HAL
open science

Etude théorique des fluctuations de courant de l'admittance et de la densité d'états d'un nano-système en interaction

Redouane Zamoum

▶ **To cite this version:**

Redouane Zamoum. Etude théorique des fluctuations de courant de l'admittance et de la densité d'états d'un nano-système en interaction. Autre [cond-mat.other]. Aix-Marseille Université, 2013. Français. NNT : . tel-00881571

HAL Id: tel-00881571

https://theses.hal.science/tel-00881571v1

Submitted on 12 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE
l'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Spécialité

Physique Théorique

Ecole doctorale physique et science de la matière (Marseille)

Présentée par

Redouane ZAMOUM

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

Sujet de la thèse :

Etude théorique des fluctuations de courant, de l'admittance et de la densité d'états d'un nano-système en interaction.

Date de soutenance : 27 septembre 2013

devant le jury composé de :

Mme. Adeline Crépieux	Directrice de thèse
Mme. Julia Meyer	Rapporteure
M. Pascal Simon	Rapporteur
M. Frédéric Pierre	Examinateur
M. Thierry Martin	Président du jury

A mes parents
A mes frères et sœures
A mon épouse

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont un jour aidé, par un mot, un geste, un encouragement ou une critique. Aussi bien les gens que je connais et ceux que j'ai juste rencontré.

Mes premiers remerciements s'adressent à Adeline Crépieux. D'abord pour m'avoir accepté en stage du master II et ensuite pour la thèse. Grâce à toi j'ai appris beaucoup de choses qu'un jeune chercheur a besoin de savoir. En plus des connaissances scientifiques du domaine, j'ai bien compris qu'un chercheur doit être patient en permanence, qu'il doit tomber pour se remettre debout et qu'il doit faire des erreurs pour avancer.

Pendant ces trois années, tu as su être patiente avec moi. Tu m'as permis d'avoir plus d'initiatives et d'audace scientifique, quoique des fois je me plantais dans des calculs et que je donnais des interprétations complètement bizarres. Il faut noter aussi que ton optimisme, chose qui me manquait des fois et qui nous a permis de croire en nos approches et d'arriver à des résultats. Merci pour tout, et si un jour j'aurais à encadrer quelqu'un j'espère me comporter comme toi.

Je remercie ensuite Thierry Martin, d'abord pour avoir accepté de faire partie du jury de thèse, mais surtout pour le cours de théorie quantique du solide que j'ai suivi en master II. Ce cours représente une vraie initiation à la nanophysique théorique ainsi qu'une motivation principale pour faire une thèse dans ce domaine.

Je remercie les membres du jury, Julia Meyer, Pascal Simon et Frédéric Pierre, pour avoir lu le manuscrit et de m'avoir questionné sur son contenu, ainsi que pour les suggestions qui m'ont permis d'améliorer la forme.

Je remercie les collaborateurs avec qui nous avons travaillé : Inès Safi, Cristina Bena et Marine Guigou dont les conseils ont été précieux pour la préparation de la présentation. Grâce à ces collaborateurs j'ai appris le sens du travail en groupe et l'échange des idées.

Je remercie les membres de l'équipe nanophysique du CPT, Thibaut Jonckheere, Pierre Devillard, Jérôme Rech, Claire Wahl et Denis Chevallier. Je remercie également le personnel technique et administratif du Centre de Physique Théorique, pour leur disponibilité et leur gentillesse : Véronique Esposito, Catherine Levet, Vincent Bayle, Beatrice Rolland, Magatte Sarr, Brigitte Guarnieri et tous ceux que je n'ai pas cités.

Je remercie Mossadek Talby et Serge Lazzarini, les deux responsables du master qui ont toujours été présents pour leurs étudiants pendant et même après le master.

Je souhaite aussi remercier mes amis du centre de physique théorique : Loïc de Guillebon, toujours là pour soutenir, conseiller et discuter inconditionnellement. Jordan François et Cédric Fournel pour les nombreuses pauses-café, les discussions et les idées échangées. Tapio Salminen qui partage le bureau avec moi. Je remercie également : Julien Maurer, Florent Marmol et Heinrich Steigerwald. Je remercie également mon ami Mosbah Difallah pour ses conseils et ses encouragements.

Je tiens à remercier aussi tous ceux que j'ai connus ici à Marseille et qui m'ont aidé de près ou de loin : Abdallah, Abderraouf, Saïd, Mouad, Farid et Sofiane.

Un grand merci s'adresse à mes amis pour toujours : Abdelwahab, Abderrahim, Houssam, Mahdi, Hafid, Kamel, Yacine, ainsi qu'à tous mes amis que j'ai connus à l'université

d'Alger. J'adresse un remerciement très spécial à mon meilleur ami Hmimed ainsi qu'à tous les potes et les amis d'enfance du quartier à Alger : Mohamed, Nabil, Hakim, Samir et les autres, je n'oublierai jamais les moments partagés ensemble, et je vous dis : les gars, j'ai vraiment besoin d'un match de foot.

Que faire pour remercier mes parents ? Certes, les mots ne suffisent pas. Toujours là depuis ma naissance, j'espère rendre au moins une petite partie de ce que vous avez fait pour moi. Mes frères et sœurs, toujours là pour me soutenir par tous les moyens, merci à vous tous, et merci à mes neveux et nièces. Merci aussi pour ma belle-famille qui m'a soutenu. Enfin, merci à toi ma chère épouse pour m'avoir soutenu et surtout supporté dans des moments très importants.

Table des matières

Introduction **1**

1 Conduction dans les systèmes mésoscopiques **4**
1.1 Conduction dans les métaux 5
1.1.1 Théorie des électrons de conduction 5
1.1.2 Théorie du champ moyen : Approximation de Hartree-Fock 6
1.1.3 Le phénomène d'écrantage 6
1.2 Théorie des liquides de Fermi 7
1.2.1 Notion de quasi-particules 7
1.2.2 Fonction de distribution, énergie et temps de vie des quasi-particules 8
1.2.3 Fonction de Green d'une quasi-particule 10
1.3 Blocage de Coulomb 11
1.3.1 Echelle d'énergie 12
1.3.2 Exemple de dispositif : transistor à un électron 12
1.4 Théorie $P(E)$ de la diffusion d'un électron dans un environnement dissipatif 16
1.4.1 Taux de diffusion d'un électron 16
1.4.2 Propriétés de la fonction $P(E)$ 18
1.4.3 Caractéristiques courant-tension 18
1.4.4 Cas d'un environnement Ohmique 19
1.5 Théorie de la diffusion 20
1.5.1 Description du système 21
1.5.2 Courant moyen et conductance 22
1.6 Bruit et corrélations de courant 24
1.6.1 Origine du bruit 25
1.6.2 Bruit poissonien : formule de Schottky 25
1.6.3 Bruit dans la limite quantique 26
1.6.4 Bruit à fréquence nulle 27
1.6.5 Bruit à fréquence finie 29
Conclusion 32

2 Théorie des liquides de Luttinger chiraux **33**
2.1 Effet Hall quantique fractionnaire 34
2.2 Liquide de Luttinger chiral 36
2.2.1 Théorie hydrodynamique de Wen 37
2.2.2 Théorie des champs effective pour un liquide de Luttinger chiral incompressible complexe 40
2.2.3 Caractéristique courant-tension et transmission électronique entre deux états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire 42

2.3 Refermionisation . . . 46
2.3.1 Refermionisation par résolution des équations du mouvement . . . 47
2.3.2 Refermionisation par diagonalisation du Hamiltonien . . . 49
2.4 Expériences importantes sur les liquides de Luttinger chiraux . . . 50
Conclusion . . . 54

3 Fluctuations de courant et admittance dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire 55
3.1 Admittance quantique . . . 56
3.1.1 Description théorique . . . 56
3.1.2 Description expérimentale . . . 57
3.2 Description du système et modèle . . . 59
3.3 Expression des corrélations de courant et de l'admittance en terme d'amplitude de transmission . . . 61
3.3.1 Auto-corrélations et corrélations croisées . . . 61
3.3.2 Admittance . . . 63
3.4 Relations entre les fluctuations du courant et l'admittance . . . 63
3.4.1 Auto-corrélations . . . 65
3.4.2 Corrélations croisées . . . 65
3.5 Discussion . . . 66
3.5.1 Limite de faible température . . . 67
3.5.2 Limite de faible rétrodiffusion . . . 67
3.5.3 Limite de haute température . . . 68
Conclusion . . . 70

4 Conducteur à un canal dans un environnement Ohmique 71
4.1 Concepts importants . . . 72
4.1.1 Anomalie de point zéro . . . 72
4.1.2 Le mapping . . . 73
4.2 Modèle . . . 73
4.3 Résultats . . . 76
4.3.1 Courant . . . 76
4.3.2 Le bruit non-symétrisé à fréquence finie . . . 76
4.3.3 Le bruit à fréquence nulle . . . 77
4.3.4 La conductance à fréquence finie . . . 77
4.4 Discussion . . . 78
4.4.1 Conductance différentielle et bruit à fréquence nulle . . . 78
4.4.2 Conductance à fréquence finie et bruit non-symétrisé à fréquence finie 82
Conclusion . . . 86

5 Théorie des liquides de Luttinger non chiraux 87
5.1 Linéarisation du spectre . . . 88
5.2 Bosonisation . . . 90
5.2.1 Champs bosoniques . . . 90
5.2.2 Expression du Hamiltonien . . . 92
5.2.3 Expression du Lagrangien et de l'action . . . 93
5.3 Expériences sur des liquides de Luttinger . . . 94
5.3.1 Les nanotubes de carbone . . . 94

5.3.2 Fractionalisation de la charge dans les liquides de Luttinger non-chiraux . . . 96
5.4 Conclusion . . . 98
Conclusion . . . 98

6 Densité d'états dans un fil quantique connecté à deux électrodes 99
6.1 Fonctions de Green . . . 100
6.1.1 Cadre de la théorie de la réponse linéaire . . . 100
6.1.2 Cadre de la théorie de perturbation . . . 101
6.1.3 Formalisme de Keldysh . . . 102
6.1.4 Equation de Dyson . . . 105
6.2 Propriétés d'un fil quantique . . . 106
6.2.1 Expression de la fonction de Green retardée fermionique . . . 106
6.2.2 Densité d'états d'un fil quantique . . . 108
6.3 Fil quantique en présence d'impuretés . . . 109
6.3.1 Cas d'une seule impureté en interaction . . . 109
6.3.2 Cas de deux impuretés sans interaction . . . 112
6.4 Fil quantique connecté à deux électrodes . . . 114
6.4.1 Modèle . . . 115
6.4.2 Equation de Dyson . . . 116
6.4.3 Solution de l'équation de Dyson . . . 117
6.5 Résultats : densité d'états . . . 118
6.5.1 Paramètre d'interaction uniforme . . . 118
6.5.2 Paramètre d'interaction dépendant de la position . . . 122
Conclusion . . . 123

Perspectives 124

A Calcul de courant, bruit non-symétrisé à fréquence finie et conductance 128
A.1 Courant moyen . . . 128
A.2 Bruit non-symétrisé . . . 129
A.3 Conductance . . . 133
A.4 Bruit à fréquence finie : comparaison avec la théorie de la diffusion . . . 134

B Relation entre corrélations de courant et admittance calculées par rétrodiffusion dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire 136

C Solution de l'équation de Dyson de l'article de Song et *coll.* 142

D Validité de l'équation de Dyson pour un fil quantique connecté à deux électrodes 143

E Dérivation et résolution de l'équation de Dyson 147
E.1 Equation de Dyson . . . 147
E.2 Transformée de Fourier de l'équation de Dyson . . . 149
E.3 Solution de l'équation de Dyson . . . 150

F Fonctions de Green bosoniques et fermioniques pour un fil quantique inhomogène **153**
F.1 Fonctions de Green bosoniques 153
F.1.1 Fonctions de Green bosoniques quand $x' = -L/2$ 156
F.1.2 Fonctions de Green bosoniques quand $x' = +L/2$ 158
F.1.3 Les autres fonctions de Green bosoniques 159
F.2 Fonction de Green retardée fermionique 159
F.2.1 Fonction de Green $g^R_{r,r}(\pm L/2, \pm L/2; \omega)$ 160
F.2.2 Fonction de Green $g^R_{r,r}(\pm L/2, \mp L/2; \omega)$ 163
F.2.3 Fonction de Green $g^R_{r,r}(x, \pm L/2; \omega)$ 166
F.2.4 Fonction de Green $g^R_{r,r}(\pm L/2, x, \omega)$ 171
F.2.5 Fonction de Green $g^R_{r,r}(x, x; \omega)$ 173

Introduction

Le cadre général de cette thèse est la physique de la matière condensée. Plus précisément, la physique mésoscopique qui étudie les propriétés d'un solide de petite dimension. De nombreux outils émanants de nombreuses théories, ont tenté de comprendre et de décrire les phénomènes qui caractérisent cette échelle mésoscopique. De nombreuses expériences ont été réalisées pour les mêmes buts. Une des caractéristiques importante d'un échantillon mésoscopique, est le fait que sa taille doit être inférieure à la longueur de cohérence de phase des électrons. Elle correspond à la longueur moyenne sur laquelle la phase de la fonction d'onde électronique est inchangée.

La fabrication des conducteurs de petite taille a permis d'observer un certain nombre de phénomènes nouveaux. Le phénomène de blocage de Coulomb nous a intéressé en particulier. Il caractérise des dispositifs construits à base de jonctions. Ce phénomène est engendré par la quantification des niveaux d'énergie [1]. Son étude permet de comprendre la conduction dans de nombreux dispositifs. Ceci peut se faire en mesurant le courant en fonction de la tension appliquée. Cependant, certaines conditions peuvent affecter le profil du courant. A noter, les charges parasites et l'environnement extérieur. L'étude de ce dernier point se fait par la théorie $P(E)$ qui permet de calculer le courant en fonction de la tension appliquée en tenant compte de l'influence de l'environnement extérieur [2].

Le phénomène de conduction n'est pas restreint aux jonctions. D'une manière plus générale, la conduction a fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux sur divers systèmes depuis le début du siècle dernier. Au début, on s'intéressait à l'étude du courant moyen. Plusieurs approches théoriques ont tenté d'expliquer le comportement collectif des porteurs de charge, allant des modèles classiques, semi-classiques jusqu'aux modèles quantiques. L'un des modèles qui décrit bien le transport dans les systèmes mésoscopiques est celui de Landauer. Il permet en effet de calculer le courant moyen et la conductance en se basant sur une approche de diffusion pour un fil connecté à des réservoirs [3, 4]. Les prédictions théoriques de ce modèle ont été vérifiées expérimentalement. A noter l'observation de la quantification de la conductance qui augmente par palier de $2e^2/h$ [5].

Un autre aspect très important du transport est le bruit. Celui-ci représente les fluctuations temporelles du courant autour de sa valeur moyenne. Dans le passé on cherchait à éradiquer le bruit, qui des années après s'avère très utile. En effet, l'analyse de son comportement permet d'accéder à des informations sur la physique du système. Un des plus importants résultat est la détermination de la charge des porteurs pour différents systèmes à travers la relation de Schottky [6]. Cette formule a été dérivée initialement pour un métal. Elle montre que le bruit qui résulte d'une source de particules est proportionnel au courant moyen et à la charge des porteurs de courant. Cette expression peut être étendue à d'autres systèmes en écrivant : $S = 2e^*\langle I\rangle$, où e^* est la charge effective. Elle varie suivant les systèmes étudiés. Par exemple, pour une jonction métal-supraconducteur $e^* = 2e$, correspondant aux paires de Cooper [7]. Plusieurs travaux théoriques et expérimentaux ont

étudié le bruit pour divers systèmes. La mesure du bruit à fréquence finie diffère du point de vue du protocole de mesure [8, 9]. Il en est de même pour les prédictions théoriques qui diffèrent du point de vue de la définition du bruit [10, 11].

Une autre grandeur importante à citer est l'admittance quantique. Etant directement reliée à la conductance ac, elle peut donc décrire le transport dans les systèmes mésoscopiques. Plusieurs travaux théoriques ont étudié l'admittance, à citer l'article fondamental de Büttiker et *coll.* [12]. Du point de vue expérimental, les travaux pionniers de Gabelli et *coll.* ont permis de mesurer l'admittance quantique pour plusieurs systèmes [13, 14, 15].

Dans cette thèse, l'ensemble des systèmes étudiés sont des conducteurs unidimensionnels et en interaction. L'interaction est introduite d'une façon phénoménologique par Landau dans sa théorie des liquides de Fermi, en définissant le concept de quasi-particules [16]. Cette théorie est très efficace à deux et à trois dimensions. Cependant, pour les systèmes unidimensionnels, elle est incapable de décrire des phénomènes nouveaux dûs à la réduction des dimensions du système. L'introduction de la théorie des liquides de Tomonaga-Luttinger permet de décrire ces phénomènes [17, 18]. Cette théorie s'appuie sur deux bases : la linéarisation de la relation de dispersion, et la bosonisation. En effet, pour un système électronique fortement corrélé, elle décrit les excitations comme des bosons. Les liquides de Tomonaga-Luttinger sont caractérisés par un paramètre d'interaction K. Quand ce paramètre prend la valeur $1/2$, il permet de réécrire les excitations bosonique sous une forme fermionique. C'est ce que l'on appelle la procédure de refermionisation [19, 20].

Suivant le système, le liquide de Tomonaga-Luttinger peut être chiral ou non-chiral. La théorie des liquides de Luttinger non-chiraux s'applique sur des systèmes comme les fils quantiques ou les nanotubes de carbone. Pour ces deux systèmes, des expériences ont mis en évidence la physique de Tomonaga-Luttinger [21]. La théorie des liquides de Luttinger chiraux développée par Wen [22, 23], est appliquée à des systèmes tels que les états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire [24, 25]. Pour un fluide de Hall incompressible simple ou complexe cette théorie s'applique en tenant compte d'un certain nombre de modification suivant le système. Pour un fluide de Hall compressible, le modèle des fermions composites est utilisé [26].

Nous nous sommes intéressés à l'étude des fluctuations de courant, de l'admittance quantique et de la densité d'états pour les nano-systèmes en interaction. Dans une première partie, nous avons étudié les fluctuations de courant ainsi que l'admittance quantique pour les états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Le système est constitué de deux états de bord interagissant à travers une constriction. L'objectif du travail est de calculer les auto-corrélations, les corrélations croisées ainsi que l'admittance quantique, et d'essayer de trouver un lien entre ces quantités. Pour cela, nous avons considéré un facteur de remplissage $\nu = 1/2$, qui permet d'utiliser la procédure de refermionisation et d'obtenir des résultats permettant ainsi d'avoir une idée sur le système, en dépit du fait que cette valeur de ν ne soit pas observée expérimentalement. Le fait que les fluctuations de courant et l'admittance dépendent de l'amplitude de transmission nous a permis d'établir un lien direct entre ces grandeurs. En effet, les auto-corrélations et les corrélations croisées s'écrivent en termes de l'admittance. De plus, dans les limites de basse et de haute température les corrélations de courant dépendent exclusivement de l'admittance.

Dans une deuxième partie, nous avons étudié le transport dans un conducteur cohérent

couplé avec l'environnement. Nous avons considéré un conducteur à un canal en série avec une résistance de valeur égale au quantum de résistance. Par le mapping, ce système est équivalent à un liquide de Tomonaga-Luttinger en présence d'une impureté. La valeur de la résistance de l'environnement implique que le paramètre d'interaction du liquide de Tomonaga-Luttinger est $K = 1/2$. Cette valeur nous permet d'utiliser la procédure de refermionisation. Nous avons ainsi obtenu des résultats exacts pour le calcul du courant moyen, du bruit non-symétrisé à fréquence finie ainsi que pour la conductance à fréquence finie, et cela pour tous les régimes de température, toutes les valeurs de la tension appliquée et toutes les gammes de fréquence. Les expressions obtenues du courant moyen et du bruit à fréquence nulle sont équivalentes à celles de la théorie de la diffusion. Ce n'est pas le cas pour le bruit non-symétrisé à fréquence finie et de la conductance à fréquence finie qui s'écrivent d'une manière différente que celle de la théorie de la diffusion. Le profil obtenu pour la conductance est en bon accord avec les résultats de mesure pour un circuit comportant un conducteur cohérent en série avec une résistance.

Dans une troisième partie, nous avons étudié un fil quantique connecté à deux réservoirs. L'objectif est d'établir le profil de la densité d'états. Le fil est décrit par un liquide de Tomonaga-Luttinger et les points de contact avec les réservoirs sont décrits par deux impuretés. Afin de calculer la densité d'états, nous avons dérivé et résolu l'équation de Dyson pour la fonction de Green retardée en espace et en fréquence. Cette fonction de Green retardée s'écrit au moyen de fonctions de Green retardées nues. Nous avons ensuite considéré deux cas, le premier cas correspond à un fil quantique homogène. A faible rétrodiffusion et dans la limite des faibles interactions, on retrouve le comportement d'un fil quantique sans interaction. Pour des positions loin des impuretés, on retrouve le comportement d'un fil quantique sans impuretés. Dans le deuxième cas, le fil quantique est inhomogène. Il faut calculer les fonctions de Green retardées nues en espace et en temps, les incorporer dans la fonction de Green avec impuretés et effectuer une transformée de Fourier qui permet d'avoir la densité d'états.

Cette thèse est organisée comme suit. Dans le premier chapitre, nous exposons quelques concepts fondamentaux de la physique mésoscopique. Dans le deuxième chapitre, après un bref rappel sur l'effet Hall quantique fractionnaire, nous exposons la théorie des liquides de Luttinger chiraux qui décrit les états de bord d'un fluide de Hall quantique. Nous donnons la caractéristique courant-tension pour différents types de fluides de Hall. Nous abordons ensuite la procédure de refermionisation, qui constitue un outil fondamental pour notre travail. Nous finissons le chapitre par exposer quelques résultats expérimentaux sur les états de bord. Dans le troisième chapitre, après un rappel sur l'admittance quantique, nous présentons les résultats relatifs au calcul des corrélations de courant et de l'admittance dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Le quatrième chapitre est dédié au travail qui porte sur l'étude d'un conducteur cohérent à un canal couplé à un quantum de résistance. Nous exposons les outils principaux qui ont permis le calcul du bruit non-symétrisé à fréquence finie ainsi que la conductance. Dans le cinquième chapitre, nous décrivons la théorie des liquides de Luttinger non-chiraux, indispensable pour étudier les fils quantiques. Ces derniers constituent l'objet de notre travail exposé dans le sixième chapitre. Après une introduction aux fonctions de Green et au formalisme de Kelysh [27], nous présentons quelque résultats antérieurs relatifs à l'étude des fils quantiques sans impureté, avec une seule impureté ou en présence de deux impuretés. Nous donnons ensuite le modèle et les résultats de calcul de la fonction de Green retardée. Nous finissons le chapitre par l'application au cas d'un fil quantique homogène et au cas d'un fil quantique inhomogène.

Chapitre 1

Conduction dans les systèmes mésoscopiques

L'un des aspects de cette thèse est l'étude des propriétés de transport dans les nano-systèmes en interaction. En effet, nous nous sommes intéressés au calcul de courant moyen, de conductance ainsi qu'aux fluctuations de courant. Ce chapitre est consacré aux généralités sur le phénomène de transport, où nous allons exposer un ensemble de concepts et d'outils que nous avons utilisés dans cette thèse.

Dans la section 1.1, nous présentons les modèles de base de la théorie de la conduction dans les métaux. Après, dans une suite logique, nous exposons dans la section 1.2, la théorie de Landau des liquides de Fermi qui introduit le concept de quasi-particule indispensable dans notre étude. Nous nous intéressons ensuite dans la section 1.3 au phénomène de blocage de Coulomb. Ce phénomène très important que nous allons rencontrer dans le chapitre 4 lors de notre étude du conducteur cohérent couplé à une résistance. Dans la section 1.4, nous présentons la théorie $P(E)$ appliquée au cas d'une jonction tunnel. L'importance de cette théorie, réside dans le fait qu'elle constitue une bonne comparaison par rapport à nos résultats relatifs au calcul de courant moyen et de conductance dans un conducteur cohérent dans un environnement ohmique. Dans la section 1.5 nous exposons la théorie de la diffusion qui traite le courant et la conductance dans un système mésoscopique. Nous finissons le chapitre par la section 1.6 dans laquelle nous parlons du bruit et des corrélations de courant.

1.1 Conduction dans les métaux

Les métaux représentent les conducteurs les plus répendus et les premiers à avoir été étudiés. Plusieurs modèles ont tenté d'expliquer le phénomène de conduction dans les métaux. Nous allons en exposer quelques uns.

1.1.1 Théorie des électrons de conduction

Le modèle de Drude [28] est le premier élaboré dans cette théorie. Dans ce modèle les électrons sont considérés comme un gaz. Ce gaz d'électrons est décrit par la théorie cinétique des gaz sous deux hypothèses : la première hypothèse est celle des électrons indépendants, après deux collisions l'électron n'interagit pas avec les autres électrons. La seconde hypothèse est celle des électrons libres, donc aucune interaction avec les ions composant le réseau n'est prise en compte. Les collisions provoquent un changement brutal de la vitesse d'un électron, la nouvelle direction de la vitesse est aléatoire. La distribution de vitesse à l'équilibre et à température T est donnée par la statistique de Maxwell-Boltzmann :

$$f_{MB}(v) \propto n \exp\left(\frac{-mv^2}{k_B T}\right) , \tag{1.1}$$

où n représente la densité électronique et v la norme du vecteur vitesse. Cette considération est fausse. En effet, il est indispensable d'introduire le principe d'exclusion de Pauli afin de tenir compte de la nature quantique des électrons. Ce problème est résolu dans le modèle de Sommerfeld qui considère que le gaz d'électrons libres est régi par la statistique de Fermi-Dirac [29] :

$$f_{FD} \propto \frac{1}{1 + \exp[(\frac{1}{2}mv^2 - k_B T_0)/k_B T]} , \tag{1.2}$$

où T_0 est une température caractéristique. Cette correction permet de comprendre d'une meilleur manière la conduction dans les métaux. Notons que le modèle de Drude explique bien certains résultats expérimentaux en rapport avec des matériaux massifs.

Une autre approximation du modèle de Drude, est celle du temps de relaxation. En effet, les événements de collisions ne sont pas corrélés. D'autre part, la fonction de distribution des électrons est supposée ne pas avoir d'effet sur la vitesse des électrons qui entrent en collision. Le temps de relaxation est donc indépendant de la position et de la vitesse des électrons. De plus, la fonction de distribution hors équilibre correspond à la fonction de distribution à l'équilibre. Cependant, le principe d'exclusion de Pauli impose aux électrons diffusés après collision d'occuper des niveaux d'énergie vides. Afin de contourner cette approximation qui ne respecte pas la nature quantique des électrons, il faut définir une fonction de distribution hors équilibre. Celle-ci s'obtient en résolvant l'équation de Boltzmann ([30]) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}.\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n + \mathbf{F}.\frac{\partial}{\hbar \partial \mathbf{k}} n = \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{coll} , \tag{1.3}$$

où $\mathbf{F}$ représente une force au sens mécanique. L'équation de Boltzmann permet donc de relier l'évolution des électrons de conduction décrite par les membres de gauche de l'équation, au terme de collision. On comprend donc que le transport des électrons dans un métal se fait par diffusion.

Il existe bien d'autres théories qui traitent de la conduction. La théorie de la réponse linéaire développée par Kubo est l'une des première théories à caractère purement quantique [31, 32]. En effet, dans sa formulation elle fait intervenir des probabilités moyennes

d'occupation de niveaux d'énergie. Pour un gaz d'électrons, les coefficients des lois linéaires du transport sont déterminés au moyen de fonctions de corrélations à l'équilibre de courant.

1.1.2 Théorie du champ moyen : Approximation de Hartree-Fock

Parmi les limitations du modèle de Drude, est le fait que les interactions ne sont pas prises en compte. En effet, l'électron dans un métal interagit avec les autres électrons ainsi qu'avec les ions du réseau à travers un potentiel d'interaction $U(\mathbf{r}) = U_{el}(\mathbf{r}) + U_{ion}(\mathbf{r})$. Ce potentiel est présent dans l'équation de Schrödinger pour l'électron. Dans les équations de Hartree [33], l'introduction d'un champ moyen entre les électrons permet de prendre en compte leur interaction. Pour un niveau occupé à un électron l'équation de Hartree s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_i(\mathbf{r}) + U_{ion}(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}) + \Big[e^2\sum_j \int d\mathbf{r}'\frac{|\psi_j(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big]\psi_i(\mathbf{r}) = E_i\psi_i(\mathbf{r}) \ , \tag{1.4}$$

où ψ_i est la fonction d'onde décrivant un niveau occupé i. Chaque orbital possède un potentiel U différent. Le handicap de cette approximation est lié au fait qu'elle ne prend pas en compte le reste des électrons qui interagissent avec l'électron de la i-ème orbitale. Les équations de Hartree-Fock prennent en compte l'effet de cet électron en introduisant un nouveau terme d'échange [34]. En effet, le principe d'exclusion de Pauli oblige à prendre des fonctions d'onde antisymétriques $\Psi(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, ..., \overrightarrow{r_n}) = \psi_1(\overrightarrow{r_1})\psi_2(\overrightarrow{r_2})...\psi_n(\overrightarrow{r_n})$. Cette considération permet de généraliser l'équation (1.4) pour un état occupé à un électron :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_i(\mathbf{r}) + U_{ion}(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}) + U_{el}(\mathbf{r})\psi_i(\mathbf{r}) - \Big[e^2\sum_j \int d\mathbf{r}'\frac{\psi_j(\mathbf{r}')\psi_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big]\psi_j(\mathbf{r}) = E_i\psi_i(\mathbf{r}) \ . \tag{1.5}$$

Le potentiel U_{el} correspond au potentiel d'interaction électronique des équations de Hartree. Le terme d'échange correspond au dernier terme du membre de gauche de l'équation.

Cette approximation permet de traiter les interactions électroniques en terme de champ moyen. Ceci ne permet pas de décrire avec précision les interactions électroniques. De plus, elle ne prend pas en compte l'effet des ions sur les électrons de conduction, ni l'effet des charges parasites.

1.1.3 Le phénomène d'écrantage

Le phénomène d'écrantage se produit lorsqu'une charge attire les électrons voisins. Dans les métaux, les ions du réseau supposés fixes attirent les électrons dans leurs voisinages. Les électrons regroupés autour de l'ion jouent le rôle d'un écran qui limite l'action du champ de l'ion. La présence d'un ion génère un potentiel électrostatique ϕ_{ext}, qui se retrouve transformé en un champ total ϕ sous l'action du nuage électronique entourant l'ion. Le lien entre ces deux potentiels est donné par la transformée de Fourier de la constante diélectrique :

$$\phi(\mathbf{q}) = \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q})}\phi_{ext}(\mathbf{q}) \ , \tag{1.6}$$

où $\phi(\mathbf{q})$ et $\phi_{ext}(\mathbf{q})$ sont respectivement les transformées de Fourier du champ total et du champ externe. La constante diélectrique peut s'exprimer aussi en fonction de la densité

de charge induite par le potentiel total ρ et de la fonction de réponse à la présence d'un champ extérieur χ :

$$\epsilon(\mathbf{q}) = 1 - \frac{4\pi}{Q^2}\chi(\mathbf{q}) \ , \tag{1.7}$$

avec $\chi(\mathbf{q}) = \rho(\mathbf{q})/\phi(\mathbf{q})$.

Le calcul de la constante diélectrique repose donc sur la forme du potentiel total ϕ. Dans la théorie de Thomas-Fermi, le potentiel externe varie lentement en fonction de la distance [35, 36]. La relation de dispersion dans ce cas a la forme suivante :

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - e\phi(\mathbf{r}) \ . \tag{1.8}$$

La constante diélectrique dans ce cas est :

$$\epsilon(\mathbf{q}) = 1 + \frac{k_0^2}{Q^2} \ , \tag{1.9}$$

où k_0 est le vecteur d'onde de Thomas-Fermi, qui représente la distance caractéristique d'écrantage des électrons sur le champ externe ϕ_{ext}. Pour une charge ponctuelle Q, le potentiel externe est $\phi_{ext}(r) = Q/r$, le potentiel total est alors du type Yukawa $\phi(\mathbf{r}) = Qe^{-k_0 r}/r$. Le comportement du potentiel à grande distance change. En effet, ce dernier décroît lentement en oscillant :

$$\phi(\mathbf{r}) \propto r^{-3}\cos(2k_F r) \ , \tag{1.10}$$

où k_F est le vecteur d'onde de Fermi. Ces oscillations sont appelées oscillations de Friedel.

Il existe d'autres théories qui traitent le phénomène d'écrantage d'une manière différente que celle de la théorie de Thomas-Fermi. A citer par exemple la théorie de Lindhard qui s'appuie sur un développement perturbatif de la fonction de réponse χ au premier ordre en ϕ [37].

1.2 Théorie des liquides de Fermi

La théorie de Landau des liquides de Fermi [16, 38, 39] a pour objectif la description d'un système de fermions en interaction. L'idée principale est de traiter un gaz de Fermi en interaction par une théorie de champ moyen. En effet, dans l'hypothèse que les interactions ne provoquent pas de transition de phase et pour des basses températures ($k_B T \ll E_F$), les excitations de faible énergie devant l'énergie de Fermi possèdent une durée de vie infinie. Ceci est dû au principe d'exclusion de Pauli qui limite le processus de diffusion électron-électron. Ces excitations sont considérées alors comme des quasi-particules faiblement couplées. Une théorie de champ moyen est alors applicable sur un tel système.

1.2.1 Notion de quasi-particules

Dans un système à plusieurs fermions invariant par translation et sans interaction, les états propres d'une particule sont décrits par des ondes planes. L'énergie du dernier état occupé correspond à l'énergie de Fermi $E_F = \hbar^2 k_F^2/2m$. Les excitations élémentaires pour un tel système sont sous deux formes : la première forme correspond à l'addition d'une particule de moment $|k| > k_F$, la seconde forme correspond à la destruction d'une

particule de moment $|k| < k_F$ et donc à la création d'un trou. Ces excitations ont une énergie positive et sont des états propres du Hamiltonien du système [40] :

$$H = \sum_k \varepsilon_k n_k \ , \tag{1.11}$$

où n_k est l'opérateur nombre de particules et $\varepsilon_k = E_k - \mu$ avec μ le potentiel chimique. Les excitations particule-trou changent le nombre total de particules.

Dans la figure 1.1.(a), la relation de dispersion d'une particule élémentaire et d'un trou est tracée. La figure 1.1.(b) représente le continuum particule-trou formé par la construction d'états à partir d'un état donné k avec $|k| < k_F$ ramené à un état k' avec $|k| > k_F$ sous l'hypothèse d'un nombre de particules constant. Les excitations particule-trou sont alors représentées par les nombres quantiques k et k' [40]. La seule restriction sur les valeurs que peuvent prendre k et k' est imposée par le principe de Pauli.

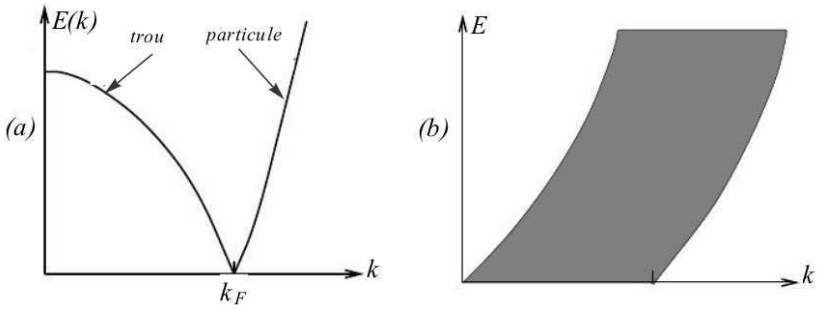

FIGURE 1.1 – (a) : Relation de dispersion pour une particule et un trou. (b) : Continuum particule-trou.

L'idée de la théorie de Landau est la correspondance continue entre les états propres d'un système en absence et en présence d'interaction. Ces interactions ne doivent pas conduire à des transitions de phases ou à une brisure de symétrie dans l'état fondamental. L'interaction d'une particule avec la mer de Fermi conserve le moment total du système en dépit des changements dans la surface de Fermi par cette même interaction, le volume contenu dans cette surface étant inchangé [41]. En même temps, cette interaction modifie la distribution des particules dans l'espace des nombres d'onde et modifie aussi l'énergie de l'état auquel on rajoute ou on enlève une particule. L'ensemble formé par cette particule et les perturbations de la distribution des particules est appelé quasi-particule. Autrement dit, les quasi-particules sont des électrons habillés par des fluctuations. Ce sont donc des fermions évoluant au voisinage du niveau de Fermi.

Les quasi-particules représentent des excitations presque libres. Par conséquent, leur temps de vie τ est fini. Pour des excitations de moment proche de k_F nous avons $1/\tau \propto (E - E_F)^2$, ce qui représente un temps de vie plus grand que l'inverse de l'énergie d'excitation. Les quasi-particules sont donc bien définies. Pour des énergies faibles devant l'énergie de Fermi, la théorie de Landau est donc applicable.

La théorie de Landau est phénoménologique. En effet, les paramètres de cette théorie sont ajustés par rapport aux quantités mesurées expérimentalement. Elle permet un certain nombre de prédictions qualitatives et quantitatives.

1.2.2 Fonction de distribution, énergie et temps de vie des quasi-particules

Dans cette partie nous allons exposer quelques propriétés des liquides de Fermi. Dans un premier temps nous allons écrire la fonction de distribution des quasi-particules ainsi

que leur énergie. Ensuite nous donnerons plus de détails sur le temps de vie des quasi-particules.

Fonction de distribution et énergie des quasi-particules

La distribution des quasi-particules à l'état fondamental $n_0(k)$ vaut 1 si $|k| < k_F$ et elle vaut 0 si $|k| > k_F$. Les excitations induisent des déviations de la fonction de distribution par rapport à l'état fondamental :

$$n(k) = n_0(k) + \delta n(k) \ , \tag{1.12}$$

où $\delta n(k) = +1$ représente une quasi-particule excitée et $\delta n(k) = -1$ représente un quasi-trou excité. La fonction $n(k) = 1/(e^{E(\mathbf{k})/k_B T} + 1)$ est la fonction de distribution de Fermi-Dirac. La déviation par rapport à l'état fondamental engendre un changement d'énergie [40] :

$$\delta E = \sum_k E_0(k)\delta n(k) + \frac{1}{2}\sum_{k,k'} f(k,k')\delta n(k)\delta n(k') \ . \tag{1.13}$$

Le premier terme représente l'énergie d'une quasi-particule, le second terme représente l'interaction entre quasi-particules. La fonction $E_0(k)$ est le terme de plus bas ordre du développement du Hamiltonien donné par la relation (1.11) au voisinage de $|k| = k_F$. On peut considérer que c'est l'énergie d'une quasi-particule seule :

$$E_0(k) = \frac{k_F}{m^*}(|k| - k_F) \ , \tag{1.14}$$

où m^* est la masse effective, qui en absence d'interaction est égale à la masse d'une particule m. La fonction $f(k,k')$ dans l'équation (1.13) détermine les interactions entre quasi-particules. Il est commode de l'écrire au moyen de fonctions de spin symétriques et anti-symétriques, qui s'écrivent à leur tour au moyen de polynômes de Legendre [40]. Cette décomposition permet de calculer certaines quantités à l'équilibre telles que la chaleur spécifique, la susceptibilité magnétique et la compressibilité.

L'énergie d'une quasi-particule ajoutée au système est donnée par la relation suivante :

$$E(\mathbf{k}) = E_0(k) + \sum_{k'} f(k,k')\delta n(k') \ . \tag{1.15}$$

Cette expression représente l'énergie d'une quasi particule entourée d'un gaz composé d'autres quasi-particules de densité $\delta n(k')$.

Temps de vie des quasi-particules

Le calcul du temps de vie des quasi-particules se fait par le traitement de l'équation de Boltzmann. Cette équation est nécessaire afin d'étudier les propriétés hors équilibre d'un liquide de Fermi. Afin d'étudier ces propriétés il faut prendre en compte certaines hypothèses [42], à savoir : la déviation par rapport à l'équilibre est régie par l'équation de Boltzmann de la fonction de distribution des quasi-particules qui dépend de l'espace et du temps $n(k,r,t)$, qui décrit la densité des quasi-particules de moment k au point r et en temps t. Les interactions ont un effet moyen sur l'énergie donnée par l'expression (1.15) en prenant en considération la variation spatiale et temporelle. La variation spatiale et temporelle de la fonction de distribution doivent être lente par rapport à la longueur d'onde et à la fréquence typique des quasi-particules. Chaque quasi-particule est considérée comme une entité isolée, par analogie à une molécule dans un gaz dilué. Chaque quasi-particule

a une vitesse v de composante $v_\alpha(k) = \hbar^{-1}(\partial E(k,r)/\partial k_\alpha)$, et subit une force de diffusion $\mathcal{F}$ de composante $\mathcal{F}_\alpha = -\partial E(k,r)/\partial r_\alpha$. Cette force pousse les quasi-particules vers les régions où l'énergie est minimale.

L'étude du régime sans collisions conduit aux modes d'oscillations collectives. Ces modes sont solutions de l'équation de Boltzmann linéarisée et correspondent aux oscillations de la surface de Fermi [42]. Le mode le plus important est le mode longitudinal symétrique, qui est un effet purement quantique impliquant des fluctuations dans la densité des quasi-particules. Cependant, pour calculer la durée de vie des quasi-particules, il est crucial d'introduire le terme de collision dans l'équation de Boltzmann. Pour une quasi particule d'énergie E, la durée de vie est donnée par la relation suivante [40] :

$$\tau^{-1} \propto m^{*3} \frac{(\pi T)^2 + E^2}{1 + e^{-\frac{E}{k_B T}}} \ . \tag{1.16}$$

Pour des faibles énergies et des températures basses, le temps de vie diverge. Ce qui montre qu'une quasi-particule est bien définie pour des excitations de basse énergie devant l'énergie de Fermi.

1.2.3 Fonction de Green d'une quasi-particule

La fonction de Green d'une quasi-particule $G(k,t)$, est définie au moyen des opérateurs de création $a_k^\dagger$ et d'annihilation a_k par la relation :

$$G(k,t) = -i\langle T\{a_k(t), a_k^\dagger(0)\}\rangle \ , \tag{1.17}$$

où T reprénte l'opérateur d'ordre temporel. La fonction de Green $G(k,\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction de Green $G(k,t)$, en l'absence d'interaction elle vaut :

$$G(k,\omega) = \frac{1}{i\omega - E_{00}(k)} \ , \tag{1.18}$$

où la fonction $E_{00}(k)$ est l'énergie d'une particule sans les effets de la masse effective m^*. Les effets de l'interaction apparaissent via la correction en terme de self-énergie $\Sigma(k,\omega)$. La fonction de Green $G(k,\omega)$ prend alors la forme suivante :

$$G(k,\omega) = \frac{1}{i\omega - E_{00}(k) - \Sigma(k,\omega)} \ . \tag{1.19}$$

Les énergies d'excitations sont données par les pôles de cette fonction [40, 42]. La self-énergie doit être régulière au voisinage de la surface de Fermi afin que les quasi-particules soient bien définies. De plus, les interactions doivent être de courte portée pour pouvoir faire un développement de la fonction $\Sigma(k,\omega)$. Le développement au premier ordre de la self-énergie permet d'avoir le résultat suivant :

$$G(k,\omega) = \frac{z}{i\omega - E_0(k)} \ , \tag{1.20}$$

où z est le paramètre de renormalisation des quasi-particules :

$$z = \Big(1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial \omega}\Big)^{-1} \ . \tag{1.21}$$

L'énergie d'une quasi-particule sous l'effet de la masse effective $E_0(k)$ est donnée par la relation (1.14). La masse effective vaut [40] :

$$m^* = mz^{-1}\Big(1 - \frac{m}{k_F}\frac{\partial\Sigma}{\partial k}\Big)^{-1} \ . \tag{1.22}$$

Le développement de la self-énergie au second ordre fait apparaître le temps de vie τ, la fonction de Green $G(k,\omega)$ devient :

$$G(k,\omega) = \frac{z}{i\omega - E_0(k) + i\ sign(\omega)\tau(\omega)^{-1}} \ . \tag{1.23}$$

La fonction spectrale $A(k,\omega)$ permet de caractériser les excitations. Dans le cas des électrons indépendants elle est donnée par un pic de Dirac $A(k,\omega) = \delta(\hbar\omega - E(\mathbf{k}))$, montrant que les excitations sont bien définies. Dans le cas d'un liquide de Fermi, la fonction spectrale est donnée par une lorentzienne [42, 43] :

$$A(k,\omega) \propto \frac{\Gamma(k)}{(\omega - E(\mathbf{k}))^2 + \Gamma(k)^2} \ , \tag{1.24}$$

où $\Gamma = 1/\tau$ représente la largeur du pic de la lorentzienne. Au voisinage de k_F, la fonction spectrale $A(k,\omega)$ contient deux contributions : une fonction continue de faible variation qui correspond au fond d'excitations mal définies, et un pic correspondant aux excitations élémentaires centré autour de $E(\mathbf{k})$ et de largeur Γ de l'ordre de $(k - k_F)^2$ (voir figure 1.2).

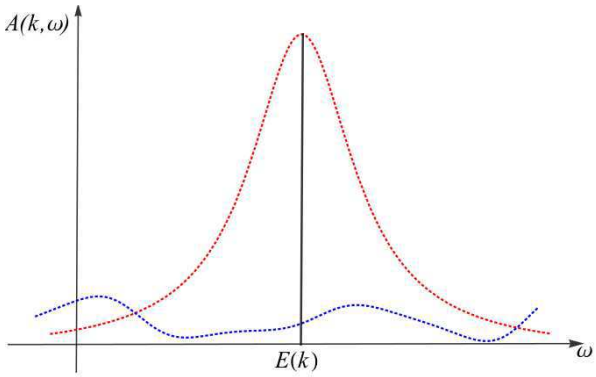

FIGURE 1.2 – Forme de la fonction spectrale $A(k,\omega)$. Le trait plein représente le cas sans interaction, les traits en pointillé représentent les deux contributions de la fonction spectrale en présence d'interaction comme décrit dans le texte.

La fonction de Green $G(k,\omega)$ se trouve aussi décomposée en deux contributions, une contribution cohérente donnée par la relation (1.23) et une contribution incohérente. Notons enfin que la fonction de distribution $n(k)$ est renormalisée par le paramètre z tout en conservant sa discontinuité en k_F. Cependant, une contribution continue en k_F s'ajoute à cause du fond d'excitation incohérent.

1.3 Blocage de Coulomb

Le blocage de Coulomb est un phénomène quantique observé dans des systèmes mésoscopiques quasi-isolés appelés îles ou îlots. Ce phénomène est engendré par la quantification des niveaux d'énergie, la charge des porteurs de courant étant quantifiée. Les

îlots sont présents dans les dispositifs à un électron, tels que les condensateurs quantiques, les boites à un électron ou les transistors à un électron. Ces dispositifs sont constitués de jonctions tunnel mises dans un circuit créant des îlots électriquement isolés. Les premiers travaux ont été menés pour de petites jonctions tunnel mises dans des circuits macroscopiques linéaires. Par la suite, la théorie de blocage de coulomb a été étendue à d'autres systèmes, y compris les conducteurs cohérents [44, 45].

1.3.1 Echelle d'énergie

Si on prend l'exemple d'un condensateur quantique, possédant une jonction tunnel, le transfert des électrons à travers cette jonction se fait un par un. Chaque électron rapporte une énergie $E_c = e^2/2C$ où C est la capacité du condensateur. Ce phénomène ne peut avoir lieu que si la condition suivante sur l'énergie est réalisée :

$$E_c \gg k_B T \ . \tag{1.25}$$

Si le quantum d'énergie électrostatique $e^2/2C$ est proche de $k_B T$, le transfert des électrons sera gouverné par l'énergie thermique.

Experimentalement, la surface d'une jonction est $S = 100nm^2$, la capacité du conducteur ayant cette jonction est de l'ordre de $10^{-15}F$ [1]. L'énergie de charge est $E_c \approx 10^{-4}$, ce qui correspond à une température $E_c/k_B \approx 1K$. Ce qui montre que le transport dans ce régime de température est gouverné par les effets de charge.

1.3.2 Exemple de dispositif : transistor à un électron

Le transistor à un électron "single electron transistor" ou (SET), est un dispositif composé de deux jonctions tunnel mises en série et définissant un îlot. Les deux jonctions ont une faible conductance ($\ll e^2/h$), et ont les capacités C_1 et C_2 et les résistances tunnel R_{t1} et R_{t2} respectivement (voir figure 1.3). L'îlot est couplé à une tension de grille V_G à travers une capacité C_G. L'ajout d'une tension de grille permet la variation du potentiel chimique du système. Le nombre total d'électrons dans l'îlot est un entier n.

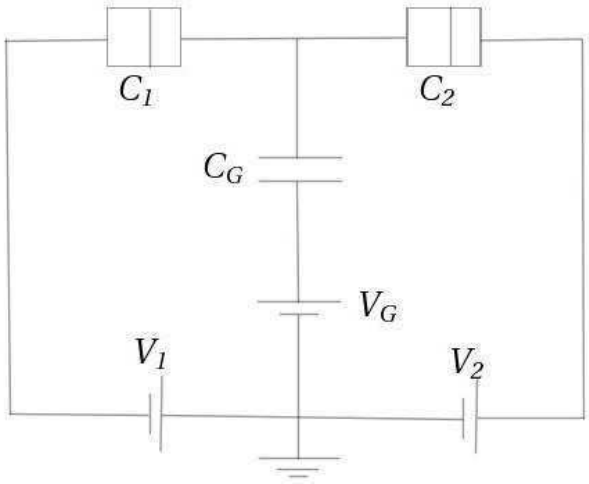

FIGURE 1.3 – Schéma d'un transistor à un électron en présence de tension de grille.

Comportement statique

Le système est soumis à une tension $V = V_1 - V_2$, la capacité totale de l'îlot est la somme des trois capacités présentes dans le circuit $C = C_1 + C_2 + C_G$. L'énergie potentielle électrique ou énergie de charge dépend de la charge de la grille Q_G [1] :

$$E_c(n, Q_G) = \frac{(ne - Q_G)^2}{2C} \ , \tag{1.26}$$

avec $Q_G = C_G V_G + C_1 V_1 + C_2 V_2$. La variation de l'énergie de charge lorsqu'un processus tunnel se produit tel que le nombre d'électrons dans l'îlot passe de n à $n+1$ est donnée par la relation suivante :

$$\Delta E_c(n \longrightarrow n+1) = (n + \frac{1}{2} - \frac{Q_G}{e})\frac{e^2}{C} \ . \tag{1.27}$$

Ce transfert de charge à lieu lorsque l'énergie libre tend à diminuer. La variation de l'énergie libre vaut :

$$\Delta F = \Delta E_c - \Delta W \ , \tag{1.28}$$

où ΔW est la variation du travail fourni par la source de tension pour compenser l'électron transféré vers l'îlot. En général nous avons :

$$\Delta W = \pm eV + E_{pol} \ , \tag{1.29}$$

où E_{pol} représente l'énergie électrostatique crée par les charges de polarisation. Lorsque la tension $V \neq 0$, le nombre d'électrons dans l'îlot varie discrètement par transfert tunnel, chaque électron contribue par une énergie $e^2/2C$. Par conséquent, l'énergie de charge varie discrètement.

En l'absence de tension de grille (absence du couplage par C_G) (voir figure 1.3), l'énergie de charge prend la forme suivante [46] :

$$E_c = \frac{1}{2C}[C_1 C_2 V^2 + (ne)^2] \ , \tag{1.30}$$

où $C = C_1 + C_2$. Un transfert tunnel n'est possible que si la tension V satisfait à la condition suivante :

$$V > V_{seuil} = \frac{e}{2C} \ . \tag{1.31}$$

Si $V < V_{seuil}$, le transfert d'électrons n'est pas possible et on se retrouve dans une situation de blocage de Coulomb. Si la tension de grille est présente, une condition supplémentaire s'ajoute. Si la première condition sur la tension V n'est pas réalisée, $V < V_{seuil}$, l'action de la tension de grille permet alternativement le transfert puis le blocage des électrons, nous avons alors la condition sur la tension de grille [46] :

$$V_G = V_{Gseuil} = \frac{(2k+1)e}{2C} \ , \tag{1.32}$$

où k est un entier. Pour ces valeurs de V_G, le blocage de Coulomb disparaît.

Comportement dynamique

Dans cette partie nous allons introduire le concept de taux de diffusion du transfert d'un

électron à travers une jonction tunnel. Cette théorie dite “orthodoxe“ a été développée par Arvin et Likharev [47]. L'Hamiltonien total du système est donné par la relation suivante :

$$H = H_1 + H_2 + H_I + H_{int} + H_t \ , \tag{1.33}$$

où H_1 et H_2 représentent les Hamiltoniens des réservoirs 1 et 2 respectivement, H_I représente l'Hamiltonien de l'îlot et H_t est l'Hamiltonien qui décrit l'ensemble des processus tunnel. L'Hamiltonien d'interaction est supposé dépendre uniquement de la charge de l'îlot [1] :

$$H_{int} = \frac{(\hat{n}e - Q_G)^2}{2C} \ , \tag{1.34}$$

où $\hat{n}$ représente l'opérateur du nombre d'électrons en excès sur l'îlot. Considérons maintenant le transfert de charge de la jonction 1 vers l'îlot, ce transfert est décrit par l'Hamiltonien tunnel :

$$H_{t,1} = \sum_{k,q,\sigma} T_{k,q} c^{\dagger}_{k,\sigma} c_{q,\sigma} + h.c \ . \tag{1.35}$$

Cet Hamiltonien décrit l'annihilation d'un électron de vecteur d'onde q et de spin σ dans le réservoir 1 et la création d'un électron de même spin et de vecteur d'onde k dans l'îlot. Ce transfert change le nombre d'électrons dans l'îlot de n à $n+1$, le taux de diffusion est donné par la règle d'or de Fermi [1] :

$$\Gamma_{1I}(n) = \frac{1}{e^2 R_{t1}} \int_{-\infty}^{\infty} dE_k \int_{-\infty}^{\infty} dE_q f_1(E_k)[1 - f_I(E_q)]\delta(\delta E_c + E_q - E_k) \ , \tag{1.36}$$

où E_q et E_k correspondent aux énergies des états électroniques q et k respectivement et f est la fonction de distribution de Fermi-Dirac, δE_c correspond à la variation de l'énergie de charge et elle est donnée par la relation suivante :

$$\delta E_c = E_c(n+1, Q_G) - E_c(n, Q_G) - eV_1 \ . \tag{1.37}$$

Le taux de diffusion s'obtient après intégration de la relation (1.36). Donc pour un transistor à un électron, le taux de diffusion pour un processus tunnel à un électron vaut [47] :

$$\Gamma_{1I}(n) = \frac{1}{e^2 R_{t1}} \frac{\delta E_c}{e^{\delta E_c / k_B T} - 1} \ . \tag{1.38}$$

A basses températures $k_B T \ll |\delta E_c|$, si l'énergie de charge tend à croître, le transfert d'électron n'aura plus lieu et on se retrouve dans une situation de blocage de Coulomb. Ce résultat correspond à la diffusion d'un électron à travers une jonction. Le courant dans ce cas est linéaire $I_t = V/R_t$.

Prenons maintenant l'exemple d'un transistor avec $V_1 = -V_2 = V/2$. Il existe quatre transitions possibles : $\Gamma_{1I}(n)$ et $\Gamma_{2I}(n)$ qui augmentent le nombre total d'électrons dans l'îlot de n à $n+1$, et les transitions inverses $\Gamma_{I1}(n+1)$ et $\Gamma_{I2}(n+1)$. La variation de l'énergie de charge qui détermine les taux de diffusions pour $\Gamma_{1I}(n)$ et $\Gamma_{I1}(n+1)$ est :

$$\delta E_c = \pm\Big[(n + \frac{1}{2} - \frac{Q_G}{e})\frac{e^2}{C} - \frac{eV}{2}\Big] \ . \tag{1.39}$$

La variation d'énergie de charge pour les deux autres transitions s'obtient en changeant eV par $-eV$. La probabilité de trouver l'îlot dans un état à n électrons est donnée par la relation suivante [1] :

$$p(n) = \frac{\Gamma_{I1}(n+1) + \Gamma_{I2}(n+1)}{\Gamma_{\Sigma}} \ , \tag{1.40}$$

où $\Gamma_\Sigma = \Gamma_{I1}(n+1) + \Gamma_{I2}(n+1) + \Gamma_{1I}(n) + \Gamma_{2I}(n)$. Le courant total dans ce cas vaut :

$$I = -e\frac{\Gamma_{1I}(n)\Gamma_{I2}(n+1) - \Gamma_{2I}(n)\Gamma_{I1}(n+1)}{\Gamma_\Sigma} \ . \tag{1.41}$$

A basse température et pour $-VC/2e \leq (Q_G - n - 1/2 \leq VC/2e$ le courant se réduit à [1] :

$$I \propto V - \frac{4e^2}{C^2 V}\Big(\frac{Q_G}{e} - n - \frac{1}{2}\Big)^2 \ . \tag{1.42}$$

Le courant s'annule en dehors de l'intervalle définit plus haut. La conductance linéaire s'obtient à partir du courant, elle vaut :

$$G(T, Q_G) = \frac{1}{2R}\frac{\delta E_c}{\sinh(\delta E_c/k_B T)} \ . \tag{1.43}$$

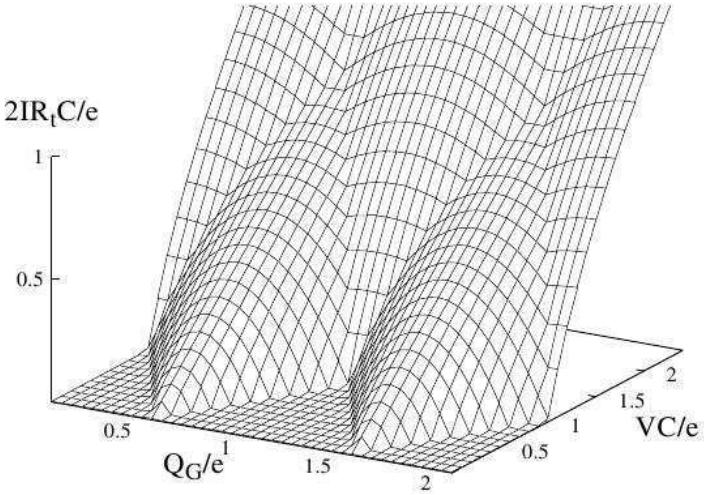

FIGURE 1.4 – Courant d'un transistor symmétrique en fonction de la tension et de la charge de grille. A basse température et basse tension $VC/e < 1$, les oscillations de Coulomb se manifestent et deux états de charge jouent un rôle uniquement. D'après [1].

Dans la figure 1.4, le courant est tracé en fonction de la tension V et la charge de grille Q_G. Pour des valeurs entières de la charge Q_G, le courant s'annule en dessous d'une tension seuil $V = V_{seuil} = e/C$, ce qui traduit une manifestation du phénomène de blocage de Coulomb. Pour des valeurs quelconques de la charge de grille, une séries de pics centrés autour des valeurs demi-entières de la charge de grille se manifeste, ce qui représente les oscillations de Coulomb.

Si la diffusion électronique est supprimée à cause du blocage de Coulomb à basse température, un nouveau phénomène apparaît lors de l'application d'une tension. Ce phénomène est nommé "cotunneling". Il consiste en un transfert des électrons à travers tout le système. Durant ce processus l'état avec un excès d'un électron sur l'îlot est virtuel [1]. Si cette diffusion d'un électron à travers tout le système ne laisse pas d'excitations dans l'îlot, elle est alors élastique, générant un faible courant proportionnel à la tension appliquée. Dans le cas d'une diffusion inélastique, le taux de diffusion est proportionnel à

une puissance de la tension appliquée $\Gamma_{cot} \propto V^3$. Le courant de fuite est donné alors par l'expression suivante :

$$I_{fuite}(V) \propto \frac{\hbar}{12\pi e^2 R_{t1} R_{t2}}[(eV)^2 + (2\pi k_B T)^2]V \ . \tag{1.44}$$

Pour de faibles tensions et de faibles températures, le courant de fuite élastique devient important, dans le cas contraire le courant inélastique est dominant.

1.4 Théorie $P(E)$ de la diffusion d'un électron dans un environnement dissipatif

Dans cette partie nous allons montrer l'influence de l'environnement sur le comportement d'une jonction tunnel mise dans un circuit électrique. La jonction tunnel est mise en série avec une impédance $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$, où V est la tension alternative appliquée et I est le courant qui circule dans le circuit. Il faut noter que dans les expériences on utilise des sources de courant mais l'utilisation d'une source de tension dans les calculs reste raisonable [48]. La jonction tunnel a une capacité C, et une charge moyenne $Q_e = CV$ (voir figure 1.5). D'un point de vu classique, le circuit est donc constitué d'une jonction tunnel de capacité C et d'une impédance Z. L'impédance effective totale du circuit vue par la jonction est donnée par la relation suivante :

$$Z_t(\omega) = [i\omega C + Z^{-1}(\omega)]^{-1} \ . \tag{1.45}$$

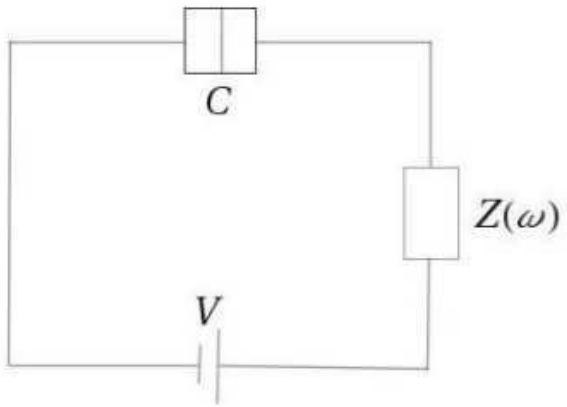

FIGURE 1.5 – Schéma d'une jonction tunnel en série avec une impédance $Z(\omega)$.

Ce qui va suivre donne un aperçu de l'influence de l'impédance sur la taux de diffusion des électrons et ainsi sur le courant qui traverse la jonction tunnel.

1.4.1 Taux de diffusion d'un électron

Le système étudié est semblable au transistor à un électron, sauf qu'ici il s'agit d'une seule jonction tunnel. L'Hamiltonien total du système est la somme des Hamiltoniens des réservoirs H_1 et H_2, de l'Hamiltonien tunnel H_t et de l'Hamiltonien de l'environnement H_{env}. L'Hamiltonien des réservoirs décrit les quasi-particules présentes dans les électrodes :

$$H_{1,2} = \sum_{k,\sigma} E_k c^\dagger_{k,\sigma} c_{k,\sigma} \ . \tag{1.46}$$

L'Hamiltonien tunnel H_t vaut [48, 49] :

$$H_t = \sum_{k,q,\sigma} t_{k,q} c^{\dagger}_{q,\sigma} c_{k,\sigma} e^{-i\tilde{\varphi}(t)} + h.c \ . \tag{1.47}$$

Cet Hamiltonien correspond à celui de l'équation (1.35) multiplié par un facteur de phase, avec $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - eVt/\hbar$ où la fonction φ est définie par la relation [50] :

$$\varphi(t) = \frac{e}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' U(t') \ , \tag{1.48}$$

où $U = Q/C$ correspond à la tension entre les bornes de la jonction. Le facteur de phase agit comme un opérateur qui change la charge de la jonction par la charge élémentaire e. Le dernier terme de l'Hamiltonien total correspond à l'Hamiltonien de l'environnement. Celui-ci traduit le couplage du système avec l'environnement, cet environnement est représenté par un ensemble d'oscillateurs harmoniques couplés à $\varphi(t)$. Ces oscillateurs harmoniques peuvent être vus comme des circuits LC. L'Hamiltonien de l'environnement est donc la somme des Hamiltoniens de ces oscillateurs harmoniques [1, 2] :

$$H_{env} = \sum_j \Big(\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{m_j}{2} \Omega_j^2 x_j^2 \Big) \ , \tag{1.49}$$

où Ω_j représente la fréquence d'un oscillateur et x_j sa coordonnée.

Le taux de diffusion est déterminé par la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma_{i \to f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_t | i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f) \ , \tag{1.50}$$

qui donne le taux de transition entre un état initial $|i\rangle$ et un état final $|f\rangle$. Ces états sont le produit des états de quasi-particules $|E\rangle$ d'énergie E, et des états de charge notés $|X\rangle$ d'énergie E_X, ces états de charge décrivent le couplage entre les réservoirs et l'environnement. L'application de la règle d'or permet d'avoir l'expression du taux de diffusion [1, 2] :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma}(V) \ &= \ \frac{1}{e^2 R_t} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' f(E)[1 - f(E')] \\ &\quad \times \sum_{X,X'} P_{env}(X) |\langle X' | e^{-i\tilde{\varphi}} | X \rangle|^2 \delta(E + eV + E_X - E' - E'_X) \ , \end{aligned} \tag{1.51}$$

où $P_{env}(X)$ représente la probabilité de trouver le couplage réservoirs-environnement dans un état X. La seconde ligne de l'expression du taux de diffusion représente la fonction de corrélation phase-phase $\langle e^{-i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle = e^{J(t)}$. La fonction de corrélation résultante $J(t)$ vaut :

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{Re[Z_t(\omega)]}{R_K} \left[\coth\Big(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\Big)[\cos(\omega t) - 1] - i \sin(\omega t) \right] \ . \tag{1.52}$$

La transformée de Fourier de cette fonction de corrélation définie la fonction $P(E)$ [1, 2] :

$$P(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\Big[J(t) + \frac{i}{\hbar} E t \Big] \ . \tag{1.53}$$

Le taux de diffusion peut être écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_t} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' f(E)[1 - f(E')] P(E + eV - E') \ . \tag{1.54}$$

L'utilisation des propriétés de la fonction de distribution de Fermi-Dirac, permet de simplifier la forme de l'expression du taux de diffusion pour une jonction tunnel :

$$\overrightarrow{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_t} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{E}{1 - e^{-E/k_B T}} P(eV - E) \ . \tag{1.55}$$

Le taux de rétrodiffusion pour une jonction tunnel s'obtient directement à partir du taux de diffusion par la formule :

$$\overleftarrow{\Gamma}(V) = \overrightarrow{\Gamma}(-V) \ . \tag{1.56}$$

1.4.2 Propriétés de la fonction $P(E)$

La fonction $P(E)$ représente la probabilité d'échange d'énergie entre l'électron diffusé et l'environnement. La fonction $P(E)$ est déterminée analytiquement uniquement dans les cas où l'impédance prend une forme spécifique. L'intégrale de le fonction $P(E)$ sur toutes les énergies vaut 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE P(E) = e^{J(0)} = 1 \ . \tag{1.57}$$

Le lien avec l'énergie de charge E_c, est établi en prenant la dérivée par rapport au temps de $e^{J(t)}$ [2] :

$$\int_{-\infty}^{\infty} E dE P(E) = i\hbar J'(0) = E_c \ . \tag{1.58}$$

La fonction $P(E)$ vérifie aussi la relation du bilan détaillé :

$$P(-E) = e^{-E/k_B T} P(E) \ , \tag{1.59}$$

qui traduit le fait que la probabilité d'exciter les modes composants l'environnement est égale à la probabilité d'absorber l'énergie de l'environnement multipliée par le facteur de Boltzmann. A température nulle et pour des valeurs élevées de l'énergie, la fonction $P(E)$ vaut [51] :

$$P(E) = \frac{2}{E} \frac{Re[Z_t(E/\hbar)]}{R_K} \ . \tag{1.60}$$

1.4.3 Caractéristiques courant-tension

Le courant total qui passe à travers la jonction est donné par le produit de la charge élémentaire e par la différence entre taux de diffusion et taux de rétrodifussion :

$$I(V) = e[\overrightarrow{\Gamma}(V) - \overleftarrow{\Gamma}(V)] \ . \tag{1.61}$$

L'utilisation de l'équation (1.55) permet d'avoir l'expression du courant à température finie :

$$I(V) = \frac{1}{R_t}(1 - e^{-eV/k_B T}) \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{E}{1 - e^{-E/k_B T}} P(eV - E) \ , \tag{1.62}$$

où le terme $(1 - e^{-eV/k_B T})$ provient de la propriété du bilan détaillé de la fonction $P(E)$ donnée par l'équation (1.59). A noter que le courant est antisymétrique en V. Dans la limite de $T = 0$ et pour une tension positive, le courant dépend uniquement de la probabilité d'exciter les modes de l'environnement pour une énergie inférieure à eV, du moment où celle-ci est l'énergie maximale que peut acquérir un électron diffusé. La formule de courant se simplifie dans le cas d'une température nulle :

$$I(V) = \frac{1}{R_T} \int_0^{eV} dE \ E(eV - E) \ P(E) \ . \tag{1.63}$$

Pour la valeur de la tension $V = e/2C$ qui correspond à la tension seuil du blocage de Coulomb, le courant dépend de $P(E)$ pour toutes les énergies jusqu'à l'énergie de charge E_c. Pour de très grandes tensions, La borne supérieure d'intégration de l'équation (1.63) peut être étendue à $+\infty$. Le calcul de l'intégrale donne l'expression du courant à température nulle et pour de très grandes tensions [1, 2] :

$$I(V) = \frac{V - e/2C}{R_t} \ . \tag{1.64}$$

Dans la limite d'une impédance nulle $Z(\omega) = 0$, la probabilité $P(E)$ se réduit à un pic de Dirac et donc seuls les processus de diffusions élastiques se produisent. Le taux de diffusion se réduit à l'expression suivante :

$$\overrightarrow{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_t} \frac{eV}{1 - \exp(-eV/k_B T)} \ . \tag{1.65}$$

La tension entre les bornes de la jonction est constante. L'électron diffusé doit être transféré dans le circuit afin de restaurer la charge dans la jonction. La seule énergie figurant dans l'expression du taux de diffusion est alors le travail fourni par la source de tension. De l'autre coté, dans la limite où l'impédance est très grande $Z(\omega) \gg R_K$, l'électron diffusé peut facilement exciter les modes de l'environnement. Si la température est très faible ($k_B T \ll E_c$) la probabilité $P(E)$ se réduit à un pic de Dirac décalé par l'énergie de charge E_c :

$$P(E) = \delta(E - E_c) \ . \tag{1.66}$$

L'énergie que transfert l'électron correspond à l'énergie de charge E_c. La diffusion est alors permise si l'énergie fournie par la source de tension eV est supérieure à l'énergie de charge, et on se retrouve dans une situation de blocage de Coulomb.

1.4.4 Cas d'un environnement Ohmique

L'exemple d'un environnement Ohmique est l'un des plus important. Dans ce cas, la jonction tunnel est mise en série avec une résistance $Z(\omega) = R$. Pour des valeurs asymptotiques de la résistance, les effets résultants sont les mêmes que ceux dans le cas d'une impédance quelconque. En effet, pour une faible résistance la probabilité $P(E)$ se réduit à un pic de Dirac et la caractéristique courant-tension est celle d'une jonction en l'absence de l'environnement. Si la résistance est très grande, on se retrouve dans un cas de "damping" Ohmique, et le phénomène de blocage de Coulomb se manifeste. Ceci apparaît clairement dans l'expression de $P(E)$ qui montre un gap de Coulomb E_c [1, 2] :

$$P(E) = (4\pi E_c k_B T)^{-1/2} \exp\Big[- \frac{(E - E_c)^2}{4 E_c k_B T} \Big] \ . \tag{1.67}$$

A température nulle, il est possible de dériver des relations analytiques pour la probabilité $P(E)$ ainsi que pour la caractéristique courant-tension. L'impédance totale est donnée par la relation suivante :

$$Re\{Z_t(\omega)\} = \frac{R}{1 + i(\omega/\omega_R)} \ , \tag{1.68}$$

où $\omega_R = 1/RC$ est une fréquence de coupure. Dans la limite des faibles énergies, la probabilité $P(E)$ se réduite à la loi de puissance [48] :

$$P(E) = \frac{\exp(-2\gamma/g)}{\Gamma(2/g)} \frac{1}{E} \Big(\frac{\pi E}{g E_c} \Big)^{2/g} \ , \tag{1.69}$$

où $g = R_K/R$ et $\gamma \simeq 0.577$ est la constante d'Euler. La caractéristique courant-tension à température nulle vaut :

$$I(V) = \frac{\exp(-2\gamma/g}{\Gamma(2+2/g)} \frac{V}{R_t} \Big(\frac{\pi e|V|}{gE_c}\Big)^{2/g} \ . \tag{1.70}$$

Cette expression du courant conduit à l'anomalie du point zéro "zero bias anomaly" qui apparaît dans l'expression de la conductance différentielle [52, 48, 53, 49, 54]. Dans la limite des grandes énergies ($E \longrightarrow \infty$), la probabilité $P(E)$ est donnée par la loi de puissance :

$$P(E) = \frac{2gE_c^2}{\pi^2 E^3} \ . \tag{1.71}$$

Cette expression conduit à la caractéristique courant-tension suivante :

$$I(V) = \frac{1}{R_t}\Big[V - \frac{2}{2C} + \frac{ge^2}{4\pi^2 C^2 V}\Big] \ . \tag{1.72}$$

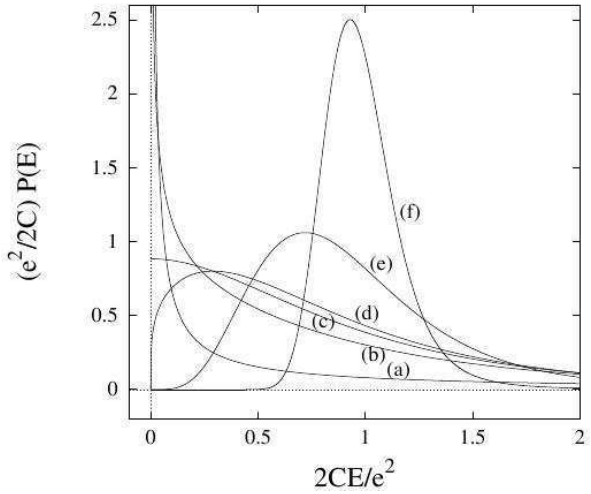

FIGURE 1.6 – La fonction $P(E)$ à température nulle en fonction de l'énergie pour différentes valeurs de la résistance. De (a) à (f) le rapport $g = R_k/R = 20, 3.2, 2, 1.6, 0.4, 0.04$. D'après [1].

Dans la figure 1.6, la probabilité $P(E)$ est tracée en fonction de l'énergie à température nulle et pour différentes valeurs de la résistance de l'environnement. Si la valeur de la résistance augmente, le pic de $P(E)$ effectue une translation vers des valeurs croissantes de l'énergie jusqu'à la valeur $e^2/2C$ qui correspond à une résistance $R = R_K$.

1.5 Théorie de la diffusion

Dans les précédentes sections nous avons exposé différentes théories liées de près ou de loin au phénomène de conduction dans les systèmes mésoscopiques. Allant des premiers modèles pour les métaux, jusqu'aux jonctions tunnel dans un environnement dissipatif. Dans cette section, nous allons exposer la théorie de la diffusion qui décrit le phénomène de transport dans un système mésoscopique à travers la détermination du courant et de la conductance. Cette théorie se base seulement sur les propriétés de diffusion du conducteur. Développée par Landauer [3, 4], elle prend en compte le caractère quantique des électrons en considérant leur nature ondulatoire.

1.5.1 Description du système

Il s'agit d'un conducteur mésoscopique connecté à des réservoirs, ces réservoirs sont des conducteurs macroscopiques à l'équilibre thermique caractérisés par un potentiel chimique μ. Dans la figure 1.7, le premier schéma décrit un conducteur mésoscopique connecté à plusieurs réservoirs. Le second schéma montre un conducteur connecté à deux réservoirs, gauche et droit à température T et de potentiels chimiques μ_L et μ_R respectivement. Le conducteur est connecté aux réservoirs au moyen de fils parfaits, dont les contactes avec les réservoirs sont transparents. Les électrons circulant dans ces fils ne doivent subir aucune rétrodiffusion et sont décrits par des ondes planes longitudinales. Ces fils sont en général des fils quantiques sans impuretés ou des systèmes quasi-unidimensionnels multi-canaux. L'ensemble canaux et fils peut être considéré comme un système quasi-unidimensionnel. Les électrons traversent ce système dans la direction longitudinale x et sont confinés dans la direction orthogonale notée $\mathbf{r}_\perp$. L'énergie totale d'un électron est donnée par la relation suivante :

$$E = E_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \ , \tag{1.73}$$

où E_n représente l'énergie d'un état propre induit par le confinement dans la direction longitudinale. L'indice n qui apparaît dans l'énergie détermine le canal dans lequel les électrons se propagent. Ces électrons obéissent à la fonction de distribution de Fermi-Dirac $f_\alpha(E) = \big(\exp(E - \mu_\alpha/k_B T) + 1\big)^{-1}$ qui dépend de la température et du potentiel chimique.

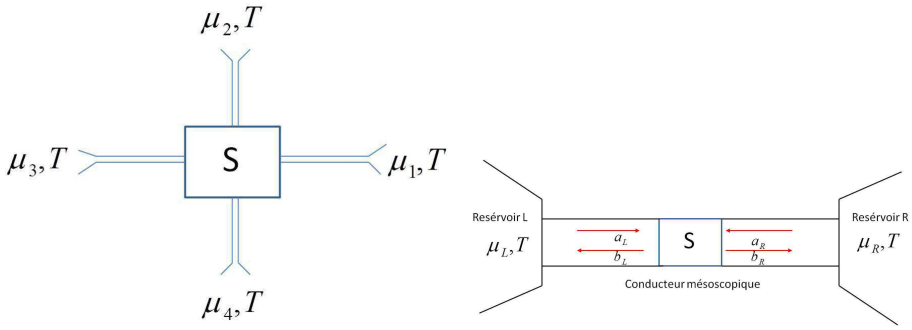

FIGURE 1.7 – (a) : Schéma d'un conducteur mésoscopique connecté à plusieurs terminaux. (b) : Schéma d'un conducteur mésoscopique connecté à deux réservoirs L et R, a_α sont les amplitudes entrantes dans le conducteur et b_α sont les amplitudes sortantes.

La description du transport est liée uniquement aux propriétés de diffusion du conducteur. Celui-ci est décrit par une matrice de diffusion S qui relie les états incidents aux états transmis et réfléchis. L'opérateur d'annihilation d'un électron de spin σ dans le réservoir α est donné dans le cas d'un conducteur connecté à deux terminaux par l'expression suivante :

$$\psi_{\alpha,\sigma}(\mathbf{r}_\perp) = \sum_\sigma \int dE e^{Et/\hbar} \sum_{n=1}^{N_\alpha(E)} \frac{\chi_{\alpha,n}(\mathbf{r}_\perp)}{2\pi\hbar v_{\alpha,n}(E)} \Big(a_{\alpha,n,\sigma} e^{ik_{\alpha,n}x_\alpha} + b_{\alpha,n,\sigma} e^{-ik_{\alpha,n}x_\alpha} \Big) \ . \tag{1.74}$$

Cet opérateur est la somme d'un état incident se propageant vers le conducteur dont l'amplitude d'onde est $a_{\alpha,n,\sigma}$, et d'un état diffusé par l'autre terminal dont l'amplitude d'onde est $b_{\alpha,n,\sigma}$. Ces amplitudes sont connectées par la matrice S. La fonction $\chi_{\alpha,n}$ représente l'état propre normalisé des électrons confinés dans la direction orthogonale, N_α

est le nombre de canaux de conduction du terminal α et $v_{\alpha,n}(E) = \hbar k_{\alpha,n}/m$ est la vitesse de propagation des électrons. Dans le cas de plusieurs terminaux, il faut tenir compte de leur nombre afin de pouvoir généraliser l'équation (1.74).

1.5.2 Courant moyen et conductance

Dans cette partie nous allons exposer les éléments essentiels du calcul du courant moyen et de la conductance. Par simplicité, nous avons choisi le cas où le conducteur mésoscopique est connecté à deux terminaux et les électrons peuvent se propager sur plusieurs canaux de conduction. Il est possible de calculer le courant et la conductance dans le cas où le conducteur est connecté à plusieurs terminaux. Ceci a été fait dans les références [55, 56] pour le cas de quatre terminaux.

Le calcul s'appuie sur la méthode de diffusion basée sur la seconde quantification. Cette méthode ne prend en compte que les processus de diffusion élastiques. Les effets inélastiques tels que les collisions avec déplacement collectif d'atomes, les collisions électron-électron et les impuretés magnétiques ne sont pas pris en compte. En effet, les processus inélastiques détruisent la cohérence de phase. Les résultats que nous allons exposer ont été obtenus dans les références [57, 58].

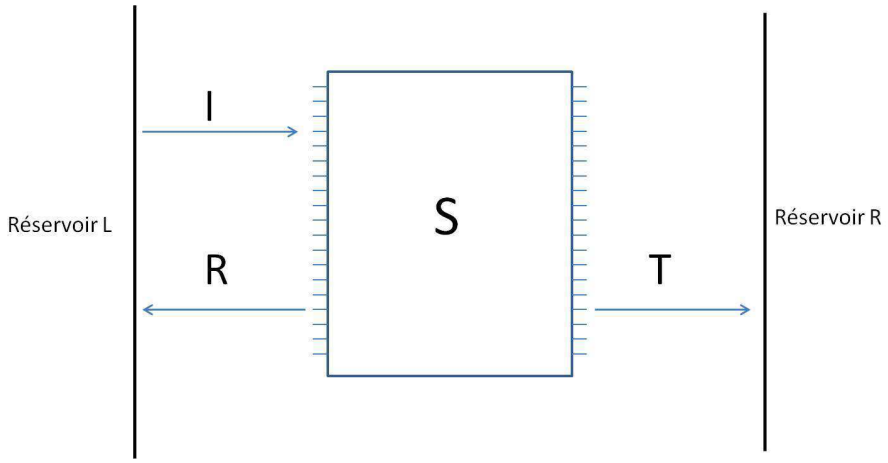

FIGURE 1.8 – Schéma représentant un conducteur multi-canaux connecté à deux réservoirs. Un électron incident peut être transmis ou réfléchi.

Nous considérons donc un conducteur mésoscopique relié à deux réservoirs. Les électrons peuvent se propager dans plusieurs canaux de conduction (voir figure 1.8). Un électron est décrit par la fonction d'onde $\psi_{\alpha,\sigma}$ donnée par l'équation (1.74), en remplaçant les amplitudes d'onde $a_{\alpha,n,\sigma}$ et $b_{\alpha,n,\sigma}$ par des opérateurs de création et d'annihilation $\hat{a}^{(\dagger)}_{\alpha,n,\sigma}$ et $\hat{b}^{(\dagger)}_{\alpha,n,\sigma}$ afin de respecter le fait de travailler en seconde quantification. Ces opérateurs de création et d'annihilation obéissent aux relations d'anti-commutation usuelles des fermions :

$$\{\hat{a}_{\alpha,n,\sigma}(E), \hat{a}^{\dagger}_{\alpha,n,\sigma}(E')\} = \delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{n,n'}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(E-E') \ , \tag{1.75}$$

$$\{\hat{a}_{\alpha,n,\sigma}(E), \hat{a}_{\alpha,n,\sigma}(E')\} = 0 \ , \tag{1.76}$$

$$\{\hat{a}^{\dagger}_{\alpha,n,\sigma}(E), \hat{a}^{\dagger}_{\alpha,n,\sigma}(E')\} = 0 \ . \tag{1.77}$$

L'opérateur courant pour le terminal α est défini de la manière standard :

$$I_\alpha(x,t) = \frac{e\hbar}{2im}\sum_\sigma \int d\mathbf{r}_\perp \left(\psi^\dagger_{\alpha,\sigma}(\mathbf{r},t)\frac{\partial \psi_{\alpha,\sigma}(\mathbf{r},t)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \psi^\dagger_{\alpha,\sigma}(\mathbf{r},t)}{\partial x_\alpha}\psi_{\alpha,\sigma}(\mathbf{r},t)\right) , \tag{1.78}$$

avec $\mathbf{r} = (x, \mathbf{r}_\perp)$. Il faut maintenant remplacer dans l'équation (1.78) les opérateurs de création et d'annihilation $\psi^\dagger_{\alpha,\sigma}$ et $\psi_{\alpha,\sigma}$ par leurs expressions en fonction des opérateurs $\hat{a}^{(\dagger)}_{\alpha,n,\sigma}$ et $\hat{b}^{(\dagger)}_{\alpha,n,\sigma}$. Ces derniers opérateurs sont liés à travers la matrice de diffusion :

$$S = \begin{pmatrix} r(E) & t'(E) \\ t(E) & r'(E) \end{pmatrix} , \tag{1.79}$$

qui est une matrice unitaire $SS^\dagger = 1$, écrite par blocs. Les blocs diagonaux correspondent aux amplitudes de réflexion des électrons issus des réservoirs. Les blocs non-diagonaux correspondent aux amplitudes de transmission de ces électrons. L'unitarité de la matrice de diffusion est conforme à l'hypothèse de ne considérer que les processus de diffusion élastique. En utilisant l'ensemble de ces propriétés, on peut récrire l'opérateur de courant en terme des opérateurs $\hat{a}^{(\dagger)}_{\alpha,n,\sigma}$ et $\hat{a}_{\alpha,n,\sigma}$ uniquement :

$$I_\alpha(x,t) = \frac{e}{22\pi\hbar}\sum_{\beta,\gamma}\sum_{m,n,\sigma}\int dE \int dE' e^{i(E-E')t/\hbar} M^{mn}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E')\hat{a}^{(\dagger)}_{\alpha,n,\sigma}(E)\hat{a}_{\alpha,n,\sigma}(E) , \tag{1.80}$$

où $M^{mn}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E')$ est l'élément de matrice de courant qui contient deux contributions :

$$M^{mn}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E') = M^{mn;\Delta k}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E') + M^{mn;\Sigma k}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E') . \tag{1.81}$$

Le terme $M^{mn;\Sigma k}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E')$ est un terme qui oscille rapidement avec une longueur d'onde π/k_F. Du fait que l'on ne considère que les processus élastiques, ce terme est nul. Le terme $M^{mn;\Delta k}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E')$ est un terme non oscillant et non nul. Les énergies E et E' sont très proches ce qui signifie que $k \sim k'$. De plus, les vitesses $v_{\alpha,n}$ varient très lentement et peuvent être négligées. Ces considérations permettent l'écriture de l'élément de matrice de courant sous la forme suivante :

$$M^{mn}_{\beta,\gamma}(\alpha;E,E') = \delta_{mn}\delta_{\beta,\alpha}\delta_{\gamma,\alpha} - \sum_k s^*_{\alpha,\beta,mk}(E)s_{\alpha,\gamma,kn}(E') , \tag{1.82}$$

où $s_{\alpha,\gamma,kn}$ est l'élément de la matrice diffusion. Il reste maintenant l'évaluation de la valeur moyenne du courant. Pour cela, il faut estimer la valeur moyenne sur les opérateurs de création et annihilation de l'équation (1.80). Cette moyenne vaut :

$$\langle \hat{a}^{(\dagger)}_{\alpha,n,\sigma}(E)\hat{a}_{\alpha,n,\sigma}(E')\rangle = f_\alpha(E)\delta_{\alpha,\beta}\delta_{mn}\delta(E-E') . \tag{1.83}$$

Ceci permet d'écrire le courant moyen :

$$\langle I_\alpha(x,t)\rangle = \frac{e}{h}\sum_{\alpha,\beta,n}\int dE[f_\alpha(E) - \sum_{mn} s^*_{\alpha,\beta,mn}(E)s_{\alpha,\beta,mn}(E)f_\beta(E)] . \tag{1.84}$$

L'unitarité de la matrice S permet d'utiliser la propriété suivante :

$$\sum_{mn} s^*_{\alpha,\beta,mn}(E)s_{\alpha,\beta,mn}(E) = Tr\left[s^*_{\alpha,\beta,mn}(E)s_{\alpha,\beta,mn}(E)\right] . \tag{1.85}$$

En résultat final, le courant moyen pour un conducteur mésoscopique connecté à deux réservoirs à multiples canaux de conductions est :

$$\langle I_\alpha(x,t)\rangle = \frac{e}{h}\sum_{\alpha,\beta,n}\int dE\mathcal{T}_{\alpha\beta mn}[f_\alpha(E)-f_\beta(E)] \ , \tag{1.86}$$

où $\mathcal{T}_{\alpha\beta mn} = |s_{\alpha,\beta,mn}|^2$ est le coefficient de transmission. A température nulle et pour une tension $V = (\mu_\alpha - \mu_\beta)/e$ basse, le coefficient de transmission ne dépend pas de l'énergie. Le courant moyen s'écrit alors [58] :

$$\langle I_\alpha(x,t)\rangle = \frac{e^2V}{h}\sum_{mn}\mathcal{T}_{\alpha\beta mn} \ , \tag{1.87}$$

qui est la formule de Landauer pour le courant moyen. La conductance s'obtient directement à partir du courant moyen :

$$G_{\alpha,\beta} = \frac{e^2}{h}\sum_{mn}\mathcal{T}_{\alpha\beta mn} \ . \tag{1.88}$$

La conductance dépend uniquement du coefficient de transmission. Cette dépendance a été vérifée expérimentalement pour un échantillon dont le nombre de canaux de conduction peut être contrôlé par une tension de grille [5]. L'addition de chaque canal augmente la conductance d'une marche équivalente au quantum de conductance $2e^2/\hbar$.

Il faut noter que la formule de la conductance n'est pas unique. En effet, elle dépend du protocole expérimental de mesure. Si on prend l'exemple de mesure de courant par des sondes placées de part et d'autre de l'échantillon, la conductance s'écrit [59] :

$$G = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\sum_{mn}\frac{\mathcal{T}_{mn}}{1-\mathcal{T}_{mn}} \ . \tag{1.89}$$

Cette expression découle d'un calcul basé sur une méthode de théorie de localisation "scaling theory of localization".

En observant l'équation (1.87), il apparaît que pour une transmission parfaite $\mathcal{T} = 1$ il existe une résistance non négligeable égale à $2e^2/h$. L'origine de cette résistance vient des contactes, du moment qu'aucune rétrodiffusion n'est permise dans le conducteur mésoscopique. Cette résistance se décompose en deux parties, une résistance aux contacts et une résistance intrinsèque de l'échantillon qui est nulle pour une transmission parfaite. Dans la référence [60], ces deux résistance ont été mesurées pour un conducteur balistique unidimensionnel.

1.6 Bruit et corrélations de courant

Nous avons vu dans la section précédente que la réponse d'un conducteur mésoscopique à une tension appliquée constante est un courant stationnaire. Le courant moyen et la conductance ne décrivent que l'aspect moyen du transport. En effet, une analyse plus détaillée du courant montre qu'il présente des fluctuations autour de la valeur moyenne. Ces fluctuations étaient longtemps considérées comme un phénomène parasite qu'il faut supprimer. Plus tard, les fluctuations de courant ont acquis un grand intérêt. De nombreux travaux théoriques et expérimentaux se sont intéressés aux fluctuations de courant. Celles-ci contiennent des informations indispensables permettant de mieux comprendre le phénomène de transport. L'une des manières de caractériser ces fluctuations est de calculer la transformée de Fourier de la fonction de corrélations de courant. C'est ce qu'on appelle le bruit.

1.6.1 Origine du bruit

Le bruit résulte de la nature stochastique du transport. On peut distinguer trois origines physiques du bruit : le bruit en $1/f$, qui est un bruit hors équilibre résultant de la résistance du système au mouvement des impuretés dans le réseau cristallin [61, 62, 63]. Ce bruit se mesure à basses fréquences et il est proportionnel à l'inverse de la fréquence. Pour des fréquences plus élevées, sa contribution au bruit total devient indissociable des contributions des autres types de bruit. Le second type du bruit est le bruit thermique. Celui-ci apparaît suite à l'agitation thermique des électrons et aux vibrations du réseau causées par l'augmentation de la température. C'est un bruit d'équilibre présent également en l'absence d'une tension appliquée [64, 65]. Le dernier type du bruit est le bruit de grenaille "shot noise". Ce bruit hors équilibre est une conséquence de la granularité du courant. Nous nous sommes intéressés dans nos travaux à ce dernier type de bruit.

Afin de calculer le bruit, il faut introduire la fonction de corrélation de courant-courant :

$$C(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt' \langle I(t')I(t+t')\rangle \ . \tag{1.90}$$

La densité spectrale de la fonction de corrélation représente le bruit. Elle est obtenue en calculant sa transformée de Fourier :

$$S(\omega) = \int dt C(t) e^{-i\omega t} \ . \tag{1.91}$$

Notons que cette définition est fondée sur l'hypothèse d'ergodicité. Celle-ci stipule que les moyennes d'ensemble d'un processus stochastique I sont équivalentes aux moyennes temporelles de chaque réalisation $I(t)$.

1.6.2 Bruit poissonien : formule de Schottky

Walter Schottky a prédit qu'il y avait deux sortes de fluctuations dans un tube à vide [6] : le bruit thermique et le bruit de grenaille qui est dû aux fluctuations statistiques des porteurs de charge. Dans cette situation, plusieurs particules traversent le système et voyagent d'une électrode vers une autre. La probabilité d'avoir N événements tunnel dans un temps t est donnée par la loi poissonienne :

$$P_N(t) = \frac{t^N}{\tau^N N!} e^{-t/\tau} \ , \tag{1.92}$$

où τ représente le temps entre deux événements. La fonction caractéristique de la distribution poisonnienne s'écrit :

$$\phi = e^{(t/\tau)(e^{i\lambda}-1)} \ , \tag{1.93}$$

où λ est un paramètre. Cette fonction caractéristique permet de récrire la probabilité $P_N(t)$ sous la forme suivante :

$$P_N(t) = \frac{\langle N\rangle^N}{N!} e^{-\langle N\rangle} \ . \tag{1.94}$$

Elle permet aussi de calculer le nombre moyen de particules transmises :

$$\langle N\rangle = t/\tau \ , \tag{1.95}$$

ainsi que la variance :

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \langle N\rangle \ . \tag{1.96}$$

Le courant moyen est donné par le produit du nombre moyen des particules transmises par la charge élémentaire divisé par le temps :

$$\langle I \rangle = \frac{e\langle N \rangle}{t} \ . \tag{1.97}$$

Le bruit est proportionnel à la variance, qui dans ce cas est égale au nombre moyen de particules transmise. La formule de Schottky s'écrit :

$$S = 2e\langle I \rangle \ . \tag{1.98}$$

Cette formule est d'une importance capitale. D'abord elle s'applique à n'importe quelle système où une diffusion tunnel se produit. De plus, elle permet de faire la comparaison avec le bruit quantique. Enfin, elle permet d'avoir des informations sur la charge effective des porteurs. Dans le cas d'un métal cette charge est égale à e. Dans le cas des supraconducteurs cette charge correspond à $2e$, qui représente la charge d'une paire de Cooper [7, 60, 66]. Dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire, la charge effective correspond à la charge des quasi-particules de Laughlin [67, 68].

1.6.3 Bruit dans la limite quantique

Nous nous intéressons dans cette section au bruit de grenaille dans la limite quantique. La densité spectrale de la fonction de corrélations courant-courant est donnée dans ce cas par l'expression suivante :

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega t'} \Big[\langle I(t) I(t+t') \rangle - \langle I(t) \rangle \langle I(t+t') \rangle \Big] \ . \tag{1.99}$$

Dans le cas classique, le bruit est symétrique $S(\omega) = S(-\omega)$, ceci est dû au fait que $I(t)$ et $I(t+t')$ sont des fonctions et donc commutent. Cependant, la nature quantique des porteurs de charge impose que le courant soit un opérateur. Le fait que le courant doit être une quantité mesurable expérimentalement, impose que l'opérateur courant soit hermitien. Par contre, le produit de deux opérateurs courant n'est pas hermitien. Ce que pensait Landau [69], est que pour avoir une quantité réelle et mesurable, il faut symétriser le bruit :

$$S_{sym}(\omega) = \frac{1}{2}\big(S_+(\omega) + S_-(\omega)\big) \ , \tag{1.100}$$

où S_+ et S_- représentent les densités spectrales non-symétrisées. Cette considération de Landau s'avèrent pas nécessaire. Sous l'hypothèse de la connaissance de l'état initial $|i\rangle$ et de l'état final $|f\rangle$, ces densités spectrales s'écrivent :

$$S_+(\omega) = 4\pi \sum_{if} |\langle f|I(0)|i\rangle|^2 P(i) \delta(\omega + E_f - E_i) \ , \tag{1.101}$$

$$S_-(\omega) = 4\pi \sum_{if} |\langle f|I(0)|i\rangle|^2 P(i) \delta(\omega + E_i - E_f) \ , \tag{1.102}$$

ici $P(i)$ représente la distribution de probabilité des états initiaux. Les densités spectrales S_+ et S_- s'interprètent physiquement en fonction du signe de la fréquence. A fréquence positive (resp. négative), S_+ (resp. S_-) correspond au taux d'émission de photon du conducteur mésoscopique couplé avec l'environnement. A fréquence négative (resp. positive) S_+ (resp. S_-) correspond au taux d'absorption des photons par le conducteur mésoscopique.

1.6.4 Bruit à fréquence nulle

Dans cette partie, nous allons considérer un conducteur mésoscopique couplé à deux réservoirs contenant de multiples canaux de conduction (voir figure 1.8). L'expression du bruit à fréquence nulle dans l'un des réservoirs (L ou R) s'écrit [70] :

$$\begin{aligned} S_{LL(RR)}(0) &= \frac{2e^2}{h}\sum_n \int dE \Big[\mathcal{T}_n(E)(f_L(E)(1-f_L(E)) + f_R(E)(1-f_R(E))) \\ &\quad + \mathcal{T}_n(E)(1-\mathcal{T}_n(E))(f_L(E)-f_R(E))^2 \Big] \ . \end{aligned} \tag{1.103}$$

Cette expression décrit aussi bien les fermions que les bosons, en substituant les signes (+) par des signes (-) et les signes (-) par les signes (+). Une expression équivalente est obtenue dans l'approche du paquet d'onde. Dans cette approche les fréquences sont considérées assez basses par rapport à l'inverse du temps nécessaire pour qu'un électron traverse le système [71]. Cette méthode se base sur l'hypothèse que le courant est une superposition de pulses [72] :

$$I(t) = \sum_n j(t - n\tau) g_n \ , \tag{1.104}$$

où j est le courant associé à une pulse et g_n un facteur d'occupation. Ce facteur prend la valeur 1 si l'électron passe de la gauche vers la droite du système et prend la valeur -1 si l'électron passe de la droite vers la gauche.

An l'absence d'une tension appliquée, et dans la limite des hautes températures ($\hbar\omega \ll k_B T$), la contribution du bruit thermique dans l'expression (1.103) domine. L'utilisation de la relation $f_i(1-f_i) = -k_B T \partial f_i / \partial E$ permet de retrouver l'expression standard du bruit thermique [57] :

$$S(0) = 4 G k_B T \ , \tag{1.105}$$

où G est la conductance de Landauer. Le théorème de fluctuation-dissipation permet aussi de retrouver ce résultat. Dans l'autre limite, et pour une tension appliquée V et une température nulle, c'est la contribution du bruit hors-équilibre qui domine. Ce qui correspond à une réduction du bruit, qui devient dans ce cas le bruit de grenaille quantique [73, 74] :

$$S_{LL(RR)}(0) = \frac{4e^2}{h} eV \sum_n \mathcal{T}_n(1-\mathcal{T}_n) \ . \tag{1.106}$$

Dans la limite d'une transmission parfaite, le bruit s'annule. Ce qui conduit à un comportement de la conductance en marche d'amplitude $2e^2/h$ [75, 76, 77]. Pour une transmission faible on retrouve la formule de Schottky du bruit. La réduction du bruit dans le cas d'un conducteur à un canal corréspond à la formule de Schottky multiplié par un facteur $1-\mathcal{T}$:

$$S_{LL(RR)}(0) = 2e\langle I \rangle (1-\mathcal{T}) \ . \tag{1.107}$$

Notons enfin que dans le régime intermédiaire $\hbar\omega \approx k_B T$, il n'est pas possible de dissocier les deux contributions du bruit.

Transition entre deux régimes de bruit

Dans l'hypothèse où le coefficient de transmission n'a pas de dépendance significative en énergie, il est possible de calculer les intégrales de l'équation (1.103) analytiquement. Cette

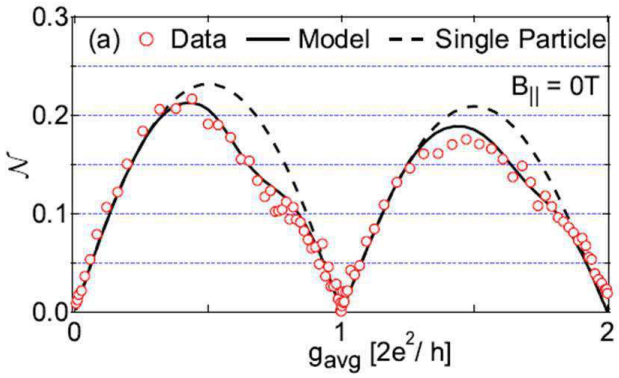

FIGURE 1.9 – Bruit de grenaille en fonction de la conductance dans un point contact. D'après [77].

hypothèse est justifiée si $T(d\mathcal{T}_n/dE)^{-1} \gg eV$. Donc il faut choisir une basse tension et des potentiels chimiques qui ne permettent pas une transmission résonnante. Ceci permet d'écrire une expression du bruit à fréquence nulle valable pour toutes les valeurs de la tension et tous les régimes de température [72] :

$$S_{LL(RR)}(0) = \frac{4e^2}{h}\left[2k_BT\sum_n \mathcal{T}_n^2 + eV\coth\left(\frac{eV}{2k_BT}\right)\sum_n \mathcal{T}_n(1-\mathcal{T}_n)\right] . \tag{1.108}$$

Dans la limite des faibles transmissions, cette expression se réduit au bruit de grenaille quantique :

$$S_{LL(RR)}(0) = 2e\langle I\rangle \coth\left(\frac{eV}{2k_BT}\right) . \tag{1.109}$$

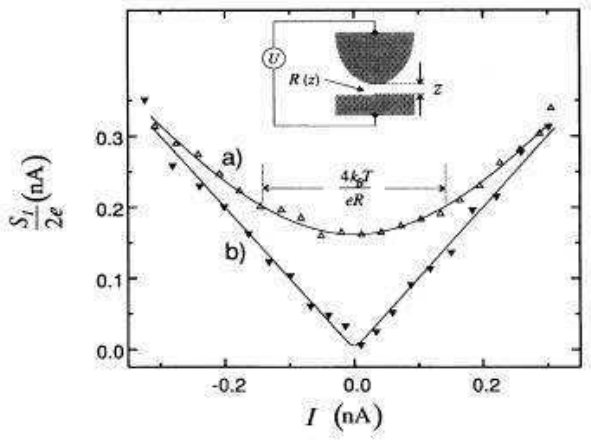

FIGURE 1.10 – Bruit en fonction du courant pour deux différents régimes de température. La courbe (a) correspond au cas haute température et faible tension, et la courbe (b) correspond à une tension appliquée non nulle et une basse température. D'après [78].

Dans la figure 1.10 le bruit est mesuré par une pointe STM sur la surface d'un métal. Deux courbes sont tracées, à haute et à basse température. A haute température, le facteur

de Fano qui est le rapport entre le bruit à fréquence nulle et le courant, n'est significatif que pour un courant important. A basse température la formule de Schottky s'illustre à travers la linéarité du bruit en fonction du courant.

Corrélations croisées à fréquence nulle

Il s'agit des corrélations de courants mesurées dans des terminaux différents. Pour deux terminaux gauche (L) et droite (R), le scénario de mesure est d'imaginer un nouveau réservoir $L + R$ pour lequel on mesure l'auto-corrélation $S_{(L+R)(L+R)}$. Les corrélations croisées sont alors obtenues par la relation suivante :

$$S_{LR}(0) = \Big(S_{(L+R)}(0) - S_L(0) - S_R(0)\Big)/2 \ . \tag{1.110}$$

Dans les expériences de Hanbury-Brown et Twiss [79, 80], les corrélations croisées ont permis de caractériser la statistique des excitations. Dans ces expériences, des filtres ont été utilisés sur une source de lumière. Le faisceau monochromatique obtenu est divisée en deux composantes par une lame semi-réfléchissante. Les deux faisceaux résultants sont orientés vers deux détecteurs de photons. Les corrélations croisées entre les deux détecteurs ont été mesurées en fonction de la distance qui les sépare. Le résultat trouvé est toujours positif. L'explication est liée à la nature bosonique des photons qui sont des particules indiscernables obéissant à la statistique de Bose-Einstein. Ainsi plusieurs photons en moyenne occupaient le même état transversal dans le faisceau initial. Après la séparation en deux composantes, la détection d'un ensemble de photons dans l'un des capteurs implique la détection de photons dans l'autre capteur.

Plusieurs auteurs ont suggéré la mise en place de ce type d'expérience pour les fermions. La nature fermionique des électrons impose qu'ils ne peuvent pas occuper un même état. Les corrélations croisées devraient être négatives. Dans la référence [72], à cause de la difficulté de produire un faisceau d'électrons dense, une suggestion d'expérience est proposée en considérant un conducteur à trois terminaux, communément appelé jonction en "Y". Les électrons sont alors injectés dans le terminal 3 et détectés au niveau des terminaux 1 et 2. Le potentiel chimique du terminal 3 et plus élevé que celui des deux autres terminaux. Les corrélations croisées entre les terminaux 1 et 2 normalisées par la racine carrée du produit des auto-corrélations s'écrivent :

$$\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}S_{22}}} = -\frac{\sqrt{\mathcal{T}_{13}\mathcal{T}_{23}}}{\sqrt{(1-\mathcal{T}_{13})(1-\mathcal{T}_{23})}} \ , \tag{1.111}$$

où T_{13} et T_{23} représentent les coefficients de transmission des électrons du terminal 3 vers le terminal 1 et 2 respectivement. En accord avec ce résultat, plusieurs expériences ont montré que le signe des corrélations croisées permet de caractériser la statistique des porteurs de charge. Dans la référence [81], en utilisant une grille métallique mince un faisceau électronique est scindé en deux. Cette expérience est analogue à l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss. Une autre expérience est réalisée dans le régime de l'effet Hall quantique [82]. Un point de contact est placé au milieux de l'échantillon jouant le rôle d'un séparateur de faisceau de particules. L'état de bord incident se trouve ainsi divisé en deux états de bords transmis. Dans la référence [83], des corrélations croisées négatives ont été observées dans des expériences d'émission de champ électronique.

1.6.5 Bruit à fréquence finie

L'importance de la considération de la dépendance en fréquence du bruit réside dans la possibilité d'élargir la gamme de bruits étudiés. Le courant total dans ce cas est conservé.

Il est composé du courant de particules et du courant de déplacement $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$. Contrairement au cas du bruit à fréquence nulle où le courant total se compose uniquement du courant de particules qui est conservé. Dans le cas dynamique la considération des interactions électroniques conduit à la non-conservation du courant de particules [84]. Ce qui montre que l'équation (1.103) calculée pour une fréquence nulle n'est pas valable à fréquence finie. Une restriction est possible lorsque la matrice de diffusion ne dépend pas de l'énergie. Dans ce cas l'expression du bruit s'écrit :

$$\begin{aligned} S_{LL(RR)}(\omega) &= \frac{2e^2}{h}\Bigg[\sum_n \mathcal{T}_n^2 \int dE\Big(f_{LL}(E,\omega)(1-f_{LL}(E,\omega)) + f_{RR}(E,\omega)(1-f_{RR}(E,\omega))\Big) \\ &\quad + \sum_n \mathcal{T}_n(1-\mathcal{T}_n)\int dE\Big(f_{LR}(E,\omega)+f_{RL}(E,\omega)\Big)\Bigg] \ , \end{aligned} \tag{1.112}$$

Avec :

$$f_{\alpha,\beta}(E,\omega) = f_\alpha(E)(1-f_\beta(E+\hbar\omega)) + (1-f_\alpha(E))f_\beta(E+\hbar\omega) \ , \tag{1.113}$$

où $\alpha, \beta = R, L$. Après intégration, l'expression devient :

$$S_{LL(RR)}(\omega) = \frac{2e^2}{h}\Bigg[\sum_n \mathcal{T}_n^2 \frac{2\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} + \sum_n \mathcal{T}_n(1-\mathcal{T}_n)\Big[\frac{\hbar\omega+eV}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} + \frac{\hbar\omega-eV}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\Big]\Bigg] \ . \tag{1.114}$$

Le comportement dans les deux limites de température est semblable au cas du bruit à fréquence nulle. En effet, pour une tension nulle et dans la limite des hautes températures le bruit s'écrit :

$$S_{LL(RR)}^{(V=0)}(\omega) = \frac{2\hbar\omega G}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} \ , \tag{1.115}$$

qui se réduit à l'équation (1.105) si $\omega \to 0$. Dans la limite opposée, le bruit à fréquence finie contient deux contributions : une contribution à l'équilibre $(4e^2\hbar\omega/h)\sum_n \mathcal{T}_n^2$, et une contribution hors-équilibre qui différent suivent le régime choisi. Si $\hbar|\omega| > eV$ elle est nulle. Si par contre $\hbar|\omega| < eV$ cette contribution vaut :

$$S_{LL(RR)}^{heq}(\omega) = \frac{4e^2\big(eV-\hbar|\omega|\big)}{h}\sum_n \mathcal{T}_n(1-\mathcal{T}_n) \ . \tag{1.116}$$

Introduire le bruit en excès :

$$S_{exces}(\omega) = S(\omega) - S_{V=0}(\omega) \ , \tag{1.117}$$

permet de ne garder que la contribution hors équilibre du bruit.

Dans les expériences c'est le bruit en excès qui est mesuré. Celui-ci est symétrique en l'absence d'interaction, il est donc difficile de distinguer entre le bruit en excès correspondant au spectre d'absorption et celui qui correspond au spectre d'émission. Autrement dit, il n'est pas possible de séparer les deux contributions non symétrisées du bruit symétrisé. Il faut rajouter à cela l'influence du mode de détection. Dans la référence [9], l'utilisation d'un amplificateur ne permet de détecter qu'un corrélateur symétrisé. Dans le cas d'une jonction de Josephson, où il est possible de mesurer séparément les deux contributions non

symétrisé du bruit [85].

Dans la référence [86], G.B. Lesovik et R. Loosen ont proposé un scénario de mesure qui permet de déterminer quel corrélateur est obtenu. Le système est couplé d'une manière inductive avec le détecteur et le bruit est mesuré à travers les fluctuations de charge dans le circuit LC. L'expression du bruit mesuré s'écrit [10] :

$$S_{mes}(\omega) = KRe\Big[S_{+}^{mn}(\omega)(N(\omega)+1) - S_{-}^{mn}(\omega)N(\omega)\Big] \ , \tag{1.118}$$

où $N(\omega) = \left(e^{\hbar\omega/k_BT} - 1\right)^{-1}$ est la fonction de Bose-Einstein, $\omega = 1/\sqrt{LC}$ est la fréquence du circuit résonnant et K est une constante qui dépend du couplage du circuit avec le système. Cette expression du bruit diffère de celle du bruit symétrisé, c'est un mélange des deux contributions non-symétrisées du bruit . Dans la référence [11], le couplage entre le détecteur et le système est capacitif. L'utilisation des processus inélastiques qui agissent dans un double point quantique permet en utilisant ce couplage de séparer les contributions d'émission et d'absorption.

L'étude du bruit à fréquence finie permet d'accéder à certaines propriétés du système. Dans la référence [87], les auteurs ont calculé les corrélations de bruit à fréquence finie pour un nanotube de carbone connecté à deux réservoirs dans lequel on injecte un électron. Les corrélations de bruit à fréquence finie permettent de calculer la charge transmise aux réservoirs. En effet, l'injection d'un électron dans le système engendre la création de deux excitations anormalement chargées se propageant dans deux directions opposées. Dans la référence [88], les auteurs ont calculé la conductance ainsi que le bruit non-symétrisé à fréquence finie pour un nontube de carbone ainsi que pour un fil quantique. Le profil en fréquence du bruit exhibe une forte asymétrie, qui est proportionnelle à la conductance en excès. Dans la référence [89], l'auteur à appliqué la formulation du bruit en bruit d'absorption et bruit d'emission au cas d'un conducteur cohérent ainsi qu'à la généralisation de la formule de Kubo. Une analyse théorique a permis de proposer un protocole de mesure du bruit et de dire quel bruit est mesuré dans des expérience de hautes fréquences. Le résultat montre que le bruit mesuré est le bruit d'émission et un bruit lié au détecteur qui est complètement indépendant des propriétés hors équilibre du système étudié. Par conséquent, mesurer le bruit en excès permet de détecter directement le bruit d'émission.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce premier chapitre une vue globale sur le phénomène de conduction dans les systèmes mésoscopiques, partant des premières théories pour les métaux jusqu'à la théorie de la diffusion qui s'appuie sur le caractère quantique des porteurs de charge. Au passage, nous avons donné un aperçu de la théorie des liquides de Fermi. Cette théorie qui tente de décrire les interactions dans les systèmes fermioniques.

Nous avons décrit le phénomène de blocage de Coulomb sous ses deux aspects, statique et dynamique. Ce phénomène caractérise de nombreux dispositifs construits grâce aux jonctions tunnel. Ces jonctions se comportent différemment une fois couplées avec un environnement électromagnétique.

Dans les deux dernières sections nous avons monté l'intérêt de l'étude du courant moyen et de la conductance. Nous avons décrit la théorie de la diffusion qui sert de support pour calculer ces grandeurs pour un système couplé à deux réservoirs à multi-canaux de conduction. L'insuffisance des informations contenues dans le courant moyen et la conductance impose l'étude des fluctuations de courant. Cet outil puissant qui permet de fournir d'avantage d'informations sur le système mésoscopique, notamment la charge des porteurs de courant ou encore la statistique de ces porteurs déterminés à fréquence nulle.

Chapitre 2

Théorie des liquides de Luttinger chiraux

L'effet Hall quantique fractionnaire est l'une des manifestations importantes de la matière, caractérisée par le comportement en plateaux de la résistivité de Hall pour des facteurs de remplissage fractionnaires. Ce qui nous intéresse en particulier dans un tel régime sont les états de bord. L'étude de ces systèmes ainsi que leur interaction permet de déterminer des caractéristiques du régime de l'effet Hall quantique fractionnaire, telles que le comportement en loi de puissance de la densité d'états, la charge fractionnaire des porteurs de courant ou encore leur statistique.

Après un bref rappel sur l'effet Hall quantique fractionnaire dans la section 2.1, nous décrivons la théorie des liquides de Luttinger chiraux dans la section 2.2. Cette théorie décrit les états de bords qui sont considérés comme des systèmes quasi unidimensionnels. Dans cette section nous présentons le modèle hydrodynamique de Wen qui est indispensable pour décrire des états de bord à un seul mode. C'est ce type d'états de bord que nous avons étudié dans le chapitre 3. Dans la même section nous avons exposé quelques notions et rappels de différents résultats théoriques relatifs à l'étude des états de bords multimodes.

Dans la section 2.3, nous avons décrit l'un des outils principaux que nous avons utilisé dans cette thèse, la procédure de refermionisation. Cette méthode qui nous a permis de calculer le courant et le bruit pour un conducteur cohérent couplé à l'environnement ainsi que pour les états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Nous terminons le chapitre par la section 2.4, dans laquelle nous reppelons quelques résultats expérimentaux importants, obtenus dans le cadre de l'effet Hall quantique fractionnaire.

2.1 Effet Hall quantique fractionnaire

L'effet Hall quantique est un phénomène très important en physique. C'est l'un des phénomènes où la mécanique quantique se manifeste à des échelles macroscopiques. L'effet Hall quantique entier a été découvert par Von Klinzing et *coll.* en 1980 [90]. L'expérience de base a été réalisée pour un gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique perpendiculaire. Des bandes d'énergies nommées niveaux de Landau se forment alors, et sont séparées par $\hbar\omega_C$, ω_C étant la fréquence cyclotron. Les niveaux de Landau sont hautement dégénérés, pour un échantillon de taille A et un champ magnétique B, le nombre d'états de chaque niveau est donné par la relation suivante [91] :

$$N = An_\phi \ , \tag{2.1}$$

où $n_\phi = Be/h$ représente la densité de quanta de flux. Le facteur de remplissage d'un niveau de Landau est donné par le rapport entre la densité électronique et la densité de quanta de flux

$$\nu = \frac{n_s}{n_\phi} \ , \tag{2.2}$$

dans ce cas ν prend des valeurs entières. Pour ces valeurs, la résistivité de Hall ρ_{xy} présente une série de plateaux. A chacun de ces plateaux est associée une forte décroissance de la résistivité dissipative $\rho_{xx} \longrightarrow 0$. La résistivité de Hall est donnée par l'expression suivante :

$$\rho_{xy} = -\frac{1}{\nu}\frac{h}{e^2} \ . \tag{2.3}$$

L'effet Hall quantique entier est indépendant de tout détail microscopique, il s'agit d'une manifestation des propriétés du transport pour un système de particules chargées sans interaction soumis à un champ magnétique intense et perpendiculaire [91].

En 1982, Tsui, Stömer et Gossard [24] ont réalisé la même expérience sur un échantillon $GaAs/AlGaAs$ de meilleur qualité, pour un champ magnétique intense et pour des températures plus basses. En plus des conditions sur le champ magnétique et la température, trois autres conditions sont indispensables : (i) la considération d'un temps de diffusion τ_0 caractérisant le désordre et qui satisfait $\tau_0\omega_C \gg 0$, (ii) la température $k_BT \leq \Delta$, où Δ est un gap provenant des interactions répulsives, (iii) l'interaction doit dominer l'effet du désordre, cela peut se voir en prenant un gap Δ plus grand que le potentiel de désordre. Les plateaux de la résistivité de Hall dans ce cas apparaissent même pour des valeurs fractionnaires de ν, ces valeurs sont du type $\nu = n/m$, où m est un entier impair (voir figure 2.1). L'effet Hall quantique fractionnaire est en fait dû à des interactions coulombiennes fortes et à des corrélations entre électrons. Les électrons condensent dans des états décrits par des nombres quantiques fractionnaires. On observe alors des quasi-particules de charge fractionnaire, et ayant une statistique fractionnaire intermédiaire entre la statistique de Bose-Einstein et la statistique de Fermi-Dirac [92, 93]. L'observation de la charge fractionnaire a été confirmée par des expériences de type Aharonov-Bohm [94, 95], et par des expériences de mesure de bruit de grenaille [96, 67].

L'un des phénomènes importants engendrés par l'effet Hall quantique fractionnaire est l'apparition des états de bord. Dans un échantillon donné, des champs électriques de rétroaction confinent les électrons dans les bords. Ces champs électriques causent un mouvement de dérive linéaire des centres des orbites circulaires du mouvement cyclotronique causé par le champ magnétique. Ce comportement collectif dû à l'interaction coulombienne [25] impose donc aux électrons de se propager aux bords de l'échantillon (voir figure 2.2) . Les

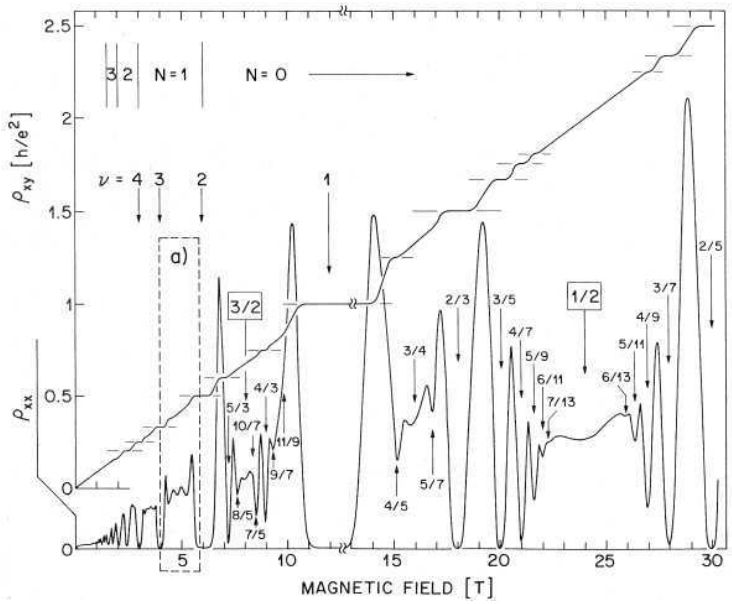

FIGURE 2.1 – Résistivité de Hall en fonction du champ magnétique : des plateaux se forment pour des valeurs entières et fractionnaires du facteur de remplissage ν. D'après Willet et *coll.* [97]

états de bords constituent des systèmes unidimensionnels intéressants dans la mesure où ils peuvent être équivalents à un liquide de Tomonaga-Luttinger chiral.

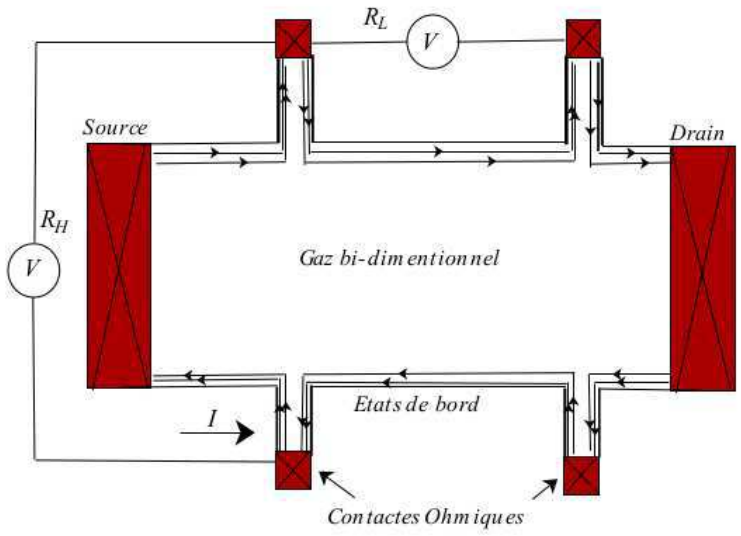

FIGURE 2.2 – Echantillon d'un système dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire dans lequel les électrons se propagent sur les bords. Dans le schéma, les deux flèches représentent deux modes se propageant dans le même sens.

Nous pouvons classifier les fluides de Hall en deux catégories : des fluides incompressibles et des fluides compressibles. Les fluides de Hall incompressibles se divisent eux aussi en deux groupes : fluides incompressibles simple ou de type Laughlin [25], et des

fluides incompressibles complexes invoquant des séquences hiérarchiques tels que les séries de Jain [98, 99, 100, 101]. Les fluides incompressibles de type Laughlin sont caractérisés par le facteur de remplissage suivant :

$$\nu_L = \frac{1}{2p+1} \ , \tag{2.4}$$

où p est un entier. Cette formule du facteur de remplissage est universelle. Dans le cas des fluides incompressibles complexes, un état de bord est composé de plusieurs branches, donnant naissance à des modes multi-branches. Le facteur de remplissage n'a pas de forme universelle et dépend des interactions inter-modes, qui sont des interactions qui mixent les modes. Néanmoins, pour des séquences spécifiques telles que les séries de Jain, le facteur de remplissage est donné par la relation suivante :

$$\nu_J = \frac{n}{np+1} \ , \tag{2.5}$$

avec n un entier non nul et p un entier pair.

Dans la prochaine section nous allons voir comment on peut étudier ces états de bord en les considérant comme des liquides de Luttinger chiraux. Nous introduisons ensuite les modèles théoriques qui décrivent ces états de bord.

2.2 Liquide de Luttinger chiral

La théorie des liquides de Luttinger chiraux initialement introduite par Wen [22, 23, 102, 103] offre un moyen d'étudier la dynamique à basse énergie des états de bord des systèmes bi-dimensionnels de gaz d'électrons fortement corrélés, tel que les états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. L'existence d'un profil de Tomonaga-Luttinger au niveau des bords caractérisé par une loi de puissance dans les corrélations et des excitations bosoniques sans gap, justifie l'application de la théorie des liquides de Luttinger à ce genre de système. De plus, dans le cas des fluides incompressibles, les bords sont véritablement unidimensionnels. La chiralité est due à la rétro-action du système en conséquence à l'application du champ magnétique. En effet, le champ magnétique introduit un sens de rotation dans la propagation des modes des états de bord, dans une direction donnée par $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$ où $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont respectivement le champ électrique de rétro-action et le champ magnétique appliqué. Par conséquent, le liquide de Luttinger doit être chiral.

Pour un fluide de Hall incompressible de type Laughlin, la caractéristique courant-tension du transfert tunnel des quasi-particules est une loi de puissance, similaire à la caractéristique d'un liquide de Luttinger. Par conséquent, les états de bord d'un système de type Laughlin possèdent un profil du type liquide de Luttinger "Luttinger-liquid-like profile", ceci permet de dire que les deux système sont équivalents. Ainsi, nous pouvons décrire les états de bord d'un fluide de Hall de type Laughlin par un liquide de Luttinger.

Concernant les fluides incompressibles complexes, les caractéristiques du transfert tunnel sont considerées comme un moyen efficace permettant la classification des différents états basée sur l'ordre topologique des états. Cet ordre topologique est incarné par le formalisme de la matrice K [104, 103, 105]. Dans ce cas, l'exposant de l'éventuelle loi de puissance n'est pas universel, ceci est dû à la non-universalité du facteur de remplissage ν. Cependant, Kane et *coll.* [106] ont montré qu'un fort désordre résiduel permet de rétablir l'exposant à des valeurs universelles. Concernant des séquences spécifiques telles que les séquences de Jain où nous connaissons la forme du facteur de remplissage ν_J, le mélange de n modes permet d'avoir un mode chargé et $n-1$ modes neutres. L'ensemble des modes

résultants obéit à une symétrie du type $SU(n)$ et se propage à une vitesse identique. Le mode chargé et les modes neutres se comportent ainsi d'une manière analogue aux modes de charge et de spin d'un liquide de Luttinger.

Les fluides de Hall compressibles sont un peu particuliers. L'observation expérimentale d'un comportement des états de bord du type Luttinger était considéré comme une surprise [107]. La description théorique la plus consistante du comportement des états de bord d'un fluide de Hall compressible se base sur une formulation du type Chern-Simon [108, 109] d'une théorie des champs effective pour des fermions composites. Ces travaux ont été fait par Shytov et *coll.* [26] et Levitov *coll.* [110]. La dynamique résultante est du type liquide de Luttinger. Contrairement au cas des fluides de Hall compressibles, la description d'un fluide de Hall de type Laughlin ou d'un fluide de Hall avec des séquences hiérarchiques demeure plus rigoureuse. En effet, pour tous les cas incompressibles une description standard de la théorie des états de bord existe. Cette description standard est faite dans un cas parfait, pour passer aux cas plus réalistes incorporant par exemple des effets d'écrantage ou des interactions de longue portée, la description est alors faite d'une manière approximative [111, 112, 113, 110].

2.2.1 Théorie hydrodynamique de Wen

Nous allons nous intéresser dans cette partie à un fluide de Hall incompressible de type Laughlin. Le facteur de remplissage dans ce cas est du type $\nu = 1/m$ où m est un entier impair. Ce modèle se compose de deux parties importantes [22] : la première partie consiste à décrire le système par la théorie hydrodynamique classique d'une onde de surface se propageant dans une seule direction, en s'appuyant sur le fait qu'un tel système est un fluide irrotationel et incompressible, la seconde partie est la quantification canonique des coordonnées et des impulsions. Nous supposons au début que la densité totale du fluide est constante, et que seules les excitations aux bords sont permises (voir figure 2.3). La densité électronique unidimensionnelle au niveau des bords est donnée par la relation suivante :

$$\rho\,(x) = nh(x)\ , \tag{2.6}$$

où n est la densité électronique totale, et $h(x)$ est la hauteur de déformation du bord. Cette densité obéit à l'équation d'onde

$$\partial_t \rho(x) - v\partial_x \rho(x) = 0\ . \tag{2.7}$$

Dans un tel système où la conductance dissipative $\sigma_{xx} \longrightarrow 0$ et la conductance de Hall σ_{xy} est non nulle, un courant sera créé au niveau des bords par le champ électrique lié à la densité électronique $\rho(x)$

$$\overrightarrow{J} = \sigma_{xy}\overrightarrow{e}_z \times \overrightarrow{E}\ . \tag{2.8}$$

avec $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}V(x)$, où V est le potentiel électrique. La vitesse de dérive des électrons au niveau des bords est $v = E/B$, et le champ électrique est lié au potentiel électrique par la relation $V(x) = h(x)E$. L'Hamiltonien du système est donné par la relation suivante :

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L dx V(x) e\rho(x)\ . \tag{2.9}$$

En exploitant les équations (2.2) et (2.6) nous pouvons récrire l'Hamiltonien sous la forme suivante :

$$H = \pi\hbar\frac{v}{\nu}\int_0^L dx\,[\rho(x)]^2\ . \tag{2.10}$$

Dans la représentation configuration, la densité $\rho(x)$ est la transformée de Fourier de la densité ρ_q de la représentation des moments

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_q \rho_q e^{-iqx} \ . \tag{2.11}$$

Nous pouvons alors récrire l'Hamiltonien en représentation des moments

$$H = 2\pi\hbar \frac{v}{\nu} \sum_{q>0} \rho_q \rho_{-q} \ . \tag{2.12}$$

Ceci nous ramène à récrire l'équation de continuité (2.7) dans la représentation des moments

$$\dot{\rho_q} = -ivq\rho_q \ . \tag{2.13}$$

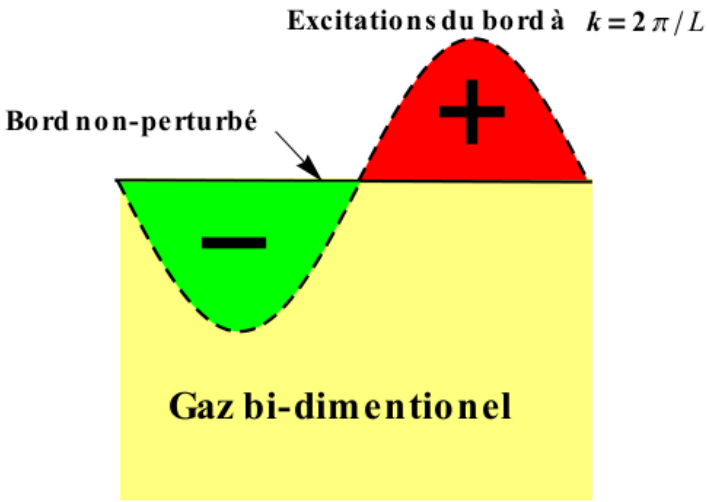

FIGURE 2.3 – Densité des électrons sur le bord d'un fluide de Hall quantique fractionnaire en présence de perturbations. La propagation de l'onde de surface de vecteur d'onde $k = 2\pi/L$ où L est la longueur du bord, provoque des déformations des bords ainsi qu'une accumulation de charge dans certaines régions et un déficit de charge dans d'autres régions.

Nous pouvons maintenant construire un système Hamiltonien en considérant la densité ρ_q comme coordonnée généralisée et comme moment conjugué p_q qui s'obtient par la relation suivante :

$$p_q = -\frac{\partial H}{\partial \rho_q} \ . \tag{2.14}$$

Procédant maintenant à la quantification canonique de ce système Hamiltonien. D'abord il faut quantifier la coordonnée et le moment conjugué

$$q_q = \rho_q \quad , \quad p_q = \frac{ih}{\nu q} \rho_{-q} \ . \tag{2.15}$$

Ces deux grandeurs nous permettent d'écrire les équations de Hamilton :

$$\dot{q_q} = \frac{\partial H}{\partial p_q} \quad , \quad \dot{p_q} = -\frac{\partial H}{\partial q_q} \ . \tag{2.16}$$

La procédure de quantification canonique nécessite la définition des relations de commutation suivantes :

$$\left[p_q, \rho_{q'}\right] = i\hbar\delta_{q,q'} \ , \tag{2.17}$$

$$\left[\rho_q, \rho_{q'}\right] = \frac{\nu q}{2\pi}\delta_{q,-q'} \ , \tag{2.18}$$

$$\left[H, \rho_q\right] = -qv\rho_q \ . \tag{2.19}$$

Nous introduisons un champ bosonique φ :

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}} \sum_{q>0} \frac{e^{-aq/2}}{q} i \left[e^{-iqx}\rho_q - e^{iqx}\rho_{-q}\right] \ , \tag{2.20}$$

où le a est le "cut-off" de distance impératif dans une théorie de liquide de Luttinger. Les champs bosoniques ainsi définis doivent satisfaire à la relation de commutation $[\phi(x), \phi(x')] = \frac{-i\pi\nu}{4} sign(x - x')$. Ces champs satisfont aussi à la relation importante :

$$\partial_x \varphi(x) = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{\nu}}\rho \ , \tag{2.21}$$

et donc à la relation de commutation $[\phi(x), \rho(x')] = -\frac{i}{\sqrt{4\pi}}\nu\delta\left(x - x'\right)$. Le but maintenant est de construire un champ fermionique ψ en fonction du champs bosonique φ satisfaisant la définition de la densité électronique $\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$. Nous posons alors :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{ik_F x} e^{i\frac{\sqrt{4\pi}}{\nu}\phi(x)} \ . \tag{2.22}$$

Le calcul de l'anti-commutateur $\{\psi(x), \psi(x')\}$ permet en utilisant l'identité de Becker-Campbell-Hausdroff, $e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}$, d'aboutir au résultat suivant :

$$\psi(x)\psi(x') = e^{\pm i\frac{\pi}{\nu}}\psi(x')\psi(x) \ . \tag{2.23}$$

Cette relation impose à $1/\nu$ d'être un entier impair, ce qui coïncide avec la condition sur un fluide de Hall incompressible simple de type Laughlin.

Pour un tel type de fluide de Hall, la fonction de Green bosonique est donnée alors par la relation suivante [114, 102, 103] :

$$\langle\varphi(x,t)\varphi(0,0)\rangle = -\nu \ln(x - vt) + cste \ . \tag{2.24}$$

La fonction de Green fermionique en fonction du nombre d'onde k et de l'énergie ω est donnée par la relation suivante :

$$G(k,\omega) \propto \frac{(vk + \omega)^{m-1}}{vk - \omega} \ . \tag{2.25}$$

Nous pouvons alors écrire la densité d'états

$$D(\omega) \propto |\omega|^{m-1} \ , \tag{2.26}$$

qui s'exprime comme une loi de puissance avec un exposant universel $m-1$. En particulier, pour le fluide de Hall le plus robuste, $\nu = 1/3$, l'exposant m est égale à 3.

2.2.2 Théorie des champs effective pour un liquide de Luttinger chiral incompressible complexe

Toute l'approche faite ci-dessus peut être généralisée pour les fluides de Hall incompressibles complexes. On distingue deux cas : le premier cas correspond aux fluides à séquences hiérarchiques simples, tels que le fluide à spin polarisé de facteur de remplissage $\nu = 2/5$ et $\nu = 2/3$. Ces types de fluides de Hall contiennent deux modes dans l'état de bord. Dans le cas où $\nu = 2/5$, l'état de bord est composé d'un mode externe $\nu_1 = 1/3$ de charge $e/3$ et d'un mode interne de condensat de quasi-particules de facteur de remplissage $\nu_2 = 1/15$ et de charge $e/5$. Les deux modes se propagent dans le même direction. Dans le cas $\nu = 2/3$, le mode externe est entier $\nu_1 = 1$ et le mode interne représente un condensat de quasi-trous de facteur de remplissage $\nu_h = 1/3$ et de charge $|e|/3$. Ce condensat de quasi-trous correspond à un condensat de quasi-particules de facteur de remplissage $\nu_2 = -1/3$ et de charge $e/3$. Dans ce cas, le mode interne et le mode externe se propagent dans deux directions différentes [115, 106, 102, 103].

L'Hamiltonien des états de bord s'écrit cette fois sous la forme suivante :

$$H = 2\pi\hbar \sum_I \frac{v_I}{\nu_I} \sum_{q>0} \rho_{I,q}\rho_{I,-q} \ , \tag{2.27}$$

où l'indice $I = 1, 2$ fait référence au premier ou au deuxième mode de l'état de bord, qui sont les modes externe et interne avec $\sum_I \nu_I = \nu$. Les densités obéissent à la relation de commutation $[\rho_{I,q}, \rho_{J,q'}] = (\nu_I/2\pi)q\delta_{I,J}\delta_{q,q'}$. D'une manière similaire au cas d'un fluide de Hall de type Laughlin, on peut écrire l'opérateur fermionique

$$\Psi_I(x) \propto e^{i\frac{1}{\nu_I}\varphi_I(x)} \ , \tag{2.28}$$

où le champ bosonique φ_I satisfait à la relation caractérisant un liquide de Luttinger $\rho_I(x) = (1/2\pi)\partial_x\varphi_I(x)$. Cette description n'est pas complète. En effet, le fait que les deux modes soient chargés implique l'existence d'une interaction coulombienne entre eux. La mise en évidence de cette interaction se fait en introduisant deux matrices : une matrice diagonale U et une matrice anti-diagonale V. Ceci nous permet de renormaliser la densité

$$\tilde{\rho_I} = \frac{1}{\sqrt{|\nu_I|}}\rho_I \ . \tag{2.29}$$

La relation de commutation pour ces opérateurs devient $[\tilde{\rho}_{I,q}, \tilde{\rho}_{J,q'}] = (sgn(\nu_I)/2\pi)q\delta_{I,J}\delta_{q,q'}$. Ainsi nous pouvons récrire l'Hamiltonien sous la forme suivante :

$$H = 2\pi\hbar\Big(\sum_I u_{II} \sum_{q>0} \rho_{\tilde{I},q}\rho_{\tilde{I},-q} + \sum_{I\neq J} v_{IJ} \sum_{q>0} \rho_{\tilde{I},q}\rho_{\tilde{J},-q}\Big) \ , \tag{2.30}$$

avec les nouvelles matrices u et v d'éléments $u_{II} = U_{II}|\nu_I|$ et $v_{IJ} = V_{IJ}\sqrt{|\nu_I\nu_J|}$ respectivement. Afin de mieux percevoir l'interaction entre les modes et les échanges de quasi-particules, il faut diagonaliser l'Hamiltonien en introduisant des transformations sur la densité $\tilde{\rho}$, tout en conservant ses propriétés qui permettent d'écrire la fonction d'onde fermionique. Les transformations sont les suivantes :

$$\rho_{\hat{1},q} = \cos(\sqrt{\eta}\theta)\tilde{\rho}_{1,q} + \frac{1}{\sqrt{\eta}}\sin(\sqrt{\eta}\theta)\tilde{\rho}_{2,q} \ , \tag{2.31}$$

$$\rho_{\hat{2},q} = -\sqrt{\eta}\sin(\sqrt{\eta}\theta)\tilde{\rho}_{1,q} + \cos(\sqrt{\eta}\theta)\tilde{\rho}_{2,q} \ , \tag{2.32}$$

avec $\eta = sgn(\nu_1\nu_2)$ et $\tan(2\sqrt{\eta}\theta) = 2\sqrt{|\eta|}v_{12}/(u_{11} - \eta u_{22})$. Ces nouvelles densités obéissent à la même relation de commutation

$$[\hat{\rho}_{I,q}, \hat{\rho}_{J,q'}] = \frac{sgn(\nu_I)}{2\pi} q\delta_{I,J}\delta_{q,q'} \ . \tag{2.33}$$

L'Hamiltonien dans ce cas prend la forme suivante :

$$H = 2\pi\hbar \sum_I sgn(\nu_I) V_I \sum_{q>0} \hat{\rho}_{I,q}\hat{\rho}_{I,-q} \ . \tag{2.34}$$

Le transfert de quasi-particules entre les modes interne et externe peut être maintenant exprimé par un opérateur qui met en jeu les champs fermioniques donnés par la relation (2.28). Si on considère par exemple un état de bord à deux modes, le transfert de quasi-particules du mode interne vers le mode externe est donné par l'opérateur suivant :

$$T_{\nu_1} = [\Psi_1 \Psi_2^\dagger]^{\nu_1} \ . \tag{2.35}$$

Intéressons nous maintenant aux fluides de Hall incompressibles complexes multi-modes. L'étude de ce cas basée sur une extension des opérateurs bosoniques φ définis dans le cas bi-modes à des opérateur bosoniques chiraux généralisés, a été introduite par Wen [102]. L'action pour les états de bord dans ce cas est dérivée dans le cadre du formalisme de la matrice K [103, 104]

$$S = -\frac{\hbar}{2\pi} \int dtdxdy(\frac{1}{2} K_{IJ} a_{I\mu} \partial_\nu a_{J\lambda} \epsilon^{\nu\nu\lambda} + e t_I A_\mu \partial_\nu a_{I\lambda} \epsilon^{\mu\nu\lambda}) \ , \tag{2.36}$$

où $a_{I\mu}$ est un champ de gauge, A_μ est un potentiel externe, t_I est le vecteur de charge à n composantes et K est une matrice $n \times n$ à éléments entiers. La matrice K contient les informations sur la topologie du système de n modes correspondants aux n types de quasi-particules. Le facteur de remplissage dans ce cas s'écrit sous la forme suivante :

$$\nu = t_I^J [K^{-1}]_{IJ} t_J \ . \tag{2.37}$$

Dans le cas où les excitations obéissent à une statistique abélienne, les éléments du vecteur de charge seront égaux à l'unité et le facteur de remplissage prend la forme suivante :

$$\nu = \sum_{IJ} [K^{-1}]_{IJ} \ . \tag{2.38}$$

Dans le cas particulier des séries de Jain, le facteur de remplissage $\nu = n/(np+1)$ peut être représenté sous forme de fraction continue à $n-1$ niveaux [116]. Un élément de matrice K est alors donné par la relation suivante :

$$K_{IJ} = \delta_{IJ} + p \ . \tag{2.39}$$

Notons que n ici représente le nombre de mode. Si nous prenons l'exemple de $\nu = 2/5$, nous avons deux modes et la matrice K alors est 2×2 et elle vaut :

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \ . \tag{2.40}$$

Les signes des valeurs propres de la matrice K nous informe sur les directions de propagation relatives des excitations dans chaque mode.

Le Hamiltonien d'un tel système décrit la dynamique à basse énergie des n modes composant l'état de bord, il est donnée par l'expression suivante :

$$H = \frac{\hbar}{4\pi} \int dx W_{IJ} \partial_x \varphi_I \partial_x \varphi_J \ , \tag{2.41}$$

où $W_{IJ} = U_{II}\delta_{IJ} + V_{IJ}$ est un élément de la matrice W symétrique et à valeurs propres positives. Le champ bosonique φ_I est lié à la densité par la relation suivante :

$$\rho_I = \frac{1}{2\pi} \partial_x \varphi_I \ , \tag{2.42}$$

cette densité satisfait à la relation de commutation de type Kac-Moody $[\rho_{I,q}, \rho_{J,q'}] = [K^{-1}]_{IJ} \frac{q}{2\pi} \delta_{q,q'}$. L'opérateur fermionique dans ce cas s'écrit sous la forme suivante :

$$\Psi_I \propto e^{i\varphi_I l_I} \ , \tag{2.43}$$

où l_I est une composante du vecteur l, qui est un vecteur à n composantes entières et arbitraires. Notons enfin qu'une diagonalisation de ce système est possible en introduisant une transformation aux matrices K et W.

2.2.3 Caractéristique courant-tension et transmission électronique entre deux états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux travaux théoriques qui concernent la transmission électronique entre deux états de bord d'un fluide de Hall quantique. Ces travaux sont liés aux expériences de mesure de courant tunnel ou de conductance différentielle dans un fluide de Hall, sur lequel on applique une tension V au niveau des points de contact placés symétriquement de part et d'autre d'une barrière tunnel. Cette barrière peut être réalisée en appliquant une constriction pour rapprocher deux états de bord. D'un point de vue théorique, on peut schématiser cette barrière par une impureté localisée. Afin de simplifier les choses, cette impureté est placée en $x = 0$ et considérée ponctuelle. En général, une barrière tunnel possède une largeur donnée, cette largeur est prise en compte dans l'amplitude tunnel. L'objectif est donc de calculer le courant ainsi que la conductance différentielle dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. La densité d'états donnée dans l'équation (2.26) impose que la loi régissant la caractéristique courant-tension doit être une loi de puissance. L'exposant de cette loi doit être le même que celui de la densité d'états. Dans ce qui suit nous allons exposer un certain nombre de résultats théoriques obtenus pour les différents types de fluides de Hall quantiques.

Transmission électronique entre deux états de bord à un mode

Dans le cas le plus simple, c'est-à-dire un fluide de Hall quantique de type Laughlin pour un facteur de remplissage $\nu = 1/m$ où m est un entier impair, l'exposant de la loi de puissance que l'on note α est donné par la résistance de Hall :

$$\alpha = \frac{\rho_{xy}}{(h/e^2)} \ . \tag{2.44}$$

L'exposant dans un tel système est exactement $\alpha = m$ et il est universel. La prédiction théorique a été faite dans le cas où $\nu = 1/3$ et donc $\alpha = 3$ dans le cas où les interactions

électron-électron ne sont pas prises en compte [104]. Considérons donc un système de type Laughlin avec un Hamiltonien tunnel qui traduit la transmission électronique entre deux états de bord donné par la relation suivante :

$$H_{tun} = \Gamma \psi_2^\dagger(0)\psi_1(0) + H.c \ , \tag{2.45}$$

où Γ est l'amplitude tunnel. L'expression de la réponse à une tension appliquée V en terme de courant tunnel est donnée par Nozières à température nulle dans le cadre d'une théorie perturbative [42] :

$$\begin{aligned} I_{tun}(t) &= e\Gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Theta(t) (e^{i\int_t^{t'} eV(t'')dt''} \langle [A(t), A^\dagger(0)] \rangle \\ &\quad - e^{-i\int_t^{t'} eV(t'')dt''} \langle [A(t)A^\dagger(t), A(0)] \rangle) \ , \end{aligned} \tag{2.46}$$

avec $A(t) = c_1(0,t)c_2^\dagger(0,t)$ où c_1 et c_2 sont les opérateurs d'électrons sur les bords 1 et 2 respectivement. Le calcul donne le résultat suivant :

$$I_{tun}(V) \propto -2e\Gamma^2 V^\alpha \ . \tag{2.47}$$

A température finie on distingue deux régimes. Le premier régime correspond à la limite $eV \ll k_B T$. Dans ce régime le courant est linéaire en V et possède une loi de puissance en T :

$$I_{tun} \propto (eV)T^{\alpha-1} \ . \tag{2.48}$$

Le second régime correspond à la limite $eV \gg k_B T$. Dans ce cas le courant exhibe une loi de puissance en V aussi :

$$I_{tun} \propto T^{\alpha-1}(eV)^\alpha \ . \tag{2.49}$$

La conductance différentielle est définie comme la dérivée du courant par rapport à la tension $G_{diff} = dI_{tun}/dV$, elle vaut dans la limite $eV \ll k_B T$:

$$G_{diff} \propto T^{\alpha-1} \ , \tag{2.50}$$

et dans la limite $eV \gg k_B T$ elle vaut :

$$G_{diff} \propto e\alpha T^{\alpha-2}(eV)^{\alpha-1} \ . \tag{2.51}$$

Une expression alternative a été proposée par Kane et Fisher faisant intervenir la variable sans dimensions $x = eV/k_B T$ [117, 118]. L'étude est basée sur une analyse par le groupe de renormalisation pour la rétrodiffusion par une impureté des électrons issus des deux branches droite et gauche d'un liquide de Luttinger. La variable x permet de retrouver les limites citées ci-dessus. En effet, pour $x \ll 1$ le courant est linéaire en V et pour $x \gg 1$ le courant est en loi de puissance en V et on retrouve donc le même comportement que celui des équations (2.48) et (2.49) respectivement. La valeur $x = 1$ représente la frontière entre les deux limites. Le courant est alors donnée par la relation suivante :

$$I \propto \left[\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)\right]^2 x + x^\alpha \ , \tag{2.52}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

Dans les travaux de Fendley, Ludwig et Saleur, une étude complète a été réalisée dans le cas de diffusion par une impureté entre deux états de bord à un mode pour un

facteur de remplissage $1/4 < \nu < 1$ [119, 120]. De plus, ils ont montré l'existence d'une dualité entre le régime de faible transmission et le régime de forte transmission. Cette dualité correspond à la diffusion d'électrons dans la limite faible et la transmission de quasi-particules dans la limite forte. Un tel problème est équivalent à un modèle du type Sine-Gordon [121] qui est lié en fait à un problème de Kondo qui est soluble par Bethe ansatz. Par conséquent, la conductance différentielle varie exclusivement en fonction des deux variables sans dimension eV/k_BT et T_K/T, où T_K est la température Kondo. Dans la limite $eV, k_BT \ll T_K$ l'expression du courant est donnée par la relation suivante :

$$I_{tun} = \nu \frac{e^2}{h} \frac{T_K}{2\left[\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\right]^2} \left(\frac{2\pi T}{T_K}\right)^{\alpha} \left(\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]^2 x + x^{\alpha}\right) . \tag{2.53}$$

Dans le cas particulier où $\nu = 1/2$, la solution du problème est exacte et le courant est donné par la relation suivante [120] :

$$I_{tun} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega^2}{\omega^2 + (T_K/2)^2} [f(\omega - \omega_0) - f(\omega)] , \tag{2.54}$$

où $\omega_0 = eV/2$ et f est la fonction de distribution de Fermi-Dirac. Le courant dans cette expression s'exprime comme l'intégrale d'un coefficient de transmission dépendant de l'énergie. Dans la référence [122] on retrouve une expression similaire pour un cas où on étudie un conducteur à un canal en série avec un quantum de résistance. A température nulle, le courant vaut [120, 123] :

$$I_{tun} = \frac{e^2 V}{2h} - \frac{eT_K}{h} \arctan\left(\frac{eV}{2T_K}\right) . \tag{2.55}$$

Dans d'autres travaux les auteurs se sont intéressés à l'étude de la diffusion entre un métal et un état de bord d'un fluide quantique [124, 125], et aussi à l'étude de diffusions multiples par des impuretés entre deux états de bord à un mode.

Cas des séries de Jain

Pour n modes de ce fluide de Hall quantique incompressible, il y a un mode qui correspond à un mode de charge et $n-1$ modes neutres. Le facteur de remplissage $\nu = n/(np+1)$ où p est un entier pair. Pour $p > 0$, tous les modes se propagent dans la même direction. La conductance est donnée dans ce cas par l'expression suivante [106] :

$$G(T) \propto T^{\alpha} , \tag{2.56}$$

avec l'exposant $\alpha = 2p$. Dans le cas où $p < 0$, les $n-1$ modes neutres se propagent dans une direction opposée à la direction du mode de charge. Les $n-1$ modes obéissent à la symétrie $SU(n)$, l'existence de la diffusion par une impureté brise cette symétrie. Afin de restituer cette symétrie et ainsi équilibrer les n modes, Kane et Fisher [106] ont pris en considération le désordre résiduel. En effet, ils rajoutent un terme supplémentaire dans l'action et séparent les termes d'interaction contenus dans la matrice W en deux matrices, l'une ne contient que les contributions diagonales et l'autre ne contient que les contributions non-diagonales. L'introduction du désordre résiduel permet ainsi de récuperer la symétrie des n modes $U(1) \times SU(n)$ et de garder le mode de charge et les modes neutres

découplés. Le désordre conduit aussi à une relation de la conductance pour $p < 0$ avec un exposant universel :

$$G(T) \propto T^{2|p|-\frac{4}{n}} \ , \tag{2.57}$$

l'exposant est alors $\alpha = 2|p| - \frac{4}{n}$ [106].

Cas d'un fluide de Hall compressible

L'étude théorique des fluides de Hall compressibles est basée sur le modèle des fermions composites [26, 110]. Dans l'hypothèse de l'interaction électron-électron à courte portée $U(r) = U\delta(r)$, l'interaction des fermions composites est donnée par la relation suivante :

$$U_{cf}(r) = \Big(U + \frac{1}{\kappa_0}\delta(r)\Big) \ , \tag{2.58}$$

où $\kappa_0 = 2\pi m^*/\hbar^2$ est la compressibilité des fermions composites libres avec m^* la masse effective. L'action dans ce modèle est définie sur la base de l'action effective des fermions composites. La diffusion par l'impureté s'appuie sur la fonction de Green à temps imaginaire des fermions composites écrite sous sa forme semi-classique [26] :

$$G^{cf}(\tau, a_\mu) = e^{i\phi[a_\mu]}G^0(\tau) \ , \tag{2.59}$$

où la phase ϕ vaut :

$$\phi[a_\mu] = \int a^\mu(r,t) j^{cf}_\mu(r,t) d^2r dt \ , \tag{2.60}$$

avec a_μ un champ de gauge de faibles fluctuations et j^{cf}_μ est le courant décrivant la diffusion de la densité des fermions composites libres. La fonction $G^0(\tau)$ dans l'équation (2.59) est la fonction de Green des fermions composites en absence de fluctuations du champ de gauge. En assumant que les fermions composites sont des quasi-particules bien définies $G^0(\tau) \sim \tau^{-1}$, ce qui conduit à une fonction de Green des fermions composites $G^{cf}(\tau) \sim \tau^\alpha$. La fonction de Green des fermions composites est importante dans la définition du courant. Celui-ci est donné par l'expression suivante [30] :

$$I(V) \sim Im\left[\int_0^\infty G^{cf}(\tau)\frac{e^{ieV\tau}}{\tau}d\tau\right] \ . \tag{2.61}$$

Dans la limite $eV \gg k_BT$, nous retrouvons la loi de puissance $I(V) \propto V^\alpha$. Dans la limite opposée, $eV \ll k_BT$, le courant devient linéaire en fonction de la tension $I(V) \propto VT^{\alpha-1}$. Ces résultats ont une forme semblables à ceux d'un fluide du type Laughlin. La différence est dans l'exposant. En effet, dans le cas d'un fluide de Hall compressible l'exposant α vaut [26] :

$$\alpha = 1 + \frac{2e^2}{\pi h}[\theta_H\rho_{xy} - \theta_H^{(0)}\rho_{xy}^{(0)}] + \frac{e^2\rho_{xx}}{\pi h}\ln\left(\frac{\kappa_0\sigma_{xx}}{\kappa\sigma_{xx}^{(0)}}\right) \ , \tag{2.62}$$

avec $\theta_H = \tan^{-1}(\rho_{xy}/\rho_{xx})$ qui est l'angle de Hall, $\theta_H^{(0)}$ est l'angle de Hall pour des fermions composites libres, σ_{xx} est la conductivité dissipative et κ est la compressibilité des fermions composites. La résistivité de Hall des fermions composites est donnée par la relation suivante :

$$\rho_{xy} = \frac{ph}{e^2} + \rho_{xy}^{(0)} \ , \tag{2.63}$$

avec $\rho_{xy}^{(0)} = h/ne^2$, nous avons aussi $\rho_{xx} = \rho_{xx}^{(0)}$. Le paramètre p ici représente le nombre de quanta de flux acquis par les fermions composites, il correspond à $p = 2$ pour $1/3 < \nu < 1$

et à $p = 4$ pour $1/5 < \nu < 1/3$. Dans la figure 2.4, l'exposant α est tracé en fonction de la résistivité de Hall ρ_{xy} pour les deux valeurs que peut prendre p, on remarque que si $\rho_{xx} = 0$ alors α est universel. Dans le cas où ρ_{xx} est non nulle, l'exposant peut être supérieur ou inférieur à la valeur universelle. Si on prend $\theta_H = \theta_H^{(0)} = \pi/2$, $\rho_{xy} = (p + 1/n)h/e^2$ et $\rho_{xx} = \rho_{xx}^{(0)} = 0$ on retrouve une valeur de l'exposant prédite dans le cadre d'un fluide de Hall incompressible avec un facteur de remplissage correspondant à des séries de Jain avec $\alpha = 1 + |p + 1/n| - 1/|n|$, ce qui est en accord avec l'exposant calculé dans la référence [106].

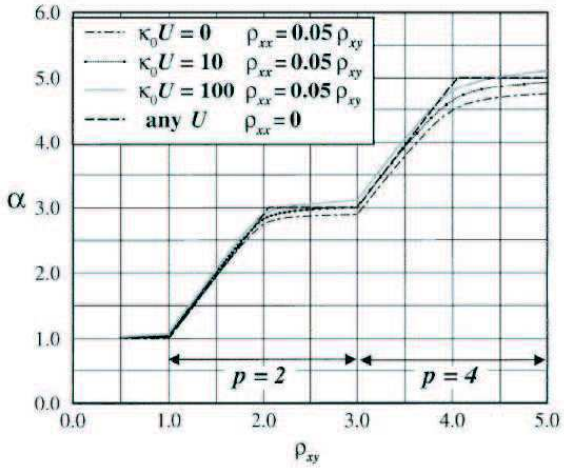

FIGURE 2.4 – L'exposant α en fonction de la résistivité de Hall pour différentes valeurs de la résistivité dissipative ρ_{xx} et du paramètre d'interaction $\kappa_0 U$. Le nombre de quanta de flux prend ses deux valeurs 2 et 4. De Shytov et *coll.*[26].

2.3 Refermionisation

La procédure de refermionisation est une méthode d'analyse des champs bosonisés issus du Hamiltonien d'un liquide de Luttinger. Cette méthode consiste à introduire de nouveaux champs fermioniques qui s'écrivent en fonction des champs bosoniques. La construction est purement mathématique, et elle n'est applicable que si le paramètre d'interaction K égal à 1/2. En effet, c'est la seule valeur qui permet d'écrire la transformation des champs bosoniques initiaux en nouveaux champs bosoniques chiraux. Ces champs bosoniques résultants permettent de définir les nouveaux fermions qui possèdent un coefficient de transmission qui dépend de l'énergie, et permettent de résoudre un certain nombre de problème d'une manière exacte. Dans le chapitre 3 et le chapitre 4, nous exploiterons cette méthode afin de calculer les différentes grandeurs liées au transport dans un liquide de Luttinger, telles que le courant, le bruit et l'admittance. Dans ce paragraphe, nous allons exposer la procédure de refermionisation suivant deux méthodes. La première consiste à résoudre les équations du mouvement pour les nouveaux fermions, et la seconde consiste à diagonaliser l'Hamiltonien des nouveaux fermions en introduisant les fermions de Majorana [126].

Afin de mieux illustrer la procédure de refermionisation, nous allons considérer un système unidimensionnel avec une impureté localisée décrit par un liquide de Luttinger.

2.3.1 Refermionisation par résolution des équations du mouvement

L'approche par la résolution des équations du mouvement a été utilisée dans la référence [19] pour calculer les corrélations de courant dans les états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Elle a été utilisée également dans la référence [127] pour calculer le courant dans un fil quantique de longueur finie L connecté à deux réservoirs. D'autres auteurs tels que Kane et Fisher [128] ont exposé cette méthode. Il faut signaler que les notations et les conventions changent parfois d'un auteur à un autre.
Dans cette méthode, on s'appuie sur une expression bosonisée du Hamiltonien d'un liquide de Luttinger en présence d'une impureté. Cette présence est traduite par un terme de rétrodiffusion dans l'Hamiltonien. Pour alléger les notations, nous n'allons considérer que le secteur de charge. Ainsi, l'Hamiltonien du système s'écrit :

$$H = H_L^0 + H_R^0 + \Gamma_B F_L^\dagger F_R e^{-i\omega_0 t} e^{i\sqrt{K}[\varphi_R(0,t)+\varphi_L(0,t)]} + h.c. \ , \tag{2.64}$$

où Γ_B est l'amplitude de rétrodiffusion due à l'impureté située en $x = 0$, et $\omega_0 = eV/\hbar$. Les Hamiltoniens H_L^0 et H_R^0 correspondent aux Hamiltoniens de liquide de Luttinger en interaction pour les champs se déplaçant vers la gauche et vers la droite du fil quantique respectivement. Introduisons maintenant les nouveaux champs chiraux $\phi_{p=\pm}$, qui sont définis comme :

$$\phi_\pm(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_R(x,t) \mp \varphi_L(x,t)] \ . \tag{2.65}$$

Ces champs obéissent à la relation de commutation suivante :

$$[\phi_p(x), \phi_{p'}(x')] = -i\pi\delta_{p,p'} sgn(x - x') \ . \tag{2.66}$$

Nous pouvons aussi définir la densité électronique en fonction de ces nouveaux champs

$$\rho_\pm(x) = \frac{1}{2\pi}\partial_x \phi_\pm(x) \ . \tag{2.67}$$

La transformation (2.65) est à la base de la procédure de refermionisation. En effet, pour un paramètre d'interaction $K = 1/2$ nous pouvons remplacer directement cette transformation dans l'expression du Hamiltonien donné par l'équation (2.64). En fonction des nouveaux champs bosoniques, l'Hamiltonien prend la forme suivante :

$$H = H_+^0 + H_-^0 + \Gamma_B F_+ e^{-i\omega_0 t} e^{i\phi_+(0,t)} + h.c. \ , \tag{2.68}$$

où les Hamiltoniens H_+^0 et H_-^0 sont des Hamiltoniens de liquide de Luttinger s'exprimant en fonction des nouveaux champs $\phi_\pm$, F_+ est un facteur de Klein. La remarque la plus importante ici est la fait que l'Hamiltonien se décompose en deux parties complètement indépendantes. La première partie est H_-^0 qui est sans rétrodiffusion, et la seconde partie H_+ qui s'exprime en fonction du champ ϕ_+ qui subit la rétrodiffusion. Nous pouvons maintenant définir les nouveaux champs fermioniques :

$$\psi_+(x) = \frac{F_+}{\sqrt{2\pi a}} e^{i\phi_+(x)} \ . \tag{2.69}$$

La présence du facteur de Klein F_+ justifie le caractère fermionique de la fonction ψ_+. En réalité, d'après la référence [129] $F_+ = C + C^\dagger$ où l'opérateur C est un fermion auxiliaire. Ces fermions vérifient la relation d'anticommutation $\{C, C^\dagger\} = 1$. Une telle expression peut être construite en manipulant les modes zéro des champs bosoniques $\phi_\pm$ [130], et on peut alors identifier le facteur de Klein F_+ à l'opérateur de comptage fermionique utilisé pour basculer des conditions aux limites périodiques aux conditions aux limites anti-périodiques dans les théories des champs conformes. Ces nouveaux champs fermionique obéissent aux relations d'anti-commutation suivantes :

$$\{\psi_+(x), \psi_+^\dagger(x')\} = \delta(x - x') \ , \tag{2.70}$$

$$\{\psi_+(x), F_+\} = 0 \ . \tag{2.71}$$

Une fois la fonction d'onde définie, on écrit la partie H_+ du Hamiltonien en fonction de ψ_+ :

$$H_+ = \int dx \psi_+^\dagger(x)\Big(-i\partial_x - \omega_0\Big)\psi_+(x) + \int dx \sqrt{2\pi}\delta(x)[\Gamma_B \psi_+(x) F_+ + \Gamma_B^* F_+ \psi_+^\dagger(x)] \ . \tag{2.72}$$

Les équations du mouvement peuvent être obtenues en calculant les différents commutateurs entre les opérateurs ψ_+, $\psi_+^\dagger$ et F_+ et l'Hamiltonien H_+ [19]. L'équation du mouvement à résoudre est définie pour toutes positions $x \neq 0$ pour un champ ψ_+ en mouvement d'énergie décalée par ω_0 :

$$(i\partial_t + i\partial_x + \omega_0)\psi_+ = 0 \ . \tag{2.73}$$

En $x = 0$ la présence de l'impureté impose une discontinuité. Du fait des conditions aux limites nous définissons le champ fermionique $\psi_+(0) = (1/2)[\psi_+(0^+) + \psi_+(0^-)]$. La solution de l'équation (2.73) est donnée par :

$$\psi_+(x,t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} A_\omega e^{i(\omega+\omega_0)x/v} e^{-i\omega t} \ , \ \textit{pour } x < 0 \ , \tag{2.74}$$

$$\psi_+(x,t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} B_\omega e^{i(\omega+\omega_0)x/v} e^{-i\omega t} \ , \ \textit{pour } x > 0 \ , \tag{2.75}$$

avec A_ω (et $A_\omega^\dagger$) l'opérateur d'annihilation et (de création) pour les nouveaux fermions dans la région des $x < 0$ obéissant à la relation d'anti-commutation $\{A_{\omega_1}, A_{\omega_2}^\dagger\} = \delta_{\omega_1,\omega_2}$. L'opérateur B_ω (et $B_\omega^\dagger$) correspond à l'opérateur d'annihilation (et de création) des nouveaux fermions dans la région des $x > 0$. L'opérateur B_ω s'écrit en fonction des opérateurs A_ω et $A_\omega^\dagger$:

$$B_\omega = \frac{1}{2}\left[t(\omega)A_\omega + r(\omega)A_{-\omega}^\dagger\right] \ , \tag{2.76}$$

avec l'amplitude de transmission :

$$t(\omega) = \frac{i\omega}{i\omega - 4\pi\left|\Gamma_B\right|^2} \ , \tag{2.77}$$

et l'amplitude de réflexion :

$$r(\omega) = \frac{4\pi\left|\Gamma_B\right|^2}{i\omega - 4\pi\left|\Gamma_B\right|^2} \ . \tag{2.78}$$

Cette écriture traduit le fait qu'un nouveau fermion qui atteint la position $x = 0$ subit une rétrodiffusion qui le divise en une particule d'énergie ω et un trou d'énergie $-\omega$ [19]. Avec de telles définitions, nous pouvons conclure que les nouveaux fermions possèdent un coefficient de transmission $\mathcal{T}(\omega) = t(\omega)t^*(\omega)$ qui dépend de l'énergie.

2.3.2 Refermionisation par diagonalisation du Hamiltonien

L'objectif de cette méthode est d'écrire l'Hamiltonien refermionisé en terme quadratique, en diagonalisant les nouveaux fermions sur une base de fermions de type Majorana. Dans la référence [20], cette méthode a été exposée puis utilisée pour calculer la densité d'états d'un fil quantique avec une impureté. Dans un autre travail Furusaki [131] a utilisé cette méthode pour calculer la densité d'états dans un liquide de Tomonaga-Luttinger. Egger et Gogolin ont aussi utilisé cette approche dans la référence [132] afin de décrire les propriétés de transport dans un nanotube de carbone.

Le point de départ est l'expression du Hamiltonien $H = H_+ + H_-$, les deux parties de cet Hamiltonien sont complètement découplées. Rappelons que $H_- \approx H_-^0$ (le symbole $\approx$ traduit le fait que l'on a négligé la partie diffusion H_F dans l'Hamiltonien) est une fonction des champs ϕ_-, les champs qui ne subissent pas de rétrodiffusion. La diagonalisation de cette partie de l'Hamiltonien se fait en introduisant la transformation unitaire $U_- = e^{ic_-\Phi_-}$ avec $c_- = (\Gamma_F/2\pi)(2K)^{1/2}$ où Γ_F traduit la diffusion. Nous obtenons alors l'Hamiltonien $H'_- = U_- H_- U_-^{-1}$:

$$H_- \approx v \int dx (\partial_x \phi_-(x))^2 \ . \tag{2.79}$$

Il n'est pas nécessaire ici d'introduire de nouveaux fermions, car ils ne subissent pas de rétrodiffusion. Par conséquent, aucun changement ne s'opère sur eux.

La seconde partie du Hamiltonien est la partie rétrodiffusée $H_+ = H_+^0 + H_B$ contenant un terme du type liquide de Luttigner et un terme de rétrodiffusion. La diagonalisation de cette partie se fait en trois étapes :

1) La première étape consiste à récrire l'Hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation des nouveaux fermions. Pour un fil de longueur L nous introduisons l'opérateur suivant :

$$c_k = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(2\pi L)^{1/2}} e^{ikx} \psi_+(x) \ , \tag{2.80}$$

où $\psi_+(x)$ est donnée par l'équation (2.69). Il est possible de récrire maintenant l'Hamiltonien en fonction de ces nouveaux opérateurs :

$$H_+ = \sum_k \left[\varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \sqrt{\Delta_L \Gamma_B} \sum_k \left(c_k^\dagger e^{i\theta_B} + c_k^{e\,-i\theta_B} \right) \right] \ , \tag{2.81}$$

où $\Delta_L = 2\pi v/L$ et θ_B est une phase.

2) La deuxième étape est d'absorber cette phase afin d'obtenir un Hamiltonien quadratique. Cela se fait en introduisant la transformation unitaire $H'_+ = U_+ H_+ U_+^{-1}$ avec $U_+ = e^{i\frac{\pi}{2}\hat{N}^2 - \theta_B \hat{N}}$ où $\hat{N}$ représente l'opérateur de nombre de particules. L'application de cette transformation sur un facteur de Klein multiplié par une phase donne naissance à un fermion de type Majorana d'après la relation suivante :

$$U_+ (F_+^\dagger e^{i\theta_B}) U_+^{-1} = F_+^\dagger (i\sqrt{2}\alpha_d) \ . \tag{2.82}$$

Le fermion de Majorana α_d possède les propriétés d'un fermion de Dirac en matière de relation d'anticommutation. L'application de cette transformation sur l'Hamiltonien H_+ nous donne alors le résultat suivant :

$$H'_+ = \sum_k \left[\varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \sqrt{\Delta_L \Gamma_B} (c_k^\dagger + c_k)(i\sqrt{2}\alpha_d) \right] \ . \tag{2.83}$$

3) La troisième et dernière étape consiste à écrire l'Hamiltonien exclusivement en fonction de fermions de Majorana sous forme quadratique. Donc pour un fil de longueur L, il faut récrire l'opérateur c_k en fonction de fermions de Majorana d'après la relation :

$$c_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_k(t) + i\beta_k(t)) \ , \tag{2.84}$$

où les opérateurs α_k et β_k sont deux fermions de Majorana. Grâce à cette écriture l'Hamiltonien se met sous la forme :

$$H'_+ = \sum_{\varepsilon>0} \varepsilon(\alpha_k^\dagger \alpha_k - 1/2) + \sum_{k>0} \varepsilon_k(\beta_k^\dagger \beta_k + 1/2) \ . \tag{2.85}$$

Cette méthode permet de calculer la densité d'états dans une limite asymptotique.

2.4 Expériences importantes sur les liquides de Luttinger chiraux

Dans cette section nous allons présenter quelques expériences importantes qui traitent de la manifestation des caractéristiques d'un liquide de Luttinger chiral dans les propriétés de bord d'un fluide de Hall quantique fractionnaire. Trois approches ont été entreprises par différents auteurs : la première approche est liée à la mesure du courant tunnel lors de la diffusion électronique d'un état de bord à un autre à travers une impureté. Ces expériences permettent de déduire par la mesure la valeur de l'exposant α. La deuxième approche est l'étude du transport à travers des "anti-dots", ceux-ci sont encerclés par des états de bord qui servent à créer une rétrodiffusion. Le but de ces expériences était de déterminer la charge fractionnaire en analysant l'effet Aharonov-Bohm. La troisième approche consiste à mesurer directement le bruit de grenaille dans le régime tunnel des quasi-particules entre deux modes d'états de bord se propageant dans des directions opposées, rapprochés par une constriction.

Une des propriétés importantes d'un liquide de Luttinger, est le comportement à basses énergies lorsque l'on rajoute ou enlève un électron au voisinage de l'énergie de Fermi. En effet, la catastrophe d'orthogonalité entre l'état fondamental de N électrons et le nouvel état des $N \pm 1$ électrons impose une annulation du courant tunnel par une loi de puissance quand l'énergie est proche de l'énergie de Fermi $E - E_F \longrightarrow 0$. Des expériences de diffusion électronique par une impureté sont alors adéquates. Afin de réaliser ce type d'expériences dans lesquelles l'objectif est de mesurer le courant tunnel, un certain nombre de conditions doivent être satisfaites [133] : (i) la non-linéarité observée dans la caractéristique courant-tension doit provenir de la densité d'état et non pas de l'énergie résiduelle qui provient des éléments de la matrice de diffusion à travers la barrière tunnel. (ii) La mesure doit être précise afin de distinguer le comportement du courant en loi de puissance d'autres comportements. (iii) Afin d'établir un bon comportement non-linéaire avec un bon rang dynamique il serait désirable d'avoir un exposant $\alpha \sim 1.5 - 4$.

Au milieu des années 1990, des expériences de diffusion électronique entre des états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire ont été réalisées. Des auteurs comme Milliken et *coll.* [134] ont étudié la diffusion entre deux fluides de Hall quantique de type Laughlin avec $\nu = 1/3$ à travers une barrière de potentiel crée par une grille électrostatique. Une loi de puissance a été trouvée dans la conductance ainsi qu'une anomalie dans la dépendance en température. Le fait de ne pas avoir un bon rang de température,

n'a pas permis d'avoir des mesures précises. Ainsi, la distinction entre le comportement en loi de puissance et d'autres comportements fonctionnels n'était pas possible. Les caractéristiques courant-tension ainsi obtenues n'avaient pas trop de sens. De telles difficultés avaient pour origine la géométrie de l'échantillon. L'utilisation d'une nouvelle géométrie réalisée à l'aide de la technique CEO "Cleaved-Edge Overgrowth" [135, 138], a permis la réalisation d'expériences qui ont donné lieu à des résultats satisfaisants. Dans les travaux de Chang et *coll.* [136], plusieurs expériences de diffusion tunnel entre un échantillon de $GaAs$ dopé $n+$ et un état de bord de plusieurs types de fluides de Hall fractionnaires incompressibles ont été réalisées. Dans la cas où le fluide de Hall est le plus robuste, c'est à dire $\nu = 1/3$ les résultats sont très proches des prédictions théoriques. Comme le montre la figure 2.5, dans laquelle la caractéristique courant-tension est tracée en échelle logarithmique, pour deux échantillons mis dans deux champs magnétiques différents $13,4T$ et $10,8T$ respectivement, on remarque l'existence de deux régimes : un régime où le comportement du courant est linéaire en V correspondant à des faibles valeurs de la tension en comparaison avec la température, et un régime où le courant exhibe une loi de puissance en $I \propto V^{\alpha}$ correspondant à une tension élevée par rapport à la température. La limite entre les deux régimes correspond à $6k_BT/e \sim 12\mu V$. La valeur de l'exposant est $\alpha = 2,7 \pm 0.06$ et $\alpha = 2,65 \pm 0.06$ respectivement. Ce résultat est proches des prédictions théoriques qui est $\alpha = 3$ obtenu dans le cadre d'un modèle de liquide de Luttinger chiral [102, 117]. Les résultats obtenus pour la conductance différentielle sont aussi satisfaisants. Pour d'autres facteurs de remplissage, par exemple $\nu = 1$, le courant prend une forme quasi-linéaire en V avec un exposant $\alpha = 1,2$ et $\alpha = 1,14$ respectivement. L'état de bord dans ce cas se comporte comme un liquide de Fermi chiral, ce qui représente l'un des rares exemples d'un système unidimensionnel fortement corrélé qui se comporte comme un liquide de Fermi et non pas comme un liquide de Luttinger. Dans le cas d'un facteur de remplissage $\nu = 2/3$, la loi de puissance est non-universelle avec un exposant non-universel $1,2 \leq \alpha \leq 1,42$.

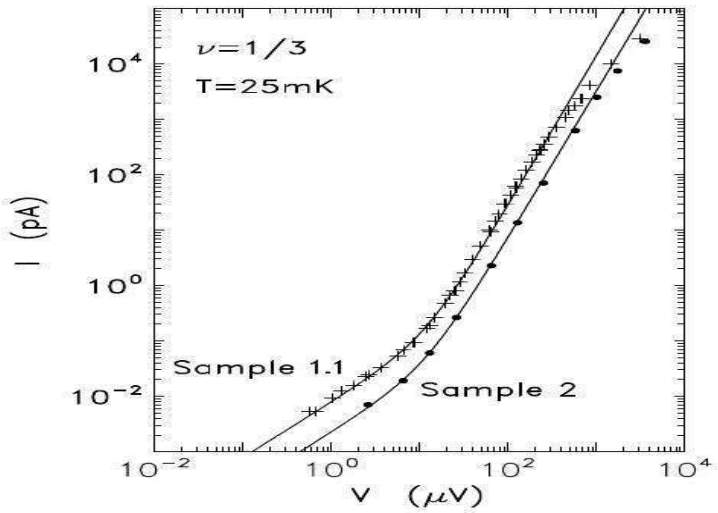

FIGURE 2.5 – Courant mesuré en fonction de la tension appliquée pour un facteur de remplissage $\nu = 1/3$ en échelle $log - log$. Les croix désignent l'échantillon avec un champ magnétique $B = 13,4T$, les points désignent l'échantillon avec $B = 10,8T$. Les lignes solides représentent un "fit" par la formule universelle donnée par l'équation (2.52) pour $\alpha = 2,7$ et $\alpha = 2,65$. D'après Chang et *coll.* [136].

Concernant les fluides de Hall quantiques compressibles, nous avons vu dans la section

2.2.3 que le modèle des fermions composites sert à les décrire. Dans les travaux de Chang et *coll.* [107], la caractéristique courant-tension pour un échantillon de fermions composites au facteur de remplissage $\nu = 1/2$ révèle un comportement comparable au comportement d'un liquide de Luttinger chiral avec un exposant α proche de 2. Dans d'autres travaux, des auteurs tels que Chang et *coll.* [137] et Grayson *coll.* [138] se sont intéressés au comportement du courant pour un facteur ν quelconque englobant à la fois les fluides quantiques compressibles et incompressibles. Pour cela, ils ont effectué une caractérisation du comportement en loi de puissance pour un continuum du facteur de remplissage. Ils ont remarqué qu'il existe un continuum dans le comportement en loi de puissance et que l'exposant est donné approximativement par $1/\nu$ en traçant la courbe de variation de α en fonction de $1/\nu$.

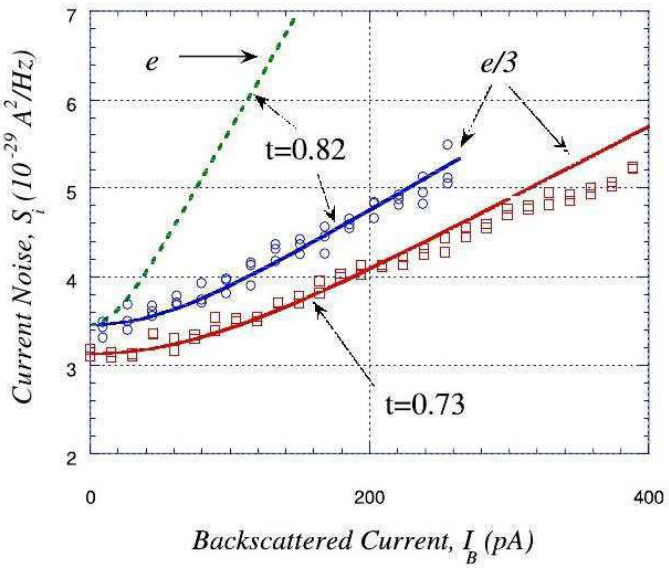

FIGURE 2.6 – Bruit de grenaille en fonction du courant de rétrodiffusion pour un facteur de remplissage $\nu = 1/3$, pour deux valeurs du coefficient de transmission. Les lignes solides correspondent à une charge de $e/3$. La ligne en pointillé correspond à une charge égale à e. D'après de Picciotto et *coll.* [68].

Il existe d'autres manifestations des caractéristiques d'un liquide de Luttinger dans les propriétés des états de bord dans les fluides de Hall quantiques fractionnaires. Parmi ces propriétés, la détermination de la charge fractionnaire des quasi-particules. Dans les travaux de Goldman et Su [95], l'introduction d'un antidot entre deux états de bord se propageant dans des directions opposées a permis, en combinant la période Aharonov-Bohm dans la conductance tunnel et la période de la tension de modulation, de déterminer la charge fractionnaire pour des facteurs de remplissage $\nu = 1/3, 2/5$. Dans d'autres expériences, De Picciotto et *coll.* [68] et Seminadayar *coll.* [67], la charge fractionnaire a été déterminée directement par la mesure du bruit de grenaille. Dans la référence [67], un système électronique bidimensionnel a été utilisé en présence d'un champ magnétique perpendiculaire intense. La mesure du bruit de grenaille associée à la diffusion pour un facteur de remplissage $\nu = 1/3$ permet de déterminer directement la charge des quasi-particules. Dans la figure 2.6 le bruit est tracé en fonction du courant de rétrodiffusion $I_B = (e^2/3h)V - I$ où I est le courant total. La relation entre le bruit et le courant de

rétrodiffusion est donnée par la relation suivante [67] :

$$S_I = 2\left(\frac{e}{3} I_B coth\Big(\frac{e^* V}{2k_B T}\Big) - 2k_B T \frac{dI_B}{dV}\right) + 4k_B T \frac{dI}{dV} \ . \tag{2.86}$$

La deuxième partie du membre de droite s'identifie au bruit de Johnson-Nyquist au point zéro. Dans la figure 2.6, cette expression est tracée pour une charge e et une charge $e^* = e/3$, pour cette dernière valeur de la charge l'expression coïncide avec les points expérimentaux. Des mesures de charge fractionnaire de $e/5$ ont été établies dans d'autres expériences [139, 140].

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé l'effet Hall quantique fractionnaire. Ce phénomène est caractérisé par un facteur de remplissage fractionnaire. Dans notre travail nous nous sommes intéressés aux états de bord, qui sont considérés comme des systèmes unidimensionnels. Ces états de bord sont décrits par la théorie des liquides de Luttinger chiraux que nous avons exposé dans la section 2.2. Les porteurs de charge dans les états de bord sont ainsi décrits par des fonctions d'onde bosonisées. Nous nous sommes pas restreints à la description du fluide de Hall de type Laughlin, nous avons aussi décrit des fluides de Hall incompressibles plus complexes.

Nous avons discuté également de la diffusion d'électrons entre un état de bord et un autre en montrant l'importance de ce phénomène pour la caractérisation de l'interaction entre états de bord. La formule du courant de rétrodiffusion diffère suivant le fluide du Hall étudié, ainsi que l'expression de la conductance. L'exploration des différents régimes de tension et de température permet également de discuter les résultats obtenus.

Dans la section 2.3, nous avons exposé la méthode de refermionisation. Cette méthode que nous utiliserons dans le chapitre 3 pour calculer les fluctuations de courant et l'admittance dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire, et que nous utiliserons afin de calculer la bruit non symétrisé à fréquence finie et la conductance pour un conducteur cohérent couplé avec une résistance. Deux schémas équivalents expliquant cette méthode ont été évoqués. L'objectif étant de transformer les fonctions bosoniques et de définir des nouveaux fermions dont le coefficient de transmission dépend de l'énergie.

Dans une dernière section, nous avons résumé quelques expériences réalisées sur des fluide de Hall fractionnaire. Certaines avaient pour objectif d'établir la caractéristique courant-tension, d'autres étaient des expériences de mesure de bruit. L'objectif est de mettre en évidence la physique qui régit les systèmes dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Parmi les paramètres importants caractérisant cette physique, il y a l'exposant universel apparaissant dans les lois de puissance de la densité d'états. Notons aussi la charge fractionnaire déterminée dans les expériences de mesure de bruit.

Chapitre 3

Fluctuations de courant et admittance dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire

L'admittance quantique et les corrélations de courant sont deux grandeurs qui donnent des informations sur le transport dans les systèmes mésoscopiques. De nombreux études théoriques et expérimentales ont été effectuées sur les corrélations de courant. Ce n'est pas le cas de l'admittance qui reste peu étudiée dans les systèmes corrélés. Dans ce chapitre nous allons exposer quelques travaux théoriques et expérimentaux liés à l'admittance quantique. Ensuite nous exposerons notre travail lié au calcul des corrélations de courant et de l'admittance dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Nous avons choisi un facteur de remplissage $\nu = 1/2$ qui permet d'utiliser la procédure de refermionisation. Nous avons ainsi obtenu des résultats exacts valables pour tous les régimes de température, de tension et pour toutes les fréquences. Notons que la valeur $\nu = 1/2$ ne correspond pas à une situation observée expérimentalement. Néanmoins, il est important de faire ce genre d'études pour comprendre l'effet des interactions.

L'objectif principal de notre travail est d'établir un lien direct entre corrélations de courant S et admittance Y pour ce système. En sachant que ses deux grandeurs vérifient la relation : $2\hbar\omega Re[Y(\omega)] = S(-\omega) - S(\omega)$.
Dans la section 3.1, nous rappellerons brièvement les principaux résultats théoriques et expérimentaux relatifs à l'admittance. Dans la section 3.2, nous présentons le système que nous avons étudié. Nous exposons ensuite dans la section 3.3 les expressions que nous avons obtenu des corrélations de courant et de l'admittance. Toutes ces expressions dépendent de l'amplitude de transmission. Ce qui constitue une motivation supplémentaire pour notre travail. Nous présentons le résultat principal dans la section 3.4, et nous le discuterons dans différentes limites dans la section 3.5.

3.1 Admittance quantique

3.1.1 Description théorique

Au début des années 90, Büttiker et *coll.* ont étudié la conductance dynamique pour les petits conducteurs en s'appuyant sur le formalisme de la matrice de diffusion S [12]. Pour un conducteur relié à plusieurs terminaux, il existe une matrice d'admittance $g_{\alpha\beta}$ qui relie le courant et la tension aux points de contact entre le conducteur et les terminaux. Un des objectifs du travail est de voir la réponse du système face à des perturbations électriques et magnétiques. L'élément de la matrice admittance s'écrit comme le rapport du courant moyen I_α en réponse à un potentiel externe U_β :

$$g_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{\langle \delta I_\alpha(\omega)\rangle}{\delta U_\beta(\omega)} = \frac{e^2}{h}\int dE\, Tr\Big[\mathbf{1}_\alpha \delta_{\alpha\beta} - s^*_{\alpha\beta}(E) s_{\alpha\beta}(E+\hbar\omega)\Big]\frac{f(E)-f(E+\hbar\omega)}{\hbar\omega}\ , \quad (3.1)$$

où s est un élément de la matrice de diffusion. Cette équation obéit à la condition $g_{\alpha\beta}(\omega) = g^*_{\alpha\beta}(-\omega)$. La partie réelle est liée aux corrélations de courant à l'équilibre au moyen de l'énergie ϵ d'un oscillateur harmonique :

$$s_{\alpha\beta}(\omega) = 2\epsilon(\omega, k_B T) Re[g_{\alpha\beta}(\omega)]\ . \quad (3.2)$$

Une autre expression de l'admittance (notée ici $g(\omega)$ a été obtenue en tenant compte de l'effet d'un potentiel self-consistant sur un système en interaction :

$$g^I_{\alpha\beta}(\omega) = g_{\alpha\beta}(\omega) - \left(\frac{(i/\omega C)\sum_\gamma g_{\gamma\alpha}(\omega)\sum_\delta g_{\delta\beta}(\omega)}{1+(i/\omega C)\sum_{\gamma\delta} g_{\gamma\delta}(\omega)}\right)\ , \quad (3.3)$$

où C est la capacité du conducteur. Si ce conducteur est relié à un seul terminal, l'équation (3.3) se réduit à :

$$g^I = \frac{g}{1+(i/\omega C)g}\ , \quad (3.4)$$

qui se réduit à l'expression suivante dans le cas des faibles fréquences :

$$g^I = \frac{-i\omega C}{1+(\tau_{RC}/\tau)}\ , \quad (3.5)$$

où τ_{RC} est le temps de réponse du circuit RC. L'une des prédictions importante de la référence [12] est la valeur de la résistance de relaxation. En fait, elle est égale à la moitié du quantum de résistance $R_q = h/(2e^2)$. L'admittance permet donc d'avoir des informations sur la résistance de relaxation. Rappelons que dans cette thèse nous nous intéressons qu'à l'admittance.

Dans le papier de Hamamoto et *coll.* [141], la réponse dynamique d'un point quantique couplé par une capacité à une grille et relié à un réservoir a été étudiée. Le réservoir est décrit par la physique de Luttinger, et le système est considéré en présence d'interactions électroniques fortes. Les auteurs ont utilisé une combinaison d'outils comme la théorie de la perturbation et le groupe de renormalisation pour étudier ce problème. L'admittance est donnée par la relation suivante :

$$G(i\omega_n) = \frac{e^2}{h}\frac{|\omega_n|}{\pi}\int_0^\beta d\tau \langle\phi(\tau)\phi(0)\rangle e^{i\omega_n t}\ . \quad (3.6)$$

La conductance dynamique est obtenue par continuation analytique de l'admittance $G(\omega) = G(i\omega_n \to \omega + i\delta)$. L'admittance, la capacité du conducteur C_μ et la résistance de relaxation

R_q sont développé en série de la tension V. La résistance de relaxation reste universelle malgré la présence d'un puissant blocage de Coulomb. Néanmoins, une transition de phase quantique vers un régime incohérent est observée pour $K < 1/2$. Cette transition de phase peut être testée en couplant le point quantique à un état de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. La résistance de relaxation prend alors la valeur $R_q = h/(2e^2)(1/K)$.

D'autres travaux ont été menés sur d'autres systèmes. A citer par exemple la référence [142], où l'admittance quantique est calculée pour un double point quantique. Dans la référence [143], l'admittance est calculée pour un circuit RC, décrit dans le modèle d'Anderson dans les symétries $SU(2)$ et $SU(4)$. Citons enfin la référence [144], où le développement en séries de l'admittance quantique pour un système mésoscopique est traité. Nous utilisons la définition l'admittance dans le cas du régime de l'effet Hall quantique fractionnaire donné dans cette référence.

3.1.2 Description expérimentale

Dans cette partie nous donnerons quelques résultats expérimentaux de mesures de l'admittance quantique dans différents systèmes. Les expériences pionnières ont été réalisées par Gabelli et *coll.*. Dans la référence [13], le transport dynamique d'un conducteur cohérent est étudié. Le système en question est un circuit RC quantique. La capacité est formée d'une électrode métallique en or, au-dessus d'une seconde électrode composé d'un gaz d'électron bidimensionnel de taille inférieure au micron. La résistance est faite par un point de contact quantique, connecté à un large réservoir. La capacité totale du système C_μ a deux contributions : la capacité géométrique notée C et la capacité quantique C_q. La résistance est contrôlée par une tension de grille. L'objectif de l'expérience est de mesurer la conductance du circuit RC. Dans la figure 3.1, la partie réelle et la partie imaginaire de l'admittance mesurée sont tracées en fonction de la tension de grille pour une fréquence $\omega/(2\pi) = 1.2GHz$. La partie imaginaire oscille plus que la partie réelle. Ces oscillations ont pour origine la modulation de la densité d'états du point quantique. Notons enfin que ces expériences confirment la prédiction théorique de la référence [12] sur la valeur de la résistance de relaxation. En effet, elle est indépendante du coefficient de transmission, contrairement à la capacité qui oscille lorsque la transmission diminue. Dans un autre papier [14], d'autres expériences réalisées sur le même système ont montré que les lois de Kirchhoff d'additions d'impédances dans un circuit RC quantique sont violées. La valeur de la résistance n'est plus donnée par la formule de Landauer (voir chapitre 1), mais donnée par la résistance de relaxation $R_q = h/2e^2$.

La violation des lois classiques des circuits électriques résulte du caractère quantique du transport dans les systèmes mésoscopiques. Dans la même perspective, Gabelli et *coll.* ont réalisé une expérience de mesure de l'admittance d'un circuit RL quantique chiral [15]. Le système se compose d'une large barre de Hall avec N états de bord jouant le rôle de l'inductance L, en série avec une résistance variable R composée d'un point de contact quantique, couplé à une grille. Le couplage entre les états de bord est considéré comme faible. Dans la figure 3.2, la partie réelle de l'admittance $Re[G]$ et la partie imaginaire de l'admittance $Im[G]$ sont tracées en fonction de la tension du point de contact quantique V_{QPC} dans le cas où $N = 14$. La contribution $Im[G] < 0$ représente la contribution inductive. Le deux courbes exhibent un profil en marches régulières. L'amplitude de l'inductance pour chaque marche est de l'ordre de $1\mu H$. Les deux contributions de l'admittance ont une phase indépendante de la transmission, conformément à la relation suivante :

$$G(\omega) = G_0\Big(1 - i\omega\frac{h}{e^2}\frac{c_{\mu g}}{N}\Big) \ , \tag{3.7}$$

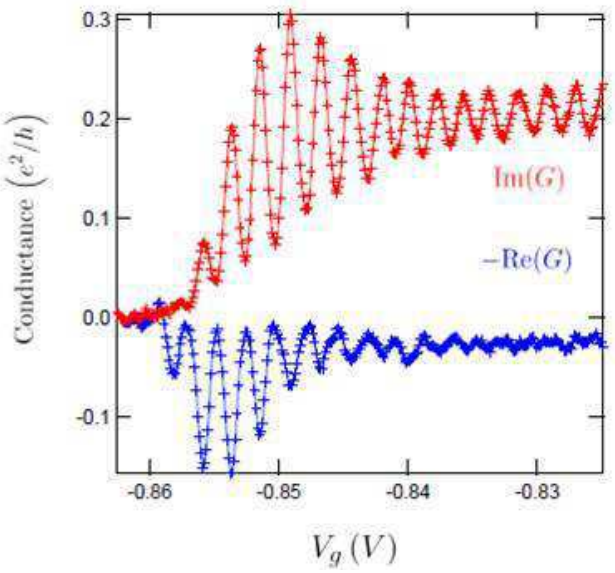

FIGURE 3.1 – Partie réelle de l'admittance $Re[G]$ et partie imaginaire de l'admittance $Im[G]$ en fonction de la tension de grilleV_g, mesurées à la fréquence $\omega/2\pi = 1.2GHz$. D'après Gabelli et *coll.* [13].

où G_0 est la conductance différentielle de Landauer et $c_{\mu g}$ est la capacité électrochimique entre un état de bord et son coté liée à la grille (side gate). Pour un couplage fort avec la grille, les mesures sont bien décrites par la théorie de la diffusion. Notons enfin que des quantités importante telles que les analogues mésoscopiques des temps caractéristiques d'un circuit RC et d'un circuit RL deviennent accessibles pour des fréquence dans la gamme du GHz.

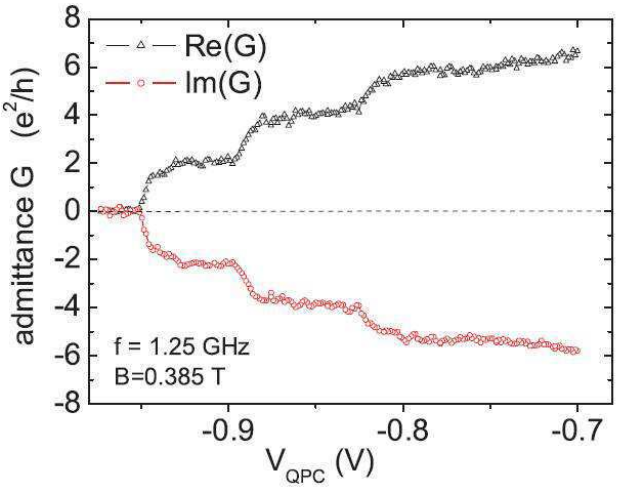

FIGURE 3.2 – Partie réelle et partie imaginaire de l'admittance en fonction de la tension V_{QPC} à température $T = 50mK$. D'après Gabelli et *coll.* [14].

Il existe d'autres expériences de mesure de l'admittance quantiques pour d'autres systèmes. Hashisaka et *coll.* ont mesuré l'admittance en haute fréquence pour un point contact dans le régime de l'effet Hall quantique [145]. Dans la référence [146], la mesure

de l'admittance pour un nanotube de carbone est réalisée. Basset et *coll.* ont mesuré l'admittance à haute fréquence pour une jonction supraconducteur/isolant/supraconducteur [147]. Enfin, dans la référence [148], l'admittance dynamique est étudiée pour un point quantique couplé à un gaz d'électrons bidimensionnel.

3.2 Description du système et modèle

Nous considérons un système dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire avec un facteur de remplissage $\nu = 1/2$. Les quasi-particules possèdent une charge $e^* = e/2$. Dans ce système, deux états de bord droit (R) et gauche (L) se propagent dans deux directions opposées. Les deux états de bord interagissent à travers une constriction réalisée par un grille de tension V_G (voir figure 3.3.a). L'interaction se fait par la diffusion des électrons d'un état de bord à un autre. Ce système est équivalent à un liquide de Luttinger chiral de paramètre d'interaction $K = 1/2$, avec une impureté ponctuelle que l'on suppose localisée en $x = 0$ jouant le rôle d'un centre diffuseur. Le système peut alors être schématisé par une géométrie à quatre branches, deux branches entrantes indexées par $1, 2$ et deux branches sortantes indexées par $3, 4$ (voir figure 3.3.b). L'Hamiltonien du système

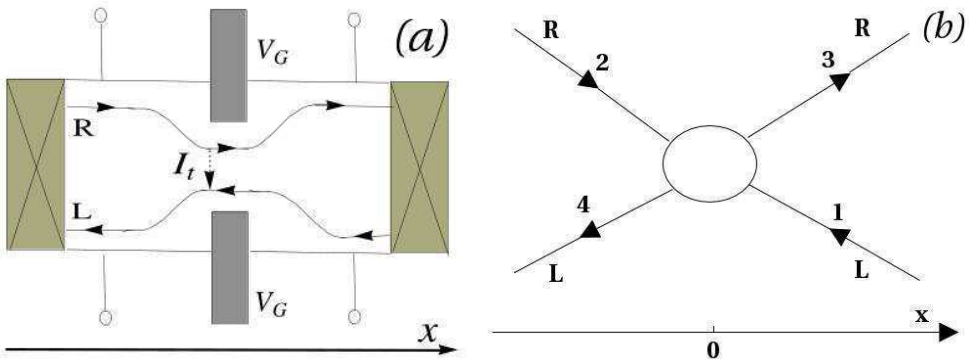

FIGURE 3.3 – (a) Schéma du système représentant deux états de bord se propageant dans deux directions opposées. La constriction permet le passage d'un courant tunnel entre les deux états de bord. (b) Schéma de la géométrie à quatre terminaux, on distingue les deux branches entrantes $(1, 2)$ et les deux branches sortantes $(3, 4)$.

est celui d'un liquide de Luttinger chiral à qui on ajoute un terme de rétrodiffusion :

$$H = H_L^0 + H_R^0 + H_B \ , \tag{3.8}$$

où H_L^0 H_R^0 sont les Hamiltonien des deux états de bords. L'Hamiltonien de rétrodiffusion est donné par l'expression suivante :

$$H_B = \Gamma_B e^{-i\omega_0 t} \psi_L^\dagger(0)\psi_R(0) + \Gamma_B^* e^{+i\omega_0 t} \psi_R^\dagger(0)\psi_L(0) \ , \tag{3.9}$$

où Γ_B est l'amplitude de rétrodiffusion, et ψ_R et ψ_L sont les champs fermioniques chiraux. Après bosonisation et refermionisation (voir chapitre 2), l'Hamiltonien se décompose en deux parties complètement découplées :

$$H = H_+ + H_- \ , \tag{3.10}$$

où H_- est l'Hamiltonien des nouveaux fermions ψ_- qui ne subissent pas de rétro-diffusion, et H_+ est un Hamiltonien correspondant aux nouveaux fermions ψ_+ qui subissent la

rétrodiffusion, et qui est donnée par l'équation (2.72). Les expressions des nouveaux fermions sont données par les équations (2.74) et (2.75). Grâce à ces nouveaux fermions, nous pouvons définir les densités électroniques des fermions ψ_+ et ψ_- :

$$\rho_\pm(x) =: \psi_\pm^\dagger(x)\psi_\pm(x) : , \tag{3.11}$$

où :: représente l'ordre normal. Le courant total, ou le courant de Hall dans ce cas, est égal à la densité électronique prise dans l'ordre normal :

$$I(x) = e\rho(x) = ev_F\psi^\dagger(x)\psi(x) - ev_F \langle 0| \psi^\dagger(x)\psi(x) |0\rangle \ , \tag{3.12}$$

où $|0\rangle$ est l'état du vide dans l'espace de Fock après refermionisation. Cet état correspond à la référence pour laquelle la tension appliquée V est nulle et il n'existe pas d'impureté susceptible de diffuser les charges. Dans cette géométrie à quatre terminaux, nous disposons de deux régions : une région des $x > 0$ et une région des $x < 0$. Ce qui permet d'avoir deux courant chiraux I_L et I_R correspondants aux charges qui se déplacent vers la gauche et vers la droite respectivement. Dans chaque région le courant total est conservé quelque soit la position x, il est donné par la relation suivante [127] :

$$I(x) = ev_F(\rho_R(x) - \rho_L(x)) \ , \tag{3.13}$$

où ρ_R et ρ_L sont les densités chirales qui s'écrivent en fonction des nouvelles densités ρ_+ et $\rho-$:

$$\rho_R(x) = \frac{1}{2}(\rho_+(x) + \rho_-(x)) \ , \tag{3.14}$$

et

$$\rho_L(x) = \frac{1}{2}(\rho_+(-x) - \rho_-(-x)) \ . \tag{3.15}$$

Après calcul (voir annexe A.1 pour le détail), on retrouve l'expression du courant moyen total en fonction de la tension à température finie :

$$I(V) = \frac{e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{T}(\omega) \left[f\left(\hbar\omega - eV/2\right) - f\left(\hbar\omega + eV/2\right)\right] \ , \tag{3.16}$$

où $\mathcal{T}(\omega) = 4\hbar^2\omega^2/(4\hbar^2\omega^2 + \Gamma_B^2)$ est le coefficient de transmission des nouveaux fermions. Cette expression est la même que celle obtenue dans la référence [122] où on étudie un conducteur couplé à un quantum de résistance (voir chapitre 4), et elle correspond à la formulation de Landauer du courant. A température nulle, l'expression devient :

$$I(V) = \frac{G_q\Gamma_B}{2}\left[\frac{V}{\Gamma_B} - \arctan\left(\frac{V}{\Gamma_B}\right)\right] \ , \tag{3.17}$$

où G_q le quantum de conductance.

Intéressons nous maintenant au courant de rétrodiffusion, celui-ci est défini par la relation suivante :

$$I_B(t) = ev_F(\rho_R(x) - \rho_R(-x)) \ . \tag{3.18}$$

Après calcul, on obtient la variation du courant moyen de rétrodiffusion en fonction de la tension V à température finie :

$$I_B(V) = \frac{e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega(\mathcal{T}(\omega) - 1) \left[f\left(\hbar\omega - eV/2\right) - f\left(\hbar\omega + eV/2\right)\right] \ . \tag{3.19}$$

Notons que ce résultat peut être retrouvé à partir de l'équation (3.16) en appliquant la conservation de courant total. A température nulle, le courant de rétrodiffusion s'écrit :

$$I_B(V) = \frac{G_q\Gamma_B}{2}\arctan\left(\frac{V}{\Gamma_B}\right) \ . \tag{3.20}$$

3.3 Expression des corrélations de courant et de l'admittance en terme d'amplitude de transmission

3.3.1 Auto-corrélations et corrélations croisées

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux auto-corrélations et aux corrélations croisées non-symétrisées à fréquence finie entre les différentes branches entrantes et sortantes du système, ainsi qu'au bruit non-symétrisé à fréquence finie et au bruit de rétrodiffusion. D'une manière générale, le bruit non-symétrisé à fréquence finie calculé par rapport à un courant donné I est donné par la transformée de Fourier suivante :

$$S(\omega, V) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \delta\hat{I}(0)\delta\hat{I}(t)\rangle \ , \tag{3.21}$$

où $\delta\hat{I}(t) = \hat{I}(t) - \langle\hat{I}\rangle$ est le corrélateur de l'opérateur courant. L'ensemble de ces corrélateurs s'écrivent en fonction des quatre contributions C_1, C_2, C_3 et C_4 calculées dans l'annexe A.2. Ces corrélateurs sont des intermédiaires de calcul, il ne sont pas mesurables expérimentalement.

Bruit du courant total et bruit de rétrodiffusion

Le bruit non-symétrisé du courant total à fréquence finie à température finie est donné par l'expression $S(V,\omega) = e^2 v_F^2 [C_1 + C_2 + C_3 + C_4]/4$. Après calcul on obtient :

$$\begin{aligned} S(V,\omega) \ = \ & \frac{e^2}{4\pi} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(\Big[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') + |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4 \Big] \\ & \times [1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega \pm eV/2) \\ & + \Big[\mathcal{T}(\omega') - \mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') - |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4 \Big] \\ & \times [1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega \mp eV/2) \Big) \ , \end{aligned} \tag{3.22}$$

où $t(\omega)$ est l'amplitude de rétrodiffusion donnée par l'équation (2.77). On remarque que cette expression diffère de celle obtenue dans la théorie de la diffusion. Le bruit de rétrodiffusion est donné par une expression similaire $S_B(V,\omega) = e^2 v_F^2 [C_1 - C_2 - C_3 + C_4]/4$, après calcul, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} S_B(V,\omega) \ = \ & \frac{e^2}{4\pi} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(\Big[1 + \mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') - [\mathcal{T}(\omega') + \mathcal{T}(\omega+\omega')] \\ & + |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4 \Big] \times [1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega \pm eV/2) \\ & + \Big[\mathcal{T}(\omega') - \mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') - |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4 \Big] \\ & \times [1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega \mp eV/2) \Big) \ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Auto-corrélations

On distingue deux types d'auto-corrélations, les auto-corrélations entre deux branches entrantes $S^{ii(in)} = e^2 v_F^2 [C_1 + C_{free}]/4$ pour lesquelles les nouveaux fermions ψ_+ ne sont

pas encore affectés par l'effet de l'impureté, avec $i = 1, 2$. On a aussi les auto-corrélations entre deux branches sortantes $S^{ii(out)} = e^2 v_F^2 [C_4 + C_{free}]/4$ où les nouveaux fermions ψ_+ sont rétrodiffusés, avec $i = 3, 4$. Le corrélateur C_{free} est celui des fermions ψ_- qui ne voient pas la rétrodiffusion, il est donné par :

$$C_{free} = \frac{1}{2\pi v_F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [1 - f(\hbar\omega' - eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega - eV/2) \ . \tag{3.24}$$

Après calcul, les auto-corrélations entre les deux branches entrantes sont données par la relation suivante :

$$S^{ii(in)}(V, \omega) = \frac{e^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [1 - f(\hbar\omega' - eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega - eV/2) \ . \tag{3.25}$$

L'auto-corrélateur des branches sortantes est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} S^{ii(out)}(V, \omega) \quad = \quad & \frac{e^2}{4\pi} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(\Big[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega + \omega') - [\mathcal{T}(\omega') + \mathcal{T}(\omega + \omega')]/2 \\ & + (1 + |t(\omega') - t(\omega + \omega')|^2)/4 \Big] \times [1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega \pm eV/2) \\ & + \Big[\mathcal{T}(\omega') - \mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega + \omega') - |t(\omega') - t(\omega + \omega')|^2/4 \Big] \\ & \times [1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega \mp eV/2) \Big) \ . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Corrélations croisées

Les corrélations croisées sont calculées par rapport à deux branches distinctes. Elles se divisent en deux types : corrélations croisées entre deux branches de même nature, qui correspondent à deux branches entrantes ou deux branches sortantes. Dans ce cas, il suffit de prendre l'auto-corrélation et multiplier par une phase $e^{i\omega(x-x')}$ ou $e^{i\omega(x'-x)}$qui indique la dépendance de la position des corrélation croisées, du moment que la mesure se fait en deux points distincts. Nous obtenons ainsi l'expression pour les corrélations croisées entre deux branches entrantes :

$$S^{LR(in)}(V, \omega; x, x') = S^{ii(in)} e^{i\omega(x-x')} \ , \tag{3.27}$$

et les corrélations croisées entre deux branches sortantes :

$$S^{LR(out)}(V, \omega; x, x') = S^{ii(out)} e^{i\omega(x'-x)} \ . \tag{3.28}$$

Le second type de corrélations croisées est celui qui relie deux branches de type différent. On distingue alors deux corrélations $S^{ij} = e^2 v_F^2 [C_2 + C_{free}]/4$ et $S^{ji} = e^2 v_F^2 [C_3 + C_{free}]/4$ avec $i = 1, 2$ et $j = 3, 4$. Comme les corrélateurs C_2 et C_3 sont complexes conjugués, alors $S^{ij} = (S^{ji})^*$. La partie réelle de S^{ji} dans la limite $(x - x') \longrightarrow 0$ est donnée par l'expression suivante :

$$\mathrm{Re}[S^{ij}](V, \omega) = \frac{e^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (\mathcal{T}(\omega') + \mathcal{T}(\omega + \omega')) [1 - f(\hbar\omega' - eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega - eV/2) \ , \tag{3.29}$$

et la partie imaginaire vaut dans la même limite :

$$\mathrm{Im}[S^{ij}](V, \omega) = \frac{e^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' |\Gamma|^2 \omega [1 - t^*(\omega') - t(\omega' + \omega)] [1 - f(\hbar\omega' - eV/2)] f(\hbar\omega' + \hbar\omega - eV/2) \ . \tag{3.30}$$

3.3.2 Admittance

Afin de calculer l'admittance $Y(\omega)$ nous considérons une modulation de la tension $V(t) = V_0 + V_\omega \cos(\omega t)$. L'admittance est définie comme la dérivée par rapport à V_ω du premier ordre du développement en harmoniques du courant photo-assisté :

$$Y(\omega) = \frac{\partial I^{(1)}(\omega)}{\nu \partial V_\omega} \ , \tag{3.31}$$

où ν est le facteur de remplissage. L'expression du courant photo-assisté a été dérivée dans la référence [149]. Dans le cas d'une constriction dans un fluide de Hall quantique fractionnaire où le facteur de remplissage est $\nu = 1/2$, en utilisant la procédure de refermionisation l'admittance vaut [144] :

$$Y(\omega) = \frac{e^2}{2h\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' [f(\hbar\omega' + eV_0/2) - f(-\hbar\omega' + eV_0/2)][t(\omega') - t(\omega' - \omega)] \ . \tag{3.32}$$

A température nulle nous pouvons calculer l'intégrale analytiquement. Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$Y_{T=0}(\omega) = \frac{e^2}{4ih} \frac{\Gamma_B}{\hbar\omega} \sum_{\pm} \ln\left(1 + \frac{i\hbar\omega}{\Gamma_B/2 \pm ieV_0/2}\right) \ , \tag{3.33}$$

avec Γ_B l'énergie qui caractérise notre système (ici l'amplitude de rétrodiffusion). Ce résultat est en accord avec celui obtenu par la théorie de la diffusion pour une jonction méta/point quantique/métal [150]. La partie réelle de l'admittance à température nulle est donnée par la relation suivante [144] :

$$\mathrm{Re}[Y_{T=0}(\omega)] = \frac{e^2}{4h} \frac{\Gamma_B}{\hbar\omega} \sum_{\pm} \arctan\left(\frac{\hbar\omega \pm eV_0/2}{\Gamma_B/2}\right) \ . \tag{3.34}$$

Une expression alternative est donnée par $\mathrm{Re}[Y_{T=0}(\omega)] = e\sum_{\pm} I^{dc}(V_0 \pm \hbar\omega/e^*)/(2\hbar\omega)$ [122, 151, 152]. La partie imaginaire de l'admittance est égale à [144] :

$$\mathrm{Im}[Y_{T=0}(\omega)] = \frac{e^2}{8h} \frac{\Gamma_B}{\hbar\omega} \sum_{\pm} \ln\left(\frac{(\Gamma_B/2)^2 + (eV_0/2)^2}{(\Gamma_B/2)^2 + (\hbar\omega \pm eV_0/2)^2}\right) \ . \tag{3.35}$$

Dans la figure 3.4.(a), la partie réelle de l'admittance à température nulle est tracée en fonction de la tension. Les marches sont observées à $eV_0/2 = \pm\hbar\omega$ et disparaissent quand $\hbar\omega_M$ augmente. Dans la figure 3.4.(b), la partie imaginaire de l'admittance est tracée en fonction de la tension. La distance entre les deux pics pour des petites valeurs de $\hbar\omega_M$ est égale à $2\hbar\omega$, ce qui est en accord avec les données expérimentales [147]

3.4 Relations entre les fluctuations du courant et l'admittance

Dans cette section nous allons exposer les expressions des auto-corrélations et des corrélations croisées en fonction de l'admittance. Le fait que l'ensemble de ces grandeurs s'écrit en terme d'amplitude de transmission nous permet d'effectuer ce calcul. Le détail des calculs est exposé dans l'annexe B. Commençons d'abord par écrire une expression

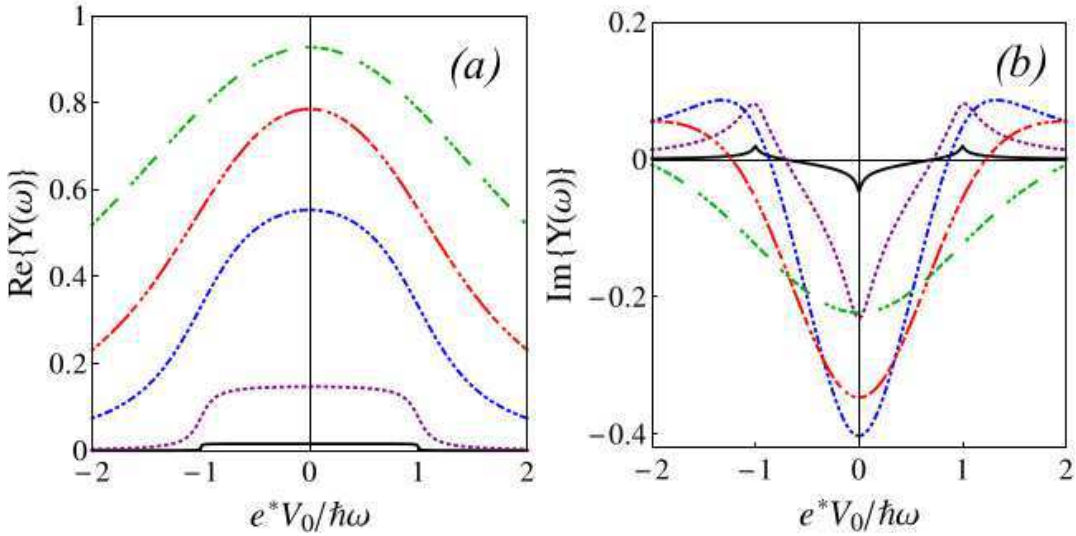

FIGURE 3.4 – (a) : Partie réelle de l'admittance $\mathrm{Re}[Y_{T=0}]$ en unité de $G_q = e^2/h$ en fonction de $e^*V_0/\hbar\omega$ à température nulle. (b) : Partie imaginaire de l'admittance $\mathrm{Im}[Y_{T=0}]$ en unité de $G_q = e^2/h$ en fonction de $e^*V_0/\hbar\omega$ à température nulle, pour $\hbar\omega_M = 0.02e^*V_0$ (ligne continue noire), $\Gamma_B = 0.2e^*V_0$ (ligne en pointillé violet), $\Gamma_B = e^*V_0$ (ligne en pointillé bleu), $\Gamma_B = 2e^*V_0$ (ligne hachurée rouge), $\Gamma_B = 4e^*V_0$ (ligne hachurée verte). D'après Crépieux [144].

générale qui englobe tous les corrélateurs courant-courant entre les deux états de bord chiraux L et R couplés par une constriction :

$$\begin{aligned} S_{ij}(x,x',\omega) &= \frac{e^2 v_{\mathrm{F}}^2 r_i r_j}{4}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau}\Big[\langle\delta\rho_+(r_i x,0)\delta\rho_+(r_j x',\tau)\rangle \\ &\quad + r_i r_j\langle\delta\rho_-(r_i x,0)\delta\rho_-(r_j x',\tau)\rangle\Big] , \end{aligned} \tag{3.36}$$

où $\delta\rho_\pm(x,\tau) = \rho_\pm(x,\tau) - \langle\rho_\pm(x,\tau)\rangle$, et $r_{ij} = \pm$ est la chiralité. Comme le montre la figure 3.5, le nombre total de possibilité est de seize, du moment qu'il y a quatre branches.

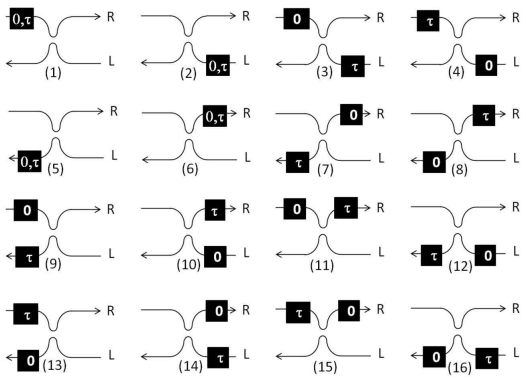

FIGURE 3.5 – Schéma de tous les corrélateurs courant-courant entre les différentes branches. Les diagrammes 1, 2, 4 et 5 représentent les auto-corrélations. Le reste des diagrammes représente les corrélations croisées. Les valeurs 0 et τ indiquent les argument temporels de l'opérateur courant.

3.4.1 Auto-corrélations

Les auto-corrélations correspondent aux indices $i = j$ dans l'équation (3.36). Les auto-corrélateurs sont égaux deux à deux. Pour les branches entrantes, donc avant la constriction, les diagrammes correspondant sont les diagrammes 1 et 2 de la figure 3.5. Le calcul donne :

$$S_1(\omega) = S_2(\omega) = \frac{G_\mathrm{q}\hbar\omega N(\hbar\omega)}{2} \ , \tag{3.37}$$

où $N(\hbar\omega) = [\exp(\hbar\omega/(k_\mathrm{B}T)) - 1]^{-1}$ (correspond à la fonction de distribution de Bose-Einstein à fréquence positive). Les deux autres auto-corrélateurs correspondent aux diagrammes 5 et 6 de la figure 3.5, pour les deux branches sortantes, les charges correspondantes sont alors réfléchies ou transmises à travers la constriction. Après calcul nous avons :

$$S_5(\omega) = S_6(\omega) = S_0(\omega) + \frac{G_\mathrm{q}\hbar\omega N(\hbar\omega)}{2} - \hbar\omega\big[2N(\hbar\omega) + 1\big]\mathrm{Re}\{Y(\omega)\} \ , \tag{3.38}$$

où :

$$\begin{aligned} S_0(\omega) \ &= \ \frac{e}{4}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\tilde{\sigma}=\pm}\Bigg\{N(\tilde{\sigma}\hbar\omega + \sigma eV_\mathrm{dc})\Big[I(\tilde{\sigma}\hbar\omega/\overline{e} + \sigma V_\mathrm{dc}) + I(\sigma V_\mathrm{dc})\Big] \\ &\quad -\frac{e}{4\pi}\Big[N(\tilde{\sigma}\hbar\omega + \sigma eV_\mathrm{dc}) - N(\tilde{\sigma}\hbar\omega)\Big]\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\Omega - \sigma\overline{e}V_\mathrm{dc})\big|t(\Omega + \tilde{\sigma}\omega) + t^*(\Omega)\big|^2\Bigg\} \ , \end{aligned} \tag{3.39}$$

est une fonction paire en fréquence et en tension, et I est le courant donnée par l'équation (3.16).

3.4.2 Corrélations croisées

Pour les corrélations croisées les indices dans l'équation (3.36) sont différents $i \neq j$. La mesure des corrélations croisées se fait en deux points distincts. Nous avons choisi de travailler dans la limite x et x' proches de zéro pour se focaliser sur ce qui se passe au voisinage de la constriction. Les corrélateurs correspondants aux diagrammes 3 et 4 de la figure 3.5 sont nuls :

$$S_3(\omega) = S_4(\omega) = 0 \ . \tag{3.40}$$

Cela s'explique par le fait que les charges n'ont pas encore atteint la constriction, et donc ne sont pas corrélées. Les deux diagrammes 7 et 8 de la figure 3.5 correspondent aux corrélateurs entre les deux branches sortantes :

$$S_7(\omega) = S_0(\omega) - \hbar\omega\big[2N(\hbar\omega) + 1\big]\mathrm{Re}\{Y(\omega)\} \ . \tag{3.41}$$

Les corrélateurs correspondants aux diagrammes 9, 10, 13 et 14 de la figure 3.5 sont reliés entre eux par la relation :

$$S_9(\omega) = S_{10}(\omega) = S_{13}^*(\omega) = S_{14}^*(\omega) \ , \tag{3.42}$$

avec :

$$S_9(\omega) = \hbar\omega N(\hbar\omega)\left[Y(\omega) - \frac{G_\mathrm{q}}{4}\right] \ . \tag{3.43}$$

Le reste des diagrammes sont reliés par :

$$S_{11}(\omega) = S_{12}(\omega) = S_{15}^*(\omega) = S_{16}^*(\omega) \ , \tag{3.44}$$

avec :

$$S_{11}(\omega) = \hbar\omega N(\hbar\omega)\left[Y(\omega) + \frac{G_{\mathrm{q}}}{4}\right] \ . \tag{3.45}$$

Tous les corrélateurs obtenus dépendent exclusivement de la fonction S_0 et de l'admittance quantique Y. Les auto-corrélations tout comme les corrélations croisées sont mesurables expérimentalement. Cela dépend en fait de dispositif de mesure (voir chapitre 1).

3.5 Discussion

Nous avons tracé les différentes courbes relatives aux corrélateurs en excès en fonction de la fréquence qui sont définis par leurs valeurs à tension non nulle à qui on retranche leurs valeurs à tension nulle $\Delta S_n(\omega) = S_n(\omega) - S_n(\omega)|_{V_{\mathrm{dc}}=0}$. Les corrélateurs en excès obtenus sont égaux quatre par quatre. Pour les quatre premiers diagrammes, le corrélateur en excès est nul. En effet, les charges n'ayant pas atteint la constriction ne ressentent pas encore la tension :

$$\Delta S_{n\in[1,4]}(\omega) = 0 \ . \tag{3.46}$$

Le corrélateur en excès pour les diagrammes 5, 6, 7 et 8 de la figure 3.5 dépend de la fonction S_0 et de la partie réelle de l'admittance :

$$\Delta S_{n\in[5,8]}(\omega) = \Delta S_0(\omega) - \hbar\omega\big[2N(\hbar\omega) + 1\big]\mathrm{Re}\{\Delta Y(\omega)\} \ . \tag{3.47}$$

Pour les diagrammes 9, 10, 11 et 12 le corrélateur en excès est :

$$\Delta S_{n\in[9,12]}(\omega) = \hbar\omega N(\hbar\omega)\Delta Y(\omega) \ , \tag{3.48}$$

et enfin pour le reste des diagrammes le corrélateur en excès vaut :

$$\Delta S_{n\in[13,16]}(\omega) = \hbar\omega N(\hbar\omega)\Delta Y^*(\omega) \ . \tag{3.49}$$

Il est possible aussi d'écrire le bruit total en excès ΔS_T ainsi que le bruit de rétrodiffusion en excès ΔS_{B}. En effet, le bruit total et le bruit de rétrodiffusion s'écrivent respectivement $S_{\mathrm{T}} = S_1 + S_5 + S_9 + S_{13}$ et $S_{\mathrm{B}} = S_1 + S_6 - S_{11} - S_{15}$ (D'après la figure 3.3). Le résultat dépend de la fonction S_0 et de la partie réelle de l'admittance :

$$\Delta S_{\mathrm{T}}(\omega) = \Delta S_0(\omega) - \hbar\omega\mathrm{Re}\{\Delta Y(\omega)\} \ , \tag{3.50}$$

$$\Delta S_{\mathrm{B}}(\omega) = \Delta S_T(\omega) - 4\hbar\omega N(\hbar\omega)\mathrm{Re}\{\Delta Y(\omega)\} \ . \tag{3.51}$$

La parité de la fonction S_0 implique que l'asymétrie du bruit total est dû au fait que la partie réelle ΔY est non nulle. Ce qui constitue une vérification de la relation $\Delta S_{\mathrm{T}}(-\omega) - \Delta S_{\mathrm{T}}(\omega) = 2\hbar\omega\mathrm{Re}\{\Delta Y(\omega)\}$ [88, 153].

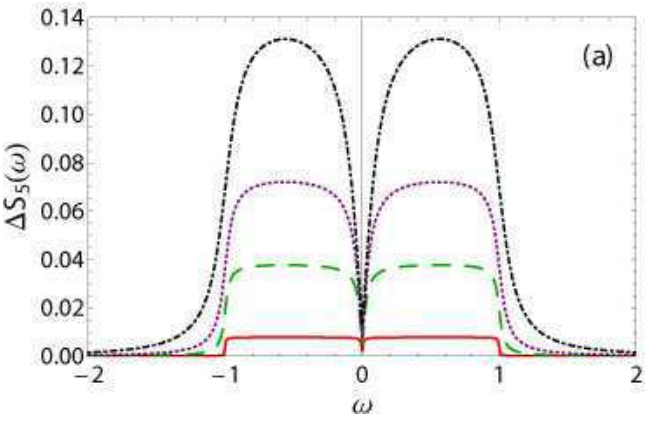

FIGURE 3.6 – Corrélateur en excès $\Delta S_5(\omega)$ en unité de $\bar{e}V_{\rm dc}G_{\rm q}$, en fonction de la fréquence en unité de $\bar{e}V_{\rm dc}/\hbar$ pour différentes valeurs de l'amplitude de rétrodiffusion Γ_B à température $k_{\rm B}T = 0.001\bar{e}V_{\rm dc}$. Les amplitudes de rétrodiffusion sont : $\Gamma_{\rm B} = 0.01\bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne solide rouge), $\Gamma_{\rm B} = 0.05\bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne verte hachurée), $\Gamma_{\rm B} = 0.1\bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne violet en pointillé) et $\Gamma_{\rm B} = 0.2\bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne hachurée et en pointillé noire).

3.5.1 Limite de faible température

Afin de connaitre l'effet de l'amplitude de rétrodiffusion, nous avons tracé les corrélateurs en excès en fonction de la fréquence à température faible. Dans la figure 3.6, nous avons tracé le corrélateur ΔS_5. Le corrélateur tracé est symétrique en fréquence. En effet, les diagrammes 5, 6, 7 et 8 correspondants à ces corrélteurs sont symétriques sous inversion de temps dans la définition : $\langle \delta I_i(x,0)\delta I_j(x',\tau)\rangle = \langle \delta I_i(x,\tau)\delta I_j(x',0)\rangle$, ce qui implique que $\Delta S_5(\omega) = \Delta S_5(-\omega)$. La partie réelle et la partie imaginaire de $\Delta S_9(\omega)$ sont tracées dans les figures 3.7.(a) et figure 3.7.(b) respectivement. Pour ces deux courbes, la contribution pour les fréquences positives est nulle. En comparant les figures 3.6 et 3.7 on remarque que $\Delta S_5(\omega) \approx -\mathrm{Re}\{\Delta S_9(\omega)\}$. On comprend donc que dans ce régime la contribution du terme S_0 est négligeable. On peut justifier ceci par le fait qu'à température nulle nous avons $N(\hbar\omega) = -\Theta(-\omega)$, où Θ est la fonction de Heaviside. Par conséquent, il est possible d'approximer l'ensemble des corrélateurs comme suit :

$$\Delta S_5(\omega) \approx -\hbar|\omega|\mathrm{Re}\{\Delta Y(\omega)\} \ , \tag{3.52}$$

$$\Delta S_9(\omega) \approx -\hbar\omega\Theta(-\omega)\Delta Y(\omega) \ , \tag{3.53}$$

$$\Delta S_{\rm T}(\omega) \approx -\hbar\omega\mathrm{Re}\{\Delta Y(\omega)\} \ , \tag{3.54}$$

$$\Delta S_{\rm B}(\omega) \approx \hbar\omega\big[4\Theta(-\omega) - 1\big]\mathrm{Re}\{\Delta Y(\omega)\} \ . \tag{3.55}$$

Dans le régime de faible température, l'ensemble des corrélateurs en excès est entièrement déterminé par l'admittance en excès. Les singularités observées dans les figures 3.6, 3.7.(a) et 3.7.(b), pour $\hbar\omega = \pm\bar{e}V_{\rm dc}$, sont celle de l'admittance observées dans les figures 3.4.(a) et 3.4.(b).

3.5.2 Limite de faible rétrodiffusion

Cette limite correspond à une amplitude de rétrodiffusion très petite par rapport à la tension appliquée $\Gamma_B \ll eV_{dc}$. Dans les figures 3.8, 3.9.(a) et 3.9.(b) nous avons tracé le corrélateur en excès $\Delta S_5(\omega)$ ainsi que la partie réelle et la partie imaginaire du corrélateur en excès $\Delta S_9(\omega)$ pour différentes valeurs de la température et pour $\Gamma_{\rm B} = 0.01\bar{e}V_{\rm dc}$. Sur la

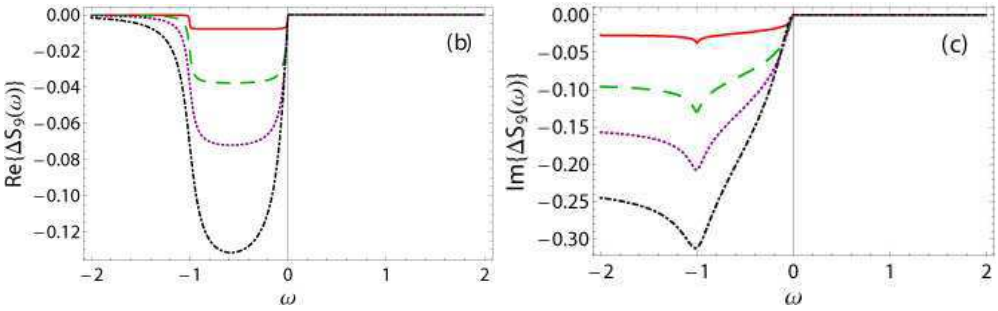

FIGURE 3.7 – (a) : Partie réelle, (b) : partie imaginaire du corrélateur en excès $\Delta S_9(\omega)$ en unité de $\bar{e}V_{\rm dc}G_{\rm q}$, en fonction de la fréquence en unité de $\bar{e}V_{\rm dc}/\hbar$ pour différentes valeurs de l'amplitude de rétrodiffusion Γ_B (les mêmes que sur la figure 3.6) à température $k_{\rm B}T = 0.001\bar{e}V_{\rm dc}$.

figure 3.8, le corrélateur $\Delta S_5(\omega)$ s'annule pour $|\hbar\omega| > \bar{e}V_{\rm dc}$ sous la condition que l'amplitude de rétrodiffusion et la température soient faibles. Concernant les courbes 3.9.(a) et 3.9.(b), nous remarquons que la contribution à fréquence positive est non nulle. En effet, pour $\hbar\omega < -\bar{e}V_{\rm dc}$ les effets de la température et de la rétrodiffusion donnent une contribution non nulle. Ce qui n'est pas le cas pour $\hbar\omega > 0$ où seuls les effets thermiques donnent cette contribution non nulle, qui est assez petite pour la partie imaginaire de $\Delta S_9(\omega)$.

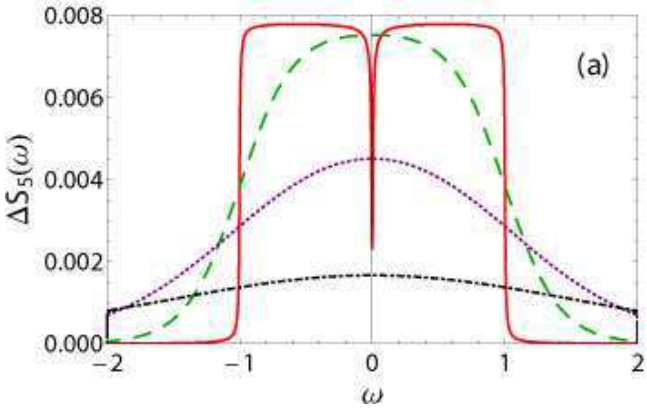

FIGURE 3.8 – Corrélateur en excès $\Delta S_5(\omega)$ en unité de $\bar{e}V_{\rm dc}G_{\rm q}$, en fonction de la fréquence en unité de $\bar{e}V_{\rm dc}/\hbar$ pour une faible amplitude de rétrodiffusion $\Gamma_{\rm B} = 0.01\bar{e}V_{\rm dc}$. Les températures sont : $k_{\rm B}T = 0.001\bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne solide rouge), $k_{\rm B}T = 0.2\bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne verte hachurée), $k_{\rm B}T = 0.5\bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne violet en pointillé) et $k_{\rm B}T = \bar{e}V_{\rm dc}$ (ligne hachurée et en pointillé noire).

3.5.3 Limite de haute température

A l'équilibre ($k_BT \gg \bar{e}V_{\rm dc}$), la fonction S_0 dépend uniquement de la partie réelle de l'admittance :

$$S_0(\omega) \approx \hbar\omega\big[2N(\hbar\omega) + 1\big]{\rm Re}\{Y(\omega)\} \ , \tag{3.56}$$

Ce résultat conduit à une annulation de $\Delta S_9(\omega)$ qui est dû au fait que la contribution majeure dans ce régime est d'origine thermique et ne dépend pas de la tension. Le bruit total et le bruit de rétrodiffusion en excès valent :

$$\Delta S_{\rm T}(\omega) \approx -\Delta S_{\rm B}(\omega) \approx 2\hbar\omega N(\hbar\omega){\rm Re}\{\Delta Y(\omega)\} \ , \tag{3.57}$$

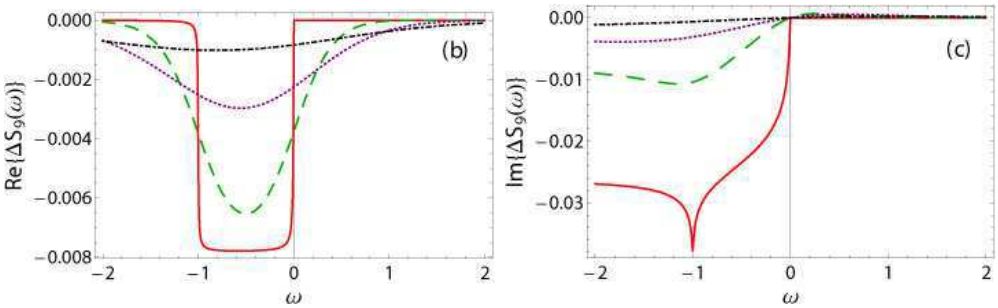

FIGURE 3.9 – (a) : Partie réelle, (b) : partie imaginaire du corrélateur en excès $\Delta S_9(\omega)$ en unité de $\bar{e}V_{\mathrm{dc}}G_{\mathrm{q}}$, en fonction de la fréquence en unité de $\bar{e}V_{\mathrm{dc}}/\hbar$ pour une faible amplitude de rétrodiffusion $\Gamma_{\mathrm{B}} = 0.01\bar{e}V_{\mathrm{dc}}$ et pour différentes températures (les mêmes que celles de la figure 3.8).

en accord avec le théorème de fluctuation-dissipation dans la mesure où la partie réelle de l'admittance correspond à la conductance. Dans ce régime l'ensemble des corrélateurs est déterminé par l'admittance.

Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre quelques résultats théoriques et expérimentaux antérieurs, relatifs à l'admittance quantique. Nous avons vu l'intérêt que porte le calcul ou la mesure de cette grandeur, qui contient des informations sur le transport dans les systèmes mésoscopiques.

Dans les parties qui ont suivi nous avons exposé notre travail sur le calcul exact des corrélations de courant et l'admittance dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Ces deux grandeurs sont reliées entre elles et s'expriment toutes deux en termes d'amplitude et de transmission. Ce qui a permis l'obtention de relations directes entre elles. Les singularités observées dans le profil des corrélations de courant en régime de faible rétrodiffusion ou de faible température pour des fréquences égales à $\pm\bar{e}V_{\mathrm{dc}}/\hbar$ ont pour origine l'admittance. Nous avons vu aussi que dans les deux régimes de températures, les corrélations de courant s'expriment exclusivement en fonction de l'admittance. Ce qui implique que dans ces limites, mesurer l'admittance suffit pour avoir toutes les informations sur les corrélations de courant.

Chapitre 4

Conducteur à un canal dans un environnement Ohmique

Dans ce chapitre nous allons présenter l'étude d'un conducteur cohérent à un canal en série avec un quantum de résistance. Nous avons calculé le bruit non symétrisé à fréquence finie ainsi que la conductance. Dans la première partie nous allons exposer l'outil principal qui nous permet de traiter le système considéré. Cet outil est le mapping, il permet de rendre équivalent notre système à un liquide de Tomonaga-Luttinger avec une impureté. Le choix particulier de la résistance du circuit égale au quantum de résistance fixe la valeur du paramètre d'interaction du liquide de Tomonaga-Luttinger à 1/2. Cette valeur particulière nous permet d'utiliser la procédure de refermionisation. Nous pouvons ainsi avoir un résultat exact valable pour tous les régimes de température, de tension et pour toutes les gammes de fréquences.

Dans la section 4.1 nous introduisons quelques outils théoriques importants pour notre calcul. Dans la section 4.2 nous présentons le modèle. Nous présentons ensuite dans la section 4.3 les résultats du calcul de courant, du bruit et de la conductance. Nous discutons pour finir les résultats obtenus dans différentes limites dans la section 4.4.

4.1 Concepts importants

4.1.1 Anomalie de point zéro

L'introduction d'un conducteur mésoscopique dans un circuit électrique modifie considérablement les lois qui régissent ce circuit. La nature mésoscopique de ce conducteur favorise l'émergence de certains phénomènes tels que le blocage de Coulomb dynamique qui représente l'échange de photons entre le conducteur et l'environnement électromagnétique dans lequel il est mis. De nombreux travaux théoriques et expérimentaux se sont intéressés à ce phénomène [154]. Dans le cadre de ce phénomène, le transfert d'électrons est inélastique, ainsi le courant sera affecté par une importante non-linéarité que l'on appelle l'anomalie de point zéro (zero bias anomaly). Cette non-linéarité est bien visible dans la figure 4.1, où la caractéristique courant-tension est tracée à température nulle pour différentes valeurs du rapport R/R_q où R est la résistance du circuit et $R_q = h/e^2$ le quantum de résistance.

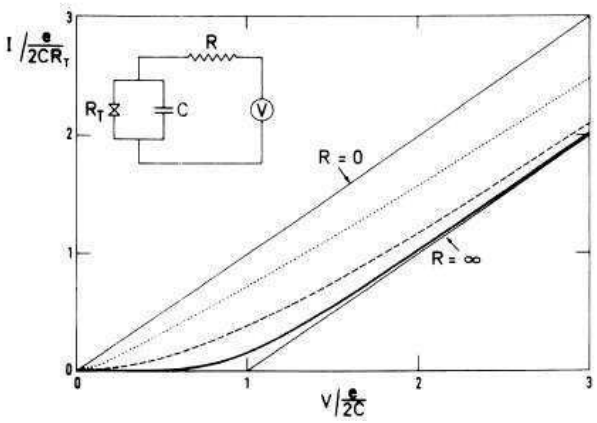

FIGURE 4.1 – Caractéristique courant-tension à $T = 0$ pour différentes valeurs de R/R_q. De Devoret et *coll.* [154].

Certains travaux ont été menés dans le cadre du régime tunnel [155]. D'autres travaux ont été menés dans le cas des conducteurs à bonne transmission où l'effet de l'environnement peut être plus apparent si on réduit le nombre de canaux. Ce qui est important à citer est le fait que dans le cas d'un conducteur avec une bonne transmission, certains travaux théoriques et expérimentaux [45, 156, 157] ont été menés dans le but d'étudier la réduction du courant et les fluctuations de charges ainsi que le lien avec le bruit. Le calcul était fait perturbativement dans le cas d'une impédance faible. La condition sur les énergies, qui dans ce cas étaient élevées, a imposé une divergence logarithmique. Afin de résoudre ce problème, il faut considérer une impédance $Z(\omega) = R$ aux fréquences $\omega < \omega_{RC}$ où C est la capacité. En utilisant le groupe de renormalisation, Kindermann et Nazarov [158] ont réussi à éliminer la divergence logarithmique pour une résistance $R \ll R_q$, et ont montré que le coefficient de transmission dépend de l'énergie :

$$\frac{\partial \mathcal{T}(E)}{\partial \ln E} = 2\frac{R}{R_q}\mathcal{T}(E)[1 - \mathcal{T}(E)] \ . \tag{4.1}$$

4.1.2 Le mapping

Dans la référence [159], Safi et Saleur ont montré que le problème d'un conducteur cohérent mis en série avec une résistance est équivalent à un liquide de Tomonaga-Luttinger [17, 18] avec une impureté où la paramètre d'interaction est :

$$K = (1 + R/R_q)^{-1} \ . \tag{4.2}$$

Ce mapping est valable pour toutes les valeurs de R. Ce résultat permet de dire que le blocage de Coulomb dynamique existe même à bonne transmission. La contribution du blocage de Coulomb dynamique à la conductance différentielle est liée au bruit en présence de l'environnement et non pas au bruit d'un conducteur isolé, ce qui est traduit par la formule suivante [159] :

$$\frac{\partial G_{n-1}}{\partial \ln V} = 2\frac{R}{R_q} G_n \ . \tag{4.3}$$

Pour $n = 2$, G_{n-1} représente la conductance différentielle dI/dV et $G_n \propto dS/dV$ où S est le bruit. Notons que ce mapping peut être étendu à un conducteur à multi-canaux en incluant les résistances des canaux. Ceci permet de renormaliser le paramètre d'interaction K.

Dans la référence [160] Parmentier et *coll.* ont étudié la forte rétro-action d'un conducteur à un canal de transmission ajustable introduit dans un circuit linéaire d'impédance comparable au quantum de résistance $R_q = h/e^2$. La mesure de la conductance montre une déviation par rapport au régime de faible rétro-action et un bon accord avec les prédictions théoriques des références [158, 159]. Les résultats expérimentaux on permit de dériver une formule phénoménologique de la conductance :

$$G(V,T) = \frac{\tau_\infty}{R_q} \frac{1 + E_B(Z,V,T)}{1 + \tau_\infty E_B(Z,V,T)} \ , \tag{4.4}$$

où τ_∞ est la transmission en absence de la rétro-action, E_B est la rétro-action relative d'une petite jonction tunnel mise dans un circuit, et Z est l'impédance du circuit. Dans des expériences plus récentes du même groupe [161], la conductance des circuits mesoscopiques constitués d'un conducteur à un canal en série avec une résistance a été étudiée. En comparant les résultats expérimentaux et la formule phénoménologique avec la courbe universelle d'un liquide de Luttinger, ils ont montré expérimentalement l'existence du mapping entre le système étudié constitué du conducteur à un canal dans un environnement électromagnétique et un liquide de Luttinger avec une impureté, ce mapping prédit dans la référence [159]. Dans la figure 4.2, la conductance est tracée en fonction de la tension normalisée par la tension de référence V_B. On remarque que la courbe théorique obtenue dans le cadre d'une solution Bethe-ansatz de la théorie des liquides de Luttinger à $T = 0$, la courbe obtenue par la formule phénoménologique à $T = 0$ et les courbes expérimentales coïncident.

4.2 Modèle

Soit un conducteur à un canal, cohérent et de transmission τ_0 placé en série avec un environnement dissipatif d'impédance $Z(\omega) = R/(1 + i\omega RC)$ où C ici représente la capacité effective qui inclut celle du conducteur (voir figure 4.3). Une première condition sur l'énergie impose que $Z(\omega) \approx R$. Ce qui nous permet de prendre l'approximation suivante :

$$\omega < \omega_{RC} = 1/(RC) \ . \tag{4.5}$$

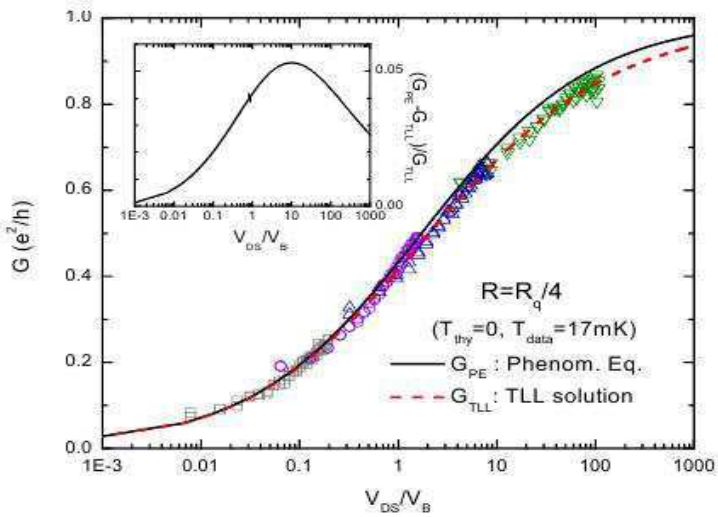

FIGURE 4.2 – Conductance G en unité de e^2/h en fonction de la tension V en unité de V_B. La ligne solide noire correspond à la courbe prédite par la formule phénoménologique. La ligne rouge hachurée est celle obtenue dans le cadre de la théorie des liquides de Luttinger. Les courbes expérimentales sont tracées pour une tempŕature $T = 0.17mK$, les courbes théoriques sont tracées à température nulle. De Jezouin et *coll.* [161].

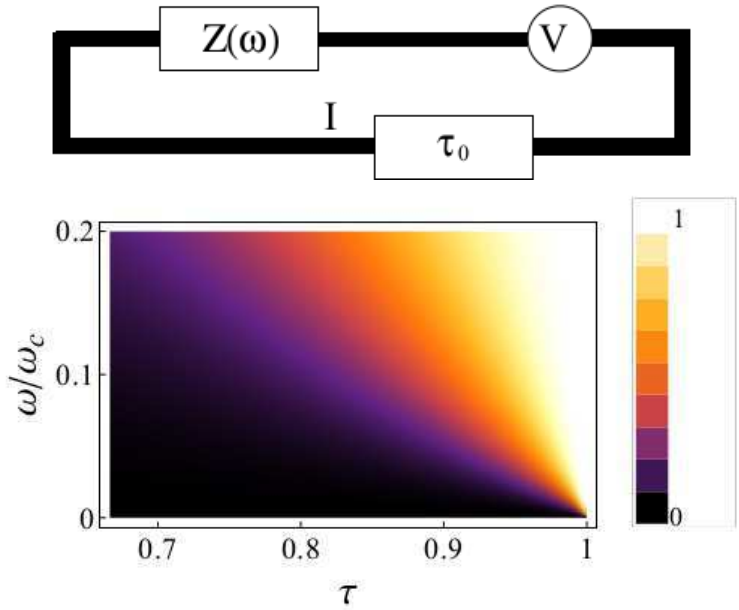

FIGURE 4.3 – En haut : Schéma représentant un conducteur à un canal de transmission τ_0 en série avec une résistance. En bas : Profil du coefficient de transmission en fonction de la fréquence ω/ω_C et la transmission effective τ.

Dans la figure 4.3, sur la partie supérieure on voit un schéma représentant le système qu'on veut étudier. On note V la tension imposée par le générateur et I le courant qui traverse le circuit. Il faut noter que V est différente de la tension aux bornes du conducteur. Celle-ci est égale à KV dans la limite $\tau_0 \simeq 1$, comme c'est le cas dans le régime perturbatif.

Pour $\tau_0 < 1$ l'expression de la tension aux bornes du conducteur est plus compliquée.

Afin d'étudier ce système, nous utilisons le mapping avec un liquide de Tomonaga-Luttinger de paramètre d'interaction K donné dans l'équation (4.2). Une telle expression du paramètre K permet de le contrôler en changeant la valeur de R. Ce qui permet de mieux tester expérimentalement les prédictions théoriques. Le liquide de Tomonaga-Luttinger dont il est question est défini en présence d'impureté d'amplitude de rétrodiffusion v_B définie ici comme une quantité sans dimension. L'Hamiltonien d'un tel système est donné par l'expression suivante :

$$H = H_0 + \frac{\hbar\omega_F v_B}{4\pi\sqrt{\pi}} e^{i\phi(0,t) - ieKVt/\hbar} + h.c. \ , \tag{4.6}$$

où H_0 est l'Hamiltonien cinématique. Les degrés de liberté de spin n'ont pas été inclus. Le champ bosonique ϕ coïncide avec la charge électrique transférée à travers le conducteur $e\phi(t) = Q(t)$. Il faut noter que cet Hamiltonien est valable pour des énergies inférieures à l'énergie de Fermi $\hbar\omega_F$, qui impose une seconde condition sur l'énergie. Par conséquent, on définit une fréquence de coupure "cut-off" $\omega_C = \min\{\omega_{RC}, \omega_F\}$. La partie rétrodiffusion de l'Hamiltonien de l'équation (4.6) est caractérisée par l'amplitude de rétrodiffusion v_B. Celle-ci n'est pas liée à la transmission τ_0, car en général on ne peut pas lier paramètre d'un système fortement corrélé à un autre appartenant à un système sans interaction. C'est pour cette raison que nous introduisons la transmission effective $\tau = 1/(1 + v_B^2)$ qui ne coïncide pas avec τ_0. Cette transmission effective doit être assez proche de 1, ce qui correspond à un v_B faible, permettant ainsi l'écriture de l'Hamiltonien sous sa forme bosonisée dans l'équation (4.6). Il est cependant possible de dépasser cette restriction sur v_B [127].

Nous introduisons aussi un autre paramètre non-universel V_B [119]. Ce paramètre représente la tension de référence pour le modèle, l'énergie de référence correspondante est eV_B, et représente la frontière entre le régime de faible rétrodiffusion et le régime de forte rétrodiffusion. Cette énergie est liée à l'amplitude de rétrodiffusion par la relation $eV_B \simeq \hbar\omega_C v_B^{1/(1-K)}$. Pour des énergies suffisamment plus élevées que eV_B, il est possible d'utiliser une analyse perturbative du groupe de renormalisation dans la limite d'une faible rétrodiffusion [128]. Dans le cas où les énergies sont très faibles par rapport à eV_B, l'effet de l'impureté devient important et un faible effet tunnel se manifestera. Dans ce cas, le blocage de Coulomb dynamique est toujours présent pour $\tau < 1$ et pour une énergie inférieure à eV_B.

Une conséquence très importante du mapping, est une relation exacte et cruciale entre la conductance différentielle $G(V, \omega = 0) = dI(V)/dV$ et la bruit à fréquence nulle $S(V, \omega = 0)$ à température nulle :

$$R_q |eV| \ dG(V, \omega = 0) = 2R \ dS(V, \omega = 0) \ . \tag{4.7}$$

Ce qui est en accord avec l'équation (4.3). Dans la limite $R \ll R_q$, l'équation (4.7) s'accorde avec l'équation du groupe de renormalisation (4.2) obtenue par Kindermann et Nazarov. Dans le cadre d'une solution Bethe-Ansatz, la statistique complète de bruit (Full Counting statistics) est calculée d'une manière exacte. De plus, dans un travail de Golubev *et coll.* [162] ils ont étudié un conducteur multi-canaux connecté à un environnement ohmique. Le calcul effectué dans un régime perturbatif est en accord avec le résultat de la référence [159].

Le mapping étant exposé, nous nous intéressons maintenant au cas où la valeur de la résistance de l'environnement correspond à $R = R_q$. Le paramètre d'interaction devient

alors $K = 1/2$. Par conséquent, le problème du liquide de Tomonaga-Luttinger à une impureté peut être résolu d'une manière exacte [119] en utilisant la procédure de refermionisation [19, 20, 131] comme exposé dans le chapitre 2. Cette méthode d'analyse non-perturbative s'appuie sur l'introduction de nouveaux fermions à partir d'une construction purement mathématique. Ces nouveaux fermions possèdent l'amplitude de transmission suivante :

$$t(\omega) = \frac{\omega}{\omega + ieV_B/2\hbar} \ , \tag{4.8}$$

et par conséquent un coefficient de transmission :

$$\mathcal{T}(\omega) = \frac{4\hbar^2\omega^2}{4\hbar^2\omega^2 + e^2V_B^2} = \frac{\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega^2 + (1-\tau)^2\omega_C^2} \ . \tag{4.9}$$

Dans le cas où $K = 1/2$, le lien entre l'amplitude de rétrodiffusion et l'énergie de référence devient : $eV_B \simeq \hbar\omega_C v_B^2$. Dans la partie inférieure de la figure 4.3, nous exposons le profil de $\mathcal{T}(\omega)$. On remarque que pour $\tau = 1$ la transmission est parfaite quelque soit la valeur de ω. Dès que la valeur de τ s'écarte de 1, $\mathcal{T}(\omega)$ décroit rapidement et tend vers zéro à faibles fréquences.

4.3 Résultats

Exposons maintenant les résultats que nous avons obtenus. Ces résultats dépendent de la fréquence de coupure ω_C, de la transmission effective τ et de l'énergie de référence eV_B. Les quantités calculées comme le courant, la conductance et le bruit à fréquence nulle et à fréquence finie dépendent exclusivement de V/V_B, k_BT/eV_B et $\hbar\omega/eV_B$, et sont valables pour tous les régimes de température, toutes les tensions et toute la gamme de fréquences inférieures à ω_C.

4.3.1 Courant

Nous avons d'abord calculé le courant moyen correspondant à la dérivée par rapport au temps de la charge moyenne transférée à travers le conducteur $I(V) = \langle \hat{I}(t) \rangle = \langle \dot{Q}(t) \rangle$, $\hat{I}$ correspondant à l'opérateur courant. Le détail du calcul est exposé dans l'annexe A.1. Le résultat est le suivant :

$$I(V) = \frac{e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{T}(\omega) \left[f\left(\hbar\omega - eV/2\right) - f\left(\hbar\omega + eV/2\right) \right] \ , \tag{4.10}$$

où $f\left(\hbar\omega\right) = [1 + exp(\hbar\omega/k_BT)]^{-1}$ est la fonction de distribution de Fermi-Dirac. L'effet non trivial de l'amplitude de transmission est ressenti à travers le terme $\mathcal{T}(\omega)$. Le résultat de l'équation (4.10) correspond à la formule de Landauer du courant [72]. Ce résultat décrit le profil de courant du régime de faible rétrodiffusion au régime de forte rétrodiffusion pour toutes les tensions et tous les régimes de température. Il faut noter que les bornes d'intégrations ont été étendues à $\pm\infty$ au lieu de $\pm\omega_C$. Le fait que les termes correctifs sont négligeables nous a permis de faire cette simplification.

4.3.2 Le bruit non-symétrisé à fréquence finie

Le bruit non-symétrisé à fréquence finie est donné par la transformée de Fourier du corrélateur de courant $\delta\hat{I}(t) = \hat{I}(t) - \langle \hat{I} \rangle$:

$$S(V,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \delta\hat{I}(0)\delta\hat{I}(t) \rangle \ . \tag{4.11}$$

Les détails du calcul sont exposés dans l'annexe A.2. On obtient alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} S(V,\omega) &= \frac{e^2}{4\pi}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(\Big[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') + |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4\Big] \\ &\quad \times[1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)]f(\hbar\omega' + \hbar\omega \pm eV/2) \\ &\quad + \Big[\mathcal{T}(\omega') - \mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') - |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4\Big] \\ &\quad \times[1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)]f(\hbar\omega' + \hbar\omega \mp eV/2)\Big) \ . \end{aligned} \tag{4.12}$$

La remarque la plus importante est le fait que l'équation (4.12) est différente de celle obtenue par l'approche de la diffusion pour un conducteur à un canal à transmission dépendante de l'énergie [72, 84, 163](voir les détails de la comparaison dans l'annexe A.3), même dans le cas des fermions chiraux [164]. Ceci se comprend par le fait que l'approche par la théorie de la diffusion n'introduit pas l'effet de l'environnement.
L'équation (4.12) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S(V,\omega) &= \frac{e}{2}\sum_{\pm} N(\hbar\omega \pm eV)[I(\pm V) + I(2\hbar\omega/e \pm V)] + \frac{e^2}{4\pi}\sum_{\pm}[N(\hbar\omega \pm eV) - N(\hbar\omega)] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \left[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') + \frac{|t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2}{4}\right] \\ &\quad \times[f(\hbar\omega + \hbar\omega' \pm eV/2) - f(\hbar\omega' \mp eV/2)] \ , \end{aligned} \tag{4.13}$$

où $N(\hbar\omega) = [exp(\hbar\omega/k_BT) - 1]^{-1}$ représente à $\omega > 0$ la fonction de distribution de Bose-Einstein. Dans cette formulation du bruit figurent f la fonction de distribution de Fermi-Dirac pour les électrons et N la fonction de distribution de Bose-Einstein pour les excitations électron-trou de l'environnement électromagnétique. Ces fonctions de distribution ne possèdent pas les mêmes arguments, cela apparaît dans la tension effective qui n'est pas la même : $\hbar\omega \pm eV/2$ pour f et $\hbar\omega \pm eV$ pour N. Un cas limite intéressant est celui où $\tau = 1$, le bruit dans ce cas se réduit à l'expression simple $S(V,\omega) = \hbar\omega N(\hbar\omega)G_q$ pour toutes les valeurs de la température T, ici $G_q = e^2/h$ correspond au quantum de conductance.

4.3.3 Le bruit à fréquence nulle

Un autre cas limite important est celui du bruit à fréquence nulle. On le déduit directement de l'équation (4.12) :

$$\begin{aligned} S(V,0) &= \frac{e^2}{4\pi}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(\mathcal{T}^2(\omega')[1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)]f(\hbar\omega' \pm eV/2) \\ &\quad + \mathcal{T}(\omega')\left(1 - \mathcal{T}(\omega')\right)[1 - f(\hbar\omega' \pm eV/2)]f(\hbar\omega' \mp eV/2)\Big) \ . \end{aligned} \tag{4.14}$$

On obtient une expression identique à celle obtenue dans le cadre de la théorie de la diffusion [70].

4.3.4 La conductance à fréquence finie

La conductance à fréquence finie est définie par la réponse à l'application d'une tension modulée [88, 144]. La conductance à fréquence finie et le bruit non symétrisé à fréquence

finie satisfont à une relation de type Kubo hors équlibre généralisée, quelque soit l'amplitude de rétrodiffusion de l'impureté, et pour des tension, des fréquences et de températures arbitriares [88, 165] :

$$\mathrm{Re}[G(V,\omega)] = \frac{S(V,-\omega) - S(V,\omega)}{2\hbar\omega} \ . \tag{4.15}$$

C'est cette relation qu'on a choisi pour calculer la conductance à fréquence finie. Après calcul, nous obtenons le résultat suivant :

$$\mathrm{Re}[G(V,\omega)] = \frac{e^2}{4h\omega} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{T}(\omega') \Big[f(\hbar\omega' \pm eV/2) - f(\hbar\omega + \hbar\omega' \pm eV/2) \Big] \ , \tag{4.16}$$

qui peut être réécrite sous la forme de différence de courants :

$$\mathrm{Re}[G(V,\omega)] = \frac{e}{4\hbar\omega} \left[I\left(V + 2\hbar\omega/e\right) - I\left(V - 2\hbar\omega/e\right) \right] \ . \tag{4.17}$$

Ce résultat crucial et très important est le même que celui obtenu dans le cadre de la théorie perturbative de Tien-Gordon avec une charge renormalisé de $e/2$ [166, 151]. Cette expression est valable quelque soit la tension et la température. Dans la référence [167] il a été montré que la relation (4.17) peut être universelle pour une ou plusieurs impuretés à faible rétrodiffusion. Il est utile de savoir que dans le cas où $V \ll \hbar\omega/e$, la conductance prend la forme suivante :

$$\mathrm{Re}[G(V \ll \hbar\omega/e, \omega)] \approx \frac{eI(2\hbar\omega/e)}{\hbar\omega} \ , \tag{4.18}$$

qui montre que dans ce cas limite il n'y a plus de dépendance en V.

4.4 Discussion

Dans cette partie nous allons détailler d'avantage les résultats obtenus dans la section précédente, en allant du régime à faible température ($k_B T \ll eV$) au régime de haute température ($k_B T \gg eV$).

4.4.1 Conductance différentielle et bruit à fréquence nulle

Commençons d'abord par le régime stationnaire où, rappelons-le, les résultats que nous allons obtenir sont connus, ce qui nous permet de vérifier la validité de notre approche.

Comportement à faible température

A température nulle, l'intégrale de l'équation (4.10) peut être calculé analytiquement, le courant total s'écrit alors sous la forme suivante :

$$I(V) = \frac{G_q V_B}{2} \left[\frac{V}{V_B} - \arctan\left(\frac{V}{V_B}\right) \right] \ . \tag{4.19}$$

On remarque que pour $\tau = 1$, c'est-à-dire $V_B = 0$, on retrouve la loi d'Ohm $I(V) = V/(2R_q)$. A $\tau < 1$ on observe une réduction du courant du type loi de puissance. Ceci s'explique par le fait que le blocage de Coulomb dynamique persiste. Il faut noter aussi que dans le régime de forte rétrodiffusion pour une tension $V \ll V_B$ l'exposant de la loi de puissance s'écrit en fonction de la résistance $1 + 2R/R_q = 3$, comme il est le cas dans la

théorie $P(E)$ [154] pour un conducteur à faible transmission. Dans notre cas, le courant devient

$$I(V \ll V_B) = \frac{G_q V^3}{6V_B^2} \ . \tag{4.20}$$

Dans le régime de faible rétrodiffusion à $V \gg V_B$, on déduit le courant de rétrodiffusion donné par la relation suivante :

$$I_B(V) = \frac{G_q V}{2} - I(V) \ , \tag{4.21}$$

qui peut être exprimé sous la forme suivante quand $V \gg V_B$:

$$I_B(V \gg V_B) \simeq \frac{G_q V}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{V_B}{V}\Big) \ . \tag{4.22}$$

Le second terme correspond à celui obtenu dans un cadre perturbatif [117] $I_B(V) \sim V^{2K-1}$, qui ne dépend pas de la tension lorsque $K = 1/2$.

Regardons maintenant le comportement de la conductance différentielle. Celle-ci est obtenue en dérivant le courant par rapport à la tension. A température nulle on trouve :

$$G(V, \omega = 0) = \frac{dI}{dV} = \frac{G_q}{2}\left[1 - \frac{V_B^2}{V^2 + V_B^2}\right] \ , \tag{4.23}$$

qui peut être réécrite en fonction du coefficient de transmission sous la forme suivante :

$$G(V, \omega = 0) = \frac{G_q}{2}\mathcal{T}\left(\frac{eV}{2\hbar}\right) \ . \tag{4.24}$$

Pour une transmission parfaite $\tau = 1$, la conductance différentielle sera égale à $G_q/2$ car le conducteur est en série avec une résistance $R = R_q$. Pour $\tau < 1$, $G(V, \omega = 0)$ sera inférieure à $G_q/2$ dans le sens où eV est limité par $\hbar\omega_C$.

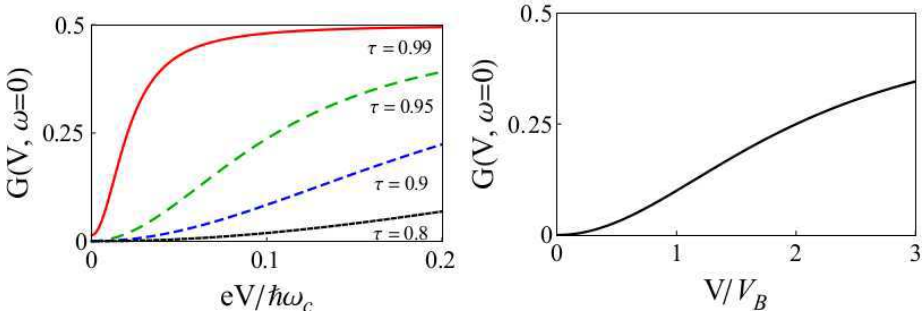

FIGURE 4.4 – Coté gauche : Conductance différentielle en unité de e^2/h, en fonction de $eV/\hbar\omega_C$ pour différentes valeurs de τ, à $k_BT/\hbar\omega_C = 0.001$. Les valeurs correspondantes de V_B sont les suivantes : $eV_B/\hbar\omega_C = 0.02$ (ligne continue rouge), $eV_B/\hbar\omega_C = 0.1$ (ligne verte hachurée), $eV_B/\hbar\omega_C = 0.22$ (ligne bleu hachurée) et $eV_B/\hbar\omega_C = 0.5$ (ligne noire en pointillé). Coté droit : Toutes les courbes du coté gauche se superposent en une seule courbe en considérant la variation en V/V_B.

Sur la figure 4.4 nous avons tracé la conductance différentielle à faible température. On remarque d'abord que l'anomalie de point zéro est plus visible quand τ décroît. L'autre remarque importante, est la sensibilité aux faibles variations de τ. Ceci est dû au fait de la variation rapide de $\mathcal{T}(\omega')$ à faibles fréquences. En effet, la contribution majeure dans

l'équation (4.10) est donnée par $\mathcal{T}(\omega')$ pour les fréquences faibles. Vue ces remarques, on conclut donc que le régime de forte rétrodiffusion est atteint rapidement pour les mêmes valeurs de τ. Il faut noter aussi que dans la partie droite de la figure 4.4 toutes les courbes se superposent en une seule courbe si on normalise la tension par V_B.
Regardons maintenant le bruit à fréquence nulle. A température nulle, il est obtenu à partir de l'équation (4.14) en intégrant à $T = 0$

$$S(V, \omega = 0) = \frac{G_q e V_B}{4} \left| \arctan\left(\frac{V}{V_B}\right) - \frac{V V_B}{V^2 + V_B^2} \right| . \tag{4.25}$$

On peut montrer que le bruit à fréquence nulle obéit à l'équation (4.7) pour $R = R_q$. Ceci confirme que l'anomalie de point zéro est liée au bruit à fréquence nulle en présence d'un environnement électromagnétique.

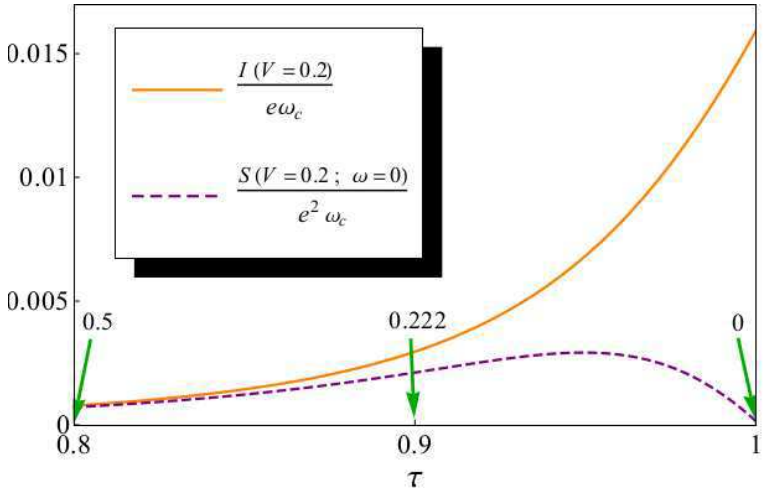

FIGURE 4.5 – Le courant et le bruit à fréquence nulle en fonction de la transmission effective τ pour $eV/\hbar\omega_C = 0.2$ et à $k_B T/\hbar\omega_C = 0.001$ Les flèches indiquent les valeurs correspondantes de $eV_B/\hbar\omega_C$.

Nous avons tracé dans la figure 4.5 le bruit à fréquence nulle et le courant en fonction de la transmission effective τ à basses températures. On remarque que les deux courbes possèdent un comportement différent. En effet, le fait que l'intégrale définissant le courant contient $\mathcal{T}(\omega')$ nous donne une courbe régulièrement croissante. Par contre, dans l'expression du bruit à fréquence nulle la quantité à intégrer contient le terme $\mathcal{T}(\omega')[1-\mathcal{T}(\omega')]$ qui rend le comportement non-monotone. Pour $\tau < 0.9$ qui correspond à une tension $V_B > V$, les deux courbes convergent vers la même valeur. En utilisant ces grandeurs, nous pouvons définir le facteur de Fano par le rapport $S(V, \omega = 0)/I(V)$. Le résultat est identique à celui obtenu dans un régime poissonien avec transfert de charge e indépendant à travers le conducteur. Dans le cas où $V_B \ll V$, le transfert de charge n'est plus indépendant.Le facteur de Fano est défini par le rapport $S(V, \omega = 0)/I_B(V)$, où $I_B(V)$ est le courant de rétrodiffusion, ce facteur prend la valeur $e^* = e/2$. Cette valeur est liée à la conductance différentielle en l'absence de rétrodiffusion.

Comportement à température intermédiaire

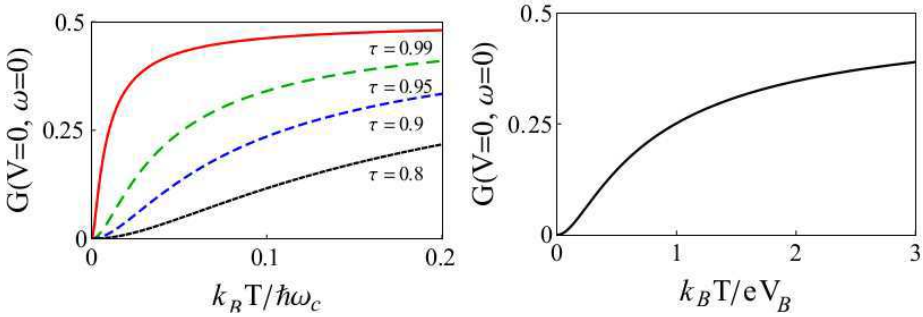

FIGURE 4.6 – Coté gauche : Conductance différentielle en unité de e^2/h, en fonction de la température T en unité de $\hbar\omega_C/k_B$ pour différentes valeurs de τ, à $k_BT/\hbar\omega_C = 0.001$. Coté droit : Toutes les courbes du coté gauche se superposent en une seule courbe en considérant la variation en k_BT/eV_B.

Ce régime correspond à des températures proches de eV/k_B. Sur la figure 4.6 nous avons tracé la conductance différentielle en fonction de la température pour différentes valeurs de τ. L'augmentation de la température élimine l'anomalie de point zéro, le comportement est similaire à celui obtenu dans la théorie $P(E)$ [154, 53]. Du coté droit de la figure 4.6, on voit de nouveau que toutes les courbes se superposent en une seule courbe si on considère la variation en k_BT/eV_B.

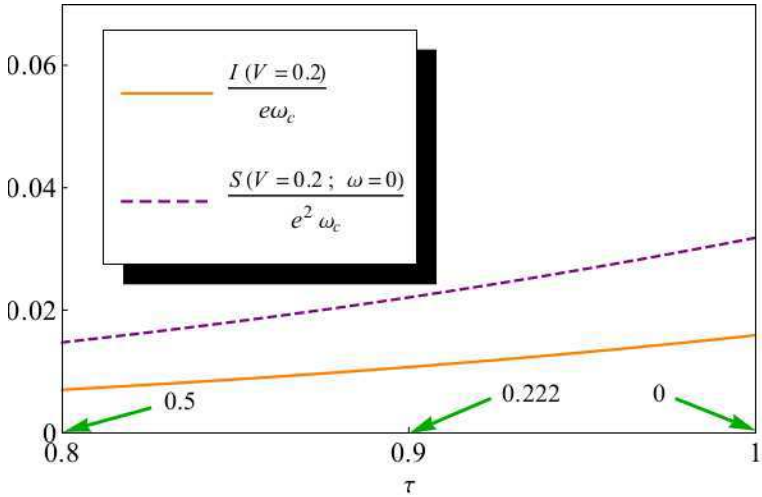

FIGURE 4.7 – Le courant et le bruit à fréquence nulle en fonction de la transmission effective τ pour $eV/\hbar\omega_C = 0.2$ et à $k_BT/\hbar\omega_C = 0.2$. Les flèches indiquent les valeurs correspondantes de $eV_B/\hbar\omega_C$.

Sur la figure 4.7 nous avons tracé le courant et le bruit à fréquence nulle en fonction de τ. On remarque cette fois que les deux courbes sont régulièrement croissantes avec des valeurs plus élevées du coté du bruit à fréquence nulle à cause de la contribution du bruit thermique.

Comportement à haute température

Ce cas correspond à $k_BT \gg eV$, on se retrouve à l'équilibre, le courant devient alors

linéaire en V ainsi que la conductance qui vaut [168, 120] :

$$G(V \simeq 0, \omega = 0) = \frac{G_q}{2}\left[1 - \frac{eV_B}{4\pi k_B T}\Psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{eV_B}{4\pi k_B T}\right)\right] , \tag{4.26}$$

avec $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, où Γ est la fonction d'Euler. Dans le cas de forte rétrodiffusion et $k_B T \gg eV_B$ nous retrouvons la loi de puissance en T :

$$G = \frac{2\pi^2 G_q k_B^2 T^2}{3e^2 V_B^2} . \tag{4.27}$$

Ce résultat est en accord avec le comportement d'un liquide de Tomonaga-Luttinger dans le régime de forte rétrodiffusion [117, 128] où on a $G \sim T^{2/K-2}$. Il est aussi en accord avec ce que prédit la théorie $P(E)$ dans le régime tunnel.
La conductance différentielle à température et à tension finies obéit à la loi $G \sim T^{\alpha} F(V/T)$ où $F(x \gg 1) \longrightarrow$ *constante*. Ce qui implique que la température et la tension ne jouent pas des rôles symétriques. Dans le cas des faibles rétrodiffusions ce comportement est violé. En effet, si on considère la conductance différentielle définie par rapport au courant de rétrodiffusion $G_B = G_q/2 - G$, on obtient dans la limite $k_B T \gg eV_B$ le résultat suivant :

$$G_B = \frac{\pi G_q e V_B}{16 k_B T} , \tag{4.28}$$

qui diffère de celui que l'on obtient si on développe l'équation (4.23) dans la limite $V \gg V_B$:

$$G_B = \frac{G_q V_B^2}{2V^2} . \tag{4.29}$$

4.4.2 Conductance à fréquence finie et bruit non-symétrisé à fréquence finie

Dans cette partie nous allons expliciter les résultats obtenus pour les grandeurs liées au transport dépendant du temps. Nous nous intéressons alors à la conductance à fréquence finie et au bruit non-symétrisé à fréquence finie. Comme il a été dit auparavant, ces grandeurs dépendent de la fréquence, de la tension et de la température en respectant la fréquence de coupure $\hbar\omega_C$ et l'énergie de référence eV_B.

Comportement à basse température
Commençons d'abord par la conductance à fréquence finie. A température nulle, elle est donnée par la relation suivante :

$$\mathrm{Re}[G(V,\omega)] = \frac{G_q}{2}\left[1 - \frac{eV_B}{4\hbar\omega}\sum_{\pm}\arctan\left(\frac{2\hbar\omega \pm eV}{eV_B}\right)\right] . \tag{4.30}$$

Nous avons tracé dans la figure 4.8 la conductance à fréquence finie en fonction de la fréquence. Pour une transmission parfaite, on retrouve une conductance parfaite $G_q/2$. Il faut noter que $\mathrm{Re}[G(V,\omega)]$ est une fonction paire de ω. Par conséquent, nous avons tracé que les fréquences positives. On remarque que les courbes présentent un minimum fixé par la dérivée $\partial_\omega \mathrm{Re}[G(V,\omega)]$ à une fréquence qui dépend de V et de V_B. Ce minimum disparaît lorsque τ décroît, et la conductance devient alors croissante. Toutes les courbes à gauche dans la figure 4.8 basculent vers celle de droite si on considère la variation en $\hbar\omega/eV_B$. Il faut noter que la conductance ne s'annule pas à $\omega = 0$ à cause de la valeur finie

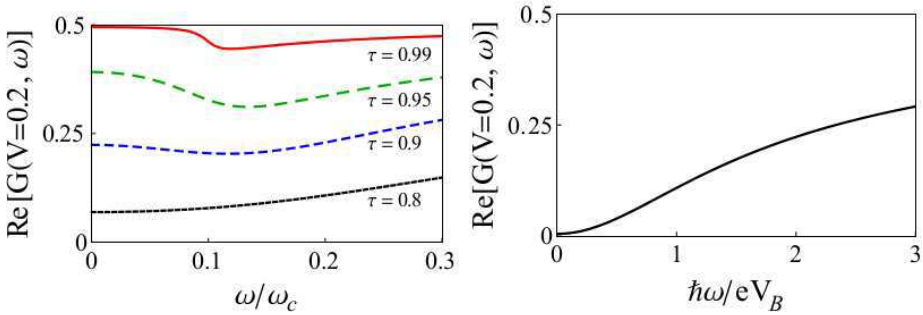

FIGURE 4.8 – Coté gauche : Conductance à fréquence finie en unité de e^2/h, en fonction de ω/ω_C pour différentes valeurs de τ, à $k_BT/\hbar\omega_C = 0.001$ et $eV/\hbar\omega_C = 0.2$. Coté droit : Toutes les courbes du coté gauche se superposent en une seule courbe en considérant la variation en $\hbar\omega/eV_B$ avec $V/V_B = 0.2$ et $k_BT/eV_B = 0.001$.

de la tension. Concernant le bruit non-symétrisé, à température nulle il est donné par la relation suivante :

$$S(V,\omega) = G_q eV_B \mathcal{F}\left(\frac{V}{V_B}, \frac{\hbar\omega}{eV_B}\right) , \tag{4.31}$$

avec la fonction sans dimension $\mathcal{F}$ qui vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\tilde{V},\tilde{\omega}) \quad = \quad & -\tilde{\omega}\Theta(-\tilde{\omega}) + \frac{1}{8}\sum_{\pm}\Bigg[\pm\,\Theta(-\tilde{\omega}\pm\tilde{V})\arctan(\tilde{V}) \\ & +[3\Theta(-\tilde{\omega}) - \Theta(-\tilde{\omega}\mp\tilde{V})]\arctan\left(2\tilde{\omega}\pm\tilde{V}\right)\Bigg] \\ & +\frac{1}{8\tilde{\omega}}\sum_{\pm}\left[-\Theta(-\tilde{\omega}) + \Theta(-\tilde{\omega}\pm\tilde{V})\right]\left[\ln\left(1+\tilde{V}^2\right) - \ln\left(1+(2\tilde{\omega}\mp\tilde{V})^2\right)\right] ,\end{aligned} \tag{4.32}$$

avec $\tilde{V} = V/V_B$, $\tilde{\omega} = \hbar\omega/eV_B$. La fonction $S(V,\omega)$ est paire en V. Par conséquent, nous nous limitons à des valeurs positives de la tension. Cette parité n'étant pas vérifiée par rapport à ω, nous tracerons donc les fréquences positives et les fréquences négatives qui correspondent au bruit d'émission et au bruit d'absorption respectivement [85].

Le bruit d'émission dans ce cas s'annule au-delà de eV contrairement au cas perturbatif [169] où on prévoit une annulation au-delà de KeV. Cette annulation est dûe à la fonction de Bose-Einstein de l'équation (4.13) qui devient une fonction de Heaviside à $T = 0$, et qui correspond à l'échange de photons entre les électrons et les excitations électron-trou. Deux interprétations sont possibles : La première consiste à considérer que les nouveaux fermions sont indépendants et donc par la théorie de la diffusion le bruit d'émission s'annule au-delà de eV, malgré que le bruit ici n'obéit pas à la même relation. La seconde interprétation consiste à considérer que le système ne peut plus émettre aux fréquences supérieures à celle de la tension du générateur. On peut aussi voir d'une manière équivalente que si $\hbar\omega < -eV$ alors $S(V,-\omega) = 0$, et donc l'équation (4.15) devient [165] :

$$S(V,\omega < -eV/\hbar) = -2\hbar\omega\mathrm{Re}[G(V,\omega)] . \tag{4.33}$$

Donc pour $\omega < -eV/\hbar$ et à température nulle, le bruit d'absorption est contrôlé par la conductance.

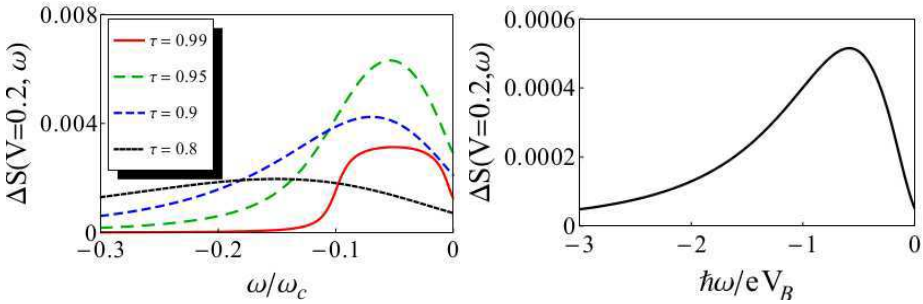

FIGURE 4.9 – Coté gauche : Bruit en excès non-symétrisé pour des fréquences négatives en unité de $e^2\omega_C$, en fonction de ω/ω_C pour différentes valeurs de τ, à $k_BT/\hbar\omega_C = 0.001$ et $eV/\hbar\omega_C = 0.2$. Coté droit : Bruit en excès non-symétrisé pour des fréquences négatives en unité de $e^2V_B/\hbar$ en fonction de $\hbar\omega/eV_B$ en prenant $V/V_B = 0.2$ et $k_BT/eV_B = 0.001$.

Dans la figure 4.9 et la figure 4.10 nous avons tracé le bruit en excès pour des fréquences négatives et des fréquences positives respectivement. Le bruit en excès est donné par la relation suivante :

$$\Delta S(V,\omega) = S(V,\omega) - S(V=0,\omega) \ , \tag{4.34}$$

qui, à température nulle donne :

$$\Delta S(V,\omega) = G_q eV_B[\mathcal{F}(\tilde{V},\tilde{\omega}) - \mathcal{F}(0,\tilde{\omega})] \ . \tag{4.35}$$

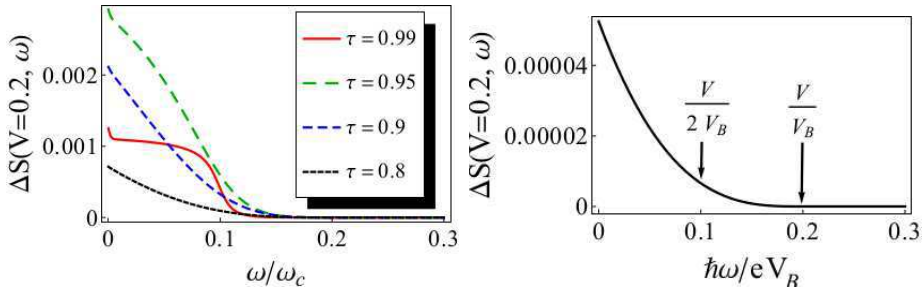

FIGURE 4.10 – Coté gauche : Bruit en excès non-symétrisé pour des fréquences positives en unité de $e^2\omega_C$, en fonction de ω/ω_C pour différentes valeurs de τ, à $k_BT/\hbar\omega_C = 0.001$ et $eV/\hbar\omega_C = 0.2$. Coté droit : Bruit en excès non-symétrisé pour des fréquences positives en unité de $e^2V_B/\hbar$ en fonction de $\hbar\omega/eV_B$ en prenant $V/V_B = 0.2$ et $k_BT/eV_B = 0.001$.

Les figures 4.9 et 4.10 sont tracées à basse température. On remarque que pour τ très proche de 1, sur les deux figures pour des valeurs de $\hbar\omega = \pm e^*V = \pm eV/2$, il existe un saut, qui à température nulle est dû à la fonction arctan (voir équation (4.32)). Le saut disparaît quand τ décroît. Notons que pour toutes les valeurs de τ, il existe une asymétrie entre le bruit d'absorption et le bruit d'émission. Cette asymétrie est la conséquence de la non-linéarité induite par l'environnement électromagnétique. Les courbes des deux figures 4.9 et 4.10 basculent vers les deux courbes montrées du coté droit de ces figures, si on considère une variation en $\hbar\omega/eV_B$.

Comportement à température intermédiaire

Dans ce régime qui correspond à $K_BT \approx eV$, nous avons tracé la conductance à

fréquence finie dans la figure 4.11. Nous remarquons que pour toutes les valeurs de τ la conductance croît régulièrement.

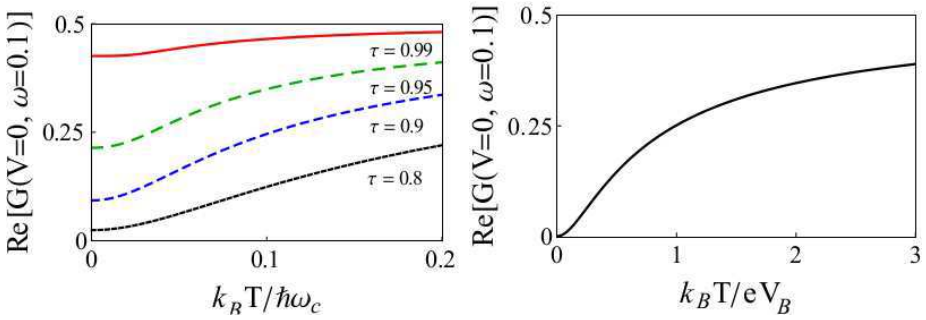

FIGURE 4.11 – Coté gauche : Conductance à fréquence finie en unité de e^2/h, en fonction de $k_BT/\hbar\omega_C$ pour différentes valeurs de τ, à $V = 0$ et $\omega/\omega_C = 0.1$. Coté droit : Toutes les courbes du coté gauche se superposent en une seule courbe en considérant la variation en k_BT/eV_B en prenant $V = 0$ et $\hbar\omega/eV_B = 0.1$.

Dans la figure 4.12 nous avons tracé le bruit en excès non-symétrisé. Quand τ diminue, le bruit augmente en conservant l'asymétrie.

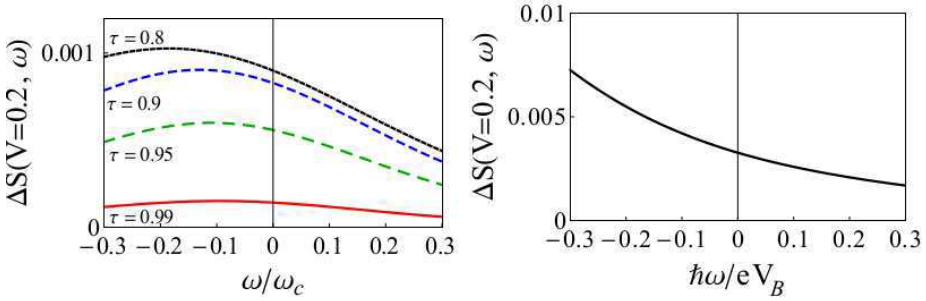

FIGURE 4.12 – Coté gauche : Bruit en excès non-symétrisé en unité de $e^2\omega_C$, en fonction de ω/ω_C pour différentes valeurs de τ, à $k_BT/\hbar\omega_C = 0.2$ et $eV/\hbar\omega_C = 0.2$. Coté droit : Bruit en excès non-symétrisé en unité de $e^2V_B/\hbar$ en fonction de $\hbar\omega/eV_B$ en prenant $V/V_B = 0.2$ et $k_BT/eV_B = 0.2$.

Comportement à haute température

Dans ce régime où $k_BT \gg eV$ (c'est à dire à l'équilibre), nous avons vérifié que le bruit non-symétrisé et la conductance deviennent indépendants de la tension, en accord avec le théorème de fluctuation-dissipation. En effet, en exploitant les équations (4.13) et (4.17) nous obtenons :

$$S(V \ll k_BT/e, \omega) = 2\hbar\omega N(\hbar\omega)\mathrm{Re}[G(V \ll k_BT/e, \omega)] \ . \tag{4.36}$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié un conducteur cohérent à un canal placé en série avec une résistance. Nous nous sommes intéressés au calcul des grandeurs qui déterminent les propriétés stationnaires et dynamiques du transport. Nous avons choisi une valeur particulière de la résistance $R = R_q$. Afin d'étudier ce problème nous avons pris l'avantage du mapping en un problème de liquide de Tomonaga-Luttinger avec impureté de paramètre d'interaction $K = 1/2$. Ceci nous a permis d'avoir des résultats non-perturbatifs, valables pour tous les régimes de températures, toutes les tensions et toutes les fréquences inférieurs à la fréquence de coupure ω_C. A température nulle, les résultats que nous avons obtenus sont analytiques. L'ensemble de ces résultats est contrôlé par un paramètre non-universel V_B, qui dépend à la fois des propriétés du conducteur ainsi que de l'environnement. Le choix de la résistance $R = R_q$ et par conséquent la valeur que doit prendre le paramètre d'interaction $K = 1/2$, nous a permis d'appliquer la procédure de refermionisation, cette méthode puissante qui s'appuie sur l'introduction des nouveaux fermions caractérisés par le coefficient de transmission $\mathcal{T}(\omega)$.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux propriétés stationnaires de transport. L'expression du courant calculée correspond à celle de la théorie de la diffusion. Du régime de faible rétrodiffusion jusqu'au régime de forte rétro-diffusion nous avons remarqué que le blocage de Coulomb dynamique persiste. Dans les cas limites, qui correspondent à des valeurs de la tension V inférieures ou supérieures à la tension V_B, nous retrouvons les lois de puissances correspondantes aux régimes de faible rétrodiffusion et forte rétrodiffusion respectivement. Nous avons trouvé que le bruit à fréquence nulle lui aussi obéit à la même loi que celle de la théorie de la diffusion. De plus, dans les cas limites correspondants aux régimes de faible et de forte rétrodiffusion il devient poissonnien. Concernant le transport dépendant du temps, le bruit à fréquence finie n'a pas la forme prévue par la théorie de la diffusion. De plus, pour une température nulle, le bruit d'émission s'annule au-delà de eV, ce qui est une propriété des électrons sans interaction. D'un autre coté, la conductance à fréquence finie n'obéit pas à la théorie de la diffusion. Elle s'écrit en fonction du courant dans une relation similaire à celle de la théorie de Tien-Gordon. Notons que dans le même contexte de notre étude, des travaux théoriques très récents ont étudiés le transport à fréquence finie à travers une barrière tunnel couplée à un environnement électromagnétique arbitraire [170].

D'un point de vue expérimental, ce système permet la réalisation d'un liquide de Tomonaga-Luttinger de paramètre d'interaction $K = 1/2$. Notre travail présente une contribution en matière de transport dans certains problèmes tel que le blocage de Coulomb dynamique et d'autres système fortement corrélé pour une valeur de $K = 1/2$. Dans la référence [160], un tel système a été réalisé en incorporant un conducteur à un canal dans un circuit d'impédance comparable à R_q. Dans des travaux ultérieures du même groupe [161], la physique des liquides de Tomonaga-Luttinger a été étudiée pour un système constitué d'un conducteur à un canal en série avec une résistance qui peut prendre plusieurs valeurs, y compris R_q. Cette expérience constitue la vérification expérimentale du mapping entre un tel système et un liquide de Tomonaga-Luttinger avec une impureté.

Chapitre 5

Théorie des liquides de Luttinger non chiraux

La théorie des liquides de Luttinger a été élaborée afin de décrire des systèmes unidimensionnels en interaction. La théorie de Landau des liquides de Fermi n'étant pas appropriée. En effet, pour de tels systèmes la structure de l'espace des phases est à une dimension, la surface de Fermi se résume donc à deux points correspondant à $\pm k_F$. De ce fait, un certain nombre de conséquences impose la non-validité de la description par la théorie des liquides de Fermi pour ce type de systèmes. Parmi ces conséquences la mauvaise définition du concept des quasi-particules. En effet, l'image de la self énergie $Im[\Sigma]$, identifiée comme le taux de diffusion des quasi-particules et qui sert à bien définir ces derniers, n'a plus le même profil. Pour des systèmes unidimensionnels $Im[\Sigma(k,\omega)] \propto \omega$ au lieu de ω^2 en 2-d ou en 3-d. Notons aussi la présence des divergences logarithmiques dans l'opérateur d'interaction de deux particules dans le cadre d'un développement perturbatif à l'ordre 2. Pour une énergie $E = E_F$, la renormalisation des quasi-particules s'annule. Par conséquent, la correspondance entre un état non perturbé k et les excitations élémentaires est perdue. Par ailleurs de nouveaux phénomènes émergent à une dimension, nécessitant alors d'autres outils pour les décrire. A citer par exemple la distortion de Peierls ou la séparation spin-charge des excitations bosoniques, où les modes de spin et de charge se propagent à vitesses différentes à cause du caractère fini de la densité de spin et de charge à basse énergie.

Les premiers modèles introduits étaient ceux de Tomonaga [17] et Luttinger [18] sur une approche basée sur la bosonisation. Des résolutions pour ce modèle ont été proposées par Matthis et Lieb [171], Luther et Peschel [114] et finalement Haldane [172, 173] qui étend le modèle aux fermions en interaction. Une autre approche appelée "g-ology" qui a été introduite par Menyhard et Solyom [174], et par Metzner et *al.* [175], qui s'appuie sur une analyse par le groupe de renormalisation.

La théorie des liquides de Tomonaga-Luttinger est un modèle unidimensionnel idéalisé de fermions en interaction. Il s'appuie sur deux caractéristiques principales qui sont : (i) la linéarisation du spectre au niveau des deux points de Fermi $\pm k_F$ (i.e. l'énergie de Fermi E_F), (ii) la bosonisation où on profite de la nature bosonique des excitations élémentaires. Il est important de noter que dans la version originale des modèles de Tomonaga et de Luttinger le spin n'était pas inclus.

5.1 Linéarisation du spectre

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux deux points fondamentaux qui composent la théorie des liquides de Luttinger qui sont la linéarisation du spectre et la bosonisation. Nous considérons pour ceci un système unidimensionnel de fermions en interaction représenté par un fil quantique de longueur L. L'Hamiltonien pour ce système est donné par la somme d'un Hamiltonien cinétique et d'un Hamiltonien d'interaction :

$$H = H_0 + H_I \ . \tag{5.1}$$

La relation de dispersion des électrons présente une bande d'énergie au voisinage de l'énergie de Fermi E_F où le spectre est linéairement stable. Nous supposons que ce spectre est sans gap et symétrique (voir figure 5.1).
Dans le modèle de Tomonaga [17], on linéarise la relation de dispersion au voisinage des points correspondants aux surfaces de Fermi $\pm k_F$. Par conséquent, en ces points l'énergie sera :

$$E_{\pm}(k) = E_F \pm \hbar v_F (k \pm k_F) \ . \tag{5.2}$$

Tomonaga a donc démontré que ce type de système en interaction correspond à des excitations bosoniques identifiées à des oscillations de plasmons avec une relation de dispersion linéaire. Le spectre se réduit donc à deux branches correspondantes à des électrons qui se déplacent vers la droite (chiralité $r = +$, $k > 0$) et à des électrons qui se déplacent vers la gauche (chiralité $r = -$, $k < 0$). L'énergie des excitations devient dans ce cas indépendante de k :

$$E_r(k+q) - E_r(k) = \hbar v_F r q \ . \tag{5.3}$$

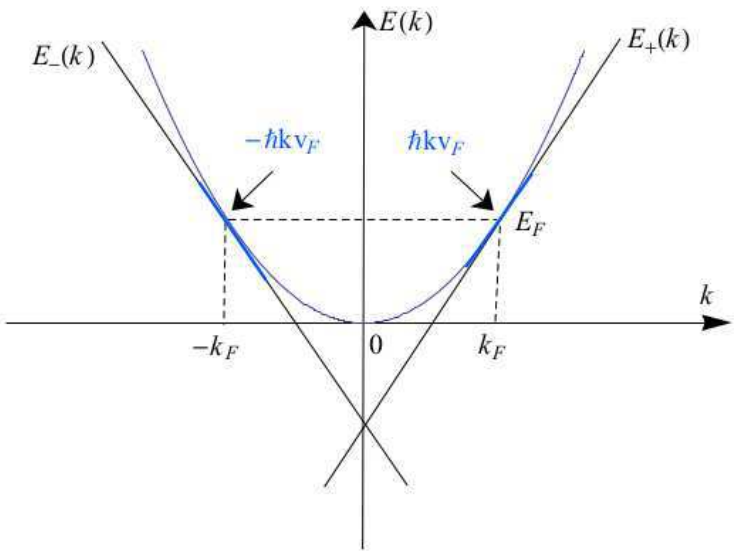

FIGURE 5.1 – Linéarisation de la relation de dispersion au niveau de l'énergie de Fermi E_F.

Luttinger quand à lui, a étendu cette linéarisation à toutes les valeurs de k positives et négatives. Il faut noter que cette extension rajoute une infinité d'états d'énergie négative qui n'ont aucun sens physique mais qui n'ont aucune incidence sur l'énergie du système. Un autre fait important de cette extension, est la solvabilité exacte de ce modèle par la

méthode de bosonisation que nous introduirons après. Chacune des branches après cette extension devient indépendante. Les électrons se déplaçant sur les branches sont indexés par l'indice de chiralité r, l'opérateur de création électronique s'écrit alors sous la forme suivante :

$$a^\dagger_\sigma(k) = a^\dagger_{+,\sigma}(k)\Theta(k) + a^\dagger_{-,\sigma}(k)\Theta(-k) \ , \tag{5.4}$$

où Θ est la fonction de Heaviside. Les opérateurs de création et d'annihilation obéissent aux relations d'anti-commutation $\{a^\dagger_{r\sigma}(k), a_{r'\sigma'}(k')\} = \delta_{r,r'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{k,k'}$. L'Hamiltonien cinétique s'écrit en fonction des nouveaux opérateurs :

$$H_0 = \hbar v_F \sum_{r,k,\sigma} rk a^\dagger_{r\sigma}(k) a_{r\sigma}(k) \ . \tag{5.5}$$

L'expression de l'opérateur de création nous permet aussi de déduire l'expression de la fonction d'onde fermionique. Celle-ci représente la transformée de Fourier de l'opérateur de création :

$$\psi_{r,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{-ikx} a^\dagger_{r\sigma}(k) \ . \tag{5.6}$$

Ces fonctions d'onde obéissent à la relation d'anti-commutation suivante $\{\psi^\dagger_{r,\sigma}(x), \psi_{r',\sigma'}(x')\} = \delta_{r,r'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta(x-x')$. Nous définissons maintenant l'opérateur densité :

$$\rho_{r,\sigma}(k) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k'} a^\dagger_{r\sigma}(k+k') a_{r\sigma}(k') \ . \tag{5.7}$$

Le commutateur de deux opérateurs densité est donné par la relation :

$$[\rho_{r,\sigma}(k), \rho_{r',\sigma'}(k')] = -\frac{rk}{2\pi}\delta_{r,r'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{k,-k'} \ . \tag{5.8}$$

Le commutateur de l'opérateur densité avec l'Hamiltonien cinétique est donné par la relation suivante :

$$[H_0, \rho_{r,\sigma}(k)] = \hbar v_F rk \rho_{r,\sigma}(k) \ . \tag{5.9}$$

Ce résultat signifie que l'opérateur $\rho_{r,\sigma}$ met le système sur un état propre de l'Hamiltonien avec la valeur propre $\hbar v_F rk$. Comme conséquence on peut réécrire l'Hamiltonien cinétique sous la forme [30] :

$$H_0 = \pi\hbar v_F \sum_{r,\sigma} \int_{-L/2}^{+L/2} \rho^2_{r,\sigma}(x) \ , \tag{5.10}$$

avec $\rho_{r,\sigma}(x) = \psi^\dagger_{r,\sigma}(x)\psi_{r,\sigma}(x)$ l'opérateur densité défini en position. Le commutateur de cet opérateur avec le champ fermionique est donné par :

$$[\psi_{r,\sigma}(x), \rho_{r,\sigma'}(x')] = \delta_{\sigma\sigma'}\delta(x-x')\psi_{r,\sigma}(x) \ . \tag{5.11}$$

Ce qui montre que si on ajoute un électron au point x, un pic de Dirac se manifestera au même point dans la densité. L'opérateur densité joue un rôle central dans la théorie des liquides de Luttinger. En effet, l'équation (5.8) vérifie l'algèbre $U(1)$ de Kac-Moody [102], et donc il est crucial dans l'élaboration de la bosonisation.

5.2 Bosonisation

La bosonisation est une procédure mathématique permettant l'écriture des états fermioniques d'un système unidimensionnel en termes d'excitations électron-trou qui ont les propriétés de bosons sans interaction à basses énergies [20, 176, 177]. Cela peut se faire par la construction d'états excités à partir de l'état fondamental correspondant à une mer de Fermi complètement remplie (voir figure 5.2). Le rôle important que joue l'opérateur densité dans la technique de la bosonisation est le fait qu'il obéit à une relation similaire à celle d'un opérateur de Bose dans le cadre d'une algèbre $U(1)$ de Kac-Moody. Les fluctuations de densité se comportent alors comme des opérateurs bosoniques de création et d'annihilation. Agissant sur un état fondamental $|0\rangle$, ils créent ou détruisent une excitation électron-trou.

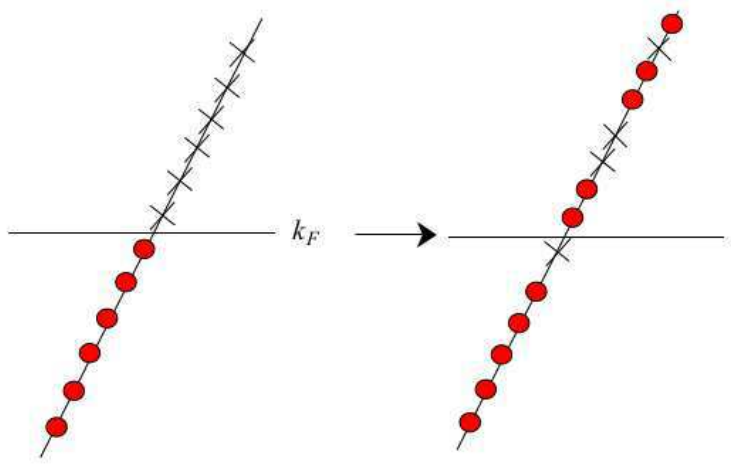

FIGURE 5.2 – Excitations électron-trou. A gauche : l'état fondamental d'une mer de Fermi remplie. A droite : état excité, les points représentent les états occupés, les croix représentent les états inoccupés.

5.2.1 Champs bosoniques

Nous commençons d'abord par définir les opérateurs de création et d'annihilation bosoniques. Ces opérateurs possèdent la propriété de ne pas dépendre des branches. Il est important de noter que les opérateurs de création et d'annihilation bosoniques sont définis sur la base d'un ordre normal par rapport à l'état du vide bosonique. Ces opérateurs s'écrivent alors sous les formes suivantes :

$$b_\sigma^\dagger(k) = i\frac{2\pi}{|k|}[\Theta(k)\rho_{+,\sigma}(-k) + \Theta(-k)\rho_{-,\sigma}(-k)] \ , \tag{5.12}$$

$$b_\sigma(k) = -i\frac{2\pi}{|k|}[\Theta(k)\rho_{+,\sigma}(k) + \Theta(-k)\rho_{-,\sigma}(k)] \ . \tag{5.13}$$

Ces opérateurs obéissent à la relation de commutation $[b_\sigma(k), b_{\sigma'}^\dagger(k')] = \delta_{\sigma,\sigma'}\delta_{k,k'}$. Grâce à ces nouveaux opérateurs on peut maintenant rcrire l'opérateur bosonique :

$$\varphi_{r,\sigma}(x) = \frac{i}{\sqrt{L}}\sum_{rk>0}(\frac{2\pi}{k})(\rho_{r,\sigma}(k)e^{-ikx} - \rho_{r,\sigma}(-k)e^{ikx})e^{-a|k|/2} \ ,$$

sous la forme :

$$\varphi_{r,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{rk>0} r(\frac{2\pi}{k})^{1/2}(b_\sigma(k)e^{-ikx} + b^\dagger_\sigma(k)e^{ikx})e^{-a|k|/2} \ . \tag{5.14}$$

Le paramètre a est un cut-off de distance indispensable dans la théorie des liquides de Luttinger. Il permet en effet d'éliminer les divergences dans les intégrales. Il a été introduit afin de contrer l'ajout des états d'énergies négatives dans le modèle de Luttinger. Les nouveaux opérateurs bosoniques obéissent à la relation de commutation suivante :

$$[\varphi_{r,\sigma}(x), \varphi_{r,\sigma'}(x')] = ir\pi\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x - x') \ . \tag{5.15}$$

Le calcul du commutateur du champ bosonique φ et de la densité ρ nous permet de déduire que les deux greteurs sont canoniquement conjuguées. En effet, le commutateur vaut :

$$[\varphi_{r,\sigma}(x), \rho_{r,\sigma'}(x')] = -ir\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x - x') \ . \tag{5.16}$$

Si deux champs p et q sont canoniquement conjugués, et si on définit une fonction exponentielle e^{iq} du champ q, alors les deux champs vérifient la propriété $[p(x), e^{iq(x')}] = \delta(x - x')e^{iq(x)}$. L'application de cette propriété aux deux champs φ et ρ permet d'écrire la relation :

$$\psi_{r,\sigma}(x) = f_{r,\sigma}(x)e^{i\varphi_{r,\sigma}(x)} \ , \tag{5.17}$$

avec $f_{r,\sigma}$ une fonction d'opérateurs qui s'obtient en calculant la valeur moyenne de l'opérateur densité dans la limite $a \longrightarrow 0$. Le champ fermionique initial s'écrit finalement en fonction de l'opérateur bosonique φ sous la forme :

$$\psi_{r,\sigma}(x) = \frac{F_{r,\sigma}}{\sqrt{2\pi a}} e^{ik_F x + ir\varphi_{r,\sigma}(x)} \ . \tag{5.18}$$

Le terme k_F ici est important pour décrire correctement la bande d'énergie. Les opérateurs $F_{r,\sigma}$ sont des opérateurs fermioniques dits facteurs de Klein. Leur introduction est très importante du fait de leur caractère fermionique. Ils permettent ainsi d'obtenir des relations d'anti-commutations bien définies. Ils commutent aussi avec les opérateurs bosoniques assurant ainsi la préservation des excitations électron-trou. Les facteurs de Klein obéissent aux relations d'anti-commutation [20] :

$$\{F_{r,\sigma}, F^\dagger_{r',\sigma'}\} = 2\delta_{r,r'}\delta_{\sigma,\sigma'} \ , \tag{5.19}$$

$$\{F^\dagger_{r,\sigma}, F^\dagger_{r',\sigma'}\} = 0 \ , \tag{5.20}$$

$$\{F_{r,\sigma}, F_{r',\sigma'}\} = 0 \ . \tag{5.21}$$

Il existe aussi une autre équation qui lie le champ bosonique φ à l'opérateur densité. Celle-ci s'exprime :

$$\partial_x\varphi_{r,\sigma}(x) = 2\pi\rho_{r,\sigma}(x) \ . \tag{5.22}$$

Introduisons maintenant deux nouveaux champs bosoniques ϕ et θ. Ces deux champs sont donnés par les relations suivantes :

$$\phi(x) = \varphi_R(x) + \varphi_L(x) \ , \tag{5.23}$$

$$\theta(x) = \varphi_R(x) - \varphi_L(x) \ . \tag{5.24}$$

Il est important de noter qu'à cause de la séparation spin-charge, les nouveaux champs bosoniques seront définis par secteur de spin ou par secteur de charge, et il est donc nécessaire d'indexer les champs ϕ et θ par l'indice $j = c, s$ désignant le secteur de charge ou le secteur de spin respectivement. La relation entre le champ φ et les champs ϕ_j et θ_j est :

$$\varphi_{r,\sigma}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_j h_\sigma(j)(\phi_j(x) + r\theta_j(x)) \ , \tag{5.25}$$

avec $h_\sigma(c) = 1$ et $h_\sigma(s) = \sigma$. La fonction $h_\sigma(j)$ possède les propriétés suivantes :

$$h_\sigma^2(j) = 1 \ , \tag{5.26}$$

$$h_\sigma(-j) = \sigma h_\sigma(j) \ . \tag{5.27}$$

Les nouveaux champs bosoniques obéissent à la relation de commutation suivante :

$$[\phi_j(x), \theta_{j'}(x')] = \frac{i}{2}\delta_{j,j'} sgn(x - x') \ . \tag{5.28}$$

Nous réécrivons maintenant le champ fermionique en fonction des deux nouveaux champs bosoniques ϕ et θ :

$$\psi_{r,\sigma}(x) = \frac{F_{r,\sigma}}{\sqrt{2\pi a}} e^{ik_F x + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_j h_\sigma(j)(\phi_j(x) + r\theta_j(x))} \ . \tag{5.29}$$

La considération de cette expression, qui représente une bonne définition d'un fermion à travers les champs bosoniques ϕ et θ liés au champ initial φ. Ce champ est lié à la densité électronique par la relation (5.22), et sachant que la densité obéit à une algèbre $U(1)$ de Kac-Moody, alors les excitations seront du type "sound-like". A basses énergies les corrélations électroniques seront sous forme de loi de puissance dans le secteur de charge si l'on rajoute ou on enlève un électron.

5.2.2 Expression du Hamiltonien

Commençons d'abord par l'Hamiltonien cinétique. A partir de l'équation (5.10), en exploitant l'équation (5.14) nous obtenons l'expression du Hamiltonien cinétique :

$$H_0 = \frac{\hbar v_F}{4\pi} \sum_{r,\sigma} \int_{-L/2}^{+L/2} dx (\partial_x \varphi_{r,\sigma}(x))^2 \ . \tag{5.30}$$

Si nous utilisons maintenant la transformation (5.25) nous aboutissons à l'expression suivante du Hamiltonien cinétique :

$$H_0 = \frac{\hbar v_F}{8\pi} \sum_j \int_{-L/2}^{+L/2} dx \left((\partial_x \phi_j(x))^2 + (\partial_x \theta_j(x))^2\right) \ . \tag{5.31}$$

Intéressons nous maintenant à l'Hamiltonien d'interaction. Celui-ci s'écrit sous la forme suivante :

$$H_{int} = \int_{-L/2}^{+L/2} dx \int_{-L/2}^{+L/2} dx' \rho(x) U(x - x') \rho(x') \ , \tag{5.32}$$

où $\rho(x) = \sum_{r,\sigma} \rho_{r,\sigma}(x)$ est la densité électronique totale et U est le potentiel d'interaction coulombien. Dans le cadre de l'hypothèse des interactions à courte portée $U(x - x') =$

$U_0\delta(x-x')$ et en exploitant la définition de la densité totale et les équations (5.22) et (5.25), la densité électronique totale devient alors :

$$\rho(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\partial_x\theta_c(x) \ . \tag{5.33}$$

Par conséquent l'Hamiltonien d'interaction prend la forme :

$$H_{int} = \frac{\hbar U_0}{\pi}\int_{-L/2}^{-L/2} dx(\partial_x\theta_c(x))^2 \ . \tag{5.34}$$

Ceci nous permet d'écrire l'Hamiltonien total :

$$H = \sum_j \int_{-L/2}^{-L/2} dx\frac{\hbar v_j}{2}[K_j(\partial_x\phi_j(x))^2 + K_j^{-1}(\partial_x\theta_j(x))^2] \ , \tag{5.35}$$

avec $v_j = v_F/K_j$ la vitesse des excitations collectives dans le fil, et K_j le paramètre d'interaction coulombienne défini comme :

$$K_j = \left(1 + \frac{2U_0\delta_{cj}}{v_F\pi}\right)^{-1/2} \ , \tag{5.36}$$

ce qui conduit à deux valeurs distinctes propres à chaque secteur : $K_s = 1$ pour le secteur de spin, et $K_c = (1 + \frac{2U_0}{v_F\pi})^{-1/2}$ pour le secteur de charge.

Dans le cas d'un fil quantique inhomogène, la paramètre d'interaction dépend de la position $K_j(x)$. La vitesse des excitations collectives devient $v_j(x) = v_F/K_j(x)$ [178, 179, 180]. L'Hamiltonien dans ce cas vaut :

$$H = \frac{\hbar}{2}\sum_j \int_{-L/2}^{-L/2} dx\Big(v_j(x)K_j(x)(\partial_x\phi_j(x))^2 + v_j(x)K_j^{-1}(\partial_x\theta_j(x))^2\Big) \ . \tag{5.37}$$

5.2.3 Expression du Lagrangien et de l'action

Il est intéressant de connaître l'expression de l'action euclidienne. Celle-ci est à l'origine des fonctions de Green qui régissent la dynamique des excitations du système. Afin de déterminer l'action, il faut d'abord écrire le Lagrangien L. Définissons alors l'opérateur bosonique $\Pi_j(x,t) = -\partial_x\theta_j(x,t)$. Le calcul du commutateur de ce champ bosonique avec le champ ϕ_j donne :

$$[\phi_j(x,t), \Pi_{j'}(x',t)] = i\delta_{j,j'}\delta(x-x') \ . \tag{5.38}$$

Ce qui montre que Π_j et ϕ_j sont canoniquement conjugués. De ce fait, il est possible d'appliquer une transformation de Legendre à l'Hamiltonien en utilisant le champ $\Pi_j(x,t)$ et la dérivée temporelle de son conjugué canonique $\partial_t\phi_j$. Cette transformation donne le Lagrangien :

$$L = \sum_j \int_{-L/2}^{-L/2} dx(-\partial_t\phi_j(x,t)\partial_x\theta_j(x,t)) - H \ . \tag{5.39}$$

En utilisant les équations d'évolution $\partial_t\theta_j = i[H,\theta_j]$ et $\partial_t\phi_j = i[H,\phi_j]$, nous obtenons les deux relations suivantes :

$$\partial_t\theta_j(x,t) = -v_j(x)K_j(x)\partial_x\phi_j(x,t) \ , \tag{5.40}$$

$$\partial_t\phi_j(x,t) = -\frac{v_j(x)}{K_j(x)}\partial_x\theta_j(x,t) \ . \tag{5.41}$$

En reportant ces deux relations dans l'équation (5.39) et en remplaçant l'Hamiltonien par son expression donnée par l'équation (5.37), nous obtenons l'expression du Lagrangien :

$$L = \frac{\hbar}{2}\sum_j \int_{-L/2}^{-L/2} dx\Big(\frac{1}{v_j(x)K_j(x)}(\partial_t\theta_j(x,t))^2 - \frac{v_j(x)}{K_j(x)}(\partial_x\theta_j(x,t))^2\Big) \ . \tag{5.42}$$

Comme l'action $S = \int dtL$, on obtient alors :

$$S = \frac{\hbar}{2}\sum_j \int dt \int_{-L/2}^{-L/2} dx\Big(\frac{1}{v_j(x)K_j(x)}(\partial_t\theta_j(x,t))^2 - \frac{v_j(x)}{K_j(x)}(\partial_x\theta_j(x,t))^2\Big) \ . \tag{5.43}$$

Cette expression représente l'action d'un oscillateur harmonique où θ_j est un champ de déplacement et la vitesse de phase v_j est renormalisée par le paramètre d'interaction K_j.

5.3 Expériences sur des liquides de Luttinger

Dans cette partie nous allons exposer quelques résultats d'expériences sur des systèmes unidimensionnels en interaction, l'objectif étant d'observer le profil d'un liquide de Luttinger. La méthode de caractérisation de ce profil diffère d'un système à un autre. Parmi ces systèmes on peut citer les chaînes d'atomes à une dimension, les nanotubes de carbone, et les circuits mesoscopiques constitués d'un conducteur à un canal en série avec une résistance.

La largeur d'une chaîne d'atomes est de l'ordre d'un seul atome. Par conséquent elle peut être considérée comme un système quasi-unidimensionnel. Elle sont construite par dépôt d'atomes en général un métal, sur un substrat de silicium. Dans les travaux de Segovia et *coll.* [181], les chaînes sont constituées d'atomes d'or. Des mesures de photoemission à basses températures ont été effectuées afin de déterminer la densité spectrale. L'analyse des données expérimentales montre l'existence de la séparation spin-charge dans les modes d'excitations.

5.3.1 Les nanotubes de carbone

Un autre système intéressant est le nanotube de carbone. Un nanotube de carbone à paroi simple (single-walled nanotube), a un diamètre de $0.5 - 2.0nm$ (voir figure 5.3), les excitations circonférentielles sont alors bloquées et le système peut être considéré comme un gaz électronique à une dimension. La vérification d'un comportement de liquide de Luttinger dans un tel système se fait par la mesure de l'exposant α présent dans la loi de puissance régissant la densité d'états.
Dans la référence [183], le spectre de photoemission a été mesuré à partir d'une source synchrotron de nanotubes de carbone de même diamètre augmenté par ablation laser. L'analyse des résultats du spectre de photoemission et de la densité d'états ont permis de déterminer expérimentalement l'exposant α. Dans une autre expérience, Bockrath et *coll.* [21] ont étudié les propriétés de transport pour des nanotubes de carbone connectés à des électrodes métalliques soit aux extrémités du nanotube soit par le centre (bulk). Pour ces deux géométries, un transport tunnel se passe aux points de contact assimilés à des points quantiques. Les mesures de la conductance et de la conductance différentielle en fonction de la température et de la tension permettent de déduire la valeur de l'exposant α. A titre d'illustration, dans la figure 5.4 est tracée la conductance différentielle en fonction de la tension. Les résultats obtenus sont en accord avec les prédictions théoriques. En effet,

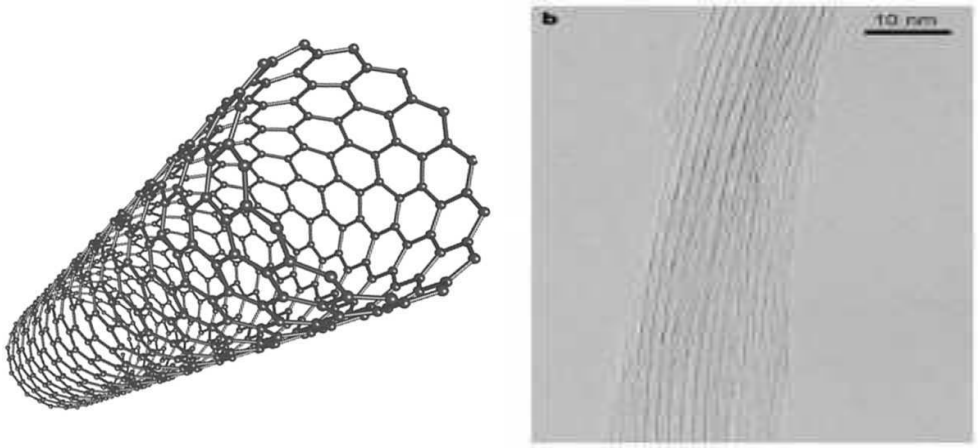

FIGURE 5.3 – A gauche : schéma d'un nanotube de carbone à paroi simple. A droite : un faisceau de nanotubes de carbone à paroi simple observés par microscopie à effet tunnel. D'après Ishii et *coll.* [183].

pour une tension $eV \ll k_B T$ la conductance présente une variation en loi de puissance en fonction de la température $G \propto T^\alpha$, et pour une tension $eV \gg k_B T$ la conductance différentielle est en loi de puissance en fonction de la tension $dI/dV \propto V^\alpha$. L'exposant est donné pour les deux géométries [184], pour un contact avec le "bulk" :

$$\alpha = \frac{1}{8}(K_c + K_c^{-1} - 2) \ , \tag{5.44}$$

et pour un contact avec les extrémités :

$$\alpha = \frac{1}{4}(K_c^{-1} - 1) \ . \tag{5.45}$$

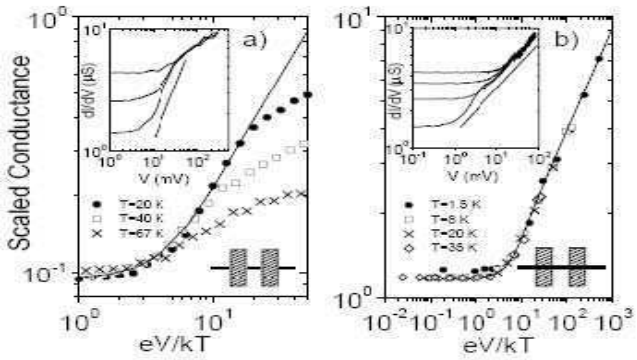

FIGURE 5.4 – Conductance différentielle en fonction de la tension pour différentes valeurs de la température. (a) Lorsque le nanotube a un point contact par le "bulk", la valeur de l'exposant est $\alpha = 0.46$. (b) Lorsque le nanotube a un point contact par les extrémités, la valeur de l'exposant est $\alpha = 0.63$. Les lignes solides représentent les courbes théoriques. D'après Bockrath et *coll.* [21].

5.3.2 Fractionalisation de la charge dans les liquides de Luttinger non-chiraux

Dans les systèmes unidimensionnels tels que les fils quantiques ou les nanotubes de carbone, la charge des porteurs de courant peut être plus grande ou plus petite que la charge unitaire e. Ces systèmes sont décrits par la théorie des liquides de Luttinger non chiraux. Cependant, l'injection d'un électron au centre d'un fil quantique ou d'un nanotube de carbone produit une séparation de la charge de cet électron en deux pulses de charge se propageant dans deux directions différentes. La charge dans chacun de ces pulses est fe et $(1-f)e$. Le facteur f dépend du paramètre d'interaction du liquide de Luttinger :

$$f = \frac{1+K}{2} \ . \tag{5.46}$$

Comme l'indique sa définition $f \leq 1$ car $K \leq 1$ dans ce cas. La fractionalisation de la charge émane de la renormalisation de la vitesse de charge dans les liquides de Luttinger. De plus, les résultats théoriques acquis sortent du contexte de calcul de valeurs moyennes. La description théorique de ce phénomène est faite dans la référence [185]. Ce modèle s'appuie sur l'introduction de champs chiraux dans un liquide de Luttinger non chiral [186, 187, 188].

La fractionalisation de la charge peut être mise en évidence en mesurant la quantité :

$$\frac{I_s^- - I_s^+}{I_s} = 2f - 1 = K \ , \tag{5.47}$$

où I_s est le courant tunnel, et I_s^- et I_s^- sont deux courants qui se propagent dans deux directions opposées. Dans une géométrie à trois terminaux, un autre paramètre identifie la fractionalisation de la charge. Il s'agit de rapport universel de fractionalisation qui doit être égale à 1 [185] :

$$\frac{A_s(2e^2/\hbar)}{G_2} = \frac{1}{K}\Big(\frac{I_s^- - I_s^+}{I_s}\Big) \ , \tag{5.48}$$

où A_s est la facteur d'asymétrie et G_2 est la conductance de deux terminaux.

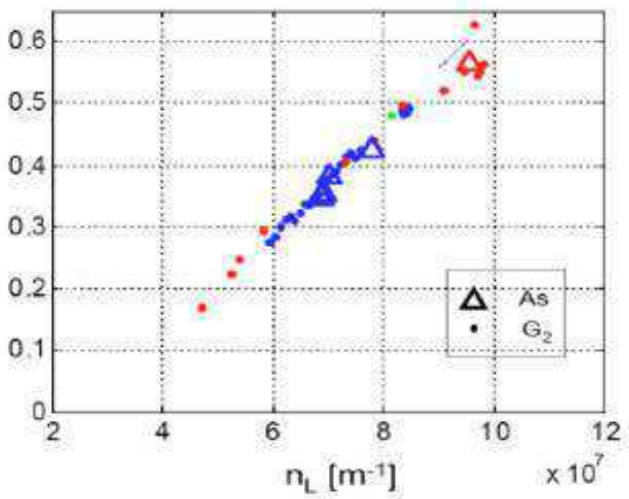

FIGURE 5.5 – Paramètre d'interaction en fonction de la densité n_L. D'après Steinberg et *coll.* [189].

Dans la référence [189], une expérience a été réalisée dans la cadre d'une géométrie à trois terminaux. Des électrons ont été injectés au centre d'un fil quantique et les courants résultants ont été mesurés aux extrémités du fil. Dans la figure 5.5, le paramètre d'interaction K est tracé en fonction de la densité n_L. Les résultats de cette expérience sont en accord avec les prédictions théoriques. Le rapport universel de fractionalisation est égale à 1.

5.4 Conclusion

Nous avons vu dans cette partie que la théorie des liquides de Tomonaga-Luttinger a été élaboré afin de décrire les phénomènes se passant dans des systèmes à basses dimensions. Cette théorie s'appuie sur deux bases importantes qui sont la linéarisation de la relation de dispersion et la bosonisation. Cette dernière constitue une solution exacte du modèle linéarisé de Luttinger. Elle se base sur le fait que les excitations électron-trou ont un caractère bosonique. Elle permet donc de donner une nouvelle forme aux fermions initiaux en fonction des champs bosoniques construits. L'Hamiltonien bosonisé est quadratique.
Dans la dernière section nous avons exposé quelques résultats des expériences sur des systèmes unidimensionnels. Ces systèmes constituent des exemples parfaits pour démontrer expérimentalement la physique des liquides de Luttinger.

Chapitre 6

Densité d'états dans un fil quantique connecté à deux électrodes

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude d'un fil quantique connecté à deux électrodes. Le système unidimensionnel est décrit par un liquide de Luttinger non-chiral en présence de deux impuretés localisées. Dans un premier cas le fil quantique est homogène, le paramètre d'interaction ne dépend pas de la position. Le deuxième cas correspond à un fil quantique non homogène, et le paramètre d'interaction dépend de la position.

Dans la section 6.1, nous allons exposer le concept de fonctions de Green. L'importance des fonctions de Green réside dans leur implication directe dans la définition des propriétés spectrales d'un système, comme la densité d'états. Nous exposons aussi quelques outils relatifs aux fonctions de Green tels que le formalisme de Keldysh et l'équation de Dyson, et pour établir un lien direct avec notre étude, nous décrivons dans la section 6.2 quelques propriétés de fil quantique sans interaction. Pour s'approcher de notre sujet, nous exposons dans la section 6.3 quelques résultats de la littérature qui traitent de la densité d'états pour un fil quantique en interaction avec une seule impureté ainsi que pour un fil quantique sans interaction en présence de deux impuretés.

A partir de la section 6.4 nous traitons notre approche d'un fil quantique en interaction en présence de deux impuretés. Nous explicitons les calculs relatifs à équation de Dyson ainsi qu'à sa résolution. Dans la section 6.5, nous montrons les résultats que nous avons obtenu. Ces résultats décrivent la densité d'états d'abord pour un fil quantique homogène, puis pour un fil quantique inhomogène. Nous donnons l'expression des fonctions de Green inhomogènes.

6.1 Fonctions de Green

Comme nous l'avons déjà cité, les fonctions de Green ont leur importance capitale en matière condensée. Dans cette section, nous allons présenter différents types de fonctions de Green dans différents cadres théoriques. Allant de la théorie de la réponse linéaire, en passant par la description de systèmes où la perturbation est introduite adiabatiquement et enfin pour des systèmes fortement perturbés.

6.1.1 Cadre de la théorie de la réponse linéaire

Dans la théorie de la réponse linéaire, un système donné est perturbé par une source extérieure qui dépend du temps. Cette source extérieure peut être un champ électrique, un champ magnétique, une force ou n'importe quelle grandeur pouvant apporter un changement au système. L'Hamiltonien total du système s'exprime en terme d'un Hamiltonien à l'équilibre noté H_0, et d'un Hamiltonien de perturbation qui dépend de la source extérieur $V_k(t)$ et d'une observable qui lui est couplée $O_k^1(t)$:

$$H_{ext} = \sum_k V_k(t) O_k^{(1)}(t) \ . \tag{6.1}$$

L'objectif est de calculer la valeur moyenne d'un opérateur $O_k^{(2)}(t)$ dans l'état perturbé. La valeur moyenne est donnée par la formule de Kubo [31, 32] :

$$\langle O_k^{(2)}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_l G_{kl}^R(t-t') V_l(t') \ , \tag{6.2}$$

où G_{kl}^R est la fonction de réponse retardée, ou fonction de Green retardée :

$$G_{kl}^R(t-t') = \frac{-i}{\hbar} \Theta(t-t') \langle [O_k^{(2)}(t-t'), O_l^{(1)}(0)] \rangle \ . \tag{6.3}$$

La fonction de Heaviside Θ exprime le fait qu'une mesure à un temps t ne dépend que de la perturbation aux temps antérieurs. C'est ce que l'on appelle le principe de causalité. Dans la réalité, l'opérateur $O_k^{(2)}(t)$ correspond à une fonction de corrélation retardée telles que la conductivité ou la susceptibilité. La fonction de réponse retardée décrit ainsi la dissipation. Afin de décrire les fluctuations, donc des grandeurs telles que le courant ou la charge, il faut introduire la fonction de réponse ordonnée dans le temps :

$$G_{kl}^T(t-t') = -i \langle T(O_k^{(2)}(t-t') O_l^{(1)}(0)) \rangle \ . \tag{6.4}$$

Si on prend l'exemple deux opérateurs $A(t)$ et $B(t)$, l'action de T pour $t > t'$ est donnée par :

$$T(A(t)B(t')) = A(t)B(t') \ , \tag{6.5}$$

et pour $t < t'$:

$$T(A(t)B(t')) = \pm B(t')A(t) \ , \tag{6.6}$$

où le signe ($\pm$) est relatif à la nature bosonique ou fermionique des opérateurs. L'utilisation du théorème de Wick permet le calcul des valeurs moyennes dans les expressions des fonctions de réponse retardées et ordonnées dans le temps.

6.1.2 Cadre de la théorie de perturbation

Le système est décrit par un Hamiltonien total $H = H_0 + H_{int}$ composé d'une partie cinétique et d'une partie interaction. Le système est supposé réversible, c'est-à-dire qu'après un temps t le système retrouve son état d'équilibre. Le départ se fait de l'état fondamental à $t = 0$ correspondant à une situation où aucun couplage avec un champs extérieur n'existe. Par la suite, l'interaction est introduite adiabatiquement. Dans la représentation d'Heisenberg, la fonction de Green pour une particule à température nulle est [30] :

$$G(x,t;x',t') = -i\frac{\langle\Psi_0|T(\psi(x,t)\psi^\dagger(x',t'))|\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle} \ , \tag{6.7}$$

où $|\Psi_0\rangle$ est l'état fondamental correspondant à l'Hamiltonien H, et ψ est l'opérateur d'annihilation dans la représentation d'Heisenberg. L'objectif étant de calculer la valeur moyenne d'un opérateur $A(t)$ défini par :

$$A(t) = e^{iHt}Ae^{-iHt} \ . \tag{6.8}$$

Cependant, il est nécessaire de réduire le problème à une série de perturbations. Pour cela, il faut introduire la représentation interaction [190]

$$\tilde{A}(t) = e^{iH_0t}A(0)e^{-iH_0t} \ , \tag{6.9}$$

avec la correspondance entre la représentation interaction et la représentation d'Heisenberg :

$$A(t) = S^{-1}(t,-\infty)\tilde{A}(t)S(t,-\infty) \ , \tag{6.10}$$

où $S(t,t') = U(t)U^\dagger(t')$ est une matrice s'exprimant en terme d'opérateur d'évolution $U(t) = e^{iH_0t}e^{-iH_0t}$, qui est un produit ordonné dans le temps [30, 191]. Cette matrice obéit à la propriété $S(t,t'') = S(t,t')S(t',t'')$, et est régie par l'équation différentielle :

$$\partial_t S(t,t') = \partial_t U(t)U^\dagger(t') = -iH_{int}(t)S(t,t') \ . \tag{6.11}$$

Résoudre cette équation permet d'obtenir l'expression de la matrice S en fonction de l'Hamiltonien $\tilde{H}_{int}$:

$$S(t,t') = T\left(\exp\left(-i\int_{t'}^{t}\tilde{H}_{int}(t_1)dt_1\right)\right) \ . \tag{6.12}$$

Il est important maintenant de redéfinir l'état fondamental. En effet, $|\Psi_0\rangle$ l'état fondamental relatif à l'Hamiltonien H n'est pas connu. Cependant, l'état fondamental $|\Phi_0\rangle$ relatif à l'Hamiltonien H_0 est connu, et il est possible d'exprimer $|\Psi_0\rangle$ en fonction de $|\Phi_0\rangle$ au moyen du théorème de Gell-Mann Low [192] :

$$|\Psi_0\rangle = S(0,-\infty)|\Phi_0\rangle \ , \tag{6.13}$$

$$\langle\Psi_0| = \langle\Phi_0|S(\infty,0) \ . \tag{6.14}$$

Ce qui permet de récrire la fonction de Green définie dans l'équation (6.7) :

$$G(x,t;x',t') = -i\frac{\langle\Phi_0|T(S(\infty,-\infty)\psi(x,t)\psi^\dagger(x',t'))|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|S(\infty,-\infty)|\Phi_0\rangle} \ . \tag{6.15}$$

Lorsque le système revient à l'équilibre, l'état final est exprimé en fonction de de l'état initial :

$$|\Phi_f\rangle = S(\infty, -\infty)|\Phi_0\rangle \ , \tag{6.16}$$

avec :

$$\langle\Phi_0|S(\infty, -\infty)|\Phi_0\rangle = e^{i\alpha} \ . \tag{6.17}$$

L'état final est unique, il est indépendant de la manière dont les perturbations sont introduites et est égale à une phase près à l'état initial.

La fonction de Green définie par l'équation (6.15), permet d'exprimer certaines quantités physiques telle que la densité électronique :

$$\rho(x) = -Im\Big[\lim_{x'\to x, t'\to t+\varepsilon} G(x,t;x',t')\Big] \ , \tag{6.18}$$

et le courant :

$$j(x) = \pm\frac{\hbar}{m}\lim_{x'\to x, t'\to t+\varepsilon}(\nabla_x - \nabla_{x'})G(x,t;x',t') \ . \tag{6.19}$$

Notons enfin que cette description se limite au cas d'une perturbation adiabatique dans un système réversible. Afin d'étudier des systèmes irréversibles ou des système fortement perturbés d'autres outils sont indispensables. Le calcul explicite de la fonction de Green se fait par plusieurs méthodes, à citer par exemple le prolongement analytique de la fonction de Matsubara calculée en fréquence imaginaire, ou la théorie de perturbation en temps réelle.

6.1.3 Formalisme de Keldysh

Il s'agit de décrire un système irréversible fortement perturbé. En effet, même pour un temps asymptotiquement grand le système ne revient pas à son état d'équilibre. Typiquement, un tel système est transféré d'un état d'équilibre à $t = -\infty$, décrit par un Hamiltonien H_0, vers un état hors équilibre pour lequel un Hamiltonien H_{int} intervient. L'état final hors équilibre n'est pas un état propre de l'Hamiltonien H_0. Un système de deux réservoirs portés à différents potentiels chimiques constitue un bon exemple. Un autre exemple est le transport dans un système unidimensionnel (fil quantique, nonotube de carbone) engendré par l'application d'une différence de potentiel entre les bornes du conducteur. Ces situations illustrent bien l'irréversibilité dans l'évolution du système.
Le formalisme de Schwinger-Keldysh est une méthode de théorie des champs conçue pour calculer les fonctions de corrélations d'un système hors équilibre [27]. S'appuyant sur la transcription de la théorie de perturbation à l'équilibre pour des systèmes hors équilibre, elle constitue une extension de celle-ci. Cette approche est utile pour traiter divers cas de systèmes hors équilibres, à citer par exemple le phénomène de transport ou le traitement des systèmes hors équilibre thermique.

Dans le formalisme de Keldysh, le système évolue de $t \to -\infty$ à $t \to +\infty$ puis cette évolution est renversée, de $t \to -\infty$ à $t \to +\infty$. Ceci est traduit par un contour temporel dans le plan complexe [27] (voir figure 6.1). Plusieurs changements affectent l'expression de la fonction de Green décrite dans le cadre de la théorie de perturbation. A noter, l'opérateur évolution devient un opérateur identité $U_K = \mathbf{1}$, et la matrice S_K s'écrit au moyen de produit de matrices S :

$$S_K = S(-\infty, \infty)S(\infty, -\infty) \ . \tag{6.20}$$

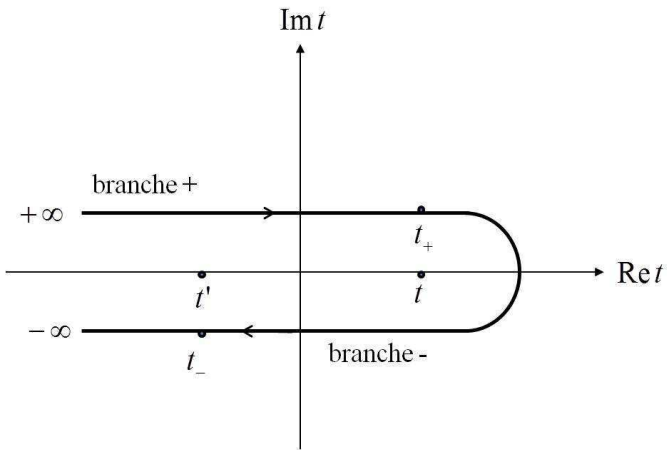

FIGURE 6.1 – Contour temporel de Keldysh, l'indice des branches est $\eta = \pm 1$.

Par conséquent, elle possède une nouvelle expression en fonction de l'intégrale de l'Hamiltonien $\tilde{H}_{int}$ sur le contour K de Keldysh :

$$S_K = T_K\left(\exp\left(-i \int_K \tilde{H}_{int}(t_1) dt_1 \right) \right) , \tag{6.21}$$

où T_K est le nouvel opérateur d'ordre temporel, qui ordonne les opérateurs sur le contour Keldysh. Ces opérateurs peuvent se trouver sur la branche supérieure indexée par $\eta = +$ ou sur la branche inférieure $\eta = -$. Pour deux opérateurs $A(t)$ et $B(t)$ l'opérateur T_K s'écrit, si $t >_K t'$:

$$T_K\big(A(t)B(t')\big) = A(t)B(t') , \tag{6.22}$$

et si $t <_K t'$:

$$T_K\big(A(t)B(t')\big) = \pm B(t')A(t) , \tag{6.23}$$

où $t >_K t'$ et $t <_K t'$ expriment la relations d'ordre entre deux temps sur le contour Keldysh. Ces nouveaux opérateurs permettent de définir la fonction de Green dans le cadre du formalisme de Keldysh :

$$G(x,t;x',t') = -i \frac{\langle \Phi_0 | T_K\big(S_K \psi(x,t) \psi^\dagger(x',t')\big) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | S_K | \Phi_0 \rangle} . \tag{6.24}$$

L'opérateur T_K définit en fait quatre fonctions de Green suivant la position des temps de chaque opérateur. On peut donc récrire la fonction de Green en mettant en évidence l'ordre temporel par l'indice $\eta = \pm$:

$$G^{\eta\eta'}(x,t;x',t') = -i \langle \Phi_0 | T_K\big(S_K \psi(x,t) \psi^\dagger(x',t')\big) | \Phi_0 \rangle . \tag{6.25}$$

Cette écriture de la fonction de Green nous permet d'expliciter les quatre fonctions suivant l'ordre des temps sur le contour Keldysh [30, 193, 194]. Les deux premières fonctions de Green correspondent au cas où les deux temps se trouvent dans des branches différentes :

$$G^{+-(<)}(x,t;x',t') = i \langle \Phi_0 | \psi^\dagger(x',t') \psi(x,t) | \Phi_0 \rangle , \tag{6.26}$$

et :

$$G^{-+(>)}(x,t;x',t') = -i \langle \Phi_0 | \psi(x,t) \psi^\dagger(x',t') | \Phi_0 \rangle . \tag{6.27}$$

Dans le cas où les deux temps se trouvent sur la branche supérieure du contour, on définit la fonction de Green ordonnée dans le temps :

$$G^{++(t)}(x,t;x',t') = -i\langle\Phi_0|T(\psi(x,t)\psi^\dagger(x',t'))|\Phi_0\rangle \ . \tag{6.28}$$

Si les deux temps se trouvent sur la branche inférieure, on définit alors la fonction de Green anti-ordonnée dans le temps :

$$G^{--(\bar{t})}(x,t;x',t') = -i\langle\Phi_0|\bar{T}(\psi(x,t)\psi^\dagger(x',t'))|\Phi_0\rangle \ , \tag{6.29}$$

où $\bar{T}$ est l'opérateur définit sur le contour Keldysh qui anti-ordonne le temps. Les fonctions de Green ordonnée et anti-ordonnée peuvent être exprimées en fonction de G^{+-} et G^{-+}, nous avons donc [30] :

$$G^{++(t)}(x,t;x',t') = \Theta(t-t')G^{-+(>)}(x,t;x',t') + \Theta(t'-t)G^{+-(<)}(x,t;x',t') \ , \tag{6.30}$$

$$G^{--(\bar{t})}(x,t;x',t') = \Theta(t'-t)G^{-+(>)}(x,t;x',t') + \Theta(t-t')G^{+-(<)}(x,t;x',t') \ . \tag{6.31}$$

Les indices entre parenthèses $<$, $>$, t et $\bar{t}$ représentent les autres notations de ces mêmes fonctions de Green qu'on peut trouver dans la littérature. L'ensemble de ces quatre fonctions vérifient la relation [30]

$$G^{++} + G^{--} = G^{+-} + G^{-+} \ , \tag{6.32}$$

et permettent de définir une matrice 2×2 :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G^{++} & G^{+-} \\ G^{-+} & G^{--} \end{pmatrix} \ . \tag{6.33}$$

L'application d'une transformation unitaire sur cette matrice permet de définir trois fonctions de Green supplémentaires :

$$\begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & G^K \end{pmatrix} = \frac{1-i\sigma_y}{2}\begin{pmatrix} G^{++} & G^{+-} \\ G^{-+} & G^{--} \end{pmatrix} \ , \tag{6.34}$$

où G^A, G^R et G^K sont les fonctions de Green avancée, retardée et la fonction de Green Keldysh respectivement. La fonction de Green avancée est définie par :

$$G^A(x,t;x',t') = G^{++}(x,t;x',t') - G^{+-}(x,t;x',t') = i\Theta(t-t')\langle\Phi_0|\left[\psi(x,t),\psi^\dagger(x',t')\right]_\mp|\Phi_0\rangle \ , \tag{6.35}$$

où l'indice $\mp$ dans le crochet $[,]_\mp$ fais référence au commutateur des champs bosoniques et fermioniques respectivement. La fonction de Green retardée est donnée par la relation :

$$G^R(x,t;x',t') = G^{++}(x,t;x',t') - G^{-+}(x,t;x',t') = -i\Theta(t-t')\langle\Phi_0|\left[\psi(x,t),\psi^\dagger(x',t')\right]_\mp|\Phi_0\rangle \ . \tag{6.36}$$

La dernière fonction est la fonction de Green Keldysh, spécifiques aux systèmes hors équilibre, elle s'écrit :

$$G^K(x,t;x',t') = -i\langle\Phi_0|\left[\psi(x,t),\psi^\dagger(x',t')\right]_\mp|\Phi_0\rangle \ . \tag{6.37}$$

En utilisant les relations (6.35) et (6.36) on peut récrire la relation (6.32) :

$$G^A - G^R = G^{+-} - G^{-+} \ . \tag{6.38}$$

Grâce au formalisme de Keldysh on peut définir plusieurs quantités physiques au moyen des fonctions de Green. De plus, quelque soit la dimension du système le formalisme est applicable car il ne dépend que de l'intensité de la perturbation.

6.1.4 Equation de Dyson

L'ensemble des fonctions de Green définies dans la partie précédente peut être évalué pour un système en interaction. Cette évaluation s'appuie sur le développement en séries de la matrice S_K. En d'autres termes, il s'agit de développer le potentiel d'interaction $\tilde{H}$ contenu dans la matrice S_K puis intégrer sur le contour Keldysh. L'Hamiltonien d'interaction $\tilde{H}$ peut représenter n'importe quel type d'interaction, électron-électron, électron-phonon ou électron-photon. Le théorème de Wick permet d'apparier les opérateurs. Dans ce développement de la matrice S_K, chaque élément produit un ensemble de termes lié à une des deux branches suivant laquelle le temps est ordonné. L'ensemble de ces terme peut être organisé sous une formulation matricielle (voir la référence [30] pour plus de détails).

Si on considère une interaction quelconque, le développement d'une fonction de Green G s'écrit :

$$\begin{aligned} G &= G_0 + G_0\Sigma^{(1)}G_0 + G_0\Sigma^{(1)}G_0\Sigma^{(1)} + G_0\Sigma^{(2)}G_0 + G_0\Sigma^{(1)}G_0\Sigma^{(2)}G_0 \\ &\quad + G_0\Sigma^{(2)}G_0\Sigma^{(1)}G_0 + G_0\Sigma^{(3)}G_0 + \dots , \end{aligned} \tag{6.39}$$

chacun de ces termes correspond à un diagramme de Feynman (voir figure 6.2 où G_0 est dite fonction de Green nue, représentée par une ligne solide. On remarque par exemple que le diagramme (3) s'obtient en composant le diagramme (2) avec lui même. Les diagrammes (5) et (6) s'obtiennent en composant les diagrammes (2) et (4). Les diagrammes (2), (4) et (7) sont des diagrammes irréductibles. En général, le développement à l'ordre 1 ou 2 suffit à comprendre certains éléments de la physique du problème. Par conséquent, on tient compte de certain diagramme que l'on sait calculer, et on néglige les autres. Un certain nombre de problème ont été résolus dans cette approche, à citer par exemple : l'approximation de phase aléatoire ou la localisation faible, où les électrons interagissent avec un potentiel d'impureté.

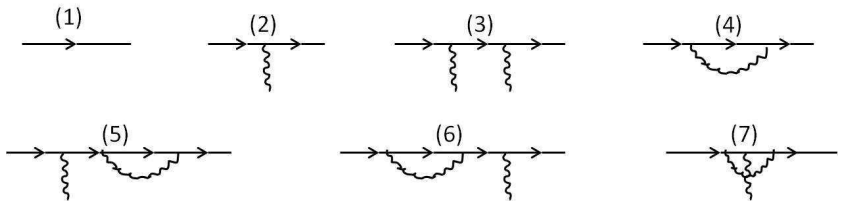

FIGURE 6.2 – Diagrammes de Feynman pour le développement en séries de la fonction de Green G, chaque terme du membre de droite de l'équation (6.39) est représenté par un diagramme.

A partir de l'équation (6.39) on peut écrire l'équation de Dyson qui représente la somme de tous les diagrammes irréductibles :

$$G = G_0 + G_0\Sigma G , \tag{6.40}$$

où $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(4)} + \Sigma^{(3)} + \dots$ est la self énergie. Cette équation peut être écrite sous forme matricielle [30] :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{\Sigma}\mathbf{G} , \tag{6.41}$$

en considérant la représentation matricielle de la fonction de Green donnée par l'équation (6.33) ou (6.34). A son tour, la matrice $\mathbf{\Sigma}$ s'écrit :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma^{++} & \Sigma^{+-} \\ \Sigma^{-+} & \Sigma^{--} \end{pmatrix} . \tag{6.42}$$

D'une manière moins condensée, l'équation (6.41) s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(x,x';t,t') &= \mathbf{G}_0(x,x';t,t') + \int dt_1 \int dt_2 \int dx_1 \int dx_2 \mathbf{G}_0(x,x_1;t,t_1) \\ &\times \mathbf{\Sigma}(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathbf{G}(x_2,x';t_2,t') \ . \end{aligned} \tag{6.43}$$

Les équations de Dyson pour l'ensemble des six fonctions de Green, avancée, retardée, ordonnée dans le temps, anti-ordonnée, G^{+-} et G^{+-} s'écrivent sous une forme équivalente, en tenant compte de la nature de la fonction de Green nue et de la self énergie qui suivent la nature de la fonction de Green G choisie [30]. Par exemple, pour les fonctions de Green retardée et avancée, l'équation de Dyson s'écrit :

$$G^A = G_0^A + G_0^A \Sigma^A G^A \ , \tag{6.44}$$

$$G^R = G_0^R + G_0^R \Sigma^R G^R \ . \tag{6.45}$$

La transformée de Fourier de l'ensemble des équations de Dyson pour les différentes fonctions de Green, permet de mieux les exploiter afin de calculer différentes quantités physiques.

Il est possible de dériver l'équation de Dyson à partir de l'équation du mouvement, ce que nous verrons plus tard quand nous aborderons la problèmatique d'un fil quantique connecté à deux réservoirs.

6.2 Propriétés d'un fil quantique

Dans cette section nous allons présenter à titre d'illustration le calcul de la densité d'états pour un fil quantique décrit par un liquide de Luttinger de paramètre d'interaction K. Ceci nous permet de comprendre les différentes approches de calcul qui différent du cas simple, au cas d'une impureté jusqu'au cas qui nous intéresse, c'est-à-dire un fil avec deux impuretés.

6.2.1 Expression de la fonction de Green retardée fermionique

Nous considérons donc un fil quantique décrit par un liquide de Luttinger. L'Hamiltonien décrivant le système est donné par l'équation (5.35). Nous voulons déterminer la fonction de Green retardée fermionique $\mathcal{G}^R$, elle s'écrit en fonction des fonctions de Green $\mathcal{G}^{+-}$ et $\mathcal{G}^{-+}$:

$$\mathcal{G}^R(x,x';t,t') = \Theta(t-t')\Big(\mathcal{G}^{-+}(x,x';t,t') - \mathcal{G}^{+-}(x,x';t,t')\Big) \ . \tag{6.46}$$

Afin de calculer cette quantité, il est utile d'utiliser l'identité bosonique donnée par l'équation (5.29). La fonction de Green $\mathcal{G}^{-+}$ s'exprime donc au moyen des champs bosoniques ϕ_j et θ_j :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{r\sigma}^{-+}(x,x';t,t') &= -\frac{ie^{irk_F(x-x')}}{2\pi a} \\ &\times \Big\langle F_{r,\sigma}F_{r,\sigma}^{\dagger} e^{i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_j h(j)[\phi_j(x',t')+r\theta_j(x',t')]} e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_j h(j)[\phi_j(x,t)+r\theta_j(x,t)]}\Big\rangle \ . \end{aligned} \tag{6.47}$$

La moyenne se fait par rapport à l'état propre $|\phi_0\rangle$ de l'Hamiltonien H_0. Cette moyenne se divise en moyenne d'exponentielles de champs bosonique multipliée par la moyenne

des facteurs de Klein qui sont des opérateurs fermioniques. Les propriétés des facteurs de Klein impliquent $\langle F_{r,\sigma} F^{\dagger}_{r,\sigma} \rangle = 1$. A l'aide du théorème de Beker-Campbell-Hausdorff, qui exprime le produit des exponentielles de deux opérateurs A et B liés par la relation de commutation $[A, B]$:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{[a,B]/2} \ , \tag{6.48}$$

il est possible de développer le produit des exponentielles des champs bosoniques. Afin de calculer la moyenne, il faut utiliser la relation $\langle e^A \rangle = e^{\langle A^2 \rangle/2}$ [195]. La fonction de Green dans l'équation (6.47) s'exprime en termes de fonctions de Green bosoniques :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-+}_{r\sigma}(x, x'; t, t') &= -\frac{i e^{i r k_F (x-x')}}{2\pi a} \\ &\times \exp\left[\frac{\pi}{2} \sum_j G_j^{\phi\phi,-+}(x, x'; t, t') + \frac{\pi}{2} \sum_j G_j^{\theta\theta,-+}(x, x'; t, t') \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{2} \sum_j r G_j^{\phi\theta,-+}(x, x'; t, t') + \frac{\pi}{2} \sum_j r G_j^{\theta\phi,-+}(x, x'; t, t') \right] \ . \end{aligned} \tag{6.49}$$

Ces fonctions de Green bosoniques sont définies grâce aux champs bosoniques θ et ϕ. Par exemple la fonction de Green $G_j^{\phi\phi,-+}$ s'écrit :

$$G_j^{\phi\phi,-+}(x, x'; t, t') = \langle \phi_j(x, t) \phi_j(x', t') \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi_j^2(x, t) \rangle - \frac{1}{2} \langle \phi_j^2(x', t') \rangle \ . \tag{6.50}$$

Les expressions des fonctions de Green bosoniques pour un système d'écrit par l'Hamiltonien de liquide de Luttinger, invariant par translation et à température nulle dans l'espace (x, t) sont décrits dans la littérature [176, 177].

La fonction de Green fermionique $\mathcal{G}^{-+}_{r\sigma}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-+}_{r\sigma}(x, x'; t, t') = -\frac{i e^{i r k_F (x-x')}}{2\pi a} \prod_j \left[\frac{1}{\left(1 + i\frac{(t-t')v_F}{a} + i\frac{K_j(x-x')}{a}\right)^{\gamma_j} \left(1 + i\frac{(t-t')v_F}{a} - i\frac{K_j(x-x')}{a}\right)^{\gamma_j}} \right. \\ \left. \times \frac{1}{\left(1 + i\frac{(t-t')v_F}{a} - i\frac{K_j(x-x')}{a}\right)^{(1+r)/4} \left(1 + i\frac{(t-t')v_F}{a} + i\frac{K_j(x-x')}{a}\right)^{(1-r)/4}} \right], \end{aligned} \tag{6.51}$$

où $\gamma_j = \frac{1}{8}(K_j^{-1} + K_j - 2)$ est un paramètre non universel. Rappelons que l'indice $j = c, s$ fait référence aux secteurs de charge et de spin respectivement. La fonction de Green $\mathcal{G}^{+-}$ se déduit de la fonction $\mathcal{G}^{-+}$ par la propriété :

$$\mathcal{G}^{+-}(x, x'; t, t') = \mathcal{G}^{-+}(x', x; t', t) \ . \tag{6.52}$$

La détermination de ces deux fonctions permet d'écrire la fonction de Green retardée fermionique. Dans l'équation (6.51) la fonction de Green à une loi de puissance décroissante d'exposant non universel γ_j. Ce qui engendre des singularités en le moment q et l'énergie ω.

Afin de calculer la densité d'états, il est intéressant d'exprimer la fonction de Green retardée selon les valeurs du moment q et de l'énergie ω. Pour cela l'utilisation de l'invariance par translation spatiale et temporelle donne $\mathcal{G}(x, x'; t, t') = \mathcal{G}(x, x; \tau = t - t')$. Dans la papier de Braunecker et *coll.*, la fonction de Green retardée dans l'espace (x, ω) est calculée pour différents types de liquides de Luttinger [196]. Dans le cas d'un liquide de

Luttinger sans spin, les auteurs se sont basés sur le calcul de la transformée de Fourier de la fonction $G(x;\tau)$ à partir de son expression en fonction du temps imaginaire et sur des méthodes de calcul d'intégrale de contours, dans la mesure où une continuation analytique par rotation de Wick n'est pas bien définie dans ce cas. La fonction de Green retardée $\mathcal{G}^R_{rr}(x,\omega)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^R_{r,r}(x,\omega) &= \frac{-e^{irk_Fx}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma+1)}\frac{\omega_+a}{v_F^2}(\frac{2i|x|v_F}{\omega_+a^2})^{\frac{1}{2}-\gamma} \\ &\quad\times\left[\mathbf{K}_{\gamma-\frac{1}{2}}(|x|\omega_+/iv_F)-sgn(rx)\mathbf{K}_{\gamma+\frac{1}{2}}(|x|\omega_+/iv_F)\right] ,\end{aligned} \tag{6.53}$$

où Γ est la fonction d'Euler, $\mathbf{K}_\alpha$ est la fonction de Bessel modifée de second type, a est le cutoff de distance, $\omega_+ = \omega + i0$ et γ est donné par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{K+K^{-1}-2}{4} . \tag{6.54}$$

Il faut noter que $0 < \gamma < 1$ correspond à une constante d'interaction $0.17 < K \leq 1$ qui assurera la convergence des intégrales et ainsi régulariser les divergences ultraviolettes. Notons aussi que ce résultat est valable dans la limite $|x| \gg a$ dans laquelle la bosonozation est applicable. Dans l'équation (6.53), l'indice r,r fait référence aux auto-corrélations. Les corrélations croisées $\mathcal{G}_{r,r'}$ sont nulles dans le mesure où elles ne préservent pas le nombre des porteurs de charge chiraux.

6.2.2 Densité d'états d'un fil quantique

La densité d'états est définie dans ce cas par la relation suivante :

$$\rho(\omega) = \frac{-1}{\pi}\sum_r Im[\mathcal{G}^R_{r,r}(x\to 0,\omega)] . \tag{6.55}$$

L'homogénéité du système impose la non-dépendance de la densité d'états du fil quantique en fonction de la position. Pour calculer la densité d'états il faut développer d'abord la fonction de Bessel modifiée de second type $\mathbf{K}_\alpha(z)$ au voisinage de $x = 0$. La fonction de Green retardée s'écrit dans cette limite [196] :

$$\mathcal{G}^R_{r,r}(x\to 0,\omega) \sim \frac{-\Gamma(\frac{1}{2}-\gamma)}{4\sqrt{\pi}\Gamma(1+\gamma)}\frac{\omega_+a}{v_F^2}(\frac{\omega_+a}{2iv_F})^{2\gamma-1} . \tag{6.56}$$

L'utilisation des propriétés de la fonction Γ permet d'écrire la densité d'états sous la forme :

$$\rho_0(\omega) = \frac{|\omega/\omega_F|^{2\gamma}}{\pi v_F\Gamma(1+2\gamma)} . \tag{6.57}$$

Dans la figure 6.3, nous avons tracé la densité d'états en fonction de l'énergie ω pour différentes valeurs du paramètre d'interaction K. Lorsque le paramètre d'interaction augmente, la valeur de la densité d'états diminue. De plus, au fur et à mesure que le paramètre d'interaction augmente, le profil de la densité d'états change, allant d'un comportement en loi de puissance pour des faibles valeurs de K à une valeur constante pour $K = 1$ sur toute la gamme de fréquences. Ceci est dû à l'exposant 2γ qui tend vers 0 lorsque K tend vers 1. Cette remarque montre qu'aucune excitation individuelle ne survit dans un liquide de Luttinger. Ce type de comportement met en évidence la dimension anormale des fermions [197].

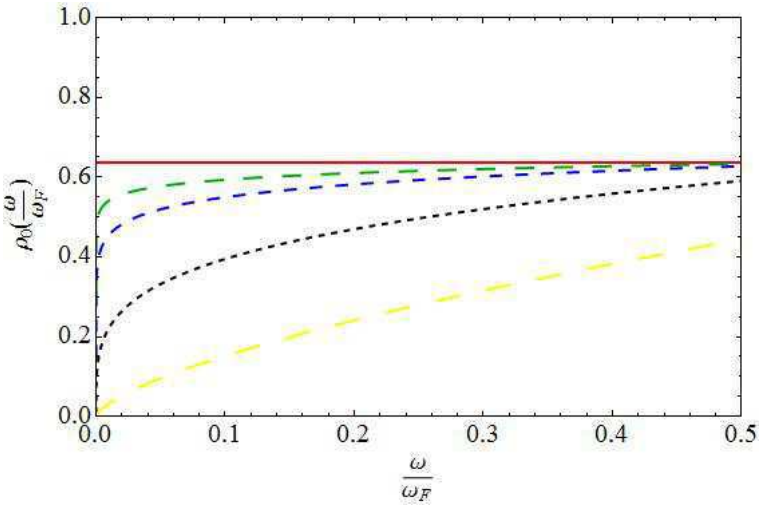

FIGURE 6.3 – Densité d'états $\rho_0(\omega)$ en unité de v_F en fonction de ω/ω_F pour différentes valeurs de K. Ligne rouge $K = 1$, ligne hachurée verte $K = 3/4$, ligne pointillée bleu $K = 2/3$, ligne pointillée noire $K = 1/2$ et ligne hachurée jaune $K = 1/3$.

6.3 Fil quantique en présence d'impuretés

Dans cette section nous allons exposer quelques propriétés des fils quantiques en présence d'une ou de deux impuretés. Dans une première partie nous allons décrire le comportement de la densité d'états pour un fil quantique décrit par un liquide de Luttinger en présence d'une seule impureté. Dans une deuxième partie, nous exposerons le résultat relatif au calcul de la fonction de Green retardée dans le cas d'un fil quantique en présence de deux impuretés. Le fil quantique en question est décrit par un liquide de Luttinger sans interaction. Ce que nous allons introduire sert comme comparaison aux résultats obtenus dans le cas d'un fil quantique connecté à deux réservoirs.

6.3.1 Cas d'une seule impureté en interaction

Plusieurs auteurs ont étudié le problème d'une impureté dans un liquide de Luttinger. Dans le papier d'Oreg et Finkel'stein, la densité d'états pour un fil quantique ou un état de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire a été étudiée [198]. Ces systèmes unidimensionnels sont décrits par un liquide de Luttinger. La densité d'états est calculée au niveau de la position de l'impureté à température finie. L'Hamiltonien du système est composé d'un terme de type liquide de Luttinger donné par l'équation (35 chapitre 5) et d'un terme de rétrodiffusion dû à la présence de l'impureté. Le terme de rétrodiffusion peut s'exprimer sous la forme [198] :

$$H_B = \Gamma F_L^\dagger F_R e^{i[\varphi_R(0,t)+\varphi_L(0,t)]} + h.c. \ . \tag{6.58}$$

La densité d'états est obtenue par la continuation analytique de la transformée de Fourier de la fonction de Green Matsubara $G(x, x; \tau)$:

$$\rho(\omega, x) = -\frac{1}{\pi} Im\Big[\int_0^\infty G(x, x; \tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau\Big]_{i\omega_n \to \omega + i\delta} \ . \tag{6.59}$$

Le résultat du calcul donne une densité d'état au voisinage de l'impureté qui s'écrit :

$$\rho(\omega) \sim \omega^{1/2K-1} \ , \tag{6.60}$$

qui en comparant avec l'expression de la densité d'état d'un liquide de Luttinger sans impuretés $\rho_0(\omega) \sim \omega^{(K+1/K)/2-1}$, est non seulement augmentée, mais aussi diverge pour $K > 1/2$. Dans la référence [199], Fabrizio et Gogolin ont recalculé la densité d'états pour le même système en tenant compte d'une subtilité importante. En effet, la non considération du facteur de phase qui apparaît à cause de la non-commutativité des champs fermionique implique la surestimation de la densité d'états tel qu'il a été montré dans la référence [198]. La densité d'état dans ce cas s'écrit :

$$\rho(\omega) \sim \omega^{1/K-1} \ , \tag{6.61}$$

qui ne s'annule que si $\omega \longrightarrow 0$, ce qui conduit donc à la suppression de la densité d'états ainsi que la conductance au voisinage de l'impureté. Notons que Kane et Fisher ont obtenu auparavant la même expression de la densité d'états [128].

Dans les références [20, 131], la densité d'états est calculée pour le même système mais dans le cas particulier où le paramètre d'interaction est $K = 1/2$. Rappelons que cette valeur du paramètre d'interaction permet d'utiliser la procédure de refermionisation et ainsi obtenir des résultats non perturbatifs. La densité d'état est obtenue dans une limite asymptotique (limite qui permet de calculer les intégrales qui mettent en jeu des opérateurs de vertex) ($\Gamma t \gg 1$) :

$$\rho(\omega) = \frac{2\omega}{\pi^2 v\Gamma} \ . \tag{6.62}$$

Dans un travail plus récent, Grishin et *coll.* [200], ont calculé la densité d'états pour un liquide de Luttinger en présence d'une seule impureté en s'appuyant sur un formalisme de bosonisation fonctionnelle [201, 202, 203]. Deux éléments sont importants dans ce formalisme : d'abord le découplage de l'Hamiltonien d'interaction contenant quatre opérateurs fermioniques par la transformation de Hubbard-Stratonovich. Ensuite, l'élimination des termes mixtes bosoniques-fermioniques dans l'action par une transformation de jauge. Dans ce modèle, l'Hamiltonien de rétrodiffusion s'écrit [200] :

$$H_B = v_F \int dx \Gamma(x) \Big[\psi_+^\dagger(x)\psi_-(x) + \psi_-^\dagger(x)\psi_+(x) \Big] \ , \tag{6.63}$$

l'indice $+$ $(-)$ fait référence aux porteurs se déplaçant vers la droite (vers la gauche). Notons que cette expression de l'Hamiltonien mixe les chiralités. Elle représente la version fermionique de l'Hamiltonien donné dans l'équation (6.58). La densité d'états est obtenue en établissant une continuation analytique de la transformée de Fourier de la fonction de Green fermionique $\mathcal{G}$ pour une position arbitraire par rapport à l'impureté. Cette impureté est prise ponctuelle $\Gamma(x) = \Gamma\delta(x)$ où l'amplitude de rétrodiffusion est $\Gamma \ll 1$ afin de garantir la linéarisation du spectre en présence de l'impureté. Les échelles d'énergies sont inférieures à l'énergie de Fermi. Notons que les auteurs ont inclus des quantités renormalisées telles que : la position $\tilde{x} \propto K|x|$, l'énergie $\tilde{\omega} = \omega/\omega_F$, la température $\alpha = \pi T/\omega_F$ et l'amplitude de rétrodiffusion $\Gamma' = \Gamma^{1/(1-K)}$ [204]. La densité d'états est obtenue explicitement pour $K \geq 1/2$ dans les limite asymptotique suivantes : la première limite correspond à une position au voisinage de l'impureté $\tilde{x} \ll \Gamma'^{-1} \ll \tilde{\omega}^{-1}$, la densité d'états s'écrit :

$$\rho(\omega) \sim \tilde{\omega}^{1/K-1} \Gamma'^{-(1/2)(1/K-K)} \ . \tag{6.64}$$

La deuxième limite correspond au cas où la densité d'états dépend à la fois de la position et de l'énergie $\Gamma'^{-1} \ll \tilde{x} \ll \tilde{\omega}^{-1}$:

$$\rho(\omega) \sim \tilde{\omega}^{1/K-1} \tilde{x}^{(1/2)(1/K-K)} \ . \tag{6.65}$$

Enfin, la dernière limite correspond à la densité d'états obtenue très loin de l'impureté, $\min(\tilde{x}, \Gamma'^{-1}) \gg \tilde{\omega}^{-1}$:

$$\rho(\omega) \sim \tilde{\omega}^{(1/2)(1/K+K)-1}. \tag{6.66}$$

La figure 6.4 montre un schéma qui décrit les trois régions correspondantes aux trois précédentes équations. La région hachurée diagonalement correspond à l'équation (6.64), le résultat est en accord avec l'expression originale de la densité d'états [128] (voir équation (6.61)). De plus, la dépendance de l'amplitude de rétrodiffusion est établie. La région hachurée verticalement correspond à l'équation (6.65). L'effet de l'impureté est toujours ressenti dans cette région. Cependant la domination de l'impureté diminue, et le comportement d'un liquide de Luttinger pur commence à se manifester. Enfin la région hachurée horizontalement correspond à l'équation (6.66). Dans cette limite l'effet de l'impureté n'est plus ressenti, et on retrouve le profil d'un liquide de Luttinger ordinaire.

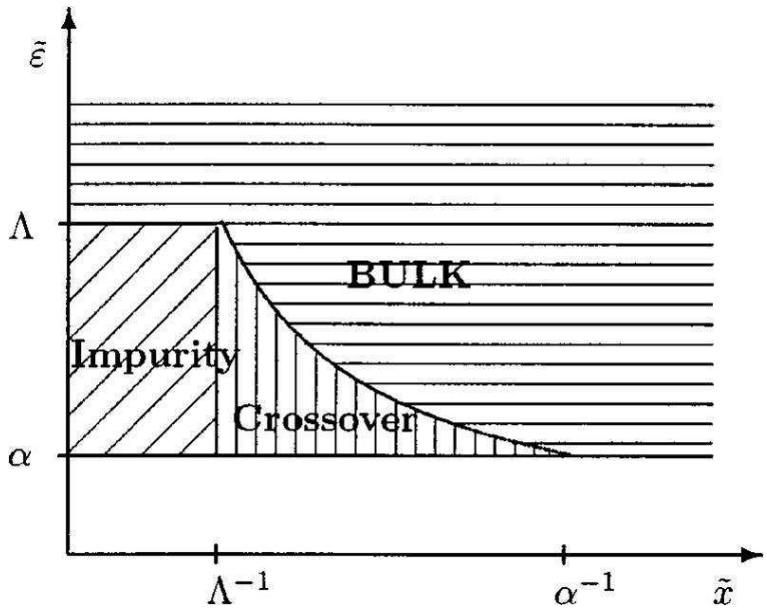

FIGURE 6.4 – Représentation des différentes régions qui montre le comportement de la densité d'états. D'après Grishin et *coll.* [200].

La présence d'une impureté dans un métal engendre des oscillations nommée oscillations de Friedel. Dans un liquide de Fermi, l'impureté cause des oscillations dans le profil de la densité [205, 206] :

$$\rho \sim cos(2k_F r + \delta)/r^d \ , \tag{6.67}$$

où d est la dimensionnalité, r est la distance par rapport à l'impureté et δ est un facteur de phase. Dans un système unidimensionnel, la question est comment les interactions électroniques peuvent affecter ces oscillations. Dans la référence [207], les auteurs ont étudié les oscillations de Friedel dans un système électronique unidimensionnel pour une interaction électronique arbitraire, et un potentiel d'impureté arbitraire. Les résultats ont été obtenus pour les cas sans spin ainsi que pour un spin 1/2. Les calculs ont été fait dans le cadre de la bosonisation. Les oscillations de Friedel peuvent s'obtenir de la fonction génératrice Z. Pour le cas sans spin, elle s'écrivent :

$$\langle \hat{\rho}(x) \rangle / \rho_0 = P(|x|, K, \Gamma) W(|x|, K) cos(2k_F x) \ , \tag{6.68}$$

où $\rho_0 = k_F/\pi$, P est la fonction de pinning, Γ est le potentiel de l'impureté et W est une fonction de poids qui s'écrit :

$$W(x, K) = (1 + x/\alpha)^{-K} \ , \tag{6.69}$$

où $\alpha \propto v_F/2K$ est une longueur caractéristique. Le comportement asymptotique à très large distance de l'impureté montre que les oscillations de Friedel décroissent en une loi de puissance x^{-K}. L'évaluation de la fonction de penning montre qu'elle est essentiellement constante. Pour le cas d'un spin 1/2, la densité s'écrit :

$$\langle \hat{\rho} \rangle \sim cos(2k_F x) x^{-2K} \ . \tag{6.70}$$

Le comportement asymptotique montre une décroissance plus rapide des oscillations. En effet, la loi de puissance s'exprime comme $\sim x^{(1+K)/2}$. Ce comportement est dû à l'addition du canal de spin.

Dans la référence [208], les auteurs ont étudié les oscillations de Friedel pour le cas $K = 1/2$. Cette valeur du paramètre d'interaction permet d'effectuer un calcul exact. Pour une température nulle, et dans la limite où on se trouve très proche de l'impureté $x \to 0$, les oscillations de Friedel s'écrivent :

$$\langle \hat{\rho} - \rho_0 \rangle / \rho_0 \propto -ln(x) \cos(2k_F x + \eta_F) \ , \tag{6.71}$$

dans l'autre limite ($x \to \infty$), nous avons :

$$\langle \hat{\rho} - \rho_0 \rangle / \rho_0 \propto x^{-1/2} \cos(2k_F x + \eta_F) \ , \tag{6.72}$$

où $\eta_F = K\pi\Gamma/k_F$.

6.3.2 Cas de deux impuretés sans interaction

Dans la référence [209], Song et *coll.* ont étudié la transmission électronique à travers deux impuretés dans un fil quantique. Ce qui nous intéresse le plus dans ce travail est l'établissement et la résolution de l'équation de Dyson. Les auteurs ont considéré un fil quantique quasi-unidimensionnel dans lequel un électron d'énergie E est soumis à un potentiel de confinement U_c dans la direction y, et aux potentiels des deux impuretés $U_{(i)}$, où l'indice $i = 1, 2$ fait référence à la première impureté et à la deuxième impureté, qui sont séparées par une distance L. La fonction de Green notée G^R est solution de l'équation du mouvement d'un électron. L'équation de Dyson de la fonction de Green G^R s'écrit (la dépendance temporelle n'est pas indiquée afin d'alléger les notations) :

$$G_S^R(x, x') = G_0^R(x, x') + \int dx_1 G_0^R(x, x_1) \sum_{i=1}^{2} U_{(i)}(x_1) G_S^R(x_1, x') \ , \tag{6.73}$$

où G_0^R est la fonction de Green sans impuretés. Le potentiel des impuretés est considéré comme ponctuel :

$$U_{(1)}(x) = \Gamma_1 \delta(x + L/2) \ , \tag{6.74}$$

$$U_{(2)}(x) = \Gamma_2 \delta(x - L/2) \ , \tag{6.75}$$

où Γ_1 et Γ_2 sont les amplitudes de rétrodiffusion. En utilisant ces expressions du potentiel des impuretés il est possible de résoudre l'équation de Dyson (6.73). La méthode de

résolution est exposée dans l'annexe C. La fonction de Green G^R s'écrit :

$$\begin{aligned} G_S^R(x,x') &= G_0^R(x,x') + \Big[G_0^R\Big(x,\frac{-L}{2}\Big) T_1 G_0^R\Big(\frac{-L}{2},x'\Big) + G_0^R\Big(x,\frac{+L}{2}\Big) T_2 G_0^R\Big(\frac{+L}{2},x'\Big) \\ &\quad + G_0^R\Big(x,\frac{-L}{2}\Big) T_1 G_0^R\Big(\frac{-L}{2},\frac{+L}{2}\Big) T_2 G_0^R\Big(\frac{+L}{2},x'\Big) \\ &\quad + G_0^R\Big(x,\frac{+L}{2}\Big) T_2 G_0^R\Big(\frac{+L}{2},\frac{-L}{2}\Big) T_1 G_0^R\Big(\frac{-L}{2},x'\Big) \Big] / D \ , \end{aligned} \tag{6.76}$$

avec $T_1 = \Gamma_1(1-g_{11}\Gamma_1)^{-1}$, $T_1 = \Gamma_2(1-g_{22}\Gamma_2)^{-1}$ et $D = 1 - T_1 g_{12} T_2 g_{21}$. Les g_{ij} sont les éléments d'une matrice 2×2 qui regroupe les fonctions de Green nues calculées aux positions des impuretés (voire l'annexe C).

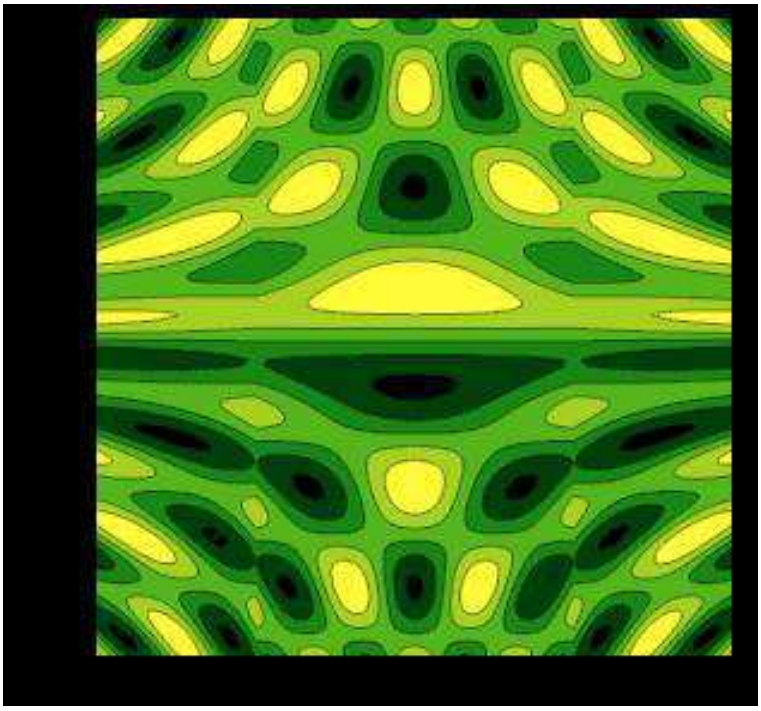

FIGURE 6.5 – Densité d'états calculée à partir de l'expression de la fonction de Green solution de l'équation de Dyson de Song et *coll.* en fonction de la position x/a et de l'énergie ω/ω_C pour $L/a = 1000$ et $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1$.

Pour connaître le comportement de la densité d'états définie au moyen de la fonction de Green de l'équation (6.76), nous avons choisie une expression de la fonction de Green nues dans l'espace (x,ω) qui correspond à celle d'un liquide de Luttinger non chiral :

$$G_0^{\mathrm{R}}(x,x';\omega) = -ie^{i\omega|x-x'|/v_F + ik_F(x-x')} \ . \tag{6.77}$$

Nous avons calculé ensuite la densité d'états notée ρ_S :

$$\rho_S(x,\omega) = -\frac{1}{\pi} Im\Big[G_S^R(x,x;\omega)\Big] \ . \tag{6.78}$$

Dans la limite de faible rétrodiffusion, un calcul perturbatif par rapport aux Γ_i $(i=1,2)$ est appliqué. Nous avons alors $T_i \approx \Gamma_i$ et $D \approx 1$. La densité d'états se réduit alors à

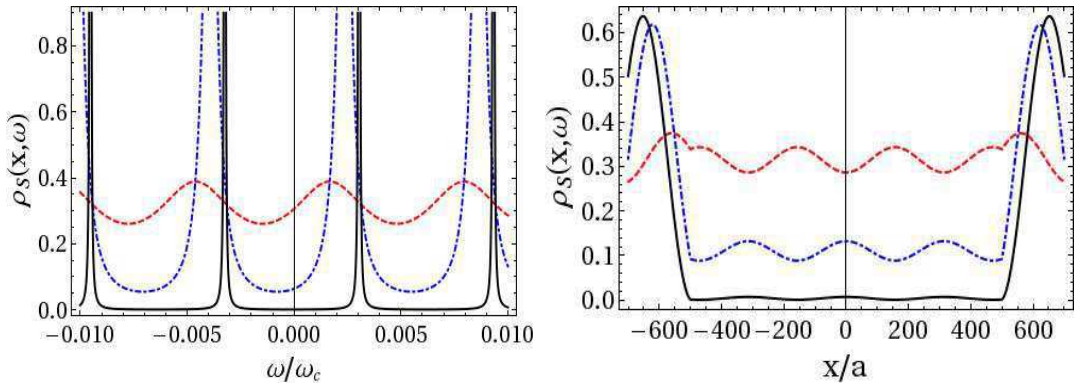

FIGURE 6.6 – Densité d'états calculée à partir de l'expression de la fonction de Green solution de l'équation de Dyson de Song et *coll.* :A Gauche En fonction de l'énergie ω/ω_C à $x = 0$, pour $L/a = 1000$, à droite en fonction de la position x/a pour $\omega/\omega_C = 0.01$. Ligne rouge hachurée $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1\hbar\omega_C$, ligne bleue hachurée en pointillés $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \hbar\omega_C$ et ligne solide noire $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 10\hbar\omega_C$.

l'expression :

$$\rho_S(x,\omega) \approx \rho_0 + \frac{1}{\pi}\Big[\Gamma_1 \sin(2\omega|x + L/2|) + \Gamma_2 \sin(2\omega|x - L/2|)\Big] \ , \tag{6.79}$$

avec $\rho_0 = 1/\pi$ la densité d'états de la fonction de Green nue sans interaction. A forte rétrodiffusion, la fonction de Green calculée dans cette approche devient réelle :

$$G_S^R(x,x;\omega) \approx \frac{\cos(\omega L) - \cos(2\omega x)}{\sin(\omega L)} \ . \tag{6.80}$$

Nous avons représenté la densité d'états en fonction de x et ω. Puis en fonction de ω et en fonction de x séparément. Dans la figure 6.5 la densité d'états est représentée en fonction de (x,ω). Dans la figures 6.6(gauche), la densité d'états calculée à partir de la fonction de Green (6.76) est représentée en fonction de ω/ω_C pour différentes valeurs des amplitudes de rétrodiffusion prises égales $\Gamma_1 = \Gamma_2$. La densité d'états ρ_S change de comportement en fonction de la valeur des amplitudes de rétrodiffusion. En effet, pour une faible rétrodiffusion la parité est brisée. Quand la rétrodiffusion devient forte la parité est restaurée. On se retrouve dans une situation où le fil est coupé au niveau des impuretés, le système est donc isolé. Les pics indiquent la quantification des niveaux d'énergie. Sur la figure 6.6(droite), la densité d'états est tracée en fonction de la position. Le comportement oscillatoire à faible rétrodiffusion diffère suivant la région (dans l'intervalle $]-L/2,+L/2[$ ou en dehors). Quand la rétrodiffusion augmente jusqu'à atteindre le rgime de forte rétrodiffusion, la densité d'états s'annule dans la région $]-L/2,+L/2[$. Un comportement typique d'un système isolé.

6.4 Fil quantique connecté à deux électrodes

Nous considérons dans cette partie un fil quantique connecté à deux réservoirs. Nous avons pu établir et résoudre l'équation de Dyson pour ce système. La solution de l'équation de Dyson est la fonction de Green retardée, qui apparaît dans la définition de la densité d'états. Comme perspective, l'application du résultats obtenu à partir de l'équation de Dyson établie dépend du choix de la fonction de Green retardée sans impuretés. Ce choix

est lié à la nature même du fil quantique. Dans une première application le fil quantique est considéré uniforme, décrit par un liquide de Luttinger homogène. Les profils obtenus pour la densité d'états sont exposés dans la section 6.5. La deuxième application consiste à considérer un fil quantique inhomogène, décrit par un liquide de Luttinger dont la paramètre d'interaction dépend de la position. Le calcul de la fonction de Green nue fermionique est beaucoup plus difficile. En effet, il n'est pas possible de calculer la transformée de Fourier de la fonction de Green retardée analytiquement. Cependant, la fonction de Green retardée fermionique dans l'espace (x, t) est obtenue analytiquement en termes des fonctions de Green bosoniques. L'application au nanotube de carbone est aussi possible.

6.4.1 Modèle

Le système est donc composé d'un fil quantique connecté à deux électrodes. Il est décrit par un liquide de Luttinger en interaction. Les points de contact avec les réservoirs de gauche et de droite sont représentés par deux impuretés localisées aux positions $x = \pm L/2$. Les impuretés sont caractérisés par leurs amplitudes de rétrodiffusion Γ_1 et Γ_2 (voir figure 6.7).

L'objectif est de calculer la densité d'états en déterminant la fonction de Green retardée solution de l'équation de Dyson, que l'on construira dans le cadre de l'approximation suivante :

1. Considérer un Hamiltonien total $H = H_0 + H_b + H_{int}$ où H_0 est un Hamiltonien fermionique sans interaction, H_b est un Hamiltonien de rétrodiffusion et H_{int} est l'Hamiltonien d'interaction.
2. Etablir et résoudre l'équation de Dyson en ne considérant que $H_0 + H_b$.
3. Remplacer les fonctions de Green associées à H_0 présentes dans la fonction de Green retardée par des fonctions de Green calculées dans le cadre de la théorie des liquides de Luttinger en interaction et sans impuretés.

Afin de justifier cette approximation, écrivons d'abord l'Hamiltonien d'interaction coulombienne en fonction des opérateurs fermioniques $\psi_r(x)$, où $r = \pm$ désigne les porteurs de charge se déplaçant vers la droite et vers la gauche :

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{r,r'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_r^\dagger(x) \psi_{r'}(x) V(x,y) \psi_r^\dagger(y) \psi_{r'}(y) dx dy \ , \tag{6.81}$$

Le potentiel d'interaction $V(x, y)$ est de nature décroissante. Il atteint sa valeur maximale pour $x = y$. Dans le cas où on ne garde que cette contribution maximale, ce qui revient à considérer la forme $V(x, y) = V_0 \delta(x - y)$, la correction qu'apporte le terme d'interaction dans l'équation de Dyson représente un simple décalage dans l'énergie. Ce décalage peut être considéré comme une renormalisation de l'énergie cinétique (voir annexe D pour le détail du calcul). Par conséquent, ne pas considérer le terme d'interaction dans l'Hamiltonien total n'affecte pas la validité de notre méthode.

L'Hamiltonien total du système est la somme d'un Hamiltonien cinétique sans interaction et d'un Hamiltonien de rétrodiffusion. L'Hamiltonien cinétique s'écrit [200]

$$H_0 = -i v_F \sum_{r,\sigma} r \int dx \psi_{r,\sigma}^\dagger(x,t) \partial_x \psi_{r,\sigma}(x,t) \ , \tag{6.82}$$

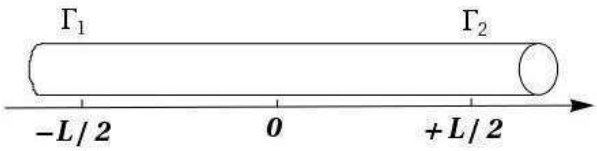

FIGURE 6.7 – Schéma d'un fil unidimensionnel en présence de deux impuretés.

où σ est l'indice du spin. L'Hamiltonien de rétrodiffusion mixe les chiralités, il s'écrit [200] :

$$H_{bi} = \sum_{\sigma} \int dx \lambda_i(x) [\psi^{\dagger}_{+,\sigma}(x,t)\psi_{-,\sigma}(x,t) + \psi^{\dagger}_{-,\sigma}(x,t)\psi_{+,\sigma}(x,t)]; i = 1,2 \ , \tag{6.83}$$

où $\lambda_i(x) = \Gamma_i U_i(x)$ est le potentiel des impuretés, qui est produit d'une amplitude de rétrodiffusion $\Gamma_i \ll 1$ par un facteur de forme $U_i(x)$.

6.4.2 Equation de Dyson

L'équation de Dyson est dérivée à partir de l'équation du mouvement d'un électron (voir annexe E.1). Le calcul du commutateur $\partial_t \psi_{r,\sigma}(x,t) = \frac{i}{\hbar}[H, \psi_{r,\sigma}(x,t)]$ donne lieu à deux contributions : une contribution cinétique et une contribution de rétrodiffusion qui se traduisent par les deux termes du membre de droite de l'équation suivante :

$$\frac{\partial \psi_{r,\sigma}(x,t)}{\partial t} = i v_F r \partial_x \psi_{r,\sigma}(x,t) - \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{2} \int dx' \lambda_i(x') \psi_{-r,\sigma}(x',t) \delta(x-x') \ . \tag{6.84}$$

On définit maintenant la fonction de Green retardée $G^R = G_t - G^<$ [30] :

$$G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') = -i\Theta(t-t')\langle\{\psi_{r,\sigma}(x,t), \psi^{\dagger}_{r',\sigma'}(x',t')\}\rangle \ . \tag{6.85}$$

L'utilisation de l'équation (6.84) et un certain nombre de manipulation permet d'obtenir une équation de type Schrödinger pour la fonction de Green retardée :

$$\begin{aligned}(i\hbar\partial_t - i v_F r \partial_x) G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') &= \delta_{r,r'}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x-x')\delta(t-t') \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \int dx \lambda_i(x) G^R_{-r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t')\delta(x-x') \ .\end{aligned} \tag{6.86}$$

L'introduction de la fonction de Green nue $g^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t')$, et l'intégration par rapport par rapport au temps et par rapport à la position permettent d'avoir l'équation de Dyson pour la fonction de Green retardée :

$$\begin{aligned}G^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x,x';t,t') &= g^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x,x';t,t') \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \sum_{r_1,\sigma_1} \sum_{m_1} \int dt_1 \int dx_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1;m,m_1}(x,x_1;t,t_1)\lambda_i(x_1) \\ &\times G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma';m_1,m'}(x_1,x';t_1,t') \ ,\end{aligned} \tag{6.87}$$

où m est l'indice qui représente les différents modes ou canaux que l'on a rajouté dans ce résultat. Cette équation n'est pas équivalente à l'équation (8) de la référence [209]. La

raison est que nous avons pris un Hamiltonien de rétrodiffusion différent. En effet, dans un liquide de Luttinger il faut tenir compte de la chiralité.

Exprimons maintenant le potentiel des impuretés localisées en $x = \pm L/2$. Les deux composantes du potentiel λ_i s'écrivent :

$$\lambda_1(x = -L/2) = \delta(x + L/2)\Gamma_1 \ , \tag{6.88}$$

$$\lambda_2(x = +L/2) = \delta(x - L/2)\Gamma_2 \ . \tag{6.89}$$

La propriété d'invariance par translation dans le temps des fonctions de Green :

$$G^R(t, t') = G^R(t - t', 0) \ , \tag{6.90}$$

$$g^R(t, t') = g^R(t - t', 0) \ , \tag{6.91}$$

permet de calculer la transformée de Fourier en $(t - t')$ de l'équation de Dyson (6.87) :

$$\begin{aligned} &G^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x, x'; \omega) = g^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x, x'; \omega) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1,m_1} \Gamma_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1;m,m_1}(x, -L/2; \omega) G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma';m_1,m'}(-L/2, x'; \omega) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1,m_1} \Gamma_2 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1;m,m_1}(x, +L/2; \omega) G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma';m_1,m'}(+L/2, x'; \omega) \ . \end{aligned} \tag{6.92}$$

C'est cette équation qu'il faut résoudre afin d'obtenir l'expression de la fonction de Green retardée qui permet de calculer la densité d'états.

6.4.3 Solution de l'équation de Dyson

Avant d'exposer la solution de l'équation de Dyson, il est important d'éclaircir certains points. D'abord il faut noter que l'équation (6.92) est linéaire. Ce qui permet d'avoir une solution analytique. Dans notre solution, nous avons supposé que le fil quantique ne contient qu'un seul mode. De plus, nous avons considéré qu'il y a qu'une seule contribution au niveau de la sommation sur l'indice du spin, et deux contributions au niveau de la sommation sur l'indice de chiralité r_1. Afin de résoudre cette équation, il faut la récrire pour toutes les valeurs que peuvent prendre les indices r et r'. Les équations se regroupent ensuite en deux groupes, un groupe donc l'indice de chiralité de la fonction de Green est r, r, et un autre groupe dont l'indice est $-r, r$. Autrement dit, une solution qui conserve la chiralité et une autre solution qui la mélange. Dans l'annexe E.2 la méthode de résolution est exposée intégralement. La fonction de Green retardée G^R correspond à la somme des deux solutions $G^R_{r,r}$ et $G^R_{-r,r}$ qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} G^R_{r,r}(x, x') &= g^R_{r,r}(x, x') + g^R_{r,r}(x, -L/2)\Gamma_1 G^R_{-r,r}(-L/2, x') \\ &\quad + g^R_{r,r}(x, +L/2)\Gamma_2 G^R_{-r,r}(+L/2, x') \ , \end{aligned} \tag{6.93}$$

$$G^R_{-r,r}(x, x') = g^R_{r,r}(x, -L/2)\Gamma_1 G^R_{r,r}(-L/2, x') + g^R_{r,r}(x, +L/2)\Gamma_2 G^R_{r,r}(+L/2, x') \ , \tag{6.94}$$

avec les fonctions :

$$G^R_{r,r}(-L/2,x') = \frac{T_1(g^R_1 + \gamma_{12}T_2 g^R_2)}{\Gamma_1(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \ , \tag{6.95}$$

$$G^R_{r,r}(+L/2,x') = \frac{T_2(g^R_2 + \gamma_{21}T_1 g^R_1)}{\Gamma_2(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \ , \tag{6.96}$$

et :

$$\begin{aligned} G^R_{-r,r}(-L/2,x') &= g^R_{-r,-r}(-L/2,-L/2)\frac{T_1(g^R_1 + \gamma_{12}T_2 g^R_2)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \\ &\quad + g^R_{-r,-r}(+L/2,-L/2)\frac{T_2(g^R_2 + \gamma_{21}T_1 g^R_1)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \ , \end{aligned} \tag{6.97}$$

$$\begin{aligned} G^R_{-r,r}(+L/2,x') &= g^R_{-r,-r}(-L/2,+L/2)\frac{T_1(g^R_1 + \gamma_{12}T_2 g^R_2)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \\ &\quad + g^R_{-r,-r}(+L/2,+L/2)\frac{T_2(g^t_R + \gamma_{21}T_1 g^R_1)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \ . \end{aligned} \tag{6.98}$$

Ces fonctions s'écrivent en terme des fonctions de Green $g^R_{r,r}(-L/2,x') = g^R_1$ et $g^R_{r,r}(+L/2,x') = g^R_2$, des coefficients $T_1 = \Gamma_1(1-\gamma_{11}\Gamma_1)^{-1}$ et $T_1 = \Gamma_2(1-\gamma_{22}\Gamma_2)^{-1}$ et des éléments de la matrice :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \ , \tag{6.99}$$

dont l'expression est donnée dans l'annexe E.2.

Cette solution est utilisée par la suite pour la calcul de la densité d'états. La différence entre les différents types de systèmes se fait par le choix de la fonction de Green retardée sans impuretés. Celle-ci une fois remplacée dans les équations (6.93) et (6.93) permet d'estimer la fonction de Green totale ainsi que la densité d'états.

6.5 Résultats : densité d'états

Dans cette partie nous allons appliquer les résultats obtenus pour la fonction de Green retardée pour le cas d'un fil quantique homogène, et calculer la densité d'états. Dans le cas d'un fil quantique inhomogène, nous écrirons la fonction de Green retardée fermionique en (x,t), la transformée de Fourier ne pouvant être évaluée analytiquement.

6.5.1 Paramètre d'interaction uniforme

Pour un fil quantique homogène la constante d'interaction ne dépend pas de la position. Dans un tel système, les fonctions de Green nues sont invariantes par translation spatiale :

$$g(x,x';t,t') = g(x-x';t-t') \ . \tag{6.100}$$

La densité d'états s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho(x,\omega) = \sum_{r,r'} \rho_{r,r'}(x,\omega) \ , \tag{6.101}$$

avec :

$$\rho_{r,r}(x,\omega) = \frac{-2}{\pi} Im\Big[G^R_{r,r}(x,x,\omega)\Big] \ , \tag{6.102}$$

et :

$$\rho_{-r,r}(x,\omega) = \frac{-2}{\pi} Im\Big[G^R_{-r,r}(x,x,\omega)\Big] \ . \tag{6.103}$$

L'application est faite pour deux cas. D'abord, une authentification des résultats pour $K = 1$ avec ceux obtenus dans l'approche de Song et *coll.* Ensuite, une application pour un paramètre d'interaction homogène quelconque.

Application à $K = 1$

Pour ce cas on considère la fonction de Green nue sans interaction :

$$g^{R,(0.0)}_{r,r}(x,x';\omega) = -ie^{i\omega|x-x'|/v_F + irk_F(x-x')}\Theta\big(r(x-x')\big) \ . \tag{6.104}$$

Nous avons calculé la densité d'états. Puis nous l'avons tracée par rapport à la position et par rapport à l'énergie. Dans la limite des faibles rétrodiffusion, un développement perturbatif en Γ_i permet d'écrire :

$$\rho(x,\omega) \approx \rho_0 + \frac{1}{\pi}\Big[\Gamma_1 \sin(2\omega|x+L/2|) + \Gamma_2 \sin(2\omega|x-L/2|)\Big] \ , \tag{6.105}$$

qui est identique à la relation (6.79) obtenue dans l'approche de Song et *coll.* Dans la figure 6.8(a), nous avons tracé la densité d'état ρ en fonction de ω/ω_C à $x = -L/4$ pour différentes valeurs de l'amplitude de rétrodiffusion $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$. La densité d'états ρ exhibe un profil oscillant à faible rétrodiffusion. Ce comportement change quand l'amplitude de rétrodiffusion augmente. A forte rétrodiffusion, des pics apparaissent, ce qui traduit le fait que le système devient isolé et les niveaux d'énergie sont quantifiés. Dans la figure 6.8(b), la densité d'état ρ est tracée en fonction de la position pour différentes valeurs de l'amplitude de rétrodiffusion et pour une énergie $\omega/\omega_C = 0.01$. Le comportement oscillatoire domine à faible rétrodiffusion. A forte rétrodiffusion, la densité d'états s'annule pour une position comprise entre $-L/2$ et $+L/2$, un comportement typique d'un système isolé. Il important de citer deux différences avec les résultats de Song et *coll.* dans cette limite. Premièrement, le régime de forte rétrodiffusion est atteint plus rapidement dans notre approche ($\Gamma \approx 1.9\hbar\omega_C$). Deuxièmement, les pics n'ont pas la même position. Ce décalage des pics est dus a priori à cause de la non considération de la diffusion vers l'avant dans notre approche. La justification vient du fait que ces termes sont absorbés dans l'Hamiltonien cinétique [20]. Dans le modèle de Song, tout les types de diffusion sont incluses. Notons que dans le régime de faible rétrodiffusion les termes de diffusion vers l'avant n'ont pas une contribution importante ce qui permet de retrouver les résultats de Song et *coll.*

Paramètre d'interaction $K \neq 1$

Le second cas correspond au choix de la fonction de Green en interaction de la référence [196] donnée par l'équation (6.53). Nous avons tracé la densité d'états en fonction de l'énergie et de la position. Dans la figure 6.9, la densité d'états ρ est tracée en fonction de ω/ω_C pour différentes valeurs du paramètre d'interaction K. La figure de gauche correspond au régime de faible rétrodiffusion. Pour $K = 1$, on retrouve le profil impair comme celui obtenu pour le cas sans interaction (voir figure 6.6). Quand l'interaction devient plus importante, l'effet des impuretés diminue et on retrouve un profil en loi de puissance équivalent au cas d'un liquide de Luttinger sans impuretés. Pour K petit, la valeur de la densité d'états diminue. La figure de droite est tracée pour une amplitude de rétrodiffusion plus élevée, il apparaît que les oscillations liées aux impuretés se manifeste même pour des interactions plus importantes. Sur la figure 6.10 de gauche, le régime de forte rétrodiffusion

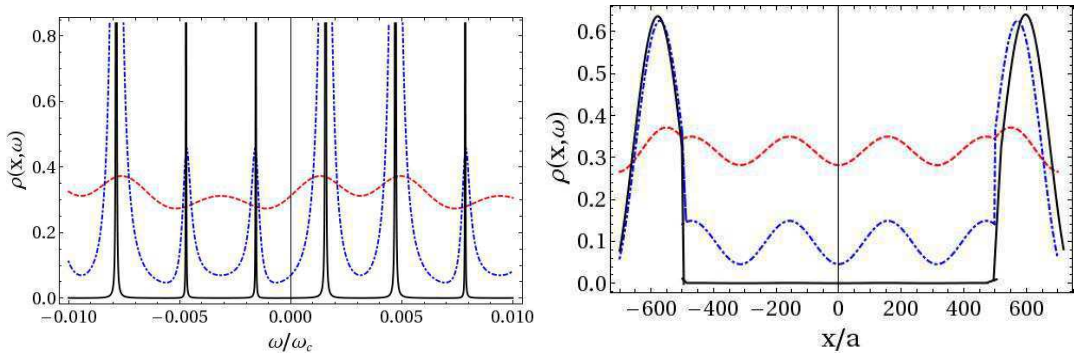

FIGURE 6.8 – A gauche (a) : Densité d'états ρ en fonction de ω/ω_C pour $x = -L/4$ et $L/a = 1000$. A droite (b) : Densité d'états ρ en fonction de la position x/a, pour $\omega/\omega_C = 0.01$. Ligne rouge hachurée $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1\hbar\omega_C$, ligne bleue hachurée en pointillés $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1\hbar\omega_C$ et ligne solide noire $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.9\hbar\omega_C$.

est atteint. Les pics qui apparaissent ont une large différence au niveau des amplitudes qui sont très grandes pour K proche de 1. Ces pics traduisent la quantification des niveaux d'énergie du système isolé se trouvant dans l'intervalle $]-L/2, +L/2[$.

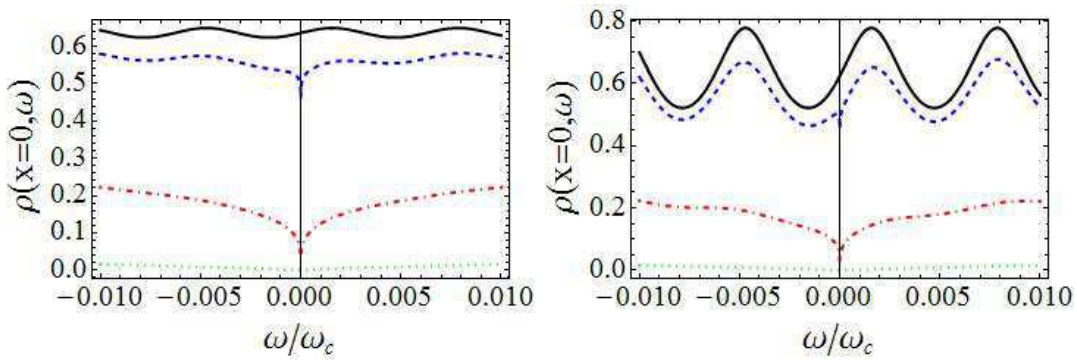

FIGURE 6.9 – Densité d'états ρ en fonction de ω/ω_C pour $x = 0$ et $L/a = 1000$. La figure à gauche correspond à $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.01\hbar\omega_C$ et celle de droite à $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.1\hbar\omega_C$. Les valeurs du paramètre d'interaction sont : $K = 1$ (ligne solide noir), $K = 0.8$ (ligne hachurée bleue), $K = 0.5$ (ligne hachurée pointillée violet) et $K = 0.3$ (ligne en pointillée verte).

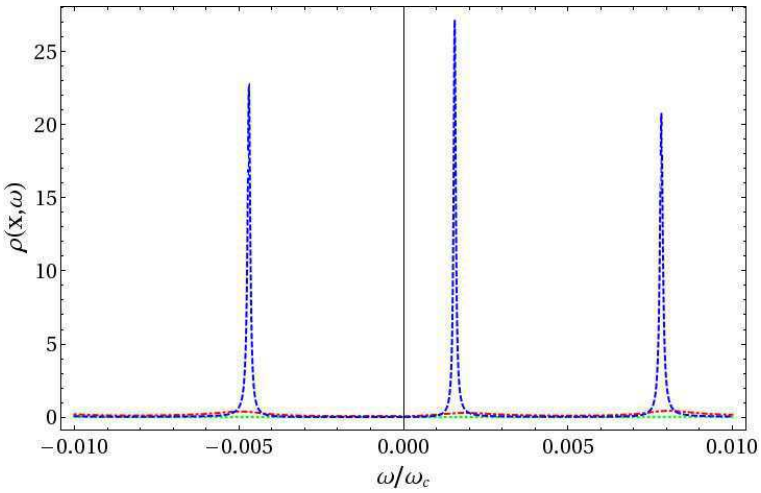

FIGURE 6.10 – Densité d'états ρ en fonction de ω/ω_C pour $x = 0$ et $L/a = 1000$ dans la limite des fortes rétrodiffusion. Les courbes : $K = 0.8$ (ligne hachurée bleue), $K = 0.5$ (ligne hachurée pointillée violet) et $K = 0.3$ (ligne en pointillée verte).

6.5.2 Paramètre d'interaction dépendant de la position

Dans cette partie nous considérons un liquide de Luttinger inhomogène. Le paramètre d'interaction dépend de la position comme le montre le schéma de la figure 6.11. Nous réécrivons l'Hamiltonien qui décrit le système dans le cas où que la contribution du secteur charge est considérée :

$$H_0^{inhomo} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{v(x)}{2} [K(x)(\partial_x \phi(x))^2 + K^{-1}(x)(\partial_x \theta(x))^2] \ . \tag{6.106}$$

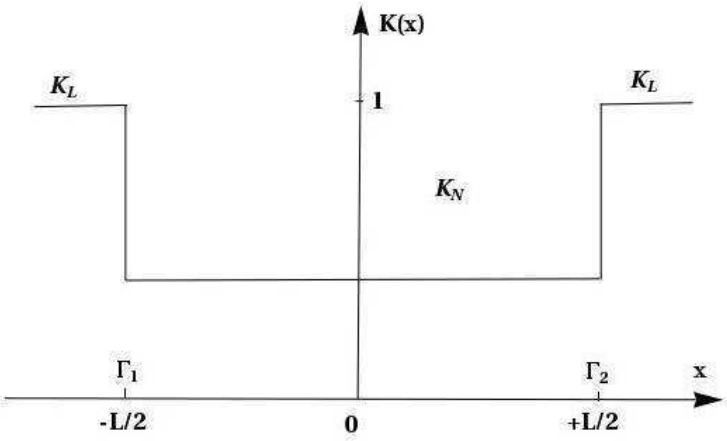

FIGURE 6.11 – Schéma représentant un fil quantique inhomogène en présence de deux impuretés localisées en $x = \pm L/2$. D'après les références [180, 178, 179].

La détermination de la densité d'états dans ce cas passe par deux étapes. La première étape consiste à évaluer la fonction de Green retardée fermionique au moyen des fonctions de Green bosoniques :

$$\begin{aligned} g_r^R(x,x';t,t') &= -\frac{i\Theta(t-t')}{\pi a} \\ &\times \mathrm{Re}\{ e^{irk_F(x-x')} e^{\pi g_{\theta\theta}^{+-}(x,x';t,t') + \pi r g_{\theta\phi}^{+-}(x,x';t,t')} \\ &\times e^{\pi r g_{\phi\theta}^{+-}(x,x';t,t') + \pi g_{\phi\phi}^{+-}(x,x';t,t')} \} \ , \end{aligned} \tag{6.107}$$

où $g_{\theta\theta}^{+-}$, $g_{\theta\phi}^{+-}$, $g_{\phi\theta}^{+-}$, and $g_{\phi\phi}^{+-}$ sont les fonctions de Green Keldysh associées aux champs bosoniques θ et ϕ. L'ensemble des fonctions de Green bosnoniques et fermioniques sont données dans l'annexe F. La deuxième étape consiste à évaluer numériquement la transformée de Fourier de la fonction de Green fermionique (voir annexe F). Cette dernière étape est en cours, une fois achevée elle permet d'avoir la densité d'état pour un fil quantique inhomogène connecté à deux réservoirs.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu l'importance de l'évaluation des fonctions de Green en physique mésoscopique. En effet, ces fonctions rentrent dans la définition d'un certain nombre de grandeurs physiques importantes. Nous avons vu l'évolution du formalisme qui définit ces fonctions de Green. Allant de la théorie de la réponse linéaire, et arrivant au formalisme de Keldysh. Ce formalisme constitue un outil puissant valable au delà de la théorie de perturbation. Les fonctions de Green Keldysh sont solutions des équations de Dyson. Ces équations de Dyson peuvent être dérivées à partir de l'équation du mouvement.

Un exemple de système où une des fonctions de Green joue un rôle important, est celui du fil quantique. Le profil de la densité d'états change suivant la nature du fil quantique. La considération d'un fil quantique en interaction, sans interaction, sans impuretés où en présence d'une ou plusieurs impuretés change le comportement de la densité d'états. Plusieurs travaux ont été fait dans le cadre d'un fil quantique en présence d'une seule impureté. Le résultat le plus important est la suppression de la densité d'états au voisinage de l'impureté qui conduit à la suppression de la conductance.

Dans notre travail, nous avons établi et résolu l'équation de Dyson pour un fil quantique connecté à deux réservoirs. Le résultat obtenu permet de déterminer la forme de la fonction de Green retardée. Cette solution est indépendante du type du système. En effet, le choix du système est lié au choix de la fonction de Green retardée sans impuretés figurant dans l'expression de la fonction de Green retardée solution de l'équation de Dyson. Deux cas sont examinés, le premier cas correspond à un fil quantique homogène, pour lequel la densité d'états est en bon accord avec les résultats standards dans la limite d'une position très loin des impuretés ou dans la limite sans interaction. Le deuxième cas est très intéressant, il correspond au cas d'un fil quantique inhomogène. La finition du travail est en cours. Des perspectives pour le nanotube de carbone sont également envisagées.

Perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié les corrélations de courant, l'admittance quantique ainsi que la densité d'états pour les nano-systèmes en interaction. La première partie de la thèse est consacrée au phénomène de transport, où nous avons étudié les corrélations de courant et l'admittance dans le cas des états de bord dans l'effet Hall quantique fractionnaire. La deuxième partie est consacrée à l'étude d'un conducteur cohérent couplé avec l'environnement, où nous avons calculé le bruit non-symétrisé à fréquence finie ainsi que la conductance à fréquence finie. Dans la troisième partie nous avons calculé la densité d'états pour un fil quantique connecté à deux électrodes.

Dans une première partie (chapitre trois), nous avons considéré un système constitué de deux états de bord dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. Ces états de bord se propagent dans deux directions opposées. L'interaction entre ces deux états de bord se fait au moyen d'une constriction réalisée grâce à une tension de grille, permettant ainsi le passage des quasi-particules par effet tunnel entre les états de bord. Les quasi particules ont une charge fractionnaire $\bar{e} = e/2$, ce qui correspond à un facteur de remplissage $\nu = 1/2$. Cette situation ne correspond pas à un cas observé dans l'expérience, mais elle permet néanmoins d'avoir une idée sur le comportement des états de bord dans de telles conditions. Le système considéré est équivalent à un liquide de Tomonaga-Luttinger de paramètre d'interaction $K = 1/2$ en présence d'une impureté localisée. L'utilisation de la procédure de refermionisation nous a permis d'avoir des résultats exacts pour l'admittance quantique et les fluctuations de courant.

Les corrélations de courant et l'admittance s'expriment en terme d'amplitude de transmission. Ce qui nous a permis d'obtenir des expressions alternatives des auto-corrélations et des corrélations croisées en terme de l'admittance. De plus, dans les deux limites de température (faible et forte), les corrélations de courant s'expriment exclusivement en terme de l'admittance. Dans le régime de faible température et de faible rétrodiffusion, nous avons observé des singularités dans le profil des corrélations de courant pour des fréquences égales à $\pm\bar{e}V_{dc}/\hbar$. Ces singularités sont celles de l'admittance.

Dans une seconde partie (chapitre quatre), nous avons étudié un conducteur cohérent couplé avec l'environnement. Le système est constitué d'un conducteur à un canal en série avec une résistance de valeur égale au quantum de résistance $R = R_q$. Nous avons pu étudier ce système en le ramenant par le mapping à un liquide de Tomonaga-Luttinger de paramètre d'interaction $K = 1/2$ en présence d'une impureté. L'utilisation de la procédure de refermionisation nous a permis d'avoir des résultats non-perturbatifs des quantités calculées qui déterminent les propriétés stationnaires et dynamiques du transport pour tous les régimes de températures, toutes les tensions appliquées et toutes les fréquences inférieures à la fréquence de coupure ω_C. A température nulle les résultats sont analytiques. Les résultats dépendent d'un paramètre non-universel V_B, déterminé à la fois par les

propriétés du conducteur et de l'environnement.

Dans le régime stationnaire, nous avons remarqué que le blocage de Coulomb persiste quelque soit la rétrodiffusion. Par ailleurs, les expressions du courant et du bruit à fréquence nulle obtenues sont équivalentes à celles de la théorie de la diffusion. Dans les limites correspondantes à une tension V très inférieure ou très supérieure au paramètre V_B, on retrouve les lois de puissances pour le courant moyen correspondantes aux régimes de faible rétrodiffusion et de forte rétrodiffusion. Pour ces mêmes cas limites, le bruit à fréquence nulle devient poissonnien. D'autre part, le bruit à fréquence finie ne correspond pas à celui obtenu dans le cadre de la théorie de la diffusion, exhibant une contribution d'émission nulle au-delà de eV pour une température nulle. Concernant la conductance à fréquence finie, elle aussi ne s'écrit pas de la même façon que dans le cas de la théorie de la diffusion. Elle s'exprime au moyen du courant moyen sous une forme équivalente à celle de la théorie de Tien-Gordon. Le profil obtenu pour la conductance est en bon accord avec les résultats expérimentaux de mesure de la conductance pour un conducteur cohérent en série avec une résistance. Ce même type d'expérience constitue une bonne vérification du mapping.

Une généralisation est possible à un conducteur à plusieurs canaux. Le mapping reste valable, et la procédure de refermionisation s'applique aussi. Cependant, il est possible que les résultats ne seront pas analytiques même à température nulle. Il serait intéressant d'effectuer le calcul pour une résistance quelconque, ce qui exclu l'utilisation de la refermionisation et impose plutôt des méthodes perturbatives.

Dans une troisième partie (chapitre six), nous avons étudié un fil quantique connecté à deux électrodes. Le fil est décrit par un liquide de Tomonaga-Luttinger de paramètre d'interaction K. Les points de contact sont décrits par deux impuretés ponctuelles. Nous avons établi l'équation de Dyson pour la fonction de Green retardée en négligeant la contribution de l'Hamiltonien d'interaction, qui ne rajoute qu'un décalage dans l'énergie cinétique. L'équation de Dyson obtenue est linéaire, sa résolution permet d'obtenir la fonction de Green retardée en présence d'impuretés en terme de fonctions de Green retardées nues. La fonction de Green retardée permet de calculer la densité d'états dans différents cas.

Le choix des fonctions de Green nues permet de distinguer deux cas. Le premier cas correspond à un fil quantique homogène, où le paramètre d'interaction est uniforme. Le profil de la densité d'état exhibe une compétition entre la rétrodiffusion et la force de l'interaction. A faible rétrodiffusion, on retrouve le comportement impaire en fréquence pour une faible interaction. Le choix d'une position loin des impuretés ramène le profil de la densité d'états à celui du cas sans impuretés. Dans le profil de la densité d'états en fonction de la position pour des faibles rétrodiffusions, on remarque l'apparition d'un comportement en loi de puissance lorsque la valeur du paramètre d'interaction diminue. Le second cas correspond à un fil quantique inhomogène. le paramètre d'interaction dans ce cas dépend de la position. La différence avec le premier cas réside dans les fonctions de Green nues. Ces fonctions de Green fermioniques se calculent à partir des fonctions de Green bosoniques. L'étape suivante consiste à calculer la transformée de Fourier des fonctions de Green fermioniques afin de pouvoir les insérer dans l'équation de Dyson et ainsi obtenir la densité d'états.

Une généralisation de l'équation de Dyson obtenue peut être réalisée en incluant la contribution du spin, ou on considérant plusieurs modes. Dans ce cas la difficulté réside dans la taille du système d'équations à résoudre, notons toute fois qu'il reste linéaire. Il est aussi possible de considérer des impuretés non ponctuelles. La forme géométrique peut se manifester dans un facteur de forme qui impose le calcul de l'intégrale du second terme

du membre de droite de l'équation de Dyson. Même dans le cas où l'intégrale se calcule analytiquement, la linéarité de l'équation de Dyson sera a priori brisée. Notons enfin que l'application des résultats obtenus est possible pour un nanotube de carbone. La physique du système dans ce cas impose des termes supplémentaires à l'équation de Dyson. Ces termes sont issus des différents type d'interaction dans le nanotube.

Annexes

Annexe A

Calcul de courant, bruit non-symétrisé à fréquence finie et conductance

Cette annexe est consacrée au calcul du courant, des corrélations non symétrisées de courant ainsi que de la conductance.

A.1 Courant moyen

Le courant est défini par la relation $I = ev_F(\rho_R - \rho_L)$ [127], où ρ_R et ρ_L sont les densités des porteurs de charge se déplaçant vers la droite et vers la gauche respectivement :

$$\rho_R(x) = \frac{\langle\tilde{\psi}^\dagger(x,t)\tilde{\psi}(x,t)\rangle + \langle\psi^\dagger(x,t)\psi(x,t)\rangle}{2} , \tag{A.1}$$

$$\rho_L(x) = \frac{\langle\tilde{\psi}^\dagger(-x,t)\tilde{\psi}(-x,t)\rangle - \langle\psi^\dagger(-x,t)\psi(-x,t)\rangle}{2} , \tag{A.2}$$

où $\psi(-x,t) \propto e^{i\phi(x,t)}$ est le champ fermionique associé au champ bosonique ϕ qui subit la rétrodiffusion et ressent la tension appliquée. Le champ $\tilde{\psi}(x,t) \propto e^{i\tilde{\phi}(x,t)}$ est le champ fermionique associé au champ bosonique libre $\tilde{\phi}$ qui n'est ni affecté par la rétrodiffuson ni par la tenson appliquée. Les valeurs moyennes figurant dans ces équations sont définies par rapport à l'état fondamental à qui on retranche un état d'équilibre. Ce qui implique que $\langle\tilde{\psi}^\dagger(x,t)\tilde{\psi}(x,t)\rangle = 0$. Dans les équations (A.1) et (A.2), les densités ρ_R et ρ_L dépendent de la position x. Cependant, la différence $\rho_R - \rho_L$ ne dépend pas de x, à partir du moment où le courant est une quantité conservée.

Réécrivons d'abord l'expression du champ fermionique ψ issu de la résolution de l'équation du mouvement dans la procédure de refermionisation [19], on prend $x > 0$:

$$\psi(-x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}\omega_F}\int_{-\infty}^{\infty} a_\omega e^{i(\omega+\frac{eV}{2\hbar})\frac{x}{v_F}-i\omega t}d\omega , \tag{A.3}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}\omega_F}\int_{-\infty}^{\infty} b_\omega e^{i(\omega+\frac{eV}{2\hbar})\frac{x}{v_F}-i\omega t}d\omega , \tag{A.4}$$

où $b_\omega = t(\omega)a_\omega + r(\omega)a^\dagger_{-\omega}$ est un opérateur dépendant à la fois de l'opérateur de création $a^\dagger_\omega$ et de l'opérateur d'annihilation a_ω. Ces opérateurs obéissent à la relation d'anti-commutation $\{a_\omega, a^\dagger_{\omega'}\} = \delta_{\omega,\omega'}$. Les fonctions $t(\omega) = \omega/(\omega + i\omega_F v_B^2)$ et $r(\omega) = i\omega_F v_B^2/(\omega +$

$i\omega_F v_B^2$) sont respectivement les amplitudes de transmission et de réflexion qui composent les parties non-diagonales et diagonales de la matrice de diffusion :

$$\mathcal{S}(\omega) = \begin{pmatrix} r(\omega) & t^*(\omega) \\ t(\omega) & r^*(\omega) \end{pmatrix} . \tag{A.5}$$

Les équations (A.3) et (A.4) permettent d'estimer les moyennes figurant dans l'expression des opérateurs densités ρ_R et ρ_L. La moyenne du produit de deux champs fermioniques s'écrit :

$$\langle \psi^\dagger(-x,t)\psi(-x,t)\rangle = \frac{1}{2\pi v_F}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Big[f(\hbar\omega - eV/2) - f(\hbar\omega)\Big] , \tag{A.6}$$

et :

$$\langle \psi^\dagger(x,t)\psi(x,t)\rangle = \frac{1}{2\pi v_F}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Big(2\mathcal{T}(\omega) - 1\Big)\Big[f(\hbar\omega - eV/2) - f(\hbar\omega)\Big] , \tag{A.7}$$

avec $\mathcal{T} = t^*t$, le coefficient de transmission. La fonction de distribution de Fermi-Dirac f s'obtient à partir des moyennes des opérateurs de création et d'annihilation $\langle a_\omega^\dagger a_{\omega'}\rangle = f(\hbar\omega - eV/2)\delta_{\omega,\omega'}$. En reportant les équations (A.6) et (A.7) dans les équation (A.1) et (A.2), on peut écrire l'expression du courant moyen :

$$I(V) = \frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(\omega)\Big[f(\hbar\omega - eV/2) - f(\hbar\omega)\Big] d\omega . \tag{A.8}$$

On montre que le courant moyen est pair en la tension appliquée V en tenant compte du fait que $\mathcal{T}(-\omega) = \mathcal{T}(\omega)$, et $f(-\hbar\omega) = 1 - f(\hbar\omega)$:

$$\begin{aligned} I(-V) &= \frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(\omega)\Big[f(\hbar\omega + eV/2) - f(\hbar\omega)\Big] d\omega = \frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(-\omega) \\ &\quad \times \Big[f(-\hbar\omega + eV/2) - f(-\hbar\omega)\Big] d\omega \\ &= \frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(\omega)\Big[1 - f(\hbar\omega - eV/2) - 1 + f(\hbar\omega)\Big] d\omega = -I(V) . \end{aligned} \tag{A.9}$$

Ce qui permet de réécrire le courant moyen sous la forme :

$$I(V) = \frac{e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}(\omega)\Big[f\left(\hbar\omega - \frac{eV}{2}\right) - f\left(\hbar\omega + \frac{eV}{2}\right)\Big] d\omega , \tag{A.10}$$

qui est une expression du type Landauer, comme on l'a déjà explicité dans le chapitre 4.

A.2 Bruit non-symétrisé

Le calcul du bruit non-symétrisé, et en général de toutes les fluctuations de courant, passe par la détermination des quatre corrélateurs suivants :

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\langle \psi^\dagger(-x,0)\psi(-x,0)\psi^\dagger(-x,t)\psi(-x,t)\rangle , \tag{A.11}$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\langle \psi^\dagger(x,0)\psi(x,0)\psi^\dagger(-x,t)\psi(-x,t)\rangle , \tag{A.12}$$

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\langle \psi^\dagger(-x,0)\psi(-x,0)\psi^\dagger(x,t)\psi(x,t)\rangle , \tag{A.13}$$

$$C_4 = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}\langle \psi^\dagger(x,0)\psi(x,0)\psi^\dagger(x,t)\psi(x,t)\rangle . \tag{A.14}$$

Déterminons ces corrélateurs un par un. Commençons d'abord par C_1. Celui-ci est déterminé à partir de la moyenne des opérateurs ψ avant d'arriver à l'impureté. Ces opérateurs ne subissent pas encore de rétrodiffusion. La moyenne sur les quatre opérateurs s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle\psi^\dagger(-x,0)\psi(-x,0)\psi^\dagger(-x,t)\psi(-x,t)\rangle &= \frac{1}{4\pi^2a^2\omega_F^4}\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \langle a^\dagger_{\omega_1}a_{\omega_2}a^\dagger_{\omega_3}a_{\omega_4}\rangle \\ &\quad\times e^{i(-\omega_1+\omega_2-\omega_3+\omega_4)\frac{x}{v_F}+i(\omega_3-\omega_4)t} \ . \end{aligned} \tag{A.15}$$

L'utilisation du théorème de Wick permet de calculer la moyenne $\langle a^\dagger_{\omega_1}a_{\omega_2}a^\dagger_{\omega_3}a_{\omega_4}\rangle$. L'intégration par rapport aux fréquences et par rapport au temps permet d'avoir le résultat final pour le corrélateur C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{2\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)[1-f(\hbar\omega'-eV/2)] \ . \tag{A.16}$$

Les corrélateurs C_2 et C_3 sont déterminés respectivement à partir des moyennes :

$$\begin{aligned}\langle\psi^\dagger(x,0)\psi(x,0)\psi^\dagger(-x,t)\psi(-x,t)\rangle &= \frac{1}{4\pi^2a^2\omega_F^4}\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \langle b^\dagger_{\omega_1}b_{\omega_2}a^\dagger_{\omega_3}a_{\omega_4}\rangle \\ &\quad\times e^{i(-\omega_1+\omega_2-\omega_3+\omega_4)\frac{x}{v_F}+i(\omega_3-\omega_4)t} \ , \end{aligned} \tag{A.17}$$

et :

$$\begin{aligned}\langle\psi^\dagger(-x,0)\psi(-x,0)\psi^\dagger(x,t)\psi(x,t)\rangle &= \frac{1}{4\pi^2a^2\omega_F^4}\int d\omega_1\int d\omega_2\int d\omega_3\int d\omega_4 \langle a^\dagger_{\omega_1}a_{\omega_2}b^\dagger_{\omega_3}b_{\omega_4}\rangle \\ &\quad\times e^{i(-\omega_1+\omega_2-\omega_3+\omega_4)\frac{x}{v_F}+i(\omega_3-\omega_4)t} \ . \end{aligned} \tag{A.18}$$

Le calcul montre que $C_2 = C_3^*$. Du moment que ces corrélateurs sont complexes, on écrit alors leurs parties réelle et imaginaire. La partie réelle de C_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}Re[C_2] &= \frac{1}{2\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)(1-f(\hbar\omega'-eV/2)) \\ &\quad\times\Big[t(\omega')t^*(\omega')t(\omega+\omega')t^*(\omega+\omega')-r(\omega')r^*(\omega')r(\omega+\omega')r^*(\omega+\omega')\Big] \ , \end{aligned} \tag{A.19}$$

et la partie imaginaire de C_2 s'écrit :

$$\mathrm{Im}[S^{ij}](V,\omega) \propto \frac{e^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\omega[1-t^*(\omega')-t(\omega'+\omega)][1-f(\hbar\omega'-eV/2)]f(\hbar\omega'+\hbar\omega-eV/2) \ . \tag{A.20}$$

Calculons maintenant le corrélateur C_4, qui dépend exclusivement des opérateurs b_ω et $b^\dagger_\omega$, il s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle\psi^\dagger(x,0)\psi(x,0)\psi^\dagger(x,t)\psi(x,t)\rangle &= \frac{1}{4\pi^2a^2\omega_F^4}\int d\omega_1\int d\omega_2\int d\omega_3\int d\omega_4 \langle b^\dagger_{\omega_1}b_{\omega_2}b^\dagger_{\omega_3}b_{\omega_4}\rangle \\ &\quad\times e^{i(-\omega_1+\omega_2-\omega_3+\omega_4)\frac{x}{v_F}+i(\omega_3-\omega_4)t} \ . \end{aligned} \tag{A.21}$$

L'application du théorème de Wick permet d'avoir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{1}{2\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)[1-f(\hbar\omega'-eV/2)] \\
&\times\Big[|t(\omega')|^2|t(\omega+\omega')|^2+|r(\omega')|^2|r(\omega+\omega')|^2-2t(\omega')t^*(\omega+\omega')r^*(\omega')r(\omega+\omega')\Big] \\
&+\Big[f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)(1-f(\hbar\omega'+eV/2))+f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)(1-f(\hbar\omega'-eV/2))\Big] \\
&\times\Big[|t(\omega')|^2|r(\omega+\omega')|^2+t(\omega')t^*(\omega+\omega')r^*(\omega')r(\omega+\omega')\Big]\Big) \ . \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}$$

Le bruit non symétrisé s'obtient par la moyenne des quatre corrélateurs $S(V,\omega)=e^2v_F^2[C_1+C_2+C_3+C_4]/4$:

$$\begin{aligned}
S(V,\omega) &= \frac{e^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)[1-f(\hbar\omega'-eV/2)] \\
&\times\Big[1+3|t(\omega')|^2|t(\omega+\omega')|^2-|r(\omega')|^2|r(\omega+\omega')|^2-2t(\omega')t^*(\omega+\omega')r^*(\omega')r(\omega+\omega')\Big] \\
&+\Big[f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)(1-f(\hbar\omega'+eV/2))+f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)(1-f(\hbar\omega'-eV/2))\Big] \\
&\times\Big[|t(\omega')|^2|r(\omega+\omega')|^2+t(\omega')t^*(\omega+\omega')r^*(\omega')r(\omega+\omega')\Big]\Big) \ . \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}$$

La substitution de r par $1-t$ et l'utilisation des propriétés $t+t^*=2\mathcal{T}$ et $tt^*=\mathcal{T}$ permet d'obtenir la relation suivante :

$$t(\omega')t^*(\omega+\omega')r^*(\omega')r(\omega+\omega') = \frac{1}{2}[\mathcal{T}(\omega+\omega')+\mathcal{T}(\omega')-2\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')-|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2] \ , \qquad \text{(A.24)}$$

ce qui permet de réécrire le bruit sous la forme :

$$\begin{aligned}
S(V,\omega) &= \frac{e^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)[1-f(\hbar\omega'-eV/2)] \\
&\times\Big[4\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')+|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2\Big] \\
&+\Big[f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)(1-f(\hbar\omega'+eV/2))+f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)(1-f(\hbar\omega'-eV/2))\Big] \\
&\times\frac{1}{2}\Big[3\mathcal{T}(\omega')+\mathcal{T}(\omega+\omega')-4\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')-|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2\Big]\Big) \ . \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}$$

Regardons maintenant la parité du bruit par rapport à la tension appliquée V. Pour cela, écrivons :

$$\begin{aligned}
S(-V,\omega) &= \frac{e^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)[1-f(\hbar\omega'+eV/2)] \\
&\times\Big[4\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')+|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2\Big] \\
&+\Big[f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)(1-f(\hbar\omega'-eV/2))+f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)(1-f(\hbar\omega'+eV/2))\Big] \\
&\times\frac{1}{2}\Big[3\mathcal{T}(\omega')+\mathcal{T}(\omega+\omega')-4\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')-|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2\Big]\Big) \ . \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}$$

Dans l'expression précédente il y a deux contributions, la seconde est identique à celle qui figure dans l'expression de $S(V,\omega)$. En revanche, la première contribution est différente :

$$\frac{e^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\Big(f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)[1-f(\hbar\omega'+eV/2)]\Big[4\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')+|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2\Big] \ . \tag{A.27}$$

L'utilisation du changement de variables $\omega'+\omega=-\omega''$ permet de réécrire cette contribution :

$$\begin{aligned}
&\frac{e^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' f(-\hbar\omega''+eV/2)[1-f(-\hbar\omega''-\hbar\omega+eV/2)]\\
&\times\Big[4\mathcal{T}(-\omega''-\omega)\mathcal{T}(-\omega')+|t(-\omega''-\omega)-t(-\omega'')|^2\Big]\\
&=\frac{e^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega''[1-f(\hbar\omega''-eV/2)]f(\hbar\omega''+\hbar\omega-eV/2)\\
&\Big[4\mathcal{T}(\omega''+\omega)\mathcal{T}(\omega')+|t(\omega''+\omega)-t(\omega'')|^2\Big] \ ,
\end{aligned} \tag{A.28}$$

qui permet de dire finalement que le bruit est bien pair en la tension appliquée $S(-V,\omega)=S(V,\omega)$. Ce fait nous permet d'écrire le bruit sous une nouvelle forme :

$$\begin{aligned}
S(V,\omega) \;=\; &\frac{e^2}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\Big(\Big[f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)[1-f(\hbar\omega'-eV/2)]\\
&+f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)[1-f(\hbar\omega'+eV/2)]\Big]\Big[4\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')+|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2\Big]\\
&+\Big[f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)(1-f(\hbar\omega'+eV/2))+f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)(1-f(\hbar\omega'-eV/2))\Big]\\
&\times\Big[3\mathcal{T}(\omega')+\mathcal{T}(\omega+\omega')-4\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')-|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2\Big]\Big) \ .
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned}
S(V,\omega) \;=\; &\frac{e^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\Big(-\Big[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega')+\frac{|t(\omega')-t(\omega+\omega')|^2}{4}\Big]\\
&\times(f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)-f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2))(f(\hbar\omega'+eV/2)-f(\hbar\omega'-eV/2))\\
&+\mathcal{T}(\omega')\Big[f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2)(1-f(\hbar\omega'+eV/2))\\
&+f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)(1-f(\hbar\omega'-eV/2))\Big]\Big) \ .
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Tentons maintenant de réécrire le bruit non symétrisé sous une forme qui met en jeu à la fois les fermions et les bosons qui décrivent les excitations élémentaires. Pour cela nous utilisons la propriété de la fonction de distribution de Fermi-Dirac :

$$f(\omega_1)f(\omega_2)=\frac{1}{2}\left[1+\coth\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2k_BT}\right)\right]f(\omega_1)+\frac{1}{2}\left[1+\coth\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2k_BT}\right)\right]f(\omega_2) \ . \tag{A.31}$$

Qui conduit à l'expression :

$$\begin{aligned}
&(f(\hbar\omega+\hbar\omega'+eV/2)-f(\hbar\omega+\hbar\omega'-eV/2))(f(\hbar\omega'+eV/2)-f(\hbar\omega'-eV/2))\\
&=\sum_{\pm}[N(\hbar\omega)-N(\hbar\omega\pm eV)][f(\hbar\omega+\hbar\omega'\pm eV/2)-f(\hbar\omega'\mp eV/2)] \ ,
\end{aligned} \tag{A.32}$$

où $N(\hbar\omega) = [\coth(\hbar\omega/2k_BT) - 1]/2$, et :

$$\begin{aligned}
&f(\hbar\omega + \hbar\omega' - eV/2)[1 - f(\hbar\omega' + eV/2)] + f(\hbar\omega + \hbar\omega' + eV/2)[1 - f(\hbar\omega' - eV/2)] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \coth\left(\frac{\hbar\omega - eV}{2k_BT}\right)\right]\left[f(\hbar\omega + \hbar\omega' - eV/2) - f(\hbar\omega' + eV/2)\right] \\
&+\frac{1}{2}\left[1 - \coth\left(\frac{\hbar\omega + eV}{2k_BT}\right)\right]\left[f(\hbar\omega + \hbar\omega' + eV/2) - f(\hbar\omega' - eV/2)\right] \\
&= \sum_{\pm} N(\hbar\omega \pm eV)\left[f(\hbar\omega' \mp eV/2) - f(\hbar\omega + \hbar\omega' \pm eV/2)\right] \ . \qquad \text{(A.33)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, le bruit devient :

$$\begin{aligned}
S(V,\omega) &= \frac{e^2}{4\pi}\sum_{\pm}[N(\hbar\omega \pm eV) - N(\hbar\omega)] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\left[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') + \frac{|t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2}{4}\right][f(\hbar\omega + \hbar\omega' \pm eV/2) - f(\hbar\omega' \mp eV/2)] \\
&+\frac{e^2}{4\pi}\sum_{\pm} N(\hbar\omega \pm eV)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\mathcal{T}(\omega')\left[f(\hbar\omega' \mp eV/2) - f(\hbar\omega + \hbar\omega' \pm eV/2)\right] \ . \qquad \text{(A.34)}
\end{aligned}$$

Certains termes peuvent être remplacés par l'expression du courant moyen, ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
S(V,\omega) &= \frac{e}{2}\sum_{\pm} N(\hbar\omega \pm eV)[I(\pm V) + I(2\hbar\omega/e \pm V)] + \frac{e^2}{4\pi}\sum_{\pm}[N(\hbar\omega \pm eV) - N(\hbar\omega)] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\left[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') + \frac{|t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2}{4}\right][f(\hbar\omega + \hbar\omega' \pm eV/2) - f(\hbar\omega' \mp eV/2)] \ . \qquad \text{(A.35)}
\end{aligned}$$

A partir de ce résultat, il est immédiat d'obtenir le bruit à fréquence nulle :

$$\begin{aligned}
S(V,0) &= \frac{e^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\Big(- \mathcal{T}^2(\omega')(f(\hbar\omega' + eV/2) - f(\hbar\omega' - eV/2))^2 \\
&+\mathcal{T}(\omega')\Big[f(\hbar\omega' - eV/2)(1 - f(\hbar\omega' + eV/2)) + f(\hbar\omega' + eV/2)(1 - f(\hbar\omega' - eV/2))\Big]\Big) \ , \qquad \text{(A.36)}
\end{aligned}$$

qui s'avère identique à l'expression du bruit à fréquence nulle obtenue dans le cadre de la théorie de la diffusion.

A.3 Conductance

Reprenons d'abord la définition [169] :

$$\mathrm{Re}[G(V,\omega)] = \frac{S(V,-\omega) - S(V,\omega)}{2\hbar\omega} \ . \qquad \text{(A.37)}$$

A partir de l'équation (A.30) nous avons :

$$\begin{aligned}
S(V,-\omega) - S(V,\omega) &= \frac{e^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\mathcal{T}(\omega')\Big[- f(\hbar\omega + \hbar\omega' + eV/2) + f(\hbar\omega' + eV/2) \\
&- f(\hbar\omega + \hbar\omega' - eV/2) + f(\hbar\omega' - eV/2)\Big] \ , \qquad \text{(A.38)}
\end{aligned}$$

qui permet d'écrire la conductance sous la forme :

$$\mathrm{Re}[G(V,\omega)] = \frac{e^2}{4h\omega}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{T}(\omega')\Big[f(\hbar\omega' \pm eV/2) - f(\hbar\omega + \hbar\omega' \pm eV/2)\Big] \ . \tag{A.39}$$

En utilisant l'expression du courant donnée par l'équation (A.10) on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[G(V,\omega)] &= \frac{e}{4\hbar\omega}\Big[-I(-V-2\hbar\omega/e) + I(-V) - I(V-2\hbar\omega/2) + I(V)\Big] \\ &= \frac{e}{4\hbar\omega}\Big[I(V+2\hbar\omega/e) - I(V-2\hbar\omega/e)\Big] \ . \end{aligned} \tag{A.40}$$

Il est maintenant possible de calculer la conductance à $\omega = 0$ et $V = 0$. A partir de l'équation (A.39) nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[G(V=0,\omega=0)] &= \frac{e^2}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{T}(\omega') \lim_{\omega\to 0}\left[\frac{f(\hbar\omega') - f(\hbar\omega+\hbar\omega')}{\omega}\right] \\ &= -\frac{e^2}{2h}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathcal{T}(\omega') \lim_{\omega\to 0}\left[\frac{\partial f}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega'} \ . \end{aligned} \tag{A.41}$$

L'utilisation du fait que $\partial f/\partial\omega|_{\omega=\omega'} = -\hbar/4k_BT\cosh^2(\hbar\omega'/2k_BT)$, conduit à :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[G(V=0,\omega=0)] &= \frac{e^2}{16\pi k_BT}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathcal{T}(\omega')}{\cosh^2(\hbar\omega'/2k_BT)} = \frac{e^2}{16\pi k_BT}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1-\mathcal{R}(\omega')}{\cosh^2(\hbar\omega'/2k_BT)} \\ &= \frac{e^2}{16\pi k_BT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\cosh^2(\hbar\omega'/2k_BT)} \\ &\quad -\frac{e^2V_B^2}{64\pi k_BT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{(\hbar^2\omega'^2 + e^2V_B^2/4)\cosh^2(\hbar\omega'/2k_BT)} \\ &\approx \frac{g_0}{2} - \frac{e^2}{16\pi k_BT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{1+\omega'^2(4\hbar^2/e^2V_B^2 + \hbar^2/4k_B^2T^2)} \\ &\approx \frac{g_0}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e^2V_B^2}{16k_B^2T^2 + e^2V_B^2}}\right) \ . \end{aligned} \tag{A.42}$$

La comparaison aux résultats numériques permet de conclure que l'expression suivante donne un meilleur fit des courbes :

$$\mathrm{Re}[G(V=0,\omega=0)] \approx \frac{g_0}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{e^2V_B^2}{8k_B^2T^2 + e^2V_B^2}}\right) \ . \tag{A.43}$$

A.4 Bruit à fréquence finie : comparaison avec la théorie de la diffusion

Dans cette partie nous comparons l'expression du bruit à fréquence finie obtenue avec celle de la théorie de la diffusion. Les expressions du courant et du bruit à fréquence nulle s'écrivent en terme du coefficient de transmission, les effets non triviaux de l'interaction à plusieurs nombre de particules sont encodés dans ce coefficient. Ce fait n'empêche pas que le courant et le bruit à fréquence nulle sont compatibles avec la théorie de la diffusion. Cependant, le bruit non symétrisé à fréquence finie qu'on a obtenu ne s'écrit pas sous une

forme compatible avec la théorie de la diffusion.

Afin de comparer notre résultat avec celui de la théorie de la diffusion [72, 163, 210, 84], nous allons symétrisé le bruit obtenu. La symétrisation se fait par :

$$S_{sym}(V,\omega) = \frac{S(V,\omega) + S(V,-\omega)}{2} \ . \tag{A.44}$$

Ce qui permet d'écrire le bruit symétrisé :

$$\begin{aligned} S(V,\omega) + S(V,-\omega) \ = \ & \frac{e^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big(\Big[\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') \\ & + |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4 \Big] \Big[F_{++}(\omega,\omega') + F_{--}(\omega,\omega') \Big] \\ & + \Big[\mathcal{T}(\omega') - \mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') - |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2/4 \Big] \\ & \times \Big[F_{+-}(\omega,\omega') + F_{-+}(\omega,\omega') \Big] \Big) \ , \end{aligned} \tag{A.45}$$

où $F_{ss'}(\omega,\omega') = \sum_{\pm} f(\hbar\omega' \pm \hbar\omega \pm seV/2)[1 - f(\hbar\omega' \pm s'eV/2)]$. En utilisant nos notations, et un coefficient de transmission $\mathcal{T}$ dépendant de l'énergie, on obtient le bruit symétrisé dans l'approche de la théorie de la diffusion [122] :

$$\begin{aligned} S_{\text{scat}}(V,\omega) + S_{\text{scat}}(V,-\omega) \ = \ & \frac{e^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Big([\mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') + |t(\omega') - t(\omega+\omega')|^2] F_{++}(\omega,\omega') \\ & + \mathcal{T}(\omega')\mathcal{T}(\omega+\omega') F_{--}(\omega,\omega') + \mathcal{T}(\omega')(1 - \mathcal{T}(\omega+\omega')) F_{+-}(\omega,\omega') \\ & + \mathcal{T}(\omega+\omega')(1 - \mathcal{T}(\omega')) F_{-+}(\omega,\omega') \Big) \ . \end{aligned} \tag{A.46}$$

La différence entre les équations (A.45) et (A.46) réside dans le fait que les facteurs qui précédent F_{++} et F_{--} sont les mêmes dans l'équation (A.45) mais différents dans l'équation (A.46). La même remarque s'applique pour F_{+-} et F_{-+}. Si le coefficient de transmission est indépendant de l'énergie, les deux expressions coïncident.

Annexe B

Relation entre corrélations de courant et admittance calculées par rétrodiffusion dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire

Dans cette annexe nous établissons une relation directe entre les différents corrélateurs C_1, C_2, C_3 et C_4 vus dans l'annexe A, et l'admittance quantique $Y(\omega)$. Ce qui nous permet d'écrire les auto-corrélations et les corrélations croisées du chapitre 3, en termes de l'admittance quantique. Commençons d'abord par le corrélateur C_1 qui s'écrit :

$$C_1 = \frac{1}{2\pi v_F^2} \int d\Omega f(\hbar\Omega + \hbar\omega - eV/2)[1 - f(\hbar\Omega - eV/2)] \ . \tag{B.1}$$

En utilisant la propriété de la fonction de distribution de Fermi-Dirac on obtient :

$$\begin{aligned} f(\hbar\Omega + \hbar\omega - eV/2) f(\hbar\Omega - eV/2) &= \frac{1}{2}\left[1 + \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)\right] f(\hbar\Omega + \hbar\omega - eV/2) \\ &+ \frac{1}{2}\left[1 - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)\right] f(\hbar\Omega - eV/2) \ . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{aligned} f(\hbar\Omega + \hbar\omega - eV/2)[1 - f(\hbar\Omega - eV/2)] &= \frac{1}{2}\left[1 - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)\right] \\ &\times [f(\hbar\Omega + \hbar\omega - eV/2) - f(\hbar\Omega - eV/2)] \ . \end{aligned} \tag{B.3}$$

Par conséquent, le corrélateur C_1 devient :

$$C_1 = \frac{1}{4\pi v_F^2} \underbrace{\left[1 - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)\right]}_{=-2N(\hbar\omega)} \underbrace{\int d\Omega [f(\hbar\Omega + \hbar\omega - eV/2) - f(\hbar\Omega - eV/2)]}_{=\omega} \ , \tag{B.4}$$

où N est la fonction de distribution de Bose-Einstein. Enfin, nous obtenons :

$$C_1 = -\frac{\omega N(\hbar\omega)}{2\pi v_F^2} \ . \tag{B.5}$$

Le corrélateur C_2 s'écrit :

$$C_2 = \frac{1}{2\pi v_F^2}\int d\Omega f(\hbar\Omega+\hbar\omega-eV/2)[1-f(\hbar\Omega-eV/2)]\big[t^*(\Omega)t(\Omega+\omega)-r^*(\Omega)r(\Omega+\omega)\big] \ , \tag{B.6}$$

en utilisant le fait que $r = 1 - t$ on obtient :

$$C_2 = \frac{1}{2\pi v_F^2}\int d\Omega f(\hbar\Omega+\hbar\omega-eV/2)[1-f(\hbar\Omega-eV/2)]\big[t^*(\Omega)+t(\Omega+\omega)-1\big] \ , \tag{B.7}$$

en utilisant l'équation (B.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{N(\hbar\omega)}{4\pi v_F^2}\int d\Omega[f(\hbar\Omega+\hbar\omega-eV/2)-f(\hbar\Omega-eV/2)]\big[1-t^*(\Omega)-t(\Omega+\omega)\big] \\ &= \frac{N(\hbar\omega)}{4\pi v_F^2}\int d\Omega f(\hbar\Omega-eV/2)\big[t^*(\Omega)+t(\Omega+\omega)-t^*(\Omega-\omega)-t(\Omega)\big] \ . \end{aligned} \tag{B.8}$$

En identifiant à la définition de l'admittance quantique [144], le corrélateur C_2 devient :

$$C_2 = \frac{2\hbar\omega N(\hbar\omega)}{e^2 v_F^2} Y^*(\omega) \ . \tag{B.9}$$

Le corrélateur $C_3 = C_2^*$, par conséquent on obtient :

$$C_3 = \frac{2\hbar\omega N(\hbar\omega)}{e^2 v_F^2} Y(\omega) \ . \tag{B.10}$$

Passons maintenant au corrélateur C_4, celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{1}{2\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\omega+\hbar\Omega-eV/2)[1-f(\hbar\Omega-eV/2)] \\ &\times\Big[|t(\Omega)|^2|t(\omega+\Omega)|^2+|r(\Omega)|^2|r(\omega+\Omega)|^2-2t(\Omega)t^*(\omega+\Omega)r^*(\Omega)r(\omega+\Omega)\Big] \\ &+\frac{1}{2\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega\Big[f(\hbar\omega+\hbar\Omega-eV/2)(1-f(\hbar\Omega+eV/2)) \\ &+f(\hbar\omega+\hbar\Omega+eV/2)(1-f(\hbar\Omega-eV/2))\Big] \\ &\times\Big[|t(\Omega)|^2|r(\omega+\Omega)|^2+t(\Omega)t^*(\omega+\Omega)r^*(\omega')r(\omega+\Omega)\Big] \ . \end{aligned} \tag{B.11}$$

En utilisant la relation :

$$t(\Omega)t^*(\omega+\Omega)r^*(\Omega)r(\omega+\Omega) = \frac{1}{2}[\mathcal{T}(\omega+\Omega)+\mathcal{T}(\Omega)-2\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)-|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2] \ , \tag{B.12}$$

le corrélateur C_4 devient :

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{1}{2\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\omega+\hbar\Omega-eV/2)[1-f(\hbar\Omega-eV/2)] \\
&\quad \times\Big[1-2\mathcal{T}(\Omega)-2\mathcal{T}(\omega+\Omega)+4\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)+|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2\Big] \\
&\quad +\frac{1}{4\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega\Big[f(\hbar\omega+\hbar\Omega-eV/2)(1-f(\hbar\Omega+eV/2)) \\
&\quad +f(\hbar\omega+\hbar\Omega+eV/2)(1-f(\hbar\Omega-eV/2))\Big] \\
&\quad \times\Big[3\mathcal{T}(\Omega)+\mathcal{T}(\omega+\Omega)-4\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)-|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2\Big]\ . \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

Nous voulons maintenant vérifier la parité de ce corrélateur en la tension appliquée V. Pour cela, on utilise la changement de variables $\Omega' = -\Omega-\omega$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\omega+\hbar\Omega-eV/2)[1-f(\hbar\Omega-eV/2)] \\
&\times\Big[1-2\mathcal{T}(\Omega)-2\mathcal{T}(\omega+\Omega)+4\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)+|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2\Big] \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(-\hbar\Omega'-eV/2)[1-f(-\hbar\Omega'-\hbar\omega-eV/2)] \\
&\times\Big[1-2\mathcal{T}(-\Omega'-\omega)-2\mathcal{T}(-\Omega')+4\mathcal{T}(-\Omega'-\omega)\mathcal{T}(-\Omega')+|t(-\Omega'-\omega)-t(-\Omega')|^2\Big] \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega[1-f(\hbar\Omega'+eV/2)]f(\hbar\Omega'+\hbar\omega+eV/2) \\
&\times\Big[1-2\mathcal{T}(\Omega'+\omega)-2\mathcal{T}(\Omega')+4\mathcal{T}(\Omega'+\omega)\mathcal{T}(\Omega')+|t(\Omega'+\omega)-t(\Omega')|^2\Big]\ , \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire le corrélateur C_4 sous la forme :

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{1}{4\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \sum_{\pm} f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)[1-f(\hbar\Omega\pm eV/2)] \\
&\quad \times\Big[1-2\mathcal{T}(\Omega)-2\mathcal{T}(\omega+\Omega)+4\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)+|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2\Big] \\
&\quad +\frac{1}{4\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \sum_{\pm} f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)[1-f(\hbar\Omega\mp eV/2)] \\
&\quad \times\Big[3\mathcal{T}(\Omega)+\mathcal{T}(\omega+\Omega)-4\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)-|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2\Big]\ . \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

Ce corrélateur peut être écrit comme une somme de deux termes. Le premier terme $C_4^{(1)}$ correspond à la partie contenant le facteur $\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)+|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2/4$, il s'écrit :

$$\begin{aligned}
C_4^{(1)} &= \frac{1}{\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \sum_{\pm} f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)[f(\hbar\Omega\mp eV/2)-f(\hbar\Omega\pm eV/2)] \\
&\times\left[\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)+\frac{|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2}{4}\right] \\
&= \frac{1}{\pi v_F^2}\sum_{\pm}[N(\hbar\omega\pm eV)-N(\hbar\omega)]\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega[f(\hbar\Omega+\hbar\omega\pm eV/2)-f(\hbar\Omega\mp eV/2)] \\
&\times\left[\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)+\frac{|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2}{4}\right] \\
&= \frac{1}{\pi v_F^2}\sum_{\pm}\underbrace{[N(\hbar\omega\pm eV)-N(\hbar\omega)]}_{=-N(-\hbar\omega\mp eV)+N(-\hbar\omega)}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\Omega\pm eV/2)\left[\mathcal{T}(\Omega-\omega)\mathcal{T}(\Omega)+\frac{|t(\Omega-\omega)-t(\Omega)|^2}{4}\right] \\
&-\frac{1}{\pi v_F^2}\sum_{\pm}[N(\hbar\omega\pm eV)-N(\hbar\omega)]\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\Omega\mp eV/2)\left[\mathcal{T}(\Omega)\mathcal{T}(\omega+\Omega)+\frac{|t(\Omega)-t(\omega+\Omega)|^2}{4}\right],
\end{aligned} \tag{B.16}$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
C_4^{(1)} &= -\frac{1}{\pi v_F^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\tilde{\sigma}=\pm}[N(\tilde{\sigma}\hbar\omega+\sigma eV)-N(\tilde{\sigma}\hbar\omega)]\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\Omega-\sigma eV/2) \\
&\times\left[\mathcal{T}(\Omega+\tilde{\sigma}\omega)\mathcal{T}(\Omega)+\frac{|t(\Omega+\tilde{\sigma}\omega)-t(\Omega)|^2}{4}\right].
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Le reste des termes dans le corrélateurs C_4 s'écrivent :

$$\begin{aligned}
C_4^{(2)} &= \frac{1}{4\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega\sum_{\pm} f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)[1-f(\hbar\Omega\pm eV/2)]\Big[1-2\mathcal{T}(\Omega)-2\mathcal{T}(\omega+\Omega)\Big] \\
&+\frac{1}{4\pi v_F^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega\sum_{\pm} f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)[1-f(\hbar\Omega\mp eV/2)]\Big[3\mathcal{T}(\Omega)+\mathcal{T}(\omega+\Omega)\Big].
\end{aligned} \tag{B.18}$$

En s'appuyant sur la relation :

$$\begin{aligned}
\sum_{\pm} f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)[1-f(\hbar\Omega\pm eV/2)] &= -\sum_{\pm} N(\hbar\omega) \\
&\times[f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)-f(\hbar\Omega\pm eV/2)]
\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\pm} f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)[1-f(\hbar\Omega\mp eV/2)] &= \sum_{\pm} N(\hbar\omega\pm eV) \\
&\times[f(\hbar\Omega\mp eV/2)-f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)],
\end{aligned} \tag{B.20}$$

on obtient :

$$
\begin{aligned}
C_4^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi v_F^2}\sum_{\pm} N(\hbar\omega)\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega[f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)-f(\hbar\Omega\pm eV/2)]\Big[1-2\mathcal{T}(\Omega)-2\mathcal{T}(\omega+\Omega)\Big] \\
&+\frac{1}{4\pi v_F^2}\sum_{\pm} N(\hbar\omega\pm eV)\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega\sum_{\pm}[f(\hbar\Omega\mp eV/2)-f(\hbar\omega+\hbar\Omega\pm eV/2)] \\
&\times\Big[3\mathcal{T}(\Omega)+\mathcal{T}(\omega+\Omega)\Big] \ . \qquad \text{(B.21)}
\end{aligned}
$$

Introduisons maintenant le courant :

$$
I(V) = \frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{T}(\Omega)\Big[f(\hbar\Omega-eV/2)-f(\hbar\Omega)\Big]d\Omega \ , \qquad \text{(B.22)}
$$

Ce qui permet de réécrire $C_4^{(2)}$ sous la forme :

$$
\begin{aligned}
C_4^{(2)} &= \frac{1}{2ev_F^2}\sum_{\pm} N(\hbar\omega)\Big[\frac{e\omega}{2\pi}+2I(-2\hbar\omega/e\mp V)+2I(\mp V)-2I(\mp V)-2I(2\hbar\omega/e\mp V)\Big] \\
&+\frac{1}{2ev_F^2}\sum_{\pm} N(\hbar\omega\pm eV)\Big[3I(\pm V)-3I(-2\hbar\omega/e\mp V)+I(2\hbar\omega/e\pm V)-I(\mp V)\Big] \ , \qquad \text{(B.23)}
\end{aligned}
$$

qui peut se simplifier comme :

$$
\begin{aligned}
C_4^{(2)} &= \frac{\omega N(\hbar\omega)}{2\pi v_F^2}+\frac{1}{ev_F^2}\sum_{\pm} N(\hbar\omega)\Big[I(-2\hbar\omega/e\mp V)-I(2\hbar\omega/e\mp V)\Big] \\
&+\frac{2}{ev_F^2}\sum_{\sigma=\pm} N(\hbar\omega+\sigma eV)\Big[I(2\hbar\omega/e+\sigma V)+I(\sigma V)\Big] \ , \\
&= \frac{\omega N(\hbar\omega)}{2\pi v_F^2}-\frac{2}{ev_F^2}\sum_{\tilde\sigma=\pm} N(\hbar\omega)I(2\hbar\omega/e+\sigma V)+\frac{1}{ev_F^2}\sum_{\sigma=\pm} I(-2\hbar\omega+\sigma V) \\
&+\frac{1}{ev_F^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\tilde\sigma=\pm} N(\tilde\sigma\hbar\omega+\sigma eV)\Big[I(2\tilde\sigma\hbar\omega/e+\sigma V)+I(\sigma V)\Big] \ . \qquad \text{(B.24)}
\end{aligned}
$$

En regroupant les deux parties du corrélateur C_4, on obtient :

$$
\begin{aligned}
C_4 &= \frac{\omega N(\hbar\omega)}{2\pi v_F^2}-\frac{2}{ev_F^2}\sum_{\tilde\sigma=\pm} N(\hbar\omega)I(2\hbar\omega/e+\sigma V)+\frac{1}{ev_F^2}\sum_{\sigma=\pm} I(-2\hbar\omega+\sigma V) \\
&+\frac{1}{ev_F^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\tilde\sigma=\pm} N(\tilde\sigma\hbar\omega+\sigma eV)\Big[I(2\tilde\sigma\hbar\omega/e+\sigma V)+I(\sigma V)\Big] \\
&-\frac{1}{\pi v_F^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\tilde\sigma=\pm}[N(\tilde\sigma\hbar\omega+\sigma eV)-N(\tilde\sigma\hbar\omega)]\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\Omega-\sigma eV/2) \\
&\times\left[\mathcal{T}(\Omega+\tilde\sigma\omega)\mathcal{T}(\Omega)+\frac{|t(\Omega+\tilde\sigma\omega)-t(\Omega)|^2}{4}\right] \ . \qquad \text{(B.25)}
\end{aligned}
$$

L'utilisation de la relation entre admittance et courant :

$$
\mathrm{Re}[Y(\omega)] = \frac{e^2}{4h\omega}\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\Omega-eV/2)\big[\mathcal{T}(\Omega+\omega)-\mathcal{T}(\Omega-\omega)\big] = \frac{2h\omega}{\pi e}\sum_{\sigma=\pm} I(2\hbar\omega/e+\sigma V) \ , \qquad \text{(B.26)}
$$

et en notant :

$$\begin{aligned} C_0 &= +\frac{1}{ev_F^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\tilde{\sigma}=\pm} N(\tilde{\sigma}\hbar\omega+\sigma eV)\Big[I(2\tilde{\sigma}\hbar\omega/e+\sigma V)+I(\sigma V)\Big] \\ &\quad -\frac{1}{\pi v_F^2}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\tilde{\sigma}=\pm}[N(\tilde{\sigma}\hbar\omega+\sigma eV)-N(\tilde{\sigma}\hbar\omega)]\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega f(\hbar\Omega-\sigma eV/2) \\ &\quad \times\left[\mathcal{T}(\Omega+\tilde{\sigma}\omega)\mathcal{T}(\Omega)+\frac{|t(\Omega+\tilde{\sigma}\omega)-t(\Omega)|^2}{4}\right] , \end{aligned} \tag{B.27}$$

nous obtenons le corrélateur C_4 en fonction de la partie réelle de l'admittance et du terme symétrique C_0 :

$$C_4 = \frac{\omega N(\hbar\omega)}{2\pi v_F^2} - \frac{2h\omega}{\pi e^2 v_F^2}[2N(\hbar\omega)+1]\mathrm{Re}[Y(\omega)] + C_0 \ . \tag{B.28}$$

Afin de déterminer les quatre auto-corrélations et les 12 corrélations croisées (voir figure 3.5), il faut rajouter à chacun des corrélateurs calculés dans cette annexe les corrélateurs $\tilde{C}_i$ $(i = 1, 4)$. Ces corrélateurs sont associés aux champs fermioniques libres $\tilde{\psi}$. L'obtention des corrélations de courant dans chaque branche se fait par la relation $S_{ii}(\omega) = e^2 v_F^2[C_i+\tilde{C}_i]/4$. Les corrélateurs associés aux champs fermioniques libres s'écrivent :

$$\tilde{C}_i = -\frac{\omega N(\hbar\omega)}{2\pi v_F^2} \ . \tag{B.29}$$

Annexe C

Solution de l'équation de Dyson de l'article de Song et *coll.*

Dans cette annexe nous allons exposer la solution de l'équation de Dyson pour un fil quantique sans interaction en présence de deux impuretés [209]. L'équation de Dyson est donnée par la relation (6.73). Afin de la résoudre, introduisons d'abord la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\frac{-L}{2}, \frac{-L}{2}) & g(\frac{-L}{2}, \frac{+L}{2}) \\ g(\frac{+L}{2}, \frac{-L}{2}) & g(\frac{+L}{2}, \frac{+L}{2}) \end{pmatrix} , \tag{C.1}$$

et les notations : $G_1 = G(\frac{-L}{2}, x')$, $G_2 = G(\frac{+L}{2}, x')$, $g_1 = g(\frac{-L}{2}, x')$ et $g_2 = g(\frac{+L}{2}, x')$. Ce qui nous permet d'avoir le système de deux équations suivant :

$$G_1 = g_1 + g_{11}\Gamma_1 G_1 + g_{12}\Gamma_2 G_2 , \tag{C.2}$$

et :

$$G_2 = g_2 + g_{21}\Gamma_1 G_1 + g_{22}\Gamma_2 G_2 . \tag{C.3}$$

A partir de l'équation (C.3), on extrait la fonction de Green G_2 :

$$G_2 = (1 - g_{22}\Gamma_2)^{-1}(g_2 + g_{21}\Gamma_1 G_1). \tag{C.4}$$

On injecte ensuite le résultat dans l'équation (C.2). Après un certain nombre de manipulations, on retrouve l'expression de G_1 :

$$G_1 = \frac{T_1(g_1 + g_{12}T_2 g_2)}{\Gamma_1 D}, \tag{C.5}$$

où $T_1 = \Gamma_1(1-g_{11}\Gamma_1)^{-1}$, $T_1 = \Gamma_2(1-g_{22}\Gamma_2)^{-1}$ et $D = 1-T_1 g_{12} T_2 g_{21}$. De la même manière, on obtient la fonction de Green G_2, il suffit d'intervertir les indices 1 et 2 :

$$G_2 = \frac{T_2(g_2 + g_{21}T_1 g_1)}{\Gamma_2 D} . \tag{C.6}$$

En remplaçant ces deux solutions dans l'équation de Dyson nous obtenons la fonction de Green du papier de Song et *coll.* [209] :

$$\begin{aligned} G^R(x,x') &= G_0^R(x,x') + \Big[G_0^R(x,\frac{-L}{2})T_1 G_0^R(\frac{-L}{2},x') + G_0^R(x,\frac{+L}{2})T_2 G_0^R(\frac{+L}{2},x') \\ &\quad + G_0^R(x,\frac{-L}{2})T_1 G_0^R(\frac{-L}{2},\frac{+L}{2})T_2 G_0^R(\frac{+L}{2},x') \\ &\quad + G_0^R(x,\frac{+L}{2})T_2 G_0^R(\frac{+L}{2},\frac{-L}{2})T_1 G_0^R(\frac{-L}{2},x')\Big]/D . \end{aligned} \tag{C.7}$$

Annexe D

Validité de l'équation de Dyson pour un fil quantique connecté à deux électrodes

Cette annexe est consacrée au calcul de la contribution de l'Hamiltonien d'interaction à l'équation de Dyson (6.87). L'objectif étant de justifier notre approximation qui consiste à négliger cette contribution dans l'équation de Dyson. Rappelons que l'Hamiltonien du système est la somme de trois contributions : $H = H_0 + H_I + H_b$. Les contributions de l'Hamiltonien cinétique et de l'Hamiltonien de rétrodiffusion dans l'équation de Dyson seront calculées dans le prochain annexe. L'Hamiltonien d'interaction est donné par la relation :

$$H_I = \frac{1}{2}\int dx \int dx' \rho(\mathbf{x}) V(x,x') \rho(\mathbf{x}'), \tag{D.1}$$

où $\mathbf{x} = (x,t)$, $V(x,x')$ est le potentiel d'interaction coulombienne et $\rho(\mathbf{x})$ est l'opérateur densité. L'équation de Dyson est obtenue à partir de l'équation du mouvement en calculant le commutateur du Hamiltonien total avec le champ fermionique $\psi_{r,m,\sigma}$ où r est l'indice de chiralité, m fait référence au modes dans le fil quantique et σ est l'indice de spin :

$$-i\hbar\partial_t \psi_{r,\alpha,\sigma}(\mathbf{x}) = [H_0 + H_b + H_I; \psi_{r,\alpha,\sigma}(\mathbf{x})]. \tag{D.2}$$

Afin de déterminer la contribution de l'Hamiltonien d'interaction, écrivons d'abord l'expression de son commutateur avec le champ fermionique $\psi_{r,m,\sigma}$:

$$\begin{aligned}
[H_I; \psi_{r,m,\sigma}(\mathbf{x})] &= \frac{1}{2}\int dy \int dz V(y,z) \sum_{r_1,m_1,\sigma_1} \sum_{r_2,m_2,\sigma_2} \sum_{r_3,m_3,\sigma_3} \sum_{r_4,m_4,\sigma_4} \\
&\times \{\psi^\dagger_{r_1,m_1,\sigma_1}(\mathbf{y})\psi_{r_2,m_2,\sigma_2}(\mathbf{y})\psi^\dagger_{r_3,m_3,\sigma_3}(\mathbf{z})\psi_{r_4,m_4,\sigma_4}(\mathbf{z})\psi_{r,m,\sigma}(\mathbf{x}) \\
&- \psi_{r,m,\sigma}(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r_1,m_1,\sigma_1}(\mathbf{y})\psi_{r_2,m_2,\sigma_2}(\mathbf{y})\psi^\dagger_{r_3,m_3,\sigma_3}(\mathbf{z})\psi_{r_4,m_4,\sigma_4}(\mathbf{z})\}.
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Il est plus intéressant d'utiliser les indices contractés $r = \{r, m, \sigma\}$ et $p = \{r_1, m_1, \sigma_1\}$. Ce changement d'indice nous permet de reformuler le second membre de l'équation (D.2) qui devient :

$$\begin{aligned}
\psi_r(\mathbf{x})\psi^\dagger_p(\mathbf{y})\psi_{p'}(\mathbf{y})\psi^\dagger_q(\mathbf{z})\psi_{q'}(\mathbf{z}) &= \delta_{r,p}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{y})\psi^\dagger_q(\mathbf{z})\psi_{q'}(\mathbf{z}) + \delta_{r,q}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\psi^\dagger_p(\mathbf{y})\psi_{p'}(\mathbf{y})\psi_u(\mathbf{z}) \\
&+ \psi^\dagger_p(\mathbf{y})\psi_{p'}(\mathbf{y})\psi^\dagger_q(\mathbf{z})\psi_{q'}(\mathbf{z})\psi_r(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{D.4}$$

En remplaçant le résultat dans l'équation (D.3), on trouve :

$$
\begin{aligned}
[H_I;\psi_{r,\alpha,\sigma}(\mathbf{x})] &= \frac{-1}{2}\sum_u \Big\{ \sum_{q,q'} \int dz V(x,z)\psi_u(\mathbf{x})\psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_{q'}(\mathbf{z}) \\
&+ \sum_{p,p'} \int dy V(x,y)\psi_p^\dagger(\mathbf{y})\psi_{p'}(\mathbf{y})\psi_u(\mathbf{x})\Big\}. \qquad \text{(D.5)}
\end{aligned}
$$

La prochaine étape est l'implémentation du résultat obtenu dans l'expression de la dérivée temporelle de la fonction de Green retardée définie par :

$$
\begin{aligned}
\partial_t G^R_{r,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') &= i\delta_{r,r'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad \text{(D.6)} \\
&- i\Theta(t-t')\underbrace{\langle \partial_t\psi_r(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\rangle}_{=I} + i\Theta(t-t')\underbrace{\langle \psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\partial_t\psi_r(\mathbf{x})\rangle}_{=II} .
\end{aligned}
$$

Cette expression se compose de deux termes. Chacun des termes est la somme de deux intégrales. Explicitons le terme I (sachant que le calcul du terme II est similaire) :

$$
\begin{aligned}
\partial_t\psi_r(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') &= \frac{i}{\hbar}[H_I;\psi_{r,\alpha,\sigma}(\mathbf{x})]\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') \qquad \text{(D.7)} \\
&= \frac{-i}{2\hbar}\sum_u \Big\{ \underbrace{\sum_{q,q'} \int dz V(x,z)\psi_u(\mathbf{x})\psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_{q'}(\mathbf{z})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')}_{a} \\
&+ \underbrace{\sum_{p,p'} \int dy V(x,y)\psi_p^\dagger(\mathbf{y})\psi_{p'}(\mathbf{y})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')}_{b}\Big\}. \qquad \text{(D.8)}
\end{aligned}
$$

En remplaçant q' par $\pm q$ on calcul le terme Ia :

$$
\begin{aligned}
Ia &= \sum_q \int dz V(x,z)\big[\delta_{u,q}\delta(x-z)\psi_q(\mathbf{z})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \delta_{u,q}\delta(x-z)\psi_{-q}(\mathbf{z})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}' \qquad \text{(D.9)} \\
&+ \psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_q(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_{-q}(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\big] \\
&= V(x,x)\sum_q \big[\psi_q(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \psi_{-q}(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') \\
&+ \int dz V(x,z)\big[\psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_q(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_{-q}(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\big]. \qquad \text{(D.10)}
\end{aligned}
$$

Le terme Ib s'obtient de la même manière. En combinant les deux termes on obtient :

$$
\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\sum_u (Ia+Ib) &= \partial_t\psi_r(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{u,q}\Big[V(x,x)\big(\psi_q(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \psi_{-q}(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\big) \qquad \text{(D.11)} \\
&+ 2\int dz V(x,z)\big(\psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_q(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_{-q}(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\big)\Big], \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{u,q}\Big[V(x,x)\big(\psi_q(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \psi_{-q}(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\big) \qquad \text{(D.12)} \\
&+ \int dz V(x,z)\big(\psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_q(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') + \psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_{-q}(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') \\
&- \psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_q(\mathbf{z})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}') - \psi_q^\dagger(\mathbf{z})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{-q}(\mathbf{z})\psi_{r'}^\dagger(\mathbf{x}')\big)\Big].
\end{aligned}
$$

Le potentiel d'interaction est décroissant, il atteint sa valeur maximale pour $x = y$. Dans le cas où on garde que cette contribution maximale le potentiel d'interaction prend la forme $V_{SR}(a,b) = V_0\delta(a,b)$:

$$\begin{aligned}
\partial_t\psi_r(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}') &= -iV_0\sum_u\Big[\psi_u(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}') \\
&+ \sum_q\big[\psi^\dagger_q(\mathbf{x})\psi_q(\mathbf{x})\psi_u(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}') + \psi^\dagger_q(\mathbf{x})\psi_{-q}(\mathbf{x})\psi_u(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}') \\
&- \psi^\dagger_q(\mathbf{x})\psi_u(\mathbf{x})\psi_q(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}') - \psi^\dagger_q(\mathbf{x})\psi_u(\mathbf{x})\psi_{-q}(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\big]\Big].
\end{aligned} \tag{D.13}$$

L'application de la somme sur les indices u et q donne zéro sauf pour le premier terme. En prenant la moyenne de I on trouve :

$$\langle\partial_t\psi_r(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\rangle = -iV_0\sum_u\langle\psi_u(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\rangle. \tag{D.14}$$

La partie II se calcule de la même manière :

$$\langle\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\partial_t\psi_r(\mathbf{x})\rangle = -iV_0\sum_u\langle\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\psi_u(\mathbf{x})\rangle. \tag{D.15}$$

Regardons maintenant ce qu'apporte ces deux contributions qui découlent de l'Hamiltonien d'interaction dans l'équation de Dyson. Ces deux contributions s'écrivent dans la définition de la fonction de Green retardée :

$$\begin{aligned}
\langle\partial_t\psi_r(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\rangle &= irv_F\partial_x\langle\psi_r(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\rangle - iV_0\sum_u\langle\psi_u(\mathbf{x})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\rangle \\
&- i\int dy\delta(x,y)\sum_i\lambda_i(y)\langle\psi_{-r}(\mathbf{y})\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\rangle,
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\partial_t\psi_r(\mathbf{x})\rangle &= irv_F\partial_x\langle\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\psi_r(\mathbf{x})\rangle - iV_0\sum_u\langle\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\psi_u(\mathbf{x})\rangle \\
&- i\int dy\delta(x,y)\sum_i\lambda_i(y)\langle\psi^\dagger_{r'}(\mathbf{x}')\psi_{-r}(\mathbf{y})\rangle.
\end{aligned} \tag{D.17}$$

L'équation de Dyson devient :

$$(i\partial_t - irv_F\partial_x)G_{r,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta_{r,r'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + V_0\sum_u G_{u,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') + \int dy\delta(x,y)\sum_i\lambda_i(y)G_{-r,r'}(\mathbf{y},\mathbf{x}'). \tag{D.18}$$

Afin de mieux comprendre le rôle des termes engendrés par l'Hamiltonien d'interaction, écrivons l'équation de Dyson (sans impuretés) en faisant la distinction entre les chiralités :

$$(i\partial_t - irv_F\partial_x)G^0_{+,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta_{+,r'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + V_0\sum_u G^0_{u,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}'), \tag{D.19}$$

$$(i\partial_t - irv_F\partial_x)G^0_{-,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta_{-,r'}\delta(\mathbf{x}`-\mathbf{x}') + V_0\sum_u G^0_{u,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}'). \tag{D.20}$$

La somme donne :

$$\sum_r(i\partial_t - irv_F\partial_x - 2V_0)G^0_{r,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta_{r,r'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + V_0\sum_u G^0_{u,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}'). \tag{D.21}$$

Une équation similaire s'écrit dans le cas où les impuretés sont présentes :

$$\sum_r (i\partial_t - irv_F\partial_x - 2V_0)G_{r,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta_{r,r'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + V_0\sum_u G_{u,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') + \int dy\delta(x,y)\sum_i \lambda_i(y)G_{-r,r'}(\mathbf{y},\mathbf{x}'), \quad \text{(D.22)}$$

en multipliant par $G^0_{r,r'}$ et en intégrant par rapport à x_1 et t_1 et en effectuant la somme sur l'indice p, ont trouve :

$$\int d\mathbf{x_1}\sum_p (i\partial_{t_1} - irv_F\partial_{x_1} - 2V_0)G_{p,r'}(\mathbf{x_1},\mathbf{x}')G^0_{r,p}(\mathbf{x},\mathbf{x_1}) \quad \text{(D.23)}$$

$$= \int d\mathbf{x_1}\sum_p \delta_{p,r'}\delta(\mathbf{x_1}-\mathbf{x}')G^0_{r,p}(\mathbf{x},\mathbf{x_1}) + \int d\mathbf{x_1}\sum_p\int dy\sum_i \delta(x_1-y)\lambda_i(y)G^0_{r,p}(\mathbf{x},\mathbf{x_1})G_{-r,p}(\mathbf{y},\mathbf{x}')$$

Ce qui conduit au final à l'équation de Dyson :

$$G_{r,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = G^0_{r,r'}(\mathbf{x},\mathbf{x}') + \int d\mathbf{x_1}\sum_p\sum_i \lambda_i(x_1)G^0_{r,p}(\mathbf{x},\mathbf{x_1})G_{-r,p}(\mathbf{x_1},\mathbf{x}') \quad \text{(D.24)}$$

Qui coïncide avec l'équation (6.87).

Annexe E

Dérivation et résolution de l'équation de Dyson

Dans cette annexe nous allons montrer en détail la dérivation ainsi que la résolution de l'équation de Dyson (6.87) du chapitre 6. Nous commençons d'abord par l'établir. Ensuite, nous effectuons une transformée de Fourier sur cette équation. La transformée de Fourier est nécessaire pour obtenir des fonctions de Green dans l'espace (x, ω). Le système d'équation résultant est linéaire, ce qui permet d'avoir un résultat exact pour la fonction de Green retardée G^R.

E.1 Equation de Dyson

Dans le cadre de l'approximation citée dans le chapitre 6, nous considérons un Hamiltonien composé de deux termes $H = H_0 + H_b$, un terme cinétique et un terme de rétrodiffusion donnés par les équations (6.82) et (6.83). Pour établir l'équation de Dyson il faut calculer le commutateur :

$$-i\hbar\partial_t\psi_{r,\sigma}(x,t) = [H, \psi_{r,\sigma}(x,t)] \ . \tag{E.1}$$

Il y a deux contributions, la première est celle de l'Hamiltonien cinétique :

$$[H_0, \psi_{r,\sigma}(x,t)] = -iv_F \sum_{r',\sigma'} r' \int dx' [\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t)\partial_{x'}\psi_{r',\sigma'}(x',t), \psi_{r,\sigma}(x,t)] \ . \tag{E.2}$$

On remarque que $[\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t)\partial_x\psi_{r',\sigma'}(x',t), \psi_{r,\sigma}(x,t)] = \partial_x\psi_{r',\sigma'}(x',t)\{\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t), \psi_{r,\sigma}(x,t)\}$. Il en résulte :

$$[H_0, \psi_{r,\sigma}(x,t)] = irv_F\partial_x\psi_{r,\sigma}(x,t) \ . \tag{E.3}$$

La deuxième contribution est celle de l'Hamiltonien de rétrodiffusion :

$$[H_{b_i}, \psi_{r,\sigma}(x,t)] = \sum_{r',\sigma'} \int dx' \lambda_i(x') [\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t)\psi_{-r',\sigma'}(x',t), \psi_{r,\sigma}(x,t)] \ , \tag{E.4}$$

le commutateur donne le résultat suivant :

$$[\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t)\psi_{-r',\sigma'}(x',t), \psi_{r,\sigma}(x,t)] = -\psi_{-r',\sigma'}(x',t)\delta_{r,r'}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x-x') \ . \tag{E.5}$$

Le résultat global est donné par la relation :

$$[H_b, \psi_{r,\sigma}(x,t)] = -\sum_{i=1}^{2} \int dx' \lambda_i(x')\psi_{-r,\sigma}(x',t)\delta(x-x') \ . \tag{E.6}$$

En regroupant les deux termes on obtient :

$$\partial_t \psi_{r,\sigma}(x,t) = -\frac{r v_F}{\hbar}\partial_x \psi_{r,\sigma}(x,t) - \frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{2}\int dx' \lambda_i(x')\psi_{-r,\sigma}(x',t)\delta(x-x') \ . \tag{E.7}$$

On définit maintenant la fonction de Green retardée :

$$G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') = -i\Theta(t-t')\langle\{\psi_{r,\sigma}(x,t),\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\}\rangle \ . \tag{E.8}$$

Dérivons cette fonction par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\partial_t G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') &= -i\delta(t-t')\langle\psi_{r,\sigma}(x,t)\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t') + \psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\psi_{r,\sigma}(x,t)\rangle \\ &\quad -i\Theta(t-t')\Big\langle\frac{\partial\psi_{r,\sigma}(x,t)}{\partial t}\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\Big\rangle - i\Theta(t'-t)\Big\langle\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\frac{\partial\psi_{r,\sigma}(x,t)}{\partial t}\Big\rangle,\end{aligned} \tag{E.9}$$

il en résulte :

$$i\partial_t G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') = \delta_{r,r'}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x-x')\delta(t-t') - i\Theta(t-t')\langle\{\partial_t\psi_{r,\sigma}(x,t),\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\}\rangle. \tag{E.10}$$

On prend l'équation (E.7), et en multipliant à gauche et à droite par $\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')$. Ensuite, on regroupe les deux termes résultants en multipliant par $i\Theta(t-t')$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{-i\theta(t-t')}{\hbar}\langle\{\partial_t\psi_{r,\sigma}(x,t),\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\}\rangle &= \frac{i v_F r}{\hbar}\partial_x\big[i\Theta(t-t')\{\psi_{r,\sigma}(x,t),\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\}\big] \\ &\quad -\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{2}\int dx\lambda_i(x) \\ &\quad \times\big[i\Theta(t-t')\{\psi_{-r,\sigma}(x,t),\psi^\dagger_{r',\sigma'}(x',t')\}\big]\delta(x-x') \ .\end{aligned} \tag{E.11}$$

Par conséquent, on peut extraire la dérivée par rapport au temps de la fonction de Green :

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') &= \delta_{r,r'}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(t-t')\delta(x-x') \\ &\quad +(r v_F\partial_x)G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') \\ &\quad +\sum_{i=1}^{2}\int dx\lambda_i(x)G^R_{-r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t')\delta(x-x') \ ,\end{aligned} \tag{E.12}$$

en réarrangeant les termes on obtient :

$$\begin{aligned}(i\hbar\partial_t - r v_F\partial_x)G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') &= \delta_{r,r'}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x-x')\delta(t-t') \\ &\quad +\sum_{i=1}^{2}\int dx\lambda_i(x)G^R_{-r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t')\delta(x-x').\end{aligned} \tag{E.13}$$

On définit maintenant la fonction de Green "libre" associée à H_0 qui obéit à l'équation suivante :

$$(i\hbar\partial_t - r v_F\partial_x)g^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') = \delta_{r,r'}\delta_{\sigma,\sigma'}\delta(x-x')\delta(t-t') \ , \tag{E.14}$$

puis, on multiplie l'équation (E.13) par la fonction g^R ensuite on effectue l'intégrale dans l'espace et le temps et on somme sur les indices de chiralité et de spin. On obtient finalement :

$$\sum_{r_1,\sigma_1}\int\int(i\hbar\partial_{t_1}-r_1v_F\partial_x)G^R_{r_1,r';\sigma_1,\sigma}(x_1,x';t_1,t')g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,x_1;t,t_1)dt_1dx_1 =$$
$$\sum_{r_1,\sigma_1}\int\int\delta_{r,r_1}\delta_{\sigma,\sigma_1}\delta(x-x_1)\ \delta(t_1-t')g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,x_1;t,t_1)dt_1dx_1$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\sum_{r_1,\sigma_1}\int\int\int\lambda_i(x)g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,x_1;t,t_1)G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(x_1,x';t_1,t')\delta(x-x_1)dx'dt_1dx_1\ . \tag{E.15}$$

En exploitant la relation (E.14), et en effectuant les intégrales par rapport à t_1 et x_1 on trouve l'équation de Dyson recherchée :

$$\begin{aligned}G^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x,x';t,t') &= g^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x,x';t,t')\\ &+\sum_{i=1}^{2}\sum_{r_1,\sigma_1}\sum_{m_1}\int dt_1\int dx_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1;m,m_1}(x,x_1;t,t_1)\lambda_i(x_1)\\ &\times G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma';m_1,m'}(x_1,x';t_1,t').\end{aligned} \tag{E.16}$$

L'indice m représente les différents modes ou canaux, nous l'avons rajouté dans ce résultat.

E.2 Transformée de Fourier de l'équation de Dyson

Supposons que les impuretés sont ponctuelles en $X=\pm L/2$. On peut exprimer les fonctions λ_i par :

$$\lambda_1(x=-L/2)=\delta(x+L/2)\Gamma_1\ , \tag{E.17}$$

$$\lambda_2(x=+L/2)=\delta(x-L/2)\Gamma_2\ . \tag{E.18}$$

On peut ainsi réécrire l'équation (E.16) et intégrer par rapport à x_1. On trouve :

$$\begin{aligned}G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t') &= g^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t,t')+\sum_{r_1,\sigma_1}\int dt_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,-L/2;t,t_1)\Gamma_1\\ &\times G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(-L/2,x';t_1,t')\\ &+\sum_{r_1,\sigma_1}\int dt_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,+L/2;t,t_1)\Gamma_2 G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(+L/2,x';t_1,t')\end{aligned} \tag{E.19}$$

Les fonctions de Green sont invariantes par translation dans le temps :

$$G^R(t,t')=G^R(t-t',0)\ , \tag{E.20}$$

$$g^R(t,t')=g^R(t-t',0)\ . \tag{E.21}$$

L'utilisation de ces propriétés sur l'équation (E.19) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t-t',0) &= g^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t-t',0) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1} \int dt_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,-L/2;t-t',t_1)\Gamma_1 G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(+L/2,x';t_1,0) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1} \int dt_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,+L/2;t-t',t_1)\Gamma_2 G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(+L/2,x';t_1,0) \ . \end{aligned} \tag{E.22}$$

Effectuons maintenant la transformée de Fourier par rapport à $t-t'$:

$$\begin{aligned} &\int d(t-t')e^{i\omega(t-t')}G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t-t',0) = \int d(t-t')e^{i\omega(t-t')}g^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';t-t,0) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1} \int d(t-t')e^{i\omega(t-t')} \int dt_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,-L/2;t-t',t_1)\Gamma_1 G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(-L/2,x';t_1,0) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1} \int d(t-t')e^{i\omega(t-t')} \int dt_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,+L/2;t-t',t_1)\Gamma_2 G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(+L/2,x';t_1,0) \ . \end{aligned} \tag{E.23}$$

En rajoutant et retranchant t_1 dans l'exponentielle des deux derniers termes de l'équation (E.23) et en utilisant le fait que $g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,\pm L/2;t-t',t_1) = g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,\pm L/2;t-t'-t_1,0)$, on trouve :

$$\begin{aligned} &G^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';\omega) = g^R_{r,r';\sigma,\sigma'}(x,x';\omega) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1} \Gamma_1 \int dt_1 G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(-L/2,x';t_1,0)e^{i\omega t_1} \int d(t-t')e^{i\omega(t-t'-t_1)}g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,-L/2;t-t'-t_1,0) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1} \Gamma_2 \int dt_1 G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma'}(+L/2,x';t_1,0)e^{i\omega t_1} \int d(t-t')e^{i\omega(t-t'-t_1)}g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1}(x,+L/2;t-t'-t_1,0). \end{aligned} \tag{E.24}$$

A la fin on aboutit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} G^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x,x';\omega) &= g^R_{r,r';\sigma,\sigma';m,m'}(x,x';\omega) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1,m_1} \Gamma_1 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1;m,m_1}(x,-L/2;\omega)G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma';m_1,m'}(-L/2,x';\omega) \\ &+ \sum_{r_1,\sigma_1,m_1} \Gamma_2 g^R_{r,r_1;\sigma,\sigma_1;m,m_1}(x,+L/2;\omega)G^R_{-r_1,r';\sigma_1,\sigma';m_1,m'}(+L/2,x';\omega) \ . \end{aligned} \tag{E.25}$$

E.3 Solution de l'équation de Dyson

On remarque que la relation (E.25) est linéaire. Afin de résoudre cette équation il faut la réécrire pour toutes les valeurs possibles de r et de r' pour $x' = -L/2$ et $x' = +L/2$. Nous supposons qu'il n'y a qu'une seule contribution sur la sommation sur les spins et deux contributions par rapport à la sommation sur r_1. Nous supposons aussi qu'il y a qu'un seul mode. Nous allons d'abord écrire les huit équations correspondantes aux différentes valeurs de r et r'. On va exploiter le fait que $g^t_{r,-r}(x,x') = 0$. En effet, ces corrélations croisées ne conservent pas la chiralité [196]. Nous avons choisi de ne pas écrire la dépendance en ω

pour alléger les notations.

Huit équations résultent de l'écriture de toutes les fonctions de Green correspondantes aux valeurs possibles de r et de r' pour $x' = -L/2$ et $x' = +L/2$. Ces huit équations peuvent se regrouper en deux systèmes équations. Le premier système correspnd à $r = r'$:

$$\begin{aligned} G^R_{r,r}(-L/2,x') &= g^t_{r,r}(-L/2,x') \\ &\quad +\Gamma_1 g^R_{r,r}(-L/2,-L/2)G^R_{-r,r}(-L/2,x') + \Gamma_2 g^R_{r,r}(-L/2,+L/2)G^R_{-r,r}(+L/2,x'), \end{aligned} \tag{E.26}$$

$$\begin{aligned} G^R_{r,r}(+L/2,x') &= g^R_{r,r}(+L/2,x') \\ &\quad +\Gamma_1 g^R_{r,r}(+L/2,-L/2)G^R_{-r,r}(-L/2,x') + \Gamma_2 g^R_{r,r}(+L/2,+L/2)G^R_{-r,r}(+L/2,x') \ . \end{aligned} \tag{E.27}$$

Le second système correspond à $r = -r'$:

$$G^R_{-r,r}(-L/2,x') = \Gamma_1 g^R_{-r,-r}(-L/2,-L/2)G^R_{r,r}(-L/2,x') + \Gamma_2 g^R_{-r,-r}(-L/2,+L/2)G^R_{r,r}(+L/2,x') \ , \tag{E.28}$$

$$G^R_{-r,r}(+L/2,x') = \Gamma_1 g^R_{-r,-r}(+L/2,-L/2)G^R_{r,r}(-L/2,x') + \Gamma_2 g^R_{-r,-r}(+L/2,+L/2)G^R_{r,r}(+L/2,x') \ . \tag{E.29}$$

L'idée est de remplacer les équations (E.28) et (E.29) dans (E.26) puis dans (E.27). Afin d'obtenir un système de deux équations linéaires :

$$\begin{aligned} &G^R_{r,r}(-L/2,x') = g^R_{r,r}(-L/2,x') \\ &+\left[\Gamma_1 g^R_{r,r}(-L/2,-L/2)g^R_{-r,-r}(-L/2,-L/2) + \Gamma_2 g^R_{-r,-r}(+L/2,-L/2)g^R_{r,r}(-L/2,+L/2)\right] \\ &\times\Gamma_1 G^R_{r,r}(-L/2,x') \\ &+\left[\Gamma_1 g^R_{r,r}(-L/2,-L/2)g^R_{-r,-r}(-L/2,+L/2) + \Gamma_2 g^R_{r,r}(-L/2,+L/2)g^R_{-r,-r}(+L/2,+L/2)\right] \\ &\times\Gamma_2 G^R_{r,r}(+L/2,x') \ , \end{aligned} \tag{E.30}$$

$$\begin{aligned} &G^R_{r,r}(+L/2,x') = g^R_{r,r}(+L/2,x') \\ &+\left[\Gamma_1 g^R_{-r,-r}(-L/2,-L/2)g^R_{r,r}(+L/2,-L/2) + \Gamma_2 g^R_{-r,-r}(+L/2,-L/2)g^R_{r,r}(+L/2,+L/2)\right] \\ &\times\Gamma_1 G^R_{r,r}(-L/2,x') \\ &+\left[\Gamma_1 g^R_{-r,-r}(-L/2,+L/2)g^R_{r,r}(+L/2,-L/2) + \Gamma_2 g^R_{-r,-r}(+L/2,+L/2)g^R_{r,r}(+L/2,+L/2)\right] \\ &\times\Gamma_2 G^R_{r,r}(+L/2,x'). \end{aligned} \tag{E.31}$$

On pose maintenant $G^R_{r,r}(-L/2,x') = G^R_1$, $G^R_{r,r}(+L/2,x') = G^R_2$, $g^R_{r,r}(-L/2,x') = g^R_1$ et $g^R_{r,r}(+L/2,x') = g^R_2$. On définit aussi la matrice :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \ , \tag{E.32}$$

avec :

$$\gamma_{11} = \Gamma_1 g^R_{r,r}(-L/2,-L/2)g^R_{-r,-r}(-L/2,-L/2) + \Gamma_2 g^R_{r,r}(-L/2,+L/2)g^R_{-r,-r}(+L/2,-L/2) \ , \tag{E.33}$$

$$\gamma_{12} = \Gamma_1 g^R_{r,r}(-L/2,-L/2) g^R_{-r,-r}(-L/2,+L/2) + \Gamma_2 g^R_{r,r}(-L/2,+L/2) g^R_{-r,-r}(+L/2,+L/2), \tag{E.34}$$

$$\gamma_{21} = \Gamma_1 g^R_{r,r}(+L/2,-L/2) g^R_{-r,-r}(-L/2,-L/2) + \Gamma_2 g^R_{r,r}(+L/2,+L/2) g^R_{-r,-r}(+L/2,-L/2), \tag{E.35}$$

$$\gamma_{22} = \Gamma_1 g^R_{r,r}(+L/2,-L/2) g^R_{-r,-r}(-L/2,+L/2) + \Gamma_2 g^R_{r,r}(+L/2,+L/2) g^R_{-r,-r}(+L/2,+L/2). \tag{E.36}$$

En posant $T_1 = \Gamma_1(1-\gamma_{11}\Gamma_1)^{-1}$ et $T_1 = \Gamma_2(1-\gamma_{22}\Gamma_2)^{-1}$, on aboutit aux résultats suivants :

$$G^R_{r,r}(-L/2,x') = \frac{T_1(g^R_1 + \gamma_{12}T_2 g^R_2)}{\Gamma_1(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})}, \tag{E.37}$$

$$G^R_{r,r}(+L/2,x') = \frac{T_2(g^R_2 + \gamma_{21}T_1 g^R_1)}{\Gamma_2(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})}. \tag{E.38}$$

Les deux autres solutions sont obtenues en remplaçant les solutions (E.37) et (E.38) dans les équations (E.28) et (E.29) :

$$\begin{aligned} G^R_{-r,r}(-L/2,x') &= g^R_{-r,-r}(-L/2,-L/2)\frac{T_1(g^R_1 + \gamma_{12}T_2 g^R_2)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \\ &\quad + g^R_{-r,-r}(-L/2,+L/2)\frac{T_2(g^R_2 + \gamma_{21}T_1 g^R_1)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \ , \end{aligned} \tag{E.39}$$

$$\begin{aligned} G^R_{-r,r}(+L/2,x') &= g^R_{-r,-r}(+L/2,-L/2)\frac{T_1(g^R_1 + \gamma_{12}T_2 g^t_2)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \\ &\quad + g^R_{-r,-r}(+L/2,+L/2)\frac{T_2(g^R_2 + \gamma_{21}T_1 g^R_1)}{(1 - T_1\gamma_{12}T_2\gamma_{21})} \ . \end{aligned} \tag{E.40}$$

Il suffit maintenant de prendre l'équation (E.25) la détailler et obtenir ainsi les deux solutions suivantes qui correspondent aux deux fonctions de Green recherchées :

$$\begin{aligned} G^R_{r,r}(x,x') &= g^R_{r,r}(x,x') + \Gamma_1 g^R_{r,r}(x,-L/2) G^R_{-r,r}(-L/2,x') \\ &\quad + \Gamma_2 g^R_{r,r}(x,+L/2) G^R_{-r,r}(+L/2,x') \ , \end{aligned} \tag{E.41}$$

$$G^R_{-r,r}(x,x') = \Gamma_1 g^R_{r,r}(x,-L/2) G^R_{r,r}(-L/2,x') + \Gamma_2 g^R_{r,r}(x,+L/2) G^R_{r,r}(+L/2,x') \ . \tag{E.42}$$

La fonction de Green retardée totale correspond à la somme de ces deux contributions :

$$G^R(x,x') = \sum_r \left[G^R_{r,r}(x,x') + G^R_{-r,r}(x,x') \right] \ . \tag{E.43}$$

Annexe F

Fonctions de Green bosoniques et fermioniques pour un fil quantique inhomogène

Cette annexe est consacrée au calcul des fonctions de Green bosoniques et fermioniques pour un fil quantique inhomogène décrit par un liquide de Luttinger de paramètre d'interaction non uniforme. Rappelons l'expression du Hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}\sum_j \int dx v_j(x)\Big[K_j(x)\big(\partial_x\phi_j(x,t)\big)^2 + K_j^{-1}\big(\partial_x\theta_j(x,t)\big)^2\Big], \tag{F.1}$$

où :

$$\begin{aligned} K_j(x) &= K_j^L(\Theta(x-\frac{L}{2})+\Theta(-x-\frac{L}{2})) + K_j^N(\Theta(x+\frac{L}{2})+\Theta(-x+\frac{L}{2})), && \text{(F.2)} \\ v_j(x) &= v_j^L(\Theta(x-\frac{L}{2})+\Theta(-x-\frac{L}{2})) + v_j^N(\Theta(x+\frac{L}{2})+\Theta(-x+\frac{L}{2})). && \text{(F.3)} \end{aligned}$$

La fonction de Heaviside est définie sous la forme :

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

F.1 Fonctions de Green bosoniques

La première étape est d'écrire l'action en utilisant les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \partial_t\phi_j(x,t) &= -\frac{v_j(x)}{K_j(x)}\partial_x\theta_j(x,t), && \text{(F.4)} \\ \partial_t\theta_j(x,) &= -v_j(x)K_j(x)\partial_x\phi_j(x,t), && \text{(F.5)} \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression de l'action :

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\sum_j \int dt \int dx v_j(x)\Big[K_j^{-1}\big(\partial_t\theta_j(x,t)\big) - K_j\big(\partial_x\theta_j(x,t)\big)\Big]. \tag{F.6}$$

L'intégration par parties et l'utilisation de la propriété $t = i\tau$ nous permet d'écrire :

$$\mathrm{S} \;=\; -\sum_j \int_0^\beta d\tau \int dx \theta_j(x,\tau) \underbrace{\Big[\frac{1}{v_j(x)K_j(x)}\partial_\tau^2 - \partial_x \frac{v_j(x)}{K_j(x)}\partial_x\Big]}_{(G_j^{\theta\theta})^{-1}} \theta_j(x,\tau), \tag{F.7}$$

avec $G_j^{\theta\theta}(x,\tau;x',\tau')$ la fonction de Green bosonique qui satisfait :

$$-\Big[\frac{1}{v_j(x)K_j(x)}\partial_\tau^2 - \partial_x \frac{v_j(x)}{K_j(x)}\partial_x\Big] G_j^{\theta\theta}(x,\tau;x',\tau') \;=\; \delta(x-x')\delta(\tau-\tau'). \tag{F.8}$$

En effectuant une transformée de Fourier on obtient l'équation différentielle :

$$\Big[\frac{\omega^2}{v_j(x)K_j(x)} - \partial_x \frac{v_j(x)}{K_j(x)}\partial_x\Big] G_j^{\theta\theta}(x,x',\omega) \;=\; \delta(x-x'). \tag{F.9}$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$G_j^{\theta\theta}(x,x',\omega) = \begin{cases} A(x')e^{\frac{|\omega|x}{v_j^L}} & x < -L/2 \\ B(x')e^{\frac{|\omega|x}{v_j^N}} + C(x')e^{\frac{-|\omega|x}{v_j^N}} & x < x' \\ D(x')e^{\frac{|\omega|x}{v_j^N}} + E(x')e^{\frac{-|\omega|x}{v_j^N}} & x > x' \\ F(x')e^{\frac{-|\omega|x}{v_j^L}} & x > L/2 \end{cases}$$

Les fonctions définies en x' sont déterminées en utilisant leur continuité ainsi que celle de leurs dérivées aux bords situés à $\pm L/2$.

– Si $x \in]-L/2; L/2[$ et $x = x'$:

L'équation de continuité pour la dérivée de la fonction de Green G s'écrit :

$$\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to x'+0^+;\omega) \;=\; \partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to x'+0^-;\omega) - \frac{K_j^N}{v_j^N}\ . \tag{F.10}$$

– Si $x' = -L/2$ et $x \neq x'$:

$$\partial_x\Big(\frac{v_j(x)}{K_j(x)}\Big) \;=\; \Big(\frac{v_j^N}{K_j^N} - \frac{v_j^L}{K_j^L}\Big)\delta\Big(x+\frac{L}{2}\Big) \tag{F.11}$$

$$\Rightarrow \frac{v_j^N}{K_j^N}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to -L/2+0^+, -L/2;\omega) \;=\; \frac{v_j^L}{K_j^L}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to -L/2+0^-, -L/2;\omega)\ . \tag{F.12}$$

– Si $x' = L/2$ et $x \neq x'$:

$$\partial_x\Big(\frac{v_j(x)}{K_j(x)}\Big) \;=\; \Big(\frac{v_j^L}{K_j^L} - \frac{v_j^N}{K_j^N}\Big)\delta\Big(x-\frac{L}{2}\Big) \tag{F.13}$$

$$\Rightarrow \frac{v_j^L}{K_j^L}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to L/2+0^+, L/2;\omega) \;=\; \frac{v_j^N}{K_j^N}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to L/2+0^-, L/2;\omega)\ . \tag{F.14}$$

– Si $x' = -L/2$ et $x = x'$:

$$\partial_x\Big(\frac{v_j(x)}{K_j(x)}\Big) = \Big(\frac{v_j^N}{K_j^N} - \frac{v_j^L}{K_j^L}\Big)\delta\Big(x + \frac{L}{2}\Big) \tag{F.15}$$

$$\Rightarrow \frac{v_j^N}{K_j^N}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to -L/2 + 0^+, -L/2; \omega) = \frac{v_j^L}{K_j^L}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to -L/2 + 0^-, -L/2; \omega) - 1 \ . \tag{F.16}$$

– Si $x' = L/2$ et $x = x'$:

$$\partial_x\Big(\frac{v_j(x)}{K_j(x)}\Big) = \Big(\frac{v_j^L}{K_j^L} - \frac{v_j^N}{K_j^N}\Big)\delta\Big(x - \frac{L}{2}\Big) \tag{F.17}$$

$$\Rightarrow \frac{v_j^L}{K_j^L}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to L/2 + 0^+, L/2; \omega) = \frac{v_j^N}{K_j^N}\partial_x G_j^{\theta\theta}(x \to L/2 + 0^-, L/2; \omega) - 1 \ . \tag{F.18}$$

Les fonctions de Green en (x, t) peuvent être déterminées en effectuant une transformée de Fourier. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in]-L/2; L/2[$, nous avons :

– Pour $x \leq -L/2$:

$$G_j^{\theta\theta}(x, x'; t) = -\frac{K_j^N K_j^L}{K_j^L + K_j^N}\sum_r \sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n}\Big(\ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^L\frac{x + L/2}{a} - irK_j^N\frac{x' + L/2 + 2nL}{a}\Big) + b_j\ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^L\frac{x + L/2}{a} + irK_j^N\frac{x' - 3L/2 - 2nL}{a}\Big)\Big) \ . \tag{F.19}$$

– Pour $-L/2 < x \leq x'$:

$$G_j^{\theta\theta}(x, x'; t) = -\frac{K_j^N}{2}\sum_r \sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n}\Big(\ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^N\frac{x - x' - 2nL}{a}\Big) + b_j\ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^N\frac{x + x' - L - 2nL}{a}\Big) + b_j\ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^N\frac{x + x' + L + 2nL}{a}\Big) + b_j^2\ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^N\frac{x - x' + 2L + 2nL}{a}\Big)\Big) \tag{F.20}$$

que l'on peut écrire :

$$G_j^{\theta\theta}(x, x'; t) = -\frac{K_j^N}{2}\sum_r \ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^N\frac{x - x'}{a}\Big) - \frac{K_j^N}{2}\sum_{rp}\sum_{n=1}^{\infty} b_j^n \ln\Big(1 + i\frac{v_F t}{a} + irK_j^N\frac{x - (-1)^n x' + npL}{a}\Big) \tag{F.21}$$

– Pour $x' < x \leq L/2$:

$$G_j^{\theta\theta}(x,x';t) = -\frac{K_j^N}{2}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n}\Big(\ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^N\frac{x-x'+2nL}{a}\Big)$$
$$+b_j\,\ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^N\frac{x+x'+L+2nL}{a}\Big)$$
$$+b_j\,\ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^N\frac{x+x'-L-2nL}{a}\Big)+b_j^2\,\ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^N\frac{x-x'-2L-2nL}{a}\Big)\Big) \tag{F.22}$$

que l'on peut écrire :

$$G_j^{\theta\theta}(x,x';t) = -\frac{K_j^N}{2}\sum_r \ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^N\frac{x-x'}{a}\Big)$$
$$-\frac{K_j^N}{2}\sum_{rp}\sum_{n=1}^{\infty} b_j^n \ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^N\frac{x-(-1)^n x'+npL}{a}\Big) \tag{F.23}$$

Cette expression est identique à celle obtenue pour $-L/2 < x \leq x'$.

– Pour $x > L/2$:

$$G_j^{\theta\theta}(x,x';t) = -\frac{K_j^N K_j^L}{K_j^L+K_j^N}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n}\Big(\ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^L\frac{x-L/2}{a}-irK_j^N\frac{x'-L/2-2nL}{a}\Big)$$
$$+b_j\,\ln\Big(1+i\frac{v_F t}{a}+irK_j^L\frac{x-L/2}{a}+irK_j^N\frac{x'+3L/2+2nL}{a}\Big)\Big) \tag{F.24}$$

Ces fonctions de Green sont continues en $x = x'$. Cependant, il est plus délicat de traiter la continuité en $x' = \pm L/2$. Il est donc plus judicieux de déterminer directement ces fonctions de Green en $x' = \pm L/2$.

F.1.1 Fonctions de Green bosoniques quand $x' = -L/2$

Pour alléger les notations nous allons omettre l'indice (j). Déterminer les fonctions de Green dans ce cas revient à résoudre le système d'équations :

$$Ae^{-\frac{|\omega|L}{2vL}} = Be^{-\frac{|\omega|L}{2vN}} + Ce^{\frac{|\omega|L}{2vN}}, \tag{F.25}$$
$$\frac{K^N}{K^L}Ae^{-\frac{|\omega|L}{2vL}} - \frac{K^N}{|\omega|} = Be^{-\frac{|\omega|L}{2vN}} - Ce^{\frac{|\omega|L}{2vN}}, \tag{F.26}$$
$$Be^{\frac{|\omega|L}{2vN}} + Ce^{\frac{-|\omega|L}{2vN}} = Fe^{-\frac{|\omega|L}{2vL}}, \tag{F.27}$$
$$Be^{\frac{|\omega|L}{2vN}} - Ce^{\frac{-|\omega|L}{2vN}} = -\frac{K^N}{K^L}Fe^{-\frac{|\omega|L}{2vL}}. \tag{F.28}$$

Les solutions s'écrivent :

$$A = \frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}}\Big(e^{\frac{L|\omega|}{2v^L}} + b e^{|\omega|L\left(\frac{1}{2v^L}-\frac{2}{v^N}\right)}\Big), \tag{F.29}$$

$$B = \frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}} b e^{-\frac{3L|\omega|}{2v^N}}, \tag{F.30}$$

$$C = \frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}} e^{-\frac{L|\omega|}{2v^N}}, \tag{F.31}$$

$$F = \frac{2K^N (K^L)^2}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}} e^{|\omega|L\left(\frac{1}{2v^L}-\frac{2}{v^N}\right)}, \tag{F.32}$$

où $b = \frac{K^L-K^N}{K^L+K^N}$. De la même manière, les fonctions de Green bosoniques en (x,τ) sont obtenues en effectuant une transformée de Fourier :

– Si $x \leq -L/2$:

La fonctions de Green bosonique vaut :

$$\begin{aligned} G^{\theta\theta}(x,-L/2;\tau) &= -\frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\Big[2(1+b)\gamma \\ &+ \ln\Big(-i\tau - \frac{x+L/2}{v^L} + \frac{2nL}{v^N}\Big) + \ln\Big(i\tau - \frac{x+L/2}{v^L} + \frac{2nL}{v^N}\Big) \\ &+ b\ln\Big(-i\tau - \frac{x+L/2}{v^L} + \frac{2L(n+1)}{v^N}\Big) + b\ln\Big(-i\tau - \frac{x+L/2}{v^L} + \frac{2L(n+1)}{v^N}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{F.33}$$

où γ est la constante d'Euler. En appliquant une continuation analytique $\tau = it + a/v_F$, et en introduisant l'indice $r = \pm 1$ et en remplaçant $v^L = v_F$ et $v^N = v_F/K^N$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} G^{\theta\theta}(x,-L/2;t) &= -\frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\Big[2(1+b)(\gamma+\ln(a/v_F)) \\ &+\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a} + ir\frac{x+L/2}{a} - irK^N\frac{2nL}{a}\Big) + b\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a} + ir\frac{x+L/2}{a} - irK^N\frac{2L(n+1)}{a}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{F.34}$$

– Si $x \in [-L/2; L/2]$:

En effectuant les mêmes démarches nous obtenons :

$$\begin{aligned} G^{\theta\theta}(x,-L/2;t) &= -\frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\Big[2(1+b)(\gamma+\ln(a/v_F)) \\ &+ \ln\Big(1+\frac{itv_F}{a} + irK^N\frac{x+L/2+2nL}{a}\Big) + b\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a} + irK^N\frac{x-3L/2-2nL}{a}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{F.35}$$

– $x \geq L/2$:

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} G^{\theta\theta}(x,-L/2;t) &= -\frac{2K^N (K^L)^2}{(K^N+K^L)^2}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\Big[2(\gamma+\ln(a/v_F)) \\ &+ \ln\Big(1+\frac{itv_F}{a} + ir\frac{x-L/2}{a} + irK^N\frac{L+2nL}{a}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{F.36}$$

F.1.2 Fonctions de Green bosoniques quand $x' = +L/2$

Pour commencer, il faut résoudre le système d'équations :

$$
\begin{aligned}
Ae^{-\frac{|\omega|L}{2v^L}} &= Be^{-\frac{|\omega|L}{2v^N}} + Ce^{\frac{|\omega|L}{2v^N}}, && \text{(F.37)}\\
\frac{K^N}{K^L}Ae^{-\frac{|\omega|L}{2v^L}} &= Be^{-\frac{|\omega|L}{2v^N}} - Ce^{\frac{|\omega|L}{2v^N}}, && \text{(F.38)}\\
Be^{\frac{|\omega|L}{2v^N}} + Ce^{\frac{-|\omega|L}{2v^N}} &= Fe^{-\frac{|\omega|L}{2v^L}}, && \text{(F.39)}\\
Be^{\frac{|\omega|L}{2v^N}} - Ce^{\frac{-|\omega|L}{2v^N}} &= -\frac{K^N}{K^L}Fe^{-\frac{|\omega|L}{2v^L}} + \frac{K^N}{|\omega|}, && \text{(F.40)}
\end{aligned}
$$

où les solutions s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2K^N(K^L)^2}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}} e^{|\omega|L\left(\frac{1}{2v^L}-\frac{2}{v^N}\right)}, && \text{(F.41)}\\
B &= \frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}} e^{-\frac{L|\omega|}{2v^N}}, && \text{(F.42)}\\
C &= \frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}} b e^{-\frac{3L|\omega|}{2v^N}}, && \text{(F.43)}\\
F &= \frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)|\omega|}\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n} e^{\frac{-2nL|\omega|}{v^N}} \left(e^{\frac{L|\omega|}{2v^L}} + b e^{|\omega|L\left(\frac{1}{2v^L}-\frac{2}{v^N}\right)}\right). && \text{(F.44)}
\end{aligned}
$$

– Si $x \leq -L/2$:
On écrit la fonction de Green bosonique :

$$
\begin{aligned}
G^{\theta\theta}(x, L/2; t) &= -\frac{2K^N(K^L)^2}{(K^N+K^L)}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\Big[2(\gamma + \ln(a/v_F)) && \text{(F.45)}\\
&+ \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a} - ir\frac{x+L/2}{a} + irK^N\frac{L+2nL}{a}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

– Si $x \in [-L/2; L/2]$:
Nous avons :

$$
\begin{aligned}
G^{\theta\theta}(x, L/2; t) &= -\frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\Big[2(1+b)(\gamma + \ln(a/v_F)) && \text{(F.46)}\\
&+ \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a} - irK^N\frac{x-L/2-2nL}{a}\Big) + b\ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a} - irK^N\frac{x+3L/2+2nL}{a}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

– Si $x \geq L/2$:
Nous avons :

$$
\begin{aligned}
G^{\theta\theta}(x, L/2; t) &= -\frac{K^N K^L}{(K^N+K^L)}\sum_r\sum_{n=0}^{\infty} b^{2n}\Big[2(1+b)(\gamma + \ln(a/v_F)) && \text{(F.47)}\\
&+ \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a} + ir\frac{x-L/2}{a} + irK^N\frac{2nL}{a}\Big) + b\ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a} + ir\frac{x-L/2}{a} + irK^N\frac{2L(n+1)}{a}\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

F.1.3 Les autres fonctions de Green bosoniques

Les autres fonctions de Green bosoniques s'obtiennent exactement de la même manière que la fonction de Green $G^{\theta\theta}$. Il est possible d'établir une relations entre elles et la fonction de Green $G^{\theta\theta}$.

Commençons par la fonction de Green $G^{\phi\phi}(x,x',t) = \langle\phi(x,t)\phi(x,0)\rangle$. Celle-ci s'obtient à partir de l'action $S[\phi,\phi]$ équivalente à l'action $S[\theta,\theta]$ à un facteur près. La fonction de Green $G^{\phi\phi}$ s'obtient de la fonction de Green $G^{\theta\theta}$:

– Si $x' \in [-L/2; L/2]$ et $x \in [-L/2; L/2]$:
nous avons :

$$\begin{aligned} G^{\phi\phi}(x,x';t) &\rightarrow (K^N)^{-2} G^{\theta\theta}(x,x',t), \\ b &\rightarrow (-b). \end{aligned} \tag{F.48}$$

– Si $x' \in [-L/2; L/2]$ et $x \notin [-L/2; L/2]$:
nous avons :

$$\begin{aligned} G^{\phi\phi}(x,x';t) &\rightarrow (K^N)^{-1} G^{\theta\theta}(x,x',t), \\ b &\rightarrow (-b). \end{aligned} \tag{F.49}$$

Pour la fonction de Green $G^{\phi\theta}(x,x',t) = \langle\phi(x,t)\theta(x,0)\rangle$ nous avons :
– $x' \in [-L/2; L/2]$ et $x \in [-L/2; L/2]$:

$$G^{\phi\theta}(x,x';t) \rightarrow (-rK^N)^{-1} G^{\theta\theta}(x,x',t). \tag{F.50}$$

– Si $x' \in [-L/2; L/2]$ et $x \notin [-L/2; L/2]$:

$$G^{\phi\theta}(x,x';t) \rightarrow -rG^{\theta\theta}(x,x',t). \tag{F.51}$$

Finalement, pour la fonction de Green $G^{\theta\phi}(x,x',t) = \langle\theta(x,t)\phi(x,0)\rangle$ on a :
– Si $x' \in [-L/2; L/2]$ et $x \in [-L/2; L/2]$:

$$\begin{aligned} G^{\theta\phi}(x,x';t) &\rightarrow (-rK^N)^{-1} G^{\theta\theta}(x,x',t), \\ b &\rightarrow (-b). \end{aligned} \tag{F.52}$$

– Si $x' \in [-L/2; L/2]$ et $x \notin [-L/2; L/2]$:

$$\begin{aligned} G^{\theta\phi}(x,x';t) &\rightarrow (-rK^N)^{-1} G^{\theta\theta}(x,x',t), \\ b &\rightarrow (-b). \end{aligned} \tag{F.53}$$

F.2 Fonction de Green retardée fermionique

La fonction de Green retardée fermionique s'exprime au moyen des fonctions de Green bosoniques sous la forme :

$$\begin{aligned} g^R_{r,r}(x,t;x',t') &= \frac{-i\Theta(t-t')}{2\pi a}\Big[e^{irk_F(x-x')} e^{\pi\sum_j\left[\tilde{G}^{\theta\theta}_j(x,t;x',t')+\tilde{G}^{\phi\phi}_j(x,t;x',t')+r\tilde{G}^{\phi\theta}_j(x,t;x',t')+r\tilde{G}^{\theta\phi}_j(x,t;x',t')\right]} \\ &+ e^{irk_F(x'-x)} e^{\pi\sum_j\left[\tilde{G}^{\theta\theta}_j(x',t';x,t)+\tilde{G}^{\phi\phi}_j(x',t';x,t)+r\tilde{G}^{\phi\theta}_j(x',t';x,t)+r\tilde{G}^{\theta\phi}_j(x',t';x,t)\right]}\Big] \end{aligned} \tag{F.54}$$

L'équation de Dyson (6.87) met en jeu un ensemble de neuf fonctions de Green à déterminer. Ces neuf fonctions diffèrent dans leurs arguments, suivant que l'on se place à $-L/2$ ou $+L/2$.

F.2.1 Fonction de Green $g^R_{r,r}(\pm L/2, \pm L/2; \omega)$

Commençons par calculer les fonctions de Green normalisées. En s'appuyant sur l'équation (F.46) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{\theta\theta}_j(L/2, L/2, t) &= G^{\theta\theta}_j(L/2, L/2, t) - \frac{1}{2} G^{\theta\theta}_j(L/2, L/2, t) - \frac{1}{2} G^{\theta\theta}_j(L/2, L/2, 0), \\
&= \frac{-K^N_j K^L_j}{2(K^N_j + K^L_j)} \sum_{r'} \sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n} \\
&\times \Big[\ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2Ln}\Big) + b_j \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2L(n+1)}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{F.55}$$

L'équation (F.34) mène à un résultat identique pour les positions $x = x' = -\frac{L}{2}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{\theta\theta}_j(-L/2, -L/2, t) &= \frac{-K^N_j K^L_j}{2(K^N_j + K^L_j)} \sum_{r'} \sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n} \\
&\times \Big[\ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2Ln}\Big) + b_j \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2L(n+1)}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{F.56}$$

Dans la suite nous allons considérer que le cas $x = x' = \frac{L}{2}$ afin de simplifier les notations. Les autres fonctions de Green bosoniques s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{\phi\phi}_j(L/2, L/2, t) &= \frac{-K^L_j}{2K^N_j(K^N_j + K^L_j)} \sum_{r'} \sum_{n=0}^{\infty} (-b_j)^{2n} \\
&\times \Big[\ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2Ln}\Big) - b_j \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2L(n+1)}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{F.57}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{\phi\theta}_j(L/2, L/2, t) &= \frac{r' K^L_j}{2(K^N_j + K^L_j)} \sum_{r'} \sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n} \\
&\times \Big[\ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2Ln}\Big) + b_j \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2L(n+1)}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{F.58}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{\theta\phi}_j(L/2, L/2, t) &= \frac{r' K^L_j}{2(K^N_j + K^L_j)} \sum_{r'} \sum_{n=0}^{\infty} (-b_j)^{2n} \\
&\times \Big[\ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2Ln}\Big) - b_j \ln\Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir' K^N_j 2L(n+1)}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{F.59}$$

Définissions la fonction $\mathcal{F}$ représentant la somme de toutes les fonctions de Green

bosoniques dans la première exponentielle dans l'équation(F.54). Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \pi \sum_j [\tilde{G}_j^{\theta\theta}(L/2,L/2,t) + \tilde{G}_j^{\phi\phi}(L/2,L/2,t) + r\tilde{G}_j^{\phi\theta}(L/2,L/2,t) + r\tilde{G}_j^{\theta\phi}(L/2,L/2,t)] \\
&= -\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r'} \Big[\frac{K_j^L b_j^{2n}}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N + \frac{(-1)^{2n}}{K_j^N} - rr' - rr'(-1)^{2n} \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_j^N 2Ln} \Big) \\
&+ \frac{K_j^L b_j^{2n+1}}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N + \frac{(-1)^{2n+1}}{K_j^N} - rr' - rr'(-1)^{2n+1} \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_j^N 2L(n+1)} \Big) \Big].
\end{aligned} \tag{F.60}$$

Pour toutes les valeurs de n, $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$. Ce qui permet de simplifier l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r'} \Big[\frac{K_j^L b_j^{2n}}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N + \frac{1}{K_j^N} - 2rr' \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_j^N 2Ln} \Big) \\
&+ \frac{K_j^L b_j^{2n+1}}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N - \frac{1}{K_j^N} \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_j^N 2L(n+1)} \Big) \Big], \\
&= -\sum_j \sum_{r'} \Big[\frac{K_j^L}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N + \frac{1}{K_j^N} - 2rr' \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a} \Big) \\
&+ \frac{K_j^L b_j}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N - \frac{1}{K_j^N} \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_j^N 2L} \Big) \Big] \\
&- \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r'} \Big[\frac{K_j^L b_j^{2n}}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N + \frac{1}{K_j^N} - 2rr' \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_j^N 2Ln} \Big) \\
&+ \frac{K_j^L b_j^{2n+1}}{2(K_j^N + K_j^L)} \Big(K_j^N - \frac{1}{K_j^N} \Big) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_j^N 2L(n+1)} \Big) \Big].
\end{aligned} \tag{F.61}$$

Nous supposons que seul le secteur de charge totale est affecté par les interactions $K_{c+}^N < 1$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= -\sum_{r'} \Big[\frac{(K_c + K_c^{-1} - 2rr')}{2(1+K_c)} \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a} \Big) + \frac{(1 - rr')}{2} \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a} \Big) \\
&+ \frac{b_c(K_c - K_c^{-1})}{2(1+K_c)} \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_c 2L} \Big) \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \frac{b_c^{2n}(K_c + K_c^{-1} - 2rr')}{2(1+K_c)}) \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_c 2Ln} \Big) \\
&+ \frac{b_c^{2n+1}(K_c - K_c^{-1})}{2(1+K_c)} \ln \Big(1 + \frac{itv_F}{a + ir'K_c 2L(n+1)} \Big) \Big\} \Big].
\end{aligned} \tag{F.62}$$

En utilisant la propriété $\ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan(y/x)$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{t^2v_F^2}{a^2}\Big) + i\arctan\Big(\frac{tv_F}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a+ir'K_c2L}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+4L^2K_c^2+tv_Fr'2LK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2K_c^2)^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4L^2K_c^2+2Lr'tv_FK_c}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a+ir'K_c2Ln}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+4n^2L^2K_c^2+tv_Fr'2LnK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2n^2K_c^2)^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4n^2L^2K_c^2+2Lnr'tv_FK_c}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a+ir'K_c2L(n+1)}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2+tv_Fr'2L(n+1)K_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2(n+1)^2K_c^2)^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2+2L(n+1)r'tv_FK_c}\Big).
\end{aligned}$$

Injectant maintenant l'expression obtenue dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
e^{\mathcal{F}} = &\frac{exp\Big(2i\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_c^{2n}\Big[\mathcal{A}_+\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4n^2L^2K_c^2+2Lntv_FK_c}\Big)+\mathcal{A}_-\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4n^2L^2K_c^2-2Lntv_FK_c}\Big)\Big]}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(a^2+4n^2L^2K_c^2+tv_F2LnK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2n^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{A}_+}\Big(\frac{(a^2+4n^2L^2K_c^2-tv_F2LnK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2n^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{A}_-}}\\
\times&\frac{exp\Big(2i\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_c^{2n}\Big[\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2+2L(n+1)tv_FK_c}\Big)+\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2-2L(n+1)tv_FK_c}\Big)\Big]}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2+tv_F2L(n+1)K_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2(n+1)^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{B}}\Big(\frac{(a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2-tv_F2L(n+1)K_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2(n+1)^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{B}}}\\
\times&\frac{exp\Big(i\Big[\frac{(2K_c+K_c^{-1}+1)}{(1+K_c)}\arctan\Big(\frac{tv_F}{a}\Big)+2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4L^2K_c^2+2Ltv_FK_c}\Big)+2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4L^2K_c^2-2Ltv_FK_c}\Big)\Big]\Big)}{\Big(1+\frac{t^2v_F^2}{a^2}\Big)^{\frac{(2K_c+K_c^{-1}+1)}{2(1+K_c)}}\Big(\frac{(a^2+4L^2K_c^2+tv_F2LK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2K_c^2)^2}\Big)^{\mathcal{B}}\Big(\frac{(a^2+4L^2K_c^2-tv_F2LK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2K_c^2)^2}\Big)^{\mathcal{B}}},
\end{aligned} \tag{F.63}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{r'} &= \frac{(K_c+K_c^{-1}-2rr')}{4(1+K_c)},\\
\mathcal{B} &= \frac{b_c(K_c-K_c^{-1})}{4(1+K_c)}.
\end{aligned}$$

La deuxième exponentielle dans l'équation (F.54) est obtenue à partir de la première en effectuant le changement $t \to -t$. Ce qui nous permet d'obtenir l'expression de la fonction de Green fermionique retardée :

$$g^R_{r,r}(\pm L/2, \pm L/2, t) = \frac{-i\Theta(t)}{\pi a}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \tag{F.64}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \cos\Bigg[2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4L^2K_c^2-2Ltv_FK_c}\Big)+2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4L^2K_c^2+2Ltv_FK_c}\Big)\\
&+ \frac{(2K_c+K_c^{-1}+1)}{(1+K_c)}\arctan\Big(\frac{tv_F}{a}\Big)+2\sum_{n=1}^{\infty}b_c^{2n}\Big[\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2+2L(n+1)tv_FK_c}\Big)\\
&+ \mathcal{B}\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2-2L(n+1)tv_FK_c}\Big)+\mathcal{A}_+\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4n^2L^2K_c^2+2Lntv_FK_c}\Big)\\
&+ \mathcal{A}_-\arctan\Big(\frac{atv_F}{a^2+4n^2L^2K_c^2-2Lntv_FK_c}\Big)\Big]\Bigg], \qquad \text{(F.65)}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} &= \Big(\frac{(a^2+4L^2K_c^2+tv_F2LK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2K_c^2)^2}\Big)^{\mathcal{B}}\Big(\frac{(a^2+4L^2K_c^2-tv_F2LK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2K_c^2)^2}\Big)^{\mathcal{B}}\\
&\times \Big(1+\frac{t^2v_F^2}{a^2}\Big)^{\frac{(2K_c+K_c^{-1}+1)}{2(1+K_c)}}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2+tv_F2L(n+1)K_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2(n+1)^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{B}}\\
&\times \Big(\frac{(a^2+4(n+1)^2L^2K_c^2-tv_F2L(n+1)K_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2(n+1)^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{B}} \qquad \text{(F.66)}\\
&\times \Big(\frac{(a^2+4n^2L^2K_c^2+tv_F2LnK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2n^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{A}_+}\Big(\frac{(a^2+4n^2L^2K_c^2-tv_F2LnK_c)^2+(atv_F)^2}{(a^2+4L^2n^2K_c^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{A}_-}
\end{aligned}
$$

F.2.2 Fonction de Green $g^R_{r,r}(\pm L/2,\mp L/2;\omega)$

En utilisant les équations (F.35)et (F.46), la fonction de Green normalisée dans l'équation (F.54) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_j^{\theta\theta}(\pm L/2,\mp L/2,t) &= \frac{-K_j^N}{2(K_j^N+1)}\sum_{r'}\sum_{n=0}^{\infty}b_j^{2n}\Big[\ln\Big(1+\frac{ir'LK_j^N}{a+itv_F+ir'K_j^N2Ln}\Big)+\ln\Big(1+\frac{ir'LK_j^N+itv_F}{a+ir'K_j^N2Ln}\Big)\\
&+ b_j\ln\Big(1-\frac{ir'LK_j^N}{a+itv_F+ir'K_j^N2L(n+1)}\Big)+b_j\ln\Big(1+\frac{itv_F-ir'LK_j^N}{a+ir'K_j^N2L(n+1)}\Big)\Big],
\end{aligned}
\qquad \text{(F.67)}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_j^{\phi\phi}(\pm L/2,\mp L/2,t) &= \frac{-(K_j^N)^{-1}}{2(K_j^N+1)}\sum_{r'}\sum_{n=0}^{\infty}(-b_j)^{2n}\Big[\ln\Big(1+\frac{ir'LK_j^N}{a+itv_F+ir'K_j^N2Ln}\Big)\\
&+\ln\Big(1+\frac{ir'LK_j^N+itv_F}{a+ir'K_j^N2Ln}\Big)\\
&-b_j\ln\Big(1-\frac{ir'LK_j^N}{a+itv_F+ir'K_j^N2L(n+1)}\Big)-b_j\ln\Big(1+\frac{itv_F-ir'LK_j^N}{a+ir'K_j^N2L(n+1)}\Big)\Big], \qquad \text{(F.68)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_j^{\phi\theta}(\pm L/2,\mp L/2,t) &= \frac{r'}{2(K_j^N+1)}\sum_{r'}\sum_{n=0}^{\infty}b_j^{2n}\Big[\ln\Big(1+\frac{ir'LK_j^N}{a+itv_F+ir'K_j^N2Ln}\Big)+\ln\Big(1+\frac{ir'LK_j^N+itv_F}{a+ir'K_j^N2Ln}\Big)\\
&+ b_j\ln\Big(1-\frac{ir'LK_j^N}{a+itv_F+ir'K_j^N2L(n+1)}\Big)+b_j\ln\Big(1+\frac{itv_F-ir'LK_j^N}{a+ir'K_j^N2L(n+1)}\Big)\Big],
\end{aligned}
\qquad \text{(F.69)}
$$

$$\tilde{G}_j^{\theta\phi}(\pm L/2, \mp L/2, t) = \frac{r'}{2(K_j^N+1)} \sum_{r'} \sum_{n=0}^{\infty} (-b_j)^{2n} \Big[\ln\Big(1 + \frac{ir'LK_j^N}{a + itv_F + ir'K_j^N 2Ln}\Big)$$
$$+ \ln\Big(1 + \frac{ir'LK_j^N + itv_F}{a + ir'K_j^N 2Ln}\Big)$$
$$-b_j \ln\Big(1 - \frac{ir'LK_j^N}{a + itv_F + ir'K_j^N 2L(n+1)}\Big) - b_j \ln\Big(1 + \frac{itv_F - ir'LK_j^N}{a + ir'K_j^N 2L(n+1)}\Big)\Big]. \quad \text{(F.70)}$$

Notons par $\mathcal{G}$ l'argument de la première exponentielle dans l'équation (F.54) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= -\sum_{r'} \Bigg[2\mathcal{A}_{r'} \Bigg(\ln\Big(1 + \frac{ir'K_cL}{a + itv_F}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{itv_F + ir'K_cL}{a}\Big)\Bigg) \\
&+ \frac{(1-rr')}{2} \Bigg(\ln\Big(1 + \frac{ir'L}{a + itv_F}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{itv_F + ir'L}{a}\Big)\Bigg) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_c^{2n} \Big[2\mathcal{A}_{r'} \Bigg(\ln\Big(1 + \frac{ir'K_cL}{a + itv_F + ir'K_c 2nL}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{itv_F + ir'K_cL}{a + ir'K_c 2nL}\Big)\Bigg) \\
&+ 2\mathcal{B} \Bigg(\ln\Big(1 - \frac{ir'K_cL}{a + itv_F + ir'K_c 2L(n+1)}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{itv_F - ir'K_cL}{a + ir'K_c 2L(n+1)}\Big)\Bigg)\Big]\Bigg].
\end{aligned} \quad \text{(F.71)}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires des logarithmes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\ln\Big(1 + \frac{ir'K_cL}{a + itv_F}\Big) &= \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{(a^2 + t^2v_F^2 - tv_F r'K_cL)^2 + a^2K_c^2L^2}{a^2 + t^2v_F^2}\Big) \\
&+ i \arctan\Big(\frac{ar'K_cL}{a^2 + t^2v_F^2 - tv_F r'K_cL}\Big), \\
\ln\Big(1 + \frac{itv_F + ir'K_cL}{a}\Big) &= \frac{1}{2} \ln\Big(1 + \frac{(tv_F + r'K_cL)^2}{a^2}\Big) + i \arctan\Big(\frac{tv_F + r'K_cL}{a}\Big), \\
\ln\Big(1 + \frac{ir'L}{a + itv_F}\Big) &= \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{(a^2 + t^2v_F^2 - tv_F r'L)^2 - a^2L^2}{(a^2 + t^2v_F^2)^2}\Big) \\
&+ i \arctan\Big(\frac{ar'L}{a^2 + t^2v_F^2 - tv_F r'L}\Big), \\
\ln\Big(1 + \frac{itv_F + ir'L}{a}\Big) &= \frac{1}{2} \ln\Big(1 + \frac{(tv_F + r'L)^2}{a^2}\Big) + i \arctan\Big(\frac{tv_F + r'L}{a}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln\Big(1 + \frac{ir'K_cL}{a + itv_F + ir'K_c 2nL}\Big) &= \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{(a^2 + (tv_F + r'K_c 2nL)^2 + r'K_cL(tv_F + r'K_c 2nL))^2 + a^2K_c^2L^2}{(a^2 + (tv_F + r'K_c 2nL)^2)^2}\Big) \\
&+ i \arctan\Big(\frac{ar'K_cL}{a^2 + (tv_F + r'K_c 2nl)^2 + r'K_cL(tv_F + r'K_c 2nL)}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln\Big(1 + \frac{ir'K_cL + itv_F}{a + ir'K_c 2nL}\Big) &= \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{(a^2 + 4K_c^2n^2L^2 + r'K_c 2nL(tv_F + r'K_cL))^2 + a^2(tv_F + K_c r'L)^2}{(a^2 + 4K_c^2n^2L^2)^2}\Big) \\
&+ i \arctan\Big(\frac{a(r'K_cL + tv_F)}{a^2 + 4K_c^2n^2L^2 + r'K_c 2nL(tv_F + r'K_cL)}\Big),
\end{aligned}$$

$$\ln\Big(1-\frac{ir'K_cL}{a+itv_F+ir'K_c2(n+1)L}\Big)=$$
$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2-r'K_cL(tv_F-r'K_c2(n+1)L))^2+a^2K_c^2L^2}{(a^2+(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2)^2}\Big)$$
$$-i\arctan\Big(\frac{ar'K_cL}{a^2+(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2-r'K_cL(tv_F+r'K_c2(n+1)L)}\Big),$$

$$\ln\Big(1+\frac{itv_F-ir'K_cL}{a+ir'K_c2(n+1)L}\Big)=$$
$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2(n+1)L(tv_F-r'K_cL))^2+a^2(tv_F-K_cr'L)^2}{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2)^2}\Big)$$
$$+i\arctan\Big(\frac{a(-r'K_cL+tv_F)}{a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2(n+1)L(tv_F-r'K_cL)}\Big).$$

Injectons les résultats obtenus dans l'expression de $\mathcal{G}$. En utilisant le fait que les deux exponentielles dans l'équation (F.54) sont complexes conjuguées, nous obtenons :

$$g^R_{r,r}(\pm L/2,\mp L/2,t) \;=\; \frac{-i\Theta(t)}{\pi a}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \tag{F.72}$$

où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N} \;=\;& \cos\Bigg[\mp Lrk_F+\sum_{r'}\Bigg(2\mathcal{A}_{r'}\Big(\arctan\Big(\frac{ar'K_cL}{a^2+t^2v_F^2-tv_Fr'K_cL}\Big)+\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_cL}{a}\Big)\Big)\\
+\;& \frac{(1-rr')}{2}\Big(\arctan\Big(\frac{ar'L}{a^2+t^2v_F^2-tv_Fr'L}\Big)+\arctan\Big(\frac{tv_F+r'L}{a}\Big)\Big)\\
+\;& \sum_{n=1}^{\infty}b_c^{2n}\Bigg(2\mathcal{A}_{r'}\arctan\Big(\frac{ar'K_cL}{a^2+(tv_F+r'K_c2nl)^2+r'K_cL(tv_F+r'K_c2nL)}\Big)\\
+\;& 2\mathcal{A}_{r'}\arctan\Big(\frac{a(r'K_cL+tv_F)}{a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_cL)}\Big)\\
-\;& 2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{ar'K_cL}{a^2+(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2-r'K_cL(tv_F+r'K_c2(n+1)L)}\Big)\\
+\;& 2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{a(-r'K_cL+tv_F)}{a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2(n+1)L(tv_F-r'K_cL)}\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg],
\end{aligned} \tag{F.73}$$

et :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} \;=\; & \prod_{r'} \Big(\frac{(a^2+t^2v_F^2-tv_Fr'K_cL)^2+a^2K_c^2L^2}{(a^2+t^2v_F^2)^2}\Big)^{\mathcal{A}_{r'}} \Big(1+\frac{(tv_F+r'K_cL)^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{A}_{r'}} \qquad \text{(F.74)}\\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+t^2v_F^2-tv_Fr'L)^2+a^2L^2}{(a^2+t^2v_F^2)^2}\Big)^{\frac{(1-rr')}{4}} \Big(1+\frac{(tv_F+r'L)^2}{a^2}\Big)^{\frac{(1-rr')}{4}}\\
\times\; & \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{(a^2+(tv_F+r'K_c2nL)^2+r'K_cL(tv_F+r'K_c2nL))^2+a^2K_c^2L^2}{(a^2+(tv_F+r'K_c2nL)^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{A}_{r'}}\\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_cL))^2+a^2(tv_F+K_cr'L)^2}{(a^2+4K_c^2n^2L^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{A}_{r'}}\\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2-r'K_cL(tv_F-r'K_c2(n+1)L))^2+a^2K_c^2L^2}{(a^2+(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{B}}\\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2(n+1)L(tv_F-r'K_cL))^2+a^2(tv_F-K_cr'L)^2}{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{B}}.
\end{aligned}
$$

F.2.3 Fonction de Green $g^R_{r,r}(x,\pm L/2;\omega)$

L'expression $g^R_{r,r}(x,L/2;t)$ se calcul dans le cas où $x\in]-\frac{L}{2};\frac{L}{2}[$. En s'appuyant sur les équations (F.21) et (F.46) on peut écrire la fonction de Green normalisée $\tilde{G}^{\theta\theta}_j$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}^{\theta\theta}_j(x,L/2,t) \;=\; & \frac{-K_j^N}{2(K_j^N+1)}\sum_{r'}\sum_{n=0}^{\infty} b_j^{2n}\Big[\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_j^N(x-L/2)}{a-ir'K_j^N2nL}\Big)\\
+\; & \ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_j^N\frac{(x-L/2)-2nL}{a}\Big)\\
-\; & \frac{(1+K_j^N)}{2}\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}-ir'K_j^N\frac{2nL}{a}\Big)-\frac{b_j^2(1+K_j^N)}{2}\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_j^N\frac{2(n+1)L}{a}\Big)\\
+\; & b_j\Big[\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_j^N(x-L/2)}{a+ir'K_j^N2(n+1)L}\Big)\\
+\; & \ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_j^N\frac{(x-L/2)+2(n+1)L}{a}\Big)\\
-\; & \frac{(1+K_j^N)}{2}\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_j^N\frac{2nL+L+2x}{a}\Big)\\
-\; & \frac{(1+K_j^N)}{2}\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_j^N\frac{2x-2nL-L}{a}\Big)\Big]\Big]\,. \qquad \text{(F.75)}
\end{aligned}
$$

On définit la fonction $\mathcal{H}$, représentant l'argument de la première exponentielle dans

l'équation (F.54) :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\sum_{r'}\Bigg[4\mathcal{A}_{r'}\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a}\Big)+(1-rr')\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'(x-L/2)}{a}\Big)\\
&- (2\mathcal{C}_{r'}+\frac{(1-rr')}{4})\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}\Big)-2\mathcal{C}_{r'}b_c^2\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2L}{a}\Big)\\
&+ 2\mathcal{B}\Bigg(\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a+ir'K_c2L}\Big)+\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2+2L)}{a}\Big)\Bigg)\\
&- 2\mathcal{D}\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(2x-L)}{a}\Big)-2\mathcal{D}\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(L+2x)}{a}\Big)\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}b_c^{2n}\Big[2\mathcal{A}_{r'}\Bigg(\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a-ir'K_c2nL}\Big)+\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{(x-L/2)-2nL}{a}\Big)\Bigg)\\
&- 2\mathcal{C}_{r'}\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}-ir'K_c\frac{2nL}{a}\Big)-2\mathcal{C}_{r'}b_c^2\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2(n+1)L}{a}\Big)\\
&+ 2\mathcal{B}\Bigg(\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a+ir'K_c2(n+1)L}\Big)+\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{(x-L/2)+2(n+1)L}{a}\Big)\Bigg)\\
&- 2\mathcal{D}\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2nL+L+2x}{a}\Big)-2\mathcal{D}\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2x-2nL-L}{a}\Big)\Big]\Bigg],
\end{aligned}
\tag{F.76}
$$

où l'on introduit :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{r'} &= \frac{(K_c+K_c^{-1}-2rr')}{8},\\
\mathcal{D} &= \frac{b_c(K_c-K_c^{-1})}{8}.
\end{aligned}
\tag{F.77}
$$

En séparant la partie réelle de la partie imaginaire dans les logarithmes on obtient :

$$
\begin{aligned}
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2nL+L+2x}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(2nL+L+2x))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(2nL+L+2x)}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2x-L-2nL}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(2x-L-2nL))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(2x-L-2nL)}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{L+2x}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(L+2x))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(L+2x)}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2x-L}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(2x-L))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(2x-L)}{a}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{t^2v_F^2}{a^2}\Big)+i\arctan\Big(\frac{tv_F}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2L}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c2L)^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c2L}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2nL}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c2nL)^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c2nL}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{2(n+1)L}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c2(n+1)L}{a}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'(x-L/2)}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'(x-L/2))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'(x-L/2))}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2+2L)}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2L))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2L))}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{(x-L/2)-2nL}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2-2nL))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(x-L/2-2nL)}{a}\Big),\\
\ln\Big(1+\frac{itv_F}{a}+ir'K_c\frac{(x-L/2)+2(n+1)L}{a}\Big) &= \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2(n+1)L))^2}{a^2}\Big)\\
&+ i\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2(n+1)L))}{a}\Big),
\end{aligned}
$$

$$\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a+ir'K_c2L}\Big)=$$
$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+4K_c^2L^2+r'K_c2L(tv_F+r'K_c(x-L/2)))^2+a^2(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{(a^2+4K_c^2L^2)^2}\Big)$$
$$+i\arctan\Big(\frac{a(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a^2+4K_c^2L^2+r'K_c2L(tv_F+r'K_c(x-L/2))}\Big),$$
$$\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a-ir'K_c2nL}\Big)=$$
$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2)))^2+a^2(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{(a^2+4K_c^2n^2L^2)^2}\Big)$$
$$+i\arctan\Big(\frac{a(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2))}\Big),$$
$$\ln\Big(1+\frac{itv_F+ir'K_c(x-L/2)}{a+ir'K_c2(n+1)L}\Big)=$$
$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2)))^2+a^2(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2)^2}\Big)$$
$$+i\arctan\Big(\frac{a(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2))}\Big).$$

En remplaçant dans l'équation (F.54), on arrive au résultat suivant :

$$\begin{aligned} g^R_{r,r}(x,L/2,t) &= \frac{-i\Theta(t)}{\pi a}\Re\Big[e^{irk_F(x-L/2)}e^{\mathcal{H}}\Big], \\ &= \frac{-i\Theta(t)}{\pi a}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \end{aligned} \tag{F.78}$$

où :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} \;=\;& \cos\Bigg[rk_F(x-L/2) \qquad\qquad (F.79)\\
&- \sum_{r'}\Bigg(4\mathcal{A}_{r'}\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a}\Big)+(1-rr')\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'(x-L/2))}{a}\Big)\\
&- (2\mathcal{C}_{r'}+\frac{(1-rr')}{2})\arctan\Big(\frac{tv_F}{a}\Big)-2\mathcal{C}_{r'}b_c^2\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c2L}{a}\Big)\\
&+ 2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{a(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a^2+4K_c^2L^2+r'K_c2L(tv_F+r'K_c(x-L/2))}\Big)\\
&+ 2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2L))}{a}\Big)\\
&- 2\mathcal{D}\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(2x-L)}{a}\Big)-2\mathcal{D}\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(L+2x)}{a}\Big)\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}b_c^{2n}\Big[2\mathcal{A}_{r'}\arctan\Big(\frac{a(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2))}\Big)\\
&+ 2\mathcal{A}_{r'}\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(x-L/2-2nL)}{a}\Big)\\
&- 2\mathcal{C}_{r'}\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c2nL}{a}\Big)-2\mathcal{C}_{r'}b_c^2\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c2(n+1)L}{a}\Big)\\
&+ 2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{a(tv_F+r'K_c(x-L/2))}{a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2))}\Big)\\
&+ 2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2(n+1)L))}{a}\Big)\\
&- 2\mathcal{D}\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(2nL+L+2x)}{a}\Big)-2\mathcal{D}\arctan\Big(\frac{tv_F+r'K_c(2x-L-2nL)}{a}\Big)\Big]\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} \;=\; & \prod_{r'} \frac{\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{a^2}\Big)^{2\mathcal{A}_{r'}}\Big(1+\frac{(tv_F+r'(x-L/2))^2}{a^2}\Big)^{\frac{(1-rr')}{2}}}{\Big(1+\frac{t^2v_F^2}{a^2}\Big)^{(\mathcal{C}_{r'}+\frac{(1-rr')}{4})}\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c2L)^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{C}_{r'}b_c^2}} \\
\times\; & \frac{\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2L))^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{B}}\Big(\frac{(a^2+4K_c^2L^2+r'K_c2L(tv_F+r'K_c(x-L/2)))^2+a^2(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{(a^2+4K_c^2L^2)^2}\Big)^{\mathcal{B}}}{\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(L+2x))^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{D}}\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(2x-L))^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{D}}} \\
\times\; & \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2-2nL))^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{A}_{r'}b_c^{2n}}}{\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c2(n+1)L)^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{C}_{r'}b_c^{2n+2}}\Big(1+\frac{(tv_F-r'K_c2nL)^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{C}_{r'}b_c^{2n}}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2)))^2+a^2(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{(a^2+4K_c^2n^2L^2)^2}\Big)^{\mathcal{A}_{r'}b_c^{2n}} \\
\times\; & \frac{\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(x-L/2+2(n+1)L))^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{B}b_c^{2n}}}{\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(2nL+L+2x))^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{D}b_c^{2n}}\Big(1+\frac{(tv_F+r'K_c(2x-L-2nL))^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{D}b_c^{2n}}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'K_c2nL(tv_F+r'K_c(x-L/2)))^2+a^2(tv_F+r'K_c(x-L/2))^2}{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2)^2}\Big)^{\mathcal{B}b_c^{2n}}.
\end{aligned}
\tag{F.80}
$$

L'expression de $g^R_{r,r}(x,-L/2;t)$ s'obtient de l'expression ci-dessus en effectuant la substitution $L \to -L$.

F.2.4 Fonction de Green $g^R_{r,r}(\pm L/2, x, \omega)$

Cette fonction de Green s'obtient en effectuant les mêmes démarches que celles entreprises pour les autres fonctions de Green. Le résultat s'écrit :

$$
g^R_{r,r}(L/2,x,t) \;=\; \frac{-i\Theta(t)}{\pi a}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \tag{F.81}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} \;=\;& \cos\Bigg[(rk_F)(x-L/2) \\
&+ \sum_{r'}\Bigg((1-rr')\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'(L/2-x)}{a}\Big)-\frac{(1-rr')}{2}\arctan\Big(\frac{v_Ft}{a}\Big) \\
&- 2\mathcal{A}_{r'}\arctan\Big(\frac{v_Ft}{a}\Big)-2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c2L}{a}\Big) \\
&+ 2\mathcal{C}_{r'}\Big\{2\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c(L/2-x)}{a}\Big)+b_c^2\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c(3L/2-x)}{a}\Big) \\
&+ b_c^2\arctan\Big(\frac{a(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}{a^2+4K_c^2L^2-r'K_c2L(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}\Big)\Big\} \\
&+ 2\mathcal{D}\Big\{\arctan\Big(\frac{a(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}{a^2+K_c^2(x+3L/2)^2+r'K_c(x+3L/2)(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}\Big) \\
&+ \arctan\Big(\frac{a(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}{a^2+K_c^2(x-L/2)^2+r'K_c(x-L/2)(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}\Big) \\
&+ \arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c(x-L/2)}{a}\Big)+\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c(3L/2+x)}{a}\Big)\Big\} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_c^{2n}\Big[2\mathcal{C}_{r'}\Big\{\arctan\Big(\frac{a(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}{a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c2Ln(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}\Big) \\
&+ \arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c(L/2-x+2nL)}{a}\Big) \\
&+ b_c^2\arctan\Big(\frac{a(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}{a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2-r'K_c2L(n+1)(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}\Big) \\
&+ b_c^2\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c(L/2-x-2L(n+1))}{a}\Big)\Big\} \\
&+ 2\mathcal{D}\Big\{\arctan\Big(\frac{a(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}{a^2+K_c^2(3L/2+x+2nL)^2+r'K_c(3L/2+x+2nL)(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}\Big) \\
&+ \arctan\Big(\frac{a(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}{a^2+K_c^2(x-L/2-2nL)^2+r'K_c(x-L/2-2nL)(v_Ft+r'K_c(L/2-x))}\Big) \\
&+ \arctan\Big(\frac{av_Ft+r'K_c(3L/2+x+2nL)}{a}\Big)+\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c(x-L/2-2nL)}{a}\Big)\Big\} \\
&- 2\mathcal{A}_{r'}\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c2nL}{a}\Big)-2\mathcal{B}\arctan\Big(\frac{v_Ft+r'K_c2L(n+1)}{a}\Big)\Big]\Bigg)\Bigg], \qquad \text{(F.82)}
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} \;=\; & \prod_{r'} \frac{\Big(1+\frac{(v_F t+r'(L/2-x))^2}{a^2}\Big)^{\frac{(1-rr')}{2}} \Big(1+\frac{(v_F t+K_c r'(L/2-x))}{a^2}\Big)^{2\mathcal{C}_{r'}} \Big(1+\frac{(v_F t+K_c r'(3L/2-x))}{a^2}\Big)^{b_c^2\mathcal{C}_{r'}}}{\Big(1+\frac{v_F^2 t^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{A}_{r'}+\frac{(1-rr')}{4}}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+4K_c^2L^2-r'K_c 2L(v_F t+K_c r'(x-L/2)))^2+a^2(v_F t+K_c r'(x-L/2))^2}{(a^2+4K_c^2L^2)^2}\Big)^{b_c^2\mathcal{C}_{r'}} \\
\times\; & \frac{\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c(x-L/2)^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{D}}\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c(x+3L/2)^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{D}}}{\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c 2L)^2}{a^2}\Big)^{\mathcal{B}}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+K_c^2(x+3L/2)^2+r'K_c(x+3L/2)(v_F t+K_c r'(x-L/2)))^2+a^2(v_F t+K_c r'(x-L/2))^2}{(a^2+K_c^2(x+3L/2)^2)^2}\Big)\Big)^{\mathcal{D}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+K_c^2(x-L/2)^2+r'K_c(x-L/2)(v_F t+K_c r'(x-L/2)))^2+a^2(v_F t+K_c r'(x-L/2))^2}{(a^2+K_c^2(x-L/2)^2)^2}\Big)\Big)^{\mathcal{D}} \\
\times\; & \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c(L/2-x+2nL))^2}{a^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{C}_{r'}}\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c(L/2-x-2(n+1)L))^2}{a^2}\Big)^{b_c^{2n+2}\mathcal{C}_{r'}}}{\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c 2nL)^2}{a^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{A}_{r'}}\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c 2(n+1)L)^2}{a^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{B}}} \\
\times\; & \Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c(3L/2+x+2nL))^2}{a^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{D}}\Big(1+\frac{(v_F t+r'K_c(x-L/2-2nL))^2}{a^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{D}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+4K_c^2n^2L^2+r'K_c 2Ln(v_F t+r'K_c(L/2-x)))^2+a^2(v_F t+r'K_c(L/2-x))^2}{(a^2+4K_c^2n^2L^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{C}_{r'}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2-r'K_c 2L(n+1)(v_F t+r'K_c(L/2-x)))^2}{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2)^2} \\
+\; & \frac{a^2(v_F t+r'K_c(L/2-x))^2}{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2)^2}\Big)^{b_c^{2n+2}\mathcal{C}_{r'}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+K_c^2(3L/2+x+2nL)^2+r'K_c(3L/2+x+2nL)(v_F t+r'K_c(L/2-x)))^2}{(a^2+K_c^2(3L/2+x+2nL)^2)^2} \\
+\; & \frac{a^2(v_F t+r'K_c(L/2-x))^2}{(a^2+K_c^2(3L/2+x+2nL)^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{D}} \\
\times\; & \Big(\frac{(a^2+K_c^2(x-L/2-2nL)^2+r'K_c(x-L/2-2nL)(v_F t+r'K_c(L/2-x)))^2}{(a^2+K_c^2(x-L/2-2nL)^2)^2} \\
+\; & \frac{a^2(v_F t+r'K_c(L/2-x))^2}{(a^2+K_c^2(x-L/2-2nL)^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{D}}. \qquad \text{(F.83)}
\end{aligned}
$$

Le changemant $L \to -L$ permet d'obtenir l'expression de la fonction de Green $g^R_{r,r}(x,-L/2;t)$.

F.2.5 Fonction de Green $g^R_{r,r}(x,x;\omega)$

De la même façon, on peut écrire l'expression de la fonction de Green $g^R_{r,r}(x,x;\omega)$:

$$
g^R_{r,r}(x,x,t) \;=\; \frac{-i\Theta(t)}{\pi a}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \qquad \text{(F.84)}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \cos\Big[2\sum_{r'}\Big\{(\mathcal{C}_{r'}+\frac{(1-rr')}{4})\arctan\Big(\frac{v_F t}{a}\Big)+\mathcal{C}_{r'}b_c^2\arctan\Big(\frac{av_F t}{a^2+4K_c^2L^2+r'2Lv_F tK_c}\Big)\\
&+ \mathcal{D}\arctan\Big(\frac{av_F t}{a^2+K_c^2(2x+L)^2+v_F tK_c(2x+L)}\Big)+\mathcal{D}\arctan\Big(\frac{av_F t}{a^2+K_c^2(2xL)^2+v_F tK_c(2x-L)}\Big)\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_c^{2n}\Big[\mathcal{C}_{r'}\arctan\Big(\frac{av_F t}{a^2+4K_c^2n^2L^2+r'2nLv_F tK_c}\Big)\\
&+ \mathcal{C}_{r'}b_c^2\arctan\Big(\frac{av_F t}{a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'2(n+1)Lv_F tK_c}\Big)\\
&+ \mathcal{D}\arctan\Big(\frac{av_F t}{a^2+K_c^2(2x+(2nL+L)+v_F tK_c(2x+(2nL+L)))^2}\Big)\\
&+ \mathcal{D}\arctan\Big(\frac{av_F t}{a^2+K_c^2(2x-(2nL+L)+v_F tK_c(2x-(2nL+L)))^2}\Big)\Big]\Big\}\Big],
\end{aligned}
\tag{F.85}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} &= \prod_{r'}\Big(1+\frac{v_F^2t^2}{a^2}\Big)^{(\mathcal{C}_{r'}+\frac{(1-rr')}{4})}\Big(\frac{(a^2+4K_c^2L^2+r'2Lv_F tK_c)^2+(av_F t)^2}{(a^2+4K_c^2L^2)^2}\Big)^{\mathcal{C}_{r'}b_c^2}\\
&\times \Big(\frac{(a^2+K_c^2(2x+L)^2+v_F tK_c(2x+L))^2+(av_F t)^2}{(a^2+K_c^2(2x+L)^2)^2}\Big)^{\mathcal{D}}\\
&\times \Big(\frac{(a^2+K_c^2(2x-L)^2+v_F tK_c(2x-L))^2+(av_F t)^2}{(a^2+K_c^2(2x-L)^2)^2}\Big)^{\mathcal{D}}\\
&\times \prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(a^2+4K_c^2n^2L^2+r'2nLv_F tK_c)^2+(av_F t)^2}{(a^2+4K_c^2n^2L^2)^2}\Big)^{\mathcal{C}_{r'}b_c^{2n}}\\
&\times \Big(\frac{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2+r'2(n+1)Lv_F tK_c)^2+(av_F t)^2}{(a^2+4K_c^2(n+1)^2L^2)^2}\Big)^{\mathcal{C}_{r'}b_c^{2n+2}}\\
&\times \Big(\frac{(a^2+K_c^2(2x+2nL+L)^2+v_F tK_c(2x+2nL+L))^2+(av_F t)^2}{(a^2+K_c^2(2x+2nL+L)^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{D}}\\
&\times \Big(\frac{(a^2+K_c^2(2x-2nL-L)^2+v_F tK_c(2x-2nL-L))^2+(av_F t)^2}{(a^2+K_c^2(2x-2nL-L)^2)^2}\Big)^{b_c^{2n}\mathcal{D}}.
\end{aligned}
\tag{F.86}
$$

Bibliographie

[1] G. Schön, *Single electron tunneling*. Dans *Quantum transport and dissipation*, VCH Verlag (1997), Chap. 3.

[2] G.-L. Ingold and Yu.V. Nazarov, dans *Charge Tunneling Rates in Ultrasmall Junctions*, *B294*, H. Grabert and M.H. Devoret Eds. (Plenum Press, New York, 1992), Chap. 2, p. 21.

[3] R. Landauer. IBM J. Res. Dev., **1**, 233 (1957).

[4] R. Landauer. Phil. Mag., **21**, 863 (1970).

[5] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, et D. van der Marel, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).

[6] W. Schottky, Annalen der Physik, **57**, 541 (1918).

[7] G. B. Lesovik, T. Martin et J. Torres, Phys. Rev. B**60**, 11935 (1999).

[8] R. H. Koch, D. J. van Harlingen, et J. Clarke. Phys. Rev. B **26**, 74 (1982).

[9] R. J. Schoelkopf, P. J. Burke, A. A. Kozhevnikov, D. E. Prober, et M. J. Rooks, Phys. Rev. Lett., **78**, 3370 (1997).

[10] M. Creux, A. Crépieux, et T. Martin. Phys. Rev. B **74**, 115325 (2006).

[11] R. Aguado et L. P. Kouwenhoven. Phys. Rev. Lett. **84**, 1986 (2000).

[12] M. Büttiker, A. Prêtre, et H. Thomas, Phys. Rev. Lett. **70**, 4114 (1993).

[13] J. Gabelli, G. Fève, J.-M. Berroir, B. Plaçais, A. Cavanna, B. Etienne, Y. Jin, et D.C. Glattli, Science **313**, 49 (2006).

[14] J. Gabelli, G. Fève, T. Kontos, J.-M. Berroir, B. Plaçais, D.C. Glattli, B. Etienne, Y. Jin, et M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **98**, 166806 (2007).

[15] J. Gabelli, G. Fève, J.-M. Berroir, et B. Plaçais, Rep. Prog. Phys. **75**, 126504 (2012).

[16] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **3**, 920 (1957).

[17] S. Tomonaga, Prog. Theo. Phys. **5**, 544 (1950).

[18] J.M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).

[19] C.C. Chamon, D.E. Freed, et X.G. Wen, Phys. Rev. B **53**, 4033 (1996).

[20] J. von Delft et H. Schoeller, Ann. Phys. **7**, 225 (1998).

[21] M. Bockrath, D.H. Cobden, J. Lu, A.G. Rinzler, R.E. Smalley, L. Balents, et P.L. McEuen, Nature **397**, 598 (1999).

[22] X. G. Wen, Phys. Rev. B **41**, 12838 (1990).

[23] X. G. Wen, Phys. Rev. B **44**, 5708 (1991).

[24] D. C. Tsui, H. Stömer, et A. C. Grossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).

[25] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).

[26] A. V. Shytov, L. S. Levitov, et B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **80**, 141 (1998).

[27] L. V. Keldysh. Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965).

[28] P. Drüde. Annalen der Physik, **306**, 566 (1900).

[29] A. Sommerfeld et H. Bethe. *Elektronentheorie der Metalle*. Springer Verlag, Heidelberg, (1933).

[30] G. D. Mahan. Many-particle physics. Kluwer Academic/ Plenum publishers (2000).

[31] R. Kubo. J. Phys. Soc. Japan, **12**, 570 (1957).

[32] D. A. Grennwood. Proc. Phys. Soc. London, **71**, 585 (1958).

[33] D. R. Hartree. Proc. R. Soc. London, A**113**, 621 (1928).

[34] V. Fock. Z. Phys. **61**, 126 (1930).

[35] L. H. Thomas. Proc. Cambridge Philo. Soc. **23**, 542 (1927).

[36] E. Fermi. Z. Phys. **48**, 73 (1928).

[37] J. Lindhard. MAT.-Fys. Medd. **28**, 8 (1954).

[38] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **5**, 101 (1957).

[39] L. D. Landau, Sov. Phys. JETP **8**, 70 (1958).

[40] H. J. Schulz, G. Cuniberti, et P. Pieri. *Fermi liquids and Luttinger liquids*, dans *Field theories for low-dimensional condensed matter systems*, G. Morandini et *al.* Eds. Springer (2000).

[41] D. Pines et P. Nozières. *Theory of quantum liquids*. W. A. Benjamin, Menlo Parko, California (1966).

[42] P. Nozières. *Theory of interacting Fermi systems*. W. A. Benjamin, New York (1964).

[43] L. P. Kadanoff et G. Baym. *Quantum statistical mechanics*. W. A. Benjamin, New York (1962).

[44] D.S. Golubev et A.D. Zaikin, Phys. Rev. Lett. **86**, 4887 (2001).

[45] A. Levy Yeyati, A. Martin-Rodero, D. Estève, et C. Urbina, Phys. Rev. Lett. **87**, 046802 (2001).

[46] J. Sée, Théorie du blocage de Coulomb appliquée aux nanostructures semiconductrices : modélisation des dispositifs à nanocristaux de silicium. Thèse de Doctorat. Université d'Orsay (2004).

[47] D. V. Arvin et K. K. Likharev, dans *mesoscopic phenomena in solids*, édité par B. L. Altschuler, P. A. Lee et R. A. Webb, Elsevier, Amsterdam (1991).

[48] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, et C. Urbina, Phys. Rev. Lett. **64**, 1824 (1990).

[49] D. V. Averin et A. A. Odintsov, Phys. Lett. A **140**, 251 (1989).

[50] G. Schön, Phys. Rev. B **32**, 4469 (1985).

[51] G. Falci, V. Bubanja, et G. Schön, Europhys. Lett. 16, 109 (1991) ; Z. Phys. B **85**, 451 (1991).

[52] Yu. V. Nazarov, Pisâma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **49**, 105 (1989).

[53] S. M. Girvin, L. I. Glazman, M. Jonson, D. R. Penn, et M. D. Stiles, Phys. Rev. Lett. **64**, 3183 (1990).

[54] S. V. Panyukov et A. D. Zaikin, J. Low Temp. Phys. **73**, 1 (1988).

[55] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986).

[56] M. Büttiker, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988).

[57] R. Landauer, Z. Phys. B **68**, 217 (1987).

[58] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer et S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985).

[59] E. N. Economou et C. M. Soukoulis. Phys. Rev. Lett. **46**, 618 (1981).

[60] R. de Picciotto et *coll.*, Nature, **411**, 51 (2001).

[61] P. Dutta et M. P. Horn. Rev. Mod. Phys., **53**, 497 (1981).

[62] M. B. Weissman, Rev. Mod. Phys., **60**, 537 (1988).

[63] S. Feng, P. A. Lee et A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **56**, 1960 (1986).

[64] J. B. Johnson, Phys. Rev. **32**, 97 (1928).

[65] H. Nyquist, Phys. Rev. **32**, 97 (1928).

[66] R. Cron, M. F. Goffman, D. Esteve et C. Urbina, Phys. Rev. Lett. **86**, 4104 (2001).

[67] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin et B. Etienne, Phys. Rev. Lett., **79**, 2526 (1997).

[68] R. de Picciotto, , M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin, et D. Mahalu. Nature, **389** :162 (1997).

[69] L. D. Landau et E. M. Lifshitz. Statistical Physics part. 1. Butterworth Heinemann (1997).

[70] G. B. Lesovik, JETP Lett. **49**, 594 (1989).

[71] M. Büttiker et R. Landauer, Phys. Rev. Lett. **49**, 1739 (1982).

[72] T. Martin et R. Landauer. Phys. Rev. B **45**, 1742 (1992).

[73] M. Büttiker, Phys. Rev. B **46**, 12485 (1992).

[74] M. Büttiker. Phys. Rev. Lett. **65**, 2901 (1990).

[75] H. E. van den Brom et J. M. van Ruitenbeek, Phys. Rev. Lett. **82**, 1526 (1999).

[76] M. Reznikov, M. Heiblum, H. Shtrikman et D. Mahalu, Phys. Rev. Lett. **75**, 3340 (1995).

[77] L. Di Carlo. Phys. Rev. Lett. **97**, 036810 (2006).

[78] H. Birk, M. J. M. de Jong and C. Schönenberger, Phys. Rev. Lett. **75**, 1610 (1995).

[79] R. Hanbury Brown et R. Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1956)

[80] R. Hanbury Brown et R. Q. Twiss, Proc. Royal. Soc. London Ser. A **242**, 300 (1957)

[81] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu et Y. Yamamoto, Science **248**, 299 (1999).

[82] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland et C. Schönenberger, Science **284**, 296 (1999).

[83] H. Kiesel, A. Renz et F. Hasselbach, Nature **218**, 393 (2002).

[84] Ya. M. Blanter et M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1 (2000).

[85] P. M. Billangeon, F. Pierre, H. Bouchiat, et R. Deblock. Phys. Rev. Lett. **96**, 136804 (2006).

[86] G. B. Lesovik et R. Loosen. JETP Lett. **65**, 295 (1997).

[87] A. V. Lebedev, A. Crépieux, et T. Martin, Phys. Rev. B **71**, 047516 (2005).

[88] I. Safi, C. Bena, et A. Crépieux, Phys. Rev. B **78**, 205422 (2008).

[89] U. Gavish, *Quantum current noise in mesoscopic systems*, thèse de doctorat, Weizmann institut of science, Rehovot, Israel (2003).

[90] K. von Klitzing, G. Dorda, et M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).

[91] R. E. Prange et S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag (1990).

[92] D. Arovas, J. R. Schieffer, et F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).

[93] F. E. Camino, Wei Zhou, et V. J. Goldman, Phys. Rev. B**72**, 075342 (2005).

[94] H. L. Stömer, Physica B**177**, 401 (1992).

[95] V. J. Goldman et B. Su, Science **267**, 1010 (1995).

[96] G. P. Collins, Phys. Today, Nov 1997, p.17.

[97] R. Willet, J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, et J. H. English, Phys. Rev. Lett. **59**, 1776 (1987).

[98] F.D.M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **51**, 605(1983).

[99] J.K. Jain, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).

[100] J.K. Jain, Phys. Rev. B **40**, 8079 (1989).

[101] J.K. Jain, Phys. Rev. B **41**, 7653 (1990).

[102] X. G. Wen, Int. J. Mod. Phys. B **6**, 1711 (1992).

[103] X. G. Wen, Adv. Phys. **44**, 405 (1995).

[104] X. G. Wen et A. Zee, Phys. Rev. B **46**, 2290 (1992).

[105] J. Frohlich et A. Zee, Nucl. Phys. B **364**, 517 (1991).

[106] C. L. Kane et M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **51**, 13449 (1995).

[107] A. M. Chang, L. N. Pfeiffer, et K. W. West, Proceedings of the 12th EP2DS, Tokyo, Physica B **249-251**, 383 (1998).

[108] B. I. Halperin, P. A. Lee, et N. Read, Phys. Rev. b **47**, 7312(1993).

[109] A. Lopez et E. Fretkin, Phys. Rev. B **59**, 15323 (1999).

[110] L. S. Levitov, A. V. Shytov, et B. I. Halperin, Phys. Rev. B **64**, 075322 (2001).

[111] U. Zülick et A. H. MacDonald, Physica E **3**, 229 (1997).

[112] K. Imura et N. Nagaosa, Phys. Rev. B **55**, 7690 (1997).

[113] W. J. Zheng et Yue Yu, Phys. Rev. Lett. **79**, 3242 (1997).

[114] A. Luther et I. Peschel, Phys. Rev. B **9**, 2911 (1974).

[115] A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **64**, 220 (1990).

[116] B. Blok et X. G. Wen, Phys. Rev. B **42**, 8133 (1990).

[117] C. L. Kane et M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 7268 (1992).

[118] C. L. Kane et M. P. A. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 15233 (1992).

[119] P. Fendley, A. W. W. Ludwig, et H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **74**, 3005 (1995).

[120] P. Fendley, A. W. W. Ludwig, et H. Saleur, Phys. Rev. B **52**, 8934 (1995).

[121] S. Ghoshal et A. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 3841 (1994).

[122] R. Zamoum, A. Crépieux, et I. Safi, Phys. Rev. B **85**, 125421 (2012).

[123] U. Weiss, M. Sassetti, T. Negele, et M. Wollensak, Z. Phys. B-condensed matter **84**, 471 (1991).

[124] C. de C. Chamon et E. Fradkin, Phys. Rev. B **56**, 2012 (1997).

[125] E. Fradkin, Proceedings of theXXXIVth Recontres de Moriond, January 23-30, 1999, edited by G. Glattli, M. Sanquer, et J. Tran Thanh Van, 197-218.

[126] E. Majorana, Nuovo Cimento, **5**, 171 (1937).

[127] R. Egger et H. Grabert, Phys. Rev. B **58**, 10761 (1998).

[128] C.L. Kane et M.P.A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **68**, 1220 (1992).

[129] K. A. Matveev, Phys. Rev. B **51**, 1743 (1995).

[130] M. B. Green, J. H. Schwartz, et E. Witten, Superstring Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1988), Vol. I.

[131] A. Furusaki, Phys. Rev. B **56**, 9352 (1997).

[132] R. Egger et A. O. Gogolin, Eur. Phys. J. B **3**, 281 (1998).

[133] A. M. Chang, Rev. Mod. Phys. **75**, 1449 (2003).

[134] F. P. Milliken, C. P. Umbach, et R. A. Webb, Solid State Comm. **97**, 309 (1996).

[135] L. N. Pfeiffer, K. W. West, H. L. Stormer, J. P. Eisenstein, K.W. Baldwin, D. Greshoni, et J. Spector, Appl. Phys. Lett. **56**, 1697 (1990).

[136] A. M. Chang, L. N. Pfeiffer, et K. W. West, Phys. Rev. Lett. **77**, 2538 (1996).

[137] A. M. Chang, M.K. Wu, J.C.C. Chi, L. N. Pfeiffer, et K. W. West, Phys. Rev. Lett. **86**, 2538 (2001).

[138] M. Grayson, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, K.W. West, et A.M. Chang, Phys. Rev. Lett. **80**, 1062 (1998).

[139] M. Reznikov, R. de Picciotto R, T.G. Griffiths, M. Heiblum, et V. Umansky, Nature **399**, 238 (1999).

[140] E. Comforti, Y.C. Chung, M. Heiblum, V. Umansky, et D. Mahalu, Nature **416**, 515 (2002).

[141] Y. Hamamoto, T. Jonckheere, T. Kato, et T. Martin, Phys. Rev. B **81**, 153305 (2010).

[142] A. Cottet, C. Mora, et T. Kontos, Phys. Rev. B **83**, 121311(R) (2011).

[143] M. Filippone et K. Le Hur, C. Mora, Phys. Rev. B **88**, 045302 (2013).

[144] A. Crépieux, Phys. Rev. B **87**, 155432 (2013).

[145] M. Hashisaka, K. Washio, H. Kamata, K. Muraki, et T. Fujisawa, Phys. Rev. B **85**, 155424 (2012).

[146] S.J. Chorley, J. Wabnig, Z.V. Penfold-Fitch, K.D. Petersson, J. Frake, C.G. Smith, et M.R. Buitelaar, Phys. Rev. Lett. **108**, 036802 (2012).

[147] J. Basset, H. Bouchiat, et R. Deblock, Phys. Rev. B **85**, 085435 (2012).

[148] T. Frey, P.J. Leek, M. Beck, J. Faist, A. Wallraff, K. Ensslin, T. Ihn, et M. Büttiker, Phys. Rev. B **86**, 115303 (2012).

[149] A. Crépieux, P. Devillard, et T. Martin, Phys. Rev. B **69**, 205302 (1998).

[150] Y. Fu et S. C. Dudley, Phys. Rev. Lett. **70**, 6568 (2003).

[151] J. R. Tucker et M. J. Feldman Rev. Mod. Phys. **57**, 1055 (1985).

[152] I. Safi et E. Sukhorukov, Eur. Phys. Lett. **91**, 67008 (2010).

[153] I. Safi et P. Joyez, Phys. Rev. B **84**, 205129 (2011).

[154] Yu.V. Nazarov, Sov. Phys. JETP **68**, 561 (1989) ; P. Delsing, K.K. Likharev, L.S. Kuzmin, et T. Claeson, Phys. Rev. Lett. **63**, 1180 (1989) ; G. Schön et A.D. Zaikin, Phys. Rep. **198**, 237 (1990) ; M.H. Devoret, D. Estève, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, et C. Urbina, Phys. Rev. Lett. **64**, 1824 (1990) ; G.-L. Ingold et Yu.V. Nazarov, in *Charge Tunneling Rates in Ultrasmall Junctions*, *B294*, H. Grabert et M.H. Devoret Eds. (Plenum Press, New York, 1992), Chap. 2, p. 21.

[155] P. Joyez, D. Estève, et M.H. Devoret, Phys. Rev. Lett. **80**, 1956 (1998).

[156] D.S. Golubev et A.D. Zaikin, Phys. Rev. Lett. **86**, 4887 (2001).

[157] C. Altimiras, U. Gennser, A. Cavanna, D. Mailly, et F. Pierre, Phys. Rev. Lett. **99**, 256805 (2007).

[158] M. Kindermann et Yu.V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **91**, 136802 (2003).

[159] I. Safi et H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **93**, 126602 (2004).

[160] F.D. Parmentier, A. Anthore, S. Jezouin, H. le Sueur, U. Gennser, A. Cavanna, D. Mailly, et F. Pierre, Nature Physics **7**, 935 (2011).

[161] S. Jezouin, M. Albert, F.D. Parmentier, A. Anthore, U. Gennser, A. Cavanna, I. Safi, et F. Pierre, Nature Comm. **4**, 1802 (2013).

[162] D.S. Golubev, A.V. Galaktionov, et A.D. Zaikin, Phys. Rev. B **72**, 205417 (2005).

[163] M. Büttiker, Phys. Rev. B **45**, 3807 (1992).

[164] I.P. Levkivskyi et E.V. Sukhorukov, Phys. Rev. B **85**, 075309 (2012).

[165] I. Safi, arXiv :0908.4382 (2009) ; AIP Conf. Proc. **1129**, 431, NOISE et FLUCTUATIONS : 20th International Conference on Noise et Fluctuations, Vol. 1129 (AIP, Melville, New York, 2009), Eds. M. Macucci et G. Basso, cond-mat/0906.4658 ; I. Safi et P. Joyez, Phys. Rev. B **84**, 205129 (2011).

[166] P.K. Tien et J.P. Gordon, Phys. Rev. **129**, 647 (1963).

[167] I. Safi et E. Sukhorukov, Eur. Phys. Lett. **91**, 67008 (2010).

[168] F. Guinea, Phys. Rev. B **32**, 7518 (1985).

[169] C. Bena et I. Safi, Phys. Rev. B **76**, 125317 (2007).

[170] J.-R. Souquet, I. Safi et P. Simon, arXiv :1306.5135 (2013).

[171] D.C. Matthis et E.H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1995).

[172] F.D.M. Haldane, J. Phys. C : Solid State Phys. **12**, 4791 (1979).

[173] F.D.M. Haldane, J. Phys. C : Solid State Phys. **14**, 2585 (1981).

[174] N. Menyhard et J. Solyom, J. Low Temp. Phys. **12**, 529 (1973).

[175] W. Metzner, C. Castellani, et C. Di Castro, Adv. in Phys. **47**, 317 (1998).

[176] A. O. Gogolin, A. A. Nersesyan, et A. M. Tsvelik. Bosonization et strongly correlated systems. Cambridge University Press, (1998).

[177] T. Giamarchi. Quantum Physics in One Dimension. Oxford University Press, (2003).

[178] D. L. Maslov et M. Stone, Phys. Rev. B **52**, 5539 (1995).

[179] V. V. Ponomorenko, Phys. Rev. B **52**, 8666 (1995).

[180] I. Safi et H. J. Schulz, Phys. Rev. B **52**, 17040 (1995).

[181] P. Segovia, D. Purdie, M. Hengsberger, et Y. Baer, Nature **402**, 504 (1999).

[182] S. Eggert, One-dimensional quantum wires : a pedestrian approach to bosonization, Chapter 2 in : Theoritical Sarvey of one Dimensional Wire systems. Edited by Y. Kak et *al.* (Souha Publishing, Seoul, 2007).

[183] H. Ishii, H. Kataura, H. Shiozawa, H. Yoshioka, H. Otsubo, Y. Takayama, T. Miyahara, S. Suzuki, Y. Achiba, M. Nakatake, T. Narimura, M. Higashiguchi, K. Shimada, H. Namatame, et M. Taniguchi, Nature **426**, 540 (2003).

[184] C.L. Kane, L. Balents, et M.P.A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **79**, 5086 (1997).

[185] K. Le Hur, B. I. Halperin, et A. Yacoby, Science, **323**, 3037 (2008).

[186] K.-V. Pham, M. Gabay, et P. Lederer, Phys. Rev. B **61**, 16397 (2000).

[187] K. Le Hur, Phys. Rev. B **65**, 233314 (2002).

[188] K.-I. Imura, K.-V. Pham, P. Lederer, et F. Pièchon, Phys. Rev. B **66**, 035313 (2002).

[189] H. Steinberg, G. Barak, A. Yacoby, L. N. Pfeiffer, K. W. West, B. I. Halperin, et K. Le Hur, Nature Physics **4**, 116 (2008).

[190] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, et I. E. Dzyaloshinski, Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics, (Permagon, 1965).

[191] H. Bruus et K. Flensberg. Many-body quantum theory in condensed matter physics. Oxford University Press (2002).

[192] A. L. Fetter et J. D. Walecka. Quantum Theory of Many-Particle Systems. Mc Graw-Hill, New York (1991).

[193] A. Kamenev. cond-mat, page 0412296, 2005.

[194] A. P. Jauho. Quantum kinetics in transport and optics of semiconductors. Springer Solid-Sate Sciences, 123, 1996.

[195] V. J. Emery. Highly Conducting One-Dimensional Solids. Plenum (1979).

[196] B. Braunecker, C. Bena, et P. Simon, Phys. Rev. B **85**, 035136(2012).

[197] J. Voit. Rep. Prog. Phys., **58**, 977 (1995).

[198] Y. Oreg et A.M. Finkelâstein, Phys. Rev. Lett. **76**, 4230 (1996).

[199] M. Fabrizio et A.O. Gogolin, Phys. Rev. Lett. **78**, 4527 (1997).

[200] A. Grishin, I. V. Yurkevich et I. V. Lerner, Phys. Rev. B **69**, 165108 (2004).

[201] H.C. Fogedby, J. Phys. C **9**, 3757 (1976).

[202] D.K. Lee et Y. Chen, J. Phys. A **21**, 4155 (1988).

[203] I.V. Yurkevich, in Bosonisation as the Hubbard-Stratonovich Transformation, NATO Science Series Volume **72**, pp 69-80 (2002).

[204] Y. Saito, Z. Phys. B **32**, 75 (1978).

[205] J. Friedel, Nuovo Cim. Suppl. **7**, 287 (1958).

[206] I. Tüttö et A. Zawadowski, Phys. Rev. B **32**, 2449 (1985).

[207] R. Egger et H. Grabert, Phys. Rev. Lett. **75**, 3505 (1995).

[208] A. Leclair, F. Lesage, et H. Saleur, Phys. Rev. B **54**, 13597 (1996).

[209] X. L. Song, Z. Y. Zhao, Y. Wang, et Y. M. Shi, Journal of Shanghai university, **7**(4), 361 (2003).

[210] S.-R. Eric Yang, Solid Stat. Com. **81**, 375 (1992).