



HAL
open science

Optimisation multi-critères et multi-physique d'aérogénérateurs à aimants permanents à flux axial

Nabil Abdel Karim

► **To cite this version:**

Nabil Abdel Karim. Optimisation multi-critères et multi-physique d'aérogénérateurs à aimants permanents à flux axial. Energie électrique. Université du Havre, 2008. Français. NNT : . tel-00880881

HAL Id: tel-00880881

<https://theses.hal.science/tel-00880881v1>

Submitted on 7 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DU HAVRE

MEMOIRE

Présenté en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DU HAVRE

Spécialité : GENIE ELECTRIQUE

par

Nabil ABDEL KARIM

**Optimisation multi-critères et multi-physique
d'aérogénérateurs à aimants permanents
à flux axial**

Soutenu le 12 juin 2008 devant le Jury composé de :

Claude MARCHAND	Rapporteur
Daniel MATT	Rapporteur
Georges BARAKAT	Directeur
Brayima DAKYO	Examineur
Mohamed GABSI	Examineur
Yacine AMARA	Examineur
Adnan YASSINE	Examineur

Groupe de Recherche en Electrotechnique et Automatique du Havre EA 3220

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE.....	9
CHAPITRE I – GENERATEURS A AIMANTS PERMANENTS POUR EOLIENNE : STRUCTURES, CARACTERISTIQUES, ET METHODOLOGIE DE DIMENSIONNEMENT	
1 INTRODUCTION.....	17
2 RAPPEL DES PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DE L’ENERGIE EOLIENNE .	18
2.1 SITUATION DE L’ENERGIE EOLIENNE DANS LE CONTEXTE DES ENERGIES RENOUVELABLES.....	18
2.2 LE MARCHE DES EOLIENNES – SITUATION ET TENDANCES.....	20
2.3 EVOLUTION DE LA TECHNOLOGIE EOLIENNE.....	21
2.4 NATURE DU GISEMENT EOLIEN ET MODELISATION DE LA VITESSE DU VENT.....	22
2.5 CARACTERISTIQUES STATIQUES D’UNE EOLIENNE.....	25
2.6 REGULATION DE LA PUISSANCE CAPTEE PAR UNE EOLIENNE.....	27
3 LES DIFFERENTS TYPES DES GENERATEURS UTILISES DANS L’INDUSTRIE EOLIENNE	29
3.1 LES GENERATRICES ASYNCHRONES.....	30
3.1.1 <i>Les génératrices asynchrones à cage.....</i>	<i>31</i>
3.1.2 <i>Les génératrices asynchrones à double alimentation.....</i>	<i>31</i>
3.2 LES GENERATRICES SYNCHRONES.....	32
4 PRESENTATION DES MACHINES SYNCHRONES A AIMANTS PERMANENTS A FLUX AXIAL	34
4.1 CONSTITUTION ET PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT.....	35
4.2 MATERIAUX DE FABRICATION.....	39
4.3 DIVERSES ARCHITECTURES DE MACHINES ET COMPARAISON DES PERFORMANCES.....	46
5 DEMARCHE DE CONCEPTION DES MACHINES ELECTRIQUES	50
5.1 CHOIX DE LA STRUCTURE DU DISPOSITIF.....	50
5.2 DIMENSIONNEMENT DE LA STRUCTURE CHOISIE.....	50
5.3 LES DIFFERENTS OUTILS DE DIMENSIONNEMENT DE LA STRUCTURE RETENUE.....	51
6 POSITION DE NOTRE TRAVAIL PAR RAPPORT AUX TRAVAUX EXISTANTS....	53
7 OBJECTIF DE CETTE ETUDE	54
8 CONCLUSION	55

CHAPITRE II- MODELISATION DE LA MACHINE A FLUX AXIAL PAR LE CALCUL ANALYTIQUE DES CHAMPS EN VUE DE L'OPTIMISATION

1	NOMENCLATURE.....	59
2	INTRODUCTION	61
3	MODELE MAGNETIQUE SIMPLIFIE	62
4	MODELE MAGNETIQUE ISSU DU FORMALISME DE MAXWELL.....	65
4.1	HYPOTHESES ET POINTS DE DEPART	65
4.2	FORMULATION MAGNETOSTATIQUE DU PROBLEME DANS LE REPERE CYLINDRIQUE	66
4.3	REPARTITION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE A VIDE.....	67
4.3.1	<i>Solution de l'induction dans les différentes régions de la machine</i>	<i>69</i>
4.3.2	<i>Conditions de passage entre les régions.....</i>	<i>72</i>
4.3.3	<i>Réduction du temps de calcul du modèle.....</i>	<i>73</i>
4.3.4	<i>Comparaison des résultats analytiques avec la méthode des éléments finis.....</i>	<i>74</i>
4.4	REPARTITION EXACTE DU CHAMP DU A LA REACTION D'INDUIT	77
4.4.1	<i>Expression de l'induction dans les différentes régions de la machine</i>	<i>78</i>
4.4.2	<i>Conditions du passage entre les deux régions</i>	<i>79</i>
4.4.3	<i>Validation des résultats avec les éléments finis</i>	<i>80</i>
5	CALCUL DES GRADEURS GLOBALES A PARTIR DES GRANDEURS LOCALES.....	82
5.1	FONCTION DE DISTRIBUTION D'UNE PHASE STATORIQUE	82
5.2	EXPRESSION DE LA FORCE ELECTROMOTRICE A PARTIR DU FLUX	84
5.3	EXPRESSION DES INDUCTANCES MAGNETISANTES ET DES MUTUELLES	87
6	ETUDE ANALYTIQUE DU COUPLE DE DETENTE	87
6.1	INTRODUCTION	87
6.2	METHODE DE LA DERIVATION DE L'ENERGIE	88
6.3	METHODE DU TENSEUR DE MAXWELL.....	89
6.4	TECHNIQUES DE MINIMISATION DU COUPLE DE DETENTE.....	91
7	EXPRESSION DU COUPLE TOTALE DEVELOPPE PAR LA MACHINE.....	93
8	EQUATIONS ELECTRIQUES DES PHASES STATORIQUES.....	94
9	MODELISATION DES PERTES DANS LA MACHINE	96
9.1	LES PERTES PAR EFFET JOULE	96
9.2	LES PERTES FER	97
10	MODELISATION THERMIQUE DE LA MSAPFA	103
10.1	INTRODUCTION	103
10.2	PRESENTATION DE LA METHODE NODALE	103
10.3	ELABORATION DU MODELE THERMIQUE DE LA MACHINE A FLUX AXIAL	105
11	ASPECT MECANIQUE DES MSAPFA	107
12	CONCLUSION.....	110

CHAPITRE III – PRINCIPALES METHODES D’OPTIMISATION SOUS-CONTRAINTES UTILISEES EN GENIE ELECTRIQUE

1	INTRODUCTION	115
2	OPTIMISATION MONO-OBJECTIF.....	117
2.1	FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME	117
2.2	MINIMUM LOCAL ET MINIMUM GLOBAL	117
2.3	PROBLEMES D’OPTIMISATION NON CONTRAINTS	118
2.3.1	<i>Les méthodes d’optimisation déterministes</i>	<i>119</i>
2.3.2	<i>Méthode d’optimisation Stochastiques</i>	<i>120</i>
2.4	PROBLEME D’OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES.....	121
2.4.1	<i>Méthodes de transformation</i>	<i>122</i>
2.4.1.1	<i>Méthodes de pénalités</i>	<i>123</i>
2.4.1.2	<i>Lagrangien augmenté.....</i>	<i>124</i>
2.4.2	<i>Les méthodes directes.....</i>	<i>124</i>
3	LES ALGORITHMES GENETIQUES	125
3.1	PRESENTATION	125
3.2	LES OPERATEURS	127
3.2.1	<i>L’opérateur de sélection</i>	<i>127</i>
3.2.2	<i>L’opérateur de croisement.....</i>	<i>127</i>
3.2.3	<i>L’opérateur de mutation.....</i>	<i>128</i>
3.3	VERS UN ALGORITHME GENETIQUE PERFORMANT : LE SYSTEME GENOCOP	129
3.3.1	<i>Type de codage adopté</i>	<i>129</i>
3.3.2	<i>Le mécanisme de sélection.....</i>	<i>130</i>
3.3.3	<i>Les opérateurs génétiques disponibles propres au GENOCOP.....</i>	<i>132</i>
4	OPTIMISATION MULTI-OBJECTIF	136
4.1	INTRODUCTION	136
4.2	FORMULATION GENERALE D’UN PROBLEME MULTI-OBJECTIF	137
4.3	L’APPROCHE PARETO : NOTION DE DOMINANCE	137
4.4	CLASSIFICATION DES METHODES DE SOLUTION	138
4.4.1	<i>Méthodes à base de transformation vers le mono-objectif</i>	<i>138</i>
4.4.2	<i>Méthodes basée sur l’approche Pareto</i>	<i>140</i>
4.4.2.1	<i>Le NSGA (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm)</i>	<i>140</i>
4.4.2.2	<i>Le SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm)</i>	<i>141</i>
4.4.2.3	<i>Critiques relevées sur le SPEA et amélioration : le SPEA-II.....</i>	<i>144</i>
5	IMPLEMENTATION DU CODE D’OPTIMISATION SOUS MATLAB	146
6	EXPERIENCES ANTERIEURES D’UTILISATION DES ALGORITHMES EVOLUTIONNISTES POUR L’OPTIMISATION DES MACHINES ELECTRIQUES	153
7	CONCLUSION.....	156

CHAPITRE IV – CONCEPTION PAR OPTIMISATION DES MACHINES A FLUX AXIAL A AIMANTS PERMANENTS. MISE EN OEUVRE DE LA METHODOLOGIE PROPOSEE

1	INTRODUCTION	159
2	DESCRIPTION DE L’AEROGENERATEUR VISE.....	159
2.1	CARACTERISTIQUES DE LA TURBINE EOLIENNE VISEE.....	159
2.2	SYSTEME « GENERATRICE-REDRESSEUR A DIODES- HACHEUR- BATTERIES »	160
2.3	SYSTEME GENERATRICE « REDRESSEUR MLI »	161
2.4	TOPOLOGIE DE LA GENERATRICE A DIMENSIONNER.....	162
2.5	LE BUS A COURANT CONTINU.....	163
3	PROCEDURE D’OPTIMISATION ET METHODOLOGIE DE GENERATION DES PROTOTYPES OPTIMAUX PROPOSEE PAR NOTRE APPROCHE	164
3.1	JUSTIFICATION DU CHOIX D’UNE METHODE EVOLUTIONNISTE MULTI-OBJECTIF	164
3.2	ELABORATION DU CAHIER DES CHARGES DE L’APPLICATION ET PROCEDURE D’OPTIMISATION	165
3.3	FORMULATION DU PROBLEME EN TERME D’OPTIMISATION NON LINEAIRE SOUS CONTRAINTES	168
3.4	FONCTIONNEMENT DU LOGICIEL DE DIMENSIONNEMENT OPTIMSAP.....	169
4	ANALYSE DES PERFORMANCES DES GENERATRICES DIMENSIONNEES SELON LES CRITERES RETENUS	173
4.1	SOLUTIONS RELATIVES AU COUPLE DE CRITERES “ MASSE DES PARTIES ACTIVES/RENDEMENT ”	173
4.2	SOLUTIONS RELATIVES AU COUPLE DE CRITERES “ VOLUME DES AIMANTS/PERTES JOULE”	179
4.3	SOLUTIONS RELATIVES AU COUPLE DE CRITERES “ PUISSANCE VOLUMIQUE/RENDEMENT”	182
4.4	PERFORMANCES D’UN PROTOTYPE OPTIMISE	184
5	CONCLUSION.....	193
	CONCLUSION GENERALE.....	195
	REFERENCES	201
	ANNEXE A	213
	ANNEXE B	221
	ANNEXE C	227
	ANNEXE D.....	233
	ANNEXE E	237

INTRODUCTION GENERALE

Dans un marché plus que jamais concurrentiel, les fabricants des éoliennes améliorent, sans cesse, leurs prestations en développant des systèmes plus fiables et plus puissants. Dans ce contexte, l'effort fourni par les équipes de recherche pour améliorer les performances des machines ne cesse de croître pour répondre à la demande. Les machines synchrones à aimants et plus particulièrement celles à flux axial font l'objet d'une grande attention. Leur champ d'application couvre un grand nombre de domaines, comme par exemple, la robotique, les navires tout électrique, la traction, la production de l'énergie électrique, etc. La raison principale est la réduction du prix de la puissance électrique produite et en multipliant les entrefers, elles peuvent également fournir plus de puissance. Ces machines portant un grand nombre de paire de pôles, permettent de tourner à très basse vitesse de qui les rend particulièrement adaptées à un accouplement direct. Dans ce contexte, notre travail de recherche portera sur le développement d'un outil de dimensionnement des machines à flux axial dédiées à la génération d'énergie électrique de l'énergie éolienne.

Ce mémoire s'articule en quatre chapitres :

Le premier chapitre est divisé en quatre parties. Dans la première partie, on présente brièvement les principales caractéristiques de l'énergie éolienne. Quelques notions sur le gisement éolien et les caractéristiques mécaniques de la turbine sont rappelées. La deuxième partie présente les différents types des génératrices utilisés dans l'industrie éolienne. On listera les avantages et les inconvénients de chacune. La troisième partie est consacrée aux machines à aimants permanents à flux axial. Leur principe de fonctionnement, les éléments constitutifs, les différentes caractéristiques des matériaux utilisés ainsi que les différentes architectures seront exposées. A la quatrième partie, on décrit la démarche générale de conception des machines électriques. Ensuite, on mettra le point sur les principaux outils utilisés pour le dimensionnement des machines. Finalement, et après avoir situé notre travail par rapport aux travaux existants, on présentera l'objectif de cette étude.

Nous détaillerons, dans le deuxième chapitre, une modélisation analytique du calcul des champs des machines à aimants permanents à flux axial. Dans ce contexte, nous avons développé un modèle analytique bidimensionnel issu de la résolution des équations de Maxwell par la méthode de séparation des variables dans les différentes régions de la machine. Ce modèle présente de nombreux avantages par rapport aux modèles numériques et permet de calculer avec une bonne précision et un temps de calcul raisonnable l'induction dans différentes régions de la machine. Afin d'étudier la validité de notre formulation, les résultats analytiques obtenus sont comparés avec ceux obtenus par une simulation éléments finis.

Ensuite, nous présenterons un modèle thermique simplifié basé sur la méthode nodale qui prend en compte les différents phénomènes de transfert de chaleur au sein d'une machine. Le but de ce modèle est de prédire, au mieux, le comportement thermique des machines à flux axial. Il permet d'agir a priori sur la conception de l'ensemble de la machine et de l'optimiser. Ce modèle thermique sera suivi par un modèle mécanique basé sur les expressions proposées par le modèle de Young. Ce modèle nous permet de contrôler l'épaisseur des disques rotoriques à partir des efforts axiaux calculés avec le tenseur de Maxwell afin d'éviter une déflexion préjudiciable pour la machine.

Le troisième chapitre sera consacré à la présentation des méthodes d'optimisation sous contraintes les plus courantes dans le génie électrique. Deux grandes familles seront présentées : les déterministes et les stochastiques. Nous aborderons par la suite le sujet des algorithmes génétiques tout en précisant leurs avantages et leur champ d'application ainsi qu'une présentation d'un algorithme d'optimisation évolutionniste connu sous le nom de *GENOCOP* qui nous sera utile pour le traitement des différentes contraintes linéaires. Les opérateurs génétiques propres au *GENOCOP* ainsi que son principe de fonctionnement sont exposés en détail. Ensuite, un passage en revue des principales techniques d'optimisation multi-critère sera présenté avec une attention particulière pour le *SPEA_II* (Strength Pareto Evolutionary Algorithm). Cet algorithme exposé en détail, permet de trouver en un seul lancement l'ensemble des solutions de compromis optimal, appelé aussi l'ensemble de Pareto. Il s'appuie sur un facteur essentiel pour la réussite de la recherche de solutions pour les problèmes multi-objectif qui est l'élitisme. Le couplage du *SPEA2* avec le *GENOCOP* d'un côté et le modèle dimensionnant multi-physique de l'autre, donnera lieu à un code nommé *OPTIMSAP* que nous allons utiliser par la suite pour le dimensionnement de la génératrice à flux axial.

Au quatrième et dernier chapitre, on appliquera notre approche de dimensionnement optimisé à un aérogénérateur de 10 kW à base de machine synchrone à flux axial débitant à travers un redresseur à diodes suivi d'un hacheur dévolteur, sur une charge de consommation. Afin d'éprouver la méthodologie de dimensionnement développée, nous avons choisi d'adopter un cahier des charges s'inspirant d'un produit industriel proposé par une société américaine et se traduisant par un ensemble de contraintes structurelles, électriques, thermiques et mécaniques. La stratégie de dimensionnement optimal est également présentée.

L'utilisation du code d'optimisation multi-critère *OPTIMSAP* nous a permis d'étudier l'ensemble des solutions de compromis optimal et ce, pour des couples de critères contradictoires les plus souvent évoqués pour ce type d'application. Puis, une modélisation

par éléments finis tridimensionnelle d'un pré-prototype choisi est effectuée et dans le but de valider notre procédure de conception par optimisation. Finalement, une simulation du système aérogénérateur sera effectuée pour analyser son fonctionnement pour plusieurs vitesses du vent.

On termine ce manuscrit par une conclusion générale qui résume les résultats de nos investigations et des perspectives de ce travail.

**CHAPITRE I – GENERATEURS A AIMANTS PERMANENTS POUR
EOLIENNE : STRUCTURES, CARACTERISTIQUES, ET METHODOLOGIE
DE DIMENSIONNEMENT**

SOMMAIRE – Chapitre I

1	INTRODUCTION.....	17
2	RAPPEL DES PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DE L'ENERGIE EOLIENNE. 18	
2.1	SITUATION DE L'ENERGIE EOLIENNE DANS LE CONTEXTE DES ENERGIES RENOUVELABLES	18
2.2	LE MARCHE DES EOLIENNES – SITUATION ET TENDANCES	20
2.3	EVOLUTION DE LA TECHNOLOGIE EOLIENNE	21
2.4	NATURE DU GISEMENT EOLIEN ET MODELISATION DE LA VITESSE DU VENT	22
2.5	CARACTERISTIQUES STATIQUES D'UNE EOLIENNE	25
2.6	REGULATION DE LA PUISSANCE CAPTEE PAR UNE EOLIENNE	27
3	LES DIFFERENTS TYPES DES GENERATEURS UTILISES DANS L'INDUSTRIE	
	EOLIENNE.....	29
3.1	LES GENERATRICES ASYNCHRONES	30
3.1.1	<i>Les génératrices asynchrones à cage</i>	<i>31</i>
3.1.2	<i>Les génératrices asynchrones à double alimentation.....</i>	<i>31</i>
3.2	LES GENERATRICES SYNCHRONES.....	32
4	PRESENTATION DES MACHINES SYNCHRONES A AIMANTS PERMANENTS A	
	FLUX AXIAL.....	34
4.1	CONSTITUTION ET PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT	35
4.2	MATERIAUX DE FABRICATION.....	39
4.3	DIVERSES ARCHITECTURES DE MACHINES ET COMPARAISON DES PERFORMANCES	46
5	DEMARCHE DE CONCEPTION DES MACHINES ELECTRIQUES.....	50
5.1	CHOIX DE LA STRUCTURE DU DISPOSITIF.....	50
5.2	DIMENSIONNEMENT DE LA STRUCTURE CHOISIE	51
5.3	LES DIFFERENTS OUTILS DE DIMENSIONNEMENT DE LA STRUCTURE RETENUE	51
6	POSITION DE NOTRE TRAVAIL PAR RAPPORT AUX TRAVAUX EXISTANTS ...	54
7	OBJECTIF DE CETTE ETUDE	55
8	CONCLUSION	56

1 Introduction

La filière éolienne est en train de jouer un rôle de premier plan dans le domaine de la production électrique. Sur les 2560 TWh électriques produits en 2000 en Europe, 368 TWh étaient d'origine renouvelable [Euro 2002].

Après un siècle de recherches, d'essais et de déconvenues, la génération éolienne a connu son premier marché avec le "*wind rush*" californien dans les années 80. Cette opération volontariste a permis au marché éolien de créer et d'amorcer une réelle compétitivité économique. Dans ce contexte, l'Allemagne occupe une position de leader mondial avec 14,6 GW installé fin 2003 sur les 29 GW européens et les 39,3 mondiaux. L'Espagne occupe la deuxième place avec 6,4 GW et le Danemark la troisième avec 3,1 GW. La France atteint, quant à elle, à peine 250 MW.

Parmi toutes les ressources de production d'électricité, celle d'origine éolienne subit le plus fort taux de croissance depuis plus de 10 ans [Rah 2003]. De 2000 à 2003, le taux de croissance moyen mondial de la puissance éolienne installée a été de plus de 33%. L'utilisation de cette énergie éolienne est maintenant considérée comme une solution moderne faisant appel à une technologie de pointe.

Ce premier chapitre est divisé en quatre parties. La première partie présente une brève description de l'énergie éolienne. Quelques notions importantes au sujet de la technologie éolienne comme les méthodes de description du gisement éolien et les caractéristiques principales d'une éolienne sont donnés. La deuxième partie introduit les différentes structures d'aérogénérateurs les plus utilisés dans le marché éolien et donne pour chacune des éléments de comparaisons en listant les principaux avantages et inconvénients. La troisième partie aborde le sujet des machines à aimants permanents à flux axial pour une application éolienne. Leur principe de fonctionnement, les caractéristiques des matériaux susceptibles d'être utilisés et les différentes architectures sont exposés. Enfin, la quatrième partie décrit la démarche générale de conception et de dimensionnement des machines électriques. Un passage en revue sur les principaux outils utilisés pour le dimensionnement des machines électriques est également présenté.

2 Rappel des principales caractéristiques de l'énergie éolienne

2.1 Situation de l'énergie éolienne dans le contexte des énergies renouvelables

Dans le cadre du développement durable, face à l'enjeu planétaire posé par le risque d'épuisement des gisements fossiles, l'augmentation de leurs prix, les risques de maladie de certaines centrales et la pollution font des énergies renouvelables comme centre d'intérêt et objet de plusieurs recherches dans le monde entier.

En effet, la consommation mondiale d'énergie ne cesse d'augmenter posant des questions cruciales sur l'effet de serre et l'amenuisement des ressources énergétiques.

Aujourd'hui plus de 85% de l'énergie produite est obtenue à partir des matières fossiles comme le pétrole, le charbon, le gaz naturel ou de l'énergie nucléaire. La figure I-1 montre la répartition en termes d'énergie primaire dans le monde pour toutes les ressources actuelles.

Les formes de production d'énergie non renouvelables engendrent une forte pollution environnementale par rejet des gaz à effet de serre qui provoquent un changement climatique irréversible ou dans le cas nucléaire une pollution par radiations de longue durée qui pose le problème aujourd'hui non résolu du stockage des déchets radioactifs [IEA 2002].

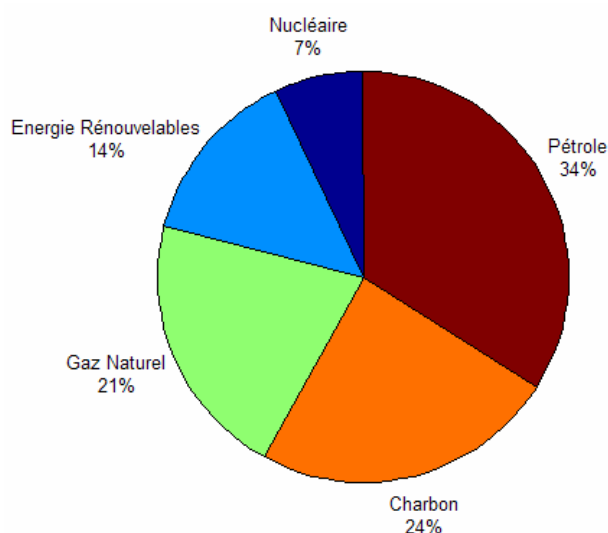


Figure I-1: Répartition des sources primaires

L'autre argument qui milite à l'avantage des sources renouvelables est lié à la pérennité des ressources en énergies. Dans le 21ème siècle, le paysage énergétique va radicalement changer car plusieurs ressources fossiles risquent de disparaître. De nouvelles ressources associées à des technologies performantes et fiables sont donc indispensables pour maintenir le niveau de la production énergétique mondiale.

Il existe plusieurs ressources en énergies renouvelables : l'énergie hydraulique, l'énergie éolienne, l'énergie solaire thermique ou photovoltaïque, l'énergie produite par les vagues et les houles ainsi que les courants marins, la géothermie et la biomasse. Ces ressources sont pratiquement propres et inépuisables, l'inconvénient majeur des ces énergies renouvelables vient de la non régularité des ressources.

L'énergie éolienne est largement reconnue comme une des technologies énergétiques les moins dommageables pour l'environnement. Les éoliennes n'émettent pas d'oxydes d'azote, de soufre, ni de gaz à effet de serre dans l'atmosphère. Les bénéfices de l'énergie éolienne ne sont pas qu'environnementaux, ils sont aussi économiques et sociaux.

Après avoir pendant longtemps oublié cette énergie pourtant exploitée depuis l'antiquité, elle connaît depuis 30 ans un essor dû aux premiers chocs pétroliers qui était la raison principale que plusieurs pays ont commencé à investir dans ce domaine afin d'améliorer la technologie des aérogénérateurs modernes [Ack 2002].

A l'échelle mondiale, l'énergie éolienne depuis une dizaine d'année maintient une croissance de 30% par an. En Europe, on comptait en 2000 environ 15000 MW de puissance installée. Ce chiffre à presque doublé en 2003, soit environ 27000 MW pour 40000 MW de puissance éolienne installée dans le monde. La figure I-2 illustre l'augmentation de cette énergie au fil des années.

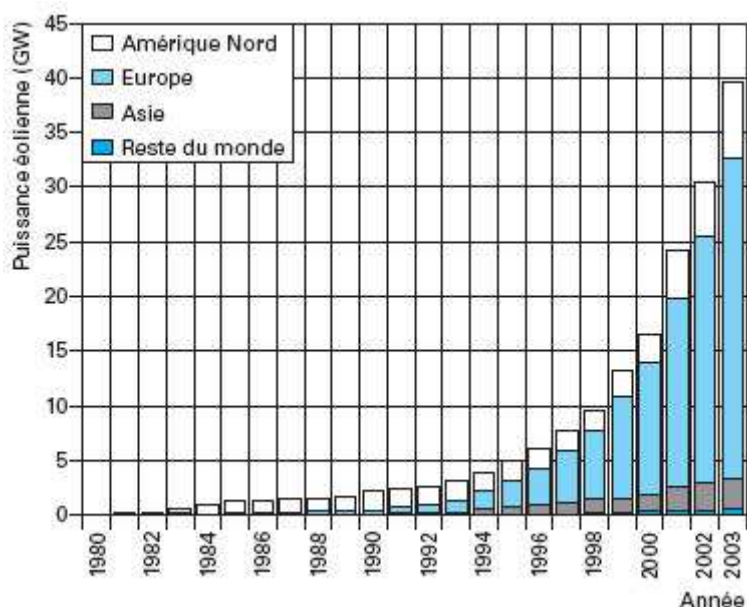


Figure I-2: Puissance éolienne cumulée dans le monde en MW

La France a lancé en 1996 le programme EOLE 2005 dans lequel on prévoyait l'installation de 250 à 500 MW d'éolienne puis en 2001 les objectifs ont été ensuite largement revus à la hausse avec des tarifs de rachat plus attractifs pour les investisseurs [Gar 2001].

2.2 Le marché des éoliennes – situation et tendances

A la fin de l'année 2000, le nombre d'éoliennes installées approchait le 50 000, avec une capacité totale de plus de 18 000 MW. La croissance du marché dépasse 28% par an. En l'an 2000, on note une augmentation de capacité de 4 500 MW environ avec l'installation de plus de 5 400 éoliennes d'une puissance moyenne de 830 kW. Cette croissance ne semble pas devoir se ralentir dans un futur allant jusqu'en 2010. L'EWEA (European Wind Energy Association) revoit régulièrement ses perspectives de capacité à la hausse. En 1999, les perspectives de production en Europe pour 2010 avoisinaient les 40 000 MW, en 2000 et 2001, elles ont été revues à plus de 60 000 MW. Selon une étude effectuée par Shell [She 1998], la demande en énergie sera triplée en 2060 et la part de l'énergie renouvelable devrait atteindre 60% dont 10% provenant de l'énergie éolienne.

Les tendances étudiées en 2001 montraient que l'Europe serait la région du globe la plus dynamique en terme de développement de l'énergie éolienne. Les pays le plus actifs sont l'Allemagne, le Danemark et l'Espagne avec une puissance cumulée respective de plus de 6 000MW, 2 300 MW et 2 800 MW.

En France, TotalFinaElf étudie un projet de lancement d'une plate-forme d'éoliennes de 40 à 90 MW au total au large de Port la nouvelle dans le Languedoc. D'autres projets sont en cours d'étude pour une ferme offshore de 70 MW au large du Cotentin, une de 40 à 50 MW dans le Finistère et une de 100 MW en Belgique.

Ainsi, le marché des éoliennes s'oriente progressivement vers des machines de plus en plus puissantes. Actuellement, de nombreuses éoliennes dépassent le MW. Cette tendance entraîne aussi une évolution de leurs systèmes de contrôle et de régulation.

En 2000, les éoliennes de capacité inférieure à 500 kW représentaient 1,8% de la demande globale, soit 311 unités. La demande semblait être en forte baisse d'année en année. Les éoliennes de capacité allant de 500 kW à 1 MW représentaient 59%, soit 4 087 unités, avec une demande en très légère baisse. Enfin, les éoliennes de capacité supérieure à 1 MW représentaient 39,2% de la demande globale, soit 1 293 unités avec une demande en hausse.

Les perspectives pour les années à venir semblent suivre les chiffres de l'année 2000. La hausse de la demande en éoliennes de grande capacité est due à l'offshore, mais aussi à l'installation d'éoliennes terrestres de plus de 1 MW. En particulier l'Allemagne a déjà installé des éoliennes de ce type sur terre. Des éoliennes de 2,5 sont opérationnelles (chez Nordex par exemple) et des pilotes de 4 à 5 MW sont en cours de test. Jakobs Energie travaille en collaboration avec Nordex pour la conception d'une éolienne offshore de 5 MW.

2.3 Evolution de la technologie éolienne

Le secteur de l'énergie éolienne évolue progressivement vers l'implantation d'éoliennes en mer. Actuellement, la technologie *offshore* reprend les technologies les plus robustes développées pour les éoliennes terrestres, mais de nouveaux types sont en cours de développement. Il faut noter ici que le coût d'installation d'une éolienne est beaucoup plus important en mer que sur terre. La répartition des coûts est très différente dans les deux cas. En particulier le coût de la connexion au réseau électrique et les fondations ont un impact considérable sur le coût final de l'éolienne.

Le projet européen CA-OWEE (Concerted Action on Offshore Wind Energy in Europe) a été réalisé pour évaluer les capacités de l'énergie éolienne en mer et identifier les points clés de ces développements. Actuellement, quelques constructeurs ont déjà accumulé une expérience significative en mer : Bonus, Gewind, Neg-Micon, Vestas et Enercon. Les puissances des éoliennes varient entre 2,2 et 5 MW avec des projets à quelques années pour des éoliennes allant largement au-delà de 5 MW, et jusqu'à 10 MW.

- Enercon a développé une éolienne de 4,5 MW avec entraînement direct, dont le diamètre de la génératrice à aimants permanents est de 10 mètres et le diamètre de la turbine éolienne est de 113 mètres. Cette éolienne est en cours de test.
- Pfleiderer a installé une éolienne hybride de 5 MW conçue par Aerodyn. Ce concept est en phase de test. Le système hybride inclut un multiplicateur de vitesse compact à un seul étage, un générateur synchrone et un support de palier intégré.
- Neg-Micon propose une éolienne de 4,2 MW dédiée à l'offshore avec un multiplicateur standard à trois étage.
- RE-Power dont la société LVDF (Les Vents De France) est la filiale française, propose une éolienne de 5 MW équipée d'une hélice de 125 mètres, d'un arbre soutenu par deux gros paliers et d'un multiplicateur développée par la compagnie Renk.

En ce qui concerne le marché *offshore*, une douzaine de parcs éoliens sont en cours de fonctionnement en Europe. Ils produisent actuellement 280 MW. Cela peut paraître faible mais de nombreux projets sont en cours de développement avec un objectif, pour l'Europe du nord seule, de plus de 20 000 MW selon l'EWEA. Voilà quelques exemples de développement de parcs éoliens *offshore* :

- le parc éolien d'Arklow en Irlande fournit actuellement 25 MW avec un objectif à moyen terme de 200 MW.

- la parc éolien de Rødsand au Danemark en cours d'installation doit ériger 72 turbines Bonus de 2,2 MW.
- de nombreux autres projets à moins de 10 km des côtes sont en cours, par exemple au Pays-Bas (Mouth of the western Scheldt, 100 MW), au Danemark (Läsö, 150 MW), en Suède (Lillgrund, 48 MW) et en Grande-Bretagne (Kish Bank, 260 MW).

2.4 Nature du gisement éolien et modélisation de la vitesse du vent

En parlant d'énergie éolienne, nous ne pouvons pas oublier la notion de vent puisque c'est l'élément de base de cette forme d'énergie. Bien qu'il soit une source inépuisable et renouvelable, elle est tout à fait aléatoire, fluctuante, saisonnière et surtout non conservable ce qui rend très délicate l'optimisation d'un système éolien en imposant des contraintes au niveau de la conception du système aussi bien sur le domaine de la mécanique que sur celui de l'électricité.

Le comportement aléatoire du vent peut se présenter sous deux formes distinctes. On distingue la moyenne de la vitesse du vent sur une période bien définie qui s'appelle composante '*lente*' et la composante '*rapide*' qui est déterminée dans un délai plus court que celui de la composante lente. Dans un intervalle de temps donné, le vent peut prendre plusieurs directions. Ceci ne fait pas partie de notre préoccupation car les systèmes existants déjà dans le marché actuellement sont très efficaces. D'autre part, le choix géographique d'un site éolien est primordial dans un projet de production d'énergie. Les caractéristiques du vent vont déterminer la quantité de l'énergie qui pourra être extraite du gisement éolien. Pour connaître les propriétés d'un site, des mesures de la vitesse du vent ainsi que de sa direction, sur une grande période du temps sont nécessaires.

Chaque site éolien est caractérisé par une direction de la vitesse du vent dominante. Pour décrire ces propriétés spatio-temporelles, le diagramme appelé rose des vents peut être élaboré. Il se présente comme un diagramme polaire, lequel répertorie l'énergie du vent disponible dans chaque direction en pourcent et le temps de l'occurrence de chaque direction du vent en pourcent. Des informations supplémentaires peuvent être insérées dans ce graphique comme la turbulence ou la rugosité du terrain.

Cependant, la fonction de répartition de la vitesse de vent d'un site peut être modélisée par d'autres approches analytiques connues telles que la loi normale Gaussienne, la loi Khi mais les plus utilisées sont la distribution de Rayleigh et celle de Weibull.

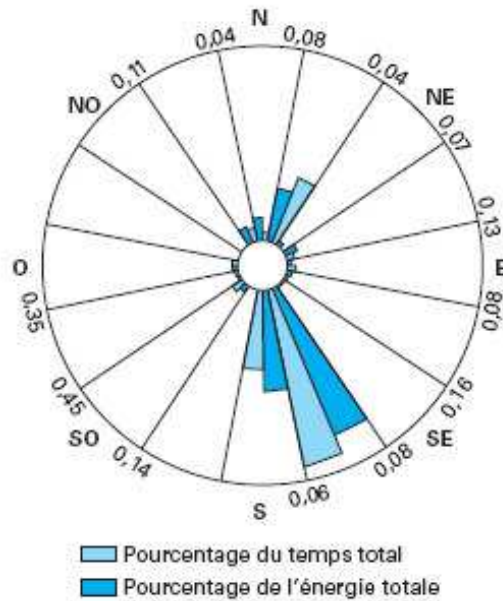


Figure I-3: Exemple de la rose des vents de site du Havre

Description de la vitesse du vent : La distribution de Weibull

Il est trop important pour l'industrie éolienne d'être en mesure de décrire les variations de la vitesse du vent. Les fabricants utilisent ces informations pour optimiser la conception des éoliennes dans le but de minimiser les coûts liés à la production de l'électricité.

On décrit normalement les variations du vent sur un site donné en utilisant la distribution de Weibull qui s'est avérée bien appropriée pour la description des propriétés statiques du vent. Elle modélise avec succès la probabilité de l'occurrence des vitesses du vent du gisement éolien. La distribution de Weibull à deux paramètres 'c' et 'k' et s'écrit :

$$f(v) = \frac{k}{c} \left(\frac{v}{c} \right)^{(k-1)} \exp \left[- \left(\frac{v}{c} \right)^k \right]$$

où $f(v)$ représente la fréquence d'apparition de la vitesse du vent, le paramètre $c(m/s)$ est dénommé facteur d'échelle et 'k' le facteur de forme, sans dimension, pour caractériser l'asymétrie et la forme de la distribution. La figure I-4 donne la distribution de Weibull pour le cas $k=2$, paramétrée par 'c'.

La distribution statique des vitesses du vent varie d'un endroit à l'autre vu qu'elle dépend des conditions climatiques locales, le paysage et sa surface. La distribution de Weibull tend donc à varier, tant en forme qu'en valeur moyenne. Dans le cas où le paramètre de forme est égal à 2, on parle d'une distribution de Rayleigh. Les fabricants fournissent souvent les calculs de performance en utilisant la distribution de Rayleigh.

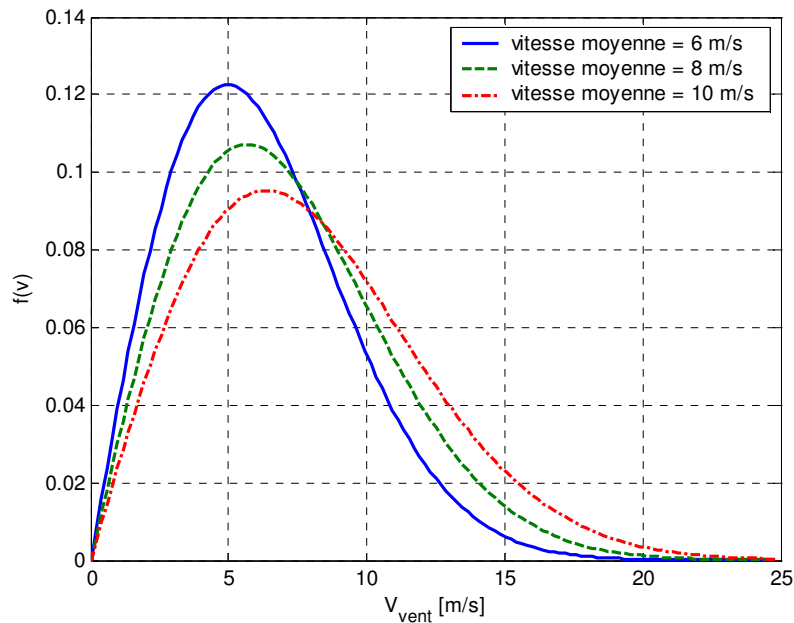


Figure I-4: Caractéristique de distribution de Weibull

Par ailleurs, la vitesse du vent est une variable importante à modéliser car la précision des simulations dépendra de la qualité de son modèle. La vitesse du vent a une variation aléatoire et une caractéristique fluctuante. Ainsi, dans le but de reproduire ces caractéristiques, il existe deux possibilités qui sont les mesures expérimentales et la modélisation analytique. La première consiste à effectuer des mesures expérimentales sur un site éolien bien défini. Cette solution est certes beaucoup plus précise que la deuxième mais seulement elle ne permet pas de simuler différents types de profil de vitesse de vent. La deuxième solution semble plus souple car il s'agit d'une modélisation analytique de la grandeur. L'une des méthodes les plus utilisées pour modéliser le vent est la caractéristique spectrale de Van der Hoven [Nic 2002]. Dans ce modèle, la composante de turbulence est considérée comme un processus aléatoire stationnaire et donc elle ne dépend pas de la variation de la moyenne de la vitesse de vent. A partir de cette caractéristique spectrale de puissance, on effectue une discrétisation directe dans le but de reproduire la caractéristique du vent du site [Sam 2005].

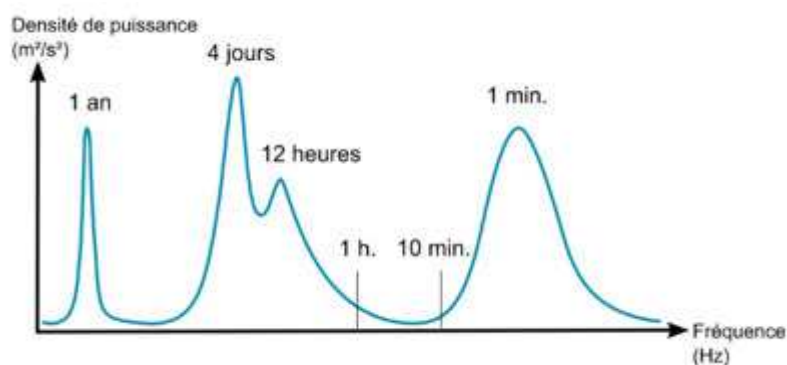


Figure I-5: Spectre de Van der Hoven d'un site donné

2.5 Caractéristiques statiques d'une éolienne

La turbine est un dispositif qui transforme l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique. La puissance de la masse d'air qui traverse la surface active de la turbine est donnée par :

$$P_v = \frac{1}{2} \rho S V_v^3$$

Où ρ , V_v et S sont la masse volumique d'air, la vitesse du vent et la surface balayée par l'hélice respectivement.

Selon A. Betz, une éolienne ne pourra jamais convertir en énergie mécanique plus que 16/27 (59%) de l'énergie cinétique contenue dans le vent à cause de la vitesse non nulle des masses d'air derrière l'aéromoteur. De cette façon, le coefficient de puissance maximal théorique est défini :

$$C_p^{opt} = \frac{P_{max}}{P_v} = 0,59 \cdot P_v$$

Ce rendement appelé coefficient de puissance C_p de l'éolienne est propre à chaque voilure. Il caractérise l'aptitude de l'aérogénérateur à capter l'énergie éolienne, la puissance correspondante est donc donnée par :

$$P_e = \frac{1}{2} \rho S V_v^3 C_p$$

D'autre part, pour décrire la vitesse de fonctionnement d'une éolienne, une grandeur spécifique est utilisée : la vitesse réduite λ . C'est le rapport de la vitesse linéaire en bout de pales de la turbine et de la vitesse du vent :

$$\lambda = \frac{R\Omega}{V_v}$$

Le coefficient de puissance de l'éolienne dépend de la vitesse spécifique λ et la puissance maximale extraite est fonction de la valeur maximale de ce coefficient. La courbe $C_p(\lambda)$ passe un maximum compris entre 5 et 16 environ, selon le nombre de pales de la turbine et c'est seulement pour cette valeur que C_p approche de la valeur 16/27.

Le graphique de la figure I-6 montre l'évolution du coefficient de puissance pour des turbines réelles à axe horizontal à 1, 2, 3 et 4 pales [Hau 2000], on note que sa valeur reste bien au dessous de la limite de Betz (0,59). Ces courbes dépendent pratiquement du profil des pales.

Si on considère la machine tripale, on peut dire que son coefficient de puissance est maximal pour $\lambda \approx 7$, c'est-à-dire une vitesse périphérique en bout de pale égale 7 fois la vitesse du vent. C'est pour une telle vitesse normalisée que l'on maximise le rendement aérodynamique.

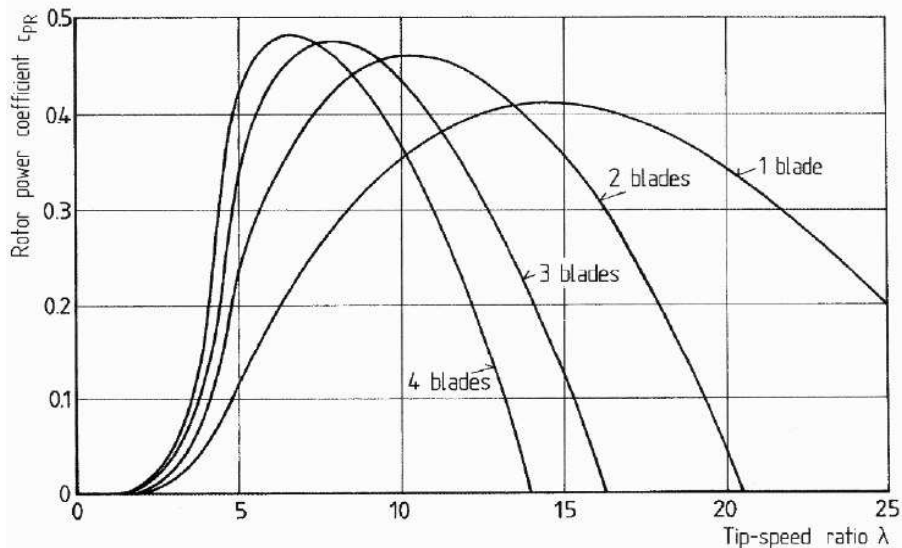


Figure I-6 : Coefficient de puissance en fonction de la vitesse réduite pour différents types de turbines

En réalité, jusqu'à présent, seulement 60 à 70% de cette puissance maximale théorique peut être exploitée par les engins les plus perfectionnés, ceci est dû aux divers rendements successifs de la chaîne éolienne.

D'autre part, le couple éolien Γ_e développé sur l'arbre est calculé par la relation :

$$\Gamma_e = \frac{P_e}{\Omega} = \frac{\rho \pi C_P v^2 R^3}{2\lambda}$$

et on définit le coefficient de couple de l'éolienne par :

$$C_\Gamma(\lambda, \beta) = C_P(\lambda, \beta) / \lambda$$

D'où l'on a:

$$\Gamma_e = \frac{P_e}{\Omega} = \frac{\rho \pi C_\Gamma(\lambda, \beta) v^2 R^3}{2}$$

La figure I-7 donne l'allure du coefficient du couple pour des éoliennes à axe vertical.

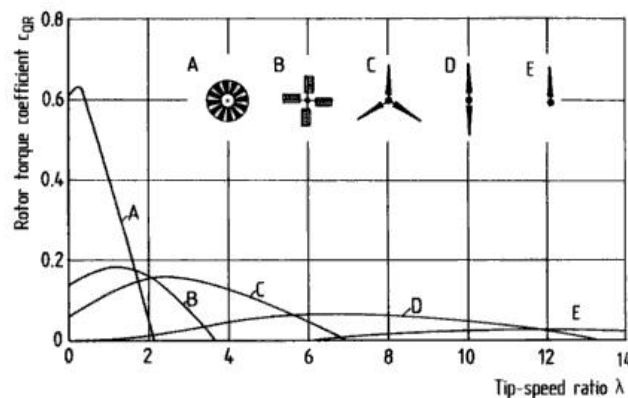


Figure I-7: Evolution du coefficient du couple en fonction de la vitesse spécifique

Cette famille des courbes montre clairement que le couple de démarrage augmente lorsque le nombre des pales de l'éolienne augmente aussi.

Les deux caractéristiques $C_p(\lambda, \beta)$ et $C_T(\lambda, \beta)$ sont les caractéristiques les importantes d'une éolienne dont les paramètres constructifs sont connus. Elles nous donnent respectivement les dépendances de la puissance éolienne disponible sur l'arbre P_e , et du couple développé Γ_e en fonction de la vitesse de rotation Ω .

2.6 Régulation de la puissance captée par une éolienne

L'objectif principal de la régulation dans une chaîne éolienne est d'assurer la sécurité de l'éolienne et de limiter sa puissance. En général, la turbine éolienne est dimensionnée pour développer une puissance nominale P_n sur son arbre obtenue à partir d'une vitesse du vent nominale V_n . A partir de cette vitesse nominale du vent, l'éolienne doit modifier ses paramètres afin éviter son endommagement de sorte que sa vitesse de rotation soit constante. La figure I-8 donne la courbe de la puissance d'une éolienne en fonction de la vitesse du vent.

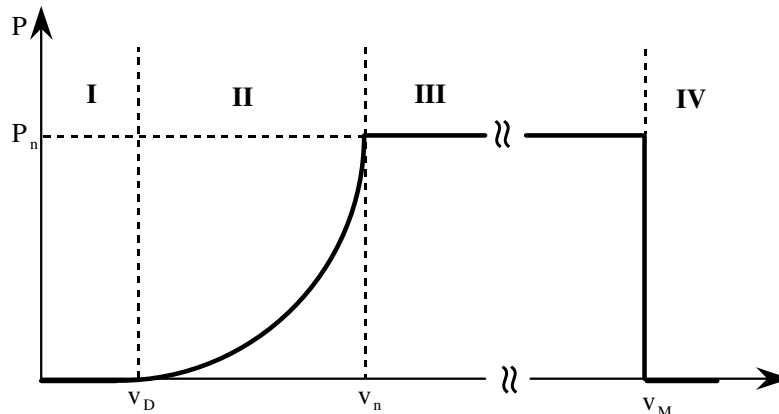


Figure I-8: Puissance extraite par une éolienne en fonction de la vitesse de vent

Sur cette courbe, on définit les quatre zones suivantes :

- La zone *I* où la vitesse du vent est inférieure à la vitesse du démarrage V_d . Dans ce cas, l'éolienne ne produit pas de l'énergie.
- La zone *II* où la vitesse du vent varie dans le domaine $[V_d, V_n]$. C'est dans cette zone qu'il est intéressant de faire varier la vitesse de rotation afin de maximiser la puissance captée par la turbine éolienne.
- La zone *III* où la puissance fournie par l'éolienne est maintenue constante. En effet, au-delà de la vitesse nominale, le surcoût de dimensionnement ne serait pas amorti par le gain de production.
- La zone *IV* correspond au cas des vents violents. Dans ce cas, le système de sûreté

de fonctionnement intervient pour protéger la partie mécanique de l'éolienne et éviter sa destruction.

L'optimisation de la puissance dans la zone *II* peut s'effectuer par des commandes sur la turbine [Con 1993] ou sur la partie électrotechnique (MPPT) [Spe 1996]. Si la vitesse de rotation de l'éolienne varie en permanence pour qu'elle soit adaptée à la vitesse du vent, le lieu des points de fonctionnement à puissance maximale décrit la courbe de puissance dans cette zone (figure I.8). Les expériences ont montré que le gain offert en vitesse variable varie entre 10 et 25% par rapport à la vitesse fixe [Hof 2000]. Cependant, l'argument majeur en faveur de la vitesse variable est lié à la diminution du stress mécanique et aux effets d'ombrage. Ainsi, dans [Bau 2002], les auteurs montrent comment l'ondulation de puissance est réduite d'une façon très significative entre systèmes à vitesse fixe et variable.

La figure I-9 donne l'image de la famille des courbes de la puissance éolienne en fonction de la vitesse de rotation pour différentes vitesses du vent ainsi que la courbe optimale qui relie leurs sommets selon une fonction cubique de la vitesse de rotation. En suivant cette courbe, la puissance éolienne recueillie sera toujours maximale.

En ce qui concerne la zone *III* lorsque la vitesse du vent dépasse la valeur nominale, deux méthodes principales existent pour contrôler la vitesse de rotation de l'éolienne par rapport à la vitesse du vent et ainsi limiter la puissance aérodynamique lorsque la vitesse du vent devient trop élevée.

Système "pitch" ou "à calage variable"

Ce système permet d'ajuster la portance des pales à la vitesse du vent pour maintenir une puissance sensiblement constante en pivotant les pales de quelques degrés à chaque variation de la vitesse du vent. Les pales sont face au vent aux basses vitesses puis commencent à s'incliner pour atteindre la position 'drapeau' à la vitesse maximale.

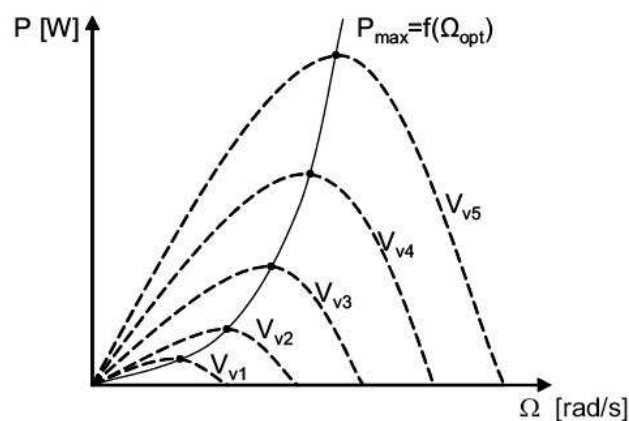


Figure I-9 : Puissance éolienne en fonction de la vitesse de rotation. Cas où $V \in [V_d, V_n]$

Ce système permet également de freiner la turbine si nécessaire. Il offre aussi la possibilité de pouvoir effectuer un contrôle actif de la puissance sous toutes les conditions de vent. Mécaniquement, il s'agit d'un dispositif sophistiqué surtout pour les petites machines. La figure I.10 met en évidence l'effet de l'angle de calage sur le coefficient de puissance C_p , un angle nul correspond à une pale face au vent.

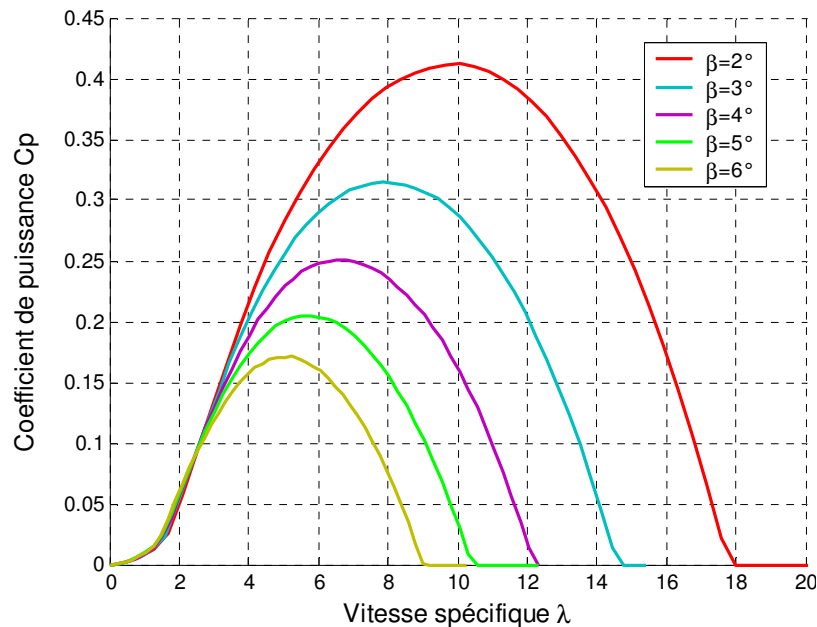


Figure I-10: Effet de l'angle de calage sur le coefficient de puissance

Système "stall" ou "à décrochage dynamique"

C'est un système de contrôle passif qui réagit au-delà d'une certaine vitesse de vent. L'angle de calage est choisi afin de permettre le décrochage du flux d'air de la surface de la pale pour des vitesses de vent plus grandes que la vitesse nominale. Cela réduit la portance et augmente la force de traînage. En comparaison avec les turbines à calage variable, celles à décrochage dynamique ont les avantages suivants :

- Pas de système de contrôle d'angle de calage.
- Construction plus simple et moins coûteuse du rotor.
- Maintenance plus aisée et meilleure fiabilité.

3 Les différents types des générateurs utilisés dans l'industrie éolienne

Après avoir rappelé les principales caractéristiques d'une turbine éolienne, il devient naturel de chercher à savoir quel type de génératrices employées par les concepteurs éoliens. En effet, les génératrices électriques constituent la frontière entre la partie mécanique et la partie électrique pour assurer la conversion mécanique/électrique. Il existe sur le marché des

tas de variétés de machines pour ce genre de conversion. On peut trouver les machines à courant continu, à reluctance variable, asynchrone, synchrone classique et synchrone à flux axial. Certains concepts de base permettent de classifier les diverses sortes d'aérogénérateurs [Cam 2003], [Bar 2007].

Les deux types de machine électrique les plus utilisés dans l'industrie éolienne sont les machines synchrones et les machines asynchrones sous leurs diverses variantes. Les machines à courant continu présentent une excellente marge de variation de la vitesse de rotation et une bonne réponse dynamique mais elles sont chères et ont un poids élevé. Les génératrices à reluctances variables sont des machines mécaniquement robuste, ils ont de plus un bon rendement et une large marge de variation de vitesse et leur commande est simple. Ce type de machine pourrait être candidat pour des futures éoliennes. Les éoliennes à vitesse variable font largement appel à l'électronique de puissance, les stratégies de commande et de supervision doivent naturellement être intégrées dans ces modèles pour assurer un maximum de captage d'énergie dans la zone où la vitesse du vent n'a pas encore atteint la vitesse nominale. Cette technologie s'étend actuellement aux éoliennes de grande puissance car les appareils électroniques de transformation du courant sont de moins en moins coûteux [Bia 1997].

3.1 Les génératrices asynchrones

Les machines asynchrones sont les plus simples à fabriquer et les moins coûteuses. Elles sont moins exigeantes en termes d'entretien et présentent un taux de défaillance très peu élevé. Elles sont bien adaptées à des vitesses de rotation importantes mais elles présentent le défaut d'imposer la présence d'une boîte de multiplicateurs de vitesse. En 1999, les systèmes utilisant des boîtes de vitesse occupaient 89% du marché.

La normalisation des multiplicateurs d'éoliennes n'est pas encore uniforme et claire. Différents organismes européens travaillent sur ce sujet. Notons que, selon la société française LVDF (Les Vents De France) créée fin 2001 qui commercialise et assemble des éoliennes supérieures à 1 MW pour la France, la Belgique et le Luxembourg, la référence européenne dans le domaine de la certification est la Germanischer Lloyd Wind Energy. Cette société utilise les normes DIN 3990 équivalents aux normes ISO 6336 pour le calcul des multiplicateurs. Elle édite aussi un code de calcul et de règles pour les éoliennes. Celui-ci est disponible sur son site <http://www.germanlloyd.org>.

Dans le domaine de la génération d'énergie couplée au réseau, les machines asynchrones à cage dominant encore car elles offrent des performances attractives en terme de coût

d'investissement. Mais lorsqu'il s'agit de réaliser un entraînement à vitesse variable, on leur préfère plutôt des machines à rotor bobiné doublement alimentées qui offrent des bons compromis performances/coût.

3.1.1 Les génératrices asynchrones à cage

Les machines asynchrones à cage ne nécessitent qu'une installation assez sommaire. Elles sont souvent associées à une batterie de condensateurs pour compenser la puissance réactive et à un démarreur automatique progressif à gradateur pour éviter des régimes transitoires perturbateurs lors de la mise sous tension.

Ces machines tournant généralement à 1000 ou 1500 tr/min nécessitent d'être associées à leur turbine éolienne qui est beaucoup plus lente à travers un multiplicateur de vitesse, organe qui subit au cours de sa vie des sollicitations normales ou pas et qui exige un grand emplacement. Il a un poids considérable et nécessite un débit d'huile important. La plupart des défaillances mécaniques lui sont attribuées [WPM 1999] et peuvent donc entraîner un arrêt imprévu du système de production avec des coûts induits importants.

Un multiplicateur de vitesse moderne pèse environ 8 tonnes/MW. On arrive ainsi pour des machines tournant à 1500 tr/min à des puissances massiques globales de l'ensemble multiplicateur-génératrice de l'ordre de 80W/kg.

Cette solution courante dans les années 1990 est de moins en moins commercialisée. En effet la vitesse de rotation quasi-constante ne maximise pas la productivité de la turbine et on lui préfère des solutions à deux vitesses (système Dahlander) ou à vitesse continûment variables (utilisation d'un variateur de fréquence).

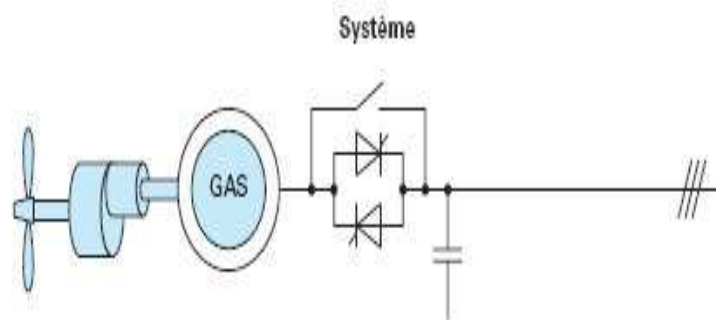


Figure I-11: Génératrice asynchrone à cage intégrée dans une chaîne éolienne

3.1.2 Les génératrices asynchrones à double alimentation

Ces machines présentent un avantage important concernant la puissance réduite de dimensionnement du convertisseur électronique de puissance [Mul 2002]. Son principe est

issu ce celui de la cascade hyposynchrone : le stator est connecté à tension et fréquence fixe au réseau alors que le rotor est relié à travers un convertisseur de fréquence au réseau. Si la variation de vitesse requise reste réduite autour de la vitesse de synchronisme, le dimensionnement du convertisseur de fréquence peut être réduit.

Ces machines sont un peu plus complexes que les machines à cage avec lesquelles elles ont en commun de nécessiter un multiplicateur de vitesse. Il faut noter aussi que l'usure des contacts glissants occasionne une maintenance plus importante (environ 1 à 2 ans pour les balais et 10 ans pour les bagues), ce qui constitue un inconvénient en particulier pour les systèmes offshore. Malgré la nécessité d'une maintenance accrue et le surcoût de la machine à rotor bobiné, le gain sur le prix du convertisseur est suffisamment significatif pour assurer la compétitivité de cet ensemble et pour le voir occuper une très large part du marché actuel.

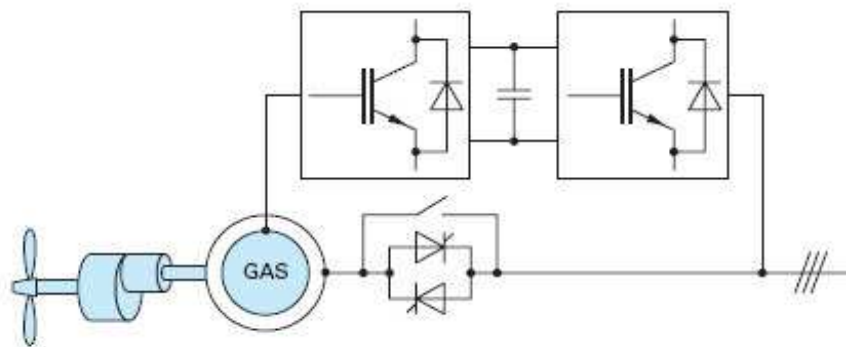


Figure I-12: Génératrice asynchrone avec multiplicateur à variation de vitesse par le rotor

Enfin, on signale que de nouvelles solutions sans balais sont à l'étude, notamment pour des applications offshore dans lesquelles la maintenance est particulièrement coûteuse.

3.2 Les génératrices synchrones

Les machines synchrones sont bien connues pour offrir des couples élevés à dimensions géométriques courtes convenables. Ils peuvent être à rotor bobiné ou à aimants permanents. Les machines à rotor bobiné exigent un entretien régulier du système bagues-balais, éléments responsables d'une défaillance prématurée dont la fréquence atteint 25% des génératrices tombées en panne [Dur 1998].

Globalement, le coût des machines synchrones est plus élevé que celui des machines asynchrones avec multiplicateur, mais à couple et masse égaux, elles possèdent un meilleur rendement qui permet à terme un amortissement du surinvestissement. De plus, elles sont les seules à pouvoir répondre aux contraintes d'un entraînement direct. Donc, le système de ce type de machines a un taux de défaillance jugé faible grâce à la suppression de la boîte de vitesse et du système bagues-balais. Les génératrices synchrones à entraînement direct sont

encore peu nombreuses, elles constituent environ 10% des aérogénérateurs en service. Le principal fabricant est Enercon (environ 3000 machines sont déjà en service) et Largerwey.

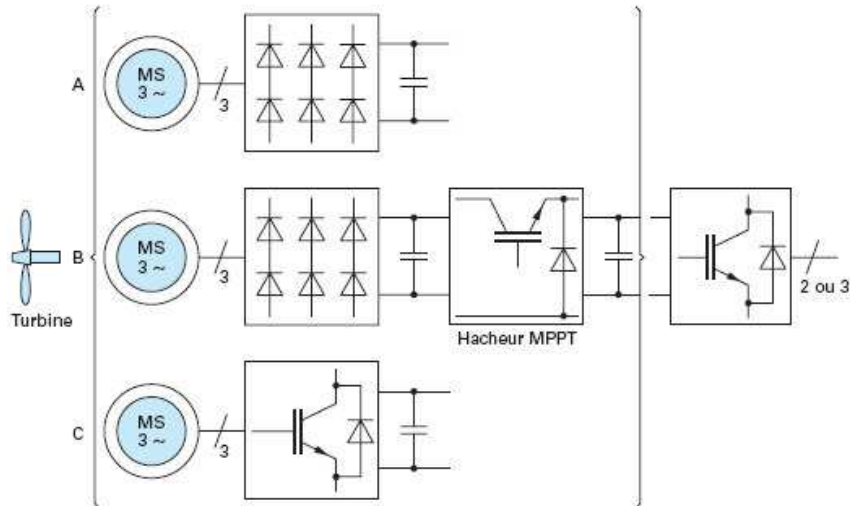


Figure I-13: Génératrice synchrone à attaque direct

La figure I-13.A montre une chaîne de conversion utilisant une machine synchrone à aimants entraînée directement par la turbine et connectée à bus continu à travers un simple redresseur à diodes. Le bus continu peut être associé à des batteries de stockage, un onduleur génère alors la source alternative nécessaire. La figure I-13.B montre l'amélioration de cette chaîne de conversion en ajoutant un hacheur contrôlé en MPPT pour adapter le niveau de tension continu et ainsi la vitesse de rotation de la turbine. Enfin, la figure I-13.C donne la structure idéale avec redresseur MLI qui permet d'absorber des courants sinusoïdaux et de contrôler éventuellement leur phase pour disposer d'un degré de liberté supplémentaire dans l'optimisation énergétique et dans celle du dimensionnement du système.

On trouve également des machines synchrones rapides associées à un multiplicateur de vitesse comme chez le constructeur "Made". Ces machines fonctionnent à vitesse variable, elles débitent sur un redresseur à diodes, puis la tension continue est convertie à travers un MLI pour être compatible avec le réseau.

Parmi les génératrices utilisées dans l'industrie éolienne, il semble que les génératrices à aimants permanents couplées directement à la turbine présentent les meilleures performances en termes de fiabilité, maintenance, capacité de l'extraction de l'énergie, pollution harmonique et rendement [Dub 2001].

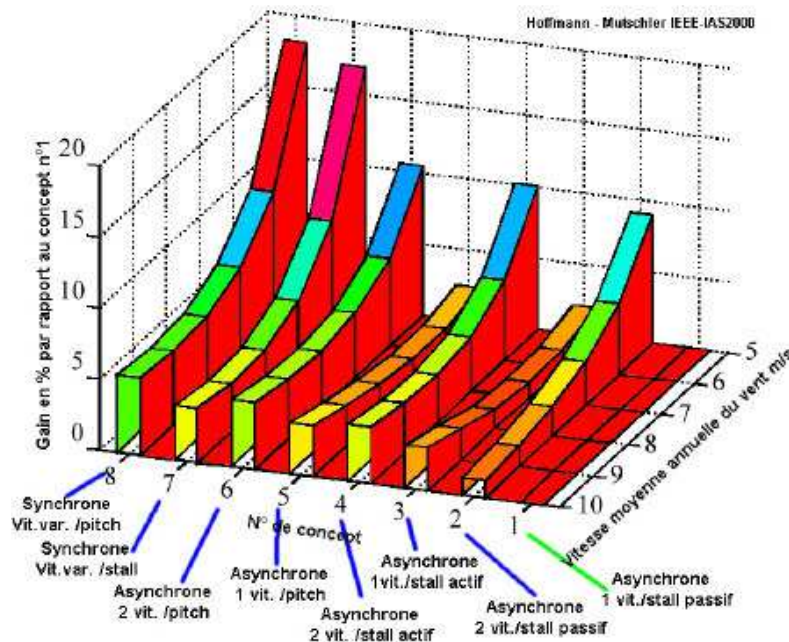


Figure I-14: Comparaison des performances énergétiques de différentes chaînes éoliennes [Hof 2000]

La figure I-14 montre une comparaison des performances énergétiques pour différentes chaînes de conversion sur une machine tripale de 600 kW. La solution de référence est une génératrice asynchrone à cage à vitesse fixe. On voit que la plus performante est la machine synchrone à attaque direct et à régulation de l'angle de calage.

4 Présentation des machines synchrones à aimants permanents à flux axial

L'histoire des machines tournantes montre que la première machine électrique inventée par Faraday en 1821 était une machine à flux axial mais la mauvaise qualité des matériaux magnétiques à l'époque a empêché le développement de ces systèmes. Ce n'est qu'avec l'arrivée des aimants performants du type NdFeB après un siècle environ qui a permis le développement de ces machines d'une manière efficace.

A leur apparition, les machines à flux axial souffraient des quatre problèmes suivants :

- Fabrication du stator délicate pour réaliser des encoches avec des tôles en fer laminées.
- Assemblage difficile de la machine pour garder un entrefer constant.
- Force d'attraction magnétique importante entre le stator et le rotor.
- Coût de fabrication élevé.

Les trois principaux types des machines à flux axial : les machines à courant continu, les machines asynchrones et les machines synchrones. Dans ce travail, nous ne nous intéressons qu'à ce dernier type de machine. La gamme de puissance peut aller d'une fraction de Watt

[Arn 2006] à quelques mégawatts [Car 1999].

Le progrès technologique des matériaux pour l'électrotechnique a permis aux machines synchrones à aimants permanents à flux axial de gagner une grande importance sur le terrain récemment. Leur application ne cesse d'accroître surtout dans le domaine de l'énergie éolienne [Cha 1999], la propulsion marine [Car 1999] et les automobiles [Car 2000].

La raison principale est la réduction du prix de la puissance électrique produite et en réduisant la longueur axiale, elles peuvent également fournir plus de puissance. Ces machines procurant une haute précision et fiabilité pour des applications nécessitant un couple élevé à petite vitesse, permettent de *s'affranchir les réducteurs mécaniques* dans de nombreuses installations industrielles. Ces machines présentent les avantages suivants :

- La présence de deux entrefers équilibre la force d'attraction entre le stator et le rotor.
- La chaleur produite par les enroulements statoriques est évacuée plus facilement.
- Les aimants ont leur surface plate plus simple à réaliser que les aimants galbés.
- L'épaisseur de l'entrefer est ajustable avant et après l'assemblage.
- Facilité du bobinage du stator car il est plat et facilement accessible.

Par contre, elles présentent les inconvénients suivants:

- Nombre des aimants élevés.
- L'espace réservée aux têtes des bobines au niveau du rayon interne est limitée.
- L'inclinaison des bobinages statoriques n'élimine pas complètement le couple de détente.
- Les laminations statoriques ont une direction circonférentielle, ce qui rend chère la fabrication du circuit statorique.

4.1 Constitution et principe de fonctionnement

Le principe de fonctionnement des machines à flux axial dérive de celui des machines à flux radial. La particularité de la machine synchrone à aimants permanents à flux axial réside dans le caractère intrinsèquement tridimensionnel de son flux principal.

En effet, sur une paire de pôles et en partant d'un pôle nord de la couronne aimantée, le flux principal traverse la couronne aimantée au rotor ainsi que l'entrefer axialement, il pénètre ensuite axialement dans un pôle statorique et circule circonférentiellement dans la culasse statorique. Enfin, il sort du pôle nord statorique, traverse l'entrefer et le pôle sud de la couronne aimantée, parcourt le circuit magnétique rotorique tangentiellement et radialement pour revenir à son point de départ.

En conclusion, le flux principal emprunte les trois directions des coordonnées cylindriques, ce qui lui confère cet aspect tridimensionnel contrairement à un grand nombre des machines

synchrones à aimants permanents classiques.

Le circuit magnétique statorique

Le circuit magnétique statorique doit présenter à la fois des propriétés magnétiques, des caractéristiques mécaniques déterminées et une bonne conductivité thermique. Ce circuit peut être encoché ou lisse. Ceci est montré par la figure I-15. La configuration lisse où les conducteurs sont enroulés autour du circuit statorique permet de supprimer le couple de détente et résoudre les problèmes de la saturation des dentures au niveau du rayon interne. Avec cette configuration, la longueur des bobines est réduite et par conséquent les pertes joules sont minimales [Nap 1991]. Par ailleurs, elle demande une quantité des aimants plus importante que celle encochée. La structure encochée est envisageable lorsque les efforts mécaniques sont importants. Dans ce cas les bobines sont bien protégées car les conducteurs seront logés dans des encoches et on utilise une quantité des aimants inférieure à celle utilisée dans le cas lisse.

D'autre part, les enroulements sont constitués de bobines qui peuvent être mises en place directement dans les encoches ou préformées séparément avant la mise en place. Contrairement aux machines conventionnelles, les conducteurs actifs sont montés dans le sens radial à partir de l'axe de la machine. Le disque étant plat, la mise en place des conducteurs peut être facilement automatisée, notamment en utilisant des bobinages en couche et non imbriqués. Des isolants placés entre les différentes sections de cuivre d'une part, et entre les conducteurs et la tôle d'autre part, permettent de garantir l'isolement électrique de la machine. Le maintien des conducteurs et des isolants dans les encoches peut être réalisé soit mécaniquement avec des cales d'encoches, soit par collage.

Concernant le refroidissement du stator des machines discoïdes de faible puissance, la ventilation est quasiment assurée par le rotor et ses aimants qui jouent le rôle d'un auto-ventilateur. La chaleur est évacuée à travers des trous pourvus à cet effet.

Pour les machines de moyenne et forte puissance, le système de refroidissement peut être réalisé par circulation d'air en surface du stator si la vitesse de la machine est faible, ou par adjonction d'un système de ventilation motorisé et séparé [Gie 2004]. La ventilation a pour but d'extraire les pertes internes de leurs différentes sources et d'assurer un refroidissement aussi homogène que possible des bobinages pour conserver aux matériaux isolants la longévité que peut atteindre l'utilisateur. L'efficacité de la ventilation est primordiale en ce qui concerne le dimensionnement d'une machine électrique.

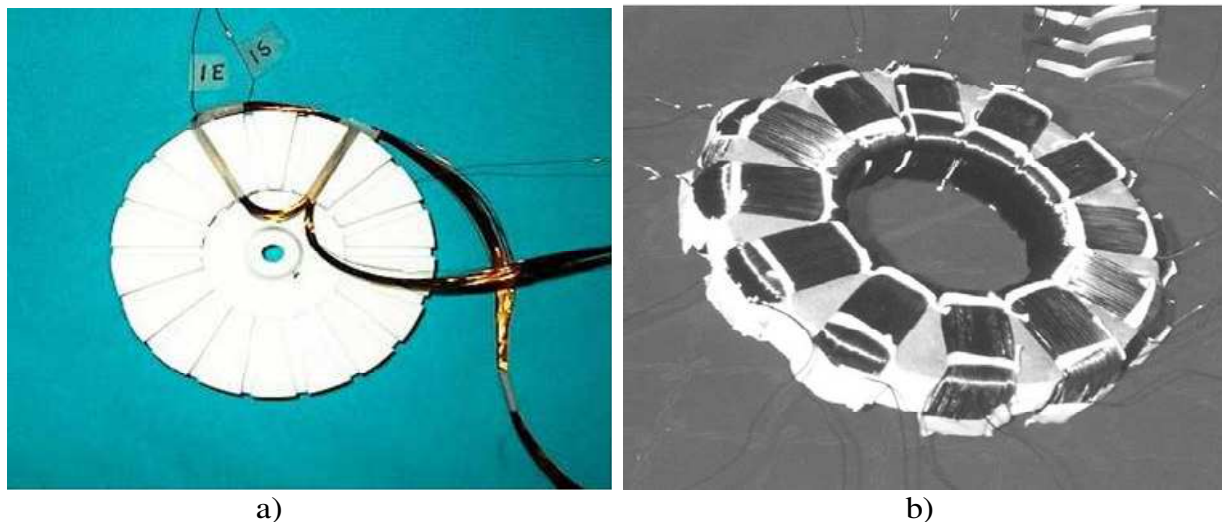


Figure I-15: Stator d'une MSAPFA. a) structure encochée. b) structure lisse

Il est également possible de refroidir le stator par un dispositif à circulation de fluide dans des tubes. Dans ce cas, le système doit être conçu de façon à éviter que le système de tubes ne soit pas parcouru par des courants de circulation ou des courants induits par une variation du champ magnétique lors du fonctionnement de la machine. Les principaux fluides de refroidissement sont : l'eau, l'huile, le fréon, l'azote ou l'hydrogène.

Les disques rotoriques

Le rotor est constitué d'un ou plusieurs disques sur lesquels sont placés des aimants permanents (fig. I-16). Il est généralement formé d'une pièce massive pour les petites et moyennes puissances ou bien avec des tôles feuilletées pour les puissances élevées. La figure 1-16 montre une coupe axiale d'un disque rotorique qui est généralement muni des trous afin d'évacuer au mieux la chaleur et assurer une bonne tenue thermique des aimants.

La réalisation du rotor avec des aimants permanents conduit à deux variantes technologiques selon la disposition des aimants. On distingue ainsi les machines à aimants collés en surface et les machines à aimants enterrés. Ces derniers possèdent une robustesse mécanique élevée qui leur permet de travailler à des vitesses de rotation importantes. Pour les machines à aimants montés en surface, les aimants peuvent être collés en surface sous réserves d'utiliser les colles adaptées, et d'un procédé de collage parfaitement maîtrisée. Chaque pôle magnétique peut être constitué d'un ou plusieurs aimants juxtaposés. La mise en place des aimants est délicate, voire dangereuse, car les efforts d'attraction entre les aimants et les parties ferromagnétiques d'une part, et de répulsion entre aimants d'un même pôle d'autre part, sont très importants. Pour cette raison, le processus de collage doit être robotisé de façon à éviter tout accident corporel, et doit être effectué dans des enceintes propres et sécurisées.

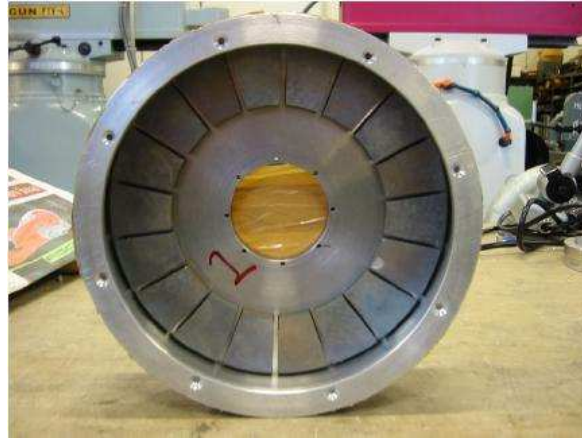


Figure I-16: Coupe axiale d'un disque rotorique

Après collage, notamment si les aimants sont du type NdFeB, une protection par peinture de l'ensemble du rotor doit être effectuée de façon à éviter toute corrosion, en particulier des aimants. D'une façon générale, les aimants collés en surface d'une machines à flux axial ont une aimantation axiale. D'autres types d'aimantation existent évidemment, on peut citer par exemple l'aimantation Halbach qui assure une f.é.m sinusoïdale et permet d'atténuer considérablement le couple de détente [Zhu 2002], [Zhu 2004], [Moo 2004].

D'autre part, l'induction dans l'entrefer crée une force axiale qui tend à ramener le rotor au contact du stator, cette force est importante et en première approximation proportionnelle au carrée de la l'induction dans l'entrefer et à la surface du disque rotorique. Si le rotor est constitué d'un disque dont chacune des deux faces est en vis-à-vis du disque statorique, les forces d'attraction se compensent. Toutefois, en fonction des irrégularités de l'entrefer, la différence entre les niveaux d'induction sur chacune des deux faces crée une force résultante non nulle. Cette force peut évoluer en fonction du point de fonctionnement ou de l'échauffement et des déformations de la structure. Donc, les disques rotoriques doivent être conçus de façon à résister aux efforts d'attraction magnétique avec le stator sans déformation sensible (la déflexion d'un disque ne devrait pas dépasser 10% l'épaisseur de l'entrefer). De même, ils ne doivent pas subir de déformation en fonctionnement sous l'effet de la température. Pour cette raison, ils sont munis de renforts pour les rigidifier. En revanche, l'effet de la température sur le rotor ne nécessite pas un dispositif de refroidissement car celui-ci ne comporte pas de bobinage. Les seuls pertes qui y siègent sont les pertes fer dont la contribution est négligeable par rapport aux pertes totales.

Les paliers et la carcasse

Les paliers, en plus du guidage en rotation du ou des disques rotoriques doivent supporter les efforts d'attraction magnétique et maintenir la valeur de l'entrefer mécanique relativement faible pour les machines à aimants.

Pour cette raison, ils doivent être sans jeu et il est préférable d'utiliser des paliers à roulement. Le montage devant être très rigide, il est nécessaire pour les machines à fort couple et de grandes dimensions d'utiliser des montages avec paliers à billes à contact oblique ou à rouleaux. Si le rayon interne est suffisamment important, il est également possible d'utiliser un monoroulement à trois rangées de rouleaux.

La lubrification des paliers doit être particulièrement performante pour éviter toute usure. En effet, une usure crée un jeu entraînant des variations de la valeur de l'entrefer, des vibrations et une augmentation des efforts d'attraction magnétiques.

D'autre part, si la machine est composée d'un stator et deux rotors de part et d'autre, les deux rotors peuvent être liés mécaniquement soit par le rayon interne, soit par le rayon externe.



Figure I-17: Machine à flux axial assemblée

Si les deux rotors sont liés par le rayon externe, le stator est alors fixé sur une jante placée sur le rayon interne. Il n'y a pas donc de carcasse à proprement parler.

4.2 Matériaux de fabrication

Il est connu que les performances des machines électriques sont liées directement à la qualité des matériaux ferromagnétiques utilisés. Ainsi pour concevoir un dispositif performant, et plus particulièrement lorsqu'on doit utiliser des nouveaux matériaux, il est impératif dans un premier temps de mener une réflexion sur la structure la mieux adaptées pour profiter des avantages et limiter les effets des inconvénients des matériaux utilisés.

Ce paragraphe a pour but de présenter les caractéristiques des principaux matériaux magnétiques utilisés pour la fabrication des machines tournantes qui se classent généralement en deux grandes familles :

- Les matériaux magnétiques doux qui ne présentent des propriétés magnétiques qu'en présence d'une excitation extérieure.
- Les matériaux magnétiques durs qui sont les aimants permanents.

Les matériaux magnétiques doux pour usage électrotechnique se caractérisent par quatre constantes, qui sont la polarisation magnétique, la résistivité électrique, la constante d'anisotropie et la constante de magnétostriction. Le matériau idéal serait celui qui possède une polarisation magnétique à saturation, une résistivité électrique très élevée et simultanément des constantes d'anisotropie et de magnétostriction voisines de zéro.

Les aimants permanents se caractérisent par leurs cycles d'hystérésis et plus particulièrement par le deuxième quadrant de ce cycle appelé courbe de désaimantation. L'aimant idéal est celui qui présente une bonne tenue thermique, une bonne résistance à la corrosion, et simultanément une induction rémanente et un champ coercitif élevé.

Afin de tendre vers le matériau idéal, nous allons examiner les différentes possibilités que proposent les constructeurs des machines tournantes, et qui permettent de couvrir la gamme des machines de faibles puissances jusqu'aux très grosses machines.

A. Principaux matériaux magnétiques doux

Pour assurer la canalisation du flux magnétique dans les machines électriques, les composantes laminées à base de fer constituent de toute évidence la solution la plus utilisée. De plus, facilement disponibles sous formes de tôles laminées, les composés qui en découlent se prêtent au feuilletage du circuit magnétique afin de limiter les pertes par courant de Foucault engendrées sous champ variable.

Par opposition aux matériaux durs, les matériaux doux bénéficient d'une polarisation magnétique à saturation relativement élevée sous un champ d'excitation relativement faible. Parmi les différents matériaux utilisés dans l'industrie des machines tournantes, on distinguera : les alliages fer-silicium, les alliages fer-cobalt et les matériaux composites. Chaque matériau possède ses propres caractéristiques magnétiques, technologiques et ses propres pertes massiques.

A.1) Les alliages fer-cobalt

Les alliages fer-cobalt (FeCo) présentent de nombreuses caractéristiques intéressantes, toutefois leur développement reste confiné dans des applications spécifiques. La rareté et le prix du Cobalt (75€/kg contre 3€/kg pour le FeSi) en sont les principaux responsables. Ils sont surtout utilisés dans le domaine aéronautique, spatial et militaire.

Possédant une perméabilité relative de 20000 et une température de Curie assez élevée ($T_c =$

950°C), ils sont actuellement les alliages à aimantation à saturation la plus élevée des alliages magnétiques (2.4T). Entre des tôles Fer-Cobalt et Fer-Silicium, le gain sur l'induction est d'environ 40% [Zie 2008]. L'emploi des tôles FeCo permet aussi un gain de 15% à 20% sur la masse des parties actives, ce qui n'est pas négligeable pour certaines applications.

A.2) Les alliages fer-silicium

Deux grandes familles des alliages fer-silicium sont utilisées pour la réalisation des circuits magnétiques des équipements électriques dont le principe de construction est basé sur l'action du champ magnétique. On distingue les tôles magnétiques à grains non orientés qui sont surtout utilisées dans les machines tournantes et les tôles à grains orientés qui servent exclusivement à la construction des transformateurs.

La résistivité électrique est l'un des principales caractéristiques de ces alliages, la variation de ce paramètre a des conséquences importantes au niveau des pertes dans le matériau. Elle augmente considérablement avec la présence de silicium. Malheureusement, l'addition du silicium étant limitée au maximum à 3,4% en raison des difficultés du laminage à froid des aciers. D'autre part, la conductivité thermique est un paramètre assez important dans la conception des machines électriques car elle conditionne la température du cuivre. Malheureusement, l'addition du silicium se traduit par une diminution de la conductivité thermique.

Pour les machines de puissance inférieure à 75 kW, les matériaux magnétiques les plus employés sont du type : M-330-50-A5, M-350-50-A5, M-400-50-A5 et le M-700-50-A5 [Gie2004]. La courbe typique $B(H)$ pour les tôles du type M-400-50-A5 est donnée par la figure I-18.

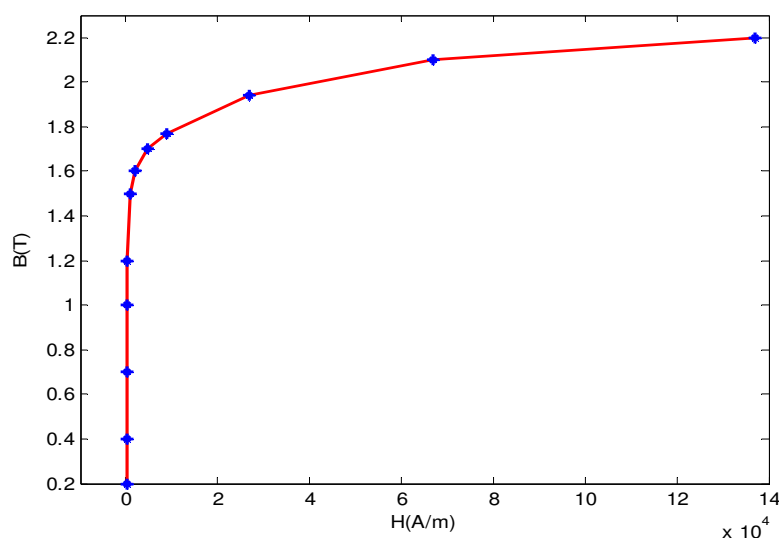


Figure I-18: Courbe d'aimantation d'un matériau M-400-50-A5

Les principales familles des matériaux magnétiques doux, leurs caractéristiques, leur comportement macroscopique et propriétés magnétiques sont résumés dans [Leb 2006].

A.3) Les matériaux composites

Bien que ces matériaux présentent des perméabilités moins élevées que les matériaux ferromagnétiques leurs propriétés diélectriques favorisent les structures à circulation tridimensionnelle du flux magnétiques. Ils offrent des caractéristiques thermiques et mécaniques non négligeables et des avantages économiques tels que :

- Un coût de fabrication réduit.
- Un recyclage possible.
- Des pertes massiques minimales à hautes fréquences.

En effet, les matériaux composites issus de la métallurgie de la poudre de fer sont des matériaux diélectro-magnétique. L'augmentation de la résistivité est due à l'isolation des particules de fer par la résine. Suivant les dimensions, il est possible de réaliser à moindre coût des culasses avec des formes complexes en une seule opération de pressage. Les matériaux composites sont isotropes. Ils présentent une perméabilité relativement faible par rapport aux matériaux classiques (300 à 500). La faible perméabilité de ces matériaux en comparaison avec celle des tôles Fe-Si a un effet négligeable sur les performances de la machine. Les matériaux composites se distinguent des matériaux laminés classiques au niveau des pertes magnétiques. A 50Hz ou 60Hz, les pertes magnétiques sont supérieures à celles des matériaux classiques mais à fréquence élevées de quelques centaines d'Hertz, la réduction des courants de Foucault rend leur utilisation particulièrement intéressante par rapport à celle des matériaux laminés [Via 2001]. Les matériaux composites sont utilisés avec succès pour les applications nécessitant des entrefers larges ou utilisant des excitations à aimants permanents. Un exemple d'utilisation de la poudre de fer dans la fabrication des machines à flux axial est montré dans la figure I-19. Les principaux fabricants des matériaux composites : *TSC international* (U.S.A) et *Höganäs* (Suède).

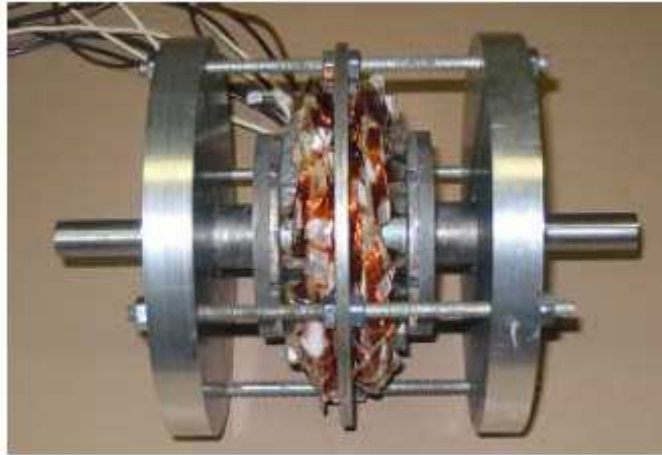


Figure I-19: Machine à flux axial fabriquée à partir de poudre de fer [Che 2005]

B. Les matériaux durs (les aimants permanents)

Les aimants permanents sont utilisés de plus en plus fréquemment dans les machines tournantes. Ils ont été l'objet dans les années récentes de progrès importants, liés à ceux des techniques des matériaux. Les aimants sont principalement caractérisés par leurs cycles d'hystérésis et plus particulièrement par le deuxième quadrant de ce cycle appelé courbe de désaimantation. Cette courbe nous renseigne sur :

- L'induction rémanente B_r , c'est une indication de la puissance potentielle de l'aimant.
- Le champ coercitif de l'induction H_{cB} qui est le champ démagnétisant annulant l'induction, plus sa valeur est élevée et plus l'aimant est stable.
- Le produit d'énergie volumique $(BH)_{max}$ qui définit la valeur énergétique de l'aimant par unité de volume.

Actuellement, il existe trois familles de matériaux utilisés dans l'industrie des machines tournantes. Cités selon l'ordre de l'apparition, on a : les ferrites durs, les samarium-cobalt (SmCo) et les néodyme-fer-bore (NdFeB).

Les ferrites et les NdFeB sont les deux familles d'aimants qui présentent le meilleur rapport performances magnétiques/coût. Pour une application donnée, le choix entre aimant ferrite et aimant NdFeB dépend de la priorité entre coût et performance.

Les ferrites sont souvent utilisées en grande série, dans les très nombreuses applications où la maîtrise des coûts reste l'élément incontournable par rapport aux performances magnétiques. Les NdFeB occupent les secteurs d'application où l'utilisation d'aimants aux performances magnétiques élevées est irremplaçable, notamment lorsqu'une forte miniaturisation est

indispensable. Dans les secteurs d'activité tel que l'aéronautique, l'informatique et les machines électriques, le volume et le poids génèrent des coûts qu'il faut absolument minimiser, nécessitant de plus en plus l'emploi de ce type d'aimants.

Les machines poussées sur le plan thermique utilisent des aimants terres rares Samarium Cobalt combinant une induction élevée, une forte résistance à la désaimantation et excellente stabilité en température, mais les NdFeB en dépit d'une stabilité thermique plus faible, possèdent des caractéristiques magnétiques supérieures et gagnent le terrain dans les applications industrielles pour des raisons économiques. Une comparaison des performances magnétiques entre les différents types des aimants est donnée dans la figure I-21.

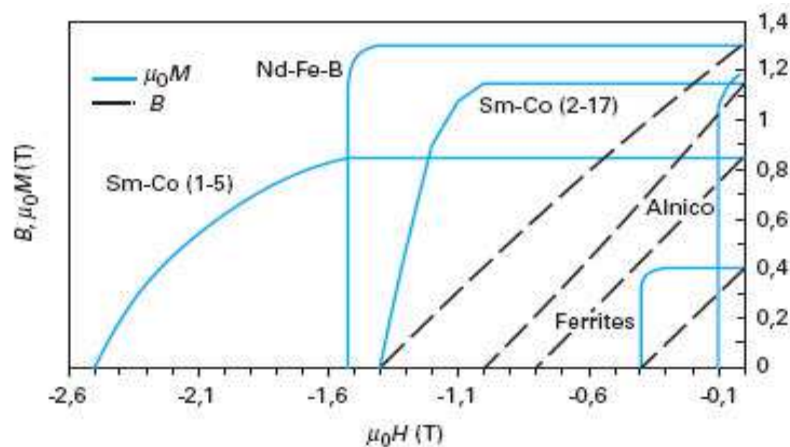


Figure I-21: Courbes de désaimantation de différents types d'aimants

B.1) Les Ferrites durs

Les ferrites sont fabriqués à partir d'oxyde de fer associé à du manganèse, du nickel ou du zinc, assemblés par frittage (agglomération à chaud). Ce sont des céramiques, c'est-à-dire des produits très durs mais fragiles et peu résistants aux efforts de traction. Les ferrites ne sont pas sujets à l'oxydation. Ils offrent une excellente résistance aux composés hydrocarbonés mais sont, par contre, fortement attaqués par les acides concentrés. A la condition de rester au-dessus du coude de la caractéristique $B=f(H)$, les pertes d'induction dues aux champs magnétiques extérieurs sont faibles. Ils sont peu sensibles à la présence de masse ferromagnétique voisine. Ils présentent cependant une aimantation rémanente et une énergie spécifique faibles, respectivement 0,2 à 0,4T et 8 à 35kJ/m³. Leur coefficient de température de polarisation réversible est assez élevé (-0,25%/°C). Mais leur faible coût en fait les aimants les plus compétitifs et les plus utilisés. Leur particularité importante est que leur champ coercitif a un coefficient de température positif : c'est à froid que le risque de désaimantation est maximal.

B.2) Les Samarium – Cobalt

Première génération d'aimant à base de terres rares, ce sont également des céramiques d'alliage métallique, pressées dans des moules et cuits au four. Durs et fragiles, ils ont tendance à se briser en de multiples morceaux sous l'effet d'un choc. Leur polarisation rémanente reste limitée vers 1T maximum à température ambiante mais leur champ coercitif intrinsèque est tout à fait exceptionnel, jusqu'à 2000kA/m. Ce type d'aimant supporte donc de travailler en répulsion sans pertes d'aimantation. Ils présentent une bonne stabilité thermique jusqu'à 350°C. Leur coefficient de température de polarisation réversible est d'environ - 0,03%/°C. Ils sont peu sensibles à la présence de masse ferromagnétique voisine et à la corrosion. Mais il reste relativement cher à cause de la faible disponibilité du samarium (2% des terres rares) et du coût du cobalt.

B.3) Les aimants néodyme-fer-bore (NdFeB)

Les aimants néodyme-fer-bore (NdFeB) dernier né du marché sont l

es aimants les plus utilisés dans l'industrie des machines tournantes. Ils sont actuellement les aimants les plus puissants à température ambiante avec des valeurs d'induction à très hauts niveaux de magnétisation. Ils présentent une résistance extrême à la démagnétisation et sont moins fragile que le samarium cobalt, matériau de base d'éléments de terres rares largement utilisé dans les années 80. D'autre part, les NdFeB ont une température de Curie relativement faible et une résistance à l'oxydation et à la corrosion médiocre en l'absence d'une couche protectrice. Ils peuvent être utilisés jusqu'à 150°C voire 200°C dans des atmosphères peu corrosive. Leur coût est plus faible que celui des SmCo, principalement en raison de deux facteurs : ils ne comportent pas de Cobalt, et le Néodyme est plus abondant que le samarium et donc moins cher. La figure I-22 donne les courbes de désaimantation des NdFeB en fonction de la température.

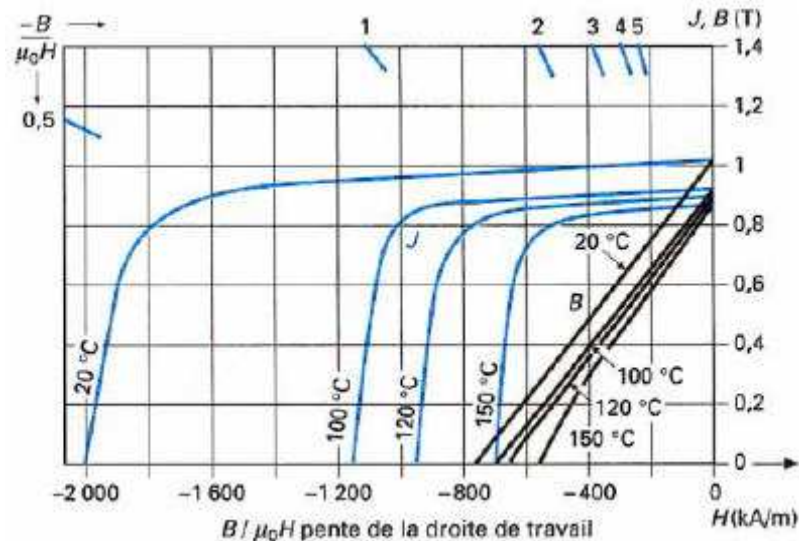


Figure I-22 : Courbes typiques de désaimantation d'aimants NdFeB frittés en fonction de la température

Très sensible à l'environnement, en particulier à l'humidité de l'air, les NdFeB ne peuvent être utilisés que protégés, sinon ils présentent des pertes magnétiques irréversibles dans le temps.

4.3 Diverses architectures de machines et comparaison des performances

Les machines à flux axial peuvent être à simple ou double entrefer, à induit avec ou sans encoches, avec rotor à l'intérieur ou rotor à l'extérieur, et encore, avec aimants montés en surface ou encastrés. Le contrôle des machines à flux axial est identique aux machines à flux radial, c'est-à-dire soit alimenté directement en courant alternatif, soit à l'aide de convertisseurs électroniques de puissance, de carte de commande avec ou sans capteur de position. Dans la suite, nous allons présenter les différentes topologies de ces machines qui sont classées en fonction de la disposition et du nombre de rotor par rapport au stator, on a :

- La structure simple entrefer.
- La structure double entrefer – stator interne.
- La structure double entrefer – rotor interne.
- La structure multidisque.

La machine simple entrefer est la machine la plus simple à concevoir (fig. I-23), elle est surtout utilisée pour des petites applications. Mais, une importante force axiale, dépendant du rayon, agit constamment entre le rotor et le stator d'où la nécessité d'un arrangement soigneux des roulements et une épaisseur du disque rotorique importante.

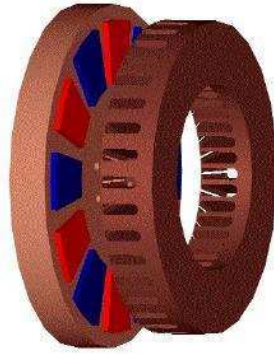


Figure I-23: MSAPFA - Simple entrefer

La structure double entrefer caractérisée par un stator inséré entre deux disques rotoriques est connue dans la littérature sous le nom de “*TORUS*” (fig. I-24). La première machine de ce type à été construite à la fin des années 80 [Spo 1992]. En général, on distingue deux types de machines “*TORUS*”, il y a les machines dites du type (NN) et les machines dites tu type (NS). La différence se situe au niveau du trajet emprunté par le flux créé par les aimants permanents. Les deux structures sont identiques de point de vue géométrique à l’exception de l’épaisseur de la culasse statorique et le mode de bobinage.

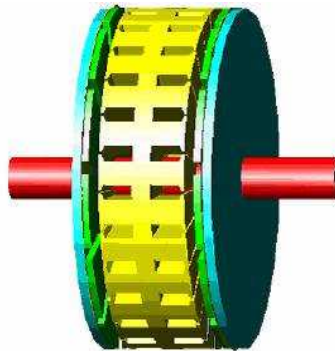


Figure I-24: Machine double entrefer – stator interne

Les études ont montré que les machines du type (NN) présentent de pertes joules moins importantes ainsi qu’un rayon externe inférieur [Hua 2001] mais par contre les pertes fer sont élevées et demandent une longueur axiale plus importante.

La figure I-25 montre une MSAPFA double entrefer – rotor interne. Les aimants permanents peuvent collés à la surface comme ils peuvent être encastrés mais dans les deux cas le stator reste toujours le même. L’épaisseur du disque rotorique pour une structure ayant des aimants encastrés est importante par rapport à une structure avec des aimants permanents collés à la surface d’où la réduction de la puissance massique. Le flux de fuite est important et des problèmes de saturation peuvent surgir au niveau du rayon interne si l’aimantation ainsi que l’épaisseur des aimants restent constants en fonction du rayon actif de la machine car les aimants sont proches l’un de l’autre mais évidemment tout dépend du rayon interne et du

nombre de paire de pôles.

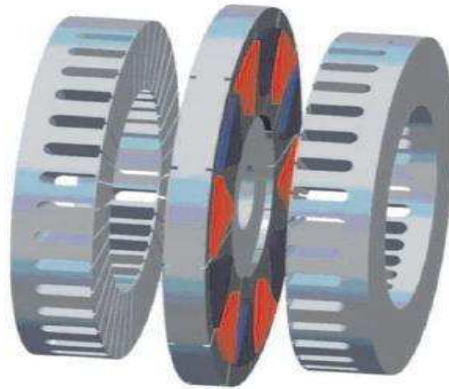


Figure 1-25: MSAPFA double entrefer – rotor interne

Finalemment et pour certaines applications où l'on cherche à augmenter considérablement le couple, des arrangements plus complexes existent. Il consiste à assembler plusieurs machines à flux axial alignées sur le même arbre en formant une machine multidisques. Ce type de machines rencontre beaucoup de problèmes de stabilité mécanique et thermique et il souvent utilisé dans la propulsion marine, les grandes pompes et font l'objet de plusieurs projets de recherche [Bra 2003]. Aydin et al dans [Ayd 2004] présentent un passage en revue des machines à flux axial avec une référence bibliographique assez riche. Les différentes structures, les principes et l'avantage de chaque topologie ont été aussi examinés. Plusieurs études comparatives des machines à flux axial et les machines classiques basées sur différents critères ont été présentées par de nombreux auteurs. Cependant, il existe peu de documents et peu d'informations permettant d'établir une comparaison entre les différentes structures des machines à flux axial. Le document qui semblait le plus intéressant était celui de Sitapati et al [Sit 2001]. Dans leurs travaux, les auteurs ont comparés les performances des quatre différentes structures des machines à flux axial et une machine à flux radial pour une plage de puissance allant de 0.25 jusqu'à 10 kW et pour une vitesse de rotation entre 1000 et 2000 tr/min. La figure I-26 donne le volume des parties actives en fonction de différentes puissances de sorties et pour cinq topologies et géométries différentes.

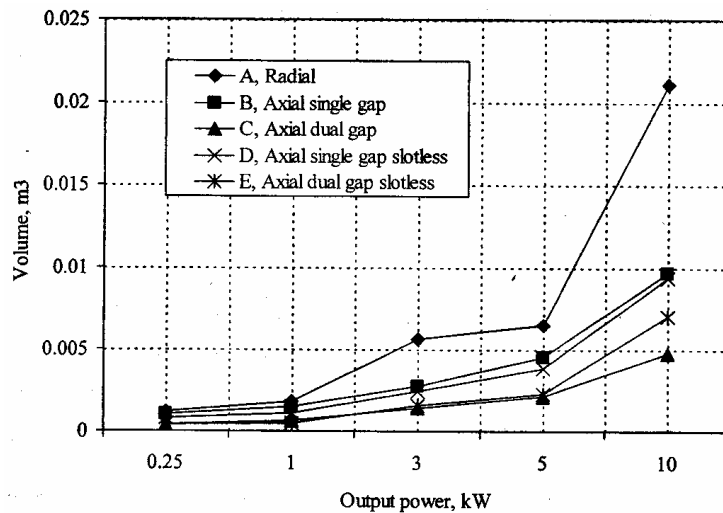


Figure I-26: Volume des parties actives en fonction de la puissance

Cette figure montre que lorsque la puissance augmente, le volume de la machine à flux radial devient important devant celui des différents types de machines à flux axial. Il semble intéressant que la machine à flux axial double entrefer avec encoches (C) permet d'avoir le volume le moins important sur toute la gamme de puissance.

La figure I-27 donne les pertes totales pour les cinq types de machines. Les résultats montrent que la machine à flux axial double entrefer avec ou sans encoches et la machine à flux radial possèdent environ les mêmes pertes. On remarque aussi que la machine à flux axial simple entrefer sans encoches présente les pertes les plus élevées.

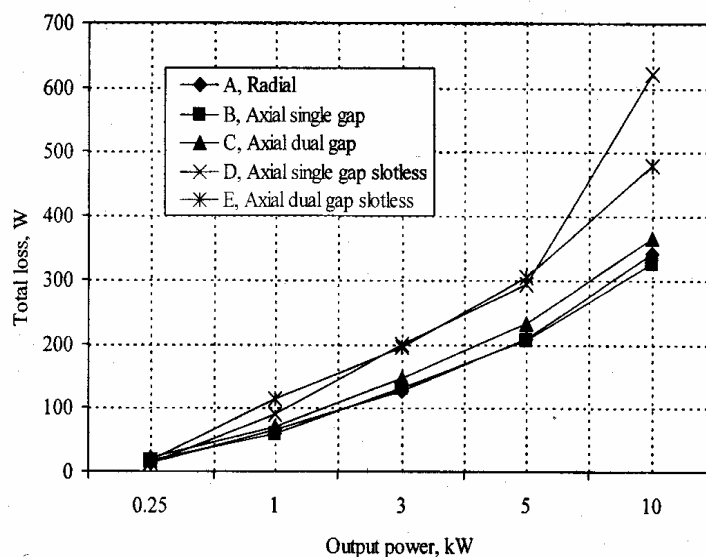


Figure I-27: Pertes totales en fonction de la puissance

Finalement, la figure I-28 donne l'évolution de la puissance volumique en fonction de la puissance. Le volume considéré ici est celui des parties actives. On peut facilement remarquer que la puissance volumique des machines à flux radial est

faible sur toute la gamme de puissance devant celle des machines à flux axial, ce qui justifie l'emploi des machines à flux axial lorsque l'espace disponible est contraignant.

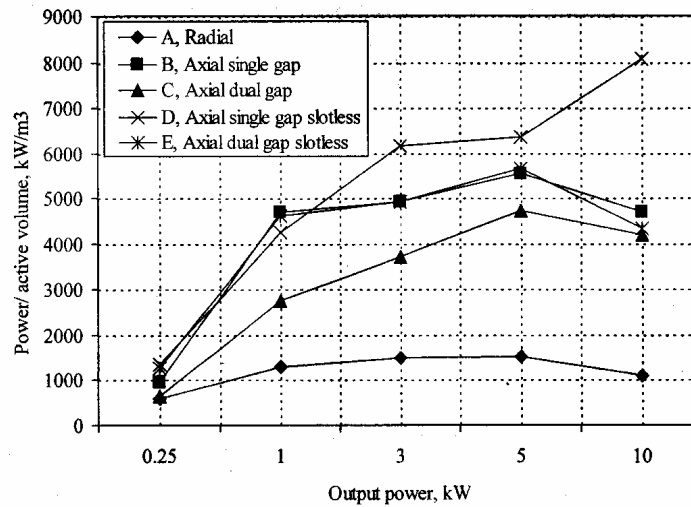


Figure I-28: Evolution de la puissance volumique

En accord avec les résultats, on aboutit à des meilleures caractéristiques avec les machines à flux axial surtout lorsqu'il s'agit du volume ou la puissance volumique. Ce qui explique l'utilisation accrue de ce type de machines dans différents domaines et notamment dans les applications éoliennes.

D'autre part, de nombreux auteurs ont proposé des études comparatives entre les machines à flux radial et les machines à flux axial basées sur d'autres critères comme par exemple le couple massique [Qu 2003], le volume des parties actives [Bro 2002], ou des contraintes thermiques [Cav 2002]. Les résultats de comparaison ont mis en évidence que les MSAPFAs sont attractifs pour des arbres courts avec un nombre de pôles élevé. Elles peuvent fournir un couple volumique important avec un volume inférieur à celui des machines à flux radial. Les machines conventionnelles montrent leur intérêt en terme de couple et de couple volumique dans des dimensions plus communes (arbre plus long) et pour un nombre de pôles plus réduits.

5 Démarche de conception des machines électriques

En général, le processus de conception peut être décomposé en deux étapes élémentaires à savoir le choix de la structure à concevoir ensuite le dimensionnement de la structure choisie.

5.1 Choix de la structure du dispositif

La première étape de la conception consiste à définir la structure choisie de la machine

qui est apte à satisfaire les exigences définies dans le cahier de charges qui comprend généralement les performances à réaliser et les contraintes à respecter [Sab 1985].

Cette étape exige de la créativité ou de l'expérience. En effet, généralement on fait appel à l'expérience ou on agit par similitude avec d'autres applications plus ou moins proches et déjà traitées [Esp 1999]. Le choix définitif du dispositif ne se confirme qu'à la fin de la deuxième étape. Dans le cadre de notre travail, la structure retenue est une machine synchrone à flux axial double entrefer–stator interne équipée par des aimants NdFeB en surface. Cette structure est notamment justifiée par l'élimination de la boîte de vitesse et par sa puissance volumique élevée à vitesse lente.

5.2 Dimensionnement de la structure choisie

Une fois la structure est choisie selon la première étape, il s'agit dans la deuxième étape de déterminer les paramètres géométriques satisfaisant les performances et respectant les contraintes préalablement définies par le cahier de charges [Wur 1996]. Autrement dit, il s'agit de l'opération inverse de la modélisation, où l'on donne les performances d'un système à partir de ses caractéristiques géométriques et physiques. Donc pour dimensionner une machine électrique, il est question de la modéliser puis de développer ou de disposer d'une méthodologie pour réaliser l'inversion du modèle en question. A la fin de cette étape, un choix définitif pourra être réalisé à partir des résultats de dimensionnement des différentes structures. De nombreux auteurs ont montré que *le dimensionnement des machines électriques est équivalent à un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes* [Sle 1992], [Kon 1996]. Evidemment, l'existence d'une solution n'est pas toujours garantie, surtout si le cahier de charges est trop contraignant ou si la structure choisie n'est pas bien adaptée au cahier de charges [Wur 1996]. Dans un cas contraire, plusieurs solutions, voire même une infinité se présentent, ce qui correspond à un cahier de charges réalisable. Dans ce cas, il s'agit de tirer ces solutions et trier la meilleure en se basant sur un ou plusieurs critères choisis arbitrairement ou déduits naturellement du cahier de charges. Les principales étapes de conception des machines électriques sont décrites dans le schéma de la figure I-29.

5.3 Les différents outils de dimensionnement de la structure retenue

Les outils mis en œuvre pour assister le concepteur à dimensionner une structure retenue peuvent être regroupés en trois familles.

- les outils de dimensionnement par une approche procédurale [Wur 1996],[Esp 1999].
- les outils de dimensionnement utilisant des systèmes experts [Sab 1998].

- les outils de dimensionnement à l'aide des algorithmes d'optimisation.

Tous les trois partent d'un modèle mathématique donné mais ils utilisent des approches différentes pour réaliser l'opération inverse de la modélisation. Nous nous intéressons en particulier à la troisième catégorie que nous allons examiner en détail dans le sous paragraphe suivant.

Outils de dimensionnement à l'aide des algorithmes d'optimisation

Le problème d'optimisation des machines électriques est formé généralement d'une fonction objectif à rendre optimale qui peut être mono ou multi-critères et un ensemble des contraintes sur la géométrie ou les performances [Pal 1996]. Ces contraintes peuvent se présenter sous forme d'équations du type égalité ou inégalités, elles peuvent être linéaires ou non-linéaires, implicites ou explicites. La façon de traitement de ces contraintes diffère d'un algorithme à l'autre.

Dans tous les cas, l'algorithme part d'une conception initiale représentant une structure donnée et essaie de l'améliorer itération après itération en modifiant les paramètres du problème pour converger vers la solution optimale. Cette approche convient donc parfaitement au problème d'amélioration d'une structure déjà existante. Pour traiter un problème de dimensionnement, on a besoin donc de [Wur 1996] :

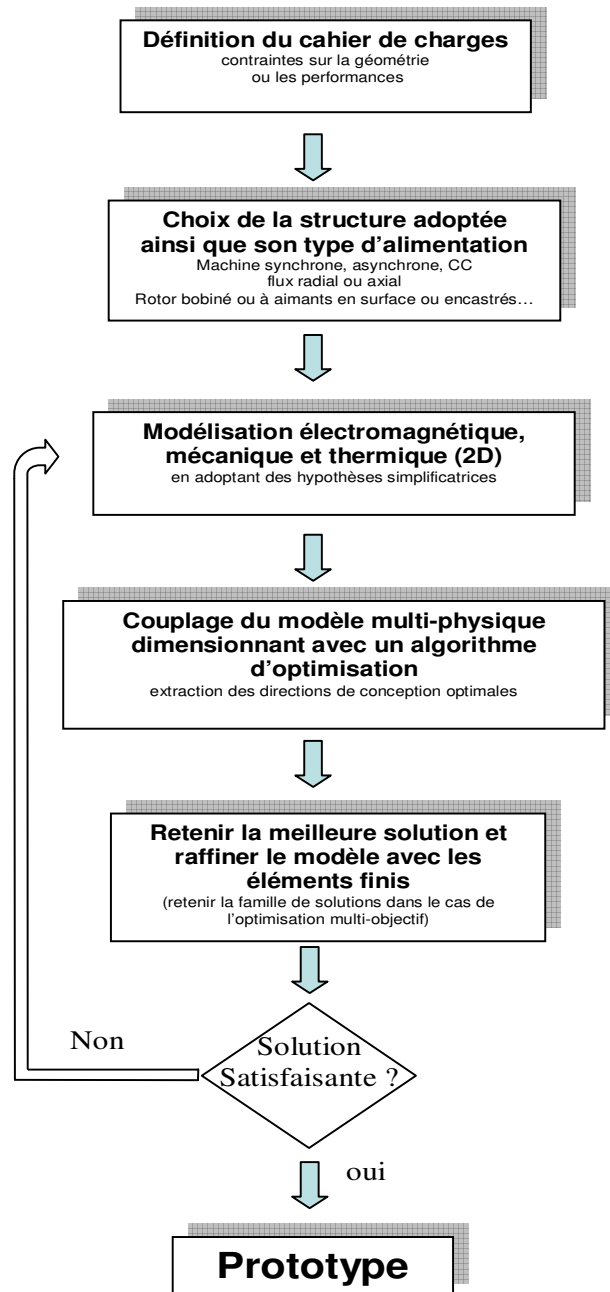


Figure I-29: Procédure de conception d'une machine électrique retenue dans cette étude

- Un outil d'analyse de la structure retenue : c'est un programme qui permet d'évaluer les performances de la machine en fonction des paramètres du système à optimiser. Deux grandes familles d'analyse se présentent basées respectivement sur des modèles analytiques spécifiques à chaque structure ou des modèles numériques à base d'éléments finis permettant une analyse plus fine du problème mais le temps de calcul offert par cette approche représente son talon d'Achille. Notre outil d'analyse est basé sur un modèle analytique du calcul des champs issu du formalisme de Maxwell. Ce modèle est ensuite complété par un modèle thermique et un aspect mécanique pour évaluer les performances de la machine à chaque itération dans le processus

d'optimisation. Ces modèles seront détaillés dans le chapitre suivant.

- Un algorithme d'optimisation : plusieurs techniques d'optimisation existe dans la littérature. Elles sont groupées en deux familles : les algorithmes déterministes et les algorithmes stochastiques. Ces derniers offrent de nombreux avantages par rapport aux algorithmes déterministes. Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de dimensionner les machines à flux axial avec un algorithme évolutionniste stochastique à base des algorithmes génétiques connu sous le nom de SPEA_II. Cet algorithme ainsi que les algorithmes génétiques seront abordés en détail dans le troisième chapitre.

6 Position de notre travail par rapport aux travaux existants

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse s'inscrit dans la thématique de recherche d'une équipe faisant partie du Groupe de Recherche en Electrotechnique et Automatique du Havre (GREAH). Il se positionne dans la continuité des travaux menés par la communauté de chercheurs travaillant avec des modèles analytiques et des outils d'optimisation en vue de concevoir des logiciels de conception automatique conduisant à un dimensionnement préliminaire des machines électriques [Wur 1996], [Esp 1999], [Mes 1999], [Ber 2000], [Ama 2001], [Cal 2001], [Gas 2004], [Alb 2004], [Lak 2005], [Mak 2006], [Loc 2006], [Scu 2006].

L'objectif de ces études était :

- de tester et de comparer l'efficacité des techniques d'optimisation.
- de commenter les résultats obtenus avec les logiciels de conception et de dimensionnement.
- de proposer des prototypes optimaux adaptés à une application spécifique.

Notre travail utilise les résultats de ces études. Cependant, son originalité est qu'il explore deux aspects très rarement abordés :

1. notre modèle analytique, basé sur la résolution des équations de Maxwell, permet de calculer la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer *due à la réaction d'induit en tenant compte de la géométrie réelle des encoches*. Ensuite, en utilisant la théorie des fonctions de bobinages, on peut évaluer exactement les différentes valeurs des inductances magnétisantes et mutuelles.
2. l'outil d'optimisation adopté utilise directement la relation de dominance au sens de Pareto pour déterminer l'efficacité des meilleures solutions. C'est une méthode élitiste qui utilise une archive externe pour stocker les individus non-

dominés au sens de Pareto et effectue la mise à jour de cette archive à la fin de chaque génération. Cependant, les autres approches ont utilisé des méthodes déterministes du type gradient ou la transformation du problème multi-objectif en un problème mono-objectif et ensuite le résoudre avec un algorithme génétique classique.

Il est à noter ici que notre approche n'est pas en mesure de couvrir tous les aspects relatifs à la conception complète de la machine. Il y a plusieurs aspects qu'on ne pouvait pas prendre en compte comme par exemple le flux de fuite des têtes des bobines, la caractéristique non linéaire du circuit magnétique, etc. Ainsi et afin de parfaire la démarche de dimensionnement présenté, une modélisation par éléments finis tridimensionnels confirmant les performances du prototype théorique optimisé est indispensable.

7 Objectif de cette étude

L'objectif de cette thèse est d'offrir un outil de dimensionnement dédié aux machines synchrones à aimants permanents à flux axial. Dans un premier temps, nous allons développer un modèle analytique basé sur la résolution des équations de Maxwell par le biais de la technique de séparation des variables. Ensuite, les performances et les caractéristiques de la machine (f.é.m, inductances, couple de détente, etc.) sont écrites en fonction de la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer. Pour se faire, nous avons commencé par réduire le problème tridimensionnel (3D) en un problème bidimensionnel (2D) à cause de la difficulté à déterminer les conditions aux limites dans la direction radiale. Ce modèle analytique souple et robuste nous permet d'évaluer les performances de la machine avec un temps de simulation très raisonnable et pourrait être intégré dans un processus d'optimisation avec une grande fiabilité. Ce modèle bidimensionnel sera complété par un modèle thermique pour déterminer la température des points de la machine et un aspect mécanique pour contrôler la déflexion des disques rotatifs respectivement.

La deuxième partie du travail consiste à coupler la connaissance contenue dans ces modèles analytiques avec un outil d'optimisation multi-objectif afin de trouver les meilleurs compromis. Les outils d'optimisation permettent cela car ils utilisent la sensibilité des grandeurs objectives et des contraintes par rapport aux paramètres de construction pour converger vers des solutions optimales. Parmi les algorithmes évolutifs multi-objectif les plus populaires, ceux de la famille NSGA de Deb et du SPEA de Zitzler sont susceptibles d'obtenir des bons résultats. L'auteur du SPEA a effectué plusieurs tests [zit 2001] et conclut qu'en général le NSGA-II et le SPEA-II donnent des résultats semblables. Par contre, le SPEA-II

semble donner de meilleurs résultats lorsque le nombre de fonctions objectifs est plus élevé. Cet algorithme sera donc adopté dans le cadre de notre étude pour le dimensionnement des machines à flux axial afin de trouver les meilleures solutions et d'extraire des directions de conception qui sont à priori optimales.

8 Conclusion

Dans ce premier chapitre, une brève description du domaine de l'énergie éolienne a été présentée. Dans ce contexte, quelques notions principales au sujet de la technologie éolienne ont été données comme les méthodes de description du gisement éolien, des exemples d'architectures de systèmes aérogénérateurs, le type des génératrices utilisées, etc. Ensuite, les structures les plus courantes des machines à flux axial ont été présentées et les résultats de quelques comparaisons entre les différentes configurations ont été exposés. Ceci dans le but de situer les machines à flux axial parmi les différentes machines proposées dans l'industrie éolienne. Enfin, dans la dernière partie, nous avons essayé de dégager une définition du processus de conception des machines électriques allant du choix de la structure passant par son dimensionnement et terminant par l'optimisation de ce dimensionnement. Nous avons également passé en revue les principaux outils de dimensionnement de la structure retenue. Nous avons choisi d'étudier la conception des machines à flux axial car, en plus des nombreux avantages par rapport aux machines conventionnelles, la structure annulaire de ce type de machine semble convenir à l'encombrement de la nacelle dans le cas des éoliennes de petite puissance.

Ainsi, le chapitre suivant sera consacré au développement des modèles mathématiques pour la modélisation analytique des machines à aimants permanents à flux axial double entrefer – stator interne afin de construire le modèle dimensionnant.

**CHAPITRE II – MODELISATION DE LA MACHINE A FLUX AXIAL PAR LE
CALCUL ANALYTIQUE DES CHAMPS EN VUE DE L'OPTIMISATION**

SOMMAIRE – Chapitre II

1	NOMENCLATURE.....	59
2	INTRODUCTION	61
3	MODELE MAGNETIQUE SIMPLIFIE.....	62
4	MODELE MAGNETIQUE ISSU DU FORMALISME DE MAXWELL.....	65
4.1	HYPOTHESES ET POINTS DE DEPART	65
4.2	FORMULATION MAGNETOSTATIQUE DU PROBLEME DANS LE REPERE CYLINDRIQUE	66
4.3	REPARTITION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE A VIDE	67
4.3.1	<i>Solution de l'induction dans les différentes régions de la machine.....</i>	<i>69</i>
4.3.2	<i>Conditions de passage entre les régions.....</i>	<i>72</i>
4.3.3	<i>Réduction du temps de calcul du modèle.....</i>	<i>73</i>
4.3.4	<i>Comparaison des résultats analytiques avec la méthode des éléments finis.....</i>	<i>74</i>
4.4	REPARTITION EXACTE DU CHAMP DU A LA REACTION D'INDUIT.....	77
4.4.1	<i>Expression de l'induction dans les différentes régions de la machine</i>	<i>78</i>
4.4.2	<i>Conditions du passage entre les deux régions.....</i>	<i>79</i>
4.4.3	<i>Validation des résultats avec les éléments finis.....</i>	<i>80</i>
5	CALCUL DES GRADEURS GLOBALES A PARTIR DES GRANDEURS LOCALES.....	82
5.1	FONCTION DE DISTRIBUTION D'UNE PHASE STATORIQUE	82
5.2	EXPRESSION DE LA FORCE ELECTROMOTRICE A PARTIR DU FLUX.....	84
5.3	EXPRESSION DES INDUCTANCES MAGNETISANTES ET DES MUTUELLES	87
6	ETUDE ANALYTIQUE DU COUPLE DE DETENTE	87
6.1	INTRODUCTION	87
6.2	METHODE DE LA DERIVATION DE L'ENERGIE	88
6.3	METHODE DU TENSEUR DE MAXWELL	89
6.4	TECHNIQUES DE MINIMISATION DU COUPLE DE DETENTE.....	91
7	EXPRESSION DU COUPLE TOTALE DEVELOPPE PAR LA MACHINE.....	93
8	EQUATIONS ELECTRIQUES DES PHASES STATORIQUES.....	94
9	MODELISATION DES PERTES DANS LA MACHINE	96
9.1	LES PERTES PAR EFFET JOULE	96
9.2	LES PERTES FER	97
10	MODELISATION THERMIQUE DE LA MSAPFA.....	103
10.1	INTRODUCTION	103
10.2	PRESENTATION DE LA METHODE NODALE	103
10.3	ELABORATION DU MODELE THERMIQUE DE LA MACHINE A FLUX AXIAL	105
11	ASPECT MECANIQUE DES MSAPFA	107
12	CONCLUSION.....	110

1 Nomenclature

A	potentiel vecteur magnétique.
$A^{(l)}, A^{(2)}, A^{(3)}$	potentiel vecteur magnétique dans une encoche ' l ', dans l'entrefer et dans la région des aimants respectivement.
$a_0^{(l)}, a_0^{(2)}, a_0^{(3)}$	valeur moyenne de $A^{(l)}, A^{(2)}$ et $A^{(3)}$ respectivement.
φ, z	coordonnée tangentielle et normale dans le repère cylindrique lié au stator.
φ_s	coordonnée tangentielle dans le référentiel statorique.
φ_l	angle de repérage des faces axiales d'une encoche ' l '.
θ	l'abscisse angulaire repérant le référentiel statorique par rapport au référentiel rotorique.
B_φ, B_z	composante tangentielle et normale de l'induction dans un repère cylindrique.
$B_\varphi^{(l)}, B_z^{(l)}$	composante de l'induction dans une encoche ' l '.
$B_\varphi^{(2)}, B_z^{(2)}$	composante de l'induction dans l'entrefer.
$B_\varphi^{(3)}, B_z^{(3)}$	composante de l'induction dans la région aimantée.
$H_\varphi^{(3)}, H_z^{(3)}$	composante du champ magnétique dans la région aimantée.
$C_k^{(2)}, D_k^{(2)}, E_k^{(2)}, F_k^{(2)}$	coefficients de série de Fourier de l'induction dans l'entrefer.
$C_k^{(3)}, D_k^{(3)}, E_k^{(3)}, F_k^{(3)}$	coefficients de série de Fourier de l'induction dans la région des aimants.
E_k^M, F_k^M	coefficients de série de Fourier de l'induction rémanente.
$f(k,n), g(k,n)$	fonction auxiliaire décrivant le couplage entre les coefficients de Fourier de l'induction.
B_r	induction rémanente des aimants permanents.
$J^{(l)}$	densité du courant dans une encoche ' l '.
C_ϕ	coefficient de concentration du flux.
k_{ml}	coefficient de flux de fuite.
k_c	coefficient de Carter.
μ_0	perméabilité du vide.
μ_r	perméabilité relative des aimants.

R_o, R_i	rayon externe et rayon interne de la machine.
r_m	rayon moyen de la machine.
N_s	nombre totales d'encoches.
p	nombre de paire de pôles.
w_{sl}	largeur d'une encoche.
H_m	épaisseur des aimants.
g	épaisseur de l'entrefer mécanique.
H_{sl}	profondeur d'encoche.
F_d	fonction de distribution d'une bobine.
F_{dph}	fonction de distribution d'une phase statorique.
α_s	rapport d'ouverture d'encoche sur le pas dentaire.
α_p	rapport d'ouverture des aimants sur le pas polaire.
k_{son}	coefficient d'ouverture d'encoche.
k_{bn}	coefficient du bobinage.
ε	pas d'encoche.
Z	nombre d'encoches/pôle/phase.
θ_b	ouverture angulaire d'une bobine.
N_{sp}	nombre de spires en série d'une bobine.
$\Gamma(t)$	couple instantané totale développé.
$\Gamma_{cog}(t)$	couple de détente.

2 Introduction

Des nos jours, nous disposons d'une longue expérience sur la modélisation analytique des machines tournantes. En effet, il existe une littérature très riche concernant la modélisation, englobant une expérience de plus d'un siècle de recherche, d'expérimentation et de savoir faire.

Dans la littérature, nous discernons plusieurs approches concernant la modélisation des machines électriques. En choisissant de les présenter par leur degré de complexité croissante, nous avons :

- La modélisation par une approche externe.
- La modélisation par une approche interne (formalisme de Maxwell).
- La modélisation par réseaux de perméance.
- La modélisation par éléments finis.

L'approche externe utilise les relations entre tensions, courants, flux, avec comme paramètres les inductances et les résistances. C'est une vision en termes de circuits. Les modèles obtenus pour un fonctionnement quelconque sont lourds. L'application des transformations de Concordia et de Park permet de les rendre plus commodes. Les modèles simplifiés valables pour les régimes permanents sont très simples d'emploi. Les logiciels de simulation prennent le relais pour les études plus complexes comme les régimes transitoires. Ces modèles sont également ceux qui ont été utilisés pour la réalisation de la commande des machines.

L'approche interne repose sur l'application des équations de Maxwell. Cette méthode est indispensable pour l'explication des phénomènes tels que l'effet de peau dans les conducteurs, les courants de Foucault, ... cette méthode est utilisée plutôt par les concepteurs sera détaillée dans ce chapitre de thèse.

La modélisation par réseaux de perméance, quant à elle, permet de prendre en compte la non-linéarité tout en ayant un coût de calcul inférieur aux modèles basés sur la méthode d'éléments finis. Cela consiste à modéliser le circuit magnétique de la machine par un schéma électrique équivalent. La principale difficulté se situe au niveau de la représentation de l'entrefer de la machine. L'erreur de modélisation est très sensible au modèle utilisé pour la perméance de l'entrefer. Cette méthode constitue un intermédiaire entre la modélisation à partir du formalisme de Maxwell et la modélisation par éléments finis. Elle est inadéquate pour une optique de contrôle-commande mais elle est très intéressante pour tester la robustesse des algorithmes.

Finalement, la modélisation par éléments finis est la méthode la plus précise. Hélas, le temps de calcul offert par cette approche est rédhibitoire. Néanmoins, lors d'un dimensionnement ou

lors d'une estimation de paramètres de la machine, sa précision justifie son utilisation. Des logiciels tels que Flux-3D et Maxwell-3D permettent la modélisation par éléments finis des dispositifs électromagnétiques. Ce type d'approche est également utilisé lors d'un dimensionnement d'une machine électrique, ou bien pour l'ajustement des paramètres d'un modèle par réseaux de perméance.

On se limite dans ce chapitre à la présentation d'un modèle analytique issu du formalisme de Maxwell d'une machine à flux axial double entrefer – stator interne qu'on a pris comme exemple d'application dans ce travail. Ce modèle analytique présente un bon compromis en termes de complexité et précision de calcul. Son temps de calcul est très raisonnable et il est bien adapté pour les processus de dimensionnement des machines tournantes. Ce modèle analytique sera suivi par un modèle thermique pour prédire au mieux le comportement thermique de la machine et par un calcul mécanique basé sur le modèle de Young et permettant de limiter la déflexion maximale des disques par leur choix de leur épaisseur.

3 Modèle magnétique simplifié [Azo 2007]

La structure de la MSAPFA qui fait l'objet de cette étude est composée d'un disque statorique inséré entre deux disques rotoriques portant des aimants NdFeB collés en surface. Le disque statorique contient des encoches droites et constitués d'un empilage de tôles magnétiques enroulées toroïdalement. Les disques rotoriques sont massifs et toriques.

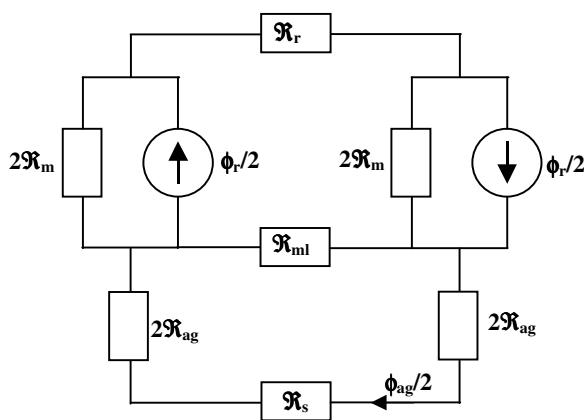


Figure II-1: Modèle du circuit magnétique du flux des aimants à vide

La figure II-1 présente une modélisation du chemin parcouru par le flux magnétique des aimants qui sont représentés par une source de flux ϕ_r en parallèle avec une réluctance équivalente \mathcal{R}_m . Les fers statoriques et rotoriques sont représentés respectivement par les réluctances \mathcal{R}_s et \mathcal{R}_r . ϕ_{ag} représente le flux des aimants traversant l'entrefer. \mathcal{R}_{ml} représente la

réductance du flux de fuite de la zone inter-polaire. L'entrefer est modélisé par la réductance \mathfrak{R}_{ag} qui tient en compte l'effet des encoches.

En tenant compte de la symétrie de la machine, nous pouvons se contenter d'étudier une paire de pôles appartenant à l'un des deux étages constituant la machine. Dans ce contexte, l'induction dans l'entrefer s'écrit en fonction de l'induction rémanente comme suit :

$$B_{ag} = \frac{C_\phi}{1 + \mu_r k_c k_{ml} / P_c} B_r \quad (\text{II.1})$$

D'autre part, pour calculer les inductances de phase, les aimants doivent être supprimés tout en gardant la même perméabilité de l'espace qu'ils occupent. Ensuite, il faut alimenter l'une des phases et calculer le flux à travers cette phase en fonction de son courant. La figure II-2 illustre le réseau de réductances représentant le chemin emprunté par le flux créé par une phase statorique.

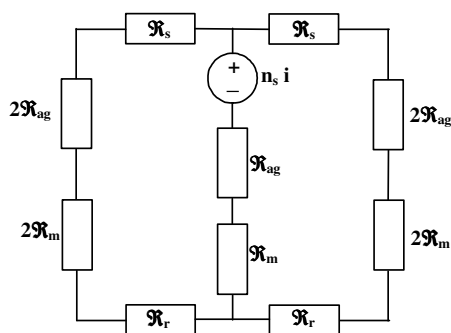


Figure II-2: Réseau de réductance représentant le parcours du flux créé par une phase

A partir de cette figure, et après simplification, l'inductance magnétisante d'une bobine statorique est donnée par :

$$L_{bob} = \frac{n_s^2}{2(\mathfrak{R}_{ag} + \mathfrak{R}_m)} = \frac{n_s^2 \mu_0 \mu_r (R_o - R_i) \tau_p}{2(H_m + \mu_r k_c g)} \quad (\text{II.2})$$

En plus de l'inductance magnétisante, l'inductance propre d'une bobine a d'autres composantes : l'inductance de fuite d'encoche et l'inductance de fuite des têtes des bobines. Ces deux dernières composantes de l'inductance propre sont difficiles à estimer. Plusieurs expressions ont été proposées pour les estimer [Fog 1999], [Han 2003], [Gie 2004].

$$L_{TetBob} = \frac{\mu_0 n_s^2 (h_{sy} + H_{sl} / 2)}{4} \ln \left(\frac{(h_{sy} + H_{sl} / 2)^2 \pi}{H_{sl} w_{sl}} \right) \quad (\text{II.3})$$

$$L_{FuitEncoch} = \frac{n_s^2}{3} \frac{\mu_0 (R_o - R_i) H_{sl}}{w_{sl}} \quad (\text{II.4})$$

L'inductance propre d'une bobine est obtenue en additionnant ses différentes composantes.

$$L_{propre} = L_{bob} + L_{FuitEncoch} + L_{TetBob} \quad (II.5)$$

L'inductance propre par phase est obtenue en additionnant les inductances propres de toutes les bobines constituant cette phase. Dans le cas d'un enroulement triphasé, les deux tiers du flux créé par le courant d'une phase '*i*' traversant la phase '*j*' et '*k*' dans un sens tandis que le tiers restant les traverse dans le sens opposé. Ainsi, nous pouvons déduire que les flux mutuels sont égaux aux deux tiers du propre. Ainsi, nous pouvons écrire :

$$M_{ij} = \frac{L_{propre,i}}{3} \quad (II.6)$$

Couple électromagnétique et f.é.m

A partir de l'équation de Laplace qui donne l'expression de la force s'exerçant sur un conducteur idéal parcouru par un courant I placé dans un champ d'induction magnétique B_{ag} (Fig. II-3), nous pouvons écrire la force et le couple agissant sur ce conducteur comme suit :

$$dF = I dr \times B_{ag} \quad (II.7)$$

$$dT = r \times dF \quad (II.8)$$

Pour passer à l'écriture scalaire des deux équations précédentes, nous supposons que les aimants créent dans l'entrefer un champ magnétique rectangulaire. Nous supposons ainsi que tous les conducteurs sont parcourus par un courant constant dans la direction radiale et de valeur efficace i . En tenant en compte que les deux surfaces actives du disque statoriques contribuent à la production du couple, l'expression de ce dernier devient :

$$T_e = 2p Z k_b B_{ag} n_s i (R_o^2 - R_i^2) \quad (II.9)$$

Dans le cas d'une génératrice débitant sur une charge à travers un pont à diodes, le couple total est développé à chaque instant par deux phases seulement. Il est égal à deux fois celui exprimé par l'équation (II.9).

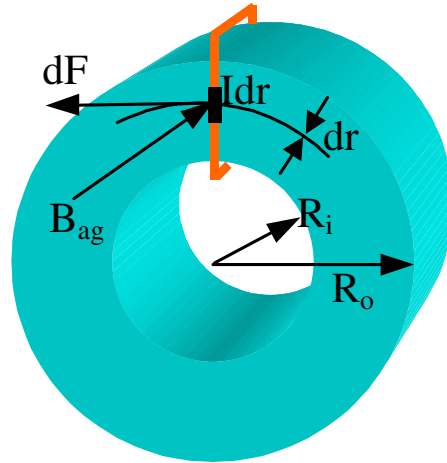


Figure II-3: Force d'un conducteur parcouru par un courant I et placé dans un champ B_{ag}

D'autre part, la f.é.m à vide créée par les aimants permanents est directement proportionnelle à la valeur du couple produit par la machine et elle peut être exprimé par comme suit :

$$E = \frac{T_e \Omega}{i} = 2p Z k_b B_{ag} n_s (R_o^2 - R_i^2) \Omega = 2p Z k_b B_{ag} n_s \underbrace{\frac{S}{\pi}}_{k_f} \Omega \quad (\text{II.10})$$

Où k_f représente le coefficient du flux. D'après cette relation, on voit clairement que la f.é.m est proportionnelle au nombre de pôles, au type de bobinage, à la vitesse de rotation et à l'induction moyenne et la surface dans l'entrefer.

4 Modèle magnétique issu du formalisme de Maxwell

4.1 Hypothèses et points de départ

Afin d'obtenir des expressions fonctionnelles pour le champ magnétique, il est nécessaire d'adopter quelques hypothèses simplificatrices et de choisir des points de départ. Dans le cadre de cette étude, nous considérons les hypothèses de calcul suivantes :

- ✓ L'effet de bord est négligeable.
- ✓ Le stator et le rotor de la machine ne présentent pas d'inclinaison.
- ✓ La perméabilité relative du circuit magnétique est infinie. Ceci implique que :
 - les phénomènes de saturation et d'hystérésis sont absents.
 - Le champ total dans l'entrefer est la superposition du champ produit par les aimants et celui produit par les courants statoriques.
- ✓ La résistivité des aimants permanents est infinie et leur perméabilité relative vaut celle

de l'air. Bien qu'il soit possible d'introduire la perméabilité relative réelle, cette supposition est raisonnable pour les aimants modernes de type terre rare (NdFeB) qui présentent une perméabilité relative très proche de l'unité.

- ✓ L'absence de densité de charge électrostatique.
- ✓ L'aimantation \vec{M} est strictement axiale et ne dépend que de φ_r .
- ✓ L'induction est nulle sur les surfaces latérales et sur la base extérieure du rotor.

4.2 Formulation magnétostatique du problème dans le repère cylindrique

Les phénomènes électromagnétiques en jeu dans une machine électrique peuvent être modélisés en utilisant les équations de Maxwell. Pour restreindre le nombre de vecteurs inconnus et simplifier la résolution numérique sur l'ordinateur, on présente une formulation de ces équations basée sur le potentiel vecteur magnétique et les équations simplifiées par l'utilisation de systèmes de coordonnées cylindriques bidimensionnelles.

En Electrotechnique, les fréquences de fonctionnement sont relativement basses. Il est donc possible de négliger le terme associé à la densité de courant de déplacement $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0\right)$ et la première forme différentielle pour les champs quasi-statiques est l'équation de Maxwell – Ampère donnée par:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.11})$$

La deuxième forme est l'équation de conservation du flux, elle se traduit par:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Avec la relation complémentaire permettant de caractériser les différents milieux étudiés:

$$\vec{B} = \mu_r (\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{II.13})$$

Ces trois équations caractérisent complètement le champ magnétique et forment la base de la dérivation de l'équation aux dérivées partielles (EDP) qui régit le champ dans l'entrefer et la région des aimants. En insérant l'équation (II.3) dans (II.1), on obtient :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu (\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \quad (\text{II.14})$$

Il est possible de combiner les équations (II.12) et (II.14) pour obtenir une équation aux dérivées partielles. Cependant, il devient plus simple si on introduit la notion de potentiel vecteur magnétique \vec{A} défini par :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{II.15})$$

On note que le potentiel vecteur n'est pas unique et son rotationnel ne permet pas de le déterminer complètement. Une infinité de solutions se présentent et elles diffèrent les unes des autres d'un gradient près. La jauge de Coulomb est souvent utilisée pour garantir l'unicité de

la solution :

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{II.16})$$

En combinant les équations (II.14) et (II.15), on obtient l'équation de Poisson qui régit le potentiel vecteur magnétique \vec{A} . Pour les machines à aimants en surface, on a :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = \mu (\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \quad (\text{II.17})$$

En développant le deuxième membre de cette équation et supposant que l'aimantation ne dépend que de la coordonnée tangentielle, l'équation (II.17) sous la forme finale suivante :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \left[\left(J_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + J_\varphi \vec{e}_\varphi + \left(J_z - \frac{1}{r} \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \right] \quad (\text{II.18})$$

Dans le cas des machines à flux axial, l'équation (II.18) peut être écrite sous la forme scalaire suivante :

$$\frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 A_r(\varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_r(\varphi, z)}{\partial z^2} = -\mu \left(J_r + \frac{1}{r_m^2} \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{II.19})$$

où r_m est le rayon moyen de la machine. φ et z représentent respectivement la deuxième et la troisième coordonnée dans un système de coordonnées cylindriques dont l'axe Oz est confondu avec l'axe de la machine.

D'autre part, les différents composantes de l'induction sont liées au potentiel vecteur par la relation suivante:

$$\vec{B} = \underbrace{\frac{\partial A_r(\varphi, z)}{\partial z}}_{B_\varphi} \vec{e}_\varphi - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial A_r(\varphi, z)}{\partial \varphi}}_{B_z} \vec{e}_z \quad (\text{II.20})$$

4.3 Répartition du champ électromagnétique à vide

La solution analytique exacte de la répartition du champ électromagnétique à vide est nécessaire pour le calcul des forces et par conséquent pour la prédiction du bruit acoustique et les vibrations, aussi bien pour la prédiction de la f.é.m, la caractéristique couple-vitesse ainsi que le couple de détente.

Au début, nous avons essayé de résoudre le problème dans le cas général, i.e. en 3D et dans toutes les régions de la machine. Cependant les difficultés rencontrées et la lourdeur du système nous a amené à considérer une structure 2D en se basant sur un ensemble des hypothèses simplificatrices sur la structure de la machine et ses propriétés physiques. Le passage d'une structure 3D à une structure 2D est montré dans la figure II-4.

D'autre part et d'un point de vue temps de calcul, la détermination de la distribution de l'induction en 2D est préférable à une analyse tridimensionnelle complète et est entièrement adéquate pour l'évaluation des performances de la machine surtout lorsqu'il s'agit de coupler un outil d'analyse avec un algorithme d'optimisation.

De nombreux auteurs ont proposés des modèles analytiques des machines synchrones à

aimants en surface basé sur le formalisme de Maxwell pour calculer la distribution de l'induction à vide [Zhi 1998], [Hew 2005], [Zhu 2002], [Kim 1998], [Abd 2006]. Cette approche est intéressante car elle nous permet de calculer les différentes composantes de l'induction dans l'entrefer et par conséquent elle est bien adaptée pour évaluer le couple de détente et la force d'attraction avec une bonne précision.

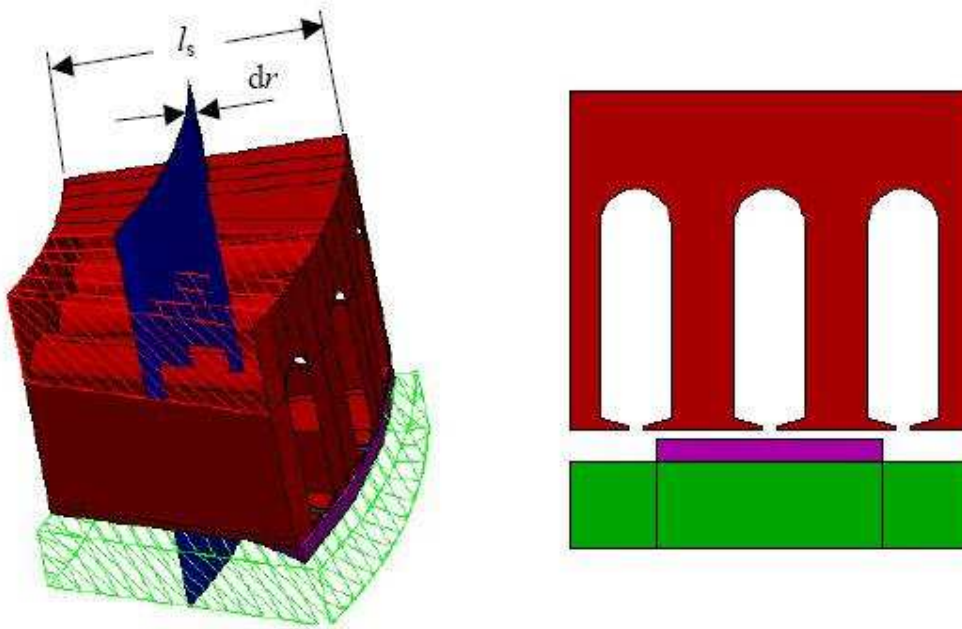


Figure II-4: Méthode de transformation de la géométrie 3D en 2D au niveau du rayon moyen

Pour résoudre le problème, l'équation (II.19) doit être résolue dans trois différentes régions de la machine, à savoir : la région des encoches ($-H_{sl} < z < 0$), l'entrefer ($0 < z < g$) et la région des aimants permanents ($g < z < g + H_m$). La coupe 2D au niveau du rayon moyen de la machine montrant les différentes régions du calcul est présentée par la figure II-5.

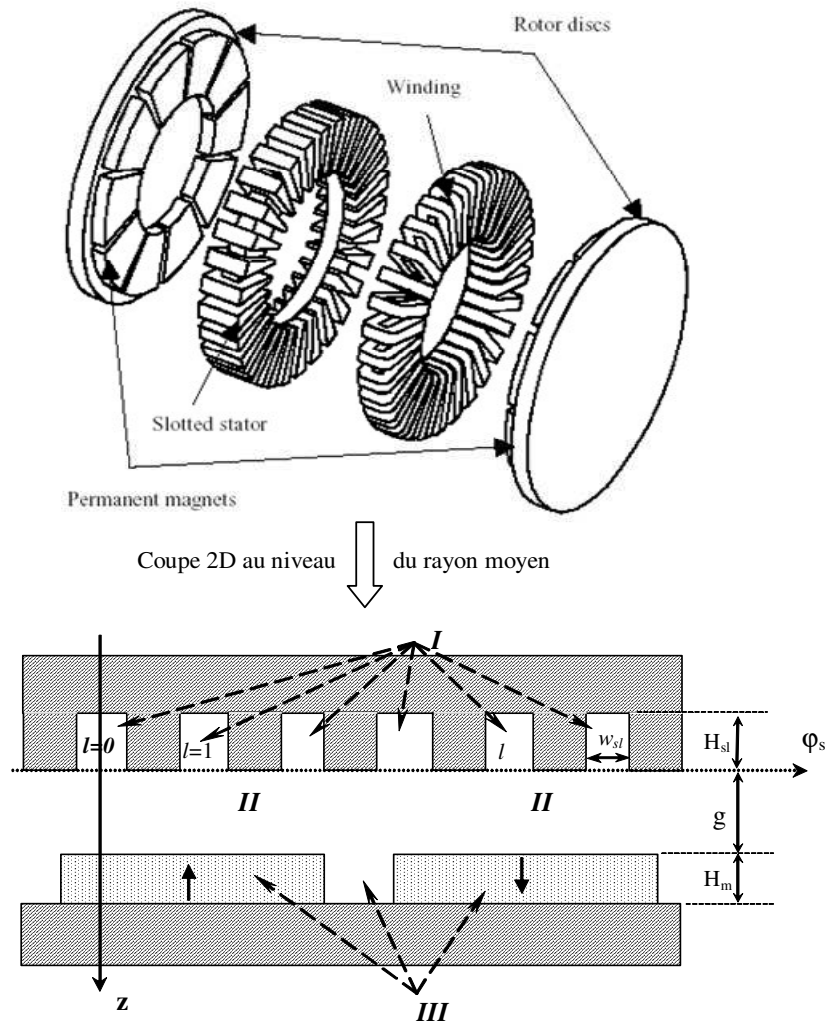


Figure II-5: Machine encochée. Structure 3D ainsi que sa surface déroulée (2D) au niveau du rayon moyen montrant les différentes régions de calcul

4.3.1 Solution de l'induction dans les différentes régions de la machine

a.1) Solution dans la région I (région des encoches)

Dans cette région, la densité du courant ainsi que l'aimantation sont nuls. L'équation (II.19) donc se réduit à l'équation de Laplace :

$$\frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 A_{rAP}(\varphi_s, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_{rAP}(\varphi_s, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.21})$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, le potentiel vecteur ainsi que les différentes composantes de l'induction pour une encoche ' l ' ($l=0, \dots, \frac{N_s}{p}-1$) s'écrivent et en tenant de conditions aux limites pour cette région sous la forme suivante :

$$A_{rAP}^{(l)}(\varphi_s, z, \theta) = a_0^{(l)} + \sum_{m \neq 0} \frac{r_m w_s}{m\pi} f_m^{(l)} \frac{ch\left[\frac{m\pi}{r_m w_{sl}}(z + H_{sl})\right]}{ch\left(\frac{m\pi H_{sl}}{r_m w_{sl}}\right)} \cos\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \quad (\text{II.22})$$

$$B_{\varphi AP}^{(l)}(\varphi_s, z, \theta) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} \frac{sh\left[\frac{m\pi}{r_m w_{sl}}(z + H_{sl})\right]}{ch\left(\frac{m\pi H_{sl}}{r_m w_{sl}}\right)} \cos\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \quad (\text{II.23})$$

$$B_{zAP}^{(l)}(\varphi_s, z, \theta) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} \frac{ch\left[\frac{m\pi}{r_m w_{sl}}(z + H_{sl})\right]}{ch\left(\frac{m\pi H_{sl}}{r_m w_{sl}}\right)} \sin\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \quad (\text{II.24})$$

Où θ est l'abscisse angulaire repérant le référentiel statorique par rapport au référentiel rotorique et φ_s est la coordonnée tangentielle du repère cylindrique lié au stator.

b) Solution dans la région II (l'entrefer)

La densité du courant et l'aimantation sont nulles dans la région de l'entrefer. L'expression générale du potentiel vecteur ainsi que les composantes de l'induction peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$A_{rAP}^{(2)}(\varphi_s, z, \theta) = a_0^{(2)} + \sum_{k \neq 0} \frac{r}{kp} \left\{ \begin{aligned} & \left[C_{kAP}^{(2)} ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) + D_{kAP}^{(2)} sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \right] \cos(kp\varphi_s) \\ & \left[E_{kAP}^{(2)} ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) + F_{kAP}^{(2)} sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \right] \sin(kp\varphi_s) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.25})$$

$$B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi_s, z, \theta) = \sum_{k \neq 0} \left\{ \begin{aligned} & \left[C_{kAP}^{(2)} sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) + D_{kAP}^{(2)} ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \right] \cos(kp\varphi_s) \\ & \left[E_{kAP}^{(2)} sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) + F_{kAP}^{(2)} ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \right] \sin(kp\varphi_s) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.26})$$

$$B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, z, \theta) = \sum_{k \neq 0} \left\{ \begin{aligned} & \left[C_{kAP}^{(2)} ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) + D_{kAP}^{(2)} sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \right] \sin(kp\varphi_s) \\ & \left[E_{kAP}^{(2)} ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) + F_{kAP}^{(2)} sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \right] \cos(kp\varphi_s) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.27})$$

Les différents coefficients seront déterminés à partir des conditions de passage entre les différentes régions de la machine. Le calcul détaillé de tous les coefficients sera donné dans l'annexe.

c) Solution dans la région III (région des aimants)

Dans cette région, la densité du courant est nulle. Par conséquent :

$$\frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 A_{rAP}(\varphi_s, z)}{\partial \varphi_s^2} + \frac{\partial^2 A_{rAP}(\varphi_s, z)}{\partial z^2} = -\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial M_z}{\partial \varphi_s}$$

Commençons tout d'abord par exprimer la répartition de l'aimantation qui est supposée strictement axiale dans cette zone de la machine. Elle est représentée par la figure II-6 et elle ne dépend que de φ_R (coordonnée du repère cylindrique liée au rotor).

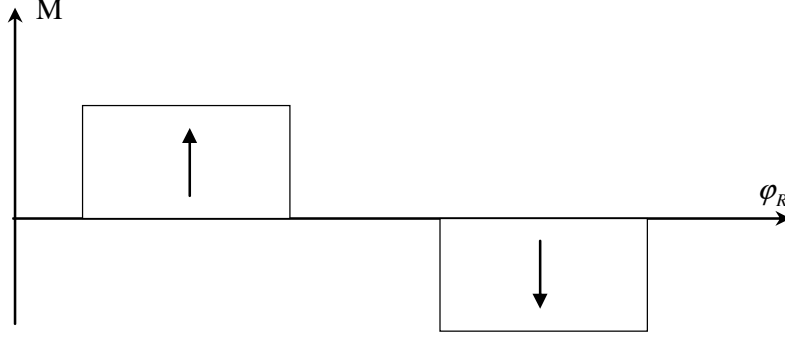


Figure II-6: Représentation d'une aimantation strictement axiale

Si on prend l'axe du pôle nord comme axe de référence, l'aimantation s'exprime dans le référentiel statorique par :

$$B_R(\varphi_s) = \mu M_z(\varphi_s) = \sum_{k \neq 0} E_k^M \cos(kp\varphi_s) + F_k^M \sin(kp\varphi_s) \quad (\text{II.28})$$

avec

$$\begin{cases} E_k^M = \begin{cases} \frac{4B_R}{k\pi} \sin\left[k\left(\frac{\pi}{2} + p\theta\right)\right] \cos\left(\frac{kp\tau}{2}\right) & \text{si } k \text{ impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases} \\ F_k^M = \begin{cases} \frac{-4B_R}{k\pi} \cos\left[k\left(\frac{\pi}{2} + p\theta\right)\right] \cos\left(\frac{kp\tau}{2}\right) & \text{si } k \text{ impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

D'autre part, la solution particulière de l'équation (II.19) est donnée par :

$$A_{rp} = \sum_{k \neq 0} \frac{r}{k} \left[-E_k^M \sin(kp\varphi_s) + F_k^M \cos(kp\varphi_s) \right] \quad (\text{II.30})$$

La seule condition aux limites qui existe dans cette région réside dans la nullité de la composante tangentielle de l'induction à la surface du disque rotorique $B_{\varphi AP}^{(3)}(\varphi_s, g + H_m, \theta)$.

Il en découle que le potentiel vecteur ainsi que les différentes composantes de l'induction s'écrivent comme suit:

$$A_{rAP}^{(3)}(\varphi_s, z, \theta) = a_0^{(3)} + \sum_{k \neq 0} \frac{r_m}{kp} \left\{ \begin{aligned} & \left[D_{kAP}^{(3)} P_k(z) + F_k^M \right] \cos(kp\varphi_s) \\ & + \left[F_{kAP}^{(3)} P_k(z) - E_k^M \right] \sin(kp\varphi_s) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.31})$$

$$B_{\varphi AP}^{(3)}(\varphi, z, \theta) = \sum_{k \neq 0} Q_k(z) \left[D_{kAP}^{(3)} \cos(kp\varphi) + F_{kAP}^{(3)} \sin(kp\varphi) \right] \quad (\text{II.32})$$

$$B_{zAP}^{(3)}(\varphi, z, \theta) = \sum_{k \neq 0} \left[D_{kAP}^{(3)} P_k(z) + F_k^M \right] \sin(kp\varphi) - \left[F_{kAP}^{(3)} P_k(z) - E_k^M \right] \cos(kp\varphi) \quad \text{II.33}$$

$$P_k(z) = sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) - \frac{ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right)}{T_{kp}\left(\frac{g+H_m}{r_m}\right)} \quad \text{et} \quad Q_k(z) = ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) - \frac{sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right)}{T_{kp}\left(\frac{g+H_m}{r_m}\right)}$$

4.3.2 Conditions de passage entre les régions

a) Conditions de passage entre les régions II et III

D'une façon générale, le passage du champ électromagnétique d'un milieu à un autre est caractérisé par la continuité de la composante normale de l'induction \vec{B} et la continuité de la composante tangentielle de l'intensité du champ électromagnétique \vec{H} .

Ainsi, le passage entre la région II et III sera caractérisé par
$$\begin{cases} B_z^{(2)}(\varphi_s, g, \theta) = B_z^{(3)}(\varphi_s, g, \theta) \\ H_\varphi^{(2)}(\varphi_s, g, \theta) = H_\varphi^{(3)}(\varphi_s, g, \theta) \end{cases}$$

Avec l'équation du milieu correspondante : $\vec{B}^{(3)} = \mu_0 \mu_r \left(\vec{H}^{(3)} + \vec{M} \right) \Rightarrow \begin{cases} B_z^{(3)} = \mu_0 \mu_r (H_z^{(3)} + M_z) \\ B_\varphi^{(3)} = \mu_0 \mu_r H_\varphi^{(3)} \end{cases}$

Par conséquent, les conditions de passage entre les régions II et III deviennent et $\forall \theta$:

$$\begin{cases} B_\varphi^{(2)}(\varphi_s, g, \theta) = B_\varphi^{(3)}(\varphi_s, g, \theta) \\ B_z^{(2)}(\varphi_s, g, \theta) = B_z^{(3)}(\varphi_s, g, \theta) \end{cases}$$

$$\text{on en déduit que : } \begin{cases} C_{kAP}^{(2)} = C_{kAP}^{(3)} + F_k^M ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \\ D_{kAP}^{(2)} = -C_{kAP}^{(3)} T_{kp}\left(\frac{g+H_m}{r_m}\right) - F_k^M sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \\ E_{kAP}^{(2)} = E_{kAP}^{(3)} - E_k^M ch\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \\ F_{kAP}^{(2)} = -E_{kAP}^{(3)} T_{kp}\left(\frac{g+H_m}{r_m}\right) + E_k^M sh\left(\frac{kpz}{r_m}\right) \end{cases} \quad \text{II.34}$$

b) Conditions de passage entre les régions I et II

Face à une encoche (i.e. pour $\varphi_l \leq \varphi_s \leq \varphi_l + w_{sl}$) et sachant que ces deux régions sont de même

nature, ces conditions sont et $\forall \theta$:
$$\begin{cases} B_z^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) = B_z^{(I)}(\varphi_s, 0, \theta) \\ B_\varphi^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) = B_\varphi^{(I)}(\varphi_s, 0, \theta) \end{cases}$$

en développant l'équation précédente, on a :

$$\begin{cases} \sum_{k \neq 0} C_{kAP}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) - E_{kAP}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(I)} \sin\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \\ \sum_{k \neq 0} D_{kAP}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) + F_{kAP}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(I)} T_{m\pi} \left(\frac{H_{sl}}{r_m}\right) \cos\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

D'autre part, face à une denture (i.e. pour $\varphi_l + w_{sl} \leq \varphi_s \leq \varphi_{l+1}$) on a:

$$H_\varphi^{(2)}(\varphi_s, 0) = 0 \quad (\text{car on a supposé que la perméabilité du fer est infinie}) \Rightarrow B_\varphi^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) = 0$$

L'équation II.35 nous permettra de construire un système d'algèbre linéaire dont les inconnus sont les coefficients de l'induction dans la région des aimants (le calcul est donné en détail dans l'annexe). Une fois les coefficients dans la région des aimants sont calculés, les coefficients de l'induction dans l'entrefer peuvent être obtenus en utilisant la relation II.24.

4.3.3 Réduction du temps de calcul du modèle

La résolution de l'équation II.35 aboutit au système d'algèbre linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(\alpha) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + H(n,n) \end{bmatrix}}_{[A_c]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1AP}^{(3)} \\ C_{2AP}^{(3)} \\ \vdots \\ C_{nAP}^{(3)} \end{bmatrix}}_{[X]} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} sh(\beta) + ch(\beta)H(1,1) & ch(2\beta)H(1,2) & \dots & ch(n\beta)H(1,n) \\ ch(\beta)H(2,1) & sh(2\beta) + ch(2\beta)H(2,2) & \dots & ch(n\beta)H(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ch(\beta)H(n,1) & ch(2\beta)H(n,2) & \dots & sh(n\beta) + ch(n\beta)H(n,n) \end{bmatrix}}_{[B_c]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} F_1^M \\ F_2^M \\ \vdots \\ F_n^M \end{bmatrix}}_{[F^M]}$$

On appelle par la suite les matrices A_c et B_c matrices du système. Elles sont généralement creuses et carrées d'ordre N (N le nombre d'harmonique souhaité). Ces matrices ne dépendent que des grandeurs géométriques de la machine et ne changent pas si la position du rotor par rapport au stator a changé. Ainsi, pour évaluer les grandeurs globales à vide (flux, f.é.m ou couple de détente), il suffit de calculer une seule fois ces matrices pour une position rotorique quelconque.

On a vu aussi (eq. II.29) que les différents coefficients E_k^M et F_k^M de rang pair sont nuls quelque soit θ . Cela aura des conséquences directes sur la réduction de la taille des matrices du système selon la parité du rapport N_s/p .

Dans le cas où le rapport N_s/p est pair, la matrice B_c et le vecteur F^M auront la forme suivant :

$$[B_c] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & \cdot & \cdot & b_{1(n-1)} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} & \cdot & \cdot & 0 & b_{2n} \\ b_{31} & 0 & b_{33} & 0 & \cdot & \cdot & b_{3(n-1)} & 0 \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44} & 0 & \cdot & 0 & b_{4n} \\ b_{51} & 0 & b_{53} & 0 & b_{55} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & 0 & b_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [F^M] = \begin{bmatrix} F_1^M \\ 0 \\ F_3^M \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{n-1}^M \\ 0 \end{bmatrix}$$

On note aussi que la matrice A_c a la même forme que celle de B_c . Dans ces conditions, le système linéaire peut être représenté en découplant les coefficients de parité différente du vecteur des inconnus $C_k^{(3)}$ sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1(n-1)} \\ a_{31} & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & a_{55} & \cdot & a_{5(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{(n-3)(n-3)} & \cdot \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)3} & \cdot & \cdot & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{(3)} \\ C_3^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n-1}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & \cdot & \cdot & b_{1(n-1)} \\ b_{31} & b_{33} & \cdot & \cdot & b_{3(n-1)} \\ \cdot & \cdot & b_{55} & \cdot & b_{5(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_{(n-3)(n-3)} & \cdot \\ b_{(n-1)1} & b_{(n-1)3} & \cdot & \cdot & b_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^M \\ F_3^M \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{n-1}^M \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ a_{42} & a_{44} & \cdot & \cdot & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & a_{66} & \cdot & a_{6n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{(n-2)(n-2)} & \cdot \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^{(3)} \\ C_4^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

On en conclut que, les différents coefficients $C_k^{(3)}$ de l'induction dans la région des aimants ayant un rang pair sont **nuls**. Ainsi, la taille du système est réduite de moitié et par conséquent le temps de calcul est amélioré. Par exemple pour une machine ayant 36 encoches et 6 paires de pôles et pour $N = 256$, le système réduit est résolu en 1,9sec pendant que le système initial est résolu en 5,9sec de calcul, soit un gain de temps de 64%.

Par contre, on ne peut pas décomposer le système précédent en deux sous systèmes regroupant chacun les coefficients de parité différente du vecteur des inconnus dans le cas où le rapport N_s/p est impair. Donc, aucune réduction de la taille des matrices du système ne sera possible.

4.3.4 Comparaison des résultats analytiques avec la méthode des éléments finis

Le modèle basé sur la résolution des équations de Maxwell que nous venons de proposer est un modèle analytique simplifié qui repose sur un ensemble des hypothèses simplificatrices. Donc, la précision obtenue par ce calcul analytique doit être comparée à celle d'un logiciel de calcul numérique basé sur les éléments finis (FLUX 2D par exemple). Les

résultats de la simulation à vide que nous exploiterons dans la suite sont ceux d'une machine à flux axial ayant 84 encoches et 14 paires de pôle.

Les figures II-7, II-8 et II-9 montrent la distribution de l'induction magnétique pour trois différentes régions de l'entrefer calculée à l'aide de notre modèle et comparée avec celle obtenue à l'aide d'une simulation par éléments finis.

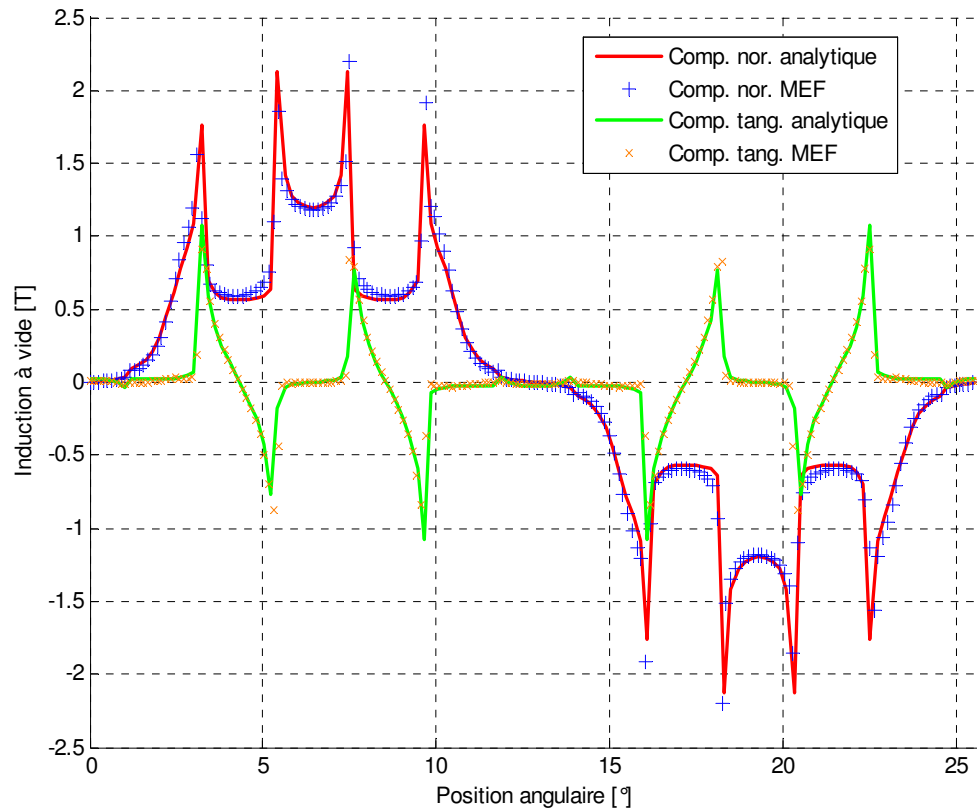


Figure II-7: Distribution de l'induction à la surface de l'alésage statorique ($z=0$)

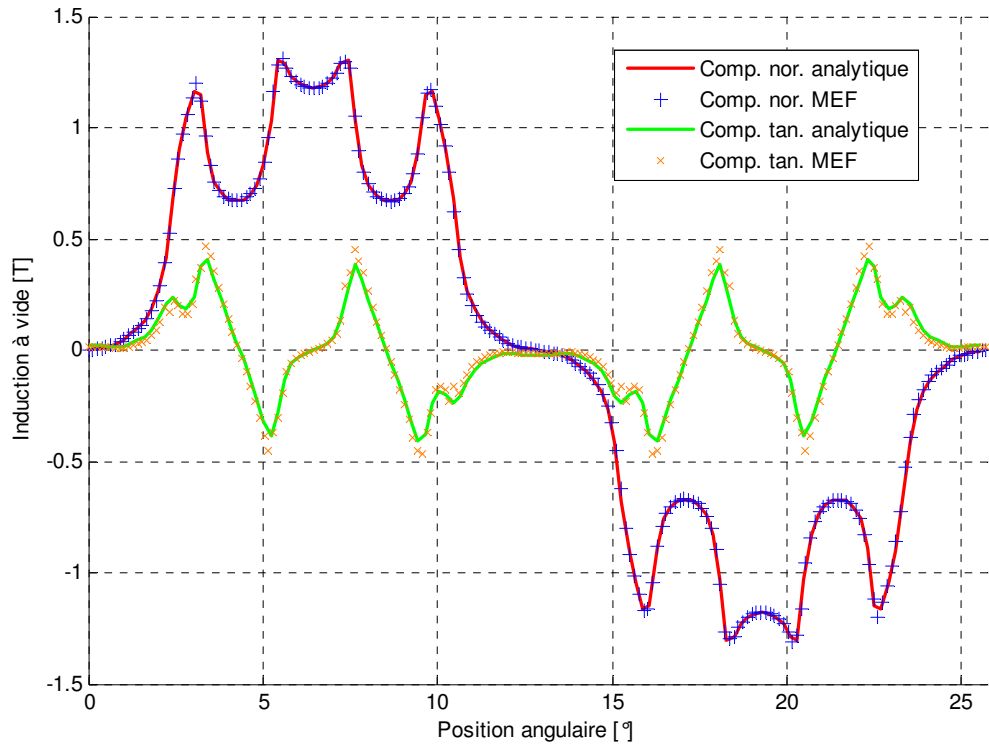


Figure II-8: Distribution de l'induction au milieu de l'entrefer ($z=g/2$)

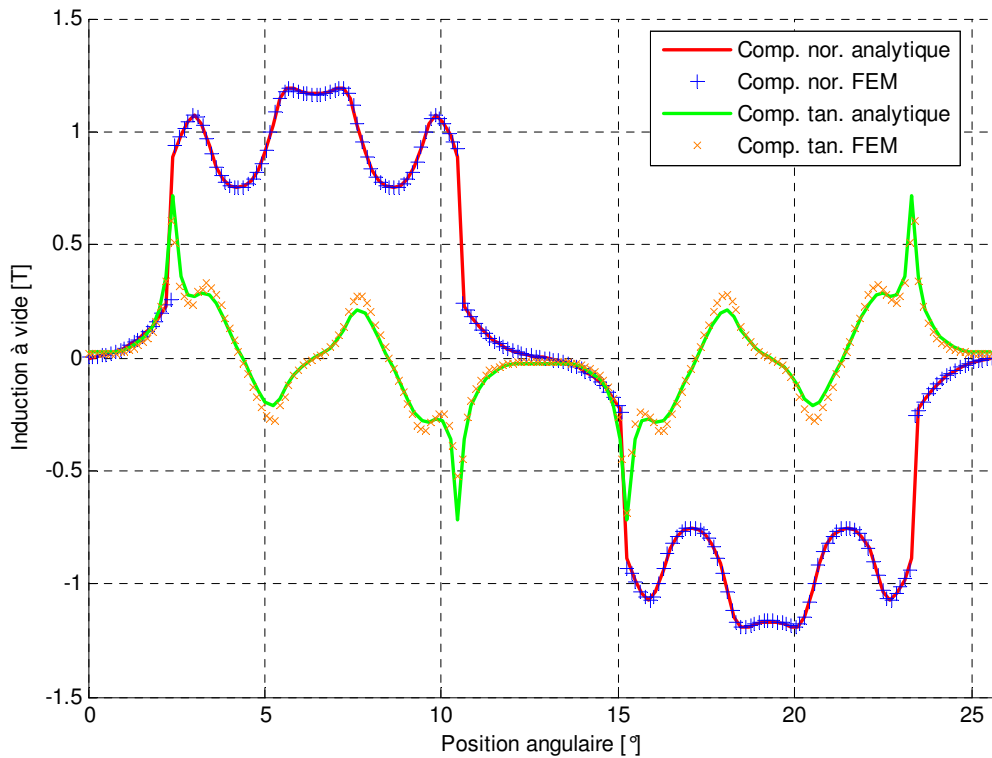


Figure II-9: Distribution de l'induction à la surface des aimants ($z=g$)

L'analyse de ces résultats confirme la fiabilité du modèle analytique proposé dans un processus de dimensionnement. De même, la solution analytique exacte dans la région des aimants permet de contrôler la valeur du champ d'excitation magnétique et de prévenir donc

la désaimantation.

4.4 Répartition exacte du champ dû à la réaction d'induit

Sachant que les machines de forte et moyenne puissance ont des encoches rectangulaires et que le champ produit par les courants statoriques dans l'entrefer est beaucoup moins important que celui produit par les aimants permanents, la connaissance de la réaction d'induit est importante pour la prédiction des forces agissant sur les conducteurs, aussi bien que les inductances magnétisantes et les mutuelles des enroulements statoriques.

De nombreux auteurs ont proposés des modèles analytiques afin de prédire la distribution de l'induction due à la réaction d'induit des machines à aimants permanents [Zhu 1993], [Zha 1999], [Wan 2003], [Hol 2002], [Ata 1998], [Abd 2006]. Cependant, la structure encochée est transformée en une structure lisse en remplaçant l'induit par une région du stator homogénéisé. Le courant dans chaque encoche est modélisé par une nappe de courant distribuée uniformément tout au long d'un arc couvrant l'ouverture d'encoche et pour prendre en compte l'effet d'encoche, ils corrigent l'induction dans l'entrefer en la multipliant par une fonction qui représente la perméance relative de l'entrefer obtenue grâce à la méthode de transformation Schwartz-Christoffel.

Dans le cadre de cette étude, on propose de calculer la répartition de l'induction créée par les courants statoriques dans l'entrefer en tenant en compte de la géométrie réelle des encoches comme le montre la figure II-10.

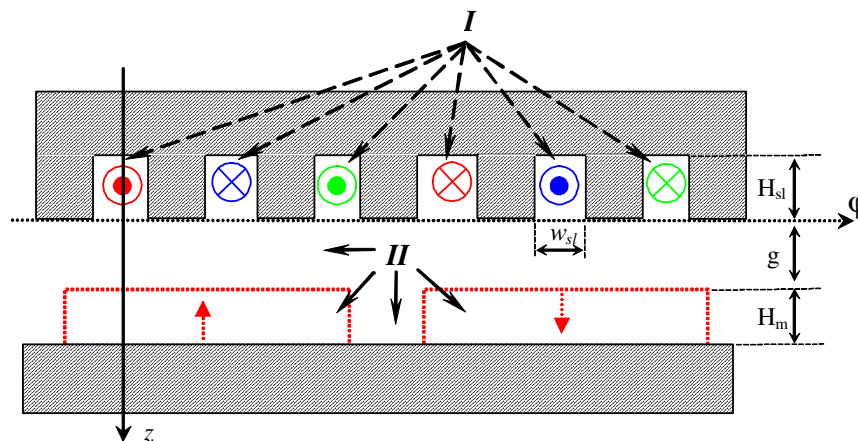


Figure II-10: Différentes régions de la machine pour le calcul de la réaction d'induit d'une structure lisse

Dans ce cas, il suffit de considérer une seule région pour l'entrefer. Il n'est pas nécessaire de séparer la région de l'entrefer et la région des aimants car un aimant sans aimantation est supposé avoir les mêmes caractéristiques magnétiques que l'air, ce qui nous mène à éliminer virtuellement les aimants.

L'équation qui régit le potentiel vecteur magnétique s'écrit alors:

$$\frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 A_{ris}(\varphi_s, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_{ris}(\varphi_s, z)}{\partial z^2} = \begin{cases} -\mu_0 J^{(l)} & \text{dans la région I} \\ 0 & \text{dans la région II} \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

Équation qui doit être résolue dans deux régions notamment la région de l'entrefer magnétique ($0 < z < g + H_m$) et la région des encoches ($-H_{sl} < z < 0$).

4.4.1 Expression de l'induction dans les différentes régions de la machine

a) Solution de l'induction dans la région des encoches

Dans cette région l'EDP s'écrit de la façon suivante:

$$\frac{1}{r_m^2} \frac{\partial^2 A_{ris}(\varphi_s, z)}{\partial \varphi_s^2} + \frac{\partial^2 A_{ris}(\varphi_s, z)}{\partial z^2} = -\mu_0 J^{(l)}$$

Il existe une infinité de solutions particulières qui pourraient satisfaire cette équation. On peut citer par exemple :

$$A_p = \frac{-\mu_0}{4} J^{(l)} [(r\varphi_s)^2 + z^2] ; \quad A_p = \frac{-\mu_0}{2} J^{(l)} (r\varphi_s)^2 ; \quad A_p = \frac{-\mu_0}{2} J^{(l)} z^2 ;$$

$$A_p = \mu_0 J^{(l)} \left[\frac{(z+l_p)^2}{2} - r^2 (\varphi_s - \varphi_l)^2 \right]$$

Nous avons testé chacune de ces solutions particulières mais le calcul était trop lourd et nous n'avons pas pu réussir à obtenir des équations exploitables afin de construire un système d'algèbre linéaire. Par contre, la solution la plus intéressante était de la forme suivante :

$$A_{rp} = -\frac{\mu_0}{2} J^{(l)} (z + H_{sl})^2 \quad (\text{II.37})$$

Bien que cette solution ne dépend pas de φ (mais elle répond toujours à l'équation du poisson), elle nous a facilité la tâche en permettant d'utiliser une grande partie du calcul mené précédemment pour la répartition de l'induction à vide.

En utilisant la méthode de séparation des variables et en tenant compte des conditions aux limites dans cette région, le potentiel vecteur dans cette région ainsi que les différentes composantes de l'induction s'écrivent comme suit:

$$A_{ris}^{(l)}(\varphi_s, z, t) = a_0^{(l)} + \sum_{m \neq 0} \frac{r_m w_{sl}}{m\pi} f_m^{(l)} \frac{\text{ch} \left[\frac{m\pi}{r_m w_{sl}} (z + H_{sl}) \right]}{\text{ch} \left(\frac{m\pi H_{sl}}{r_m w_{sl}} \right)} \cos \left[\frac{m\pi}{w_{sl}} (\varphi_s - \varphi_l) \right] - \frac{\mu_0}{2} J^{(l)} (z + l_p)^2 \quad (\text{II.38})$$

$$B_{\varphi_s}^{(l)}(\varphi_s, z, t) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} \frac{\text{sh} \left[\frac{m\pi}{r_m w_{sl}} (z + H_{sl}) \right]}{\text{ch} \left(\frac{m\pi}{r_m w_{sl}} H_{sl} \right)} \cos \left[\frac{m\pi}{w_{sl}} (\varphi_s - \varphi_l) \right] - \mu_0 J^{(l)} (z + H_{sl}) \quad (\text{II.39})$$

$$B_{z_{is}}^{(l)}(\varphi, z, t) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} \frac{\operatorname{ch} \left[\frac{m\pi}{r_m w_{sl}} (z + H_{sl}) \right]}{\operatorname{ch} \left(\frac{m\pi}{r_m w_{sl}} H_{sl} \right)} \sin \left[\frac{m\pi}{w_{sl}} (\varphi_s - \varphi_l) \right] \quad (\text{II.40})$$

b) Solution de l'induction dans l'entrefer

La seule condition aux limites qui existe dans cette région réside dans la nullité de la composante tangentielle à la surface du disque rotorique $B_\varphi^{(2)}(\varphi_s, g + H_m) = 0$.

Ainsi, les différentes composantes l'induction dans cette région s'écrivent de la manière suivante :

$$B_{\varphi_s}^{(2)}(\varphi_s, z, t) = \sum_{k \neq 0} \left[D_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) + F_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) \right] \left(\operatorname{ch} \left(\frac{kpz}{r_m} \right) - \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{kpz}{r_m} \right)}{T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right)} \right) \quad (\text{II.41})$$

$$B_{z_{is}}^{(2)}(\varphi_s, z, t) = \sum_{k \neq 0} \left[D_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) - F_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) \right] \left(\operatorname{sh} \left(\frac{kpz}{r_m} \right) - \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{kpz}{r_m} \right)}{T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right)} \right) \quad (\text{II.42})$$

Les différents coefficients seront déterminés à partir des conditions de passage entre les deux régions.

4.4.2 Conditions du passage entre les deux régions

Face à une encoche (i.e. pour $\varphi_l \leq \varphi_s \leq \varphi_l + w_{sl}$), on a :
$$\begin{cases} B_{\varphi_s}^{(2)}(\varphi_s, 0) = B_{\varphi_s}^{(l)}(\varphi_s, 0) \\ B_{z_{is}}^{(2)}(\varphi_s, 0) = B_{z_{is}}^{(l)}(\varphi_s, 0) \end{cases}$$

Ceci nous mène à écrire les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{k \neq 0} C_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) - E_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} \sin \left[\frac{m\pi}{w_{sl}} (\varphi_s - \varphi_l) \right] \\ \sum_{k \neq 0} D_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) + F_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} T_{kp} \frac{m\pi}{w_{sl}} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right) \cos \left[\frac{m\pi}{w_{sl}} (\varphi_s - \varphi_l) \right] - \mu_0 J^{(l)} H_{sl} \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

D'autre part, face à une denture (i.e. pour $\varphi_l + w_{sl} \leq \varphi_s \leq \varphi_{l+1}$), on a $H_\varphi^{(2)}(\varphi_s, 0) = 0$, il en découle aussi que $B_\varphi^{(2)}(\varphi_s, 0) = 0$.

La résolution du système (II.43) aboutit à un système d'algèbre linéaire dont la solution est le vecteur des inconnus de différents coefficients $C_{kis}^{(2)}$ et $D_{kis}^{(2)}$. Ce système est donné par :

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(\alpha) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{1is}^{(2)} \\ C_{2is}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{nis}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\mu_0 H_{sl}}{\pi} \sin\left(\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \cos\left(\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{2\pi} \sin\left(2\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \cos\left(2\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{n\pi} \sin\left(n\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \cos\left(n\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(\alpha) + P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{1is}^{(2)} \\ E_{2is}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{nis}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2\mu_0 H_{sl}}{\pi} \sin\left(\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{2\pi} \sin\left(2\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(2\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{n\pi} \sin\left(n\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(n\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \end{bmatrix}$$

La résolution de ces deux systèmes permet de calculer les coefficients de l'induction dans l'entrefer magnétique et ainsi déduire la répartition exacte de l'induction dans cette région de la machine. Le calcul de différents coefficients est exposé en détail dans l'annexe.

4.4.3 Validation des résultats avec les éléments finis

Afin d'étudier la validité des formulations proposées ci-dessus, nous avons comparé les résultats de la méthode de référence (simulation MEF) avec les résultats obtenus avec notre

modèle analytique. Les figures II-11 et II-12 présentent la forme d'onde de l'induction dans l'entrefer. La même machine prise comme exemple pour valider les résultats du modèle à vide est considéré ici.

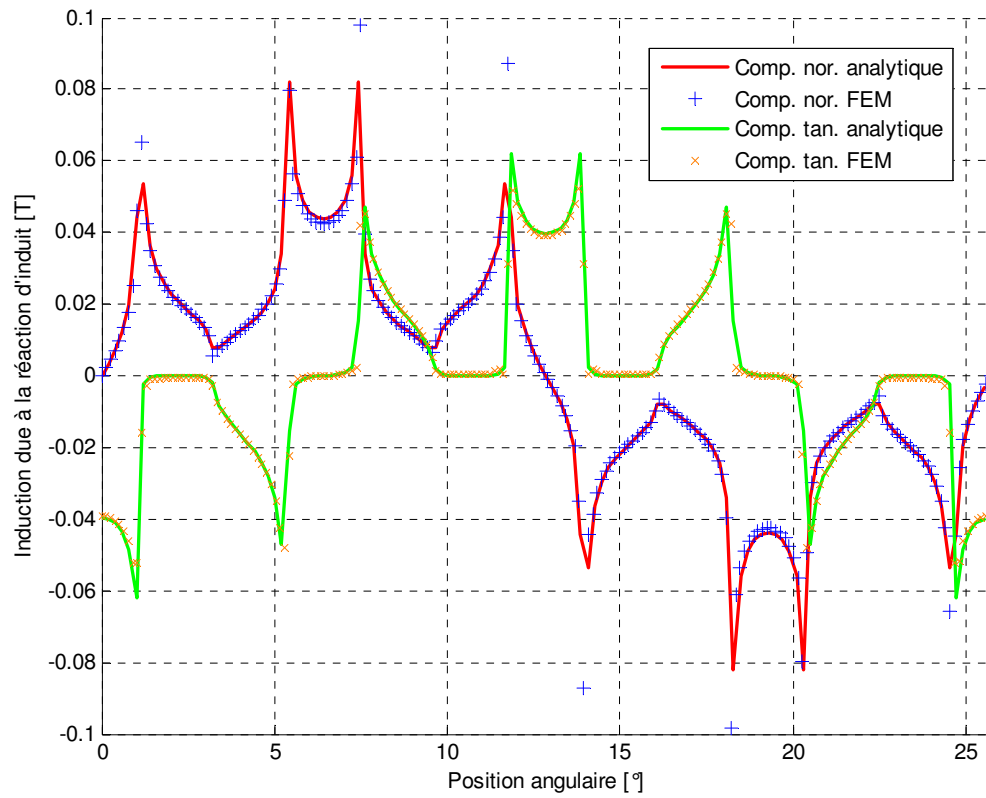


Figure II-11: Forme d'onde de l'induction à la surface de l'alésage statorique (z=0)

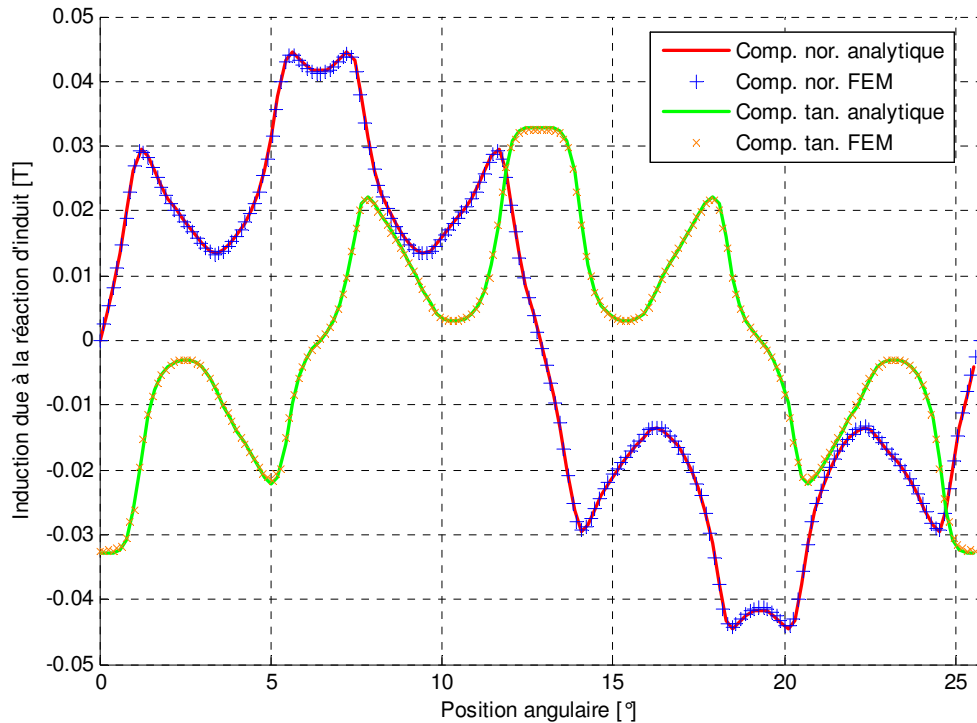


Figure II-12: Forme d'onde de l'induction à la surface des aimants ($z=g$)

Les figures parlent d'elles mêmes. Là encore, on remarque que le modèle que nous proposons permet d'obtenir une distribution d'induction due à la réaction d'induit en très forte adéquation avec la méthode de référence (MEF).

5 Calcul des gradeurs globales à partir des grandeurs locales

Le but de ce paragraphe est d'évaluer des grandeurs électromagnétiques globales conditionnant les performances de la machine, à savoir : les inductances de phase et la force électromotrice. Le calcul de ces deux grandeurs revient à calculer le flux embrassé par une phase statorique : la représentation du bobinage permet d'exprimer la variation de ce flux. Utilisée dans [Hou 2004] et [Tol 1991], la fonction de bobinage est un outil chargé de représenter l'influence du bobinage de la machine sur le champ statorique. Son utilisation permet d'aborder le problème de l'adaptation du profil de la distribution des bobines de phase dans les encoches en fonction du type d'alimentation.

5.1 Fonction de distribution d'une phase statorique

Soit une bobine ayant N_{sp} spires en série placée dans un stator ayant N_s encoches (fig. II.13). L'ouverture de cette bobine θ_b est un multiple du pas d'encoche $2\pi/N_s$. La fonction de distribution de cette bobine a pour but de nous renseigner sur la position angulaire des

faisceaux aller-retour de la bobine tout au long de l'alésage statorique ainsi sur le nombre de ses spires en série. Cette fonction de distribution est égale à N_{sp} entre le faisceau d'aller et celui du retour et zéro ailleurs. Elle dépend aussi du type du bobinage utilisé (bobinage à pôles consécutifs, pas raccourci, deux couches, etc...).

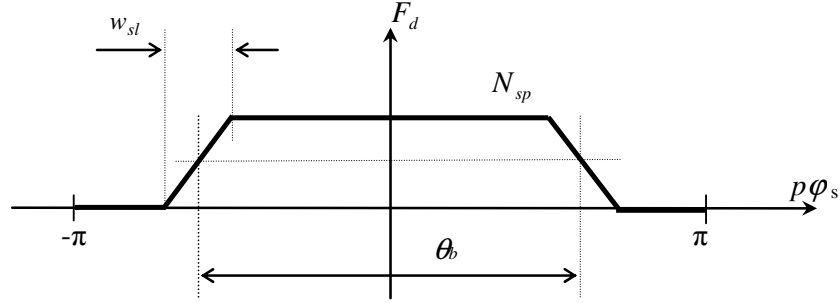


Figure II-13: Fonction de distribution d'une bobine statorique

Le développement en série de Fourier de la fonction de distribution de la bobine nous donne les harmoniques suivants :

$$F_{dbob}(\varphi_s) = p \frac{N_{sp} \theta_b}{2\pi} + \sum_{n \neq 0} p \frac{\theta_b N_{sp}}{\pi} \Gamma_{np}(w_{sl}) \Gamma_{np}(\theta_b) \cos(np \varphi_s) \quad (\text{II.44})$$

avec $\Gamma_{np}(x) = \frac{\sin(np x / 2)}{np x / 2}$.

La fonction de distribution d'une phase statorique quelconque est obtenue en sommant les fonctions de distribution de toutes les bobines constituant la phase. Elle s'écrit et en prenant l'axe de cette phase comme axe de référence comme suit :

$$F_{dph}(\varphi_s) = pZ \frac{N_{sp} \theta_b}{2\pi} + \sum_{n \neq 0} \frac{2N}{n\pi} K_{son} K_{bn} \cos(np \varphi_s) \quad (\text{II.45})$$

$N = Z.N_{sp}$ (nombre de spires / paire de pôle / phase)

$$K_{son} = \frac{\sin(np w_{sl} / 2)}{np w_{sl} / 2} \quad (\text{coefficient d'ouverture d'encoche})$$

$$K_{bn} = \underbrace{\frac{\sin(np \theta_b / 2)}{np \theta_b / 2}}_{\text{coefficient du raccourcisement}} \cdot \underbrace{\frac{\sin(np Z \varepsilon / 2)}{Z \sin(np \varepsilon / 2)}}_{\text{coefficient de distribution}} \quad (\text{coefficient de bobinage})$$

Tirant profit de la modélisation magnétique de la structure considérée et de la théorie de la fonction de bobinage précédemment décrites, les deux paragraphes suivants décrivent le calcul de deux grandeurs électromagnétiques qui déterminent les performances de la machine, à savoir : la force électromotrice et la série des inductances propres et mutuelles.

5.2 Expression de la force électromotrice à partir du flux

Cette partie montre comment le flux peut être évalué en utilisant la théorie de la fonction de bobinage qui nous permet de passer après au calcul de la force électromotrice. Pour les machines à aimants permanents, le flux renvoyé par les aimants et embrassé par une

phase 'j' est donné par :

$$\phi_j^{PM}(\theta) = \frac{p(R_o^2 - R_i^2)}{2} \int_0^{2\pi/p} F_{Dj}(\varphi_s) B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) d\varphi_s \quad (\text{II.46})$$

$F_{Dj}(\varphi_s)$ et $B_{zAP}^{(2)}$ désignent respectivement la fonction de distribution de la phase 'j' et l'induction créée par les aimants dans l'entrefer.

D'autre part, l'expression de la fonction de distribution considère que l'axe de référence est l'axe d'une phase statorique tandis que le référentiel du modèle magnétique est le milieu d'une encoche quelconque. Par conséquent, pour évaluer correctement le flux traversant la phase statorique à vide, il faut exprimer la fonction de distribution par rapport au référentiel de modèle analytique. Ceci est montré par la figure II-14.

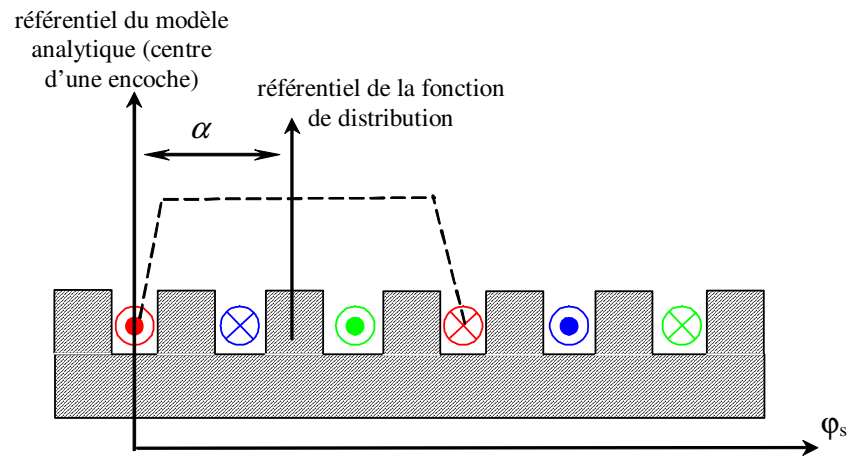


Figure II-14: Représentation des différents référentiels intervenant dans le calcul

En développant l'équation (II.46) :

$$\phi_j^{PM}(t) = \frac{\pi(R_o^2 - R_i^2)}{2} \sum_{k \neq 0} E_{dk} \left\{ \left[C_{kAP}^{(3)} + F_k^M \operatorname{ch}\left(\frac{kpe}{r}\right) \right] \sin(kp\alpha) - \left[E_{kAP}^{(3)} - E_k^M \operatorname{ch}\left(\frac{kpe}{r}\right) \right] \cos(kp\alpha) \right\} \quad (\text{II.47})$$

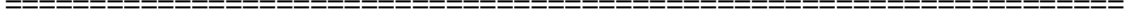
La force électromotrice induite correspondante est obtenue en appliquant la loi de Faraday :

$$e_j^{PM}(t) = \frac{-\Omega\pi(R_o^2 - R_i^2)}{2} \sum_{k \neq 0} E_{dk} \left\{ \left[\frac{dC_k^{(3)}}{d\theta} + \frac{dF_k^M}{d\theta} \operatorname{ch}\left(\frac{kpe}{r}\right) \right] \sin(kp\alpha) - \left[\frac{dE_{kAP}^{(3)}}{d\theta} - \frac{dE_k^M}{d\theta} \operatorname{ch}\left(\frac{kpe}{r}\right) \right] \cos(kp\alpha) \right\} \quad (\text{II.48})$$

Les différents coefficients $\frac{dE_n^M}{d\theta}$ et $\frac{dF_n^M}{d\theta}$ sont obtenus en dérivant l'équation (II.29) par

rapport à θ . Les différents termes $\frac{dC_k^{(3)}}{d\theta}$, $\frac{dE_k^{(3)}}{d\theta}$, $\frac{dF_k^M}{d\theta}$ et $\frac{dE_k^M}{d\theta}$ sont obtenus en résolvant le système matriciel suivant :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(\alpha) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dC_{1AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \frac{dC_{2AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dC_{nAP}^{(3)}}{d\theta} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} sh(\beta) + ch(\beta)H(1,1) & ch(2\beta)H(1,2) & \dots & ch(n\beta)H(1,n) \\ ch(\beta)H(2,1) & sh(2\beta) + ch(2\beta)H(2,2) & \dots & ch(n\beta)H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ ch(\beta)H(n,1) & ch(2\beta)H(n,2) & \dots & sh(n\beta) + ch(n\beta)H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dF_1^M}{d\theta} \\ \frac{dF_2^M}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dF_n^M}{d\theta} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(\alpha) + P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dE_{1AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \frac{dE_{2AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \frac{dE_{nAP}^{(3)}}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} sh(\beta) + ch(\beta)P(1,1) & ch(2\beta)P(1,2) & \dots & ch(n\beta)P(1,n) \\ ch(\beta)P(2,1) & sh(2\beta) + ch(2\beta)P(2,2) & \dots & ch(n\beta)P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ ch(\beta)P(n,1) & ch(2\beta)P(n,2) & \dots & sh(n\beta) + ch(n\beta)P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dE_1^M}{d\theta} \\ \frac{dE_2^M}{d\theta} \\ \frac{dE_n^M}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Les figures II-15, II-16 montrent le flux à vide traversant par la phase 'A' et la force électromotrice induites aux bornes de cette phase. La machine simulée est une machine triphasée à 14 paires de pôles. Deux cas sont considérés : $N_s=84$ et $N_s=168$. Le nombre de spires par bobine étant fixé à 28.

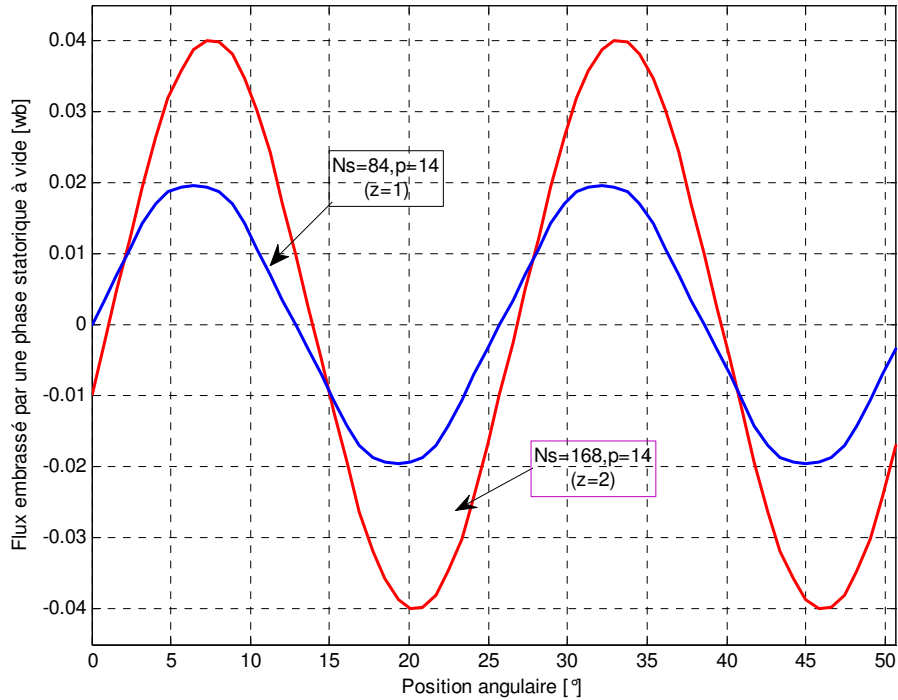


Figure II-15: Distribution du flux envoyé par les aimants permanents

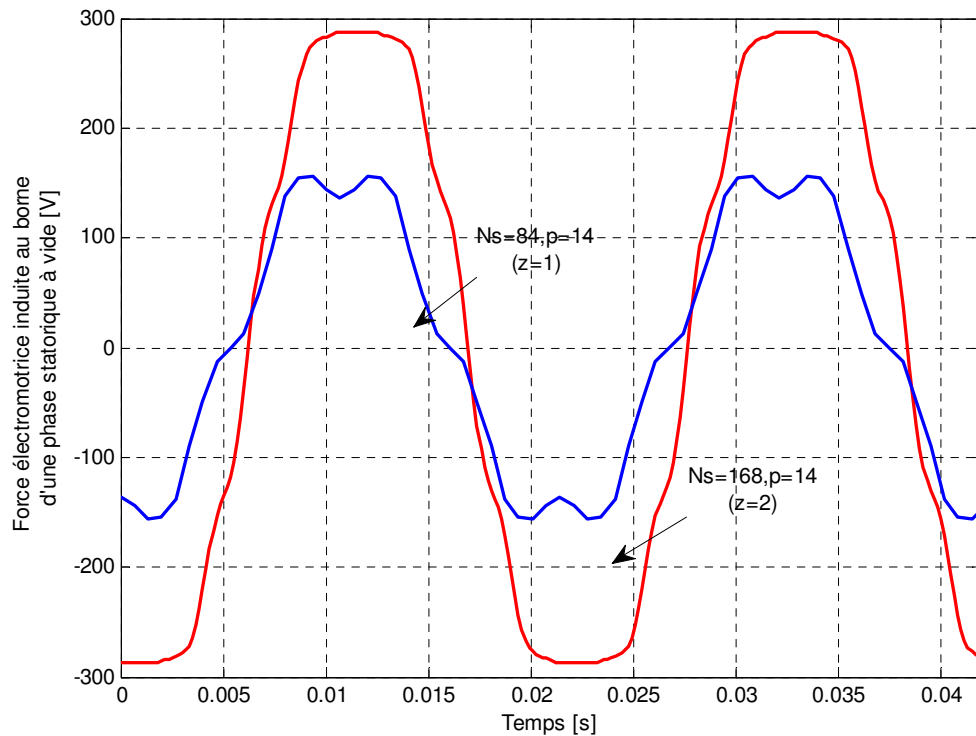


Figure II-16: Formes d'onde de la FEM induites aux bornes de chaque phase

5.3 Expression des inductances magnétisantes et des mutuelles

Cette partie présente les calculs des inductances propres et mutuelles à partir du flux embrassé par une phase statorique lorsque la machine est alimentée.

En utilisant la théorie des fonctions de bobinage, l'inductance mutuelle se calcul à partir le flux envoyé par un enroulement 'j' parcouru par un courant $i_j(t)$ à travers l'enroulement 'i'.

Son expression est donné par :

$$L_{SSij}(t) = \frac{p(R_o^2 - R_i^2)}{2} \int_0^{2\pi/p} F_{Di}(\varphi_s) B_{j,zis}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) d\varphi_s = \frac{\pi(R_o^2 - R_i^2)}{2p} \sum_{k \neq 0} E_{dk} \begin{cases} C_{kis}^{(2)} \sin(kp\alpha) \\ E_{kis}^{(2)} \cos(kp\alpha) \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

E_{dk} représente les coefficients de Fourier de la fonction de distribution de la phase 'i'. $C_{kis}^{(2)}$ et $D_{kis}^{(2)}$ sont les coefficients de l'induction dans l'entrefer due au courant circulant dans l'enroulement 'j'.

L'inductance magnétisante d'une phase statorique 'j' se calcule de la même manière que l'inductance mutuelle. La différence si situe au niveau de la fonction de la distribution de la phase qui dans ce cas doit appartenir à la phase 'j' au lieu de la phase 'i' :

$$L_{SSij} = \frac{p(R_o^2 - R_i^2)}{2} \int_0^{2\pi/p} F_{Dj}(\varphi) B_{j,zis}^{(2)}(\varphi, 0) d\varphi \quad (\text{II.50})$$

Aux inductances magnétisantes, il faut ajouter l'inductance des têtes de bobines calculée à partir de formulations classiques [Fog 1999], [Han 2003], [Gie 2004].

6 Etude analytique du couple de détente

Ce paragraphe a pour objectif de concrétiser la modélisation du couple de détente d'une machine à aimants permanents à flux axial. Par conséquent, afin d'obtenir la caractéristique de ce genre de couple qui est basée sur les différentes paramètres dimensionnant de la machine, l'étude se fera en deux parties : la dérivation de l'énergie et le tenseur de Maxwell.

6.1 Introduction

L'interaction du champ magnétique créé par les aimants permanents et les encoches statoriques produit un couple parasite, dit couple de détente, sa valeur moyenne est nulle donc il ne contribue pas au développement du couple totale produit par la machine mais il provoque des ondulations supplémentaires et par conséquence des vibrations.

En effet, lorsque la machine est à l'arrêt, autrement dit quand les bobinages statoriques ne sont pas alimentés, en exerçant un couple externe pendant un intervalle de temps dans un sens

de rotation, le rotor se met à chercher une position d'équilibre la plus proche bien entendu. Supposons que ce mouvement était dans le sens contraire de la direction du couple, en faisant la même procédure mais cette fois-ci dans l'autre sens, le phénomène se produit toujours mais par contre la partie tournante emprunte le même sens de mouvement que celui dans lequel le couple a été appliqué pour trouver une position d'équilibre.

Ces positions d'équilibre correspondent aux points sur lesquelles le flux est maximal et l'énergie est minimale. Tout ceci est dû à la géométrie de la machine et aussi à l'énergie des aimants constituant la couronne aimantée. La machine se positionne donc sur un point sur lequel elle peut se détendre d'où l'appellation 'couple de détente'. Ce phénomène est illustré par le schéma de la figure II-17.

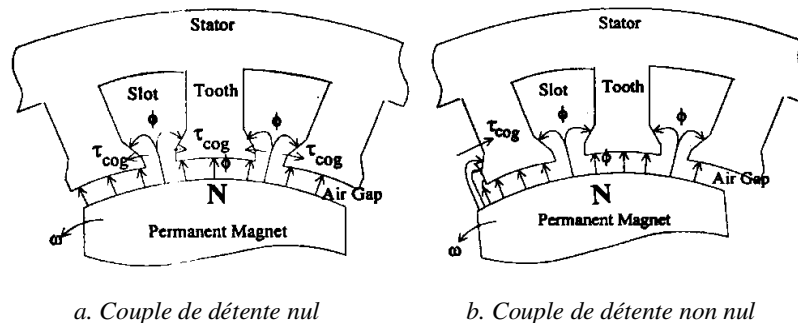


Figure II-17: Production du couple de détente

L'étude de ce phénomène parasite qui dépend essentiellement de l'état magnétique des dents statoriques et qui pourrait influencer le fonctionnement de la machine s'avère vraiment nécessaire pour concrétiser les avantages et les inconvénients qu'il peut apporter [Ack 1995], [Gie 2004], [Zhu 1992].

6.2 Méthode de la dérivation de l'énergie

Cette méthode consiste à dériver les énergies des différents corps constituant la machine, notamment l'aimant et l'entrefer. Ainsi, le couple est obtenu en dérivant cette énergie développée par les différentes sources par rapport à l'angle de rotation θ .

L'énergie totale est donnée par l'expression suivante :

$$W_t = \iiint_{(v)} W_s d\tau = \iiint_{(v)} \left(\int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B} \right) dv = \iiint_{(v)} \frac{B^2}{2\mu} dv - \iiint_{(v)} \frac{1}{\mu} \left(\int_0^{\vec{B}} \vec{B}_r d\vec{B} \right) dv$$

Dans les machines électriques, la variation de l'énergie dans les aimants et le fer est négligeable devant celle de l'entrefer. Cette dernière peut être écrite en fonction de la perméance de l'entrefer par unité de surface et la force magnétomotrice créée par les aimants

permanents de la façon suivante :
$$W_e(\theta) = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{(v)} P^2(\varphi) \cdot F_m^2(\varphi, \theta) dV$$

avec $P(\varphi) = \frac{\mu_0}{e} G(\varphi)$ et $F_m(\varphi, \theta) = \frac{e}{\mu_0} B_z(\varphi, \theta)$ où $G(\varphi)$ est une fonction représentant la perméance

relative de l'entrefer. Après intégration :
$$W_e(\theta) = \frac{e}{4\mu_0} (R_o^2 - R_i^2) \int_0^{2\pi} G^2(\varphi) B_z^2(\varphi, \theta) d\varphi$$

La perméance relative ainsi que l'induction dans l'entrefer peuvent être représentés sous leur forme la plus générale issue du développement en série du Fourier comme suit :

$$\begin{cases} G^2(\varphi) = \sum_{n \neq 0} G_{an} \cos(nN_s \varphi) + G_{bn} \sin(nN_s \varphi) \\ B_z^2(\varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} B_{ak} \cos[2kp(\varphi + \theta)] + B_{bk} \sin[2kp(\varphi + \theta)] \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

On voit clairement que l'intégrale dans l'équation (II.41) est nul partout sauf pour certaines combinaisons des harmoniques de n et k qui tuent leur dépendance par rapport à φ . En autre termes, il est nul sauf dans les cas où $nN_s - 2kp = 0 \Rightarrow k = n \frac{Q_s}{2p}$. Comme n et $k \in N^{*+}$, cela implique veut dire $2kp$ devrait être un multiple du PPCM de N_s et $2p$.

Tenant compte de cette condition, le couple s'écrit comme suit:

$$\Gamma(\theta) = -\frac{\partial W_e(\theta)}{\partial \theta} = \frac{e\pi}{4\mu_0} (R_o^2 - R_i^2) \sum_{n \neq 0} nN_L \begin{cases} G_{an} B_{an} \sin(nN_L \theta) - G_{bn} B_{an} \cos(nN_L \theta) \\ + \\ G_{bn} B_{bn} \sin(nN_L \theta) + G_{an} B_{bn} \cos(nN_L \theta) \end{cases}$$

où N_L est le PPCM de Q_s et $2p$.

Pour les machines symétriques, les termes en sinus dans l'équation précédente sont généralement nuls. Donc, le couple de détente s'écrit de la façon simplifiée suivante :

$$\Gamma(\theta) = \frac{e\pi}{4\mu_0} (R_o^2 - R_i^2) \sum_{n \neq 0} nN_L G_{an} B_{an} \sin(nN_L \theta) \quad (\text{II.52})$$

D'après cette relation, on voit que le couple de détente est fortement lié à N_L , G_{an} et B_{an} avec une période de $\frac{2\pi}{N_L}$ pour le fondamental.

6.3 Méthode du tenseur de Maxwell

On peut déterminer les forces agissant sur un système électromagnétique en partant des perméances ou des inductances des divers circuits électriques.

Elles présentent cependant un inconvénient pour des structures géométriques complexes. En effet, la nécessité de dériver les perméances des divers circuits rend cette opération difficile et très peu précise lors d'un calcul numérique. Par ailleurs, ces relations ne sont pas utilisables

sans autre pour des milieux saturables. Le tenseur de Maxwell permet de détourner ces difficultés.

En partant de la forme locale de l'équation de Laplace et les équations de Maxwell, nous pouvons écrire l'expression de la force totale exercée sur un volume sous la forme suivante :

$$\vec{F} = \iiint_{(s)} \mu_0 \left[(\vec{H} \cdot \vec{n}) \vec{H} - \frac{H^2}{2} \vec{n} \right] ds \quad (\text{II.53})$$

Sachant qu'en tout point de la surface renfermant le volume de l'entrefer, on a :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_n + d\vec{F}_t \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{H} = H_\varphi \vec{e}_\varphi + H_z \vec{e}_z$$

Donc la force totale appliqué à la surface des aimants s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \mu_0 \left[(\vec{H} \cdot \vec{e}_z) \vec{H} - \frac{H^2}{2} \vec{e}_z \right] ds = \frac{\mu_0}{2} \left[(H_z^2 - H_\varphi^2) \vec{e}_z \right] ds + \mu_0 \left[(H_\varphi H_z) \vec{e}_\varphi \right] ds \\ &= \underbrace{\vec{\sigma}_n}_{\substack{\text{contrainte} \\ \text{normale}}} ds + \underbrace{\vec{\sigma}_t}_{\substack{\text{contrainte} \\ \text{tangentielle}}} ds \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

La contrainte tangentielle contribue à la production du couple tandis que la contrainte normale ne contribue pas à la production du couple mais elle a tendance plutôt à déformer le disque rotorique. En remplaçant $\vec{\sigma}_t$ par son expression, le couple développé par la machine est

$$\text{donné par :} \quad \vec{\Gamma}_{cogging} = \frac{p(R_o^3 - R_i^3)}{3\mu_0} \int_0^{2\pi/p} B_\varphi^{(3)}(\varphi, e) B_z^{(3)}(\varphi, e) d\varphi \vec{e}_z = \frac{2\pi}{3} (R_o^3 - R_i^3) \langle \sigma_t \rangle_\varphi \quad (\text{II.55})$$

Si on remplace l'induction normale et tangentielle créées par les aimants permanents par leur expression et après calcul de l'intégral, développement et regroupement, on obtient :

$$\Gamma_{cogging} = \frac{\pi}{3\mu_0} (R_o^3 - R_i^3) \sum_{k \neq 0} (C_k^{(2)} F_k^{(2)} - E_k^{(2)} D_k^{(2)}) \quad (\text{II.56})$$

La figure II-18 donne l'allure du couple de détente calculé avec la relation (II.56).

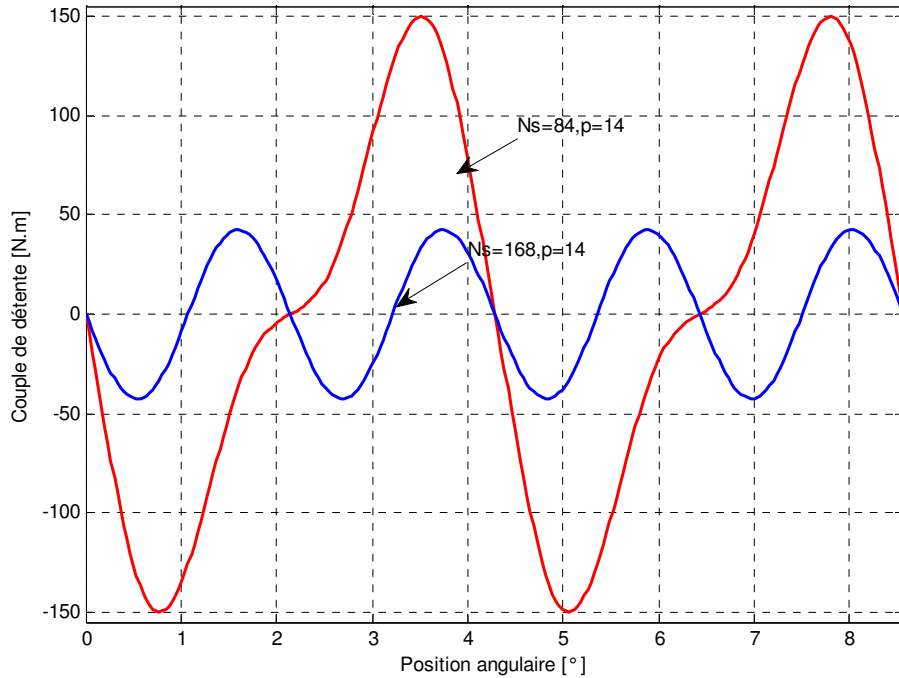


Figure II-18: Couple de détente obtenu à partir du tenseur de Maxwell

on voit clairement que la période du couple de détente pour la machine ayant 84 encoches vaut bien $4.285^\circ \left(\frac{2\pi}{N_L=84} \right)$ pendant que pour la machine avec 168 encoches elle vaut 2.142° .

6.4 Techniques de minimisation du couple de détente

Après avoir calculé le couple de détente de deux manières différentes, il devient naturel de chercher à comprendre comment minimiser ce couple voire l'annuler sans avoir altéré les performances de la machine. Nous citons par la suite les techniques de minimisation le plus utilisées dans l'industrie. En commençant par le stator, on peut citer : l'inclinaison des encoches [Hans 1997], le fraisage des dentures [Bre 2000], [abd 2007], l'utilisation des dents d'ouverture différentes [Hwa 2000], [Eom 2001], l'introduction de pôles auxiliaires [Zhu 2000], [Tho 1996] et la modification de la forme d'onde des courants statoriques [Fav 1993]. Pour le rotor, on peut citer : l'inclinaison des aimants [Wro 2003], l'utilisation des aimants avec des coefficients d'arc polaire différents [Bia 2002],[Hwa 2001], la variation de l'énergie des aimants [Key 1999] et la distribution asymétrique des aimants [Bia 2001], [Kau 1994].

➤ ***Inclinaison des encoches***

Si les encoches statoriques ou les aimants sont inclinés, la fonction de la perméance relative ou l'induction dans l'entrefer s'expriment dans ce cas en fonction de la direction radiale et l'angle d'inclinaison α_s de la façon suivante :

$$\begin{cases} G^2(r, \varphi) = \sum_{n \neq 0} G_{an} \cos \left[nQ_s \left(\varphi - \alpha_s \frac{r - R_i}{R_o - R_i} \right) \right] \\ B_z^2(r, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} B_{ak} \cos \left[2kp \left(\varphi + \theta + \alpha_s \frac{r - R_i}{R_o - R_i} \right) \right] \end{cases}$$

Dans le cas où les encoches statoriques subissent une inclinaison, l'expression de l'énergie emmagasinée dans l'entrefer sera :

$$W(\theta) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{2\pi} \sum_{n \neq 0} \sum_{k \neq 0} G_{an} B_{ak} \cos \left[nQ_s \left(\varphi - \alpha_s \frac{r - R_i}{R_o - R_i} \right) \right] \cos[2kp(\varphi + \theta)] r dr d\varphi dz$$

après calcul des intégrales, simplifications, regroupement des termes en sinus et cosinus et en dérivant l'énergie par rapport à la position angulaire, le couple de détente s'écrit alors :

$$\Gamma(\theta) = \frac{e}{2\mu_0} \frac{R_o - R_i}{N_L \alpha_s^2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} G_{an} B_{an} \left\{ \begin{array}{l} nN_L \alpha_s [R_o \cos[nN_L(\alpha_s + \theta)] - R_i \cos(nN_L \theta)] \\ - \\ 2(R_o - R_i) \cos(nN_L \theta + \frac{1}{2} nN_L \alpha_s) \sin(\frac{1}{2} nN_L \alpha_s) \end{array} \right.$$

Il est clair que contrairement aux machines radiales, l'inclinaison du stator des machines axiales d'un pas d'encoche ($\alpha_s = 2m\pi/N_s$) n'élimine pas complètement le couple de détente.

➤ *Structure ayant des dents d'ouvertures différentes*

La figure II-19 montre un pas d'encoche d'une structure ayant des dents d'ouverture différente 'a' et 'b' ainsi que la fonction de la perméance relative dans l'entrefer la plus simple. Dans ce cas, le pas d'encoche est doublé ce qui veut dire que la période la perméance de l'entrefer l'est aussi, il en découle que N_L sera le PPCM de $N_s/2$ et $2p$.

En raisonnant de la même façon, le développement de G_{an} donne les harmoniques suivants :

$$\begin{aligned} G_{an} &= \frac{Q_s}{\pi} \left\{ \int_0^{a/2} \cos(nN_L \varphi) d\varphi + \int_{2\pi/Q_s - b/2}^{2\pi/Q_s + b/2} \cos(nN_L \varphi) d\varphi + \int_{4\pi/Q_s - a/2}^{4\pi/Q_s} \cos(nN_L \varphi) d\varphi \right\} \\ &= \frac{2Q_s}{\pi} \frac{1}{nN_L} \left[\sin\left(nN_L \frac{a}{2}\right) + \sin\left(nN_L \frac{b}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

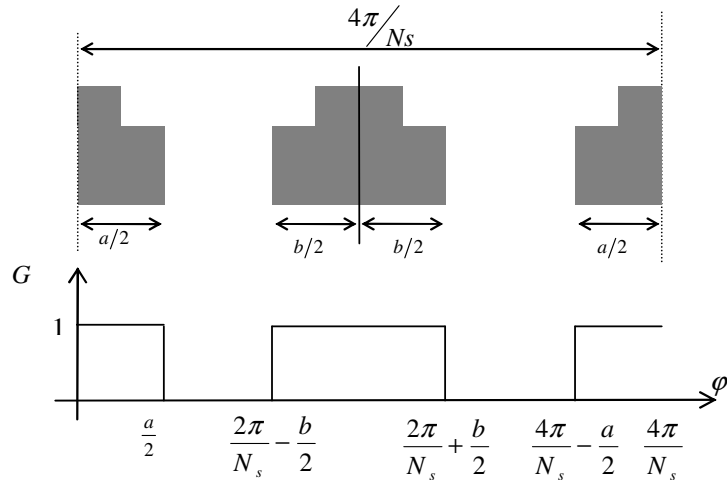


Figure II-19: Structure ayant des ouvertures dentaires différentes

D'après cette équation, on remarque que le fondamental du couple de détente peut être éliminé en choisissant une combinaison appropriée des ouvertures dentaires 'a' et 'b'.

➤ *Fraisage des dents et introduction des dents auxiliaires*

La fonction de la perméance relative de l'entrefer peut être contrôlée en fraisant des rainures à la surface des dents ou bien en introduisant des dents auxiliaires comme c'est montré dans la figure suivante.

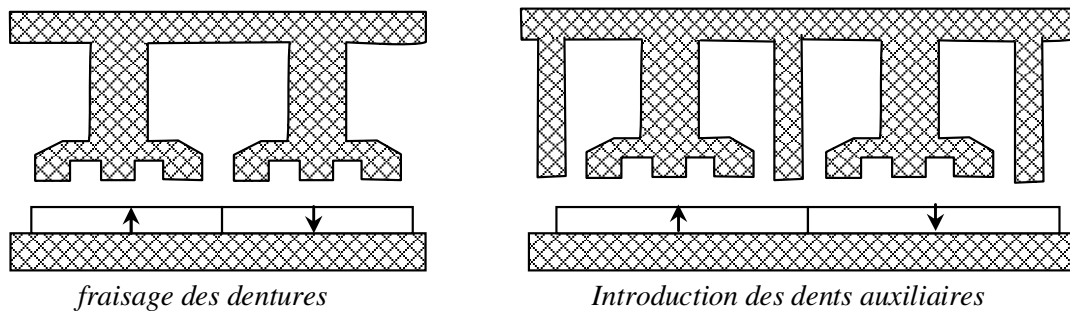


Figure II-20: Structure de stator comportant de fausses dents et des dents auxiliaires

En effet, avec une profondeur assez suffisante, les dents se comportent comme des encoches supplémentaires ce qui entraîne une augmentation de N_L et par conséquent la réduction du couple de détente.

7 Expression du couple totale développé par la machine

En se plaçant toujours dans l'hypothèse de la linéarité du circuit magnétique, l'induction totale dans l'entrefer est la superposition de l'induction créée par les aimants permanents et l'induction due aux à la réaction d'induit. En partant de ce principe, le couple totale développé

par la machine et en utilisant le tenseur de Maxwell est donnée par :

$$\Gamma(t) = \frac{P}{3\mu_0} (R_o^3 - R_i^3) \int_0^{2\pi/p} B_{\varphi T}^{(2)}(\varphi, g) B_{zT}^{(2)}(\varphi, g) d\varphi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_{\varphi T}^{(2)}(\varphi, g) = B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi, g) + B_{\varphi is}^{(2)}(\varphi, g) \\ B_{zT}^{(2)}(\varphi, g) = B_{zAP}^{(2)}(\varphi, g) + B_{z is}^{(2)}(\varphi, g) \end{cases}$$

Après calcul de l'intégrale, développement et regroupement :

$$\Gamma(t) = \frac{\pi}{3\mu_0} (R_o^3 - R_i^3) \sum_{k \neq 0} \underbrace{C_{kAP}^{(2)} F_{kAP}^{(2)} - E_{kAP}^{(2)} D_{kAP}^{(2)}}_{\text{couple de détente}} + F_{kis}^{(2)} \underbrace{\left(C_{kAP}^{(2)} + \frac{D_{kAP}^{(2)}}{T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right)} \right)}_{\text{couple principal}} - D_{kis}^{(2)} \underbrace{\left(E_{kAP}^{(2)} + \frac{F_{kAP}^{(2)}}{T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right)} \right)}_{\text{couple principal}}$$

La figure II-211 donne l'évolution du couple total dans le cas d'une machine à flux axial de 10kW tournant à 200 tr/min et pour un bobinage à pas diamétral.

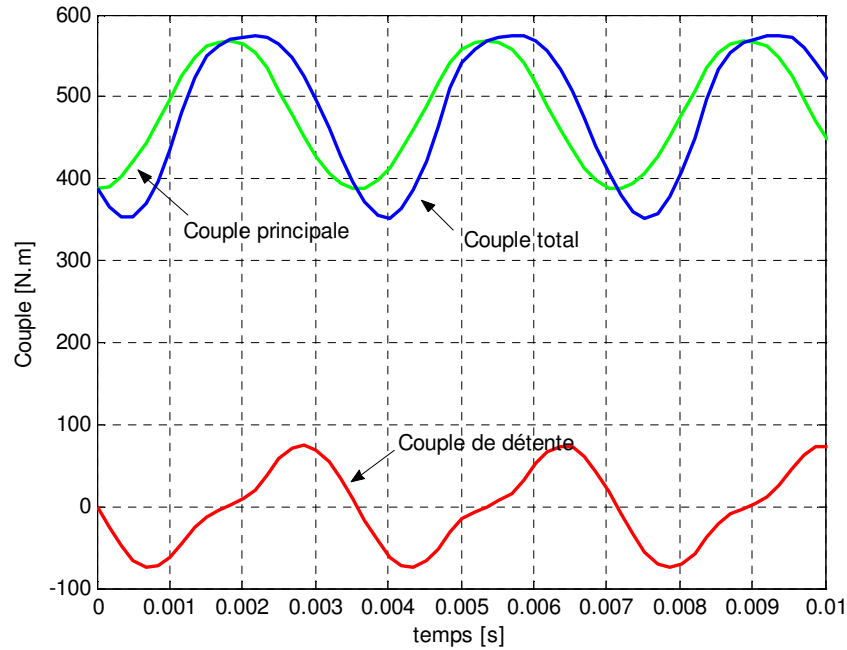


Figure II-21: Forme d'onde du couple développé par la machine

8 Equations électriques des phases statoriques

L'équation d'une phase statorique 'k' de résistance R_{sk} soumise à la tension v_{sk} et parcourue par le courant i_{sk} est la suivante:

$$v_{sk} = -R_{sk} i_{sk} - \frac{d\Phi_{SSk}}{dt} + \frac{d\Phi_{SRk}}{dt} \quad (\text{II.57})$$

Φ_{SSk} représente le flux provenant des phases statoriques y compris la phase 'k' elle-même et Φ_{SRk} est le flux envoyé par les aimants permanents.

Si on désigne par $L_{\sigma sk}$ l'inductance de fuite d'une phase statoriques k' (i.e. l'inductance de fuite des têtes des bobines et l'inductance de fuite d'encoches), L_{SSkk} l'inductance propre de la phase ' k ' et par L_{SSkn} l'inductance mutuelle entre la phase ' k ' et la phase ' n ', le flux envoyé par les enroulements statoriques à travers la phase ' k ' s'écrit:

$$\Phi_{SSk} = (L_{SSkk} + L_{\sigma sk})i_{Sk} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{n=m} L_{SSkn}i_{Sn}$$

En généralisant l'équation (II.47) à toutes les phases statoriques, l'équation du stator peut être mise sous la forme vectorielle suivante:

$$[V_S] = [e_{PM}] - \left([R_S] + \Omega \frac{d[L_{SS}]}{d\theta} \right) [I_S] - [L_{SS}] \frac{d[I_S]}{dt} \quad (\text{II.58})$$

- où: $[V_S]$ est le vecteur des tensions des phases statoriques de dimension m .
 $[e_{PM}]$ est le vecteur des forces électromotrices à vide de dimension m .
 $[I_S]$ est le vecteur des courants des phases statoriques de dimension m .
 $[R_S]$ est une matrice diagonale des résistances des phases statoriques de dimension (m,m) .
 $[L_{SS}]$ est une matrice symétrique contenant les différentes inductances de dimension (m,m) .

Modélisation du circuit électrique

Dans la plupart des systèmes éoliens, la connexion de la génératrice synchrone avec un redresseur triphasé de courant est nécessaire pour adapter la tension du bus continu avant de à une tension alternative. Dans le cas des éoliennes de petite puissance, on a souvent affaire à un redresseur à diodes comme le montre la figure II-22.

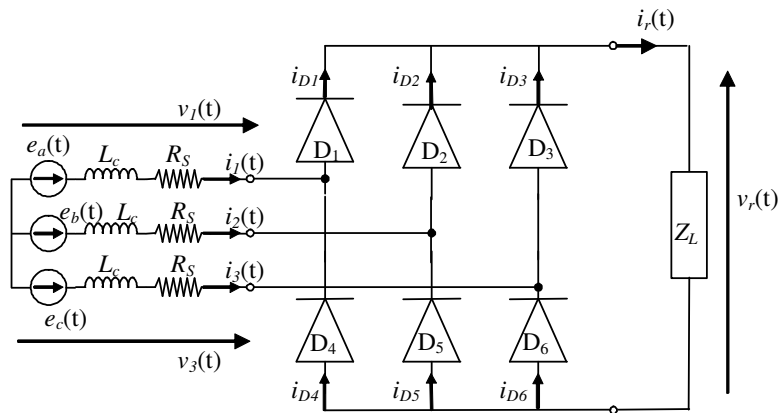


Figure II-22: Circuit électrique de la génératrice couplé avec un redresseur

Une première approche basée sur l'hypothèse du premier harmonique peut être utilisée pour déterminer le courant continu et la puissance en sortie du redresseur. Avec cette approche, on suppose que les f.é.m délivrées par la génératrice sont sinusoïdales. Ce modèle donne de bons résultats si et seulement si les courants de phase ont peu d'harmoniques. Autrement dit, ce modèle n'est valable que pour le mode de conduction triphasé ou en cas de fort empiètement. En effet, cette solution est loin de la réalité car les f.é.m ne sont pas vraiment sinusoïdales et le contenu spectral du courant de phase est pratiquement riche en harmoniques. C'est pour cette raison que nous avons décidé de travailler avec une méthode plus élaborée qui tient en compte la forme réelle des courants de phase. Cette méthode est basée sur la résolution des équations différentielles quelque soit la mode de fonctionnement du redresseur i.e. conduction à deux ou trois diodes. Ces équations permettent de déterminer l'évolution temporelle des courants de phase de la génératrice synchrone pour les différents modes de conduction. La charge Z_L représente un hacheur suivi d'une unité de stockage en parallèle avec une charge de consommation. Cette partie sera développée au quatrième chapitre.

9 Modélisation des pertes dans la machine

Les pertes dans une machine électrique peuvent être divisées en trois grandes parties :

- Les pertes dans les circuits électriques : ce sont les pertes par effet joules dans les enroulements d'induit, d'excitation et plus généralement dans les parties conductrices traversées par des courants.
- Les pertes dans le circuit magnétique : appelés aussi pertes fer qui regroupent les pertes par hystérésis et les pertes par courant de Foucault.
- Les pertes mécaniques qui prennent en compte tous les frottements dus à la rotation de la partie tournante de la machine.

Il est indéniable que la connaissance de la nature de ces pertes et leur localisation est capitale dans l'étude thermique d'une machine électrique. Elles sont la source de tout échauffement dans la machine et mal les connaître peut avoir pour conséquence de négliger un point chaud. Mieux les connaître pour les atténuer peut permettre d'améliorer le rendement ou d'optimiser économiquement les différents matériaux.

9.1 Les pertes par effet joule

L'effet Joule est un effet thermique qui se produit lors du passage du courant électrique dans un conducteur. Il se manifeste par une augmentation de l'énergie interne du conducteur et généralement de sa température. Les pertes par effet joule sont les principales pertes dans les

machines tournantes en régime permanent sauf dans certaines conditions dans le cas d'une grande vitesse de rotation par exemple, les pertes par courant de Foucault sont dominantes. Ces pertes dépendent du courant absorbé par la charge et de la température de l'enroulement. On note que dans le cas des machines à flux axial, une grande partie des pertes joule est générée par les têtes du bobinage plutôt que les conducteurs logés dans les encoches, cela est montré clairement dans la figure II-23. Ainsi, afin d'augmenter le rendement de la machine, la conception des têtes des bobines mérite une attention particulière. Comme l'excitation est assurée par des aimants permanents, les pertes joules rotoriques sont nulles et elles se situent uniquement au niveau du stator qui est formé de trois enroulements triphasés.



Figure II-23: Têtes de bobines statoriques

L'expression des pertes joule est donnée par :

$$P_j = 3R_{ph}I_{eff}^2 \quad (II.59)$$

D'autre part, la résistance des conducteurs statorique varie avec le temps en fonction de la température du cuivre. Elle varie selon la loi suivante :

$$R(T) = R(T_{ref}) \cdot (1 + \alpha(T - T_{ref}))$$

α est le coefficient de dilation thermique. Pour le cuivre, il est de l'ordre $3,9 \cdot 10^{-3}$ à 20°C .

9.2 Les pertes fer

Le calcul de pertes fer dans les machines est très complexe pour les raisons suivantes:

- ✓ la géométrie tridimensionnelle.
- ✓ le mouvement relatif des deux parties actives.
- ✓ la très forte non-linéarité de la caractéristique magnétique du matériau.

Ces pertes sont proportionnelles au volume de matériau ferromagnétique dans lequel elles prennent naissance. La réduction de ces pertes ne peut résulter que d'un bon choix de la tôle et de la géométrie. Deux types principaux de pertes sont à distinguer, les pertes par courants de

Foucault et par hystérésis. De nombreux auteurs ont proposés des différentes formulations de pertes fer [Jam 1990], [Den 1999], [Gre 2003], [Sou 2003], [Mi 2005] en régime harmonique ou en régime non sinusoïdal. Ils utilisent la formulation la plus générale en séparant les pertes par courant de Foucault et les pertes par hystérésis.

En régime sinusoïdal, les pertes fer volumiques sont exprimées par :

$$P_{fer} (W / m^3) = p_h + p_f = k_h B_m^\beta \omega_s + k_f B_m^2 \omega_s \quad (II.60)$$

où k_h , k_f , B_m , ω_s , β sont respectivement la constante des pertes par hystérésis, la constante des pertes par courant de Foucault, l'induction maximale dans le fer, la pulsation de l'induction et la constante de Steinmetz qui dépend des matériaux utilisés. En général k_h varie entre 40 et 50 et k_f varie entre 4.10^{-2} et 7.10^{-2} .

En réalité, l'induction évolue d'une façon trapézoïdale dans une dent et quasi-sinusoïdale dans la culasse statorique. Ainsi, en adoptant l'approche sinusoïdale donnée par la relation (II.60), l'erreur commise sur le calcul des pertes par courant de Foucault est de l'ordre de 60% dans les dents et 21,3% dans la culasse statorique [Mi 2001].

a) Pertes par courant de Foucault dans les dents

Les variations temporelles de flux magnétiques induisent dans les matériaux ferromagnétiques des forces électromotrices et créent ainsi des courants. Ces courants vont donc provoquer une dissipation de chaleur par effet joule. C'est pour limiter ces pertes que les parties magnétiques du rotor et du stator sont composées d'un empilement de tôles parallèles au sens du flux et isolées entre elles par un traitement de surface.

La valeur moyenne des pertes par courant de Foucault dans les dents peut être exprimée en fonction de la variation de l'induction par rapport au temps de la manière suivante :

$$P_{fdent} (W / m^3) = \frac{2k_f}{T} \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt$$

A vide, l'allure de l'induction dans les dents est quasiment trapézoïdale. L'évolution de l'induction au centre d'une dent est fonction de la position angulaire est illustrée par la figure II.20. Les travaux de Mi [Mi 2001] ont montré que l'intervalle de croissance de l'induction Δt est le temps nécessaire mis par un coté de l'aimant pour parcourir un pas d'encoche (et non pas une ouverture dentaire [Sle 1990]) à cause de l'épanouissement des lignes de champ.

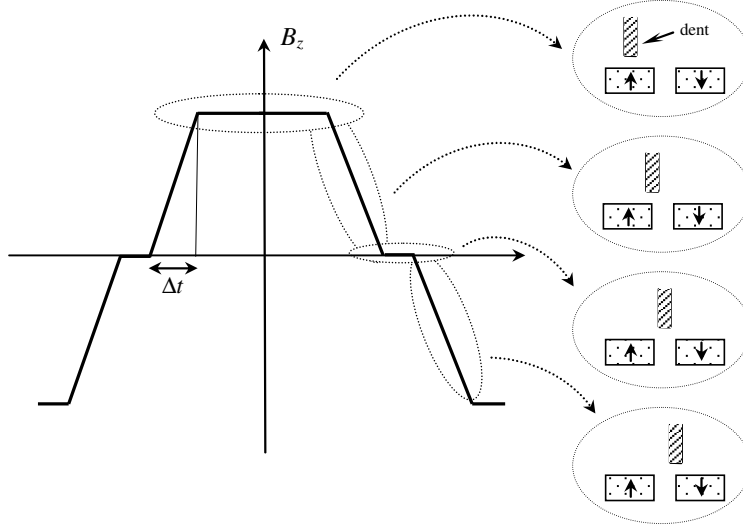


Figure II-24: Evolution de l'induction normale au centre d'une denture

En se basant sur ces observations, le temps mis pour parcourir un pas d'encoche $\Delta t = \frac{T}{2mZ}$ et

la dérivée de l'induction dans la zone linéaire peut s'exprimer par $\frac{dB}{dt} = \frac{B_{d\max}}{\Delta t}$.

Comme la zone linéaire se répète quatre fois par période, on peut exprimer la valeur efficace

de la dérivée de l'induction $\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{B_{d\max}}{\Delta t} \right)^2 4\Delta t = 8mZ (fB_{d\max})^2$.

Finalement, l'expression des pertes totales par courant de Foucault dans les dents :

$$P_{fdent} = \frac{12Z}{\pi^2} k_q k_c k_f (\omega_s B_{d\max})^2 V_{dent} N_s \quad (\text{II.61})$$

Où K_q , K_e sont des facteurs de correction [Mi 2001]. D'après (II.61), on remarque que les pertes dans les dents par courant de Foucault sont proportionnelles au nombre d'encoche/pôle/phase et au carré de la fréquence.

a.1) calcul de l'induction dans une dent

Le modèle analytique développé dans le deuxième chapitre ne permet pas de calculer la distribution de l'induction dans les régions ferromagnétiques. Par contre, on peut calculer l'induction moyenne à la base d'une dent ' l ' à la frontière avec l'entrefer par chaque position du rotor par rapport au stator. Elle est donnée par :

$$B_{il}(\theta) = \frac{1}{T_w} \int_{\varphi_l+w}^{\varphi_{l+1}} B_z^{(2)}(\varphi,0) d\varphi = \sum_{k \neq 0} \frac{2 \sin \left[kp \left(\frac{\pi}{N_s} - \frac{w_{sl}}{2} \right) \right]}{kpT_w} \begin{cases} C_k^{(2)} \sin \left[(2l+1) \frac{kp\pi}{N_s} \right] \\ E_k^{(2)} \cos \left[(2l+1) \frac{kp\pi}{N_s} \right] \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

T_w représente l'ouverture dentaire en radians.

Un exemple de l'allure de l'induction calculée à la base d'une dent est présenté par la figure II-25 pour deux valeurs différentes du coefficient d'arc polaire α_p .

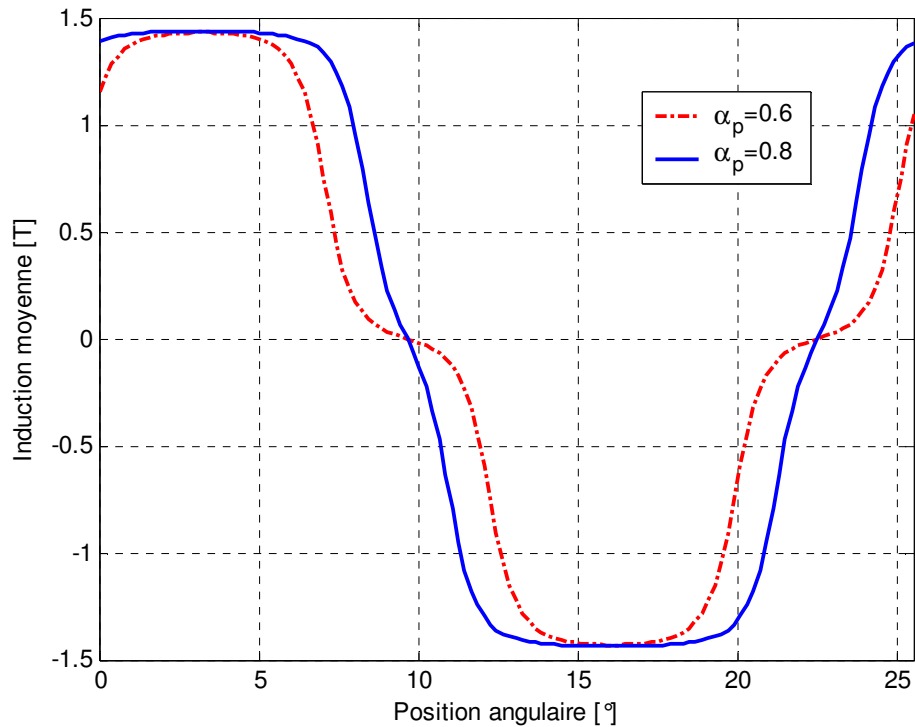


Figure II-25: Induction moyenne à la base d'une dent

Les résultats de la figure II-25 mettent en évidence l'allure trapézoïdale de l'induction au niveau des dentures. Il faut noter ici que ces pertes par courant de Foucault sont sous-estimés car on ne tient pas en compte la quantité du flux qui passe par les encoches et qui sont récoltés par le centre d'une denture.

b) Pertes par courant de Foucault dans la culasse statorique

De la manière, la forme d'onde de l'induction tangentielle dans la culasse statorique est approximé à une onde trapézoïdale. L'intervalle angulaire de croissance de l'induction (passage du plateau négatif au plateau positif) est proche de l'ouverture d'un aimant.

Dans ce cas, le temps mis pour parcourir l'ouverture d'un aimant vaut $\Delta t = \frac{\alpha\pi}{\omega_s}$ et la dérivée de

l'induction dans la zone linéaire est exprimée par $\frac{dB}{dt} = \frac{2\hat{B}_{culasse}}{\Delta t}$.

Comme la zone linéaire se répète quatre fois par période, on peut exprimer la valeur efficace

$$\text{de la dérivée de l'induction } \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{\alpha} \frac{8}{2\pi^2} \left(\omega_s \hat{B}_{culasse} \right)^2.$$

Au final, on peut exprimer les pertes dans la culasse statorique par courant de Foucault dues à

la composante tangentielle de l'induction :

$$P_{f_{culasse}} = \frac{2k_f}{T} \int_0^T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{\alpha} \frac{8}{\pi^2} k_e k_r (\omega_s \hat{B}_{culasse})^2 V_{culasse} \quad (\text{II.63})$$

D'après cette équation, on remarque aussi que les pertes par courant de Foucault dans la culasse statorique sont inversement proportionnelles au coefficient d'arc polaire α pour une vitesse de rotation donnée.

b.1) calcul de l'induction dans la culasse statorique

La figure II-26 montre un réseau de reluctance simple pour le calcul du flux dans la culasse statorique.

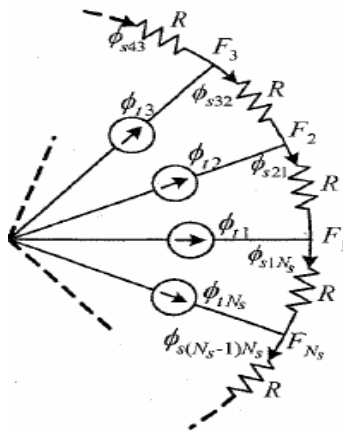


Figure II-26: Réseau de perméance pour calculer le flux dans la culasse statorique

En analysant cette figure, on peut construire le système suivant :

$$\begin{cases} \phi_{s1N_s} - \phi_{s21} - \phi_{t1} = 0 \\ \phi_{s21} - \phi_{s32} - \phi_{t2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \phi_{sN_s(N_s-1)} - \phi_{s1N} - \phi_{tN} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

Bien qu'on a ' N ' équations à ' N ' inconnus, ce système n'a pas de solution. D'autre part, en appliquant la loi de Kirchhoff à chaque nœud et en divisant par la reluctance statorique R :

$$\phi_{s21} + \phi_{s32} + \dots + \phi_{s1N} = 0 \quad (\text{II.65})$$

en utilisant ces deux dernières relations et sachant que la somme des flux des dents est nulle ($\phi_{t1} + \phi_{t2} + \dots + \phi_{tN_s} = 0$), on aboutit à la relation suivante qui permet de calculer ϕ_{s21} en fonction des autres termes du circuit :

$$\phi_{s21}(\theta) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s-1} (N_s - k) \phi_{t(k+1)}(\theta) \quad (\text{II.66})$$

Où ϕ_{ik} est le flux d'une dent ' k ' quelconque. Il est donné par : $\phi_{ik}(\theta) = \frac{R_o^2 - R_i^2}{2} T_w B_{ik}(\theta)$.

Les différents flux traversant les autres branches de la culasse statorique peuvent être calculés de la manière suivante :

$$\phi_{s(k+1)k} = \phi_{sk(k-1)} - \phi_{tk} \quad (\text{II.67})$$

La figure II.27 montre l'allure de l'induction dans une branche de la culasse statorique située au dessus d'une encoche quelconque pour deux valeurs différentes de α_p .

c) Pertes par hystérésis

Ces pertes sont directement liées à l'évolution de la structure cristalline du matériau constituant les tôles. Les variations de flux agissant sur l'orientation de Weiss constituant la matière ferromagnétique et un échauffement en résulte. Il est difficile d'évaluer exactement l'amplitude de ces pertes également dépendantes de la forme d'onde du flux. La répartition de ces pertes n'est pas uniforme, elles sont plus importantes dans les dents statoriques que dans la culasse. Elles sont calculées en utilisant la formule classique suivante :

- Pour les dents : $P_{hdent} = k_h \omega_s B_{d \max}^\beta V_{dent} N_s$
- Pour la culasse statorique : $P_{hculasse} = k_h \omega_s \hat{B}_{culasse} V_{culasse}$

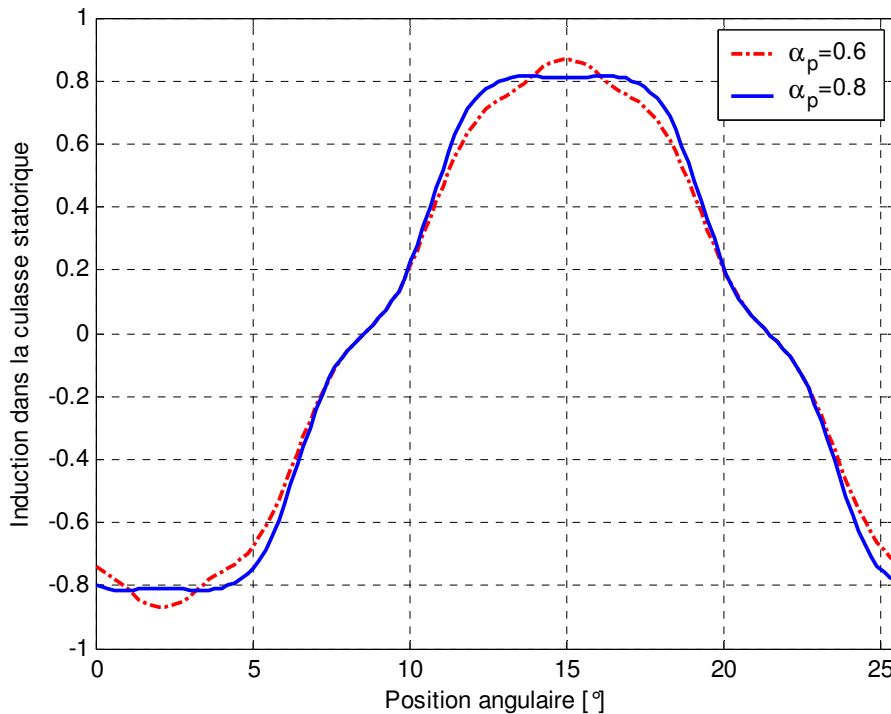


Figure II-27: Forme d'onde de l'induction dans la culasse statorique

d) Pertes fer totales

Les pertes fer totales à vide sont la somme des pertes par courant de Foucault et les pertes par hystérésis :

$$P_{fer} = P_{fdent} + P_{hdent} + P_{fculasse} + P_{hculasse} \quad (\text{II.68})$$

10 Modélisation thermique de la MSAPFA

10.1 Introduction

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier le comportement thermique et mécanique de la machine à flux axial dont nous pouvons souligner la complexité. En ce qui concerne la thermique, différentes méthodes sont utilisées. Une première consiste à résoudre les équations de la chaleur par une méthode d'éléments finis. En toute rigueur il faut travailler en 3D avec une pseudo périodicité permettant de réduire le domaine. Nous avons préféré une méthode intégrale plus familière pour les électrotechniciens qui est la méthode nodale permettant une représentation de notre modèle sous la forme d'un réseau électrique équivalent. Cette technique va nous permettre de la coupler avec un autre réseau modélisant les pertes dans la machine. La modélisation va donc consister d'une part à découper la machine en volumes finis et d'autre part à caractériser les propriétés physiques des matériaux constituant les différents organes de la machine et les liaisons qui les unissent (conduction, convection,...).

10.2 Présentation de la méthode nodale

Le principe de la méthode nodale est de discrétiser la machine en un certain nombre de volumes élémentaires tel que l'on puisse les supposer isothermes. De ce fait, il est nécessaire de posséder une connaissance a priori de la nature des phénomènes thermiques ayant lieu dans la machine modélisée en question. Ainsi nous découperons plus finement dans le sens d'un gradient thermique élevé et, à l'inverse un bloc massif ne nécessitera pas un grand nombre de nœuds. Il s'agit ensuite d'effectuer, sur chacun de ces volumes qui sont d'autant de nœuds un bilan énergétique en égalant leur taux de variation d'énergie interne à la somme algébrique des flux de chaleur apportés. Ce flux peut provenir des nœuds voisins ou d'une source de chaleur interne. Cette discrétisation spatiale conduit à un système d'équations algébro-différentielles couplées. Le taux de variation d'énergie d'un volume est le produit de la variation de son échauffement par sa capacité thermique. Le flux "hors sources" apporté par l'environnement est le produit des écarts de températures avec les nœuds voisins par les conductances. Ces couplages peuvent être modélisés un transfert de chaleur par conduction mais également par convection ou rayonnement.

Nous présentons dans la figure II-28 un exemple simple d'un cube de volume V_i de masse volumique ρ , de capacité thermique C_p , de conductivité thermique λ , de surface latérale S , et d'épaisseur e dissipant une puissance P_i lié à deux nœuds adjacents $i-1$ et $i+1$ et à l'air ambiant

de température T_0 généralement pris comme référence pour les échauffements.

Le volume ' i ' est contact avec les deux volumes voisins ' $i-1$ ' et ' $i+1$ ', les nœuds ' $i-1$ ', ' i ' et ' $i+1$ ' sont placés au milieu des volumes correspondants et les termes $G(i-1, i)$ et $G(i, i+1)$ sont des conductances de conduction. Le volume ' i ' est en contact avec l'air aussi, le nœud ' i ' est placé dans ce cas sur l'interface du volume et l'air et la conductance $G(i,0)$ sera donc convective. Les différentes conductances seront définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} G_{i-1,i} &= 2 \cdot [1/\lambda_{i-1} + 1/\lambda_i]^{-1} \cdot S/e \\ G_{i,i+1} &= 2 \cdot [1/\lambda_{i+1} + 1/\lambda_i]^{-1} \cdot S/e \\ G_{i,0} &= h \cdot S \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

λ_i et h représente respectivement la conductivité du volume élémentaire ' i ' et le coefficient d'échange convectif qui dépende de l'état de la surface d'échange, des propriétés physiques du fluide, de la température et de la vitesse. Il est souvent déterminé par expérience.

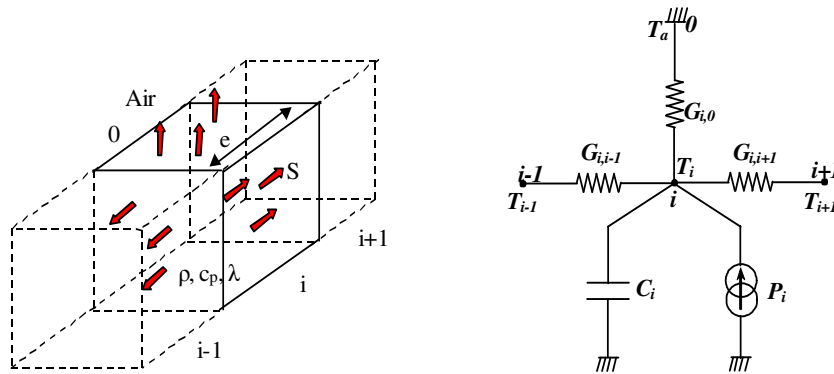


Figure III-28: Modèle élémentaire du réseau nodal pour le nœud i

Supposons qu'on considère uniquement le régime permanent et qu'on a décomposé la machine en N nœuds élémentaires. Le bilan des flux échangés et des puissances dissipées pour la zone ' i ' donne:

$$\left[\sum_{j=1}^N G(i, j) + G(i, 0) \right] T(i) - \sum_{j=1}^N G(i, j) T(j) = P(i) + G(i, 0) T_0 \quad (\text{II.70})$$

avec $G(i, j)$ la conductance de la zone ' i ' caractérisant l'échange entre les zones ' i ' et ' j ', $T(i)$ la température au nœud ' i ', $T(j)$ la température au nœud ' j ', $P(i)$ la puissance dissipée dans la zone ' i ', $G(i, a)$ la conductance thermique de convection entre la zone ' i ' avec l'air extérieur et T_0 la température de l'air extérieur. En pratique, les conductances $G(i, j)$ sont presque toutes nulles. Le terme $G(i, j)$ n'est nul que lorsque les zones ' i ' et ' j ' sont voisines.

Cette équation doit être résolue pour chaque zone ' i ', soit un système à N équations qui peut être représenté sous la forme matricielle suivante: $[G][T]=[P]$.

Etant donné la forme des conductances $G(i,j)$, la matrice $[G]$ est symétrique et s'écrit de la façon suivante:

$$\begin{pmatrix} \sum_j G(1,j)+G(1,0) & \dots & -G(1,j) & \dots & -G(1,N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G(i,1) & \dots & \sum_j G(i,j)+G(i,0) & \dots & -G(i,N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G(N,1) & \dots & -G(N,j) & \dots & \sum_j G(j,N)+G(N,0) \end{pmatrix}$$

le vecteur $[T]$ des températures inconnues et le vecteur $[P]$ des puissances, incluant la convection avec l'extérieur, s'écrivent de la manière suivante:

$$[T] = \begin{pmatrix} T(1) \\ \dots \\ T(j) \\ \dots \\ T(N) \end{pmatrix} \quad [P] = \begin{pmatrix} P(1)+G(1,0)T_0 \\ \dots \\ P(j)+G(j,0)T_0 \\ \dots \\ P(N)+G(N,0)T_0 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur de températures inconnus $[T]$, nous n'avons qu'à inverser la matrice $[G]$, et résoudre l'équation $[T] = [G]^{-1}[P]$.

10.3 Elaboration du modèle thermique de la machine à flux axial

La construction du modèle part de la décomposition de la machine en plusieurs volumes élémentaires qui doivent présenter une unité suffisante tant du point de vue géométrique que du point de vue thermo-physique et qui seront ensuite représentés par un nœud chacun.

Cette discrétisation liste les éléments principaux de la machine :

- Les tôles rotoriques
- La culasse statorique
- Le cuivre dans les encoches
- Les tête de bobines au niveau interne
- L'arbre de transmission
- L'air ambiant
- Les aimants permanents
- Les dents statoriques
- Les tête de bobines au niveau externe
- L'entrefer
- Le carter

La figure II-29 présente les différentes connections axiales et tangentielles entre les différents nœuds. La figure III-30 illustre le chemin parcouru par le flux radial de chaleur entre les nœuds.

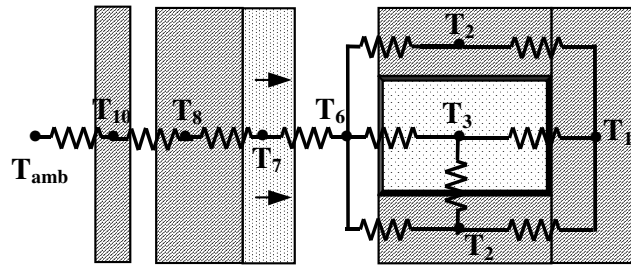


Figure III-29: Réseau de résistances représentant les flux thermiques axial et tangentiel dans la MSAPFA

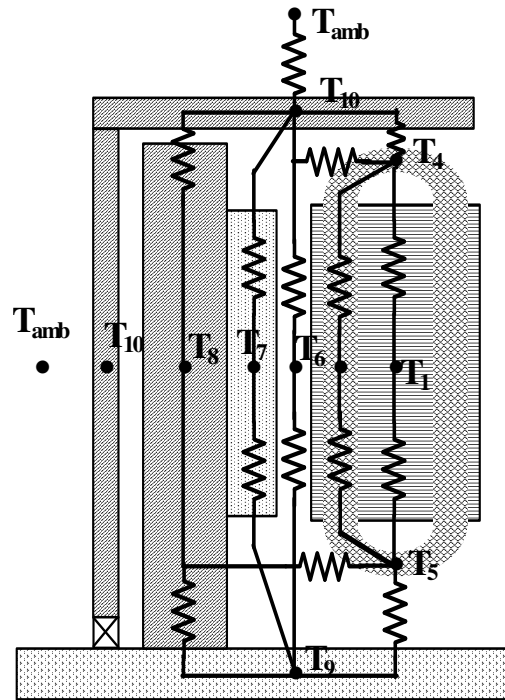


Figure III-30: Réseau de résistances thermiques représentant le flux thermique radial dans une MSAPFA

A ce stade nous allons introduire des hypothèses importantes dans notre modélisation. En considérant la symétrie géométrique, électrique et thermique de la structure à flux axial à deux étages, nous modéliserons qu'un seul étage de la machine. Nous considérons aussi que les contacts entre les éléments constitutifs de la machine est parfait. Cependant dans les assemblages, la présence des cavités interstitielles dues aux rugosités, qui vont emprisonner de l'air, des impuretés résiduelles de films d'oxydes, dont il est très difficile d'apprécier l'épaisseur et la nature exacte, peut fortement influencer les valeurs des résistances thermiques équivalentes, en induisant une résistance thermique de contact supplémentaire.

Cette résistance qui est fonction de la pression de serrage, va occasionner une chute de température dans cette région. Dans notre cas, elle apparaît prioritairement aux interfaces rotor/ aimants permanents, arbre/ rotor, bobinages/ fond d'encoches En général un calage par la mesure reste indispensable à la précision de ces grandeurs. Le calcul des différentes conductances constituant le modèle thermique dimensionnant de la machine à flux axial est donné en détail dans [Azo 2007].

11 Aspect mécanique des MSAPFA

L'étude des nuisances vibratoires produites par les efforts d'attraction entre les différents disques de la machine est élément essentiel pour le dimensionnement des machines à flux axial. En ayant à sa disposition un aspect mécanique dimensionnant, le concepteur pourra estimer le niveau de vibration et optimiser la conception de la machine dans la perspective de réduction du bruit et des vibrations. L'étude précise du comportement vibratoire des disques est très complexe. Elle est basée sur la méthode de superposition modale qui consiste à écrire les équations du mouvement qui généralement fait intervenir un opérateur d'espace traduisant le type déformation rencontrée. Ces équations peuvent être obtenues en utilisant le principe de Newton-Alembert. Après, les valeurs et vecteurs propres sont déterminées en considérant les solutions de l'équation du mouvement comme harmoniques dans le temps. Ces vecteurs propres seront ensuite utilisés comme base de projection pour découpler les équations du mouvement. Pour un système continu, la projection ne peut être obtenue par des matrices de changement de base appelées matrices modales et obtenues par le produit scalaire entre l'équation du mouvement et chacun des modes propres.

Dans ce contexte, l'équation du mouvement de flexion du disque dans l'approximation de

l'élasticité linéaire aboutit à :

$$D\nabla^4 w + \rho L_{cr} \frac{\partial^2 w(\theta, t)}{\partial t^2} = 0 .$$

Où D représente le module de rigidité en flexion, w le déplacement, L_{cr} l'épaisseur du disque, ρ sa masse volumique. Dans un système de coordonnées cylindriques, et en ne s'intéressant qu'aux vibrations tangentielles, l'équation précédente devient :

$$D \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w(\theta, t)}{\partial \theta^4} + \rho L_{cr} \frac{\partial^2 w(\theta, t)}{\partial t^2} = 0$$

Pour pouvoir résoudre cette équation, il faut lui adjoindre quatre conditions aux limites. De même, il faut lui associer deux conditions initiales pour définir le comportement dynamique.

En effet, la notion de conditions aux limites est indissociable de la notion de modes et fréquences propres. Ainsi, à des conditions aux limites différentes correspondent des modes et

fréquences propres différentes.

La solution d'une telle équation est assez complexe et peut être écrite sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions exponentielles complexes. Ces fonctions peuvent aussi être représentées par des fonctions harmoniques et hyperboliques.

Face à la complexité des calculs de cette tâche, on a préféré de travailler avec un modèle plus léger basé sur les équations proposées par le modèle de Young [You 1989] permettant de calculer la déflexion du disque rotorique en régime statique comme le montre la figure II.31.

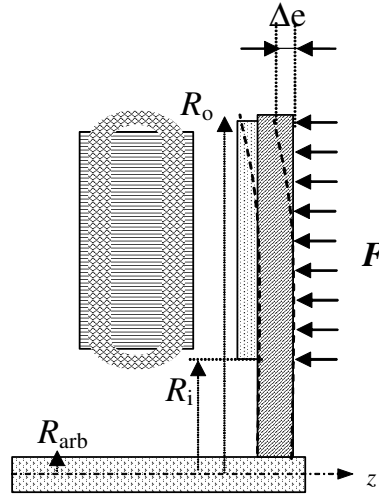


Figure II-31: Déflexion du disque rotorique due à la force d'attraction

La valeur de la déflexion du disque Δe doit être une fraction de l'entrefer. Dans les pires des cas, elle ne doit pas dépasser 10% la longueur de l'entrefer. Cette déflexion peut être calculée à partir de l'expression proposée par Young [You 1989]. Elle est donnée par :

$$\Delta e = K_{10} \frac{R_0^2 K_{11}}{K_4} + K_1 \frac{R_0^3}{K_4} K_5 - F \frac{R_0^4}{K_4} K_6 \quad (\text{II.71})$$

R_o et F représentent le rayon externe et la force d'attraction respectivement. Les différents coefficients K_i sont calculés en fonction du rayon externe, rayon interne, rayon de l'arbre de transmission, le module de l'élasticité ($2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}_2$ pour les tôles) et le coefficient de Poisson (0,3 pour les tôles magnétiques). L'expression de ces coefficients est reprise en détail dans [Par 2005].

La force d'attraction entre les deux disques peut être obtenue en utilisant le tenseur de Maxwell appliquée au disque rotorique à la surface des aimants. La force appliquée à la surface des aimants est donnée par (cf eq.II.54) :

$$d\vec{F} = \mu_0 \left[\left(\vec{H} \cdot \vec{e}_z \right) \vec{H} - \frac{H^2}{2} \vec{e}_z \right] ds = \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \left[\left(H_z^2 - H_\varphi^2 \right) \vec{e}_z \right]}_{\text{contrainte normale}} ds + \underbrace{\mu_0 \left[\left(H_\varphi H_z \right) \vec{e}_\varphi \right]}_{\text{contrainte tangentielle}} ds$$

C'est la contrainte normale qui engendre la force d'attraction axiale qui existe le disque rotorique et le disque statorique et qui tend à déformer les disques. En développant le premier terme de cette équation, la force axiale entre les disques sera donnée par :

$$F_{ax}(\theta) = \frac{\pi(R_o^2 - R_i^2)}{4\mu_0} \sum_{k \neq 0} \left([C_k^{(2)}]^2 - [D_k^{(2)}]^2 \right) + \left([E_k^{(2)}]^2 - [F_k^{(2)}]^2 \right) \quad (\text{II.73})$$

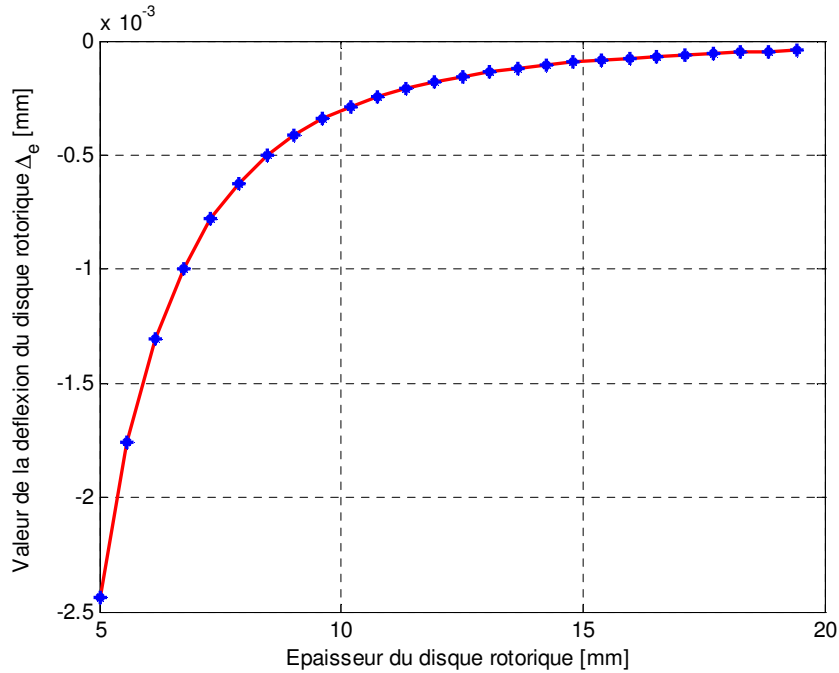


Figure II-32: Exemple de calcul de l'épaisseur du disque rotorique avec le modèle de Young

La figure II-32 montre la valeur de déflexion du disque rotorique en fonction de son épaisseur. D'après cette figure, si on souhaite que Δe ne dépasse 0.2mm, il faut choisir un disque rotorique ayant une épaisseur minimale de 15mm. La figure II-33 représente l'allure de la force d'attraction calculée avec le tenseur de Maxwell pour une machine ayant 84 encoches et 14 paires de pôles. Le rayon externe ainsi que rayon sont 0.2m et 0.145m respectivement.

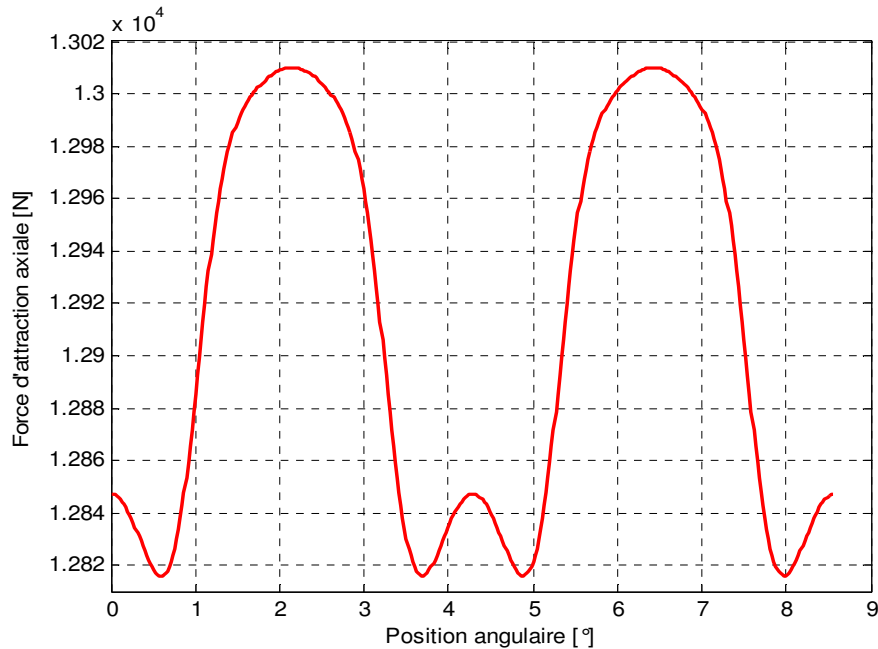


Figure II-33: Exemple de la force d'attraction entre le disque rotorique et le disque statorique

12 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre un formalisme mathématique basé sur un modèle analytique découlant de la résolution des équations de Maxwell dans la structure d'une machine à flux axial par la méthode de séparation des variables dans une optique d'optimisation. Le calcul de champ est un outil très performant qui nous permet d'évaluer les différentes composantes dans l'entrefer avec une bonne précision et un temps de calcul raisonnable. Afin de mettre en évidence l'apport de notre modèle, nous avons comparé les formes d'ondes de l'induction obtenues à l'aide de ce modèle analytique avec celles obtenues par un modèle basé sur les éléments finis. Les résultats correspondent de façon satisfaisante et nous constatons une bonne adéquation pour la forme générale. Ensuite, les expressions des performances et des grandeurs caractéristiques de la machine (f.é.m, couple, différentes inductances) sont écrites en fonction de la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer en utilisant la théorie des fonctions de bobinage.

D'autre part, nous avons étudié les différentes méthodes de calcul du couple de détente qui sont le tenseur de Maxwell et la dérivation de l'énergie. Nous avons choisi la première méthode car elle est plus précise et donne directement le couple de détente à condition qu'on ait la bonne répartition de l'induction à la surface des aimants.

Pour modéliser le circuit électrique, nous avons utilisé une méthode basée sur la résolution

des équations différentielles des courants plutôt qu'un modèle du premier harmonique car ce dernier ne permet pas d'estimer correctement les courants de la génératrice.

Afin de prendre en compte les contraintes thermiques des matériaux, un modèle analytique thermique basé sur la méthode nodale a été développé dans le but de prédire au mieux le comportement thermique de la machine. Ainsi, les expressions des températures en fonction des pertes et des paramètres géométriques de la machine ont été établies aux nœuds principaux.

Ce modèle thermique est complété par un aspect mécanique (modèle de Young) de la MSAPFA pour contrôler l'épaisseur minimale des disques rotoriques afin d'éviter une déflexion préjudiciable de la machine. Pour cette approche, la force d'attraction agissant sur les disques est calculée en appliquant la méthode du tenseur de Maxwell à la surface du disque rotorique.

Ces trois modèles analytiques vont nous permettre d'étudier et d'analyser en détail le fonctionnement de la machine. Ils sont ainsi parfaitement adaptés à une utilisation dans un processus d'optimisation. Dans le chapitre suivant, nous rappelons les différentes méthodes avec lesquelles sont traités les problèmes de dimensionnement par optimisation des machines électriques, et nous développons en détail celles que nous avons adoptées dans le cadre de ce travail.

**CHAPITRE III – PRINCIPALES METHODES D'OPTIMISATION SOUS-
CONTRAINTES UTILISEES EN GENIE ELECTRIQUE**

SOMMAIRE – Chapitre III

1	INTRODUCTION.....	115
2	OPTIMISATION MONO-OBJECTIF	117
2.1	FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME	117
2.2	MINIMUM LOCAL ET MINIMUM GLOBAL	117
2.3	PROBLEMES D’OPTIMISATION NON CONTRAINTS.....	118
2.3.1	<i>Les méthodes d’optimisation déterministes.....</i>	<i>119</i>
2.3.2	<i>Méthode d’optimisation Stochastiques.....</i>	<i>120</i>
2.4	PROBLEME D’OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES	121
2.4.1	<i>Méthodes de transformation.....</i>	<i>122</i>
2.4.1.1	<i>Méthodes de pénalités.....</i>	<i>123</i>
2.4.1.2	<i>Lagrangien augmenté.....</i>	<i>124</i>
2.4.2	<i>Les méthodes directes.....</i>	<i>124</i>
3	LES ALGORITHMES GENETIQUES.....	125
3.1	PRESENTATION	125
3.2	LES OPERATEURS	127
3.2.1	<i>L’opérateur de sélection.....</i>	<i>127</i>
3.2.2	<i>L’opérateur de croisement.....</i>	<i>127</i>
3.2.3	<i>L’opérateur de mutation.....</i>	<i>128</i>
3.3	VERS UN ALGORITHME GENETIQUE PERFORMANT : LE SYSTEME GENOCOP	129
3.3.1	<i>Type de codage adopté.....</i>	<i>129</i>
3.3.2	<i>Le mécanisme de sélection.....</i>	<i>130</i>
3.3.3	<i>Les opérateurs génétiques disponibles propres au GENOCOP.....</i>	<i>132</i>
4	OPTIMISATION MULTI-OBJECTIF	136
4.1	INTRODUCTION	136
4.2	FORMULATION GENERALE D’UN PROBLEME MULTI-OBJECTIF	137
4.3	L’APPROCHE PARETO : NOTION DE DOMINANCE	137
4.4	CLASSIFICATION DES METHODES DE SOLUTION.....	138
4.4.1	<i>Méthodes à base de transformation vers le mono-objectif.....</i>	<i>138</i>
4.4.2	<i>Méthodes basée sur l’approche Pareto</i>	<i>140</i>
4.4.2.1	<i>Le NSGA (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm)</i>	<i>140</i>
4.4.2.2	<i>Le SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm)</i>	<i>141</i>
4.4.2.3	<i>Critiques relevées sur le SPEA et amélioration : le SPEA-II.....</i>	<i>144</i>
5	IMPLEMENTATION DU CODE D’OPTIMISATION SOUS MATLAB.....	146
6	EXPERIENCES ANTERIEURES D’UTILISATION DES ALGORITHMES EVOLUTIONNISTES POUR L’OPTIMISATION DES MACHINES ELECTRIQUES.....	152
7	CONCLUSION	155

1 Introduction

On présente dans ce chapitre un état de l'art des méthodes mathématiques utilisées dans la résolution des problèmes d'optimisation. On commence par la présentation de quelques définitions nécessaires à l'application de ces méthodes, ainsi que par l'exposition de concepts de base importants, tels que la formulation mathématique d'un problème d'optimisation.

La première section est consacrée aux problèmes d'optimisation non contraints, dans laquelle seront présentées les méthodes d'optimisation les plus classiques et les plus utilisées. L'objectif ne sera ni de comparer la performance de chacune de ces méthodes, ni de montrer tous les détails concernant leur implémentation, mais plutôt de mettre en évidence les caractéristiques qu'elles ont en commun et qui nous permettent de les réunir en différents groupes.

Après, on présente les problèmes d'optimisation contraints et les méthodes utilisées pour leur résolution. Encore une fois, on ne va pas s'attacher aux détails d'implémentation et de performance de ces méthodes, mais démontrer qu'elles ont des caractéristiques en commun qui nous permettent de les réunir en différents groupes. Parmi ces méthodes, nous trouverons la *Programmation Quadratique Réursive*, le *Lagrangien Augmenté* et les méthodes de *Pénalités*.

Ensuite, on aborde le sujet des algorithmes génétiques (AG) en détail tout en précisant leurs avantages, leur champ d'application ainsi qu'une présentation d'un algorithme d'optimisation numérique fondé sur les travaux de Z. Michalewicz. Cet algorithme connu sous le nom de *GENOCOP* consiste à une programmation évolutionniste qui utilise un codage réel des paramètres et il est capable de gérer des problèmes linéaires.

Finalement, une revue des principales techniques d'optimisation des problèmes multi-objectif (PMO) sera effectuée. Parmi les algorithmes évolutionnistes multi-objectif, le NSGA-II et le SPEA-II sont les plus populaires. Ils permettent de trouver en un seul lancement l'ensemble des solutions non-dominées et ils s'appuient sur un facteur essentiel pour la réussite d'un PMO qui est l'élitisme.

Ces méthodes permettent de favoriser la recherche de solutions non-dominées tout en conservant une diversité suffisante en utilisant des techniques différentes tel que le 'crowding' et le 'clustering' pour représenter d'une manière uniforme la frontière Pareto sans détruire ses

caractéristiques. Les principales spécificités de ces algorithmes seront présentées avec une attention particulière sur le *SPEA-II* qui sera adopté dans le cadre de ce travail de thèse pour trouver des directions de conception optimales de la machine à flux axial intégrée dans une chaîne éolienne.

Le dernier paragraphe montre quelques expériences antérieures de l'utilisation des algorithmes génétiques pour résoudre les problèmes liés aux machines électriques.

2 Optimisation mono-objectif

2.1 Formulation mathématique du problème

Un problème d'optimisation de dimension n peut être écrit de façon générale sous la forme suivante :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \in R^n \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, q \\ x_{kmin} \leq x_k \leq x_{kmax} & k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

$f(x)$ est le critère à minimiser (ou à maximiser) appelé aussi *fonction objectif*.

x est un vecteur à n variables x_k qui représentent les *paramètres* du problème à optimisation.

$g_i(x)$ et $h_j(x)$ représentent respectivement les *contraintes d'inégalités* et *d'égalités*.

x_{kmin} et x_{kmax} désignent le domaine de *variation* de chaque *variable*.

R^n est l'*espace de recherche* borné par les contraintes de domaine.

La solution d'un problème d'optimisation est alors donnée par un ensemble de paramètres x^* pour lesquels la fonction objectif présente une valeur minimale (ou maximale) tout en respectant les contraintes d'égalités, d'inégalités et de domaine.

2.2 Minimum Local et Minimum Global

Un point x^* de l'espace de recherche R^n représente un *minimum local* ou *optimum local*, s'il existe un voisinage de x^* noté $V(x^*)$, tel que :

$$\forall x \in V(x^*) \quad f(x) \geq f(x^*) \quad (\text{III.2})$$

cette relation signifie que dans le voisinage de x^* , défini par un ε , il existe aucun point pour lequel $f(x)$ est inférieure à $f(x^*)$.

Un point x^* de l'espace de recherche R^n est un *minimum global* ou *optimum global*,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geq f(x^*) \quad (\text{III.3})$$

Nous pouvons aussi dire que le minimum global est le plus petit minimum local de l'espace de recherche, comme le montre la figure III.1.

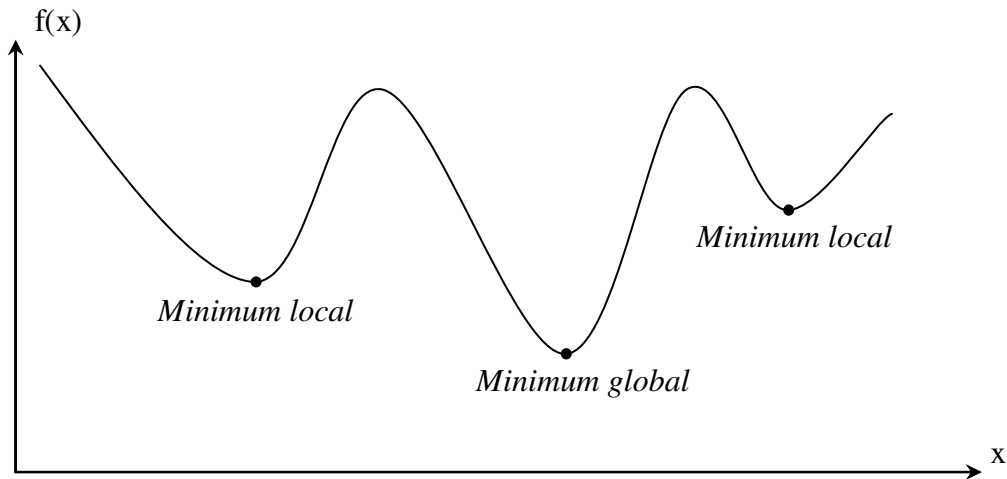


Figure III.1 : Représentation du minimum local et global d'une fonction

Lorsque la fonction ne contient qu'un minimum local, elle est dite *unimodale*. Dans le cas contraire, elle est dénommée *multimodale*.

2.3 Problèmes d'optimisation Non Contraints

Un problème d'optimisation est dit *non contraint* s'il ne contient pas de fonction contrainte, c'est-à-dire, si les fonctions $g_i(x)$ et $h_j(x)$ du problème (III.1) ne sont pas définies.

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) \in \mathbb{R}^n \\ x_{kmin} \leq x_k \leq x_{kmax} \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Une *condition nécessaire* pour que x^* soit minimum local d'un problème non contraint est

$$\text{donné par : } \begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \\ H(x^*) \text{ non négative} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

où ∇f est le gradient de la fonction objectif et $H = \nabla^2 f$ est la matrice de dérivées partielles de f qualifiée de *Hessien*.

Dans la pratique, nous classifions les problèmes d'optimisation non contraints selon la nature mathématique de la fonction objectif. Celle-ci peut être unidimensionnelle ou multidimensionnelle, continue ou discontinue, linéaire ou non linéaire, convexe ou non convexe, différentiable ou non différentiable.

Selon les caractéristiques du problème d'optimisation non contraint, nous pouvons appliquer différentes méthodes de résolution pour identifier sa solution. Ces méthodes sont séparées en deux grands groupes : les *méthodes déterministes* et les *méthodes stochastiques*.

2.3.1 Les méthodes d'optimisation déterministes

Une méthode d'optimisation est dite déterministe lorsque son évolution vers la solution du problème est toujours la même pour un même contexte initial donné, ne laissant aucune place au hasard. Ce sont en général des méthodes efficaces, peu coûteuses, mais qui nécessitent une configuration initiale (point de départ) pour résoudre le problème. Ce sont souvent *des méthodes locales*, c'est-à-dire qu'elles convergent vers l'optimum *le plus proche* du point de départ, qu'il soit local ou global.

Selon la dimension de la fonction à optimiser, les méthodes déterministes peuvent être classifiées en *unidimensionnelles* ou *multidimensionnelles*.

Ces dernières peuvent être classées selon l'utilisation de l'information des dérivées de la fonction objectif par rapport aux paramètres x_k . Elles sont dites *directes* ou *d'ordre 0* si elles n'utilisent que l'information de la valeur de la fonction elle-même. Dans le cas où elles nécessitent aussi le calcul du gradient de la fonction, elles sont dites *indirectes* ou *d'ordre 1*.

Les méthodes d'ordre 0 sont en général peu précises et convergent très lentement vers l'optimum. En revanche, elles offrent l'avantage de se passer du calcul du gradient, ce qui peut être intéressant lorsque la fonction n'est pas différentiable ou lorsque le calcul de son gradient représente un coût important.

Les méthodes d'ordre 1 permettent d'accélérer la localisation du point d'optimisation, une fois que le gradient donne l'information sur la direction de recherche de la solution. Par contre, elles sont applicables uniquement aux problèmes où la fonction est continûment différentiable.

Nous pouvons diviser les méthodes multidimensionnelles qu'elles soient directes ou indirectes, en deux différents groupes : les méthodes *analytiques* (ou *de descente*) et les méthodes *heuristiques* (ou *géométriques*).

Les méthodes analytiques se basent sur la connaissance d'une direction de recherche souvent donnée par le gradient de la fonction. La plupart de ces méthodes sont d'ordre 1 et exécutent

des minimisations linéaires successives en faisant appel à des méthodes unidimensionnelles. Les exemples les plus significatifs de méthodes analytiques sont la méthode de la *Plus Grande Pente* [Cul 1994], le *Gradient Conjugué* [Fle 1987], la méthode de *Powell* [Pow 1965] et les méthodes *Quasi-Newtonienne*.

Les méthodes heuristiques explorent l'espace par essais successifs en recherchant les directions les plus favorables. A l'opposé des méthodes analytiques, la plupart de ces méthodes sont d'ordre 0. Les implémentations de méthodes géométriques les plus souvent utilisées sont celles de la méthode du *Simplex* [Nel 1965], la méthode de *Rosenbrock* [Ros 1996] et la méthode de variations locales de *Hooke et Jeeves* [Che 1999].

La figure suivante montre les méthodes multidimensionnelles les plus importantes avec leur ordre respectif de résolution.

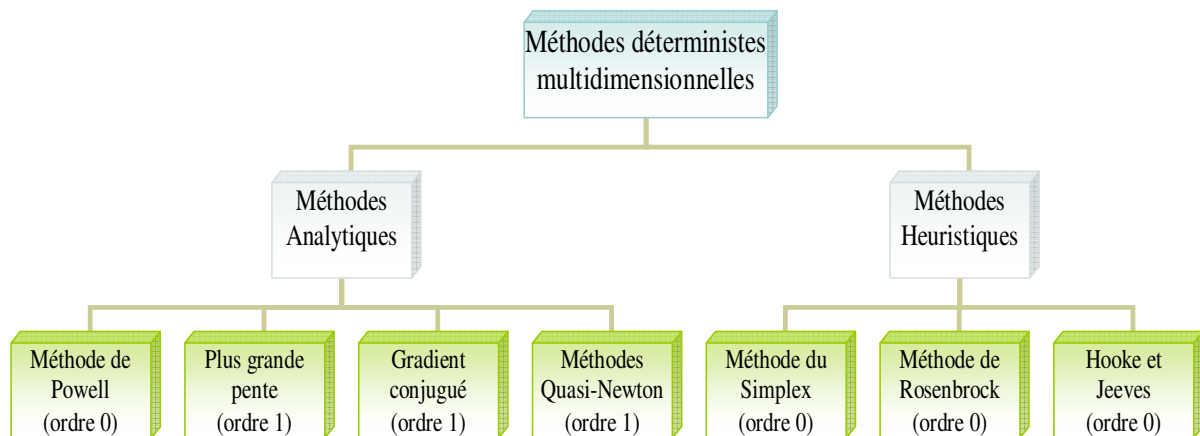


Figure III-2: Principales méthodes déterministes multidimensionnelles

2.3.2 Méthode d'optimisation Stochastiques

Les méthodes d'optimisation stochastiques s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires. Cette caractéristique indique que plusieurs exécutions successives de ces méthodes peuvent conduire à des résultats différents pour une même configuration initiale d'un problème d'optimisation.

Ces méthodes ont une grande capacité de trouver l'optimum global du problème. Contrairement à la plupart des méthodes déterministes, elles ne nécessitent ni de point de départ, ni la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations avant d'arriver à la solution du problème.

Parmi les méthodes stochastiques les plus employées (fig. III-3), nous distinguons le *Recuit Simulé* [Kir 1983], la *Recherche Tabou* [Hu 1992] et les *Méthodes Évolutionnistes*. Ces derniers regroupent différents algorithmes basés sur le même principe d'exploration de l'espace de recherche en utilisant un ensemble de solutions et pas seulement une solution unique. Comme représentantes des méthodes évolutionnistes, nous avons les *Algorithmes Génétiques* [Hol 1975], [Dej 1975], [Gol 1989], [Mic 1994], les *Stratégies d'Evolution*, la *Programmation Evolutionnistes* [Fog 1994] et la *Programmation Génétique* [Koz 1992].

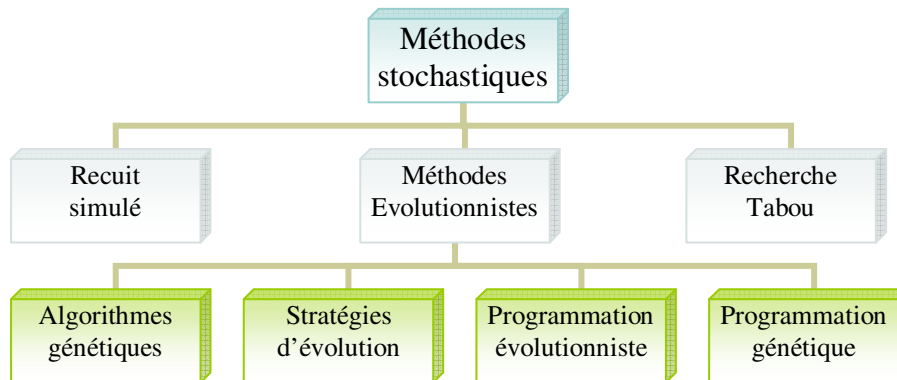


Figure III-3: Présentation principales méthodes stochastiques

2.4 Problème d'optimisation sous contraintes

Un problème d'optimisation est dit *Contraint* s'il contient au moins une fonction contrainte $g_i(x)$ ou $h_j(x)$ dans sa description.

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) \in \mathbb{R}^n \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, q \\ x_{Kmin} \leq x_K \leq x_{Kmax} & k = 1, \dots, n \end{cases}$$

Si on remplace chaque contrainte égalité par deux contraintes inégalités (i.g. $h_j(x) = 0 \Rightarrow h_j(x) \leq 0$ et $-h_j(x) \leq 0$), le problème précédent s'écrit de la façon suivante :

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) \in \mathbb{R}^n \\ g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m = p + 2q \\ x_{Kmin} \leq x_K \leq x_{Kmax} & k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

On appelle *fonction de Lagrange* associée au problème (III.6) la fonction :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

Les coefficients λ_i sont appelés les Multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$.

Une condition nécessaire pour que x^* soit un optimal d'un problème contraint est donnée par les équations de Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

L'existence de fonctions contraintes dans un problème d'optimisation demande une attention spéciale à la résolution du problème, car une solution minimise la fonction objectif ne sera valable que dans le cas où elle respecte aussi les contraintes existantes.

L'ensemble de régions de l'espace de recherche où les contraintes sont vérifiées est dénommé espace réalisable. Inversement, l'espace irréalisable désigne l'ensemble de régions de l'espace de recherche où les contraintes sont violées.

La solution d'un problème contraint peut être obtenue à partir de l'application de méthodes qui peuvent être classés en deux grands groupes : les *Méthodes de transformation* et les *Méthodes directes*.

2.4.1 Méthodes de transformation

Les méthodes de transformation ou méthodes indirectes représentent une famille de méthodes qui transforment le problème original avec contraintes en un sous-problème équivalent sans contraintes, en ajoutant les contraintes dans la fonction à optimiser.

Une fois que le problème est créé, un algorithme classique d'optimisation sans contrainte est appliqué sur lui de façon à trouver une solution qui sera utilisée pour l'actualiser. Ce processus de façon itérative jusqu'au moment où le critère de convergence est vérifié.

Parmi les méthodes de transformation les plus classiques, on distingue les *méthodes de pénalités*, la *méthode du Lagrangien augmenté*, la *méthode de variables mixtes* et la *méthode des asymptotes mobiles*. Ceci est montré par la figure III-4.

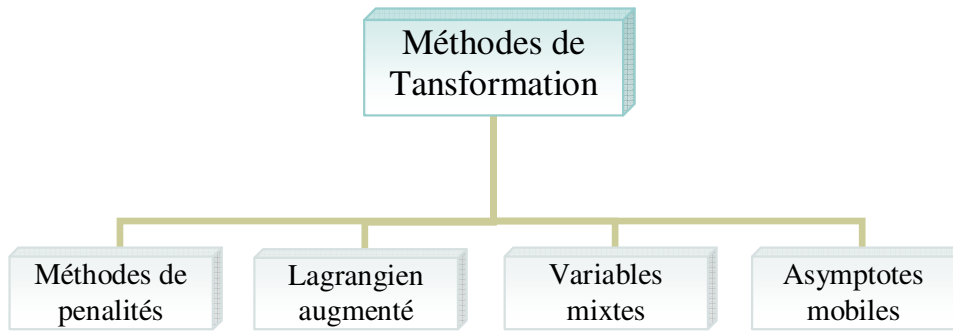


Figure III-4: Principales méthodes de transformation

2.4.1.1 Méthodes de pénalités

Ces méthodes sont souvent utilisées dans l'optimisation de problèmes contraints car elles sont assez simples. L'idée est de remplacer la résolution du problème avec contraintes par une suite de résolution des problèmes sans contraintes en introduisant dans la fonction objectif une pénalisation concernant chacune des contraintes violées comme suit [Mor 2002]:

$$eval(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{si } \bar{x} \in F \\ f(\bar{x}) + p(\bar{x}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Où $p(\bar{x})$ représente le terme de pénalités. Si aucune violation n'aura lieu, $p(\bar{x})$ sera fixé à zéro, dans le cas contraire il est un réel positif.

Selon la nature de la fonction de pénalités, les méthodes peuvent être divisées en deux classes : les *méthodes de pénalités intérieures* et *méthodes de pénalités extérieures*.

Pour un AG, les méthodes extérieures sont plus utilisées car elles ne présentent pas l'inconvénient d'avoir besoin d'un point initial qui soit à l'intérieur du domaine réalisable, ce qui n'est pas toujours facile à obtenir [Yen 2005]. La formulation générale de cette méthode est donnée par la formule suivante :

$$\Phi(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^q r_i G_i + \sum_{j=q+1}^m c_j L_j \quad (\text{III.10})$$

Où $\Phi(\bar{x})$ sera la nouvelle fonction objectif à optimiser. r_i, c_j sont les paramètres de pénalité tandis que G_i, L_j sont les contraintes $g_i(\bar{x})$ et $h_j(\bar{x})$ respectivement donnés par :

$$\begin{cases} G_i = \max[0, g_i(\bar{x})]^\beta \\ L_j = |h_j(\bar{x})|^\gamma \end{cases}$$

Souvent β et γ sont pris entre 1 et 2.

2.4.1.2 Lagrangien augmenté

Comme les paramètres de pénalité sont inconnus à priori pour les méthodes de pénalité, une bonne connaissance du problème et plusieurs essais numériques sont nécessaires afin de bien choisir ces paramètres et que la mise à jour de l'algorithme soit correcte.

Pour contourner ce problème, la méthode du Lagrangien augmenté s'avère une bonne alternative. Cette méthode a été initiée par Powell en 1969 pour le traitement des problèmes avec des contraintes du type égalité puis développée par Fletcher en 1975 pour tenir en compte les contraintes non-linéaires aussi. Elle est basée sur la minimisation d'une fonction L appelée fonction de Lagrangienne augmentée. Cette fonction est créée à partir de l'addition d'une pénalisation qui est donnée par la formule suivante [Hoj 1994] :

$$L(x, \lambda, r) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + r \sum_{i=1}^m g_i^2(x) \quad (\text{III.11})$$

Où $r \sum_{i=1}^m g_i^2(x)$ représente la fonction de pénalité et λ_i est le multiplicateur de Lagrange.

2.4.2 Les méthodes directes

Les méthodes directes ou primales sont des méthodes qui travaillent directement avec le problème contraint original. Ces méthodes sont capables de trouver une solution soit à partir d'une suite de minimisations unidirectionnelles, soit en remplaçant le problème original par une suite de sous-problèmes approchés.

Il existe plusieurs méthodes directes parmi lesquelles on cite : *la programmation quadratique récursive, la méthode de l'ellipsoïde, la méthode des directions admissibles, la méthode de gradient recuit et la méthode du gradient projeté.*

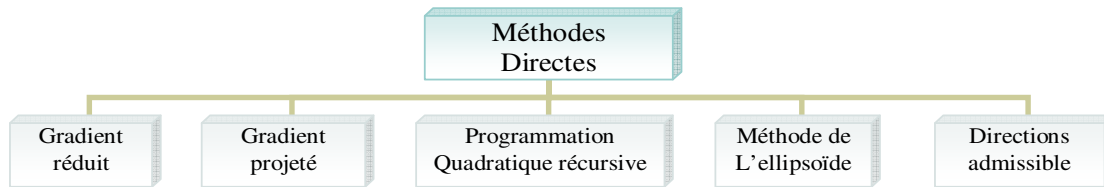


Figure III-5: Les principales méthodes directes

3 Les Algorithmes Génétiques

3.1 Présentation

Les algorithmes génétiques (AGs) sont des algorithmes d'optimisation stochastiques fondés sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique. Leur fonctionnement est extrêmement simple. On part avec une population de solutions potentielles (chromosomes) initiales arbitrairement choisies. On évalue leur performance relative i.e. leur valeur d'adaptation. Sur la base de ces performances on crée une nouvelle population de solutions potentielles en utilisant des opérateurs évolutionnaires simples : la sélection, le croisement et la mutation. Plusieurs critères d'arrêt de l'algorithme sont possibles : le nombre de générations peut être fixé à priori ou l'algorithme s'arrête lorsque la population n'évolue plus suffisamment rapidement. Le principe général d'un algorithme génétique classique est donnée par la figure III-6.

Les AGs ont été initialement développés par John Holland en 1975. C'est au livre de Goldberg en 1989 que nous devons leur popularisation. Leurs champs d'application est très vaste. Outre que l'Electrotechnique, ils sont utilisés pour optimiser des problèmes en acoustique [Sat 2002], Astronomie [Cha 1995], génie aérospatial [Wil 2001] et beaucoup d'autres domaines comme la théorie des jeux, les mathématiques appliquées, la chimie, la robotique, etc.

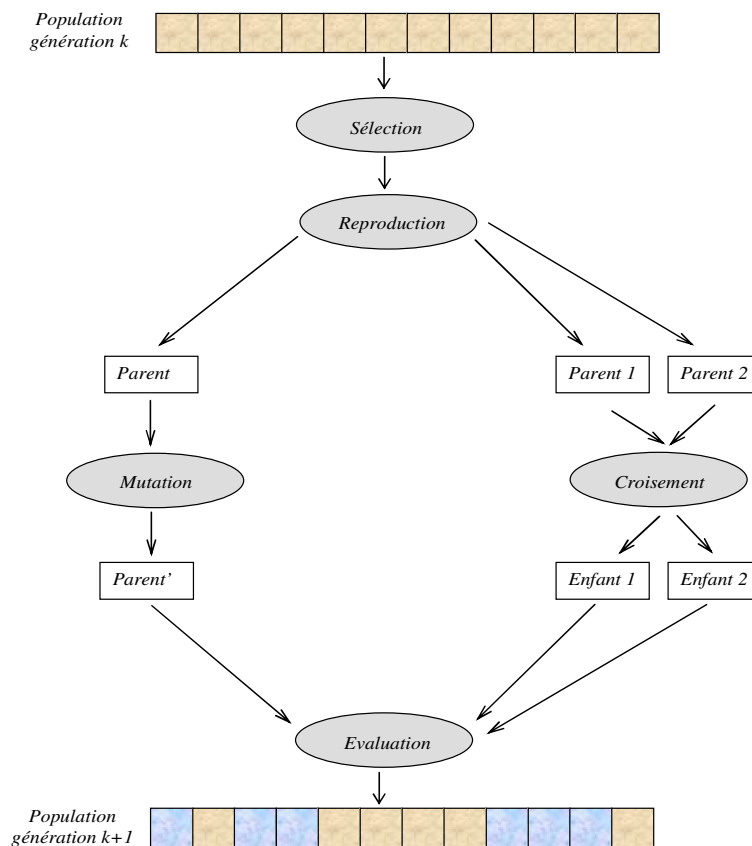


Figure III-6: Principe général d'un algorithme génétique

La raison de ce grand nombre d'application est claire : simplicité et efficacité. Pour résumer, quatre points principaux distinguent les AGs par rapport aux autres méthodes :

- ✓ Les AGs utilisent un codage des paramètres, et non pas les paramètres eux-mêmes.
- ✓ Ils travaillent sur une population de points, au lieu d'un point unique.
- ✓ Ils n'utilisent que les valeurs de la fonction étudiée, aucune autre information n'est nécessaire.
- ✓ Ils utilisent des règles de transition probabilistes et non déterministes.

La simplicité de leurs mécanismes, la facilité de leur mise en œuvre et leur efficacité même pour des problèmes complexes ont conduit à un nombre croissants de travaux en sciences pour l'ingénieur ces dernières années.

Le reproche que l'on pouvait leur faire jusqu'à présent est de consommer un temps de calcul assez important mais l'arrivée des micro-ordinateurs surpuissants et des possibilités de traitement parallèle les rend compétitifs en termes de rapidité.

3.2 Les opérateurs

Les opérateurs jouent un rôle essentiel dans la réussite d'un AG. Les trois principaux sont : l'opérateur de sélection, de croisement et de mutation.

3.2.1 L'opérateur de sélection

Cet opérateur est peut être le plus important puisqu'il permet aux individus de survivre, de se reproduire ou de mourir. D'une manière générale, la probabilité d'un individu de survie est directement reliée à sa valeur d'adaptation au sein de la population.

Il existe plusieurs méthodes de reproduction. La méthode la plus connue est la roue de loterie biaisée de Goldberg. Ici, chaque individu sera dupliqué dans une nouvelle population proportionnellement à sa valeur d'adaptation. On effectue autant de tirage qu'il y a des individus dans la population. Ainsi, la d'adaptation d'un individu particulier étant $f(c_i)$, la probabilité avec laquelle il sera réintroduite dans la nouvelle population de taille N est :

$$\frac{f(c_i)}{\sum_{j=1}^N f(c_j)}$$

Les individus ayant une grande valeur d'adaptation ont donc plus de chance d'être sélectionnés. On parle alors de la sélection proportionnelle.

L'inconvénient majeur de cette méthode repose sur le fait qu'un individu n'étant pas forcément le meilleur peut tout de même dominer la sélection. Elle peut aussi engendrer une perte de diversité par la dominance d'un super individu. Un autre inconvénient est sa faible performance vers la fin quand l'ensemble des individus se ressemblent.

Evidement, il existe autres méthodes de sélection comme par la méthode de sélection de Baker et la méthode du tournoi. Cette dernière consiste à tirer deux individus aléatoirement dans la population et on reproduit le meilleur des deux dans la nouvelle population. On refait cette procédure jusqu'à ce que la nouvelle population soit complète.

3.2.2 L'opérateur de croisement

Cet opérateur permet la création de nouveaux individus selon processus simple. Il permet l'échange d'information entre les individus. Ceci est illustré par la figure III-7. Tout

d'abord, deux individus, qui forment alors un couple, sont tirés au sein de la nouvelle population issue de la reproduction. Puis un site de croisement est choisi aléatoirement et les segments finaux des deux parents sont alors échangés autour de ce site.

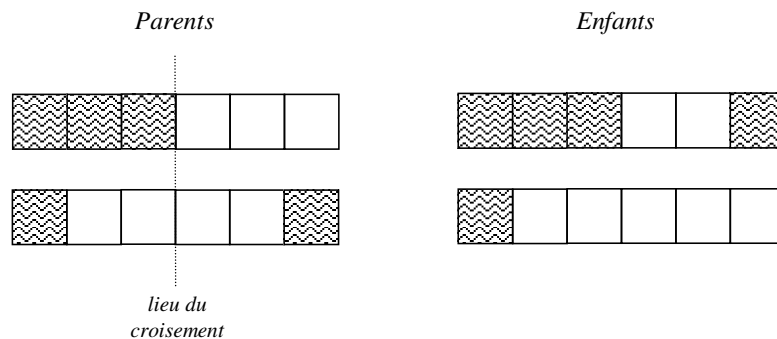


Figure III-7: le processus du croisement dans un AG

Quoi qu'il en soit, il se peut que l'action conjointe de la sélection et du croisement soit insuffisante pour la réussite de l'AG. Ainsi, dans le cas d'un codage réel, une telle situation peut arriver si en utilisant un opérateur simple de croisement, il se trouvait qu'initialement toute la population soit comprise entre 0 et 40 et que la valeur optimale était de 50. Toutes les combinaisons convexes possibles de chiffres appartenant à l'intervalle $[0,40]$ ne permettent jamais d'aboutir à un chiffre de 50. C'est pour remédier entre autre à ce problème que l'opérateur de mutation a été créé.

3.2.3 L'opérateur de mutation

Le rôle cet opérateur est modifier aléatoirement la valeur d'un composant de l'individu. Ceci est illustré par la figure suivante.

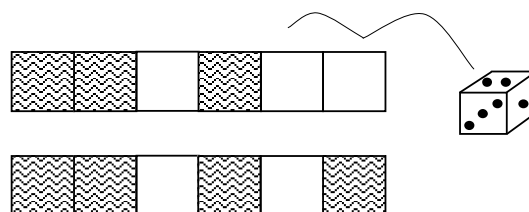


Figure III-8: Mutation du composant d'un individu

Tout comme plusieurs lieux de croisement peuvent être possibles, nous pouvons très bien admettre qu'une chaîne puisse subir plusieurs mutations. La mutation est traditionnellement considérée comme un opérateur marginal bien qu'elle confère en quelque sorte aux AGs la propriété d'ergodicité. Cet opérateur est donc d'une grande importance. Il a de fait un double

rôle : celui d'effectuer une recherche locale et/ou de sortir d'une trappe.

3.3 Vers un algorithme génétique performant : le système GENOCOP

Le code génétique GENOCOP (Genetic Algorithm for Numerical Optimization for Constrained Problems) est un algorithme d'optimisation applicable à des problèmes purement linéaires [Mic 1994]. Le GENOCOP est un AG de la classe programmation évolutionniste qui utilise un codage réel des paramètres. Il fonctionne néanmoins correctement sur les problèmes combinatoires. L'avantage majeur du GENOCOP réside dans la façon dont il gère ses contraintes [Mic 1996]. Aucune méthode de transformation (méthode des pénalités ou lagrangien) ou méthode directe n'est nécessaire. Les contraintes sont uniquement gérées par des opérateurs spéciaux qui assurent toujours l'engendrement des individus faisables.

3.3.1 Type de codage adopté

Dans son ouvrage, [Ren 1995] propose une version des algorithmes génétiques appelée "*Algorithmes génétiques codés réels*". Ceux-ci semblent être mieux adaptés aux besoins et aux pratiques industrielles pour la résolution des problèmes réels.

Il a comparé deux types de codage (le codage binaire et le codage réel) et conclut que les algorithmes codés réels sont bien adaptés à l'optimisation des problèmes industriels réels.

[Des 1996] fait aussi une comparaison entre ces deux types de codage. Il note que l'efficacité de l'algorithme et son pouvoir d'invention sont directement liés au codage. La principale différence entre les deux codages se fait sentir au moment du croisement : un codage binaire présente un nombre de *sites de croisement* beaucoup plus important qu'un codage réel.

Encore une fois, deux écoles s'opposent avec des arguments solides, mais il est difficile de faire un choix. Le choix pertinent et scientifique du codage d'un problème d'optimisation par un algorithme génétique semble donc être une piste de recherche à explorer.

En ce qui concerne le *GENOCOP*, les concepteurs ont choisi de travailler avec un codage réel des paramètres avec toutes réserves émises par [Des 1996]. Tous les opérateurs de recombinaison utilisés dans cet algorithme sont conçus pour cet effet et ne sont pas applicables en aucun cas sur des problèmes utilisant le codage binaire.

3.3.2 Le mécanisme de sélection

Pour éviter qu'un individu trop parfait ne constitue presque exclusivement la génération suivante, et afin de préserver une certaine diversité dans la population, on peut décider de ne sélectionner qu'une partie de la population en fonction d'un taux de sélection.

Le mécanisme de sélection joue un rôle essentiel pour la réussite du *GENOCOP*. Elle est basée sur la méthode de sélection proposée par Baker (fig. III-9). La sélection s'opère comme suit :

1. On sélectionne N_{pa} individus (les parents) qui vont subir l'opération de recombinaison.
2. On applique les opérateurs génétiques sur les N_{pa} parents.
3. les individus engendrés viennent de compléter la nouvelle génération.

Le nombre N_{pa} est déterminé par l'utilisateur qui choisit respectivement pour chaque opérateur génétique qui à chaque génération le subira. Ici, chaque individu est sélectionné par rapport à son rang dans la population (après classement) et non pas par rapport à sa valeur d'adaptation afin d'éviter la convergence prématurée comme dans le cas de la roulette du casino par exemple.

Dans un premier temps, on calcule la probabilité de survie de chaque individu ayant un rang ' i ' donnée par la forme non-linéaire suivante : $prob(i) = \frac{q(1-q)^{(i-1)}}{1-(1-q)^{pop_size}}$. ($i=1$ pour le meilleur individu, $i = N$ pour le pire individu).

q est un paramètre défini par l'utilisateur qui contrôle la pression de sélection. Une valeur élevée de q fournit une pression sélective plus forte ($q=0,1$ est une valeur très raisonnable pour une population de 70 individus).

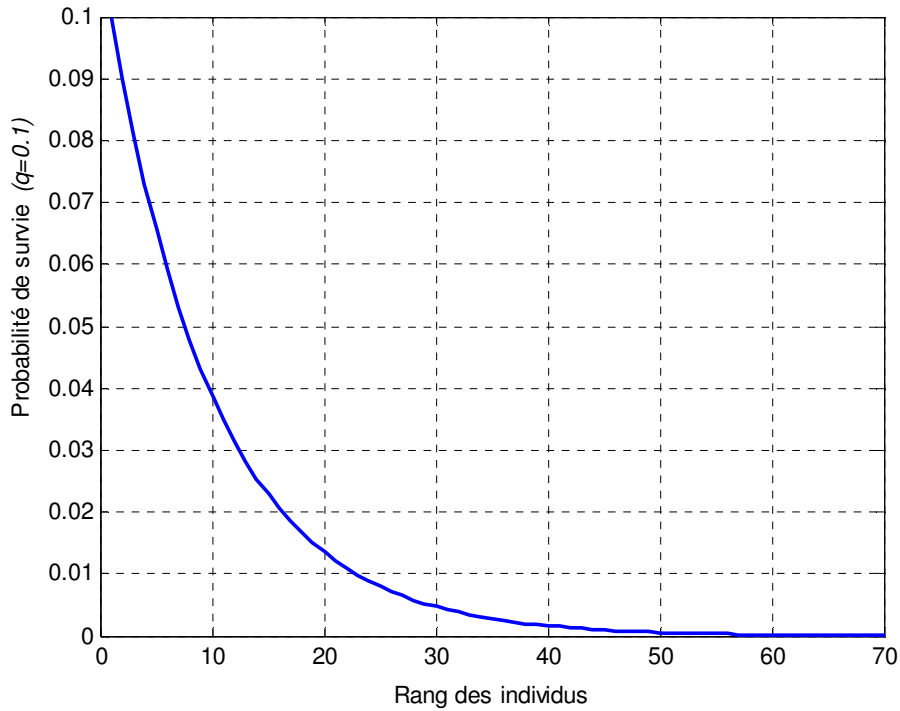


Figure III-9: Probabilité de survie des individus selon la méthode de Baker

Après, on calcule la probabilité cumulative de chaque individu à partir de la probabilité de survie. Elle est donnée par : $prob_cum(i) = prob_cum(i-1) + prob_survie(i)$.

La probabilité cumulative est illustrée par la figure III-10. Cas d'une population de 70 individus et $q=0,1$.

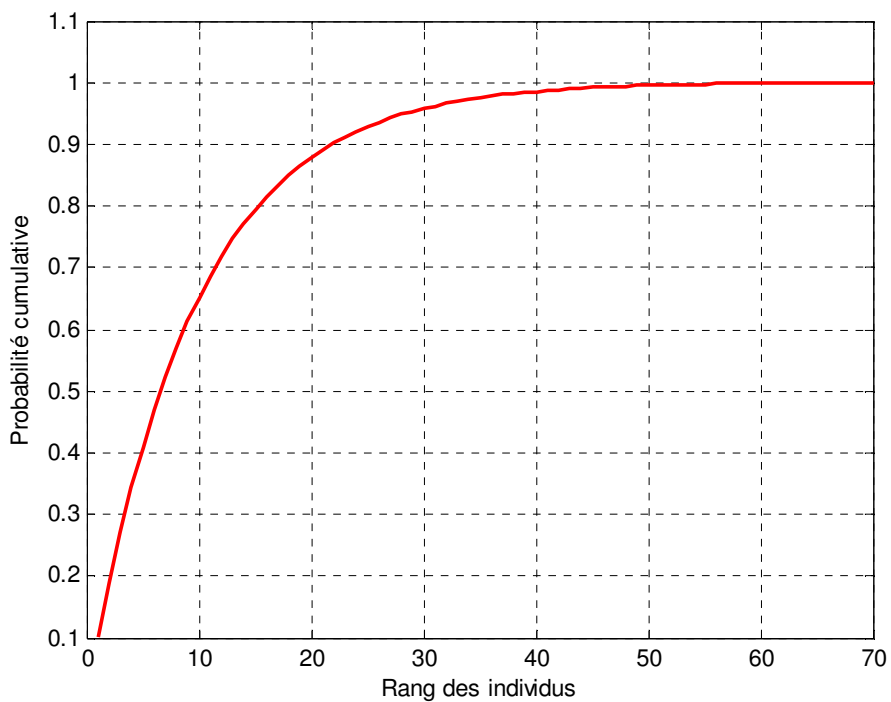


Figure IV.10: probabilité cumulative des individus

L'étape finale est la sélection des parents : on tire N_{pa} fois un nombre aléatoire $r \in [0,1]$. A chaque fois, on choisit l'individu dont la probabilité cumulative est justement inférieure ou égale au nombre r . D'après la figure III-10, il est clair que les 20 premiers individus ont la probabilité de sélection la plus élevée. Evidemment, le reste des individus peuvent portés candidat mais avec une probabilité de sélection très faible.

3.3.3 Les opérateurs génétiques disponibles propres au GENOCOP

Le système GENOCOP dispose de ses propres opérateurs génétiques. Ils sont conçus d'une telle manière qu'ils garantissent toujours que les progénitures soient des individus faisables. Nous présentons ici la liste des opérateurs disponibles ainsi que leurs caractéristiques principales.

Avant d'appliquer les opérateurs de croisement et de mutation, il faut reformuler le cahier des charges initiales. Dans ce sens, les contraintes du type égalité sont éliminées par substitution d'un nombre égal de variables. L'espace faisable \mathcal{F} sera ainsi défini par des inégalités linéaires.

Soit un problème d'optimisation soumis aux contraintes linéaires suivantes :

1. Domaine de variation des variables du problème : $l_i \leq x_i \leq u_i$ avec $i=1,2,\dots,q$. Sous forme vectoriel, on a : $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$, où $\mathbf{l} = \langle l_1, \dots, l_q \rangle$, $\mathbf{u} = \langle u_1, \dots, u_q \rangle$ et $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_q \rangle$.
2. Contraintes égalités : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_q \rangle$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_p \rangle$, $1 \leq i \leq p$ (p est le nombre des équations du type égalité) et $1 \leq j \leq q$.
3. Contraintes inégalités : $\mathbf{Cx} \leq \mathbf{d}$, avec $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_q \rangle$, $\mathbf{C} = (C_{ij})$, $\mathbf{d} = \langle d_1, \dots, d_m \rangle$, $1 \leq i \leq m$ (m est le nombre des équations du type inégalité) et $1 \leq j \leq q$.

Le problème contient p équations indépendantes. Donc il y a p variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ ($\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, 2, \dots, q\}$) qui peuvent être exprimés en fonction des autres variables, et par conséquent être supprimés du problème original de la manière suivante :

On divise la matrice \mathbf{A} en deux sous-matrices \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 de telle façon que la $j^{\text{ième}}$ colonne de \mathbf{A} appartient à \mathbf{A}_1 si $j \in \{i_1, \dots, i_p\}$. La même chose est appliquée pour la matrice \mathbf{C} et les vecteurs \mathbf{x} , \mathbf{l} et \mathbf{u} i.e. $\mathbf{x}^1 = \langle x_{i_1}, \dots, x_{i_p} \rangle$, $\mathbf{l}^1 = \langle l_{i_1}, \dots, l_{i_p} \rangle$ et $\mathbf{u}^1 = \langle u_{i_1}, \dots, u_{i_p} \rangle$:

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 = b \Rightarrow x^1 = A_1^{-1} b - A_1^{-1} A_2 x^2$$

$$l_1 \leq A_1^{-1} b - A_1^{-1} A_2 x^2 \leq u_1$$

$$Cx \leq d \Rightarrow C_1 x^1 + C_2 x^2 \leq d \Rightarrow C_1 (A_1^{-1} b - A_1^{-1} A_2 x^2) + C_2 x^2 \leq d$$

Donc, après avoir éliminé les p variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ du problème, les nouvelles contraintes du domaine, d'égalité et d'inégalité s'écrivent finalement comme suit :

1. $l_2 \leq x^2 \leq u_2$ (contraintes du domaine du problème original)
2. $l_1 \leq A_1^{-1} b - A_1^{-1} A_2 x^2 \leq u_1$ (nouvelles contraintes du domaine après l'élimination)
3. $(C_2 - C_1 A_1^{-1} A_2) x^2 \leq d - C_1 A_1^{-1} b$ (contraintes inégalités après l'élimination de x^1

Variables).

Exemple : considérons une fonction à six variables $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ soumises aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_3 + x_5 - 3x_6 = 10 \\ x_1 + 4x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 \leq 120 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -40 \leq x_1 \leq 20 & 50 \leq x_2 \leq 75 \\ 0 \leq x_3 \leq 10 & 5 \leq x_4 \leq 15 \\ 0 \leq x_5 \leq 20 & -5 \leq x_6 \leq 5 \end{cases}$$

Dans ce problème, 3 variables peuvent être éliminées ($p=3$). Si on choisit par exemple x_1, x_2 et x_3 :

$$x_1 = 3 - 4x_4$$

$$x_2 = -10 + 8x_4 + x_5 - 3x_6$$

$$x_3 = 10 - x_5 + 3x_6$$

De cette manière, le problème original à six variables est réduit à un autre problème de trois variables x_4, x_5, x_6 donné par :

$$g(x_4, x_5, x_6) = f((3 - 4x_4), (-10 + 8x_4 + x_5 - 3x_6), (10 - x_5 + 3x_6), x_4, x_5, x_6)$$

Soumis aux contraintes suivantes (seulement des contraintes inégalités) :

$$\begin{cases} 8x_4 + 2x_5 - 3x_6 \leq 130 \\ 60 \leq 8x_4 + x_5 - 3x_6 \leq 85 & -10 \leq -x_5 + 3x_6 \leq 0 \\ 5 \leq x_4 \leq 10.75 & 0 \leq x_5 \leq 20 \quad -5 \leq x_6 \leq 5 \end{cases}$$

a. La mutation uniforme simple

L'opérateur sélectionne aléatoirement un composant $k \in [1, q]$ et le fait muter avec une distribution de probabilité uniforme. Soit un individu $x = \langle x_1, \dots, x_k, \dots, x_q \rangle$, le résultat de cette mutation est un autre individu $x' = \langle x_1, \dots, x'_k, \dots, x_q \rangle$ où x'_k est une valeur choisie aléatoirement de l'intervalle $[l_k, u_k]$. Prenons l'exemple précédent comme application : soit l'individu

$$(x_4, x_5, x_6) = (10, 8, 2), \text{ on tenant compte des contraintes finales } \begin{cases} l_1 = 7.25 & u_1 = 10.375 \\ l_2 = 6 & u_2 = 11 \\ l_3 = 1 & u_3 = 2.66 \end{cases} .$$

Ça veut dire que le premier composant de l'individu $(10, 8, 2)$ peut varier entre 7.25 et 10.375 lorsque les deux autres composants restent constants. Le même raisonnement se fait pour le reste des composants. Cet opérateur joue un rôle important au début du processus d'évolution car les individus sont autorisés à se mouvoir dans l'espace de recherche. Cet opérateur est essentiel lorsque la population initiale est composée de clones puisqu'il introduit une diversité génétique absente au départ.

b. La mutation de bord

L'opérateur sélectionne aléatoirement un composant et le fait muter aléatoirement à la valeur d'une des bornes du domaine de variation autorisé. Autrement dit, x'_k prend la valeur l_k ou u_k . Cet opérateur est utile au début du processus pour détecter une éventuelle limitation de l'optimisation par un domaine de variation trop restreint.

c. La mutation non-uniforme

Soit un individu $x = \langle x_1, \dots, x_k, \dots, x_q \rangle$, le résultat de cette mutation est un autre individu

$$x' = \langle x_1, \dots, x'_k, \dots, x_q \rangle \text{ où : } x'_k = \begin{cases} x_k + \Delta(t, u_k - x_k) \\ x_k - \Delta(t, x_k - l_k) \end{cases}$$

La fonction $\Delta(t, y)$ retourne une valeur comprise dans l'intervalle $[0, y]$ tel que la probabilité que $\Delta(t, y)$ soit proche de 0 augmente à mesure que le temps t augmente (ici, c'est le nombre

des générations). Cette propriété permet à cet opérateur d'explorer l'espace de recherche au début de l'optimisation puis, en limitant la dispersion des mutations au court du temps d'explorer plus localement la région la plus prometteuse. La fonction Δ est définie par :

$$\Delta(t, y) = y \cdot r \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right)^b$$

où r est réel choisi aléatoirement entre 0 et 1, T est le nombre de générations prévues. Le paramètre b détermine le degré de la non-uniformité.

d. Le croisement arithmétique complet

Cet opérateur est défini comme étant la combinaison linéaire de deux individus. Son action est prépondérante dans le succès du GENOCOP. Deux parents s_1 et s_2 sont sélectionnés, le résultat est deux progénitures s'_1 et s'_2 tel que
$$\begin{cases} s'_1 = a \cdot s_1 + (1-a) \cdot s_2 \\ s'_2 = (1-a) \cdot s_1 + a \cdot s_2 \end{cases}$$

Cet opérateur utilise une valeur aléatoire $a \in [0,1]$ et garantit toujours des individus appartenant à \mathcal{F} .

e. Le croisement arithmétique simple

Soit deux parents $s_1 = (x_1, \dots, x_q)$ et $s_2 = (y_1, \dots, y_q)$, cet opérateur choisi aléatoirement un composant placé à la $k^{ième}$ position et effectue le croisement à partir de cette position. Le résultat est :

$$\begin{cases} s'_1 = (x_1, \dots, x_k, a \cdot y_{k+1} + (1-a) \cdot x_{k+1}, \dots, a \cdot y_q + (1-a) \cdot x_q) \\ s'_2 = (y_1, \dots, y_k, a \cdot x_{k+1} + (1-a) \cdot y_{k+1}, \dots, a \cdot x_q + (1-a) \cdot y_q) \end{cases}$$

Il reste à savoir la valeur de a qui garantit des individus faisables. La méthode la plus simple est de fixer $a=1$ au départ. Si l'un des enfants n'appartient pas à \mathcal{F} , alors on décrémente a d'une constante $\frac{1}{\rho}$. Après ρ essais, $a=0$ et les enfants appartiennent à \mathcal{F} car ils sont identiques à leurs parents.

f. Le croisement heuristique

Cet opérateur est assez singulier pour les raisons suivantes :

- Il utilise la valeur de la fonction objectif pour déterminer une direction de recherche.

- Il n'engendre qu'un individu x' et peut être n'en produire aucun.
- Contrairement aux autres opérateurs, sa définition n'assure pas que les composants de l'individu engendré se trouvent dans les bornes fixées.

Son comportement suit les règles suivantes :

- On détermine le meilleur des deux parents (au sens de la valeur d'adaptation). Si on suppose que s_2 est meilleur que s_1 .
- $s' = r \cdot (s_2 - s_1) + s_2$ où $r \in [0,1]$ est un réel aléatoire.

Si après un certain nombre de tirage de r , l'individu engendré n'est toujours pas faisable alors aucun individu n'est engendré. Sa principale action est de tenter de déterminer des directions privilégiées dans l'espace de recherche.

4 Optimisation multi-objectif

4.1 Introduction

De nombreux secteurs industriels sont concernés par des problèmes complexes de grande dimension et multi-critères pour lesquels les décisions doivent être prises de façon optimale. Les problèmes rencontrés dans la nature sont rarement mono-objectif. Il y a généralement plusieurs critères contradictoires à satisfaire simultanément. L'optimisation multi-objectif s'intéresse à la résolution de ce type de problèmes. Elle possède des racines dans le 19^{ième} siècle dans les travaux en économie d'Edgeworth et Pareto. Elle a été utilisée en économie et dans les sciences de management et graduellement dans les sciences pour l'ingénieur.

L'optimisation multi-objectif cherche à optimiser plusieurs critères d'un vecteur donnée. Contrairement à l'optimisation mono-objectif, une solution unique qui minimise toute les fonctions simultanément n'existe pas. Dans ce cas, il faut chercher des compromis connu par l'ensemble des solutions Pareto optimales. Toute solution appartenant à la frontière Pareto est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur une composante du vecteur sans dégrader *d'au moins* une autre composante de ce vecteur. Le choix d'une solution par rapport à une autre nécessite la connaissance du problème et des nombreux facteurs liés au problème. Ainsi, une solution choisie par un décideur peut ne pas être acceptable par un autre décideur. Il est donc utile d'avoir plusieurs alternatives dans le choix d'une solution Pareto.

La difficulté dans la conception d'un problème multi-objectif (PMO) réside dans les faits suivants :

- Il n'y a pas de définition communément admise sur l'optimalité d'une solution comme en optimisation mono-objectif.
- Le nombre de solutions optimales au sens de Pareto augmente en fonction de la taille des problèmes et principalement avec le nombre de critères utilisés.

4.2 Formulation générale d'un problème multi-objectif

Un problème d'optimisation multi-objectif peut être défini de la manière suivante :

$$(P) \begin{cases} \text{Min } F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \text{ avec } x \in F \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p \\ h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, q \\ x_{Kmin} \leq x_K \leq x_{Kmax} \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où $n \geq 2$ est le nombre de fonctions objectifs, $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur représentant les variables de décision, F l'espace de solutions réalisables (espace de décision) et $F(x)$ est le vecteur des critères à optimiser.

Dans le cadre de l'optimisation multi-objectif, le plus souvent le décideur raisonne plutôt en termes d'évaluation d'une solution sur chaque critère et se place naturellement dans l'espace des critères.

4.3 L'approche PARETO : Notion de dominance

Pour la solution d'un PMO, la relation d'ordre n'est pas totale car nous avons rarement un vecteur x^* qui est optimum pour tous les objectifs. En effet, une solution peut être meilleure qu'une autre pour certains objectifs mais moins bonne relativement aux autres. On parle alors de *solution de compromis* et c'est au décideur de choisir parmi les différentes solutions proposées, la solution de compromis qui lui convient au mieux. La notion d'optimalité admise est celle introduite par Edgeworth en 1881 plus tard généralisée par Pareto en 1896. On parle alors d'*optimum de Pareto* et les solutions manipulées sont dites Pareto optimales. Les solutions Pareto optimales sont connues aussi sous le nom de solutions *admissibles, efficaces, non-dominées et non-inférieures*.

Pour comprendre l'approche Pareto, il est nécessaire de définir une notion intermédiaire de dominance entre deux solutions x_i et x_j . On dit qu'une solution x_i domine une autre solution x_j

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \forall k \in [1, n] \quad f_k(x_i) \leq f_k(x_j) \\
 \text{et} \\
 \exists k \in [1, n] \text{ tq } f_k(x_i) < f_k(x_j)
 \end{array} \right\} \text{ si et seulement si}
 \end{array} \quad (\text{III.13})$$

Cela signifie qu'il est impossible de trouver une solution qui améliore les performances sur un critère sans que cela entraîne une dégradation des performances sur au moins un autre critère.

L'image de l'ensemble Pareto optimal dans \mathcal{F} est appelée frontière Pareto ou surface de compromis. De plus, l'ensemble Pareto optimal peut être divisé en deux sous-ensembles : l'ensemble des solutions supportées et l'ensemble des solutions non-supportées. Les solutions supportées sont les solutions Pareto optimales dont le point correspondant dans \mathcal{F} se trouve sur l'enveloppe convexe de la frontière Pareto. Les solutions n'appartenant pas à l'enveloppe convexe sont dites non-supportées.

4.4 Classification des méthodes de solution

Dans la littérature, une attention particulière a porté sur les problèmes à deux critères en utilisant les méthodes directes. Ces méthodes sont efficaces pour des problèmes de petites tailles. Des méthodes heuristiques sont nécessaires pour résoudre les problèmes de grande taille ou les problèmes à plus de deux critères. Plusieurs adaptations de métaheuristiques ont été proposées dans la littérature pour la résolution d'un PMO et la détermination des solutions Pareto : le recuit simulé, la recherche Tabu et les algorithmes génétiques.

Les deux approches principales utilisées pour la résolution d'un PMO sont les :

- Approches basée sur la transformation d'un problème en un problème mono-objectif.
- Approches Pareto qui utilise directement la notion d'optimalité Pareto dans leur processus de recherche. Le processus de sélection des solutions générées est basé sur la notion de non-dominance.

4.4.1 Méthodes à base de transformation vers le mono-objectif

Dans la résolution d'un PMO, plusieurs méthodes traditionnelles transforment le PMO en un problème mono-objectif. Parmi ces méthodes on a la méthode d'agrégation, la méthode

ε -contrainte et les méthodes de programmation par but.

Méthodes d'agrégation

C'est l'une des premières méthodes utilisées pour la génération de la frontière Pareto. Elle consiste à transformer le PMO en un problème mono-objectif en combinant les différentes fonctions f_i du problème en une seule fonction objectif F généralement de façon

$$\text{linéaire : } F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x).$$

où les poids $\lambda_i \in [0,1]$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Différents poids fournissent différentes solutions supportées.

Les résultats obtenus dépendent fortement des paramètres choisis. Les poids λ_i doivent aussi être choisis en fonction de préférences associées aux objectifs, ce qui est une tâche délicate.

Méthode ε -contrainte

Dans cette approche, le problème consiste à optimiser une fonction f_k sujette à des contraintes sur les autres fonctions.

$$\begin{cases} \min f_k(x) & x \in D \\ f_j(x) \leq \varepsilon_j, & j = 1, \dots, n, j \neq k \end{cases}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$. Ainsi, un problème mono-objectif f_k sujet à des contraintes sur les autres objectifs est résolu. Différentes valeurs de ε_i peuvent être données pour pouvoir générer différentes solutions Pareto optimales.

Programmation par but

Dans cette méthode, le décideur doit définir les buts qu'il désire pour chaque objectif. Ces valeurs sont introduites dans la formulation du problème, le transformant en un problème mono-objectif. Par exemple, la fonction peut intégrer une norme pondérée qui minimise les déviations par rapport aux buts. Le problème peut être formulé de la manière suivante :

$$\min \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j |f_j(x) - z_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où $1 < p < \infty$, et z est le vecteur de référence. Généralement p est égal à 2, dans ce cas on a une

métrique euclidienne. Une sélection arbitraire du vecteur de référence peut ne pas être désirable puisqu'un mauvais vecteur de référence peut aboutir à une solution qui n'est pas Pareto optimale.

4.4.2 Méthodes basée sur l'approche Pareto

L'idée d'utiliser la dominance au sens de Pareto a été proposée par Goldberg [Gol 1989] pour résoudre les problèmes proposés dans [Sch 1985]. Le principal avantage de ces approches est qu'elles sont capables de générer des solutions Pareto optimales dans les portions concaves de la frontière Pareto.

Les algorithmes génétiques sont largement utilisés pour la résolution de PMO, étant donné qu'ils travaillent sur une population de solutions. Deux objectifs doivent être pris en compte :

- Converger vers la frontière Pareto : la plupart des travaux de recherche sur l'application des AGs aux PMO se sont concentrés sur l'étape de sélection. Dans cette étape, des méthodes de 'ranking' sont appliquées dont le rôle est d'établir un ordre (rang) entre les individus. Cet ordre dépend de la notion de dominance et donc directement de l'optimalité Pareto.
- Trouver des solutions diversifiées dans la frontière Pareto : les méthodes de maintenance de la diversité en utilisant la technique des niches ou bien le Crowding par exemple peuvent être utiles pour stabiliser des sous-populations le long de la frontière Pareto.

Depuis 1993, un grand nombre de méthodes utilisent la dominance de Pareto pour explorer au mieux la frontière Pareto. Parmi les algorithmes évolutifs multi-objectif les plus populaires, ceux de la famille NSGA de Deb et du SPEA de Zitzler sont susceptibles d'obtenir des bons résultats.

4.4.2.1 Le NSGA (Non Dominated Sorting Genetic Algorithm)

Le NSGA_I développé par Deb et Srivinas [Sri 1993] est un algorithme qui utilise la relation de dominance au sens de Pareto pour déterminer l'efficacité d'un individu. Elle est basée sur une classification en plusieurs niveaux des individus. La valeur d'adaptation est attribuée en se basant sur le rang de chaque individu. Cette méthode attribue un rang égal à 1 pour tous les individus non dominés de la population courante qui forment le front de Pareto

nommé R1. La méthode procède récursivement en attribuant le rang k aux individus non dominés de la même population de laquelle ont été retirés les individus de rang 1 à k-1. Pour différencier l'adaptation des solutions de même rang, une technique de formation des niches est utilisée. Cette méthode a pour but d'obtenir des solutions diversifiées réparties de la manière la plus uniforme possible le long de la frontière Pareto. Le principe donc consiste à dégrader la d'adaptation des solutions situées dans une région de recherche contenant une grande concentration de solutions. Dans la deuxième version du NSGA (NSGA_II) [Deb 2000], [Rat 2006], les auteurs tentent de résoudre les critiques relevées sur la première version : complexité, non élitisme et utilisation de la technique du sharing [Mil 1996]. Pour diminuer la complexité de calcul, ils proposent une modification de la procédure de tri de la population en plusieurs frontières. L'autre critique est l'utilisation du sharing [Hor 1994], méthode qui exige le réglage d'un ou plusieurs paramètres et qui est également grosse consommatrice de calcul. Dans cette nouvelle version, ils remplacent la fonction de sharing par une fonction de crowding [Kno 1999].

4.4.2.2 Le SPEA (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*)

En 1999, Zitzler et Thiele [Zit 1999] proposent la méthode SPEA. Cette méthode élitiste utilise une archive externe pour stocker les individus non-dominés (au sens de Pareto). Une technique de clustering permet de réduire l'ensemble de Pareto sans supprimer ses caractéristiques et une technique de 'niching' permet de préserver la diversité de la population. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'exige pas de réglage de paramètres de sharing comme il est cas pour le NSGA.

Une comparaison des principaux algorithmes du domaine a été effectuée par Zitzler en se basant sur un ensemble de problèmes tests [Zit 2000]. Cette comparaison a notamment permis de mettre en évidence que l'élitisme est un facteur essentiel dans l'optimisation évolutionniste multi-objectif. D'un point de vue général, le mécanisme d'élitisme dans les algorithmes évolutionnistes vise à lier la durée de vie des individus à leur performance : les individus dont la valeur d'adaptation est bonne sont gardés pendant plusieurs générations. Dans le domaine de l'optimisation multi-objectif, la sélection élitiste consiste à maintenir une seconde population appelée archive, contenant les solutions non-dominées trouvées au cours des différents générations de l'algorithme. Les individus de cette population participe avec une certaine probabilité à l'étape de sélection et donc à la reproduction de nouveaux individus. En outre, des techniques de regroupements ou *clustering* sont employées pour limiter la taille de cette archive. Cette technique a été mise en œuvre dans l'algorithme SPEA.

– Présentation

Le SPEA utilise une population externe \bar{P} de taille \bar{N} (fixé par l'utilisateur) qui sera appelé *archive*. Cette population sera composée des élites. L'algorithme utilise aussi une population de taille N (N et \bar{N} ne sont pas forcément égaux). A chaque itération, l'algorithme calcule l'ensemble de Pareto \mathcal{F} de P_t . L'ensemble des solutions non-dominés est alors copiés dans \bar{P} . Par la suite, toutes les solutions dominées de \bar{P} seront exclues. En appliquant une implantation de type tournoi binaire sur la population $\{P_t \cup \bar{P}_t\}$, la population P_{t+1} sera alors créée. Le principe de fonctionnement général du SPEA est donné par la figure III-11.

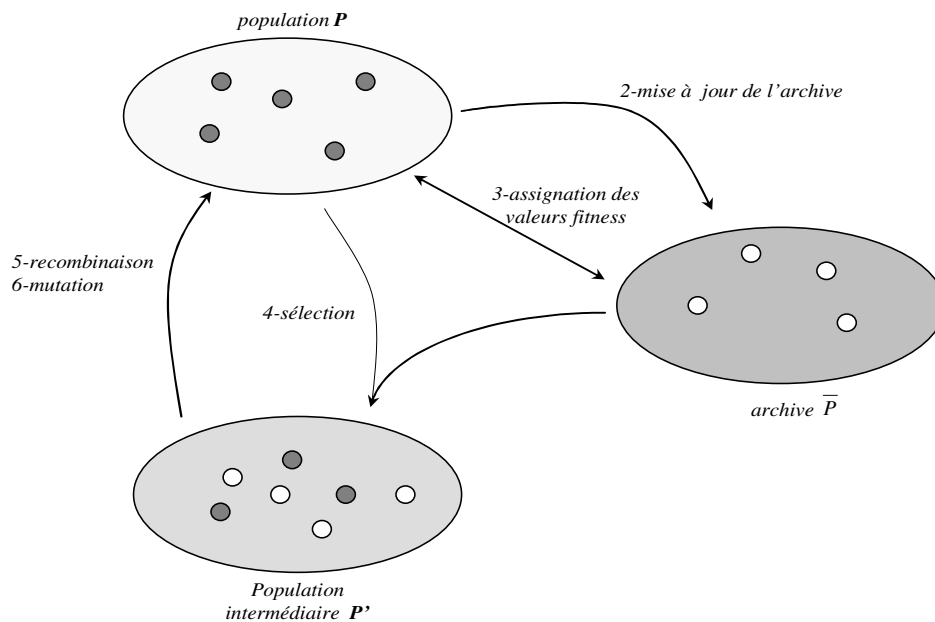


Figure III-11: principe de fonctionnement du SPEA

Le concept d'algorithme SPEA est le suivant :

Etape 1 : **Initialisation** — Générer aléatoirement une population initiale P_0 et créer l'ensemble vide \bar{P}_0 .

Etape 2 : **Mise à jour de l'archive** —

- identifier \mathcal{F} de P_t et appliquer $\bar{P}_t = \bar{P}_t \cup \mathcal{F}$
- identifier \mathcal{F} de \bar{P}_t , $\mathcal{F} \subset \bar{P}_t$
- mettre à jour $\bar{P}_t = \mathcal{F}$
- réduire la taille de \bar{P}_t si elle dépasse \bar{N} en utilisant la méthode du clustering

Etape 3 : **Evaluer la fonction d'adaptation** de chaque solution.

Etape 4 : **Sélection** — créer un ensemble vide $P' = \emptyset$. Pour $i=1:N$

a) choisir deux solutions j et $k \in P_t + \bar{P}_t$.

b) si $F(j) < F(k)$ donc $P' = P' + \{j\}$ sinon $P' = P' + \{k\}$.

Etape 5 : **Recombinaison et mutation**.

Etape 6 : **fin** — fixer $P_{t+1} = P'$ et $t=t+1$. Arrêter si le critère d'arrêt est satisfait sinon revenir à l'étape 2.

– Assignment de la valeur d'adaptation

L'implantation de l'opérateur d'assignation de la valeur d'adaptation s'effectue en deux étapes. Tout d'abord la valeur d'adaptation de chaque individu appartenant à \bar{P} est calculée comme suit :

$$S(i) = \frac{n_i}{N+1} \quad i \in \bar{P} \quad (\text{III.14})$$

La variable n_i détermine le nombre de solutions dominées dans P par la solution i .

Pour les membres de la population P_t , la valeur d'adaptation se calcule selon la relation suivante :

$$F(j) = 1 + \sum_{(i \in \bar{P}) \& (i \geq j)} S(i) \quad j \in P \quad (\text{III.15})$$

on ajoute 1 pour garantir que les membres de la population \bar{P} aient une meilleure valeur d'adaptation que ceux de la population P . On note ici que plus la valeur d'adaptation d'un membre quelconque est faible, plus la probabilité que ce membre soit candidat pour la reproduction. De cette façon, lors du tournoi binaire, les élites seront assurées d'avoir une valeur d'adaptation inférieure à 1 et les membres de P auront une valeur supérieure à 1.

– Mise à jour de la population d'élites

Dans certains cas, l'ensemble des solutions Pareto trouvées peut être extrêmement large voire infini. De point de vue décideur, présenter toutes les solutions non-dominées n'a pas de sens si leur nombre dépasse une certaine limite. D'autre part, une taille élevée de \bar{P} pourrait réduire la pression de sélection et ralentir le processus de l'exploration de l'espace de recherche [Cun 1997].

L'un des aspects importants de l'algorithme proposé par Zitzler est la mise à jour de

l'ensemble d'élites \bar{P} . Lors de la copie des solutions non-dominées \mathcal{F} dans \bar{P} , si le nombre de solutions de l'ensemble \bar{P} est supérieur à \bar{N} alors un opérateur de mise à jour sera appliqué afin de réduire la taille de $\|\bar{P}\| = \bar{N}$. Initialement, cet opérateur crée un regroupement pour chaque solution. Toutes les distances entre chaque paire de regroupement (C_1, C_2) sont ensuite calculées. Cette distance est calculée par rapport à la distance moyenne de toutes les solutions comprises dans le regroupement. Par la suite l'opérateur fera l'union des deux regroupements ayant la plus petite distance. Cet union sera effectué jusqu'à ce que le nombre de regroupement soit égal à \bar{N} . Dès lors, une seule solution sera choisie par regroupement et la population \bar{P} sera constituée.

4.4.2.3 Critiques relevées sur le SPEA et amélioration : le SPEA-II

Le SPEA comporte certaines faiblesses. Tout d'abord, il peut arriver que deux solutions différentes $\{Z_i, Z_j\} \notin \bar{P}$ possèdent la même valeur d'adaptation. C'est le cas, entre autres, lorsque ces deux solutions sont dominées par la même solution $Z_k \in P$. Le deuxième point faible vient de la manière dont l'algorithme traite la diversité. En aucun cas, lors du calcul de la valeur d'adaptation et la troncation d'archive, les solutions extrêmes de l'ensemble Pareto auront priorité sur les autres. Ceci pourrait éventuellement réduire la couverture de la population dans l'espace objectif. La prochaine méthode présentée sera donc le SPEA-II qui tient en compte les faiblesses mentionnées ci-dessus.

Récemment, Zitzler et al [Zit 2001] ont proposé une version améliorée de leur SPEA. Les modifications majeures se situent au niveau de l'assignation de la valeur d'adaptation et de la procédure de mise à jour de la population d'élites \bar{P} . La première étape de l'assignation de la valeur d'adaptation s'effectue sur l'ensemble $P \cup \bar{P}$ (et non pas sur \bar{P} comme dans SPEA). Cette valeur est déterminée en calculant pour chaque solution $Z_i \in P \cup Q$, la valeur $S(i)$ qui représente le nombre de solutions que domine Z_i .

$$S(i) = \left| \left\{ j \in P \cup \bar{P}, Z_i \geq Z_j \right\} \right| \quad (\text{III.16})$$

Dans un deuxième temps, pour chaque solution $Z_i \in P \cup Q$, la valeur $R(i)$ sera calculée. La valeur $R(i)$ représente le nombre de solutions qui dominent la solution Z_i .

$$R(i) = \sum_{j \in P \cup \bar{P}, j > i} S(j) \quad (\text{III.17})$$

Ceci implique que toutes les solutions ayant une valeur $R(i)=0$ seront non-dominées au sens de Pareto dans $P \cup \bar{P}$. Par contre, cette affectation n'assure pas une diversité à l'intérieur de la population. C'est pourquoi Zitzler *et al* ont ajouté une mesure de densité qui est basée sur la méthode du $k^{ième}$ voisin. La valeur d'adaptation finale sera donc obtenue par la relation :

$$F(i) = R(i) + D(i) \quad (\text{III.18})$$

La procédure de l'obtention de la mesure de la distance $D(i)$ est divisée en quatre étapes :

- Pour chaque solution Z_i , la distance (dans l'espace d'objectif) $d_{ij} \forall j \in P \cup \bar{P}$ est calculée et stockée dans une liste. (le résultat est une matrice carrée d'ordre $\|P\| + \|\bar{P}\|$).
- Trier chaque colonne par ordre croissant puis repérer la $k^{ième}$ ligne avec $k = \sqrt{\|P\| + \|\bar{P}\|}$. La valeur correspondante est ainsi dénommée σ_i^k .
- Affecter $D(i) = \frac{1}{\sigma_i^k + 2}$.

La valeur 2 est ajoutée pour deux raisons : la première est pour s'assurer que le dénominateur ne s'annule jamais. La deuxième pour que $D(i)$ soit toujours inférieur à 1. Ainsi, on ne tombe jamais sur le cas où deux valeurs d'adaptation sont identiques.

La valeur de $D(i)$ étant comprise entre $[0,1]$, toute solution ayant une valeur d'adaptation $F(i)$ inférieure à 1 sera considérée comme non-dominée.

En ce qui concerne l'archive d'élites \bar{P} , les auteurs ont décidé de garder un nombre constant d'individus \bar{N} (fixé par l'utilisateur) pendant le processus d'optimisation. Tout comme le SPEA, à chaque itération toutes les solutions non-dominées de P seront copiées dans \bar{P} . Ceci implique encore une fois la mise à jour de l'archive mais cette fois d'une manière différente. La procédure de la mise à jour introduit un nouvel opérateur de comparaison entre les individus de l'ensemble \bar{P} défini comme suit :

Un individu Z_i est éliminé de l'archive si $Z_i \leq_d Z_j ; \forall Z_i, Z_j \in \bar{P}$. La relation $Z_i \leq_d Z_j$ est donnée par la définition suivante :

- Soit un ensemble des solutions non-dominées \mathcal{F} ; la relation $Z_i \leq_d Z_j$ s'applique entre

deux solutions $\{Z_i, Z_j\} \in \mathcal{F}$ si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq k \leq \|\bar{P}\| : \sigma_i^k = \sigma_j^k \\ \text{ou} \\ \exists 1 \leq k \leq \|\bar{P}\| : [\forall 0 \leq l \leq k : \sigma_i^l = \sigma_j^l \text{ et } \sigma_i^k < \sigma_j^k] \end{array} \right. \quad (\text{III.19})$$

La figure suivante illustre la procédure de la mise à jour de l'archive. Elle présente un cas hypothétique où la taille de l'archive doit être égale à cinq.

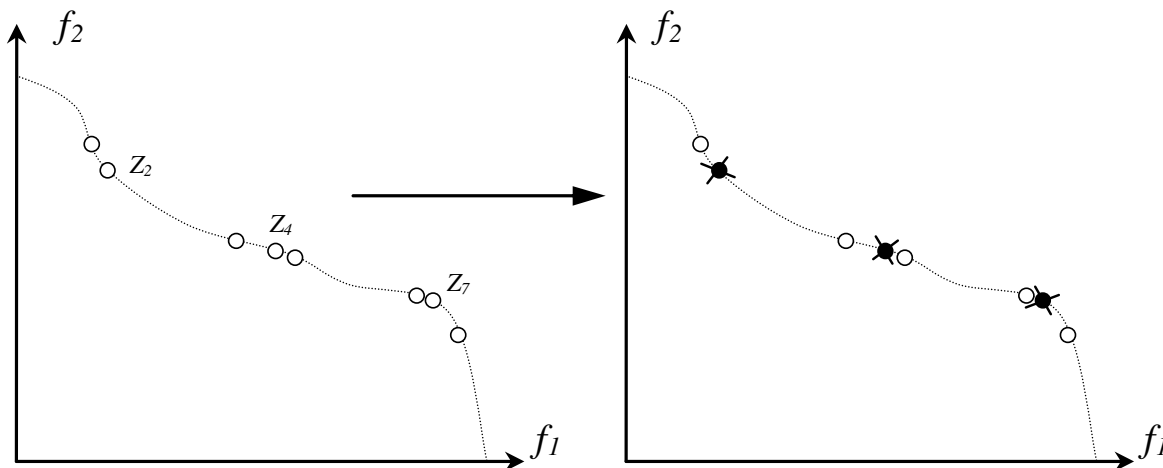


Figure III-12: Illustration de la troncature de l'archive utilisée dans le SPEA-II

On montre que suite à l'application de la procédure de mise à jour, la solution Z_2 est retirée, puis ensuite la solution Z_4 et Z_7 .

Zitzler conclut que le SPEA-II donne de meilleurs résultats que son ancêtre le SPEA. Cette différence vient essentiellement de l'assignation de la valeur d'adaptation qui s'effectue selon la dominance dans les deux populations P et \bar{P} . Ensuite, l'auteur a effectué plusieurs tests [Zit 2001] et conclut qu'en général le NSGA-II et le SPEA-II donnent des résultats semblables. Par contre, le SPEA-II semble donner de meilleurs résultats lorsque le nombre de fonctions objectifs est plus élevé. Cet algorithme sera donc adopté dans le cadre de notre étude.

5 Implémentation du code d'optimisation sous Matlab

Pour des multiples raisons (facilité d'implantation, outils graphiques, large diffusion, etc.) nous avons choisi d'implanter les algorithmes et les méthodes décrites plus haut sous l'environnement Matlab. Le code d'optimisation que nous avons développé s'appelle OPTIMSAP et est composé de 3 modules principaux : un module pour l'algorithme GENOCOP pour le traitement de contraintes linéaires, un module pour l'algorithme SPEA_II

pour l'optimisation multi-objectif et un module pour la transformation des solutions non-faisables en solutions complètement faisables (module donné en détail au quatrième chapitre). La figure III-13 représente l'enchaînement des étapes du GENOCOP grâce à un organigramme détaillé. Cette figure met en évidence les points suivants :

- Les informations à fournir avant de lancer le cycle d'optimisation comme par exemple : le nombre des variables du problème, le type des contraintes à appliquer, les bornes de variation de chaque variable d'optimisation, le paramètre de la pression de sélection, etc.
- Dès que les informations nécessaires sont fournies par l'utilisateur, le processus d'optimisation peut s'enclencher. Celui-ci s'apparente à un cycle qui comprend les étapes suivantes :
 - Etape 0 : Reformulation du cahier des charges. L'algorithme génère automatiquement la matrice finale qui contient les nouvelles bornes après avoir transformé toutes les contraintes en contraintes du type inégalité. Ceci est décrit en détail dans le sous-paragraphe 3.3.3.
 - Etape 1 : Initialisation. A ce niveau, l'algorithme crée une population initiale contenant les individus qui répondent aux toutes les contraintes linéaires. Cette population peut être constituée par des individus différents (si l'espace de recherche est vaste) ou bien par des clones (si l'espace de recherche est restreint).
 - Etape 2 : Appel à la procédure du calcul de la fonction objectif et du triage des individus. Les solutions seront classées en fonction de leur valeur d'adaptation. La meilleure solution est classée en première position, etc.
 - Etape 3 : Appel à la fonction qui effectue le mécanisme de sélection des individus (les parents) pour la recombinaison selon la méthode de Baker. Le paramètre de la pression de sélection étant fixé par l'utilisateur.
 - Etape 4 : Appel à la procédure qui applique les sept opérateurs génétiques propres au GENOCOP garantissant la création des individus faisables. Le nombre des parents pour chaque opérateur est défini par l'utilisateur.

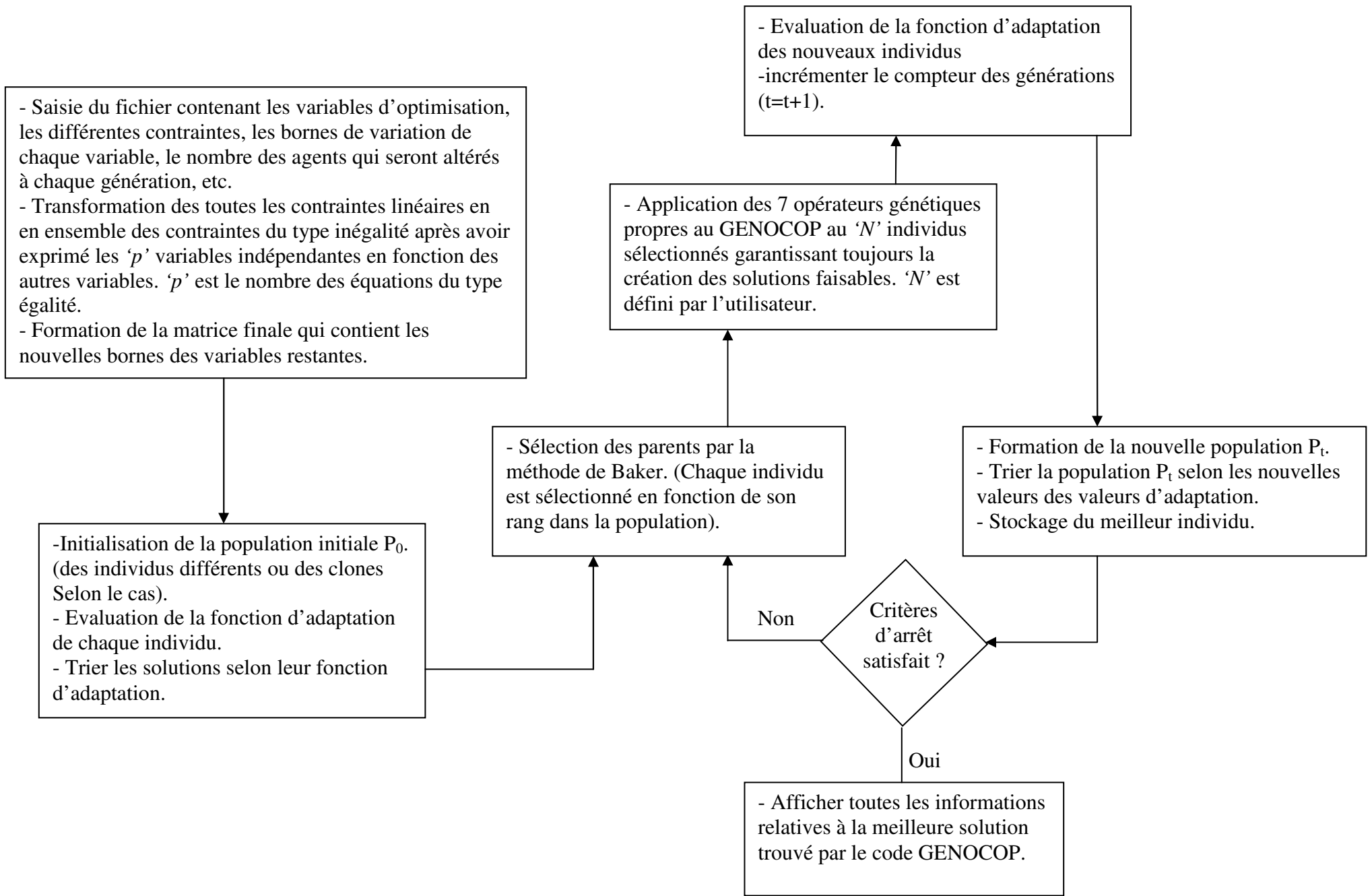


Figure III-13: Fonctionnement général du système GENOCOP

- Etape 5 : Evaluation de la valeur d'adaptation des nouveaux individus et incrémentation du nombre des générations.
- Etape 6 : Formation de la nouvelle population et appel de la procédure de triage des individus selon les nouvelles valeurs d'adaptation. Stockage des informations liées à la meilleure solution dans un fichier.
- Etape 7 : Tester si le critère d'arrêt est satisfait. Si oui, terminer le cycle d'optimisation et afficher les informations contenues dans le fichier relatif à la meilleure solution trouvée par l'algorithme. Si non, retourner à l'étape 3.

De la même façon, le schéma de la figure III-14 montre le principe de fonctionnement du SPEA_II. Cette figure met en évidence les points suivants :

- Les informations à fournir avant de lancer le cycle d'optimisation comme par exemple : le nombre des variables du problème, le type des contraintes à appliquer, les bornes de variation de chaque variable d'optimisation, le paramètre de la pression de sélection, etc.
- Dès que les informations nécessaires sont fournies par l'utilisateur, le processus d'optimisation peut s'enclencher. Celui-ci s'apparente à un cycle qui comprend les étapes suivantes :
 - Etape 0 : Reformulation du cahier des charges après avoir fourni les paramètres d'optimisation par l'utilisateur. C'est la même étape définie ci-haut avec le GENOCOP.
 - Etape 1 : L'algorithme crée une population externe vide appelée archive qui contiendra tous les individus non-dominés au sens de Pareto.
 - Etape 2 : Appel de la procédure d'évaluation de la fonction objectif. les individus sont évalués avec la méthode décrite au sous-paragraphe 4.4.2.3.
 - Etape 3 : Appel de la fonction qui effectue la mise à jour de l'archive.
 - Etape 4 : Sélection des individus en appelant la fonction qui effectue un tournoi binaire entre les individus de la population et de l'archive à la fois. Ce nombre d'individus doit être défini par l'utilisateur.

- Etape 5 : Recombinaison des individus sélectionnés et appel à la fonction qui applique les sept opérateurs génétiques propre au GENOCOP.
- Etape 6 : Evaluation des nouveaux individus au sens de Pareto.
- Etape 7 : Test du critère d'arrêt. Si oui, afficher l'archive contenant toutes solutions non-dominées avec toutes les informations nécessaires. Par exemple : f.é.m, puissance, courant, résistance de phase, inductance, induction dans l'entrefer, masse, rendement, dimensions géométriques, etc. Si non, retourner à l'étape 3.

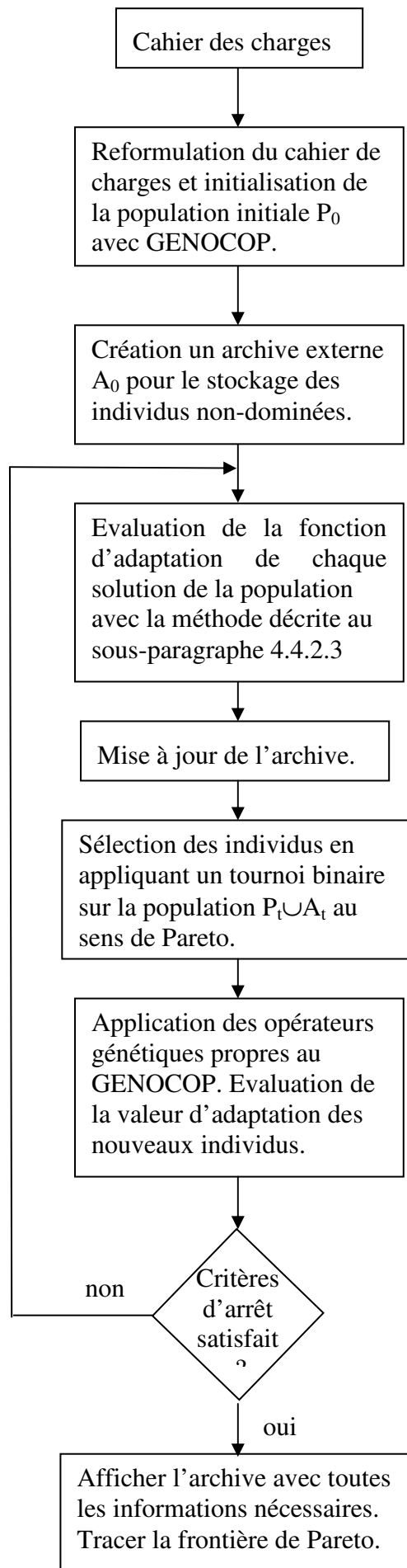


Figure III-14: Enchaînement des étapes du SPEA

6 Expériences antérieures d'utilisation des algorithmes évolutionnistes pour l'optimisation des machines électriques

On présente dans ce paragraphe quelques exemples d'utilisation des algorithmes évolutionnistes pour la résolution des problèmes liés aux machines électriques.

- Luizzi et al [Lui 2003] proposent d'utiliser les algorithmes génétiques pour le dimensionnement d'une machine asynchrone tétrapolaires de 7,5KW. L'optimisation portait sur trois problèmes multi-objectif et quatre problèmes mono-objectif. Les résultats ont été classés dans un tableau puis traduits par un graphique afin de mieux comparer les différentes valeurs des fonctions objectif pour aider le décideur à choisir le bon compromis. Ce graphique fait clairement ressortir les remarques suivantes :
 - L'optimisation mono-objectif a donné de bons résultats par rapport au critère choisi, mais elle influence fortement les autres critères surtout lorsqu'il s'agit de maximiser le rendement. L'optimisation du rendement a abouti une valeur élevée de l'ordre de 0,911, mais ceci nécessitait le coût de fabrication et le courant de démarrage les plus élevés (190,3€ et 58,9A respectivement).
 - L'optimisation multi-objectif a présenté de bons compromis. Le coût de fabrication ne dépassait pas 156€ quelque soit les critères choisis. Cette valeur reste inférieure à celle obtenue lorsqu'on souhaite optimiser séparément le rendement (190,3€), le facteur de puissance (167,8€) et le courant de démarrage (180,6€).
- Çun et al [çun 2006] ont établi une procédure d'optimisation basée sur les algorithmes génétiques d'une machine asynchrone triphasée à cage de puissance nominale de 22KW. Le problème est codé en binaire et les contraintes sont traités en utilisant la méthode de pénalités extérieures. Trois fonctions objectif ont été considérées dans cette étude qui sont le coût de fabrication, le couple nominal et le rendement de la machine. L'intérêt de cet article se situe au niveau du résultat obtenu concernant le coût de fabrication. Les auteurs concluent que le dimensionnement de la machine asynchrone en utilisant les AGs a permis une réduction de 25%. (480\$ pour la machine existante et 360\$ pour le prototype obtenu par l'optimisation).

- Benedicic et al [Ben 2001] ont présenté le principe de l'optimisation des moteurs universels par les algorithmes génétiques en s'appuyant sur exemple concret. Le problème est codé en binaire. Chaque individu représenté par 11 bits est évalué par la méthode des éléments finis. La fonction objectif est de minimiser les pertes totales dans la machine avec comme variable du problème les grandeurs géométriques du stator et du rotor sauf le diamètre extérieur du stator qui était maintenue constant pendant le processus d'optimisation. L'algorithme démarre sur une population initiale composée de clones représentant une machine réelle. Le meilleur prototype obtenu avec les AGs est comparé ensuite avec un moteur universel déjà existant de même puissance nominale 850W dont les pertes totales sont de l'ordre de 200W. Dans ce travail, les auteurs ont montré qu'il est possible et à grâce aux AGs de trouver une meilleure machine capable de fournir la même puissance où les pertes totales sont de l'ordre de 144W soit une réduction de 28%.

- Jolly et al [Jol 2005] utilisent les algorithmes génétiques pour optimiser la performance d'une machine synchrone à aimants permanents enterrés. Dans ce travail, l'algorithme d'optimisation est couplé avec une méthode basée sur les éléments finis. La fonction objectif consiste à maximiser le rapport $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ où $[\Omega_1, \Omega_2]$ représente le domaine de variation de la vitesse de rotation pour lequel la puissance est maintenue constante. Trois grandeurs géométriques sont considérées dans cette étude : l'épaisseur des aimants ($1mm \leq l_m \leq 2mm$), le coefficient d'arc polaire ($57,5^\circ \leq \alpha_m \leq 75^\circ$) et la position des aimants par rapport au centre de l'axe de rotation ($0,6 \leq \delta \leq 0,75$). Le couple devrait être supérieur ou égal à 2,55Nm pour obtenir une puissance de 400W à 1500tr/min. Le meilleur individu est obtenu au bout de la 100^{ième} génération. La fonction objectif atteint alors une valeur de 19,8 pour laquelle $l_m = 1mm$, $\alpha_m = 60^\circ$ et $\delta = 0,672$.

- Cho et al [Cho 1999] s'intéressent aussi à l'application des AGs pour l'optimisation multi-objectif des machines à aimants permanents enterrés de puissance nominale

600W à 2500tr/min. La fonction objectif est multi-critère et prend en compte les pertes et la masse des parties actives qui doivent être minimisées. Le vecteur des variables de décision contient sept composantes qui sont : le nombre de spires statorique, le rayon de l'alésage statorique, la longueur de la machine, l'épaisseur de la culasse statorique, l'épaisseur des aimants, la profondeur des encoches et le coefficient d'arc polaire. L'algorithme appliqué à chaque critère séparé a renvoyé une valeur minimale de 154,43W pour les pertes et 1,72Kg pour la masse.

En ce qui concerne la frontière Pareto, les auteurs ont représenté la masse en fonction des pertes. Il est intéressant de noter ici que la courbe présentait des discontinuités. Ainsi, un prototype considéré comme optimal prélevé sur la courbe est comparé avec une machine existante. Les résultats ont mis en évidence encore une fois l'efficacité des AGs pour trouver des meilleures solutions (185,58W pour la machine réelle contre 167,58W pour le prototype optimisé, les masses sont très proches).

- [Pil 1997] est l'un des premiers articles à proposer l'utilisation des AGs pour la vérification des paramètres électriques des machines asynchrones en utilisant le modèle équivalent classique. Le problème est codé en binaire et chaque individu est représenté par 14 bits. Dans ce travail, quatre variantes d'AGs sont appliquées sur trois moteurs asynchrones de puissances différentes dont on connaît à priori les valeurs exactes des paramètres du modèle équivalent. La différence entre les approches AGs se situe au niveau du mécanisme de la sélection des individus pour la reproduction et le croisement. La fonction objectif correspond à une minimisation de l'erreur commise sur le calcul du couple. Elle est donnée par la différence entre la valeur de l'expression analytique en fonction des plusieurs paramètres électriques de la machine et la valeur du couple mesuré qui est maintenue constante pendant le processus d'optimisation. Les paramètres de la meilleure solution trouvée par les AGs sont comparés ensuite avec les paramètres mesurés. Les résultats sont convaincants puisque l'erreur commise sur le couple ne dépasse pas en aucun cas 2%.

- Cun et al [Cun 2007] traitent aussi d'un cas d'optimisation des machines asynchrones de 30KW en utilisant les AGs. Des tailles de population différentes ainsi que des probabilités de croisement et de mutation variées ont été utilisés dans ce travail. Le but est de comparer les résultats obtenus avec un moteur industriel. La fonction objectif prend en compte la minimisation du coût de fabrication. Le problème contient dix

variables d'optimisation (électriques et géométriques) codées en binaire sur 12bits et 8bits. L'AG est couplé avec le modèle équivalent classique des moteurs asynchrones et le meilleur individu est analysé avec les éléments finis.

Les résultats à partir d'éléments finis ont montré que le coût de fabrication est réduit d'une valeur remarquable de l'ordre de 14% (540\$ pour le moteur industriel et 466\$ pour le moteur optimisé). Les auteurs signalent aussi une amélioration au niveau du rendement et du facteur de puissance.

7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les techniques les plus importantes utilisées dans la résolution des problèmes d'optimisation en génie électrique. Selon leurs caractéristiques, ces méthodes peuvent être réunies en deux grandes familles : les algorithmes déterministes et les algorithmes stochastiques.

On remarque que les méthodes déterministes sont en général peu coûteuses mais elles nécessitent un point de départ et la connaissance du gradient de la fonction à optimiser pour résoudre le problème. A l'opposé, les méthodes stochastiques ne nécessitent ni un point de départ, ni la connaissance du gradient de la fonction objectif pour atteindre la solution optimale. Cependant, elles demandent un nombre important d'évaluations avant de trouver la solution finale. Parmi les méthodes stochastiques, les algorithmes génétiques ont été expliqués en détail avec une attention particulière au système GENOCOP qui formera la base de la résolution du problème d'optimisation multi-objectif adoptée dans cette étude.

Ensuite, une introduction au paradigme des méthodes évolutionnistes multi-objectif a été présentée. Quelques approches stochastiques d'optimisation structurale comme le NSGA et le SPEA ont été proposées. Elles sont largement utilisées dans les problèmes réels académiques et industriels. Parmi ces approches, le SPEA_II se trouve classé parmi les plus performantes. Le code basé sur le SPEA que nous avons développé sera utilisé dans l'optimisation des machines synchrones à aimants permanents. On termine ce chapitre par quelques expériences d'utilisation des algorithmes génétiques dans le domaine des machines électriques menées par des chercheurs à travers le monde.

**CHAPITRE IV – CONCEPTION PAR OPTIMISATION DES MACHINES A
FLUX AXIAL A AIMANTS PERMANENTS. MISE EN OEUVRE DE LA
METHODOLOGIE PROPOSEE**

SOMMAIRE – Chapitre IV

1	INTRODUCTION	159
2	DESCRIPTION DE L’AEROGENERATEUR VISE	159
2.1	CARACTERISTIQUES DE LA TURBINE EOLIENNE VISEE	159
2.2	SYSTEME « GENERATRICE-REDRESSEUR A DIODES- HACHEUR- BATTERIES »	160
2.3	SYSTEME GENERATRICE « REDRESSEUR MLI »	161
2.4	TOPOLOGIE DE LA GENERATRICE A DIMENSIONNER	162
2.5	LE BUS A COURANT CONTINU	163
3	PROCEDURE D’OPTIMISATION ET METHODOLOGIE DE GENERATION DES PROTOTYPES OPTIMAUX PROPOSEE PAR NOTRE APPROCHE.....	164
3.1	JUSTIFICATION DU CHOIX D’UNE METHODE EVOLUTIONNISTE MULTI-OBJECTIF	164
3.2	ELABORATION DU CAHIER DES CHARGES DE L’APPLICATION ET PROCEDURE D’OPTIMISATION	165
3.3	FORMULATION DU PROBLEME EN TERME D’OPTIMISATION NON LINEAIRE SOUS CONTRAINTES	168
3.4	FONCTIONNEMENT DU LOGICIEL DE DIMENSIONNEMENT OPTIMSAP	169
4	ANALYSE DES PERFORMANCES DES GENERATRICES DIMENSIONNEES SELON LES CRITERES RETENUS	173
4.1	SOLUTIONS RELATIVES AU COUPLE DE CRITERES “ MASSE DES PARTIES ACTIVES/RENDEMENT ”	173
4.2	SOLUTIONS RELATIVES AU COUPLE DE CRITERES “ VOLUME DES AIMANTS/PERTES JOULE ”	179
4.3	SOLUTIONS RELATIVES AU COUPLE DE CRITERES “ PUISSANCE VOLUMIQUE/RENDEMENT ”	182
4.4	PERFORMANCES D’UN PROTOTYPE OPTIMISE	184
5	CONCLUSION.....	193

1 Introduction

Ce chapitre est consacré au dimensionnement d'une chaîne éolienne de 10 kW ayant une machine synchrone à aimants permanents à flux axial pour génératrice suivi d'un redresseur à diodes en cascade avec un hacheur débitant sur un banc de batteries de 120 V en parallèle avec une charge de consommation.

Ce travail n'ayant pas donné lieu à la construction d'un prototype pendant la thèse pour diverses raisons, l'aérogénérateur dimensionné dans ce chapitre constitue une illustration des potentialités de la méthodologie de dimensionnement développée. En outre, l'aérogénérateur de 10 kW à base de machine à aimants à flux axial, fait écho à un aérogénérateur de 10 kW installé sur la plateforme technologique de Fecamp consacré aux énergies renouvelables et s'appuyant sur le GREAH.

Dans une première partie, nous décrivons l'application visée et nous déduisons le cahier des charges. Se basant sur ce dernier, nous construisons ensuite le problème de dimensionnement comme un problème d'optimisation non-linéaire multi-critère sous contraintes pouvant être résolu par OPTIMSAP. Plusieurs critères d'optimisation ont été établis et les performances des solutions obtenues sont analysées par couple de critères comme masse/rendement, pertes Joule/volumes des aimants, ou encore puissance volumique/rendement.

Enfin, et pour un prototype choisi sur la frontière de Pareto 'pertes Joule/volume des aimants', une modélisation tridimensionnelle par éléments finis est réalisée et les résultats de simulation sont comparées à ceux issus du modèle analytique de calcul du champ magnétique. De même, une simulation du système aérogénérateur est effectuée pour le même prototype permettant de situer ses performances énergétiques par rapport à la puissance maximale disponible sur l'arbre de la turbine pour différentes vitesses de rotation et de vent incident.

2 Description de l'aérogénérateur visé

2.1 Caractéristiques de la turbine éolienne visée

La turbine éolienne visée est du type NACA d'une puissance de 10 kW proposé par Bergey. La figure IV-1 représente l'évolution de la puissance éolienne captée par cette turbine en fonction de la vitesse de rotation pour différentes vitesses du vent. Ces caractéristiques ont été obtenues par le biais du code 'simtorque' développé au GREAH [Nic 1994] et basé sur la méthode des éléments de pôle.

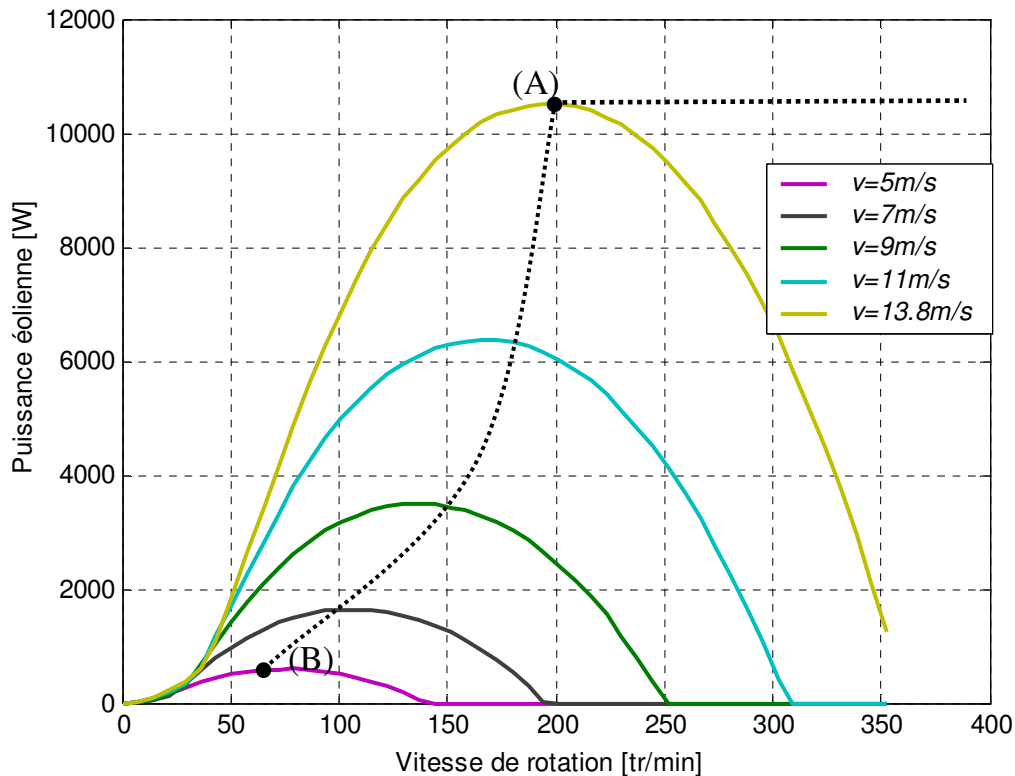


Figure IV.1: Puissance mécanique sur l'arbre en fonction de la vitesse de rotation de la turbine éolienne

La courbe en pointillé représente la courbe théorique optimale qui relie les sommets des courbes de la puissance éolienne en fonction de la vitesse de rotation. Le point 'A' sur cette courbe correspond à la vitesse nominale du vent et la puissance nominale P_n captée par l'éolienne, en fonction de laquelle la génératrice devrait être dimensionnée.

Le point 'B' correspond à la vitesse d'amorçage. C'est la vitesse du vent à laquelle l'éolienne commence à produire de l'énergie.

2.2 Système « génératrice-redresseur à diodes- hacheur- batteries »

Dans les sites de petites puissances, soit isolés, soit raccordés au réseau, on utilise un bus continu intermédiaire avant de transformer l'énergie en courant alternatif. Ce bus continu présente l'avantage d'interconnecter plus aisément divers systèmes de production (éolien, photovoltaïque, etc.) et des batteries tampon.

Une des structures la plus courante d'un système éolien de petite puissance est basée sur l'association : turbine éolienne, machine synchrone, pont redresseur à diodes, hacheur et batterie. Ceci est montré sur la figure IV-2. Cette approche est aussi considérée plus fiable et moins chère du point de vue de l'entretien [Ack 2003].

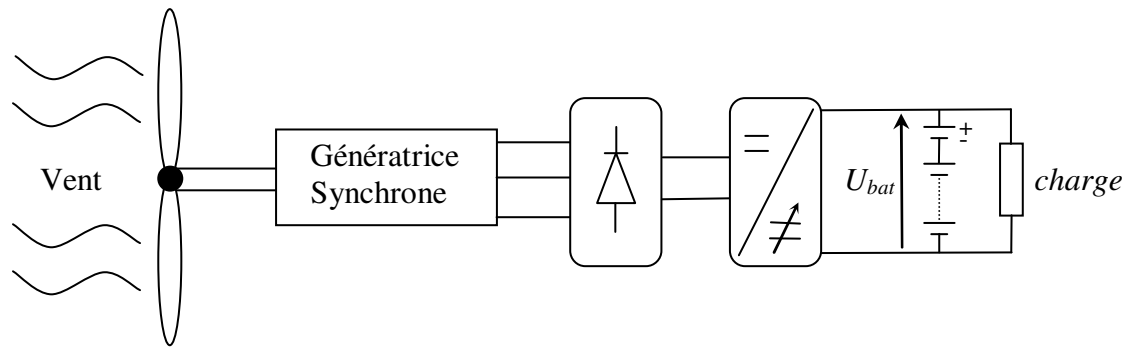


Figure IV-2: Aérogénérateur à aimants permanents débitant sur un banc des batteries

Par ce procédé, la puissance éolienne peut être indirectement contrôlée par un contrôle du courant de sortie du hacheur, dans le cas d'un dévolteur, et du courant d'entrée pour un survolteur.

L'association d'un pont redresseur à diodes avec une génératrice synchrone à aimants permanents comporte cependant quelques limitations ne permettant pas toujours de fonctionner à une puissance électrique maximale de façon à optimiser le rendement énergétique.

Il s'avère que cette structure est la plus simple et la moins coûteuse et peut rivaliser avec des systèmes plus complexes en terme de structure et d'instrumentation. La mise en œuvre de ces différents convertisseurs ainsi que la synthèse de la commande ne seront pas considérées dans ce document. Les détails concernant cette structure sont exposés dans [Mir 2005].

2.3 Système génératrice « redresseur MLI »

Dans le cas d'un redresseur triphasé à modulation de largeur d'impulsions, il est possible d'extraire un maximum de puissance de la turbine éolienne par le biais d'un contrôle du courant de la génératrice. Ce système permet de contrôler les grandeurs électromagnétiques telles que le couple ou la vitesse de rotation de la génératrice. Il permet aussi un contrôle totalement réversible de la puissance instantanée. Les inconvénients de cette structure reposent sur la complexité du montage et la commande nécessitant un capteur mécanique de position.

Le redresseur MLI étant de nature survolteur, son bus continu doit être de tension suffisamment élevée pour assurer le pilotage de la génératrice à vitesse maximale. Ceci impose l'association en série d'un grand nombre de batterie de tension qui peut parfois occasionner des déséquilibres entre les différentes cellules pouvant s'avérer néfaste pour le dispositif de stockage.

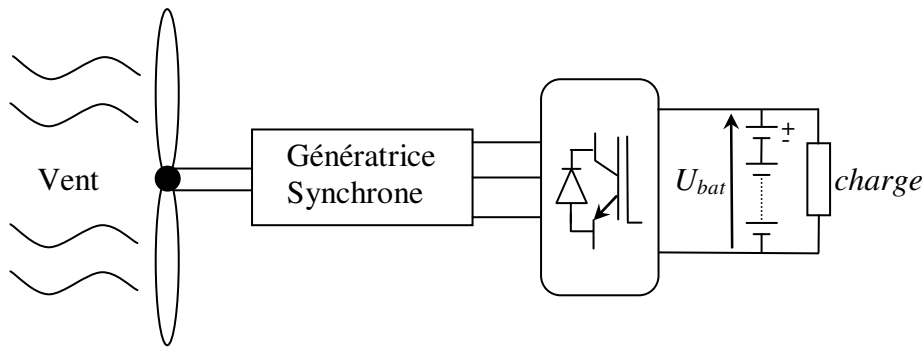


Figure IV-3: Système éolien avec un redresseur MLI

La figure IV-3 donne la structure idéale avec un redresseur à modulation de largeur d'impulsions qui permet d'absorber des courants sinusoïdaux et de contrôler éventuellement leur phase pour disposer d'un degré de liberté supplémentaires dans l'optimisation énergétique et dans celle du dimensionnement du système [Bar 2007].

Cette structure est la plus complète et a priori la plus coûteuse donc pénalisant dans un ensemble de petite puissance. Elle permet d'assurer un facteur de puissance égal à l'unité, ce qui minimise son dimensionnement. Cette structure de redressement est utilisée comme référence de comparaison pour les autres architectures plus simples.

2.4 Topologie de la génératrice à dimensionner

La génératrice est une des pièces maîtresse d'un système de conversion d'énergie éolienne. Comme décrit au premier chapitre, plusieurs types de machines électriques peuvent jouer le rôle de génératrice de construction spécifique, bien adaptées aux besoins particuliers de ce domaine.

La génératrice considérée dans cette étude est une machine à flux axial à double entrefer caractérisée par un stator inséré entre deux disques rotoriques portant chacun des aimants permanents collés en surface (cf. fig.IV-4). La mise en place ainsi que le processus du collage des aimants ne seront pas expliqués dans ce document.

Cette structure a été retenue en raison des avantages de conception qu'elle présente par rapport aux machines conventionnelles cités déjà dans le premier chapitre.

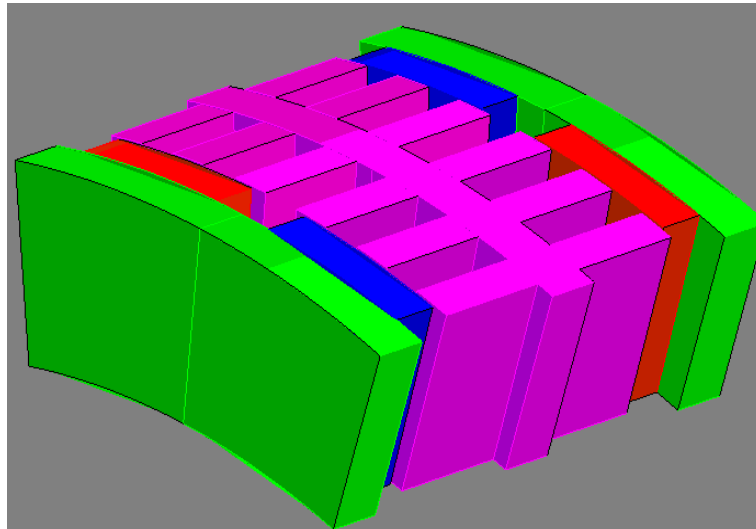


Figure IV-4: Géométrie d'une paire de pôles de la génératrice retenue dans cette étude

Ces structures sont généralement dédiées à des applications à faible vitesse et fort couple. Leur structure aide à la multiplication du nombre des paires de pôles, ce qui permet aussi de réduire le volume du circuit magnétique. Le stator encoché offre une structure de bobinage plus robuste et utilise une quantité d'aimants inférieure à celle utilisée dans le cas d'un stator lisse [Par 2005].

2.5 Le bus à courant continu

L'éolienne présentée ci-dessus est connectée à un banc de batteries en parallèle avec la charge via un redresseur suivi d'un hacheur. Ainsi, le bus à courant continu est régulé à une valeur de tension constante en contrôlant le flux d'énergie entre les batteries et le bus.

Quand l'énergie fournie par l'éolienne est insuffisante pour faire face à une augmentation soudaine de la charge, la tension du bus à courant continu devient inférieure à la valeur de référence. Dans ce cas, l'énergie manquante est obtenue à partir des batteries. Cela induit une chute de tension à ses bornes et il faut une tension plus importante que la tension à vide pour le recharger. Les tensions en fin de décharge sont standardisées et fixées par les constructeurs de batteries ou par des organismes techniques (par exemple les normes DIN 40757, 40767 et 72311).

Quand il existe un excès d'énergie, le bus à CC est utilisé pour recharger les batteries. Une charge correcte ne peut être effectuée qu'avec un courant continu. Les harmoniques induits par le redresseur causent un échauffement additionnel de la batterie et doivent être réduits au maximum, surtout vers la fin de la charge.

Il existe dans la littérature une large variété de modèles de batterie. Le plus souvent, ces modèles représentent la batterie par un circuit électrique équivalent composé de résistances,

de capacités et autres éléments de valeur fixe ou variant avec des paramètres tels que l'état de charge ou la température. Le schéma électrique d'un tel modèle est présenté dans la figure IV-5. Il s'agit d'une source idéale de tension en série avec une résistance et une capacité.

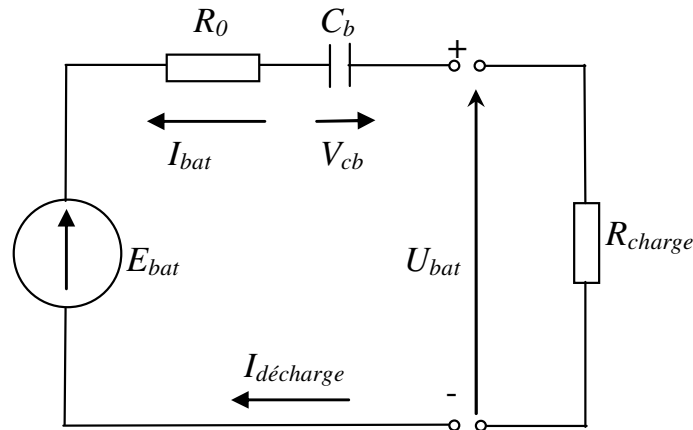


Figure IV-5: Modèle électrique simplifié des batteries

Par convention, la batterie est vue comme un générateur. Le courant de charge est négatif et celui de décharge est positif. Pour ce modèle, l'influence de la température est négligée. Le modèle de la capacité est approché par le condensateur C_b et le modèle de tension est obtenu en appliquant la loi des mailles :

$$V_{bat} = E_{bat} - R_0 I_{bat} + \frac{1}{C_b} \int i_{bat} dt \quad (IV.1)$$

La résistance R_0 supposé constante, modélise la résistance interne de la batterie tandis que la source idéale de tension E en série avec la capacité C_b modélise la partie linéaire sur les courbes de charge et de décharge.

Ce modèle a été utilisé pour la simulation de l'ensemble de l'aérogénérateur dans le cas d'une génératrice optimisée particulière (cf. paragraphe 4.4). On note ici que la tension du bus est parfaitement régulée pour l'optimisation.

3 Procédure d'optimisation et méthodologie de génération des prototypes optimaux proposée par notre approche

3.1 Justification du choix d'une méthode évolutionniste multi-objectif

Les problèmes d'optimisation multi-objectif sont une généralisation des problèmes d'optimisation. Le but est de trouver la frontière de Pareto optimal qui contient les solutions non inférieures ou non dominées. On a vu au premier chapitre que le dimensionnement des machines tournantes est fondamentalement un problème d'optimisation multi-objectif sous contraintes. Les techniques d'optimisation mono-objectif assemblent tous les objectifs dans

une même fonction. Si l'on suppose un problème d'optimisation défini par $\min\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, la fonction objectif utilisée par un algorithme mono-critère sera $\sum_{i=1}^m w_i f_i$ où w_i est le poids accordé à chaque objectif. Le vecteur de poids ne représente qu'une mesure de préférence qui privilégie un objectif par rapport à un autre et, si les critères de préférence changent, un nouveau vecteur poids doit être défini et *une nouvelle recherche doit être faite*. Contrairement aux techniques d'optimisation mono-critère où le seul objectif à atteindre est la maximisation ou la minimisation d'une seule fonction objectif, l'obtention de la frontière Pareto répartie d'une manière la plus uniforme possible et la diversité des solutions qui en font partie sont deux objectifs indissociables pour un problème multi-objectif. Cette diversité est un objectif d'une grande importance car elle permet d'effectuer une meilleure décision a posteriori. Notre problème étant un problème multi-objectif, l'application d'une méthode de résolution multi-critère est préférable. Les méthodes évolutionnaires offrent aussi l'avantage d'utiliser une population d'individus. Dans une application multi-critère, il sera donc possible de faire converger l'ensemble de la population vers la frontière de Pareto en effectuant *un seul lancement de l'algorithme*. Ceci éliminera toute pondération des fonctions objectif appliquée a priori. De plus, les résultats montrent que les algorithmes génétiques utilisés dans l'optimisation multi-critère peuvent être aussi performants que tout autre algorithme stochastique tel que la recherche tabou et le recuit simulé [Bur 1996].

3.2 Elaboration du cahier des charges de l'application et procédure d'optimisation

Le cahier des charges est un point important du dimensionnement des dispositifs électromagnétiques. D'une manière générale, il doit définir les contraintes sous leurs différents types et les butées des variables du problème dont le but est d'assurer la faisabilité de la conception de la machine. En effet, les contraintes délimitent l'espace d'exploration auquel doit appartenir l'ensemble des paramètres à optimiser et exigent certaines limites caractéristiques d'ordre électromagnétiques, mécaniques et thermiques. L'ensemble de ces contraintes permet de ramener le dimensionnement en un système d'équations non-linéaires. Ainsi, le concepteur peut spécifier diverses contraintes comme par exemple des contraintes sur les performances visées, des contraintes de cohérences géométriques et de dimensionnement, et enfin des contraintes issues du processus de fabrication. Il a intérêt à faire varier un grand nombre de variables pour augmenter les degrés de liberté de l'algorithme afin d'explorer suffisamment de solutions nouvelles et d'en choisir la meilleure. L'identification des ces variables peut être obtenue à partir de l'application de la méthode des

plans d'expériences par exemple [Sch 1998].

Sachant que le rayon de la nacelle ne doit pas dépasser 10-15% du rayon de la turbine éolienne qui est supposé de l'ordre de 3,5m, le rayon externe de la machine a été fixé à 0,3m. Ces valeurs sont issues des données techniques du modèle industriel « BWC EXCEL » commercialisé par 'Bergey', spécialiste de la fabrication des éoliennes de petite puissance [www.Bergey.com].

En raison des amplitudes importantes des vibrations des disques due à la valeur élevée du rayon moyen de la machine, la valeur minimale de l'entrefer mécanique est fixée 1 mm et la valeur de la déflexion du disque rotorique ne doit pas dépasser 10% celle de l'entrefer.

En ce qui concerne le processus de fabrication, nous imposons les contraintes suivantes : le coefficient de remplissage d'encoches est fixé à 0,4, le coefficient de foisonnement des laminations statoriques est supposé égal à 0,95, l'épaisseur minimale des aimants est de l'ordre de 2 mm et les isolants utilisés sont supposés de classe F, ce qui implique que la température des conducteurs ne doit pas dépasser 155°C. Par ailleurs, pour des raisons de stabilité mécanique, l'ouverture dentaire ne doit pas être inférieure à 3mm. Cette condition nous permet de fixer la valeur du rayon interne minimale de la machine à dimensionner. Ensuite, nous complétons ces contraintes par d'autres liées à la physique. Ainsi l'induction dans les parties ferromagnétiques et l'induction moyenne dans l'entrefer ne doivent pas dépasser 1,7T et 0.8T respectivement. Cette contrainte sur l'induction permet d'avoir une bonne conception magnétique de la machine tout en limitant les pertes fer. Nous faisons de même avec la densité du courant dans les conducteurs statoriques pour limiter les pertes par effet Joule et ainsi garantir une bonne tenue thermique des conducteurs. Cette grandeur dépend de l'échauffement est déterminante pour le dimensionnement, son influence s'étend sur différentes parties structurelles de la machine. En considérant que l'échauffement de la machine est directement lié aux pertes Joule, le choix de ce paramètre se trouve dans un compromis entre les dimensions minimales et un échauffement acceptable. Pour les machines sans système de refroidissement auxiliaire, la valeur de la densité de courant sont classiquement comprise entre 2 et 10 A/mm². Ainsi, elle a été contrainte à ne pas dépasser 10A/mm².

D'autre part, le rotor tourne à la vitesse nominale de 200 tr/min pour une vitesse de vent de 13.8 m/s, ce qui correspond au point de fonctionnement de puissance nominale. Encore faut-il prendre en compte le cas lorsque les vents sont moyens ou faibles, ce qui constitue effectivement la majeure partie de la plage d'opération d'une éolienne. Dans ce sens, le dimensionnement de la génératrice doit prendre en compte le point de fonctionnement où

l'éolienne commence à produire de l'énergie ce qui correspond au point 'B' sur la figure IV.1. Donc, le système de commande du hacheur doit trouver le bon rapport cyclique $\alpha_{hach} \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ pour assurer la présence d'une tension suffisante aux bornes des batteries quelque soit la vitesse du vent comprise entre la vitesse du démarrage et la vitesse nominale.

Le tableau suivant liste les paramètres fixés pendant le processus du dimensionnement ainsi que les variables géométriques et électriques d'optimisation et leurs plages de variation. Le choix de ces variables d'optimisation a été effectué suite à une analyse de leur impact sur les performances de la machine tout en s'appuyant sur des études similaires dans la bibliographie [Yan 2004].

Tableau IV.I : Liste des variables retenues pendant le processus d'optimisation

Paramètres	Description	Valeur
<u>Paramètres fixes</u>		
N_{ph}	Nombre de phase	3
Ω (tr/min)	Vitesse de rotation	200
R_o (m)	Rayon externe	0,3
N_s	Nombre d'encoches	84
p	Nombre de paires de pôles	14
B_{max} (T)	Induction maximale dans les tôles	1,7
k_{cp}	Coefficient de remplissage d'encoche	0,5
k_{st}	Coefficient de foisonnement	0,95
k_h	Coefficient des pertes par hystérésis	45
k_f	Coefficient des pertes par courant de Foucault	5e-02
ρ_{fer} (Kg/m ³)	Densité volumique du fer	7560
ρ_{cuivre} (Kg/m ³)	Densité volumique du cuivre	8900
ρ_{NdFeB} (Kg/m ³)	Densité volumique des APs	7500
r_0 ($\Omega.m$)	Résistivité du cuivre à 20°	1,7e-08
$T_{cuivre,max}$ (°C)	Température maximale des conducteurs	155
$T_{AP,max}$ (°C)	Température maximale des aimants permanents	120

<u><i>Variables d'optimisation</i></u>		
R_i (m)	Rayon interne	0,15-0,28
α_m (%)	Coeff. d'arc polaire	50-100
H_m (mm)	Epaisseur des aimants	02-15
g (mm)	Epaisseur de l'entrefer	01-03
	Mécanique	
τ_s	Coefficient d'ouverture d'encoche	0,5
H_{s1} (mm)	Profondeur d'encoche	10-60
N_{sp}	Nombre de spires en Série par bobine	10-50
J (A/mm ²)	Densité de courant	01-10

3.3 Formulation du problème en terme d'optimisation non linéaire sous contraintes

On a vu au premier chapitre que la conception de tels dispositifs consiste à coupler un modèle analytique pourvu d'un minimum d'hypothèses simplificatrices avec un algorithme d'optimisation. Ceci peut se faire par le biais d'un modèle issu de la résolution des équations de Maxwell par la méthode de séparation des variables suivi d'un modèle thermique et un aspect mécanique. Les relations issues de ce modèle multi-physique dimensionnant ne sont pas linéaires. Le problème de conception des machines électriques se présente donc directement comme un problème d'optimisation multi-objectif non-linéaire sous contraintes.

Avant de lancer un processus d'optimisation appliqué à une machine électrique dont la structure est bien définie par rapport à un cahier des charges fixé, il faut choisir les objectifs à atteindre sous forme d'une fonction objectif et formuler l'ensemble des contraintes à respecter.

Cette fonction est habituellement une performance ou une caractéristique de la machine telle que le rendement, la masse, le facteur de puissance, la puissance volumique, le coût, etc. Plusieurs exemples seront considérés dans ce chapitre. Le reste des critères du cahier des charges seront utilisées comme des contraintes de type égalité ou inégalité. Donc, notre problème est formulé de la façon suivante :

$$\text{Min/Max } F(X) = \{f_1, f_2\}$$

f1 et f2 peuvent être : le rendement, la masse, la puissance volumique, le coût, etc...

assujétie à :

- * Contraintes égalités :

$$P_u = 10kW$$

$$E = E_0$$
- * Contraintes inégalités :

$$T_{bob} \leq 15^\circ C$$

$$T_{ap} \leq 120^\circ C$$

$$J_{enc} \leq J_{max}$$

$$B_{moy} \leq 0,8T$$

$$\Delta e \leq \frac{g}{10}$$

$$\alpha_{hach} \in [\alpha_{min}, \alpha_{max}] \forall V_{vent}$$
- * Les butées (variables d'optimisation)

$$x_{i\min} \leq x_i \leq x_{i\max}$$

Figure IV-6: Définition du problème d'optimisation

3.4 Fonctionnement du logiciel de dimensionnement OPTIMSAP

Le principe mis en œuvre pour générer automatiquement des solutions physiquement acceptables consiste à utiliser un programme de calcul des performances de la machine couplé ensuite à un algorithme d'optimisation multi-objectif sous contrainte. L'ensemble constitue le code nommé OPTIMSAP que nous avons programmé sous Matlab. Grâce à un processus itératif, ce dernier doit aboutir à des solutions optimales au problème de conception sous contraintes. Le fonctionnement général du logiciel de dimensionnement à partir des modèles magnétiques, thermiques et mécaniques est schématisé par la figure IV-7. Il fonctionne de la manière suivante :

Dans un premier temps, l'OPTIMSAP génère une population des individus (solutions) qui respectent les contraintes linéaires avec le module GENOCOP. Il crée aussi une archive externe vide pour le stockage des solutions non-dominées au sens de Pareto trouvées pendant le processus d'optimisation. La taille de cette archive est défini par l'utilisateur.

Ensuite, l'OPTIMSAP appelle la fonction de correction des individus partiellement faisable.

Cette fonction a pour rôle de modifier quelques paramètres d'optimisation afin de trouver la f.é.m souhaitée. Une fois trouvée, le code procède au calcul des différentes inductances et à l'évaluation d'autres grandeurs comme par exemple le couple de détente, les efforts axiaux, l'épaisseur nécessaire des disques rotoriques et les pertes fer.

L'étape suivante consiste à construire le modèle électrique puis le coupler avec un redresseur à diodes en faisant varier l'impédance à la sortie pour que la machine débite 10 kW. Une fois cette puissance atteinte, des tests sur la densité du courant et la valeur moyenne de l'induction dans l'entrefer seront effectués. Si ces deux contraintes sont respectées, L'OPTIMSAP évalue à ce niveau l'état thermique de la solution considérée et teste les contraintes qui en découlent. A ce stade de calcul, l'OPTIMSAP aurait traité une partie du cahier des charges relative au point de fonctionnement nominal identifié par le point 'A' sur la figure IV-1. Par la suite, le code traitera la contrainte liée au système aérogénérateur en passant au point 'B' de la même figure. Dans ce contexte, il calcul la f.é.m qui correspond à la vitesse du démarrage du vent et sa tension redressée à la sortie du pont. Si, dans ces conditions, le rapport cyclique du hacheur appartient à l'intervalle défini par l'utilisateur pour que ce dernier assure une tension de 120 V, alors le code retient cette solution et évalue sa fonction objectif avec le module SPEA2 et effectuera une mise à jour de l'archive.

Finalement, si le critère d'arrêt est satisfait, alors L'OPTIMSAP affiche la frontière de Pareto et génère le fichier qui contient toutes informations relatives aux solutions non-dominées. Sinon, il applique les opérateurs génétiques propres au GENOCOP pour former une nouvelle population et recommencer le même processus qu'auparavant.

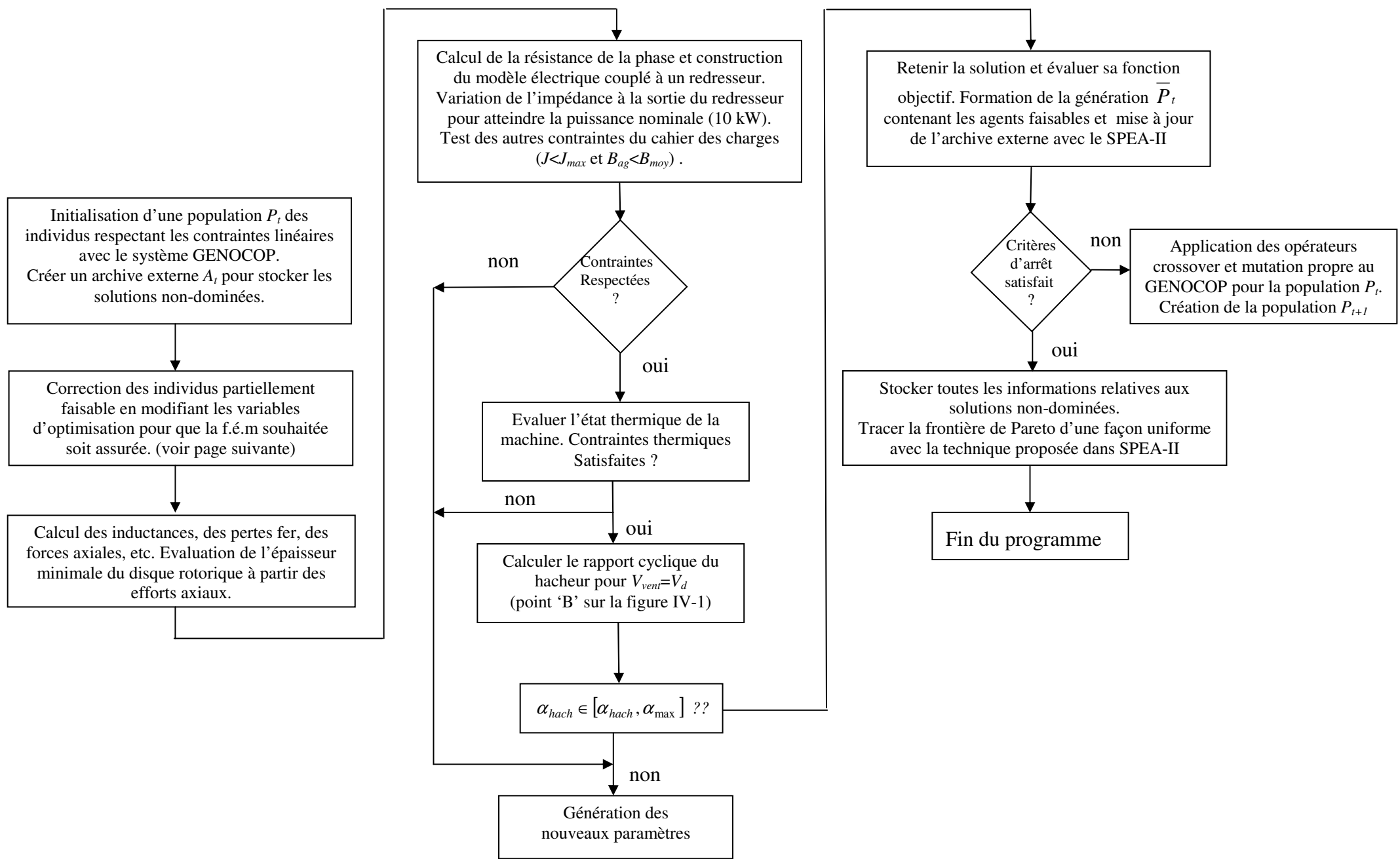


Figure IV-7: Principales étapes de la méthodologie de dimensionnement implantée

Correction des individus partiellement faisable en modifiant les variables d'optimisation pour assurer la f.é.m appropriée

Pour pouvoir trouver un individu qui répond à toutes les contraintes, on génère tout d'abord un individu qui respecte seulement les contraintes linéaires avec le code GENOCOP. On note ici que les bornes de variation de différentes variables d'optimisation sont considérées aussi comme des contraintes linéaires.

Dans la plupart des cas, la f.é.m créée par cet individu ne correspond pas à celle fixée par le cahier des charges. Donc, une correction doit être apportée en modifiant quelques variables d'optimisation pour trouver la f.é.m adéquate. La figure IV-8 montre l'exemple dans le cas où le rayon interne est modifié pour le calcul de la f.é.m.

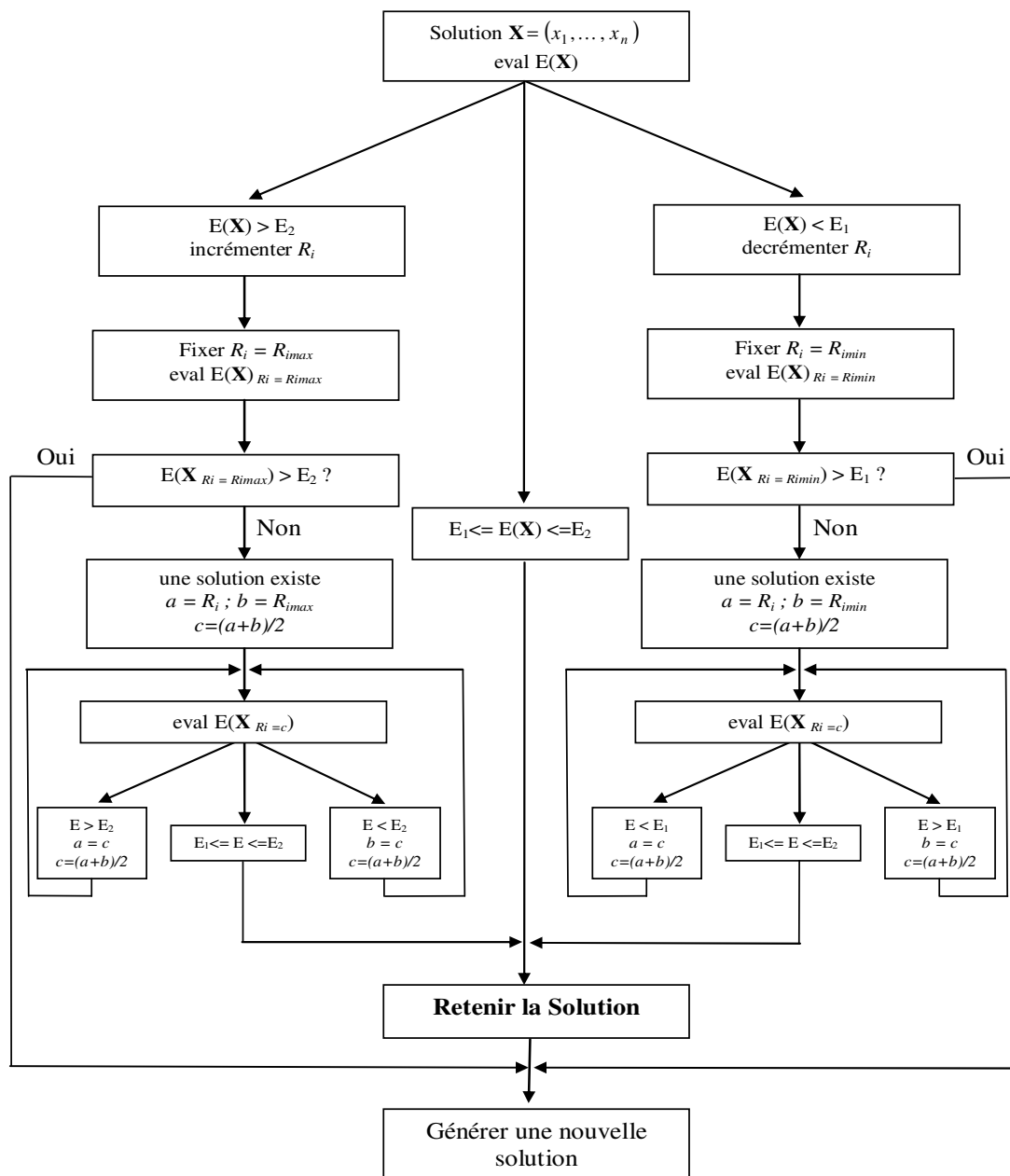


Figure IV-8: Processus de modification du rayon interne d'un individu quelconque pour le calcul de la f.é.m appropriée

Dans cette figure, les termes E_1 et E_2 représentent les bornes de l'intervalle des valeurs tolérées pour la f.é.m, ces bornes correspondent à la tolérance numérique sur les valeurs efficaces des f.é.m obtenues. Dans les calculs présentés, cette tolérance a été fixée à 2,5%.

Bien évidemment, d'autres paramètres influencent la valeur efficace de la f.é.m. l'OPTIMSAP prend en compte la modification de quatre autres paramètres, à savoir le coefficient d'arc polaire, le nombre de spires, l'épaisseur des aimants et la largeur de l'entrefer.

4 Analyse des performances des génératrices dimensionnées selon les critères retenus

Le code développé, OPTIMSAP, a été utilisé afin de dimensionner un aérogénérateur de 10 kW composé d'une turbine éolienne du type NACA, d'une génératrice synchrone à aimants permanents à flux axial double entrefer et d'un redresseur à diodes suivi d'un hacheur débitant sur un banc de batteries et une charge en parallèle.

Le cahier des charges de cet aérogénérateur s'inspire de l'aérogénérateur de 10 kW proposé par le constructeur 'Bergey' et installé sur la plateforme technologique de Fécamp.

Afin d'étudier toutes les possibilités de pré-prototypage de ce type d'aérogénérateur, nous avons choisi de présenter les résultats par couple de critères, à savoir : masse/rendement, pertes Joule/volume des aimants et puissance volumique/rendement.

Les différentes frontières de Pareto issues de ces résultats sont de nature à guider le constructeur dans le choix d'un compromis 'optimal'.

4.1 Solutions relatives au couple de critères “ Masse des parties actives/Rendement ”

a) Le rendement

Les machines à flux axial à aimants permanents possèdent un bon rendement puisque le rotor ne souffre pas des pertes Joule. Les pertes sont pratiquement localisées au niveau statorique.

Le rendement est déterminé à partir de la formule classique suivante :

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_j + P_{fer}} \quad (IV.2)$$

où P_u , P_j et P_{fer} sont respectivement la puissance utile, les pertes Joule et les pertes magnétiques statoriques.

Les pertes Joule sont calculées à partir de l'équation classique qui fait intervenir la valeur efficace du courant de phase. En ce qui concerne les pertes fer, nous avons choisi une formulation générale en régime périodique non sinusoïdal dans laquelle on sépare les pertes

par hystérésis et les pertes par courant de Foucault. A vide, on considère que l'évolution de l'induction dans les dents est trapézoïdale et qu'elle est proche de la sinusoïde dans la culasse statorique (cf paragraphe 9.2 du deuxième chapitre).

b) La masse du rotor

Le rotor comportant des aimants collés en surface a une géométrie relativement simple. La partie ferromagnétique est un disque du rayon externe R_o , du rayon interne R_i et d'épaisseur h_{bi} . En supposant que le rotor est massif et en notant par ρ_{fer} la masse volumique du matériau ferromagnétique, la masse du disque rotorique vaut alors :

$$M_{fer,rot} = \pi(R_o^2 - R_i^2)\rho_{fer}h_{bi}$$

D'autre par, les aimants montés en surface d'épaisseur h_m et d'ouverture angulaire α_m ont le même rayon interne et externe que le disque ferromagnétique rotorique. Si on désigne par τ_m l'ouverture de l'aimant relative à un pas polaire (coefficient d'arc polaire) et par ρ_m la masse volumique des aimants, la masse totale des aimants est :

$$M_m = \pi\tau_m(R_o^2 - R_i^2)\rho_m h_m$$

La masse totale du disque rotorique d'une partie active sera donc :

$$M_{rotor} = M_{fer,rot} + M_m = \pi(R_o^2 - R_i^2)(\rho_{fer}h_{bi} + \tau_m\rho_m h_m) \quad (IV.3)$$

c) La masse du stator

Le stator est formé d'un empilement de tôles magnétiques. Les rayons interne et externe de la tôle sont respectivement R_i et R_o . On considère que les encoches sont ouvertes. Donc, à partir des dimensions d'une denture, on peut déterminer la surface totale occupée par les dents statoriques en introduisant le coefficient de foisonnement k_f et l'ouverture d'encoche relative à un pas dentaire τ_s par la formule suivante :

$$S_{dent} = \pi k_f (1 - \tau_s)(R_o^2 - R_i^2)$$

D'autre part, on considère que la culasse statorique est un disque identique au disque rotorique ferromagnétique mais d'épaisseur h_{cy} . Dans ces conditions, la masse des dents M_{ds} , de la culasse statorique M_{cs} et du stator complet M_{stat} valent respectivement :

$$M_{ds} = \pi k_f (1 - \tau_s)(R_o^2 - R_i^2)\rho_{fer}h_{sl} \quad M_{cs} = k_f \pi(R_o^2 - R_i^2)\rho_{fer}h_{sy}$$

$$M_{stat} = M_{ds} + M_{cs} \quad (IV.4)$$

d) La masse du cuivre

La masse totale du cuivre utilisé dans la machine est la somme de la masse du cuivre des conducteurs actifs logés dans les encoches et la masse du cuivre constituant les têtes des bobines.

➤ *Masse du cuivre dans les encoches*

Si N_{sp} désigne le nombre de spires en série par encoche, et si d_{sp} désigne le diamètre d'une spire et S_{sp} la section d'une spire à nu, alors la surface occupée par les N_{sp} spires par encoche est:

$$S_{sp} = N_{sp} \pi \frac{d_{sp}^2}{4}$$

Le volume du cuivre occupant toutes les encoches d'une surface active du stator vaut donc:

$$V_{cu,enc} = \pi(R_o - R_i)N_s N_{sp} \frac{d_{sp}^2}{4}$$

En notant par ρ_{cu} la masse volumique du cuivre, la masse totale du cuivre logé dans les encoches sera donnée par :

$$M_{cu,enc} = \rho_{cu} V_{cu,enc}$$

➤ *Masse du cuivre de têtes des bobines*

La longueur des têtes de bobines est difficile à évaluer. Elle dépend du type de fil utilisé et aussi de la méthode de réalisation du bobinage. Dans ce qui suit, on propose un modèle pour la calculer.

En effet, la longueur des têtes de bobines peut être décomposée en deux parties : la première correspond aux fils reliant les deux encoches d'une phase dans un plan parallèle aux tôles du stator au niveau du rayon externe et la deuxième correspond à la partie des fils contenu dans ce plan reliant les mêmes encoches au niveau du rayon interne (cf. fig IV-9).

On désignant par r_{cour} et h_t le rayon de courbure de têtes des bobines et la sortie droite des conducteurs respectivement, la longueur de la première et de la deuxième partie valent respectivement :

$$l_{tbo} = 2 \left(h_t + \frac{\pi}{4} r_{cour} \right) + \left(\frac{\pi}{p} - w_{sl} \right) (R_o + h_t + r_{cour})$$

$$l_{tbi} = 2 \left(h_t + \frac{\pi}{4} r_{cour} \right) + \left(\frac{\pi}{p} - w_{sl} \right) (R_i - h_t - r_{cour})$$

Ici, on considère que la sortie droite des conducteurs est égale à l'ouverture d'encoche au niveau de rayon externe ($h_t = w_{sl} R_o$) et que le rayon de courbure vaut sa moitié.

En notant par N_{epp} et N_{ph} le nombre d'encoches/pôle/phase et le nombre de phase respectivement, le volume total du cuivre occupant les têtes des bobines est :

$$V_{tbo/i} = p N_{epp} N_{ph} N_{sp} S_{sp} l_{tbo/i}$$

La masse du cuivre totale occupant les têtes des bobines est ensuite déterminée par la formule suivante :

$$M_{cu,tb} = \rho_{cu} (V_{tbo} + V_{tbi})$$

Dans ces conditions, On peut écrire donc que la masse totale du cuivre d'une partie active est :

$$M_{cu} = M_{cu,enc} + M_{cu,tb} \quad (IV.8)$$

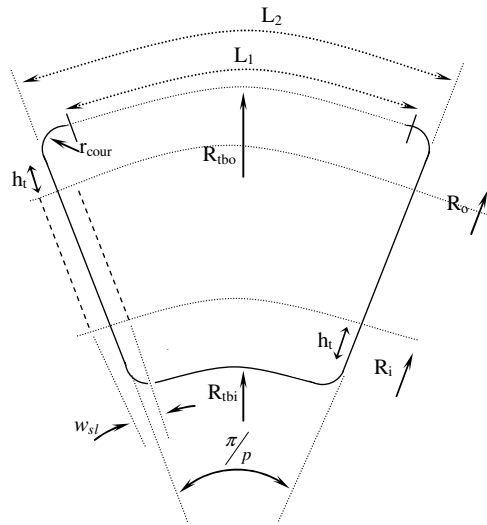


Figure IV-9: Schéma montrant les têtes des bobines pour le calcul de la masse

Ainsi, la masse totale des parties actives de la machine qui contribuent à la production du couple sera donnée par :

$$M_{tot} = M_{rot} + M_{stat} + M_{cu} \quad (IV.5)$$

e) La frontière de Pareto

Les deux critères 'Masse/Rendement' sont les plus souvent évoqués dans un grand nombre d'application industrielles. Pour l'éolien, la masse de la génératrice constitue un élément important pour la détermination de la masse de la nacelle. Cette dernière conditionne l'amplitude des vibrations du mât face aux rafales du vent.

La figure IV-10 représente les courbes de Pareto obtenues pour différentes valeurs de B_r dans le cas où le rendement et la masse de la machine sont pris comme des objectifs. Le code d'optimisation a été lancé trois fois pour chaque valeur de B_r afin de tester la convergence des résultats obtenus. L'analyse des résultats de la figure IV-10 montre une faible dispersion des compromis à l'approche de la frontière Pareto. Les pré-prototypes dimensionnés sont donc obtenus avec une certaine tolérance due essentiellement à la nature stochastique de l'algorithme d'optimisation.

Il est notable que chaque point sur ces courbes est une solution optimisée avec des grandeurs géométriques et électriques définies. Les parties actives englobent les disques rotoriques, les aimants permanents, le disque statorique (culasse et dents) et le cuivre. La masse de l'arbre ainsi que la masse de la carcasse de la machine ne sont pas prises en compte dans cette étude.

On présente sur la figure IV-11 l'ensemble des mêmes solutions Pareto obtenue par l'algorithme pour chaque valeur de B_r . Cet abaque montre que, pour les rendements élevés, l'augmentation de l'induction rémanente de 1 à 1,4T se traduit par une relative 'stagnation' du

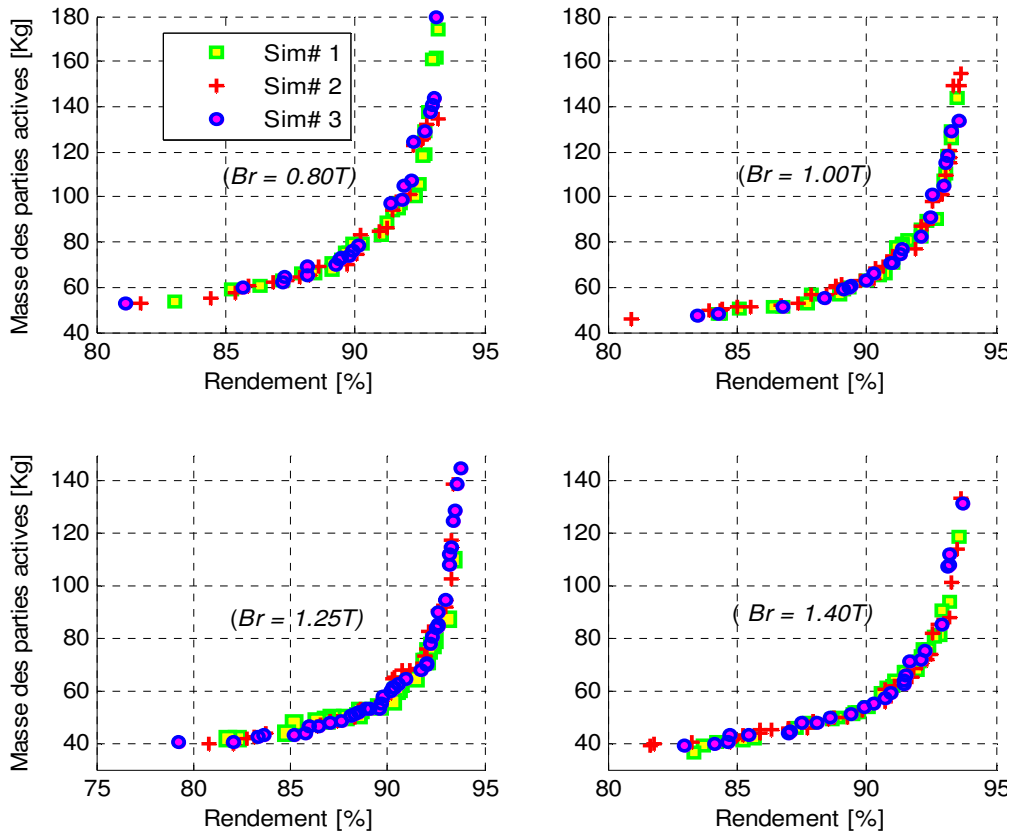


Figure IV-10: Frontière de Pareto ‘Masse/Rendement’ pour différentes valeurs de B_r , pour montrer la convergence des résultats.

rendement. Le volume des aimants ayant sensiblement augmenté pour les rendements inférieurs à 93%, les frontières de Pareto se succèdent de haut en bas dans le sens d’augmentation de B_r , indiquant ainsi l’apport de l’induction rémanente par la diminution de la masse du cuivre et donc de la masse totale des parties actives.

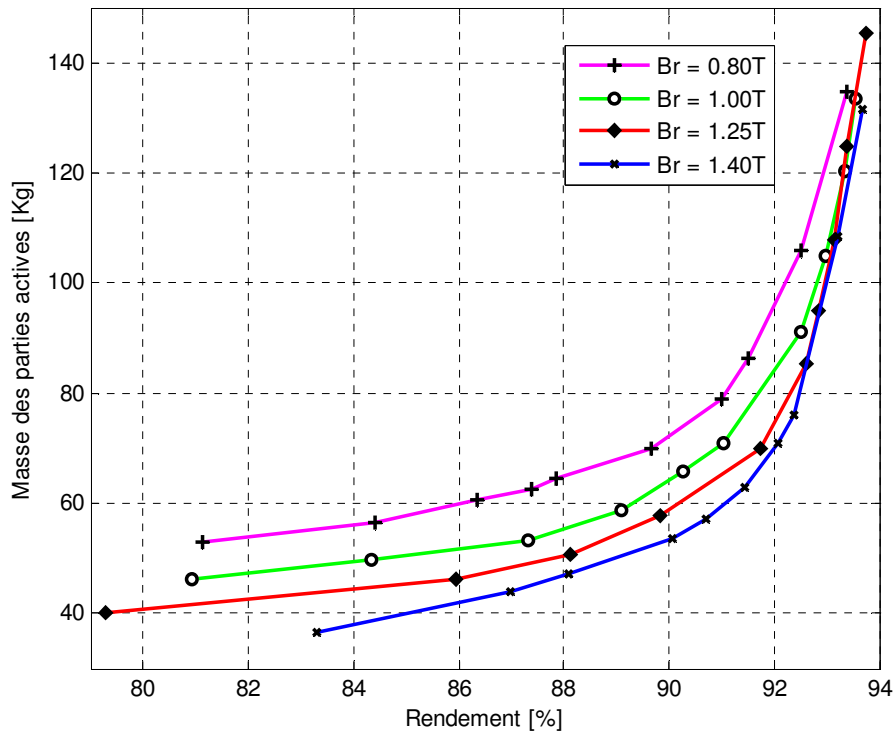


Figure IV-11: Courbe de Pareto "Masse / Rendement" pour différentes valeurs d'induction rémanente B_r

D'autre part, il est intéressant d'observer les résultats d'optimisation en libérant l'induction rémanente. Dans ce contexte, l'algorithme a été modifié et l'induction rémanente est libre de varier entre 0.8T et 1.4T.

La frontière de Pareto du type « Masse des parties actives / Rendement » dans le cas où B_r est libérée est donnée par la figure IV-12. On définit sur cette figure deux points particuliers 'A' et 'B'. Au-delà du point 'B', on observe une augmentation de la masse à rendement constant, alors que le point 'A' représente la limite à partir de laquelle le rendement chute à masse quasi-constante. Il en découle que toutes les solutions situées entre le point 'A' et le point 'B' offre un meilleur compromis à la fois au niveau de la masse et du rendement. Les prototypes situés en dehors de cette zone sont a priori moins intéressants. Obtenir un rendement supérieur au point 'B' se soldera par une forte augmentation de la masse active. Inversement, si on cherche une masse inférieure au point 'A', alors le rendement se dégradera. Pour cette frontière, nous avons remarqué que B_r évoluait entre 1,1 et 1,4T.

Cette courbe de Pareto permet de déterminer les meilleurs compromis « masse/rendement ». Elle permet au concepteur de choisir la meilleure solution, qui se trouve, dans la plupart de cas dans le coude de la courbe.

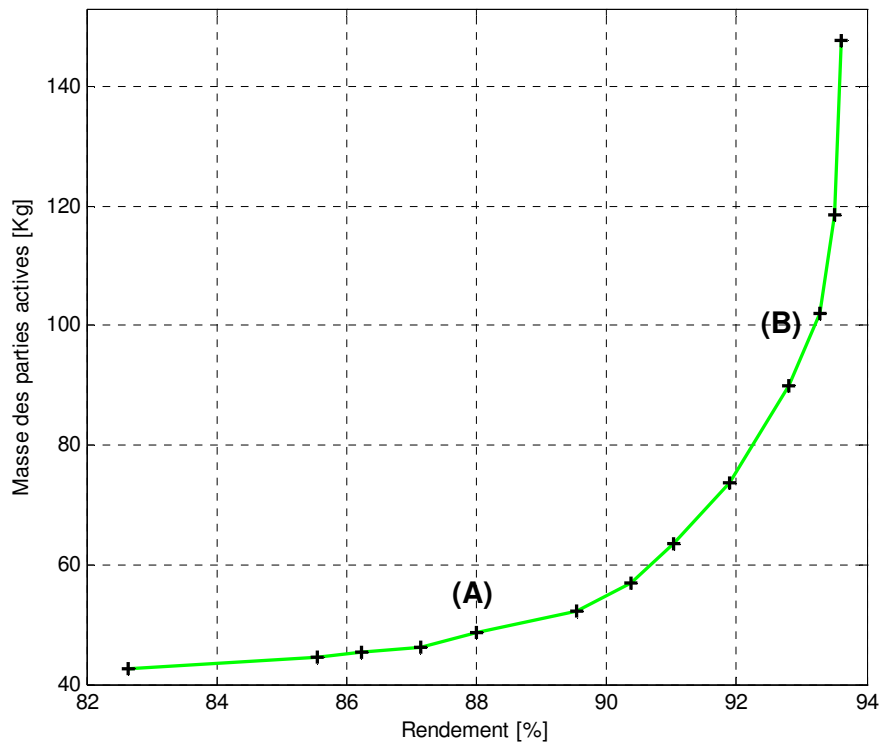


Figure IV-12: Courbe du type "Masse/Rendement". Cas où B_r est variable

4.2 Solutions relatives au couple de critères “ Volume des aimants/Pertes Joule”

Dans le domaine du petit éolien (≤ 100 kW), le coût matériel représente une part importante face aux coûts de l’installation et de maintenance d’un aérogénérateur. Ainsi, il est intéressant d’avoir le coût comme fonction objectif dans l’optimisation de la génératrice à flux axial. A ce stade, ne pouvant prendre en considération le coût des opérations de fabrication de ce type de machines, il nous est cependant possible de minimiser le coût matériel en minimisant justement la masse des parties actives et en particulier le volume des aimants. Ces derniers étant toujours bien plus chers que le cuivre ou encore le fer-silicium malgré les augmentations de leurs marchés respectifs ces derniers temps.

De même, on considérant que les pertes Joule sont majoritaires pour ce type de machines, il est possible d’augmenter directement le rendement en diminuant ces pertes tout en surveillant les aspects thermiques par le contrôle de la quantité de chaleur à évacuer.

De même qu’auparavant, la figure IV-13 montre que la recherche des solutions optimales converge vers la même frontière Pareto pour trois lancements différents et deux valeurs extrêmes de B_r . La dispersion des résultats autour de la frontière Pareto reste relativement faible eu égard aux fonctions objectif retenues.

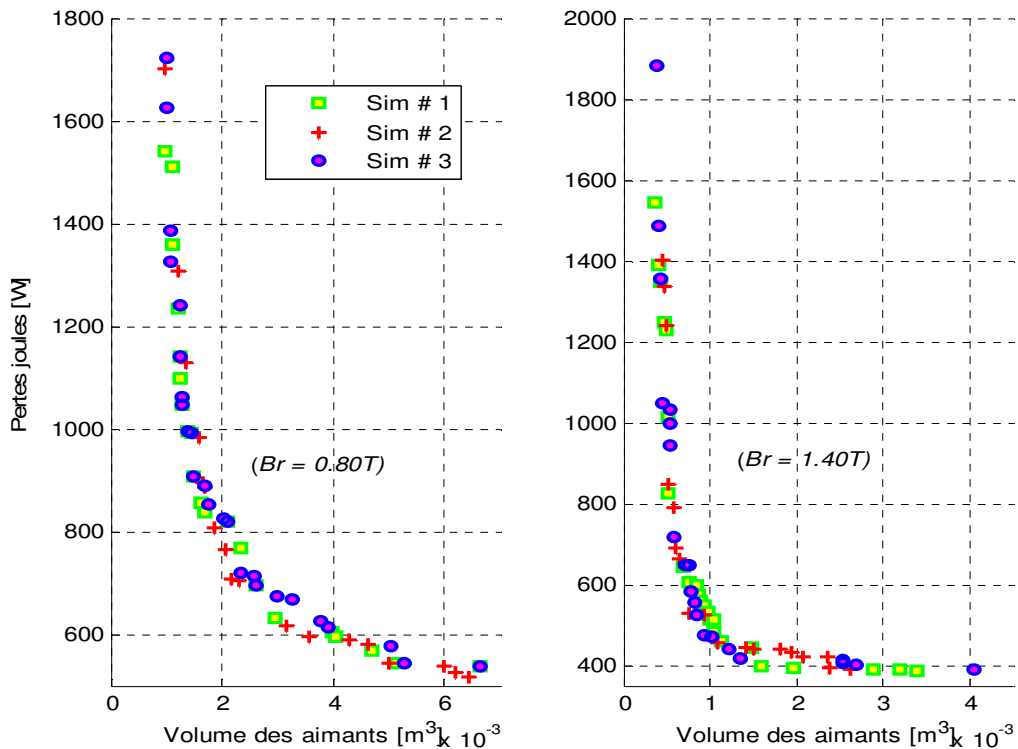


Figure IV-13: Courbe de Pareto relative aux critères "Volume des aimants/Pertes Joule" pour deux valeurs de B_r . Convergence des résultats

Par ailleurs, on peut noter la cohérence entre les frontières de Pareto présentées sur les figures IV-13 et IV-14 d'un côté, et de l'autre, celles relatives au couple de critères 'masse des parties actives/rendement' exposées plus haut. En effet, si nous considérons que le volume des aimants est un indicateur important de la masse des parties actives, et que les pertes Joule sont inversement proportionnelles au rendement, la forme de la frontière de Pareto de la figure IV-15 est assez similaire à celle de la figure IV-12.

Dans le même ordre d'idées, la figure IV-14 montre que les prototypes optimaux réduisant en même temps le volume des aimants et les pertes Joule correspondent à l'induction rémanente la plus forte, un résultat prévisible pour un machiniste. Nous pouvons remarquer cependant que l'augmentation de B_r au-delà de 1,25T se traduit par une amélioration assez modérée des deux fonctions objectif.

On note sur cette figure que l'asymptote verticale correspond au volume minimal d'aimants permanents permettant de réaliser la conversion électromécanique de cette machine. Cependant, l'asymptote horizontale correspond aux pertes Joule minimales et donc au rendement maximal possible avec ce type de machines.

De la même manière que précédemment, on définit sur la courbe IV-15 deux points intéressants 'C' et 'D'. Le point 'D' montre une augmentation des volumes des aimants à pertes Joule constantes, alors que le point 'C' représente la limite à partir de laquelle les pertes Joule augmentent à volume des aimants constants. On en déduit que tous les solutions qui

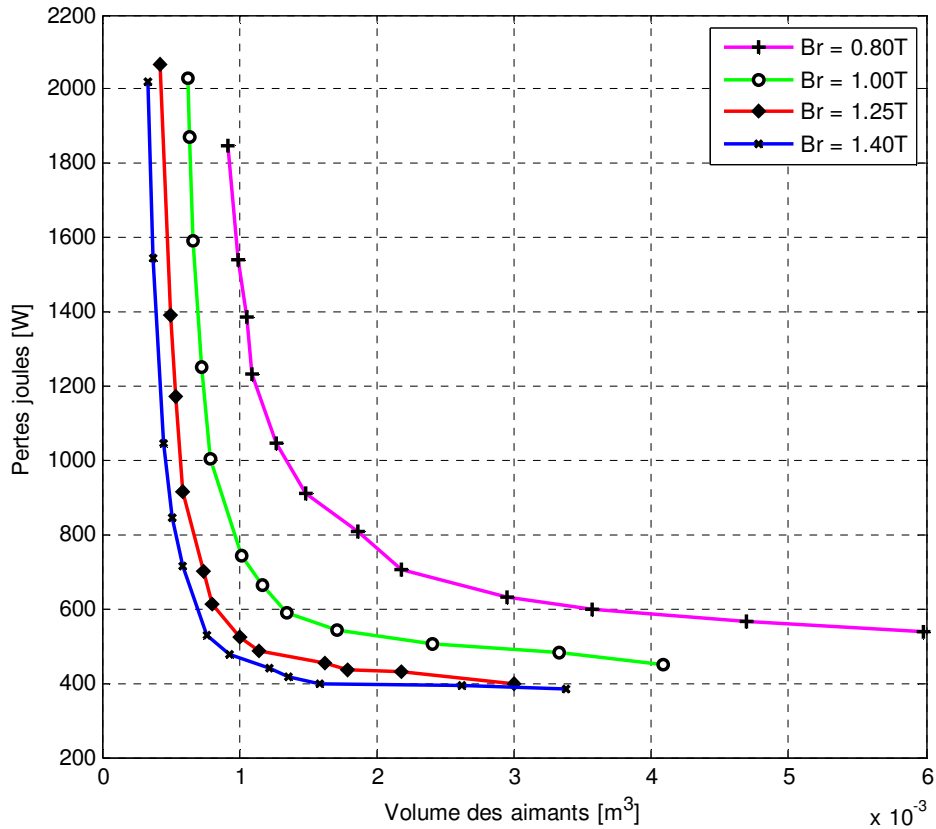


Figure IV-14: Frontière de Pareto ‘Volume des aimants/Pertes Joule’ pour différentes valeurs de B_r ,

se trouvent entre ces deux points particuliers sont les meilleurs compromis à la fois au niveau du volume des aimants et du rendement. Les solutions qui sont en dehors de cette zone sont moins intéressantes. Obtenir des pertes Joule inférieure au point ‘D’ se paye par une forte augmentation du volume des aimants permanents.

Il est important à noter que la frontière de Pareto de la figure IV-15 a été obtenue pour de Br variant entre 1,1 et 1,3T alors que cette grandeur était libre de varier.

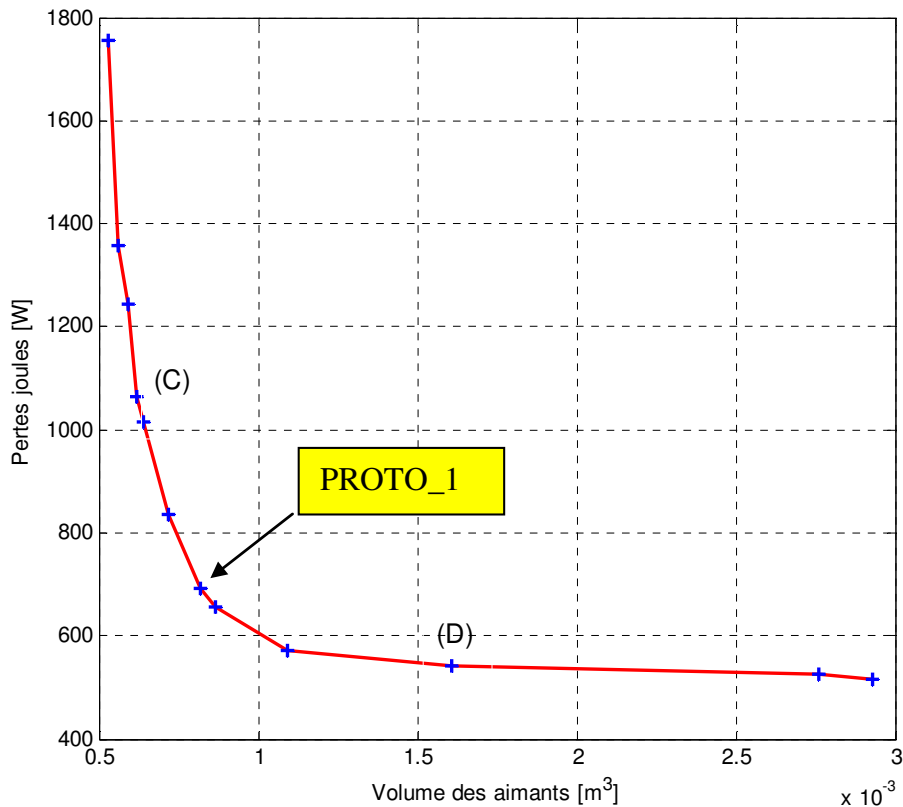


Figure IV-15: Frontière de Pareto lorsque B_r est librement variable

4.3 Solutions relatives au couple de critères “ puissance volumique/rendement”

Le critère ‘Puissance volumique/rendement’ a été choisi afin de répondre à une préoccupation d’encombrement de la nacelle. Le couplage avec le critère ‘rendement’ nous permet de contrôler les performances des pré-prototypes de la frontière de Pareto.

Dans ce cas, le code a été lancé trois fois pour tester la convergence des résultats obtenus pour deux valeurs de B_r , à savoir 0.8 et 1.4T. Selon les résultats de la figure IV-16, on remarque que la dispersion reste faible et les solutions convergent vers la même frontière Pareto.

De même que pour les résultats précédents, la puissance volumique de la machine augmente avec B_r pour un rendement donné inférieur à 93%. Ceci est dû essentiellement à la diminution du volume des aimants et à la diminution du volume du cuivre avec B_r (fig. IV-17).

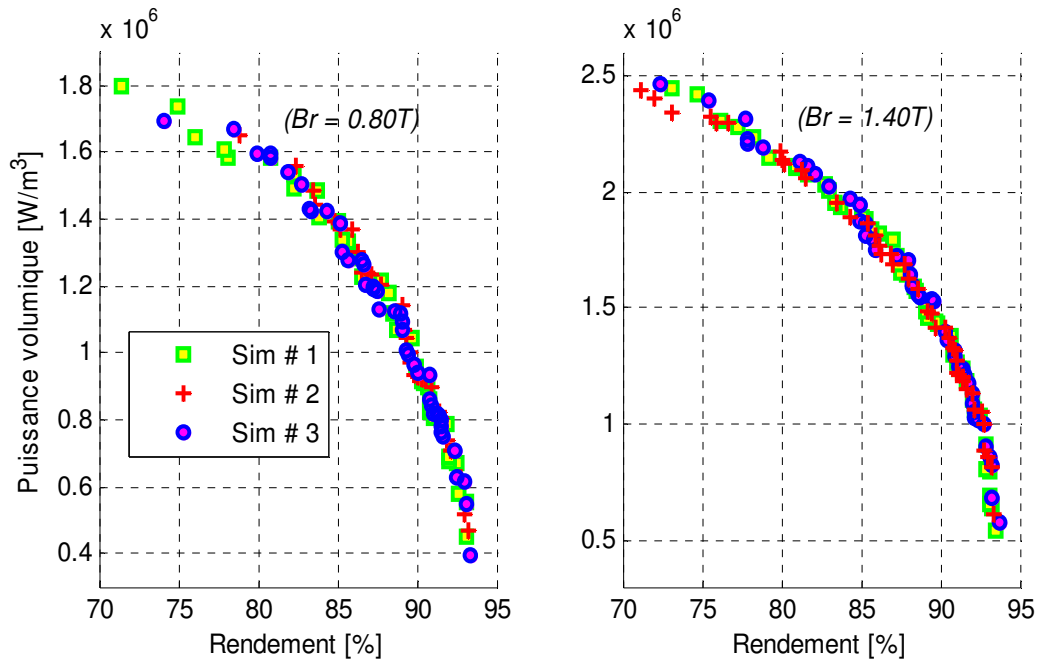


Figure IV-16 : Evolution de la frontière Pareto pour le couple des critères 'Puissance volumique/Rendement'. Convergence des résultats.

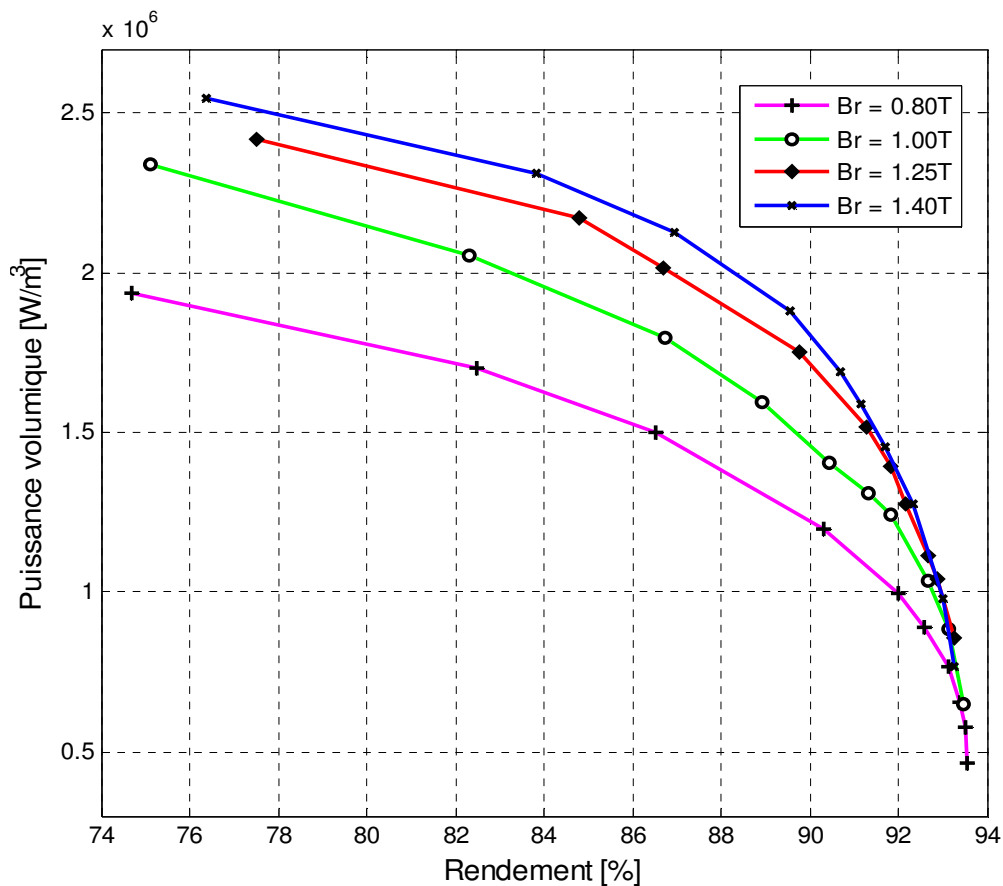


Figure IV-17: Ensemble des solutions optimales obtenu en optimisant la puissance volumique et le rendement pour différentes valeurs de B_r .

4.4 Performances d'un prototype optimisé

Le pré-prototype optimisé dont les performances seront analysées par la suite est appelé PROTO_1 (cf fig.IV-15). Cette solution a été choisie car elle présente un bon compromis à la fois au niveau des pertes Joule et le volume des aimants. Elle présente des pertes Joule de l'ordre de 690W pour une masse de 62 Kg. Les grandeurs caractéristiques de ce pré-prototype sont données par le tableau suivant.

Tableau IV.2 : Liste des principales grandeurs caractéristiques du PROTO_1

Nombre d'encoches	84	Résistance de phase (Ω)	0.73
Nombre de paire de Pôles	14	Inductance cyclique (mH)	5.12
Rayon externe (m)	0.3	Force électromotrice (V)	225
Rayon interne (m)	0.24	Courant de phase (A)	17.9
Coefficient d'arc Polaire	0.73	Pertes Joule (W)	690
Epaisseur des Aimants (mm)	4.7	Puissance électrique (W)	10000
Entrefer (mm)	1.45	Vitesse de rotation (tr/min)	200
Profondeur d'encoche (mm)	22	Epaisseur de la Culasse statorique (mm)	11.4
Nombre de spires par encoche	20	Epaisseur du disque Rotorique (mm)	13.2
Coefficient d'ouverture d'encoche	0.62	Masse de la machine (Kg)	62

a) Validations des grandeurs locales

Le modèle magnétique développé dans cette étude est un modèle analytique basé sur la résolution des équations de Maxwell qui repose sur un ensemble des hypothèses simplificatrices. Donc, la précision des grandeurs obtenues avec ce modèle doivent être comparés avec des résultats issus d'une modélisation tridimensionnelle basée sur les éléments finis. Dans ce contexte, et pour mettre en évidence l'apport de notre méthode, un prototype donné (PROTO_1) a été choisi pour comparer ses performances locales avec celles obtenus à l'aide du logiciel éléments finis FLUX-3D.

Appliquées au cas des machines à flux axial à aimants en surface, les expressions analytiques des différentes composantes de l'induction dans l'entrefer sont données par les relations II.26

et II.27. Les différents coefficients du développement en série de l'induction sont calculés à partir des conditions de passage entre les régions de la machine.

La figure IV-18 montre un dégradé de la distribution de l'induction relative au pré-prototype optimisé PROTO_1. Les figures IV-19 et IV-20 donnent les différentes composantes de l'induction au milieu de l'entrefer obtenue par éléments finis et avec le modèle analytique au niveau du rayon moyen de la machine.

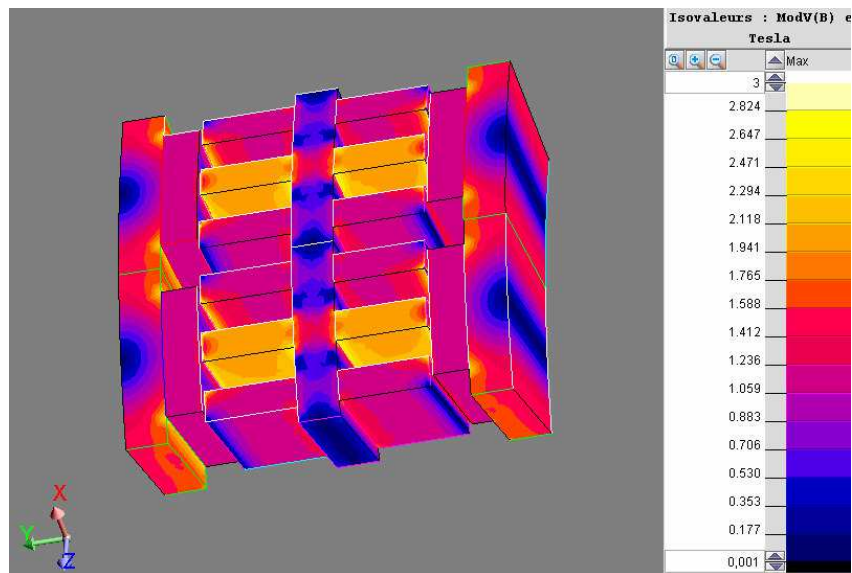


Figure IV-18 : Dégradé de la distribution de l'induction

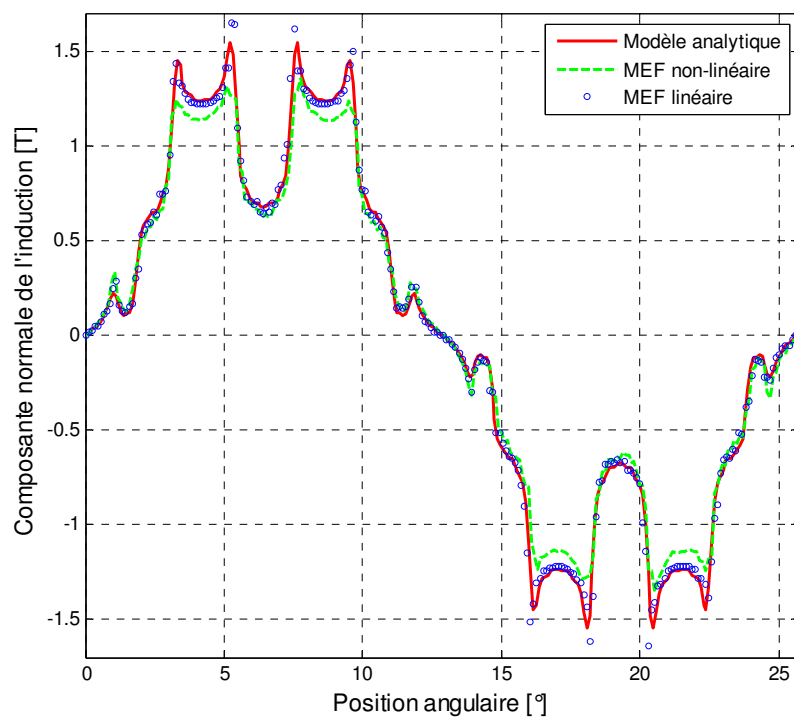


Figure IV-19 : Comparaison de la forme d'onde de la composante normale de l'induction

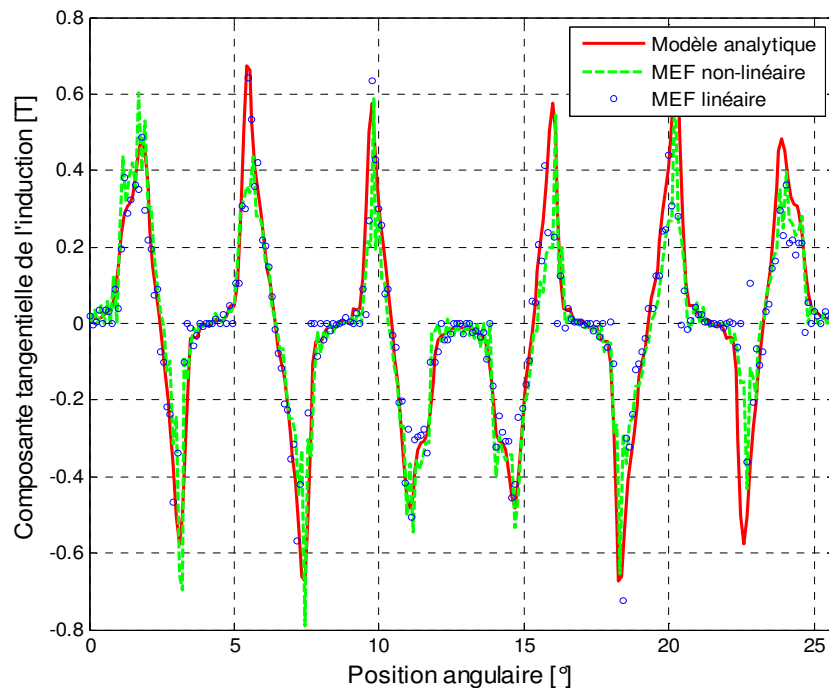


Figure IV-20 : Comparaison de la forme d'onde de la composante tangentielle de l'induction

En analysant ces résultats, nous constatons une bonne adéquation tant pour la forme que pour les valeurs. La différence est clairement perceptible dans le cas non-linéaire dans le cas de la composante normale de l'induction face en encoches. En effet, la saturation des dents se traduit par une baisse de la perméabilité relative de ces mêmes dents conduisant donc à une diminution de l'induction dans l'entrefer.

b) Flux et forces électromotrices

Le flux des aimants embrassé par une phase statorique est écrit en fonction de la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer en utilisant la théorie des fonctions de bobinage. Ensuite, la force électromotrice induite aux bornes de cette phase est obtenue à partir de la variation de la quantité du flux capté à vide. Leurs expressions sont données par les relations II.47 et II.48. Les figures IV-21 et IV-22 illustrent respectivement le flux créé par les aimants et les différentes f.é.m à vide.

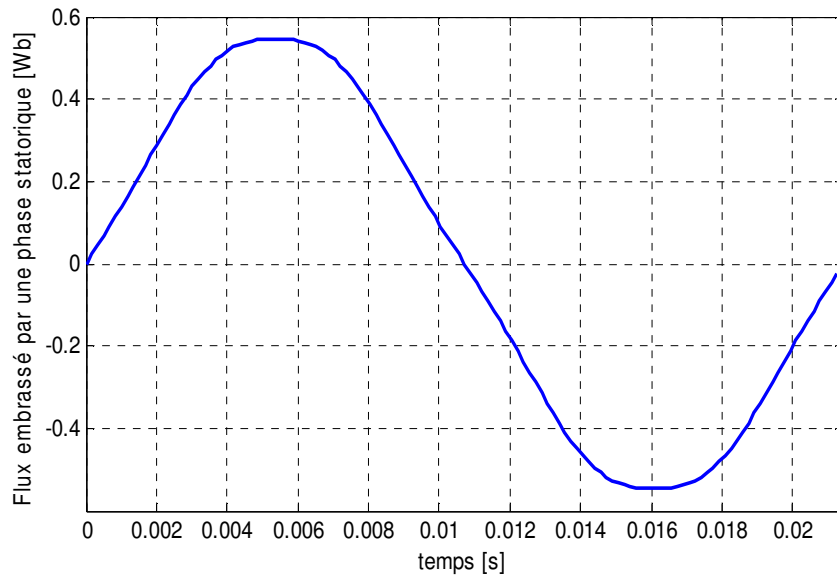


Figure IV-21 : Flux magnétique à vide embrassé par la phase 'A'

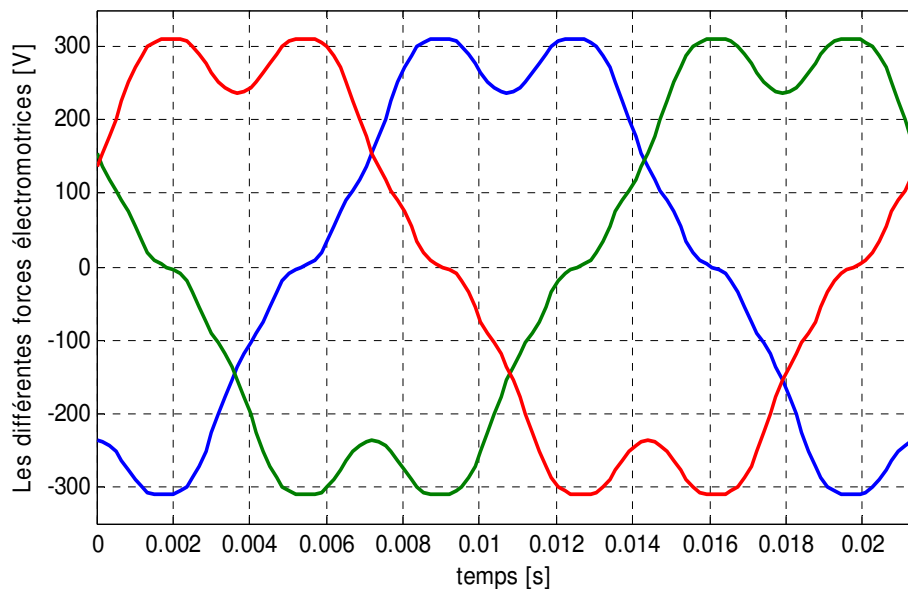


Figure IV-22 : Formes d'onde des f.é.m à vide induites aux bornes des phases statoriques

Les chutes relativement fortes (25% de la valeur max) que présente la f.é.m sont dues au fait que, lors du calcul analytique du champ, les encoches sont considérées ouvertes.

c) Couple de détente et force axiale entre les disques

Les figures IV-23 et IV-24 présentent respectivement les formes d'onde du couple de détente et de la force axiale d'attraction qui existe entre les deux disques statoriques et rotoriques. Leurs expressions analytiques sont données par les relations II.56 et II.73.

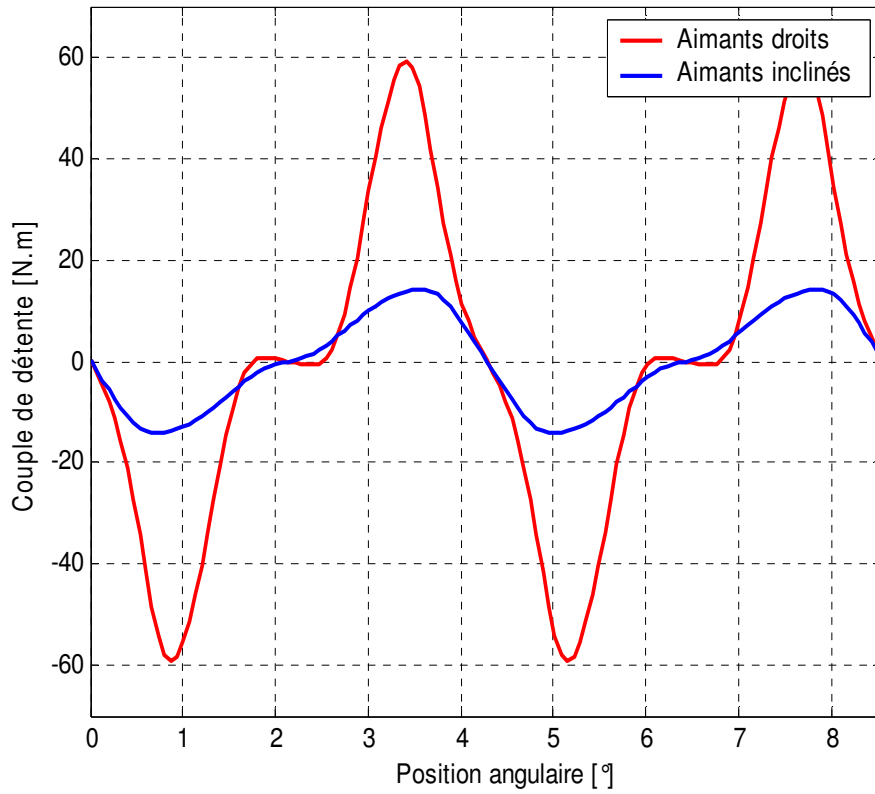


Figure IV-23 : Forme d'onde du couple de détente développé par le prototype optimisé

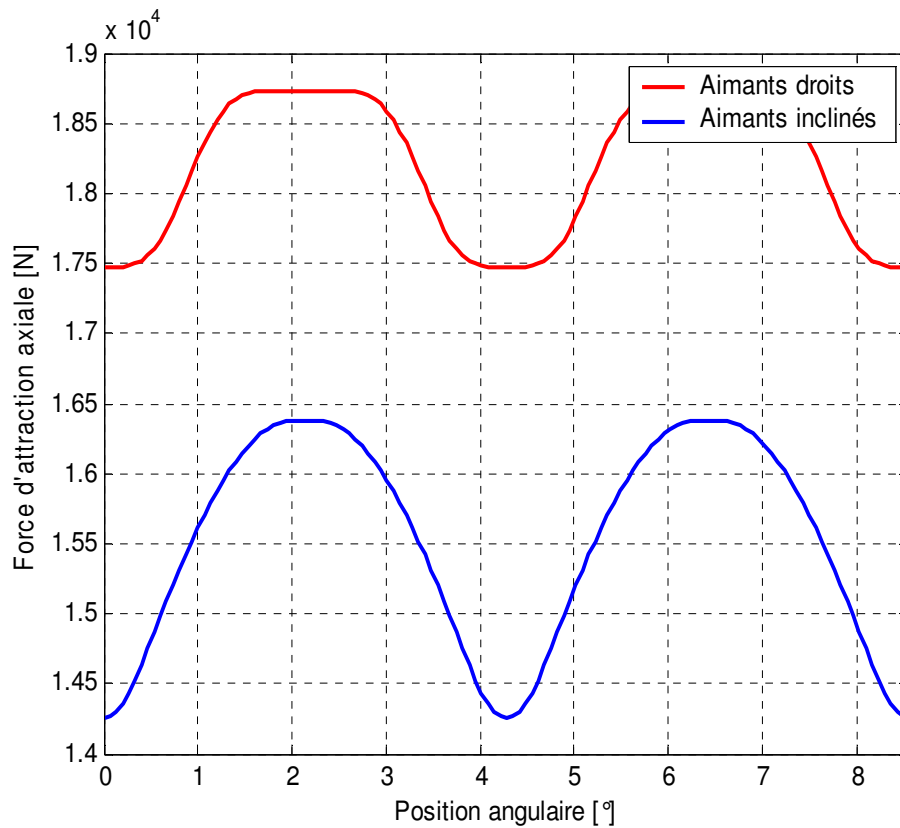


Figure IV-24 : Frome d'onde da la force axiale entre les disques

Nous pouvons remarquer que le couple de détente et les efforts axiaux ont la même période.

Elle vaut 4.28° , ce qui correspond bien à la valeur de $\frac{2\pi}{N_L}$ (N_L est le PPCM du nombre d'encoches et du nombre de pôles) donnée par la relation II.52. D'autre part, nous constatons aussi que la valeur maximale du couple de détente vaut 12.5% de la valeur moyenne du couple développé par la machine (477 N.m). Cette valeur est relativement importante, donc la minimisation de ce couple s'avère nécessaire. L'une des techniques utilisées consiste à incliner les aimants permanents. L'effet de l'inclinaison des aimants est clairement perceptible sur la même figure IV-23. Pour un angle d'inclinaison de 12° , nous constatons une réduction de 70% de la valeur maximale du couple.

d) Simulations du fonctionnement de l'aérogénérateur

Dans ce paragraphe, il s'agit d'étudier le fonctionnement du système aérogénérateur de 10 kW dans le cas où la génératrice est remplie par `PROTO_1`. Cette étude est réalisée en simulation en utilisant le logiciel PSIM. Le système simulé est représenté par la figure IV-25. La turbine éolienne est prise en compte uniquement par l'imposition de la vitesse de rotation du rotor de la génératrice. Les phases statoriques de cette dernière sont décrites par un schéma électrique simple comportant la f.é.m en série avec l'inductance cyclique et la résistance de phase. Le hacheur est contrôlé en courant de façon à réguler la tension des batteries et donc du bus continu à 120 V.

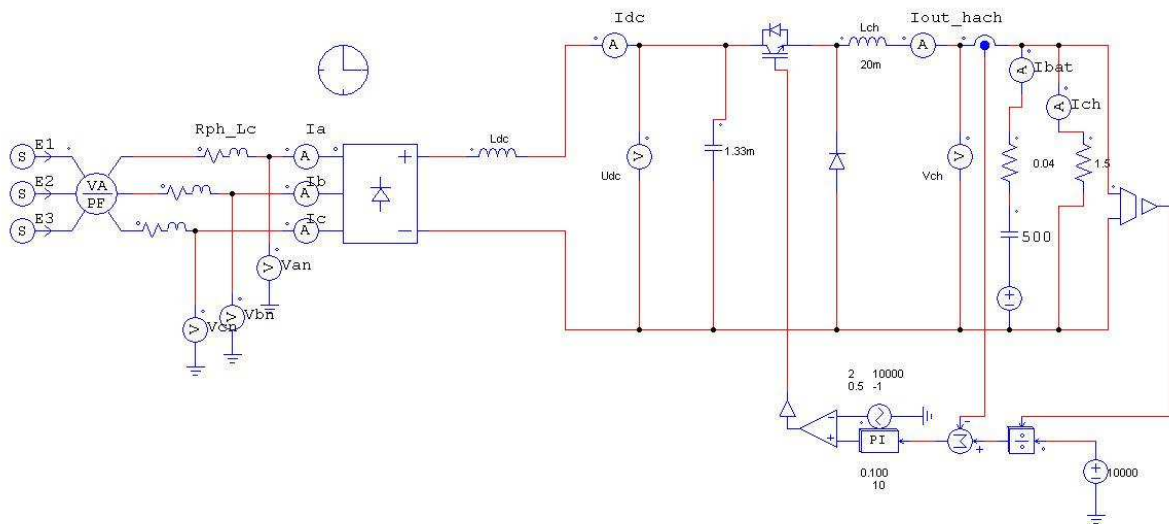


Figure IV-25: Schéma présentant le circuit de simulation du système aérogénérateur avec PSIM

Ce circuit nous permet de simuler le fonctionnement de l'aérogénérateur pour différentes vitesses du vent. La puissance de la génératrice correspondant à vitesse du vent est déduite à partir de la courbe donnée par la figure IV-1 de ce chapitre.

La figure IV-26 montre l'évolution de la puissance électrique pour différentes vitesses de rotation aux bornes des phases statoriques alors que la figure IV-27 donne l'allure de la tension

redressée en fonction du temps paramétrée par la vitesse de rotation de la génératrice. Nous y observons que la tension redressée est de 200V pour la vitesse de démarrage et 450V pour la vitesse nominale, ce qui correspond respectivement à $\alpha = 0.6$ et $\alpha = 0.26$, valeurs réalisables par la commande du hacheur.

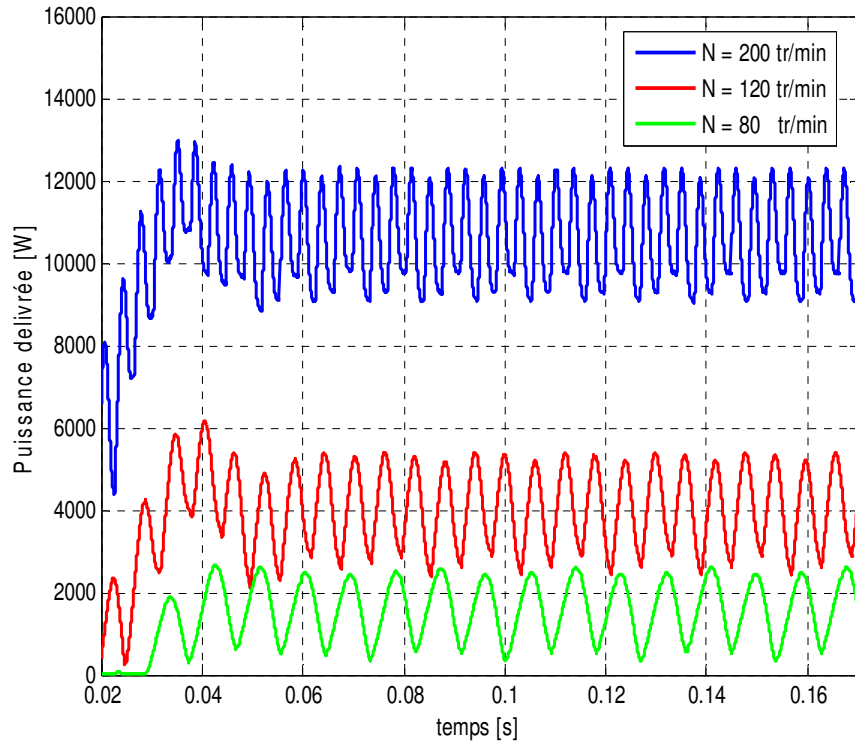


Figure IV-26 : Puissance électrique pour différentes vitesses de rotation

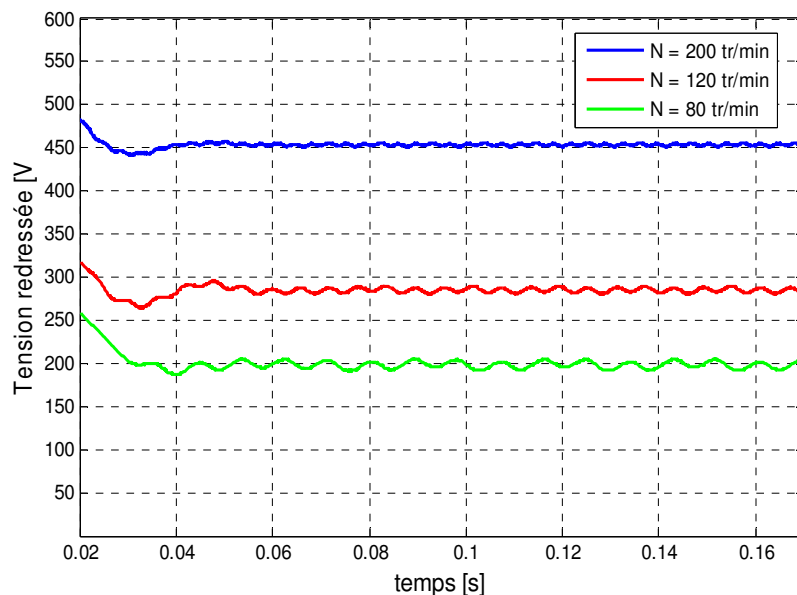


Figure IV-27 : Tension redressée pour différentes valeurs de la vitesse de rotation

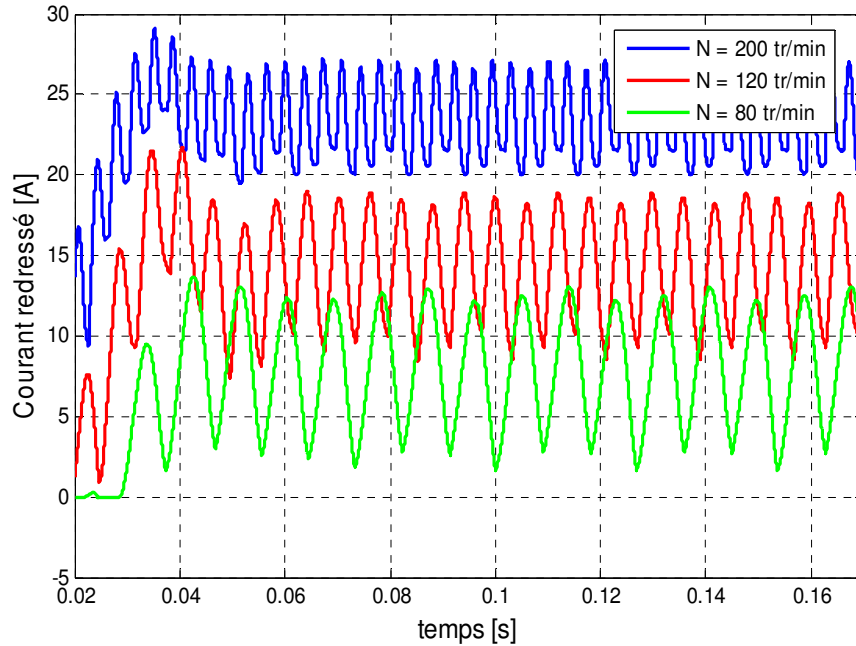


Figure IV-28 : Courant redressé pour différentes valeurs de la vitesse de rotation

Les courants redressés de la figure IV-28 ont été obtenus pour une inductance de lissage nulle. Comme le montre cette figure, l'ondulation du courant redressé est importante, elle atteint 23% pour le fonctionnement nominal.

Afin de réduire l'ondulation du courant redressé, on serait tenté d'insérer une inductance de lissage. Cependant, cette dernière contribue à la baisse du couple électromagnétique par

l'augmentation du déphasage entre la f.é.m et le courant de phase $\left(\Gamma = 3p \frac{E}{\omega_s} I_s \cos(\beta) \right)$

comme le montre la figure IV-29. Cette dernière indique l'évolution de l'angle interne β de la machine en fonction de la valeur de l'inductance de lissage. Un compromis est donc à rechercher afin de réduire l'ondulation du courant redressé sans pour autant détériorer sensiblement le rendement de la génératrice.

Finalement, la figure IV-30 représente l'allure temporelle du courant de phase pour différentes vitesses de rotation. Cette figure met en évidence que l'empiètement augmente avec la vitesse de la rotation et donc la f.é.m (pour N=200 tr/min, l'empiètement est le plus fort). Mais l'empiètement dépend aussi des inductances du circuit en aval du redresseur et en particulier l'inductance de lissage.

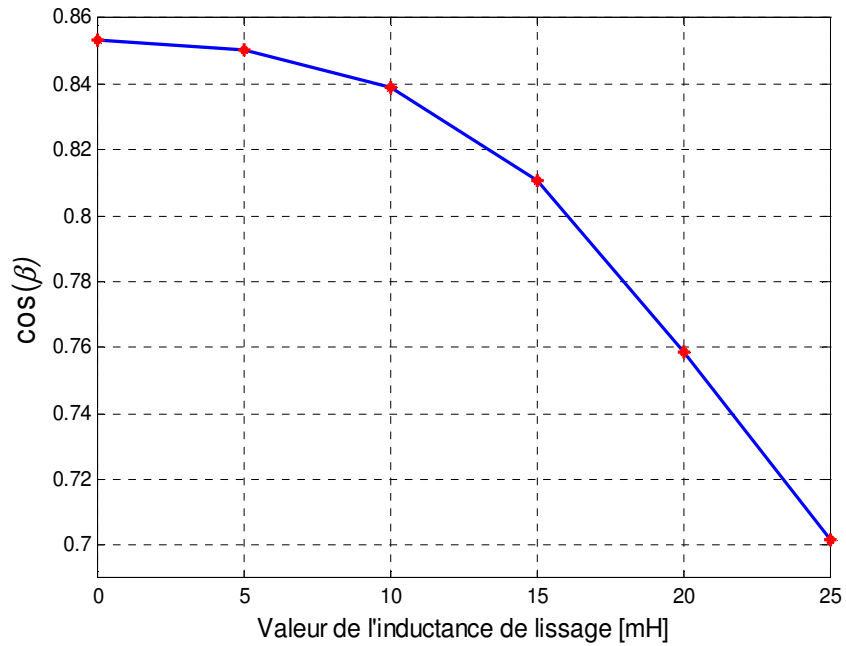


Figure IV-29 : Evolution de l'angle interne de la machine en fonction de l'inductance de lissage

D'autre part, la commande du hacheur permettant de contrôler la génératrice en valeur moyenne, l'angle interne est de 30° pour le fonctionnement à puissance nominale (cf. fig. IV-29). Il est donc possible d'augmenter le couple de la génératrice en imposant $\beta = 0^\circ$, ce que la commande du rapport cyclique ne permet pas. Cet aspect se traduit par un surdimensionnement de la génératrice par comparaison au cas du redresseur MLI.

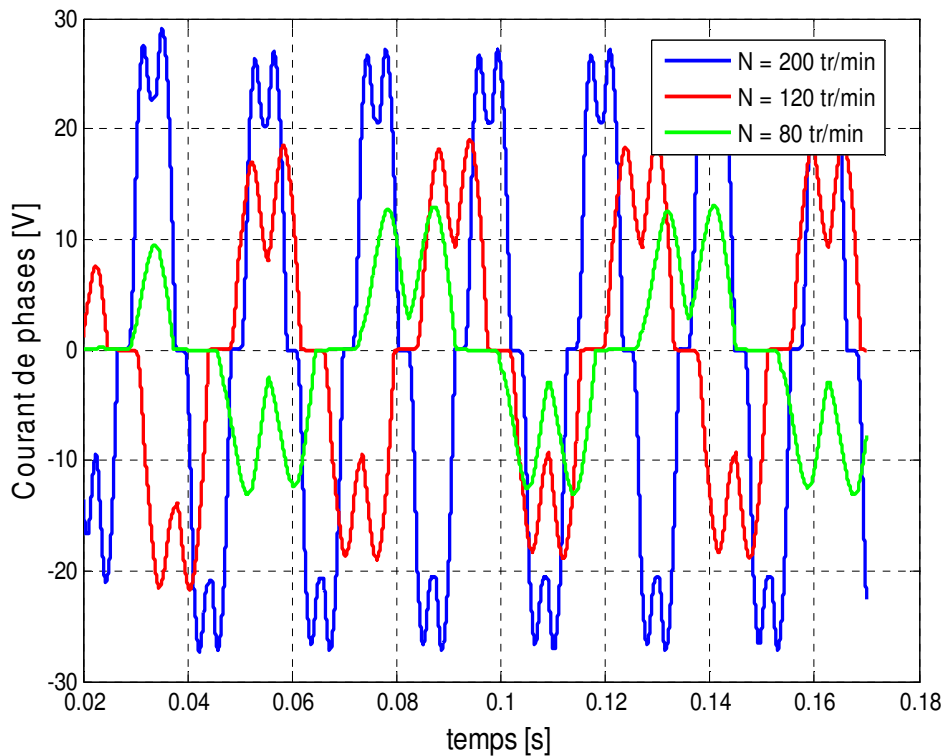


Figure IV-30 : Courant de phase pour différentes vitesse du vent

La stratégie de dimensionnement développée permet de dimensionner la génératrice ou encore

le système aérogénérateur pour le point de fonctionnement nominal correspondant à la puissance nominale et à la vitesse de rotation nominale.

Se basant sur la caractéristique de Van der Hoven décrivant la densité spectrale du vent incident sur un site donné (cf. fig. I-5), il est aisé de constater que la génératrice va souvent se trouver à des points de fonctionnement situés entre V_d et V_n sur la caractéristique de puissance éolienne optimale (cf. fig I-8 et fig. IV-1). Or, pour des vitesses de rotation inférieures à la vitesse nominale, le rendement de la génératrice diminue. Ainsi, dans le cas d'un aérogénérateur, la génératrice aura la plupart du temps un rendement inférieur à son rendement nominal correspondant à la puissance nominale. Ce constat appelle deux pistes de réflexion quant à l'amélioration de la démarche d'optimisation de la génératrice au sein du système aérogénérateur. La première piste est relative au rendement de la génératrice. En effet, il serait intéressant de rechercher une génératrice dont le rendement présente le moins de variation possible sur la plage de la vitesse $[V_d, V_n]$. La deuxième piste de réflexion concerne la maximisation du rendement énergétique globale de l'aérogénérateur qui nécessite le calcul de l'énergie extraite sur un horizon temporel représentatif du site visé (6 mois ou 1 an).

Les deux pistes d'amélioration évoquées plus haut, introduisent le besoin de disposer d'une méthodologie d'optimisation applicable aux systèmes dynamiques car les fonctions objectif peuvent évoluer en fonction du temps.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité la méthodologie de conception et d'optimisation appliquée à un aérogénérateur de 10 kW à base d'une machine synchrone à aimants permanents à flux axial couplée débitant sur un banc de batteries de 120V en parallèle avec une charge de consommation à travers un redresseur à diodes suivi d'un hacheur dévolteur.

Après avoir construit le cahier des charges qui englobe les différentes contraintes du système, nous avons formulé et présenté le problème de dimensionnement comme étant un problème d'optimisation multi-objectif non-linéaire sous contraintes.

Ensuite, l'application du logiciel de dimensionnement OPTIMSAP dont le fonctionnement général a été présenté en détail nous a permis de construire et de présenter l'ensemble des solutions de compromis (solutions Pareto) optimal et ce, pour prendre en compte un des objectifs antagonistes au rendement, à savoir, la masse, le volume des aimants et la puissance volumique de la génératrice. Ceci dans le but d'aider le concepteur à choisir les meilleurs pré-prototypes optimisés de la structure en tenant compte des attributs et des caractéristiques du problème. Puis, et afin de valider la procédure de conception proposée, une modélisation par

éléments finis tridimensionnels a été appliquée à un pré-prototype choisi. Les résultats sont satisfaisants et nous constatons une légère différence entre les formes d'onde analytique et celles numériques. Finalement, une simulation du système aérogénérateur a été effectuée pour différentes vitesses de rotation de la génératrice entre la vitesse du démarrage et la vitesse nominale. Cette simulation a permis d'étudier les formes d'ondes des grandeurs électriques sur le bus continu ainsi que la puissance électrique délivrée. L'influence des éléments passifs du circuit électrique sur les performances de la génératrice a pu aussi être évaluée.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons abordé la problématique posée par la conception des machines synchrones à aimants permanents à flux axial (MSAPFA) intégrées dans un système éolien de petite puissance. Les objectifs ont été de mettre au point une méthodologie générale de dimensionnement et le développement d'une méthode de modélisation de MSAPFAs par le calcul analytique des champs à partir du formalisme de Maxwell. Le défi de cette modélisation demeure toujours le compromis à faire entre temps de calcul et précision des résultats.

Dans le premier chapitre, nous avons tout d'abord rappelé quelques notions principales au sujet de l'énergie éolienne ainsi que les différents types de machines qui peuvent jouer le rôle de génératrice dans un système éolien. Nous avons ensuite présenté les différentes réalisations existantes des machines à flux axial, leur principe de fonctionnement ainsi que les divers éléments constitutifs. Après, Nous avons abordé la méthodologie de conception des machines électriques dont la portée dépasse largement le cas particulier des machines à flux axial. Enfin, nous avons positionné notre travail et nous avons détaillé nos objectifs, à savoir, modéliser la machine à flux axial en vue de l'optimisation et développé une approche d'optimisation multi-critères.

Au second chapitre et en application de cette méthodologie, nous avons développé un outil d'analyse analytique issu de la résolution des équations de Maxwell par la méthode de séparation des variables dans les différentes régions de la machine. Ce modèle détaillé nous a permis de calculer la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer à vide et en charge. Les expressions des grandeurs globales sont ensuite écrites en fonction de la répartition exacte de l'induction dans l'entrefer en utilisant la théorie des fonctions de bobinages. Le couple principal et le couple de détente ainsi que les efforts axiaux sont évalués en appliquant le tenseur de Maxwell à la surface des aimants permanents. Afin de mettre en évidence l'apport de cet outil d'analyse, nous avons comparé favorablement les formes d'ondes de l'induction obtenues à l'aide de ce modèle analytique avec celles issues d'une simulation éléments finis. Nous constatons que les résultats sont tout à fait acceptables.

Ce modèle magnétique est ensuite complété par un modèle thermique simplifiée basé sur la méthode nodale. La construction de ce modèle conduit à un système d'équations algébriques linéaires dont la solution nous renseigne sur la température aux nœuds sensibles de la machine. Ce modèle thermique est suivi par un modèle mécanique qui s'appuie sur les expressions proposées par le modèle de Young permettant ainsi de contrôler la déflexion des disques rotoriques en choisissant la bonne épaisseur de ces derniers à partir des efforts axiaux. Le troisième chapitre est consacré à la présentation et à la mise en œuvre de l'algorithme

génétique d'optimisation multi-contraite (GENOCOP) associé un algorithme d'optimisation multi-objectif (SPEA_II). Après un passage en revue des principales techniques d'optimisation utilisées en électrotechnique, les algorithmes génétiques ont été exposés tout en précisant leurs avantages et leurs champs d'application. Parmi ces algorithmes, nous avons justifié le choix de l'algorithme GENOCOP tout en expliquant son fonctionnement. Pour l'optimisation multi-objectif, notre choix s'est orienté vers le SPEA2. C'est une méthode élitiste qui utilise une archive externe pour le stockage des solutions Pareto et effectue sa mise à jour au fur et à mesure des générations. Cette approche utilise aussi une technique de réduction permettant de présenter d'une manière uniforme la frontière Pareto sans modifier son allure.

Le couplage du SPEA2 avec le GENOCOP nous a permis de développer un code d'optimisation implanté sous Matlab et dédié au dimensionnement des machines électriques.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons formulé le problème de dimensionnement et d'optimisation des MSAPFAs comme étant un problème d'optimisation non linéaire multi-objectif sous contraintes. Après avoir présenté le cahier des charges, le code d'optimisation OPTIMSAP développé précédemment a été appliqué pour le dimensionnement d'un système aérogénérateur de 10 kW à base d'une machine synchrone à aimants permanents à flux axial couplée à un redresseur à diodes suivi d'un hacheur dévolteur et débitant sur un banc de batteries de 120V en parallèle avec une charge de consommation. Ainsi, la frontière de Pareto a été déterminée et représentée par l'évolution des trois couples de critères différents qui agissent d'une manière antagoniste. Ces courbes de Pareto sont très utiles et présentent un ensemble de solutions compromis qui sont priori optimales.

Ensuite, un pré-prototype choisi a été modélisé par les éléments finis tridimensionnels. Les résultats numériques ont permis de conforter le modèle magnétique développé. Puis, une simulation du système complet a été effectuée pour situer ses performances énergétiques par rapport à la puissance maximale disponible sur l'arbre pour différentes vitesses de rotation.

Les perspectives de nos travaux sont nombreuses :

- Au niveau du modèle magnétique, le développement d'un modèle analytique 3D permettant de prendre en compte la composante radiale de l'induction dans l'entrefer peut constituer une perspective immédiate de ce travail. Ainsi, le couplage du modèle analytique 3D avec un réseau de perméances modélisant le circuit magnétique de façon à prendre en compte la caractéristique $B(H)$ est préférable.
- Au niveau du modèle thermique, une étude approfondie de l'orientation des principaux flux de chaleur dans ce type de machines est nécessaire tant le manque

de retour d'expérience est pesant sur la validité du modèle développé.

- Au niveau de l'approche systémique, l'optimisation de l'aérogénérateur doit prendre en compte le gisement éolien du site considéré sur un horizon temporel représentatif. Cet aspect impactera fortement le dimensionnement de la génératrice ainsi que les convertisseurs de puissances associés.

Dans cet ordre d'idées, l'introduction d'une fonction objectif dans l'optimisation représentant le coût du kWh produit par l'aérogénérateur dimensionné complétera favorablement ce code d'optimisation.

REFERENCES

[Abd 2006]^o : Abdel Karim. N, Azzouzi. J, Barakat. G, “*Winding function theory and Maxwell’s equations coupled analytical modelling of axial flux PM synchronous machine*”, IREE, Vol.0, pp.355-362, 2006.

[Abd 2006]^o : Abdel Karim. N, Barakat. G, Dakyo, B, “*Complete analytical modelling of an axial flux PM synchronous machine for wind turbine application*”, EPE-PEMC, 2006.

[Abd 2007]^o : Abdel Karim. N, Azzouzi. J, Barakat. G, “*Influence of skewing on the performances of an axial flux wind generator coupled to diode rectifier*”, IEMDC, 2007.

[Ack 1995]^o : Ackermann. B, Sottek. R, “*Analytical modelling of the cogging torque in permanent magnet motors*”, Electrical engineering – Springer Verlag 1995, pp. 117-125.

[Ack 2003]^o : Ackermann. T, Sotter. L, “*An overview of wind energy status*”, Renewable and Sustainable Energy Reviews, Vol. 6, pp. 67-128, 2002.

[Atallah 1998]^o : Atallah. K, Zhi. Z, Birch. T, “*Armature reaction field and winding inductances of slotless PM brushless machines*”, IEEE trans on magnetics, Sep. 1998, Vol. 34, No. 5, pp. 3737-3744.

[Alb 2004]^o : Albert, L, “*Modélisation et optimisation des alternateurs à griffes. Application au domaine automobile*”, Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble 2004.

[Ama 2001]^o : Amara, Y, “*Contribution à la conception et à la commande des machines synchrones à double excitation*”, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 2001.

[Arn 2006]^o : Arnold. D, Herrault. F, Zana. i, “*Design optimization of an 8W, microscale, axial flux permanent magnet generator*”, Journal of micromechanics and microengineering, Vol. 16, pp.290-296, 2006.

[Ayd 2004]^o : Aydin. M, Huang. S, “*Axial flux permanent magnet disc machines : A review*”, SPEEDAM 2004, Capri, Italy, 2004.

[Azo 2007]^o : Azzouzi. J, “*Contribution à la modélisation et à l’optimisation des machines synchrones à aimants permanents à flux axial. Application au cas de l’aérogénérateur*”, Thèse de Doctorat, GREAH-Université du Havre 2007.

[Bau 2002]^o : Bauer. P, De Haan. S, Dubois. M.R, “*Wind energy and offshore windparks :state of art and trends*”, EPE-PEMC Conference, Dubrovnic, September 2002.

[Bar 2007]^o : Baroudi. J, Dinavahi. V, Knight. A, “*A review of power converter topologies for wind generators*”, Renewable Energy, Vol.32, pp.2369-2385, 2007.

[Ben 2001]^o : Benedicic. B, Papa. G, “*Evolutionary optimization of a universal motor*”, IECON’01: The 27th annual conference of the IEEE industrial electronics society, pp. 19-24.

[Ber 2000]^o : De Bernardinis. A, “*Etude et optimisation d’un ensemble alternateur à aimants/redresseur commandé. Application à un véhicule hybride*”, Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Lorraine 2000.

[Bia 1997]^o : Bianco. G, Caricchi F, “*Power electronics interface for unconventional*

small size stand wind energy conversion system”, 7th European conference on Power electronics and applications, Norvège, 8-10 September 1997.

[Bia 2001]^o : Bianchi, N, Bolognani. S, “*Reduction torque ripple in PM synchronous motors by pole shifting* ”, ICEM 2000, pp. 1222-1226.

[Bia 2002]^o : Bianchi. N, Bolognani. S, “*Design techniques for reducing cogging torque in surface mounted PM motors* ”, IEEE trans on industry applications, Oct. 2002, Vol. 38, No. 5, pp. 1259-1265.

[Bra 2003]^o : Braid J, Vanzyl A, “*Unbalanced load sharing in a prototype multistage axial flux permanent synchronous machine*”, Proc of IEEE electric machines and drives conference, IEMDC’03, Madison USA, pp. 1935-1940.

[Bre 2000]^o : Breton. C, Bartolomé. J, “*Influence of machine symmetry on reduction of cogging torque in PM brushless motors*”, IEEE trans on magnetics, Sep. 2000, Vol. 36, No. 5, pp. 3819-3823.

[Bro 2002]^o : Brown. N, Haydock. L, Bumby. J, “*An idealized geometric approach to electromagnetically comparing axial and radial flux PM machines*”, Proc of international conference on electrical machines, ICEM’2002.

[Cal 2001]^o : Caldora Costa. M, “*Optimisation des dispositifs électromagnétiques dans un contexte d’analyse par la méthode des éléments finis*”, Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble 2001.

[Car 1999]^o : Caricchi. F, Honorati. O, “*Modular axial flux permanent magnet motor for ship propulsion drives*”, IEEE trans. on energy conversion, Vol. 14, No.3, 1999.

[Car 1999]^o : Caricchi. F, Crescimbin. E, Solero. L, “*High efficiency low volume Starter/alternator for automotive applications*”, IEEE Industry application conference, Vol. 1, pp. 215-222, 1999.

[Cav 2002]^o : Cavagnino. A, Lazzari. M, Profumo. F, Tenconi. A, “*A comparison between the axial flux and the radial flux structures for PM synchronous motors*”, IEEE trans on industry applications, Vol. 38, No. 6, pp. 1517-1524, 2002.

[Cha 1995]^o : Charbonneau. P, “*Genetic algorithm in astronomy and astrophysics*”, The astrophysical journal supplement series, Vol. 101, pp 309-334.

[Cha 1999]^o : Chalmers. B.J, Wu. W “*An axial flux PM generator for a gearless wind energy system*”, IEEE trans. on energy conversion, Vol. 14, No.2, pp. 251-257, 1999.

[Che 1999]^o : Cherruault. Y, “*Optimisation: méthodes locales et globales*”, Presses universitaires de France.

[Che 2005]^o : Chen. Y, Pillay. P, “*Axial flux PM wind generator with a soft magnetic composite core*”, IEEE tans. on industry applications, Vol. 1, No. 6, pp. 231-237, 2005.

[Cho 1999]^o : Cho. D.H, Jung. H.K, “*Multiobjective optimal design of interior permanent magnet synchronous motors considering improved core loss formula*”, IEEE trans on industry applications, Vol. 33, No.5, pp. 1273-1282.

[Con 1993]^o : Connor. B, Leithead W.E, “*Investigation of a fundamental trade-off in tracking the Cp max curve of a variable speed wind turbine*”, Proc. British Wind Energy Conference, pp. 313-319, 1993.

[Cul 1994]^o : Culioli. J, “*Introduction à l’optimisation*”, Ellipse. ISBN : 2-7298-9428-4.

[Cun 1997]^o : Cunha. A.J, Oliviera. P, Covas. J, “*Use of genetic algorithm in multicriteria optimization to solve industrial problems*”, Proc. of the 7th international conference on genetic algorithm, California, pp. 682-688.

[Cun 2006]^o : Cunkas. M, Akkaya. R, “*Design optimization of induction motor by genetic algorithm and comparison with existing motor*”, Mathematical and computational applications, Vol. 11, No. 3, pp. 193-203.

[Dub 2001]^o : Dubois. M.R, Polinder. H, Ferreira. J.A, “*Generator topologies for direct-drive wind turbines, an adapted technology for turbine running in cold climate*”, Proc. on the conference on wind energy in cold climates. Matane, canada, august 2001.

[Cun 2007]^o : Cunkas. M, Akkaya. R, Bilgin. O, “*Cost optimization of submersible motors using a genetic algorithm and a finite element method*”, The international journal of advanced manufacturing technology, Vol. 33, No. 3, pp. 223-232.

[Deb 2000]^o : Deb.K, Agrawal. S, “*A fast elitist non dominated sorting genetic algorithm for multi objective optimization: NSGA-II*”, Parallel problem solving from nature – PPSN, Springer lecture notes in computer science, pp. 849-858.

[Dej 1975]^o : DeJong. K.A, “*An analysis of the behaviour of a class of genetic adaptive systems*”, Thèse de doctorat, university of Michigan.

[Den 1999]^o : Deng. F, “*An improved iron losses estimation for permanent magnet brushless machines*”, IEEE trans on energy conversion, Dec. 1999, Vol. 14, No. 4, pp. 1391-1395.

[Des 1996]^o : Dessalles. J.L, “*L’ordinateur génétique*”, Edition Hermes.

[Dur 1998]^o : Dursstewitz M, Wengler. R, “*Analyses of generator failure of wind turbine in germany - 250MW Wind Program*”, ISET, KASSEL 1998 study.

[Eom 2001]^o : Eom. J.B, Kim. T.J, “*Minimization of cogging torque in PM motors by teeth pairing and magnet arc design using genetic algorithm*”, Journal of magnetism and magnetic materials 2001, pp. 1229-1231.

[Esp 1999]^o : Espanet. C, “*Modélisation et conception optimale des moteurs sans balais à structure inversée : application au moteur roue*”, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 1999.

[Euro 2002]^o : EuroservER, “*Le baromètre européen des énergies renouvelables*”, Bilan Octobre 2000/février 2002. Editions systèmes solaires.

[Fav 1993]^o : Favre. E, jufer. M, “*Permanent magnet synchronous motors : A comprehensive approach to cogging torque suppression*”, IEEE trans on industry applications, Dec. 1993, Vol. 29, No. 6, pp. 1141-1149.

[Fle 1987]^o : Fletcher. R, “*Practical method of optimization*”, John Wiley & Sons. ISBN : 978-0-471-49463-8.

[Fog 1994]^o : Fogel. L.J, “*Evolutionary programming in perspective: the top-down view*”, IEEE press, New Jersey.

[Fog 1999]^o : Foggia. A, “*Méthodes de calcul des inductances de fuite*”, Traité Génie électrique, Vol.D6, D3340, 1999.

[Gar 2001]^o : Garrigues. B, “*Achat de l'électricité éolienne : les nouveaux tarifs viennent de sortir*”, Revue systèmes solaires, Vol. 143, pp. 46-47, mai-juin 2001.

[Gas 2004]^o : Gasc, L, “*Conception d'un actionneur permanents à faible ondulation du couple pour assistance de direction automobile*”, Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse 2004.

[Gie 2004]^o : Gieras. J, “*Analytical approach to cogging torque calculation of PM brushless motors*”, IEEE trans on industry applications, Sep. 2004, Vol. 40, No. 5, pp. 1310-1316.

[Gie 2004]^o : Gieras. J, Wang. R.J, Kamper. M, “*Axial flux permanent magnet brushless machines*”, Kluwer academic publishers, ISBN: 1-4020-2661-7, 2004.

[Gol 1989]^o : Goldberg. D.E, “*Genetic algorithm in search, optimization and machine learning*”, Addison Wesley. ISBN:0201157675.

[Gre 2003]^o : Grellet. G, “*Pertes dans les machines électriques*”, Techniques de l'ingénieur. D3-450.

[Han 2003]^o : Hanselman. D.C, “*Brushless permanent magnet motor design, second edition*”, ISBN: 1-932133-63-1, 2003.

[Hof 2000]^o : Hoffman. R, Mutschler T, “*The influence of control strategies on the energy capture in wind turbine*”, IEEE. IAS Conf, Roma, Vol. 2, pp. 886-893, October 2000.

[Hoj 1994]^o : Hojjat. A, Nai-Tsang. C, “*Augmented Lagrangian genetic algorithm for structural optimization*”, Journal of aerospace engineering, Vol.7, pp. 104-118.

[Hol 1975]^o : Holland. J.H, “*Adaptation in natural and artificial system*”, The university of Michigan press.

[Hol 2002]^o : Holm. S.R, Polinder. H, Ferreira. J.A, “*Analytical calculation of the magnetic field in electrical machines due to the current density in an air-gap winding*”, ICEM 2002.

[Hor 1994]^o : Horn. J, Nafpliotis. N, Goldberg. D.E, “*A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization*”, 1st IEEE international conference on evolutionary computation, Vol. 1, pp. 82-87.

[Hou2004]^o, Houdouin. G, Barakat, G, Dakyo. B, “*A winding function theory based global method for the simulation of faulty induction machines*”, IEMCD, Jun. 2003, Vol. 1, pp. 297-303.

[Hu 1992]^o : Hu. N, “*Tabu search method with random moves for globally optimal design*”, International journal for numerical methods in engineering, Vol.35, No.5, pp. 1055-1070.

[Hua 2001]^o : Huang, Lipo.T, “*Torus concept machines : Pre-prototyping design assessment for two major topologies*”, IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, pp.1619-1625, 2001.

[Hwa 2000]^o : Hwang. S.M, Eom. J, Jung. Y.H, “*Various design techniques to reduce cogging torque by controlling energy variation in PM motors*”, IEEE trans on magnetics, Jul. 2001, Vol. 37, No. 4, pp. 2806-2809.

[IEA 2002]^o : Renewables in Global Energy Supply, “*International Energy Agency (IEA) fact sheet*”, Novembre 2002.

[Jam 1990]^o : Jamil. M.K, Demerdash, N.A, “*Harmonics and core losses of permanent magnet DC motorss controlled by chopper circuits*”, IEEE trans on energy conversion, Jun. 1990, Vol. 5, No. 2, pp. 408-414.

[Jol 2005]^o : Jolly. L, Jabbar. A, “*Design optimization of permanent magnet motors using respons surface methodology and genetic algorithms*”, IEEE trans on magnetics, Vol. 41, No.10, pp. 3928-3930.

[Kau 1994]^o : Kaufmann J.M, Miraoui A, Kong. Li, “*Irregular shifting of permanent magnet to reduce cogging torque of a brushless motor*”, EPE switzerland, Oct. 1994, pp. 67-71.

[Key 1999]^o : Keyhani. A, Studer. C.B, “*Study of cogging torque in PM machines*”, electric machines & power systems 1999, pp. 665-678.

[Kim 1998]^o : Kim. U, Lieu. D, “*Magnetic field calculation in PM motors with rotor eccentricity : without slotting effect*”, IEEE trans on magnetics, Jul. 1998, Vol. 34, No. 1, pp. 2243-2252.

[Kir 1983]^o : Kirkpatrick. S, Gelatt. C.D, Vecchi. M.P, “*Optimization by simulated annealing*”, Journal of Science, Vol. 220, pp. 671-680.

[Kno 1999]^o: Knowles. J, Corne. D, “*The Pareto archived evolution strategy (PAES): a new baseline algorithm for multiobjective optimization*”, Congress on evolutionary computation, pp. 98-105.

[kon 1996]^o : kone. A.D, “*Contribution à la conception des actionneurs électriques par formulation en terme d’optimisation*”, Thèse de doctorat, INP-Toulouse, 1996.

[Koz 1992]^o: Koza. J.R, “*Genetic programming*”, Cambridge, MA, MIT press.

[Lak 2005]^o : Lakhdar, M, “*Contribution à la CAO optimisée des machines électriques, application au moteur linéaire à induction*”, Thèse de Doctorat, Université de Batna 2005.

[Leb 2006]^o : Lebouc. A, www.clubeea.org/documents/mediatheque/Lebouc-Electromag-mat-magn-doux-NRJ-2005-2006.pdf

[Loc 2006]^o : Locement, F, “*Conception et modélisation d’une machine synchrone à 7 phases à aimants permanents à flux axial : Commande vectorielle en modes normal et dégradé*”, Thèse de Doctorat, Université des sciences et technologies de Lille 2006.

[Lui 2003]^o : Luizzi. G, Lucidi. S, Parasiliti. F, “*Multiobjective optimization techniques for the design of induction motors*”, IEEE trans on magnetics, Vol. 39, No.3, pp. 1261-1264, 2003.

[Mi 2001]^o : MI. C “*Modelling of iron losses of PM synchronous motors*”, Thèse de doctorat, Université de Toronto 2001.

[Mi 2005]^o : Mi. C, Slemon. G, “*Minimization of iron losses of PM synchronous machines*”, IEEE trans on energy conversion, Mar. 2005, Vol. 20, No. 1, pp. 121-127.

[Mak 2006]^o : Makni, Z, “*Contribution au développement d’un outil d’analyse multi-physique pour la conception et l’optimisation d’actionneurs électromagnétiques*”, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 2006.

[Mes 1999]^o : Messier. C, “*Modélisation et conception de moteurs à aimants permanents asynchrones synchronisés à l’aide du calcul des champs*”, Thèse de Doctorat, Faculté des sciences et génie, Université Laval 1999.

[Mic 1994]^o : Michalewicz. Z, “*Genetic algorithm + data structure = evolution programs*”, Springer Verlag, ISBN 3-540-60676-9.

[Mic 1996]^o : Michalewicz. Z, Schoenauer. M, “*Evolutionary algorithms for constrained parameters optimization problems*”, Evolutionary computation, Vol. 4. pp. 1-32.

[Mil 1996]^o : Miller. B, Shaw. M, “*Genetic algorithm with dynamic niche sharing for multimodal function optimization*”, International conference on evolutionary computation, pp. 786-791.

[Moo 2004]^o : Moon. G, Sung.Q, “*Analysis of Halbach magnet array and its application to linear motor*”, Elsevier Mechatronics, Vol.14, No. 1, pp. 115-128, 2004.

[Mor 2002]^o : Morales. A.F, Garcia. J, “*Penalty function methods for constrained optimization with genetic algorithms: a statistical analysis*”, International conference on artificial intelligence, pp. 187-200.

[Mul 2002]^o : MULTON. B, GERGAUD. O, “*Etat de l’art dans les aérogénérateurs*”, l’électronique de puissance vecteur d’optimisation pour les énergies renouvelables. Ed. NOVELECT-ECRIN, pp. 97-154, 2002.

[Nap 1991]^o : Di Napoli. A, Caricchi.F, Noia. G, “*Design criteria of a low speed axial flux synchronous machine*”, Int. conf. on evolution and modern aspects of synchronous machines, pp.1119-1123, 1991.

[Nel 1965]^o : Nelder. J.A, Mead. R, “*A simplex method for function minimization*”, Computer journal, Vol.7, pp. 308-312.

[Nic 1994]^o : Nichita. C, “*Etude et développement de structures et lois de commande numériques pour la simulation en temps réel d’actionneurs. Application à la réalisation d’un simulateur d’aérogénérateurs de 3 kW*”, Thèse de doctorat, Université du Havre, 1994.

[Nic 2002]^o : Nichita. C, Luca. D, Dakyo. B, “*Large band simulation of the wind speed for real time wind turbine simulator*”, IEEE trans. on energy conversion, Vol. 17, No. 4, pp.523-529, 2002.

[Pal 1996]^o : Palko. S, “*Structural optimization of an induction motor using a genetic algorithm and a finite element method*”, Thèse de doctorat, Acta polytechnica Scandinavica, 1996.

[Par 2005]^o : Parviainen. A, “*Design of axial flux PM low speed machines and performances comparison between radial flux and axial flux machines*”, Thèse de doctorat, Lappeenranta university of technology, 2005.

[Pil 1997]^o : Pillay. P, Nolan. R, Haque. T, “*Application of genetic algorithm to motor parameter determination for transient torque calculations*”, IEEE trans on industry applications, Vol. 33, No.5, pp. 1273-1282.

[Pow 1965]^o : Powell. M.J, “*An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivations*”, Computer journal, Vol.7, pp. 155-162.

[Qu 2003]^o : Qu.R, Aydin. M, Lipo. T.A, “*Performance comparison of dual rotor radial flux and axial flux permanent magnet BLDC machines*”, Proc of IEEE electric machines and drives conference, IEMDC’2003, pp. 1948-1954, 2003.

[Rah 2003]^o : Rahman. S, “*Green power. What is it and where can we find it?*”, IEEE power & energy magazine, Jan/Feb 2003, pp.30-37, 2003.

[Rat 2006]^o : Rath. A.K, Dehuri. S.N, “*Non dominated sorting genetic algorithm for heterogeneous embedded system design*”, Journal of computer science, Vol. 2, No. 3, pp. 288-291.

[Ren 1995]^o : Renders. J.M, “*Algorithmes génétiques et réseaux de neurones*”, Edition Hermes.

[Sab 1998]^o : Sabonnadière. J.C, “*Conception assistée par ordinateur en génie électrique*”, Technique de l’ingénieur, D-3 585, 1998.

[Sam 2005]^o : Sambatra. E, “*Contribution à la modélisation comportementale d’une chaîne de conversion de l’énergie à source éolienne et à charge variable*”, Thèse de Doctorat, Université du Havre - GREAH, 2005.

[Sat 2002]^o : Sato. S, Otori. A, “*Applying genetic algorithm to the optimum design of a convert hall*”, Journal of sounds and vibration, Vol. 258, No. 3, pp 517-526.

[Sch 1985]^o : Schaffer. D, “*Multi objective optimization with vector evaluated genetic algorithm*”, Proc. of the 1st international conference on genetic algorithm, pp. 93-100.

[Scu 2006]^o : Scuiller, F, “*Développement d’outils de conception de machines polyphasées à aimants utilisant l’approche multimachine*”, Thèse de Doctorat, Ecole nationale supérieure d’arts et métiers 2006.

[She 1998]^o : Shell International Ltd, “*The evolution of the worlds energy system*”, Grid integration of the wind energy conversion system. Wiley (UK) 1998.

[Sle 1990]^o : Slemon. G, Liu. X, “*Core losses in permanent magnet motors*”, IEEE trans on magnetics, Sep. 1990, Vol. 26, No. 5, pp. 1653-1655.

[Sle 1992]^o : Slemon.G, Liu. X, “*Modelling and design optimization of permanent magnet motors*”, Electric and power systems, Vol. 20, No. 2, pp.71-92, 1992.

[Sou 2003]^o : Soulard. J, Chin. Y.K, “*Modeling of iron losses in PM synchronous motors with field weakening capability for electric vehicules*”, International journal of automative technology, Vol. 4, No. 2, pp. 87-94.

[Spe 1996]^o : SPENA. R.S, CLARE. J.C, ASHER. G.M, “*Doubly fed induction generator using back-to-back PWM converters and its application to variable speed wind energy generation*”, IEE. Proc. Electronic Power Applications, Vol. 143, pp. 231-241, Mai 1996.

[Spo 1992]^o : Spooner. E, Chalmers. B.J, “*TORUS: a slotless, toroidal-stator permanent magnet generator*”, IEE proc-B, Vol. 139, No.6, pp. 497-506, 1992.

[Sit 2001]^o : Sitapati. K, Krishnan. R, “*Performance comparison of radial and axial field PM brushless machines*”, IEEE trans on industry applications, Vol. 3, No. 5, pp. 1219-1226, 2001.

[Sri 1993]^o : Srivians. N, Deb.K, “*Multi objective optimization using nondominated sorting genetic algorithms*”, Technical report, Department of mechanical engineering, Institute of technology, India.

[Tho 1996]^o : Thomas. M, Soong. W, “*Pulsating torque minimization techniques for PM AC motor drives – A review*”, IEEE trans on industrial electronics, Apr. 1996, Vol. 43, No. 2, pp. 321-330.

[Tol 1991]^o : Toliyat. H.A, Lipo. T.A, “*Analysis of a concentrated winding induction machine for adjustable speed drive applications*”, IEEE trans on energy conversion, Dec. 1991, Vol. 6, No. 4, pp. 684-692.

[Via 2001]^o : Viarouge. P, Cros. J, “*Power transformers and power inductors for low frequency applications using isotropic composite materials with high power to weight ratio*”, PCT patent CA 2, 2001.

[Wan 2003]^o : Wang. X, Li. Q, “*Analytical calculation of air-gap magnetic field distribution and instantaneous characteristics of brushless DC motors*”, IEEE trans on energy conversion, Sep. 2003, Vol. 18, No. 3, pp. 424-432.

[Wil 2001]^o : Williams. E, Thomas. L, “*Average and maximum revisit time trade studies for satellite constellations using a multiobjective genetic algorithm*”, Journal of the astronautical sciences, Vol. 49, No. 3, pp 385-400.

[Wro 2003]^o : Wrobel. R, Lukaniszyn. M “*A new approach to reduction cogging torque in a brushless motor by skewing optimization of permanent magnets*”, Electrical engineering – Springer Berlin, May. 2003, Vol. 85, No. 2, pp. 59-69.

[WPM 1999]^o : Wind Power Monthly (1999), “*Exstensive Gearbox Retrofit Program*”.

[Wur 1996]^o : Wurtz. F, “*Une nouvelle approche pour la conception sous contraintes des machines électriques*”, Thèse de doctorat, INP-Grenoble, 1996.

[Yan 2004]^o: Yang. Y.P, Luh. Y.P, “*Design and control of axial flux brushless DC wheel motors for electric vehicule – part1: Multiobjective optimal design and analysis*”, Mathematical and computational application, Vol. 10, No.1, pp. 45-56.

[Yen 2005]^o: Yeniay. O, “*Penalty function for constrained optimization with genetic algorithms*”, Mathematical and computational application, Vol. 10, No.1, pp. 45-56.

[Zha 1999]^o : Zhang. Y.J, Ho. S.L, Wong. H.C, “*Analytical prediction of armature reaction field in disc type PM generators*”, IEEE trans on energy conversion, Dec. 1999, Vol. 14, No. 4, pp. 1385-1390.

[Zhu 1992]^o : Zhu. Q.Z, Howe. D, “*Analytical prediction of the cogging torque in radial field PM brushless motors*”, IEEE trans on magnetics, Mar. 1992, Vol. 28, No. 2, pp. 1371-1374.

[Zhu 1993]^o : Zhu. Q.Z, Howe. D, “*Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet dc motors, part II : Armature-reaction field*”, IEEE trans on magnetics, Jan. 1993, Vol. 29, No. 1, pp. 136-142.

[Zhu 2000]^o : Zhu. Q.Z, Howe. D, “*Influence of design parameters on cogging torque in permanent magnet machines*”, IEEE trans on energy conversion, Dec. 2000, Vol. 15, No. 4, pp. 407-412.

[Zhu 2002]^o : Zhu. Q.Z, Xia. Z.P, “*Comparison of Halbach magnetized brushless machines based on discrete magnet segments or a single ring magnet*”, IEEE trans on magnetics, Vol. 38, No. 5, pp. 2997-2999, 2002.

[Zhu 2002]^o : Zhu. Q.Z, Howe. D, Chan.C.C, “*Improved analytical model for predicting the magnetic field distribution in brushless PM machines*”, IEEE trans on magnetics, Jan. 2002, Vol. 38, No. 1, pp. 229-238.

[Zhu 2004]^o : Zhu. Q.Z, XIA. Z.P (2004), “*Analytical magnetic field analysis of Halbach magnetized permanent magnet machines*”, IEEE trans on magnetics, Vol. 40, No. 4, pp. 1864-1872, 2004

[Zie 2008]^o : Ziegler. N “*Actionneur électromagnétique linéaire polyentrefer à aimants à hautes performances. Application aux entraînements directs pour le domaine aéronautique*”, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, 2008.

[Zit 1999]^o: Zitzler. E, Thiele. L, “*Evolutionary algorithm for multiobjective optimization: Methods and applications*”, Swiss federal institute of technology (ETH). TIK-schriftenreihe N. 30, Dissertation ETH N. 13398, Germany: Shaker Verlag.

[Zit 2000]^o: Zitzler. E, Deb. K, Thiele. L, “*Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empiric results*”, Evolutionary computation, the MIT press, Vol.8, No. 2, pp. 173-195.

[Zit 2001]^o: Zitzler. E, Laumanns. M, Thiele. L, “*SPEA2: improving the strength Pareto evolutionary algorithm*”, Technical report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss federal institute of technology (ETH) Zurich, Gloriastrasse 35, CH-8092.

**ANNEXE A – CALCUL DE DIFFERENTS COEFFICIENTS DE
L'INDUCTION A VIDE DANS L'ENTREFER ET DANS LA REGION
AIMANTEE. CAS D'UNE MACHINE A FLUX AXIAL**

Nous rappelons que $B_\varphi^{(2)}(\varphi,0)$ et $B_z^{(2)}(\varphi,0)$ sont périodiques de période $2\pi/p$ et écrites sous forme de série de Fourier (éq. II.25). le calcul de leurs coefficients en utilisant les conditions de passage entre les différents régions permettra de les écrire en fonction d'une sommation sur les coefficients de l'induction dans les encoches.

➤ **Calcul de $F_{kAP}^{(2)}$**

$$F_{kAP}^{(2)} = \frac{p}{\pi} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi,0,\theta) \sin(kp\varphi) d\varphi = \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{\frac{Q_s}{p}-1} \left\{ \int_{\varphi_l}^{\varphi_l+w} B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi,0,\theta) \sin(kp\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_l+w}^{\varphi_{l+1}} B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi,0,\theta) \sin(kp\varphi) d\varphi \right\}$$

Le second terme est nul ($B_\varphi^{(2)}(\varphi,0,\theta) = 0$ face à une denture), donc :

$$F_{kAP}^{(2)} = \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{\frac{Q_s}{p}-1} \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w}} \left(\frac{l_p}{r} \right)^{\varphi_l+w} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l+w} \cos \left[\frac{m\pi}{w} (\varphi - \varphi_l) \right] \sin(kp\varphi) d\varphi$$

Après calcul des intégrales, regroupements, simplifications et remplacement de φ_l par sa

valeur :

$$F_{kAP}^{(2)} = \left(\sqrt{k/\pi} w_{sl} p \right)^2 \sum_{l=0}^{\frac{N_s}{p}-1} \sum_{m \neq 0} \frac{f_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w_{sl}}} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(kp w_{sl})^2 - (m\pi)^2} \cdot \delta_m \left(\frac{2k\pi p l}{N_s}, \frac{kp w_{sl}}{2} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\delta_m(a,b) = \begin{cases} 2 \sin(a) \sin(b) & \text{si } m \text{ est pair} \\ 2 \cos(a) \cos(b) & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

➤ **Calcul de $D_{kAP}^{(2)}$**

$$D_{kAP}^{(2)} = \frac{p}{\pi} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi,0,\theta) \cos(kp\varphi) d\varphi = \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{\frac{Q_s}{p}-1} \left\{ \int_{\varphi_l}^{\varphi_l+w} B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi,0,\theta) \cos(kp\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_l+w}^{\varphi_{l+1}} B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi,0,\theta) \cos(kp\varphi) d\varphi \right\}$$

Après calcul des intégrales, regroupements, simplifications:

$$D_{kAP}^{(2)} = \left(\sqrt{k/\pi} w_{sl} p \right)^2 \sum_{l=0}^{\frac{N_s}{p}-1} \sum_{m \neq 0} \frac{f_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w_{sl}}} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(kp w_{sl})^2 - (m\pi)^2} \cdot \gamma_m \left(\frac{2k\pi p l}{N_s}, \frac{kp w_{sl}}{2} \right) \quad (\text{A.2})$$

avec $\gamma_m(a,b) = \begin{cases} \tan^{-1}(a) \delta_m(a,b) & \text{si } m \text{ est pair} \\ -\tan(a) \delta_m(a,b) & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$

➤ **Calcul de $C_{kAP}^{(2)}$**

$$\begin{aligned}
C_{kAP}^{(2)} &= \frac{p}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s = \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s + \\ \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} f_m^{(l)} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} \sum_{m \neq 0} \sin\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \\ + \\ \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} \sum_{n \neq 0} [C_{nAP}^{(2)} \sin(np\varphi_s) - E_{nAP}^{(2)} \cos(np\varphi_s)] \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \\ \\ \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} f_m^{(l)} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} \sum_{m \neq 0} \sin\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \\ + \frac{p}{2\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} C_k^{(2)} \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} (1 - \cos(2kp\varphi_s)) d\varphi_s - \frac{p}{2\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} E_{kAP}^{(2)} \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} \sin(2kp\varphi_s) d\varphi_s \quad (\text{pour } n = k) \\ + \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \neq k}} [C_{nAP}^{(2)} \sin(np\varphi_s) - E_{nAP}^{(2)} \cos(np\varphi_s)] \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{array} \right.
\end{aligned}$$

d'autre part, $\sum_{l=0}^{N_s-1} e^{j(n \pm k) \frac{2\pi}{(N_s/p)}} = \begin{cases} N_s/p & \text{si } (n \pm k) \text{ est multiple de } N_s/p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{N_s-1} \sin\left[p(n \pm k) \left(\frac{2\pi(l+1)}{N_s} - \frac{w_{sl}}{2}\right)\right] = \frac{-N_s}{p} \sin\left[p(n \pm k) \frac{w_{sl}}{2}\right] \\ \sum_{l=0}^{N_s-1} \cos\left[p(n \pm k) \left(\frac{2\pi(l+1)}{N_s} - \frac{w_{sl}}{2}\right)\right] = \frac{N_s}{p} \cos\left[p(n \pm k) \frac{w_{sl}}{2}\right] \end{array} \right.$$

en utilisant cette propriété après calcul des intégrales :

$$C_{kAP}^{(2)} = \left\{ \begin{aligned} & \sum_{l=0}^{N_s-1} \sum_{m \neq 0}^p \frac{-mpw_{sl}}{(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2} f_m^{(l)} \cdot \gamma_m \left(\frac{2k\pi l}{N_s}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \\ & + C_{kAP}^{(2)} \left(1 - \frac{N_s w_{sl}}{2\pi} + \frac{N_s}{2kp\pi} \sin(kpw_{sl}) \right) \\ & + \frac{N_s}{\pi} \left\{ \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \neq k \\ n+k = \rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \frac{\sin \left[p(n+k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n+k)} - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \neq k \\ n-k = \rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \frac{\sin \left[p(n-k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n-k)} \right\} \end{aligned} \right.$$

sachant que $\lim_{n \rightarrow k} \frac{\sin \left[p(n-k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n-k)} = \frac{w_{sl}}{2}$, $\lim_{n \rightarrow k} \frac{\sin \left[p(n+k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n+k)} = \frac{\sin(kpw_{sl})}{2kp}$ et en posant

que $\Gamma_m = \sum_{l=0}^{N_s-1} f_m^{(l)} \gamma_m \left(\frac{2k\pi l}{N_s}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right)$, la relation précédente s'écrira de la façon suivante :

$$\sum_{m \neq 0} \left(\frac{mpw_{sl}}{(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \Gamma_m = \frac{N_s}{\pi} \left\{ \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k = \rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \frac{\sin \left[p(n+k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n+k)} - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n-k = \rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \frac{\sin \left[p(n-k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n-k)} \right\} \quad (\text{A.3})$$

à ce niveau, nous allons exploiter le développement en série des sinus issu du théorème des résidus afin de transformer les termes en sinus dans l'équation (A.3) en une somme afin de pouvoir faire des simplifications pour le reste du calcul. Tout calcul fait :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\sin \left[p(n+k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n+k)} &= \sum_{m \neq 0} \left(\frac{(m\pi \sqrt{2w_{sl}})^2}{[(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2] [(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2]} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{-npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \\ \frac{\sin \left[p(n-k) \frac{w_{sl}}{2} \right]}{p(n-k)} &= \sum_{m \neq 0} \left(\frac{(m\pi \sqrt{2w_{sl}})^2}{[(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2] [(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2]} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \end{aligned} \right.$$

en remplaçant ces deux dernières égalités dans l'équation (A.3) :

$$\sum_{m \neq 0} \left(\frac{mpw_{sl}}{(kpw_s)^2 - (m\pi)^2} \right) \Gamma_m$$

$$= \frac{N_s}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k=\rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{(m\pi\sqrt{2w_{sl}})^2}{[(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2] \cdot [(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2]} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{-npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \\ - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n-k=\rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{(m\pi\sqrt{2w_{sl}})^2}{(npw_{sl})^2 - [(m\pi)^2] \cdot [(kpw_{sl})^2 - m\pi]^2} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \end{array} \right.$$

les termes des sommations de deux membres de l'équation précédente sont linéairement indépendants, ce qui nous permet de les égaliser terme à terme :

$$\Gamma_m = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k=\rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{2m\pi N_s/p}{(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{-npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \\ - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n-k=\rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{2m\pi N_s/p}{(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \end{array} \right.$$

A ce stade, on remplace la sommation sur les coefficients $f_m^{(l)}$ dans l'expression de l'équation (A.2), d'où:

$$D_{kAP}^{(2)} = \left(\sqrt{k/\pi} w_{sl} p \right)^2 \sum_{m \neq 0} \frac{T_{m\pi} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \Gamma_m$$

$$= \sum_{m \neq 0} \left(\frac{2kmN_s p w_{sl}^2}{(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \cdot \left(\frac{T_{m\pi} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n+k=\rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \cdot \delta_m \left(\frac{-npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \\ - \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n-k=\rho \frac{N_s}{p}}} C_{nAP}^{(2)} \cdot \delta_m \left(\frac{npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \end{array} \right.$$

on définit par la suite les deux fonctions auxiliaires suivantes :

$$f(k, n) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{2kmN_s p w_{sl}^2}{(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \left(\frac{T_{m\pi} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{-npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) \quad \text{si } (n+k) \text{ est multiple de } \frac{Q_s}{p} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

et

$$g(k, n) = \begin{cases} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{2kmN_s p w_{sl}^2}{(kpw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \left(\frac{T_{\frac{m\pi}{w}} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(npw_{sl})^2 - (m\pi)^2} \right) \cdot \delta_m \left(\frac{npw_{sl}}{2}, \frac{kpw_{sl}}{2} \right) & \text{si } (n-k) \text{ est multiple de } \frac{Q_s}{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'écrire l'équation précédente sous la forme simplifiée suivante:

$$D_{kAP}^{(2)} = \sum_{n \neq 0} C_{nAP}^{(2)} f(k, n) - \sum_{n \neq 0} C_{nAP}^{(2)} g(k, n) = \sum_{n \neq 0} C_{nAP}^{(2)} \{f(k, n) - g(k, n)\}$$

En utilisant les relations issues des conditions aux limites entre les régions II et III, on obtient finalement l'équation qui nous permet de calculer les différents coefficients $C_k^{(3)}$ en fonction des grandeurs géométriques de la machine :

$$C_{kAP}^{(3)} T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right) + \sum_{n \neq 0} C_{nAP}^{(3)} \{f(k, n) - g(k, n)\} = -F_k^M sh(kpg/r_m) - \sum_{n \neq 0} F_n^M ch(kpg/r_m) \{f(k, n) - g(k, n)\} \quad (A.4)$$

Mise en équation sous la forme d'un système d'algèbre linéaire

Les inconnus dans l'équation précédente sont les différents coefficients $C_k^{(3)}$. On peut résoudre l'équation précédente en construisant un système d'algèbre linéaire puis le résoudre avec la méthode directe de Gauss par exemple.

- Pour $k = 1$

$$C_{1AP}^{(3)} (T_{1p}(\alpha) + H(1,1)) + C_{2AP}^{(3)} H(1,2) + \dots + C_{nAP}^{(3)} H(1,n) \\ = \\ -F_1^M (sh(\beta) + ch(\beta)H(1,1)) - F_2^M ch(2\beta)H(1,2) - \dots - F_n^M ch(n\beta)H(1,n)$$

- Pour $k = 2$

$$C_{1AP}^{(3)} H(2,1) + C_{2AP}^{(3)} (T_{2p}(\alpha) + H(2,2)) + \dots + C_{nAP}^{(3)} H(2,n) \\ = \\ -F_1^M ch(\beta)H(2,1) - F_2^M (sh(2\beta) + ch(2\beta)H(2,2)) - \dots - F_n^M ch(n\beta)H(2,n) \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot$$

- Pour $k = n$

$$C_{AP1}^{(3)} H(n,1) + C_{2AP}^{(3)} H(n,2) + \dots + C_{nAP}^{(3)} (T_{np}(\alpha) + H(n,n))$$

$$=$$

$$- F_1^M ch(\beta) H(n,1) - F_2^M ch(2\beta) H(n,2) - \dots - F_n^M (sh(n\beta) + ch(n\beta) H(n,n))$$

Sous forme matriciel :

$$- \underbrace{\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(\alpha) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + H(n,n) \end{bmatrix}}_{[A_c]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_{1AP}^{(3)} \\ C_{2AP}^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{nAP}^{(3)} \end{bmatrix}}_{[X]} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} sh(\beta) + ch(\beta) H(1,1) & ch(2\beta) H(1,2) & \dots & ch(n\beta) H(1,n) \\ ch(\beta) H(2,1) & sh(2\beta) + ch(2\beta) H(2,2) & \dots & ch(n\beta) H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ ch(\beta) H(n,1) & ch(2\beta) H(n,2) & \dots & sh(n\beta) + ch(n\beta) H(n,n) \end{bmatrix}}_{[B_c]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} F_1^M \\ F_2^M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n^M \end{bmatrix}}_{[F^M]}$$

Avec $\alpha = \frac{g + H_m}{r_m}$, $\beta = \frac{pg}{r_m}$ et $H(k, n) = f(k, n) - g(k, n)$

➤ **Calcul de $E_k^{(2)}$**

$$- E_{kAP}^{(2)} = \frac{P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s$$

$$= \frac{P}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \left\{ \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s + \int_{\varphi_{l+1}}^{\varphi_{l+1} + w_{sl}} B_{zAP}^{(2)}(\varphi_s, 0, \theta) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s \right\}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \frac{P}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} f_m^{(l)} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l+w_{sl}} \sum_{m \neq 0} \sin \left[\frac{m\pi}{W_{sl}} (\varphi_s - \varphi_l) \right] \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s \\ & + \frac{P}{2\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} C_k^{(2)} \int_{\varphi_l+w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} \sin(2kp\varphi_s) d\varphi_s - \frac{P}{2\pi} \sum_{l=1}^{Q_s/p} E_{kAP}^{(2)} \int_{\varphi_l+w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} (1 + \cos(2kp\varphi_s)) d\varphi_s \\ & + \frac{P}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \int_{\varphi_l+w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \neq k}} [C_{nAP}^{(2)} \sin(np\varphi_s) - E_{nAP}^{(2)} \cos(np\varphi_s)] \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{aligned} \right.$$

de la même manière que $C_k^{(2)}$ et tout calcul fait, on obtient:

$$E_{kAP}^{(3)} T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right) - \sum_{n \neq 0} E_{nAP}^{(3)} \{f(k, n) + g(k, n)\} = E_k^M sh(kpg/r_m) - \sum_{n \neq 0} E_n^M ch(kpg/r_m) \{f(k, n) + g(k, n)\} \quad (\text{A.5})$$

sous forme matriciel :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(\alpha) + P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + P(n,n) \end{bmatrix}}_{[A_e]} \cdot \begin{bmatrix} E_{1AP}^{(3)} \\ E_{2AP}^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{nAP}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sh(\beta) + ch(\beta)P(1,1) & ch(2\beta)P(1,2) & \dots & ch(n\beta)P(1,n) \\ ch(\beta)P(2,1) & sh(2\beta) + ch(2\beta)P(2,2) & \dots & ch(n\beta)P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ ch(\beta)P(n,1) & ch(2\beta)P(n,2) & \dots & sh(n\beta) + ch(n\beta)P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1^M \\ E_2^M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n^M \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{[B_e]} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{[E^M]}$

avec $P(k, n) = -[f(k, n) + g(k, n)]$.

**ANNEXE B – CALCUL DE DIFFERENTS COEFFICIENTS DE
L'INDUCTION DUE A LA REACTION D'INDUIT. CAS D'UNE MACHINE A
FLUX AXIAL**

Les conditions de passage entre la région des encoches et la région de l'entrefer conduisent à écrire l'équation suivante :

$$\begin{cases} \sum_{k \neq 0} C_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) - E_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} \sin\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \\ \sum_{k \neq 0} D_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi_s) + F_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi_s) = \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w_{sl}}}\left(\frac{H_{sl}}{r_m}\right) \cos\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] - \mu_0 J^{(l)} H_{sl} \end{cases}$$

Il est clair aussi $B_{\varphi}^{(2)}(\varphi, 0)$ et $B_z^{(2)}(\varphi, 0)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{p}$ et écrites sous forme de série de Fourier comme dans le cas à vide.

➤ **Calcul de $F_{kis}^{(2)}$**

$$F_{kis}^{(2)} = \frac{p}{\pi} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi AP}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s = \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} B_{\varphi s}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s + \\ \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} B_{\varphi s}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{array} \right\}$$

Le second terme est nul ($B_{\varphi s}^{(2)}(\varphi_s, 0) = 0$ face à une denture), donc:

$$F_{kis}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{p\mu_0 H_{sl}}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} J^{(l)} \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \\ + \frac{p}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \sum_{m \neq 0} f_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w_{sl}}}\left(\frac{H_{sl}}{r_m}\right) \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} \cos\left[\frac{m\pi}{w_{sl}}(\varphi_s - \varphi_l)\right] \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{cases}$$

Tout calcul fait :

$$F_{kis}^{(2)} = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{k}{\pi}} w_{sl} p\right)^2 \sum_{l=0}^{N_s-1} \sum_{m \neq 0} \frac{f_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w_{sl}}}\left(\frac{H_{sl}}{r_m}\right)}{(kp w_{sl})^2 - (m\pi)^2} \cdot \delta_m\left(\frac{2k\pi p l}{N_s}, \frac{kp w_{sl}}{2}\right) \\ - \frac{2\mu_0 l_p}{k\pi} \sin\left(\frac{kp w}{2}\right) \sum_{l=0}^{Q_s-1} J^{(l)}(t) \sin\left(\frac{2k\pi p l}{Q_s}\right) \end{cases} \quad (B.1)$$

➤ **Calcul de $D_{kis}^{(2)}$**

$$D_{kis}^{(2)} = \frac{P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi_{is}}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s = \frac{P}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \begin{cases} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} B_{\varphi_{is}}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s + \\ \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} B_{\varphi_{is}}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{cases}$$

après calcul des intégrales, regroupements, simplifications :

$$D_{kis}^{(2)} = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{k}{\pi}} w_{sl} p \right)^2 \sum_{l=0}^{N_s-1} \sum_{m \neq 0} \frac{f_m^{(l)} T_{m\pi} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(kp w_{sl})^2 - (m\pi)^2} \cdot \gamma_m \left(\frac{2k\pi pl}{N_s}, \frac{kp w_{sl}}{2} \right) \\ - \frac{2\mu_0 l_p}{k\pi} \sin\left(\frac{kp w_{sl}}{2}\right) \sum_{l=0}^{Q_s-1} J^{(l)}(t) \cos\left(\frac{2k\pi pl}{Q_s}\right) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

➤ **Calcul de $C_{kis}^{(2)}$**

$$C_{kis}^{(2)} = \frac{P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{z_{is}}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s = \frac{P}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \begin{cases} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} B_{z_{is}}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s + \\ \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} B_{z_{is}}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \sin(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{cases}$$

En se basant en grande partie sur le calcul fait pour le calcul de la répartition de l'induction à vide et en adoptant les mêmes notations :

$$D_{kis}^{(2)} = \left(\sqrt{\frac{k}{\pi}} w_{sl} p \right)^2 \sum_{m \neq 0} \frac{T_{m\pi} \left(\frac{H_{sl}}{r_m} \right)}{(kp w_{sl})^2 - (m\pi)^2} \Gamma_m - \frac{2\mu_0 H_{sl}}{k\pi} \sin\left(\frac{kp w_{sl}}{2}\right) \sum_{l=0}^{N_s-1} J^{(l)} \cos\left(\frac{2k\pi pl}{N_s}\right)$$

après calcul et développement, $D_{kis}^{(2)}$ s'écrira sous la forme suivante :

$$D_{kis}^{(2)} = \sum_{n \neq 0} C_{nis}^{(2)} \{f(k, n) - g(k, n)\} - \frac{2\mu_0 H_{sl}}{k\pi} \sin\left(\frac{kp w_{sl}}{2}\right) \sum_{l=0}^{N_s-1} J^{(l)} \cos\left(\frac{2k\pi pl}{N_s}\right)$$

où $f(k, n)$ et $g(k, n)$ sont les deux fonctions auxiliaires déjà définis dans la section qui traite le

calcul de l'induction à vide. D'autre part, $C_{kis}^{(2)} = -D_{kis}^{(2)} / T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right)$, on écrira finalement :

$$C_{kis}^{(2)} T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right) + \sum_{n \neq 0} C_{nis}^{(2)} \{f(k, n) - g(k, n)\} = \frac{2\mu_0 H_{sl}}{k\pi} \sin\left(\frac{kp w_{sl}}{2}\right) \sum_{l=0}^{N_s-1} J^{(l)} \cos\left(\frac{2k\pi pl}{N_s}\right) \quad (\text{B.3})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(\alpha) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{1is}^{(2)} \\ C_{2is}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{nis}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\mu_0 H_{sl}}{\pi} \sin\left(\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{p}} J^{(l)} \cos\left(\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{2\pi} \sin\left(2\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{p}} J^{(l)} \cos\left(2\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{n\pi} \sin\left(n\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{p}} J^{(l)} \cos\left(n\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \end{bmatrix}$$

➤ **Calcul de $E_{kis}^{(2)}$**

$$-E_{kis}^{(2)} = \frac{P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{zis}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s = \frac{P}{\pi} \sum_{l=0}^{N_s-1} \begin{cases} \int_{\varphi_l}^{\varphi_l + w_{sl}} B_{zis}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s + \\ \int_{\varphi_l + w_{sl}}^{\varphi_{l+1}} B_{zis}^{(2)}(\varphi_s, 0, t) \cos(kp\varphi_s) d\varphi_s \end{cases}$$

de la même manière que précédemment et tout calcul fait, a:

$$E_{kis}^{(2)} T_{kp} \left(\frac{g + H_m}{r_m} \right) - \sum_{n \neq 0} E_{nis}^{(2)} \{f(k, n) + g(k, n)\} = \frac{2\mu_0 H_{sl}}{k\pi} \sin\left(\frac{kp w_{sl}}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{N_s-1}{p}} J^{(l)} \sin\left(\frac{2k\pi pl}{N_s}\right) \quad (\text{B.4})$$

Sous forme matricielle :

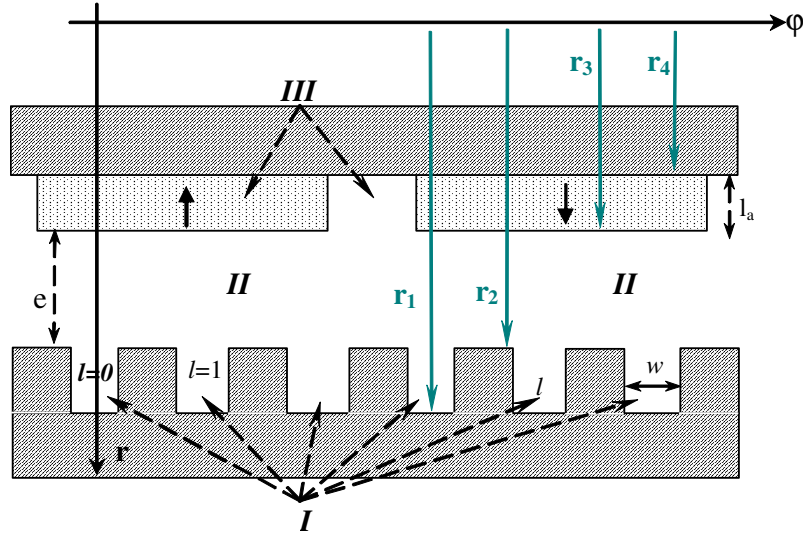
$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha) + P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(\alpha) + P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha) + P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{1is}^{(2)} \\ E_{2is}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ E_{nis}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2\mu_0 H_{sl}}{\pi} \sin\left(\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{2\pi} \sin\left(2\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(2\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{2\mu_0 H_{sl}}{n\pi} \sin\left(n\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(n\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \end{array} \right]$$

**ANNEXE C – REPARTITION DU CHAMP A VIDE POUR UNE MACHINE A
FLUX RADIAL**

L'équation aux dérivées partielles qui régit le potentiel vecteur dans le cas d'une machine à flux radial et dans le cas d'une aimantation strictement radiale s'écrit sous la forme scalaire suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = -\mu \left(J_z - \frac{1}{r} \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{C.1})$$



Solution dans la région I

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{C.2})$$

Le potentiel vecteur ainsi que les différentes composantes de l'induction et en tenant compte des conditions aux limites qui existe pour chaque encoche s'écrivent de la façon suivante :

$$A_{zAP}^{(l)}(r, \varphi, \theta) = a_0^{(l)} - \sum_{m \neq 0} \frac{wr_2}{m\pi} g_m^{(l)} \frac{C_{m\pi}(r, r_1)}{C_{m\pi}(r_2, r_1)} \cos \left[\frac{m\pi}{w} (\varphi - \varphi_l) \right] \quad (\text{C.3})$$

$$B_{rAP}^{(l)}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi} = \sum_{m \neq 0} \frac{r_2}{r} g_m^{(l)} \frac{C_{m\pi}(r, r_1)}{C_{m\pi}(r_2, r_1)} \sin \left[\frac{m\pi}{w} (\varphi - \varphi_l) \right] \quad (\text{C.4})$$

$$B_{\varphi AP}^{(l)}(r, \varphi, \theta) = -\frac{\partial A}{\partial r} = \sum_{m \neq 0} \frac{r_2}{r} g_m^{(l)} \frac{S_{m\pi}(r, r_1)}{C_{m\pi}(r_2, r_1)} \cos \left[\frac{m\pi}{w} (\varphi - \varphi_l) \right] \quad (\text{C.5})$$

où

$$g_m^{(l)} = -2 \frac{m\pi}{w} C_{\frac{m\pi}{w}}(r_2, r_1) r_1^{\left(\frac{m\pi}{w}\right)} \frac{a_{\frac{m\pi}{w}}^{(l)} c_{\frac{m\pi}{w}}^{(l)}}{r_2 \cos\left(\frac{m\pi}{w} \varphi_l\right)}$$

$$C_x(a, b) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{b}{a}\right)^x \right]; \quad S_x(a, b) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x \right]$$

Il faut noter aussi que :

$$\frac{\partial C_x(a, b)}{\partial a} = \frac{x}{a} S_x(a, b); \quad \frac{\partial S_x(a, b)}{\partial a} = \frac{x}{a} C_x(a, b)$$

Solution dans la région II

Pour cette région, nous essayons d'écrire les équations en conservant leur forme obtenue dans la région I. Pour cela, nous cherchons à obtenir la même induction normale pour $r = r_2$ en faisant intervenir les termes $C_{kp}(r, r_2)$ et $S_{kp}(r, r_2)$. Tout calcul fait :

$$A_{zAP}^{(2)}(r, \varphi, \theta) = a_0^{(2)} - \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{kp} \left\{ \begin{array}{l} [a_{kAP}^{(2)} C_{kp}(r, r_2) + b_{kAP}^{(2)} S_{kp}(r, r_2)] \cos(kp\varphi) \\ [c_{kAP}^{(2)} C_{kp}(r, r_2) + d_{kAP}^{(2)} S_{kp}(r, r_2)] \sin(kp\varphi) \end{array} \right\} + \quad (C.6)$$

$$B_{rAP}^{(2)}(r, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{r} \left\{ \begin{array}{l} [a_{kAP}^{(2)} C_{kp}(r, r_2) + b_{kAP}^{(2)} S_{kp}(r, r_2)] \sin(kp\varphi) \\ [c_{kAP}^{(2)} C_{kp}(r, r_2) + d_{kAP}^{(2)} S_{kp}(r, r_2)] \cos(kp\varphi) \end{array} \right\} - \quad (C.7)$$

$$B_{\varphi AP}^{(2)}(r, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{r} \left\{ \begin{array}{l} [a_{kAP}^{(2)} S_{kp}(r, r_2) + b_{kAP}^{(2)} C_{kp}(r, r_2)] \cos(kp\varphi) \\ [c_{kAP}^{(2)} S_{kp}(r, r_2) + d_{kAP}^{(2)} C_{kp}(r, r_2)] \sin(kp\varphi) \end{array} \right\} + \quad (C.8)$$

Solution dans la région III

Si on considère que l'aimantation est strictement radiale, l'EDP s'écrit dans cette région comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r_2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} = \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} \quad (C.9)$$

En tenant compte de la seule condition aux limites dans cette région ($B_\varphi^{(3)}(r_4, \varphi) = 0$), le potentiel vecteur ainsi que les composantes de l'induction seront donnés par :

$$A_{zAP}^{(3)}(r, \varphi, \theta) = a_0^{(3)} - \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{kp} \left\{ \begin{array}{l} [a_{kAP}^{(3)} \cos(kp\varphi) + b_{kAP}^{(3)} \sin(kp\varphi)] \cdot [C_{kp}(r, r_2) - T_{kp}(r_4, r_2) S_{kp}(r, r_2)] \\ [F_k^M \cos(kp\varphi) + E_k^M \sin(kp\varphi)] \cdot C_{kp}(r_3, r_2) \cdot [1 - T_{kp}^2(r_3, r_2)] \end{array} \right\} + \quad (C.10)$$

$$B_{rAP}^{(3)}(r, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{r} \left\{ \begin{array}{l} [a_{kAP}^{(3)} \sin(kp\varphi) - b_{kAP}^{(3)} \cos(kp\varphi)] \cdot [C_{kp}(r, r_2) - T_{kp}(r_4, r_2)S_{kp}(r, r_2)] \\ + \\ [F_k^M \sin(kp\varphi) - E_k^M \cos(kp\varphi)] \cdot C_{kp}(r_3, r_2) \cdot [1 - T_{kp}^2(r_3, r_2)] \end{array} \right. \quad (C.11)$$

$$B_{\varphi AP}^{(3)}(r, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{r} [a_{kAP}^{(3)} \cos(kp\varphi) + b_{kAP}^{(3)} \sin(kp\varphi)] \cdot [S_{kp}(r, r_2) - T_{kp}(r_4, r_2)C_{kp}(r, r_2)] \quad (C.12)$$

Où

$$T_{kp}(a, b) = \frac{S_{kp}(a, b)}{C_{kp}(a, b)}$$

$$E_k^M = \begin{cases} -4B_R \frac{r}{k\pi} \frac{\sin\left[k\left(\frac{\pi}{2} + p\theta\right)\right] \cos\left(\frac{kp\tau}{2}\right)}{r_2 C_{kp}(r_3, r_2) \cdot [1 - T_{kp}^2(r_3, r_2)]} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

$$F_k^M = \begin{cases} -4B_R \frac{r}{k\pi} \frac{\cos\left[k\left(\frac{\pi}{2} + p\theta\right)\right] \cos\left(\frac{kp\tau}{2}\right)}{r_2 C_{kp}(r_3, r_2) \cdot [1 - T_{kp}^2(r_3, r_2)]} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Condition de passage entre les deux régions II et III

Elles se traduisent par la relation suivante :
$$\begin{cases} B_{rAP}^{(2)}(r_3, \varphi) = B_{rAP}^{(3)}(r_3, \varphi) \\ B_{\varphi AP}^{(2)}(r_3, \varphi) = B_{\varphi AP}^{(3)}(r_3, \varphi) \end{cases}$$

Il en découle que :

$$\begin{cases} a_{kAP}^{(2)} = a_{kAP}^{(3)} + F_k^M \\ b_{kAP}^{(2)} = -[a_{kAP}^{(3)} T_{kp}(r_4, r_2) + F_k^M T_{kp}(r_3, r_2)] \\ c_{kAP}^{(2)} = b_{kAP}^{(3)} + E_k^M \\ d_{kAP}^{(2)} = -[b_{kAP}^{(3)} T_{kp}(r_4, r_2) + E_k^M T_{kp}(r_3, r_2)] \end{cases} \quad (C.13)$$

Condition de passage entre les deux régions I et II

– Face aux encoches :

$$\begin{cases} B_{rAP}^{(l)}(r_2, \varphi) = B_{rAP}^{(2)}(r_2, \varphi) \\ B_{\varphi AP}^{(l)}(r_2, \varphi) = B_{\varphi AP}^{(2)}(r_2, \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{kAP}^{(2)} \sin(kp\varphi) - c_{kAP}^{(2)} \cos(kp\varphi) = \sum_{m \neq 0} g_m^{(l)} \sin\left[\frac{m\pi}{w}(\varphi - \varphi_l)\right] \\ d_{kAP}^{(2)} \sin(kp\varphi) + b_{kAP}^{(2)} \cos(kp\varphi) = \sum_{m \neq 0} g_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w}}(r_2, r_1) \cos\left[\frac{m\pi}{w}(\varphi - \varphi_l)\right] \end{cases}$$

– Face aux dentures : $B_{\varphi AP}^{(2)}(r_2, \varphi) = 0$

Détermination des coefficients de l'induction

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad a_{kAP}^{(2)} &= \frac{P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{rAP}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \sin(kp\varphi) d\varphi ; & b_{kAP}^{(2)} &= \frac{P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi AP}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \cos(kp\varphi) d\varphi \\
 \bullet \quad c_{kAP}^{(2)} &= \frac{-P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{rAP}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \cos(kp\varphi) d\varphi ; & d_{kAP}^{(2)} &= \frac{P}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi AP}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \sin(kp\varphi) d\varphi
 \end{aligned}$$

Après calcul des intégrales, développement et regroupements :

$$\bullet \quad a_{kAP}^{(3)} T_{kp}(r_4, r_2) + \sum_{n \neq 0} a_{nAP}^{(3)} \{g(k, n) - f(k, n)\} = -F_k^M T_{kp}(r_3, r_2) - \sum_{n \neq 0} F_n^M \{g(k, n) - f(k, n)\} \quad (C.14)$$

$$\bullet \quad b_{kAP}^{(3)} T_{kp}(r_4, r_2) + \sum_{n \neq 0} b_{nAP}^{(3)} \{g(k, n) + f(k, n)\} = -E_k^M T_{kp}(r_3, r_2) - \sum_{n \neq 0} E_n^M \{g(k, n) + f(k, n)\} \quad (C.15)$$

Les différents coefficients de l'induction dans l'entrefer sont déduits à partir des coefficients $a_k^{(3)}$ et $b_k^{(3)}$ de l'induction de la région III en utilisant la relation (A.13). les deux fonctions auxiliaires $f(k, n)$ et $g(k, n)$ sont données par :

$$f(k, n) = \begin{cases} \sum_{m \neq 0} \left\{ T_{\frac{m\pi}{w}}(r_2, r_1) \cdot \left\{ \cos \left[p(n+k) \frac{w}{2} \right] - (-1)^m \cos \left[p(n-k) \frac{w}{2} \right] \right\} \right. & \text{si } (n+k) \text{ est multiple de } \frac{Q_s}{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(k, n) = \begin{cases} \sum_{m \neq 0} \left\{ T_{\frac{m\pi}{w}}(r_2, r_1) \cdot \left\{ \cos \left[p(n-k) \frac{w}{2} \right] - (-1)^m \cos \left[p(n+k) \frac{w}{2} \right] \right\} \right. & \text{si } (n-k) \text{ est multiple de } \frac{Q_s}{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour trouver les différents coefficients $a_k^{(3)}$ et $b_k^{(3)}$, il faut résoudre les deux systèmes linéaires suivants :

$$- \begin{bmatrix} T_{1p}(r_4, r_2) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(r_4, r_2) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(r_4, r_2) + H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1AP}^{(3)} \\ a_{2AP}^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nAP}^{(3)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(r_3, r_2) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(r_3, r_2) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(r_3, r_2)H(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^M \\ F_2^M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n^M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(r_4, r_2) + P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(r_4, r_2) + P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(r_4, r_2) + P(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1AP}^{(3)} \\ b_{2AP}^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nAP}^{(3)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(r_3, r_2) + P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(r_3, r_2) + P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(r_3, r_2) + P(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^M \\ E_2^M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_n^M \end{bmatrix}$$

$H(k, n) = g(k, n) - f(k, n)$ et $P(k, n) = g(k, n) + f(k, n)$.

**ANNEXE D – REPARTITION DU CHAMP DUE A LA REACTION D'INDUIT
POUR UNE MACHINE A FLUX RADIAL**

La condition aux limites dans cette région réside dans la nullité de la composante tangentielle

de l'induction à la surface du disque rotorique $\left(B_{\varphi}^{(2)}(r_3, \varphi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_{kis}^{(2)} = -T_{kp}(r_3, r_2) a_{kis}^{(2)} \\ d_{kis}^{(2)} = -T_{kp}(r_3, r_2) c_{kis}^{(2)} \end{cases} \right)$.

L'exploitation de cette condition nous permet d'exprimer d'écrire :

$$A_{zis}^{(2)}(r, \varphi, \theta) = a_{Ois}^{(2)} - \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{kp} \left[b_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi) + d_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi) \right] \cdot \left[S_{kp}(r, r_2) - \frac{C_{kp}(r, r_2)}{T_{kp}(r_3, r_2)} \right] \quad (D.6)$$

$$B_{ris}^{(2)}(r, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{r} \left[b_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi) - d_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi) \right] \cdot \left[S_{kp}(r, r_2) - \frac{C_{kp}(r, r_2)}{T_{kp}(r_3, r_2)} \right] \quad (D.7)$$

$$B_{\varphi is}^{(2)}(r, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} \frac{r_2}{r} \left[b_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi) + d_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi) \right] \cdot \left[C_{kp}(r, r_2) - \frac{S_{kp}(r, r_2)}{T_{kp}(r_3, r_2)} \right] \quad (D.8)$$

Conditions de passage entre les deux régions

– Face aux encoches, on a : $\begin{cases} B_{ris}^{(l)}(r_2, \varphi) = B_{ris}^{(2)}(r_2, \varphi) \\ B_{\varphi is}^{(l)}(r_2, \varphi) = B_{\varphi is}^{(2)}(r_2, \varphi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi) - c_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi) = \sum_{m \neq 0} g_m^{(l)} \sin\left[\frac{m\pi}{w}(\varphi - \varphi_l)\right] \\ -T_{kp}(r_3, r_2) \left[a_{kis}^{(2)} \cos(kp\varphi) + c_{kis}^{(2)} \sin(kp\varphi) \right] = \sum_{m \neq 0} g_m^{(l)} T_{\frac{m\pi}{w}}(r_2, r_1) \cos\left[\frac{m\pi}{w}(\varphi - \varphi_l)\right] - \frac{r_1}{2} \mu_0 J^{(l)} \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2} \right) \end{cases}$$

– Face aux dentures : $B_{\varphi is}^{(2)}(r_2, \varphi) = 0$

Détermination des coefficients

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_{kis}^{(2)} &= \frac{p}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{ris}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \sin(kp\varphi) d\varphi ; & c_{kis}^{(2)} &= \frac{-p}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{ris}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \cos(kp\varphi) d\varphi ; \\ \bullet \quad a_{kis}^{(2)} T_{kp}(r_3, r_2) &= \frac{-p}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi is}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \cos(kp\varphi) d\varphi ; & c_{kis}^{(2)} T_{kp}(r_3, r_2) &= \frac{-p}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \frac{2\pi}{p}} B_{\varphi is}^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) \sin(kp\varphi) d\varphi ; \end{aligned}$$

Après calcul des intégrales, développement et regroupement :

$$\bullet \quad a_{kis}^{(2)} T_{kp}(r_4, r_2) + \sum_{n \neq 0} a_{nis}^{(2)} \{g(k, n) - f(k, n)\} = \frac{r_1}{k\pi} \mu_0 \left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2} \right) \sin\left(\frac{kpw}{2}\right) \sum_{l=0}^{Q_s-1} J^{(l)} \cos\left(\frac{2k\pi pl}{Q_s}\right) \quad (D.9)$$

$$\bullet \quad c_{kis}^{(2)} T_{kp}(r_4, r_2) + \sum_{n \neq 0} c_{nis}^{(2)} \{g(k, n) + f(k, n)\} = \frac{r_1}{k\pi} \mu_0 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_2} \right) \sin\left(\frac{kpw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(\frac{2k\pi pl}{Q_s}\right) \quad (D.10)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(r_4, r_2) + H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(r_4, r_2) + H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(r_4, r_2) + H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1is}^{(2)} \\ a_{2is}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nis}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r_1 \mu_0}{\pi} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_2} \right) \sin\left(\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \cos\left(\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \frac{r_1 \mu_0}{2\pi} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_2} \right) \sin\left(2\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \cos\left(2\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{r_1 \mu_0}{n\pi} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_2} \right) \sin\left(n\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \cos\left(n\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \end{bmatrix}$$

=====

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(r_4, r_2) + P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(r_4, r_2) + P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(r_4, r_2) + P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1is}^{(2)} \\ c_{2is}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{nis}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r_1 \mu_0}{\pi} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_2} \right) \sin\left(\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \frac{r_1 \mu_0}{2\pi} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_2} \right) \sin\left(2\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(2\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{r_1 \mu_0}{n\pi} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 - r_2} \right) \sin\left(n\frac{pw}{2}\right) \sum_{l=0}^{\frac{Q_s-1}{2}} J^{(l)} \sin\left(n\frac{2\pi pl}{Q_s}\right) \end{bmatrix}$$

**ANNEXE E – CALCUL DES GRANDEURS GLOBALES D'UNE MACHINE
A FLUX RADIAL**

- Calcul de la f.é.m

Pour une machine à flux radial à aimants permanents en surface, le flux embrassé par une

phase 'j' est donné par :

$$\Phi_j^{PM}(\theta) = p \int_0^{2\pi/p} \int_0^L F_{Dj}(\varphi) B_r^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) r_2 d\varphi dz \quad (E.1)$$

avec

$$\begin{cases} F_{Dj}(\varphi) = a_0 + \sum_{n \neq 0} E_{dn} \cos(np\varphi) + F_{dn} \sin(np\varphi) \\ B_r^{(2)}(r_2, \varphi, \theta) = \sum_{k \neq 0} a_{kAP}^{(2)} \sin(np\varphi) - c_{kAP}^{(2)} \cos(np\varphi) \end{cases}$$

tout calcul fait :

$$\Phi_j^{PM}(\theta) = \pi r_2 L \sum_{k \neq 0} a_{kAP}^{(2)} F_{dk} - c_{kAP}^{(2)} E_{dk} \quad (E.2)$$

L : longueur de la machine.

D'autre part, la f.é.m induite aux bornes d'une phase 'j' est obtenue à partir de la loi de

Faraday :

$$e_j^{PM}(\theta) = -\Omega \frac{d\Phi_j^{PM}(\theta)}{d\theta} = -\pi\Omega r_2 L \sum_{k \neq 0} \frac{da_{kAP}^{(2)}}{d\theta} F_{dk} - \frac{dc_{kAP}^{(2)}}{d\theta} E_{dk}$$

En tenant compte de l'équation (A.13), cette force électromotrice prendra la forme suivante :

$$e_j^{PM}(\theta) = -\pi\Omega r_2 L \sum_{k \neq 0} \left(\frac{da_{kAP}^{(3)}}{d\theta} + \frac{dF_k^M}{d\theta} \right) F_{dk} - \left(\frac{db_{kAP}^{(3)}}{d\theta} + \frac{dE_k^M}{d\theta} \right) E_{dk} \quad (E.3)$$

Pour résoudre cette équation, une dérivation des équations (C.14) et (C.15) par rapport à θ est nécessaire, ce qui nous mène à écrire les équations suivantes :

$$\frac{da_{kAP}^{(3)}}{d\theta} T_{kp}(r_4, r_2) + \sum_{n \neq 0} \frac{da_{nAP}^{(3)}}{d\theta} \{g(k, n) - f(k, n)\} = -\frac{dF_k^M}{d\theta} T_{kp}(r_3, r_2) - \sum_{n \neq 0} \frac{dF_n^M}{d\theta} \{g(k, n) - f(k, n)\} \quad (E.4)$$

$$\frac{db_{kAP}^{(3)}}{d\theta} T_{kp}(r_4, r_2) + \sum_{n \neq 0} \frac{db_{nAP}^{(3)}}{d\theta} \{g(k, n) + f(k, n)\} = -\frac{dE_k^M}{d\theta} T_{kp}(r_3, r_2) - \sum_{n \neq 0} \frac{dE_n^M}{d\theta} \{g(k, n) + f(k, n)\} \quad (E.5)$$

$$\frac{dE_k^M}{d\theta} = \begin{cases} -4pB_R \frac{r}{k\pi} \frac{\cos\left[k\left(\frac{\pi}{2} + p\theta\right)\right] \cos\left(\frac{kp\tau}{2}\right)}{r_2 C_{kp}(r_3, r_2) \cdot [1 - T_{kp}^2(r_3, r_2)]} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\frac{dF_k^M}{d\theta} = \begin{cases} 4pB_R \frac{r}{k\pi} \frac{\sin\left[k\left(\frac{\pi}{2} + p\theta\right)\right] \cos\left(\frac{kp\tau}{2}\right)}{r_2 C_{kp}(r_3, r_2) \cdot [1 - T_{kp}^2(r_3, r_2)]} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Les différents coefficients des équations (C.4) et (C.5) peuvent être obtenus en solvant les

systèmes algébriques linéaires suivants :

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha)+H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(\alpha)+H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha)+H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{da_{1AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \frac{da_{2AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{da_{nAP}^{(3)}}{d\theta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\beta)+H(1,1) & H(1,2) & \dots & H(1,n) \\ H(2,1) & T_{2p}(\beta)+H(2,2) & \dots & H(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ H(n,1) & H(n,2) & \dots & T_{np}(\beta)H(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dF_1^M}{d\theta} \\ \frac{dF_2^M}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dF_n^M}{d\theta} \end{bmatrix}$$

=====

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\alpha)+P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(\alpha)+P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(\alpha)+P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{db_{1AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \frac{db_{2AP}^{(3)}}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{db_{nAP}^{(3)}}{d\theta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} T_{1p}(\beta)+P(1,1) & P(1,2) & \dots & P(1,n) \\ P(2,1) & T_{2p}(\beta)+P(2,2) & \dots & P(2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ P(n,1) & P(n,2) & \dots & T_{np}(\beta)+P(n,n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dE_1^M}{d\theta} \\ \frac{dE_2^M}{d\theta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dE_n^M}{d\theta} \end{bmatrix}$$

- **Calcul des inductances magnétisantes et des mutuelles**

Le flux embrassé par une phase statorique 'j' créé par le courant d'une autre phase statorique

'i' est donné par :

$$\Phi_{SSij}(t) = p \int_0^{\frac{2\pi}{p}L} \int_0 F_{Dj}(\varphi) B_{i,ris}^{(2)}(r_2, \varphi, t) r_2 d\varphi dz \quad (E.6)$$

où $B_{i,ris}^{(2)}$ est l'induction créée dans l'entrefer par la phase 'i' et F_{Dj} est la fonction de distribution de la phase 'j'. Après calcul de l'intégrale et développement :

$$\Phi_{SSij}(t) = \pi r_2 L \sum_{k \neq 0} E_{dk} c_{kis}^{(2)} \cos\left(k(j-1)\frac{2\pi}{3}\right) \quad (E.7)$$

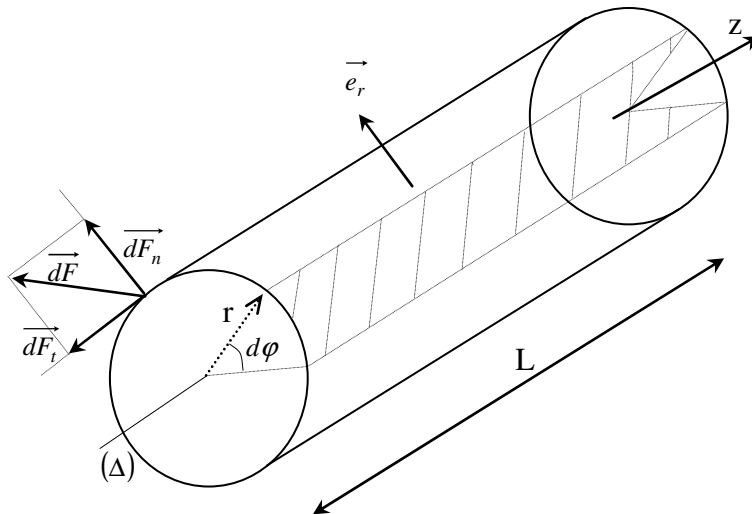
L'inductance mutuelle entre la phase 'j' et la phase 'i' aurait la même expression que celle du flux si on suppose que le courant traversant la phase 'i' est unitaire. Dans ce cas,

$$L_{SSij}(t) = \Phi_{SSij}(t) \quad (E.8)$$

Pour calculer l'inductance magnétisante L_{SSjj} de la phase 'j', on utilise la même relation (E.6) mais dans ce cas $B_{j,ris}^{(2)}$ représente l'induction créée par la phase 'j' elle-même.

$$\Phi_{SSjj}(t) = p \int_0^{\frac{2\pi}{p}L} \int_0 F_{Dj}(\varphi) B_{j,ris}^{(2)}(r_2, \varphi, t) r_2 d\varphi dz \quad (C.9)$$

- **Calcul du couple de détente**



Le couple développé par une machine à flux radial est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Gamma} = p \int_0^{2\pi/p} \int_0^L r \vec{e}_r \wedge d\vec{F} = p\mu_0 r^2 L \int_0^{2\pi/p} (H_n H_t) d\varphi \vec{e}_z \\ d\vec{F} = \frac{\mu_0}{2} (H_n^2 - H_t^2) r d\varphi dz \vec{e}_r + \mu_0 H_n H_t r d\varphi dz \vec{e}_\varphi \end{array} \right. \quad (\text{E.10})$$

Pour le calcul du couple de détente, on considère seulement l'induction à vide dans la région de l'entrefer à la surface des aimants. Dans ces conditions ce couple s'écrit sous la forme suivante :

$$\Gamma = \frac{pr_3^2 L}{\mu_0} \int_0^{2\pi/p} B_{rAP}^{(2)}(r_3, \varphi) B_{\varphi AP}^{(2)}(r_3, \varphi) d\varphi \quad (\text{E.11})$$

en remplaçant $B_{rAP}^{(2)}(r_3, \varphi)$ et $B_{\varphi AP}^{(2)}(r_3, \varphi)$ par leurs expressions données dans (A.7) et (A.8) :

$$\Gamma = \frac{\pi r_3^2 L}{\mu_0} \sum_{k \neq 0} a_k^{(2)} d_k^{(2)} [C_{kp}^2(r_3, r_2) - S_{kp}^2(r_3, r_2)] + b_k^{(2)} c_k^{(2)} [S_{kp}^2(r_3, r_2) - C_{kp}^2(r_3, r_2)] \quad (\text{E.12})$$

mais $C_{kp}^2(r_3, r_2) - S_{kp}^2(r_3, r_2) = 1$, donc le couple de détente d'une machine radiale s'écrit sous la forme finale suivante :

$$\Gamma = \frac{\pi r_3^2 L}{\mu_0} \sum_{k \neq 0} a_k^{(2)} d_k^{(2)} - b_k^{(2)} c_k^{(2)} \quad (\text{E.13})$$