



HAL
open science

INFLUENCE DU BRUIT ET DE LA BRISURE DE SYMÉTRIE DE RÉFLEXION SUR LES INSTABILITÉS DANS LES SYSTÈMES OPTIQUES SPATIALEMENT ÉTENDUS

Louvergneaux Eric

► **To cite this version:**

Louvergneaux Eric. INFLUENCE DU BRUIT ET DE LA BRISURE DE SYMÉTRIE DE RÉFLEXION SUR LES INSTABILITÉS DANS LES SYSTÈMES OPTIQUES SPATIALEMENT ÉTENDUS. Formation de Structures et Solitons [nlin.PS]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2009. tel-00880986

HAL Id: tel-00880986

<https://theses.hal.science/tel-00880986>

Submitted on 12 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Synthèse d'activités de recherche

présentée à l'Université Lille1

le 20 Novembre 2009



INFLUENCE DU BRUIT ET DE LA BRISURE DE SYMÉTRIE DE RÉFLEXION SUR LES INSTABILITÉS DANS LES SYSTÈMES OPTIQUES SPATIALEMENT ÉTENDUS

Éric LOUVERGNEAUX

pour obtenir

l'Habilitation à Diriger des Recherches

devant le jury :

Marcel CLERC	Examineur	Université du Chili - Santiago	
Pierre GLORIEUX	Directeur	Université de Lille 1	
Laurent LARGER	Rapporteur	Institut Femto-St-Franche-Comté	
Guy MILLOT	Rapporteur	Institut Carnot de Bourgogne	
Stefania RESIDORI	Examinatrice	Institut Non-Linéaire de Nice	
Majid TAKI	Examineur	Université de Lille 1	
Mustapha TLIDI	Rapporteur	Université Libre de Bruxelles	

N° d'ordre : H675

Avant Propos

Qu'on le veuille ou non, la base de la physique est l'expérimentation. En effet, la physique n'accepte comme résultat que ce qui est mesurable et reproductible par l'expérience. Cette méthode permettant de confirmer ou d'infirmer les hypothèses fondées sur une théorie ou un modèle donnés. Cette phrase provocatrice aux yeux des théoriciens, n'est là que pour mieux illustrer mon évolution, dans la démarche de chercheur, du statut d'expérimentateur à celui que j'oserais qualifier d'"expérimentateur-théoricien". En effet, la culture de la recherche en physique présente une différence notable avec celle des autres sciences en ce qui concerne la séparation entre théorie et expérience. Depuis le XX^{ème} siècle, la majorité des physiciens sont spécialisés soit en physique théorique, soit en physique expérimentale¹. Cependant, rester cantonné à l'expérimentation, sans jamais chercher à formaliser mathématiquement un modèle, ni essayer d'identifier les paramètres physiques pertinents d'un modèle grâce aux comparaisons des résultats expérimentaux avec les simulations numériques ou les prédictions analytiques, peut s'avérer très frustrant. C'est pour ces raisons et aussi à titre d'enrichissement personnel que ma démarche se veut aujourd'hui à la fois expérimentale et théorique, et ceci de manière indissociable (bien qu'ayant été purement expérimentale à ses débuts). Au delà de la satisfaction personnelle que renvoie la maîtrise et la mise en accord de ces deux aspects complémentaires, le bénéfique est qu'en retour, des prédictions analytiques ou numériques, basées sur un modèle censé donner une représentation conceptuelle de la réalité, peuvent alors être vérifiées expérimentalement et permettre d'explorer des régimes jusqu'alors insoupçonnés.

Ainsi, ma contribution, toute modeste qu'elle soit, au champ très large que constitue la physique et plus particulièrement celui de la dynamique non-linéaire dans les systèmes optiques, est d'apporter quelques briques supplémentaires à la construction de cet édifice de Babel que constitue la compréhension des phénomènes physiques. Pour être honnête, je crois qu'une bonne part de cette motivation vient, à la base, de la définition du mot "*Physique*"² dans son sens général et ancien, qui désigne *la connaissance de la nature*. Et pour l'homme que je suis, j'y ajouterais le terme *compréhension* car notre héritage génétique fait qu'une force non palpable nous pousse à comprendre comment fonctionnent les choses qui nous entourent et que nous rencontrons dans la vie de tous les jours. Voilà qui répond au moins à la deuxième partie de la phrase de Schrödinger qui s'exprime ainsi : "tout scientifique devrait à *long terme* être capable

1. Ce qui n'est pas le cas en revanche, en chimie ou en biologie, où presque tous les théoriciens renommés sont également des expérimentateurs.

2. La physique (du grec *φυσικη*, la nature) est étymologiquement la « science de la nature ».

d'expliquer à *n'importe qui* ce qu'il a fait et la raison pour laquelle il l'a fait"³. La première partie, je l'espère, trouvera sa justification, au moins auprès des scientifiques, dans la synthèse de mes travaux de recherche présentés dans ce document. Et c'est toujours avec plaisir que j'expliquerai à qui le veut mes travaux de recherche⁴ et ma passion pour cette discipline.

3. Les expressions en italique sont soulignées par Erwin Schrödinger dans son livre *Physique quantique et représentation du monde* [1].

4. Eric Louvergneaux research homepage : <http://www.phlam.univ-lille1.fr/perso/louvergneaux/>

Présentation et contenu du manuscrit

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont une synthèse d'une partie de mes activités scientifiques en dynamique non-linéaire des systèmes optiques. Ils ont pour but d'illustrer mes capacités et mon expérience dans l'animation et la maîtrise d'une stratégie de recherche comme stipulé dans l'Art. 4 de l'arrêté du 23 novembre 1988 relatif à l'habilitation à diriger des recherches. J'espère aussi qu'ils convaincront le lecteur du caractère original et actuel de mes activités de recherche.

Ce choix de ne présenter qu'une partie de mes activités scientifiques est motivé par un souci de cohérence des travaux exposés au lecteur. Les études sélectionnées dans ce manuscrit ont pour but de faire apparaître une thématique originale que j'ai développée ces dernières années en collaboration avec les membres de mon équipe. Il s'agit des études concernant les effets du bruit et de la brisure de symétrie de réflexion⁵ sur les instabilités dans les systèmes optiques spatialement étendus. Le caractère original réside ici dans la manière d'aborder ces effets : la nature convective ou stochastique n'est pas considérée comme un effet perturbatif mais comme un ingrédient inévitable jouant un rôle constructif et actif dans les phénomènes engendrés par ces propriétés de convection ou de stochasticité.

Avant de rentrer dans la description de mes activités liées à cette thématique de recherche (voir Sec. 1.3), j'introduis dans le premier chapitre (Chap. 1) le domaine dans lequel se situent ces travaux. C'est à dire celui de la morphogenèse optique. J'y expose les intérêts de mener ces recherches en optique, l'émergence et les tendances actuelles dans ce domaine, les thèmes abordés dans ce manuscrit et les dispositifs expérimentaux ayant été utilisés pour ces travaux. Les deux chapitres suivants sont consacrés respectivement à l'étude des effets du bruit (Chap. 2) et de la brisure de symétrie de réflexion (Chap. 3) sur la dynamique spatio-temporelle en optique. Enfin, le lecteur pourra trouver en annexe les autres activités de recherche que je mène dans le domaine de la morphogenèse optique.

5. Cette brisure de symétrie rend les systèmes *convectifs* au même titre que le bruit rend les systèmes stochastiques. De façon pratique, les instabilités dans les systèmes convectifs dérivent continûment dans le plan transverse suivant un mouvement de *convection*. D'où la terminologie employée. A ne pas confondre avec la convection dans le sens de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Table des matières

Avant propos	3
Présentation et contenu du manuscrit	5
Table des matières	6
1 Introduction	9
1.1 Morphogenèse et structures dissipatives	9
1.2 Morphogenèse en optique	12
1.2.1 Intérêts de l’optique	13
1.2.2 Configurations et spécificités des systèmes optiques	13
1.2.3 Émergence, diversité et tendances actuelles	15
1.2.4 Systèmes optiques équivalents à des systèmes spatio-temporels à une dimension : systèmes “ <i>pseudo-spatio-temporels</i> ”	18
1.3 Thèmes de recherche abordés dans ce manuscrit	19
1.4 Dispositifs expérimentaux utilisés dans ce manuscrit	21
1.4.1 Lame de cristal liquide nématique avec rétroaction optique	21
1.4.2 Résonateur fibré	24
2 Effets du bruit dans les systèmes optiques spatialement étendus	29
2.1 Introduction	29
2.2 Utilisation du speckle de bruit pour la détermination des constantes de relaxation du système	31
2.3 Structures précurseurs induites par le bruit dans une configuration unidimensionnelle	38
2.4 Loi universelle pour les bifurcations stochastiques supercritiques	45
2.5 Instabilités entretenues par le bruit	52
3 Effets de la brisure de symétrie de réflexion dans les systèmes optiques spatialement étendus	53
3.1 Introduction	53
3.2 Démonstration expérimentale de l’instabilité convective en morphogenèse optique	56
3.3 Structures spatiales à deux dimensions entretenues par le bruit	64

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	7
3.3.1 Structures élémentaires entretenues par le bruit ou <i>modes convectifs</i> . . .	64
3.3.2 Hyper-réseaux stationnaires entretenus par le bruit	78
3.4 Les systèmes optiques fibrés sont intrinsèquement convectifs	86
Conclusion	93
Annexe : Autres activités de recherches	97
A.1 Instabilité spatio-temporelle de dislocation induite par le profil Gaussien du pompage	97
A.2 Antiphase spatio-temporelle dans les milieux optique étendus couplés	102
A.3 Contrôle et élimination des instabilités modulationnelles dans les fibres à très faible dispersion	110
A.4 Structures localisées à N pics dans l'enveloppe du battement temporel généré par deux fréquences d'instabilité modulationnelle	114
Bibliographie	119
Liste des symboles et acronymes	142

Chapitre 1

Introduction

1.1 Morphogenèse et structures dissipatives

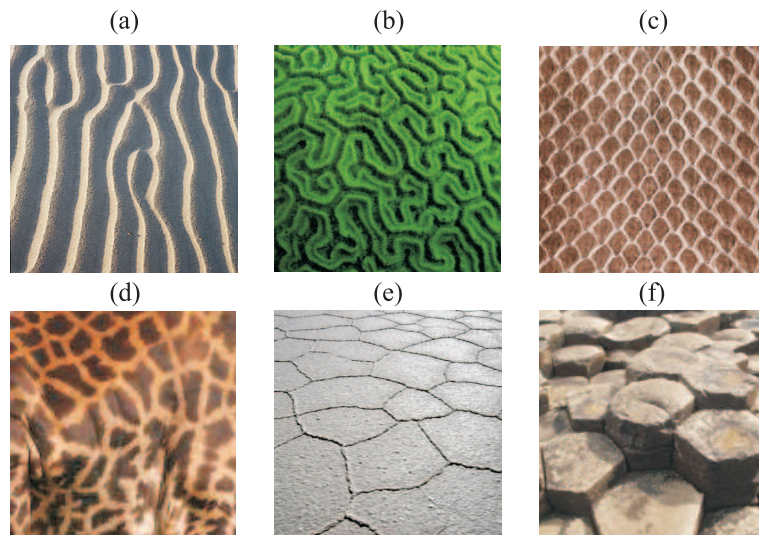


FIGURE 1.1: Structurations observées dans la nature. (a) Dunes de sable, (b) corail vert, (c) peau de serpent, (d) pelage de girafe, (e) surface du salar d'Uyuni et (f) colonnes basaltiques de la chaussée des géants.

Comment ne pas être interpellé ou succomber à la beauté des formes¹ qui apparaissent naturellement dans le monde qui nous entoure (Fig. 1.1). Que ce soit lors d'un voyage ou simplement dans la vie de tous les jours, la nature nous dévoile un monde de formes, riche et infiniment beau, fait de lignes, de surfaces, de volumes, de toutes échelles, de toutes matières. Nul besoin de s'armer de télescopes géants ou de microscopes à champ proche, le monde observable, à l'oeil nu et pour tout un chacun, regorge de formes qui ne doivent rien au hasard. En effet,

1. Le terme *forme* ou *structure* sera utilisé indifféremment. Il est regroupé sous un seul mot en anglais : *pattern*.

les mécanismes morphologiques sous-jacents à leur apparition sont les mêmes dès qu'il s'agit de formes similaires, quelles que soient les matières ou les échelles. Il s'agit là d'une unité derrière la diversité, appelée plus communément *universalité*. Mais aussi, du fondamental derrière le superficiel et de l'intelligence derrière la beauté.

L'émergence spontanée de toutes ces formes, aussi appelée *morphogenèse*², participe d'un phénomène d'*auto-organisation*³. En d'autres termes, un phénomène de mise en ordre croissant⁴ obtenu au prix d'une dissipation d'énergie qui sert à maintenir cette structure⁵. Il s'agit de *structures dissipatives* [2, 3, 4, 5] dans le sens de la *théorie des structures dissipatives* introduites par Ilya Prigogine. C'est à dire des structures qui apparaissent dans les systèmes thermodynamiques hors d'équilibre. Ces derniers sont regroupés sous le terme de *systèmes dissipatifs* et sont régis par un équilibre entre la dissipation et l'apport d'énergie dans le milieu. Dans ces systèmes, la *formation de structures*⁶ [6] est toujours consécutive à une *brisure spontanée de symétrie*. Ces dernières correspondent phénoménologiquement à des *transitions de phase*⁷ entre les états macroscopiques du système, généralement, entre un *état initial homogène* stationnaire et un état final structuré (stationnaire ou dynamique). Ces transitions de phase, introduites par Landau [7], sont formalisées en dynamique non-linéaire par le concept d'*instabilité* qui constitue un outil puissant pour l'étude de la formation des structures. En effet, une structure spatiale ou temporelle émerge quand un système "relativement" simple est conduit vers un état instable. C'est à dire, vers un état où toute perturbation, soit-elle infinitésimale, va complètement déstabiliser ou déformer l'état initial. La phase ultime de cette étude scientifique étant d'identifier le mécanisme non-linéaire intrinsèque par lequel le système évolue vers le nouvel état.

C'est D'Arcy Wentworth Thompson⁸, qui invita le premier les chercheurs naturalistes et physiciens à rechercher des "similitudes entre les choses dissemblables aux yeux du commun des mortels". Cette voie fut empruntée avec succès par de célèbres adeptes comme Ilya Prigogine, Benoît Mandelbrot, John Von Neumann ou encore Stephen Wolfram pour n'en citer que

2. Morphogenèse : Développement des formes, des structures (Trésor) ; Processus de développement des formes d'un organisme au cours de l'embryogenèse (biologie) ; Ensemble des mécanismes qui participent au développement des formes, des structures.

3. Tendence des systèmes à s'organiser d'eux-mêmes. Ce terme fait référence à un processus dans lequel l'organisation interne du système augmente sans être dirigée par une contrainte externe. En général, les notions d'auto-organisation et d'émergence sont liées.

4. Si on essaye de rapprocher ce phénomène d'auto-organisation macroscopique du second principe de la thermodynamique, on remarque que leurs évolutions s'opposent. En effet, l'auto-organisation constitue une mise en ordre croissant du système alors que le second principe de la thermodynamique stipule que toute transformation réelle s'effectue avec une augmentation du désordre global en raison de la présence de phénomènes dissipatifs.

5. Le caractère dissipatif est nécessaire pour que le système puisse évoluer, à partir de conditions stationnaires, asymptotiquement vers un état final (un attracteur).

6. La science de la formation des structures traite des résultats de l'auto-organisation et des principes communs à l'origine de ces formes.

7. Ces transitions de phases correspondent à des bifurcations vers de nouveaux états du système. L'apparition ou la disparition d'un état est appelée bifurcation. Un changement de stabilité est une bifurcation, ce sont les deux faces d'une même médaille. L'étude des bifurcations renseigne sur le comportement qualitatif du système en répondant à ces questions : quels et combien d'états existent ? Lesquels sont stables ? Comment ce nombre change quand un paramètre de contrôle est modifié ? etc...

8. Sir D'Arcy Wentworth Thompson (1860-1948) biologiste, mathématicien, et universitaire. Professeur de zoologie à l'université de Saint-Andrews (Écosse) au début du XXème siècle. Il est surtout connu pour ses travaux sur la morphogenèse et son célèbre livre *On Growth and Form* [8], publié en 1917. Un travail qui a fait école et d'une étonnante originalité.

quelques uns. Le plus illustre est Alan Turing, qui grâce à son modèle de *réaction-diffusion* chimique [9], identifia en 1952 les ingrédients minima nécessaires au phénomène de morphogenèse et à l’obtention de structures dans un système. Ils sont au nombre de trois : une *non-linéarité* pour briser une symétrie⁹ ; un *couplage spatial* entre les différents points de l’espace pour garantir le transport spatial de l’information. En général, il est assuré par la diffusion ou la diffraction (la dispersion dans les systèmes temporels). Et enfin, un *paramètre de contrôle* pour conduire le système hors de son état d’équilibre. Grâce aux travaux de Turing, l’étude de la morphogenèse et de l’émergence des structures spatiales connut une avancée majeure. Ces études permirent de poser les bases théoriques des modèles de dynamique spatio-temporelle [4] et ainsi d’appréhender les mécanismes mis en jeu dans l’auto-organisation de ces formes multiples.

De telles structures spatialement organisées ont ensuite été obtenues dans le cadre plus contrôlé du laboratoire scientifique, ce qui a fortement impulsé l’intérêt de la communauté scientifique pour ce type de phénomènes. Ainsi, parallèlement à la chimie, l’hydrodynamique est une branche de la science qui joua, et joue encore, un rôle prépondérant dans la compréhension des instabilités spatio-temporelles. Citons notamment, les études sur les structures convectives apparaissant dans un fluide chauffé par le dessous (Rayleigh-Bénard¹⁰ [11, 12] et Rayleigh-Marangoni¹¹), ou encore les formes périodiques apparaissant à la surface des fluides et des milieux granulaires lorsque ces derniers sont soumis à une vibration périodique verticale (instabilité de Faraday [13, 14]). Ces organisations spontanées ont été largement explorées scientifiquement dans bien d’autres domaines de la science comme la biologie [15], la chimie [16], l’électroconvection dans les cristaux liquides [17], l’optique [18, 19, 20, 21, 22], etc., que ce soit expérimentalement ou théoriquement. Ces recherches ont fourni des outils conceptuels puissants pour étudier les instabilités spatio-temporelles dans les systèmes dynamiques non-linéaires. A titre d’exemple, les *équations aux amplitudes* [23, 24] qui décrivent l’évolution spatio-temporelle au voisinage des bifurcations¹² dans le système et dont la forme est universelle pour chaque type d’instabilité. L’intérêt étant d’identifier ces équations à une des *formes normales*¹³, c’est à dire à une des variétés de modèle non-linéaire bien connu.

En dépit de leur caractère universel, il existe toutefois une différence notable entre les instabilités de Turing et la convection de Rayleigh-Bénard en milieu confiné : dans le premier cas, la période caractéristique de la structure ne dépend pas de l’étendue spatiale du dispositif

9. La symétrie de translation dans le cas d’un état homogène à une seule dimension transverse. A deux dimensions, ce peut être la symétrie de rotation.

10. Les instabilités de Rayleigh-Bénard existent également dans la nature, on les rencontre par exemple dans les mouvements de convection du manteau terrestre [10] aussi bien que dans les deux premiers kilomètres de l’atmosphère terrestre.

11. La différence entre les dispositifs de convection de Rayleigh-Bénard et de Rayleigh-Marangoni réside dans le fait que le fluide dans le premier cas est confiné entre deux plaques horizontales alors que dans le second cas la surface supérieure est à l’air libre.

12. Issues d’une approche basée sur les perturbations, leur validité se limite à de faibles amplitudes ou encore à des phénomènes faiblement non-linéaires. Elles sont applicables au voisinage des bifurcations super-critiques. Par contre, elles sont inadaptées aux “grandes amplitudes”, c’est à dire loin du seuil. C’est le cas des *structures localisées* qui requièrent un traitement non-linéaire spécifique. Plus loin des seuils d’instabilité, d’autres descriptions universelles connues sous le nom d’*équations de phase* [25] peuvent être dérivées.

13. Les formes normales sont des ensembles d’équations non-linéaires regroupant toutes les caractéristiques (cycles limites, nature des bifurcations, etc.) d’un type de système dynamique à partir d’un petit nombre de degrés de liberté. Elles sont les variétés les plus simples des modèles non-linéaires.

alors que dans le second, elle est fixée par la dimension du système. Cette constatation nécessite de distinguer les systèmes où les effets de confinement sont suffisants pour geler la structure spatiale des modes participant à la dynamique, systèmes dits "*confinés*," de celui des systèmes "*étendus*" où ils ne le sont plus. Dans le premier cas, la morphogenèse est dictée par la taille et la géométrie du système, alors que dans le second cas elle est imposée par les processus intrinsèques du même système. Dans les deux situations, la dynamique est décrite par des équations aux dérivées partielles¹⁴. La géométrie confinée imposant des équations supplémentaires liées aux conditions aux limites. Le paramètre quantifiant la dimensionnalité transverse et qui permet de différencier les systèmes confinés des systèmes étendus est le *rapport d'aspect* ρ . Il exprime le rapport entre l'étendue transverse du système et la période spatiale caractéristique de la structure. Dans les lasers, il est exprimé sous la forme du nombre de Fresnel. Bien évidemment, la transition entre les systèmes où la dynamique est imposée par les conditions aux bords ($\rho \sim 1$) de celle induite par les propriétés intrinsèques du milieu ($\rho \gg 1$) est la plus complexe. Des travaux intéressants faisant varier le rapport d'aspect dans des cavités résonantes avec gain ont permis d'étudier cette transition et la portée spatiale respective de chacun des effets [21, 26].

Enfin, même si bon nombre de ces instabilités spatiales, comme celle de Rayleigh-Bénard, ou encore celles présentées sur la Fig. 1.1, sont stationnaires au voisinage de leur seuil d'apparition, ce n'est pas une caractéristique commune à la morphogenèse. Ainsi, on observe par exemple des structures qui dérivent continuellement dès leur naissance dans les systèmes où la symétrie de réflexion spatiale est brisée¹⁵ ou encore des structures dynamiques engendrées par des mécanismes de compétition liés à l'apparition d'une seconde périodicité spatiale¹⁶. La prise en compte de ces instabilités temporelles dans les phénomènes d'auto-organisation constitue le champ d'investigation de la dynamique spatio-temporelle.

1.2 Morphogenèse en optique

Ce n'est que dans les années 80 que l'intérêt scientifique s'est porté sur les phénomènes de morphogenèse en optique, alors que ceux-ci avaient déjà été rapportés bien avant [27]. Cet intérêt correspond certainement à la conjugaison de plusieurs faits comme l'avènement des études sur le chaos temporel et la question bien naturelle de l'existence du chaos spatio-temporel, première étape d'une transition vers la turbulence; des observations expérimentales de filamentation (structuration) spatiale dans des systèmes passifs [28]; la volonté d'augmenter la complexité dans les systèmes dynamiques, en y incluant les degrés de liberté spatiaux, quand il était devenu clair que les modèles en onde plane n'étaient plus suffisants pour décrire les expériences [29]; la possibilité de simuler numériquement des équations aux dérivées partielles, à deux dimensions plus le temps, grâce à l'avènement d'ordinateurs assez puissants; le fait que les effets non-linéaires spatiaux sont exacerbés par l'avènement des sources lasers puissantes et nécessitent

14. Equations aux dérivées partielles si le milieu est continu ou équations aux dérivées ordinaires si le milieu est discret.

15. C'est l'objet du troisième chapitre. Ces systèmes appelés *convectifs* sont caractérisés par un régime d'instabilité convective, à ne pas confondre avec la convection dans le sens de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

16. Que ce soit au seuil d'apparition ou pour des valeurs plus élevées du paramètre de contrôle.

d’être pris en compte et compris. Par exemple, l’auto-focalisation, i.e. la contraction de la lumière dans les milieux non-linéaires, peut mener à la destruction des matériaux même dans les milieux transparents [30], ou des faisceaux initialement homogènes peuvent se briser en filaments ou spots intenses [31]. Enfin, la volonté d’étendre l’universalité des phénomènes de morphogenèse à l’optique a sans nul doute permis à l’optique de progresser aussi vite.

1.2.1 Intérêts de l’optique

Au delà de la conjoncture qui a conduit à cet intérêt scientifique, il faut souligner que l’optique présente, par rapport aux autres domaines mentionnés précédemment, des “atouts” scientifiques et techniques pour l’exploration et l’analyse de ce nouveau champ d’investigation : (i) modifier la taille transverse du système ou l’échelle de temps¹⁷ d’une expérience est beaucoup plus aisée qu’en dynamique des fluides ou en chimie ; (ii) l’accès expérimental direct à la transformée de Fourier de la structure obtenue dans le plan focal d’une lentille constitue un outil très puissant. Il permet d’investiguer la composition spectrale des structures ou encore de contrôler la dynamique en filtrant spatialement certains nombres d’onde ; (iii) les équations de Maxwell forment un cadre théorique bien établi permettant une comparaison poussée entre modèles et expériences ; (iv) certains des phénomènes optiques peuvent fournir des analogies avec les phénomènes correspondants par exemple en mécanique des fluides ; (v) la détection et la reconnaissance des formes en optique suggère l’implémentation de l’encodage spatial de l’information et le calcul massivement parallèle [32, 33] ; C’est pour toutes ces raisons que les études de morphogenèse en optique ont connu un formidable succès ces vingt dernières années et continuent de focaliser l’attention des chercheurs dans le vaste domaine des instabilités spatio-temporelles.

1.2.2 Configurations et spécificités des systèmes optiques

En optique, la morphogenèse émerge de l’interaction entre un champ optique et un milieu non-linéaire. Le couplage spatial qui garantit le transport de l’information de la phase étant assuré par la diffraction et la non-linéarité fournie par la susceptibilité diélectrique du milieu. Les systèmes dans lesquels ces instabilités spatio-temporelles sont observées peuvent être regroupés en trois catégories suivant leur configuration géométrique. La plus simple correspond à la traversée d’un faisceau optique à travers un matériau non-linéaire [Fig. 1.2(a)]. Elle est bien connue puisque les premiers effets d’auto-focalisation ont été observés dès les années 70 [31, 35]. Toujours dans le même cadre mais avec des faisceaux contra-propageants [avec le faisceau de pompe en pointillé, Fig. 1.2(a)], la configuration de mélange d’ondes, qui dans un milieu de susceptibilité d’ordre 3 ($\chi^{(3)}$) a donné lieu à la première mise en évidence des phénomènes de structuration en optique [28]. Viennent ensuite les résonateurs de type Pérot-Fabry [Fig. 1.2(c)] ou en anneau, qui sont à la base des cavités lasers dans lesquelles les premières organisations

17. Les expériences d’optique offrent une large palette d’échelles temporelles. Celles-ci peuvent être aussi lentes que la seconde pour certains cristaux photoréfractifs (BaTiO_3), que plus rapides (e.g. la nanoseconde) pour des oscillateurs paramétriques optiques. La dynamique temporelle n’est ici limitée que par le temps de réponse du matériau, les sources lasers impulsives les plus courtes étant actuellement inférieures à la femtoseconde.

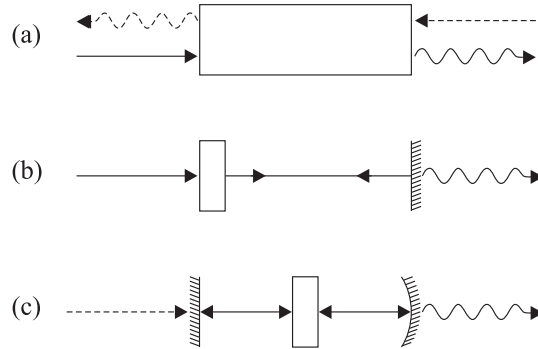


FIGURE 1.2: Configurations typiques des systèmes optiques présentant des structures transverses. (a) Simple passage ou faisceaux contra-propageants (respectivement sans ou avec le faisceau de pompe en pointillé), (b) feedback optique et (c) cavité résonante. Les conformations (a) et (b) correspondent à des systèmes passifs alors que le cas (c) peut être utilisé dans une configuration passive ou active (respectivement avec ou sans faisceau externe injecté - en pointillé sur le schéma). Ces schémas sont inspirés d'une figure tirée du mémoire d'habilitation de T. Ackemann [34].

de modes transverses étaient observés dès les années 60 [36, 37, 38]. Enfin, la configuration la plus récente proposée pour générer des structures transverses est celle proposée par Firth [19] [Fig. 1.2(b)]. Elle est composée d'un milieu non-linéaire de longueur très courte soumis à une rétroaction optique provenant d'un miroir de renvoi, souvent connue sous le nom de *système avec feedback*. Cette dernière conformation géométrique présente l'avantage de pouvoir dissocier les actions de la diffraction et de la non-linéarité qui rendent, dans le cas d'un milieu de longueur telle que les deux actions précédentes agissent simultanément, extrêmement difficile toute analyse théorique.

Au niveau des structures pouvant se développer dans ces systèmes, il apparaît ici des limitations liées aux conditions aux limites transverses, c'est à dire à l'étendue et à la nature des ondes propres spatiales sur lesquelles peuvent se développer ces mêmes structures. En effet, dans les configurations (a) et (b) de la Fig. 1.2, les ondes propres sont des ondes *planes* associées à une bande *continue* de nombres d'onde. Toute structure, quelle que soit sa géométrie (rectangulaire, striée, hexagonale, quasi-cristalline, etc...) et les périodicités la composant, peut alors être générée à partir d'une telle bande de vecteurs d'onde. Par contre, dans une cavité telle que celle de la Fig. 1.2(c), les ondes propres sont des ondes *gaussiennes* associées à un ensemble *discret* de modes propres de cavité¹⁸. Cet ensemble limité ne permet pas de générer n'importe quelle structure, sauf dans le cas où il posséderait un nombre infini de modes. Ceci n'est jamais le cas dans la réalité en raison de la limitation transverse des ouvertures du résonateur. Néanmoins, il est possible de s'approcher de cette limite en créant des cavités à très grand nombre de Fresnel¹⁹, mais celles-ci ont plutôt été conçues dans un objectif d'étude du chaos spatio-temporel

18. Base des modes d'Hermite-Gauss, de Laguerre-Gauss ou des doughnuts pour des miroirs concaves et de taille finie.

19. ou grand rapport d'aspect ρ . Le nombre de Fresnel comme le rapport d'aspect servent à quantifier la dimensionalité transverse du système (voir la définition dans la Sec. 1.1).

[39] et n'ont jamais engendré de structures hexagonales ou encore cannelées essentiellement en raison de la présence de miroirs sphériques. Une classification des systèmes en deux classes apparaît alors naturellement : les systèmes possédant la symétrie translationnelle et ceux ne la possédant pas [40]. Dans le premier cas, les miroirs sont plans et les ondes de pompe sont planes. C'est le cas des configurations (a) et (b) de la Fig. 1.2. Il est bien évident qu'expérimentalement les faisceaux de pompes sont gaussiens et brisent cette symétrie, mais dans le cas de grands rapports d'aspect ρ les ondes de pompe peuvent être considérées comme des ondes planes en première approximation. La seconde catégorie de systèmes concerne essentiellement les cavités résonantes incluant des miroirs sphériques [Fig. 1.2(c)]. Elle a suscité de nombreuses investigations aussi bien expérimentales que théoriques car elle correspond aux cavités standards utilisées pour l'émission cohérente. L'intérêt initial de la morphogenèse pour les cavités résonantes, compte-tenu des connaissances acquises dans le domaine des lasers, s'est ensuite porté essentiellement sur les systèmes avec rétroaction, car ces derniers autorisent l'existence de n'importe quelle forme morphogénétique en évitant toute restriction liée à un ensemble de vecteurs d'onde discret.

Il est enfin nécessaire de discerner, au delà des considérations de configuration géométrique, le caractère *passif* ou *actif* du système. Si on prend l'exemple d'une cavité passive du type de la Fig. 1.2(c), un champ incident [en pointillé sur la Fig. 1.2(c)] est déformé alors qu'il se propage à travers un milieu absorbant et/ou dispersif. Dans le cas où le résonateur est actif [sans faisceau externe injecté, en pointillé sur la Fig. 1.2(c)], le milieu amplificateur donne lieu à l'émission d'un champ dans la cavité. Ainsi, la morphogenèse passive se traduit par la distorsion d'un champ initial uniforme vers une nouvelle distribution spatiale, alors que la morphogenèse active provient de l'émergence d'un champ à partir des fluctuations du vide ou de l'émission spontanée. Les dispositifs (a) et (b) de la Fig. 1.2 correspondent essentiellement à des utilisations en systèmes passifs alors que la configuration (c) est utilisée de manière aussi bien passive qu'active (respectivement avec injection ou non d'un faisceau de pompe - en pointillé sur le schéma).

1.2.3 Émergence, diversité et tendances actuelles

Comme il a été mentionné dans l'introduction de cette section, c'est vers la fin des années 80 que les scientifiques s'intéressent aux phénomènes de morphogenèse en optique. Exceptés quelques travaux pionniers qui les considèrent d'un point de vue modal (e.g. [41, 42, 27, 43]), les effets transverses en optique non-linéaire sont considérés jusqu'alors comme indésirables ou difficiles à comprendre et à contrôler. L'objectif poursuivi est leur élimination par l'utilisation d'ouvertures limitantes afin d'assurer un faisceau gaussien TEM_{00} "homogène" et stationnaire dans les lasers destinés à la plupart des applications.

En 1988, plusieurs groupes publient les premières observations expérimentales de phénomènes d'auto-organisation spatiale : Akhmanov *et al.* [44] et Giusfredi *et al.* [45] dans des systèmes à rétroaction où les milieux sont respectivement une valve optique à cristaux liquides et une vapeur de sodium, et Grynberg *et al.* [28] dans une expérience de mélange à quatre ondes dans une vapeur de sodium. A peu près à la même époque des structures transverses

sont aussi mises en évidence dans des cavités *actives* (lasers Na_2 [46] et CO_2 [47, 21], oscillateurs à gain photoréfractif [48]) aussi bien que *passives* [49]. Ces premières mises en évidence expérimentales ne sont pas précurseurs de l'intérêt scientifique porté à ce nouveau domaine de la physique. En effet, les premiers travaux, essentiellement numériques, apparaissent dès le début des années 80 [50, 51, 52, 53] et portent sur les structures dans des résonateurs bistables. Viennent ensuite les premières études analytiques concernant aussi bien les structures globales que locales²⁰ [54, 55, 56, 57] et qui coïncident avec la période des premières observations expérimentales mentionnées ci-dessus. Le travail de Lugiato et Lefever, qui prédit l'émergence spontanée de rayures spatiales stationnaires dans un résonateur optique [54], est à mentionner particulièrement car il établit la correspondance avec les structures dissipatives de type Turing observées dans d'autres domaines comme la biologie, la chimie, etc. [2]. Il initie ainsi le vaste champ de la morphogenèse en optique non-linéaire.

C'est d'ailleurs dès les premières études théoriques que la notion de *structure transverse localisée* apparaît avec les travaux de Mc Laughlin *et al* en 1983 [52], de Zabolotskii [58] en 1987 et ceux de Rozanov *et al* en 1988 [56]²¹. Les termes de *solitary wave*, *soliton*²² et *autosoliton* sont alors respectivement introduits. Le premier faisant directement référence à l'expression employée par Russell en 1844 [60, 61] pour décrire "la grande ondulation, dont la surface est arrondie, lisse et parfaitement déterminée et qui se propage dans le canal sans que sa forme ni sa vitesse ne paraissent s'altérer en rien"²³. C'est à dire une structure isolée spatialement et qui ne se déforme pas avec la propagation. Ce type de structure est différent des *structures globales* dont il a été discuté jusqu'à présent. Leur différence réside dans le caractère limité de l'extension de la structure. Les structures comme celles de la Fig. 1.1 appartiennent à la catégorie des formes dites *globales* car elles remplissent tout l'espace transverse disponible comme les hexagones ou les rouleaux observés par exemple dans les expériences de feedback optique [63, 64, 65]. Par contre, les structures limitées spatialement à des régions plus petites que celle imposée par les frontières²⁴ de la section transverse sont dites *localisées* (Fig. 1.3 et celles par exemple des références [57, 66, 67, 68, 69, 70, 71]). Deux types de structures localisées sont distinguées. Les premières [52, 56] connectent deux états homogènes stables par verrouillage de fronts, alors que les secondes relient un état homogène avec un état périodique provenant d'une bifurcation sous-critique de type Turing [66]. Ces dernières correspondent à des orbites homoclines, ce qui implique que leur forme et leur nombre sont complètement déterminés par les conditions initiales²⁵. Ceci n'est jamais le cas pour les structures globales où l'organisation

20. Une structure sera dite *globale* si elle remplit tout l'espace transverse et *locale ou localisée* si elle n'en occupe qu'une partie limitée. A titre d'exemple, les hexagones appartiennent à la première catégorie et les solitons spatiaux à la seconde.

21. Rozanov introduit le terme *autosoliton* en 1988 mais la notion de structure localisée est déjà sous-jacente dans un article de 1982 [51] avec les *switching waves* qui correspondent à ce qui est connu maintenant sous le nom de *fronts*.

22. La première introduction du terme *soliton* date de 1965 pour des phénomènes purement propagatifs où les dimensions transverses ne sont pas considérées [59].

23. Extrait traduit et compilé de la référence [60]. Le texte original est donné en référence [62].

24. Diaphragme, ouverture de miroir, taille finie du faisceau de pompe, etc.

25. Le diagramme de bifurcation sous-critique concerné ici présente une forme serpentée appelée "*homoclinic snaking bifurcation*" [72, 73, 74, 75]. Les structures localisées sont alors vues comme des orbites homoclines émergeant de l'état spatialement homogène et passant près de l'orbite périodique associée à l'état structuré.

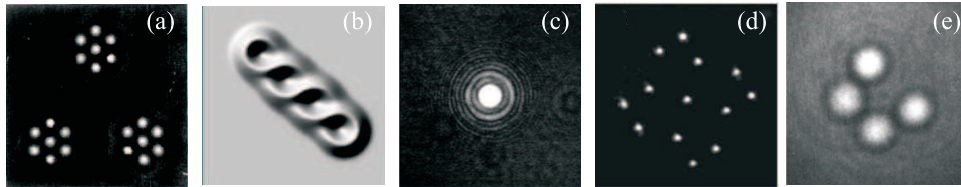


FIGURE 1.3: Exemples de structures transverses optiques localisées tirés des références (a) [66], (b) [76], (c) [71], (d) [77] et (e) [69]. (a,b) Théorique et (c-e) expérimental.

spatiale qui apparaît au seuil est toujours la même. En effet, ces structures sont composées d’une combinaison unique de vecteurs d’onde spatiaux complètement déterminée par la non-linéarité du système.

En essayant d’établir un état de l’art des instabilités spatio-temporelles en optique²⁶, il est vite apparu que la quantité des sujets d’études, des systèmes concernés, et des articles publiés est gigantesque. Il est bien évident qu’il n’est pas lieu de mener ni publier ici cette recherche. Une partie de cette information est disponible dans des articles de revues (e.g. [78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93]) où les auteurs font un état des lieux d’un sujet d’étude ou d’une classe de systèmes. Cependant, afin que le lecteur puisse prendre conscience de l’étendue et de la diversité des sujets d’études menés dans le domaine de la morphogenèse en optique, quelques exemples d’études sont donnés ci-après²⁷ : vortex optiques (e.g. [94, 46]); influence des effets de bords (e.g. [21, 26, 95]) et des variations spatiales des paramètres (e.g. [96, 29]); quasi-cristaux optiques (e.g. [97, 98], section 9.4 dans [99]); chaos spatio-temporel (e.g. [39, 100, 101]); synchronisation (e.g. [102, 103]); coexistence de domaines de structures (e.g. [104, 105, 106]); structures localisées, solitons, interactions et management (e.g. [73, 68, 69, 107, 70, 89, 108, 109, 74, 76, 71, 93, 75]); fronts, parois de domaines (e.g. [110, 111, 112, 113, 77, 114]); billes de lumière (light bullets) (e.g. [115, 116, 117, 118]); multi-stabilité entre différentes structures (e.g. [119, 108]); contrôle et forçage de structures (e.g. [67, 120, 121]); structures fractales (e.g. [122]); mémoires optiques (e.g. [123, 124]); traitement optique des images (e.g. [125]) et de l’information en parallèle (e.g. [126]).

Actuellement, même si les thèmes d’étude sont toujours aussi nombreux et variés, des tendances se dégagent nettement. Il s’agit par exemple du fort intérêt pour les “*cavity solitons*” [127], ces spots lumineux indépendants obtenus dans des cavités résonantes et qui pourraient potentiellement être utilisés comme des *bits optiques* [107, 128]. En effet, les possibilités de les manipuler, de les sélectionner, de profiler des structures à une ou plusieurs entités, de commuter entre différentes structures et surtout de les déplacer et les manipuler transversalement, constituent autant de sujets d’étude fondamentaux que d’applications potentielles. Un très fort investissement théorique [129, 130] et expérimental [131, 132] dans ce sens a été mené ces der-

L’orbite peut alors effectuer plusieurs “tours” autour de cet état de Turing avant de retourner vers l’état homogène, offrant ainsi une infinie possibilité de structures localisées. Le nombre de “tours” donnant le nombre de spots (à 1 dimension par exemple) composant la structure.

²⁶. Qui n’est “vieux” que de 25 ans!

²⁷. La ou les références sont données à titre d’illustration et non comme référence majeure ou comme la plus ancienne.

nières années avec des projets tels que FunFacs [133]. D’une manière plus générale, ce sont les structures localisées qui concentrent une grande partie de la recherche en morphogenèse optique. Mais au delà de l’intérêt fondamental évident, aussi bien théorique qu’expérimental, c’est leur contrôle qui constitue le réel challenge aujourd’hui.

Une autre tendance, concerne non pas l’étude et le développement d’une classe spécifique de structures et de leur dynamique mais l’exploration des possibilités et des comportements offerts par les nouveaux milieux comme les cristaux photoniques et les métamatériaux. Les premiers permettent de manipuler la propagation de la lumière et donc la diffraction par des modulations périodiques de l’indice de réfraction [134, 135] alors que les seconds autorisent des indices négatifs²⁸ [136, 137, 138]. Ces deux classes de matériaux engendrent de nouveaux types de solitons [139, 140, 141], structures [142] et dynamiques [143]. Un bon état des lieux des récents développements dans ces domaines peut être trouvé dans les très bonnes introductions des références [141] et [142] pour les cristaux photoniques et les matériaux gauchers respectivement.

Enfin, une dernière tendance qui n’est pas aussi récente que les précédentes, mais toujours en plein développement, est l’étude des effets non triviaux du bruit [144, 145, 146], avec un intérêt particulier ces dernières années pour les structures spatiales entretenues par le bruit en régime d’instabilité convective [147, 148, 149, 150]. Quant aux autres comportements engendrés par le bruit, une très bonne revue les concernant est disponible dans [145].

Pour terminer cette sous-section, j’aimerais préciser que même si les références citées dans cette sous-section sont nombreuses, leur liste n’est aucunement exhaustive. Aussi, j’espère que le lecteur m’excusera pour tout article non cité.

1.2.4 Systèmes optiques équivalents à des systèmes spatio-temporels à une dimension : systèmes “*pseudo-spatio-temporels*”

Les concepts développés pour analyser la dynamique des systèmes spatio-temporels s’avèrent aussi performants pour étudier des problèmes purement temporels dans le cas où les phénomènes se déploient sur des échelles de temps très différentes. En effet, dans ce dernier cas l’équation d’évolution temporelle peut être traitée comme une équation régissant l’évolution d’un système spatio-temporel à une dimension spatiale. Une illustration est donnée par l’équation de Schrödinger non-linéaire temporelle

$$\partial_z A = i\beta_2 \partial_\tau^2 A + i|A|^2 A \quad (1.1)$$

décrivant par exemple l’évolution de la propagation de la lumière dans une fibre optique suivant deux échelles de temps différentes [151] (une liée à τ qui représente le temps dans le repère se déplaçant à la vitesse de la lumière et une autre liée à z qui représente l’abscisse suivant laquelle se propage la lumière). Cette équation est purement équivalente à une des formes particulières de l’équation d’amplitude de Ginzburg-Landau à une dimension spatiale [Eq. (3.40) dans [4]]

$$\partial_t A = ic_1 \partial_x^2 A + ic_3 |A|^2 A. \quad (1.2)$$

28. Ils sont alors aussi appelés *matériaux gauchers* dans ce cas

si on permute (x avec τ) et (t avec z)²⁹. L'équation (1.1) peut donc être traitée comme une équation régissant l'évolution d'un système à une dimension spatiale et analysée avec les outils conceptuels développés en dynamique spatio-temporelle. Au delà du caractère d'universalité, apparaissant ici entre ces deux systèmes, spatio-temporel et purement temporel, cela signifie que l'évolution de la variable A de l'Eq. (1.1) dans l'espace des phases (τ, z) est identique à l'évolution de la variable A de l'Eq. (1.2) dans l'espace spatio-temporel (x, t) . Cette projection dans l'espace des phases (τ, z) de l'évolution de la variable A de l'Eq. (1.1) permet de faire apparaître des comportements dynamiques invisibles dans une représentation classique unidimensionnelle (z) [153]. La condition est que l'amplitude A évolue plus rapidement suivant l'axe τ que suivant l'axe z . Dans l'exemple de l'Eq. (1.1) cette variable représente un temps rapide mais elle peut tout aussi bien correspondre à n'importe quel type de dimension non-spatiale³⁰ apparaissant dans l'équation d'évolution concernée. Ainsi, tout système temporel peut voir sa dynamique projetée sur un espace des phases *pseudo-spatio-temporel* (τ, z) et être étudié comme un système spatio-temporel à une dimension spatiale τ . Cette propriété de transposition a été utilisée pour la première fois à ma connaissance en optique dans l'étude de la turbulence obtenue dans un système soumis à un feedback temporel [154]. Mais c'est Arecchi *et al.* [153] qui furent les premiers à montrer que ce type de représentation pseudo-spatio-temporelle fait apparaître des propriétés cachées dans une séquence temporelle standard. Depuis, ce type de projection dans un espace des phases *pseudo-spatio-temporel* a été utilisé avec succès pour l'étude de la dynamique non-linéaire dans les systèmes optiques comme les fibres [156] ou encore le laser à électrons libres [157].

Ainsi, certains systèmes optiques purement temporels peuvent être étudiés comme des systèmes spatio-temporels à une dimension spatiale et rentrer dans le cadre des études d'instabilités spatio-temporelles, en n'oubliant pas qu'ils restent des systèmes temporels et ne possèdent aucune dimension spatiale réelle.

1.3 Thèmes de recherche abordés dans ce manuscrit

C'est dans ce cadre de la morphogenèse optique et plus généralement de la dynamique non-linéaire que mes activités de recherche actuelles se situent. Cet intérêt pour la dynamique des structures spatiales réside dans la culture en dynamique non-linéaire acquise pendant mon parcours de formation à la recherche et plus spécialement par une première approche de la morphogenèse optique dans les lasers CO_2 durant ma thèse. Cette formation m'a permis d'acquérir les outils d'analyse nécessaires à l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires et m'a orienté vers les systèmes optiques transverses dissipatifs. C'est ainsi que j'ai monté, grâce à la confiance de P. Glorieux³¹, le projet CRISTO³² en 1998 sur les instabilités spatio-temporelles optiques dans les cristaux liquides. Je serai renforcé fin 1999 par le recrutement d'un maître de confé-

29. Un autre exemple d'équivalence entre un système spatial et son pendant temporel est celui du milieu Kerr soumis à une rétroaction optique [152].

30. L'espace des fréquences par exemple [154, 155].

31. Alors directeur du laboratoire.

32. Acronyme pour CRistaux liquides : Instabilités Spatio-Temporelles Optiques.

rences (C. Szwaj). En 2005, la création par l'équipe de photonique du laboratoire d'une centrale technologique de fibrage, avec les potentialités de réalisations de fibres photoniques fortement non-linéaires et à courbe de dispersion managée, m'a motivé avec M. Taki à ouvrir un nouvel axe de recherche sur la photonique non-linéaire dans ces fibres optiques. Ceci conduira à la fusion de nos deux équipes pour en créer une nouvelle dénommée NDOS³³. Un maître de conférences (A. Mussot) sera recruté suite à l'ouverture des études sur la dynamique non-linéaire dans les fibres micro-structurées. Lors de ces projets, un étudiant (G. Agez, 2005) a effectué sa thèse sous ma responsabilité, un second (V. Odent) l'a commencée depuis un an et un troisième (F. Rogister) a réalisé un post-doctorat (Sec. Curriculum Vitae à la suite de l'annexe).

Au cours des premières études il est vite apparu que le bruit naturellement présent dans les cristaux liquides nématiques sous forme d'agitation thermique modifiait la dynamique prévue par les modèles déterministes [158]. Ce dernier est présent dans la majorité des systèmes optiques expérimentaux et nécessite de considérer non plus des modèles déterministes mais stochastiques afin d'appréhender la dynamique réelle. Les effets du bruit en morphogenèse optique constituèrent ainsi un premier axe d'investigation. Le second est venu d'une rencontre avec Majid Taki et de sa culture des instabilités rencontrées dans les systèmes convectifs. Ces derniers sont des systèmes dont la symétrie de réflexion est brisée et qui présentent une réponse critique au bruit³⁴ et aux perturbations localisées. Ils sont caractérisés par un régime d'instabilité convective à ne pas confondre avec la convection dans le sens de l'expérience de Rayleigh-Bénard. Cette instabilité enrichit la dynamique des systèmes spatio-temporels par de nouveaux comportements liés à la génération de structures propagatives dans le plan transverse. Les travaux de San Miguel *et al.* [147, 159] avec ceux de Taki *et al.* [160, 161] ont été les pionniers dans l'étude des systèmes convectifs en optique. J'ai donc décidé d'incorporer cette thématique dans le projet CRISTO en collaboration avec M. Taki. Nous avons ainsi été les premiers à mettre en évidence expérimentalement l'instabilité convective et les structures spatiales entretenues par le bruit en optique [162]. Les études concernant les systèmes optiques convectifs sont encore toutes récentes mais elles présentent déjà un fort intérêt que ce soit (i) au niveau fondamental pour l'analyse par exemple des instabilités dans les fibres [156], l'auto-entretien par le bruit des structures qui n'existeraient pas autrement [150] ou encore la génération des ondes scélérates optiques [163]; ou (ii) au niveau des potentialités d'applications telles que le déplacement et la manipulation spatiale des structures optiques localisées en vue du routage de l'information ou la sélection de structures par pilotage du taux d'asymétrie.

Ce sont ces deux thèmes que j'ai choisi de présenter dans ce document. Plus spécifiquement, il s'agit de la partie de mes études concernant les effets du bruit et de la brisure de symétrie de réflexion sur les instabilités dans les systèmes spatialement étendus. Ces deux thèmes font partie des tendances actuelles de la recherche dans le domaine de la morphogenèse optique. L'aspect original de notre approche est que la nature convective ou stochastique d'un système n'est pas considérée comme un effet perturbatif mais comme un ingrédient incontournable jouant un rôle constructif et actif dans la dynamique du système.

33. Acronyme pour Dynamique Non-linéaire des Systèmes Optiques. <http://www.phlam.univ-lille1.fr/ndos/>

34. Hyper sensibilité au bruit.

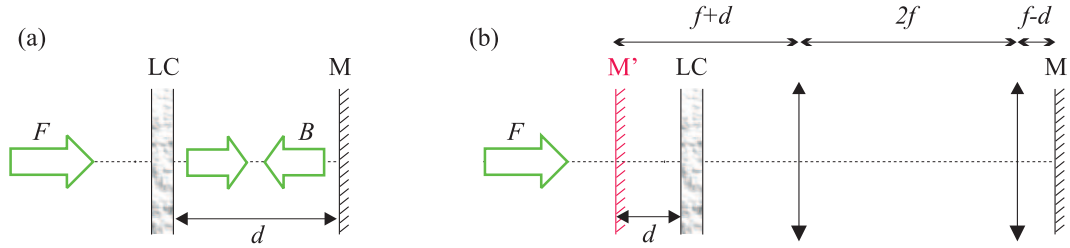


FIGURE 1.4: (a) Schéma du dispositif expérimental avec feedback optique. Le milieu Kerr est ici un cristal liquide (LC). M est le miroir plan de renvoi. (b) Configuration correspondant à une distance optique de feedback d négative. Celle-ci est obtenue grâce à deux lentilles identiques montées en arrangement $4f$. L'image virtuelle M' du miroir M est située devant l'échantillon de cristal liquide (LC). F est le champ de pompe.

1.4 Dispositifs expérimentaux utilisés dans ce manuscrit

Les études d'instabilités spatio-temporelles dans les systèmes optiques stochastiques et convectifs présentées dans les chapitres suivants ont été réalisées à partir de deux systèmes expérimentaux : un spatial et un temporel équivalent à un système pseudo-spatio-temporel. Il s'agit respectivement d'un système à cristaux liquides avec feedback optique et d'un système à résonateur fibré. J'ai choisi le premier comme système modèle pour les études de dynamique spatio-temporelle car il présente l'avantage d'être très versatile et avec un temps caractéristique³⁵ adapté à l'enregistrement de la dynamique avec une caméra CCD classique. Le deuxième dispositif³⁶, temporel, montre si besoin est, que les effets de la stochasticité et de la convection ne sont pas réservés aux systèmes spatiaux mais se retrouvent aussi dans les systèmes purement temporels. Il permet aussi d'illustrer l'intérêt de projeter la dynamique temporelle sur un espace pseudo-spatio-temporel (τ, t) représenté par une variable temporelle rapide³⁷ τ et la variable temporelle classique t . Cette approche fait apparaître des comportements non visibles directement dans les séquences temporelles standards et permet leur analyse avec les outils conceptuels de la dynamique spatio-temporelle.

1.4.1 Lame de cristal liquide nématique avec rétroaction optique

Parmi les différentes configurations de systèmes optiques employées pour étudier la morphogenèse, la plus étudiée et la plus récente est celle proposée par Firth [19] [Fig. 1.4(a)]. Elle est composée d'un milieu non-linéaire de type Kerr³⁸ d'épaisseur très faible soumis à une rétroaction optique provenant d'un miroir plan de renvoi. Elle a donné lieu à de nombreuses études, principalement avec des milieux non-linéaires de type vapeur de sodium [164] et de rubidium [165], cristal photoréfractif [166, 167], film de bacteriorhodopsine [168], cristal liquide nématique [20, 169] et valve à cristaux liquides [64, 65]. Cette configuration est connue sous le

35. De l'ordre de la seconde.

36. Pseudo-spatialement étendu.

37. τ est le temps dans le repère se déplaçant à la vitesse de la lumière.

38. La partie non-linéaire de l'indice est proportionnelle à l'intensité reçue. Le coefficient de proportionnalité est noté n_2 .

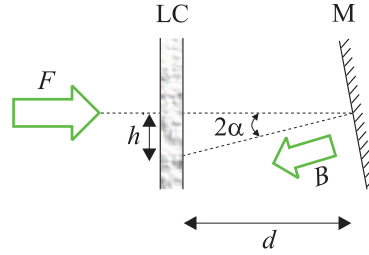


FIGURE 1.5: Schéma du dispositif brisant la symétrie de réflexion. Le miroir M est incliné d'un angle α . Le système avec feedback est alors convectif.

nom abrégé de *système avec feedback*³⁹. Une version avec un miroir concave avait été étudiée plus tôt [45, 170] mais a laissé place à la configuration avec un miroir plan. Cette dernière offre l'avantage de ne pas être soumise à l'influence des conditions aux limites imposées par le miroir sphérique. En plus d'être aisée à mettre en place expérimentalement et très versatile, le système avec feedback présente l'avantage de pouvoir dissocier les actions de la diffraction et de la non-linéarité⁴⁰ dans le modèle théorique, ce qui rend possible l'étude analytique.

L'apparition d'une instabilité spatiale périodique dans ce dispositif s'explique facilement de manière qualitative à partir d'un phénomène connu sous le nom d'effet Talbot [171]. Cet effet exprime la conversion de toute modulation de phase spatiale en modulation d'intensité au cours de la propagation⁴¹ est résulte simplement de la diffraction. Comme le milieu est non-linéaire, il réagit à son tour au faisceau retour modulé en amplitude par un changement de son indice de réfraction. Ainsi, pour une distance d donnée entre la lame de cristal liquide et le miroir plan, l'amplification d'une longueur d'onde spatiale particulière peut avoir lieu à partir des fluctuations et donner naissance à une structure spatiale macroscopique. Celle apparaissant au seuil, lorsque d est différente de zéro, possède une symétrie hexagonale dictée par le caractère quadratique du couplage entre les amplitudes associées à chaque vecteur d'onde [173]. Dans le cas particulier $d = 0$, le système est purement interférentiel. Il donne aussi lieu à la formation de structures globales dans le cas d'une rétroaction non-locale due, par exemple, à la rotation ou la translation du faisceau dans la boucle de feedback [174, 175], ou locales sous forme de fronts dans le cas d'une bistabilité du système comme dans le cas de la valve à cristaux liquides [176, 177].

Briser la symétrie de réflexion dans ce système est très simple. Il suffit pour cela de décaler spatialement le faisceau de retour B par rapport au faisceau aller F . Une simple inclinaison du miroir de renvoi M engendre cette translation spatiale h au niveau de l'échantillon de cristal liquide (Fig. 1.5) [175]. Ceci a pour effet de créer une rétroaction non-locale qui rend le système

39. Dans le manuscrit, j'utiliserai indifféremment les noms de *lame de cristal liquide nématique avec rétroaction optique* ou de *système Kerr avec feedback*.

40. Ce qui est impossible dans le cas d'un milieu de longueur telle que les deux actions précédentes agissent simultanément.

41. La distance nécessaire à cette conversion est $l_T/4$ (resp. $3l_T/4$) pour obtenir une modulation en intensité où les maxima d'amplitude correspondent aux zones les plus (resp. moins) retardées de la modulation de phase ([172] et section 1.2 dans [99]). $l_T = 2\Lambda^2/\lambda_0$ avec Λ la période de la modulation de phase et λ_0 la longueur d'onde optique.

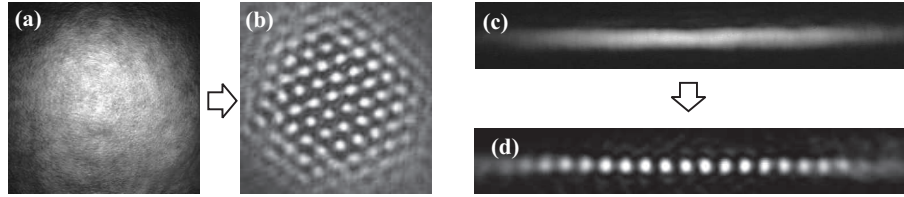


FIGURE 1.6: Sections transverses du faisceau de pompe F (a) en configuration 2D et (c) en configuration 1D; (b) et (d) Structures développées au seuil de déstabilisation de la structure homogène.

convectif [162, 150] comme il sera démontré dans le chapitre 3.

Dans nos expériences, le milieu Kerr est un échantillon de cristal liquide nématique $E7$ d'une épaisseur de $50 \mu\text{m}$ orienté de façon homéotrope⁴². Le coefficient Kerr n_2 [172] de ce dernier a été mesuré à une valeur de $n_2 = 2.45 \cdot 10^{-9} \text{m}^2 \text{W}^{-1}$ [99] et indique un matériau de type focalisant. Un système de deux lentilles de même focale f , insérées entre l'échantillon et le miroir plan et disposées en arrangement $4f$, permet de réaliser des distances optiques de rétroaction d négatives comme on peut le voir sur la Fig. 1.4(b). Le changement de signe de la distance d est équivalent à un changement de signe de la non-linéarité associé à une distance $|d|$. Il est donc possible de choisir le signe de non-linéarité, focalisante pour $d > 0$ [Fig. 1.4(a)] et défocalisante pour $d < 0$ [Fig. 1.4(b)]. Dans nos expériences, le champ de pompe incident F est délivré par un laser $\text{Nd}^{3+}:\text{YVO}_4$ doublé, de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 532 \text{nm}$ et polarisé linéairement suivant l'axe extraordinaire des molécules de cristal liquide. Son émission est continue d'une puissance maximale de 8W mono-mode TEM_{00} . La section du faisceau au niveau de l'échantillon a une taille d'environ $2800 \mu\text{m}$ [Fig. 1.6(a)]. Un dispositif composé de deux télescopes à lentilles cylindriques permet de mettre en forme le faisceau pour obtenir une configuration quasi-unidimensionnelle (1D) [Fig. 1.6(c)]. Celui-ci se présente alors sous la forme d'un "cigare" de dimensions transverses $w_x \times w_y \approx 2800 \times 200 \mu\text{m}$. Dans cette situation, aucune structure ne se développe dans la direction perpendiculaire à la taille la plus grande [Fig. 1.6(d)].

La modélisation théorique de ce système permet d'obtenir une seule équation pour l'évolution de l'indice réfractif non-linéaire u du cristal liquide grâce à la dissociation des actions de la diffraction et de la non-linéarité (la diffraction est négligée dans le cristal liquide en raison de son épaisseur infime). L'équation issue du modèle, d'abord introduit par Akhmanov *et al.* [18] puis développé ensuite par Firth *et al.* [19, 178, 173], s'écrit :

$$\partial_t u(x, y, t) = (\nabla_{\perp}^2 - 1) u(x, y, t) + |F(x, y)|^2 + R \left| e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi u(x, y, t)} F(x, y) \right) \right|^2 \quad (1.3)$$

où $u(x, y, t)$ représente l'indice réfractif non-linéaire de l'échantillon de cristal liquide nématique; t et (x, y) sont les variables de temps et d'espace normalisées par rapport au temps de relaxation τ et à la longueur de diffusion l_d ; leur détermination $l_d = 9.95 \pm 0.31 \mu\text{m}$ et $\tau = 2.28 \pm 0.18 \text{s}$

42. Les molécules sont ancrées perpendiculairement aux surfaces.

pour notre échantillon est l'objet de la section 2.2. R est le coefficient de réflexion en intensité du miroir. $\chi \equiv \chi_0 L l_d^{-2}$ avec $\chi_0 \equiv k_0 n_2 / 2$, k_0 le nombre d'onde du champ de pompe, n_2 le coefficient Kerr, L l'épaisseur de la couche de cristal liquide et d la distance optique de rétroaction. χ exprime la non-linéarité et son signe la nature du milieu (focalisant pour $\chi > 0$ et défocalisant pour $\chi < 0$). $\sigma = d / k_0 l_d^2$ mesure le rapport entre la diffraction et la diffusion. $\sigma \gg 1$ indique un régime dominé par la diffraction alors que $\sigma \ll 1$ correspond à un régime diffusif. Nous nous placerons dans le premier cas. Le profil transverse gaussien du champ incident F , de section $2w$, est pris en compte sous la forme $F(x, y) = F_0 \exp(-(x^2 + y^2) / w^2)$.

Dans le cas où le système est convectif et soumis au bruit, l'Eq. (1.3) devient :

$$\partial_t u(x, y, t) = (\nabla_{\perp}^2 - 1) u(x, y, t) + |F(x, y)|^2 + R \left| e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi u(x-h, y, t)} F(x, y) \right) \right|^2 + \sqrt{\varepsilon} \xi(x, y, t) \quad (1.4)$$

ξ et ε sont la source et le niveau d'intensité du bruit respectivement. Le bruit est ici d'origine thermique et fait fluctuer l'orientation moyenne des molécules de cristal au cours du temps. Il est donc additif comme on peut le voir dans l'Eq. (1.4), gaussien, de moyenne nulle et blanc. Il vérifie ainsi $\langle \xi(r, t) \xi(r', t') \rangle = \delta(r - r') \delta(t - t')$. Pour nos expériences ε vaut 0.01 [158]. On remarque dans l'Eq. (2.4) la rétroaction non-locale par la présence du terme $x-h$ dans l'indice $u(x-h, y, t)$ du champ B de retour. C'est cette équation générale qui sera retenue dans la suite pour les études de stochasticité et de convectivité.

La longueur d'onde spatiale des structures périodiques se développant au seuil est obtenue par l'analyse de stabilité linéaire de l'Eq. (1.3) [19]

$$\Lambda_{\infty}^+ \simeq 2\sqrt{\lambda_0 d}, \quad \chi > 0 \quad (1.5)$$

$$\Lambda_{\infty}^- \simeq 2\sqrt{\frac{\lambda_0 d}{3}}, \quad \chi < 0 \quad (1.6)$$

dans la limite d'une onde plane $F(x, y) = F_0$, d'un régime diffractif $\sigma \gg 1$ et du cas classique $h = 0$. La conformation hexagonale [Fig. 1.6(b)] quant à elle est donnée par l'analyse de stabilité non-linéaire qui fait apparaître un couplage quadratique dans les équations d'amplitudes associées aux vecteurs d'ondes spatiaux composant la structure [179]. C'est l'unique structure observée au seuil de déstabilisation de la solution homogène. Nous verrons que l'utilisation d'une translation spatiale h dans la rétroaction optique lève cette unicité et induit par exemple des structures striées ou rectangulaires, et que ces dernières sont propagatives au seuil contrairement à la structure hexagonale qui est stationnaire (Chap. 3).

1.4.2 Résonateur fibré

Le second dispositif utilisé pour l'étude de l'influence du bruit et de la brisure de symétrie spatiale est un système temporel équivalent à un système pseudo-spatio-temporel à une dimension transverse (Fig. 1.8). La variable équivalente à la dimension d'espace est ici le temps d'évolution rapide τ dans le repère se déplaçant à la vitesse de la lumière. Ce système est un résonateur fibré

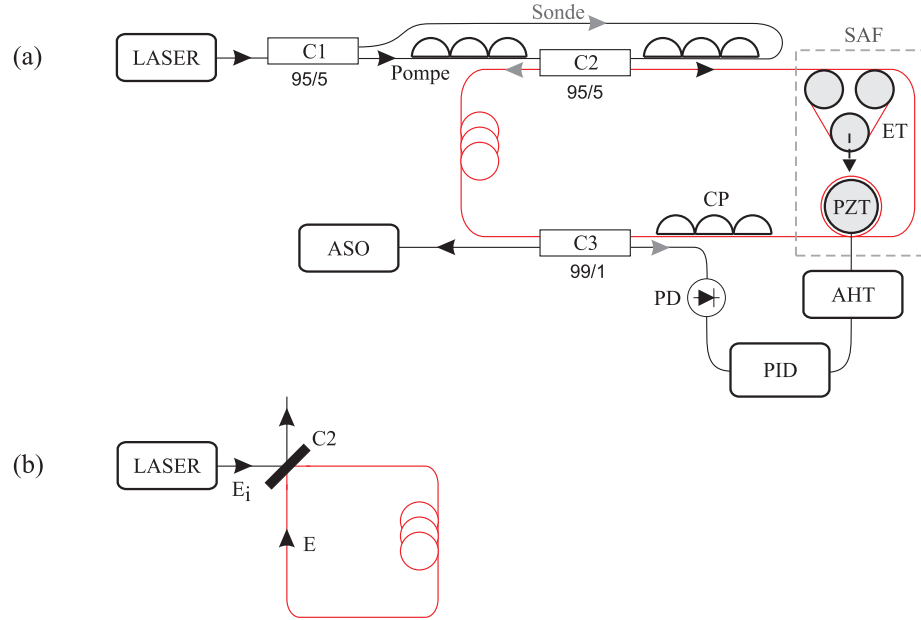


FIGURE 1.7: (a) Schéma du résonateur fibré expérimental. La cavité fibrée est coloriée en rouge. C1-C3 : Coupleurs 2x2. CP : Contrôleurs de polarisation. SAF : Système d’allongement de la longueur de la fibre. ET : Étireur (la flèche indique le sens de l’étirement). PZT : Cylindre piezo-électrique de diamètre variable commandé par l’alimentation haute tension AHT. PID : Système électronique proportionnel-intégrateur-dérivateur. PD : Photo-détecteur. ASO : Analyseur de spectre optique. (b) Représentation schématique utilisée pour la modélisation du résonateur fibré. C2 : Coupleur d’entrée de coefficient de transmission en champ T.

comme celui introduit par Nakazawa *et al.* [180, 181] pour la réalisation d’un laser à instabilité modulationnelle. Il a été utilisé par Haelterman *et al.* [182] puis Coen *et al.* [183] pour montrer l’influence de la cavité sur l’existence de l’instabilité modulationnelle en régime de dispersion normale. Les effets de l’instabilité convective⁴³ sur la taille et l’existence du cycle de bistabilité dans ce dispositif ont aussi été étudiés par ce groupe [184].

Le schéma du dispositif expérimental utilisé dans ce manuscrit est représenté sur la Fig. 1.7(a). Il est inspiré de celui de la référence [183]. Une onde de pompe pulsée provenant d’une source laser est injectée dans la cavité résonante, coloriée en rouge sur le schéma, via le coupleur C2. La longueur de cavité est ajustée de manière à ce que l’impulsion ayant fait un ou plusieurs tours de cavité coïncide temporellement avec l’arrivée des impulsions provenant de la pompe. La superposition cohérente des impulsions évite toute instabilité de type convective liée au déphasage entre les impulsions [184]. Le réglage fin de la longueur de cavité nécessaire à la réalisation de cette condition est d’abord effectué à l’aide d’un étireur⁴⁴ [ET sur la Fig. 1.7(a)] composé de galets sur lesquels est enroulée la fibre. Ce système permet un étirement pouvant aller jusqu’à 1.5 cm. Le second réglage, sub-micrométrique, est obtenu grâce à une céramique

43. Induite par un désaccord entre les impulsions injectées et celles déjà présentes dans la cavité

44. Le système d’allongement de la longueur de fibre est basé sur une ligne à retard développée par Reynaud *et al.* [185]. Il est commercialisé par la société LEUKOS.

piezo-électrique [PZT sur la Fig. 1.7(a)]. Son étendue est d'environ $40\ \mu\text{m}$. Lorsque la cohérence est obtenue entre les impulsions provenant de la source et celles se propageant dans la cavité, l'intensité de la fonction d'Airy est maximale et le déphasage linéaire de la cavité Φ_0 est nul. Comme il est montré dans [182], le déphasage linéaire du résonateur est critique dans les régimes dynamiques obtenus. Il est donc indispensable de stabiliser ce dernier au cours du temps pour toute observation ou enregistrement expérimental. En effet, les fluctuations thermiques ou phoniques captées par la fibre ainsi que les fluctuations de la longueur d'onde de pompe émise par le laser sont autant de sources de variations du déphasage. Une stabilisation dynamique est donc employée pour maintenir constante la valeur de Φ_0 . Elle est basée sur une boucle de contre-réaction qui modifie la longueur physique de la cavité. Celle-ci nécessite un faisceau de sonde obtenu en déviant une faible fraction (5% au niveau du coupleur C1) du laser vers la seconde entrée du coupleur C2. Cette sonde est injectée dans le résonateur en sens inverse de la propagation du faisceau de pompe et sur l'axe neutre de la fibre perpendiculaire à celui emprunté par la pompe⁴⁵. L'utilisation des contrôleurs de polarisation aux entrées du coupleur C2 permet d'orienter les faisceaux de pompe et de sonde sur les deux axes neutres⁴⁶ de la fibre intra-cavité. La stabilisation est alors obtenue au moyen d'un système électronique (PID) qui pilote le cylindre piezo-électrique (PZT) en fonction de l'intensité de sonde reçue par le photo-détecteur (PD). La valeur du déphasage linéaire Φ_0 est mesurée en traçant simultanément les fonctions d'Airy obtenues pour chaque faisceau. La référence de phase étant fixée par la sonde, la valeur de Φ_0 vue par la pompe peut être modifiée en changeant le degré de biréfringence par l'intermédiaire d'une torsion de la fibre via un troisième contrôleur de polarisation intra-cavité. Tout ce dispositif permet de régler le déphasage linéaire Φ_0 continûment entre 0 et 2π avec une précision variant entre 5 et 10%.

Les caractéristiques de la source laser utilisée dans nos expériences sont les suivantes : la durée des impulsions est de $5\ \text{ps}$ à une longueur d'onde pouvant être ajustée entre 1530 et 1560 nm. Le taux de répétition est de 20 MHz et la puissance pic maximale supérieure à 100 W, ce qui donne une puissance de sortie moyenne allant jusqu'à environ 20 mW. Un amplificateur est utilisé pour atteindre des puissances moyennes allant jusqu'à quelques watts. Les propriétés des fibres utilisées dans les expériences seront données dans les sections concernées car il s'agit aussi bien de fibre à dispersion décalée (DSF), avec un zéro de dispersion vers 1550 nm (Sec. 3.4), que de fibre photonique⁴⁷. Deux longueurs⁴⁸ ont été utilisées, une de 10 m et une de 60 m, en fonction des éléments inclus dans le résonateur.

La modélisation de l'évolution de l'enveloppe lentement variable E du champ optique à l'intérieur du résonateur fibré [Fig. 1.7(b)] est basée sur l'équation de Schrödinger non-linéaire [151]

$$\partial_z E(z, \tau) = \left(-i\frac{\beta_2}{2}\partial_{\tau^2} + \frac{\beta_3}{6}\partial_{\tau^3} + i\frac{\beta_4}{24}\partial_{\tau^4} + i\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau')|E(z, \tau - \tau')|^2 d\tau' \right) E \quad (1.7)$$

45. Le terme non-linéaire de modulation de phase croisée est négligé compte-tenu de la faible durée de l'impulsion

46. La biréfringence naturelle de la fibre induit deux axes neutres orthogonaux de polarisation.

47. Fabriquée spécialement par l'équipe de photonique du laboratoire. <http://www.phlam.univ-lille1.fr/photonique/>

48. Elles sont des multiples d'environ 10 m compte-tenu du taux de répétition du laser de pompe

associée aux conditions aux limites imposées par la cavité

$$E(z = 0, \tau + t_R) = T \times E_{in}(z = 0, \tau) + \rho \times E(z = L, \tau) \exp(-i\Phi_0). \quad (1.8)$$

$\beta_{1,2,3,4}$ sont les ordres successifs de dispersion. γ est le coefficient non-linéaire; z la coordonnée longitudinale suivant l'axe de propagation de la lumière dont l'origine est fixée sur le coupleur d'entrée C2 [Fig. 1.7(b)]; $R(\tau')$ la réponse non-linéaire incluant à la fois les contributions instantanées (effet Kerr) et retardées (effet Raman).; $\tau = t - \beta_1 z$ le temps retardé dans le repère se déplaçant à la vitesse de groupe de l'impulsion lumineuse; t_R le temps mis pour parcourir un tour de cavité; L la longueur de cavité; $\Phi_0 = \frac{2\pi n}{\lambda_0} L$ le déphasage linéaire avec n l'indice de la fibre; T le coefficient de transmission en champ du coupleur d'injection C2; et ρ le coefficient de réflexion total de la cavité incluant les réflexions des coupleurs C2 et C3. Le champ optique de pompe à l'entrée du résonateur est noté E_i . Lorsque l'effet Raman peut être négligé, l'Eq. (1.7) devient

$$\partial_z E(z, \tau) = \left(-i\frac{\beta_2}{2} \partial_{\tau^2} + \frac{\beta_3}{6} \partial_{\tau^3} + i\frac{\beta_4}{24} \partial_{\tau^4} + i\gamma |E|^2 \right) E. \quad (1.9)$$

Ce système d'équations [Eqs. (1.7,1.8)] itératif de dimension infinie peut être approximé par une équation unique dans les conditions de l'approximation d'un champ moyen, c'est à dire lorsque le champ optique E évolue très peu d'un tour de cavité à l'autre. Ceci est vérifié lorsque les effets de la dispersion, de la non-linéarité, des pertes et du gain sont faibles devant la variation du champ E sur un tour de cavité. De manière concrète, cette hypothèse est justifiée lorsqu'on peut développer le champ E au premier ordre à l'aide de la formule de Taylor. Dans ce cas, l'équation régissant l'évolution du champ dans la cavité s'écrit [186] :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = S - (1 + i\Delta)\psi + i|\psi|^2 \psi - i\beta_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} + iB_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau'^3} + iB_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \tau'^4} + i\psi \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau'') |\psi(\tau' - \tau'')|^2 d\tau'' \quad (1.10)$$

où $t' = t \frac{1-\rho}{t_R}$, $\tau' = \tau \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{\rho L}}$, $\psi = E \sqrt{\frac{\gamma L \rho}{1-\rho}}$, $S = E_i \frac{T}{1-\rho} \sqrt{\frac{\gamma L \rho}{1-\rho}}$, $B_3 = \beta_3 \sqrt{\frac{2(1-\rho)}{9\rho L}}$, $B_4 = \beta_4 \frac{1-\rho}{6L\rho}$, et $\Delta = \Phi_0 \frac{\rho}{1-\rho}$.

En absence d'effet Raman⁴⁹, les états stationnaires (en t') et homogènes (en τ') ψ_S de l'Eq. (1.10) vérifient $S_S = [1 + i(\Delta - |\psi_S|^2)]\psi_S$ et sont identiques à ceux de l'équation de Lugiato-Lefever [54]. Ils correspondent à des réponses S_S en fonction de ψ_S monostable pour $|\Delta| < \sqrt{3}$ et bistable pour $|\Delta| > \sqrt{3}$. Ces solutions stationnaires homogènes sont instables au profit de perturbations de la forme $\exp i(\Omega\tau' - Kt')$. Ces dernières sont connues sous le terme d'instabilités modulationnelles (IM) [183]. Dans le cas $\beta_3 = \beta_4 = 0$, au premier seuil $I_{SC} = |\psi_{SC}|^2 = 1$, leurs fréquences sont définies par [182, 156] :

$$\Omega_C = \frac{1}{\beta_2} \sqrt{(\Delta - 2)}, \quad (1.11)$$

et dans le cas d'une dispersion "plate" ($\beta_3 = 0$) avec $\beta_4 \neq 0$ par [186] :

$$\Omega_C^2 = \frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 + 4(\Delta - 2)B_4}}{2B_4}. \quad (1.12)$$

⁴⁹. Cette hypothèse est justifiée car les fréquences d'instabilités modulationnelles sont petites par rapport au décalage Raman.

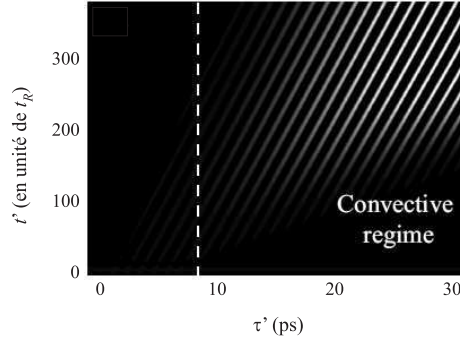


Figure 1.8: Représentation pseudo-spatio-temporelle dans l'espace des phases (τ', t') de la dynamique temporelle du résonateur fibré. Ici, l'évolution d'une perturbation initialement localisée à $\tau' = 0$ ps à $t' = 0$ en régime convectif [156].

Les expressions des fréquences Ω_C et du seuil associé I_{S_C} dans le cas où $\beta_3 \neq 0$ et $\beta_4 = 0$ peuvent être obtenues asymptotiquement par la méthode de la “steepest descent” [187] à partir de la relation de dispersion suivante [156] :

$$\Omega(K) = -B_3 K^3 + i \left[-1 + \sqrt{I_s^2 - (\Delta - \beta_2 K^2 - 2I_s)^2} \right]. \quad (1.13)$$

Enfin, la représentation pseudo-spatio-temporelle dans l'espace des phases (τ', t') est utilisée pour étudier et analyser les régimes dynamiques de cette cavité comme on peut l'observer sur la figure 1.8.

Chapitre 2

Effets du bruit dans les systèmes optiques spatialement étendus

2.1 Introduction

Le hasard est un élément qui anime notre vie de tous les jours. Dans la nature, animée ou inanimée, celui-ci se présente sous la forme de fluctuations quelle que soit l'échelle observée. Que nous focalisions nos efforts pour scruter le monde naturel ou contrôler des dispositifs expérimentaux plus ou moins sophistiqués, la présence des incertitudes et du bruit est partout. Ainsi, les systèmes naturels sont irrémédiablement sujets aux fluctuations aléatoires, provenant soit des variables environnementales soit des effets thermiques. Quelle que soit son origine, le bruit est généralement considéré, au moins par définition, comme une source de désordre et de nuisances dans les systèmes physiques. Cependant, les fluctuations liées au bruit peuvent interagir avec les non-linéarités du système pour donner lieu à des comportements contre-intuitifs. Il est bien accepté aujourd'hui que le bruit peut conduire à des effets surprenants. Il y a bon nombre de situations physiques où le bruit montre un rôle constructif, plutôt que destructif dans le comportement des systèmes non-linéaires. Un parfait exemple, faisant encore l'objet de recherches actives, est le phénomène de résonance stochastique. Dans ce dernier, la réponse d'un système non-linéaire, soumis à un signal externe présentant des fluctuations aléatoires, peut être améliorée en choisissant un niveau judicieux (non nul) de bruit [188]. Cela peut être vu comme si le bruit aidait le système à franchir une barrière de potentiel. C'est l'un des deux schémas où les fluctuations aléatoires conspirent avec les non-linéarités dans les systèmes purement temporels¹. Il concerne aussi la résonance cohérente [189] et le transport induit par le bruit [190]. Le second schéma correspond à la déstabilisation d'états stationnaires existants, via des transitions induites par le bruit, au profit de nouveaux états [191].

Dans les systèmes spatialement étendus, les degrés de liberté spatiaux ouvrent des scénarios supplémentaires où le rôle non-trivial du bruit peut s'exprimer. C'est le cas des transitions de phase [192, 193] et de la formation de structures hors d'équilibre [4, 147, 150] induites par le bruit. La mise en évidence de tels comportements a été rapportée aussi bien théoriquement

1. Systèmes de dimension zéro.

qu'expérimentalement. Cette influence du bruit dans les systèmes étendus auto-organisés n'induit pas que des changements qualitatifs par rapport aux systèmes déterministes associés, mais aussi des spécificités foncièrement différentes. Dans ces situations, les prédictions naïves basées sur l'analyse déterministe sont très loin de donner des résultats fiables. Bon nombre d'exemples où le bruit induit, augmente, ou soutient un comportement ordonné dans un milieu non-linéaire aussi bien passif qu'actif peuvent être cités. C'est le cas des structures spatiales induites par le bruit [194, 195, 196, 197], des transitions de phases d'ordre induites par le bruit (à la fois du second ordre [198, 199, 200], et du premier ordre [201, 202]), des transitions de phases de désordre induites par le bruit [199, 200, 203], de la dynamique de phase induite par le bruit [204], des fronts induits par le bruit [205], de la propagation de fronts [114, 144], des précurseurs de structures (provenant du bruit quantique [206], ou classique [207, 208]) et des structures soutenues par le bruit dans les systèmes convectifs [147, 148, 150] et les milieux excitables [209, 210]. La majorité des phénomènes induits par le bruit mentionnés ci-dessus vont dans la direction d'une certaine mise en ordre dans le système. Ce constat surprenant contraste avec le désordre auquel on pourrait s'attendre intuitivement en se référant à la mécanique statistique. Une excellente revue des mécanismes à travers lesquels le bruit induit, améliore, et soutient des comportements ordonnés dans différents systèmes non-linéaires spatio-temporels est donnée dans [145]. De nombreuses observations expérimentales de phénomènes d'auto-organisation observés y sont décrites.

Les systèmes spatialement étendus sont généralement décrits par un champ $u(x, y, t)$ représentant la ou les variables physiques pertinentes du problème. Ce champ u est régi, en présence de bruit, par une équation stochastique différentielle du type :

$$\partial_t u(r, t) = F(u, \partial_r^n, \{\mu\}) + g(u)\eta(r, t) + \sqrt{\varepsilon}\xi(r, t) \quad (2.1)$$

où $r \equiv (x, y)$ sont les variables de l'espace transverse. Les bruits Gaussiens additif ξ et multiplicatif η de cette équation ont une moyenne nulle et les corrélations suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \xi(r, t)\xi(r', t') \rangle &= \delta(r - r') \delta(t - t') \\ \langle \eta(r, t)\eta(r', t') \rangle &= C(r - r') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.2)$$

$C(r - r')$ est la fonction de corrélation spatiale du bruit multiplicatif $\eta(r, t)$ [$C(0)$ est proportionnelle à l'intensité du bruit]. Le bruit blanc additif $\xi(r, t)$ représente les fluctuations internes avec une intensité ε .

Dans le présent document, le système spatio-temporel que nous avons retenu comme prototype pour l'étude de l'influence du bruit sur la morphogenèse en optique est la lame de cristal liquide soumise à une rétroaction optique. Nous nous intéressons donc uniquement aux effets du bruit additif dès lors que le système étudié n'est sujet qu'à des fluctuations² internes d'origine thermique. Les effets du bruit multiplicatif ne seront pas développés ni discutés ici, une excellente revue sur les effets du bruit externe peut être trouvée dans [211]. Ainsi, l'équation

2. qui ne peuvent être variées de manière contrôlée.

stochastique générale qui va nous intéresser dans ce chapitre se présentera sous la forme :

$$\partial_t u(r, t) = F(u, \partial_r^n, \{\mu\}) + \sqrt{\varepsilon} \xi(r, t). \quad (2.3)$$

C'est une équation de type Langevin [212]. Sa forme développée pour l'échantillon de cristal liquide nématique soumis au feedback optique est la suivante [Eq. (1.4)] :

$$\partial_t u(x, y, t) = (\nabla_{\perp}^2 - 1) u(x, y, t) + |F(x, y)|^2 + R \left| e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} \left(e^{i\chi u(x-h, y, t)} F(x, y) \right) \right|^2 + \sqrt{\varepsilon} \xi(x, y, t) \quad (2.4)$$

où $u(x, y, t)$ représente l'indice réfractif non-linéaire. Les autres variables sont définies dans la section 1.4.1.

L'expérience la plus simple des effets du bruit dans notre système spatialement étendu est sans doute l'observation du speckle optique de bruit obtenu lors d'une simple traversée du cristal par un faisceau laser de faible intensité. A partir de l'analyse de cette figure spatiale les constantes de relaxation temporelle et spatiale de notre système (respectivement τ et l_d) peuvent être extraites. Cette étape est cruciale à toute modélisation quantitative sans laquelle aucune comparaison avec les données expérimentales n'est possible.

2.2 Utilisation du speckle de bruit pour la détermination des constantes de relaxation du système

Afin d'accéder aux variables de relaxation dynamiques, que sont respectivement le temps de relaxation réorientationnel des molécules de cristal liquide ancrées (τ) et la longueur de diffusion dans ces mêmes cristaux (l_d), nous avons utilisé une approche purement optique basée sur l'analyse du speckle³ de bruit obtenu par la traversée d'un faisceau de sonde dans ce milieu [213]. L'idée de l'utilisation de la dynamique des fluctuations d'un cristal liquide pour mesurer sa fréquence de relaxation avait déjà été suggérée dans la référence [214]. La méthode proposée ici présente l'avantage d'adopter une approche optique simple, purement linéaire, et surtout ne nécessitant pas l'utilisation de tension appliquée [215, 216] ou encore d'effets non-linéaires [217], contrairement aux approches précédentes qui donnent des temps de réponse dépendants de la méthode utilisée. Notre méthode permet ainsi de mesurer directement τ . Dans les cristaux liquides ancrés, tel que c'est le cas ici, l'agitation thermique, qui est la source de bruit additif dans ce système, produit un mouvement aléatoire des molécules qui diffusent sur une longueur l_d et relaxent sur un temps τ vers leur position d'équilibre imposée par l'ancrage. La traversée de ce milieu par un faisceau de sonde produit alors sur ce dernier des modulations de phase optique portant les informations sur τ et l_d . Ces modulations se convertissent ensuite en modulations d'amplitude par simple propagation (effet Talbot) et peuvent alors être enregistrées sur des caméras CCD.

Dans l'expérience, l'indice u n'est pas accessible directement. Par contre, le champ optique ayant traversé le milieu porte les informations relatives à u . Aussi, les grandeurs mesurables ex-

3. Définition de speckle : Tacheture, moucheture (suivant les dictionnaires). Ici, figure d'interférences, composée de taches de tailles et d'intensités variables et de répartition spatiale très complexe.

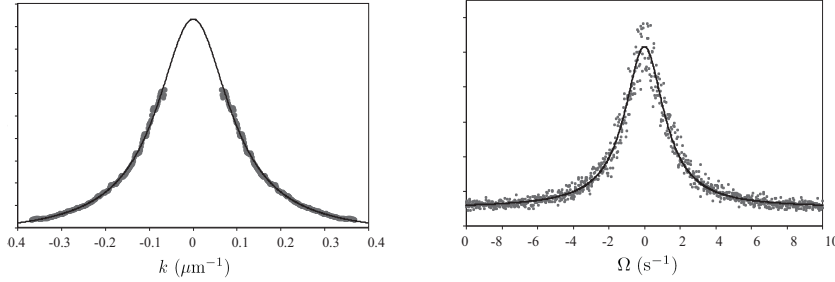


FIGURE 2.1: Dépendance radiale des intensités moyennes en champ lointain $\langle I_{FF}(k, t) \rangle_t$ (à gauche) et champ proche $\langle I_{NF}(k, \Omega) \rangle_t$ (à droite). Les points représentent les données expérimentales et les courbes en trait plein les ajustements lorentziens calculés à partir des Eqs. (5) et (9) de [213].

périmentalement sont les intensités moyennes⁴ des champs optiques proches⁵ I_{NF} et lointains⁶ I_{FF} . Les expressions analytiques de celles-ci s'obtiennent facilement par un calcul qui dépend de l'indice en champ lointain $u(k, t)$ ⁷ [Eqs. (4) et (7) dans [213]]. Cependant, seule la fonction d'auto-corrélation temporelle de $u(k, t)$ peut être déterminée mathématiquement. C'est l'objet du calcul de l'annexe C de [99]⁸ mené suivant celui de l'article [218] :

$$\left\langle \widetilde{\Delta u^*}(\mathbf{k}, t) \widetilde{\Delta u}(\mathbf{k}, t) \right\rangle = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^2} \frac{\pi}{1 + \mathbf{k}^2 - 2R\chi |F_0|^2 \sin(\sigma \mathbf{k}^2)}. \quad (2.5)$$

Dès lors que cette expression est connue, celles des intensités moyennes en champ proche I_{NF} et lointain I_{FF} sont obtenues facilement. Leur particularité commune est de posséder un profil Lorentzien dans l'espace de Fourier dont la largeur dépend directement des variables l_d et τ (Fig. 2.1). La mesure successive des largeurs à mi-hauteur de ces profils $\langle I_{FF}(k, t) \rangle_t$ et $\langle I_{NF}(k, \Omega) \rangle_t$ par ajustement avec les expressions lorentziennes des Eqs. (5) et (9) de [213] donne $l_d = 9.95 \pm 0.31 \mu\text{m}$ et $\tau = 2.28 \pm 0.18 \text{ s}$. Ces valeurs sont en excellent accord avec celles calculées à partir d'autres méthodes comme celle de la Ref. [219] qui donne $l_d = 10 \mu\text{m}$ et $\tau = 2.32 \text{ s}$.

La mesure des largeurs à mi-hauteur des profils Lorentziens des champs proche et lointain donne $l_d = 9.95 \pm 0.31 \mu\text{m}$ et $\tau = 2.28 \pm 0.18 \text{ s}$.

D'une manière plus générale, cette méthode est applicable à n'importe quel système dynamique pour déterminer ses constantes de relaxation spatiale et temporelle.

4. Intégrées sur le temps d'acquisition des caméras CCD.

5. C'est à dire dans le plan de la lame de cristal liquide.

6. C'est à dire dans le plan focal d'une lentille. C'est la transformée de Fourier du champ proche.

7. $\Delta n(k, t)$ dans [213]. k est le nombre d'onde dans le plan de Fourier.

8. Eq. (C12)



Available online at www.sciencedirect.com



Optics Communications 245 (2005) 243–247

OPTICS
COMMUNICATIONS

www.elsevier.com/locate/optcom

Using noise speckle pattern for the measurements of director reorientational relaxation time and diffusion length of aligned liquid crystals

G. Agez, P. Glorieux, C. Szwaj, E. Louvergneaux *

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523, Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Received 21 July 2004; received in revised form 10 September 2004; accepted 27 September 2004

Abstract

A purely optical approach using noise as a perturbation source and speckle analysis is used to measure the diffusion length and the director reorientational relaxation time of an aligned nematic liquid crystal. This method gives a direct measure of the intrinsic director relaxation time without any voltage or optical driving nor nonlinear effects contrarily to previous approaches. The obtained values of the diffusion length and relaxation time are in excellent agreement with those calculated from the liquid crystal elastic and rotational viscosity constants.

© 2004 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 47.54 + r; 61.30 – v; 05.40 – a; 42.79.Kr

Temporal dynamics is one of the most critical issues of anchored liquid crystals (ALC) for devices involving switching [1,2] as well as for quantitative modelling in, e.g., optical pattern formation [3,4]. These dynamics are directly related to the LC director orientational relaxation

processes. The determination of the temporal and spatial relaxation constants (respectively, relaxation time and diffusion length) are thus crucial for quantitative comparison of models with experiments as well as for applications. The diffusion length has been directly experimentally measured using the spatial decay of the molecular distortion in a truncated laser beam [5]. It can also be deduced from the elastic constants of the LC measured by different techniques such as the Fréedericksz effect threshold [6,7], birefringence [8], light scattering [9], etc. On the other hand,

* Corresponding author. Tel.: +33 320 336 443; fax: +33 320 337 020.

E-mail address: eric.louvergneaux@univ-lille1.fr (E. Louvergneaux).

the usual experimental measures of temporal relaxation phenomena involve either optical nonlinear effects [10,11] or, e.g., voltage excitation [12] that give optical response times dependent of the corresponding method parameters such as optical intensity, wave number of the periodic reorientation, etc. But they do not measure the intrinsic director relaxation time, that only depends on the rotational viscosity γ , the bend elastic constant K_{33} and the cell thickness L of the LC, independently of any external parameter. Although these response times can be correlated to the director relaxation time in some cases [13], to our knowledge no optical method exists to measure directly the director relaxation time $\tau = \gamma L^2 / K_{33} \pi^2$.

We propose here an alternative purely linear optical approach using noise scattering and speckle analysis to extract aligned liquid crystal (ALC) diffusion length l_d and director relaxation time τ . This method relies on director fluctuations only and does not use any voltage or optical driving nor nonlinear effects that can give optical response times in place of the pure director relaxation time. Only a very weak probe optical beam is used to make our measurements. Using dynamics of fluctuations in LC to measure the relaxation frequency of the slow mode was already suggested in [14]. In such ALC, thermal agitation produces random motion of the molecules that diffuse over length l_d and relax with time τ towards the equilibrium position imposed by anchoring. Optical reading of these molecular fluctuations with the help of a probe field passing through the ALC (Fig. 1(a)) gives access to l_d and τ . Indeed, the phase of an electromagnetic wave passing through such a medium carries information on the orientation motions since the index of the material depends on the molecular orientation. These phase modulations are then transformed into amplitude information as light propagates, so that they can be detected by imaging the output transverse wave intensity.

Imaging the near field intensity (NF), i.e., directly at ALC layer output, is sufficient since the free propagation through the layer thickness converts phase into amplitude modulation. More quantitatively, the amplitude E of the linearly

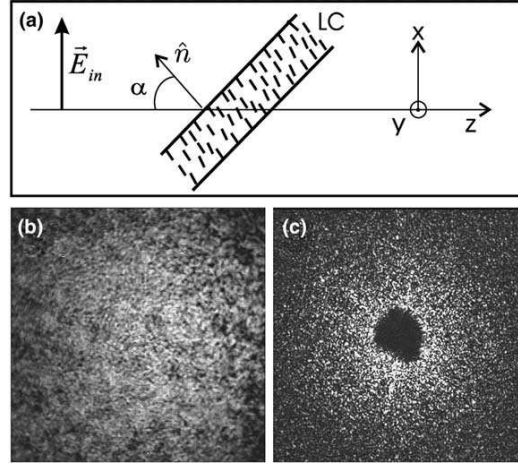


Fig. 1. (a) Experimental setup; LC liquid crystal layer, \hat{n} LC axis director, α incidence angle, \vec{E}_{in} incident linearly polarized optical field. (b) Near field and (c) far-field instantaneous distributions of the output intensity. (c) The black central region corresponds to a beam filtering to avoid saturation of the CCD camera.

polarized electric field emerging after propagation through a thin layer of LC reads

$$E(r, t) \vec{u} = e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} (e^{i\chi n_{\vec{u}}(r, t)} E_{in}(r) \vec{u}), \quad (1)$$

where $n_{\vec{u}}(r, t) = n_m(r) + \Delta n(r, t)$ is the effective index of the LC along the direction of polarization \vec{u} . $n_{\vec{u}}(r, t)$ is a function of the ordinary n_o and extraordinary n_e indexes of the LC determined by the polarization axis \vec{u} (Section 6.3.1. in [1]). For instance, in the scheme of Fig. 1(a), \vec{u} is along the x axis such that $n_{\vec{u}}(r, t)$ is function of n_o and n_e , whereas if \vec{u} would be along the y axis $n_{\vec{u}}(r, t)$ restricts to n_o . n_m is the mean effective index along \vec{u} and Δn its fluctuations. χ parameterizes the phase coefficient so that χn corresponds to the LC induced phase shift. E_{in} represents the amplitude of the linearly polarized input field. $\sigma = L/2k_0$, where L is the layer thickness and k_0 the laser wavenumber. The operator $e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2}$ stands for the free propagation. r corresponds to the transverse coordinates (x, y) . Note that the expression of $E(r, t)$ at a distance d from the output can be easily obtained by replacing the LC layer optical thickness L by the new total optical path $L + d$ in σ .

The time evolution of the index fluctuations Δn in presence of noise is given by [15]

$$\tau \frac{\partial \Delta n(r, t)}{\partial t} = - \left(1 - l_{d,x}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - l_{d,y}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta n(r, t) + \sqrt{\varepsilon} \xi(r, t), \quad (2)$$

where $l_{d,x}$ and $l_{d,y}$ are the diffusion constants along the x and y axes.

This model follows that of [16–18] with the addition of a stochastic term $\xi(r, t)$ to account for noise. $\xi(r, t)$ is a Gaussian stochastic process of zero mean and correlation $\langle \xi(r, t) \xi(r', t') \rangle = \delta(r - r') \delta(t - t')$. ε scales the amplitude of the fluctuations.

Experimentally, only the intensity is accessible. It can be recorded between the near field (NF), i.e., at the output of the LC layer crossing, and the far field (FF), i.e., in the focal plane of a lens. Simple analytical expressions of corresponding intensities EE^* show how to get access to l_d and τ .

The diffusion constant l_d (either $l_{d,x}$ or $l_{d,y}$ depending on \vec{u} is along the x or y axis) is obtained from the time averaged of the FF intensity $\langle I_{FF}(k, t) \rangle_t$. $I_{FF}(k, t)$ is calculated as the modulus square of the Fourier transform (FT) of the NF $E(r, t)$

$$I_{FF}(k, t) = I_0 \left\{ \delta(0) + 2\chi^2 \widetilde{\Delta n}(k, t) \widetilde{\Delta n}^*(k, t) \times [1 + \cos(\sigma k^2)] \right\}, \quad (3)$$

where $\widetilde{\Delta n}(k, t)$ is the spatial FT of $\Delta n(r, t)$. The average FF intensity can be written as

$$\langle I_{FF}(k, t) \rangle_t = I_0 \langle \delta(0) + 4\chi^2 |\widetilde{\Delta n}(k, t)|^2 \rangle_t, \quad (4)$$

where we have set $\sigma k^2 \approx 0$ since the LC layer L is very thin and $k \leq 0.4 \mu\text{m}^{-1}$ typically (see Fig. 2). No time dependent expression of $\Delta n(k, t)$ can be derived from Eq. (2), however, a time averaged expression can be obtained as demonstrated in [15]. Once the DC component has been subtracted, $\langle I_{FF}(k, t) \rangle_t$ has a Lorentzian shape

$$\langle I_{FF}(k, t) \rangle_t = \frac{2\varepsilon I_0 \chi}{1 + l_d^2 k^2} \quad (5)$$

of half width (in the Fourier space) equal to l_d^{-1} indicating that in presence of fluctuations, the time

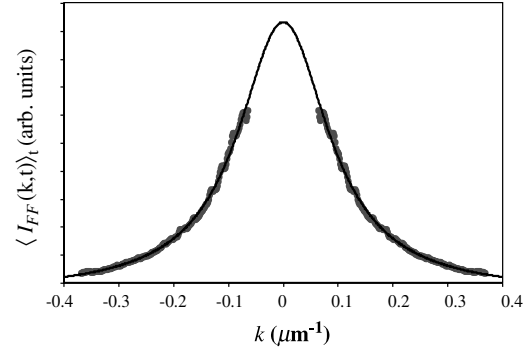


Fig. 2. Radial dependence of the FF intensity versus the wavevector modulus k (grey plots), Lorentzian fit (full line).

averaged FF intensity carries information on the diffusion length.

Once l_d is known, the relaxation time may be extracted from the NF intensity. The output NF intensity is, at first order in Δn ,

$$|E(r, t)|^2 = I_0 \{ 1 - 2\chi \sin(\sigma \nabla_{\perp}^2) \Delta n(r, t) \}. \quad (6)$$

The relevant information is then obtained from the double (spatial and temporal) FT of the NF intensity

$$\widetilde{|E|^2}(k, \Omega) = I_0 \left\{ \delta(k = 0) + 2\chi \sin(\sigma k^2) \widetilde{\Delta n}(k, \Omega) \right\}. \quad (7)$$

In this expression, the double FT of the refractive index $\Delta n(r, t)$ is directly obtained from Eq. (2) as

$$\widetilde{\Delta n}(k, \Omega) = \frac{\sqrt{\varepsilon} \widetilde{\xi}(k, \Omega)}{1 + k^2 l_d^2 - i\Omega \tau}, \quad (8)$$

where $\widetilde{\xi}(k, \Omega)$ is the Fourier transform of the Gaussian noise term $\xi(x, t)$. The squared modulus of Eq. (7) after the suppression of the spatial DC component is

$$\left\| \widetilde{|E|^2}(k, \Omega) \right\|^2 = 4I_0^2 \chi^2 \sin^2(\sigma k^2) \varepsilon \frac{\left\| \widetilde{\xi}(k, \Omega) \right\|^2}{(1 + k^2 l_d^2)^2 + \Omega^2 \tau^2}. \quad (9)$$

For a given value of k , the double FT has a Lorentzian shape of half width versus Ω equal to $(1 + k^2 l_d^2)/\tau$. So, τ can be extracted knowing l_d (from the previous FF intensity analysis) and the chosen value of k . One can remark here the importance of the free propagation since no dependence on τ would be obtained in its absence ($\sigma = 0$).

To validate these developments we compare l_d and τ , based on Eqs. (5) and (9), from numerical integrations of Eq. (2). The process is the following one:

First, a series of FF intensity pictures $I(k, t)$ is generated (every 0.2τ). After removing the continuous component ($k = 0$) associated with the background signal, these pictures are time averaged to derive the FF intensity dependence on the modulus k of the wave vector $\langle I_{FF}(k, t) \rangle_t$. This quantity has a Lorentzian dependence on k and a least-square fit directly provides l_d . The numerical simulations are performed for two configurations, a top hat transverse intensity profile and a Gaussian one of width $\approx 300 l_d$ corresponding to our experimental conditions. Parameters are $E_{in}(r = 0) = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $l_d = 1$, $\tau = 1$ and a spatial and temporal resolution of $1.367 l_d$ and 0.2τ , respectively. The calculated two values of l_d given by the Lorentzian fits are similar (top hat: 1.003 ± 0.005 , Gaussian: 0.998 ± 0.007) and coincide with the input value, indicating that the Gaussian pump profile has no influence on the measurement of l_d in our conditions.

Secondly, from the series of NF pattern pictures recorded at the same rate of 0.2τ , we generate a spatio-temporal diagram $I_{NF}(x, t)$ by reporting the time evolution of a 1D cross line intensity for each image. Each diagram $I_{NF}(x, t)$ is then numerically spatially Fourier transformed line by line to obtain a new diagram $\widetilde{I}_{NF}(k, t)$. This later displays sinusoidal modulation on a Lorentzian background, due to the $\sin(\sigma k^2)$ term in Eq. (9), with a fringe location depending on the propagation distance. The intensity of one fringe corresponding to wave number k_i , $I_{NF}(k_i, t)$, is time Fourier transformed to obtain the square of the modulus of the double (space and time) FT quantity $|\widetilde{I}_{NF}(k_i, \Omega)|^2$. This procedure is repeated typically over 50 times or over 50 different 1D lines to get an averaged

shape of $|\widetilde{I}_{NF}(k_i, \Omega)|^2$, in order to filter the truncated $\widetilde{\xi}(k, \Omega)$ dependence. As expected from the calculations of Eq. (9) this quantity exhibits a Lorentzian dependence on Ω . As l_d is already known and k_i is chosen, τ may be deduced from the fitted half width $(1 + k_i^2 l_d^2)/\tau$ of the Lorentzian curve. From the numerical simulations, the values of τ are found to be 1.006 ± 0.014 (resp. 1.004 ± 0.015) for the top hat (resp. Gaussian) profile. Thus our method allows us to extract the precise values of the diffusion length and the relaxation time.

In experiments, both quantities corresponding to Eqs. (5) and (9) are obtained in a similar procedure as that used for numerical simulations. First, a series of FF intensity $I(k, t)$ pictures is recorded on a CCD camera every 0.3 s including a spatial filtering of the continuous component ($k = 0$) (Fig. 1(c)). Typically, we register and average series of 1024 images (768×576 pixels, 1 pixel = $0.0016 \mu\text{m}^{-1}$). After that, 1024 NF intensity images are recorded at the same rate (0.3 s) with a typical resolution of $3.38 \mu\text{m}/\text{pixel}$ (Fig. 1(b)). Then, we follow the same procedure of spatio-temporal diagram construction and of calculation of double (space and time) FT. This procedure is repeated over 30 times to get an averaged shape of $|\widetilde{I}_{NF}(k_i, \Omega)|^2$ as previously.

In our experiments, a $50 \mu\text{m}$ thick layer of E_7 homeotropically aligned nematic LC at 22°C is irradiated by a 532 nm frequency doubled Nd:YVO₄ laser with a beam waist of 1.5 mm . As shown in Fig. 1(a) the layer is tilted at $\alpha = 45^\circ$ from the propagation axis and the optical field is p -polarized (i.e., \vec{u} is along the x axis) (Fig. 1(a)). The measured diffusion length is then $l_{d,x}$ and involves the splay and bend deformations of LC. The experimental curves obtained from the two treatments corresponding to Eqs. (5) and (9) are depicted in Figs. 2 and 3. They fit very well Lorentzian distributions that give $l_{d,x} = 9.95 \pm 0.31 \mu\text{m}$ (Fig. 2) and $\tau = 2.27 \pm 0.18 \text{ s}$ (Fig. 3). The accuracy of the $l_{d,x}$ measurements depends on the calibration of the transverse resolution of the imaging planes ($\pm 0.20 \mu\text{m}$) and of the fit precision ($\pm 0.11 \mu\text{m}$). For τ it includes the one

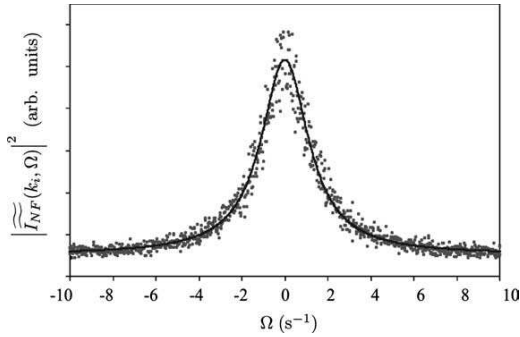


Fig. 3. Evolution versus pulsation Ω of the square of the modulus of the double Fourier Transform of the near field intensity (grey plots), Lorentzian fit (full line).

of $l_{d,x}$ (± 0.07 s) and the Student statistical error made over the multiple measures (± 0.11 s). The values of $l_{d,x}$ and τ can be compared to that calculated from e.g., [5] for $l_{d,x} = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{33}}} \cos(\alpha)$ with $K_{11} = 12.1 \times 10^{-7}$ dyne, $K_{33} = 15.3 \times 10^{-7}$ dyne, and $\tau = \gamma L^2 / \cos(\alpha)^2 K_{33} \pi^2$ with $\gamma = 0.07$ Pa. They give, respectively, $l_{d,x} = 10 \mu\text{m}$ and $\tau = 2.32$ s which demonstrate the excellent precision of our method.

A direct consequence of the experimental determination of τ and $l_{d,x}$ is that we can obtain the *bend* and *splay* elastic constants. They are, respectively, calculated to $K_{33} = 15.55 \times 10^{-7}$ and $K_{11} = 12.16 \times 10^{-7}$ dyne.

Practically, the signal to noise ratio is improved by recording the NF intensity at some distance (typically $d = 2$ cm) from the LC layer. Indeed, Eq. (9) shows that increasing σ induces large peaks in the spatial FT $[\sin(\sigma k^2)]$ thus giving larger signal for analysis.

Finally, our experiments were performed with 2D imaging but a similar procedure may be carried out on the basis of a 1D system, which simplifies some steps of the signal processing. However, 2D FF images obviously provide more information content. Averaging on the radial distribution greatly enhances the signal-to-noise ratio because information is added in the large k domain, where the signal is very weak. It also helps reducing the influence of the local imperfections in the device, that pins some parasitic refractive index modulations.

To summarize, the analysis of noise speckle pattern gives a very accurate way to measure diffusion length and director relaxation time in ALC. This method is a purely probing one contrarily to the previous approaches. It gives the first optical direct measurement of the intrinsic relaxation time. Finally, our method is an another way to obtain the elastic constants of LC. More generally, this method can be used for the determination of space and time relaxation constants of any dynamical system.

References

- [1] I.C. Khoo, Liquid Crystals: Physical Properties and Nonlinear Optical Phenomena, Wiley, New York, 1995.
- [2] L.M. Blinov, V.G. Chigrinov, Electrooptic Effects in Liquid Crystals Materials, Springer Verlag, New York, 1994.
- [3] R. Macdonald, H.J. Eicher, Opt. Commun. 89 (1992) 289.
- [4] M. Tamburrini, M. Bonavita, S. Wabnitz, E. Santamato, Opt. Lett. 18 (1993) 855.
- [5] E. Santamato, E. Ciamarella, M. Tamburrini, Mol. Cryst. Liq. Cryst. 241 (1994) 205.
- [6] H.L. Ong, Phys. Rev. A 28 (1983) 2393.
- [7] W.K. Bajdecki, L. Calero, R. Meucci, Opt. Commun. 176 (2000) 473.
- [8] G.P. Crawford, J.A. Mitcheltree, E.P. Boyko, W. Fritz, S. Zumer, J.W. Doane, Appl. Phys. Lett. 60 (1992) 3226.
- [9] E. Miraldi, L. Trossi, P.T. Valabrega, C. Oldano, Il Nuovo Cimento B 60 (1980) 165, and references therein.
- [10] W.K. Bajdecki, M.A. Karpierz, Acta Phys. Pol. A 103 (2003) 187.
- [11] A. Parfenov, A. Chrzanowska, in: Liquid Crystals Materials, Devices and Flat Panel Displays, Proc. SPIE, vol. 3955, San Jose CA, 2000, p. 26.
- [12] P.L. Papadopoulos, H.M. Zenginoglou, J.A. Kosmopoulos, J. Appl. Phys. 86 (1999) 3042.
- [13] H. Wang, T.X. WU, X. Zhu, S.T. Wu, J. Appl. Phys. 95 (2004) 5502.
- [14] Groupe d'Etude des Cristaux Liquides (Orsay), J. Chem. Phys. 51 (1969) 816.
- [15] C. Szwarz, G. Agez, E. Louvergneaux, P. Glorieux, to be published.
- [16] G. D'Alessandro, W.J. Firth, Phys. Rev. A 46 (1992) 537.
- [17] E. Santamato, E. Ciamarella, M. Tamburrini, Mol. Cryst. Liq. Cryst. 251 (1994) 127.
- [18] S.A. Akhmanov, M.A. Vorontsov, V.Yu. Ivanov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47 (1988) 611.

2.3 Structures précurseurs induites par le bruit dans une configuration unidimensionnelle

Lorsqu'on observe expérimentalement la naissance de la structure hexagonale dans le système Kerr avec feedback, on constate immédiatement que celle-ci n'apparaît pas subitement pour une valeur donnée de l'intensité du faisceau de pompe mais se dessine continûment au fur et à mesure que l'intensité est augmentée [Fig. 2.2(h,d)]. Ceci contraste avec les prédictions du modèle déterministe [19, 173] qui prévoit une absence totale de structuration jusqu'au premier seuil [Fig. 2.2(e-f)]. Ce désaccord est imagé sur la figure 2.2 où le champ lointain enregistré expérimentalement sous le seuil (Fig. 2.2g) présente des cercles concentriques alors que la prédiction numérique (Fig. 2.2e) ne possède aucune structuration. Cette différence provient des perturbations aléatoires internes au système expérimental et qui ne sont pas prises en compte dans les simulations numériques effectuées à partir du modèle déterministe. Cette observation illustre parfaitement un des effets macroscopiques du bruit connu sous le nom de *structures précurseurs induites par le bruit*. Ces précurseurs ont d'abord été observés dans les systèmes purement temporels : en hydrodynamique [220], en optique [221], ou encore dans des jonctions p-n [222] ; puis ensuite en dynamique spatio-temporelle dans des expériences d'électro-convection dans les cristaux liquides [207, 223], de convection de Rayleigh-Bénard [208] et prédits dans les oscillateurs paramétriques optiques [206, 224]. Ces dernières structures sont d'origine quantique⁹ et sont connues sous le nom d'images quantiques. La particularité de tous ces précurseurs est d'anticiper sous le seuil certaines caractéristiques des structures à venir telles que le nombre d'onde comme on peut le voir sur la Fig. 2.2(g).

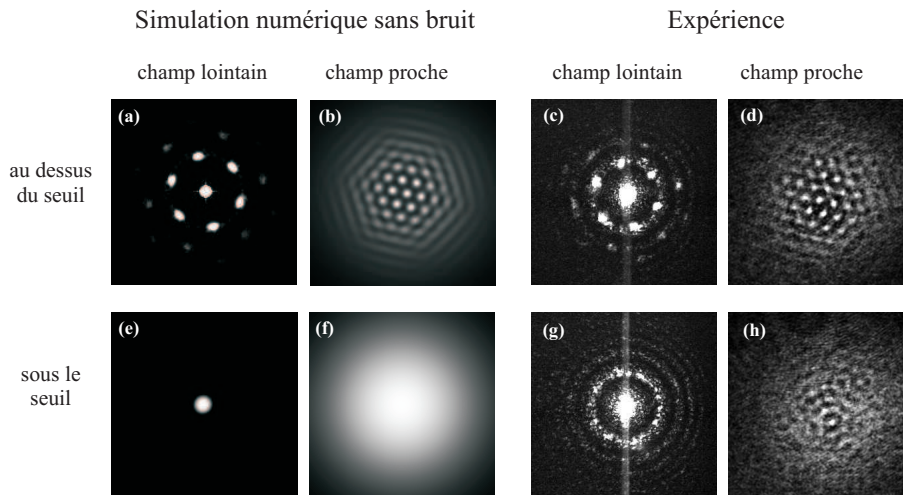


FIGURE 2.2: Comparaison entre les structures transverses prédites à partir du modèle déterministe (a,b,e,f) et celles obtenues expérimentalement (c,d,g,h) pour des intensités de pompe supérieures (a-d) et inférieures (e-h) au seuil.

9. C'est à dire induites par des fluctuations quantiques. Le bruit est de type additif.

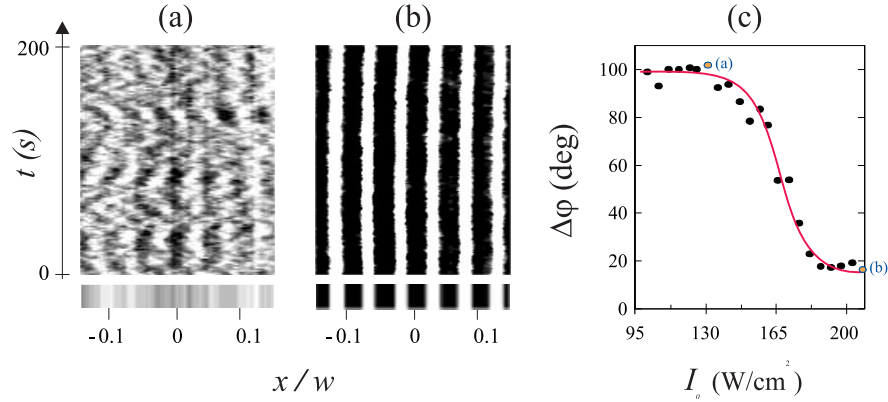


FIGURE 2.3: Évolution spatio-temporelle des rouleaux expérimentaux (a) sous et (b) au dessus du seuil. (a) $I_0 = 130 \text{ W/cm}^2$ et (b) $I_0 = 205 \text{ W/cm}^2$. Les rectangles inférieurs représentent la moyenne temporelle sur 500 secondes. (c) Variation brutale de l'écart type $\Delta\varphi$ de la phase spatiale des rouleaux au voisinage du seuil $I_0 \sim 165 \text{ W/cm}^2$. Les points en orange correspondent aux diagrammes spatio-temporels (a) et (b).

Avant nos études sur les précurseurs en morphogenèse optique, ceux-ci n'avaient été étudiés que de manière théorique et pour des systèmes dont la source de bruit était d'origine quantique (e.g. [206, 224]). Dans ce contexte, l'influence du bruit classique nécessitait d'être résolue. De plus comme la Fig. 2.2 le montre, la localisation du seuil est établie par la transition des anneaux vers les six spots dans l'espace de Fourier [Fig. 2.2(g,c)]. Il était donc logique d'examiner si dans la configuration à une dimension transverse un tel type de transition existait aussi¹⁰ et si elle pouvait être utilisée comme critère de localisation du seuil en présence de bruit.

Dans la lame de cristal liquide avec rétroaction optique (Fig. 1.4) pompé par un faisceau transverse quasi-unidimensionnel (1D) les structures se développant sont des spots¹¹ alignés suivant une seule direction. Leur évolution au cours du temps représentée sous forme de diagramme spatio-temporel montre, sous le seuil, des rouleaux précurseurs dont la phase spatiale fluctue aléatoirement [Fig. 2.3(a)]. Par contre, au delà du seuil cette phase spatiale est verrouillée [Fig. 2.3(b)]. Ce que nous montrons expérimentalement dans [158] (article joint ci-après) c'est que la traversée du seuil est caractérisée par une localisation de la phase spatiale φ des rouleaux [Fig. 2.3(c)]. En effet, l'évolution de l'écart type $\Delta\varphi$ de cette phase montre une variation brutale de $\Delta\varphi$ au voisinage du seuil [Fig. 2.3(c)]. Cette transition ne coïncide pas exactement avec le seuil en absence de bruit mais définit le point de changement de phase entre les régimes sous le seuil et au dessus du seuil en présence de bruit. On remarque ici la différence d'approche de la dynamique des systèmes bruités. En absence de bruit, le seuil correspond au point de bifurcation entre deux solutions stables ou instables du système. Par contre, en présence de bruit, c'est la notion de phase qui est pertinente. Le système passe d'un état à un autre via une transition de phase. Par exemple, ici, un état où la phase spatiale est aléatoire à un état où elle

10. En effet, à une dimension transverse, le champ lointain est caractérisé par deux spots à la fois sous et au dessus du seuil. Ce qui ne permet pas de localiser la transition.

11. Ce sont pratiquement des spots vu la nature unidimensionnelle transverse du système.

est déterminée. La notion de seuil n'a plus de sens strict comme pour un système déterministe. On peut cependant parler de "seuil en présence de bruit", sachant que ce terme signifie alors point de transition de phase entre deux états du système.

La traversée du seuil est caractérisée par une localisation de la phase spatiale φ des rouleaux de la structure.

Ces observations expérimentales sont en excellent accord avec les simulations de l'Eq. (2.4) possédant un bruit additif d'origine classique. Par comparaison entre les simulations et l'expérience, le niveau de bruit expérimental ε peut être mesuré à partir de la raideur de la pente de transition de $\Delta\varphi$, ce qui donne une estimation à $\varepsilon \simeq 10^{-2}$.

En résumé, les précurseurs apparaissant en présence de bruit, sont des rouleaux dont la longueur d'onde spatiale est déjà celle de la structure qui apparaît au dessus du seuil mais dont la phase spatiale est aléatoire. A la transition vers la structure établie, la phase spatiale se verrouille de façon soudaine. Cette propriété permet de localiser le point de transition de phase (ou seuil en présence de bruit) ainsi que le niveau de bruit dans le système.

PHYSICAL REVIEW A **66**, 063805 (2002)**Noisy precursors in one-dimensional patterns**

G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523, Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

(Received 29 May 2002; published 12 December 2002)

Noisy pattern precursors have been observed experimentally in a Kerr-like slice subjected to one-dimensional (1D) optical feedback. These noise-induced patterns appear below threshold and anticipate the characteristics of the incoming patterns. In our 1D system, precursors are rolls with an undefined spatial phase which wanders erratically and locks spatially when crossing the threshold. Phase localization allows for a criterion to define the threshold in presence of noise. The experimental observations are well reproduced by the standard model of the Kerr slice medium with optical feedback when Langevin noise terms are included.

DOI: 10.1103/PhysRevA.66.063805

PACS number(s): 42.65.Sf, 47.54.+r, 05.40.-a, 05.45.-a

I. INTRODUCTION

Pattern formation in optical systems has received several waves of interest. First, threshold conditions were derived and the mechanisms through which the patterns, e.g., hexagons or rolls, originate were discussed [1]. Recently, the interplay between the quantum nature of light and pattern formation was explicitly considered [2]. Quantum images were predicted on the basis of models leading to Fokker-Planck type of equations or to stochastic equations equivalent to the classical models in which noise terms have been added [3]. On the experimental side, the quantum images are still to be observed. In this context, the influence of classical noise in pattern formation must be cleared out so as to separate the quantum effects from the classical ones.

Indeed, classical noise (e.g., thermal noise) may have nontrivial effects in nonlinear spatially extended systems, such as noise-sustained structures [4] and precursors [5]. Noisy precursors were first observed in temporal dynamical systems where the presence of a period doubling or a Hopf bifurcation may be anticipated in the spectrum of the variables [6]. In spatiotemporal dynamics, noisy precursors correspond to the anticipation, below threshold, of some characteristics (such as the wave number) of the pattern appearing above threshold. For instance, a ring in the Fourier transform (FT) of the pattern amplitude (the far field) is observed below the onset in Rayleigh-Bénard convection [5]. This ring reduces at threshold to six equidistant spots in the case of a hexagonal pattern. Thus, the precursors correspond to a progressive selection of the modulus of the wave vectors whose azimuths become fixed above onset, giving rise to a good criterion for the localization of the onset. However, in transverse one-dimensional (1D) systems, such a transition may not be observed since roll patterns are characterized by two spots in the far field both below and above the threshold. Such rolls were observed in a 1D electroconvection system by Rehberg [7] with a fluctuating phase below threshold. These phase fluctuations may be used as a tool to study and characterize 1D noisy precursors.

The purpose of this article is to show that 1D noisy precursors also exhibit localization in a suitable representation and to propose a reliable criterion for “threshold location” in 1D optical pattern forming systems in presence of classical

noise. We consider here 1D optical systems in which roll patterns build up above threshold in a supercritical bifurcation. Below threshold and in presence of thermal classical noise, rolls progressively develop with a spatial phase which largely fluctuates. These precursors appear through two peaks at the corresponding wave number in the Fourier space, but in 1D contrarily to the 2D case there is no qualitative change in the far field as the threshold region is crossed. We experimentally show here that threshold is then characterized by the spatial phase localization in the complex Fourier space of the associated pattern.

II. EXPERIMENTAL SETUP

The experiments have been carried out in a Kerr slice medium subjected to optical feedback. It essentially consists in a nematic liquid-crystal (LC) layer irradiated by a strong laser beam which is reflected back onto the sample by a simple plane mirror placed at a variable distance from the LC layer. The reorientation of the LC director by the laser electric field leads to a nonlinear change of its refractive index. This setup mimics the Kerr slice with feedback proposed by Firth for optical pattern formation [8]. The first bifurcation that occurs in this system is a transition between the homogeneous state and a space ordered state where rolls or hexagons appear as experimentally observed by Macdonald and Danlewski [9], and Tamburrini *et al.* [10], respectively. Noise originates here from thermal fluctuations which induce random motion of the molecular axis around the mean director azimuth, leading to local variations of the birefringence in the LC.

In our experiments, Fig. 1, the nonlinear medium is a 50- μm -thick layer of E_7 LC homeotropically anchored. This LC sample is placed inside the beam delivered by a single-mode frequency doubled $\text{Nd}^{3+}:\text{YVO}_4$ laser ($\lambda_0=532\text{ nm}$) which has been shaped by means of two cylindrical telescopes. The resulting diameters ($\approx 200\mu\text{m} \times 2800\mu\text{m}$) of the “cigar” transverse laser beam differ by a factor of 14 in the vertical (y) and horizontal (x) directions. The smallest waist (e.g., vertical) is chosen such that only one roll can develop in its direction and the system may be considered as monodimensional. After passing through the LC layer, the light is reflected back by an optical system made of two lenses and a

AGEZ *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **66**, 063805 (2002)

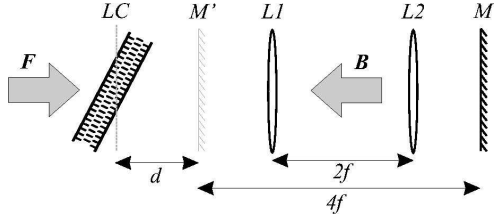


FIG. 1. Experimental setup; LC liquid crystal layer; L_1, L_2 lenses of focal length f ; M (M') real (virtual) feedback mirror; F, B forward and backward optical fields.

plane mirror in a $4f$ arrangement. This optical setup is equivalent to a fictitious mirror placed at an adjustable distance d from the LC sample where d may be positive or negative. Note that the equivalent medium is self-focusing (defocusing) if $d > 0$ ($d < 0$) [11]. The reflected beam is monitored after its second passage through the LC layer. Near and far fields are simultaneously recorded. Two control parameters are easily accessible in the experiments, namely, the maximum intensity I_0 of the incident laser beam and the distance d between the fictitious mirror and the LC layer.

III. EXPERIMENTS

We first study how the patterns appear near threshold in the presence of noise. In our operating conditions, aspect ratio $\eta \approx 37$ [12] ($d = -10$ mm, waist $w_x = 1400$ μm), this corresponds to incident intensity varying from 95 to 210 W/cm^2 . Beneath this range, the transverse profile of the transmitted beam is almost homogeneous and simply reflects the Gaussian dependence of the incident beam. Beyond it, secondary instabilities appear which are not discussed here [13]. The near threshold region exhibits two distinct regimes, a “wandering” and a “stationary” one. The latter, observed above threshold [14], corresponds to stationary fringes which are the optical 1D manifestation of the standard roll pattern [Fig. 2(c)]. The wandering regime is observed in the intensity domain between the homogeneous state and the stationary rolls making the transition continuous. This last regime is characterized by rolls with a wave number similar to that of the stationary pattern obtained at higher power, but with a

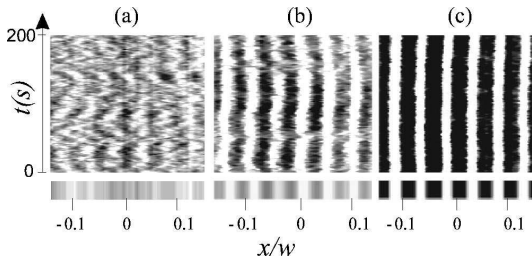


FIG. 2. Evolution of the roll patterns in the near threshold region for different values of the incident intensity I_0 (a) 130 W/cm^2 , (b) 170 W/cm^2 , and (c) 205 W/cm^2 . Vertical axis, time; horizontal axis, space. The lower rectangles represent averages over 500 s.

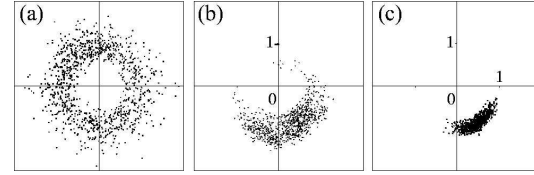


FIG. 3. Complex plane plot of the Fourier-transform component $I_{q_0}(t)$ of the transmitted intensity for different values of the incident laser power (a) 130 W/cm^2 , (b) 170 W/cm^2 , and (c) 205 W/cm^2 . Duration 500 s with a time interval 0.5 s. The amplitudes have been normalized to the average value.

fluctuating spatial phase [Figs. 2(a), 2(b)]. The transition between this regime and the stationary one is accompanied by a progressive locking of the spatial phase (Fig. 2). As it will be demonstrated by numerical simulation, the fluctuating phase is related to the presence of noise in the system, and therefore the wandering rolls are the noisy *precursors* of the incoming pattern.

The existence of the precursors is clearly exhibited using the FT of the near field intensity $I(x, t)$. This has been performed on four rolls in the central part of the pattern to select a range of almost constant input power I_0 ($\Delta I_0 / I_0 < 10^{-2}$) in order to assume almost space-independent wave number q and phase φ . Above threshold the spatial FTs of the transmitted intensity $I(q, t)$ exhibit a large and sharp peak centered at q_0 . This peak is the Fourier signature of the rolls. Its modulus \mathcal{I}_{q_0} decreases as the incident power is reduced but it is still quite visible in the region of the wandering rolls, e.g., at an incident intensity of 100 W/cm^2 . We concentrate on the evolution of the FT component at the corresponding spatial frequency q_0 through the variables \mathcal{I} and φ of the transverse modulation $I_{q_0}(t) = \mathcal{I}_{q_0}(t) \exp[i\varphi_{q_0}(t)]$ (we leave out q_0 in the following). The standard representation uses two traveling waves whose amplitudes fluctuate independently below threshold. In our experiments we use the Fourier plane representation which is equivalent but best suited since we shall see the behavior of the amplitude and the phase separately in the near threshold region.

On Fig. 3, we have plotted in the complex plane, the real and imaginary parts of $I(t)$ for different values of the incident power. In this diagram, each point is represented in polar coordinates by (\mathcal{I}, φ) . Two qualitatively different dynamical behaviors are observed: (i) well below threshold [Fig. 3(a)], the FT gives a cloud of points centered around zero, indicating the absence of order at this wavelength, the phase φ randomly fluctuates within 2π , (ii) well above threshold [Fig. 3(c)], i.e., when the roll pattern is stationary, the points cluster in a zone whose size is fixed by the noise level. These two regimes are connected by the noisy precursors domain where the point distribution shrinks progressively as the incident power increases [Fig. 3(b)]. The points progressively cluster in a crescent revealing progressive phase and amplitude localization. Note that the average angle of the clusters displayed in Figs. 3(b) and 3(c) is pinned by the boundary conditions and particularly by the Gaussian profile of the pump intensity. Measurements remain consis-

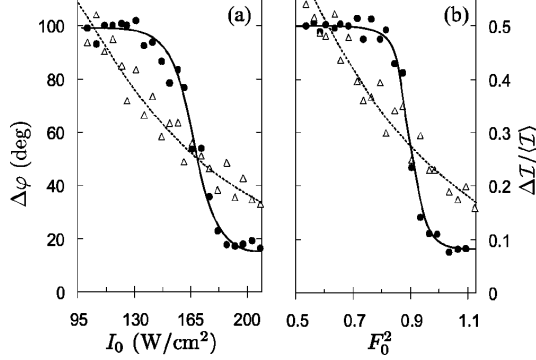


FIG. 4. Dependence vs input intensity of the phase standard deviation $\Delta\varphi$ (black filled circles) and of the relative amplitude standard deviation $\Delta I/\langle I \rangle$ (triangles) in the near threshold region (a) experiments, (b) numerical simulations.

tent for total recording times in the 10–500 s range.

We evaluate the phase and relative amplitude spread by plotting the evolution of their standard deviations ($\Delta\varphi$ and $\Delta I/\langle I \rangle$) near the threshold [Fig. 4(a)]. The curve obtained for $\Delta\varphi$ clearly evidences the two dynamical behaviors ($\Delta\varphi \approx 100^\circ$ and 20°) previously mentioned. The first one corresponds to a uniform distribution ($\Delta\varphi = 104^\circ$) of the phase, indicating that the phase can take any value within 360° . The second one corresponds to the stationary rolls. The interesting feature is that these two regimes are well separated by a rather sharp transition of $\Delta\varphi$ near 165 W/cm^2 (or 0.95 W). By comparison, the curve of the roll amplitude standard deviation $\Delta I/\langle I \rangle$ is very much smoother [Fig. 4(a)]. The plot of the wave-number q_0 evolution shows that its mean value remains constant throughout the observed range. Thus, the roll precursors have already the “good” wave number but no definite phase. The spatial phase localization is the 1D counterpart of the azimuthal phase locking in the 2D systems.

IV. NUMERICAL SIMULATIONS

Our results have been compared with numerical simulations on the basis of the equations proposed by Firth for a Kerr slice medium with a single feedback mirror [8]. Thermal fluctuations in the LC are modeled by adding a Gaussian white-noise term $\xi(x,t)$ in the medium refractive index $n(x,t)$ equation which reads in adimensional form,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}n + \frac{\partial n}{\partial t} + n = |F|^2 + |B|^2 + \sqrt{\varepsilon}\xi$$

with

$$B = \sqrt{R}e^{i\sigma(\partial^2/\partial x^2)}e^{i\chi n}F.$$

F is the forward input optical field, its Gaussian transverse profile is taken into account by using $F(x) = F_0 \exp(-x^2/w^2)$, where w is the beam radius at sample position. B is the backward reflected field and R is the mirror

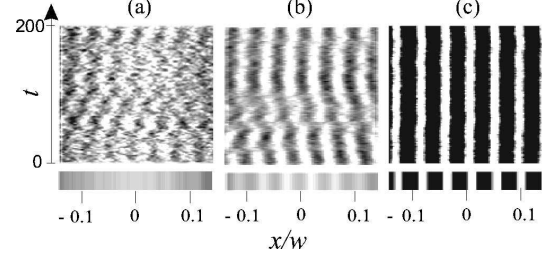


FIG. 5. Numerical simulations with parameters $\chi=1$, $\sigma=-10$, $R=0.9$, $\eta=35$, $F_0=0.79$ (a), 0.9 (b), and 1.09 (c). Vertical axis, time. Horizontal axis, space. Lower rectangles represent averages of 500 time units.

reflectivity. The noise is scaled by ε and χ parametrizes the Kerr effect. $\sigma = d/(k_0 l_D^2)$ measures the diffraction to diffusion ratio, where d is the optical feedback length, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ is the laser wave number and l_D is the diffusion length of the liquid crystal (which is $\approx 8 \mu\text{m}$ in our system [15]). The spatial variables are scaled with respect to l_D and the time to the relaxation time (of the order of the second). A standard procedure has been used for integrating the stochastic equations [16]. The experimental observations are well reproduced by numerical simulations for $\sigma=-10$, $w=200$, and F_0^2 between 0.5 and 1.1 typically. If no noise is injected in the model ($\varepsilon=0$), we can determine the exact threshold value ($F_0^2=0.9$). Below this value no pattern is observed. However if noise is added ($\varepsilon=10^{-2}$), below threshold, e.g., $F_0^2=0.79$, rolls with clear contrast are observed at any time as in the experiments.

As shown on Fig. 5(a), when time goes on, they experience random translational jumps. For higher F_0^2 (1.05), the spatial phase locks and the pattern becomes stationary [Fig. 5(c)]. The evolution of these patterns is still characterized by the localization property of their spatial phase and amplitude. A steeper transition is observed for the phase as compared to the amplitude standard deviation as shown on Fig. 4(b). More quantitatively, the noise amplitude $\varepsilon=10^{-2}$ was chosen to match the experiments by measuring the steepness of the transition of $\Delta\varphi$. The larger the noise, the wider the transition. Thus, the comparison between experiments and simulations can serve to measure the noise parameter, assuming that experimental noise statistics follow the standard distribution for thermal effects.

V. DISCUSSION

Numerical simulations allow us to compare the system with and without noise, the latter giving access to the noiseless threshold value ($F_0^2=0.9$). We can then discuss about the value of this threshold as compared to the phase localization transition location or else the threshold obtained from amplitude (of modulation) versus F_0 . Indeed, the relatively sharp transition of the phase spread may be used to redefine the threshold in presence of noise as, e.g., the onset of phase coherence in the system. In the case of Fig. 5, the inflexion point of the $\Delta\varphi$ curve is measured at 0.895 which is very

AGEZ *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **66**, 063805 (2002)

close to the threshold value in the absence of noise. Fits carried out on amplitude \mathcal{I} evolution versus control parameter F_0^2 give values from 0.85 to 0.95 depending on the fitting and averaging procedures. We have checked that this criterion for finding the threshold is robust with respect to changing the sampling and recording times.

VI. CONCLUSION

In conclusion, the investigation of the onset of pattern formation in a 1D system reveals the existence of noisy precursors. They correspond to an emerging periodic pattern with a preferred wavelength equal to that of the rolls observed above threshold but these rolls experience random translational jumps. A Fourier analysis indicates that the crossing of the threshold is characterized by a localization of their transverse spatial phase that locks above threshold. This transition that coincides with the crossing of the threshold suggests a criterion for threshold location in noisy systems. This buildup of 1D noisy precursors is somehow the analog

in the complex plane of the progressive localization of 2D precursors in the real space plane, more precisely in the far-field transform in real space [5]. Our experimental observations are in good agreement with a model in which a classical noise term has been introduced and therefore can be used to scale noise in experimental systems. All these classical noise-induced phenomena must be considered in future work on quantum images which investigate the effect of quantum noise on patterns.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank M. San Miguel, P. Colet, P. Scotto, and M. Taki for useful discussions. The Laboratoire de Physique des lasers, Atomes et Molécules is Unité de Recherche Mixte du CNRS. The Center d'Études et de Recherches Lasers et Applications was supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord-Pas de Calais, and the Fonds Européen de Développement Économique des Régions.

-
- [1] L.A. Lugiato, Phys. Rep. **219**, 293 (1992).
 - [2] A. Gatti and L. Lugiato, Phys. Rev. A **52**, 1675 (1995).
 - [3] A. Gatti, H. Wiedemann, L.A. Lugiato, I. Marzoli, G.-L. Oppo, and S.M. Barnett, Phys. Rev. A **56**, 877 (1997).
 - [4] M. San Miguel and R. Toral, *Stochastic Effects in Physical Systems* (Kluwer Academic, Dordrecht, 2000).
 - [5] M. Wu, G. Ahlers, and D.S. Cannell, Phys. Rev. Lett. **75**, 1743 (1995).
 - [6] C. Jeffries and K. Weisenfeld, Phys. Rev. A **31**, 1077 (1985); K. Wiesenfeld, *ibid.* **32**, 1744 (1986); P. Pieranski and J. Malecki, *ibid.* **34**, 582 (1986).
 - [7] I. Rehberg, S. Rasenat, M. de la Torre Juárez, W. Schöpf, F. Hörner, G. Ahlers, and H.R. Brand, Phys. Rev. Lett. **67**, 596 (1991).
 - [8] W.J. Firth, J. Mod. Opt. **37**, 151 (1990); W.J. Firth and G.P. D'Alessandro, Phys. Rev. Lett. **66**, 2597 (1991).
 - [9] R. Macdonald and H. Danlewski, Opt. Lett. **20**, 441 (1995).
 - [10] M. Tamburrini, M. Bonavita, S. Wabnitz, and E. Santamato, Opt. Lett. **18**, 855 (1993).
 - [11] E. Ciarabella, M. Tamburrini, and E. Santamato, Appl. Phys. Lett. **63**, 1604 (1995).
 - [12] The aspect ratio η corresponds to the ratio of the beam diameter to the theoretical roll wavelength calculated in a uniform configuration. It measures the transverse size of the system.
 - [13] E. Louvergneaux, Phys. Rev. Lett. **87**, 244501 (2001).
 - [14] At this point it is difficult to define rigorously a "threshold." However in experiments, a threshold region as defined by the emergence of "almost stationary" rolls is easily located within 10%. In simulations, threshold is used by reference to the noiseless situation keeping in mind the continuous transition in presence of noise.
 - [15] E. Santamato, E. Ciarabella, and M. Tamburrini, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **251**, 127 (1994).
 - [16] M. Neufeld, D. Walgraef, and M. San Miguel, Phys. Rev. E **54**, 6344 (1996).

2.4 Loi universelle pour les bifurcations stochastiques supercritiques

Comme on vient de le voir, une des conséquences du bruit est de masquer les points critiques tels que celui correspondant au point de bifurcation entre deux états du système. Dans le cas présenté dans la sous-section précédente 2.3, la bifurcation supercritique déterministe laisse place en présence de bruit à une transition progressive entre les deux phases, masquant par là même le point de changement de structuration. Ces points de bifurcation sont cruciaux en dynamique non-linéaire car ils correspondent aux changements d'équilibre dans le système qui transite alors d'une phase à une autre. Au delà de leur détermination, c'est la caractérisation des bifurcations stochastiques elle-même qui est fondamentale dans le cadre de l'étude plus générale des bifurcations. Dans le cas déterministe, la forme et les caractéristiques des bifurcations sont obtenues facilement à partir des équations d'amplitudes. Par contre, en présence de bruit, de telles équations ne peuvent être dérivées à partir du modèle stochastique. La démarche souvent suivie consiste à traiter les régimes de part et d'autre de la bifurcation de manière indépendante mais sans continuité entre les deux solutions obtenues. Par exemple, dans les systèmes bruités spatialement étendus, l'amplitude des précurseurs [218], obtenue à partir d'une analyse linéaire de l'équation stochastique, diverge au point de bifurcation et donc n'est pas connectée à l'amplitude moyenne de la structure au dessus du seuil obtenue à partir de l'équation déterministe. Ainsi, aucune expression analytique universelle de l'amplitude du mode critique¹² n'existe pour les bifurcations supercritiques en présence de bruit¹³. C'est à dire aucune expression décrivant la transition complète d'avant à après le point de bifurcation. C'est cette description universelle des bifurcations supercritiques dans les systèmes transverses unidimensionnels (uniformes ou variant très lentement avec l'espace) soumis au bruit qui fait l'objet de l'étude présentée dans la référence [146] jointe ci-après et qui est décrite maintenant.

La démarche suivie, pour obtenir l'expression analytique de l'amplitude décrivant la bifurcation, consiste à réduire l'équation différentielle partielle stochastique de type Langevin¹⁴ du système en une équation différentielle ordinaire pour l'amplitude a du mode le plus instable. Celle-ci est dérivée pour des variations spatiales très lentes de a ¹⁵. Les solutions de cette équation sont ensuite obtenues grâce à l'équation de Fokker-Planck qui régit l'évolution temporelle de la densité de probabilité de l'amplitude a [212]. Le calcul de la distribution stationnaire de cette probabilité donne alors l'expression de l'amplitude la plus probable a_{max} [Eq. (5) dans [146]] caractérisant la bifurcation supercritique stochastique :

$$|a_{max}| = \sqrt{\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\eta}}{2}} \quad (2.6)$$

μ représente l'écart au point de bifurcation ($\mu = 0$) et η le niveau de bruit renormalisé. La dépendance de l'Eq. (2.6) avec le niveau de bruit η permet de suivre la déformation continue de la bifurcation. La comparaison de l'expression analytique de a_{max} avec ses valeurs calculées à

12. C'est à dire le mode le plus instable.

13. ni d'ailleurs pour les bifurcations souscritiques.

14. par exemple du modèle de Swift-Hohenberg [193].

15. Les tests effectués sur une amplitude a qui dépend de l'espace montrent le même accord avec l'expression analytique de l'Eq. (2.6) que celui obtenu pour l'amplitude indépendante de l'espace.

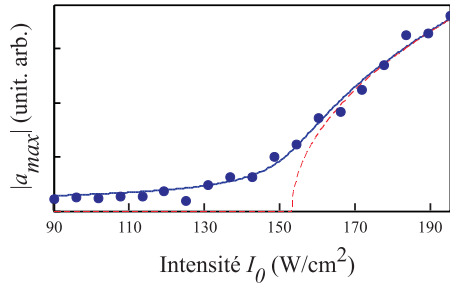


FIGURE 2.4: Diagramme de bifurcation supercritique stochastique obtenu pour le système expérimental à cristaux liquides avec feedback optique [146]. Les points correspondent aux données expérimentales de $|a_{max}|$ et la courbe en bleu à l'ajustement suivant la formule de l'Eq. (2.6). La courbe en pointillés est la bifurcation déterministe déduite de l'ajustement précédent.

partir des simulations numériques montre un parfait accord. Ceci indique que la formule de l'Eq. (2.6) est pertinente pour décrire les bifurcations supercritiques stochastiques. La détermination du point de changement de phase en présence de bruit fait apparaître un décalage par rapport au point de bifurcation déterministe ($\mu = 0$) d'une valeur égale à $\mu_{min} = +0.55\sqrt{\eta}$. On retrouve ici une des conséquences bien connue du bruit sur les points critiques qui est le phénomène de décalage de ces points de bifurcation [225, 226].

L'expression de l'amplitude a_{max} décrivant les bifurcations stochastiques supercritiques est $|a_{max}| = \sqrt{\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\eta}}{2}}$

L'application de cette expression universelle a été testée sur le dispositif expérimental à cristaux liquides avec feedback optique en configuration 1D. En effet, dans ce cas, les rouleaux transverses apparaissent via une bifurcation supercritique [173]. Le résultat est présenté sur la Fig. 2.4 où les données expérimentales de $|a_{max}|$ sont tracées conjointement avec la formule de l'Eq. (2.6) (courbe en bleu). Le graphique montre que l'expression analytique s'ajuste parfaitement aux valeurs expérimentales. Ainsi, l'expression universelle de l'amplitude de l'Eq. (2.6) est bien pertinente pour décrire la bifurcation spatiale supercritique de notre système bruité et plus généralement de tous les systèmes physiques stochastiques présentant une bifurcation du second ordre comme les systèmes temporels, ceci pour des conditions de variations lentes spatiales.

PHYSICAL REVIEW E 77, 026218 (2008)

Universal shape law of stochastic supercritical bifurcations: Theory and experimentsGonzague Agez,¹ Marcel G. Clerc,¹ and Eric Louvergneaux²¹*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, Casilla 487-3, Santiago, Chile*²*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR-CNRS 8523, CERLA FR-CNRS 2416,**Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

(Received 26 July 2006; revised manuscript received 11 January 2008; published 26 February 2008)

A universal analytical expression for the supercritical bifurcation shape of transverse one-dimensional (1D) systems in the presence of additive noise is given. The stochastic Langevin equation of such systems is solved by using a Fokker-Planck equation, leading to the expression for the most probable amplitude of the critical mode. From this universal expression, the shape of the bifurcation, its location, and its evolution with the noise level are completely defined. Experimental results obtained for a 1D transverse Kerr-type slice subjected to optical feedback are in excellent agreement.

DOI: [10.1103/PhysRevE.77.026218](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.026218)

PACS number(s): 05.10.-a, 45.70.Qj, 42.65.Hw

In nature, most physical systems are subjected to fluctuations. For a long time, the effects of these fluctuations were either considered as a nuisance (degradation of the signal-to-noise ratio) or ignored because it was not known how to handle them. For three decades, a wealth of theoretical and experimental research has shown that fluctuations can have rather surprisingly constructive and counterintuitive effects in many physical systems and that they can be figured out with the help of different analysis tools. These situations occur when there are mechanisms of noise amplification or when noise interacts with nonlinearities or driving forces on the system. The most well-known examples in zero-dimensional systems are noise-induced transition [1] and stochastic resonance [2]. More recently, examples of spatially extended systems are noise-induced phase transition, noise-induced patterns (see [3] and references therein), noise-sustained structures in convective instability [4], stochastic spatiotemporal intermittency [5], noise-induced traveling waves [6], noise-induced ordering transition [7], and front propagation [8]. Among these effects, a direct consequence of noise effects is the modification of the deterministic bifurcation shapes where the critical points and the physical mechanisms are masked by fluctuations. It is important to remark that the critical points generically represent a change of balance between forces. Hence, the characterization of noisy bifurcations is a fundamental problem due to the ubiquitous nature of bifurcations. For instance, the supercritical bifurcations transform into smooth transitions between the two states and the subcritical bifurcations experience hysteresis size modifications. In the absence of noise, the shape of a bifurcation and its characteristics are given by the analytical solution of the deterministic amplitude equation of the critical mode [9]. On the other hand, in the presence of noise, no such analytical expression can be obtained from the stochastic amplitude equation. In this latter situation, the below and above bifurcation point regimes are usually treated separately, but without continuity between their respective solutions. For instance, in noisy spatially extended systems in which the systems are characterized by the appearance of pattern precursors below the bifurcation point and by established patterns that fluctuate above this point [10], the pre-

cursor amplitude [11], obtained from the linear study of the stochastic equation, diverges at the bifurcation point and does not connect to the “mean” amplitude of the fluctuating pattern, obtained from the deterministic equation. To our knowledge, no universal analytical expression of the critical mode amplitude, describing the complete transition from below to above the bifurcation point, exists for the supercritical bifurcations in the presence of noise.

In this paper, we propose a universal description of the supercritical bifurcation shapes of one-dimensional (1D) transverse systems (either uniform or very slowly varying in space) in the presence of noise that is also valid for the second-order bifurcations of temporal (zero-dimensional) systems. *More precisely, we give a unified analytical expression for the most probable amplitude describing the supercritical bifurcations in the presence of noise, including the noise level and the deterministic bifurcation point location.* The systems under study are described by stochastic partial differential equations (SPDEs) of the Langevin type [12] (first order in time and with linear noise terms) involving additive white noise. First, we reduce the SPDE to an ordinary differential equation (ODE) for the amplitude of the critical mode. Second, we solve the Langevin ODE describing the stochastic dynamics by using a Fokker-Planck equation for the probability density of the critical mode amplitude. Then, from the stationary distribution of this amplitude, we deduce the bifurcation shape by means of the most probable value of the pattern amplitude. Finally, the comparison with experimental results obtained in a Kerr-type slice subjected to 1D optical feedback is given and leads to an excellent agreement.

Let us consider a 1D extended system that exhibits a supercritical spatial bifurcation described by

$$\partial_t \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}, \partial_x, \{\mu\}) + \sqrt{\eta_0} \vec{\zeta}(x, t), \quad (1)$$

where $\vec{u}(x, t)$ is a field that describes the system under study, \vec{f} is the vector field, $\{\mu\}$ is a set of parameters that characterizes the system, η_0 is the noise level intensity, and $\vec{\zeta}(x, t)$ is a white Gaussian noise with zero mean value and correlation $\langle \zeta^i(x, t) \zeta^j(x', t') \rangle = \delta^{ij} \delta(t' - t) \delta(x' - x)$.

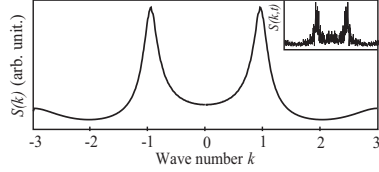


FIG. 1. Averaged Fourier transform modulus $S(k)$ of the field w for the supercritical Swift–Hohenberg equation (2) with $q=1$ obtained below the bifurcation point. The inset corresponds to an instantaneous snapshot of $S(k, t)$.

We assume that the associated deterministic system ($\eta_0=0$) possesses a stationary state \vec{u}_0 that satisfies $\vec{f}(\vec{u}_0, \partial_x, \{\mu\})=0$. Above a set of critical values $\{\mu_c\}$, the deterministic system exhibits a spatial instability such that \vec{u} reads $\vec{u}(x, t)=\vec{u}_0+e^{\lambda(k)t+i k x}\hat{u}_k$, where $\lambda(k)$ is the linear growth rate, k is the wave number of the instability, and \hat{u}_k is the eigenvector associated with this critical mode. Close to $\{\mu_c\}$, for $\lambda(k)<0$ (i.e., \vec{u}_0 is stable), the profile of λ already displays two maxima for non-null wave numbers close to the critical ones $\pm k_c$. Hence, below the bifurcation point, when noise is present, among all the excited spatial modes, the ones associated with the maximum growth rate ($k \approx \pm k_c$) will rule the dynamics. The dynamical behavior of the system will then be characterized by pattern precursors as illustrated in Fig. 1. It shows the instantaneous $S(k, t)$ and averaged $S(k)=\langle S(k, t) \rangle_t$ moduli of the Fourier transform of the field \vec{u} , also called the structure factor, for the supercritical Swift–Hohenberg equation [3] below the deterministic threshold. We can remark that the maxima of the function, both instantaneous and averaged, already give the incoming critical wave numbers $k_c = \pm 1$ (Fig. 1).

To describe the stochastic supercritical bifurcations of Eq. (1) type in a unified description close to the instability threshold, we consider the example of the stochastic supercritical Swift–Hohenberg model [3] for pattern formation which reads

$$\partial_t w = \mu w - w^3 - (\partial_{xx} + q^2)w + \sqrt{\sigma_0} \zeta(x, t), \quad (2)$$

where $w(x, t)$ is in general a real field. $\mu - q^4$ is the bifurcation parameter, q is the transverse wave number of periodical solutions, $\zeta(x, t)$ is a Gaussian white noise with zero mean value and correlation $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$, and σ_0 represents the intensity of noise. A trivial uniform stationary state of the deterministic model of Eq. (2) is $w(x, t)=0$. This state is stable for $\mu < 0$ and exhibits a supercritical spatial instability for $\mu = 0$, which gives rise to the appearance of a pattern for $\mu > 0$. In order to describe the appearance of pattern formation, we consider the small bifurcation parameter ε such that $\varepsilon = \mu \ll 1$. The transverse domain of the system is taken to be finite, of size L , and for the sake of simplicity we consider periodic boundary conditions $w(x = -L/2, t) = w(x = L/2, t)$. To capture the dynamics of Eq. (2) we introduce the ansatz

$$w = \frac{a(T)}{\sqrt{3}} e^{iqx} + \frac{\bar{a}(T)}{\sqrt{3}} e^{-iqx} + U(a, \bar{a}, x), \quad (3)$$

where $q \approx 2\pi n/L$ for wide enough L , $a(T)$ is the space-independent amplitude of the critical mode q , and $U(a, \bar{a}, x)$ is a small correction function including high-order terms in a, \bar{a} . This ansatz is restricted to the single amplitude $a(T)$ of the most unstable wave vector $q = k_c$. It is clear that to describe the full spatial variation of $a(x, T)$ we should consider more critical wave vectors as shown in Refs. [13, 14]. However, in this paper, we derive in a first step an analytical expression of the most probable value of $a(T)$. We will show, with the help of numerical simulations, that the plot of the most probable value of $a(x, T)$ is in very good agreement with the one of the most probable value of $a(T)$ based on a single wave vector approximation. The “taking into account” of more wave vectors would lead to a functional amplitude for the stationary probability density of a and is out of the scope of this paper. Work in this direction is in progress.

The amplitude a , slow time $T = \varepsilon t$, and $U(a, \bar{a}, x)$ are of the order of $\varepsilon^{1/2}$, ε , and ε^3 , respectively. Introducing the ansatz (3) into Eq. (2), we obtain at order ε^3

$$\begin{aligned} (\partial_{xx} + q^2)^2 U = & \{-\partial_T a + \varepsilon a - |a|^2 a\} \frac{e^{iqx}}{\sqrt{3}} - \frac{a^3}{3\sqrt{3}} e^{-i3qx} \\ & + \sqrt{\sigma_0} \zeta(x, t) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (4)$$

where “c.c.” means “complex conjugate.” The linear operator $(\partial_{xx} + q^2)^2$ is a self-adjoint with inner product $\langle f | g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f \bar{g}$, and it is not invertible because $(\partial_{xx} + q^2)^2 e^{\pm i q x} = 0$. In order to have solutions for U , we multiply the right-hand side of Eq. (4) by e^{-iqx}/L , integrate in whole domain, and impose that it be equal to zero (Fredholm alternative or solvability condition). Hence, we obtain the amplitude equation

$$\partial_T a = \varepsilon a - |a|^2 a + \sqrt{\eta} \xi(T), \quad (5)$$

where $\eta = 3\sigma_0$ and

$$\xi(T) \equiv \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \zeta(x, T) e^{-iqx} dx,$$

with correlation $\langle \xi(T) \xi(T') \rangle = 0$ and $\langle \xi(T) \bar{\xi}(T') \rangle = \delta(T' - T)$. It is important to note that the dynamics close to supercritical spatial bifurcation is described by Eq. (5) [9].

The general way of obtaining a solution of the Langevin equation (5) is by use of a Fokker–Planck equation which provides us with a deterministic equation satisfied by the time-dependent probability density $P(a, \bar{a}; T)$ [12] of the amplitude a , which reads

$$\partial_T P = \partial_a \left\{ -\varepsilon a + |a|^2 a + \frac{\eta}{2} \partial_{\bar{a}} \right\} P + \text{c.c.} \quad (6)$$

The associated stationary probability density of the modulus of a is

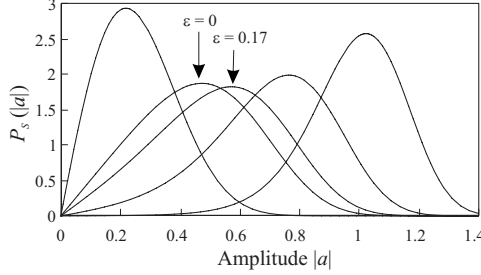


FIG. 2. Stationary probability distribution $P_s(|a|)$ for different values of the bifurcation parameter ε . From left to right, $\varepsilon = -1, 0, 0.17, 0.5, 1$. $\eta = 0.1$.

$$P_s(|a|, \varepsilon, \eta) = Q(\varepsilon, \eta) |a| e^{\varepsilon |a|^2 - (|a|^4/2)/\eta}, \quad (7)$$

where $Q(\varepsilon, \eta) \equiv 2\sqrt{2}e^{-\varepsilon^2/2\eta}/\text{erfc}(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\eta}})\sqrt{\pi\eta}$. This stationary probability density is shown in Fig. 2 for different values of the bifurcation parameter ε . The probability density function is not symmetrical with respect to its maximum so that the most relevant quantity for characterizing $P_s(|a|, \varepsilon, \eta)$ is its maximum and not its mean value as usually calculated, e.g., in experiments. The value of $|a|$ corresponding to the maximum of $P_s(|a|, \varepsilon, \eta)$ occurs at the expectation value $|a_{\max}|$ given by

$$|a_{\max}| = \sqrt{\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 2\eta}}{2}}. \quad (8)$$

The comparison of this analytical expression with the numerical simulations performed on Eq. (5) is depicted in Fig. 3. It clearly shows a very good agreement between the numerical values of $|a_{\max}|$ obtained from the numerical simulations of the stochastic supercritical Swift–Hohenberg equation (2) and its analytical values [formula (8)]. Thus, the plot of $|a_{\max}|$ gives the searched for supercritical bifurcation

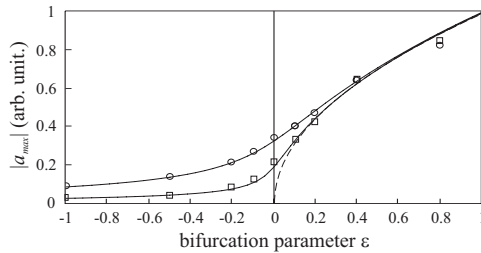


FIG. 3. Influence of the noise level η on the shape of the imperfect supercritical bifurcation. The squares and circles are obtained from the numerical simulations of the stochastic Swift–Hohenberg equation (2) with $q=1$ and a noise intensity, respectively, $\sigma_0=0.001$ and $\sigma_0=0.01$. The solid curves correspond to the analytical expectation value $|a_{\max}|$ of Eq. (8); the corresponding mean-square fit values are $\eta^{(fit)}=0.0035$ and $\eta^{(fit)}=0.032$ (in accordance with the relation $\eta=3\sigma_0$).

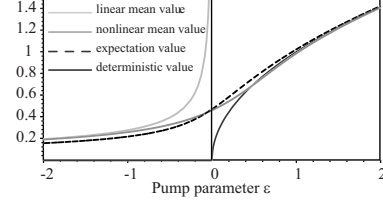


FIG. 4. Bifurcation diagrams of the amplitude of the critical mode obtained for different solutions of Eq. (5)—namely, the deterministic value, the expectation value $|a_{\max}|$, and the linear and nonlinear mean values $\langle |a| \rangle_{\text{linear}}$ and $\langle |a| \rangle_{\text{nonlinear}}$, respectively (see text for value definitions).

shape in the presence of noise. As this latter expression includes the noise level η , we can easily follow the continuous deformation and evolution of the bifurcation shape with the level of noise as can be seen in Fig. 3. Finally, when the bifurcation parameter ε is driven far from 0 ($|\varepsilon| \gg 1$), this expectation value converges to zero ($\sqrt{-\eta/2\varepsilon}$) for negative values of ε and to $\sqrt{\varepsilon}$ for positive values, then coinciding exactly with the values of the amplitude a for the deterministic case of Eq. (5). Thus, the expression of $|a_{\max}|$ is the relevant one to describe the noisy supercritical bifurcations including the noise level and the bifurcation point location ($\varepsilon=0$) of systems satisfying Eq. (1).

Let us now discuss the choice of $|a_{\max}|$ for describing the noisy supercritical bifurcation against other quantities such as, for instance, the averaged value of a . If we neglect the nonlinear term in the Langevin equation (5), one can perform a linear stability analysis that provides us with the linear mean value of the amplitude modulus, $\langle |a| \rangle_{\text{linear}} = \sqrt{-\pi\eta/4\varepsilon}$. Note that this value diverges at the bifurcation point and is only valid for $\varepsilon < 0$ (Fig. 4). The nonlinear mean value $\langle |a| \rangle_{\text{nonlinear}}$ is computed numerically from the time average of a . All the linear mean, nonlinear mean, expected, and deterministic values of the critical mode amplitude are reported in Fig. 4 for comparison. The interesting region is located in the vicinity of the bifurcation point ($\varepsilon=0$) where the behaviors of the different curves strongly differ. The linear mean value and the deterministic value do not correspond to a realistic physical behavior since the amplitude never diverges at threshold and we are considering a noisy system respectively. Only the nonlinear mean and expected values can mimic the supercritical bifurcation in presence of noise. However, as we have mentioned earlier, due to the asymmetry of $P_s(|a|, \varepsilon, \eta)$, the most probable and relevant value for describing the evolution of the amplitude versus the control parameter is the expectation value $|a_{\max}|$.

Regardless of the sign of ε , the width of the stationary probability distribution decreases as $|\varepsilon|$ increases far from 0 (Fig. 2). It is maximum when ε corresponds to a change in the dynamics of the system. The dynamics is then characterized by large amplitude fluctuations coinciding with a minimum of $P_s(|a_{\max}|)$ versus ε . In the case of Fig. 5 this *intrinsic bifurcation point* occurs at $\varepsilon_{\min} \approx 0.1$ which is shifted from the deterministic bifurcation point $\varepsilon=0$. This shift reminds us of bifurcation postponements as in [15]. A straightforward calculation gives

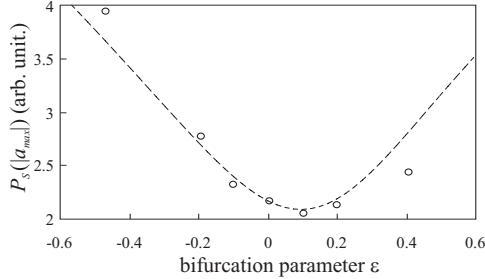


FIG. 5. Evolution of $P_s(|a_{\max}|)$ versus ε for $\eta=0.03$ ($\sigma_0=0.01$) showing a minimum at the intrinsic bifurcation point $\varepsilon_{\min} \approx 0.1$.

$$\varepsilon_{\min}(\eta) \approx 0.55\sqrt{\eta}.$$

Thus, the plot of $P_s(|a_{\max}|)$ provides us with the intrinsic bifurcation point location which corresponds to the relevant location for the change in the dynamical regime of the stochastic system.

In addition to the very good agreement between the analytical expression of $|a_{\max}|$ and the numerical simulations, we checked the assumption on the restriction to the single most unstable wave vector $q \equiv k_c$ in the ansatz (3). We performed a space and time extraction of the critical mode amplitude $a(x, T)$ by the well-known Hilbert transformation. We got for each time T the spatial profile $a(x, T)$ [Fig. 6(c)] of $w(x, T)$

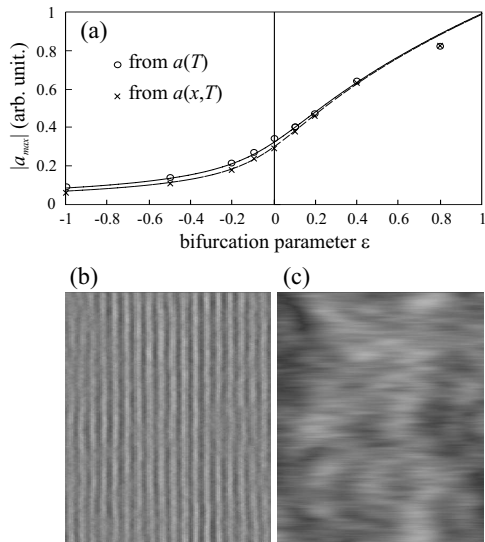


FIG. 6. (a) Comparison of the stochastic bifurcation shapes obtained from a space-independent amplitude $a(T)$ [Eq. (3)] and from a space-dependent amplitude $a(x, T)$ for $\eta=0.03$. (b) Spatial evolution of $w^2(x, T)$ versus time T and (c) its corresponding amplitude $a(x, T)$. Space and time are, respectively, the horizontal and vertical axes.

[Fig. 6(b)]. Then, we plotted the stationary probability densities to extract the corresponding values of the expectation value $|a_{\max}|$. Figure 6(a) depicts the stochastic bifurcation then obtained from $a(x, T)$ together with that obtained from $a(T)$. The two shapes give quite the same values of η : 0.032 with the first method and 0.028 with the Hilbert treatment. Thus, the single wave vector approximation in the ansatz (3) is a good assumption and the analytical expression of $|a_{\max}|$ is relevant to describe the shape of the SPDE (2).

In order to completely validate the universal law of Eq. (8), we have applied our analysis to experiments realized on a noisy 1D transverse system known to exhibit a supercritical bifurcation at the onset of roll pattern formation. The system is a nematic liquid-crystal (LC) slice subjected to optical feedback (cf. inset of Fig. 8) based on the well-known feedback optical system [16,17]. The corresponding stochastic model reads [4]

$$\partial_t u = (\partial_{xx} - 1)u + |F|^2 + R|e^{i\sigma\partial_{xx}}(e^{i\chi u}F)|^2 + \sqrt{\eta_0}\zeta, \quad (9)$$

where $u(x, t)$ stands for the refractive index of the nonlinear nematic LC layer, t and x are the time and transverse space variables scaled with respect to the relaxation time τ and the diffusion length l_d , and R is the mirror intensity reflectivity. $\sigma = d/k_0$ where d is the slice-mirror distance and k_0 is the optical wave number of the field. F is the forward input optical field; its transverse profile is accounted for using $F(x) = F_0 \exp(-x^2/w^2)$ for a Gaussian pump beam of radius w . ζ and η_0 are the noise source and level, respectively, as defined in Eq. (1). The Kerr effect is parametrized by χ which is positive (negative) for a focusing (defocusing) medium.

Equation (9) is similar to Eq. (1) and leads to an amplitude equation [Eq. (24) in Ref. [18]] which is the same as the deterministic part of Eq. (5). The spatial variations of the pumping beam around its maximum are slow (less than 10% for a domain width L including fewer than ten rolls) due to the high transverse aspect ratio ($2wk_c/2\pi \approx 30$). Thus, the conditions are fulfilled to apply the previous analysis to our experimental noisy system in order to describe its supercritical bifurcation. Figure 7 shows probability density functions calculated from experimental spatiotemporal diagrams for a transverse domain width L around the center of the Gaussian pumping beam. In Fig. 8 we have plotted the experimental recordings of the amplitude expectation value $|a_{\max}|$ together with its analytical expression [Eq. (8)]. We can see that the analytical expression fits very well the experimental values. It provides us with the deterministic threshold $I = 151 \text{ W cm}^{-2}$. The intrinsic bifurcation point ε_{\min} could not be located from $P_s(|a_{\max}|)$ since this latter does not depict a clear minimum due to the Gaussian profile of $F(x)$. The analysis was performed on many regions of spatial width L ranging from very limited transverse extensions close to the center of the pump profile to the full width of the transverse profile. The results always led to the same bifurcation shape. So the universal amplitude expression of Eq. (8) is valid and relevant to describe the supercritical spatial bifurcation shape of our noisy system and more generally to describe the su-

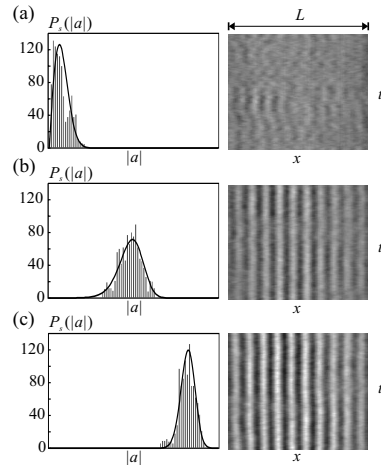


FIG. 7. Right: Spatiotemporal diagrams built from experimental roll patterns. Left: Experimental probability amplitude histograms and corresponding probability density functions [Eq. (7)]. (a) $I = 108 \text{ W/cm}^2$, (b) $I = 154 \text{ W/cm}^2$, and (c) $I = 180 \text{ W/cm}^2$.

percritical bifurcations of 1D systems in presence of noise even with nonuniform transverse profiles, assuming that they vary very slowly in space.

In conclusion, we have given an universal amplitude equation for 1D systems in the presence of noise. From this equation, we have derived an analytical expression for the

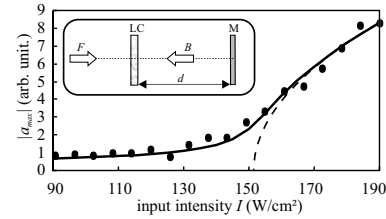


FIG. 8. Experimental bifurcation diagram for the optical feedback system. The dots are the experimental measured values of $|a_{\max}|$ and the solid curve its fitted analytical value [Eq. (8)]. The dashed line is the corresponding deterministic bifurcation deduced from the fit. The inset is a schematic sketch of the experimental setup. LC, liquid-crystal layer; M , feedback mirror; F , input optical field; B , backward optical field; d , feedback length.

amplitude expectation value that fully describes the noisy supercritical bifurcations. The agreement with experiments carried out for a 1D pattern-forming system is excellent. This amplitude equation can be applied to any second-order transition of noisy temporal systems.

We thank Rene Rojas for useful discussions. The simulation software DIMX developed at the laboratory INLN in France has been used for some numerical simulations. We thank for support Anillo Grant No. ACT15, FONDAP Grant No. 1020374, and the ECOS-Sud Committee. The CERLA is supported in part by the ‘‘Conseil Régional Nord Pas de Calais’’ and the ‘‘Fonds Européen de Développement Economique des Régions.’’

- [1] W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-induced Transitions: Theory and applications in physics, chemistry and biology* (Springer, Berlin, 1984).
- [2] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
- [3] J. Garcia-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [4] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Phys. Rev. A* **74**, 043814 (2006).
- [5] M. G. Zimmermann, R. Toral, O. Piro, and M. San Miguel, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3612 (2000).
- [6] L. Q. Zhou, X. Jia, and Q. Ouyang, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 138301 (2002).
- [7] R. Müller, K. Lippert, A. Kuhnel, and U. Behn, *Phys. Rev. E* **56**, 2658 (1997).
- [8] M. G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 148302 (2005); M. G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. E* **74**, 011303 (2006).
- [9] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993) and references therein.
- [10] G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **66**, 063805 (2002).
- [11] W. Schöpf and W. Zimmermann, *Phys. Rev. E* **47**, 1739 (1993).
- [12] N. G. Van Kampen, *Stochastic Process in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [13] M. N. Ouarzazi, P. A. Bois, and M. Taki, *Phys. Rev. A* **53**, 4408 (1996).
- [14] P. C. Hohenberg and J. B. Swift, *Phys. Rev. A* **46**, 4773 (1992).
- [15] R. Lefever and J. W. Turner, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1631 (1986).
- [16] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, and V. Yu. Ivanov, *JETP Lett.* **47**, 707 (1988); S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zheleznykh, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 78 (1992).
- [17] W. J. Firth, *J. Mod. Opt.* **37**, 151 (1990).
- [18] G. D’Alessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. A* **46**, 537 (1992).

2.5 Instabilités entretenues par le bruit

Le phénomène de précurseurs est un des exemples de l'interaction constructive des fluctuations liées au bruit avec les non-linéarités du système. Contrairement au phénomène de résonance stochastique qui n'est pas intuitif, celui des précurseurs est assez prévisible. Une autre conséquence du bruit, qui est rencontrée dans les systèmes spatialement étendus, grâce aux degrés de liberté supplémentaires offerts par les dimensions spatiales, est le régime des instabilités entretenues par le bruit (IEB). A l'opposé de ce qu'on pourrait naïvement prédire, la source de bruit microscopique ne transforme pas l'état existant en un état complètement désordonné mais au contraire soutient et entretient de façon constructive un nouvel état macroscopique. Ces structures soutenues par le bruit sont observées dans les systèmes convectifs¹⁶ [147, 148, 150] et dans les milieux excitable du type activateur-inhibiteur ou automate cellulaire [209, 210]. Ces derniers systèmes font l'objet d'un attrait particulier, car ils offrent une description réaliste des tissus neuronaux du cortex cérébral [227]. Les deux dispositifs étudiés dans ce manuscrit ne sont pas du type excitable mais par contre sont convectifs soit par nature (Sec. 3.4 [156]) soit de par leur configuration géométrique (Fig. 1.5). Ainsi, ces systèmes peuvent présenter des instabilités spatiales [162, 150] (Fig. 2.5) ou temporelles entretenues par le bruit. Ce n'est pas le cas pour le dispositif fibré car les sources de bruit (d'origine externe)¹⁷ sont négligeables. Par contre, ces systèmes fibrés présentent une très grande sensibilité aux conditions initiales et par conséquent au bruit présent¹⁸ à l'entrée de la fibre.

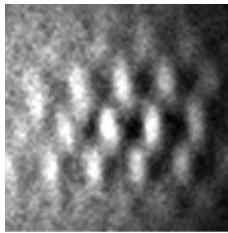


FIGURE 2.5: Exemple de structure spatiale convective entretenue par le bruit obtenue dans la lame de cristal liquide soumise à un feedback optique [150].

Des régimes d'instabilités entretenues par le bruit (IEB) dans des systèmes convectifs sont exposés dans les sections 3.2 à 3.3 du prochain chapitre après avoir introduit la notion de système convectif.

16. Systèmes dont la symétrie de réflexion est brisée (Chap. 3).
 17. bruit phonique ou thermique.
 18. e.g. sur la pompe.

Chapitre 3

Effets de la brisure de symétrie de réflexion dans les systèmes optiques spatialement étendus

3.1 Introduction

Les systèmes *convectifs* sont des systèmes où les structures dérivent continûment dès leur naissance dans le plan transverse. Par exemple, au delà du premier seuil¹, une perturbation initiale localisée va dériver transversalement (à cause de l’advection) en même temps qu’elle va s’amplifier. Deux situations sont alors observées : (i) l’advection est plus “rapide” que le taux de croissance de la perturbation. La perturbation croît mais est poussée hors des limites transverses du système. Le système retourne alors à son état initial d’équilibre [Fig. 3.1(b) et ses encadrés] ; (ii) la croissance domine la dérive, de telle manière que la perturbation envahit plus vite l’espace qu’elle n’est poussée hors de ses limites. En d’autres termes, elle se propage à contre-courant du mouvement de convection. Le système atteint alors un état structuré [Fig. 3.1(c) et ses encadrés]. Le premier régime révèle l’occurrence d’une *instabilité convective* (IC) et le second caractérise une *instabilité absolue* (IA). Les deux états finaux associés, obtenus à long terme, sont respectivement l’état initial de départ et un état structuré [encadrés en rouge de la Fig. 3.1(b,c)]. Ce scénario est générique des systèmes convectifs.

Il existe cependant quelques exceptions à ce scénario. C’est le cas des systèmes pompés par une onde plane ou émettant une onde plane, et dont soit (i) les conditions aux limites spatiales sont périodiques, soit (ii) le couplage spatial est de type global ou soit (iii) l’extension spatiale est infinie. Dans le premier cas, la perturbation est périodiquement réinjectée dans le système et ne permet jamais un retour à l’état initial caractéristique du régime convectif [228, 229, 156]. De même, pour le second cas, si tous les points de l’espace sont globalement couplés entre-eux, la perturbation se répand globalement et donc ne disparaît pas à long terme du système. La troisième situation ne correspond à aucun système spatial réaliste. Néanmoins, si on considère les systèmes temporels et leur représentation pseudo-spatio-temporelle dans l’espace des phases

1. correspondant à la brisure de symétrie de translation.

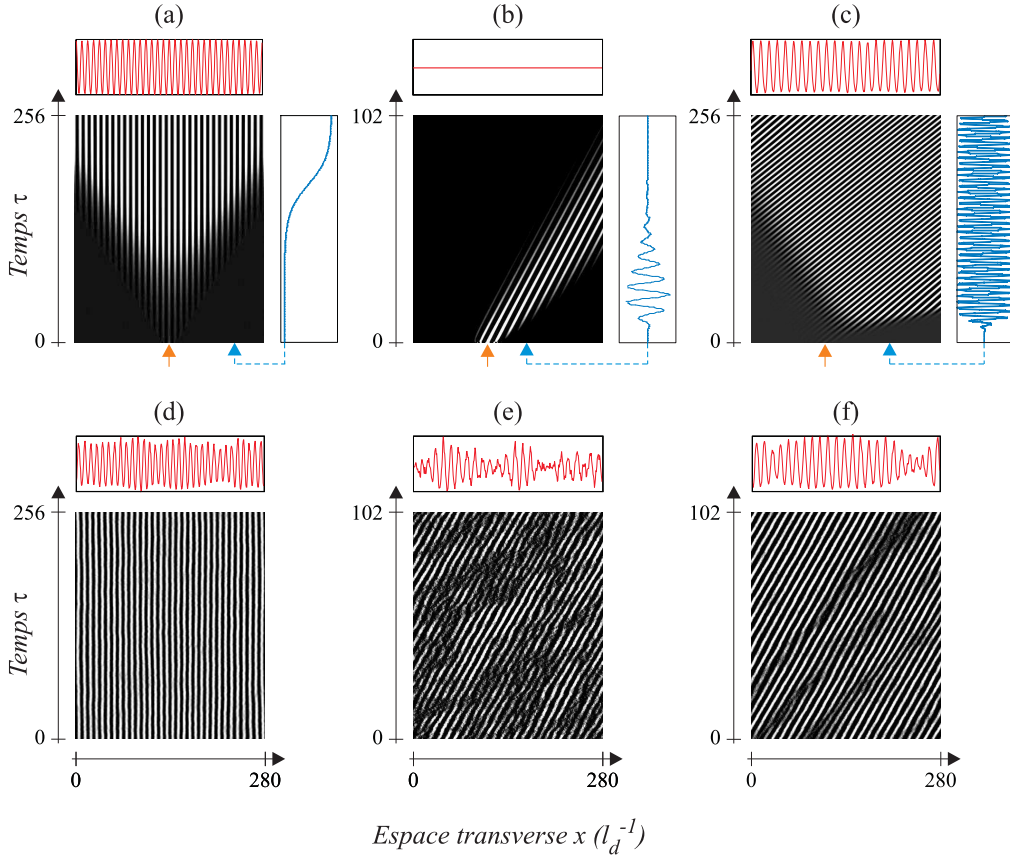


FIGURE 3.1: Évolution spatio-temporelle d’une perturbation initialement localisée au niveau de la flèche orange, pour (a) un système non convectif et (b,c) un système convectif. (b) Régime d’instabilité convective et (c) régime d’instabilité absolue. (d-f) Évolutions correspondantes en présence de bruit. (e) Régime de structure entretenue par le bruit. Les encadrés au dessus des diagrammes spatio-temporels représentent l’état final en rouge. Les encadrés à droite des diagrammes spatio-temporels représentent l’évolution temporelle en bleu pour une abscisse x donnée. Les simulations ont été réalisées à partir de l’équation (1.4). $\chi = 1$, $\sigma = 4.3$. (a,d) $h = 0$. (b,c,e,f) $h = 1.3l_d$. (d-f) $\varepsilon = 0.01$.

(τ, t) (Sec. 1.2.4), il apparaît que l’extension de τ peut être quasi-infinie. C’est le cas par exemple de la simple propagation dans une fibre. Dans les trois exceptions énumérées ici, il n’existe plus de distinction entre les régimes convectif et absolu. L’état final est toujours structuré et ne revient jamais à son état initial de départ comme précédemment. Tout ceci est conditionné par la propriété d’onde plane, et donc d’extension infinie, de la pompe ou de la variable étudiée. Dès lors que la pompe ou la variable possèdent une extension limitée (e.g. gaussienne), la perturbation en régime convectif peut à nouveau disparaître à terme et redonner le scénario classique des systèmes convectifs.

En résumé, les régimes convectif et absolu sont rencontrés dans les systèmes convectifs sauf dans de très rares exceptions comme il a été vu juste avant. Les états finaux associés à ces régimes, sont respectivement l’état initial du système ou un nouvel état structuré [voir encadrés

des Figs. 3.1(b,c)]. Cette différence change radicalement dès que le bruit est présent dans le système [162]. Dans le cas du régime convectif, le bruit agit comme une source de perturbations microscopiques qui sont sélectivement amplifiées pour donner lieu à une structure transverse macroscopique entretenue par le bruit. Plus précisément, une structure entretenue par le bruit est observée en régime convectif [Fig. 3.1(e)] et une structure auto-soutenue pour le régime absolu [Fig. 3.1(f)]. Ainsi, un état structuré est observé pour les deux régimes, sans distinction simple entre eux en terme d'évolution spatio-temporelle [encadrés en rouge de la Fig. 3.1(e,f)].

L'étude analytique de ces systèmes convectifs est très différente de celle des systèmes non convectifs. Une analyse de stabilité linéaire standard ne convient pas puisqu'elle ne traite que de l'évolution des perturbations d'étendues infinies². L'approche adoptée pour étudier l'évolution des instabilités dans les systèmes convectifs est celle d'un problème aux valeurs initiales qui rend compte des mécanismes d'émergence et d'étalement des perturbations initiales. En effet, que la structure apparaisse globalement ou qu'elle naisse localement puis envahisse le système par différents processus de propagation et d'amplification est complètement différent comme on peut le voir sur la Fig. 3.1. Suivant les cas, aux temps longs, la structure peut emplir tout l'espace ou non comme on peut le voir sur les Figs. 3.1(b) et 3.1(c). L'étude analytique des systèmes convectifs consiste donc à calculer et étudier la réponse du système à une perturbation initiale localisée spatialement. La périodicité spatiale, le taux de croissance temporel et la vitesse de dérive du packet d'onde le plus instable sont déterminés à partir de la relation de dispersion suivant la méthode de la "steepest descend" [231, 187]. Le critère distinguant les deux types d'instabilités (convective et absolue) fut d'abord introduit par Sturrock en 1958 [232]. Sa formulation mathématique et sa description peuvent être trouvées dans le travail original de Briggs [233] ou dans des introductions plus récentes à cette notion telle que celle du §62 de [234] ou de la Sec. I de [150].

Le concept d'instabilités convective et absolue fut d'abord introduit dans le contexte de la physique des plasmas [233], puis utilisé ensuite avec succès en hydrodynamique [230]. Ces instabilités sont communes à une classe de systèmes dynamiques non-linéaires, à savoir les systèmes convectifs. Ils forment une plateforme d'activités de recherche multidisciplinaires incluant l'hydrodynamique [230, 235, 236, 237, 238, 239, 240], la physique des plasmas [233, 241], les flux de trafic routier [242], la croissance cristalline [243], les réactions chimiques [244] ou encore l'optique non-linéaire [245, 184, 162]. Il a été montré que l'existence des instabilités convectives dans ces systèmes donnait lieu à des comportements nouveaux et inattendus tels que les instabilités auto-pulsées [184], la sélection de structures [150], et les structures entretenues par le bruit [246, 247, 236, 238, 240, 150]. Ces dernières instabilités, prédites dans des champs aussi variés que les flux ouverts [248, 235], l'optique [245], le trafic routier [242], ou la croissance cristalline [243], ont été mis en évidence expérimentalement en hydrodynamique [246, 247] et plus récemment en optique [162, 150, 249].

La clé de l'obtention de tels régimes convectifs est la présence de termes brisant la sy-

2. L'étude de stabilité linéaire standard ne détermine que la périodicité spatiale et le taux de croissance temporel des structures spatiales. Cette méthode d'analyse de stabilité est une méthode dite *globale* (selon la terminologie employée par Huerre et Monkevitz [230]), c'est à dire qu'elle traite de l'évolution d'une perturbation d'étendue infinie.

métrie de réflexion spatiale $r \rightarrow -r^3$ dans les équations régissant l'évolution du système (et donnant ainsi lieu à des solutions asymétriques). Dans les modèles, ces termes apparaissent sous la forme de dérivées spatiale ou temporelle d'ordre impaire pour les couplages locaux ($\partial^{2n+1}/\partial r^{2n+1}$ ou $\partial^{2n+1}/\partial t^{2n+1}$), ou d'intégrales distribuées pour les couplages globaux ($A \int |A|^2$)⁴. Du point de vue expérimental, ces termes sont obtenus dans les systèmes spatialement étendus par un couplage asymétrique entre les points de l'espace (interaction non-locale asymétrique). Ceci est réalisé, par exemple, en inclinant le miroir de renvoi dans le dispositif de la lame de cristal liquide soumise à un feedback optique⁵ [162]. Dans les systèmes purement temporels, de tels termes sont produits par exemple grâce à une désynchronisation entre les pulses injectés et présents dans le résonateur fibré en anneau⁶ [184], ou encore grâce au troisième ordre de dispersion des fibres⁷ [156]. Ainsi, tous les systèmes dont les modèles possèdent de tels termes de brisure de symétrie de réflexion sont convectifs. Notons, que cela inclut un très grand nombre d'équations d'amplitudes telles que l'équation de Schrödinger non-linéaire, l'équation de Ginzburg-Landau, ou encore l'équation de Swift-Hohenberg.

Les termes brisant la symétrie de réflexion $r \rightarrow -r$ et rendant le système convectif se présentent dans les modèles sous la forme de dérivées spatiale ou temporelle d'ordre impaire pour les couplages locaux ($\partial^{2n+1}/\partial r^{2n+1}$ ou $\partial^{2n+1}/\partial t^{2n+1}$), ou d'intégrales distribuées pour les couplages globaux ($A \int |A|^2$). Expérimentalement, ces termes sont obtenus par un couplage asymétrique entre les points de l'espace.

L'objet de ce chapitre est de présenter les résultats concernant les études des systèmes transverses optiques convectifs ; que ce soit la démonstration expérimentale de l'instabilité convective et des structures entretenues par le bruit en optique [162, 150] ou la nature intrinsèquement convective des systèmes fibrés [156].

3.2 Démonstration expérimentale de l'instabilité convective en morphogenèse optique

Quand j'ai commencé à m'intéresser aux instabilités convectives et aux structures entretenues par le bruit, suite à des discussions avec Majid Taki, ces régimes étaient prédits dans les systèmes optiques spatialement étendus [147, 159, 160, 161], mais aucune démonstration expérimentale n'avait encore été apportée. La question de l'existence de ces instabilités dans un système réel était aussi posée : est-ce que ces instabilités survivaient aux spécificités des dispositifs expérimentaux ? C'est à dire, à la présence de paramètres de contrôle dépendants de l'espace (profils de pompes Gaussiens, miroirs sphériques) et au bruit, comme c'est le cas dans la majorité des systèmes optiques. De plus, les critères de caractérisation usuels établis pour des systèmes idéaux (i.e. uniformes en espace, d'extension transverse infinie et sans bruit) n'étaient pas applicables aux systèmes réels et devaient être implémentés.

3. r est ici la variable correspondant à une direction de l'espace transverse.

4. A est la variable de l'équation possédant un terme brisant la symétrie de réflexion.

5. apparition d'un terme $\partial/\partial x$ dans l'équation d'amplitude.

6. apparition d'un terme $\partial/\partial t$ dans l'équation d'amplitude.

7. apparition d'un terme $\partial^3/\partial t^3$ dans l'équation d'amplitude.

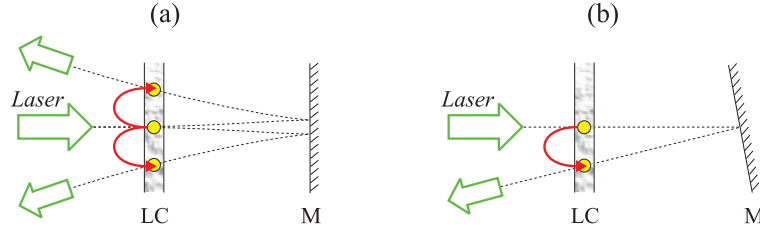


FIGURE 3.2: Rétroaction non-locale (a) symétrique et (b) asymétrique. La première est due à la diffraction naturelle tandis que la seconde est due à l'inclinaison du miroir M. Le second dispositif (b) est convectif alors que le premier ne l'est pas (a).

La première étape pour répondre à la question précédente, fut de disposer d'un système convectif. Comme nous l'avons vu dans l'introduction précédente, un des effets majeur de la brisure de symétrie de réflexion est de rendre les structures propagatives dans le plan transverse. De tels régimes de propagation avaient été observés dans les travaux de [250, 251, 252] en appliquant une rétroaction non-locale *asymétrique*. C'est à dire un système couplant l'information d'un point (x, y) au point $(x - h, y)$ (h étant la translation induite par la rétroaction non-locale). Nous avons donc modifié notre système Kerr avec feedback en inclinant le miroir de renvoi afin d'obtenir un tel déplacement spatial (Fig. 1.5). Dans cette configuration, l'équation (1.4) de l'indice réfractif u du cristal liquide fait apparaître un terme de rétroaction non-locale $u(x-h, y, t)$ dans sa partie de droite. En développant l'indice au premier ordre autour de sa solution stationnaire homogène u_0 , il apparaît un terme $\partial\delta u/\partial x$ dans l'équation de la variation d'indice δu . Ce terme brise la symétrie de réflexion et démontre que ce système est bien un système convectif. C'est donc ce dispositif que nous avons retenu pour nos études.

Il est important ici de remarquer deux choses. La première concerne le type de déplacement effectué dans la boucle de rétroaction. Dans le cas cité ici, il correspond à une translation. D'autres types de déplacements peuvent être appliqués comme une rotation ou une homothétie [253]. Ils conduisent aussi à des interactions non-locales asymétriques et donc à un système qui sera convectif [18, 174, 228]. La deuxième remarque concerne la nature asymétrique de l'interaction non-locale⁸. En effet, le caractère non-local de l'interaction ne suffit pas à rendre le système convectif. Il est impératif que celle-ci soit de surcroît asymétrique [Fig. 3.2(b)]. A titre d'exemple, la diffraction, qui couple de façon symétrique un point (x, y) aux points $(x + h, y)$ et $(x - h, y)$ [Fig. 3.2(a)], ne rend pas un système convectif. En effet, l'interaction fait apparaître un terme de dérivée paire $\partial^2\delta u/\partial x^2$ (dans l'équation d'amplitude) qui ne brise pas la symétrie de réflexion. Seules les interactions non-locales asymétriques du type de celle représentée sur la Fig. 3.2(b) donnent lieu à des systèmes convectifs.

Seules les interactions non-locales de type asymétriques donnent lieu à des systèmes convectifs

⁸. Cette remarque fait suite à une question qui m'avait été posée lors d'une conférence. La personne rappelait que la diffraction donnait lieu à une rétroaction non-locale et me demandait pourquoi celle-ci ne suffisait pas à rendre le système convectif. Je m'étais alors rendu compte que je ne devais pas oublier de préciser *asymétrique* quand je parlais du type de rétroaction concernant le dispositif de la figure 3.2(b).

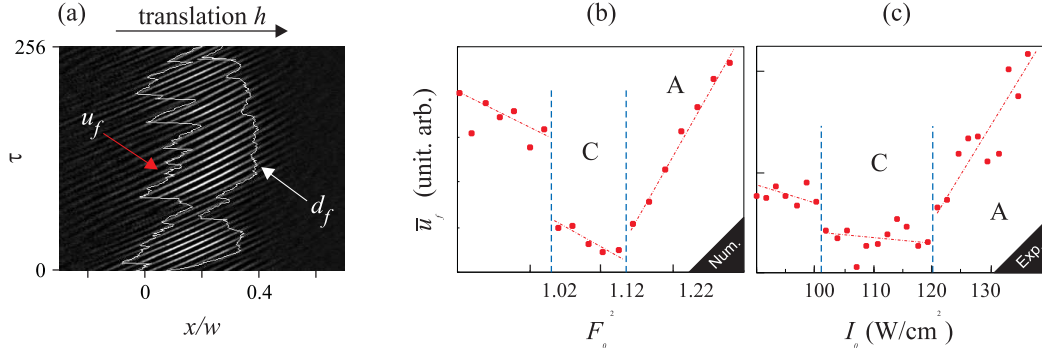


FIGURE 3.3: (a) Détection des bords (u_f, d_f) de la zone structurée : u_f à contre dérive et d_f dans le sens de la dérive. (b,c) Évolutions de la position moyenne de \bar{u}_f avec l'intensité de pompe démontrant la distinction entre les régimes convectif (C) et absolu (A). Les traits pointillés bleus indiquent les seuils convectif et absolu déterminés pour le système sans bruit. (b) Simulations numériques ; (c) expériences.

Avant nos travaux [162], il n'était pas fait référence aux notions d'instabilités convective (IC) et absolue (IA), ni aux structures entretenues par le bruit (SEB), pour les structures propagatives observées expérimentalement en morphogenèse optique [250, 251, 252]. Cela peut se comprendre dans le sens où il n'apparaît de distinction nette⁹ entre le régime d'instabilité entretenue par le bruit et le régime absolu dans les systèmes expérimentaux [Fig. 3.1(e,f)]. Une de nos principales préoccupations pour montrer l'existence de ces deux régimes en morphogenèse optique fut donc de trouver une signature pertinente permettant de distinguer ces deux régimes. Ceci fut réalisé pour la configuration 1D de notre dispositif Kerr avec feedback et les résultats sont présentés dans l'article [162] joint ci-après.

La démarche que nous avons suivie est la suivante : nous avons d'abord montré analytiquement l'existence de deux seuils distincts correspondant aux instabilités convective et absolue, dans la configuration d'un système idéal où le bruit est absent et l'onde de pompe est plane [Eq. (4) dans [162]]. Ces calculs font appel à des nombres d'ondes spatiaux k complexes pour tenir compte de l'amplification spatiale¹⁰ en plus de la modulation spatiale¹¹. C'est à ce niveau que la distinction d'avec une analyse de stabilité linéaire classique apparaît. Ensuite, à partir des simulations numériques réalisées dans les conditions réalistes de notre expérience (pompage gaussien et présence de bruit), nous avons trouvé une signature différenciant les régimes d'IC et d'IA. Celle-ci concerne l'évolution du bord à "contre-dérive" u_f de la zone structurée [Fig. 3.3(a)]. L'évolution de la position moyenne de ce front \bar{u}_f avec le taux de pompage permet de distinguer de façon claire le régime entretenu par le bruit du régime absolu. Ceux-ci présentent en effet des pentes d'évolution différentes dont les changements coïncident avec les seuils convectif et absolu [Fig. 3.3(b)]. Enfin, l'application de cette signature aux données expérimentales fait apparaître de façon claire l'existence de l'instabilité convective caractérisée par des structures entretenues par le bruit [Fig. 3.3(c)] dans les systèmes transverses optiques.

9. voir l'introduction de ce chapitre

10. caractérisée par la partie imaginaire de k

11. caractérisée par la partie réelle de k

L'évolution du bord à "contre-dérive" \bar{u}_f de la zone structurée permet de distinguer de façon claire le régime entretenu par le bruit du régime absolu.

En résumé, nous avons démontré théoriquement et expérimentalement l'existence de l'instabilité convective en morphogenèse optique grâce à la mise en évidence aussi bien analytique qu'expérimentale de deux seuils distincts. De manière plus générale, nous avons établi que les instabilités entretenues par le bruit (IEB), associées à l'instabilité convective, survivaient dans les systèmes réels non-idéaux. Ce résultat met en évidence le rôle crucial de la présence de bruit dans la dynamique des structures. En effet, ces structures (SEB) résultent de l'amplification spatiale sélective des perturbations. Elles sont à ne pas confondre avec d'autres effets du bruit comme, par exemple, les précurseurs qui correspondent aux fluctuations faiblement atténuées dans le régime linéaire [158].

Experimental Evidence of Absolute and Convective Instabilities in Optics

Eric Louvergneaux, Christophe Szewaj, Gonzague Agez, Pierre Glorieux, and Majid Taki

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523, Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
(Received 20 June 2003; revised manuscript received 26 September 2003; published 27 January 2004)

Experimental evidence of convective and absolute instabilities in a nonlinear optical system is given. In optics, the presence of spatial nonuniformities brings in additional complexity. Hence, signatures characterizing these two regimes are derived based on analytical and numerical investigations. The corresponding noise-sustained and dynamical patterns are observed experimentally in a liquid crystal layer subjected to a laser beam with tilted feedback.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.043901

PACS numbers: 42.65.Sf, 05.40.Ca, 05.45.-a, 47.54.+r

Spatiotemporal instabilities have been predicted in many different nonlinear systems. They arise from the spontaneous symmetry breaking which leads to pattern formation. The phenomenology of these instabilities is completely modified as soon as a drift is present in the system (breaking of the reflection symmetry $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$). Indeed, transverse propagating waves rise at the onset. One has then to deal not only with the growth of disturbances, but also with their propagation. As a result, if an instability occurs in these systems, it can be either *convective* or *absolute*. The concepts of convective instability (CI) and absolute instability (AI) were first developed in the context of plasma physics [1], and later successfully used in hydrodynamics [2]. In the convective regime, an initial local disturbance exponentially grows but is simultaneously advected away so that the system returns locally to the initial homogeneous equilibrium state. In contrast, disturbances in the absolute regime grow locally fighting the drift upstream so that the system reaches a patterned state. The convective regime, where no pattern is expected, can, however, show structures if noise is present in the system. Then, macroscopic *noise-sustained structures* (NSS) result from the selective spatial amplification of the continuous perturbations produced by the microscopic noise source.

So far convective instabilities leading to noise-sustained structures were theoretically predicted in many areas such as open flows [3], optics [4], traffic flow [5], crystal growth [6], etc. They were obtained experimentally in hydrodynamics [7–9] but still wait to be observed in extended optical systems [10,11]. In the latter field, the question of the existence of such instabilities (CI, NSS) in real systems, i.e., surviving the limitations of real devices, is open. Namely, in most optical systems control parameters are space dependent (Gaussian pump profile, curved mirrors). Thus, the characterization criteria established by theoretical works for ideal systems, i.e., with a uniform incident plane wave and space independent parameters, cannot be applied directly [12] and have to be improved.

The purpose of this Letter is to evidence theoretically and experimentally the convective instability in optics, but also more generally in nonideal systems. The system considered here is a nematic liquid crystal layer irradiated by a laser beam and inserted in a feedback loop with a tilted mirror [13]. We emphasize that our real system (i) is noisy with an inherent noise source stemming from thermal fluctuations of the liquid crystal and (ii) possesses control parameters that are space dependent due to the Gaussian incident beam. We focus here on the one-dimensional (1D) case. We derive, first, analytical thresholds for convective and absolute instabilities in the ideal situation where noise is neglected and the incident wave is a plane wave. Then, from numerical simulations carried out for the experimental conditions, we find signatures for these two regimes showing that the scenario of these instabilities still remains with these specific features. Finally, by comparison between the CI and AI signatures of these numerical simulations and of experimental recordings, we prove that CI characterized by NSS are, indeed, experimentally observable in real systems.

Experiments have been realized on a feedback optical system (Fig. 1) well described in the framework of a model introduced first by Akhmanov *et al.* [14] and later adapted by Firth and d'Alessandro [15]. Here this model is slightly modified to account for the input field spatial variation and for the noise. In the 1D case it reads

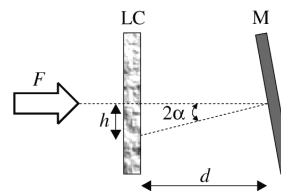


FIG. 1. Schematic sketch of the experimental setup. LC, liquid crystal layer; M, feedback mirror; F , input optical field; α , mirror tilt angle; d , feedback length.

$$-\nabla_{\perp}^2 n + \frac{\partial n}{\partial t} + n = |F|^2 + |B|^2 + \sqrt{\epsilon} \xi(x, t), \quad (1)$$

$$B(x, t) = \sqrt{R} F_0 e^{i\sigma \nabla_{\perp}^2} (e^{i\chi n(x+h,t)} g(x)), \quad (2)$$

where $n(x, t)$ stands for the refractive index of the non-linear nematic LC layer, t and x are the time and space variables scaled with respect to the relaxation time τ and the diffusion length l_D , h represents the lateral shift due to the tilted mirror as indicated in Fig. 1, and R is its reflectivity. We have set $\sigma = d/k_0 l_D^2$ where d is the slice-mirror distance and k_0 is the optical wave number of the field. $\xi(x, t)$ describes a Gaussian stochastic process of zero mean and correlation $\langle \xi(x, t) \xi(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$. The level of noise is controlled by the parameter ϵ , which is purely phenomenological. F is the forward input optical field, and its transverse profile is accounted for by using $F(x) = F_0 g(x)$, with $g(x) = \exp(-x^2/w^2)$ for a Gaussian pump beam of radius w and $g = 1$ for the uniform (plane wave) case. B is the backward optical field [15]. The Kerr effect is parameterized by χ which is positive (negative) for a focusing (defocusing) medium.

Starting from the above equations, in the plane wave approximation [$g(x) = 1$] and in the absence of noise ($\epsilon = 0$), we can perform a linear stability analysis that provides us with the convective and absolute thresholds in the presence of a feedback mirror tilt. Assuming perturbations of the stationary state $n_0 = F_0^2(1 + R)$ in the form $\Delta n \sim \exp(ikx - \lambda t)$, we obtain the following dispersion relation:

$$\lambda = 1 + k^2 - \mu \sin(\sigma k^2) \exp(ikh), \quad (3)$$

where $\mu = 2RF_0^2|\chi|$. The above expression shows that the presence of h leads to a complex dispersion relation. This means that, in addition to the classical temporal instabilities (k real and λ complex), there are also spatial amplifications (k complex). Near onset of the instability, Eq. (3) may be approximated [16] as

$$\lambda^{\text{app}} = \lambda_c + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right) \Big|_c (\mu - \mu_c) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial k} \right) \Big|_c (k - k_c) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial^2 k} \right) \Big|_c (k - k_c)^2, \quad (4)$$

where the derivatives are evaluated at μ_c and k_c that are the critical values given by Eq. (3) and correspond to μ_{conv} and k_{conv} (in our notations), and $\lambda_c = \lambda(k_c, \mu_c)$. After simplifications, we find $\partial \lambda / \partial \mu|_c = -\sin(\sigma k_c^2) \times \exp(ihk_c)$, $\partial \lambda / \partial k|_c = -i(1 + k_c^2)[h + 2\sigma k_c \tan(hk_c) / \tan(\sigma k_c^2)]$, and $\partial^2 \lambda / \partial^2 k|_c = (1 + k_c^2)\{4\sigma^2 k_c^2 + h^2 + \tan(hk_c)[4\sigma k_c / \tan(\sigma k_c^2) - h/k_c]\} + i\{(1 + k_c^2) \tan(hk_c) \times [4\sigma^2 k_c^2 - 2\sigma / \tan(\sigma k_c^2) - h^2] - 4hk_c\}$. Note that these expressions are obtained without any restriction on the value of h . The key feature is the presence of a group velocity [imaginary part of the third term in Eq. (4)] which vanishes for $h = 0$, meaning that a convective regime may exist if $h \neq 0$.

The convective threshold μ_{conv} is obtained by canceling $\text{Re}(\partial \lambda / \partial k)_{k_c, \text{real}}$ in Eq. (4), whereas the absolute instability threshold μ_{abs} is given by the saddle point method. It states that the absolute threshold is such that $\text{Re}(\lambda(k_s)) = 0$ where k_s is a complex saddle point satisfying $\nabla_k \lambda(k) = 0$ and $\text{Re}[\nabla_k^2 \lambda(k)] \geq 0$ (see Refs. [2,17–19] for details). The thresholds are plotted in Fig. 2 versus h . As can be seen from the figure, there exists a region $\mu_{\text{conv}} < \mu < \mu_{\text{abs}}$ where a convective regime is expected.

The analytical approach proves firmly the existence of CI and AI in the ideal system; in addition, it allows one to determine the parameter domain for h and $\chi\sigma$ that maximizes the convective region. However, the experimental conditions differ mainly by the presence of a Gaussian pump beam and noise that may affect drastically the dynamics [20,21]. Fortunately, numerical investigations performed in the parameter range of our experiments show that these experimental features do not modify qualitatively the scenario of CI and AI. In what follows, we describe (i) the numerical test for demonstrating the CI persistence in the presence of a Gaussian pumping without noise, (ii) the signature found numerically showing that the addition of noise does not affect the CI and AI threshold values (determined without noise) and their scenario, and (iii) the role of this signature to evidence the CI and AI regimes in the experiments.

In a first step we check numerically the influence of a Gaussian input field on the existence of CI. In that purpose, we analyze (in the absence of noise) the spatiotemporal evolution of a small perturbation applied initially on the top of the Gaussian beam for increasing values of the parameter μ [Figs. 3(a)–3(c)], and identify three different regimes. Namely, a homogeneous regime where the perturbation is linearly damped [Fig. 3(a)]. A convective regime, the perturbation is amplified and advected away. The system returns to the basic state for long times [Fig. 3(b)]. An absolute regime, the pattern invades all the available space [Fig. 3(c)]. The transitions between these regimes set the values of the convective and absolute thresholds (second row of Table I). Note that, as mentioned above, these values differ slightly from the analytical predictions obtained in the ideal case (\dagger in Table I). If we further reduce the Gaussian width, the

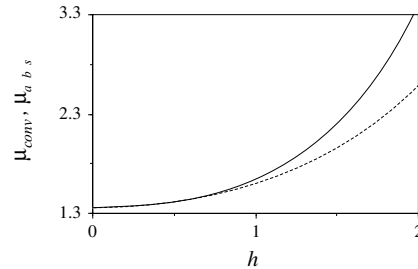


FIG. 2. Absolute (solid line) and convective (dashed line) thresholds versus h for $\sigma = 4.23$ (as in experiments).

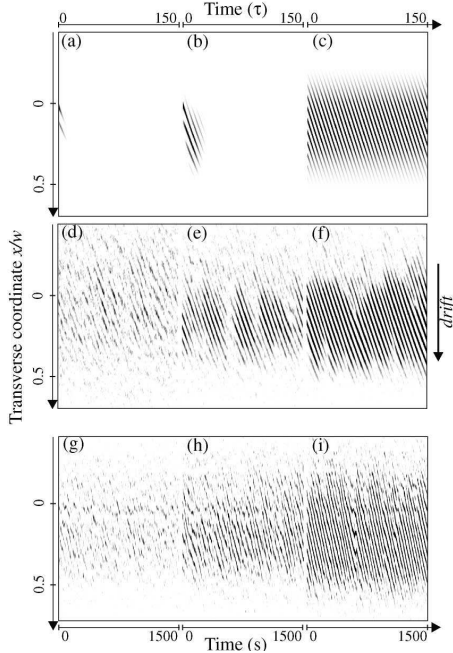


FIG. 3. (a)–(c) Numerical simulations of the evolution of a perturbation applied at $(x = 0, t = 0)$, in case of a Gaussian pump beam without noise. (d)–(f) Numerical simulations of the “patterns” obtained for the same Gaussian input beam but in the presence of noise. (g)–(i) Corresponding experimental observations. Pictures (a),(d),(g) correspond to a regime below CI threshold, (b),(e),(h) to CI, and (c),(f),(i) to AI. The parameters are $w = 140$, $\sigma = 4.23$, $h = 1.3$, $\epsilon = 10^{-2}$. (a),(d) $F_0^2 = 0.98$; (b),(e) $F_0^2 = 1.1$; (c),(f) $F_0^2 = 1.21$. (g)–(i) $d = 5$ mm, $w = 1400$ μ m, $\alpha \approx 1.3$ mrad, $h = 1.3l_D$. (g) $I_0 = 95$ W/cm², (h) $I_0 = 110$ W/cm², (i) $I_0 = 128$ W/cm².

separation between the two thresholds increases more. So, the addition of a Gaussian profile does not affect the existence of a convective region—only its domain of existence varies with the pump width.

In the second step we take into account noise ($\epsilon \neq 0$) in Eqs. (1) and (2). Numerical integrations for the same parameters as previously are carried out to obtain the realistic “noisy” patterns [Figs. 3(d)–3(f)] that are expected experimentally. Below the convective threshold (determined without noise), they depict an intermittent

TABLE I. Comparison of the numerical values of the convective and absolute thresholds obtained from (†) the local perturbation method and (◇) the edge detection \bar{u}_f . $w = 140$, $\sigma = 4.23$, $h = 1.3$, $\epsilon = 10^{-2}$. $\Delta(F_0^2)$ is the uncertainty.

	$F_{0\text{conv}}^2$	$F_{0\text{abs}}^2$	$\Delta(F_0^2)$
Flat profile, noise (\equiv analytic)†	0.998	1.073	...
Gaussian profile, no noise†	1.05	1.16	0.02
Gaussian profile and noise◇	1.05	1.16	0.02

pattern of very small amplitude and with a random spatial phase [Fig. 3(d)]. It is associated with a precursor, induced by noise [22], of the pattern that emerges at threshold. In the convective regime [Fig. 3(e)], the perturbations are amplified and advected away, but since they appear recursively they lead to NSS. Above the absolute threshold (determined without noise, i.e., 1.16) the domain of the roll pattern extends upstream and invades all the available region [Fig. 3(f)]. Although the pump profile is symmetric with respect to its center (position $x = 0$), the patterns are located to the bottom. This is a direct consequence of the amplification and advection. As a result, drifting rolls are observed for both unstable regimes CI and AI [Fig. 3(e) and 3(f)]. However, these two regimes do not differ sufficiently to be distinguished without any ambiguity from the figure. In order to evidence the CI and NSS regimes, we look for a signature of the convective and absolute regimes based on the evolution of the width of the pattern region versus μ and more precisely of the evolution of its upstream edge (\bar{u}_f) which is the most relevant. It is defined as the mean location where the roll amplitude is 1/10 of its maximum (at the corresponding μ). Indeed, Fig. 4(a) reveals that \bar{u}_f displays three different evolutions characterized by two critical values of F_0^2 (◇ in Table I) corresponding to the two transitions in the evolution of \bar{u}_f [vertical dashed lines in Fig. 4(a)]. Comparison between these critical values and the numerical evaluations of the CI-AI thresholds († second row in Table I) previously found for a Gaussian pumping without noise are in excellent agreement. One may conclude that the first breaking in the curve of \bar{u}_f occurring at $F_0^2 = 1.05$ (left dashed vertical line) corresponds to the convective instability threshold while that observed at $F_0^2 = 1.16$ (right dashed vertical line) is associated with the onset of the absolute instability. This means that the three distinct evolutions of \bar{u}_f correspond to the three different regimes of below CI threshold, CI, and AI (respectively, regions labeled H, C, and A in Fig. 4). The above quantitative comparison demonstrates that the addition of a realistic level of noise does not change the scenario of the instabilities. Finally,

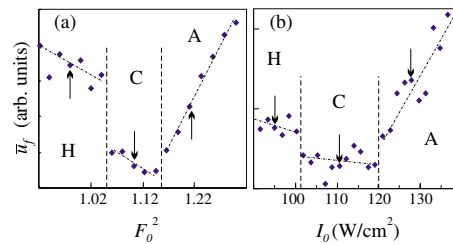


FIG. 4 (color online). Evolution of \bar{u}_f versus the incident intensity. Left: numerical simulations; right: experiments. Same parameters as Fig. 3. H, C, and A refer to the homogeneous, convective, and absolute regimes, respectively. The arrows correspond to the diagrams of Fig. 3.

the jumps in the slope evolution of \bar{u}_f provide a criterion for evidencing the CI regime in the realistic conditions. Note that the study of temporal Fourier transform of the intensity at a space location [4,23] confirms the existence of the two regimes (CI and AI).

Corresponding experiments have been performed on the setup already described in Refs. [20,22], with the essential difference of having a feedback mirror tilted by an angle α (see Fig. 1). As the power of the input laser beam is increased, we observe experimentally [Figs. 3(g)–3(i)] three qualitatively different spatiotemporal behaviors that are similar to those of numerical simulations [Figs. 3(d)–3(f)]. For low input intensities, the output beam intensity shows erratic rolls that appear randomly in time and space with short time duration [Fig. 3(g)]. When increasing the input intensity, drifting “rolls” are observed that never die out and have a spread width increasing with I_0 [Figs. 3(h) and 3(i)]. The inspection of the \bar{u}_f evolution evaluated from the experimental recordings [Fig. 4(b)] shows clearly three distinct regimes that mimic those of the realistic numerical simulations [Fig. 4(a)]. By comparison, we conclude the existence of a convective regime [C region in Fig. 4(b)] and locate approximately the two thresholds. The agreement between the simulations and the experiments is quantitatively good with a ratio of the absolute to convective “thresholds” of about, respectively, 1.1 and 1.07.

To summarize, we have demonstrated that noise-sustained rolls associated with the convectively unstable regime survive in a real system with parameters slowly varying in space. The existence of a CI regime highlights the crucial role of noise source in the dynamics of patterns. Indeed, these structures result from the amplification of perturbations by deterministic dynamics. This contrasts with other noise effects as, for instance, the noisy precursors corresponding to weakly damped fluctuations observed in the linear stable regime [22]. The necessary condition for the occurrence of the convective regime is the reflection symmetry breaking which is produced here by feedback mirror tilt, thus producing a drift velocity. Dynamical rolls as due to the absolute instability have also been observed beyond the CI domain. They are self-sustained by the nonlinear dynamics. Experiments and simulations show that the best indicator of the nature of the instabilities is provided by the evolution of the boundaries of the patterned region. In spite of the presence of noise, this evolution exhibits clear thresholds for convective and absolute instabilities. The statistics and temporal Fourier transform confirm that there exists a sizable domain of convective instabilities between the unpatterned and the fully patterned states.

We thank M. Tlidi, P. Collet, P.L. Ramazza, M. San Miguel, and R. Zambrini for useful discussions. The Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules is Unité de Recherche Mixte du CNRS. The Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the

Région Nord-Pas de Calais, and the Fonds Européen de Développement Économique des Régions.

-
- [1] R. J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas* (MIT Press, Cambridge, MA, 1964).
 - [2] P. Huerre and P. A. Monkewitz, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473 (1990).
 - [3] A. Couairon and J. M. Chomaz, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2666 (1997); H. R. Brand, R. J. Deissler, and G. Ahlers, *Phys. Rev. A* **43**, 4262 (1991).
 - [4] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3633 (1997).
 - [5] N. Mitarai and H. Nakanishi, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1766 (2000).
 - [6] N. Israeli, D. Kandel, M. F. Schatz, and A. Zangwill, *Surf. Sci.* **494**, L735 (2001).
 - [7] P. Büchel and M. Lucke, *Phys. Rev. E* **61**, 3793 (2000); X. Nicolas, A. Mojtabi, and J. K. Platten, *Phys. Fluids* **9**, 337 (1997).
 - [8] P. Gondret, P. Ern, L. Meignin, and M. Rabaud, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1442 (1999).
 - [9] L. Pastur, M. T. Westra, and W. van de Water, *Physica (Amsterdam)* **174D**, 71 (2003).
 - [10] M. Taki, N. Ouarzazi, H. Ward, and P. Glorieux, *J. Opt. Soc. Am. B* **17**, 997 (2000); H. Ward, M. Taki, and P. Glorieux, *Opt. Lett.* **27**, 348 (2002).
 - [11] G. Izùs, M. Santagiustina, M. San Miguel, and P. Colet, *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 1592 (1999); M. Taki, M. San Miguel, and M. Santagiustina, *Phys. Rev. E* **61**, 2133 (2000).
 - [12] M. N. Ouarzazi, P. A. Bois, and M. Taki, *Phys. Rev. A* **53**, 4408 (1996).
 - [13] P. L. Ramazza, S. Ducci, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4128 (1998); S. Ducci, P. L. Ramazza, W. González-Viñas, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5210 (1999).
 - [14] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, and V. Yu. Ivanov, *JETP Lett.* **47**, 707 (1988); S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zheleznykh, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 78 (1992).
 - [15] W. J. Firth, *J. Mod. Opt.* **37**, 151 (1990); G. D'Alessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2597 (1991).
 - [16] A. D. D. Craik, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **373**, 457 (1981); R. Tagg, W. S. Edwards, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. A* **42**, 831 (1990).
 - [17] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, *Phys. Rev. E* **58**, 3843 (1998).
 - [18] H. Ward, M. N. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux, *Eur. Phys. J. D* **3**, 275 (1998).
 - [19] H. Ward, M. N. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux, *Phys. Rev. E* **63**, 016604 (2001).
 - [20] E. Louvergneaux, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 244501 (2001).
 - [21] M. San Miguel and R. Toral, *Instabilities and Nonequilibrium Structures VI* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000), Pt. I.
 - [22] G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **66**, 063805 (2002).
 - [23] K. L. Babcock, G. Ahlers, and D. S. Cannell, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3388 (1991).

3.3 Structures spatiales à deux dimensions entretenues par le bruit

3.3.1 Structures élémentaires entretenues par le bruit ou *modes convectifs*

A l’opposé du système unidimensionnel (1D) précédent, où la convection ne change pas la nature de la structure en rouleaux, dans les systèmes convectifs à deux dimensions transverses (2D), la dynamique est beaucoup plus riche ; que ce soit en terme de structures, de symétries, de sélection de vecteurs d’onde spatiaux, etc. La plupart des expériences réalisées sur les systèmes spatiaux convectifs concernaient des configurations 1D [246, 247, 162] à l’époque de la publication de l’article [162] présenté dans la section précédente. A notre connaissance, les structures entretenues par le bruit obtenues expérimentalement dans un système spatialement étendu à 2D n’avaient pas encore été analysées. C’est ce qui a motivé l’étude présentée maintenant et qui est publiée dans l’article [150] joint ci-après.

Les prédictions analytiques des structures attendues, ainsi que de leurs propriétés, sont basées sur les relations de la Table I [150] qui proviennent de l’analyse de stabilité spécifique aux systèmes convectifs (Sec. I dans [150]). Celles-ci font apparaître trois types de “structures élémentaires convectives” ou *modes convectifs*¹² qui sont destabilisées au premier seuil d’instabilité convective. Il s’agit des *rouleaux horizontaux*, des *rouleaux verticaux* et des *réseaux rectangulaires* [respectivement images (C), (E) et (G) de la Fig. 3.4]. Le scénario d’apparition de ces structures avec le taux de rétroaction non-locale h pour une non-linéarité négative est le suivant : à mesure que h augmente à partir de 0, les rouleaux horizontaux apparaissent en premier puis les rouleaux verticaux et enfin les réseaux rectangulaires. Cette séquence dépend du signe de la non-linéarité du milieu. Ces prédictions sont confirmées aussi bien numériquement¹³ qu’expérimentalement par la Fig. 3.4 qui montre les différentes structures (images A-H et a-h) rencontrées au premier seuil d’instabilité convective (tracés I et i) en fonction de h . On remarque l’excellent accord entre les simulations et les “modes convectifs” expérimentaux entretenus par le bruit.

Il existe trois types de “structures élémentaires convectives” entretenues par le bruit au premier seuil d’instabilité convective. Il s’agit des *rouleaux horizontaux*, des *rouleaux verticaux* et des *réseaux rectangulaires*.

Nous avons aussi mis en évidence expérimentalement et étudié les propriétés et caractéristiques des SEB observées dans notre système optique. En particulier, les rouleaux horizontaux et les réseaux rectangulaires sont purement entretenus par le bruit et sont stationnaires au seuil convectif. En d’autres termes, en absence de bruit ces structures ne seraient jamais observées. De plus, contre-intuitivement, ces structures au lieu de dériver transversalement (comme les rouleaux verticaux) restent en place malgré le caractère convectif du système. L’analyse théorique ainsi que les expériences montrent en effet que la vitesse de phase de ces structures est

12. Par définition, les vecteurs d’onde composant une structure élémentaire, ou un mode, ont tous le même module. Exprimé autrement, une structure élémentaire, ou un mode, n’est caractérisée que par un seul nombre d’onde.

13. Les simulations numériques sont réalisées dans le cas des conditions expérimentales. C’est à dire avec une pompe gaussienne et la présence de bruit.

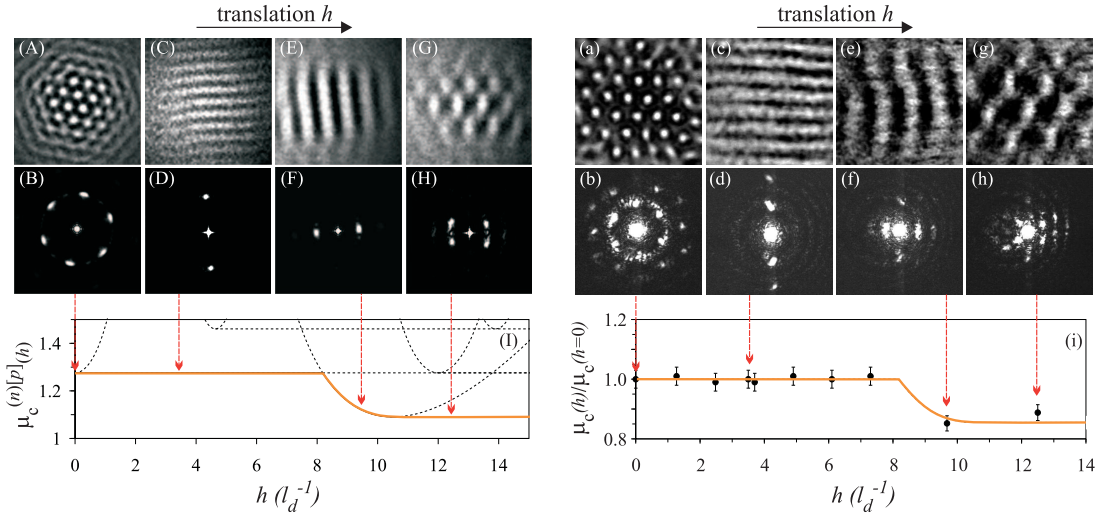


FIGURE 3.4: Structures élémentaires entretenues par le bruit à 2D obtenues au premier seuil d’instabilité convective en fonction de la translation h appliquée dans la boucle de rétroaction optique. (A-H) Simulations numériques et (a-h) expériences. Rangée haute : champs proches et rangée basse : champs lointains correspondants. (I,i) Évolution du premier seuil d’instabilité convective μ_c (en orange). Les points sur la figure (i) sont les valeurs normalisées mesurées expérimentalement. Les paramètres sont dans les légendes des Figs. 9 et 14 de [150].

toujours nulle quel que soit h (Fig. 16 dans [150]). D’autres caractéristiques concernent aussi ces deux types de structures purement entretenues par le bruit comme par exemple l’indépendance avec h de leur nombre d’onde et de leur seuil convectif [Figs. 6 et 15 dans [150] et 3.4(I,i) dans ce document]. Ainsi, seuls les rouleaux verticaux dérivent et peuvent devenir absolus dans notre système. Ceux-ci peuvent avoir des vitesses de phase négatives et même nulles pour certaines valeurs spécifiques de h .

En conclusion, nous avons identifié les structures de base entretenues par le bruit ou “modes convectifs” apparaissant dans un système spatialement étendu convectif à 2D ainsi que leurs propriétés. Comme il est mis en évidence sur la Fig. 3.4, le taux d’interaction non-locale asymétrique (quantifié par h) sert de sélecteur de structure. Dans la configuration à 1D spatiale, le système Kerr avec rétroaction se comporte comme un générateur de longueurs d’onde spatiales. On peut rapprocher cette notion de générateur de longueurs d’onde d’avec celle du laser à argon qui est un générateur de longueurs d’onde optiques. L’équivalent de l’inclinaison du prisme dans le laser à argon est ici le taux de translation h introduit dans la boucle de rétroaction.

PHYSICAL REVIEW A **74**, 043814 (2006)**Two-dimensional noise-sustained structures in optics: Theory and experiments**

G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux*

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523, Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,
Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

(Received 11 April 2006; published 19 October 2006)

Translational transverse shifts drastically affect pattern formation in a noisy system with optical feedback. These strong nonlocal interactions may give rise to large domains of convective instability resulting in various types of two-dimensional (2D) *noise-sustained structures*. These “basic patterns” are investigated and their thresholds and properties are analytically derived. Corresponding 2D experimental patterns are shown to be in complete agreement with theory. Surprisingly enough, some patterns that are purely sustained by noise are found to be nondrifting in contrast with the commonly widespread situation in which convective instabilities lead to traveling patterns.

DOI: [10.1103/PhysRevA.74.043814](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.043814)

PACS number(s): 42.65.Sf, 05.40.Ca, 47.54.-r, 05.45.-a

Pattern formation always occurs through the spontaneous symmetry breaking of a ground state. Just above the threshold corresponding to this symmetry breaking, only perturbations at a critical wavelength are destabilized and expand through the whole transverse space, giving rise to a variety of patterns. In the standard analytical approach of spatial instabilities, the critical wave number that is destabilized at threshold and its associated growth rate are determined, but little attention is paid to the question of the emergence mechanisms and of the transverse spreading of the pattern. Indeed, whether it occurs globally everywhere in the system or it rises up locally and then invades the system by different propagation or amplification processes is an important issue. This inherent question of spatiotemporal evolution of localized perturbations and the subsequent aspects of propagation is crucial in extended transverse systems with a transverse *asymmetric nonlocal interaction*. This is the case of convective systems where the reflection symmetry is broken and patterns may drift at the onset of instabilities. In such systems, beyond translational symmetry breaking (or first threshold), an initial local perturbation at a critical wavelength is advected away by the nonlocal interaction as it simultaneously grows. Then, two cases are observed: (i) the advection is “faster” than the growth of the initial local disturbance so that the system returns locally to its initial homogeneous equilibrium state; (ii) the growth dominates the drift upstream so that the system reaches a patterned state. The first regime reveals the occurrence of a *convective instability* (CI) and the second one characterizes the transition to an *absolute instability* (AI). The two associated final states obtained at long time are the homogeneous state and the patterned one, respectively. This difference drastically changes as soon as noise is present in the system [1]. In the case of the convective regime, the noise acts as a continuous microscopic perturbation source that is selectively spatially amplified to give rise to the noise-sustained pattern. Namely, a *noise-sustained structure* (NSS) is observed for the convective regime and a *self-sustained* pattern for the absolute re-

gime. Thus, a structured state is observed for both regimes with no simple distinction between them in terms of their spatiotemporal evolution.

The concepts of convective and absolute instabilities were first developed in the context of plasma physics [2], and later successfully used in hydrodynamics [3]. So far, convective instabilities leading to noise-sustained structures were theoretically predicted in such diverse fields as open flows [4], optics [5], traffic flow [6], and crystal growth [7]. On the experimental side, noise-sustained structures were obtained in hydrodynamics [8–10] and later in a spatially extended one-dimensional (1D) optical system [1]. In contrast with 1D systems where the advection does not change the nature of the pattern (rolls), in 2D systems the dynamics is richer in term of new patterns, symmetries, wave-vector selection with respect to the drift direction, etc. Moreover, most experiments have been achieved in 1D systems and, as far as we know, NSS have not yet been experimentally evidenced in a 2D system. The purpose of this paper is to investigate theoretically and experimentally 2D noise-sustained pattern formation in an optical system with an asymmetric nonlocal interaction. The system considered here is a Kerr slice medium with optical feedback where the backward beam is shifted transversely [11,12]. It allows us to generate and observe different types of basic 2D experimental *noise-sustained structures* that are destabilized from the homogeneous state at the first convective threshold.

The paper is organized as follows. Section I briefly recalls the main concepts peculiar to convective and absolute instabilities. The model in the presence of a translational displacement and its associated dispersion relation are given in Sec. II. The analytical investigations and predictions, in the ideal situation in which noise is neglected and the incident wave is a plane wave, of all the different types of possible basic “convective modes,” their associated thresholds and properties are summarized in Sec. III. Then, the experimentally expected NSS are obtained from numerical simulations carried out in the experimental conditions. In Sec. IV, we determine the absolute thresholds that are compared afterwards with the convective ones found in Sec. III. This allows us to delimit the regions of purely convective modes. Experimental findings are then compared with analytical predictions in

*Electronic address: eric.louvergneaux@univ-lille1.fr; URL: <http://www.phlam.univ-lille1.fr/perso/louvergneaux>

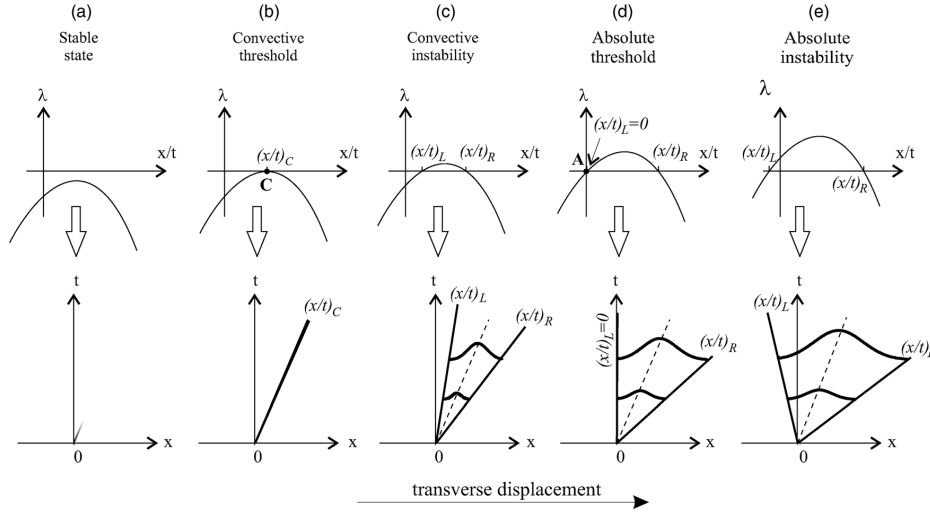


FIG. 1. Schematic diagram of the different types of wave-packet time evolution from an initial perturbation localized at the origin for the (a) stable, (c) convectively unstable, and (e) absolute unstable regimes in a 1D configuration. The cases (b) and (d) correspond to the thresholds of the last two regimes. The control parameter is increased from (a) to (e). λ is the growth rate of the wave packets propagating at velocities x/t along the rays (x/t) in the spatiotemporal diagrams (x, t) . The convective threshold is observed when the global maximum of the growth rate reaches zero [point C of case (b)] whereas the absolute threshold is reached when the growth rate of the wave packet having a vanishing group velocity reaches zero [point A of case (d)]. $(x/t)_L$ and $(x/t)_R$ correspond to the slow and fast frontiers of the wave packets defined by $\lambda((x/t)_L \text{ or } (x/t)_R)=0$, which are the front solutions limiting the wave packets.

Sec. V, showing excellent agreement. Concluding remarks are given in the final section.

I. CONVECTIVE AND ABSOLUTE INSTABILITIES

The standard theoretical approach of the convective and absolute instabilities consists in finding the response of the system to an initial localized perturbation and is provided by the Green function $G(\mathbf{r}, t)$ [3,13], where $\mathbf{r}=(x, y)$ represents the spatial coordinate in the transverse plane. The formal expression of $G(\mathbf{r}, t)$ is an integral over a finite band of wave vectors $\mathbf{k}=(k_x, k_y)$ that can rarely be calculated. However, its evolution over long times can be evaluated by the steepest-descent method [14]. In that case, the response of the system to a local perturbation is asymptotically determined by the value of $G(\mathbf{r}, t)$ estimated at the complex wave vector \mathbf{k}^* corresponding to a saddle point of the underlying linear dispersion relation. The dominant wave packet, propagating at group velocity (\mathbf{r}/t) , that corresponds to the wave vector \mathbf{k}^* is defined by

$$\left. \frac{\partial \Omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}^*} = \frac{\mathbf{r}}{t}, \quad (1)$$

where $\Omega(\mathbf{k})$ is the complex frequency of linear perturbations satisfying the dispersion relation. The set of rays (\mathbf{r}/t) corresponding to asymptotically diverging values of $G(\mathbf{r}, t)$ defines a wave packet, originating from the initial localized perturbation and propagating in the spatiotemporal domain (\mathbf{r}, t) (Fig. 1). Its evolution provides us with the nature, either

convective or absolute, of the instability. In the former case, the wave packet spreads slower than the drift so that it disappears at long times (convective regime) [Fig. 1(c)]. In the second case, the wave packet spread is faster than its advection so that a pattern invades the whole transverse space (absolute regime) [Fig. 1(e)].

The classification of the wave-packet asymptotic evolutions can still be made by the study of the (temporal and spatial) growth rate $\lambda(\mathbf{r}/t)$ (Fig. 1) of the destabilized wave vectors associated with each ray (\mathbf{r}/t) in the packet that constitutes the perturbation $\Delta n(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{aligned} \Delta n(\mathbf{r}, t) &\sim e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\Omega(\mathbf{k})t]} = e^{[-k^i \cdot \mathbf{r}/t + \Omega^i(\mathbf{k})]t} e^{i[k^r \cdot \mathbf{r} - \Omega^r(\mathbf{k})t]} \\ &= e^{\lambda(\mathbf{r}/t)t} e^{i[k^r \cdot \mathbf{r} - \Omega^r(\mathbf{k})t]}, \end{aligned}$$

where $\Omega = \Omega^r + i\Omega^i$ and $\mathbf{k} = \mathbf{k}^r + i\mathbf{k}^i$ are complex to account for both temporal and spatial growth rates. The analysis of $\lambda(\mathbf{r}/t)$ (see the caption of Fig. 1) then gives relations on $\Omega(\mathbf{k})$ that provide the thresholds of convective and absolute instabilities and their corresponding wave vectors. These relations are summarized in Table I, where \vec{V}_g is the group velocity of the wave packet and $\vec{\nabla}_{\mathbf{k}^r}(\Omega^i)|_{\mathbf{k}_c} = \vec{0}$ means $\frac{\partial \Omega^i}{\partial k_x^r}|_{\mathbf{k}_c} = 0$ and $\frac{\partial \Omega^i}{\partial k_y^r}|_{\mathbf{k}_c} = 0$.

II. DISPERSION RELATION

Table I shows that the expression of the dispersion relation $\Omega(\mathbf{k})$ is required to locate the different types of structures that are destabilized at the convective threshold. This

TWO-DIMENSIONAL NOISE-SUSTAINED STRUCTURES...

PHYSICAL REVIEW A 74, 043814 (2006)

TABLE I. Relations giving the convective and absolute instability thresholds and their associated wave vectors.

	Convective	Absolute
Unstable wave vectors	$\mathbf{k}^* = \mathbf{k}_c \in \mathbb{R}$	$\mathbf{k}^* = \mathbf{k}_a \in \mathbb{C}$
Wave vectors obtained from	$\vec{\nabla}_{\mathbf{k}^*}(\Omega^i) _{\mathbf{k}_c} = \vec{0}$	$\vec{\nabla}_{\mathbf{k}^*}(\Omega^i) _{\mathbf{k}_a} = \vec{0}$
	$\vec{\nabla}_{\mathbf{k}^*}(\Omega^r) _{\mathbf{k}_c} = \left(\frac{\mathbf{r}}{t}\right) = \vec{V}g$	$\vec{\nabla}_{\mathbf{k}^*}(\Omega^r) _{\mathbf{k}_a} = \vec{0}$
Thresholds obtained from	$\Omega^i(\mathbf{k}_c) = 0$	$\Omega^i(\mathbf{k}_a) = 0$

relation is obtained from the model of our setup (Fig. 2) based on the well known feedback optical system first introduced by Akhmanov *et al.* [15] and later developed by Firth and d'Alessandro [16]. Here, the model is modified to account for the nonlocality and for the noise. It reads

$$\left(-\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial}{\partial t} + 1\right)n(\mathbf{r}, t) = |F(\mathbf{r})|^2 + |B(\mathbf{r}, t)|^2 + \sqrt{\epsilon}\xi(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$B(\mathbf{r}, t) = \sqrt{R}F_0 e^{i\sigma\nabla_{\perp}^2} [e^{i\chi n(x-h, y, t)} g(\mathbf{r})], \quad (3)$$

where $n(\mathbf{r}, t)$ stands for the refractive index of the nonlinear nematic liquid crystal (LC) layer; t and $\mathbf{r}=(x, y)$ are the time and transverse space variables scaled with respect to the relaxation time τ and the diffusion length l_d ; R is the mirror intensity reflectivity. We have set $\sigma=d/k_0 l_d^2$, where d is the slice-mirror distance and k_0 is the optical wave number of the field. The nonlocality arises from the term $(x-h)$ in the expression of the backward beam B , where h represents the lateral shift along the x axis due to the tilted mirror as indicated in Fig. 1. $\xi(\mathbf{r}, t)$ accounts for thermal noise and describes a Gaussian stochastic process of zero mean and correlation $\langle \xi^a(\mathbf{r}, t)\xi^b(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$, $\langle \xi(\mathbf{r}, t)\xi(\mathbf{r}', t') \rangle = 0$. The level of noise is controlled by the parameter ϵ . F is the forward input optical field; its transverse profile is accounted for using $F(\mathbf{r})=F_0 g(\mathbf{r})$, with $g(\mathbf{r})=\exp[-(x^2+y^2)/w^2]$ for a Gaussian pump beam of radius w and $g=1$ for the uniform (plane wave) case. B is the backward optical field [16]. The Kerr effect is parametrized by χ , which is

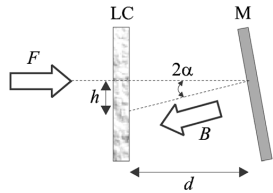


FIG. 2. Schematic sketch of the experimental setup. LC, liquid-crystal layer; M, feedback mirror; F, input optical field; B, backward optical field; α , mirror tilt angle; d , feedback length.

positive (negative) for a focusing (defocusing) medium.

Starting from the above equations, in the plane-wave approximation [$g(\mathbf{r})=1$] and in the absence of noise ($\epsilon=0$), a linear stability analysis provides us with the dispersion relation. Assuming perturbations of the stationary state $n_0 = F_0^2(1+R)$ in the form $\Delta n(\mathbf{r}, t) \sim \exp[i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \Omega(\mathbf{k})t]]$ with $\mathbf{k}=(k_x, k_y)$, we obtain the following dispersion relation:

$$\Omega = \Omega^r + i\Omega^i = -i[1 + \mathbf{k}^2 - \mu \sin(\sigma\mathbf{k}^2)\exp(ihk_x)], \quad (4)$$

where $\mu=2RF_0^2|\chi|$ is the reduced intensity control parameter. The above expression shows that the presence of h leads to a complex dispersion relation, meaning that, in addition to the classical temporal instabilities (\mathbf{k} real and Ω complex), there are also spatial amplifications (\mathbf{k} complex).

Our interest now is to determine to what extent the transverse shift influences and more importantly affects the formation of the different types of basic patterns or “modes” that destabilize at convective threshold, their domain of connectivity (up to the absolute threshold), and their properties. Interactions and competitions between such patterns are beyond the scope of the present work.

III. CONVECTIVE MODES AND THEIR THRESHOLDS

Conditions defining the convective threshold and the associated wave vectors of a mode for a given value of the shift h are obtained from Table I and Eq. (4). The following set of five equations is then obtained:

$$\left.\frac{\partial\Omega^i}{\partial k_x^r}\right|_{\mathbf{k}_c} = \mu_c[2k_{c_x}\sigma\cos(\sigma\mathbf{k}_c^2)\cos(hk_{c_x}) - h\sin(\sigma\mathbf{k}_c^2)\sin(hk_{c_x})] - 2k_{c_x} = 0, \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial\Omega^i}{\partial k_y^r}\right|_{\mathbf{k}_c} = \mu_c 2k_{c_y}\sigma\cos(\sigma\mathbf{k}_c^2)\cos(hk_{c_x}) - 2k_{c_y} = 0, \quad (6)$$

$$\left.\frac{\partial\Omega^r}{\partial k_x^r}\right|_{\mathbf{k}_c} = -\mu_c[2k_{c_x}\sigma\cos(\sigma\mathbf{k}_c^2)\sin(hk_{c_x}) + h\sin(\sigma\mathbf{k}_c^2)\cos(hk_{c_x})] = V_{gx}, \quad (7)$$

$$\left.\frac{\partial\Omega^r}{\partial k_y^r}\right|_{\mathbf{k}_c} = -\mu_c 2k_{c_y}\sigma\cos(\sigma\mathbf{k}_c^2)\sin(hk_{c_x}) = V_{gy}, \quad (8)$$

$$\Omega^i(\mathbf{k}_c) = -1 - \mathbf{k}_c^2 + \mu_c \sin(\sigma\mathbf{k}_c^2)\cos(hk_{c_x}) = 0. \quad (9)$$

Here, we arbitrarily chose the transverse displacement h along the x axis.

The previous set of Eqs. (5)–(9) leads to two sets of convective solutions defined by

$$k_{c_y} = 0, \quad (10a)$$

$$k_{c_x}^{(n)} = \frac{n\pi}{h}. \quad (10b)$$

We then investigate the family of instabilities for each of these two solutions. Condition (10a) obviously leads to solu-

AGEZ *et al.*

 PHYSICAL REVIEW A **74**, 043814 (2006)

tions with no modulation along the y axis since $k_y=0$, and they are called in the following subsection “1D-type convective modes.” In contrast, Eq. (10b) yields the full 2D-type convective modes, as we shall see in Sec. III B.

A. The “1D” type convective modes: Vertical rolls

In the presence of a lateral shift h of the backward beam in the horizontal x direction, the instabilities associated with $k_y=0$ display no modulation along the vertical y axis, i.e., they appear as *vertical rolls* whose periodicity is fixed by the wave number at threshold $k_c=k_{c_x}$. They are similar to those that would be found in a 1D system restricted along the x axis as studied in [1]. Here, we extend the previous study to large values of h and point out that convective pattern formation drastically changes with increasing the value of h .

The convective modes are determined in two steps: first, from Eq. (5), we determine the destabilized wave number $k_x(h)$ at threshold. Since periodic functions are present in Eq. (5), there exists an infinite number of solutions for $k_x(h)$ indexed by $[p]$. No analytical expression of $k_x^{[p]}(h)$ exists since Eq. (5) is transcendental. We then determine them numerically. Thus, these wave numbers $k_x^{[p]}(h)$ are injected in Eq. (9) to yield the convective threshold $\mu_c^{[p]}(h)$ as

$$\mu_c^{[p]}(h) = \frac{1 + k_{c_x}^{2[p]}}{\sin(\sigma k_{c_x}^{2[p]}) \cos(h k_{c_x}^{[p]})}. \quad (11)$$

Figures 3 and 4 display the evolution of the first six convective thresholds and their associated wave numbers versus h (the x subscript is omitted for the sake of clarity). The convective threshold curves versus h look like tongues and evolve very strongly with h . For a given h , instabilities with different wave numbers may compete in the regimes where tongues overlap. For each value of p , the associated wave number decreases continuously (for $\sigma < 0$) with h . The lowest convective threshold and its associated pattern wave number are determined graphically (bold curves in Figs. 3 and 4). The wave number corresponding to this mode evolves with discontinuity (bold curve of Fig. 4) and the jumps are associated with a change of index $[p]$ of the lowest threshold tongue.

The phase and group velocities (V_ϕ, V_g) of the mode selected at the lowest convective threshold are plotted in Fig. 5. We can see that the group velocity is always positive [Fig. 5(b)] whereas the phase velocity can be either positive or negative, meaning that the rolls can drift upstream [see, e.g., $h=8$ in Fig. 5(a)] or downstream. The change in the sign of the phase velocity occurs at each local minimum of the lowest convective threshold curve (Fig. 5) where the pattern is nondrifting (e.g., $h=4.65$ or 10.55). The minimum of each tongue in Fig. 3 leads to a spatially fixed pattern [null phase velocity in Fig. 5(a)]. This situation corresponds to a lateral shift h multiple of the half-wavelength $\Lambda=2\pi/k_{c_x}^{[p]}$. Physically it means that each time the lateral shift h is such that a fringe (maximum of transverse modulation) of the backward field B comes back in phase or in antiphase with a fringe of the incoming field F , the pattern does not drift and its thresh-

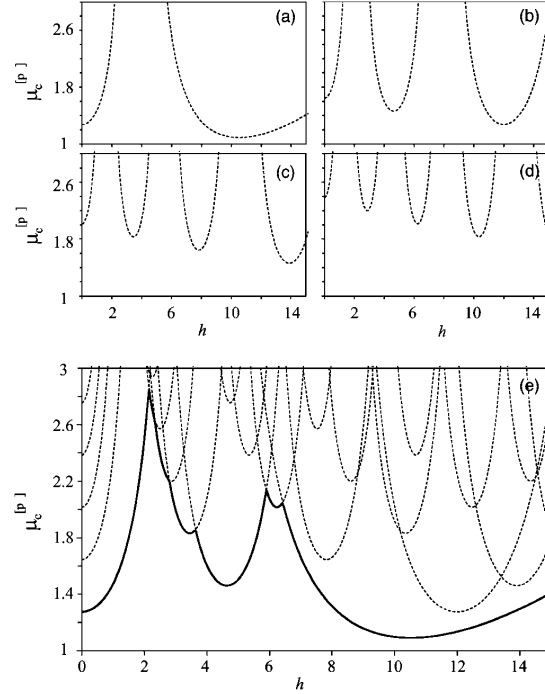


FIG. 3. Evolutions of the convective thresholds of vertical rolls vs h for (a) $p=1$, (b) $p=2$, (c) $p=3$, and (d) $p=4$. $\sigma=-17$ and $\chi=1$. (e) Evolution of the primary threshold vs h (bold curve).

old is minimum since the nonlinear Kerr effect is optimum.

B. The “2D” type convective modes: Horizontal rolls and rectangular lattices

These modes are specific to the full 2D dynamics and are associated with the second condition [Eq. (10b)], namely $k_{c_x}^{(n)} = \frac{n\pi}{h}$. As done previously, we determine the variation of the wave vectors and thresholds versus h by combining the

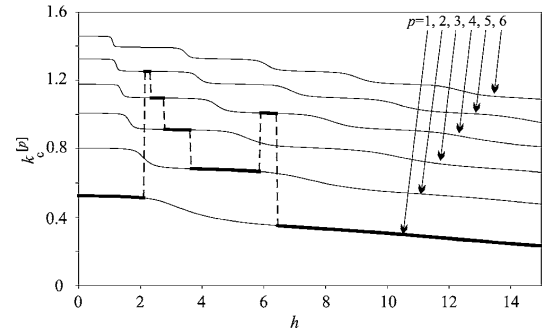


FIG. 4. Evolution of the first six convective wave numbers vs h corresponding to Fig. 3. The bold curve follows the wave number selected at the primary convective threshold.

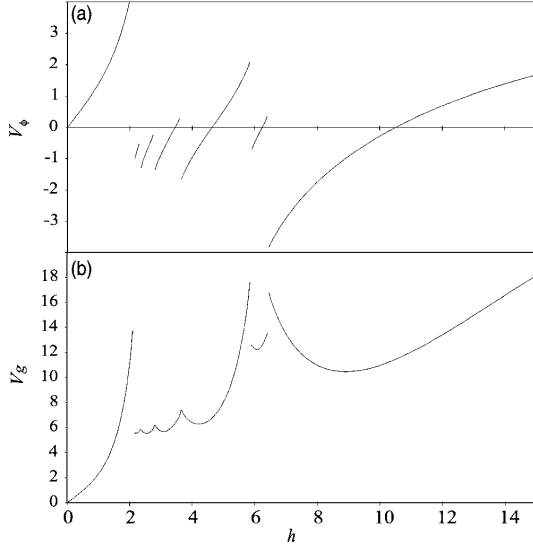


FIG. 5. Evolution of the phase and group velocities (V_ϕ and V_g , respectively) for the mode of lowest threshold vs h corresponding to Fig. 3.

set of Eqs. (5)–(9) with the condition on $k_c^{(n)}$. Inserting this condition in Eq. (9) leads to a series of thresholds for convective instabilities,

$$\mu_c^{(n)}(h) = (-1)^n \frac{1 + k_c^{2(n)}}{\sin(\sigma k_c^{2(n)})}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

with

$$k_c^{2(n)} = k_{c_x}^{2(n)} + k_{c_y}^{2(n)} = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + k_{c_y}^{2(n)}. \quad (13)$$

The striking feature of Eq. (12) is that the threshold is independent of h , and is equal to its value in the absence of drift ($h=0$), except for the term $(-1)^n$. So, *their wave number and threshold are constant with h* . As a consequence, regardless of h , the convective thresholds coincide with those of the system without drift depending on the parity of n ,

$$\begin{aligned} \mu_c^{(n)}(h, \sigma) &= \mu_c^{(n)}(0, \sigma) \quad \text{for } n \text{ even,} \\ \mu_c^{(n)}(h, \sigma) &= \mu_c^{(n)}(0, -\sigma) \quad \text{for } n \text{ odd.} \end{aligned}$$

For negative (positive) values of σ , the convective thresholds are those of the negative (positive) nonlinearity system without drift for even n , and those of the positive (negative) nonlinearity for odd n .

The specific values of the wave numbers $k_c^{(n)}$ are obtained for the minimum of $\mu_c^{(n)}(h)$ versus $k_c^{(n)}$ in Eq. (12) that gives

$$\tan(\sigma k_c^{2(n)}) = (-1)^n \sigma (1 + k_c^{2(n)}). \quad (14)$$

This trigonometric equation admits, for a fixed value of n , multiple wave-number solutions indexed by p , as in Sec.

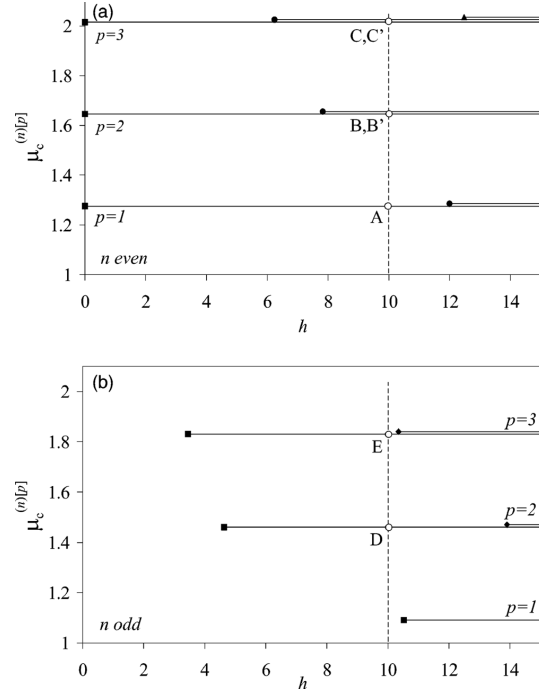


FIG. 6. Evolutions of the 2D type convective mode thresholds $\mu_c^{(n)[p]}$ vs h for three first values of p . (a) Even values of n ($n=0$ squares, $n=2$ diamonds, $n=4$ triangles) and (b) odd values of n ($n=1$ squares, $n=3$ diamond). Note that for a given value of n , the threshold value increases with the p index. The domains of existence of the modes $k_c^{(n)[p]}$ are located to the right of the squares, diamonds, and triangles ending the half-lines. Letters A–E correspond to threshold values of the patterns of Fig. 8. Threshold curves (that are degenerate) have been slightly shifted for the sake of visibility. $\sigma = -17$, $\chi = 1$.

III A. To summarize, convective solutions are characterized by two indices $(n)[p]$. Each $(n)[p]$ mode with a wave number $k_c^{(n)[p]}$ and associated threshold $\mu_c^{(n)[p]}$ exists within a bounded domain set by equality (13) since $k_{c_y}^{(n)[p]}$ exists only if

$$h \geq h_c^{(n)[p]} = \frac{n\pi}{k_c^{(n)[p]}}. \quad (15)$$

These two properties are illustrated in Fig. 6, where the evolution of the convective thresholds for the lower indices ($n \leq 4$; $p \leq 2$) is plotted versus the lateral shift h . As explained above, these thresholds are completely independent of the shift h and the existence condition selects the domains of the threshold curves that reduce to half-lines starting at $h_c^{(n)[p]}$. The transverse displacement does not change here the threshold value nor the mode composition of convective modes, contrary to the 1D type modes. Only the nature of the pattern emerging at the lowest threshold depends on h .

AGEZ *et al.*

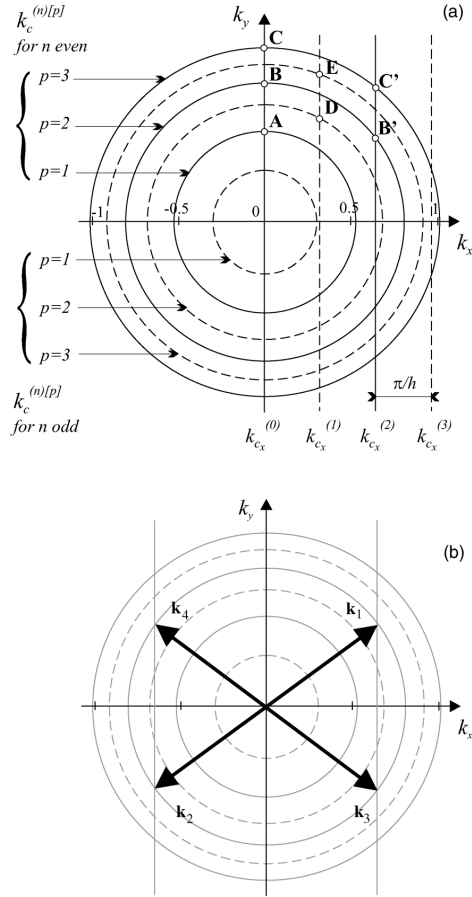
 PHYSICAL REVIEW A **74**, 043814 (2006)


FIG. 7. (a) 2D type convective mode wave-vector locations depending on their indexes (n) and $[p]$. The possible wave-vector ends are found at the crossings of a circle of radius $k_c^{(n)[p]}$ and a vertical line defined by $k_{c_x}^{(n)} = \frac{n\pi}{h}$ of the same draw type (continuous or dashed). Only the wave-vector ends belonging to the first quadrant are represented. Dots labeled A, B, C, D, E, B', C' correspond to modes $(0)[1], (0)[2], (0)[3], (1)[2], (1)[3], (2)[2], (2)[3]$. (b) Full composition of the four wave vectors \mathbf{k}_1 to \mathbf{k}_4 contributing to mode B' . Corresponding near- and far-field transverse modes are depicted in Fig. 8 and their thresholds in Fig. 6.

The wave-vector construction of these 2D convective modes is the following. For a given $(n)[p]$ mode, (n) gives the wave-vector x component defined by $k_{c_x}^{(n)} = \frac{n\pi}{h}$ and $[p]$ gives the modulus $k_c^{(n)[p]}$ of the wave vectors composing the mode. Thus, the location of the end of the wave vectors composing a convective mode $(n)[p]$ is defined by the intersection of a circle of radius $k_c^{(n)[p]}$ and a vertical line defined by $k_{c_x}^{(n)} = \frac{n\pi}{h}$ [Fig. 7(a)]. An example of wave-vector composition for the convective mode $(n)[p] = (2)[2]$ is given in Fig. 7(b). The given wave-vector location description gives the two wave vectors \mathbf{k}_1 (and \mathbf{k}_3). The \mathbf{k}_1 wave-vector end corresponds to the dot B' in Fig. 7(a). Their two opposite wave

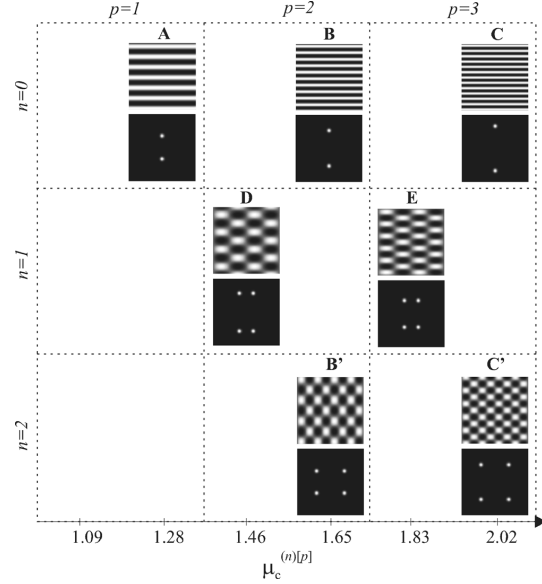


FIG. 8. Convective 2D modes corresponding to the $A-E$ wave vectors presented in Fig. 7. Their convective thresholds are given by the dots in Fig. 6. Top pictures: near field, bottom: far field.

vectors $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ and $\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_3$ also enter the mode composition since Eq. (14) involves the square of $k_c^{(n)}$. So such a convective mode is likely to produce a rectangular pattern because this yields a weaker symmetry breaking than rolls.

Globally, two types of 2D convective modes are obtained: horizontal rolls ($n=0$) and rectangular lattices ($n \neq 0$), as illustrated in Fig. 8. Examples of convective modes corresponding to the wave-vector constructions presented in Fig. 7(a) are plotted in Fig. 8 for $h=10$ in the conditions of Fig. 6. Depending on the pump parameter μ , horizontal rolls and rectangular lattices are obtained with different wave-number values and wave-vector compositions. Threshold degeneracy is observed for, e.g., the horizontal roll mode B and the rectangular lattice mode B' leading to mode competition at the onset of their appearance.

Finally, inspecting the real part of $\Omega(k)$,

$$\Omega'(\mathbf{k}_c) = \mu_c \sin(\sigma \mathbf{k}_c^2) \sin(h k_{c_y}), \quad (16)$$

one can see that the above expression [Eq. (16)] vanishes regardless of h for the 2D type modes [Eq. (10b)]. This implies that the phase velocity of these modes at convective threshold, defined by $v_\phi = \frac{\Omega'(\mathbf{k}_c)}{k_c}$, is identically zero. In other words, all the 2D type modes are *nondrifting* at convective threshold despite the presence of the drift ($h \neq 0$). This striking feature has also been predicted in other fields of nonlinear sciences [17] and seems not to be specific to our system but rather to be generic.

C. Numerical simulations

So far, all the convective modes have been obtained for an ideal configuration where noise is neglected and the incident

wave is a plane wave. However, our experimental system is composed of a liquid crystal layer that is noisy and pumped by a Gaussian beam. The changes induced by these two parameters in the numerical simulations as compared to the analytical predictions at the primary convective threshold are the following. Concerning the noise, as mentioned in the Introduction, when noise is absent ($\epsilon=0$), any initial perturbation is amplified but advected away such that no pattern is observed at long times. On the other hand, when noise is present, a permanent pattern is observed resulting from the continuous spatial perturbation source. The effect of noise is thus to sustain the structures in the regime of convective instability. The level of noise used here, $\epsilon=0.01$, comes from a previous quantitative determination carried out in our experimental setup [18]. Taking into account the Gaussian profile for the input beam in the numerical simulations does not change the global scenario of the convective mode appearance at the primary threshold versus h nor their wave-vector composition. Only the numerical convective threshold values are shifted up (as compared to the analytical ones) due to the finite width of the Gaussian beam. These shifts decrease with the transverse aspect ratio η (beam width $2w$ divided by the pattern wavelength Λ_∞ calculated in the plane-wave case). In the conditions of our experiments, this ratio is around 30 ($2w \approx 3600 \mu\text{m}$ and $\Lambda_\infty \approx 120 \mu\text{m}$) yielding e.g., at $h=0$, the convective threshold value $\mu_c=1.52$ for the experimental conditions while the predicted one is $\mu_c=1.28$ for the ideal system. Thus, the numerical simulations carried out for realistic experimental conditions, i.e., including a Gaussian incident beam and a noise source term, allow us to predict the parameter domain in which NSS should be observed experimentally together with their wave-vector content and their thresholds.

An example of the structures that will destabilize at the primary convective threshold for different values of the lateral shift parameter h is given in Fig. 9 for a negative nonlinearity (σ) and with both noise and Gaussian input beam. As h increases from 0, horizontal rolls ($k_x=0$) appear first up to $h \approx 8.2$, then vertical rolls ($k_y=0$) for $8.2 < h < 10.5$, and rectangular lattices when $h > 10.5$ ($k_{c_x}^{(n)} = \frac{n\pi}{h}$ with $n > 0$). The threshold values can be lower than those observed for the system without transverse displacement, as was done experimentally in Ref. [19] ($h > 8$ in Fig. 9). The sequence of observed noise-sustained modes strongly depends on the sign of σ , since for positive values of σ (not represented here) only horizontal rolls and rectangular lattices are observed at the primary convective threshold. We do not discuss here patterns resulting from the combination of convective modes (e.g., at $h \approx 8$, where the horizontal and vertical roll modes have the same convective threshold).

As we can remark from Fig. 9, the NSS mimic the convective modes obtained previously for an ideal system.

IV. ABSOLUTE THRESHOLDS OF THE CONVECTIVE MODES

Convective modes can be observed as long as the threshold for absolute instabilities μ_a is not reached. If $\mu \geq \mu_a$, the

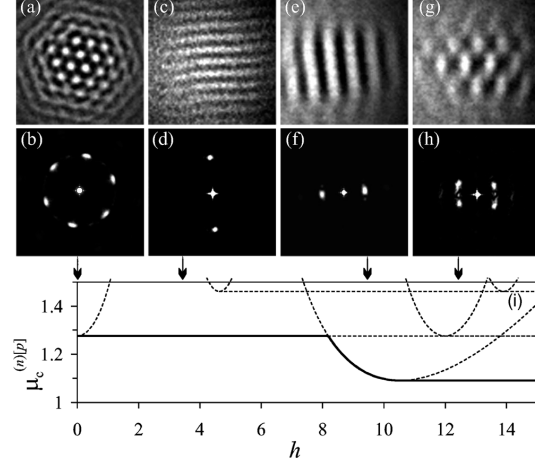


FIG. 9. (a)–(h) Noise-sustained patterns at the primary threshold obtained from numerical simulations carried out for the experimental conditions. The snapshots of the patterns are represented for near (top) and far (bottom) field, respectively. The numerical simulation parameters are (a), (b) $h=0$ and $\mu=1.52$, (c), (d) $h=3.5$ and $\mu=1.62$, (e), (f) $h=9.7$ and $\mu=1.62$, (g), (h) $h=12.5$ and $\mu=1.62$, $\chi=1$, $\sigma=-17$, $\omega=180l_d$, and $\epsilon=0.01$. (i) Synthesis of convective threshold curves of 1D and 2D type convective modes vs h . The sizes of the near- and far-field pictures are, respectively, $130 \times 130 l_d^2$ and $1.77 \times 1.77 l_d^2$.

initial perturbations of the homogeneous state are amplified all over the space. To know the extension of the convective and absolute domains of the previous convective modes, we need to determine their absolute thresholds. As has been detailed in Sec. I, it is necessary to consider complex wave vectors to characterize the spreading mechanism of the wave packet resulting from an initial local perturbation. Namely, a complex wave vector \mathbf{k} is defined by (for clarity)

$$\mathbf{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y = (k_x^r + ik_x^i) \cdot \vec{e}_x + (k_y^r + ik_y^i) \cdot \vec{e}_y, \quad (17)$$

where $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$ are the Cartesian orthogonal unitary vectors of the transverse plane, and $(k_x; k_y)$ and the x and y components of \mathbf{k} . Then, \mathbf{k}^2 reads

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \underbrace{(k_x^r^2 + k_y^r^2 - k_x^i^2 - k_y^i^2)}_A + i2(k_x^r k_x^i + k_y^r k_y^i) = A + iB. \quad (18)$$

We now plug Eqs. (17) and (18) into the dispersion relation [Eq. (4)]. After lengthy but straightforward calculations, we obtain

$$\Omega^r = B - \mu \exp(-k_x^i h) [\cos(\sigma A) \sinh(\sigma B) \cos(k_x^r h) + \sin(\sigma A) \cosh(\sigma B) \sin(k_x^r h)], \quad (19a)$$

$$\Omega^i = -1 - A + \exp(-k_x^i h) [\sin(\sigma A) \cosh(\sigma B) \cos(k_x^r h) - \cos(\sigma A) \sinh(\sigma B) \sin(k_x^r h)]. \quad (19b)$$

The conditions of Table I expressed in terms of the complex

AGEZ *et al.*

 PHYSICAL REVIEW A **74**, 043814 (2006)

components lead to the following five relations:

$$\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k_y^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0, \quad (20a)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k_y^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0, \quad (20b)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^r}{\partial k_x^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0, \quad (20c)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^i}{\partial k_x^r} \right|_{\mathbf{k}_a} = 0, \quad (20d)$$

$$\Omega^i(\mathbf{k}_a) = 0. \quad (20e)$$

These relations determine both the values of the absolute threshold and of the wave-vector components, i.e., μ_a , $k_{x_a}^r$, $k_{y_a}^i$, $k_{y_a}^r$, and $k_{x_a}^i$, respectively. We now proceed to the analysis of the two types of instabilities obtained in the preceding section, namely the “1D” and “2D” convective modes.

A. “1D” type modes (vertical rolls)

In the case of vertical rolls, the system of the five previous equations [Eqs. (20a)–(20e)] reduces to three [Eqs. (20c)–(20e)] since there is no component along the y axis (see Sec. III A). No exact analytical expressions of μ_a , $k_{x_a}^r$, and $k_{x_a}^i$ have been derived from this set of equations. However, approximated analytical expressions of the latter variables can be obtained from a Taylor expansion of the dispersion relation [Eq. (4)] following the same approach as in [1,20]. Here we include the second-order cross-coupling term $1/2(\partial^2 \Omega / \partial \mathbf{k} \partial \mu)(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c)(\mu - \mu_c)$, which was not taken into account in previous works [1,20]. In these conditions, the approximated analytical values and numerically solved exact values of the absolute threshold agree very well even for nonsmall values of $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c)$ or $(\mu - \mu_c)$ (Fig. 10). As can be seen from Fig. 10, $(\mu - \mu_c)$ is around 0.4 for $h \approx 8$, which is beyond the conditions for a Taylor expansion, but taking into account the cross-coupling term gives an excellent evaluation of the expected absolute threshold value (black solid line of Fig. 10) even in these conditions. Indeed, without the presence of the second-order cross-coupling term, the approximated value of the absolute threshold would be 20% far from the alternative value leading to large errors for the width of the purely convective regimes. Finally, the system [Eqs. (20c)–(20e)] is numerically solved to get exact values of μ_a , $k_{x_a}^r$, and $k_{x_a}^i$. One has then to ensure that the obtained values actually correspond to a saddle point [3,21] by checking first the pinching condition as shown in Fig. 12. From the example of Fig. 11, at saddle point, the pinching condition of the curve $\Omega^i = 0$ in the complex plane defined by (k^r, k^i) [Fig. 12(c)] is satisfied. Secondly, one has to check that this saddle point corresponds to the one associated with the absolute threshold. Indeed, Papoff and Zambrini [22] mention that

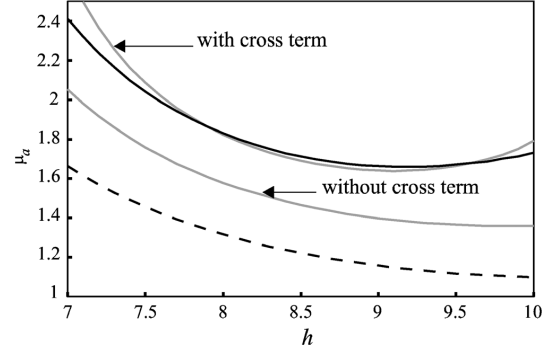


FIG. 10. Influence of the second-order cross term in the Taylor expansion of the dispersion relation for nonsmall values of $(\mu - \mu_c)$. Numerically solved exact convective (dashed line) and absolute (black solid line) thresholds for $\sigma = -17$. In gray, the approximate values of the absolute threshold with and without a second-order cross term are shown.

due to the exponential term in the dispersion relation, there exists a countable infinity of saddle points. To avoid the non-desired saddle points, we follow by continuity from the situation $h=0$ the one actually corresponding to the absolute threshold up to the desired h value.

The absolute thresholds obtained in the conditions of Fig. 3 are plotted in Fig. 13. Note, for mode $[p]=1$ around $h=9$, the relatively wide regions of the convective regime (gray region between dashed and solid lines). We emphasize here that for $h=8$, the mode that destabilizes first does not become the first absolutely unstable mode. Moreover, by varying the control parameter μ and following the spatiotemporal evolution of a given convective mode, we have observed that its phase velocity v_ϕ at absolute threshold generally differs from that at convective threshold. The resulting striking feature is that a nondrifting mode at convective threshold will be traveling at the absolute one and vice versa.

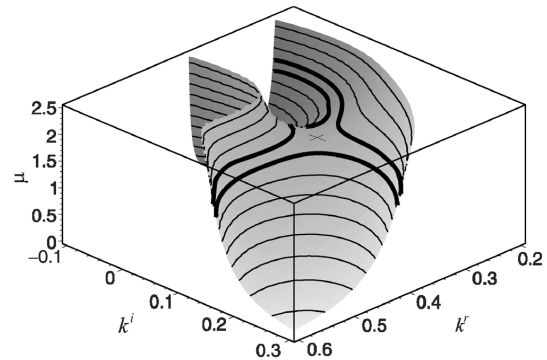


FIG. 11. $\Omega^i=0$ surface in (k^r, k^i, μ) space showing the saddle point around the absolute threshold point $\mu_a=1.8$ (cross). Bold level lines correspond to $\mu=1.6$ (below absolute threshold) and $\mu=1.8$ (above absolute threshold). $\sigma=-17$ and $h=10$.

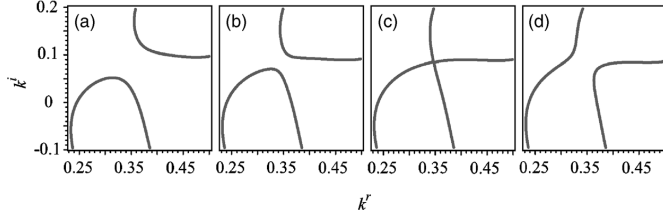


FIG. 12. Pinching condition observed for $\Omega^i = 0$ when crossing the absolute threshold at $\mu = 1.731$. (a) $\mu = 1.6$, (b) $\mu = 1.7$, (c) $\mu = 1.731$, and (d) $\mu = 1.8$. Same parameters as Fig. 11.

B. “2D” type modes (horizontal rolls and rectangular lattices)

The situation of 2D type modes is complicated because a system of five equations should be solved. However, two observations lead to a significant reduction of the degree of the system complexity. The first one is that at absolute threshold

$$k_{y_a}^i = 0. \quad (21)$$

Indeed, there is no transverse displacement along the y axis, hence there is no spatial amplification along this axis at absolute threshold. This situation is common to other systems experiencing drift effects as, in particular, for optical parametric oscillators in the presence of walk off [23]. The second one that is valid only for the horizontal rolls,

$$k_{x_a}^r = 0, \quad (22)$$

originates, in the absence of modulation along the x axis, from these modes.

Starting from these properties, we first develop an analytical expression of the absolute threshold for the horizontal rolls. Putting Eqs. (21) and (22) in Eqs. (20a)–(20e), we straightforwardly obtain $B=0$ leading to the following system ($k_{y_a}^r \neq 0$):

$$\mu_a \exp(-k_{x_a}^i h) \sin(\sigma A) = 1 + A, \quad (23a)$$

$$\mu_a \exp(-k_{x_a}^i h) \sigma \cos(\sigma A) = 1, \quad (23b)$$

$$\mu_a \exp(-k_{x_a}^i h) [2\sigma \cos(\sigma A) k_{x_a}^i - h \sin(\sigma A)] = 2k_{x_a}^i. \quad (23c)$$

Substituting Eqs. (23a) and (23b) into Eq. (23c) gives

$$h(1 + A) = 0. \quad (24)$$

So, either $h=0$ or $A=-1$. Since here $h \neq 0$, then $A=-1$ leading to a nonphysical solution. Thus, no absolute threshold is found for the horizontal rolls. The analytical development of the absolute threshold carried out for the rectangular lattices also leads to a system that does not possess absolute thresholds. We have numerically solved the system of Eqs. (20a)–(20e) together with the approximated expansion of the dispersion relation, and no saddle point was found for the 2D type modes. This is in agreement with the numerical simulations performed with the parameter set of Fig. 3 with $h=2$, where only convective horizontal rolls have been found up to $2\mu_c$ ($\mu \in [1.3; 2.8]$, i.e., in a region where only horizontal rolls are predicted). From these investigations, one may conjecture that the 2D type modes are purely convective.

V. EXPERIMENTAL RESULTS

The main goal of this section is to compare the experimental patterns observed at the primary threshold with the analytical predictions and the numerical simulations carried out in realistic conditions. The comparison is mostly performed on the wave-vector composition of the convective modes together with the evolution of their threshold $\mu_c(h)$ and wave number k_c with the lateral shift h .

The experiments are performed on the setup already described in [18,24] with the main difference of having a feedback mirror tilted by an angle α (see Fig. 2). A 50- μm -thick layer of E_7 homeotropically aligned nematic liquid crystal at 22 °C is irradiated by a 532 nm frequency doubled Nd:YVO₄ laser with a beam radius of 1.8 mm. The response time τ and diffusion length l_d are 2.3 s and 10 μm , respectively [25]. Thus, for a typical feedback length $d=-2$ cm, the angle α is of order of 2.5 mrad for $h \approx 10l_d=100 \mu\text{m}$ (to be compared with the pattern wavelength in the conditions of a uniform pump profile $\Lambda_\infty=120 \mu\text{m}$). In the following, h will be given in units of l_d to keep the same units as for analytical predictions.

Starting from the “homogeneous” state (i.e., without any transverse modulation except for the Gaussian profile) and increasing the transverse shift h , we successively observe, at the first convective instability threshold, noise-sustained horizontal rolls [Figs. 14(c) and 14(d)], vertical rolls [Figs. 14(e) and 14(f)], and rectangular lattices [Figs. 14(g) and

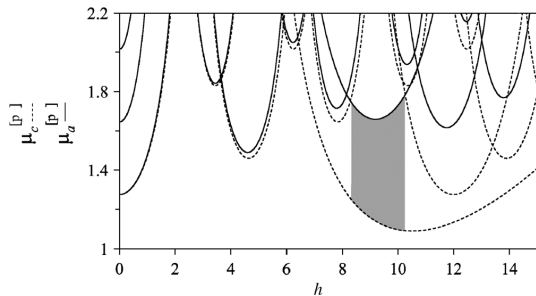


FIG. 13. Evolution of the six first convective μ_c (dashed lines) and absolute μ_a (plain lines) thresholds of vertical rolls vs h for $\sigma=-17$, $\chi=1$. The gray region corresponds to the width of the convective regime of mode $[p]=1$ for $h \approx 9$.

AGEZ *et al.*

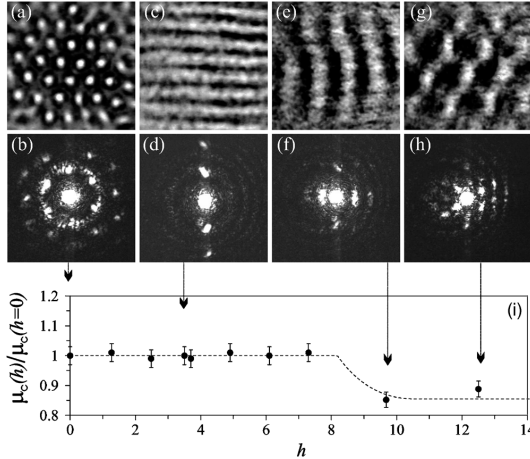
 PHYSICAL REVIEW A **74**, 043814 (2006)


FIG. 14. Near-field (upper row) and far-field (lower row) 2D experimental noise-sustained patterns observed for different values of the shift h (in units of l_d) at the first convective instability threshold. $\sigma = -17$, $d = -20$ mm. μ_c is measured in units of the hexagon threshold intensity at $h=0$ evaluated with 10% accuracy. $h=0$ hexagons (a), (b), $h=3.5$ horizontal rolls (c), (d), $h=9.7$ vertical rolls (e), (f), and $h=12.5$ rectangular lattices (g), (h) are observed. (i) Experimental values of the normalized convective threshold $\mu_c(h)/\mu_c(h=0)$ (dots). The dotted line corresponds to its analytical value [Fig. 9(i)]. The size of pictures is 1.3×1.3 mm² ($130 \times 130 l_d^2$) for the near fields and 15×15 mrad ($1.77 \times 1.77 l_d^2$) for the far fields.

14(h)]. This scenario exactly follows the one predicted by our analytical study illustrated in Fig. 9. Indeed, starting from the situation in which the transverse shift h is absent, so that the hexagon [Figs. 14(a) and 14(b)] is the only possible absolute pattern, we increase from zero the value of h and successively recover the three convective modes obtained by numerical simulations and predicted by our theoretical analysis.

Several qualitative properties of these structures have been checked.

(i) The convective threshold of the horizontal rolls does not evolve with h , as can be seen in Fig. 14 for $0 < h < 8$. This result was predicted in Sec. III B and plotted in Fig. 6. It reveals that the convective threshold of horizontal rolls is the same as that of the hexagonal pattern. We have also checked that the convective threshold of rectangular lattices remains constant with h for $h > 10.5$.

(ii) The wave number at convective threshold of horizontal rolls or rectangular lattices does not change with h for constant input intensity parameter (Fig. 15). This property is a direct consequence of the previous property of independence of the convective threshold upon h [Eq. (12)].

(iii) The rectangular lattices are not drifting at threshold. Indeed, as we have checked in Fig. 16(c), the profile of its cross section does not propagate along the transverse shift direction, meaning that its phase velocity vanishes. This is also the case for horizontal rolls. This property is remarkable since it is nonintuitive and in contrast with the commonly widespread situation where convection leads to propagating

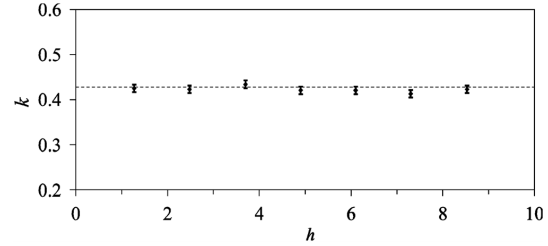


FIG. 15. Evolution of the wave number (in units of l_d^{-1}) of the horizontal roll mode (0)[1] vs h at convective threshold.

patterns. Let us mention that there exists a temporal dynamics of the noise-sustained rectangular lattices at convective threshold. It looks like alternation between the two rolls composing the pattern.

(iv) The vertical rolls are drifting patterns and have a threshold value lower than that of the hexagonal structure in the absence of transverse shift (see region $8 < h < 10.5$ in Fig. 14).

We have also performed a quantitative comparison of the predictions of the model with the experimental observations in the case of the vertical rolls. Since these patterns have the same threshold and wave number as those of an equivalent 1D system, we have realized such a system by means of cylindrical lenses [24], thus keeping only the wave-vector component along the transverse shift axis (k_x). The results are plotted in Fig. 17. The determination of the convective threshold is carried out by using the instability convective signature based on the evolution of pattern region upstream

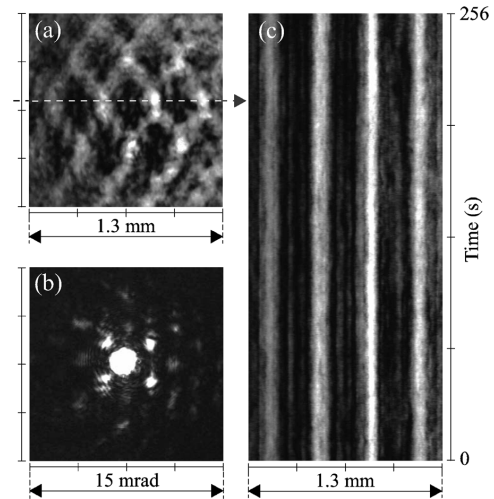


FIG. 16. (a) Experimental nondrifting noise-sustained rectangular lattice for a non-null lateral shift h at first convective threshold. Upper, near field; lower, far field. (b) Temporal evolution of the transverse cross section of the pattern along the line indicated by the dashed arrow showing the nondrifting of the pattern. $h=14.6$, $\mu_c/\mu_c(h=0)=0.93$. The size of pictures (a) and (b) is, respectively, 1.3×1.3 mm² ($130 \times 130 l_d^2$) and 15×15 mrad ($1.77 \times 1.77 l_d^2$).

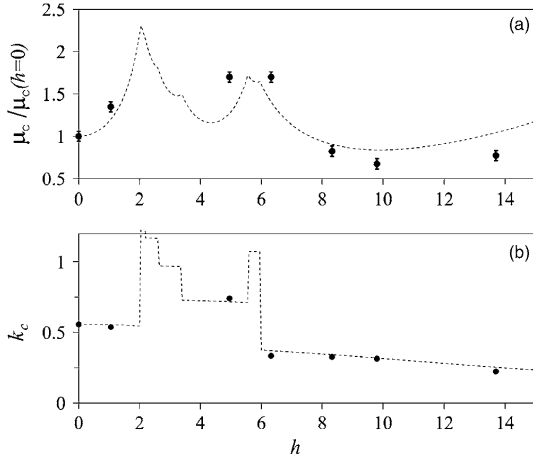


FIG. 17. Experimental evolution of the (a) convective threshold and (b) wave number of vertical rolls vs h . The continuous lines are the theoretical values calculated from the analytical expressions of Eqs. (5) and (11). Dots are the measured experimental data. Vertical bars are convective threshold determination errors. $\sigma = -15$.

edge [1]. The agreement between the wave-number analytical curves determined for the equivalent uniform system and the experimental values (dots) measured for the real system pumped with a Gaussian beam input is excellent [Fig. 17(b)]. Concerning the convective threshold [Fig. 17(a)], the agreement is also good, taking into account the presence of a Gaussian profile for the pumping beam that induces shifts in the threshold values. It is also clear here that because of convective instability, it is possible to lower by 10% the first threshold of pattern instability as compared to the absolute threshold in the absence of nonlocality ($h=0$) for negative values of σ (or equivalently for negative feedback lengths) as already mentioned by Ramazza *et al.* [19,26].

To summarize our experimental observations, we have obtained an excellent agreement between the predictions and the experimental observations on all the points that have been checked. More specifically, the nature of the modes predicted at the primary threshold, the variation with h of their threshold $\mu_c(h)$ and wave number k_c , and their phase velocity v_ϕ agree in all details. This confirms that the model [Eqs. (2) and (3)] accurately describes pattern formation of our nonlocal system and generalizes what was obtained in the 1D configuration [1]. In these conditions, we can safely assume that the theoretical and numerical determinations of the absolute thresholds are also reliable. Unfortunately, no experimental check of absolute threshold is available for

these 2D instabilities, in particular because of the possible interactions of several convective modes, contrary to the 1D configuration, where the evolution of the instability front u_f provided such a check. Therefore, in the 2D case, we have to rely on the predicted evolutions and values of μ_a . As the calculations of the absolute thresholds μ_a predict wide regions of purely convective regimes, i.e., domains in which μ_c and μ_a are significantly different, we can expect corresponding experimental large regions of purely convective patterns. Numerical simulations have also confirmed that the finite transverse dimension and Gaussian dependence of the pump transverse profile do not change significantly the relative values of the thresholds if the aspect ratio η is large, which is the case here since $\eta \approx 30$. As simulations carried out with corresponding parameters confirm that structures disappear in the absence of noise, we can safely claim that the patterns obtained experimentally in these conditions just above the primary convective threshold are noise-sustained structures.

CONCLUDING REMARKS

In conclusion, we have shown that introducing a transverse shift in a feedback loop of a noisy optical system leads to convective and absolute instabilities generating *noise-sustained* and dynamically self-sustained transverse structures, respectively. The first ones are convective patterns that would not be observed if there were no noise in the system. The second ones are the well known patterns that asymptotically cover the whole transverse space even in the absence of noise.

We have analytically predicted, in the ideal situation of a uniform incident wave, three types of “basic convective patterns” or “convective modes,” namely horizontal rolls, vertical rolls, and rectangular lattices. Numerical simulations carried out for realistic experimental conditions confirm this analytical study and agree very well with the obtained experimental noise-sustained modes.

We have also experimentally evidenced the properties and features of the “convective modes” appearing in our optical system. In particular, horizontal rolls and rectangular lattices are purely noise-sustained structures and are nondrifting at convective threshold. Their related wave number and convective threshold do not evolve with the transverse shift h that controls the nonlocality. We have also shown that the vertical rolls can be either noise-sustained or self-sustained and drift at convective threshold except for very specific values of h .

Numerous more complex patterns that can be generated from the basis of these three previous “convective modes” depending on their domains of existence and their competition are now under study.

AGEZ *et al.*

PHYSICAL REVIEW A **74**, 043814 (2006)

- [1] E. Louvergneaux, C. Szwaj, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 043901 (2004).
- [2] R. J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas* (MIT Press, Cambridge, MA, 1964).
- [3] P. Huerre and P. A. Monkewitz, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473 (1990).
- [4] A. Couairon and J. M. Chomaz, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2666 (1997); H. R. Brand, R. J. Deissler, and G. Ahlers, *Phys. Rev. A* **43**, 4262 (1991).
- [5] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3633 (1997).
- [6] N. Mitarai and H. Nakanishi, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1766 (2000).
- [7] N. Israeli, D. Kandel, M. F. Schatz, and A. Zangwill, *Surf. Sci.* **494**, L735 (2001).
- [8] P. Büchel and M. Lucke, *Phys. Rev. E* **61**, 3793 (2000); X. Nicolas, A. Mojtabi, and J. K. Platten, *Phys. Fluids* **9**, 337 (1997).
- [9] P. Gondret, P. Ern, L. Meignin, and M. Rabaud, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1442 (1999).
- [10] L. Pastur, M. T. Westra, and W. van de Water, *Physica D* **174**, 71 (2003).
- [11] P. L. Ramazza, S. Ducci, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4128 (1998); S. Ducci, P. L. Ramazza, W. González-Viñas, and F. T. Arecchi, *ibid.* **83**, 5210 (1999).
- [12] For a review of the different types of transverse nonlocal interactions in the feedback system and associated references, see Sec. 3.6. in F. T. Arecchi, S. Boccaletti, and P. L. Ramazza, *Phys. Rep.* **318**, 1 (1999).
- [13] P. A. Sturrock, *Amplifying and Evanescent Waves, Convective and Non-convective Instabilities*, edited by J. E. Drummond (McGraw-Hill, New York, 1961).
- [14] C. Bender and S. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1978).
- [15] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, and V. Yu. Ivanov, *JETP Lett.* **47**, 707 (1988); S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zheleznykh, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 78 (1992).
- [16] W. J. Firth, *J. Mod. Opt.* **37**, 151 (1990); G. D'Alessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2597 (1991).
- [17] P. N. McGraw and M. Menzinger, *Phys. Rev. E* **72**, 026210 (2005).
- [18] G. Agez, C. Szwaj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **66**, 063805 (2002).
- [19] P. L. Ramazza, P. Bigazzi, E. Pampaloni, S. Residori, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. E* **52**, 5524 (1995).
- [20] A. D. D. Craik, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **373**, 457 (1981); R. Tagg, W. S. Edwards, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. A* **42**, 831 (1990).
- [21] See Sec. 4 in P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics I* (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [22] F. Papoff and R. Zambrini, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 243903 (2005); R. Zambrini and F. Papoff, *Phys. Rev. E* **73**, 016611 (2006).
- [23] H. Ward, M. N. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux, *Phys. Rev. E* **63**, 016604 (2001); H. Ward, M. Taki, and P. Glorieux, *Opt. Lett.* **27**, 348 (2002).
- [24] E. Louvergneaux, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 244501 (2001).
- [25] G. Agez, P. Glorieux, C. Szwaj, and E. Louvergneaux, *Opt. Commun.* **245**, 243 (2005).
- [26] P. L. Ramazza, S. Boccaletti, A. Giaquinta, E. Pampaloni, S. Soria, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. A* **54**, 3472 (1996).

La composition et l'interaction des modes convectifs et absolus obtenus dans la sous-section précédente donnent lieu à des structures dont la dynamique peut s'avérer très complexe. La sous-section suivante présente le cas particulier des structures stationnaires obtenues par composition de deux de ces modes convectifs. Il s'agit des structures *hyper-réseaux*.

3.3.2 Hyper-réseaux stationnaires entretenus par le bruit

En plus de la dérive, l'autre conséquence majeure de la nature convective d'un système spatial est de générer toute une nouvelle série de structures élémentaires (Fig. 3.4). Ces structures de base¹⁴ (ou modes) viennent enrichir l'unique structure hexagonale observée au seuil en absence de rétroaction non-locale. A partir de cette constatation il est possible d'envisager le degré supérieur dans la complexité spatiale, c'est à dire les structures composées d'au moins deux de ces modes. Deux types de structures peuvent alors être obtenues : les structures *quasipériodiques* [254, 255, 97, 98, 256, 257] et les structures de type *hyper-réseaux* [258, 259, 260, 261, 262, 263]. Les premières, apériodiques, font référence à l'ordre quasi-cristallin observé dans la physique de l'état solide [264]. Elles s'obtiennent en présence de modes de même nombre d'onde, à l'opposé des structures de type hyper-réseaux dont chaque mode a un nombre d'onde différent. Quand leurs vecteurs d'onde \mathbf{k}_i vérifient la *condition de résonance* suivante

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{k}_i = 0 \quad (3.1)$$

les structures sont stationnaires. Dans le cas contraire, les modes rentrent en compétition et une dynamique complexe se met en place [265, 266, 267].

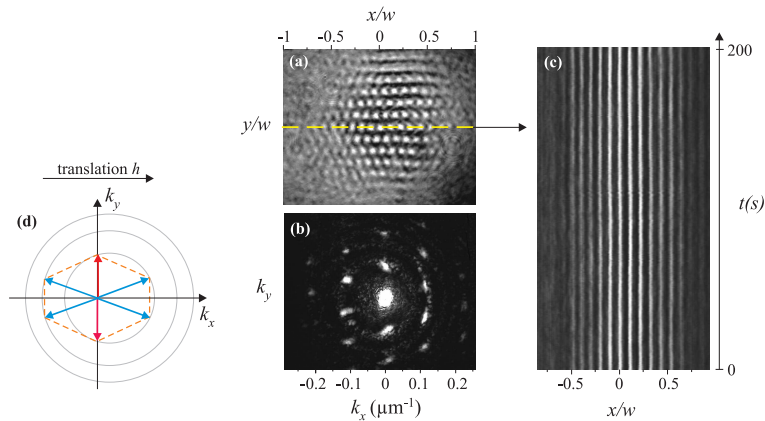


FIGURE 3.5: (a,b) Hyper-réseau expérimental stationnaire et entretenu par le bruit. (a) Champ proche et (b) lointain. (c) Diagramme spatio-temporel correspondant à la ligne en tirets jaunes sur (a). (d) Composition schématique de la structure dans l'espace de Fourier : les vecteurs d'ondes \mathbf{k} en rouge correspondent au mode rouleau horizontal et ceux en bleu au mode réseau rectangulaire.

14. Voir la note de bas de page 12 dans cette section

Grâce à l'existence d'une base de trois modes convectifs¹⁵ dans notre système Kerr à 2D, il est donc possible de générer des structures *stationnaires* de type *hyper-réseaux*. Cette étude¹⁶ est présentée dans la Sec. 9.4 de la thèse de G. Agez [150] jointe ci-après. Le principal résultat est l'observation expérimentale d'un hyper-réseau stationnaire entretenu par le bruit [Fig. 3.5(a)]. Celui-ci est composé d'un mode convectif de type rouleau horizontal [en rouge sur la Fig. 3.5(d)] et d'un mode de type réseau rectangulaire [en bleu sur la Fig. 3.5(d)]. Le schéma de la Fig. 3.5 ainsi que la transformée de Fourier optique [Fig. 3.5(b)] montrent que les vecteurs d'ondes de ces deux modes vérifient bien la relation de l'Eq. (3.1). L'évolution temporelle¹⁷ de cette structure confirme le caractère stationnaire de la structure [Fig. 3.5(c)]. Notons, qu'en plus d'être stationnaire spatialement, ce qui n'est pas intuitif pour un système convectif, la structure est complètement entretenue par le bruit et donc ne serait pas observée si le système n'était pas stochastique. L'orientation de l'hyper-réseau est fixée par l'axe suivant lequel est appliquée la rétroaction non-locale. D'autres exemples d'hyper-réseaux construits à partir de la relation (3.1) sont présentés sur les figures numériques 9.15 et 9.16 de la Sec 9.4 de [99] jointe ci-après.

Un hyper-réseau stationnaire entretenu par le bruit, composé d'un mode convectif de type rouleau horizontal et d'un mode de type réseau rectangulaire, est observé expérimentalement.

15. Rouleaux horizontaux, rouleaux verticaux et réseaux rectangulaires.

16. en cours de rédaction

17. Il s'agit de l'évolution temporelle d'une section réalisée suivant la direction de la rétroaction non-locale.

Extrait de la thèse de G. Agez

9.4 Structures hyper-réseaux et quasi-cristaux entretenues par le bruit

Nous venons de voir dans ce chapitre 9 que la présence de dérive dans notre système donnait lieu à la naissance de toute une série de nouvelles structures périodiques absentes dans le système classique où seule la structure hexagonale existe. Ces structures de base, encore appelées modes, font partie des structures périodiques typiques largement étudiées dans les systèmes dissipatifs telles que les rouleaux, les carrés, les hexagones observés dans les différents domaines de la physique [1].

Un autre classe de structures plus complexes existe lorsqu'au moins deux modes coexistent ou lorsqu'une rotation est appliquée dans le système. Deux types de structures peuvent alors être obtenues : les structures *quasipériodiques* et les structures de type *hyper-réseaux*. Les premières, aperiodiques, font référence à l'ordre quasicristallin observé dans la physique de l'état solide [2] et se présentent sous forme par exemple d'ordre à 8 ou 12 spots répartis sur un anneau dans le plan de Fourier. Plusieurs de ces structures ont été mises en évidence d'abord en hydrodynamique [3, 4] puis ensuite en optique [5, 6, 7, 8]. Le second type de structures (hyper-réseaux) s'obtient en présence d'aux moins deux modes qui doivent alors vérifier une *condition de résonance* pour que cette structure soit stationnaire. Dans le cas contraire, les modes rentrent en compétition et une dynamique complexe se met en place qui peut donner lieu par exemple à une dynamique d'alternance [9], de "winner takes all" [10], ou plus complexe [11].

Nous nous intéressons ici au cas des structures stationnaires. Ces dernières sont composées de modes dont les vecteurs d'onde \mathbf{k}_i vérifient la condition de résonance :

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{k}_i = 0 \tag{9.26}$$

Au même titre que l'hexagone dans le système classique est le résultat de cette combinaison, les hyper-réseaux se construisent à partir de cette relation vectorielle à la différence près que les vecteurs d'onde en jeu n'ont pas tous le même module.

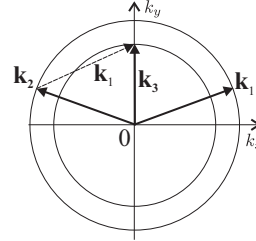


FIGURE 9.11: Exemple de résonance entre deux vecteurs d'onde de même module \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 et un vecteur d'onde de module différent \mathbf{k}_3 tel que $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$.

Un exemple de cette interaction constructive est donné sur la figure 9.11 : les vecteurs d'onde composant la structure en champ proche se retrouvent tous par simple combinaison linéaire de deux autres. Ainsi, deux vecteurs créent une modulation qui va coïncider avec celle d'un troisième vecteur, l'amplifiant et la stabilisant. De nombreux travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux ont mis en évidence ces hyper-réseaux ainsi que les conditions à remplir pour les obtenir [12, 13, 14, 15, 16, 17].

Nous allons montrer ici qu'il est possible de générer de tels hyper-réseaux ainsi que des quasicristaux à partir des modes obtenus dans notre système grâce à la dérive. En effet, notre système possède tous les ingrédients requis :

1. des modes de différents modules $k_i \neq k_j$;
2. des rapports entre les nombres d'onde qui vérifient la condition de résonance (Eq. 9.26).

Nous proposons ici une méthode simple de construction de ces structures particulières à partir de différents modes du système. Nous nous limiterons à vérifier, à travers un exemple expérimental, que ces structures sont stationnaires et qu'elles sont entretenues par le bruit en régime convectif (grâce aux simulations numériques).

9.4.1 Construction géométrique d'un hyper-réseau

Nous avons vu dans la section 9.1 que trois types de modes existaient dans le système à dérive : des rouleaux horizontaux stationnaires de nombres d'onde constants $k_{c(n=0)}^{[p]}$ (indépendants de h), des réseaux rectangulaires stationnaires dont les nombres d'onde $k_{c(n \neq 0)}^{[p]}$ dépendent de h , et des rouleaux verticaux non stationnaires.

SECTION 9.4

21

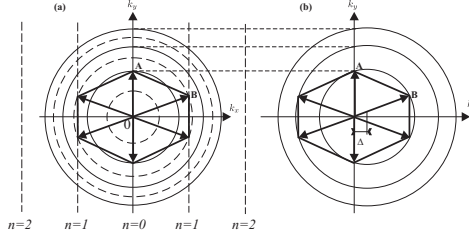


FIGURE 9.12: (a) Construction d'un hyper-réseau dans l'espace des \mathbf{k} de l'indice \tilde{n} ; (b) TF optique correspondante, le centre des anneaux est décalé de $\Delta = \frac{h}{2\sigma}$ comme prévu par l'équation 9.25. Les vecteurs d'ondes utilisés sont $\mathbf{k}_{(1)}^{[2]}$ pour B et $\mathbf{k}_{(0)}^{[1]}$ pour A. $\sigma = -17$.

La réalisation d'hyper-réseaux à partir de ces modes s'effectue grâce à la construction géométrique de la figure 9.12a basée sur le modèle de la figure 9.3 proposée précédemment. Rappelons les étapes de la détermination des modes susceptibles de se déstabiliser :

1. Tracer les cercles concentriques dans l'espace réciproque de rayons $k_c^{[p]}$ pour $\sigma > 0$ (en tirets) et $k_c^{[p]}$ pour $\sigma < 0$ (en traits pleins) centrés sur $\mathbf{k} = (0, 0)$. Le rapport entre chacun des rayons étant quasi constant dès que $|\sigma| \gg 1$ (typiquement $|\sigma| > 10$) ces cercles concentriques peuvent être utilisés comme une base commune à toutes les compositions de structures (d'autant plus que la valeur de σ affecte surtout le rayon du premier anneau).
2. Tracer dans le même repère des droites verticales d'équations $k_x^{(n)} = n\frac{\pi}{h}$ avec $n \in \mathbb{N}$, en tirets pour n impairs et en traits pleins pour n pairs¹.
3. Chaque intersection entre un cercle et une droite du même trait (plein ou tirets) marque le sommet d'un vecteur d'onde susceptible de se déstabiliser dans le système.

Pour déterminer les paramètres favorables à la formation d'un hyper-réseau, il suffit, une fois les cercles tracés (étape 1), d'ajuster et fixer la position des droites verticales (étape 2) qui vont permettre de construire des combinaisons de vecteurs résonnants. La construction géométrique réalisée donne alors la valeur du décalage transverse h nécessaire à la formation de la structure suivant la relation 9.8. Pour l'exemple de la figure 9.12, il faut que $h = \frac{\pi}{k_{c-x(1)}} = 5$.

¹. Pour le cas σ positif, il suffit de tracer en tirets les droites associées aux n pairs et en traits pleins celles associées aux n impairs, le reste de la méthode est rigoureusement identique.

Les vecteurs d'ondes utilisés sont alors $\mathbf{k}_{(1)}^{[2]}$ et $\mathbf{k}_{(0)}^{[1]}$ et la structure est composée d'un RH et d'un RR.

Notons que cette construction détermine les conditions optimales de résonance, c'est à dire pour les nombres d'ondes critiques. En effet, lorsque le paramètre de pompe μ augmente, une bande plus large de nombres d'onde est autorisée, ce qui autorise une relative incertitude sur les paramètres nécessaire à la formation des hyper-réseaux. Cependant, une intensité incidente trop forte peut amener d'autres effets comme la déstabilisation de modes non désirés ou encore la perte de la stationnarité.

9.4.2 Observation expérimentale d'un hyper-réseau stationnaire entretenu par le bruit

La structure construite sur la figure 9.12 pour $\sigma = -17$ et $h = 5$ a été observée expérimentalement sur notre dispositif (Fig. 9.13a). Les vecteurs d'onde composant sa TF optique (Fig. 9.13b) correspondent bien à ceux prévus par la construction géométrique : les taches principales s'incrivent au sommet d'un hexagone aplati. La condition de résonance entre les vecteurs d'onde des structures RH et RR permettent la coexistence des 3 modulations spatiales qui forment la structure observée en champ proche. Notons que cette dernière est stable, son orientation est fixée par le sens de la dérive et elle est stationnaire comme en atteste l'évolution spatiale du profil d'intensité présentée sur la figure 9.13c. Ce dernier point découle du fait que les modes composant la structure sont eux-même stationnaires.

La condition de résonance entre vecteurs d'onde est nécessaire pour obtenir l'hyper-réseau mais elle n'est pas suffisante pour que celui-ci n'évolue pas au cours du temps. En effet, si les modes en jeu possèdent des vitesses de phase différentes, la structure en champ proche risque fortement d'afficher une dynamique non stationnaire.

Remarque :

La construction géométrique de cette structure est réalisée sur la grandeur d'indice $\tilde{n}(k)$, cependant nos observations expérimentales sont faites sur le champ lointain après la seconde traversée du cristal liquide $B_{out}(k)$. Il est possible de représenter les vecteurs d'onde en jeu dans le plan (k_x, k_y) de la TF optique en se basant sur l'étude des anneaux décalés du régime de diffraction (c.f. section 9.3). En effet, si on trace des anneaux concentriques de centre C et de rayons $k_h^{[p]}$, avec $C = (\frac{h}{2\sigma}, 0)$ et $k_h^{[p]}(h) = \sqrt{(k^{[p]})^2 - (\frac{h}{2\sigma})^2}$, on remarque que chaque sommet

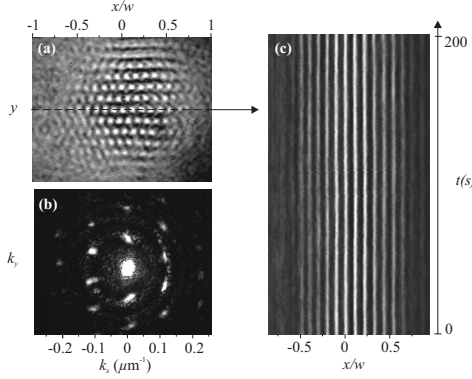


FIGURE 9.13: Structure hyper-réseau expérimentale obtenue pour $\sigma = -17$ et $h = 5$ en champ (a) proche et (b) lointain . (c) diagramme spatio-temporel d'un profil transverse du champ proche repéré par la ligne en tirets sur (a). $w = 1400\mu\text{m}$.

des vecteurs d'onde participant à la structure se situe sur ces anneaux² (Fig. 9.12b).

9.4.3 Influence du bruit sur les hyper-réseaux

On peut remarquer deux effet non-triviaux du bruit sur l'hyper-réseau présenté sur la figure 9.13 :

1. Cette structure hyper-réseau est composée de modes purement convectifs. Des simulations numériques montrent qu'en absence de bruit la structure dérive et quitte le système (Fig. 9.14c), ce qui signifie que *l'hyper-réseau observé expérimentalement est entretenu par le bruit*.
2. Pour des intensités incidentes où seul existe le mode RH convectif sans bruit (on peut voir la structure RH quelques instant avant qu'elle ne disparaisse sur les figures 9.14c-d), le système bruité affiche déjà l'hyper-réseau (Fig. 9.14a-b). La présence de perturbations aléatoires entraîne un couplage (condition de résonance) entre le mode RH super-actif (dont le taux croissance temporel est positif [10]) et le précurseur du mode RR passif (dont le taux de croissance est négatif) qui a pour effet d'avancer¹ l'apparition de l'hyper-réseau.

2. Notons la modification apportée dans l'expression des rayons des anneaux. Le terme $\frac{2\pi}{\sigma}m - \left(\frac{h}{2\sigma}\right)^2$ définissant les maxima du cosinus traduisant la diffraction dans l'équation 9.24 est remplacé par la grandeur $k^{[p]2} - \left(\frac{h}{2\sigma}\right)^2$ dans le cas des structures établies.

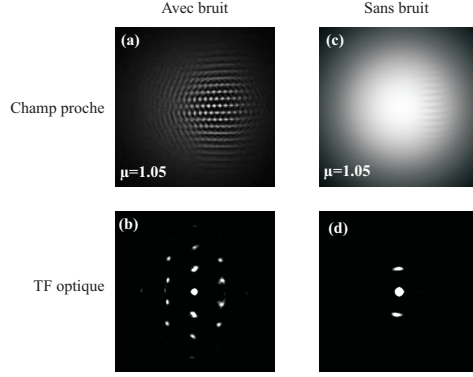


FIGURE 9.14: (a,b) Structures hyper-réseaux en champ proche (a) et lointain (b) en présence de bruit $h = 5$, $\sigma = -17$, $\eta = 30$. (c,d) Structures convectives obtenues pour les mêmes paramètres mais sans bruit en champ proche (c) et lointain (d). Les images (c) et (d) montrent des régimes transitoires issue d'une perturbation locale, pour des temps plus longs le système ne montre plus aucune structuration.

9.4.4 Exemples d'hyper-réseaux et de quasi-cristaux réalisables dans le système à dérive

La figure 9.16 montre d'autres exemples d'hyper-réseaux construits à partir de la méthode développée précédemment et obtenues par simulations numériques. Nous n'effectuons pas d'analyse détaillée de ces structures cependant nous notons quelques remarques :

- Pour garder la stationnarité des structures, il est préférable d'utiliser une valeur de $|\sigma|$ assez grande afin que les différents modes en jeu dans la formation de la structures n'aient pas des valeurs de seuil trop différentes. Rappelons que la valeur des seuils pour les modes utilisés ici (RH et RR) ne dépend pas de h .
- Des simulations numériques avec une pompe spatialement homogène montrent que les hyper-réseaux se forment sans l'aide d'un filtrage spatial dans le plan de Fourier et qu'ils sont stationnaires au voisinage de leur seuil d'apparition. Néanmoins, lorsque la pompe est gaussienne, le filtrage spatiale est nécessaire pour stabiliser la structure et ainsi garder la stationnarité (Fig. 9.16a-c) .
- Il est également possible de former des hyper-réseaux à partir de modes associés aux langues $p > 1$, qui ne sont pas des modes primaires. Dans

SECTION 9.4

23

ce cas, un filtrage spatiale dans le plan de Fourier qui ne laisse passer que les vecteurs d'onde désirés est nécessaire (filtre du même type que celui la figure 9.6). Un exemple est donné sur la figure 9.16d.

- Enfin, plus le paramètre h est grand, plus les possibilités de construction sont nombreuses car l'écart ($k_{c_x(n)} - k_{c_x(n-1)}$) est proportionnel à $\frac{1}{h}$. Ainsi, il est possible, par exemple de construire une quasi-structure à douze spots comme le montre la figure 9.15. L'utilisation d'un filtre "passe bande" (Fig. 9.15b) est nécessaire pour stabiliser la structure.

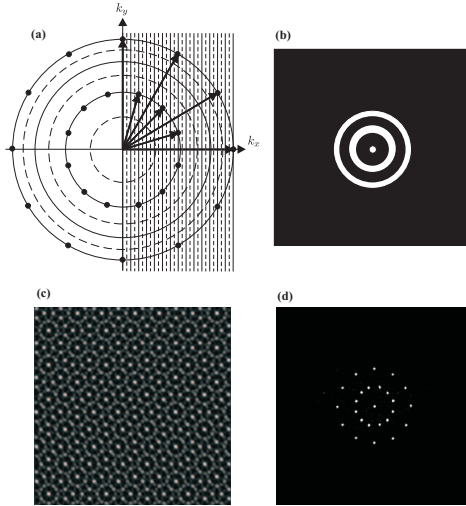


FIGURE 9.15: (a) Construction d'une quasi-structure pour $\sigma = -17$ et $h = 87.35$; (b) filtre spatial utilisé (c) structure obtenue en champ proche par simulation numérique (conditions aux limites périodiques) (d) structure en champ lointain

En conclusion, il est possible d'obtenir des hyper-réseaux et quasi-cristaux à partir de combinaisons résonantes de modes de base obtenues grâce à la dérive. Ceux-ci ont la particularité d'être stationnaires (en dépit de la dérive) et d'être entretenus par le bruit. Dans certains cas, nous avons vu que l'utilisation de filtres spatiaux dans le plan de Fourier peut être nécessaire pour stabiliser ces structures, en particulier lorsque la pompe est spatialement inhomogène ou lorsque les modes de base sont associés aux langues d'indice $p > 1$.

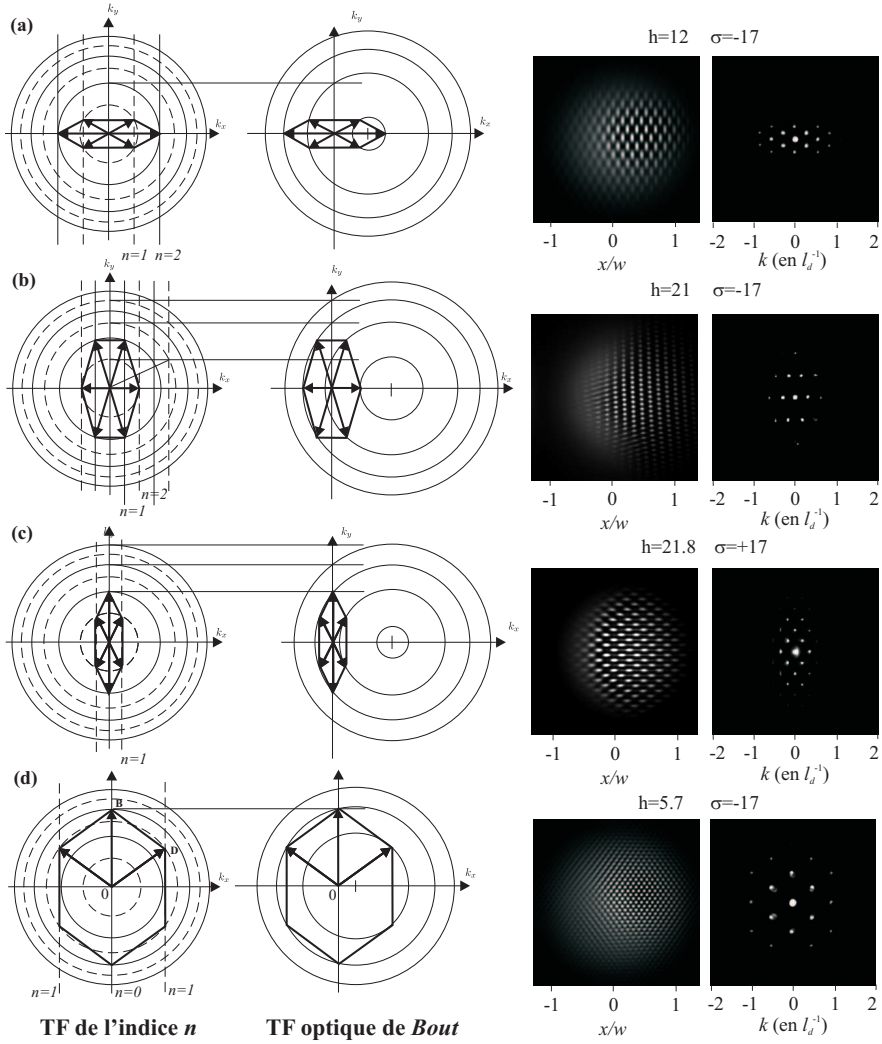


FIGURE 9.16: Exemples de structures hyper-réseaux réalisables. Les images de droites sont les simulations numériques correspondantes avec un faisceau incident gaussien. (a-c) avec filtre passe-bas dans le plan de Fourier coupant tous les $k > \max(k_i)$ où les k_i sont les nombres d'onde participant à la structure. (d) avec filtre dans le plan de Fourier du même type que pour la figure 9.6.

Bibliographie

- [1] M. Cross and P. Hohenberg, *Pattern formation outside equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
- [2] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. Cahn, *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1951 (1984).
- [3] B. Christiansen, P. Alstrom, and M. Levinsen, *Ordered capillary-wave states : Quasicrystals, hexagons, and radial waves*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2157 (1992).
- [4] W. Edwards and S. Fauve, *Parametrically excited quasicrystalline surface waves*, Phys. Rev. E **47**, R788 (1993).
- [5] E. Pampaloni, P. Ramazza, S. Residori, and F. Arecchi, *Two-dimensional crystals and quasicrystals in nonlinear optics*, Phys. Rev. Lett. **74**, 258 (1995).
- [6] D. Leduc, M. L. Berre, E. Ressayre, and A. Tallet, *Quasipatterns in a polarization instability*, Phys. Rev. A **53**, 1072 (1996).
- [7] T. Ackemann and W. Lange, *Optical pattern formation in alkali metal vapors : Mechanism, phenomena and use*, Appl. Phys. B **72** (2001).
- [8] A. Aumann, T. Ackemann, E. G. Westhoff, and W. Lange, *Eightfold quasipatterns in a optical pattern-forming system*, Phys. Rev. E **66**, 046220 (2002).
- [9] B. Thüring, A. Schreiber, M. Kreuzer, and T. Tschudi, *Spatio-temporal dynamics due to competing spatial instabilities in a coupled LCLV feedback system*, Physica D **96**, 282 (1996).
- [10] M. Vorontsov and W. J. Firth, *Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two dimensional feedback*, Phys. Rev. A **49**, 2891 (1994).
- [11] S. Residori, P. Ramazza, E. Pampaloni, S. Boccaletti, and F. Arecchi, *Domain coexistence in two-dimensional optical patterns*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1063 (1996).
- [12] M. Vorontsov and A. Y. Karpov, *Pattern formation due to interballon spatial mode coupling*, J. Opt. Soc. Am. B **14**, 34 (1997).
- [13] M. Vorontsov and B. Samson, *Nonlinear dynamics in a optical system with controlled two-dimensional feedback black-eye patterns and related phenomena*, Phys. Rev. A **57**, 3040 (1998).
- [14] H. Muller, *Model equation for two-dimensional quasipattern*, Phys. Rev. E **49**, 1273 (1994).
- [15] H. Arbell and J. Fineberg, *Pattern formation in two-frequency forced parametric waves*, Phys. Rev. E **65**, 036224 (2002).
- [16] Y. A. Logwin, T. Ackemann, and W. Lange, *Subhexagons and ultrahexagons as a result of a secondary instability*, Phys. Rev. A **55**, 4538 (1997).
- [17] F. Arecchi, S. Boccaletti, S. Ducci, E. Pampaloni, P. Ramazza, and S. Residori, *The liquid crystal light valve with optical feedback : a case study in pattern formation*, J. Nonlinear Optical Physics and Materials **9**, 183 (2000).

3.4 Les systèmes optiques fibrés sont intrinsèquement convectifs

Les équations régissant les systèmes fibrés sont généralement des formes modifiées de l'équation de Schrödinger non-linéaire [151, 183] telle que celle de l'Eq. (1.7). Si on examine cette dernière équation on remarque la présence d'une dérivée temporelle d'ordre impair $\frac{\beta_3}{6} \partial_{\tau^3} E$ et d'une intégrale distribuée $i\gamma E(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau') |E(\tau - \tau')|^2 d\tau'$. Or, comme il a été exposé dans l'introduction de ce chapitre, de tels termes brisent la symétrie de réflexion (ici temporelle suivant la variable τ) et génèrent des comportements de propagation des instabilités. Ceci indique donc que les systèmes fibrés sont convectifs et que l'origine de cette propriété provient des effets du troisième ordre de dispersion β_3 et/ou de l'effet Raman. La démonstration du caractère intrinsèquement convectif des systèmes fibrés est présentée maintenant et est publiée dans l'article [156] joint ci-après.

Les systèmes fibrés sont convectifs suite à la brisure de symétrie de réflexion introduite par le troisième ordre de dispersion et/ou l'effet Raman.

Le système expérimental utilisé pour mener à bien cette étude est le résonateur fibré décrit dans la Sec. 1.4.2. La configuration choisie est telle que l'effet Raman peut être négligé mais pas l'effet Kerr ni l'influence de la pente (β_3) de la courbe de dispersion. Ceci correspond à une situation où la fréquence de l'instabilité modulationnelle est suffisamment proche de la fréquence de l'onde de pompe. La démarche suivie est similaire à celle de la Sec. 3.2. L'étude analytique montre l'existence des deux seuils d'instabilités convective et absolue en accord avec les simulations numériques (Fig. 2 de [156]). Le tracé de ces deux seuils sur la Fig. 2 de l'article ci-joint [156] indique qu'un régime convectif existe dès que $\beta_3 \neq 0$. Ceci est confirmé par le calcul analytique de la vitesse de propagation, $Vg = \beta_3 \frac{T}{3\sqrt{L}} k^2$ des perturbations localisées, qui établit que cette vitesse est directement proportionnelle à β_3 . Ainsi, dès que la pente (β_3) de la courbe de dispersion est non-nulle le système fibré est convectif, ce qui est tout le temps le cas avec des fibres standards¹⁸ et photoniques sauf design particulier de la courbe de dispersion¹⁹. Les évolutions temporelles typiques, calculées numériquement²⁰, d'une perturbation initiale localisée sont reportées sur les Figs. 3(a) et 3(b) de [156] en utilisant une représentation pseudo-spatio-temporelle (τ, t) ²¹. Ces diagrammes font clairement apparaître les caractéristiques des régimes convectif et absolu (voir Fig. 3.1).

Comme pour le système de la lame de cristal liquide avec rétroaction optique, la mise en évidence expérimentale ne peut se faire grâce à l'étude de l'évolution d'une perturbation localisée comme représentée numériquement sur la Fig. 3 de l'article ci-joint. En effet, les échelles de temps²² sont beaucoup trop rapides même pour des dispositifs d'enregistrement comme les streak caméras. La recherche d'une signature utilisable dans les conditions expérimentales est donc nécessaire. Il n'est pas possible de reprendre la même signature que pour les systèmes spa-

18. télécoms, à dispersion décalée, hautement non-linéaires, etc.

19. Par exemple, une courbe de dispersion pour laquelle β_3 est pratiquement nul sur une plage donnée de longueurs d'onde.

20. pour une onde de pompe continue

21. Représentation correspondant au tracé pour chaque tour de cavité (axe vertical), de l'évolution rapide du système dans un repère se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le milieu (axe horizontal). Voir Sec. 1.2.4.

22. La période d'une oscillation d'IM est de l'ordre de quelques centaines de femtosecondes.

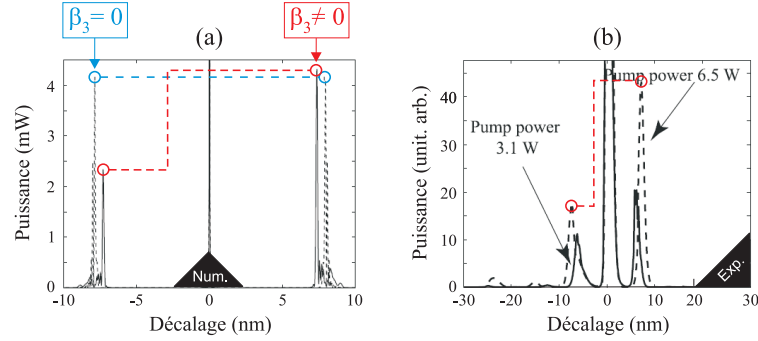


FIGURE 3.6: Spectres de puissance montrant l’asymétrie (en tirets rouges) entre les amplitudes des deux fréquences (positive et négative) de l’instabilité modulationnelle. (a) Numérique et (b) expérimental. (a) Trait plein ($\beta_3 \neq 0$) et traits pointillés ($\beta_3 = 0$).

tiaux (Sec. 3.2) car ici les instabilités ne sont pas entretenues par le bruit. Les systèmes fibrés présentent une sensibilité aux conditions initiales ce qui est totalement différent. En effet, dans ces systèmes le seul bruit est d’origine externe et est pratiquement tout le temps négligé, donc aucune instabilité entretenue par le bruit ne peut voir le jour dans ces conditions. La signature que nous avons utilisée est l’asymétrie entre les amplitudes des deux fréquences positive et négative de l’instabilité modulationnelle [Fig. 3.6]. Elle est inspirée de l’article de Zambrini *et al.* [268] qui montre comment la nature convective d’un système, qui est un phénomène *linéaire*, affecte de manière *non-linéaire* son comportement. Plus précisément, comment l’interaction non-linéaire entre les deux modes de l’instabilité modulationnelle conduit à une asymétrie dans les intensités de ses deux fréquences spatiales positive et négative. Cette caractéristique est une signature directe de la nature convective d’un système puisqu’elle disparaît dès que le système n’est plus convectif. En effet, lorsque la pente de dispersion est nulle ($\beta_3 = 0$) le spectre est parfaitement symétrique alors que dès que cette pente est différente de zéro ($\beta_3 \neq 0$) une asymétrie apparaît dans le spectre de l’instabilité modulationnelle [Fig. 3.6(a)]. Les enregistrements des spectres expérimentaux de notre résonateur fibré révèlent une telle asymétrie entre les deux lobes de l’instabilité modulationnelle [Fig. 3.6(b)]. Ceci établit de manière incontestable que le système fibré expérimental est convectif et de manière plus générale que la nature convective est générique à tous les systèmes fibrés.

La signature de la nature convective du système fibré est l’asymétrie, dans le spectre, entre les intensités des deux lobes de l’instabilité modulationnelle.

Il est intéressant de remarquer que le critère de la signature asymétrique ne dépend pas de la nature de la pompe puisqu’il a été vérifié pour des ondes de pompe aussi bien continues (numériquement) que pulsées (numériquement et expérimentalement). Cette signature non-linéaire de la nature convective d’un système introduite dans [268] a aussi été vérifiée dans les expériences menées sur la lame de cristal liquide avec rétroaction décalée spatialement. Ainsi, ce critère basé sur l’asymétrie du spectre de l’instabilité modulationnelle est pertinent quel que soit la nature du système convectif.

Optical Fiber Systems Are Convectively Unstable

A. Mussot,^{1,*} E. Louvergneaux,¹ N. Akhmediev,² F. Reynaud,³ L. Delage,³ and M. Taki¹

¹Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR-CNRS 8523 IRCICA, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

²Optical Sciences Group, Research School of Physical Sciences and Engineering, The Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia

³Département photonique/IRO Xlim UMR6172, 123 rue A. Thomas, 87060 Limoges Cedex, France

(Received 1 April 2008; published 11 September 2008)

We theoretically and experimentally evidence that fiber systems are convective systems since their nonlocal inherent properties, such as the dispersion and Raman effects, break the reflection symmetry. Theoretical analysis and numerical simulations carried out for a fiber ring cavity demonstrate that the *third-order dispersion* term leads to the appearance of convective and absolute instabilities. Their signature is an asymmetry in the output power spectrum. Using this criterion, experimental evidence of convective instabilities is given in a fiber cavity pumped by a pulsed laser.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.113904

PACS numbers: 42.65.Sf, 05.45.-a, 42.55.Wd, 47.54.-r

Convective and absolute instabilities arising in temporal systems as well as in spatially extended systems are common to a class of nonlinear dynamical systems, namely, the convective ones. They form a platform of multidisciplinary research activities including, e.g., hydrodynamics [1], plasma physics [2], traffic flow [3], surface science [4], chemical reactions [5], and nonlinear optics [6–8]. It has been shown that the existence of convective instabilities in such systems gives rise to new and unexpected behaviors such as self-pulsing instabilities [8], pattern selection [9], and noise-sustained structures [1,9]. The key feature for the occurrence of such convective regimes in a system is the presence of *nonlocal* terms that break the reflection symmetry in the governing equations. In most nonlinear science modeling, these terms appear in the form of either *first-order* spatial or temporal derivative accounting for local couplings, or *distributed integrals* accounting for global couplings. The reflection symmetry breaking induced by these terms leads to convective and absolute instabilities, giving rise to asymmetric solutions. For instance, in spatially extended systems, convective regimes have been recently observed by tilting the feedback mirror in experiments on a liquid crystal with optical feedback [7], or, in temporal systems, by mismatching the synchronization of the pump pulses in fiber ring cavity experiments [8]. Thus, all systems whose models possess nonlocal terms that break the reflection symmetry are convective. Notice that this includes the huge number of amplitude equations as nonlinear Schrödinger, Ginzburg-Landau, and Swift-Hohenberg equations.

In this Letter, we show that fiber systems belong to the class of convective systems (see [10] for this classification) because they are mainly modeled by different forms of the extended nonlinear Schrödinger equation. The nonlocal terms stem from either higher order temporal derivatives (nonlocal coupling) or the Raman effect (global coupling). These terms provide both the reflection symmetry breaking and the traveling character for the spontaneous generation

of convective instabilities. It turns out that optical fiber systems systematically exhibit convective and/or absolute regimes. We demonstrate here, by considering a fiber ring resonator, the generation of convective regimes for both cw and pulsed injected fields. More precisely, our analytical study predicts that the third-order dispersion term leads to the existence of two distinct instability thresholds, namely, the convective and absolute ones. Numerical simulations obtained by integrating the governing equations of the fiber cavity including boundary conditions confirm these predictions and show that the signature of convective regimes can be characterized by an asymmetry in the power spectrum of the output field [11]. Using this asymmetry as a criterion we have evidenced the experimental occurrence of convective instabilities in a fiber cavity pumped by a pulsed laser in complete agreement with the theory.

The system under investigation is a ring cavity whose nonlinear element is a fiber. Figure 1 depicts a simplified scheme of the experimental setup. A laser field with power $\|E_i\|^2$ is launched into the cavity through a beam splitter. At each round-trip the light inside the fiber is coherently superimposed with the input beam. The experimental device dynamics can be described by the extended nonlinear Schrödinger equation with boundary conditions as [12]

$$\partial_z E(z, \tau) = \left(-i \frac{\beta_2}{2} \partial_{\tau^2} + \frac{\beta_3}{6} \partial_{\tau^3} + i\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau') |E(z, \tau - \tau')|^2 d\tau' \right) E(z, \tau), \quad (1)$$

$$E(0, \tau + t_R) = TE_i(\tau) + \rho E(L, \tau) \exp(-i\Phi_0), \quad (2)$$

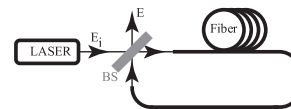


FIG. 1. Experimental setup. BS, beam splitter.

with t_R being the round-trip time which is the time it takes for a pulse to travel the cavity length L with the group velocity, Φ_0 the linear phase shift, T^2 (ρ^2) the mirror intensity transmissivity (reflectivity), and L the cavity length. The electric field inside the cavity is denoted E . $\beta_{2,3}$ are the second- and third-order dispersion terms, respectively. γ is the nonlinear coefficient, z the longitudinal coordinate, τ the time in a reference frame moving at the group velocity of the light, and $R(\tau')$ the nonlinear response including both instantaneous (Kerr effect) and delayed contributions (Raman effect). To study the role of the nonlocal terms (odd-order dispersion and Raman effect) in the generation of convective regimes, and to keep mathematics as simple as possible, we perform the reduction of the above infinite-dimensional map [Eqs. (1) and (2)] into the following modified Lugiato-Lefever equation that has been proven to be relevant for describing weakly nonlinear dynamics in the fiber cavity [12]. It reads

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = S - (1 + i\Delta)\psi - i\beta_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} + B_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau'^3} + i\psi \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau'') |\psi(\tau' - \tau'')|^2 d\tau'', \quad (3)$$

where $t' = t(T/2t_R)$ with t the real time, $\tau' = \tau(T^2/L)^{1/2}$, $\psi = E\sqrt{2\gamma L/T^2}$, $S = 2/T(2\gamma L/T^2)^{1/2}E_p$, $B_3 = \beta_3 T/\sqrt{9L}$, and $\Delta = 2\Phi_0/T^2$. Here we neglect the Raman contribution but keep the Kerr effect and carry out the analytical study for configurations where the dispersion slope (β_3) influence is significant as compared to the lower order dispersion term. This assumption corresponds to a configuration where the frequency of instability is close enough to the pump carrier frequency, so that the Raman gain or absorption value is negligible compared to the modulational instability (MI) one. The steady state response ψ_s of Eq. (3) satisfies $S_s = [1 + i(\Delta - I_s)]\psi_s$, where $I_s = |\psi_s|^2$. Starting from the above equation, we can perform a linear stability analysis that provides us with the convective and absolute thresholds peculiar to convective systems. Assuming perturbations of the stationary state in the form $\exp(i(Q\tau' - \Omega t'))$, the following dispersion relation is obtained:

$$\Omega = -B_3 Q^3 + i\{-1 + \sqrt{I_s^2 - (\Delta - \beta_2 Q^2 - 2I_s)^2}\}. \quad (4)$$

Note that the role of the third-order dispersion on soliton propagation and radiation emission has been studied previously in Refs. [13–16]. Our present work shows the appearance of convective instability as a result of reflection symmetry breaking caused by β_3 . The convective threshold is obtained by canceling the growth rate $\text{Im}(\Omega(Q_c))$ of the most unstable mode Q_c . The absolute threshold is determined following the method of steepest descent [17]. It is reached when $\text{Im}(\Omega(Q_s)) = 0$, where Q_s is a saddle point satisfying $d\Omega/dQ = 0$. These thresholds are plotted in Fig. 2 versus the dispersion slope parameter β_3 . As can be seen from this figure, there exists a convective

regime as soon as $\beta_3 \neq 0$. It is located between the convective and the absolute thresholds and increases monotonically with β_3 . Although the third-order dispersion does not impact the onset of MI, it leads to the appearance of convective and absolute instabilities as it introduces a group velocity through the dispersion relation [first right-hand term in Eq. (4)]. The fact that the threshold does not depend on β_3 is not surprising. The main feature of a convective instability is not to necessarily impact the instability threshold but to give rise to a nonvanishing “group velocity” of the wave packet generated by small localized perturbations.

To check the values of these thresholds, we have performed numerical integrations of the infinite-dimensional map with boundary conditions [Eqs. (1) and (2)] using the split-step Fourier method. The determination of the convective and absolute thresholds is carried out by using the following well-known classical test for identifying the nature of instability: we initialize the system with a localized perturbation at time $t = 0$ and observe its evolution. Two dynamical behaviors are then developed: (i) the advection is “faster” than the growth of the initial local disturbance so that the system returns locally to its initial homogeneous steady state; (ii) the growth dominates the drift upstream so that the system reaches a modulated state. The first regime reveals the occurrence of a *convective instability* (CI) and the second one characterizes an *absolute instability* (AI). Consequently, we superimpose, at the first round-trip of integration, a small localized perturbation on the continuous wave pump with a frequency in the band of MI. This disturbance corresponds to a sine oscillation with a Gaussian envelope of short duration time (2 ps) and small amplitude (a few percent of the pump power). In the subsequent round-trips, only the continuous wave is injected. Then, the temporal evolution of this perturbation provides us the convective and the absolute nature of the regime. Typical temporal evolutions of the

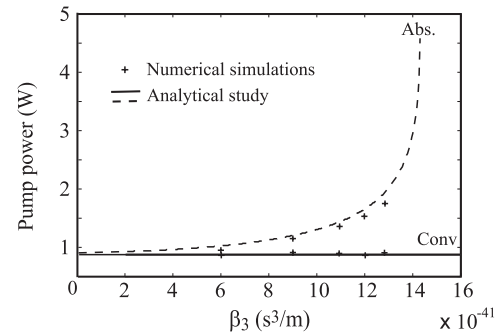


FIG. 2. Evolution of the convective and absolute thresholds versus the value of the dispersion slope. $\beta_2 = -5 \times 10^{-28} \text{ s}^2/\text{m}$, $\gamma = 2.5 \times 10^{-3} \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$, $\Phi_0 = 0$, $L = 60 \text{ m}$, $R = 0.8267$, and $T = 0.303$. These parameters correspond to a standard telecommunication fiber (with $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-40} \text{ s}^3/\text{m}$).

perturbation are shown in Figs. 3(a) and 3(b) using a “pseudospatiotemporal” representation corresponding to the fast temporal evolution of the system in the comoving reference frame (horizontal axis) plotted at each round-trip (vertical axis). In other words, this is the slow time versus the fast time evolution. These diagrams clearly show the main characteristics of convective and absolute regimes (Figs. 3). For instance, the power evolution of the intracavity field at the fixed time value $\tau = 6.5$ ps demonstrates that for the convective regime the perturbation is amplified but the system locally returns back to the steady state value [Fig. 3(c)], whereas for the absolute regime the same perturbation leads to a stable modulated state [Figs. 3(b) and 3(d)]. In both cases a symmetry breaking in the temporal domain is observed during the evolution. From this analysis we got the numerical convective and absolute threshold values that fully confirm the analytical ones as can be seen in Fig. 2 (crosses). A striking feature appearing in Fig. 2 is the existence of a limit value $\beta_{3im} \approx 14.27 \times 10^{-41} \text{ s}^2/\text{m}$, over which the instabilities become purely convective. It means that under pulsed pumping, if no noise is present in the fiber system or on the input signal, no instability is able to develop in the system, even above the convective threshold. The initial input perturbations will first induce the rising up of MI and then disappear after some time due to the drift that will drive the oscillations below the CI threshold. On the contrary, in a noisy system, the instabilities will be sustained by noise and the two

expected side bands will be observed in the output power spectrum. It is worth noting that with a cw pump the behavior is completely different and the observation of MI for $\beta_3 > \beta_{3im}$ is possible whatever noise conditions are. Experimentally, the previous classical perturbation test is not accessible for two reasons. The most important reason is due to the presence of noise in the system, and the second one is due to the frequency band of the instability (few THz) that is well above the bandpass of photo-detectors. The former one leads to noise-sustained oscillations in the regime of convective instability. As a result, propagating modulated states are observed in the pseudospatiotemporal mapping diagrams for both unstable regimes of CI and AI, but do not differ sufficiently to be distinguished without any ambiguity. Thus, in order to evidence the existence of CI and AI regimes, we look for a signature of these regimes based on the study of the output power spectrum features. We numerically found that in the convective regime an asymmetry is observed between the amplitudes of the two frequencies of instability [solid lines in Fig. 4(a)]. By increasing the pump power to reach the absolute regime we observed the same feature with an increase of the asymmetry [solid lines in Fig. 4(b)]. This asymmetry feature is a clear signature of the convective nature of the system since they disappear as soon as the slope of the dispersion vanishes ($\beta_3 = 0$) leading to a perfect symmetric spectrum [dotted lines in Figs. 4(a) and 4(b)]. Obviously, this is the case when the dispersion curve of the fiber is perfectly flat but also when the pump wavelength is very far from the zero dispersion wavelength of the fiber. In this latter case, the frequencies of the instabilities are close to the pump frequency so that we can consider that the dispersion is almost the same for each of them. Therefore, no significant asymmetry can be observed as it has been reported in [18].

To evidence experimentally that our system is convective, we have used a pulsed pump to avoid stimulated Brillouin scattering. The laser emits pulses of 5.5 ps duration with a 20 MHz repetition rate at 1556.1 nm. The fiber ring cavity is composed of 59.5 m of dispersion shifted fiber ($\lambda_0 \approx 1552 \text{ nm}$) and 0.5 m of SMF28 ($\lambda_0 \approx 1300 \text{ nm}$).

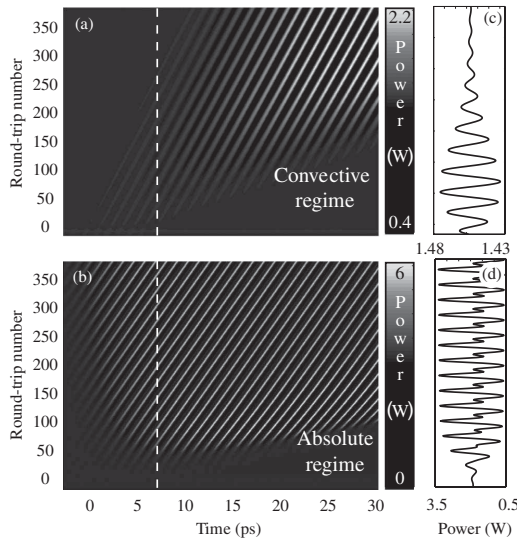


FIG. 3. Evolution of a perturbation initially located at $\tau = 0$ ps and $z = 0$ (round-trip 0) evidencing (a),(c) a convective regime, $P_p = 1.3$ W, and (b),(d) an absolute regime, $P_p = 2$ W. Panels (a) and (b) are the “pseudospatiotemporal” slow-fast time evolution maps. Panels (c) and (d) are the slow time evolutions of this perturbation registered at $\tau = 6.5$ ps as indicated by the vertical dashed lines in panels (a) and (b).

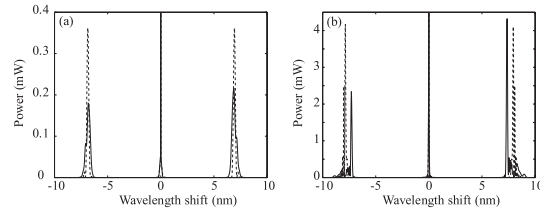


FIG. 4. Numerical solutions of Eqs. (1) and (2) showing the impact of β_3 on the output power spectra after 350 round-trips. Solid (dotted) lines correspond to $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-40} \text{ s}^3/\text{m}$ ($\beta_3 = 0$). (a) The convective regime, $P_p = 1.1$ W, and (b) the absolute regime, $P_p = 2$ W. The pump wavelength is located at 1556.1 nm.

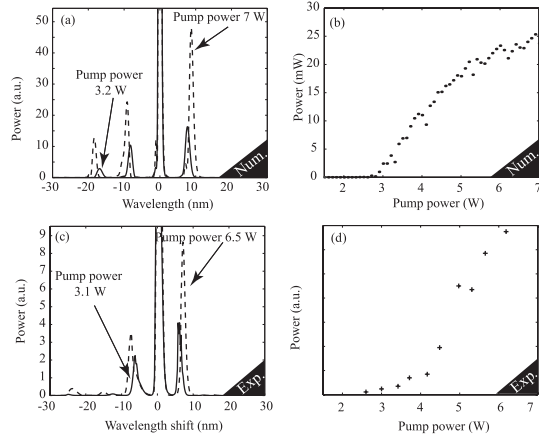


FIG. 5. (a),(c) Numerical and experimental output power spectra for a pulsed pump of 5.5 ps duration. (b),(d) Power difference between the maxima of the two side lobes of modulational instability. (c),(d) Experimental recordings. (a),(b) Numerical simulations taking into account noise. The integrated power spectrum (a) is averaged over the last hundred round-trips to reproduce the experimental averaging coming from the sweep rate time of the optical spectrum analyzer.

At the laser operating wavelength 1556.1 nm, the average second-order dispersion value is approximately $\beta_2 = -5 \times 10^{-28} \text{ s}^2/\text{m}$ and $\beta_3 = 1.2 \times 10^{-40} \text{ s}^3/\text{m}$. By using a set of an optical delay line and a piezoelectric stretcher (manufactured by LEUKOS), it is possible to control the fiber loop optical path with a submicron accuracy [19]. Care has been given to the synchronization between the pump and the successive pulses having experienced one or more round-trips since synchronization mismatch directly drives the system to be convective [8]. An easy way to achieve it experimentally consists in optimizing the finesse of the cavity by fine-tuning the fiber length. Typical experimental output spectra are displayed in Fig. 5(c) near above the convective threshold (solid line) and well above it (dashed line). They clearly show an asymmetry between the intensities of the two MI side lobes. As predicted numerically for a cw pumping, the MI intensity asymmetry increases with the pump power [Fig. 5(d)]. Numerical simulations carried out for these experimental conditions (pulsed pump plus noise) show a very good qualitative agreement with experiments as can be seen in Figs. 5(a) and 5(b). Thus, the signature found numerically to evidence the convective nature of the system remains valid for pulsed pumps and so forth is relevant. We then conclude that a direct consequence of the symmetry breaking in our fiber system is that it behaves as a convective system, and this is not specific to our system but it is generic to *all fiber systems*.

In summary, we have theoretically and experimentally shown that, in a fiber ring cavity pumped by a pulsed laser,

the *third-order dispersion* term breaks the reflection symmetry and leads to the appearance of convective instabilities. More generally, odd-order dispersion terms and the Raman effect in fiber systems correspond to nonlocal terms that make the fiber systems convective. The asymmetry between the two lobes of modulational instability observed in the output power spectrum of fiber systems is a signature of convective instability. A striking feature revealed by our study is that for high enough values of β_3 and pulsed pumping conditions, only noise-sustained modulational instabilities can be observed.

We acknowledge the GDR 3073 PhoNoMi2 and the PAI.

*mussot@phlam.univ-lille1.fr

- [1] A. Couairon and J. M. Chomaz, Phys. Rev. Lett. **79**, 2666 (1997); H. R. Brand, D. Deissler, and G. Ahlers, Phys. Rev. A **43**, 4262 (1991); P. Büchel and M. Lucke, Phys. Rev. E **61**, 3793 (2000).
- [2] R. J. Briggs, *Electron-Stream Interaction with Plasmas* (MIT Press, Cambridge, MA, 1964).
- [3] N. Mitarai and H. Nakanishi, Phys. Rev. Lett. **85**, 1766 (2000).
- [4] N. Israeli, D. Kandel, M. F. Schatz, and A. Zangwill, Surf. Sci. **494**, L735 (2001).
- [5] O. Nekhamkina and M. Scheintuch, Phys. Rev. E **68**, 036207 (2003).
- [6] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, Phys. Rev. Lett. **79**, 3633 (1997); H. Ward, M. Taki, and P. Glorieux, Opt. Lett. **27**, 348 (2002).
- [7] E. Louvergneaux, C. Szwarz, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki, Phys. Rev. Lett. **92**, 043901 (2004).
- [8] S. Coen, M. Tlidi, Ph. Emplit, and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **83**, 2328 (1999).
- [9] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, Phys. Rev. A **74**, 043814 (2006).
- [10] H. Ward, M. N. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux, Phys. Rev. E **63**, 016604 (2000).
- [11] R. Zambrini, M. San Miguel, C. Durniak, and M. Taki, Phys. Rev. E **72**, 025603 (2005).
- [12] M. Tlidi, A. Mussot, E. Louvergneaux, G. Kozyreff, A. G. Vladimirov, and M. Taki, Opt. Lett. **32**, 662 (2007).
- [13] N. Akhmediev, V. I. Korneev, and N. V. Mitskevich, Radiophys. Quantum Electron. **33**, 95 (1990).
- [14] Solange B. Cavalcanti, José C. Cressoni, Heber R. da Cruz, and Artur S. Gouveia-Neto, Phys. Rev. A **43**, 6162 (1991).
- [15] M. J. Potasek, Opt. Lett. **12**, 921 (1987).
- [16] F. Kh. Abdullaev, S. A. Darmanyan, S. Bischoff, P. L. Christiansen, and M. P. Sørensen, Opt. Commun. **108**, 60 (1994).
- [17] C. Bender and S. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (MacGraw-Hill, New York, 1978).
- [18] S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **79**, 4139 (1997).
- [19] F. Reynaud and E. Delaire, Electron. Lett. **29**, 1718 (1993).

Conclusion

Les recherches exposées dans cette habilitation ont été l'occasion de démontrer l'intérêt d'étudier les effets liés au bruit et à la nature convective dans les systèmes optiques spatialement étendus. Elles ont permis de développer une série de travaux dans une même lignée où les concepts se conjuguent pour apporter des explications à des phénomènes de plus en plus complexes. Un certain nombre de conséquences non-triviales de ces effets sur la morphogenèse optique ont été illustrées expérimentalement. Elles démontrent, si besoin est, la nécessité de prendre en compte ces effets dans les études théoriques des systèmes non-linéaires. L'approche qui a été adoptée ici, en considérant la nature convective ou stochastique d'un système, non comme un effet perturbatif du système idéal, mais comme un ingrédient incontournable jouant un rôle actif dans les phénomènes engendrés par ces propriétés de convection ou de stochasticité, a permis de rendre compte et d'expliquer les phénomènes observés.

Au cours des différentes étapes de ces activités de recherche, un étudiant (G. Agez) effectua sa thèse sous ma responsabilité, un second (V. Odent) l'a commencée depuis un an et un troisième (F. Rogister) réalisa un post-doctorat (Sec. Curriculum Vitae à la suite de l'annexe). Leurs travaux concernent les deux thèmes principaux développés dans ce manuscrit ainsi qu'un thème présenté dans les autres activités de recherche résumées dans l'annexe. C'est ainsi 6 articles co-signés avec des étudiants en thèse ou en post-doctorat [158, 162, 213, 150, 269, 146] qui font partie des articles joints à ce document.

Tout ceci n'a été possible que parce que des synergies ont été progressivement dégagées pour faire émerger et animer une stratégie de recherche. En effet, j'ai initié seul le projet CRISTO²³ qui a conduit à la création de mon équipe. Ensuite, l'ouverture du nouvel axe de recherche sur la photonique non-linéaire dans les fibres micro-structurées avec Majid Taki, a permis de créer une dynamique qui a donné lieu à la constitution de l'équipe actuelle (NDOS²⁴). Au delà de la génération d'un nouvel axe ou d'une nouvelle thématique de recherche, c'est l'émergence d'un groupe qui apparaît avec comme conséquence le recrutement de chercheurs. Ce sont ainsi deux maîtres de conférences (C. Szwaj et A. Mussot) qui ont été recrutés suite à la formation des équipes CRISTO et NDOS (Sec. 1.3).

L'évolution future de ces activités de recherche concerne, pour une part, la suite du développement des études sur les systèmes optiques convectifs. Un exemple en est fourni par l'étude

23. Acronyme pour CRistaux liquides : Instabilités Spatio-Temporelles Optiques (1998).

24. Acronyme pour Dynamique Non-linéaire des Systèmes Optiques (2005). <http://www.phlam.univ-lille1.fr/ndos/>

en cours mettant en évidence le rôle prépondérant de la nature convective du système dans l'origine des ondes scélérates optiques²⁵ obtenues dans les supercontinuum [163]. Les autres perspectives de ce thème concernent l'utilisation des propriétés de dérive pour le contrôle et la manipulation des structures²⁶. Un des exemples d'études envisagées dans ce cadre est le contrôle du déplacement transverse²⁷ des structures pour réaliser des lignes à retard à délai variable 100% optique.

Le deuxième aspect de l'évolution de mes activités de recherche, qui a déjà débuté, concerne la génération et l'étude des structures localisées. Ces structures peuvent être obtenues lorsque le système optique présente de la bistabilité (Sec. 1.2.3). En ajoutant un miroir au dispositif de la lame de cristal liquide avec feedback, le système obtenu devient une cavité Kerr qui est connue pour générer des structures localisées pour certaines valeurs du déphasage linéaire de la cavité. Ces solitons, à un seul pic, ou avec une distribution spatiale plus complexe²⁸, sont actuellement très étudiés théoriquement et expérimentalement dans les cavités actives telles que les lasers à semi-conducteur [274, 275]. Leur recensement, propriétés et interactions sont en pleine analyse et restent encore largement inachevés - de même que l'accord entre les expériences et les études théoriques. L'avantage de notre cavité Kerr passive est d'être très versatile et bien modélisée. Il est ainsi aisé de pouvoir bien maîtriser les paramètres de contrôle du système en vue de l'identification des paramètres pertinents dans la dynamique et l'émergence de ces structures localisées. Actuellement, un étudiant réalise sa première année de thèse sur ce sujet.

Ces orientations de recherche coïncident avec les préoccupations actuelles dans le domaine de la morphogenèse optique et plus généralement de la dynamique spatio-temporelle des systèmes non-linéaires comme l'attestent les exposés de la session *Dynamics, Instabilities and Patterns* de la dernière conférence *EQEC 2009* [276] qui s'est déroulée mi-juin à Munich.

25. Les ondes scélérates optiques sont le pendant optique des vagues scélérates (rogue waves) observées dans les océans [270, 271, 272]. Ce sont ces vagues dévastatrices ("murs d'eau") apparaissant à partir de nulle part, extrêmement rares et qui ont été considérées pendant des siècles comme des légendes racontées par d'heureux survivants marins. Ces comportements ont depuis été confirmés par des enregistrements scientifiques.

26. Une demande de projet ANR blanc international franco-chilien en partenariat avec une équipe de l'INLN de Nice (S. Résidori) et une équipe de l'université du Chili à Santiago (M. Clerc) a été déposée cette année sur ce sujet.

27. induit par la dérive en régime convectif.

28. Ces structures composées de plusieurs solitons à un seul pic sont généralement appelées complexes ou molécules de solitons. Des structures localisées sous forme d'anneau contenant un défaut de phase (vortex) ont été tout dernièrement observées par Patrice Genevet *et al.* [273].

Annexe : Autres activités de recherches

Autres activités de recherches

Parallèlement aux études concernant les effets du bruit et de la brisure de symétrie de réflexion sur les instabilités en morphogenèse optique, j'ai mené d'autres activités de recherche connectées aux instabilités dans les systèmes optiques spatialement étendus. Ces études, décrites ici succinctement, sont le fruit d'un étroit travail en commun avec les membres de mon équipe et de collaborations avec des équipes externes au laboratoire.

A.1 Instabilité spatio-temporelle de dislocation induite par le profil Gaussien du pompage

Dans la majorité des systèmes spatio-temporels, une instabilité modulationnelle spatiale se déstabilise au premier seuil correspondant à la brisure spontanée de symétrie de l'état homogène de départ. Si le paramètre de contrôle du système continue d'être augmenté, cette structure stationnaire périodique se déstabilise à son tour généralement par l'apparition soit d'une bifurcation de Hopf, ou d'une seconde fréquence spatiale, ou d'une instabilité de phase, etc [4]. Ces instabilités secondaires sont rencontrées dans les systèmes spatialement uniformes et d'extension infinie. Or, dans la majorité des systèmes réels, l'extension transverse du système est finie et, par exemple en optique, les paramètres ne sont pas uniformes en espace. C'est le cas de l'utilisation des sources laser qui présentent une dépendance transverse gaussienne. La conséquence de ces dépendances spatiales est d'introduire d'autres types d'instabilités secondaires comme l'instabilité d'Eckhaus induite par rampe en hydrodynamique [277, 278, 279] qui a aussi été observée dans le spectre d'un laser fibré [280].

Dans l'article [96], joint ci-après, il est démontré que la déstabilisation des rouleaux stationnaires obtenus dans la configuration 1D de la lame de cristal liquide avec rétroaction est due à la dépendance gaussienne du faisceau de pompe laser. Cette instabilité secondaire se présente sous la forme de dislocations des rouleaux qui apparaissent dans le diagramme d'évolution spatio-temporelle [Fig. 2(b,c,e,f) dans [96]]. Le mécanisme à l'origine de ces dislocations est la sélection par la non-uniformité spatiale du faisceau de pompe d'un nombre d'onde en dehors de la zone de stabilité d'Eckhaus des nombres d'onde [Fig. 3 dans [96]]. Elle est différente des dislocations purement spatiales qui apparaissent par exemple dans l'électroconvection des cristaux liquides où les paramètres sont uniformes en espace. Cette instabilité est le pendant optique de l'instabilité hydrodynamique d'Eckhaus induite par un paramètre de contrôle variant linéairement spatialement.

Pattern-Dislocation-Type Dynamical Instability in 1D Optical Feedback Kerr Media with Gaussian Transverse Pumping

E. Louvergneaux

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR 8523, Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

(Received 25 July 2001; revised manuscript received 5 October 2001; published 26 November 2001)

We study experimentally and numerically the secondary instability corresponding to the destabilization of stationary transverse roll patterns appearing in a 1D liquid crystal layer subjected to optical feedback. This dynamical instability appears as roll dislocations in the spatiotemporal diagrams. We show that it originates from the Gaussian spatial transverse dependence of a control parameter and that its corresponding mechanism is the selection of a local unstable wave number. This instability is the optical counterpart of the *ramp-induced Eckhaus instability* observed in hydrodynamics.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.244501

PACS numbers: 47.54.+r, 05.45.-a, 42.65.Sf, 61.30.Gd

Many dissipative systems, when driven far from equilibrium, can undergo a primary instability from a spatially uniform state to a state with spatial periodicity when a threshold value of an external forcing parameter, let us say, R is exceeded. Examples are Rayleigh-Benard convection [1], Taylor vortex flow [2], electroconvection in liquid crystals [3], chemical reactions [4], optical feedback systems [5], etc. The question then arises as to how the emerged patterns destabilize as R is further increased. The study of these secondary instabilities has been generally carried out for "ideal infinite uniform systems" with periodic boundary conditions for the theoretical case and large aspect ratios for the experimental one. This leads to the well-known Eckhaus, zigzag, . . . instabilities [6]. However, many real systems cannot be considered as uniform since their control parameters present spatial variations. The consequences of these spatial dependences have been shown to induce a particular type of secondary instability in hydrodynamics, the *ramp-induced Eckhaus instability* [7–9] which has been also evidenced in optics in the stationary patterns appearing inside the spectrum of a fiber laser [10]. In the domain of optical transverse patterns, the smooth spatial variations are unavoidable because of the Gaussian profile of laser beams or else curved mirrors and should lead to the same kind of instability as suggested in Ref. [10].

In this Letter, we show that taking into account explicitly these spatial dependences of control parameters in optical transverse patterns leads to a spatial secondary instability which appears to be generic to systems with "bell shaped" variation of the parameters. It constitutes the counterpart of the ramp-induced Eckhaus instability in hydrodynamics. More precisely, we show that the Gaussian transverse spatial dependence of the laser beam control parameter induces a dislocation-type secondary instability. This occurs through recurrent annihilation or creation of cells (depending on the sign of the nonlinearity) appearing as dislocations in the spatiotemporal diagrams of output 1D transverse pattern. We also show that the Gaussian profile of the pump intensity leads to a selection mechanism of a local unstable wave number as in Refs. [8–10].

A simple optical system which gives rise to spontaneous transverse pattern formation is a thin slice of Kerr medium irradiated by a Gaussian laser beam and a single feedback mirror at a distance d from the Kerr slice, which reflects the transmitted light backwards into the medium [11], as shown in Fig. 1. Pattern formation in such a system usually occurs through hexagon and roll formation at threshold [5,12,13]. The Kerr-like medium is a 50 μm thick cell of homeotropically aligned E_7 nematic liquid crystal (LC). The cell is tilted with an angle of 45° with respect to the optical axis in order to maximize the nonlinear effective Kerr coefficient n_2 [13]. Two identical lenses set in a "4f-type" arrangement lead to a virtual mirror M' , shifted by a distance $4f$ with respect to M . Note that this allows for positive and negative equivalent feedback paths d . It was shown that changing the sign of d was equivalent in changing the sign of the Kerr nonlinearity [14]. Thus, it is negative for a negative optical distance d yielding a defocusing-type system. The pump beam is emitted by a linearly polarized frequency-doubled NdYVO₄ laser at 532 nm. The laser beam diameter can be continuously and independently varied in the two transverse directions by means of two cylindrical lens telescopes. Let us introduce the aspect ratio η which reads

$$\eta = \frac{2w}{\Lambda_z}, \quad (1)$$

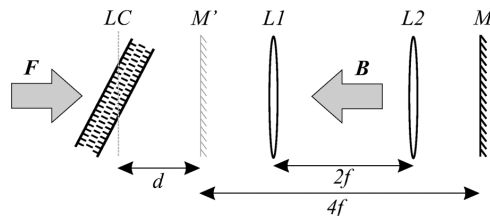


FIG. 1. Scheme of the experimental setup; LC: liquid crystal layer; L_1, L_2 : lenses of focal length f ; M (respectively, M'): real (respectively, virtual) feedback mirror; F, B : forward and backward optical fields.

where $2w$ is the input beam diameter at LC plane and Λ_∞ is the critical wavelength of pattern obtained for a plane wave input beam at threshold. In our experiment, a one-dimensional (1D) transverse laser beam corresponds to η close to unity in one direction and much larger than unity (typically 20–40) in the orthogonal one. This allows one to obtain 1D patterns composed of one line of cells as shown in Fig. 2(h). The reflected beam is collected on charge-coupled device cameras through near or far field imaging. Two control parameters are accessible to explore the patterns and their dynamics, namely, the feedback length d and the laser intensity I .

Spontaneous 1D pattern formation is observed [Fig. 2(h)] as the laser intensity exceeds some threshold value I_{th} . The transverse modulation of the intensity corresponds to the destabilization of the critical wave number

q_{th} appearing at the primary instability threshold. The evolution of the pattern is illustrated using the standard spatiotemporal plot for 1D systems with space and time as horizontal axis and vertical axis, respectively. Figure 2(a)–2(c) shows the way through which the patterns appear and destabilize in the presence of a Gaussian input field [Fig. 2(g)] in different feedback situations. Figure 2(a) shows the reference pattern which appears just above threshold I_{th} . It corresponds to a stationary wave extending over the central part of the transverse profile with an approximately constant wave number q_{th} (the variation of q_{th} over the transverse profile is typically less than 2% when I is 1% above threshold). This pattern remains stationary up to an intensity value I_2 where it is destabilized by recurrent creation (respectively, annihilation) of cells for negative (respectively, positive) values of the optical feedback path d as illustrated in Fig. 2(b) [respectively, Fig. 2(c)]. We have observed that cell creation and annihilation are always accompanied by outward (respectively, inward) drift of the remaining cell pattern and always appear in the central part of the pattern. For larger beam diameter (typically $\eta > 40$), the dislocations are distributed more randomly in a wider central region of the spatiotemporal diagrams. Although the general scheme of pattern evolution is similar for both signs of d , the specific values of thresholds and occurrence of dislocations are quite different for positive and negative values of d . For instance, for a value of η approximately equal to 36, the ratio between the second and the first threshold I_2/I_{th} is, e.g., 2.3 (respectively, 1.7) with positive (respectively, negative) d . Moreover, the occurrence of successive dislocations close to I_2 is almost regular for negative d (time fluctuations in recurrence periods are less than 10%), while no regularity is observed for positive d .

The theoretical study of pattern destabilization can be performed in the framework of the model commonly used to describe the spatiotemporal dynamics of liquid crystal under the presence of an external feedback. The Kerr equation for refractive index n which captures most of the relevant dynamics of the liquid crystal reads [15]

$$-l_D^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial n}{\partial t} + n = |F|^2 + |B|^2. \quad (2)$$

The Kerr effect, assumed to be due to photoexcitation, relaxes to zero with a time constant τ . The diffusion length l_D inside the crystal is much larger than the optical wavelength λ_0 thus removing the transverse interference effects. The small thickness of the Kerr medium allows neglecting light diffraction along the sample [11]. F and B are the forward field and the backward field, respectively. Equation (2) must be completed by the two following equations that govern light propagation through the sample and over the feedback loop, respectively:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = i\chi n F, \quad \text{and} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-i}{2k_0} \nabla_\perp^2 F. \quad (3)$$

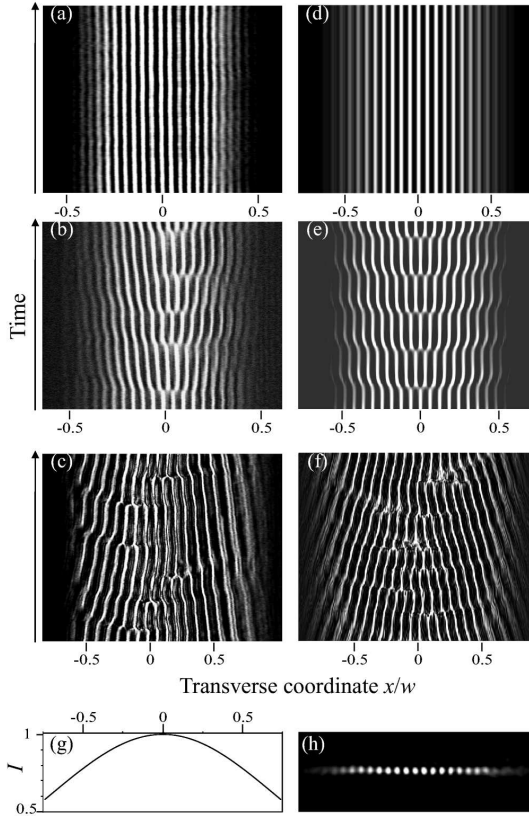


FIG. 2. (a)–(c) Spatiotemporal diagrams of experimental pattern dynamics, (a) stationary; (b),(c) unstable. (d)–(f) Corresponding numerical simulations. (g) Transverse intensity profile. (h) Typical 1D transverse pattern. (a),(b),(d),(e) [respectively, (c),(f)] Positive (respectively, negative) feedback length d . Recording times are 512 s for experiments and 100τ for numerical simulations. From (a) to (f): $\eta = 36; 36; 20; 36; 36; 21$ and $I/I_{th} = 1.3; 1.6; 3; 1.14; 1.28; 3.6$.

χ parametrizes the Kerr effect (positive for a focusing medium, $d > 0$) and k_0 is the laser field wave number. The profile of the forward propagation field is assumed to be Gaussian so that $F = F_0 e^{-(x^2/w^2)}$, with w the beam radius at the sample.

The numerical code developed for solving Eqs. (2) and (3) uses a Fourier-transform routine to propagate the fields in free space and a Runge-Kutta method of order 8 to integrate the equation of refractive index. As shown in Fig. 2(d), a pattern appears at threshold F_{0th} which remains stationary until it is destabilized for a higher F_0 value either by cell creations [Fig. 2(e)] or annihilations [Fig. 2(f)] in agreement with experimental observations for, respectively, negative or positive feedback d values. The properties of regularity in successive dislocation occurrence also correspond to those described in the experimental pattern recordings. Thus, the dynamical behaviors obtained from numerical simulations are in good qualitative agreement with those experimentally observed.

Let us discuss now the mechanism through which this instability arises. It is clearly linked to cell drift since cell creation implies that the already present cells move away (i.e., the wave number in that place locally decreases). To go further into the discussion, we need a local characterization of the pattern. It can be obtained by considering the Hilbert transform of the backward intensity which provides us with a measure of the local wave number $q(x)$ [16]. Figure 3 shows the transverse profiles of $q(x)$ for increasing intensities for numerical simulations and experiments in the stationary regimes [e.g., Figs. 2(d) and 2(a)]. It is obvious that the local wave number $q(x)$ is completely determined by the variation of the intensity profile [Fig. 2(g)] with a minimum value at the center, i.e., at the maximum of the pump profile for $d < 0$. The important point here is that the gradient of $q(x)$ increases with light intensity as shown by the arrows in Fig. 3. Following this scheme, the intensity threshold for the secondary instability is reached when the local wave number $q(x)$ reaches an unstable do-

main, e.g., $q(0) < 101 w^{-1}$ in the conditions of Fig. 3(a). Beyond this value a cell creation always appears at $q(0)$. This fixes the maximum variation of q beyond which q is smaller than the smallest stable q ; the local spacing between two neighbor cells then becomes too large thus leading to the creation of a new cell. Similar experiments and simulations in the positive d case exhibit the opposite dependence on the intensity.

Thus, the Hilbert transform shows that the dislocation mechanism corresponds to the selection of an unstable wave number. This selection is local and results from the transverse profile of q which is induced by the transverse dependence of the intensity. An important feature here is that the instability arises in the region of the maximum intensity, i.e., where the transverse dependence is *parabolic*. The wing parts of the Gaussian profile play no role in the dynamics since they are well below threshold. The relevance of the parabolic part in the dynamics of transverse pattern formation has already been evidenced in systems under inhomogeneous pumping [17]. Thus, the origin of the dislocation instability is directly related to the parabolic transverse dependence of the control parameter $I(x)$ [Fig. 2(g)].

The instability described in this Letter is induced by the Gaussian spatial properties of a control parameter (R) and does not correspond to the standard secondary instabilities such as, e.g., Eckhaus or zigzag instabilities. Secondary instabilities induced by spatial dependence of a control parameter have been evidenced in hydrodynamics by Riecke and Paap [8] in a ramped Taylor vortex flow (TVF) and more recently in optics in the emitted optical power spectrum of a fiber laser [10]. Both of these experiments showed that the spatial dependence of R selects a wave number q outside the Eckhaus stable wave number band. A dislocation then appears each time this wave number crosses the band limit given by the linear stability analysis of the uniform system. Another feature is that the wave number selection from its threshold value to its unstable value is completely determined by the spatial gradient of the considered control parameter (the angle of the ramp in the TVF, η in optics). This leads to different paths in the (I, q) stability diagram and different values of $q(I_2)$. We can follow experimentally the progressive selection of q and consider that the appearance of dislocations can be used to locate the Eckhaus band for a given η . Figure 4 displays the evolution of q versus the input intensity for different values of the aspect ratio η in the experimental defocusing case. The evolutions of q show a nonmonotonic behavior for $\eta > 30$. Above this value, q decreases until it reaches a value $q(I_2)$ where a dislocation appears in the pattern (denoted D in Fig. 4). This shows that the selected wave number depends on both the intensity I and the aspect ratio η . The same behavior is observed for the positive case except that q always increases from the first to the second instability thresholds. An advantage can be taken from this to select any required wave

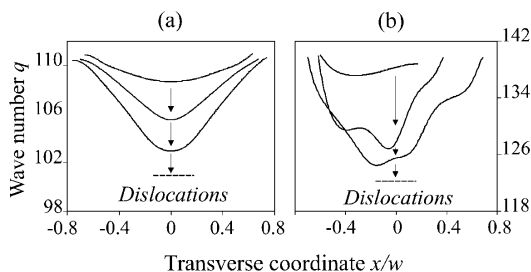


FIG. 3. Evolution of the transverse profiles of the wave number q (measured in units of w^{-1}) for various intensities. (a) Numerical simulations; (b) experiments. $I/I_{th} =$ (a) 1.01; 1.14; 1.25, (b) 1.37; 1.54; 1.6. $\eta = 36$. The arrows show the way of $q(x)$ variation with intensity. The dashed line symbolizes very locally the secondary instability threshold. The ripples seen on (b) are caused by inhomogeneities in the sample.

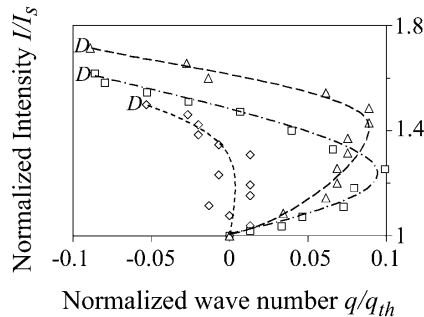


FIG. 4. Experimental evolution of q with intensity in the (I, q) diagram for different aspect ratios. $\eta = 30$ (diamonds), 36 (triangles), and 49 (squares). D denotes the boundary of the secondary instability region.

number in the stable state band by a suitable choice of the aspect ratio η .

In conclusion, we have evidenced a secondary instability present in 1D systems with bell shaped transverse spatial dependence of one control parameter, such as the Gaussian profile of the intensity in optics. It appears as dislocations in the spatiotemporal diagrams of pattern evolution. It reminds us of dislocations in the stationary transverse patterns observed in, e.g., liquid crystal electroconvection but is completely different since it finds its origin in the transverse spatial dependence of a control parameter as opposite to electroconvection where the parameters are spatially uniform. The basic mechanism and wave number selection can be related to that observed in hydrodynamics. Here, the Gaussian profile can be seen as two connected identical ramps, each of them inducing a drift [18]. The smooth connection locks the drifts until the q gradient from boundary to bulk can no longer be “absorbed” by the system then leading to the creation/annihilation of a cell. Finally, it suggests that any 1D pattern forming system involving a control parameter with “parabolic” dependence such as the central part of Gaussian shapes can undergo this kind of instability. The open question then arises to the role of this parabolic spatial dependence in 2D secondary instabilities since, e.g., the stabilization mechanism has been observed in a 2D drift instability [19].

E. L. acknowledges the group of N. Isaert for its assistance in the realization of liquid crystal samples, C. Szwaj and S. Bielawski for helpful discussions in the understanding of the instability mechanism, and especially P. Glorieux

for his support in the achievement of this project and his help in the writing of this Letter. The Centre d’Etudes et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais, and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions.

-
- [1] A. Schlüter, D. Lortz, and F. Busse, *J. Fluid Mech.* **23**, 129 (1965).
 - [2] R. C. DiPrima and H. L. Swinney, in *Hydrodynamic Instabilities and Transition to Turbulence*, edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub (Springer, Berlin, 1981).
 - [3] L. Kramer and W. Pesch, in *Pattern Formation in Liquid Crystals*, edited by A. Buka and L. Kramer (Springer, New York, 1996).
 - [4] D. Feinn, P. Ortuleva, W. Scalf, S. Schmidt, and M. Wolff, *J. Chem. Phys.* **69**, 27 (1978).
 - [5] T. Ackemann and W. Lange, *Appl. Phys. B* **72**, 21 (2000).
 - [6] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
 - [7] Y. Pomeau and P. Manneville, *J. Phys. (Paris), Lett.* **40**, L609 (1979); L. Kramer, E. Ben-Jacob, H. Brand, and M. C. Cross, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1891 (1982).
 - [8] H. Riecke and H. G. Paap, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2570 (1987).
 - [9] M. A. Dominguez-Lerma, D. S. Cannell, and G. Ahlers, *Phys. Rev. A* **34**, 4956 (1986).
 - [10] J. Plumecoq, C. Szwaj, D. Derozier, M. Lefranc, and S. Bielawski, *Phys. Rev. A* **64**, 061801(R) (2001).
 - [11] W. J. Firth, *J. Mod. Opt.* **37**, 151 (1990).
 - [12] G. D’Alessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. A* **46**, 537 (1992); R. MacDonald and H. Danlewski, *Opt. Lett.* **20**, 441 (1995); T. Honda, H. Matsumoto, M. Sedlatschek, C. Denz, and T. Tschudi, *Opt. Commun.* **133**, 293 (1997).
 - [13] E. Santamato, E. Ciarabella, and M. Tamburrini, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **251**, 127 (1994).
 - [14] E. Ciarabella, M. Tamburrini, and E. Santamato, *Appl. Phys. Lett.* **63**, 1604 (1993).
 - [15] R. MacDonald and H. J. Eichler, *Opt. Commun.* **89**, 289 (1992).
 - [16] See Sec. 2.2 in P. Bot and I. Mutabazi, *Eur. Phys. J. B* **13**, 141 (2000).
 - [17] M. N. Ouarzazi, P. A. Bois, and M. Taki, *Phys. Rev. A* **53**, 4408 (1996).
 - [18] I. Rehberg, E. Bodenschatz, B. Winkler, and F. H. Busse, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 282 (1987).
 - [19] T. Ackemann, B. Schäpers, J. P. Seipenbusch, Yu. A. Logvin, and W. Lange, *Chaos Solitons Fractals* **10**, 665 (1999).

A.2 Antiphase spatio-temporelle dans les milieux optiques couplés

L'antiphase dynamique est un phénomène très connu qui concerne de nombreux domaines de la science. Quand elle se produit, deux quantités présentent la même évolution par rapport au temps ou à l'espace, mais décalée d'une demi-période. La plus connue est l'antiphase temporelle entre deux variables différentes $V_1(t)$ et $V_2(t)$ correspondant à deux systèmes ou sous-systèmes couplés. L'antiphase temporelle a été démontrée théoriquement et expérimentalement dans une grande variété de domaines de la science, de l'optique [281, 282, 283] à la biologie [284], en passant par la neurologie [285, 286, 287], la géophysique [288], etc. En revanche, l'antiphase spatiale entre deux variables $V_1(r)$ et $V_2(r)$ correspondant à deux sous-systèmes spatialement étendus couplés, n'est que prédite théoriquement [289, 290, 291]. Par exemple, l'antiphase spatiale se produit entre les deux composantes de polarisation d'un champ régi par l'équation vectorielle complexe de Ginzburg-Landau [290], les structures périodiques obtenues dans la lumière traversant de par et d'autre un système de deux couches minces résonantes [291], ou les structures localisées dans les champs de pompe et signal d'un oscillateur paramétrique optique dégénéré à absorbant saturable [289]. La dynamique d'antiphase dans les systèmes spatialement étendus a aussi été étudiée dans le cas d'une unique variable V enregistrée à deux endroits différents de l'espace transverse $V(r_1, t)$ et $V(r_2, t)$ d'un même système. Ceci est également connu dans la littérature comme de l'antiphase spatio-temporelle [292, 293, 294] mais ce cas ne traite pas du couplage entre deux systèmes ou sous-systèmes. Ainsi, à notre connaissance, l'antiphase spatio-temporelle entre deux (sous-)systèmes couplés devait encore être démontrée expérimentalement.

C'est l'objet du travail présenté dans l'article joint ci-après [269] où nous avons mis en évidence expérimentalement le comportement d'antiphase spatio-temporelle dans un système optique à une dimension transverse. Celui-ci est constitué de deux couches minces indépendantes, de cristal liquide nématique ancré, soumises à un pompage par deux faisceaux lasers contra-propagatifs de même intensité (Fig. 1 dans [269]). La spécificité de ce dispositif réside dans le couplage intrinsèque entre les deux couches minces. En effet, ces deux sous-systèmes font partie d'un système unique qui ne peut pas être dissocié. A l'opposé du cas de deux systèmes initialement indépendants où le couplage serait externe. Ici, les deux variables $V_1 \equiv I_1(x)$ et $V_2 \equiv I_2(x)$ correspondent aux lectures²⁹ des indices réfractifs observés dans chacune des couches minces. L'expérience aussi bien que la théorie montrent que les rouleaux stationnaires observés dans chacune des lames de cristal liquide sont soit en phase soit en antiphase spatialement suivant que la non-linéarité est focalisante ou défocalisante (Figs. 2 et 4 dans [269]). Ces comportements de phase et d'antiphase spatiale sont robustes puisqu'ils survivent à des comportements plus complexes tels que le régime de dislocations spatio-temporelles (Sec. 3.4). La fonction d'inter-corrélation spatiale $C_{1/2}(\Delta x)$ entre les deux variables $V_1(x)$ et $V_2(x + \Delta x)$ confirme quantitativement les phénomènes de phase et d'antiphase spatiale (Tab. 1 dans [269]). En effet, $C_{1/2}$ est toujours bien éloignée de 0 même dans le régime d'instabilité secondaire de dislocations spatio-temporelles (document EPAPS No. E-PRLTAO-99-021751 joint ci-après). Enfin, l'étude analytique est en excellent accord avec les observations expérimentales puis-

²⁹. Les intensités $I_{1,2}$ recueillies en transmission de part et d'autre du système portent l'information de la distribution des indices réfractifs dans chacune des lames de cristal liquide.

A.2 ANTIPHASE SPATIO-TEMPORELLE DANS LES MILIEUX OPTIQUES COUPLÉS

qu'elle montre l'existence de deux distributions distinctes d'indice réfractif, dans chacune des couches minces, qui peuvent soit être en phase ou en antiphase suivant le signe de la non-linéarité. Des formes plus sophistiquées d'antiphase spatio-temporelle, telle que la dynamique de "winner takes all" [283], sont attendues dans des configurations similaires à celle étudiée ici mais comportant plus de deux couches minces couplées.

Spatiotemporal Antiphase Dynamics in Coupled Extended Optical Media

E. Louvergneaux,^{1,2,*} F. Rogister,³ and P. Glorieux^{1,2}

¹Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CERLA, Université des Sciences et Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

²CNRS UMR8523, FR2416, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

³TCTS Lab, Faculté Polytechnique de Mons, 31 boulevard Dolez, 7000 Mons, Belgium

(Received 7 May 2007; published 26 December 2007)

Experimental evidence of spatiotemporal antiphase dynamics is given for an extended system made of two liquid crystal slices that are optically coupled by two equal amplitude counterpropagating pumping beams. Theory and experiments carried out in a transverse one-dimensional configuration show that roll patterns are generated in each slice. These rolls are spatially in-phase or antiphase for a focusing or a defocusing nonlinearity type, respectively. These in-phase or antiphase dynamics remain robust even for complex spatiotemporal regimes such as dislocation regimes.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.263901

PACS numbers: 47.54.-r, 05.45.-a, 42.65.Sf

Antiphase dynamics is a general and very well-known phenomenon which spans many fields of science. When it occurs, two quantities exhibit the same evolution versus time or space but shifted by half a period. The most well known is the temporal antiphase between two different variables $V_1(t)$ and $V_2(t)$ corresponding to two coupled systems or subsystems. Temporal antiphase has been demonstrated theoretically and experimentally in a large variety of science domains, from optics [1–3] to biology [4], neurology [5–7], geophysics [8], etc. On the other hand, spatiotemporal antiphase between two different variables $V_1(\mathbf{r}, t)$ and $V_2(\mathbf{r}, t)$, corresponding to two coupled spatially extended subsystems, has only been predicted theoretically [9–11]. For instance, spatial antiphase is expected to occur between, e.g., polarization components of a field ruled by the vector complex Ginzburg-Landau equation [10], periodic patterns in light counterpropagating through a system of two resonant thin films [11], or transverse localized structures in the pump and signal fields of a degenerate optical parametric oscillator with saturable absorber [9]. Antiphase dynamics in spatially extended systems has also been investigated in the case of a unique variable V recorded at two different locations of the transverse space $V(\mathbf{r}_1, t)$ and $V(\mathbf{r}_2, t)$ of a single system. This is also known in the literature as spatiotemporal antiphase dynamics [12–14] but does not deal with coupled (sub)systems. However, to the best of our knowledge, spatiotemporal antiphase in coupled (sub)systems has yet to be experimentally demonstrated.

In this Letter, we report on the experimental evidence of spatiotemporal antiphase dynamics in an optical extended system made of two coupled Kerr subsystems that are optically pumped by equal amplitude counterpropagating beams. In this system, the coupling is intrinsic since the two subsystems are part of a unique system that cannot be dissociated, whereas the coupling would have been external in the case of two initially independent systems. Here, the two different variables V_1 and V_2 correspond to the

fields observed in the two subsystems. We show that stationary roll patterns in each slice are either spatially in-phase or antiphase for a focusing or a defocusing nonlinearity, respectively. These in-phase or antiphase dynamics remain robust for complex spatiotemporal regimes such as a dislocation regime [15]. Analytical developments and numerical simulations are in excellent agreement with experiments carried out for a transverse one-dimensional configuration on nematic liquid crystals slices as Kerr media.

The experimental setup follows the idea of Logvin [11] and is made of two liquid crystal (LC) layers distant from $2d$, and subjected to two equal amplitude F counterpropagating laser beams as shown in Fig. 1. This system is an unfolded version of the Kerr slice with simple optical feedback [16]. The light beam transmitted through one layer carries phase modulations that are converted into amplitude modulations during the free propagation over the coupling distance $2d$ (Talbot effect [17]) and drives the refractive index of the opposite layer via the Kerr effect. The patterns observed in both LC layers are simultaneously monitored by CCD cameras via the two transmitted beams. For the sake of simplicity, we concentrate on the case of one-dimensional extended patterns.

Apart from a different optical arrangement as shown in Fig. 1, the experimental details are identical to those reported in our previous studies on the spatiotemporal dynamics of a Kerr slice submitted to the feedback of a single mirror [15]. The coupling distance $2d$ governs the

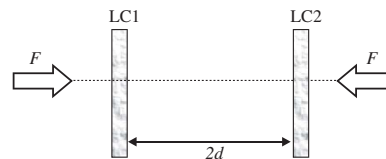


FIG. 1. Schematic representation of the experimental setup. LC1 and LC2 liquid crystal slices. $2d$ optical coupling distance.

nonlinearity of the system. The use of a $4f$ lens arrangement inserted between the two slices allows for positive as well as negative $2d$ values. A positive (negative) value of the coupling distance corresponds to a positive (negative) effective Kerr nonlinearity.

The global features of the scenarios of successive pattern destabilizations do not depend on the sign of $2d$. For low pumping beam intensity $I = |F|^2$, the fields observed in the two LC slices simply reflect the overall Gaussian dependence of I . At primary threshold I_c , stationary rolls with identical wavelength for both transmitted fields are observed. As the input power is increased beyond a secondary threshold I_d , these rolls destabilize via time pseudoperiodic dislocations associated with fringe annihilation (creation) for positive (negative) $2d$ values [15].

Figure 2 shows typical spatiotemporal evolutions of the two 1D patterns $V_1 \equiv I_1(x)$ and $V_2 \equiv I_2(x)$ observed in slices 1 and 2 above the primary threshold for negative [Figs. 2(a)–2(d)] and positive [Figs. 2(e)–2(h)] coupling distances $2d$. These patterns V_1 and V_2 reveal in-phase or antiphase dynamics depending on the sign of the nonlinearity. Above the primary threshold, the stationary patterns formed on both beams coincide spatially [Figs. 2(e) and 2(f)] if $2d > 0$, while they are shifted by half a wavelength if $2d < 0$ [Figs. 2(a) and 2(b)]. We take as a definition for spatiotemporal antiphase $V_1(\mathbf{r}, t) = V_2(\mathbf{r} + \Lambda/2, t)$, where Λ is the spatial wavelength of the pattern. To exhibit qualitatively these in-phase or antiphase properties, the sum (Σ) and difference (Δ) of I_1 and I_2 are constructed. The Δ pattern exhibits either deep contrast fringes [Fig. 2(d)] or almost no contrast [Fig. 2(h)] for antiphase and in-phase patterns, respectively. The Σ pattern in Fig. 2(c) has a spatial wavelength twice the wavelength of the individual patterns. This indicates that the individual patterns are in antiphase. A quantitative indication of these in-phase or antiphase dynamics has been calculated using

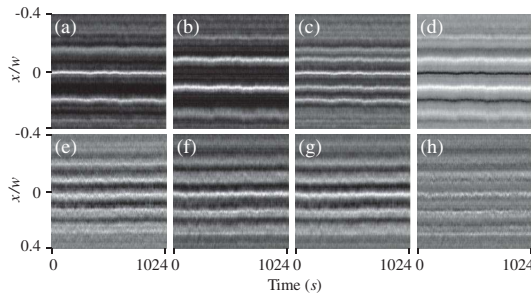


FIG. 2. Experimental roll spatiotemporal evolutions observed in slices 1 (a),(e) and 2 (b),(f) for negative (a)–(d) and positive (e)–(h) nonlinearity, respectively. (c),(g) [(d),(h)] correspond to the sum [difference] of the diagrams of the two slices 1 and 2. Parameters are $w = 1400 \mu\text{m}$, (a)–(d) $I = 1.25I_c$, $d = -12.5 \text{ mm}$ ($\sigma = -10.6$) and (e)–(h) $I = 1.1I_c$, $d = 13 \text{ mm}$ ($\sigma = 11$).

the time averaged spatial cross correlation $C_{1/2}(\Delta x)$ between the two beams $I_1(x)$ and $I_2(x + \Delta x)$ where Δx is the spatial shift [18]. The results which are obtained at the thresholds for pattern formation I_c and for dislocation instability I_d are presented in Table I. The values for $\Delta x = 0$ clearly identify the type of dynamics (in-phase or antiphase). The evolution of $C_{1/2}$ versus Δx depicts damped oscillations with wavelength Λ due to the Gaussian profile of the pumping beams [18]. The maximal values of the extrema of $C_{1/2}(\Delta x)$ demonstrate the very good quality for both in-phase and antiphase phenomenon since $C_{1/2}$ is always far from 0 even within the dislocation regime. These values decrease slowly as the control parameter I is driven far from thresholds.

These experimental observations have been compared with the analytical predictions and the results of numerical simulations performed on an extension of the model of the single Kerr slice with feedback first introduced by Akhmanov *et al.* [19] and Firth and D’Alessandro [16]. The refractive indices $n_{1,2}$ in slices 1 and 2, respectively, are ruled by the following set of coupled equations

$$\left(\tau \frac{\partial}{\partial t} - l_d^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right) n_{1,2} = |F|^2 + |e^{i\sigma(\partial^2/\partial x^2)} e^{i\chi n_{2,1}} F|^2 + \sqrt{\varepsilon} \xi_{1,2}, \quad (1)$$

where F is the input Gaussian laser field with radius w and transverse dependence $F(x) = F_0 \exp(-x^2/w^2)$. t and x are the time and transverse space variables scaled with respect to the relaxation time τ ($\sim 2.3 \text{ s}$) and the diffusion length l_d ($\sim 10 \mu\text{m}$). ε ($= 0.01$) scales the noise amplitude and $\xi_{1,2}(x, t)$ are Gaussian stochastic processes of zero mean and delta correlation introduced as previously to model thermal noise [20]. We have set $\sigma = d/k_0 l_d^2$ where k_0 is the optical wave number of the field. The Kerr effect is parametrized by χ which is focusing (defocusing) for positive (negative) values of $2d$.

For plane wave input, $F(x) = F_0$ and in absence of noise ($\varepsilon = 0$), Eq. (1) admits a homogeneous stationary solution such that $n_{1,2} = n_0 = 2|F|^2$. This solution destabilizes against transverse spatial modulations in the form $\Delta n_{1,2} \sim a_{1,2} \exp(iKx)$ where K is the transverse wave number and constants $a_{1,2}$ account for spatial phase shift. A straightforward linear stability analysis leads to the following coupled dispersion relations

TABLE I. Maximal values of the transverse cross correlation $C_{1/2}(\Delta x)$ between the two intensities I_1 and I_2 observed in slices 1 and 2 at thresholds for pattern formation I_c and for dislocation instability I_d . The values observed at $\Delta x = 0$ are in bold.

$C_{1/2}(\Delta x)$	$I_c, 2d > 0$	$I_c, 2d < 0$	$I_d, 2d < 0$
Numerics	-0.85/ 0.92	-0.60 /0.95	-0.50 /0.80
Experiments	-0.65/ 0.65	-0.56 /0.60	-0.42 /0.72

$$a_{1,2}(l_d^2 K^2 + i\Omega\tau + 1) = a_{2,1}2I\chi \sin(\sigma K^2) \quad (2)$$

possessing two sets of solutions for $\Delta n_{1,2}$ satisfying

$$a_2 = \pm a_1, \quad \sin(\sigma K^2) = \pm \frac{1 + K^2}{2\chi I_c}, \quad (3)$$

where I_c is the intensity threshold for modulational instability. For each sign of σ , the two sets of solutions are valid as illustrated in Fig. 3 for $\sigma = +10.6$. Moreover, the transverse wave number of the roll patterns as well as the value of the primary instability threshold I_c are independent of the sign of σ . However, only one of the two sets of solutions possesses the lowest threshold corresponding to the lowest value among all the possible wave numbers K . In the case of Fig. 3, the in-phase solution has the lowest threshold for pattern destabilization ($K = K_c \approx 0.38l_d^{-1}$). Thus, for $\sigma > 0$ the lowest intensity threshold solution is found for $a_2 = a_1$ and by contrast for $a_2 = -a_1$ if $\sigma < 0$. In other words, the dynamics at threshold is characterized by the generation of stationary roll patterns in each slice with the same wavelength that are spatially in-phase for $\sigma > 0$ and spatially antiphase for $\sigma < 0$. So, while the mechanism responsible for the existence of in-phase and antiphase patterns is the Talbot effect [17], the selection of the in-phase or antiphase solution is directly related to a “lowest threshold principle.” These analytical results confirm the observations of Fig. 2.

Numerical simulations carried out for parameters corresponding to the experimental recordings of Fig. 2 show an excellent qualitative agreement with the experiments as shown in Figs. 4 and 5. They confirm the genuine character of the antiphase dynamics and its dependence with the sign of $2d$. The wavelengths for symmetric values of $2d$ are identical at primary threshold, in agreement with the analytical predictions. The wavelengths in Figs. 4(a) and 4(e) are different because the patterns are calculated for values exceeding the threshold in order to obtain a better contrast. As the variation of the wavelength with the incident power

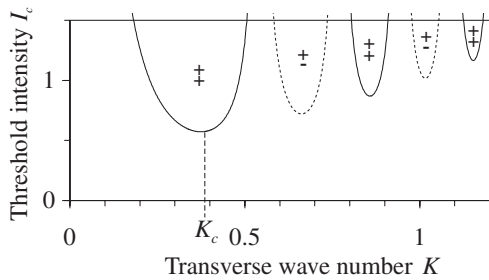


FIG. 3. Marginal stability curve of the uniform pattern for $\sigma = +10.6$. The tongues correspond to the domains of rolls. (++) indicates an in-phase solution and (+-) an antiphase solution of Eq. (1). Here, the in-phase roll solution destabilizes first due to its lowest threshold.

strongly depends on the sign of σ (see Fig. 4 in [15]), significantly different wavelengths are observed for positive and negative values of $2d$.

In-phase or antiphase dynamics remain robust even for complex spatiotemporal behaviors such as the dislocation regime observed beyond the secondary threshold I_d (Fig. 5). Indeed, for positive nonlinearity, i.e., the in-phase case, experimental backward and forward dislocation patterns evolve identically. The situation is quite different for antiphase (negative nonlinearity), since the fringes are intertwined. In this dislocation antiphase regime, experimental temporal and spatial evolutions of the fringes are coupled because of the fringe drift motion, thus producing different patterns as, e.g., the connected [Fig. 5(a)] and disconnected [Fig. 5(b)] filaments shown in Fig. 5. The temporal oscillations related to these dislocations do not correspond to a Hopf bifurcation but come from the selection of an unstable wave number due to the Gaussian profile of the pumping beam [15]. The threshold for the dislocation instability is well below the threshold for the Hopf bifurcation so no Turing-Hopf interaction [14,21] occurs. In accordance with these experimental observations, numerics confirm that antiphase is present in the whole domain of parameters, even for complex spatiotemporal regimes such as irregular dislocations [Figs. 5(e)–5(h)]. Although it is difficult to define precisely a global transverse wavelength (except in the central part of the patterns) in this situation, and consequently rigorous antiphase, we observe that the cross correlation $C_{1/2}(\Delta x)$ still remains significantly far from zero. Thus, we may conclude that antiphase spatiotemporal dynamics is a robust property which is not destroyed by additional bifurcations (as a temporal one here) although each of them is accompanied by some symmetry breaking.

To summarize, we have experimentally and theoretically evidenced spatiotemporal antiphase dynamics in spatially extended systems exhibiting a complex spatiotemporal

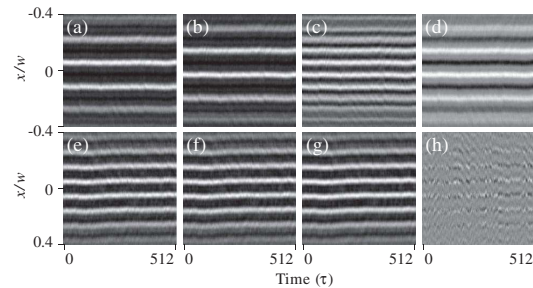


FIG. 4. Numerical roll spatiotemporal evolutions observed in slices 1 (a),(e) and 2 (b),(f) for negative (a)–(d) and positive (e)–(h) nonlinearity, respectively. (c),(g) [(d),(h)] correspond to the sum [difference] of the diagrams of the two slices 1 and 2. Parameters are $w = 140l_d$, (a)–(d) $\sigma = -10.6$, $I = 1.08I_c$ and (e)–(h) $\sigma = 11$, $I = 1.08I_c$.

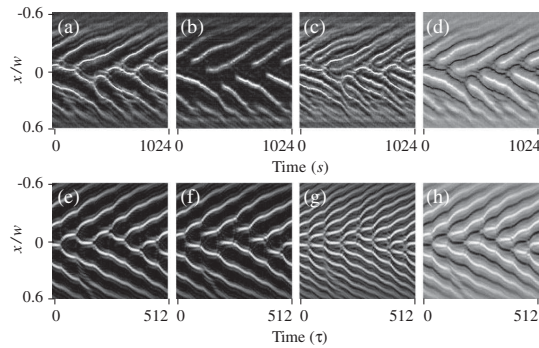


FIG. 5. Experimental (a)–(d) and numerical (e)–(h) roll spatiotemporal evolutions observed in slices 1 (a),(e) and 2 (b),(f) in the dislocation regime. (c),(g) [(d),(h)] correspond to the sum [difference] of the diagrams of the two slices 1 and 2. Parameters are (a)–(d) $w = 1400 \mu\text{m}$, $\sigma = -10.6$, $I = 1.7I_c$ (with $I_d = 1.35I_c$), $d = -12.5 \text{ mm}$; (e)–(h) $w = 140I_d$, $\sigma = -10.6$, $I = 1.38I_c$ (with $I_d = 1.14I_c$).

behavior, provided that the system is built from coupled similar subsystems. In-phase or antiphase dynamics depends on the sign of the nonlinearity, in our problem, the sign of the coupling distance. When it occurs, spatiotemporal antiphase appears as a robust phenomenon surviving complex behaviors. More sophisticated forms of spatiotemporal antiphase such as “winner takes all” dynamics [3] are expected in experimental devices built from more than two coupled identical subsystems.

F. R. acknowledges support from the Fonds National de la Recherche Scientifique and the Attraction Pole program V-18 of the Belgian science policy.

*eric.louvergneaux@univ-lille1.fr; <http://www.phlam.univ-lille1.fr/perso/louvergneaux/>

- [1] E. Lacot, F. Stoeckel, and M. Chenevier, *Phys. Rev. A* **49**, 3997 (1994); E. Cabrera, S. Melle, O. G. Calderon, and J. M. Guerra, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 233902 (2006).
- [2] K. Wiesenfeld, C. Bracikowski, G. James, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1749 (1990); K. Otsuka, P. Mandel, S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **46**, 1692 (1992).
- [3] K. Otsuka, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1090 (1991).
- [4] P. Varona, J. J. Torres, H. D. I. Abarbanel, M. I. Rabinovich, and R. C. Elson, *Biol. Cybern.* **84**, 91 (2001).
- [5] G. Ullah, P. Jung, and A. H. Cornell-Bel, *Cell Calcium* **39**, 197 (2006).
- [6] H. O. de la Iglesia *et al.*, *Science* **290**, 799 (2000).
- [7] A. Sherman and J. Rinzel, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **89**, 2471 (1992).
- [8] J. B. Snively and V. P. Pasko, *Geophys. Res. Lett.* **32**, L08808 (2005).
- [9] M. Tlidi and P. Mandel, *Phys. Rev. A* **59**, R2575 (1999).
- [10] A. Amengual, E. Hernandez-Garcia, R. Montagne, and M. San Miguel, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4379 (1997).
- [11] Yu. A. Logvin, *Phys. Rev. A* **57**, 1219 (1998); I. V. Babushkin, Yu. A. Logvin, and N. A. Loiko, *J. Exp. Theor. Phys.* **90**, 133 (2000).
- [12] A. Birzu, F. Plenge, N. I. Jaeger, J. L. Hudson, and K. Krischer, *J. Phys. Chem. B* **107**, 5825 (2003).
- [13] V. K. Vanag, L. Yang, M. Dolnik, A. M. Zhabotinsky, and I. R. Epstein, *Nature (London)* **406**, 389 (2000).
- [14] J.-J. Perraud, A. De Wit, E. Dulos, P. De Kepper, G. Dewel, and P. Borckmans, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1272 (1993).
- [15] E. Louvergneaux, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 244501 (2001); H. Riecke and H. G. Paap, *ibid.* **59**, 2570 (1987); L. Ning, G. Ahlers, and D. S. Cannell, *ibid.* **64**, 1235 (1990).
- [16] W. J. Firth, *J. Mod. Opt.* **37**, 151 (1990); G. D’Alessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2597 (1991).
- [17] W. H. F. Talbot, *Philos. Mag.* **9**, 401 (1836); M. Tamburini, M. Bonavita, S. Wabnitz, and E. Santamato, *Opt. Lett.* **18**, 855 (1993).
- [18] See EPAPS Document No. E-PRLTAO-99-021751 for the auxiliary material. It contains the formula of the cross correlation $C_{1/2}(\Delta x)$ function and two figures depicting the numerical and experimental autocorrelation and cross correlation functions between the two intensities I_1 and I_2 at thresholds. For more information on EPAPS, see <http://www.aip.org/pubservs/epaps.html>.
- [19] S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, and V. Yu. Ivanov, *JETP Lett.* **47**, 707 (1988); S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zheleznykh, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 78 (1992).
- [20] G. Agez, P. Glorieux, C. Szwaj, and E. Louvergneaux, *Opt. Commun.* **245**, 243 (2005).
- [21] M. Tlidi, P. Mandel, and M. Haelterman, *Phys. Rev. E* **56**, 6524 (1997).

Time Averaged Cross-correlation and Autocorrelation Functions of In-phase and Antiphase Spatiotemporal Dynamics

E. Louvergneaux, F. Rogister, P. Glorieux

The time averaged cross-correlation $C_{1/2}(\Delta x)$ between the two intensities $I_1(x)$ and $I_2(x + \Delta x)$ observed in slices 1 and 2 versus the spatial shift Δx reads:

$$C_{1/2}(\Delta x) = \left\langle \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_1(x_i) - \bar{I}_1) \times (I_2(x_i + \Delta x) - \bar{I}_2)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_1(x_i) - \bar{I}_1)^2 \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_2(x_i + \Delta x) - \bar{I}_2)^2}} \right\rangle \quad (1)$$

where $\bar{I}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_1(x_i)$ and $\bar{I}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_2(x_i + \Delta x)$. $\langle \rangle$ indicates that the quantity is time averaged. n is the number of sampled points x_i over the studied transverse space. $\Delta x = i \delta x$ is in units of the transverse sampling step δx . The autocorrelation $C_{1/1}(\Delta x)$ for a single intensity $I_1(x)$ is obtained by replacing I_2 with I_1 in Eq. (1).

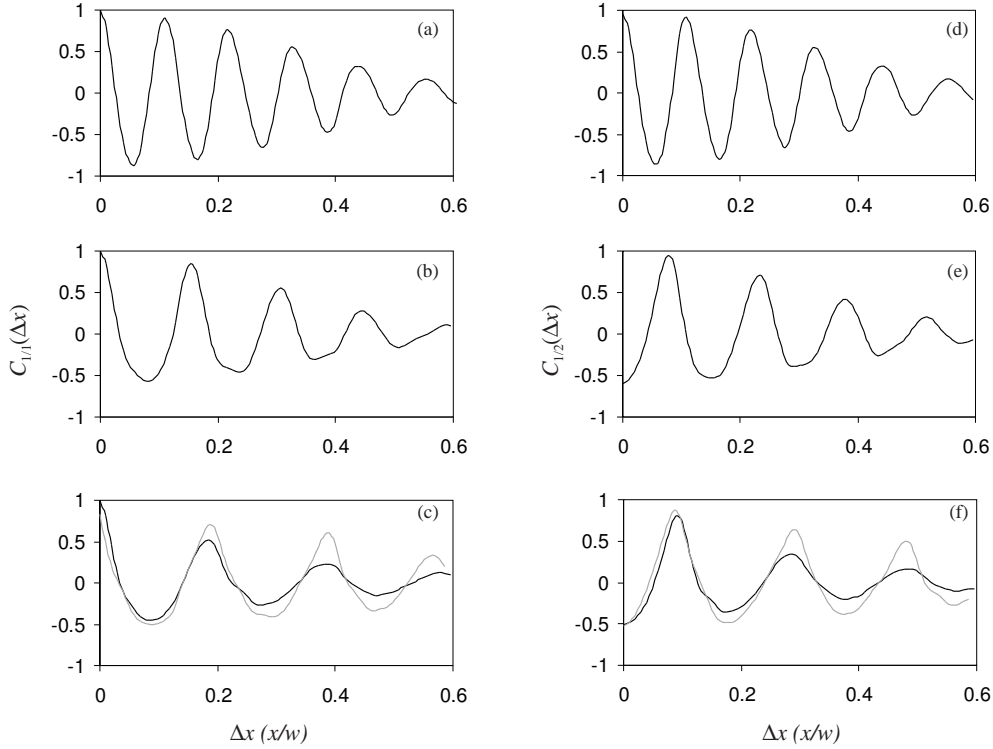


Figure 1: (a-c) Numerical autocorrelation $C_{1/1}(\Delta x)$ and (d-f) cross-correlation $C_{1/2}(\Delta x)$ between the two intensities I_1 and I_2 observed in slices 1 and 2 at thresholds for pattern formation I_c (a,b,d,e) and for dislocation instability I_d (c,f). (a,d) correspond to positive nonlinearity and (b,c,e,f) to negative nonlinearity. (c,f) Plots in gray correspond to instantaneous values at $t = 0$ for comparison with time averaged ones. Parameters are $w = 140 l_d$, (a,d) $\sigma = 11$, $I = I_c$, (b,e) $\sigma = -10.6$, $I = I_c$, (c,f) $\sigma = -10.6$, $I = I_d = 1.14 I_c$.

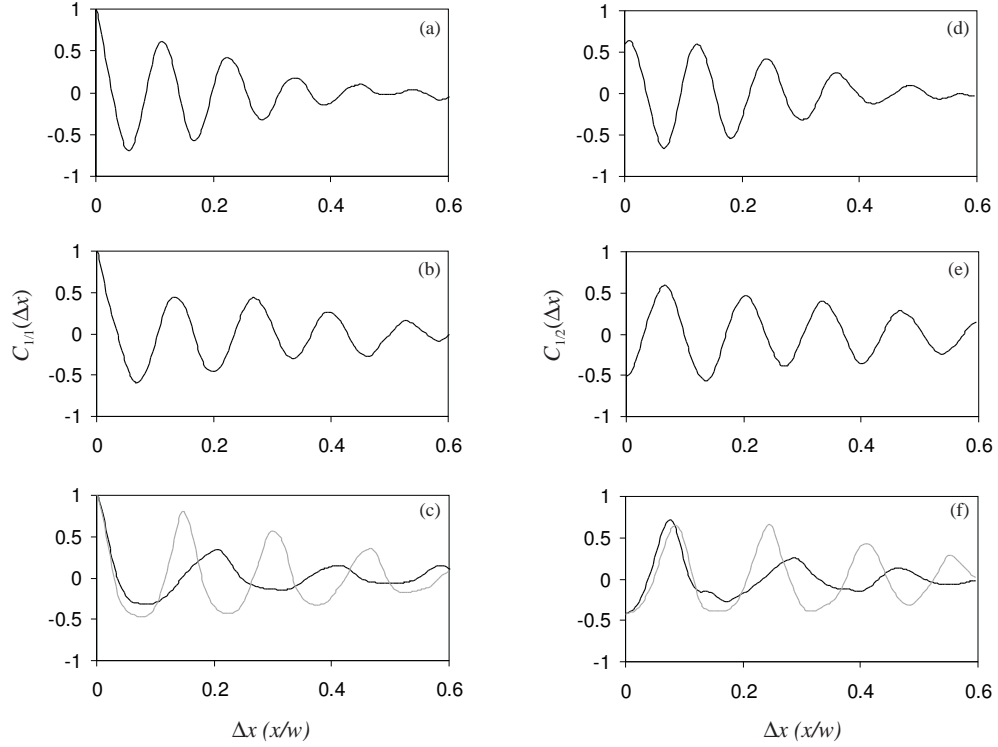


Figure 2: (a-c) Experimental autocorrelation $C_{1/1}(\Delta x)$ and (d-f) cross-correlation $C_{1/2}(\Delta x)$ between the two intensities I_1 and I_2 observed in slices 1 and 2 at thresholds for pattern formation I_c (a,b,d,e) and for dislocation instability I_d (c,f). (a,d) correspond to positive nonlinearity and (b,c,e,f) to negative nonlinearity. (c,f) Plots in gray correspond to instantaneous values at $t = 0$ for comparison with time averaged ones. Parameters are $w = 1400 \mu m$, (a,d) $d = 13 mm$ ($\sigma = 11$), $I = I_c$, (b,e) $d = -12.5 mm$ ($\sigma = -10.6$), $I = I_c$, (c,f) $d = -12.5 mm$ ($\sigma = -10.6$), $I = I_d = 1.35I_c$.

A.3 Contrôle et élimination des instabilités modulationnelles dans les fibres à très faible dispersion

Comme il a été vu et discuté dans les sections 1.4.2 et 3.4, l'équation retenue pour modéliser l'évolution du champ optique dans un système fibré est du type Schrödinger non-linéaire généralisée (GNLSE), c'est à dire l'équation de Schrödinger non-linéaire classique [151] incluant des ordres supérieurs de dispersion β_i (avec $i > 2$) et des contributions comme celles des effets Raman ou Brillouin. Suivant les études dynamiques considérées la forme de l'équation GNLSE diffère. A titre d'exemple, lorsque le régime étudié correspond à un pompage près du zéro de dispersion (λ_0) de la fibre, il a été montré qu'un développement jusqu'au quatrième ordre de dispersion était nécessaire pour rendre compte du gain de l'instabilité modulationnelle en simple propagation [295, 296, 297]. Notre curiosité fut alors de vérifier si cette propriété était aussi valide dans le cas de la cavité fibrée et dans l'affirmative quelles en étaient les conséquences. En effet, ce système n'avait été étudié jusqu'alors que pour des régimes de forte dispersion³⁰ à partir de l'équation de Schrödinger classique (NLSE).

Ce que montre notre étude est qu'il est aussi nécessaire de prendre en compte les termes de dispersion jusqu'au quatrième ordre (β_4) pour capturer toute la dynamique de la cavité fibrée passive quand le régime exploré correspond à celui d'une très faible dispersion (pompage à une longueur d'onde très proche du zéro de dispersion λ_0). Pour illustrer ce résultat, nous avons pris l'exemple d'un régime monostable observé dans les conditions où la concavité de la courbe de dispersion de la fibre au voisinage de λ_0 est tournée vers les valeurs négatives ($\beta_4 > 0$) et dont la pente de cette courbe est quasi-nulle ($\beta_3 \approx 0$). Dans ces conditions, l'étude analytique établit que quelle que soit la valeur de β_4 , une seconde fréquence d'instabilité modulationnelle apparaît au premier seuil d'instabilité [Eq. (2) dans l'article joint ci-après [186]]. Celle-ci n'est pas prédite par l'équation ne tenant pas compte des effets du quatrième ordre de dispersion [183]. En effet, une unique fréquence d'instabilité modulationnelle est prévue dans ce dernier cas.

L'autre résultat très important de cette analyse est que le domaine d'instabilité n'est plus ouvert mais est borné dans l'espace des paramètres (intensité de pompage, fréquence d'instabilité) [Fig. 2(a) dans l'article joint ci-après [186]]. La conséquence directe est que l'état stationnaire est retrouvé pour des valeurs élevées du taux de pompage. Les simulations numériques menées dans le cas d'une cavité fibrée de très faible dispersion confirment que toute instabilité modulationnelle est supprimée dès que l'intensité du champ de pompe est assez élevée (Fig. 4 dans [186]).

30. En d'autres termes, un pompage éloigné du zéro de dispersion.

Control and removal of modulational instabilities in low-dispersion photonic crystal fiber cavities

M. Tlidi

Optique Nonlineaire Theorique Université Libre de Bruxelles, C.P. 231, Campus Plaine, B-1050 Bruxelles, Belgium

A. Mussot and E. Louvergneaux

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molecules, UMR-CNRS 8523 IRCICA, Université des Sciences et
Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

G. Kozyreff

Optique Nonlineaire Theorique Université Libre de Bruxelles, C.P. 231, Campus Plaine, B-1050 Bruxelles, Belgium

A. G. Vladimirov

Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstrasse 39, D-101178 Berlin, Germany

M. Taki

*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molecules, UMR-CNRS 8523 IRCICA, Université des Sciences et
Technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

Received October 11, 2006; accepted November 29, 2006;
posted December 20, 2006 (Doc. ID 75864); published February 15, 2007

Taking up to fourth-order dispersion effects into account, we show that fiber resonators become stable for a large intensity regime. The range of pump intensities leading to modulational instability becomes finite and controllable. Moreover, by computing analytically the thresholds and frequencies of these instabilities, we demonstrate the existence of a new unstable frequency at the primary threshold. This frequency exists for an arbitrary small but nonzero fourth-order dispersion coefficient. Numerical simulations for a low and flattened dispersion photonic crystal fiber resonator confirm analytical predictions and open the way to experimental implementation. © 2007 Optical Society of America

OCIS codes: 190.0190, 190.3100, 190.4360, 190.4370, 230.4320.

Instabilities in nonequilibrium systems are drawing considerable attention both from fundamental as well as applied point of views.^{1,2} One such instability gives rise to periodic self-modulations and is referred to as modulational instability (MI) in temporally dispersive media³ and Turing instability⁴ in spatially extended systems. In optical fibers, MI results from the interplay between chromatic dispersion and the intensity-dependent refractive index. In the usual scalar-free propagation, the phase matching of the underlying four-wave mixing process requires anomalous dispersion.³ However, phase matching can also be achieved in normal dispersion region by considering extra degrees of freedom such as polarization in birefringent⁵ and isotropic⁶ fibers, bimodal fibers,⁷ working around the zero-dispersion wavelength (ZDW),^{8–10} or inserting the fiber within a cavity.¹¹ Scalar MI in free propagation through a single-mode optical fiber is usually described by the nonlinear Schrödinger equation (NLSE), in which the propagation constant is expanded in a Taylor series in the frequency domain. It has been shown that only even-order terms contribute to the MI gain and that development up to the fourth order must be considered when the pump wavelength is close to the ZDW.

In this case, scalar MI is possible in the normal dispersion region if the fourth-order dispersion term is negative, and a second frequency of instability can be generated if the fourth-order dispersion term is positive.^{8–10} To our knowledge, intracavity MI leading to a single frequency has been studied only in relatively strong dispersion regions where models including up to the second-order dispersion term are relevant to describe its dynamics.

In this Letter, we show that it is necessary to take into account up to the fourth-order dispersion term to capture the full MI dynamics of a passive fiber resonator, especially when proceeding close to the ZDW. To this end, we extend the model developed by Lugiato–Lefever¹² (LL model) up to the fourth-order dispersion term. We then demonstrate that, however small the fourth-order dispersion coefficient is, a second frequency of instability can be observed at the primary threshold of stationary state destabilization, which adds to the single frequency predicted and observed up to now.¹¹ Moreover, we demonstrate that the MI process has a finite domain of existence delimited by two pump power values, allowing for the stationary state to restabilize at large powers. We investigate the evolution of the MI frequencies within the

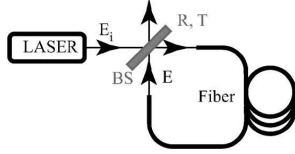


Fig. 1. Experimental setup. BS, beam splitter.

existence domain from their rise up to their disappearance. Finally, in view of an experimental implementation, we perform numerical simulations for a realistic experimental configuration with a flattened dispersion photonic crystal fiber and find excellent agreement with the analytical predictions.

The fiber resonator is schematically depicted in Fig. 1. A continuous wave of power E_i^2 is launched into the cavity by means of a beam splitter, propagates inside the fiber, and experiences dispersion and the Kerr effect. At each round trip the light inside the fiber is coherently superimposed with the input beam. This can be described by the boundary conditions $E(z=0, \tau+t_R) = T \times E_{in}(\tau) + R \times E(L, \tau) \exp(-i\Phi_0)$ and by the extended NLSE $\partial_z E(z, \tau) = (-i\beta_2/2\partial_{\tau^2} + \beta_3/6\partial_{\tau^3} + i\beta_4/24\partial_{\tau^4} + i\gamma|E|^2)E$, with round-trip time t_R , linear phase shift Φ_0 , intensity mirror transmissivity (reflectivity) T^2 (R^2), and cavity length L . The electric field inside the cavity is denoted E . $\beta_{2,3,4}$ are the second-, third-, and fourth-order dispersion terms, respectively. γ is the nonlinear coefficient, z is the longitudinal coordinate, and τ is the time in a reference frame moving at the group velocity of the light. This infinite-dimensional map can be simplified to the following single normalized equation by applying the mean field approximation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t'} = & S - (1 + i\Delta)\psi + i|\psi|^2\psi - i\beta_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} \\ & + B_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau'^3} + iB_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \tau'^4}, \end{aligned} \quad (1)$$

where $t' = tT^2/2t_R$, $\tau' = \tau(T^2/L)^{1/2}$, $\psi = E\sqrt{2\gamma L/T^2}$, $S = 2/T(2\gamma L/T^2)^{1/2}E_i$ is the normalized input field, $B_3 = \beta_3 T/\sqrt{9L}$, $B_4 = \beta_4 T^2/12L$, and $\Delta = 2\Phi_0/T^2$ is the cavity detuning. We carry out the analytical study in a low-dispersion fiber with a small dispersion slope. Thus, B_3 can be neglected. The steady state (SS) response ψ_S of Eq. (1) satisfies $S_S = [1 + i(\Delta - |\psi_S|^2)]\psi_S$. This solution is identical to that of the LL model leading to a monostable (bistable) regime for $\Delta < \sqrt{3}$ ($> \sqrt{3}$). Its stability with respect to finite frequency perturbations, i.e., of the form $\exp(i\Omega\tau' + \lambda t')$, shows that the MI frequencies that can be destabilized at the primary threshold $I_{1m} = |\psi_{1m}|^2 = 1$ are

$$\Omega_{L,U}^2 = \frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 + 4(\Delta - 2)B_4}}{2B_4}, \quad (2)$$

and one can see immediately that two frequencies can be destabilized at the primary threshold for a suitable choice of β_2 and Δ . Thus, taking into account

β expansion up to the fourth order in Eq. (1) evidences the existence of a second frequency of instability that has not yet been reported experimentally or theoretically when working in quite strong dispersion regions.¹¹

This result is illustrated by the closed marginal stability curve in Fig. 2(a), where two destabilization frequencies (Ω_L and Ω_U) exist at the primary threshold I_{1m} in the monostable regime [Fig. 2(b)]. The finite extent of the MI domain is also evidenced by the lower and upper values of cavity power, $|\psi_{1m}|^2 = I_{1m} = 1$ and $|\psi_{2m}|^2 = I_{2m} = (2\Delta_{eff} + \sqrt{\Delta_{eff}^2 - 3})/3$. The lower value fixes the minimum input power required for the MI process to occur, while the upper one can be tuned as a function of the physical parameter $\Delta_{eff} = \beta_2^2/(4B_4) + \Delta$. The critical value of the frequency at the upper bifurcation point I_{2m} is given by $\Omega_c^2 = -\beta_2/2B_4$, and we note that it satisfies the averaging relation $\Omega_c^2 = \Omega_L^2 + \Omega_U^2$. This result strongly contrasts with the usual cavity MI where the instability domain is not bounded as shown in Fig. 2(a) by the gray curves. So the two main results of this stability analysis are that (i) two instabilities at frequencies Ω_U and Ω_L occur simultaneously at the primary threshold (I_{1m}) and (ii) it is possible to restabilize or recover the stationary state by driving the system to the large intensity regime ($I > I_{2m}$).

In view of the above analysis, an important question arises: how do the first two frequencies Ω_L and Ω_U evolve and connect to Ω_c upon increasing the input intensity $P = |S|^2$? The linear stability analysis can give us some insight on this point through the evolution of the most unstable frequencies of the SS,

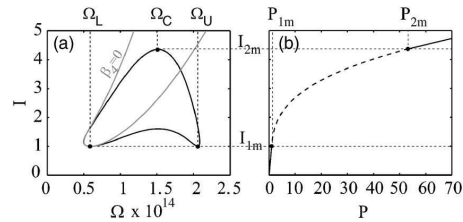


Fig. 2. (a) Marginal stability curve for the steady state solution versus MI. Black curve, $\beta_4 \neq 0$; gray curve, $\beta_4 = 0$. (b) Evolution of the cavity intensity stationary state $I = |\psi_S|^2$ versus the input intensity $P = |S|^2$ (the dashed curve corresponds to the unstable case). $\gamma = 10 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1}$, $\Phi_0 = 1.98\pi$, $T = 0.35$, $L = 10 \text{ m}$, $\beta_2 = -3 \times 10^{-28} \text{ s}^2/\text{m}$, $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = 6.4 \times 10^{-54} \text{ s}^4/\text{m}$.

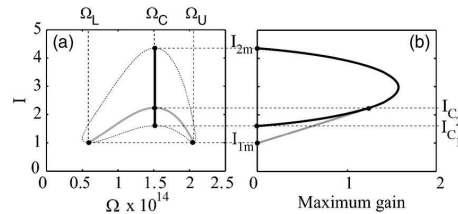


Fig. 3. Evolution of the maximum temporal gains (solid black and gray lines) versus (a) the frequency Ω and (b) the output intensity I .

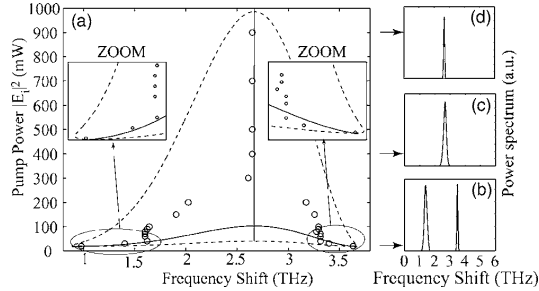


Fig. 4. (a) Evolution of the frequency of instability versus the pump power with the same parameters as in Fig. 2, except for $\beta_3=2 \times 10^{-42} \text{ s}^3/\text{m}$. Circles, numerical simulations; solid curves, analytical results. (b), (c), and (d) power spectra for 30, 400, and 900 mW of pump power, respectively.

as shown in Fig. 3. At $I \geq 1$ the SS undergoes a bifurcation leading to small-amplitude modulations at frequencies Ω_L and Ω_U . The two corresponding bands of unstable frequencies widen with growing I until it reaches the value I_{c1} at $\Omega = \Omega_c$ [Fig. 3(a)]. This signals the merging of the two bands into a single larger one. This new band of unstable frequencies is now characterized by the existence of three frequencies with positive gain, as can be seen from Fig. 4(b). When we further increase I , the two most unstable lateral frequencies merge into the critical one Ω_c at $I = I_{c2}$. This point indicates an outstanding feature leading to an exchange of the maximum gain between Ω_L (Ω_U) and Ω_c [Fig. 3(b)]. Finally, one then can expect from Fig. 3 that above this power value ($I > I_{c2}$) the dynamics is dominated by the frequency Ω_c until the upper limit of the instability domain is reached ($I = I_{2m}$).

These results should be experimentally observable using a fiber whose dispersion curve is low and as flat as possible at the working wavelength ($\beta_3 \approx 0$). We numerically checked our predictions by integrating the extended NLSE with bounded conditions by using the split-step Fourier method with an input continuous wave. We included realistic third- and fourth-order dispersion term values in our simulations (see the caption of Fig. 2). Indeed, we did not take exactly $\beta_3=0$ but a very low value [$D_S = 0.001 \text{ ps}/\text{nm}^2/\text{km}$, i.e., $\beta_3 = 2 \times 10^{-42} \text{ s}^3/\text{m}$ (Ref. 13)] to match with a realistic configuration. We have checked in all our simulations that the final state was reached (≈ 400 round trips). We show in Fig. 4(a) that two frequencies (0.98 and 3.63 THz) are destabilized (circles) just above the first pump threshold (20 mW) [Fig. 4(b)], in excellent agreement with the analytical results (1.1 and 3.6 THz). Upon increasing the pump power, the frequencies merge, leading to a single frequency of instability around 300 mW [Fig. 4(c)]. This unique frequency then disappears just above the second pump threshold, corresponding to a recovery of the stationary state of the cavity. Thus,

the two main predictions of our analytical study are numerically verified. This linear stability analysis provides an excellent insight into the frequency evolution scenario within the instability domain, except for $50 \text{ mW} < I < 300 \text{ mW}$ [Fig. 4(a)]. In this last region only a nonlinear analysis as in Refs. 14 and 15 will figure out the dynamic evolution of the system. This work is in progress.

To summarize, we presented an analytical and numerical study of a coherently driven photonic crystal fiber resonator. We showed that it is necessary to take into account dispersion up to the fourth order to capture the full temporal dynamics of the system. Namely, there exist two frequencies at the primary MI threshold, and their domain of existence is finite or bounded such that the stationary state is recovered for pumping of high enough intensity. In addition, numerical simulations carried out for realistic experimental parameters provide the evolution of these instabilities with the input field. They confirm our analytical results and constitute a step towards a future experimental demonstration.

M. Tlidi (mtlidi@ulb.ac.be) and G. Kozyreff received support from the Fonds National de la Recherche Scientifique (Belgium). This work was also partially supported by the Interuniversity Attraction Pole program of the Belgian government. The IRCICA and CERLA are supported in part by the "Conseil Régional Nord Pas de Calais" and the "Fonds Européen de Développement Economique des Régions."

References

1. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
2. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic, 1995).
3. K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 135 (1986).
4. A. M. Turing, *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. B* **237**, 37 (1952).
5. J. E. Rothenberg, *Phys. Rev. A* **42**, 682 (1990).
6. P. Kockaert, M. Haelterman, S. Pitois, and G. Millot, *Appl. Phys. Lett.* **75**, 2873 (1999).
7. G. Millot, S. Pitois, P. Tchofo Dinda, and M. Haelterman, *Opt. Lett.* **22**, 1686 (1997).
8. S. B. Cavalcanti, J. C. Cressoni, H. R. da Cruz, and A. S. Gouveira-Neto, *Phys. Rev. A* **43**, 6162 (1991).
9. S. Pitois and G. Millot, *Opt. Commun.* **226**, 415 (2003).
10. J. D. Harvey, R. Leonhardt, S. Coen, G. Wong, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, and P. St. J. Russell, *Opt. Lett.* **28**, 2225 (2003).
11. S. Coen and M. Haelterman, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4139 (1997).
12. L. A. Lugiato and R. Lefever, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2209 (1987).
13. K. Hansen, *Opt. Express* **11**, 1503 (2003).
14. G. Kozyreff, S. J. Chapman, and M. Tlidi, *Phys. Rev. E* **68**, 015201(R) (2003).
15. G. Kozyreff and M. Tlidi, *Phys. Rev. E* **69**, 066202 (2004).

A.4 Structures localisées à N pics dans l’enveloppe du battement temporel généré par deux fréquences d’instabilité modulationnelle

Une des conséquences directes de l’existence d’une seconde fréquence d’instabilité modulationnelle au premier seuil de déstabilisation (Sec. 3.4), est l’obtention d’un phénomène de battement. Si ces deux fréquences sont assez éloignées l’une de l’autre alors un simple battement temporel est observé. Par contre, si les deux fréquences sont proches, des effets non-linéaires sont attendus qui peuvent affecter aussi bien les valeurs des fréquences que l’enveloppe du battement [298]. L’étude analytique et numérique présentée ici correspond au cas où les deux fréquences d’instabilité modulationnelle émises dans une cavité fibrée sont très proches l’une de l’autre [299]. L’effet alors observé est l’apparition de structures localisées à N pics dans l’enveloppe du battement (Fig. 1 dans l’article joint ci-après [299]). Ainsi, l’enveloppe est localement modulée, au lieu d’être constante au cours du temps comme c’est le cas dans le simple battement linéaire entre deux fréquences.

L’étude analytique faiblement non-linéaire menée à partir de l’Eq. (1) de [299] conduit à l’équation d’amplitude de Swift-Hohenberg pour l’enveloppe du battement [Eq. (8) de [299]]. Cette équation est bien connue pour admettre des solutions localisées [66, 74, 300] qui sont reliées aux structures localisées en optique [301, 107]. Celles-ci sont composées de structures à N pics qui suivent un diagramme de bifurcation de type “*homoclinic snaking*”³¹ [73]. Le diagramme de bifurcation des structures localisées obtenu à partir de l’Eq. (8) montre que notre système présente cette instabilité [Fig. 3 de [299]]. Ainsi, les battements localisés observés dans le résonateur fibré sont une manifestation de ce type d’instabilité. La nature homocline de cette instabilité explique le fait que le nombre N de pics de ces structures est complètement déterminé par les conditions initiales. En effet, le nombre de pics observés dans les simulations numériques (N = 4 dans le cas de la Fig. 1 de l’article ci-joint) dépend complètement des conditions initiales.

Ce comportement de localisation est robuste puisqu’il est retrouvé même dans le cas où une seule fréquence d’IM est déstabilisée au premier seuil (cas où la concavité de la courbe de dispersion de la fibre au voisinage de λ_0 est tournée vers les valeurs positives, i.e. $\beta_4 < 0$). Dans ce cas, ce sont deux fréquences qui se déstabilisent à l’intérieur de la courbe de stabilité marginale et qui présentent à nouveau des localisations de leur battement. Ce comportement est observé dans les simulations au delà des limites de validité du développement multi-échelles où les résultats analytiques précédents s’appliquent.

En résumé, les systèmes non-linéaires dont l’analyse de stabilité linéaire présente les caractéristiques de la Fig. 2 de l’article ci-joint peuvent présenter de la localisation dans le battement de leurs fréquences d’instabilité. Cette localisation provient de l’instabilité de type “*homoclinic snaking*” qui est caractéristique de l’équation d’amplitude de Swift-Hohenberg régissant l’évolution de l’enveloppe du battement.

31. Voir note de bas de page 25 dans le premier chapitre.

Localized Beating between Dynamically Generated Frequencies

G. Kozyreff,¹ M. Tlidi,¹ A. Mussot,² E. Louvergneaux,² M. Taki,² and A. G. Vladimirov³

¹*Optique Nonlinéaire Théorique, Université libre de Bruxelles (U.L.B.), C.P. 231, Campus Plaine, B-1050 Bruxelles, Belgium*

²*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, CNRS UMR 8523, Centre d'Etudes et de Recherche Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France*

³*Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Mohrenstrasse 39, D-10117 Berlin, Germany*

(Received 16 May 2008; published 29 January 2009)

We analyze the beating between intrinsic frequencies that are simultaneously generated by a modulation (Turing) instability in a nonlinear extended system. The model studied is that of a coherently driven photonic crystal fiber cavity. Beating in the form of a slow modulation of fast intensity oscillations is found to be stable for a wide range of parameters. We find that such beating can also be localized and contain only a finite number of slow modulations. These structures consist of dips in the amplitude of the fast intensity oscillations, which can either be isolated or regularly spaced. An asymptotic analysis close to the modulation instability threshold allows us to explain this phenomenon as a manifestation of homoclinic snaking for dissipative localized structures.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.043905

PACS numbers: 42.65.Sf, 42.60.Da, 47.54.-r, 82.40.Bj

One of the most basic and useful experiments in physics is to superimpose two sinusoidal signals with similar frequencies and produce beating—modulation of the mean frequency by an envelope at the difference frequency. An everyday example of this is the moiré pattern produced by folding a sheer window curtain onto itself. This slow modulation can be particularly useful for metrology purposes: in the space domain, moiré allows one to monitor micromechanical deformations [1] while temporal beating can be used to completely characterize ultrashort optical pulses [2]. Usually, the two signals at the origin of beating are generated externally. In this Letter, however, we study numerically and analytically the situation where these emerge spontaneously out of a modulation instability (MI) with threshold. This instability is commonly referred to as Turing instability in chemistry and in biology. The physical setting we have in mind for this study is that of an optical cavity containing a photonic crystal fiber (PCF). In this system, it was shown that two distinct frequencies are generated at the instability threshold [3]. Such a situation is not uncommon in nonlinear optics. Other examples are the double-pass optical loop studied in [4,5], the broad area two-photon resonant Kerr cavity [6], and broad area cavities with nonlocal interactions [7]. Another two-dimensional example is the model proposed in [8] for Faraday waves. In the last three examples, beating is spatial rather than temporal and could therefore involve more than one dimension. We find that, while fast oscillations at the mean frequency do emerge past the MI threshold, the accompanying sets in only *locally*; see Fig. 1. In other words, the beating is localized. This phenomenon is robust, stable, and results from the nonlinear saturation that follows the onset of MI. In addition, the number of slow modulations (four in the example of Fig. 1) depends on the initial conditions, which

indicates very rich dynamics. We explain this finding through an asymptotic analysis near the MI threshold.

Inside a PCF cavity, the envelope of the electromagnetic field is governed by [3]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t'} = S - (1 + i\Delta)\psi + i|\psi|^2\psi - iB_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau'^2} + iB_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \tau'^4}. \quad (1)$$

In this equation, the t' dependence corresponds to the slow, average evolution of ψ from one cavity round trip to the next, while τ' corresponds to its fast variations; the parameter S is real and proportional to the injected field, Δ is the cavity detuning, and B_2 and B_4 account for second and fourth order chromatic dispersion, respectively. Finally, $i|\psi|^2\psi$ is the Kerr nonlinearity. The last term in (1) is usually omitted in fiber cavity models [9], but the disper-

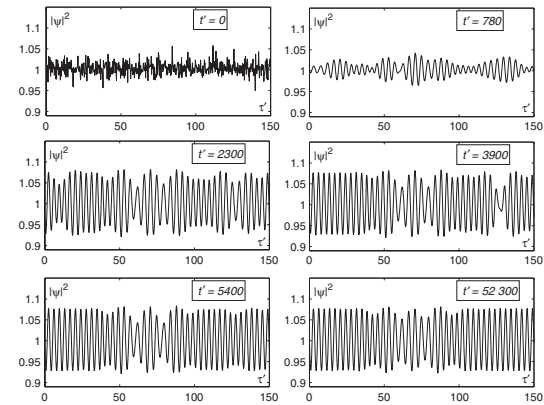


FIG. 1. Snapshots of the numerical integration of (1) for various values of t' with $S = 1.02185$, $\Delta = 0.8$, $B_2 = -1$, $B_4 = 0.2$.

sion characteristics of PCF may invalidate this approximation [10,11], even if B_4 is small. On the other hand, we focus on the situation where third-order dispersion is negligible: this somewhat simplifies the complicated dynamics we are about to describe. Moreover, this can be realized without difficulty with PCF.

We start by assuming that dispersion is anomalous. Thus, the coefficient B_2 is negative and it can be scaled down to -1 by an appropriate choice of unit for τ' . In that case, given the conventional PCF dispersion coefficients $\beta_{2,4}$, group velocity v , and the cavity power loss rate α , one has

$$B_2 = -1, \quad B_4 = \alpha\beta_4/(12\beta_2^2v), \quad (2)$$

and we will assume in addition that $B_4 > 0$.

At the MI threshold, the constant solution becomes unstable with respect to perturbations of the form $\exp(i\Omega_U\tau')$ and $\exp(i\Omega_L\tau')$. The two dynamical frequencies are given by

$$\Omega_{L,U}^2 = \frac{1}{2B_4} \pm \frac{\sqrt{1 + 4(\Delta - 2)B_4}}{2B_4}. \quad (3)$$

This formula, incidentally, shows how important B_4 can be despite its smallness.

As a first step to analyze the dynamics, we perform the linear stability analysis of the homogeneous steady state solution of (1). The steady state is given by $\psi = \sqrt{I}\exp(i\phi)$, where

$$S = \sqrt{1 + (\Delta - I)^2}\sqrt{I}, \quad \tan\phi = I - \Delta, \quad (4)$$

and can thus be parametrized by the intracavity intensity I . The MI threshold is located at $I_{\text{MI}} = 1$. Anticipating a weakly nonlinear analysis near this threshold, and focusing on the ‘‘beating limit’’ $\Omega_U \approx \Omega_L$, we introduce a small parameter ϵ and set

$$I = 1 + 2\epsilon^2\lambda, \quad \Delta = 2 - 1/(4B_4) + 2\epsilon. \quad (5)$$

The result of the linear stability analysis in that limit is depicted in Fig. 2. In particular, we note that by scaling Δ as above, we get $\Omega_{U,L} \sim \Omega_C \pm \sqrt{\epsilon}$, i.e., a mean frequency $\Omega_C = 1/\sqrt{2B_4}$ and a beat note $2\sqrt{\epsilon}$. The other scalings are standard: the growth rate of unstable perturbations is $O(\epsilon^2)$ and frequency bands of $O(\epsilon)$ width become unstable around Ω_U and Ω_L . These observations suggest to seek a multiple-scale solution of the form

$$\psi \sim e^{i\phi} \left(\sqrt{I} + \sum_n \epsilon^n f_n(t, s, \tau) \right), \quad (6)$$

where

$$t = 2\epsilon^2\tau', \quad s = \Omega_C\tau', \quad \tau = \sqrt{\epsilon}\tau'.$$

In addition, ϕ should be expanded as $\phi_0 + \epsilon\phi_1 + \dots$ in order to satisfy (4), given (5).

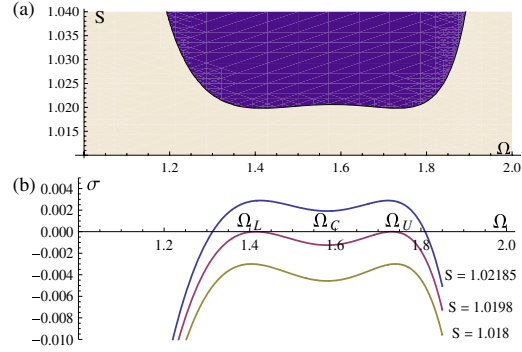


FIG. 2 (color online). Linear stability analysis of the solution (4) for the parameters of Fig. 1. (a) Instability domain in the Ω - S plane. (b) Growth rate σ of perturbations as a function of frequency near MI threshold.

Substituting the asymptotic expansion (6) into (1), we obtain, at $O(\epsilon)$, the linear problem

$$\mathcal{L}f_1 \equiv \left(1 + \frac{\partial}{\partial s^2}\right)^2 f_1 + 4B_4(if_1 + \bar{f}_1) = 0,$$

where the overbar is used to denote complex conjugate. The above equation possesses the nontrivial solution

$$f_1 = \sqrt{i}u(t, \tau)\cos(s), \quad (7)$$

where u is real and to be determined at subsequent orders of the analysis. Note that for any complex function $w(t, \tau)$, one has $\mathcal{L}[w\cos(s)] - i\mathcal{L}[w\cos(s)] = 0$. Hence the solvability condition for the equation $\mathcal{L}f = g\cos(s)$ is that $g - i\bar{g}$ vanish. This condition is automatically satisfied for the problem obtained at $O(\epsilon^2)$, and we find at this order that

$$f_2 = 2B_4[(-2 - i) + 4(1 + i)B_4]u^2 + \frac{2B_4}{81}[(-18 - 9i) + 4(1 + i)B_4]u^2\cos(2s) + \sqrt{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + u\right)\cos(s).$$

Finally, evaluating the solvability condition at $O(\epsilon^3)$, we obtain

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda u - \kappa u^3 - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)^2 u, \quad (8)$$

where $\kappa = 2B_4(171 - 326B_4)/81$.

We have thus shown that the envelope u satisfies the well-known Swift-Hohenberg equation. The derivation of (8) is a considerable progress with respect to (1), as it has already been the subject of numerous studies in the frame of pattern formation. On the other hand, to obtain (8) near the MI threshold is also somewhat surprising because one usually expects a Ginzburg-Landau equation in that limit.

Actually, if Ω_U and Ω_L are well apart, the resulting asymptotic description is a pair of coupled Ginzburg-Landau equations, each governing the amplitude of oscillations at one of the two frequencies. Let us remark that (8) is valid only if its cubic term is saturating, i.e., if $B_4 < B_4^* = 171/326$.

Equation (8) shows that two frequencies become unstable at $\lambda = 0$, in agreement with the MI behavior of (1). An homogeneous solution, corresponding to oscillation at Ω_C , exists for $\lambda = 1$ and is stable for $\lambda > 1.5$. On the other hand, (8) admits localized solutions [12–14], which have been linked to localized structures in optics [15,16], solid mechanics [17,18], and fluid dynamics [19–21]. The bifurcation diagram associated to these solutions generally assumes an infinite series of folds whereby the localized state acquires or loses a pair of peaks, as shown in Fig. 3. A convenient measure of these solutions is the “energy” N of their oscillations. One way to define it is

$$N = \sqrt{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} |u - u_{\infty}| d\tau,$$

where u_{∞} is the homogeneous (Ω_C) solution. With such a norm, the folds of the bifurcation diagram generally assemble into two interweaved snaking curves. The phenomenon giving rise to localized solutions is thus often referred to as homoclinic snaking. In most cases, the two aforementioned snaking curves delimit a finite range of parameters where localized states exist—the “pinning range.” In the special case of Eq. (8), however, the snakes extend to infinity [22], and so does the existence domain of localized states. Looking back at expression (7), we see that localized solutions of (8) actually describe localized beating solutions in the original model (1), as illustrated schematically in Fig. 4. Consequently, localized beating can be understood as an indirect manifestation of homoclinic snaking. The localized beating is between the fre-

quencies Ω_L and Ω_U and happens over a background oscillating at the central frequency Ω_C .

It should be emphasized that (8) is only valid for $\epsilon \ll 1$. Hence, given that $I = 1 + \epsilon^2 \lambda$, the range of existence of localized beating solutions is not necessarily large in the full model, even though it is infinite in the Swift-Hohenberg limit. Nevertheless, we found that key features of homoclinic snaking, such as the multiplicity of localized beating solutions, are preserved in the original model. Moreover, in Fig. 3, we see that the minimum value of λ to observe localized beating is given by $\lambda_{LB} \approx 1.8$. Substituting these values into (5), we obtain a nonlinear threshold for localized beating: $I_{LB} \approx 1 + 0.9[\Delta - 2 + 1/(4B_4)]^2$. This is a finite distance above the MI threshold. For the parameters of Fig. 1, for instance, we obtain $I_{LB} = 1.00225$, and the corresponding value of the injection parameter is $S_{LB} = 1.02139$. This is in very good agreement with our numerical simulations of (1). In addition, the beating period of 20 in Fig. 1 corresponds to the theoretical beat note equal to 0.32. For these simulations, we used the implicit Euler method with discretization steps $\delta t' = 0.78$ and $\delta \tau' = 0.25$ in the t' and τ' variables, respectively, together with periodic boundary conditions in τ' .

If, instead of the above analysis, we assume that chromatic dispersion is normal, $B_2 = +1$, then MI can still occur but this time with $B_4 < 0$. In that case, only one frequency is found to be destabilized at the MI threshold, making Fig. 2 and hence (8) inappropriate to discuss the dynamics. Nevertheless, we still find localized beating, as shown in Fig. 5. The multiplicity of solutions is strongly reminiscent of homoclinic snaking, although the period of the slow modulation now suggests the dominance of two modes within a single, narrow band of unstable frequencies. This shows that localized beating is a very robust phenomenon and that it exists well outside the asymptotics limits where our analytical results strictly hold.

We now discuss some possible experimental parameter values relevant to the present investigation. The general experimental setup is similar to that of previous experimental investigations of MI in fiber cavities, such as [23,24]. Let us assume a PCF with dispersion coefficients $\beta_2 = -1.45 \times 10^{-29} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ and $\beta_4 = 1.15 \times 10^{-55} \text{ s}^4 \text{ m}^{-1}$. At each cavity round trip, a fraction of the electromagnetic power is lost through an output coupler with an amplitude transmission coefficient T . Given the cavity length L , the

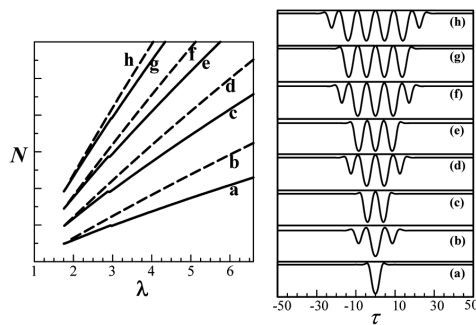


FIG. 3. Left: Bifurcation diagram for the localized structures of (8). Solid lines indicate stable solutions, broken lines indicate unstable solutions. The bifurcation curves extend to arbitrary large and positive values of λ . Right: Representative solutions of the various branches on the left.

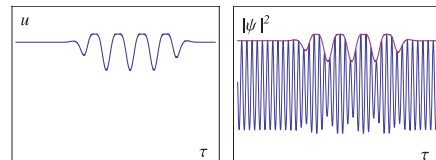


FIG. 4 (color online). Schematic example of a localized solution of the amplitude Eq. (8) and the corresponding localized beating solution of (1), as constructed from (7).

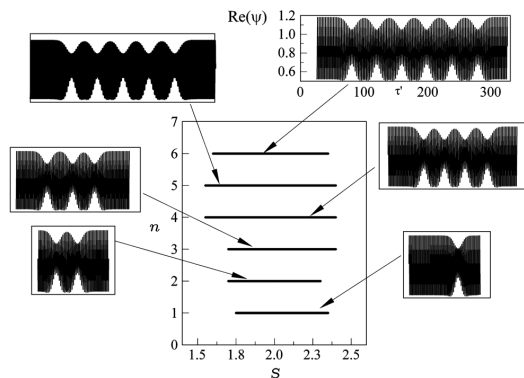


FIG. 5. Numerically determined range of existence of localized beating solutions as a function of S , where n denotes the number of modulations. $\Delta = 1.5$, $B_2 = 1$, $B_4 = -0.25$.

power loss per unit time is therefore $\alpha = T^2 v/L$, and we thus have $\alpha/v = T^2/L$ in (2). With the above PCF characteristics and the typical value $T = 0.35$, a cavity length $L = 27.9$ m yields $B_4 = 0.2$. Interestingly, the critical value $B_4 = B_4^*$ could be reached by reducing the cavity length to $L = 10.64$ m. In this regard, we note that as B_4 approaches and surpasses B_4^* , Eq. (8) should generally be completed by a quintic nonlinearity. This, in turn, is known to result in a finite pinning range [25].

In conclusion, we have revisited the concept of beating for nonlinear extended systems where the source of oscillation is a modulation instability. Through the nonlinearity, the beating can self-organize and become localized in time. By means of a multiple-scale reduction near the instability threshold, we have been able to link this phenomenon with the homoclinic snaking that takes place in the Swift-Hohenberg equation. Moreover, since our analysis is local, this reduction should in principle hold for any system whose linear stability is as depicted in Fig. 2. Such systems have not been particularly sought after in the past, but the present study certainly prompts one to investigate under which physical, chemical, or biological circumstances a modulation instability with two frequencies can arise.

G. K. and M. T. acknowledge financial support from the Fonds National de la Recherche Scientifique (F.R.S.-FNRS, Belgium). A. G. V. acknowledges financial support by the SFB 787 of the DFG. This work was also partially supported by the Interuniversity Attraction Pole program of the Belgian government. The Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications is supported by the

Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord-Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions. We thank S. Méstens for bibliographical informations as well as the anonymous referees whose comments significantly improved the manuscript.

-
- [1] *Handbook of Moiré Measurement*, edited by C. A. Walker (Institute of Physics, Bristol, 2003).
 - [2] P. Kockaert *et al.*, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **10**, 206 (2004).
 - [3] M. Tlidi *et al.*, Opt. Lett. **32**, 662 (2007).
 - [4] P. Kockaert *et al.*, Opt. Lett. **31**, 495 (2006).
 - [5] G. Kozyreff *et al.*, Phys. Rev. A **73**, 063815 (2006).
 - [6] M. Hoyuelos *et al.*, Phys. Rev. E **65**, 046620 (2002).
 - [7] L. Gelens *et al.*, Phys. Rev. A **75**, 063812 (2007).
 - [8] R. Lifshitz and D.M. Petrich, Phys. Rev. Lett. **79**, 1261 (1997).
 - [9] L. A. Lugiato and R. Lefever, Phys. Rev. Lett. **58**, 2209 (1987).
 - [10] F. Biancalana, D. V. Skryabin, and P.S.J. Russell, Phys. Rev. E **68**, 046603 (2003).
 - [11] F. Biancalana and D. V. Skryabin, J. Opt. A Pure Appl. Opt. **6**, 301 (2004).
 - [12] M. Tlidi, P. Mandel, and R. Lefever, Phys. Rev. Lett. **73**, 640 (1994).
 - [13] G. W. Hunt, G. J. Lord, and A. R. Champneys, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **170**, 239 (1999).
 - [14] G. Kozyreff and S. J. Chapman, Phys. Rev. Lett. **97**, 044502 (2006).
 - [15] V. B. Taranenko, I. Ganne, R. J. Kuszelewicz, and C. O. Weiss, Phys. Rev. A **61**, 063818 (2000).
 - [16] S. Barland *et al.*, Nature (London) **419**, 699 (2002).
 - [17] G. W. Hunt, M. A. Peletier, A. R. Champneys, P. D. Woods, M. A. Wadee, C. J. Budd, and G. J. Lord, Nonlinear Dynamics **21**, 3 (2000).
 - [18] M. K. Wadee, C. D. Coman, and A. P. Bassom, Physica (Amsterdam) **163D**, 26 (2002).
 - [19] H. Sakaguchi and H. Brand, Physica (Amsterdam) **97D**, 274 (1996).
 - [20] O. Batiste, E. Knobloch, A. Alonso, and I. Mercader, J. Fluid Mech. **560**, 149 (2006).
 - [21] A. Bergeon and E. Knobloch, Phys. Fluids **20**, 034102 (2008).
 - [22] J. Burke and E. Knobloch, Phys. Rev. E **73**, 056211 (2006).
 - [23] S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **79**, 4139 (1997).
 - [24] M. Stratmann, T. Pagel, and F. Mitschke, Phys. Rev. Lett. **95**, 143902 (2005).
 - [25] J. Burke and E. Knobloch, Phys. Lett. A **360**, 681 (2007).

Bibliographie

- [1] E. Schrödinger, *Physique quantique et représentation du monde*, Points - Sciences (Seuils, 2001). 4
- [2] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium Systems : From Dissipative Structures to Order through Fluctuations* (John Wiley and Sons, New York, 1977). 10, 16
- [3] P. Manneville, *Structures dissipatives chaos et turbulence* (Aléa, Saclay, 1990). 10
- [4] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993). 10, 11, 18, 29, 97
- [5] J. P. Gollub and J. S. Langer, *Pattern formation in nonequilibrium physics*, Rev. Mod. Phys. **71**, S396 (1999). 10
- [6] F. Arrechi, *Optical morphogenesis : pattern formation and competition in nonlinear optics*, Physica D **86**, 297 (1995). 10
- [7] L. Landau and E. Lifshitz, *Statistical Physics* (1969), chap. XIV. 10
- [8] D. W. Thompson, *On Growth and Form* (Dover Publications Inc., 1917 revised 1992). 10
- [9] A. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. R. Soc. London **237**, 37 (1952). 11
- [10] H. G. Purwins, C. Radehaus, T. Dirksmeyer, R. Dohmen, R. Schmeling, and H. Willebrand, *Application of the activator inhibitor principle to physical systems*, Phys. Lett. A **136**, 480 (1989). 11
- [11] L. Rayleigh, *On the dynamics of revolving fluids*, Proc. R. Soc. London Ser **93**, 148 (1916). 11
- [12] H. Bénard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportent de la chaleur par convection en régime permanent*, Ann. Chim. Phys. **7**, 62 (1900). 11
- [13] M. Faraday, *On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **52**, 319 (1831). 11

- [14] T. B. Benjamin and F. Ursell, *The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion*, Proc. Roy. Soc. London A **225**, 505 (1954). 11
- [15] J. Murray, *Mathematical biology* (Springer Verlag, New York, 1989). 11
- [16] D. Fein, P. Ortuvela, W. Scalf, S. Schmidt, and M. Wolff, *spontaneous pattern formation in precipitates systems*, J. Chem Phys. **69** (1978). 11
- [17] E. Dubois-Violette, G. Durand, E. Guyon, P. Manneville, and P. Pieranski, *Liquid Crystals* (Solid State Phys. Suppl., 1978), vol. 14, chap. Instabilities in nematic liquid crystals, p. 147. 11
- [18] S. Akhmanov, M. Vorontsov, and V. Y. Ivanov, *Large-scale transverse nonlinear interactions in laser beams ; new types of nonlinear waves ; onset of optical turbulence*, JETP Lett. **47**, 707 (1988). 11, 23, 57
- [19] W. Firth, *Spatial instabilities in Kerr medium with single feedback mirror*, J. Mod. Opt. **37**, 151 (1990). 11, 14, 21, 23, 24, 38
- [20] R. Macdonald and H. Eicher, *Spontaneous optical pattern formation in a nematic liquid crystal with feedback mirror*, Opt. Comm. **89**, 289 (1992). 11, 21
- [21] D. Dangoisse, D. Hennequin, C. Lepers, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Two-dimensional optical lattices in a CO₂ laser*, Phys. Rev. A **46**, 5955 (1992). 11, 12, 16, 17
- [22] F. Arrechi, S. Boccaletti, and P. Ramazza, *Pattern formation and competition in nonlinear optics*, Physics Reports **318**, 1 (1999). 11
- [23] A. Newell and J. Whitehead, *Finite bandwidth, finite amplitude convection*, J. Fluid. Mech. **38**, 279 (1969). 11
- [24] M. Cross and P. Hohenberg, *Pattern formation outside equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993). 11
- [25] Y. Pomeau and P. Manneville, *Stability and fluctuations of a spatially periodic convective flow*, J. Phys. Lett. **40**, L (1979). 11
- [26] F. T. Arecchi, S. Boccaletti, P. L. Ramazza, and S. Residori, *Transition from boundary to bulk-controlled regimes in optical pattern formation*, Phys. Rev. Lett. **70**, 2277 (1993). 12, 17
- [27] A. F. Suchkov, *Effect of inhomogeneities on operation regime of solid-state lasers*, Sov. Phys. JETP **22**, 1026 (1966). 12, 15
- [28] G. Grynberg, E. L. Bihan, P. Verkerk, P. Simoneau, J. Leite, D. Bloch, S. L. Boiteux, and M. Ducloy, *Observation of instabilities due to mirrorless four-wave mixing oscillation in sodium*, Opt. Commun. **67**, 363 (1988). 12, 13, 15

- [29] M. Ouarzazi, P. Bois, and M. Taki, *Global-stability analysis of transverse modes in laser systems under inhomogeneous pumping*, Phys. Rev. A **53**, 4408 (1996). 12, 17
- [30] M. Hercher, *Laser-induced damage in transparent media*, J. Opt. Soc. Am. **54**, 563 (1964). 13
- [31] Y. R. Shen, *Self-focusing : Theory*, Prog. Quant. Elec. **4**, 2 (1975). 13
- [32] M. Vorontsov and W. Miller, *Self-organization in optical systems and applications in information technology* (Springer, Berlin, 1995). 13
- [33] C. Weiss, in *Esprit project 28235 PIANOS* (Cordis, 1998). 13
- [34] T. Ackemann, *Spontaneous formation of spatial structures in dissipative nonlinear optical systems with external feedback and time-independant driving*, Ph.D. thesis, Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (2002). 14
- [35] I. C. Khoo, J. Y. Hou, T. H. Liu, P. Y. Yan, R. R. Michael, and G. M. Finn, *Transverse self-phase modulation and bistability in the transmission of a laser beam through a nonlinear thin film*, J. Opt. Soc. Am. B **4**, 886 (1987). 13
- [36] H. Kogelnik and W. W. Rigrod, *Visual display of isolated optical-resonator modes*, Proc. IRE (Correspondence) **50**, 220 (1962). 14
- [37] H. Kogelnik and T. Li, *Laser Beams and Resonators*, Appl. Opt. **5**, 1550 (1966). 14
- [38] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Mill Valley, California, 1986). 14
- [39] F. Arecchi, G. Giacomelli, P. Ramazza, and S. Residori, *Experimental evidence of chaotic itinerancy and spatiotemporal chaos in optics*, Phys. Rev. Lett. **65**, 2531 (1990). 15, 17
- [40] L. Lugiato, *Transverse nonlinear optics : Introduction and review*, Chaos, Solitons and Fractals **4**, 1251 (1994), special Issue : Nonlinear Optical Structures, Patterns, Chaos. 15
- [41] W. W. Rigrod, *Isolation of axi-symmetrical optical-resonator modes*, Appl. Phys. Lett. **2**, 51 (1963). 15
- [42] J. P. Goldsborough, *Beat Frequencies Between Modes of a Concave-Mirror Optical Resonator*, Appl. Opt. **3**, 267 (1964). 15
- [43] I. Belousova, G. Vinokurov, O. Danilov, and N. Rozanov, *Mode interaction in a gas laser with spherical mirror resonator*, Sov. Phys. JETP **2**, 761 (1967). 15
- [44] S. Akhmanov, M. Vorontsov, and V. Y. Ivanov, *Large-scale transverse nonlinear interactions in laser beams ; new types of nonlinear waves ; onset of optical turbulence*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 611 (1988). 15

- [45] G. Giusfredi, F. Valley, R. Pon, G. Khitrova, and H. Gibbs, *Optical instabilities in sodium vapor*, J. Opt. Soc. Am. B **5**, 1181 (1988). 15, 22
- [46] M. Brambilla, F. Battipede, L. A. Lugiato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm, and C. O. Weiss, *Transverse laser patterns. I. Phase singularity crystals*, Phys. Rev. A **43**, 5090 (1991). 16, 17
- [47] J. R. Tredicce, E. J. Quel, A. M. Ghazzawi, C. Green, M. A. Pernigo, L. M. Narducci, and L. A. Lugiato, *Spatial and temporal instabilities in a CO₂ laser*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1274 (1989). 16
- [48] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza, and S. Residori, *Vortices and defect statistics in two-dimensional optical chaos*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3749 (1991). 16
- [49] M. Kreuzer, W. Balzer, and T. Tschudi, *Formation of spatial structures in bistable optical elements containing nematic liquid crystals*, Appl. Opt. **29**, 579 (1990). 16
- [50] J. Moloney and H. Gibbs, *Role of the diffractive coupling and self-focusing or defocusing in the dynamical switching of a bistable optical cavity*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1607 (1982). 16
- [51] N. N. Rozanov, V. E. Semenov, and G. V. Khodorova, *Transverse structure of a field in nonlinear bistable interferometers. I. Switching waves and steady-state profiles*, Sov. J. Quant. Electron. **12**, 193 (1982). 16
- [52] D. W. M. Laughlin, J. V. Moloney, and A. C. Newell, *Solitary Waves as Fixed Points of Infinite-Dimensional Maps in an Optical Bistable Ring Cavity*, Phys. Rev. Lett. **51**, 75 (1983). 16
- [53] D. W. McLaughlin, J. V. Moloney, and A. C. Newell, *New Class of Instabilities in Passive Optical Cavities*, Phys. Rev. Lett. **54**, 681 (1985). 16
- [54] L. A. Lugiato and R. Lefever, *Spatial Dissipative Structures in Passive Optical Systems*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2209 (1987). 16, 27
- [55] L. Lugiato and C. Oldano, *Stationary spatial pattern in passive optical systems : two-level atoms*, Phys. Rev. A **37**, 3896 (1988). 16
- [56] N. N. Rozanov and G. V. Khodova, *Autosolitons in bistable interferometers*, Opt. Spektrosk. **65**, 1375 (1988). 16
- [57] N. N. Rosanov and G. V. Khodova, *Diffractive Autosolitons in bistable interferometers*, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1057 (1990). 16
- [58] A. A. Zabolotskii, *Soliton transverse structure and optical bistability*, Phys. Lett. A **120**, 385 (1987). 16

- [59] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Interaction of "Solitons" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*, Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965). 16
- [60] J. S. Russell, *Report on waves*, Rep. Br. Assoc. Adv. Sci. pp. 311–390 (1844). 16
- [61] *John scott russel and the solitary wave*, http://en.wikipedia.org/wiki/Wave_of_translation. 16
- [62] I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped - not so the mass of water in the channel which it had put in motion ; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles (14 km) an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles (3 km) I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation. 16
- [63] M. Tamburini, M. Bonavita, S. Wabnitz, and E. Santamato, *Hexagonally patterned beam filamentation in a thin liquid crystal film with a single feedback mirror*, Opt. Lett. **18**, 855 (1993). 16
- [64] E. Pampaloni, S. Residori, and F. T. Arecchi, *Roll-Hexagon Transition in a Kerr-Like Experiment*, Europhys. Lett. **24**, 647 (1993). 16, 21
- [65] B. Thüring, R. Neubecker, and T. Tschudi, *Transverse pattern formation in liquid crystal light valve feedback system*, Opt. Commun. **102**, 111 (1993). 16, 21
- [66] M. Tlidi, P. Mandel, and R. Lefever, *Localized structures and localized patterns in optical bistability*, Phys. Rev. Lett. **73**, 640 (1994). 16, 17, 114
- [67] M. Brambilla, L. A. Lugiato, and M. Stefani, *Interaction and control of localized structures*, EuroPhys. Lett. **34**, 109 (1996). 16, 17
- [68] A. Schreiber, B. Thüring, M. Kreuzer, and T. Tschudi, *Experimental investigation of solitary structures in a nonlinear optical feedback system*, Opt. Commun. **136**, 415 (1997). 16, 17
- [69] B. Schapers, M. Feldmann, T. Ackemann, and W. Lange, *Interaction of localized structures in an optical pattern-forming system*, Phys. Rev. Lett. **85**, 748 (2000). 16, 17
- [70] P. Ramazza, E. Benkler, U. Bortolozzo, S. Boccaletti, S. Ducci, and F. Arecchi, *Tailoring the profile and interactions of optical localized structures*, Phys. Rev. E **65** (2002). 16, 17

- [71] P. Ramazza, U. Bortolozzo, S. Boccaletti, and F. Arecchi, *Localized structures in an optical feedback interferometer : properties and interactions*, Appl. Phys. B **81**, 921 (2005). 16, 17
- [72] P. D. Woods and A. R. Champneys, *Heteroclinic tangles and homoclinic snaking in the unfolding of a degenerate reversible Hamiltonian-Hopf bifurcation*, Physica D **129**, 147 (1999). 16
- [73] P. Couillet, C. Riera, and C. Tresser, *Stable Static Localized Structures in One Dimension*, Phys. Rev. Lett. **84**, 3069 (2000). 16, 17, 114
- [74] M. G. Clerc and C. Falcon, *Localized patterns and hole solutions in one-dimensional extended systems*, Physica A **356**, 48 (2005). 16, 17, 114
- [75] S. J. Chapman and G. Kozyreff, *Exponential asymptotics of localised patterns and snaking bifurcation diagrams*, Physica D **238**, 319 (2009). 16, 17
- [76] N. Rosanov, S. Fedorov, and A. Shatsev, *Two-dimensional laser soliton complexes with weak, strong, and mixed coupling*, Appl. Phys. B **81**, 937 (2005). 17
- [77] S. Residori, A. Petrossian, T. Nagaya, C. Riera, and M. Clerc, *Fronts and localized structures in a liquid-crystal-light-valve with optical feedback*, Physica D **199**, 149 (2004). 17
- [78] N. Abraham and W. Firth, *Overview of transverse effects in nonlinear-optical systems*, J. Opt. Soc. Am. **7**, 951 (1990). 17
- [79] L. Lugiato, *Spatio-temporal structures. Part I*, Phys. Lett. **219**, 293 (1992). 17
- [80] C. Weiss, *Spatio-temporal structures. Part II. Vortices and defects in lasers*, Phys. Lett. **219**, 311 (1992). 17
- [81] F. Arecchi, *Optical Morphogenesis : Pattern formation and competition in non-linear optics*, Il Nuovo Cimento **107**, 1110 (1994). 17
- [82] L. Lugiato, *Transverse nonlinear optics : introduction and review*, Chaos, Solitons and Fractals **4**, 1251 (1994). 17
- [83] H. Haken, *From pattern formation to pattern analysis and pattern recognition*, Int. J. Bif. and Chaos **4**, 1069 (1994). 17
- [84] F. Arecchi, *Optical morphogenesis : pattern formation and competition in nonlinear optics*, Physica D **86**, 297 (1995). 17
- [85] F. Arecchi, S. Boccaletti, and P. Ramazza, *Pattern formation and competition in nonlinear optics*, Phys. Rep. **318**, 1 (1999). 17, 136
- [86] L. Lugiato, *Introduction to the feature section on cavity solitons : An overview*, IEEE J. Quant. Elec. **39**, 193 (2003). 17

- [87] W. Krolikowski, B. Luther-Davies, and C. Denz, *Photorefractive solitons*, IEEE J. Quant. Elec. **39**, 3 (2003). 17
- [88] P. Mandel and M. Tlidi, *Transverse dynamics in cavity nonlinear optics (2000-2003)*, J. Opt. B **6**, R60 (2004). 17
- [89] S. Residori, A. Petrossian, T. Nagaya, and M. Clerc, *Localized structures and their dynamics in a liquid crystal light valve with optical feedback*, J. Opt. B **6**, S169 (2004). 17
- [90] T. Ackemann, C. Denz, and F. Mitschke, *Dynamics in nonlinear optics and quantum optics*, App. Phys. B **81**, 881 (2005). 17
- [91] C. Weiss and Y. Larionova, *Pattern formation in optical resonators*, Rep. Prog. Phys. **70**, 255 (2007). 17
- [92] M. Tlidi, M. Taki, and T. Kolokolnikov, *Focus issue : Dissipative localized structures in extended systems*, Chaos **17**, 037101 (2007). 17
- [93] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, eds., *Dissipative solitons : From optics to biology and medicine*, vol. 751 of *Lect. Notes Phys.* (Springer, Berlin Heidelberg, 2008). 17
- [94] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza, and S. Residori, *Vortices and defect statistics in two-dimensional optical chaos*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3749 (1991). 17
- [95] F. Papoff, G. D'Alessandro, G. Oppo, and W. Firth, *Local and global effect of boundaries on optical-pattern formation in Kerr media*, Phys. Rev. A **48**, 634 (1993). 17
- [96] E. Louvergneaux., *Pattern dislocation-type dynamical instability in 1D optical feedback Kerr media with gaussian transverse pumping*, Phys. Rev. Lett. **87**, 244501 (2001). 17, 97
- [97] E. Pampaloni, P. Ramazza, S. Residori, and F. Arecchi, *Two-dimensional crystals and quasicrystals in nonlinear optics*, Phys. Rev. Lett. **74**, 258 (1995). 17, 78
- [98] D. Leduc, M. L. Berre, E. Ressayre, and A. Tallet, *Quasipatterns in a polarization instability*, Phys. Rev. A **53**, 1072 (1996). 17, 78
- [99] G. Agez, *Effets du bruit et d'un flot transverse sur les instabilités spatio-temporelles dans un système optique à cristaux liquides*, Ph.D. thesis, Université de Lille 1 (2005), URL <http://tel.ccsd.cnrs.fr/docs/00/04/84/41/PDF/tel-00010207.pdf>. 17, 22, 23, 32, 79
- [100] F. Arecchi, *Chaos, Complexity and Morphogenesis : optical-pattern formation and recognition*, Il Nuovo Cimento **16D**, 1065 (1994). 17
- [101] L. Pastur, L. Gostiaux, U. Bortolozzo, S. Boccaletti, and P. L. Ramazza, *Experimental Targeting and Control of Spatiotemporal Chaos in Nonlinear Optics*, Phys. Rev. Lett. **93**, 063902 (2004). 17

- [102] S. Boccaletti, J. Bragard, and F. Arecchi, *Controlling and synchronizing space time chaos*, Phys. Rev. E **59**, 6574 (1999). 17
- [103] P. L. Ramazza, U. Bortolozzo, and S. Boccaletti, *Experimental synchronization of spatio-temporal chaos in nonlinear optics*, Phys. Rev. E **73**, 036213 (2006). 17
- [104] M. Tlidi and P. Mandel, *Spatial patterns in nascent optical bistability*, Chaos, Solitons and Fractals **4**, 1475 (1994), special Issue : Nonlinear Optical Structures, Patterns, Chaos. 17
- [105] S. Residori, P. L. Ramazza, E. Pampaloni, S. Boccaletti, and F. T. Arecchi, *Domain Coexistence in Two-Dimensional Optical Patterns*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1063 (1996). 17
- [106] S. L. Lachinova and W. Lu, *Domain coexistence in nonlinear optical pattern formation*, Phys. Rev. E **64**, 026207 (2001). 17
- [107] S. Barland, J. R. Tredicce, M. Brambilla, L. A. Lugiato, S. Balle, M. Giudici, T. Maggipinto, L. Spinelli, G. Tissoni, T. Knödl, et al., *Cavity Solitons as Pixels in Semiconductor Microcavities*, Nature **419**, 699 (2002). 17, 114
- [108] U. Bortolozzo, L. Pastur, P. L. Ramazza, M. Tlidi, and G. Kozyreff, *Bistability between Different Localized Structures in Nonlinear Optics*, Phys. Rev. Lett. **93**, 253901 (2004). 17
- [109] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, eds., *Dissipative solitons*, vol. 661 of *Lecture Notes in Physics* (Springer, New York, 2005). 17
- [110] W. van Saarloos and P. C. Hohenberg, *Pulses and fronts in the complex Ginzburg-Landau equation near a subcritical bifurcation*, Phys. Rev. Lett. **64**, 749 (1990). 17
- [111] K. Staliūnas, G. Šlekys, and C. O. Weiss, *Nonlinear Pattern Formation in Active Optical Systems : Shocks, Domains of Tilted Waves, and Cross-Roll Patterns*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2658 (1997). 17
- [112] M. Taki, N. Ouarzazi, H. Ward, and P. Glorieux, *Nonlinear front propagation in optical parametric oscillators*, J. Opt. Soc. Am. B **17**, 997 (2000). 17
- [113] H. Ward, M. Taki, and P. Glorieux, *Secondary transverse instabilities in optical parametric oscillators*, Opt. Lett. **27**, 348 (2002). 17
- [114] M. G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui, *Additive noise induces front propagation*, Phys. Rev. Lett. **94**, 148302 (2005). 17, 30
- [115] A. B. Blagoeva, S. G. Dinev, A. A. Dreischuh, and A. Naidenov, *Light bullets formation in a bulk media*, IEEE J. Quant. Elec. **27**, 2060 (1991). 17
- [116] M. Tlidi and P. Mandel, *Three-Dimensional Optical Crystals and Localized Structures in Cavity Second Harmonic Generation*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4995 (1999). 17

- [117] P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, J. Trull, C. Conti, and S. Trillo, *Spontaneously Generated X-Shaped Light Bullets*, Phys. Rev. Lett. **91**, 093904 (2003). 17
- [118] M. Brambilla, T. Maggipinto, G. Patera, and L. Columbo, *Cavity Light Bullets : Three-Dimensional Localized Structures in a Nonlinear Optical Resonator*, Phys. Rev. Lett. **93**, 203901 (2004). 17
- [119] D. Michaelis, U. Peschel, and F. Lederer, *Multistable localized structures and superlattices in semiconductor optical resonators*, Phys. Rev. A **56**, R3366 (1997). 17
- [120] I. Pérez-Arjona, F. Silva, E. Roldán, and G. de Valcárcel, *Stabilizing and controlling domain walls and dark-ring cavity solitons*, Opt. Exp. **12**, 2130 (2004). 17
- [121] B. Gütlich, H. Zimmermann, C. Denz, R. Neubecker, M. Kreuzer, and T. Tschudi, *Forcing and control of localized states in optical single feedback systems*, Appl. Phys. B **81**, 927 (2005). 17
- [122] J. G. Huang and G. S. McDonald, *Spontaneous Optical Fractal Pattern Formation*, Phys. Rev. Lett. **94**, 174101 (2005). 17
- [123] G. S. McDonald and W. J. Firth, *Spatial solitary-wave optical memory*, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1328 (1990). 17
- [124] M. Brambilla, L. Lugiato, M. Pinna, F. Prati, P. Pagani, P. Vanotti, M. Li, and C. Weiss, *The laser as nonlinear element for an optical associative memory*, Opt. Commun. **92**, 145 (1992). 17
- [125] A. Jacobo, P. Colet, P. Scotto, and M. S. Miguel, *Use of nonlinear properties of intracavity type II second harmonic generation for image processing*, Appl. Phys. B **81**, 955 (2005). 17
- [126] V. B. Taranenko, G. Slekyš, and C. O. Weiss, *Spatial resonator solitons*, Chaos **13**, 777 (2003). 17
- [127] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, eds., *Dissipative solitons* (Springer, New York, 2005), vol. 661 of *Lecture Notes in Physics*, chap. 3-6, pp. 37–130. 17
- [128] Y. Kivshar, *Spatial solitons : Bending light at will*, Nat. Phys. **2**, 729 (2006). 17
- [129] L. Columbo, I. M. Perrini, T. Maggipinto, and M. Brambilla, *3D self-organized patterns in the field profile of a semiconductor resonator*, New J. Phys. **8**, 312 (2006). 17
- [130] A. Jacobo, D. Gomila, M. A. Matias, and P. Colet, *Effects of a localized beam on the dynamics of excitable cavity solitons*, Phys. Rev. A **78**, 053821 (2008). 17
- [131] Y. Tanguy, T. Ackemann, W. J. Firth, and R. Jäger, *Realization of a Semiconductor-Based Cavity Soliton Laser*, Phys. Rev. Lett. **100**, 013907 (2008). 17

- [132] F. Pedaci, S. Barland, E. Caboche, P. Genevet, M. Giudici, J. R. Tredicce, T. Ackemann, A. J. Scroggie, W. J. Firth, G.-L. Oppo, et al., *All-optical delay line using semiconductor cavity solitons*, Appl. Phys. Lett. **92**, 011101 (2008). 17
- [133] Fundamental, functionalities, and applications of cavity solitons, 6th framework program, project number N° 004868, URL <http://www.funfacts.org>. 18
- [134] D. N. Christodoulides, F. Lederer, and Y. Silberberg, *Review article : Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices*, Nature **424**, 817 (2003). 18
- [135] D. Neshev, A. Sukhorukov, W. Krolikowski, and Y. Kivshar, *Nonlinear optics and light localization in periodic photonic lattices*, J. Nonlinear Opt. Phys. Mater. **16**, 1 (2007). 18
- [136] L. I. Mandelstam, *Group velocity in a crystal lattice*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **15**, 475 (1945). 18
- [137] V. G. Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Sov. Phys. Usp. **10**, 509 (1968). 18
- [138] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, *Experimental Verification of a Negative Index of Refraction*, Science **292**, 77 (2001). 18
- [139] D. Gomila and G.-L. Oppo, *Subcritical patterns and dissipative solitons due to intracavity photonic crystals*, Phys. Rev. A **76**, 043823 (2007). 18
- [140] D. Mihalache, D. Mazilu, F. Lederer, and Y. S. Kivshar, *Spatiotemporal dissipative solitons in two-dimensional photonic lattices*, Phys. Rev. E **78**, 056602 (2008). 18
- [141] K. Staliunas, O. Egorov, Y. S. Kivshar, and F. Lederer, *Bloch Cavity Solitons in Nonlinear Resonators with Intracavity Photonic Crystals*, Phys. Rev. Lett. **101**, 153903 (2008). 18
- [142] P. Tassin, L. Gelens, J. Danckaert, I. Veretennicoff, G. V. der Sande, P. Kockaert, and M. Tlidi, *Dissipative structures in left-handed material cavity optics*, Chaos **17**, 037116 (2007). 18
- [143] L. Gelens, D. Gomila, G. V. der Sande, J. Danckaert, P. Colet, and M. A. Matías, *Dynamical instabilities of dissipative solitons in nonlinear optical cavities with nonlocal materials*, Phys. Rev. A **77**, 033841 (2008). 18
- [144] M. G. Clerc, C. Falcon, and E. Tirapegui, *Front propagation sustained by additive noise*, Phys. Rev. E **74**, 011303 (2006). 18, 30
- [145] F. Sagués, J. M. Sancho, and J. Garcia-Ojalvo, *Spatiotemporal order out of noise*, Rev. Mod. Phys. **79**, 829 (2007). 18, 30
- [146] G. Agez, M. G. Clerc, and E. Louvergneaux, *Universal shape law of stochastic supercritical bifurcations : Theory and experiments*, Phys. Rev. E. **77**, 026218 (2008). 18, 45, 46, 93

- [147] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, *Noise-sustained convective structures in nonlinear optics*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3633 (1997). 18, 20, 29, 30, 52, 56
- [148] M. Santagiustina, P. Colet, M. S. Miguel, and D. Walgraef, *Two-dimensional noise-sustained structures in optical parametric oscillators*, Phys. Rev. E **58**, 3843 (1998). 18, 30, 52
- [149] H. Ward, M. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux, *Transverse dynamics of optical parametric oscillators in presence of walk-off*, Eur. Phys. J. D **3**, 275 (1998). 18
- [150] G. Agez, P. Glorieux, M. Taki, and E. Louvergneaux, *Two-dimensional noise-sustained structures in optics : Theory and experiments*, Phys. Rev. A **74**, 043814 (2006). 18, 20, 23, 29, 30, 52, 55, 56, 64, 65, 79, 93
- [151] G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics* (Academic Press, San Diego, California, 1995). 18, 26, 86, 110
- [152] G. Kozyreff, T. Erneux, M. Haelterman, and P. Kockaert, *Fast optical self-pulsing in a temporal analog of the Kerr-Slice pattern-forming system*, Phys. Rev. A **73**, 063815 (2006). 19
- [153] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, A. Lapucci, and R. Meucci, *Two-dimensional representation of a delayed dynamical system*, Phys. Rev. A **45**, R4225 (1992). 19
- [154] K. Ikeda and K. Matsumoto, *Information theoretical characterization of turbulence*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2265 (1989). 19
- [155] C. Sz waj, S. Bielawski, and D. Derozier, *Propagation of waves in the spectrum of a multimode laser*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4540 (1996). 19
- [156] A. Mussot, E. Louvergneaux, N. Akhmediev, F. Reynaud, L. Delage, and M. Taki, *Optical fiber systems are convectively unstable*, Phys. Rev. Lett. **101**, 113904 (2008). 19, 20, 27, 28, 52, 53, 56, 86
- [157] C. Bruni, S. Bielawski, G. L. Orlandi, D. Garzella, and M. E. Couprie, *Suppression of limit cycles in a free electron laser*, Eur. Phys. J. D **39**, 75 (2006). 19
- [158] G. Agez, C. Sz waj, E. Louvergneaux, and P. Glorieux, *Noisy precursors in one-dimensional patterns*, Phys. Rev. A **66**, 063805 (2002). 20, 24, 39, 59, 93
- [159] M. Santagiustina, P. Colet, M. San Miguel, and D. Walgraef, *Two-dimensional noise-sustained structures in optical parametric oscillators*, Phys. Rev. E **58**, 3843 (1998). 20, 56
- [160] M. Taki, M. San Miguel, and M. Santagiustina, *Order parameter description of walk-off effect on pattern selection in degenerate optical parametric oscillators*, Phys. Rev. E **61**, 2133 (2000). 20, 56

- [161] H. Ward, M. Ouarzazi, M. Taki, and P. Glorieux, *Influence of walkoff on pattern formation in nondegenerate optical parametric oscillators*, Phys. Rev. E **63**, 016604 (2000). 20, 56
- [162] E. Louvergneaux, C. Sz waj, G. Agez, P. Glorieux, and M. Taki, *Experimental evidence of absolute and convective instabilities in optics*, Phys. Rev. Lett. **92**, 043901 (2004). 20, 23, 52, 55, 56, 58, 64, 93
- [163] A. Mussot, A. Kudlinski, M. I. Kolobov, E. Louvergneaux, M. Douay, and M. Taki, *Mechanisms of rogue wave formation*, <http://arxiv.org/abs/0903.4522> (2009). 20, 94
- [164] T. Ackemann and W. Lange, *Non- and nearly hexagonal patterns in sodium vapor generated by single-mirror feedback*, Phys. Rev. A **50**, R4468 (1994). 21
- [165] G. Grynberg, A. Maître, and A. Petrossian, *Flowerlike patterns generated by a laser beam transmitted through a rubidium cell with single feedback mirror*, Phys. Rev. Lett. **72**, 2379 (1994). 21
- [166] T. Honda and H. Matsumoto, *Buildup of spontaneous hexagonal patterns in photorefractive BaTiO₃ with a feedback mirror*, Opt. Lett. **20**, 1755 (1995). 21
- [167] T. Honda, H. Matsumoto, M. Sedlatschek, C. Denz, and T. Tschudi, *Spontaneous formation of hexagons, squares and squeezed hexagons in a photorefractive phase conjugator with virtually internal feedback mirror*, Opt. Commun. **133**, 293 (1997). 21
- [168] J. Glückstad and M. Saffman, *Spontaneous pattern formation in a thin film of bacteriorhodopsin with mixed absorptive-dispersive nonlinearity*, Opt. Lett. **20**, 551 (1995). 21
- [169] M. Tamburini, M. Bonavita, S. Wabnitz, and E. Santamato, *Hexagonally patterned beam filamentation in a thin liquid-crystal film with a single feedback mirror*, Opt. Lett. **18**, 855 (1993). 21
- [170] M. L. Berre, E. Ressayre, A. Tallet, and J.-J. Zondy, *Linear analysis of single-feedback-mirror spatiotemporal instabilities*, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1346 (1990). 22
- [171] W. Talbot, *Facts relating to optical science*, Philos. Mag. **9**, 401 (1836). 22
- [172] E. Santamato, E. Ciamarella, and M. Tamburrini, *Talbot assisted pattern formation in a liquid crystal film with single feedback mirror*, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **251**, 127 (1994). 22, 23
- [173] G. D'Alessandro and W. J. Firth, *Hexagonal spatial patterns for a Kerr slice with a feedback mirror*, Phys. Rev. A **46**, 537 (1992). 22, 23, 38, 46
- [174] S. Akhmanov, M. Vorontsov, V. Ivanov, A. Larichev, and N. Zheleznykh, *Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics : generation and interaction of spatiotemporal structures*, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 78 (1992). 22, 57

- [175] P. Ramazza, S. Ducci, and F. Arrechi, *Optical diffraction free patterns induced by a discrete translational transport*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4128 (1998). 22
- [176] M. G. Clerc, S. Residori, and C. S. Riera, *First-order Fréedericksz transition in the presence of light-driven feedback in nematic liquid crystals*, Phys. Rev. E **63**, 060701 (2001). 22
- [177] M. Clerc, T. Nagaya, A. Petrossian, S. Residori, and C. Riera, *First-order Fréedericksz transition and front propagation in a liquid crystal light valve with feedback*, Eur. Phys. J. D **28**, 435 (2004). 22
- [178] G. D'Alessandro and W. J. Firth, *Spontaneous hexagon formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2597 (1991). 23
- [179] G. D'Alessandro and W. Firth, *Hexagonal spatial patterns for a Kerr slice with a feedback mirror*, Phys. Rev. A **46**, 537 (1992). 24
- [180] M. Nakazawa, K. Suzuki, and H. Haus, *The modulational instability laser. I. Experiment*, IEEE J. Quant. Elec. **25**, 2036 (1989). 25
- [181] M. Nakazawa, K. Suzuki, H. Kubota, and H. Haus, *The modulation instability laser. II. Theory*, IEEE J. Quant. Elec. **25**, 2045 (1989). 25
- [182] M. Haelterman, S. Trillo, and S. Wabnitz, *Additive-modulation-instability ring laser in the normal dispersion regime of a fiber*, Opt. Lett. **17**, 745 (1992). 25, 26, 27
- [183] S. Coen and M. Haelterman, *Modulational Instability Induced by Cavity Boundary Conditions in a Normally Dispersive Optical Fiber*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4139 (1997). 25, 27, 86, 110
- [184] S. Coen, M. Tlidi, P. Emplit, and M. Haelterman, *Convection versus Dispersion in Optical Bistability*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2328 (1999). 25, 55, 56
- [185] F. Reynaud and E. Delaire, *Linear optical path modulation with $\lambda/200$ accuracy using a fibre stretcher*, Electron. Lett. **29**, 1718 (1993). 25
- [186] M. Tlidi, A. Mussot, E. Louvergneaux, G. Kozyreff, A. Vladimirov, and M. Taki, *Control and removal of modulational instabilities in low-dispersion photonic crystal fiber*, Opt. Lett. **32**, 662 (2007). 27, 110
- [187] C. Bender and S. Orszag, *Advance mathematical methods for scientists and engineers* (McGraw Hill, New York, 1978). 28, 55
- [188] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni, *Stochastic resonance*, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998). 29
- [189] B. Lindner, J. García-Ojalvo, A. Neiman, and L. Schimansky-Geier, *Effects of noise in excitable systems*, Phys. Rep. **392**, 321 (2004). 29

- [190] P. Reimann, *Brownian motors : Noisy transport far from equilibrium*, Phys. Rep. **361**, 57 (2002). 29
- [191] W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-induced transitions* (Springer, Berlin, 1984). 29
- [192] S. Ma, *Modern theory of critical phenomena* (Benjamin, Reading, 1976). 29
- [193] J. Garcia-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems* (Springer-Verlag, New York, 1999). 29, 45
- [194] J. Garcia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado, and J. M. Sancho, *Effects of external noise on the Swift-Hohenberg equation*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1542 (1993). 30
- [195] A. Becker and L. Kramer, *Linear stability analysis for bifurcations in spatially extended systems with fluctuating control parameter*, Phys. Rev. Lett. **73**, 955 (1994). 30
- [196] B. J. Parrondo J. M. R., Van den Broeck C. and J. de la Rubia, *Noise-induced spatial patterns*, Physica A **224**, 153 (1996). 30
- [197] A. A. Zaikin and L. Schimansky-Geier, *Spatial patterns induced by additive noise*, Phys. Rev. E **58**, 4355 (1998). 30
- [198] P. Luque, J. Garcia-Ojalvo, and J. M. Sancho, *Fluctuation phenomena : disorder and nonlinearity* (World Scientific, Singapore, 1995), p. 75. 30
- [199] C. V. den Broeck, J. M. R. Parrondo, and R. Toral, *Noise-induced nonequilibrium phase transition*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3395 (1994). 30
- [200] W. Genovese, M. A. Munoz, and J. M. Sancho, *Nonequilibrium transitions induced by multiplicative noise*, Phys. Rev. E **57**, R2495 (1998). 30
- [201] R. Müller, K. Lippert, A. Kühnel, and U. Behn, *First-order nonequilibrium phase transition in a spatially extended system*, Phys. Rev. E **56**, 2658 (1997). 30
- [202] A. A. Zaikin, L. Schimansky-Geier, and J. Garcia-Ojalvo, *Nonequilibrium first-order phase transition induced by additive noise*, Phys. Rev. E **60**, 6275 (1999). 30
- [203] J. Garcia-Ojalvo, J. M. R. Parrondo, J. M. Sancho, and C. V. den Broeck, *Reentrant transition induced by multiplicative noise in the time-dependent Ginzburg-Landau model*, Phys. Rev. E **54**, 6918 (1996). 30
- [204] J. Garcia-Ojalvo, A. M. Lacasta, J. M. Sancho, and R. Toral, *Phase separation driven by external fluctuations*, Europhys. Lett. **42**, 125 (1998). 30
- [205] M. A. Santos and J. M. Sancho, *Noise-induced fronts*, Phys. Rev. E **59**, 98 (1999). 30
- [206] A. Gatti, H. Wiedemann, L. A. Lugiato, I. Marzoli, G.-L. Oppo, and S. M. Barnett, *Langevin treatment of quantum fluctuations and optical patterns in optical parametric oscillators below threshold*, Phys. Rev. A **56**, 877 (1997). 30, 38, 39

- [207] I. Rehberg, S. Rasenat, M. de la Torre Juarez, W. Schopf, F. Horner, G. Ahlers, and H. R. Brand, *Thermally induced hydrodynamics fluctuations below the onset of electroconvection*, Phys. Rev. Lett. **67**, 596 (1991). 30, 38
- [208] M. Wu, G. Ahlers, and D. S. Cannell, *Thermally induced fluctuations below the onset of Rayleigh-Bénard convection*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1743 (1995). 30, 38
- [209] J. W. S. Kadar and K. Showalter, *Noise-supported travelling waves in sub-excitable media*, Nature **391**, 770 (1998). 30, 52
- [210] L. S.-G. H. Hempel and J. Garcia-Ojalvo, *Noise-Sustained Pulsating Patterns and Global Oscillations in Subexcitable Media*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3713 (1999). 30, 52
- [211] J. M. Sancho and J. Garcia-Ojalvo, *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology* (Springer Berlin / Heidelberg, 2000), vol. 557 of *Lecture Notes in Physics*, chap. Noise-Induced Order in Extended Systems : A Tutorial, pp. 235–246. 30
- [212] N. G. V. Kampen, *Stochastic process in physics and chemistry* (North-Holland Personal Library, Amsterdam, 1992), 2nd ed. 31, 45
- [213] G. Agez, P. Glorieux, C. Szwaj, and E. Louvergneaux, *Using noise speckle pattern for the measurements of director reorientational relaxation time and diffusion length of aligned liquid crystals*, Opt. Commun. **245**, 243 (2005). 31, 32, 93
- [214] O. L. C. Group, *Quasielectric rayleigh scattering in nematic liquid crystals*, Phys. Rev. Lett. **22**, 1362 (1969). 31
- [215] W. Bajdecki and M. Karpierz, *Influence of external electric field on time of nonlinear optical reorientational effect in nematics*, Acta Phys. Polonica A **103**, 188 (2003). 31
- [216] A. Parfenov and A. Chrzanowska, in *Liquid Crystals Materials, Devices and Flat Panel Display* (Procc. of SPIE, San Jose CA, 2000), p. 3955. 31
- [217] P. Papadopoulos, H. Zenginoglou, and J. Kosmopoulos, *Optical measurement of the director relaxation time in a periodically reoriented nematic liquid crystal*, J. Apl. Phys. **86**, 3042 (1999). 31
- [218] W. Schöpf and W. Zimmermann, *Convection in binary fluids : Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations*, Phys. Rev. E **47**, 1739 (1993). 32, 45
- [219] E. Santamato, E. Ciamarella, and M. Tamburrini, *A new nonlinear optical method to measure the elastic anisotropy of liquid crystals*, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **241**, 205 (1994). 32
- [220] R. DiPrima, H. Swinney, and J. Gollub, *Hydrodynamic instabilities and transition to turbulence* (Springer, Berlin, 1981). 38

- [221] N. Abraham, *Proceeding of the Workshop on fluctuations and sensitivity in nonequilibrium systems* (Springer, Berlin, 1984). 38
- [222] C. Jeffries and K. Wiesenfeld, *Observation of noisy precursors of dynamical instabilities*, Phys. Rev. A **31**, 1077 (1985). 38
- [223] U. Bisang and G. Ahlers, *Thermal fluctuations*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3061 (1998). 38
- [224] C. Szwej, G. Oppo, A. Gatti, and L. Lugiato, *Quantum images in non degenerate optical parametric oscillators*, Eur. Phys. J. D **10**, 433 (2000). 38, 39
- [225] F. Arrechi, G. Rodari, and A. Sona, *Statistics of the laser radiation at threshold*, Phys. Lett. A **25**, 59 (1967). 46
- [226] K. Jansons and G. Lythe, *Stochastic calculus : application to dynamic bifurcations and threshold crossings*, J. Stat. Phys. **90**, 227 (1998). 46
- [227] W. M. Kistler, R. Seitz, and J. L. van Hemmen, *Modeling collective excitations in cortical tissue*, Physica D **114**, 273 (1998). 52
- [228] S. Residori, A. Petrossian, and L. Gil, *Sum-Frequency Generation in Dissipative Systems : Experimental Evidence for Optical Wave Patterns*, Phys. Rev. Lett. **88**, 233901 (2002). 53, 57
- [229] N. Garnier, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and A. Prigent, *Nonlinear dynamics of waves and modulated waves in 1D thermocapillary flows. I. General presentation and periodic solutions*, Physica D **174**, 1 (2003). 53
- [230] P. Huerre and P. Monkewitz, *Local and global instabilities in spatially developing flows*, Ann. Rev. Fluid. Mech. **22**, 473 (1990). 55
- [231] L. Hall and W. Heckrotte, *Instabilities : convective versus absolute*, Phys. Rev. **166**, 120 (1968). 55
- [232] P. A. Sturrock, *Kinematics of Growing Waves*, Phys. Rev. **112**, 1488 (1958). 55
- [233] R. Briggs, *Electron-stream interaction with plasmas* (MIT Press, Cambridge, Mass., 1964). 55
- [234] L. Landau and E. Lifshitz, *Physical Kinetics*, vol. 10 (Pergamon Press Ltd, 1981). 55
- [235] H. R. Brand, R. J. Deissler, and G. Ahlers, *Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold*, Phys. Rev. A **43**, 4262 (1991). 55
- [236] X. Nicolas, A. Mojtabi, and J. K. Platten, *Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille Bénard flow in a rectangular channel heated from below*, Phys. Fluids **9**, 337 (1997). 55

- [237] P. Gondret, P. Ern, L. Meignin, and M. Rabaud, *Experimental evidence of a nonlinear transition from convective to absolute instability*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1442 (1999). 55
- [238] P. Büchel and M. Lucke, *Influence of through flow on binary fluid convection*, Phys. Rev. E **61**, 3793 (2000). 55
- [239] A. Couairon and J. M. Chomaz, *Pattern Selection in the Presence of a Cross Flow*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2666 (1997). 55
- [240] L. Pastur, M. T. Westra, and W. van de Water, *Sources and sinks in 1D traveling waves*, Physica D **174**, 71 (2003). 55
- [241] M. Sugawa, R. Sugaya, and H. Nomoto, *Absolute and convective instabilities of electrostatic ion cyclotron waves excited in an ion beam-plasma system*, Phys. Lett. A **61**, 323 (1977). 55
- [242] N. Mitarai and H. Nakanishi, *Convective instability and structure formation in traffic flow*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1766 (2000). 55
- [243] N. Israeli, D. Kandel, M. Schatz, and A. Zangwill, *Convective instability of strained layer step*, Surf. Sci. **494**, L735 (2001). 55
- [244] O. Nekhamkina and M. Scheintuch, *Asymptotic solutions of stationary patterns in convection-reaction-diffusion systems*, Phys. Rev. E **68**, 036207 (2003). 55
- [245] M. Santagiustina, P. Colet, M. S. Miguel, and D. Walgraef, *Noise-sustained convective structures in nonlinear optics*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3633 (1997). 55
- [246] K. L. Babcock, G. Ahlers, and D. S. Cannell, *Noise-sustained structure in Taylor-Couette flow with through flow*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3388 (1991). 55, 64
- [247] R. J. Deissler, *Thermally sustained structure in convectively unstable systems*, Phys. Rev. E **49**, R31 (1994). 55, 64
- [248] A. Couairon and J. M. Chomaz, *Pattern Selection in the Presence of a Cross Flow*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2666 (1997). 55
- [249] S. Bielawski, C. Szwaj, C. Bruni, D. Garzella, G. L. Orlandi, and M. E. Couprie, *Advection-Induced Spectrotemporal Defects in a Free-Electron Laser*, Phys. Rev. Lett. **95**, 034801 (2005). 55
- [250] G. Grynberg, *Drift instability and light-induced spin waves in an alkali vapor with feedback mirror*, Opt. Commun. **109**, 483 (1994). 57, 58
- [251] P. Ramazza, P. Bigazzi, E. Pampaloni, S. Residori, and F. Arrechi, *One-dimensional transport-induced instabilities in an optical system with nonlocal feedback*, Phys. Rev. E **52**, 5524 (1995). 57, 58

- [252] T. Ackemann, B. Schapers, J. P. Seipenbusch, Y. A. Logvin, and W. Lange, *Drifting and locking behavior of optical patterns, an investigation using Fourier filtering*, Chaos, Solitons and Fractals **10**, 665 (1999). 57, 58
- [253] For a review of the different types of transverse nonlocal interactions in the feedback system and associated references, see Sec. 3.6. in [85]. 57
- [254] B. Christiansen, P. Alstrom, and M. Levinsen, *Ordered capillary-wave states : Quasicrystals, hexagons, and radial waves*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2157 (1992). 78
- [255] W. Edwards and S. Fauve, *Parametrically excited quasicrystalline surface waves*, Phys. Rev. E **47**, R788 (1993). 78
- [256] T. Ackemann and W. Lange, *Optical pattern formation in alkali metal vapors : Mechanism, phenomena and use*, Appl. Phys. B **72**, 21 (2001). 78
- [257] A. Aumann, T. Ackemann, E. G. Westhoff, and W. Lange, *Eightfold quasipatterns in a optical pattern-forming system*, Phys. Rev. E **66**, 046220 (2002). 78
- [258] H. Muller, *Model equation for two-dimensional quasipattern*, Phys. Rev. E **49**, 1273 (1994). 78
- [259] M. Vorontsov and A. Y. Karpov, *Pattern formation due to interballon spatial mode coupling*, J. Opt. Soc. Am. B **14**, 34 (1997). 78
- [260] Y. A. Logvin, T. Ackemann, and W. Lange, *Subhexagons and ultrahexagons as a result of a secondary instability*, Phys. Rev. A **55**, 4538 (1997). 78
- [261] M. Vorontsov and B. Samson, *Nonlinear dynamics in a optical system with controlled two-dimensional feedback black-eye patterns and related phenomena*, Phys. Rev. A **57**, 3040 (1998). 78
- [262] F. Arecchi, S. Boccaletti, S. Ducci, E. Pampaloni, P. Ramazza, and S. Residori, *The liquid crystal light valve with optical feedback : a case study in pattern formation*, J. Nonlinear Optical Physics and Materials **9**, 183 (2000). 78
- [263] H. Arbell and J. Fineberg, *Pattern formation in two-frequency forced parametric waves*, Phys. Rev. E **65**, 036224 (2002). 78
- [264] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. Cahn, *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1951 (1984). 78
- [265] M. Vorontsov and W. J. Firth, *Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two dimensional feedback*, Phys. Rev. A **49**, 2891 (1994). 78
- [266] B. Thüring, A. Schreiber, M. Kreuzer, and T. Tschudi, *Spatio-temporal dynamics due to competing spatial instabilities in a coupled LCLV feedback system*, Physica D **96**, 282 (1996). 78

- [267] S. Residori, P. Ramazza, E. Pampaloni, S. Boccaletti, and F. Arecchi, *Domain coexistence in two-dimensional optical patterns*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1063 (1996). 78
- [268] R. Zambrini, M. S. Miguel, C. Durniak, and M. Taki, *Convection-induced nonlinear symmetry breaking in wave mixing*, Phys. Rev. E **72**, 025603 (2005). 87
- [269] E. Louvergneaux, F. Rogister, and P. Glorieux, *Spatiotemporal Antiphase Dynamics in Coupled Extended Optical Media*, Phys. Rev. Lett. **99**, 263901 (2007). 93, 102
- [270] C. Kharif and E. Pelinovsky, *Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon*, Eur. J. Mech. B/Fluids **22**, 603 (2003). 94
- [271] P. Peterson, T. Soomere, J. Engelbrecht, and E. van Groesen, *Soliton interaction as a possible model for extreme waves in shallow water*, Nonlinear Process Geophys. **10**, 503 (2003). 94
- [272] M. Oikawa and H. Tsuji, *Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems*, Fluid Dynamics Research **38**, 868 (2006). 94
- [273] P. Genevet, S. Barland, M. Giudici, and J. R. Tredicce, *EH3.5 Clusters of localized structures in a Cavity Soliton Laser. Properties of the homoclinic snaking bifurcation diagram*, European Quantum Electronics Conference, Munich (2009). 94
- [274] P. Genevet, S. Barland, M. Giudici, and J. R. Tredicce, *Cavity Soliton Laser Based on Mutually Coupled Semiconductor Microresonators*, Phys. Rev. Lett. **101**, 123905 (2008). 94
- [275] K. M. Aghdami, F. Prati, P. Caccia, G. Tissoni, L. Lugiato, R. Kheradmand, and H. Tajalli, Eur. Phys. J. D **47**, 447 (2008). 94
- [276] *EH Sessions*, European Quantum Electronics Conference, Munich (2009). 94
- [277] L. Kramer, E. Ben-Jacob, H. Brand, and M. C. Cross, *Wavelength Selection in Systems Far from Equilibrium*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1891 (1982). 97
- [278] M. A. Dominguez-Lerma, D. S. Cannell, and G. Ahlers, *Eckhaus boundary and wave-number selection in rotating Couette-Taylor flow*, Phys. Rev. A **34**, 4956 (1986). 97
- [279] H. Riecke and H.-G. Paap, *Perfect Wave-Number Selection and Drifting Patterns in Ramped Taylor Vortex Flow*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2570 (1987). 97
- [280] J. Plumecoq, C. Szawaj, D. Derozier, M. Lefranc, and S. Bielawski, *Eckhaus instability induced by nonuniformities in a laser*, Phys. Rev. A **64**, 061801 (2001). 97
- [281] E. Lacot, F. Stoeckel, and M. Chenevier, *Dynamics of an erbium-doped fiber laser*, Phys. Rev. A **49**, 3997 (1994). 102
- [282] K. Wiesenfeld, C. Bracicowski, G. James, and R. Roy, *Observation of antiphase states in a multimode laser*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1749 (1990). 102

- [283] K. Otsuka, *Winner-takes-all dynamics and antiphase states in modulated multimode lasers*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1090 (1991). 102, 103
- [284] P. Varona, J. J. Torres, H. D. I. Abarbanel, M. I. Rabinovich, and R. C. Elson, *Dynamics of two electrically coupled chaotic neurons : Experimental observations and model analysis*, Biol. Cybern. **84**, 91 (2001). 102
- [285] G. Ullah, P. Jung, and A. Cornell-Bell, *Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration*, Cell Calcium **39**, 197 (2006). 102
- [286] H. O. de la, Iglesia, J. Meyer, J. Carpino, Alan, and W. J. Schwartz, *Antiphase Oscillation of the Left and Right Suprachiasmatic Nuclei*, Science **290**, 799 (2000). 102
- [287] A. Sherman and J. Rinzel, *Rhythmogenic effects of weak electrotonic coupling in neuronal models*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **89**, 2471 (1992). 102
- [288] J. B. Snively and V. P. Pasko, *Antiphase OH and OI airglow emissions induced by a short-period ducted gravity wave*, Geophys. Res. Lett. **32**, L08808 (2005). 102
- [289] M. Tlidi and P. Mandel, *Space-time localized structures in the degenerate optical parametric oscillator*, Phys. Rev. A **59**, R2575 (1999). 102
- [290] A. Amengual, E. Hernández-García, R. Montagne, and M. San Miguel, *Synchronization of Spatiotemporal Chaos : The Regime of Coupled Spatiotemporal Intermittency*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4379 (1997). 102
- [291] Y. A. Logvin, *Nonreciprocal optical patterns due to symmetry breaking*, Phys. Rev. A **57**, 1219 (1998). 102
- [292] A. Birzu, F. Plenge, N. I. Jaeger, J. L. Hudson, and K. Krischer, *Complex Spatiotemporal Antiphase Oscillations during Electrodeposition of a Metal Disk Electrode : Model Calculations*, J. Phys. Chem. B **107**, 5825 (2003). 102
- [293] V. K. Vanag, L. Yang, M. Dolnik, A. M. Zhabotinsky, and I. R. Epstein, *Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback*, Nature **406**, 389 (2000). 102
- [294] J.-J. Perraud, A. De Wit, E. Dulos, P. De Kepper, G. Dewel, and P. Borckmans, *One-dimensional spirals : Novel asynchronous chemical wave sources*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1272 (1993). 102
- [295] S. B. Cavalcanti, J. C. Cressoni, H. R. da Cruz, and A. S. Gouveira-Neto, *Modulation instability in the region of minimum group-velocity dispersion of single-mode optical fibers via an extended nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Rev. A **43**, 6162 (1991). 110

- [296] S. Pitois and G. Millot, *Experimental observation of a new modulational instability spectral window induced by fourth-order dispersion in a normally dispersive single-mode optical fiber*, Opt. Commun. **226**, 415 (2003). 110
- [297] J. D. Harvey, R. Leonhardt, S. Coen, G. Wong, J. C. Knight, W. J. Wadsworth, and P. S. J. Russell, *Scalar modulation instability in the normal dispersion regime by use of a photonic crystal fiber*, Opt. Lett. **28**, 2225 (2003). 110
- [298] E. Louvergneaux, G. Sleky, D. Dangoisse, and P. Glorieux, *Coupled longitudinal and transverse self-organization in lasers induced by transverse-mode locking*, Phys. Rev. A **57**, 4899 (1998). 114
- [299] G. Kozyreff, M. Tlidi, A. Mussot, E. Louvergneaux, M. Taki, and A. G. Vladimirov, *Localized Beating between Dynamically Generated Frequencies*, Phys. Rev. Lett. **102**, 043905 (2009). 114
- [300] G. Kozyreff and S. J. Chapman, *Asymptotics of Large Bound States of Localized Structures*, Phys. Rev. Lett. **97**, 044502 (2006). 114
- [301] V. B. Taranenko, I. Ganne, R. J. Kuszelewicz, and C. O. Weiss, *Patterns and localized structures in bistable semiconductor resonators*, Phys. Rev. A **61**, 063818 (2000). 114

Liste des symboles

$\beta_{1,2,3,4}$	Ordres successifs de dispersion des fibres
χ	Valeur théorique de la non-linéarité du cristal liquide
$\chi^{(3)}$	Susceptibilité du troisième ordre
Λ	Période de la modulation spatiale
λ_0	Longueur d'onde optique (généralement de la source laser)
ρ	rapport d'aspect
σ	Mesure du rapport entre la diffraction et la diffusion
τ	Pour la lame de cristal liquide nématique ancré : temps de relaxation. Pour les systèmes fibrés : temps dans le repère se déplaçant à la vitesse de la lumière.
ε	Intensité du bruit additif dans les équations
ξ	Source de bruit additif dans les équations
A	En général, amplitude d'une modulation
B	Champ optique retour dans le système de la lame de cristal liquide avec rétroaction optique
d	Distance optique de rétroaction
E	Champ optique dans le résonateur fibré
F	Champ optique aller dans le système de la lame de cristal liquide avec rétroaction optique
F_0	Amplitude théorique du faisceau laser
h	Translation spatiale du champ B introduite dans la boucle de rétroaction
$I_0 = F_0^2$	Intensité laser
l_d	Longueur de diffusion du cristal liquide nématique ancré
u	Indice non-linéaire réfractif du cristal liquide nématique ancré
u_f	Bord à contre dérive de la zone structurée
w	Rayon du faisceau de pompe laser au niveau du cristal liquide

GNLSE Equation de Schrödinger non-linéaire généralisée (i.e. l'équation de NLSE avec des termes supplémentaires tels que l'effet Raman ou/et la pente de dispersion β_3)

IA Instabilité absolue

IC Instabilité convective

IEB Instabilités Entretienues par le Bruit

SEB Structure entretenue par le bruit