



**HAL**  
open science

# Identification inverse de paramètres biomécaniques en hyperélasticité anisotrope

Nizar Harb

► **To cite this version:**

Nizar Harb. Identification inverse de paramètres biomécaniques en hyperélasticité anisotrope. Autre. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 2013. Français. NNT : 2013BELF0201 . tel-00879257

**HAL Id: tel-00879257**

**<https://theses.hal.science/tel-00879257v1>**

Submitted on 2 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE BELFORT-MONTBÉLIARD

# **Identification inverse de paramètres biomécaniques en hyperélasticité anisotrope**

**■ Nizar HARB**

# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques  
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE BELFORT-MONTBÉLIARD

Thèse N° 201

THÈSE présentée par

Nizar HARB

pour obtenir le

Grade de Docteur de  
L'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Spécialité : **Mécanique**

Soutenue le 20 Juin 2013 devant le jury composé de

Monsieur <b>Stéphane AVRIL</b> Professeur des Universités Ecole supérieure des Mines de Saint-Etienne  <b>rapporteur</b>	Monsieur <b>Zhi-Qiang FENG</b> Professeur des Universités Université d'Evry - Val d'Essonne  <b>rapporteur</b>
Monsieur <b>Pierre VILLON</b> Professeur des Universités Université de Technologie Compiègne	Monsieur <b>François PEYRAUT</b> Professeur des Universités Université de Technologie Belfort-Montbéliard
Monsieur <b>Matthieu DOMASZEWSKI</b> Professeur des Universités Université de Technologie de Belfort-Montbéliard	Madame <b>Nadia LABED</b> Maître de Conférences Université de Technologie Belfort-Montbéliard

*À mes parents, à mes deux sœurs.*

« *Nous devons savoir, nous saurons.* »

David HILBERT

# *Remerciements*

Je remercie mon directeur de thèse Monsieur le Professeur F. PEYRAUT pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger ce travail doctoral, pour ses multiples conseils, pour son soutien et pour sa disponibilité.

Je remercie également mon co-directeur de thèse, Monsieur le Professeur M. DOMASZEWSKI, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire IRTES-M3M et également au sein de son équipe Modélisation et Optimisation des Structures.

J'exprime ma gratitude à Mme N. LABED pour m'avoir encadrée tout au long de ce travail ainsi que pour m'avoir initiée à l'enseignement supérieur.

Je remercie Monsieur le Professeur S. AVRIL et également Monsieur le Professeur Z.-Q. FENG pour avoir acceptés de prendre sur leurs temps précieux pour être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur P. VILLON pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Nombreuses sont les personnes que je remercie chaleureusement d'avoir rendues mon expérience d'étudiant en doctorat agréable. Je remercie Béatrice ROSSEZ pour son sourire ainsi que sa bonne humeur et je remercie également Pascal ALDINGER pour tous les précieux conseils qui m'a donné.

Cette thèse a été financée par une allocation du Ministère de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur, dans le cadre d'un contrat doctoral de l'université de technologie de Belfort-Montbéliard. Les travaux de recherche ont été réalisés au sein du laboratoire IRTES-M3M (EA7274).

---

# Table des matières

---

Liste des symboles . . . . .	vii
Liste des Figures . . . . .	viii
Liste des Tableaux . . . . .	x
<b>Introduction générale . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>I Tissus biologiques souples . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1 La biomécanique des tissus souples . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Le collagène . . . . .	12
1.2.1 La famille des collagènes . . . . .	13
1.2.2 Localisation des différents types de collagènes dans les tissus . . . . .	14
1.3 Les Glycosaminoglycanes . . . . .	16
1.3.1 Les protéoglycanes . . . . .	16
1.4 L'élastine . . . . .	18
1.5 Récapitulatif . . . . .	19
1.6 Mécanique des tissus souples . . . . .	21
1.7 Le disque intervertébral . . . . .	25
1.7.1 Composition du disque . . . . .	26
1.7.2 Le rôle mécanique . . . . .	29
1.7.3 Les propriétés mécaniques . . . . .	30
1.8 La paroi artérielle . . . . .	31
1.8.1 Structure artérielle . . . . .	32
1.8.2 Le rôle mécanique . . . . .	36

---

1.9	Synthèse . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Mécanique des milieux continus – Hyperélasticité . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1	Cinématique . . . . .	39
2.2	Contraintes . . . . .	41
2.3	Lois de conservations . . . . .	42
2.4	Hyperélasticité . . . . .	45
2.5	Densité d'énergie de déformation . . . . .	49
2.5.1	L'hyperélasticité et les tissus souples . . . . .	49
2.5.2	Le tissu souple renforcé . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Processus d'identification . . . . .</b>	<b>62</b>
3.1	Introduction . . . . .	62
3.2	Expérimentation . . . . .	63
3.3	La représentation numérique . . . . .	66
3.3.1	Modèle linéaire . . . . .	67
3.3.2	Modèle non linéaire . . . . .	68
3.4	Les méthodes numériques classiques . . . . .	70
3.4.1	Méthode de Gauss-Newton . . . . .	71
3.4.2	Méthode de Marquardt . . . . .	72
3.4.3	Calcul du pas optimal . . . . .	73
3.5	Les algorithmes évolutionnaires . . . . .	73
3.6	Les algorithmes génétiques . . . . .	75
3.7	Commentaires . . . . .	78
<b>II</b>	<b>Méthodes d'identification inverse . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>4</b>	<b>Méthode GAO . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Préliminaires . . . . .	83
4.3	Identification des paramètres matériau . . . . .	85
4.3.1	Problème général . . . . .	85
4.3.2	Réduction de l'espace de recherche de solution . . . . .	86
4.4	Le fonctionnement et le réglage des options des algorithmes génétiques . . . . .	94
4.4.1	L'initialisation . . . . .	94
4.4.2	L'évaluation . . . . .	96
4.4.3	Le remplacement . . . . .	96

---



---

4.4.4	Les critères d'arrêts . . . . .	97
4.4.5	La sélection . . . . .	98
4.4.6	Les variations . . . . .	100
4.4.7	Le croisement et le temps de calcul . . . . .	103
4.4.8	Synthèse . . . . .	107
4.5	Application en biomécanique . . . . .	108
4.5.1	Modèle de Fung . . . . .	109
4.5.2	Le modèle HGO . . . . .	120
4.5.3	Le modèle de Peng . . . . .	128
4.6	Conclusion . . . . .	151
<b>5</b>	<b>La viscoélasticité de la paroi artérielle . . . . .</b>	<b>154</b>
5.1	Introduction . . . . .	154
5.2	Modèle structural de la paroi artérielle . . . . .	156
5.3	Identification des paramètres viscoélastiques . . . . .	161
5.3.1	Calcul de la dissipation d'énergie . . . . .	161
5.3.2	Identification par minimisation de la variance . . . . .	168
5.3.3	Le problème d'identification maximum-minimum . . . . .	170
5.4	Conclusion . . . . .	173
	<b>Conclusions générales et perspectives . . . . .</b>	<b>177</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>181</b>

---

## Liste des symboles

---

GAO	<i>Genetic algorithms &amp; Analytical Optimization</i>
MMIM	<i>Maximum Minimum Identification Method</i>
MEC	Matrice extracellulaire
MB	Membrane basale
TC	Tissu conjonctif
SFA	Substance fondamentale amorphe
CML	Cellules musculaires lisses
GAG	glycosaminoglycane
NP	<i>Nucleus pulposus</i> , noyau pulpeux
AF	<i>Annulus fibrosus</i> , anneau fibreux

---

## Table des figures

---

1.1	Deux modes de liaisons des cellules animales . . . . .	9
1.2	Tissu digestif . . . . .	11
1.3	Tissu de la peau . . . . .	11
1.4	Structure hiérarchique du tendon . . . . .	12
1.5	Aggrégat de protéoglycane et molécule d'aggrécane. . . . .	17
1.6	Protéoglycanes et fibres de collagène dans un cartilage . . . . .	18
1.7	Extensions d'un tissu fibreux . . . . .	22
1.8	Déformation moléculaire et glissement inter-fibrillaire . . . . .	23
1.9	Vue latérale de la colonne vertébrale. . . . .	25
1.10	Représentation du disque intervertébral. . . . .	28
1.11	Les parois des artères, veines et capillaires. . . . .	33
1.12	Artère élastique vs Artère musculaire. . . . .	35
2.1	Transformation d'une surface . . . . .	41
2.2	Un tissu avec une direction de collagène privilégiée . . . . .	56
3.1	Déformation uniaxiale . . . . .	66
3.2	Schéma de principe des algorithmes génétiques . . . . .	77
4.1	Schéma classique de minimisation non linéaire . . . . .	86
4.2	Schéma de résolution du problème d'identification de paramètres . . . . .	91
4.3	Boucle GAO . . . . .	93
4.4	Croisement heuristique . . . . .	103
4.5	Temps processeur vs fraction de croisement heuristique . . . . .	105
4.6	Génération vs fraction de croisement . . . . .	105
4.7	Croisements heuristique et arithmétique . . . . .	107
4.8	Repère artériel . . . . .	113
4.9	Modèle de Fung : courbes déformations-déformations . . . . .	114
4.10	Modèle de Fung : courbes de contraintes-déformations . . . . .	119

---

4.11	Modèle HGO : courbes déformations-déformations . . . . .	125
4.12	Modèle HGO : Courbes contraintes-déformations. . . . .	128
4.13	Modèle de Peng : représentation mécanique du tissu discal . .	130
4.14	Modèle de Peng : courbes de déformations . . . . .	137
4.15	Modèle de Peng- méthode GAO : meilleure performance et performance moyenne. . . . .	141
4.16	Modèle de Peng- méthode GAO : distance moyenne . . . . .	142
4.17	Modèle de Peng : évolution spatiale de 100 individus aléatoires	145
4.18	Modèle de Peng- méthode GA7 : meilleure performance, per- formance moyenne et distance moyenne . . . . .	147
4.19	Modèle Peng : Contraintes axiales vs déformations axiales . .	148
4.20	Modèle de Peng : Contraintes circonférentielles vs déforma- tions circonférentielles . . . . .	148
4.21	Fonction objectif vs $\{\lambda^*, \beta\}$ . . . . .	150
4.22	Performance de 100 individus aléatoires . . . . .	151
5.1	Modèle de Maxwell généralisé avec $m$ éléments parallèles. . . .	159
5.2	Viscoélasticité : Fig.5 dans [79] . . . . .	167
5.3	Viscoélasticité : énergie dissipée . . . . .	167
5.4	Viscoélasticité : problème de la variance . . . . .	169
5.5	Viscoélasticité : méthode MMIM . . . . .	172

---

## Liste des tableaux

---

1.1	Les tissus de bases . . . . .	10
1.2	Types de collagène . . . . .	15
2.1	Listes des énergies de déformation isotrope et de leurs paramètres matériaux . . . . .	60
2.2	Listes des énergies de déformation anisotropes et de leurs paramètres matériaux . . . . .	61
4.1	Listes des énergies de déformation et de leurs paramètres matériaux . . . . .	84
4.2	Valeurs estimées des paramètres matériau du modèle de Fung	117
4.3	Résultats d'identification trouvés pour le modèle de Fung Vs résultats par Holzapfel [77] . . . . .	118
4.4	Valeurs estimées des paramètres matériau du modèle HGO . .	127
4.5	Modèle de Peng : valeurs des paramètres matériau. . . . .	140
5.1	Paramètres viscoélastiques de la couche media extraits de [79]	159
5.2	Expression de l'énergie dissipée normalisé par cycle. . . . .	166
5.3	Viscoélasticité : Paramètres identifiés avec MMIM . . . . .	173

# Introduction générale

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre de la recherche et le développement de méthodes d'identification inverse de paramètres matériau. On porte un intérêt particulier à la biomécanique des tissus souples (paroi artérielle, disque intervertébral, peau, tendon, etc.), dans le cadre de leurs réponses viscoélastiques [17, 54, 79] et en grandes déformations et en grands déplacements (hyperélasticité) [78].

Fortement non linéaires et anisotropes, les lois constitutives modélisant le comportement de ces tissus contiennent un nombre considérable de paramètres matériau. Pour identifier ces paramètres, on pose un problème inverse non linéaire qui nécessite des techniques de résolution itératives. En utilisant des procédés d'identification classiques, i.e. à base de gradient, le problème inverse en biomécanique est synonyme de difficultés numériques. Afin de remédier à cette problématique, nous avons développé des méthodes de résolution qui privilégient les solutions analytiques combinées aux algorithmes génétiques (méthodes hybrides). Ces méthodes développées dans cette thèse permettent de traiter le problème d'identification en biomécanique qui est de grande dimension et hautement non linéaire. Leur développement repose sur :

- une compréhension de la construction des lois constitutives biomécaniques qui permettra de mettre en évidence des caractéristiques mathématiques avantageuses pour la résolution, analytiquement et/ou numériquement, du problème d'identification.
- la relation structure-mécanique du tissu qui permettra de valider la dimension physique des paramètres identifiés.

Cet ouvrage est subdivisé en cinq chapitres.

Le premier contient deux parties qui expliquent le tissu biologique souple. Dans la première, on détaille la structure d'un tissu biologique souple chez les animaux, notamment chez les vertébrés. Le tissu porteur de la charge mécanique, le tissu conjonctif, est étudié d'un point de vue anatomique, morphologique et histologique. Selon sa fonction et son emplacement, chaque

tissu conjonctif possède une architecture particulière. Pourtant, tous ces tissus sont constitués de molécules identiques. De manière générale, et dans le but de comprendre les hypothèses de modélisation, on présente :

- les théories expliquant la formation et l'organisation, selon les niveaux hiérarchiques, des composantes du tissu qui sont mécaniquement actives.
- les théories expliquant l'interaction entre ces différentes composantes.

Ensuite, on étudie la contribution de chacune des composantes du tissu à sa réponse passive (élastique et viscoélastique).

Dans la deuxième partie du premier chapitre, on explicite l'anatomie et l'histologie de tissus tels que la paroi artérielle et l'anneau fibreux. Ces tissus serviront d'exemple dans les méthodes d'identification que nous avons développées. Puis, en décrivant le rôle mécanique de chacun d'eux, on établit la relation reliant la mécanique à la structure biologique de ces tissus.

Le deuxième chapitre donne les outils mathématiques utilisés pour modéliser le comportement élastique du tissu biologique souple. En effet, à l'échelle micrométrique, le tissu est un milieu continu. Sa réponse élastique est modélisée par la théorie de l'hyperélasticité [54] et la théorie des invariants appliquées aux matériaux composites renforcés [155]. Ce chapitre met l'accent sur les modèles hyperélastiques décrivant un matériau isotrope transverse, une formulation souvent suffisante pour décrire le comportement de la plupart des tissus souples existant [78]. On présente aussi dans ce chapitre les modèles biomécaniques les plus connus.

Le troisième chapitre explique d'abord le test de déformation uniaxiale qui est utilisé afin de déterminer, pour une plage de déformations physiologiques du tissu, les paramètres matériau des lois constitutives. Ensuite, on expose la formulation classique du problème d'identification inverse : un problème de moindres carrés non linéaires. Sa minimisation conduit à l'identification des paramètres matériau. En biomécanique, l'algorithme de Levenberg-Marquardt [103, 107] est souvent utilisé pour le résoudre. On présente cette



technique mathématiquement, puis on la commente. Enfin, on introduit les algorithmes génétiques et leur principe de fonctionnement.

Dans le quatrième chapitre, on présente une nouvelle méthode d'identification de paramètres que nous avons développée et que nous avons nommé GAO (Genetic algorithms & Analytical Optimization). Cette méthode couple les algorithmes génétiques avec un calcul analytique. Elle permet de réduire l'espace de recherche de solution en fonction du nombre de termes additifs formant la densité d'énergie de déformation. On utilise la méthode GAO afin de déterminer les paramètres matériau des trois lois constitutives suivantes : Holzapfel [77], Fung *et al.* [55] et Peng *et al.* [123]. Pour cela, on résout un problème de moindres carrés non linéaire qui, grâce à GAO, réduit considérablement la dimension de l'espace des solutions. La rapidité et la performance de la méthode GAO sont comparées aux algorithmes génétiques standards, dont les options sont commentés, et aux algorithmes à base de gradient. Il faut noter que la méthode GAO consiste à réaliser un recalage en réduisant l'écart entre les contraintes mesurées et calculées. Pour cela, la fonction objectif est construite sur la base de l'écart quadratique des composantes de contraintes. Une alternative plus sophistiquée pour construire la fonction objectif consisterait à utiliser la méthode des champs virtuels [7, 64, 116, 127]. Cette amélioration possible, qui permettrait entre autre de réduire l'influence des bruits de mesure, n'est pas considérée dans ce mémoire mais pourrait faire l'objet de développements futurs.

Le dernier chapitre présente une nouvelle approche d'identification des paramètres viscoélastiques de tissus biologiques en se basant sur le travail de Holzapfel *et al.* [79]. On suppose en particulier que la réponse du tissu est insensible aux taux de déformation qui lui sont appliqués. Ce phénomène est classiquement représenté par la viscoélasticité quasi-linéaire [54] qui utilise des éléments standards viscoélastiques (Maxwell, Kelvin, Voight). Ces éléments sont disposés en série et/ou en parallèle afin de couvrir une large bande fréquentielle où la dissipation visqueuse reste constante. L'inconvénient de cette représentation réside cependant dans le nombre important de

paramètres viscoélastiques à identifier, ce qui nécessite des méthodes d'identification adaptées. Nous avons donc proposé une méthode inverse originale baptisée MMIM (Maximum Minimum Identification Method). Cette méthode consiste à minimiser l'écart entre le maximum et le minimum de l'énergie dissipée. On montre qu'elle possède un lien avec l'utilisation de la norme infinie qui est réputée pour être un critère robuste [18]. On montre également que la méthode MMIM est plus performante qu'une approche standard basée sur la minimisation de la variance. Les résultats obtenus sur le modèle de Holzapfel *et al.* [79] montrent enfin que l'objectif souhaité (énergie dissipée constante sur une bande fréquentielle donnée) est parfaitement atteint.

# Première partie

## Tissus biologiques souples

---

# La biomécanique des tissus souples

---

## 1.1 Introduction

Les tissus sont constitués de réseaux de fibres de protéine interconnectées et immergées dans une substance de base et de fluide ionique. Les cellules attachées à ces fibres sont responsables de l'élaboration et de la nutrition des fibres et des substances de bases. Ainsi on repère deux milieux dans un tissu : la matrice extracellulaire (MEC) et la matrice intracellulaire [3].

Du point de vue structural, les contraintes sont acheminées dans un corps biologique suivant deux stratégies : la première dépend de la rigidité de la MEC et la deuxième dépend, à la fois, de la rigidité du cytosquelette de la cellule et des liaisons d'adhésion cellule-cellule (voir FIGURE 1.1). Chez les plantes, les tissus acquièrent leur rigidité grâce à la paroi cellulaire de la MEC. Tandis que chez les animaux, la rigidité du tissu repose sur une combinaison de ces deux stratégies, mais avec des amplitudes différentes pour chaque tissu différent. Par exemple, pour gagner plus en rigidité mécanique, la MEC est calcifiée durant la formation des os et des dents.

On distingue chez les animaux quatre groupes fondamentaux de tissus [3, 114, chapitre 19] :

1. le tissu épithélial : ensemble de cellules plates dites jointives qui recouvrent les surfaces internes et externes du corps. Elles reposent sur

- une fine membrane de la MEC nommée « membrane basale » (MB). Ce tissu forme une couche protectrice (épiderme, peau), une surface absorbante (muqueuse de l'intestin grêle), et compose les glandes de sécrétions endocrine et exocrine (glandes digestives, pancréas) ainsi que le tissu embryonnaire. Donc les rôles de ce tissu sont : le revêtement, l'absorption et la sécrétion.
2. le tissu conjonctif (TC) : il est caractérisé par une MEC qui est composée par de la substance fondamentale amorphe (SFA) et des fibres. Elle occupe un volume considérable et est limitée par une MB fibrillaire. Les cellules du TC, dont les fibroblastes élaborent des fibrilles, sont éparpillées dans le tissu comme le montre la FIGURE 1.1. La MEC a pour fonctions principales : la rigidité et le soutien des organes (tendon, ligament), la filtration (le glomérule des reins) et la défense (membrane basale).
  3. le tissu musculaire : il est formé par la myosine et l'actine, deux protéines contractiles. Le tissu musculaire est composé de différentes cellules : les cellules musculaires lisses (CML), les cellules musculaires striées et les cellules musculaires myocardiques (contraction non volontaire du muscle strié).
  4. le tissu nerveux : il est dédié à la conduction et l'irritabilité (capacité de réagir aux variations du milieu extracellulaire en modifiant les propriétés électriques de sa membrane). Les cellules nerveuses sécrètent des molécules (neurotransmetteurs) transportées par l'axone. De plus, elles génèrent des signaux électriques appelés potentiels de dépolarisation (potentiels d'action)

Le TABLEAU 1.1 résume ces quatre groupes. On remarque qu'une distinction est établie entre un tissu conjonctif lâche et un tissu conjonctif dense. Cette classification est basée sur la densité relative des fibres par rapport à celle des cellules et de la substance fondamentale. Le TC lâche est le plus répandu dans l'organisme. Comparativement au TC dense, il est pauvre en fibres mais riche en cellules et en substance fondamentale.

Les tissus, selon leur fonction spécifique, sont différents à l'échelle microscopique et macroscopique. Ainsi, du point de vue de l'apparence physique, on distingue deux types de tissus : les *tissus souples* et les *tissus durs*.

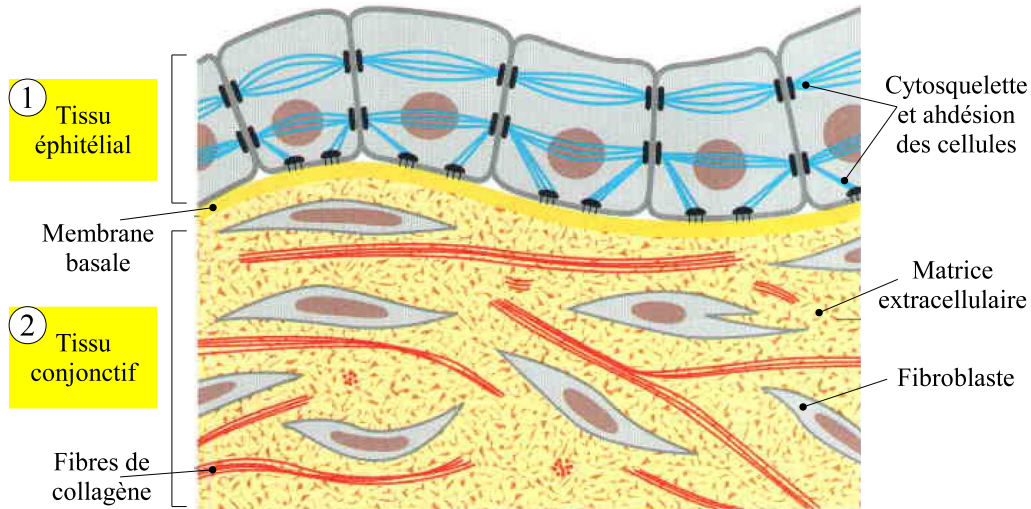


FIGURE 1.1: Deux modes de liaisons des cellules animales [Adaptée de Alberts *et al.* [3]].

La FIGURE 1.1 montre les deux principales configurations de liaisons cellulaires. C'est la MEC du TC qui supporte le chargement, tandis que dans le tissu épithélial, c'est le cytosquelette des cellules qui transmet les contraintes cellule-cellule à travers les jonctions d'ancrage. Les attaches cellule-matrice lient le tissu épithélial au tissu conjonctif.

La matrice extracellulaire est l'élément structurel des tissus souples. Elle est sécrétée par les cellules. La fonction de la matrice extracellulaire comprend un support mécanique pour l'ancrage des cellules, la détermination de l'orientation des cellules (la polarisation), le contrôle de la croissance cellulaire, le maintien de la différenciation cellulaire, des échafaudages pour le renouvellement des tissus, la création de micro-environnement tissulaire, la séquestration, le stockage et la présentation des molécules solubles de régulation.

La MEC est constituée de grosses molécules reliées entre elles dans un composite insoluble [149]. Les composants fibrillaires de la MEC comprennent : le

collagène et l'élastine. Le collagène assure principalement la rigidité du tissu, tandis que les fibres d'élastine lui donnent de la souplesse. La substance fondamentale amorphe est composée principalement de protéoglycanes, glycoprotéines non-collagéniques, de solutés et d'eau. Physiquement, une SFA se comporte comme une colle, un lubrifiant et un amortisseur de chocs dans les différents tissus.

TABLEAU 1.1: Les tissus de base : classifications et exemples.

Tissus de base	Exemples
Tissu épithélial	
De surface	Épiderme de la peau (FIGURE 1.3), muqueuse intestinale (FIGURE 1.2)
Glandulaire	follicule thyroïdien, acinus (sac) pancréatique
Spécialisé	épithélium rétinien ou olfactif
De support	cartilage, os
Tissu conjonctif	
TC propre et lâche	derme de la peau (Figure 1.3)
TC propre et dense	péricardium, tendon
TC spécialisé	tissu adipeux
Tissu musculaire	
Lisse	CML artérielles et intestinales (FIGURE 1.2)
Strié	diaphragme, muscles des membres
Myocardique	cœur
Tissu nerveux	cellules cérébrales, nerfs périphériques

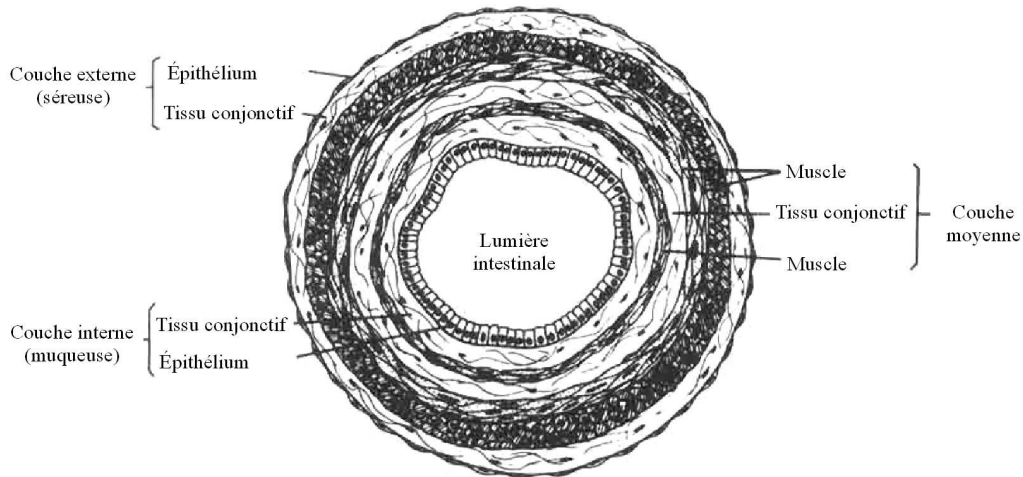


FIGURE 1.2: Les différentes couches de tissu dans un tube digestif [Adaptée de Shoen [149]].

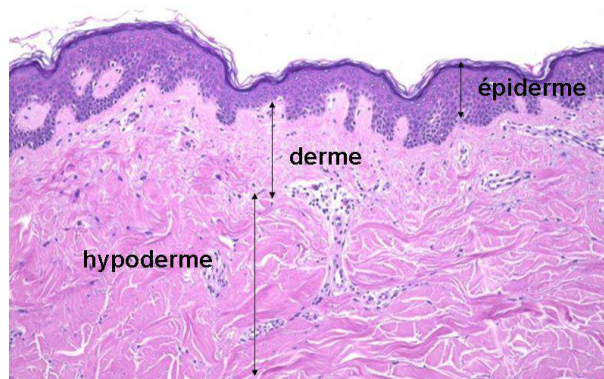


FIGURE 1.3: Les différentes couches de tissu qui composent la peau.

Afin de pouvoir détailler le comportement des tissus souples, il est essentiel de définir des échelles liées aux tailles des composantes structurales du tissu. Ainsi, la Figure 1.4 représente les niveaux hiérarchiques d'assemblage des fibres constituant un tendon. On parle de trois échelles dans un tissu [54] : l'échelle moléculaire (nano-échelle : 1-100 nm), l'échelle ultra-moléculaire (micro-échelle : 0.1 – 100  $\mu\text{m}$ ) et l'échelle du tissu (0.1-10 mm). La structure du tissu à chaque niveau hiérarchique, possède un rôle important pour la détermination de ses propriétés physiques et physiologiques [105].



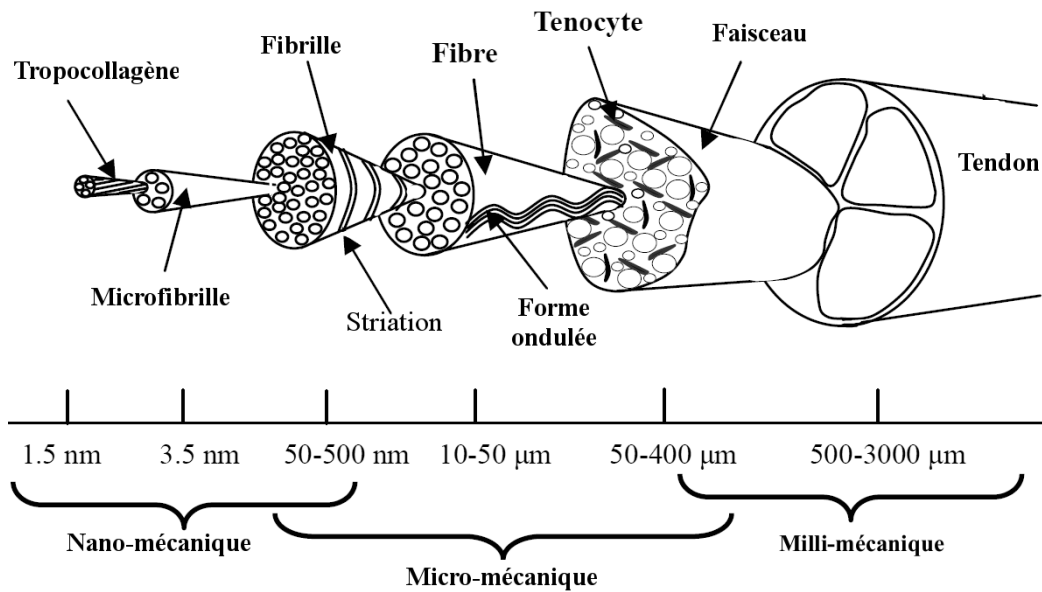


FIGURE 1.4: Structure hiérarchique du tendon avec des indications sur les diamètres du collagène; adaptée de Kastelic *et al.* [98]. La terminologie utilisée pour décrire les niveaux d'échelle n'est pas consistante d'un article à un autre.

## 1.2 Le collagène

A la base, tous les collagènes sont fabriqués et assemblés à partir des mêmes chaînes ou molécules de protéine. Cependant, c'est leur arrangement et leur périodicité qui permet d'établir des familles de fibres de collagène. Ainsi, il a été identifié chez les humains 27 types de collagène [3, chap. 19]. Dans la MEC, les molécules de collagène sont sécrétées sous une forme en triple hélices de chaîne moléculaire, qui sont en forme de corde, dont la composition en acides aminés diffère selon le type de collagène : c'est le tropocollagène. Son assemblage en fibrilles est réalisé à proximité de la membrane cellulaire. Une fois les fibrilles formées, des liaisons covalentes transversales « crosslinks » intramoléculaires et intermoléculaires viennent s'y ajouter. Généralement, il est admis que le crosslink apporte un gain considérable en rigidité et une meilleure tenue du tissu sous cisaillement facilitant ainsi la distribution et le

transfert des efforts [3, 6, chap. 19]. Cependant, le regroupement des molécules dans des fibrilles demeure un sujet de désaccord car les théories suggèrent que les fibrilles prennent soit une forme de feuille, soit une forme de microfibrilles circulaires [87]. A l'échelle ultra-moléculaire, les fibrilles forment des fibres qui, à leur tour, s'assemblent pour former des faisceaux.

### 1.2.1 La famille des collagènes

**Le collagène fibrilleux :** Les molécules de ce groupe de collagène sont longues ( $\sim 300$  nm) et en forme de tige. Elles s'auto-assemblent parallèlement en fibres. Une striation latérale de périodicité (65–67) nm identifiable par un microscope électronique caractérise les collagènes de ce groupe. Ce dernier réunit les types de collagène suivants : I, II, III, V et XI.

**Le collagène de réseau :** Le plus abondant de ce collagène est de type IV. Ses molécules sont très longues ( $\sim 400$  nm) et flexibles en raison des irrégularités de la chaîne moléculaire. Elles forment un « grillage » constituant l'ossature des membranes basales des vertébrés et des invertébrés. Les types VIII et X s'assemblent et forment un réseau de mailles d'aspect hexagonal qui sont présentes dans le cartilage de croissance. Ils sont souvent classés comme des collagènes à « chaîne courte ».

**Le collagène filamenteux :** Caractérise le type VI et est observé comme une structure filamenteuse souple. Ses molécules s'alignent bout à bout chaque 100 nm approximativement.

**Les collagènes fibrillaires associés :** Plusieurs types de collagène ne forment pas une fibre ou un réseau du même type ; ils s'associent à d'autres collagènes fibreux. Par exemple, le type IX collagène décore la surface de la fibre collagène de type II et crée avec ce dernier des liaisons covalentes [32, 169]. Les types XII et XIV sont généralement associés à la surface des fibres de collagène de type I. Ils ont aussi été localisés dans le cartilage du fœtus. Cependant, le type IX peut aussi s'associer avec lui même [169]. Le type VII forme des micro-fibres. Elles s'étalent sous certaines membranes

basales agissant comme des courtes fibrilles d'ancrage entre la membrane et la matrice sous-jacente. D'autres types de collagène ne sont connus que par leur séquence d'ADN. Par conséquent, leurs structures macromoléculaires sont inconnues.

### **1.2.2 Localisation des différents types de collagènes dans les tissus**

L'os et le tendon contiennent essentiellement du collagène fibreux de type I, le système vasculaire, les types I et III, tandis que le cartilage contient essentiellement du collagène de type II. Le collagène de type IV structure les membranes basales minces.

En général, les tissus collagèneux contiennent des collagènes « mineurs » en faible quantité. Les fibres peuvent aussi contenir de faibles proportions d'un autre type de collagène. À ce jour, les informations sur les modifications des propriétés physiques de la fibre par ce collagène additif sont rares. Par exemple, dans les tissus embryonnaires et vasculaires, la présence de fibres de type III est supposée leur conférer plus d'élasticité (principalement en raison du faible diamètre des fibres), mais son effet lors de la co-polymérisation avec le type I est inconnu. Le type XI du cartilage et le type V, peuvent participer à la nucléation des fibrilles de type I et II. Le type IX attaché à la surface des fibres de type II, est susceptible d'avoir un rôle de dimensionnement du diamètre de la fibre [167].

TABLEAU 1.2: Quelques types de collagène et leurs propriétés.

	Type	Forme	Localisation
Fibrillaire	I	Fibrille	os, peau, tendons, ligaments, cornée, organes internes (représentent 90% de collagène du corps)
	II	Fibrille	cartilage, disque intervertébral, notochorde
	III	Fibrille	peau, vaisseaux sanguins, organes internes
	V	Fibrille (avec le type I)	comme pour le type I
	XI	Fibrille (avec le type II)	comme pour le type II
Associé Fibrille	IX	association latérale avec le type II	cartilage
Formation en réseau	IV	feuilletés ou réseaux	membrane basale
	VII	fibrilles d'ancrage	sous le tissu épithélial
Transmembranaire	XVII	non-fibrillaire	hémidesmosome (liaison cellule-matrice)
Protéine de protéoglycane	XVIII	non-fibrillaire	membrane basale

Le TABLEAU 1.2 indique les principaux types de collagène présents dans les tissus conjonctifs. Le collagène de type I, II, III, IV sont les plus étudiés mécaniquement. Ils sont identifiés dans les organes souples comme le cœur, les tendons, la membrane basale, le cartilage...

### 1.3 Les Glycosaminoglycanes

Les glycosaminoglycanes (GAG) sont des chaînes de molécules qui occupent un grand volume, et forment un gel à base d'eau même pour de très faible concentration d'eau. Le poids des GAG dans le tissu conjonctif, est 10% plus petit que celui des fibres de protéines. Cependant, ils occupent la majorité de l'espace extracellulaire parce qu'ils forment un gel hydraté poreux. Grâce à leur densité élevée de charges électriques négatives, les GAG attirent les cations ( $\text{Na}^+$ ) qui sont osmotiquement actifs. L'eau est ainsi mobilisée par cette pression osmotique. Elle est absorbée puis immobilisée par cette matrice. Il en résulte une pression de gonflement (swelling pressure) qui rend la structure incompressible et absorbante des chocs. Par exemple, Alberts *et al.* [3] indique que le cartilage du genou arrive à supporter plusieurs atmosphères de pression grâce aux GAG.

#### 1.3.1 Les protéoglycanes

Les protéoglycanes sont composés de chaînes de GAG liés à une protéine centrale en établissant une liaison covalente (Figure 1.5). Les plus répandus sont : la décorine présente dans tous les tissus conjonctifs, le perlecan dans les membranes basales, et l'aggrécane, abondant dans le cartilage. L'acide hyaluronique ne forme pas des protéoglycanes. Cependant, les agrégats de protéoglycanes correspondent à une molécule d'acide hyaluronique sur laquelle se lient de multiples protéoglycanes.

Les protéoglycanes sont variés : ils se présentent sous différentes tailles, liaisons de protéines et de chaîne de GAG. Par exemple la décorine a une chaîne moléculaire relativement petite. L'aggrécane est sécrété par les chondrocytes (les fibroblastes dans le cartilage). Sa taille peut atteindre celle d'une bactérie, de l'ordre de quelques micro-mètres. Les protéoglycanes contrôlent la

structure du tissu. Par exemple, la décorine règle la structure des fibrilles, la taille de leurs diamètres ainsi que leur assemblage [36]. Elle règle aussi la fibrillogenèse et la croissance des fibrilles [35].

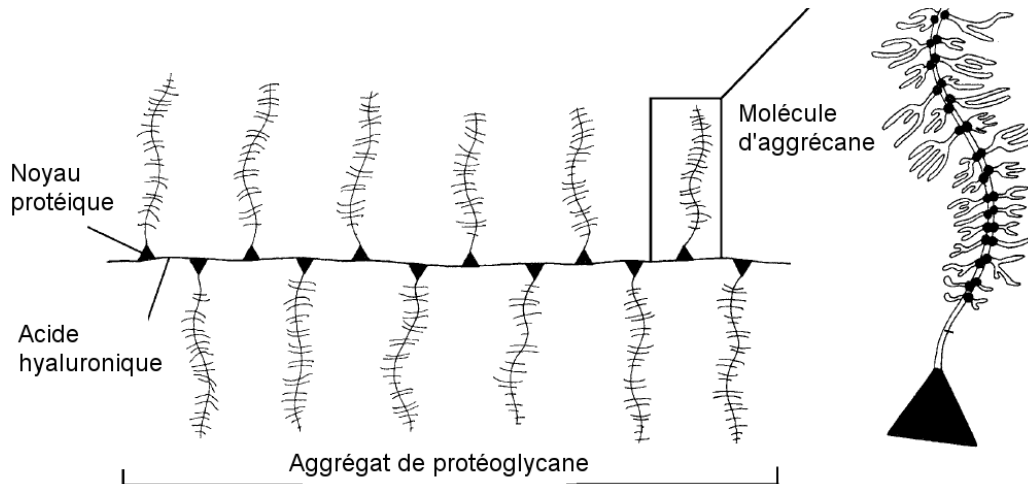


FIGURE 1.5: Aggrégat de protéoglycane et molécule d'aggrecane.

La décorine a été détectée entre les fibrilles où elle s'y accroche par sa terminaison protéique. L'étude de l'interaction des réseaux collagène-protéoglycane illustre la théorie de glissement inter-fibrillaire. En effet, dans un tissu au repos, la décorine a une disposition orthogonale par rapport aux fibrilles de collagène. Une fois que le tissu est étiré suivant la direction des fibres<sup>1</sup>, les décorines s'inclinent selon cette même direction. Les fibrilles sont donc en mouvement. Comme elles ne s'allongent pas, la seule explication possible de cette déformation des décorines demeure le glissement inter-fibrillaires [104, 145, 146].

Les protéoglycanes sont les principaux responsables du comportement visco-élastique d'un tissu. À cause de leur aptitude à absorber une grande quantité d'eau et à l'immobiliser, ils sont considérés comme des amortisseurs mécaniques.

1. Une fibre est composée de fibrilles discontinues et interconnectées.

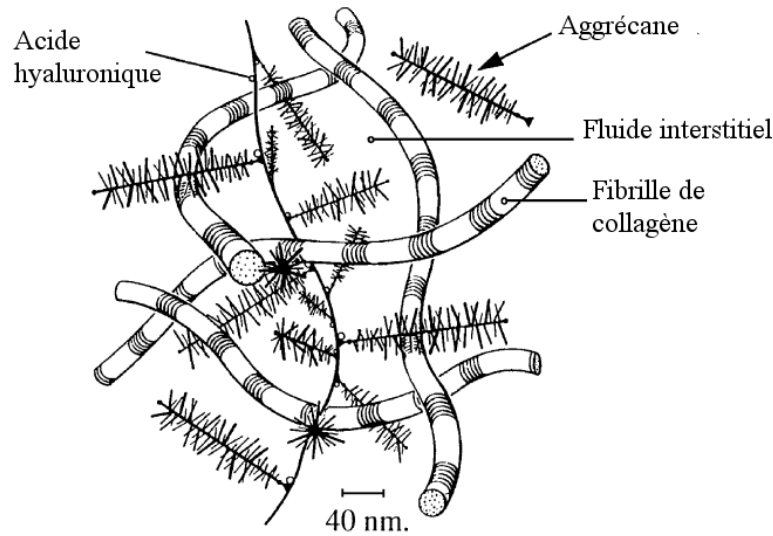


FIGURE 1.6: Interaction dans un cartilage artériel entre les protéoglycanes et le réseau collagène formant un composite renforcé poreux, selon Lu et Mow [105].

La Figure 1.6 symbolise l'interaction entre le réseau collagène et les protéoglycanes. Les espaces interstitiels canalisent les solutés composés principalement d'eau. Quand le tissu est comprimé, le fluide interstitiel commence à couler dans le tissu. En conséquence, le fluide en mouvement dans l'espace interstitiel, génère une résistance de frottement. Donc, la fonction de transport assurée par le tissu, est accompagnée d'une dissipation énergétique qui définit le comportement viscoélastique du tissu.

## 1.4 L'élastine

Plusieurs tissus des vertébrés nécessitent à la fois qu'ils soient élastiques et rigides, par exemple : la peau, les vaisseaux sanguins et les poumons. Un réseau de fibres élastiques, dans la matrice extracellulaire de ces tissus, leur confère, en s'enroulant, la résilience nécessaire pour qu'il puisse revenir à son état initial après avoir été étiré. Ses fibres élastiques sont très extensibles : cinq fois plus qu'un caoutchouc pour une même section transversale. Le réseau de fibres élastiques et le collagène inélastique sont entrelacés limitant ainsi la sur-extension et l'endommagement du tissu.

Le composant principal des fibres élastiques est l'élastine, une protéine hautement hydrophobe. Son assemblage chez les mammifères se fait à proximité de la membrane plasmique dans l'espace extracellulaire à partir de molécules de base, la tropoélastine. Les molécules de tropoélastine s'interconnectent intensivement, en établissant des liaisons covalentes, l'une et l'autre générant un vaste réseau amorphe de fibres d'élastine et de feuilles. Cependant, l'incertitude demeure autour de la configuration adoptée par les molécules d'élastine pour former des fibres hautement élastiques. Des études récentes sur la forme en 3D de la tropoélastine, montrent qu'elle possède une forme asymétrique allongée dont le centre ressemble à un bobinage dense (une superhélice) qui peut mécaniquement s'enrouler (phénomène de relâchement) ou se dérouler (phénomène d'étirement) en absence d'un hystérésis. Ainsi les tropoélastines sont des nano-ressorts très efficaces emmagasinant de l'énergie potentielle élastique [10]. On trouve dans les fibres élastiques, non seulement de l'élastine, mais aussi des microfibrilles composées d'un certain nombre de glycoprotéines distinctes, comme de la fibrilline. Ses microfibrilles, de diamètre d'environ 10 nm, recouvrent le noyau d'élastine. Comme elles apparaissent avant l'élastine dans les tissus en croissance, il est estimé qu'elles jouent le rôle d'un échafaudage de dépôt de l'élastine. Le réseau de ces microfibrilles est élastique. Elles remplacent l'élastine dans certains endroits du tissu, par exemple : elles aident à supporter le cristallin de l'œil.

Dans les artères, l'élastine est la protéine dominante de la matrice extracellulaire. Elle représente 50% du poids sec des plus grandes artères de l'aorte. Des mutations dans le gène de l'élastine entraînent une défaillance de la protéine chez les souris ou les humains. Il en résulte des sections étroites de l'aorte ou d'autres artères et une prolifération excessive des cellules musculaires lisses dans la paroi artérielle.

## 1.5 Récapitulatif

Bien que les tissus biologiques souples chez les animaux soient variés, leur composition à l'échelle cellulaire reste presque identique. C'est le rôle, la fonction et l'emplacement de chaque tissu qui définissent sa composition.



Chez les vertébrés, le tissu conjonctif assure principalement le soutien et la protection des organes. Donc, il occupe un rôle mécanique important pour les protéger et faire circuler les efforts. L'étude anatomique, histologique et biochimique montre qu'un tissu est une structure complexe formée par des macromolécules (protéiques, glycoprotéiques...), des cellules responsables de l'entretien du tissu et des solutés.

Le comportement complexe du tissu est régi par des facteurs biomécaniques, chimiques et électriques. On distingue deux types de réponse : active et passive. La réponse passive n'est que la réponse élastique et inélastique du tissu associée à la biomécanique. Elle est indépendante des facteurs chimiques et électriques qui sont responsables de la réponse active du tissu. Selon les études histologiques, la réponse passive revient à quatre grandes catégories de composantes de tissus : le collagène, le protéoglycane, l'élastine et les solutés. Chacune de ses quatre catégories induit certaines propriétés mécaniques. En effet, le ratio de la masse de collagène par rapport à la masse de la matrice extracellulaire, permet de qualifier un tissu comme dense ou lâche ; un ratio élevé indique que le tissu est dense. Aussi, sa répartition et sa dispersion dans le tissu détermine si le tissu est régulier ou irrégulier ; régulier si les fibres de collagène possèdent une direction privilégiée. Les types les plus connus et étudiés dans les tissus denses sont les collagènes de types : I, II, III et IV. Les trois premiers forment des fibrilles et des bandes de fibres selon des directions privilégiées, alors que le type IV forme des réseaux de fibres en feuilles. Le type I est le plus résistant à l'extension parmi tous les autres types de collagène. Bien que le type II présente des fibres moins épaisses que celles du type I, il accomplit la même fonction mécanique. Le type III remplace souvent le type I dans les tissus embryonnaires. Il est présent surtout dans les tissus souples élastiques comme les vaisseaux sanguins et la peau. Le collagène de type IV forme les membranes basales et entourent les cellules musculaires lisses comme dans les vaisseaux sanguins. Les fibrilles de collagène sont inélastiques et possèdent un comportement passif en compression.

Le protéoglycane est une macromolécule occupant un grand volume dans l'espace extracellulaire. Il interconnecte avec les composantes de la matrice

extracellulaire, particulièrement, avec les fibrilles de collagène. Il retient les solutés dans sa matrice et l'immobilise. Son comportement est similaire à un gel hydraté. Cependant, les solutés sont mobiles durant un régime transitoire de chargement mécanique. Ainsi le tissu assure une fonction de transport (circulation des solutés à travers le tissu) des fluides interstitiels. Dans le cartilage, il a le rôle d'un amortisseur de choc. Son comportement mécanique est viscoélastique renforçant la matrice non-collagèneuse.

L'élastine est une protéine hautement hydrophobe et élastique. Elle forme les tissus élastiques comme les poumons, la peau et les vaisseaux sanguins. Avec les fibres de collagène, elle forme un réseau élastique renforcé. Présente sous forme réticulée ou de bobinage, l'élastine est très extensible et son comportement est élastique.

## 1.6 Mécanique des tissus souples

Nous limitons notre travail aux matériaux *pré-conditionnés* pour lesquels les effets typiques d'adoucissement, qui se produisent pendant les premiers cycles de chargement, ne sont plus évidents. En général, seule la réponse mécanique de matériaux biologiques pré-conditionnés est publiée. Le pré-conditionnement du matériau est un processus mécanique de chargement et de déchargement qui prend fin une fois que la courbe contraintes-déformations du matériau devient répétitive. Après préconditionnement, le matériau est supposé manifester un comportement identique à un matériau *in vivo*. Pour un matériau préconditionné, on distingue, selon l'hystérésis de chargement-déchargement, deux comportements : (parfaitement) élastique ou viscoélastique. Les deux comportements sont modélisés en utilisant la théorie de l'hyperélasticité selon le principe de la pseudo-élasticité [54, section 7.6] [55]. On admet que l'hystérésis associé est relativement insensible à la vitesse de déformation sur plusieurs décades temporelles. Cependant cette hypothèse n'est pas vérifiée tant qu'un test fréquentiel complet n'a pas été réalisé afin de caractériser la réponse cyclique du tissu (voir par exemple Haslach [73]).

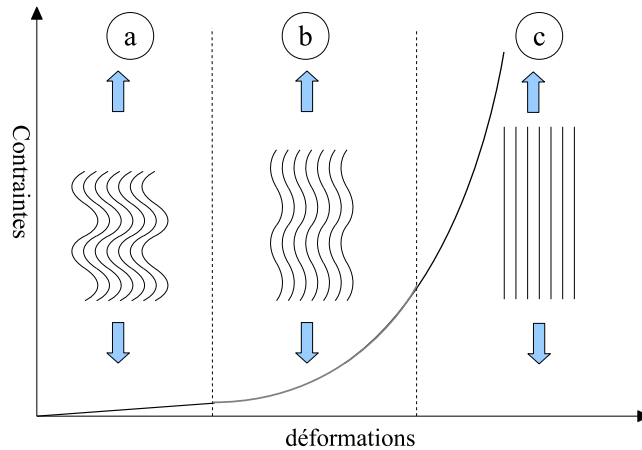


FIGURE 1.7: Extensions d'un tissu fibreux ; contraintes-déformations.

Afin de comprendre la mécanique de déformation d'un tissu en extension, il faut observer comment chaque niveau hiérarchique contribue à sa réponse. En effet, l'étude portant sur le collagène fibrillaire montre que l'extension des fibrilles contribue à 40% de l'extension totale du tissu [50]. En conséquence, d'autres éléments constitutifs du tissu jouent un rôle décisif durant son extension [129]. En effet, au niveau nano-moléculaire, les molécules de collagène se déforment en transmettant les efforts par la voie des liaisons intermoléculaires. La fibrille, formée par un ensemble de molécule, se déforme avec une augmentation de sa périodicité de striation qui devient de l'ordre de 68.4 nm pour des chargements de basse pression [48, 112]. Il est estimé que la longueur de la fibrille augmente de 100  $\mu\text{m}$ , ce qui est équivalent à une déformation de 2 – 5% (réversible) du tissu [33, 147]. Cette augmentation de longueur et de périodicité revient à la récupération de frisage (ondulation) de la fibrille qui n'est plus observable. C'est la phase (a) de la FIGURE 1.7. Elle est connue sous la terminologie anglaise de « toe zone ». Elle présente une relation linéaire de contraintes-déformations. Ensuite, la zone (b)-FIGURE 1.7 représentent le dénouement des crosslinks. En observant un glissement entre les fibrilles du même tissu, les molécules du crosslink –les protéoglycanes– s'orientent selon la direction du chargement puis s'étirent. Ils sont la cause de cette résilience du tissu représentée par la partie (b) ou aussi « heel zone ».

Elle est considérée comme une transition entre la réversibilité de la déformation du tissu et de l'étirement des fibrilles avec leurs inter-connections. Ainsi dans la partie (c), les inter-connections moléculaires collagèneuses sont en extension et les fibrilles manifestent un glissement de l'une par rapport à l'autre sollicitant le réseau gélatineux de la matrice [129]. Par conséquent, les crosslinks sont essentiels à la rigidité de la structure du tissu. Leur absence fait chuter sa résistance à la rupture ainsi que sa résilience mais accroît son comportement de fluage [9, 97]. La Figure 1.8 résume les théories reposant sur la déformation moléculaire et le glissement inter-fibrillaire contrôlé par les protéoglycanes.

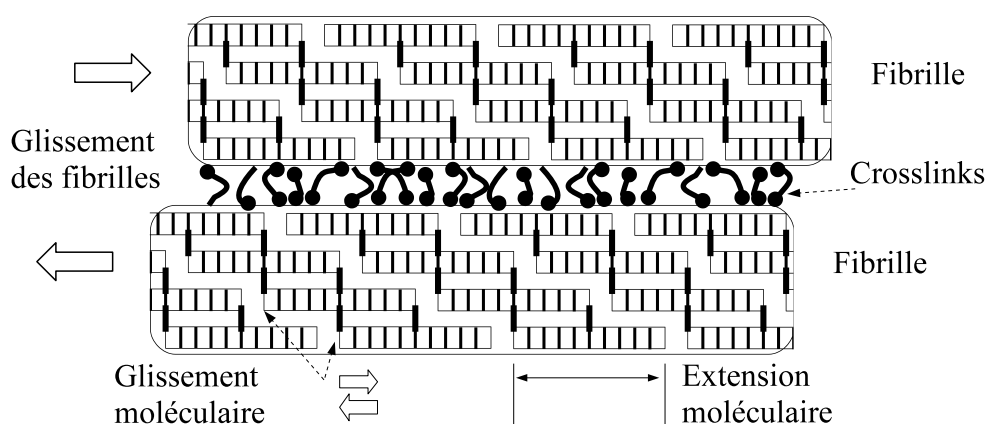


FIGURE 1.8: Les différents mécanismes de déformations observés au niveau moléculaire et fibrillaire.

Cependant, la relation entre les fibres et la matrice reste floue. La composition précise et l'organisation des composantes de la matrice non-collagèneuse sont méconnues. En effet, la théorie du glissement des fibrilles est un point de désaccord parmi les scientifiques. L'étude récente menée par Provenzano et Vanderby Jr. [128] montre que, pour les ligaments et les tendons, la fibrille s'étale sur toute la longueur du tissu. Par conséquent, les charges mécaniques sont directement transmises du muscle à l'os ou d'un côté de l'articulation à l'autre à travers la fibre uniquement. Le manque de protéoglycanes ne fait pas diminuer les propriétés élastiques du tissu comme la

résistance à la rupture. Cependant, le tissu présentant un manque de décorine est plus sensible à la vitesse de déformation qu'un tissu normal. Cette sensibilité est expliquée par le fait que le manque de décorine baisse le niveau d'eau et des solutés retenus par la matrice non-collagèneuse du tissu, modifiant ainsi le facteur d'amortissement du tissu. Un essai sur un tendon où 90% des GAG ont été détruites, révèle que sa résistance à la rupture n'a pas diminué [128, 148]. Un autre débat en cours concerne la structure du cœur [58, 59], en particulier, la microstructure anisotrope cardiaque. Une première approche décrit le cœur comme un seul muscle enroulé dans une configuration hélicoïdale, tandis qu'une deuxième approche considère le cœur comme un milieu continu composé de plusieurs lamelles. Cette dernière décrit le tissu myocardique comme des lamelles contenant, chacune, des fibres musculaires interconnectées latéralement par des fibres de collagène. Identiquement au réseau collagènes-protéoglycanes (Figure 1.8), le tissu myocardique présente un réseau *fibres musculaires-collagènes*. Donc, en considérant l'approche qui soutient les feuilles en lamelle formant le tissu myocardique, la résistance à l'extension du tissu repose sur le principe du glissement inter-fibrillaire comme décrit dans la section 1.3. En partant de ce principe, les fibres musculaires sous extension glissent l'une par rapport à l'autre. Par la suite, leurs interconnexions latérales de fibres de collagène s'orientent selon la direction des fibres musculaires en s'étirant [80]. Alors qu'en considérant le cœur comme un seul muscle, le glissement inter-fibrillaire (fibres musculaires) est négligé. Donc les crosslinks entre les fibrilles ne sont pas actives mécaniquement. En d'autre terme, l'interaction entre le collagène et la matrice non-collagèneuse est absente.

Classiquement, la théorie de glissement de fibrilles est largement utilisée pour la modélisation des tissus biologiques souples. En effet, cette théorie permet de modéliser l'éventuel cisaillement entre les fibres de collagène et la matrice et/ou l'interaction qui a lieu probablement entre les trousseaux de fibres disposés selon deux ou plusieurs directions privilégiées. Donc, la théorie de glissement favorise l'utilisation de la théorie de fibres renforcées de Spencer [155] afin de modéliser le tissu biologique fibreux.

## 1.7 Le disque intervertébral

**La colonne vertébrale :** La colonne vertébrale humaine se compose d'un ensemble de vertèbres qui sont séparées les unes des autres par des disques intervertébraux. De plus, elle est entourée par des ligaments et des muscles. La principale fonction mécanique de la colonne vertébrale est de soutenir le haut du corps et de transmettre le rapport poids/force aux jambes. Les disques, qui représentent environ entre un quart et un tiers de la longueur totale de la colonne vertébrale, permettent des déformations de la colonne vertébrale. Ils se comportent comme des absorbeurs d'énergie et redistribuent les forces qui agissent principalement selon l'axe vertical de la colonne vertébrale et uniformément dans toutes les directions.

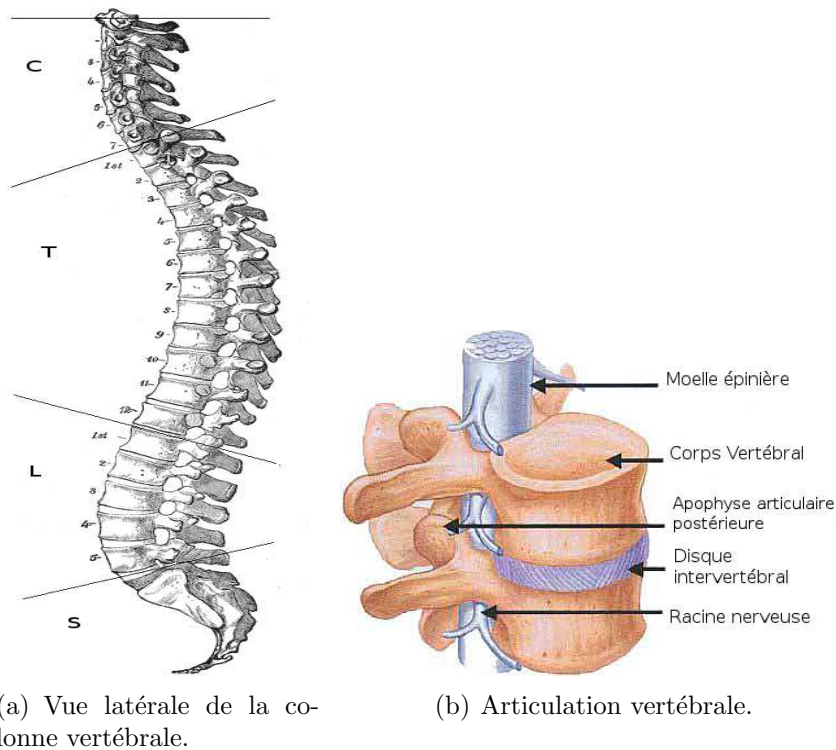


FIGURE 1.9: C : vertèbres cervicales, T : vertèbres dorsales (ou thoraciques), L : vertèbres lombaires, S : vertèbres sacrées. Le coccyx est la partie inférieure du sacrum.

La colonne vertébrale est formée par 33 vertèbres :

- rachis cervical (7 vertèbres cervicales au niveau du cou)
- rachis dorsal (12 vertèbres dorsales situées derrière le thorax)
- rachis lombaire (5 vertèbres dorsales derrière l'abdomen)
- sacrum (5 vertèbres soudées au niveau du bassin)
- coccyx (4 vertèbres soudées)

Les vertèbres cervicales, thoraciques et lombaires restent distinctes et séparées les unes des autres tout au long de la vie. Elles sont considérées comme des vertèbres mobiles et sont séparées les unes des autres par des disques intervertébraux. En revanche, les vertèbres sacrées et coccygiennes sont fusionnées (unies) les unes avec les autres pour former deux os, le sacrum et le coccyx (Figure 1.9(a)).

### 1.7.1 Composition du disque

La région du bas du dos de la colonne vertébrale, connue sous le nom de région lombaire, est soumise à la plupart de la charge mécanique qui peut causer des douleurs et la dégénérescence discale. Les vertèbres de cette zone sont labellisées successivement par  $L_1, L_2, \dots, L_5$ . Chaque disque est désigné par les vertèbres entre lesquelles il est compris. Par exemple le disque  $L_4 - L_5$  est compris entre la vertèbre  $L_4$  et la vertèbre  $L_5$ . Le disque intervertébral est le plus grand tissu du corps avasculaire. C'est à dire, il n'est pas nourri par des vaisseaux sanguins. Par conséquent, il est le siège d'un transport fluide nutritif qui le traverse en diffusant à travers ses parois. Le disque intervertébral contient trois domaines :

- le nucleus pulposus
- l'annulus fibrosus
- les plateaux cartilagineux

**L'annulus fibrosus :** C'est une paroi fibreuse formée par des lamelles et entourant la partie centrale gélatineuse du disque, le nucleus pulposus. L'anneau fibreux est divisé en deux zones : l'anneau extérieur et l'anneau intérieur

[20]. L'anneau fibreux est formé par une série de 15 à 25 lamelles<sup>2</sup> complètes concentriques qui l'encerclent. De plus, l'anneau fibreux contient un nombre important de lamelles incomplètes (au moins 40% dans un secteur de 20°). L'anneau extérieur est caractérisé par une grande densité de trousseaux de fibres contrairement à l'anneau interne qui perd cette caractéristique au fur et à mesure qu'on se rapproche du nucleus pulposus. La direction des trousseaux est alternée d'une lamelle à l'autre. Par exemple, si dans une lamelle  $i$  la direction privilégiée des trousseaux de fibres est de  $+\alpha$ , alors dans les lamelles  $i+1$  et  $i-1$  on trouve des trousseaux orientés selon une direction de  $-\alpha$  [106]. Les premières études sur les fibres de chaque lamelle ont relevé une inclinaison de  $\alpha = 30^\circ$  [56]. Selon l'étude détaillée de Marchand et Ahmed [106] l'angle  $\alpha$  ne reste pas constant d'une lamelle à l'autre et varie aussi selon la région du disque (région postérieure, antérieure ou latérale ; voir Figure 1.10). L'inclinaison des fibres change selon le chargement mécanique. Par exemple, pour une flexion de  $8^\circ$ , une rotation de l'angle  $\alpha$  de  $3$  à  $4^\circ$  vers la direction axiale a été repérée dans la zone postérieure du disque [19].

L'anneau extérieur fibreux du disque est attaché au corps vertébral. Le collagène représente 40 à 60% du poids sec de l'anneau extérieur et 25 à 40% de celui de l'anneau intérieur. Les types de collagène I et II sont dominants. L'anneau extérieur est formé d'environ 95% de fibres de collagène de type I. Ce pourcentage décroît graduellement pour atteindre une valeur proche de 5% dans le nucleus pulposus. Pour le collagène de type II, ce pourcentage de fibres croît de 5 à 95% quand on se rapproche de l'anneau intérieur. Les protéoglycanes, principalement l'aggrécane, représentent le deuxième plus grand constituant du disque en termes de poids sec après le collagène. Ils constituent 5-8% de l'anneau extérieur et 11 à 20% de l'anneau intérieur. Un gradient croissant de la concentration en protéoglycane existe à partir de la périphérie de l'anneau fibreux jusqu'à la zone de transition avec le nucleus pulposus [23, 153].

---

2. Une lamelle est définie comme une couche de l'anneau fibreux du disque dans laquelle les trousseaux de fibres de collagène, noyés dans une matrice –principalement de protéoglycane– sont orientées selon une seule direction privilégiée.



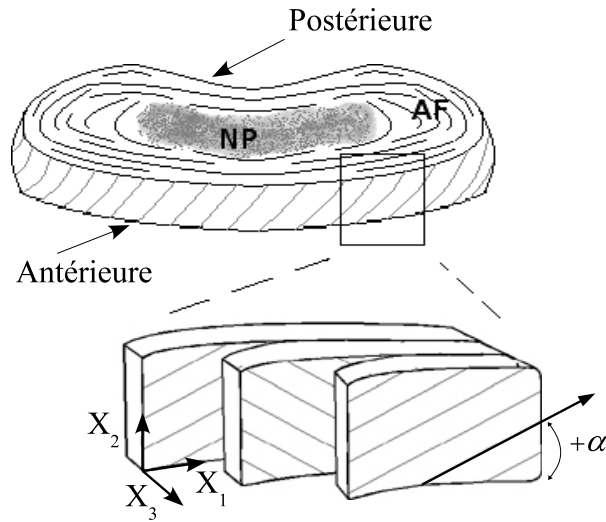


FIGURE 1.10: Schéma du disque intervertébral.

AF : anneau fibreux, NP : nucleus pulposus.

$X_1$  : direction circonférentielle (tangentielle).

$X_2$  : direction axiale du disque.

$X_3$  : direction radiale.

$\alpha$  est l'angle phénoménologique qui caractérise l'inclinaison des fibres par rapport à la direction circonférentielle  $X_1$ .

**La composition cellulaire :** L'étude biochimique du disque intervertébral sain permet de comprendre certaines pathologies comme la dégénérescence discale qui est accompagnée par un changement de la structure cellulaire et de la matrice extracellulaire du disque [24]. Les cellules de l'anneau fibreux, comme pour un tissu conjonctif, possèdent une forme spécifique qui dépend de la fonction du tissu. Ainsi la forme de la cellule a été corrélée avec la fonction mécanique du tissu [60, 108]. Dans le disque intervertébral, la forme des cellules varie selon la direction radiale du disque. On trouve, dans l'annulus extérieur, des cellules allongées orientées selon la direction privilégiée des fibres de collagène. Cette caractéristique des tissus permet une bonne résistance à l'extension. La forme des cellules tend à devenir sphérique au fur et à mesure qu'on se rapproche du nucleus qui subit une pression hydrostatique [20].

**Le nucleus pulposus :** Le noyau est situé au centre du disque. Il occupe 25 à 50% de l'aire de la section transversale. Il est composé d'un réseau irrégulier de fibres de collagène, noyées dans une matrice de protéoglycanes formant un gel granulaire avec de l'eau qui compose 70-90% de son poids total [94, 120, 153]. Les cellules du nucleus sont généralement grandes et rondes de type chondrocytes (des fibroblastes) chez les adultes. Elles produisent essentiellement du collagène de type II qui joue, en rentrant en interaction avec le protéoglycane et l'eau interstitielle, un rôle majeur pour les propriétés mécaniques statiques et dynamiques du disque [105].

**Les plateaux cartilagineux :** Ils possèdent une épaisseur d'environ 0.6-1 mm et sont supposés être collés au corps vertébral. Les plateaux cartilagineux forment une zone de transition entre le tissu discal et les corps vertébraux osseux. Leur structure poreuse favorise les échanges fluidiques qui représentent la source de nutrition première du disque intervertébral [5, 24].

**Composition radiale du tissu discal :** La structure trans-lamellaire discale est caractérisée par des ponts fibreux. Il est très probable que les ponts contribuent à la réponse mécanique radiale discale. De même, le rôle des fibres d'élastine est susceptible de renforcer la structure radiale du disque en compression. Il a été noté que la dégradation des fibres élastiques fait chuter la résistance à la rupture, la limite élastique, mais, augmente l'extensibilité radiale du disque fibreux. Les ponts fibreux contiennent de la fibre élastique. Cependant, ce sujet est assez méconnu car aucune image de leur microstructure n'a encore été publiée [140, 152, 153].

### 1.7.2 Le rôle mécanique

Sous l'action des charges compressives, il est estimé que le disque  $L_3 - L_4$  supporte une pression de 0.6 du poids de notre corps avec les mains vides et passe à 3.0 lorsqu'on porte un poids de 20 Kg dans les mains. Le rôle du disque intervertébral, notamment le nucleus pulposus, est de résister aux charges compressives et de les distribuer équitablement dans toutes les directions. Cependant, le taux de compression du nucleus est réglé par le protéoglycane

qui définit la porosité de la structure et attire les fluides interstitiels. Quand le nucleus est soumis à une pression supérieure à celle qu'il peut supporter, le fluide est expulsé, ce qui entraîne l'accroissement de la concentration des molécules de protéoglycane dans le disque. Étant chargées négativement, les molécules de protéoglycane engendrent une augmentation de la pression osmotique qui tend à conserver le fluide au sein du disque. Ce transport de fluide prend fin lorsque l'équilibre est atteint entre la pression osmotique et la pression externe appliquée sur le disque. Le disque intervertébral montre un comportement viscoélastique. Cependant, cette réponse du tissu dû à la pression osmotique est considérée comme active vu qu'elle est déclenchée par un potentiel électrique. Dans ce mémoire, l'étude ne porte que sur la réponse passive du tissu décrite uniquement par le comportement du collagène et de la matrice non-collagèneuse.

L'anneau fibreux retient l'expansion radiale du nucleus grâce à ses trousseaux de fibres de collagène. En effet, étant sollicité radialement par le nucleus, les lamelles de l'anneau fibreux externe empêchent les déformations vu qu'elles sont reliées au corps vertébral. En outre, elles subissent les efforts engendrés par la torsion ou la flexion de la colonne vertébrale protégeant ainsi les ligaments intervertébraux d'éventuelles déchirures. Donc, la structure de l'anneau extérieur fibreuse, dense et fortement orientée est bien adaptée à la nature des efforts externes qui agissent sur le disque [86, 106].

### 1.7.3 Les propriétés mécaniques

Les propriétés élastiques en extension de l'anneau fibreux ont été largement étudiées [13, 38, 40, 52, 56, 117, 120, 121, 151]. La compréhension du comportement mécanique du disque sain notamment l'anneau fibreux permet de développer des prothèses discales afin de remédier aux pathologies comme la dégénérescence discale [83]. En effet, une ingénierie réussie d'un remplacement du disque intervertébral nécessite la duplication de sa fonction mécanique et de sa forme anatomique. Actuellement, une prothèse discale est un composite formé de lamelles concentriques qui sont renforcées par des fibres avec des directions privilégiées en alternance d'une lamelle à l'autre ; c'est la

partie de la prothèse externe représentant l'anneau fibreux. La partie interne est un hydrogel biocompatible représentant le nucleus [115]. Pour développer de telles prothèses, on estime que le module d'Young de l'anneau fibreux suivant la direction de fibres est de une à deux fois supérieur au module d'Young suivant la direction radiale ou axiale du disque [40, 151].

Quant aux mesures expérimentales du coefficient de Poisson, elles manquent de précision. En effet, la littérature (par exemple Alkalay [5]) expose des valeurs nominales du coefficient de poisson qui sont comprises entre 0.4 et 2.32 [165]. Autres mesures faites par Elliott et Setton [40] sur le disque intervertébral, montre que le coefficient de Poisson de l'anneau extérieur diffère de l'intérieur, où on a respectivement 0.6 et 1.6 comme valeurs nominales. Théoriquement, le coefficient de Poisson est compris entre 0 et 0.5, ce qui ne correspond pas totalement aux valeurs mesurées. Cet écart entre le coefficient théorique et mesuré, est rapporté à l'anisotropie et la non linéarité du tissu [5] : le tissu possède une réponse en compression différente de celle en traction en raison du comportement des faisceaux de fibres de collagène qui sont extensibles mais passives pour un chargement compressif. Aujourd'hui, l'estimation expérimentale du coefficient de Poisson reste un sujet ouvert au développement scientifique.

Pour la suite, on suppose que l'anneau fibreux possède une structure lamellaire idéale : toutes les lamelles sont complètes et la densité du trousseaux de fibres est identique dans toutes les lamelles. De plus, on suppose qu'il possède un comportement élastique non-linéaire et anisotrope.

## 1.8 La paroi artérielle

La modélisation de la paroi artérielle demande une certaine connaissance de sa composition, sa morphologie et son histologie. Dans cette partie, on présente des généralités sur la paroi artérielle saine afin d'acquérir une meilleure compréhension de la mécanique de cette structure complexe. Puis, on explique les caractéristiques mécaniques du tissu artériel. Pour plus de détails techniques et d'illustrations de la biomécanique vasculaire, le lecteur peut

consulter les travaux suivants : Fung [54], Humphrey [88], Mescher [109], Thubrikar [163] ou Humphrey [90].

### 1.8.1 Structure artérielle

Le système circulatoire est constitué du cœur (une pompe centrale) et d'une vaste gamme de tubes, les artères, qui transportent le sang du cœur vers la périphérie ainsi que les veines qui transportent le sang de la périphérie vers le cœur. Le sang nourrit les organes à travers un réseau capillaire sanguin. Ainsi le sang est supposé effectuer presque une boucle fermée (voir Figure 1.11). Environ les trois-quart du volume sanguin dans le corps est contenu dans les veines à une basse pression transmurale. Les veines jouent le rôle d'un réservoir de sang. Les artères contiennent le quart restant de volume sanguin mais à une pression transmurale élevée. Ainsi les artères ont une double fonction : elles forment des conduits pour la circulation sanguine et des réservoirs de pression artérielle. De nombreuses études soulignent que les maladies cardiovasculaires peuvent être déclenchées ou aggravées par des stimuli mécaniques, tels que les contraintes transmurales et l'étirement qui résultent de la pression artérielle, ou la contrainte de cisaillement résultant de l'écoulement du sang. En outre, grâce à l'action de pompage du cœur, la pression sanguine et la circulation sanguine sont pulsatiles.

Dans la section transversale, l'artère a un profil circulaire et généralement une épaisseur uniforme (voir Figure 1.11). Les principales composantes de la paroi du vaisseau sont l'endothélium, les cellules musculaires lisses, le tissu élastique, le collagène et le tissu conjonctif. La paroi des artères et des veines se compose de trois couches concentriques laissant une ouverture centrale pour la circulation sanguine. De l'intérieur vers l'extérieur, on distingue : l'intima, la media et l'adventitia. Pour les artères, l'ouverture est étroite et la média est la couche la plus épaisse. Alors que pour les veines, l'adventitia représente la couche la plus épaisse et l'intima est munie de valves qui fonctionnent comme un clapet anti-retour du sang (Figure 1.11). D'autres composantes ont un rôle uniquement physiologique comme le vasa vasorum :

c'est l'ensemble des artérioles (des artères de très faibles diamètres), des capillaires et des veinules (petites veines). Le vasa vasorum assure la nutrition, notamment l'apport de l'oxygène aux couches distantes des ouvertures.

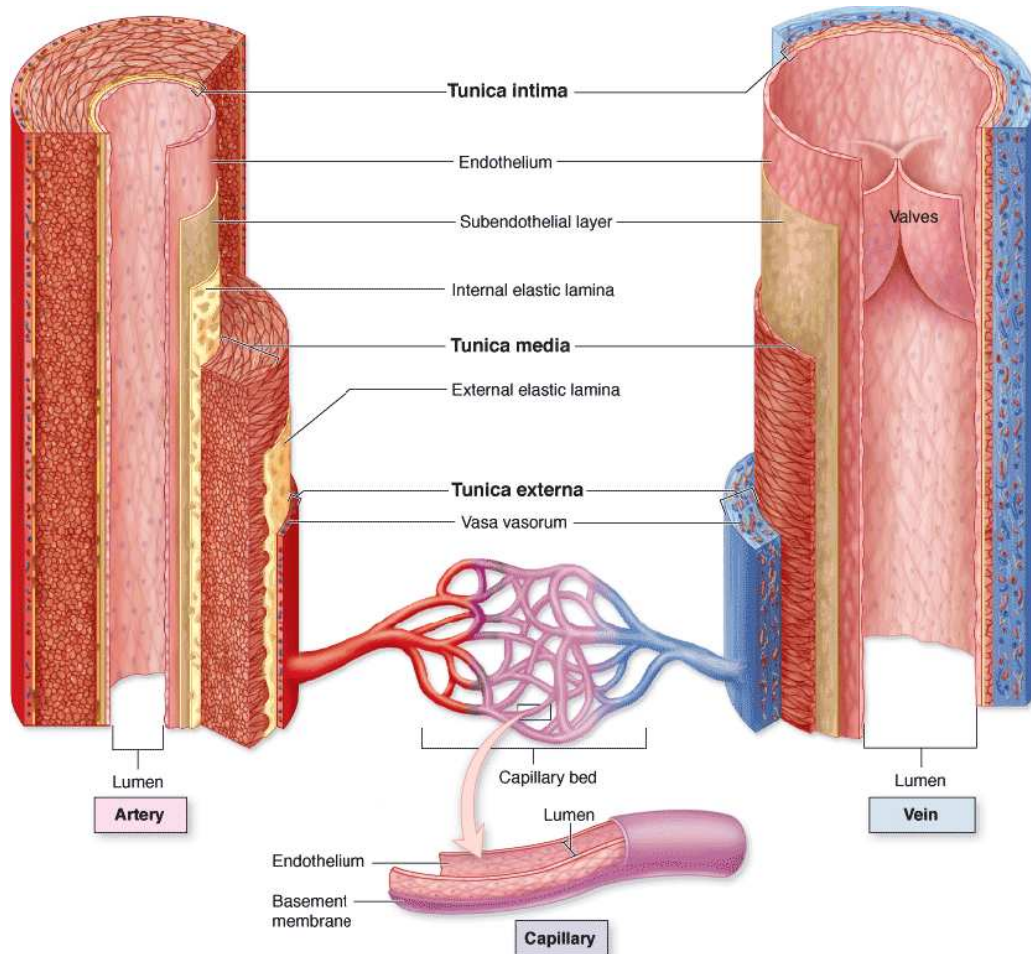


FIGURE 1.11: Les parois des artères, veines et capillaires ; adaptée de [109, chapitre 11].

Les artères montrent une grande variété de diamètres. On peut les classer sous deux types : élastiques et musculaires. Les artères élastiques comme l'aorte, les artères carotides et iliaques sont situées à proximité du cœur (artères proximales). Elles ont relativement de grands diamètres et peuvent être considérées comme des structures élastiques. Les artères musculaires (artères distales) telles que les artères fémorales et cérébrales sont plus petites

et peuvent être considérées comme des structures viscoélastiques. Les petites artères affichent généralement un comportement viscoélastique plus prononcé que les artères de grand diamètre. Cette viscosité est liée aux cellules musculaires lisses relativement abondantes dans les artères de faibles diamètres (Figure 1.12).

On s'intéresse aux artères composées de trois couches distinctes : intima, media et adventitia. La contribution mécanique de l'intima à la réponse artérielle en déformation est négligeable chez les jeunes individus en bonne santé. Toutefois, elle devient significative pour les artères âgées (l'intima devient plus épaisse et plus rigide). En outre, il est important de noter que des changements pathologiques des composantes intimes (athérosclérose) sont associés à des modifications importantes des propriétés mécaniques des parois artérielles, qui diffèrent considérablement de celles des artères saines [84].

La media est la couche moyenne qui est séparée de l'intima et de l'adventitia par, respectivement, une membrane basale interne (limitante élastique interne) et une membrane basale externe (limitante élastique externe). Contrairement à une artère musculaire, l'artère élastique présente des membranes basales de très faibles épaisseurs. Des fibres élastiques concentriques et des cellules musculaires lisses forment la media. Dans une artère élastique, le motif se compose de lamelles élastiques dont le nombre et l'épaisseur varient le long de l'arbre vasculaire (jusqu'à 60, environ  $15 \mu\text{m}$  d'épaisseur pour l'aorte thoracique ; jusqu'à 30, une épaisseur d'environ  $20 \mu\text{m}$  pour l'aorte abdominale). Chaque unité (lamelle élastique) peut être considérée comme un ensemble de couches de cellules musculaires lisses séparées par  $3 \mu\text{m}$  d'épaisseur de feuilles de fibres élastiques. Les trousseaux de fibres courtes de collagène sont tissés dans les feuilles d'élastine. Le collagène présent est de type III réticulé et de type I en faibles proportions. Les trousseaux de collagènes sont disposés, tout comme les cellules musculaires lisses, en hélice le long de l'artère avec une inclinaison selon la direction circonférentielle de l'artère. On trouve aussi des protéoglycanes et des glycoprotéines. L'élastine est la fibre la plus dominante dans cette couche. En passant des artères élastiques (Figure 1.12(a)) aux musculaires (Figure 1.12(b)), les unités formant la media s'épaississent

et les cellules musculaires lisses deviennent les principales constituantes de cette couche : la proportion d'élastine diminue ainsi que celle de collagène.

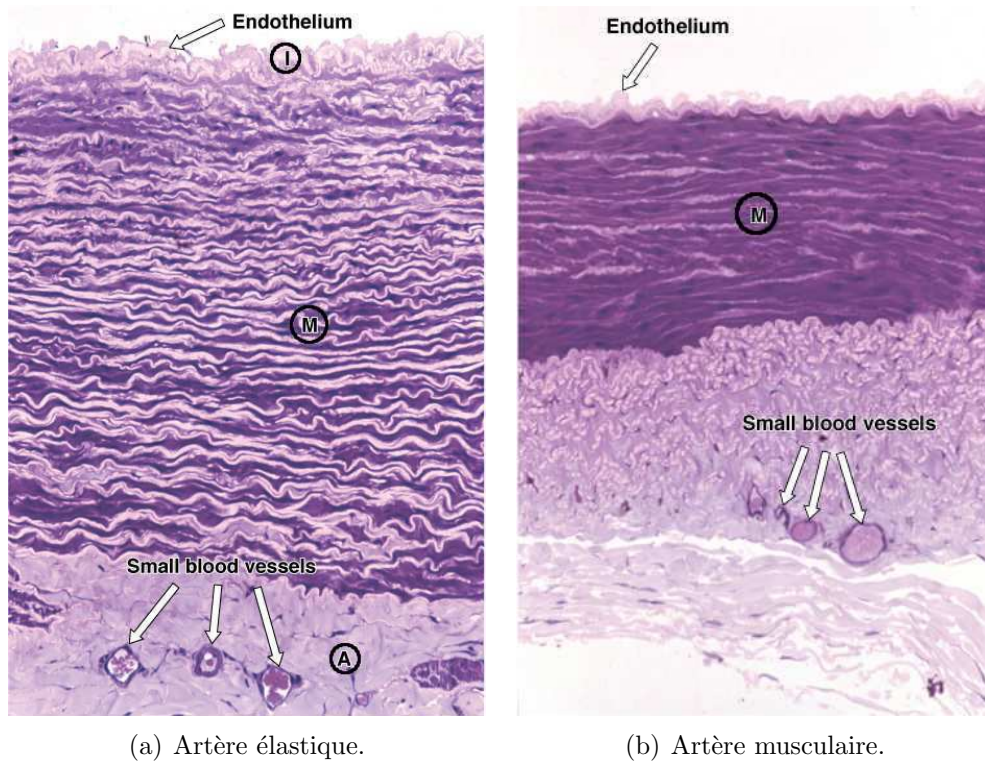


FIGURE 1.12: Artère élastique vs Artère musculaire [109, chapitre 11]. (I) : couche intima de faible épaisseur. (A) : couche adventitia contenant les veinules du vasa vasorum. (a) : Aorte élastique montrant une couche media (M) épaisse avec un réseau dense de lamelles élastiques. L'artère se dilate sous la pression pulsatile réduisant la pression transmurale et favorisant la circulation sanguine. (b) : Artère de diamètre moyen de type musculaire montrant dans sa coupe transversale une media avec une forte présence de cellules musculaires lisses.

Enfin, l'adventitia représente environ 10% de l'épaisseur de la paroi d'une artère élastique et beaucoup plus dans une artère musculaire. La couche de l'adventitia est essentiellement un réseau dense de fibres de collagène de type I entrecoupées avec des fibroblastes, des fibres élastiques, des nerfs, et du vasa vasorum. Les fibres de collagène dans l'adventitia sont orientées selon



la direction circonférentielle. Avec celles de la media, elles offrent à la paroi artérielle une résistance contre les sur-dilatations artérielles. L'adventitia est presque absente dans les artères cérébrales. Dans les artérioles, les vaisseaux sont réduits à de l'endothélium, une limitante élastique interne et plusieurs couches de muscles lisses.

### 1.8.2 Le rôle mécanique

Pour les jeunes individus en bonne santé, la media (la couche du milieu) et l'adventitia (la couche la plus externe) sont les seules responsables de la résistance de la paroi artérielle en absorbant la plupart des contraintes physiologiques. Pour de petites déformations (pressions physiologiques), c'est surtout la media qui détermine les propriétés de la paroi artérielle. Son réseau interconnecté de fibres de collagène avec des fibres élastiques lui confère une résistance aux charges circonférentielles et longitudinales. De plus, en raison de la forte teneur en cellules musculaires lisses, on suppose qu'elle est principalement responsable du comportement viscoélastique artériel. Une fois le niveau de grandes déformations atteint, l'adventitia –représenté mécaniquement par des trousseaux de fibres de collagène de type I et de fibres élastiques– subit le chargement et retient l'expansion de l'artère. L'adventitia se comporte comme un tube à paroi épaisse qui empêche la rupture ou la sur-extension de l'artère.

Pour chacune de ces deux couches, on trouve des trousseaux de fibres de collagènes de type I qui possèdent deux directions privilégiées. Les directions sont symétriquement disposées de part et d'autre de l'axe circonférentiel de l'artère avec une certaine inclinaison définissant ainsi un angle phénoménologique. Cette configuration anisotrope permet de résister aux déformations pulsatiles de l'artère dont l'amplitude maximale est suivant la direction circonférentielle. La matrice non-collagèneuse forme la substance fondamentale amorphe et enveloppe les fibres de collagène. Elle se comporte comme un matériau isotrope très élastique permettant de réduire la pression transmurale durant le systole et de maintenir un bon débit sanguin durant la diastole. Le

modèle mécanique équivalent de l'artère élastique est un multicouche composite renforcé par des fibres croisées de collagène. Les premiers travaux de modélisation de l'anisotropie artérielle considère la paroi artérielle comme un cylindre orthotrope [78, 168].

## 1.9 Synthèse

Dans cette partie, on a présenté les tissus biologiques souples sains dans le but de comprendre leur comportement mécanique passif en insistant sur le tissu fibreux du disque intervertébral et de la paroi artérielle. Pour modéliser ces tissus, il est essentiel d'étudier leur anatomie, morphologie, histologie ainsi que la chimie du tissu. L'histologie montre que l'élément de base structurale de ces tissus fibreux est la matrice extracellulaire. Elle est formée par des fibres de collagène, de l'élastine, des protéoglycanes et des solutés. Ces tissus sont denses et réguliers. Ils sont caractérisés par un comportement de base qui est élastique, non-linéaire et anisotrope. La matrice non-collagèneuse possède une résilience mécanique élevée qui se déforme en cas de petites déformations. Une fois que le régime de grandes déformations débute, les fibres de collagènes commencent à s'étirer en durcissant, ce qui protège le tissu contre les fortes pressions qui peuvent provoquer sa rupture. Ce durcissement des fibres de collagène caractérise le tissu par une relation de contraintes-déformations de la forme d'une exponentielle, donc non-linéaire. Selon la proportion de protéoglycanes et de solutés présente dans le tissu, sa viscosité est plus ou moins prononcée. La viscoélasticité et l'élasticité des tissus ne sont que sa réponse passive engendrée par la déformation du collagène et de l'élastine.

Les tissus sont généralement formés par des couches et des lamelles de composition différente et en alternance. C'est le cas de l'anneau fibreux du disque intervertébral et de la paroi artérielle. Les couches media et adventitia de la paroi artérielle sont des composites complexes avec une substance de base constituée principalement d'élastine et de fibres de collagènes disposées suivant deux directions privilégiées. De même, l'anneau fibreux est formé par de nombreuses lamelles qui contiennent des fibres de collagènes selon une seule

direction privilégiée par lamelle. Cependant, la présence des mécanismes d'interaction entre les couches et les lamelles n'a pas été encore clarifiée. En effet, à l'échelle nano-moléculaire, il reste beaucoup à découvrir avec les avancées techniques expérimentales. La morphologie, la chimie et l'histologie des tissus ne sont pas encore complètement connues. Ainsi, les hypothèses de modélisation des tissus biologiques attendent que les théories dont elles sont inspirées, comme le glissement fibrillaire et la formation des trousseaux de fibres, soient validées.

Aujourd'hui, une très grande variété de lois constitutives qui modélisent ces tissus existe (par exemple, [39, 79, 80, 90, 123]). Chaque loi est caractérisée par un nombre de paramètres à déterminer et qui reflètent la composition structurale du tissu en reliant la structure histologique à sa fonction mécanique. Ainsi, ces paramètres matériau doivent être déterminés à partir de tests expérimentaux relativement simples afin de pouvoir obtenir un champs de déformations homogènes facilement exploitables. La suite de ce mémoire présente les outils de modélisations mathématiques des tissus, particulièrement la théorie de l'hyperélasticité, ainsi que les méthodes de détermination des paramètres matériau qui sont associés aux modèles.

---

# Mécanique des milieux continus – Hyperélasticité

---

Il s'agit ici de rappeler quelques éléments fondamentaux de la mécanique des milieux continus, de l'hyperélasticité isotrope et anisotrope et des lois de comportement standards. Ces éléments seront utiles à la bonne compréhension des chapitres qui vont suivre et qui traiteront de l'identification proprement dite. Les parties 2.1 à 2.4 qui suivent ont été rédigées en se basant sur ces trois principales références : [51, 75, 159].

## 2.1 Cinématique

On considère un solide qui ne subit que des déformations statiques. Dans sa configuration non-déformée  $\Omega_0$ , dite *configuration de référence* (ou encore configuration Lagrangienne), une particule matérielle de ce solide sera identifiée par un vecteur de position  $\mathbf{X}$  à un temps  $t_0$ . A un temps  $t$ , le solide est en mouvement dans la *configuration déformée*  $\Omega$  (ou encore configuration Eulérienne). Sa nouvelle position est repérée par un vecteur de position  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ . Dans la suite de ce chapitre, on omettra le temps dans les notations puisque l'on s'intéresse au régime statique. De ce fait, la position de chaque particule de  $\Omega_0$  est reliée à sa position dans  $\Omega$  par une relation bijective  $\phi$  :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}) \tag{2.1}$$

Le déplacement de matière est le vecteur qui relie la position initiale à la position courante d'une particule :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \quad (2.2)$$

On définit par  $\mathbf{F} = \partial \boldsymbol{x} / \partial \boldsymbol{X}$  le tenseur gradient de la déformation. Généralement,  $\mathbf{F}$  est non-homogène, ce qui signifie que  $\mathbf{F}$  dépend de  $\boldsymbol{X}$ . Le déterminant de  $\mathbf{F}$ , très souvent noté  $J$ , représente le déterminant de la matrice jacobienne. Il s'exprime comme le rapport des volumes infinitésimaux  $d\boldsymbol{v}$  et  $dV_0$ , en configuration respectivement déformée et non déformée. Il est strictement positif comme rapport de deux volumes :

$$\det(\mathbf{F}) = J = \frac{d\boldsymbol{v}}{dV_0} > 0 \quad (2.3)$$

Pour un mouvement isochore, le volume reste constant au cours de la déformation et le déterminant de  $\mathbf{F}$  vaut 1.

Le tenseur de gradient de la déformation donne des informations sur la déformation (longueur, angle) et sur la rotation du corps rigide pour un point matériel du solide. Le théorème de décomposition polaire permet l'écriture de  $\mathbf{F}$  en un produit d'un tenseur orthogonal par un tenseur symétrique défini positif  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ , où  $\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal et  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  sont des tenseurs symétriques définis positifs. De plus, ce théorème permet de montrer que  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , appelé le tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite, est indépendant du mouvement de corps rigide puisqu'il résulte de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (2.4)$$

On note par  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  le tenseur gauche de dilatations de Cauchy-Green. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange est défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{I}$  représente la matrice d'identité dans  $\mathbb{R}^3$ . Il reste à préciser que la position des points matériels et de ses vecteurs associés dans la configuration déformée,

sont reliés à la configuration de référence par  $\mathbf{F}$ . L'élément de surface  $da \subset \Omega$  de normale extérieure  $\mathbf{n}$  est relié à  $dA \subset \Omega_0$  de normale extérieure  $\mathbf{N}$  par la formule de *Nanson* (voir FIGURE 2.1) :

$$\mathbf{n}da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}dA \quad (2.6)$$

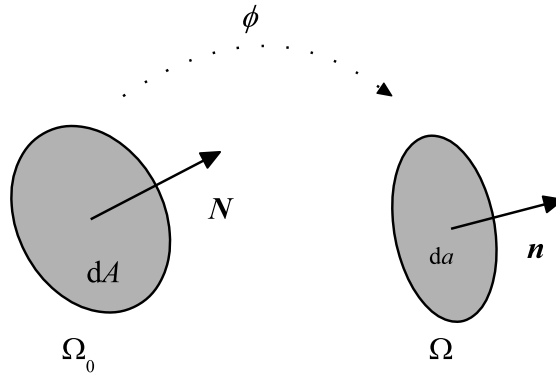


FIGURE 2.1: transformation d'une surface.

## 2.2 Contraintes

La force de contact  $df$  appliquée à  $\partial\Omega_0$ , surface frontière de  $\Omega_0$ , ou à  $\partial\Omega$ , surface frontière de  $\Omega$ , s'écrit :

$$df = \mathbf{t}da = \mathbf{T}dA \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{T}$  sont des répartitions surfaciques d'effort respectivement dans la configuration déformée et non déformée. Ces répartitions s'expriment donc en Pascal et sont communément appelées vecteurs contraintes. Elles dépendent à la fois de la géométrie par l'intermédiaire de la normale extérieure ainsi que de la position spatiale :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}; \mathbf{N}); \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}; \mathbf{n})$$

**Théorème 2.2.1** (de Cauchy). *Cauchy a établi que le vecteur contrainte s'exprime linéairement en fonction de la normale extérieure<sup>1</sup> :*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{N} \quad (2.9)$$

$\mathbf{t}$  et  $\mathbf{T}$  sont donc des applications linéaires respectivement de  $\mathbf{n}$  et de  $\mathbf{N}$ . Ces applications linéaires peuvent être représentées dans la base cartésienne par des matrices qui seront notées  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{P}$ .  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy (en anglais : *true stress tensor*) et  $\mathbf{P}$  s'appelle le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (en anglais : *engineering stress tensor* ou *conventional stress tensor*).

On peut facilement établir la relation entre  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{P}$  à partir du théorème 2.2.1 et de la formule (2.6) :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \quad (2.10)$$

L'équilibre des moments montre que le tenseur d'ordre deux  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ . Ceci implique, en considérant l'équation (2.10), que  $\mathbf{P}$  n'est pas un tenseur symétrique. Ainsi l'introduction du second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ , qui est un tenseur symétrique, s'impose pour la formulation des lois constitutives :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.11)$$

Ce tenseur  $\mathbf{S}$  apparaît naturellement en prenant en compte le premier et le second principe de la thermodynamique. Ces principes sont rappelés dans le paragraphe qui suit.

## 2.3 Lois de conservations

La mécanique des milieux continus est régie par un certain nombre de grands principes appelés lois de conservations [37]. On rappelle ci-après ces lois en coordonnées lagrangiennes : conservation de la masse, conservation de

---

1. On peut trouver une démonstration détaillée de ce théorème dans [37], première partie chapitre 2 section 4 page 41.

la quantité de mouvement, conservation de l'énergie et deuxième loi de la thermodynamique :

$$J - \rho_0/\rho = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{Div}\mathbf{P} + \rho_0\mathbf{f} - \rho_0\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

$$\rho_0\dot{u} - \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0r + \text{Div}\mathbf{Q}_0 = 0 \quad (2.14)$$

$$\dot{\eta} - \frac{r}{T} + \frac{1}{\rho_0}\text{Div}\left(\frac{\mathbf{Q}_0}{T}\right) \geq 0 \quad (2.15)$$

où Div représente l'opérateur divergence :

$$\text{Div}\mathbf{Q}_0 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (Q_0)_i}{\partial X_i}, \quad \text{Div}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{1j}}{\partial X_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{2j}}{\partial X_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{3j}}{\partial X_j} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Le point surmontant une quantité représente la dérivée de cette quantité par rapport au temps,  $(\bullet : \bullet)$  symbolise le produit doublement contracté, l'indice  $(\bullet)_0$  fait référence à la configuration non déformée de la matière,  $\rho_0$  et  $\rho$  sont respectivement la masse volumique dans la configuration non déformée et courante,  $\mathbf{f}$  est une force volumique,  $\mathbf{a}$  est l'accélération,  $\dot{u}$  est la variation de l'énergie interne par unité de masse,  $\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})$  est le taux des déformations,  $r$  est une production volumique interne de chaleur (en Watt par mètre cube),  $\mathbf{Q}_0$  est le vecteur flux de chaleur (en Watt par mètre carré),  $\dot{\eta}$  est la variation de l'entropie spécifique et  $T$  est la température absolue.

En développant l'opérateur divergence dans (2.15), puis en éliminant  $r$  entre (2.14) et (2.15), on obtient :

$$\rho_0(T\dot{\eta} - \dot{u}) + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{\mathbf{Q}_0}{T} \text{Grad}(T) \geq 0 \quad (2.17)$$



où l'opérateur  $\text{Grad}(T)$  représente le gradient :

$$\text{Grad}(T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial X_1} \\ \frac{\partial T}{\partial X_2} \\ \frac{\partial T}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Quand la température est un paramètre indépendant, il convient d'utiliser le potentiel de Helmholtz (ou l'énergie libre)  $\psi = u - T\eta$ . On obtient alors l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$-\rho_0(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{\mathbf{Q}_0}{T} \text{Grad}(T) \geq 0 \quad (2.19)$$

En introduisant la dépendance de l'énergie libre  $\psi$  par rapport aux déformations  $\mathbf{E}$  et à la température  $T$  ( $\psi = \psi(\mathbf{E}, T)$ ), on effectue une dérivation en chaîne de  $\psi$  dans (2.19) :

$$\left(\mathbf{S} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}\right) : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \left(\eta - \frac{\partial \psi}{\partial T}\right) \dot{T} \geq 0 \quad (2.20)$$

L'inégalité (2.20) étant valable pour n'importe quel champs et n'importe quelle histoire, on en déduit que :

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.21)$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.22)$$

Les deux équations (2.21) et (2.22) caractérisent la loi de comportement d'un matériau thermo-élastique. Dans ce mémoire, on considère une évolution isotherme, ce qui est classique pour des tissus biologiques.  $\psi$  ne dépendra alors que de  $\mathbf{E}$ . Une densité volumique d'énergie de déformation (Watt par mètre cube) définie par  $W(\mathbf{E}) = \rho_0 \psi$  permet d'écrire, à partir de (2.21), l'équation

constitutive définissant les contraintes :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.23)$$

Les contraintes de Cauchy se déduisent des équations (2.11) et (2.23) :

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \quad (2.24)$$

## 2.4 Hyperélasticité

On dira qu'un matériau est hyperélastique s'il est caractérisé par une densité d'énergie de déformation scalaire  $W$  conformément à (2.23), ce qui assure une compatibilité avec les deux premiers principes de la thermodynamique. D'un point de vue pratique, l'hyperélasticité caractérise les matériaux pouvant subir des grands déplacements et des grandes déformations dans le cadre de processus réversible. Ces processus n'induisent pas, par exemple, de déformations plastiques permanentes.

Les lois de conservations présentées dans la section ci-dessus sont des conditions nécessaires, mais non suffisantes, afin de pouvoir décrire l'état des contraintes dans un milieu continu. Elles doivent être complétées par des lois physiques qui décrivent la diversité des comportements du matériau. Ces dernières représentent les équations d'état (équations constitutives). Elles établissent la connexion (relation fonctionnelle) entre le champs des variables d'état (déformations, températures, etc) et les sollicitations extérieures (contraintes, flux de chaleurs, etc).

Les relations constitutives découlent de la fonctionnelle  $W$ . Sa forme tient compte des propriétés spécifiques du matériau comme la présence ou non de renforts fibreux. Dans la suite de ce chapitre, on rappelle la notion de matériau isotrope (pas de renfort) puis celle de matériau isotrope transverse qui correspond typiquement au cas de tissu biologique renforcé par des fibres de collagène.

**Matériau isotrope :** Un matériau est qualifié d'isotrope lorsqu'il présente les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. C'est le cas des aciers standards dans le cadre de l'élasticité linéaire ou de la plupart des caoutchoucs et des mousses élastomères en hyperélasticité non-linéaire. En terme de densité d'énergie de déformation  $W(\mathbf{C})$ , cela se traduit par la propriété d'invariance suivante [27] :

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}_3^+ \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{O}_3^+$  représente le groupe des transformations orthogonales à déterminant positif, c'est à dire le groupe des rotations dans  $\mathbb{R}^3$ .

En choisissant la matrice de rotation dans (2.25) de sorte à diagonaliser  $\mathbf{C}$ , on en déduit que  $W$  dépend des trois valeurs propres de  $\mathbf{C}$  encore appelées dilatations principales. Ces trois valeurs propres étant reliées aux trois invariants principaux de  $\mathbf{C}$ , définis par la formule (2.26) ci-après, on en déduit que la densité d'énergie associée à un matériau isotrope est une fonction de ces trois invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  :

$$I_1 = \mathbf{C} : \mathbf{1}, \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\mathbf{C} : \mathbf{1})^2 - (\mathbf{C}^2 : \mathbf{1})], \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (2.26)$$

En utilisant (2.23) et des règles de dérivations standards, on obtient les formules classiques suivantes :

$$\mathbf{s} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{1} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} = \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T} = \text{Cof}(\mathbf{C}) \quad (2.28)$$

où  $\text{Cof}(\bullet)$  représente la matrice des cofacteurs.

La combinaison de (2.27) avec (2.28), utilisées conjointement avec le théorème de Cayley-Hamilton, conduit à la formule qui suit, connue sous le nom de

théorème de représentation [27] :

$$\mathbf{S} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{C} + \alpha_2 \mathbf{C}^2 \quad (2.29)$$

où les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  sont des fonctions scalaires dépendant des trois invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$ .

**Matériau isotrope transverse :** Ainsi que cela a été présenté dans le premier chapitre de ce mémoire, les fibres de collagène jouent un rôle primordial pour de nombreux tissus souples. Cela confère à ces tissus un caractère fondamentalement non isotrope puisque leur comportement diffère selon qu'ils sont sollicités dans le sens des fibres ou perpendiculairement à celles-ci. Les outils mis en place pour l'hyperélasticité isotrope sont alors pour partie inopérants et il convient de considérer des tenseurs additionnels qualifiés de tenseurs structuraux [16, 154, 155, 172]. Par exemple, pour un matériau constitué d'une seule famille de fibres, de direction unitaire  $\mathbf{a}$  dans la configuration de référence  $\Omega_0$ , il a été démontré [155] que ce tenseur était égal au produit tensoriel  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ . De manière plus générale, la relation (2.25) doit être remplacée par :

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{S} \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{S}$  représente le groupe de symétries matérielles.

A partir de (2.30), il a été établi [93, 172] que la densité anisotrope  $W$  peut s'exprimer comme une fonction isotrope à condition de lui adjoindre un tenseur additionnel relié au groupe de symétrie  $\mathbf{S}$ . Dans le cas d'une famille de fibres, ce tenseur additionnel est  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$  :

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) = W(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}_3^+ \quad (2.31)$$

On se ramène ainsi, d'une certaine manière, à la problématique des densités d'énergie isotropes. On en déduit [16] que  $W$  s'exprime comme une fonction de cinq invariants dont trois sont déjà définis par (2.26) et deux sont additionnels

( $I_4$  et  $I_5$ ) et fonction de  $\mathbf{a}$  :

$$I_4 = \mathbf{C} : \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad I_5 = \mathbf{C}^2 : \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad (2.32)$$

$I_4$  est le carré de la dilatation suivant la direction  $\mathbf{a}$  puisque l'on a :

$$I_4 = \langle \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{F} \mathbf{a}, \mathbf{F} \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{F} \mathbf{a}\|^2 \quad (2.33)$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  et  $\|\bullet\|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne.

En dérivant les invariants additionnels  $I_4$  et  $I_5$  par rapport à  $\mathbf{C}$ , on obtient facilement :

$$\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{C} \quad (2.34)$$

En appliquant à nouveau (2.27) on obtient la représentation des contraintes :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \left\{ W_1 \mathbf{I} + W_2 (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + W_3 \text{Cof}(\mathbf{C}) \right. \\ \left. + W_4 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + W_5 [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{C}] \right\} \quad (2.35) \end{aligned}$$

avec  $W_i = \partial W / \partial I_i$  pour  $\{i = 1, 2, \dots, 5\}$ .

En définissant le vecteur unitaire  $\mathbf{d}$  comme l'image de  $\mathbf{a}$  dans la configuration déformée ( $\mathbf{d} = \mathbf{F} \mathbf{a}$ ), le tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , obtenu par substitution de (2.35) dans (2.24) s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left\{ W_1 \mathbf{B} + W_2 (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + W_3 I_3 \mathbf{I} \right. \\ \left. + W_4 \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} + W_5 (\mathbf{d} \otimes \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{B} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \right\} \quad (2.36) \end{aligned}$$

**Remarque** : Lorsque le matériau comprend deux familles de fibres, associées à deux directions privilégiées représentées par deux vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ,

on suit le même raisonnement qu'avec une seule famille de fibres mais en introduisant deux tenseurs structuraux  $W = W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2)$ .

## 2.5 Densité d'énergie de déformation

Ainsi que cela a été expliqué au paragraphe 1.6 (cf. Figure 1.7), la relation entre les contraintes et les déformations pour les tissus souples présente des zones différentes bien caractéristiques. C'est ce qui motive souvent la superposition d'une densité isotrope, suffisante pour représenter le comportement pour des déformations modérées, à une densité anisotrope nécessaire pour modéliser l'allongement des fibres lorsque les déformations sont plus importantes (généralement lorsque l'invariant mixte  $I_4$  est supérieur à 1). On pourra se référer sur cet aspect à Holzapfel *et al.* [78] ainsi qu'à Peyraut *et al.* [126]. Mais d'autres approches, qui consistent à utiliser uniquement des densités isotropes, ont également été proposées dans le passé comme cela a été reporté dans Wu et Yao [168]. Aujourd'hui, la technique consistant à superposer une densité isotrope avec une densité anisotrope est néanmoins la plus répandue. Dans ce paragraphe, sans prétendre à l'exhaustivité, on va passer en revue quelques unes des densités isotropes et anisotropes les plus utilisées en biomécanique.

### 2.5.1 L'hyperélasticité et les tissus souples

Pour modéliser le comportement élastique des tissus souples, la biomécanique exploite la théorie de l'hyperélasticité [14, 53, 65, 168]. Initialement, cette théorie a été développée dans le but de décrire le comportement des élastomères (caoutchouc) isotropes et incompressibles, des mousses isotropes compressibles ainsi que des élastomères renforcés par des fibres [2, 15, 65]. Les premiers modèles qui ont vu le jour en biomécanique utilisaient des lois de comportement isotropes dédiées aux élastomères et renforcées par des fibres [53, 168]. Depuis ces travaux pionniers, basés sur l'observation des déformations, l'utilisation de l'hyperélasticité anisotrope s'est imposée pour modéliser le comportement des tissus souples en biomécanique, notamment dans le cadre des analyses éléments finis. Les modèles isotropes restent néanmoins

souvent utilisés, conjointement avec des modèles anisotropes, afin de représenter le comportement de la matrice [78, 90]. C'est la raison pour laquelle nous débutons ce paragraphe par une revue de modèles isotropes.

On rappelle qu'un matériau isotrope possède une densité d'énergie qui dépend des trois invariants principaux de  $\mathbf{C}$  [27] :  $I_1, I_2$  et  $I_3$ . Parmi les modèles que l'on retrouve dans la littérature, on peut citer le modèle de Mooney-Rivlin [111, 134], récemment utilisé dans le cadre de la simulation biomécanique chirurgicale [28] :

$$W = b_1(I_1 - 3) + b_2(I_2 - 3) \quad (2.37)$$

où  $b_1$  et  $b_2$  sont des paramètres matériau. On note que quand  $b_2 = 0$ , le modèle se réduit à la forme néo-Hookéenne (chapitre 5 dans [51]). La densité d'énergie de déformation de Valanis et Landel [164] permet d'écrire chacun des ces deux modèles, néo-Hookéen et Mooney-Rivlin, sous la forme de densités séparables :

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad (2.38)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les ratios de dilatations principales et  $w$  est une fonction logarithmique arbitraire de densité d'énergie de déformation. Ogden [119] propose un modèle équivalent à (2.37) et à (2.38) sous la forme suivante :

$$W = \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m}{\alpha_m} (\lambda_1^{\alpha_m} + \lambda_2^{\alpha_m} + \lambda_3^{\alpha_m} - 3) \quad (2.39)$$

où  $\mu_m$  et  $\alpha_m$  sont des paramètres matériau et  $n$  est un entier naturel positif. Les paramètres  $\mu_m$  et  $\alpha_m$  doivent vérifier :

$$\sum_{m=1}^n \mu_m \alpha_m = \mu \quad (2.40)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement. Ce modèle est utilisé pour modéliser l'élasticité des tissus souples ayant des propriétés isotropes [150]. Il a la particularité de s'exprimer en fonction des valeurs propres de  $\mathbf{C}$  et non de ses invariants. Cette particularité nécessite des précautions particulières pour

l'implémentation éléments finis, notamment pour traiter les cas de valeurs propres doubles ou triples [125].

Blatz et Ko sont connus d'après leurs célèbres travaux sur les mousses hyperélastiques et compressibles [15]. Sur la base d'observations expérimentales, ils ont proposé la densité d'énergie de déformation suivante :

$$W = \frac{\mu}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2 I_2^{1/2} - 5 \right) \quad (2.41)$$

où  $\mu > 0$  est le module de cisaillement du matériau. Ce modèle est un cas particulier du modèle de Blatz et Ko [15] généralisé qui s'écrit :

$$W = \frac{\mu}{2} f \left( I_1 - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{(1-2\nu)}{\nu} I_3^{-\nu/(1-2\nu)} \right) + \frac{\mu}{2} (1-f) \left( \frac{I_2}{I_3} - 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{(1-2\nu)}{\nu} I_3^{\nu/(1-2\nu)} \right) \quad (2.42)$$

où les constantes  $\mu$ ,  $\nu$  et  $f$  satisfont les inégalités suivantes :

$$\mu > 0, \quad 0 \leq f \leq 1, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2} \quad (2.43)$$

Les constantes  $\mu$  et  $\nu$  représentent respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson et  $f$  le ratio de vide par rapport à la mousse. Ce modèle (2.42) a été largement étudié dans deux cas particuliers :  $f$  égal à 0 ou  $f$  égal à 1 (voir la section 4.8 dans Fu et Ogden [51] et les références qui y sont citées).

Lorsque  $f$  est égal à 0 et  $\nu$  égal à 0.25, ce modèle généralisé se réduit à celui de l'équation (2.41) appelé modèle spécial de Blatz et Ko. Pour un matériau incompressible, (2.42) se simplifie :

$$W = \frac{\mu}{2} f (I_1 - 3) + \frac{\mu}{2} (1-f) (I_2 - 3) \quad (2.44)$$

On retrouve ainsi la même forme que la densité d'énergie de déformation de Mooney-Rivlin pour des matériaux incompressibles.



Taber et Perucchio [160] ont utilisé le modèle de Blatz et Ko généralisé afin de modéliser la réponse isotrope passive et active (croissance en fonction du temps) du cœur embryonnaire. Leur modèle est basé sur une forme exponentielle, l'argument de l'exponentielle étant représenté par le modèle de Blatz et Ko généralisé (2.42). Ce modèle exponentiel sera présenté plus en détail ultérieurement (cf. équation (2.47)).

Une autre famille de modèles hyperélastiques a été développée sur la base de l'observation expérimentale de la relation contraintes-déformations du tissu biologique souple. Les premiers travaux réalisés sur les tissus biologiques étaient conduits par Fung [53] et reposaient sur l'observation de la relation entre les contraintes nominales  $\mathbf{P}$  (sans dimension car normalisée par rapport à une contrainte de référence) et la dilatation uniaxiale  $\lambda$  dans le cadre d'un essai de traction simple. Cette observation a mené à une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{dP}{d\lambda} = c_1 + c_2 P \quad (2.45)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des paramètres adimensionnels. La solution de l'équation différentielle (2.45), sachant que les contraintes sont nulles quand le matériau est au repos, conduit à :

$$P = \frac{c_1}{c_2} \left\{ \exp [c_2(\lambda - 1)] - 1 \right\} \quad (2.46)$$

Cette forme exponentielle est connue sous le nom « densité d'énergie de déformation de *Fung* ». Sous sa forme générale, la densité d'énergie de déformation de Fung s'écrit :

$$W = C (\exp(Q) - 1) \quad (2.47)$$

où  $Q$  est une fonction linéaire de la dilatation du tissu [53]. Un grand nombre de tissus souples, dont, mais pas exclusivement, les tissus artériels [78, 88], se rigidifient fortement pour un niveau de déformation élevé [25, 53, 54, 76]. Ce point a déjà été relevé dans ce manuscrit. Il est illustré par la Figure 1.7. Il explique le succès obtenu par les densités exponentielles de la forme de

l'équation (2.47).

Un des premiers modèles exploitant cette forme exponentielle est celui de Demiray [31] qui a proposé une énergie de déformation isotrope tridimensionnelle impliquant  $I_1$  :

$$W = \frac{\mu}{2\alpha} \{ \exp [\alpha(I_1 - 3)] - 1 \} \quad (2.48)$$

où  $\mu$  et  $\alpha$  sont des constantes du matériau,  $\mu$  représentant le module de cisaillement. Cette loi a été appliquée par Delfino *et al.* [30] dans le contexte des éléments finis.  $Q$  est une fonction polynomiale des invariants principaux de  $\mathbf{C}$  [14, 31] ou des composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange [25, 55, 90].

Quelques années plus tard, Blatz *et al.* [14] généralisent la densité d'énergie de déformation de Valanis et Landel [164] et proposent trois densités d'énergie de déformations qui sont basées sur un choix particulier de  $w$  (formule (2.38)). Une de ces trois densités proposées est identique au modèle de Fung [53]. Elle est connue sous le nom de « Blatz généralisé » (section 7.5 dans [54]) et s'exprime comme :

$$W = C \{ \exp [\alpha(\lambda_i - 1)] - 1 \} \quad (2.49)$$

où  $C$  et  $\alpha$  sont des paramètres matériau. Le modèle de Blatz généralisé est utilisé pour décrire le comportement d'une variété de tissus souples comme celui d'un rein en compression [42] ou, plus récemment, dans le cadre d'une étude comparative, de modèles hyperélastiques [135]). Il a été implémenté dans le logiciel de calcul par éléments finis COSMOS.

### 2.5.2 Le tissu souple renforcé

Les tissus biologiques souples contiennent à l'échelle cellulaire des fibres dont le rôle primordial est de renforcer la structure du tissu pour qu'il résiste aux sollicitations mécaniques (voir le chapitre 1 de ce manuscrit). Cette présence de fibres regroupées en faisceaux influence la réponse du tissu [53, 76, 168] et le rend sensible à la direction du chargement [40]. Il en résulte que le tissu conjonctif dense (Tableau 1.1) possède des propriétés élastiques anisotropes.

**Approche phénoménologique :** Les modèles hyperélastiques basés sur une approche phénoménologique décrivent souvent la relation de contraintes-déformations du tissu biologique avec une fonction exponentielle ou logarithmique. La densité d'énergie de déformation s'exprime directement en fonction des composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange [53]. L'approche structurale, qui sera introduite ultérieurement, se fonde plutôt sur les invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green. Afin de modéliser l'anisotropie du tissu, plusieurs densités d'énergies de déformations de type Fung ont été proposées [25, 26, 31, 55]. Par exemple, Fung *et al.* [55] ont introduit un modèle de déformations en 2-dimensions alors que le modèle de Chuong et Fung [25] modélise les déformations en 3-dimensions. Avec le temps, ces modèles ont été perfectionnés en ajoutant ou en retranchant des termes de la fonction exponentielle de l'énergie de déformation. Finalement (section 7.12.1 dans [54]), Fung a proposé une généralisation de ce modèle :

$$W = C(\exp(Q) - 1)$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 K_{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad (2.50)$$

où  $K_{ijkl}$  sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 incluant 81 paramètres matériau. Classiquement, la propriété d'orthotropie permet de réduire ce nombre à 9 paramètres matériau, l'isotropie transverse à 6 et l'isotropie complète à 2 [75].

Une des formes les plus abouties de cette famille d'énergie de déformations est celle proposée par Humphrey [90] qui modélise un tissu artériel avec un matériau orthotrope :

$$W = C(\exp(Q) - 1)$$

$$Q = a_1 E_{RR}^2 + a_2 E_{\Theta\Theta}^2 + a_3 E_{ZZ}^2 + 2a_4 E_{RR} E_{\Theta\Theta} + 2a_5 E_{\Theta\Theta} E_{ZZ} + 2a_6 E_{ZZ} E_{RR} + a_7 (E_{R\Theta}^2 + E_{\Theta R}^2) + a_8 (E_{\Theta Z}^2 + E_{Z\Theta}^2) + a_9 (E_{ZR}^2 + E_{RZ}^2) \quad (2.51)$$

où  $E_{ij}$  sont les composantes de déformation associées à un système de coordonnées cylindriques ( $R, \Theta, Z$ ). Ce modèle est donc tridimensionnel. Il inclut

le cisaillement  $C$  et neuf paramètres matériau  $a_i$  indépendants.

Takamizawa et Hayashi [161] ont proposé une densité d'énergie de déformation logarithmique et bidimensionnelle dans le plan  $(\Theta; Z)$  afin de modéliser l'artère carotide :

$$\begin{aligned} W &= -C \ln(1 - Q) \\ Q &= \frac{1}{2}c_1 E_{\Theta\Theta}^2 + \frac{1}{2}c_2 E_{ZZ}^2 + c_3 E_{\Theta\Theta} E_{ZZ} \end{aligned} \quad (2.52)$$

où  $C$  est le cisaillement et  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont trois paramètres matériau indépendants. Takamizawa et Hayashi [161] ont choisi, à un coefficient multiplicatif près, la même expression de  $Q$  que celle du modèle bidimensionnel de Fung *et al.* [55] :

$$\begin{aligned} W &= C [\exp(Q) - 1] \\ Q &= c_1 E_{\Theta\Theta}^2 + c_2 E_{ZZ}^2 + 2c_3 E_{\Theta\Theta} E_{ZZ} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Il est à noter que l'équation (2.53) est un cas spécial de l'équation (2.50). Ce modèle de Fung *et al.* [55] a été repris par Holzapfel [77] pour modéliser l'énergie de déformation des fibres de collagène artérielles. En l'exprimant dans un repère cartésien, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= C [\exp(Q) - 1] \\ Q &= c_1 E_{11}^2 + c_2 E_{22}^2 + c_3 E_{11} E_{22} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Par rapport au modèle proposé par Fung *et al.* [55], Holzapfel [77] lie les paramètres matériau  $c_i$  à l'angle phénoménologique  $\beta^2$ , attribuant ainsi un sens physique aux paramètres matériau  $c_i$ . Holzapfel [77] insiste sur la convexité de  $W$  et montre que pour un  $C > 0$ , (2.54) est convexe si et seulement si  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  et  $c_1 c_2 > c_3^2$ . Cette même remarque a aussi été établie dans [78].

Federico *et al.* [43] évoquent l'importance de la convexité des densités d'énergie de déformation de type Fung pour la fiabilité des routines de calcul par

---

2. angle mesuré dans la configuration non déformée du matériau entre la direction privilégiée des fibres de collagène et la direction d'un des axes du repère dans le plan des fibres (Figure 2.2).

éléments finis et notamment dans le cadre de l'identification de paramètres. Ils montrent que la condition de convexité est satisfaite si la forme quadratique de  $Q$  est définie positive et si la dérivée seconde de  $W$  par rapport au tenseur de déformation de Green-Lagrange est positive. Cette dernière, qui représente les modules tangents, est la base de toutes les routines de calcul numérique implémentant une linéarisation de  $W$  [124].

**Approche structurale :** Les tissus biologiques sont composés de plusieurs constituants notamment l'élastine, le collagène, les cellules musculaires lisses et la substance de base. Chacun de ces constituants influence, par sa présence et sa distribution au niveau microscopique, le comportement mécanique macroscopique du tissu.

Un modèle structural représente une densité d'énergie de déformation incluant des informations sur la microstructure. La densité et la répartition en faisceaux du collagène fibrillaire dans un tissu, induisent une anisotropie. D'après Lanir [102], on considère que le tissu est modélisé par des fibres de collagènes imprégnés dans une matrice isotrope.

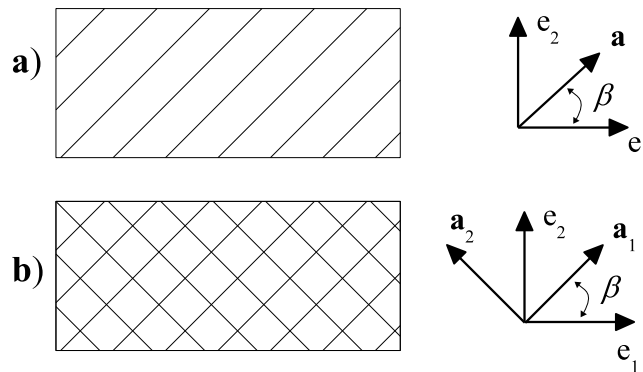


FIGURE 2.2: Arrangement des fibres dans un plan  $e_1 - e_2$ . a) : un tissu avec une direction de collagène privilégiée  $\mathbf{a}$ . b) : un tissu avec deux directions de collagène privilégiées  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ .

La matrice isotrope se comporte d'une manière élastique linéaire. Aux basses pressions, elle se déforme entraînant les fibres de collagène. Ces dernières, qui sont enroulées au repos, s'étirent. Le régime des hautes pressions commence.

La longueur de la fibre augmente graduellement avec le chargement jusqu'à atteindre son allongement élastique maximal (toutes les fibres passent à l'état lisse). Le passage de l'état enroulé à l'état lisse se fait progressivement avec une transition qui marque le passage d'un comportement linéaire à un comportement non-linéaire. Cette transition est expliquée (§1.6) par l'arrêt du glissement des fibres par rapport à la matrice non-collagèneuse. En conséquence, le comportement mécanique d'un tissu biologique est non-linéaire et anisotrope en raison du rôle conjoint joué par les fibres et la matrice. L'introduction de la décomposition additive de la densité d'énergie de déformation en partie isotrope et partie anisotrope (revenant aux fibres) par Holzapfel et Weizsäcker [85] est donc justifiée. De plus, deux directions de fibres dans un tissu appartenant à la même famille de fibre, possèdent les mêmes paramètres matériaux. Il est donc possible de superposer leurs énergies de déformations transverses [76, 78]. La densité d'énergie suivante a été proposée par Holzapfel, Gasser et Ogden [78] pour modéliser la réponse hyperélastique des parois artérielles avec deux familles de fibres ( $i = 1, 2$ ) :

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \exp \left[ k_2 (I_{4\mathbf{a}_i} - 1)^2 \right] - 1 \right\} \quad (2.55)$$

où  $I_{4\mathbf{a}_i}$  est l'invariant  $I_4$  (équation (2.32)) pour une direction de fibre  $\mathbf{a}_i$  avec  $i = 1, 2$  (Figure 2.2). Les paramètres matériau  $\mu$  et  $k_1$  s'expriment en Pascal ( $\mu$  est le module de cisaillement) et  $k_2$  est sans dimension. Ce modèle, connu sous le nom de modèle HGO, en référence aux auteurs qui l'ont proposés, est aussi appliqué pour des tissus intervertébraux afin de modéliser l'annulus fibrosus, partie fibrillaire du disque [39]. Le modèle (2.55) a été généralisé par Gasser *et al.* [57] en prenant en compte la dispersion des fibres dans le tissu :

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \exp \left\{ k_2 \left[ kI_1 + (1 - 3k)I_{4\mathbf{a}_i} - 1 \right]^2 \right\} - 1 \right\} \quad (2.56)$$

$k \in [0; 1/3]$  est le coefficient de dispersion des fibres ;  $\mu$ ,  $k_1$  et  $k_2$  possédant les mêmes définitions que pour (2.55).

Les deux modèles hyperélastiques, définis par les équations (2.55) et (2.56), constituent une forme courante de modèles structuraux qui adoptent les invariants de Spencer [154, 155]. En effet, depuis le travail de Wu et Yao [168] sur le tissu du disque intervertébral fibreux, une multitude d'énergies de déformation anisotropes (type Fung, puissance ou logarithmique) ont adopté les résultats de Spencer. C'est le cas par exemple de l'énergie proposée par Peng *et al.* [123] qui modélise l'hyperélasticité de l'anneau fibreux. Cette énergie incorpore un terme représentatif du cisaillement résultant du mouvement relatif de la matrice non-collagèneuse par rapport aux fibres de collagène (cette hypothèse est inspirée de la théorie du glissement inter-fibrillaire présentée dans la section 1.6 de ce mémoire). L'originalité repose donc sur l'introduction d'un nouvel invariant (noté  $\chi$ ) qui rend compte du cisaillement. Cet invariant a été récemment utilisé dans une loi hyperélastique modélisant l'élasticité d'un anneau fibreux pathologique [117]. L'énergie de déformation de Peng *et al.* [123] superpose trois densités :

$$W = W^M + W^F + W^{FM} \quad (2.57)$$

avec :

$$W^M = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + D^{-1}(J - 1)^2$$

$$W^F = \begin{cases} C_2(I_4 - 1)^2 + C_3(I_4 - 1)^4 & I_4 > 1 \\ 0 & I_4 \leq 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

$$W^{FM} = f(I_4) \chi^2$$

Les énergies de déformation  $W^M$ ,  $W^F$  et  $W^{FM}$  sont respectivement celles de la matrice non-collagèneuse, des fibres de collagènes et de l'interaction entre la matrice et les fibres. Il est à noter que  $W^M$  est le terme isotrope de  $W$  alors que  $W^F$  et  $W^{FM}$  constituent les termes anisotropes décrits par le biais des invariants mixtes (équation (2.32)). L'invariant  $\bar{I}_1$  est la partie isochore de

l'invariant  $I_1$  ( $\bar{I}_1 = I_3^{-1/3} I_1$ ). Il est calculé sur la base de la division multiplicative du tenseur de gradient de la déformation  $\mathbf{F}$  en une partie volumétrique et une partie isochore [44, 118]. L'invariant  $\chi$ , qui exprime le cisaillement, est fonction des invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  de  $\mathbf{C}$  (équation (2.26)) et des invariants mixtes  $I_4$  et  $I_5$  (équation (2.32)) :

$$\chi = \frac{I_4}{I_3} (I_5 - I_1 I_4 + I_2) - 1 \quad (2.59)$$

La fonction  $f$  définissant la densité d'interaction  $W^{FM}$  dans l'équation (2.58) est une fonction sigmoïde :

$$f(I_4) = \frac{\gamma}{1 + \exp[-\beta(\lambda^F - \lambda^*)]} \quad (2.60)$$

où  $\lambda^F$  est la racine carré de l'invariant  $I_4$  et  $\lambda^*$  est un paramètre matériau qui peut être associé à la toe zone.

La densité d'énergie  $W$  (équation (2.57)) contient sept paramètres matériau qui sont  $C_{10}$ ,  $\gamma$ ,  $D$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $\beta$  et  $\lambda^*$ . Les paramètres  $\beta$  et  $\lambda^*$  sont sans unité,  $D$  est l'inverse d'une pression et les autres paramètres s'expriment en MPa.

Les tableaux 2.1 et 2.2 qui suivent donnent un aperçu des différentes formes mathématiques utilisées dans les modèles courants de densités d'énergie (formes exponentielles, puissances et logarithmiques).

Les densités d'énergie de déformation, qu'elles soient isotrope ou anisotrope, impliquent des paramètres matériau. Ces paramètres matériau (représentés par le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  des tableaux 2.1 et 2.2) doivent être identifiés afin de pouvoir valider les modèles proposés. En principe, l'identification est réalisée sur la base d'une série de tests expérimentaux et en utilisant des méthodes numériques [77]. Le chapitre 3 suivant présente les tests expérimentaux ainsi que les techniques numériques standards d'identification de paramètres employées dans le domaine de la biomécanique.



Des techniques d'identification originales seront ensuite présentées dans le chapitre 4. Elles seront appliquées à trois des modèles présentés dans le Tableau 2.2 : le modèle HGO (ligne 10), le modèle de Fung (ligne 12) et le modèle de Peng et al. (ligne 13). On pourra se référer aux équations (2.54), (2.55) et (2.57) de ce paragraphe pour plus de détails sur ces modèles.

TABLEAU 2.1: Listes des énergies de déformation isotrope et de leurs paramètres matériaux.  $\boldsymbol{\theta}$  représente le vecteur de paramètres matériau.

	$W_{iso}$	$\boldsymbol{\theta}$
1	$\alpha_1 I_1 (I_3)^{-1/3}$	$\alpha_1$
2	$\alpha_1 \left( I_1^{\alpha_2} I_3^{-\alpha_2/3} - 3^{\alpha_2} \right)^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$
3	$\alpha_1 \left( I_3^{-\alpha_2} I_2^{3\alpha_2/2} - 3 \sqrt{3^{\alpha_2}} \right)^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$
4	$\alpha_1 \left\{ \exp \left[ \left( I_3^{-\alpha_2} I_2^{3\alpha_2/2} - 3 \sqrt{3^{\alpha_2}} \right)^{\alpha_3} - 1 \right] \right\}$	$\alpha_{1,2,3}$
5	$\alpha_1 \left\{ \exp \left[ \left( I_1^{\alpha_2} I_3^{-\alpha_2/3} - 3^{\alpha_2} \right)^{\alpha_3} - 1 \right] \right\}$	$\alpha_{1,2,3}$
6	$\alpha_1 I_2 (I_3)^{-1/3}$	$\alpha_1$
7	$\alpha_1 \left( I_3^{\alpha_2} + I_3^{-\alpha_2} - 2 \right)^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$
8	$\alpha_1 \left( I_3^{\frac{1}{2}} \right)^{\alpha_2}$	$\alpha_{1,2}$
9	$\alpha_1 \left( I_3^{\alpha_2} + I_3^{\alpha_2/3} - 3^{\alpha_2} \right)^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$
10	$\alpha_1 \left( I_3^{-\alpha_2} + I_3^{3\alpha_2/2} - 3 \sqrt{3^{\alpha_2}} \right)^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$
11	$\alpha_1 \left( I_1 (I_3)^{-1/3} - 3 \right)$	$\alpha_1$
12	$C_{10} \left( I_1 (I_3)^{-1/3} - 3 \right) + D^{-1} (J - 1)^2$	$C_{10}$ $D$

TABLEAU 2.2: Listes des énergies de déformation anisotropes et de leurs paramètres matériaux.  $\theta$  représente le vecteur de paramètres matériau.

	$W_{aniso}$	$\theta$
1	$k_1 (I_{4a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
2	$k_1 I_{4a_i} I_3^{-1/3}$	$k_1$
3	$k_1 (I_1 - I_{4a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
4	$k_1 I_3^{-\frac{1}{3}} (I_1 - I_{4a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
5	$k_1 (I_{5a_i} - I_1 I_{4a_i} + I_2)^{k_2}$	$k_{1,2}$
6	$k_1 I_3^{-\frac{1}{3}} (I_{5a_i} - I_1 I_{4a_i} + I_2)^{k_2}$	$k_{1,2}$
7	$k_1 (I_1 I_{4a_i} - I_{5a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
8	$k_1 I_3^{-1/3} (I_1 I_{4a_i} - I_{5a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
9	$\frac{k_1}{2k_2} \{ \exp [k_2 (I_{4a_i} - 1)^2] - 1 \}$	$k_{1,2}$
10	$\frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp \left[ \frac{k_2}{2} (I_3 - 1) \right] - 1 \right\}$	$k_{1,2}$
11	$\frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp \left\{ k_2 [k I_1 + (1 - 3k) I_{4a_i} - 1]^2 \right\} - 1 \right\}$	$k_{1,2}$
12	$C [\exp(Q) - 1],$ $Q = c_1 E_{11}^2 + c_2 E_{22}^2 + c_3 E_{11} E_{22}$	$C$ $c_{1,2,3}$
13	$C_2 (I_4 - 1)^2 + C_3 (I_4 - 1)^4 +$ $\frac{\gamma}{1 + \exp [-\beta(\lambda^F - \lambda^*)]} \chi^2$	$C_{2,3}$ $\gamma, \beta, \lambda^*$

---

## Processus d'identification

---

### 3.1 Introduction

Ce chapitre focalise sur les techniques et les processus d'identification de paramètres matériau. Ces paramètres sont inclus dans les équations constitutives qui transcrivent la réponse du matériau sous l'action d'une excitation extérieure. Étant représentative de la matière, la réponse doit être mesurée expérimentalement [81]. On notera  $\theta$  le vecteur qui contient l'ensemble des paramètres matériau. Ces paramètres doivent :

- a) être identifiables sur la base de déformations physiologiques mesurées expérimentalement,
- b) avoir une signification liée à la physique du matériau.

Plusieurs protocoles expérimentaux sont classiquement employés pour caractériser les matériaux biologiques à l'échelle du tissu (Figure 1.4). On renvoie à [54, chapitre 7] et à [13, 77, 82, 92, 95, 136] pour plus de détails. Le but est d'observer une réponse du matériau suite à une excitation contrôlée par l'expérimentateur. La réponse mesurée constitue la référence sur laquelle s'appuiera le processus d'identification. Comme cela a été déjà évoqué dans la section 2.4, les relations de type excitation-réponse sont exprimées par des équations constitutives qui, dans notre cas, découlent d'une densité d'énergie de déformation  $W$ . Les équations constitutives du matériau engendrent une

réponse qui est fonction du vecteur  $\theta$ . L'objectif est d'identifier ce vecteur en cherchant la meilleure correspondance possible entre la réponse calculée et la réponse mesurée de référence. Dans cette démarche deux points essentiels seront étudiés dans ce chapitre :

- a) les tests expérimentaux fournissant les valeurs de référence en portant un intérêt particulier au test de déformation uniaxiale [77] qui est largement utilisé en biomécanique,
- b) l'estimation des paramètres matériau par des méthodes numériques classiques qui sont proposées dans la littérature [103, 107, 130].

### 3.2 Expérimentation

Les tests en biomécanique se préparent soigneusement puisque ce sont des tests *in vivo* où on réplique les conditions entourant le tissu (densité et composition de la solution entourant le tissu, pression osmotique...). Le déroulement du test est le suivant :

- (a). déplacement imposé.
- (b). incrémentation du déplacement jusqu'à ce que l'échantillon atteigne sa limite élastique.
- (c). relâchement du chargement après relaxation du tissu.

La courbe contrainte-déformation de l'étape de chargement et du déchargement forme une hystérésis. Les étapes de (a) à (c) sont répétées jusqu'à ce que les courbes de chargement et de décharge coïncident quasiment. L'hystérésis est alors très faible et la réponse du tissu est qualifiée de pseudo-élastique.

Nous présentons ci-dessous les quatre essais expérimentaux les plus utilisés dans la communauté des chercheurs en biomécanique et pour lequel l'échantillon du test possède une forme géométrique régulière [54] :

1. le test d'extension-inflation.
2. le test de déformation uniaxiale.
3. le test de cisaillement.
4. le test de déformation biaxiale.

Le test d'extension-inflation est utilisé pour mettre en évidence la réponse des vaisseaux sanguins. En effet, l'inflation du vaisseau ou de l'artère par de l'air comprimé modifie la circonférence du tissu. On mesure ainsi le rayon du vaisseau et la pression correspondante. Les tests 2, 3 et 4 sont planaires et la section de l'échantillon possède une forme géométrique régulière, généralement un carré ou un rectangle.

La déformation uniaxiale est l'un des tests les plus utilisés pour identifier les paramètres. L'échantillon du test est guidé en déplacement suivant une direction donnée tout en laissant les deux autres directions libres. D'où son nom de déformation uniaxiale (à ne pas confondre avec traction uniaxiale). Compte tenu des conditions aux limites considérées (Figure 3.1), le champ de déformations obtenu est homogène c'est à dire que les déformations sont identiques en tout point de l'échantillon. On mesure les déformations principales et on en déduit une contrainte en divisant l'effort de traction par la section déformée.

Le test 3 est un test classique de cisaillement simple.

Enfin, pour le test biaxial, l'échantillon est étiré par deux de ses côtés, simultanément, ou bien en imposant un allongement fixe suivant une direction et en étirant suivant l'autre.

Ces tests expérimentaux étant simples, il est parfois nécessaire d'en mettre en œuvre plusieurs [81] pour pouvoir recueillir les informations nécessaires à la détermination de la densité d'énergie de déformation. Les paramètres matériau doivent alors être identifiés de manière à pouvoir satisfaire l'ensemble de tous les tests en même temps. Dans ce mémoire, on se limitera à utiliser des résultats expérimentaux de référence extraits de la littérature [40, 77, 78]. Toutes ces données de référence concernent le test de déformation uniaxiale. On se focalise donc sur ce test dans la suite.

**Déformations uniaxiales.** En imposant une déformation suivant une direction donnée (Figure 3.1), on mesure les déformations dans les deux autres directions perpendiculaires à la direction d'élongation. Compte tenu des conditions aux limites imposées (une face en traction, deux faces libres et trois

faces en appui simple), il est clair que les déformations sont homogènes et le tenseur  $\mathbf{F}$  diagonal. On note  $\{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}\}$  ses coefficients diagonaux qui sont les racines des dilatations principales. Il est à noter que les résultats diffèrent si la traction s'exerce dans la direction du vecteur  $e_1$  (Figure 3.1(a)) ou dans la direction du vecteur  $e_2$  (Figure 3.1(b)) en raison du caractère non isotrope du matériau testé. L'ensemble des contraintes mesurées (pour chaque déplacement imposé et pour chaque test de traction) est stocké dans un vecteur noté  $\mathbf{S}^*$ . Ce vecteur sera comparé au vecteur des contraintes calculées et le jeu des paramètres matériau ajusté de manière à obtenir la meilleure correspondance possible. La fonction objectif s'exprime alors comme la somme des carrés des résidus entre les valeurs mesurées et les valeurs numériques calculées :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \sum_i \varepsilon_i^2 \quad (3.1)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}$  représente le vecteur des écarts en contrainte :

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (S_i^* - S_i(\lambda^*; \boldsymbol{\theta}))^2 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$m$  étant le nombre de points de mesure.  $S_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  composante des contraintes calculées. Elle dépend des élongations mesurées  $\lambda^*$  ainsi que du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  qui contient l'ensemble des paramètres matériau de la loi de comportement. En notant  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  le jeu de paramètre matériau qui minimise la fonction objectif (3.1), on a naturellement :

$$\lim_{\boldsymbol{\theta} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\theta}}} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \|\mathbf{S}^* - \hat{\mathbf{S}}(\lambda^*; \hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2 = 0 \quad (3.3)$$

à condition d'admettre que la densité d'énergie  $W$  utilisée représente parfaitement le comportement du tissu dans la plage du test expérimental.

À ce stade, il est important de noter que la procédure d'identification que nous préconisons, et qui sera présentée en détail ultérieurement, ne nécessite pas d'évaluation par la méthode des éléments finis. L'estimation des contraintes numériques  $\mathbf{S}(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})$  s'opère en effet en injectant directement les élongations mesurées dans la loi de comportement du matériau. Il ne reste plus alors

qu'à fitter au mieux les paramètres matériau. Cette procédure de fitting, extrêmement avantageuse en temps de calcul, nécessite cependant de disposer d'une mesure préalable des élongations (ce qui sera toujours le cas dans les exemples pratiques traités dans ce mémoire). A défaut, la procédure que nous proposons pourrait être adaptée en procédant à des calculs numériques de contraintes, soit analytiquement dans le cas de chargement simple, soit par éléments finis pour les cas les plus complexes. Au-delà de cet aspect lié au fitting, un deuxième ingrédient essentiel de la méthode que nous proposons concerne la séparation des paramètres matériau en deux catégories. La première est qualifiée de linéaire et la seconde de non-linéaire. Cette distinction sera abordée en détail dans les paragraphes qui suivent.

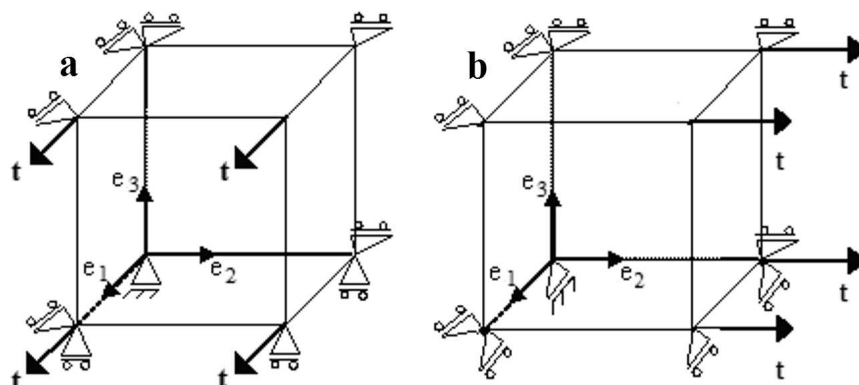


FIGURE 3.1: Déformation uniaxiale. (a) : Traction dans la direction  $e_1$ . (b) : Traction dans la direction  $e_2$ .

### 3.3 La représentation numérique

Dans le cadre d'un chargement de type déformation uniaxiale, on rappelle que le tenseur des contraintes ne comprend qu'une seule composante non nulle correspondant à la direction d'élongation. A titre d'exemple, pour une traction dans la direction  $e_1$  (Figure 3.1-a), il s'agit de la composante  $S_{11}$ . Cette composante se calcule en fonction des déformations mesurées  $\lambda^*$  ainsi que des paramètres matériau  $\theta$  en utilisant la loi de comportement. Comme l'essai de traction est piloté en déplacement, il y a autant de valeurs de contraintes à calculer que de valeurs de déplacements imposées. Toutes les

contraintes calculées sont stockées dans un vecteur  $\mathbf{S}(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})$  de dimension  $m$ ,  $m$  étant le nombre de points de mesure.

### 3.3.1 Modèle linéaire

Lorsque la densité d'énergie  $W$ , qui caractérise la loi de comportement des tissus, s'exprime comme une combinaison linéaire de paramètres matériau (le modèle de Mooney-Rivlin défini par l'équation (2.37) en est un exemple), les contraintes s'expriment elles aussi linéairement en fonction de ces paramètres grâce à (2.35) :

$$\mathbf{S}(\lambda^*; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^p \mathbf{N}_j(\lambda^*) \theta_j \quad (3.4)$$

où  $p$  est le nombre de paramètres matériau du modèle,  $\mathbf{N}_j$  est un vecteur de même dimension que  $\mathbf{S}(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})$  et  $\theta_j$  est la  $j^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ . L'écart  $\varepsilon_i(\boldsymbol{\theta})$  entre la contrainte mesurée  $S_i^*$  et la contrainte calculée  $S_i(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})$  est donc donné par :

$$\varepsilon_i(\boldsymbol{\theta}) = S_i^* - \sum_{j=1}^p N_{ij}(\lambda^*) \theta_j \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

On obtient donc l'écart quadratique total :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2 &= \sum_{i=1}^m (\varepsilon_i(\boldsymbol{\theta}))^2 = \sum_{i=1}^m \left[ S_i^* - \sum_{j=1}^p N_{ij}(\lambda^*) \theta_j \right]^2 \\ &= \|\mathbf{S}^* - \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}\|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

où on a introduit la matrice  $\mathbf{N}$  de composantes  $N_{ij}(\lambda^*)$ . Cette matrice, qui est indépendante de  $\boldsymbol{\theta}$ , comporte  $m$  lignes et  $p$  colonnes qui sont définies par les vecteurs  $\mathbf{N}_j$ .

Le problème d'identification des paramètres matériau  $\boldsymbol{\theta}$  revient à minimiser l'écart quadratique (3.6) de sorte à faire coïncider au mieux les contraintes



mesurées avec les contraintes calculées. Il s'agit d'un problème de minimisation convexe classique dont la formulation découle directement de (3.6) :

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\theta}} [\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2] \\ \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\theta} - 2\mathbf{S}^{*T} \mathbf{N} \boldsymbol{\theta} + \|\mathbf{S}^*\|^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Le point critique  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  qui annule le gradient de la fonction objectif  $\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2$  satisfait l'équation de stationnarité :

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{N}^T \mathbf{S}^* \quad (3.8)$$

Si l'on suppose que la matrice  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  est inversible, on déduit de (3.8) que :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^* \quad (3.9)$$

C'est la solution d'un problème de moindres carrés linéaires, connu aussi sous le nom de problème d'Estimation des Moindres Carrés Ordinaires (EMCO). La justification de l'inversibilité de la matrice  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  sera traitée en détail dans le chapitre 4, dans un cadre plus général où l'on mixe des paramètres matériau linéaires et non linéaires.

Dans le cas de la biomécanique, les lois de comportement font apparaître des dépendances non linéaires par rapport à certains paramètres matériau. Il est alors nécessaire de faire appel à des méthodes de résolution itératives qui sont décrites dans la section suivante.

### 3.3.2 Modèle non linéaire

Un exemple typique de modèle à paramètres non linéaires est donné par la densité de Demiray [31], formule (2.48). Cette densité dépend en effet hyperboliquement et exponentiellement du paramètre matériau  $\alpha$ . Les contraintes qui en découlent ne sont alors plus linéaires par rapport à ce paramètre. On observe également qu'il existe une dépendance linéaire par rapport à un second paramètre matériau  $\mu$ . Cette observation, existence simultanée de paramètres linéaires et non linéaires, est commune à de très nombreux modèles

en biomécanique. Elle est à la base de la méthode d'identification GAO que nous proposons [70, 71], méthode avec laquelle nous séparons le traitement des paramètres linéaires de ceux qui ne le sont pas. Cette méthode sera décrite en détail au chapitre 4. Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que des paramètres non linéaires  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  représentera le jeux de paramètres qui minimise la somme des carrés des résidus. Cette somme des résidus sur les  $m$  points mesurés est :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = [\mathbf{S}^* - \mathbf{S}(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})]^T [\mathbf{S}^* - \mathbf{S}(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})] \quad (3.10)$$

Quand les dérivées partielles du résidu par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  valent zéro, on obtient les équations normales de l'équation (3.10). La solution des équations normales donne l'estimation de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  au sens des moindres carrés. La forme générale de chaque équation normale est :

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2}{\partial \theta_j} = - \sum_{i=1}^m [S_i^* - S_i(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})] \left[ \frac{\partial S_i(\lambda^*; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right] = 0 \quad (3.11)$$

La matrice jacobienne  $\partial \mathbf{S}(\lambda^*; \boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}$  représente la sensibilité du modèle par rapport aux paramètres matériau. Ses composantes sont définies par  $(\frac{\partial S}{\partial \theta})_{ij}$ . Cette matrice est donc de dimension  $m \times p$ , où on rappelle que  $m$  représente le nombre de points mesurés et  $p$  le nombre de paramètres matériau. En raison de la dépendance non linéaire de  $\mathbf{S}$  vis à vis de  $\boldsymbol{\theta}$ , la résolution des équations normales n'est pas triviale et les solutions ne peuvent en général pas être explicitées analytiquement, même dans les cas les plus simples. On utilise alors des méthodes itératives, ce qui requiert une initialisation des paramètres matériau. Ceux-ci sont ensuite mis à jour à chaque itération suivant les règles du schéma numérique retenu. La convergence est obtenue lorsque les résidus sont suffisamment petits.

Les méthodes numériques qui seront présentées ci-dessous, sont les plus employées en biomécanique, et plus généralement pour les problèmes d'estimation de paramètres.

### 3.4 Les méthodes numériques classiques

Dans cette section, les méthodes sont présentées de manière très générique et on pourra consulter Nash [113] pour plus de détails. En préambule, on rappelle quelques généralités et grandeurs usuelles concernant la minimisation d'une fonction coût  $\mathcal{F}$  (appelée encore fonction objectif) dépendante de  $p$  variables,  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ . Dans le cadre de l'identification de paramètres, cette fonction coût prend la forme de la norme au carré des résidus,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S}^* - \mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda}^*; \boldsymbol{\theta})$  sur tous les points de mesure :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [\varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})]^2 \quad (3.12)$$

Il est à noter que le facteur  $1/2$  a été introduit dans (3.12) uniquement pour des raisons de commodité pour faciliter le calcul ultérieur de dérivées. Le problème de minimisation associé est à nouveau un problème de moindres carrés.

Vu que les méthodes les plus utilisées sont à base de gradient, l'introduction des dérivées de  $\mathcal{F}$  est nécessaire sachant que la dérivée seconde de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})$  est continue. Le gradient de  $\mathcal{F}$  a pour composantes :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \quad (3.13)$$

Soit encore :

$$\mathcal{F}'(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.14)$$

où on a introduit la matrice jacobienne  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  contenant les dérivées partielles de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})$  :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})_{ji} = \frac{\partial \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \quad (3.15)$$

De (3.13) on définit la matrice Hessienne de  $\mathcal{F}$  dont la composante  $(i, k)$  est définie par :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_k} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} + \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial^2 \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_k} \right) \quad ,$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathcal{F}''(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j(\boldsymbol{\theta}) \varepsilon_j''(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.16)$$

Toutes les méthodes d'optimisation non-linéaires sont itératives.

### 3.4.1 Méthode de Gauss-Newton

Elle est la base des méthodes efficaces employées pour rechercher une solution au problème des moindres carrés non linéaire. Cette méthode est d'ordre 1 car elle nécessite le calcul de la dérivée première de la fonction résidu  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})$ . Elle est en effet basée sur une approximation linéaire de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})$  à l'aide d'un développement en *série de Taylor* d'ordre 1 :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{h}) \simeq \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}^0) + \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^0) \mathbf{h} \quad (3.17)$$

avec  $\mathbf{h} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0$

où  $\boldsymbol{\theta}^0$  représente l'ensemble des paramètres matériau autour duquel est effectué le développement en série de Taylor et  $\mathbf{h}$  est le taux d'accroissement. Dans la suite, pour plus de commodité, on note :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}^0)$  et  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^0)$ . En insérant l'approximation linéaire (3.17) dans la fonction coût définie par (3.12), on obtient l'approximation quadratique suivante pour  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^0 + \mathbf{h}) \simeq \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}^0) + \mathbf{h}^T \mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{h} = \mathcal{L}(\mathbf{h}) \quad (3.18)$$

Le membre de droite de (3.18) est un polynôme de degré 2 en  $\mathbf{h}$  qui sera noté  $\mathcal{L}$  dans la suite. Son gradient et son Hessien sont donnés par :

$$\mathcal{L}'(\mathbf{h}) = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{h}, \quad \mathcal{L}''(\mathbf{h}) = \mathbf{J}^T \mathbf{J} \quad (3.19)$$

Le pas de Gauss-Newton  $\mathbf{h}_{gn}$  minimisant  $\mathcal{L}$  annule son gradient :

$$\mathcal{L}'(\mathbf{h}_{gn}) = 0 \iff (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \mathbf{h}_{gn} = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.20)$$

Lorsque les colonnes de  $\mathbf{J}$  sont indépendantes,  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  est définie positive et donc inversible. Dans ce cas,  $\mathcal{L}(\mathbf{h})$  possède un minimum unique  $\mathbf{h}_{gn}$  défini par (3.20). On remarque que  $\mathbf{h}_{gn}$  est de sens opposé au gradient puisque d'après (3.14) et (3.20) :

$$\mathbf{h}_{gn}^T \mathcal{F}' = \mathbf{h}_{gn}^T (\mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon}) = -\mathbf{h}_{gn}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \mathbf{h}_{gn} < 0 \quad (3.21)$$

En raison de (3.21),  $\mathbf{h}_{gn}$  est qualifié de direction de plus profonde descente (*steepest descent*).

### 3.4.2 Méthode de Marquardt

Cette méthode [103, 107] est la plus utilisée en identification inverse dans le domaine de la biomécanique des tissus souples. Elle converge, sous certaines conditions, pour presque tous les problèmes de moindres carrés non linéaires. Elle se base sur une modification de la méthode de *Gauss-Newton* décrite ci-dessus. Le pas  $\mathbf{h}_{lm}$  est obtenu en modifiant (3.20) :

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + e\mathbf{I}) \mathbf{h}_{lm} = -\mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.22)$$

où  $e$  est un paramètre strictement positif afin que  $\mathbf{h}_{lm}$  soit une direction de descente. En généralisant, la solution de l'équation (3.22) en fonction du pas de Levenberg-Marquardt s'écrit :

$$\mathbf{h}_{lm} = -(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + e\mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.23)$$

Quand  $e$  est très grand par rapport à la norme de  $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{h}_{lm}$  est un pas  $\mathbf{h}_d$  dans la direction de la descente :

$$\mathbf{h}_d = -\frac{1}{e}\mathbf{J}^T\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.24)$$

Lorsque  $e$  est très faible par rapport à cette norme,  $\mathbf{h}_{lm}$  est identique à la solution de Gauss-Newton, direction de la plus profonde descente.

### 3.4.3 Calcul du pas optimal

Pour calculer le pas optimal  $\boldsymbol{\theta}$  avec la méthode de Gauss-Newton ou avec la méthode de Marquardt, Hartley [72] a proposé une amélioration de la méthode de descente en introduisant un paramètre numérique additionnel  $\alpha$ . L'actualisation de  $\boldsymbol{\theta}$  à l'itération  $k + 1$  se fait de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k + \alpha\mathbf{h} \quad (3.25)$$

où  $\mathbf{h}$  est la direction de descente et  $\alpha$  est le pas dans la direction  $\mathbf{h}$ . Le calcul de  $\alpha$  est réalisé avec la technique *line search* (voir section 9.2 dans [18], [49]) ou de *trust region* [41, 171].

## 3.5 Les algorithmes évolutionnaires

Les algorithmes évolutionnaires partagent un certain nombre de principes communs qui définissent le schéma général suivant :

- (i) Les algorithmes évolutionnaires utilisent le processus d'apprentissage collectif d'une population d'individus. Chaque individu représente (ou code) un point de recherche dans l'espace des solutions possibles à un problème donné. En outre, des individus peuvent également comporter des informations complémentaires, par exemple sur la stratégie de l'évolution.
- (ii) Les descendants de ces individus sont générés par des processus aléatoires destinés à modéliser la mutation et la recombinaison. La mutation correspond à une erreur d'auto-réplication des individus, tandis

qu'une recombinaison échange les informations entre deux individus ou plus.

- (iii) Par le biais de l'évaluation des individus dans leur environnement, une mesure de la qualité ou la valeur de l'adaptation (la performance) de l'individu peut leur être attribuée. Une comparaison de la performance est possible, ce qui donne une décision binaire (mieux ou pire) sur la performance d'un individu. Selon la performance de chacun, le processus de sélection favorise un meilleur individu (individu performant) à se reproduire plus souvent que ceux qui sont moins bons.

La différence dans l'utilisation de ces principes fait apparaître trois courants en algorithmes évolutionnaires :

- Les algorithmes génétiques (initialement décrit par Holland [74] à Ann Arbor, au Michigan, en tant que plans d'adaptation ou de reproduction) privilégient la recombinaison (croisement) comme l'opérateur de recherche le plus important. Ils appliquent également la mutation avec une probabilité très faible afin de préserver la diversité génétique en complément de l'opérateur principal, le croisement. Enfin, ils utilisent un opérateur de sélection probabiliste (sélection proportionnelle) et reposent souvent sur une représentation binaire des individus.
- Les stratégies de l'évolution (développé par Rechenberg [131, 132] et Schwefel [143, 144] à l'Université technique de Berlin) utilisent des mutations normalement distribuées afin de modifier des vecteurs à valeurs réelles (*real-coded vectors*) et insistent sur la mutation et la recombinaison comme des opérateurs essentiels pour la recherche dans l'espace de recherche et, en même temps, dans l'espace des stratégies de recherches des paramètres. L'opérateur de sélection est déterministe, et la taille de la population parent et celle de sa descendance sont généralement différentes les unes des autres.

- Programmation évolutive (développée par Lawrence J Fogel [46] et décrite dans Fogel *et al.* [47] et redéfinie par David B Fogel [45] et d'autres) met l'accent sur la mutation et ne tient pas compte de la recombinaison des individus. En approchant des problèmes d'optimisation à valeurs réelles, la programmation évolutive, comme les stratégies de l'évolution, travaille avec des mutations normalement distribuées et étend le processus de l'évolution aux paramètres de stratégie. L'opérateur de sélection est probabiliste, et actuellement la plupart des applications sont présentées pour des espaces de recherche aux valeurs réelles.

C'est dans le début des années 90 que ces trois courants ont combiné leurs connaissances et ont construit l'*Evolutionary Computation*. Il faut noter que les algorithmes évolutionnaires sont efficaces pour résoudre des problèmes combinatoires comme, par exemple, un problème d'optimisation non convexe [29]. Leurs stratégies de recherche visent l'obtention de la meilleure solution du problème en évitant la convergence prématurée vers des minima locaux. Leur technique de recherche est donc qualifiée de « globale ».

### 3.6 Les algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques sont inspirés de la sélection darwinienne naturelle basée sur la reproduction sexuée et la survie du plus apte [100]. Dans le concept darwinien, la survie des plus aptes signifie que l'entité ayant une plus grande capacité à s'adapter et à effectuer des tâches dans son environnement (par exemple, les individus les plus performants *Fittest*) survivent et se reproduisent à un taux plus élevé; les entités moins aptes, survivent et se reproduisent éventuellement à un taux inférieur. Par conséquent, Holland [74], dans sa simulation mathématique de l'évolution, a représenté la sélection naturelle et la survie des plus aptes, en permettant aux plus aptes à se reproduire stochastiquement (sélection proportionnelle) en fonction de leurs performances tandis que la recombinaison (croisement) est considérée comme



le meilleur opérateur de recherche du plus performant. Les algorithmes génétiques [8], ainsi que la programmation génétique [101], considèrent la mutation comme un opérateur secondaire. On en déduit, les étapes de base suivantes d'un algorithme génétique :

- la sélection.
- le croisement.
- la mutation.

Le processus de l'algorithme génétique suit le schéma classique d'un algorithme évolutionnaire (FIGURE 3.2). Sur cette figure, on distingue : l'initialisation, la meilleure solution. Une population initiale est d'abord créée, en général de manière aléatoire. Un processus itératif est ensuite mis en œuvre de la manière suivante :

- (i) une évaluation de la population initiale permet de déterminer le phénotype pour chacun de ses individus, c.à.d les caractéristiques génétiques et la performance.
- (ii) les individus qui sont maintenant caractérisés, remplacent leurs ancêtres pour former une population parents ; une population qui possède des gènes à transmettre.
- (iii) parmi les parents, celui qui possède la meilleure performance et qui répond aux critères d'arrêts sera retenu comme une solution du problème et on arrête d'itérer.
- (iv) dans le cas contraire, le processus continue.
- (v) les parents géniteurs sont sélectionnés.
- (vi) la descendance des parents géniteurs est créée, en grande partie, en mixant les gènes de deux individus (croisement) et, en petite partie, en auto-répliquant des parents dans la descendance après modification de son code génétique.
- (vii) les étapes de (i) jusqu'à (vi) sont répétées tant que la condition (iii) n'est pas satisfaite.

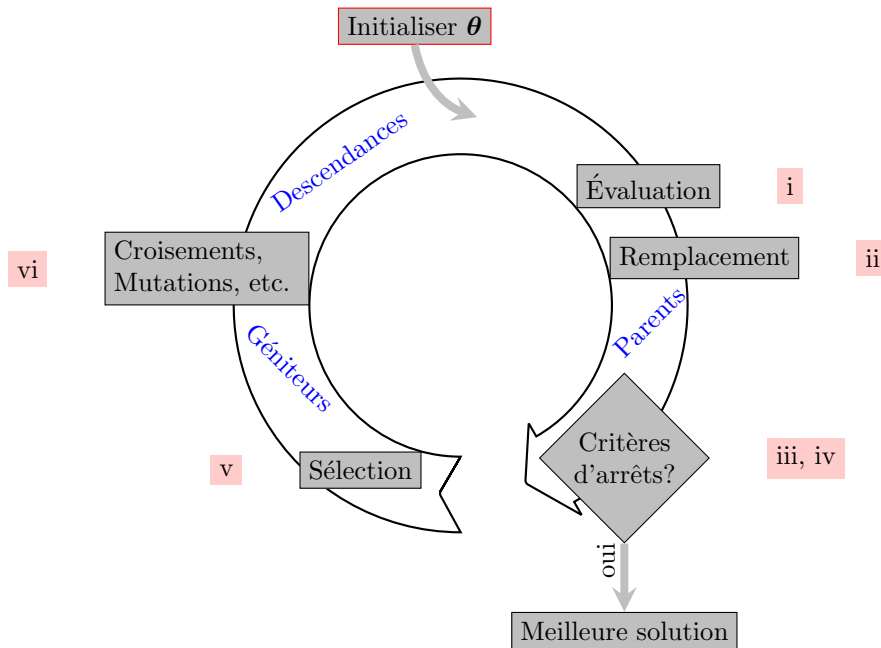


FIGURE 3.2: Schéma de principe des algorithmes génétiques.

Les logiciels d'optimisation par algorithmes évolutionnaires fournissent un choix large pour chacune des étapes décrites dans la Figure 3.2. Il est en effet notoire qu'il n'existe pas de combinaison universelle des méthodes qui répondent à tous les types de problèmes. Par conséquent, à chaque fois qu'on veut résoudre un problème, il faut configurer l'algorithme de façon à obtenir la meilleure efficacité, ce qui n'est pas toujours évident à faire.

Cependant, différentes combinaisons pour différents types de problème ont été testées [8], et il a été noté que les algorithmes génétiques sont en général efficaces pour les stratégies de bases définies initialement par Holland :

- (i) taille de la population : fixe au cours des itérations.
- (ii) méthode de sélection : *proportionnée*.
- (iii) opérateur principal de « variations » (croisement, mutation, ...) : *croisement*.

### 3.7 Commentaires

On a présenté dans ce chapitre plusieurs méthodes numériques permettant de procéder à l'identification de paramètres. Ces méthodes sont classées en deux grandes catégories : les méthodes de descente déterministe, basées sur le calcul du gradient (Marquardt, Gauss-Newton, plus profonde descente) et les méthodes évolutionnaires (principalement les algorithmes génétiques). Dans un cas comme dans l'autre, elles s'appliquent à déterminer la solution optimale au sens des moindres carrés. Pour terminer ce chapitre, on présente une synthèse des conclusions relatives à ces deux méthodes :

- le principe des moindres carrés est utilisé pour trouver la solution.
- les méthodes de résolution du problème des moindres carrés non linéaire sont itératives.
- la méthode de *Gauss-Newton* est performante quand  $\theta^0$  est proche de  $\hat{\theta}$ . Dans le cas contraire, sa convergence n'est pas assurée sauf avec la modification de Hartley [72] qui améliore son efficacité alors que sa robustesse reste faible.
- la méthode de Marquardt se comporte comme la méthode de la plus profonde descente (pour  $e$  grand) en phase initiale et comme la méthode de *Gauss-Newton* dans les phases finales. Donc elle tire partie des points forts des deux méthodes.
- la convergence de ces méthodes n'implique pas que la solution est un optimum (problématique des optima locaux).
- si la valeur d'initialisation n'est pas bonne, la convergence est lente ou pas atteinte.
- en biomécanique, le problème d'estimation des paramètres matériau est classiquement formulé comme un problème de moindres carrés. Dans le cas non linéaire, la méthode de Marquardt est la plus employée pour trouver une solution.

- la convergence des méthodes à base de gradient peut être très rapide si le nombre de paramètres à identifier est faible, mais elle est très lente si ce nombre est élevé.

Il est à noter que les techniques numériques dites évolutionnaires sont rarement employées en identification inverse de paramètres en biomécanique. Les méthodes stochastiques ont pourtant prouvé leur robustesse et convergent vers un optimum global. Afin de tirer partie des avantages des deux grandes catégories de méthodes (déterministes et évolutionnaires), on introduit dans la suite une nouvelle méthode qui combine l'algorithme génétique (AG) et l'estimation des moindres carrés ordinaires (EMCO). Elle est nommée *GAO Genetic algorithms & Analytical Optimization*.

## Deuxième partie

# Méthodes d'identification inverse

---

## Méthode GAO

---

### 4.1 Introduction

La méthode GAO (Genetic algorithms & Analytical Optimization) que nous avons développée est présentée dans cette partie. Elle résout le problème inverse de moindres carrés non-linéaires afin d'estimer les paramètres matériau associés à une loi de comportement. Le principe de base est de combiner de manière avantageuse les méthodes déterministes de type gradient avec les algorithmes génétiques. Il est ainsi possible de tirer partie du meilleur de chacune de ces méthodes. La méthode GAO peut donc être considérée comme une approche hybride. Cette hybridation a déjà été mise à profit par d'autres chercheurs dans le cadre de l'hyperélasticité isotrope [96]. L'originalité de notre approche consiste à introduire des calculs analytiques pour la partie déterministe et à appliquer cette stratégie dans le cadre de l'hyperélasticité anisotrope.

Le problème inverse de moindres carrés est exprimé comme la norme euclidienne (*norme* –  $L^2$ ) des résidus. La minimisation de ce problème permet d'estimer les paramètres du modèle mathématique quand la somme des carrés des résidus tend vers zéro.

En biomécanique, il est courant de décomposer la solution du problème d'identification en plusieurs étapes, par exemple Holzapfel [77] ou Peng *et al.*

[123]. A chaque étape, une partie de l'ensemble de paramètres est progressivement identifiée. Cette approche dite « multi-étape » permet de réduire la dimension du problème initial en le divisant en de multiples problèmes de dimensions inférieures. Cependant, elle nécessite un travail considérable que ce soit au niveau numérique (plusieurs problèmes sont à résoudre séparément) ou expérimental (différents tests sont nécessaires). À la base, cette approche multi-étape est utilisée afin de pouvoir résoudre le problème inverse avec des méthodes de gradient qui sont inefficaces pour des problèmes de grandes dimensions. La réduction de la dimension de l'espace de recherche que la méthode GAO apporte, se fait au niveau de la formulation du problème *norme* –  $L^2$ . En effet, la méthode GAO tire avantage du fait que les énergies de déformations, associées aux modèles hyperélastiques qui sont utilisées pour simuler le comportement des tissus biologiques, sont une somme d'au moins deux termes. Le premier est isotrope et concerne la matrice, alors que le second, de nature anisotrope, permet de représenter l'effet des fibres de collagènes [102]. De cette linéarité, il découle que certains paramètres matériau, qualifiés de linéaires, sont calculés analytiquement en fonction des autres paramètres qualifiés de non linéaires. Ces paramètres non linéaires sont pour leur part déterminés numériquement à l'aide d'un algorithme génétique. Les paramètres linéaires sont mis à jour à chaque itération grâce aux formules analytiques préalablement établies. Cette stratégie possède un triple avantage :

1. forte réduction de la dimension de l'espace des paramètres matériau à identifier,
2. temps de calcul très court,
3. convergence vers l'optimum global.

Cette stratégie est donc particulièrement bien adaptée à l'identification de paramètres en biomécanique pour laquelle les lois hyperélastiques anisotropes impliquent souvent un nombre élevé de paramètres. Elle a également été testée avec succès dans le cadre de la simulation des procédés de mise en forme [67]. Ce point ne sera cependant pas développé dans ce mémoire dans la mesure où il fait l'objet d'une autre thèse en cours [66].

Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

- on présente dans un premier temps et de manière détaillée la méthode GAO
- le fonctionnement et le réglage des options des algorithmes génétiques sont exposés dans un second temps
- dans un troisième temps, on utilise l’approche GAO proposée pour identifier les paramètres matériau de trois lois qui modélisent le comportement en extension :
  - de la paroi artérielle avec une densité d’énergie de déformation de type Fung qui suit une approche phénoménologique et qui inclut cinq paramètres matériau à identifier [77].
  - de la paroi artérielle avec le modèle micro-structural de HGO incluant trois paramètres matériau à identifier [12, 78].
  - du disque intervertébral avec un modèle micro-structural comprenant l’interaction entre les fibres et la matrice non-collagèneuse et impliquant sept paramètres matériau à identifier [123].

## 4.2 Préliminaires

On rappelle que (cf. Chapitre 2) les densités d’énergie de déformation modélisant le comportement hyperélastique des tissus souples sont constituées de termes additifs d’énergie de déformation dues :

- à l’application de la théorie des composites renforcés aux matériaux biologiques souples.
- aux contraintes mathématiques à satisfaire dans la formulation de l’énergie de déformation.

Par conséquent,  $W$  s’écrit avec au moins deux termes additifs :

$$W = W_{iso}(I_1, I_2, I_3) + W_{aniso}(I_{4a_i}, I_{5a_i}) \quad (4.1)$$

On attribue  $W_{aniso}$  aux trousseaux de fibres de collagène imprégnés dans la matrice isotrope non-collagèneuse modélisée par  $W_{iso}$ . Rappelons que les invariants  $I_{4a_i}$  et  $I_{5a_i}$ , associés à la  $i^{me}$  direction privilégiée  $\mathbf{a}_i$ , intègrent les tenseurs



structuraux (voir (2.32)). Selon le théorème de Zhang et Rychlewski [172], la densité d'énergie de déformation (4.1) respecte la condition de symétrie matérielle en intégrant les tenseurs structuraux.

TABLEAU 4.1: Listes des énergies de déformation et de leurs paramètres matériaux.  $\theta$  représente le vecteur de paramètres matériau.

$W_{iso}$	$\theta$	$W_{aniso}$	$\theta$
1 $\alpha_1 I_1 (I_3)^{-1/3}$	$\alpha_1$	$k_1 (I_{4a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
2 $\alpha_1 (I_1^{\alpha_2} I_3^{-\alpha_2/3} - 3^{\alpha_2})^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$	$k_1 I_{4a_i} I_3^{-1/3}$	$k_1$
3 $\alpha_1 (I_3^{-\alpha_2} I_2^{3\alpha_2/2} - 3\sqrt{3^{\alpha_2}})^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$	$k_1 (I_1 - I_{4a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
4 $\alpha_1 \left\{ \exp \left[ (I_3^{-\alpha_2} I_2^{3\alpha_2/2} - 3\sqrt{3^{\alpha_2}})^{\alpha_3} - 1 \right] \right\}$	$\alpha_{1,2,3}$	$k_1 I_3^{-\frac{1}{3}} (I_1 - I_{4a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
5 $\alpha_1 \left\{ \exp \left[ (I_1^{\alpha_2} I_3^{-\alpha_2/3} - 3^{\alpha_2})^{\alpha_3} - 1 \right] \right\}$	$\alpha_{1,2,3}$	$k_1 (I_{5a_i} - I_1 I_{4a_i} + I_2)^{k_2}$	$k_{1,2}$
6 $\alpha_1 I_2 (I_3)^{-1/3}$	$\alpha_1$	$k_1 I_3^{-\frac{1}{3}} (I_{5a_i} - I_1 I_{4a_i} + I_2)^{k_2}$	$k_{1,2}$
7 $\alpha_1 (I_3^{\alpha_2} + I_3^{-\alpha_2} - 2)^{\alpha_3}$	$\alpha_{1,2,3}$	$k_1 (I_1 I_{4a_i} - I_{5a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
8 $\alpha_1 (I_3^{\frac{1}{2}})^{\alpha_2}$	$\alpha_{1,2}$	$k_1 I_3^{-1/3} (I_1 I_{4a_i} - I_{5a_i})^{k_2}$	$k_{1,2}$
9 $\frac{k_1}{k_2} \left\{ \exp \left[ \frac{k_2}{2} (I_3 - 1) \right] - 1 \right\}$	$k_{1,2}$		
10 $\alpha_1 (I_1 (I_3)^{-1/3} - 3)$	$\alpha_1$	$\frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp [k_2 (I_{4a_i} - 1)^2] - 1 \right\}$	$k_{1,2}$
11 $\alpha_1 (I_1 (I_3)^{-1/3} - 3)$	$\alpha_1$	$\frac{k_1}{2k_2} \left\{ \exp \left\{ k_2 \left[ k I_1 + (1 - 3k) I_{4a_i} - 1 \right]^2 \right\} - 1 \right\}$	$k_{1,2}$
12 $\alpha_1 (I_1 (I_3)^{-1/3} - 3)$	$\alpha_1$	$C [\exp(Q) - 1],$ $Q = c_1 E_{11}^2 + c_2 E_{22}^2 + c_3 E_{11} E_{22}$	$C$ $c_{1,2,3}$
13 $C_{10} (I_1 (I_3)^{-1/3} - 3) + D^{-1} (J - 1)^2$	$C_{10}$ $D$	$C_2 (I_4 - 1)^2 + C_3 (I_4 - 1)^4 +$ $\frac{\gamma}{1 + \exp[-\beta(\lambda^F - \lambda^*)]} \chi^2$	$C_{2,3}$ $\gamma, \beta, \lambda^*$

Le Tableau 4.1 présente plusieurs exemples de lois hyperélastiques :

- ligne 1 à 8 : lois extraites des travaux de Schröder et Neff [141] et Schröder *et al.* [142].
- ligne 9 : utilisé dans le contexte des éléments finis par Delfino *et al.* [30] (voir (2.48)). Semblable au modèle développé par Demiray [31].
- ligne 10 : modèle HGO [78].
- ligne 11 : modèle HGO généralisé qui intègre la dispersion des fibres  $k$  [57], (voir (2.56)).

- ligne 12 : densité d'énergie de déformation de type Fung [25, 55] (voir (2.47)).
- ligne 13 : modèle de Peng *et al.* [123] (voir (2.57)).

Les contraintes dérivant de la densité d'énergie et la dérivation étant un opérateur linéaire, on en déduit que le tenseur des contraintes compte au moins deux termes additifs :

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S}_{iso}(I_1, I_2, I_3) + \mathbf{S}_{aniso}(I_{4a_i}, I_{5a_i}) \quad (4.2)$$

où  $\boldsymbol{\theta}$  est l'ensemble des paramètres matériau à déterminer (voir Tableau 4.1) et  $\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Pour déterminer ces paramètres, le test de déformation uniaxiale est souvent utilisé. Il consiste à étirer une membrane de tissu dans une direction donnée tout en laissant les deux autres directions orthogonales libres de se dilater et en prenant l'hypothèse d'une déformation homogène. Ce test permet de noter la dilatation imposée, de mesurer la contrainte correspondante  $\mathbf{S}^*$  et de mesurer les dilatations dans les directions orthogonales. Ainsi on écrit :

$$\mathbf{F} = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \quad (4.3)$$

$$\text{et } \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \text{diag} [S_{11}(\boldsymbol{\theta}), S_{22}(\boldsymbol{\theta}), S_{33}(\boldsymbol{\theta})] \quad (4.4)$$

où  $\lambda_i$  sont les dilatations principales et  $S_{ii}(\boldsymbol{\theta})$  les contraintes principales.

Ce test sera pris en compte pour valider la méthode GAO. Il est néanmoins à noter que la méthode GAO possède un caractère de généralité et est utilisable avec tout type de campagne d'essai dès lors que les contraintes et les déformations sont mesurées expérimentalement.

## 4.3 Identification des paramètres matériau

### 4.3.1 Problème général

Soient  $\mathbf{S}^*$  les contraintes expérimentales et  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$  les contraintes mathématiques. Le problème revient à trouver les paramètres matériau définis par le

vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ , pour lesquels  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta})$  coïncide avec  $\mathcal{S}^*$ . Formulé comme un problème de moindres carrés non linéaires (Figure 4.1), la minimisation de la somme des carrés des résidus entre  $\mathcal{S}^*$  et  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta})$  permet d'estimer les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = \|\mathcal{S}^* - \mathcal{S}(\boldsymbol{\theta})\|^2 = \sum_{i=1}^m (S_i^* - S_i(\boldsymbol{\theta}))^2 \quad (4.5)$$

où  $m$  est le nombre total de mesures.

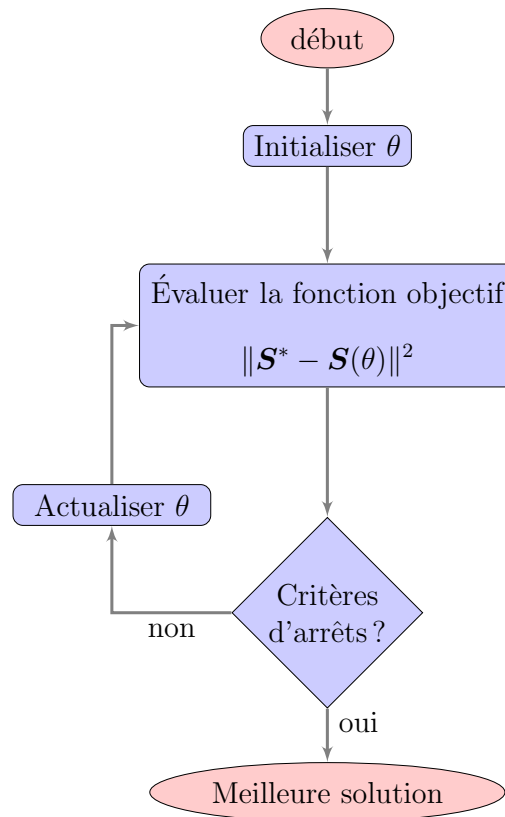


FIGURE 4.1: Schéma classique de minimisation non linéaire.

### 4.3.2 Réduction de l'espace de recherche de solution

On introduit le vecteur des contraintes mathématiques  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta})$  regroupant les composantes de contraintes indépendantes pour chaque point de mesure. Chacune d'elle possède une forme additive composée d'un terme isotrope

et d'un terme anisotrope selon (4.2). Elle s'exprime donc linéairement par rapport à au moins deux paramètres matériau. On notera  $\boldsymbol{\theta}_l$  le vecteur regroupant les paramètres linéaires et  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  le vecteur regroupant les autres qui seront qualifiés de non linéaires. La dimension du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  des paramètres matériau satisfait par conséquent :  $\dim(\boldsymbol{\theta}) = \dim(\boldsymbol{\theta}_l) + \dim(\boldsymbol{\theta}_{nl})$ . Les composantes du vecteur de contraintes s'écrivent donc comme le produit d'une fonction  $N(\boldsymbol{\theta}_{nl})$  et de  $\boldsymbol{\theta}_l$  :

$$S_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{p=1}^{\dim(\boldsymbol{\theta}_l)} N_{kp}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot (\theta_l)_p \quad (4.6)$$

Afin d'illustrer la formule (4.6) de manière concrète, on considère le cas où  $\dim(\boldsymbol{\theta}_l) = 2$  avec un test de déformation uniaxiale selon la direction  $e_1$ . Ainsi que cela a été déjà signalé, ce cas est fréquent en biomécanique (cf. Tableau 4.1). Par hypothèse, les frontières du plan  $e_2 - e_3$  se déforment librement. Cette hypothèse se traduit par des composantes de contraintes  $S_{22}^*$  et  $S_{33}^*$  nulles pour chaque mesure dans la direction normale au plan  $e_2 - e_3$ . Par conséquent, pour chaque point de mesure, les résidus s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}^* - N_{11}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot (\theta_l)_1 - N_{12}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot (\theta_l)_2 \\ \varepsilon_2 &= S_{22}^* - N_{21}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot (\theta_l)_1 - N_{22}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot (\theta_l)_2 \\ \varepsilon_3 &= S_{33}^* - N_{31}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot (\theta_l)_1 - N_{32}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot (\theta_l)_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

avec  $S_{22}^* = 0$  et  $S_{33}^* = 0$ ,  $\varepsilon_i$  représentant le résidu pour le  $i^{\text{ème}}$  point de mesure. Soit encore, sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{S}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot \boldsymbol{\theta}_l \quad (4.8)$$

avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{S}^* = \begin{bmatrix} S_{11}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta}_l = \begin{bmatrix} (\theta_l)_1 \\ (\theta_l)_2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \\ N_{31} & N_{32} \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2]$$

Pour généraliser l'équation (4.8) à  $m$  points de mesure d'un protocole expérimental quelconque et à  $p$  paramètres linéaires, il suffit d'adapter la dimension des vecteurs et des matrices :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} S_1^* \\ \vdots \\ S_m^* \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta}_l = \begin{bmatrix} (\theta_l)_1 \\ \vdots \\ (\theta_l)_p \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) = \begin{bmatrix} N_{11} & \dots & N_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{m1} & \dots & N_{mp} \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_1 \quad \dots \quad \mathbf{N}_p] \quad (4.10)$$

Klisch et Lotz [99] ont utilisé une fonction « composée » similaire à (4.9) et (4.10) afin de tenir compte de mesures provenant de plusieurs protocoles expérimentaux.

On déduit de (4.8) la somme des carrés des résidus :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\|^2 &= \|\mathbf{S}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \cdot \boldsymbol{\theta}_l\|^2 \\ &= \boldsymbol{\theta}_l^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_l - 2 \mathbf{S}^{*T} \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}_l + \|\mathbf{S}^*\|^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

On observe que l'expression (4.11) est une forme quadratique en  $\boldsymbol{\theta}_l$ . La matrice  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  représente par conséquent la moitié de la matrice Hessienne. Sa dimension est  $p \times p$  puisque  $\mathbf{N}$  possède  $m$  lignes et  $p$  colonnes. Pour établir que  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  est inversible, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une matrice définie positive. Cette propriété est acquise si on suppose que les vecteurs colonnes de  $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_p)$  forment un système indépendant. En effet, on remarque que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{x}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{N} \mathbf{x})^T \mathbf{N} \mathbf{x} = \langle \mathbf{N} \mathbf{x}, \mathbf{N} \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{N} \mathbf{x}\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{x}$  représente un vecteur quelconque non nul de  $\mathbb{R}^p$ .

Cela prouve que  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  est positive. Pour montrer que cette matrice est définie positive, il suffit d'établir en complément que, si  $\mathbf{N} \mathbf{x} = 0$ , alors  $\mathbf{x} = 0$ .

Supposons donc que  $\mathbf{N} \mathbf{x} = 0$ , ce qui se traduit par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

où  $\{x_1, \dots, x_p\}$  représentent les coordonnées de  $\mathbf{x}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ . On déduit de (4.13) que :

$$x_1 \mathbf{N}_1 + \dots + x_p \mathbf{N}_p = 0 \quad (4.14)$$

Comme on a supposé que  $(\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_p)$  formait une famille indépendante, on conclut que :

$$x_1 = \dots = x_p = 0 \quad (4.15)$$

$\mathbf{x}$  est donc égal au vecteur nul, ce qu'il fallait démontrer. La matrice  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  est par conséquent définie positive. On peut par ailleurs noter qu'il s'agit d'une matrice de Gram puisque d'après (4.10) :

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{N}_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{N}_1\|^2 & \dots & \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{N}_p, \mathbf{N}_1 \rangle & \dots & \|\mathbf{N}_p\|^2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

On peut enfin observer qu'une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que la famille de vecteurs  $(\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_p)$  soit indépendante (c'est l'hypothèse de base qui nous a permis de démontrer que  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  est définie positive) est que  $p$  soit inférieur ou égal à  $m$ . En effet, on considère une famille de  $p$  vecteurs dans  $\mathbb{R}^m$  qui est un espace vectoriel de dimension  $m$ . En d'autres termes, il est nécessaire de disposer de plus de points de mesure ( $m$ ) que de paramètres linéaires ( $p$ ). Sous réserve de l'indépendance des colonnes de  $\mathbf{N}$ ,

on déduit donc que le carré des résidus donné par l'équation (4.11) est une fonction quadratique convexe puisque la matrice Hessienne associée est définie positive. Cette fonction admet donc un minimum unique qui est solution de l'équation de stationnarité. Cette équation correspond à l'annulation du gradient de la fonction. Elle est encore appelée équation normale :

$$(\mathbf{N}^T \mathbf{N}) \boldsymbol{\theta}_l = \mathbf{S}^{*T} \mathbf{N} \quad (4.17)$$

$$\implies \boldsymbol{\theta}_l = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{S}^{*T} \mathbf{N} \quad (4.18)$$

En rappelant que  $\mathbf{N}$  dépend des paramètres non-linéaires  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  (cf. équation 4.8), l'équation (4.18) fournit une expression analytique des paramètres linéaires optimaux en fonction des paramètres non-linéaires. Dans le cas particulier où  $p$  est égal à deux, ce qui correspond à un grand nombre de cas en biomécanique, en raison de la superposition des densités d'énergie en une partie isotrope et une partie anisotrope, il est possible de concrétiser le calcul analytique jusqu'à l'obtention de la solution. En effet, si  $p$  est égal à deux, la matrice  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  est facilement inversible à la main :

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{N}_1\|^2 & \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle & \|\mathbf{N}_2\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\implies (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{N}_1\|^2 \|\mathbf{N}_2\|^2 - \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle^2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{N}_2\|^2 & -\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle \\ -\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle & \|\mathbf{N}_1\|^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

D'après l'étude générale menée précédemment ( $p$  quelconque), on sait que  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  est définie positive. Son déterminant est par conséquent strictement positif. On peut vérifier cette propriété d'une autre manière dans le cas particulier où  $p$  est égal à deux, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle| < \|\mathbf{N}_1\| \|\mathbf{N}_2\| \quad (4.20)$$

L'inégalité est stricte puisque  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  sont supposés indépendants. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \rangle^2 &< \|\mathbf{N}_1\|^2 \|\mathbf{N}_2\|^2 \\ \Rightarrow \det(\mathbf{N}^T \mathbf{N}) &> 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

En conclusion, on a obtenu une relation analytique explicite donnant les paramètres linéaires optimaux  $\boldsymbol{\theta}_l$  (c'est-à-dire minimisant le résidu) en fonction des paramètres non-linéaires  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  (équation 4.18). Cela suggère de mettre en place une stratégie d'optimisation hybride avec une mise à jour séparée de  $\boldsymbol{\theta}_l$  et de  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  au cours des itérations. Le principe général de cette stratégie est explicité sur la Figure 4.2.

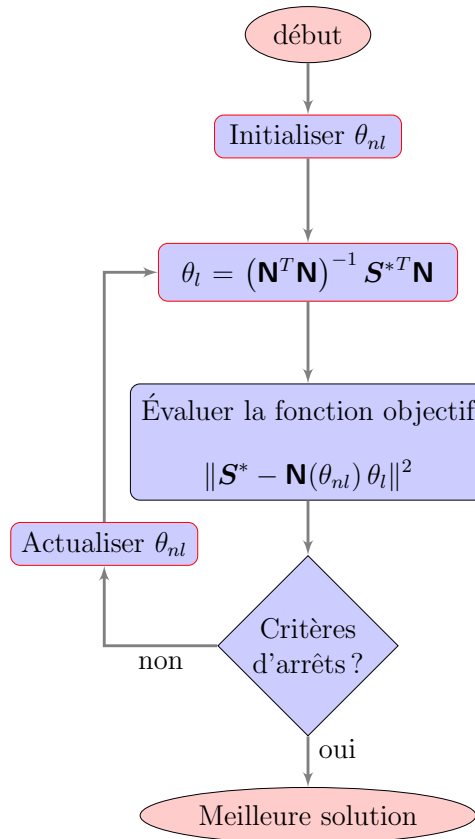


FIGURE 4.2: Schéma de résolution du problème d'identification de paramètres avec séparation des paramètres linéaires et non-linéaires.

Mais avant d'aborder l'implémentation pratique de cette stratégie, il convient de se poser la question de sa pertinence en terme de convergence. En d'autres



termes, si l'algorithme hybride converge en séparant les paramètres, est-ce que l'on converge vers l'optimum que l'on aurait obtenu en prenant en compte dans le même temps l'ensemble des paramètres ? Le lemme qui suit apporte une réponse positive à cette question.

**Lemme 4.3.1.** *Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  les ensembles dans lesquels évoluent  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  et  $\boldsymbol{\theta}_l$ . Alors on a :*

$$\inf_{(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) = \inf_{\boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X}} \left( \inf_{\boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \right) \quad (4.22)$$

*Démonstration.* On a de manière évidente :

$$\inf_{(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \leq \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \quad \forall \boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X}, \forall \boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y} \quad (4.23)$$

Puisque l'inf est le plus grand des minorants, on en déduit que :

$$\inf_{(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \leq \inf_{\boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \quad \forall \boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X} \quad (4.24)$$

On conclut en utilisant une deuxième fois la définition de l'inf :

$$\inf_{(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \leq \inf_{\boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X}} \left( \inf_{\boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \right) \quad (4.25)$$

Inversement :

$$\inf_{\boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X}} \left( \inf_{\boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \right) \leq \inf_{\boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \quad \forall \boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X} \quad (4.26)$$

Ce qui entraîne :

$$\inf_{\boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X}} \left( \inf_{\boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \right) \leq \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \quad \forall \boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X}, \forall \boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y} \quad (4.27)$$

On utilise une dernière fois le fait que l'inf est le plus grand des minorants pour conclure que :

$$\inf_{\boldsymbol{\theta}_{nl} \in \mathcal{X}} \left( \inf_{\boldsymbol{\theta}_l \in \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \right) \leq \inf_{(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \epsilon(\boldsymbol{\theta}_{nl}, \boldsymbol{\theta}_l) \quad (4.28)$$

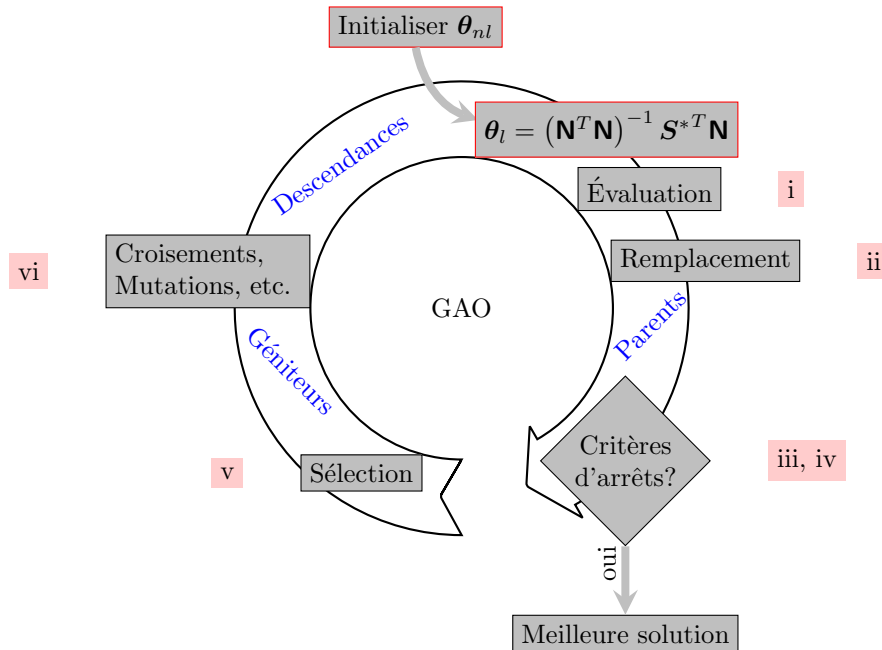


FIGURE 4.3: Schéma de principe de la méthode GAO : algorithmes génétiques standard couplés avec un calcul analytique.

La partition de l'ensemble initial en deux sous-ensembles permet de chercher la solution au problème de minimisation en balayant séparément chacun d'eux. Le problème classique de moindres carrés non-linéaires (voir équation 4.5 dans § 4.3.1) de dimension  $\dim(\boldsymbol{\theta})$ , se réduit à un problème de dimension  $\dim(\boldsymbol{\theta}_{nl})$ . Plus le nombre de termes linéaires sera important plus la méthode sera efficace. Cependant, l'étape de calcul de  $\boldsymbol{\theta}_l$ , qui nécessite l'inversion de la matrice  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  (équation 4.18), induit parfois des problèmes numériques car la formation de  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  peut-être accompagnée d'instabilités numériques [113]. Mais, le calcul de  $\boldsymbol{\theta}_l$  sera distribué sur un grand nombre d'individus correspondant à la population d'un algorithme génétique. D'éventuelles instabilités n'auront donc aucune influence car les individus qui les portent seront défavorisés par les processus de sélection naturelle.

L'option que nous avons retenue pour l'identification des paramètres non-linéaires  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  repose sur les algorithmes génétiques. Par rapport à une approche

classique (Figure 3.2, § 3.6), la réduction de l'espace de recherche induit une étape de calcul analytique  $\theta_l$  pour chaque vecteur  $\theta_{nl}$  appelé individu (Figure 4.3). Comme l'espace de recherche de solution est uniquement défini par le domaine de  $\theta_{nl}$ , la stratégie de recherche de solution opère sur le domaine correspondant à  $\theta_{nl}$ . Les algorithmes génétiques utilisés sont ceux de la boîte à outils « Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox » de MATLAB® qui propose plusieurs options de choix d'opérateurs. Ceux qui jouent un rôle prépondérant sont l'opérateur de sélection et les opérateurs de variations. Ces opérateurs (étapes v et vi de la Figure 4.3) sont le noyau de la stratégie de recherche de solution équivalente à l'étape « Actualiser » dans la Figure 4.2. Couplée avec l'étape de calcul analytique de  $\theta_l$ , cette nouvelle méthode d'identification inverse sera appelée « GAO » *Genetic algorithms & Analytical Optimization* [70, 71]. Il s'agit d'une méthode hybride dans le sens où elle couple une approche déterministe et une approche métaheuristique. Son originalité réside dans le fait que la partie déterministe est intégrée dans l'algorithme génétique et utilise des calculs purement analytiques.

## 4.4 Le fonctionnement et le réglage des options des algorithmes génétiques

On expose les options utilisées de l'algorithme génétique qui s'appliquent pour toutes les sections qui vont suivre. Les problèmes d'identification qui seront résolus par la suite utilisent le codage réel pour l'algorithme génétique.

### 4.4.1 L'initialisation

Cette première étape de l'algorithme est très importante pour sa réussite car elle fournit les informations initiales qui vont orienter les premières générations (itérations). Comme les algorithmes génétiques demandent uniquement une évaluation de la fonction objectif, ils fonctionnent comme des algorithmes de degré zéro. Leur efficacité à trouver une solution globale dépend donc de la « richesse » de la solution. La population initiale est définie comme une matrice dont chaque ligne représente un vecteur (individu) aléatoire de paramètres à identifier. Cet aspect aléatoire est important car il permet de

maintenir une diversité (richesse) de la population. Le nombre d'individus de la population initiale est fixé par l'utilisateur. Par défaut, les individus de la population initiale sous MATLAB sont générés dans un intervalle  $[0;1]$  ou un autre intervalle que l'on peut indiquer. Or, ce choix n'est pas nécessairement adapté à toutes les fonctions objectifs car les paramètres à trouver appartiennent parfois à différents domaines de l'espace. La meilleure manière de définir une population initiale aléatoire est de la répartir uniformément sur le domaine borné des paramètres. Cette tâche a été réalisée en utilisant d'abord la fonction *rand* disponible dans MATLAB. Elle génère un tableau de nombres aléatoires uniformément répartis sur l'intervalle  $[0;1]$ . On considère une fonction objectif dépendant d'un vecteur de dimension  $p$  :

$$\boldsymbol{\theta}_{nl} = (y_1, \dots, y_p), \quad y_i \in [a_i; b_i], \quad b_i > a_i \quad (4.29)$$

Les valeurs aléatoires correspondantes au chromosome  $y_i$  de l'individu  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  sont obtenues selon :

$$y_i = a_i + (b_i - a_i) \times \text{rand} \quad (4.30)$$

où *rand* est une fonction intégrée dans MATLAB qui permet de générer des données numériques de manière aléatoire. L'opération (4.30) est répétée sur chaque composante de  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  ayant un domaine borné. Enfin, en assemblant les vecteurs aléatoires en une matrice de dimension  $nbr \times \text{dim}(\boldsymbol{\theta}_{nl})$  (où *nbr* représente le nombre d'individus de la population) on obtient une population initiale aléatoire qui couvre uniformément le domaine de définition de  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(nbr)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & \dots & y_p^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(nbr)} & \dots & y_p^{(nbr)} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

La documentation de la boîte à outils « Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox » de MATLAB souligne le fait que la diversité de la population, particulièrement celle de la population initiale, est un des facteurs les plus importants qui détermine la performance de l'algorithme génétique. Si la distance moyenne entre les individus est importante, la diversité est élevée

alors que, si la distance moyenne est de petite taille, la diversité est faible. Ces deux extrêmes sont à éviter. La fonction aléatoire qui est proposée garantit une répartition uniforme des individus sur tout le domaine admissible. La condition de diversité de la population initiale est ainsi respectée.

Chaque individu  $\theta_{nl}$  de la population correspond à un  $\theta_l$  calculé avec l'équation (4.18). Cette étape caractérise la méthode GAO. Comme pour les algorithmes génétiques classiques, l'étape suivant l'initialisation pour l'algorithme GAO est l'évaluation.

#### 4.4.2 L'évaluation

Avec les paramètres  $\theta_{nl}$  et  $\theta_l$  trouvés, une évaluation de la fonction objectif est réalisée pour chaque couple de vecteur  $\{\theta_{nl}; \theta_l\}$ . Cette évaluation représente la capacité de chaque individu  $\theta_{nl}$  à s'adapter à son environnement. La mesure de cette performance est appelée fitness ou encore le score de l'individu. Concrètement, au niveau de l'implémentation, on adoptera une forme normalisée sous forme de pourcentage de la fonction objectif définie par l'équation (4.11) :

$$\|\epsilon(\theta)\|^2 = \frac{\|\mathcal{S}^* - \mathbf{N}(\theta_{nl}) \theta_l\|^2}{\|\mathcal{S}^*\|^2} \times 100 \quad (4.32)$$

#### 4.4.3 Le remplacement

Les caractéristiques génétiques de la population étant connues, compte tenu du fait que le score de chaque individu est déjà évalué, la population initiale devient la population « Parents ». Les parents sont classés selon leur score. Pour les algorithmes génétiques qui minimisent la fonction objectif, l'individu le plus performant est celui qui possède le score le plus bas. Il est défini comme le *meilleur individu* et sera classé au rang 1.

#### 4.4.4 Les critères d'arrêts

Ces critères déterminent la cause de l'arrêt de l'algorithme. La boîte à outils permet de contrôler les options suivantes :

- Génération : spécifie le nombre maximum d'itérations que l'algorithme génétique réalisera.
- Délai : spécifie la durée maximale en secondes avant que l'algorithme génétique s'arrête.
- Limite de la performance (équivalent à la tolérance sur la fonction objectif) : si la meilleure valeur de performance est inférieure ou égale à la valeur de la limite de la performance, l'algorithme s'arrête.
- Génération d'attente (Stall Generations) : spécifie le nombre toléré d'itérations pendant lesquelles le changement moyen pondéré de la performance au fil des générations est inférieure à la limite de la performance. L'algorithme s'arrête une fois que ce nombre de générations d'attente est atteint.
- Temps d'attente : si la meilleure valeur de la performance ne s'améliore pas durant un intervalle de temps en secondes spécifiées par temps d'attente, l'algorithme s'arrête.
- La fonction de tolérance : si la variation cumulée de la valeur de la fonction performance au fil des générations d'attente est inférieure à la fonction de tolérance, l'algorithme s'arrête.
- La tolérance de limitation non linéaire : c'est la tolérance d'arrêt lorsque des limitations non linéaires, de type inégalité par exemple, ne sont plus respectées.

Dans beaucoup de travaux utilisant les algorithmes génétiques, le critère de nombre maximum d'itérations est privilégié par rapport aux autres. Dans notre travail, le nombre de générations est désigné de manière à ce que la convergence (la réussite de l'algorithme) ait eu lieu avant que le nombre maximum d'itérations soit atteint. Ceci permettra de vérifier que l'algorithme a convergé tout en assurant que le meilleur individu marque un score inférieur à la limite de la performance. Les générations d'attente ont été fixées à 50

générations, un nombre qui est choisi après plusieurs exécutions de l'algorithme génétique. Le délai, la fonction tolérance et le temps d'attente valent l'infini (la valeur par défaut pour la plupart de ces critères).

Si un de ces critères est satisfait, l'algorithme arrête d'itérer et le meilleur individu de la population parents en cours est retenu comme la meilleure solution trouvée.

##### 4.4.5 La sélection

L'opérateur de sélection va déterminer les individus géniteurs qui vont survivre et diffuser leurs gènes. Les deux méthodes les plus connues sont la méthode de la roulette et la méthode du tournoi, chacune possédant plusieurs variantes [61]. La méthode tournoi compare la performance de deux parents différents et garde celui qui a la performance la plus élevée. Par conséquent, cette méthode divise la taille de la population par deux après chaque itération. L'algorithme arrête d'itérer quand la population compte un seul individu. Or, le dernier survivant risque de marquer un score qui ne minimise pas la somme des carrés des résidus. Cette méthode de sélection s'est donc avérée non adaptée à nos problèmes. La fonction de sélection que nous avons choisie s'appelle *Remainder*. Dans la littérature, elle est connue sous l'appellation *remainder stochastic selection with replacement*. Elle maintient une taille de population constante, utilise une méthode de sélection proportionnelle et garde une diversité moyenne au cours des itérations [61, 74]. La méthode *stochastic selection with replacement* est la célèbre méthode de la roulette biaisée (*roulette wheel*) de Goldberg [61]. Elle est probabiliste et proportionnelle. Chaque individu sélectionné comme géniteur sera dupliqué proportionnellement à sa probabilité. Cette dernière est calculée comme le ratio du score de l'individu par rapport à la somme cumulée de tous les individus de la population des parents. Puis, cette valeur est multipliée par le nombre total d'individus afin de déterminer le nombre de duplication qui seront des géniteurs. De cette manière, l'individu le plus performant aura plus de chance de transmettre ses gènes. Cependant, utilisée en l'état, cette procédure présente le risque d'une convergence prématurée. En effet, un individu,

largement plus performant que les autres, risque de dominer la génération des parents et d'appauvrir la diversité des générations futures en la saturant avec les gènes qu'il lui a transmises. Pour remédier à ce problème, l'opérateur de sélection agit sur la performance une fois qu'elle est mise à l'échelle (*scaled fitness*). La méthode retenue, qui s'appelle *Rank scaling*, permet de maintenir une bonne diversité au cours des itérations [61]. Les individus sont rangés par ordre de performance. Comme on cherche à minimiser une fonction, l'individu le plus performant est celui qui marquera le score le plus bas. Il occupera le rang 1. Proportionnellement à son rang, une valeur est attribuée à l'individu.

Supposons à titre d'exemple qu'un individu possède une valeur 4.2 qui est mise à l'échelle. Cet individu sera sélectionné 4 fois comme géniteurs. S'il manque encore des places pour compléter la population des géniteurs, on sélectionne aléatoirement parmi les parents restants. C'est la méthode de la roulette biaisée dont la méthode *remainder* n'est qu'une variante. En effet, dans une première étape, la fonction de sélection utilisée est identique à la roulette biaisée. Mais, dans une deuxième étape, la fonction sélectionne des parents supplémentaires en utilisant les parties fractionnaires des valeurs mises à l'échelle, selon la sélection uniforme stochastique. Cette fonction définit une ligne de segments dont les longueurs sont proportionnelles à la partie fractionnaire de la valeur mise à l'échelle des individus, et se déplace avec un pas constant le long de la ligne pour sélectionner les parents.

**Les élites :** Les meilleurs individus, nommés les élites, peuvent être copiés dans la descendance. L'élitisme permet de garder un historique de l'évolution. De Jong [29] a noté qu'en optimisation, l'élitisme favorise la convergence vers une solution optimale [8, 133]. Cependant, le nombre d'individus élite à copier doit rester raisonnable afin de ne pas entraîner l'algorithme vers une convergence prématurée. Sous MATLAB, l'algorithme est configuré par défaut de manière à copier deux élites d'une génération à l'autre. Pour notre configuration de l'algorithme, une seule élite a été retenue. Ce choix est le résultat de plusieurs essais montrant que :

- retenir un nombre important d'élites n'est pas le bon choix. La diversité chute rapidement.



- Pour un nombre d'élites raisonnable (de deux à cinq), l'efficacité de l'algorithme ne s'améliore pas par rapport au cas où l'on retient une seule élite.

#### 4.4.6 Les variations

Les variations sont les ensembles des opérateurs qui agissent sur les géniteurs sélectionnés afin de créer la descendance. Les principaux opérateurs sont le croisement et la mutation. Un autre opérateur activé par défaut sous MATLAB est la migration.

**La migration :** Elle est inspirée du principe du *modèle des îles* [voir § C6.3 dans 8]. Ce modèle a montré son utilité pour les calculs distribués entre plusieurs processeurs opérants sur des sous-domaines de l'espace sans intersection [voir chapitre 22 dans 101]. Les îles peuvent être comparées à de nombreuses petites populations reproductrices locales, aléatoires et isolées les unes des autres. Ces petites populations sont créées par l'algorithme dès que la taille de la population est supérieure à 1. Elles émanent du processus statistique de création de la descendance qui présente la probabilité de grouper des individus sur une zone localisée de l'espace de recherche de solution. La migration permet d'échanger les informations entre les sous-populations. Sous MATLAB, la migration déplace des individus entre les sous-populations. Elle copie les meilleurs individus d'une sous-population pour remplacer les pires individus dans une autre sous-population. La fréquence de l'occurrence de la migration ainsi que le nombre des meilleurs individus à copier sont contrôlables.

Comme la migration ne fait pas partie des principaux opérateurs des algorithmes génétiques, son impact sur l'efficacité de l'algorithme GAO n'a pas été étudié et les valeurs définies par défaut par MATLAB ont été retenues.

**La mutation :** trois types de mutation sont présentés dans MATLAB. On trouve la mutation :

*Uniforme* : chaque variable  $y_i \in \theta_{nl}$  est changée selon une certaine probabilité en un nombre aléatoire tiré dans une distribution uniforme sur l'intervalle  $[a_i; b_i]$ , les bornes inférieures et supérieures pour  $y_i$ .

*Adaptation admissible* (adaptative feasible) : génère aléatoirement des directions qui sont adaptatives par rapport à la dernière génération. Une longueur de pas est choisie selon chaque direction de façon à rester dans le domaine admissible.

*Gaussienne* : ajoute un nombre aléatoire à chaque vecteur individu de la population. Ce nombre aléatoire provient d'une distribution gaussienne centrée sur zéro. L'écart-type de cette distribution peut être contrôlé avec deux paramètres : le paramètre d'échelle (Scale parameter) détermine l'écart-type à la première génération et le paramètre de rétrécissement (Shrink parameter) contrôle la manière dont l'écart-type se rétrécit au cours des générations. Si le paramètre shrink est égal à 0, l'écart-type garde une valeur constante. Si le paramètre Shrink vaut 1, l'écart-type se rétrécit linéairement pour atteindre la valeur 0 à la dernière génération.

En identification inverse, les paramètres du problème sont souvent bornés et contraints. Il est donc préférable de choisir la mutation adaptative car elle permet de respecter ces restrictions. Si il n'y a pas de contraintes, on privilégie l'utilisation de la méthode gaussienne, préférentiellement à l'uniforme, car elle est basée sur le calcul statistique de l'écart-type.

**Le croisement** : C'est l'opérateur de variation le plus important. Il permet l'échange d'informations entre les chromosomes (individus) par le biais de leur combinaison.

*Croisement simple* (single point crossover) : la population qui résulte de la sélection est divisée en deux sous-populations de taille  $nbr/2$ , où on rappelle que  $nbr$  est le nombre d'individus dans la population. Chaque couple de parents,  $\theta_{nl}^{(1)} = (y_1^{(1)}, \dots, y_p^{(1)})$  et  $\theta_{nl}^{(2)} = (y_1^{(2)}, \dots, y_p^{(2)})$ , formé par un membre provenant de chaque sous-population, participe à un croisement. Si le croisement a lieu, un

nombre aléatoire  $r$  est tiré selon une distribution uniforme sur l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$  qui représente le nombre de paramètres à identifier. Deux nouveaux descendants  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$  sont créés et leurs  $i^{\text{ème}}$  chromosomes sont choisis de la manière suivante :

$$\mathbf{d}_1 : \begin{cases} y_i^{(1)}, & \text{si } i < r \\ y_i^{(2)}, & \text{sinon} \end{cases} \quad \mathbf{d}_2 : \begin{cases} y_i^{(2)}, & \text{si } i < r \\ y_i^{(1)}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.33)$$

La même méthode existe pour deux nombres tirés aléatoirement. Elle est nommée *croisement double* (two points crossover). Ces deux méthodes ont été testées pour la résolution du problème inverse. Il a été remarqué que, pour une taille de vecteur de paramètres très courte (taille égale à 1 par exemple), ces deux méthodes font chuter rapidement la diversité de la fonction. On a donc opté pour des méthodes adaptées au codage réel comme les croisements arithmétique et heuristique qui sont décrits ci-après.

*Croisement arithmétique* : Ce croisement crée les enfants en effectuant une simple combinaison linéaire entre les parents. Après avoir généré un nombre aléatoire  $\alpha$  dans  $[0;1]$ , la moyenne arithmétique aléatoire crée les descendants suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= \alpha \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(1)} + (1 - \alpha) \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(2)} \\ \mathbf{d}_2 &= (1 - \alpha) \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(1)} + \alpha \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

*Croisement heuristique* : Cet opérateur effectue une extrapolation linéaire des deux parents pour créer un enfant. Cet enfant sera placé au hasard sur la ligne contenant les deux parents, à une faible distance du parent le plus performant et dans la direction opposée à celui de faible performance :

$$\mathbf{d}_1 = \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(1)} + r(\boldsymbol{\theta}_{nl}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}_{nl}^{(2)}) \quad (4.35)$$

Dans la formule (4.35), on a considéré que la performance de  $\boldsymbol{\theta}_{nl}^{(1)}$  était supérieure à la performance de  $\boldsymbol{\theta}_{nl}^{(2)}$ . Dans le cas contraire,

il suffit de permuter les rôles de  $\theta_{nl}^{(1)}$  et  $\theta_{nl}^{(2)}$ . Le nombre  $r$  est souvent choisi dans l'intervalle  $[0; 1]$ . Il est par défaut fixé à 1.2 dans MATLAB (Figure 4.4). Si l'enfant  $d_1$  créé est situé en dehors du domaine admissible, l'algorithme génère aléatoirement des valeurs de  $r$  jusqu'au respect des contraintes.

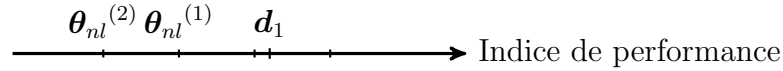


FIGURE 4.4: Croisement heuristique.

L'avantage du croisement heuristique provient du fait qu'il repose sur la fonction performance des parents. Selon Michalewicz *et al.* [110], cette méthode guide l'algorithme vers la solution globale plus facilement que les autres. Il faut cependant noter que, lorsque plusieurs contraintes sont imposées, la détermination du  $r$  permettant de respecter ces contraintes peut nécessiter un temps de calcul assez long. Dans ce cas, il est plus rentable d'utiliser le croisement arithmétique.

#### 4.4.7 Le croisement et le temps de calcul

Dans ce paragraphe, on aborde la question du temps de calcul en lien avec l'opérateur de croisement. Cet opérateur constitue, ainsi que cela a été souligné précédemment, l'un des opérateurs les importants des algorithmes génétiques. Pour illustrer ce paragraphe, nous avons considéré le modèle de Peng *et al.* [123]. Ce modèle comporte cinq paramètres non-linéaires et deux linéaires. L'identification a ainsi porté sur sept paramètres au total. Il s'agit du cas le plus complexe que nous avons traité dans nos travaux de thèse. Cela permet donc d'exploiter des résultats avec des temps de calcul suffisamment significatifs. Les calculs ont été réalisés sur une machine Dell OPTIPLEX 760 Pentium(R) Dual-Core E5300. On approxime la solution du problème inverse avec la méthode GAO.

#### La fraction de croisement

Avec la méthode de croisement heuristique, on fait varier la fraction du croisement. Cette dernière est définie comme le pourcentage des géniteurs qui

vont transmettre leur gène à leur descendance par croisement. L'élite retenue n'est pas considérée comme un géniteur vu qu'elle est directement copiée dans la descendance. Le complémentaire de cette fraction représente les individus qui vont subir une mutation. Par défaut, cette fraction de croisement sous MATLAB est réglée à 0.8, indiquant un pourcentage de croisement de 80% des géniteurs.

En choisissant les valeurs de fraction allant de 0.7 à 0.9 avec un pas de 0.05, on relève, pour chacune de ces fractions, le temps processeur mis pour résoudre le problème d'identification. Pour chacune des fractions de croisement, l'algorithme GAO est exécuté 5 fois. On note ainsi 5 temps processeur différents en raison du caractère aléatoire des algorithmes génétiques. La Figure 4.5 montre l'évolution de la moyenne du temps processeur par rapport à la fraction de croisement. On remarque que le temps processeur a tendance à croître rapidement si la fraction de croisement diminue. Ainsi pour une fraction de 0.7, le temps processeur est presque 3 fois supérieur à celui enregistré pour une fraction de 0.9. À partir de la valeur de 0.8, le temps processeur chute lentement en fonction de la fraction de croisement.

Les écart-types du temps processeur, calculés pour les 5 exécutions de chaque fraction de croisement, augmentent fortement lorsque les fractions de croisement diminuent. Ce constat s'explique aisément car :

- quand la fraction de croisement est élevée, la population au cours des itérations est stable puisqu'elle subit peu l'influence des perturbations aléatoires provenant de la mutation des individus qui est ici faible.
- quand la fraction de croisement est faible, le taux de mutation est élevé. Cela entretient une forte diversité dans les populations successives, ce qui ralentit la convergence.

Sur cet exemple, on peut conclure que la fraction de croisement de 0.8 proposée par défaut par MATLAB est un bon compromis. Une fraction trop faible entrave la rapidité de convergence. Une fraction trop élevée permet une convergence rapide mais avec une faible diversité qui risque d'entraîner l'obtention d'un optimum local. La Figure 4.6 confirme cette analyse. On

observe en effet que, plus la fraction de croisement est faible (et donc plus le taux de mutation est élevé), plus le nombre de générations nécessaire à la convergence est important.

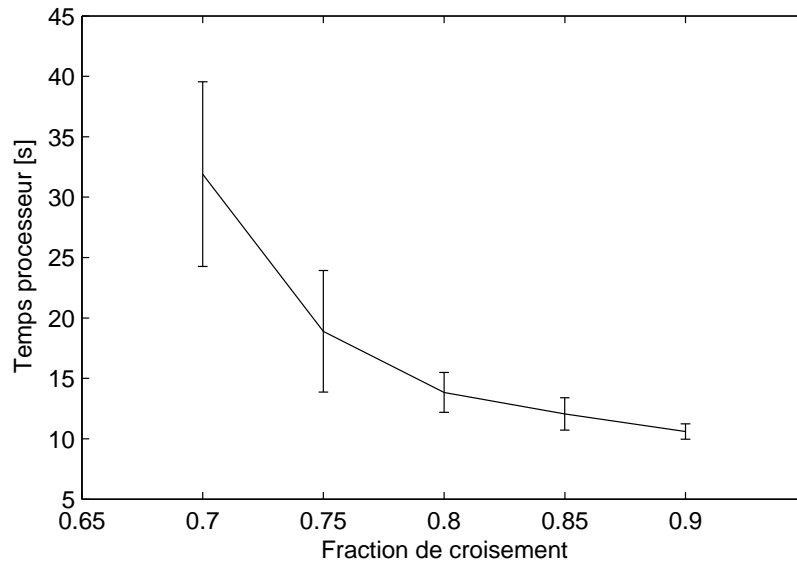


FIGURE 4.5: Temps processeur vs fraction de croisement heuristique. Pour chaque fraction de croisement : moyenne et écart-type du temps processeur pour 5 exécutions différentes de GAO.

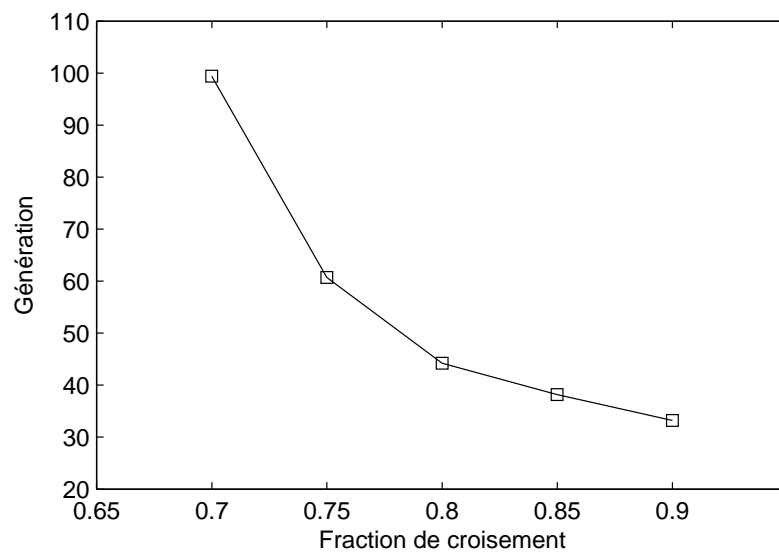


FIGURE 4.6: Génération vs fraction de croisement.

### **Le croisement heuristique et le croisement arithmétique**

Dans cette partie, on fait à nouveau une étude sur le temps de calcul en comparant cette fois le croisement heuristique et le croisement arithmétique. La fraction de croisement a été choisie égale à 0.75 de manière à obtenir une diversité assez élevée tout en restant proche de la valeur par défaut de 0.8 qui est un bon compromis entre la convergence et la diversité comme cela a été souligné précédemment. On réalise 7 exécutions de l'algorithme pour chacune des deux méthodes de croisement. Puis, on note le temps processeur ainsi que le nombre de génération nécessaires à la convergence.

La Figure 4.7 montre deux séries de calcul, l'une réalisée avec le croisement heuristique et l'autre avec le croisement arithmétique. La moyenne, effectuée sur les sept exécutions de chaque calcul, est symbolisée par une étoile \* sur la figure. On en déduit que :

- les exécutions ont en moyenne un temps processeur de 18.9 secondes pour le croisement heuristique contre 42.5 secondes pour le croisement arithmétique.
- l'écart-type lié au temps processeur est de l'ordre de 5 secondes pour le croisement heuristique contre 9 secondes pour le croisement arithmétique.

Par conséquent, le croisement heuristique est plus efficace que le croisement arithmétique pour ce qui concerne le temps processeur.

Très logiquement, on peut noter que le temps processeur varie linéairement en fonction du nombre de génération pour les deux séries d'exécution. Il est cependant remarquable que les pentes des deux droites sont identiques. Cela signifie que le temps de calcul consacré à chaque génération est le même pour le croisement heuristique que pour le croisement arithmétique. Ce qui rend le croisement arithmétique plus compétitif est donc le nombre de génération nécessaire à la convergence, et non le temps de calcul consacré à chaque génération.

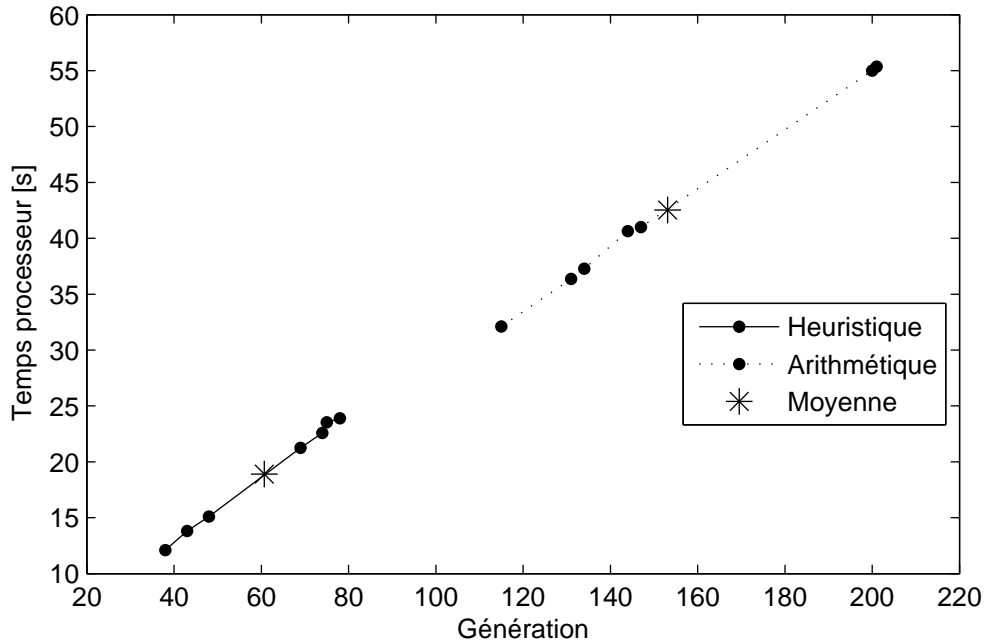


FIGURE 4.7: Croisements heuristique et arithmétique pour une fraction de croisement de 0.75.

#### 4.4.8 Synthèse

En optimisation, et plus particulièrement pour les problèmes inverses en biomécanique, la combinaison des opérateurs *selection remainder* et *croisement heuristique* à 80% fonctionne parfaitement.

Les tests numériques présentés dans cette partie ont été réalisés à partir d'une population initiale générée selon la loi uniforme (4.30). Cependant, cette méthode ne permet pas de prendre en compte des contraintes linéaires ou non linéaires. Cette lacune n'est pas pénalisante dans le cadre de cette thèse car le problème d'optimisation associé aux modèles étudiés ne nécessite pas la prise en compte de contraintes. Il serait toutefois intéressant de réfléchir à inclure l'intégration de telles contraintes dans le processus de génération de la population initiale.

Les choix d'options de l'algorithme génétique ayant été justifiés et validés dans ce paragraphe, on met en œuvre dans les paragraphes qui suivent la



méthode GAO afin de résoudre de manière concrète des problèmes d'identification inverse en biomécanique.

## 4.5 Application en biomécanique

Les tissus biologiques sont souvent considérés comme quasi-incompressibles. Numériquement, l'incompressibilité est imposée par le biais d'un multiplicateur lagrangien [LSDyna, Livermore, CA, USA ; 68]. Les contraintes sont alors calculées pour un champs arbitraire de pression hydrostatique [voir 25]. La densité d'énergie  $W$  est ainsi généralement constituée de l'addition d'un terme incompressible noté  $U$  et d'un terme isochore noté  $\bar{W}$  :

$$W = U(\mathbf{X}; J) + \bar{W}(\mathbf{X}; \bar{\mathbf{C}}; \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \quad (4.36)$$

Le terme  $U$ , qui est lié à l'incompressibilité, est qualifié de densité d'énergie de déformation volumétrique. Le terme  $\bar{W}$ , appelé encore densité de déformation isochore, est associé à la décomposition multiplicative. Il est bien connu que cette décomposition du champs de déformation  $\mathbf{F}$  permet d'améliorer la convergence des algorithmes numériques (Flory [44], Ogden [119] et Weiss *et al.* [166]). Cette décomposition consiste à séparer  $\mathbf{F}$  en une partie volumétrique et une autre isochore :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3} \mathbf{I}, \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (4.37)$$

Il est ainsi évident que la partie volumétrique  $\mathbf{F}_{vol}$  contribue au changement de volume, alors que la partie  $\bar{\mathbf{F}}$  est isochore :

$$\det(\mathbf{F}_{vol}) = J, \quad \det(\bar{\mathbf{F}}) = 1 \quad (4.38)$$

Les tenseurs de déformation gauche et droit de Cauchy-Green ( $\bar{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}$ ) ainsi que le tenseur de Green-Lagrange  $\bar{\mathbf{E}}$  s'obtiennent à partir de l'équation (4.37) :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{C}} &= \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^T = J^{-2/3} \mathbf{B} \\ \bar{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} (J^{-2/3} \mathbf{C} - \mathbf{I}) = J^{-2/3} \mathbf{E} + \frac{1}{2} (J^{-2/3} - 1) \mathbf{I}\end{aligned}\quad (4.39)$$

On en déduit les invariants réduits (modifiés) associés à  $\bar{\mathbf{C}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}$  [166] :

$$\bar{I}_1 = I_3^{-1/3} I_1, \quad \bar{I}_2 = I_3^{-2/3} I_2 \quad (4.40)$$

On note enfin que la densité d'énergie de déformation isochore  $\bar{W}$  est fonction des  $i$  tenseurs structuraux  $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i$  associés aux  $i$  directions privilégiées de famille de fibres de collagène.

#### 4.5.1 Modèle de Fung

Ce modèle a été présenté par Holzapfel [77] dans le cadre de l'identification inverse des paramètres matériau pour un tissu artériel. Holzapfel utilise la densité d'énergie de type Fung (équation (2.53)) pour modéliser le comportement anisotrope du tissu artériel et pour la densité d'énergie néo-Hookéenne pour modéliser le comportement isotrope du tissu. On désigne donc par le modèle de Fung la densité d'énergie étudiée par Holzapfel [77]. On considère le comportement mécanique passif de la paroi artérielle. Il est caractérisé par une densité d'énergie de déformation  $W$  donnée par (Holzapfel et Weizsäcker [85]) :

$$W = W_{iso}(\mathbf{E}) + W_{ortho}(\mathbf{E}) \quad (4.41)$$

La substance de base de la paroi artérielle a une densité isotrope d'énergie de déformation  $W_{iso}$ . Holzapfel et Weizsäcker [85] ont suggéré d'utiliser une forme néo-Hookéenne pour la représenter :

$$W_{iso} = \mu/2 (I_1 - 3) \quad (4.42)$$

où  $\mu > 0$  est le module de cisaillement.

En rappelant que  $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$ , on exprime  $I_1$  en fonction du tenseur de Green-Lagrange :  $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = 2\text{tr}(\mathbf{E}) + 3$ . On a donc :

$$W_{iso} = \mu \text{tr}(\mathbf{E}) \quad (4.43)$$

On rappelle par ailleurs que la décomposition multiplicative (4.37) est utilisée préférentiellement :

$$\bar{W}_{iso} = \mu \text{tr}(\bar{\mathbf{E}}) \quad (4.44)$$

où  $\bar{\mathbf{E}}$  est défini par l'équation (4.39).

Par ailleurs, en utilisant la condition d'incompressibilité (4.38) et en supposant que l'on travaille dans le repère des déformations principales, on obtient :

$$\bar{E}_{33} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ (2\bar{E}_{11} + 1)(2\bar{E}_{22} + 1) \right]^{-1} - 1 \right\} \quad (4.45)$$

En remplaçant  $\bar{E}_{33}$  dans (4.44), on obtient finalement :

$$\bar{W}_{iso} = \frac{\mu}{2} \left\{ 2(\bar{E}_{11} + \bar{E}_{22}) + \left[ (2\bar{E}_{11} + 1)(2\bar{E}_{22} + 1) \right]^{-1} - 1 \right\} \quad (4.46)$$

Les trousseaux de fibres de collagène renforcent la paroi artérielle. Ils sont disposés selon deux directions privilégiées dans chacune des trois couches – intima, media et adventitia – de la paroi artérielle. Comme ils sont répartis dans le plan circonférentiel de la couche, le tissu devient un matériau cylindriquement orthotrope dont les fibres emmagasinent une densité d'énergie de déformation  $\bar{W}_{ortho}(\bar{E}_{11}, \bar{E}_{22})$  quand elles sont étirées. Cette énergie orthotrope  $\bar{W}_{ortho}$  est modélisée par une forme d'énergie de Fung [53] qui suit une approche phénoménologique du tissu et qui est fonction des composantes de  $\bar{\mathbf{E}}$  :

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ortho}(\bar{E}_{11}, \bar{E}_{22}) &= C [\exp(Q) - 1], \\ Q &= c_1 \bar{E}_{11}^2 + c_2 \bar{E}_{22}^2 + c_3 \bar{E}_{11} \bar{E}_{22} \end{aligned} \quad (4.47)$$

où  $C > 0$  est un paramètre matériau qui est exprimé en MPa, tandis que  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont des paramètres matériau sans dimension. Conformément aux hypothèses sur la distribution des fibres dans une couche artérielle,  $\bar{W}_{ortho}$  est un modèle à deux dimensions exprimé en fonction de  $\bar{E}_{11}$  et  $\bar{E}_{22}$ . Il décrit l'isotropie transverse du tissu dans le plan. Ce modèle ne permet pas d'analyser les contraintes suivant l'épaisseur du tissu. En revanche, pour une transformation isochore sans cisaillement, ce modèle est précis et tridimensionnel malgré sa formulation bidimensionnelle. Ainsi il est bien adapté pour simuler la déformation du tissu dans des cas particuliers, telle que la traction simple ou le gonflement d'une artère qui est considérée comme un tube cylindrique circulaire à paroi mince (ou à paroi épaisse).

#### 4.5.1.1 Equations constitutives

Avec la méthode GAO, on va procéder à l'identification des paramètres  $\mu$ ,  $C$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  de la loi de Fung décrite par la somme des densités d'énergie définies par les équations (4.46) et (4.47). Il sera ainsi nécessaire de présenter les équations constitutives qui permettront de valider le test de déformation uniaxial pour chacune des couches artérielles : adventitia, media et intima. Ces tests expérimentaux réalisés par Holzapfel [77] montrent des courbes de contraintes du second tenseur de Piola-Kirchhoff en fonction des déformations Lagrangiennes. En rappelant l'équation (2.23), les composantes du second tenseur de Piola-Kirchhoff s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{E}_{11}} = \mu \left\{ 1 - \left[ (2\bar{E}_{11} + 1)^2 (2\bar{E}_{22} + 1) \right]^{-1} \right\} \\ &\quad + C \left[ (2c_1 \bar{E}_{11} + c_3 \bar{E}_{22}) \exp(Q) \right] \\ S_{22} &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{E}_{22}} = \mu \left\{ 1 - \left[ (2\bar{E}_{11} + 1) (2\bar{E}_{22} + 1)^2 \right]^{-1} \right\} \\ &\quad + C \left[ (2c_2 \bar{E}_{22} + c_3 \bar{E}_{11}) \exp(Q) \right] \end{aligned} \tag{4.48}$$

avec  $Q = c_1 \bar{E}_{11}^2 + c_2 \bar{E}_{22}^2 + c_3 \bar{E}_{11} \bar{E}_{22}$ . Les directions principales sont indiquées sur la Figure 4.8,  $e_1$  sa direction circonférentielle et  $e_2$  la direction axiale de

l'artère.

L'additivité des contraintes  $S_{11}$  et  $S_{22}$  montre deux termes linéaires dont les coefficients sont  $\mu$  et  $C$ . Ces deux paramètres matériau sont exprimés en Pa. Les autres paramètres matériau  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont adimensionnels et interviennent de manière non-linéaire dans l'équation (4.48). Il y a donc cinq paramètres à identifier dans le modèle de Fung, deux linéaires et trois non-linéaires :

$$\boldsymbol{\theta}_l = \begin{bmatrix} \mu \\ C \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_{nl} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_l \\ \boldsymbol{\theta}_{nl} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

La construction de (4.48) permet d'écrire un système matriciel sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ C \end{bmatrix}, \\ N_{11} &= 1 - \left[ (2\bar{E}_{11} + 1)^2 (2\bar{E}_{22} + 1) \right]^{-1} \\ N_{12} &= (2c_1\bar{E}_{11} + c_3\bar{E}_{22}) \exp(c_1\bar{E}_{11}^2 + c_2\bar{E}_{22}^2 + c_3\bar{E}_{11}\bar{E}_{22}) \\ N_{21} &= 1 - \left[ (2\bar{E}_{11} + 1)(2\bar{E}_{22} + 1)^2 \right]^{-1} \\ N_{22} &= (2c_2\bar{E}_{22} + c_3\bar{E}_{11}) \exp(c_1\bar{E}_{11}^2 + c_2\bar{E}_{22}^2 + c_3\bar{E}_{11}\bar{E}_{22}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Soit encore, sous forme plus compacte :

$$\mathbf{S} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \boldsymbol{\theta}_l \quad (4.51)$$

#### 4.5.1.2 Données mesurées

L'identification des paramètres de la loi de Fung utilise des données expérimentales provenant de deux protocoles différents de test de déformation uniaxiale :

- traction suivant la direction circonférentielle

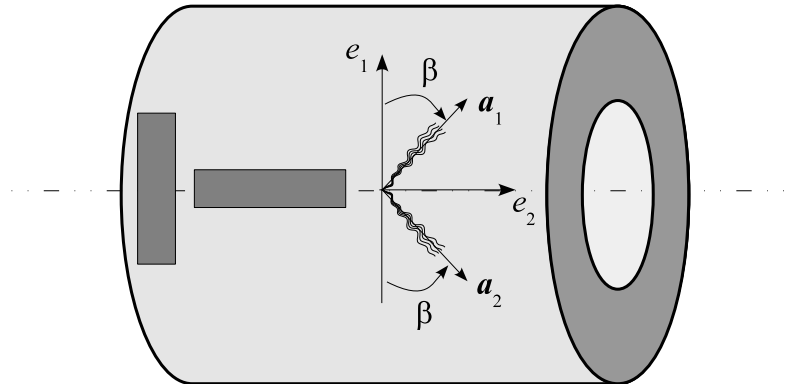


FIGURE 4.8: Test de déformation uniaxiale.  $e_1$  : direction circonférentielle.  $e_2$  : direction axiale.  $\beta$  est l'angle phénoménologique associé à la direction privilégiée des fibres de collagène.

- traction suivant la direction axiale

Ce processus est répété pour chacune des trois couches artérielles. Ne disposant pas de données expérimentales tabulées (seulement fournies sous forme de courbes dans [77]), se pose la question de leur exploitation. Plutôt que de numériser les courbes expérimentales présentées dans Holzapfel [77] (avec des risques de perte d'information au niveau de la précision de la numérisation), nous avons fait le choix de reproduire ces courbes à l'identique par le calcul. Les paramètres matériau utilisés dans le calcul sont ceux estimés par Holzapfel dans [77]. Pour chacun des deux tests uniaxiaux, le protocole de calcul est le suivant :

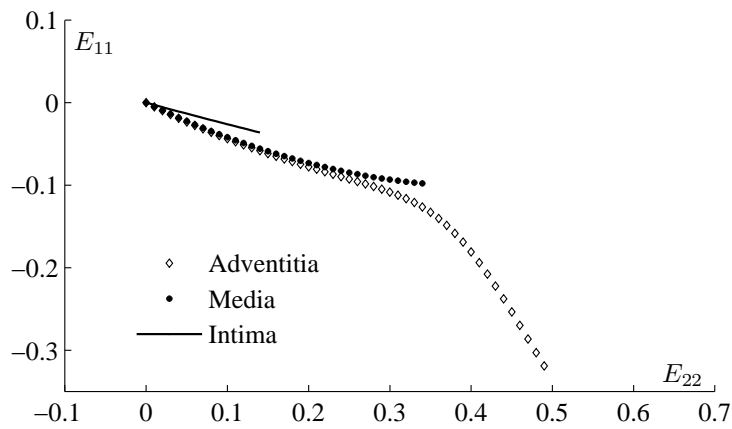
*Protocole 1* : traction suivant la direction  $e_1$ .

On impose une valeur de  $E_{11}$  choisie dans le domaine de déformations physiologiques du tissu. Le tissu étant libre de se déformer suivant la direction  $e_2$ , on calcule une valeur  $E_{22}$ , correspondante à  $E_{11}$  imposée, de manière à annuler les contraintes  $S_{22}$  définies par l'équation (4.48). En faisant ainsi varier la valeur de  $E_{11}$ , la résolution de  $S_{22} = 0$  permet de trouver les couples de mesure  $\{E_{11}; E_{22}\}$ . Par conséquent, à chaque couple de déformations correspond une valeur de contrainte calculée  $S_{11}$  selon (4.48). Ces points de contraintes sont stockés pour chaque  $E_{11}$  dans le vecteur des contraintes mesurées  $\mathbf{S}_{11}^*$ .

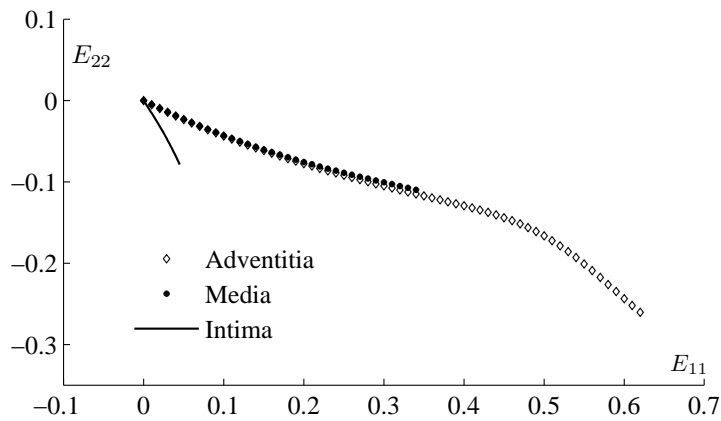
*Protocole 2* : traction suivant la direction  $e_2$ .

La même démarche que pour le protocole 1 est adoptée. Pour une valeur de  $E_{22}$  imposée, la solution de  $S_{11} = 0$  donne une valeur de  $E_{11}$ . Puis, pour le couple  $\{E_{22}; E_{11}\}$ , une contrainte  $S_{22}$  est calculée. On appelle  $\mathbf{S}_{22}^*$  le vecteur qui stocke les valeurs  $S_{22}$  trouvées pour chaque  $E_{22}$  balayant le domaine de déformation physiologique en extension.

La fonction *fzero* de Matlab a été utilisée afin de trouver le zéro des fonctions non linéaires :  $S_{11}(E_{22}) = 0$  pour un  $E_{11}$  imposé et  $S_{22}(E_{11}) = 0$  pour un  $E_{22}$  imposé.



(a) Traction dans la direction axiale.



(b) Traction dans la direction circonférentielle.

FIGURE 4.9: Courbes déformations-déformations.

Les Figures 4.9 (a) et (b) montrent l'évolution de  $E_{22}$  en fonction de  $E_{11}$  pour le test de traction dans la direction axiale et la variation de  $E_{11}$  en fonction de  $E_{22}$  pour le test de traction dans la direction circonférentielle. Les courbes obtenues sont strictement identiques à celles tracées dans Holzapfel [77].

#### 4.5.1.3 Identification des paramètres

Pour la résolution du problème de moindres carrés non linéaires en utilisant la méthode GAO, on procède par l'assemblage du système matriciel représentant les deux protocoles expérimentaux décrits ci-dessus. Ce système matriciel est décrit en généralisant l'équation (4.51) avec une matrice  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl})$  comprenant autant de lignes ( $m$ ) que de valeurs  $E_{11}$  et  $E_{22}$  considérées dans les protocoles expérimentaux.  $m$  est donc un nombre pair. Le problème d'identification se ramène au problème suivant de minimisation au sens des moindres carrés :

$$\text{Min}_{\boldsymbol{\theta}_l, \boldsymbol{\theta}_{nl}} \frac{\|\mathbf{S}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \boldsymbol{\theta}_l\|^2}{\|\mathbf{S}^*\|^2} \times 100 \quad (4.52)$$

où  $\mathbf{S}^*$  représente le vecteur des contraintes mesurées. La multiplication par 100 et la division par  $\|\mathbf{S}^*\|^2$  ont été introduites pour tenir compte d'un écart relatif.

Conformément aux résultats théoriques obtenus avec la méthode GAO, notamment le Lemme 4.3.1 ainsi que l'équation (4.18), il est possible de réduire ce problème de minimisation en passant de 5 à 3 paramètres à identifier :

$$\text{Min}_{\boldsymbol{\theta}_{nl}} \frac{\left\| \mathbf{S}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) [\mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl})]^{-1} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \mathbf{S}^* \right\|^2}{\|\mathbf{S}^*\|^2} \times 100 \quad (4.53)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  est le vecteur à trois composantes défini par l'équation (4.49).

Remarque : Si  $m$  est égal à 2 on note que la matrice  $\mathbf{N}$  est une matrice carrée. En supposant que les deux colonnes de  $\mathbf{N}$  sont indépendantes l'une de l'autre, donc que  $\mathbf{N}$  est inversible, il vient :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) [\mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl})]^{-1} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) = \mathbf{I} \quad (4.54)$$



La fonction objectif dans (4.53) est donc nulle. Cela signifie que n'importe quel jeu de paramètres non-linéaires  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  est un minimum de la fonction à minimiser. Dans le cas du modèle de Fung, il est par conséquent nécessaire de choisir  $m$  au moins égal à 4 (sachant que  $m$  doit être pair) pour éviter d'obtenir une infinité de solution au problème d'identification inverse.

Il faut noter par ailleurs que les paramètres non-linéaires  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  ne peuvent pas être choisis librement. En effet, Holzapfel [77] préconise les contraintes de type inégalité suivantes afin de satisfaire des propriétés de convexité :

$$\begin{cases} c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0 \\ 4 c_1 c_2 - c_3^2 > 0 \end{cases} \quad (4.55)$$

Les limitations linéaires de type inégalité et égalité sont précisées, sous forme matricielle, directement dans le bloc des options des algorithmes génétiques. Les limitations non linéaires, de type égalité ou inégalité, requièrent par contre de définir un programme dans un fichier séparé de type *Function M-file* de MATLAB. Le détail sur les limitations est disponible dans la documentation de MATLAB sur la boîte à outils *Optimization Toolbox* sous la rubrique *Writing Constraints*. Pour une formulation classique de ce problème d'identification, il sera nécessaire d'imposer une limitation additionnelle  $\{\boldsymbol{\theta}_i\} > 0$  à la fonction objectif conformément aux limitations définies dans Holzapfel [77].

Les simulations sont exécutées sur un ordinateur muni d'un processeur Pentium 4 cadencé à 2.8 GHz et avec 512 Mo de RAM. Les critères d'arrêts sont réglés de manière à retenir la meilleure solution avec un score inférieur à une limite de performance de l'ordre de  $10^{-10}$ . Cette valeur est atteignable car le vecteur de contraintes mesurées est généré numériquement. Si on s'était appuyé sur un nuage de points, plutôt que sur une courbe numérique, la dispersion des mesures aurait bien sûr permis une identification mais avec une performance inférieure de la meilleure solution.

La taille de la population est fixée à 50 individus. Cette valeur est retenue, après avoir augmenté progressivement sa valeur initiale jusqu'à ce que l'algorithme arrive à converger vers la même solution pour une multitude d'exécutions aléatoires. Il faut noter que le temps d'évaluation de la population est très rapide en raison de la forme analytique de la fonction objectif.

Le Tableau 4.2 présente les résultats d'identification de paramètres avec la méthode GAO. Le temps processeur est enregistré pour chaque convergence de l'algorithme.

TABLEAU 4.2: Résultats de l'identification des paramètres avec la méthode GAO - score du meilleur individu.

Couche	$\mu$ [KPa]	C [KPa]	$c_1$ [-]	$c_2$ [-]	$c_3$ [-]	TP <sup>1</sup> [s]
Adventitia	17.3	4.71 E <sup>-4</sup>	37.7	63.8	58	110
Media	31.4	1.4 E <sup>-1</sup>	32.8	23.5	14.7	30
Media <sup>2</sup>	31.4	1.4 E <sup>-1</sup>	32.8	23.5	14.7	8
Intima	39.8	1.42	998.0	126.9	509.5	467

<sup>1</sup> Le temps processeur (TP) est une moyenne sur plusieurs calculs, sachant que l'écart-type est faible. Chaque calcul, effectué dans les mêmes conditions, fournit un temps différent en raison du caractère aléatoire des AGs.

<sup>2</sup> La fonction objectif est calculée selon l'option 'vectorized' de l'AG.

Pour tester l'option 'vectorized' de l'AG, la couche media a été retenue. En effet, les tests numériques ont montré que la convergence avec cette couche était la plus aisée. L'option 'vectorized' demande une forme de programmation particulière à MATLAB qui permet d'évaluer toute la population au même instant. On remarque l'impact de l'utilisation de cette option sur le temps processeur. Il est environ 4 fois plus petit que celui de la couche media avec l'option vectorized inactive et les résultats de l'identification sont strictement les mêmes (Tableau 4.2).

Les résultats obtenus avec GAO sont comparés à ceux de Holzapfel [77] dans le Tableau 4.3. On note une correspondance quasi-parfaite. Le nombre de points de mesure utilisés pour procéder à l'identification est de 54 pour la

couche intima, 108 pour la couche adventitia et 70 pour la couche media. Bien que les points de mesure soient généralement de l'ordre du millier en biomécanique [138, 139], les TABLEAUX 4.2 et 4.3 montrent que l'algorithme GAO converge parfaitement vers les valeurs attendues, et ce même avec un nombre réduit de points de mesure.

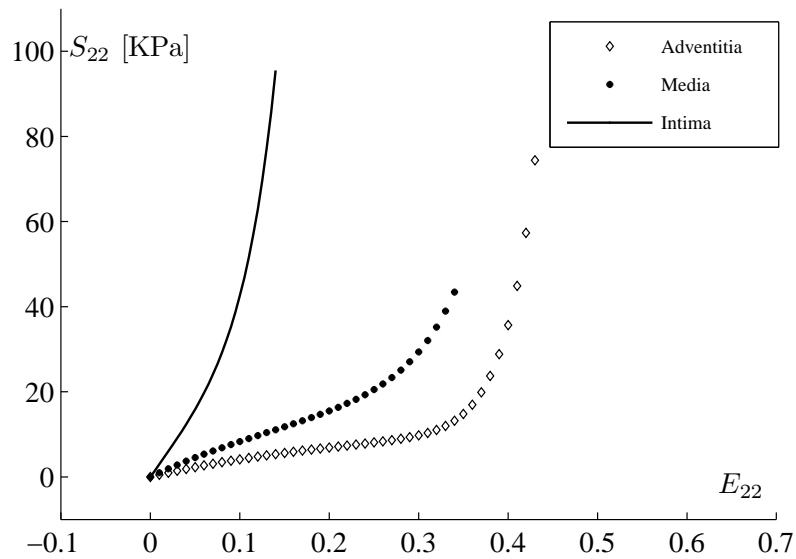
TABLEAU 4.3: Comparaison des résultats d'identification avec celles de Holzapfel [77].

Couche	$\mu$ [KPa]	$C$ [KPa]	$c_1$ [-]	$c_2$ [-]	$c_3$ [-]
Adventitia	17.3	4.71 E <sup>-4</sup>	37.7	63.8	58
Erreur <sup>1</sup>	0	0	0	0	0
Media	31.4	1.4 E <sup>-1</sup>	32.8	23.5	14.7
Erreur <sup>1</sup>	0	0	0	0	0
Intima	39.8	1.42	999.0	127.0	510.0
Erreur <sup>1</sup>	0	0	0.1	0.079	0.098

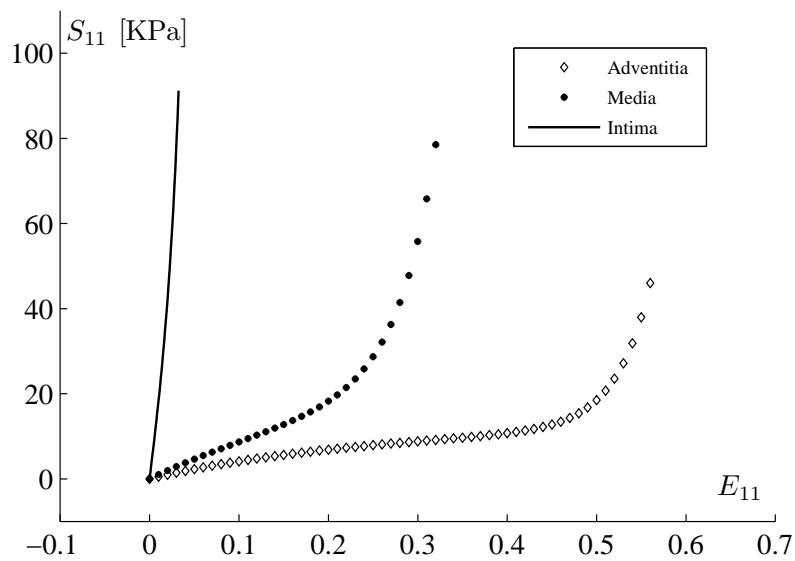
<sup>1</sup> Différence relative (%) entre les valeurs du Tableau 4.2 et celles de Holzapfel [77]

Le résultat intéressant du Tableau 4.3 est celui de la couche intima. Les valeurs de  $\mu$  et  $C$  que nous avons identifiées sont en effet identiques à celles trouvées par Holzapfel [77] mais une légère différence est observée pour  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$ . On remarque par ailleurs (Tableau 4.2) que le temps de calcul consacré à l'identification pour l'intima (467 secondes) est beaucoup plus important que pour les couches adventitia et media (respectivement 110 secondes et 30 secondes). Cela traduit une difficulté manifeste à trouver la solution optimale. On observe enfin que les courbes contraintes-déformations pour la couche intima (Figure 4.10) présentent une typologie très éloignée de la forme exponentielle utilisée dans le modèle de Fung pour modéliser le comportement des fibres. On peut alors légitimement se poser la question de la pertinence de ce modèle pour la couche intima, d'autant que cette dernière n'est pas considérée comme un tissu actif mécaniquement du fait de sa nature épithéliale (§ section 1.8 chapitre 1). Même si les écarts constatés en identification

sont très faibles, ce faisceau d'élément plaide en faveur d'une modélisation plus spécifique pour la couche intima bien que cela reste en dehors du scope de ce travail de thèse.



(a) Traction dans la direction axiale.



(b) Traction dans la direction circonférentielle.

FIGURE 4.10: Courbes de contraintes-déformations.

Les courbes tracées sur les FIGURES 4.10 (a) et (b) utilisent les paramètres matériau du Tableau 4.2. Ces courbes représentent les contraintes et les déformations dans le plan  $(e_1, e_2)$ . Elles sont identiques à celles obtenues par Holzapfel [77]. Les courbes montrent que les couches media et adventitia possèdent une résilience plus prononcée que celle de la couche intima. Ceci est expliqué par le fait que la media et l'adventitia sont des couches du tissu conjonctif dense qui présente des crosslinks entre les trousseaux de fibres. Les crosslinks qui n'existent pas dans le tissu endothélial (intima) sont responsables de cette résilience (voir § 1.6).

#### 4.5.2 Le modèle HGO

La loi HGO (Holzapfel-Gasser-Ogden) [78] modélise la symétrie de la structure artérielle en considérant deux directions privilégiées,  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ , qui représentent l'orientation moyenne des fibres de collagène. La symétrie matérielle est modélisée par les tenseurs structuraux  $\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2$ . Le modèle HGO suit ainsi l'approche micro-structurale reposant sur les invariants (2.26) et (2.32) et modélise le tissu comme un composite renforcé par des fibres [155]. Ce tissu possédant deux directions de fibres privilégiées, la densité de déformation anisotrope, stockée par le tissu en extension, est répartie de la manière suivante :

$$W = U(J) + \overline{W}(\overline{\mathbf{C}}; \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \quad (4.56)$$

où  $\overline{W}$  se décompose en une partie isotrope et une partie anisotrope :

$$\overline{W}(\overline{\mathbf{C}}; \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) = \overline{W}_{iso}(I_1, I_2, I_3) + \sum_{i=1}^2 \overline{W}_{aniso}(I_{4a_i}, I_{5a_i}) \quad (4.57)$$

et  $U(J)$  représente la partie volumétrique :

$$U(J) = k(I_3 - 1) \quad (4.58)$$

Le paramètre  $k$  s'exprime en Pascal. Il permet de forcer l'incompressibilité du matériau [voir 34]. La densité d'énergie de déformation isotrope est modélisée par le modèle néo-Hookéen classique :

$$\bar{W}_{iso} = C_1(\bar{I}_1 - 3) \quad (4.59)$$

Il est à noter que  $C_1$  est égal à la moitié du module de cisaillement.

Les deux directions  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont associées à des fibres appartenant à la même couche artérielle. Toutes les fibres possèdent ainsi les mêmes caractéristiques mécaniques. Il est donc possible de superposer<sup>1</sup> les densités d'énergie de déformation stockées par ces deux familles de fibres de la manière suivante :

$$\bar{W}_{aniso} = \begin{cases} \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=1}^2 \{ \exp [k_2(\bar{I}_{4a_i} - 1)^2] - 1 \} & \text{si } \bar{I}_{4a_i} \geq 1 \\ 0 & \text{si } \bar{I}_{4a_i} < 1 \end{cases} \quad (4.60)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des paramètres matériau et  $\bar{I}_{4a_i} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i : \bar{\mathbf{C}} = I_3^{-\frac{1}{3}} I_{4a_i}$ .

En introduisant l'angle phénoménologique  $\beta$  défini sur la Figure 4.8, et en choisissant le même repère que celui indiqué sur cette figure, les deux vecteurs unitaires associés aux directions privilégiées des trousseaux de fibres de collagène s'expriment de la manière suivante :

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ -\sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Le carré de la dilatation suivant la direction de fibres devient alors :

$$(\lambda^F)^2 = I_4 = I_{4a_1} = I_{4a_2} = \lambda_1^2 \cos(\beta)^2 + \lambda_2^2 \sin(\beta)^2 \quad (4.62)$$

On remarque que l'équation (4.61) prend en compte le fait que les fibres n'agissent pas en compression. On a donc logiquement une densité nulle lorsque  $\bar{I}_4$  est plus petit que 1.

---

1. en utilisant les mêmes paramètres matériau pour les deux familles de fibres.

Les paramètres matériau  $C_1$  et  $k_1$  du modèle HGO sont exprimés en unité de pression et  $k_2$  est sans unité. On choisira un angle  $\beta = 43.39^\circ$  conformément aux préconisations de Balzani *et al.* [12].

#### 4.5.2.1 Équations constitutives

Pour étudier la réponse en extension de la couche media de la paroi artérielle, deux tests de déformation uniaxiaux sont appliqués dans les directions  $e_1$  puis  $e_2$  du tissu. Le protocole expérimental est le même que pour le modèle modifié de Fung déjà traité. Cependant, on utilise ici les contraintes de Cauchy dans les équations constitutives à la place des contraintes du second tenseur de Piola-Kirchhoff. En effet, les données de la littérature [12] sur lesquelles nous allons nous appuyer dans ce paragraphe concernent les contraintes de Cauchy. En adaptant l'équation (2.36) au cas de deux familles de fibres, le tenseur de contraintes de Cauchy est donné par :

$$\sigma = \frac{2}{J} \left\{ W_1 \bar{\mathbf{B}} + W_2 (\bar{I}_1 \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}^2) + W_3 \mathbf{I} + \sum_{i=1}^2 \left[ W_4 \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i + W_5 (\mathbf{d}_i \otimes \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}_i + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i) \right] \right\} \quad (4.63)$$

où on rappelle que le vecteur  $\mathbf{d}_i$  est l'image de  $\mathbf{a}_i$  dans la configuration déformée :

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_i \quad (4.64)$$

Pour simplifier l'équation (4.63), on introduit ensuite les tenseurs cinématiques :

$$\mathbf{K}_4 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i) ; \mathbf{K}_5 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{d}_i \otimes \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}_i + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i) \quad (4.65)$$

d'où :

$$\sigma = \frac{2}{J} \left\{ W_1 \bar{\mathbf{B}} + W_2 (\bar{I}_1 \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}^2) + W_3 \mathbf{I} + 2 W_4 \mathbf{K}_4 + 4 W_5 \mathbf{K}_5 \right\} \quad (4.66)$$

Les fonctions réponse  $W_i = \partial W / \partial I_i$  de (4.63) sont données par [124] :

$$\begin{aligned}
 W_1 &= C_1 I_3^{-1/3} \\
 W_3 &= \frac{-1}{3I_3} \left\{ C_1 \bar{I}_1 + k_1 \bar{I}_4 (\bar{I}_4 - 1) \exp [k_2 (\bar{I}_4 - 1)^2] \right\} + k \\
 W_4 &= I_3^{-1/3} k_1 (\bar{I}_4 - 1) \exp [k_2 (\bar{I}_4 - 1)^2] \\
 W_2 &= W_5 = 0
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Pour le test de déformation uniaxial, les tenseurs cinématiques se simplifient :

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_5 = \begin{bmatrix} \lambda_1^4 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

où  $c = \cos(\beta)$  et  $s = \sin(\beta)$ . Comme le matériau est considéré comme quasi-incompressible, on a :

$$J^2 = I_3 = 1; \quad \lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \tag{4.69}$$

En reportant (4.67), (4.68) et (4.69) dans (4.66), on obtient les trois composantes non nulles du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_{11}}{2} &= C_1 \lambda_1^2 - \frac{1}{3} C_1 I_1 + k - \frac{1}{3} k_1 (I_4 - 1) \exp [k_2 (I_4 - 1)^2] \\
 &\quad + k_1 2 \lambda_1^2 c^2 (I_4 - 1) \exp [k_2 (I_4 - 1)^2] \\
 \frac{\sigma_{22}}{2} &= C_1 \lambda_2^2 - \frac{1}{3} C_1 I_1 + k - \frac{1}{3} k_1 (I_4 - 1) \exp [k_2 (I_4 - 1)^2] \\
 &\quad + k_1 2 \lambda_2^2 s^2 (I_4 - 1) \exp [k_2 (I_4 - 1)^2] \\
 \frac{\sigma_{33}}{2} &= C_1 \lambda_3^2 - \frac{1}{3} C_1 I_1 + k - \frac{1}{3} k_1 (I_4 - 1) \exp [k_2 (I_4 - 1)^2]
 \end{aligned} \tag{4.70}$$



La condition de bord libre  $\sigma_{33} = 0$  permet d'exprimer la constante d'incompressibilité  $k$  sous la forme suivante :

$$k = \frac{1}{3}C_1 I_1 + \frac{1}{3}k_1(I_4 - 1) \exp \left[ k_2(I_4 - 1)^2 \right] - C_1 (\lambda_1 \lambda_2)^{-2} \quad (4.71)$$

En reportant ce résultat dans  $\sigma_{11}$  et dans  $\sigma_{22}$ , on retrouve les équations constitutives des contraintes de Cauchy calculées dans [126] pour le cas du test de déformation uniaxiale dans le plan  $(e_1, e_2)$  :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2 \left\{ \left[ \lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2} \right] C_1 + 2 c^2 \lambda_1^2 (I_4 - 1) \exp \left[ k_2 (I_4 - 1)^2 \right] k_1 \right\} \\ \sigma_{22} = 2 \left\{ \left[ \lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2} \right] C_1 + 2 s^2 \lambda_2^2 (I_4 - 1) \exp \left[ k_2 (I_4 - 1)^2 \right] k_1 \right\} \end{cases} \quad (4.72)$$

Ces deux équations peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

avec :

$$\begin{aligned} N_{11} &= 2 \left[ \lambda_1^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2} \right] \\ N_{12} &= 4 c^2 \lambda_1^2 (I_4 - 1) \exp \left[ k_2 (I_4 - 1)^2 \right] \\ N_{21} &= 2 \left[ \lambda_2^2 - (\lambda_1 \lambda_2)^{-2} \right] \\ N_{22} &= 4 s^2 \lambda_2^2 (I_4 - 1) \exp \left[ k_2 (I_4 - 1)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.74)$$

Les paramètres matériau à identifier étant :

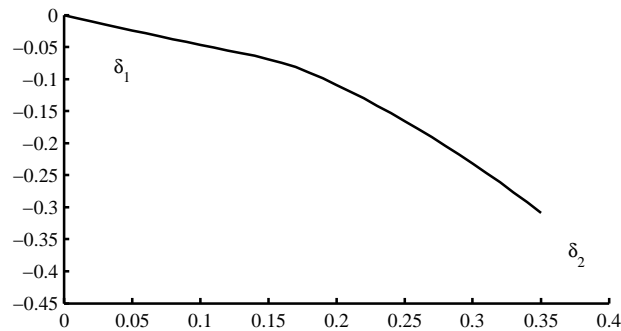
$$\boldsymbol{\theta}_l = \begin{bmatrix} C_1 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_{nl} = \left[ k_2 \right] \quad (4.75)$$

### 4.5.2.2 Données mesurées

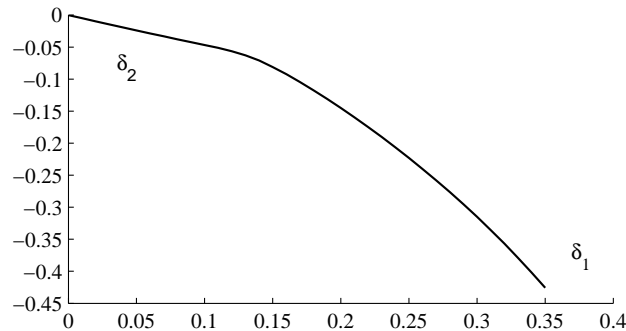
On forme le vecteur des données mesurées en procédant de la même manière que pour le modèle modifié de Fung (§4.5.1.2) : deux protocoles expérimentaux fournissant deux vecteurs de mesures dans la direction axiale et circonférentielle de la paroi artérielle (Figure 4.8). Avec les valeurs des couples de déformations calculés, on trace les figures 4.11 (a) et (b). Ces deux figures montrent clairement une bosse qui marque un changement de courbure. C'est la « toe zone » (voir §1.6).

Les couples de déformations sont calculés de la manière suivante :

- pour une traction  $\delta_2$  imposée dans la direction axiale, on calcule  $\delta_1$  en résolvant l'équation au bord libre  $\sigma_{11} = 0$  à partir de (4.72),
- pour une traction  $\delta_1$  imposée dans la direction circonférentielle, on calcule  $\delta_2$  en résolvant l'équation au bord libre  $\sigma_{22} = 0$  à partir de (4.72).



(a) Traction dans la direction axiale.



(b) Traction dans la direction circonférentielle.

FIGURE 4.11: Courbes déformations-déformations avec  $\delta = \lambda - 1$ .

### 4.5.2.3 Identification des paramètres

On procède à la formulation du problème inverse pour le résoudre avec la méthode GAO. En généralisant (4.73) à l'ensemble des points de mesure, on peut exprimer les contraintes de Cauchy sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \boldsymbol{\theta}_l \quad (4.76)$$

où les paramètres linéaires  $\boldsymbol{\theta}_l$  et non-linéaires  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  sont donnés par l'équation (4.75). La matrice  $\mathbf{N}$  est de dimension  $m \times 2$ , où  $m$  représente le nombre de points de mesure. Cette matrice compile les composantes données dans la formule (4.74).

Le problème d'identification de  $\boldsymbol{\theta}_l$  et de  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  est un problème de minimisation au sens des moindres carrés similaire à celui formulé pour le modèle de Fung (équation (4.52)) :

$$\text{Min}_{\boldsymbol{\theta}_l, \boldsymbol{\theta}_{nl}} \frac{\|\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \boldsymbol{\theta}_l\|^2}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^2} \times 100 \quad (4.77)$$

Grâce à la technique de séparation des paramètres linéaires et non-linéaires, qui constitue l'un des éléments clés de la méthode GAO, le problème de minimisation (4.77), qui est d'ordre 3 dans l'exemple traité, se ramène à un problème de minimisation monodimensionnel :

$$\text{Min}_{\boldsymbol{\theta}_{nl}} \frac{\left\| \boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) [\mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl})]^{-1} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \boldsymbol{\sigma}^* \right\|^2}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^2} \times 100 \quad (4.78)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  est égal à  $k_2$ .

Comme pour le modèle de Fung, on remarque que, si  $m$  est égal à 2 et si les colonnes de  $\mathbf{N}$  sont indépendantes, le problème d'optimisation (4.78) admet une infinité de solutions. On recommande donc de disposer d'au moins de trois points de mesure. Il est également à noter que  $k_2$  doit être positif strictement pour des raisons liées à la convexité de la densité d'énergie. Cela introduira donc une contrainte additionnelle dans le processus d'optimisation.

Le problème de minimisation est résolu avec les mêmes options de l'algorithme que celles utilisées pour le modèle de Fung. Le critère de convergence de  $10^{-10}$  reste en particulier le critère d'arrêt de l'algorithme. Avec la méthode GAO, l'algorithme cherche uniquement le paramètre  $k_2$  optimal, tandis que les paramètres  $C_1$  et  $k_1$  sont calculés analytiquement. On voit donc là à nouveau tout l'intérêt de la méthode GAO qui permet de réduire de manière drastique le nombre de paramètres à identifier numériquement et donc le temps de calcul consacré au processus d'identification.

TABLEAU 4.4: Valeurs de paramètres matériau selon Balzani *et al.* [12]

$C_1 = \mu/2$ [KPa]	$k_1$ [KPa]	$k_2$ [-]
10.2069	0.00170	882.847

Les résultats de l'identification par GAO de ces trois paramètres (Tableau 4.4) sont en parfaite adéquation avec ceux trouvés par Balzani *et al.* [12]. Les courbes de contraintes-déformations sont tracées sur la Figure 4.12 pour les paramètres du Tableau 4.4. En utilisant le code industriel Abaqus, dans lequel le modèle HGO est implémenté, on obtient les mêmes courbes. Ces dernières montrent que, pour la même plage de déformation  $\Delta l/L$ , ratio de l'allongement  $\Delta l$  sur la longueur initiale de référence  $L$ , les contraintes circonférentielles  $\sigma_{11}$  sont supérieures aux contraintes axiales  $\sigma_{22}$ . En effet, pour les basses pressions pour lesquelles les fibres de collagène ne jouent aucun rôle, les deux courbes coïncident. Mais, une fois que le régime des hautes pressions débute (pour  $\Delta l/L = 0.13$  environ), les fibres de collagène s'étirent et durcissent. On rappelle que l'angle phénoménologique  $\beta$  est égal à  $43.39^\circ$  ce qui traduit l'adaptabilité des fibres au fait que la pression artérielle agit dans la direction circonférentielle  $e_1$  (§ 1.8). La raideur du tissu et la contrainte associée sont donc supérieures dans cette direction :  $\sigma_{11} > \sigma_{22}$ .

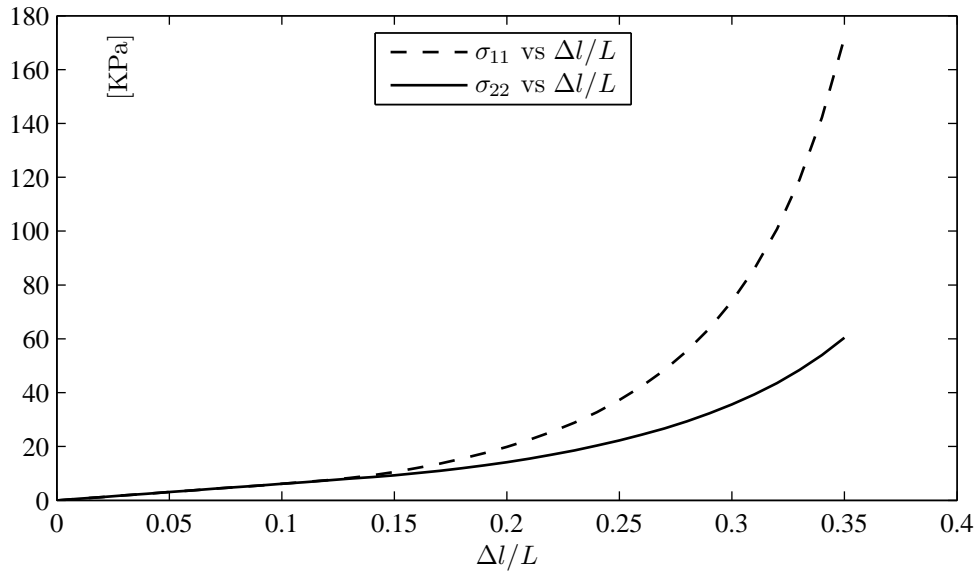


FIGURE 4.12: Courbes contraintes-déformations.

### 4.5.3 Le modèle de Peng

Lorsque les lois de comportement hyperélastique des tissus souples intègrent un nombre considérable de paramètres matériau (c'est le cas des deux modèles présentés aux paragraphes § 4.5.1 et 4.5.2), la résolution du problème inverse par des méthodes classiques à base de gradient ne permet pas toujours de trouver une solution. Une technique parfois utilisée pour surmonter cette difficulté consiste à diviser le problème initial en plusieurs sous-problèmes. On peut par exemple séparer l'identification en deux étapes. La première consiste à estimer les paramètres matériau liés à la réponse isotrope du tissu en ajustant les courbes contraintes-déformations à basse pression. Dans la deuxième étape, le recalage des paramètres s'effectue sur les courbes contraintes-déformations à haute pression, sachant que la réponse isotrope est déjà identifiée. Ce processus est utilisé par Holzapfel [77] sur le modèle de Fung, le paramètre de cisaillement étant identifié en premier et les quatre autres en second par la résolution d'un problème de moindres carrés non linéaires par la technique de Levenberg-Marquardt.

Le modèle de Peng *et al.* [123] modélise le comportement hyperélastique de l'anneau fibreux du tissu discal, qui suppose l'interaction entre les fibres de collagène et la matrice non-collagèneuse. Avec le cisaillement qui est représenté en terme d'invariants, ce modèle propose une densité d'énergie de déformation composée de trois termes :

- un terme isotrope pour représenter la matrice non-collagèneuse,
- un terme anisotrope pour modéliser le comportement des fibres de collagène,
- un terme prenant en compte l'interaction entre la matrice et les fibres.

Au total, cette loi nécessite l'identification de 7 paramètres matériau. Pour contourner les problèmes numériques liés à l'identification simultanée des 7 paramètres par des techniques d'optimisation classiques, Peng *et al.* [123] ont procédé à une identification en trois étapes :

- identification des deux paramètres du terme isotrope,
- identification des deux paramètres du terme anisotrope,
- identification des trois paramètres du terme d'interaction.

Ce processus d'identification en trois étapes utilise cependant une relation empirique entre deux des paramètres du modèle. Dans ce paragraphe, nous proposons donc une approche plus globale en identifiant en une seule étape les 7 paramètres du modèle avec la méthode GAO. La dimension du problème inverse devient d'ordre 2 (ce qui correspond au nombre de paramètres non-linéaires) au lieu de 7 initialement.

#### 4.5.3.1 Biomécanique du disque intervertébral

Le disque intervertébral est constitué par le *nucleus pulposus* (NP), la partie centrale gélatineuse du disque et par l'*annulus fibrosus* (AF) entourant le NP. L'AF est à son tour divisé en deux zones : l'anneau extérieur et l'anneau intérieur [20]. L'anneau extérieur est caractérisé par une grande densité de fibres réparties en faisceaux contrairement à l'anneau interne qui perd cette caractéristique au fur et à mesure qu'on se rapproche du NP. Le gonflement

du NP le transforme en une entité incompressible distribuant les forces de compression radiale à travers l'AF. Les fibres de collagène regroupées en faisceaux parallèles et inclinées d'environ  $\alpha = 30^\circ$  [106] par rapport à la direction circonférentielle du disque (Fig. 4.13) s'étirent afin d'absorber les charges compressives radiales du NP. De plus, en flexion ou en torsion de la colonne vertébrale, les fibres de l'anneau extérieur sont étirées limitant ainsi la formation de déchirures à travers les ligaments entre deux vertèbres [86]. En conséquence, le rapport de magnitude entre les modules d'élasticité suivant la direction circonférentielle de l'AF et ceux de la direction radiale ou axiale est d'environ deux [40, 151].

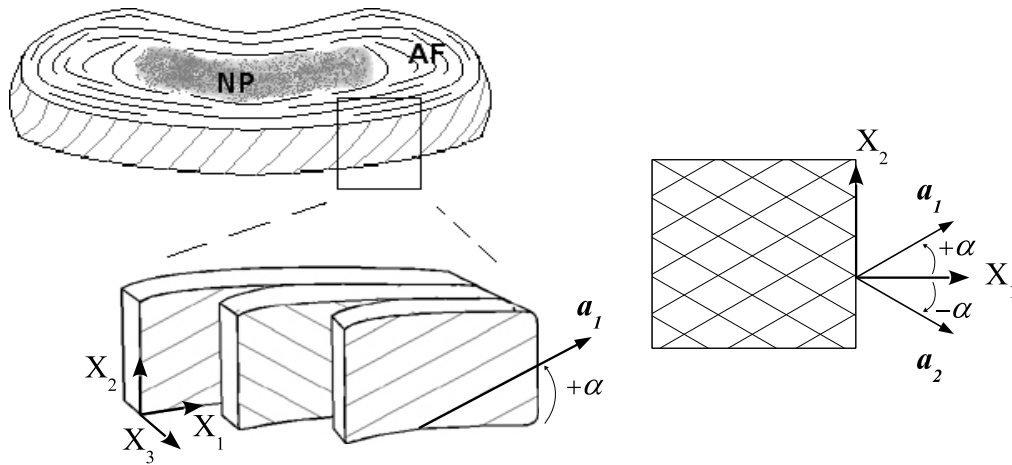


FIGURE 4.13: AF : anneau fibreux, NP : nucleus pulposus.

$X_1$  : direction circonférentielle (tangentielle).

$X_2$  : direction axiale du disque.

$X_3$  : direction radiale.

$\alpha$  est l'angle phénoménologique qui caractérise l'inclinaison des fibres par rapport à la direction circonférentielle  $X_1$ .

À droite : deux lamelles adjacentes homogénéisées en un composite à fibres croisées à  $\pm\alpha^\circ$  de vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ .

Pour modéliser la biomécanique du disque intervertébral, Peng *et al.* [123] ont proposé une densité d'énergie de déformation  $W$  qui suit l'approche structurale de modélisation des tissus souples renforcés. Cette énergie de déformation est fonction du tenseur droit de Cauchy-Green et des vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_1$

et  $\mathbf{a}_2$  qui représentent les directions préférentielles des fibres (Figure 4.13) :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{a}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (4.79)$$

Étant donné que l'interaction entre les fibres et la matrice est importante [40, 69, 99, 117, 165, 168], la densité d'énergie de déformation  $W$  du tissu intervertébral humain présentée par Peng *et al.* [123] compte trois densités additives : celles de la matrice isotrope  $W^M$ , des fibres de collagène  $W^F$  et de l'interaction  $W^{FM}$  entre la matrice et les fibres :

$$W = W^M + W^F + W^{FM} \quad (4.80)$$

En considérant le tissu comme compressible, Peng *et al.* [123] ont choisi d'appliquer la division multiplicative du gradient des déformations uniquement à la partie isotrope de l'énergie de déformation. Elle est modélisée par une partie néo-Hokéenne et une partie volumétrique selon :

$$W^M = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + D^{-1}(J - 1)^2 \quad (4.81)$$

$\bar{I}_1$  est la partie déviatorique de  $I_1$ ,  $\bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1$ .  $D^{-1}$  est le module de compressibilité. L'énergie étant stockée dans les fibres seulement si elles sont étirées [23], l'énergie correspondante  $W^F$  proposée par Peng *et al.* prend la forme suivante :

$$W^F = \begin{cases} C_2(I_4 - 1)^2 + C_3(I_4 - 1)^4 & I_4 > 1 \\ 0 & I_4 \leq 1 \end{cases} \quad (4.82)$$

Les coefficients  $C_2$  et  $C_3$  sont donc pris égal à zéro lorsque  $I_4$  est plus petit que 1. Les fibres et la matrice sont supposées être en contact parfait sans glissement. L'interaction entre la fibre et la matrice est modélisée par une densité d'énergie de cisaillement qui est fonction du carré de l'allongement



des fibres  $I_4 = (\lambda^F)^2$  :

$$W^{FM} = f(I_4) \chi^2 \quad (4.83)$$

$$f(I_4) = \frac{\gamma}{1 + \exp[-\beta(\lambda^F - \lambda^*)]} \quad , \quad \chi = \frac{I_4}{I_3} (I_5 - I_1 I_4 + I_2) - 1$$

Les 7 paramètres matériau de  $W$  sont  $C_{10}$ ,  $\gamma$ ,  $D$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $\beta$  et  $\lambda^*$ .  $\beta$  et  $\lambda^*$  sont sans unité,  $D$  est l'inverse d'une pression et les autres paramètres s'expriment en MPa.  $\lambda^*$  peut s'interpréter comme le point de transition entre les contraintes isotropes et les contraintes anisotropes [123]. On peut noter que le modèle de Peng *et al.* [123] n'utilise la décomposition multiplicative du gradient des déformations que sur l'invariant  $I_1$  (c.f. équations (4.81), (4.82) et (4.83)). Pour des motivations physiques, Sansour [137] a adopté une démarche similaire en montrant que la décomposition volumétrique-isochore ne doit être appliquée que sur la partie isotrope de l'énergie de déformation. Ce point fait néanmoins l'objet d'un débat dans la communauté scientifique car, si on se place d'un point de vue strictement mathématique [44, 119], il serait plus consistant d'appliquer la décomposition à tous les invariants, qu'ils soient isotropes ou anisotropes. La démarche de Peng *et al.* [123] se justifie physiquement par l'utilisation d'une formule standard liant  $D$  à  $C_{10}$  [1] :

$$D = \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)C_{10}} \quad (4.84)$$

où  $\nu$  représente le coefficient de Poisson.  $C_{10}$  et  $D^{-1}$  peuvent ainsi s'interpréter comme le module de cisaillement et le module de résistance à la compression.

Si la décomposition multiplicative avait été appliquée à tous les invariants, on aurait déduit de la condition du bord libre  $\sigma_{33} = 0$  et de l'équation (4.89) que le paramètre  $D$  pouvait s'exprimer en fonction des autres paramètres  $C_{10}$ ,  $\gamma$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $\beta$  et  $\lambda^*$ . En reportant ce résultat dans (4.84), on aurait alors obtenu un coefficient de Poisson dépendant des paramètres anisotropes  $C_2$  et  $C_3$ . Or la relation (4.84) est applicable uniquement pour le cas isotrope, le coefficient de Poisson utilisé n'étant représentatif que de la réponse isotrope du tissu. Elle ne peut donc a priori pas être utilisée dans le cas anisotrope.

Un point qui n'est cependant pas explicité dans Peng *et al.* [123] est la motivation qui a conduit à ne pas appliquer la décomposition multiplicative à l'invariant isotrope  $I_2$ .

D'un point de vue pratique, Peng *et al.* [123] fixent le coefficient de Poisson à une valeur de 0.49, ce qui permet de prendre en compte une relation directe entre  $D$  et  $C_{10}$  (équation (4.84)) et de n'identifier ainsi que 6 paramètres au lieu de 7. Pour notre part, en raison du caractère très général de la méthode GAO, nous avons considéré 7 paramètres complètement indépendants les uns des autres dans le processus d'identification qui sera détaillé ultérieurement.

Le modèle équivalent de l'anneau fibreux est un composite à fibres croisées orientées à  $\pm\alpha$ . Dans la configuration lagrangienne, les deux vecteurs unitaires associés aux directions de fibres privilégiées sont  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  (Figure 4.13). Cette anisotropie du tissu est représentée par les invariants mixtes  $I_{4a_1}, I_{5a_1}, I_{4a_2}, I_{5a_2}$  de  $\mathbf{C}$  et les tenseurs structuraux  $\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2$  [chapitre 6 de la référence 75] :

$$\begin{aligned} I_{4a_1} &= \mathbf{C} : \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, & I_{5a_1} &= \mathbf{C}^2 : \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, \\ I_{4a_2} &= \mathbf{C} : \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2, & I_{5a_2} &= \mathbf{C}^2 : \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Pour modéliser le tissu humain, discal et fibreux, Peng *et al.* [123] ont réparti la densité d'énergie de déformation entre les deux familles de fibres de la manière suivante :

$$W = W^M + \frac{1}{2} (W_{a_1}^F + W_{a_2}^F) + \frac{1}{2} (W_{a_1}^{FM} + W_{a_2}^{FM}) \quad (4.86)$$

Les énergies  $W_{a_i}^{(\bullet)}$  sont liées aux directions privilégiées des fibres par le biais des invariants mixtes et des vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_i$ , pour  $i = \{1, 2\}$ .

#### 4.5.3.2 Équations constitutives

Les vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont distribués selon un angle de  $\pm\alpha = 30^\circ$  par rapport à la direction circonférentielle de l'AF (Figure 4.13) conformément aux observations de [106]. Les invariants mixtes sont alors égaux l'un à l'autre :  $I_{4a_1} = I_{4a_2}$  et  $I_{5a_1} = I_{5a_2}$ . De plus, l'AF est renforcé par la même famille de fibres de collagène. Par conséquent, les fonctions réponses modélisant

l'anisotropie du tissu sont identiques pour chacune des directions de fibres :  $W_{4a_1} = W_{4a_2}$  et  $W_{5a_1} = W_{5a_2}$ . En conséquence, les expressions des fonctions réponses  $W_i = \partial W / \partial I_i$  sont :

$$\begin{aligned}
W_1 &= C_{10} I_3^{-1/3} - 2\gamma (1+A)^{-1} \frac{I_4^2}{I_3} \chi \\
W_2 &= 2\gamma (1+A)^{-1} \frac{I_4}{I_3} \chi \\
W_3 &= \frac{-1}{3} C_{10} I_1 I_3^{-4/3} - (I_3^{-1/2} - 1) D^{-1} - \frac{2}{I_3} \gamma \chi (\chi + 1) (1+A)^{-1} \\
W_{4a_1} = W_{4a_2} &= 2C_2 (I_4 - 1) + 4C_3 (I_4 - 1)^3 + \gamma Q = W_4 \\
W_{5a_1} = W_{5a_2} &= 2 \frac{I_4}{I_3} \chi (1+A)^{-1} = W_5
\end{aligned} \tag{4.87}$$

avec :

$$\begin{aligned}
A &= \exp \left[ -\beta (I_4^{1/2} - \lambda^*) \right] \\
Q &= \left[ \frac{\beta A \chi}{2(1+A) I_4^{1/2}} + \frac{L}{1+A} \right] \frac{\chi}{1+A} \\
L &= \frac{2}{I_3} (I_5 - 2I_1 I_4 + I_2)
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$\chi$  étant défini par l'équation (4.83).

En utilisant (4.86) ainsi que la forme générale des contraintes de Cauchy donnée par (2.36), on obtient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{J} \left\{ W_1 \mathbf{B} + W_2 (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + W_3 I_3 \mathbf{I} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (W_{4a_1} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + W_{4a_2} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [W_{5a_1} (\mathbf{B} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{B} \mathbf{d}_1) + W_{5a_2} (\mathbf{B} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{B} \mathbf{d}_2)] \right\}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

En combinant les équations (4.87) et (4.89) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} = & \frac{2}{J} \left\{ C_{10} I_3^{-1/3} \left( \mathbf{B} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I} \right) \right. \\
& + \gamma \left\{ \frac{2\chi}{1+A} \left\{ \frac{I_4}{I_3} \left[ (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) - I_4 \mathbf{B} + 2\mathbf{K}_5 \right] - (\chi + 1) \mathbf{I} \right\} + Q \mathbf{K}_4 \right\} \\
& + D^{-1} I_3 \left( 1 - I_3^{-1/2} \right) \mathbf{I} \\
& + 2C_2 (I_4 - 1) \mathbf{K}_4 \\
& \left. + 4C_3 (I_4 - 1)^3 \mathbf{K}_4 \right\} \tag{4.90}
\end{aligned}$$

où les tenseurs cinématiques  $\mathbf{K}_4$  et  $\mathbf{K}_5$  sont définis dans le cas général par l'équation (4.65). Dans le cas particulier d'une traction uniaxiale, cette forme générale se simplifie (équation (4.68)).

On remarque que  $\boldsymbol{\sigma}$  est linéaire par rapport à 5 de ses paramètres :  $C_{10}$ ,  $\gamma$ ,  $D^{-1}$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Ces paramètres composent le vecteur de paramètres linéaires  $\boldsymbol{\theta}_l$  qui est de dimension 5, tandis que  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  est composé de deux paramètres non linéaires  $\{\beta, \lambda^*\}$  qui sont contenus dans l'expression de  $A$  et de  $Q$  (voir équation (4.88)). Pour le cas d'un test de déformation uniaxiale, on déduit de la séparation des paramètres linéaires et non linéaires la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & \cdots & N_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{31} & \cdots & N_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{10} \\ \gamma \\ D^{-1} \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

où les composantes  $N_{kp}$  ( $1 \leq k \leq 3$  et  $1 \leq p \leq 5$ ) sont dépendantes des paramètres non linéaires  $\beta$  et  $\lambda^*$  par l'intermédiaire de  $A$  :

$$\mathbf{N}(\beta, \lambda^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{I_3}} \left( \lambda_1^2 - \frac{I_1}{3} \right) & \frac{\chi}{2(A+1)} \left[ \frac{I_4}{I_3} \lambda_1^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - I_4 + 2\lambda_1^2 c^2) - (\chi + 1) \right] + Q\lambda_1^2 c^2 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{I_3}} \left( \lambda_2^2 - \frac{I_1}{3} \right) & \frac{\chi}{2(A+1)} \left[ \frac{I_4}{I_3} \lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - I_4 + 2\lambda_2^2 s^2) - (\chi + 1) \right] + Q\lambda_2^2 s^2 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{I_3}} \left( \lambda_3^2 - \frac{I_1}{3} \right) & \frac{\chi}{2(A+1)} \left[ \frac{I_4}{I_3} \lambda_3^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - I_4) - (\chi + 1) \right] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{I_3}}\right) I_3 & 2(I_4 - 1)\lambda_1^2 c^2 & 4(I_4 - 1)^3 \lambda_1^2 c^2 \\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{I_3}}\right) I_3 & 2(I_4 - 1)\lambda_2^2 s^2 & 4(I_4 - 1)^3 \lambda_2^2 c^2 \\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{I_3}}\right) I_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{I_3}} \quad (4.92)$$

avec  $c = \cos(\alpha)$  et  $s = \sin(\alpha)$ . Selon la forme (4.91), la méthode GAO va chercher à identifier numériquement les deux paramètres non-linéaires  $\beta$  et  $\lambda^*$  alors que les 5 autres  $C_{10}$ ,  $\gamma$ ,  $D^{-1}$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  sont linéaires et seront calculés analytiquement.

#### 4.5.3.3 Données mesurées

Les 7 paramètres matériau du modèle de Peng *et al.* [123] seront identifiés avec deux tests de déformation uniaxiale (Figure 4.13) :

- traction selon la direction  $X_1$  circonférentielle
- traction selon la direction  $X_2$  axiale

Vu que le tissu est compressible,  $\lambda_3$  est indépendant de  $\lambda_1$  et de  $\lambda_2$ . Ainsi les contraintes sont fonction des trois déformations  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

Les données expérimentales proviennent d'un test de déformation uniaxiale sur le tissu de l'AF humain [40] dans le plan  $(X_1, X_2)$  utilisé par Peng *et al.* [123]. En tirant le tissu suivant la direction  $X_1$ ,  $\lambda_1$  est imposé et contrôle la déformation du tissu, tandis que  $\sigma_{11}$  est déduite de la mesure de la section déformée du tissu. De nouveau, en tirant suivant la direction  $X_2$ ,  $\lambda_2$  contrôle la déformation du tissu, tandis que  $\sigma_{22}$  est déduite de la mesure de la section déformée du tissu. Pour ces deux protocoles de chargement la contrainte  $\sigma_{33}$  est supposée nulle.

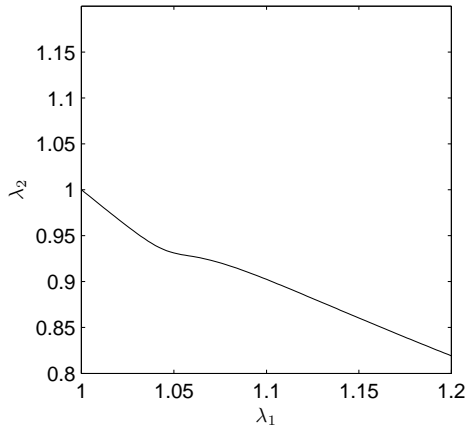
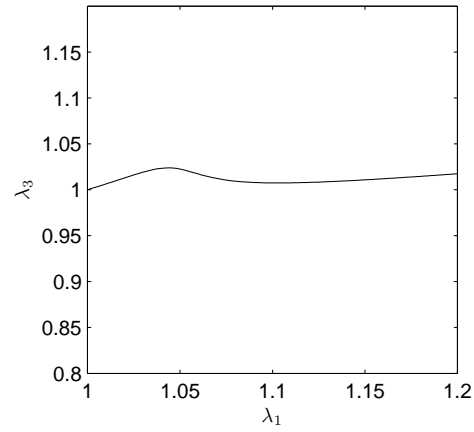
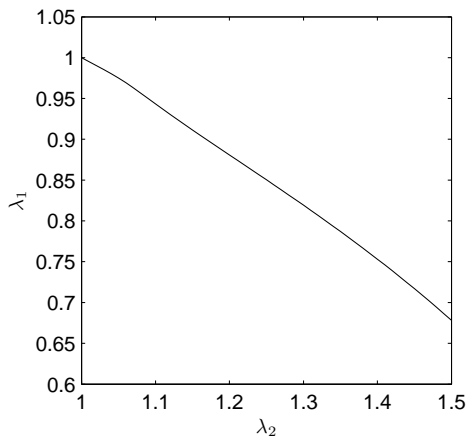
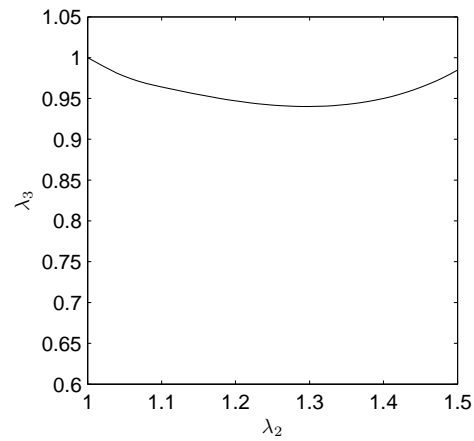
(a) Déformations dans le plan  $X_1 - X_2$ .(b) Déformations dans le plan  $X_1 - X_3$ .(c) Déformations dans le plan  $X_2 - X_1$ .(d) Déformations dans le plan  $X_2 - X_3$ .

FIGURE 4.14: courbes de déformations pour un test de traction suivant la direction circonférentielle  $X_1$  ((a) et (b)), puis suivant la direction axiale  $X_2$  ((c) et (d)).

Les données expérimentales peuvent aussi être reproduites numériquement :

*Protocole  $\{I\}$*  : en tirant suivant la direction circonférentielle  $X_1$ ,  $\lambda_1$  est imposé.  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont obtenus en trouvant la solution du système d'équations  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ . Les figures 4.14(a) et 4.14(b) montrent le point de toe zone pour  $\lambda_1 \approx 1.03$ .

*Protocole {2}* : en tirant suivant la direction axiale  $X_2$ ,  $\lambda_2$  est imposé.  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont obtenus en trouvant la solution du système d'équations  $\sigma_{11} = \sigma_{33} = 0$ . La courbe Figure 4.14(c) montre une relation presque linéaire entre  $\lambda_2$  et  $\lambda_1$ . Par conséquent, la participation de la réponse des fibres en traction axiale n'est pas significative du fait de l'absence de toe zone.

Les courbes de déformations obtenues grâce à ces deux protocoles (Figure 4.14) correspondent exactement à celles obtenues par Peng *et al.* [123]. Une fois les déformations déterminées, les contraintes sont calculées à l'aide de la loi de comportement (4.91) et (4.92) dans laquelle ont été injectés les paramètres matériau identifiés par Peng *et al.* [123]. Cette méthode numérique a été utilisée pour produire le vecteur des données expérimentales  $\sigma^*$  qui constituera le vecteur de référence pour l'identification. Il contient un total de  $m = 200$  points de mesure suivant les deux directions  $X_1$  et  $X_2$ .

#### 4.5.3.4 Identification de paramètres

Pour la résolution du problème de moindres carrés non linéaires en utilisant la méthode GAO, on procède à l'assemblage du système matriciel représentant les deux protocoles expérimentaux décrits dans le paragraphe précédent. Pour le protocole {1}, seul  $\sigma_{11}$  est calculé selon (4.91) et (4.92). Pour le protocole {2}, c'est  $\sigma_{22}$  qui est calculé, toujours à l'aide des mêmes formules (4.91) et (4.92). Une fois pris en compte l'ensemble des points de mesure, les contraintes calculées s'expriment sous la forme suivante :

$$\sigma = \mathbf{N}(\theta_{nl}) \theta_l \quad (4.93)$$

où  $\mathbf{N}(\theta_{nl})$  représente une matrice  $200 \times 5$  (200 points de mesure et 5 paramètres linéaires).  $\theta_l$  et  $\theta_{nl}$  sont les paramètres linéaires et non-linéaires définis par :

$$\boldsymbol{\theta}_l = \begin{bmatrix} C_{10} \\ \gamma \\ D^{-1} \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_{nl} = \begin{bmatrix} \beta \\ \lambda^* \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Les composantes de la matrice  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl})$  sont calculées sur la base de l'équation (4.92). Le problème d'identification se ramène alors au problème de minimisation suivant au sens des moindres carrés :

$$\text{Min}_{\boldsymbol{\theta}_l, \boldsymbol{\theta}_{nl}} \frac{\|\boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \boldsymbol{\theta}_l\|^2}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^2} \times 100 \quad (4.95)$$

Grâce à la technique de séparation des paramètres linéaires et non-linéaires, qui constitue l'un des éléments clés de la méthode GAO, le problème de minimisation (4.95), qui est d'ordre 7 dans l'exemple traité, se ramène à un problème de minimisation bidimensionnel :

$$\text{Min}_{\boldsymbol{\theta}_{nl}} \frac{\left\| \boldsymbol{\sigma}^* - \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl}) [\mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}_{nl})]^{-1} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\theta}_{nl}) \boldsymbol{\sigma}^* \right\|^2}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^2} \times 100 \quad (4.96)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_{nl}$  est le vecteur à deux composantes défini par l'équation (4.94).

On remarque que si  $m$  est égal à 5 et si les colonnes de  $\mathbf{N}$  sont indépendantes, le problème d'optimisation (4.96) admet une infinité de solutions. On recommande donc de disposer d'au moins de six points de mesure. Il est également à noter que  $\beta$  et  $\lambda^*$  doivent être positifs conformément aux interprétations physiques données par Peng *et al.* [123]. Cela introduira donc des contraintes additionnelles dans le processus d'optimisation.

#### 4.5.3.5 Résultats et discussions

Ce paragraphe est consacré à l'identification des paramètres matériau de la loi de Peng *et al.* [123] en résolvant numériquement le problème de minimisation (4.96) par la méthode GAO. Pour les algorithmes génétiques, la



population initiale contient 800 individus générés aléatoirement selon la distribution uniforme (4.30). La sélection est assurée par la méthode remainder. Un seul individu élite est copié dans la descendance. Puis, 80% de la population subit un croisement heuristique. Afin de tester l'efficacité de la méthode GAO, notamment la prise en compte analytique des paramètres linéaires (problème de dimension 2), des comparaisons ont été effectuées avec une identification basée uniquement sur les algorithmes génétiques (problème de dimension 7). Cette dernière approche est labellisée GA7. Elle utilise les mêmes options pour les algorithmes génétiques que celles qui sont réglées pour GAO. Le Tableau 4.5 ci-dessous résume les résultats trouvés par les différentes approches. Les résultats de la méthode GAO et Peng *et al.* [123] sont identiques. On obtient ainsi une haute précision de convergence qui est illustrée par la Figure 4.15 à la génération 95. On rappelle également, qu'avec la méthode GAO, on a identifié les 7 paramètres matériau en minimisant un seul problème inverse alors que Peng *et al.* [123] ont dû résoudre 3 problèmes inverses successifs afin de pouvoir déterminer progressivement les 7 paramètres matériau.

	$\beta$	$\lambda^*$	$C_{10}$	$\gamma$	$D$	$C_2$	$C_3$
Peng <i>et al.</i> [123]	1.250E+02	1.020	3.400E-02	1.200E+01	1.970E-01	4.500E-01	8.260E+01
GAO	1.250E+02	1.020	3.400E-02	1.200E+01	1.970E-01	4.500E-01	8.260E+01
GA7	1.250E+02	1.020	3.400E-02	1.200E+01	1.970E-01	4.500E-01	8.260E+01
GA7a	1.387E+02	1.458	6.502E-02	1.764E+00	1.000E+04	7.385E-01	9.318E+01
GA7b	8.615E+01	1.765	6.502E-02	1.212E+02	1.000E+04	7.385E-01	9.318E+01
GA7c	3.919E+01	1.138	1.000E-04	1.169E+01	4.293E-02	9.175E-01	8.583E+01
GA7d	3.833E+01	1.155	1.000E-04	1.984E+01	4.290E-02	9.172E-01	8.595E+01

TABLEAU 4.5: Résultats d'identification des paramètres matériau.

Peng *et al.* [123] : valeurs de référence.

GAO : valeurs obtenues par la méthode GAO en 8 secondes.

GA7 : valeurs obtenues par la méthode GA7 en 235 secondes.

GA7a-GA7b-GA7c-GA7d : plusieurs résultats de calculs du problème standard de dimension 7 obtenus avec les algorithmes génétiques classiques (GA7) et ne convergeant pas vers la meilleure solution.

La Figure 4.15 montre l'évolution logarithmique de la fonction performance au cours des générations. La meilleure performance décroît en fonction des générations. Cette tendance indique une aptitude à améliorer la meilleure

solution qui minimise la fonction objectif. L'évolution basée sur la sélection proportionnelle et le croisement favorise la transmission des gènes des individus les plus performant. La descendance partagera ainsi des caractéristiques génétiques similaires. De ce fait, à la fin du processus itératif, les individus ont des caractéristiques très proches comme le montre une distance moyenne entre individus presque égale à un (Figure 4.16) manifestant ainsi les mêmes performances (Figure 4.15). Au moment de la convergence, on voit que la moyenne de la performance est relativement faible. L'algorithme arrête d'itérer car la limite de la performance est atteinte. On rappelle que la distance moyenne entre les individus est un indicateur de la diversité. Une distance moyenne basse indique que la diversité de la population est pauvre et que le processus d'évolution atteint ses limites.

Entre la 1<sup>ère</sup> et la 32<sup>ème</sup> génération, la meilleure performance a chuté jusqu'à la valeur de  $10^{-15}$ . Néanmoins, la moyenne de la performance et la distance moyenne des individus n'ont pas changé de tendance. La diversité au sein de la population est donc assez importante pour pouvoir espérer une nouvelle diminution de la meilleure performance. En conséquence, l'algorithme doit continuer à itérer car la convergence n'a pas lieu tant que ces trois courbes n'ont pas la même tendance.

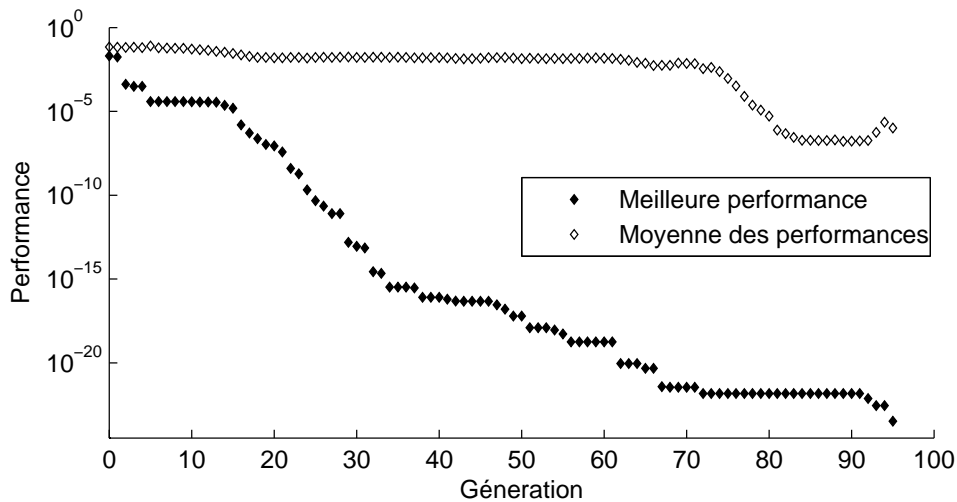


FIGURE 4.15: Évolution de la meilleure performance et de la moyenne de la performance (méthode GAO).

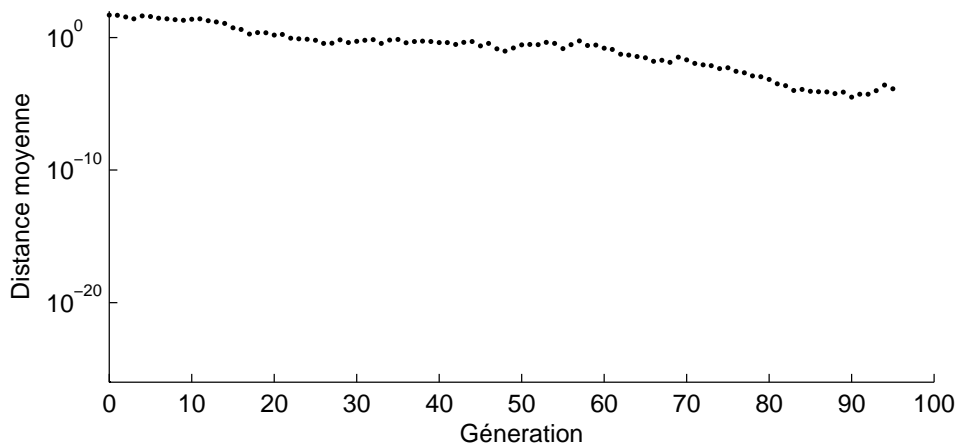
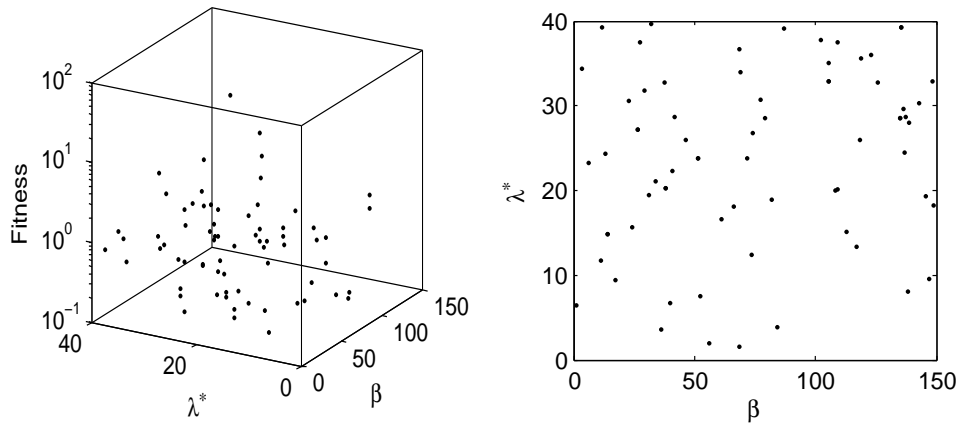
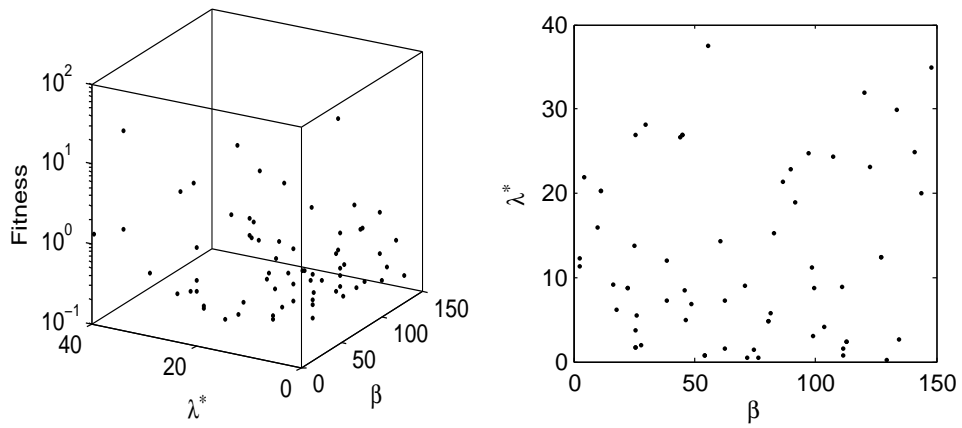
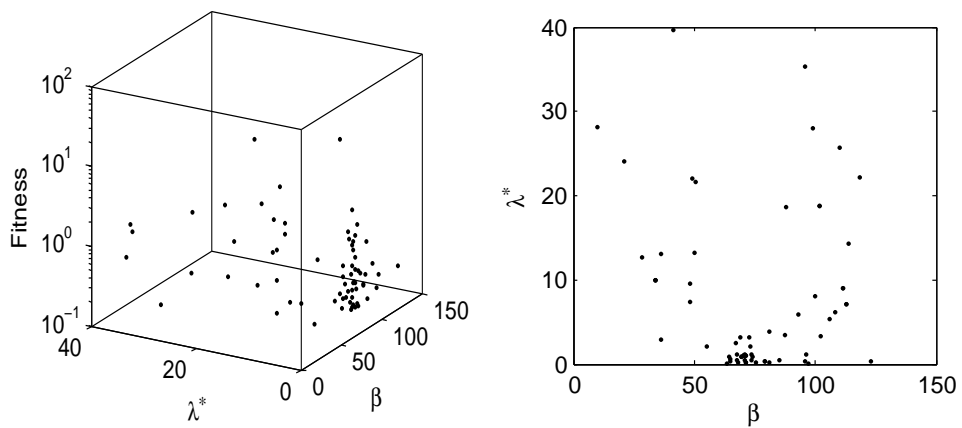


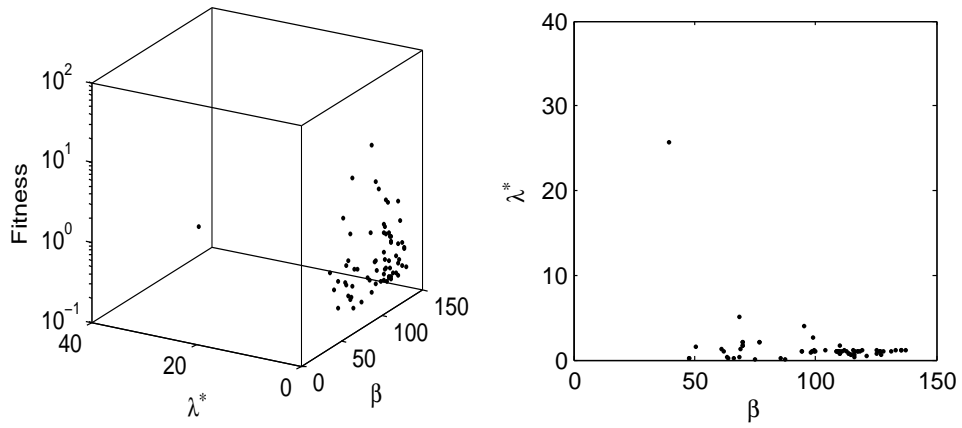
FIGURE 4.16: Évolution de la distance moyenne des individus (méthode GAO).

La Figure 4.17 montre sur la vue de gauche la fonction Fitness (score mis à l'échelle avec la méthode *Rank Scaling* où l'individu le plus performant est associé à la Fitness la plus élevée, cf. section 4.4.5) par rapport aux paramètres non-linéaires. La vue de droite représente la répartition des individus dans l'espace  $(\beta, \lambda^*)$ . Pour faciliter la visualisation et l'interprétation des résultats, 100 individus ont été choisis aléatoirement parmi les 800 de la population. L'individu le plus performant est celui qui marque la valeur de Fitness la plus élevée. La population initiale correspond à la Figure 4.17(a). Au cours des générations, les individus se regroupent et se dirigent vers le minimum global de la fonction objectif. A partir de la génération 32 (Figure 4.17(e)), on voit que les 100 individus sont groupés dans une zone bien localisée de l'espace indiquant ainsi un éventuel minimum de la fonction objectif. Cette zone correspond à la première diminution sensible de la fonction performance (Figure 4.15). À partir de la génération 44 (Figure 4.17(f)), on a effectué une mise à l'échelle sur l'axe correspondant à  $\lambda^*$  en passant de  $[0;40]$  à  $[0;2]$  afin de pouvoir visualiser la faible dispersion des individus. À la génération 70, qui correspond au deuxième palier de la Figure 4.15, on constate que la convergence est atteinte.

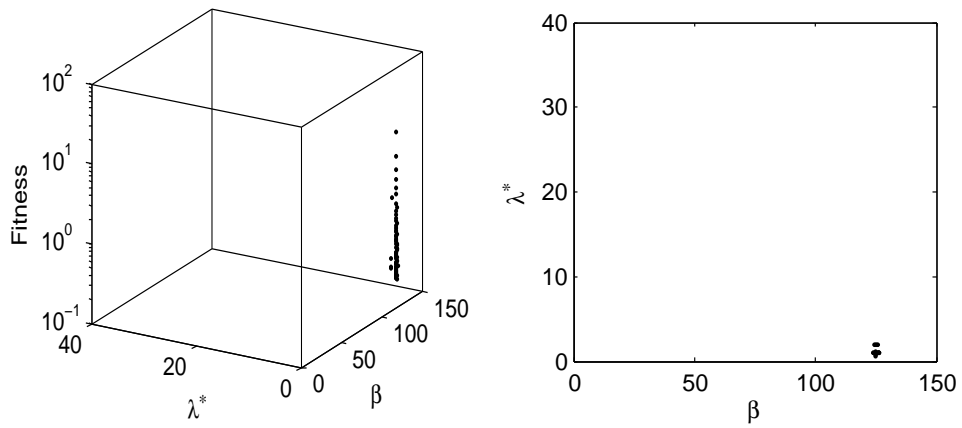


(a) Population initiale.

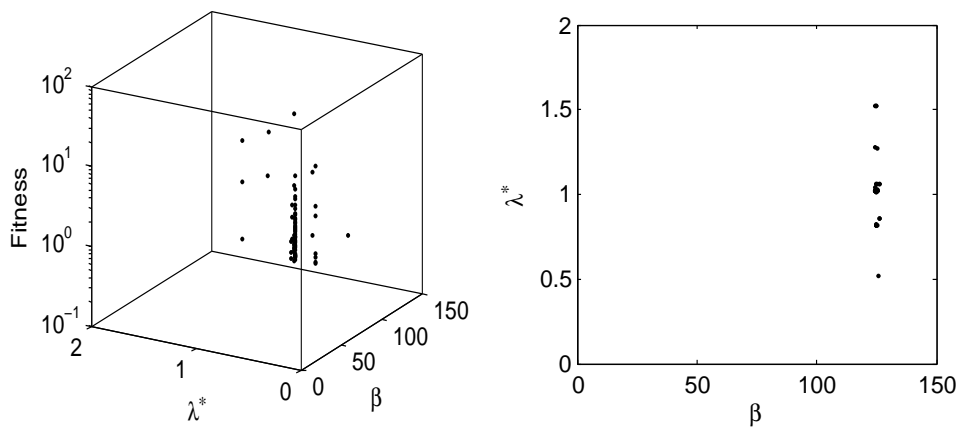
(b) 2<sup>ème</sup> génération.(c) 4<sup>ème</sup> génération.



(d) 8<sup>ème</sup> génération.



(e) 32<sup>ème</sup> génération.



(f) 44<sup>ème</sup> génération.

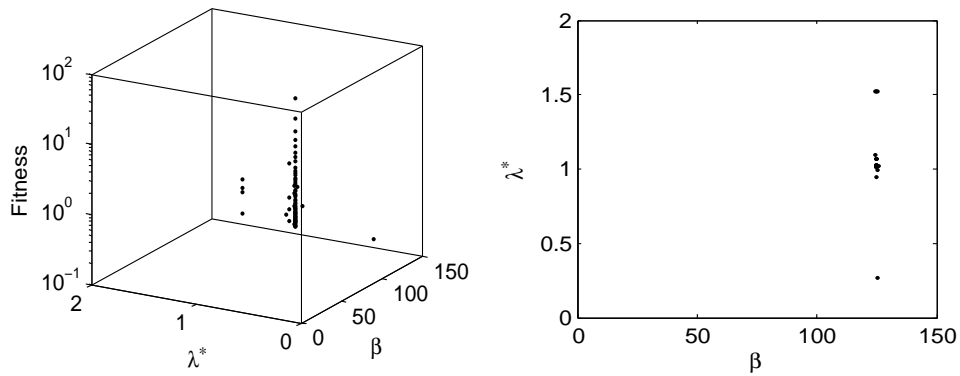
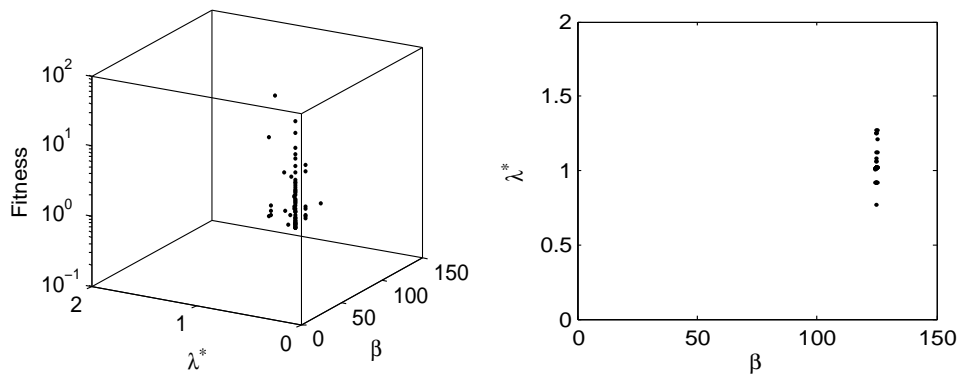
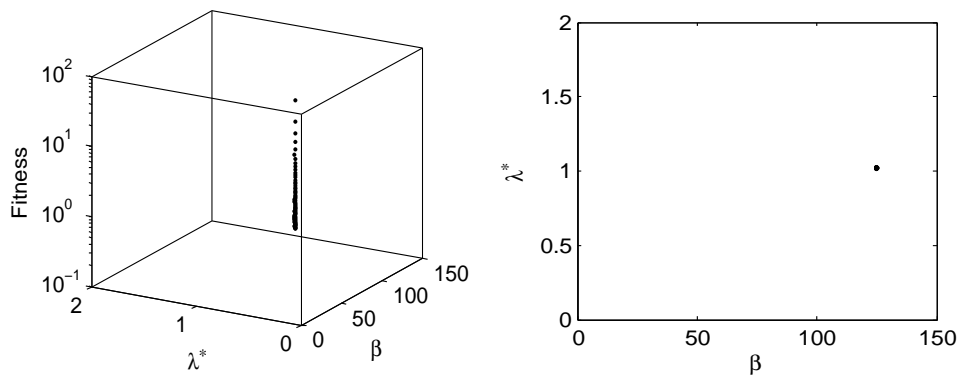
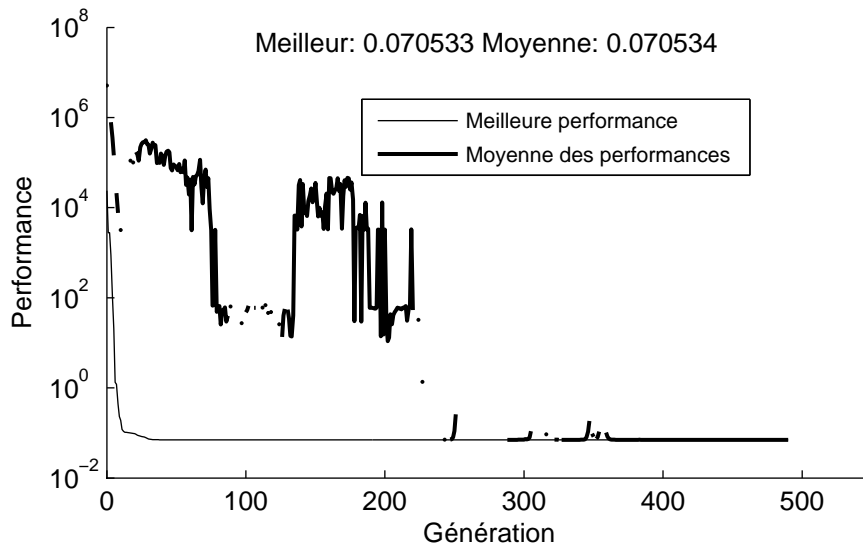
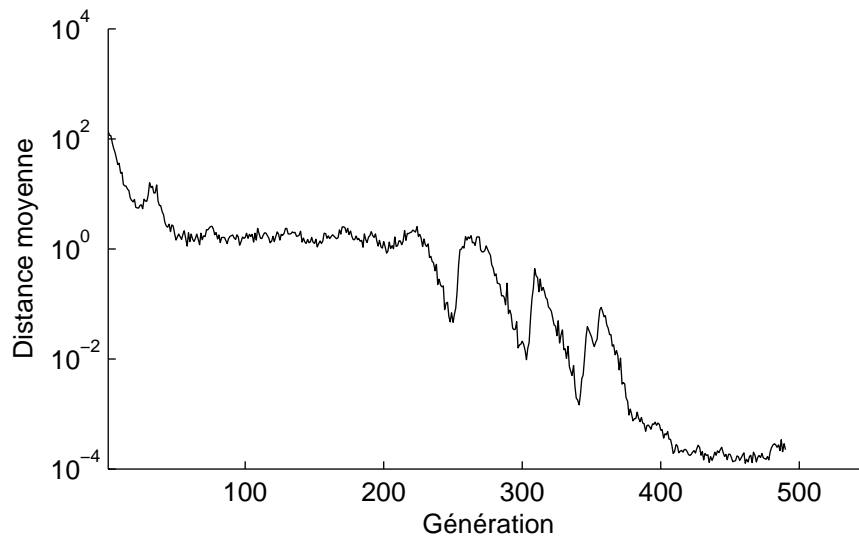
(g) 52<sup>ème</sup> génération.(h) 64<sup>ème</sup> génération.(i) 70<sup>ème</sup> génération.

FIGURE 4.17: Évolution spatiale de 100 individus aléatoires dans l'espace  $\lambda^*-\beta$ . Le meilleur individu est  $\lambda^* = 1.02$  et  $\beta = 125$  (Tableau 4.5).

Nous avons également comparé la méthode GAO avec les algorithmes génétiques standards que l'on a utilisé pour identifier les sept paramètres du modèle Peng *et al.* [123]. Le problème étant de dimension 7, il sera labellisé par la terminologie GA7. Pour ces deux méthodes, GA7 et GAO, on va utiliser les mêmes options pour l'algorithme génétique. La seule différence est que l'individu avec la méthode GAO comprend 2 gènes ( $\dim(\boldsymbol{\theta}_{nl}) = 2$ ), tandis que celui avec la méthode GA7 comprend 7 gènes ( $\dim(\boldsymbol{\theta}) = 7$ ). Ensuite, on a procédé à l'exécution de plusieurs calculs avec la méthode GAO, puis avec GA7. Chacun de ces calculs possède une population initiale aléatoire. C'est la raison pour laquelle les algorithmes génétiques peuvent produire des résultats différents pour le même problème de minimisation. Avec la méthode GAO, on a toujours réussi à approximer la meilleure solution (voir GAO dans le Tableau 4.5) pour un temps processeur de 8 secondes en moyenne. Avec la méthode GA7, il a fallu en moyenne 235 secondes pour approximer la meilleure solution. En outre, les calculs exécutés avec GA7 n'ont pas tous convergé vers la bonne solution. Le Tableau 4.5 montre quatre jeux différents de paramètres matériau (GA7a, GA7b, GA7c et GA7d) qui sont le résultat de quatre calculs différents en utilisant la méthode GA7. Ces 4 cas illustrent une convergence prématurée de la méthode GA7.



(a) Meilleure et moyenne performance.



(b) Distance moyenne entre les individus.

FIGURE 4.18: convergence de l'algorithme dans les cas de GA7a.

La convergence de GA7 dans les cas a, b, c et d présente de très fortes similarités. Pour illustrer cette convergence, la Figure 4.18 présente l'évolution de la performance et de la distance entre individus en fonction des générations dans le cas a. L'algorithme sélectionne les gènes des individus (chromosomes) dans la population initiale et les recombine. Avec ces gènes, l'algorithme génère l'individu le plus performant possible. La courbe de meilleure performance devient plate à partir de la génération 25. Dans l'impossibilité de faire évoluer le meilleur individu, l'algorithme crée de nouvelles copies de celui-ci. Puis, ces dernières sont sélectionnées pour devenir les parents qui vont transmettre leurs gènes à la prochaine descendance. À la génération 225, la moyenne des performances coïncide avec la meilleure performance. On remarque aussi une chute de la valeur de la distance moyenne entre les individus. Ceci indique que tous les individus de la population sont les mêmes et correspondent au meilleur individu. Lorsque cela se produit, la distance moyenne entre les individus est de 0. Puis, et en raison de la mutation, l'algorithme crée de nouveaux individus. Les valeurs de la moyenne des performances et de la



distance moyenne entre les individus augmentent à nouveau. Cette oscillation s'arrête à partir de la génération 390 marquant une chute de la distance moyenne entre les individus. L'algorithme, n'arrivant plus à améliorer les performances des individus, continue à itérer jusqu'à atteindre le nombre maximal toléré de générations d'attente.

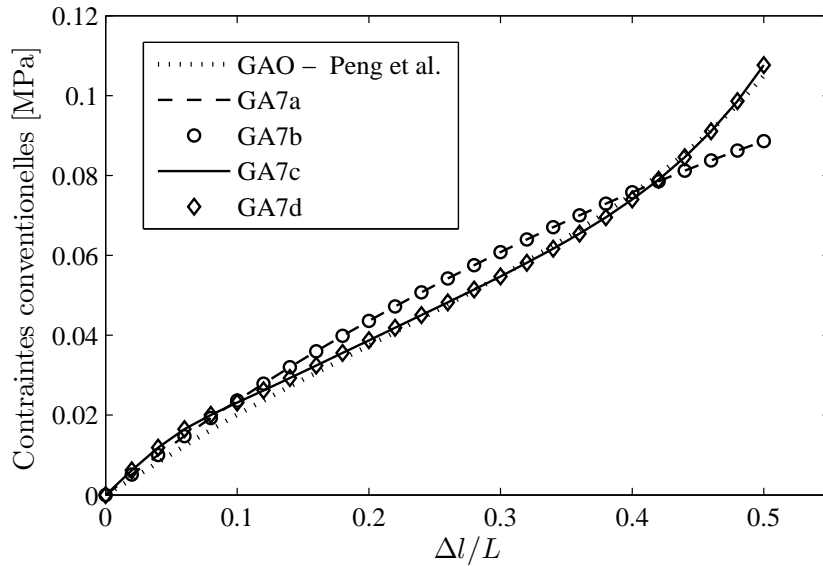


FIGURE 4.19: Contraintes axiales vs déformations axiales.

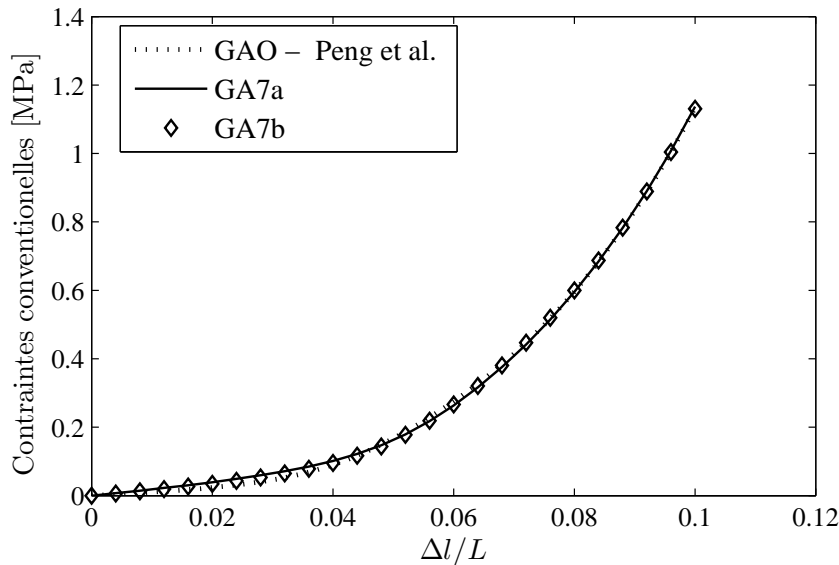
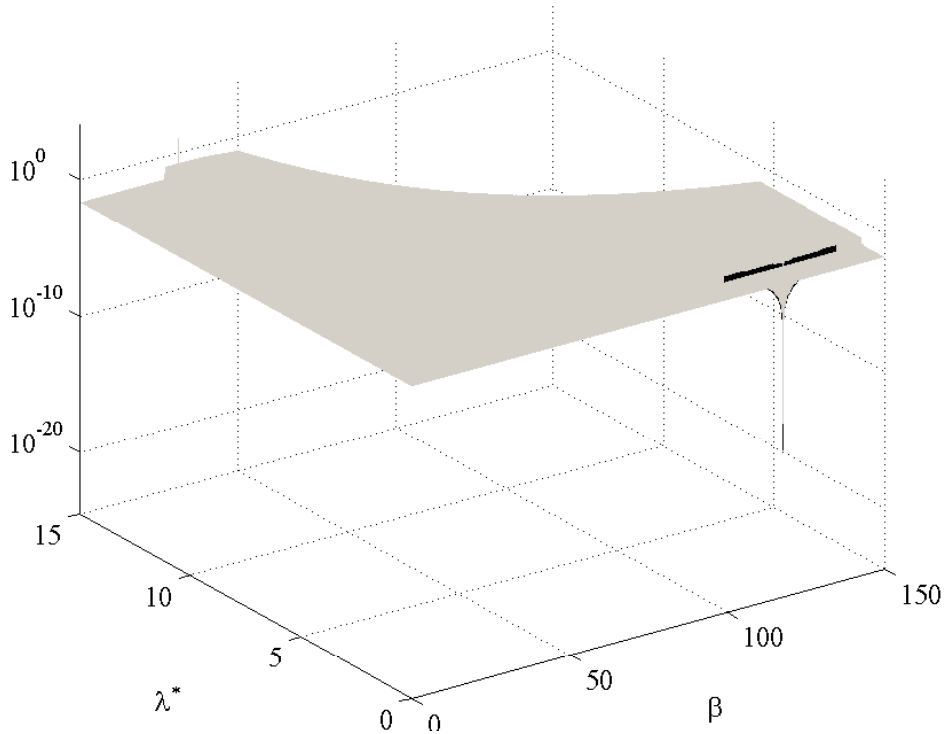


FIGURE 4.20: Contraintes circonférentielles vs déformations circonférentielles.

Avec les 4 jeux de paramètres matériau de GA7, on a tracé les courbes de contraintes-déformations sur les Figure 4.19 et 4.20. Il est à noter que GA7c et d étant parfaitement superposés à GA7a et b pour les contraintes circonférentielles, les courbes correspondantes ne seront pas représentées sur la Figure 4.20. Pour ces contraintes circonférentielles, on observe une bonne correspondance entre GA7 et la courbe de référence de Peng *et al.* [123]. En revanche, pour les contraintes axiales, on remarque que les courbes associées à GA7 ne permettent pas de couvrir efficacement la plage complète de déformation. En effet, il y a des écarts importants entre la courbe de référence et GA7a et b lorsque  $\Delta l/L$  est supérieure à 0.4 et avec GA7c et d lorsque  $\Delta l/L$  est inférieure à 0.2. Pour ce qui concerne la méthode GAO, qui est parfaitement superposée avec les courbes de Peng *et al.* [123], toute la plage de déformation est correctement couverte, aussi bien pour les contraintes axiales que pour les contraintes circonférentielles.

La fonction objectif est tracée sur la Figure 4.21 dans l'espace  $\lambda^*$  et  $\beta$ . Pour cela, on fait varier  $\lambda^*$  et  $\beta$  et, pour chacun des couples de ces paramètres non linéaires, on calcule la fonction objectif grâce à l'équation (4.96). Le premier élément frappant est le caractère constant de la fonction objectif sur une grande plage de variation de  $\lambda^*$  et  $\beta$ . Ce constat s'explique par la forme exponentielle de la loi de comportement. En effet, lorsque l'argument de la quantité  $A$  (équation (4.88)) dépasse une valeur d'environ 70,  $A$  devient très grand. Pour des raisons purement informatiques, ce cas a été géré en remplaçant  $A^{-1}$  par une valeur nulle pour éviter l'apparition d'instabilités ou d'erreurs numériques. L'expression  $Q$  donnée par l'équation (4.88) est alors approximativement égale à 0. En se reportant à l'expression des contraintes calculées (équation (4.90)), il est alors clair que ces dernières deviennent indépendantes de  $\lambda^*$  et  $\beta$ . Le deuxième élément marquant est la faible sensibilité de la fonction objectif par rapport à  $\lambda^*$  et  $\beta$ , à l'exception d'une zone extrêmement localisée correspondant au minimum de la Figure 4.21.

FIGURE 4.21: Fonction objectif vs  $\{\lambda^*, \beta\}$ 

D'une manière générale, compte tenu de la topologie particulière de la fonction objectif, le minimum est extrêmement difficile à atteindre numériquement. En particulier, l'utilisation de GA7 nécessitera une population très importante et suffisamment diversifiée afin d'augmenter les chances de disposer d'individus à proximité du pic qui représente le minimum. Si on considère par exemple une population de 100 individus (Figure 4.22), on remarque deux principaux niveaux de score,  $7E^{-02}$  et  $2E^{-02}$ , avec quelques valeurs intermédiaires. Le nombre élevé d'individus appartenant à ces deux niveaux entraînent la convergence de GA7 vers une valeur proche de l'un de ces deux scores.

Pour ce qui concerne les méthodes à base de gradient, il est clair qu'elles auront très peu de chance de converger à moins bien sûr, soit d'initialiser dans la proximité immédiate du minimum, soit de réduire de manière importante les plages de variations de  $\lambda^*$  et  $\beta$ . Concernant ce dernier point, selon Peng *et al.* [123] il pourrait être possible d'interpréter  $\lambda^*$  comme le point de transition

entre le régime de basses pressions et celui de hautes pressions, en d'autre terme le toe zone. Il suffirait alors de limiter l'espace de variation de  $\lambda^*$  avec, par exemple, une valeur maximale de 2. Mais l'interprétation physique du paramètre  $\beta$  n'étant pas connue, il est beaucoup plus difficile de réduire sa plage de variation.

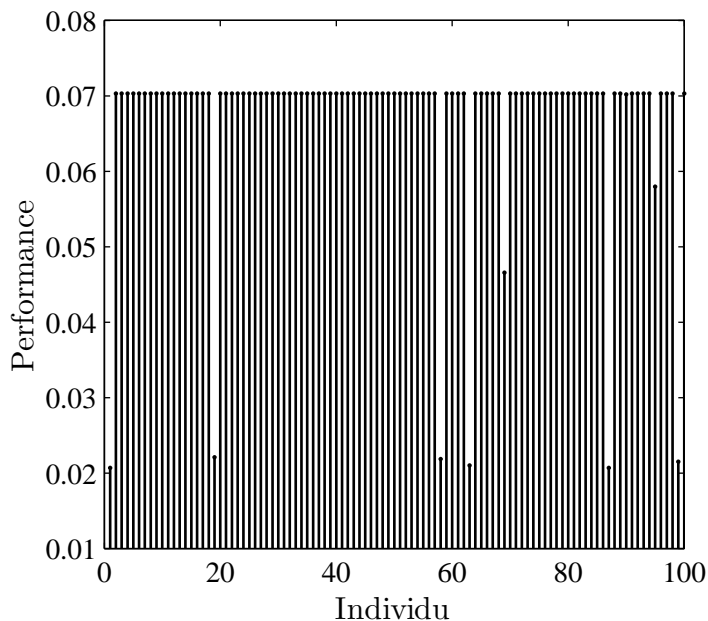


FIGURE 4.22: Performance de 100 individus aléatoires

## 4.6 Conclusion

Une nouvelle procédure d'identification de paramètres biomécaniques combinant les algorithmes génétiques avec une optimisation analytique a été proposée. L'avantage de cette approche repose sur sa simplicité et son efficacité. Elle bénéficie de la forme additive de l'énergie de déformation caractérisant le comportement hyperélastique des tissus biologiques souples. Pour déterminer les paramètres matériau, le problème inverse est formulé comme un problème de moindres carrés non linéaires. Les paramètres des termes additifs du problème de moindres carrés sont linéaires et sont analytiquement calculés en fonction des paramètres non linéaires. L'espace de recherche de

solution qui minimise la fonction objectif est ainsi réduit analytiquement. Sa dimension est égale à celle du vecteur des paramètres non linéaires. Ces derniers deviennent les seuls paramètres indépendants de la fonction objectif. Ils sont approximés par les algorithmes génétiques qui vont agir sur un domaine de recherche réduit. L'avantage de l'utilisation de la technique des algorithmes génétiques est leur capacité à converger vers le minimum global du problème à minimiser. De plus, ils utilisent plusieurs points d'initialisation -une population- au lieu d'un seul point d'initialisation pour les méthodes classiques à base de gradient utilisées en biomécanique. Pour ces dernières, la difficulté de convergence conduit à une décomposition du problème d'identification en plusieurs étapes (voir par exemple Holzapfel [77] et Peng *et al.* [123]). Chaque étape permet d'identifier une partie des paramètres et de réduire le problème initial, qui est de grande dimension, en plusieurs sous-problèmes de faible dimension. Cependant, cette approche multi-étapes augmente notablement la quantité de travail numérique et expérimental à réaliser.

La méthode GAO a été testée en identifiant les paramètres matériau de trois modèles. A chaque fois, la dimension du problème de minimisation a été réduite à :

- 2 dimensions au lieu de 3 pour le modèle HGO [78].
- 3 dimensions au lieu de 5 pour le modèle de Fung [77].
- 2 dimensions au lieu de 7 pour le modèle de Peng *et al.* [123].

Les résultats de l'identification sont obtenus en exécutant une seule étape de calcul. En comparant la méthode GAO à d'autres méthodes de résolution du problème inverse, on a trouvé que :

- GAO converge contrairement aux méthodes à base de gradient.
- Comparée aux algorithmes génétiques standards, la méthode GAO est moins sensible à la diversité et à la taille de la population. Le temps processeur de la méthode GAO est ainsi 30 fois plus rapide que les algorithmes génétiques standards.
- GAO a démontré son efficacité et sa rapidité pour la résolution des problèmes d'identification de paramètres.

L'application de la méthode GAO n'est pas limitée uniquement à la biomécanique, mais elle s'étend à tout problème d'identification inverse basé sur des tests expérimentaux pour lesquels on dispose de mesures de contraintes et d'élongations.

---

# La viscoélasticité de la paroi artérielle

---

## 5.1 Introduction

Les propriétés du tissu vasculaire, et en particulier des artères, sont complexes : non homogénéité, anisotropie, non linéarité et dépendance au temps [31, 54, 55, 62, 78, 79, 162]. La caractérisation des propriétés du tissu et des lois de comportement correspondantes doit être uniquement accomplie par le biais des tests multi-axiaux simples [81].

On peut représenter le comportement quasi-statique non linéaire et anisotrope des tissus souples par une variété d'approches micro-structurales et phénoménologiques [82, 90]. En particulier, de nombreuses lois constitutives ont été développées sur le principe de la pseudo-élasticité, le matériau biologique étant considéré comme deux matériaux élastiques aux comportements différents au cours du chargement et du déchargement afin de modéliser la boucle d'hystérésis [21, 26, 54, 55, 91]. Ce concept simplifie la représentation mathématique de l'historique des chargements cycliques de contraintes-déformations, mais il manque de précision dans la description du comportement viscoélastique. Une autre approche utilise les modèles viscoélastiques qui permettent une représentation plus réaliste de l'hystérésis. Une partie de ces lois mathématiques est basée sur le concept de la viscoélasticité quasi-linéaire [54]. Dans cette formulation, le tissu sous chargement cyclique répété

montre une insensibilité à la vitesse de chargement. Cette propriété d'insensibilité correspond aux observations réalisées par Fung [54] (chapitre 7) sur les tissus biologiques où le matériau est supposé linéaire pour sa réponse visqueuse liée au temps (la relaxation des contraintes dépend du temps). Cependant, la relation contraintes-déformations reste non linéaire. Cette hypothèse réduit la complexité mathématique du problème car les équations différentielles de l'évolution du système sont linéaires. Par conséquent, la théorie de la viscoélasticité quasi-linéaire a été appliquée aux artères ainsi qu'à d'autres tissus [22, 92, 95].

Les éléments viscoélastiques classiques (Kelvin, Maxwell et Voight), formés par des ressorts et amortisseurs, dépendent de la fréquence de chargement avec une fréquence caractéristique pour chacun d'eux. Avec un grand nombre de ces éléments disposés en série ou en parallèle, leurs fréquences caractéristiques peuvent être choisies pour couvrir la bande de fréquence où l'hystérésis du tissu montre une insensibilité à la vitesse de chargement. Par conséquent, on arrive à approximer les fonctions continues du spectre de relaxation [54]. Le désavantage de cette approche réside dans le nombre élevé de paramètres viscoélastiques à identifier.

Dans une récente stratégie de construction des modèles hyperviscoélastiques, la densité d'énergie libre de Helmholtz est considérée comme une somme de deux termes d'énergie : hyperélastique et visqueuse [17, 75, 79, 122]. Les contraintes sont alors écrites comme un terme élastique, et un terme dissipatif qui tend vers zéro au cours du temps.

Dans ce chapitre nous analysons le travail présenté par Holzapfel *et al.* [79]. En utilisant un système de Maxwell généralisé, Holzapfel *et al.* [79] ont modélisé en trois dimensions le comportement visqueux de la paroi artérielle. Le système de Maxwell comprend cinq éléments, composés chacun d'un amortisseur et d'un ressort en série, et montés en parallèle avec un ressort représentant la réponse purement élastique. Le système contient donc dix variables viscoélastiques à déterminer. Cinq de ces variables sont les temps caractéristiques de relaxation des éléments de Maxwell. Ces derniers ont été choisis de façon à couvrir quatre décades de temps, un intervalle suffisamment large



pour capturer le spectre des fréquences dans lequel la paroi artérielle montre un amortissement constant. Les cinq temps caractéristiques de relaxation ne sont donc pas des paramètres à identifier. Comme le module d'Young du ressort libre est par ailleurs fixé dans Holzapfel *et al.* [79], il ne reste qu'à identifier cinq paramètres viscoélastiques. Ils sont appelés les *facteurs d'énergie libre* et sont liés aux temps de relaxation et à la viscosité. Le problème d'identification de ces 5 paramètres revient à formuler un problème d'optimisation tout en conservant un amortissement du système de Maxwell constant sur une large bande de fréquence. Holzapfel *et al.* [79] les ont déterminés de façon linéaire, en supposant que l'énergie dissipée par la paroi artérielle est constante sur la bande fréquentielle 0.01Hz – 100Hz. En effet, d'après l'équation (42) de l'énergie dissipative donnée dans Holzapfel *et al.* [79], la relation entre cette énergie et ses facteurs d'énergie libre est linéaire.

Cependant, il manque un terme dans l'expression du déplacement complexe normalisé proposé dans [79] (cf. Eq. (49) de cette référence). En conséquence, le déplacement présente une anomalie dimensionnelle et l'énergie dissipative visqueuse est mal formulée. Les paramètres matériau viscoélastiques, identifiés sur la base de cette formulation, ne sont donc pas représentatifs du comportement réel de la paroi artérielle. Dans ce chapitre, on se propose d'établir les expressions correctes des déplacements et de l'énergie dissipative. Sur la base de ces expressions, le problème d'optimisation des facteurs de l'énergie libre devient non linéaire. Pour le résoudre, on utilise une approche originale basée sur la minimisation de l'écart entre le maximum et le minimum de la fonction objectif. Cette approche permet d'obtenir les paramètres matériau qui rendent la dissipation visqueuse constante sur la bande fréquentielle d'étude. Sur la base de la fonction objectif proposée, le jeu de paramètres matériau optimal est recherché à l'aide des algorithmes génétiques disponibles sous MATLAB®.

## 5.2 Modèle structural de la paroi artérielle

La paroi artérielle est formée par trois couches concentriques qui sont de l'intérieur vers l'extérieur : l'intima, la media et l'adventitia. L'intima est une

couche mince de cellules endothéliales juxtaposées. Dans les artères jeunes en bonne santé, sa contribution mécanique est non significative. Les cellules musculaires lisses forment la couche media. C'est la couche la plus active dans l'artère. Grâce à la protéine d'élastine, composante essentielle de son poids sec, elle répond aux sollicitations mécaniques longitudinales et transversales. Elle est également supposée être responsable de la réponse viscoélastique des artères. L'adventitia se comporte comme un tube à paroi épaisse qui renforce la structure de la paroi artérielle par des trousseaux de fibres de collagène [chap.19 3, 78, 79, 88, 89].

Le tissu artériel est modélisé comme un cylindre à deux couches (media et adventitia) renforcé par des fibres de collagène. Il est décrit par un modèle viscoélastique tridimensionnel dans Holzapfel *et al.* [79]. La viscoélasticité dépend explicitement du comportement hyperélastique du tissu à long terme. Pour une position donnée de l'équilibre, au fur et à mesure que le temps s'approche d'une valeur infinie, le terme dissipatif tend vers zéro. La partie hyperélastique de cette loi est représentée par le modèle hyperélastique de Holzapfel *et al.* [78]. Elle s'appuie sur la construction de Spencer pour des matériaux composites et hyperélastiques. Elle adopte également la division multiplicative de déformations volumétrique et isochore. En reprenant la densité d'énergie libre (4.56), la densité d'énergie de déformation du tissu est :

$$\Psi = U(\mathbf{X}; J) + \bar{\Psi}(\mathbf{X}; \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2) + \sum_{\alpha=1}^m \bar{\Upsilon}_{\alpha}(\mathbf{X}; \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2, \bar{\Gamma}_{\alpha}) \quad (5.1)$$

où  $U$  et  $\bar{\Psi}$  sont, respectivement, les termes volumétriques et isochores caractérisant l'état d'équilibre. On note que, contrairement aux chapitres précédents où elle était notée  $W$ , la densité d'énergie de déformation est décrite ici par  $\Psi$  pour être homogène avec les notations utilisées dans [79]. Le terme  $U(\mathbf{X}; J)$  permet de prendre en compte la légère compressibilité du tissu.  $\mathbf{X}$  est la position d'un point matériel du solide dans sa configuration de référence et  $\mathbf{x}$  sa position dans la configuration déformée. Le tenseur gradient de la déformation est  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$  avec le ratio de changement de volume  $J = \det(\mathbf{F})$ .

On rappelle les parties isochores de ce tenseur  $\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F}$  et du tenseur droit de Cauchy-Green :  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T\bar{\mathbf{F}}$ . Les  $i$  directions privilégiées des fibres marquant l'anisotropie du tissu sont caractérisées par les tenseurs structuraux  $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i$ . Les couches media et adventitia contiennent deux directions privilégiées de fibres. L'état d'équilibre dynamique incluant le phénomène de fluage ou de relaxation, est caractérisé par la densité d'énergie libre  $\sum_{\alpha=1}^m \bar{\gamma}_\alpha$ , où  $m$  représente le processus viscoélastique et  $\bar{\gamma}_\alpha$  est un tenseur du second ordre décrivant l'historique des déformations viscoélastiques. Chacune des couches artérielles, media et l'adventitia, est modélisée par une densité d'énergie de déformation hyperélastique :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \bar{\Psi}_{\text{isotropic}} + \bar{\Psi}_{\text{anisotropic}} \\ &= \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \begin{cases} \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=1}^2 \left\{ \exp \left[ k_2 (\bar{I}_{4a_i} - 1)^2 \right] - 1 \right\}, & \text{si } \bar{I}_{4a_i} \geq 1 \\ 0, & \text{si } \bar{I}_{4a_i} < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

En extension, les fibres dans les couches artérielles emmagasinent de l'énergie de déformation anisotrope suivant les directions  $\{i = 1, 2\}$  des fibres. Le carré de dilatation suivant les directions  $\mathbf{a}_i$  est mesuré par le biais de l'invariant réduit  $\bar{I}_{4a_i}$  (voir (4.62)). La partie isotrope de (5.2) revient au modèle néo-Hookéen avec  $\bar{I}_1 = \text{tr}(\bar{\mathbf{C}})$  [75, chap. 6]. La partie anisotrope correspond au modèle de Holzapfel *et al.* [78] introduit au chapitre 2 et étudié, pour ce qui concerne l'identification de ses paramètres, au chapitre 4. Les paramètres matériau  $\mu$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont estimés en ajustant les équations constitutives aux valeurs mesurées des tests expérimentaux sur un domaine physiologique de déformations.

Dans le cadre d'un équilibre dynamique, des équations supplémentaires sont nécessaires pour déterminer l'évolution du comportement viscoélastique. En particulier, on formule  $\alpha$  équations différentielles d'évolution qui lient les

contraintes viscoélastiques  $\mathbf{Q}_\alpha$  aux contraintes purement élastiques  $\mathbf{F}_c$  correspondant au modèle rhéologique de la Figure 5.1 :

$$\dot{\mathbf{Q}}_\alpha + \frac{\mathbf{Q}_\alpha}{\tau_\alpha} = \beta_\alpha^\infty \dot{\mathbf{F}}_c \quad (5.3)$$

où  $\tau_\alpha$  représentent les temps caractéristiques de relaxation et  $\beta_\alpha^\infty$  les facteurs de l'énergie libre pour  $\alpha = 1, \dots, m$ . Les contraintes s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\alpha &= C_\alpha (u - u_\alpha) = \eta_\alpha \dot{u}_\alpha \\ \mathbf{F}_c &= c u \end{aligned} \quad (5.4)$$

où  $\eta_\alpha$  représente la viscosité,  $c$  la raideur purement élastique du modèle,  $C_\alpha$  la raideur élastique des ressorts dans chaque branche du modèle,  $u$  le déplacement total et  $u_\alpha$  le déplacement de chaque amortisseur.

En linéarisant le modèle visco-élastique autour des déformations physiologiques, et en supposant l'insensibilité par rapport à la fréquence de la dissipation visqueuse des artères, Holzapfel *et al.* [79] ont obtenu un modèle unidimensionnel de Maxwell généralisé (Figure 5.1). Ce modèle est approprié pour décrire le comportement viscoélastique des artères.

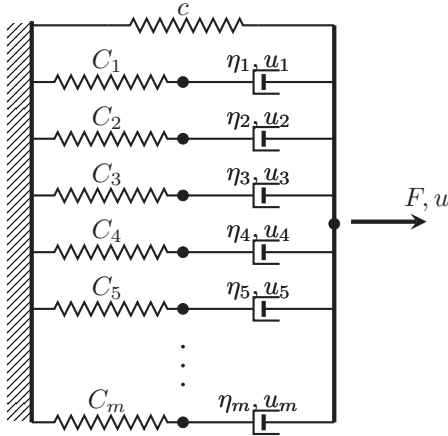


FIGURE 5.1: Modèle de Maxwell généralisé avec  $m$  éléments parallèles.

TABLEAU 5.1: Paramètres viscoélastiques de la couche media extraits de [79]

Media	
$\beta_1^\infty = 0.353$ (-)	$\tau_1 = 0.001$ (s)
$\beta_2^\infty = 0.286$ (-)	$\tau_2 = 0.01$ (s)
$\beta_3^\infty = 0.298$ (-)	$\tau_3 = 0.1$ (s)
$\beta_4^\infty = 0.285$ (-)	$\tau_4 = 1$ (s)
$\beta_5^\infty = 0.348$ (-)	$\tau_5 = 10$ (s)

L'équation d'équilibre global du système de Maxwell décrit sur la Figure 5.1 s'écrit :

$$F = c u + \sum_{\alpha=1}^5 C_{\alpha} (u - u_{\alpha}) \quad (5.5)$$

On rappelle par ailleurs que les équations des équilibres internes associées à chaque élément ressort-amortisseur du système de Maxwell sont données par l'équation (5.4). En faisant l'hypothèse d'un chargement cyclique harmonique :

$$F = F_0 \exp(j\omega t) \quad (j^2 = -1) \quad (5.6)$$

ainsi que d'une réponse harmonique en déplacement :

$$u = u^{\star} \exp(j\omega t), \quad u_{\alpha} = u_{\alpha}^{\star} \exp(j\omega t), \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (5.7)$$

on retrouve, en combinant les équations (5.4), (5.5), (5.6) et (5.7), les équations d'équilibre du système de Maxwell obtenues par Holzapfel *et al.* (cf. équation (47) dans [79]) :

$$F_0 - c u^{\star} - \sum_{\alpha=1}^5 C_{\alpha} (u^{\star} - u_{\alpha}^{\star}) = 0 \quad (5.8a)$$

$$u_{\alpha}^{\star} (C_{\alpha} + \eta_{\alpha} j\omega) - C_{\alpha} u^{\star} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (5.8b)$$

où  $C_{\alpha} > 0$  et  $c > 0$  sont les modules élastiques linéaires des ressorts et  $\eta_{\alpha} > 0$  caractérise l'écoulement Newtonien du fluide visqueux se comportant comme un amortisseur. Les rapports entre les raideurs de chaque élément du système de Maxwell avec la raideur du ressort isolé seront notés dans la suite  $\beta_{\alpha}^{\infty}$  :

$$\beta_{\alpha}^{\infty} = \frac{C_{\alpha}}{c}, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (5.9)$$

Le temps de réponse caractéristique de chaque élément ressort-amortisseur sera noté  $\tau_{\alpha}$ . Il est défini comme le rapport entre la viscosité et la raideur :

$$\tau_{\alpha} = \frac{\eta_{\alpha}}{C_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (5.10)$$

### 5.3 Identification des paramètres viscoélastiques

Cette partie est consacrée à l'identification des cinq paramètres viscoélastiques  $\beta_\alpha^\infty$  pour chacun des cinq éléments ressort-amortisseur du système de Maxwell. Les temps de réponse caractéristiques  $\tau_\alpha$  sont fixés par décade, de 0.0001 à 10 secondes, comme indiqué dans le Tableau 5.1 et comme cela a été réalisé dans [79]. Les paramètres  $\beta_\alpha^\infty$  vont être choisis de manière à obtenir une énergie dissipée constante sur la bande de fréquence 0.01 – 100Hz. Cette hypothèse correspond à la démarche adoptée dans [79] et permet de s'affranchir du manque de données expérimentales pour chaque fréquence, données qui auraient permis une comparaison directe entre l'expérimental et la modélisation. Afin d'exploiter cette propriété d'invariance de la dissipation en fonction de la fréquence, le paragraphe qui suit est consacré au calcul de l'énergie dissipée en fonction des paramètres du modèle.

#### 5.3.1 Calcul de la dissipation d'énergie

De (5.8b), on déduit le déplacement complexe  $u_\alpha^\star$  d'un amortisseur en fonction du déplacement global complexe  $u^\star$  :

$$u_\alpha^\star = \frac{C_\alpha}{C_\alpha + j\omega\eta_\alpha} u^\star \quad (5.11)$$

En remplaçant l'expression de  $u_\alpha^\star$  dans (5.8a), on obtient :

$$F_0 = c u^\star + \sum_{\alpha=1}^5 C_\alpha \left( u^\star - \frac{C_\alpha}{C_\alpha + j\omega\eta_\alpha} u^\star \right) \quad (5.12)$$

En factorisant cette expression par  $u^\star$  et en divisant les deux membres par  $u^\star$ , on trouve :

$$\frac{F_0}{u^\star} = c + \sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{j\omega C_\alpha \eta_\alpha}{C_\alpha + j\omega\eta_\alpha} \right) \quad (5.13)$$

Pour séparer la partie imaginaire de la partie réelle, on multiplie le dénominateur du deuxième terme de la somme par son conjugué :

$$\frac{j\omega C_\alpha \eta_\alpha}{C_\alpha + j\omega \eta_\alpha} \frac{C_\alpha - j\omega \eta_\alpha}{C_\alpha - j\omega \eta_\alpha} = \frac{C_\alpha (\omega \eta_\alpha)^2 + j\omega C_\alpha^2 \eta_\alpha}{C_\alpha^2 + (\omega \eta_\alpha)^2} \quad (5.14)$$

en remplaçant  $\eta_\alpha$  par  $C_\alpha \tau_\alpha$ , il vient :

$$\frac{C_\alpha^3 (\omega \tau_\alpha)^2 + j\omega C_\alpha^3 \tau_\alpha}{C_\alpha^2 + (\omega \tau_\alpha)^2 C_\alpha^2} = \frac{C_\alpha (\omega \tau_\alpha)^2 + j C_\alpha (\omega \tau_\alpha)}{1 + (\omega \tau_\alpha)^2} \quad (5.15)$$

Ainsi (5.13) devient :

$$\frac{F_0}{u^\star} = c + \sum_{\alpha=1}^5 \frac{C_\alpha (\omega \tau_\alpha)^2}{1 + (\omega \tau_\alpha)^2} + j \sum_{\alpha=1}^5 \frac{C_\alpha (\omega \tau_\alpha)}{1 + (\omega \tau_\alpha)^2} \quad (5.16)$$

On introduit le déplacement complexe  $\hat{u}^\star$  normalisé par l'effort  $F_0$  :

$$\hat{u}^\star = \frac{u^\star}{F_0} \quad (5.17)$$

On déduit donc de (5.16) et (5.17) que :

$$\hat{u}^\star = \frac{1}{A - jB} \quad (5.18)$$

avec :

$$A = c + \sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{C_\alpha (\omega \tau_\alpha)^2}{1 + (\omega \tau_\alpha)^2} \right) \quad B = - \sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{C_\alpha \omega \tau_\alpha}{1 + (\omega \tau_\alpha)^2} \right) \quad (5.19)$$

Soit encore :

$$\hat{u}^\star = \frac{A + jB}{A^2 + B^2} \quad (5.20)$$

On note que les expressions de  $A$  et de  $B$  que nous avons obtenues diffèrent de celles établies par Holzapfel *et al.* (cf. équation (49) dans [79] dans laquelle le coefficient  $C_\alpha$  est absent du numérateur).

On introduit de la même façon le déplacement complexe normalisé d'un amortisseur :

$$\hat{u}_\alpha^\star = \frac{u_\alpha^\star}{F_0} \quad (5.21)$$

On déduit alors de (5.11) :

$$\begin{aligned} \hat{u}_\alpha^\star &= \frac{C_\alpha}{C_\alpha + j w \eta_\alpha} \frac{u^\star}{F_0} = \frac{C_\alpha}{C_\alpha + j w \eta_\alpha} \hat{u}^\star \\ &= \frac{C_\alpha^2 - j C_\alpha (w \eta_\alpha)}{C_\alpha^2 + (w \eta_\alpha)^2} \hat{u}^\star \end{aligned} \quad (5.22)$$

En remplaçant  $\eta_\alpha$  par  $C_\alpha \tau_\alpha$  puis en simplifiant par  $C_\alpha^2$ , on obtient :

$$\hat{u}_\alpha^\star = \frac{1 - j (w \tau_\alpha)}{1 + (w \tau_\alpha)^2} \hat{u}^\star \quad (5.23)$$

En injectant l'expression (5.20) dans (5.23), on obtient après un calcul simple mais un peu fastidieux :

$$\hat{u}_\alpha^\star = \text{Re}(\hat{u}_\alpha^\star) + j \text{Im}(\hat{u}_\alpha^\star) \quad (5.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\hat{u}_\alpha^\star) &= [A + B (w \tau_\alpha)] |\hat{u}_\alpha^\star|^2, \quad \text{Im}(\hat{u}_\alpha^\star) = [B - A (w \tau_\alpha)] |\hat{u}_\alpha^\star|^2 \\ |\hat{u}_\alpha^\star|^2 &= \frac{1}{[1 + (w \tau_\alpha)^2] (A^2 + B^2)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Les vitesses  $v_\alpha$ , les vitesses complexes  $v_\alpha^\star$  et les vitesses complexes normalisées  $\hat{v}_\alpha^\star$  sont respectivement définies par :

$$v_\alpha = \frac{du_\alpha}{dt}, \quad v_\alpha^\star = j w u_\alpha^\star, \quad \hat{v}_\alpha^\star = \frac{v_\alpha^\star}{F_0} = j w \hat{u}_\alpha^\star \quad (5.26)$$

on en déduit que :

$$|\hat{v}_\alpha^\star| = w |\hat{u}_\alpha^\star| \quad (5.27)$$



On dispose maintenant de tous les éléments permettant de calculer l'énergie dissipée par cycle afin de la comparer avec celle trouvée par Holzapfel *et al.* [79]. L'énergie moyenne dissipée par un élément ressort-amortisseur du système de Maxwell sur une période  $2\pi/w$  est définie par :

$$W_\alpha = \int_0^{2\pi/w} \mathbf{Q}_\alpha v_\alpha dt \quad (5.28)$$

où  $\mathbf{Q}_\alpha$  est l'effort interne défini par (5.4) et  $v_\alpha$  est la vitesse interne définie par (5.26). On en déduit que :

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \int_0^{2\pi/w} \eta_\alpha \left( \frac{du_\alpha}{dt} \right)^2 dt = \eta_\alpha \int_0^{2\pi/w} (\operatorname{Re}[j w u_\alpha^* \exp(j w t)])^2 dt \\ &= \eta_\alpha w^2 \int_0^{2\pi/w} (\operatorname{Re}(u_\alpha^*) \sin(w t) + \operatorname{Im}(u_\alpha^*) \cos(w t))^2 dt \end{aligned} \quad (5.29)$$

Après un calcul intégral de base, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/w} \sin(w t)^2 dt &= \int_0^{2\pi/w} \cos(w t)^2 dt = \frac{\pi}{w} \\ \int_0^{2\pi/w} \sin(w t) \cos(w t) dt &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

On en déduit que :

$$W_\alpha = \eta_\alpha w \pi |u_\alpha^*|^2 \quad (5.31)$$

L'énergie dissipée totale  $W_D$  est constituée de la contribution de chaque élément du système :

$$W_D = \sum_{\alpha=1}^5 W_\alpha = w \pi \sum_{\alpha=1}^5 \eta_\alpha |u_\alpha^*|^2 \quad (5.32)$$

Soit encore, en normalisant par  $F_0^2$  :

$$\hat{W}_D = \frac{W_D}{F_0^2} = w \pi \sum_{\alpha=1}^5 \eta_{\alpha} |\hat{u}_{\alpha}^*|^2 \quad (5.33)$$

En utilisant pour finir (5.9), (5.10) et (5.27), on obtient :

$$\hat{W}_D = \pi c \sum_{\alpha=1}^5 \beta_{\alpha}^{\infty} \tau_{\alpha} |\hat{v}_{\alpha}^*| |\hat{u}_{\alpha}^*| \quad (5.34)$$

On retrouve ainsi exactement l'expression de l'énergie dissipée par cycle qui est donnée par Holzapfel *et al.* (cf. page 461 dans [79]). Pour exploiter de manière pratique l'équation (5.34), on utilise successivement (5.25) et (5.27) :

$$\begin{aligned} \hat{W}_D &= \pi c w \sum_{\alpha=1}^5 \beta_{\alpha}^{\infty} \tau_{\alpha} |\hat{u}_{\alpha}^*|^2 \\ &= \frac{\pi c w}{A^2 + B^2} \sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{\beta_{\alpha}^{\infty} \tau_{\alpha}}{1 + (w \tau_{\alpha})^2} \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Le Tableau 5.2 fournit les expressions de  $A$  et  $B$  ainsi que l'expression de l'énergie visqueuse dissipée par cycle  $\hat{W}_D$ . Comme cela a déjà été signalé précédemment, il apparaît qu'il manque le paramètre  $C_{\alpha}$  dans les expressions de la colonne labellisée Holzapfel *et al.* [79]. Cette absence se traduit par des expressions qui ne sont pas cohérentes en unité puisque  $c$  s'exprime en Pa alors que  $(w \tau_{\alpha})$  est sans dimension. En conséquence, l'identification des paramètres réalisée dans [79] est effectuée sur la base d'une fonction objectif dont l'expression est erronée.

Dans la Figure 5.2, l'énergie normalisée dissipée par cycle est tracée en fonction du spectre fréquentiel. Son expression intègre les formules de  $A$  et  $B$  du Tableau 5.2 selon Holzapfel *et al.* [79]. Les temps caractéristiques  $\tau_{\alpha}$  et les facteurs d'énergie libre  $\beta_{\alpha}^{\infty}$  sont ceux du Tableau 5.1. Ce graphe est identique à celui de la figure 5.b dans [79]. Les courbes en pointillés représentent l'énergie visqueuse dissipée dans chacune des cinq branches du système de Maxwell

généralisé.

TABLEAU 5.2: Expression de l'énergie dissipée normalisée par cycle.

	Holzapfel <i>et al.</i> [79]	Expressions correctes
$A$	$c + \sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{(w \tau_{\alpha})^2}{1 + (w \tau_{\alpha})^2} \right)$	$c + \sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{C_{\alpha} (w \tau_{\alpha})^2}{1 + (w \tau_{\alpha})^2} \right)$
$B$	$-\sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{w \tau_{\alpha}}{1 + (w \tau_{\alpha})^2} \right)$	$-\sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{C_{\alpha} w \tau_{\alpha}}{1 + (w \tau_{\alpha})^2} \right)$
$\hat{W}_D$	$\frac{\pi c w}{A^2 + B^2} \sum_{\alpha=1}^5 \left( \frac{\beta_{\alpha}^{\infty} \tau_{\alpha}}{1 + (w \tau_{\alpha})^2} \right)$	

Cependant, en utilisant à nouveau les paramètres du Tableau 5.1, mais avec les expressions correctes de  $A$  et  $B$  du Tableau 5.2, il apparaît que l'énergie dissipative  $\hat{W}_D$  n'est plus constante dans la bande 0.01 Hz – 100 Hz (Figure 5.3). Par conséquent, on doit procéder à une nouvelle identification des paramètres  $\beta_{\alpha}^{\infty}$  avec les expressions correctes du Tableau 5.2 et ce afin de pouvoir assurer un amortissement constant du système dans la bande de fréquence 0.01 Hz – 100 Hz. Cette identification sera réalisée en prenant en compte des restrictions sur les paramètres à identifier, conformément aux préconisations formulées dans Holzapfel *et al.* [79]. En s'appuyant sur des données expérimentales disponibles seulement pour une fréquence de 2Hz, Holzapfel *et al.* [79] proposent en effet la restriction suivante sur les coefficients  $\beta_{\alpha}^{\infty}$  :

$$\sum_{\alpha=1}^5 \beta_{\alpha}^{\infty} = 1.57 \quad (5.36)$$

Le module d'élasticité  $c$  du ressort libre est obtenu dans Holzapfel *et al.* [79] en procédant à un essai de traction simple sur la couche média. Il vaut 634.0 KPa.

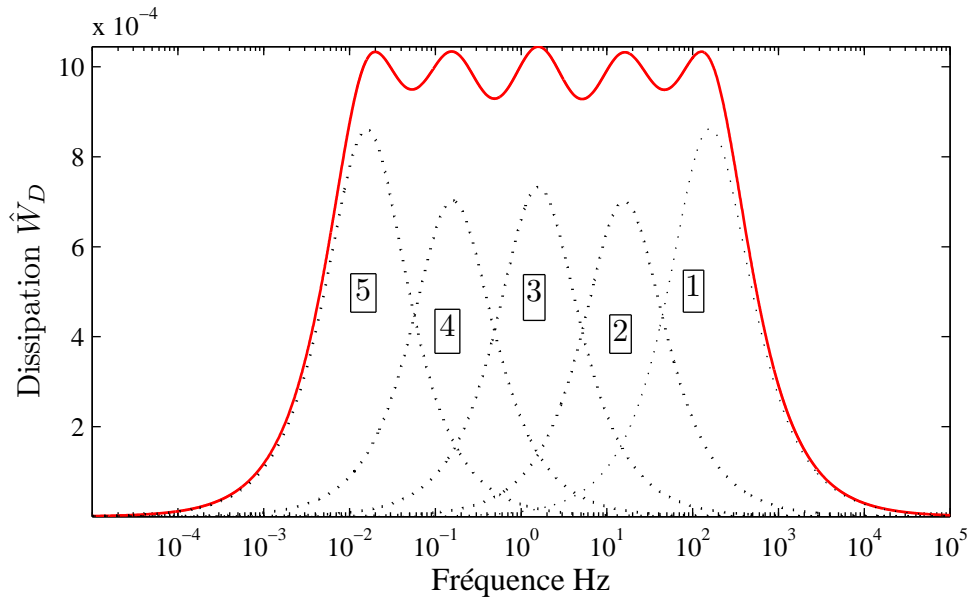


FIGURE 5.2: Dissipation d'énergie normalisée par cycle (figure 5b dans [79]).

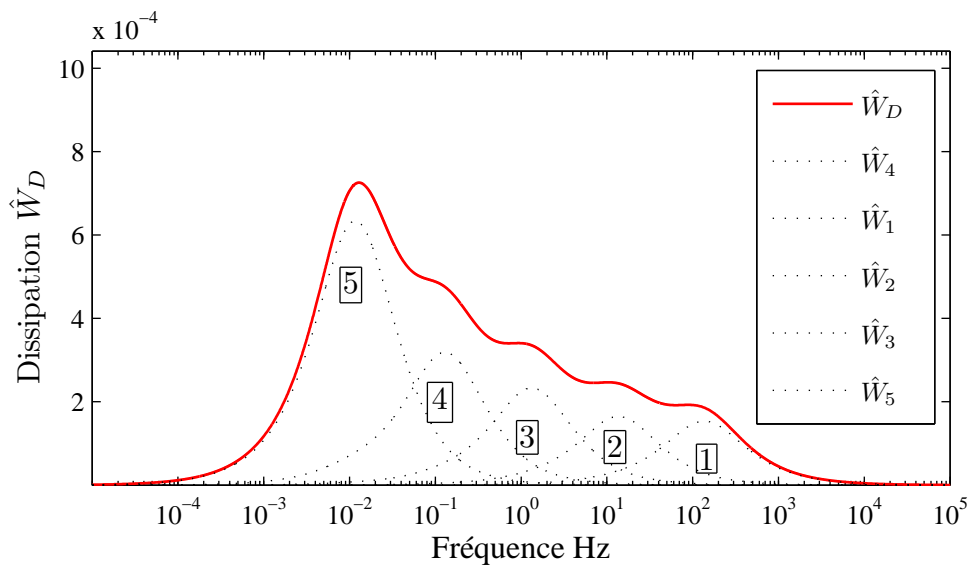


FIGURE 5.3: Dissipation d'énergie normalisée par cycle (deuxième colonne du Tableau 5.2).

### 5.3.2 Identification par minimisation de la variance

La technique des moindres carrés non linéaires est une méthode robuste qui est utilisée pour ajuster des modèles mathématiques à des mesures expérimentales. Présentée en détail dans les chapitres 3 et 4, cette technique a été récemment utilisée pour estimer les paramètres viscoélastiques du tissu conjonctif [170]. Pour identifier les facteurs d'énergie libre du système de Maxwell sur la plage de fréquence souhaitée à l'aide de cette technique, il serait néanmoins indispensable de disposer de mesures expérimentales correspondant à chaque fréquence. Cependant, des séries de mesure pour chaque fréquence comprise entre 0.01 Hz – 100 Hz n'existent pas dans la littérature. Par conséquent, l'estimation des paramètres viscoélastiques sera réalisé sans valeurs de références expérimentales et sous la condition que l'amortissement reste constant ainsi que cela a été proposé dans [79]. L'invariance de la dissipation vis à vis de la fréquence est une hypothèse classique [54] qui est fondée sur l'observation que l'hystérésis ne dépend pas de la vitesse de chargement. Afin de garantir que la dissipation reste constante sur la bande fréquentielle souhaitée, on rappelle que toute fonction constante peut être caractérisée par une différence nulle à sa valeur moyenne. Ce critère n'est autre que la minimisation de la variance de  $\hat{W}_D$  sur un spectre continu de fréquence :

$$\text{Min}_{(\beta_1^\infty, \beta_2^\infty, \beta_3^\infty, \beta_4^\infty, \beta_5^\infty)} \left\{ \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \left( \hat{W}_D - \overline{\hat{W}_D} \right)^2 df \right\} \quad (5.37)$$

$$\overline{\hat{W}_D} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \hat{W}_D df \quad (5.38)$$

où  $a$  et  $b$  sont les limites fréquentielles du domaine d'étude :  $a = 0.01\text{Hz}$ ,  $b = 100\text{Hz}$ . La fonction objectif impliquée dans le problème de minimisation (5.37) représente la variance de  $\hat{W}_D$  et  $\overline{\hat{W}_D}$ , définie par (5.38), sa moyenne. En développant (5.37), le problème de minimisation se reformule aisément de la manière suivante :

$$\text{Min}_{(\beta_1^\infty, \beta_2^\infty, \beta_3^\infty, \beta_4^\infty, \beta_5^\infty)} \left\{ \overline{\hat{W}_D^2} - \left( \overline{\hat{W}_D} \right)^2 \right\} \quad (5.39)$$

La limitation donnée par (5.36) est appliquée à la fonction objectif au cours de la minimisation et les intégrales impliquées dans (5.39) sont calculées par une fonction de quadrature de Gauss. L'optimisation a été réalisée grâce aux algorithmes génétiques implémentés dans la toolbox *Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox* de MATLAB.

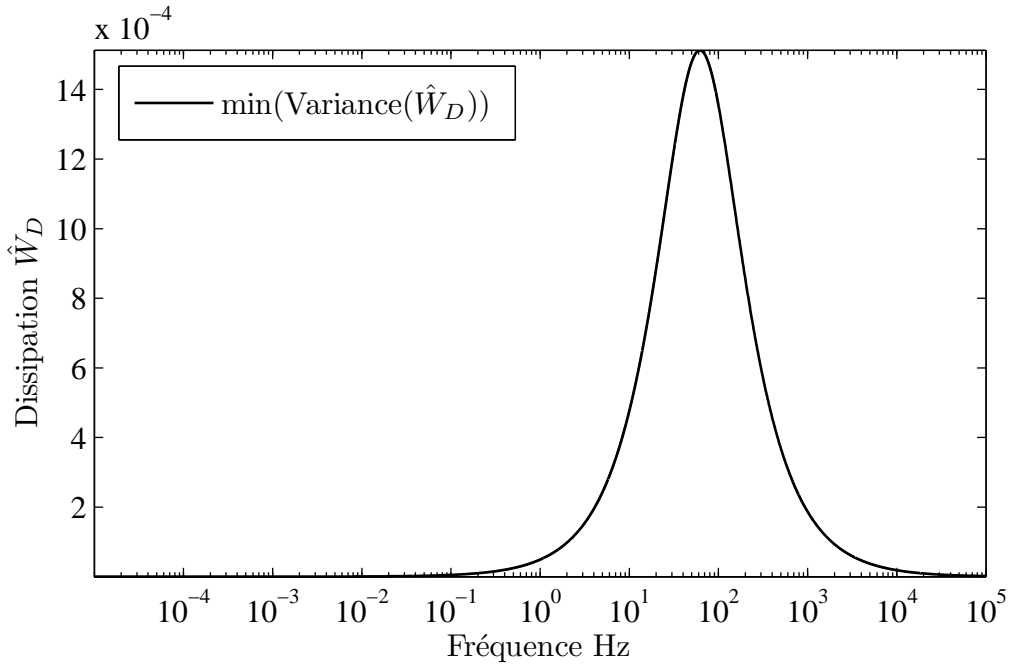


FIGURE 5.4:  $\hat{W}_D$  avec  $\beta_\alpha^\infty$  solution du problème de la variance (5.39).

Malheureusement, ainsi que cela est illustré sur la Figure 5.4, les paramètres  $\beta_\alpha^\infty$  résultant de l'optimisation du problème (5.39) ne correspondent pas à une dissipation constante. Les paramètres identifiés  $\beta_\alpha^\infty$ ,  $\alpha = 1, \dots, 5$  tendent en effet tous vers zéro, sauf pour le premier qui tend vers 1.57 afin de satisfaire la limitation (5.36). Cette solution correspond à une fonction de dissipation d'énergie égale à zéro presque partout, sauf autour d'un pic localisé. Le critère de variance favorise donc la domination d'un seul système ressort-amortisseur par rapport aux autres conduisant ainsi à une fonction non constante de dissipation d'énergie. L'inconvénient de la méthode provient du fait que la minimisation de la variance peut s'accompagner d'une forte amplitude entre

le maximum et le minimum de la dissipation. Il faut pour cela que cette forte amplitude se manifeste sur un spectre de fréquence étroit, ce qui est le cas sur la Figure 5.4. Dans ce cas, la contribution des points associés à la forte amplitude dans le calcul de la variance est faible. La formulation du problème de minimisation de la variance en terme d'un problème de norme  $L_2$  n'est donc clairement pas appropriée pour calculer les paramètres  $\beta_\alpha^\infty$  du matériau. Ce constat nous a amené à proposer, en remplacement de la variance, une fonction objectif basée sur l'écart entre le maximum et le minimum. Cette proposition fait l'objet du paragraphe qui suit.

### 5.3.3 Le problème d'identification maximum-minimum

Pour surmonter les difficultés numériques rencontrées dans la section précédente, nous avons développé un concept original d'optimisation qui est basé sur l'idée simple qu'une fonction est constante si et seulement si ses valeurs minimales et maximales sont égales :

$$\hat{W}_D = \text{constante} \quad \forall f \in [a, b] \Leftrightarrow \underset{f \in [a, b]}{\text{Min}} (\hat{W}_D) = \underset{f \in [a, b]}{\text{Max}} (\hat{W}_D) \quad (5.40)$$

$$\Leftrightarrow \underset{f \in [a, b]}{\text{Max}} (\hat{W}_D) - \underset{f \in [a, b]}{\text{Min}} (\hat{W}_D) = 0 \quad (5.41)$$

En l'adaptant à notre problème, l'équation (5.41) peut s'exprimer comme un problème de minimisation :

$$\underset{(\beta_1^\infty, \beta_2^\infty, \beta_3^\infty, \beta_4^\infty, \beta_5^\infty)}{\text{Min}} \left( \underset{f \in [a, b]}{\text{Max}} (\hat{W}_D) - \underset{f \in [a, b]}{\text{Min}} (\hat{W}_D) \right) \quad (5.42)$$

La limitation (5.36) reste bien sûr toujours associée au problème d'optimisation donné ici en l'occurrence par (5.42). On observe que (5.42) peut également être exprimé avec la norme infinie  $\|\bullet\|_\infty$  qui est souvent utilisée pour formuler les problèmes d'optimisation [18]. En effet, l'énergie dissipée étant une quantité positive (Tableau 5.2), on a :

$$\|\hat{W}_D\|_\infty = \underset{f \in [a, b]}{\text{Max}} (|\hat{W}_D|) = \underset{f \in [a, b]}{\text{Max}} (\hat{W}_D) \quad (5.43)$$

En outre, en utilisant à nouveau le fait que  $\hat{W}_D$  est positive, on démontre que :

$$\text{Min}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D) = \left( \text{Max}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D^{-1}) \right)^{-1} \quad (5.44)$$

En effet, on a trivialement :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D) \leq \hat{W}_D \quad \forall f \in [a,b] &\implies \hat{W}_D^{-1} \leq \left( \text{Min}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D) \right)^{-1} \quad \forall f \in [a,b] \\ \implies \text{Max}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D^{-1}) \leq \left( \text{Min}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D) \right)^{-1} &\implies \text{Min}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D) \leq \left( \text{Max}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D^{-1}) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Inversement :

$$\begin{aligned} \hat{W}_D^{-1} \leq \text{Max}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D^{-1}) \quad \forall f \in [a,b] &\implies \left( \text{Max}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D^{-1}) \right)^{-1} \leq \hat{W}_D \quad \forall f \in [a,b] \\ \implies \left( \text{Max}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D^{-1}) \right)^{-1} &\leq \text{Min}_{f \in [a,b]} (\hat{W}_D) \end{aligned}$$

L'égalité (5.44) est ainsi démontrée. On déduit ensuite de (5.43) et (5.44) que (5.42) est équivalent à un problème d'optimisation uniquement exprimé avec la norme infinie :

$$\text{Min}_{(\beta_1^\infty, \beta_2^\infty, \beta_3^\infty, \beta_4^\infty, \beta_5^\infty)} \left( \|\hat{W}_D\|_\infty - \left( \|\hat{W}_D^{-1}\|_\infty \right)^{-1} \right) \quad (5.45)$$

La norme infinie est un critère robuste utilisé pour résoudre les problèmes d'identification dans le domaine de la commande et de l'asservissement des systèmes [18]. Nous allons tester son efficacité dans le cadre de la biomécanique avec le problème de minimisation (5.45).

La méthode mise en place pour minimiser (5.45) est nommée *MMIM* (Maximum - Minimum Identification Method) car la fonction objectif associée a la forme d'une différence entre une valeur minimale et une valeur maximale. La méthode agit en réduisant la distance entre les crêtes et les creux de fréquence. En pratique, la solution optimale est calculée après 360 générations



(itérations) en utilisant les algorithmes génétiques grâce à la boîte à outils *Genetic Algorithms and Direct Search Toolbox-MATLAB*<sup>®</sup>. Chaque génération est constituée d'une population de 100 individus. Les minimum et maximum associés à chaque individu sont obtenus en échantillonnant la bande de fréquence, en calculant la dissipation sur chaque fréquence échantillonnée grâce à la formule (5.35) et en opérant un tri sur les valeurs obtenues. Les paramètres  $\beta_\alpha^\infty$  fournis par la méthode MMIM sont donnés dans le Tableau 5.3. On observe qu'ils sont très différents de ceux calculés dans [79].

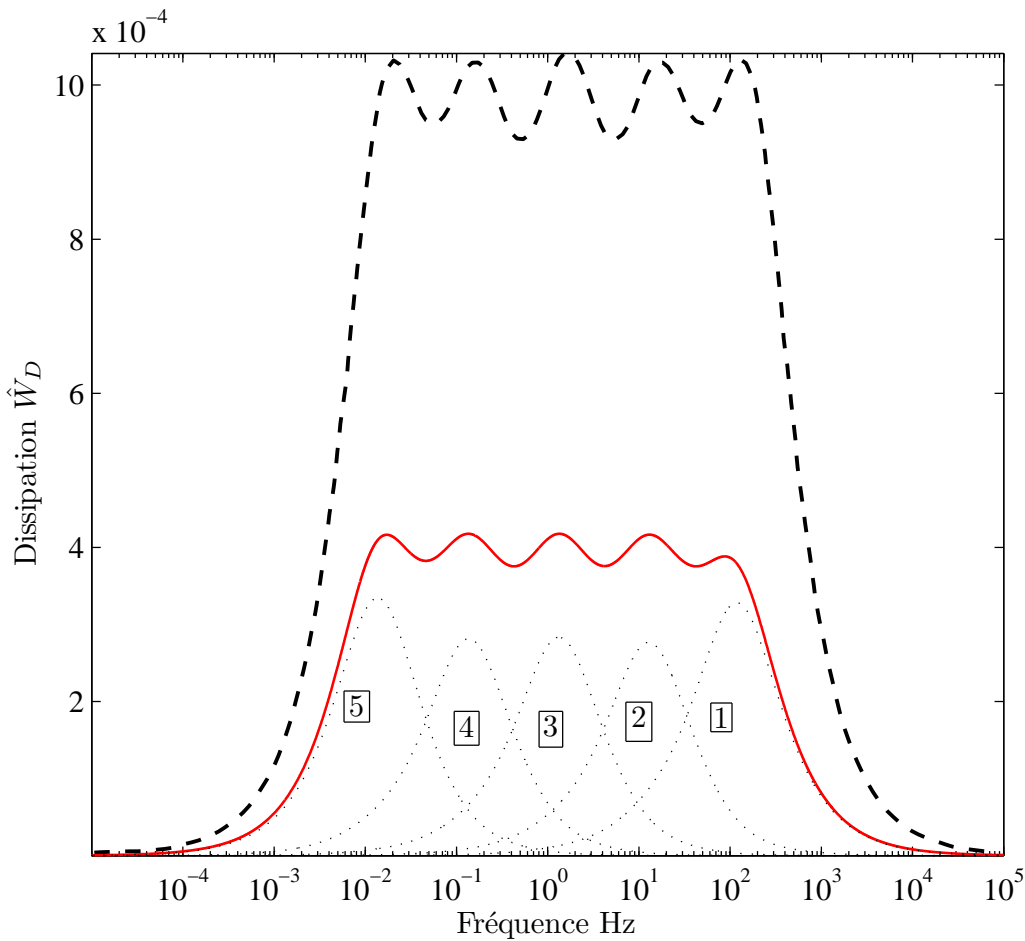


FIGURE 5.5: Énergie dissipée.

--- Holzapfel *et al.* [79] — MMIM ·····  $\hat{W}_1, \hat{W}_2, \hat{W}_3, \hat{W}_4, \hat{W}_5$

La Figure 5.5 représente les courbes obtenues en utilisant les paramètres  $\beta_\alpha^\infty$

approximés par la méthode MMIM ainsi que la courbe obtenue dans Holzapfel *et al.* [79]. Les courbes numérotées de 1 à 5 correspondent à l'énergie dissipée par cycle et normalisée pour chaque élément du système de Maxwell généralisé dans le cadre de la méthode MMIM. À un élément  $\alpha$  correspond ainsi une énergie  $\hat{W}_\alpha$  pour  $\alpha = 1, \dots, 5$ . L'énergie dissipée associée à la méthode MMIM a été obtenue en utilisant les expressions correctes de  $A$  et  $B$  (Tableau 5.1), les temps caractéristiques de relaxation du Tableau 5.1 et les paramètres viscoélastiques  $\beta_\alpha^\infty$  du Tableau 5.3 identifiés grâce à la méthode MMIM. Elle présente une allure constante sur l'intervalle  $[0.01; 100]$  Hz, ce qui était l'objectif attendu. Il est à noter que la courbe de l'énergie normalisée et dissipée par cycle montre un niveau d'énergie inférieur à celui obtenu dans Holzapfel *et al.* [79]. La méthode MMIM n'a donc pas uniquement permis d'identifier correctement les facteurs de l'énergie libre qui sont les paramètres viscoélastiques du modèle. Elle a aussi permis de réduire l'énergie dissipée par cycle qui traduit la réponse viscoélastique du tissu artériel.

TABLEAU 5.3: Paramètres viscoélastiques.

	méthode MMIM	Holzapfel <i>et al.</i> [79]
$\beta_1^\infty$	0.653	0.353
$\beta_2^\infty$	0.341	0.286
$\beta_3^\infty$	0.242	0.298
$\beta_4^\infty$	0.176	0.285
$\beta_5^\infty$	0.157	0.348

## 5.4 Conclusion

La viscoélasticité des artères est modélisée en postulant l'existence d'une fonction de densité d'énergie libre décrivant son comportement. Cette énergie est composée d'un terme élastique et d'un terme viscoélastique. Le terme élastique est indépendant du temps, alors que le terme viscoélastique tend

vers zéro pour un chargement qui est maintenu appliqué sur le tissu pendant une longue période de temps. L'évolution au cours du temps du terme visqueux est représenté par des équations différentielles linéaires. Par le biais d'un ensemble de paramètres viscoélastiques (les facteurs de l'énergie libre et les temps caractéristiques de relaxation), ces équations lient les contraintes élastiques à celles qui sont viscoélastiques. En procédant par une linéarisation du terme élastique anisotrope, on arrive à étudier séparément la réponse viscoélastique du tissu. Les paramètres viscoélastiques sont alors identifiés sur la base de cette réponse. Dans ce but, des éléments de Maxwell (ressort-amortisseur) sont disposés en série afin de former un système de Maxwell généralisé. Pour une excitation fréquentielle, ce système doit montrer un comportement identique à celui du tissu artériel, en particulier une insensibilité à la vitesse de déformation. Pour un chargement harmonique en fréquence, l'énergie visqueuse dissipée sur un cycle est exprimée en fonction des déplacements et des vitesses de déformations complexes. Cette approche est similaire à celle proposée par Holzapfel *et al.* [79] pour modéliser la viscoélasticité du tissu artériel.

Cependant, dans les travaux réalisés par Holzapfel *et al.*, Nous avons constaté qu'il manquait un terme dans les expressions des déplacements complexes. Ce terme a été pris en compte dans ce mémoire afin de réaliser l'identification des paramètres viscoélastiques du modèle. Une première méthode d'identification, basée sur la variance de l'énergie dissipée, a été testée. Mais cette méthode produit des fonctions presque partout constantes en fonction de la fréquence, à l'exception de pic très localisé de type Dirac. Le critère d'insensibilité de l'énergie dissipée par rapport au spectre fréquentiel n'est donc pas respecté. Pour surmonter ce problème, nous avons proposé une nouvelle méthode que nous avons baptisée MMIM (Maximum - Minimum Identification Method). Cette méthode définit le critère d'optimisation comme la distance entre le maximum et le minimum (max-min) de la courbe de l'énergie dissipée en fonction de la fréquence. Nous avons également démontré que la fonction objectif associée à la méthode MMIM peut être reformulée d'une manière équivalente avec la norme vectorielle  $L_\infty$ . Les résultats obtenus, avec

une dissipation d'énergie constante sur le spectre de fréquence, démontrent la robustesse de l'approche.

# Conclusions générales et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons développé deux méthodes d'identification de paramètres biomécaniques.

La première méthode s'intitule GAO (Genetic algorithms & Analytical Optimization). Elle consiste à réduire la dimension du problème inverse non linéaire en intégrant à l'algorithme de recherche de solution un calcul analytique des paramètres linéaires du matériau. La solution du problème est approximée par la technique des algorithmes génétiques. Cette stratégie permet de réduire considérablement le temps de calcul nécessaire à l'identification. Elle permet également, en diminuant significativement le nombre de paramètres à identifier par les algorithmes génétiques, de travailler avec des populations d'individus de taille raisonnable. La robustesse et la convergence des algorithmes génétiques s'en trouvent améliorées. Cette méthode d'identification a été testée sur plusieurs modèles hyperélastiques anisotropes : modèle de Fung [77], modèle HGO [11, 78] et modèle de Peng *et al.* [123]. Les résultats obtenus sont en parfaite cohérence avec la littérature. Appliquée dans le cadre de cette thèse uniquement à des tests de déformation uniaxiale en biomécanique, cette méthode est adaptable à tout test de déformation multiaxiale et à tout type de lois de comportement. Un travail est par exemple actuellement en cours pour appliquer cette méthode à l'identification de paramètres matériau thermo-viscoplastiques pour la mise en forme à froid et à très haute vitesse de pièces destinées à l'industrie automobile [66, 67].

Le principe de base de la méthode GAO, qui repose sur la séparation des paramètres linéaires et non-linéaires, pourrait trouver des applications dans d'autres domaines que l'identification des lois de comportement. En particulier, en raison des gains spectaculaires en temps de calcul qu'elle permet, elle pourrait être mis à profit dans le contexte d'applications en temps réel pour la biomécanique du mouvement ou la robotique, avec des problématiques associées de minimisation d'énergie liée aux trajectoires.

La deuxième méthode que nous avons proposée s'intitule MMIM (Maximum - Minimum Identification Method). Elle est destinée à l'identification des paramètres viscoélastiques des tissus biologiques souples et traite le problème de l'identification inverse dans le cadre des lois viscoélastiques quasi-linéaires.

Son principe de base consiste à minimiser l'écart entre le maximum et le minimum de la dissipation d'énergie afin de rendre constante cette dissipation sur la bande fréquentielle d'étude. Afin de minimiser l'écart entre le maximum et le minimum, on utilise la technique des algorithmes génétiques. L'approche MMIM a été utilisée avec succès pour identifier les paramètres viscoélastiques de la loi proposée par Holzapfel *et al.* [79].

Tous les développements informatiques ont été réalisés sur une plate-forme de programmation MATLAB, tant pour la méthode GAO que pour la méthode MMIM. En particulier, les algorithmes génétiques ont été mis en œuvre à partir de la toolbox Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox-MATLAB®.

Pour ce qui concerne la méthode MMIM, qui utilise actuellement la différence absolue entre le minimum et le maximum de la dissipation d'énergie, l'introduction d'une fonction objectif exprimée avec un critère relatif serait de nature à améliorer peut-être encore la qualité des résultats. La méthode MMIM pourrait également être utilisée pour identifier les paramètres viscoélastiques de modèles à mémoire courte plus complexes que le modèle de Maxwell à cinq branches étudié dans ce mémoire. Elle pourrait également être étendue au cas de modèle à mémoire longue. Les méthodes GAO et MMIM pourraient être enfin utilisées conjointement pour identifier les paramètres hyperélastique et viscoélastiques de matériau isotrope amortissant comme les mousses élastomères. Cette perspective pourrait en particulier concerner les modèles viscoélastiques à mémoire à dérivées fractionnaires comme ceux considérés dans [96].

De manière générale, l'estimation des paramètres des lois biomécaniques est réalisée sur la base de séries de mesures expérimentales (un nuage non-lissé de points de mesures) qui constituent les valeurs de référence. Dans ce mémoire, ces valeurs de référence correspondent à des données expérimentales extraites de la littérature. Pour faciliter leurs exploitations, elles sont générées numériquement. Une collaboration avec des spécialistes expérimentateurs, bio-mécaniciens ou médecins praticiens, serait une perspective permettant de prendre en considération l'analyse des erreurs liées aux mesures. L'objectif serait d'intégrer la notion de reproductibilité expérimentale dans la confiance

que l'on peut accorder au résultat de l'identification inverse des paramètres. Afin d'atteindre cet objectif, deux étapes seraient nécessaires :

- (i). obtenir la meilleure estimation,
- (ii). établir un intervalle de confiance (post-traitement de l'étape précédente).

La meilleure estimation pourrait être obtenue au sens de la méthode du maximum de vraisemblance (*maximum-likelihood estimation*) introduite par Fisher [4, 156]. La technique d'estimation des paramètres par le maximum de vraisemblance consiste à choisir les valeurs de paramètres maximisant la vraisemblance des mesures (dites observations). Cet estimateur est identique à celui fourni par la méthode de moindres carrés [130] utilisée dans le chapitre 4 de ce manuscrit. L'estimateur au sens des moindres carrés est ainsi le meilleur estimateur des paramètres pour une distribution des erreurs de mesure qui suit une loi normale, de vecteur d'espérance zéro et de matrice de covariance diagonale.

Dans le cas le plus général, l'estimateur des moindres carrés diffère de celui du maximum de vraisemblance. Une adaptation de l'estimateur des moindres carrés serait alors nécessaire.

Les intervalles de confiance sont ensuite définis en fonction de la nature de la fonction probabilité de distribution des erreurs [130]. Sur ce principe, les méthodes d'identification inverse proposées dans cette thèse nécessiteraient une approche statistique en complément.

Une méthode plus précise et robuste permettant de réduire l'influence des bruits de mesure consisterait à utiliser les champs virtuels [64, 116, 127]. La méthode des champs virtuels permet en effet d'atténuer le bruit des mesures à l'aide de fonctions tests [63]. Son utilisation avec la méthode GAO nécessiterait cependant d'établir une collaboration avec des expérimentateurs afin de pouvoir disposer de champs de mesure appropriés. Elle nécessiterait également une réflexion préalable afin d'étudier la séparation des paramètres linéaires et des paramètres non linéaires dans les fonctions coûts telles que celles proposées dans [7].



Enfin, une dernière perspective concerne la continuité des travaux réalisés dans la première partie de ce mémoire relativement aux hypothèses, propriétés et histologie des tissus biologiques souples. Pour capitaliser les connaissances acquises sur ce sujet, il est envisagé de développer dans la continuité de la thèse une loi de comportement pour des tissus biologiques souples à une ou plusieurs familles de fibres, en s'appuyant sur la théorie des invariants, et notamment le théorème de Noether [157, 158]. Les paramètres matériau de cette loi seraient alors identifiés en utilisant les techniques développées durant cette thèse.

---

# Bibliographie

---

- [1] ABAQUS (2001). Abaqus/standard user's manuel, version 6.2,.
- [2] Adkins, J. (1967). Cilindrically symmetrical deformations of incompressible elastic materials reinforced with inextensible cords. *J Biomech* 9(1), 1–7.
- [3] Alberts, B., A. Johnson, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts, et P. Walter (2002). *Molecular biology of the cell* (4 ed.). Garland Science Taylor & Francis Group.
- [4] Aldrich, J. (1997). R. a. fisher and the making of maximum likelihood 1912–1922. *Stat Sci* 12(3), 162–176.
- [5] Alkalay, R. (2002). The material and mechanical properties of the healthy and degenerated intervertebral disc. Dans R. Barbucci (Ed.), *Integrated Biomaterials Science*, pp. 403–424. Springer US.
- [6] Avery, N. C. et A. J. Bailey (2005). Enzymic and non-enzymic cross-linking mechanisms in relation to turnover of collagen : relevance to aging and exercise. *Scand J Med Sci Sports* 15(4), 231–240.
- [7] Avril, S., P. Badel, et A. Duprey (2010). Anisotropic and hyperelastic identification of in vitro human arteries from full-field optical measurements. *J Biomech* 43(15), 2978 – 2985.
- [8] Bäck, T., D. Fogel, et Z. Michalewicz (1997). *Handbook of evolutionary computation*. Oxford Univ. Press.
- [9] Bailey, A. J., R. G. Paul, et L. Knott (1998). Mechanisms of maturation and ageing of collagen. *Mech Ageing Dev* 106(1-2), 1 – 56.
- [10] Baldock, C., A. F. Oberhauser, L. Ma, D. Lammie, V. Siegler, S. M. Mithieux, Y. Tu, J. Y. H. Chow, F. Suleman, M. Malfois, S. Rogers, L. Guo, T. C. Irving, T. J. Wess, et A. S. Weiss (2011). Shape of tropoelastin, the highly extensible protein that controls human tissue elasticity. *Proc Natl Acad Sci U S A* 108(11), 4322–4327.
- [11] Balzani, D. (2006). *Polyconvex anisotropic energies and modelling of damage applied to arterial walls*. Ph. D. thesis, Institute of Mechanics, University Duisburg Essen, Germany.

- 
- [12] Balzani, D., P. Neff, J. Schröder, et G. Holzapfel (2006). A polyconvex framework for soft biological tissues. adjustment to experimental data. *Int J Solids Struct* 43(20), 6052–6070.
- [13] Bass, E., F. Ashford, M. Segal, et J. Lotz (2004). Biaxial testing of human annulus fibrosus and its implications for a constitutive formulation. *Ann Biomed Eng* 32, 1231–1242.
- [14] Blatz, P. J., B. M. Chu, et H. Wayland (1969). On the mechanical behavior of elastic animal tissue. *Trans Soc Rheol* 13(1), 83–102.
- [15] Blatz, P. J. et W. L. Ko (1962). Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Trans Soc Rheol* 6(1), 223–252.
- [16] Boehler, J. (1978). Loi de comportement anisotrope des milieux continus. *Journal de Mécanique* 17(2), 153–190.
- [17] Bonet, J. Large strain viscoelastic constitutive models. *Int J Solids Struct* 38(17), 2953–2968.
- [18] Boyd, S. et L. Vandenberghe (2004). *Convex Optimization*. New York, NY, USA : Cambridge University Press.
- [19] Bruehlmann, S., J. Matyas, et N. Duncan Issls prize winner : Collagen fibril sliding governs cell mechanics in the anulus fibrosus - an in situ confocal microscopy study of bovine discs. *Spine* 29(23), 2612–2620.
- [20] Bruehlmann, S., J. Rattner, J. Matyas, et N. Duncan (2002). Regional variations in the cellular matrix of the annulus fibrosus of the intervertebral disc. *J Anat* 201, 159–171(13).
- [21] Carboni, M., G. W. Desch, et H. W. Weizsäcker (2007). Passive mechanical properties of porcine left circumflex artery and its mathematical description. *Med Eng Phys* 29(1), 8 – 16.
- [22] Carew, E. O., J. E. Barber, et I. Vesely (2000). Role of preconditioning and recovery time in repeated testing of aortic valve tissues : Validation through quasilinear viscoelastic theory. *Ann Biomed Eng* 28, 1093–1100.
- [23] Cassidy, J. J., A. Hiltner, et E. Baer (1989). Hierarchical structure of the intervertebral disc. *Connect Tissue Res* 23(1), 75–88.
- [24] Chagnon, A. (2009). Etude biomécanique de la dégénérescence du disque intervertébral à l’aide d’un modèle éléments finis poroélastique. Master’s thesis, École polytechnique de Montréal.
- [25] Chuong, C. J. et Y. C. Fung (1983). Three-dimensional stress distribution in arteries. *J Biomech Eng* 105(3), 268–274.
- [26] Chuong, C. J. et Y. C. Fung (1986). On residual stresses in arteries. *J Biomech Eng* 108(2), 189–192.
-

- 
- [27] Ciarlet, P. G. (1988). *Mathematical Elasticity*, Volume 1 : Three-Dimensional Elasticity. North-Holland.
- [28] Costalat, V., M. Sanchez, D. Ambard, L. Thines, N. Lonjon, F. Nicoud, H. Brunel, J. Lejeune, H. Dufour, P. Bouillot, J. Lhalcky, K. Kouri, F. Segnarbieux, C. Maurage, K. Lobotesis, M. Villa-Uriol, C. Zhang, A. Frangi, G. Mercier, A. Bonafant, L. Sarry, et F. Jourdan (2011). Biomechanical wall properties of human intracranial aneurysms resected following surgical clipping (irras project). *Journal of Biomechanics* 44(15), 2685 – 2691.
- [29] De Jong, K. (1975). *An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*. Ph. D. thesis, Ann Arbor, MI, USA.
- [30] Delfino, A., N. Stergiopoulos, J. E. Moore, et J. J. Meister (1997). Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation. *J Biomech* 30(8), 777 – 786.
- [31] Demiray, H. (1972). A note on the elasticity of soft biological tissues. *J Biomech* 5(3), 309 – 311.
- [32] Diab, M., J. J. Wu, et D. R. Eyre (1996). Collagen type IX from human cartilage : a structural profile of intermolecular cross-linking sites. *Biochem J* 314(1), 327–332.
- [33] Diamant, J., A. Keller, E. Baer, M. Litt, et R. G. C. Arridge (1972). Collagen ; ultrastructure and its relation to mechanical properties as a function of ageing. *Proc. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.* 180(1060), 293–315.
- [34] Doll, S. et K. Schweizerhof (2000). On the development of volumetric strain energy functions. *J Appl Mech* 67(1), 17–21.
- [35] Dugan, T. A., V. W.-C. Yang, D. J. McQuillan, et M. Höök (2003). Decorin binds fibrinogen in a  $zn^{2+}$ -dependent interaction. *J Biol Chem* 278(16), 13655–13662.
- [36] Dugan, T. A., V. W.-C. Yang, D. J. McQuillan, et M. Höök (2006). Decorin modulates fibrin assembly and structure. *J Biol Chem* 281(50), 38208–38216.
- [37] Duvaut, G. (1998). *Mécanique des milieux continus*.
- [38] Ebara, S., J. C. Iatridis, L. A. Setton, R. J. Foster, V. C. Mow, et M. Weidenbaum (1996). Tensile properties of nondegenerate human lumbar annulus fibrosus. *Spine* 21(4), 452–461.
- [39] Eberlein, R., G. A. Holzapfel, et C. A. J. Schulze-Bauer (2001). An anisotropic model for annulus tissue and enhanced finite element analyses of intact lumbar disc bodies. *Comput Methods Biomech Biomed Engin* 4, 209–229.
- [40] Elliott, D. et L. Setton (2001). Anisotropic and inhomogeneous tensile behavior of the human annulus fibrosus : Experimental measurement and material model predictions. *J Biomech Eng* 123(3), 256–263.
- [41] Fan, J.-y. et Y.-x. Yuan (2005). On the quadratic convergence of the levenberg-marquardt method without nonsingularity assumption. *Computing* 74, 23–39.
-

- 
- [42] Farshad, M., M. Barbezat, P. Flüeler, F. Schmidlin, P. Graber, et P. Niederer (1999). Material characterization of the pig kidney in relation with the biomechanical analysis of renal trauma. *Journal of Biomechanics* 32(4), 417 – 425.
- [43] Federico, S., A. Grillo, G. Giaquinta, et W. Herzog (2008). Convex fung-type potentials for biological tissues. *Meccanica* 43, 279–288.
- [44] Flory, P. (1961). Thermodynamic relations for high elastic materials. *Trans Faraday Soc* 57, 829–838.
- [45] Fogel, D. B. *Evolutionary Computation : Toward a New Philosophy of Machine Intelligence* (Third ed.). IEEE Press Series on Computational Intelligence. Wiley-IEEE Press.
- [46] Fogel, L. J. (1962). Autonomous automata. *Industrial Research Magazine* 4(2), 14–19.
- [47] Fogel, L. J., A. J. Owens, et M. J. Walsh (1966). *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*. New York, USA : John Wiley.
- [48] Folkhard, W., E. Mosler, W. Geercken, E. Knörzer, H. Nemetschek-Gansler, T. Nemetschek, et M. Koch (1987). Quantitative analysis of the molecular sliding mechanisms in native tendon collagen – time-resolved dynamic studies using synchrotron radiation. *Int. J. Biol. Macromol.* 9(3), 169 – 175.
- [49] Frandsen, P. E., K. Jonasson, H. B. Nielsen, et O. Tingleff (2004). Unconstrained optimization.
- [50] Fratzl, P., K. Misof, I. Zizak, G. Rapp, H. Amenitsch, et S. Bernstorff (1998). Fibrillar structure and mechanical properties of collagen. *J Struct Biol* 122(1-2), 119 – 122.
- [51] Fu, Y. B. et R. W. Ogden (Eds.) (2001). *Nonlinear Elasticity : Theory and Applications*. Number 283 in London Mathematical Society. Cambridge University Press.
- [52] Fujita, Y., N. A. Duncan, et J. C. Lotz (1997). Radial tensile properties of the lumbar annulus fibrosus are site and degeneration dependent. *J Orthop Res* 15(6), 814–819.
- [53] Fung, Y. (1967). Elasticity of soft tissues in simple elongation. *Am J Physiol* 213(6), 1532–1544.
- [54] Fung, Y. (1993). *Biomechanics : mechanical properties of living tissues*. Springer-Verlag, New York.
- [55] Fung, Y. C., K. Fronek, et P. Patitucci (1979). Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression. *Am J Physiol Heart Circ Physiol* 237(5), H620–631.
- [56] Galante, J. O. (1967). Tensile properties of the human lumbar annulus fibrosus. *Acta Orthop Scand Suppl* 100, 1–91.
- [57] Gasser, T., R. Ogden, et G. Holzapfel (2006). Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *J R Soc Interface* 3(6), 15–35.

- 
- [58] Gilbert, S., A. Benson, P. Li, et A. Holden (2007a). Visualisation of dog myocardial structure from diffusion tensor magnetic resonance imaging : The paradox of uniformity and variability. Dans F. Sachse et G. Seemann (Eds.), *Functional Imaging and Modeling of the Heart*, Volume 4466 de *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 403–412. Springer Berlin / Heidelberg.
- [59] Gilbert, S. H., A. P. Benson, P. Li, et A. V. Holden (2007b). Regional localisation of left ventricular sheet structure : integration with current models of cardiac fibre, sheet and band structure. *Eur J Cardiothorac Surg* 32(2), 231–249.
- [60] Giori, N. J., G. S. Beaupré, et D. R. Carter (1993). Cellular shape and pressure may mediate mechanical control of tissue composition in tendons. *J Orthop Res* 11(4), 581–591.
- [61] Goldberg, D. (1994). *Algorithmes génétiques, exploration, optimisation et apprentissage automatique*. Addison Wesley.
- [62] Grashow, J., A. Yoganathan, et M. Sacks (2006). Biaxial stress-stretch behavior of the mitral valve anterior leaflet at physiologic strain rates. *Ann Biomed Eng* 34, 315–325.
- [63] Grédiac, M., F. Pierron, S. Avril, et E. Toussaint (2006). The virtual fields method for extracting constitutive parameters from full-field measurements : a review. *Strain* 42(4), 233–253.
- [64] Grédiac, M., F. Pierron, S. Avril, E. Toussaint, et M. Rossi (2012). *The Virtual Fields Method*, Chapitre 11, pp. 301–330. John Wiley & Sons, Inc.
- [65] Green, A. et J. Adkins (1960). *Large Elastic Deformation* (2nd ed.). Oxford : Clarendon Press.
- [66] Gruber, M. *Conception numérique pour la mise en forme des matériaux sous sollicitations extrêmes*. Ph. D. thesis, thèse de doctorat de l’UTBM (en cours).
- [67] Gruber, M., F. Peyraut, N. Lebaal, S. Roth, N. Harb, et P. Sterionow. A numerical and experimental approach for bulk metal forming in automotive applications (en cours de soumission).
- [68] Guccione, J., A. McCulloch, et L. Waldman (1991). Passive material properties of intact ventricular myocardium determined from a cylindrical model. *J Biomech Eng* 113(1), 42–55.
- [69] Guerin, H. L. et D. M. Elliott (2007). Quantifying the contributions of structure to annulus fibrosus mechanical function using a nonlinear, anisotropic, hyperelastic model. *J Orthop Res* 25(4), 508–516.
- [70] Harb, N., N. Labeled, M. Domaszewski, et F. Peyraut (2011a). Gao parameter identification method in biomechanics. *Comput Methods Biomech Biomed Engin* 14(sup1), 255–256.
- [71] Harb, N., N. Labeled, M. Domaszewski, et F. Peyraut (2011b). A new parameter identification method of soft biological tissue combining genetic algorithm with analytical optimization. *Comput Methods Appl Mech Eng* 200(1-4), 208 – 215.
-

- 
- [72] Hartley, H. O. (1961). The modified gauss-newton method for the fitting of non-linear regression functions by least squares. *Technometrics* 3(2), 269–280.
- [73] Haslach, H. W. (2005). Nonlinear viscoelastic, thermodynamically consistent, models for biological soft tissue. *Biomech Model Mechanobiol* 3, 172–189.
- [74] Holland, J. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor, Michigan : University of Michigan Press.
- [75] Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics : A Continuum Approach for Engineering Science*. Wiley.
- [76] Holzapfel, G. A. (2001). Biomechanics of soft tissue. Dans J. Lemaitre (Ed.), *Handbook of Materials Behavior Models*, pp. 1057 – 1071. Burlington : Academic Press.
- [77] Holzapfel, G. A. (2006). Determination of material models for arterial walls from uniaxial extension tests and histological structure. *J Theor Biol* 238(2), 290 – 302.
- [78] Holzapfel, G. A., T. Gasser, et R. Ogden (2000). A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *J Elast* 61, 1–48.
- [79] Holzapfel, G. A., T. Gasser, et M. Stadler (2002). A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls : Continuum formulation and finite element analysis. *Eur J Mech A Solid* 21(3), 441 – 463.
- [80] Holzapfel, G. A. et R. W. Ogden (2009a). Constitutive modelling of passive myocardium : a structurally based framework for material characterization. *Philos Trans R Soc Lond A* 367(1902), 3445–3475.
- [81] Holzapfel, G. A. et R. W. Ogden (2009b). On planar biaxial tests for anisotropic nonlinearly elastic solids. a continuum mechanical framework. *Math Mech Solid* 14, 474 – 489.
- [82] Holzapfel, G. A. et R. W. Ogden (2010). Constitutive modelling of arteries. *Proc R Soc Lond A Math Phys Sci* 466(2118), 1551–1597.
- [83] Holzapfel, G. A., C. A. J. Schulze-Bauer, G. Feigl, et P. Regitnig (2005). Single lamellar mechanics of the human lumbar annulus fibrosus. *Biomech Model Mechanobiol* 3, 125–140.
- [84] Holzapfel, G. A., G. Sommer, et P. Regitnig (2004). Anisotropic mechanical properties of tissue components in human atherosclerotic plaques. *J Biomech Eng* 126(5), 657–665.
- [85] Holzapfel, G. A. et H. Weizsäcker (1998). Biomechanical behavior of the arterial wall and its numerical characterization. *Comput Biol Med* 28(4), 377 – 392.
- [86] Hukins, D. et J. Meakin (2000). Relationship between structure and mechanical function of the tissues of the intervertebral joint. *Am Zool* 40(1), 42–52.
- [87] Hulmes, D. J. (2002). Building collagen molecules, fibrils, and suprafibrillar structures. *J Struct Biol* 137(1-2), 2 – 10.
-

- 
- [88] Humphrey, J. (2002). *Cardiovascular Solid Mechanics : Cells, Tissues, and Organs*. New York : Springer.
- [89] Humphrey, J. (2009). *Need for a Continuum Biochemomechanical Theory of Soft Tissue and Cellular Growth and Remodeling*, pp. 344. Number 508 in CISM International Centre for Mechanical Sciences. Wien, New york : Springer.
- [90] Humphrey, J. D. (1995). Mechanics of the arterial wall : review and directions. *Crit Rev Biomed Eng* 23, 1 – 162.
- [91] Humphrey, J. D. et S. Na (2002). Elastodynamics and arterial wall stress. *Ann Biomed Eng* 30, 509–523.
- [92] Huyghe, J. M., D. H. van Campen, T. Arts, et R. M. Heethaar (1991). The constitutive behaviour of passive heart muscle tissue : A quasi-linear viscoelastic formulation. *J Biomech* 24(9), 841 – 849.
- [93] I-Shih, L. (1982). On representations of anisotropic invariants. *Int J Eng Sci* 20(10), 1099 – 1109.
- [94] Iatridis, J. C., J. J. MacLean, M. O’Brien, et I. A. F. Stokes (2007). Measurements of proteoglycan and water content distribution in human lumbar intervertebral discs. *Spine* 32(14), 1493–1497.
- [95] Iatridis, J. C., J. Wu, J. A. Yandow, et H. M. Langevin (2003). Subcutaneous tissue mechanical behavior is linear and viscoelastic under uniaxial tension. *Connect Tissue Res* 44(5), 208–217.
- [96] Jmal, H. (2012). *identification du comportement quasi-statique et dynamique de la mousse de polyuréthane au travers de modèles à mémoire*. Ph. D. thesis, Université de Haute Alsace.
- [97] Kastelic, J. et E. Bær (1980). Deformation in tendon collagen. *Symp Soc Exp Biol* 34, 397–435.
- [98] Kastelic, J., A. Galeski, et E. Baer (1978). The multicomposite structure of tendon. *Connect Tissue Res* 6(1), 11–23.
- [99] Klisch, S. et J. Lotz (1999). Application of a fiber-reinforced continuum theory to multiple deformations of the annulus fibrosus. *J Biomech* 32(10), 1027 – 1036.
- [100] Koza, J. (1990). Genetic programming : a paradigm for genetically breeding populations of computer programs to solve problems. Technical report, Stanford, CA, USA.
- [101] Koza, J. R. (1998). *Genetic programming : on the programming of computers by means of natural selection* (sixth ed.). Cambridge, MA : The MIT Press.
- [102] Lanir, Y. (1983). Constitutive equations for fibrous connective tissues. *J Biomech* 16(1), 1 – 12.
-



- 
- [103] Levenberg, K. (1944). A method for the solution of certain problems in least squares. *Q Appl Math* 2, 164–168.
- [104] Liao, J. et I. Vesely (2007). Skewness angle of interfibrillar proteoglycans increases with applied load on mitral valve chordae tendineae. *J Biomech* 40, 390–398.
- [105] Lu, X. L. et V. C. Mow (2008). Biomechanics of articular cartilage and determination of material properties. *Med Sci Sports Exerc* 40(2), 193–199.
- [106] Marchand, F. et A. M. Ahmed (1990). Investigation of the laminate structure of lumbar disc annulus fibrosus. *Spine* 15, 402–410.
- [107] Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J Appl Math* 11(2), 431–441.
- [108] Matyas, J. R. (1994). Analysing nuclear shape as a function of relative spatial position in the femoral insertion of the medial collateral ligament. *Comput Methods Programs Biomed* 44(2), 69 – 77.
- [109] Mescher, A. L. (2010). *Junqueira's Basic Histology* (Twelfth Edition ed.). The McGraw-Hill Companies, Inc.
- [110] Michalewicz, Z., T. Logan, et S. Swaminatha (1994). Evolutionary operators for continuous convex parameter spaces. Dans A. Sebald et L. Fogel (Eds.), *Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming*, pp. 84–97. World Scientific Publishing, River Edge, NJ.
- [111] Mooney, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *J Appl Phys* 11, 582–592.
- [112] Mosler, E., W. Folkhard, E. Knörzer, H. Nemetschek-Gansler, T. Nemetschek, et M. Koch (1985). Stress-induced molecular rearrangement in tendon collagen. *J. Mol. Biol.* 182(4), 589 – 596.
- [113] Nash, J. C. (1990). *Compact Numerical Methods for Computers : Linear Algebra and Function Minimisation* (2nd ed.). Taylor & Francis.
- [114] Nataf, S. (2009). Histologie. [Online] : <http://histoblog.viabloga.com/pcem1.shtml>.
- [115] Nerurkar, N., D. Elliott, et R. Mauck (2010). Mechanical design criteria for intervertebral disc tissue engineering. *J Biomech* 43(6), 1017 – 1030.
- [116] Notta, D. (2011). *Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de comportements viscoplastiques et d'endommagement, à partir de mesures de champs mécaniques hétérogènes*. Ph. D. thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.
- [117] O'Connell, G., H. Guerin, et D. Elliott (2009). Theoretical and uniaxial experimental evaluation of human annulus fibrosus degeneration. *J Biomech Eng* 131(11), 111007–1110013.
- [118] Ogden, R. (1978). Nearly isochoric elastic deformations : Application to rubberlike solids. *J Mech Phys Solids* 26(1), 37 – 57.
-

- 
- [119] Ogden, R. W. (1972). Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc R Soc Lond A Math Phys Sci* 326(1567), 565–584.
- [120] Panagiotacopoulos, N. D., W. G. Knauss, et R. Bloch (1979). On the mechanical properties of human intervertebral disc material. *Biorheology* 16(4-5), 317–330.
- [121] Panagiotacopoulos, N. D., M. H. Pope, R. Bloch, et M. Krag (1987). Water content in human intervertebral discs : Part II. viscoelastic behavior. *Spine* 12, 918–924.
- [122] Peña, E., B. Calvo, M. Martínez, et M. Doblaré (2007). An anisotropic visco-hyperelastic model for ligaments at finite strains. formulation and computational aspects. *Int J Solids Struct* 44(3-4), 760 – 778.
- [123] Peng, X. Q., Z. Y. Guo, et B. Moran (2006). An anisotropic hyperelastic constitutive model with fiber-matrix shear interaction for the human annulus fibrosus. *J Appl Mech* 73(5), 815–824.
- [124] Peyraut, F., D. Chamoret, S. Gomes, et Z.-Q. Feng (2010). Implémentation éléments finis du modèle hyperélastique anisotrope hgo. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* 19(4), 441–464.
- [125] Peyraut, F., Z.-Q. Feng, Q.-C. He, et N. Laped (2009). Robust numerical analysis of homogeneous and non-homogeneous deformations. *Applied Numerical Mathematics* 59(7), 1499 – 1514.
- [126] Peyraut, F., Z.-Q. Feng, N. Laped, et C. Renaud (2010). A closed form solution for the uniaxial tension test of biological soft tissues. *Int J Non Linear Mech* 45(5), 535 – 541.
- [127] Pierron, F. et M. Grédiac (2012). *The Virtual Fields Method – Extracting Constitutive Mechanical Parameters from Full-field Deformation Measurements*. Springer US.
- [128] Provenzano, P. P. et R. Vanderby Jr. (2006). Collagen fibril morphology and organization : Implications for force transmission in ligament and tendon. *Matrix Biol* 25(2), 71 – 84.
- [129] Puxkandl, R., I. Zizak, O. Paris, J. Keckes, W. Tesch, S. Bernstorff, P. Purslow, et P. Fratzl (2002). Viscoelastic properties of collagen : synchrotron radiation investigations and structural model. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci* 357(1418), 191–197.
- [130] Rawlings, J. O., S. G. Pantula, et D. A. Dickey (2001). *Applied Regression Analysis : A Research Tool (Springer Texts in Statistics)*. Springer.
- [131] Rechenberg, I. (1965). Cybernetic solution path of an experimental problem. Technical report, Royal Air Force Establishment.
- [132] Rechenberg, I. (1973). *Evolutionstrategie : optimierung technischer systeme nach prinzipien der biologischen evolution*. Frommann-Holzboog.
- [133] Reeves, C. R. et J. E. Rowe (2002). *Genetic Algorithms : Principles and Perspectives : A Guide to GA Theory*. Norwell, MA, USA : Kluwer Academic Publishers.
-

- 
- [134] Rivlin, R. S. (1947). Torsion of a rubber cylinder. *J Appl Phys* 18(5), 444–449.
- [135] Rosen, J., J. D. Brown, S. De, M. Sinanan, et B. Hannaford (2008). Biomechanical properties of abdominal organs in vivo and postmortem under compression loads. *J Biomech Eng* 130(2), 021020.
- [136] Sacks, M. S. et W. Sun (2003). Multiaxial mechanical behavior of biological materials. *Annu Rev Biomed Eng* 5(1), 251–284.
- [137] Sansour, C. (2008). On the physical assumptions underlying the volumetric-isochoric split and the case of anisotropy. *Eur J Mech A Solid* 27(1), 28 – 39.
- [138] Schmid, H., M. P. Nash, A. A. Young, O. Röhrle, et P. J. Hunter (2007). A computationally efficient optimization kernel for material parameter estimation procedures. *J Biomech Eng* 129(2), 279–283.
- [139] Schmid, H., P. O’Callaghan, M. Nash, W. Lin, I. LeGrice, B. Smaill, A. Young, et P. Hunter (2008). Myocardial material parameter estimation. *Biomech Model Mechanobiol* 7, 161–173.
- [140] Schollum, M. L., P. A. Robertson, et N. D. Broom (2009). A microstructural investigation of intervertebral disc lamellar connectivity : detailed analysis of the translamellar bridges. *J Anat* 214(6), 805–816.
- [141] Schröder, J. et P. Neff (2003). Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *Int J Solids Struct* 40(2), 401 – 445.
- [142] Schröder, J., P. Neff, et D. Balzani (2005). A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity. *Int J Solids Struct* 42(15), 4352 – 4371.
- [143] Schwefel, H.-P. (1965). Kybernetische evolution als strategie der experimentellen forschung in der strömungstechnik. Master’s thesis, Technical University of Berlin.
- [144] Schwefel, H.-P. (1977). *Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie*, Volume 26. Birkhäuser, Basel, Switzerland.
- [145] Scott, J. E. (1980). Collagen–proteoglycan interactions. localization of proteoglycans in tendon by electron microscopy. *Biochem J* 187(3), 887–891.
- [146] Scott, J. E. (1988). Proteoglycan-fibrillar collagen interactions. *Biochem J* 252(2), 313–323.
- [147] Screen, H. R. C., D. A. Lee, D. L. Bader, et J. C. Shelton (2004). Local strain measurement within tendon. *Strain* 40(4), 157–163.
- [148] Screen, H. R. C., J. C. Shelton, V. H. Chhaya, M. V. Kayser, D. L. Bader, et D. A. Lee (2005). The influence of noncollagenous matrix components on the micromechanical environment of tendon fascicles. *Ann Biomed Eng* 33, 1090–1099.
- [149] Shoen, F. J. (1996). Tissue. Dans B. D. Ratner, A. S. Hoffman, F. J. Shoen, et J. E. Lemons (Eds.), *Biomaterials Science : An Introduction to Materials in Medicine.*, pp. 147–164. Academic Press.
-

- 
- [150] Silber, G. et C. Then Numerical analysis of the interactions between human body soft tissue and body supports. London, pp. 743–755.
- [151] Skaggs, D., M. Weidenbaum, J. Iatridis, A. Ratcliffe, et V. Mow (1994). Regional variation in tensile properties and biochemical composition of the human lumbar annulus fibrosus. *Spine* 19, 1310–1319.
- [152] Smith, L., S. Byers, J. Costi, et N. Fazzalari (2008). Elastic fibers enhance the mechanical integrity of the human lumbar annulus fibrosus in the radial direction. *Ann Biomed Eng* 36, 214–223.
- [153] Smith, L. et N. Fazzalari (2009). The elastic fibre network of the human lumbar annulus fibrosus : architecture, mechanical function and potential role in the progression of intervertebral disc degeneration. *Eur Spine J* 18, 439–448.
- [154] Spencer, A. (1972). *Deformations of fiber-reinforced materials*. Oxford Science, New York.
- [155] Spencer, A. (1984). *Continuum Theory of the Mechanics of Fiber-Reinforced Composites*. Springer, New York.
- [156] Stigler, S. M. (2007). The epic story of maximum likelihood. *Stat Sci* 22(4), 598–620.
- [157] Ta, A. T. *Modélisation du comportement des tissus organiques*. Ph. D. thesis, thèse de doctorat de l’UTBM (en cours).
- [158] Ta, A. T., N. Laped, F. Holweck, A. Thionnet, et F. Peyraut. A new invariant-based method for building biomechanical behavior laws- application to an anisotropic hyperelastic material with two fiber families. *Int J Solids Struct*. Accepted.
- [159] Taber, L. (2004). *Nonlinear Theory of Elasticity : Applications to Biomechanics*. Singapore : World Scientific.
- [160] Taber, L. et R. Perucchio (2000). Modeling heart development. *J Elast* 61, 165–197. 10.1023/A :1011082712497.
- [161] Takamizawa, K. et K. Hayashi (1987). Strain energy density function and uniform strain hypothesis for arterial mechanics. *J Biomech* 20(1), 7 – 17.
- [162] Tanaka, T. T. et Y.-C. Fung (1974). Elastic and inelastic properties of the canine aorta and their variation along the aortic tree. *J Biomech* 7(4), 357 – 370.
- [163] Thubrikar, M. J. (2007). *Vascular Mechanics and Pathology*. Springer US.
- [164] Valanis, K. C. et R. F. Landel (1967). The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *J Appl Phys* 38(7), 2997–3002.
- [165] Wagner, D. et J. Lotz (2004). Theoretical model and experimental results for the nonlinear elastic behavior of human annulus fibrosus. *J Orthop Res* 22(4), 901–910.
- [166] Weiss, J. A., B. N. Maker, et S. Govindjee (1996). Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Comput Methods Appl Mech Eng* 135(1-2), 107 – 128.

- [167] Wotton, S., V. Duance, et P. Fryer (1988). Type IX collagen : A possible function in articular cartilage. *FEBS Lett.* 234(1), 79 – 82.
- [168] Wu, H.-C. et R.-F. Yao (1976). Mechanical behavior of the human annulus fibrosus. *J Biomech* 9(1), 1–7.
- [169] Wu, J. J., P. E. Woods, et D. R. Eyre (1992). Identification of cross-linking sites in bovine cartilage type IX collagen reveals an antiparallel type II-type IX molecular relationship and type IX to type IX bonding. *J Biol Chem* 267(32), 23007–14.
- [170] Yoo, L., V. Gupta, C. Lee, P. Kavehpore, et J. Demer (2011). Viscoelastic properties of bovine orbital connective tissue and fat : constitutive models. *Biomech Model Mechanobiol* 10, 901–914.
- [171] Yuan, Y.-x. (2000). A review of trust region algorithms for optimization. Dans H. J. C. R. Ball, J. M. (Ed.), *ICM99 : Proc. 4th Int. Congress on Industrial and Applied Mathematics*, pp. 271–282. Oxford : Oxford University Press.
- [172] Zhang, J. et J. Rychlewski (1990). Structural tensors for anisotropic solids. *Arch Mech* 42(3), 267–277.

## Abstract:

This thesis focuses on research and development of inverse identification methods of material parameters. A particular attention is attributed to the viscoelastic response of collagen-reinforced soft tissues (artery, intervertebral disc, skin, tendon, ligament, etc) submitted to large displacements and large deformations (hyperelasticity). Highly non-linear and anisotropic, biomechanical constitutive laws account for a large number of material parameters. The inverse problem that allows their identification is of high non-linearity and of large dimension. By reason of numerical difficulties related to its resolution with gradient-based methods, we developed two new identification methods labelled GAO (Genetic algorithms & Analytical Optimization) and MMIM (Maximum-Minimum Identification Method).

GAO advantageously combines deterministic methods of gradient type with genetic algorithms. Its originality consists in introducing analytical computations for the deterministic part leading to a gain in the speed up and in the convergence of genetic algorithms. This strategy is used in the context of anisotropic hyperelasticity.

Regarding MMIM method, it operates according to an identification criterion that is expressed with the infinite norm and uses genetic algorithms. MMIM method identifies parameters of quasi-linear viscoelastic laws. It guarantees a constant viscous response that characterises the insensitivity of soft tissues to strain rate.

GAO and MMIM methods successfully identified parameters of arterial wall and intervertebral disc tissues. The properties of these tissues are described in a more general context that exhibits the anatomy, histology and deformation mechanism at different hierarchical levels (nano-scale to milli-scale) of collagen-reinforced soft tissues. This gives understanding of the role of forces in relating structure to function in biology.

*Keywords:* Parameter Identification · Biomechanics · Hyperelasticity · Viscoelasticity · Optimization · Genetic algorithms · Soft biological tissue

## Résumé :

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre du développement de méthodes d'identification inverse de paramètres matériau. On porte un intérêt particulier à la biomécanique des tissus souples renforcés par des fibres de collagène (artère, disque intervertébral, peau, tendon, ligament, etc.), dans le cadre de leurs réponses viscoélastiques et en grandes déformations et en grands déplacements (hyperélasticité). Fortement non-linéaires et anisotropes, les lois constitutives en biomécanique contiennent un nombre important de paramètres matériau. Le problème inverse qui permet de les identifier est de grande dimension et fortement non linéaire. En raison de difficultés numériques liées à sa résolution avec des méthodes à base de gradient, nous avons développé deux nouvelles méthodes d'identification inverse de paramètres nommées GAO (Genetic algorithms & Analytical Optimization) et MMIM (Maximum-Minimum Identification Method).

La méthode GAO combine de manière avantageuse les méthodes déterministes de type gradient avec les algorithmes génétiques. Son originalité consiste à introduire des calculs analytiques pour la partie déterministe, ce qui permet d'accélérer et d'améliorer la convergence des algorithmes génétiques. Cette stratégie est appliquée dans le cadre de l'hyperélasticité anisotrope.

En ce qui concerne la méthode MMIM, elle opère selon un critère d'identification basé sur la norme infinie et elle utilise les algorithmes génétiques. Elle permet d'identifier les paramètres de lois viscoélastiques quasi-linéaires. Elle garantit une réponse visqueuse constante qui est caractéristique des tissus souples qui sont insensibles à la vitesse de chargement.

Les méthodes GAO et MMIM ont identifié avec succès des paramètres de tissus artériels et de tissus du disque intervertébral. Les propriétés de ces tissus sont décrits par ailleurs dans le mémoire dans un contexte plus général où on expose l'anatomie, l'histologie et le mécanisme de déformation aux différents niveaux hiérarchiques (nano-échelle à milli-échelle) d'un tissu souple renforcé par des fibres de collagène. Ceci permet de comprendre le rôle des efforts dans la relation liant la structure à la fonction en biologie.

*Mots clés :* Identification de paramètres · Biomécanique · Hyperélasticité · Viscoélasticité · Optimisation · Algorithmes génétiques · Tissu biologique souple

# SPIM

■ École doctorale SPIM - Université de Technologie Belfort-Montbéliard

F - 90010 Belfort Cedex ■ tél. +33 (0)3 84 58 31 39

■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

