



**HAL**  
open science

# Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique: application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement

Cristian Golovanov

## ► To cite this version:

Cristian Golovanov. Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique: application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1997. Français. NNT : . tel-00904770

**HAL Id: tel-00904770**

**<https://theses.hal.science/tel-00904770>**

Submitted on 15 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée par

**Cristian GOLOVANOV**

(Ingénieur de Universitatea Politehnica Bucuresti)

Pour obtenir le grade de **DOCTEUR**

de l'**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

(Spécialité : Génie Electrique)

\*\*\*\*\*

**Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel  
vecteur magnétique:  
application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en  
mouvement**

\*\*\*\*\*

Date de soutenance: **27 octobre 1997**

Composition du jury :

Monsieur	Christian BROCHE	Président
Messieurs	André NICOLET	Rapporteur
	Zhuoxiang REN	Rapporteur
	Jean-Louis COULOMB	Examineur
	Thomas DREHER	Examineur
	Yves MARECHAL	Examineur
	Gérard MEUNIER	Examineur

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble



*A mes parents,  
les professeurs Carmen et Nicolae GOLOVANOV*

*A Cornelia*

"Il faut avoir beaucoup étudié pour savoir peu"

Montesquieu - *Pensées diverses*





## Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Christian BROCHE, Professeur à la Faculté Polytechnique de Mons, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Je tiens à assurer Monsieur André NICOLET, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille III de ma gratitude pour l'honneur qu'il m'a fait en participant à mon jury de thèse et d'accepter d'être rapporteur de mon travail.

C'est pour moi un très grand honneur de pouvoir compter parmi les membres du jury Monsieur Zhuoxiang REN, Chargé de Recherche au Laboratoire de Génie Electrique de Paris (LGEP), qui, de plus, a accepté de rédiger un rapport sur ce mémoire.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Gérard MEUNIER, Directeur de Recherche CNRS et Directeur adjoint du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, qui a co-encadré mon travail de thèse. Il m'est difficile d'exprimer en quelques mots toute ma reconnaissance et mon admiration pour sa haute compétence et ses qualités humaines. Gérard va rester pour moi le modèle du chef idéal.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Yves MARECHAL Maître de Conférences à l'ENSIEG, pour ses bons conseils et l'aide précieuse qu'il m'a apportée en co-encadrant cette thèse. Je le remercie tout particulièrement pour avoir consciencieusement suivi mes travaux et pour avoir relu avec énormément de patience ce rapport. Je lui adresse mes sincères reconnaissances.

Je remercie vivement Monsieur Jean-Louis COULOMB, Professeur à l'ENSIEG, dont l'ouverture d'esprit et les conseils m'ont été fort utiles dans l'avancement de cette thèse. Qu'il soit assuré de ma plus profonde reconnaissance.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Thomas DREHER, ingénieur de recherche dans la société MOULINEX, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse. Sa compétence et son savoir-faire m'ont aidé à résoudre de nombreux problèmes.

Je remercie également tous mes professeurs de l'Université Polytechnique de Bucarest et en particulier Monsieur Constantin MOCANU et Monsieur Alexandru TIMOTIN pour m'avoir initié aux notions de l'électromagnétisme. Je remercie aussi Messieurs Alexandru NICOLAE,

Florea HANTILA, Horia GAVRILA pour leur gentillesse et pour la confiance qu'ils m'ont témoignée.

Mes très vifs remerciements vont aussi à:

Madame Etienne CALLEGHER, Messieurs Patrick GUILLOT et Patrick EUSTACHE, responsables du réseau informatique, pour leur grande disponibilité et pour la sympathie qu'ils m'ont témoignée,

Monsieur Patrice LABIE, grand chasseur de bugs, pour m'avoir aidé efficacement,

Dr. Lucas SALUDJIAN, futur cadre d'entreprise à Toulouse et Dr. Tuan LUONG futur grand professeur à Ho-Chi-Minh, pour les discussions intéressantes que nous avons eues,

Mes illustres prédécesseurs, anciens thésards de l'équipe Modélisation de la génération d'or: Ioannis SAKELLARIS, Florence OSSART, Gilbert REYNE, Bachir NECKOUL, Nicolas LABBE, Christophe GUERIN, Christophe BODY, Rémy PERRIN-BIT, Thomas DREHER pour m'avoir transmis tout leur savoir-faire et pour m'avoir appris à faire de la recherche. Qu'ils soient assurés de mon plus profond respect et amitié.

Il m'est très agréable de remercier ici tous mes amis du LEG, qui par leur esprit d'équipe ont créé une atmosphère amicale et chaleureuse: Antoine JAROSZ, Sylvain MAGINIER, Fabrice LEDORZE, Gwenaëlle Le COAT, Stéphane BERGEON, Till WELFONDER, Marcello VANTI, Patrice PETITCLAIRE, Laurent GROS, Frédéric BLOCH, Stéphanie RICHARD, Claire DIVOUX, Eric NENS, Jérôme PECHOUX, Fabiano GARCIA, Nam NGUYEN, Luiz DE MEDEIROS, Djamel HADJI, Victor FERNANDEZ, mes compatriotes Adi MANESCU, Sorin UDRISTE, Cristina et Sorin SPORNIC, Emil NEAGOE et tous les thésard ou permanents du LEG.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à Cornelia-Rodica, ma femme, dont le soutien moral me fut précieux tout au long de ce travail.

## Sommaire

<b>Introduction générale .....</b>	<b>13</b>
<b>Chapitre I. Du modèle physique vers le modèle discret.....</b>	<b>19</b>
1. Introduction.....	21
2. Forme locale des équations de Maxwell.....	22
2.1. Les discontinuités des vecteurs du champ.....	23
3. Les modèles du champ électromagnétique.....	24
3.1. Modèle magnétostatique.....	24
3.1.1. Formulation magnétostatique en potentiel vecteur.....	26
3.1.2. Formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique réduit.....	27
3.2. Modèle magnétodynamique.....	28
3.2.1. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique.....	30
3.2.2. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique modifié .....	31
4. La méthode des éléments finis.....	32
4.1. Espace des solutions admissibles .....	33
4.2. Éléments géométriques .....	34
4.3. Fonctions d'interpolation.....	34
4.3.1. Éléments finis nodaux .....	35
4.3.2. Éléments finis mixtes conformes dans $H(\text{rot})$ .....	38
4.4. Conclusion.....	45
5. Conclusion.....	46
<b>Chapitre II. Formulations magnétostatiques.....</b>	<b>47</b>
1. Introduction.....	49
2. Forme discrète de la formulation en potentiel vecteur magnétique .....	50
3. Formulation en potentiel vecteur, basée sur l'interpolation nodale.....	51
3.1. Introduction de la jauge de Coulomb par pénalité .....	51
3.2. Problèmes numériques liés à l'utilisation des éléments nodaux.....	54
3.3. Investigations numériques .....	55
3.3.1. Barreau de fer en champ magnétique uniforme.....	56
3.3.2. Circuit magnétique fermé.....	59
3.3.3. Problème no. 13 du TEAM Workshop.....	64

3.4. Conclusions des investigations numériques.....	70
4. Formulation en potentiel vecteur, basée sur l'interpolation mixte.....	70
4.1. Compatibilité du système d'équations.....	71
4.2. Comment avoir un second membre compatible ? .....	74
4.2.1. Méthode de l'équation normale.....	74
4.2.2. Méthode d'orthogonalisation .....	74
4.2.3. Conclusion.....	75
4.3. Formulations compatibles en potentiel vecteur magnétique.....	75
4.3.1. Formulations compatibles pour inducteurs maillés.....	76
4.3.2. Validations numériques.....	79
4.3.3 Formulations compatibles pour inducteurs non-maillés (filaires).....	84
5. Conclusion.....	88
<b>Chapitre III. Formulations magnétodynamiques.....</b>	<b>89</b>
1. Introduction.....	91
2. Forme discrète des formulations magnétodynamiques.....	92
2.1. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur (éléments nodaux).....	92
2.2. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur (éléments mixtes).....	94
3. Régime harmonique. Formalisme complexe.....	94
4. Régime transitoire.....	95
4.1. Méthodes d'intégration directe des systèmes temporels du premier ordre.....	96
4.1.1. Méthode d'Euler .....	96
4.1.2. Mise en oeuvre de la méthode .....	100
5. Régime multi-harmonique établi.....	102
5.1. Méthode basée sur la discretisation sur une demi période .....	102
5.2. Méthode basée sur la décomposition en séries de Fourier.....	103
5.3. Conclusion.....	103
6. Validations numériques .....	104
6.1. Cylindre ferromagnétique .....	104
6.1.1. Cylindre conducteur en matériau linéaire.....	105
6.1.2. Cylindre conducteur en matériau non-linéaire .....	108
6.1.3. Conclusion des validations numériques sur le cylindre ....	111
6.2. Problème no. 21 du TEAM Workshop.....	111
6.2.1. Régime harmonique.....	113
6.2.2. Régime transitoire .....	118

6.2.3. Conclusion.....	121
7. Conclusion.....	122
<b>Chapitre IV. Couplage avec les équations de circuit .....</b>	<b>123</b>
1. Introduction.....	125
2. Méthodes de couplage avec les équations de circuit. Etat de l'art.....	126
2.1. Couplage indirect.....	126
2.2. Couplage direct.....	126
2.3. Choix de la méthode.....	127
3. Couplage dans le cas des inducteurs filaires .....	128
4. Couplage dans le cas d'un inducteur massif.....	131
5. Méthodes d'analyse des circuits électriques.....	131
5.1. Éléments de la théorie des graphes .....	132
5.2. Analyse des circuits électriques à l'aide des théorèmes de Kirchoff.....	135
5.2.1. Analyse par rapport aux courants.....	135
5.2.2. Analyse par rapport aux tensions .....	137
5.3. Choix de la méthode.....	139
6. Couplage de la méthode des potentiels nodaux intégrés avec les équations électromagnétiques. Aspects pratiques.....	140
7. Validations numériques .....	146
8. Conclusion.....	154
<b>Chapitre V. Prise en compte du mouvement.....</b>	<b>155</b>
1. Introduction.....	157
2. Etat de l'art.....	158
2.1. La méthode directe.....	158
2.2. Remaillage locale de l'entrefer (bande de roulement).....	159
2.3. Macro-élément.....	160
2.4. Couplage avec les intégrales de frontière .....	161
2.5. Connexion par interpolation nodale.....	162
2.6. Connexion par multiplicateurs de Lagrange .....	163
3. Méthodes de connexion spécifiques aux éléments mixtes.....	164
3.1. Méthode basée sur les multiplicateurs de Lagrange.....	164
3.1.1. Multiplicateurs éliminés de la fonctionnelle.....	164
3.1.2. Multiplicateurs gardés dans la fonctionnelle .....	165
3.1.3. Difficultés pratiques dans l'évaluation des matrices élémentaires.....	165
3.1.4. Validations numériques.....	166

3.1.5. Conclusions sur les limites d'applications de la méthode des multiplicateurs de Lagrange en éléments mixtes.....	177
3.2. Méthode basée sur l'interpolation entre éléments mixtes non- conformes.....	178
3.2.1. Démarche suivie.....	178
3.2.2. Cas général de la méthode.....	180
3.2.3. Cas particulier du glissement des maillages réguliers.....	183
3.2.4. Validations numériques.....	184
3.2.5. Limites d'application de la méthode d'interpolation des maillages.....	187
4. Conclusion.....	188
<b>Chapitre VI. Modélisation d'un moteur à réluctance variable.....</b>	<b>189</b>
1. Introduction.....	191
2. Généralités sur les moteurs à réluctance variable.....	192
3. Particularités des moteurs à réluctance variable par rapport aux autres types de moteurs.....	192
3.1. Géométrie.....	192
3.2. Bobinage.....	192
3.3. Commande du moteur.....	193
3.4. Couple du moteur à réluctance variable.....	194
3.5. Amélioration des caractéristiques du moteur.....	194
3.5.1. Diminution des constantes de temps du moteur.....	195
3.5.2. Avance de la commande.....	196
4. Calcul numérique d' un moteur à réluctance variable.....	197
4.1. Introduction.....	197
4.2. Circuit électrique de commande.....	177
4.3. Modèle utilisé et hypothèses de travail.....	198
4.4. Résultats de simulation.....	199
5. Conclusion.....	203
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>205</b>
<b>Annexe 1. Méthodes de résolutions de systèmes matriciels de grande taille.....</b>	<b>211</b>
<b>Annexe 2. La méthode de Newton-Raphson.....</b>	<b>221</b>
<b>Référencés bibliographiques.....</b>	<b>223</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>231</b>

## Nomenclature

$\vec{H}$	champ magnétique
$\vec{E}$	champ électrique
$\vec{B}$	induction magnétique
$\vec{D}$	induction électrique
$\vec{J}$	densité volumique de courant
$\vec{B}_r$	induction rémanente
$\vec{A}$	potentiel vecteur magnétique
$\vec{A}_s$	potentiel vecteur magnétique source
$\vec{A}_r$	potentiel vecteur magnétique réduit
$\vec{A}^*$	potentiel vecteur magnétique modifié
$V$	potentiel scalaire électrique
$\vec{T}_0$	potentiel vecteur électrique
$\vec{J}_0$	densité de courant source (en régime stationnaire)
$\vec{H}_s$	champ magnétique source créé par les inducteurs supposés dans l'air
$\vec{H}'$	projection du champ magnétique source $\vec{H}_s$ sur les arêtes du maillage
$\Psi$	potentiel nodale électrique intégré dans le temps
$I$	courant
$U$	tension
$\rho_v$	densité de volume de la charge électrique
$\epsilon$	permittivité électrique
$\mu$	perméabilité magnétique
$\mu_r$	perméabilité magnétique relative
$\mu_0$	perméabilité magnétique du vide
$\nu$	réductivité magnétique ( $\nu = 1/\mu$ )
$\sigma$	conductivité électrique
$\rho_s$	densité surfacique de charge sur l'interface
$\vec{J}_s$	densité de courant surfacique
$f$	fréquence
$\omega$	pulsation
$\Omega$	région volumique (domaine d'étude)
$\Gamma$	interface
$\vec{n}$	normale associée à l'interface
$A_n$	composante normale (à une surface) du vecteur $\vec{A}$
$\vec{A}_t$	composante tangentielle (suivant une surface) du vecteur $\vec{A}$
$\Gamma_H$	interface à champ magnétique tangentiel nul



$\Gamma_E$	interface à champ électrique tangentiel nul
$\Gamma_B$	interface à induction magnétique normale nulle
$N_i$	fonction d'interpolation scalaire
$\vec{W}_i$	fonction d'interpolation vectorielle (nodale ou d'arête)
$[M]$	matrice
$[M]'$	matrice transposée
$[M]^{-1}$	l'inverse de la matrice $[M]$
$\ x\ $	norme euclidienne du vecteur $[x]$

\*\*\*

ICCG	gradient conjugué avec preconditionnement incomplet Choleski
PDCG (ou Evans)	gradient conjugué avec preconditionnement diagonal
BICG	gradient bi-conjugué avec preconditionnement Gauss

\*\*\*

## **Introduction générale**



L'analyse tridimensionnelle des dispositifs électromagnétiques passe par la maîtrise des phénomènes électromagnétiques, souvent complexes, nécessitant sans cesse l'amélioration des modèles utilisés. Les travaux de recherches ont lieu à différents niveaux: représentation des lois de comportement des matériaux magnétiques, techniques de maillage, choix des formulations les mieux adaptées, amélioration des algorithmes de résolution des grands systèmes linéaires et non-linéaires.

Depuis quelques années, un effort particulièrement important a porté sur la prise en compte des phénomènes tridimensionnels couplés, par la recherche de techniques générales et robustes, capables de résoudre des problèmes pratiques de plus en plus élaborés.

L'objectif de ce travail de recherche est de développer des méthodes numériques spécifiques destinées à la modélisation des équations électromagnétiques 3D couplées avec les circuits d'alimentation électriques et le déplacement de parties mobiles dans le cas de machines électriques tournantes.

Ce travail vient à la suite de deux thèses ayant abouti par la création du logiciel MV3DYN [Dreher-94], [Perrin-94] capable de simuler le comportement dynamique des machines électriques. La formulation développée dans ces deux thèses utilise, comme inconnue principale, le potentiel vecteur magnétique interpolé sur des éléments finis nodaux. Ce choix, bien qu'adapté au problème, pose quelques difficultés se traduisant par des pertes de précision dans les parties ferromagnétiques.

Le travail de recherche mené dans cette thèse est donc, d'une façon générale, l'amélioration de la formulation tridimensionnelle en potentiel vecteur magnétique incluant en particulier la prise en compte du mouvement des parties mobiles et les circuits électriques d'alimentation. Pour atteindre cet objectif, deux voies étaient envisageables. La première consistait en l'identification exacte des problèmes liés à l'utilisation du potentiel vecteur magnétique dans le contexte de l'interpolation nodale et en tout connaissance de cause essayer de les corriger. Cette solution présentait l'avantage incontestable qu'elle pouvait s'appuyer sur l'expérience vaste existante au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble sur les éléments nodaux. D'autre part, les techniques numériques utilisées par MV3DYN pour la prise en compte du mouvement et le couplage avec les circuits électriques d'alimentation pouvait directement être récupérées.

La deuxième piste consistait en l'implantation et le développement des formulations basées sur l'interpolation mixte conforme dans  $H(\text{rot})$  ou d'arête. Cette solution représentait pour nous un saut dans l'inconnu, car ce type d'interpolation n'avait pas été utilisé auparavant au LEG. En

plus, il fallait trouver des solutions spécifiques aux problèmes de mouvement et couplage avec les équations de circuit.

On aurait aimé que la première démarche aboutisse et que l'amélioration de la formulation basée sur le potentiel vecteur magnétique nodale soit possible, mais les problèmes liés à l'utilisation des éléments nodaux sont si complexes que nous avons décidé de nous tourner vers les éléments mixtes. Petit à petit, nous avons surmonté les difficultés spécifiques à ce type d'éléments, à savoir le problème de la compatibilité de la formulation, le couplage avec les équations de circuit et la prise en compte du mouvement des parties mobiles.

Beaucoup d'expériences numériques ont été réalisées. Nous nous proposons d'exposer celles qui nous ont paru les plus intéressantes, même si la méthode utilisée n'a pas été retenue par la suite.

D'autre part, nous avons choisi de présenter quelques idées originales, même si elles ne font pas l'objet d'une validation poussée. Ainsi, nous espérons donner quelques pistes à ceux qui voudraient continuer le travail ou chercher d'autres solutions mieux adaptées à leurs problèmes.

La présentation du travail a été structurée en 6 chapitre.

Le premier chapitre rappelle les bases de la modélisation en électrotechnique, les équations de Maxwell et les différents modèles rencontrés dans la pratique, notamment la magnétostatique et la magnétodynamique. Les formulations seront réécrites à l'aide du potentiel vecteur magnétique. Sont aussi développées les fonctions de base des éléments nodaux et mixtes conformes dans  $H(\text{rot})$ .

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des formulations magnétostatiques basées sur le potentiel vecteur magnétique. Les problèmes numériques et les contraintes d'utilisation liées à différents types d'interpolation (nodale ou mixtes) sont exposées.

Le troisième chapitre aborde les problèmes magnétodynamiques de courants induits. Le régime harmonique et le régime transitoire y sont traités. La méthode en pas-à-pas dans le temps ( $\theta$ -schéma) implantée est validée à l'aide de problèmes test.

Le quatrième chapitre montre comment réaliser le couplage des équations électromagnétiques avec les équations de circuit et, en même temps, l'analyse du circuit d'alimentation. La méthode

choisie est adaptée à l'interpolation mixte et tient compte du fait que les circuits d'alimentation peuvent être complexes.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude des méthodes permettant la prise en compte des parties mobiles. Après avoir passé en revue les techniques classiquement utilisées, nous développons une méthode originale pour la prise en compte du mouvement dans le contexte des éléments mixtes.

Le dernier chapitre représente l'aboutissement logique du travail: il s'agit de la modélisation tridimensionnelles d'un dispositif électrotechnique incluant le couplage avec le circuit d'alimentation et le mouvement: notre choix s'est porté sur un moteur à réluctance variable. Après avoir implanté tous les outils nécessaires, l'analyse dynamique des machines électriques tournantes est devenue réalisable avec notre outil.

Le manuscrit contient également des annexes présentant quelques méthodes de résolution de grands systèmes, implantées et utilisées dans le cadre de ce travail et la méthode de Newton-Raphson pour la résolution des systèmes non-linéaires.



## **Chapitre I**

### **Du modèle physique vers le modèle discret**





## 1. Introduction

Notre recherche consiste en l'étude et le développement de modèles mathématiques et numériques tridimensionnels destinés à déterminer la répartition du champ électromagnétique dans les dispositifs électrotechniques. Le modèle de départ étant celui des équations de Maxwell, différentes hypothèses permettent d'en extraire des modèles simplifiés, plus adaptés aux méthodes numériques.

Ce premier chapitre présente les bases de la modélisation en électrotechnique. La première partie rappelle les équations de Maxwell et les différents modèles rencontrés dans la pratique: la magnétostatique et la magnétodynamique. L'introduction de la notion du potentiel vecteur magnétique va nous permettre d'établir diverses formulations, exprimant sous une forme plus appropriée les équations de Maxwell.

La deuxième partie rappelle brièvement le principe de la méthode des éléments finis qui permet le passage de la formulation continue à la formulation discrète, par la discretisation en éléments finis. Sont aussi développés les éléments nodaux et les éléments mixtes conformes dans  $H(\text{rot})$  ou éléments d'arête, pour lesquelles on définit les fonctions de base des espaces d'approximation.

## 2. Forme locale des équations de Maxwell

D'un point de vue macroscopique, le champ électromagnétique est décrit à l'aide de quatre vecteurs, définis en tout point de l'espace  $M$  et à chaque instant  $t$ . Ces vecteurs sont:

- l'intensité du champ électrique  $\vec{E}(M,t)$
- l'induction électrique  $\vec{D}(M,t)$
- l'intensité du champ magnétique  $\vec{H}(M,t)$
- l'induction magnétique  $\vec{B}(M,t)$

Dans un souci d'alléger les expressions, par la suite nous allons omettre d'indiquer explicitement cette dépendance.

Les phénomènes électromagnétiques classiques sont régis par les équations de Maxwell, qui constituent un système d'équations aux dérivées partielles et qui expriment des lois universelles unifiant les quatre grandeurs qui caractérisent le champ électromagnétique. Ce système s'écrit [Stratton-41], [Timotin-62], [Mocanu-91]:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_v \quad (\text{I.4})$$

où  $\vec{J}$  est la densité de courant de conduction et  $\rho_v$  la densité de volume de la charge électrique.

L'équation (I.1) est la généralisation de la loi d'Ampère et l'équation (I.2) est appelée la loi de Faraday. Elles constituent les équations dites d'évolution, alors que les équations (I.3) et (I.4) constituent des équations dites de conservation. Par ailleurs, l'équation (I.3) est une conséquence de (I.2) si on admet que l'induction magnétique  $\vec{B}$  a été nulle à l'instant initial. D'une façon similaire, vu la loi de la conservation de la charge électrique, qui s'écrit:

$$\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.5})$$

l'équation (I.4) est conséquence de (I.1) avec la même hypothèse sur  $\vec{D}$ .

Les formules (I.1-I.4) ne sont pas suffisantes pour déterminer le champ électromagnétique et il convient d'ajouter les lois de comportement établissant des relations de dépendance entre les couples  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$ ; ces relations expriment les propriétés de matériaux. Il s'agit de:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{I.6})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.7})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.8})$$

où  $\epsilon$  est la permittivité électrique,  $\mu$  est la perméabilité magnétique et  $\sigma$  est la conductivité électrique.

Dans les cas les plus simples, les coefficients  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des constantes scalaires. Plus généralement, ils dépendent de la position du point considéré (pour un matériau linéaire isotrope), d'une anisotropie du matériau (cas dans lequel les coefficients deviennent alors des tenseurs associés à des formes bilinéaires positives) et souvent de l'intensité du champ local (par exemple,  $\mu = \mu(H)$ ,  $\epsilon = \epsilon(E)$  et  $\sigma = \sigma(E)$ ).

Un cas particulier est constitué par les aimants permanents, qui sont caractérisés par l'induction rémanente. Lorsque le champ magnétique appliqué à un tel matériau s'annule, il subsiste une induction dite rémanente, notée  $\vec{B}_r$ . Pour ce type de matériau, la relation (I.7) est remplacée par:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{I.9})$$

## 2.1. Les discontinuités des vecteurs du champ

Lors du passage d'un milieu à un autre, les grandeurs subissent des discontinuités et ne sont par conséquent pas différentiables. En intégrant les relations (I.1-I.4) sur des volumes incluant les interfaces et en appliquant le théorème de la divergence ou le théorème de Stokes, on obtient les conditions dites de transmission:

- continuité de la composante normale de  $\vec{B}$ :

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (\text{I.10})$$

- saut de la composante tangentielle de  $\vec{H}$ :

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \quad (\text{I.11})$$

- continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ :

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (\text{I.12})$$

- saut de la composante normale de  $\vec{D}$ :

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (\text{I.13})$$

où  $\vec{B}_1, \vec{H}_1, \vec{E}_1, \vec{D}_1$  et  $\vec{B}_2, \vec{H}_2, \vec{E}_2, \vec{D}_2$  sont les grandeurs physique de part et l'autre de l'interface,  $\rho_s$  est une densité surfacique de charge sur l'interface,  $\vec{J}_s$  est une densité de courant surfacique et  $\vec{n}$  la normale associée à l'interface.

Il en résulte que même si les densités  $\vec{J}_s$  et  $\rho_s$  sont nulles, les grandeurs électromagnétiques présentent des discontinuités en cas de changement de nature du matériau.

### 3. Les modèles du champ électromagnétique

Souvent, suivant les dispositifs étudiés, certains phénomènes électromagnétiques peuvent être négligés. Dans les hypothèses simplificatrices proposées, le système (I.1-I.4) devient plus simple. Nous n'aborderons que les modèles magnétostatique et magnétodynamique.

#### 3.1. Modèle magnétostatique

La magnétostatique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques en régime stationnaire. Typiquement, un problème magnétostatique est composé des parties suivantes (Fig. I.1) :

- des inducteurs parcourus par des courants continus de densité  $\vec{J}$  donnée

- des aimants permanents d'induction rémanente  $\vec{B}_r$ , donnée
- des régions composées des matériaux magnétiques saturables ou non-saturables
- une boîte d'air englobante

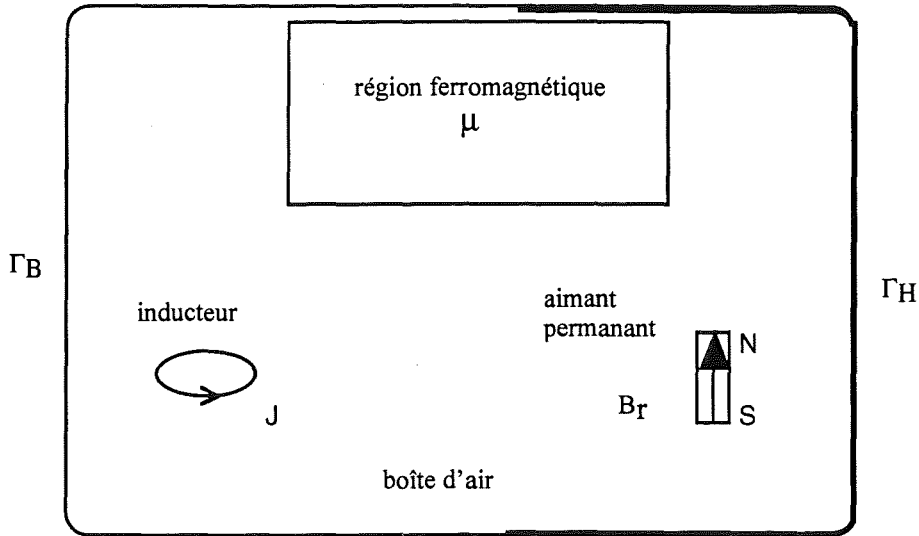


Fig. I.1 Problème général magnétostatique

Les équations à considérer sont issues des équations de Maxwell, dont les dérivées temporelles sont annulées. Elle s'écrivent:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{I.14})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{I.15})$$

A ces équations s'ajoute la loi de comportement magnétique:

$$\vec{B} = \mu(H) \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{I.16})$$

Afin d'assurer l'unicité de la solution du système (I.14-I.16) des conditions aux limites adéquates doivent être données sur la frontière du domaine d'étude, correspondant à un échange nul d'énergie magnétique. Elle sont relatives soit à la composante tangentielle de  $\vec{H}$  soit à la composante normale de  $\vec{B}$  [Radulet-71]. Sur une portion de surface  $\Gamma_H$  de  $\Gamma$ , éventuellement non-connexe, on impose la condition:

$$\vec{n} \times \vec{H} = 0 \quad (\text{I.17})$$

Sur la surface  $\Gamma_B$ , complémentaire de  $\Gamma_H$  dans  $\Gamma$ , on impose la condition:

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.18})$$

De telles conditions assurent l'unicité de  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  si  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_B$  sont simplement connexes. Sinon des grandeurs intégrales doivent être spécifiés, i.e. les flux magnétiques sur  $\Gamma_H$  et les tensions magnétomotrices sur des coupures qui rendraient le domaine simplement connexe [Radulet-71].

Dans un souci de simplification, nous n'allons considérer par la suite que le cas des frontières connexes.

### 3.1.1. Formulation magnétostatique en potentiel vecteur

Introduit pour la première fois par Neumann en 1845 et présente également dans les travaux de Thomson en 1846 et de Maxwell en 1864, le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  permet de simplifier le système (I.14-I.16). L'équation (I.15), i.e.  $div\vec{B}=0$ , permet de définir le potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que:

$$\vec{B} = rot\vec{A} \quad (I.19)$$

L'élimination de  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dans (I.14) et (I.16) donne la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique:

$$rot(v\,rot\vec{A}) = \vec{J} \quad (I.20)$$

avec  $v$  l'inverse de la perméabilité.

En terme du potentiel vecteur, les conditions aux limites (I.17) et (I.18) s'écrivent:

$$\vec{n} \times v\,rot\vec{A} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (I.21)$$

$$\vec{n} \cdot rot\vec{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B \quad (I.22)$$

Dans la pratique on préfère remplacer la condition (I.22) par une condition plus simple à imposer, et qui, en plus, la renforce [Biro-89]:

$$\vec{n} \times \vec{A} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_B \quad (I.23)$$

Il faut noter que la relation de définition du potentiel vecteur (I.19) implique que la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{A}$  assure la continuité de la composante normale de  $\vec{B}$ .

### Conditions d'unicité

Les conditions aux limites (I.21) et (I.23) n'assurent pas l'unicité du potentiel  $\vec{A}$ . En effet, si  $\vec{A}$  est solution de l'équation (I.20), alors tout champ du type  $\vec{A} + \text{grad } f$ , où  $f$  est une fonction scalaire telle que:

$$\vec{n} \times \text{grad } f = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_B \quad (\text{I.24})$$

est également solution.

Ceci ne semble pas constituer un problème, vu que les grandeurs dérivées, l'induction magnétique  $\vec{B}$  et le champ  $\vec{H}$  sont uniques. Dans la pratique, certaines méthodes numériques se comportent mal lorsque le potentiel  $\vec{A}$  n'est pas unique et d'autres quand on impose l'unicité de  $\vec{A}$ . Il convient donc d'assurer l'unicité en fonction de la méthode choisie.

Une jauge couramment utilisée dans la méthode des éléments nodaux est la jauge de Coulomb, c'est-à-dire:

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (\text{I.25})$$

Une autre jauge, mieux adaptée aux éléments d'arêtes est:

$$\vec{A} \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{I.26})$$

où  $\vec{u}$  est un champ de vecteurs dont les lignes de champ ne sont pas fermées et sont telles qu'elles peuvent relier toute paire de points du domaine d'étude [Albanese-90].

#### 3.1.2. Formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique réduit

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  peut être décomposé en deux parties  $\vec{A}_s$  et  $\vec{A}_r$ , c'est-à-dire:

$$\vec{A} = \vec{A}_s + \vec{A}_r \quad (\text{I.27})$$

où  $\vec{A}_s$  est appelé potentiel vecteur source, créé par les seules sources de courant en l'absence de régions magnétiques et  $\vec{A}_r$  est appelé potentiel vecteur de réaction, associé aux phénomènes d'aimantation des matériaux magnétiques, soumis au champ source.



Le potentiel  $\vec{A}_s$  est choisi tel que:

$$\text{rot} \vec{A}_s = \vec{B}_s \quad (\text{I.28})$$

avec:

$$\vec{B}_s = \mu_0 \vec{H}_s \quad (\text{I.29})$$

Le champ  $\vec{H}_s$  est le champ Biot-Savart créée par les inducteurs en l'absence de régions magnétiques, qui vérifie la relation:

$$\text{rot} \vec{H}_s = \vec{J} \quad (\text{I.30})$$

L'introduction des relations (I.27-I.30) en (I.20) permet d'obtenir *la formulation en potentiel vecteur magnétique réduit*, donnée par:

$$\text{rot}(\nabla \text{rot} \vec{A}_r) = \text{rot}[(\nu_0 - \nu) \text{rot} \vec{A}_s] \quad (\text{I.31})$$

De même que pour le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , des conditions aux limites doivent être associées au potentiel vecteur réduit  $\vec{A}_r$ . Comme précédemment, la condition d'unicité n'est pas obligatoire, même si elle peut se révéler utile dans certains cas.

### 3.2. Modèle magnétodynamique

La magnétodynamique consiste en l'étude des phénomènes électromagnétiques couplés, en régime dynamique, en négligeant les courants de déplacement ( $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ).

Typiquement, un problème magnétodynamique est composé des parties suivantes (Fig. I.2):

- des inducteurs dans lesquelles circulent de courants variables en fonction du temps et dans lesquelles aucun courant de Foucault n'est supposé se développer
- des régions composées des matériaux magnétiques saturables ou non-saturables qui sont supposées isolantes
- des conducteurs où peuvent circuler des courants induits
- une boîte d'air englobante

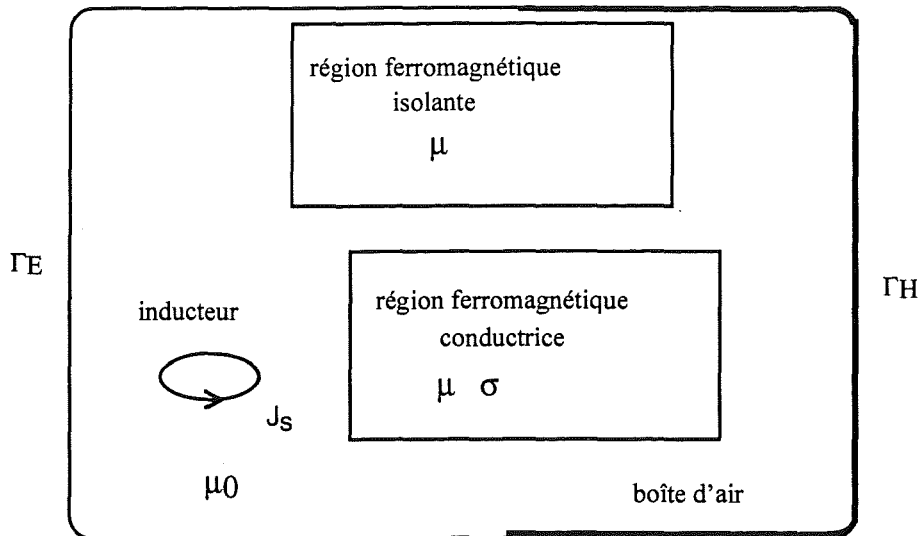


Fig. I.2 Problème général magnétodynamique

Les équations à considérer sont issues des équations de Maxwell, en négligeant le courant de déplacement. Elle s'écrivent:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{I.32})$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.33})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{I.34})$$

A ces équations s'ajoutent les lois:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.35})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.36})$$

avec éventuellement  $\mu = \mu(H)$  pour les matériaux non-linéaires.

La densité de courant  $\vec{J}$  peut se décomposer en deux parties, l'une  $\vec{J}_s$  relative aux courants imposés, l'autre  $\vec{J}_r$ , due aux courants induits.

Les vecteurs du champ électromagnétique solution du système (I.32-I.36) sont uniques si on spécifie les conditions suivantes [Radulet-71]:

a) une condition initiale:

$$\vec{H}(t_0) = \vec{H}_0 \quad (\text{I.37})$$

b) des conditions sur la frontière  $\Gamma = \Gamma_H \cup \Gamma_E$ :

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_E \quad (\text{I.38})$$

$$\vec{n} \times \vec{H} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{I.39})$$

La condition (I.38) implique  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$  sur  $\Gamma_E$  et la condition (I.39) entraîne  $\vec{n} \cdot \vec{J} = 0$  sur la frontière du conducteur qui touche  $\Gamma_H$ .

### 3.2.1. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique

De même qu'en magnétostatique, l'équation (I.34) permet l'introduction du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  tel que:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{I.40})$$

En remplaçant (I.40) dans (I.33) on obtient l'expression du champ électrique  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} V \quad (\text{I.41})$$

où  $V$  est un potentiel scalaire électrique.

En introduisant (I.40) dans (I.32) en tenant compte des relations (I.35 - I.36) on obtient:

$$\text{rot}(\text{v rot} \vec{A}) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} V \right) = \vec{0} \quad (\text{I.42})$$

qui constitue *la formulation magnétodynamique en potentiel vecteur*, ou *la formulation AV*.

Dans les régions non-conductrices, l'équation à résoudre s'écrit:

$$\text{rot}(\text{v rot} \vec{A}) = \vec{J}_s \quad (\text{I.43})$$

Notons que le potentiel scalaire électrique n'est défini que dans les régions conductrices.

### **Conditions d'unicité**

L'équation (I.42) et les conditions aux limites (I.38-I.39) réécrites en termes des potentiels  $\vec{A}$  et  $V$  n'assurent pas l'unicité de la solution, même si  $\text{rot} \vec{A}$  est uniquement déterminé. Ainsi,

une condition de jauge associée au potentiel vecteur doit être définie, soit en imposant la divergence de  $\vec{A}$  soit en éliminant une composante de  $\vec{A}$ . Les jauges les plus utilisées sont la jauge de Coulomb, i.e.  $div\vec{A}=0$  et la jauge de Lorentz, introduite par Riemann en 1861, i.e.  $div\vec{A}=-\mu\sigma V$ . Cette dernière présente l'avantage de découpler les équations des potentiels  $\vec{A}$  et  $V$ .

### 3.2.2. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique modifié

On peut définir un potentiel vecteur modifié, noté  $\vec{A}^*$ , tel que:

$$\frac{\partial\vec{A}^*}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + gradV \quad (I.44)$$

Par conséquent:

$$\vec{E} = \frac{\partial\vec{A}^*}{\partial t} \quad (I.45)$$

et la formulation (I.42) devient:

$$rot(\nabla rot\vec{A}^*) + \sigma \frac{\partial\vec{A}^*}{\partial t} = \vec{0} \quad (I.46)$$

qui constitue la formulation magnétodynamique en potentiel vecteur modifié.

On peut remarquer que si l'on prend la divergence de l'équation (I.46) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}(div\sigma\vec{A}^*) = 0 \quad (I.47)$$

et donc que si on considère une condition initiale nulle, on a:

$$div(\sigma\vec{A}^*) = 0 \quad (I.48)$$

Il s'agit d'une jauge implicite dans (I.46) qui n'apparaît que dans les régions conductrices. Cette jauge entraîne la continuité du produit de la conductivité par la composante normale du potentiel vecteur modifié  $\vec{A}^*$ . Par conséquent, à la surface de séparation entre deux matériaux de conductivité différente, la composante normale de  $\vec{A}^*$  est discontinue. Sa composante tangentielle doit, par contre, rester continue afin d'assurer la continuité de la composante normale de  $\vec{B}$ .

#### 4. La méthode des éléments finis

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les phénomènes électromagnétiques dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  sont décrites à l'aide des opérateurs différentiels locaux, qui régissent la répartition spatiale des champs vectoriels. A ces opérateurs on associe des conditions aux limites, afin d'assurer l'unicité du champ magnétique et électrique.

En toute généralité, les problèmes peuvent se mettre sous la forme:

$$Lu = f \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{I.49})$$

$$Bu = g \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{I.50})$$

où  $L$  est un opérateur différentiel d'ordre  $n$ ,  $B$  est un opérateur qui définit une condition à la limite,  $f$  et  $g$  sont des fonctions respectivement définies sur  $\Omega$  et  $\Gamma$ , connues, et  $u$  est une fonction inconnue appartenant à un espace fonctionnel des solutions admissibles.

Pour pouvoir résoudre numériquement tout problème continu, il est nécessaire de passer par la formulation faible du problème, qui peut être obtenue soit en appliquant la méthode de Galerkin, soit en minimisant la fonctionnelle d'énergie associée au modèle physique. Les deux méthodes sont sensées donner le même résultat si l'opérateur  $L$  est auto-adjoint.

La méthode de Galerkin consiste à rechercher des fonctions  $u$  qui annulent la forme intégrale suivante:

$$F(u) = \int_{\Omega} w(Lu - f) d\Omega = 0 \quad (\text{I.51})$$

pour toute fonction test ou de pondération  $w$  appartenant au même espace fonctionnel que l'espace des solutions admissibles.

Dans la forme intégrale (1.51) le problème physique est encore continu. La méthode des éléments finis consiste à chercher une solution approchée  $u_h$  du système discret, en résolvant celui-ci dans un sous-espace  $U_h$  de dimension finie, de l'espace des solutions admissibles. La construction de l'espace  $U_h$  par la méthode des éléments finis passe tout d'abord par la subdivision du domaine d'étude par des éléments géométriques simples. L'espace  $U_h$  est alors constitué de fonctions d'approximation définies sur chaque élément géométrique. Ces fonctions sont généralement polynomiales, le plus souvent linéaires ou quadratiques, vérifiant les conditions de conformité de l'espace  $U_h$ .

#### 4.1. Espace des solutions admissibles [Bossavit-93][Bossavit-96]

Dans le domaine  $\Omega$  de calcul, l'énergie magnétique définie par:

$$W = \int_{\Omega} \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B} d\Omega \quad (I.52)$$

est finie.

D'autre part, on sait que la dissipation par effet Joule dans un matériau conducteur de résistivité  $\rho$ , donnée par l'expression:

$$P = \int_{\Omega} \rho J^2 d\Omega = \int_{\Omega} \rho (\text{rot} \vec{H})^2 d\Omega \quad (I.53)$$

est aussi finie.

Ceci impose des conditions sur l'espace dans lequel on va chercher les solutions.

Si l'on note:

$$L^2(\Omega) = \left\{ \vec{W} \in \Omega; \int_{\Omega} |\vec{W}|^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (I.54)$$

l'espace des fonctions vectorielles à valeurs complexes de carré du module sommable, le champ magnétique  $\vec{H}$  peut être recherché dans l'espace Hilbert suivant:

$$H(\text{rot}) = \left\{ \vec{W} \in L^2(\Omega); \text{rot} \vec{W} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (I.55)$$

Par ailleurs,  $\vec{B}$  peut être recherché dans l'espace:

$$H(\text{div}) = \left\{ \vec{W} \in L^2(\Omega); \text{div} \vec{W} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (I.56)$$

Tenant compte de la relation de définition du potentiel vecteur magnétique, i.e.  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ , il en résulte que  $\vec{A}$  doit être recherché dans l'espace  $H(\text{rot})$ .

Une propriété fondamentale des fonctions des espaces  $H(\text{rot})$  et  $H(\text{div})$  est qu'elles sont à composantes tangentielles continues et respectivement à composante normale continue sur le domaine  $\Omega$  de définition.

Notons que les conditions aux limites sur les frontières du domaine imposent des restrictions sur les espaces admissibles.

#### 4.2. Éléments géométriques

Un maillage d'un domaine est représenté par un ensemble d'éléments géométriques (Fig. I.3) pouvant être des tétraèdres, des hexaèdres, des prismes et des pyramides. A ce maillage on associe quatre types d'entités géométriques: les volumes, les facettes, les arêtes et les noeuds. Le maillage est appelé conforme quand l'intersection de deux éléments est soit une facette, soit une arête ou un noeud, ou bien ils sont disjoints.

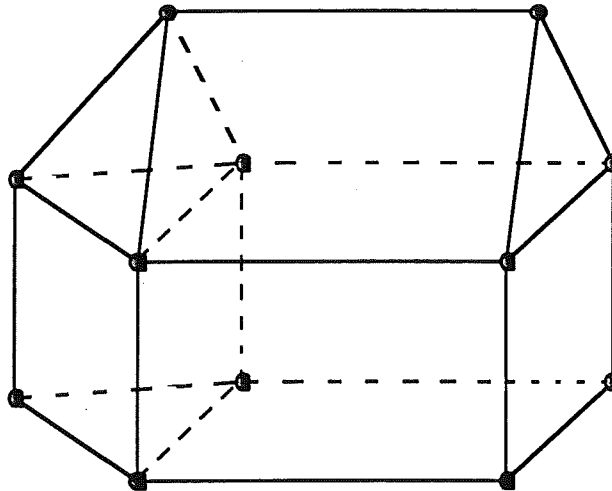


Fig. I.3 Éléments géométriques

#### 4.3. Fonctions d'interpolation

Sur chaque élément géométrique on peut construire des fonctions d'interpolation, qu'on résume dans le tableau I.1. Pour chaque type d'interpolation, on précise les propriétés des fonctions d'interpolation et les entités géométriques sur lesquelles elle s'appuient.

Tableau I.1 Propriétés de différents types d'interpolation

Type d'interpolation	Propriétés	Entité géométrique
nodale	continuité de la fonction interpolé	noeud
conforme dans $H(\text{rot})$ ou d'arête	continuité de la composante tangentielle	arête ( facette et volume pour les ordres supérieurs)
conforme dans $H(\text{div})$ ou de facette	continuité de la composante normale	facette
volume	discontinuité de la fonction interpolé	volume

L'utilisation rationnelle de ces éléments satisfait naturellement la continuité requise des différentes variables scalaires et vectorielles. Ainsi, pour interpoler les potentiels scalaires, magnétique ou électrique, on va utiliser les éléments nodaux. Par contre, si on a des variables vectorielles de type champ ou potentiel vecteur, il est plus naturel d'utiliser les éléments mixtes conformes dans  $H(\text{rot})$ . Les éléments de facette, quand à eux, peuvent être utiles pour interpoler l'induction électrique ou magnétique, et les éléments de volume pour interpoler une variable de type densité de charge.

Nous commençons par rappeler la description de quelques éléments finis nodaux, spécialement ceux de Lagrange, qui nous serviront ensuite à l'introduction des éléments mixtes.

#### 4.3.1. Éléments finis nodaux [Zienkiewicz-89][Dhatt-84]

Les éléments nodaux sont les éléments les plus usuels de la méthode des éléments finis. Ces éléments permettent de générer des fonctions continues, à valeurs scalaires, qui définissent de façon unique sur les éléments géométriques dits de type  $k$  et notés  $P_k$  tout polynôme de degré  $k$ . L'ensemble des degrés de liberté est constitué des valeurs de la variable interpolée aux noeuds. Les valeurs de la variable interpolée sur chaque frontière ne dépendent que des valeurs nodales sur celle-ci, et par conséquent, la variable est continue au passage d'un élément fini à l'autre.

Les éléments nodaux peuvent également être utilisés pour interpoler des variables vectorielles, cas dans lequel les degrés de liberté sont les valeurs des 3 composantes aux noeuds de l'élément. Ainsi, dans l'approximation d'un vecteur à l'aide des fonctions nodales, on impose à chacune de ses composantes d'être continue.



## Élément de référence

Les notions d'élément de référence et de transformation géométrique permettent de simplifier la définition des fonctions de base pour des éléments géométriques de forme compliquée. Un élément géométrique quelconque  $K$ , dit réel, peut se ramener à un élément de référence, noté  $K_r$ , dans un système de coordonnées de référence  $(u, v, w)$ , par une transformation géométrique  $F$ . Cette transformation doit être inversible et associer à tout point  $u$  de  $K_r$  un seul point  $x$  dans  $K$  défini par:

$$x = F(u) \quad (I.51)$$

Dans le cas d'un élément isoparamétrique, la transformation  $F$  s'exprime à l'aide des fonctions de base nodales, définies dans l'élément  $K_r$ .

### 4.3.1.1. Élément nodal P1 sur le tétraèdre

C'est l'élément géométrique le plus simple et le plus utilisé dans la modélisation tridimensionnelle. Nous allons expliciter les fonctions de base pour un tétraèdre de référence, de sommets  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  (Fig. I.4):

Noeud	Fonction de base associée
$M_1 (0,0,0)$	$1-u-v-w$
$M_2 (1,0,0)$	$u$
$M_3 (0,1,0)$	$v$
$M_4 (0,0,1)$	$w$

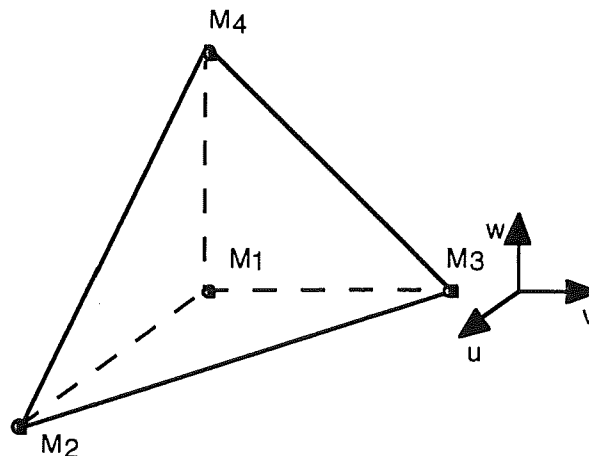


Fig. I.4 Tétraèdre de référence d'ordre 1

### 4.3.1.2. Élément nodal P<sub>1</sub> sur l'hexaèdre

L'élément de référence considéré est un cube unitaire, de sommet M<sub>1</sub>-M<sub>8</sub> (Fig. I.5)

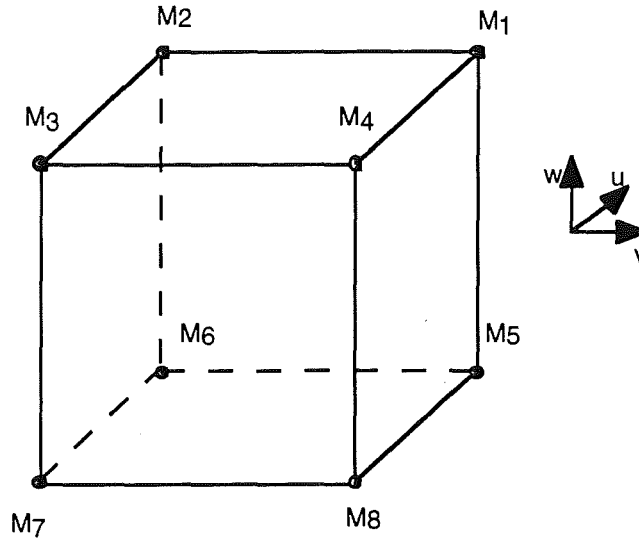


Fig. I.5 Hexaèdre de référence d'ordre 1

Les fonctions de Lagrange associées aux sommets s'écrivent:

Noeud	Fonction de base associée
M <sub>1</sub> ( 1, 1, 1)	$(1+u)(1+v)(1+w)/8$
M <sub>2</sub> (-1, 1, 1)	$(1-u)(1+v)(1+w)/8$
M <sub>3</sub> (-1,-1, 1)	$(1-u)(1-v)(1+w)/8$
M <sub>4</sub> ( 1,-1, 1)	$(1+u)(1-v)(1+w)/8$
M <sub>5</sub> ( 1, 1,-1)	$(1+u)(1+v)(1-w)/8$
M <sub>6</sub> (-1, 1,-1)	$(1-u)(1+v)(1-w)/8$
M <sub>7</sub> (-1,-1,-1)	$(1-u)(1-v)(1-w)/8$
M <sub>8</sub> ( 1,-1,-1)	$(1+u)(1-v)(1-w)/8$

### 4.3.1.3. Élément nodal P<sub>1</sub> sur le prisme

L'élément de référence considéré est un prisme unitaire, de sommet M<sub>1</sub>-M<sub>6</sub> (Fig. I.6):

Noeud	Fonction de base associée
$M_1(1,0, 1)$	$u (1+w)/2$
$M_2 (0,1, 1)$	$v (1+w)/2$
$M_3 (0,0, 1)$	$1-u-v)(1+w)/2$
$M_4 (1,0,-1)$	$u (1-w)/2$
$M_5 (0,1,-1)$	$v (1-w)/2$
$M_6 (0,0,-1)$	$(1-u-v)(1-w)/2$

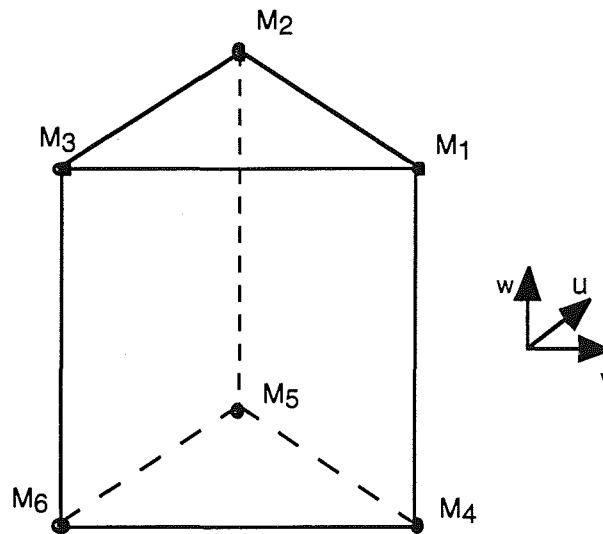


Fig. I.6 Prisme de référence d'ordre 1

#### 4.3.2. Éléments finis mixtes conformes dans $H(\text{rot})$

Nous avons vu que les éléments nodaux imposent la continuité de la variable interpolée au passage d'un élément à l'autre. Cependant, cette propriété n'est pas toujours désirée, surtout quand on veut interpoler de variable de type champ électrique ou champ magnétique. Les éléments mixtes conformes dans  $H(\text{rot})$  sont les plus adaptés à la représentation des champs de vecteurs, permettant la discontinuité de la composante normale.

Introduits vers les années 80, ce type d'élément a les degrés de libertés associés non seulement aux noeuds du maillage mais aussi aux arêtes, facettes ou volumes. En [Nédélec-80], l'auteur a introduit deux familles d'éléments finis mixtes en 3 dimensions, l'une conforme dans  $H(\text{div})$  et l'autre dans  $H(\text{rot})$ . Bossavit a retrouvé les éléments mixtes du premier ordre de Nédélec chez

Whitney [Bossavit-88] et il a montré qu'ils sont bien adaptés au calcul des courants de Foucault [Bossavit-93] et dans les problèmes de diffraction en électromagnétisme [Bossavit-89]. Actuellement, ce type d'élément est largement utilisé pour de diverses applications [van Welij-85], [Ren-88], [Webb-93-2], [Albanese-93], [Dular-94], [Yao-95], [Ren-96-1].

Les éléments mixtes conforme dans  $H(\text{rot})$  sont également connus sous le nom de éléments d'arête ou 1-forme de Whitney ou éléments tangentiels ou éléments mixtes de  $H(\text{rot})$ . Ces éléments sont vectoriels et ils imposent uniquement la continuité de la composante tangentielle du champ.

#### 4.3.2.1. Principes fondamentaux

- les degrés de liberté sont associés aux entités géométriques de l'élément, c'est-à-dire arête, facette et volume, d'où leur nom d'éléments mixtes.

- pour pouvoir imposer la continuité de la composante tangentielle de la variable, celle-ci va être déterminé de façon unique sur chaque frontière de l'élément par la seule donnée des degrés de liberté définis sur la frontière. Ainsi, la composante tangentielle va être localisée sur la frontière et par conséquent, elle sera commune à l'élément voisin.

Il existe deux familles d'éléments mixtes, l'une est dite 'incomplète' et l'autre 'complète'. La première est décrite dans [Nédélec-80] tandis que la seconde est décrite dans [Nédélec-86]. Pour la famille incomplète, l'espace d'interpolation est un espace de vecteurs dont les composantes normales et tangentielles appartiennent à des espaces de polynômes différentes. Pour la famille complète, l'espace d'interpolation est un espace de vecteurs où les composantes normale et tangentielles sont de degré identique.

Dans la suite, nous allons présenter les fonctions de base mixtes qui ont été utilisées tout au long de ce travail.

### 4.3.2.2. Éléments mixtes $H(\text{rot})$ sur le tétraèdre [Webb-93-1]

Dans le tableau I.2 on présente les fonctions de base pour trois ordres d'interpolation. Pour chaque ordre on donne le nombre de fonctions; chaque fonction est associée à une arête (E) ou une facette (F).

Tableau I.2 Fonctions de base mixtes sur le tétraèdre

Ordre d'interpolation	Nombre total de degrés de liberté	Localisation et nombre de d.d.l. associé	Fonctions de base
		$E_{i-j}$ (6)	$N_i \text{grad}_u N_j - N_j \text{grad}_u N_i$
1 <sup>er</sup> ordre incomplet	6		
		$E_{i-j}$ (6)	$N_i \text{grad}_u N_j + N_j \text{grad}_u N_i$
1 <sup>er</sup> ordre complet	12		
		$F_{i-j-k}$ (8)	$N_k N_j \text{grad}_u N_i$ $N_k N_i \text{grad}_u N_j$
2 <sup>ème</sup> ordre incomplet	20		

Les fonctions de base mixte font apparaître les fonctions de base nodales (qui ont été explicitées antérieurement), notées  $N_i$ , et leurs gradients calculés dans le repère local (u,v,w), notés  $\text{grad}_u N_i$ .

#### Fonctions associées aux arêtes:

A l'ordre 1 incomplet, l'ensemble de fonctions associées aux arêtes notées  $E_{i-j}$ , de sommets  $i$  et  $j$ , se composent de six fonctions s'appuyant chacune sur une arête. Pour les ordres plus élevés, on ajoute encore une fonction par arête.

#### Fonctions associées aux facettes:

A l'ordre 2 incomplet, les fonctions associées aux facettes se compose de huit fonctions, chaque facette  $F_{i-j-k}$  ayant deux fonctions.

### Remarque

Ces trois éléments sont hiérarchiques. Cela signifie que les fonctions de base pour un élément sont un sous-ensemble des fonctions de base pour l'élément d'ordre plus élevé. Par exemple, l'élément incomplet du premier ordre a six fonctions de base (une par arête). L'élément complet du premier ordre a les fonctions de base précédentes plus six fonctions additionnelles (une par arête). L'élément du second ordre incomplet est obtenu en ajoutant huit fonctions de plus (deux pour chaque facette).

Les propriétés hiérarchiques permettent de mélanger des éléments de différents ordres dans le même maillage.

### Quelques propriétés

Le fait de localiser les degrés de liberté sur les arêtes et sur les facettes afin d'assurer la continuité tangentielle au passage entre un élément et l'autre est une propriété remarquable de ces éléments. Cette propriété est une conséquence des propriétés de  $\text{grad}_U N_i$  :

- $\text{grad}_U N_i$  est un vecteur constant dans le tétraèdre et il dépend des coordonnées des quatre sommets du tétraèdre.
- $\text{grad}_U N_i$  est perpendiculaire sur la face  $N_i = 0$ .
- la composante tangentielle de  $\text{grad}_U N_i$  sur l'arête ne dépend que des coordonnées de deux sommets de l'arête, et est indépendante des coordonnées des autres sommets.
- la composante tangentielle de  $\text{grad}_U N_i$  sur la facette ne dépend que des trois sommets de la facette.

Pour chaque fonction associée à l'arête  $E_{i-j}$  on peut montrer que:

- la composante tangentielle de la fonction est nulle sur toute arête autre que  $E_{i-j}$  et sur celle-ci ne dépend que des coordonnées des sommets  $i$  et  $j$ .
- la composante tangentielle à une facette est nulle si la facette ne contient pas l'arête  $E_{i-j}$ , et sur une facette contenant  $E_{i-j}$  elle ne dépend que des coordonnées des sommets de la facette.

Donc, sur l'arête  $E_{i-j}$  la composante tangentielle n'est contrôlée que par les coefficients de la fonction associée à cette arête; ces coefficients ne sont déterminés que par les coordonnées des sommets  $i$  et  $j$  et non par les coordonnées des autres sommets.

D'une façon analogue, pour chaque fonction associée à la facette  $F_{i-j-k}$ , on peut montrer que:

- la composante tangentielle de la fonction sur une arête est nulle sur toute arête
- la composante tangentielle de la fonction est nulle sur toute facette autre que  $F_{i-j-k}$ , et sur cette facette ne dépend que de coordonnées de trois sommets  $i, j$  et  $k$ .

Sur la facette, la composante tangentielle n'est contrôlée que par les coefficients des fonctions d'arête appartenant à la facette et des fonctions de facette associées; ces coefficients ne sont déterminés que par les coordonnées de sommets  $i, j$  et  $k$  de la facette.

#### 4.3.2.3. Éléments mixtes $H(\text{rot})$ sur l' hexaèdre

Dans le tableau I.3 on présente les fonctions de base construites sur l'hexaèdre, pour trois ordres d'interpolation. Les fonctions sont associée aux arêtes (E), aux facettes (F) et au volume (V), suivant l'ordre d'interpolation.

Tableau I.3 Fonctions de base mixtes sur l'hexaèdre

Ordre d'interpolation	Nombre total de degrés de liberté	Localisation et nombre de d.d.l. associé	Fonctions de base
		$E_{i-j}$ (12)	$(N_i + N_j) \text{ grad}_u \Gamma_{i-j}$
1 <sup>er</sup> ordre incomplet	12		
		$E_{i-j}$ (12)	$(N_i - N_j) \text{ grad}_u \Gamma_{i-j}$
1 <sup>er</sup> ordre complet	24		
		$F_{i-j-m-k}$ (24) $V_{i-j-m-l}$ (6)	$N_i N_j \text{ grad}_u \Gamma_{m-k}$ $N_i N_j \text{ grad}_u \Gamma_{m-l}$
2 <sup>ème</sup> ordre incomplet	54		

Dans l'expression des fonctions de base,  $N_i$  est la fonction nodale associée au noeud  $i$  et  $\Gamma_{i-j}$  est une fonction génératrice de direction  $\Gamma_{i-j}$  associée à deux noeuds  $i$  et  $j$ . Elle vaut 0 sur la facette du noeud  $i$  de départ et 1 sur la facette du noeud  $j$  d'arrivée.

### Fonctions associées aux arêtes

A l'ordre 1 incomplet, l'ensemble de fonctions associées aux arêtes notées  $E_{i-j}$ , de sommets  $i$  et  $j$ , se compose de douze fonctions s'appuyant chacune sur une arête. Pour les ordres plus élevés, on ajoute encore une fonction par arête.

### Fonctions associées aux facettes

A l'ordre 2 incomplet, les fonctions associées aux facettes se composent de vingt-quatre fonctions, chaque facette portant 4 fonctions, soit une par arête de facette.  $F_{i-j-k-m}$  est la fonction associée à la facette qui contient l'arête  $i-j$  de noeud milieu  $m$ , et  $k$ , le noeud milieu de l'arête opposée. Pour chaque facette, on associe quatre fonctions, s'appuyant chacune sur une médiane.

### Fonctions associées au volume

A l'ordre 2 incomplet, les fonctions associées au volume se composent de 6 fonctions, soit une par facette du volume. Soit une facette de noeuds diagonaux  $i-j$  et de centre  $m$ . Soit  $l$  le centre de la facette opposée. La fonction qui s'appuie sur la facette  $i-j$  et la médiane  $m-l$  est notée  $V_{i-j-m-l}$ .

#### **4.3.2.4. Éléments mixtes $H(\text{rot})$ sur le prisme**

Dans le tableau I.4 on présente les fonctions de base construites sur le prisme, pour trois ordres d'interpolation.

Une fonction génératrice de direction  $\Gamma_{i-j}$  associée à une arête verticale  $i-j$  vaut 1 sur cette arête et 0 sur la facette rectangulaire verticale opposée. Les trois fonctions associées aux arêtes verticales sont:

$$\Gamma_{1-4} = u \qquad \Gamma_{2-5} = v \qquad \Gamma_{3-6} = 1 - u - v$$



Une fonction génératrice de direction  $\Gamma_{i-j-k}$  associée à la facette triangulaire horizontale  $i-j-k$  vaut 1 sur cette facette et 0 sur la facette triangulaire opposée. Les deux fonctions associées aux facettes triangulaires horizontales sont:

$$\Gamma_{1-2-3} = (1+w)/2$$

$$\Gamma_{4-6-5} = (1-w)/2$$

Tableau I.4 Fonctions de base mixtes sur le prisme

Ordre d'interpolation	Nombre total de degré de liberté	Association et nombre de d.d.l. associé	Fonctions de base
		$E_{i-j}$ (6)	$N_i \text{grad}_u \Gamma_{j-j'} - N_j \text{grad}_u \Gamma_{i-i'}$
		$E_{i-i'}$ (3)	$N_i \text{grad}_u \Gamma_{j-j''} - N_j \text{grad}_u \Gamma_{i-i''}$
1 <sup>er</sup> ordre incomplet	9		
		$E_{i-j}$ (6)	$N_i \text{grad}_u \Gamma_{j-j'} + N_j \text{grad}_u \Gamma_{i-i'}$
		$E_{i-i'}$ (3)	$N_i \text{grad}_u \Gamma_{j-j''} + N_j \text{grad}_u \Gamma_{i-i''}$
1 <sup>er</sup> ordre complet	18		
		$F_{i-j-k-l}$ (6)	$N_i N_j \text{grad}_u \Gamma_{k-l}$
		$F_{j-k-l-i}$ (6)	$N_j N_k \text{grad}_u \Gamma_{l-i}$
		$F_{i-j-k}$ (6)	$N_i N_j \text{grad}_u \Gamma_{k-k'}$
		$V_{i-k-m-n}$ (3)	$N_j N_k \text{grad}_u \Gamma_{m-n}$
2 <sup>ème</sup> ordre incomplet	39		

### Fonctions associées aux arêtes

A l'ordre un incomplet les fonctions associées aux arêtes se composent de six fonctions qui s'appuient sur les arêtes horizontales, notées  $E_{i-j}$  et trois fonctions sur les arêtes verticales, notées  $E_{i-i'}$ . Pour les ordres plus élevés, on ajoute encore une fonction par arête. Dans les expressions des fonctions,  $i-i'$  et  $j-j'$  sont les arêtes verticales passant par  $i$  et  $j$ , et  $i-i''$  et  $j-j''$  sont les facettes triangulaires horizontales passant par  $i$  et  $j$ .

### Fonctions associées aux facettes

A l'ordre deux incomplet les fonctions de facette se composent de dix-huit fonctions, réparties de la façon suivante: chaque facette quadrilatère a quatre fonctions, une par arête de facette, et chaque facette triangulaire porte trois fonctions, soit une par arête de facette. Soit  $i-j-k-l$  une facette quadrilatère où  $i-j$  et  $k-l$  sont des arêtes horizontales et  $j-k$  et  $l-i$  sont des arête verticales. La fonction de base associée à cette facette et qui s'appuie sur une arête horizontale est noté  $F_{i-j-k-l}$ , tandis que celle qui s'appuie sur une arête verticale est noté  $F_{j-k-l-i}$ . La fonction associée a une facette triangulaire est noté  $F_{i-j-k}$ .

### Fonctions associées au volume

A l'ordre deux incomplet les fonctions associées au volume se composent de 3 fonctions, soit une par facette quadrilatère du volume. Soit  $i-j-k-l$  une facette quadrilatère de diagonale  $i-k$  (et  $j-l$ ) et  $m-n$  l'arête opposée à la facette. La fonction de base associée est noté  $V_{i-k-m-n}$ .

La validation des fonctions de base mixtes se fera dans le deuxième chapitre, en même temps que l'étude de la formulation en potentiel vecteur.

## **4.4. Conclusion**

Nous avons présenté les fonctions de base qui sont indispensables à la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis, sur les éléments géométriques les plus courants (tétraèdres, hexaèdres, prismes). A partir des fonctions de base nodales, nous avons explicité une famille des fonctions mixtes de  $H(\text{rot})$ , qui est caractérisée par le fait que les degrés de liberté sont hiérarchiques.

Notons aussi l'existence des fonctions de base mixtes de  $H(\text{rot})$  sur la pyramide [Coulomb-97].

## 5. Conclusion

Au cours de ce chapitre, après avoir présenté les équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques dans le cadre de l'approximation macroscopique, on a vu qu'elles peuvent être simplifiées à travers des hypothèses simplificatrices, mieux adaptées aux méthodes numériques.

Le passage du modèle physique continu au modèle discret se fait par l'application de la méthode des éléments finis qui est basée sur le processus de discrétisation de l'espace des solutions admissibles à l'aide des fonctions construites sur les éléments finis.

Enfin, nous avons présenté les éléments finis qui serviront tout au long de cette étude, les éléments nodaux  $P_1$  et les éléments mixtes conformes dans  $H(\text{rot})$ , en explicitant les fonctions de base sur les éléments géométriques les plus courants (tétraèdres, hexaèdre, prisme).

**Chapitre II**  
**Formulations magnétostatiques**



## 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des formulations magnéto-statiques basées sur le potentiel vecteur dans le contexte de la méthode des éléments finis.

Dans le chapitre précédent nous avons vu que le potentiel vecteur magnétique peut être interpolé soit en utilisant les éléments nodaux soit en utilisant les éléments mixtes. Suivant le type d'élément utilisé, le traitement de l'unicité du potentiel vecteur n'est pas le même, ce qui entraîne des propriétés particulières au niveau du comportement numérique de la formulation.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'identifier clairement les contraintes et les problèmes numériques liées à l'utilisation des interpolations nodales et mixtes, afin de disposer d'une formulation robuste et générale, capable de modéliser les dispositifs électrotechniques réels.

Après l'écriture de la formulation sous la forme discrète, nous allons exposer à l'aide d'exemples numériques les particularités de chaque type d'interpolation au niveau de l'unicité et les difficultés qu'elles entraînent.

## 2. Forme discrète de la formulation en potentiel vecteur magnétique

Soit  $n_{eq}$  le nombre de degrés de liberté de la discretisation et  $\vec{W}_i$  avec  $i = 1, \dots, n_{eq}$  les fonctions test appartenant à l'espace  $P^k$  pour les éléments nodaux et  $H(\text{rot})$  pour les éléments mixtes et vérifiant la condition (II.1):

$$\vec{n} \times \vec{W}_i = \vec{0}, \text{ sur la frontière } \Gamma_B \text{ où } \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.1})$$

L'application de la méthode de Galerkin à l'équation (I.20), qui constitue la formulation en potentiel vecteur magnétique, permet d'écrire:

$$\int_{\Omega} \vec{W}_i \cdot \text{rot}(\text{vrot} \vec{A}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{W}_i \cdot \vec{J} d\Omega \quad \text{avec } i = 1, \dots, n_{eq} \quad (\text{II.2})$$

Après l'application du théorème de Green, la forme discrète de la formulation devient:

$$\int_{\Omega} (\text{rot} \vec{W}_i \text{vrot} \vec{A}) d\Omega - \int_{\Gamma} \vec{W}_i (\vec{n} \times \text{vrot} \vec{A}) d\Gamma = \int_{\Omega} (\vec{W}_i \cdot \vec{J}) d\Omega \quad (\text{II.3})$$

L'intégrale surfacique de (II.3) disparaît sur  $\Gamma_B$  à cause de la condition (II.1) et sur  $\Gamma_H$  afin d'assurer faiblement la condition (I.21), i.e.  $\vec{n} \times \vec{H} = \vec{0}$ . La suppression du terme surfacique va aussi assurer la conservation faible de  $\vec{H}$ , au passage d'un élément à l'autre.

La forme matricielle de la formulation se déduit très aisément de l'équation (II.3), en exprimant  $\vec{A}$  comme une combinaison linéaire des fonctions de base et des degrés de liberté associés. Le système à résoudre s'écrit:

$$\sum_{j=1}^{n_{eq}} \left[ \int_{\Omega} (\text{rot} \vec{W}_i \text{vrot} \vec{W}_j) d\Omega \right] A_j = \int_{\Omega} \vec{W}_i \cdot \vec{J} d\Omega \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_{eq} \quad (\text{II.4})$$

Notons que la matrice du système est symétrique et définie semi-positive.

### Remarque

Le système matriciel ainsi obtenu est équivalent au système issu de la minimisation de la fonctionnelle suivante [Coulomb-81]:

$$F_1(A) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{J} \right] d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{A}_t \times \vec{H}_t) \vec{n} d\Gamma \quad (\text{II.5})$$

Le terme surfacique de (II.5) traduit les conditions aux limites et il est nul dans le cas des conditions naturelles sur les frontières.

La formulation discrète (II.3) n'assure pas l'unicité du potentiel vecteur. Ceci se traduit, au niveau matriciel par le fait que dans la matrice du système à résoudre est singulière. Sous certaines conditions, la résolution numérique de ce système est encore possible.

Le fait que le potentiel vecteur n'est pas unique, ne constitue pas un obstacle, vu que le champ l'est et qu'il constitue la seule grandeur physiquement appréciable.

Au niveau numérique, le potentiel vecteur en éléments nodaux a un comportement bien différent de celui en éléments mixtes  $H(\text{rot})$ . Dans la suite, nous allons expliciter les caractéristiques de chaque type d'interpolation, nodale et mixte.

### 3. Formulation en potentiel vecteur, basée sur l'interpolation nodale

L'expérience acquise depuis plusieurs années montre que la formulation en potentiel vecteur basée sur les éléments nodaux se comporte très mal lorsqu'on n'assure pas l'unicité du potentiel vecteur. Pour le cas particulier des problèmes à nombre réduit de degrés de liberté, la convergence peut être possible, au prix d'un nombre très élevé d'itérations du solveur itératif utilisé. Plus généralement, pour les problèmes de taille importante, la convergence est souvent impossible.

Il convient donc d'assurer l'unicité du potentiel vecteur dans le contexte des éléments nodaux.

#### 3.1. Introduction de la jauge de Coulomb par pénalité

Le problème de l'unicité de potentiel vecteur magnétique a fait l'objet d'un nombre impressionnant de travaux. Depuis les années 80, date à laquelle on a commencé à appliquer effectivement la formulation en potentiel vecteur sur des problèmes tridimensionnel, le problème suscite l'intérêt des chercheurs.

La jauge la plus couramment utilisée est la celle de Coulomb, i.e.  $\text{div } \vec{A} = 0$ , qui est introduite dans la formulation (I.20) à travers un terme de pénalité; cela donne la formulation en potentiel vecteur avec la jauge de Coulomb:



$$\text{rot}(\nu \text{rot} \vec{A}) - \text{grad}(\lambda \text{div} \vec{A}) = \vec{J} \quad (\text{II.6})$$

où  $\lambda$  est un paramètre d'espace, positif, ayant la dimension d'une réductivité et qui impose d'une manière plus ou moins forte la jauge dans l'équation (II.6). Si  $\lambda$  est choisi trop grand, c'est la jauge qui va dominer la solution et non pas le phénomène physique. Inversement, si  $\lambda$  est trop petit, la jauge ne va pas être imposée que d'une manière faible. Aux deux extrémités, la matrice du système devient mal conditionnée. Le choix optimum pour  $\lambda$ , qui minimise le nombre d'itération du solveur itératif nécessaire à résoudre le système, est  $\nu$ , la réductivité du matériau. Pour les matériaux non-linéaires, le choix le plus utilisé est  $\lambda = \nu(B=0)$  dans les milieux isotropes et  $\lambda = \|\nu(B=0)\|$ , dans les milieux anisotropes [Coulomb-81].

L'introduction du terme de pénalité n'est pas suffisante pour assurer l'unicité et certaines conditions aux limites doivent être rajoutées aux conditions (I.21-I.23). Il s'agit de [Coulomb-81], [Biro-89]:

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{II.7})$$

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B \quad (\text{II.8})$$

Il faut noter également que l'introduction de la jauge entraîne la conservation de la composante normale du potentiel vecteur au passage d'un élément à l'autre.

### Remarque

Le système matriciel obtenu après l'application de la méthode de Galerkin sur la formulation (II.6) est équivalent à la minimisation de la fonctionnelle suivante [Coulomb-81]:

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[ \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B} - \vec{A} \vec{J} \right] d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{A}_t \times \vec{H}_t) \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} (\text{div} \vec{A})^2 d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \vec{A}) \lambda \text{div} \vec{A} d\Gamma \quad (\text{II.9})$$

On observe que la nouvelle fonctionnelle  $F(A)$  est la somme des deux fonctionnelles à optimiser simultanément. Une qui traduit le phénomène physique notée  $F_1(A)$ , définie en (II.5), et l'autre  $F_2(A)$  égale à:

$$F_2(A) = \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} (\text{div} \vec{A})^2 d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \vec{A}) \lambda \text{div} \vec{A} d\Gamma \quad (\text{II.10})$$

qui impose la jauge de Coulomb.

Dans la littérature on peut trouver quelques méthodes, différentes de l'approche que nous avons présentée, pour imposer l'unicité. Dans la suite, nous allons exposer brièvement les méthodes qui nous ont paru les plus intéressantes.

### Autres méthodes pour imposer l'unicité du potentiel vecteur magnétique

Dans [Hasebe-87], [Kanayama-90] les auteurs proposent une méthode basée sur les multiplicateurs de Lagrange: à la fonctionnelle  $F_1(A)$  s'ajoute une deuxième fonctionnelle  $F_3(A, p)$ , égale à:

$$F_3(A, p) = \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{A} d\Omega \quad (\text{II.11})$$

En minimisant la fonctionnelle totale  $F_1(A) + F_3(A, p)$ , les multiplicateurs de Lagrange  $p$  peuvent être identifiés avec:

$$p = \nu \operatorname{div} \vec{A} \quad (\text{II.12})$$

Les multiplicateurs peuvent être soit gardés comme inconnues et interpolés séparément soit éliminés par la relation (II.12). La dernière approche est équivalente à la méthode classique dans laquelle  $\lambda$  est choisi égal à la perméabilité du matériau.

Les essais numériques basés sur la première approche ont montré que la matrice du système est très mal conditionnée et par conséquent, l'utilisation d'un solveur itératif n'est pas envisageable.

Konrad [Konrad-89] impose explicitement la jauge  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  par une méthode de contrainte, ce qui a l'avantage de réduire la taille de la matrice (par élimination d'une composante de  $\vec{A}$ ). Cette technique n'est toujours pas assez maîtrisée pour être appliquée aux problèmes tridimensionnels.

Dans [Mesquita-92],[Mesquita-94] les auteurs proposent l'utilisation d'une jauge incomplète de type  $\vec{A} \cdot \vec{u} = 0$ , similaire à la jauge développée pour les éléments d'arêtes [Albanese-90]. La construction de l'arbre pose des difficultés à proximité des interfaces entre matériaux différents, dans le sens où l'arbre ne doit pas être tangent à ces interfaces. Toutefois, la matrice

du système est mal conditionnée, ce qui se traduit par un nombre important d'itérations du solveur itératif.

### 3.2. Problèmes numériques liés à l'utilisation des éléments nodaux

Bien que la formulation en potentiel vecteur avec la jauge de Coulomb semblait être très générale et robuste, au fil des années les expériences numériques ont révélé l'existence de problèmes numériques liés à l'utilisation de la jauge, dans le contexte des éléments nodaux. Ainsi, de nombreux travaux signalent les pertes de précision dans le cas des problèmes comportant des régions à perméabilité magnétique différente [Demerdash-90], [Preis-91], [Mesquita-92],[Mesquita-94], [Dreher-94], [Perrin-94], [Preis-92].

Morisue [Morisue-90] met en évidence une forte sensibilité du potentiel vecteur magnétique à proximité des coins des matériaux ferromagnétiques, sur le problème bidimensionnel de la (Fig. II.1). La région ferromagnétique est supposée entourée par un inducteur linéique, parcouru par le courant  $I$  (A/m).

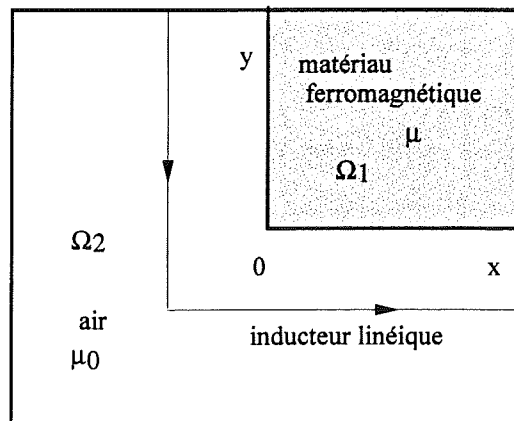


Fig. II.1 Coin ferromagnétique

Sous l'hypothèse que  $\frac{\mu}{\mu_0} \mapsto \infty$ , l'auteur calcule analytiquement le potentiel vecteur solution du système (II.6) et les conditions aux limites (I.21-I.23), (II.7-II.8). Il montre qu'à proximité du coin, la solution s'écrit:

$$\begin{aligned} A_x(x, y) &= -axy \\ A_y(x, y) &= +axy \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$\begin{aligned} A_x(x, y) &= 0 \\ A_y(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (\text{II.13})$$

avec  $a$  un paramètre constant.

L'induction  $B_z$  dans le coin est calculée par:

$$B_z = \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y} = a(y - x) = 0 \quad (\text{II.14})$$

En conclusion, même si la valeur exacte de l'induction dans la région ferromagnétique, y compris le coin est  $B_z = \mu I(T)$ , la formulation en éléments nodaux, avec la jauge de Coulomb, va fournir une induction nulle dans le coin. Ce phénomène va se traduire par une répartition non-physique du flux sur l'interface air/fer.

Dans [Preis-91] les auteurs observent ce phénomène et proposent une autre explication basée sur l'incapacité de la formulation à assurer correctement le saut de la composante tangentielle de  $\vec{B}$  aux interfaces air/fer. Afin de résoudre ce problème, ils proposent la libération de la composante normale de  $\vec{A}$  sur les interfaces air/fer, étant donné que pour assurer la continuité de  $B_n$  à travers les interface seule la continuité de  $\vec{A}_t$  est requise.

Comme on va le voir à travers les exemples numériques, cette technique améliore nettement la distribution du flux dans les pièces ferromagnétiques, sans toutefois résoudre le problème des pertes de précision dans le cas des circuits magnétiques fermés.

### 3.3. Investigations numériques

Nous souhaitons, à l'aide d'investigations numériques, d'identifier clairement les problèmes numériques liées à l'utilisation des éléments nodaux afin de les maîtriser et, par conséquent, de disposer d'une formulation robuste, capable de modéliser les problèmes réels.

### 3.3.1. Barreau de fer en champ magnétique uniforme

#### Intérêt

Le but de cet exemple est de montrer que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  en éléments nodaux est très sensible aux coins à l'interface entre un matériau ferromagnétique et l'air. Ce problème simple va permettre également la mise en évidence des effets de la libération de la composante normale de  $\vec{A}$  sur l'interface air / fer.

#### Description du problème et méthodes utilisées

La géométrie est constituée d'un barreau de fer infiniment long, plongé dans un champ magnétique uniforme suivant l'axe z, créé à l'aide des conditions aux limites imposées sur les bords du domaine. (Fig. II.2)

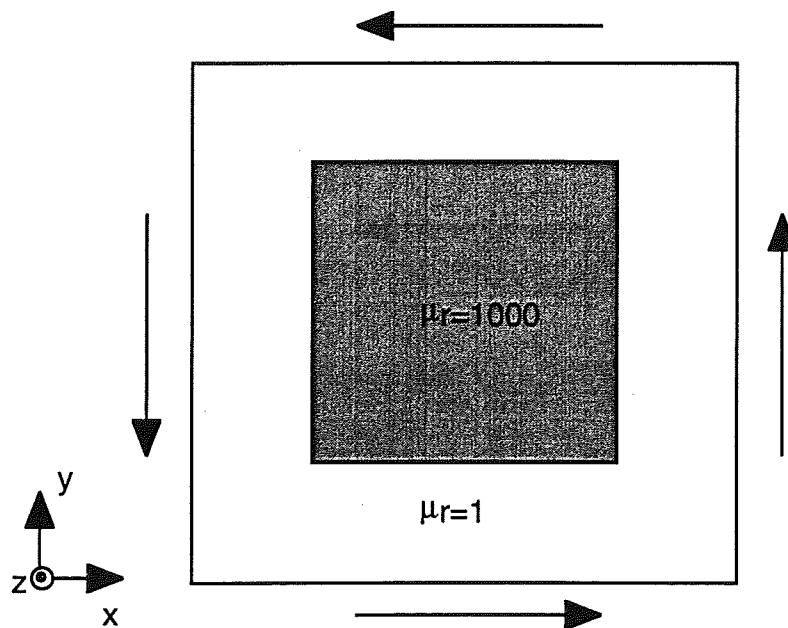


Fig. II.2 Barreau ferromagnétique en champ magnétique uniforme

Le problème a été modélisé successivement à l'aide de quatre méthodes:

**Cas no. 1:** la formulation avec jauge de Coulomb et composante normale  $A_n$  continue

**Cas no. 2:** la formulation avec jauge de Coulomb et composante normale  $A_n$  libérée sur l'interface air/fer

**Cas no. 3:** la formulation non-jaugée et  $A_n$  continue

**Cas no. 4:** la formulation non-jaugée et  $A_n$  libérée à l'interface

Le maillage utilisé comporte 1330 éléments hexaédriques du deuxième ordre (Fig.II.3).

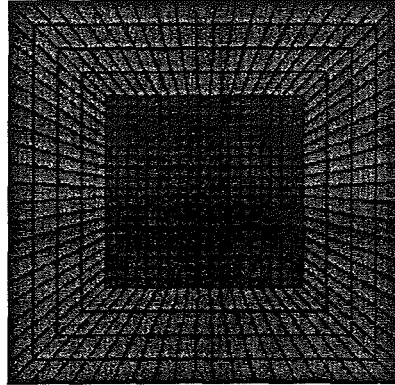
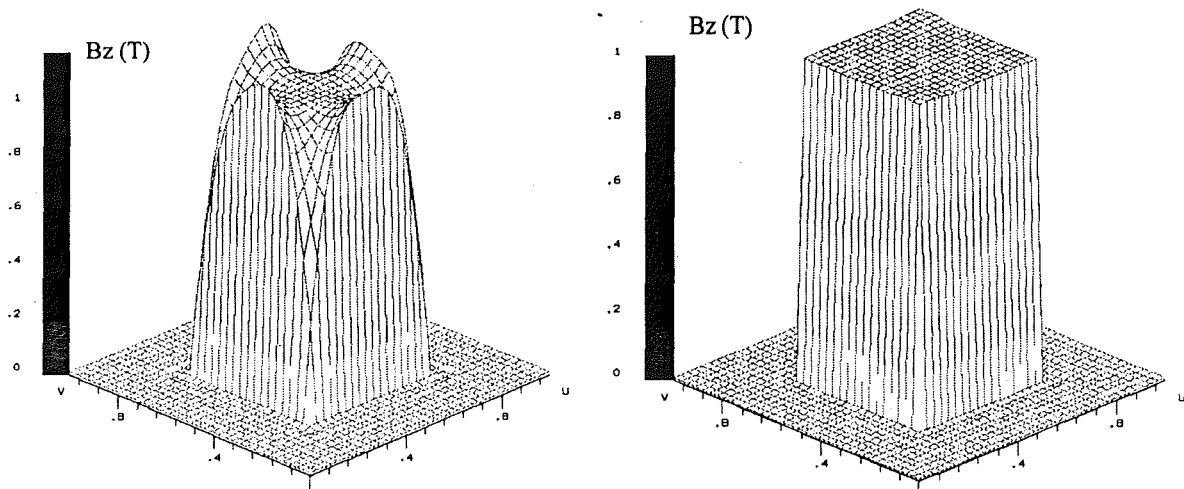


Fig. II.3 Maillage utilisé pour le barreau ferromagnétique

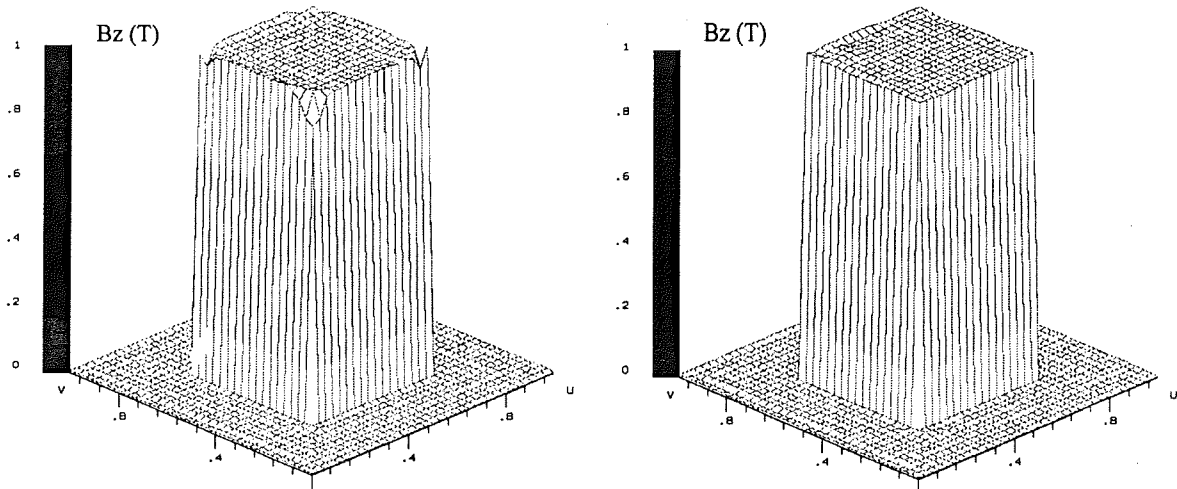
### Résultats

La figure II.4 montre la distribution de l'induction magnétique dans le domaine de calcul pour les quatre méthodes. Le tableau II.1 résume les valeurs extrêmes et moyennes de l'induction magnétique.



a) Cas 1. Formulation jaugée. Composante  $A_n$  continue

b) Cas 2. Formulation jaugée. Composante  $A_n$  libérée



c) Cas 3. Formulation non-jaugée. Composante  $A_n$  continue

d) Cas 4. Formulation non-jaugée. Composante  $A_n$  libérée

Fig. II.4 Répartition de l'induction magnétique dans le domaine de calcul

Tableau II.1. Valeurs extrêmes et moyennes de l'induction

Méthode	Maximum $B_z$ (T)	Minimum $B_z$ (T)	Moyenne $B_z$ (T)	Solution analytique $B_z$ (T)
Formulation jaugée. Composante $A_n$ continue	1,24	0,0017	0,99	1,0
Formulation jaugée. Composante $A_n$ libérée	1,014	0,988	0,99	1,0
Formulation non-jaugée. Composante $A_n$ continue	2,2	0,53	0,99	1,0
Formulation non-jaugée. Composante $A_n$ libérée	1,025	0,978	0,99	1,0
Éléments mixtes (Formulation non-jaugée)	1,02	0,98	0,99	1,0

Dans les cas des formulations à composante normale continue, qu'elles soient jaugée ou non, on s'aperçoit que l'induction n'est pas constante dans le barreau, elle diminue à proximité des coins. Le phénomène est plus accentué pour la formulation jaugée. Malgré cette répartition non-physique de l'induction, le flux total reste très proche de la valeur analytique.

Pour les formulations avec composante normale  $A_n$  discontinue, le fait de libérer la composante normale de  $\vec{A}$  entraîne une meilleure répartition du flux, en concordance avec le phénomène physique.

A titre de comparaison, on fournit les résultats obtenus avec la formulation en éléments mixtes, pour montrer que cette dernière ne rencontre pas de difficultés à modéliser l'exemple traité.

### *Conclusions*

Le potentiel vecteur en éléments nodaux (jaugé ou non) est sensible aux coins entre les matériaux de différentes perméabilités.

La libération de la composante normale sur les interfaces entre les matériaux de perméabilité magnétique différente améliore nettement la répartition du flux magnétique.

### 3.3.2. Circuit magnétique fermé

#### *Intérêt*

Le but de cet exemple est de montrer que l'introduction de la jauge de Coulomb entraîne des résultats déraisonnables dans le cas d'un circuit magnétique fermé.

#### *Description du problème et méthodes utilisées*

La géométrie du problème est constituée d'un circuit magnétique fermé, entouré par une bobine parcourue par un courant continu de 10110 At (Fig. II.5). Le matériau magnétique du circuit est supposé linéaire, de perméabilité relative 5000.



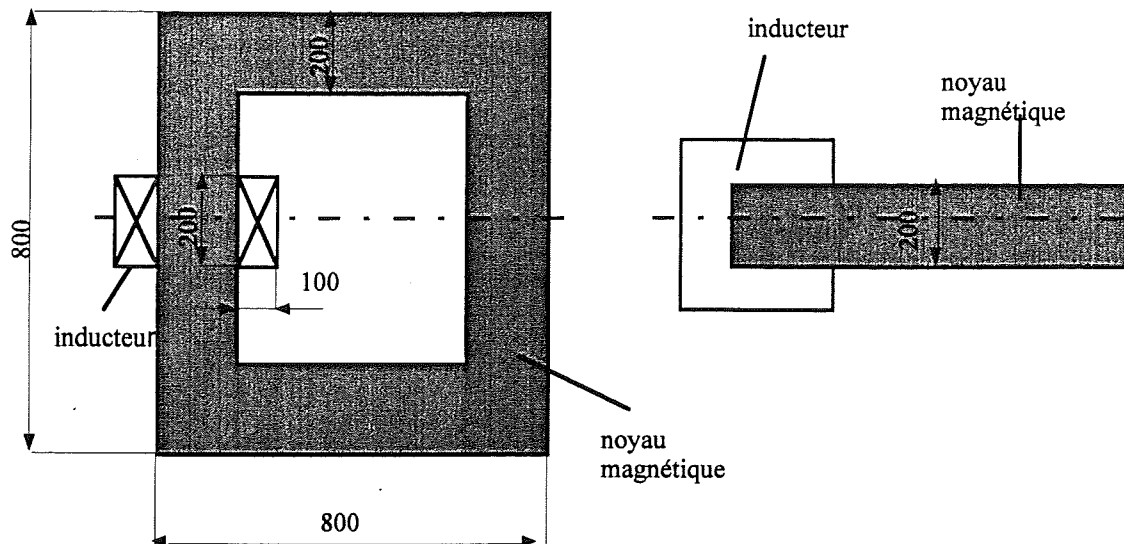


Fig. II.5 Géométrie du circuit magnétique étudié

Tenant compte des symétries du problème, seul un quart de la géométrie a été modélisé. Le maillage comporte 5141 éléments tétraédriques du deuxième ordre.

Les calculs ont été effectués avec les mêmes formulations que dans l'exemple précédent.

### Résultats

Le tableau II.2 résume les caractéristiques de résolution des méthodes utilisées. On note le nombre très élevés d'itérations nécessaire au solveur ICCG pour converger, dans le cas des formulations non-jaugées.

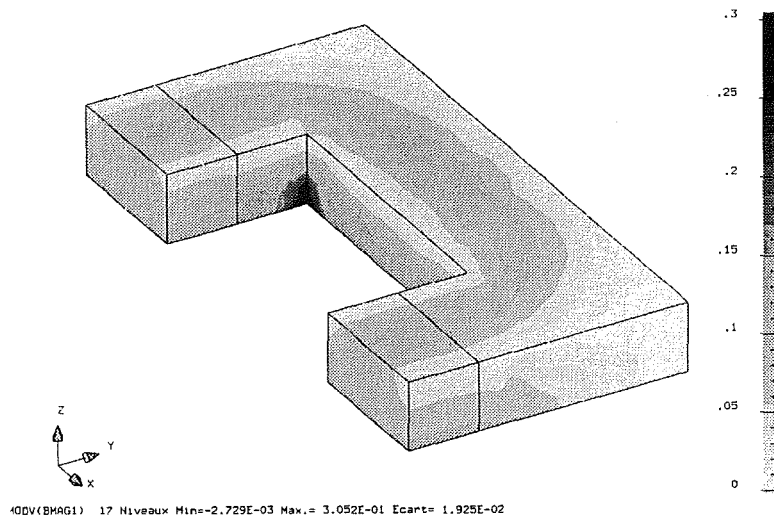
Tableau II.2. Caractéristiques de résolution du circuit magnétique fermé

Méthode	Nombre d'inconnues	Nombre de termes non-nuls	Nombre d'itérations* ICCG	Temps de résolution du système (sec)
Formulation jaugée. Composante $A_n$ continue	19958	775443	108	238
Formulation jaugée. Composante $A_n$ libérée	20551	815346	109	244
Formulation non-jaugée. Composante $A_n$ continue	19958	775443	1605	3145
Formulation non-jaugée. Composante $A_n$ libérée	20551	815346	1615	3208

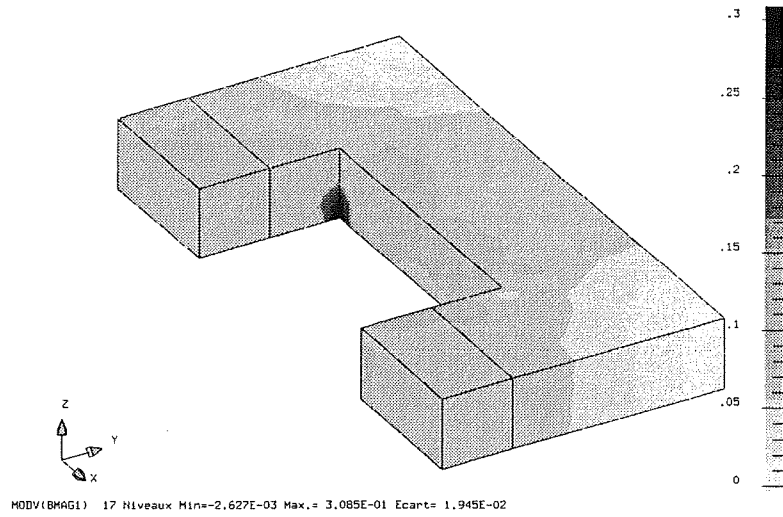
\*Critère de convergence :  $10^{-4}$

Station utilisé : HP 700

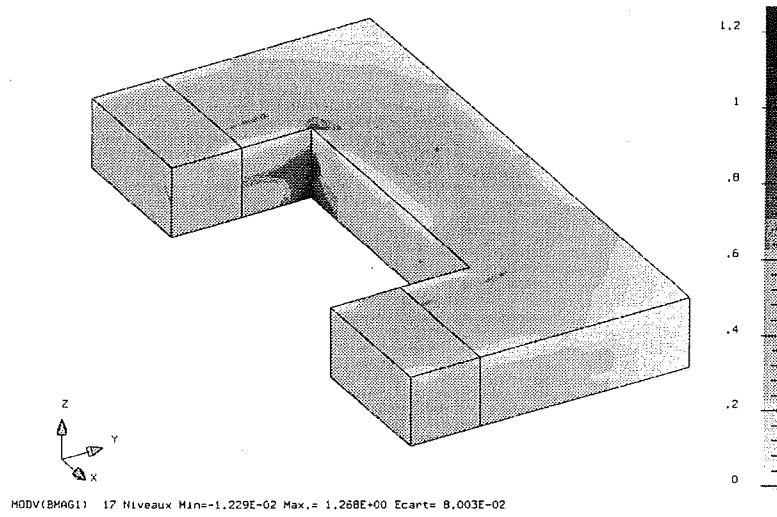
Dans la figure II.6 on montre la distribution de l'induction magnétique pour les quatre méthodes utilisées.



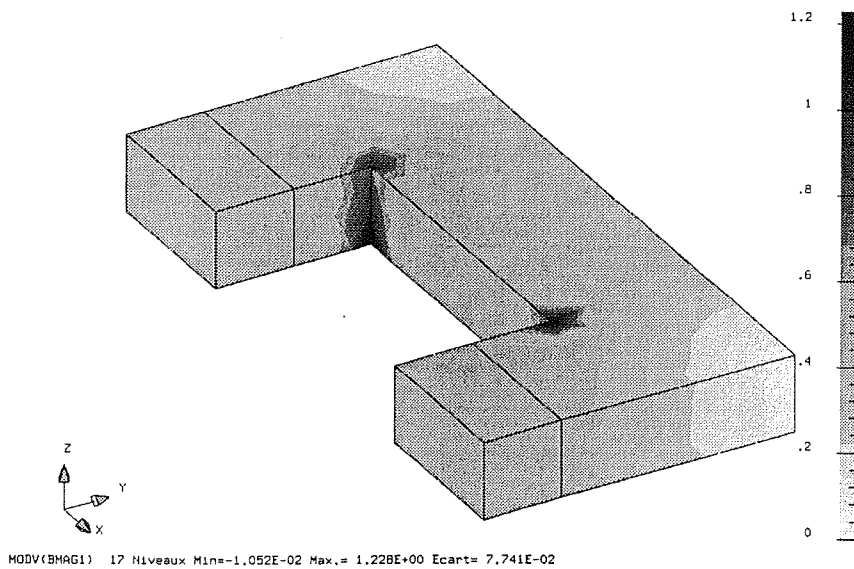
a) Cas 1. Formulation jaugée. Composante  $A_n$  continue



b) Cas 2. Formulation jaugée. Composante  $A_n$  libérée



c) Cas 3 . Formulation non-jaugée. Composante  $A_n$  continue



d) Cas 4 . Formulation non-jaugée. Composante  $A_n$  libérée

Fig. II.6 Distribution de l'induction magnétique

Dans le tableau II.3 on montre l'énergie stockée dans le circuit magnétique, calculée avec  $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} d\Omega$  et avec  $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J} d\Omega$ , et la densité moyenne du flux dans le circuit du coté de la bobine.

Tableau II.3 Énergie stockée et flux dans le circuit magnétique

Méthode	Énergie magnétique calculé avec $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} d\Omega$ (J)	Énergie magnétique calculé avec $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J} d\Omega$ (J)	Flux dans le circuit magnétique (Wb)
Formulation jaugée. Composante $A_n$ continue	0,041	0,079	0,0015
Formulation jaugée. Composante $A_n$ libérée	0,041	0,079	0,0015
Formulation non-jaugée. Composante $A_n$ continue	0,445	0,445	0,009
Formulation non-jaugée. Composante $A_n$ libérée	0,445	0,445	0,009
Éléments mixtes (Formulation non-jaugée)	0,626	0,626	0,012

Par rapport à la valeur analytique du flux ( $\phi = 0,011$  Wb), obtenue par un calcul simplifié en négligeant les fuites, il est évident que les formulations jaugées produisent des résultats excessivement sous-estimés. Le flux calculé n'est pas en accord avec la loi d'Ampère et les deux formules pour le calcul de l'énergie magnétique donnent des résultats différents.

En revanche, les formulations sans jauge fournissent des résultats plus proches du calcul analytique.

Au niveau de la distribution de l'induction dans le circuit magnétique, on retrouve les mêmes observations faites sur l'exemple traité précédemment, dans le sens que la libération de  $A_n$  (Cas no. 2 et Cas no. 4) améliore nettement la répartition de l'induction par rapport aux formulations à composante  $A_n$  continue.

La formulation jaugée basée sur les éléments mixtes (Cas no. 5) fournit des résultats tout à fait satisfaisants aussi bien au niveau de la répartition physique du flux qu'au niveau des résultats globaux.

### *Conclusions*

La libération de la composante normale  $A_n$  améliore la répartition du flux mais pas les valeurs globales. Dans le cas d'un circuit magnétique fermé, l'introduction de la jauge de Coulomb entraîne des résultats numériques excessivement sous-estimés.

### 3.3.3. Problème no. 13 du TEAM Workshop

#### *Intérêt*

Ce problème qui fait partie de la série de cas test internationaux, a été proposé dans le but de valider les logiciels de modélisation par rapport à des résultats expérimentaux. Ce test va nous permettre de comparer les résultats de différentes simulations avec les mesures et en même temps de mettre en évidence sur un problème réel les observations faites antérieurement sur des cas d'école.

#### *Description de la géométrie*

La géométrie étudiée est représentée dans la Fig. II.7. La définition complète de la géométrie et les propriétés physiques peuvent être trouvées dans [Nakata-90]. Un inducteur de section carrée est insérée parmi deux plaques en acier, disposées symétriquement de part et d'autre d'une troisième plaque centrale, de façon à ce qu'il y ait quatre entrefers. L'inducteur est parcouru par un courant continu de 1000 At.

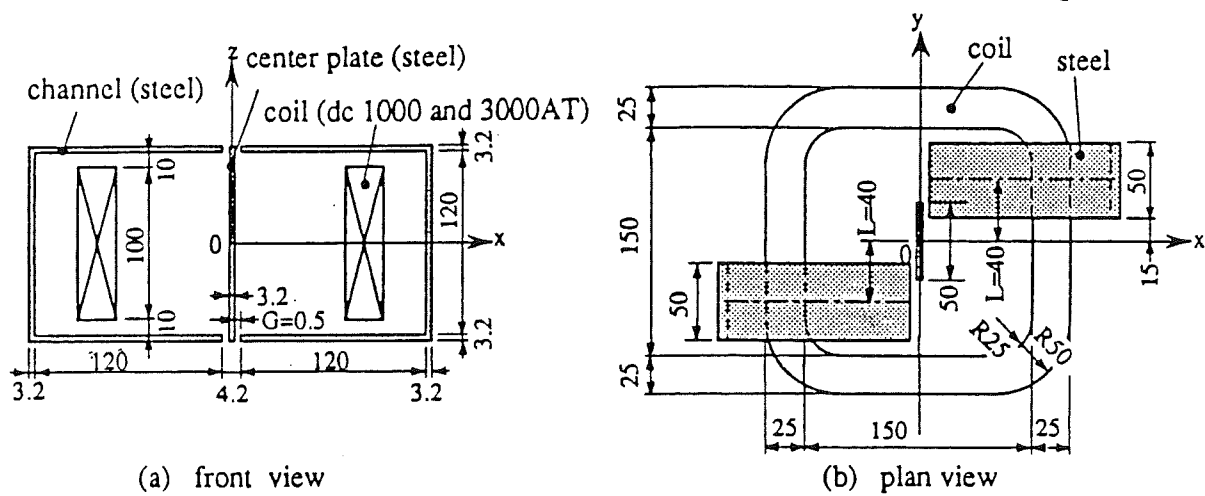


Fig. II.7 Géométrie du problème no. 13 du TEAM Workshop

Par rapport au problème test original, la géométrie de l'inducteur a été légèrement modifiée, dans le sens que les coins ne sont plus arrondis. Ceci permettra la définition aisée d'une densité de courant source à divergence nulle, ce qui va nous permettre d'utiliser la formulation basée sur les éléments mixtes (le problème de la divergence nulle va être traité en détail dans le paragraphe II.4).

L'acier est supposé non-linéaire, la courbe d'aimantation étant donnée dans la Fig. II.8 .

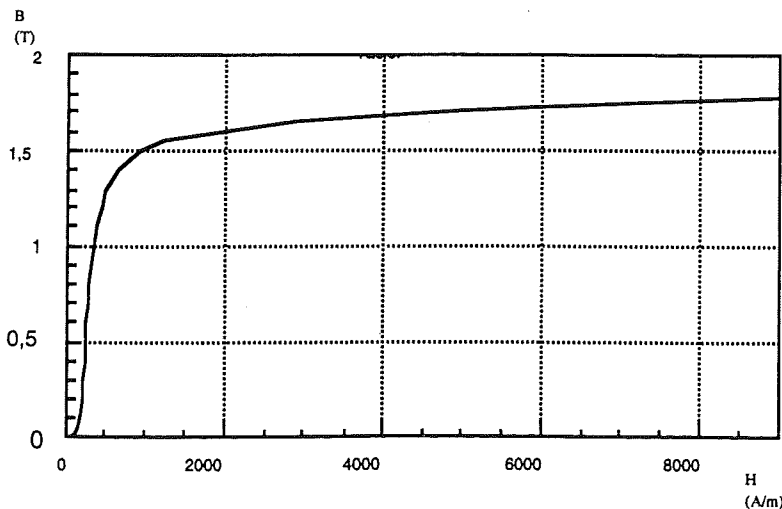


Fig. II.8 Courbe B(H) utilisée pour le problème no. 13 du TEAM Workshop

## Conditions aux limites et symétries

Tenant compte des symétries seul un quart de la géométrie a été modélisé. De plus, le domaine d'étude a été limité à une boîte parallélépipédique de dimensions suffisantes et dont les surfaces éloignées de la structure modélisent des surfaces à l'infini.

### *Méthodes de résolution*

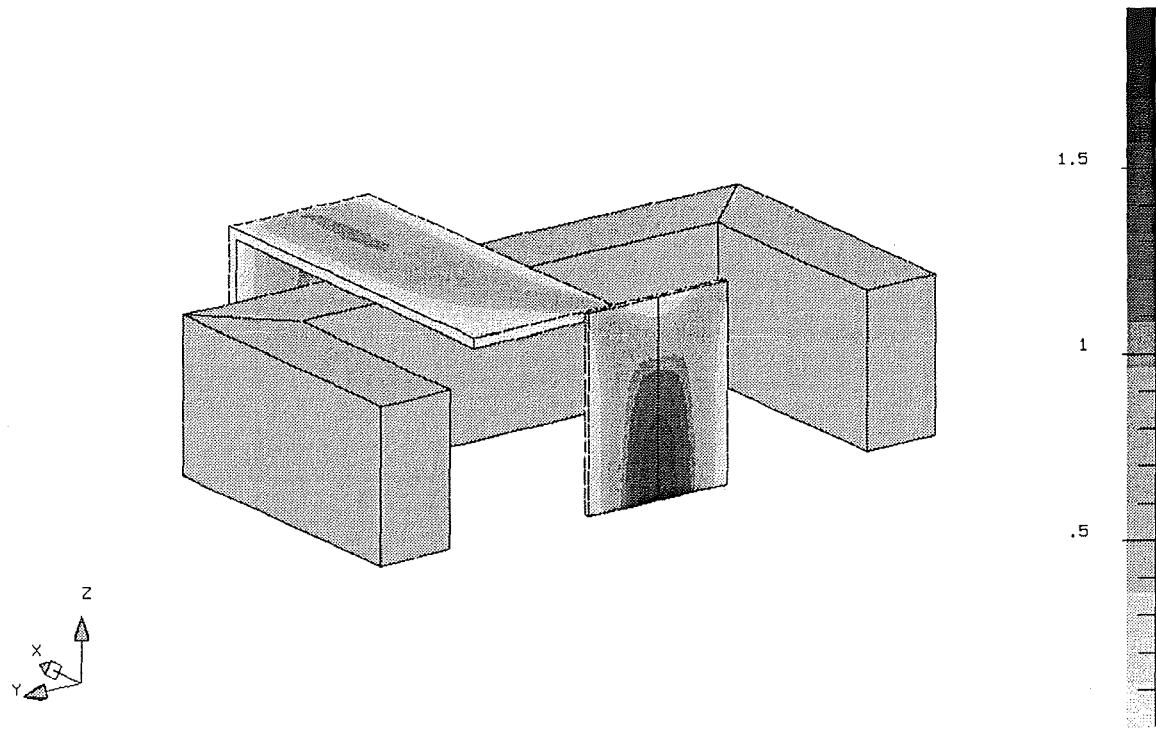
Deux séries d'essais numériques ont été effectuées. Dans la première série on a utilisé la formulation en éléments nodaux avec la jauge de Coulomb, la composante normale  $A_n$  étant dans un premier cas continue et ensuite libérée aux interfaces fer/air. Les essais avec la formulation non-jaugé que nous avons tentés n'ont pas donné de résultats, la convergence du solveur itératif ICCG étant impossible.

Pour la deuxième série d'essai, nous avons utilisé la formulation en éléments mixte  $H(\text{rot})$ , sans jauge, à l'ordre 1 incomplet et 2 incomplet. Cet essai nous a permis d'une part de valider les éléments mixtes utilisée et d'autre part de comparer les résultats avec ceux fournis par les formulations en éléments nodaux.

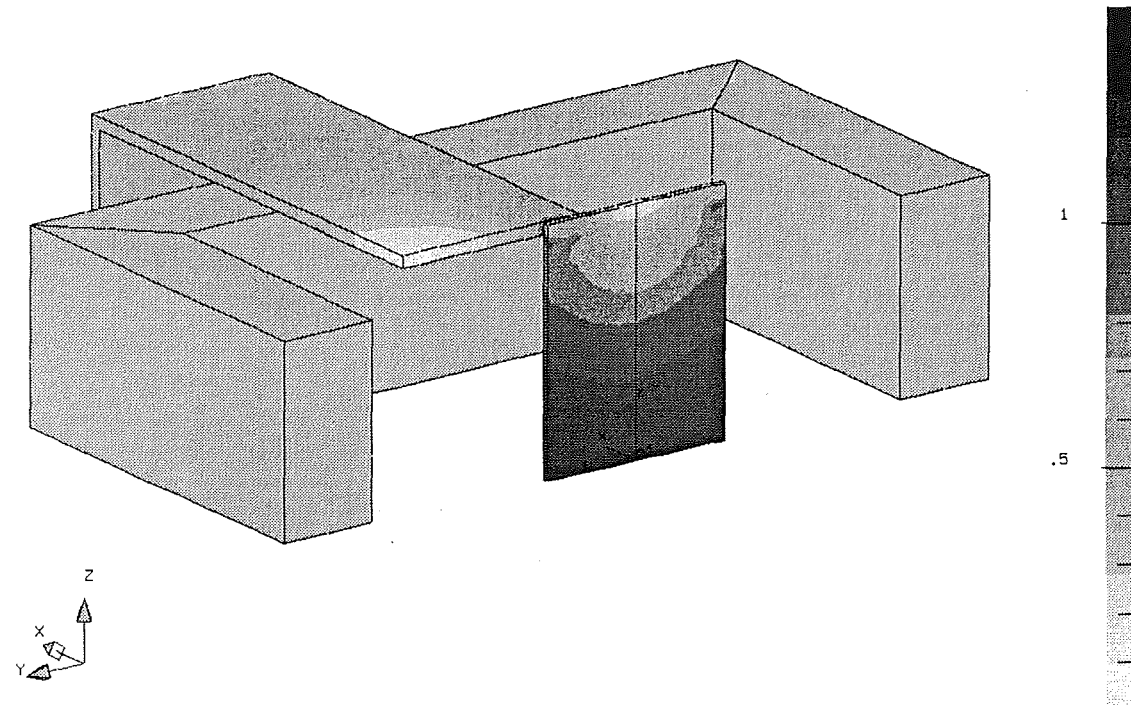
### *Résultats*

Dans la figure II.9 on montre la distribution de l'induction magnétique pour les formulations en éléments nodaux. L'induction moyenne dans les plaques magnétiques pour les points spécifiés est montrée sur la figure II.10.

Le tableau II.4 fournit les paramètres de résolution pour les méthodes utilisées.



a) Cas 1. Formulation jaugée. Composante  $A_n$  continue



b) Cas 2. Formulation jaugée. Composante  $A_n$  libérée

Fig. II.9 Distribution de l'induction magnétique dans les plaques d'acier



Tableau II.4 Caractéristiques de résolution du problème 13

Méthode	Formulation en éléments nodaux jaugée. $A_n$ continue	Formulation en éléments nodaux jaugée. $A_n$ discontinue	Formulation en éléments mixtes du 1-er ordre incomplet	Formulation en éléments mixtes du 2-ème ordre incomplet
nombre d'éléments	21895	21895	18697	18697
nombre d'inconnus	86598	89884	22439	121262
nombre de termes non-nuls	3838963	4083416	192280	2670645
mémoire nécessaire (MB)	25	25	8	35
nombre d'itérations Newton-Raphson	18	18	19	19
nombre total d'itérations ICCG	4320	4392	1406	8588
temps CPU (s)	24000	25500	7100	29000

Critère de convergence pour Newton-Raphson :  $10^{-4}$

Critère de convergence pour ICCG :  $10^{-4}$

Station utilisée: HP 700

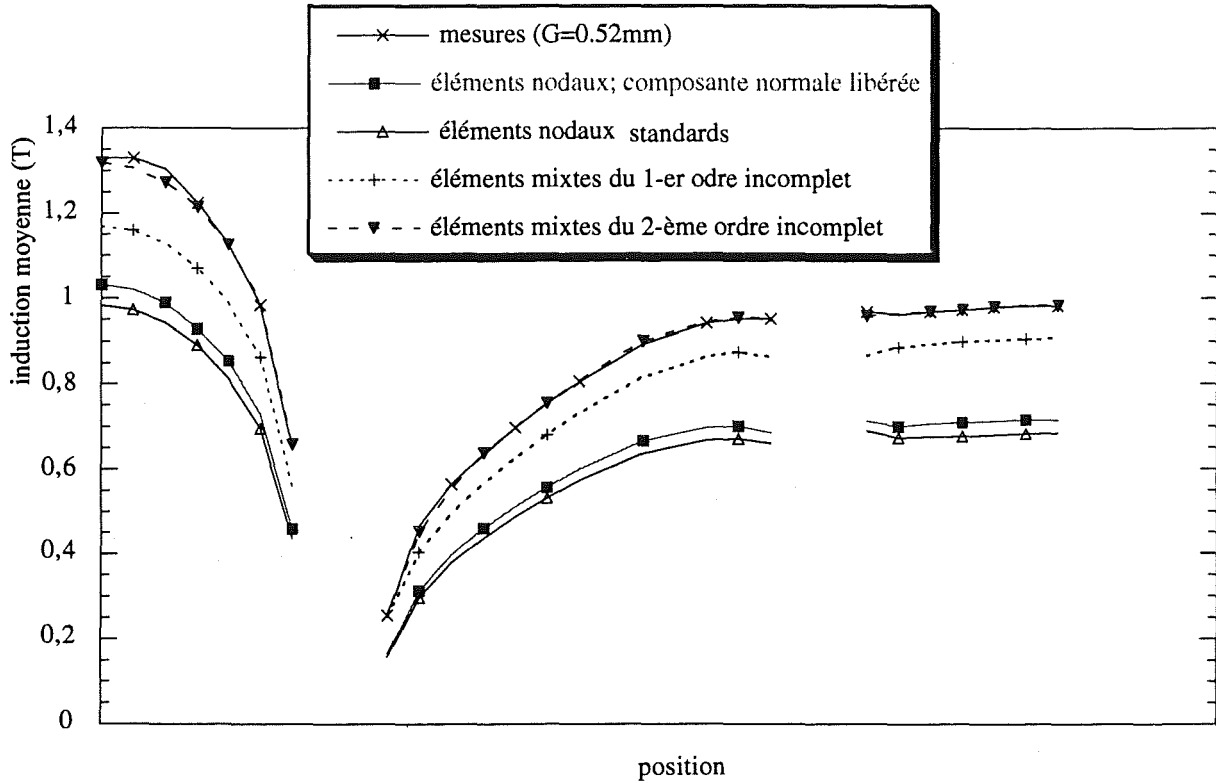


Fig. II.10 Induction moyenne pour les positions de mesure spécifiées

Les formulations basées sur les éléments nodaux, avec la composante normale  $A_n$  libérée ou continue, fournissent les mêmes résultats globaux, qui sont dans ce cas largement sous-estimé par rapport aux mesures, bien que la libération de la composante normale améliore nettement la répartition du flux.

La meilleure concordance avec les mesures a été trouvée dans le cas de l'utilisation des éléments mixtes  $H(\text{rot})$ .

*Conclusion*

Ce problème réel permet de valider le comportement numérique des formulations utilisées mis en évidence sur des cas test simples. D'une part, l'utilisation des éléments nodaux conduit à des valeurs de flux magnétique sous-estimées par rapport aux mesures et d'autre part, la libération de la composante normale de  $\vec{A}$  aux interfaces air-fer améliore la répartition du flux, sans corriger le problème précédent.

### 3.4. Conclusions des investigations numériques

A l'aide des exemples numériques nous avons identifié clairement les problèmes numériques liés à l'utilisation du potentiel vecteur avec les éléments nodaux, avec et sans jauge.

Les résultats peuvent être résumés ainsi:

- le potentiel vecteur  $A$ , jaugé ou non, est très sensible aux coins entre les matériaux de différentes perméabilités
- l'introduction de la jauge de Coulomb à travers le terme de pénalité a comme conséquence des pertes importantes de précisions dans le cas des circuits magnétiques fermés ou présentant un faible entrefer.
- la technique de la libération de la composante normale améliore la répartition physique du flux mais ne résout en rien le problème du circuit fermé.

### 4. Formulation en potentiel vecteur, basée sur l'interpolation mixte

L'utilisation du potentiel vecteur magnétique, basé sur les éléments mixtes, est une alternative puissante à la formulation basée sur les éléments nodaux classiques. L'emploi des éléments mixtes permet d'éviter les problèmes numériques spécifiques aux éléments classiques, qui ont été présentés dans le paragraphe précédant. En revanche, la question de la jauge en éléments d'arête reste ouverte.

Dans [Albanese-90] les auteurs proposent la construction d'un arbre sur les arêtes du maillage et l'élimination des degrés de liberté localisés sur les arêtes appartenant à l'arbre. Des expériences numériques ont montré que l'utilisation de l'arbre dégrade fortement le conditionnement de la matrice globale, et par conséquent la vitesse de convergence du solveur itératif se trouve considérablement ralentie. Pire encore, les résultats dépendent du choix de l'arbre [Golias-94].

Par ailleurs, des travaux récents [Fujiwara-95], [Ren-96-2], [Ren-96-3] ont montré que la jauge n'est pas indispensable, à condition d'assurer la divergence nulle de la densité de courant source. Les expériences numériques de Fujiwara analysent différentes possibilités pour la définition du courant source dans les coins des conducteurs (Fig. II.11).

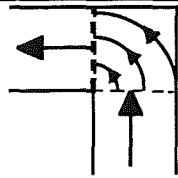
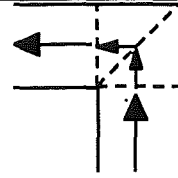
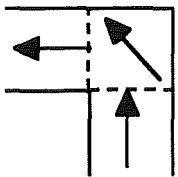
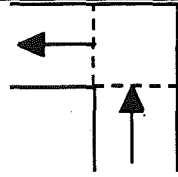
Cas	répartition du courant dans le coin	div J
1		$= 0$
2		$= 0$
3		$\neq 0$
4		$\neq 0$

Fig. II.11 Différentes possibilités pour la définition du courant source dans un coin

Il conclut que seuls les cas 1 et 2 assurent la convergence du solveur itératif pour la formulation non-jaugée en éléments mixtes.

Ren montre dans [Ren-96-3] que la condition de divergence nulle de la densité de courant source assure la compatibilité du système matriciel global dont la matrice est singulière et que, dans ce cas, un solveur itératif de type gradient conjugué impose une jauge.

Avant d'expliciter la démarche adoptée, nous allons rappeler la notion de compatibilité d'un système matriciel singulier.

#### 4.1. Compatibilité du système d'équations

Considérons un système linéaire, de type:

$$[A][x] = [b] \tag{II.15}$$

avec  $[A]$  matrice de dimension  $n \times n$  symétrique et singulière  
 $[b]$  vecteur de dimension  $n \times 1$   
 $[x]$  vecteur inconnu de dimension  $n \times 1$

On se pose la question de savoir quelles sont les conditions sur le second membre  $[b]$  pour que le système ait une solution dans le cas où la matrice  $[A]$  est singulière.

Conformément à un théorème classique de décomposition, la matrice  $[A]$  peut être décomposée dans un produit de trois matrices, à savoir:

$$[A] = [U] [\lambda] [U]^t \quad (\text{II.16})$$

où  $[\lambda]$  matrice diagonale contenant les valeurs propres de la matrice  $[A]$   
 $[U]$  matrice orthogonale construite avec les vecteurs propres, normalisés, de l'équation:

$$[A] [u_i] = \lambda_i [u_i]$$

et

$$[U] = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

Les vecteurs propres  $[u_1], [u_2], \dots, [u_n]$  sont orthogonaux entre eux et forment ce qu'on appelle les axes principaux de la matrice.

En remplaçant (II.16) dans (II.15), le système initial se transforme dans le système suivant:

$$[\lambda] [x'] = [b'] \quad (\text{II.17})$$

avec  $[x'] = [U]^t [x]$   
 $[b'] = [U]^t [b]$

Comme  $[\lambda]$  est une matrice diagonale, les équations peuvent être séparées et résolues immédiatement si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  sont différentes de zéro.

Si une valeur propre  $\lambda_i = 0$ , alors l'équation:

$$\lambda_i x_i' = b_i' \quad (\text{II.18})$$

n'a solution que si  $b_i' = 0$ . Maintenant,  $b_i'$  peut être interprété comme la  $i$ -ème composante du vecteur  $[b]$  dans le système de référence des axes principaux de la matrice:

$$b_i' = [u_i]^t [b] \quad (\text{II.19})$$

et la condition  $[u_i]^t [b] = 0$  a une signification géométrique: le vecteur  $[b]$  est orthogonal à l'axe principale  $i$ .

On rappelle que l'axe principal  $[u_i]$  a été définie par l'équation des vecteurs propres:

$$[A][u_i] = \lambda_i [u_i] \quad (\text{II.20})$$

et que sous l'hypothèse que  $\lambda_i = 0$  on obtient les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres nulles:

$$[A] [u_i] = 0 \quad (\text{II.21})$$

Si on note avec  $[U_p]$  la matrice de dimension  $n \times p$  des vecteurs propres correspondants au  $p$  valeurs propres non-nuls et avec  $[U_o]$  de dimensions  $n \times (n-p)$  la matrice de dimensions  $n \times (n-p)$  des vecteurs propres correspondants au  $(n-p)$  valeurs nulles, la condition de compatibilité nécessaire pour que la solution du système singulier (II.15) existe, s'écrit:

$$[U_o]^t [b] = 0 \quad (\text{II.22})$$

En d'autres termes, la condition de compatibilité demande que le vecteur  $[b]$  soit orthogonal à chaque solution indépendante de l'équation homogène  $[A][x] = [0]$ .

### Remarque

La condition de compatibilité (II.22) assure l'existence de la solution, mais celle-ci n'est pas unique, car l'équation:

$$0 x_i' = 0 \quad (\text{II.23})$$

a solution pour tout  $x_i'$  arbitraire.

## 4.2. Comment avoir un second membre compatible ?

Dans la littérature, il existe quelques méthodes qui rendent le second membre compatible. Dans la suite nous allons rappeler la méthode de l'équation normale et une méthode dite d'orthogonalisation.

### 4.2.1. Méthode de l'équation normale

Cette méthode est basée sur la multiplication des deux membres de l'équation (III.15) par  $[A]^t$ . On obtient:

$$[A]^t [A] [x] = [A]^t [b] \quad (\text{II.24})$$

Le nouveau second membre obtenu est toujours compatible, car:

$$[U_0]^t [A]^t [b] = 0 \quad (\text{II.25})$$

La démonstration est basée sur la décomposition du second membre conformément au théorème (II.16).

Cette méthode s'appelle la méthode de l'équation normale et elle présente l'inconvénient d'avoir des propriétés de convergence modestes (voir Annexe 1).

### 4.2.2. Méthode d'orthogonalisation

Afin d'assurer le respect de la condition de compatibilité (II.22), on écrit que:

$$[b'] = [b] - [U_0] [q] \quad (\text{II.26})$$

avec  $[q]$  un vecteur de dimension  $(n-p) \times 1$ , qui va être déterminé en utilisant la condition de compatibilité (II.22) :

$$[U_0]^t [b'] = [U_0]^t [b] - [U_0]^t [U_0] [q] = 0 \quad (\text{II.27})$$

on obtient un système de dimension  $(n-p) \times (n-p)$  pour déterminer  $[q]$ :

$$[U_0]^t [U_0] [q] = [U_0]^t [b] \quad (\text{II.28})$$

Après le calcul du vecteur  $[q]$ , on obtient le nouveau second membre  $[b']$  du système, à l'aide de l'équation (II.26), qui satisfait les conditions requises de compatibilité.

### *Remarque*

Même si  $[b]$  ne satisfait pas la condition de compatibilité, il existe encore une solution possible dans le sens de moindres carrés. La différence  $[A][x] - [b]$  peut ne pas être nulle, mais on peut minimiser la norme de l'erreur définie comme:

$$r^2 = \|[A][x] - [b]\|^2 \quad (\text{II.29})$$

### 4.2.3. Conclusion

Les méthodes que nous avons présentées s'appliquent sur le système global, après la phase d'assemblage et demandent soit des manipulations matricielles très lourdes (la méthode de l'équation normale) soit la connaissance des vecteurs propres correspondants aux valeurs propres nulles.

Une approche plus intéressante serait d'assurer la condition de compatibilité par la formulation même.

### **4.3. Formulations compatibles en potentiel vecteur magnétique**

Dans ce qui suit, nous allons traiter séparément le cas des inducteurs maillés et le cas des inducteurs non-maillés.



### 4.3.1. Formulations compatibles pour inducteurs maillés

La formulation en potentiel vecteur est compatible si la divergence du second membre de l'équation (I.20) est nulle en chaque point du domaine de calcul [Ren-96-3]. Physiquement cela est toujours vrai, car  $div\vec{J}=0$ , mais du fait qu'on ne peut pas toujours définir une densité de courant à  $div\vec{J}=0$ , notamment dans le cas des inducteurs cylindriques et présentant des coins (Fig. II.11), on peut se retrouver avec un système non-compatible. Comme les dispositifs électrotechniques réels qu'on souhaite modéliser présentent des inducteurs de formes complexes, nous serons obligés d'assurer toujours cette condition de compatibilité. Une méthode récemment proposée est basée sur l'introduction d'un potentiel vecteur électrique  $\vec{T}_0$ .

#### Introduction d'un potentiel vecteur électrique

Afin d'assurer fortement la condition  $div\vec{J}=0$ , on introduit un potentiel vecteur électrique tel que :

$$\vec{J} = rot\vec{T}_0 \quad (II.30)$$

Si on substitue (II.30) dans (I.20) on obtient la nouvelle équation différentielle à résoudre:

$$rot(\nabla rot\vec{A}) = rot\vec{T}_0 \quad (II.31)$$

Après la multiplication de (II.31) avec les fonctions test  $\vec{W}_i$  appartenant à l'espace  $H(rot)$ , on obtient la formulation faible suivante:

$$\int_{\Omega} (rot\vec{W}_i \nabla rot\vec{A}) d\Omega - \int_{\Gamma} \vec{W}_i (\vec{n} \times \nabla rot\vec{A}) d\Gamma = \int_{\Omega_{T_0}} (\vec{T}_0 rot\vec{W}_i) d\Omega - \int_{\Gamma_{T_0}} \vec{W}_i (\vec{n} \times \vec{T}_0) d\Gamma \quad (II.32)$$

où  $\Omega_{T_0}$  est le domaine de définition de  $\vec{T}_0$ .

Les intégrales surfaciques sont nulles si on considère, d'une part, des conditions de frontières naturelles et si, d'autre part, on impose la condition  $\vec{n} \times \vec{T}_0 = \vec{0}$  sur les limites du domaine de calcul de  $\vec{T}_0$ . Dans ce cas, le domaine de calcul de  $\vec{T}_0$  ne peut pas être limité au volume de la bobine mais il doit être obligatoirement élargi à un domaine connexe, comprenant au moins la bobine et le trou à l'intérieur.

Une possibilité pour limiter le domaine de calcul de  $\vec{T}_0$  à la bobine est de renoncer à imposer  $\vec{n} \times \vec{T}_0 = \vec{0}$  sur les bords. Les expériences numériques ont montré que, si on garde l'intégrale surfacique dans le deuxième membre de (II.32), le système n'est plus compatible et par conséquent, le solveur itératif ne converge plus.

Nous allons donc chercher dans un domaine connexe  $\Omega_{\tau_0}$  un potentiel vecteur électrique source, tel que :

$$\text{rot} \vec{T}_0 = \vec{J} \quad (\text{II.33})$$

$$\vec{n} \times \vec{T}_0 = \vec{0} \text{ sur la frontière } \Gamma_{\tau_0} \quad (\text{II.34})$$

Ces conditions assurent la compatibilité de la formulation (II.32) [Ren-96-2].

Dans le cas d'une bobine de forme simple, sous l'hypothèse que la densité de courant est constante dans la section transversale (bobine filaire), on peut calculer analytiquement l'expression de la fonction vectorielle  $\vec{T}_0$ . Quelques formules analytiques simples pour  $\vec{T}_0$  peuvent être trouvées dans [Biro-93], [Nakata-88].

Si la bobine a une forme complexe, on est obligé de prédéterminer numériquement  $\vec{T}_0$ .

Pour trouver  $\vec{T}_0$  deux méthodes numériques peuvent être utilisées: la résolution électrocinétique et la minimisation dans l'espace  $H(\text{rot})$ .

#### a) Résolution d'un problème électrocinétique [Biro-93]

Le problème analysé est divisé en deux parties, une partie conductrice, parcourue par des courants source de densité connue et une autre où il n'y a pas de courants.

Si on considère l'équation satisfaite par l'intensité du champ électrique:

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{II.35})$$

et si on prend en compte la relation (I.8), i.e. la loi d'ohm, on obtient l'équation différentielle à résoudre pour obtenir  $\vec{T}_0$  :

$$\text{rot rot } \vec{T}_0 = \vec{0} \text{ dans la région conductrice} \quad (\text{II.36})$$

avec une condition aux limites globale:

$$\int_{\Gamma} \vec{T}_0 d\vec{l} = I \quad (\text{II.37})$$

Dans l'air, on résout l'équation différentielle suivante:

$$\text{rot rot } \vec{T}_0 = \vec{0} \quad (\text{II.38})$$

Pour assurer la condition (II.34) le domaine de calcul de  $\vec{T}_0$  peut être soit étendu jusqu'aux plans de symétries, ou bien limité à une boîte autour de la bobine, sur laquelle on impose la condition (II.34). Cette dernière approche suppose la description géométrique de cette boîte, ce qui complique la géométrie du problème.

La principale difficulté est la prise en compte de la condition globale (II.37). Afin de réduire celle-ci à une condition de type locale nous allons introduire dans la région conductrice un conducteur imaginaire parcouru par le même courant total  $I$ . Sur la frontière de la région conductrice on va imposer:

$$\vec{n} \times \vec{T}_0 = \vec{n} \times \vec{H}_s \quad (\text{II.39})$$

avec  $\vec{H}_s$  le champ source créé par le conducteur imaginaire.

Une fois le potentiel électrique obtenu, le résultat de cette résolution peut être utilisé dans la résolution magnéto-statique, à condition que le maillage ne soit pas modifié.

### *Choix de la résistivité*

La résistivité électrique  $\rho$  peut être considérée comme une fonction scalaire ou un tenseur.

Une résistivité scalaire caractérise un matériau isotrope, avec des propriétés électriques identiques suivant chaque direction. Par conséquent, seules les inducteurs massifs peuvent être modélisés à l'aide d'une résistivité scalaire. La densité de courant obtenue n'est pas distribuée uniformément en chaque section transversale de l'inducteur; par exemple, pour un inducteur

circulaire la densité de courant va être plus importante à proximité de la surface intérieure qu'à l'extérieur.

Ce comportement ne peut pas être accepté pour un inducteur filaire, où la densité de courant reste uniformément distribuée dans chaque section transversale. Dans ce cas, les caractéristiques électriques de l'inducteur seront mieux prises en compte à l'aide d'une résistivité tensorielle, avec une résistivité principale suivant la direction des spires et sur les autres directions une résistivité plus importante, qui peut être interprétée comme la résistivité résiduelle de l'isolation entre les spires.

Cette méthode a été testée sur le problème no. 13 du TEAM Workshop et a donné de bons résultats [Golovanov-96]. Toutefois, vu les difficultés liées au choix de la résistivité électrique et à la définition du conducteur imaginaire, cette méthode a été abandonnée au profit de celle basée sur la minimisation dans l'espace  $H(\text{rot})$ .

#### b) Minimisation dans l'espace $H(\text{rot})$ [Ren-96-2]

La deuxième méthode utilisée consiste à minimiser la fonctionnelle suivante dans l'espace  $H(\text{rot})$  :

$$F(T_0) = \int_{\Omega_{r_0}} (\text{rot} \vec{T}_0 - \vec{J})^2 d\Omega \quad (\text{II.40})$$

$$\text{avec } \vec{n} \times \vec{T}_0 = \vec{0} \text{ sur la frontière } \Gamma_{T_0} \quad (\text{II.41})$$

Le potentiel vecteur  $\vec{T}_0$  solution de (II.40) n'est pas unique. La formulation (II.40) étant compatible, le solveur itératif converge toujours.

Cette méthode présente l'avantage qu'elle peut être généralisée au cas des inducteurs massifs, à condition de déterminer en préalable  $\vec{J}$  par un calcul électrocinétique.

#### 4.3.2. Validations numériques

Nous souhaitons analyser la méthode présentée sur le problème no. 13 TEAM Workshop. Cette fois-ci, la géométrie de l'inducteur n'est pas modifiée et, par conséquent, vu que les coins

de l'inducteur sont arrondis, la condition de divergence nulle de la densité de courant n'est pas assurée fortement.

Pour réduire les temps de calcul, dans un premier temps on utilise un maillage moyen, comportant 27549 tétraèdres mixtes du premier ordre incomplet.

### *Méthode de résolution utilisée*

Pour résoudre le système matriciel de type  $[A][x] = [b]$ , on utilise la méthode du gradient conjugué avec un préconditionnement basé sur la factorisation incomplète de Choleski. Le test d'arrêt porte sur le rapport de la norme euclidienne du résidu à l'itération  $k$  sur la norme du second membre:

$$\varepsilon_k = \frac{\|[b] - [A][x]\|_2}{\|[b]\|_2} \quad (\text{II.42})$$

### *Résultats numériques*

Dans un premier essai, la formulation (II.4), a été utilisée. La figure II.12 montre la caractéristique de convergence du solveur itératif. Après une phase initiale de convergence, le résidu ne peut pas descendre au-delà d'une certaine limite, qui dépend fortement de la finesse de la discretisation de la bobine.

Dans l'essai suivant, on a utilisé la formulation compatible (II.32) avec dans un premier temps le calcul analytique de  $\vec{T}_0$  et ensuite avec la prédétermination numérique de  $\vec{T}_0$ , basée sur la minimisation du système (II.40-II.41). Les figures II.13 et II.14 montrent respectivement la distribution analytique et numérique de  $\vec{T}_0$ . Les caractéristiques de convergence sont montrées sur la figure II.15.

On peut remarquer que dans les deux cas, le solveur converge rapidement vers une erreur résiduelle de l'ordre de  $10^{-12}$ , et que la matrice est légèrement mieux conditionnée dans le cas de la prédétermination analytique par rapport à la prédétermination numérique.

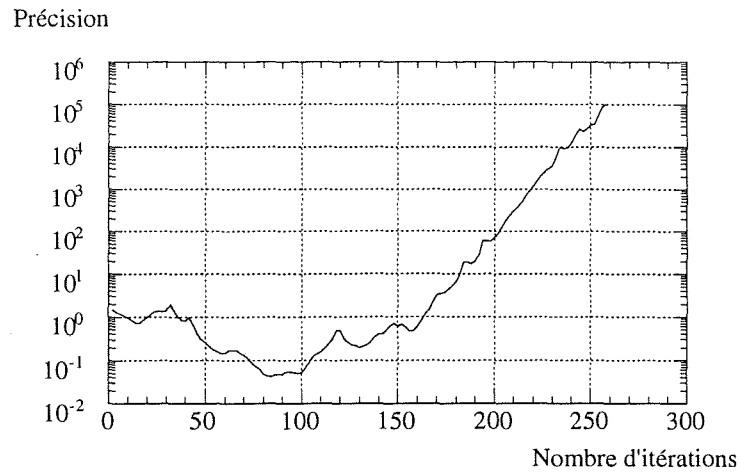


Fig. II.12 Caractéristique de convergence de la formulation non-compatible (II.4)

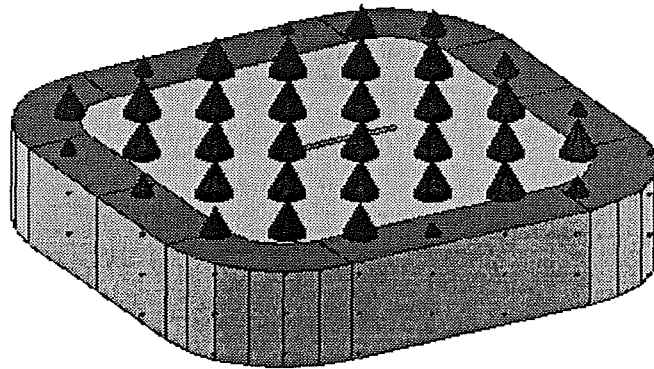


Fig. II.13 Distribution analytique de  $\vec{T}_0$

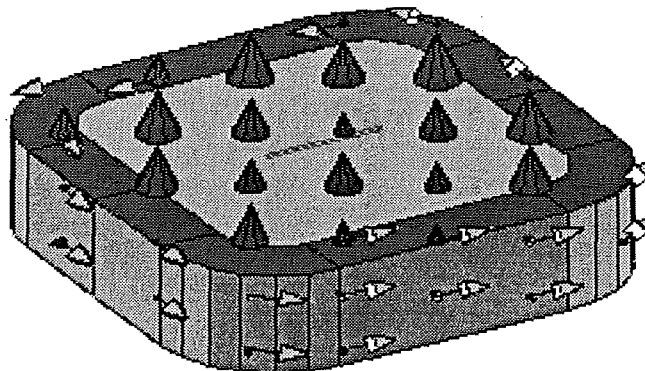


Fig. II.14 Distribution de  $\vec{T}_0$  et de  $\vec{J}$  calculés numériquement

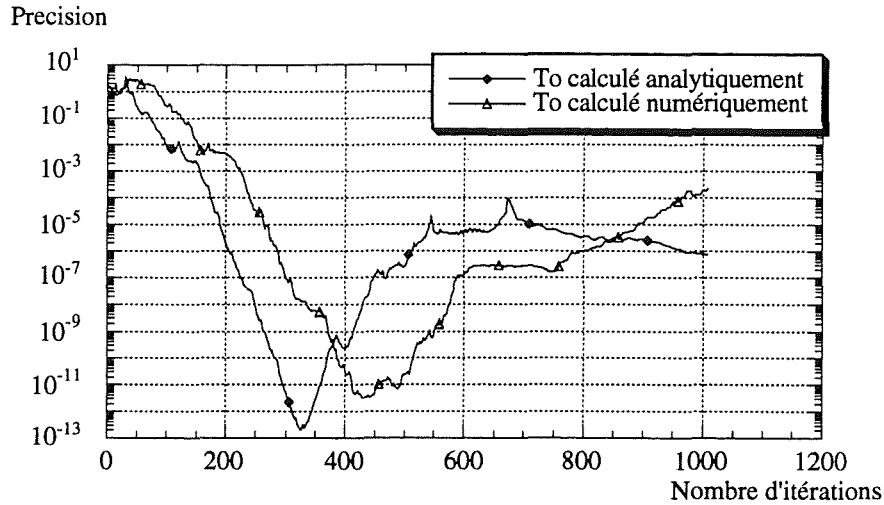


Fig. II.15 Caractéristique de convergence de la formulation compatible (II.32)

Si la condition  $\vec{n} \times \vec{T}_0 = \vec{0}$  sur  $\Gamma_{T_0}$  n'est pas imposée, après une phase initiale de convergence le solveur ICCG diverge sans atteindre le seuil précédent (Fig. II.16)

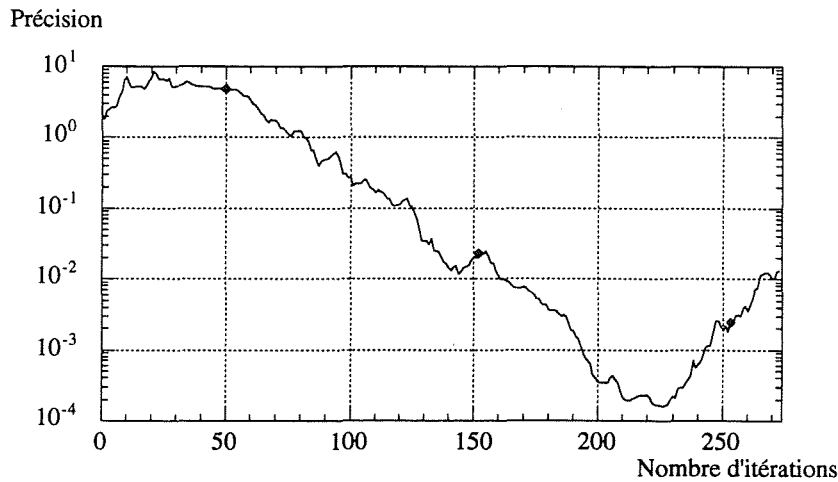


Fig. II.16 Caractéristique de convergence de la formulation (II.32),  $\vec{n} \times \vec{T}_0 \neq \vec{0}$  sur  $\Gamma_{T_0}$

### Validation par rapport aux mesures

L'intérêt est de valider par rapport aux mesures la résolution numérique en deux temps proposée et en même temps d'évaluer l'effort de calcul nécessaire sur un maillage plus fin. Le modèle a été remaillé, résultant 53027 tétraèdres mixtes du premier ordre incomplet. Dans le tableau II.5 on présente les caractéristiques de la résolution, montrant que la phase de

prédétermination numérique de  $\vec{T}_0$  demande un effort de calcul négligeable devant l'effort nécessaire pour résoudre la formulation (II.32). La figure II.17 montre les valeurs numériques de l'induction magnétique, pour les positions spécifiées, comparées avec les valeurs expérimentales. On note l'excellente corrélation entre les deux courbes, prouvant l'efficacité de la méthode.

Tableau II.5 Caractéristiques de résolution

Méthode	Prédétermination numérique de $\vec{T}_0$ par minimisation de (II.40) et (II.41)	Résolution magnétostatique de (II.32)
Nombre d'inconnues	14594	62181
Nombre de coefficients non-nuls	121019	539563
Nombre d'itérations Newton-Raphson*	1	7
Nombre moyen d'itération ICCG pour une itération Newton-Raphson*	37	127
Temps de résolution (sec)	65	3911

\* Le critère d'arrêt est :  $\epsilon_k < 10^{-4}$

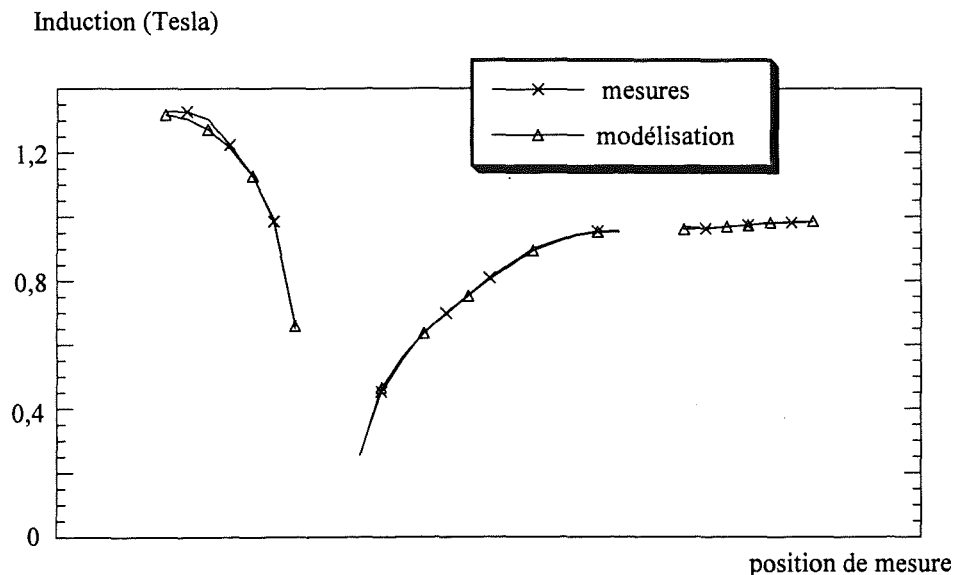


Fig. II.17 Induction magnétique calculée et mesurée



### 4.3.3 Formulations compatibles pour inducteurs non-maillés (filaires)

Souvent, les inducteurs des dispositifs électrotechniques peuvent avoir des formes très complexes, dont la description géométrique peut se révéler difficile. Un exemple suggestif est le bobinage d'une machine électrique, pour lequel une description poussée demanderait le calcul des intersections entre les différentes spires.

Les formulations qui seront présentées ci-dessous ne demandent pas le maillage des inducteurs, seul leur champ source doit être connu en chaque point de l'espace.

#### 4.3.3.1. Formulation en potentiel vecteur réduit

En appliquant la méthode de Galerkin à l'équation (I.30), qui constitue la formulation en potentiel vecteur réduit, on obtient la forme discrète de cette formulation (sous l'hypothèse des conditions homogènes sur les frontières):

$$\int_{\Omega} \text{rot} \bar{W}_i \nu \text{rot} \bar{A}_r d\Omega = \int_{\Omega} \text{rot} \bar{W}_i (\nu_0 - \nu) \bar{B}_s d\Omega \quad (\text{II.42})$$

La formulation (II.42) est compatible car le second membre de l'équation est à divergence nulle dans les parties magnétiques et nulle dans l'air.

On peut noter que l'induction  $\bar{B}_s$  peut être calculée en chaque point de l'espace par l'intégration Biot-Savart sur le domaine de l'inducteur et, pas conséquent, il n'est pas nécessaire de le mailler.

L'application de cette méthode sur le problème traité précédemment, (Problème no.13) permet d'obtenir la caractéristique de convergence suivante (pour le maillage moyen) (Fig. II.18).

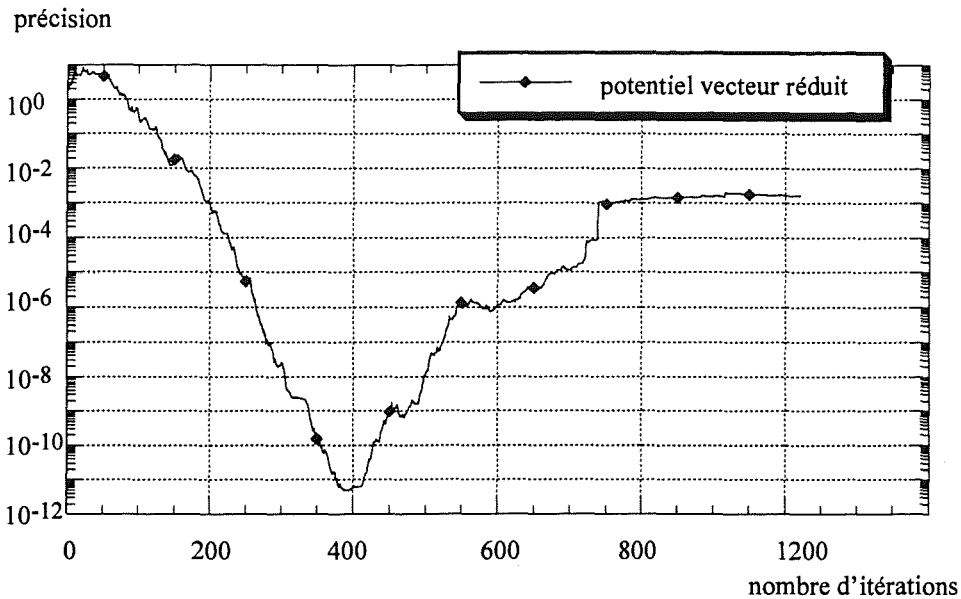


Fig. II.18 Caractéristiques de convergence de la formulation (II.42)

Au niveau de la vitesse de convergence, cette méthode est similaire aux autres méthodes compatibles. La phase de prédétermination de  $\vec{T}_0$  n'est plus nécessaire, mais en revanche, la détermination du champ Biot-Savart dans les parties ferromagnétiques du domaine de calcul peut se révéler coûteuse.

D'autre part, cette méthode présente quelques limitations en ce qui concerne l'éventuel couplage avec les équations du circuit électrique dans le cas où les inducteurs seraient alimentés en tension.

#### 4.3.3.2. Méthode basée sur l'introduction d'un potentiel vecteur électrique

Nous proposons ici une méthode originale, basée sur l'introduction d'un potentiel vecteur électrique  $\vec{T}_0$ . Le principal avantage de cette méthode est qu'elle permet le traitement unifié des inducteurs, qu'ils soient maillés ou non-maillés.

Pour un inducteur non-maillés, la densité du courant source n'est pas directement accessible et doit être déterminée à partir du champ Biot-Savart par la relation:

$$\vec{J} = \text{rot } \vec{H}_s \quad (\text{II.43})$$

Le calcul du rotationnel de  $\vec{H}_s$  peut se faire à l'aide des fonctions d'interpolation mixtes, connaissant la projection de  $\vec{H}_s$  sur l'espace discret  $H(\text{rot})$ .

Ainsi, le premier pas consiste en la minimisation de la fonctionnelle suivante:

$$\text{Pas 1:} \quad F(H') = \int_{\Omega_{H'}} (\vec{H}_s - \vec{H}')^2 d\Omega \quad (\text{II.44})$$

avec  $\vec{H}_s$  le champ source créé par l'inducteur  
 $\vec{H}'$  la projection de  $\vec{H}_s$  sur l'espace des éléments mixtes  
 $\Omega_{H'}$  le domaine de calcul de  $\vec{H}'$  qui doit être connexe et englober l'inducteur

Les pas suivants sont similaires à la méthode appliquée aux inducteurs maillés, à savoir:

**Pas 2:** Minimisation de la fonctionnelle :

$$F(T_0) = \int_{\Omega_{T_0}} (\text{rot } \vec{T}_0 - \text{rot } \vec{H}')^2 d\Omega$$

avec  $\vec{n} \times \vec{T}_0 = \vec{0}$  sur la frontière  $\Gamma_{T_0}$  (II.45)

**Pas 3:** Résolution de la formulation (II.32), avec  $\vec{T}_0$  obtenu au pas no° 2.

La méthode a été validée à l'aide du même problème no.13. L'inducteur, qui pour cet essai n'est pas maillé, est englobé dans une boîte, dans laquelle nous allons calculer la projection  $\vec{H}'$  (Fig. II.19). Le maillage utilisé, comportant 53421 tétraèdres du premier ordre incomplet, ne respecte pas la trace de l'inducteur.

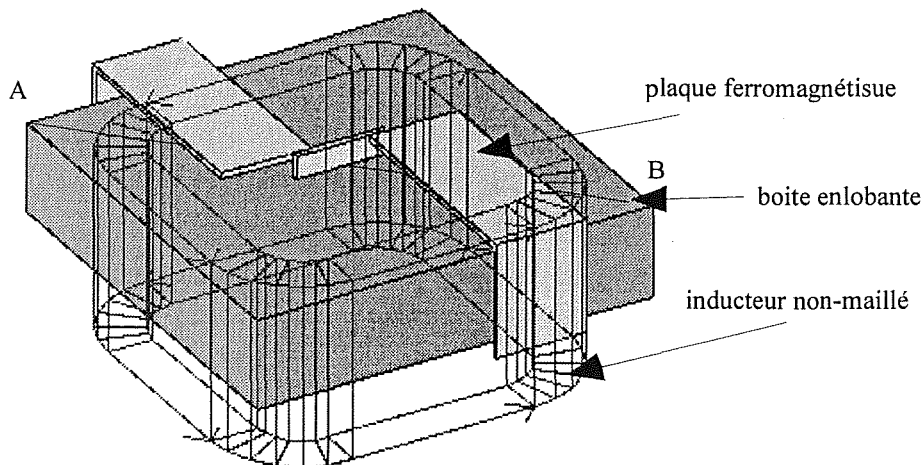


Fig. II.19 Modèle utilisé

La figure II.20 montre une comparaison sur la courbe AB définie dans la figure II.9 entre le champ source  $\vec{H}_s$  et le champ projeté sur l'espace des éléments mixtes  $\vec{H}'$ , calculé par la minimisation de (II.44).

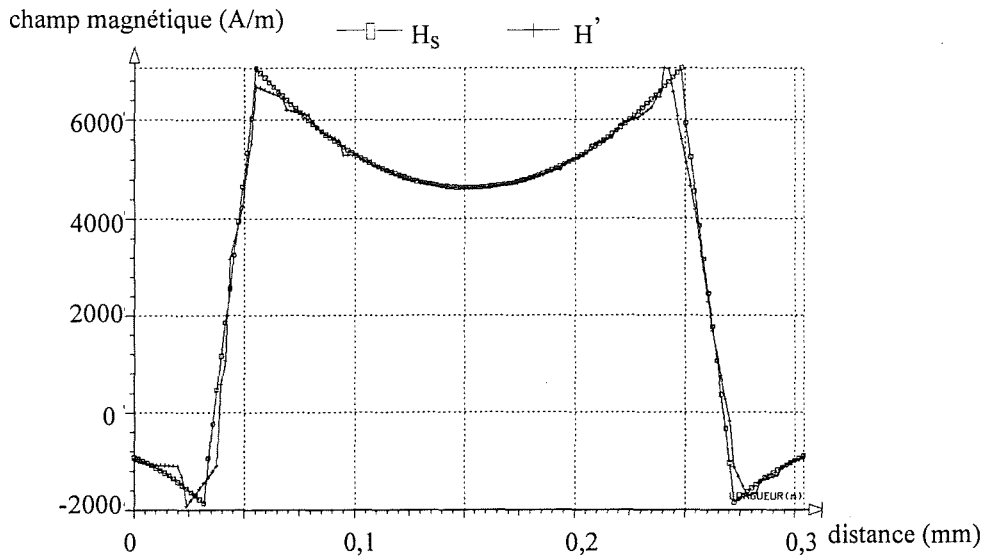


Fig. II.20 Comparaison sur la courbe AB entre le champ source  $\vec{H}_s$  et le champ projeté  $\vec{H}'$

Les écarts entre les deux courbes sont d'autant plus accentués que la variation du champ source est forte. Logiquement, les erreurs dans les régions à forte variation de champ devraient se diminuer par un maillage plus fin ou par l'utilisation d'éléments mixtes d'ordre deux pour l'interpolation de  $\vec{H}'$ .

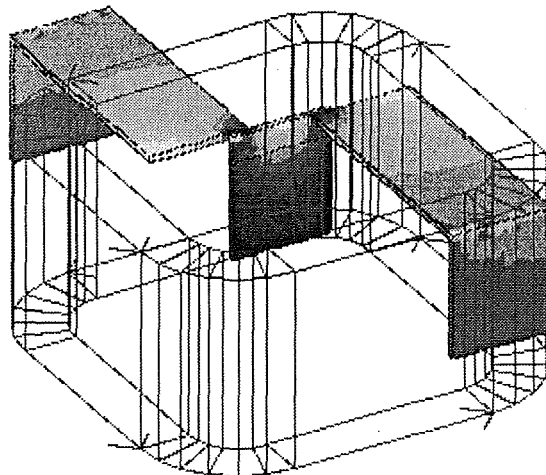


Fig.II.21 Répartition du module de l'induction dans les plaques magnétiques

Les résultats obtenus (Fig. II.21) sont satisfaisants et au niveau de la caractéristique de convergence de la résolution cette méthode semble aussi robuste que la méthode du potentiel vecteur réduit. En plus, cette méthode peut être adaptée au couplage avec les équations de circuit dans le cas où les inducteurs sont alimentés en tension.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé en détail les caractéristiques numériques de formulations magnétostatiques basées sur le potentiel vecteur, en vue de l'application sur des dispositifs électrotechniques réels.

Nous avons identifié clairement les problèmes liés à l'utilisation de l'interpolation nodale. Si les difficultés dues à la sensibilité du potentiel vecteur aux coins de perméabilité élevée peuvent être contournées par la libération de la composante normale du potentiel vecteur sur les interfaces air/fer, le problème des imprécisions dues à l'introduction de la jauge de Coulomb pour un circuit fermé nous paraît jusqu'à présent insurmontable.

Pour les formulations en éléments mixtes, le problème de la compatibilité du système matriciel est résolu par l'introduction d'un potentiel vecteur électrique  $\vec{T}_0$ , aussi bien pour les inducteurs maillés que pour les inducteurs non-maillés. Vu la qualité des résultats et la robustesse des caractéristiques de convergence de la résolution, nous pouvons conclure que les formulations en éléments mixtes sont plus adaptées aux problèmes magnétostatiques réels.

**Chapitre III**  
**Formulations magnétodynamiques**



## 1. Introduction

L'objet de ce chapitre est le calcul du champ magnétique et des courants induits dans le cas où les sources sont variables dans le temps.

Si les matériaux sont linéaires et les alimentations sinusoïdales, la méthode communément adoptée consiste à substituer le modèle transitoire par un modèle écrit dans le formalisme complexe.

Lorsque les alimentations sont quelconques et les matériaux sont non-linéaires, on adopte des méthodes d'intégration directe des équations différentielles.

La première partie du chapitre présente la forme discrète des formulations magnétodynamiques basées sur le potentiel vecteur magnétique, déjà présentées dans le Chapitre I. Nous mettons en évidence les particularités de chaque type d'interpolation (nodale ou mixte) au niveau de l'unicité du potentiel vecteur.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des méthodes spécifiques aux régimes que l'on veut modéliser: le régime permanent et le régime transitoire.

Enfin, la dernière partie présente d'abord une validation de la méthode transitoire en pas à pas dans le temps implantée et ensuite une étude sur un problème réel.



## 2. Forme discrète des formulations magnétodynamiques

Le problème magnétodynamique général est représenté par la figure (I.2). Il s'agit de calculer la répartition du champ magnétique dans des domaines comportant des matériaux de différentes perméabilités et la répartition des courants induits dans les régions conductrices, sous une alimentation variable dans le temps.

Bien que plusieurs formulations puissent être utilisées, nous allons nous restreindre à l'étude des formulations basées sur le potentiel vecteur magnétique, qui ont été déjà présentées dans le paragraphe I.3.2.

Pour interpoler le potentiel vecteur magnétique, on peut utiliser soit les fonctions de base nodales soit les fonctions de base mixtes. Vu que le traitement de l'unicité n'est pas le même, dans la suite nous allons présenter séparément les deux cas.

### 2.1. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur (éléments nodaux)

La formulation  $\bar{A}\bar{V}$ - $\bar{A}$  (éléments nodaux) est sans doute une des formulations magnétodynamiques la plus répandue. Elle est robuste et générale, sans contrainte de connexité; en revanche elle engendre quatre inconnues scalaires par noeud dans les régions conductrices et trois dans le reste du domaine.

L'unicité du potentiel vecteur magnétique peut être imposée à travers la jauge de Coulomb:

$$\text{div } \bar{A} = 0 \quad (\text{III.1})$$

La méthode la plus utilisée est l'incorporation de la jauge dans l'équation (I.42), à savoir la formulation magnétodynamique en potentiel vecteur, à l'aide du terme de pénalité suivant [Biro-89]:

$$-\text{grad}(\lambda \text{div } \bar{A}) \quad (\text{III.2})$$

où  $\lambda$  est un paramètre d'espace ayant la dimension d'une réductivité (cf. § II.3.1). Le meilleur comportement numérique est obtenu quand  $\lambda = \nu$ , la réductivité du milieu.

Dans le milieu conducteur, l'équation de la conservation de la densité de courant n'est plus implicite et il faudra l'imposer explicitement. L'équation (I.42) est remplacée par le système suivant:

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \bar{A}) - \text{grad}(\nu \text{div } \bar{A}) + \sigma \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \text{grad } V \right) = \bar{0} \quad (\text{III.3})$$

$$\text{div} \left[ \sigma \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \text{grad } V \right) \right] = 0 \quad (\text{III.4})$$

L'introduction du terme de pénalité n'est pas suffisante pour assurer l'unicité et certaines conditions aux limites doivent être rajoutées aux conditions (I.38-I.39) [Biro-89].

Par des raisons de symétrie on préfère remplacer le potentiel  $V$  par un potentiel scalaire électrique intégré  $v$ , tel que:

$$V = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

Soit  $\bar{W}_i$  fonctions de pondérations nodales vectorielles vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \bar{n} \times \bar{W}_i &= \bar{0} && \text{sur } \Gamma_E \\ \bar{n} \cdot \bar{W}_i &= 0 && \text{sur } \Gamma_H \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

et  $N_i$  les fonctions de pondérations nodales scalaires vérifiant la condition:

$$N_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{III.7})$$

Après l'application de la méthode de Galerkin et en tenant compte des conditions (III.6-III.7) la formulation discrète à considérer s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \left( \text{rot } \bar{W}_i \nu \text{rot } \bar{A} + \text{div } \bar{W}_i \nu \text{div } \bar{A} + \sigma \bar{W}_i \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \sigma \bar{W}_i \text{grad } \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega_i} \left( \sigma \text{grad } N_i \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } N_i \text{grad } \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

dans le domaine conducteur

et

$$\int_{\Omega_2} (\text{rot } \vec{W}_i \nu_2 \text{rot } \vec{A} + \text{div } \vec{W}_i \nu_2 \text{div } \vec{A}) d\Omega = \int_{\Omega_2} \vec{W}_i \vec{J}_s d\Omega \quad (\text{III.9})$$

dans le domaine non-conducteur

## 2.2. Formulation magnétodynamique en potentiel vecteur (éléments mixtes)

D'une façon analogue à la formulation magnétostatique, l'unicité du potentiel magnétique vecteur peut être imposée à l'aide de la jauge  $\vec{A} \cdot \vec{u} = 0$ . D'après des expériences numériques, la jauge n'est pas nécessaire et le système converge mieux sans imposer explicitement l'unicité. En revanche, il convient d'assurer la divergence nulle de la densité du courant source  $\vec{J}_s$ .

Soient  $\vec{W}_i$  les fonctions de base mixtes vérifiant la condition  $\vec{n} \times \vec{W}_i = \vec{0}$  sur  $\Gamma_E$  et  $N_i$  les fonctions de base nodales, vérifiant  $N_i = 0$  sur  $\Gamma_H$ . La forme discrète de la formulation s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\text{rot } \vec{W}_i \nu_1 \text{rot } \vec{A} + \sigma \vec{W}_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{W}_i \text{grad } \frac{\partial v}{\partial t}) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega_1} (\sigma \text{grad } N_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } N_i \text{grad } \frac{\partial v}{\partial t}) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

dans le domaine conducteur

et

$$\int_{\Omega_2} (\text{rot } \vec{W}_i \nu_2 \text{rot } \vec{A}) d\Omega = \int_{\Omega_2} \vec{W}_i \vec{J}_s d\Omega \quad (\text{III.11})$$

dans le domaine non-conducteur

## 3. Régime harmonique. Formalisme complexe

Lorsque les alimentations sont sinusoïdales et les matériaux sont linéaires, on adopte le formalisme complexe, qui consiste à considérer toute grandeur en fonction du temps comme étant la partie réelle d'une grandeur complexe.

Si la grandeur est de la forme:

$$A(x, t) = A_m(x) \cos[\omega t + \varphi(x)] \quad (\text{III.12})$$

avec  $A_m$  l'amplitude  
 $\varphi(x)$  la phase  
 $\omega$  la pulsation d'alimentation

on lui associe une grandeur complexe, appelée phaseur, d'expression:

$$\underline{A} = A_m(x) e^{j\varphi(x)} \quad (\text{III.13})$$

La grandeur physique peut être retrouvée en prenant la partie réelle de (III.13).

Le régime sinusoïdale établi peut être déterminé en résolvant le système complexe résultant de la substitution des grandeurs fonction de temps par les phaseurs associées. Conformément à la relation de définition, l'opérateur de dérivée temporelle  $\frac{\partial}{\partial t}$  se transforme en un facteur  $j\omega$ .

#### 4. Régime transitoire

Lorsque les alimentations sont quelconques ou les matériaux sont non-linéaires, le formalisme complexe n'est plus valable et d'autres méthodes doivent être utilisées.

En général, l'application de la méthode des éléments finis à une formulation magnétodynamique en régime transitoire conduit à un système différentiel du premier ordre, du type suivant:

$$[M][U] + [T] \frac{\partial [U]}{\partial t} = [S] \quad (\text{III.14})$$

A ce système on associe une condition initiale:

$$[U]_{t=0} = [U]_0 \quad (\text{III.15})$$

#### 4.1. Méthodes d'intégration directe des systèmes temporels du premier ordre

Parmi les méthodes classiques d'intégration temporelle pour les systèmes du premier ordre on peut énumérer la méthode d'Euler ou la méthode des différences finies dans le temps, les méthodes de prédiction correction, les méthodes de Runge-Kutta. Dans la suite nous n'envisagerons que le premier type de méthode, qui répond de manière tout à fait satisfaisante aux problèmes rencontrés dans la pratique.

##### 4.1.1. Méthode d'Euler

Ces méthodes sont basées sur un schéma itératif qui permet de déterminer la solution à l'étape  $n$ , c'est-à-dire à l'instant  $t_n$ , à partir de la solution connue à l'étape précédente  $n-1$ . Si on considère que l'inconnue  $[U]$  varie linéairement dans l'intervalle  $(t_n, t_{n+1})$ , alors on a:

$$[U]_{t_n+\theta\Delta t_n} = (1-\theta)[U]_{t_n} + \theta[U]_{t_{n+1}} \quad (\text{III.16})$$

où  $\Delta t_n$ , appelé pas de temps à l'étape  $n$ , est égal à:

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \quad (\text{III.17})$$

et  $\theta$  est un paramètre compris entre 0 et 1. Les valeurs de  $\theta$  qui définissent les schémas les plus utilisés sont données dans le tableau suivant:

Valeur de $\theta$	Nom du schéma
1	implicite
0.878	Liniger
2/3	Galerkine
1/2	Crank-Nicolson
0	explicite

La dérivée temporelle dans l'intervalle  $[t_n, t_{n+\Delta t}]$  de la variable  $[U]$  est discrétisée de la façon suivante:

$$\frac{\partial[U]}{\partial t} = \frac{[U]_{t_{n+1}} - [U]_{t_n}}{\Delta t_n} \quad (\text{III.18})$$

La solution  $[U]$  à l'instant  $t_{n+1}$  est obtenue après la résolution du système matriciel suivant:

$$\left\{ \theta[M]_{t_{n+1}} + \frac{[T]}{\Delta t} \right\} [U]_{t_{n+1}} = \theta[S]_{t_{n+1}} + (1-\theta)[S]_{t_n} + \left\{ (\theta-1)[M]_{t_n} + \frac{[T]}{\Delta t} \right\} [U]_{t_n} \quad (\text{III.19})$$

On reconnaît alors un système algébrique de la forme:

$$[K]_{t_{n+1}} [U]_{t_{n+1}} = [G]_{t_n} \quad (\text{III.20})$$

C'est ce système qu'il faut résoudre à chaque pas. Dans le cas général il est non-linéaire, puisque le terme général  $K_{ij}$  de la matrice  $[K]$  dépend du vecteur solution.

### Quelques propriétés de la méthode d'Euler

L'analyse des propriétés de la méthode passe par une décomposition modale du système initial [Hugues-94], [Stoer-94].

Considérons le problème de valeurs propres de dimensions  $n_{eq} \times n_{eq}$  suivant:

$$([M] - \lambda_l [T]) [\psi_l] = 0 \quad (\text{III.21})$$

où  $\psi_l$ , avec  $l=1, \dots, n_{eq}$ , sont les vecteurs propres et  $\lambda_l$  avec  $l=1, \dots, n_{eq}$ , sont les valeurs propres.

La solution  $[U]$  du système (III.14) peut être décomposée dans la base orthonormée formée par les vecteurs propres  $\psi_l$  associés au problème (III.21):

$$[U] = \sum_{l=1}^{n_{eq}} u_l [\psi_l] \quad (\text{III.22})$$

avec  $u_l$  les projections du vecteur solution dans la base  $\psi_l$ .

Dans la même base, la dérivé de la solution s'écrit:

$$\frac{\partial [U]}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n_{eq}} \frac{\partial u_l}{\partial t} [\psi_l] \quad (\text{III.23})$$

Pour chaque mode  $l$ , le système modal équivalent s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_l}{\partial t} + \lambda_l u_l = S_l \\ u_l(0) = u_0 \end{array} \right\} \quad (\text{III.24})$$

avec  $S_l = [\Psi_l]^T [S]$  et  
 $u_0 = [\Psi_l]^T [T][U]_{t=0}$

### Stabilité

Pour caractériser la stabilité de la méthode, on analyse le comportement de l'équation homogène modale (III.24):

La solution à l'instant  $t_{n+1}$  s'écrit, pour une condition initiale  $u_n$  :

$$u_{n+1} = u_n \exp(-\lambda_l \Delta t) \quad (\text{III.25})$$

Il résulte que:

$$|u_{n+1}| < |u_n| \text{ si } \lambda_l > 0 \quad (\text{III.26})$$

et

$$u_{n+1} = u_n \text{ si } \lambda_l = 0 \quad (\text{III.27})$$

Maintenant, si on applique la méthode d'Euler à l'équation homogène modale, on obtient:

$$\left(\theta \lambda_l + \frac{1}{\Delta t}\right) u_{n+1} = \left[(\theta - 1) \lambda_l + \frac{1}{\Delta t}\right] u_n \quad (\text{III.28})$$

Sachant que  $(1 + \theta \Delta t \lambda_l) > 0$  et si on note:

$$A = \frac{1 - (1 - \theta) \Delta t \lambda_l}{1 + \theta \Delta t \lambda_l} \quad (\text{III.29})$$

la condition (III.25) est équivalente à dire que le facteur d'amplification  $A$  satisfait la relation:

$$|A| < 1 \text{ pour } \lambda_l > 0 \quad (\text{III.30})$$

ou encore:

$$-1 < \frac{[1 - (1 - \theta)\Delta t \lambda_l]}{(1 + \theta\Delta t \lambda_l)} < 1 \quad (\text{III.31})$$

L'inégalité à droite est toujours satisfaite. En revanche, pour satisfaire l'inégalité à gauche, la condition suivante doit être respectée:

$$\lambda_l \Delta t < \frac{2}{1 - 2\theta} \quad \text{si } \theta < \frac{1}{2} \quad (\text{III.32})$$

Si  $\theta \geq \frac{1}{2}$  l'inégalité (III.31) est toujours vraie.

Pour une valeur propre  $\lambda_l$  quelconque, la relation (III.32) impose une limite supérieure sur  $\Delta t$ . Plus  $\lambda_l$  est grand, plus  $\Delta t$  doit être petit.

#### *Remarque 1*

Un algorithme qui est toujours stable, indépendamment du pas de temps, est dit inconditionnellement stable.

#### *Remarque 2*

La condition de stabilité (III.32) doit être respectée pour chaque valeur propre du système. C'est le plus grand  $\lambda_l$  qui impose le pas de temps. Dans certains cas particuliers (résolution de l'équation de Poisson dans un domaine bidimensionnel) on arrive à connaître a priori la plus grande valeur propre du système. Dans le cas général, la condition (III.32) est une contrainte sévère et pour cette raison on préfère les algorithmes inconditionnellement stables.

### Convergence

La convergence de la méthode peut être analysée à l'aide de l'erreur locale au pas  $t_n$ , définie par:

$$e(t_n) = \frac{u_{t_{n+1}} - u(t_{n+1})}{\Delta t} \quad (\text{III.33})$$



avec  $u_{t_{n+1}}$  la solution numérique et  $u(t_{n+1})$  la solution exacte.

Une méthode d'intégration est dite d'ordre  $p$  si on a:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e(t_n) = C\Delta t^p \quad (\text{III.34})$$

avec  $C$  une constante d'intégration.

On utilise également la notation suivante:

$$e(t_n) = O(\Delta t^p) \quad (\text{III.35})$$

Pour la méthodes d'Euler, on peut montrer que:

$$e(t_n) = (1 - 2\theta)O(\Delta t^1) + O(\Delta t^2) \quad (\text{III.36})$$

### Conclusion

Le schéma de Crank-Nicolson ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) a l'avantage de avoir une convergence quadratique, tandis que les autres ont une convergence linéaire. D'autre part, cette méthode présente des risques d'oscillations, toujours de part et d'autre de la solution exacte. La méthode implicite, elle donne des résultats toujours lisses, mais elle peut être mal adaptée aux problèmes raides, dont la solution varie très rapidement dans le temps.

On peut alors faire un compromis, en choisissant soit la méthode de Galerkin, soit la méthode de Liniger, qui réduisent le risque d'oscillations et s'approchent plus de la convergence quadratique.

#### 4.1.2. Mise en oeuvre de la méthode

Nous allons détailler l'application de la méthode d'Euler dans le cas de la formulation magnétodynamique en potentiel vecteur, basée sur les éléments mixtes.

Afin de pouvoir traiter les éventuels non-linéarités des matériaux par la méthode de Newton-Raphson (voir Annexe 2), on réécrit l'équation (III.10) de telle manière à ce que les résidus soient mises en évidence:

$$\begin{aligned}
 R_i &= \int_{\Omega_i} \text{rot } \bar{W}_i \cdot \bar{H} d\Omega - \int_{\Omega_i} \text{rot } \bar{W}_i \cdot \bar{J} d\Omega \\
 r_i &= \int_{\Omega_i} \text{grad } N_i \left( \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } \frac{\partial v}{\partial t} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{III.37}$$

Connaissant la solution  $[A]_t$  et  $[v]_t$ , on souhaite calculer la solution au pas suivant  $[A]_{t+\Delta t}$  et  $[v]_{t+\Delta t}$ . Pour cela, le système suivant doit être résolu, à chaque itération de la méthode de Newton-Raphson:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial [R]_{t+\theta\Delta t}}{\partial [A]_{t+\Delta t}} & \frac{\partial [R]_{t+\theta\Delta t}}{\partial [v]_{t+\Delta t}} \\ \frac{\partial [r]_{t+\theta\Delta t}}{\partial [A]_{t+\Delta t}} & \frac{\partial [r]_{t+\theta\Delta t}}{\partial [v]_{t+\Delta t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta [A]_{t+\Delta t} \\ \Delta [v]_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[R]_{t+\theta\Delta t} \\ -[r]_{t+\theta\Delta t} \end{bmatrix} \tag{III.38}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned}
 [A] &= [A]_{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)[A]_t + \theta[A]_{t+\Delta t} \\
 [v] &= [v]_{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)[v]_t + \theta[v]_{t+\Delta t} \\
 \frac{\partial [A]}{\partial t} &= \frac{[A]_{t+\Delta t} - [A]_t}{\Delta t} \\
 \frac{\partial [v]}{\partial t} &= \frac{[v]_{t+\Delta t} - [v]_t}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

les termes matriciels du jacobien sont donnés par:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{i,t+\theta\Delta t}}{\partial A_{j,t+\Delta t}} &= \theta \left( \int_{\Omega_i} \text{rot } \bar{W}_i \cdot v_j \cdot \text{rot } \bar{W}_j d\Omega \right) + \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_i} \bar{W}_i \cdot \sigma \cdot \bar{W}_j d\Omega \right) \\
 \frac{\partial R_{i,t+\theta\Delta t}}{\partial v_{j,t+\Delta t}} &= \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_i} \bar{W}_i \cdot \sigma \cdot \text{grad } N_j d\Omega \right) \\
 \frac{\partial r_{i,t+\theta\Delta t}}{\partial A_{j,t+\Delta t}} &= \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_i} \text{grad } N_i \cdot \sigma \cdot \bar{W}_j d\Omega \right) \\
 \frac{\partial r_{i,t+\theta\Delta t}}{\partial v_{j,t+\Delta t}} &= \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_i} \text{grad } N_i \cdot \sigma \cdot \text{grad } N_j d\Omega \right)
 \end{aligned}$$

## 5. Régime multi-harmonique établi

Dans tous les systèmes non-linéaires soumis à des excitations périodiques, la solution comporte une plage transitoire, suivie par le régime périodique lui-même affecté par la non-linéarité des milieux. Souvent, c'est ce régime établi et multi-harmonique qui constitue l'objectif de la modélisation. En général, la période transitoire précédant cet état stationnaire est longue, et donc nécessite un nombre de pas de temps élevés.

Une première possibilité d'accéder directement au régime établi est l'utilisation des méthodes magnétodynamiques complexes non-linéaires. Ce type de méthodes est basé sur la détermination sur des considérations énergétiques d'une courbe  $B(H)$  équivalente. Les grandeurs instantanées n'ont plus de signification physique, seules les grandeurs globales sont exploitables. Une analyse complète de ces méthodes peut être trouvée dans [Guerin-94].

Dans la littérature on peut trouver d'autres méthodes permettent d'obtenir la forme réelle des grandeurs physiques, sans passer par le régime transitoire. Nous avons choisi de ne présenter que deux: la méthode basée sur la discretisation sur une demi période et la méthode basée sur la décomposition en séries de Fourier.

### 5.1. Méthode basée sur la discretisation sur une demi période

Son principe consiste à introduire dans la formulation la périodicité dans le temps, de façon à obtenir en résolvant un seul système matriciel, l'évolution complète du système pendant une demi période [Nakata-89]. Si  $T$  est la période des phénomènes étudiées,  $[U]$  le vecteur inconnu choisi, et  $\Delta t$  le pas de temps, on exprime que :

$$\begin{aligned} [U]_{t+\frac{T}{2}} &= -[U]_t \\ [S]_{t+\frac{T}{2}} &= -[S]_t \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

La demi période est discretisée en  $n$  pas de temps correspondant à  $n$  inconnues. Les vecteurs inconnus  $[U]_t$ ,  $[U]_{t+\Delta t}$ , ...,  $[U]_{t+\frac{T}{2}}$  sont traités simultanément, la dérivée par rapport au temps étant approchée par la différence :

$$\frac{\partial [U]_t}{\partial t} = \frac{[U]_{t+\Delta t} - [U]_t}{\Delta t} \quad (\text{III.40})$$

D'après les auteurs, les temps de résolution sont réduits par rapport à une méthode conventionnelle en pas à pas dans le temps grâce à une méthode itérative de résolution du système matriciel.

### 5.2. Méthode basée sur la décomposition en séries de Fourier

L'idée développée par les auteurs [Albanese-92] est de décomposer le vecteur inconnu en séries de Fourier sous la forme :

$$[\tilde{U}(t)] = [C_0] + \sum_{i=1}^m [C_{2i-1}] \cos(i\omega t) + [C_{2i}] \sin(i\omega t) \quad (\text{III.41})$$

où  $[C_i]$  avec  $i = 1, \dots, 2m$  sont les vecteurs inconnus et  $m$  le nombre d'harmoniques à considérer. Les coefficients  $[C_i]$  sont déterminés en résolvant le système suivant:

$$[M][\tilde{U}]_{i_i} + [T] \frac{\partial [\tilde{U}]}{\partial t}_{i_i} = [S]_{i_i} \quad i = 1, \dots, 2m \quad (\text{III.42})$$

La matrice du système reste creuse, mais des techniques spéciales de factorisation doivent être utilisées pour assurer la convergence du solveur itératif. Le prix à payer est un accroissement considérable de la taille du système matriciel à résoudre, ce qui peut rendre délicate l'application de cette méthode à des problèmes 3D.

### 5.3. Conclusion

Les méthodes par décomposition harmonique et celles par discretisation sur une demi période sont coûteuses en place mémoire. Ainsi, il est difficilement envisageable de traiter de gros cas en 3D, du moins sur le matériel existant. Nous allons nous contenter de la méthode d'intégration directe en pas-à-pas développée dans le paragraphe III.4.1, qui est actuellement tout à fait satisfaisante pour les applications envisagées.

## 6. Validations numériques

Afin de valider la méthode d'Euler qui a été implantée dans notre logiciel, nous nous sommes proposé, dans un premier temps, de traiter un problème simple. Après la validation des résultats, nous allons traiter un problème réel 3D, pour lequel on dispose de résultats de mesure. Ce problème va être résolu en régime transitoire et en régime harmonique, afin de comparer les formulations magnétodynamiques basées sur les éléments nodaux et sur les éléments mixtes.

### 6.1. Cylindre ferromagnétique

La méthode en pas-à-pas dans le temps a été testée sur un cas axisymétrique composé d'un cylindre ferromagnétique entouré d'un inducteur, parcouru par un courant sinusoïdal. Les résultats ont pu être comparés à ceux obtenus avec le logiciel FLUX2D<sup>®</sup>, soit en pas-à-pas dans le temps, soit en magnétodynamique harmonique. Ce cas test nous a permis de valider les algorithmes implantés et aussi de déterminer le comportement des différents  $\theta$ -schémas utilisés.

#### Description du problème test

La géométrie du problème test est donnée dans la figure III.1.

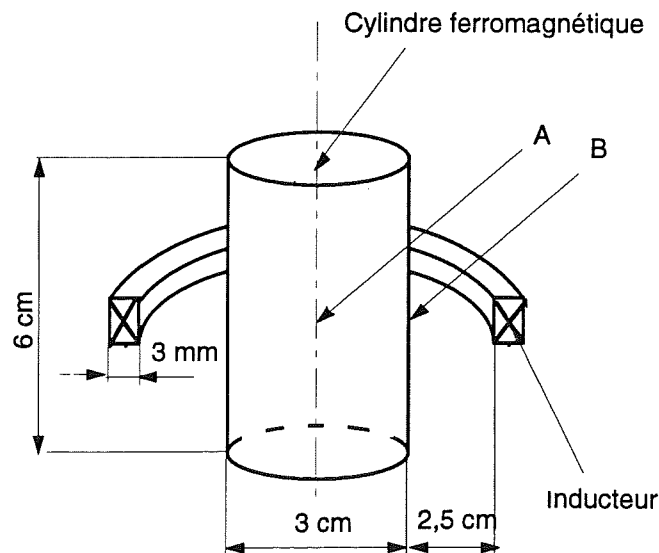


Fig. III.1 Cylindre ferromagnétique

Tout d'abord nous allons considérer que l'acier est linéaire et, cela, afin de comparer les résultats en pas-à-pas dans le temps avec ceux obtenus en utilisant la formulation magnétodynamique harmonique. Ensuite, le matériau va être supposé non-linéaire et les résultats vont être comparés avec ceux donnés par FLUX2D®.

6.1.1. Cylindre conducteur en matériau linéaire

Les valeurs de la conductivité et de la fréquence ont été choisies telles que l'épaisseur de peau soit un tiers du rayon du cylindre. Les caractéristiques sont les suivantes:

$$f = 2 \text{ Hz}$$

$$\sigma = 10^7 \text{ S/m}$$

$$\mu_r = 1000 \text{ H/m}$$

Les calculs ont été effectués pour un courant de 2000A dans l'inducteur. Le tableau III.1 résume les pertes Joule dans le cylindre pour les différentes résolutions effectuées.

Tableau III.1 Pertes Joule dans le cylindre (W)

	Flux2d ( $\theta = 1$ )	$\theta = 1$	$\theta = 0,878$	$\theta = 0,67$	$\theta = 0,5$
20 pas / période	0,0212	0,0212	0,0217	0,0220	0,0226
40 pas / période	0,0220	0,0220	0,0225	0,0225	0,0228
50 pas / période	0,0223	0,0223	0,0227	0,0227	0,0229

Sachant que les pertes calculées en magnétodynamique harmonique sont égales à 0,0229 W, la figure III.2 montre les erreurs relatives sur les pertes calculées en pas-à-pas par rapport aux premières.

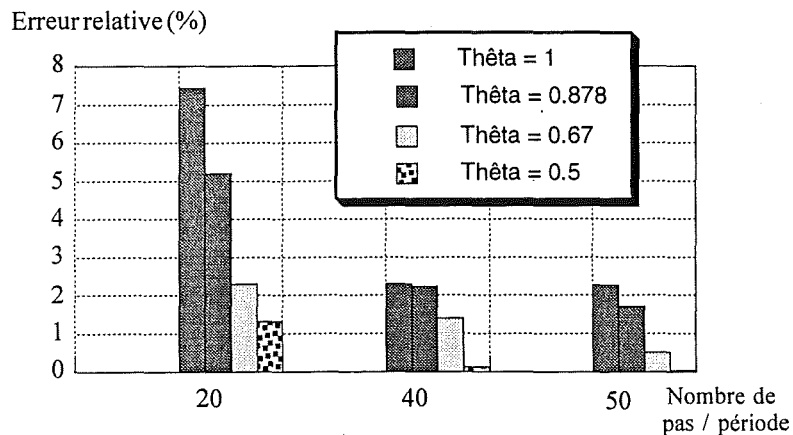


Fig. III.2. Comparaison des erreurs relatives des pertes calculées en pas-à-pas dans le temps par rapport aux pertes calculées en régime harmonique

Vu les résultats globaux, on s'aperçoit que, pour un pas de temps donné, la méthode de Crank-Nicolson ( $\theta = 0,5$ ) est la plus précise et que plus le pas de temps diminue, plus on réduit les erreurs d'intégration de la méthode.

Nous avons également choisi d'exploiter l'induction dans les points A et B définis sur la figure III.1, afin de d'observer le régime transitoire numérique. Les figures III.3 et III.4 montrent une comparaison entre les formes d'onde de l'induction magnétique obtenu avec FLUX2D<sup>®</sup> et la méthode implicite implantée, dans les points A et B, pour un pas de temps choisi pour avoir 20 pas sur la période.

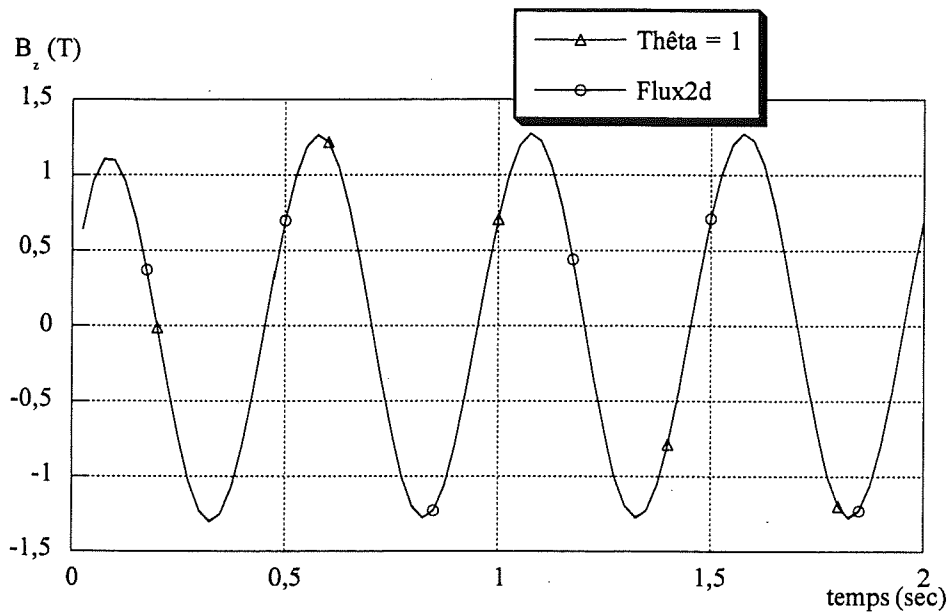


Fig. III.3 Induction en point B

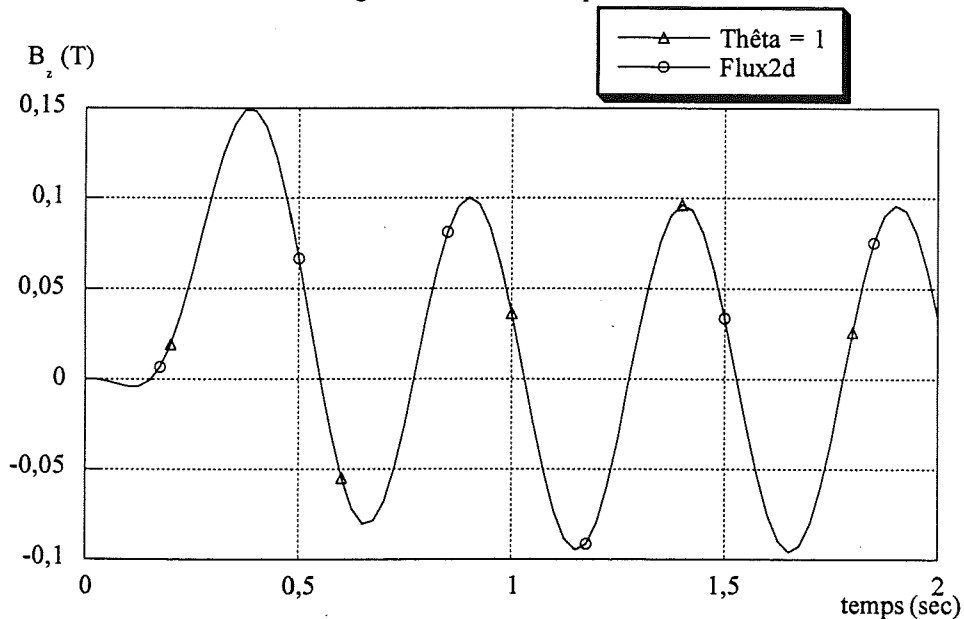


Fig. III.4 Induction en point A

On peut observer que nos résultats sont identiques aux résultats de FLUX2D<sup>®</sup>, pour le schéma implicite ( $\theta=1$ ). On s'aperçoit également que le calcul traverse un transitoire numérique avant d'atteindre le régime permanent. Ce transitoire numérique est plus prononcé au point A où la réaction du champ est plus forte.

Sur les figures III.5 et III.6 on donne une comparaison entre les formes d'onde de l'induction pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$ , dans les points A et B.

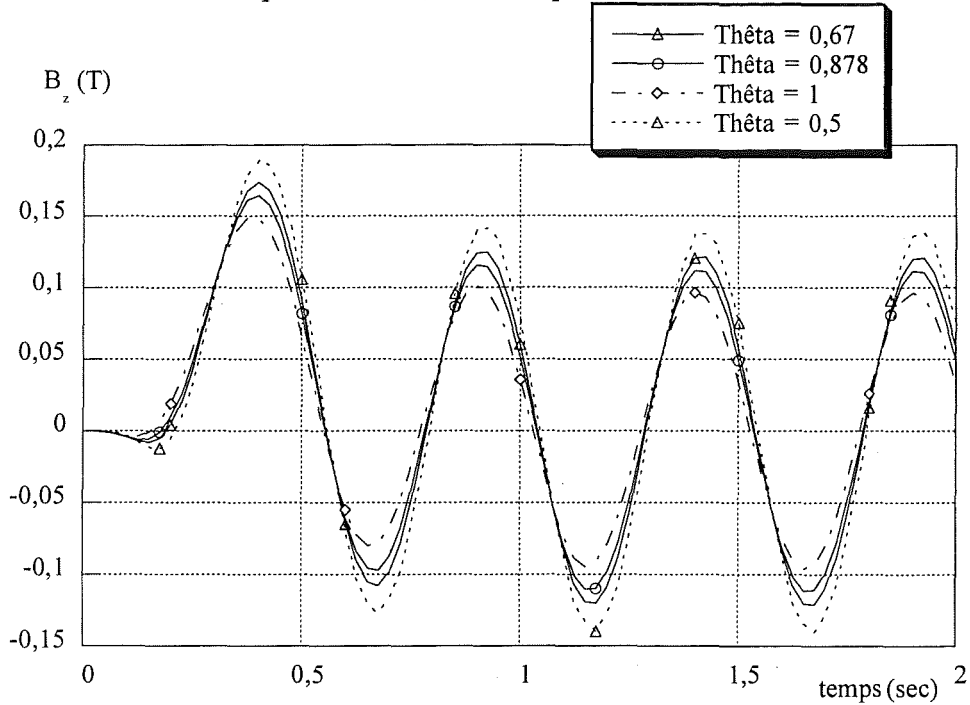


Fig. III.5 Induction en point A, pour différentes valeurs du  $\theta$

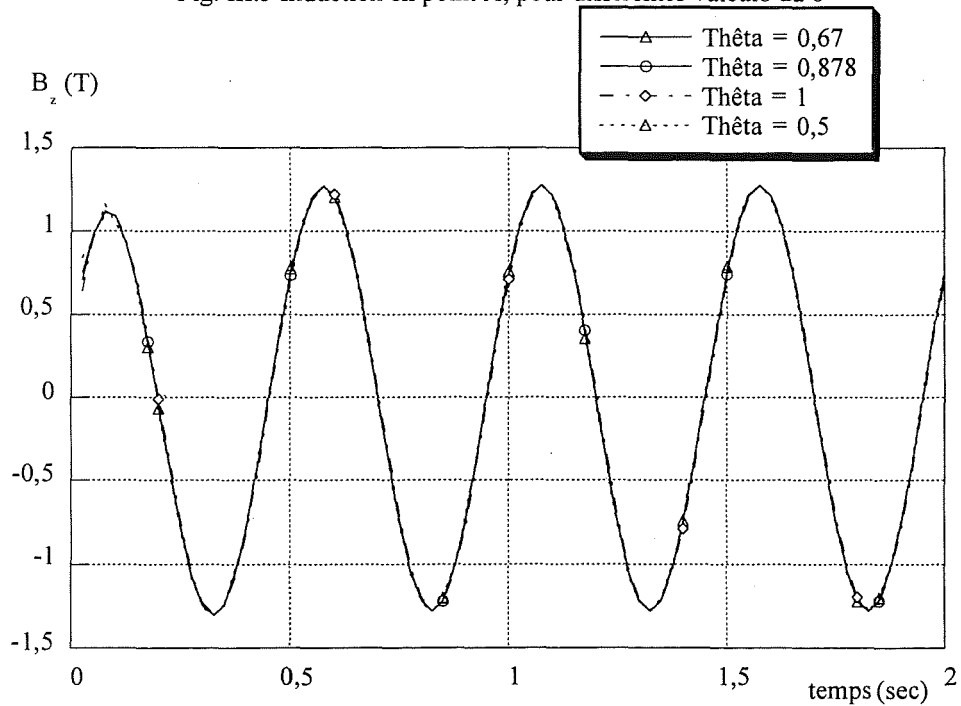


Fig. III.6 Induction en point B, pour différentes valeurs du  $\theta$



Les écarts entre les courbes sont plus importants au point A par rapport au point B, où la réaction du matériau conducteur est plus faible. Ces écarts traduisent l'erreurs d'intégration de la méthode, qui doivent être plus réduites dans le cas de l'utilisation de schéma de Crank-Nicolson ( $\theta=0,5$ ) par rapport au schéma implicite ( $\theta=1$ ).

### 6.1.2. Cylindre conducteur en matériau non-linéaire

La courbe  $B(H)$  du matériau est donnée dans la figure III.7. On considère que le courant dans l'inducteur est de 7000 A, valeur suffisante pour saturer le matériau.

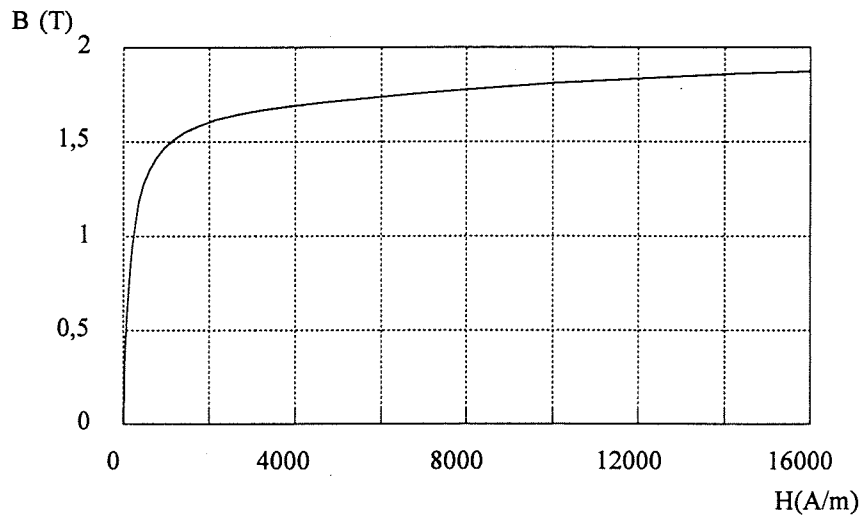


Fig. III.7 Courbe  $B(H)$  du matériau

Pour ce cas, nous allons nous contenter de comparer les valeurs obtenues par rapport à celles de FLUX2D<sup>®</sup>, pour le cas  $\theta=1$ . Comme précédemment, on va regarder les valeurs instantanées en deux point de la géométrie (Figures III.8-III.11) et une valeur globale constituée par les pertes par courants induits dans le cylindre.

Le tableau III.2 montre les pertes Joule pour les différentes résolutions effectuées.

Tableau III.2 Pertes Joule pour le matériau non-linéaire

Cas	Pertes Joules (W)
Flux2d	0.0612
$\theta = 1$	0.0612
$\theta = 0.67$	0.0631
$\theta = 0.5$	0.0643

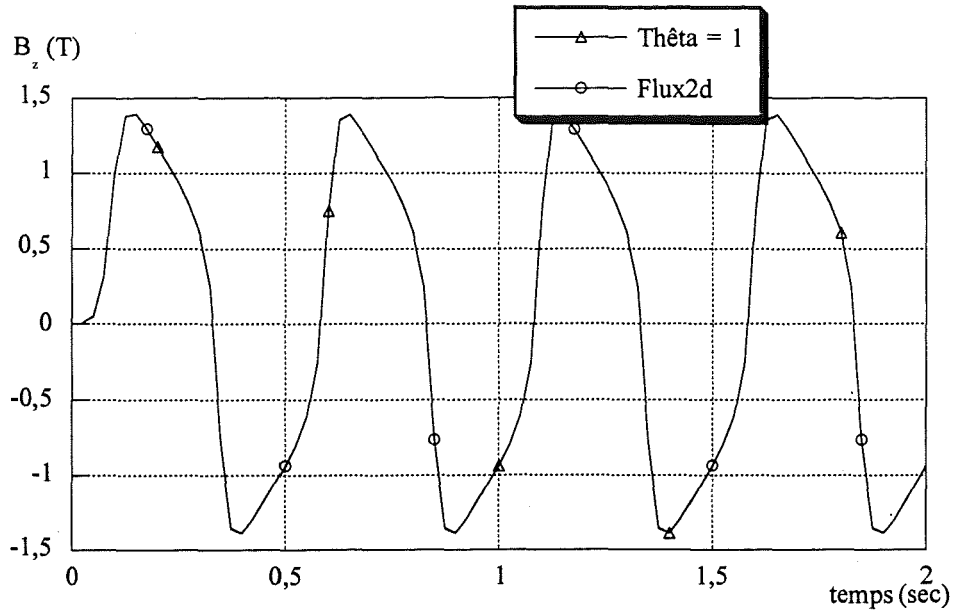


Fig.III.8 Induction magnétique en point A

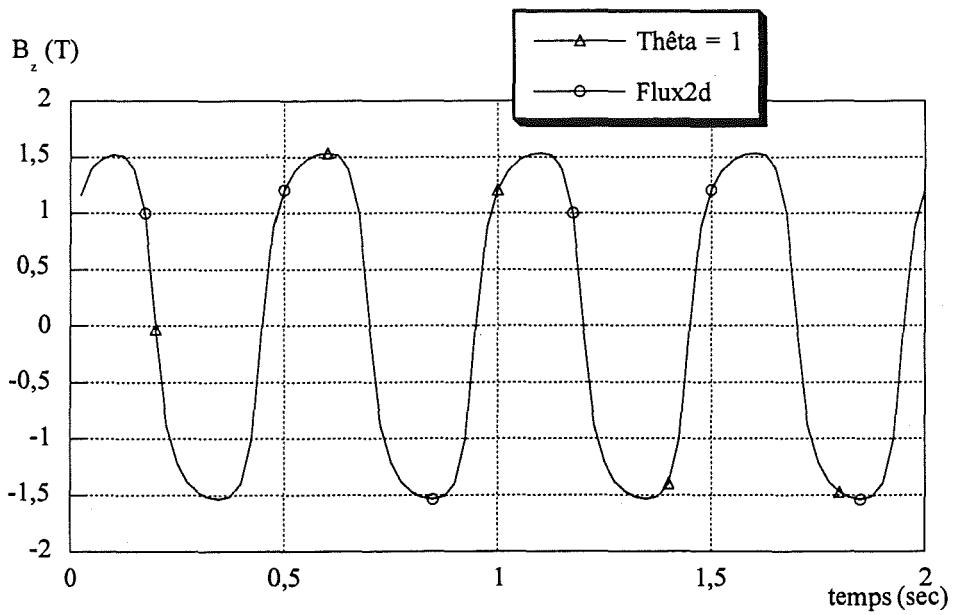


Fig.III.9 Induction magnétique en point B

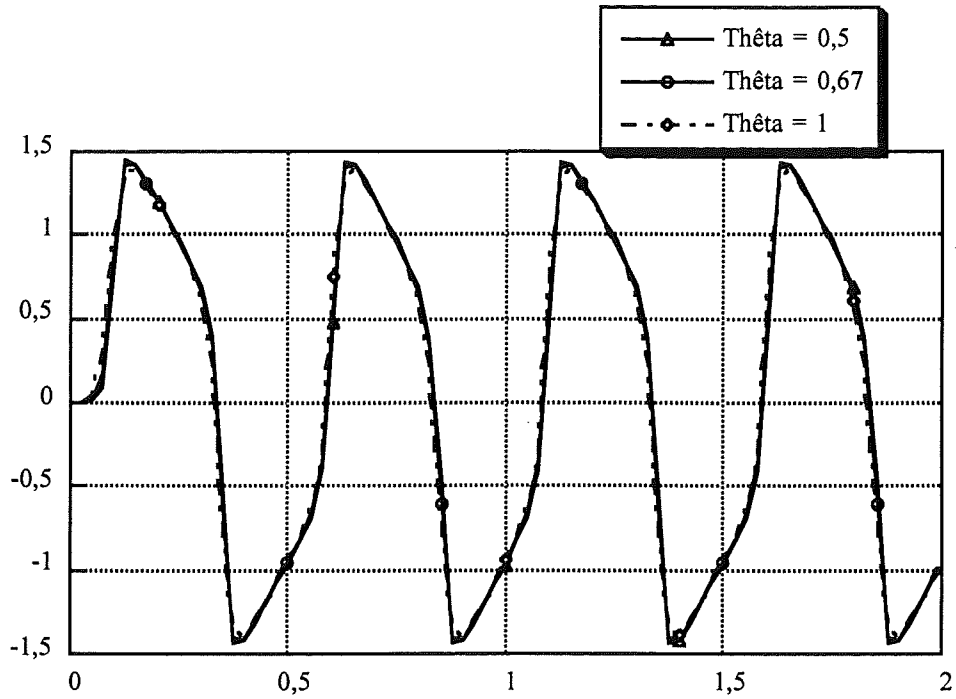


Fig. III.10 Induction en point A, pour différentes valeurs du  $\theta$

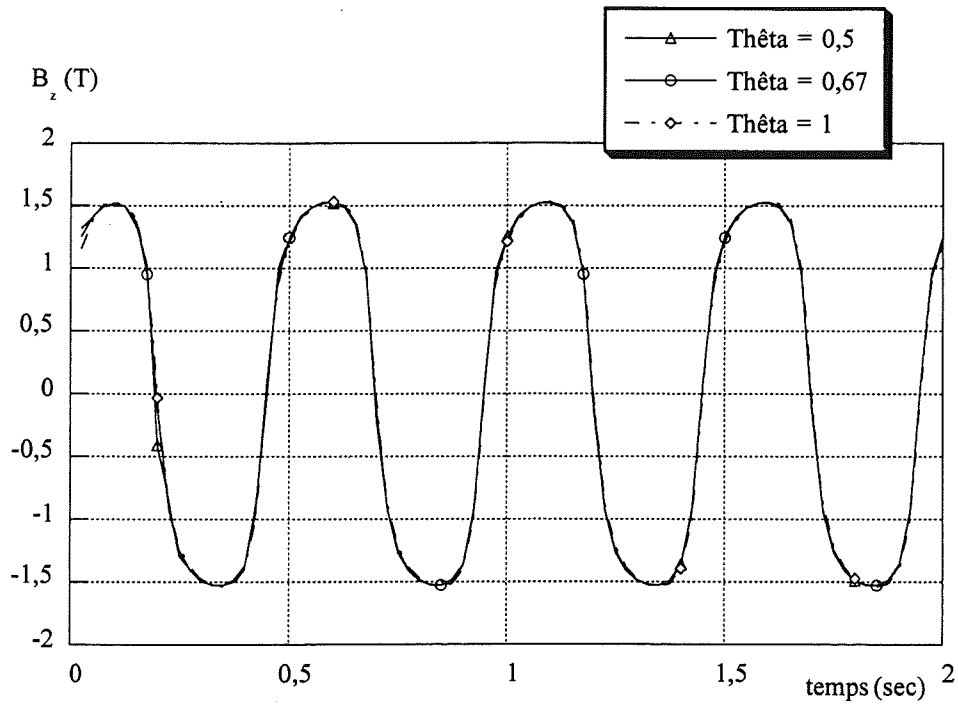


Fig. III.11 Induction en point A, pour différentes valeurs du  $\theta$

### 6.1.3. Conclusion des validations numériques sur le cylindre

La comparaison avec les résultats de FLUX2D<sup>®</sup> (globaux et locaux) nous permet de considérer que l'algorithme implanté est désormais validé, aussi bien pour le cas linéaire que pour le cas non-linéaire.

Pour le cas linéaire, les expériences effectuées ont montré que pour un pas de temps donné, la méthode la plus précise est la méthode de Crank-Nicolson, d'une part, et d'autre part, il est évident que plus on diminue le pas de temps plus la précision augmente.

### **6.2. Problème no. 21 du TEAM Workshop**

L'étude du problème no. 21 va permettre, d'une part, la validation du schéma d'intégration en pas-à-pas dans le temps sur un cas tridimensionnel et d'autre part, la validation des formulations harmoniques AV-A symétrisées, qu'elles soient en éléments mixtes ou nodaux. En régime transitoire, l'effort de calcul reste assez important. Par conséquent, nous avons choisi de résoudre le problème avec une seule formulation, à savoir la formulation en éléments nodaux.

#### *Description de la géométrie du Problème 21*

Le problème no. 21 est constitué de deux modèles. Le modèle B contient deux inducteurs parcourus par des courants opposés. Une plaque en acier est placée à proximité des inducteurs. Le modèle A a les mêmes inducteurs que le modèle B et deux plaques en acier placées à proximité des inducteurs. Dans le centre d'une plaque il y a un trou. Les deux modèles sont montrés dans la figure III.12. Une description complète du problème, montrant les positions de mesure, peut être trouvée dans [Cheng-94].

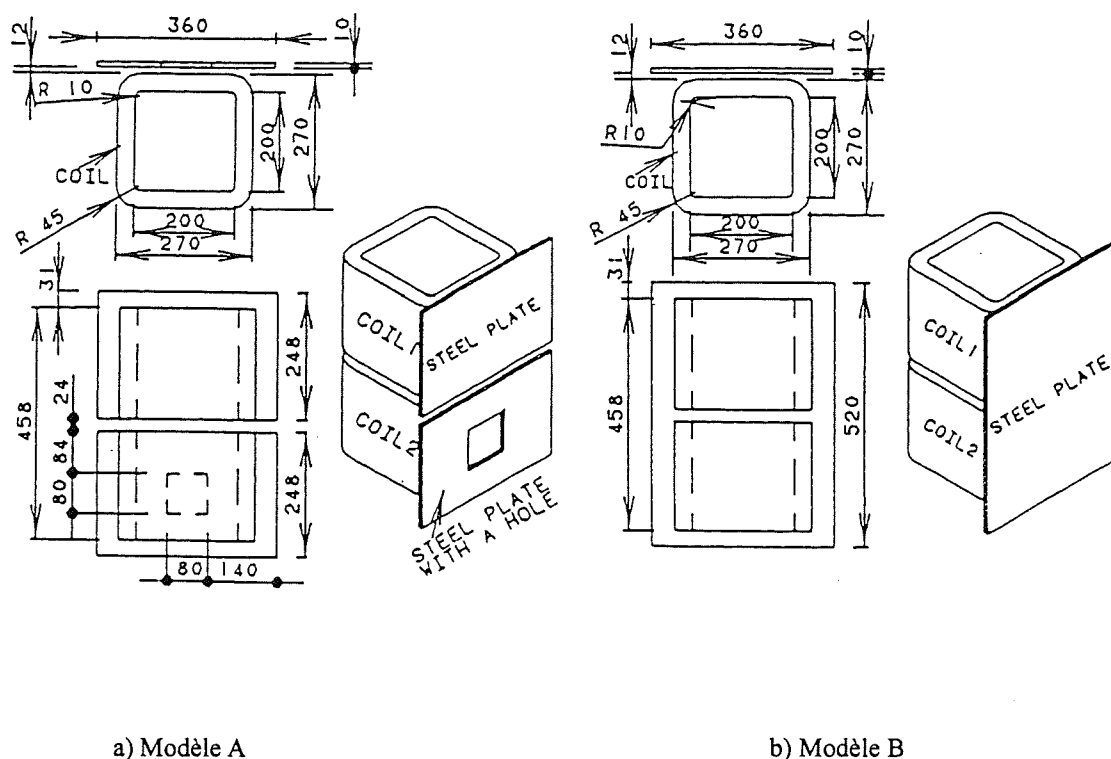


Fig. III.12 Géométrie du problème no.21 du TEAM Workshop

*Méthodes de calcul utilisées*

Tenant compte des symétries, la géométrie du modèle A a été réduite à la moitié et la géométrie du modèle B à un quart. Sur la figure III.13 on montre les maillage utilisés pour les deux modèles. Notre souci principal a été de résoudre le problème sans faire un gros effort de calcul, ce qui nous a contraint d'utiliser un maillage moyen. D'autre part, vu que l'épaisseur de peau vaut approximativement 0,3 mm pour une épaisseur de la plaque de 10 mm, un soin particulier a été accordé à la réalisation du maillage dans l'épaisseur. La figure III.14. montre un détail du maillage dans l'épaisseur de la plaque.

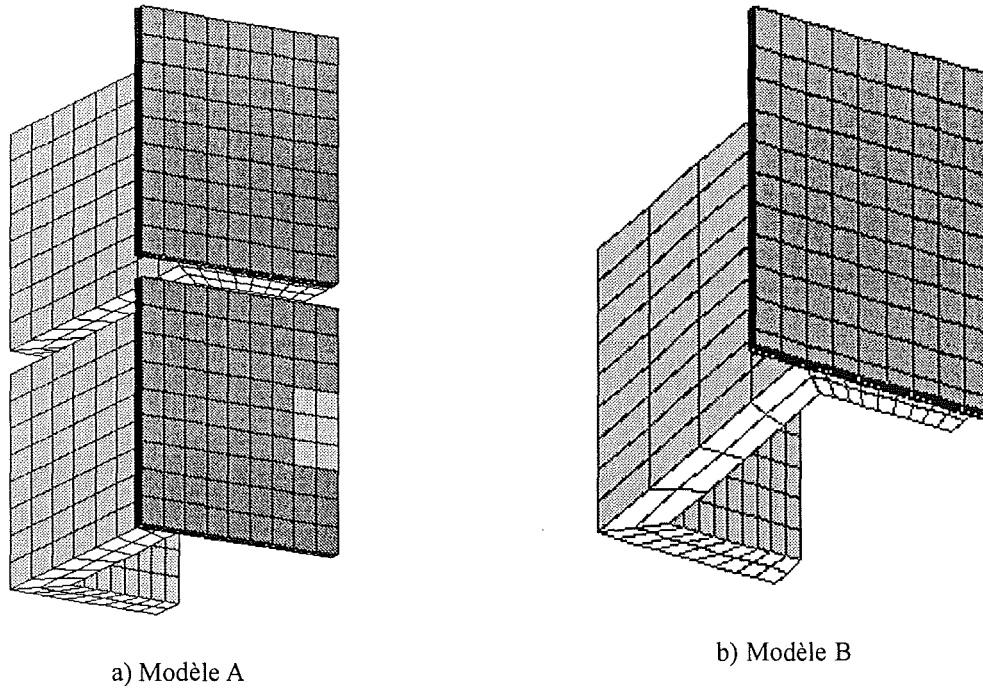


Fig. III.13 Maillage utilisé

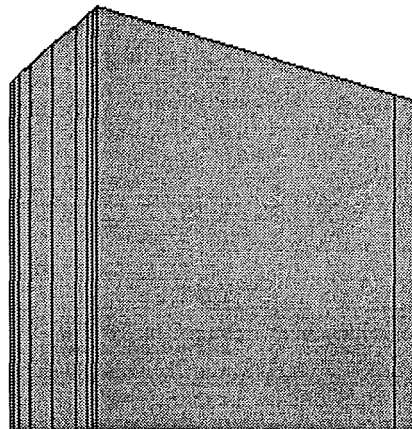


Fig. III.14 Détail du maillage dans l'épaisseur

Les calculs ont été effectués en régime harmonique et en régime transitoire (pas-à-pas dans le temps).

### 6.2.1. Régime harmonique

On suppose que la perméabilité relative de l'acier est égale à 1000. Chaque modèle a été successivement résolu avec la formulation AV-A basée sur l'interpolation nodale et celle basée sur l'interpolation mixte.

## Résultats

Le tableau III.3 résume les caractéristiques de convergence pour la résolution en régime harmonique.

Tableau III.3. Caractéristiques de convergence pour le calcul en régime harmonique

Méthode	Formulation en éléments nodaux		Formulation en éléments mixtes	
	Modèle A	Modèle B	Modèle A	Modèle B
nombre d'éléments (hexaèdre du premier ordre)	11072	5760	11072	5760
nombre d'inconnues	33402	17159	36996	18870
nombre de termes non-nuls	1318591	659773	899507	451744
nombre d'itérations BICG*	200	367	134	1395
temps CPU** (sec)	4333	4305	1187	4378

\*Critère d'arrêt pour BICG:  $10^{-4}$

\*\*Station utilisée: HP700

On s'aperçoit que pour le même maillage, les deux formulations génèrent approximativement le même nombre d'inconnues. C'est une particularité du maillage hexaédrique pour lequel le nombre d'arêtes est égal à  $3N$ ,  $N$  étant le nombre de noeuds du maillage. En même temps, le nombre de termes non-nuls est plus réduit pour la formulation en éléments mixtes et, par conséquent, une itération du solveur coûte moins chère par rapport à la formulation en éléments nodaux. Nous observons aussi que la convergence de deux formulations est dégradée pour le modèle B et que cette dégradation est plus importante dans le cas des éléments mixtes.

Dans la figure III.15 on montre la distribution des courants induits sur les deux faces des plaques, à l'instant  $\omega t = 90^\circ$ . Les plans  $x = 5\text{mm}$  et  $x = -5\text{mm}$  correspondent respectivement à la position en face des inducteurs et de l'autre côté. On constate pour le modèle A que les courants induits tournent principalement dans le plan  $xOy$  et pour le modèle B dans le plan  $yOz$ .

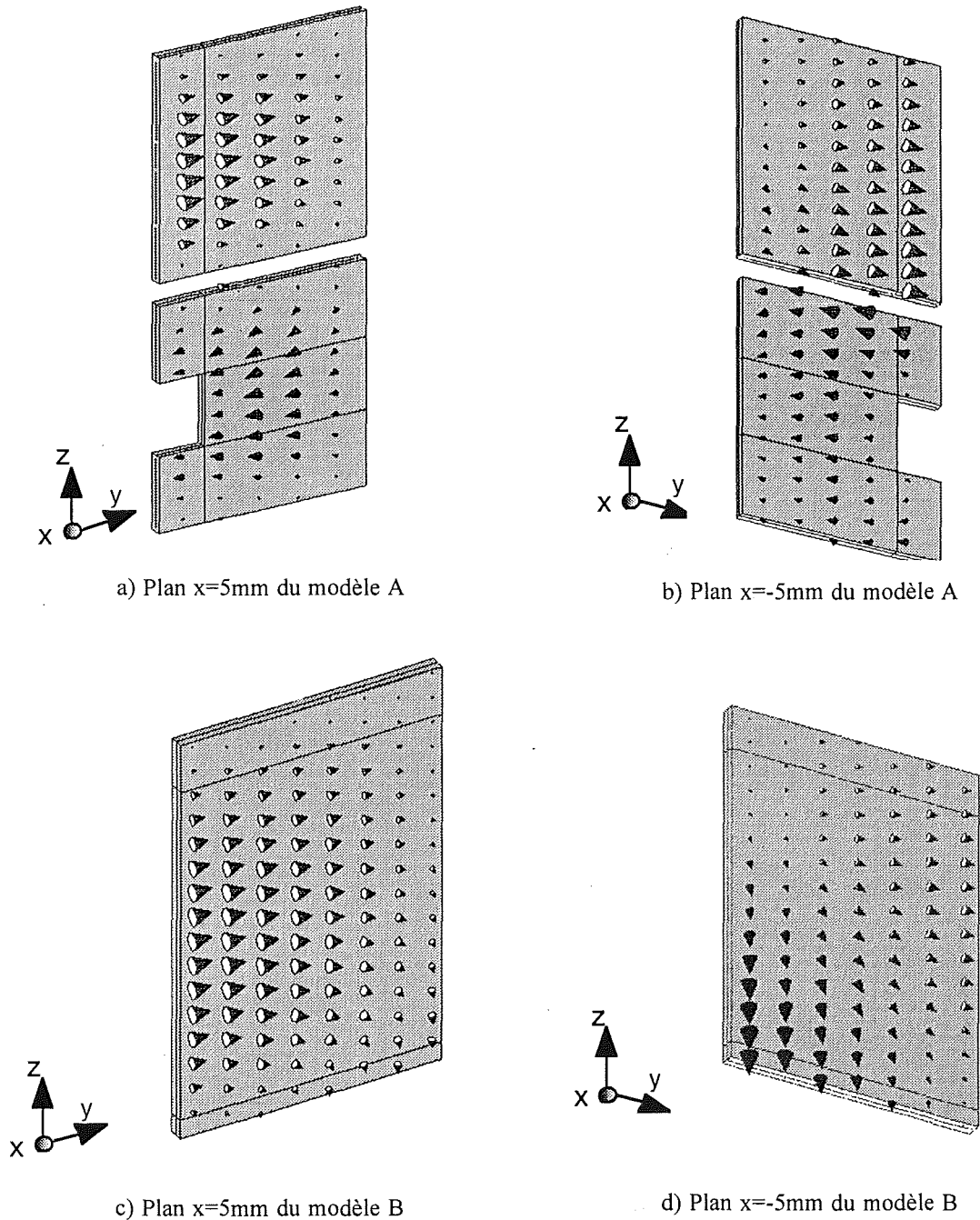
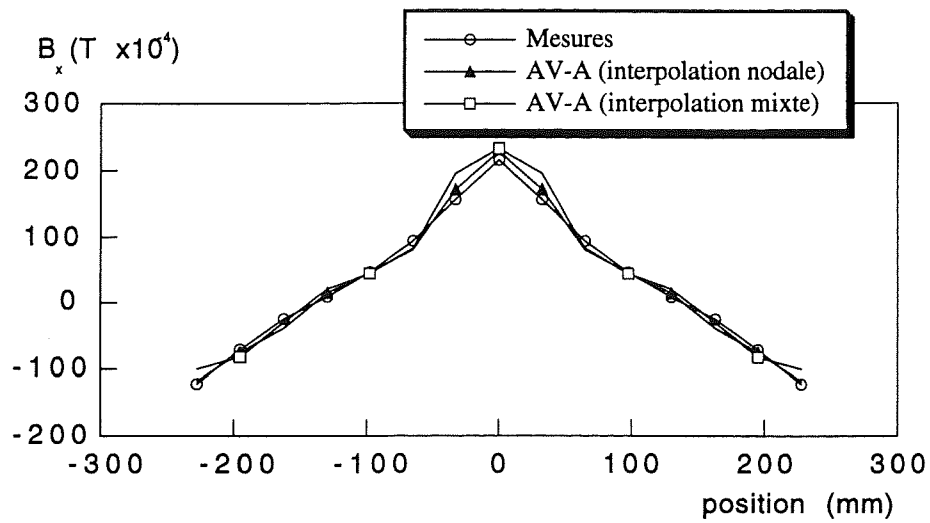


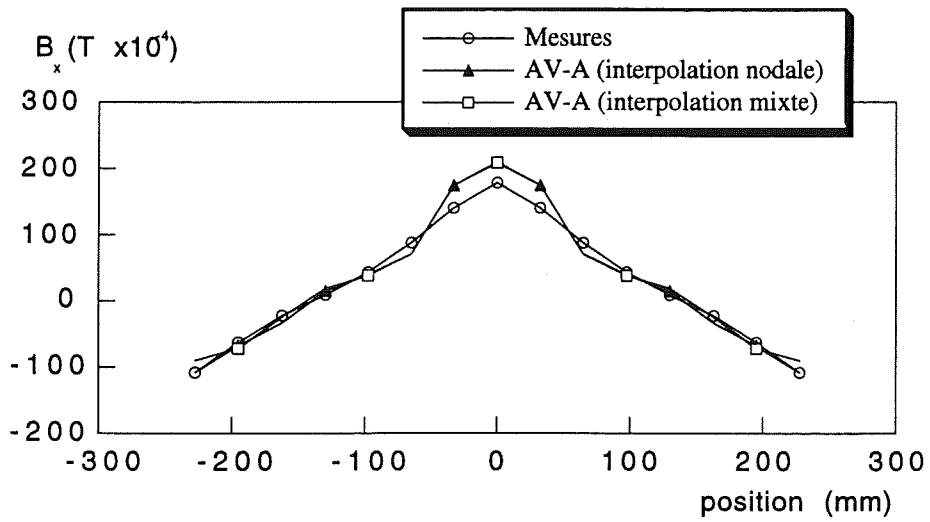
Fig. III.15 Distribution des courants induits

La figure III.16 montre l'induction magnétique, pour les deux modèles, calculée avec les deux formulations, en comparaison avec les résultats de mesure. On constate que les résultats de simulation sont proches des mesures. Tout de même, on observe quelques différences au voisinage du plan  $z=0$ , dues au fait que le maillage utilisé n'est pas assez fin pour prendre en compte la variation brusque du champ.

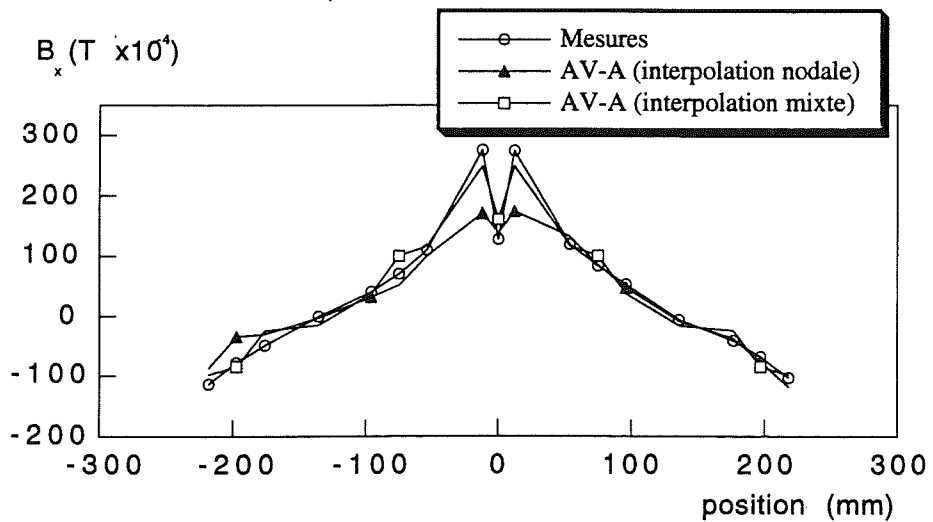




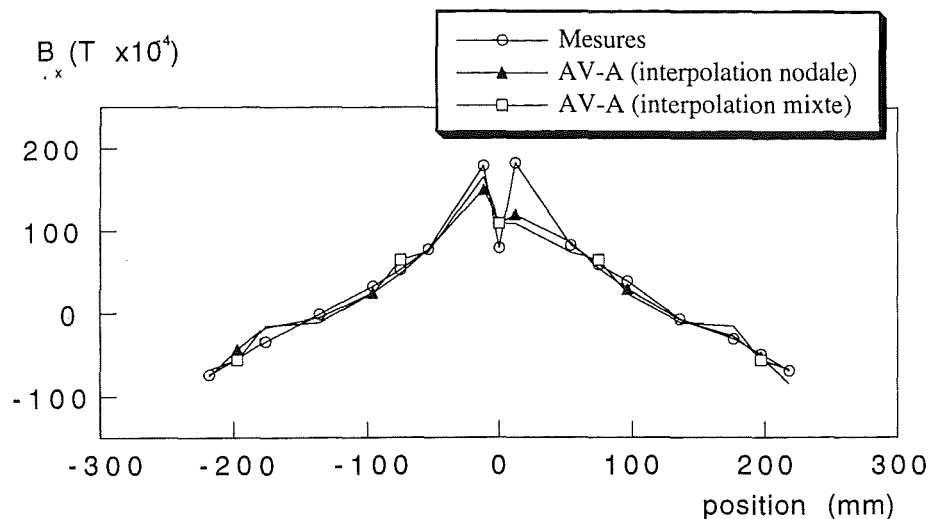
a) Position I du modèle B



b) Position II du modèle B



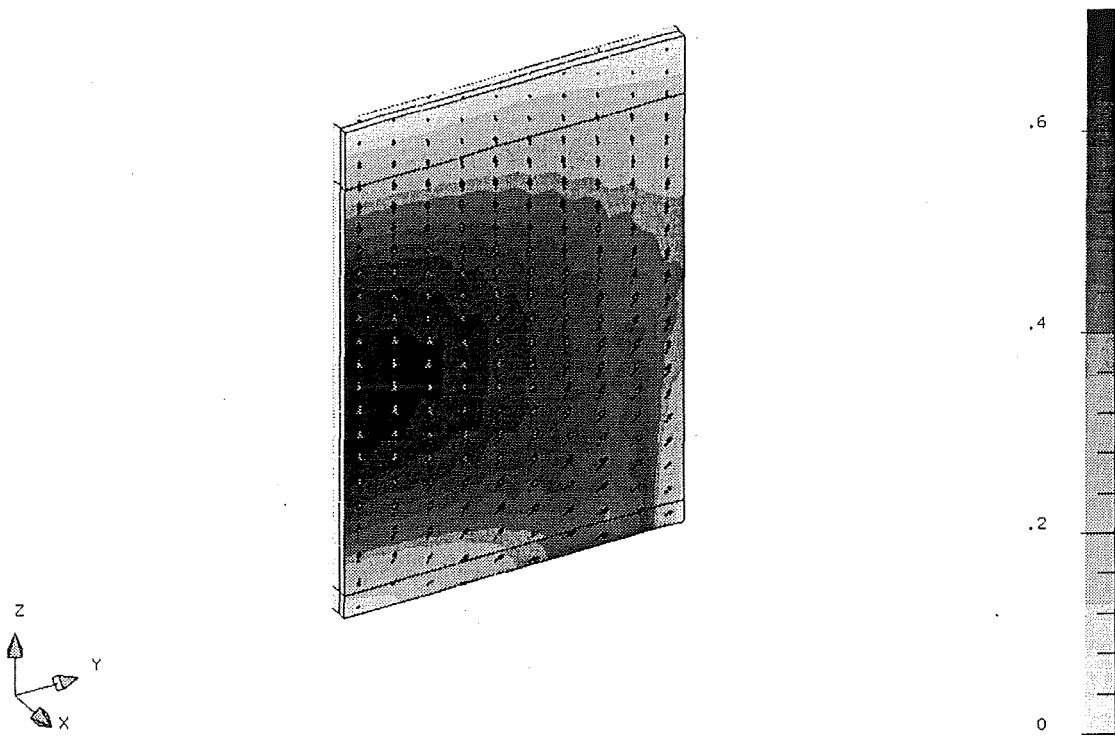
c) Position III du modèle A



d) Position IV du modèle A

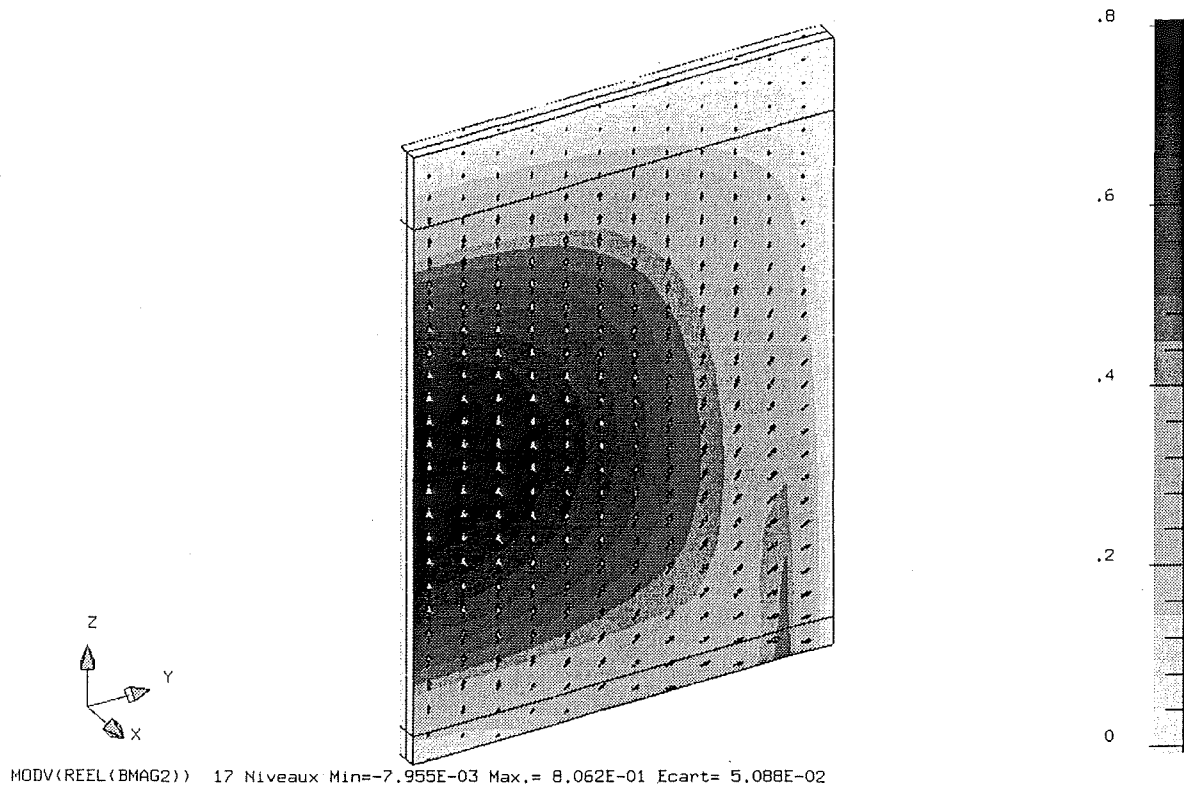
Fig. III.16 Induction magnétique pour les positions spécifiées

La figure III.17 montre la distribution de l'induction magnétique dans la plaque pour le modèle B. La valeur maximum de l'induction pour les deux résolutions effectuées ne dépasse pas 0,8 T, ce qui laisse penser que il n'y aura pas de saturation pour la courbe B(H) de la figure III.18.



MODV(REEL(ROTA2W)) 17 Niveaux Min=-7.115E-03 Max.= 7.210E-01 Ecart= 4.551E-02

a) Formulation en éléments mixtes



b) Formulation en éléments nodaux

Fig. III.17 Distribution de l'induction magnétique pour le modèle B

### 6.2.2. Régime transitoire

Le matériau est supposé non-linéaire, avec la courbe  $B(H)$  donnée dans la figure III.18.

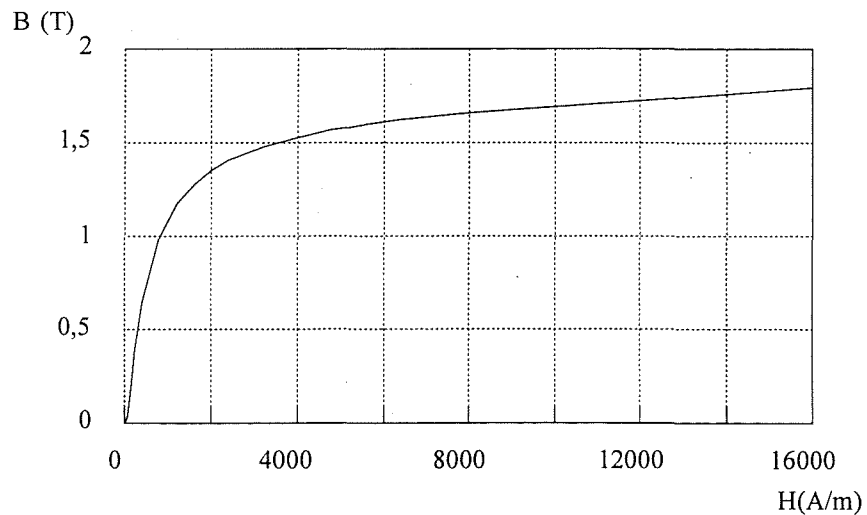


Fig. III.18 Courbe  $B(H)$  de l'acier

### Résultats

Nous avons calculé trois périodes avec un pas de temps  $\Delta t = 1ms$ , ce qui correspond à 20 pas sur une période. Le paramètre  $\theta$  a été choisi égal à 0,878 (schéma de Liniger), sachant que cette valeur est considérée comme optimum [Labbe-96]. Vu l'effort de calcul nécessaire pour la résolution en pas-à-pas dans le temps, seule la formulation en éléments nodaux a été utilisée.

Le tableau III.4. résume les caractéristiques de convergence pour la résolution en régime harmonique.

Tableau III.4. Caractéristiques de convergence pour le calcul en pas-à-pas dans le temps

Méthode	Formulation en éléments nodaux	
	Modèle A	Modèle B
nombre d'éléments (hexaèdres d'ordre 1)	11072	5760
nombre d'inconnues	33402	17159
nombre de termes non-nuls	1318591	659773
nombre moyen d'itérations ICCG pour un pas de calcul*	200	120
nombre moyen d'itérations Newton-Raphson pour un pas de calcul**	9	9
temps CPU*** (sec)	480586	103336

\*Critère d'arête pour ICCG:  $10^{-4}$

\*\*Critère d'arête pour Newton-Raphson :  $10^{-4}$

\*\*\*Station utilisée: HP700

Pour la résolution en pas-à-pas dans le temps, nous avons choisi de exploiter l'induction magnétique en point P6 et la densité de courant induit dans la plaque en point P (Fig. III.19 et III.20). Les formes d'ondes obtenues sont sinusoïdales, donc il n'y a pas de saturation de l'acier. Le tableau III.5 résume les pertes Joule dans les plaques conductrices pour toutes les résolutions effectuées.

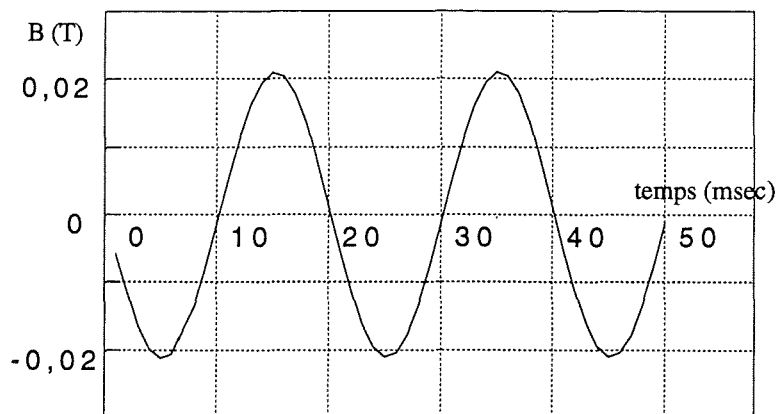


Fig. III.19 Induction magnétique en point P6

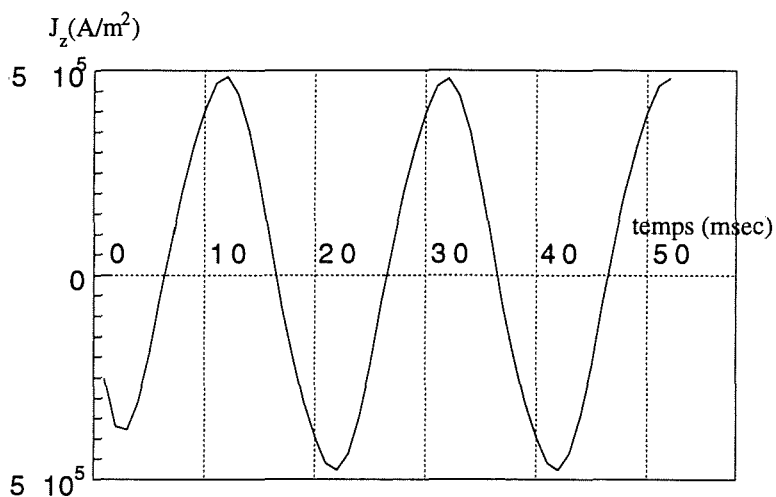


Fig. III.20 Densité de courant en point P

Tableau III.5. Pertes Joule dans les plaque (W)

Méthode		Modèle A	Modèle B
Analyse transitoire Formulation en éléments nodaux		7,20	10,68
Analyse harmonique	Formulation en éléments nodaux	7,54	11,35
	Formulation en éléments mixtes	8,32	12,44
Mesures		9,65	12,38

### 6.2.3. Conclusion

Le problème no. 21 du TEAM Workshop a été résolu en régime harmonique et en régime transitoire.

L'analyse en régime harmonique a montré que les résultats de simulation, que ce soit en éléments mixtes ou nodaux, sont en accord avec les mesures. L'utilisation d'éléments d'ordre supérieur devrait logiquement contribuer à une amélioration de la précision des résultats.

L'analyse en régime transitoire n'a été réalisée qu'avec la formulation en éléments nodaux. Elle nous a permis de valider le bon fonctionnement du  $\theta$ -schéma implanté sur un problème tridimensionnel réel. Cependant, les écarts constatés par rapport aux résultats de mesure des pertes Joules, laisse penser que le maillage doit être encore raffiné, surtout dans les zones à forte variation du champ et que le pas de temps doit être diminué.

## **7. Conclusion**

Ce chapitre a été consacré à l'étude des formulations magnétodynamiques basées sur le potentiel vecteur en différents régimes. Nous avons implanté et validé la formulation AV-A (éléments mixtes) en régime harmonique, d'une part, et, d'autre part, la méthode d'Euler pour l'intégration des systèmes différentiels temporels d'ordre 1, pour les cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Nous disposons désormais d'un outil général, capable de modéliser en pas-à-pas dans le temps les problèmes comportant des alimentations quelconques et des matériaux non-linéaires. C'est cette méthode qui va être utilisée pour effectuer les simulations qui vont être présentées dans les chapitres suivants.

## **Chapitre IV**

### **Couplage avec les équations de circuit**





## 1. Introduction

La plupart des dispositifs électrotechniques sont alimentés en tension, le courant qui en résulte dépend du flux magnétique créé à travers les inducteurs. Or, les formulations qui ont été présentées dans les chapitres II et III nécessitent la connaissance de la densité de courant dans les inducteurs. Ainsi, il s'avère nécessaire de coupler le calcul électromagnétique avec les équations du circuit électrique d'alimentation.

Par ailleurs, les circuits d'alimentation peuvent être complexes, comportant des composants passifs linéaires (résistances, condensateurs ou inductances), des composants passifs non-linéaires ou commandés (diodes, transistors), et des composants actifs (source de tension ou de courant). Les inconnues du système électrique, différentes selon la méthode d'analyse choisie, seront rajoutées aux inconnues issues de l'application de la méthode des éléments finis.

La première partie du chapitre résume l'état de l'art du sujet, la deuxième partie expose la méthode de couplage choisie. La troisième partie présente quelques méthodes d'analyse des circuits électriques suivies de validations numériques.

## 2. Méthodes de couplage avec les équations de circuit. Etat de l'art

Tout d'abord réalisé en 2D et puis en 3D, le couplage des équations électromagnétiques avec les équations du circuit électrique d'alimentation a constitué un thème de recherche de prédilection pour les chercheurs. Au fil des années, deux directions principales se sont imposées: le couplage direct et le couplage indirect, que nous présentons ci-dessous:

### 2.1. Couplage indirect

Les deux systèmes, électromagnétique et électrique sont résolus successivement, la solution de l'un étant injectée dans l'autre [Williamson-85], [Demenko-92]. Les itérations sont arrêtées lorsque la précision demandée est atteinte.

L'avantage principal de cette méthode est que l'analyse du circuit électrique peut être faite avec des logiciels spécialisés (par exemple SPICE). D'autre part, l'implantation pratique du couplage nécessite peu de modifications du code éléments finis. Enfin, le conditionnement de la matrice n'est pas modifié par le couplage.

Bien qu'attrayante par sa simplicité, cette méthode présente néanmoins un gros inconvénient: pour atteindre la précision désirée, plusieurs itérations doivent être effectuées. Imaginons un calcul transitoire 3D, non-linéaire, avec des centaines de pas de temps à calculer et que à chaque pas de temps, on résout séparément les deux systèmes et on échange les données. On comprend aisément pourquoi cette solution ne peut pas être envisagée en 3D.

### 2.2. Couplage direct

Le système électromagnétique et le système électrique sont résolus simultanément. Les inconnues électriques sont soit éliminées (cas de la méthode dite intégro-différentielle) soit rajoutées au système élément finis (cas de la méthode dite de résolution simultanée).

La méthode intégro-différentielle a prouvé son efficacité sur des problèmes 2D [Brunelli-83],[Konrad-81], [Shen-85], [Meunier-88]. Les courants électriques dans les inducteurs sont exprimés à l'aide du système électrique et ensuite introduits dans le système électromagnétique.

Néanmoins, son application paraît difficilement envisageable sur des problèmes 3D. En effet, le fait d'avoir éliminé les variables électriques se traduit par une augmentation très importante de la bande de la matrice du système résultant dans les régions couplées à des circuits électriques.

La méthode de la résolution simultanée est, sans doute, la méthode la plus utilisée pour les simulations 3D. Les inconnues électriques sont gardées dans le système, les équations électriques étant rajoutées aux équations électromagnétiques. Cette méthode a été appliquée avec succès sur une large variété de formulations: formulations en potentiel vecteur magnétique nodale ou d'arête [Dreher-93], [Dreher-95], [Bouissou-94-1], formulation en potentiel scalaire réduit [Leonard-92], formulation T $\Omega$  [Bouissou-94-2]. La méthode présente l'avantage qu'elle conserve le caractère creux de la matrice du système.

### **2.3. Choix de la méthode**

Le but du travail étant le calcul des structures 3D, nous avons choisi la méthode de la résolution simultanée, d'autant plus que l'équipe Modélisation du LEG a un grand savoir faire, vu le nombre de ses travaux sur le sujet.

La méthode sera adaptée pour la formulation en potentiel magnétique vecteur basée sur les éléments mixtes avec le souci de préserver le caractère compatible de la formulation.

Avant de présenter la méthode, nous allons définir les différents types d'inducteurs qui peuvent être rencontrés dans les dispositifs électrotechniques.

Un inducteur filaire a généralement plusieurs spires, dans lesquelles la densité de courant dans la section transversale est considérée constante. Par conséquent, les courants induits dans chaque fil sont négligés.

Un inducteur massif est un conducteur électrique où les courants induits ne peuvent pas être négligés et ils doivent être pris en compte.

### 3. Couplage dans le cas des inducteurs filaires

La méthode classique de couplage est basée sur le modèle volumique de l'inducteur filaire. Afin d'éviter le maillage de chaque spire de l'inducteur on considère que la densité de courant est constante dans la section transversale de l'inducteur et on détermine une densité équivalente.

Supposant que l'inducteur ait  $n_s$  spires et que sa section transversale soit  $S$ , le module de la densité de courant équivalente est donné par la formule:

$$|\vec{J}| = \frac{n_s}{S} I \quad (\text{IV.1})$$

où  $I$  est le courant dans une spire.

La direction de la densité de courant est uniquement définie par la géométrie du bobinage. Si on introduit un vecteur unitaire, tangent en chaque point du bobinage à la direction des spires, noté  $\vec{t}$ , le vecteur densité de courant est donné par:

$$\vec{J} = |\vec{J}| \vec{t} = \frac{n_s}{S} I \vec{t} \quad (\text{IV.2})$$

Vu que  $I$  est une inconnue, on préfère la notation:

$$\vec{J} = \vec{N}_s I \quad (\text{IV.3})$$

avec  $\vec{N}_s = \frac{n_s}{S} \vec{t}$  appelé fonction de bobinage.

#### *Remarques*

Dans le cas des inducteurs de formes complexes, deux aspects peuvent se révéler extrêmement embarrassants:

- la fonction de bobinage  $\vec{N}_s$  doit être évaluée en chaque point. Cette évaluation peut devenir très délicate si la section transversale de l'inducteur n'est pas constante.

- nous avons vu dans le paragraphe II.4 que le potentiel vecteur non-jaugé en éléments mixtes est extrêmement sensible à la condition de divergence nulle de la densité de courant

(condition de compatibilité de la formulation). Vu la relation (IV.3), on doit s'assurer qu'en chaque point de définition, la fonction de bobinage  $\vec{N}_s$  est à divergence nulle.

La méthode que nous proposons introduit un nouveau vecteur  $\vec{K}_s$ , tel que:

$$\vec{N}_s = \text{rot}\vec{K}_s \quad (\text{IV.4})$$

et ainsi la condition de divergence nulle de  $\vec{N}_s$  est fortement assurée. Pour la détermination de  $\vec{K}_s$ , la démarche est similaire à celle présentée dans le paragraphe II.4.3.

Le vecteur  $\vec{K}_s$  est déterminé par minimisation de la fonctionnelle:

$$F(K_s) = \int_{\Omega_k} (\vec{N}_s - \text{rot}\vec{K}_s)^2 d\Omega \quad (\text{IV.5})$$

Il convient d'assurer la condition:

$$\vec{n} \times \vec{K}_s = \vec{0} \quad (\text{IV.6})$$

sur les limites du domaine de calcul.

Le domaine de calcul du vecteur  $\vec{K}_s$  doit être connexe, comprenant au moins l'inducteur et le trou à l'intérieur.

L'équation à résoudre dans le domaine de l'inducteur est:

$$\text{rot}(\text{vrot}\vec{A}) - \text{rot}\vec{K}_s I = \vec{0} \quad (\text{IV.7})$$

*Calcul de la tension aux bornes de l'inducteur:*

Considérons un inducteur de résistance  $R$  parcouru par un courant  $I$  (Figure IV.1). Nous voulons déterminer la tension  $\Delta V$  aux bornes de l'inducteur.

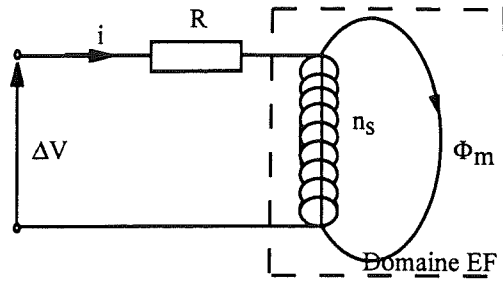


Fig. IV.1 Inducteur alimenté en tension

Conformément à la loi d'Ohm, la tension aux bornes de l'inducteur est donnée par l'expression:

$$\Delta V = RI + \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{IV.8})$$

où  $R$  est la résistance électrique de l'inducteur et  $\Phi_m$  est le flux magnétique total dans l'inducteur.

On peut démontrer que le flux magnétique total dans l'inducteur peut être écrit sous la forme [Dreher-93], [Bouissou-94-1]:

$$\Phi_m = \int_{\Omega_{ind}} \vec{A} \cdot \vec{N}_s d\Omega \quad (\text{IV.9})$$

En tenant compte de la relation (IV.4) on écrit que:

$$\Phi_m = \int_{\Omega_{ind}} \vec{A} \cdot \vec{N}_s d\Omega = \int_{\Omega_{ind}} \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{K}_s d\Omega = \int_{\Omega_K} \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{K}_s d\Omega - \int_{\Gamma_K} \vec{A} \cdot (\vec{n} \times \vec{K}_s) d\Gamma \quad (\text{IV.10})$$

L'intégrale surfacique dans (IV.10) est nulle, afin d'assurer la condition (IV.6)

Finalement, la relation de la tension aux bornes de l'inducteur est réécrite ainsi:

$$\Delta V = RI + \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_K} \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{K}_s d\Omega \right) \quad (\text{IV.11})$$

Ainsi, le couplage de l'équation locale du champ magnétique et de l'équation de circuit requiert la résolution du système formé par les équations (IV.7) et (IV.11), où les inconnues seront le potentiel vecteur magnétique dans le domaine éléments finis et le courant dans l'inducteur.

#### 4. Couplage dans le cas d'un inducteur massif

Considérons le cas d'un inducteur massif alimenté par un circuit électrique externe. Comme les courants induits ne peuvent pas être négligés, le phénomène physique est régi par l'équation de la magnétodynamique (III.8). Dans la suite on va supposer que le courant  $I$  entre normalement dans la surface  $S_1$  est qu'il sort normalement sur la surface  $S_2$ . Avec cette hypothèse, la formulation magnétodynamique peut être réécrite ainsi [Wang-96]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \text{rot} \bar{W}_i \nu_i \text{rot} \bar{A} + \text{div} \bar{W}_i \nu_i \text{div} \bar{A} + \sigma \bar{W}_i \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \sigma \bar{W}_i \text{grad} \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_i} \sigma \text{grad} N_i \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad} N_i \text{grad} \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega - \int_{S_1} N_i \frac{I}{S_1} d\Gamma + \int_{S_2} N_i \frac{I}{S_2} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

On remarque que l'inconnue courant n'apparaît que sur les bornes de l'inducteur. La continuité du courant électrique est assurée par le couplage avec le circuit électrique d'alimentation.

Une approche différente de celle déjà décrite est proposée dans [Meunier-86]. La méthode, basée sur la décomposition du potentiel scalaire électrique en deux parties, l'une relative aux courants induits et l'autre à la tension d'alimentation, présente un meilleur comportement numérique, au prix de l'introduction d'une variable supplémentaire par rapport à (IV.12).

#### 5. Méthodes d'analyse des circuits électriques

Le circuit électrique d'alimentation des dispositifs électrotechniques peut être complexe, comportant des résistances, des inductances et des condensateurs. D'autre part, les machines électriques sont souvent alimentées à travers des circuits électroniques de commutation, (onduleurs ou hacheurs), comportant des composants commandés (transistors, thyristors) et des composants non-linéaires (diodes).

L'analyse topologique du circuit électrique consiste en la détermination des courants dans les composants, les tensions aux bornes et les potentiels électriques nodaux, à l'aide des théorèmes de Kirchhoff. Cette analyse aboutit toujours à un système d'équations intégral-différentielles.



Dans la suite nous allons rappeler les théorèmes principaux, indispensable à l'analyse topologique des circuits électriques.

### 5.1. Éléments de la théorie des graphes [Mocanu-79]

En formulation topologique, les théorèmes de Kirchoff ne dépendent pas du type de composant, actif ou passif, linéaire ou non-linéaire; en négligeant le type de composant et en remplaçant celui-ci par des segments orientés dans le sens de référence du courant on obtient le graphe orienté du circuit. Par exemple, la figure IV.2, montre le circuit électrique et son graphe orienté associée.

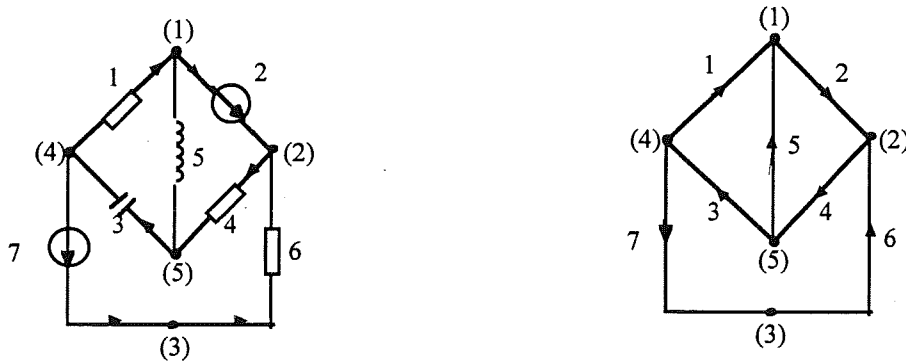


Fig. IV.2. Circuit électrique et son graphe associé

Le circuit électrique de la figure IV.2 est constitué de 7 composants. Les points de connexions des bornes des composantes sont les noeuds topologiques et les segments orientés dans le sens de référence s'appellent branches.

Une maille est une courbe fermée, orientée dans un sens de référence, qui suit les branches du graphe, tel que celles-ci soient parcourues une seule fois.

#### Théorème d'Euler

Considérons le graphe d'un circuit électrique comportant  $b$  branches et  $n$  noeuds. Le théorème d'Euler peut s'énoncer ainsi: le système indépendant des équations intégrales pour le calcul des tensions et des courants dans les composants est constitué de  $n' = n - 1$  équations de noeuds et  $o = b - n + 1$  équations de mailles.

### Matrices d'incidence des branches aux noeuds et mailles

Soit  $[N]$  la matrice:

$$[N] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1b} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kj} & \dots & \alpha_{kb} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nb} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

Les coefficients  $\alpha_{kj}$  sont définis tel que:

$$\begin{aligned} \alpha_{kj} &= +1, \text{ si la branche } j \text{ part du noeud } (k) \\ \alpha_{kj} &= -1, \text{ si la branche } j \text{ arrive au noeud } (k) \\ \alpha_{kj} &= 0, \text{ si la branche } j \text{ n'est pas connectée au noeud } (k) \end{aligned}$$

La matrice ainsi définie est la matrice d'incidence des branches aux noeuds.

#### Propriétés:

- a) le nombre de coefficients  $\alpha_{kj}$  non-nuls sur la ligne  $k$  est égal au nombre de branches  $j$  connectées au noeud  $(k)$
- b) sur chaque colonne  $j$  il n'y a que deux coefficients  $\alpha_{kj}$  non-nuls, un positif, l'autre négatif, car une branche ne peut lier que deux noeuds

A l'aide de la matrice  $[N]$ , le premier théorème de Kirchoff peut s'écrire de la façon suivante:

$$[N][I] = [0] \quad (\text{IV.14})$$

où  $[I]$  est le vecteur colonne contenant les  $b$  courants inconnus.

Si l'on supprime une ligne de la matrice  $[N]$ , on obtient la matrice réduite  $[N']$  de dimension  $(n-1) \times b$ . La suppression d'une ligne  $k$  correspond au choix du noeud  $(k)$  en tant que noeud de référence.

Le système d'équations indépendantes s'écrit:

$$[N'] [I] = [0] \quad (\text{IV.15})$$

Soit  $[M]$  la matrice:

$$[M] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1b} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2j} & \dots & \beta_{2b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mj} & \dots & \beta_{mb} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{o+1,1} & \beta_{o+1,2} & \dots & \beta_{o+1,j} & \dots & \beta_{o+1,b} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

Les coefficients  $\beta_{mj}$  sont définis tel que:

$\beta_{mj} = +1$ , si la branche  $j$  appartient à la maille  $[m]$  et si elles sont orientées dans le même sens

$\beta_{mj} = -1$ , si la branche  $j$  appartient à la maille  $[m]$  et si elles sont orientées dans le sens opposé

$\beta_{mj} = 0$ , si la branche  $j$  n'appartient pas à la maille  $[m]$

La matrice ainsi définie est la matrice d'incidence des branches aux mailles.

### Propriétés:

a) le nombre de coefficients  $\beta_{mj}$  non-nuls sur le ligne  $m$  est égal au nombre de branches  $j$  qui appartient à la maille  $[m]$

b) sur chaque colonne  $j$  il n'y a que deux coefficients  $\beta_{mj}$  non-nuls, un positif, l'autre négatif, car une branche ne peut appartenir à plus de deux mailles.

Si on supprime une ligne de la matrice  $[M]$  on obtient la matrice réduite  $[M']$  de dimension  $o \times b$ . A l'aide de la matrice  $[M']$ , le deuxième théorème de Kirchoff peut s'écrire de la façon suivante:

$$[M'] [U] = [0] \quad (\text{IV.17})$$

où  $[U]$  est le vecteur colonne contenant les  $b$  tensions de branches.

## 5.2. Analyse des circuits électriques à l'aide des théorèmes de Kirchoff

### 5.2.1. Analyse par rapport aux courants

On rappelle les relations de liaison entre le courant et la tension aux bornes de chaque élément de circuit.

Résistance :  $U = R I$  où  $R$  est la résistance électrique du composant

Inductance:  $U = L \frac{dI}{dt}$  où  $L$  est l'inductance du composant

Condensateur:  $U = \frac{1}{C} \int_0^t I dt' + U_c(0)$  où  $C$  est la capacité et  $U_c(0)$  la tension initiale aux bornes du condensateur

Ces relations peuvent être mises sous la forme matricielle suivante:

$$[U] = [Z][I] - [E_c] \quad (\text{IV.18})$$

avec:

$[U]$  le vecteur des tensions aux bornes

$[I]$  le vecteur des courants de branches

$[E_c]$  vecteur contenant les tensions initiales des condensateurs et les tensions

d'alimentation

$[Z]$  la matrice diagonale d'impédance égale à:

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 \frac{d}{dt} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \int_0^t dt' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_b \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Après la multiplication de (IV.18) par la matrice  $[M']$ , on obtient le système matriciel suivant

$$[M'] [U] = [M'] [Z] [I] - [M'] [E_c] = 0 \quad (\text{IV.20})$$

qui permet la détermination du vecteur des courants de branches  $[I]$

### La méthode des courants de mailles

Le système (IV.20) peut être réduit si au lieu de garder comme inconnues tous les courants de branches, on définit dans chaque maille un courant de maille avec une orientation arbitraire.

Les courants de branches peuvent être obtenus à partir des courants de maille, en tenant compte de l'orientation de la branche par rapport à l'orientation de la maille:

$$[I] = [M']^t [I_m] \quad (\text{IV.21})$$

où  $[I_m]$  est le vecteur des courants de maille de dimension  $o = b - n + 1$ .

En introduisant la relation (IV.21) dans (IV.20) on obtient le nouveau système à résoudre:

$$[M'] [Z] [M']^t [I_m] = [M'] [E_c] \quad (\text{IV.22})$$

Cette méthode nécessite la mise en oeuvre des algorithmes pour la détermination des mailles indépendantes.

### La méthode des charges électriques

Cette méthode est basée sur l'introduction d'une charge électrique de maille:

$$q_m = \int_0^t I_m dt', \quad m = 1, \dots, o \quad (\text{IV.23})$$

Le vecteur des courants de branche est donnée par:

$$[I] = [M']^t \frac{d[q]}{dt} \quad (\text{IV.24})$$

En introduisant la relation (IV.24) dans (IV.22) on obtient le nouveau système à résoudre:

$$[M'] [Z] [M']^t \frac{d[q]}{dt} = [M'] [E_c] \quad (\text{IV.25})$$

De même que pour la méthode des mailles, cette méthode nécessite la mise en oeuvre des algorithmes pour le calcul des mailles indépendantes.

### 5.2.2. Analyse par rapport aux tensions

Tenant compte des relations suivantes écrites pour chaque de circuit:

Résistance :  $I = GU$  où  $G$  est la conductance électrique du composant

Inductance:  $I = \frac{1}{L} \int_0^t U dt' + I_l(0)$  où  $L$  est l'inductance du composant et  $I_l(0)$  le courant initial dans l'inductance

Condensateur:  $I = C \frac{dU}{dt}$  où  $C$  est la capacité du condensateur

on peut écrire l'équation matricielle suivante:

$$[I] = [Y][U] + [I_g] \quad (\text{IV.26})$$

avec:

$[I]$  le vecteur des courants de branches

$[U]$  le vecteur des tensions aux bornes

$[I_g]$  vecteur contenant les courants des générateurs de courants et les courants initiaux des inductances

$[Y]$  la matrice diagonale d'admittance égale à:

$$[Y] = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \int dt' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \frac{d}{dt} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_b \end{bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Le système matriciel qui va fournir le vecteur des tensions aux bornes s'obtient après la multiplication de (IV.26) par la matrice  $[N']$ :

$$[N'] [I] = [N'] [Y][U] + [N'] [I_g] = 0 \quad (\text{IV.28})$$

### La méthode des potentiels nodaux

La dimension du système peut être réduite si au lieu de garder comme inconnues toutes les tensions de branches, on introduit le potentiel nodal électrique comme nouvelle inconnue.

Les potentiels nodaux peuvent être obtenus à partir de tensions de branche, en tenant compte de l'orientation de la branche par rapport au noeud:

$$[U] = [N']^T [v] \quad (\text{IV.29})$$

où  $[v]$  est le vecteur des potentiels nodaux de dimension  $n$

En introduisant la relation (IV.29) dans (IV.28) on obtient le nouveau système à résoudre:

$$[N']^T [Y] [N'] [v] = -[N']^T [I_g] \quad (\text{IV.30})$$

### La méthode des potentiels nodaux intégrés

Cette méthode est basée sur la définition d'un potentiel nodal intégré dans le temps:

$$\Psi_i = \int_0^t v dt', \quad i = 1, n \quad (\text{IV.31})$$

Le vecteur des tensions de branches est donnée par:

$$[U] = [N']^T \frac{d}{dt} [\Psi] \quad (\text{IV.32})$$

En introduisant la relation (IV.32) dans (IV.30) on obtient le nouveau système à résoudre:

$$[N']^T [Y] [N']^T \frac{d}{dt} [\Psi] = -[N']^T [I_g] \quad (\text{IV.33})$$

En tenant compte de la définition de la matrice d'admittance  $[Y]$ , le système (IV.33) peut se mettre sous la forme:

$$[N'] [G] [N']' \frac{d}{dt} [\Psi] + [N'] [L]^{-1} [N']' [\Psi] + [N'] [C] [N']' \frac{d^2}{dt^2} [\Psi] = -[N'] [I_s] \quad (\text{IV.34})$$

avec  $[G]$  la matrices diagonale des conductances  
 $[L]^{-1}$  l'inverse de la matrice diagonale des inductances  
 $[C]$  la matrice diagonale des capacités

### 5.3. Choix de la méthode

Le choix de la méthode d'analyse du circuit électrique répond à deux exigences: faciliter la description du circuit pour l'utilisateur et réduire le temps de calcul.

Les logiciels existants sur le marché se distinguent en ce qui concerne la méthode d'analyse choisie. Ainsi, FLUX2D [Lombard-92] utilise la méthode des courants de mailles, MV2DYN [Brisset-95] est basé sur la méthode des potentiels nodaux, MSC/EMAS [Brauer-91] et MV3DYN [Perrin-94], [Dreher-94] utilisent la méthode des potentiels nodaux intégrés.

Comme on l'a déjà souligné, les méthodes des courants de mailles et des charges nécessitent la connaissance des mailles fondamentales du circuit. Les éventuelles modifications de la topologie du circuit (fermeture ou ouverture des interrupteurs) vont entraîner la modification des mailles et par conséquent, la reconstruction de la matrice symbolique du système. De plus, après la résolution du système, une nouvelle multiplication matricielle est nécessaire pour retrouver les courants de branche.

Les méthodes des potentiels nodaux et potentiels nodaux intégrés sont plus adaptées pour l'analyse des circuits électriques complexes, elles ne nécessitant pas d'algorithmes particuliers à mettre en oeuvre. Parmi les deux méthodes en potentiel nodal, la dernière semble plus cohérente avec le couplage des équations électromagnétiques-équations de circuit envisagé. En effet, le flux dans l'inducteur va être directement donné par la différence des potentiels nodaux intégrés aux bornes électriques de celui-ci.

Bien que nous ayons implanté deux méthodes: la méthode des courants de mailles et la méthode des potentiels nodaux intégrés dans le temps, nous avons particulièrement apprécié l'élégance et la simplicité de la dernière. C'est cette méthode qui a été finalement retenue. Dans la suite nous allons présenter quelques aspects pratiques de la réalisation du couplage équations de circuit - équations électromagnétiques.



## 6. Couplage de la méthode des potentiels nodaux intégrés avec les équations électromagnétiques. Aspects pratiques

L'ensemble du système à résoudre est composée des équations du potentiel vecteur magnétique, des équations des potentiels électriques intégrés dans le temps aux noeuds du circuit électrique et des équations exprimant la tension aux bornes des inducteurs bobinés.

Le système global se met sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} [S][A] - [C][I] = [0] \\ [C]' \frac{d[A]}{dt} + [R][I] - [N'][\Psi] = [0] \\ [N'][\dot{I}] + [N']G[N']' \frac{d}{dt}[\Psi] + [N']L^{-1}[N']'[\Psi] + [N']C[N']' \frac{d^2}{dt^2}[\Psi] = -[N'][I_s] \end{array} \right\} \quad (\text{IV.35})$$

avec:

$$S_{ij} = \int_{\Omega} \text{rot} \bar{W}_i \cdot \text{rot} \bar{W}_j \, d\Omega, \quad i = 1, \dots, n_{EF} \text{ et } j = 1, \dots, n_{EF}$$

$$C_{ik} = \int_{\Omega_k} \text{rot} \bar{W}_i \cdot \bar{K}_s \, d\Omega, \quad i = 1, \dots, n_{EF} \text{ et } k = 1, \dots, b$$

$n_{EF}$  et  $b$  étant respectivement le nombre de degrés de libertés du potentiel vecteur magnétique et le nombre d'inducteurs du circuit électrique  
 $[R]$  la matrice diagonale des résistances des inducteurs

Classiquement, les opérations matricielles se font sur chaque élément fini et la matrice et le sous-vecteur élémentaire seront assemblés dans la matrice globale. La méthode d'analyse choisie permet le traitement des éléments finis et des composants électriques de la même manière.

Après la phase d'intégration sur les éléments finis, on calcule la contribution de chaque composant électrique.

Dans la suite, nous allons donner l'expression de la contribution des composants principaux d'un circuit électrique.

**Composant PHASE** (Figure IV.3)

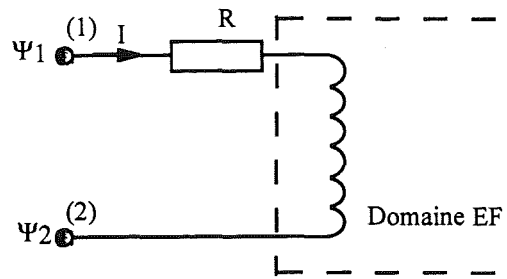


Fig. IV.3 Composant PHASE

La contribution matricielle de ce composant est:

$$\begin{bmatrix} [S] & -[C] & 0 & 0 \\ [C] \frac{d}{dt} & R & -\frac{d}{dt} & \frac{d}{dt} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ I \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

avec les matrices  $[S]$  et  $[C]$  déjà explicitées pour la relation (IV.35).

Les dérivées temporelles sont exprimées à l'aide de la méthode d'Euler implicite. Cela donne:

$$\begin{bmatrix} [S] & -[C] & 0 & 0 \\ \frac{I}{\Delta t} [C] & R & -\frac{I}{\Delta t} & \frac{I}{\Delta t} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ I \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ -\frac{I}{\Delta t} [C] [A]_{i-1} + \frac{I}{\Delta t} \Psi_{1i-1} - \frac{I}{\Delta t} \Psi_{2i-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

La matrice peut être rendu symétrique en multipliant la deuxième ligne par  $-\Delta t$ .

**Composant RESISTANCE** (Figure IV.4)

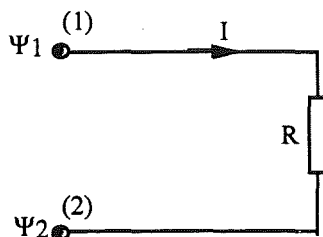


Fig. IV.4 Composant RESISTANCE

Pour déterminer la contribution du composant, on écrit l'expression du courant  $I$  dans les deux noeuds (1) et (2) de la résistance, en tenant compte de l'orientation par rapport aux noeuds:

$$\begin{aligned} \text{Au noeud} \quad (1) : +G \frac{d\Psi_1}{dt} - G \frac{d\Psi_2}{dt} &= 0 \\ (2) : -G \frac{d\Psi_1}{dt} + G \frac{d\Psi_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.38})$$

Sous forme matricielle, les relations (IV.38) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} +G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\Psi_1}{dt} \\ \frac{d\Psi_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

La discrétisation de la dérivé à l'aide de la méthode d'Euler implicite conduit a un système linéaire avec des termes source dérivés du pas de calcul précédent.

### Composant TRANSISTOR

Le transistor est un interrupteur commandé modélisé par une résistance qui peut prendre deux valeurs, en fonction de l'état de conduction du transistor. Les grandeurs caractéristiques sont:

- T - la période de fonctionnement
- T<sub>1</sub> - l'instant de la début de la commande
- T<sub>2</sub> - l'instant de fin de commande
- r - la résistance passante
- R - la résistance bloquée

Avant le calcul de la matrice du composant (IV.39), on détermine l'état de conduction du transistor.

**Composant INDUCTANCE** (Figure IV.5)

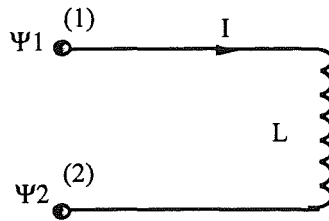


Fig. IV.5 Composant INDUCTANCE

Les équations des courants dans les noeuds (1) et (2) sont:

$$\begin{aligned} (1) : +\frac{I}{L}\Psi_1 - \frac{I}{L}\Psi_2 &= 0 \\ (2) : -\frac{I}{L}\Psi_1 + \frac{I}{L}\Psi_2 &= 0 \end{aligned} \tag{IV.40}$$

La contribution matricielle s'écrit:

$$\begin{bmatrix} +\frac{I}{L} & -\frac{I}{L} \\ -\frac{I}{L} & +\frac{I}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{IV.41}$$

**Composant CAPACITE** (Figure IV.6)

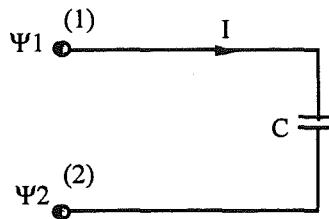


Figure IV.6 Composant CAPACITE

Les équations des courants dans les noeuds (1) et (2) sont:

$$\begin{aligned} (1) : +C\frac{d^2\Psi_1}{dt^2} - C\frac{d^2\Psi_2}{dt^2} &= 0 \\ (2) : -C\frac{d^2\Psi_1}{dt^2} + C\frac{d^2\Psi_2}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \tag{IV.42}$$

La contribution matricielle s'écrit:

$$\begin{bmatrix} +C & -C \\ -C & +C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2\Psi_1}{dt^2} \\ \frac{d^2\Psi_2}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

Ce système fait apparaître des équations du second ordre dans le temps. Une méthode simple, utilisant une approximation des dérivées par différences finies centrées peut être utilisée pour la discretisation de la dérivée.

### Composant DIODE (Figure IV.7)

L'état d'ouverture ou de fermeture de la diode dépend de la tension aux bornes du composant. Il peut être prédit, cas dans lequel un modèle bi-résistif est efficace [Pawlak-88]. Plus généralement, l'équation de la diode, reliant la tension aux bornes à l'état de conduction, doit être résolue d'une manière itérative [Piriou-88], [Dreher-94]. Nous avons choisi le modèle non-linéaire de la diode, basé sur la vérification et la correction de l'état de conduction lors des itérations de l'algorithme de Newton-Raphson.

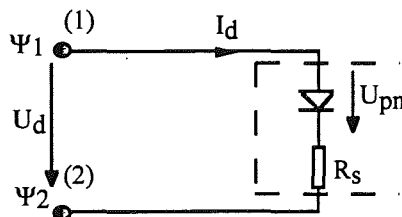


Figure IV.7 Circuit équivalent d'une diode réelle

Nous n'allons rappeler que les lignes générales de la méthode utilisée, celle-ci étant détaillée dans [Dreher-94].

Généralement, le courant  $I_d$  d'une diode est donné par:

$$I_d = I_s \left( \exp \left[ \frac{U_{pn}}{U_T} \right] - 1 \right) \quad (\text{IV.44})$$

Des valeurs typiques pour  $I_s$  et  $U_T$  sont:

$$\begin{aligned} I_s &= 1 \mu A \dots 1 mA \\ U_T &= 25 mV \end{aligned}$$

A l'itération  $i$  de la boucle Newton-Raphson, la matrice du composant s'écrit:

$$\begin{bmatrix} +G_d^{(i-1)} & -G_d^{(i-1)} \\ -G_d^{(i-1)} & +G_d^{(i-1)} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \Delta\Psi_1^{(i)} \\ \Delta\Psi_2^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_d^{(i-1)} \\ +I_d^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.45})$$

avec

$$G_d^{(i-1)} = \frac{I}{I/g_{pn}^{i-1} + R_s}$$

$$g_{pn}^{(i-1)} = \frac{dI_d^{(i-1)}}{dU_{pn}}$$

Sachant que la tension  $U_{pn}$  n'est pas directement fournie par le calcul, à chaque itération on doit résoudre l'équation non-linéaire suivante:

$$U_{pn} + R_s I(U_{pn}) = U_d \quad (\text{IV.46})$$

### Composant SOURCE DE COURANT

La contribution matricielle s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +I_g \\ -I_g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.47})$$

### Composant SOURCE DE TENSION

La méthode des potentiels nodaux intégrés ne permet pas la prise en compte directe des sources de tension. Celles ci peuvent être transformées en sources équivalentes de courant, conformément au théorème de Thévenin.

Une autre possibilité de prendre en compte les sources de tension est d'écrire la relation entre les potentiels nodaux intégrés et la tension électromotrice de la source:

$$\Psi_1 = \Psi_2 + \int_0^t U_s dt' \quad (\text{IV.48})$$

Le potentiel  $\Psi_1$  sera remplacé dans le système d'équations par l'expression (IV.48).

## 7. Validations numériques

Nous allons passer à la validation du couplage réalisé, sur un cas simple: une bobine à noyau ferromagnétique.

### *Description de la géométrie*

Le problème est constitué d'un circuit ferromagnétique excité par un inducteur filaire maillé (Fig. IV.8). Le circuit magnétique est en forme UI, avec un entrefer qui peut être varié. L'inducteur comporte 3100 spires et a une résistance mesurée en courant continu de  $63.9 \Omega$ . Le matériau du noyau est supposé non-linéaire avec la même courbe  $B(H)$  que celle de la figure III.18.

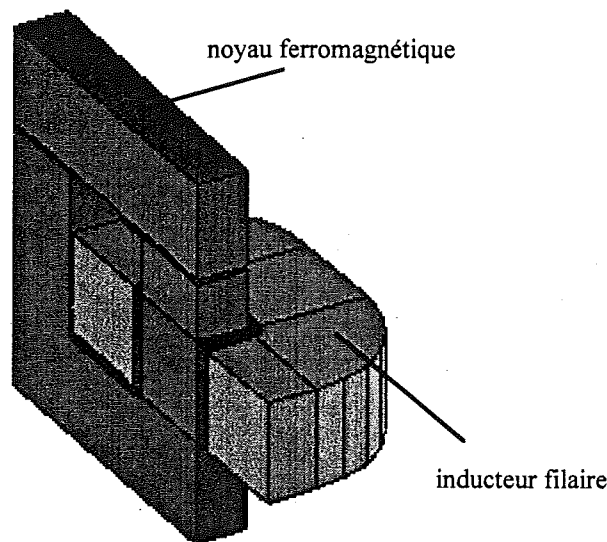


Figure IV.8 Géométrie du modèle

### *Méthodes de résolution*

Après la détermination numérique du vecteur de bobinage  $\vec{K}_s$  (cf. § IV.3), différentes simulations ont été effectuées.

Dans la première série, nous cherchons à valider le couplage réalisé en utilisant un circuit électrique très simple comportant une source de tension. Nous nous proposons de déterminer la réponse transitoire en courant de l'inducteur, sous une alimentation en créneau de tension d'amplitude 20V (Figure IV.9). Les calculs vont être effectués pour deux valeurs de l'entrefer.

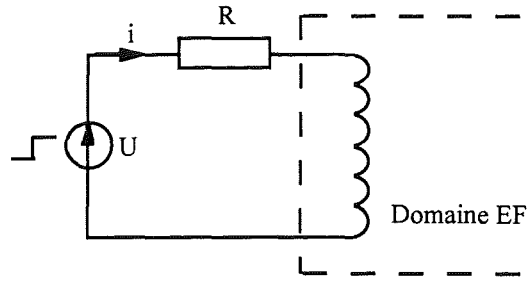


Fig. IV.9 Schéma d'alimentation pour le premier essai

Dans la deuxième série nous allons regarder qualitativement l'influence de la saturation du noyau magnétique sur la forme d'onde du courant. Le circuit d'alimentation est composé d'une source de tension sinusoïdale (Figure IV.10).

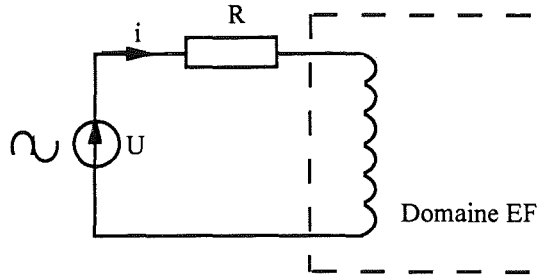


Fig. IV.10 Schéma d'alimentation pour le deuxième essai

Dans la troisième série d'essai, l'inducteur est alimenté à travers un circuit électrique plus compliqué (Figure IV.11), comportant un transistor de commande et une diode. Cet essai est destiné à valider les composants commandés (transistors) et surtout le modèle non-linéaire de la diode.

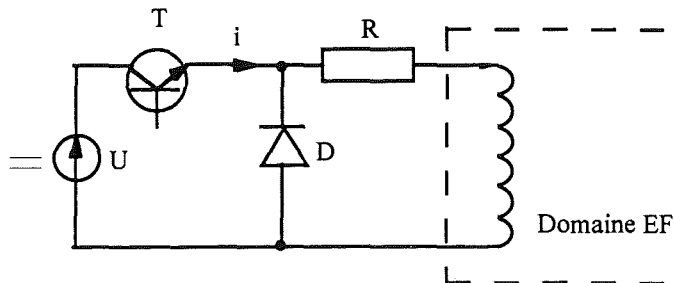


Fig. IV.11 Schéma d'alimentation pour le troisième essai



## Résultats

Avant de regarder les résultats, on peut se demander quelle est l'influence du couplage équations de circuit-équations magnétiques sur le conditionnement de la matrice. Pour le premier essai nous avons effectué plusieurs résolutions, les inconnues électriques étant placées soit en début de la matrice globale soit à la fin. Dans la troisième résolution, l'inducteur a été alimenté en courant, donc il n'y a pas de couplage avec les équations de circuit.

La figure IV.12 résume les caractéristiques de convergence de résolution du système matriciel pour ces essais.

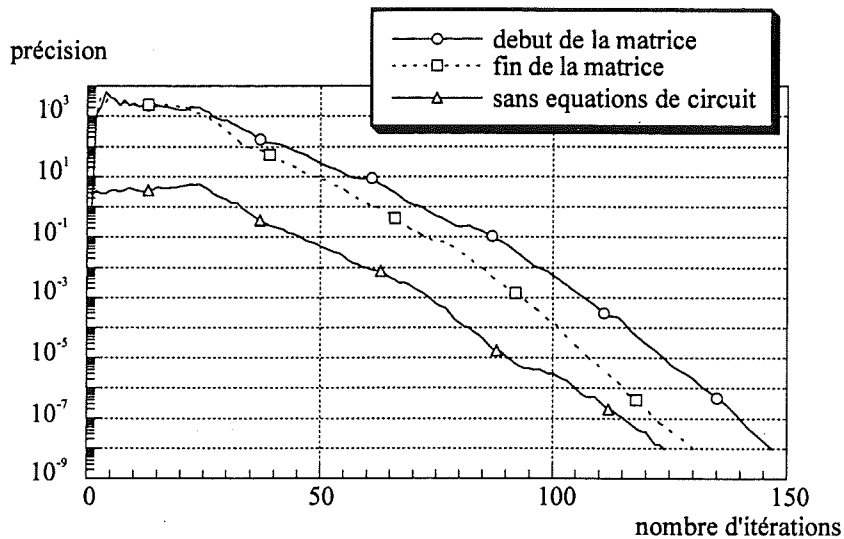


Fig. IV.12 Caractéristiques de convergence pour différentes positions dans la matrice globale des équations électriques

On s'aperçoit que par rapport au problème magnétostatique, sans couplage avec l'équation d'alimentation, l'introduction de nouvelles inconnues dégrade légèrement la vitesse de convergence. La dégradation est moins forte si on place ces inconnues à la fin de la matrice globale. Désormais, dans la phase de numérotations des inconnues, nous allons mettre toujours à la fin les inconnues électriques, à savoir les courants dans les inducteurs et les potentiels nodaux intégrés dans le temps.

Les figures IV.13 et IV.14 montrent le courant dans l'inducteur pour deux valeurs de l'entrefer du dispositif, 1 mm et respectivement 2 mm.

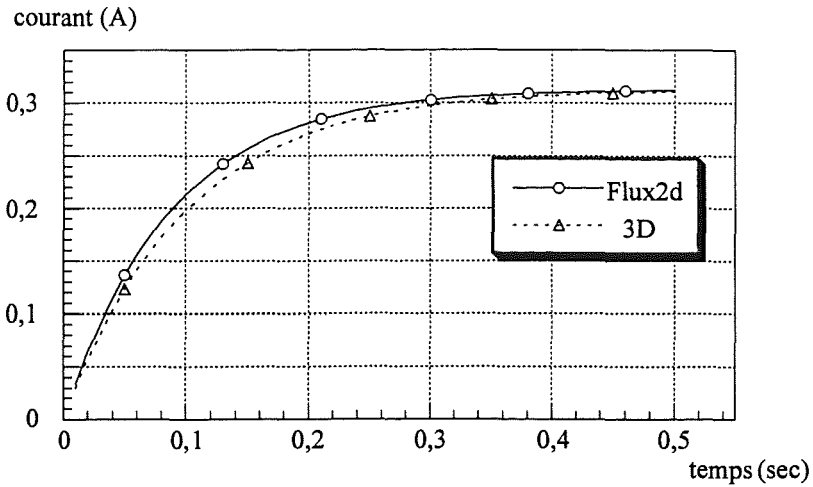


Fig. IV.13 Courant dans l'inducteur pour un entrefer de 1 mm

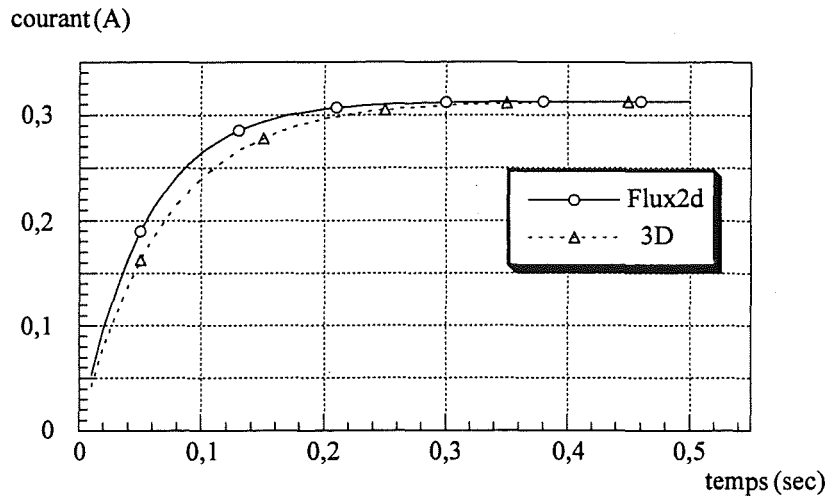


Fig. IV.14 Courant dans l'inducteur pour un entrefer de 2 mm

Des résultats de mesure ne sont pas disponibles. Afin de valider le couplage réalisé, on compare les résultats obtenus, noté 3D sur les Fig. IV.13 et IV.14, avec ceux donnés par FLUX2D<sup>®</sup>, en considérant une approximation bidimensionnelle du problème traité. La différence entre les résultats est due au flux créé par la tête de l'inducteur, qui n'est pas pris en compte par le modèle bidimensionnel. Pour le cas tridimensionnel le flux dans l'inducteur est plus important, donc la constante de temps plus grande.

Dans la deuxième série d'essai, nous avons alimenté l'inducteur avec une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz et d'amplitude 200 V, dans un premier temps, et ensuite en augmentant l'amplitude jusqu'à 250 V. La figure IV.15 montre la forme d'onde de la tension d'alimentation ainsi que le courant qui en résulte. Le matériau n'est pas encore saturé. La saturation

n'intervient qu'au début de la mise sous tension, quand le courant est 4,5 fois plus grand que le courant établi au régime permanent.

En augmentant l'amplitude de la tension à 250 V, on obtient la saturation du matériau, même en régime permanent. (Fig. IV.16).

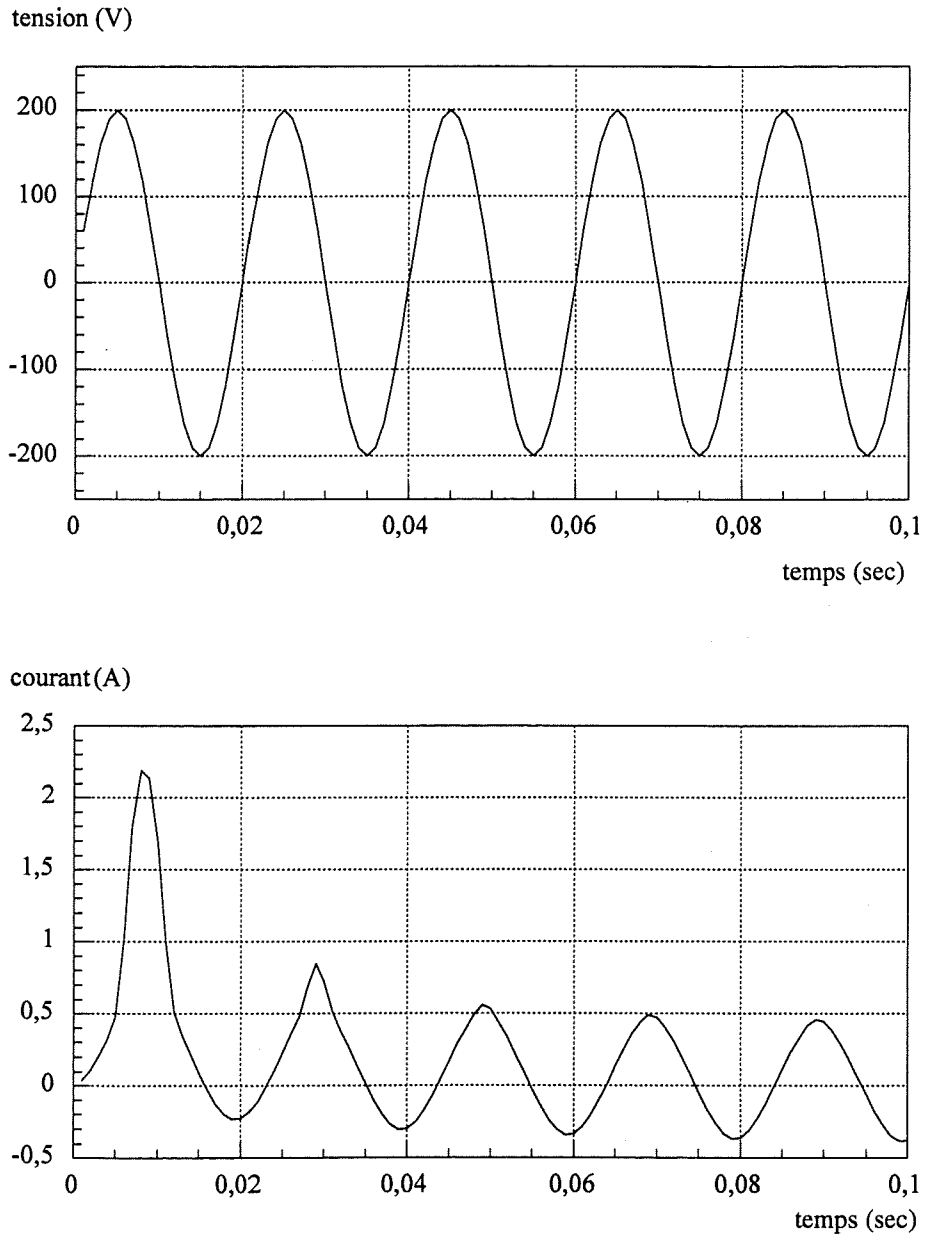


Fig. IV.15 Tension d'alimentation et courant dans l'inducteur

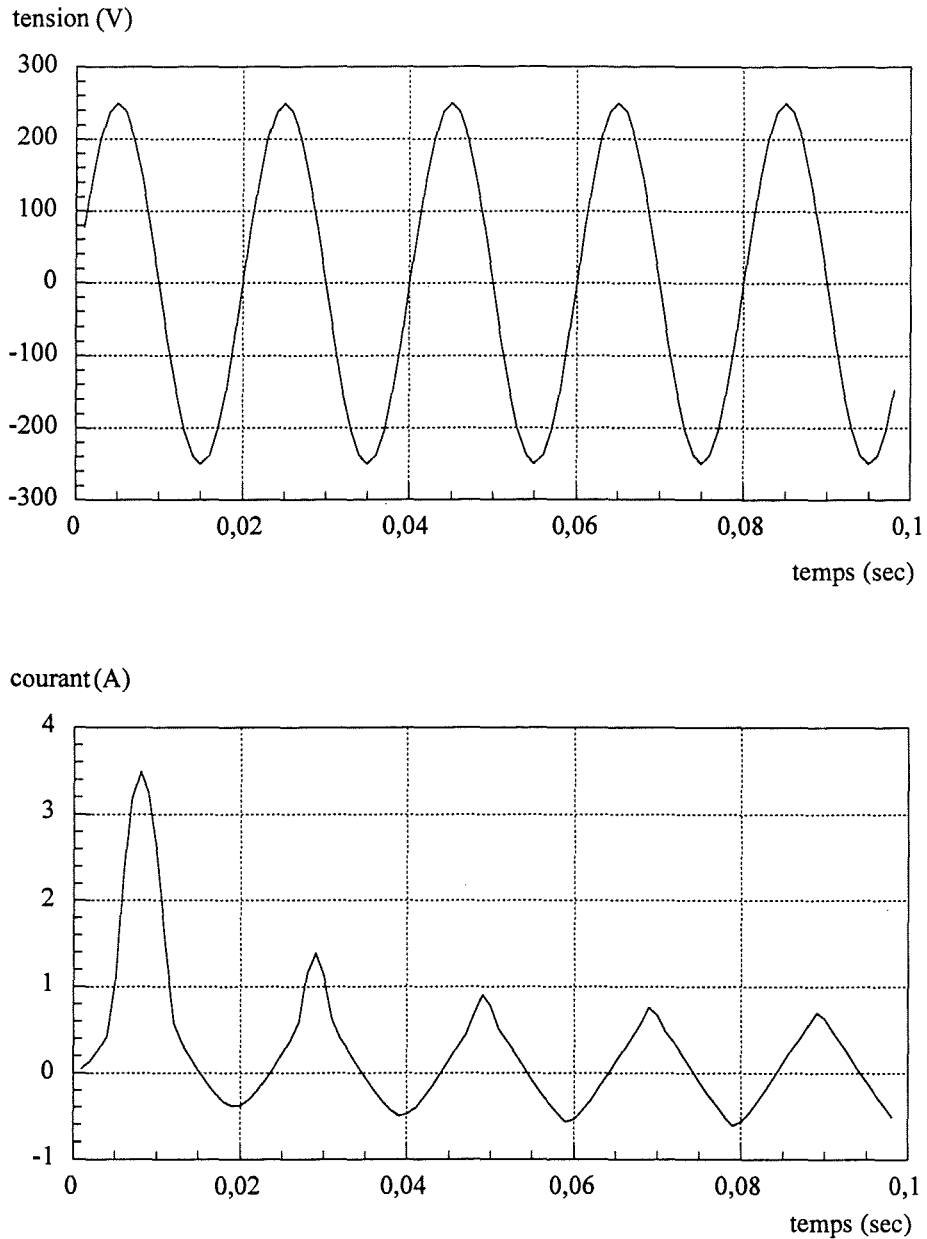


Fig. IV.16 Tension d'alimentation et courant dans l'inducteur

Dans la troisième série d'essai, l'inducteur a été alimenté à travers un hacheur. La tension est constante, d'amplitude 20 V, et le facteur cyclique de commande vaut 0,75. Dans les figures IV.17, IV.18 et IV.19 on montre respectivement le courant dans l'inducteur, le courant dans le transistor et le courant dans la diode. On constate qu'une fois le transistor bloqué, c'est la diode qui entre en conduction.

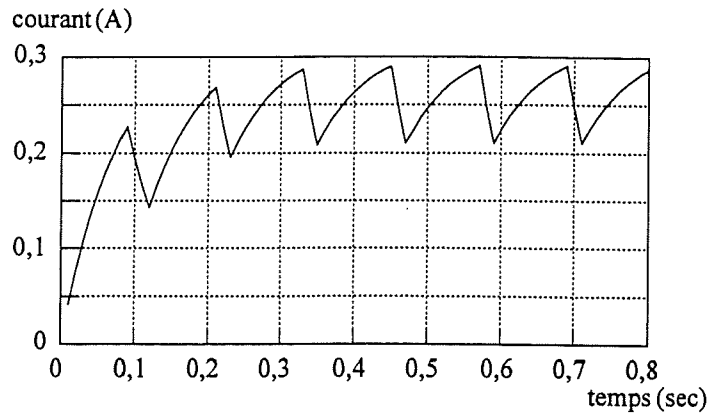


Fig. IV.17 Courant dans l'inducteur

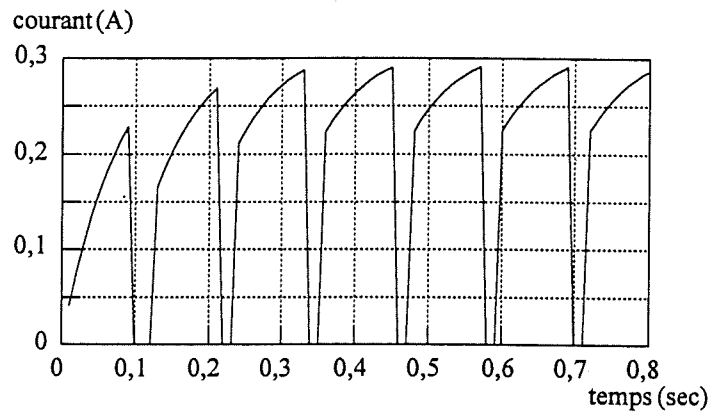


Fig. IV.18 Courant dans le transistor de commande

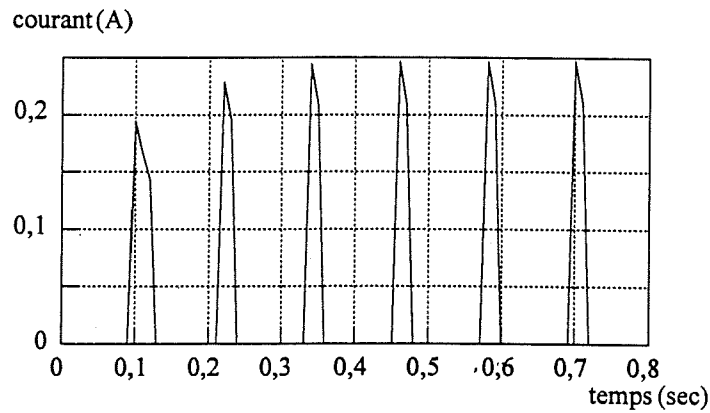


Fig. IV.19 Courant dans la diode

### Conclusion des validations numériques

Les différentes phases de simulation nous ont permis de valider le couplage réalisé et les divers composants électriques que l'on peut rencontrer dans la pratique, notamment les transistors et

les diodes. D'autre part, à l'aide de ces essais nous avons déterminé le comportement de la convergence en fonction de la position des équations de circuit dans la matrice globale. On peut conclure que le couplage avec les équations de circuit détériore légèrement le conditionnement de la matrice globale par rapport à la résolution magnéto-statique et que le meilleur comportement numérique est obtenu si on place les inconnues électriques à la fin de la matrice.

## **8. Conclusion**

Afin de réaliser le couplage avec les équations de circuit, nous avons sélectionné parmi les méthodes connues celle qui nous a paru la plus adaptée pour les problèmes tridimensionnels réels, comportant des circuits d'alimentation complexes. La méthode de la résolution simultanée des équations magnétiques et électriques a été adaptée à la formulation en potentiel vecteur magnétique, basée sur l'interpolation mixte, afin de préserver la compatibilité de la formulation non-jaugée.

D'autre part, la méthode de potentiels nodaux intégrés dans le temps permet de garder le même traitement pour l'intégration sur les éléments finis et sur les composants électriques.

Enfin, un exemple significatif nous a permis de valider entièrement le couplage réalisé.

## **Chapitre V**

### **Prise en compte du mouvement**





## 1. Introduction

Les dispositifs électrotechniques et notamment les convertisseurs électromécaniques (machines et actionneurs électriques) peuvent comporter des parties en mouvement. La modélisation numérique de tels systèmes nécessite donc le développement des techniques permettant la prise en compte du mouvement, que ce soit de rotation, pour les machines électriques, ou de translation, pour les électroaimants.

Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories, une appelée directe, basée sur l'utilisation d'un seul référentiel indépendant de la position de la partie mobile et l'autre basée sur l'utilisation de deux référentiels, un lié à la partie mobile et l'autre à la partie fixe. Parmi ces dernières méthodes on peut énumérer les méthodes de remaillage local, le macro-élément, le couplage avec les intégrales de frontière, la connexion par interpolation nodale et la méthode basée sur les multiplicateurs de Lagrange.

Dans un premier temps, nous allons passer en revue les techniques classiques utilisées: les méthodes de remaillage de l'entrefer et les méthodes intégrale. Ensuite, nous allons étudier quelques méthodes permettant la prise en compte du mouvement, et ceci, dans le contexte des éléments mixtes.

Ce chapitre se terminera sur l'analyse critique des méthodes étudiées sur des cas-tests qui vont nous permettre de choisir celle la mieux adaptée aux éléments mixtes.

## 2. Etat de l'art

Les principales méthodes qui ont été proposées jusqu'à présent pour la prise en compte du mouvement sont:

- la méthode directe par ajout du terme de transport dans l'équation du champ électrique en 2D et 3D
- le remaillage local de l'entrefer en 2D et 3D (ou la bande de roulement)
- le couplage avec les intégrales de frontière en 2D
- le macroélément en 2D
- la connexion par interpolation nodale en 3D
- le couplage d'interface par multiplicateurs de Lagrange

Nous allons passer rapidement en revue ces méthodes, en soulignant les particularités de chacune.

### 2.1. La méthode directe

Pour les structures simples, ayant la partie mobile homogène et invariante par le déplacement, le mouvement peut être prise en compte dans l'équation du champ électrique par l'introduction du terme de transport  $\vec{v} \times \vec{B}$ .

Supposons que la région conductrice se déplace à une vitesse constante  $\vec{v}$ . Soit R' le référentiel local attaché à cette région et R le référentiel global, fixe. Dans les hypothèses non-relativistes, le passage d'un repère à l'autre se fait par les transformations suivantes:

$$\vec{H} = \vec{H}' \quad (\text{V.1})$$

$$\vec{D} = \vec{D}' \quad (\text{V.2})$$

$$\vec{B} = \vec{B}' \quad (\text{V.3})$$

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{V.4})$$

$$\vec{J} = \vec{J}' \quad (\text{V.5})$$

Nous avons noté  $\vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{E}$  et  $\vec{J}$  les grandeurs exprimées dans le repère fixe R et  $\vec{H}', \vec{D}', \vec{B}', \vec{E}'$  et  $\vec{J}'$  les grandeurs exprimées dans le repère local en mouvement R'.

Les équations du champ sont résolues dans le repère fixe R, en tenant compte des relations de transformations. Nous nous contentons de n'explicitier que le cas des problèmes magnétostatiques (terme  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  négligé).

Dans la région fixe on résout l'équation:

$$\text{rot}(\nabla \text{rot} \vec{A}) = \vec{J} \quad (\text{V.6})$$

Dans la région conductrice mobile on résout l'équation:

$$\text{rot}(\nabla \text{rot} \vec{A}) - \sigma(\vec{v} \times \text{rot} \vec{A} - \text{grad} V) = \vec{0} \quad (\text{V.7})$$

Au passage entre les deux régions il convient d'assurer les conditions de continuité requises.

L'application de cette méthode s'avère délicate. La matrice du système obtenu après la discretisation en éléments finis n'est pas symétrique. En plus, il est recommandable d'utiliser des fonctions de pondération décentrées (méthode de type Petrov-Galerkin), et de mailler les régions conductrices en hexaèdres orientés dans la direction de la vitesse [Maréchal-91].

## 2.2. Remaillage locale de l'entrefer (bande de roulement)

Proposé tout d'abord en 2D [Davat-85][Vassent-90] cette méthode est basée sur le remaillage de l'entrefer à chaque fois qu'il y a un déplacement du maillage rotorique (Fig. V.1).

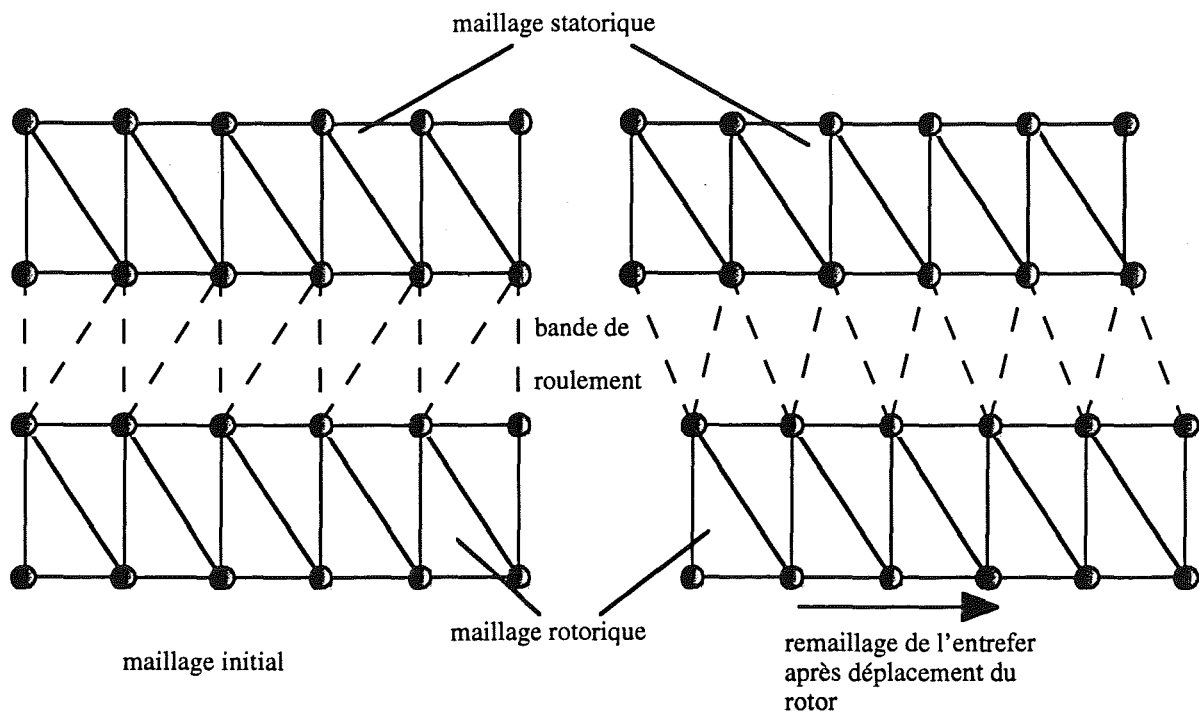


Fig. V.1 Remaillage local de l'entrefer

La couche d'éléments séparant la partie mobile et la partie fixe s'appelle bande de roulement. A chaque déplacement de la partie mobile, la bande de roulement est démaillée, les noeuds du maillage du rotor sont déplacés de l'angle imposé et la bande de roulement est remaillée.

L'avantage de la méthode est qu'elle permet d'avoir un nombre de noeuds différents de part et d'autre de la bande, ce qui rend le processus de maillage plus souple, avec la possibilité d'une densité de maillage optimale. En revanche, la solution peut être bruitée à cause de la variation discontinue de la topologie du problème. L'application de la méthode aux problèmes 3D est délicate; la tâche est facilitée si les maillages réglés sont utilisés.

### 2.3. Macro-élément

Cette méthode, proposée dans [Razek-82], est basée sur l'expression analytique du champ dans l'entrefer. L'entrefer n'est pas maillé, il est vu comme un seul éléments fini, possédant des noeuds sur la partie fixe et mobile (Fig. V.2).

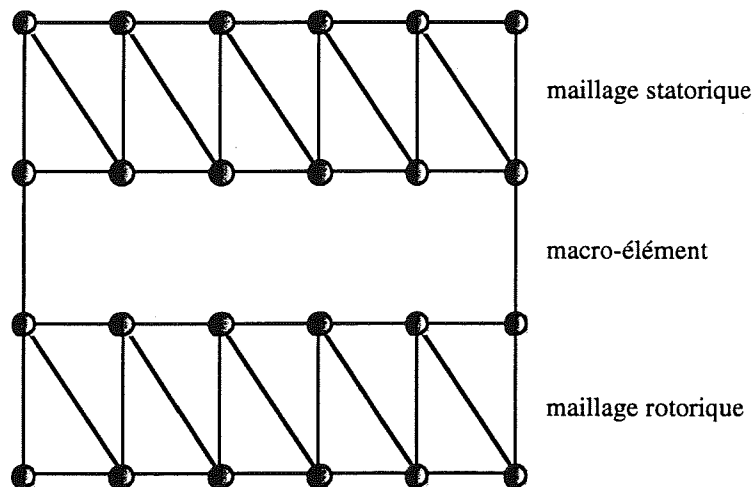


Fig. V.2 Macro-élément

Sachant que dans l'entrefer le potentiel vecteur  $A$  vérifie l'équation de Laplace:

$$\Delta A = 0 \quad (V.8)$$

on peut déterminer analytiquement les fonctions de forme du macro-élément pour les géométries de formes simples.

Cette méthode a été appliquée avec succès sur les problèmes 2D. Elle présente des avantages considérables tant au niveau de la qualité de la solution dans l'entrefer qu'au niveau de la réalisation du maillage. En effet, l'entrefer qui pose tant de problèmes de maillage, n'est plus

maillé. Cependant, la matrice perd son caractère creux du fait que les degrés de liberté du macro-élément sont interconnectés et la largeur de bande est localement augmentée. Si en 2D cette augmentation de la bande est tout à fait acceptable, en 3D elle s'avère totalement déraisonnable, conformément aux estimations faites dans [Perrin-94].

## 2.4. Couplage avec les intégrales de frontière

La méthode a été proposée pour la modélisation 2D des parties en mouvement [Bouillault-88]. Sachant que l'équation à résoudre dans l'entrefer est obtenue en minimisant la fonctionnelle suivante:

$$F(A_c) = \frac{v}{2} \int_{\Gamma_c} A_c \frac{\partial A_c}{\partial n} dl \quad (\text{V.9})$$

on se propose de déterminer la dérivée normale du potentiel vecteur  $A_c$  sur le bord de l'entrefer noté  $\Gamma_c$  en fonction des valeurs nodales, à l'aide de la méthode des intégrales de frontière ou à une méthode appelé de Trefftz.

En écrivant que:

$$A_c = \sum_{i=1}^m N_i \beta_i \quad (\text{V.10})$$

où  $N_i$  sont des fonctions harmoniques satisfaisant l'équation de Laplace

$\beta_i$  sont des coefficients sans signification particulière

$m$  est le nombre de noeuds sur la frontière  $\Gamma_c$

La dérivée  $\frac{\partial A_c}{\partial n}$  est donnée par l'expression:

$$\frac{\partial A_c}{\partial n} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial n} \beta_i \quad (\text{V.11})$$

Les coefficients  $\beta_i$  peuvent être déterminés soit par une méthode de type intégrale de frontière, soit par une méthode de collocation pour les noeuds du maillage.

Cette méthode présente le même point fort que le macroélément, à savoir la qualité de la solution dans l'entrefer. En même temps elle est plus générale, car elle peut s'appliquer sur les géométries de formes quelconques. En 3D elle paraît difficilement applicable à cause de l'augmentation considérable de la largeur de bande.

## 2.5. Connexion par interpolation nodale

Cette méthode, proposée dans [Perrin-94] s'appuie sur l'interpolation de maillage. La géométrie est divisée en deux maillages distincts, le maillage fixe, correspondant aux parties statiques et le maillage mobile, qui regroupe le rotor et l'entrefer (Fig. V.3). La zone de connexion est l'interface entre le maillage mobile et le maillage fixe.

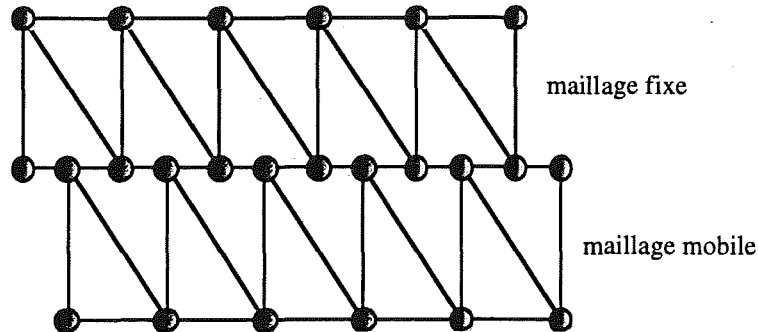


Fig. V.3 Connexion par interpolation nodale

Pour chaque noeud de l'interface de couplage du côté mobile on détecte la position dans l'élément volumique appartenant au maillage fixe.

Utilisant les fonctions d'interpolation de l'élément volumique trouvé, on peut écrire que le potentiel vecteur au noeud mobile  $j$  est :

$$\vec{A}_j = \sum_{i=1}^m N_i \vec{A}_i \quad (\text{V.12})$$

où  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation nodale de l'élément volumique fixe  
 $\vec{A}_i$  sont les valeurs nodales du potentiel vecteur de l'élément volumique fixe  
 $m$  est le nombre de degré de noeuds de l'élément volumique fixe

L'inconnue  $\vec{A}_j$  va être substituée dans le système matriciel par la combinaison linéaire (V.12).

La méthode présente plusieurs avantages:

- elle garde l'aspect symétrique de la matrice; la bande  $n$ 'est pas augmentée localement et le conditionnement de la matrice  $n$ 'est pas détérioré.
- la topologie du système varie de façon continue en fonction de l'angle de rotation.

En revanche, la continuité de la variable d'état n'est assurée qu'en moyenne. Pour cette raison, il est recommandable d'avoir un maillage homogène de part et d'autre de l'interface de connexion.

## 2.6. Connexion par multiplicateurs de Lagrange

Afin de restaurer les continuités physiques à l'interface entre deux maillages non-conformes, une nouvelle fonctionnelle  $F'$  est rajoutée à la fonctionnelle d'énergie  $F(A)$  qui correspond au phénomène physique. Pour une formulation en potentiel vecteur magnétique, la fonctionnelle  $F'(A, \lambda)$  s'écrit [Maréchal-91]:

$$F'(A, \lambda) = \int_{\Gamma} \bar{\lambda} \cdot (\bar{A}_1 - \bar{A}_2) d\Gamma \quad (\text{V.13})$$

Le processus de minimisation de la fonctionnelle totale  $F(A) + F'(A, \lambda)$  permet l'identification des multiplicateurs de Lagrange comme étant les composantes tangentielles  $\bar{H}_t$  du champ magnétique. Deux approches peuvent être considérées. Soit les multiplicateurs  $\bar{\lambda}$  sont éliminés de la fonctionnelle (V.13) remplacés par  $\bar{H}_t$ , soit ils sont considérés comme inconnues du système et interpolés séparément.

Dans [Maréchal-91] l'auteur a choisi la première approche, en substituant  $\bar{\lambda}$  par l'expression:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\bar{H}_{t1} + \bar{H}_{t2}) \quad (\text{V.14})$$

où  $\bar{H}_{t1}$  et  $\bar{H}_{t2}$  est le champ tangentiel de part et de l'autre de l'interface, et ceci afin de donner un poids identique aux deux côtés de la frontière.

La méthode a été testée sur des problèmes 2D, faisant apparaître quelques difficultés d'applications. Il s'agit notamment du fait que la matrice du système n'est plus positive définie, ce qui fait que les méthodes itératives usuelles de résolution ne sont plus efficaces. L'auteur a adopté une technique spécifique, qui consiste à renuméroter en haut de la matrice globale tous les noeuds rattachés aux éléments qui touchent l'entrefers et de faire une décomposition complète de cette partie de la matrice.

D'autres expériences avec les multiplicateurs de Lagrange ont été également réalisées par Lai [Lai-96] et Rodger [Rodger-90], dans une formulation en potentiel scalaire.



### 3. Méthodes de connexion spécifiques aux éléments mixtes

Jusqu'à présent, très peu de travaux sur ce sujet ont été publiés. On peut citer un article sur la modélisation d'une machine à réluctance variable [Yamakushi-96] où les auteurs utilisent une méthode de remaillage de l'entrefer. La même méthode est utilisée pour la modélisation du mouvement d'un moteur asynchrone par [Boualem-97]. Une thèse récente [Gasmi-96] utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange, telle qu'elle a été introduite dans [Maréchal-91]. Malheureusement, on y trouve peu d'indications sur le comportement tant au niveau de la convergence qu'au niveau des résultats de la méthode.

Dans ce qui suit, nous allons étudier donc quelques méthodes de connexion spécifiques aux éléments mixtes.

#### 3.1. Méthode basée sur les multiplicateurs de Lagrange

La méthode telle qu'elle est décrite dans [Maréchal-91] est très générale, elle peut être appliquée aussi bien dans le cas de l'interpolation nodale que dans le cas de l'interpolation mixte, pour n'importe quel ordre.

Deux approches vont être considérées. Dans un premier cas, les multiplicateurs de Lagrange seront éliminés de la fonctionnelle, grâce à la relation (V.14). Ensuite, les multiplicateurs de Lagrange seront gardés dans la fonctionnelle et interpolés séparément.

##### 3.1.1. Multiplicateurs éliminés de la fonctionnelle

La fonctionnelle totale à minimiser s'écrit:

$$F_1(A) = \int_{\Omega} \left( \int_0^{\vec{B}} \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) - \vec{J} \cdot \vec{A} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (-\nu_1 \text{rot} \vec{A}_1 \times \vec{n}_1 + \nu_2 \text{rot} \vec{A}_2 \times \vec{n}_2) (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) d\Gamma \quad (\text{V.15})$$

où  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont les normales extérieures aux régions à raccorder

$\nu_1$  et  $\nu_2$  sont les réluctivités respectives des régions à raccorder

La minimisation de la fonctionnelle (V.15) conduit au système matriciel symétrique, défini sous forme variationnelle par:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \delta \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{J}} \cdot \delta \bar{\mathbf{A}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (-\mathbf{v}_1 \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}_1 \times \bar{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{v}_2 \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}_2 \times \bar{\mathbf{n}}_2) (\delta \bar{\mathbf{A}}_1 - \delta \bar{\mathbf{A}}_2) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (-\mathbf{v}_1 \operatorname{rot} \delta \bar{\mathbf{A}}_1 \times \bar{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{v}_2 \operatorname{rot} \delta \bar{\mathbf{A}}_2 \times \bar{\mathbf{n}}_2) (\bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2) d\Gamma = 0 \quad (\text{V.16})$$

Sachant que le potentiel vecteur  $\bar{\mathbf{A}}$  est interpolé à l'aide des fonctions de base mixtes  $\bar{W}_i$ , le système sous forme discrète est obtenu immédiatement, et pour cette raison il n'est pas explicite.

### 3.1.2. Multiplicateurs gardés dans la fonctionnelle

Dans ce cas, la fonctionnelle totale à minimiser s'écrit:

$$F_1(A) = \int_{\Omega} \left( \int_0^{\bar{\mathbf{B}}} \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{A}} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\lambda} \cdot (\bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2) d\Gamma \quad (\text{V.17})$$

Le processus de minimisation conduit au système défini sous forme variationnelle par:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \delta \bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{J}} \cdot \delta \bar{\mathbf{A}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\lambda} \cdot (\delta \bar{\mathbf{A}}_1 - \delta \bar{\mathbf{A}}_2) d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta \bar{\lambda} \cdot (\bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2) d\Gamma = 0 \quad (\text{V.18})$$

Les multiplicateurs  $\bar{\lambda}$  seront interpolés séparément, ce qui va augmenter le nombre d'inconnues dans le système matriciel.

### 3.1.3. Difficultés pratiques dans l'évaluation des matrices élémentaires

Les intégrales surfaciques en (V.16) et (V.18) font intervenir des fonctions polynomiales définies par morceaux sur des domaines différents, à cause de la non-conformité du maillage. Ainsi, le calcul exact des intégrales surfaciques doit passer par le sous-découpage des maillages sur l'interface. Dans la pratique, comme ce découpage est relativement complexe à réaliser, on préfère un calcul approché par approximation polynomiale, ce qui demande une augmentation de nombre de points de Gauss sur la face de l'élément servant de support d'intégration.

### 3.1.4. Validations numériques

Pour analyser les deux approches différentes de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et pour mettre en évidence les contraintes d'applications de cette méthode, nous allons traiter un cas test simple. Il s'agit d'une région parcourue par un courant continu, dirigé suivant l'axe  $z$ , collée à une autre région, qui peut être de l'air ou un matériau ferromagnétique (Fig. V.4). Sur l'interface commune, les deux régions sont raccordées par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

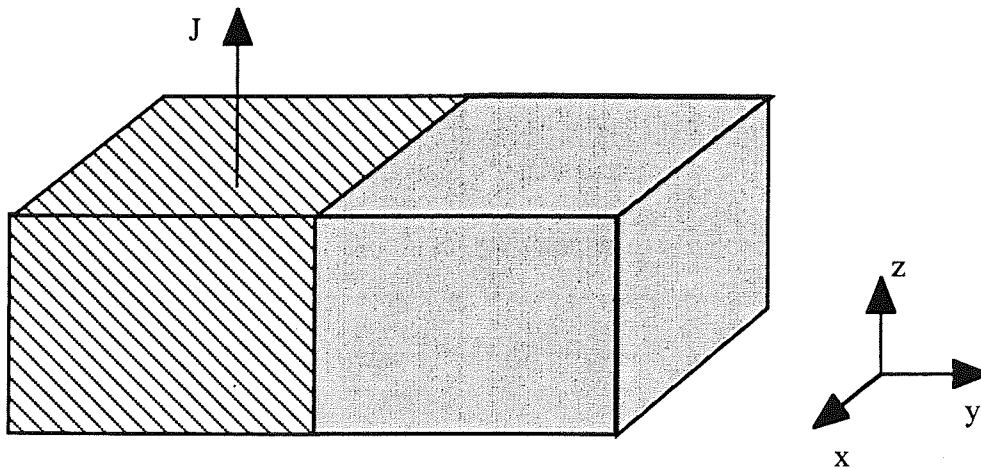


Fig. V.4 Géométrie du cas test

On peut imaginer que cette structure soit périodique suivant l'axe  $y$  et infinie suivant les axes  $x$  et  $z$ . Ainsi, des conditions aux limites de type champ tangentiel peuvent être imposées sur toutes les frontières.

Plusieurs essais numériques ont été effectués, les différents cas étant résumés ci-dessous:

- Cas 1: les deux régions sont maillées en éléments hexaédriques mixtes du premier ordre incomplet. Le maillage est grossier et conforme. ( Fig. V.5). La perméabilité des régions est égale a celle de l'air.
- Cas 2: l'essai est effectué dans les mêmes conditions que le premier, à la différence que le maillage est non-conforme (Fig. V.6).
- Cas 3: un maillage hexaédrique non-conforme plus fin est utilisé. La perméabilité des régions est égale a celle de l'air. (Fig. V.7)

Cas 4: pour le même maillage que dans le cas précédent, le matériau de la région non-conductrice est considéré ferromagnétique.

Cas 5: un maillage mélangé hexaèdres - tétraèdres est utilisé. Les perméabilités de deux régions sont égales.(Fig. V.8)

Pour chaque essai numérique on fournit les données de résolutions, les caractéristiques de convergence et l'erreur relative globale sur l'interface, définie par:

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left| \int_{\Gamma_1} (\vec{n}_1 \times \vec{A}_1) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} (\vec{n}_2 \times \vec{A}_2) d\Gamma_2 \right|}{\left| \int_{\Gamma_1} (\vec{n}_1 \times \vec{A}_1) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (\vec{n}_2 \times \vec{A}_2) d\Gamma_2 \right|} \quad (\text{V.19})$$

De plus, chaque cas a été résolu deux fois, en utilisant les différentes approches de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

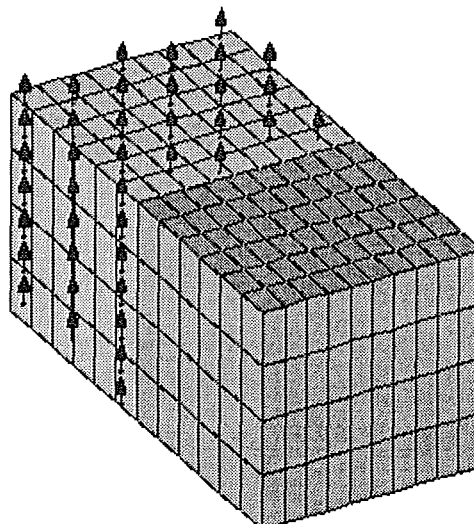
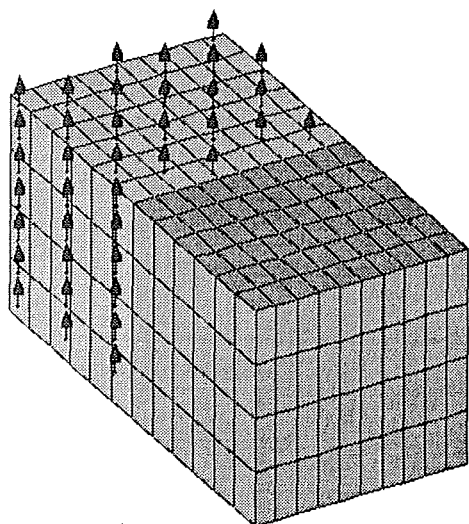


Fig. V.5 Maillage et courant source pour le cas no. 1

Fig. V.6 Maillage et courant source pour le cas no. 2

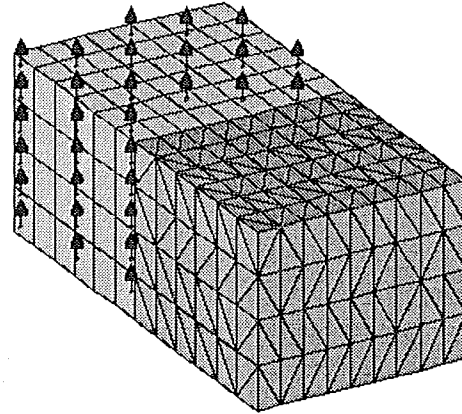
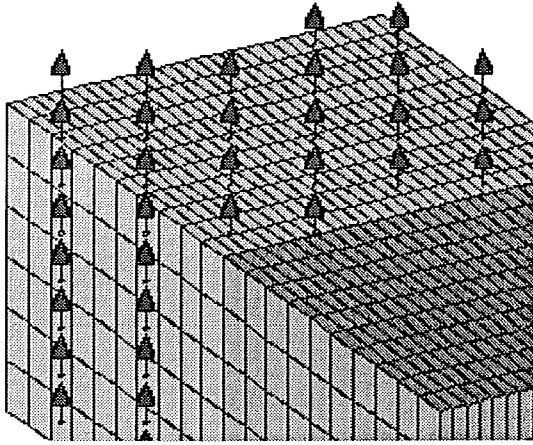


Fig. V.7 Maillage et courant source pour le cas no. 3

Fig. V.8 Maillage et courant source pour le cas no. 5

### Cas 1. Maillage hexaédrique conforme. Les régions ont la même perméabilité

Cet essai permet de mettre en évidence le comportement numérique de la méthode sur un cas très favorable, le maillage des deux régions étant conforme sur l'interface de raccordement.

Le tableau V.1. résume les caractéristiques de résolution et l'erreur relative sur l'interface pour les deux approches de la méthode.

Tableau V.1. Caractéristiques de résolution et erreur relative pour le cas no. 1

	Multiplicateurs éliminés	Multiplicateurs gardés
Nombre d'inconnues	1116	1304
Nombre de termes non-nuls	19057	28213
Nombre d'éléments	480	480
Erreur relative (%)	3,5	0,45

Les figures V.9 et V.10 montrent respectivement les caractéristiques de convergence pour les deux approches considérées, en utilisant plusieurs techniques de résolution du système linéaire (cf. Annexe 1). On s'aperçoit que le solveur ICCG n'est pas du tout adapté à ce type de matrice, qui n'est plus définie positive. D'autres techniques se révèlent plus performantes, notamment la méthode du résidu minimum et la méthode du gradient conjugué avec un préconditionnement diagonal (noté Evans sur la figure V.9).

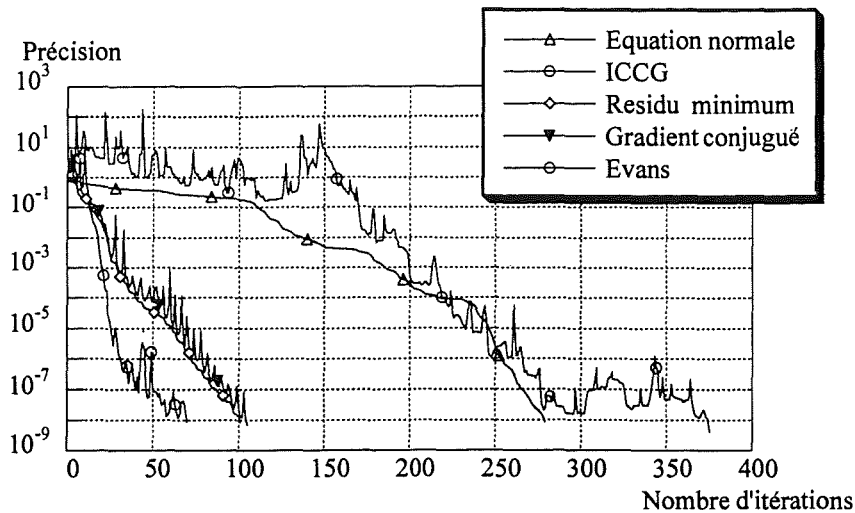


Fig. V.9 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs éliminés du système

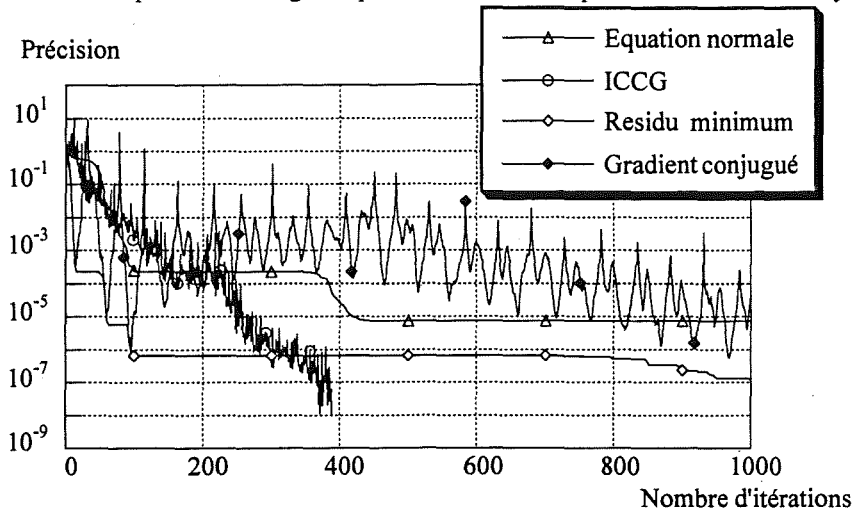


Fig. V.10 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs gardés dans le système

Les caractéristiques de convergence dans le cas où les multiplicateurs sont éliminés du système sont nettement supérieures à celles de la deuxième méthode. Cela s'explique par le fait que l'introduction d'une nouvelle variable de type champ magnétique parmi des inconnues de type potentiel dégrade fortement le conditionnement de la matrice.

Les figures V.11 et V.12 montrent respectivement la composante tangentielle du potentiel vecteur sur la surface de raccordement entre les deux régions. Comme l'erreur globale relative le montre, la première méthode est moins précise, ce qui s'explique par le fait que les multiplicateurs de Lagrange ne sont connus qu'à l'ordre 0, à la différence de la deuxième, où les multiplicateurs sont connus à l'ordre 1.

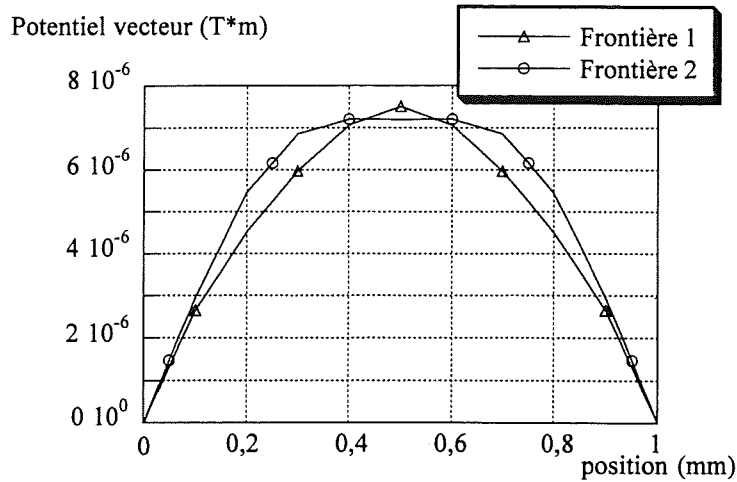


Fig. V.11 Composante tangentielle du potentiel vecteur de deux cotés de l'interface de raccordement (cas des multiplicateurs éliminés)

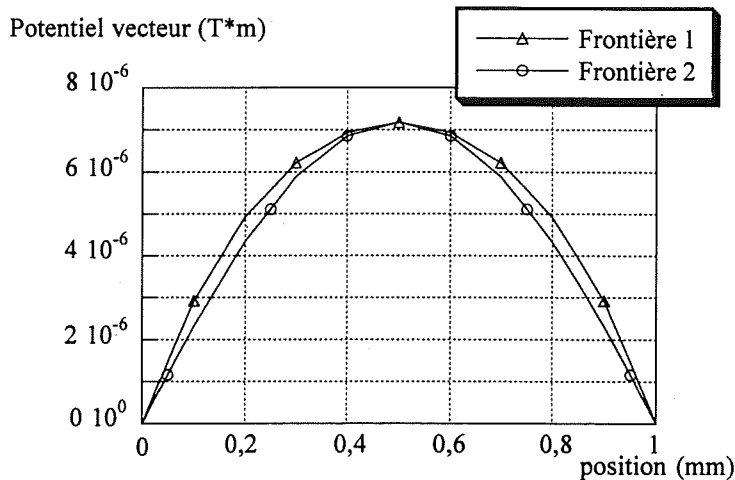


Fig. V.12 Composante tangentielle du potentiel vecteur de deux cotés de l'interface de raccordement (cas des multiplicateurs gardés)

### Cas 2. Maillage hexaédrique non-conforme. Les régions ont la même perméabilité

L'essai précédent nous a permis de constater que même pour le cas d'un maillage conforme, la convergence des solveurs usuels tel que ICCG n'est pas immédiate. On peut se demander si l'application de la méthode sur un exemple où le maillage n'est pas conforme, va encore dégrader le processus de convergence. Pour cela, on considère le cas de l'exemple précédent, mais avec un maillage différent dans les deux régions, ce qui fait qu'à l'interface de raccordement le maillage est non-conforme.

Le tableau V.2 résume les caractéristiques de résolutions et l'erreur globale obtenue sur l'interface. Les figures V.13 et V.14 montrent respectivement les caractéristiques de convergence et les figures V.15 et V.16 la composante tangentielle du potentiel vecteur sur l'interface de connexion des deux cotés, pour les deux approches différentes de la méthode.

Tableau V.2. Caractéristiques de résolution et erreur relative pour le cas no. 2

	Multiplicateurs éliminés	Multiplicateurs gardés
Nombre d'inconnues	1056	1235
Nombre de termes non-nuls	18938	28820
Nombre d'éléments	456	456
Erreur relative (%)	3,55	0,42

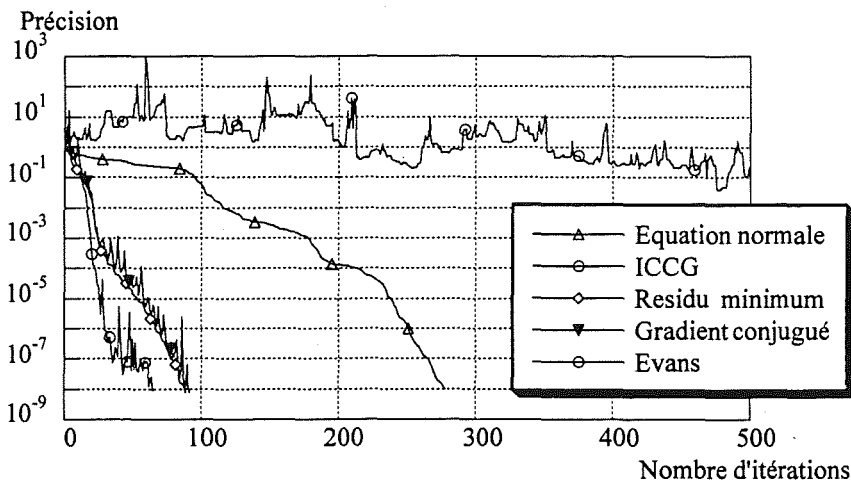


Fig. V.13 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs éliminés du système

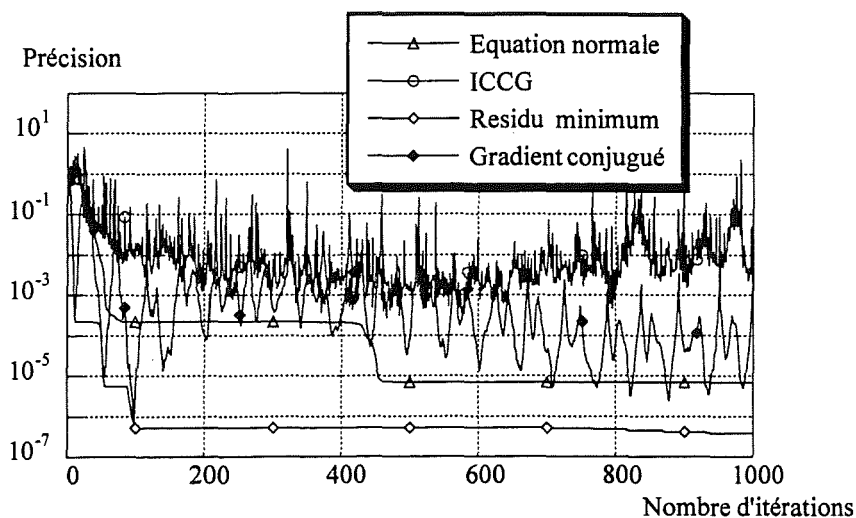


Fig. V.14 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs gardés dans le système



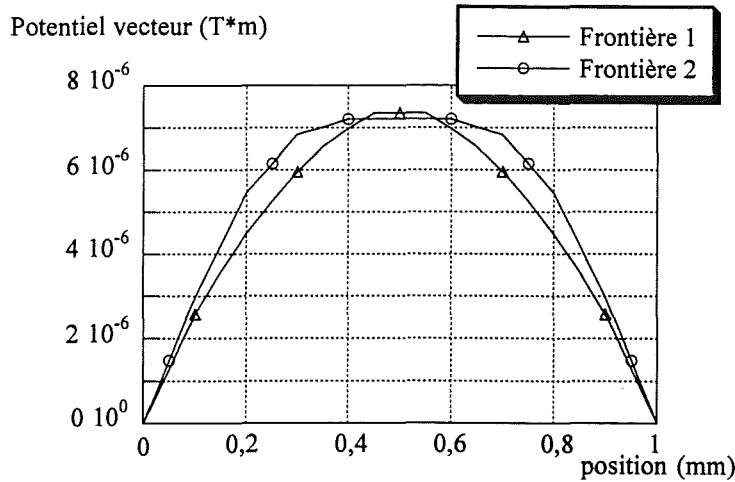


Fig. V.15 Composante tangentielle du potentiel vecteur de deux cotés de l'interface de raccordement (cas des multiplicateurs éliminés)

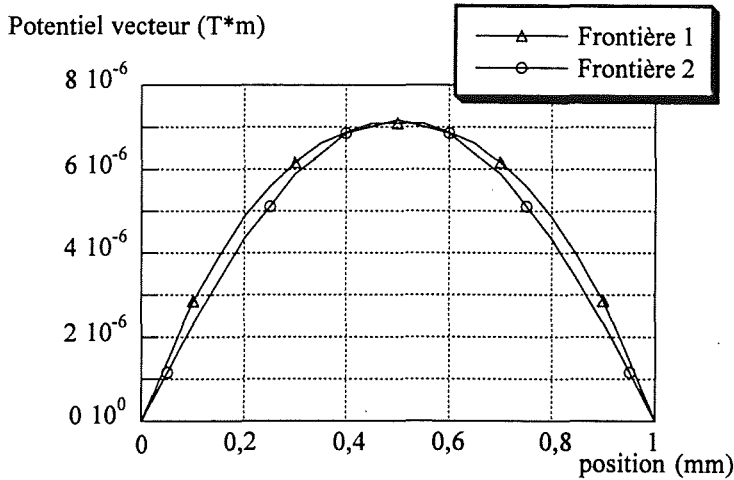


Fig. V.16 Composante tangentielle du potentiel vecteur de deux cotés de l'interface de raccordement (cas des multiplicateurs gardés)

Cet essai nous permet de retrouver les remarques déjà faites dans le cas précédent, à savoir que le fait d'avoir interpolé séparément les multiplicateurs de Lagrange conduit à une qualité de solution supérieure par rapport à la première approche, où les multiplicateurs sont éliminés, au prix d'une dégradation du conditionnement de la matrice.

Par rapport au cas résolu précédemment, la non-conformité du maillage n'a pas d'influence importante sur la convergence et la qualité de la solution reste tout à fait acceptable.

Vu les caractéristiques de convergence, seuls les solveurs les plus adaptés à ce type de problème seront désormais utilisés pour les cas suivants, à savoir le gradient conjugué avec un préconditionnement diagonal et la méthode du résidu minimum.

**Cas 3. Maillage hexaédrique non-conforme fin. Les régions ont la même perméabilité**

L'intérêt de cet essai est d'analyser le comportement de la convergence pour un problème de taille plus importante. Le tableau V.3 résume les caractéristiques de résolutions et l'erreur globale obtenue sur l'interface et les figures V.17 et V.18 montrent respectivement les caractéristiques de convergence pour les deux résolutions effectuées.

Tableau V.3 Caractéristiques de résolution et erreur relative pour le cas no. 3

	Multiplicateurs éliminés	Multiplicateurs gardés
Nombre d'inconnues	9060	9826
Nombre de termes non-nuls	166943	220110
Nombre d'éléments	3480	3480
Erreur relative (%)	2,85	0,37

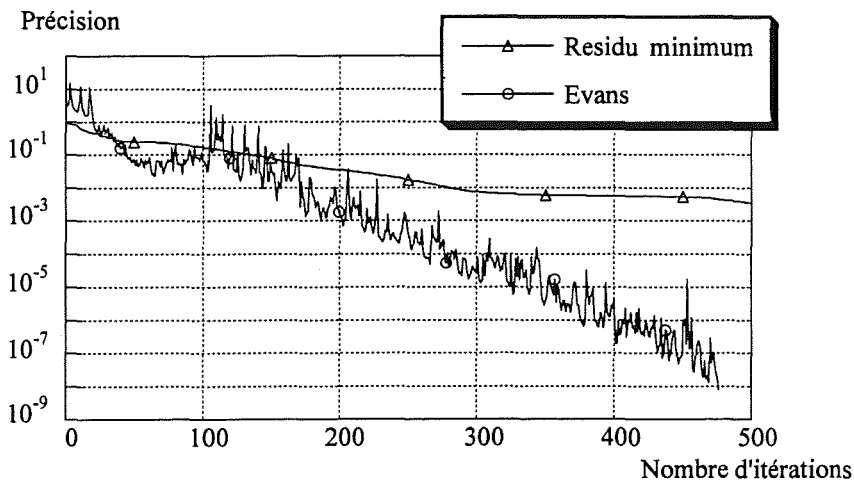


Fig. V.17 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs éliminés du système

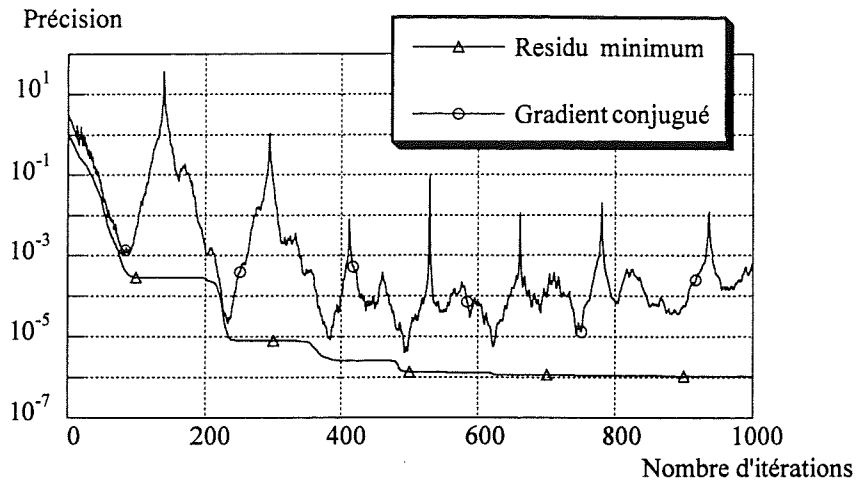


Fig. V.18 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs gardés dans le système

Pour cet essai, on remarque que pour la première approche, le gradient conjugué avec un préconditionnement diagonal est le seul solveur capable de fournir la solution du système, tandis que, pour le deuxième, la méthode du résidu minimum se révèle plus efficace.

**Cas 4. Maillage hexaédrique non-conforme fin. Les régions ont des perméabilités différentes**

L'intérêt de cet essai est d'analyser l'influence des perméabilités des milieux à raccorder sur les caractéristiques de convergence.

Le tableau V.4 résume les caractéristiques de résolution et l'erreur globale obtenue sur l'interface de couplage. Les figures V.19 et V.20 montrent respectivement les caractéristiques de convergence et les figures V.21 et V.22 la composante tangentielle du potentiel vecteur sur l'interface de connexion de deux cotés, pour les deux approches différentes de la méthode.

Tableau V.4. Caractéristiques de résolution et erreur relative pour le cas no. 4

	Multiplicateurs éliminés	Multiplicateurs gardés
Nombre d'inconnues	9060	9826
Nombre de termes non-nuls	166943	220110
Nombre d'éléments	3480	3480
Erreur relative (%)	4,68	0,32

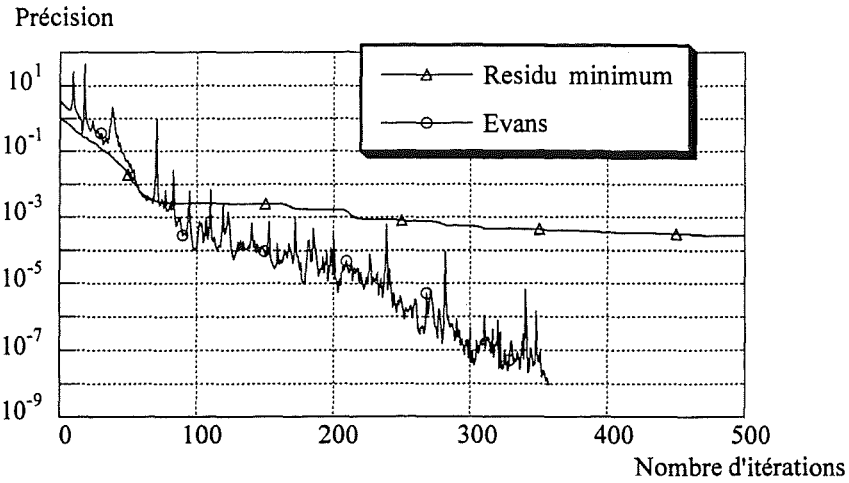


Fig. V.19 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs éliminés du système

On s'aperçoit que la convergence dans ce cas est plus rapide que dans le cas précédent, où il n'y avait pas de différence de perméabilité entre les régions. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que la composante tangentielle du champ est moins importante et donc la contrainte supplémentaire introduite par la fonctionnelle de raccordement est moins sévère.

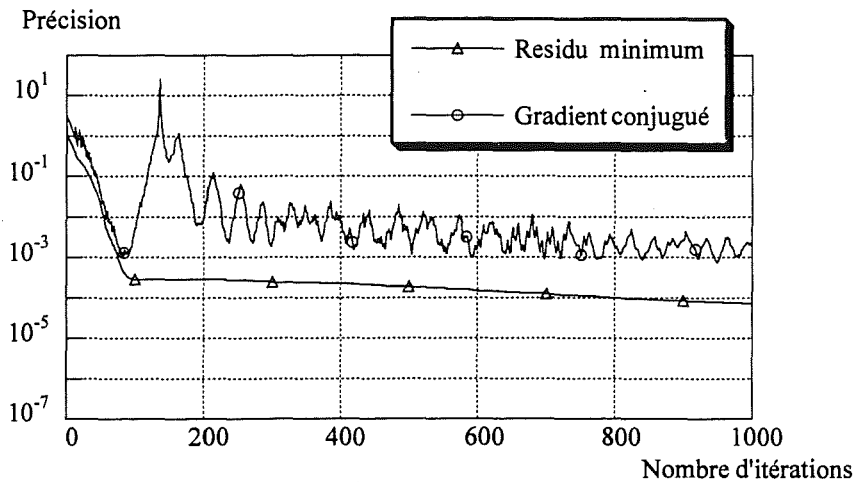


Fig. V.20 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs gardés dans le système

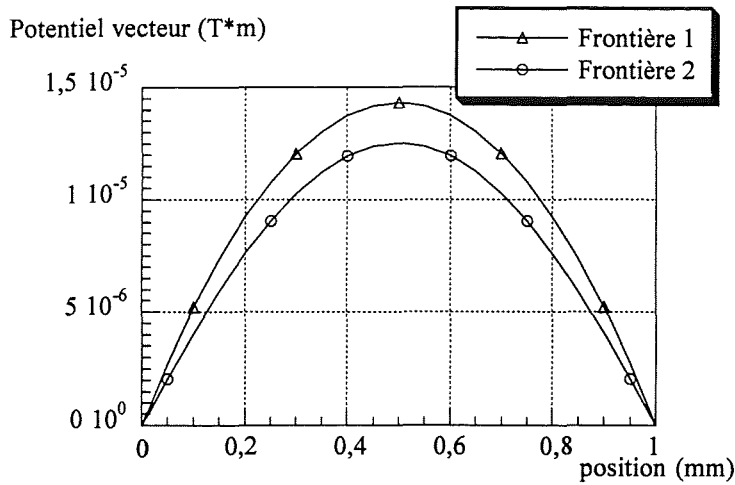


Fig. V.21 Composante tangentielle du potentiel vecteur de deux cotés de l'interface de raccordement (cas des multiplicateurs éliminés)

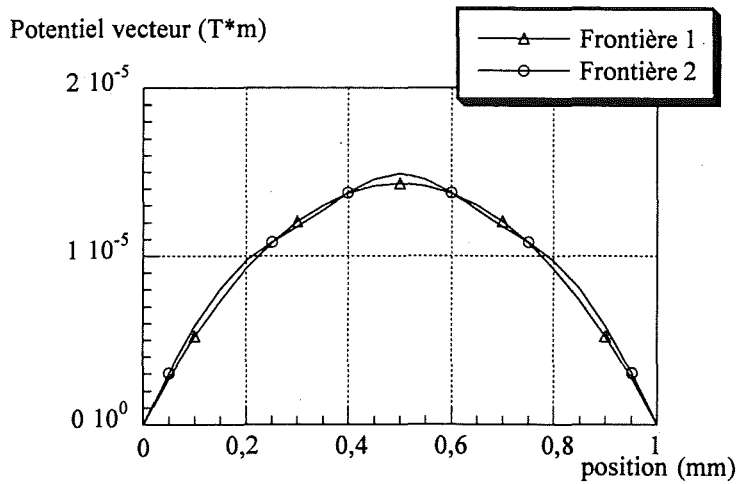


Fig. V.22 Composante tangentielle du potentiel vecteur de deux cotés de l'interface de raccordement (cas des multiplicateurs gardés)

En ce qui concerne la qualité de la solution, la deuxième approche donne toujours une erreur de raccordement plus réduite que la première.

### Cas 5. Maillage non-conforme mélangé (hexaèdres et tétraèdres). Les régions ont la même perméabilité

Dans cet essai, nous étudions le comportement de la méthode dans le cas d'un maillage mélangé, une région étant maillée avec des hexaèdres et l'autre avec des tétraèdres.

Pour cet essai la convergence n'a pas été atteinte, même pour un problème de taille réduite et pour l'approche la plus favorable à la convergence (les multiplicateurs éliminés du système).

Nous fournissons les caractéristiques de résolution (Tableau V.5) et les courbes de convergence (Fig. V.23)

Tableau V.5. Caractéristiques de résolution pour le cas no. 5

	Multiplicateurs éliminés
Nombre d'inconnues	1680
Nombre de termes non-nuls	18447
Nombre d'éléments	1224 tétraèdres 216 hexaèdres

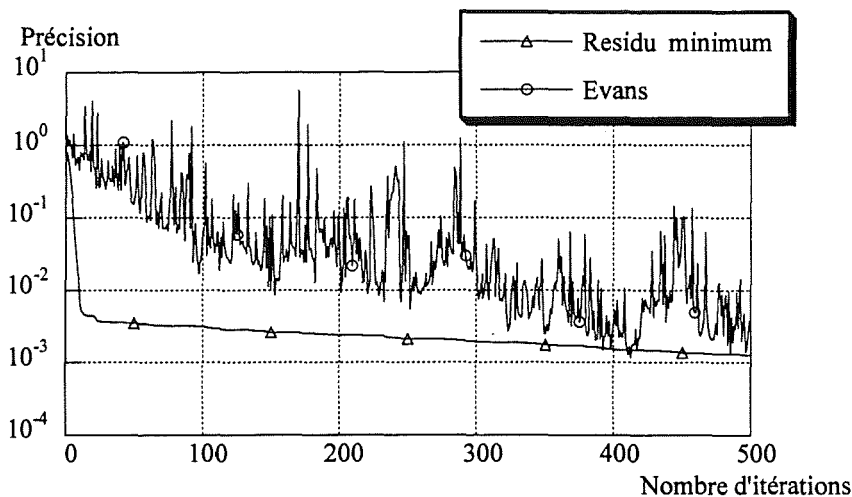


Fig. V.23 Caractéristiques de convergence pour le cas des multiplicateurs éliminés du système

### 3.1.5. Conclusions sur les limites d'applications de la méthode des multiplicateurs de Lagrange en éléments mixtes

Les essais numériques effectués ont montré que la convergence des solveurs itératifs usuels est considérablement dégradée par l'introduction de la fonctionnelle de raccordement. Le solveur ICCG n'est plus efficace et d'autres méthodes de résolution doivent être employées. Concernant la taille des problèmes traités, d'autres essais nous ont montré que la convergence devient d'autant plus difficile que le nombre d'inconnues augmente.

Si les régions à raccorder sont maillées à l'aide de types d'éléments géométriques différents, la convergence n'est pas possible avec les outils utilisés. Afin de forcer la convergence, d'autres techniques ont été essayées, mais sans résultat. Parmi celles-ci, on peut citer la décomposition

complète des lignes de la matrice correspondantes aux inconnues sur la surface de connexion et l'élimination de degrés de liberté appartenant à un arbre sur la surface de connexion.

En ce qui concerne la qualité de la solution, les résultats obtenus sont très satisfaisants. Logiquement, l'erreur est d'autant plus petite que l'ordre d'interpolation des multiplicateurs de Lagrange augmente, ce qui explique la supériorité de la deuxième approche de la méthode, au niveau de la qualité.

En conclusion, vu les grandes difficultés de convergence, nous ne pouvons pas appliquer cette méthode pour des problèmes complexes tels que les machines électriques tournantes, du moins dans l'état actuel des connaissances.

### 3.2. Méthode basée sur l'interpolation entre éléments mixtes non-conformes

#### 3.2.1. Démarche suivie

Le point de départ de cette méthode est la méthode d'interpolation nodale qu'on souhaite adapter aux éléments mixtes. D'une façon analogue à la méthode d'interpolation nodale, on veut exprimer les degrés de liberté du maillage mobile en fonction des degrés de liberté du maillage fixe.

Considérons un élément esclave d'arêtes  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  en vis-à-vis d'un élément maître d'arêtes  $(a_5, a_6, a_7, a_8)$  (Fig. V.24).

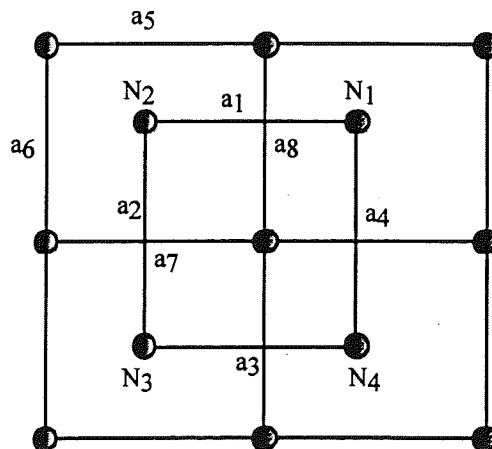


Fig. V.24 Élément esclave et élément maître

Les degrés de liberté esclaves  $A_j$ , associés aux arêtes  $a_j$  de l'élément esclave seront exprimés sous forme de combinaisons linéaires de degrés de liberté maîtres  $A_i$ , tel que leur signification physique soit prise en compte.

Sachant que, à l'ordre un incomplet, le degré de liberté associé à une arête  $j$  est la circulation du potentiel vecteur sur cette arête:

$$A_j = \int_{\text{arête } j} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{V.20})$$

chaque degré de liberté esclave sera calculé en fonction des degrés de liberté maîtres, à l'aide de la relation (V.20).

Prenons, par exemple, le cas de l'arête  $a_1$ . Le degré de liberté associé est calculé par la relation suivante:

$$A_j = \int_{\text{arête } l} (\sum_i A_i \vec{W}_i) \cdot d\vec{l} \quad (\text{V.21})$$

Pour une intégration à un seul point de Gauss, appartenant à l'élément maître  $(a_5, a_6, a_7, a_8)$ , on peut écrire la relation:

$$A_j = \int_{\text{arête } l} \vec{A} \cdot d\vec{l} = (A_5 \vec{W}_5 + A_6 \vec{W}_6 + A_7 \vec{W}_7 + A_8 \vec{W}_8) \cdot \vec{l}_j \quad (\text{V.22})$$

avec  $\vec{W}_5, \vec{W}_6, \vec{W}_7, \vec{W}_8$  les fonctions de base associées aux arêtes de l'élément maître, évaluées au point de Gauss, et  $\vec{l}_j$  la longueur orientée de l'arête.

Cette méthode présente les mêmes avantages que la méthode d'interpolation nodale, notamment la préservation du caractère creux de la matrice.

Conformément aux essais numériques effectués sur des problèmes complexes, la méthode donne de bons résultats, à condition d'avoir un maillage homogène d'une part et d'autre de l'interface de couplage. Cependant, la vitesse de convergence de la méthode ICCG est profondément affectée. Cela s'explique par le fait que la construction des combinaisons linéaires maître-esclave, par les erreurs de calcul qu'elle entraîne, fait perdre la symétrie entre les variables maîtres redondantes. Ce phénomène peut être encore amplifié par l'algorithme de préconditionnement.



Nous avons observé qu'en imposant une jauge locale, de type arbre, sur la surface de glissement, la vitesse de convergence du solveur itératif s'améliore nettement, par le fait qu'on a supprimé les degrés de liberté maîtres excédentaires. Ce comportement laisse à penser qu'une détermination plus exacte des combinaisons linéaires va assurer un meilleur comportement numérique. Par conséquent, la méthode a été réécrite afin d'assurer la conservation globale du flux au passage d'un élément maître à l'élément esclave.

### 3.2.2. Cas général de la méthode

Les degrés de liberté esclaves  $A_j$ , associés aux arêtes  $a_j$  de l'élément esclave seront exprimés sous forme de combinaison linéaire de degrés de liberté maîtres  $A_i$ , tel que le flux du rotationnel d'un maître soit conservé en moyenne.

Nous allons traiter séparément le cas où l'arête maître n'appartient pas à l'élément esclave du cas où l'arête maître appartient à l'élément esclave.

#### Cas où l'arête maître n'appartient pas à l'élément esclave

C'est le cas des arêtes  $a_5$  et  $a_6$  par rapport à l'élément esclave d'arêtes  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ .

Si on considère le cas de l'arête  $a_5$ , les seuls degrés de liberté de l'élément esclave qui traversent un élément maître influencé par  $a_5$  sont  $a_1$  et  $a_2$ . (Fig.V.25)

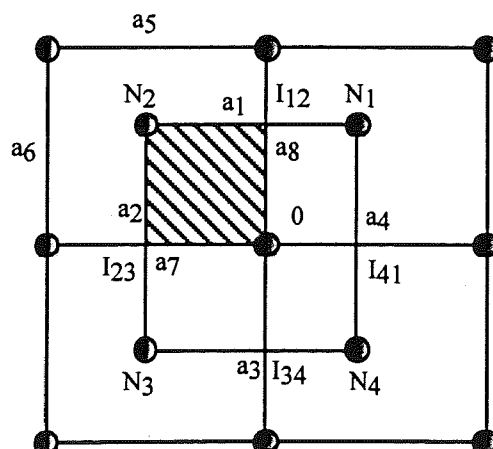


Fig. V.25 Cas de l'arête n'appartenant pas à l'élément esclave d'arêtes  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$

Le flux de  $A_5 \text{rot} \bar{W}_5$  dans l'élément esclave est son flux au travers de la zone hachurée, sachant que dans le reste de l'élément esclave  $A_5 \text{rot} \bar{W}_5$  est nul:

$$\Phi_5 = A_5 \int_{\text{élément } N_1 N_2 N_3 N_4} \text{rot} \bar{W}_5 d\bar{s} = A_5 \int_{\text{surface } N_2 I_{12} O I_{23}} \text{rot} \bar{W}_5 d\bar{s} = A_5 \oint_{\text{contour } N_2 I_{12} O I_{23}} \bar{W}_5 d\bar{l} = A_5 \left[ \int_{I_{12}}^{N_2} \bar{W}_5 d\bar{l} + \int_{N_2}^{I_{23}} \bar{W}_5 d\bar{l} \right] \quad (\text{V.23})$$

Les flux de  $A_1 \text{rot} \bar{W}_1$  et de  $A_2 \text{rot} \bar{W}_2$  au travers de l'élément esclave s'écrivent:

$$\Phi_1 = A_1 \int_{\text{élément } N_1 N_2 N_3 N_4} \text{rot} \bar{W}_1 d\bar{s} = A_1 \oint_{\text{contour } N_1 N_2 N_3 N_4} \bar{W}_1 d\bar{l} = A_1 \int_{N_1}^{N_2} \bar{W}_1 d\bar{l} \quad (\text{V.24})$$

$$\Phi_2 = A_2 \int_{\text{élément } N_1 N_2 N_3 N_4} \text{rot} \bar{W}_2 d\bar{s} = A_2 \oint_{\text{contour } N_1 N_2 N_3 N_4} \bar{W}_2 d\bar{l} = A_2 \int_{N_2}^{N_3} \bar{W}_2 d\bar{l} \quad (\text{V.25})$$

Pour obtenir  $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_5$

il faut imposer:

$$A_1 = A_5 \frac{\int_{I_{12}}^{N_2} \bar{W}_5 d\bar{l}}{\int_{N_1}^{N_2} \bar{W}_1 d\bar{l}} \quad \text{et} \quad A_2 = A_5 \frac{\int_{I_{23}}^{N_2} \bar{W}_5 d\bar{l}}{\int_{N_2}^{N_3} \bar{W}_2 d\bar{l}} \quad (\text{V.26})$$

### Cas où l'arête maître appartient à l'élément esclave

C'est le cas de l'arête maître  $a_7$  par rapport l'élément esclave d'arêtes  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  (Fig. V.26).

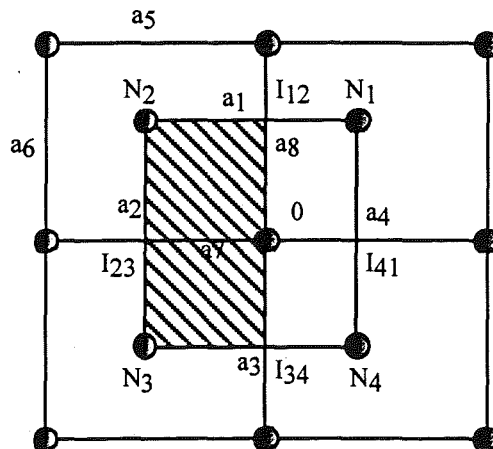


Fig. V.26 Cas de l'arête appartenant à l'élément esclave d'arêtes  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$

Si on considère le cas de l'arête  $a_7$ , les seuls degrés de liberté de l'élément esclave qui traverse un élément maître influencé par  $a_7$  sont  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ .

Le flux de  $A_7 \text{rot} \bar{W}_7$  dans l'élément esclave est son flux au travers de la zone hachurée, sachant que dans le reste de l'élément esclave  $A_7 \text{rot} \bar{W}_7$  est nul:

$$\begin{aligned} \Phi_7 &= A_7 \int_{\text{élément } N_1 N_2 N_3 N_4} \text{rot} \bar{W}_7 d\bar{s} = A_7 \int_{\text{surface } N_2 I_{12} I_{34} N_3} \text{rot} \bar{W}_7 d\bar{s} = A_7 \oint_{\text{contour } N_2 I_{12} I_{34} N_3} \bar{W}_7 d\bar{l} = \\ &= A_7 \left[ \int_{I_{12}}^{N_2} \bar{W}_7 d\bar{l} + \int_{N_2}^{I_{23}} \bar{W}_7 d\bar{l} + \int_{I_{23}}^{N_3} \bar{W}_7 d\bar{l} + \int_{N_3}^{I_{34}} \bar{W}_7 d\bar{l} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

Les flux de  $A_1 \text{rot} \bar{W}_1$ ,  $A_2 \text{rot} \bar{W}_2$  et  $A_3 \text{rot} \bar{W}_3$  sont donnés par les expressions suivantes:

$$\Phi_1 = A_1 \int_{\text{élément } N_1 N_2 N_3 N_4} \text{rot} \bar{W}_1 d\bar{s} = A_1 \oint_{\text{contour } N_1 N_2 N_3 N_4} \bar{W}_1 d\bar{l} = A_1 \int_{N_1}^{N_2} \bar{W}_1 d\bar{l} \quad (\text{V.28})$$

$$\Phi_2 = A_2 \int_{N_2}^{N_3} \bar{W}_2 d\bar{l} \quad (\text{V.29})$$

$$\Phi_3 = A_3 \int_{N_3}^{N_4} \bar{W}_3 d\bar{l} \quad (\text{V.30})$$

Pour obtenir  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_7$

il faut imposer:

$$A_1 = A_7 \frac{\int_{I_{12}}^{N_2} \bar{W}_7 d\bar{l}}{\int_{N_1}^{N_2} \bar{W}_1 d\bar{l}}, \quad A_2 = A_7 \frac{\int_{N_2}^{N_3} \bar{W}_7 d\bar{l}}{\int_{N_2}^{N_3} \bar{W}_2 d\bar{l}} \quad \text{et} \quad A_3 = A_7 \frac{\int_{I_{34}}^{N_3} \bar{W}_7 d\bar{l}}{\int_{N_3}^{N_4} \bar{W}_3 d\bar{l}} \quad (\text{V.31})$$

### Remarque

L'algorithme général demande le découpage de l'arête esclave en morceaux suivant la trace du maillage maître. Si on considère une arête esclave seule, l'effet simultané de toutes les arêtes maître conduit à une somme des influences individuelles ce qui donne une combinaison linéaire de la forme:

$$A_j = \frac{\sum_i A_i \int_{\text{arête } j} \bar{W}_i \cdot d\bar{l}}{\int_{\text{arête } j} \bar{W}_j \cdot d\bar{l}} \quad (\text{V.32})$$

La fonction  $\bar{W}_i$  peut être nulle sur tout ou une partie de l'arête  $j$ .

3.2.3. Cas particulier du glissement des maillages réguliers

La méthode présentée se simplifie considérablement si on considère le cas particulier du glissement de deux maillages réguliers. Définissons un paramètre  $\beta$  ayant des valeurs entre 0 et 1, et caractérisant linéairement le déplacement de l'élément esclave par rapport à l'élément maître. Ainsi, lorsque  $\beta = 0$  l'élément esclave coïncide avec un élément maître et lorsque  $\beta = 1$ , l'élément esclave coïncide avec l'élément maître suivant (Fig. V.27)

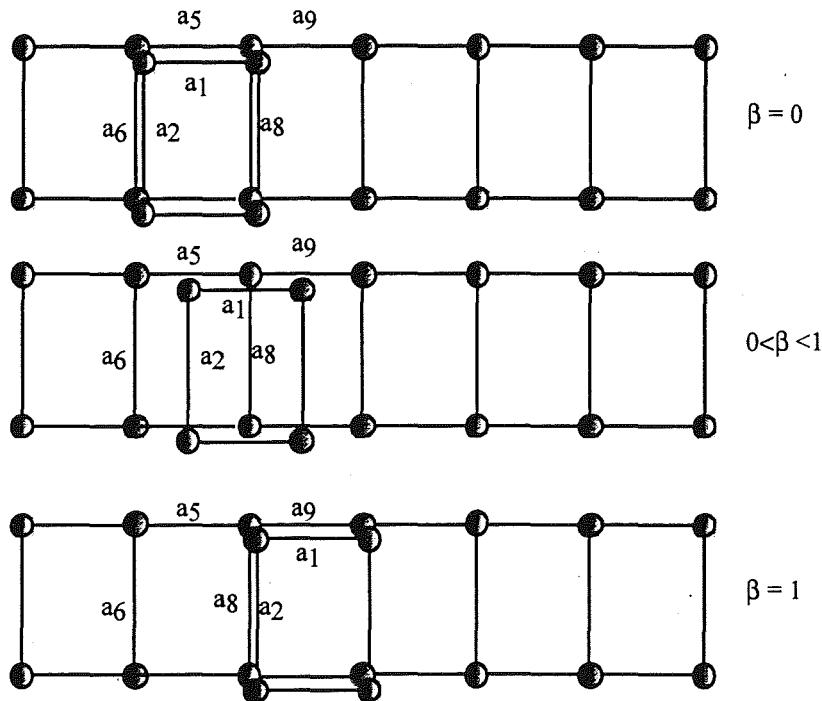


Fig. V.27 Glissement de deux maillages réguliers

Les degrés de liberté esclaves s'écrivent en fonction de degrés de liberté maîtres, en tenant compte du paramètre d'interpolation  $\beta$ , sous la forme:

$$A_1 = (1 - \beta)s_{15}A_5 + \beta s_{19}A_9 \tag{V.33}$$

$$A_2 = (1 - \beta)s_{26}A_6 + \beta s_{28}A_8 \tag{V.34}$$

Dans les relations (V.33) et (V.34) les coefficients  $s_{ij}$  rendent compte de l'orientation de l'arête  $i$  par rapport à l'arête  $j$ .

### 3.2.4. Validations numériques

Pour vérifier la validité de la méthode développée, nous avons choisi un exemple proche des problèmes rencontrés en électrotechnique. Il s'agit d'un moteur à réluctance variable, constitué d'une partie fixe, comprenant la culasse et les inducteurs et une partie mobile, comprenant le rotor. La figure V.28 montre une coupe transversale du moteur.

Une description plus détaillée du modèle tridimensionnel du moteur sera faite dans le chapitre suivant.

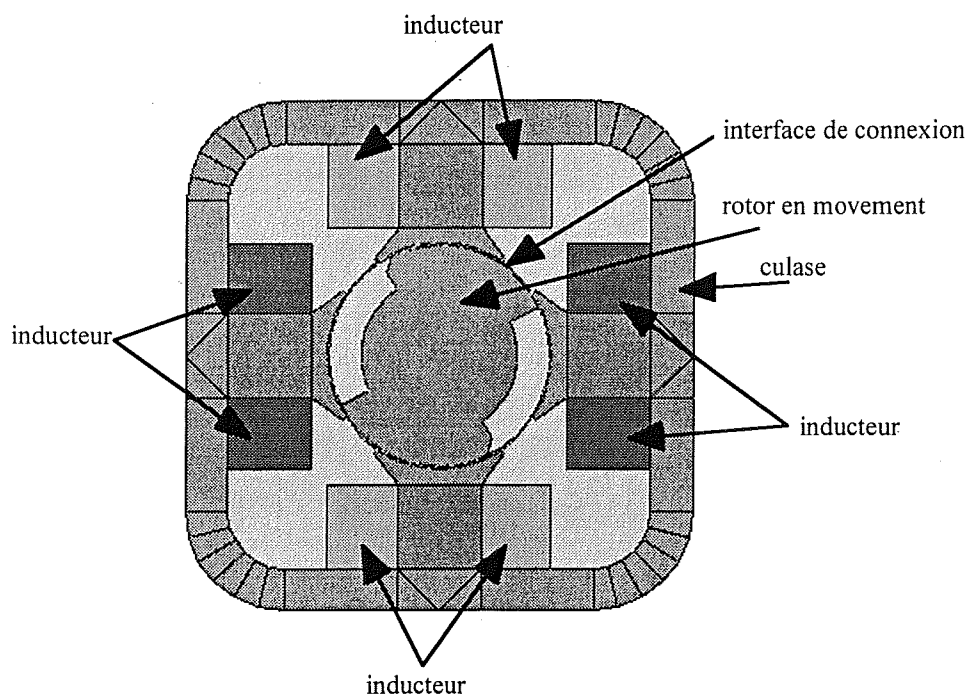


Fig. V.28 Coupe transversale du moteur à réluctance variable

Les essais numériques effectués dans cette partie ne vont concerner que le raccordement des parties fixe et mobile à l'aide de la méthode d'interpolation de maillage.

Afin d'éviter le découpage du maillage d'un côté par rapport à la trace du maillage de l'autre côté de l'interface, nous allons nous limiter à la validation du cas particulier des maillages réguliers sur la surface de raccordement. Pour cela, le maillage a été réalisé tel qu'il soit régulier sur l'interface de raccordement de deux côtés, suivant la troisième dimension. En même temps, dans le plan transversal il est à pas constant (Fig. V.29).

Le maillage du rotor comporte 3248 éléments et le maillage des parties fixes 17670 éléments mixtes, résultant 29544 inconnues.

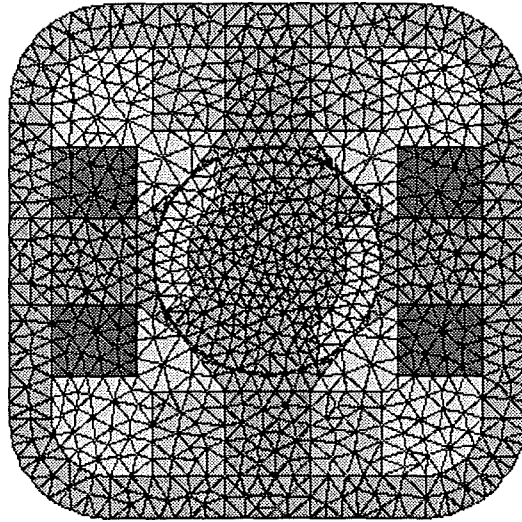
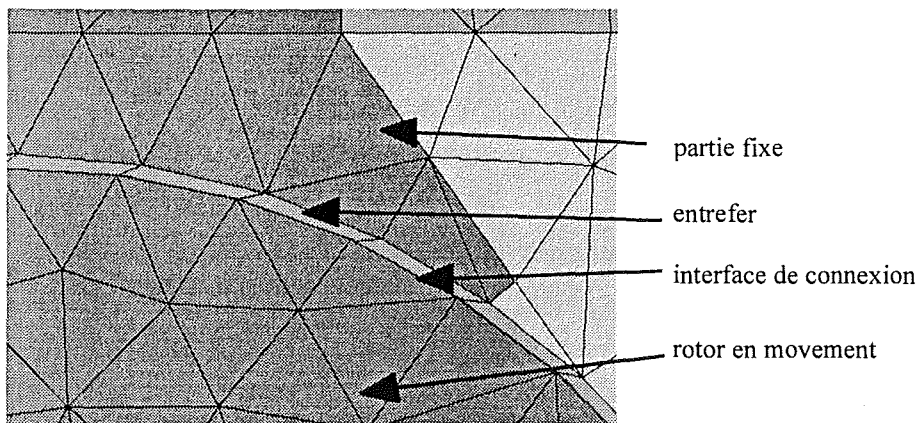


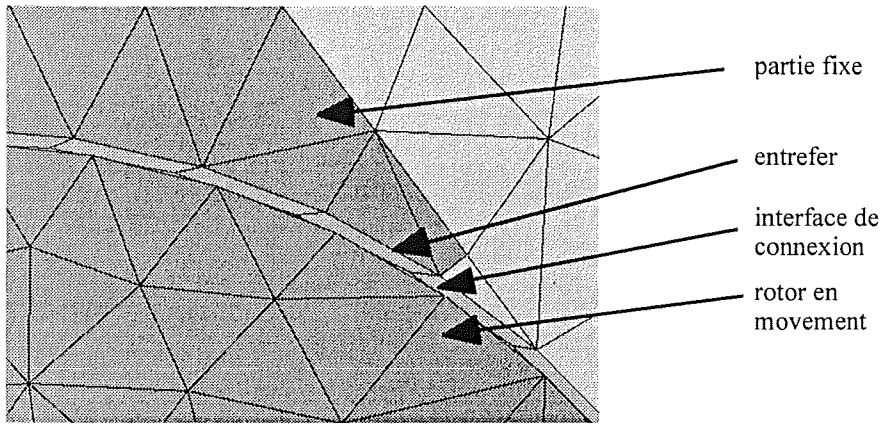
Fig. V.29 Maillage de la coupe transversale du moteur

Nous nous proposons d'étudier l'influence de l'angle de rotation, ou plus précisément du paramètre d'interpolation  $\beta$ , sur l'erreur globale de raccordement défini par la relation (V.19) et sur la convergence du solveur ICCG utilisé.

Pour cela, plusieurs résolutions ont été effectuées, pour différents angles de rotation. Dans la Fig. V.30 on montre un détail du maillage, à l'angle de rotation 0, et le nouveau maillage obtenu après avoir fait tourner le rotor de deux degrés. Dans ce dernier cas, le maillage sur l'interface de raccordement n'est plus conforme.



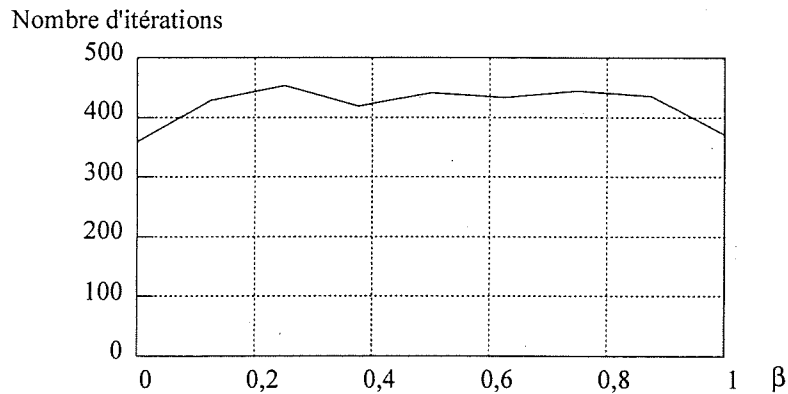
a) Angle de rotation de 0 degrés ( maillage conforme)



b) Angle de rotation de 2 degrés (maillage non-conforme)

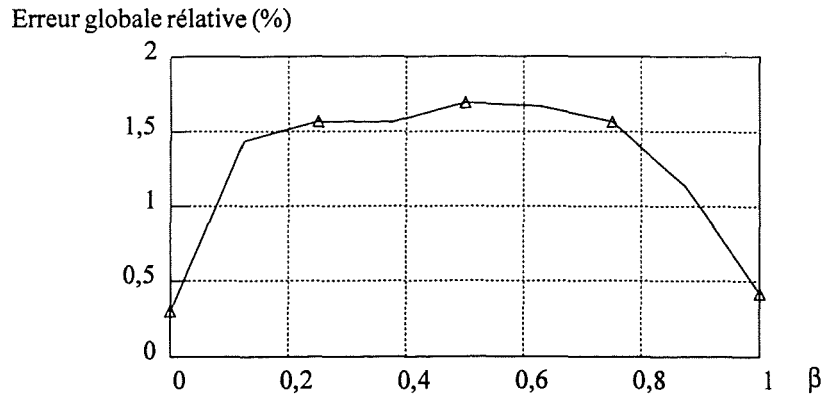
Fig. V.30 Détail du maillage

La figure V.31 montre la variation du nombre d'itérations du solveur ICCG, arrêté quand l'erreur relative a atteint  $10^{-4}$ , en fonction du paramètre d'interpolation  $\beta$ . On rappelle que lorsque  $\beta=0$  ou  $\beta=1$ , le maillage est conforme et les valeurs intermédiaires caractérisent le déplacement des noeuds mobiles par rapport aux noeuds fixes.

Fig. V.31 Nombre d'itérations en fonction du paramètre d'interpolation  $\beta$ 

On remarque que la vitesse de convergence du solveur ICCG est influencée par la non-conformité du maillage sur l'interface de raccordement, mais pas d'une manière décisive. Ainsi, le grand avantage de cette méthode est qu'elle ne dégrade pas profondément le conditionnement de la matrice, contrairement à la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

La figure V.32 montre la variation de l'erreur globale relative sur l'interface de raccordement, en fonction du paramètre  $\beta$ . Logiquement, la qualité du raccordement est d'autant plus satisfaisante que le maillage est plus proche de la conformité.

Fig. V.32 Erreur globale relative en fonction du paramètre d'interpolation  $\beta$ 

### 3.2.5. Limites d'application de la méthode d'interpolation des maillages

L'exemple tridimensionnel traité montre que les résultats obtenus sont satisfaisants au niveau de la convergence et de la qualité de la solution sur l'interface de raccordement. Cependant, la méthode d'interpolation de maillage présente quelques inconvénients:

- telle qu'elle a été décrite, la méthode n'est peut pas être employée que pour les éléments mixtes d'ordre 1 incomplet, où il y a un seul degré de liberté associés aux arêtes. Pour les ordres d'interpolation plus élevés, une possibilité consiste à annuler les degrés de liberté supérieures (et qui sont hiérarchiques) sur l'interface de raccordement et de n'interpoler que ceux associés aux arêtes.

- dans le cas général, la méthode demande le sous-découpage des arêtes d'un maillage par rapport à l'autre. Si un tel algorithme n'est pas implémenté, le cas particulier des maillages réguliers sur l'interface de raccordement peut de révéler très efficace.



## 4. Conclusion

Après avoir passé en revue les techniques les plus utilisées pour la prise en compte du mouvement, nous avons analysé deux méthodes qui peuvent être appliquées aux formulations en potentiel vecteur basées sur l'interpolation mixte.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est générale et peut être employée même dans le cas des éléments mixtes d'ordres supérieurs. Malheureusement, le conditionnement de la matrice du système est fortement dégradé par l'introduction de la fonctionnelle de raccordement et le solveur ICCG n'est plus efficace. D'autres méthodes de résolution se révèlent plus efficaces si les maillages à raccorder sont réguliers. Pour les autres cas, la convergence n'a pas été obtenue.

La deuxième méthode que nous proposons, est basée sur l'interpolation de maillage. Elle présente l'avantage que le conditionnement n'est influencé que faiblement par la non-conformité du maillage, ce qui fait que le solveur ICCG reste encore efficace. En revanche, le flux magnétique sur l'interface de raccordement n'est assuré qu'en moyenne.

C'est cette dernière méthode qui sera employée pour la modélisation d'un moteur à réluctance variable, qui sera effectuée dans le chapitre suivant.

## **Chapitre VI**

### **Modélisation d'un moteur à réluctance variable**



## **1. Introduction**

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié et mise au point des méthodes permettant la modélisation tridimensionnelle des dispositifs électrotechniques réels, tels que les machines électriques tournantes. Ainsi, après avoir choisi la formulation en potentiel vecteur basée sur les éléments mixtes, nous avons proposé des techniques adaptées à ce type d'interpolation pour le couplage avec les circuits électriques d'alimentation et pour la prise en compte du mouvement des parties mobiles.

Le but de ce chapitre est de tester l'ensemble de ces méthodes, sur une application complexe, un moteur à réluctance variable. La première partie de ce chapitre sera destinée à une présentation brève de ce type de moteur, suivie d'une description du convertisseur statique associé.

Le chapitre se terminera avec quelques résultats de simulation.

## **2. Généralités sur les moteurs à réluctance variable**

Bien que le développement des premiers moteurs à réluctance variable remonte au début des années 1930, ce n'est que depuis les années 1960 que ce type de moteur c'est véritablement développé.

Les performances en terme de rendement, couple spécifique, réponse dynamique et comportement thermique sont supérieures aux moteurs universels. En plus, le rotor étant passif, sans conducteurs ni aimant permanent, il peut tourner à grande vitesse, sans problème d'équilibrage mécanique.

Pour assurer un mouvement continu du rotor, les phases statoriques doivent être alimentées en fonction de la position du rotor, au moyen d'un convertisseur statique.

## **3. Particularités des moteurs à réluctance variable par rapport aux autres types de moteurs**

### **3.1. Géométrie**

La partie fixe - stator - est de type réluctant variable et supporte les bobinages. L'alimentation étant périodique, le circuit magnétique statorique doit être feuilleté.

La partie mobile -rotor - est également à réluctance variable. Le mouvement du rotor étant synchrone par rapport au flux statorique, le rotor peut être réalisé en structure massive. Cependant, vu le caractère impulsionnel de l'alimentation et du flux, le rotor est lui aussi feuilleté afin de réduire les pertes harmoniques.

### **3.2. Bobinage**

L'alimentation d'une bobine ou d'un groupe de bobines associées à un moteur à réluctance variable conduit le rotor à une position d'équilibre déterminée. Pour assurer le déplacement d'un pas supplémentaire, il est nécessaire d'alimenter la bobine ou le groupe de bobines suivant. Ceci permet de créer une nouvelle position d'équilibre. En conséquence, un moteur à réluctance variable doit comprendre plusieurs bobines ou groupes de bobines, appelées

phases. Le nombre de phases est en fonction du nombre de pas par tour et des performances attendues (couples ou fréquences élevées).

### 3.3. Commande du moteur

Le circuit électronique d'alimentation permet d'appliquer la tension successivement aux bornes de différentes phases du moteur. D'autre part, il assure la coupure du courant dans les phases non-commandées. Il est constitué généralement de transistors fonctionnant alternativement en régime saturé ou bloqué, commandés par un aiguillage logique attaquant la base des transistors.

Le blocage d'un transistor a pour conséquence l'apparition d'une surtension a ses bornes. Pour éviter les surtensions de coupure, le circuit doit également assurer la décroissance progressive du courant au moyen d'un circuit auxiliaire d'extinction. Sous la forme la plus simple, il comprend un circuit en parallèle avec chaque bobinage, formé d'une diode, qui permet donc la décroissance du courant après blocage du transistor correspondant (Fig.VI.1).

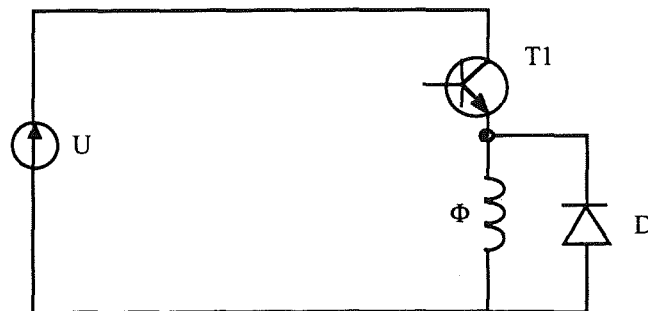


Fig. VI.1 Circuit de commande d'une phase

Lors d'une commutation de phases, le courant s'éteint avec une constante de temps dépendante de l'induction moyenne du bobinage et de sa résistance. Selon la fréquence, il peut être intéressant de diminuer cette constante de temps. Ceci peut être obtenu par l'introduction d'une résistance dans le circuit d'extinction. Le choix de la résistance résulte d'un compromis entre la réduction de la constante de temps et la limitation de la surtension de blocage (Fig.VI.2).

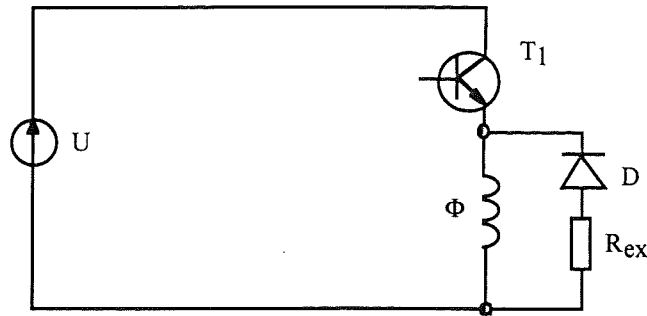


Fig. VI.2 Résistance d'extinction dans le circuit de commande

### 3.4. Couple du moteur à réluctance variable

La réluctance variable au niveau de l'entrefer permet de générer un couple à caractère périodique, donné par l'expression suivante:

$$M = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \frac{dL_i}{d\alpha} I_i^2 \quad (\text{VI.1})$$

Dans la relation (VI.1)  $m$  représente le nombre de phases,  $\alpha$  le déplacement du rotor,  $L_i$  l'inductance propre de la phase  $i$  et  $I_i$  le courant dans la phase  $i$ .

Les bobines et les géométries des pôles ou dents associées aux différentes phases sont identiques. Ces dernières sont décalées entre elles d'un angle constant. Compte tenu de cette symétrie, les caractéristiques de couple sont également déphasées d'un angle constant.

### 3.5. Amélioration des caractéristiques du moteur

La vitesse limite du moteur et d'une charge donnée est atteinte lorsque le couple moteur dynamique moyen est égal au couple résistant. Ce couple maximum diminue avec la fréquence, par suite de la diminution du courant moyen, liée à la constante de temps du bobinage. On peut également signaler l'accroissement des pertes par courant de Foucault et par hystérésis dans les circuits ferromagnétiques, qui agissent dans le même sens. Les améliorations de performances passent par la diminution des constantes de temps et par des techniques d'avance de la commande.

### 3.5.1. Diminution des constantes de temps du moteur

La diminution des constantes de temps du moteur implique la réduction des inductances propres ou l'augmentation des résistances du bobinage. L'augmentation des résistances internes de l'enroulement n'a pas grand sens, car elle implique un accroissement de l'échauffement du moteur et, par conséquent, une réduction de la capacité d'utilisation du moteur.

La diminution de l'inductance, ou plus exactement de la perméance du moteur entraîne une réduction des couples. Il s'agit donc de réaliser un compromis entre les actions sur le couple électromagnétique et celles sur la constante de temps, de façon à obtenir des performances optimales à haute fréquence. Cette action peut se faire par le biais de l'entrefer ou de la géométries des zones à réluctance variable.

La limitation de fréquence est essentiellement liée à une diminution du courant moyen, par suite de l'accroissement de l'importance, relative à la durée du pas, de la constante de temps d'établissement du courant. Toute amélioration par le biais de l'alimentation a pour but d'accroître la tension aux bornes de la phase, en fonction de la fréquence. Il s'agit, idéalement, de transformer la source de tension en une source de courant. Deux moyens principaux permettent d'y parvenir:

- introduction d'une résistance en série avec la source
- le recours à un hacheur

#### **a) Introduction d'une résistance en série**

L'introduction d'une résistance en série avec la source permet d'abaisser la constante de temps apparente. Afin de compenser la chute de tension qui en résulte, un survoltage correspondant doit être introduit. Cette solution, bien qu'efficace, n'est pas rationnelle sur le plan énergétique, mais elle assure effectivement la transformation de la source de tension en une source de courant.



### b) Alimentation par hacheur

L'alimentation par un hacheur requiert à une source de tension de niveau élevé, telle que la relation suivante soit satisfaite:

$$I_1 = \frac{U_1}{R} \gg I_N \quad (\text{VI.2})$$

avec  $U_1$  la tension de la source,  $R$  la résistance de la phase alimentée et  $I_N$  le courant nominal. La figure VI.3 montre le principe de fonctionnement du hacheur pour une fréquence de commutation des phases relativement basse par rapport à la constante de temps de l'enroulement. Dès que le courant de phase atteint le niveau  $I_N + \Delta I$ , la phase correspondante est coupée de la source et placée en régime d'extinction. Dès que le courant descend sous la valeur  $I_N - \Delta I$ , la source est à nouveau branchée sur la phase. On obtient ainsi un courant oscillant entre deux valeurs limites. Dès que la fréquence des pas devient très élevée, la source ne peut plus atteindre le niveau  $I_N + \Delta I$  et se comporte comme une alimentation conventionnelle.

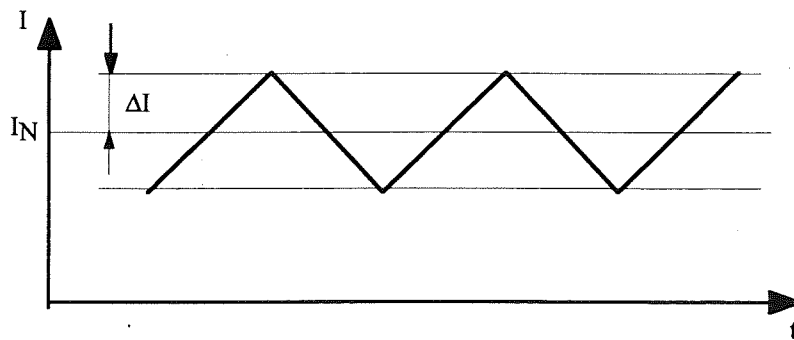


Fig.VI.3 Evolution du courant de phase avec une alimentation par hacheur

#### 3.5.2. Avance de la commande

Une technique couramment utilisée est d'avancer la commande. Cette technique est appelée avance à l'allumage, par analogie avec la technique semblable utilisée dans les moteurs à explosion. Si l'enclenchement s'effectue plus tôt, il se produit un survoltage apparent, et donc un accroissement plus rapide du courant. D'une façon similaire, l'extinction avancée entraîne l'apparition d'une tension apparente négative aux bornes de la phase et donc une décroissance plus rapide du courant.

## 4. Calcul numérique d'un moteur à réluctance variable

### 4.1. Introduction

Le moteur à réluctance variable que nous voulons modéliser se place dans un contexte industriel spécifique: il s'agit de remplacer un moteur universel tout en s'adaptant à l'existant (même encombrement, même vitesse nominale). Il est destiné à entraîner une turbine à une vitesse nominale de 22000 tours par minute pour une puissance absorbée de 960 Watts.

Le moteur comprend 4 pôles au stator, correspondant au deux phases et 2 pôles au rotor, dont la géométrie (Fig. VI.4) contient des épanouissements polaires, ainsi qu'une dissymétrie afin de privilégier un sens de rotation.

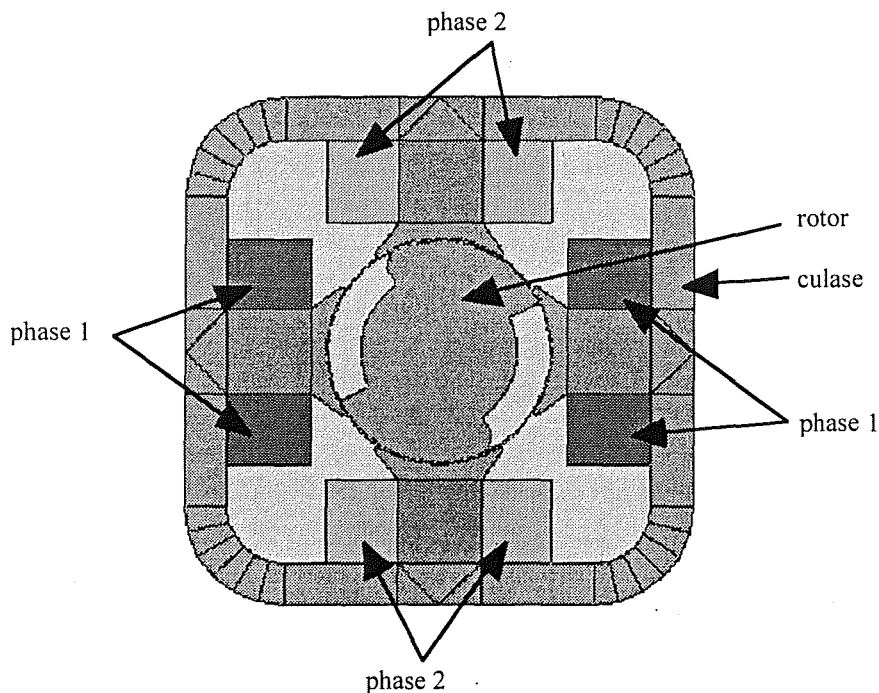


Fig. VI.4 Géométrie du moteur à réluctance variable

### 4.2. Circuit électrique de commande

Les phases sont alimentées à travers un convertisseur statique (Fig. VI.5), comprenant des interrupteurs commandés (transistors) et des diodes. La commande des interrupteurs se fait en fonction de la position (moteur autopiloté), captée à l'aide d'une fourche optique et d'une roue dentée. Le signal de ce capteur est directement utilisé pour la commande des interrupteurs.

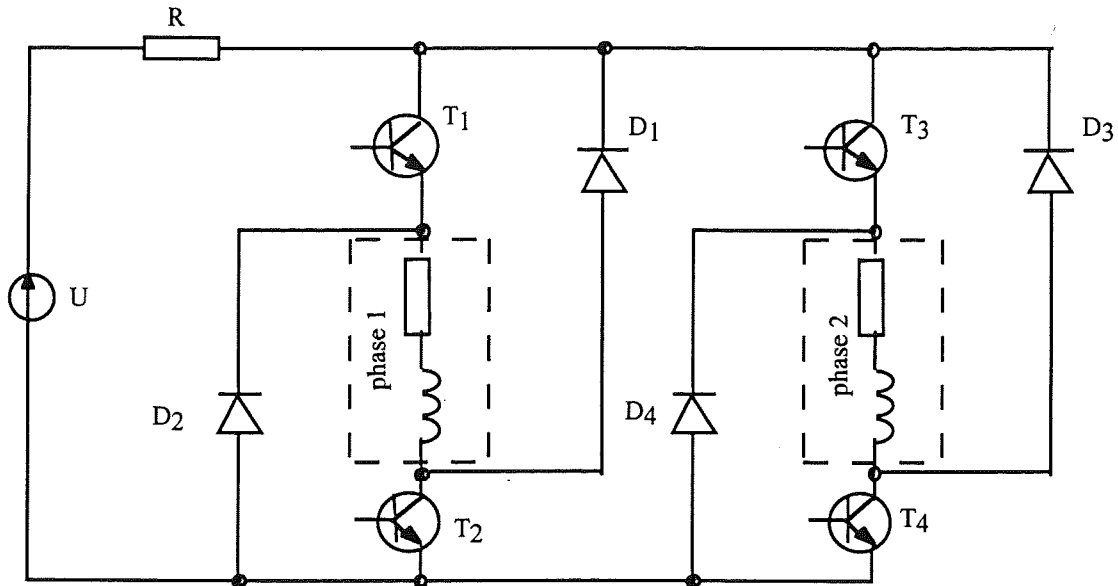


Fig. VI.5 Circuit électronique d'alimentation

La commande des interrupteurs assure également la limitation du courant des phases, à basse vitesse ou au démarrage, lorsque le courant ne doit pas dépasser la valeur nominale.

#### 4.3. Modèle utilisé et hypothèses de travail

La géométrie du moteur possède un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation du moteur, ce qui permet de réduire considérablement la taille du problème à modéliser.

Nous faisons les hypothèses simplificatrices de travail suivantes:

- la vitesse de rotation est considérée constante (vitesse nominale)
- les courants de Foucault qui peuvent se développer dans les parties ferromagnétiques sont négligés
- le circuit magnétique est considéré homogène et isotrope
- le phénomène d'hystérésis magnétique est négligé

La méthode de prise en compte du mouvement utilisée (la méthode d'interpolation entre les maillages) demande une réalisation particulière du maillage au niveau de l'interface de raccordement. Sur cette interface, le maillage doit être régulier, afin d'éviter le sous-découpage des maillages (cf. § V.3.2). Pour la réalisation du maillage nous adoptons la démarche suivante:

- la partie fixe et la partie mobile sont décrites séparément
- la partie fixe contenant les têtes des inducteurs est maillée à l'aide d'un maillage automatique
- le maillage surfacique créé précédemment est extrudé suivant l'axe de rotation. Cette technique permet de régler la taille des éléments suivant le sens de l'axe. Ainsi, nous pouvons créer des éléments plus allongés vers le centre du moteur, où les phénomènes électromagnétiques sont essentiellement 2D et plus fin vers l'extrémité, où l'effet 3D est prépondérant
- le maillage des parties mobiles est réalisé également par extrusion

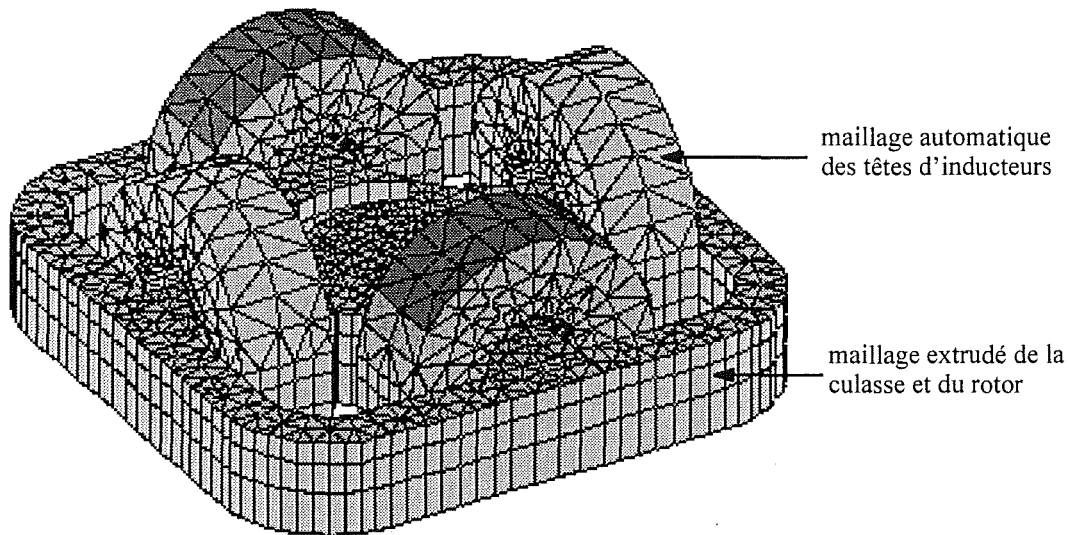


Fig. VI.6 Maillage du moteur à réluctance variable

Après la réalisation du maillage, une simple transformation géométrique permet de ramener la partie mobile à sa place, à l'intérieur de l'interface de raccordement.

#### 4.4. Résultats de simulation

La méthode de couplage avec le circuit électrique d'alimentation demande la prédétermination numérique du vecteur de bobinage  $\vec{K}_s$ , pour chaque inducteur. (cf. § IV.3). L'effort de ce pré-calcul a été considérablement réduit en choisissant un domaine de définition connexe, limité à l'inducteur et le trou de l'intérieur.

Nous avons choisi d'effectuer 200 pas de temps, avec un pas de temps égal à 0,02 ms, tel que les phénomènes soient correctement prises en compte.

La résolution a été effectuée en linéaire, en considérant une perméabilité relative des régions ferromagnétiques de 800. Le temps total CPU pour résoudre le problème, qui comporte 29536 inconnues magnétiques et 7 inconnues électriques, a été de 95,7 heures. D'après nos estimations, le temps de résolution du problème non-linéaire sera d'environ 500 heures.

La figure VI.7 montre les courants des deux phases obtenus par la simulation.

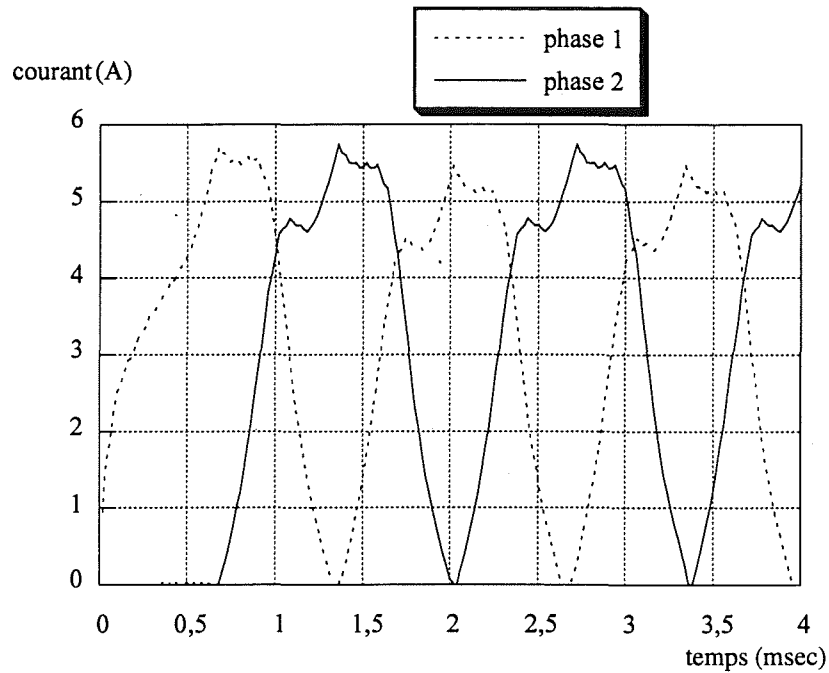
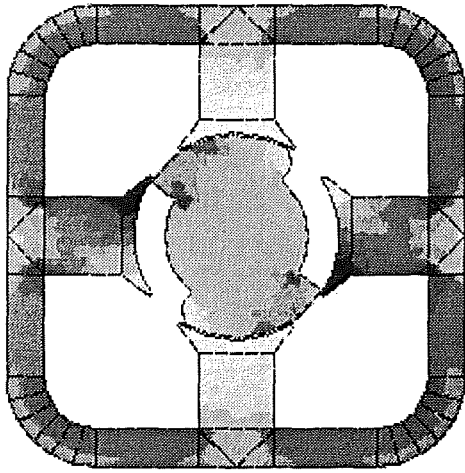
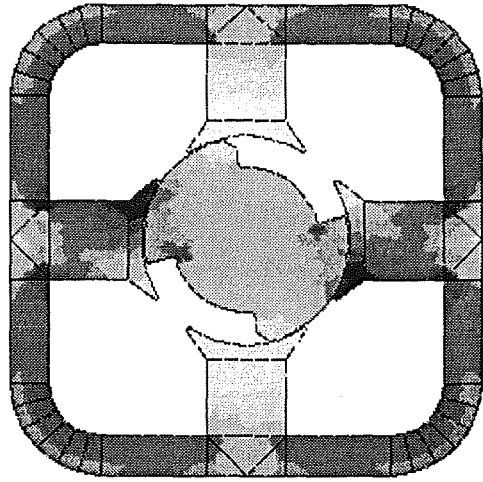


Fig. VI. 7 Courants dans les phases

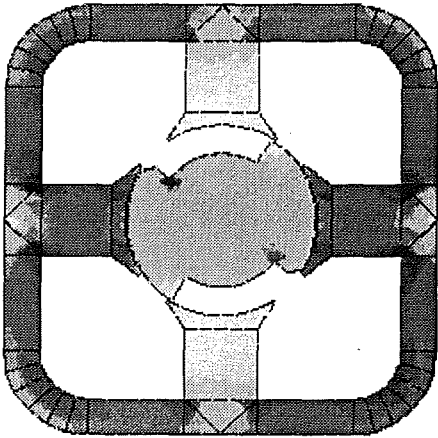
La figure VI.8 montre la répartition de l'induction magnétique pour différentes positions du rotor par rapport aux parties fixes (la couleur foncée indique une induction plus forte).



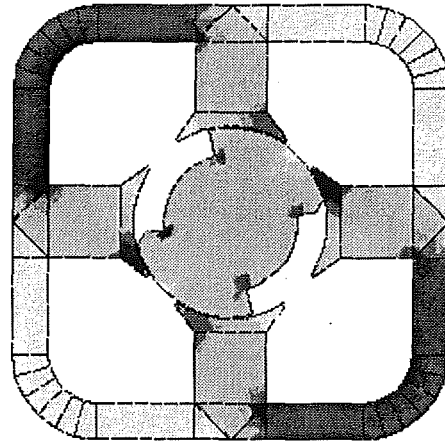
a) Angle de rotation de  $5^\circ$



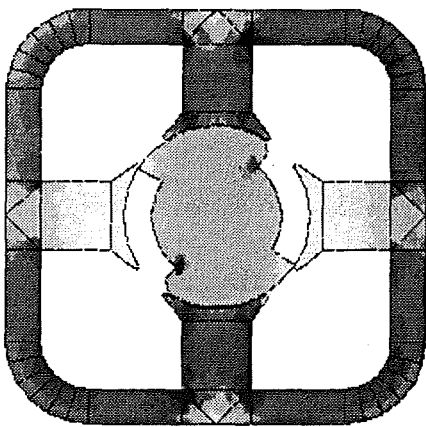
b) Angle de rotation de  $50^\circ$



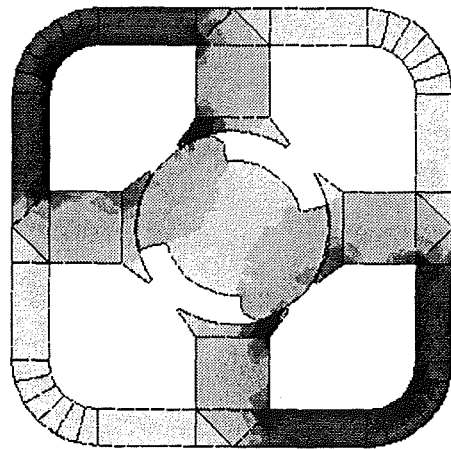
c) Angle de rotation de  $95^\circ$



d) Angle de rotation de  $140^\circ$



e) Angle de rotation de  $185^\circ$



f) Angle de rotation de  $230^\circ$

Fig. VI.8 Répartition de l'induction magnétique pour différentes positions du rotor

Malheureusement, nous ne disposons pas, jusqu'à présent, des caractéristiques précises de ce moteur. Par conséquent, la comparaison avec des résultats expérimentaux n'a pas pu être faite.

En attendant tous les éléments nécessaires à une modélisation plus précise en non-linéaire, cette simulation nous a permis de rassembler l'ensemble des développements qui ont été réalisés et de montrer le bon fonctionnement du logiciel.

## 5. Conclusion

L'ensemble des méthodes présentées dans les chapitres précédents a été testée sur une machine électrique tournante, dans des conditions fidèles à la réalité:

- le circuit de d'alimentation est complexe, comportant des transistors commandés en fonction de la position du rotor

- les inducteurs ont des formes géométriques réelles, nécessitant un traitement particulier pour assurer le caractère compatible de la formulation non-jaugée, en éléments mixtes

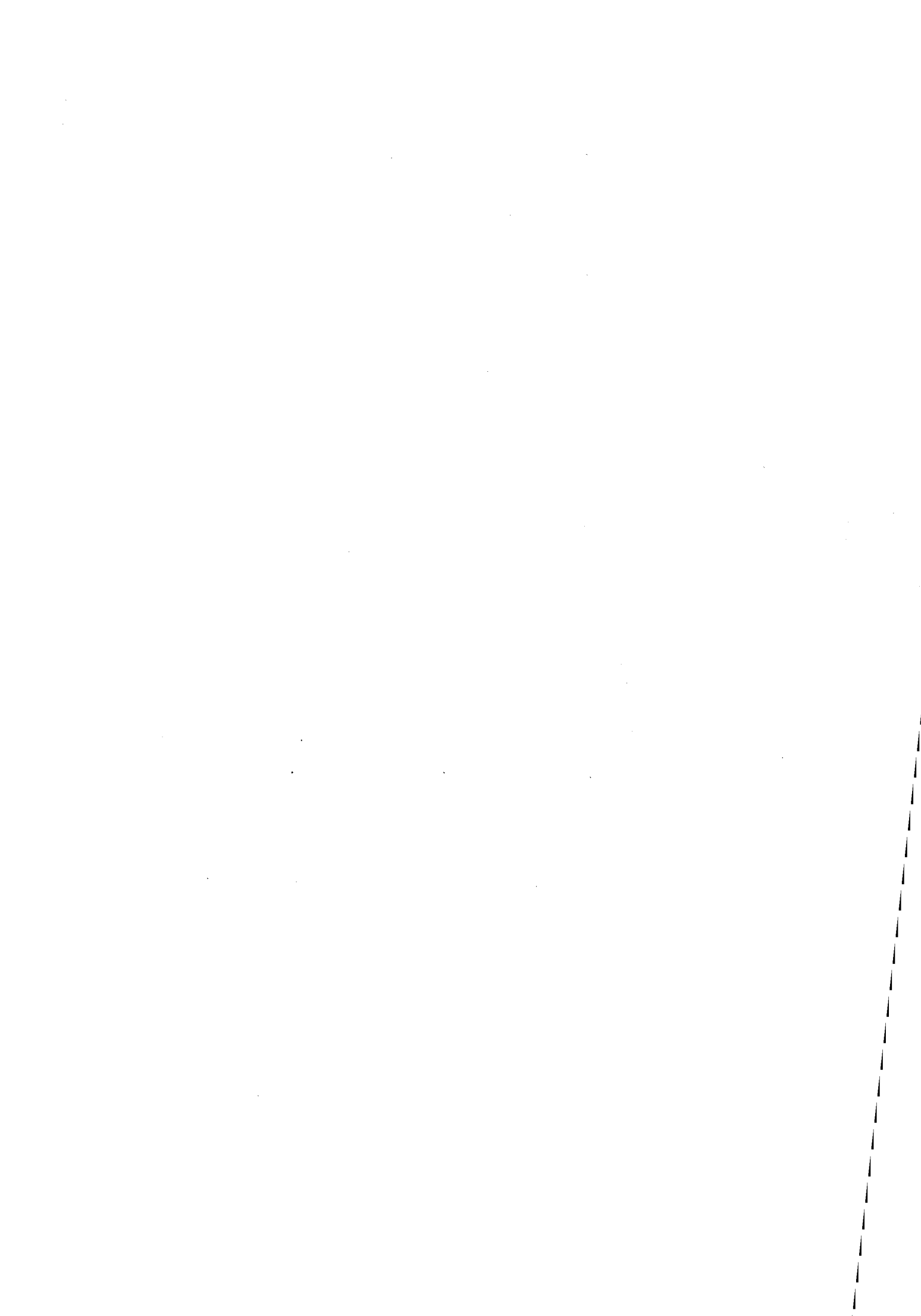
- le rotor est un mouvement

Les résultats obtenus montrent le bon fonctionnement des techniques implantées. Cependant, la phase de validation doit être poursuivie sur des moteurs sur lesquels des résultats de mesure sont disponibles.





## **Conclusion générale**



Au cours de ce travail nous avons essayé d'apporter une réponse aussi complète que possible à l'objectif initial. Ainsi, les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont permis de mettre au point un outil de calcul pour la modélisation tridimensionnelle des machines électriques tournantes, avec la prise en compte des circuits électriques d'alimentation et du mouvement des parties mobiles.

La formulation qui a été choisie utilise, comme inconnue principale, le potentiel vecteur magnétique interpolé sur des éléments finis mixtes. La compatibilité de cette formulation est assurée par l'introduction d'un potentiel vecteur électrique source, dans un domaine englobant les inducteurs, qu'ils soient maillés ou non-maillés. Cette approche est particulièrement efficace dans la modélisation des dispositifs électrotechniques réels, avec la prise en compte des têtes de bobines.

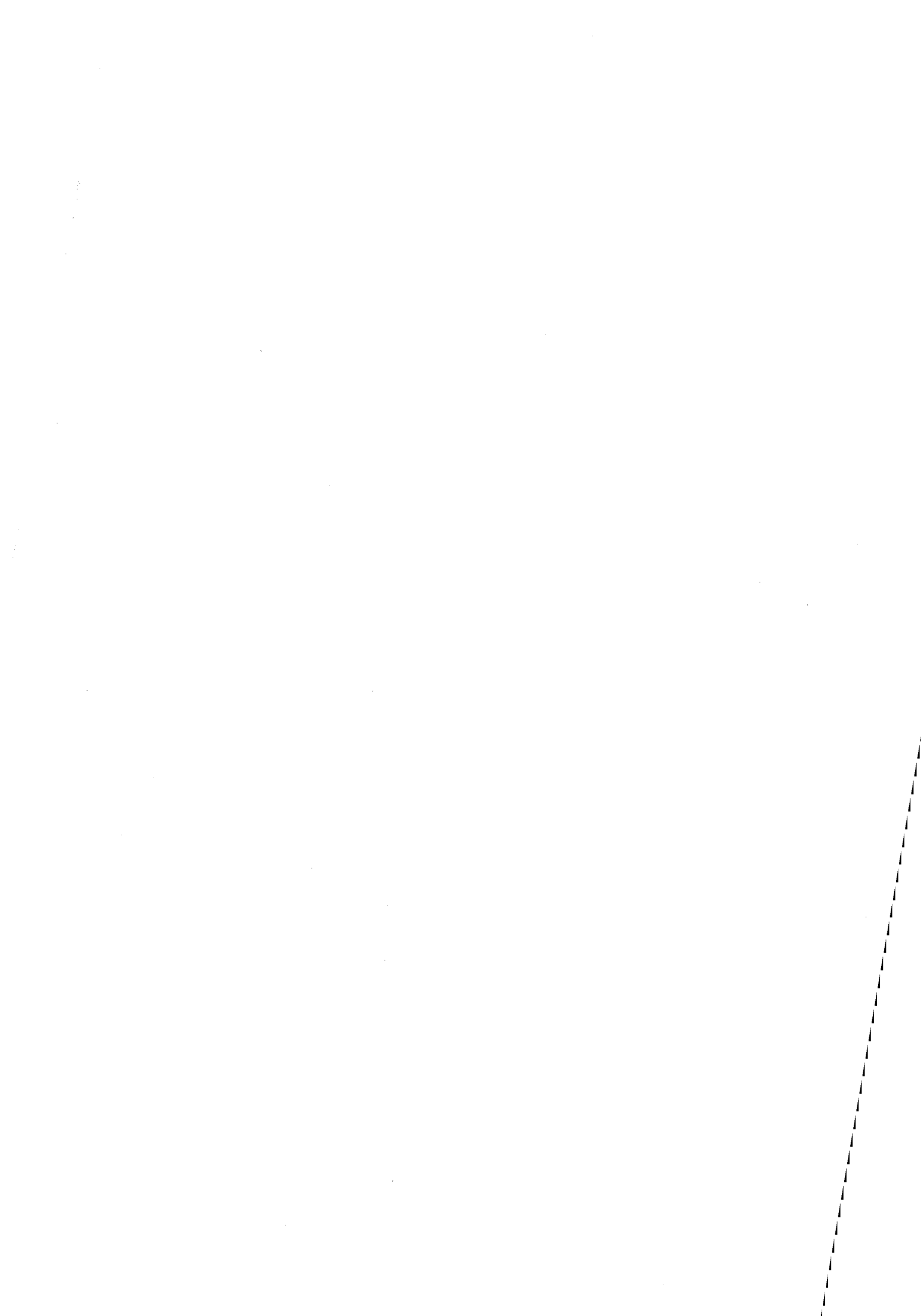
D'autre part, des méthodes originales ont été développées et validées, notamment pour la prise en compte du mouvement des parties mobiles dans le contexte de l'interpolation mixte. La méthode proposée reste cependant limitée aux éléments mixtes du premier ordre incomplet.

Les autres contributions de ce travail seront très utiles aux utilisateurs de la méthode des éléments finis, en commençant par les éléments mixtes, qui ouvrent de nouvelles perspectives dans la modélisation des dispositifs électrotechniques. Nous avons également adapté ou implanté des outils efficaces pour la résolution des grands systèmes: GMRES, la méthode de l'équation normale, la méthode du résidu minimum, ainsi que de nouvelles techniques de préconditionnement.

Cependant, la phase de validation doit être continuée et élargie à d'autres types de machines électriques, notamment à celles dont la modélisation ne requiert aucun développement supplémentaire.

Un effort important reste à réaliser pour la prise en compte des courants de Foucault qui peuvent se développer dans les parties massives en mouvement des dispositifs électromagnétiques. Ces courants sont engendrés conjointement par des alimentations variables dans le temps et par le mouvement. Cette étude pourra aboutir sur la modélisation tridimensionnelle d'une machine asynchrone.

Une autre direction également très importante pourra être le couplage cinématique, qui permettra de simuler le démarrage ou les modifications du couple de charge des machines électriques.



## **Annexes**



## Annexe 1. Méthodes de résolutions de systèmes matriciels de grande taille

Nous présentons ci-dessous quelques méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires de forme  $[A][x]=[b]$ .

Deux types de méthodes seront traités : les méthodes de gradient conjugué et la méthode GMRES (generalized minimum residual method). Ces méthodes convergent d'autant plus vite que la matrice du système à résoudre est bien conditionnée. (On rappelle que le conditionnement de la matrice est défini comme étant le rapport de la plus grande valeur propre sur la plus petite).

Nous allons également exposer quelques techniques de préconditionnement pour diminuer le rayon spectral de la matrice et ainsi, accélérer la rapidité de la convergence.

Ces méthodes ont été employées tout au long de ce travail et notamment dans le chapitre V.

### A.1.1. Méthode du gradient conjugué [Lascaux-87]

Cette méthode est, sans aucun doute, la plus utilisée pour la résolution des systèmes issus de la méthode des éléments finis. Introduite en 1952, la méthode du gradient conjugué est théoriquement une méthode directe: on obtient la solution en  $n$  itérations, où  $n$  est la dimension de la matrice du système. En pratique, à cause des erreurs d'arrondi, cette méthode est considérée comme une méthode itérative.

A chaque itération, le nouveau vecteur solution  $x_{k+1}$  est calculé en fonction de la solution à l'itération précédente:

$$[x]^{(k+1)} = [x]^{(k)} + \alpha^k [p]^{(k)} \quad (\text{A.1.1})$$

Le vecteur  $[p]^{(k)}$  et le scalaire  $\alpha^k$  sont déterminés avec l'objectif de minimiser la fonctionnelle quadratique suivante:

$$E(x) = ([A][x], [x]) - 2([b], [x]) \quad (\text{A.1.2})$$



La minimisation de (A.1.2) est équivalente à la minimisation de la forme quadratique suivante:

$$E(x) = ([r(x)][A]^{-1}[r(x)]) \quad (\text{A.1.3})$$

où  $[r(x)]$  est le résidu du système défini par  $[r(x)] = [b] - [A][x]$

Pour minimiser la fonctionnelle  $E(x)$ , les méthodes de descente sont construites en choisissant à la  $k$ -ième itération la direction de descente  $[p]^{(k)}$  et le scalaire  $\alpha^k$  tels que:

$$E(x^{k+1}) < E(x^k) \quad (\text{A.1.4})$$

La forme générale de l'algorithme, tel qu'il a été utilisé, peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \text{on choisi } [x]^{(0)} \\ & [p]^{(0)} = [r]^{(0)} = [b] - [A][x] \\ & \text{pour } k = 0, 1, \dots \\ & \quad \alpha^k = \frac{\|[r]^{(k)}\|}{([A][p]^{(k)}, [p]^{(k)})} \\ & \quad [x]^{(k+1)} = [x]^{(k)} + \alpha^k [p]^{(k)} \\ & \quad [r]^{(k+1)} = [r]^{(k)} - \alpha^k [A][p]^{(k)} \\ & \quad \beta^k = \frac{\|[r]^{(k+1)}\|}{\|[r]^{(k)}\|} \\ & \quad [p]^{(k+1)} = [r]^{(k+1)} + \beta^{k+1} [p]^{(k)} \\ & \text{fin pour} \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

Le test d'arrêt des itérations porte sur  $\|[r]^{(k)}\|$ .

### *Quelques propriétés de convergence de la méthode du gradient conjugué*

On peut démontrer que la solution  $[x]^{(k)}$  obtenue à la  $k$ -ième itération vérifie:

$$E(x^k) \leq 4 \left( \frac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1} \right)^{2k} E(x^0) \quad (\text{A.1.6})$$

Dans la relation (A.1.6) on a noté  $K(A)$ , le conditionnement de la matrice  $[A]$ .

On remarque que lorsque  $K(A)$  est grand, alors pour que :

$$\frac{E(x^k)}{E(x^0)} \leq \varepsilon, \text{ il suffit que } k \geq \frac{\sqrt{K(A)}}{2} \ln \frac{2}{\varepsilon} + 1 \quad (\text{A.1.7})$$

On conclut que le nombre d'itérations  $k$  nécessaire pour atteindre la précision  $\varepsilon$  est proportionnel à  $\sqrt{K(A)}$ .

### Préconditionnement de la matrice

Nous avons vu que la rapidité de convergence de la méthode du gradient conjugué dépend du conditionnement de la matrice  $[A]$ . Plus  $K(A)$  est proche de 1, plus vite convergera l'algorithme. Généralement, les matrices issues de la méthode des éléments finis peuvent avoir des valeurs propres très différentes, ce qui fait que dans ces cas, la convergence est souvent difficile.

L'idée du preconditionnement est de réduire le rayon spectrale de la matrice, et par conséquent, de faire en sorte que les valeurs propres du système matriciel preconditionné soient les plus proches de 1.

Le principe de preconditionnement de la matrice  $[A]$  consiste à remplacer la résolution de l'équation  $[A][x]=[b]$  par celle du système équivalent :

$$[C]^{-1}[A][x]=[C]^{-1}[b] \quad (\text{A.1.8})$$

Théoriquement, le meilleur choix est  $[C]^{-1}=[A]^{-1}$ , car alors  $K(C^{-1}A)=1$ . En pratique, il faudra trouver  $[C]^{-1}$  le plus proche de  $[A]^{-1}$ , sans que les calculs pour  $[C]^{-1}$  soient trop coûteux.

Nous allons exposer deux des techniques de preconditionnement les plus utilisées.

### Le preconditionnement diagonal

Cette technique est un cas particulier du preconditionnement SSOR d'Evans. Si la matrice  $[A]$ , symétrique et définie positive est mise sous la forme :

$$[A]=[D]-[E]-[E]' \quad (\text{A.1.9})$$

où  $[D]$  est la matrice qui contient la diagonale et  $[E]$  la matrice qui contient la partie triangulaire inférieure de  $[A]$ .

La matrice de préconditionnement est la matrice  $[D]$  contenant la diagonale de la matrice.

La résolution du système initiale est remplacée par la résolution du système:

$$[D]^{-1}[A][x]=[D]^{-1}[b] \quad (\text{A.1.10})$$

### Le préconditionnement incomplet de Choleski

La factorisation complète d'une matrice  $[C]$  symétrique et définie positive conduit à la remplissage d'une matrice  $[L]$  triangulaire inférieure tel que:

$$[C]=[L][L]' \quad (\text{A.1.11})$$

Dans la pratique, on utilise rarement la factorisation complète de la matrice  $[A]$ , car elle conduit à la remplissage de la matrice  $[L]$ , ce qui fait que les calculs peuvent devenir très coûteux. Contrairement à la factorisation complète, la factorisation incomplète est beaucoup plus économique, car la matrice  $[L]$  n'a pas de termes non-nuls supplémentaires par rapport à la matrice  $[A]$  et donc la structure de la matrice  $[A]$  est conservée.

Souvent, on préfère décomposer  $[C]$  sous une autre forme:

$$[C]=[L][D][L]' \quad (\text{A.1.12})$$

technique connue sous le nom de décomposition  $ILU(0)$ .

De la même manière, on peut définir les méthodes  $ILU(n)$ , où  $n$  représente le nombre de diagonales supplémentaires de la matrice  $[L]$  par rapport à la matrice  $[A]$ . Bien sur, plus  $n$  est grand, plus  $[C]$  est proche de  $[A]$ , mais plus coûteux sont les calculs.

La rapidité de convergence peut être considérablement améliorée si un facteur d'accélération  $\gamma$  est introduit dans l'algorithme de la factorisation incomplète [Fujiwara-93], [Lee-97]:

$$L_{ij} = \begin{cases} \gamma A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2 / D_{kk} & (i=j) \\ A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} / D_{kk} & (i>j) \end{cases} \quad (\text{A.1.13})$$

Le facteur  $\gamma$  est déterminé en fonction du conditionnement initial de la matrice et il augmente le poids des termes diagonaux de la matrice  $[C]$ . Plus le facteur d'accélération est grand, mieux la matrice  $[C]$  est conditionnée, mais elle ressemble de moins en moins à la matrice initiale.

### Gradient conjugué préconditionné

La méthode du gradient conjugué ne peut pas être appliquée directement à la nouvelle matrice  $[C]^{-1}[A]$ , car même si  $[C]^{-1}$  est symétrique, il n'est résulte pas que  $[C]^{-1}[A]$  soit symétrique.

En lieu de considérer le système (A.1.8) on considère le système:

$$[C]^{1/2}[C]^{-1}[A][C]^{-1/2}[C]^{1/2}[x] = [C]^{-1/2}[b] \quad (\text{A.1.14})$$

sur lequel on peut appliquer l'algorithme, qui s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \text{on choisi } [x]^{(0)} \\ & [p]^{(0)} = [r]^{(0)} = [b] - [A][x]^{(0)} \\ & [C][p]^{(0)} = [r]^{(0)} \\ & [z]^{(0)} = [p]^{(0)} \\ & \text{pour } k=0, 1, \dots \\ & \quad \alpha^k = ([r]^{(k)}, [z]^{(k)}) / ([A][p]^{(k)}, [p]^{(k)}) \\ & \quad [x]^{(k+1)} = [x]^{(k)} + \alpha^k [p]^{(k)} \\ & \quad [r]^{(k+1)} = [r]^{(k)} - \alpha^k [A][p]^{(k)} \\ & \quad [C][z]^{(k)} = [r]^{(k+1)} \\ & \quad \beta^k = ([r]^{(k+1)}, [z]^{(k+1)}) / ([r]^{(k)}, [z]^{(k)}) \\ & \quad [p]^{(k+1)} = [z]^{(k+1)} + \beta^{k+1} [p]^{(k)} \\ & \text{fin pour} \end{aligned} \quad (\text{A.1.15})$$

Si le préconditionnement utilisé est de type Cholesky incomplet, cette méthode s'appelle ICCG (Incomplet Choleski Conjugate Gradient)

### A.1.2. Méthode de l'équation normale [Lascaux-87]

La résolution de l'équation  $[A][x]=[b]$  est remplacée par la résolution de l'équation suivante, appelée normale:

$$[A]'[A][x]=[A]'[b] \quad (\text{A.1.16})$$

Une méthode de type gradient conjugué est appliqué pour la résolution de (A.1.16)

L'algorithme s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & \text{on choisi } [x]^{(0)} \\
 & [r]^{(0)} = [b] - [A][x]^{(0)} \\
 & [p]^{(0)} = [A]'[r]^{(0)} \\
 & \text{pour } k = 0, 1, \dots \\
 & \quad \alpha^k = ([A]'[r]^{(k)}, [A]'[r]^{(k)}) / ([A][p]^{(k)}, [A][p]^{(k)}) \\
 & \quad [x]^{(k+1)} = [x]^{(k)} + \alpha^k [p]^{(k)} \\
 & \quad [r]^{(k+1)} = [r]^{(k)} - \alpha^k [A][p]^{(k)} \\
 & \quad \beta^{k+1} = ([A]'[r]^{(k+1)}, [A]'[r]^{(k+1)}) / ([A]'[r]^{(k)}, [A]'[r]^{(k)}) \\
 & \quad [p]^{(k+1)} = [A]'[r]^{(k+1)} + \beta^{k+1} [p]^{(k)} \\
 & \text{fin pour}
 \end{aligned} \quad (\text{A.1.17})$$

Cet algorithme présente l'avantage qu'il converge pour toute matrice régulière et non pas définie positive. En revanche, les calculs sont plus coûteux par rapport à la méthode du gradient conjugué.

Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'erreur  $\epsilon$  est donné par la formule:

$$k \geq \frac{\sqrt{K(A'A)}}{2} \ln \frac{2}{\epsilon} + 1 \quad (\text{A.1.18})$$

Sachant que  $K(A'A) > K(A)$ , la rapidité de convergence de la méthode de l'équation normale est plus faible par rapport à celle du gradient conjugué.

### A.1.3. La méthode du résidu minimum [Lascaux-87]

Cette méthode cherche à minimiser la norme euclidienne du résidu  $E(r) = \|[r]\|^2$ . Elle ne peut pas être appliquée que si la partie triangulaire supérieure de  $[A]$  est définie positive.

La rapidité de convergence est donnée par la formule:

$$k \geq \frac{\sqrt{K(A)}}{2} \ln \frac{2}{\varepsilon} + 1 \quad (\text{A.1.19})$$

L'algorithme implanté est le suivant:

$$\begin{aligned}
 & \text{on choisi } [x]^{(0)} \\
 & [r]^{(0)} = [b] - [A][x]^{(0)} \\
 & [p]^{(0)} = [r]^{(0)} \\
 & [q]^{(0)} = [A][p]^{(0)} \\
 & \text{pour } k = 0, 1, \dots \\
 & \quad \alpha^k = ([r]^{(k)}, [q]^{(k)}) / ([q]^{(k)}, [q]^{(k)}) \\
 & \quad [x]^{(k+1)} = [x]^{(k)} + \alpha^k [p]^{(k)} \\
 & \quad [r]^{(k+1)} = [r]^{(k)} - \alpha^k [q]^{(k)} \\
 & \quad \beta^{k+1} = -([A][r]^{(k+1)}, [q]^{(k+1)}) / ([q]^{(k)}, [q]^{(k)}) \\
 & \quad [p]^{(k+1)} = [r]^{(k+1)} + \beta^{k+1} [p]^{(k)} \\
 & \quad [q]^{(k+1)} = [A][r]^{(k+1)} + \beta^{k+1} [q]^{(k)} \\
 & \text{fin pour}
 \end{aligned} \quad (\text{A.1.20})$$

**A.1.4. GMRES (Generalized Minimum RESidual method) [Saad-86]**

Cette méthode peut être appliquée sur toute matrice régulière. La solution à l'itération  $k$  s'écrit:

$$[x]^{(k+1)} = [x]^{(0)} + [z]^{(k)} \quad (\text{A.1.21})$$

où  $[x]^{(0)}$  étant la valeur de départ et  $[z]^{(k)}$  étant la solution du système:

$$\min_{z \in Z_k} \|[b] - [A]([x]^{(0)} + [z]^k)\| = \min_{z \in Z_k} \|[r]^{(0)} - [A][z]^k\| \quad (\text{A.1.22})$$

Nous avons noté  $K_k$  l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires des vecteurs:  $\{[r]^{(0)}, [A][r]^{(0)}, \dots, [A]^{(k-1)}[r]^{(0)}\}$ , qui s'appelle l'espace de Krylov de dimension  $k$ .

Les implémentations pratiques de la méthode peuvent être très différentes, mais chacune génère une base de  $K_k$  et ensuite remplace (A.1.21) par un système de moindres carrés de dimension  $k$ .

Afin d'éviter l'accroissement de l'espace mémoire au fur et à mesure que les itérations s'enchaînent, on utilise le plus souvent la méthode GMRES( $m$ ), où  $m$  est un nombre minimum d'itérations donné en entrée, plus petit que  $n$ . Dans un cycle de GMRES( $m$ ), la valeur de départ  $[x]^{(0)}$  étant donnée, on effectue les  $m$  itérations pour calculer une base orthogonale de l'espace de Krylov.

Si le nombre d'itérations limite  $m$  est atteint sans que la précision soit satisfaisante, le cycle est terminé avec le calcul de  $[z]^{(k)}$ . Si  $[r(x^{(0)} + z^k)]$  n'est pas suffisamment petit, un nouveau cycle est commencé.

Usuellement, les vecteurs de cette base sont déterminés par une méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, dans laquelle un processus itératif permet la détermination récursive des éléments de la base, à partir de ceux déjà calculés.

L'algorithme GMRES( $m$ ) est donné ci-dessous:

on choisit  $[x]^{(0)}$  et la dimension  $m$  de l'espace de Krylov

on définit une matrice  $[H]$  de dimensions  $(m+1, m)$

pour  $j = 1, 2, \dots, m$

$$H_{ij} = ([A][v]_i, [v]_j) \quad , \text{ pour } i = 1, 2, \dots, j$$

$$[v]_{j+1} = [A][v]_j - \sum_{i=1}^j H_{ij} [v]_i$$

$$H_{j+1,j} = \|[v]_{j+1}\|$$

$$[v]_{j+1} = [v]_{j+1} / H_{j+1,j}$$

fin pour

on calcule la solution approchée  $[x] = [x]^{(0)} + [V][d]$ ,

$$\text{où } [d] \text{ minimise } \|[r]^{(0)}[e]_1 - [H][d]\| \quad \text{avec } [e]_1 = (1, 0, \dots, 0) \quad (\text{A.1.23})$$

calcul du résidu  $[r(x)] = [b] - [A][x]$ , si la précision est atteinte

alors fin, sinon  $[x]^{(0)} = [x]$  et on recommence l'algorithme

La vitesse de convergence de l'algorithme peut être considérablement accélérée si on utilise une technique de préconditionnement de la matrice du système. Les méthodes de type ILU(n) ou SSOR sont largement utilisées et ont prouvé l'efficacité.

Différentes extensions de GMRES sont possibles. Le lecteur intéressé peut se rapporter à [Paige-75], [Turner-92], [Saad-93], [Morgan-95], [Cullum-96], [Kelley-96], [Lorber-96], [Brown-97], [Toh-97].





## Annexe 2. La méthode de Newton-Raphson

Soit  $F$  une application non-linéaire définie par:

$$F: R^N \rightarrow R^N \text{ et } F(x)=0 \quad (\text{A.2.1})$$

avec la matrice jacobienne:

$$F'(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad (\text{A.2.2})$$

symétrique est définie positive.

Pour une solution de départ  $x^{(0)}$ , on génère une suite  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ , donnée par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (\text{A.2.3})$$

et

$$F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \quad (\text{A.2.4})$$

Sous certaines hypothèses sur  $x^{(0)}$  et  $F$ , la séquence est bien définie et présente une convergence quadratique vers la solution  $x^*$  [Ortega-70], c'est-à-dire:

$$\exists c < 1 \text{ pour que } \|x^{(k+1)} - x^*\| \leq c \|x^{(k)} - x^*\|^2 \quad (\text{A.2.5})$$

L'inconvénient majeur de la méthode est qu'à chaque itération non-linéaire on doit résoudre le système linéaire (A.2.4). Dans la pratique, le système (A.2.4) est résolu à l'aide d'une méthode itérative (Gradient conjugué ou GMRES) et on obtient ce que les mathématiciens appellent la méthode de Newton-Raphson inexacte.

Plusieurs modifications de la méthode sont possibles. Une version couramment utilisée remplace  $F'(x^{(k)})$  avec  $F'(x^{(0)})$ , ce qui permet d'éviter le calcul de  $F'(x^{(k)})$  à chaque itération. Cependant, l'espace mémoire nécessaire n'est pas diminué et la convergence n'est que linéaire. D'autres méthodes peuvent être trouvées dans [Hantila-75], [Scherman-78], [Dembo-82], [Jackson-93].



## **Références bibliographiques**



- [Albanese-90] Albanese R., Rubinacci G., "Magnetostatic field computations in terms of two component vector potential", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp. 515-532, 1990.
- [Albanese-92] Albanese R., Coccoresse E., Martone R., G. Miano, Rubbinacci G., "Periodic Solutions of Nonlinear Eddy Currents Problems in Three-Dimensional Geometries", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1118-1121, March 1992.
- [Albanese-93] Albanese R., Rubinacci G., "Two-component vector potential formulations for solving Maxwell equations in closed cavities", *Rev. Roumaine de Sciences Techniques - Electrotechiques et Energétique*, Vol. 38, pp. 45-52, 1993.
- [Biro-89] Biro O., Preis K., "On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, No. 4, pp. 3145-3159, July 1989.
- [Biro-93] Biro O., Preis K., Vrisk G., Richter K.R., Ticar I., "Computation of 3-D Magnetostatic Fields Using a Reduced Scalar Potential", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No.2, pp. 1329-1332, March 1993.
- [Bossavit-88] Bossavit A., "Whitney Forms: a Class of Finite Elements for Three Dimensional Computations in Electromagnetism", *IEE Proceedings*, Vol. 135, Pt. A, pp. 493-500, March 1988.
- [Bossavit-89] Bossavit A., "Edge elements for scatterings problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, No.4, pp. 2816-2821, March 1989
- [Bossavit-93] Bossavit A., "Electromagnétisme, en vue de la modélisation", Springer-Verlag, Paris, 1993
- [Bossavit-96] Bossavit A., "Edge elements for Magnetostatics", *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 9, pp. 19-34, 1996.
- [Boualem-97] Boualem B., "Contribution à la modélisation des systèmes électrotechniques à l'aide des formulations en potentiels: application à la machine asynchrone", *Thèse de doctorat Université Lille*, juillet 1997.
- [Bouillault-88] Bouillault F., Razek A., "Hybrid Numerical Methods for Movement Consideration in Electromagnetic Systems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, pp. 259-261, 1988.
- [Bouissou-94-1] Bouissou S., Piriou F., Kieny C., Tanneau G., "Numerical Simulation of a Power Transformer using 3D Finite Element Method Coupled to Circuit Equation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 3224-3227, September 1994.
- [Bouissou-94-2] Bouissou S., Piriou F., "Study of 3D Formulations to Model Electromagnetic Devices", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 3228-3231, September 1994.
- [Brauer-91] Brauer J., MacNeal B.E., Larkin L.A., Overbye V.D., "New method for modelling electronic circuits coupled with 3D electromagnetic finite element models", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 5, pp. 4085-4088, 1991.
- [Brisset-95] Brisset S., "Outil et méthodologie pour la conception des moteurs à reluctance variable à double saillance", *Thèse de doctorat, Université Lille*, janvier 1995.
- [Brown-97] Brown P., Walker H., "GMRES on (nearly) singular systems", *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, Vol. 18, No. 1, January 1997, pp. 37-51.
- [Brunelli-83] Brunelli B., Casadei D., Reggiani U., Sena G., "Transient and Steady-State Behaviour of Solid Rotor Induction Machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-19, No. 6, pp. 2650-2654, 1983
- [Cheng-94] Cheng Z., Hu Q., Liu Z., Ye C., Wang J., "An engineering-oriented loss model", *Proceedings of Team Workshop, Aix-les-Bains*, 1994

- [Coulomb-81] Coulomb J.L., "Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, juin 1981.
- [Coulomb-97] Coulomb J.L., Zgainski F.X., Maréchal Y., "A Pyramidal Element to link Hexaedral, Prismatic and Tetrahedral Edge Finite Elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, pp. 1362-1365, March 1997.
- [Cullum-96] Cullum J., Greenbaum A., "Relations between Galerkin and norm-minimizing iterative methods for solving linear systems", *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, Vol. 17, No. 2, April 1996, pp. 223-247.
- [Davat-85] Davat B., Ren Z., Lajoie-Mazenc M., "The movement in field modeling", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 21, no,6, pp. 2296-2298, 1985.
- [Dembo-82] Dembo R., Eisenstat S., Steihaug T., "Inexact Newton methods", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 19, No. 2, April 1982, pp. 400-408.
- [Dhatt-84] Dhatt G., Touzot G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", Collection Université de Compiègne, Editions Maloine, Paris, 1984.
- [Demenko-92] Demenko A., "Equivalent RC networks with mutual capacitances for electromagnetic field simulation of electrical machines transient", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1406-1409, March 1992.
- [Demerdash-90] Demerdash N.A., Wang R., "Theoretical and numerical difficulties in 3D vector-potential methods in finite element magnetostatic computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, pp. 1656-1658, 1990.
- [Dreher-93] Dreher T., Meunier G., "3D Modelling of electromagnetic coil fed by alternating voltage sources", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 20, No. 2, March 1993.
- [Dreher-94] Dreher T., "Couplage de la méthode des éléments finis tridimensionnels avec une méthode d'analyse du circuit électrique: application à la modélisation des machines électriques tournantes", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, octobre 1994.
- [Dreher-95] Dreher T., Meunier G., "3D Line Current Model of Coils and External Circuits", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, pp. 1853-1856, May 1995.
- [Dular-94] Dular P., "Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires", *Thèse de doctorat*, Université de Liège, mai 1994.
- [Fujiwara-93] Fujiwara K., Nakata T., Fusayasu H., "Acceleration of Convergence Characteristic of the ICCG Method", *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, pp. 1958-1961, 1993.
- [Fujiwara-95] Fujiwara K., Nakata T., Takahashi N., Ohashi H., "On the continuity of the magnetizing current density in 3D magnetic field analysis with edge element", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, pp. 1342-1345, May 1995.
- [Gasmi-96] Gasmi N., "Contribution à la modélisation des phénomènes électriques-magnétiques couplés et du mouvement pour les systèmes électromagnétiques en 3D", *Thèse de doctorat*, Université Paris 6, mai 1996.
- [Golias-94] Golias N.A., Tsiboukis T.D., "Magnetostatics with Edge Elements: A Numerical Investigation in the Choice of the Tree", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 2877-2880, September 1994.
- [Golovanov-96] Golovanov C., Coulomb J.L., Maréchal, "3-D Magnetostatic Field Computation using Edge Elements: Analysis of Different Method to Improve the Convergence of the ICCG Solver", Proc. of the Third International Workshop on Electric and Magnetic Fields, Liège (Belgium), 6-9 May 1996, pp.113-117
- [Guerin-94] Guerin C., "Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en regime harmonique", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, septembre 1994.

- [Hantila-75] Hantila F.I., "A Method for Solving Stationary Magnetic Field in Nonlinear Magnetic Media", *Rev. Roumaine Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ.*, pp.397-407, Bucarest 1975
- [Hasebe-87] Hasebe S., Kano Y., "About traitement of gauge of A in 3-D magnetostatic analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-23, No.5, pp. 3305-3307, September 1987.
- [Hughes-94] Hughes T., "The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall International, New York 1994.
- [Jackson-93] Jackson K.R., Seward W.L., "Adaptive linear equation solvers in codes for large stiff systems of ODES", *SIAM Journal of Scientific Computation*, Vol. 14, No. 4, July 1993, pp. 800-823.
- [Kanayama-90] Kanayama H., Motoyama H., Endo K., Kikuchi F., "Three-dimensional magnetostatic analysis using Nedelec's elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 682-685, March 1990.
- [Kelley-96] Kelley C.T., Xue Z.Q., "GMRES and integral operators", *SIAM Journal of Scientific Computation*, Vol. 17, No. 1, January 1996, pp. 217-226.
- [Konrad-81] Konrad A., "The numerical solution of steady-state skin effect problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-17, , 1981
- [Konrad-89] Konrad A., "The zero divergence constraint in 3D vector finite element methods", *COMPEL*, Vol 9, Supplement A, pp. 7-16, September 1989
- [Labbe-96] Labbe N., "Modélisation du couplage magnéto-thermique appliquée aux ralentisseurs électromagnétiques", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, janvier 1996.
- [Lai-96] Lai H.C., Leonard P.J., Rodger D., "3D Finite Element Dynamic Simulation of Electrical Machines Coupled to External Circuits", *Proceedings of the Seventh Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, pp. 483, Okayama, March 1996.
- [Lascaux-87] Lascaux P., Théodor R., "Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur", Editions Masson, Paris, 1987.
- [Lee-97] Lee H., Jung H, Hahn S., "On the Convergence Rate Improvement of ICCG Solver on FE Mesh", *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, March 1997, pp. 1760-1763.
- [Leonard-92] Leonard P.J., Rodger D., "Modelling voltage forced coils using the reduced scalar potential method", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1615-1618, March 1992.
- [Lombard-92] Lombard P., "Couplage des équations électriques et magnétiques", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, septembre 1992.
- [Lorber-96] Lorber A., Carey G., Joubert W., "ODE recursions and iterative solvers for linear equations", *SIAM Journal of Scientific Computation*, Vol. 17, No. 1, January 1996, pp. 65-77.
- [Maréchal-91] Maréchal Y., "Modélisation des phénomènes magnétostatiques avec terme de transport. Application aux ralentisseurs électromagnétiques", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, février 1991.
- [Mesquita-92] Mesquita R.C., Bastos J.P.A., "An incomplete gauge formulation for 3D nodal finite-element magnetostatics", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1044-1047, March 1992.
- [Mesquita-94] Mesquita R.C., "Additional Properties of the Incomplete Gauge Formulation for 3-D Nodal Finite-Element Magnetostatics", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 2861-2864, September 1994.
- [Meunier-86] Meunier G. et Coulomb J.L., "Solution of 3D Eddy Currents and Electrical Circuit Combined Problems", Eddy Current Seminar, Oxford, Mars 1986
- [Meunier-88] Meunier G., Shen D., Coulomb J.L., "Modelisation of 2D and Axisymmetric magnetodynamic Domain by the Finite Elements Method", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, pp. 166-169, Jan. 1988
- [Mocanu-79] Mocanu C.I., "Teoria circuitelor electrice", Editura didactica si pedagogica, Bucuresti 1979.



- [Mocanu-91] Mocanu C.I., "Teoria câmpului electromagnetic", Editura didactica si pedagogica, Bucuresti 1991.
- [Morisue-90] Morisue T., "The corner problem in using the magnetic vector potential", *Proceedings of Int. Seminar in Electromagnetic Field Analysis*, Oxford, pp. 249-253, 1990.
- [Morgan-95] Morgan R., "A restarted GMRES method augmented with eigenvectors", *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, Vol. 16, No. 4, October 1995, pp. 1154-1171.
- [Nakata-88] Nakata T., Takahashi N. Fujiwara K., Okada Y., "Improvements of the T- $\Omega$  method for 3-D eddy current analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, pp. 94-97, January 1988.
- [Nakata-89] Nakata T., Takahashi N. Fujiwara K., Ahagon A., "3-D non-linear eddy current analysis using the time-periodic finite element method", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 25, No. 5, pp. 4150-4151, September 1989.
- [Nakata-90] Nakata T., Takahashi N. Fujiwara K., "Investigation of a Model to verify Softwares for 3D Nonlinear Eddy Current Analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 501-504, March 1990.
- [Nedelec-80] Nedelec J.C., "Mixed finite elements in  $R^3$ ", *Numer. Math.*, Vol. 35, pp. 315-341, 1980.
- [Nedelec-86] Nedelec J.C., "A New family of Mixed Finite Elements in  $R^3$ ", *Numer. Math.*, Vol. 50, pp. 57-81, 1986.
- [Ortega-70] Ortega J.M., Rheinboldt W.C., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", *Academic Press*, New York, 1970.
- [Paige-75] Paige C.C., Saunders M.A., "Solution of sparse indefinite systems of linear equations", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 12, No. 4, September 1975, pp. 617-629.
- [Pawlak-88] Pawlak A.M., Nehl T.W., "Transient finite element modeling of solenoid actuators: the coupled power electronics, mechanical and magnetic field problem", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, pp. 270-273, January 1988.
- [Perrin-94] Perrin-Bit R., "Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels: calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, septembre 1994.
- [Piriou-88] Piriou F., Razek A., "Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, pp. 274-277, January 1988.
- [Preis-91] Preis K., Bardi I., Biro O., Magele C., Renhart W., Richter K.R., Vrisk G., "Numerical analysis of 3D magnetostatic fields", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No.5, pp. 3798-3801, September 1991.
- [Preis-92] Preis K., Bardi I., Biro O., Magele C., Vrisk G., Richter K.R., "Different Finite Element Formulations of 3D Magnetostatic Fields", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No.2, pp. 1056-1059, March 1992.
- [Radulet-71] Radulet R., Tugulea A., Timotin Al., "Teoreme de unicitate pentru regimuri variabile ale câmpului electromagnetic", *Rev. Roumaine de Sciences Techniques- Electrotechiques et Energétique*, Vol. 21, pp. 109-123, 1971.
- [Razek-82] Razek A., Coulomb J.L., Feliachi M., Sabonadiere J.C., "Conception of an Air Gap Element in the Dynamic Analysis for the Electromagnetic Field in Electric Machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 18, No.2, pp. 655-659, 1982.
- [Remacle-97] Remacle J.-F., Dular P., Henrotte F., Genon A., Legros W., "On the Resolution of Magnetostatic and Magnetodynamic Mixed Formulation", *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, March 1997, pp. 1768-1771.

- [Ren-88] Ren Z., Verité J.C., "Application of a new edge element in 3D eddy currents computation", *Beijing Int. Symposium on Electromagnetic Field*, China-Beijing, october 1988.
- [Ren-96-1] Ren Z., Razek A., "Computation of 3-D electromagnetic field using differential forms based elements and dual formulation", *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 9, pp. 81-98, 1996.
- [Ren-96-2] Ren Z., "Auto-gauging of vector potential by iterative solver-numerical evidence", *Proceedings of the Third International Workshop on Electrical and Magnetical Fields*, Liège (Belgium) 6-9 May 1996.
- [Ren-96-3] Ren Z., "Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No.3, pp. 655-658, 1996.
- [Rodger-90] Rodger D., Lai H.C., Leonard P.J., "Coupled elements for problems involving movement", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 548-550, March 1990.
- [Saad-93] Saad Y., "A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm", *SIAM Journal of Scientific Computation*, Vol. 14, No. 2, March 1993, pp. 461-469.
- [Saad-86] Saad Y., Schultz M.H., "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM Journal of Scientific Computation*, Vol. 7, No. 2, March 1986, pp. 856-869.
- [Shen-85] Shen D., Meunier G., Coulomb, J.I., "Solution of magnetic fields and electrical circuits combined problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-21 No. 6, pp. 2288-2291, 1985.
- [Sherman-78] Sherman A., "On Newton-iterative methods for the solution of systems of nonlinear equations", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 15, No. 4, August 1978, pp. 755-770.
- [Stoer-94] Stoer J., Bulirsch R., "Introduction to Numerical Analysis", Springer-Verlag, New York 1994.
- [Straton-41] Straton J.A., "Electromagnetic theory", McGraw-Hill Book Company, New York 1941.
- [Timotin-62] Timotin A., "Lectii de bazele electrotehnicii", Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti 1962.
- [Toh-97] Toh K., "GMRES vs. Ideal GMRES", *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, Vol. 18, No. 1, January 1997, pp. 30-36.
- [Turner-92] Turner K., Walker H., "Efficient high accuracy solutions with GMRES(m)", *SIAM Journal of Scientific Computation*, Vol. 13, No. 3, May 1992, pp. 815-825.
- [Vassent-90] Vassent E., "Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis", *Thèse de doctorat*, I.N.P. Grenoble, novembre 1990.
- [Wang-96] Wang J.S., "A Nodal Analysis Approach for 2D and 3D Magnetic-Circuit Coupled Problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1857-1860, May 1996.
- [Webb-93-1] Webb J.P., Forghani B., "Hierarchical Scalar and Vector Tetrahedra", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, pp. 1495-1498, March 1993.
- [Webb-93-2] Webb J.P., "Edge Elements and What They can do for You", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, pp. 1460-1463, March 1993.
- [Williamson-85] Williamson S., Begg M.C., "Analysis of cage induction motors-A combined fields and circuits approach", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-21, No. 6, pp. 2396-2399, November 1985.
- [van Welij-85] van Welij J.S., "Calculation of eddy currents in terms of H on hexaedra", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. MAG-21, No. 6, pp. 2239-2242, November 1985.

- [Yamaguchi-96] Yamaguchi T., Kawase Y., Hayashi Y., "Dynamic Transient Analysis of Vector Controlled Motors Using 3-D Finite Element Method ", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1549-1552, May 1996.
- [Yao-95] Yao Bi N., "Méthode des éléments finis mixtes et conditions aux limites absorbantes pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquence", *Thèse de doctorat*, E.C. Lyon, janvier 1995.
- [Zienkiewicz-89] Zienkiewicz O.C., Wood W.L., "The finite element method ", Mc Graw Hill, New York, 1989.

## **Bibliographie**



- [Albanese] Albanese R., Rubinacci G., "Formulation of the eddy-current problem", *IEE Proceedings*, Vol. 137, Pt. A, No. 1, pp. 16-22, January 1990.
- [Bandelier] Bandelier B., Rioux-Damidau F., "Modelling of magnetic field using nodal or edge variables", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 5, pp. 1645-1648, September 1990.
- [Bedrosian] Bedrosian G., Chari M.V.K., Joseph J., "Comparison of Full and Reduced Potential Formulation for Low-Frequency Applications", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, pp. 1321-1324, March 1993.
- [Biro] Biro O., Preis K., Richter K., "Various FEM formulation for the calculation of transient 3d eddy currents in nonlinear media", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, pp. 1307-1310, May 1995.
- [Bossavit] Bossavit A., "Magnetostatic problems in multiply connected regions: some properties of the curl operator", *IEE Proceedings*, Vol. 135, Pt. A, No. 3, pp. 179-187, March 1988.
- [Brauer] Brauer J., MacNeal B.E., Larkin L.A., Overbye V.D., "New method for modelling electronic circuits coupled with 3D electromagnetic finite element models", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 5, pp. 4085-4088, 1991.
- [Brauer] Brauer J., Ruehl J., Hirtenfelder F., "Coupled Nonlinear Electromagnetic and Structural Finite Element Analysis of an Actuator Excited by an Electric Circuit", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, pp. 1861-1864, May 1995.
- [Cendes] Cendes Z., "Vector finite elements for electromagnetic field computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 5, pp. 3953-3966, September 1991.
- [Cigonski] Cigonski V., Yamashita H., "A Mixed Solving Procedure for Ungauged 3D Edge Finite Element Analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No.3, pp. 1702-1705, May 1995.
- [Demenko] Demenko A., "Time-Stepping FE Analysis of Electric Motor Drives with Semiconductor Converters", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 3264-3267, September 1994.
- [Demenko] Demenko A., "Mouvement Simulation in Finite Element Analysis of Electric Machine Dynamics", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1553-1556, May 1996.
- [Dular] Dular P., Remacle J.F., Henrotte F., Genon A., Legros W., "Magnetostatic and Magnetodynamique Mixed Formulations Compared with Conventional Formulation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, pp. 1302-1305, March 1997.
- [Fujiwara] Fujiwara K., Nakata T., Ohashi H., "Improvement of Convergence Characteristic of ICCG Method for the A- Method Using Edge Elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No.5, pp. 804-807, May 1996.
- [Kameari] Kameari A., "Calculation of transient 3D eddy current using edge-elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 466-469, March 1990.
- [Kameari] Kameari A., Koganezawa K., "Convergence of ICCG Method in FEM Using Edge Elements without Gauge Condition", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No.2, pp. 1223-1226, March 1997.
- [Kanai] Kanai Y., Abe T., Sengoku M., Iijima T., Iizuka M., Mukasa K. "Further discussion on magnetic vector potential finite-element formulation for three-dimensional magnetostatics", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, pp. 411-414, March 1990.
- [Leonard] Leonard P.J., Rodger D., "Some aspects of two- and three- dimensional transient-eddy-current modelling using finite elements and single-step time-marching algorithms", *IEE Proceedings*, Vol. 135, Pt. A, No. 3, pp. 159-166, January 1990.

- [Lin] Lin L., Xiang C., "Analysis of 3D Nonlinear Eddy Current Problem Using the Field Variables H and E Directly", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, pp. 1179-1182, March 1997.
- [Manges] Manges J., Cendes Z., "A Generalized Tree-Cotree Gauge for Magnetic Field Computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No.3, pp. 1342-1345, May 1995.
- [Mohammed] Mohammed O., Uler G., "A state space approach and formulation for the solution of nonlinear 3-D transient eddy current problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1111-1114, March 1992.
- [Nicolet] Nicolet A., Delincé F., "Implicit Runge-Kutta Methods for Transient Magnetic Field Computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1405-1408, May 1996.
- [Peios] Peios N.N., Hantila I.F., Della-Giacomo E., "Boundary Conditions in the diffusion problems of the electromagnetic field", *Rev. Roumaine de Sciences Techniques - Electrotechiques et Energétique*, Vol. 38, pp. 53-64, 1993.
- [Remacle] Remacle J.-F., Dular P., Henrotte F., Genon A., Legros W., "On the Resolution of Magnetostatic and Magnetodynamic Mixed Formulation", *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, March 1997, pp. 1768-1771.
- [Rodger] Rodger D., Allen N., Lai H.C., Leonard P.J., "Calculation of Transient 3D Eddy Currents in Nonlinear Media - Verification Using a Rotational Test Rig", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 2988-2991, September 1994.
- [Tsukerman] Tsukerman I., "A Stability Paradox for Time-Stepping Schemes in Coupled Fied-Circuit Problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, pp. 1857-1860, May 1995.

## Liste de publications concernant le travail de thèse

### Conférences internationales avec actes

C. Golovanov, T. Dreher, J.L. Coulomb, Y. Maréchal, G. Meunier, "Comparison of Different 3-D Vector Potential Methods in Finite Element Magnetostatic Computation", *Proc. of Compumag 95*, Berlin, 1995.

C. Golovanov, H.T. Luong, Y. Marechal, G. Meunier, "Results for the TEAM Workshop Problem 13 (3D Nonlinear Magnetostatic Model)", *Proc. of the TEAM Workshop Compumag 95*, Berlin, 1995.

C. Golovanov, J.L. Coulomb, Y. Maréchal, G. Meunier, "3-D Magnetostatic Field Computation using Edge Elements: Analysis of Different Method to Improve the Convergence of the ICCG Solver", *Proc. of the Third International Workshop on Electric and Magnetic Fields, Liège (Belgium)*, 6-9 May 1996, pp. 113-117.

C. Golovanov, J.L. Coulomb, Y. Maréchal, G. Meunier, G. Preda, "Magnetostatics Using Edge Elements: Numerical Techniques to Improve the Convergence of ICCG Solver", *Proc. of the First Romanian-Japanese Joint Seminar on Applied Electromagnetics*, Neptun Romania, 24-26 September 1996.

C. Golovanov, Y. Maréchal, G. Meunier, "Solution of TEAM Workshop Problem # 21", *Proc. of the TEAM Workshop CEFC 96*, March 21-21, 1996, Okayama, Japan, pp. 26-29.

C. Golovanov, Y. Maréchal, G. Meunier, "Formulation magnetostatique compatible en potentiel vecteur, basé sur les éléments d'arête", *Proc. of Numelec 97*, Lyon, Mars 1997.

C. Golovanov, Y. Maréchal, G. Meunier, "3D Edge Elements Based Formulation Coupled to Electric Circuit", *Proc. of COMPUMAG '97*, Rio, Bresil.

C. Golovanov, Y. Maréchal, G. Meunier, "3D Mesh Connexion Techniques Applied to Mouvement Simulation", *Proc. of COMPUMAG '97*, Rio, Bresil.





## Résumé

Le but de cette thèse est de développer des méthodes numériques spécifiques destinées à la modélisation des équations électromagnétiques 3D couplées avec les circuits d'alimentation électrique et le déplacement de parties mobiles, dans le cas de machines électriques tournantes. La formulation choisie utilise, comme inconnue principale, le potentiel vecteur magnétique non-jaugé, interpolé sur des éléments finis d'arête. Le caractère compatible de la formulation est assuré par l'introduction d'un potentiel vecteur électrique pour représenter le courant source, tant pour les inducteurs filaires maillés que pour les inducteurs filaires non-maillés. Le circuit électrique d'alimentation est analysé par la méthode des potentiels électriques intégrés dans le temps et les systèmes électrique et magnétique sont résolus simultanément. La connexion entre les parties mobiles et les parties fixes se fait par une technique d'interpolation des maillages, adaptée aux éléments d'arête.

Des méthodes numériques spécifiques ont été développées et implantées, notamment pour l'intégration en pas-à-pas dans le temps du système temporel du premier ordre et pour la résolution du système matriciel résultant.

L'ensemble des développements effectués a été validé sur un moteur à réluctance variable.

## Mots-clé:

Modélisation numérique tridimensionnelle  
Potentiel vecteur magnétique  
Eléments finis nodaux et d'arête  
Compatibilité de la formulation

Analyse transitoire  
Phénomènes couplés  
Mouvement des parties mobiles  
Moteur à réluctance variable

## Abstract

The aim of this thesis is to develop adapted numerical methods to model 3D electromagnetic equations coupled with electric circuit equations and with the displacement of moving parts, applied to the electric rotating machines. The formulation use as the principal unknown the non-gauged magnetic vector potential, interpolated with the edge elements. The compatibility of the formulation is ensured by the representation of the source current density with the help of an electric vector potential. The electric circuit is analysed using the method of time integrated electric potentials and the direct coupling of the magnetic and electric systems. The connection between the moving mesh and the stationary mesh is realised by an original interpolation method.

Specific numerical methods for the integration of the first order temporal system using an step-by-step algorithm and different techniques of system resolution were also developed.

All these developments were validated on a switched reluctance motor.

## Keywords:

3D- numerical simulation  
Magnetic vector potentiel  
Nodal and edge finite elements  
Formulation compatibility

Transient analysis  
Coupled phenomena  
Moving mesh  
Switched reluctance motor