



HAL
open science

Algorithmes et généricité dans les groupes de tresses

Sandrine Henri Caruso

► **To cite this version:**

Sandrine Henri Caruso. Algorithmes et généricité dans les groupes de tresses. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Rennes, 2013. Français. NNT : 2013REN1S058 . tel-00881511

HAL Id: tel-00881511

<https://theses.hal.science/tel-00881511>

Submitted on 8 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : mathématiques et applications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

Sandrine Caruso

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de recherche mathématique de Rennes
UFR de mathématiques

**Algorithmes et
généricité dans
les groupes
de tresses**

**Thèse soutenue à Rennes
le 22 octobre 2013**

devant le jury composé de :

François DIGNE

Professeur, Univ. Picardie Jules-Verne / rapporteur

Juan GONZÁLEZ-MENESES

Prof. Titular, Univ. Sevilla / examinateur

John GUASCHI

Professeur, Univ. Caen / examinateur

Jean MICHEL

DR, Univ. Paris 7 / examinateur

Juan SOUTO

DR, Univ. Rennes 1 / examinateur

Bert WIEST

MCF, Univ. Rennes 1 / directeur de thèse

Algorithmes et généricité dans les groupes de tresses

Sandrine Caruso

Table des matières

Introduction	5
1 Les groupes de tresses	9
1.1 Tresses géométriques ; générateurs et relations	9
1.2 Groupe modulaire du disque épointé	10
1.3 Structure de Garside	11
2 Relaxations par la droite et spirales	15
2.1 Algorithme de relaxations par la droite	15
2.2 Spirales	19
2.2.1 Suites d'intersections	19
2.2.2 Arc de spirale, spirale	21
2.3 Effet de l'algorithme sur les spirales	24
2.3.1 Multibigone	24
2.3.2 Intervalle de sécurité	25
2.3.3 Orientation d'une spirale	26
2.3.4 Base gauche d'une spirale	26
2.3.5 Limite de sécurité et base gauche au cours de l'algorithme	28
3 Pseudo-anosoviens à grand ensemble super-sommital	39
3.1 Une famille de tresses pseudo-anosoviennes	39
3.1.1 Le SCS n'a qu'une orbite par cyclages ou conjugaison par Δ	42
3.1.2 Courbes de réduction rondes	45
3.2 Minoration du cardinal de l'ensemble super-sommital	46
4 Généricité des tresses pseudo-anosoviennes	49
4.1 Propriétés du graphe de pondération à gauche	49
4.2 Tresses rigides	54
4.2.1 Proportion des tresses rigides	54
4.2.2 Proportion des tresses rigides non pseudo-anosoviennes	54
4.2.3 Infimum quelconque	57

4.3	Conjugaisons non intrusives	59
4.4	Tresses bloquantes	60
4.5	Généricité des tresses pseudo-anosoviennes	65
4.6	Solutions rapides au problème de conjugaison	67
	Bibliographie	71

Introduction

La théorie des groupes de tresses s'inscrit au croisement de plusieurs domaines des mathématiques, en particulier, l'algèbre et la géométrie. La recherche actuelle s'étend dans chacune de ces directions, et de riches développements naissent du mariage de ces deux aspects.

D'un point de vue géométrique, le groupe des tresses à n brins est vu comme le groupe modulaire d'un disque à n trous, avec composante de bord. Il s'agit du groupe des homéomorphismes du disque privé de n points, fixant point par point le bord, quotienté par la relation d'isotopie. Cette définition s'inscrit dans la théorie plus générale des groupes modulaires de surfaces et, à ce titre, les groupes de tresses héritent de la classification de Nielsen-Thurston, qui sépare les éléments en trois types : périodiques, réductibles, pseudo-anosoviens.

Le chapitre 2 est indépendant des suivants, et seule cette définition des groupes de tresses comme groupe modulaire y est exploitée. On représente une tresse par un *diagramme de courbes*, c'est-à-dire l'image d'une famille fixée d'arcs sur le disque, par l'élément correspondant du groupe modulaire. Dans ce chapitre est présenté l'algorithme de *relaxations par la droite*, qui permet de retrouver, étant donné un diagramme de courbes, la tresse à partir de laquelle il a été obtenu. Celle-ci est écrite comme mot en certains générateurs du groupe de tresses appelés *glissements semi-circulaires*; l'écriture obtenue est appelée *forme normale de relaxations par la droite* de la tresse.

Cet algorithme et cette forme normale permettent de faire le lien entre des propriétés géométriques du diagramme de courbes, et des propriétés algébriques du mot de tresse. Plus précisément, si une *spirale* apparaît dans le diagramme de courbe, celle-ci peut être lue sous forme d'une grande puissance d'un glissement semi-circulaire dans le mot en forme normale de relaxations par la droite obtenu.

C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.3.11. *Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes sur le disque à n trous, admettant une spirale \mathcal{S} . Soit k le nombre de tours de la spirale et ℓ le nombre de trous entourés par la spirale. Alors la forme normale de relaxations par la droite de la tresse associée à \mathcal{D} admet comme sous-mot une puissance comprise entre $(k - 1)\ell$ et $(k + 1)\ell$ d'un glissement semi-circulaire.*

D'un point de vue algébrique, le groupe de tresses est l'exemple classique de groupe de Garside, structure à laquelle est naturellement associé un ensemble de générateurs formé des tresses dites *simples*, et qui permet notamment l'écriture de tout élément sous une forme normale, appelée *forme normale à gauche*. Les principales applications en sont la résolution du problème du mot (décider si un mot, écrit sur l'ensemble de générateurs, représente l'élément neutre) et du problème de conjugaison (décider si deux mots représentent des éléments conjugués). Cependant, jusqu'à présent, pour un nombre de brins fixé supérieur ou égal à 5, aucun algorithme en temps polynomial en la longueur des tresses n'est connu pour la résolution du problème de conjugaison, et c'est un des objectifs actuels des recherches en théorie de Garside que d'en obtenir un.

La théorie de Garside permet de définir des ensembles particuliers, qui sont des ensembles finis de conjugués d'une tresse, et qui sont des invariants de conjugaison. Parmi ces ensembles, l'ensemble super-sommital, introduit par El-Rifai et Morton dans [14], est l'un des plus connus. Plus récemment, dans [19], Gebhardt et González-Meneses ont introduit un nouvel invariant, l'ensemble des circuits glissants, qui est un sous-ensemble de l'ensemble super-sommital. Les stratégies visant à résoudre le problème de conjugaison en temps polynomial consistent, d'une part, à calculer rapidement un élément d'un invariant de conjugaison donné, et d'autre part, étant donné deux tels éléments, à déterminer s'ils se trouvent dans le même invariant. Il existe un algorithme en temps polynomial pour, à partir d'une tresse, trouver un élément de son ensemble super-sommital [5]. En revanche, déterminer si deux tels éléments sont dans le même ensemble super-sommital semble beaucoup plus difficile à faire rapidement. En effet, en général, l'ensemble super-sommital d'une tresse n'est pas de taille polynomiale en la longueur de la tresse : dans [20], González-Meneses exhibe une famille de tresses réductibles dont la taille de l'ensemble des circuits glissants est exponentielle à la fois en la longueur des tresses et en leur nombre de brins. On aurait pu espérer que ce comportement soit limité aux tresses réductibles. Cependant, dans [25], Prasolov exhibe une famille de tresses pseudo-anosoviennes dont l'ensemble ultra-sommital, un autre sous-ensemble de l'ensemble super-sommital, croît exponentiellement rapidement avec le nombre de brins de la tresse. Au chapitre 3, s'inspirant de la construction de González-Meneses dans [20], nous dévoilons une famille de tresses pseudo-anosoviennes à 5 brins dont l'ensemble super-sommital est exponentiel en la longueur des tresses.

Théorème 3.2.1. *Soit $k \geq 1$. La tresse*

$$\beta_k = (\sigma_2\sigma_1)^{3k+1}\sigma_4^{2k+2}\sigma_3\sigma_4^{2k-1}$$

est pseudo-anosovienne et a un ensemble super-sommital de cardinal supérieur ou égal à 2^{2k-2} .

Il est intéressant de noter qu'en revanche, l'ensemble des circuits glissants de cette famille de tresses est aussi petit que possible (lemme 3.1.4). Ceci est en accord avec la conjecture suivante, bien connue des spécialistes du domaine :

Conjecture. *Pour tout n , il existe un polynôme P_n tel que, pour toute tresse pseudo-anosovienne x à n brins de longueur canonique l , le cardinal de l'ensemble des circuits glissants de x est inférieur à $P_n(l)$.*

D'autre part, il existe un algorithme permettant, à partir d'une tresse, d'obtenir un élément de son ensemble des circuits glissants [19]. À l'heure actuelle, on ignore la complexité de cet algorithme, mais celui-ci semble très rapide en pratique : il est donc conjecturé que sa complexité est polynomiale.

Grâce à ces deux conjectures, on peut espérer résoudre le problème de conjugaison en temps polynomial pour les tresses pseudo-anosoviennes.

Le cas des tresses pseudo-anosoviennes est d'autant plus important à connaître que la plupart des tresses sont de ce type. Cette affirmation peut être interprétée de différentes manières. Les travaux de Maher [24] et Sisto [26] ont pour objet l'étude de tresses obtenues par une marche aléatoire dans un graphe de Cayley. Ils montrent que, dans ce cadre, la probabilité qu'une tresse est pseudo-anosovienne tend vers 1 lorsque la longueur de la marche aléatoire tend vers l'infini.

Dans le chapitre 4 de cette thèse, nous nous intéressons à la proportion de tresses pseudo-anosoviennes dans la boule de rayon l du graphe de Cayley de partie génératrice l'ensemble des tresses simples. Nous montrons le théorème suivant :

Théorème 4.5.1. *Dans chaque groupe de tresses \mathcal{B}_n , parmi les tresses dans la l -boule du graphe de Cayley, la proportion des pseudo-anosoviennes tend vers 1 quand l tend vers l'infini. De plus, cette convergence est exponentiellement rapide.*

Nous obtenons également un résultat intéressant concernant les tresses *rigides* et pseudo-anosoviennes :

Théorème 4.2.8. *Pour l assez grand, dans la boule de rayon l dans le graphe de Cayley, la proportion de tresses rigides pseudo-anosoviennes est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

D'autre part, nous donnons un algorithme de complexité polynomiale en la longueur des tresses dans le graphe de Cayley, et qui résout le problème de conjugaison pour « la plupart » des tresses, dans le sens suivant : pour une proportion de tresses dans la boule de rayon l qui tend exponentiellement vite vers 1 lorsque l tend vers l'infini, l'algorithme renvoie un ensemble de taille linéaire en l qui est exactement l'ensemble des circuits glissants de la tresse. Il est donc rapide de tester si deux telles tresses ont le même ensemble des circuits glissants.

Chapitre 1

Les groupes de tresses

Dans toute cette thèse, on se donne un entier $n \geq 1$. Ce chapitre est consacré aux définitions classiques en théorie des tresses.

1.1 Tresses géométriques ; générateurs et relations

Les premiers travaux sur les groupes de tresses, ainsi que les définitions que nous donnons dans cette section, sont dus à Artin [1].

Soient A_1, \dots, A_n n points de \mathbb{C} régulièrement espacés sur l'axe réel. On appelle *tresse géométrique* la donnée de n applications $b_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $b_j(0) = A_j$, $b_j(1) \in \{A_1, \dots, A_n\}$,
- pour tout $t \in [0, 1]$, les $b_j(t)$ sont deux à deux distincts.

On appelle *j -ème brin* le sous-ensemble de $\mathbb{C} \times [0, 1]$ donné par $\{(b_j(t), t), t \in [0, 1]\}$.

Une isotopie entre deux tresses géométriques (d'extrémités les A_j) est une application continue F de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans \mathbb{C}^n telle que $F(0, \cdot)$ est égal à la première tresse, $F(1, \cdot)$ à la deuxième, et $F(t, \cdot)$ est une tresse géométrique d'extrémités les A_j pour tout $t \in [0, 1]$. On appelle *tresse à n brins* la classe d'isotopie d'une tresse géométrique à n brins. L'opération consistant à concaténer les brins et à rééchelonner pour se ramener dans le bon intervalle définit une loi de groupe sur l'ensemble des tresses à n brins.

Le groupe des tresses à n brins est donné classiquement par la présentation par générateurs et relations

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ et } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle .$$

Le générateur σ_i correspond au croisement du i -ème brin au dessous du $(i + 1)$ -ème brin. Les relations sont illustrées sur la figure 1.1.

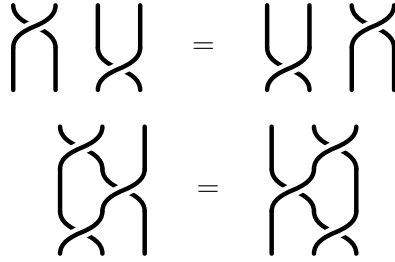


FIG. 1.1 – Relations

1.2 Groupe modulaire du disque épointé

Les premières interprétations du groupe de tresses comme groupe modulaire sont dues à Magnus [23].

Définition 1.2.1 (groupe modulaire du disque épointé). On note D_n le disque unité fermé dans \mathbb{C} auquel on a enlevé n points régulièrement espacés sur l'axe réel, notés A_1, \dots, A_n , numérotés de gauche à droite. Le *groupe modulaire* de D_n , noté $\text{Mod}(D_n)$, est le groupe des homéomorphismes de D_n quotienté par la relation d'isotopie. On note également $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$ le groupe des homéomorphismes de D_n fixant point par point le bord ∂D_n de D_n , quotienté par la relation d'isotopie.

Le groupe des tresses à n brins \mathcal{B}_n est isomorphe au groupe $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$. Le générateur σ_i correspond au *demi-twist de Dehn* autour d'une *courbe* entourant les trous A_i et A_{i+1} .

Définition 1.2.2 (courbe). On appelle *courbe fermée* dans D_n l'image du cercle \mathbb{S}^1 par une application continue à valeurs dans D_n . La courbe est dite *simple* si cette application est injective. Elle est *non dégénérée* si elle n'est homotope ni à un point, ni au bord du disque, et qu'elle entoure au moins deux trous.

Par souci de simplification, on appelle simplement courbe une courbe fermée simple non dégénérée, ou, selon le contexte, une classe d'homotopie d'une telle courbe.

Pour la définition d'un twist de Dehn et d'un demi-twist de Dehn, ainsi que pour de plus amples informations sur la théorie générale des groupes modulaires, le lecteur pourra consulter [16].

Théorème 1.2.3 (Nielsen-Thurston). *Soit $f \in \text{Mod}(D_n)$. Alors l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- soit f est *périodique*, ie il existe m tel que f^m soit l'identité,
- soit f est *réductible*, ie f préserve une famille de courbes fermées simples non-dégénérées, appelées courbes de réduction,

– soit f est pseudo-anosovienne, ie il existe deux feuilletages mesurés transverses (F_1, μ_1) et (F_2, μ_2) et un réel $\lambda > 1$ tels que $f(F_1, \mu_1) = (F_1, \lambda\mu_1)$ et $f(F_2, \mu_2) = (F_2, \frac{1}{\lambda}\mu_2)$.
Un élément peut être à la fois périodique et réductible. En revanche, le fait d'être pseudo-anosovienne est incompatible avec les deux autres types.

Une tresse $x \in \text{Mod}(D_n, \partial D_n)$ peut être projetée en un élément de $\text{Mod}(D_n)$. On appelle *type de Nielsen-Thurston de x* le type de Nielsen-Thurston de son projeté. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la définition de *périodique* est alors transformée comme suit : une tresse $x \in \mathcal{B}_n$ est périodique si et seulement si il existe m et l tels que $x^m = \Delta^l$, où $\Delta = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$ (Δ correspond au demi-twist autour du bord du disque).

1.3 Structure de Garside

Sur la théorie de Garside, on pourra consulter la référence [12], ou encore [14]. Nous en rappelons ici quelques éléments utiles pour la suite.

Tandis que le groupe \mathcal{B}_n admet la présentation de groupes

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ et } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle,$$

le monoïde des *tresses positives* \mathcal{B}_n^+ , qui est plongé dans \mathcal{B}_n , est défini par la même présentation, interprétée comme présentation de monoïdes.

Pour $i < j \leq n$, on note Δ_{ij} l'élément de \mathcal{B}_n^+ défini par

$$\Delta_{ij} = (\sigma_i \cdots \sigma_{j-1})(\sigma_i \cdots \sigma_{j-2}) \cdots (\sigma_i \sigma_{i+1}) \sigma_i$$

et on notera $\Delta = \Delta_{1n} \in \mathcal{B}_n^+$.

On note également

$$\delta_{ij} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_i \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}_{ij} = \sigma_i \cdots \sigma_{j-1},$$

ainsi que $\delta_j = \delta_{1j}$, $\delta = \delta_{1n}$, $\tilde{\delta}_j = \tilde{\delta}_{1j}$, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_{1n}$. Remarquons que $\delta^n = \tilde{\delta}^n = \Delta^2$.

Notation 1.3.1. On note τ la conjugaison par Δ , c'est-à-dire $\tau(x) = \Delta^{-1}x\Delta$ pour toute tresse x .

La paire $(\mathcal{B}_n^+, \Delta)$ définit ce que l'on appelle une structure de Garside sur \mathcal{B}_n . Sans en donner la définition complète, voici quelques propriétés d'une telle structure. Le groupe \mathcal{B}_n est muni d'une relation d'ordre \preceq définie par $x \preceq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \mathcal{B}_n^+$. Si $x \preceq y$, on dit que x est un *préfixe* de y . Deux éléments $x, y \in \mathcal{B}_n$ ont un unique plus grand préfixe commun, noté $x \wedge y$.

On définit également \succ par $x \succ y \Leftrightarrow xy^{-1} \in \mathcal{B}_n^+$. Remarquons que $x \succ y$ n'est pas équivalent à $y \preceq x$. Si $x \succ y$, on dit que y est un *suffixe* de x .

Les éléments de l'ensemble $\{x \in \mathcal{B}_n, 1 \preceq x \preceq \Delta\}$ sont appelés *tresses simples*.

Définition 1.3.2 (pondération à gauche). Soient s_1, s_2 deux tresses simples dans \mathcal{B}_n . On dit que s_1 et s_2 sont *pondérés à gauche* s'il n'existe aucun générateur σ_i tel que $s_1\sigma_i$ et $\sigma_i^{-1}s_2$ soient toutes les deux encore simples.

Définition 1.3.3 (ensemble de départ, ensemble d'arrivée). Soit $s \in B_n$ une tresse simple. On appelle *ensemble de départ de s* l'ensemble $S(s) = \{i, \sigma_i \preccurlyeq s\}$ et *ensemble d'arrivée de s* l'ensemble $F(s) = \{i, s \succcurlyeq \sigma_i\}$.

Remarque 1.3.4. Deux tresses simples s_1 et s_2 sont pondérées à gauche si et seulement si $S(s_2) \subset F(s_1)$.

Remarque 1.3.5. Soit s une tresse simple, et π la permutation associée à s . Alors $i \in S(s)$ si et seulement si $\pi(i) > \pi(i+1)$, et $i \in F(s)$ si et seulement si $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(i+1)$.

Proposition 1.3.6. Soit $x \in \mathcal{B}_n$. Il existe une unique décomposition $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ ($p \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$) telle que x_1, \dots, x_r sont des éléments simples distincts de Δ et de 1, et telle que pour tout $i = 1, \dots, r-1$, x_i et x_{i+1} sont pondérés à gauche.

Définition 1.3.7 (forme normale à gauche). Dans la proposition précédente, l'écriture $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ s'appelle *forme normale à gauche* de x , p est appelé l'*infimum* de x et noté $\inf x$, $p+r$ est le *suprémum* de x et noté $\sup x$, et r est appelé *longueur canonique* de x et noté $\ell_c(x)$.

En outre, on note $\iota(x) = \tau^{-p}(x_1)$ le *facteur initial* de x ($\iota(x) = x_1$ si p est pair, $\iota(x) = \Delta x_1 \Delta^{-1}$ si p est impair), et $\phi(x) = x_r$ son *facteur final*.

Définition 1.3.8 (ensemble super-sommital). Soit $x \in \mathcal{B}_n$. On appelle *ensemble super-sommital* de x (en abrégé, SSS, comme « super summit set ») l'ensemble des conjugués de x de longueur canonique minimale. On le note $SSS(x)$.

De manière évidente, si x et y sont conjugués, ils ont le même ensemble super-sommital : un tel ensemble est appelé *invariant de conjugaison*.

Définition 1.3.9 (cyclage, décyclage). Soient $x \in \mathcal{B}_n$ et $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ sa forme normale. Si $r \geq 1$, on définit

- le *cyclage* de x par $\iota(x)^{-1}x\iota(x) = \Delta^p x_2 \cdots x_r x'_1$,
- le *décyclage* de x par $\phi(x)x\phi(x)^{-1} = \Delta^p x'_r x_1 \cdots x_{r-1}$,

avec $x'_1 = \iota(x)$ ie $x'_1 = x_1$ ou $x'_1 = \tau(x_1)$, et $x'_r = \phi(x)$ ie $x'_r = x_r$ ou $x'_r = \tau(x_r)$, selon la parité de p . Si $r = 0$, le cyclage et le décyclage de x sont égaux à x lui-même.

Une propriété intéressante du cyclage et du décyclage est qu'ils préservent le SSS. En plus de cela, à partir d'une tresse quelconque, on peut obtenir un élément de son SSS en effectuant un nombre fini de cyclages et décyclages [14].

Un autre type de conjugaison est le *glissement cyclique* [19].

Définition 1.3.10 (glissement cyclique). On appelle *préfixe préféré* de x le plus grand préfixe commun à $\iota(x)$ et $\partial\phi(x) = \phi(x)^{-1}\Delta$. Le *glissement cyclique* est défini comme la conjugaison par le préfixe préféré, c'est-à-dire que le glissement cyclique de x est égal à $(\iota(x) \wedge \partial\phi(x))^{-1} \cdot x \cdot (\iota(x) \wedge \partial\phi(x))$.

Intuitivement, réaliser un glissement cyclique revient à « faire passer » le plus de croisements possible du facteur initial au facteur final, de sorte que le facteur final reste une tresse simple.

Le glissement cyclique préserve également l'ensemble super-sommital.

L'opération de glissement cyclique est ultimement périodique, parce qu'il n'augmente pas la longueur de la tresse : cela nous permet de définir un autre invariant de conjugaison [19].

Définition 1.3.11 (ensemble des circuits glissants). On appelle *ensemble des circuits glissants* d'une tresse x (en abrégé SCS, comme « sliding circuit set ») l'ensemble des conjugués de x qui sont des points périodiques du glissement cyclique. On le note $SC(x)$.

Le SCS de x est un sous-ensemble du SSS [19].

Définition 1.3.12 (rigidité). Une tresse x de longueur canonique strictement positive est dite *rigide* si $\phi(x)$ et $\iota(x)$ sont pondérés à gauche, autrement dit, si le glissement cyclique de x est égal à x .

Une tresse rigide, par définition, appartient nécessairement à son SCS, puisqu'elle est un point périodique de période 1 du glissement cyclique.

Chapitre 2

Algorithme de relaxations par la droite et spirales d'un diagramme de courbes

Dans ce chapitre, on considère une tresse comme un élément du groupe modulaire du disque à n trous. Elle peut être représentée par un dessin sur le disque appelé *diagramme de courbes*. Il est facile de construire le diagramme de courbes associé à une tresse. On donne ici un algorithme, dit de *relaxations par la droite*, qui permet de réaliser l'opération inverse : retrouver la tresse, écrite comme mot en des générateurs, à partir du diagramme de courbes. C'est une variante de l'algorithme de transmissions et relaxations écrit par Dynnikov et Wiest dans [13].

L'algorithme de relaxations par la droite nous permet d'établir un lien entre la présence d'une spirale dans le diagramme de courbes, et la présence d'une puissance d'un glissement semi-circulaire dans le mot de tresse correspondant.

2.1 Algorithme de relaxations par la droite

Dans ce chapitre, on note

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1} \quad (2.1)$$

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}. \quad (2.2)$$

Notons que, avec les notations introduites au chapitre précédent, on a $\Sigma_{ij} = \tilde{\delta}_{ij}$ et $\bar{\Sigma}_{ij} = \tilde{\delta}_{ij}^{-1}$. On réservera les notations Σ_{ij} et $\bar{\Sigma}_{ij}$ au cadre des groupes modulaires, et les notations δ_{ij} et $\tilde{\delta}_{ij}$ au cadre des groupes de Garside.

Remarquons que $\sigma_i = \Sigma_{i,i+1} = \bar{\Sigma}_{i,i+1}^{-1}$. (Remarque : quand on écrit un homéomorphisme comme un mot en les σ_i , en les Σ_{ij} ou en les $\bar{\Sigma}_{ij}$, on les écrit dans l'ordre de la composition

d'applications, c'est-à-dire que l'on commence par appliquer le générateur le plus à droite.)

Le disque D_n étant toujours considéré comme étant plongé dans \mathbb{C} , on prolonge les homéomorphismes de D_n (et les éléments du groupe modulaire) à $\mathbb{C} \setminus \{A_1, \dots, A_n\}$, par l'identité sur $\mathbb{C} \setminus D_0$.

Dans tout ce chapitre, les arcs que l'on considérera sont tous sans auto-intersection, tout comme les courbes. Soit \mathcal{E} l'ensemble de courbes défini sur la figure 2.1 : \mathcal{E} est la réunion de $n - 1$ courbes, l'une entourant uniquement le premier trou, la deuxième entourant les deux premiers trous, etc, la dernière entourant les $n - 1$ premiers trous, chacune coupant exactement deux fois le bord de D_0 . On appelle *diagramme de courbes* l'image, à isotopie près, de \mathcal{E} par un élément du groupe modulaire (les isotopies considérées sont l'identité à l'extérieur du disque). On choisira toujours, pour un diagramme de courbes, un représentant qui coupe l'axe réel transversalement, et qui le coupe un nombre minimum de fois.

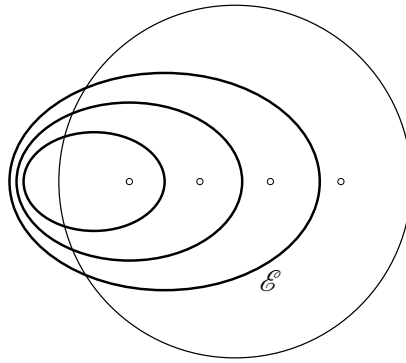


FIG. 2.1 – Le diagramme de courbes trivial \mathcal{E}

L'algorithme de relaxations par la droite, que nous décrivons dans cette section, est une variante de l'algorithme de transmissions-relaxations introduit par Dynnikov et Wiest dans [13]. Il s'agit d'un procédé permettant, étant donné un diagramme de courbes, de retrouver efficacement la tresse qui l'a produit.

Définition 2.1.1. On appelle *arc semi-circulaire* un arc isotope à un demi-cercle, dont les extrémités sont sur \mathbb{R} et qui n'a pas d'autre intersection avec \mathbb{R} .

Définition 2.1.2. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On dit que \mathcal{D} forme un *bigone* avec l'axe réel si une composante connexe de $D_n \setminus (\mathcal{D} \cup \mathbb{R})$ a pour frontière uniquement un segment de \mathbb{R} et un arc semi-circulaire de \mathcal{D} (voir figure 2.2).

Ce segment de \mathbb{R} sera appelé le *bord réel* du bigone, et l'arc de \mathcal{D} sera appelé le *bord semi-circulaire*.

Les extrémités communes du bord réel et du bord semi-circulaire sont appelées les *extrémités* du bigone.

Les deux autres arcs semi-circulaires de \mathcal{D} ayant pour extrémité l'une des extrémités du bigone sont appelées les *branches* du bigone. On appelle *branche gauche* celle qui a pour extrémité commune l'extrémité gauche du bigone, et *branche droite* l'autre.

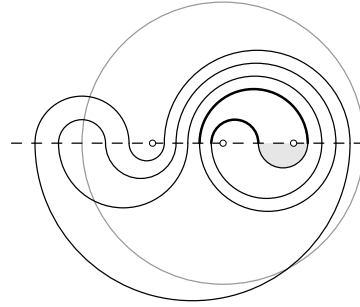


FIG. 2.2 – La partie grisée est un bigone, les deux arcs en gras sont ses branches

Remarque 2.1.3. Comme \mathcal{D} sépare les trous A_1, \dots, A_n , le bord réel d'un bigone contient au plus un trou. Comme, de plus, on suppose toujours que \mathcal{D} a le nombre minimal d'intersections avec \mathbb{R} , il en contient au moins un (sinon on pourrait éliminer le bigone en déformant \mathcal{D}).

Lemme 2.1.4. *Tout diagramme de courbes non trivial admet au moins un bigone.*

Lemme 2.1.5. *Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes, considérons son bigone b situé le plus à droite (voir figure 2.2). Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}$ ses extrémités et P'_1 et P'_2 les autres extrémités de ses branches. Alors $P'_i < P_i$ ($i = 1, 2$) (i.e. l'extrémité P'_i est située à gauche de P_i).*

Démonstration des lemmes 2.1.4 et 2.1.5. Une remarque importante pour démontrer ces deux résultats est la suivante : supposons que le diagramme de courbes \mathcal{D} admette un arc semi-circulaire α , tel que α soit inclus dans D_n . Alors, \mathcal{D} admet un bigone inclus dans le demi-disque délimité par α et l'axe réel. En effet, si α n'est pas lui-même un bigone, c'est qu'il existe un autre sous-arc de \mathcal{D} dans ce demi-disque ; comme le nombre de sous-arcs semi-circulaires de \mathcal{D} est fini, l'un de ces sous-arcs est nécessairement un bigone.

Pour établir le lemme 2.1.4, il suffit maintenant de remarquer que tout diagramme non trivial admet nécessairement un sous-arc semi-circulaire compris dans D_n : au moins l'une des $n - 1$ courbes formant le diagramme admet au moins deux intersections avec \mathbb{R} comprises dans D_n .

Le lemme 2.1.5 s'en déduit également rapidement. Les branches du bigone b sont des arcs semi-circulaires, donc le demi-disque qu'elles délimitent contient au moins un bigone b' . Si l'une de ces branches partait vers la droite, le bigone b' serait situé à droite de b ; or, on a choisi pour b le bigone le plus à droite, c'est donc impossible. \square

Le principe de l'algorithme de relaxations par la droite est d'éliminer un à un les bigones, en éliminant à chaque étape celui situé le plus à droite.

Définition 2.1.6. Soit α un arc semi-circulaire dans D_n , dont l'une des extrémités, A , est un des trous de D_n , et l'autre, B , ne l'est pas. On dit que l'on *fait glisser* A le long de α si l'on applique un homéomorphisme $\psi \circ \phi$ de D_n , où ψ et ϕ sont des homéomorphismes du disque sans trous, tels que :

- (i) ϕ est l'identité hors d'un voisinage U de α , où U ne contient pas d'autre trou de D_n que A ,
- (ii) ϕ envoie A sur B ,
- (iii) ψ envoie $\{\phi(A_1), \dots, \phi(A_n)\}$ sur $\{A_1, \dots, A_n\}$ en préservant l'ordre de ces éléments sur l'axe réel, et en préservant globalement l'axe réel.

Voir la figure 2.3.



FIG. 2.3 – Glissement semi-circulaire

En terme de tresses, un glissement semi-circulaire est homotope à un Σ_{ij} , un $\bar{\Sigma}_{ij}$, un Σ_{ij}^{-1} ou un $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$. Faire glisser le trou A_j « vers la gauche » juste avant le trou A_i pour $j > i$ revient à appliquer Σ_{ij} si l'on fait glisser « par le bas » et $\bar{\Sigma}_{ij}$ si l'on fait glisser « par le haut ». Les glissements « vers la droite » correspondent à Σ_{ij}^{-1} ou $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$.

Définition 2.1.7 (Algorithme de relaxations par la droite). Le déroulement de l'algorithme est le suivant. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes non trivial.

1. Considérons le bigone le plus à droite de \mathcal{D} . D'après la remarque 2.1.3, le segment réel qui le borde contient un unique trou A_j . Notons P' l'extrémité de la branche droite du bigone, qui n'est pas une extrémité du bigone. D'après le lemme 2.1.5, P' est à gauche de A_j .
2. a) Dans le cas où P' est à l'intérieur du disque D_0 , on procède comme suit. Soit α un arc semi-circulaire dont l'une des extrémités est A_j , et l'autre, B , est située juste à droite de P' (*i.e.* il n'y a pas d'autre intersection de \mathcal{D} avec \mathbb{R} , ni de trou, entre B et P'). On fait glisser semi-circulairement A_j le long de α , ce qui permet d'éliminer ce bigone (voir figure 2.4). Pour réaliser ce glissement, on applique un Σ_{ij} ou un $\bar{\Sigma}_{ij}$.
- b) Il peut arriver que l'extrémité P' soit en dehors du disque, dans le cas où la branche droite du bigone est l'un des $2(n - 1)$ arcs semi-circulaires qui coupent

le bord du disque. Dans ce cas, on ne peut pas faire glisser A_j comme ci-dessus, car il sortirait du disque. Au lieu de cela, on le fait glisser jusqu'à un point B qui se trouve juste à gauche de l'extrémité de la branche gauche. Cela permet d'appliquer également un Σ_{ij} ou un $\bar{\Sigma}_{ij}$.

3. Le nouveau diagramme de courbes a au moins deux intersections de moins avec l'axe réel. On recommence jusqu'à obtenir le diagramme trivial.

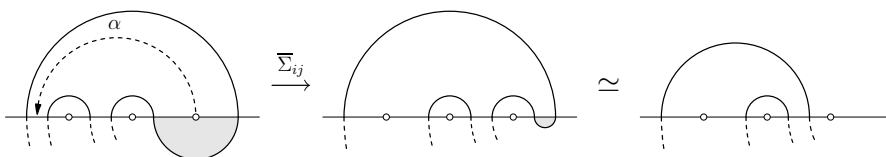


FIG. 2.4 – Glissement permettant d'éliminer un bigone

Au cours de ce processus, on a obtenu une suite d'éléments de la forme Σ_{ij} ou $\bar{\Sigma}_{ij}$. La composition de ces éléments donne une tresse β^{-1} qui est l'inverse de la tresse β telle que $\beta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$. On obtient donc β comme un mot en les Σ_{ij}^{-1} et $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$. Un exemple de l'application de l'algorithme est donné sur la figure 2.5, page 20.

Définition 2.1.8. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes et β la tresse telle que $\beta(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$. Après l'application de l'algorithme, β^{-1} est écrit comme un mot en les Σ_{ij} et $\bar{\Sigma}_{ij}$. Le mot en les Σ_{ij}^{-1} et $\bar{\Sigma}_{ij}^{-1}$ obtenu en inversant cette écriture est appelé *forme normale de relaxations par la droite* de la tresse β .

2.2 Spirales

2.2.1 Suites d'intersections

Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple dans D_n . Quitte à remplacer \mathcal{C} par une courbe isotope, on peut supposer qu'elle coupe \mathbb{R} transversalement et un nombre minimal de fois. Soit l le nombre d'intersections de \mathcal{C} et \mathbb{R} . Après avoir choisi un point de départ sur \mathcal{C} et un sens de parcours, on peut lui associer une suite $[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l]$, définie de la manière suivante. Lorsque l'on parcourt \mathcal{C} , à partir du point de départ choisi, et dans le sens choisi, on coupe une première fois l'axe réel entre un trou i et le trou $i + 1$ (resp. à gauche du premier trou, ou à droite du dernier trou); si le point de départ est déjà situé sur l'axe réel, on le considère comme la première intersection. On pose alors $i_1 = i$ (resp. $i_1 = 0$ ou $i_1 = n$), et $s_1 = \downarrow$ si on a coupé \mathbb{R} du haut vers le bas, $s_1 = \uparrow$ si on a coupé \mathbb{R} du bas vers le haut. On définit de même i_2 et s_2 lors de la deuxième intersection, puis i_3 et s_3 , etc. On s'arrête lorsqu'on est revenu au point de départ (qui, s'il est sur l'axe réel, n'est pas considéré comme la dernière intersection, afin de ne tenir compte de ce point qu'une

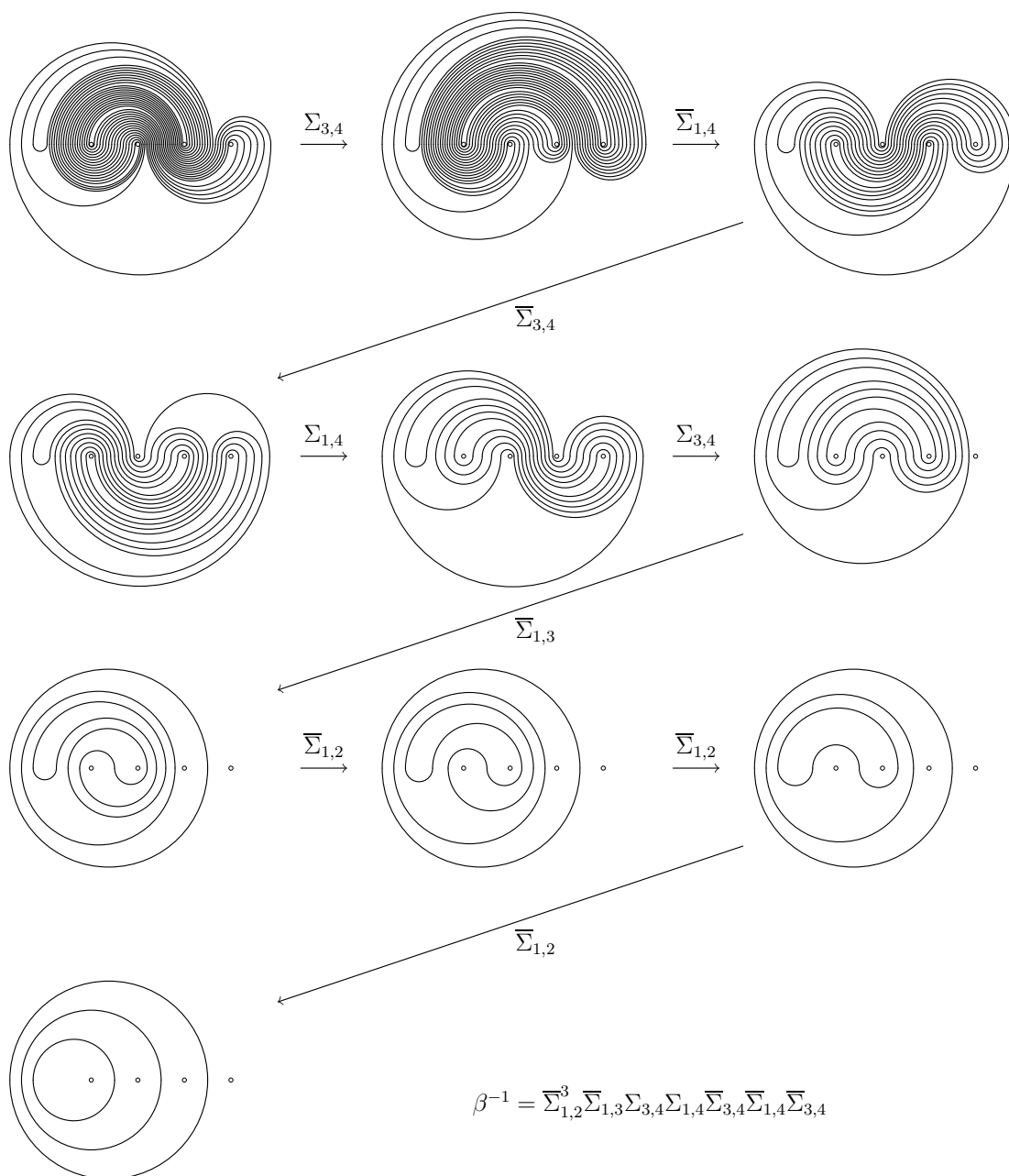


FIG. 2.5 – Algorithme appliqué à la tresse $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^4$

seule fois dans la suite). Cette suite, appelée *suite d'intersections*, détermine entièrement \mathcal{C} à isotopie près.

Remarque. On pourrait ne préciser que s_1 . En effet, \downarrow et \uparrow sont nécessairement alternés. Pour une courbe fermée simple, l est toujours pair.

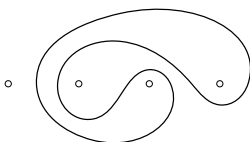


FIG. 2.6 – Une suite d'intersections de la courbe ci-dessus est $[1, \uparrow], [4, \downarrow], [3, \uparrow], [1, \downarrow], [2, \uparrow], [3, \downarrow]$.

Remarque 2.2.1. Si l'on choisit un autre point de départ, les $[i_j, s_j]$ seront simplement permutés circulairement. Si l'on choisit l'autre sens de parcours, l'ordre des i_j sera inversé et les \downarrow et \uparrow changés l'un en l'autre. On identifie de telles suites d'intersections qui sont associées à la même courbe.

Définition 2.2.2. On dit qu'une courbe \mathcal{C} est *ronde* si elle admet une suite d'intersections de la forme $[i_1, \downarrow], [i_2, \uparrow]$.

On définit de manière similaire une suite d'intersections d'un arc connexe d'extrémités distinctes ; mais dans ce cas, on choisit nécessairement comme point de départ l'une des extrémités de l'arc, et le sens de parcours se déduit de ce choix. Il n'y a donc que deux choix possibles. En outre, contrairement au cas d'une courbe fermée, si la dernière extrémité de l'arc est située sur l'axe réel, elle est comptée dans la suite d'intersections, car elle est distincte de la première extrémité.

2.2.2 Arc de spirale, spirale

Définition 2.2.3. Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple. On appelle *arc de spirale de support* \mathcal{S} un arc connexe \mathcal{S} vérifiant les conditions suivantes. Les extrémités de \mathcal{S} sont distinctes, et l'une des suites d'intersections $[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l]$ de \mathcal{C} est telle que l'une des suites d'intersections de \mathcal{S} est de la forme

$$[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l], [i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l], \dots, [i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l], [i_1, s_1], \dots, [i_r, s_r],$$

avec $0 \leq r < l$, où la chaîne $[i_1, s_1], \dots, [i_l, s_l]$ est répétée k fois ($k \geq 2$), puis est éventuellement suivie à nouveau de quelques uns des premiers termes (voir figure 2.7).

Intuitivement, l'arc de spirale \mathcal{S} fait k fois le tour de \mathcal{C} . Si k est le nombre maximal de répétitions, on parlera aussi de k -arc de spirale.

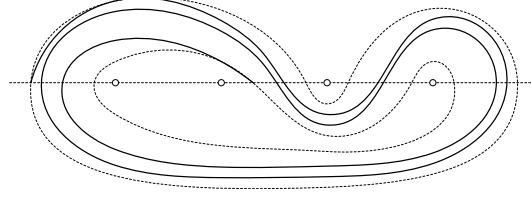


FIG. 2.7 – Un 2-arc de spirale dont le support est la courbe de suite d'intersections $[2, \downarrow]$, $[3, \uparrow]$, $[4, \downarrow]$, $[0, \uparrow]$.

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On associe à \mathcal{D} les $n-1$ suites d'intersections associées à chacune des $n-1$ courbes fermées constituant \mathcal{D} , en notant -1 l'intersection de chacune de ces courbes qui est située à l'extérieur du disque D_n .

La famille ordonnée des $n-1$ suites d'intersections d'un diagramme de courbes \mathcal{D} sera notée $SI(\mathcal{D})$. Par exemple,

$$SI(\mathcal{E}) = (([-1, \uparrow], [1, \downarrow]); ([-1, \uparrow], [2, \downarrow]); \dots; ([-1, \uparrow], [n-1, \downarrow]))$$

Si $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$, alors $SI(\mathcal{D}_1) \neq SI(\mathcal{D}_2)$, et il est facile de dessiner un diagramme de courbes \mathcal{D} si l'on connaît $SI(\mathcal{D})$.

Remarque 2.2.4. Par défaut, on fera commencer chacune des $n-1$ suites d'intersections par $[-1, \uparrow]$. Pour alléger les notations, on notera parfois simplement $[i]$ à la place de $[i, \downarrow]$ ou $[i, \uparrow]$ (une fois que l'on a fixé l'un des symboles \downarrow ou \uparrow , les autres s'en déduisent, car les deux symboles sont alternés dans chaque suite). On notera également simplement $[i]$ même lorsqu'il ne s'agit pas de courbes d'un diagramme de courbes, si le contexte indique clairement le choix d'orientation.

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. Si l'on se donne un sous-arc de \mathcal{D} , sa suite d'intersections se lit comme une sous-suite d'éléments consécutifs d'une des $n-1$ suites d'intersections de \mathcal{D} . En particulier, \mathcal{D} admet des arcs de spirale si une de ses suites d'intersections contient une répétition successive d'un motif $[i_1], \dots, [i_l]$.

Lemme 2.2.5. *Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On suppose qu'une des suites d'intersections de $SI(\mathcal{D})$ contient une période de la forme*

$$[i_1], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l], \quad (2.3)$$

où la chaîne $[i_1], \dots, [i_l]$ est la plus courte possible ($l \geq 2$) et est répétée $k \geq 2$ fois (k maximal). Alors, si $[i'_1], \dots, [i'_l]$ représente la même courbe fermée que $[i_1], \dots, [i_l]$, toute période de la forme

$$[i'_1], \dots, [i'_l], [i'_1], \dots, [i'_l], \dots, [i'_1], \dots, [i'_l], \quad (2.4)$$

contenue dans une des suites d'intersection de $SI(\mathcal{D})$ est de longueur au moins $k-1$.

Démonstration. Si une suite d'intersections contient une période

$$[i_1], \dots, [i_l], [i_1] \dots, [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l]$$

de longueur k , cela signifie que la courbe correspondante contient un k -arc de spirale autour de la courbe de suite d'intersections $[i_1], \dots, [i_l]$. Tout autre arc de spirale de \mathcal{D} autour de la même courbe est entrelacé avec celui-ci sans le couper, donc est au moins un $(k-1)$ -arc de spirale, c'est-à-dire qu'il admet une période de la forme (2.4) de longueur au moins $k-1$. \square

Définition 2.2.6. Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes admettant un arc de spirale de support \mathcal{C} . On appelle *spirale de \mathcal{D}* la réunion de tous les arcs de spirale de support \mathcal{C} du diagramme. On définit le *nombre de tours* de la spirale comme étant le nombre de tours minimal des arcs qui la composent.

Remarque 2.2.7. D'après le lemme 2.2.5, si k est le nombre de tours d'une spirale, ses arcs de spirale sont soit des k -arcs, soit des $(k+1)$ -arcs, et au moins l'un d'eux est un k -arc.

Soit \mathcal{S} une spirale dans un diagramme \mathcal{D} ; donnons quelques précisions sur la manière dont ses arcs de spirale $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ apparaissent dans $SI(\mathcal{D})$. Chacun de ces m arcs est visible dans $SI(\mathcal{D})$ sous forme d'une chaîne de la forme

$$[i_r], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l], [i_1], \dots, [i_r] \quad (2.5)$$

ou

$$[i_{r'}], \dots, [i_1], [i_l], \dots, [i_1], [i_l], \dots, [i_1], \dots, [i_l], \dots, [i_1], [i_l], \dots, [i_r], \quad (2.6)$$

où $[i_1], \dots, [i_l]$ est une suite d'intersections fixée de \mathcal{C} ; on choisit les r et r' de sorte que ces chaînes soient les plus longues possibles.

Plus précisément, quitte à intervertir les deux sens, toute chaîne dans le sens (2.5) est suivie d'une chaîne dans le sens (2.6), les deux étant séparées par des intersections $[\tilde{z}]$ comprises à l'intérieur de la courbe \mathcal{C} .

Définition 2.2.8. Un arc de spirale correspondant à une chaîne dans le sens (2.5) est appelé *arc de spirale entrant*. Un arc de spirale correspondant à une chaîne dans le sens (2.6) est appelé *arc de spirale sortant*.

Voici un exemple illustrant cela. Les suites d'intersections du diagramme représenté sur

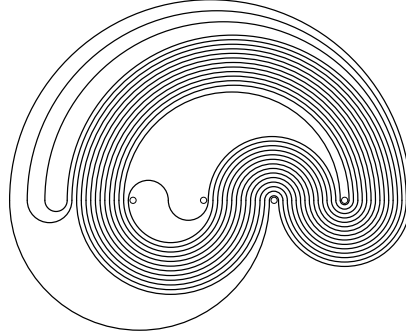


FIG. 2.8 – Exemple

la figure 2.8 sont

$$\begin{aligned}
 &((-1), \underbrace{[4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3]}, \\
 &\hspace{20em} \underbrace{[0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0]} \\
 &((-1), \underbrace{[4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [0], [4], [3], [2], [1]}, \\
 &\hspace{20em} \underbrace{[0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0], [2], [3], [4], [0]} \\
 &((-1), [4], [3], [2]).
 \end{aligned}$$

Il y a une spirale ayant pour support la courbe \mathcal{C} de suite d'intersections $([4], [3], [2], [0])$, composée de quatre arcs de spirale, indiqués ci-dessus par des accolades. Ce sont des 3-arcs de spirale. Deux d'entre eux apparaissent dans la première suite, directement l'un après l'autre. Les deux autres apparaissent dans la deuxième suite, séparés par une intersection de type [1]. Parmi ces quatre arcs, les deux apparaissant en premier dans chacune des deux suites sont des arcs entrants. Les deux autres sont des arcs sortants.

2.3 Effet de l'algorithme sur les spirales

Dans la première section est décrit un algorithme qui simplifie un diagramme de courbes \mathcal{D} à l'aide d'un élément du groupe modulaire de D_n . Le but du théorème 2.3.11 est de déterminer l'action de cet algorithme sur les spirales de \mathcal{D} .

2.3.1 Multibigone

Définition 2.3.1 (Multibigone). Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On appelle multibigone une famille d'arcs semi-circulaires de \mathcal{D} vérifiant les conditions suivantes.

- Ces arcs sont tous du même côté de l'axe réel.
- L'intersection de gauche de chacun de ces arcs est entre les deux mêmes trous A_{i-1} et A_i .
- Aucun des demi-disques délimités par ces arcs ne contient d'autre arc du diagramme que ceux de la famille.
- La famille est maximale à vérifier ces conditions.

Sur l'exemple de la figure 2.9, les multibigones d'un diagramme de courbe sont grisés.

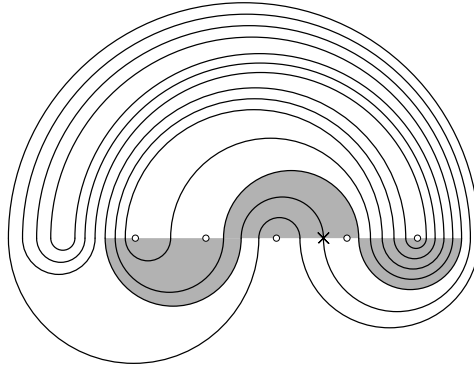


FIG. 2.9 – Les multibigones du diagramme de $\sigma_3\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3$ et la limite de sécurité

Remarque. Chaque multibigone contient un unique bigone, et chaque bigone est contenu dans un unique multibigone.

2.3.2 Intervalle de sécurité

Définition 2.3.2 (intervalle de sécurité). Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. On appelle *intervalle de sécurité* l'ensemble des intersections de \mathcal{D} avec l'axe réel situées strictement à gauche du multibigone le plus à droite de \mathcal{D} . On appelle *limite de sécurité* l'extrémité droite de l'intervalle de sécurité.

La limite de sécurité est représentée par une croix sur l'exemple de la figure 2.9.

Lemme 2.3.3. On note $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ les éléments de l'intervalle de sécurité. Soit $\tilde{\Sigma}_{ij}$ le glissement semi-circulaire réalisé lors de l'algorithme de relaxations par la droite. Il existe un homéomorphisme φ de la classe d'isotopie de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ tel que $\varphi(\mathcal{D})$ est toujours en position minimale, $\varphi(x_i) \in \mathbb{R}$ pour tout i , et $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \dots < \varphi(x_N)$. (Autrement dit, l'action de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ préserve l'ordre des intersections dans l'intervalle de sécurité.)

Démonstration. Les effets du glissement semi-circulaire sont les suivants : aucune nouvelle intersection n'est créée, et dans la famille de suites d'intersections du diagramme, celles

de type $j - 1$ et j qui se suivent sont supprimées. Les éléments de l'intervalle de sécurité sont situées strictement à gauche des intersections supprimées; avec les notations de la définition 2.1.6, le glissement semi-circulaire que l'on applique est de la forme $\psi \circ \phi$, où $\phi(x_i) = x_i$ pour i de 1 à N , et les $\psi(x_i)$ sont toujours alignés sur l'axe réel, dans le même ordre. \square

Lemme 2.3.4. *On numérote les intersections de \mathcal{D} avec \mathbb{R} de la gauche vers la droite. Soit N le numéro de la limite de sécurité. Alors N décroît (au sens large) au cours de l'algorithme de relaxations par la droite.*

Démonstration. Comme aucune intersection n'est formée au cours de l'algorithme, aucun multibigone ne peut apparaître plus à droite de celui qui était le plus à droite à l'étape précédente. Donc à aucun moment, N ne peut croître strictement. \square

2.3.3 Orientation d'une spirale

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbe contenant une spirale de support une courbe \mathcal{C} . On peut définir l'orientation d'une telle spirale, il y a deux orientations possibles, que l'on appellera *directe* et *indirecte*. Voici plusieurs manières équivalentes de les définir.

- Définition 2.3.5** (orientation d'une spirale). **1.** L'orientation de la spirale est *directe* si, en appliquant un twist de Dehn autour de \mathcal{C} , on obtient une spirale (toujours de support \mathcal{C}) ayant un tour de plus. Elle est *indirecte* si on obtient un tour de moins.
- 2.** L'orientation de la spirale est *directe* si ses arcs de spirale entrants sont orientés dans le sens inverse du sens trigonométrique, et ses arcs de spirale sortants sont orientés dans le sens trigonométrique. Elle est *indirecte* dans le cas contraire.

2.3.4 Base gauche d'une spirale

On conserve les notations de la sous-section précédente. Notons $[i_1], \dots, [i_l]$ la suite d'intersections de \mathcal{C} telle que i_1 est l'intersection la plus à gauche de \mathcal{C} avec l'axe réel, en notant les intersections dans le sens horaire si la spirale est d'orientation directe, et dans le sens trigonométrique si la spirale est d'orientation indirecte. Ainsi, dans $SI(\mathcal{D})$, les arcs de spirale apparaissent sous la forme

$$\underbrace{[i_s], \dots, [i_l]}_{\text{arc entrant}}, \underbrace{[i_1], \dots, [i_l]}_{\text{arc sortant}}, \dots, \underbrace{[i_1], \dots, [i_l]}_{\text{arc entrant}}, \underbrace{[i_1], \dots, [i_r]}_{\text{arc sortant}}, [\cdot], \dots, [\cdot],$$

$$\underbrace{[i_{r'}], \dots, [i_1]}_{\text{arc entrant}}, \underbrace{[i_l], \dots, [i_1]}_{\text{arc sortant}}, \dots, \underbrace{[i_l], \dots, [i_1]}_{\text{arc entrant}}, \underbrace{[i_l], \dots, [i_{s'}]}_{\text{arc sortant}}$$

Définition 2.3.6 (base gauche d'une spirale). On appelle *base gauche de la spirale* l'ensemble des intersections de \mathcal{D} avec l'axe réel correspondant aux occurrences de $[i_1]$ dans chacune des suites des arcs de spirale.

Remarque. Attention : la courbe \mathcal{C} peut avoir plusieurs intersections du même type que l'intersection la plus à gauche (c'est le cas de la courbe représentée sur la figure 2.6, page 21). Sur la suite d'intersections de \mathcal{C} , cela signifie qu'un des i_j ($j \neq 1$) est égal à i_1 . Les intersections correspondantes de la spirale *ne font pas partie* de la base gauche de la spirale.

La figure 2.10 représente un diagramme de courbe admettant une spirale de support la courbe de suite d'intersections $[1], [4], [3], [1], [2], [3]$. La famille de suites d'intersections de ce diagramme est

$$\begin{aligned}
 &([-1], [1]) \\
 &([-1], [4], [3], [1], [2], [3], \mathbf{[1]}, [4], [3], [1], [2], [3], \mathbf{[1]}, [4], [3], [1], [2], [3], \mathbf{[1]}, [3], [4], \\
 &\qquad\qquad\qquad \mathbf{[1]}, [3], [2], [1], [3], [4], \mathbf{[1]}, [3], [2], [1], [3], [4], \mathbf{[1]}) \\
 &([-1], [4], [3], [1], [2], [3])
 \end{aligned}$$

où on a écrit en gras les intersections de la base gauche de la spirale. Celles-ci sont représentées par des étoiles sur la figure 2.10.

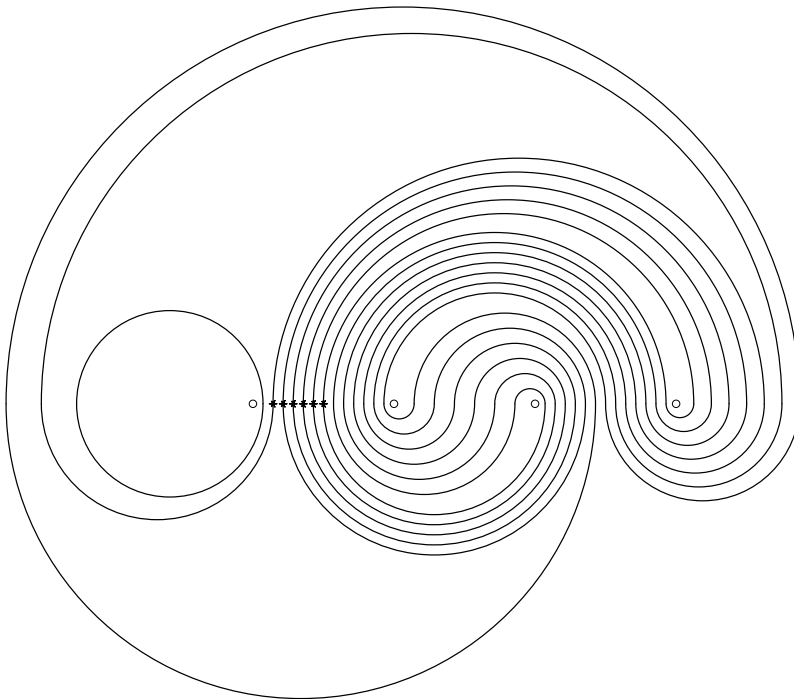


FIG. 2.10 – La base gauche d'une spirale

2.3.5 Limite de sécurité et base gauche au cours de l'algorithme

Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes admettant une spirale. En numérotant les intersections avec \mathbb{R} de la gauche vers la droite, soit n_1 le numéro de l'extrémité droite de la base gauche de cette spirale.

On exécute l'algorithme de relaxations par la droite sur le diagramme \mathcal{D} , et on numérote les étapes à l'aide d'un paramètre t : on passe d'une étape à la suivante par le glissement semi-circulaire qui élimine le bigone le plus à droite. On note $N(t)$ le numéro de la limite de sécurité du diagramme à l'étape t . (Le paramètre n_1 , lui, est fixé, et ne restera donc pas tout au long de l'algorithme l'extrémité de la base gauche d'une spirale.)

On rappelle que $N(t)$ décroît lorsque t augmente. Soit t_0 le temps tel que $N(t_0 - 1) > n_1$ et $N(t_0) \leq n_1$. Appelons G la base gauche de la spirale dans le diagramme de courbes initial. D'après le lemme 2.3.3, jusqu'au temps t_0 , les intersections dans G sont transformées étape par étape, si l'on choisit bien le représentant du glissement semi-circulaire, en des intersections qui sont toujours numérotées de la même façon le long de l'axe réel. Par un léger abus de notation, on appelle toujours G l'ensemble de ces intersections, à chaque étape de l'algorithme.

Définition 2.3.7. On dit qu'une spirale est en forme *quasi-minimale* si elle est de la forme présentée sur la figure 2.11, dont on détaille les propriétés ci-dessous.

- La spirale est ronde, de support $[i_1], [i_2]$.
- Ce qui est représenté sous forme d'une bande grisée, que nous appellerons *bande épaisse*, contient des sous-arcs du diagramme, qui sont des arcs de spirale auxquels on a retiré au plus une portion semi-circulaire (entre des intersections de type i_1 et de type i_2) à l'intérieur de la spirale, et au plus une à l'extérieur, et ajouté au plus une portion semi-circulaire, reliant des intersections de type i_2 et de type $i_1 - 1$, ou $i_1 - 2$, etc., à l'extérieur, et au plus une reliant des intersections de type i_2 et de type $i_1 + 1$, ou $i_1 + 2$, etc., à l'intérieur de la spirale. Les intersections avec \mathbb{R} contenues dans le segment sur le bord de la bande épaisse représenté en gras constituent des intersections consécutives du diagramme de courbes.
- La bande épaisse ne contient aucun trou sauf éventuellement sur ses bords libres (les deux portions du segment en gras qui ne touchent que la partie supérieure ou que la partie inférieure de la bande), comme on en a représenté en guise d'exemple sur la figure 2.11.
- À l'intérieur de la spirale et à droite du bord libre de la bande épaisse, il y a seulement un multibigone et une portion de ses branches (les branches d'un multibigone étant définies de manière similaire à celles d'un bigone).

Lorsque l'on part d'un diagramme \mathcal{D} quelconque présentant une spirale, étudions la manière dont cette spirale est transformée au cours de l'algorithme. Regroupons dans une bande, que nous appellerons *bande étroite*, les arcs de spirale auxquels on a retiré, le cas échéant, à l'intérieur, la portion depuis leur dernière intersection dans G , et à l'extérieur, la

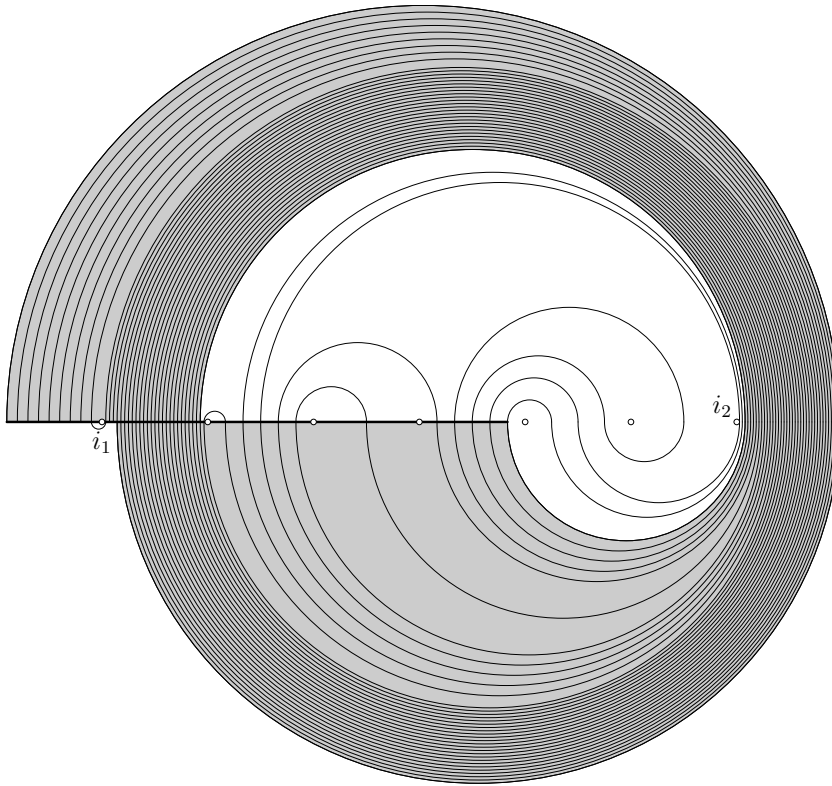


FIG. 2.11 – Spirale en forme quasi-minimale

portion jusqu'à leur première intersection dans G : on retire l'une ou l'autre de ces portions si elle ne fait pas un tour complet autour de \mathcal{C} . (De la sorte, pour chaque arc de spirale, on a enlevé au plus un tour autour de \mathcal{C}). Voir figure 2.12. La base gauche de la spirale est exactement l'ensemble des intersections contenues dans la réunion des deux « bords » de la spirale, dessinés en gras. Tant que cette base gauche est comprise dans l'intervalle de sécurité, cela fait sens de considérer l'image à chaque étape de l'algorithme de la bande grisée, ainsi que de la courbe support \mathcal{C} . Il est possible qu'au cours de cet algorithme, des trous soient amenés sur l'un ou l'autre des bords libres de la bande (qui n'est donc plus la bande étroite de la spirale), mais ils n'en bougent plus par la suite, tant que G (qui est toujours l'ensemble des intersections sur le « bord » de la bande) est inclus dans l'intervalle de sécurité. La bande grisée contient, à chacune de ces étapes, autant d'arcs que la spirale de départ contient d'arcs de spirale.

Proposition 2.3.8. *Au temps t_0 , la spirale initiale et sa bande étroite ont été transformées en une spirale en forme quasi-minimale et sa bande épaisse.*

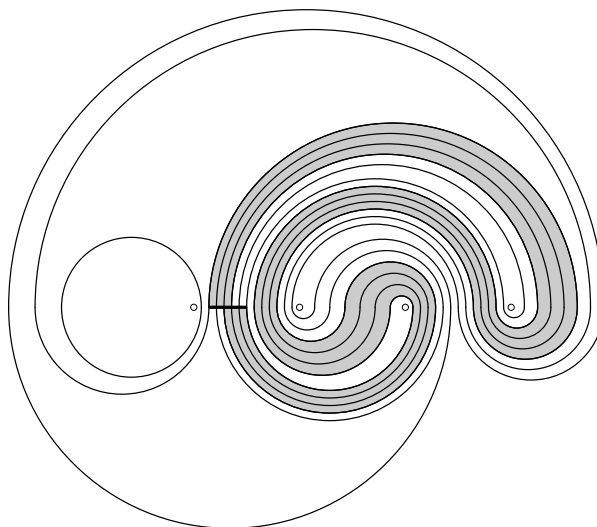


FIG. 2.12 – Bande étroite regroupant des arcs de spirale

La figure 2.13 montre l'exécution de l'algorithme sur l'exemple précédent. La spirale et sa bande étroite visibles à l'étape 1 ont été transformées à l'étape 3 en une spirale en forme quasi-minimale et sa bande épaisse (la spirale est même en *forme minimale*, dont la définition sera donnée plus loin).

Démonstration. Étudions les positions possibles du multibigone M_0 le plus à droite au temps t_0 .

Supposons que la courbe au temps t_0 ne soit pas ronde. Alors elle coupe l'axe réel au moins quatre fois, et deux intersections consécutives sont toujours séparées par au moins un trou. De plus, le diagramme de courbes admet un bigone inclus dans le bigone le plus à droite de la courbe. Ceci n'est pas possible : le multibigone contenant ce bigone serait séparé de G par au moins un trou et une intersection (voir figure 2.14), et N ne pourrait pas être dans ou à gauche de G .

Un argument similaire montre que M_0 est nécessairement à l'intérieur de la spirale : si ce n'était pas le cas, il serait à droite de la spirale, et alors N ne pourrait pas être plus à gauche que l'intersection la plus à droite de la spirale avec l'axe réel.

Ainsi, la courbe est ronde et la bande est en forme de coquille d'escargot. Supposons, pour fixer les idées, que la spirale est orientées de manière directe (coquille d'escargot « vers le haut » comme sur la figure 2.15). Le cas du sens indirect sera analogue.

Supposons que M_0 soit au dessus de l'axe réel. Il y a alors trois possibilités (figure 2.16) : le bigone B_0 contenu dans M_0 a soit ses deux extrémités dans G , soit exactement une, soit aucune. Le demi-disque de bord l'arc semi-circulaire en gras contient au moins

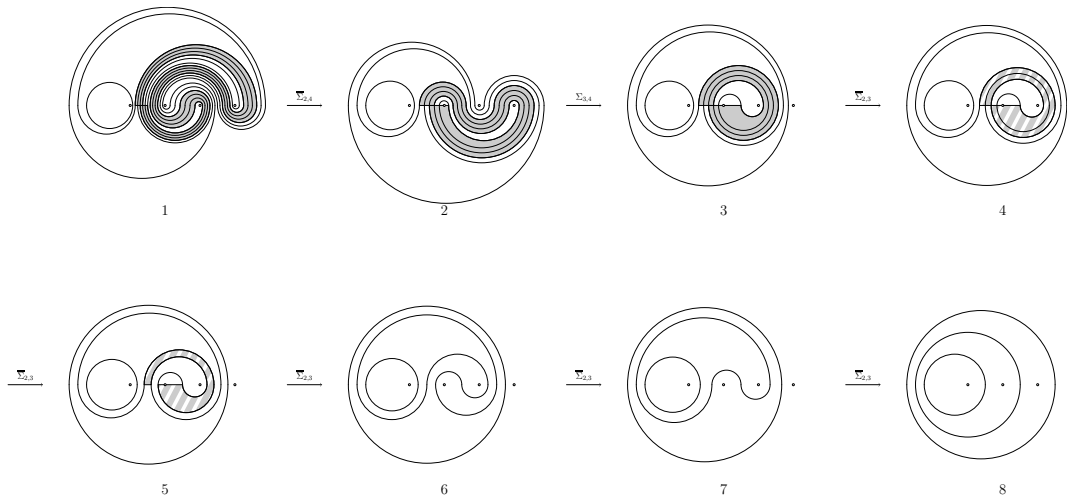


FIG. 2.13 – Transformation de la spirale au cours de l'algorithme

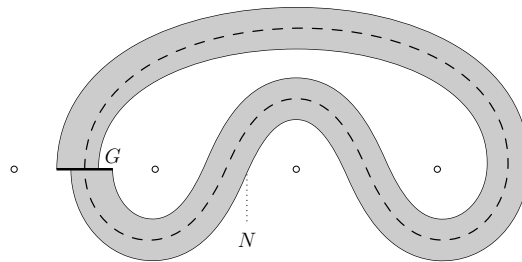


FIG. 2.14 – Lorsque la courbe \mathcal{C} n'est pas ronde, N ne peut pas être plus à gauche que la position indiquée.

un bigone. Dans les deux premiers cas, celui-ci serait à droite de B_0 , donc ces deux cas sont impossibles. Dans le troisième cas, pour qu'il n'y ait pas de bigone à droite de B_0 , la situation doit être de la forme présentée dans la figure 2.16, où $N(t_0) > n_1$. Ce cas est donc également impossible.

Donc, M_0 est en dessous de l'axe réel.

Compte tenu du fait que deux trous ne peuvent pas se trouver dans la même composante connexe de $D_0 \setminus \mathcal{D}$, on en déduit que \mathcal{D} est de l'une des deux formes de la figure 2.17 (toutes deux quasi-minimales). Dans le deuxième cas, la portion de bord intérieur sous l'axe réel fait également partie du multibigone, ainsi que d'éventuelles portions semi-circulaires parallèles à celui-ci situées dans la bande grise. Le multibigone pourrait même être réduit à ces seuls arcs semi-circulaires (dans ce cas, on parle même de forme minimale, voire la définition

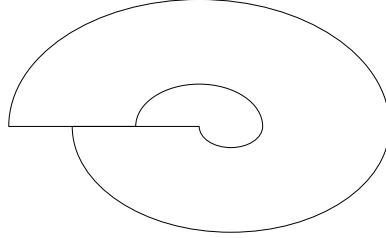
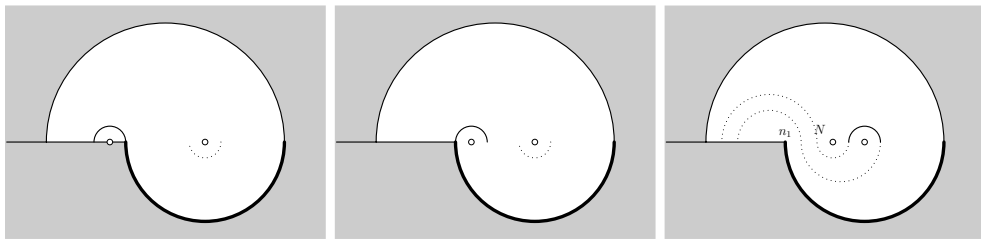


FIG. 2.15 – Spirale orientée dans le sens direct

FIG. 2.16 – Possibilités dans le cas où M_0 est vers le haut

2.3.9 ci-dessous). La zone masquée par un rectangle noir peut contenir plusieurs trous et arcs semi-circulaires. Ces deux cas sont compatibles avec l'hypothèse $N(t_0) \leq n_1$ et $N(t_0 - 1) > n_1$. \square

Définition 2.3.9. (On donne la définition dans le cas où la spirale est d'orientation positive, l'autre cas s'en déduit par symétrie.) On appelle forme minimale une forme quasi-minimale où, d'une part, le multibigone est réduit à la portion de bord intérieur représentée en gras sur la figure 2.18 et aux éventuels arcs semi-circulaires parallèles (*i.e.* d'extrémités du même type) situés dans la bande épaisse, et d'autre part, la branche droite du bigone coïncide avec la portion semi-circulaire du bord intérieur située au dessus de l'axe réel.

Si la spirale n'est pas en forme minimale au temps t_0 , elle l'est cependant au temps $t_0 + t$, où t est le nombre de trous dans le multibigone dans le cas de la figure 2.17(a), et un de moins que ce nombre dans le cas de la figure 2.17(b). Les étapes correspondantes de l'algorithme sont celles de la figure 2.19. Au cours de ces étapes, la bande épaisse reste inchangée (à renormalisation près, *i.e.* écartement des trous vers la droite), et elle contient toujours un nombre d'arcs égal au nombre d'arcs de spirale de la spirale de départ. En particulier, le bord de la bande épaisse contient toujours exactement les intersections dans G , la base gauche de la spirale initiale.

Notons $t_1 = t_0 + t$ cette étape, et M_1 le multibigone (qui, rappelons-le, est composé des arcs parallèles au bigone le plus à droite).

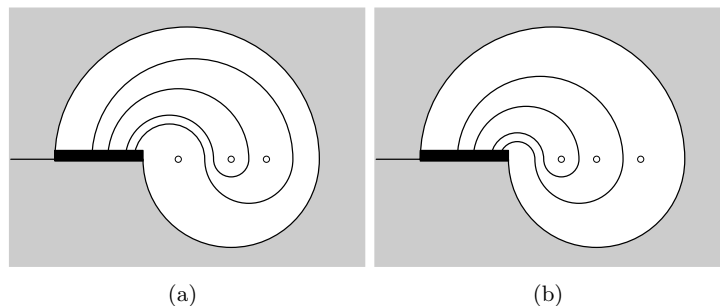


FIG. 2.17 – Les deux formes quasi-minimales possibles

Étudions à présent ce qu'il se passe dans la suite de l'algorithme. La première remarque est la suivante.

Remarque 2.3.10. Lorsque la spirale est en forme minimale, l'algorithme applique à l'étape suivante $\tilde{\Sigma}_{ij}$ (égal à Σ_{ij} si la spirale est orientée de manière indirecte, $\bar{\Sigma}_{ij}$ si elle est directe), où les trous intérieurs à la spirale sont ceux de A_i à A_j .

Ceci est une conséquence du fait que la branche droite du bigone coïncide avec la portion de bord intérieur située au-dessus (cas direct) ou au-dessous (cas indirect) de l'axe réel.

Ainsi, à l'étape $t_1 + 1$, si la spirale était « assez large », dans un sens qui sera clarifié plus tard, on obtient à nouveau une spirale en forme minimale « un peu moins large ».

Plus précisément : à l'étape t_1 , le bord de la bande épaisse contient exactement les intersections dans G . À l'étape $t_1 + 1$, on obtient une spirale en forme minimale dont la bande épaisse correspondante a pour bord un intervalle dont on note G_1 l'intersection avec \mathcal{D} ; le nombre d'intersections dans G_1 est égal au nombre d'intersections dans G auquel on a soustrait le nombre d'arc composant M_1 : voir figure 2.20, sur laquelle le multibigone M_1 et ses branches à l'étape t_1 sont représentés en gras, ainsi que leur image à l'étape $t_1 + 1$. La zone masquée par un rectangle noir peut contenir plusieurs trous et arcs semi-circulaires. On peut se référer aussi à l'exemple de la figure 2.13 : la bande épaisse, grisée à l'étape 3, a perdu un tour à l'étape 4, sur laquelle elle a été hachurée.

À l'issue de cette étape, les arcs de spirale qui contenaient le multibigone ont perdu un tour. Tant que la spirale est « assez large », ce processus est réitéré, et donc, dans l'algorithme, cela correspond à appliquer une certaine puissance de $\tilde{\Sigma}_{ij}$. À chaque étape, des arcs de spirale perdent un tour, et ce à tour de rôle (il y a toujours au plus un tour d'écart entre deux arcs de la spirale). Vient un moment où les arcs n'ont plus qu'un tour au maximum. À ce moment, les deux « bords » de la bande épaisse deviennent disjoints (figure 2.21(b) ; voir aussi l'étape 5 de la figure 2.13), la spirale n'est pas « assez large », et ce n'est plus nécessairement $\tilde{\Sigma}_{ij}$ qui sera appliqué à l'étape suivante. Notons t_2 ce moment.

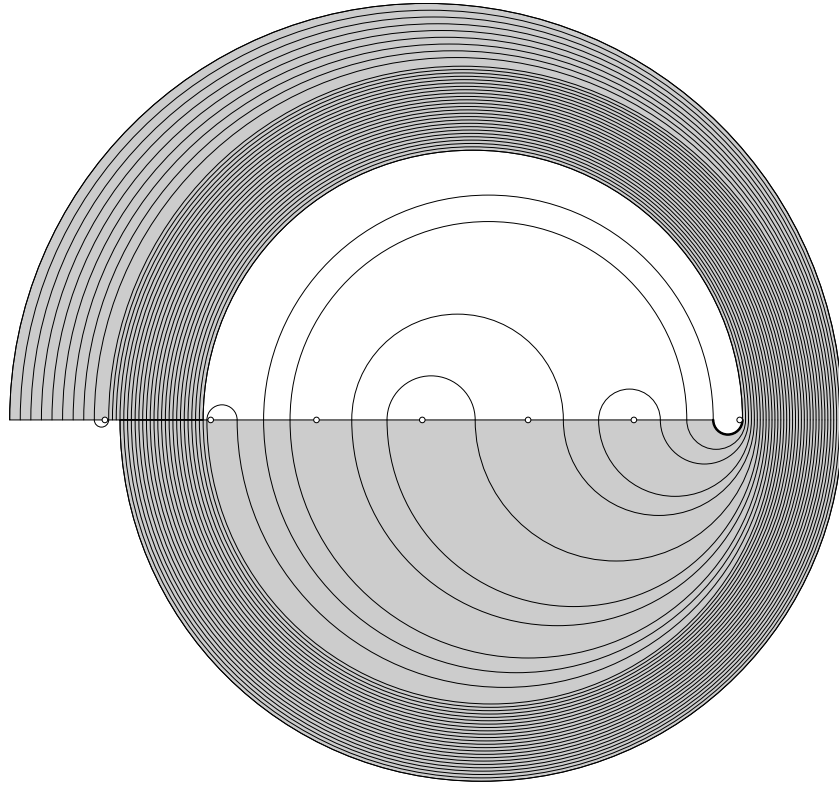


FIG. 2.18 – Forme minimale

Déterminons maintenant quelle puissance de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ est appliquée au cours du processus décrit ci-dessus. Pour cela, considérons à nouveau la spirale au début de l'algorithme et la bande étroite associée (figure 2.12). Rappelons que le bord de la bande étroite intersecte le diagramme exactement en les points de la base gauche G . D'autre part, notons m le nombre d'arcs de spirale. Chacun des deux bords libres de la bande contient exactement m intersections avec le diagramme, puisque chaque arc de spirale intersecte une fois chacun de ces deux bords libres (voir figure 2.22). Comme chaque arc fait k ou $k + 1$ tours, le nombre d'intersections dans tout le bord de la bande, c'est-à-dire le cardinal de G , vérifie $km \leq \#(G) < (k + 1)m$.

Arrivé à l'étape t_0 puis t_1 , le bord de la bande épaisse a toujours le même nombre d'intersections que la bande étroite de départ, ainsi que ses bords libres (voir figure 2.23). C'est à l'issue de cette étape t_1 , alors que la spirale est en forme minimale, que l'on commence à appliquer des générateurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$.

Numérotons de 1 à m les intersections du bord libre intérieur de la bande, comme sur

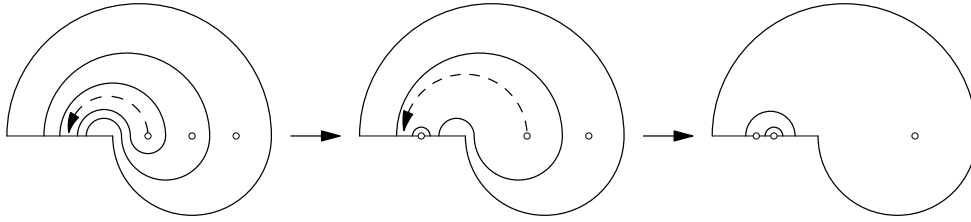


FIG. 2.19 – Passage d'une forme quasi-minimale à une forme minimale

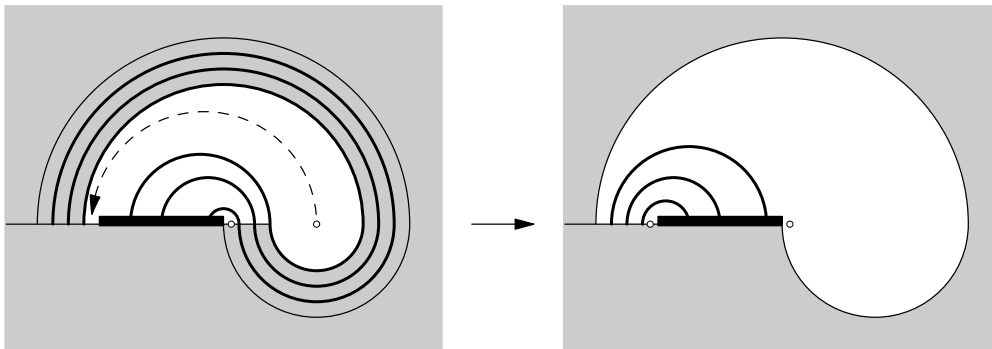


FIG. 2.20 – Démêlage progressif de la spirale

la figure 2.24. Chaque numéro correspond à un des arcs de la spirale. En appliquant un $\tilde{\Sigma}_{ij}$, les dernières intersections, à droite du bord libre, disparaissent, tandis qu'à gauche, les intersections appartenant aux mêmes arcs sont « libérées ». Ainsi, après $j - i + 1$ itérations ($j - i + 1$ étant le nombre de trous à l'intérieur de la spirale), on retrouve la numérotation d'origine, et donc chacun des m arcs a exactement perdu un tour.

Or, comme $km \leq \#(G) < (k + 1)m$, on arrive au temps t_2 après avoir appliqué exactement $(k - 1)(j - i + 1)$ générateurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$. On en déduit que, lors de l'algorithme, une puissance au moins égale à $(k - 1)(j - i + 1)$ d'un générateur $\tilde{\Sigma}_{ij}$ est appliquée pour démêler une spirale de k tours et ayant $j - i + 1$ trous à l'intérieur de sa courbe support.

Il est intéressant également de majorer la puissance de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ qui sera utilisée. Il est en effet possible qu'un ou plusieurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$ aient été appliqués juste avant le processus ci-dessous, et qu'un ou plusieurs $\tilde{\Sigma}_{ij}$ soient appliqués juste après.

Commençons donc par étudier ce qu'il se passe juste avant l'étape t_1 . Si l'on avait appliqué $(j - i + 1)$ fois le générateur $\tilde{\Sigma}_{ij}$, par le même argument que précédemment, les arcs de spirale auraient, avant cela, chacun exactement un tour de plus. Ainsi, la spirale serait au moins une $(k + 1)$ -spirale, mais par hypothèse, elle est seulement une k -spirale. Donc, juste avant t_1 , au plus $j - i$ occurrences de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ ont pu être appliquées.

Voyons maintenant ce qu'il se passe après t_2 . On peut être amené à appliquer encore

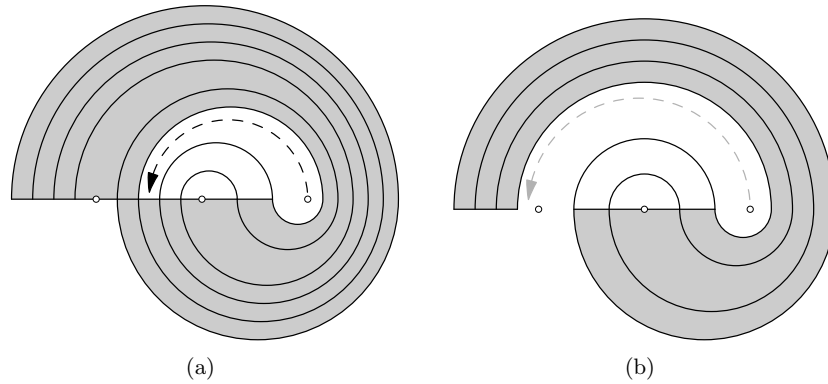


FIG. 2.21 – Fin du démantèlement de la spirale

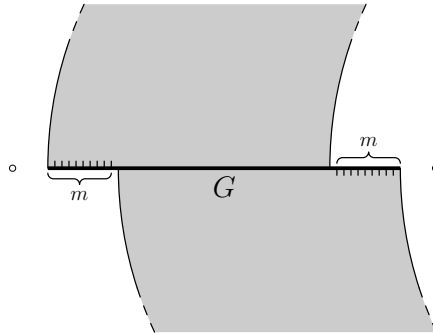


FIG. 2.22 – Bord de la bande étroite au début

$\tilde{\Sigma}_{ij}^{j-i+1}$, comme sur la figure 2.25. Est-il possible que l'on puisse appliquer encore $\tilde{\Sigma}_{ij}$ à l'étape suivante? En général, non : la seule possibilité que ce soit le cas serait que le bigone le plus à droite, à ce stade, entoure encore le trou A_j . Cela est possible, mais alors la branche de droite du bigone doit avoir une extrémité gauche qui est de type strictement inférieur à i . Sinon, l'arc représenté en gras sur la figure 2.25 ferait encore un tour de spirale sur la première figure, ce qui n'est plus le cas à ce stade de l'algorithme. Il existe une seule exception à cette règle : c'est le cas où cette branche de droite a son extrémité gauche de type -1 , car dans ce cas, on peut tout de même avoir à appliquer encore une fois $\tilde{\Sigma}_{ij}$ si la branche de gauche du bigone a une extrémité gauche de type i . C'est le cas dans l'exemple de la figure 2.13.

Donc on peut appliquer au plus $j - i + 2$ occurrences supplémentaires de $\tilde{\Sigma}_{ij}$ après le temps $t_2 + 1$. Il est possible que l'on en applique moins, dans le cas où des trous intercalaires se sont glissés sur le bord libre extérieur de la bande épaisse, comme c'est le cas sur la figure 2.21.

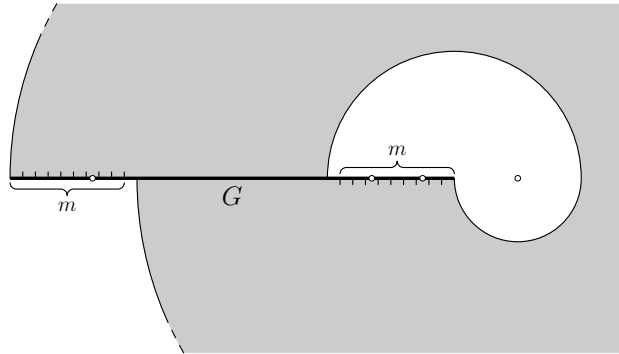


FIG. 2.23 – Bord de la bande épaisse à l'étape t_1

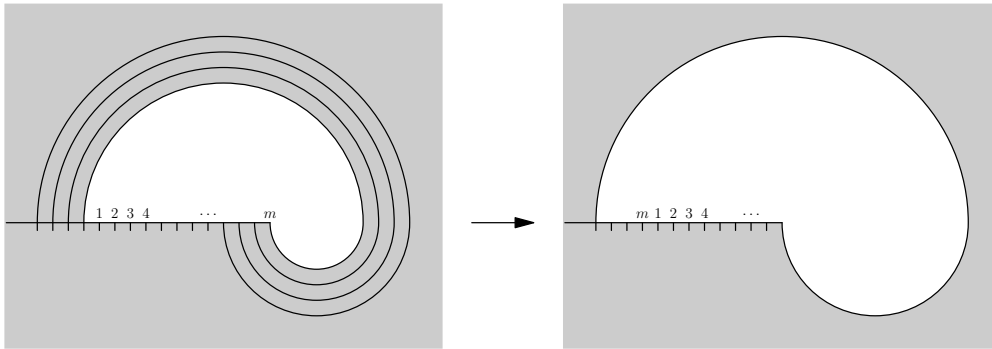


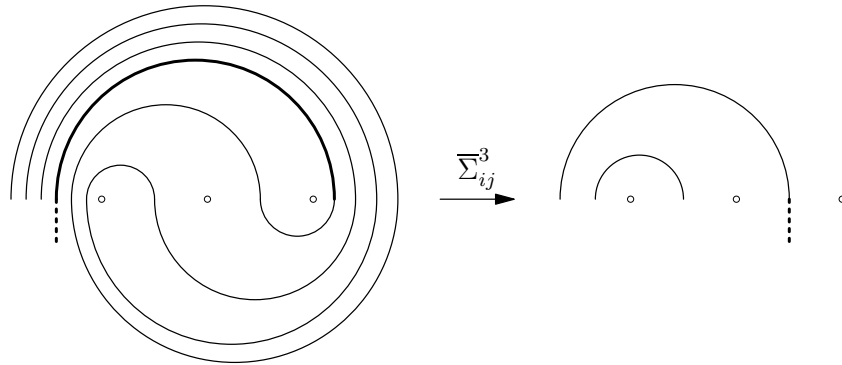
FIG. 2.24 – Numérotation des arcs de spirale

On déduit de tout cela la majoration souhaitée : la spirale est démêlée après avoir appliqué une puissance au maximum égale à $(k + 1)(j - i + 1)$ de $\tilde{\Sigma}_{ij}$.

On a finalement démontré le théorème suivant :

Théorème 2.3.11. *Soit \mathcal{D} un diagramme de courbes. Supposons que \mathcal{D} admette une k -spirale \mathcal{S} . Soit $\beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \dots \beta_\nu^{l_\nu}$ l'inverse de la forme normale de relaxations par la droite de la tresse associée à \mathcal{D} , avec $l_\mu \geq 1$, β_μ de la forme Σ_{ij} ou $\bar{\Sigma}_{ij}$ ($\mu = 1, \dots, \nu$), et $\beta_\mu \neq \beta_{\mu+1}$ ($\mu = 1, \dots, \nu - 1$). Alors il existe i et j tels que $j - i + 1$ soit le nombre de trous contenus à l'intérieur de la courbe support de \mathcal{S} , et un $\mu \in \{1, \dots, \nu\}$, tel que $l_\mu \in [(k - 1)(j - i + 1), (k + 1)(j - i + 1)]$.*

Autrement dit, si ℓ est le nombre de trous contenus à l'intérieur de la courbe support de \mathcal{S} , alors la forme normale de relaxations par la droite de la tresse associée à \mathcal{D} admet comme sous-mot une puissance comprise entre $(k - 1)\ell$ et $(k + 1)\ell$ d'un glissement semi-circulaire.

FIG. 2.25 – Juste après le temps t_2

Remarque. L'objectif de ce théorème est de relier de manière algorithmique certaines complexités « algébriques » d'une tresse à certaines complexités « géométriques » du diagramme associé : plus précisément, au lieu de considérer la longueur usuelle du mot de tresse en les générateurs choisis, on peut réduire la contribution à cette complexité des grandes puissances. Le fait de pouvoir repérer ces grandes puissances sous forme de spirales dans le diagramme de courbes permet d'adapter le calcul de la complexité géométrique pour obtenir une correspondance.

Chapitre 3

Une famille de tresses pseudo-anosoviennes dont l'ensemble super-sommital croît exponentiellement

L'une des étapes dans l'écriture d'algorithmes consistant à résoudre le problème de conjugaison dans les groupes de tresses, consiste à calculer certains ensembles de conjugués d'une tresse, qui sont des invariants de conjugaison. Malheureusement, la taille de ces ensembles est souvent trop grande pour que l'on puisse espérer les calculer en temps polynomial.

Nous exhibons dans ce chapitre une famille de tresses pseudo-anosoviennes de longueur croissante, dont l'ensemble super-sommital croît exponentiellement rapidement.

3.1 Une famille de tresses pseudo-anosoviennes

Soit $k \geq 2$ un entier. On définit la tresse à 5 brins

$$\beta_k = \delta_3^{3k+1} \sigma_4^{2k+2} \sigma_3 \sigma_4^{2k-1}$$

où $\delta_3 = \sigma_2 \sigma_1$. Rappelons que l'on note aussi $\Delta_3 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$.

Lemme 3.1.1. *La forme normale à gauche de β_k est donnée par la factorisation ci-dessous*

$$\beta_k = (\Delta_3 \sigma_4)^{2k} (\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_3 \sigma_4) (\sigma_4)^{2k-3}.$$

En particulier, $\inf \beta_k = 0$ et $\sup \beta_k = 4k - 1$.

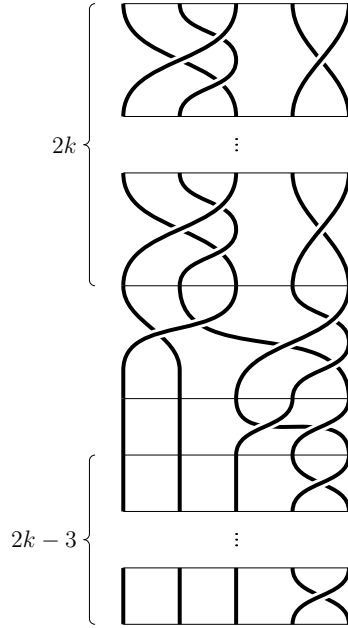


FIG. 3.1 – Forme normale à gauche de la tresse β_k .

Démonstration. Rappelons que $\Delta_3^2 = \delta_3^3$. On a bien

$$\begin{aligned} \beta_k &= \delta_3^{3k+1} \sigma_4^{2k+2} \sigma_3 \sigma_4^{2k-1} \\ &= \Delta_3^{2k} \delta_3 \sigma_4^{2k} \sigma_4 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_4^{2k-2} \\ &= (\Delta_3 \sigma_4)^{2k} \delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4^{2k-2} \\ &= (\Delta_3 \sigma_4)^{2k} (\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_3 \sigma_4) \sigma_4^{2k-3}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que chacun de ces facteurs est une tresse simple, et que deux facteurs successifs sont pondérés à gauche. (Voir figure 3.1.) \square

Considérons également la tresse

$$\tilde{\beta}_k = (\sigma_1 \sigma_3)^{2k-2} (\sigma_3 \sigma_4 \Delta_3) (\Delta_3 \sigma_4) [(\delta_3 \sigma_4) (\tilde{\delta}_3 \sigma_4)]^{k-1} (\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4).$$

(Voir figure 3.2.)

Lemme 3.1.2. *La tresse $\tilde{\beta}_k$ est conjuguée à β_k , et, de plus, est rigide et appartient à leur SCS. En outre, $\inf \tilde{\beta}_k = 0 = \inf \beta_k$ et $\sup \tilde{\beta}_k = 4k - 1 = \sup \beta_k$.*

On en déduit immédiatement le

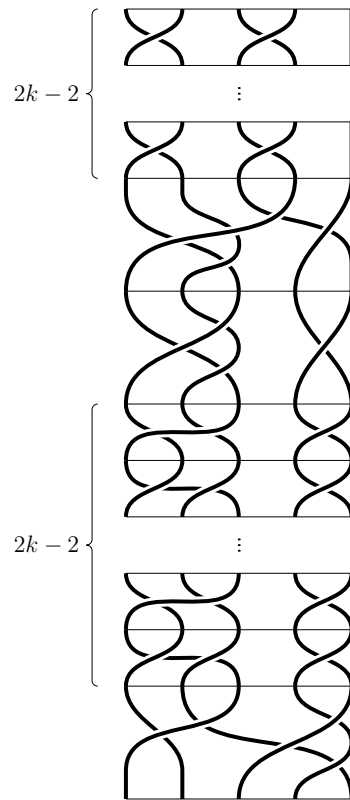


FIG. 3.2 – Tresse $\tilde{\beta}_k$ en forme normale à gauche.

Corollaire 3.1.3. *La tresse β_k est un élément de son SSS.*

En effet, β_k a la même longueur canonique qu'un de ses conjugué qui appartient à leur SCS, donc à leur SSS.

Démonstration du lemme 3.1.2. Commençons par conjuguer β_k par $(\Delta_3\sigma_4)^{2k}$. On obtient

$$(\Delta_3\sigma_4)^{-2k}\beta_k(\Delta_3\sigma_4)^{2k} = (\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4)\sigma_4^{2k-3}(\Delta_3\sigma_4)^{2k}$$

qui, remis sous forme normale, s'écrit

$$(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^{2k-1}(\sigma_4)^{2k-2}.$$

On conjugue ensuite par $(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^{2k-1}$, pour obtenir

$$(\sigma_4)^{2k-2}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^{2k-1}$$

qui sous forme normale s'écrit

$$(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}$$

où l'on a noté $\tilde{\delta}_3 = \sigma_1\sigma_2$. On constate alors que cette tresse est rigide, les facteurs $(\tilde{\delta}_3\sigma_4)$ et $(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)$ étant pondérés à gauche.

La tresse $\tilde{\beta}_k$, obtenue en conjuguant cette dernière tresse par le premier facteur $(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)$ est donc également rigide (donc appartient à son SCS), et l'écriture suivante, qui est celle par laquelle elle a été définie, est sa forme normale (figure 3.2) :

$$\tilde{\beta}_k = (\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4).$$

On en déduit donc que $\inf \tilde{\beta}_k = 0$ et $\sup \beta_k = 4k - 1$. □

3.1.1 Le SCS n'a qu'une orbite par cyclages ou conjugaison par Δ

Lemme 3.1.4. *Le SCS de β_k est réduit à l'orbite de $\tilde{\beta}_k$ sous l'opération de cyclage ou de conjugaison par Δ .*

On notera $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$ cette orbite sous cyclages et conjugaison par Δ . Remarquons que, en raison de la rigidité de $\tilde{\beta}_k$, un cyclage de $\tilde{\beta}_k$ est simplement une permutation cyclique de ses facteurs.

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants : le lemme 3.1.6 réunit des résultats démontrés dans [18] ou dans [4] (section 3.3). Le lemme 3.1.7 est énoncé et prouvé dans [21] (lemme 6.1).

Définition 3.1.5 (transport). Soit $x \in \mathcal{B}_n$ telle que x soit dans son ensemble super-sommital. Soit s une tresse simple telle que $y = s^{-1}xs$ est encore dans l'ensemble super-sommital de x . Soient $x' = \iota(x)^{-1}x\iota(x)$ et $y' = \iota(y)^{-1}y\iota(y)$ les tresses obtenues par cyclage à partir de, respectivement, x et y . On appelle *transport* de s la tresse $s^{(1)} = \iota(x)^{-1}s\iota(y)$, c'est-à-dire la tresse telle que $y' = (s^{(1)})^{-1}x's^{(1)}$.

Lemme 3.1.6. *Si s est simple, $s^{(1)}$ est simple. En outre, pour s et t simples, $s \preccurlyeq t$ implique $s^{(1)} \preccurlyeq t^{(1)}$, et $(\iota(x))^{(1)} = \iota(x')$. En particulier, si s est un préfixe de $\iota(x)$, alors $s^{(1)}$ est un préfixe de $\iota(x')$. On a aussi $(\partial\phi(x))^{(1)} = \partial\phi(x')$, et en particulier, si s est un préfixe de $\partial\phi(x)$, alors $s^{(1)}$ est un préfixe de $\partial\phi(x')$.*

Lemme 3.1.7. *Soient x et y deux éléments conjugués, tous les deux dans leur SCS. Alors il existe une suite d'éléments $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} = y$, tous dans le SCS, et des tresses simples s_1, \dots, s_r , tels que $\alpha_{i+1} = s_i^{-1}\alpha_i s_i$, $i = 1, \dots, r$, et tels que $s_i \preccurlyeq \iota(\alpha_i)$ ou $s_i \preccurlyeq \iota(\alpha_i^{-1}) = \partial\phi(\alpha_i)$.*

Démonstration du lemme 3.1.4. Soit $\iota = \iota(\tilde{\beta}_k) = \sigma_1\sigma_3$ le facteur initial de $\tilde{\beta}_k$ et $\phi = \phi(\tilde{\beta}_k) = \delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4$ son facteur final, et $\partial\phi = \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4$ le complément de ϕ (c'est-à-dire $\phi \cdot \partial\phi = \Delta$). Montrons que pour tout préfixe strict p de ι ou de $\partial\phi$, la tresse $p^{-1}\tilde{\beta}_k p$ n'appartient pas au SCS de $\tilde{\beta}_k$.

Faisons la liste des préfixes stricts de ι et de $\partial\phi$. Les préfixes stricts de $\iota = \sigma_1\sigma_3$ sont σ_1 et σ_3 . Ceux de $\partial\phi$ sont σ_2 , $\sigma_2\sigma_1$, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$, $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$ et $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$. Pour chacun d'entre eux, calculons la forme normale de $p^{-1}\tilde{\beta}_k p$.

– Pour σ_1 :

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_1 &= \sigma_1^{-1}(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)\sigma_1 \\ &= (\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)\sigma_1, \end{aligned}$$

la dernière ligne étant sous forme normale à gauche.

– Pour σ_3 :

$$\sigma_3^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_3)^{2k-3}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^2(\tilde{\delta}_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-2}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)\sigma_3.$$

– Pour σ_2 :

$$\begin{aligned} \sigma_2^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2 &= \Delta^{-1}(\Delta_3\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\delta_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ &\quad [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2). \end{aligned}$$

– Pour $\sigma_2\sigma_1$:

$$\begin{aligned} (\sigma_2\sigma_1)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1 &= \Delta^{-1}(\Delta_3\sigma_3\delta_3\sigma_4\sigma_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ &\quad [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_1). \end{aligned}$$

– Pour $\sigma_2\sigma_3$:

$$(\sigma_2\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3 = \Delta^{-1}(\tilde{\delta}_3\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3\delta_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3).$$

– Pour $\sigma_2\sigma_1\sigma_3$:

$$(\sigma_2\sigma_1\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = \Delta^{-1}(\tilde{\delta}_3\sigma_3\delta_3\sigma_4\sigma_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_1\sigma_3).$$

– Pour $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$:

$$(\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \Delta^{-1}(\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\delta_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^2 \\ (\tilde{\delta}_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-2}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3).$$

– Pour $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$:

$$(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = (\sigma_3\sigma_4\sigma_3\Delta_3)(\sigma_2\sigma_4)^{2k-2}(\delta_3\sigma_3\sigma_4\sigma_3) \\ (\sigma_1\sigma_4\sigma_3)[(\sigma_1\sigma_3\sigma_4)(\sigma_1\sigma_4\sigma_3)]^{k-1}.$$

– Pour $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$:

$$(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4 = \Delta^{-1}(\sigma_2\sigma_3\delta_3\sigma_4\sigma_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4).$$

On constate que la longueur canonique de $\sigma_1^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_1$, $\sigma_2^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2$, $(\sigma_2\sigma_1)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1$, $(\sigma_2\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3$, $(\sigma_2\sigma_1\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3$, $(\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ et $(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$ est $4k$, et donc que ces éléments ne sont pas dans le SSS de $\tilde{\beta}_k$, donc *a fortiori* pas dans son SCS.

Quant à $\sigma_3^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_3$ et $(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$, ils sont certes dans le SSS, mais ils ne sont pas rigides et ne peuvent donc être dans le SCS, en vertu du fait que si le SCS contient un élément rigide, alors tous ses éléments sont rigides (voir le corollaire 11 dans [19]).

Maintenant, les lemmes 3.1.6 et 3.1.7 permettent de conclure. Supposons qu'il existe une tresse α dans l'ensemble des circuits glissants de $\tilde{\beta}_k$ mais qui ne soit pas dans $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$. D'après le lemme 3.1.7, il existe une suite $\tilde{\beta}_k = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} = \alpha$ d'éléments de l'ensemble des circuits glissants vérifiant les conclusions du lemme 3.1.7. Soit i le plus petit indice tel que $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ sont dans $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$ et α_{i+1} n'y est pas. On note s la tresse par laquelle on conjugue α_i pour obtenir α_{i+1} . C'est, d'après le lemme 3.1.7, une tresse simple qui est un préfixe de $\iota(\alpha_i)$ ou de $\partial\phi(\alpha_i)$.

Notons $\alpha_i = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_t = \tilde{\beta}_k$ les éléments de $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$ tels que γ_{j+1} est obtenu de γ_j par cyclage (ou, le cas échéant, $\gamma_t = \tau(\gamma_{t-1})$). D'après le lemme 3.1.6, le transport $s^{(1)}$ de s est

une tresse simple, préfixe de $\iota(\gamma_1)$ ou de $\partial\phi(\gamma_1)$. On définit par récurrence $s^{(j+1)} = (s^{(j)})^{(1)}$ (ou, le cas échéant, $s^{(t)} = \tau(s^{(t-1)})$), et toujours en vertu du lemme 3.1.6 (et, le cas échéant, du fait que le conjugué par Δ d'un préfixe de $\iota(x)$ est un préfixe de $\iota(\tau(x))$), pour tout j , $s^{(j)}$ est un préfixe de $\iota(\gamma_j)$ ou de $\partial\phi(\gamma_j)$. En particulier, $s^{(t)}$ est un préfixe de $\iota(\tilde{\beta}_k)$ ou de $\partial\phi(\tilde{\beta}_k)$. Ainsi, $\tilde{\beta}_k$ est envoyé par conjugaison par $s^{(t)}$ sur une tresse qui n'est pas dans son orbite $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$, puisqu'elle est dans l'orbite de α_{i+1} . Or, ceci est impossible : d'après l'étude exhaustive réalisée ci-dessus, le conjugué de $\tilde{\beta}_k$ par un préfixe strict de $\iota(\tilde{\beta}_k)$ ou de $\partial\phi(\tilde{\beta}_k)$ n'est jamais un élément de l'ensemble des circuits glissants, et les conjugués par $\iota(\tilde{\beta}_k)$ et $\partial\phi(\tilde{\beta}_k)$ eux-mêmes sont des éléments de $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$. \square

3.1.2 Courbes de réduction rondes

Nous voulons démontrer le théorème suivant

Théorème 3.1.8. *La tresse $\tilde{\beta}_k$ (et donc également la tresse β_k , qui lui est conjuguée) est pseudo-anosovienne.*

Il est tout d'abord facile de démontrer le

Lemme 3.1.9. *La tresse $\tilde{\beta}_k$ n'est pas périodique.*

Démonstration. Si $\tilde{\beta}_k$ était périodique, une de ses puissance serait égale à une puissance de Δ . Or, $\tilde{\beta}_k$ étant rigide avec $\inf \tilde{\beta}_k = 0$, la forme normale d'une puissance de $\tilde{\beta}_k$ est obtenue directement en juxtaposant celle de β_k le nombre adéquat de fois. Il est donc évident que ce n'est pas une puissance de Δ . \square

Il reste donc à démontrer que $\tilde{\beta}_k$ n'est pas réductible. Le résultat suivant (corollaire 4.3 de [20]) nous permettra de nous ramener au cas des courbes de réduction rondes (c'est-à-dire homotopes à un cercle ; rappelons que ce que l'on appelle courbe est une courbe fermée simple non dégénérée, qui entoure au moins deux trous et au plus $n - 1$) :

Proposition 3.1.10. *Pour toute tresse $x \in \mathcal{B}_n$ réductible et non périodique, il existe un conjugué de x dans son SCS qui préserve une famille de courbes rondes.*

Citons également ce théorème de Bernadete, Gutierrez et Nitecki (théorème 5.7 dans [3]) sous la forme donnée dans [6] (théorème 1) :

Proposition 3.1.11. *Soit $x \in \mathcal{B}_n$, vue comme un élément de $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$, de forme normale $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$. Soit \mathcal{C} une courbe ronde dans D_n . Si $x(\mathcal{C})$ est ronde, alors $\Delta^p x_1 \cdots x_m(\mathcal{C})$ est ronde pour tout $m = 1, \dots, r$.*

Un corollaire de ce dernier résultat est que, si un élément du SCS préserve une famille de courbes rondes, alors c'est également le cas des tresses obtenues en lui appliquant des cyclages (ainsi, bien sûr, que de leurs conjugués par Δ). Or, d'après le lemme 3.1.4, le SCS est réduit à une seule orbite sous cyclage ou conjugaison par Δ . Il suffit donc de démontrer

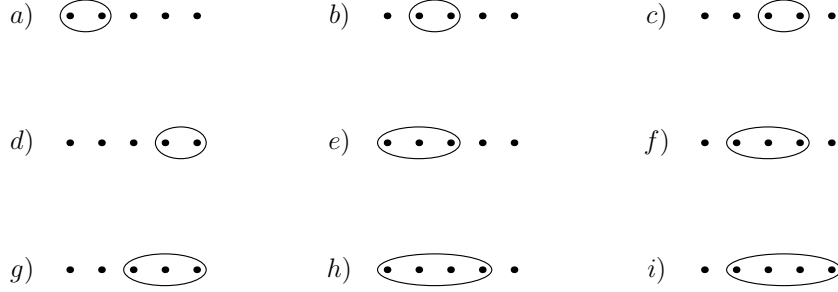


FIG. 3.3 – Toutes les courbes rondes pour 5 brins.

que $\tilde{\beta}_k$ n'envoie aucune courbe ronde sur une courbe ronde : cela établira qu'aucun élément du SCS n'envoie de courbe ronde sur une courbe ronde, puis, en vertu de la proposition 3.1.10, que $\tilde{\beta}_k$ n'est pas réductible.

Sur la figure 3.3 est représentée la liste exhaustive des courbes essentielles rondes pour une tresse à 5 brins. Vérifions qu'aucune de ces courbes n'est envoyée sur une courbe ronde par $\tilde{\beta}_k$. Notons que, encore d'après la proposition 3.1.11, il suffit qu'une tresse composée des premiers facteurs de $\tilde{\beta}_k$ transforme la courbe ronde en une courbe qui n'est pas ronde, pour s'assurer que l'image finale ne sera pas ronde non plus.

Vérifions ceci explicitement pour chacune des courbes rondes de la figure 3.3. Après application du premier facteur $\sigma_1\sigma_3$, seules les images des courbes $a)$, $c)$, $g)$ et $h)$ sont encore rondes. Toutes les quatre sont transformées en elles-mêmes, et donc restent également inchangées après avoir appliqué $(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}$. Le facteur $\sigma_3\sigma_4\Delta_3$ transforme $a)$ en $b)$, tandis que les images de $c)$, $g)$ et $h)$ ne sont plus rondes. Par $\Delta_3\sigma_4$, $b)$ est à nouveau transformée en $a)$, puis l'application des éléments $\delta_3\sigma_4$ et $\tilde{\delta}_3\sigma_4$ transforme alternativement $a)$ en $b)$ et $b)$ en $a)$. Enfin, le dernier facteur $\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4$ transforme $a)$ en une courbe qui n'est pas ronde.

En conclusion, aucune des courbes rondes n'est transformée en une courbe ronde par $\tilde{\beta}_k$. Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.8.

3.2 Minoration du cardinal de l'ensemble super-sommital

Théorème 3.2.1. *Soit*

$$\beta_k = \delta_3^{3k+1}\sigma_4^{2k+2}\sigma_3\sigma_4^{2k-1} = (\Delta_3\sigma_4)^{2k}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4)(\sigma_4)^{2k-3}$$

comme dans la section 3.1. Le cardinal de son ensemble super-sommital est supérieur ou égal à 2^{2k-2} .

Démonstration. On note $\alpha_{11} = \sigma_1$, $\alpha_{12} = \sigma_1\sigma_2$, $\alpha_{21} = \sigma_2\sigma_1$ et $\alpha_{22} = \sigma_2$, de sorte que pour tous $i, j \in \{1, 2\}$, $S(\alpha_{ij}) = \{\sigma_i\}$ et $F(\alpha_{ij}) = \{\sigma_j\}$, où $S(x)$ désigne l'ensemble des

générateurs σ_l tels que $\sigma_l \preceq x$, et $F(x)$ l'ensemble des σ_l tels que $x \succ \sigma_l$. Si l'on choisit une suite d'éléments $i_1, \dots, i_{2k-2} \in \{1, 2\}$, notons

$$\beta_{k, i_1, \dots, i_{2k-2}} = (\alpha_{1i_1} \alpha_{i_1 i_2} \cdots \alpha_{i_{2k-3} i_{2k-2}})^{-1} \beta_k(\alpha_{1i_1} \alpha_{i_1 i_2} \cdots \alpha_{i_{2k-3} i_{2k-2}}).$$

D'une part, $\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4$ et $\sigma_3 \sigma_4 \alpha_{1i_1}$ sont pondérés à gauche, et c'est également le cas de $\sigma_3 \sigma_4 \alpha_{1i_1}$ et $\sigma_4 \alpha_{i_1 i_2}$, de $\sigma_4 \alpha_{i_1 i_2}$ et $\sigma_4 \alpha_{i_2 i_3}$, etc. D'autre part, on peut calculer la forme normale de $(\alpha_{1i_1} \alpha_{i_1 i_2} \cdots \alpha_{i_{2k-3} i_{2k-2}})^{-1}$ vue comme tresse à 3 brins : la forme normale d'une tresse s'exprime facilement en fonction de celle de son inverse (voir [14]). Celle de $(\alpha_{1i_1} \alpha_{i_1 i_2} \cdots \alpha_{i_{2k-3} i_{2k-2}})^{-1}$ dans \mathcal{B}_3 est

$$\Delta_3^{-(2k-2)} \partial_3^{-(2(2k-2)+1)}(\alpha_{i_{2k-3} i_{2k-2}}) \cdots \partial_3^{-3}(\alpha_{i_1 i_2}) \partial_3^{-1}(\alpha_{1i_1}),$$

où $\partial_3(x) = x^{-1} \Delta_3$ (et donc $\partial_3^{-(2l+1)}(x) = \Delta_3^{l+1} x^{-1} \Delta_3^{-l}$). En outre, $\partial^{-1}(\alpha_{1i_1}) \sigma_4 = \Delta_3 \alpha_{1i_1} \sigma_4$ et $\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4$ sont pondérés à gauche. On en déduit que la forme normale à gauche de $\beta_{k, i_1, \dots, i_{2k-2}}$ est

$$\beta_{k, i_1, \dots, i_{2k-2}} = (\Delta_3 \sigma_4)^2 (\partial_3^{-(2(2k-2)+1)}(\alpha_{i_{2k-3} i_{2k-2}}) \sigma_4) \cdots (\partial_3^{-3}(\alpha_{i_1 i_2}) \sigma_4) (\partial_3^{-1}(\alpha_{1i_1}) \sigma_4) \\ (\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_3 \sigma_4 \alpha_{1i_1}) (\sigma_4 \alpha_{i_1 i_2}) \cdots (\sigma_4 \alpha_{i_{2k-3} i_{2k-2}}).$$

En particulier, $\beta_{k, i_1, \dots, i_{2k-2}}$ est de longueur $4k-1$, donc est dans l'ensemble super-sommital. Cette forme normale nous permet également de constater que $\beta_{k, i_1, \dots, i_{2k-2}} = \beta_{k, j_1, \dots, j_{2k-2}}$ si et seulement si $i_1 = j_1, \dots, i_{2k-2} = j_{2k-2}$. Les 2^{2k-2} choix possibles pour (i_1, \dots, i_{2k-2}) donnent donc lieu à 2^{2k-2} éléments distincts dans l'ensemble super-sommital de β_k . \square

Chapitre 4

Généricité des tresses pseudo-anosoviennes

Lorsque l'on s'intéresse à la classification de Nielsen-Thurston des groupes de tresses, il est naturel de se demander de quel type aura le plus de chances d'être une tresse tirée « au hasard ». Dans ce chapitre, nous montrons que dans le graphe de Cayley de partie génératrice les tresses simples, la proportion des tresses pseudo-anosoviennes dans la boule de rayon l tend exponentiellement rapidement vers 1 lorsque l tend vers l'infini.

Le chapitre se décompose comme suit : la première section sert à introduire le *graphe de pondération à gauche*, grâce auquel nous pouvons obtenir des estimations asymptotiques sur le nombre de tresses de longueur fixée. Dans la deuxième section, on montre que la proportion de tresses rigides pseudo-anosoviennes dans la boule de rayon l est majorée indépendamment de l par une constante strictement positive. Les trois sections suivantes sont dévolues à la démonstration du résultat énoncé au-dessus, en utilisant les résultats des deux premières sections.

D'autre part, en dernière section, nous donnons un algorithme qui permet de résoudre en temps polynomial le problème de conjugaison pour une proportion de tresses dans la boule de rayon l qui, également, tend exponentiellement vite vers 1 quand l tend vers l'infini.

4.1 Propriétés du graphe de pondération à gauche

Définition 4.1.1 (graphe de pondération à gauche). On appelle *graphe de pondération à gauche*, noté G_{pg} , le graphe orienté fini suivant. Les sommets sont indexés par les tresses simples autres que 1 et Δ , et il existe une arête du sommet x_1 vers le sommet x_2 si et seulement si le couple (x_1, x_2) est pondéré à gauche.

On appelle *chemin* une suite $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_l)$ telle qu'il y a une arête du sommet x_i vers le sommet x_{i+1} , et la *longueur* d'un tel chemin désignera le nombre d'arêtes dans

ce chemin.

L'objectif de cette section est d'étudier quelques propriétés du graphe G_{pg} , notamment des propriétés asymptotiques des chemins de longueur l , avec l tendant vers l'infini. On introduit les notations suivantes, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$:

- $N(l)$ est le nombre de chemins $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{l+1})$ de longueur l dans G_{pg} ;
- $N_{\circ}(l)$ désigne le nombre de boucles de longueur $l + 1$ avec extrémité marquée dans G_{pg} . On peut également voir $N_{\circ}(l)$ comme le nombre de chemins de longueur l tels qu'il y a une arête du dernier au premier sommet.
- Soit w un chemin dans G_{pg} . On note $N^{(w)}(l)$ le nombre de chemins de longueur l dans G_{pg} ne passant pas par w (ie ne contenant pas w comme sous-chemin), et $N_{\circ}^{(w)}(l)$ le nombre de boucles de longueur $l + 1$ avec extrémité marquée dans G_{pg} , ne passant pas par w .

D'autre part, si (u_l) et (v_l) sont deux suites de nombres réels, on note $u_l = \Theta(v_l)$ si et seulement si il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout l assez grand, $c_1 v_l < u_l < c_2 v_l$. On dira que u_l est de l'ordre de v_l .

On utilisera également les notations usuelles $u_l \sim v_l$ lorsque u_l est équivalent à v_l , c'est-à-dire lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier L tel que pour tout $l > L$, $|u_l - v_l| < \varepsilon |v_l|$, et $u_l = O(v_l)$ lorsqu'il existe $c_2 > 0$ telle que pour tout l assez grand, $u_l < c_2 v_l$.

Nous allons démontrer des propriétés du graphe de pondération à gauche en utilisant la notion de matrice d'adjacence. Pour plus de précisions sur la théorie des graphes et sur les matrices d'adjacence, le lecteur pourra consulter [22]. On rappelle la définition et la propriété suivantes, ainsi que le théorème de Perron-Frobenius.

Définition 4.1.2 (matrice d'adjacence). Soit G un graphe orienté fini, dont on numérote les sommets. On appelle *matrice d'adjacence* de G la matrice dont le coefficient (i, j) contient le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j .

Proposition 4.1.3. Soient G un graphe orienté fini et A sa matrice d'adjacence. Soit $l \in \mathbb{N}$. Le coefficient (i, j) de la matrice A^l contient le nombre de chemins de longueur l reliant le sommet i au sommet j .

Théorème (Perron-Frobenius). Soit A une matrice telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que A^k a tous ses coefficients strictement positifs. Alors le rayon spectral de A est strictement positif, est une valeur propre simple de A et est l'unique valeur propre de module maximal.

Lemme 4.1.4. Tout couple de sommets dans G_{pg} est relié par au moins un chemin de longueur exactement 5.

Démonstration. Rappelons que deux tresses simples s et t sont pondérées à gauche si et seulement si $S(t) \subset F(s)$. Soient s_1 et s_2 deux tresses simples différentes de 1 et Δ . Il existe i_1 et i_2 entre 1 et $n - 1$ tels que $F(s_1) \supset \{i_1\}$ et $S(s_2) \subset \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{i_2\}$. Nous allons construire des tresses simples x_1, x_2, x_3, x_4 vérifiant :

- $S(x_1) = \{i_1\}$,
- $F(x_1) = S(x_2) = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$,
- $F(x_2) = S(x_3) = \{1, 3, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ (l'ensemble des nombres impairs entre 1 et $n - 1$),
- $F(x_3) = S(x_4) = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$,
- $F(x_4) = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{i_2\}$.

Ainsi, $s_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow s_2$ sera bien un chemin de longueur 5 dans le graphe G_{pg} .

Voici maintenant comment l'on choisit les tresses x_1, x_2, x_3, x_4 . On pose $x_1 = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (ie $x_1 = \tilde{\delta}_{i_1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ si $i_1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $x_1 = \delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, i_1}$ si $i_1 \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). La tresse simple x_2 est celle qui correspond à la permutation suivante :

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor & 1 & 3 & \cdots & 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \end{pmatrix}$$

La tresse x_3 , quant à elle, est égale à $\bar{x}_2 \Delta_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n}$ où \bar{x}_2 est la tresse simple de permutation π_2^{-1} . Enfin, $x_4 = \Delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} \cdots \sigma_{i_2}^{-1}$ est le complémentaire à gauche de $\sigma_{i_2} \cdots \sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (ie de $\tilde{\delta}_{i_2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ si $i_2 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et de $\delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, i_2}$ si $i_2 \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Les tresses x_1 à x_4 sont représentées sur la figure 4.1 pour $n = 6$, $i_1 = 2$ et $i_2 = 4$.

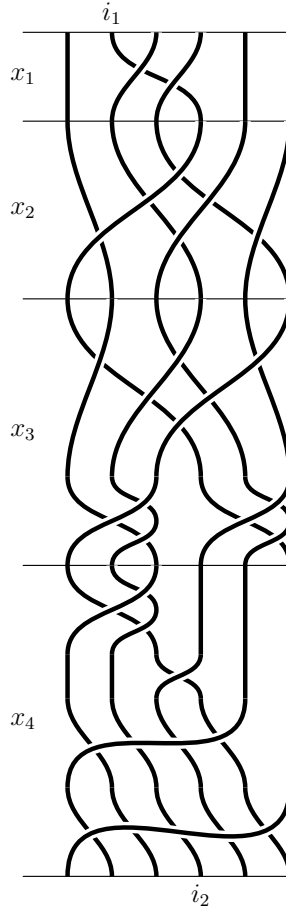
On a bien $S(x_1) = \{i_1\}$ et $F(x_1) = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Pour x_2 , la permutation π_2 est croissante sur $\{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ et sur $\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, n\}$, et on a $\pi_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) < \pi_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, donc $S(x_2) = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. D'autre part, $\pi_2^{-1}(i) > \pi_2^{-1}(i + 1)$ si et seulement si i est impair, d'où $F(x_2) = \{1, 3, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$. La permutation π_3 associée à x_3 commence par appliquer π_2^{-1} , puis inverse l'ordre des éléments de 1 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ d'une part, et de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ à n d'autre part. Il s'ensuit que, d'une part, $\pi_3(i) > \pi_3(i + 1)$ si et seulement si i est impair, et que $\pi_3^{-1}(i) > \pi_3^{-1}(i + 1)$ pour tout i sauf $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Donc $S(x_3) = \{1, 3, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ et $F(x_3) = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Enfin, x_4 est le complémentaire à gauche de $\sigma_{i_2} \cdots \sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, donc vérifie $S(x_4) = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ et $F(x_4) = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{i_2\}$. \square

Lemme 4.1.5. *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *Il existe une constante λ telle que $N_{\circ}(l) \sim \lambda^{l+1}$.*
- (ii) *On a $N(l) = \Theta(\lambda^l)$. En particulier, pour l assez grand, la proportion $N_{\circ}(l)/N(l)$ est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*
- (iii) *Pour tout chemin w , il existe une constante $\mu_{(w)} < \lambda$ telle que $N^{(w)}(l) = O(\mu_{(w)}^l)$ et $N_{\circ}^{(w)}(l) = O(\mu_{(w)}^l)$.*

Le lecteur pourra consulter [11], qui contient des résultats et démonstrations très proches de ceux de ce lemme.

Démonstration. Soit A la matrice d'adjacence du graphe G_{pg} . D'après la proposition 4.1.3, $N_{\circ}(l) = \text{tr}(A^{l+1})$ et $N(l) = |A^l|_1$, où $|\cdot|_1$ désigne la somme de tous les coefficients de la matrice.

FIG. 4.1 – Tresses x_1 à x_4

(i) D'après le lemme 4.1.4, la matrice A^5 est une matrice à coefficients strictement positifs. On peut donc appliquer à A le théorème de Perron-Frobenius, et en déduire que A a une unique valeur propre de module maximal, celle-ci est réelle et strictement positive, et l'espace propre associé est de dimension 1. Notons λ cette valeur propre, et λ_i ($i = 1, \dots, n! - 3$) les autres (non nécessairement distinctes et non nécessairement réelles). On a $\text{tr}(A^{l+1}) = \lambda^{l+1} + \lambda_1^{l+1} + \dots + \lambda_{n!-3}^{l+1}$, d'où $N_o(l) \sim \lambda^{l+1}$ lorsque l tend vers l'infini.

(ii) Il existe une matrice inversible P telle que PAP^{-1} est sous forme de Jordan, et on peut calculer

$$|PA^lP^{-1}|_1 = \lambda^l + \sum p_i(\lambda_i)$$

où les p_i sont des polynômes de degré l . On en déduit, là encore, l'équivalence $|PA^lP^{-1}|_1 \sim$

λ^l ; d'autre part, $|PA^lP^{-1}|_1 = \Theta(|A^l|_1)$, donc $N(l) = \Theta(\lambda^l)$.

On en déduit que $N_o(l)/N(l) = \Theta(1)$, et en particulier que, pour l assez grand, ce rapport est minoré indépendamment de l par une constante strictement positive.

(iii) On construit à partir de G_{pg} un graphe $G_{pg}^{(k)}$, où k est la longueur du chemin w , de la manière suivante : les sommets de $G_{pg}^{(k)}$ sont les chemins de longueur $k-1$ dans G_{pg} , et deux chemins $w_1 = (s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k)$ et $w_2 = (t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_k)$ sont reliés par une arête si et seulement si $s_2 = t_1, s_3 = t_2, \dots, s_k = t_{k-1}$. Ainsi, les arêtes de $G_{pg}^{(k)}$ correspondent aux chemins de longueur k dans G_{pg} . On note A_k la matrice d'adjacence de $G_{pg}^{(k)}$.

Si s et t sont deux sommets de G_{pg} , se donner un chemin de longueur $l \geq k$ de s vers t dans G_{pg} revient à se donner un chemin de longueur $l-k+1$ de $(s \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_k)$ vers $(t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_{k-1} \rightarrow t)$ dans $G_{pg}^{(k)}$ pour certains $s_2, \dots, s_k, t_1, \dots, t_{k-1}$. Cela amène aux conséquences suivantes. Comme tout couple de sommets dans G_{pg} est relié par un chemin de longueur 5 (lemme 4.1.4), tout couple de sommets dans $G_{pg}^{(k)}$ est relié par un chemin de longueur exactement $k+4$. En outre, comme le nombre de chemins de longueur l dans G_{pg} est un $\Theta(\lambda^l)$, il en est de même du nombre de chemins de longueur l dans $G_{pg}^{(k)}$. Comme A_k^{k+4} est à coefficients strictement positifs, on peut appliquer à A_k le théorème de Perron-Frobenius, et l'on en déduit, comme au (ii), que le nombre de chemins de longueur l dans $G_{pg}^{(k)}$ est un $\Theta(\lambda_{(k)}^l)$ où $\lambda_{(k)}$ est le rayon spectral de A_k . Les deux estimations asymptotiques obtenues assurent que $\lambda_{(k)} = \lambda$.

D'autre part, éviter un chemin de longueur k dans G_{pg} revient à éviter une arête de $G_{pg}^{(k)}$. Soit $\tilde{G}_{pg}^{(k)}$ le graphe obtenu à partir de $G_{pg}^{(k)}$ en enlevant l'arête a_w correspondant à w . On note \tilde{A}_k sa matrice d'adjacence, et $\mu_{(w)}$ le rayon spectral de cette matrice. Alors, le nombre de chemins de longueur $l-k+1$ dans $G_{pg}^{(k)}$ est un $O(\mu_{(w)}^l)$: en effet, comme au (ii), il existe une matrice inversible Q telle que $|Q\tilde{A}_k^{l-k+1}Q^{-1}|_1$ soit une somme de polynômes de degré $l-k+1$ en les valeurs propres de \tilde{A}_k . Comme ces valeurs propres sont, en module, inférieures ou égales au rayon spectral $\mu_{(w)}$, on en déduit que $|Q\tilde{A}_k^{l-k+1}Q^{-1}|_1 = O(\mu_{(w)}^{l-k+1}) = O(\mu_{(w)}^l)$, puis que $N^{(w)}(l) = |\tilde{A}_k^{l-k+1}|_1 = O(\mu_{(w)}^l)$.

Quant au nombre de boucles de longueur $l+1$ avec extrémité marquée dans G_{pg} , elles sont en nombre inférieur au nombre de chemins de longueur l , et donc on a également $N_o^{(w)}(l) = O(\mu_{(w)}^l)$.

Il reste à montrer que $\mu_{(w)} < \lambda$.

Étant donnés deux sommets $w_1 = (s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k)$ et $w_2 = (t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_k)$ de $G_{pg}^{(k)}$, il existe toujours un chemin de longueur $l_0 = 2k+9$ dans $G_{pg}^{(k)}$ de w_1 vers w_2 passant par l'arête a_w : en effet, il suffit de se rendre par un chemin de longueur $k+4$ jusqu'au sommet de départ de a_w , de parcourir l'arête a_w , puis de se rendre à nouveau par un chemin de longueur $k+4$ jusqu'à w_2 . Cela signifie qu'il y a strictement plus de chemins de longueur l_0 reliant w_1 à w_2 dans $G_{pg}^{(k)}$ que dans $\tilde{G}_{pg}^{(k)}$. Autrement dit, que la matrice $A_k^{l_0} - \tilde{A}_k^{l_0}$ est à coefficients strictement positifs. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $A_k^{l_0} - (\tilde{A}_k^{l_0} + \varepsilon I)$ a encore ses coefficients

positifs (où I est la matrice identité). Le rayon spectral de $A_k^{l_0}$ est λ^{l_0} , celui de $\tilde{A}_k^{l_0} + \varepsilon I$ est $\mu_{(w)}^{l_0} + \varepsilon$. On rappelle que le rayon spectral d'une matrice B est la limite de $\|B^k\|^{1/k}$ quand k tend vers l'infini, où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle quelconque. En choisissant pour $\|\cdot\|$, par exemple, la norme infinie, on en déduit que, puisque les coefficients de $A_k^{l_0}$ sont tous plus grands que ceux de $(\tilde{A}_k^{l_0} + \varepsilon I)$, on a $\lambda^{l_0} \geq \mu_{(w)}^{l_0} + \varepsilon$, et donc $\lambda > \mu_{(w)}$. \square

Remarque 4.1.6. Des arguments similaires permettent d'obtenir des résultats plus fins, sur le nombre de chemins ne contenant pas w dans une zone plus localisée du chemin. Plus précisément, si β est un chemin de longueur l , et que a_1, a_2, a_3 sont des fonctions de l à valeur dans \mathbb{N} , avec $a_1 + a_3$ et a_2 croissantes et tendant vers l'infini quand l tend vers l'infini, et telles que $a_1(l) + a_2(l) + a_3(l) = l$, on peut découper le chemin β en trois chemins β_1, β_2 et β_3 de longueurs respectives $a_1(l), a_2(l)$ et $a_3(l)$. Le nombre de chemins β de longueur l dont la partie « du milieu » β_2 ne contient pas le chemin w est un $\Theta(\mu_{(w)}^{a_2(l)} \lambda^{a_1(l)+a_3(l)}) = \Theta(\mu_{(w)}^{a_2(l)} \lambda^{l-a_2(l)})$.

4.2 Tresses rigides

4.2.1 Proportion des tresses rigides

Proposition 4.2.1. *Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Parmi les tresses β telles que $\inf \beta = 0$ et $\sup \beta = l$, la proportion des tresses rigides est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

Démonstration. En raison de l'unicité de la forme normale à gauche d'une tresse, l'ensemble des tresses β telles que $\inf \beta = 0$ et $\sup \beta = l$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de longueur l dans le graphe de pondération à gauche G_{pg} . L'ensemble des tresses rigides d'infimum 0 et de supremum l est, quant à lui, en bijection avec l'ensemble des chemins de longueur l pour lesquels il y a une arête allant du dernier au premier sommet. La proposition est donc un corollaire du lemme 4.1.5, (ii). \square

4.2.2 Proportion des tresses rigides non pseudo-anosoviennes

Le but de cette section est de montrer que, parmi les tresses rigides d'infimum fixé et de longueur canonique l , la proportion des tresses non pseudo-anosoviennes tend vers 0 quand l tend vers l'infini. À cette fin, on peut exploiter le théorème suivant, dû à González-Meneses et à Wiest [21] (théorème 5.16) :

Théorème 4.2.2. *Soit β une tresse réductible, non périodique, qui est rigide. Il existe un entier strictement positif $k \leq n$ tel que l'une de ces deux conditions soit vérifiée :*

- (1) β^k preserve une courbe ronde (c'est-à-dire une courbe homotope à un cercle), ou

- (2) $\inf(\beta^k)$ et $\sup(\beta^k)$ sont pairs, et l'une des deux tresses $\Delta^{-\inf(\beta^k)}\beta^k$ ou $\beta^{-k}\Delta^{\sup(\beta^k)}$ est une tresse positive qui préserve une courbe presque ronde (c'est-à-dire l'image par une tresse simple d'une courbe ronde) et telle que les brins intérieurs à la courbe ne se croisent pas.

Notation 4.2.3. Dans la suite, nous utiliserons les deux tresses suivantes, écrites sous forme normale :

$$\gamma_1 = \sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot \sigma_1\sigma_3 \cdots \sigma_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \sigma_2\sigma_4 \cdots \sigma_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2} \quad (\text{longueur } 2)$$

$$\gamma_2 = \Delta_{2,n}\sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} \quad (\text{longueur } 3)$$

(voir figures 4.2 et 4.3).

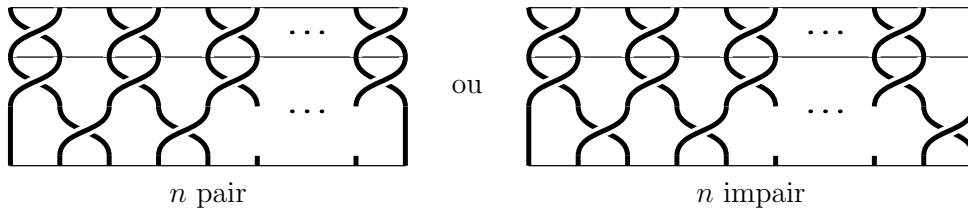


FIG. 4.2 – Une tresse n’envoyant aucune courbe ronde sur une courbe ronde

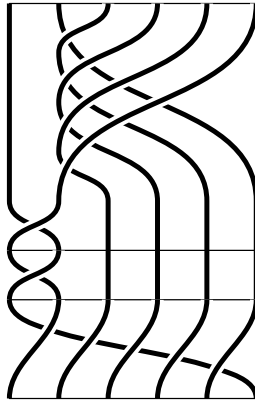


FIG. 4.3 – Une tresse dont tous les brins se croisent deux à deux

Proposition 4.2.4. Soit β une tresse rigide telle que $\inf \beta = \varepsilon$ et $\ell_c(\beta) = l$. On note $\partial\beta = \beta^{-1}\Delta^{\sup\beta}$ le complémentaire de β . Si la forme normale de β contient à la fois γ_1 et γ_2 comme sous-mots et celle de $\partial\beta$ contient γ_2 , alors β est pseudo-anosovienne.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons qu'il n'y a, en fait, aucune tresse périodique vérifiant les conditions de la proposition, excepté Δ^ε . En effet, si une tresse est rigide et de longueur canonique au moins 1, sa forme normale est de la forme $\Delta^\varepsilon s_1 s_2 \cdots s_l$ avec (s_i, s_{i+1}) ($i = 1, \dots, l-1$) et $(s_l, \tau^{-\varepsilon}(s_1))$ pondérés à gauche. La forme normale d'une puissance de cette tresse est donc de la forme

$$\Delta^{k\varepsilon} s_1^{(1)} s_2^{(1)} \cdots s_l^{(1)} s_1^{(2)} s_2^{(2)} \cdots s_l^{(2)} \cdots s_1^{(k)} s_2^{(k)} \cdots s_l^{(k)}$$

avec $s_i^{(j)} = s_i$ ou $s_i^{(j)} = \tau(s_i)$, et n'est pas une puissance de Δ dès lors que $l > 0$.

Traisons maintenant le cas des tresses réductibles. Soit β d'infimum ε et de longueur canonique l , réductible non périodique, et rigide. D'après le théorème 4.2.2, on a trois cas possibles.

Le premier cas correspond au cas (1) du théorème. Une puissance de β préserve une courbe ronde. La rigidité de β entraîne que la forme normale d'une puissance de β contient celle de β comme sous-mot (excepté les Δ initiaux). D'après la proposition 3.1.11, on en déduit qu'il existe une courbe ronde dont l'image par β est encore une courbe ronde.

Le deuxième cas est celui où une puissance k -ième de β est telle que $\Delta^{-\inf(\beta^k)} \beta^k = \Delta^{-k\varepsilon} \beta^k$ préserve une courbe presque ronde à l'intérieur de laquelle les brins de la tresse ne se croisent pas. Si la forme normale de β est $\beta = \Delta^\varepsilon s_1 \cdots s_l$, celle de $\Delta^{-k\varepsilon} \beta^k$ s'écrit

$$\Delta^{-k\varepsilon} \beta^k = s_l^{(1)} \cdots s_1^{(1)} s_l^{(2)} \cdots s_1^{(2)} \cdots s_l^{(k)} \cdots s_1^{(k)}$$

où $s_i^{(j)} = \tau^{(k-j)\varepsilon}(s_i)$. En particulier, dans ce cas, la tresse $\Delta^{-\varepsilon} \beta$, dont la forme normale apparaît comme sous-mot de cette forme normale, a deux brins qui ne se croisent jamais.

Enfin, dans le troisième cas, c'est cette fois la tresse $\beta^{-k} \Delta^{\sup(\beta^k)} = \beta^{-k} \Delta^{k(l+\varepsilon)}$ qui est telle que deux de ses brins ne se croisent pas, et $k(l+\varepsilon)$ est pair. La forme normale de $\beta^{-k} \Delta^{k(l+\varepsilon)}$ s'écrit

$$\beta^{-k} \Delta^{k(l+\varepsilon)} = \bar{s}_l^{(k)} \cdots \bar{s}_1^{(k)} \bar{s}_l^{(k-1)} \cdots \bar{s}_1^{(k-1)} \cdots \bar{s}_l^{(1)} \cdots \bar{s}_1^{(1)}$$

où $\bar{s}_i^{(j)}$ est égal à Δs_i^{-1} si $i + (j-1)(l+\varepsilon)$ est impair, et à $s_i^{-1} \Delta$ si $i + (j-1)(l+\varepsilon)$ est pair. (Autrement dit, les termes de la forme Δs_i^{-1} et $s_i^{-1} \Delta$ sont alternés dans l'écriture de la forme normale.) Donc cette condition implique que la tresse $\partial\beta = \beta^{-1} \Delta^{\sup\beta}$ ($\partial\beta = (s_l^{-1} \Delta)(\Delta s_{l-1}^{-1}) \cdots (\Delta s_1^{-1})$ si l pair et $\partial\beta = (s_l^{-1} \Delta)(\Delta s_{l-1}^{-1}) \cdots (s_1^{-1} \Delta)$ si l impair) a deux brins qui ne se croisent pas.

Or, une tresse contenant γ_1 ne peut envoyer une courbe ronde sur une courbe ronde, car aucune courbe ronde n'est envoyée sur une courbe ronde par cette succession de deux tresses simples (figure 4.2). D'après la proposition 3.1.11, c'est également le cas de la tresse entière. Une tresse contenant γ_2 ne peut vérifier le premier cas de la condition (2) du théorème 4.2.2, car tout couple de deux brins se croise dans cette succession de trois tresses simples (figure 4.3). Et de même, une tresse dont le complémentaire contient γ_2 ne peut vérifier le deuxième cas de la condition (2) du théorème. Donc une tresse vérifiant les conditions de la proposition ne peut être réductible. \square

Pour le moment, nous focalisons notre attention sur le cas des tresses d'infimum 0.

Lemme 4.2.5. *Le nombre de tresses d'infimum 0 et de supremum l , rigides et pseudo-anosoviennes, est un $\Theta(\lambda^l)$, où λ est la constante du lemme 4.1.5.*

Démonstration. Notons Ω l'ensemble des tresses rigides d'infimum 0 et de supremum l . On note également $E_1 \subset \Omega$ le sous-ensemble formé des tresses ne contenant pas, dans leur forme normale, le facteur γ_1 comme sous-mot ; on note $E_2 \subset \Omega$ celui des tresses ne contenant pas, dans leur forme normale, le facteur γ_2 comme sous-mot ; et enfin on note $E_3 \subset \Omega$ celui des tresses β telles que la tresse $\partial\beta$ définie comme ci-dessus est dans E_2 .

D'après le lemme 4.1.5, et en en reprenant les notations, le cardinal $\#(\Omega)$ est équivalent à λ^{l+1} . On a également les estimations $\#(E_1) = O(\mu_{(\gamma_1)}^l)$ où $\mu_{(\gamma_1)} < \lambda$ et $\#(E_2) = O(\mu_{(\gamma_2)}^l)$ où $\mu_{(\gamma_2)} < \lambda$. L'ensemble E_3 est en bijection avec E_2 donc vérifie également $\#(E_3) = O(\mu_{(\gamma_2)}^l)$.

D'après la proposition 4.2.4, on en déduit que l'ensemble des tresses rigides, d'infimum 0 et de supremum l , qui sont réductibles et non périodiques, est inclus dans $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, dont le cardinal est inférieur à $c(\mu_{(\gamma_1)}^l + 2\mu_{(\gamma_2)}^l)$ pour une constante $c > 0$. Autrement dit, ce cardinal est un $O(\mu_{(\gamma_1)}^l + 2\mu_{(\gamma_2)}^l)$. D'après le lemme 4.1.5, on sait que le nombre de tresses d'infimum 0 et de supremum l , rigides, est de l'ordre de λ^l . Comme $\mu_{(\gamma_1)} < \lambda$ et $\mu_{(\gamma_2)} < \lambda$, le nombre de tresses d'infimum 0 et de supremum l , rigides et pseudo-anosoviennes, est de l'ordre de λ^l . \square

4.2.3 Infimum quelconque

Considérons le graphe de Cayley du groupe de tresses, avec pour partie génératrice l'ensemble des tresses simples. Le lemme suivant, conséquence du lemme 3.1 dans [10] (voir aussi [15], section 9.3), donne les formes normales à gauche possibles pour une tresse qui est à distance l de l'élément neutre dans ce graphe.

Lemme 4.2.6. *Soit β une tresse à distance l de l'élément neutre dans le graphe de Cayley. Alors la forme normale à gauche de β est de l'une des trois formes suivantes :*

- (i) $\beta = \Delta^{-l} s_1 \cdots s_k, k \in \{0, \dots, l-1\}$,
- (ii) $\beta = \Delta^{-k} s_1 \cdots s_l, k \in \{0, \dots, l\}$,
- (iii) $\beta = \Delta^k s_1 \cdots s_{l-k}, k \in \{1, \dots, l\}$.

Démonstration. Le lemme 3.1 dans [10] affirme que la *forme normale mixte* d'une tresse est géodésique. La forme normale mixte est une écriture, qui s'avère unique, d'une tresse sous la forme $b^{-1}a$ où a et b sont des tresses positives et où $a \wedge b = 1$. Le fait qu'elle soit géodésique signifie que le chemin reliant l'élément neutre à $b^{-1}a$ dans le graphe de Cayley et passant successivement par les lettres de b^{-1} puis celles de a est aussi court que possible.

Soit β une tresse à distance l de l'élément neutre dans le graphe de Cayley, et $\beta = b^{-1}a$ sa forme normale mixte. On distingue trois cas.

- (i) Si $a = 1$, on écrit b sous forme normale à gauche : $b = \Delta^{\inf b} b_1 \cdots b_{\ell_c(b)}$. On a $\inf b \geq 0$ et, comme la forme normale mixte est géodésique, $\sup b = \inf b + \ell_c(b) = l$. La forme normale de $\beta = b^{-1}$ s'écrit alors

$$\beta = \Delta^{-l} \bar{b}_{\ell_c(b)} \cdots \bar{b}_1$$

où $\bar{b}_i = \tau^{-\inf b - i}(\partial b_i)$. En posant $k = \ell_c(b)$, on est dans le cas (i) du lemme, ou dans le cas (ii) pour $k = l$.

- (ii) Si $a \neq 1$ et $b \neq 1$, alors la condition $a \wedge b = 1$ implique $\inf a = 0 = \inf b$. Dans ce cas, $\ell_c(a) + \ell_c(b) = l$ et β s'écrit sous forme normale

$$\beta = \Delta^{-\ell_c(b)} \bar{b}_{\ell_c(b)} \cdots \bar{b}_1 a_1 \cdots a_{\ell_c(a)}$$

où $\bar{b}_i = \tau^{-i}(\partial b_i)$. On est dans le cas (ii) du théorème.

- (iii) Si $b = 1$, alors $\beta = a$ et la forme normale à gauche de β est géodésique : on est dans le cas (iii) du théorème, ou le cas (ii) pour $k = \inf a = 0$. \square

Le théorème suivant est une généralisation des résultats obtenus précédemment dans le cas particulier d'un infimum nul.

Théorème 4.2.7. *Pour l assez grand, parmi les tresses à distance l de l'élément neutre dans le graphe de Cayley, la proportion de tresses rigides pseudo-anosoviennes est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

Démonstration. Tout d'abord, faisons la remarque suivante : une tresse β est pseudo-anosovienne si et seulement si $\Delta^2 \beta$ est pseudo-anosovienne. La même propriété est vérifiée en remplaçant « pseudo-anosovienne » par « rigide ». Ainsi, une tresse de forme normale $\Delta^p s_1 \cdots s_r$ avec p pair est pseudo-anosovienne (resp. rigide) si et seulement si $s_1 \cdots s_r$ l'est.

D'après le lemme 4.2.5, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout l assez grand, le nombre de tresses pseudo-anosoviennes rigides de forme normale $s_1 \cdots s_l$ avec des s_i différents de Δ est minoré par $c_1 \lambda^l$. Par conséquent, le nombre de tresses pseudo-anosoviennes rigides de la forme $\Delta^{-k} s_1 \cdots s_l$ avec $k \in \{0, \dots, l\}$ et k pair est minoré par $c_1 \frac{l}{2} \lambda^l$.

D'autre part, majorons le nombre total de tresses à distance l de l'élément neutre. D'après le lemme 4.1.5, il existe une constante c_2 telle que le nombre de tresses de forme normale $s_1 \cdots s_k$ est majoré par $c_2 \lambda^k$. Donc :

- (i) le nombre de tresses de forme normale $\Delta^{-l} s_1 \cdots s_k$ ($0 \leq k < l$) est majoré par $c_2(1 + \cdots + \lambda^{l-1})$,
- (ii) le nombre de tresses de forme normale $\Delta^{-k} s_1 \cdots s_l$ ($0 \leq k \leq l$) est majoré par $c_2 l \lambda^l$,
- (iii) le nombre de tresses de forme normale $\Delta^k s_1 \cdots s_{l-k}$ ($0 < k \leq l$) est majoré par $c_2(1 + \cdots + \lambda^{l-1})$.

Comme $c_2(1 + \dots + \lambda^{l-1}) \sim \frac{c_2}{\lambda-1}\lambda^l$, quitte à remplacer c_2 par une constante un peu plus grande, on peut supposer que, dans les cas (i) et (iii), le nombre de tresses est majoré par $\frac{c_2}{\lambda-1}\lambda^l$. Finalement, la proportion des tresses rigides pseudo-anosoviennes parmi toutes les tresses de longueur l est minorée par

$$\frac{c_1 \frac{l}{2} \lambda^l}{\frac{c_2}{\lambda-1} \lambda^l + c_2 l \lambda^l + \frac{c_2}{\lambda-1} \lambda^l} = \frac{c_1}{2c_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{l(\lambda-1)}} \geq \frac{c_1}{2c_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{\lambda-1}} > 0,$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Corollaire 4.2.8. *Pour l assez grand, dans la boule de rayon l dans le graphe de Cayley, la proportion de tresses rigides pseudo-anosoviennes est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

Démonstration. Le nombre de tresses dans la sphère de rayon k est de l'ordre de $k\lambda^k$, et la boule de rayon l est la réunion des sphères de rayon k pour $k \leq l$. On en déduit que le nombre de tresses dans la boule de rayon l est de l'ordre de $l\lambda^l$, c'est-à-dire de l'ordre du nombre de tresses dans la sphère de rayon l . Donc la proportion des tresses pseudo-anosoviennes rigides reste de l'ordre d'une constante. \square

4.3 Conjugaisons non intrusives

Nous allons, dans cette section et les deux suivantes, nous attaquer à la démonstration du fait que la proportion de tresses pseudo-anosoviennes (non nécessairement rigides) dans la boule de rayon l tend vers 1 lorsque l tend vers l'infini.

Définition 4.3.1. Soit x une tresse de forme normale $x = \Delta^{\text{inf}(x)} x_1 \dots x_l$. Une conjugaison de x est *non-intrusive* si la forme normale de la tresse conjuguée contient le sous-mot $x_{2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil + 1} \dots x_{l-2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil}$.

Autrement dit, une conjugaison est non-intrusive si le cinquième central de la tresse x apparaît encore dans la forme normale du conjugué.

Exemple 4.3.2. Soit x la tresse à 4 brins et de longueur canonique 5 suivante :

$$x = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \cdot \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \cdot \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1.$$

Son cinquième central est le facteur $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2$. Soit \tilde{x} son conjugué à gauche par les deux derniers facteurs $\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \cdot \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \\ &= \Delta \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \cdot \sigma_1 \sigma_3 \cdot \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2. \end{aligned}$$

La conjugaison de x vers \tilde{x} est non intrusive, car \tilde{x} contient le facteur $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2$ dans sa forme normale.

Notation 4.3.3. Notons

$$\mathcal{B}_n^{\varepsilon, l} = \{x \in \mathcal{B}_n, \inf(x) = \varepsilon, \ell_c(x) = l\}$$

et $\rho_n^{\varepsilon, l}$ la proportion, parmi les éléments de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon, l}$, des tresses qui admettent une conjugaison non-intrusive vers une tresse rigide.

Proposition 4.3.4. *Il existe une constante $\xi_R \in]0, 1[$ (qui dépend de n) telle que $\rho_n^{\varepsilon, l} \geq 1 - \xi_R^l$.*

L'objectif de la section suivante est de démontrer cette proposition.

4.4 Tresses bloquantes et démonstration de la proposition 4.3.4

Notation 4.4.1. Si X et Y sont deux tresses telles que Y est d'infimum 0, on dit que $X \cdot Y$ est en forme normale si la forme normale (à gauche) du produit $X \cdot Y$ est égale, en tant que mot, à la forme normale de X , suivie par la forme normale de Y .

Si $X \cdot Y$ n'est pas en forme normale, $\text{FN}_g(X \cdot Y)$ désignera son écriture en forme normale.

Si s_1 est le dernier facteur de la forme normale de X , et s_2 le premier facteur de celle de Y , on notera également $F(X) = F(s_1)$ et $S(Y) = S(s_2)$, de sorte que $X \cdot Y$ est en forme normale si et seulement si $S(Y) \subset F(X)$.

Soit x une tresse d'infimum ε , et de longueur canonique $l \geq 5$. Introduisons encore quelques notations. On découpe le mot en forme normale représentant x (autre que la puissance de Δ initiale) en cinq morceaux de taille à peu près égale, chacun en forme normale à gauche :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x_1 \cdots x_{\lceil \frac{l}{5} \rceil}, & P_2(x) &= x_{\lceil \frac{l}{5} \rceil + 1} \cdots x_{2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil}, \\ P_3(x) &= x_{2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil + 1} \cdots x_{l - 2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil}, \\ P_4'(x) &= x_{l + 1 - 2 \cdot \lceil \frac{l}{5} \rceil} \cdots x_{l - \lceil \frac{l}{5} \rceil}, & P_5'(x) &= x_{l + 1 - \lceil \frac{l}{5} \rceil} \cdots x_l. \end{aligned}$$

Remarquons que $P_1(x), P_2(x), P_4'(x)$ et $P_5'(x)$ ont exactement la même longueur. Le mot $P_3(x)$ est le sous-mot central mentionné précédemment. Enfin, notons

$$P_4(x) = \tau^\varepsilon(P_4'(x)) \quad \text{et} \quad P_5(x) = \tau^\varepsilon(P_5'(x)).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement P_i à la place de $P_i(x)$. La tresse x peut toujours être conjuguée vers

$$\tilde{x} = \Delta^\varepsilon \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

et cette écriture est presque en forme normale à gauche : le seul endroit où deux lettres successives ne sont pas forcément pondérées à gauche est la transition de la dernière lettre de P_5 vers la première lettre de P_1 . Tous les autres couples de lettres successives sont pondérées à gauche, même $\phi(P_3)$ suivi par $\iota(\Delta^\varepsilon P_4)$ (la dernière lettre suivie par la première).

Observation 4.4.2. Regardons la forme normale de $P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2$. Si

$$\iota(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \iota(P_4) \quad (4.1)$$

et

$$\phi(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \phi(P_2) \quad (4.2)$$

alors la tresse \tilde{x} est un conjugué non-intrusif de x (puisque la forme normale de \tilde{x} contient P_3 comme sous-mot, voir définition 4.3.1), et elle est rigide.

Intuitivement, l'hypothèse de l'observation 4.4.2 dit que l'écriture de l'élément \tilde{x} en haut n'est certes pas en forme normale, mais les modifications qu'il faut faire pour le transformer vers la forme normale sont limitées, localisées à l'intérieur du mot, et ne touchent pas ses extrémités (à une apparition éventuelle de facteurs Δ près, et à conjugaison près du début de \tilde{x} par ces facteurs Δ).

Par exemple, dans l'exemple 4.3.2, les hypothèses de l'observation 4.4.2 sont vérifiées, et le conjugué \tilde{x} est bien rigide.

Notre but maintenant est de démontrer que la proportion des tresses x pour lesquelles les hypothèses de l'observation 4.4.2 sont satisfaites tend vers 1 quand la longueur de x tend vers l'infini. Pour ce faire, nous allons observer qu'il y a certaines tresses qui « bloquent les réactions en chaîne de la transformation vers la forme normale », et que ces « tresses bloquantes » ont des très bonnes chances d'effectivement apparaître.

Rappelons que pour une tresse simple s , on note ∂s son complémentaire, c'est-à-dire $\partial s = s^{-1}\Delta$. Nous étendons cette définition à toute tresse y par la formule

$$\partial y = y^{-1} \cdot \Delta^{\sup(y)}.$$

C'est l'unique tresse telle que $y \cdot \partial y = \Delta^{\sup(y)}$. Si la forme normale de y est $\Delta^{\inf y} y_1 \cdots y_l$ alors la forme normale de ∂y est $\bar{y}_l \cdots \bar{y}_1$ avec $\bar{y}_{l-i} = \tau^{-i}(\partial y_{l-i})$ pour $i = 0, \dots, l-1$ (c'est-à-dire $\bar{y}_{l-i} = y_{l-i}^{-1} \cdot \Delta = \partial y_{l-i}$ si i est pair et $\bar{y}_{l-i} = \Delta \cdot y_{l-i}^{-1} = \tau^{-1}(\partial y_{l-i})$ si i est impair). En particulier, $\inf(\partial y) = 0$ et $\sup(\partial y) = \ell_c(y)$.

Maintenant, le mot en forme normale représentant $P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2$ est

$$\text{FN}_g(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \text{FN}_g(P_4 \cdot P_5 \cdot t) \cdot \text{FN}_g(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2) \quad (4.3)$$

où

$$t = (P_1 \cdot P_2) \wedge \partial(P_4 \cdot P_5).$$

Remarquons que, puisque $P_4 \cdot P_5 \cdot t \cdot t^{-1} \cdot \partial(P_4 \cdot P_5) = \Delta^{\sup(P_4 P_5)} = \Delta^{\sup(P_4 P_5 t)}$, on a

$$\partial(P_4 \cdot P_5 \cdot t) = t^{-1} \cdot \partial(P_4 \cdot P_5). \quad (4.4)$$

Ceci suggère une façon d'énoncer le problème dans laquelle $P_1 \cdot P_2$ et $\partial(P_4 \cdot P_5)$ jouent des rôles strictement symétriques :

Lemme 4.4.3. *Supposons que*

$$\phi(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2) = \phi(P_1 \cdot P_2), \quad (4.5)$$

et

$$\phi(t^{-1} \cdot \partial(P_4 \cdot P_5)) = \phi(\partial(P_4 \cdot P_5)). \quad (4.6)$$

Alors les hypothèses de l'observation 4.4.2 sont satisfaites.

Démonstration. En vertu de l'égalité (4.3), on a

$$\phi(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \phi(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2).$$

Comme $P_1 \cdot P_2$ est en forme normale, $\phi(P_1 \cdot P_2) = \phi(P_2)$, ce qui donne l'implication de (4.5) vers (4.2), et

$$\iota(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) = \iota(P_4 \cdot P_5 \cdot t)$$

ce qui, couplé à (4.4) et au fait que $\iota(P_4 \cdot P_5) = \iota(P_4)$ ainsi qu'à la formule $\phi(\partial x) = \tau^{\sup x-1}(\partial \iota(x))$, donne l'implication de (4.6) vers (4.1). \square

Notre but maintenant est de démontrer que, dans la plupart des cas, (4.5) et (4.6) sont en effet satisfaites.

Définition 4.4.4. Une tresse positive α est *bloquante* s'il existe un $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que pour toute tresse X avec $\inf(X) = 0$, en forme normale, telle que $X \cdot \alpha$ est en forme normale, la seule tresse simple non triviale qui est un suffixe de $X \cdot \alpha$ est σ_i ; autrement dit, le dernier facteur de la forme normale à droite de $X \cdot \alpha$ est σ_i .

Lemme 4.4.5. *Soit α une tresse bloquante et X une tresse telle que $\inf X = 0$. Soit t un préfixe de $X \cdot \alpha$, où $X \cdot \alpha$ est en forme normale. Si $(\sigma_i =) \phi(X \cdot \alpha) \neq \phi(t^{-1} \cdot X \cdot \alpha)$ alors $t = X \cdot \alpha$.*

Démonstration. Soit $s = t^{-1} \cdot X \cdot \alpha$ la tresse telle que $t \cdot s = X \cdot \alpha$ (bien sûr, $t \cdot s$ n'est pas en forme normale tel qu'il est écrit). Supposons (pour obtenir une contradiction) que s soit non trivial. Alors $\phi(s)$ est une tresse simple non triviale qui est un suffixe de s et donc de $t \cdot s = X \cdot \alpha$. Or, par hypothèse, la seule tresse simple non triviale qui est un suffixe de $X \cdot \alpha$ est σ_i . Donc $\phi(X \cdot \alpha) = \phi(s)$: contradiction. \square

Lemme 4.4.6. *Soit α une tresse bloquante et X une tresse telle que $\inf X = 0$. Soit t un préfixe de $X \cdot \alpha \cdot Y$, où $X \cdot \alpha \cdot Y$ est en forme normale. Si $\phi(t^{-1} \cdot X \cdot \alpha \cdot Y) \neq \phi(X \cdot \alpha \cdot Y)$ alors la forme normale de t contient la forme normale de $X \cdot \alpha$ en tant que préfixe.*

Démonstration. Soit $t_1 = t \wedge (X \cdot \alpha)$. Alors nous affirmons, et démontrons plus bas, que $\phi(t_1^{-1} \cdot X \cdot \alpha) \neq \phi(X \cdot \alpha)$. En appliquant le lemme précédent à t_1 , on en déduit que $X \cdot \alpha$ est un préfixe de t . Il reste à montrer que la forme normale de $X \cdot \alpha$ est même le début de la forme normale de t : en effet, t étant un préfixe de $X \cdot \alpha \cdot Y$, $(X \cdot \alpha)^{-1}t$ est un préfixe de Y et en particulier, $S((X \cdot \alpha)^{-1}t) \subset S(Y) \subset F(\alpha)$, la dernière inclusion venant du fait que $X \cdot \alpha \cdot Y$ est en forme normale. Donc $X \cdot \alpha \cdot \text{FN}_g((X \cdot \alpha)^{-1}t)$ est en forme normale, ce qui implique ce que nous voulons.

Voici la démonstration de notre affirmation. On suppose, par l'absurde, que $\phi(t_1^{-1} \cdot X \cdot \alpha) = \phi(X \cdot \alpha)$: cela signifie que $\text{FN}_g(t_1^{-1} \cdot X \cdot \alpha) \cdot Y$ est en forme normale. On en déduit, comme $t_1^{-1}t \wedge t_1^{-1}X \cdot \alpha = 1$, que l'on a également $t_1^{-1}t \wedge t_1^{-1}X \cdot \alpha \cdot Y = 1$. Puis, comme $t_1^{-1}t$ divise à gauche $t_1^{-1}X \cdot \alpha \cdot Y$, on a $t_1^{-1}t = 1$. Enfin, cela implique que t est un préfixe de $X \cdot \alpha$, et donc $\phi(t^{-1} \cdot X \cdot \alpha \cdot Y) = \phi(X \cdot \alpha \cdot Y)$: contradiction. \square

Lemme 4.4.7. *Il existe des tresses bloquantes.*

Démonstration. En voici une construction : en notant $\Delta_{i,j}$ le demi-twist positif sur les brins numéro $i, i+1, \dots, j$, posons

$$\alpha = \Delta_{1,n-1}\sigma_{n-1} \cdot \Delta_{1,n-2}\sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \cdot \Delta_{1,n-3}\sigma_{n-2}\sigma_{n-3} \cdot \Delta_{1,n-4}\sigma_{n-3}\sigma_{n-4} \cdots \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_3\sigma_2 \cdot \sigma_2.$$

Par exemple pour six brins

$$\alpha = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_5 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_5\sigma_4 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_3\sigma_2 \cdot \sigma_2.$$

C'est un mot de tresse qui est en forme normale à gauche, mais aussi en forme normale à droite. Nous observons que l'ensemble de départ de α est $S(\alpha) = \{1, \dots, n-2\}$ et son ensemble d'arrivée est $F(\alpha) = \{2\}$. Si $X \cdot \alpha$ est en forme normale (à gauche), alors $F(X) \supseteq \{1, \dots, n-2\}$ et donc $F(X) = \{1, \dots, n-2\}$. Ceci implique que $X \cdot \alpha$ est aussi en forme normale à droite. Donc le seul facteur simple qu'on peut extraire à droite de $X \cdot \alpha$ est σ_2 , comme souhaité. \square

Démonstration de la Proposition 4.3.4. On note encore

$$t = P_1 \cdot P_2 \wedge \partial(P_4 \cdot P_5).$$

Nous allons appliquer un raisonnement symétrique à $P_1 \cdot P_2$ et $\partial(P_4 \cdot P_5)$. Pour cela, remarquons que

$$\text{FN}_g(\partial(P_4 \cdot P_5)) = \text{FN}_g(\partial P_5) \cdot \text{FN}_g\left(\tau^{\text{sup}(P_5)}(\partial P_4)\right) = \text{FN}_g(\partial P_5) \cdot \text{FN}_g\left(\tau^{\lceil \frac{l}{5} \rceil}(\partial P_4)\right).$$

Ainsi, P_1 et ∂P_5 d'une part, et P_2 et $\tau^{\lceil \frac{l}{5} \rceil}(\partial P_4)$ d'autre part, joueront un rôle symétrique.

Le lemme suivant découle du lemme 4.1.5 et de la remarque 4.1.6.

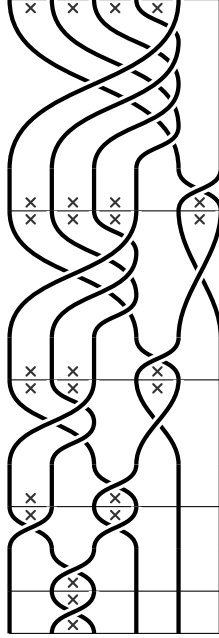


FIG. 4.4 – Exemple d’une tresse bloquante à 6 brins. Les croix indiquent les ensembles de départ et d’arrivée.

Lemme 4.4.8. Soient a_1, a_2, a_3 des fonctions de l à valeur dans \mathbb{N} , avec $a_1 + a_3$ et a_2 croissantes et tendant vers l’infini quand l tend vers l’infini, et telles que $a_1(l) + a_2(l) + a_3(l) = l$.

Pour toute tresse x d’infimum ε et de longueur canonique l , de forme normale $\Delta^\varepsilon x_1 \cdots x_l$, notons $P(x) = x_{a_1(l)+1} \cdots x_{a_1(l)+a_2(l)}$ ($P(x)$ est une partie de la forme normale de x de longueur $a_2(l)$).

Soit w une tresse fixée. La proportion des tresses $x \in \mathcal{B}_n^{i,l}$ telles que la forme normale de $P(x)$ contient celle de w comme sous-mot tend exponentiellement vite vers 1 quand l tend vers l’infini.

En particulier, la proportion des tresses x telles que P_2 et $\tau^{\lceil \frac{l}{5} \rceil}(\partial P_4)$ contiennent des tresses bloquantes tend vers 1 exponentiellement vite.

Parmi ces tresses là, selon le lemme 4.4.6, une condition nécessaire pour que

$$\phi(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) \neq \phi(P_2),$$

et donc $\phi(t^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2) \neq \phi(P_2)$, est que la forme normale de t contienne celle de P_1 en tant que préfixe. (Intuitivement, le facteur P_1 doit être complètement « mangé » lors de

la transformation de $P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2$ en forme normale.) Ceci revient à dire que P_1 doit être un préfixe de ∂P_5 . Or, la proportion des tresses x pour lesquelles ceci est le cas tend exponentiellement vite vers 0 avec la longueur l .

En voici la démonstration. On décompose ∂P_5 en deux parties de longueur $\lceil \frac{l}{10} \rceil$ et $\lceil \frac{l}{10} - \frac{1}{2} \rceil$: $\partial P_5 = Q_1 \cdot Q_2$. De même que précédemment, d'après le lemme 4.4.8, la proportion des tresses $x \in \mathcal{B}_n^{\varepsilon, l}$ telles que Q_2 contient une tresse bloquante tend exponentiellement vite vers 1 (plus précisément, d'après le lemme 4.1.5 et la remarque 4.1.6, le nombre des tresses pour lesquelles ce n'est pas le cas est de l'ordre de $\lambda^{l - \frac{l}{10} \mu^{\frac{l}{10}}}$ pour deux constantes $1 < \mu < \lambda$, tandis que le cardinal de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon, l}$ est de l'ordre de λ^l).

Nous allons maintenant montrer la chose suivante : si x vérifie l'hypothèse que P_1 est un préfixe de ∂P_5 , et si Q_2 contient une tresse bloquante, alors la forme normale de P_1 contient celle de Q_1 comme préfixe. Il suffit pour cela de montrer que $\phi(P_1^{-1} \partial P_5) \neq \phi(\partial P_5)$ et d'appliquer le lemme 4.4.6.

Rappelons que P_1 et ∂P_5 ont la même longueur $\lceil \frac{l}{5} \rceil$. Pour simplifier les notations, notons $k = \lceil \frac{l}{5} \rceil$ et $P_1 = y_1 \cdots y_k$ et $\partial P_5 = z_1 \cdots z_k$ les formes normales. L'hypothèse est que $y_1 \cdots y_k$ est un préfixe de $z_1 \cdots z_k$. Supposons par l'absurde que $\phi(P_1^{-1} \partial P_5) = \phi(\partial P_5)$, c'est-à-dire que $\phi(y_l^{-1} \cdots y_1^{-1} z_1 \cdots z_k) = z_k$. Cela revient à dire que

$$\text{FN}_g(y_l^{-1} \cdots y_1^{-1} z_1 \cdots z_k) = \text{FN}_g(y_l^{-1} \cdots y_1^{-1} z_1 \cdots z_{k-1}) \cdot z_k$$

et en particulier que $y_l^{-1} \cdots y_1^{-1} z_1 \cdots z_{k-1}$ est une tresse positive, c'est-à-dire que $y_1 \cdots y_k$ est un préfixe de $z_1 \cdots z_{k-1}$. Ceci est impossible, puisque $y_1 \cdots y_k$ est une tresse plus longue que $z_1 \cdots z_{k-1}$.

On en déduit que, si Q_2 contient une tresse bloquante, alors, sous l'hypothèse que P_1 est un préfixe de ∂P_5 , la forme normale de P_1 contient celle de Q_1 comme préfixe. Une tresse x vérifiant ces conditions est donc déterminée par au plus $l - \lceil \frac{l}{10} \rceil$ facteurs, puisque les $\lceil \frac{l}{10} \rceil$ facteurs de Q_1 sont déterminés par les premiers facteurs de P_1 . La proportion de telles tresses est donc, toujours d'après le lemme 4.1.5, de l'ordre de $\lambda^{-\frac{l}{10}}$.

Finalement, parmi toutes les tresses de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon, l}$, la proportion de celles telles que P_1 est un préfixe de ∂P_5 tend exponentiellement rapidement vers 0 avec l .

Par l'argument symétrique, il n'arrive qu'exponentiellement rarement que

$$\iota(P_4 \cdot P_5 \cdot P_1 \cdot P_2) \neq \iota(P_4).$$

Selon l'observation 4.4.2, la proportion des tresses x telles que \tilde{x} est un conjugué non-intrusif et rigide tend exponentiellement vite vers 1 avec la longueur canonique de x . \square

4.5 Généricité des tresses pseudo-anosoviennes

Théorème 4.5.1. *Dans chaque groupe de tresses \mathcal{B}_n , parmi les tresses dans la l -boule du graphe de Cayley, la proportion des pseudo-anosoviennes tend vers 1 quand l tend vers l'infini. De plus, cette convergence est exponentiellement rapide.*

Plusieurs points clé de cet argument sont déjà présents dans la sous-section 4.2.2.

Lemme 4.5.2. *Il existe une constante ξ_{pA} (qui dépend de n) telle que, parmi les tresses dans $\mathcal{B}_n^{\varepsilon,l}$, la proportion de celles qui sont conjuguables de façon non-intrusive vers une tresse rigide pseudo-anosovienne est supérieure à $1 - \xi_{pA}^l$ (pour l assez grand, indépendamment de i).*

Démonstration. D'après la proposition 4.2.4, il existe deux tresses γ_1 et γ_2 telles que, si une tresse rigide contient les deux comme sous-mots de sa forme normale, et son complémentaire contient le deuxième, elle ne peut être réductible.

Si une tresse et son complémentaire contiennent ces sous-mots dans leur cinquième central, alors tout conjugué non intrusif de cette tresse et son complémentaire les contiennent encore. Et, en particulier, si un tel conjugué s'avère être rigide, la tresse ne peut pas être réductible.

Regardons la proportion, parmi les éléments x de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon,l}$, des tresses qui contiennent, dans leur cinquième central $P_3(x)$, les deux sous-mots γ_1 et γ_2 , pendant que simultanément, leur complémentaire contient γ_2 dans son cinquième central $P_3(\partial x)$ (qui est égal à $\partial P_3(x)$ ou à $\tau(\partial P_3(x))$ selon la valeur de l). Il découle du lemme 4.4.8 que cette proportion tend vers 1 exponentiellement vite : il existe une constante ξ_C (qui dépend de n) telle que cette proportion est supérieure à $1 - \xi_C^l$. (L'index C dans la notation ξ_C vient du mot « courbe ».)

Regardons maintenant l'intersection des deux sous-ensembles de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon,l}$ (pour $l > 0$) :

1. Les tresses de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon,l}$ qui sont conjuguables, de façon non-intrusive, vers une tresse rigide.
2. Les tresses x de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon,l}$ qui contiennent, dans leur cinquième central $P_3(x)$, les deux sous-mots γ_1 et γ_2 , et dont le complémentaire contient γ_2 dans son cinquième central. (Remarquons que ce sous-ensemble peut contenir des tresses réductibles mais non rigides.)

Des tresses qui appartiennent à cette intersection ne peuvent pas être réductibles, par construction. De plus, les seules tresses rigides périodiques sont les puissances de Δ (voir démonstration de la proposition 4.2.4). Donc tous les éléments de cette intersection se conjuguent de façon non-intrusive vers une tresse rigide et pseudo-anosovienne.

En outre, la proportion des éléments de $\mathcal{B}_n^{\varepsilon,l}$ appartenant au premier sous-ensemble est au moins $1 - \xi_R^l$ d'après la Proposition 4.3.4, et pour le deuxième sous-ensemble c'est au moins $1 - \xi_C^l$. La proportion des éléments appartenant à l'intersection des deux est au moins $1 - \xi_R^l - \xi_C^l$. Donc pour tout ξ_{pA} supérieur à $\max(\xi_R, \xi_C)$ on a le résultat souhaité. Ceci termine la démonstration du lemme 4.5.2. \square

Démonstration du Théorème 4.5.1. On va mélanger trois ingrédients.

Premièrement, comme dans la sous-section 4.2.3 on observe que la l -boule $\mathbf{B}(l)$ du graphe de Cayley de \mathcal{B}_n est la réunion disjointe

$$\mathbf{B}(l) = \bigcup_{k=0}^l \bigcup_{\varepsilon=-l}^{l-k} \mathcal{B}_n^{\varepsilon,k}$$

(Cette observation nécessite de savoir que les tresses en *forme normale mixte* sont des géodésiques, ce qui est démontré dans [10].)

Deuxièmement, d'après le lemme 4.1.5, il existe un nombre $\lambda > 1$ (qui dépend de n) avec la propriété que $|\mathcal{B}_n^{\varepsilon,k}| = \Theta(\lambda^k)$, c'est-à-dire que les suites $\frac{|\mathcal{B}_n^{\varepsilon,k}|}{\lambda^k}$ et $\frac{\lambda^k}{|\mathcal{B}_n^{\varepsilon,k}|}$ restent bornées.

Troisièmement, nous rappelons que dans chaque $\mathcal{B}_n^{\varepsilon,k}$, la proportion des tresses qui n'ont pas de conjugaison non-intrusive vers une tresse rigide pseudo-anosovienne est un $O(\xi_{pA}^k)$, pour un certain nombre ξ_{pA} avec $0 < \xi_{pA} < 1$.

Donc le nombre total des tresses dans la l -boule qui ne sont pas non-intrusivement conjugués vers une tresse rigide, pseudo-anosovienne est un

$$O\left((2l+1) + 2l \cdot (\lambda \cdot \xi_{pA})^1 + (2l-1) \cdot (\lambda \cdot \xi_{pA})^2 + \dots + (2l-l+1) \cdot (\lambda \cdot \xi_{pA})^l\right)$$

La proportion, parmi les tresses dans la l -boule, de ceux qui ne sont pas non-intrusivement conjugués vers une tresse rigide, pseudo-anosovienne est donc un

$$\begin{aligned} O\left(\frac{2l+1}{\lambda^l} + \frac{2l \cdot \xi_{pA}}{\lambda^{l-1}} + \frac{(2l-1) \cdot \xi_{pA}^2}{\lambda^{l-1}} + \dots + \frac{(2l-l+1) \cdot \xi_{pA}^l}{1}\right) \\ \leq O\left((l+1) \cdot (2l+1) \cdot \left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \xi_{pA}\right)\right)^l\right) \end{aligned}$$

et donc, pour tout $\eta > 0$ un

$$O\left(\left(\max\left(\frac{1}{\lambda}, \xi_{pA}\right) + \eta\right)^l\right).$$

En choisissant η suffisamment petit pour que $\max\left(\frac{1}{\lambda}, \xi_{pA}\right) + \eta < 1$, on a le résultat. \square

4.6 Solutions rapides au problème de conjugaison

Le but de cette section est de démontrer que « génériquement, le problème de conjugaison dans \mathcal{B}_n peut être résolu en temps quadratique ». Rappelons d'abord une méthode standard pour résoudre le problème de conjugaison dans les groupes de tresses. Pour décider si deux tresses données x_1 et x_2 sont conjuguées, on calcule l'ensemble des circuits glissants $SC(x_i)$, sous-ensemble de la classe de conjugaison de x_i , pour $i = 1$ et $i = 2$ (voir définition 1.3.11). On rappelle deux choses :

- L'ensemble $SC(x)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de x , et il est toujours non-vide.
- Si la classe de conjugaison de x contient une tresse rigide, alors $SC(x)$ est exactement l'ensemble des conjugués rigides [19].

Pour décider alors si x_1 et x_2 sont conjugués, il suffit de tester si un élément arbitrairement choisi de $SC(x_1)$ est contenu dans $SC(x_2)$.

Notre but est de démontrer que pour un élément x de \mathcal{B}_n « générique », on peut calculer l'ensemble $SC(x)$ en temps polynomial.

Remarque 4.6.1. Remarquons que pour une tresse rigide x_r , l'ensemble des conjugués rigides $SC(x_r)$ contient au moins toute l'orbite de x_r

- par τ , c'est à dire conjugaison par Δ , et
- par permutation cyclique des facteurs autre que Δ .

Cette orbite a au plus $2 \cdot \ell_c(x_r)$ éléments. On verra que pour une tresse « générique », l'ensemble des conjugués rigides contient exactement *une* telle orbite.

Théorème 4.6.2. *Il existe un algorithme, qui prend en entrée une tresse $x \in \mathcal{B}_n$, qui s'exécute en temps $O(\ell_c(x)^2)$, et qui renvoie comme réponse*

1. ou bien un conjugué rigide de x , fourni avec le certificat que l'ensemble des conjugués rigides de x ne contient que son orbite par τ et par permutation cyclique des facteurs (autres que Δ),
2. ou bien bien la réponse « Je ne sais pas ».

Parmi les éléments dans la boule de rayon l du graphe de Cayley de \mathcal{B}_n , la proportion des tresses dans le cas (2) tend vers 0 exponentiellement vite quand l tend vers l'infini.

Démonstration. Comme dans la section 4.4, on découpe la tresse x en 5 morceaux P_1, P_2, P_3, P'_4 et P'_5 , et on note $P_4 = \tau^{\inf x}(P'_4)$ et $P_5 = \tau^{\inf x}(P'_5)$. On note $P_{12} = P_1 \cdot P_2$ et $P_{45} = P_4 \cdot P_5$. (En fait, pour le déroulement de l'algorithme, il suffirait de couper la tresse en 3 morceaux, mais pour la rédaction de cette démonstration, nous réutilisons les notations des sections précédentes et le découpage en 5 morceaux.) Puis on exécute les opérations suivantes :

1. calculer $\text{FN}_g(P_{45}P_{12})$;
2. tester si $\iota(P_{45}P_{12}) = \iota(P_{45})$. Si ce n'est pas le cas, renvoyer « Je ne sais pas ». Si c'est le cas, continuer l'exécution ;
3. tester si $\phi(P_{45}P_{12}) = \phi(P_{12})$. Si ce n'est pas le cas, renvoyer « Je ne sais pas ». Si c'est le cas, continuer l'exécution ;
4. tester si P_3 contient dans sa forme normale le facteur en forme normale $(\Delta\sigma_2^{-1}) \cdot \sigma_1$. Si ce n'est pas le cas, renvoyer « Je ne sais pas ». Si c'est le cas, continuer l'exécution ;
5. renvoyer $\Delta^{\inf x} P_{45}P_{12}P_3$.

Les tests (2) et (3) vérifient si les conditions de l'observation 4.4.2 sont vérifiées pour la tresse x . Si tel est le cas, cela assure que la tresse $y = \Delta^{\inf x} P_{45}P_{12}P_3$ est bien un conjugué rigide de x , et, en outre, que la conjugaison se fait de manière non intrusive. Supposons maintenant que x vérifie le test (4). Comme la conjugaison est non intrusive, y contient également le facteur $(\Delta\sigma_2^{-1}) \cdot \sigma_1$; puis, en permutant cycliquement les facteurs de y , on obtient une tresse rigide z vérifiant $\iota(z) = \sigma_1$ ou σ_{n-1} et $\phi(z) = (\Delta\sigma_2^{-1})$ ou $(\Delta\sigma_{n-2}^{-1})$.

Nous affirmons que l'ensemble $SC(z)$ est alors réduit à l'orbite définie à la remarque 4.6.1. La démonstration est essentiellement la même que celle du lemme 3.1.4. Pour pouvoir l'adapter à notre cas, il suffit de montrer la chose suivante : aucun des conjugués de z par

les préfixes stricts de $\iota(z)$ et de $\partial\phi(z)$ ne sont dans $SC(z)$. Or, cette affirmation est une tautologie, puisque ni $\iota(z) = \sigma_1$ ou σ_{n-1} , ni $\partial\phi(z) = \sigma_2$ ou σ_{n-2} , ne possède de préfixe strict !

Ceci montre que l'algorithme renvoie bien le résultat attendu.

Étudions à présent la complexité de cet algorithme. D'après [14], la complexité du calcul de la forme normale $\text{FN}_g(P_{45}P_{12})$ est en $O(\ell_c(P_{45}P_{12})^2) = O(\ell_c(x)^2)$. Les tests (2) et (3) sont réalisés en temps constant, le test (4) en temps linéaire. La complexité finale de l'algorithme est donc bien $O(\ell_c(x)^2)$.

Enfin, le fait que la proportion des tresses pour lesquelles l'algorithme renvoie « Je ne sais pas » tend exponentiellement vite vers 0 quand l tend vers l'infini est une conséquence des propriétés démontrées à la section 4.4 : la proportion de tresses dans la boule de rayon l dans le graphe de Cayley qui vérifient les hypothèses de l'observation 4.4.2 (c'est-à-dire les tests (2) et (3)) tend exponentiellement vite vers 1 quand l tend vers l'infini. D'après le lemme 4.4.8, c'est également le cas des tresses vérifiant le test (4).

Dans tous les cas, la réponse est renvoyée en temps quadratique. \square

Remarque 4.6.3. Dans la pratique, on pourrait remplacer le test (4) par « tester si P_3 contient dans sa forme normale un facteur de la forme $(\Delta\sigma_j^{-1}) \cdot \sigma_i, i \neq j$ ». Cela ne change pas la complexité en $O(\ell_c(x)^2)$ de l'algorithme, tout en étendant l'ensemble des tresses pour lesquelles l'algorithme renvoie un conjugué rigide tel que l'ensemble des circuits glissants est réduit à l'orbite de la remarque 4.6.1.

Bibliographie

- [1] E. ARTIN, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 4 (1925), p. 47–72
- [2] F. ATALAN, M. KORKMAZ, *The number of pseudo-Anosov elements in the mapping class group of a four-holed sphere*, Turkish Journal Math., 34(4), (2010), p. 585–592.
- [3] D. BERNADETE, M. GUTIERREZ, Z. NITECKI, *Braids and the Nielson-Thurston classification*, J. Knot Theory and Ramif., 4 (1995), p. 549–618
- [4] J. BIRMAN, V. GEBHARDT, J. GONZÁLEZ-MENESES, *Conjugacy in Garside groups. II. Structure of the ultra summit set*, Groups Geom. Dyn., 2 (2008), p. 13–61
- [5] J. BIRMAN, K. H. KO, S. L. LEE, *The infimum, supremum, and geodesic length of a braid conjugacy class*, Adv. Math., 164 (2001), p. 41–56
- [6] M. CALVEZ, *Dual Garside structure and reducibility of braids*, Journal of Algebra, 356 (2012), p. 355–373
- [7] S. CARUSO, *A family of pseudo-Anosov braids whose super summit sets grow exponentially*, J. Knot Theory Ram. (2013), 22(9).
- [8] S. CARUSO, *On the genericity of pseudo-Anosov braids I: rigid braids*, arXiv:1306.3757
- [9] S. CARUSO, B. WIEST, *On the genericity of pseudo-Anosov braids II: conjugations to rigid braids*, arXiv:1309.6137
- [10] R. CHARNEY, J. MEIER, *The language of geodesics for Garside groups*, Math. Zeitschrift, 248 (2004), p. 495–509
- [11] P. DEHORNOY, *Combinatorics of normal sequences of braids*, J. Combinat. Th. Series A, 114 (2007), p. 389–409
- [12] P. DEHORNOY, avec F. DIGNE, E. GODELLE, D. KRAMMER, J. MICHEL, *Foundations of Garside Theory*, livre en préparation, version préliminaire sur <http://www.math.unicaen.fr/~garside/Garside.pdf>
- [13] I. DYNNIKOV, B. WIEST, *On the complexity of braids*, J. Eur. Math. Soc. 9 (2007), p. 801–840

- [14] E. A. ELRIFAI, H. MORTON, *Algorithms for positive braids*, Q. J. Math., Oxf. II Ser., 45 (1994), p. 479 – 497
- [15] D. B. A. EPSTEIN et al., *Word processing in groups*, Jones and Bartlett (1992)
- [16] B. FARB, D. MARGALIT, *A primer on mapping class groups*, Princeton University Press (2011)
- [17] A. FATHI, *Dehn twists and pseudo-Anosov diffeomorphisms*, Invent. math. (1987), p. 129–151
- [18] V. GEBHARDT, *A new approach to the conjugacy problem in Garside groups*, Journal of Algebra, 292, No. 1 (2005), p. 282–302
- [19] V. GEBHARDT, J. GONZÁLEZ-MENESES, *The cyclic sliding operation in Garside groups*, Math. Z., 265 (2010), p. 85–114
- [20] J. GONZÁLEZ-MENESES, *On reduction curves and Garside properties of braids*, Topology of algebraic varieties and singularities, Contemp. Math., 538, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2011), p. 227–244
- [21] J. GONZÁLEZ-MENESES, B. WIEST, *Reducible braids and Garside theory*, Algebr. Geom. Topol., 11 (2011), p. 2971–3010
- [22] C. GODSIL, G. ROYLE, *Algebraic Graph Theory*, Springer (2001)
- [23] W. MAGNUS, *Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen*, Mathematische Annalen (1934), p. 617–646
- [24] J. MAHER, *Exponential decay in the mapping class group* (2011), [arXiv:1104.5543](https://arxiv.org/abs/1104.5543)
- [25] M. PRASOLOV, *Small braids with large ultra summit set*, Mat. Zametki, 89 (2011), no. 4, p. 577–588; translation in Math. Notes, 89 (2011), no. 3-4, p. 545–554
- [26] A. SISTO, *Contracting elements and random walks* (2011), [arXiv:1112.2666](https://arxiv.org/abs/1112.2666)