HAL
open science

Localisation dynamique et égalité des conductances de Hall pour des opérateurs de Schrödinger magnétiques aléatoires

Taarabt Amal

▶ **To cite this version:**

Taarabt Amal. Localisation dynamique et égalité des conductances de Hall pour des opérateurs de Schrödinger magnétiques aléatoires. Physique mathématique [math-ph]. Université de Cergy Pontoise, 2013. Français. NNT : . tel-00880091

HAL Id: tel-00880091

https://theses.hal.science/tel-00880091v1

Submitted on 5 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Cergy-Pontoise **UFR Sciences et Techniques**

Localisation dynamique et égalité des conductances de Hall pour des opérateurs de Schrödinger magnétiques aléatoires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 26 Septembre 2013

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Cergy-Pontoise

Spécialité Mathématiques

par

Amal Taarabt

Composition du jury

Hakim Boumaza	Université de Paris 13	*Examinateur*
Jean Michel Combes	Universités de Marseille et de Toulon	*Examinateur*
Horia Cornean	University of Aalborg	*Examinateur*
Vladimir Georgescu	Université de Cergy-Pontoise	*Examinateur*
François Germinet	Université de Cergy-Pontoise	*Directeur de thèse*
Peter Hislop	University of Kentucky	*Rapporteur*
Alain Joye	Université de Grenoble 1	*Rapporteur*

Laboratoire AGM — UMR CNRS 8088

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes vifs remerciements à François Germinet, pour son encadrement et sa disponibilté malgré ses nombreuses responsabilités administratives. Il m'a transmis la passion de la recherche mathématique et n'a eu de cesse de me soutenir et m'encourager tout au long de ces années, aussi bien sur le plan humain que scientifique. Il a toujours eu du temps à me consacrer même un samedi au chien qui fume !

Je remercie chaleureusement Peter Hislop et Alain Joye, les rapporteurs de cette thèse. Je leur suis reconnaissante pour leur travail minutieux.

Je suis honorée que Jean Michel Combes, Vladimir Georgescu, Horia Cornean et Hakim Boumaza, aient accepté de faire partie de mon jury et je les en remercie.

J'adress mes remerciements à la communauté des opérateur de Schrödinger aléatoires pour les nombreux évènements scientifiques qu'ils ont organisés. Je cite en particulier, le "Kochi school on random Schrödinger operators" à l'université de Kochi qui m'a été d'une grande utilité et influence alors que je venais de commencer ma thèse. Je n'oublie certainement pas le programme "Spectral and dynamical properties of quantum hamiltonians" organisé par Peter Hislop et Frédéric Klopp au Centre Interfacultaire Bernoulli à l'EPFL de Lausanne. Je les remercie pour les cours qu'ils y ont dispensés. Mes déplacements ont été partiellement financés par le projet ANR BLAN 0261. Je remercie Ivan Veselić pour son invitation à Chemnitz.

Il m'est agréable de remercier tous les membres du département de maths et le laboratoire AGM de l'UCP. J'ai eu la chance d'y côtoyer des personnes formidables et conviviales. Je nomme en particulier Thierry D, Armen, Elisabeth, Jean, Smaïl, Ifti, Patrick pour son café gris et chocolat noir ! Laurent que je remercie pour m'avoir fait connaître François ! Je remercie François Fillastre pour ses td de géo diff. J'ai énormément apprécié les moments que j'ai passé au sein de ce labo et la bonne ambiance qui y règne ! Ce qui est dû en grande partie à la bande des thésards que je remercie, actuels et anciens, et plus particulièrement David !

Je souhaite remercier chaleureusement Marie et Thomas. Il est difficile de trouver des qualificatifs assez forts pour souligner leur gentillesse et efficacité. J'entends aussi adresser mon Merci à Malika.

Nombreux sont ceux à avoir au fil de ma thèse apporté leur soutien et leur contribution scientifique voire leur secours. Je tiens ainsi à remercier Vladimir pour nos discussions et le temps qu'il m'a accordé. Je remercie également Nikolaj pour sa complicité et son côté russe et Coni, ma grande soeur de thèse, pour tout ce qu'on a pu partager ensemble. J'adresse un remerciement spécial à Lysou et Marou pour leur amitié et gentillesse et toutes les conversations bizarroïdes pleines de sens ! Je tiens à citer la petite Marie, Manu et Laye. Je les remercie pour m'avoir accueillie au sein de la famille Samba.

Un soutien qui m'est cher vient de ma famille. Tout d'abord, je voudrais remercier ma maman pour son amour et ses prières, mes soeurs et frères. J'entends aussi remercier ma belle-famille. J'adresse une pensée profonde qui me tient à coeur à mon papa. Il reste présent dans mon coeur.

Je souhaiterais terminer par mon mari Issam même si je ne pourrais le remercier assez ! Il a toujours cru en moi et a le bon mot pour me réconforter. Je le remercie pour sa présence, ses sacrifices et son amour.

À mes parents et Issam.

أن تضيء شمعة خير من أن تلعن الظلام

It is better to light a candle, than to curse the darkness.

Table of Contents

Résumé **1**

Abstract **1**

Chapitre 1 Introduction générale **5**

Chapitre 2 Présentation des travaux de thèse - Partie 1 **13**

2.1 Localisation dynamique 13

2.2 Critères de localisation 16

2.2.1 SUDEC et SULE 16

2.2.2 Des versions fortes de SUDEC et SULE 18

2.3 Relation entre les trois classes de propriétés 19

2.4 Application aux graphes 21

2.5 Localisation dynamique pour des opérateurs ergodiques 22

Chapitre 3 Présentation des travaux de thèse - Partie 2 **25**

3.1 Modèles de Landau aléatoires 25

3.1.1 Localisation 28

3.1.2 Conductance de Hall 29

3.2 Modèles avec mur 29

3.2.1 Mur électrique 30

3.2.2 Mur magnétique 30

3.2.3 Conductance de bord 32

3.3 Egalité des conductances 33

3.4 Stratégie de la preuve 33

Chapter 4 Spectral properties of dynamical localization 37

4.1 Dynamical localization 37

4.2 SULE, SUDEC 42

4.3 SULE+, SUDEC+ 45

4.4 Relationships between classes of localization properties 48

4.5 Generalized eigenfunction expansion 50

4.6 Counterexamples 52

4.7 Extension to graphs 53

4.8 Dynamical localization for ergodic Hamiltonians 54

Chapter 5 Hall/Edge conductances 55

5.1 Edge quantities: Proof of Lemma 3.4.1 55

5.1.1 Vanishing trace 56

5.1.2 Trace class property 62

5.2 Contributions of the Bulk quantities 67

5.2.1 Proof of Lemma 3.4.2 67

5.2.2 Proof of Lemma 3.4.3 71

5.2.3 Proof of Lemma 3.4.4 72

5.3 Bulk-Edge equality 75

Appendix A **77**

A.1 Pure point spectrum under (DL) 77

Appendix B **79**

B.1 Technical tools 79

B.2 Strong convergence 82

B.3 Helffer-Sjöstrand formula 83

Bibliography **85**

Résumé

Ce travail de thèse est consacré dans un premier temps à l'étude des propriétés spectrales de localisation dynamique pour des opérateurs de Schrödinger ainsi qu'à leur classification.

Nous allons introduire trois classes de propriétés équivalentes en cherchant à établir le lien entre elles d'une façon optimale que nous illustrerons par des contre-exemples. Certaines de ces propriétés s'avèrent jouer un rôle crucial dans l'étude mathématique de plusieurs phénomènes issus de la physique, notamment la quantification de la conductance de Hall et l'apparition des plateaux dûs aux états localisés.

Nous nous intéressons ainsi dans la seconde partie, aux conductances de Hall et de bord pour des modèles désordonnés continus et en présence d'un mur électrique aussi bien que magnétique. Nous expliquons comment les murs entrent en jeu pour pouvoir définir la conductance de bord, en tenant compte de la contribution des états localisés et la régularisation que les systèmes désordonnés requièrent. Nous établissons l'égalité de ces deux conductances directement et non par quantification séparée.

Mots-clés : opérateurs de Schrödinger, localisation dynamique, opérateur de Schrödinger aléatoire, hamiltonien de Landau, effet Hall quantique (EHQ), opérateur magnétique aléatoire, conductance de Hall, conductance de bord.

Abstract

The first part of this thesis is devoted to the study of spectral properties of dynamical localization for Schrödinger operators and their classification. We introduce three classes of equivalent properties and investigate the relationships between them in an optimal way.

Moreover, some of these properties have been shown to play a crucial role in the mathematical proof of several phenomenon of physical interest such as the quantization of the Hall conductance and the existence of the plateaux due to localized states.

Then, we are interested in the bulk and edge Hall conductances for continuous models in the presence of magnetic and electric walls. We explain how the walls come into play in order to define the edge conductance, taking into account the contribution of localized

states and the regularization that a disordered media requires. We prove the equality of these conductances by deriving one from the other, and not by separate quantization.

Keywords: Schrödinger operator, dynamical localization, random Schrödinger operator, Landau Hamiltonian, quantum Hall effect (QHE), random magnetic operatorss, Hall conductance, edge conductance.

Notations. Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, nous adopterons certaines notations qu'on explicite ci-dessous.

On considère $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec $\|.\|$ pour norme d'opérateurs.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $|x| := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_d|\}$. Par χ_S, on note une fonction caractéristique lisse d'un ensemble S. On utilise $|X_u|$ pour désigner l'opérateur de multiplication par la fonction $|x-u|$ et $\Lambda_L(x)$ pour une boîte ouverte centrée en $x \in \mathbb{Z}^d$ et de longueur L. La fonction caractéristique de ce dernier est notée par $\chi_{x,L}$ et nous posons $\chi_x := \chi_{x,1}$.

Pour $I \subset \mathbb{R}$ un borélien, l'ensemble des fonctions boréliennes réelles et bornées sur I est noté par $\mathcal{B}_b(I)$. Soit $p \geq 1$, on considère les $p-$normes de Schatten $\|.\|_p$ sur l'espace de Banach $\mathcal{T}_p(\mathcal{H})$ telles que $\|A\|_p := (\mathrm{tr}(A^*A)^{p/2})^{1/p}$ pour un opérateur A de domaine $\mathcal{D}(A)$. En particulier, $\mathcal{T}_1$ correspond aux opérateurs de classe trace et $\mathcal{T}_2$ à ceux de Hilbert-Schmidt.

Si $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, on notera par $\mathcal{C}^\infty_{c,+}(J)$ la classe des fonctions réelles positives et infiniment différentiables à support compact contenu dans J.

Les constantes seront toujours des constantes finies et lorsqu'elles dépendront de certains paramètres, on notera $C_{a,b,\ldots}$ où a et b sont les paramètres de dépendance.

Chapitre 1

Introduction générale

L'intérêt qu'Anderson porta au transport électronique dans les milieux désordonnés [A], a donné naissance à un nombre considérable de travaux destinés à l'étude des opérateurs de Schrödinger aléatoires, introduits pour décrire rigoureusement ces types de structure. Anderson fit valoir qu'en présence d'impuretés, les électrons auraient tendance à se localiser dans des régions bornées et proches de leurs positions initiales, éliminant ainsi toute possibilité de transport et donc de courant. Le mécanisme physique de cette localisation revient à supprimer l'effet tunnel à grande distance en raison de la décohérence induite par le milieu aléatoire. Suite à cette découverte, Anderson s'est vu attribuer le prix Nobel de la physique en 1977.

L'analyse du transport électronique consiste à étudier le comportement du système étudié à travers l'évolution temporelle de paquets d'ondes. Considérons un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable et $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint de domaine $\mathcal{D}(H)$, décrivant le système étudié. Dans ce travail, on s'intéresse au comportement d'un électron dans l'espace physique de dimension d, $\mathbb{R}^d$, et donc $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(H)$ un état initial tel que $\|\psi\| = 1$. L'évolution temporelle de l'état ψ est déterminée par l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\psi_t = H\psi_t \\ \psi_{t=0} = \psi \end{cases} \tag{1.1}$$

et est donnée par

$$\psi_t = \mathrm{e}^{-itH}\psi. \tag{1.2}$$

La *localisation dynamique* se définit par la non-propagation des paquets d'ondes (1.2) sous l'évolution temporelle issue de l'équation de Schrödinger (1.1). Nous formulerons les détails de la définition mathématique de la *localisation dynamique* un peu plus loin, voir (1.5). Les états présentant un tel comportement, sont appelés des états localisés. A l'inverse, les état délocalisés sont générateurs de transport électronique, comme c'est le cas dans les milieux périodiques modélisant des cristaux parfaits.

Signalons que le théorème de RAGE dû à Ruelle, Amrein, Georgescu et Enss (e.g. [CFKS]), met en évidence l'incidence que cette notion de localisation a sur la nature du spectre et confirme l'intuition physique. En effet, il existe une décomposition spectrale de l'espace physique $\mathcal{H}$ donnée par

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{pp},$$

tel que $\sigma(H_{|\mathcal{H}_\bullet}) = \sigma_\bullet(H)$ où $\bullet = \{ac, sc, pp\}$. Le théorème de RAGE atteste que

$$\varphi \in \mathcal{H}_{pp} \Leftrightarrow \lim_{R\to\infty} \sup_t \left\| \chi_{\{|x|>R\}}\, \mathrm{e}^{-itH}\varphi \right\| = 0,$$
$$\varphi \in \mathcal{H}_c \Leftrightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left\| \chi_{\{|x|\leq R\}}\, \mathrm{e}^{-itH}\varphi \right\| \mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } R > 0,$$

avec $\chi_{\{|x|\leq R\}}$ et $\chi_{\{|x|>R\}}$ désignant les fonctions caractéristiques des régions $\{|x| \leq R\}$ et $\{|x| > R\}$ et où $\mathcal{H}_c$ regroupe $\mathcal{H}_{ac}$ et $\mathcal{H}_{sc}$. Ceci révèle que les éléments de $\mathcal{H}_{pp}$ concordent avec des états physiquement bornés dans le sens où l'évolution temporelle $\mathrm{e}^{-itH}\varphi$ ne quitte pas ou très peu la partie compacte $\{|x| \leq R\}$. Alors que l'inverse se produit pour les états de $\mathcal{H}_c$, puisqu'ils finissent par quitter toute partie compacte de l'espace.

Dans le cadre des opérateurs dits d'Anderson, la localisation fut interprétée comme la présence du spectre purement ponctuel avec une décroissance exponentielle des fonctions localisées. Cependant, il est actuellement bien établi que cette forme de localisation bâptisée, *localisation d'Anderson*, n'est pas suffisante pour s'assurer de la *localisation dynamique* du système. Cette dernière exclut toute forme de transport alors que la *localisation d'Anderson* peut en autoriser. Précisons d'abord ce que nous entendons par transport.

Afin d'analyser le comportement dynamique, on cherche à déterminer, en moyenne, la position d'une particule après qu'elle a évolué pendant un temps t à partir d'un état intial ψ. Ceci se traduit par la quantité

$$\langle P_I(H)\mathrm{e}^{-itH}\psi, |X|^2 P_I(H)\mathrm{e}^{-itH}\psi\rangle = \left\| |X| P_I(H)\mathrm{e}^{-itH}\psi \right\|^2, \tag{1.3}$$

où $|X|$ est l'opérateur position défini par $(|X|\psi)(x) = |x|\psi(x)$ pour $\psi \in \mathcal{H}$ et $P_I(H)$ est la projection spectrale sur un intervalle d'énergie I. De manière générale, on considère les moments d'ordre p

$$m_{\psi,p,I}(t) = \langle P_I(H)\mathrm{e}^{-itH}\psi, |X|^p P_I(H)\mathrm{e}^{-itH}\psi\rangle. \tag{1.4}$$

Partons d'un état initial ψ à support compact. Si les électrons avec des énergies dans une fenêtre I, se déplacent balistiquement avec une vitesse moyenne v alors $m_{\psi,2,I}(t)$ est de l'ordre de vt^2 pour des temps t suffisamment grands.

Par ailleurs, si les électrons sont localisés, il est finalement assez naturel de s'attendre à ce que le moment $m_{\psi,2,I}(t)$ soit uniformément borné en t. Cela revient à dire qu'en ayant

de la *localisation d'Anderson* dans un tel intervalle I, $m_{\psi,p,I}(t)$ devrait être uniformément borné en t pour toute condition initiale ψ convenablement choisie :

$$\sup_t m_{\psi,p,I}(t) = \sup_t \left\| |X|^{\frac{p}{2}} P_I(H) \mathrm{e}^{-itH} \psi \right\|^2 < \infty. \tag{1.5}$$

Mais c'est loin d'être le cas puisqu'il est actuellement bien établi par Simon [Si2] qu'en présence d'un spectre purement ponctuel, le mouvement ne peut pas être balistique

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m_{\psi,2,I}(t)}{t^2} = 0, \tag{1.6}$$

pour tout état initial ψ à support compact. Et [DeRJLS2] ont construit un exemple d'opérateur quasi-périodique ayant du spectre purement ponctuel et des fonctions propres exponentiellement localisées et pour lequel

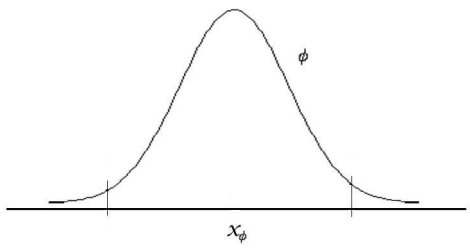
$$\limsup_{t\to\pm\infty} \frac{m_{\psi,2,I}(t)}{t^{2-\delta}} = \infty \quad \text{pour tout } \delta > 0,$$

pour une large classe de données initiales ψ à support compact. Ce résultat a été étendu à une classe plus large d'opérateurs quasi-périodiques dans [DBF] puis dans [GKT] ainsi qu'à des opérateurs à potentiel lacunaire.

Ce qui signifie que le moment peut croître de façon arbitraire et donc s'approcher du mouvement balistique malgré le fait que l'opérateur présente de localisation d'Anderson. La borne (1.6) donnée par Simon est donc optimale. Il existe également des exemples d'opérateurs avec localisation d'Anderson et un transport sous-balistique. C'est le cas du modèle des dimères : voir [DBG] pour la localisation d'Anderson et [JSS] pour l'existence de transport.

Si nous considérons une fonction propre ϕ qui décroît sous la forme

$$\|\chi_x \phi\| \leq C_\phi \, \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_\phi|}$$



alors nous ne pouvons qu'estimer la distance à partir de laquelle la fonction propre ϕ décroît exponentiellement vite et par exemple conclure que l'on a

$$\|\chi_x \phi\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{dès que} \quad |x - x_\phi| \geq \frac{1}{\sigma} \log(2C_\phi).$$

En l'occurrence, non seulement le facteur $\frac{1}{\sigma}$, appelé la longueur de localisation, importe mais la constante C_ϕ aussi. Intuitivement, si d'une fonction propre à l'autre, les constantes

C_ϕ sont autorisées à grandir arbitrairement alors les fonctions propres peuvent s'étendre à grandes échelles. Il est ainsi possible qu'un paquet d'ondes contenant une superposition infinie de fonctions propres produise du transport. Pour éviter ce phénomène et obtenir de la localisation dynamique, il est donc nécessaire d'obtenir un meilleur contrôle sur la décroissance exponentielle des fonctions propres.

Pour surmonter celà, il est nécessaire d'aller au-delà de la *localisation d'Anderson* et de requérir un contrôle plus explicite de la constante C_ϕ. C'est ce que firent, dans un premier temps, Del Rio, Jitomirskaya, Last et Simon dans [DeRJLS1, DeRJLS2] lorsqu'ils ont soulevé la question : qu'est ce que la localisation ? Ils ont introduit un critère nommé ($SULE$), fonctions propres semi-uniformémemnt localisées (Semi-Uniformly Localized Eigenfunctions), qui décrit explicitement la constante C_ϕ en terme du centre de localisation x_ϕ autour duquel ϕ décroît. Un autre type de propriétés de localisation a vu le jour plus tard dans [G, GK2] et y est intitulé ($SUDEC$), décroissance sommable et uniforme des corrélations des fonctions propres (Summable-Uniform Decay of Eigenfunction Correlations). Cette dernière propriété est une variante de ($WULE$) introduite par [G] et elle fournit un contrôle de la corrélation des fonctions propres entre deux sites.

Ces deux propriétés citées plus haut, entraînent bel et bien la *localisation dynamique* et sont généralement équivalentes [GK2]. Il était communément admis que ($SULE$) et ($SUDEC$) étaient des notions de localisation plus fortes que la (DL). Cependant, [DeRJLS2, T] indiquèrent que davantage de précision et d'information sur la décroissance des fonctions propres peuvent se déduire par le simple fait de borner les moments des paquets d'ondes.

Dans cette thèse nous revenons sur ces propriétés qui, au cours des 20 dernières années, ont été bien établies et longuement utilisées dans la littérature de la physique mathématique. Nous allons introduire trois catégories de propriétés équivalentes et étudierons les relations qui existent entre elles. La première catégorie correspond à la *localisation dynamique*, la seconde à ($SULE$) et ($SUDEC$) pour une base de vecteurs propres, et puis la dernière catégorie est une forme plus forte de ($SULE$) et ($SUDEC$) qui, cette fois-ci, seront vérifiées pour tous les vecteurs de l'image des projecteurs propres que l'on dénommera ($SULE+$) et ($SUDEC+$). Autrement dit, les propriétés sont vérifiées pour les vecteurs propres ainsi que leurs combinaisons linéaires. Nous signalerons que cette dernière forme de localisation entraîne une multiplicité finie tandis que ce n'est pas le cas pour les autres. La première partie de ce travail a pour but d'étendre les résultats de [DeRJLS2] et [T] et de présenter une classification claire de ces critères de *localisation*. Nous répondons en particulier à une question de [DeRJLS2] restée jusqu'à présent ouverte portant sur l'équivalence de (DL) et ($SULE$), et l'intervention de la multiplicité des valeurs propres.

Notre motivation provient des opérateurs aléatoires [A, GK2, BJ, GK4, RM] et des opérateurs quasi-périodiques [G, JL], pour lesquels la *localisation dynamique* fut établie.

Rappelons quelques propriétés de base de la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires qui encodent les structures désordonées (e.g. [CFKS, CL]). Considérons une

famille d'opérateurs H_ω où ω parcourt Ω un certain espace de probabilité. Comme chaque H_ω correspond à une réalisation particulière ω, il est essentiel de s'assurer que les propriétés spectrales de H_ω ne dépendent pas de ω et qu'elles sont valables sur des ensembles de mesure pleine. Et c'est là qu'intervient la notion d'ergodicité.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{G}$ un groupe additif agissant sur Ω à travers une famille de transformation $\{\tau_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{G}}$ qui préserve la mesure et que l'on suppose ergodique. Une famille mesurable d'opérateurs auto-adjoints $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ est dite $\mathcal{G}$-ergodique s'il existe une famille mesurable d'opérateurs unitaires $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\mathcal{G}}$ telle que

$$H_{\tau_\gamma(\omega)} = U_\gamma^* H_\omega U_\gamma, \tag{1.7}$$

pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$. On appelle (1.7) la propriété de covariance. Dans la majorité des cas, nous prenons $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$ et les opérateurs unitaires U_γ sont donc les translations dans $\mathcal{H}$. Les transformations τ_γ, pour leur part, sont données par $(\tau_\gamma(\omega))_j = \omega_{j_\gamma}$ pour $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^d}$. Cette propriété d'ergodicité a pour conséquence que le spectre de H_ω est presque sûrement déterministe [P]. Autrement dit, il existe un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma(H_\omega) = \Sigma, \quad \mathbb{P} - \text{p.t } \omega. \tag{1.8}$$

D'autre part, les composantes purement ponctuelle, singulièrement continue et absolument continue de $\sigma(H_\omega)$, bénéficient de la même propriété [KuS, KM]. A savoir, il existe des ensembles $\Sigma_\bullet \subset \mathbb{R}$ pour $\bullet \in \{pp, sc, ac\}$ tels que

$$\sigma_\bullet(H_\omega) = \Sigma_\bullet \quad \mathbb{P} - \text{p.t } \omega. \tag{1.9}$$

Le premier modèle qui nous vient à l'esprit est celui d'Anderson

$$H_\omega = -\Delta + V_\omega \ \text{ sur } \ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \text{ ou } \ell^2(\mathbb{Z}^d), \tag{1.10}$$

où $V_\omega = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} \omega_\gamma u(. - \gamma)$. C'est certainement l'opérateur de Schrödinger aléatoire qui a été le plus étudié par les physiciens et mathématiciens depuis 1958. Les variables aléatoires $\omega = (\omega_\gamma)_\gamma$ sont indépendantes et identiquement distribuées (iid). Les fonctions u sont appelées potentiel de site simple et sont à support compact. Ce type d'opérateurs modélise le remplacement d'un atome par un autre comme c'est le cas des semi-conducteurs où les impuretés sont distribuées sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ mais avec une amplitude aléatoire. Il s'agit d'un désordre compositionnel. Nous pouvons généraliser (1.10) à

$$H_\omega = -\Delta + V_{\text{per}} + V_\omega, \tag{1.11}$$

avec V_{per} un opérateur borné et $\mathbb{Z}^d$-périodique. Une autre variante de (1.10) est le modèle de Poisson où les $(\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{N}}$ sont des points d'un processus de Poisson d'intensité μ. Les impuretés sont donc aléatoirement et uniformément distribuées dans l'espace. Cela décrit les matières dites amorphes. Nous mentionnons également le modèle de déplacement

$$V_\omega = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^d} u(. - \gamma - \omega_\gamma), \tag{1.12}$$

qui, pour sa part, prend en considération des impuretés ayant la même forme mais distribuées aléatoirement. Ce qui produit une déformation spatiale du réseau.

D'autre part, le modèle d'Anderson a été étendu au cas des matrices unitaires aléatoires de type CMV introduites par Cantero, Moral et Velázquez qui sont reliées à la théorie des polynômes orthogonaux sur le cercle unité. Les *localisation d'Anderson* et *dynamique* pour ces matrices sont démontrées dans [J, HJS]. Nous citons également le model de Chalker-Coddington introduit dans la littérature physique afin d'étudier la transition de l'effet Hall [ABJ1, ABJ2].

Anderson a soutenu que tous les états de l'équation de Schrödinger avec un potentiel aléatoire et pour un désordre suffisement grand, devraient rester localisés. Les premières études mathématiques de ce problème furent établies par Goldsheid, Molchanov et Pastur [GMP]. Ils ont montré qu'en dimension 1, tous les états sont localisés aussi faible que soit le désordre. Quant au cas des dimensions supérieures, Fröhlich et Spencer ont mis en place la méthode de l'analyse multi-échelles (MSA) afin de soulever cette question de localisation. Cette méthode s'est vue améliorer plus tard par Germinet et Klein [GK1]. Cette méthode a pour conséquence la *localisation dynamique* outre celle d'*Anderson* [DBG, DS]. Par ailleurs, Aizenman, Molchanov ont développé un moyen similaire dénommé la méthode des moments fractionnaires (FMM) [AM], étendue au cas continu par [AENSS].

Soulignons que la plupart des résultats reposent sur le fait que la fonction u garde un signe constant ainsi que sur la régularité des variables aléatoires. Le cas de variables $(\omega_\gamma)_\gamma$ suivant une loi de Bernoulli a résisté pendant longtemps à l'analyse des mathématiciens. La preuve de la *localisation d'Anderson* pour ce modèle est fournie par Bourgain et Kenig [BoK]. Plus tard, Germinet et Klein ont su étendre ce résultat et ont démontré la *localisation dynamique* pour une large classe d'opérateurs ayant une mesure de probabilité non-dégénérée [GK4].

Dans la catégorie des modèles d'Anderson, nous incluons également les opérateurs de Schrödinger magnétiques aléatoires. Il se trouve que de nombreux travaux ont été destinés à l'étude de localisation pour l'hamiltonien de Landau aléatoire [CH, W, GK5]. Ils ne considèrent non seulement des perturbations par un potentiel électrique de type Anderson. Il est également pris en compte des perturbations magnétiques aléatoires, à savoir

$$H_\omega = (-i\nabla - A - A_\omega)^2, \tag{1.13}$$

où A est un vecteur potentiel générant un champ magnetique constant et A_ω est de type Anderson [GhHK, DGR2, AHK].

Par ailleurs, nous mentionnons le cas des modèles non-ergodiques

$$V_\omega = \sum_{\gamma\in\mathcal{D}} \omega_\gamma u(. - \gamma), \quad \mathcal{D} \text{ ensemble de Delone}, \tag{1.14}$$

qui ne satisfont pas la relation de covariance (1.7), [BdMSS1, BdMSS2]. Dans le travail [RM], la localisation ainsi qu'une caractérisation de la région de localisation au sens de [GK3] sont démontrées pour ce genre de modèles en adaptant une analyse multi-échelles (MSA) appropriée au cas des opérateurs non ergodiques. Et dans le chapitre 2, nous nous intéressons sur des opérateurs non nécessairement ergodiques.

Revenons maintenant sur les proprités de localisation précédemment évoquées. Outre l'intérêt physique de vouloir contrôler l'évolution temporelle des paquets d'ondes, il s'avère que *la localisation dynamique* (*DL*) ainsi que les propriétés (*SULE*) et (*SUDEC*) jouent un rôle crucial dans l'étude mathématique de plusieurs phénomènes issus de la physique. Nous citons notamment l'effet de Hall quantique [H, Be], la formule de Mott [KLM] et la validité de la formule de Kubo [BoGKS] ainsi que l'égalité des conductances de Hall [EGS, Ta] et les régularisations de la conductance de bord [CG, CGH, EGS]. Ces propriétes fournissent également des informations sur les statistiques des valeurs propres du modèle d'Anderson, à savoir, la multiplicité finie [GK2, GK4], simplicité du spectre [KM], les statistiques de Poisson [M, GKl1, GKl2], le comportement ergodique des valeurs propres [Klo], statistiques des niveaux d'espacement [GKl1, GKl2].

Nous nous attardons dans ce travail sur l'effet de Hall quantique (EHQ) qui est étroitement lié à la notion de *localisation*. Illustrons ce phénomène découvert par E.H. Hall [H]. L'expérience que ce dernier a entreprise, revient à prendre un conducteur très plat soumis à un champ magnétique $\mathcal{B}$ constant et transversal au plan (Oxy) de cette surface. Lorsqu'on applique un courant électrique constant $\overrightarrow{\mathcal{J}}$ dans la direction de x, les électrons seront soumis à la force de Lorentz $\overrightarrow{\mathcal{F}_L} \sim \overrightarrow{\mathcal{J}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{B}}$ dans la direction de y qui est perpenduculaire au courant et au champ magnétique. Cette force aura pour effet de faire accumuler des particules chargées d'un côté de la feuille métallique. Cela crée une différence de potentiel appelée champ électrique de Hall $\overrightarrow{\mathcal{E}_H}$. A l'équilibre, le système est décrit par l'équation

$$Ne\ \overrightarrow{\mathcal{E}}_H + \overrightarrow{\mathcal{J}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{B}} = 0, \tag{1.15}$$

où N est la densité des électrons et e est la charge élémentaire. La solution de (1.15) est donnée par $\overrightarrow{\mathcal{J}} = \sigma\ \overrightarrow{\mathcal{E}_H}$ où σ est le tenseur de conductivité dont les composantes diagonales $\sigma_{1,1}$ et $\sigma_{2,2}$ sont nulles. Pour ce qui est des coefficients hors diagonale, ils sont donnés par $\sigma_{1,2} = -\sigma_H$ et $\sigma_{2,1} = \sigma_H$ où

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h}, \tag{1.16}$$

est appelé la *conductance de Hall*. Le paramètre ν est le facteur de remplissage $\nu = \frac{\rho h}{eB}$ où ρ est la densité électrique de la plaque et h est la constante de Planck.

Cette expérience fut conduite par Dorda, Klitzing et Pepper [KDP] qui ont montré que dès lors que la température est très basse, la conductance de Hall σ_H varie par palier et que c'est un multiple entier de la constante universelle $\frac{e^2}{h}$. Il s'agit de la découverte de l'effet Hall quantique entier (IQHE) qui a valu à Klitzing le prix Nobel de la physique en

1985. Cette quantification précise a fait de σ_H un étalon primaire pour les mesures de la résistance électrique et a permis de redéfinir la constante de structure fine.

La première tentative pour élucider l'apparition des plateaux a été proposée par Laughlin [L] suivi de Halperin [H]. Ils ont soutenu que ce phénomène est une conséquence de la localisation. En effet, pour observer l 'effet Hall quantique, la présence des impuretés est impérative, comme le remarqua J. Bellisard [Be, BES]. Plus précisement, le désordre aura pour conséquence d'élargir les niveaux de Landau en bandes au bord desquelles on a de la localisation [BES, GKS1]. Le voisinage des niveaux de Landau correspond plutôt à des états délocalisés [Ku, AG, AvSS] étant les seuls à pouvoir porter du courant.

Lorsque l'énergie de Fermi (potentiel chimique à température zero) prend des valeurs dans les bords des bandes, la conductance demeure constante. Et dès qu'elle s'approche des centres, on a des états diffusifs et la conductance fait donc un saut puis on retrouve de nouveau une zone de localisation.

Halperin a par ailleurs démontré l'existence et la quantification de courants de bord dans les systèmes de Hall [H]. Plus précisement, les électrons rebondissent le long du bord du système induisant ainsi un courant quantifié à travers la *conductance de bord* σ_e. Et il également établi un lien entre cette quantification de bord et l'effet Hall quantique en indiquant que la conductance de bord et la conductance de Hall étaient a priori égales. Cette propriété est au coeur de la seconde partie de cette thèse.

Pour procéder à une étude mathématique de ces quantifications, Bellisard et al. [Be, BES] se sont intéressés à la conductance de Hall et au côté topologique que l'effet Hall quantique subsiste. Ceci relève de la géométrie non commutative. Pendant que [CG, CGH, DGR1, KSB, KRSB2] se sont plutôt orientés vers la compréhension des courants de bord et leur quantification. Ces travaux développés en parallèle, ont mis au clair l'égalité des conductances de Hall. Plus tard, Elgart, Graf et Schenker [EG, EGS] ont établi cette égalité directement dans le cas discret. En effet, [EG] ont commencé par examiner le cas où l'énergie de Fermi se situe dans une lacune spectrale. Ensuite, [EGS] ont étendu le résultat à une région de localisation. Soulignons que ce dernier cas nécessite une régularisation de la conductance de bord. Ce qui est propre aux systèmes désordonnés.

Dans ce travail, nous considérons des perturbations aléatoires électriques et magnétiques du hamiltonien de Landau et nous définissons des opérateurs de bord associés aux murs qu'on introduit. Le résultat principal est l'égalité des conductances de Hall et de bord dans une zone de localisation. Ce qui nécessitera une régularisation de la conductance de bord. En fait, la formulation mathématique de ces deux conductances fait appel à des opérateurs à trace comme nous allons le voir en détail dans le chapitre 3. Les régularisations restaurent la propriété de la classe trace qui pourrait être détruite lorsque nous prenons en compte des énergies associées à des états localisés. Elles ont pour rôle d'atténuer la contribution des états vivant loin du bord. Ce résultat est une extention de [EGS] au cas continu et pour des murs magnétiques.

Chapitre 2

Présentation des travaux de thèse : les propriétés spectrales de la localisation dynamique

Nous procédons à une classification de critères de *localisation dynamique* et de propriétés spectrales des fonctions propres, évoquée dans le chapitre précédent. Pour ce faire, nous n'avons pas recours à un modèle spécifique mais plutôt un opérateur H de Schrödinger agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous considérons principalement les cas particuliers de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ou $\ell^2(\mathbb{R}^d)$ mais notre analyse demeure la même dans un cadre plus général. L'extension aux graphes sera aussi prise en considération.

2.1 Localisation dynamique

On considère un opérateur auto-adjoint H sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. On écrit $P_E := \chi_{\{E\}}(H)$ pour le projecteur spectral de l'opérateur H sur une énergie $E \in \mathbb{R}$. On note $\sigma_c(H)$ le spectre continu de H. On dira que le spectre de l'opérateur H est purement ponctuel dans un intervalle $\mathcal{I}$ si et seulement si $\sigma_c(H) \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Pour décrire la dynamique du système donné par H et pour $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$, on introduit le moment (σ,ζ)-sous-exponentiel au temps t de l'évolution temporelle, initialement localisée en espace près de $u \in \mathbb{Z}^d$ et localisée en énergie par une fonction $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$,

$$M_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t) := \left\| \mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2}|X_u|^\zeta} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}(H)\chi_u \right\|_2^2. \tag{2.1.1}$$

On définit sa moyenne temporelle par

$$\mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) := \frac{1}{T}\int_0^T M_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t)\mathrm{d}t. \tag{2.1.2}$$

Le critère de *localisation dynamique* se traduit par la possibilité de borner ces moments qui, en particulier, assurent la décroissance des noyaux de l'évolution temporelle.

Dans le théorème qui suit, nous généralisons le résultat principal de [T] et nous établirons des propriétés équivalentes de la *localisation dynamique*. Nous traitons le cas des opérateurs aléatoires dans la section 2.5.

Théorème 2.1.1. *Soit $\mathcal{I} \subset \sigma(H)$ un ensemble compact. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in (0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, on a une constante $C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, tels que

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{-\epsilon|u|^\zeta} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) \leq C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}}. \tag{2.1.3}$$

(ii) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in (0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, on a une constante $C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, tels que pour tout $u \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sup_T \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) \leq C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}. \tag{2.1.4}$$

(iii) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in (0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, on a une constante $C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, tels que pour tout $u \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sup_T \frac{1}{T}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/T} M_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t)\mathrm{d}t \leq C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}. \tag{2.1.5}$$

(iv) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in (0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, on a une constante $C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, tels que pour tout $u \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sup_t M_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t) \leq C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}. \tag{2.1.6}$$

(v) Il existe $\zeta \in (0,1], \sigma > 0$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, on a une constante $C_{\zeta,\sigma,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, tels que

$$\sup_t \left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2 \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon,\mathcal{X}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}\ \mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}, \tag{2.1.7}$$

pour tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$.

(vi) Le spectre de l'opérateur H est purement ponctuel dans $\mathcal{I}$ et il existe $\zeta \in (0,1]$ et $\sigma > 0$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, on a une constante $C_{\zeta,\sigma,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, tels que

$$\sup_E \mathcal{X}(E)\|\chi_x P_E \chi_u\|_2 \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon,\mathcal{X}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}\ \mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}, \tag{2.1.8}$$

pour tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$.

Si H satisfait une de ces propriétés, on dira que H possède la propriété de localisation dynamique (sous-exponentielle) dans $\mathcal{I}$ et pour raccourcir, nous écrirons (DL) dans $\mathcal{I}$.

Les critères (2.1.7) et (2.1.8) ont été introduits dans la littérature aux côtés de (SULE) dans [DeRJLS2] et y ont été respectivement nommés (SUDL) (Semi-Uniform Dynamical Localization) et (SULP) (Semi-Uniform Localized Projections).

La condition (2.1.3) est une forme faible de *localisation dynamique* qui entraîne la présence de spectre purement ponctuel de l'opérateur H dans $\mathcal{I}$, grâce au théorème de RAGE [CFKS], comme nous le rappelons dans l'appendice (A).

Notons que le Théorème 2.1.1 nous démontre l'équivalence entre la localisation dynamique et la localisation dynamique en moyenne temporelle qui est à priori une forme plus faible.

Remarque 2.1.1. *Dans le cas où l'exposant $\zeta = 1$, on parlera de la localisation dynamique exponentielle.*

En développant le moment $M_u(\sigma, \zeta, \mathcal{X}, t)$ sous la forme

$$\begin{aligned} M_u(\sigma, \zeta, \mathcal{X}, t) &= \mathrm{tr}\{\chi_u \ \mathrm{e}^{itH} \mathcal{X}(H) \ \mathrm{e}^{\sigma|X_u|^\zeta} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}(H) \chi_u\} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{tr}\{\chi_u \ \mathrm{e}^{itH} \mathcal{X}(H) \ \mathrm{e}^{\sigma|X_u|^\zeta} \chi_x \ \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}(H) \chi_u\}, \end{aligned}$$

on constate qu'une majoration de la fonction $\mathrm{e}^{\sigma|y-u|^\zeta} \chi_x(y)$ permet d'avoir deux constantes $C_{\sigma,\zeta}$ et $\tilde{C}_{\sigma,\zeta}$ telles que d'une part nous avons

$$M_u(\sigma, \zeta, \mathcal{X}, t) \leq C_{\sigma,\zeta} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta} \left\| \chi_x \ \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}(H) \chi_u \right\|_2^2,$$

et d'autre part,

$$M_u(\sigma, \zeta, \mathcal{X}, t) \geq \tilde{C}_{\sigma,\zeta} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta} \left\| \chi_x \ \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}(H) \chi_u \right\|_2^2.$$

Ce qui justifie l'équivalence de (iv) et (v). De plus, les implications $(iv) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)$ sont immédiates. Il est aussi aisé de voir que $(v) \Longrightarrow (vi)$ se déduit rapidement de l'identité

$$P_E = s - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{iEs} \mathrm{e}^{-isH} \mathrm{d}s. \tag{2.1.9}$$

Mais, nous sommes plutôt intéressés par l'implication inverse qui constitue avec $(i) \Longrightarrow (vi)$ le coeur de notre démonstration. Nous cherchons à établir le lien entre les noyaux des projecteurs spectraux et les moments sous-exponentiels en décomposant ces derniers sur les espaces propres. On restreint le moment en moyenne temporelle (2.1.2) à un volume fini, en l'occurrence une boîte $\Lambda_L(u)$ de taille L, afin de tirer parti de la bonne convergence en

temps que la décomposition spectrale nous procure. Nous revenons ensuite à un volume infini et extrayons la décroissance (2.1.8). Pour ce qui est du point $(vi) \Longrightarrow (v)$, nous faisons, une fois de plus, appel à une décomposition spectrale qui requiert une sommabilité en énergie que l'on assure en sacrifiant, en quelque sorte, un peu de décroissance spatiale.

Nous soulignons le fait que la géométrie sous-jacente de l'espace n'interfère que dans la preuve l'implication $(vi) \Longrightarrow (v)$ où, justement, nous avons recours à un lemme fournissant une majoration sur le nombre d'éléments qu'une boîte de taille L contient.

Remarque 2.1.2. *Le Théorème 2.1.1 est encore valable si les propriétés sont plutôt définies pour un certain* $\epsilon \in]0, \sigma[$ *au lieu de l'être pour tout* $\epsilon > 0$.

On pourrait aussi considérer des moments polynomiaux comme c'est parfois le cas. Et dans ce cas, le Théorème 2.1.1 sera formulé avec une décroissance polynomiale dans (2.1.7) *et* (2.1.8) *et un facteur polynomial en* u *apparaît dans* (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) *et* (2.1.6).

Bien que nous ne faisons nulle hypothèse sur la nature du spectre, nous verrons dans ce qui suit qu'une multiplicité finie donnera davantage de liens avec la décroissance des fonctions propres.

2.2 Critères de localisation

2.2.1 SUDEC et SULE

Nous nous occupons maintenant des propriétés de décroissance des fonctions propres de l'opérateur H et commençons tout d'abord par certaines notations. Soient $\mathcal{I}$ un intervalle et $\mathcal{E} \subset \mathcal{I}$ une collection non vide dénombrable de valeurs propres de H, dont la multiplicité peut être infinie. On pose

$$P_{\mathcal{E}} = \sum_{E \in \mathcal{E}} P_E,$$

et on écrit $\mathcal{H}_E = P_E \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}} \mathcal{H}$. Pour $\nu > \frac{d}{2}$, on définit l'opérateur T sur $\mathcal{H}$ donné par la multiplication par la fonction $T(x) = \langle x \rangle^{\nu}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, avec $\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$. On définit

$$\alpha_E := \operatorname{tr}\{T^{-1} P_E T^{-1}\} = \|T^{-1} P_E\|_2^2 \leq \operatorname{tr} P_E. \tag{2.2.1}$$

Pour un vecteur unitaire $\phi \in \mathcal{H}$, on désigne par P_ϕ le projecteur de rang un $P_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ et on pose

$$\alpha_\phi := \operatorname{tr}\{T^{-1} P_\phi \, T^{-1}\} = \|T^{-1} P_\phi\|_2^2 = \|T^{-1}\phi\|^2 \leq 1. \tag{2.2.2}$$

Si $\{\phi_n\}_{1 \leq n \leq N_E}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_E$ telle que $N_E := \operatorname{tr} P_E \leq \infty$ alors

$$\sum_{n=1}^{N_E} \alpha_{\phi_n} = \alpha_E.$$

Nous assumons, en outre, la condition de finitude suivante

$$\alpha_{\mathcal{E}} := \sum_{E\in\mathcal{E}} \alpha_E = \mathrm{tr}\{T^{-1}P_{\mathcal{E}}T^{-1}\} \leq \alpha_{\mathcal{I}} := \mathrm{tr}\{T^{-1}P_{\mathcal{I}}T^{-1}\} < \infty. \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1. *Si $\mathcal{I}$ est compact alors la condition* (2.2.3) *est remplie pour une large variété d'opérateurs de Schrödinger [KKS, GK4].*

Nous commençons par élaborer les propriétés de décroissance pour une base orthonormale de vecteurs propres.

Théorème 2.2.1. *Soit $\mathcal{G}_{\mathcal{E}} = \{\phi_n\}_n$ une base orthonormale de $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ et supposons* (2.2.3). *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) Décroissance sommable et uniforme des corrélations des fonctions propres (SUDEC) dans $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$: il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\phi_n \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ et tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x P_{\phi_n}\chi_u\|_2 = \|\chi_x\phi_n\|\,\|\chi_u\phi_n\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \alpha_{\phi_n}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}. \tag{2.2.4}$$

(i') Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\phi_n \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ et tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x\phi_n\|\,\|\chi_u\phi_n\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}. \tag{2.2.5}$$

(ii) Fontions propres semi-uniformément localisées (SULE) dans $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$: il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\phi_n \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ on ait $x_{\phi_n} \in \mathbb{Z}^d$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x\phi_n\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x_{\phi_n}|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-x_{\phi_n}|^\zeta}. \tag{2.2.6}$$

(ii') Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\phi_n \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ on ait $x_{\phi_n} \in \mathbb{Z}^d$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x\phi_n\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\sqrt{\alpha_{\phi_n}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x_{\phi_n}|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-x_{\phi_n}|^\zeta}. \tag{2.2.7}$$

De plus, il résulte de (ii) que l'on peut ordonner les centres de localisation x_{ϕ_n} de sorte que $|x_{\phi_n}| \geq Cn^{1/2\nu}$.

Comme nous l'avons indiqué auparavent, la propriété (SULE) (2.2.6) a été introduite par [DeRJLS2], alors que (SUDEC) l'a été par [G] et developpée par la suite dans [GK2]. Nous avons choisi de mentionner (i') pour l'aspect naturel que (2.2.5) pourrait évoquer au lecteur et sa proximité avec (2.2.6). Ce n'est pas pour autant qu'elle implique facilement la *localisation dynamique* comme c'est le cas pour (i). L'utilisation de (i') nécessite davantage d'analyse.

Remarque 2.2.2. *Si* (2.2.4) *et* (2.2.6) *sont respectivement remplacés par*

$$\|\chi_x\phi_n\|\,\|\chi_u\phi_n\| \leq C_{\zeta',\zeta,\sigma,\epsilon}\ \alpha_{\phi_n}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^{\zeta'}}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^{\zeta}}, \tag{2.2.8}$$

et

$$\|\chi_x\phi_n\| \leq C_{\zeta',\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon\left|x_{\phi_n}\right|^{\zeta'}}\mathrm{e}^{-\sigma\left|x-x_{\phi_n}\right|^{\zeta}}, \tag{2.2.9}$$

avec $\zeta' > \zeta$, alors nous perdons l'équivalence revendiquée dans le Théorème 2.1.1 en raison de l'absence de la quantité α_{ϕ_n} dans (2.2.9). *Néanmoins, (SUDEC) est pour sa part assez fort pour entraîner la localisation dynamique. En réalité, cette situation n'est pas aussi exotique qu'on pourrait le croire car c'est exactement ce qui se passe pour des opérateurs de Schrödinger aléatoires avec une mesure singulière, y compris celle de Bernoulli [GK4].*

Notre démonstration s'appuie essentiellement sur un théorème technique qui nous permet de relier (SULE) et (SUDEC). Nous nous inspirons des travaux de [DeRJLS2, G].

2.2.2 Des versions fortes de SUDEC et SULE

Jusqu'à présent, la multiplicité des valeurs propres pouvait être arbitraire. Mais nous allons maintenant introduire une troisième classe de propriétés qui correspond à une version plus forte de (SUDEC) et (SULE) citées dans le Théorème 2.1.1 et qui va contraindre la multiplicité à être finie.

Théorème 2.2.2. *Supposons* (2.2.3). *Soit $E \in \mathcal{E}$ donnée et soit $\mathcal{G}_E = \{\phi_n\}_n$ une base orthonomale de $\mathcal{H}_E$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\phi_n, \phi_m \in \mathcal{G}_E$ et pour tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x\phi_n\|\,\|\chi_u\phi_m\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\sqrt{\alpha_{\phi_n}\alpha_{\phi_m}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^{\zeta}}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^{\zeta}}. \tag{2.2.10}$$

(ii) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\phi \in \mathrm{Span}\ \mathcal{G}_E$ et pour tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x\phi\|\,\|\chi_u\phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \alpha_{\phi}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^{\zeta}}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^{\zeta}}. \tag{2.2.11}$$

(iii) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $\phi, \psi \in \mathrm{Span}\ \mathcal{G}_E$ et pour tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x\phi\|\,\|\chi_u\psi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\sqrt{\alpha_{\phi}\ \alpha_{\psi}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^{\zeta}}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^{\zeta}}. \tag{2.2.12}$$

(iv) Il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x, u \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x P_E\|_2\|\chi_u P_E\|_2 \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \alpha_E\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^{\zeta}}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^{\zeta}}. \tag{2.2.13}$$

(iv') Les propriétés (i), (ii), (iii) ou (iv) sont vérifiées avec $\alpha_\bullet = 1$ pour $\bullet = \phi, \psi$ des vecteurs normalisés ou $\bullet = E$, comme dans (2.2.5).
(v) Il existe un centre de localisation commun x_E pour tous les $\phi_n \in \mathcal{G}_E$ tel qu'il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ de telle sorte que pour tout $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x\phi_n\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x_E|^{\zeta}}\mathrm{e}^{-\sigma|x-x_E|^{\zeta}}. \tag{2.2.14}$$

(vi) Il existe un centre de localisation commun x_E pour tous les $\phi \in \mathrm{Span}\ \mathcal{G}_E$ tel qu'il existe $\sigma > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ de telle sorte que pour tout $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x \phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x_E|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_E|^\zeta}. \tag{2.2.15}$$

(vii) Il existe $x_E \in \mathbb{Z}^d$ et $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ tels que pour tout $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\chi_x P_E\|_2 \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x_E|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_E|^\zeta}. \tag{2.2.16}$$

(vii') Les propriétés (v), (vi) ou (vii) sont vérifiées avec un facteur supplémentaire $\sqrt{\alpha_{\phi_n}}$ dans la partie droite de (2.2.14) *et $\sqrt{\alpha_E}$ dans celles de* (2.2.15) *et* (2.2.16).

On désignera par (SUDEC+) l'une des propriétés (i), (ii), (iii), (iv), (iv′) et par (SULE+) l'une des propriétés (v), (vi), (vii), (vii′).
De plus, si une de ces propriétés ci-dessus est vérifiée alors les valeurs propres ont une multiplicité finie avce la borne

$$\mathrm{tr}\, P_E \leq C_{\zeta,\sigma}\ \alpha_E \langle x_E \rangle^{2\nu}, \tag{2.2.17}$$

et

$$\tilde{N}_L := \#\{E \in \mathcal{E}; |x_E| \leq L\} \leq C_{\zeta,\sigma}\ \alpha_{\mathcal{E}} L^{2\nu} \quad \textit{pour tout} \quad L \geq 1, \tag{2.2.18}$$

où x_E est comme dans (vii).

L'analyse multi-échelle (MSA) développée par Germinet et Klein pour étudier la *localisation* pour des opérateurs de Schrödinger aléatoires, fournit les formes fortes (SULE+) et (SUDEC+), [GK1, GK2].

L'existence d'un centre commun de localisation n'est pas anodin. C'est une conséquence forte de ce nous avons dénommé (SULE+) et (SUDEC+).

Proposition 2.2.3. *Supposons* (2.2.11). *Alors pour tout $\delta > 0$, il existe une constante C_δ telle que pour tout $\phi, \psi \in \mathrm{Ran}\ P_E$ et tout $E \in \mathcal{E}$, les centres de localisation x_ϕ, x_ψ satisfont*

$$|x_\phi - x_\psi| \leq \delta |x_\phi| + C_\delta. \tag{2.2.19}$$

Remarque 2.2.4. *Dans le cas où nous avons* (2.2.14) *avec $\epsilon = 0$, on déduit par la Proposition 2.2.3 que la multiplicité est uniformément finie, quitte à prendre $\delta = 0$ dans* (2.2.19).

2.3 Relation entre les trois classes de propriétés

On se pose maintenant la question du lien entre ces propriétés de décroissance avec celles de *localisation dynamique* citées dans le Théorème 2.1.1. Nous commençons par noter que

$$\|\chi_x P_E \chi_y\|_2 \leq \|\chi_x P_E\|_2 \|\chi_y P_E\|_2,$$

de telle sorte que (2.2.13) implique (2.1.8). On pourrait donc se demander si une décroissance rapide de $\|\chi_x P_E \chi_y\|_2$ est en fait équivalente à celle de $\|\chi_x P_E\|_2 \|\chi_y P_E\|_2$. Cette question a d'ailleurs été soulevée dans [DeRJLS2], où les auteurs ont prouvé l'équivalence dans le cas discet $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ et pour une multiplicité égale à un ($\operatorname{tr} P_E = 1$). Dans le même registre, les auteurs de [EGS] ont construit une base de $\mathcal{H}_E$ possédant une propriété de type (SUDEC) dans la mesure où $\operatorname{tr} P_E < \infty$ et $|\langle \delta_y, P_E\ \delta_x \rangle| \leq C_\epsilon \mathrm{e}^{\epsilon(|x|+|y|)} \mathrm{e}^{-\sigma|x-y|}$.

Nous cherchons à résumer les relations entre les trois catégories de propriétés décrites respectivement dans le Théorème 2.1.1, le Théorème 2.2.1 ainsi que dans le Thoérème 2.2.2. Nous répondons en particulier à la question de [DeRJLS2] portant sur l'équivalence entre (DL) et (SULE) et le rôle joué par la multiplicité. Et nous rappelons que Del Rio et al. traitaient seulement le cas d'un spectre simple [DeRJLS2].

Rappelons que les critères (SULE)/(SUDEC) caractérisent une famille de vecteurs propres alors que la notion de localisation dynamique concerne des énergies. Pour plus de commodité, nous adoptons la définition suivante.

Définition 2.3.1. On dit que l'opérateur H vérifie la propriété $(SUDEC)/(SULE)$ dans un intervalle $\mathcal{I}$ si le spectre de H dans $\mathcal{I}$ est purement ponctuel et vérifie $(SUDEC)/(SULE)$ pour l'ensemble $\mathcal{E} = \sigma(H) \cap \mathcal{I}$.
On considère la même définition pour (SUDEC+)/(SULE+) dans $\mathcal{I}$.

Théorème 2.3.1. *Soit $\mathcal{I}$ un intervalle tel qu'on a* (2.2.3). *Alors*
(i) On a

$$\text{(SUDEC+)/(SULE+) dans } \mathcal{I} \Longrightarrow \text{(SUDEC)/(SULE) dans } \mathcal{I} \Longrightarrow \text{(DL) dans } \mathcal{I}. \quad (2.3.1)$$

(ii) Si on suppose que $\operatorname{tr} P_E < \infty$ *pour tout* $E \in \mathcal{I}$, *on a*

$$\text{(SUDEC)/(SULE) dans } \mathcal{I} \Longleftrightarrow \text{(DL) dans } \mathcal{I}. \quad (2.3.2)$$

(iii) Il existe des opérateurs de Schrödinger

- *ayant des valeurs propres infiniment dégénérées et qui vérifient (DL) mais pas (SULE)/(SUDEC).*
- *avec (SULE)/(SUDEC) mais pas (SULE+)/(SUDEC+), dès que les valeurs propres ne sont pas simples.*

En fait, (SULE+)/(SUDEC+) fournit de sucroît une condition forte sur la répartition spatiale des centres de localisation que nous précisons à travers (2.2.19) dans la Proposition 2.2.3. Mais, il n'y a aucune raison pour qu'une condition si rigide sur les centres soient généralement vérifiées puisque des fonctions propres associées à une valeur propre donnée peuvent vivre éloignées les unes des autres. Cependant, il est facile de voir que (SULE)/(SUDEC) et (2.2.19) entraînent ensemble (SULE+)/(SUDEC+).

Remarque 2.3.2. *Bien évidement, si la multiplicité est simple alors (SULE)/(SUDEC) et (SULE+)/(SUDEC+) sont identiques.*

2.4 Application aux graphes

Comme nous l'avons précédement mentionné, ces résultats demeurent valables si nous nous plaçons dans un cadre de géométrie plus général. Pour ce faire, nous considérons un espace de Hilbert séparable $\mathbb{H}$ abstrait, muni d'une base $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on suppose orthonormale. Utilisant les notations antérieures, on définit le moment sous-exponentiel de paramètres σ and ζ

$$M_{e_u}(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t) := \sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{\sigma n^\zeta} |\langle \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)e_u, e_n\rangle_{\mathbb{H}}|^2, \tag{2.4.1}$$

où $e_u \in \mathbb{H}$ est un état initial et où $\langle .,. \rangle_{\mathbb{H}}$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{H}$. Notons que la quantité (2.4.1) correspond à (2.1.1) où on a remplacé χ_u par Π_{e_u}, la projection de rang un sur l'état e_u. Et dans ce contexte, le Théorème 2.1.1 subsiste. En effet, pour $L > 0$ et $u \in \mathbb{N}$, on définit la boule

$$B_L(e_u) := \{e_n, |n-u| \leq L\},$$

et on note que son cardinal $\#B_L(e_u) \leq 2L+1$ est en fait uniformément borné en u, de sorte que le Lemme 4.1.3 est vérifié avec $d = 1$ dans l'équation (4.1.12), qui est le seul endroit dans la preuve faisant intervenir la géométrie.

Toutefois, on perd la signification physique des moments et de la localisation dynamique. De ce point de vue, il est donc plus intéressant d'examiner le cas des graphes en tant que généralisation du réseau $\mathbb{Z}^d$.

Soit $\mathbb{G}$ un graphe de sommets $v \in \mathbb{V}$ et prenons $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{V})$. On considère la base canonique de $\ell^2(\mathbb{V})$ donnée par $\{\delta_v\}_{v\in\mathbb{V}}$ et on dispose d'une notion naturelle de distance d sur $\mathbb{V}$ définie par

$$d(u,v) = \inf_{p\,:\,u\sim v} \#\{p(u,v)\},$$

où $p(u,v)$ représente un chemin du graphe $\mathbb{G}$ joignant u et v, et $u \sim v$ signifie que les sommets u et v sont reliés. Dans le cas où $\mathbb{G}$ est un arbre, il n'y aurait qu'un seul chemin mais il se peut que $\mathbb{G}$ contienne des boucles. On définit maintenant la sphère

$$S_L(u) = \{v \in \mathbb{V};\ d(u,v) = L\},$$

de centre $u \in \mathbb{G}$ et de rayon L et on note $\mathcal{N}_L(u) = \#S_L(u)$.

Théorème 2.4.1. *On suppose qu'il existe $\beta \in [0,1[$ tel que*

$$\sup_u \mathcal{N}_L(u) \leq \mathrm{e}^{L^\beta}. \tag{2.4.2}$$

Alors nous avons le Théorème 2.1.1 pour $\zeta > \beta$.

Ainsi, le résultat s'applique aux graphes pourvu qu'ils aient une croissance modérée. Pour illustrer ceci et à titre d'exemple, les arbres à racines considérés dans [Br], répondent

bien à la condition de croissance (2.4.2). Et la localisation dynamique est bien établie pour les opérateurs de Schrödinger aléatoires définis sur de genre d'arbres [Br]. L'idée consiste à considérer des arbres étirés, ce qui leur confère des propriétés quasi-unidimentionnelle. On pourra aussi consulter [Tau].

Nous nous tournons maintenant vers les propriétés de type (SUDEC) et (SULE). La géométrie se manifeste à travers la condition

$$\alpha_{H,\mathcal{E},\alpha} = \sum_{u\in\mathbb{G}} \langle \delta_u, T_\alpha^{-1} P_{\mathcal{E}} T_\alpha^{-1}\ \delta_u\rangle < \infty, \tag{2.4.3}$$

où T_α est dans ce cas l'opérateur de multiplication par $e^{|u|^\alpha}$ pour $\alpha < \zeta$ fixé. Il traduit la croissance sous-exponentielle du volume (2.4.2) et remplace l'opérateur T qui était la multiplication par $\langle x\rangle^\nu$.

Théorème 2.4.2. *Supposons que les conditions* (2.4.2) *et* (2.4.3) *sont vérifiées pour* $\beta \in [0,1[$ *et* $\alpha \in]0,1[$ *tels que* $\beta < \alpha < \zeta$. *Alors nous avons les Théorème 2.2.1, Théorème 2.2.2 et Théorème 2.3.1.*

2.5 Localisation dynamique pour des opérateurs ergodiques

On étend les résultats de la section 2.1 au cas des hamiltonians aléatoire. Plus précisement, nous considérons un opérateur H_ω, $\mathbb{Z}^d$-ergodique operator avec $\omega = (\omega_\gamma)_\gamma$ des variables aléatoires. On adapte les même notations et les quantités précédement employées. On consider le moment aléatoire (σ,ζ)-sous-exponentiel

$$M_\omega(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t) := \left\| \mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2}|X|^\zeta} \mathrm{e}^{-itH_\omega} \mathcal{X}(H_\omega)\chi_0 \right\|_2^2 \tag{2.5.1}$$

et sa moyenne temporelle en espérance

$$\mathcal{M}_\omega(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) := \frac{1}{T}\int_0^T M_\omega(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t)\mathrm{d}t. \tag{2.5.2}$$

Nous établissons une version similaire en espérance du Théorème 2.1.1.

Théorème 2.5.1. *Soit* $\mathcal{I} \subset \sigma(H)$ *un ensemble compact. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ *tels que pour tout* $\epsilon > 0$ *et* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, *on a une constante* $C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, *tels que*

$$\liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}\{\mathcal{M}_\omega(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T)\} \le C_{\sigma,\zeta,\epsilon,\mathcal{X}}. \tag{2.5.3}$$

(ii) Il existe $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ *tels que pour toute* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, *on a*

$$\sup_T \mathbb{E}\{\mathcal{M}_\omega(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T)\} < \infty. \tag{2.5.4}$$

(*iii*) *Il existe* $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ *tels que pour toute* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, *on a*

$$\sup_T \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/T} M_{u,\omega}(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t)\}\mathrm{d}t\right) < \infty. \tag{2.5.5}$$

(*iv*) *Il existe* $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ *tels que pour toute* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$,

$$\mathbb{E}(\sup_t M_\omega(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t)) < \infty. \tag{2.5.6}$$

(*v*) *Il existe* $\zeta \in (0,1], \sigma > 0$ *tels que pour toute* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(I)$, *on a une constante* $C_{\zeta,\sigma,\mathcal{X}} < \infty$, *tels que pour tout* $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}(\sup_t \left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_0\right\|_2) \leq C_{\zeta,\sigma,\mathcal{X}}\ \mathrm{e}^{-\sigma|x|^\zeta}. \tag{2.5.7}$$

(*vi*) *Le spectre de l'opérateur* H *est purement ponctuel dans* $\mathcal{I}$ *et il existe* $\zeta \in (0,1], \sigma > 0$ *tels que pour toute* $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(\mathcal{I})$, *on a constant* $C_{\zeta,\sigma,\epsilon,\mathcal{X}} < \infty$, *de sorte que pour tout* $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{E}(\sup_k \mathcal{X}(E_{k,\omega})\|\chi_x P_{k,\omega}\chi_0\|_2) \leq C_{\zeta,\sigma,\mathcal{X}} e^{-\sigma|x|^\zeta}. \tag{2.5.8}$$

Si H *satisfait une de ces propriétés, on dira que* H *possède la propriété de localisation dynamique forte dans* $\mathcal{I}$.

Soulignons que l'ergodicité nous permet de restreindre l'étude de la dynamique près de l'origine en prenant $u = 0$ dans les moments.

Chapitre 3

Présentation des travaux de thèse : la correspondance des conductances de Hall

La seconde partie de cette thèse est dédiée à l'étude des conductances de Hall pour des opérateurs de Schrödinger magnétiques aléatoires qui satisfont aux propriétés de localisation décrites dans le chapitre 2.

Pour étudier la conductivité électrique de tels systèmes, nous disposons de deux points de vue. Si la conductance de Hall est appropriée à une vision globale du système étudié, une analyse près du bord met en évidence l'existence de courants de bord et leur quantification par la conductance de bord. Dans ce travail, nous cherchons à réconcilier ces deux approches en montrant que ces conductances coïncident et sont égales. Plus précisement, pour simuler le désordre dans le système, nous considérons des perturbations aléatoires du hamiltonien de Landau. Nous les prenons de nature électrique aussi bien que magnétique. On ajoute ensuite un mur confinant, ce qui, du point de vue classique, revient à restreindre le hamiltonien à un demi-plan. On le positionne avec l'aide d'un paramètre qu'on fait tendre vers l'infini, ce qui reviendra à envoyer le mure à l'infini. Soulignons que l'on considéra dans ce travail des modèles purement électriques et purement magnétiques (mur et perturbation aléatoire). Néanmoins, nous pouvons considérer des variantes avec un opérateur aléatoire électrique et un mur magnétique et vice-versa.

3.1 Modèles de Landau aléatoires

On définit le hamiltonien de Landau

$$H_B = (-i\nabla - \mathcal{A}_0)^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_0(x_1, x_2) = \frac{B}{2}(-x_2, x_1) \tag{3.1.1}$$

où $\mathcal{A}_0$ est le potentiel vecteur générant un champ magnétique de force constante $B > 0$. On considère des perturbations électrique V et magnétique A de H_B et on note

$$H_B(A, V) := (-i\nabla - \mathcal{A}_0 - A)^2 + V.$$

Rappelons les conditions de Leinfelder-Simader (LS) pour un opérateur de la forme

$$H(A, V) := (-i\nabla - A)^2 + V. \tag{3.1.2}$$

On dit que le potentiel magnétique A et le potentiel électrique V satisfont les conditions de Leinfelder-Simader si

1. $A \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ avec $\operatorname{div} A \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. $V(x) = V_+(x) - V_-(x)$ où $V_\pm \geq 0, V_\pm \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et V_- est relativement borné par rapport à $-\Delta$ avec une borne relative < 1 telle qu'ils existent $0 \leq \alpha < 1$ et $\beta \geq 0$ de sorte que pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Delta)$ on ait

$$\|V_-\psi\| \leq \alpha \|\Delta\psi\| + \beta \|\psi\|.$$

Sous ces conditions, l'opérateur $H(A, V)$ défini dans (3.1.2) est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ [LS].

Dans ce travail, nous nous intéressons à des perturbations aléatoires de H_B de nature électriques aussi bien que magnétiques. Nous commençons par considérer le hamiltonien de Landau aléatoire avec potentiel électrique

$$H_\omega^{\mathsf{E}} = H_B + V_\omega \quad \text{sur} \quad L^2(\mathbb{R}^2), \tag{3.1.3}$$

avec V_ω une perturbation électrique de type Anderson

$$V_\omega = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} \omega_\gamma u(. - \gamma),$$

où $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) et le potentiel à site simple u est une fonction positive mesurable et bornée de $\mathbb{R}^2$ à support compact tels que $-M_1 \leq V_\omega \leq M_2$ et où $0 \leq M_1, M_2 < \infty$. On suppose que la famille $(\omega_\gamma)_\gamma$ a une distribution de probabilité non dégénérée μ de densité ρ bornée. On note par $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité sous-jacent et par $\mathbb{E}$ l'espérance associée.

En utilisant les translations magnétiques U_α définies par

$$(U_\alpha \psi)(x) = \mathrm{e}^{-i\frac{B}{2}\alpha \wedge x}\psi(x - \alpha) \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1.4}$$

avec $\alpha \wedge x = \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1$, on peut voir que H_ω est un opérateur $\mathbb{Z}^2$-ergodique et essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, il résulte par [CL] qu'il existe un sous-ensemble $\Sigma_{\mathsf{E}} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma(H_\omega^{\mathsf{E}}) = \Sigma_{\mathsf{E}} \quad \text{p.t} \quad \omega \in \Omega. \tag{3.1.5}$$

Le spectre du Landau libre H_B dans (3.1.1) consiste en une suite de valeurs propres infiniment dégénérées, appelées les niveaux de Landau et données par

$$B_n = (2n-1)B, \ n = 1, 2, \dots \tag{3.1.6}$$

avec la convention $B_0 = -\infty$. Et nous avons

$$\Sigma_{\mathsf{E}} \subset \bigcup_{n\geq 1} [B_n - M_1, B_n + M_2], \tag{3.1.7}$$

et il n'y a pas de chevauchement dès que la condition de gap ouvert $M_1 + M_2 < 2B$ est remplie.

On considère également des perturbations magnétiques de H_B. Soit $\mathcal{A}_\omega$ un potentiel vecteur aléatoire de la forme

$$\mathcal{A}_\omega = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^2} \omega_\gamma u(. - \gamma),$$

qui satisfait les conditions de Leinfelder-Simader [LS] presque sûrement. Les fonctions site simple $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sont à support compact et les variables aléatoires $\omega = (\omega_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^2}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (iid). On désignera encore l'espace de probabilité par $(\Omega, \mathbb{P})$.

On définit l'opérateur magnétique aléatoire

$$H_\omega^{\mathsf{M}} = (-i\nabla - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_\omega)^2 \quad \text{sur} \ \ L^2(\mathbb{R}^2), \tag{3.1.8}$$

qui est essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. A l'instar de (3.1.5), il existe un ensemble $\Sigma_{\mathsf{M}} \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\sigma(H_\omega^{\mathsf{M}}) = \Sigma_{\mathsf{M}} \quad \text{p.t} \ \ \omega \in \Omega. \tag{3.1.9}$$

Le spectre Σ_{M} est contenu dans une union d'intervalles [DGR1, Lemma 4.4]

$$\Sigma_{\mathsf{M}} \subset \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{J}_n \tag{3.1.10}$$

tel que $B_n \in \mathcal{J}_n(B) = [\alpha_n(B), \beta_n(B)]$.

Les opérateurs H_ω^{E} et H_ω^{M} sont bornés inférieurement presque sûrement. En prenant $\bullet = \mathsf{E}, \mathsf{M}$, il existe $\Theta_\bullet \geq 1$ [BoGKS] tel que

$$H_\omega^\bullet + \Theta_\bullet \geq 1, \quad \mathbb{P} - \text{p.p.} \tag{3.1.11}$$

Pour alléger les notations et comme notre analyse demeure pratiquement la même pour les deux modèles, nous allons en général omettre la mention E et M et écrire directement H_ω pour désigner H_ω^{E} et H_ω^{M}. Toutefois, nous préciserons le cas que nous traitons lorsque nécessaire.

3.1.1 Localisation

Pour $m > 0$ et $\zeta \in]0,1]$ donnés, on introduit le moment aléatoire (m,ζ)-sous-exponentiel au temps t de l'évolution temporelle, initialement localisée en espace autour de l'origine et localisée en énergie par la fonction $\mathcal{X} \in \mathcal{C}^{\infty}_{c,+}(\mathcal{I})$,

$$M_\omega(m,\zeta,\mathcal{X},t) := \left\| \mathrm{e}^{\frac{m}{2}|X|^\zeta} \mathrm{e}^{-itH_\omega} \mathcal{X}(H_\omega)\chi_0 \right\|_2^2. \tag{3.1.12}$$

On définit sa moyenne temporelle en espérance par

$$\mathcal{M}(m,\zeta,\mathcal{X},T) := \frac{1}{T}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/T}\ \mathbb{E}\{M_\omega(m,\zeta,\mathcal{X},t)\}\ \mathrm{d}t. \tag{3.1.13}$$

Notons que ces quantité (3.1.12) et (3.1.13) ne sont pas les mêmes que (2.1.1) et (2.1.2) même si notre notation est similaire.

Pour une énergie $E \in \mathbb{R}$, on considère le projecteur de Fermi $P_\omega^{(E)} = \chi_{(-\infty,E]}(H_\omega)$, qui est la projection spectrale de H_ω sur les énergies en-dessous de E.

Définition 3.1.1.

(Loc) On dit que H_ω a la propriété de localisation dans un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ s'il existe $m > 0, \zeta \in]0,1]$ tels que pour tout $\mathcal{X} \in C^{\infty}_{c,+}(I)$, on ait

$$\sup_T \mathcal{M}(m,\zeta,\mathcal{X},T) < \infty. \tag{3.1.14}$$

On note Σ_{loc} la région de localisation dynamique

$$\Sigma_{loc} := \{E \in \mathbb{R} :\ H_\omega \text{ vérifie (3.1.14) dans un voisinage de } E\}. \tag{3.1.15}$$

(DFP) Le projecteur de Fermi $P_\omega^{(E)}$ décroit sous-exponentiellement si l'énergie de Fermi $E \in \Sigma_{loc}$ et s'il existe $m > 0, \zeta \in]0,1]$ tels qu'on a

$$\mathbb{E}\left\{ \left\| \chi_x P_\omega^{(E)} \chi_y \right\|_2^2 \right\} \leq C_{m,\zeta,B,E}\ \mathrm{e}^{-m|x-y|^\zeta} \quad \text{pour tout } x,y \in \mathbb{Z}^2, \tag{3.1.16}$$

où la constante $C_{m,\zeta,B,E}$ est localement bornée en E. En conséquence, nous avons que pour tout $\epsilon > 0$

$$\left\| \chi_x P_\omega^{(E)} \chi_y \right\|_2 \leq C_{\omega,m,\zeta,\epsilon,B,E}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x|^\zeta} \mathrm{e}^{-m|x-y|^\zeta}, \tag{3.1.17}$$

$\mathbb{P}-$ p.p et pour tout $x,y \in \mathbb{Z}^2$.

L'existence de la région de localisation (3.1.15) a été prouvée dans [CH, W, GK3] pour les modèles électriques. Elle correspond à la région de validité de l'analyse multi-échelles *(MSA)*, [GK1, GK2]. Pour ce qui des modèles magnétiques, ils ont été traité dans [DGR2, GhHK].

Les propriétés **(DFP)** et (3.1.17) jouent un rôle important dans la définition et l'étude de la conductance de Hall.

3.1.2 Conductance de Hall

On considère la fonction lisse $\Lambda(s) = \chi_{(\infty,-\frac{1}{2}]}(s)$ qui vaut 1 pour $s \leq -\frac{1}{2}$ et 0 pour $s \geq 1$ et telle que $\mathrm{supp}\Lambda' \subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On note par Λ_j l'opérateur de multiplication par la fonction $\Lambda_j(x) = \Lambda(x_j)$ pour $j = 1, 2$.

Définition 3.1.2. La conductance de Hall associée à l'énergie de Fermi E est définie par

$$\sigma_{\mathrm{Hall}}(B, \omega, E) := -i \operatorname{tr}\left[P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)}, P_\omega^{(E)} \Lambda_1 P_\omega^{(E)}\right]. \tag{3.1.18}$$

Soulignons que cette formule provient de la théorie de la réponse linéaire. Compte tenu de (3.1.16), elle est bien définie dans la région Σ_{loc}, [GKS1]. De plus, l'ergodicité assure que c'est une quantité non aléatoire telle que $\mathbb{P} - \mathrm{p.p}$

$$\sigma_{\mathrm{Hall}}(B, E) := \mathbb{E}\left\{\sigma_{\mathrm{Hall}}(B, \omega, E)\right\} = \sigma_{\mathrm{Hall}}(B, \omega, E). \tag{3.1.19}$$

Notons que les opérateurs $P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)}$ et $P_\omega^{(E)} \Lambda_1 P_\omega^{(E)}$ dans (3.1.18) ne sont pas séparément de classe trace autrement leur commutateur serait égal à zéro.

Par ailleurs, il est dorénavant connu que la conductance de Hall $\sigma_{\mathrm{Hall}}(B, E)$ est constante dans la zone de localisation Σ_{loc}, [BES, AG, GKS1, GKS2]. Ce qui justifie justement l'apparition des plateaux de l'EHQ puisque les états localisés ne peuvent pas transporter de courant, empêchant par conséquent les particules de se déplacer librement à travers le milieu.

Remark 3.1.3. *Remarquons qu'on pourrait aussi définir* (3.1.18) *par*

$$-i \operatorname{tr}\{P_\omega^{(E)} \left[\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right], \left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_1\right]\right]\}. \tag{3.1.20}$$

L'opérateur $\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] \left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_1\right]$ *dans* (3.1.20) *est moralement concentré près de l'origine. Une autre forme se joint à* (3.1.20) *pour définir la conductance de Hall. Elle est donnée par*

$$-i \operatorname{tr}\{\chi_0 \; P_\omega^{(E)} \left[\left[P_\omega^{(E)}, X_2\right], \left[P_\omega^{(E)}, X_1\right]\right] \chi_0\}, \tag{3.1.21}$$

où X_i *est l'opérateur de multiplication par la coordonnée* x_i *pour* $i = 1, 2$.

3.2 Modèles avec mur

Nous sommes intéressés dans cette étude par les murs confinants de nature magnétique ou électrique.

3.2.1 Mur électrique

Soit $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction décroissante invariante dans la direction de x_2 telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x_1 \to -\infty} U(x_1) = U_- < \infty \\ U(x_1) = 0 \ \text{ pour } x_1 \geq 0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

On prend la limite U_- assez grande par rapport à la zone d'énergie dans laquelle on travaille. L'opérateur de bord Electrique est

$$H^{\mathsf{E}}_{\omega,a} = H_B + U_a + V_\omega, \tag{3.2.2}$$

où $a > 0$ et U_a est la multiplication par la fonction $U_a(x_1) = U(x_1 + a)$ qui permet de translater le mur. C'est un mur souple confinant tel que la particule demeure emprisonnée et confinée dans la partie droite du plan, dès lors que l'énergie des particules est suffisement basse.

3.2.2 Mur magnétique

Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ un potentiel vecteur générant le champ magnétique $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla \wedge \mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x), \text{ pour } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.2.3}$$

où $\mathcal{B}$ est une fonction lisse décroissante et x_2-invariante telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x_1 \to -\infty} \mathcal{B}(x_1) = B_- < \infty \\ B(x_1) = 0 \ \text{ pour } x_1 \geq 0. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

A l'instar du mur électrique, nous translatons le mur avec un paramètre $a > 0$,

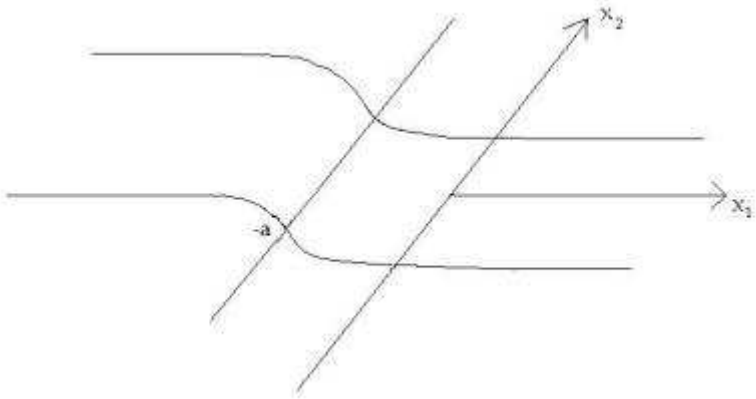
$$\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}(x_1 + a, x_2) - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}(x_1 + a, x_2) = \mathcal{B}(x_1 + a) := \mathcal{B}_a(x_1). \tag{3.2.5}$$

Dans ce cas, l'opérateur de bord Magnétique est

$$H^{\mathsf{M}}_{\omega,a} = (-i\nabla - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_a - \mathcal{A}_\omega)^2. \tag{3.2.6}$$

Signalons qu'avec $\mathcal{A}_a^{\mathrm{Iw}} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_a$, on obtient le champ magnétique communément appelé d'Iwatsuka [I] aux limites en $\pm\infty$, $B + B_-$ et B [CFKS, DGR1, E].

Le dessin ci-contre illustre la position du mur.



Par $H_{\omega,a}$, nous entendons $H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}$ et $H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}$. Notons que les opérateurs de bord $H_{\omega,a}$ convergent vers H_ω au sens de convergence forte des résolvantes. C'est ce que nous montrons dans la section B.2 de l'appendice B.

Remark 3.2.1. *Pour justifier cette convergence, on considère les opérateurs*

$$\Gamma^{\mathsf{M}}_{\omega,a} = H^{\mathsf{M}}_{\omega,a} - H^{\mathsf{M}}_{\omega} = -2\mathcal{A}_a.(-i\nabla - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_\omega) + i\,\mathrm{div}\,\mathcal{A}_a + |\mathcal{A}_a|^2, \tag{3.2.7}$$

et

$$\Gamma^{\mathsf{E}}_{\omega,a} = H^{\mathsf{E}}_{\omega,a} - H^{\mathsf{E}}_{\omega} = 2i\mathcal{A}_0.\nabla + |\mathcal{A}_0|^2. \tag{3.2.8}$$

Utilisant le fait que l'opérateur $R_{\omega,a}\Gamma_{\omega,a}$ est uniformément borné en a et par densité des fonctions à support compact dans $\mathcal{H}$, il suffit de montrer cette convergence forte dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Cela revient à consider une fonction test $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathrm{supp}\phi$ *vit assez loin du mur de sorte que* $\mathrm{supp}\phi \cap \mathrm{supp}\mathcal{B}_a = \emptyset$*, conformément au Lemme B.2.1.*

En raison de l'invariance de jauge pour les opérateurs magnétiques, on choisira une transformation appropriée qui permet de simplifier l'étude spectrale des opérateurs de la forme $(-i\nabla - \mathcal{A})^2$. Prenons la jauge de Landau où

$$\mathcal{A} = (0, \mathcal{A}_2) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \beta(x_1) := \int_0^{x_1} \mathcal{B}(s)\mathrm{d}s. \tag{3.2.9}$$

La transformée de Fourier partielle par rapport à la variable x_2 nous permet d'expliciter l'écriture de $H(\mathcal{A})$

$$H(\mathcal{A}) = -\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + (-i\frac{\partial}{\partial x_2} - \beta(x_1))^2. \tag{3.2.10}$$

L'opérateur $H(A, V)$ est donc unitairement équivalent à

$$h(k) := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}{x_1}^2} + (k - \beta(x_1))^2, \text{ pour } k \in \mathbb{R} \tag{3.2.11}$$

dont le spectre est discret [E]. Par ailleurs, l'invariance dans la direction de x_2 permet de tirer profit d'une transformée de Fourier partielle.

Dans ce travail, nous considérons des modéles purement électriques et purement magnétiques. Néanmoins, nous pouvons combiner un potentiel électrique aléatoire avec un mur magnétique et vice versa, et reproduire la même analyse.

3.2.3 Conductance de bord

On commence par définir les fonctions de Heaviside régulières.

Définition 3.2.2. Soit $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction lisse et décroissante. On dit que g est une fonction de Heaviside régulière si sa dérivée possède un support compact telle que $g(x) = 1$ pour $x \leq \inf \operatorname{supp} g'$ et $g(x) = 0$ pour $x \geq \sup \operatorname{supp} g'$.
Lorsque $\operatorname{supp} g' \subset I$, on dira que g est une fonction de Heaviside régulière de I.

Nous définissons ensuite la conductance de bord générée près du mur positionné en $-a$ et pour une fenêtre spectrale $\mathcal{I}$ se situant dans la région de localisation du hamiltonien sans mur H_ω. Signalons que la conductance de bord est habituellement définie par

$$-i \operatorname{tr} g'(H_{\omega,a}) \left[H_{\omega,a}, \Lambda_2\right], \tag{3.2.12}$$

lorsque l'intervalle $\mathcal{I}$ se situe dans une lacune spectrale de H_ω. Cependant pour un intérêt physique, il est plus approprié de considérer le cas où $\mathcal{I}$ contient des énérgies associées à des états localisés, c-à-d $\mathcal{I} \cap \Sigma_{loc} \neq \emptyset$. Si on coupe avec un mur, les états ayant de telles énergies peuvent générer des courants supplémentaires que nous devons annuler. Pour ce faire, nous avons recours à une régularisation afin que (3.2.12) soit bien définie. Des régularisations ont été parallèlement proposées dans [CG, CGH] ainsi que [EGS]. Dans la seconde approche de [EGS], les auteurs ont fait appel à une régularisation temporelle, dans le sens où ils ont considéré l'évolution de Λ_1 sous l'action du groupe de Heinsenberg et pris une moyenne en temps. C'est cette régularisation que nous considérons dans ce travail.

Définition 3.2.3. Soit $\mathcal{I}$ un intervalle tel que $\mathcal{I} \subset]B_n, B_{n+1}[\cap \Sigma_{\mathrm{loc}}$ pour un certain n. Soit g une fonction de Heaviside régulière de $\mathcal{I}$. La conductance de bord régularisée de H_ω dans $\mathcal{I}$ est définie par

$$\sigma_{e,\omega}^{\mathrm{reg}} := \lim_{T\to\infty} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T -i \operatorname{tr} g'(H_{\omega,a}) \left[H_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \Lambda_{1,a}^{\omega}(t) \mathrm{d}t, \tag{3.2.13}$$

quand les limites existent et où $\Lambda_{1,a}^{\omega}(t) := \mathrm{e}^{itH_{\omega,a}} \Lambda_1 \, \mathrm{e}^{-itH_{\omega,a}}$.

Remarque 3.2.4. *Soulignons que les définitions* (3.1.18) *et* (3.2.13) *ne dépendent ni de g, tant que* $\operatorname{supp} g' \subset \mathcal{I}$, *ni de Λ_j pour $j = 1, 2$.*

Comme l'opérateur $g'(H_{\omega,a}) \left[H_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \Lambda_{1,a}^{\omega}(t)$ est borné, nous n'avons qu'à vérifier que la trace dans (3.2.13) est bien définie et que les limites existent. L'idée est que loin du bord, la dynamique de $\Lambda_{1,a}^{\omega}(t)$ s'approche de celle de $\mathrm{e}^{itH_\omega} \Lambda_1 \mathrm{e}^{-itH_\omega}$.

3.3 Egalité des conductances

Le résultat principal de ce chapitre consiste à établir l'égalité des conductances de Hall et de bord dans une région de localisation et en présence d'un mur confinant. Ce résultat est une extension de [EGS] au cas continu et pour des opérateurs de Schrödinger avec perturbations magnétiques aléatoires.

Théorème 3.3.1. *Soit $\mathcal{I}$ un intervalle tel que $\mathcal{I} \subset]B_n, B_{n+1}[\cap \Sigma_{loc}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors pour toute fonction g de Heaviside régulière de $\mathcal{I}$ et tout $E \in \mathrm{supp} g'$, la conductance de bord* (3.2.13) *est bien définie et nous avons*

$$\sigma_{e,\omega}^{\mathrm{reg}} = \sigma_{\mathrm{Hall}}(B, \omega, E) \quad \text{pour } \mathbb{P} - \text{p.t } \omega. \tag{3.3.1}$$

3.4 Stratégie de la preuve

Tout au long de cette section, on fixe $\omega \in \Omega$ et on considère l'intervalle $\mathcal{I}$ dans une région de localisation de sorte que $\mathcal{I} \subset]B_n, B_{n+1}[\cap \Sigma_{loc}$ pour $n \in \mathbb{N}$ donné et g une fonction de Heaviside régulière de $\mathcal{I}$.

Le cœur de la preuve du Théorème 3.3.1 repose sur des lemmes intermédiaires que nous allons expliciter ci-dessous.

Nous commençons par comparer les opérateurs $g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2]$ et $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]$ grâce aux formules de Helffer-Sjöstrand (B.3.2) et (B.3.3) mais que l'on applique à la fonction primitive

$$G(x) := \int_x^\infty g(s)\mathrm{d}s.$$

Nous avons donc

$$g(H_{\omega,a}) = -\frac{1}{2\pi} \int \overline{\partial} \tilde{G}(z) R_{\omega,a}^2(z)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.4.1}$$

et

$$g'(H_{\omega,a}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\partial} \tilde{G}(z) R_{\omega,a}^3(z)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.4.2}$$

où $R_{\omega,a}(z) = (H_{\omega,a} - z)^{-1}$ et $z = u + iv$ et $\tilde{G}$ est une extension quasi-analytique de G d'ordre k pour $k = 1, 2, \ldots$. Nous utilisons ensuite l'identité de la résolvante

$$\left[R_{\omega,a}^2(z), \Lambda_j\right] = -R_{\omega,a}^2(z)\,[H_{\omega,a}, \Lambda_j]\,R_{\omega,a}(z) - R_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a}, \Lambda_j]\,R_{\omega,a}^2(z) \tag{3.4.3}$$

pour écrire

$$\begin{aligned}[g(H_{\omega,a}),\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\overline{\partial}\tilde{G}(z)R^2_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R_{\omega,a}(z)\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\overline{\partial}\tilde{G}(z)R_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R^2_{\omega,a}(z)\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (3.4.4)\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous affirmons que les opérateurs

$$[g(H_{\omega,a}),\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) \quad \text{et} \quad g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$$

sont à trace en vertu du Lemme 3.4.1 . De plus, en utilisant la cyclicité de la trace, nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} R^3_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) &= \frac{1}{2}\operatorname{tr} R^2_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)R_{\omega,a}(z)\\ &+\frac{1}{2}\operatorname{tr} R_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)R^2_{\omega,a}(z). \qquad (3.4.5)\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à comparer (3.4.4) et (3.4.5). On en déduit un opérateur $\mathcal{R}_{\omega,a}(t)$ que nous dénommons l'opérateur « reste », tel que

$$\operatorname{tr} g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) = \operatorname{tr}[g(H_{\omega,a,}),\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) + \operatorname{tr}\mathcal{R}_{\omega,a}(t), \qquad (3.4.6)$$

où

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\omega,a}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\overline{\partial}\tilde{G}(z)R^2_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R_{\omega,a}(z)\left[H_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]R_{\omega,a}(z)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &+\frac{1}{2\pi}\int\overline{\partial}\tilde{G}(z)R_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R^2_{\omega,a}(z)\left[H_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]R_{\omega,a}(z)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &+\frac{1}{2\pi}\int\overline{\partial}\tilde{G}(z)R_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R_{\omega,a}(z)\left[H_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]R^2_{\omega,a}(z)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (3.4.7)\end{aligned}$$

Nous signalons que nous avons délibérément appliqué (B.3.2) et (B.3.3) à la fonction primitive G dans le but de gagner une résolvante de plus. Une telle puissance de résolvante n'est pas uniquement nécessaire pour le modèle purement magnétique mais également dans le cas électrique. La convergence forte que $\mathcal{R}_{\omega,a}$ doit satisfaire dans le Lemme 3.4.2, la réclame.

Les étapes principales de notre démonstration du Théorème 3.3.1 sont établies par l'enchaînement des lemmes qui suivent. La stratégie revient à envoyer le mur à l'infini en prenant la limite en $a \to +\infty$ des traces dans (3.4.6). Ce qui mène à analyser des quantités associées aux hamiltoniens sans mur et à prendre la moyenne en temps.

On commence par un premier lemme qui établit la propriété classe trace des opérateurs qu'on a manipulé jusqu'à présent.

Lemme 3.4.1. *Soit g une fonction de Heaviside régulière d'un intervalle $\mathcal{I}$. Alors les opérateurs*

$$[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda_1 \ , \ g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,\Lambda_1 \ , \ [g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) \ \text{ et } \ g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$$

sont à trace. De plus, nous avons $\operatorname{tr}[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda_1 = 0$.

Le prochain lemme évalue la contribution de l'opérateur reste (3.4.7).

Lemme 3.4.2. *Soit g une fonction de Heaviside d'un intervalle $\mathcal{I}$. Alors*

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{tr}\mathcal{R}_{\omega,a}(t)\ \mathrm{d}t = 0. \tag{3.4.8}$$

Alors que le Lemme 3.4.2 met en évidence la non contribution de $\mathcal{R}_{\omega,a}$, le premier terme de la partie droite de (3.4.6) est d'une importance considérable. Mais au lieu d'étudier l'opérateur $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$ tel qu'il est, nous allons plutôt considérer

$$[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,(\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) - \Lambda_1),$$

puisque l'opérateur $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda_1$ a une trace nulle d'après le Lemme 3.4.1. Ce dernier n'affecte en rien la valeur de la trace mais apporte une localisation en espace en x_1.

Lemme 3.4.3. *Soit g une fonction de Heaviside d'un intervalle $\mathcal{I}$. Alors on a*

$$\lim_{a\to\infty}\operatorname{tr}[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,(\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) - \Lambda_1) = \operatorname{tr}[g(H_{\omega}), \Lambda_2]\,(\Lambda^{\omega}_{1}(t) - \Lambda_1) \tag{3.4.9}$$

uniformément en t.

Ainsi, nous pouvons nous charger des quantités obtenues qui correspondent à l'opérateur H_ω et évaluer leurs contributions en moyenne temporelle.

Lemme 3.4.4. *Soit $\mathcal{I}$ un intervalle tel que $\mathcal{I} \subset]B_n, B_{n+1}[\cap\Sigma_{loc}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit g une fonction de Heaviside de $\mathcal{I}$. Alors on a*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{tr}[g(H_{\omega}), \Lambda_2]\,(\Lambda^{\omega}_{1}(t) - \Lambda_1)\ \mathrm{d}t = \int g'(E)\operatorname{tr}\Pi_E\ \mathrm{d}E, \tag{3.4.10}$$

où $\Pi_E = P^{(E)}_{\omega}\Lambda_2 P^{(E)\perp}_{\omega}\Lambda_1 P^{(E)}_{\omega} - P^{(E)\perp}_{\omega}\Lambda_2 P^{(E)}_{\omega}\Lambda_1 P^{(E)\perp}_{\omega}$ *et* $P^{(E)\perp}_{\omega} = 1 - P^{(E)}_{\omega}$.

Nous tenons à mettre en exergue Λ_1 qu'on a introduit dans $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$ pour la localisation spatiale en x_1 que la différence $\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) - \Lambda_1$ apporte. Ce qui permet à l'opérateur $[g(H_{\omega}), \Lambda_2]\,(\Lambda^{\omega}_{1}(t) - \Lambda_1)$, à droite de (3.4.9), d'être à trace. Mais, en considérant une moyenne en temps, le Lemma 3.4.4 affirme que nous ne conservons que la partie qui en fin de compte vient du nouveau terme associé à Λ_1.

Nous revenons maintenant sur la conductance de Hall (3.1.18) qui s'avère être directement reliée à Π_E grâce à une réecriture de σ_{Hall}.

Lemme 3.4.5. *Soit $\mathcal{I}$ un intervalle tel que nous avons $\mathcal{I} \subset]B_n, B_{n+1}[\cap \Sigma_{loc}$ pour $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors pour tout $E \in \mathcal{I}$, nous avons*

$$\sigma_{\mathrm{Hall}}(B, \omega, E) = i \operatorname{tr}(P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_1 P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_2 P_\omega^{(E)} \Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}) = i \operatorname{tr} \Pi_E. \tag{3.4.11}$$

Après avoir mis en place ces lemmes préliminaires et grâce aux hypothèses sur la fonction g et le fait que la conductance de Hall est constante dans une région de localisation [GKS1], nous déduisons donc

$$\sigma_{e,\omega}^{\mathrm{reg}} = \int g'(E)\ \sigma_{\mathrm{Hall}}(B, \omega, E)\ \mathrm{d}E = \sigma_{\mathrm{Hall}}(B, \omega, E), \tag{3.4.12}$$

pour tout $E \in I \subset]B_n, B_{n+1}[\cap \Sigma_{loc}$.

Chapter 4

Spectral properties of DL

Contents

4.1 Dynamical localization 37
4.2 SULE, SUDEC 42
4.3 SULE+, SUDEC+ 45
4.4 Relationships between classes of localization properties . . . 48
4.5 Generalized eigenfunction expansion 50
4.6 Counterexamples 52
4.7 Extension to graphs 53
4.8 Dynamical localization for ergodic Hamiltonians 54

This chapter is devoted of the proofs of the results in spectral properties of dynamical localization cited in chapter 2.

These results are contained in the article "Spectral properties of dynamical localization for Schrödinger operators "accepted for publication in Review of Mathematical Physics [GT].

4.1 Dynamical localization

In this section, we prove Theorem 2.1.1, as a combination of the theorems below. Given $u \in \mathbb{Z}^d$, we define the function

$$\mathcal{P}_u(x, \mathcal{X}) := \sup_k \mathcal{X}(E_k) \|\chi_x P_{E_k} \chi_u\|_2, \tag{4.1.1}$$

and its corresponding moment

$$\mathcal{L}_u(\sigma, \zeta, \mathcal{X}) := \sum_x \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta} \ \mathcal{P}_u^2(x, \mathcal{X}), \tag{4.1.2}$$

for $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ and where P_{E_k} denotes the eigenprojection associated to the eigenvalue E_k.

The role of the function $\mathcal{P}_u(x,\mathcal{X})$ defined in (4.1.1) is to describe the decay of the eigenprojectors in terms of the subexponential moment (3.1.12) which will yield directly (2.1.8).

Theorem 4.1.1. *Suppose that H has pure point spectrum in $\mathcal{I}$. Fix $\sigma > 0$ and $\zeta \in (0,1]$. There exists a constant $C_{\sigma,\zeta} > 0$ such that*

$$\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) \geq C_{\sigma,\zeta}\ \mathcal{L}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X}), \tag{4.1.3}$$

for any $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_b(I)$ and all $u \in \mathbb{Z}^d$. And thus, for some constant $C_{\sigma,\zeta} < \infty$,

$$\mathcal{P}_u(x,\mathcal{X}) \leq C_{\sigma,\zeta}\ (\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T))^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2}\ |x-u|^\zeta}. \tag{4.1.4}$$

Proof. If $\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) = \infty$, then the result is immediate. We thus assume that $\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) < \infty$. We notice that

$$M_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},t) \geq C_{\sigma,\zeta} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta} \left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2^2. \tag{4.1.5}$$

Indeed, we write

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{2}|X_u|^\zeta}\mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2^2 &= \mathrm{tr}\{\chi_u\ \mathrm{e}^{itH}\mathcal{X}(H)\ \mathrm{e}^{\sigma|X_u|^\zeta}\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\} \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{tr}\{\chi_u\ \mathrm{e}^{itH}\mathcal{X}(H)\ \mathrm{e}^{\sigma|X_u|^\zeta}\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\} \\
&\geq C_{\sigma,\zeta} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\ \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta}\ \mathrm{tr}\{\chi_u\ \mathrm{e}^{itH}\mathcal{X}(H)\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\} \\
&= C_{\sigma,\zeta} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\ \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta}\left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2^2,
\end{aligned}$$

where we have bounded from below the function

$$\mathrm{e}^{\sigma|X-u|^\zeta}\chi_u(y) = \mathrm{e}^{\sigma|y-u|^\zeta}\chi_u(y).$$

For $T > 0$ and $L \geq 1$, we define the finite volume time-averaged moment

$$\mathcal{M}_u^L(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) := \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{x\in\Lambda_L(u)} \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta}\left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2^2\ \mathrm{d}t.$$

The decomposition of the kernel over the eigenspaces allows us to write

$$\mathcal{M}_u^L(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) = \sum_{k,k'} \mathcal{X}(E_k)\mathcal{X}(E_{k'}) \sum_{x\in\Lambda_L(u)} \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta} \\ \mathrm{tr}\{\chi_x P_{E_k}\chi_u P_{E'_k}\chi_x\} \left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-it(E_k-E'_k)}\,\mathrm{d}t\right). \tag{4.1.6}$$

By the dominated convergence theorem, we have

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{M}_u^L(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) = \sum_k \sum_{x\in\Lambda_L(u)} \mathcal{X}^2(E_k)\mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta}\|\chi_x P_{E_k}\chi_u\|_2^2,$$

where we have used the fact that

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-it(E_k-E_{k'})}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & k=k' \\ \frac{\mathrm{e}^{-iT(E_k-E_{k'})}-1}{-iT(E_k-E_{k'})} & k\neq k' \end{cases}.$$

Now since

$$\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) \geq C_{\sigma,\zeta} \lim_{T\to\infty} \mathcal{M}_u^L(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T),$$

and taking the limit when $L\to\infty$, we deduce that

$$\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T) \geq C_{\sigma,\zeta} \sum_k \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{X}^2(E_k)\ \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta}\|\chi_x P_{E_k}\chi_u\|_2^2 \\ \geq C_{\sigma,\zeta}\ \mathcal{L}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X}). \tag{4.1.7}$$

As a consequence, (4.1.4) holds. □

The next statement relates (2.1.8) and (2.1.7), which are called (SULP) and (SUDL) respectively.

Theorem 4.1.2. *Suppose that H has pure point spectrum in $\mathcal{I}$. Fix $\sigma>0$ and $\zeta\in(0,1]$ and let $\gamma\in(0,1)$. Then*

$$\sup_t \left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2 \leq C_{\sigma,\zeta,d,\gamma,\mathcal{I}}\ \mathcal{P}_u^{1-\gamma}(x,\mathcal{X})\ \mathcal{L}_u^{\gamma/2}(\sigma,\zeta,\mathcal{X}), \tag{4.1.8}$$

for all $x,u\in\mathbb{Z}^d$ and any function $\mathcal{X}\in\mathcal{B}_b(\mathcal{I})$. As a consequence, we have

$$\sup_t \left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2 \leq C_{\sigma,\zeta,d,\gamma,\mathcal{I}}\ (\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X},T)^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{(1-\gamma)}{2}\ \sigma|x-u|^\zeta}. \tag{4.1.9}$$

Proof. Noting that

$$\|\chi_x P_{E_k}\chi_y\|_2 \leq \|\chi_x P_{E_k}\|_2\|\chi_y P_{E_k}\|_2,$$

we have

$$\sup_t \left\|\chi_x \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2 \leq \sum_{k;E_k\in\mathcal{I}} \mathcal{X}(E_k)\|\chi_x P_{E_k}\chi_u\|_2 \\ \leq \mathcal{P}_u^{1-\gamma}(x,\mathcal{X}) \sum_{k;E_k\in\mathcal{I}} \mathcal{X}^\gamma(E_k)\|\chi_x P_{E_k}\|_2^\gamma\|\chi_u P_{E_k}\|_2^\gamma. \tag{4.1.10}$$

As in [T], we shall sacrify some decay in space in order to recover the summability over k in (5.2.32). This relies on the following lemma which provides a bound on the number of elements contained in a box of size L.

Lemma 4.1.3. *Fix $\sigma > 0$ and $\zeta \in (0,1]$. For $k \in \mathbb{Z}$ and $u \in \mathbb{Z}^d$, we set*

$$A_k(\sigma,\zeta,u) := \sum_x \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta} \frac{\|\chi_x P_{E_k} \chi_u\|_2^2}{\|\chi_u P_{E_k}\|_2^2}. \tag{4.1.11}$$

Then

$$N_{L,\zeta,\sigma,u} := \sharp\{k \in \mathbb{Z}; E_k \in \mathcal{I},\ A_k(\sigma,\zeta,u) \le L\} \le C_{\sigma,\zeta,d}\,(\log L)^{d/\zeta} \quad \textit{for all } L \in \mathbb{N}, \tag{4.1.12}$$

where $C_{\sigma,\zeta,u}$ is a positive constant uniform in $u \in \mathbb{Z}^d$.

In other terms, we can order $A_k(\sigma,\zeta,u)$ increasingly so that $A_k(\sigma,\zeta,u) \ge \exp(\tilde{C}_{\sigma,\zeta,d}\, k^{\zeta/d})$, for some constant $\tilde{C}_{\sigma,\zeta,d} > 0$.

We come back to (4.1.10). Given $\sigma > 0$ and $\zeta \in (0,1]$, one has

$$\mathcal{X}^2(E_k)\|\chi_u P_{E_k}\|_2^2 A_k(\sigma,\zeta,u) = \sum_x \mathrm{e}^{\sigma|x-u|^\zeta} \mathcal{X}^2(E_k)\|\chi_x P_{E_k}\chi_u\|_2^2 \le \mathcal{L}_u(\sigma,\zeta,\mathcal{X}).$$

Thus we have

$$\mathcal{X}(E_k)\|\chi_u P_{E_k}\|_2 \le A_k^{-1/2}(\sigma,\zeta,u)\mathcal{L}_u^{1/2}(\sigma,\zeta,\mathcal{X}), \tag{4.1.13}$$

that we insert in the sum in (4.1.10) to obtain

$$\sup_t \left\|\chi_x \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2 \le \mathcal{P}_u^{1-\gamma}(x,\mathcal{X})\mathcal{L}_u^{\gamma/2}(\sigma,\zeta,\mathcal{X}) \sum_{k;E_k\in\mathcal{I}} \|\chi_x P_{E_k}\|_2^\gamma A_k^{-\gamma/2}(\sigma,\zeta,u).$$

Now we use Lemma 4.1.3 to guarantee summability in k. Together with Hölder inequality with conjugate exponents $s = 2/\gamma$ and $s' = \frac{2}{2-\gamma}$, we get

$$\begin{aligned}\sum_{k;E_k\in\mathcal{I}} \|\chi_x P_{E_k}\|_2^\gamma A_k^{-\gamma/2}(\sigma,\zeta,u) &\le \left(\sum_{k;E_k\in\mathcal{I}} \|\chi_x P_{E_k}\|_2^2\right)^{\gamma/2} \left(\sum_{k;E_k\in\mathcal{I}} A_k^{\frac{-\gamma}{2-\gamma}}(\sigma,\zeta,u)\right)^{(1-\gamma/2)} \\ &= C_{\sigma,\zeta,d,\gamma,I} < \infty.\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Hence

$$\sup_t \left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2 \le C_{\sigma,\zeta,d,\gamma,\mathcal{I}}\ \mathcal{P}_u^{1-\gamma}(x,\mathcal{X})\mathcal{L}_u^{\gamma/2}(\sigma,\zeta,\mathcal{X}) \tag{4.1.15}$$

and (4.1.8) holds. We finish with (4.1.9) which follows directly from (4.1.8) and Theorem 4.1.1. □

Next we prove the technical lemma above.

Proof of Lemma 4.1.3. Setting

$$a_{kx}(u) := \frac{\|\chi_x P_k \chi_u\|_2^2}{\|\chi_u P_k\|_2^2},$$

we have

$$\sum_x a_{kx}(u) = \frac{\|\chi_u P_k\|_2^2}{\|\chi_u P_k\|_2^2} = 1 \quad \text{for all } u \in \mathbb{Z}^d \text{ and all } k \in \mathbb{Z}, \tag{4.1.16}$$

and

$$\sum_{k,\ E_k \in\ \mathcal{I}} a_{kx}(u) \leq \sum_{k,\ E_k \in\ \mathcal{I}} \|\chi_x P_k\|_2^2 = \mathrm{tr}(\chi_x P_{\mathcal{I}} \chi_x) \leq 1 \quad \forall x, u \in \mathbb{Z}^d, \tag{4.1.17}$$

where $P_{\mathcal{I}}$ denotes the projection on the interval $\mathcal{I}$. For $L \in \mathbb{N}$, we define the following set

$$J_u(L) := \{k \in \mathbb{Z}, E_k \in \mathcal{I};\ \sum_{x \notin\ \Lambda_L(u)} a_{kx}(u) \leq 1/2\},$$

and consider the sum

$$S_u(L) := \sum_{k \in J_u(L)} \sum_{x \in\ \Lambda_L(u)} a_{kx}(u).$$

We will estimate the cardinal of $J_u(L)$ in term of the volume of the box $\Lambda_L(u)$. Note that it follows from (4.1.16) that for $k \in J_u(L)$, we have

$$\sum_{x \in\ \Lambda_L(u)} a_{kx}(u) = \sum_x a_{kx}(u) - \sum_{x \notin\ \Lambda_L(u)} a_{kx}(u) \geq 1/2.$$

Thus $S_u(L) \geq \frac{1}{2}\sharp(J_u(L))$. Moreover, the bound (4.1.17) yields

$$S_u(L) \leq \sum_{k,\ E_k \in\ \mathcal{I}} \sum_{x \in\ \Lambda_L(u)} a_{kx}(u) \leq \sum_{x \in\ \Lambda_L(u)} 1 \leq C_d L^d,$$

and hence

$$\sharp(J_u(L)) \leq C_d L^d. \tag{4.1.18}$$

Now given $\sigma > 0$ and $\zeta \in (0, 1]$, we set

$$\mathcal{I}_u(L, \sigma, \zeta) = \{k \in \mathbb{Z}, E_k \in \mathcal{I};\ A_k(\sigma, \zeta, u) \leq \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{\sigma L^\zeta}\},$$

and notice that

$$A_k(\sigma, \zeta, u) \geq \mathrm{e}^{\sigma L^\zeta} \sum_{x \notin\ \Lambda_L(u)} a_{kx}(u),$$

which involves that $\mathcal{I}_u(L,\sigma,\zeta) \subset J_u(L)$. Taking the exponential rescaling $l = \frac{e^{\sigma L^\zeta}}{2}$ and using (4.1.18), we obtain

$$N(l) := \sharp\{k \in \mathbb{Z}, E_k \in \mathcal{I};\ A_k(\sigma,\zeta,u) \leq l\} \leq C_{\sigma,\zeta,d}\ (\log l)^{d/\zeta}.$$

The set $\{k \in \mathbb{Z},\ A_k(\sigma,\zeta,u) \leq l\}$ is thus finite. For any $u \in \mathbb{Z}^d$, there exists a new order $j_u : k \mapsto j_u(k)$ for $k \in \mathbb{Z}$ in such a way that $A_{j_u(k)}(\sigma,\zeta,u)$ increases. So $N(A_{j_u(k)}) = \left|j_{u(k)}\right|$ and with $A_{j_{u(k)}}(\sigma,\zeta,u) = l$, one gets

$$|j_u(k)| \leq C_{\sigma,\zeta,d}\ \left(\log(A_{j_u(k)}(\sigma,\zeta,u))\right)^{d/\zeta}.$$

We conclude that $A_k(\sigma,\zeta,u)$ may be ordered in an increasing way in k in the sense that

$$A_k(\sigma,\zeta,u) \geq e^{\tilde{C}_{\sigma,\zeta,d}\ k^{\zeta/d}},$$

for a positive constant $\tilde{C}_{\sigma,\zeta,d}$ which is uniform in $u \in \mathbb{Z}^d$. □

We are now in position to prove Theorem 2.1.1 but first provide a suitable version of RAGE theorem (see Appendix A).

Proof of Theorem 2.1.1. It is clear the properties (iv) and (v) are equivalent and $(iv) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)$. It remains to show that $(i) \Longrightarrow (vi) \Longrightarrow (v)$, which is actually the heart of Theorem 2.1.1.

It follows from Appendix A that (i) implies that the spectrum of H is pure point in $\mathcal{I}$ as a consequence of Proposition A.1.1, we use Theorem 4.1.1 such that (4.1.4) shows that $(i) \Rightarrow (vi)$. The implication $(vi) \Rightarrow (v)$ follows from (4.1.8). □

4.2 SULE, SUDEC

We focus now on criterias of the decay criterias of eigenfunctions and we start with the proof of Theorem 2.2.1. It is a consequence of the theorem below which is the main technical result of this section.

We may omit the index n and write $\phi \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$ instead of $\phi_n \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$. Similary to (2.2.6) and (2.2.4), we consider the following definition.

Definition 4.2.1. We say that H verifies (SULE$_f$)/(SUDEC$_f$) for some function f if the estimates (2.2.6) and (2.2.4) are respectively replaced by

$$\|\chi_x\phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon} f(\alpha_\phi)\ e^{\epsilon\left|x_\phi\right|^\zeta} e^{-\sigma\left|x-x_\phi\right|^\zeta} \tag{4.2.1}$$

and

$$\|\chi_x\phi\|\,\|\chi_u\phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ f(\alpha_\phi)\ e^{\epsilon|u|^\zeta} e^{-\sigma|x-u|^\zeta}. \tag{4.2.2}$$

Theorem 4.2.2. *Let $\mathcal{G}_{\mathcal{E}} = \{\phi_n\}_{n\geq 1}$ be an orthonormal basis of $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Then the following properties are equivalent.*
(i) There exists a nonnegative function such that for any $\epsilon > 0$, $f(s) \leq C_\epsilon \, \mathrm{e}^{\epsilon s^{-\zeta/2\nu}}$ for all $0 < s \leq 1$ and for which H has (SUDEC$_f$) *on $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$.*
(ii) There exist $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ such that for any $\epsilon > 0$

$$\|\chi_x \phi\| \, \|\chi_u \phi\| \leq C_{\sigma,\zeta,\epsilon} \, \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}, \tag{4.2.3}$$

for all $\phi \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ and all $x, u \in \mathbb{Z}^d$.
(iii) H exhibits (SUDEC) on $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$.
(iv) For any nonnegative function such that for any $\epsilon > 0$, $f(s) \geq C_\epsilon \, \mathrm{e}^{-\epsilon s^{-\zeta/2\nu}}$ for all $0 < s \leq 1$, H has (SUDEC$_f$) *on $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$.*

Recall $\alpha_\phi \leq 1$. Obviously, we have $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. It remains to prove that $(i) \Rightarrow (iv)$. This will be a consequence of the next two lemmas.

Lemma 4.2.3. *Let $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be a function. If there exist $\zeta \in (0,1]$ and $\sigma > 0$ such that for all $\epsilon > 0$,*

$$\|\chi_x \phi\| \, \|\chi_u \phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon} f(\alpha_\phi) \, \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta} \, \mathrm{e}^{-\sigma|x-y|^\zeta}, \tag{4.2.4}$$

for all $x, u \in \mathbb{Z}^d$ and any $\phi \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$, then there is a new constant $C_{\zeta,\sigma,\epsilon}$ so that for all $x \in \mathbb{Z}^d$, we have

$$\|\chi_x \phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\alpha_\phi}} f(\alpha_\phi) \, \mathrm{e}^{\epsilon|x_\phi|^\zeta} \, \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_\phi|^\zeta}, \tag{4.2.5}$$

where x_ϕ maximizes $x \mapsto \|\chi_x \phi\|$.

Remark 4.2.4. In particular, taking $f(s) = s$ says that if (SUDEC) holds on $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ then (SULE) holds on $\mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ and with the same parameters ζ and σ.

The lemma 4.2.3 states that if (SUDEC)$_f$ holds for a given function f then (SULE)$_g$ occurs where $g : s \mapsto \frac{f(s)}{\sqrt{s}}$.

Proof. We set

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_\phi}} \phi = \frac{\phi}{\|T^{-1}\phi\|},$$

and we pick $x_\phi \in \mathbb{Z}^d$ (not unique) such that

$$\|\chi_{x_\phi} \tilde{\phi}\| = \max_{u \in \mathbb{Z}^d} \|\chi_u \tilde{\phi}\|. \tag{4.2.6}$$

Since

$$1 = \|T^{-1}\tilde{\phi}\|^2 = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \|\chi_u T^{-1} \tilde{\phi}\|^2 \leq \|\chi_{x_\phi} \tilde{\phi}\|^2 \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \left\|\chi_u T^{-1}\right\|^2 \leq C_d \|\chi_{x_\phi} \tilde{\phi}\|^2, \tag{4.2.7}$$

we get

$$\|\chi_{x_\phi}\tilde{\phi}\| \geq C_d^{-1/2}. \tag{4.2.8}$$

It follows now from (4.2.4) that, for all $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}\|\chi_x\phi\| &\leq C_d^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\alpha_\phi}}\|\chi_x\phi\|\|\chi_{x_\phi}\phi\| \\ &\leq C_{d,\zeta,\sigma,\epsilon}\frac{f(\alpha_\phi)}{\sqrt{\alpha_\phi}}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x_\phi|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-x_\phi|^\zeta}. \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

□

Furthermore, we establish a control on α_ϕ defined in (2.2.2) in terms of the center of localization x_ϕ according to

Lemma 4.2.5. *Suppose that* (SULE$_f$) *holds with some function* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *such that for all* $\epsilon > 0$,

$$f(s) \leq C_\epsilon\ \mathrm{e}^{\epsilon s^{-\zeta/2\nu}} \text{for all } s \in (0,1]. \tag{4.2.10}$$

Then there exists a constant $C > 0$ *(independent on* $\mathcal{G}_\mathcal{E}$*), so that*

$$\alpha_\phi \geq C\langle x_\phi\rangle^{-2\nu} \quad \textit{for all } \phi \in \mathcal{G}_\mathcal{E}. \tag{4.2.11}$$

Proof. We note that from (4.2.1) we get

$$\left\|\chi_{|x-x_\phi|\geq R}\ \phi\right\|^2 \leq C^2_{\zeta,\sigma,\epsilon}f^2(\alpha_\phi)\ \mathrm{e}^{2\epsilon|x_\phi|^\zeta}\sum_{|x-x_\phi|\geq R}\mathrm{e}^{-2\sigma|x-x_\phi|^\zeta} \leq \frac{1}{9}, \tag{4.2.12}$$

if we take

$$R \geq R_\phi := (\frac{\epsilon}{\sigma})^{1/\zeta}|x_\phi| + (\frac{1}{\sigma}\log f(\alpha_\phi) + \frac{1}{\sigma}\log(3\ C_{\zeta,\sigma,\epsilon}))^{1/\zeta}. \tag{4.2.13}$$

Since $|x - x_\phi| \leq R_\phi$ implies that $|x| \leq |x_\phi| + R_\phi$ and using (4.2.12) and (4.2.13), we have

$$\begin{aligned}\alpha_\phi = \left\|T^{-1}\phi\right\|^2 &\geq \sum_{x\in\Lambda_{R_\phi}(x_\phi)}\left\|\chi_x T^{-1}\phi\right\|^2 \geq \langle|x_\phi| + R_\phi\rangle^{-2\kappa}\left\|\chi_{\Lambda_{R_\phi}(x_\phi)}\phi\right\|^2 \\ &\geq \frac{8}{9}\left\{(1 + (\frac{\epsilon}{\sigma})^{1/\zeta})|x_\phi| + (\frac{\epsilon}{\sigma})^{1/\zeta}{\alpha_\phi}^{-1/2\nu} + C'_{\zeta,\sigma,\epsilon}\right\}^{-2\nu},\end{aligned}$$

for any $\phi \in \mathcal{G}_\mathcal{E}$. Thus, choosing ϵ small enough, yields (4.2.11). □

We complete the proof of Theorem 4.2.2.

Proof of Theorem 4.2.2. As mentioned above, it is enough to prove that (i) implies (iv). If there exists a function f such that for any $\epsilon > 0$, we have

$$f(s) \leq C_\epsilon \mathrm{e}^{\epsilon s^{-\zeta/2\nu}} \text{ for all } s \in (0,1],$$

and (4.2.2) holds, then the (SULE) property (4.2.1) will occur with a factor $\frac{f(\alpha_\phi)}{\sqrt{\alpha_\phi}}$ in view of Lemma 4.2.3. Proceeding now as in [G, Proof of Proposition A.1] and making use of (4.2.1), we obtain

$$\|\chi_x\phi\|\,\|\chi_u\phi\| \leq \frac{1}{\alpha_\phi}\, f(\alpha_\phi)^2 C^2_{\zeta\sigma,\epsilon} \mathrm{e}^{2\epsilon|x_\phi|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_\phi|^\zeta - \sigma|u-x_\phi|^\zeta} \tag{4.2.14}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_\phi}\, f(\alpha_\phi)^2 C^2_{\zeta,\sigma,\epsilon} \mathrm{e}^{(2\epsilon-\epsilon')|x_\phi|^\zeta} \mathrm{e}^{\epsilon'|u|^\zeta} \mathrm{e}^{-(\sigma-\epsilon')|x-u|^\zeta}, \tag{4.2.15}$$

for all $x, u \in \mathbb{Z}^d$ and with $\epsilon' < \sigma$. We note that it follows from (4.2.11) that

$$\frac{1}{\alpha_\phi}\, f(\alpha_\phi)^2 \leq \mathrm{e}^{-\epsilon(\alpha_\phi)^{-\zeta/2\nu}} C\langle x_\phi\rangle^{2\nu} \mathrm{e}^{3\epsilon(C\langle x_\phi\rangle)^\zeta} \tag{4.2.16}$$

$$\leq \mathrm{e}^{-\epsilon(\alpha_\phi)^{-\zeta/2\nu}} \mathrm{e}^{C_1\epsilon|x_\phi|^\zeta + C_2}, \tag{4.2.17}$$

for some postive and finite constants C_1 and C_2. Taking $\epsilon' > (C_1+2)\epsilon$, we conclude that (4.2.2) follows for any function $f \geq 0$ such that for any $\epsilon > 0$, $f(s) \geq C_\epsilon \mathrm{e}^{-\epsilon\, s^{-\zeta/2\nu}}$ for all $s \in (0,1]$. □

We return now to Theorem 2.2.1.

Proof of Theorem 2.2.1. The "equivalence" part of the proof is currently provided by Theorem 4.2.2 and Lemma 4.2.3. It remains to show that the centers of localization $\{x_{\phi_n}\}_n$ can be reordered in such a way that $|x_{\phi_n}|$ increases with n. We proceed as in [DeRJLS2].

Given $L > 0$, we let $R_L := \delta L + C_\delta$ as in (4.2.13) for some $\delta > 0$ (that depends on ζ and σ) and where we have taken $f \equiv 1$, it follows from (4.2.12) that

$$\|\chi_{x_{\phi_n},R_L}\phi_n\|^2 > \frac{1}{9} \quad \text{whenever} \quad |x_{\phi_n}| \leq L, \tag{4.2.18}$$

and if N_L is the cardinal of the set $\{n, \phi_n \in \mathcal{G}_\mathcal{E}; |x_{\phi_n}| \leq L\}$ then we conclude that

$$\frac{1}{9}N_L \leq \sum_{n,|x_{\phi_n}|\leq L} \|\chi_{x_{\phi_n},R_L}\phi_n\|^2 \leq \|\chi_{0,L+R_L}P_\mathcal{E}\|_2^2$$

$$\leq CL^{2\nu}\alpha_\mathcal{E}, \tag{4.2.19}$$

for some finite constant C that depends on ζ and σ. Since $N_L < \infty$ for all $L > 0$ by, (2.2.3), we may reorder the centers of localization in increasing order in n, which yields $|x_{\phi_n}| \geq C_{\mathcal{E},\sigma,\zeta}\, n^{\frac{1}{2\nu}}$. □

4.3 SULE+, SUDEC+

We now turn to Theorem 2.2.2 and the strong forms of (SUDEC) and (SULE), namely (SUDEC+) and (SULE+).

Proposition 4.3.1. *Assume (SUDEC+). For any $\delta > 0$ there is a constant C_δ such that, for any $\phi, \psi \in \mathrm{Ran}\ P_E$ and $E \in \mathcal{E}$, their localization centers x_ϕ, x_ψ satisfy*

$$|x_\phi - x_\psi| \leq \delta |x_\phi| + C_\delta. \tag{4.3.1}$$

Proof. Fix $\delta > 0$. Without loss of generality, we may suppose that ϕ, ψ are orthonormalized. We mainly use (4.2.13) with $f \equiv 1$ and $\epsilon > 0$ small enough so that for some given constant $C_\delta < \infty$ and for any $\phi \in \mathrm{Ran}\ P_E$,

$$\left\|\chi_{|x-x_\phi|\geq R_\phi}\phi\right\| \leq \frac{1}{3}, \qquad \text{for } R_\phi = \delta|x_\phi| + C_\delta.$$

If $|x_\phi - x_\psi| \leq 2(R_\phi + R_\psi)$, then (4.3.1) follows from the definition of R_ϕ, R_ψ. Assume $|x_\phi - x_\psi| \geq 2(R_\phi + R_\psi)$ so that $B_{R_\phi}(x_\phi) \subset \mathbb{R}^d \setminus B_{R_\psi}(x_\psi)$ and set $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi + \psi) \in \mathrm{Ran}\ P_E$. As a consequence,

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{|x-x_\phi|\leq R_\phi}\varphi\right\| &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\chi_{|x-x_\phi|\leq R_\phi}\phi\right\| - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\chi_{|x-x_\phi|\leq R_\phi}\psi\right\| \\
&\geq \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\chi_{|x-x_\psi|\geq R_\psi}\psi\right\| \\
&\geq \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

In the same manner, we have $\left\|\chi_{|x-x_\psi|\leq R_\psi}\varphi\right\| \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Having in mind that we assumed $|x_\phi - x_\psi| - (R_\phi + R_\psi) \geq \frac{1}{2}|x_\phi - x_\psi|$ and applying (SUDEC) to φ, we get

$$\begin{aligned}
\frac{1}{18} &\leq \left\|\chi_{|x-x_\phi|\leq R_\phi}\varphi\right\| \left\|\chi_{|x-x_\psi|\leq R_\psi}\varphi\right\| \\
&\leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{C'_{\zeta,\delta}\epsilon|x_\phi|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma(|x_\phi - x_\psi| - (R_\phi + R_\psi))^\zeta} \\
&\leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{C'_{\zeta,\delta}\epsilon|x_\phi|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma(\frac{1}{2}|x_\phi - x_\psi|)^\zeta}.
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

The result follows. □

Remark 4.3.2. Notice that (4.3.1) asserts that if (SULE) holds for all vectors in the span of $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ then the multiplicity has to be finite, since a ball of given radius can only contain a finite number of centers of localization by Theorem 2.2.1 and (4.2.19).

Proof of Theorem 2.2.2. Since $\|\chi_x\phi\| \leq \|\chi_x P_E\|_2$ for any $\phi \in \mathrm{Ran} P_E$, we immediately get

$$(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii), (i) \text{ and } (vii) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (v).$$

Next, we have $(iv) \Leftrightarrow (vii)$ using the same strategy as in the proof of Theorem 2.2.1.
To see that $(i) \Rightarrow (iv)$, let $(\phi_n)_{n\geq 1}$ be an orthonormalized basis of Ran P_E verifying

(2.2.10). Then

$$\begin{aligned}\|\chi_x P_E\|_2^2 \|\chi_u P_E\|_2^2 &= \sum_{n,m} \|\chi_x \phi_n\|^2 \, \|\chi_u \phi_m\|^2 \\ &\leq \left(\sum_n \alpha_{\phi_n}\right)^2 C^2_{\zeta,\sigma,\epsilon} \, \mathrm{e}^{2\epsilon(|x|^\zeta+|u|^\zeta)} \mathrm{e}^{-2(\sigma-\epsilon)|x-u|^\zeta} \\ &= C^2_{\zeta,\sigma,\epsilon} \, {\alpha_E}^2 \, \mathrm{e}^{2\epsilon(|x|^\zeta+|u|^\zeta)} \mathrm{e}^{-2(\sigma-\epsilon)|x-u|^\zeta}. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Finite multiplicity follows. Indeed, there exists $u \in \mathbb{Z}^d$ such that $\|\chi_u P_E\|_2 \neq 0$ (otherwise $\operatorname{tr} P_E = 0$), hence for all $E \in \mathcal{E}$, $\operatorname{tr} P_E = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \|\chi_x P_E\|_2^2 < \infty$ by (4.3.4).

Next, to show that $(v) \Rightarrow (i)$, we write

$$\begin{aligned}\|\chi_x \phi_n\| \, \|\chi_x \phi_m\| &\leq C^2_{\zeta,\sigma,\epsilon} \, \mathrm{e}^{2\epsilon|x_E|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma(|x-x_E|^\zeta+|u-x_E|^\zeta)} \\ &\leq C^2_{\zeta,\sigma,\epsilon} \, \mathrm{e}^{-2\epsilon|x_E|^\zeta} \mathrm{e}^{2\epsilon(|x|^\zeta+|u|^\zeta)} \mathrm{e}^{-(\sigma-2\epsilon)|x-u|^\zeta},\end{aligned}$$

with $\epsilon < \sigma/2$. Then (i) follows since

$$\mathrm{e}^{-2\epsilon|x_E|^\zeta} \leq C\langle x_E\rangle^{-2\nu} \leq \sqrt{\alpha_{\phi_n}\alpha_{\phi_m}},$$

by (4.2.11).

We thus have $(iv) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv)$, and the equivalence is proved ((iv') and (vii') can be deduced from Theorem 2.2.1 and Lemma 4.2.2).

At last, we show that $(ii) \Rightarrow (vi)$. We have to show that we can get (SULE) with a common center of localization. By Lemma 4.2.3 we get a (SULE) bound for all $\phi \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$, with centers of localization x_ϕ. Let x_ψ be one of them, but given. By Proposition 4.3.1, $|x_\phi - x_\psi| \leq \delta|x_\psi| + C_\delta$, and

$$\|\chi_x \phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon} \mathrm{e}^{\epsilon|x_\phi|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_\psi|^\zeta+\sigma|x_\phi-x_\psi|^\zeta} \tag{4.3.5}$$

$$\leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon,\delta} \mathrm{e}^{\epsilon|x_\phi|^\zeta+\sigma\delta^\zeta|x_\psi|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_\psi|^\zeta} \tag{4.3.6}$$

$$\leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon,\delta} \mathrm{e}^{\epsilon'|x_\psi|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_\psi|^\zeta}, \tag{4.3.7}$$

with $\epsilon' = \epsilon(1+\delta)^\zeta + \sigma\delta^\zeta$.

The bound (2.2.17) is given by an argument similar to that in the proof of Lemma 4.2.5. Indeed, there are $\zeta \in (0,1], \sigma > 0$ such that for any $\epsilon > 0$ there is a finite constant $C'_{\zeta,\sigma,\epsilon}$ for which

$$\left\|\chi_{|x-x_E|\geq R_E} P_E\right\|^2 \leq \frac{1}{2}, \text{ where } R_E = (\frac{\epsilon}{\sigma})^{1/\zeta}|x_E| + C'_{\zeta,\sigma,\epsilon}. \tag{4.3.8}$$

Since

$$\left\|\chi_{|x-x_E|\leq R_E} P_E\right\|^2 \leq \left\|\chi_{|x|\leq(1+\frac{\epsilon}{\sigma})^{1/\zeta}|x_E|+C'_{\zeta,\sigma,\epsilon}} P_E\right\|^2, \tag{4.3.9}$$

and with ϵ small enough one gets

$$\left\|\chi_{|x-x_E|\leq R_E} P_E\right\|^2 \leq C_{\zeta,\sigma}\langle x_E\rangle^{2\nu}\alpha_E, \tag{4.3.10}$$

and thus

$$\operatorname{tr} P_E = \|P_E\|_1 = \|P_E\|_2^2 \leq \frac{1}{2} + C_{\zeta,\sigma}\langle x_E\rangle^{2\nu}\alpha_E.$$

Finally, the last bound (2.2.18) could be deduced from the equation (4.3.8) and in proceeding analogously to (4.2.19).

□

4.4 Relationships between classes of localization properties

Proof of Theorem 2.3.1. The first implication in (i) follows immediately from (2.2.10) applied to the case $n = m$. Otherwise, let $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be an orthonormal basis for $P_E\mathcal{H}$ such that (2.2.4) holds. We have

$$\begin{aligned}\|\chi_x P_E \chi_u\|_2 &\leq \sum_n \|\chi_x\phi_n\|\,\|\chi_u\phi_n\| \\ &= \left(\sum_n \alpha_{\phi_n}\right) C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta} \\ &= C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \alpha_E\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta},\end{aligned}$$

which implies (DL) in $\mathcal{I}$ by Theorem 2.1.1.

We turn to (ii) and notice that the implication from the left to the right is still valid. The novelty here is that under the hypothesis of finite multplicity, both properties become equivalent.

Assuming that H exhibits (2.1.8) in $\mathcal{I}$, we construct a family $\mathcal{G}_\mathcal{E}$ of orthonormalized eigenfunctions that verifies (2.2.6), namely (SULE) property. For any given $E \in \mathcal{E}$, there exists $x_E \in \mathbb{Z}^d$ which maximizes $\|\chi_x P_E\|_2$ since

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \|\chi_x P_E\|_2^2 = \operatorname{tr} P_E = N < \infty.$$

Note that $\|P_E\chi_{x_E}\|_2 \neq 0$, otherwise we would have $\|P_E\chi_x\|_2 = 0$ for all x which is not

possible since $\operatorname{tr} P_E \neq 0$. Now, we pick a unit vector $\eta \in \mathcal{H}$ such that $\|P_E \chi_{x_E} \eta\| \geq \frac{1}{2} \|P_E \chi_{x_E}\|$ and set

$$\phi_1 = \frac{P_E \chi_{x_E} \eta}{\|P_E \chi_{x_E} \eta\|} \in P_E \mathcal{H} = \mathcal{H}_E. \tag{4.4.1}$$

We have

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \operatorname{tr}(T^{-1} P_{\phi_1} T^{-1}) = \left\|T^{-1}\phi_1\right\|^2 && (4.4.2)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \left\|\chi_x T^{-1}\phi_1\right\|^2 \\ &\leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \left\|\chi_x T^{-1}\right\|^2 \frac{\|\chi_x P_E \chi_{x_E}\eta\|^2}{\|P_E\chi_{x_E}\eta\|^2} \leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \left\|\chi_x T^{-1}\right\|^2 \|\chi_x P_E\|^2 \\ &\leq C_d \|P_E \chi_{x_E}\|^2 \leq 4C_d \|P_E\chi_{x_E}\eta\|^2 . && (4.4.3) \end{aligned}$$

As

$$\|\chi_x \phi_1\| \leq \frac{\|\chi_x P_E \chi_{x_E}\|_2}{\|P_E \chi_{x_E}\eta\|},$$

we get from (2.1.8) and (4.4.3), that

$$\|\chi_x \phi_1\| \leq \tilde{C}_{\zeta,\sigma,\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \, \mathrm{e}^{\epsilon|x_E|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_E|^\zeta}. \tag{4.4.4}$$

We repeat this procedure with $P_{E,1} := P_E - P_{\phi_1}$, and so on with $P_{E,n+1} := P_{E,n} - P_{\phi_{n+1}}$, until the rank is zero. The finiteness of the rank of P_E, denoted by N, ensures that the process will stop. Notice that the projectors $P_{E,n}$ exhibit (2.1.8). For instance $\|\chi_x P_{E,1} \chi_u\|_2$ is a sum of two decaying quantities

$$\begin{aligned} \|\chi_x P_{E,1}\chi_u\|_2 &\leq \|\chi_x P_E \chi_u\|_2 + \|\chi_x \phi_1\| \, \|\chi_u \phi_1\| && (4.4.5)\\ &\leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon} \, \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}, \end{aligned}$$

where the decay of the second term in the r.h.s of (4.4.5) results from (4.4.4). Therefore, by induction we get N orthonormalized functions ϕ_n satisfying the (SULE)-like estimate in the sense that

$$\|\chi_x \phi_n\| \leq \tilde{C}_{\zeta,\sigma,\epsilon} \, \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \, \mathrm{e}^{\epsilon|x_{E_n}|^\zeta} \mathrm{e}^{-\sigma|x-x_{E_n}|^\zeta}, \tag{4.4.6}$$

for any $n \in \{1, \ldots, N\}$.

Moreover, the counterexamples claimed in Theorem 2.3.1 point (*iii*) are given in Section 4.6.

□

Remark 4.4.1. We can get rid of $\alpha_n^{-1/2}$ from the proof of Theorem 4.2.2, in which case only an arbitrary small fraction of the mass σ is lost.

Alternatively, at each step, one can follow [EGS, Proof of Lemma 4] and bound $\|\chi_x\phi_n\|$ by the geometric mean of (2.1.8) and $\|\chi_x\phi_n\| \leq \left\|\chi_{x_{E_n}} P_{E,n}\right\|$. In this latter case, the final σ is divided by 2 at each step.

4.5 Generalized eigenfunction expansion

There is a condition on the absence of the continuous part of the spectrum which enters Definition 2.3.1 for having (SUDEC)/(SULE) or (SUDEC+)/(SULE+). But in practice, it may not be so easy to show that the continuous spectrum is empty. One way is to consider the generalized eigenfunctions and prove (SUDEC) for those. This is excaltly what is done in order to prove localization for Anderson models. We briefly describe below how it works and make connection with quantities introduced in [GK2].

We follow [GK2] in the construction of a generalized eigenfunction expansion (**GEE**) for H. We consider the weighted spaces $\mathcal{H}_\pm = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \langle x\rangle^{\pm 2\nu}\mathrm{d}x)$ which are dual conjugate. The natural injections $i_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}$ and $i_- : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_-$ are continuous with dense range. We define the operators $T_\pm$, $T_+ := Ti_+$ and $T_- := i_-T$ where T is the operator defined before as the multiplication by the function $\langle x\rangle^{2\nu}$.

We consider now the specral measure

$$\mu(\mathcal{I}) := \mathrm{tr}(T^{-1}P_{\mathcal{I}}(H)T^{-1}) = \left\|T^{-1}P_{\mathcal{I}}(H)\right\|_2^2, \tag{4.5.1}$$

where $P_{\mathcal{I}}(H)$ is the specral projection of the operator H on a Borel set $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. In particular, we have $\mu(\mathcal{I}) = \mu(\mathcal{I} \cap \sigma(H)) \leq K_{\mathcal{I}} < \infty$ if $\mathcal{I}$ is bounded.

There exists a μ-locally integrable function $\mathbf{P}(E) : \mathbb{R} \to \mathcal{T}_1(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$, the space of trace class operators from $\mathcal{H}_+$ to $\mathcal{H}_-$ such that

$$\mathrm{tr}(T_-^{-1}\mathbf{P}(E)T_+^{-1}) = 1 \quad \mu - \text{a.e } E, \tag{4.5.2}$$

and

$$i_-P_{\mathcal{I}}(H)i_+ = \int_{\mathcal{I}} \mathbf{P}(E)\mathrm{d}\mu(E), \tag{4.5.3}$$

for $\mathcal{I}$ a Borel set with $\mathcal{I} \cap \sigma(H)$ bounded. In particular, it follows that for a bounded Borel function $\mathcal{X}$,

$$i_-P_{\mathcal{I}}(H)\mathcal{X}(H)i_+ = \int_{\mathcal{I}} \mathcal{X}(E)\mathbf{P}(E)\mathrm{d}\mu(E). \tag{4.5.4}$$

Remark 4.5.1. If we consider $\phi \in \mathcal{H}_+$ then $\mathbf{P}(E)\phi \in \mathcal{H}_-$ is a generalized eigenfunction of H with corresponding generalized eigenvalue E.

We recall the quantities introduced in [GK2, Section 3]. Given $E \in \mathbb{R}$ and $x \in \mathbb{Z}^d$, we set

$$\mathbf{W}_E(x) := \begin{cases} \sup\limits_{\phi \in \mathcal{H}_+, \mathbf{P}(E)\phi \neq 0} \dfrac{\|\chi_x \mathbf{P}(E)\phi\|}{\|T^{-1}\mathbf{P}(E)\phi\|} & if\ \mathbf{P}(E) \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.5.5}$$

Proposition 4.5.2. *Let $\mathcal{I}$ be an interval such that (2.2.3) holds. Then the following properties are equivalent.*
(i) There exist $\sigma > 0, \zeta \in (0,1]$ such that for any $\epsilon > 0$ we have

$$\mathbf{W}_E(x)\mathbf{W}_E(u) \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}, \tag{4.5.6}$$

for any $E \in \mathcal{I}$ and all $x, u \in \mathbb{Z}^d$.
(ii) H exhibits (SUDEC+)/(SULE+) in $\mathcal{I}$, as defined in Definition 2.3.1.

Proof. Given $x \in \mathbb{Z}^d$ and an energy $E \in \mathbb{R}$ and following the notations in [GK2], we set

$$W_E(x) := \begin{cases} \sup\limits_{\phi \in \mathcal{H}, P_E\phi \neq 0} \dfrac{\|\chi_x P_E\phi\|}{\|T^{-1}P_E\phi\|} & if\ P_E \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{4.5.7}$$

where P_E is the usual spectral projection of H on $\{E\}$.

Assume that H has pure point spectrum in $\mathcal{I}$. Then $\mathbf{W}_E(x) = W_E(x)$ for any $x \in \mathbb{Z}^d$ and $E \in \mathcal{I}$. Moreover, if (SUDEC+) holds then

$$\begin{aligned} W_E(x)W_E(u) &= \sup_{P_E\phi \neq 0} \frac{\|\chi_x P_E\phi\|}{\|T^{-1}P_E\phi\|}\frac{\|\chi_u P_E\phi\|}{\|T^{-1}P_E\phi\|} \\ &\leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u|^\zeta}, \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

and (i) follows.

Conversely, we suppose that (4.5.6) holds. Since in full generality $W_E(x) \leq \mathbf{W}_E(x)$, (4.5.6) implies (SUDEC+). To show that the spectrum is pure point it is enough to prove that any generalized eigenfunction is summable. Let us consider $\phi \in \mathcal{H}_+$ and suppose (4.5.6). Pick $u_0 \in \mathbb{Z}^d$ such that $\chi_{u_0}\mathbf{P}(E)\phi \neq 0$. Applying (4.5.6) to the points x and u_0 yields

$$\|\chi_x \mathbf{P}(E)\phi\| \leq C_{\zeta,\sigma,\epsilon}\left\|T^{-1}\mathbf{P}(E)\phi\right\|^2 \|\chi_{u_0}\mathbf{P}(E)\phi\|^{-1}\ \mathrm{e}^{\epsilon|u_0|^\zeta}\mathrm{e}^{-\sigma|x-u_0|^\zeta},$$

which ensures the sub-exponential decay of $\mathbf{P}(E)\phi$. □

Remark 4.5.3. One can show directly that (4.5.6) implies (DL). Indeed, it follows from [GK2, Lemma 2] that

$$\|\chi_x \mathbf{P}(E)\chi_u\|_2 \leq C_{d,\mathcal{X}}\langle x\rangle^\nu \langle u\rangle^\nu \mathbf{W}_E^{1/2}(x)\mathbf{W}_E^{1/2}(u),$$

so that

$$\sup_t \left\|\chi_x \, \mathrm{e}^{-itH}\mathcal{X}(H)\chi_u\right\|_2 \leq \int_{\mathcal{I}} |\mathcal{X}(E)| \|\chi_x \mathbf{P}(E)\chi_u\|_2 \, \mathrm{d}\mu(E) \tag{4.5.9}$$

$$\leq C_{d,\mathcal{X}}\langle x\rangle^\nu \langle u\rangle^\nu \int_{\mathcal{I}} \mathbf{W}_E^{1/2}(x)\mathbf{W}_E^{1/2}(u) \, \mathrm{d}\mu(E) \tag{4.5.10}$$

$$\leq C_{d,\mathcal{X}}\mu(\mathcal{I})\langle x\rangle^\nu \langle u\rangle^\nu \, \|\mathbf{W}_E(x)\mathbf{W}_E(u)\|_{L^\infty(\mathcal{I})}^{1/2}, \tag{4.5.11}$$

and (DL) holds, as well as pure point spectrum.

4.6 Counterexamples

The first model is the free Landau Hamiltonian $H_B := (-i\nabla - A)^2$ on $L^2(\mathbb{R}^2)$ where A is the vector potential $A = \frac{B}{2}(-x_2, x_1)$ and $B > 0$ is the strength of the constant magnetic field. It is well known that the Landau levels are infinitly degenerated and that it exhibits the property (2.1.8) and thus dynamical localization. We claim that (SUDEC) does not occur for H_B. In fact, consider for instance the eigenfunctions associated to the first Laudau level and whose expression is given by

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{B^n}{2\pi \, 2^n \, n!}\right)^{1/2} z^n \, \mathrm{e}^{-\frac{B}{4}|z|^2}. \tag{4.6.1}$$

For n integer, we define the radial function $f_n(r) = r^{2n} \, \mathrm{e}^{-\frac{B}{2}r^2}$ for which the maximum is achieved for the radius $r_{\max} = (\frac{2n}{B})^{1/2}$. Let z_1 and z_2 to be affixes of two opposite points on this maximal circle. A simple computation yields

$$|\varphi_n(z_1)\varphi_n(z_2)| = \frac{n^n}{2\pi n!} \, \mathrm{e}^{-n} \sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.6.2}$$

by the Stirling's formula. Since there are no positive constants c_1 and c_2 (c_2 depends on B) such that $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq c_1 \mathrm{e}^{-c_2\sqrt{n}}$ for all n, (SUDEC) does not hold.

Remark 4.6.1. Another way to see that H_B does not has (SUDEC) can be derived from the theory of the quantum Hall effect. Indeed, if (SUDEC) would occur for a basis of eigenvectors then the Hall conductance σ_H defined in details in the chapter 5, would be constant at Landau levels by [GKS1], while σ_H is known to have jumps.

Next, we recall how to construct a physical sample having eigenfunctions with compact supports. The idea is borrowed from the percolation theory [KiM] and to illustrate it, let

us consider the simplest example of lattice graph $\mathbb{L}^d$ composed of the vertex set $\mathbb{Z}^d$ and the edge set $\mathbf{E}$ given by all unordered pairs $\{x, y\}$ of nearest-neighbour vertices $x, y \in \mathbb{Z}^d$. We define the graph Laplacian $\Delta_g : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ as

$$\Delta_g f(x) := \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y)) \tag{4.6.3}$$

for $f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ and $x \in \mathbb{Z}^d$ and where $y \sim x$ denotes the adjacent vertices y to x.

We are interested in a realization of a random subraph. As an example, we consider the site percolation procedure which consists on delete (resp. keep) a vertex x and its adjacent edges with probability $1-p$ (resp. p), $0 \leq p \leq 1$. We say that a site is occupied with probability p, and empty with probability $1-p$. The probability space $(\Omega, \mathbb{P})$ is given by $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ and endowed with the product Bernoulli measure

$$\mathbb{P} = \bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^d} (p\delta_1 + (1-p)\delta_0),$$

where every possible configuration is given by an element $\omega = (\omega_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$ so that $\omega_x \in \{0,1\}$ and the procedure discribed above corresponds respectively to the events $\omega_x = 0$ and $\omega_x = 1$. The typical question that is raised regards the appareance of infinite clusters C_x that contains a vertex x in the subrapgh G_ω for a.e ω. Let $P_\infty(p)$ be the probability that a vertex x belongs to a cluster of infinite size of occupied sites. We define the critical probability which corresponds to the percolation threshold as

$$p_c := \inf\{p \; ; P_\infty > 0\}. \tag{4.6.4}$$

Of interest for us is the case of non percolating phase, that is $p < p_c$ and for which one can find a configuration ω^* of finite clusters and where the eigenfunctions of $\Delta_{G_{\omega^*}}$ are compactly supported [Gr]. Consider J copies of a given finite clusters for $J \geq 2$ and set $H_j := -\Delta_{|\mathcal{C}_j}$. The operators H_j, $j = 1, \cdots, J$, have the same discrete spectrum with compactly supported eigenfunctions. The operator $-\Delta_{|\cup_j \mathcal{C}_j} = \oplus_j H_j$ for $1 \leq j \leq J$, has (SULE) since we obtain a basis of compactly supported eigenfunctions. But (SULE+) and (SUDEC+) do not hold as soon as copies $\mathcal{C}_i$ and $\mathcal{C}_j$ for $i \neq j$, are far enough so that Proposition 4.3.1 is violated.

4.7 Extension to graphs

We turn to the proof of Theorems 2.4.1 and 2.4.2. Theorem 2.4.1 follows immediately from the proof of Theorem 2.1.1. The main point is to notice that the technical Lemma 4.1.3 is still valid in the case of subexponential growth, where the r.h.s of (4.1.12) becomes $\mathrm{e}^{C_{\sigma,\zeta,\beta}(\log L)^{\beta/\zeta}}$.

In view of the proof Theorem 2.2.2, the Theorem 2.4.2 can be deduced by adapting the different steps which involve the geometry of the space. In particular, the technical result in Lemma 4.2.5 and Theorem 4.2.2 remain true if we take $f(s) \leq C_\epsilon \mathrm{e}^{(-\epsilon \log s)^{\zeta/\alpha}}$ in (i) and $f(s) \geq C_\epsilon \mathrm{e}^{-(-\epsilon \log s)^{\zeta/\alpha}}$ in (iv) for $s \in (0,1]$ in which case $\alpha_\phi \geq C\mathrm{e}^{-|x_\phi|^\alpha}$.

4.8 Dynamical localization for ergodic Hamiltonians

In this part we review the first result of the chapter 2 in the case of random Hamiltonians.

Proof of Theorem 4.8. The proof is similar to that of Theorem 2.1.1. Since $(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$, we only need to prove $(i) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (v)$. As in (4.1.1) and (4.1.2), we introduce

$$\mathcal{P}_\omega(x, \mathcal{X}) := \sup_k \mathcal{X}(E_{k,\omega}) \|\chi_x P_{k,\omega} \chi_0\|_2, \tag{4.8.1}$$

$$\mathcal{L}_\omega(\sigma, \zeta, \mathcal{X}) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{\sigma|x|^\zeta} \ \mathcal{P}_\omega^2(x, \mathcal{X}), \tag{4.8.2}$$

and

$$\mathcal{L}(\sigma, \zeta, \mathcal{X}) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{\sigma|x|^\zeta} \mathbb{E}\left(\mathcal{P}_\omega^2(x, \mathcal{X})\right). \tag{4.8.3}$$

Using the same strategies, we have

$$\begin{aligned}\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T M_{0,\omega}(\sigma, \zeta, \mathcal{X}, T) &\geq C_{\sigma,\zeta} \sum_k \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{X}^2(E_{\omega,k}) \mathrm{e}^{\sigma|x|^\zeta} \|\chi_x P_{\omega,k} \chi_0\|_2^2 \\ &\geq C_{\sigma,\zeta} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{\sigma|x|^\zeta} \left(\sup_k \mathcal{X}^2(E_{\omega,k}) \|\chi_x P_{\omega,k} \chi_0\|_2^2\right).\end{aligned}$$

Taking the expectation, we obtain

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T M_{0,\omega}(\sigma, \zeta, \mathcal{X}, T)\right) \geq C_{\sigma,\zeta} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{\sigma|x|^\zeta} \mathbb{E}\left(\sup_k \mathcal{X}(E_{\omega,k}) \|\chi_x P_{\omega,k} \chi_0\|_2\right)^2, \tag{4.8.4}$$

and the Fatou lemma yields

$$\liminf_{T\to\infty} \mathcal{M}_0(\sigma, \zeta, \mathcal{X}, T) \geq C_{\sigma,\zeta} \ \mathcal{L}(\sigma, \zeta, \mathcal{X}). \tag{4.8.5}$$

Consequently, we get a similar result to (4.1.4). For the last point, we go back to Theorem 4.1.2 and Lemma 4.1.3 that we follow for ω fixed. Then for any $\gamma \in (0, 1)$, there exists a constant $C_{\sigma,\zeta,d,\gamma}$ which is uniform in ω such that

$$\sup_t \left\|\chi_x \ \mathrm{e}^{-itH_\omega} \mathcal{X}(H_\omega) \chi_0\right\|_2 \leq C_{\sigma,\zeta,d,\gamma} \ \mathcal{P}_\omega^{1-\gamma}(x, \mathcal{X}) \mathcal{L}_\omega^{\gamma/2}(\sigma, \zeta, \mathcal{X}),$$

and hence

$$\mathbb{E}\left(\sup_t \left\|\chi_x \ \mathrm{e}^{-itH_\omega} \mathcal{X}(H_\omega) \chi_0\right\|_2\right) \leq C_{\sigma,\zeta,d,\gamma} \ \mathbb{E}\left(\mathcal{P}_\omega(x, \mathcal{X})\right)^{1-\gamma} \mathbb{E}(\mathcal{L}(\sigma, \zeta, \mathcal{X}))^{\gamma/2},$$

thanks to the Hölder inequality that we apply with conjugate exponents $p = \frac{1}{1-\gamma}$ and $p' = 1/\gamma$ and to Jensen's inequality. □

Chapter 5

Hall and Edge conductances for continuous Hall systems

Contents

5.1 Edge quantities: Proof of Lemma 3.4.1 . . . . . **55**
5.1.1 Vanishing trace 56
5.1.2 Trace class property 62
5.2 Contributions of the Bulk quantities **67**
5.2.1 Proof of Lemma 3.4.2 67
5.2.2 Proof of Lemma 3.4.3 71
5.2.3 Proof of Lemma 3.4.4 72
5.3 Bulk-Edge equality **75**

In this chapter, we give the details of the proofs and intermediate steps mentionned in chapter 3. We start by the trace class property.

5.1 Edge quantities: Proof of Lemma 3.4.1

For the reader's convenience, we recall the lemma we aim to prove in this section.

Lemma 5.1.1. *Let g a switch function of an interval $\mathcal{I}$ such that* $\mathrm{supp} g' \subset \mathcal{I}$. *Then the operators*

$$[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda_1 \ , \ g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,\Lambda_1 \ , \ [g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) \ \text{ et } \ g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$$

are trace class. Moreover, we have $\mathrm{tr}\,[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda_1 = 0$.

We first deal with the operator $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\,\Lambda_1$ that we prove to be trace class with zero trace. We start with the pure electric model and we pursue with the magnetic one.

5.1.1 Vanishing trace

• *Electric case.* The assumptions on the electric potential U yields that there exists $r_0 > 0$ such that

$$U_a(x) \geq c_0, \ \forall x_1 < -a - r_0, \tag{5.1.1}$$

where c_0 is choosen so that $c_0 > \sup \mathcal{I}$.

Consider the auxiliary operator

$$\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a} := H^{\mathsf{E}}_{\omega,a} + \ c_0 \ \mathbf{1}_{x_1 \geq -r_0 - a} \ ,$$

where $\mathbf{1}_S$ denotes the characteristic function of a subset $S \subset \mathbb{R}^2$. In particular, $g(\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a}) = 0$ since its spectrum is disjoint from $\mathcal{I}$. We point out the creation of a forbidden zone where the electrons can not penetrate when we introduce such operators $\tilde{H}_{\omega,a}$.

We proceed as in [CG] and we split the operator $\left[g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}) - g(\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \Lambda_1$ in the direction x_2. For an arbitrary $R > 0$, we write

$$(I_R) = \left[g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \Lambda_1 \ \mathbf{1}_{|x_2| \leq R}, \tag{5.1.2}$$

$$(II_R) = \left[g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \Lambda_1 \ \mathbf{1}_{|x_2| > R}. \tag{5.1.3}$$

We first treat (5.1.2) that we decompose for $r > 0$ as

$$(I_R) = \left[g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \ \mathbf{1}_{|x_2| \leq R} \ \mathbf{1}_{-r_0 - r - a \leq x_1 \leq 0} + \left[g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \ \mathbf{1}_{|x_2| \leq R} \ \mathbf{1}_{x_1 \leq -r_0 - r - a}. \tag{5.1.4}$$

We set $K = \mathbf{1}_{|x_2| \leq R} \ \mathbf{1}_{-r_0 - r - a \leq x_1 \leq 0}$ appearing in the first term of the r.h.s of (5.1.4). We note that

$$[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2] \, K = [g(H_{\omega,a})K, \Lambda_1] \, ,$$

sucht that it is sufficient to show that $g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a})K$ is a trace class operator and then use the cyclicity of the trace to deduce immediately that

$$\mathrm{tr} \left[(g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] K = \mathrm{tr} \left[(g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a})K, \Lambda_2\right] = 0.$$

Notice that by the spectral theorem, we have

$$g(H_{\omega,a}) = h(H_{\omega,a}) \quad \text{with} \ \ h(s) = \chi_{\{s \geq 1 - \Theta\}} g(s),$$

and it has compact support (g verifies $\sup(\mathrm{supp} g') \geq 1 - \Theta$ otherwise $g(H_{\omega,a}) = 0$). Since K has also a compact support and using [Si1, Theorem 4.1], we conclude that $h(H_{\omega,a})K = g(H_{\omega,a})K \in \mathcal{T}_1$.

Remark 5.1.2. One can also prove that the operator $(g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}) - g(\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a}))K$ is trace class. We use the Helffer-Sjöstrand formula (B.3.2) which suggests to control the resolvent difference $R_{\omega,a,\mathsf{E}} - \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}$ where $R_{\omega,a,\mathsf{E}} = (H^{\mathsf{E}}_{\omega,a} - z)^{-1}$ and $\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} = (\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a} - z)^{-1}$. Set $W_a = c_0\ \mathbf{1}_{x_1 \geq -r_0 - a}$. Using the resolvent identity

$$\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) = R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) - R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z)\ W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}(z),$$

we get

$$\begin{aligned}\left\| K R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) W_a\ \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) \right\|_1 &\leq \| K R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) \|_1 (1 + \|\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}(z)\|) \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{|\operatorname{Im} z|} \| K R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) \|_1,\end{aligned}$$

where the constant $\tilde{C}$ is uniform in a. Now, writing

$$K R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) = K R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}(M)\, [H_{\omega,a}, W_a]\, R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) + K R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) W_a, \tag{5.1.5}$$

and since $K R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}(z)$ belongs to $\mathcal{T}_1$ and both $[H_{\omega,a}, W_a]\, R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z)$ and W_a are bounded, we deduce that $K R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}}(z)$ is trace class.

Otherwise, to see that $K R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}(z)$ is trace class, we let $M < \inf \sigma(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a})$. Then it follows from the resolvent identity $R_{\omega,a}(z) = R_{\omega,a}(M) + (z - M) R_{\omega,a}(M) R_{\omega,a}(z)$ that

$$\left\| K R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}(z) \right\|_1 \leq \frac{C(M)}{|\operatorname{Im} z|^2} \left\| K R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}(M) \right\|_1,$$

and since $\left\| K R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}(M) \right\|_1 < C$ uniformly in a (see e.g. [GK2, Lemma A.4]), the result holds.

We turn to the second term of the r.h.s of (5.1.4), namely

$$\left[g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}), \Lambda_2 \right]\ \mathbf{1}_{|x_2| \leq R}\ \mathbf{1}_{x_1 \leq -r_0 - r - a}, \tag{5.1.6}$$

that we treat by writing the difference operators $g(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}) - g(\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a})$ in term of the resolvents thanks to the Helffer-Sjöstrand formula (B.3.2). We have

$$\begin{aligned}&\left[R_{\omega,a,\mathsf{E}} - \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}, \Lambda_2 \right] = \Lambda_2\ R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} - R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \Lambda_2 \\ &= R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]\, R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} + R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \Lambda_2 W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \\ &+ R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \tilde{R}_{\omega,a}\, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]\, \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} - R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \Lambda_2 \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \\ &= R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]\, \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} + R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]\, R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}.\end{aligned}$$

We thus need to control the trace norms of

$$R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2 \right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \mathbf{1}_{|x_2| \leq R}\ \mathbf{1}_{x_1 \leq -r_0 - r - a}, \tag{5.1.7}$$

and

$$R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \mathbf{1}_{|x_2|\leq R}\, \mathbf{1}_{x_1\leq -r_0-r-a}. \tag{5.1.8}$$

Having in mind that the commutator operator

$$\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] = -i(-i\nabla - \mathcal{A}_0).\nabla\Lambda_2 - i\nabla\Lambda_2.(-i\nabla - \mathcal{A}_0)$$

is localized on the support of $\nabla\Lambda_2$, we let $\chi_{|x_2|\leq 1}$ to be a smooth characteristic function of $\mathbb{R}\times\{|x_2|\leq 1\}$ such that $[H_{\omega,a}, \Lambda_2] = [H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,\chi_{|x_2|\leq 1}$. We use unit cubes to decompose $\chi_{|x_2|\leq 1}$ as $\displaystyle\sum_{\substack{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2\\ |x_2|\leq 1}} \chi_x$ where $(\chi_x)_{x\in\mathbb{Z}^2}$ is a smooth decomposition of unity.

We further consider

$$W_a = c_0 \sum_{(y_1,y_2)\in(\mathbb{Z}\cap[-a-r_0,\infty))\times\mathbb{Z}} \chi_y,$$

and

$$\mathbf{1}_{|x_2|\leq R}\, \mathbf{1}_{x_1\leq -r_0-r-a} = \sum_{(z_1,z_2)\in(\mathbb{Z}\cap(\infty,-r_0-a-r])\times(\mathbb{Z}\cap[-R,R])} \chi_z.$$

To treat (5.1.7), we write

$$\begin{aligned}
(5.1.7) &= R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \chi_{|x_2|\leq 1} R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \mathbf{1}_{|x_2|\leq R}\, \mathbf{1}_{x_1\leq -r_0-r-a} \\
&= \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_x\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_z \qquad (5.1.9)\\
&+ \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \chi_x\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_z, \qquad (5.1.10)
\end{aligned}$$

with

$$\mathcal{S}_1 := \{\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\cap\{|x_2|\leq 1\})\}\times\{(\mathbb{Z}\cap[-a-r_0,\infty))\times\mathbb{Z}\}\times\{(\mathbb{Z}\cap(\infty,-r_0-a-r])\times(\mathbb{Z}\cap[-R,R])\}.$$

Notice that in (5.1.9), we have $|y-x|\leq 2$ and using Lemma B.1.5 asserting that the operator $R_{\omega,a}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_x$ is trace class independently of x, we obtain

$$\begin{aligned}
\|(5.1.9)\|_1 &\leq \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_x\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_z \right\|_1 \\
&\leq \sup_x \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_x \right\|_1 \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \left\| \chi_x\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_z \right\| \\
&\leq \frac{C}{\eta^2\tilde{\eta}} \sum_{\substack{(x_1,x_2)\in(\mathbb{Z}\cap[-a-r_0-2,\infty))\times\{|x_2|\leq 1\}\\ (z_1,z_2)\in(\mathbb{Z}\cap(\infty,-r_0-a-r])\times(\mathbb{Z}\cap[-R,R])}} \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}(|z_1-x_1|+|z_2-x_2|)} \\
&\leq \frac{C_1}{\eta^2\tilde{\eta}}\, \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}r},
\end{aligned}$$

where $\eta = \mathrm{dist}(z, \sigma(H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}))$ and $\tilde{\eta} = \mathrm{dist}(z, \sigma(\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a}))$. Since r is arbitrary and for R fixed, it follows that the trace vanishes.

In the same manner, to estimate (5.1.10), it suffices to use the decay of the trace norm of $\chi_x R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z$. Since

$$\left\| \chi_x R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z \right\|_1 \leq ||\chi_x R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y||_2 ||\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z||_2, \tag{5.1.11}$$

together with

$$\begin{aligned}
\|\chi_x R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y\|_2 &\leq \left\|\chi_x R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \chi_y\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\right\|_2 \\
&\leq \left\|\chi_x R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \chi_y\right] \tilde{\chi}_y\right\| \left\|\tilde{\chi}_y R_{\omega,a,\mathsf{E}}\right\|_2 \\
&\leq \frac{CR}{\eta}\ \mathrm{e}^{-c\eta|x-y|},
\end{aligned}$$

where we have considered $|x-y| > 2$ and $\tilde{\chi}_y = 1$ on the support of $\nabla\chi_y$. We thus obtain

$$\begin{aligned}
\|(5.1.10)\|_1 &\leq \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \chi_x\right] \tilde{\chi}_x R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z \right\|_1 \\
&\leq \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \chi_x\right] \right\| ||\tilde{\chi}_x R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y||_2 ||\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z||_2 \\
&\leq \frac{c_1}{\eta^2\tilde{\eta}} \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \mathrm{e}^{-c_2\eta(|y_1-x_1|+|y_2-x_2|)-c_2\tilde{\eta}(|z_1-y_1|+|z_2-y_2|)} \\
&\leq \frac{\tilde{c}_1(a+r_0)}{\eta^2\tilde{\eta}} \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}r}.
\end{aligned}$$

Next, we proceed similarly for (5.1.8) so that

$$\begin{aligned}
\|(5.1.8)\|_1 &\leq \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \chi_x \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z \right\|_1 \\
&\leq \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \|R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y\|_2 ||\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \chi_x|| ||\chi_x \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z||_2 \\
&\leq \frac{C}{\tilde{\eta}^2} \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|z_1-x_1|+|z_2-x_2|)} \\
&\leq \frac{\tilde{C}(a+r_0)}{\tilde{\eta}^2}\ \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}r}.
\end{aligned}$$

Hence the traces of (5.1.10) and (5.1.8) vanishe since r is arbitrarily choosen.

We deal now with the term (II_R) in (5.1.3) that we treat exactly in the same way as (5.1.6). Indeed, following the previous steps, we have to check the trace norm of

$$R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \Lambda_1 \mathbf{1}_{|x_2|>R}, \tag{5.1.12}$$

and

$$R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \Lambda_1 \mathbf{1}_{|x_2|>R}. \tag{5.1.13}$$

Considering

$$\Lambda_1 \mathbf{1}_{|x_2|>R} = \sum_{(z_1,z_2)\in(\mathbb{Z}^-\times(\mathbb{Z}\cap[-R,R]^c)} \chi_z,$$

we start with (5.1.12) such that

$$\begin{aligned}
(5.1.12) &= R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] \chi_{|x_2|\le 1} R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, W_a \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \Lambda_1 \mathbf{1}_{|x_2|>R} \\
&= \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_2} R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_x\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_z \qquad (5.1.14)\\
&+ \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_2} R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\chi_x\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_z, \qquad (5.1.15)
\end{aligned}$$

similarly to (5.1.7) where

$$\mathcal{S}_2 := \{\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\cap\{|x_2|\le 1\})\}\times\{(\mathbb{Z}\cap[-a-r_0,\infty))\times\mathbb{Z}\}\times\{\mathbb{Z}^-\times(\mathbb{Z}\cap[-R,R]^c)\}.$$

To estimate the trace norm of (5.1.14) and (5.1.15), we follow (5.1.9) and (5.1.10) and we get

$$\begin{aligned}
\|(5.1.14)\|_1 &\le \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_2} \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_x\chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\chi_z \right\|_1 \\
&\le \frac{C}{\tilde{\eta}^2\tilde{\eta}} \sum_{\substack{(x_1,x_2)\in(\mathbb{Z}\cap[-a-r_0-2,\infty))\times\{|x_2|\le 1\}\\ (z_1,z_2)\in\mathbb{Z}^-\times(\mathbb{Z}\cap[-R,R]^c)}} \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}(|z_1-x_1|+|z_2-x_2|)} \\
&\le \frac{C_1}{\eta^2\tilde{\eta}}\, \mathrm{e}^{c\tilde{\eta}(a+r_0)}\mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}R},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\|(5.1.15)\|_1 &\le \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_2} \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{E}}\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\chi_x\right] \tilde{\chi}_x R_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\, \chi_z \right\|_1 \\
&\le \frac{c_1}{\eta^2\tilde{\eta}} \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_2} \mathrm{e}^{-c_2\eta(|y_1-x_1|+|y_2-x_2|)-c_2\tilde{\eta}(|z_1-y_1|+|z_2-y_2|)} \\
&\le \frac{\tilde{c}_1(a+r_0)}{\eta^2\tilde{\eta}}\, \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}R}.
\end{aligned}$$

We come back to (5.1.13) and use similar procedure as for (5.1.8) so that

$$\begin{aligned}\|(5.1.13)\|_1 &\leq \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_2} \left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_y \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a},\Lambda_2\right] \chi_x \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}}\ \chi_z \right\|_1 \\ &\leq \frac{C}{\tilde{\eta}^2} \sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_2} \mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+|z_1-x_1|+|z_2-x_2|)} \\ &\leq \frac{\tilde{C}(a+r_0)}{\tilde{\eta}^2}\ \mathrm{e}^{c\tilde{\eta}(a+r_0)}\mathrm{e}^{-c\tilde{\eta}R}.\end{aligned}$$

Since R is arbitrary, we thus conclude that the traces of (5.1.12) and (5.1.13) vanishe.

• *Magnetic case.* We are interested now on the pure magnetic model and the additional analysis that this model requires.

Let $\tilde{\mathcal{B}}$ be a new magnetic field $\tilde{\mathcal{B}}$ such that

$$\tilde{\mathcal{B}}(x_1,x_2) \geq b_0 > \sup \mathcal{I} \ \text{ for all } (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

and it coincides with $\mathcal{B}$ for $x_1 \leq -r_0$, $r_0 > 0$. The difference magnetic field $\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$ is supported on $S_{r_0} := \{x_1 \geq -r_0\} \times \mathbb{R}$ and it follows from [DGR1, Proposition 4.2] that there exists is a magnetic potential $\tilde{\mathcal{A}}$ generating $\tilde{\mathcal{B}} - \mathcal{B}$ that vanishes on $S^c_{r_0}$. Let us consider the auxiliary operator

$$\tilde{H}^{\mathsf{M}}_{\omega,a} := (-i\nabla - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_a - \tilde{\mathcal{A}}_a - \mathcal{A}_\omega)^2, \tag{5.1.16}$$

where $\tilde{\mathcal{A}}_a$ denotes $\tilde{\mathcal{A}}(x_1+a,x_2)$. Since $\tilde{H}^{\mathsf{M}}_{\omega,a} - \tilde{\mathcal{B}}_a$ is a non-negative operator, it follows (see [E]) that

$$\inf \sigma(\tilde{H}^{\mathsf{M}}_{\omega,a}) \geq \operatorname{Ess}\inf_{x_1\in\mathbb{R}} \tilde{\mathcal{B}}_a(x_1) \geq b_0.$$

As a consequence, one has $\sigma(\tilde{H}^{\mathsf{M}}_{\omega,a}) \cap \mathcal{I} = \emptyset$ and thus $g(\tilde{H}^{\mathsf{M}}_{\omega,a}) = 0$. We follow exactly the electric case. We let $R >$ arbitrary and we split the operator $\left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}),\Lambda_2\right]\Lambda_1$ in x_2- direction such that

$$\left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}),\Lambda_2\right]\Lambda_1 = \left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}),\Lambda_2\right]\Lambda_1 \mathbf{1}_{\{|x_2|\leq R\}} + \left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}),\Lambda_2\right]\Lambda_1 \mathbf{1}_{\{|x_2|>R\}}. \tag{5.1.17}$$

In order to extract a compact part, we decompose the first r.h.s of (5.1.17) in the x_1-direction for $r > 0$ arbitrary and we write it as

$$\left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}),\Lambda_2\right] \mathbf{1}_{\{|x_2|\leq R\}}\mathbf{1}_{\{-r_0-a-r\leq x_1\leq 0\}} + \left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}),\Lambda_2\right] \mathbf{1}_{\{|x_2|\leq R\}}\mathbf{1}_{\{x_1\leq -r_0-a-r\}}. \tag{5.1.18}$$

The trace of the l.h.s of (5.1.18) is zero, following the electric case. Otherwise, to treat the second terms in r.h.s of (5.1.18) and (5.1.17), we take advantage of the auxiliary operator $\tilde{H}_{\omega,a,\mathsf{M}}$ defined in (5.1.16), as we did for (5.1.6) and (5.1.2), except that the operator W_a is replaced by the first order operator $\mathcal{W}_{a,\omega}$ given by

$$\mathcal{W}_{\omega,a} := \tilde{H}^{\mathsf{M}}_{\omega,a} - H^{\mathsf{M}}_{\omega,a} = -2\tilde{\mathcal{A}}_a.(-i\nabla - \mathcal{A}^{\mathrm{Iw}}_a - \mathcal{A}_\omega) + i\operatorname{div}\tilde{\mathcal{A}}_a + |\tilde{\mathcal{A}}|^2. \tag{5.1.19}$$

We start by $\left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \mathbf{1}_{\{|x_2|\leq R\}}\mathbf{1}_{\{x_1\leq -r_0-a-r\}}$ that leads to check the trace norm of

$$R_{\omega,a,\mathsf{M}} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{M}}\mathcal{W}_{\omega,a}\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}}\mathbf{1}_{\{|x_2|\leq R\}}\mathbf{1}_{\{x_1\leq -r_0-a-r\}} \tag{5.1.20}$$

and

$$R_{\omega,a,\mathsf{M}}\mathcal{W}_{\omega,a}\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{M}}\mathbf{1}_{\{|x_2|\leq R\}}\mathbf{1}_{\{x_1\leq -r_0-a-r\}}. \tag{5.1.21}$$

Once more, we use smooth decomposition of unity and we write

$$\mathcal{W}_{a,\omega} = \sum_{\substack{y_1\in\mathbb{Z}\cap(\infty,-r_0-a-r]\\ y_2\in\mathbb{Z}\cap[-R,R]}} \chi_z\mathcal{W}_{\omega,a} = \sum_{\substack{y_1\in\mathbb{Z}\cap(\infty,-r_0-a-r]\\ y_2\in\mathbb{Z}\cap[R,R]}} \mathcal{W}_{\omega,a}\chi_z.$$

The term in (5.1.20) is treated in the same way as (5.1.7) where we have to estimate the trace norm of

$$\sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} R_{\omega,a,\mathsf{M}} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{M}}\ \chi_x\chi_y\mathcal{W}_{\omega,a}\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}}\chi_z, \tag{5.1.22}$$

and

$$\sum_{x,y,z\in\mathcal{S}_1} R_{\omega,a,\mathsf{M}} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a,\mathsf{M}} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \chi_x\right] R_{\omega,a,\mathsf{M}}\ \chi_y\mathcal{W}_{\omega,a}\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}}\chi_z. \tag{5.1.23}$$

This follows from (5.1.9) and (5.1.10) where we use Lemma B.1.3 to obtain a decay of the kernel of $\mathcal{W}_{\omega,a}\tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}}$ instead of the Combes-Thomas estimate. In particular, (5.1.21) follows the same procedure as (5.1.8).

We now turn to the remaining term $\left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}) - g(\tilde{H}^{\mathsf{M}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \Lambda_1\mathbf{1}_{\{|x_2|>R\}}$ which is similar to (5.1.3). This gives analogous terms to (5.1.12) and (5.1.13) where once more, the decay of the kernel of the resolvent is replaced by that of $\mathcal{W}_{\omega,a}$ thanks to Lemma B.1.3.After all, we conclude that the trace of $\left[g(H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}), \Lambda_2\right] \Lambda_1$ vanishes.

5.1.2 Trace class property

The operator $g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2,]\,\Lambda_1$.

The trace class property of this operator follows from the previous section where we have considered auxiliary operators $\tilde{H}_{\omega,a}$ to take avantage of the wall. The idea consists in using the fact $g'(\tilde{H}_{\omega,a}) = 0$ and to analyse the operator

$$(g'(H_{\omega,a}) - g'(\tilde{H}_{\omega,a}))\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2,]\,\Lambda_1$$

via the formula (3.4.1).

• *Electric case.* After computation and recalling that $\tilde{H}^{\mathsf{E}}_{\omega,a} = H^{\mathsf{E}}_{\omega,a} + W_a$, we obtain six terms

$$\begin{aligned}(\tilde{R}^3_{\omega,a,\mathsf{E}} - R^3_{\omega,a,\mathsf{E}}) \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \Lambda_1 = (&\tilde{R}^2_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} + \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R^2_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} \\ &+ \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}^2_{\omega,a,\mathsf{E}} + R^2_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}} \\ &+ R_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}^2_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}} + R_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R^2_{\omega,a,\mathsf{E}}) \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \Lambda_1.\end{aligned}$$

We shall treat one term and the others holds in quite similar way. For instance, we deal with $R_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}^2_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \Lambda_1$ that we write as the sum of

$$R_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}^2_{\omega,a,\mathsf{E}} \chi_y R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \chi_x \tag{5.1.24}$$

over

$$\mathcal{D}_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^- \times (\mathbb{Z} \cap [-1, 1]), (y_1, y_2) \in (\mathbb{Z} \cap (\infty, -a - r_0]) \times \mathbb{Z}\}.$$

Thus the trace class property holds from $\tilde{R}^2_{\omega,a,\mathsf{E}} \chi_y$ while the summabilty of the sum comes from the decay of $\chi_y R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \chi_x$ thanks to the Combes-Thomas estimate [CT]. In the sense that

$$\left\| R_{\omega,a,\mathsf{E}} \tilde{R}^2_{\omega,a,\mathsf{E}} W_a R_{\omega,a,\mathsf{E}} \left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \Lambda_1 \right\|_1 \leq C(a + r_0) |\operatorname{Im} z|^{-4}. \tag{5.1.25}$$

• *Magnetic case.* Once more, the same arguments work for the magnetic case subject to change W_a into $\mathcal{W}_{\omega,a}$. If we consider the term $R_{\omega,a,\mathsf{M}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}} \mathcal{W}_{\omega,a} R^2_{\omega,a,\mathsf{M}} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \Lambda_1$, we have to estimate the trace norm of the sum of

$$R_{\omega,a,\mathsf{M}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}} \chi_y \mathcal{W}_{\omega,a} R_{\omega,a,\mathsf{M}} \chi_u \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \chi_x \tag{5.1.26}$$

over

$$\mathcal{D}_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^- \times (\mathbb{Z} \cap [-1, 1]), (y_1, y_2) \in (\mathbb{Z} \cap (\infty, -a - r_0]) \times \mathbb{Z}\, u \in \mathbb{Z}^2\},$$

so that

$$\|(5.1.26)\|_1 \leq \left\| R_{\omega,a,\mathsf{M}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}} \chi_y \right\|_1 \|\chi_y \mathcal{W}_{\omega,a} R_{\omega,a,\mathsf{M}} \chi_u\| \left\| \chi_u R_{\omega,a,\mathsf{M}} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_2\right] \chi_x \right\|. \tag{5.1.27}$$

Since $R_{\omega,a,\mathsf{M}} \tilde{R}_{\omega,a,\mathsf{M}} \chi_y$ is trace class and having in mind that $\mathcal{W}_{\omega,a}$ is a first order operator, we use Lemma B.1.3 to upper bound (5.1.27) by

$$c_1 |\operatorname{Im} z|^{-4} \, \mathrm{e}^{-c_2 |\operatorname{Im} z| (|u-y| + |x-u|)}.$$

The remaining operators are analog.

Now we establish the trace class property of operators depending on the time regularization $\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$.

The operator $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2,]\, \Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$.

We substract $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2]\, \Lambda_1$ which has zero trace by the previous analysis in section 5.1.1. Moreover, combining

$$\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) - \Lambda_1 = i \int_0^t \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_1] \, \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}} \mathrm{d}s, \tag{5.1.28}$$

that we insert in (3.4.1) and the resolvent identity (3.4.3), we are led to analyse the trace norm of

$$R^2_{\omega,a} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_2] \, R_{\omega,a} \; \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_1] \, \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}, \tag{5.1.29}$$

and

$$R_{\omega,a} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_2] \, R^2_{\omega,a} \; \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_1] \, \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}. \tag{5.1.30}$$

These operators are localized in space in both directions x_1 and x_2 in the sense that each $[H_{\omega,a}, \Lambda_j]$ is localized on the support of Λ'_j because

$$\begin{aligned} \left[H^{\mathsf{M}}_{\omega,a}, \Lambda_j\right] &= \left[(-i\nabla - A_0 - A_a - A_\omega)^2, \Lambda_j\right] \\ &= -i(-i\nabla - A_0 - A_a - A_\omega).\nabla\Lambda_j - i\nabla\Lambda_j.(-i\nabla - A_0 - A_a - A_\omega) \end{aligned}$$

and

$$\left[H^{\mathsf{E}}_{\omega,a}, \Lambda_j\right] = -i(-i\nabla - A_0).\nabla\Lambda_j - i\nabla\Lambda_j.(-i\nabla - A_0).$$

We precise that we have the same proof in the electric and magnetic cases. So we will not specify the case we deal with in the next analysis.

To estimate the trace norm of (5.1.29), we decompose it via smooth characteristic functions in the same spirit of the proof of Lemma 3.4.1 so that we write

$$(5.1.29) = \sum_{\substack{x_1\in\mathbb{Z},\ x_2\in\mathbb{Z}\cap[-1,1] \\ y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1],\ y_2\in\mathbb{Z}}} R^2_{\omega,a} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_2] \, \chi_x R_{\omega,a} \; \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_1] \, \chi_y \; \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}. \tag{5.1.31}$$

Since the operator $R^2_{\omega,a} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_2] \, \chi_x$ is trace class with

$$\left\| R^2_{\omega,a} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_2] \, \chi_x \right\|_1 \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} z|^2},$$

and the operator norm of $\chi_x R_{\omega,a} \; \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} \, [H_{\omega,a}, \Lambda_1] \, \chi_y$ is upper bounded by

$$\mathrm{e}^{c_1 s} |\operatorname{Im} z|^{-1} \; \mathrm{e}^{-c_2 |\operatorname{Im} z| (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)},$$

which follows from Lemma B.1.3, we obtain the sum (5.1.31) is finite and thus (5.1.29) is trace class. Moreover, there exist two constants c_1 and c_2 such that

$$\|(5.1.29)\|_1 \leq c_3 |\operatorname{Im} z|^{-3} \, \mathrm{e}^{c_1 s}. \tag{5.1.32}$$

We turn to (5.1.30) that we expand in the following way

$$(5.1.30) = \sum_{\substack{u_1,y_2\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{Z}^2\\ u_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right]\chi_u R_{\omega,a}\chi_x \, \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_1\right]\chi_y \, \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}.$$

In order to extract the decay in x_1 and y_2, we use commutators to push χ_u to the left through the resolvent $R_{\omega,a}$. Let $\tilde{\chi}_u$ be a smooth function such that $\tilde{\chi}_u = 1$ on $\operatorname{supp}\nabla\chi_u$. Then we have

$$\begin{aligned}
\|(5.1.30)\|_1 &\leq \sum_{\substack{u_1,y_2\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{Z}^2\\ u_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} \left\| R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right]\chi_u R_{\omega,a}\chi_x \, \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_1\right]\chi_y \, \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}\right\|_1 \\
&\leq \sum_{\substack{u_1,y_2\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{Z}^2\\ u_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} \left\| R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right] R_{\omega,a}\chi_u\chi_x \, \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_1\right]\chi_y \, \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}\right\|_1 \\
&+ \sum_{\substack{u_1,y_2\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{Z}^2\\ u_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} \left\| R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right] R_{\omega,a}\tilde{\chi}_u\left[H_{\omega,a},\chi_u\right] R_{\omega,a}\chi_x \, \mathrm{e}^{isH_{\omega,a}} R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_1\right]\chi_y \, \mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}\right\|_1 \\
&\leq C_1 |\operatorname{Im} z|^{-3} \, \mathrm{e}^{c_1 s} \sum_{\substack{x_1,y_2\in\mathbb{Z}\\ y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]\\ x_2\in\mathbb{Z}\cap[-3,3]}} \mathrm{e}^{-\tilde{c}_1|\operatorname{Im} z|(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|)} \\
&+ C_2 |\operatorname{Im} z|^{-4} \, \mathrm{e}^{c_2 s} \sum_{\substack{u_1,y_2\in\mathbb{Z},x\in\mathbb{Z}^2\\ u_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} \mathrm{e}^{-\tilde{c}_2|\operatorname{Im} z|(|x_1-u_1|+|x_2-u_2|+|x_1-y_1|+|x_2-y_2|)} \\
&\leq \tilde{C}_1 |\operatorname{Im} z|^{-3} \, \mathrm{e}^{c_1 s} + C_2 |\operatorname{Im} z|^{-4} \, \mathrm{e}^{c_2 s} \sum_{\substack{u_1,y_2\in\mathbb{Z}\\ u_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} \mathrm{e}^{-\tilde{c}_2|\operatorname{Im} z|(|u_1-y_1|+|u_2-y_2|)},
\end{aligned}$$

where we have combined Combes-Thomas estimate [CT] and Lemma B.1.3 together with Lemma B.1.5. Hence, the summability follows and the operator (5.1.30) is finally trace class with

$$\|(5.1.30)\|_1 \leq C_3 \, \mathrm{e}^{\tilde{c}_3 s}(|\operatorname{Im} z|^{-3} + |\operatorname{Im} z|^{-4}). \tag{5.1.33}$$

The operator $g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$.

We return now to the operator $g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$. From the derivative expression (3.4.2), it follows that

$$\begin{aligned} g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) &= g'(H_{\omega,a})\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\Lambda_1 \\ &+ \frac{i}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t \overline{\partial}\tilde{G}(z)R^3_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\mathrm{e}^{isH_{\omega,a}}\,[H_{\omega,a},\Lambda_1]\,\mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}\mathrm{d}s\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

By the first point of this section that it suffices to treat (5.1.34) and to estimate the trace norm operator of

$$R^3_{\omega,a}\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\mathrm{e}^{isH_{\omega,a}}\,[H_{\omega,a},\Lambda_1]\,\mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}, \tag{5.1.35}$$

that we write as

$$R^2_{\omega,a}\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R_{\omega,a}\mathrm{e}^{isH_{\omega,a}}\,[H_{\omega,a},\Lambda_1]\,\mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}} \tag{5.1.36}$$

$$-\,R^3_{\omega,a}\,[H_{\omega,a},[H_{\omega,a},\Lambda_2]]\,R_{\omega,a}\;\mathrm{e}^{isH_{\omega,a}}\,[H_{\omega,a},\Lambda_1]\,\mathrm{e}^{-isH_{\omega,a}}. \tag{5.1.37}$$

Thus one has

$$\|(5.1.36)\|_1 \leq \sum_{\substack{x_1,y_2\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{Z}^2\\ x_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} \left\|R^2_{\omega,a}\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,\chi_x\right\|_1 \left\|\chi_x R_{\omega,a}\mathrm{e}^{isH_{\omega,a}}\,[H_{\omega,a},\Lambda_1]\,\chi_y\right\|, \tag{5.1.38}$$

and similarly

$$\|(5.1.37)\|_1 \leq \sum_{\substack{x_1,y_2\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{Z}^2\\ x_2,y_1\in\mathbb{Z}\cap[-1,1]}} \left\|R^3_{\omega,a}\,[H_{\omega,a},[H_{\omega,a},\Lambda_2]]\,\chi_x\right\|_1 \left\|\chi_x R_{\omega,a}\;\mathrm{e}^{isH_{\omega,a}}\,[H_{\omega,a},\Lambda_1]\,\chi_y\right\|. \tag{5.1.39}$$

The trace norms above are upper bounded by a constant c and the operator norms operators are bounded by

$$\mathrm{e}^{c_1 s}|\operatorname{Im} z|^{-1}\mathrm{e}^{-c_2|\operatorname{Im} z|(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|)},$$

and the trace class property holds.

Although the operator $[g(H_{\omega,a}),\Lambda_2]\,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$ is still trace class, there is no reason anymore for its trace to vanishes since Λ_2 does not commute with $\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)$ as it is the case with Λ_1.

5.2 Contributions of the Bulk quantities

We start by proving the zero contribution of the remainder term (3.4.7) that we recall in the following lemma.

Lemma 5.2.1. *Let g be a switch function of an interval $\mathcal{I}$. Then*

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{tr}\mathcal{R}_{\omega,a}(t)\ \mathrm{d}t = 0. \tag{5.2.1}$$

5.2.1 Proof of Lemma 3.4.2

For convenience we set

$$r^{(1)}_{\omega,a}(t) = R^2_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R_{\omega,a}(z)\left[H_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]R_{\omega,a}(z), \tag{5.2.2}$$

$$r^{(2)}_{\omega,a}(t) = R_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R^2_{\omega,a}(z)\left[H_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]R_{\omega,a}(z), \tag{5.2.3}$$

$$r^{(3)}_{\omega,a}(t) = R_{\omega,a}(z)\,[H_{\omega,a},\Lambda_2]\,R_{\omega,a}(z)\left[H_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]R^2_{\omega,a}(z). \tag{5.2.4}$$

We first treat (5.2.3) and show the convergence to the bulk quantity. We write $r^{(2)}_{\omega,a}t)$ as

$$[R_{\omega,a},\Lambda_2]\,(H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}(\langle x_2\rangle^{-2\nu}(H_\omega+\Theta)^{-2}\langle x_1\rangle^{-2\nu})\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega+\Theta)\left[R_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]. \tag{5.2.5}$$

We notice that the operators $[R_{\omega,a},\Lambda_2]\,(H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}$ and $\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega+\Theta)\left[R_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]$ are uniformly bounded in a. As the middle operator $(\langle x_2\rangle^{-2\nu}(H_\omega+\Theta)^{-2}\langle x_1\rangle^{-2\nu})$ is trace class (see [BoGKS]), it follows from Lemma B.1.1 and Proposition B.1.2 that it suffices to prove the strong convergence of the left and right operators in (5.2.5) in $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^2)$. We use the identity $R^{\mathsf{E}}_{\omega,a}-R^{\mathsf{E}}_{\omega}=-R^{\mathsf{E}}_{\omega,a}U_a\ R^{\mathsf{E}}_{\omega}$ to write

$$\left[R^{\mathsf{E}}_{\omega,a}-R^{\mathsf{E}}_{\omega},\Lambda_2\right]=\Lambda_2R^{\mathsf{E}}_{\omega,a}U_a\ R^{\mathsf{E}}_{\omega}-R^{\mathsf{E}}_{\omega,a}U_a\ R^{\mathsf{E}}_{\omega}\ \Lambda_2. \tag{5.2.6}$$

Similarly, we have

$$R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}-R^{\mathsf{M}}_{\omega}=-R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}\Gamma_{\omega,a}\ R^{\mathsf{M}}_{\omega},$$

for the magnetic model and thus

$$\left[R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}-R^{\mathsf{M}}_{\omega},\Lambda_2\right]=\Lambda_2R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}\Gamma_{\omega,a}\ R^{\mathsf{M}}_{\omega}-R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}\Gamma_a\ R^{\mathsf{M}}_{\omega}\ \Lambda_2. \tag{5.2.7}$$

Let $\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ be such that $\operatorname{supp}\varphi\subset D_{r_1,r_2}$ where $D_{r_1,r_2}=[-r_1,r_1]\times[-r_2,r_2]$ for $r_1<a$ and $r_2>0$. In particular, $\operatorname{supp}(\Lambda_2(H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi)\subset D_{r_1,r_2}$ and we have

$$\left\|R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}\ \Gamma_{\omega,a}\ R^{\mathsf{M}}_{\omega}\ \Lambda_2(H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\|\le\frac{C}{|\operatorname{Im}z|^2}\ \mathrm{e}^{-c|a-r_1|}\left\|\Lambda_2(H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\|$$

and

$$\left\|\Lambda_2\ R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}\ \Gamma_{\omega,a}\ R^{\mathsf{M}}_{\omega}(H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} z|^2}\ \mathrm{e}^{-c|a-r_1|}\left\|(H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\|,$$

which converge to 0 as $a\to+\infty$. Similar estimates holds for the electric model.

Next we carry on the convergence of the right side of the operator in (5.2.5) that we will treat in a similar way. We write

$$\left[R_{\omega,a},\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]-\left[R_\omega,\Lambda^{\omega}_1(t)\right]=\left[R_{\omega,a}-R_\omega,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]+\left[R_\omega,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)-\Lambda^{\omega}_1(t)\right] \tag{5.2.8}$$

and we point out that the first term in r.h.s of (5.2.8) is treated in the same spirit as (5.2.7) without time-dependence. In fact

$$\left[R_{\omega,a}-R_\omega,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]=\left[R_{\omega,a}-R_\omega,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)-\Lambda_1\right]+\left[R_{\omega,a}-R_\omega,\Lambda_1\right] \tag{5.2.9}$$

and the second term in the r.h.s of (5.2.9) looks like (5.2.7) where we have Λ_1 instead of Λ_2. For the first term of (5.2.9), we take advantage of localisation in x_1 that the difference $\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)-\Lambda_1$ gives (see (5.1.28)) and the result holds similarly.

We come back to the second term in the r.h.s of (5.2.8), namely

$$\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega+\Theta)\left[R_\omega,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)-\Lambda^{\omega}_1(t)\right]$$

that requires more works. In fact, we use the commutators and the first order resolvent identity to obtain

$$\left[R_\omega,\Lambda^{\omega}_1(t)\right]=-R_\omega\mathrm{e}^{itH_\omega}\left[H_\omega,\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_\omega}R_\omega,$$

and

$$\begin{aligned}\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)R_\omega&=\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)R_{\omega,a}(1+\Gamma_{\omega,a}R_\omega)\\&=R_{\omega,a}\ \Lambda^{\omega}_{1,a}(t)(1+\Gamma_{\omega,a}R_\omega)+\mathrm{e}^{-itH_{\omega,a}}\left[R_{\omega,a},\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_{\omega,a}}(1+\Gamma_{\omega,a}R_\omega).\end{aligned}$$

Hence, one has

$$\left[R_\omega,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]=R_\omega\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)-R_{\omega,a}\ \Lambda^{\omega}_{1,a}(t)(1+\Gamma_{\omega,a}R_\omega)-\mathrm{e}^{-itH_{\omega,a}}\left[R_{\omega,a},\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_{\omega,a}}(1+\Gamma_{\omega,a}R_\omega)$$

so that

$$\begin{aligned}\left[R_\omega,\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)-\Lambda^{\omega}_1(t)\right]&=(R_\omega-R_{\omega,a})\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)-R_{\omega,a}\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\Gamma_{\omega,a}R_\omega\\&\quad-e^{-itH_{\omega,a}}\left[R_{\omega,a},\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_{\omega,a}}(1+\Gamma_{\omega,a}R_\omega)-\mathrm{e}^{itH_\omega}\left[R_\omega,\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_\omega}.\end{aligned}$$

The strong convergence to 0 follows from the fact that $\Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\to\Lambda^{\omega}_1(t)$ and $R_\omega\Gamma_{\omega,a}\to 0$ strongly that we have established in Lemma B.2.1.

We now deal with (5.2.2) and we push one resolvent from the left through the commutator $[H_{\omega,a}, \Lambda_1]$, so that

$$r^{(1)}_{\omega,a}(t) = R_{\omega,a}\,[R_{\omega,a}, \Lambda_2]\, R^2_{\omega,a}\left[H_{\omega,a}, \Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right] R_{\omega,a} \tag{5.2.10}$$

$$- R^2_{\omega,a}\,[H_{\omega,a}, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]]\, R^2_{\omega,a}\left[H_{\omega,a}, \Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right] R_{\omega,a}. \tag{5.2.11}$$

The first term (5.2.10) fit exactly to (5.2.2). Procceding as in (5.2.5) we get

$$(5.2.11) = -R_{\omega,a}\,[R_{\omega,a}, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]]\,(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}(\langle x_2\rangle^{-2\nu}(H_\omega + \Theta)^{-2}\langle x_1\rangle^{-2\nu})$$
$$\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)\left[R_{\omega,a}, \Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right].$$

Then using the trace class property of the middle operator and Lemma B.1.1 and Proposition B.1.1 with Lemma B.2.1 together with the fact that the right operator above $\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)\left[R_{\omega,a}, \Lambda^{\omega}_{1,a}(t)\right]$ is previousely treated in (5.2.7), we only need to prove the strong convergence of the operator

$$[R_{\omega,a}, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]]\,(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu},$$

which is uniformly bounded in a. We calculate the difference

$$[R_{\omega,a}, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]] - [R_\omega, [H_\omega, \Lambda_2]] = [R_{\omega,a} - R_\omega, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]] + [R_\omega, [\Gamma_{\omega,a}, \Lambda_2]]\,, \tag{5.2.12}$$

and we let $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ with support $D_{r_1,r_2} = [-r_1, r_1] \times [-r_2, r_2]$ for $r_1 < a$ and $r_2 > 0$. Then the supports of $[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi$ and $(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi$ are contained in D_{r_1,r_2} such that one has

$$\begin{aligned}
&\|[R_{\omega,a} - R_\omega, [H_{\omega,a}, \Lambda_2]]\,(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\| \\
&\le \left\|R_\omega\Gamma_{\omega,a}R_{\omega,a}\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\| + \left\|[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,R_{\omega,a}\Gamma_{\omega,a}R_\omega(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\| \\
&\le \|R_\omega\|\left\|\Gamma_{\omega,a}R_{\omega,a}\,[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\| + \|[H_{\omega,a}, \Lambda_2]\,R_{\omega,a}\|\left\|\Gamma_{\omega,a}R_\omega(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\| \\
&\le C\left(|\operatorname{Im} z|^{-2}\,\mathrm{e}^{-\tilde{c}_1|\operatorname{Im} z||a-r_1|} + |\operatorname{Im} z|^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-\tilde{c}_2|\operatorname{Im} z||a-r_1|}\right)\left\|(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\|,
\end{aligned}$$

which converges to 0 as $a \to \infty$.

Consider now the remaining term $[R_\omega, [\Gamma_{\omega,a}, \Lambda_2]]$ in (5.2.12). We have

$$[R_\omega, [\Gamma_{\omega,a}, \Lambda_2]] = R_\omega\Gamma_{\omega,a}\Lambda_2 - R_\omega\Lambda_2\Gamma_{\omega,a} - \Gamma_{\omega,a}\Lambda_2R_\omega + \Lambda_2\Gamma_{\omega,a}R_\omega,$$

that we treat in the following way

$$\left\|\Gamma_{\omega,a}\Lambda_2R_\omega(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\right\| \le c_3|\operatorname{Im} z|^{-1}\mathrm{e}^{-\tilde{c}_3|\operatorname{Im} z||a-r_1|}\left\|(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\|, \tag{5.2.13}$$

and

$$\left\|\Lambda_2\Gamma_{\omega,a}R(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\right\| \le c_4|\operatorname{Im} z|^{-1}\mathrm{e}^{-\tilde{c}_4|\operatorname{Im} z||a-r_1|}\left\|(H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi\right\|, \tag{5.2.14}$$

while $R_\omega\left[\Gamma_{\omega,a},\Lambda_2\right](H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}\varphi=0$ since $r_1<a$. We conclude that (5.2.13) and (5.2.14) converge to 0 as $a\to\infty$.

In a similar way, we could establish the strong convergences in a of (5.2.4) to the bulk corresponding operators such that $r^{(3)}_{\omega,a}(t)\to r^{(3)}_\omega(t)$ where we denote by $r^{(1)}_\omega(t), r^{(2)}_\omega(t)$ and $r^{(3)}_\omega(t)$ the analougous remainders.

After this, we estimate the time average of $r^{(j)}_\omega(t)$ in the trace norm for $j=1,2,3$. We start with $r^{(1)}_\omega(t)$. We consider $\chi_{\{|x_2|\le R\}}$ and $\chi_{\{|x_2|>R\}}$ smooth functions where $R=T^{1/2}$ and we write

$$\frac{1}{T}\int_0^T r^{(1)}_\omega(t)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T R^2_\omega\left[H_\omega,\Lambda_2\right](\chi_{\{|x_1|\le R\}}+\chi_{\{|x_1|>R\}})R_\omega\left[H_\omega,\Lambda^\omega_1(t)\right]R_\omega\ \mathrm{d}t. \tag{5.2.15}$$

We start with the first term in the r.h.s of (5.2.15) whose trace norm is estimated as

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\left\|R^2_\omega\left[H_\omega,\Lambda_2\right]\chi_{\{|x_1|\le R\}}R_\omega\left(\mathrm{e}^{iTH_\omega}\Lambda_1\mathrm{e}^{-iTH_\omega}-\Lambda_1\right)R_\omega\right\|_1\\&\le\frac{1}{T}\left\|R^2_\omega\left[H_\omega,\Lambda_2\right]\chi_{\{|x_1|\le R\}}\right\|_1\left\|R_\omega\left(\mathrm{e}^{iTH_\omega}\Lambda_1\mathrm{e}^{-iTH_\omega}-\Lambda_1\right)R_\omega\right\|\\&\le\frac{CR}{T}|\operatorname{Im}z|^{-4},\end{aligned}$$

which goes to 0 as $T\to\infty$ where we have used that the operator $R^2_\omega\left[H_\omega,\Lambda_2\right]R_\omega\chi_{\{|x_1|\le R\}}$ belongs to $\mathcal{T}_1$ together with

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T\left[H_\omega,\Lambda^\omega_1(t)\right]\ \mathrm{d}t&=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{e}^{itH_\omega}\left[H_\omega,\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_\omega}\mathrm{d}t\\&=\frac{-i}{T}(\mathrm{e}^{iTH_\omega}\Lambda_1\mathrm{e}^{-iTH_\omega}-\Lambda_1).\end{aligned}$$

Concerning the second term in the r.h.s of (5.2.15), we have

$$\begin{aligned}&\left\|R^2_\omega\left[H_\omega,\Lambda_2\right]\left(\frac{1}{T}\int_0^T\chi_{\{|x_1|>R\}}R_\omega\mathrm{e}^{itH_\omega}\left[H_\omega,\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_\omega}R_\omega\ \mathrm{d}t\right)\right\|_1\\&\le\sum_{x,y\in\mathcal{S}}\left\|\frac{1}{T}\int_0^T R^2_\omega\left[H_\omega,\Lambda_2\right]\chi_xR_\omega\mathrm{e}^{itH_\omega}\chi_y\left[H_\omega,\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_\omega}R_\omega\ \mathrm{d}t\right\|_1\\&\le\sum_{x,y\in\mathcal{S}}\left\|R^2_\omega\left[H_\omega,\Lambda_2\right]\chi_x\right\|_1\left(\frac{1}{T}\int_0^T\left\|\chi_xR_\omega\mathrm{e}^{itH_\omega}\chi_y\right\|\ \mathrm{d}t\right)\left\|\left[H_\omega,\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{-itH_\omega}R_\omega\right\|\\&\le\tilde{C}|\operatorname{Im}z|^{-4}\ T^5\mathrm{e}^{-c_1|\operatorname{Im}z|R},\end{aligned}$$

where

$$\mathcal{S}:=\{(\mathbb{Z}\cap[-R,R]^c)\times(\mathbb{Z}\cap[-1,1])\}\times\{(\mathbb{Z}\cap[-1,1])\times\mathbb{Z}\}.$$

Here, we have used the decay of the kernel $\chi_x R_\omega e^{itH_\omega}\chi_y$ (see[BGK]). Since $R = T^{1/2}$, the trace thus vanishes as $T \to \infty$.

In an analogous way we estimate the time average of $r_\omega^{(2)}(t)$ and $r_\omega^{(3)}(t)$ as in (5.2.15). Taking $\tilde{G}$ of order 5, the limit (5.2.1) follows.

5.2.2 Proof of Lemma 3.4.3

After having evaluated the contribution of (3.4.7), we deal in this section with the l.h.s of (3.4.6).

Lemma 5.2.2. *Let g be a switch function of an interval $\mathcal{I}$ with* supp $g' \subset \mathcal{I}$. *Then*

$$\lim_{a\to\infty} \operatorname{tr}\left[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2\right](\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1) = \operatorname{tr}\left[g(H_\omega), \Lambda_2\right](\Lambda_1^\omega(t) - \Lambda_1) \tag{5.2.16}$$

uniformely in t.

It follows from the previous section that the operator $[g(H_{\omega,a}), \Lambda_2](\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1)$ is trace class. Concerning the convergence in trace to $[g(H_\omega), \Lambda_2](\Lambda_1^\omega(t) - \Lambda_1)$, we adopt the same techniques used for the remainder operator $\mathcal{R}_{\omega,a}(t)$ in section 5.2.1. We use (3.4.1) and we notice that is enough to analyse the operators

$$R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a}^2(\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1) \tag{5.2.17}$$

and

$$R_{\omega,a}^2\left[H_{\omega,a}, \Lambda_2\right] R_{\omega,a}(\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1). \tag{5.2.18}$$

Once again, we introduce the operator $(H_\omega + \Theta)^2$ inside (5.2.17) and (5.2.18). Let us start with (5.2.17) and write it as

$$-\left[R_{\omega,a}, \Lambda_2\right](H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}(\langle x_2\rangle^{-2\nu}(H_\omega + \Theta)^2\langle x_1\rangle^{-2\nu})\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)R_{\omega,a}(\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1). \tag{5.2.19}$$

Since the operator $(\langle x_2\rangle^{-2\nu}(H_\omega + \Theta)^2\langle x_1\rangle^{-2\nu})$ is trace class [BoGKS], it suffices thanks to Lemma B.1.1, to prove the strong converge of the operators $[R_{\omega,a}, \Lambda_2](H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}$ and $\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)R_{\omega,a}(\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1)$ in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ because they are uniformly bounded in a. Notice that $[R_{\omega,a}, \Lambda_2](H_\omega + \Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}$ has already been treated in (5.2.2). We now look at the quantity $\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)R_{\omega,a}(\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1)$ that we write as

$$\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)(R_{\omega,a} - R_\omega)(\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1) + \langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)R_\omega(\Lambda_{1,a}^\omega(t) - \Lambda_1).$$

Since $\Lambda_{1,a}^\omega \to \Lambda_1^\omega(t)$ strongly, the second term converges to zero, and it is enough to show that $\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega + \Theta)(R_{\omega,a} - R_\omega)$ converges strongly to 0. This holds immediately from the

fact $R_{\omega,a} - R_\omega = -R_\omega \Gamma_{\omega,a} R_{\omega,a}$. Now, take $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ compactly supported in D_{r_1,r_2} as in section 5.2.1 with $r_1 < a$, then

$$\begin{aligned}\left\|\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega+\Theta)R_\omega\Gamma_{\omega,a}R_{\omega,a}\varphi\right\| &\leq \langle r_1\rangle^{2\nu}\left\|(H_\omega+\Theta)R_\omega\right\|\left\|\Gamma_{\omega,a}R_{\omega,a}\varphi\right\| \\ &\leq \frac{C_{r_1}}{|\operatorname{Im} z|^{1/2}}\mathrm{e}^{-c|\operatorname{Im} z||a-r_1|}\left\|\varphi\right\|,\end{aligned}$$

which converges to 0 as $a \to \infty$.

Next we turn to (5.2.18) whose analysis will be similar to that of (5.2.2) in the sense that one has

$$R_{\omega,a}^2\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right]R_{\omega,a}(\Lambda_{1,a}^\omega(t)-\Lambda_1) = R_{\omega,a}\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right]R_{\omega,a}^2(\Lambda_{1,a}^\omega(t)-\Lambda_1) \tag{5.2.20}$$

$$- R_{\omega,a}^2\left[H_{\omega,a},\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right]\right]R_{\omega,a}^2(\Lambda_{1,a}^\omega(t)-\Lambda_1). \tag{5.2.21}$$

Since the first term (5.2.20) fit excatly to (5.2.17), we only need to check (5.2.21). We have

$$\begin{aligned}(5.2.21) =& R_{\omega,a}\left[R_{\omega,a},\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right]\right](H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}(\langle x_2\rangle^{-2\nu}(H_\omega+\Theta)^{-2}\langle x_1\rangle^{-2\nu}) \\ & \langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega+\Theta)R_{\omega,a}(\Lambda_{1,a}^\omega(t)-\Lambda_1).\end{aligned}$$

We notice that the right operator $\langle x_1\rangle^{2\nu}(H_\omega+\Theta)R_{\omega,a}(\Lambda_{1,a}^\omega(t)-\Lambda_1)$ corresponds to the right operator treated in (5.2.19) while the left one $R_{\omega,a}\left[R_{\omega,a},\left[H_{\omega,a},\Lambda_2\right]\right](H_\omega+\Theta)\langle x_2\rangle^{2\nu}$ has been treated in (5.2.12).

5.2.3 Proof of Lemma 3.4.4

According to the spectral theorem and the assumption on g, we have

$$g(H_\omega) = \int g(E)\,\mathrm{d}P_\omega^{(E)}(E) = -\int g'(E)P_\omega^{(E)}\,\mathrm{d}E \tag{5.2.22}$$

since $g(+\infty)P_\omega^{(+\infty)} - g(-\infty)P_\omega^{(-\infty)} = 0$. Thanks to (5.2.22) we can work with the Fermi projection $P_\omega^{(E)}$ and we are left with the study of $\left[P_\omega^{(E)},\Lambda_2\right](\Lambda_1^\omega(t)-\Lambda_1)$.

We show that the operator $\left[P_\omega^{(E)},\Lambda_2\right](\Lambda_1^\omega(t)-\Lambda_1)$ is trace class uniformly in t. Using the Duhamel expansion 5.1.28, it is enough that the operator

$$\left[P_\omega^{(E)},\Lambda_2\right](\Lambda_1^\omega(t)-\Lambda_1)\,\mathrm{e}^{isH_\omega}\left[H_\omega,\Lambda_1\right]\mathrm{e}^{isH_\omega}, \tag{5.2.23}$$

is trace class for $0 \leq s \leq t$. We first notice that

$$\left[P_\omega^{(E)},\Lambda_2\right] = P_\omega^{(E)}\left[P_\omega^{(E)},\Lambda_2\right] + \left[P_\omega^{(E)},\Lambda_2\right]P_\omega^{(E)}, \tag{5.2.24}$$

and we introduce $(H_\omega-\Theta+1)R_\omega(1-\Theta)$ inside (5.2.23) such that

$$(5.2.23) = P_\omega^{(E)} \left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] (H_\omega + \Theta - 1)\mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \mathrm{e}^{isH_\omega} \tag{5.2.25}$$
$$+ \left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1)\mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \mathrm{e}^{isH_\omega}. \tag{5.2.26}$$

We start with the term (5.2.26) that we write as

$$\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] \mathrm{e}^{|x_2|^\zeta} \left(\mathrm{e}^{-|x_2|^\zeta} P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1)\mathrm{e}^{-|x_1|^\zeta}\right) \mathrm{e}^{|x_1|^\zeta} \mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \mathrm{e}^{isH_\omega}. \tag{5.2.27}$$

Since the operator $\mathrm{e}^{-|x_2|^\zeta} P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1)\mathrm{e}^{-|x_1|^\zeta}$ is localized in energy and space, it is trace class. Moreover, the left and right operators in 5.2.27 are bounded by Lemma B.1.3 and Lemma B.1.4.

We come back now to (5.2.25) and use that

$$\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] (H_\omega + \Theta - 1) = \left[P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1), \Lambda_2\right] - P_\omega^{(E)} \left[H_\omega, \Lambda_2\right],$$

to write

$$(5.2.25) = P_\omega^{(E)} \left[P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1), \Lambda_2\right] \mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \mathrm{e}^{isH_\omega} \tag{5.2.28}$$
$$- P_\omega^{(E)} \left[H_\omega, \Lambda_2\right] \mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \mathrm{e}^{isH_\omega}. \tag{5.2.29}$$

We expand these terms (5.2.28) and (5.2.29) as the sums of

$$P_\omega^{(E)} \chi_x \left[P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1), \Lambda_2\right] \chi_y \ \mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \chi_u \ \mathrm{e}^{isH_\omega} \tag{5.2.30}$$

and

$$-P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1)\chi_x R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_2\right] \chi_y \ \mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \chi_u \ \mathrm{e}^{isH_\omega} \tag{5.2.31}$$

respectively over $\mathbb{Z}^2 \times \{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \cap [-1,1])\} \times \{(\mathbb{Z} \cap [-1,1]) \times \mathbb{Z}\}$. Since

$$\sup_x \left\|P_\omega^{(E)} \chi_x\right\|_1 < \infty \ \text{ and } \ \sup_x \left\|P_\omega^{(E)}(H_\omega + \Theta - 1)\chi_x\right\|_1 < \infty,$$

we use Lemma B.1.3 to obtain an exponential decay of the kernels

$$\chi_y \ \mathrm{e}^{isH_\omega} R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_1\right] \chi_u \ \text{ and } \ \chi_x R_\omega(1-\Theta) \left[H_\omega, \Lambda_2\right] \chi_y,$$

in operator norm to deduce the summability of (5.2.30) and (5.2.31). Therefore, the operator $\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] (\Lambda_1^\omega(t) - \Lambda_1)$ is trace class.

Now, we consider the decomposition

$$\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] = \left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] P_\omega^{(E)\perp} + \left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] P_\omega^{(E)} = P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp} - P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_2 P_\omega^{(E)} \tag{5.2.32}$$

and we write

$$\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right] (\Lambda_1^\omega(t) - \Lambda_1) = P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp} (\Lambda_1^\omega(t) - \Lambda_1) \\ - P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_2 P_\omega^{(E)} (\Lambda_1^\omega(t) - \Lambda_1). \tag{5.2.33}$$

Both operators on the r.h.s of (5.2.33) are separately trace class. Hence, we can cycle the projections $P_\omega^{(E)}$ and $P_\omega^{(E)\perp}$ around the trace of (5.2.33).
Setting

$$\Pi_E := P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_1 P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_2 P_\omega^{(E)} \Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp} \tag{5.2.34}$$

and

$$\Pi_E^T = P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_1^\omega(t) P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_2 P_\omega^{(E)} \Lambda_1^\omega(t) P_\omega^{(E)\perp}, \tag{5.2.35}$$

one gets

$$\operatorname{tr}(5.2.33) = \operatorname{tr} \Pi_E(t) - \operatorname{tr} \Pi_E. \tag{5.2.36}$$

We claim that the time-average of the trace of $\Pi_E(t)$ vanishes as T tends to ∞. Indeed, we have

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Pi_E(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T (P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_1^\omega(t) P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_2 P_\omega^{(E)} \Lambda_1^\omega(t) P_\omega^{(E)\perp}) \, \mathrm{d}t \tag{5.2.37}$$

that we can write as a sum of

$$\int_{\substack{\lambda > E \\ \mu \leq E}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{-it(\mu-\lambda)} \mathrm{d}t \right) P_\omega^{(E)} \Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp} \mathrm{d}P_\lambda \, \Lambda_1 \, \mathrm{d}P_\mu P_\omega^{(E)}, \tag{5.2.38}$$

and

$$\int_{\substack{\lambda \leq E \\ \mu > E}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{-it(\mu-\lambda)} \mathrm{d}t \right) P_\omega^{(E)\perp} \Lambda_2 P_\omega^{(E)} \mathrm{d}P_\lambda \, \Lambda_1 \, \mathrm{d}P_\mu P_\omega^{(E)\perp}. \tag{5.2.39}$$

Since $\lambda \neq \mu$ and $|\frac{\mathrm{e}^{ix}-1}{x}| \leq 1$, we have

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{-it(\mu-\lambda)} \mathrm{d}t = \frac{e^{-iT(\mu-\lambda)} - 1}{-iT(\mu - \lambda)} \to 0,$$

when T goes to ∞. Using the theorem of dominated convergence we finish the proof of Lemma 3.4.4.

5.3 Bulk-Edge equality

Proof of Lemma 3.4.5. We decompose the bulk conductance (3.1.18) as

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{Hall}}(B,\omega,E) = -i\,\mathrm{tr}\left[P_\omega^{(E)}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}, P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)}\right] \\
&= -i\,\mathrm{tr}(P_\omega^{(E)}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)}\Lambda_2 P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)}\Lambda_2\ \Lambda_1 P_\omega^{(E)} + P_\omega^{(E)}\Lambda_1\ \Lambda_2 P_\omega^{(E)}) \\
&= i\,\mathrm{tr}(P_\omega^{(E)}\Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_1 P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}),
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

where we have used $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$. Moreover, to see that

$$\mathrm{tr}(P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}) = \mathrm{tr}(P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}), \tag{5.3.2}$$

we apply Proposition B.1.2 and for instance we write

$$P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)} = \left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_1\right] P_\omega^{(E)\perp}\left[\Lambda_2, P_\omega^{(E)}\right], \tag{5.3.3}$$

which is seen to be trace class by cyclicity and Lemma B.1.4. The same argument works for $P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}$. We thus get

$$\mathrm{tr}(P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}) = \mathrm{tr}(P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}).$$

Next, using that

$$\Pi_E = P_\omega^{(E)}\Lambda_2 P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_1 P_\omega^{(E)} - P_\omega^{(E)\perp}\Lambda_2 P_\omega^{(E)}\Lambda_1 P_\omega^{(E)\perp}, \tag{5.3.4}$$

one has $\sigma_{\mathrm{Hall}}(E) = i\,\mathrm{tr}\,\Pi_E$ and (3.4.11) follows. □

Proof of Theorem 3.3.1. Combining the fact that $\sigma_{\mathrm{Hall}}(E) = i\,\mathrm{tr}\,\Pi_E$ and the constancy of Hall conductance σ_H in connexe intervals of localization, we conclude that

$$\sigma_{e,\omega}^{\mathrm{reg}} = -\int g'(E)\ \sigma_{\mathrm{Hall}}(E)\ \mathrm{d}E = \sigma_{\mathrm{Hall}}.$$

□

Appendix A

A.1 Pure point spectrum under (DL)

In this section, we show that the weak form of dynamical localization given by (2.1.3) implies pure point spectrum, as a consequence of RAGE theorem.

Proposition A.1.1. *Assume that for some function $\mathcal{Z}(u) : \mathbb{Z}^d \to]0, \infty[$, we have*

$$\liminf_{R\to\infty} \liminf_{T\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{\mathcal{Z}(u)} \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \chi_{|x|>R} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \chi_u \right\| \mathrm{d}t = 0. \tag{A.1.1}$$

Then $\sigma_c(H) \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

It is immediate to see that

$$\liminf_{T\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{\mathcal{Z}(u)} \frac{1}{T} \int_0^T \left\| |X|^{p/2} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \chi_u \right\|^2 \mathrm{d}t < \infty, \tag{A.1.2}$$

for some $p > 0$, implies (A.1.1).

Proof. We pick a vector $\varphi \in \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H)\mathcal{H}$ such that $\|\varphi\| = 1$ and we set $\mathcal{H}_c = P_c\mathcal{H}$ where P_c is the projection onto the continuous component of the spectrum of H.
By the RAGE theorem (e.g. [CFKS, Theorem 5.8]), in order to prove that $\varphi \notin \mathcal{H}_c$, it is enough to prove that for some $R > 0$,

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \chi_{|x|\le R} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \varphi \right\| \mathrm{d}t > 0. \tag{A.1.3}$$

Moreover, we have

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left\| \chi_{|x|\le R} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \varphi \right\| \ge \|\varphi\| - \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \chi_{|x|>R} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \varphi \right\| \mathrm{d}t. \tag{A.1.4}$$

It is thus enough to find $R > 0$ so that there exists a sequence $(T_k)_k$, such that

$$\frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} \left\| \chi_{|x|>R} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \varphi \right\| \le \frac{1}{2}.$$

By (A.1.1), there exists a sequence $(r_j)_j$, such that given $\epsilon > 0$ and for j large enough, there is a sequence $(T_k^{(j)})_k$, so that for any $u \in \mathbb{Z}^d$, we have

$$\frac{1}{T_k^{(j)}} \int_0^{T_k^{(j)}} \left\| \chi_{|x|>r_j} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \chi_u \right\| \mathrm{d}t \leq \epsilon \mathcal{Z}(u). \tag{A.1.5}$$

Let $r_0 > 0$ be such that $\left\| \chi_{|x|>r_0} \varphi \right\| \leq \frac{1}{4}$. We pick $\epsilon > 0$ small enough so that

$$\epsilon \sum_{|u| \leq r_0+1} \mathcal{Z}(u) \leq \frac{1}{4},$$

and we select j large enough so that (A.1.5) holds true. We thus get

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_k^{(j)}} \int_0^{T_k^{(j)}} \left\| \chi_{|x|>r_j} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \varphi \right\| \mathrm{d}t &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{T_k^{(j)}} \int_0^{T_k^{(j)}} \left\| \chi_{|x|>r_j} \mathrm{e}^{-itH} \mathcal{X}_{\mathcal{I}}(H) \chi_{|x| \leq r_0} \varphi \right\| \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

and (A.1.3) holds true. □

Appendix B

Contents

B.1 Technical tools **79**
B.2 Strong convergence **82**
B.3 Helffer-Sjöstrand formula **83**

B.1 Technical tools

Lemma B.1.1. *[Si1] Let $A_n \in \mathcal{B}$ such that $A_n \xrightarrow{s} A$ and let $B \in \mathcal{T}_p$ for $p > 0$. Then we have $\|A_n B - AB\|_p \to 0$.*

Proof. Since

$$\mathcal{T}_p = \overline{(\text{Finite rank operators})}_{\|\cdot\|_p}$$

there exists a finite rank operator P such that $\|(1-P)B\|_p \leq \epsilon$ for a given $\epsilon > 0$. Write

$$\begin{aligned}
\|(A_n - A)B\|_p &= \|(A_n - A)(B - PB + PB)\|_p \\
&\leq \|(A_n - A)P\| \, \|B\|_p + \|(A_n - A)\| \, \|(1-P)B\|_p \\
&\leq \epsilon(\|A_n\| + \|A\| + \|B\|_p)
\end{aligned}$$

where we have used that by strong convergence we have $(A_n - A)P \to 0$ and the result holds since ϵ is arbitrarily chosen. □

Proposition B.1.2. *[Si1]*

(i) Let $A_n \xrightarrow{s} A$ and B be a compact operator. Then $\|A_n B - AB\| \to 0$.

(ii) Let $A, B \in \mathcal{B}$. If $AB, BA \in \mathcal{T}_1$ then $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

(iii) Let $B \in \mathcal{B}$ and $A \in \mathcal{T}_1$. Then we have $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

(iv) Let $A_n, B_n \in \mathcal{B}$ such that $A_n \xrightarrow{s} A$ and $B_n \xrightarrow{s} B$. Then $A_n B_n \xrightarrow{s} AB$.

Next, we reproduce [CG, Lemma 3] that we adapt to obtain a decay of the kernel $\chi_x \, \mathrm{e}^{-itH} R(z) \, [H, \Lambda_2] \, \chi_y$ in operator norm.

Lemma B.1.3. *Let χ_x and χ_y be two smooth functions. Let $R_A(z)$ be the resolvent of the operator $H(A) = (-i\nabla - A)^2$. Then there exist $c > 0$ and C_t such that*

$$\left\|\chi_x \, \mathrm{e}^{-itH(A)} R_A(z) \, [H(A), \Lambda_2] \, \chi_y\right\| \leq \frac{C_t}{\eta} \, \mathrm{e}^{-c\eta(|x_1-y_1|+|x_2-y_2|)} \tag{B.1.1}$$

for all $z \notin \sigma(H(A))$ and $x, y \in \mathbb{R}^d$ and where $\eta = \mathrm{dist}(z, \sigma(H))$.

Proof. We follow the same procedure used in [CG, Lemma 3]. We consider the vector potential $A = (0, \beta(x_1))$ and we let $\tilde{\chi}_j$ smooth functions with $\tilde{\chi}_j = 1$ on supp χ_j for $j = x, y$. We take $y_2 \in \mathrm{supp}\Lambda_2'$ otherwise (B.1.1) is equal to zero.

We write $H(A) = (-i\nabla - A)^2 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2$ where $\Pi_1 = p_1$ and $\Pi_2 = p_2 - \beta(x_1)$. Let us estimate the decay of $\chi_x \, \mathrm{e}^{-itH(A)} R_A(z) \, [H, \Lambda_2] \, \chi_y$ for $t \in \mathbb{R}$. Notice that

$$\begin{aligned}
[H(A), \Lambda_2] &= -i(-i\nabla - A).\nabla\Lambda_2 - i\nabla\Lambda_2.(-i\nabla - A) \\
&= -i\Pi_2\Lambda_2' - i\Lambda_2' \, \Pi_2 \\
&= -\Lambda_2'' - 2i\Lambda_2' \, \Pi_2,
\end{aligned}$$

and since for $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, we have

$$||\chi_x \mathrm{e}^{-itH(A)} R_A(z) \Pi_2 \chi_y \varphi||^2 = \langle \chi_y \, \Pi_2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x^2 \, \mathrm{e}^{-itH(A)} R_A(z) \Pi_2 \chi_y \varphi, \varphi\rangle,$$

it is enough to bound $\left\|\chi_y \, \Pi_2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x\right\|$. We write

$$\begin{aligned}
||\chi_y \, \Pi_2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi||^2 &= \langle R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi, \Pi_2 \chi_y^2 \, \Pi_2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi\rangle \\
&= \langle R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi, \tilde{\chi}_y (2(p_2\chi_y) + \beta(x_1)\chi_y)\chi_y \, \Pi_2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi\rangle \qquad \text{(B.1.2)} \\
&+ 2\langle R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi, \chi_y^2 \, \Pi_2^2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_1 \varphi\rangle, \qquad \text{(B.1.3)}
\end{aligned}$$

where we used

$$\Pi_2 \chi_y^2 \Pi_2 = (p_2\chi_y^2)\Pi_2 + \chi_y^2 \Pi_2^2 = 2(p_2\chi_y)\chi_y \Pi_2 + \chi_y^2 \beta(x_1)\Pi_2 + 2\chi_y^2 \Pi_2^2$$

together with

$$p_2\chi_y^2 = 2(p_2\chi_y)\chi_y + \chi_y^2 \, p_2 = \chi_y^2 \, \Pi_2 + \tilde{\chi}_y(2(p_2\chi_y) + \beta(x_1)\chi_y)\chi_y.$$

Similarly, we have

$$\Pi_1 \chi_y^2 \, \Pi_1 = (\Pi_1 \chi_y^2) \, \Pi_1 + \chi_y^2 \, \Pi_1^2$$

and

$$\Pi_1 \chi_y^2 = 2\tilde{\chi}_y((p_2\chi_y)\chi_y + \chi_y^2 \, \Pi_1.$$

Hence

$$\begin{aligned}
||\chi_y \, \Pi_1 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi||^2 &= \langle R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi, \Pi_1 \chi_y^2 \, \Pi_1 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi\rangle \\
&= \langle R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi, \tilde{\chi}_y (2(p_2\chi_y)\chi_y \, \Pi_2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi\rangle \qquad \text{(B.1.4)} \\
&+ \langle R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi, \chi_y^2 \, \Pi_2^2 R_A(\overline{z}) \, \mathrm{e}^{itH(A)} \chi_x \varphi\rangle. \qquad \text{(B.1.5)}
\end{aligned}$$

We first estimate (B.1.2) so that

$$\begin{aligned}|(\text{B.1.2})| &\leq \|2(p_2\chi_y)+\beta(x_1)\chi_y\|_\infty \left\|\tilde{\chi}_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\| \left\|\chi_x\ \Pi_2 R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|2(p_2\chi_y)+\beta(x_1)\chi_y)\|_\infty^2 \left\|\tilde{\chi}_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\chi_y\ \Pi_2 R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\|^2.\end{aligned}$$

In the same manner, one has

$$\begin{aligned}|(\text{B.1.4})| &\leq \|2(p_1\chi_y)\|_\infty \left\|\tilde{\chi}_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\| \left\|\chi_y\ \Pi_1 R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\| \\ &\leq 2\|(p_1\chi_y)\|_\infty^2 \left\|\tilde{\chi}_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\chi_y\ \Pi_1 R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\|^2.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}&||\chi_y\ \Pi_1 R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi||^2 + ||\chi_y\ \Pi_2 R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x||^2 \\ &\qquad \leq (\|2(p_2\chi_y)+\beta(x_1)\chi_y\|_\infty^2 + 4\|(p_1\chi_y)\|_\infty^2)\left\|\tilde{\chi}_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\|^2 \\ &\qquad + 2|\langle R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi, \chi_y^2\ (\Pi_1^2+\Pi_2^2)\ R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\rangle| \\ &\qquad \leq (4\|(p_1\chi_y)\|_\infty^2 + 6\|(p_2\chi_y)\|_\infty^2 + 2\|\beta(x_1)\chi_y\|_\infty^2)\left\|\tilde{\chi}_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\|^2 \\ &\qquad + 2\left\|\chi_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\| \|\chi_y\chi_x\varphi\| + 2|\overline{z}|\left\|\chi_y R_A(\overline{z})\ \mathrm{e}^{itH(A)}\chi_x\varphi\right\|^2,\end{aligned} \tag{B.1.6}$$

where we used that $(\Pi_1^2+\Pi_2^2)R_A(\overline{z}) = I+\overline{z}R_A(\overline{z})$. Now since the function $\frac{\mathrm{e}^{-itu}}{u-z}$ is analytic for $\operatorname{Im} z \neq 0$ (then it is of Gevrey class), it follows from [GK4, BGK]

$$\left\|\chi_x\ \mathrm{e}^{-itH(A)}R_A(z)\chi_y\right\| \leq \frac{\mathrm{e}^{c_1 t}}{\eta}\ \mathrm{e}^{-c_2\eta|x-y|}, \tag{B.1.7}$$

and the lemme holds. □

The following lemma establishes the decay of the kernel operator of $\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right]$.

Lemma B.1.4. *Assume* (3.1.17). *Then we have*

$$\left\|\chi_x\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right]\chi_y\right\|_2 \leq C_{\omega,m,\zeta,\epsilon,B,E}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x|^\zeta}\mathrm{e}^{-\frac{m}{2}|x_1-y_1|^\zeta-\frac{m}{4}|x_2|^\zeta-\frac{m}{4}|y_2|^\zeta}, \tag{B.1.8}$$

for all $x, y \in \mathbb{Z}^2$. Moreover, the operator $[P_\omega^{(E)}, \Lambda_1]P_\omega^{(E)\perp}[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2]$ is trace class.

Proof. We recall the definition of the function Λ. We considered $\Lambda(s) = 1$ for $s \leq -\frac{1}{2}$ and $\Lambda(s) = 0$ for $s \geq 1$ such that $\operatorname{supp}\Lambda_1' \subset]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

We expand the commutator such that we have

$$\chi_x\left[P_\omega^{(E)}, \Lambda_2\right]\chi_y = \chi_x\ P_\omega^{(E)}\Lambda_2\chi_y - \chi_x\ \Lambda_2 P_\omega^{(E)}\chi_y. \tag{B.1.9}$$

If $x_2, y_2 \geq 1$ or $x_2, y_2 \leq -1$ then we have (B.1.9) $= 0$. Consider now the case $y_2 \leq -1, x_2 \geq 1$ or $y_2 \geq 1, x_2 \leq -1$. where we get (B.1.9) $= \pm\chi_x P_\omega^{(E)} \chi_y$. Thus the decay can be obtained by (3.1.17) and a use of

$$\mathrm{e}^{-|x-y|^\zeta} \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x_1-y_1|^\zeta - \frac{1}{2}|x_2-y_2|^\zeta},$$

and the fact that in the present case, we have $|x_2 - y_2|^\zeta = (|x_2| + |y_2|)^\zeta \geq \frac{1}{2}|x_1|^\zeta + \frac{1}{2}|x_2|^\zeta$. The case of $x_2 = 0$ or $y_2 = 0$ yields (B.1.8) since it follows from (3.1.17) for instance for $x_2 = 0$ that

$$\left\|\chi_x \Lambda_2 P_\omega^{(E)} \chi_y\right\|_2 \leq C_{\omega,m,\zeta,B,E}\ \mathrm{e}^{\epsilon|x_1|^\zeta} \mathrm{e}^{-m|x_1-y_1|^\zeta - m|y_2|^\zeta}. \tag{B.1.10}$$

Moreover, it follows from (B.1.8) that the operator $[P_\omega^{(E)}, \Lambda_1] P_\omega^{(E)\perp} [P_\omega^{(E)}, \Lambda_2]$ is trace class. □

Lemma B.1.5. *Let R be the resolvent of the operator H. Then the operators*

$$\chi_x R^2 \left[H, \Lambda_j\right],\ R^2 \left[H, \Lambda_j\right] \chi_x,\ R \left[H, \Lambda_2\right] R\ \chi_x\ \in \mathcal{T}_1.$$

Proof. Let $M < \inf \sigma(H)$. We introduce the power resolvent $R^2(M)$ and we write

$$\chi_x R^2(z) \left[H, \Lambda_j\right] = \chi_x R^{\frac{3}{2}}(M) R^2(z)(H+M)^2 R^{\frac{1}{2}}(M) \left[H, \Lambda_j\right]. \tag{B.1.11}$$

The trace class property follows from the fact that $R^2(z)(H+M)^2$ and $R^{\frac{1}{2}}(M) \left[H, \Lambda_j\right]$ are bounded and $\chi_x R^{\frac{3}{2}}(M)$ is trace class. In particular, $R^2(z) \left[H, \Lambda_j\right] \chi_x$ is also trace class since an operator T belongs to $\mathcal{T}_1$ if and only if $T^* \in \mathcal{T}_1$.

For the last operator, it suffices to see that

$$R \left[H, \Lambda_j\right] R\ \chi_x = \left[H, \Lambda_j\right] R^2 \chi_x - R \left[H, \left[H, \Lambda_j\right]\right] R^2 \chi_x, \tag{B.1.12}$$

and since $\left[H, \Lambda_j\right] R^{\frac{1}{2}}$ is bounded as well as $R \left[H, \left[H, \Lambda_j\right]\right]$ and both $R^{\frac{3}{2}} \chi_x$ and $R^2 \chi_x$ are trace class then the operator $R \left[H, \Lambda_j\right] R\ \chi_x$ is trace class.

□

B.2 Strong convergence

Lemma B.2.1. *Let H_ω and $H_{\omega,a}$ be the operator defined in the sections 3.1 and 3.2 with corresponding resolvents R_ω and $R_{\omega,a}$. Then*

$$R_{\omega,a} \xrightarrow{s} R_\omega, \tag{B.2.1}$$

as $a \to \infty$ *and* $\mathbb{P} -$ a.e ω. *In particular, one has*

$$\Lambda^{\omega}_{1,a}(t) \xrightarrow{s} \Lambda^{\omega}_{1}(t) \quad \mathbb{P} - \text{a.e } \omega, \tag{B.2.2}$$

for all $t \in \mathbb{R}$.

Proof. We have $R_{\omega,a} - R_{\omega} = -R_{\omega}\Gamma_{\omega,a}R_{\omega,a}$ and since R_{ω} is bounded, and $\Gamma_{\omega,a}R_{\omega,a}$ is uniformly bounded in a, it suffices to prove the strong convergence of $\Gamma_{\omega,a}R_{\omega,a}$ in $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Let $f \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ such that $\text{supp} f = D_{r_1,r_2} = [-r_1, r_1] \times [-r_2, r_2]$ with $r_1 > a$ and $r_2 > 0$.

- *Electric case.* In this case, one has

$$\left\|\Gamma^{\mathsf{E}}_{\omega,a}R^{\mathsf{E}}_{\omega,a}f\right\| = \left\|U_a R^{\mathsf{E}}_{\omega,a}f\right\| \leq c_1|\operatorname{Im} z|^{-1}\ \mathrm{e}^{-\tilde{c}_1|\operatorname{Im} z||a-r_1|} \tag{B.2.3}$$

which goes to 0 as $a \to +\infty$ and where we have used Combes-Thomas estimate [CT, GK1].

- *Magnetic case.* Since the magnetic field $\mathcal{B}$ is basically generated in the region $\mathcal{P}_a := (\infty, -a) \times \mathbb{R}$, it follows from [DGR1, Proposition 4.2] that we apply for this semi-plane $\mathcal{P}_a$, that the vector potential vanishes outside $\mathcal{P}_a$. This means that the operator

$$\Gamma^{\mathsf{M}}_{\omega,a} = -2\mathcal{A}_a.(-i\nabla - \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_{\omega}) + i \operatorname{div} \mathcal{A}_a + |\mathcal{A}_a|^2$$

is supported on $\mathcal{P}_a$ and the strong convergence of $\Gamma^{\mathsf{M}}_{\omega,a}R^{\mathsf{M}}_{\omega,a}f$ follows similarly to (B.2.3).

The second point (B.2.2) is a consequence of (B.2.1), [RS1].

□

B.3 Helffer-Sjöstrand formula

Let

$$\tilde{f}(z) = \left\{\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} f^{(r)}(u)(iv)^r\right\} \rho(u,v) \tag{B.3.1}$$

be the so called quasi-analytic extension of g of order $n \geq 1$, with $\rho(u,v) = \tau(\frac{u}{\langle v\rangle})$ for some smooth real function $\tau(s)$ such that $\tau(s) = 1$ for $|s| \leq 1$ and $\tau(s) = 0$ for $|s| > 2$. A simple computation yields

$$\overline{\partial}\tilde{f}(u+iv) = \frac{1}{2n!} f^{(n+1)}(u)(iv)^n \rho(u,v) + \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} f^{(r)}(u)(iv)^r\ \overline{\partial}\rho(u,v).$$

where $\overline{\partial}\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} := \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$. In particular, $|\partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)| = \mathcal{O}(|v|^n)$ when $v \to 0$ and for any $u \in \mathbb{R}$.

We recall the Helffer-Sjöstrand formula [D] for an operator H. We have

$$f(H) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\partial} \tilde{f}(z) R(z) \mathrm{d}u \mathrm{d}v, \tag{B.3.2}$$

and

$$f'(H) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\partial} \tilde{f}(z) R^2(z) \mathrm{d}u \mathrm{d}v, \tag{B.3.3}$$

where $R(z) = (H - z)^{-1}, z = u + iv$ and $\tilde{f}$ is a quasi-analytic extension of f of order m for $m = 1, 2, \ldots$ (see [D]).

Bibliography

[A] P. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. Phys. Rev. **109**, 1492-1505 (1958)

[ABJ1] J. Asch, O. Bourget, A. Joye. Localization Properties of the Chalker-Coddington Model. Ann. Henri Poincaré. **11**, 1341-1373 (2010)

[ABJ2] J. Asch, O. Bourget, A. Joye. Dynamical localization of the Chalker-Coddington model far from transition. J. Statistical Phys. **147**, 194-205 (2012)

[AENSS] M. Aizenman, A. Elgart, S. Naboko, J. Schenker, G. Stolz. Moment analysis for localization in random Schrödinger operators. Inv. Math. **163**, 343-413 (2006)

[AG] M. Aizenman, G.M. Graf. Localization bounds for an electron gas. J. Phys. A. **31**, 6783-6806 (1998)

[AHK] Y. Avishai, Y. Hatsugai, M. Kohmoto. Localization problem of a two-dimentional lattice in random magnetic field. Phys. Rev. B, Condensed matter, **47**, 9561-9565 (1993)

[AM] M. Aizenman, S. Molchanov. Localisation at large disorder and an externe energies: an elementary derivation. Comm. Math. Phy. **157**, 245-278 (1993)

[AvSS] J. Avron, R. Seiler, B. Simon. Charge deficiency, charge transport and comparison fo dimensions. Comm. Math. Phys. **195**, 399-422 (1994)

[Be] J. Bellissard. Ordinary quantum Hall effect and noncommutative cohomology. Localization in disordered systems. (Bad Schandau, 1986), 61-74, Teubner-Texte Phys., 16, Teubner, Leipzig, (1988)

[Br] J. Breuer. Localization for the Anderson model on trees with finite dimensions. Ann. Henri Poincaré. **8**, 1507-1520 (2007)

[BES] J. Bellissard, A. van Elst, H. Schulz-Baldes. The non commutative geometry of the quantum Hall effect. J. Math. Phys. **35**, 5373-5451 (1994)

[BoK] J. Bourgain, C. Kenig. On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension. Invent. Math. **161**, 389-426 (2005)

[BGK] J.M. Bouclet, F. Germinet, A. Klein. Sub-exponential decay of operator kernels for functions of generalized Schrödinger operator. Proc. Amer. Math. Soc. **132**, 2703-2712 (2004)

[BoGKS] J.M. Bouclet, F. Germinet, A. Klein, J. Schenker. Linear response theory for magnetic Schrödinger operators in disordered media. J. Funct. Anal. **226**, 301-372 (2005)

[BJ] J. Bourgain, S. Jitomirskaya. Anderson localization for the band model. Geom. Funct. Ana. Lecture Notes in Math. **1745**, 67-79 (2000)

[BdMSS1] A. Boutet de Monvel, P. Stollman, G. Stolz. Dynamical localization for continuum random surface models. Arch. Math. **80**, no. 1, 87-97

[BdMSS2] A. Boutet de Monvel, P. Stollman, G. Stolz. Absence of continuous spectral types of certain nonstastionary random models. Ann. Henri. Poincaré. **6**, no. 2, 309-326 (2005)

[CFKS] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon. *Schrödinger Operators: With Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry.* Texts and Monographs in Physics. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin (1987)

[CG] J.M. Combes, F. Germinet. Edge and Impurity Effects on Quantization of Hall Currents. Commun. Math. Phys. **256**, 159-180 (2005)

[CGH] J.M. Combes, F. Germinet, P. Hislop. On the quantization of Hall currents in presence of disorder. Mathematical physics of quantum mechanics. 307-323, Lecture Notes in Phys., **690**, Springer, Berlin, (2006)

[CH] J.M. Combes, P. Hislop. Landau Hamiltonians with random potentials: Localization and density of states. Com. Math. Phys. **177**, 603-629 (1996)

[CL] R. Carmona, J. Lacroix. *Spectral theory of random Schrödinger operators.* Boston: Birkhaüser, (1990)

[CT] J.M. Combes, L. Thomas. Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators. Com. Math. Phys. **34**, 251-270 (1973)

[D] E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. **42**. Cambridge University Press, Cambridge, (1995)

[DBG] F. Germinet, S. De Bièvre. Dynamical localization for discrete and continuous random Schrödinger operators. Comm. Math. Phys. **194**, 323-341 (1998)

[DBF] S. De Bièvre, G. Forni. Transport properties of kicked and quasi-periodic Schrodinger Hamiltonians. J. Stat. Phys. **90**, 5-6, 1201-1224 (1998)

[DGR1] N. Dombrowski, F. Germinet, G. Raikov. Quantization of edge currents along magnetic barriers and magnetic guides. Ann. H. Poincaré. **12**, 1169 - 1197 (2011)

[DGR2] N. Dombrowski, F. Germinet, G. Raikov. Splitting of the Landau levels by magnetic perturbations and Anderson transition in 2D-random magnetic media. J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 474017 (2010)

[DeRJLS1] R. Del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, B. Simon. What is Localization? Phys. Rev. Lett. 75, 117-119 (1995)

[DeRJLS2] R. Del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last, B. Simon. Operators with singular continuous spectrum IV: Hausdorff dimensions, rank one pertubations and localization. J. d'Analyse Math. **69**, 153-200 (1996)

[DS] D. Damanik, P. Stollmann. Multi-scale analysis implies strong dynamical localization. Geom. Funct. Anal. **11**, 11-29 (2001)

[E] L. Erdös. Dia- and paramagnetism for nonhomegeneous magnetic fields. J. Math. Phys. **38**, 1289-1317 (1997)

[EG] P. Elbeau, G.M. Graf. Equality of bulk and edge Hall conductances revisited. Comm. Mth. Phy. **229**, 415-432 (2002)

[EGS] A. Elgart, G.M. Graf, J. Schenker. Equality of the bulk and edge Hall conductances in a mobility gap. Comm. Math. Phys. **259**, no. 1, 185-221 (2005)

[G] F. Germinet. Dynamical localization II with an application to the almost Mathieu operator. J. Stat Phys. **95**, 273-286 (1999)

[Gr] G. Grimmet. *Percolation.* Springer Verlag (1989)

[GhHK] F. Ghribi, P.D. Hislop, F. Klopp. Localization for Schrödinger operators with random vector potentials. Contemporary Mathematics. **447**, "adventures in mathematical physics", Eds Germinet, Hislop, 123-138 (2007)

[GJ] F. Germinet, S. Jitomirskaya. Strong dynamical localization for the almost Mathieu model. Rev. Math. Phys. **6**, 755-765 (2001)

[GK1] F. Germinet, A. Klein. Bootstrap multiscale analysis and localization in random media. Commun. Math. Phys. **222**, 415-448 (2001)

[GK2] F. Germinet, A. Klein. New characterizations of the region of complete localization for random Schrödinger operators. J. Stat. Phys. **212**, 73-94 (2006)

[GK3] F. Germinet, A. Klein. A characterization of the Anderson metal-insulator transport transition. Duke Math. J. **124**, 309-351 (2004)

[GK4] F. Germinet, A. Klein. A comprehensive proof of localization for continuous Anderson models with singular random potentials, J. Eur. Math. Soc. **15**, 53-143 (2013)

[GK5] F. Germinet, A. Klein. Explicit finite volume criteria for localization in continuum random media and applications. Geom. Funct. Anal. **13**, 1201-1238 (2003)

[GKl1] Germinet, F., Klopp, F., Spectral statistics for random Schrödinger operators in the localized regime, to appear in J. Eur. Math. Soc.

[GKl2] Germinet, F., Klopp, F., Enhanced Wegner and Minami estimates and eigenvalue statistics of random Anderson models at spectral edges. Ann. Henri Poincaré. **14**, 1263-1285 (2013)

[GKS1] F. Germinet, A. Klein, J. Schenker. Dynamical delocalization in random Landau Hamiltonians. Annals of Math. **166**, 215-244 (2007)

[GKS2] F. Germinet, A. Klein, J. Schenker. Quantization of the Hall conductance and delocalization in ergodic Landau Hamiltonians. Rev. Math. Phys. **21**, 1045-1080 (2009)

[GKT] F. Germinet, A. Kiselev, S. Tcheremchantsev. Transfer matrices and transport for 1D Schrödinger operators with singular spectrum. Ann. Inst. Fourier. **54**, no. 3, 787-830 (2004)

[GMP] I. Goldsheid, S. Molchanov, L. Pastur. A pure point spectrum of the stochastic one-dimentional Schrödinger equation. Fun. Ann. Appl. **11**, 1-10 (1977)

[GT] F. Germinet, A. Taarabt. Spectral properties of dynamical localisation for Schrödinger operators, accepted for publication in Rev. Math. Phys.

[H] B.I. Halperin. Quantized Hall conductance, current carrying edge states and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. Phys. Rev. B **25**, 2185-2190 (1982)

[HJS] E. Hamza, A. Joye, G. Stolz. Localization for random unitary operators. Lett. Math. Phys. **75**, 255-272 (2006)

[I] A. Iwatsuka. Examples of absolutely continuous Schrödinger operators in magnetic fields. Publ. Res. Ins. Math. Sci. **21**, 385-401 (1985)

[J] A. Joye. Random unitary models and their localization properties. In Entropy & the Quantum II, Contemporary Mathematics. **552**, 117-134 (2011)

[JL] S. Jitomirskaya, Y. Last. Anderson localization for the almost Mathieu equation, III. semi- uniform localization, continuity of gaps, and measure of the spectrum. Comm. in Math. Phys. **195**, 1-14 (1998).

[JSS] S. Jitomirskaya, H. Schulz-Baldes, G. Stolz. Delocalization in random polymer models. Comm. Math. Phys. **233**, 27-48 (2003)

[Klo] F. Klopp. Asymptotic ergodicity of the eigenvalues of random operators in the localized phase. ArXiv: http://fr.arxiv.org/abs/1012.0831, (2010)

[Ku] H. Kunz. The quantum Hall effect for electrons in a random potential. Comm. Math. Phys. **112**, 121-145 (1987)

[KDP] K. von Klitzing, G. Dorda, N. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine structure constant based on quantized Hall resistance. Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)

[KKS] A. Klein, A. Koines, M. Seifert. Generalized eigenfunctions for waves in inhomogeneous media. J. Funct. Anal. **190**, 255-291 (2002)

[KLM] A. Klein, O. Lenoble, P. Müller. On Mott's formula for the ac-conductivity in the Anderson model. Annals of Mathematics. **166**, 549-577 (2007)

[KM] W. Kirsch, F. Martinelli. On the spectrum of Schrödinger operators with a random potential. Comm. Math. Phy. **83**, no. 3, 329-350 (1982)

[KiM] W. Kirsch, P. Müller. Spectral porperties of the Laplacien on bond-percolation graphs. Math. Z. **252**, 899-916 (2006)

[KRSB2] J. Kellendonk, T. Richter, H. Schulz-Baldes. Edge current channels and Chern numbers in the integer quantun Hall effect. Rev. Math. Phys. **14**, 87-119 (2002)

[KSB] J. Kellendonk, H. Schulz-Baldes. Quantization of Edge currents for continuous magnetic operators. J. Funct. Anal. **209**, 388-413 (2004)

[KuS] H. Kunz, B. Souillard. Sur le spectre des operétauers aux différences finies aléatoires. Comm. Maths. Phy. **78**, no. 2, 201-246 (1981)

[L] R.B. Laughlin. Quantized Hall conductivity in two dimension. Phys. Rev. B**23**, 5632-5633 (1981)

[LS] H. Leinfelder, C.G. Simader. Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials. Math. Z. **175** 1-19 (1981)

[M] N. Minami. Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model. Comm. Math. Phys. **177**, 709-725 (1996)

[P] L. Pastur. Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation. Comm. Math. Phys. **75**, 179-196 (1980)

[RM] C. Rojas-Molina. Characterisation of the Anderson metal-insulator transition for non ergodic operators and application. Ann. Henri Poincaré. **13**, 1575-1611 (2012)

[RS1] M. Reed, B. Simon. *Methods of modern mathematical physics.* Volume I Academic Press

[Si1] B. Simon. *Trace ideals and their applications.* Second Edition. Mathematical Surveys and Monographs, **120** Amer. Math. Soc, Providence, RI, (2005)

[Si2] B. Simon. Absense of ballistic motion. Comm. Math. Phys. **134**, 209-212 (1990)

[T] S. Tcheremchantsev. How to prove dynamical localization. Comm. Math. Phys. **221**, 27-56 (2001)

[Ta] A. Taarabt. Equality of the bulk and edge Hall conductances for continuous magnetic Schrödinger operators, in preparation

[Tau] M. Tautenhahn. Localization criteria for Anderson models on locally finite graphs. J. Stat. Phys. **144**, 60-75 (2011)

[W] W.M. Wang. Microlocalization, percolation, and Anderson localization for the magnetic Schrödinger operators with a random potential. J. Func. Anal. **146**, 1-26 (1997)