rend l'analyse des résultats plus délicate. L'espacement des sources permet ici de faire varier facilement la position de la zone efficace. Il faut néanmoins avoir conscience que l'ouverture des faisceaux incidents augmente avec la distance de propagation, et par conséquent, la dimension de la zone d'interaction augmente elle aussi avec la profondeur. Cette variation peut avoir un effet sur l'amplitude de l'onde diffusée. Une solution consisterait à utiliser une focalisation des ondes incidentes de manière à assurer une zone d'interaction de taille constante.

L'évolution de l'amplitude de l'onde longitudinale est donnée par la figure 5.15 en fonction de la position de la zone d'interaction selon l'axe $\boldsymbol{y}$. La contrainte normale appliquée est $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa, valeur pour laquelle l'amplitude de l'onde longitudinale est maximale. Le coefficient de frottement est toujours égal à $\mu = 0{,}5$.

Sur la figure 5.15, on observe que l'amplitude A_L atteint un maximum lorsque l'interaction des ondes incidentes est localisée au niveau de l'interface, c'est à dire pour $y = 0$ mm. Plus l'intersection des faisceaux s'éloigne de la fissure, plus la valeur de A_L diminue. Quand la fissure est en dehors de la zone d'interaction, aucune onde longitudinale n'est générée. Il est aisé de calculer la position de l'intersection des ondes incidentes ayant défini l'espacement entre les transducteurs et l'angle d'incidence. Par conséquent, l'observation d'une valeur maximale de A_L donne une indication quant à la position de la fissure dans la profondeur du solide.

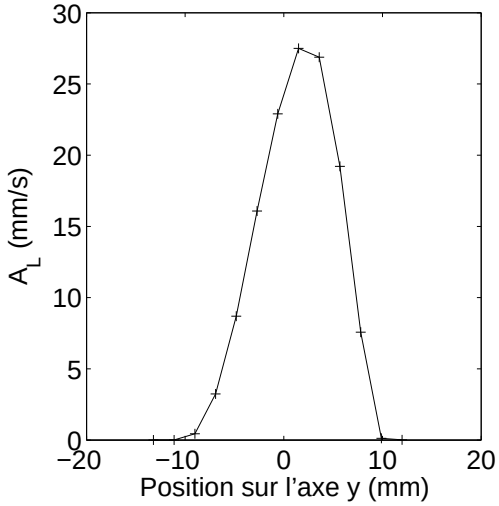


Figure 5.15 – Evolution de l'amplitude de A_L en fonction de la position de l'intersection des ondes incidentes selon l'axe $\boldsymbol{y}$. La fissure est positionnée au centre du solide, c'est à dire en $y = 0$ mm. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

De la même manière, il est aussi possible de faire varier le lieu de l'interaction non-colinéaire sur l'axe $\boldsymbol{x}$, pour une position donnée selon l'axe $\boldsymbol{y}$. Pour cela, l'espacement entre les sources acoustiques est maintenu constant. Ici, cette distance est égale à 120 mm afin d'assurer une convergence des ondes incidentes pour une ordonnée $y = 0$ mm. Ensuite, les deux sources sont déplacées vers les x positifs, ou négatifs, afin de faire évoluer la position de la zone d'interaction le long de l'axe $\boldsymbol{x}$. La zone de réception est située entre les deux sources, à égale distance de chacune d'elle. Le récepteur est donc lui aussi déplacé selon l'axe $\boldsymbol{x}$. Dans ce cas, la dimension de la zone d'interaction est constante.

L'amplitude de l'onde longitudinale enregistrée pour différentes positions d'interaction selon $\boldsymbol{x}$ est donnée par la figure 5.16, toujours pour $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$. L'amplitude de l'onde longitudinale est maximale lorsque l'interaction non-colinéaire est centrée sur la fissure, c'est à dire pour $x = 0$ mm. Lorsque l'intersection des ondes incidentes est déportée vers la droite ou la gauche, l'amplitude de l'onde diffusée diminue. En effet, le CAN n'est plus activé sur toute la longueur de la fissure et la non-linéarité générée diminue.

Caractéristiques de la fissure

Effet de la longueur de la fissure. La position de la fissure peut être déterminée en modifiant l'emplacement des sources acoustiques. Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence la relation entre la longueur de la fissure et l'amplitude de l'onde longitudinale. Pour cela, l'intersection des ondes incidentes est centrée sur la fissure puisque l'on a montré que cela conduisait à une amplitude maximale de l'onde longitudinale. Chaque transducteur est donc placé à une distance de 60 mm l'axe $\boldsymbol{y}$ et l'angle d'incidence est à nouveau égal à 57°. La taille de la zone d'interaction est constante. Des simulations sont effectuées pour différentes tailles de fissure, comprises entre 7,5 mm et 30 mm. Le solide utilisé a une largeur de 140 mm. La contrainte normale appliquée est $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et le

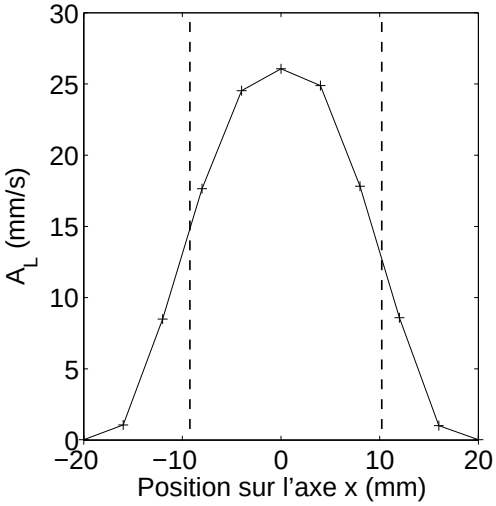


Figure 5.16 – Evolution de l'amplitude de A_L en fonction de la position de l'intersection des ondes incidentes selon l'axe $\boldsymbol{x}$. La fissure est positionnée au centre du solide, c'est à dire en $x = 0$ mm. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$. Les lignes discontinues marquent les extrémités de la fissure.

coefficient de frottement est $\mu = 0{,}5$. L'évolution de l'amplitude de l'onde longitudinale en fonction de la dimension de la fissure est donnée par la figure 5.17.

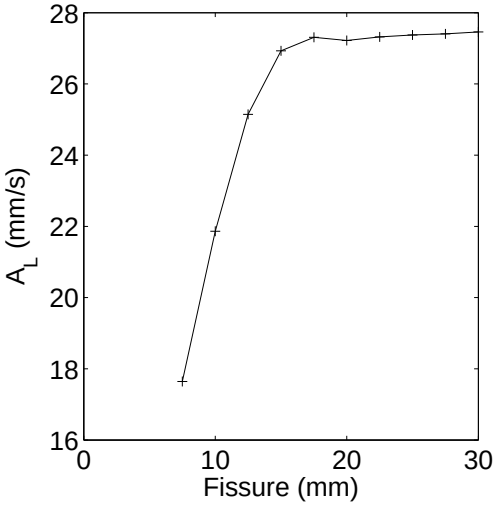


Figure 5.17 – Evolution de l'amplitude l'onde longitudinale A_L en fonction de la longueur de la fissure. Le zone d'interaction est centrée sur la fissure. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

La courbe donnée par la figure 5.17 montre que l'amplitude de l'onde longitudinale dépend en partie de la dimension de la fissure. Lorsque celle-ci augmente, elle s'accompagne d'une augmentation de A_L. Cependant, à partir d'une certaine valeur, cette progression est stoppée et l'amplitude de l'onde longitudinale est constante. Cette transition a lieu pour une fissure de 15 mm. La valeur atteinte est identique à l'amplitude maximale obtenue sur la figure 5.15 ou 5.16.

L'onde longitudinale est diffusée lorsque la non-linéarité est activée. Pour cela, l'interaction des ondes incidentes doit se faire au niveau du défaut, comme cela a été mis en évidence précédemment. L'interaction des ondes se produit dans un volume, ou une surface dans notre cas, d'extension

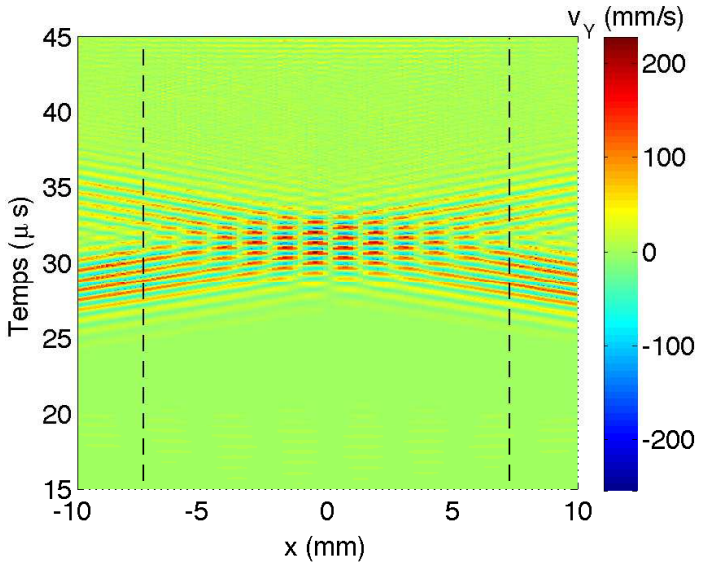


Figure 5.18 – Champ de vitesse par rapport à $\boldsymbol{y}$ au niveau de l'interface. Les lignes discontinues délimitent la zone d'interaction.

limitée dans l'espace. La figure 5.18 donne le champ de vitesses par rapport à $\boldsymbol{y}$ mesuré sur la fissure. Les deux ondes incidentes se rencontrent bien au niveau de la fissure. Sur la figure 5.18, les lignes discontinues délimitent la zone d'interaction. Dans le cas présent, la dimension selon l'axe $\boldsymbol{x}$ de cette zone d'interaction est de 15 mm environ. Cette longueur dépend notamment de l'angle d'incidence, du nombre de cycles contenus dans le pulse, de la longueur d'onde et de l'ouverture angulaire du faisceau incident. La dimension de la zone d'interaction correspond à la longueur de fissure caractéristique de la transition de A_L entre la partie croissante et la partie constante.

Si la fissure est incluse dans cette zone d'interaction, alors l'onde longitudinale est générée. L'augmentation progressive de la longueur de la fissure est synonyme d'une augmentation de la surface d'activation du CAN. Par conséquent, l'amplitude de l'onde diffusée augmente puisqu'elle résulte de la somme des diffusions le long de la fissure. Lorsque la longueur de la fissure devient supérieure à la longueur de la zone d'interaction, l'amplitude de l'onde longitudinale devient constante car aucune non-linéarité n'est activée sur les régions extérieures à la zone d'interaction.

La dimension de la zone d'interaction est donc un paramètre clé dans la génération de l'onde longitudinale. Il est alors envisageable d'utiliser une zone d'interaction de faible dimension et de balayer le profil de la fissure. Lorsque l'intersection a lieu sur la fissure, l'onde longitudinale est générée. En déplaçant la position de la zone d'interaction, on peut en déduire la longueur de la fissure. Ce principe est mis en application un peu plus loin dans la partie imagerie.

Effet de l'orientation de la fissure. L'étude en fonction l'angle d'orientation de la fissure est plus complexe à analyser que dans le cas où une onde plane seule interagit avec la fissure. Les diagrammes de directivité donnés par la figure 4.13 indiquent que l'onde transmise à travers la fissure conserve toujours la même direction de propagation. Lorsque le CAN est activé, une onde de même nature est aussi réfléchie en respectant la loi de Snell-Descartes. Lorsque la fissure est inclinée, les angles d'incidence sont différents pour chacune des ondes, comme le montre la figure 5.19.

Par conséquent, les ondes réfléchies ont une direction de propagation distincte et la symétrie par rapport à l'axe $\boldsymbol{y}$ est perdue. En revanche, elle est conservée pour les ondes transmises. L'activation du clapping permet l'interaction des ondes. Une onde longitudinale est générée selon $-\boldsymbol{y}$, telle que $\boldsymbol{k}_L^{\mathrm{tr}} = \boldsymbol{k}_1^{\mathrm{tr}} + \boldsymbol{k}_2^{\mathrm{tr}}$, comme dans le cas d'une fissure ou d'une interface de contact horizontale. Cette onde longitudinale est réfléchie sur la face inférieure du solide et peut donc être enregistrée sur la face supérieure. Une onde longitudinale est aussi générée dans la direction donnée par la somme des vecteurs d'onde réfléchis $\boldsymbol{k}_L^{\mathrm{ref}} = \boldsymbol{k}_1^{\mathrm{ref}} + \boldsymbol{k}_2^{\mathrm{ref}}$, qui ne coïncide plus avec l'axe $\boldsymbol{y}$.

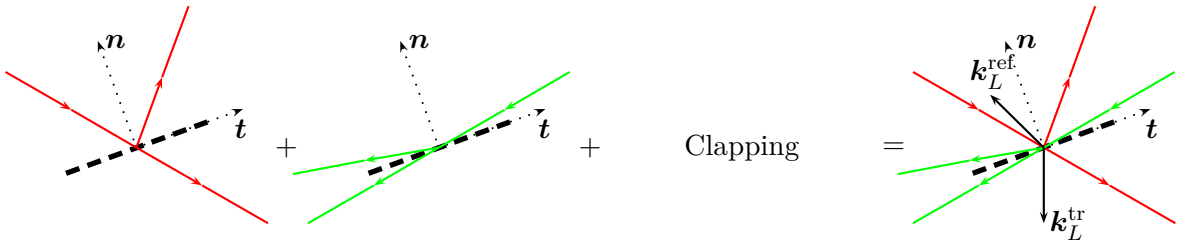


Figure 5.19 – Génération de l'onde longitudinale. L'interaction des deux ondes incidentes active le clapping à l'origine de la génération de l'onde longitudinale.

La figure 5.20 donne une image du champ de vitesse suite à l'interaction des ondes transverses avec une fissure inclinée de 20°. On retrouve les ondes transverses transmises et réfléchies et les ondes longitudinales diffusées dans deux directions distinctes, en accord avec la description donnée par la figure 5.19.

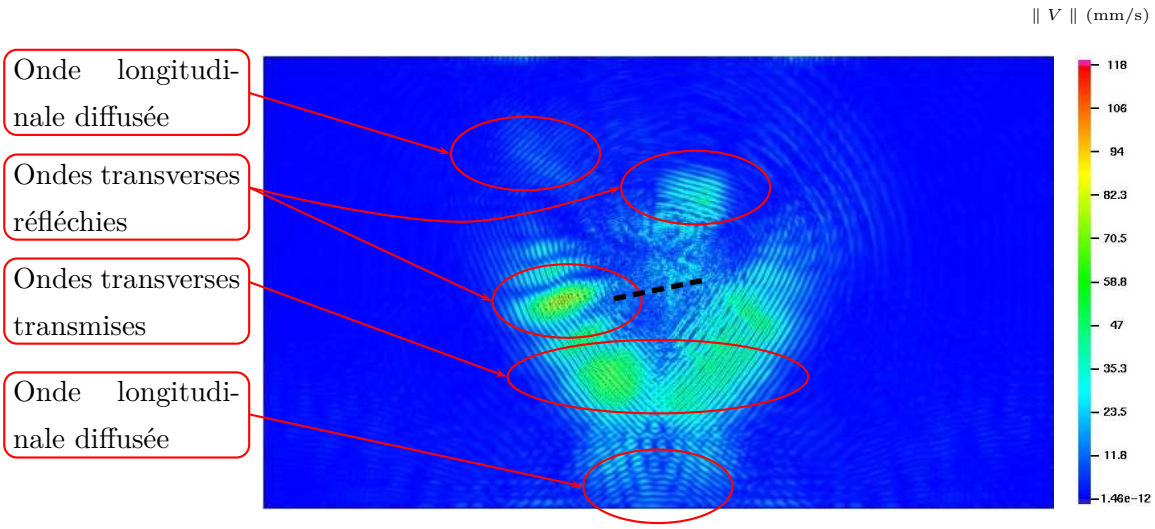


Figure 5.20 – Champ de vitesse instantané à $t = 37{,}5$ μs obtenu après l'interaction entre les deux ondes incidentes transverses et une fissure inclinée de 20° matérialisée par la ligne discontinue. Les ondes transverses sont partiellement réfléchies et transmises, et une onde longitudinale est diffusée dans deux directions différentes.

La figure 5.21.(a) donne le signal temporel non filtré reçu au centre de la face supérieure. On observe un seul paquet d'onde, en accord avec ce qui a été expliqué précédemment. Il s'agit de

l'onde longitudinale générée selon $-\boldsymbol{y}$ et réfléchie sur la face inférieure. Le spectre de ce signal est donné par la figure 5.21.(b). Cette onde possède bien une fréquence centrée autour de 3 MHz, soit le double de la fréquence incidente. La suppression quasi-totale des composantes fréquentielles impairs tient à nouveau à la symétrie du champ transmis. En revanche, l'analyse de l'onde longitudinale diffusée selon $\boldsymbol{k}_L^{\text{ref}}$ montre que l'harmonique fondamental, centré à 1,5 MHz, est toujours présent dans le spectre, en plus des composantes non-linéaires.

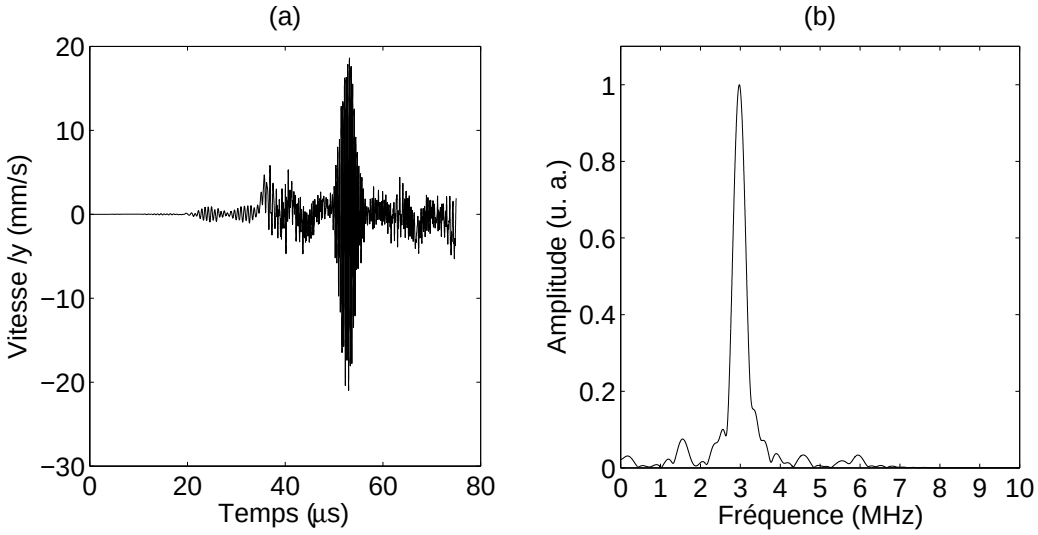


Figure 5.21 – (a) Signal temporel de l'onde longitudinale enregistrée sur la face supérieure. (b) Spectre de l'onde. La fissure est inclinée de 20°. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

L'évolution de l'amplitude de l'onde longitudinale, transmise puis réfléchie, est donnée par la figure 5.22 en fonction de l'orientation de la fissure. Celle-ci est repérée par l'angle θ défini entre la fissure et l'axe $\boldsymbol{x}$. Lorsque l'inclinaison de la fissure augmente, l'amplitude de l'onde longitudinale commence par diminuer jusqu'à $\theta = 35°$. Un maximum local est ensuite observé autour de $\theta = 55°$. L'amplitude décroit ensuite pour remonter légèrement sur les dernières valeurs.

Pour le mixage d'ondes sous incidence oblique, trois situations se présentent lorsque la fissure est inclinée. Premièrement, l'angle d'orientation est faible. Dans ce cas, la réponse non-linéaire peut être rattachée à celle obtenue dans le chapitre 4. La contrainte normale générée par les deux ondes sur l'interface diminue avec l'inclinaison de la fissure, ce qui entraîne la diminution du second harmonique. Vient ensuite le cas où l'une des ondes incidentes a un vecteur d'onde colinéaire avec la fissure. C'est le cas pour $\theta = 33°$, angle pour lequel l'amplitude A_L est minimale. L'interaction des ondes est faible. Le dernier cas est celui où les deux ondes incidentes attaquent une face différente de la fissure. L'évolution de A_L est alors plus difficile à expliquer. Il semble néanmoins que l'amplitude de l'onde longitudinale passe par un second maximum pour $\theta = 55°$, c'est à dire quand la fissure est perpendiculaire à l'une des ondes incidentes.

Comme cela a été mis en évidence dans le chapitre 4, la non-linéarité introduite par le clapping peut être corrélée à l'évolution de la contrainte normale incidente sur l'interface de contact. Une série de calculs numériques a été réalisée pour différentes orientations de fissure, en appliquant une loi de contact soudé sur celle-ci (continuité des déplacements et des contraintes). L'amplitude maximale des contraintes ainsi générées sur l'interface est relevée, et le résultat est donné par

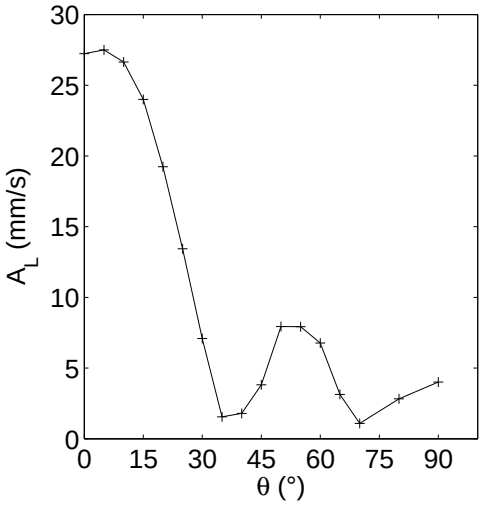


Figure 5.22 – Evolution de l'amplitude l'onde longitudinale A_L en fonction de l'angle d'orientation de la fissure. La zone d'interaction est centrée sur la fissure. La longueur de la fissure est $d = 20$ mm, $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

la figure 5.23. On constate un assez bon accord entre le comportement de la contrainte normale incidente et l'amplitude de l'onde diffusée longitudinale, notamment sur la première partie de la courbe.

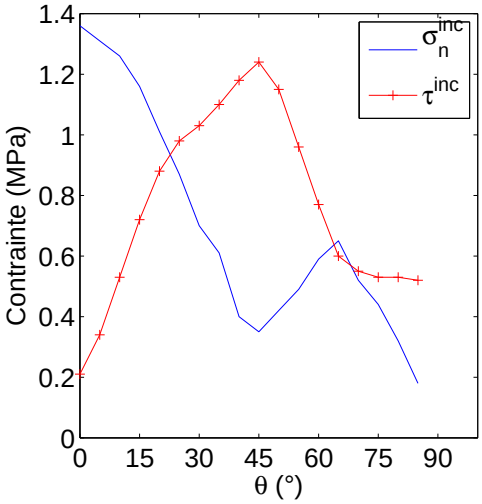


Figure 5.23 – Evolution des contraintes normales et tangentielles incidentes créées par les deux ondes transverses, en fonction de l'inclinaison de la fissure. La longueur de la fissure est $d = 20$ mm, $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

L'évolution de l'amplitude de l'onde longitudinale présente des traits singuliers, avec tout d'abord une décroissance régulière, puis des extrema locaux. Ces caractéristiques pourraient être avantageuses pour déterminer l'orientation de la fissure. Une étude systématique de ces évolutions en fonction de l'orientation de la fissure, des angles d'incidence, de la pré-contrainte et du coefficient de frottement, permettrait d'avoir plus d'éléments sur cette possibilité.

La caractérisation de la fissure, comme sa longueur ou son orientation, est néanmoins encoura-

geante. Le déplacement des sources acoustiques permet de localiser l'emplacement de la fissure. En parcourant le volume du solide, il est possible de réaliser une imagerie du défaut.

Imagerie de la fissure

Dans cette partie, on considère uniquement une fissure horizontale de 20 mm de long. L'amplitude de l'onde longitudinale est maximale lorsque la zone d'interaction des ondes incidentes est centrée sur la fissure. En modifiant la position de cette région d'interaction, et ainsi en balayant le volume du solide, il est possible de localiser la fissure. En reportant les amplitudes de l'onde longitudinale sur la géométrie du solide, il est aussi possible de réaliser une image de la fissure. Le résultat est donné par la figure 5.24. Pour obtenir cette image, un scan est réalisé selon l'axe $\boldsymbol{x}$ pour différentes profondeurs d'interaction. L'amplitude maximale donne la position de la fissure. L'am-

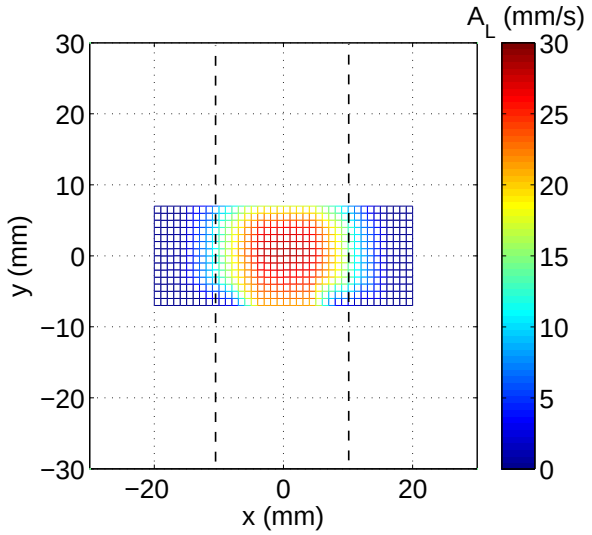


Figure 5.24 – Image de la fissure. L'amplitude A_L est reportée sur la géométrie du solide aux coordonnées calculées à partir de la position des sources acoustiques et de l'angle d'incidence. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$.

plitude maximale de A_L est bien obtenue lorsque les ondes incidentes interagissent sur la fissure. La zone d'interaction des ondes incidentes étant relativement étendue, la résolution de l'image n'est pas très élevée. La taille de la fissure, qui est de 20 mm, peut être estimée à partir de cette image. Cette imagerie pourrait être améliorée en utilisant une zone d'interaction plus petite, augmentant ainsi la résolution spatiale.

Le moyen le plus simple pour améliorer la précision de l'image est de réduire la dimension de la zone d'interaction. Pour cela, on peut réduire la longueur du train d'onde, en diminuant le nombre de cycles ou en augmentant la fréquence, et réduire l'angle d'incidence de l'onde. Cependant, pour conserver une amplitude suffisante de l'onde diffusée il ne faut pas trop réduire le volume d'interaction. On choisit des ondes incidentes de 8 cycles au lieu de 10 et un angle d'incidence de 45°. D'après l'équation (4.22), cet angle maximise la contrainte normale incidente générée par l'onde de cisaillement sur la fissure. Le clapping est donc assuré, permettant ainsi l'interaction des ondes incidentes.

Avec ces paramètres, l'onde longitudinale est bien générée, comme le montre la figure 5.25.(a).

Le spectre du premier paquet d'ondes est donné par la figure 5.25.(b). La fréquence de l'onde

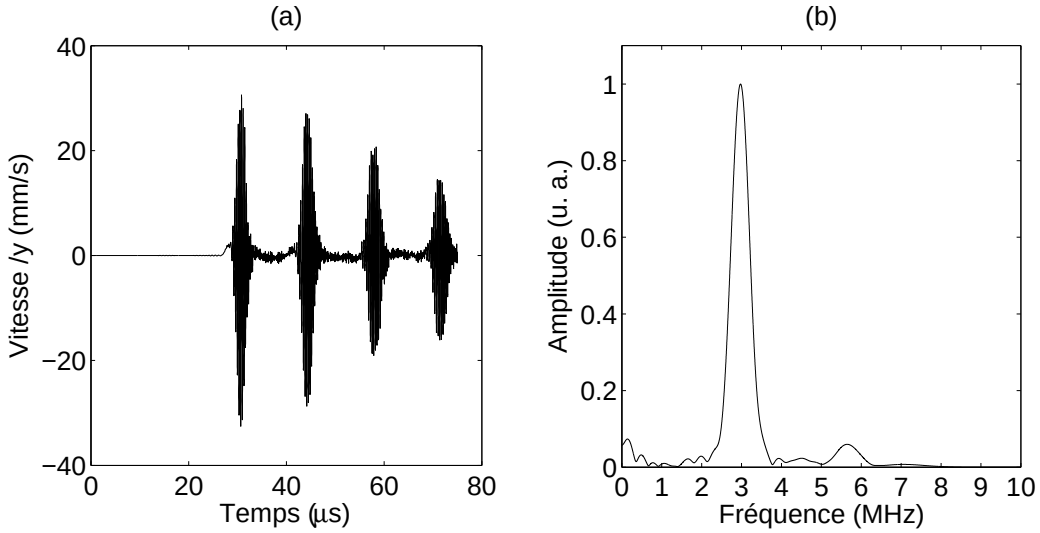


Figure 5.25 – Spectre du premier paquet d'onde reçu sur la face supérieure de l'échantillon. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$. L'angle d'incidence des ondes est $\theta_I = 45°$.

longitudinale est bien égale à 3 MHz. La méthode, qui dépend ici de l'activation du clapping, fonctionne donc pour d'autres angles d'incidence que ceux prévus par la théorie non-linéaire classique. Malgré la réduction du volume d'interaction, l'amplitude de l'onde est proche de celle obtenue précédemment pour $\theta_I = 57°$ (figure 5.4).

L'emploi d'un angle d'incidence et d'un nombre de cycles plus faible permet bien de diminuer la surface de la zone d'interaction. Cette dernière est donnée par la figure 5.26. Sa largeur selon $\boldsymbol{x}$ est de 12 mm. Connaissant la durée de l'interaction des ondes et leur vitesse de propagation, on peut estimer la dimension de la zone d'interaction selon $\boldsymbol{y}$. Elle aussi est plus réduite que dans la configuration précédente, (figure 5.18).

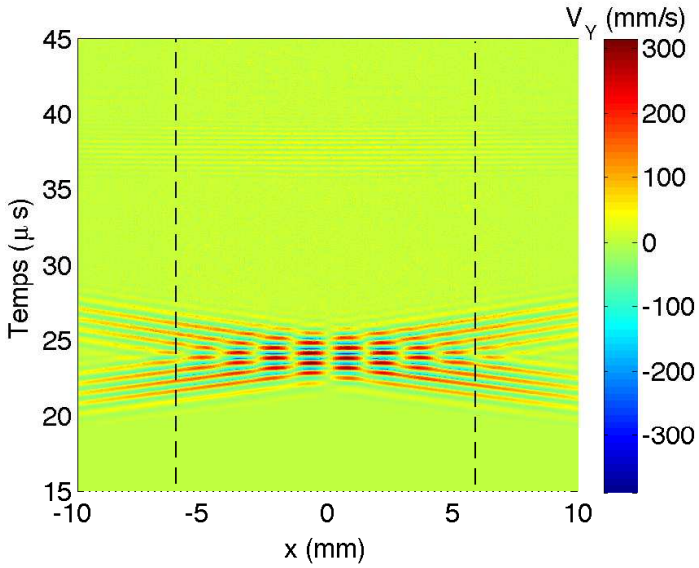


Figure 5.26 – Champ de vitesse par rapport à $\boldsymbol{y}$ au niveau de l'interface pour un angle d'incidence de 45°. Les lignes discontinues délimitent la zone d'interaction.

Il est à nouveau possible de réaliser l'imagerie de la fissure en déplaçant la position de de la zone d'interaction en changeant la position des sources acoustiques. Le résultat est donné par la figure 5.27. Le pic d'amplitude est bien centré sur la fissure, c'est à dire en (0,0) mm et est plus resserré. La dimension selon l'axe $\boldsymbol{x}$ repérée par les lignes discontinues est de 20 mm, ce qui correspond à la longueur de la fissure. L'image ainsi obtenue améliore donc le résultat de la figure 5.24.

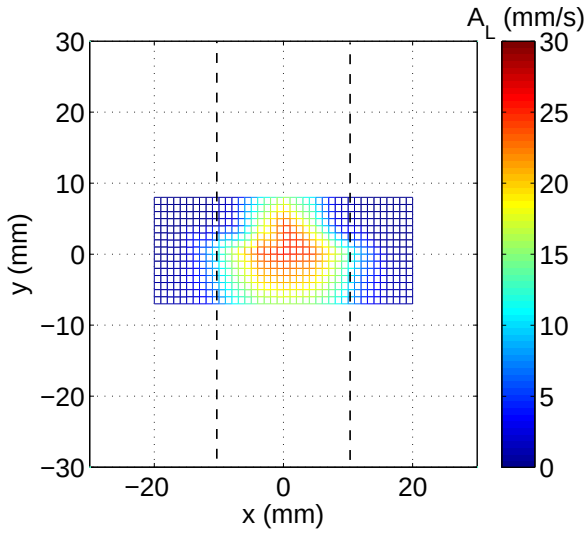


Figure 5.27 – Image de la fissure. L'amplitude A_L est reportée sur la géométrie du solide aux coordonnées calculées à partir de la position des sources acoustiques et de l'angle d'incidence. $\sigma_0 = -0{,}3$ MPa et $\mu = 0{,}5$. Les angles d'incidence sont $\theta_I = 45°$.

La méthode du mixage d'ondes non-colinéaire fonctionne pour différents angles d'incidence, dès lors que le clapping est activé. Il est alors possible de réaliser une imagerie de la fissure plus précise en choisissant correctement les paramètres utilisés. D'autre part, cette caractéristique est aussi un moyen potentiel pour pouvoir s'affranchir d'un mixage d'onde occasionné par une zone aux propriétés non-linéaires classiques qui serait proche de la fissure. Il pourrait en effet être possible de trouver un angle d'incidence de manière à ce que le mixage d'ondes ne soit dû qu'à la non-linéarité de contact.

5.4 Conclusion

Pour qu'une méthode de contrôle non-destructif non-linéaire soit efficace, il est nécessaire de pouvoir séparer la non-linéarité introduite par le système électronique, la non-linéarité du matériau, et celle générée par la zone endommagée. La méthode du mixage d'ondes non-colinéaires est ici appliquée au cas d'une interface de contact et d'une fissure. Deux ondes de cisaillement sont donc générées dans le solide à tester de manière à interagir sous incidence oblique sur ce type de défaut. Si la non-linéarité de contact est activée, alors une onde longitudinale est diffusée par l'interface de contact. Le CAN est cependant différent de la non-linéarité classique. Par conséquent, bien que les paramètres de fonctionnement fournis par la théorie non-linéaire classique fonctionnent, le comportement de l'onde diffusée est différent pour une interface de contact. La principale différence

concerne la direction de propagation de l'onde diffusée qui a lieu de part et d'autre de l'interface. Ayant un comportement non-linéaire particulier, il serait intéressant de reformuler la théorie dans le cas du CAN. Une étude numérique pourrait aussi permettre d'identifier les paramètres optimaux pour la génération de l'onde longitudinale dans le cas d'une interface de contact.

Néanmoins, la méthode fonctionne et l'activation de la non-linéarité sur la fissure permet la génération d'une onde longitudinale dont la fréquence est égale au double de la fréquence des ondes incidentes. Par ailleurs, des essais expérimentaux préliminaires confirment le bien-fondé de la méthode. Il apparaît aussi que le modèle éléments finis est pertinent pour décrire l'interaction entre les ondes incidentes. Dans la dernière partie de ce chapitre, la méthode est utilisée pour scanner un solide contenant une fissure. L'effet non-linéaire est maximal lorsque l'interaction des ondes s'effectue sur le défaut. Par conséquent, il est possible de localiser ce dernier. L'imagerie réalisée va dans ce sens. Elle est toutefois d'une résolution limitée, mais pourrait être améliorée en utilisant une zone d'interaction plus petite. Il existe en effet un lien entre la dimension de la zone d'interaction, la longueur de la fissure et l'amplitude de l'onde diffusée. L'utilisation d'ondes focalisées pourrait apporter un plus, en assurant un contrôle de la taille de la zone d'interaction. L'utilisation d'angles d'incidences plus faibles que ceux prévus par la théorie classique permet aussi de réduire la zone d'interaction. L'utilisation de ces nouveaux angles d'incidence pourrait aussi être un moyen de s'affranchir de la non-linéarité classique. Il serait en effet envisageable de trouver une incidence qui conduirait uniquement au mixage d'ondes engendré par le contact, indépendamment d'une déformation plastique par exemple. Des travaux pourront donc être poursuivis dans cette direction, pour améliorer la résolution spatiale de la méthode et sa sélectivité en terme de défaut non-linéaire.

Conclusion générale et perspectives

Bilan du travail effectué

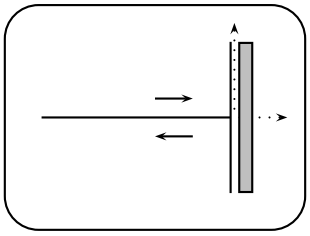
La faible variation d'amplitude ou de phase lors de la propagation d'une onde à travers une fissure fermée rend les méthodes linéaires de contrôle non-destructif (CND) peu efficaces. En revanche, les phénomènes non-linéaires de contact générés au niveau de la fissure entraînent l'apparition de nouvelles fréquences qui sont potentiellement intéressantes pour la détection des fissures fermées. Cette dynamique de contact, aussi appelée contact acoustique non-linéaire (CAN), comprend notamment l'alternance d'ouvertures et de fermetures de la fissure (clapping) ou au glissement avec frottement entre ses faces. Cela a pour conséquence de créer des distorsions de l'onde qui se manifestent par un enrichissement spectral.

L'objectif central de la thèse concerne l'étude de l'interaction entre une onde et une fissure fermée, d'une part pour comprendre les mécanismes impliqués dans la génération des harmoniques supérieurs, d'autre part pour proposer une méthode de CND non-linéaire capable de détecter et de caractériser une fissure fermée.

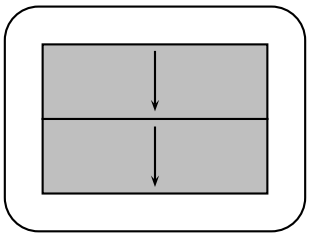
Les caractéristiques de l'acoustique non-linéaire ont été décrites dans le premier chapitre de ce mémoire, ainsi que les différentes méthodes de CND qui en découlent. Une attention particulière est accordée au CAN puisque cette non-linéarité caractérise le comportement d'une fissure fermée lorsqu'elle est excitée par une onde de forte amplitude. Les phénomènes physiques associés au CAN étant complexes, les différentes techniques de modélisation ont été présentées afin d'établir les caractéristiques pertinentes d'un modèle capable de traiter efficacement l'interaction entre onde et fissure fermée.

L'approche retenue dans ce travail passe notamment par la modélisation Eléments Finis (EF). La démarche adoptée est incrémental, et chaque étape de modélisation permet d'augmenter la complexité du problème traité, pour finalement considérer une fissure fermée. Ces différentes étapes du travail de thèse sont résumées sur la figure 5.28.

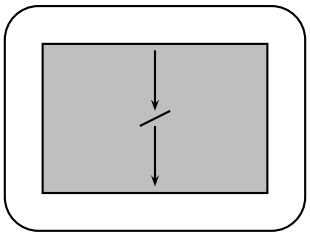
Une interface de contact entre un solide semi-infini et une surface rigide constitue la première marche de cette incrémentation. Dans ce cas, la résolution du problème est effectuée par une méthode de Différences Finies. Cette résolution a été implémentée avec Matlab. L'interface de contact est ensuite formée par deux solides déformables en contact. Ce système est étudié au moyen d'une résolution EF. La convergence du modèle a fait l'objet d'une attention particulière. Les lois de contact utilisées pour modéliser l'interface ont été modifiées pour prendre en compte une pré-contrainte. Validées numériquement, ces lois ont l'avantage de permettre de modifier facilement



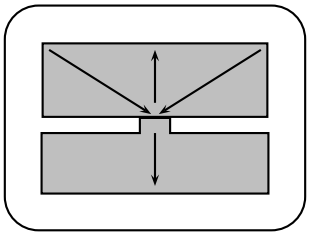
Résolution 1D par DF. Réflexion d'une onde L ou T sur une interface formée par un solide semi-infini et une surface rigide.
Analyse de l'onde réfléchie en fonction de σ_0.



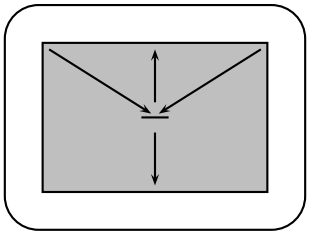
Résolution 2D par EF. Transmission d'une onde L ou T sur une interface formée par deux solides en contact.
Analyse de l'onde transmise en fonction de σ_0.
Etude expérimentale sur deux blocs d'acier pour une onde de cisaillement.



Résolution 2D par EF. Transmission d'une onde L ou T sur une fissure inclinée.
Calcul de la diffusion non-linéaire par la fissure.
Analyse de l'onde transmise en fonction de σ_0,θ,A_{inc}.



Résolution 2D par EF. Méthode du mixage d'ondes non-colinéaires appliquée à une interface de contact.
Analyse de l'onde diffusée longitudinale en fonction de σ_0. Premier résultats expérimentaux.



Résolution 2D par EF. Méthode du mixage d'ondes non-colinéaires appliquée à une fissure fermée.
Analyse de l'onde diffusée longitudinale en fonction de θ et la position de l'intersection des ondes incidentes.
Localisation et imagerie de la fissure.

Figure 5.28 – Etapes de modélisation et problèmes traités ainsi que les principaux paramètres étudiés.

l'état de contrainte appliqué sur l'interface. Ce même système comportant deux solides en contact a aussi fait l'objet d'une étude expérimentale pour le cas d'une onde transverse. La mise en place de cette étude expérimentale est issue de la collaboration avec A. J. Croxford de l'université de Bristol.

Enfin, une fissure fermée est considérée. La résolution est à nouveau confiée à la méthode EF. Le maillage utilisé est raffiné autour des pointes de fissure afin de tenir compte des singularités de contraintes. L'interaction entre une onde plane et cette fissure a été étudiée en fonction de divers

paramètres, comme l'amplitude de l'onde, l'état de contrainte normale et l'angle d'incidence. Dans ce cas, la diffusion engendrée par la fissure est calculée en champ lointain à partir d'une méthode analytique couplée au modèle EF. Les ondes transmises ou réfléchies par l'interface de contact sont analysées par transformée de Fourier afin d'extraire le contenu fréquentiel. L'amplitude des harmoniques supérieurs est relevée et corrélée à la dynamique de contact.

Par la suite, une méthode de CND est proposée et modélisée, dans un premier temps pour une interface de contact entre deux solides, puis pour une fissure fermée. Cette méthode de CND est le mixage d'ondes non-colinéaires. Deux ondes de cisaillement sont envoyées avec une incidence oblique sur un défaut de type fissure. Le déclenchement de la dynamique de contact permet l'interaction des ondes incidentes qui se traduit par la diffusion d'une onde longitudinale dont la fréquence est le double de celle des ondes incidentes. Le modèle est validé expérimentalement sur une interface de contact. Appliquée sur une fissure fermée, la méthode ouvre la voie à des possibilités d'imagerie encourageantes.

Apports et originalité du travail

Avant d'énoncer les apports de ce travail, il convient de replacer rapidement le contexte de l'étude. Il est primordial pour les applications industrielles de pouvoir détecter les fissures fermées qui endommagent la résistance d'une structure mécanique. L'interaction entre une fissure fermée et une onde acoustique est le siège d'une dynamique de contact qui engendre de nouvelles composantes fréquentielles dans l'onde transmise et réfléchie par la fissure. Ces phénomènes ont été démontrés expérimentalement, notamment pour une interface composée de deux solides en contact, et des modèles ont été proposés pour les décrire. Parmi eux, on peut citer entre autres, les modèles semi-analytiques utilisant des ressorts pour modéliser l'interface, et d'autres plus complexes basés sur les espaces de Preisach-Mayergoyz.

Du point de vue de la modélisation, le modèle EF proposé présente l'avantage de décrire finement les aspects dynamiques de l'interaction entre les faces de la fissure. Dans l'objectif de comprendre les phénomènes physiques, notre choix s'est porté sur une description de l'interface avec deux paramètres, le clapping étant géré par une loi de contact unilatéral et le glissement par une loi de Coulomb classique. La méthode des EF et la modélisation utilisée permettent aussi bien l'étude d'une interface de contact entre deux solides que celle d'une fissure. De plus, elle est adaptable à différentes géométries. Le couplage entre le modèle EF et une méthode de propagation analytique permet l'étude de la diffusion non-linéaire d'une fissure fermée en champ lointain. Bien que le couplage entre les méthodes ait déjà été appliqué par le passé, c'est à notre connaissance la première fois qu'il est utilisé dans dans un contexte d'acoustique non-linéaire. Les diagrammes de directivité ainsi obtenus mettent en évidence les conversions de modes. L'onde transmise de même nature que l'onde incidente se propage dans la même direction que cette dernière.

En terme de résultats, ce travail propose une analyse approfondie de la dynamique de contact à l'origine de la génération des harmoniques supérieurs. En incidence normale, le frottement généré dissipe de l'énergie, entraîne une distorsion de l'onde et conduit à la génération des harmoniques impairs. Le contact unilatéral quant à lui, génère tous les harmoniques supérieurs. En incidence

oblique, les comportements normaux et tangentiels sont couplés. Ainsi, l'analyse numérique nous permet de relier les conditions de chargement et d'amplitude incidente à la non-linéarité de contact activée. La non-linéarité contenue dans l'onde transmise est alors corrélée à la dynamique de contact, en particulier à l'évolution des contraintes normales et tangentielles induites par l'onde incidente ainsi qu'à l'effet des lois de contact en terme de modification de la forme des signaux. Cette analyse, qui constitue une originalité de ce travail, permet d'avoir une meilleure compréhension de la génération des harmoniques supérieurs.

Du point de vue de la validation expérimentale, l'évolution du troisième harmonique en fonction du chargement appliqué sur l'interface a été obtenue durant ce travail de thèse. L'étude numérique permet de connaître sous quelles conditions de chargement et d'amplitude incidente la non-linéarité de contact est activée. Le protocole proposé permet alors de parcourir les paramètres ainsi définis et d'extraire l'amplitude du troisième harmonique, indépendamment de la non-linéarité du système électronique. L'évolution du troisième harmonique est conforme au résultat numérique d'un point de vue qualitatif, validant par la même occasion l'emploi de la loi de Coulomb pour décrire le frottement.

Enfin, dans un objectif de proposer une méthode de CND, ces efforts d'analyse ont permis de transposer la méthode du mixage d'ondes non-colinéaires au cas d'une interface de contact. L'approche numérique permet de démontrer le fonctionnement de la méthode pour ce type de défaut. Les premiers résultats expérimentaux confirment aussi ce résultat. L'outil de simulation permet d'expliquer la génération de l'onde longitudinale diffusée. Il est démontré que cette méthode peut apporter une solution de CND qui va au delà de détection d'une fissure fermée, puisqu'il est possible de la localiser et de déterminer sa dimension, et même d'envisager de l'imagerie. Enfin, des pistes d'optimisation sont proposées, lesquelles pourront être examinées à l'aide de l'outil numérique dans un futur travail.

Perspectives

L'interaction entre une onde et une fissure fermée a été examinée à partir d'une approche numérique et les modèles construits permettent l'analyse des phénomènes physiques. La génération des harmoniques supérieurs a été étudiée en particulier. Il serait intéressant de prolonger cette étude sur les sous-harmoniques. Ces composantes fréquentielles inférieures sont en effet générées uniquement par la fissure fermée et possèdent un bon potentiel pour mettre au point une méthode de CND. L'étude de ces sous-harmoniques doit être possible avec un modèle EF tel que proposé dans ce travail, à condition d'utiliser une onde de forte amplitude et contenant un nombre de cycles assez grand pour augmenter la résolution fréquentielle.

L'étude de la diffusion non-linéaire d'une fissure obtenue au moyen d'un couplage entre une méthode numérique et un calcul de propagation analytique pourrait éventuellement donner suite à une étude sur un ensemble de fissures fermées. Il serait envisageable dans ce contexte d'utiliser le résultat numérique pour ensuite calculer le champ incident sur une seconde fissure à partir de la méthode analytique.

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à la méthode du mixage d'ondes non-colinéaires.

Cette technique est prometteuse et donne de bons résultats quant à la détection et la caractérisation de fissures fermées. Il serait intéressant de comparer cette méthode avec d'autres techniques, comme la modulation d'onde ou la génération de sous-harmoniques, pour évaluer ses capacités sur un problème donné. On a vu par ailleurs que l'effet non-linéaire qu'est le CAN avait un comportement différent de celui prédit par la théorie non-linéaire classique. En effet, il a été montré que la méthode fonctionne avec des angles d'incidence différents de celui donné par la théorie non-linéaire classique. Il serait alors nécessaire de mener une étude paramétrique afin d'optimiser la configuration du système, en analysant l'effet de l'angle d'incidence, de l'orientation de la fissure, du nombre de cycles contenus dans les ondes incidentes ou de la pré-contrainte. L'outil numérique est adapté à cela et permettra de fournir les conditions optimales pour la diffusion de l'onde longitudinale. Le développement d'un modèle semi-analytique capable de déterminer les conditions de générations de l'onde longitudinale serait aussi le bienvenu. Les premiers résultats expérimentaux obtenus par l'équipe de Bristol confirment le fonctionnement de la méthode et son potentiel. Dans un futur proche et après avoir optimisé les paramètres du système, il sera nécessaire de passer à une validation expérimentale, si possible sur une fissure.

Bibliographie

[1] Tae Hun Lee and Kyung-Young Jhang. Experimental investigation of nonlinear acoustic effect at crack. *NDT & E International*, 42 :757–764, 2009.

[2] Yongan Shui and Igor Yu. Solodov. Nonlinear properties of rayleigh and stoneley waves in solids. *Journal of Applied Physics*, 64(11) :6155 –6165, dec 1988.

[3] David T. Blackstock. Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(1) :9–30, 1962.

[4] P. A. Johnson and P. N. J. Rasolofosaon. Manifestation of nonlinear elasticity in rock : convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 3(2) :77–88, 1996.

[5] V.A. Korneev, K.T. Nihei, and L.R. Myer. Nonlinear interaction of plane elastic waves. Technical Report LBNL–41914, Lawrence Berkeley National Lab., CA (United States), 1998.

[6] L. A. Ostrovsky and P. A. Jonhson. Dynamic nonlinear elasticity in geomaterial. *Rivista del nuovo cimento*, 24(7), 2001.

[7] Marie Muller, Alexander Sutin, Robert Guyer, Maryline Talmant, Pascal Laugier, and Paul A. Johnson. Nonlinear resonant ultrasound spectroscopy (nrus) applied to damage assessment in bone. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118(6) :3946–3952, 2005.

[8] Michel Destrade, Michael D. Gilchrist, and Raymond W. Ogden. Third- and fourth-order elasticities of biological soft tissues. *Journal of the Acoustical Society of America*, 127(4) : 2103–2106, 2010.

[9] Jan Herrmann, Jin-Yeon Kim, Laurence J. Jacobs, Jianmin Qu, Jerrol W. Littles, and Michael F. Savage. Assessment of material damage in a nickel-base superalloy using nonlinear rayleigh surface waves. *Journal of Applied Physics*, 99(12) :124913 –124913–8, jun 2006.

[10] Jin-Yeon Kim, Laurence J. Jacobs, Jianmin Qu, and Jerrol W. Littles. Experimental characterization of fatigue damage in a nickel-base superalloy using nonlinear ultrasonic waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, 120(3) :1266–1273, 2006.

[11] Mark F. Hamilton and David T. Blackstock. *Nonlinear Acoustics*. Published by the Acoustical Society of America, 1998.

[12] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique 7. Théorie de l'élasticité.* Librairie du globe, 1990.

[13] L K Zarembo and V A Krasil'nikov. Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids. *Soviet Physics Uspekhi*, 13(6) :778–797, 1971.

[14] F. D. Murnaghan. Finite deformations of an elastic solid. *American Journal of Mathematics*, 59(2) :235–260, 1937.

[15] Yongping Zheng, Roman Gr. Maev, and Igor Yu. Solodov. Nonlinear acoustic applications for material characterization : a review. *Canadian Journal of Physics*, 77 :927–967, 1999.

[16] Kyung-Young Jhang. Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material : A review. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 10(1) :123–135, 2009.

[17] A.A. Shah and Y. Ribakov. Non-linear ultrasonic evaluation of damaged concrete based on higher order harmonic generation. *Materials and Design*, 30(10) :4095 – 4102, 2009.

[18] M. A. Breazeale and D. O. Thompson. Finite-amplitude ultrasonic waves in aluminum. *Applied Physics Letters*, 3(5) :77–78, 1963.

[19] Kyung-Young Jhang. Applications of nonlinear ultrasonics to the NDE of material degradation. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 47(3) :540 –548, may 2000.

[20] Jeong K. Na and Mack A. Breazeale. Ultrasonic nonlinear properties of lead zirconate-titanate ceramics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(6) :3213–3221, 1994.

[21] D. S. Hughes and J. L. Kelly. Second-order elastic deformation of solids. *Phys. Rev.*, 92 : 1145–1149, Dec 1953.

[22] R. A. Toupin and B. Bernstein. Sound waves in deformed perfectly elastic materials. acoustoelastic effect. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 33(2) :216–225, 1961.

[23] George C. Johnson. Acoustoelastic theory for elastic–plastic materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(2) :591–595, 1981.

[24] Michel Destrade and Michael D. Gilchrist. Third and fourth-order constants of incompressible soft solids and the acousto-elastic effect. *Journal of the Acoustical Society of America*, 127 (5) :2759–2763, 2010.

[25] Y. H. Pao, W. Sachse, and H. Fukuoka. Acoustoelasticity and unltrasonic measurements of residual stresses. *Physical Acoutics*, 17 :61–143, 1984.

[26] T. Leon-Salamanca and D.F. Bray. Residual stress measurement in steel plates and welds using critically refracted longitudinal (lcr) waves. *Research in Nondestructive Evaluation*, 7 : 169–184, 1996.

[27] Peter B. Nagy. Fatigue damage assessment by nonlinear ultrasonic materials characterization. *Ultrasonics*, 36 :375 – 381, 1998.

[28] Robert A. Guyer and Paul A. Johnson. Nonlinear mesoscopic elasticity : Evidence for a new class of materials. *Physics Today*, 52(4) :30–36, 1999.

[29] Igor Yu. Solodov and Boris A. Korshak. Instability, chaos, and "memory" in acoustic-wave-crack interaction. *Physical review letters*, 88(1) :14303–14306, 2002.

[30] Moussatov Alexei, Gusev Vitalyi, and Castagnède Bernard. Self-induced hysteresis for nonlinear acoustic waves in cracked material. *Physical review letters*, 90(12) :124301–124305, 2003.

[31] V.E. Nazarov, A.V. Radostin, L.A. Ostrovsky, and I.A. Soustova. Wave processes in media with hysteretic nonlinearity. part I. *Acoustical Physics*, 49 :344–353, 2003.

[32] Veniamin E. Nazarov and Andrei B. Kolpakov. Experimental investigations of nonlinear acoustic phenomena in polycrystalline zinc. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(4) :1915–1921, 2000.

[33] V.E. Nazarov, A.V. Radostin, L.A. Ostrovsky, and I.A. Soustova. Wave processes in media with hysteretic nonlinearity : Part II. *Acoustical Physics*, 49 :444–448, 2003.

[34] K. Van Den Abeele and Filip Windels. Characterization and imaging of microdamage using nonlinear resonance ultrasound spectroscopy (NRUS) : An analytical model. In *Universality of Nonclassical Nonlinearity*, pages 369–388. Springer New York, 2006.

[35] Jordi Ortin. Preisach modeling of hysteresis for a pseudoelastic cu-zn-al single crystal. *Journal of Applied Physics*, 71(3) :1454–1461, 1992.

[36] R. A. Guyer, K. R. McCall, and G. N. Boitnott. Hysteresis, discrete memory, and nonlinear wave propagation in rock : A new paradigm. *Phys. Rev. Lett.*, 74 :3491–3494, Apr 1995.

[37] F. Preisach. Uber die magnetische nachwirkung. *Zeitschrift fur Physik*, 94 :277–302, 1935.

[38] I. Mayergoyz. Mathematical models of hysteresis. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 22(5) : 603 – 608, sep 1986.

[39] M. Scalerandi, V. Agostini, P. P. Delsanto, K. E.-A. Van Den Abeele, and P. A. Johnson. Local interaction simulation approach to modeling nonclassical, nonlinear behavoir in solids. *Journal of the Acoustical Society of America*, 113, 2003.

[40] K. Van Den Abeele, F Schubert, V Aleshin, F Windels, and J Carmeliet. Resonant bar simulations in media with localized damage. *Ultrasonics*, 42(1-9) :1017 – 1024, 2004.

[41] V. Aleshin and K. Van Den Abeele. Microcontact-based theory for acoustics in microdamaged materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(2) :366 – 390, 2007.

[42] O. Buck, W. L. Morris, and J. M. Richardson. Acoustic harmonic generation at unbonded interfaces and fatigue cracks. *Applied Physics Letters*, 33(5) :371 –373, sep 1978.

[43] I. Y. Solodov, N. Krohn, and G. Busse. CAN : an example of nonclassical acoustic nonlinearity in solids. *Ultrasonics*, 40 :621–625, 2002.

[44] Boris A. Korshak, I. Y. Solodov, and E. M. Ballad. Dc effects, sub-harmonics, stochasticity and "memory" for contact acoustic nonlinearity. *Ultrasonics*, 40 :707–716, 2002.

[45] N.A. Burnham, A. J. Kulik, G. Gremaud, P. J. Gallo, and F. Oulevey. Scanning localacceleration microscopy. *Journal of Vacuum Science & Technology B : Microelectronics and Nanometer Structures*, 14(2) :794–799, 1996.

[46] Yoshikazu Ohara, Tsuyoki Mihara, and Kazushi Yamanaka. Effect of adhesion between crack planes on subharmonic and dc responses in nonlinear ultrasound. *Ultrasonics*, 44 :194–199, 2005.

[47] Oleg Kolosov and Kazushi Yamanaka. Nonlinear detection of ultrasonic vibrations in an atomic force microscope. *Japanese Journal of Applied Physics*, 32(Part 2, No. 8A) :L1095–L1098, 1993.

[48] Kazushi Yamanaka, Tsuyoshi Mihara, and Toshihiro Tsuji. Evaluation of closed cracks by model analysis of subharmonic ultrasound. *Japanese Journal of Applied Physics*, 43(5B) : 3082–3087, 2004.

[49] V. Tournat, V.E. Gusev, and B. Castagnède. Subharmonics and noise excitation in transmission of acoustic wave through unconsolidated granular medium. *Physics Letters A*, 326 (5–6) :340 – 348, 2004.

[50] K. Van Den Abeele, P. A. Johnson, and A.Sutin. Nonlinear elastic wave spectroscopy (NEWS) techniques to discern material damage, part I : Nonlinear wave modulation spectroscopy (NWMS). *Journal of Nondestructive Evaluation*, 12 :17–30, 2000.

[51] K. E.-A. Van Den Abeele, J. Carmeliet, J. A. Ten Cate, and P. A. Johnson. Nonlinear elastic wave spectroscopy (NEWS) techniques to discern material damage, part II : Single-mode nonlinear resonance acoustic spectroscopy. *Research in Nondestructive Evaluation*, 12(1) : 31–42, 2000.

[52] C. Payan, V. Garnier, J. Moysan, and P. A. Johnson. Applying nonlinear resonant ultrasound spectroscopy to improving thermal damage assessment in concrete. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(4) :125–130, 2007.

[53] Michele Meo, Umberto Polimeno, and Giuseppe Zumpano. Detecting damage in composite material using nonlinear elastic wave spectroscopy methods. *Applied Composite Materials*, 15 :115–126, 2008.

[54] W. T. Yost, John H. Cantrell, Jr, and M. A. Breazeale. Ultrasonic nonlinearity parameters and third-order elastic constants of copper between 300 and 3 ° k. *Journal of Applied Physics*, 52(1) :126–128, 1981.

[55] M. A. Breazeale and Joseph Ford. Ultrasonic studies of the nonlinear behavior of solids. *Journal of Applied Physics*, 36(11) :3486 –3490, nov 1965.

[56] James A. Bains and M. A. Breazeale. Third-order elastic constants of germanium between 300 and 3°k. *Phys. Rev. B*, 13 :3623–3630, Apr 1976.

[57] John H. Cantrell and M. A. Breazeale. Ultrasonic investigation of the nonlinearity of fused silica for different hydroxyl-ion contents and homogeneities between 300 and 3°k. *Phys. Rev. B*, 17 :4864–4870, Jun 1978.

[58] Jeong K Na, John H Cantrell, and William T Yost. Linear and nonlinear ultrasonic properties of fatigued 410 cb stainless steel. In *Twenty-Second Symposium on Quantitative Nondestructive Evaluation, Seattle*, volume 30, pages 1347 – 1360, 1995.

[59] Xander A. A. M. Verbeek, Leon A. F. Ledoux, Jean M. Willigers, Peter J. Brands, and Arnold P. G. Hoeks. Experimental investigation of the pulse inversion technique for imaging ultrasound contrast agents. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(4) :2281–2290, 2000.

[60] C. Pruel, Jin-Yeon Kim, J. Qu, and L. J. Jacobs. Evaluation of plasticity driven material damage using lamb waves. *Applied Physics Letters*, 91, 2007.

[61] N. de Jong, R. Cornet, and C.T. Lancée. Higher harmonics of vibrating gas-filled microspheres. part two : measurements. *Ultrasonics*, 32(6) :455 – 459, 1994.

[62] K.E. Morgan, M. Averkiou, and K. Ferrara. The effect of the phase of transmission on contrast agent echoes. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 45 (4) :872 –875, july 1998.

[63] John M. Richardson. Harmonic generation at an unbonded interface - I Planar interface between semi-infinite elastic media. *International Journal of Engineering Science*, 17(1) :73 – 85, 1979.

[64] S. Biwa, S. Yamaji, and E. Mastumoto. Quantitative evaluation of harmonic generation at contacting interface. *American Institute of Physics*, 978(0), 2008.

[65] Taehyung Nam, Taehun Lee, Chungseok Kim, Kyung-Young Jhang, and Nohyu Kim. Harmonic generation of an obliquely incident ultrasonic wave in solid–solid contact interfaces. *Ultrasonics*, 52 :778–783, 2012.

[66] W. L. Morris, O. Buck, and R. V. Inman. Acoustic harmonic generation due to fatigue damage in high-strength aluminum. *Journal of Applied Physics*, 50(11) :6737–6741, 1979.

[67] E.M Ballad, S.Yu Vezirov, K Pfleiderer, I.Yu Solodov, and G Busse. Nonlinear modulation technique for NDE with air-coupled ultrasound. *Ultrasonics*, 42(1–9) :1031 – 1036, 2004.

[68] Debaditya Dutta, Hoon Sohn, Kent A. Harries, and Piervincenzo Rizzo. A nonlinear acoustic technique for crack detection in metallic structures. *Structural Health Monitoring*, 8(3) : 251–262, 2009.

[69] Dawei Yan, Bruce W. Drinkwater, and Simon A. Neild. Measurement of the ultrasonic nonlinearity of kissing bonds in adhesive joints. *NDT & E International*, 42(5) :459–466, 2009.

[70] Dawei Yan. *The detectability of kissing bonds in adhesive joints using non-linear ultrasonic techniques*. PhD thesis, University of Bristol, 2010.

[71] Y. Ohara, K. Kawashima, R. Yamada, and H. Horio. Evaluation of amorphous diffusion bonding by nonlinear ultrasonic method. *AIP Conference Proceedings*, 700(1) :944–951, 2004.

[72] Y. W. Mao, Y. Shui, W. Jiang, Z. Lu, and W. Wu. Second-harmonic generation of interface waves. *Applied Physics Letters*, 55(23) :2394–2395, 1989.

[73] Laura J. Pyrak-Nolte, Jianping Xu, and Guy M. Haley. Elastic interface waves propagating in a fracture. *Physical review letters*, 68(24) :3650–3653, 1992.

[74] Laura J. Pyrak-Nolte and Neville G. W. Cook. Elastic interface waves along a fracture. *Geophysical Research Letters*, 14(11) :1107–1110, 1987.

[75] S. Biwa, S. Hiraiwa, and E. Mastumoto. Stiffness evaluation of contacting surfaces by bulk and interface waves. *Ultrasonics*, 47 :123–129, 2007.

[76] S. Biwa, A.Suzuki, and N. Ohno. Evaluation of interface wave velocity, reflection coefficients and interfacial stiffnesses of contacting surfaces. *Ultrasonics*, 43 :495–502, 2005.

[77] Gerald Lee Jones and Donald R. Kobett. Interaction of elastic waves in an isotropic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 35(1) :5–10, 1963.

[78] P. Duffour, M. Morbidini, and P. Cawlay. A study of the vibro-acoustic modulation technique for the detection of cracks in metals. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(3) : 1463–1475, 2006.

[79] D. Donskoy, A. Sutin, and A. Ekimov. Nonlinear acoustic interaction on contact surfaces and its use for nondestructive testing. *NDT & E International*, 34 :231–238, 2001.

[80] G.L.Gao, D.Y.Li, D.Q.Shi, J.W.Dong, X.D.Shi, and F.Teng. Nonlinear acoustic characteristics of fatigue microcracks in al alloy plate. *Journal of the Minerals, Metals and Materials Society*, 63(2) :77–80, 2011.

[81] J.-Y. Kim, V. A. Yakovlev, and S. I. Rokhlin. Surface acoustic wave modulation on a partially closed fatigue crack. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(5) :1961–1972, 2004.

[82] Vladimir Zaitsev, Veniamin Nazarov, Vitaly Gusev, and Bernard Castagnede. Novel nonlinear-modulation acoustic technique for crack detection. *NDT & E International*, 39 : 184–194, 2006.

[83] K. Zacharias, E. Balabanidou, I. Hatzokos, I.T. Rekanos, and A. Trochidis. Microdamage evaluation in human trabecular bone based on nonlinear ultrasound vibro-modulation (NUVM). *Journal of Biomechanics*, 42(5) :581 – 586, 2009.

[84] M. Morbidini, P. Duffour, and P. Cawley. Vibro-acoustic modulation NDE technique. Part 2 : Experimental study. *AIP Conference Proceedings*, 760(1) :616–623, 2005.

[85] Vyacheslav V. Kazakov, Alexander Sutin, and Paul A. Johnson. Sensitive imaging of an elastic nonlinear wave-scattering source in a solid. *Applied Physics Letters*, 81(4) :646–648, 2002.

[86] T. Goursolle, S. Dos Santos, O. Bou Matar, and S. Callé. Non-linear based time reversal acoustic applied to crack detection : Simulations and experiments. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(3) :170 – 177, 2008.

[87] M. Vila, F. Vander Meulen, S. Dos Santos, L. Haumesser, and O. Bou Matar. Contact phase modulation method for acoustic nonlinear parameter measurement in solid. *Ultrasonics*, 42 (1-9) :1061 – 1065, 2004.

[88] Anthony J. Croxford, Paul D. Wilcox, Bruce W. Drinkwater, and Peter B. Nagy. The use of non-collinear mixing for nonlinear ultrasonic detection of plasticity and fatigue. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126(5) :EL117–EL122, 2009.

[89] Igor Yu. Solodov, J. Wackerl, K. Pfleiderer, and G. Busse. Nonlinear self-modulation and subharmonic acoustic spectroscopy for damage detection and location. *Applied Physics Letters*, 84(26), 2004.

[90] Werner Lauterborn and Eckehart Cramer. Subharmonic route to chaos observed in acoustics. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :1445–1448, 1981.

[91] Yoshikazu Ohara, Tsuyoshi Mihara, Ryouta Sasaki, Toshihiro Ogata, Setsu Yamamoto, Yuuki Kishimoto, and Kazushi Yamanaka. Imaging of closed cracks using nonlinear response of elastic waves at subharmonic frequency. *Applied Physics Letters*, 90(1) :011902 –011902–3, jan 2007.

[92] V. Schmitz, S. Chakhlov, and W. Müller. Experiences with synthetic aperture focusing technique in the field. *Ultrasonics*, 38(1–8) :731–738, 3 2000.

[93] C. Matsuoka, K. Nakahata, A. Baba, N. Kono, and S. Hirose. Comparative study on ultrasonic imaging methods with array transducers. *AIP Conference Proceedings*, 975(1) :707–714, 2008.

[94] Y. Ohara, H. Endo, M. Hashimoto, Y. Shintaku, and K. Yamanaka. Monitoring growth of closed fatigue crack using subharmonic phased array. *AIP Conference Proceedings*, 1211(1) : 903–909, 2010.

[95] Yoshikazu Ohara, Satoshi Horinouchi, Makoto Hashimoto, Yohei Shintaku, and Kazushi Yamanaka. Nonlinear ultrasonic imaging method for closed cracks using subtraction of responses at different external loads. *Ultrasonics*, 51(6) :661 – 666, 2011.

[96] P. M. Shankar, P. D. Krishna, and V. L. Newhouse. Subharmonic backscattering from ultrasound contrast agents. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106(4) :2104–2110, 1999.

[97] P D Krishna, P M Shankar, and V L Newhouse. Subharmonic generation from ultrasonic contrast agents. *Physics in Medicine and Biology*, 44(3) :681, 1999.

[98] D. Euvrard. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson, 3 edition, 1994.

[99] Dhatt G., Lefrancois E., and Touzot G. *Méthode des éléments finis.* Lavoisier, 2005.

[100] L. L. Thompson. A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(3) :1315–1330, 2006.

[101] Sarthou Arthur. *Méthodes de domaines fictifs d'ordre élevé pour les équations elliptiques et de Navier-Stokes : application au couplage fluide-structure.* PhD thesis, Université Bordeaux1, 2009.

[102] Bonnet M. *Équations intégrales et éléments de frontière : applications en mécanique des solides et des fluides.* Eyrolles, 1995.

[103] Hsiao G. C. *Boundary Integral Equations.* Elsevier, 2008.

[104] L. A. Ostrovsky. Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(6) :3332–3337, 1991.

[105] J. Sinha and M. I. Friswell. Simulation of the dynamic response of a cracked beam. *Computers and Structures*, 80 :1473–1476, 2002.

[106] K. Kawashima, R. Omote, T.Ito, H. Fujita, and T.Shima. Nonlinear acoustic response through minute surface cracks : Fem simulation and experimentation. *Ultrasonics*, 40 :611–615, 2002.

[107] M. Krawzuk. Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38 :537–548, 2002.

[108] G.G. Adams. Contact modeling - force. *Tribology International*, 33 :431–442, 2000.

[109] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 295(1442) : 300–319, 1966.

[110] K. Kendall and D. Tabor. An ultrasonic study of the area of contact between stationary and sliding surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 323(1554) :321–340, 1971.

[111] Jai-Man Baik and R.Bruce Thompson. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces : A quasi-static model. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 4 :177–196, 1984.

[112] NF Haines. The theory of sound transmission and reflection at contacting surfaces. *CEGB Berkeley Nuclear Laboratories, Berkeley, UK, Report No. RD/B N*, 4744, 1980.

[113] B. W. Drinkwater, R. S. Dwyer-Joyce, and P. Cawley. A study of the interaction between ultrasound and a partially contacting solid–solid interface. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 452(1955) :2613–2628, 1996.

[114] P. P. Delsanto and M. Scalerandi. A spring model for the simulation of the propagation of ultrasonic pulses through imperfect contact interfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(5) :2584–2591, 1998.

[115] S. Biwa, S. Hiraiwa, and E. Mastumoto. Pressure-dependent stiffnesses and nonlinear ultrasonic response of contacting surfaces. *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, 3(1) :10–21, 2009.

[116] F. J. Margetan, R. B. Thompson, and T. A. Gray. Interfacial spring model for ultrasonic interactions with imperfect interfaces : Theory of oblique incidence and application to diffusion-bonded butt joints. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 7 :131–152, 1988.

[117] F.J. Margetan, R.B. Thompson, J.H. Rose, and T.A. Gray. The interaction of ultrasound with imperfect interfaces : Experimental studies of model structures. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 11 :109–126, 1992.

[118] C. Pecorari. Nonlinear interaction of plane ultrasonic waves with an interface between rough surfaces in contact. *Journal of the Acoustical Society of America*, 113(6) :3065–3072, 2003.

[119] C. Pecorari and M. Poznic. Nonlinear acoustic scattering by a partially closed surface-breaking crack. *Journal of the Acoustical Society of America*, 117(2) :592–600, 2005.

[120] Jin-Yeon Kim, Arturo Baltazar, Jong Wan Hu, and Stan I. Rokhlin. Hysteretic linear and nonlinear acoustic responses from pressed interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :6436–6452, 2006.

[121] D. A. Mendelsohn and J. M. Doong. Transient dynamic elastic frictional contact : a general 2D boundary element formulation with examples of SH motion. *Wave Motion*, 11 :1–21, 1989.

[122] S. Hirose and J.D. Achenbach. Higher harmonics in the far field due to dynamic crack-face contacting. *Journal of the Acoustical Society of America*, 93(1) :142–147, 1993.

[123] S. Hirose. 2-D scattering by a crack with contact-boundary conditions. *Wave Motion*, 19 : 37–49, 1993.

[124] O.V. Menshykov, M.V. Menshykova, and I.A. Guz. Effect of friction of the crack faces for a linear crack under an oblique harmonic loading. *International Journal of Engineering science*, 46 :438–458, 2008.

[125] G.E. Stavroulakis, H. Antes, and P.D. Panagiotopoulos. Transient elastodynamics around cracks including contact and friction. *Computers Methods in applied Mechanics and Engineering*, 77 :427–440, 1999.

[126] A. Tan, S. Hirose, Ch. Zhang, and C.-Y. Wang. A 2D time-domain bem for transient wave scattering analysis by a crack in anisotropic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(6) :610 – 623, 2005.

[127] M. Kögl, S. Hurlebaus, and L. Gaul. Finite element simulation of non-destructive damage detection with higher harmonics. *NDT & E International*, 37 :195–205, 2004.

[128] J. E. Akin. The generation of elements with singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(6) :1249–1259, 1976.

[129] P.R.Heyllger. On conventional and quarter-point mixed elements in linear elastic fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 31(1) :157 – 171, 1988.

[130] Yang Zhang. A fictitious domain method for acoustic wave propagation problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 50(3-4) :351 – 359, 2009.

[131] E. Bécache, J. Rodriguez, and C. Tsogka. A fictitious domain method with mixed fiinite elements for elastodynamics. *Journal of Computational Science*, 29(3) :1244–1267, 2007.

[132] G. Scarella. *Etude théorique et numérique de la propagation d'ondes en présence de contact unilatéral dans un milieu fissuré.* Mathématiques appliquées, Université PARIS IX-DAUPHINE, 2004.

[133] J. Haslinger, T.Tozubek, and R. Kucera. Fictitious domain formulations of unilateral problems : analysis and algorithms. *Computing*, 84 :69–96, 2009.

[134] J. Haslinger and Y. Renard. A new fictitious domain approach inspired by the extended finite element method. *Journal of Numerical Analysis*, 47(2) :1474–1499, 2009.

[135] B. O'Neill, R.G. Maev, and F. Severin. Distortion of shear waves passing through a friction coupled interface. In *Review of progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, volume 557, pages 1264–1267. AIP, 2001.

[136] A. Meziane, A. N. Norris, and A. L. Shuvalov. Nonlinear shear wave interaction at a frictional interface : Energy dissipation and generation of harmonics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 130(4) :1820–1828, 2011.

[137] Yue-Sheng Wang, Gui-Lan Yu, and Hui-Hui Dai. Transmission of elastic waves through a frictional contact interface between two anisotropic dissimilar media. *Wave Motion*, 37 : 137–156, 2003.

[138] L. Baillet and T. Sassi. Simulation numériques de différentes méthodes d'éléments finis pour les problèmes de contact avec frottement. *Comptes Rendus de Mécanique*, 331 :789–796, 2003.

[139] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3–4) :235 – 257, 1999.

[140] M. Cocou. Existence of solutions of a dynamic signorini's problem with nonlocal friction in viscoelasticity. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 53(6) :1099–1109, 2002.

[141] Marius Cocou and Gilles Scarella. Existence of a solution to a dynamic unilateral contact problem for a cracked viscoelastic body. *Comptes Rendus Mathematique*, 338(4) :341 – 346, 2004.

[142] NG Bourago and VN Kukudzhanov. A review of contact algorithms. *Mechanics of solids*, 40 (1) :35–71, 2005.

[143] P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2(4) :1–49, 1995.

[144] J.T. Oden and E.B. Pires. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws. *Computers & Structures*, 19(1 - 2) :137 – 147, 1984.

[145] J.O. Hallquist, G.L. Goudreau, and D.J. Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1-3) :107 – 137, 1985.

[146] Anil B. Chaudhary and Klaus-Jurgen Bathe. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. *Computers & Structures*, 24 (6) :855 – 873, 1986.

[147] F. J. Gallego and J. J. Anza. A mixed finite element model for the elastic contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(6) :1249–1264, 1989.

[148] Nicholas J. Carpenter, Robert L. Taylor, and Michael G. Katona. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1) :103–128, 1991.

[149] R. Glowinski and P. Le Tallec. Numerical solution of problems in incompressible finite elasticity by augmented lagrangian methods : (II) three-dimensional problems. *SIAM Journal of Applied Maths*, 44(4) :710–733, 1984.

[150] Juan C. Simo, Peter Wriggers, and Robert L. Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50(2) :163 – 180, 1985.

[151] T. A. Laursen. *Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements*. PhD thesis, Stanford University, 1992.

[152] D Vola, E Pratt, M Jean, and M Raous. Consistent time discretization for dynamical frictional contact problems and complementarity techniques. *Revue Européenne des éléments finis*, 7 (1-3) :149–162, 1998.

[153] L. Baillet and T.Sassi. Mixed finite element formulation in large deformation frictional contact problem. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 14(2-3) :287–304, 2005.

[154] L. Baillet. Du mécanisme au contact – modélisation par éléments finis. In *Journées Francophones de Tribologie*, 2002.

[155] J. Haslinger and J.C. Nedlec. Approximation of the signorini problem with friction, obeying the coulomb law. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 5(1) :422–437, 1983.

[156] L. Baillet and T. Sassi. Mixed finite element methods for the Signorini problem with friction. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 22(6) :1489–1508, 2006.

[157] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani, and T. Sassi. Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies. *Mathematics of Computation*, 71 (237) :1–25, 2001.

[158] G. Peillex, L. Baillet, and Y. Berthier. Strong coupling between finite elements and PML for the simulation of wave propagation in infinite medium. 2008.

[159] D. Broek. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, fourth edition, 1991.

[160] L.J Gray, A.-V Phan, Glaucio H Paulino, and T Kaplan. Improved quarter-point crack tip element. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(2) :269 – 283, 2003.

[161] Thomas Apel, Anna-Margarete Sändig, and John R Whiteman. Graded mesh refinement and error estimates for finite element solutions of elliptic boundary value problems in non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 19(1) :63–85, 1996.

[162] S.M.O. Tavares, P.M.G.P. Moreira, S.D. Pastrama, and P.M.S.T. Castro. Stress intensity factors by numerical evaluation in cracked stuctures.

[163] S.K. Chan, I.S. Tuba, and W.K. Wilson. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2(1) :1 – 17, 1970.

[164] P. Blanloeuil, A. J. Croxford, and A. Meziane. Numerical and experimental study of the nonlinear interaction between a shear wave and a frictional interface. *Soumise le 13/03/2012*.

[165] Siming Liu, Anthony J. Croxford, Simon A. Neild, and Zhenggan Zhou. Effects of experimental variables on the nonlinear harmonic generation technique. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 58 :1142–1451, 2011.

[166] John T. Hunt, Max R. Knittel, and Don Barach. Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 55(2) :269–280, 1974.

[167] John T. Hunt, Max R. Knittel, Charles S. Nichols, and Don Barach. Finite - element approach to acoustic scattering from elastic structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(2) :287–299, 1975.

[168] P. Blanloeuil, A. Meziane, and C. Bacon. Nonlinear interaction of ultrasonic waves with a crack of different orientations. *AIP Conference Proceedings*, 1511(1) :99–106, 2013.

[169] P. Blanloeuil, A. Meziane, and C. Bacon. Numerical study of the nonlinear interaction between a crack and elastic waves under an oblique incidence. *Wave Motion*, Submitted on 12/20/2012.

[170] Fred R. Rollins. Interaction of ultrasonic waves in solid media. *Applied Physics Letters*, 2 (8) :147–148, 1963.

Annexes

Annexe A

Construction du modèle EF dans le cas d'une fissure orientable

Dans cette annexe, on expose la construction du modèle EF contenant une fissure inclinée. Ce modèle est construit de manière à ce que l'angle d'orientation θ de la fissure soit un paramètre numérique à fournir en début de calcul.

En réalité, le modèle contient trois solides (hors PML), comme le montre la figure A.1. Le premier solide (1), dont les dimensions sont celles de l'échantillon (100×50 mm^2), est ajouré par un disque de diamètre de 30 mm. Les deux autres solides sont des demi-disques de diamètre 30 mm. Ces trois solides ont les mêmes propriétés mécaniques.

Les solides (2) et (3) sont mis en contact selon leur diamètre, comme le montre le figure A.1. L'interface de contact commune à ces deux solides est divisée en trois parties. Le segment central reçoit des conditions de contact unilatéral avec frottement. Il est représenté en rouge sur la figure A.1 et correspond à la fissure. Les deux segments extérieurs reçoivent des conditions de contact soudé qui assurent la continuité des déplacements et des contraintes à travers l'interface. Ces zones de contact soudé sont représentées en bleu sur la figure.

L'ensemble constitué des deux demi-disques subit une rotation d'un angle θ, selon la valeur désirée pour l'angle d'incidence entre l'onde et la fissure. Ensuite, ce disque est placé dans le solide (1), et relié à celui-ci par des conditions de contact soudé. Il ne fait donc plus qu'un avec le solide extérieur.

Pour que cette construction soit équivalente à un unique solide contenant une fissure, le contact soudé doit être efficace et complètement transparent au passage de l'onde. Pour vérifier cela, on compare le signal enregistré lors de la propagation d'une onde dans un unique solide sans fissure, par rapport à la même onde se propageant dans un solide contenant une interface de contact soudé selon la largeur du solide. L'onde incidente est générée sur la face supérieure et enregistrée en $y = -25$ mm. La configuration de test est donnée par la figure A.2.

Les figures A.3 et A.4 donnent respectivement les résultats pour une onde de compression et une onde de cisaillement. A chaque fois, les résultats obtenus pour un bloc unique et les résultats obtenus pour deux blocs reliés par une interface de contact soudé sont comparés. On remarque que les deux signaux reçus se superposent parfaitement, que ce soit dans le domaine temporel ou

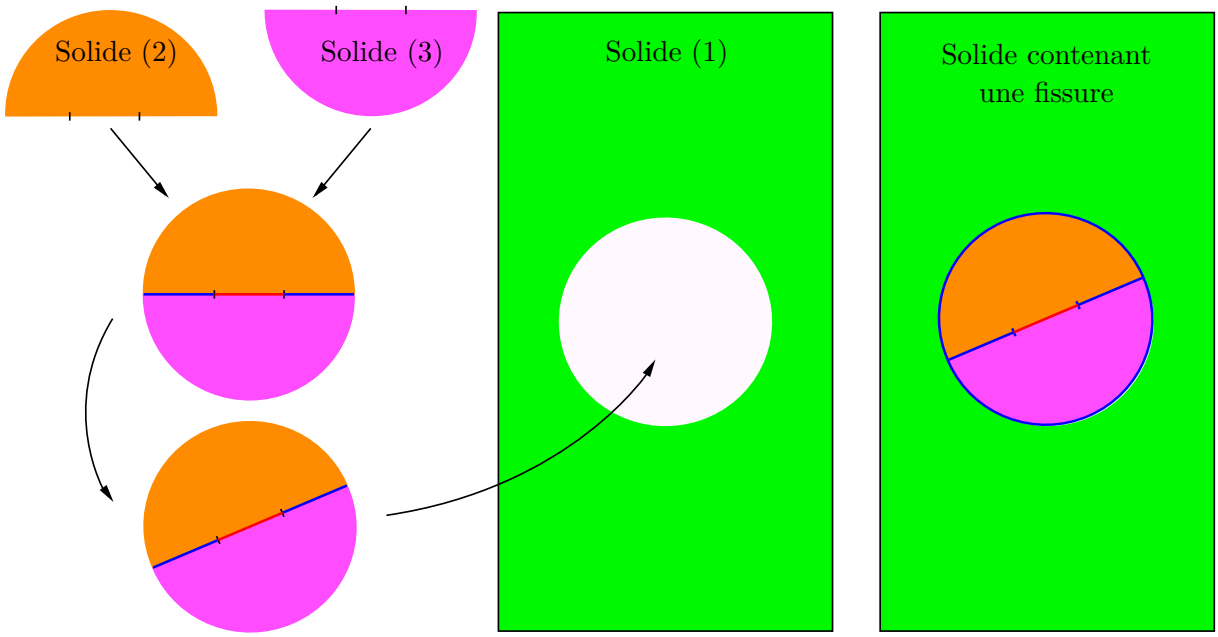


Figure A.1 – Construction du modèle EF de fissure fermée orientable

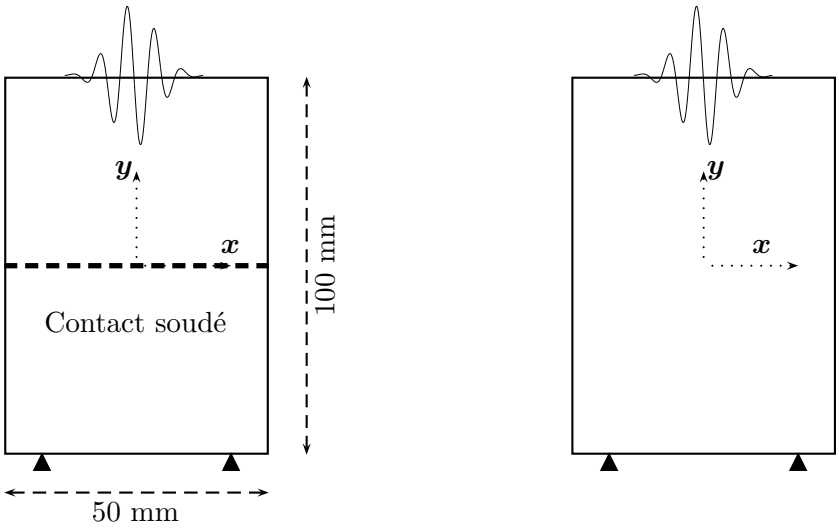


Figure A.2 – Modèle utilisé tester la transparence du contact soudé au passage d'une onde acoustique. (a) Deux blocs sont connectés par une interface de contact soudé. (b) Bloc unique de la même dimension.

fréquentiel. Le résultat le moins précis est obtenu pour une onde de compression et dans le domaine temporel. L'erreur sur le déplacement maximal est alors de 0,6%. L'écart observé entre les spectres est de l'ordre de 10^{-2}%. Pour l'onde de cisaillement, l'erreur est de l'ordre de 10^{-3}%. En ce qui concerne les deux blocs reliés par le contact soudé, les résultats sont donnés pour le cas où les maillages sont conformes au niveau de l'interface de contact. La solution est dégradée dans le cas de maillage non-conforme et l'écart atteint 2% pour l'onde de compression. Bien que cet écart soit faible, on veillera a utiliser des maillages conformes pour ces interfaces de contact soudé.

Comme cela a été dit dans le chapitre 3, le maillage est raffiné autour des pointes de fissure. Pour cela, le maillage de chaque demi-disque est raffiné dans les zones qui entourent les pointes de fissure. Enfin, l'introduction des interfaces de contact soudé n'augmente pas le coût du calcul. En

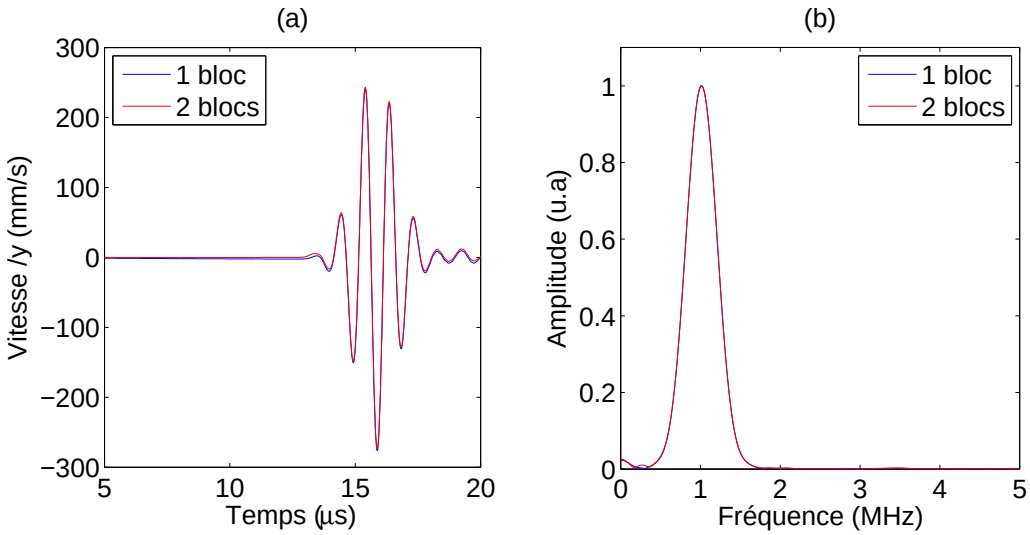


Figure A.3 – Comparaison des résultats obtenus pour la propagation d'une onde de compression dans un solide et dans 2 solides connectés par une interface de contact soudé. (a) Résultat temporel. (b) Résultat fréquentiel.

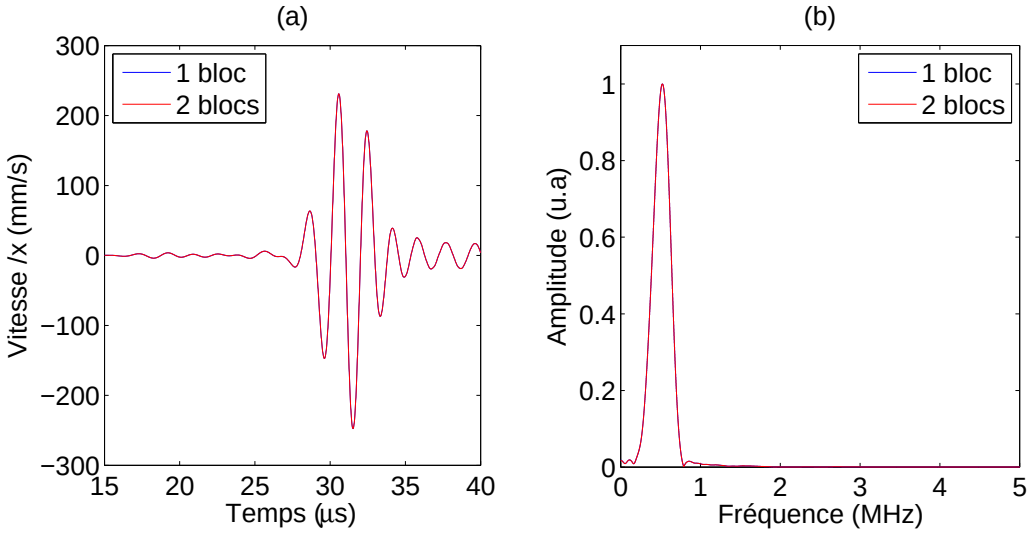


Figure A.4 – Comparaison des résultats obtenus pour la propagation d'une onde de cisaillement dans un solide et dans 2 solides connectés par une interface de contact soudé. (a) Résultat temporel. (b) Résultat fréquentiel.

effet, l'évaluation du contact (calcul des normales, projection des noeuds esclaves sur les surfaces maîtres...) est effectuée une fois pour toute pendant la première itération. La continuité des quantités est ensuite maintenue durant la simulation.

Annexe B

Interaction entre une onde et une fissure linéaire

On présente ici les diagrammes de directivité calculés pour la diffusion d'une onde plane par une fissure. Des conditions de surfaces libres sont imposées sur les faces de la fissure. Les deux lèvres de la fissure ne sont pas en contact et n'interagissent pas. Il s'agit donc d'un calcul linéaire. La méthode présentée dans la partie 4.4.1 et utilisée pour tracer ces diagrammes à une distance $r = 60$ mm du centre de la fissure.

B.1 Onde longitudinale

La figure B.1 donne les diagrammes de directivité pour les déplacements radiaux et tangentiels pour le premier harmonique. Aucun harmonique supérieur n'est généré car les dynamiques de contact entre les faces de la fissure ne sont pas prises en compte. Les déplacements sont normalisés par le déplacement radial maximal calculé sur le cercle de référence à la distance $r = R = 15$ mm avec ces mêmes conditions de surface libre appliquées à la fissure. Cette valeur sert aussi pour l'adimensionnement des diagrammes non-linéaires de la partie 4.4.1 dans le cas de l'onde de compression.

Les remarques exprimées dans la partie 4.4.1 pour l'harmonique fondamental sont toujours valables. Sous incidence normale, seule l'onde longitudinale est diffusée par le défaut, dans la même direction que l'onde incidente. Il n'y a pas de conversion de mode. En effet, l'amplitude de l'harmonique fondamental des déplacements tangentiels est faible par rapport aux déplacements radiaux et est quasi-constante.

Sous incidence oblique, l'onde longitudinale est toujours transmise selon la direction de l'onde incidente. L'onde longitudinale est aussi réfléchie selon une direction qui forme un angle avec la normale à l'interface égal à l'angle d'incidence. Les différentes directions de propagation sont repérées par les lignes discontinues. Une onde transverse est aussi réfléchie par l'interface dans le cas d'une incidence oblique. Comme le montre la figure B.1.(b), ces ondes transverses se propagent dans des directions égales à 127° et 136°, respectivement pour des orientations de fissure égales à $\theta = 25°$ et $\theta = 45°$. Il existe donc une conversion de modes en réflexion. La principale différence avec le calcul

non-linéaire réside donc dans l'amplitude de l'onde diffusée, plus importante dans le cas linéaire.

La raison principale à cela tient de la définition du champ diffusé qui est la différence entre le champ total et le champ incident. Dans le cas du modèle linéaire, l'onde est réfléchie par la fissure et son amplitude est donc égale à celle de l'onde incidente. Les éventuelles conversions de mode viennent diminuer cette amplitude réfléchie. Aucune onde n'est transmise à travers la fissure. Le champ diffusé dans la direction 270° est donc égal à l'opposé du champ incident et a donc la même amplitude que l'onde réfléchie. Au contraire, dans le cas non-linéaire, une partie de l'énergie est transmise à travers l'interface, ce qui diminue l'amplitude de l'onde réfléchie. De même la différence entre le champ total et le champ incident est plus faible dans la direction 270° dans le cas non-linéaire. D'autre part, le frottement dissipe de l'énergie, ce qui diminue aussi l'amplitude du champ diffusé par la fissure dans le cas non-linéaire.

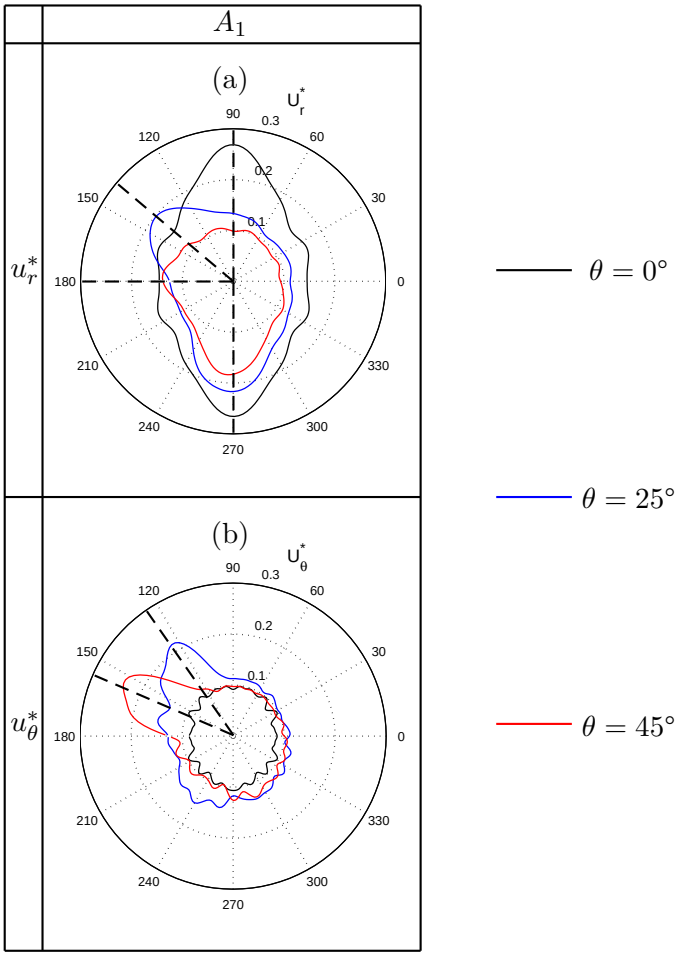


Figure B.1 – Diagrammes de directivité pour une onde incidente longitudinale pour trois angles d'incidence $\theta = 0°$, 25° et 45°. (a) pour les déplacements radiaux $\boldsymbol{u}_r^*$ et (b) pour les déplacements tangentiels $\boldsymbol{u}_\theta^*$. Calcul linéaire, avec des conditions de surfaces libres sur les faces de la fissure, donc seul l'harmonique fondamental A_1 est représenté. Le calcul est réalisé en champ lointain : $r \simeq 10\lambda$.

B.2 Onde transverse

Les diagrammes de directivité issus du calcul linéaire sont donnés pour le premier harmonique par les figures B.2.(a) et (b). Sous incidence normale, l'onde transverse est transmise et réfléchie dans la direction de l'onde incidente. Les déplacements radiaux sont dus à la diffraction par les pointes de fissure qui génèrent deux ondes sphériques.

Sous incidence oblique, l'onde est à nouveau diffusée selon la direction 270°, mais aussi réfléchie selon la direction prévue par la loi classique de Snell-Descartes. C'est aussi la cas pour $\theta = 45°$, contrairement au cas non-linéaire. Une onde longitudinale est aussi réfléchie dans le cas où $\theta = 25°$. La conversion de mode n'est pas possible dans le cas d'une incidence de 45°, toujours en accord avec la loi de Snell-Descartes. On observe à nouveau que l'amplitude de l'onde diffusée est globalement plus importante que celle obtenue dans le cas non-linéaire. Les raisons sont les mêmes que celles introduites précédemment pour l'onde longitudinale.

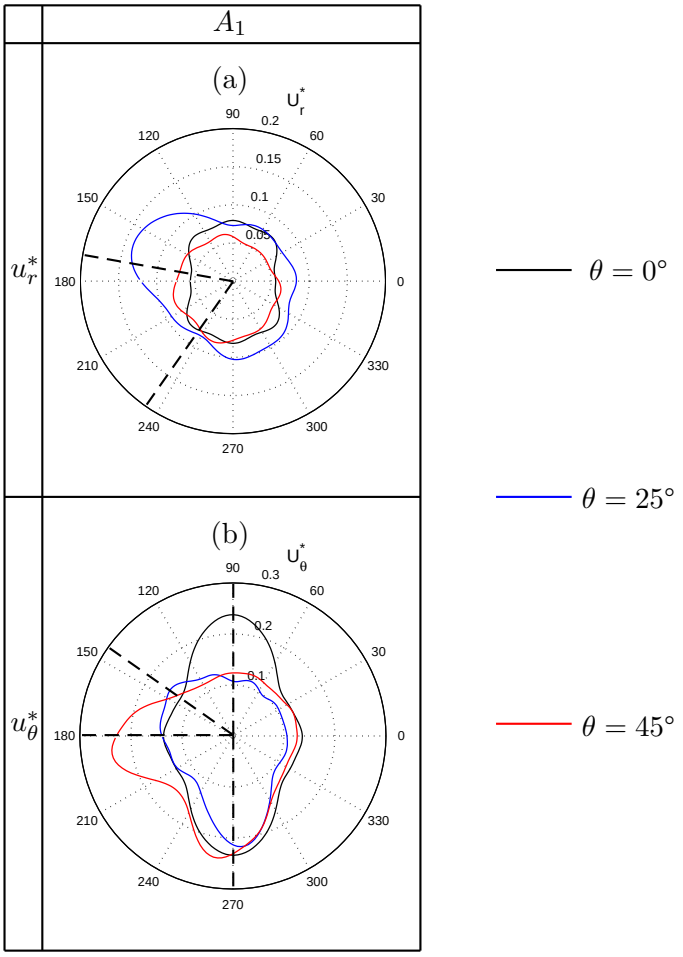


Figure B.2 – Diagrammes de directivité pour une onde incidente transverse pour trois angles d'incidence $\theta = 0°$, 25° et 45°. (a) pour les déplacements radiaux $\boldsymbol{u}_r^*$ et (b) pour les déplacements tangentiels $\boldsymbol{u}_\theta^*$. Calcul linéaire, avec des conditions de surfaces libres sur les faces de la fissure, donc seul l'harmonique fondamental A_1 est représenté. Le calcul est réalisé en champ lointain : $r \simeq 10\lambda$.

Annexe C

Interaction entre une onde et une fissure fermée - Effet de la compression

Cette annexe donne les résultats numériques obtenus pour l'interaction entre une onde acoustique longitudinale ou transverse, en fonction de l'état de compression appliqué sur la fissure. Le modèle est celui donné dans la partie 3.2.3. L'évolution des trois premiers harmoniques est donnée en fonction des paramètres ξ_L et ξ_T, définis par les équations (4.24) et (4.26), respectivement pour une onde longitudinale et une onde transverse.

C.1 Onde longitudinale

Le cas de l'onde longitudinale est considéré en premier lieu. L'amplitude de l'onde incidente est de 10 nm et le coefficient de frottement est égal à $\mu = 0{,}3$. L'amplitude des harmoniques est donnée par la figure C.1 en fonction de la contrainte normale σ_0 par l'intermédiaire du paramètre adimensionnel ξ_L. Les valeurs sont données pour trois angles d'incidence, à savoir $\theta = 0°$, 35° et 45°.

Le comportement de ces courbes est similaire, et correspond aux observations faites dans le cas de l'interaction avec une interface de contact entre deux solides lorsque la compression est modifiée. Ces résultats ont été donnés par la figure 4.3.(a). A mesure que le niveau de la contrainte augmente, la transmission à travers la fissure s'améliore et l'amplitude de l'harmonique fondamental augmente pour atteindre celle de l'onde incidente. Lorsque la compression devient trop élevée, la fissure ne s'ouvre plus et il n'y a alors plus aucun effet non-linéaire. Le paramètre adimensionnel ξ_L est égal à 1. Le second harmonique est d'un ordre plus élevé que de le troisième harmonique. Il passe un par un maximum et tend vers zéro lorsque ξ_L s'approche de l'unité. Ces remarques sont identiques à celles exprimées lors de l'étude de l'interaction entre une onde longitudinale et une interface de contact solide-solide.

La variation de l'angle d'incidence introduit principalement un effet d'amplitude. On a montré dans la partie 4.4.2 du chapitre 4 que la contrainte normale générée par l'onde incidente sur la fissure

diminue avec l'angle d'incidence. La diminution des harmoniques supérieurs est la conséquence directe de la diminution de la contrainte créée selon la normale à l'interface, comme cela a été expliqué par la figure 4.19. Si la contrainte normale diminue, il devient plus difficile d'ouvrir la fissure et l'onde est transmise plus aisément. Pour un chargement fixé, l'amplitude de l'harmonique fondamental augmente avec l'angle d'incidence.

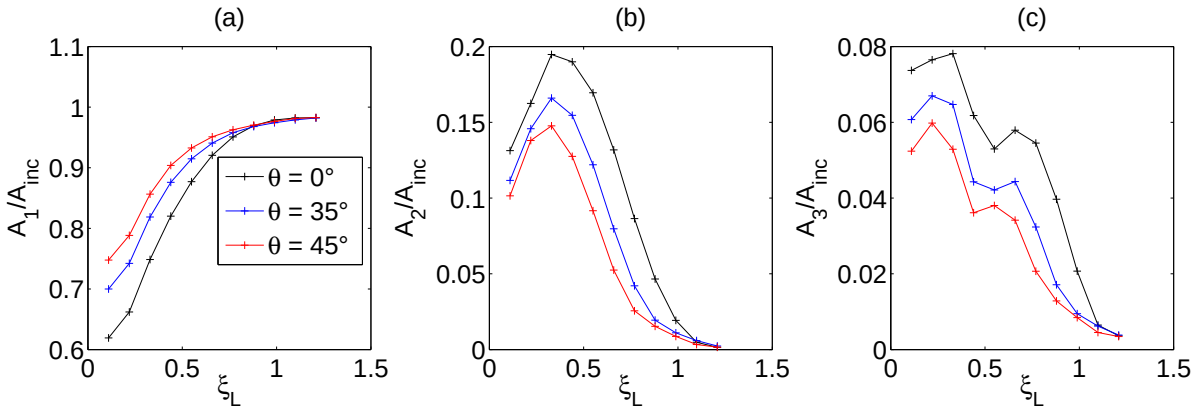


Figure C.1 – Evolution des trois premiers harmoniques pour une onde incidente longitudinale en fonction de la pré-contrainte σ_0 prise en compte dans le paramètre ξ_L. Les courbes sont données pour trois angles d'incidence, $\theta = 0°$, $25°$ et $45°$.

C.2 Onde transverse

Sous incidence normale on retrouve l'évolution des harmoniques obtenue dans le cas de l'interaction entre une onde transverse et une interface de contact formée par deux solides (figure 4.5). Le glissement de l'interface devient plus limité avec l'augmentation du chargement en compression, ce qui se traduit par une augmentation progressive de l'harmonique fondamental. Seul le glissement est généré, et comme cela a été expliqué dans les chapitres précédents, sous incidence normale le troisième harmonique est préférentiellement généré. L'amplitude du second harmonique est faible. Le troisième harmonique atteint un maximum pour $\xi_T \simeq 0{,}45$, conformément aux résultats numériques et expérimentaux obtenus pour l'interface de contact entre solides.

Sous incidence oblique, on a vu dans la partie 4.4.2 que pour les angles d'incidence considérés, la source de non-linéarité provenait du clapping. Lorsque la compression augmente le clapping devient plus limité et les effets non-linéaires diminuent rapidement, comme dans le cas de l'onde longitudinale.

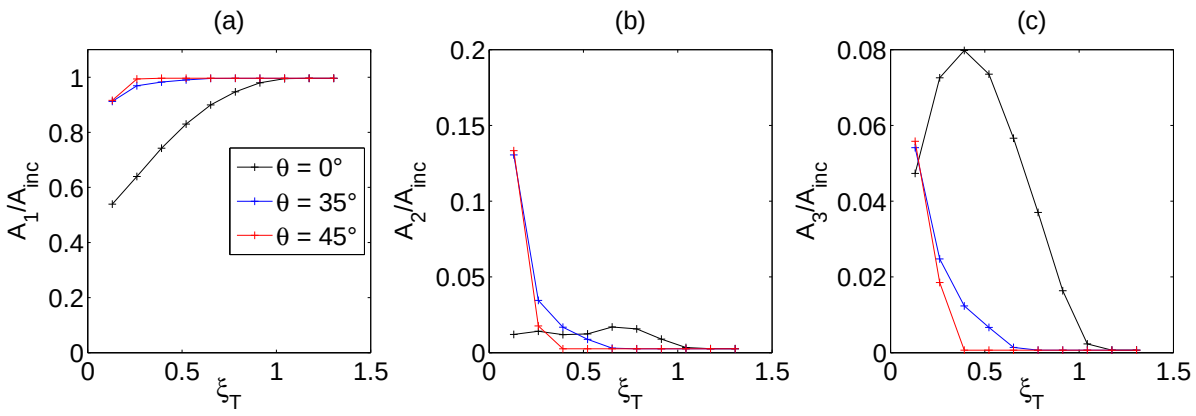


Figure C.2 – Evolution des trois premiers harmoniques pour une onde incidente transverse en fonction de la pré-contrainte σ_0 prise en compte dans le paramètre ξ_T. Les courbes sont données pour trois angles d'incidence, $\theta = 0°$, $25°$ et $45°$.

Annexe D

Géométrie du montage expérimental pour le mixage d'ondes non-colinéaire

La figure D.1 donne les caractéristiques géométriques des solides utilisés l'équipe de A. J. Croxford pour leur montage expérimental du mixage d'ondes non-colinéaire. La compression est appliquée par l'intermédiaire d'un cylindre. Des sabots sont utilisés pour générer les ondes de cisaillement avec une incidence oblique.

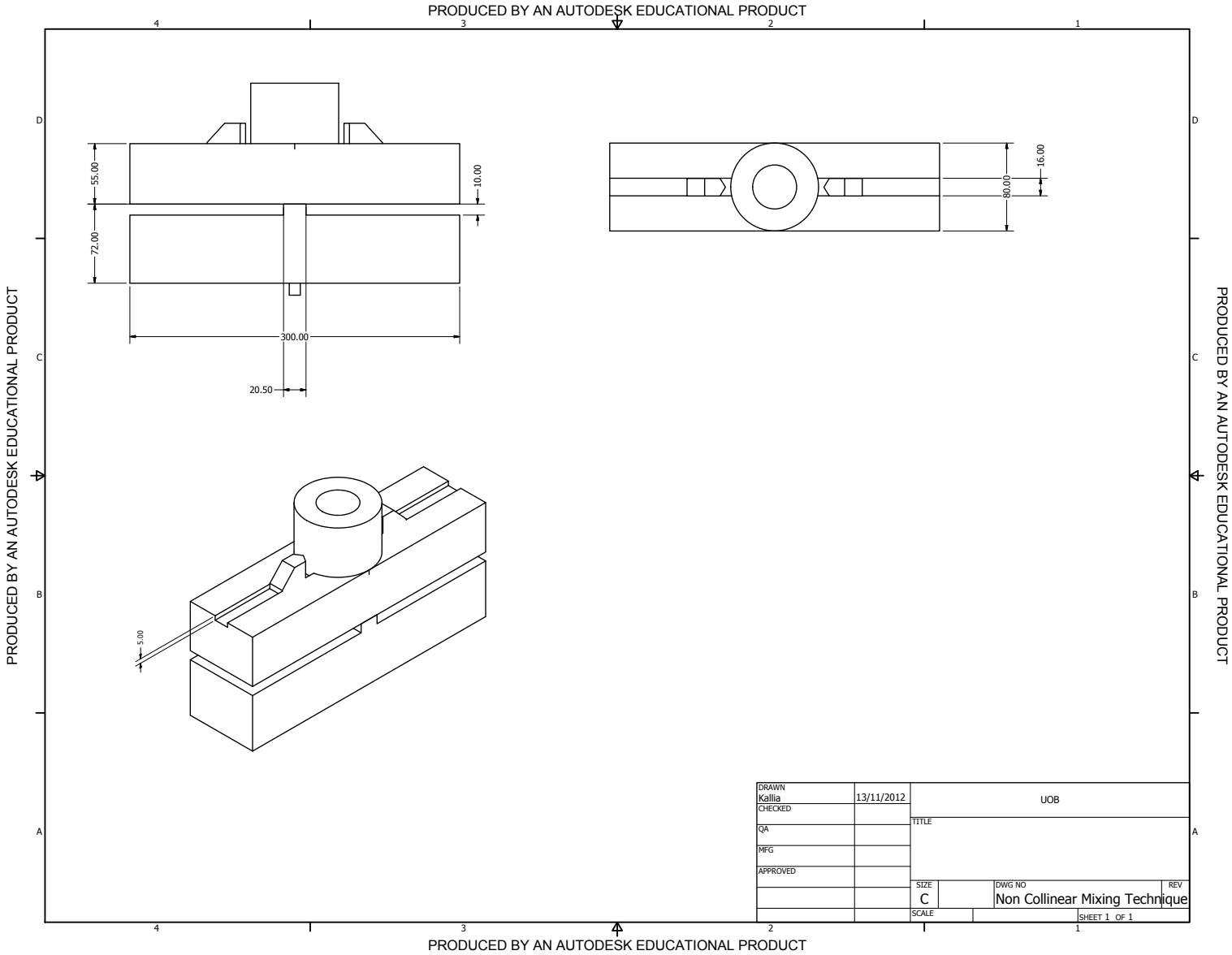


Figure D.1 – Définition géométrique des solides utilisés pour le mixage d'ondes non-colinéaire appliqué à une interface de contact.

Annexe E

Application du modèle numérique à la modulation d'ondes non-linéaire

Le modèle numérique présenté dans la partie 3.2.3, qui permet d'étudier l'interaction entre une onde plane et une fissure, est utilisé ici pour tester la technique de modulation d'ondes non-linéaire [16, 34, 78]. En pratique, deux ondes de fréquences f_1 et f_2 sont générées séparément et simultanément dans le solide à tester. La présence d'un défaut va alors permettre l'interaction des deux ondes. L'onde transmise comporte alors dans son spectre les composantes sommes et différences des deux fréquences incidentes. Pour cette étude numérique, une seule onde incidente est utilisée, mais son spectre contient initialement les composantes $f_1 = 0{,}6$ MHz et $f_2 = 1{,}5$ MHz. Le spectre de l'onde incidente est donné par la figure E.1.(a). Une pré-contrainte $\sigma_0 = -0{,}15$ MPa est appliquée sur la fissure et le coefficient de frottement est $\mu = 0{,}8$.

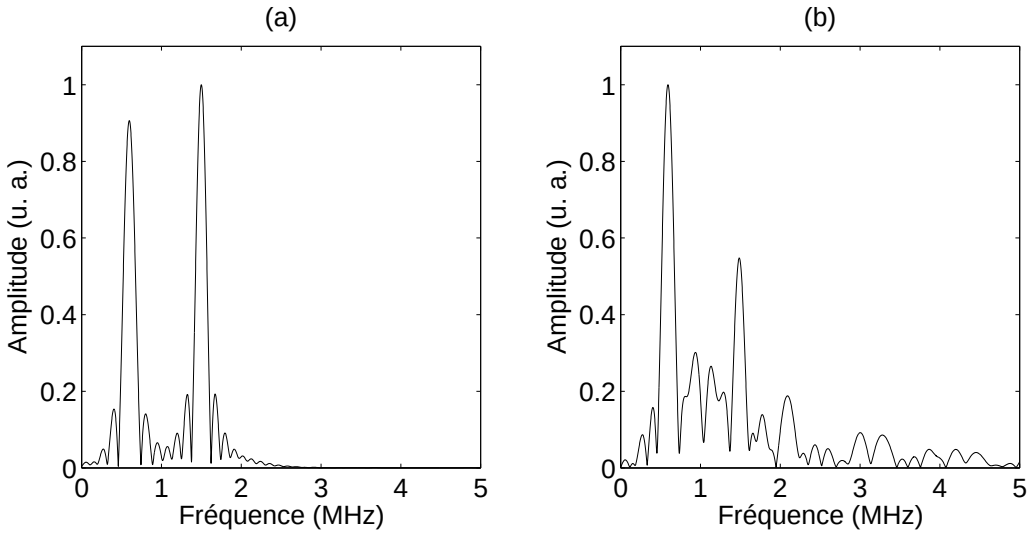


Figure E.1 – Modulation non-linéaire. (a) spectre de l'onde incidente. (b) spectre de l'onde transmise, qui contient les fréquences somme et différences des composantes fréquentielles incidentes. Les spectres sont normalisés par leur amplitude maximale.

L'onde incidente se propage dans le solide fissuré et l'onde transmise est analysée. Le spectre de cette onde transmise est donné par la figure E.1.(b). En plus des composantes f_1 et f_2, on observe

bien les composantes $f_2 - f_1 = 0{,}9$ MHz et $f_2 + f_1 = 2.1$ MHz. L'amplitude des ondes incidentes est suffisante pour activer le CAN à l'interface. Dès lors, le modèle permet l'interaction des ondes et la modulation des deux composantes fréquentielles. Outre la modulation, on retrouve aussi dans le spectre les harmoniques supérieurs de chacune des ondes incidentes. Par exemple $2f_1 = 1{,}2$ MHz ou $2f_2 = 3$ MHz.

Analyse de la non-linearite acoustique de contact pour l'Evaluation et le Contrôle Non Destructif

Les effets non-linéaires produits par l'interaction entre une onde et une fissure fermée peuvent être un moyen potentiel pour la détection de ces fissures. Ce travail porte sur l'étude et l'analyse de la non-linéarité de contact générée par la propagation d'une onde à travers une fissure fermée. Notre approche repose sur la modélisation numérique par Eléments finis (EF) dont la résolution est effectuée dans le domaine temporel. La fissure est modélisée par une loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. L'outil numérique mis en place est utilisé pour l'analyse de la méthode de génération d'harmoniques et sa relation avec la dynamique de contact. Le cas d'une interface de contact entre deux solides a permis d'estimer l'influence de l'état de contrainte sur le comportement non-linéaire, et a fait l'objet d'une validation expérimentale. La diffusion non-linéaire d'une fissure fermée orientée est ensuite obtenue en couplant la solution numérique à une méthode semi-analytique afin d'obtenir les diagrammes de directivité. Les mécanismes impliqués dans l'interaction onde - fissure sont mis en évidence. Ces résultats nous permettent ensuite d'appliquer la méthode du mixage d'ondes non-colinéaire, d'abord sur une interface de contact puis sur une fissure fermée. L'étude numérique et les premiers résultats expérimentaux démontrent le potentiel de la méthode en terme de détection, de caractérisation et d'imagerie.

Mots clés : Acoustique non-linéaire, Non-linéarité acoustique de contact, Eléments Finis, Harmoniques supérieurs, Mixage d'ondes non-colinéaire.

Analysis of the contact acoustic nonlinearity for Nondestructive Evaluation

The nonlinear effects produced by the interaction between a closed crack and an ultrasonic wave can be a good mean for the detection or the characterization of such cracks. This work is dedicated to the study and the analysis of the contact acoustic nonlinearity involved during the interaction of acoustic waves and closed cracks. Our approach is based on Finite Element (FE) modeling. The crack is modeled by unilateral contact with Coulomb's friction law, and numerical solutions are computed in the time domain. The numerical tool is used to analyze the method of higher harmonic generation and its relation with contact dynamics. First, the case of an interface between two solids in contact is considered, both numerically and experimentally, and it was shown that the nonlinear behavior depend on the state of stress. Then, nonlinear elastic scattering by a closed crack of various orientations was calculated. A hybrid model coupling FE and semi-analytical solutions was set up to compute the scattered field and to plot directivity diagrams. The nonlinear mechanisms involved in the interaction between a wave and a closed crack are highlighted. Using those results, the non-collinear mixing technique was applied for measuring the nonlinear response of a contact interface and a closed crack. The numerical results, as well as the first experimental results, are very promising for detecting, locating and imaging closed cracks.

Keywords : Nonlinear acoustics, Contact acoustic nonlinearity, Finite Element, Higher harmonics, Non-collinear mixing.