



**HAL**  
open science

# Approximation numérique de l'équation de Vlasov par des méthodes de type remapping conservatif

Pierre Glanc

► **To cite this version:**

Pierre Glanc. Approximation numérique de l'équation de Vlasov par des méthodes de type remapping conservatif. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Strasbourg, 2014. Français. NNT: . tel-00904887v1

**HAL Id: tel-00904887**

**<https://theses.hal.science/tel-00904887v1>**

Submitted on 15 Nov 2013 (v1), last revised 14 Sep 2015 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approximation numérique de l'équation de Vlasov par  
des méthodes de type remapping conservatif

Thèse rédigée par

**Pierre Glanc**

préparée au laboratoire

**Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501**

dans le cadre de l'école doctorale

**Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur**

**Jury**

Nicolas Crouseilles	Examineur
Francis Filbet	Rapporteur
Philippe Helluy	Directeur de thèse
Raphaël Loubère	Rapporteur
Michel Mehrenberger	Examineur
Stéphanie Salmon	Examinatrice

## RÉSUMÉ

*Ce manuscrit présente les travaux réalisés au cours de la thèse que j'ai effectuée à l'Université de Strasbourg en tant que membre de l'équipe CALVI de l'INRIA Nancy, sous la direction de Nicolas Crouseilles et Michel Mehrenberger. Il s'agit de l'étude et du développement de méthodes numériques pour la résolution d'équations de transport, en particulier d'une méthode de remapping bidimensionnel dont un avantage important par rapport aux méthodes existantes est la propriété de conservation de la masse. De nombreux cas-tests permettront de comparer les méthodes entre elles ainsi qu'à des méthodes déjà existantes. On s'intéressera en particulier aux équations dites de Vlasov-Poisson et du Centre-Guide, qui apparaissent très classiquement dans le cadre de la physique des plasmas.*

*Le plan de la thèse est le suivant :*

*Dans une première partie, on exposera le contexte physique dans lequel s'inscrit cette thèse avec en particulier l'étude de quelques propriétés du système Vlasov-Poisson. On détaillera ensuite le contexte numérique des méthodes dites conservatives dans lequel s'inscrivent ces travaux.*

*La deuxième partie sera consacrée à l'étude et au développement d'une méthode bidimensionnelle semi-lagrangienne conservative généralisant la méthode avec splitting développée dans [23].*

*Dans une troisième partie, on traitera les cas d'extensions de la méthode précédente pour une géométrie polaire, puis pour des problèmes quadridimensionnels en coordonnées cartésiennes (Vlasov-Poisson 4D) et polaires (Drift-Kinetic).*

*On examinera en détail dans une quatrième partie deux méthodes de type "volumes finis" étudiées dans le cadre du projet FOV du CEMRACS 2011.*

*Dans une cinquième partie, une comparaison entre ces méthodes conservatives (semi-lagrangienne*

*et par volumes finis) sera réalisée.*

*On terminera ce manuscrit par une conclusion qui présentera également des pistes de réflexions pour des travaux prolongeant cette thèse.*

## Remerciements

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Contexte des travaux effectués</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte physique et équation de Vlasov . . . . .	1
1.1.1	Plasmas et fusion nucléaire . . . . .	1
1.1.2	Modélisation mathématique . . . . .	3
1.1.3	L'équation de Vlasov-Poisson : quelques propriétés . . . . .	5
1.1.4	L'équation de Vlasov-Poisson : quelques défis . . . . .	5
1.2	Méthodes de résolution des équations de transport . . . . .	6
1.2.1	Equations de transport et résolution numérique . . . . .	6
1.2.2	Classification des méthodes numériques . . . . .	8
1.2.3	Méthodes semi-lagrangiennes . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Une méthode de remapping conservative pour des problèmes bidimension-</b>	
	<b>nels</b>	<b>14</b>
2.1	Présentation de l'algorithme . . . . .	14
2.2	Détermination du maillage lagrangien . . . . .	17
2.2.1	Hypothèses sur les mailles lagrangiennes . . . . .	17
2.2.2	Calcul des caractéristiques . . . . .	20
2.3	Intersections de maillages . . . . .	24
2.3.1	Théorème de Green . . . . .	24
2.3.2	Éléments remarquables du maillage . . . . .	26

2.3.3	Calculs des points d'intersection . . . . .	26
2.3.4	Calcul des arêtes externes . . . . .	29
2.3.5	Calcul des arêtes internes . . . . .	31
2.4	Etape de reconstruction . . . . .	32
2.4.1	Reconstructions bidimensionnelles . . . . .	32
2.4.2	Calcul des intégrales le long des frontières . . . . .	40
2.5	Résumé de l'algorithme . . . . .	43
2.6	Cas particuliers . . . . .	44
2.7	Résultats numériques . . . . .	46
2.7.1	Algorithme pour les problèmes non linéaires . . . . .	46
2.7.2	Périodicité aux frontières . . . . .	47
2.7.3	Cas-tests "de base" : Rotation et "Swirling Deformation Flow" (SDF) . . . . .	48
2.7.4	Vlasov-Poisson . . . . .	54
2.7.5	Plasma Sheath . . . . .	64
2.7.6	Centre-Guide . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Extensions de la méthode de remapping conservatif</b>	<b>74</b>
3.1	Cas polaire bidimensionnel . . . . .	74
3.1.1	Passage du cas cartésien au cas polaire . . . . .	74
3.1.2	Taux d'instabilité des modes de Fourier . . . . .	76
3.1.3	Cas-test Diocotron . . . . .	79
3.2	Extension au cas 4D . . . . .	84
3.2.1	4D et parallélisation . . . . .	84
3.2.2	Cas-test Vlasov-Poisson . . . . .	85
3.2.3	Cas-test Drift-Kinetic . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Méthodes de type volumes finis</b>	<b>93</b>
4.1	La méthode des volumes finis de Banks (voir [3]) . . . . .	93

4.1.1	L'advection linéaire unidimensionnelle . . . . .	94
4.1.2	Stabilité et ordre . . . . .	96
4.1.3	Advection 2D . . . . .	97
4.1.4	Application au système Vlasov-Poisson . . . . .	100
4.2	Les méthodes des points de Gauss en temps . . . . .	100
4.2.1	L'advection linéaire unidimensionnelle . . . . .	100
4.2.2	Advection 2D . . . . .	104
4.2.3	Application au cas Vlasov-Poisson . . . . .	105
4.3	Liens et comparaisons entre volumes finis et schémas semi-lagrangiens . . . . .	107
4.4	Résultats numériques . . . . .	113
4.4.1	Bump on tail . . . . .	114
4.4.2	Instabilité double faisceaux (TSI) . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Comparaisons entre méthode de remapping conservative 2D et volumes finis</b>	<b>124</b>
5.1	Comparaisons numériques . . . . .	124
5.2	Temps de calcul . . . . .	134
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>139</b>
<b>7</b>	<b>Appendice</b>	<b>141</b>



# Chapitre 1

## Contexte des travaux effectués

Ce Chapitre permet de faire le point sur le contexte de ce travail de thèse. Dans une première partie, on fera quelques rappels sur les plasmas et on indiquera quelques propriétés du système de Vlasov-Poisson. Ensuite, on abordera les différentes approches de résolution numérique des équations de transport afin de situer ce travail parmi ces méthodes.

### 1.1 Contexte physique et équation de Vlasov

#### 1.1.1 Plasmas et fusion nucléaire

La matière, telle que nous la connaissons, se présente généralement sous la forme de trois états : solide, liquide ou gazeux. Pourtant, un quatrième état, relativement méconnu, existe : il s'agit de l'état de *plasma*. La matière se trouvant dans cet état est constituée d'un mélange neutre de particules chargées positivement (ions) et négativement (électrons). Cependant, bien que le plasma soit très présent dans l'univers (il se retrouve dans les étoiles, le milieu interstellaire ou l'ionosphère terrestre), sa présence est très rare sur Terre. En effet, pour l'obtenir, il faut amener un gaz à une température extrêmement élevée, de l'ordre de  $10^4 K$ .

Malgré tout, son étude est aujourd'hui capitale, puisque le plasma permet des applications

industrielles de plus en plus nombreuses, tels que les écrans plasmas, les tubes fluorescents ou les propulseurs spatiaux ; mais surtout, c'est l'état dans lequel se trouve la matière lors du phénomène de création d'énergie par fusion nucléaire, tel qu'il se déroule dans le Soleil par exemple. Dans ce cas, deux isotopes de l'hydrogène très légers (le deutérium et le tritium) entrent en collision pour créer un atome plus lourd, mais engendrant tout de même un défaut de masse qui est transformée en énergie suivant la formule célèbre  $E = mc^2$  (voir Figure 1.1). Cette énergie peut se transformer en chaleur, puis en électricité par l'emploi d'une turbine.

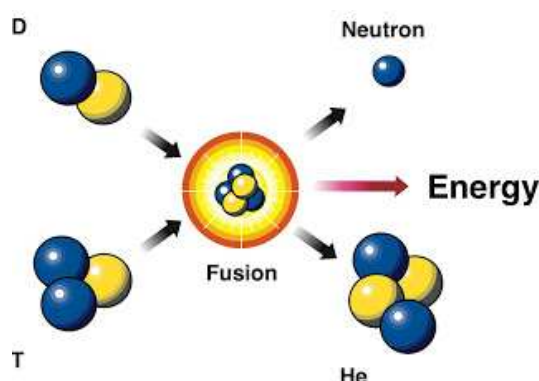


FIGURE 1.1: Le mécanisme de création d'énergie par fusion nucléaire.

L'étude et la compréhension fine du comportement des plasmas est donc essentielle. Pour ce faire, les physiciens ont développé des chambres toriques de confinement magnétique appelées *tokamaks* (voir Figure 1.2). Ces dispositifs créent des champs magnétiques qui maintiennent les trajectoires des particules chargées à l'intérieur d'un tore. Ainsi, il est possible de simuler l'évolution des particules en temps longs dans des conditions proches de celles rencontrées dans la réalité. Dans ce cadre, plusieurs projets de recherche sont actuellement en cours, dont le projet ITER ([HTTP://WWW.ITER.ORG](http://www.iter.org)) à Cadarache développé par le CEA qui vise à moyen terme à démontrer la faisabilité de centrales à fusion nucléaire. C'est dans ce contexte global que s'inscrit cette thèse.

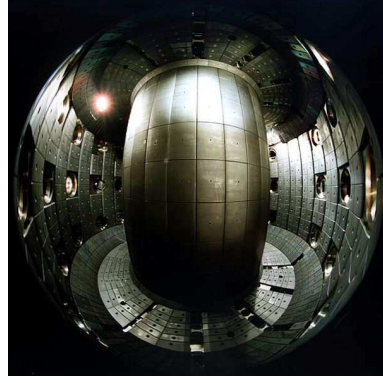
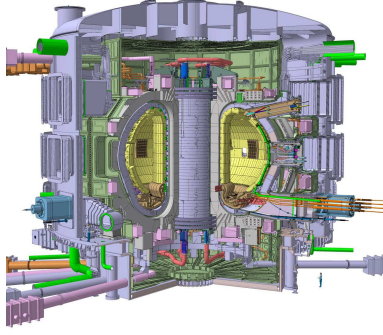


FIGURE 1.2: Un tokamak en coupe schématisé (à gauche) et une photo d'un intérieur (à droite).

### 1.1.2 Modélisation mathématique

La modélisation de l'évolution des particules chargées au sein d'un tokamak peut se faire à différents niveaux : cinétique, fluide, etc. (voir [12, 25]). On s'intéresse ici à une description cinétique à travers une fonction de distribution  $f = f(t, X, V)$  représentant la densité de particules de plasma situées à un instant donné  $t \geq 0$  dans un volume mésoscopique centré en  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et ayant un vecteur vitesse appartenant au volume mésoscopique centré en  $V = (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ . L'espace décrit par le vecteur  $(X, V)$  est alors appelé *espace des phases*.

Ainsi, l'évolution d'une espèce de particules de charge  $q$  et de masse  $m$  placée dans un champ électromagnétique est décrite par une équation bien connue, dite *équation de Vlasov*

$$\frac{\partial f(t, X, V)}{\partial t} + V \cdot \nabla_X f(t, X, V) + \frac{q}{m} (E + V \wedge B) \cdot \nabla_V f(t, X, V) = 0, \quad (1.1.1)$$

où  $E = E(t, X)$  et  $B = B(t, X)$  représentent les champs électrique et magnétique pouvant être générés par les particules chargées. Dans ce cas, ils peuvent être obtenus grâce aux

équations de Maxwell suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \wedge B = \mu_0 J, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \wedge E = 0, \\ \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot B = 0, \end{array} \right. \quad (1.1.2)$$

avec  $c$  la célérité de la lumière dans le vide,  $\mu_0$  la perméabilité du vide et  $\epsilon_0$  sa permittivité, et où les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$  sont données par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t, X) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(t, X, V) dV, \\ J(t, X) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(t, X, V) V dV. \end{array} \right. \quad (1.1.3)$$

**Remarque 1.1.1.** *L'équation (1.1.1) est obtenue dans le cas où l'on suppose que les particules sont uniquement soumises aux champs électromagnétiques, en ne tenant pas compte des collisions entre particules.*

Dorénavant, on va considérer une seule espèce de particules. En adimensionnant le système et en négligeant les effets magnétiques dans (1.1.1), on obtient le système suivant, dit de *Vlasov-Poisson*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(t, X, V)}{\partial t} + V \cdot \nabla_X f(t, X, V) + E(t, X) \cdot \nabla_V f(t, X, V) = 0, \\ \nabla_X \cdot E(t, X) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, X, V) dV - 1. \end{array} \right. \quad (1.1.4)$$

On peut constater que l'équation de Vlasov (ligne du haut) fait intervenir un champ électrique  $E = E(t, X)$  dépendant de la solution  $f$  suivant l'équation de Poisson (ligne du bas). Le modèle ainsi obtenu est donc non linéaire.

### 1.1.3 L'équation de Vlasov-Poisson : quelques propriétés

Introduisons maintenant quelques quantités, fonctions de la solution  $f$

- Les normes  $L^p$  :  $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^6} |f|^p(t, X, V) dX dV\right)^{1/p}$ .
- L'énergie cinétique :  $\mathcal{E}_k(f) = \int_{\mathbb{R}^6} f(t, X, V) \frac{|V|^2}{2} dX dV$ .
- L'énergie électrique :  $\mathcal{E}_e(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E(t, X)|^2 dX$ .
- L'énergie totale :  $\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}_k(f) + \mathcal{E}_e(f)$ .
- La masse, qui correspond au nombre total de particules :  $\mathcal{M}(f) = \int_{\mathbb{R}^6} f(t, X, V) dX dV$ .

Ces différentes quantités sont conservées en théorie par l'équation de Vlasov-Poisson.

### 1.1.4 L'équation de Vlasov-Poisson : quelques défis

- Dans la suite, on va considérer d'abord le cas où  $X$  et  $V$  sont unidimensionnels, c'est-à-dire que l'on travaille en dimension 2 pour l'espace des phases. Cependant, dans la pratique,  $X$  et  $V$  sont chacun tridimensionnels, ce qui fait un total de 6 degrés de liberté en espace, plus le temps. Un pas important dans cette direction est effectué dans la Section 3.2, où l'on considère le cas où  $X$  et  $V$  sont bidimensionnels.
- Dans le paragraphe précédent, on a mentionné quelques quantités qui sont théoriquement conservées par l'équation de Vlasov-Poisson. En pratique, c'est pourtant plus délicat à obtenir, et l'étude de l'évolution de ces quantités au cours du temps permet alors d'obtenir un bon indicateur sur la qualité d'une méthode de résolution.
- Certaines méthodes nécessitent de nombreux calculs durant une simulation, puisqu'elles requièrent des pas de temps faibles (voir en particulier le Chapitre 4). Il est donc important d'avoir des méthodes de résolution permettant de s'affranchir de cette contrainte.

## 1.2 Méthodes de résolution des équations de transport

Dorénavant, on s'intéresse à l'aspect numérique du problème. On va ainsi se placer dans un cadre 2D, où  $X$  et  $V$  sont donc unidimensionnels. Dans la suite, afin de simplifier les notations, on notera dans ce cas uniquement  $x$  pour  $X$  et  $y$  pour  $V$ .

### 1.2.1 Equations de transport et résolution numérique

L'équation de Vlasov présentée supra appartient à une classe d'équations aux dérivées partielles dites *équations de transport*, qui s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} + \nabla_{x,y} \cdot [U(t, x, y)f(t, x, y)] = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (1.2.5)$$

où  $\Omega$  est l'espace des phases et où  $U = (U_1, U_2)$  est un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  à divergence nulle (*i.e.*  $\nabla_{x,y} \cdot U = 0$ ) qui peut dépendre de la solution  $f$ . De nombreux exemples de champs  $U$  seront étudiés par la suite. Un cas simple est celui de la rotation, pour laquelle on a  $U(t, x, y) = (-y, x)$  (voir 2.7.3).

Ce type d'équations concerne un très large spectre de phénomènes physiques s'étendant bien au-delà de la physique des plasmas ; leur étude est donc fondamentale.

La plupart des équations de type (1.2.5) telles que l'équation de Vlasov-Poisson présentent une structure non-linéaire rendant difficile l'obtention de solutions analytiques. Parmi les nombreuses approches de résolution de telles équations qui ont été développées, la méthode semi-lagrangienne nous intéressera plus particulièrement dans cette thèse. Celle-ci a été introduite dans les années 70 par Cheng et Knorr [13] et Shoucri [50], puis quelques années plus tard par Sonnendrücker [52], Filbet [29, 30], Nakamura et Yabe [41], Besse [5]. Dans [51], on trouvera également une liste importante de diverses approches.

D'une manière générale, ces méthodes considèrent une discrétisation temporelle  $t^n = n\Delta t$ , avec  $\Delta t > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , à partir d'un instant initial  $t^0$  déterminé par la donnée d'une fonction initiale  $f^0(x, y) = f(t^0, x, y)$ . Le but est alors de déterminer à chaque instant  $t^n$  une fonction  $f^n(x, y) = f(t^n, x, y)$  représentant le mieux possible la situation physique régie par l'équation (1.2.5). Les  $f^n$  sont alors calculées par récurrence : on part de la donnée de  $f^n$  pour calculer  $f^{n+1}$ .

### Formes conservative et advective

Comme dans (1.2.5), on a supposé que le champ  $U$  est à divergence nulle, on peut réécrire cette équation sous la forme suivante, qui lui est alors équivalente.

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} + U(t, x, y) \cdot \nabla_{x,y} f(t, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (1.2.6)$$

On dit que l'équation (1.2.5) est sous forme *conservative*, alors que l'équation (1.2.6) est sous forme *advective*.

### Splitting directionnel

La technique dite du *splitting directionnel* consiste, pour certaines équations de transport du type (1.2.5), à séparer l'advection (c'est-à-dire le déplacement des particules) bidimensionnelle induite par le champ  $U = (U_1, U_2)$  en deux étapes successives d'advections unidimensionnelles. En d'autres termes, par cette technique, on va chercher successivement la solution des deux équations suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} + U_1(t, x, y) \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} + U_2(t, x, y) \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Le splitting le plus couramment employé est dit de Strang. Il consiste en la mise en œuvre

successive des étapes du schéma en temps suivant (voir [13]) :

- Résolution de l’advection en  $x$  de (1.2.7) pendant un temps  $\Delta t/2$ .
- Résolution de l’advection en  $y$  de (1.2.7) pendant un temps  $\Delta t$ .
- Résolution de l’advection en  $x$  de (1.2.7) pendant un temps  $\Delta t/2$ .

On obtient ainsi un schéma d’ordre 2 en temps. De nombreuses approches se sont néanmoins intéressées à la construction de splittings d’ordre supérieur. A ce sujet, on pourra consulter [22] ainsi que ses nombreuses références.

## 1.2.2 Classification des méthodes numériques

Il existe plusieurs méthodes numériques permettant de faire évoluer la solution  $f$  entre deux pas de temps. Celles-ci peuvent être classifiées en deux grandes catégories.

- Les méthodes dites *eulériennes* (voir Figure 1.3) qui utilisent une grille de l’espace des phases, composée de *cellules*, c’est-à-dire de régions de calcul fixes au cours de la simulation. La fonction  $f$  est donc approchée par des valeurs distinctes sur chaque cellule. L’évolution au cours du temps de ces valeurs moyennes se fait souvent par des calculs de flux aux interfaces des mailles. Dans cette catégorie, on peut citer les algorithmes par différences finies, éléments finis ou volumes finis (dont deux exemples seront étudiés en détail au Chapitre 4). Un avantage de cette catégorie de méthodes vient donc du fait qu’elles fournissent une précision uniforme sur tout l’espace des phases. A l’inverse, ces méthodes se révèlent peu à même de fournir des résultats stables et précis dans le cas de pas de temps relativement grands. Citons par exemple le fait que les calculs de flux peuvent s’avérer compliqués dans le cas où le fluide peut se déplacer de plus d’une cellule entre deux pas de temps. Il est donc souvent nécessaire d’avoir recours à une condition dite *CFL*, pour Courant-Friedrichs-Lewy (voir [20]) afin de restreindre les déplacements à une seule maille entre deux pas de temps.



- Les méthodes appelées *lagrangiennes* (voir Figure 1.3) qui consistent à suivre le mouvement "individuel" de macro-particules au cours du temps par l'étude des *caractéristiques*, que l'on peut définir comme étant les trajectoires que suivent les points de l'espace des phases entre deux pas de temps, déterminées par les champs agissant sur eux dans cet intervalle. Contrairement aux méthodes eulériennes, il n'y a donc pas ici a priori de recherche d'une représentation continue de l'espace physique, puisque chaque particule "transporte" ses propriétés physiques le long des caractéristiques. Par contre, ces méthodes permettent d'utiliser des pas de temps bien supérieurs à ceux tolérés par les méthodes de type eulériennes. Dans cette catégorie, on peut citer les méthodes de type *particulaires* (ou PIC, pour Particles In Cell, voir [6]) qui consistent à modéliser le plasma par des macro-particules qui se déplacent suivant le champ électromagnétique donné par les équations de Maxwell. Dans ce cas, il n'y a pas d'utilisation de grille en vitesse, mais uniquement en espace pour le calcul du champ électromagnétique grâce aux équations de Poisson ou de Maxwell. Bien que requérant un faible coût de calcul, ce type de méthodes a pour inconvénient majeur l'existence d'un bruit numérique rendant difficile une représentation précise des zones à faible densité.

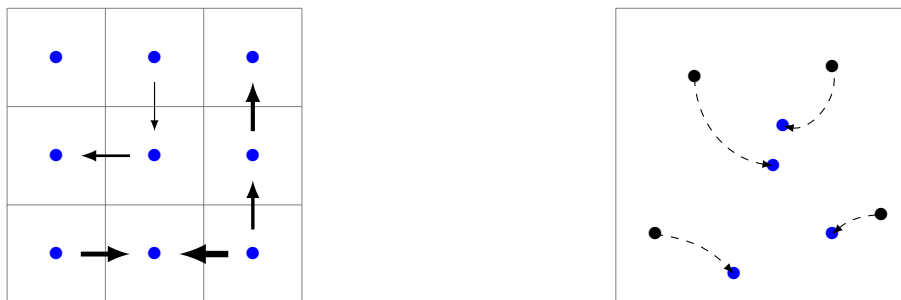


FIGURE 1.3: Représentations schématiques des données de manière eulérienne, avec grille de l'espace des phases et flux (à gauche), et lagrangienne, avec caractéristiques (à droite).

Historiquement, les méthodes de types PIC ont été les plus utilisées. C'est de moins en moins le cas depuis la montée en puissance des ordinateurs qui permettent désormais de

traiter facilement les calculs sur une grille de l'espace des phases. Cependant, comme on l'a vu, méthodes eulériennes et lagrangiennes présentent des contraintes ou des limites qui peuvent se révéler assez gênantes en pratique. Ainsi, des méthodes dites *semi-lagrangiennes* ont été développées (voir 1.2.3).

### 1.2.3 Méthodes semi-lagrangiennes

On va maintenant s'intéresser aux méthodes semi-lagrangiennes, qui sont en quelque sorte des hybrides des méthodes eulériennes et lagrangiennes, puisqu'elles tentent de combiner les avantages des deux représentations. En effet, elles considèrent une grille de l'espace des phases comme dans le cas des méthodes eulériennes, et utilisent les équations caractéristiques comme dans le cas des méthodes lagrangiennes. En particulier, les méthodes semi-lagrangiennes rendent donc également possible l'utilisation de pas de temps supérieurs à ceux utilisés dans le cas des méthodes eulériennes explicites. De plus, elle utilisent une même grille de calcul durant toute la simulation, permettant une description uniforme de l'espace des phases. Pour ces diverses raisons, ces méthodes sont étudiées dans des domaines variés, tels que la météorologie (voir notamment [47, 53, 36, 34]).

C'est dans cette catégorie que se situe la méthode développée dans le Chapitre 2.

Précisons rapidement les étapes importantes de mise en œuvre de cette méthode. Pour cela, on considère une grille de l'espace des phases (on suppose celui-ci périodique de taille  $[x_{min}, x_{max}]$ ), et on se fixe une constante  $N_x$ . On travaille alors sur le maillage régulier en  $x$  suivant :  $x_{min} = x_0, \dots, x_i, \dots, x_{max} = x_{N_x}$ , où les  $x_i$  sont définis par  $x_i = x_{min} + i\Delta x$ , avec  $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N_x$ .

Le but est donc, à partir de la donnée initiale  $f^0(x_i)$ , d'obtenir à chaque instant  $t^n, n \geq 1$ , une approximation  $f^n$  la plus précise possible de la fonction de reconstruction à cet instant, et en tous les points de la grille en espace. En d'autres termes, il faut déterminer  $f^n(x_i)$  vérifiant  $f^n(x_i) \approx f(t^n, x_i)$ .

## Propriétés de conservation

Les méthodes semi-lagrangiennes se fondent sur deux propriétés importantes de l'équation de Vlasov :

- D'une part, la fonction  $f$  est constante le long des courbes caractéristiques. Si on note  $X(t^n; t^{n+1}, x_i)$  le point de la caractéristique qui à l'instant  $t^{n+1}$  passe en  $x_i$  (ce point est alors appelé *ped de la caractéristique*), on a

$$f^{n+1}(X_i) = f^n(X(t^n; t^{n+1}, x_i)). \quad (1.2.8)$$

- D'autre part, la "masse" d'un volume est également conservée le long des caractéristiques. En d'autres termes, on a (en notations unidimensionnelles)

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f^{n+1}(x) dx = \int_{X(t^n; t^{n+1}, x_{i-1/2})}^{X(t^n, t^{n+1}, x_{i+1/2})} f^n(x) dx. \quad (1.2.9)$$

## Différents types de méthodes semi-lagrangiennes

De nombreuses approches des schémas semi-lagrangiens (SL) ont été étudiées dans la littérature. On peut par exemple citer les approches SL WENO de [45], SL sur maillage non structuré de [5], SL PFC (Positive Flux Conservative) de [29], SL avec interpolation d'Hermite de [40, 41].

Parmi cette pluralité d'approches, on peut distinguer trois catégories importantes.

- Les méthodes semi-lagrangiennes ponctuelles (ou advectives) en arrière (voir Figure 1.4, à gauche). On utilise dans ce cas la propriété de conservation le long des caractéristiques (1.2.8). L'inconnue étant située au centre d'une maille, on va chercher le pied de la caractéristique aboutissant à ce point. La valeur en ce point est ensuite calculée par un opérateur d'interpolation dans la cellule du pied.
- Les méthodes semi-lagrangiennes ponctuelles (ou advectives) en avant. On parcourt cette fois les caractéristiques en avant en partant des centres des mailles. On dépose

ensuite les valeurs aux points d'arrivée des caractéristiques par noyau de convolution. Il est important de noter que ces méthodes conservent la masse au cours du temps : elles sont donc *conservatives*.

- Les méthodes semi-lagrangiennes en arrière conservatives. On utilise cette fois la propriété de conservation de la masse le long des caractéristiques (1.2.9). L'inconnue n'est alors plus une valeur ponctuelle comme précédemment, mais la moyenne de la fonction  $f$  sur une maille. Dans ce cas, ce sont les mailles entières qui sont déplacées. Pour déterminer l'advecté en arrière d'une cellule, une approximation est donc requise.



FIGURE 1.4: A gauche : la méthode semi-lagrangienne ponctuelle en arrière, et à droite : la méthode semi-lagrangienne conservative utilisée avec splitting directionnel.

On peut donc noter que les méthodes advectives considèrent des inconnues ponctuelles (c'est-à-dire qu'elles sont des approximations de la solution évaluée à un point de la grille) , alors que dans le cas des méthodes conservatives, l'inconnue est une moyenne de la solution sur un petit volume de l'espace des phases, comme dans le cas des volumes finis.

On peut citer de ce fait un certain nombre d'avantages concernant les méthodes conservatives : elles préservent la masse totale, des limiteurs de pente peuvent être introduits afin d'obtenir certaines propriétés (positivité ou monotonie). A ce sujet, on pourra par exemple lire [16, 18, 29].

De plus, un splitting directionnel est autorisé. Dans ce cas, la cellule considérée est translatée suivant un des axes de coordonnées, et on se ramène ainsi à un problème unidimensionnel comme illustré sur la Figure 1.4, à droite. C’est d’ailleurs dans ce cadre qu’elle a été très majoritairement étudiée. On peut ainsi citer [23], et également [29, 1, 9, 13, 28, 45, 37]. Cependant même si l’emploi du splitting peut s’avérer très utile, il existe certaines situations pour lesquelles les déplacements complets doivent être considérés (voir [33, 10]). En effet, le splitting impose d’une part un mouvement spécifique des volumes, et d’autre part, les méthodes advectives bidimensionnelles ne conservent pas la masse (voir [52]), ce qui peut mener à des instabilités numériques comme indiqué dans [33].

**Remarque 1.2.1.** *Il faut cependant noter que dans le cas unidimensionnel périodique et pour les problèmes de transport à coefficients constants, les méthodes ponctuelle et conservative sont équivalentes (voir [23]).*

Ces différents points nous ont donc amené à envisager une généralisation de la méthode semi-lagrangienne conservative avec splitting étudiée dans [23] afin de s’affranchir du passage en advections unidimensionnelles.

Le Chapitre suivant est le plus important, puisqu’il sera consacré à la présentation de cette méthode. On y détaillera en particulier les étapes d’intersection de maillages ainsi que différentes reconstructions. On validera l’approche sur les cas académiques des équations de Vlasov-Poisson et du Centre-Guide. Au Chapitre 3, on présentera des extensions à l’approche : on considèrera le cas de la géométrie polaire et le cas de modèles 4D. Le Chapitre 4 est dédié aux méthodes par volumes finis qui ont été étudiées dans le cadre du CEM-RACS 2011. Dans le dernier Chapitre, on effectuera une comparaison de ces deux approches conservatives : méthodes semi-lagrangiennes et volumes finis.

# Chapitre 2

## Une méthode de remapping conservative pour des problèmes bidimensionnels

Ce Chapitre est constitué de deux parties principales. Dans un premier temps, on expose en détail la méthode de remapping conservatif entrant dans le contexte semi-lagrangien, avec en particulier les étapes d'intersections de maillages puis d'interpolation. Différents cas-tests sont présentés dans un second temps pour illustrer le comportement de la méthode.

### 2.1 Présentation de l'algorithme

L'objectif est de construire des approximations numériques pour résoudre l'équation (1.2.5) suivante

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} + \nabla_{x,y} \cdot [U(t, x, y)f(t, x, y)] = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

Pour ce faire, on commence par effectuer une discrétisation de l'espace des phases  $\Omega$ , qui dans notre cas, est un domaine rectangulaire  $\Omega = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ . On va ainsi le mailler en une grille à deux dimensions  $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})_{i=0,\dots,N_x, j=0,\dots,N_y}$  où  $x_{i+\frac{1}{2}} = x_{\min} + i\Delta x$  avec  $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/N_x$  et  $y_{j+\frac{1}{2}} = y_{\min} + j\Delta y$  avec

$\Delta y = (y_{\max} - y_{\min})/N_y$  (voir Figure 2.1).

On note  $A_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$  une cellule (ou maille) qui sera qualifiée dans la suite de *cartésienne*.

En effectuant cette discrétisation, le but va être d'obtenir une approximation la plus précise possible de l'inconnue  $f$  à un instant  $t$  moyennée sur une maille  $A_{i,j}$  du domaine.

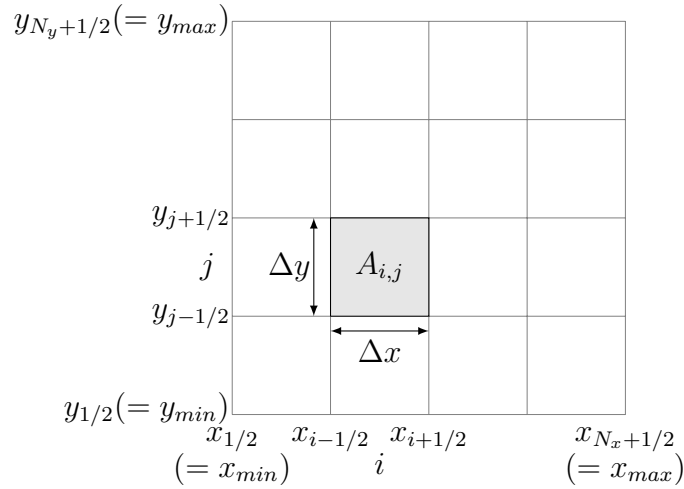


FIGURE 2.1: Quelques notations utilisées.

Pour ce faire, on considère la quantité suivante, à un instant donné  $s$

$$\bar{f}_{ij}(s) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(s, x, y) dx dy. \quad (2.1.1)$$

On va utiliser la propriété fondamentale suivante : si on considère deux instants  $s$  et  $t \geq s$ , on a l'égalité de conservation de la masse suivante (on choisit des notations analogues à [29])

$$\int_{V_t} f(t, x, y) dx dy = \int_{X(s;t, V_t)} f(s, x, y) dx dy, \quad (2.1.2)$$

où  $V_t$  est un sous-ensemble de  $\Omega$  et  $X(s; t, V_t)$  est défini par

$$X(s; t, V_t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = X(s; t, x', y'), (x', y') \in V_t\},$$

$X(s; t, x', y')$  étant la solution au temps  $s$  des caractéristiques dont les conditions initiales appartiennent à  $V_t$

$$\frac{dX(\tau)}{d\tau} = U(\tau, X(\tau)), \quad X(t) \in V_t.$$

**Remarque 2.1.1.** *On dit que l'on a remonté les caractéristiques : le volume  $X(s; t, V_t)$  est au temps  $s$  celui qui se transforme en  $V_t$  au temps  $t$ .*

Si au temps  $t$ , on choisit comme volume  $V_t$  la maille  $A_{i,j}$ , on obtient donc

$$\int_{A_{i,j}} f(t, x, y) dx dy = \int_{a_{i,j}} f(s, x, y) dx dy, \quad (2.1.3)$$

où  $a_{i,j}$  est défini par

$$a_{i,j} = X(s; t, A_{i,j}).$$

En utilisant les notations (2.1.1), l'égalité (2.1.3) devient alors

$$\bar{f}_{ij}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{a_{i,j}} f(s, x, y) dx dy. \quad (2.1.4)$$

En supposant que les  $\bar{f}_{ij}(s)$  sont connus pour  $i = 0, \dots, N_x - 1$  et  $j = 0, \dots, N_y - 1$ , on peut reconstruire une fonction polynomiale par morceaux  $P_{i,j}(x, y)$  qui satisfait les contraintes

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{A_{i,j}} P_{i,j}(x, y) dx dy = \bar{f}_{ij}(s), \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad j = 0, \dots, N_y - 1. \quad (2.1.5)$$

Ensuite, l'utilisation de (2.1.4) permet de calculer  $\bar{f}_{i,j}(t)$

$$\bar{f}_{ij}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{a_{i,j}} P_{i,j}(x, y) dx dy. \quad (2.1.6)$$



L'égalité (2.1.3) peut ainsi être résumée de la façon suivante : la moyenne de  $f(s)$  sur  $a_{i,j}$  est égale à celle de  $f(t)$  sur  $A_{i,j}$ . En utilisant cette propriété, pour aller du temps  $s$  au temps  $t$ , l'algorithme consiste à

- pour chaque cellule du maillage  $A_{i,j}$ , calculer  $a_{i,j}$ , dite cellule *lagrangienne*,
- déterminer la fonction  $P_{i,j}(x, y)$  qui satisfait les contraintes (2.1.5),
- intégrer cette fonction sur  $a_{i,j}$ .

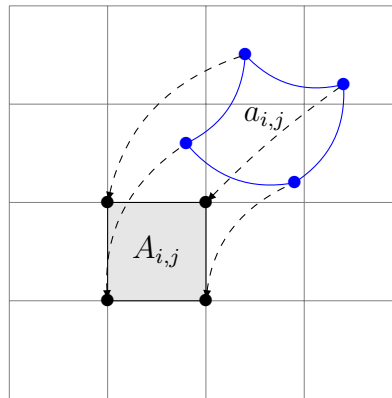


FIGURE 2.2: La cellule  $a_{i,j}$  est l'advection en arrière de  $A_{i,j}$ .

On détaille dans les Sections qui suivent les différentes étapes de cet algorithme.

## 2.2 Détermination du maillage lagrangien

### 2.2.1 Hypothèses sur les mailles lagrangiennes

#### Approximation quadrangulaire

On a vu qu'un des points essentiels de l'algorithme consiste, pour chaque cellule  $A_{i,j}$ ,  $i = 0, \dots, N_x - 1$  et  $j = 0, \dots, N_y - 1$  du maillage cartésien, en la recherche de la cellule  $a_{i,j}$  correspondante en remontant les caractéristiques calculées à partir de l'équation (1.2.5). Le domaine  $a_{i,j}$  obtenu ainsi est appelé l'advection en arrière de  $A_{i,j}$  (voir la Figure 2.2).

Cependant, on se heurte ici à deux difficultés :

- Il n'est naturellement pas envisageable de chercher à déterminer tous les points de la surface  $a_{i,j}$
- Même si l'on parvenait à déterminer  $a_{i,j}$  de manière exacte, il serait très compliqué de calculer (2.1.6) dans le cas où  $a_{i,j}$  est quelconque, tel que sur la Figure 2.2.

Pour ces raisons, on va considérer une approximation de la forme de la cellule "déformée"  $a_{i,j}$  : connaissant  $A_{i,j}$ , on va considérer ses quatre sommets, *i.e.*  $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ ,  $(x_{i+1/2}, y_{j-1/2})$ ,  $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$  et  $(x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$ , et rechercher le pied des caractéristiques issues de ces points en résolvant l'équation différentielle ordinaire suivante entre les deux instants  $s$  et  $t$ , en supposant que  $t - s$  est suffisamment petit.

$$\frac{dX(\tau)}{d\tau} = U(\tau, X(\tau)), \quad X(t) = (x_{i\pm 1/2}, y_{j\pm 1/2}), \quad (2.2.7)$$

où les  $(x_{i\pm 1/2}, y_{j\pm 1/2})$  décrivent les quatre sommets indiqués ci-dessus.

Lorsque les pieds des quatre sommets ont été déterminés, on fait alors une interpolation linéaire pour obtenir le quadrilatère  $a_{i,j}$  (voir la Figure 2.3).

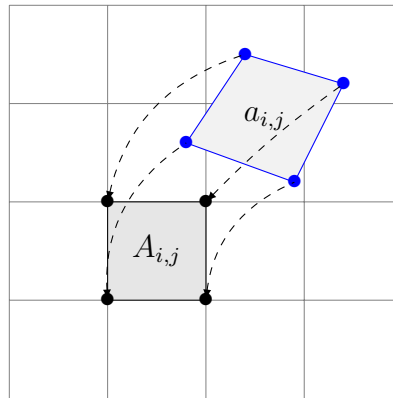


FIGURE 2.3: La cellule lagrangienne quadrangulaire  $a_{i,j}$  finalement choisie comme advecté en arrière de  $A_{i,j}$ .

**Remarque 2.2.1.** Désormais, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, on utilisera également des notations simplifiées du type  $A_k$  et  $a_k$ , où  $k = (i, j)$ , pour désigner respectivement

des cellules du maillage cartésien et lagrangien.

### Hypothèse de convexité

Une autre hypothèse importante pour la suite est la suivante : on va considérer uniquement le cas des cellules  $a_k$  convexes. Pour ce faire, la proposition qui suit nous indique que c'est toujours le cas en pratique lorsque l'on choisit  $t - s$  suffisamment petit.

**Proposition 2.2.1.** *Si  $s$  et  $t$  sont deux instants tels que  $t > s$ ,  $a_k$  est convexe si l'on considère  $t - s$  suffisamment petit.*

DÉMONSTRATION. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit convexe est la suivante : si aucun des quatre angles du quadrilatère n'est rentrant, alors le quadrilatère est convexe ; sinon, il est concave. Considérons une cellule cartésienne  $A_k$  et la cellule lagrangienne correspondante  $a_k$  (mêmes notations que précédemment). On peut nommer les quatre sommets de la cellule cartésienne  $p_1, p_2, p_3, p_4$  (on omet ici l'index  $k$ ), et  $p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*$  leur sommet correspondant dans  $a_k$  (Figure 2.4) .

Grâce au théorème d'Al-Kashi, on a :

$$\widehat{p}_1^* = \arccos \left( \frac{\|p_1^* p_2^*\|^2 + \|p_1^* p_4^*\|^2 - \|p_2^* p_4^*\|^2}{2 \|p_1^* p_2^*\| \|p_1^* p_4^*\|} \right).$$

Par conséquent, on peut écrire  $\widehat{p}_1^* = P_1(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*)$ , où  $P_1$  est une fonction continue en les quatre variables  $p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*$ . Comme l'on a  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_1^* = p_1$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_2^* = p_2$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_3^* = p_3$  et

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_4^* = p_4$ , on déduit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \widehat{p}_1^* = \widehat{p}_1 = \pi/2.$$

Le même argument restant vrai pour les trois autres angles, lorsque  $t - s$  est choisi suffisamment petit,  $\widehat{p}_1^*, \widehat{p}_2^*, \widehat{p}_3^*$  et  $\widehat{p}_4^*$  sont inférieurs à  $\pi$  et  $a_k$  est convexe.

□

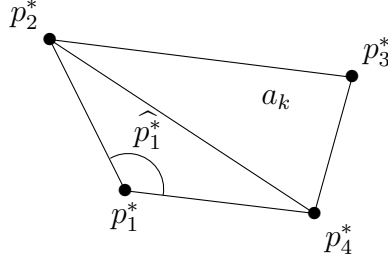


FIGURE 2.4: Aucun angle n'est rentrant : cette cellule  $a_k$  est convexe.

## 2.2.2 Calcul des caractéristiques

On étudie maintenant la discrétisation en temps. En reprenant les notations du paragraphe précédent, on se fixe un écart de temps constant entre deux instants considérés en définissant le *pas de temps*  $\Delta t = t - s$  (où l'on suppose  $\Delta t > 0$ ). On définit en outre  $t^n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}$  le  $n^{\text{eme}}$  instant considéré dans cette discrétisation.

On cherche alors à calculer une approximation numérique au temps  $t^n$  de (2.2.7), que l'on peut réécrire sous la forme du système suivant

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = U_1(\tau, x, y), & X(t^{n+1}) = x_{i\pm 1/2}, \quad \forall i, \\ \frac{dY}{d\tau} = U_2(\tau, x, y), & Y(t^{n+1}) = y_{j\pm 1/2}, \quad \forall j, \end{cases} \quad (2.2.8)$$

où l'on note  $U = (U_1, U_2)$  les composantes du champ  $U$ .

Pour ce faire, un grand nombre d'algorithmes peut être employé. Les méthodes les plus simples sont de type Euler, mais d'autres méthodes d'ordre supérieur telles que Runge-Kutta peuvent être utilisées (voir [23]).

Dans ce manuscrit, on se concentrera sur deux méthodes de type Euler et sur la méthode de Verlet, que l'on rappelle ici, en notant  $X^*$  une valeur correspondant à l'instant  $t^{n+1/2}$  intermédiaire entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ .

– Euler explicite

$$\begin{cases} X(t^n) = x_{i+1/2} - \Delta t U_1(t^n, x_{i+1/2}, y_{j+1/2}), \\ Y(t^n) = y_{j+1/2} - \Delta t U_2(t^n, x_{i+1/2}, y_{j+1/2}). \end{cases} \quad (2.2.9)$$

– Euler symplectique

$$\begin{cases} X(t^n) = x_{i+1/2} - \Delta t U_1(t^n, X(t^n), y_{j+1/2}), \\ Y(t^n) = y_{j+1/2} - \Delta t U_2(t^n, X(t^n), y_{j+1/2}). \end{cases} \quad (2.2.10)$$

– Verlet symplectique

$$\begin{cases} X^* = x_{i+1/2} - \frac{\Delta t}{2} U_1(t^n, X^*, y_{j+1/2}), \\ Y(t^n) = y_{j+1/2} - \frac{\Delta t}{2} [U_2(t^n, X^*, y_{j+1/2}) + U_2(t^n, X^*, Y(t^n))], \\ X(t^n) = X^* - \frac{\Delta t}{2} U_1(t^n, X^*, Y(t^n)). \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Dans les deux derniers cas, on utilise une méthode de point fixe pour calculer les valeurs  $X(t^n)$ ,  $Y(t^n)$  et  $X^*$ .

**Remarque 2.2.2.** *Le champ est supposé connu ici en les  $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ , puis interpolé linéairement.*

**Remarque 2.2.3.** *A l'instant  $t^n$ , on ne connaît pas les valeurs du champ  $U$  pour les points de la grille  $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ , mais uniquement pour le centre des cellules  $(x_i, y_j)$ . En effet, l'approximation  $\bar{f}_{i,j}^n$  de  $f$  utilisée pour calculer  $U(t^n, x_i, y_j)$  est effectuée aux points  $(x_i, y_j)$ . En conséquence, pour calculer le pied des caractéristiques aux points  $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ , on va calculer le pied des caractéristiques des quatre points  $(x_i, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j+1})$ ,  $(x_{i+1}, y_{j+1})$  et  $(x_{i+1}, y_j)$  en utilisant les formules (2.2.9) à (2.2.11), puis considérer l'isobarycentre de ces points. Plus précisément, si on prend l'exemple du calcul de  $X(t^n)$  de (2.2.10), on met en œuvre l'algorithme suivant (voir également la Figure 2.5 pour un schéma de principe de la méthode vu*

sur un domaine normalisé).

**Algorithme :**

\*  $x = x_i - \Delta t U_1(t^n, x_i, y_j)$

\* Itérer  $N$  fois :

- $\alpha = N_x \left( \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} - \lfloor \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \rfloor \right)$
- $i_\alpha = \lfloor \alpha \rfloor$
- $\alpha \leftarrow \alpha - i_\alpha$
- $x = x_i - \Delta t ((1 - \alpha)U_1(t^n, x_{i_\alpha}, y_j) + \alpha U_1(t^n, x_{i_\alpha+1}, y_j))$

(où  $\lfloor x$  représente la partie entière de  $x$ ).

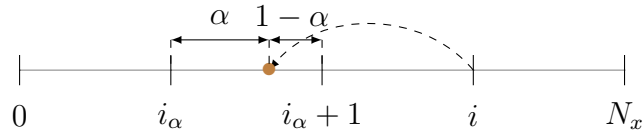


FIGURE 2.5: Illustration de la dernière étape de l'algorithme de point fixe pour l'interpolation du champ en l'itéré courant.

En d'autres termes, à chaque itération, on détermine l'endroit où l'on va calculer le champ avec lequel on va advecter le point  $x_i$  à l'itération suivante.

**Remarque 2.2.4.** En pratique, le nombre d'itérations  $N$  de l'algorithme supra sera choisi petit. En effet, dans la plupart des cas, on obtient la convergence pour  $N = 2$  (c'est aussi le cas pour Verlet).

**Remarque 2.2.5.** En vertu de la remarque 2.2.3, on constate qu'il est nécessaire de connaître le champ  $U$  sur un domaine légèrement plus grand que  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$  afin de pouvoir advecter les points situés sur la frontière. Une approximation sera donc envisagée hors du domaine physique. Selon le cas-test,  $U$  pourra être prolongé par continuité ou par périodicité.

## Conservation du volume

Pour certains cas-tests de la Section 2.7, et en particulier dans le cas du Centre-Guide (2.7.40), lorsqu'un schéma d'Euler explicite est employé pour la recherche du pied des caractéristiques, on note l'apparition d'instabilités numériques qui ne se produisent pas en utilisant un schéma symplectique. Il est utile de remarquer à ce propos que lorsque le schéma d'Euler explicite (2.2.9) est mis en œuvre, la méthode ne conserve pas en général le volume d'une maille (c'est par exemple le cas pour les cellules  $A_{i,j}$  et  $a_{i,j}$  de la Figure 2.3). Il est cependant intéressant de noter que l'on a la propriété suivante dans le cas où un schéma symplectique est utilisé.

Si  $(x, y) \in V_{t^{n+1}}$ , alors si on note  $V_{t^n} = X(t^n; t^{n+1}, x, y)$  (où  $X$  est calculé par Euler symplectique), on a  $|V(t^{n+1})| = |V(t^n)|$  lorsque le champ  $U$  est à divergence nulle, comme c'est le cas pour les équations de Vlasov-Poisson ou du Centre-Guide (voir [32]). Cependant, l'approximation de la cellule advectée en arrière par un quadrilatère brise cette propriété (sauf dans le cas de transformations linéaires comme la translation et la rotation).

Montrons ce résultat dans le cas du Centre-Guide.

**Proposition 2.2.2.** *La transformation induite par le schéma d'Euler symplectique conserve le volume dans le cas de l'équation du Centre-Guide.*

DÉMONSTRATION. On va prouver que le jacobien de la transformation induite par le déplacement des sommets vaut 1 lorsqu'on utilise un schéma d'Euler symplectique. On note pour cela  $(x, y)$  un sommet dont on cherche le pied de la caractéristique. On a

$$\begin{cases} X^n = x + \Delta t \partial_y \Phi(X^n, y) \\ Y^n = y - \Delta t \partial_x \Phi(X^n, y) \end{cases}$$

On obtient donc les dérivées partielles suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^n}{\partial x} &= 1 + \Delta t \partial_{xy} \Phi(X^n, y) \frac{\partial X^n}{\partial x}, & \frac{\partial X^n}{\partial y} &= \Delta t \partial_{xy} \Phi(X^n, y) \frac{\partial X^n}{\partial y} + \Delta t \partial_y^2 \Phi(X^n, y) \\ \frac{\partial Y^n}{\partial x} &= -\Delta t \partial_x^2 \Phi(X^n, y) \frac{\partial X^n}{\partial x}, & \frac{\partial Y^n}{\partial y} &= 1 - \Delta t \partial_x^2 \Phi(X^n, y) \frac{\partial X^n}{\partial y} - \Delta t \partial_{xy} \Phi(X^n, y) \end{aligned}$$

On peut donc calculer le jacobien de la transformation

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial X^n}{\partial x} & -\Delta t \partial_x^2 \Phi(X^n, y) \frac{\partial X^n}{\partial x} \\ \frac{\partial X^n}{\partial y} & 1 - \Delta t \partial_x^2 \Phi(X^n, y) \frac{\partial X^n}{\partial y} - \Delta t \partial_{xy} \Phi(X^n, y) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\partial X^n}{\partial x} - \Delta t \partial_{xy} \Phi(X^n, y) \frac{\partial X^n}{\partial x} = \frac{1}{1 - \Delta t \partial_{xy} \Phi(X^n, y)} (1 - \Delta t \partial_{xy} \Phi(X^n, y)) = 1.
 \end{aligned}$$

□

Dans la suite, on considérera donc essentiellement le cas des schémas symplectiques.

Après avoir déterminé les cellules lagrangiennes, on doit examiner la partie la plus technique de la méthode, qui consiste en le calcul d'intersections de maillages.

## 2.3 Intersections de maillages

### 2.3.1 Théorème de Green

Le calcul de (2.1.6) fait intervenir une fonction polynomiale par morceaux  $P_{i,j}(x, y)$  sur chaque cellule du maillage, de manière à satisfaire les contraintes (2.1.5). On est donc amené à "découper" l'intégrale intervenant dans ce calcul suivant les différentes cellules cartésiennes  $A_{i,j}$  intersectées par une cellule lagrangienne  $a_{i',j'}$  que l'on notera  $a_k$  pour simplifier les notations. On note par ailleurs  $A_l$  la cellule cartésienne  $A_{i,j}$ , et  $f^n(x, y)$  la reconstruction de l'inconnue  $f$  effectuée au temps  $t^n$  :  $f^n(x, y) = f(t^n, x, y)$ . On peut ainsi réécrire le membre de droite de (2.1.4)

$$\int_{a_k} f^n(x, y) dx dy = \sum_{l=1}^{N_k} \int_{a_{k,l}} f^n(x, y) dx dy. \quad (2.3.12)$$



L'équation (2.3.12) fait intervenir les  $N_k$  cellules  $a_{k,l}$ , intersections de  $a_k$  et de la cellule cartésienne  $A_l$  (voir Figure 2.6). On a donc

$$a_k = \bigcup_{l=1}^{N_k} a_{k,l}, \quad a_{k,l} = a_k \cap A_l.$$

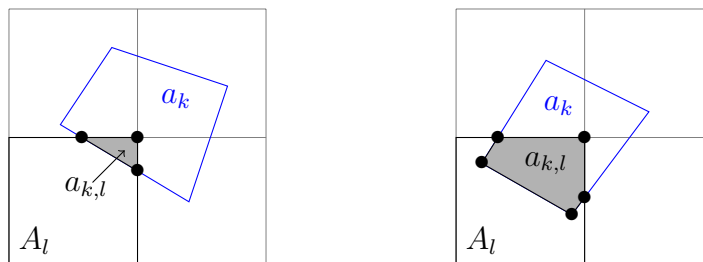


FIGURE 2.6: Exemples d'intersections entre les maillages cartésien et lagrangien.

Le calcul de (2.1.6) se ramène donc à un calcul d'intégrales sur des sous-maillages  $a_{k,l}$ . Cependant, il semble très délicat de chercher une formule générale pour le calcul de telles intégrales, étant donné que les  $a_{k,l}$  peuvent avoir des formes et des nombres de côtés quelconques (voir Figure 2.6).

L'idée consiste ici en la transformation de ces intégrales bidimensionnelles en intégrales simples le long des contours  $\oint_{\partial a_{k,l}}$  des cellules  $a_{k,l}$ , suivant la méthode développée dans [36]. Pour ce faire, on utilise le *théorème de Green* suivant.

**Proposition 2.3.1.** *Pour une région simplement connexe  $a_{k,l}$ , l'équation suivante est satisfaite*

$$\iint_{a_{k,l}} f_l^n(x, y) dx dy = \oint_{\partial a_{k,l}} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy), \quad (2.3.13)$$

où  $\partial a_{k,l}$  est la frontière de  $a_{k,l}$ , et  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  satisfont :

$$-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = f_l^n(x, y). \quad (2.3.14)$$

Voyons maintenant comment calculer ces intégrales sur les contours.

### 2.3.2 Éléments remarquables du maillage

Afin de calculer (2.3.13), une première étape consiste à déterminer  $\partial a_{k,l}$ , c'est-à-dire trouver les différentes arêtes composant chaque sous-maille  $a_{k,l}$ .

Pour ce faire, on introduit pour chaque cellule  $a_k$  les éléments remarquables suivants :

- ses *sommets*, *i.e.* le pied des caractéristiques se terminant aux points de la maille cartésienne (en noir sur la Figure 2.7),
- les *points d'intersection* entre  $a_k$  et les axes de la grille cartésienne (en marron sur la Figure 2.7),
- les *arêtes externes* appartenant à la cellule  $a_{i,j}$  (en bleu sur la Figure 2.7),
- les *arêtes internes* appartenant à la grille cartésienne (en rouge sur la Figure 2.7).

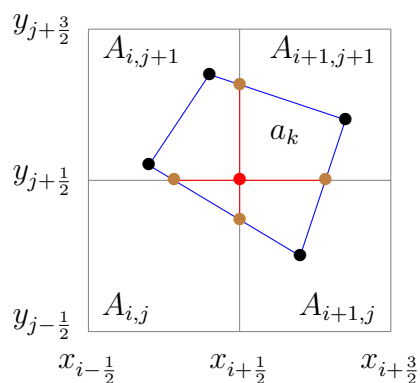


FIGURE 2.7: Les éléments remarquables d'une maille lagrangienne.

Les arêtes à déterminer dans chaque sous-maille sont donc de deux types : externes et internes, et sont délimitées par les deux éléments (sommets et points d'intersection) définis supra qu'il s'agit de déterminer dans un premier temps.

### 2.3.3 Calculs des points d'intersection

Dans un souci de simplification de la suite de l'algorithme, on effectue tout d'abord une normalisation afin de transformer le domaine physique initial  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$  en

le domaine  $[0, N_x] \times [0, N_y]$ , les axes du maillage cartésien étant alors tous à coordonnées entières (voir Figure 2.8).

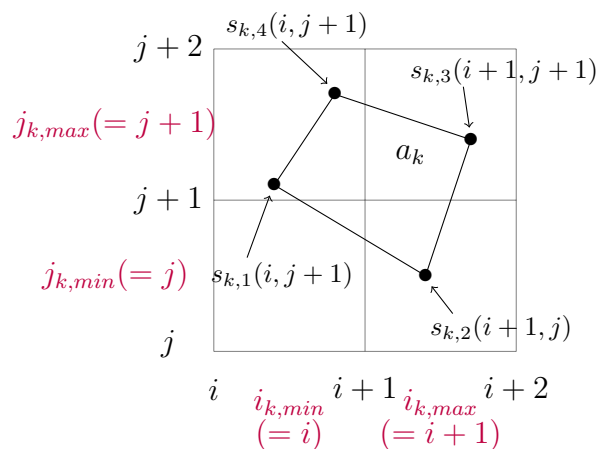


FIGURE 2.8: La recherche des arêtes dans un cas typique.

On va dorénavant travailler pour une cellule lagrangienne  $a_k$  donnée. Ses quatre sommets  $s_{k,1}, s_{k,2}, s_{k,3}, s_{k,4}$  ayant été déterminés lors de l'étape du calcul des pieds des caractéristiques de la maille cartésienne  $A_k$  (section 2.2.2), on recherche d'abord les indices des cellules des quatre sommets, ainsi que les indices  $i_{k,min}, i_{k,max}, j_{k,min}$  et  $j_{k,max}$  correspondant respectivement au minimum et au maximum des indices en abscisse puis en ordonnée de ces quatre points (voir Figure 2.8).

Par exemple, l'indice en abscisse d'un sommet est obtenu par la formule

$$i_x = N_x \left( \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} \right). \quad (2.3.15)$$

Ensuite, on considère successivement les quatre côtés de la cellule  $a_k$ . Notons-les  $c_{12}, c_{23}, c_{34}$  et  $c_{41}$  (on omet désormais l'indice  $k$  pour simplifier les notations ; voir Figure 2.9). On va parcourir chacun d'entre eux dans un ordre déterminé (par exemple dans le sens trigonométrique  $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow s_4$ ) et stocker trois types d'information :

- Les coordonnées barycentriques le long du côté courant des différents points d'inter-

section (avec les axes du maillage cartésien) rencontrés.

- La donnée du type d'intersection : avec un axe horizontal ou vertical.
- La donnée du "sens de l'intersection" (coordonnées "croissantes" ou "décroissantes").

Ainsi, dans notre exemple, si on note  $\lambda$  les coordonnées barycentriques des points, "H/V" la donnée "intersection horizontale ou verticale" et "sens" le "sens de l'intersection" (valeur 1 si le sens est croissant,  $-1$  sinon), on obtient le Tableau 2.1.

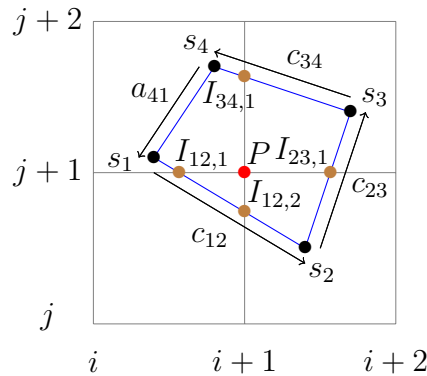


FIGURE 2.9: Points d'intersections entre maille lagrangienne et maillage cartésien.

Ces données peuvent être obtenues facilement connaissant les coordonnées et les indices des quatre sommets de la maille lagrangienne, et vont permettre le parcours des points d'intersection dans le sens choisi, que ceux-ci correspondent à une intersection "horizontale" (H) ou "verticale" (V). Par exemple, si on note  $x(s_i)$  et  $x(s_j)$  les abscisses respectives des sommets  $s_i$  et  $s_j$  d'un côté  $[s_i s_j]$  de la maille lagrangienne, et  $y(s_i)$  et  $y(s_j)$  les ordonnées respectives de ces points, la valeur  $\lambda_{ij,k}$  du  $k^{eme}$  point d'intersection  $I_{ij,k}$  rencontré sur ce côté est obtenue par une des formules suivantes (on note  $ind_x(p)$  et  $ind_y(p)$  les indices de la cellule cartésienne dans laquelle se trouve le point  $p$ ) :

- Cas d'une intersection "H" :

$$\lambda_{ij,k} = \frac{ind_y(I_{ij,k}) - y(s_i)}{y(s_j) - y(s_i)}.$$

– Cas d'une intersection "V" :

$$\lambda_{ij,k} = \frac{\text{ind}_x(I_{ij,k}) - x(s_i)}{x(s_j) - x(s_i)}.$$

	$\lambda$	H/V	sens
$I_{12,1}$	$\lambda_{12,1} = \frac{j+1 - y(s_1)}{y(s_2) - y(s_1)}$	H	$s(I_{12,1}) = -1$
$I_{12,2}$	$\lambda_{12,2} = \frac{i+1 - x(s_1)}{x(s_2) - x(s_1)}$	V	$s(I_{12,2}) = 1$
$I_{23,1}$	$\lambda_{23,1} = \frac{j+1 - y(s_2)}{y(s_3) - y(s_2)}$	H	$s(I_{23,1}) = 1$
$I_{34,1}$	$\lambda_{34,1} = \frac{i+1 - x(s_3)}{x(s_4) - x(s_3)}$	V	$s(I_{34,1}) = -1$

TABLEAU 2.1: "Caractéristiques" des points d'intersection dans l'exemple de la Figure 2.9.

Grâce à ces éléments, le calcul des arêtes externes et internes est grandement facilité.

### 2.3.4 Calcul des arêtes externes

A partir des données calculées précédemment, on détermine tout d'abord les arêtes externes de la maille lagrangienne. Pour ce faire, on parcourt suivant les  $\lambda$  croissants les différents points d'intersection des différents côtés en partant d'un sommet jusqu'à l'autre. Deux points (sommet ou points d'intersection) consécutifs considérés forment alors une arête externe. Ainsi, si le côté  $[s_i s_j]$  intersecte  $n$  fois le maillage cartésien, les différentes arêtes externes sont  $[s_i I_{ij,1}], \dots, [I_{ij,k-1} I_{ij,k}], \dots, [I_{ij,n} s_j]$ .

Il est nécessaire pour la suite de l'algorithme de connaître les coordonnées des deux sommets de l'arête courante. On utilise pour cela les valeurs telles que celles du Tableau 2.1, en remarquant qu'à chaque intersection, seul un indice de cellule (cartésienne) change. A chaque intersection, on met donc à jour cet indice par l'une des formules suivantes :

– Cas d'une intersection "H" :

$$\text{ind}_x(I_{ij,k}) = \text{ind}_x(I_{ij,k-1}), \quad \text{ind}_y(I_{ij,k}) = \text{ind}_y(I_{ij,k-1}) + s(I_{ij,k}).$$

– Cas d'une intersection "V" :

$$\text{ind}_x(I_{ij,k}) = \text{ind}_x(I_{ij,k-1}) + s(I_{ij,k}), \quad \text{ind}_y(I_{ij,k}) = \text{ind}_y(I_{ij,k-1}).$$

On obtient finalement les formules générales suivantes pour les coordonnées du point d'intersection  $I_{ij,k}$  :

– Cas d'une intersection "H" :

$$x(I_{ij,k}) = x(s_i) + \lambda_{ij,k}(x(s_j) - x(s_i)), \quad y(I_{ij,k}) = \text{ind}_y(I_{ij,k-1}) + \frac{s(I_{ij,k}) + 1}{2}.$$

– Cas d'une intersection "V" :

$$x(I_{ij,k}) = \text{ind}_x(I_{ij,k-1}) + \frac{s(I_{ij,k}) + 1}{2}, \quad y(I_{ij,k}) = y(s_i) + \lambda_{ij,k}(y(s_j) - y(s_i)).$$

**Remarque 2.3.1.** *Dans ces formules, on a appelé  $I_{ij,k-1}$  le point précédant  $I_{ij,k}$  sur le côté  $[s_i s_j]$ . Il peut s'agir d'un autre point d'intersection (si  $k > 1$ ) ou de  $s_i$  (si  $k = 1$ ).*

**Remarque 2.3.2.** *Chaque arête externe étant partagée par deux cellules lagrangiennes, il est suffisant, d'une manière générale, de déterminer uniquement les arêtes externes de deux côtés de chaque cellule. La contribution d'une arête externe (voir le paragraphe 2.4.2) à une cellule lagrangienne est alors l'opposé de la contribution de la cellule voisine séparée de la première par l'arête en question (mêmes intégrales, mais dans des sens opposés).*

### 2.3.5 Calcul des arêtes internes

Dans le cas des arêtes internes, il n'est nécessaire de calculer qu'une seule coordonnée pour les deux extrémités de l'arête (en effet, l'autre coordonnée, commune aux deux sommets, est égale à l'indice de l'axe cartésien supportant cette arête). Pour la déterminer, on procède en trois étapes.

- La première phase fait intervenir l'hypothèse que l'on a formulée concernant les cellules lagrangiennes  $a_k$  : celles-ci sont des quadrilatères convexes. De ce fait, soit un axe du maillage cartésien n'intersecte pas  $a_k$  (tel l'axe " $i$ " de la Figure 2.10), soit il l'intersecte deux fois (tel l'axe " $i + 1$ "). Lors du parcours des quatre côtés de la maille  $a_k$ , on va donc garder en mémoire deux quantités (voir Figure 2.10) :

- s'il s'agit d'une intersection "H" : l'abscisse du point d'intersection et un indice

$$indh(I_{ij,k}) = 2 \text{ind}_y(I_{ij,k-1}) + \frac{s(I_{ij,k})}{2},$$

- s'il s'agit d'une intersection "V" : l'ordonnée du point d'intersection et un indice

$$\text{ind}_v(I_{ij,k}) = 2 \text{ind}_x(I_{ij,k-1}) + \frac{s(I_{ij,k})}{2}.$$

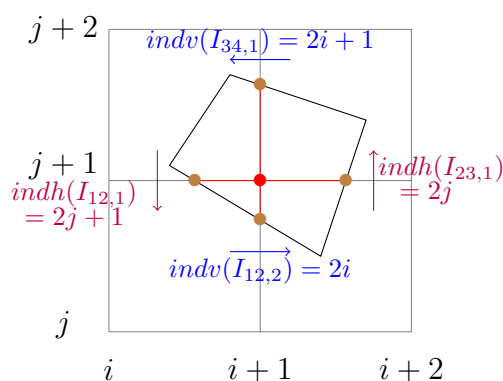


FIGURE 2.10: La recherche des arêtes internes.

- Dans un deuxième temps, pour les arêtes horizontales et pour les arêtes verticales, on met en relation les points d'intersection situés sur un même axe du maillage cartésien en appariant les indices  $indh$  et  $\text{ind}_v$  consécutifs. Plus précisément, pour la cellule la-

grangienne  $a_k$ , l'appariement se fait pour les arêtes horizontales de la manière suivante :  $\{2i_{k,min}, 2i_{k,min} + 1\}, \dots, \{2(i_{k,max} - 1), 2(i_{k,max} - 1) + 1\}$  (et des formules analogues pour les arêtes verticales).

- Pour chaque paire ainsi trouvée, on détermine ensuite facilement les arêtes internes comprises entre ces deux sommets (hormis ces sommets, les autres points sont à coordonnées entières). Dans le cas de la Figure 2.10, on obtient par exemple pour l'axe " $i + 1$ " les couples d'ordonnées suivantes :  $\{y(I_{12,2}), j + 1\}, \{j + 1, y(I_{34,1})\}$ .

Les arêtes de chaque sous-maille ayant été déterminées, étudions maintenant l'étape de reconstruction.

## 2.4 Etape de reconstruction

La seconde partie de l'algorithme consiste à calculer l'approximation de  $f^n$  que l'on va intégrer sur les arêtes déterminées dans la Section 2.3 selon l'égalité (2.3.13). Une reconstruction usuelle est la reconstruction polynomiale; cependant, des reconstructions d'ordre supérieur sont clairement souhaitables. A partir des moyennes connues  $\bar{f}_{ij}^n$ , une première étape consiste donc à déterminer une fonction polynomiale par morceaux  $P_{i,j}(x, y)$  satisfaisant les contraintes. Différentes reconstructions sont proposées dans la suite. Enfin, le calcul de  $\int_{a_{k,l}} f^n(x, y) dx dy$  est détaillé, d'après les idées développées dans [36].

### 2.4.1 Reconstructions bidimensionnelles

On s'intéresse maintenant aux différentes reconstructions qui seront comparées dans la suite : les reconstructions "type Lagrange", "type PPM" et "type Lauritzen".

L'étape de base consiste en la recherche d'une fonction polynomiale par morceaux  $P_{i,j}$  sur



chaque cellule  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$  qui satisfait les contraintes

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} P_{i,j}(x, y) dx dy = \bar{f}_{ij}^n. \quad (2.4.16)$$

### Reconstructions de type Lagrange

Les reconstructions de type Lagrange (LAG  $2d+1$ ) consistent à choisir  $P_{i,j}$  de degré  $\leq 2d$  en  $x$  et  $y$  satisfaisant (2.4.16) avec les contraintes supplémentaires (voir Figure 2.11)

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \int_{y_{l-1/2}}^{y_{l+1/2}} P_{i,j}(x, y) dx dy = \bar{f}_{k,l}^n, \quad k = i-d, \dots, i+d, l = j-d, \dots, j+d. \quad (2.4.17)$$

Par exemple, si l'on considère le cas bidimensionnel avec  $d = 1$ , on obtient pour  $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} P_{i,j}(x_{i-1/2} + \alpha \Delta x, y_{j-1/2} + \beta \Delta y) = & \\ & (1/2\alpha^2 - \alpha + 1/3)(1/2\beta^2 - \beta + 1/3)\bar{f}_{i-1,j-1}^n + (-\alpha^2 + \alpha + 5/6)(1/2\beta^2 - \beta + 1/3)\bar{f}_{i,j-1}^n \\ & + (1/2\alpha^2 - 1/6)(1/2\beta^2 - \beta + 1/3)\bar{f}_{i+1,j-1}^n + (1/2\alpha^2 - \alpha + 1/3)(-\beta^2 + \beta + 5/6)\bar{f}_{i-1,j}^n \\ & + (-\alpha^2 + \alpha + 5/6)(-\beta^2 + \beta + 5/6)\bar{f}_{i,j}^n + (1/2\alpha^2 - 1/6)(-\beta^2 + \beta + 5/6)\bar{f}_{i+1,j}^n \\ & + (1/2\alpha^2 - \alpha + 1/3)(1/2\beta^2 - 1/6)\bar{f}_{i-1,j+1}^n + (-\alpha^2 + \alpha + 5/6)(1/2\beta^2 - 1/6)\bar{f}_{i,j+1}^n \\ & + (1/2\alpha^2 - 1/6)(1/2\beta^2 - 1/6)\bar{f}_{i+1,j+1}^n. \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.1.** *D'ordinaire, on appelle fonction de Lagrange de degré  $d$  un polynôme  $L$  de degré  $\leq d$  qui s'écrit sous la forme (en notations unidimensionnelles)*

$$L(x) = \sum_{k=0}^d \alpha_k l_k(x), \quad (2.4.18)$$

les polynômes  $l_k$  ayant pour expression

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^d \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \quad (2.4.19)$$

Ce polynôme  $L$  vérifie alors les  $d + 1$  contraintes suivantes

$$L(x_0) = \alpha_0, \dots, L(x_d) = \alpha_d. \quad (2.4.20)$$

La terminologie analogue avec celle utilisée supra vient du fait suivant (on considère toujours le cas unidimensionnel pour simplifier les notations) : si on note  $p_i$  la primitive s'annulant en  $x_{i-d-1/2}$  du polynôme  $P_i$  vérifiant les conditions unidimensionnelles analogues à (2.4.17), et si on définit  $2d + 2$  entiers  $\alpha_k$  comme suit

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \bar{f}_{i-d}, \alpha_2 = \bar{f}_{i-d} + \bar{f}_{i-d+1}, \dots, \alpha_{2d+2} = \sum_{k=0}^{2d} \bar{f}_{i-d+k}, \quad (2.4.21)$$

on a les relations suivantes

$$p_i(x_{i-d-1/2}) = \alpha_0, \dots, p_i(x_{i+d+1/2}) = \alpha_{2d+2}. \quad (2.4.22)$$

Les  $p_i$  sont donc des polynômes de Lagrange tels que définis en (2.4.18) et (2.4.19), où les coefficients  $\alpha_k$  de (2.4.18) sont donnés par les formules (2.4.21).

**Remarque 2.4.2.** On privilégie dans les conditions (2.4.17) des stencils centrés

$[i - d, i + d] \times [j - d, j + d]$ . En effet, il a été prouvé dans [44, 4] que le lieu de plus grande précision d'une interpolation polynomiale est le centre du stencil.

## Reconstructions de type PPM

Les reconstructions de type "Piecewise Parabolic Method" (PPM) ont été introduites par Colella et Woodward en 1984 (voir [17]). En dimension 2, elles consistent à choisir  $P_{i,j}$  de degré  $\leq 2$  en  $x$  et  $y$  comme produit tensoriel de reconstructions PPM unidimensionnelles  $p_i$  telles que les  $p_i$  satisfont les contraintes suivantes (avec des notations évidentes) :

$$p_i(x_{i-1/2}) = f_{i-1/2}^n, \quad p_i(x_{i+1/2}) = f_{i+1/2}^n. \quad (2.4.23)$$

Dans le cas bidimensionnel, les contraintes sont donc les suivantes (voir Figure 2.11).

– Conditions sur les arêtes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} P_{i,j}(x, y_{j-1/2}) = \bar{f}_{i,j-1/2}^n, \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} P_{i,j}(x, y_{j+1/2}) = \bar{f}_{i,j+1/2}^n, \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} P_{i,j}(x_{i-1/2}, y) = \bar{f}_{i-1/2,j}^n, \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} P_{i,j}(x_{i+1/2}, y) = \bar{f}_{i+1/2,j}^n. \end{array} \right. \quad (2.4.24)$$

– Conditions sur les sommets

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{i,j}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}) = f_{i-1/2,j-1/2}^n, \\ P_{i,j}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}) = f_{i+1/2,j-1/2}^n, \\ P_{i,j}(x_{i-1/2}, y_{j+1/2}) = f_{i-1/2,j+1/2}^n, \\ P_{i,j}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) = f_{i+1/2,j+1/2}^n. \end{array} \right. \quad (2.4.25)$$

On obtient alors pour  $P_{i,j}$  (avec  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ )

$$\begin{aligned} & P_{i,j}(x_{i-1/2} + \alpha\Delta x, y_{j-1/2} + \beta\Delta y) = \\ & (3\alpha^2 - 4\alpha + 1)(3\beta^2 - 4\beta + 1)f_{i-1/2,j-1/2}^n + (3\alpha^2 - 2\alpha)(3\beta^2 - 4\beta + 1)f_{i+1/2,j-1/2}^n + \\ & (6\alpha - 6\alpha^2)(3\beta^2 - 4\beta + 1)\bar{f}_{i,j-1/2}^n + (3\alpha^2 - 4\alpha + 1)(3\beta^2 - 2\beta)f_{i-1/2,j+1/2}^n + \\ & (3\alpha^2 - 2\alpha)(3\beta^2 - 2\beta)f_{i+1/2,j+1/2}^n + (6\alpha - 6\alpha^2)(3\beta^2 - 2\beta)\bar{f}_{i,j+1/2}^n + \\ & (3\alpha^2 - 4\alpha + 1)(6\beta - 6\beta^2)\bar{f}_{i-1/2,j}^n + (3\alpha^2 - 2\alpha)(6\beta - 6\beta^2)\bar{f}_{i+1/2,j}^n + \\ & (6\alpha - 6\alpha^2)(6\beta - 6\beta^2)\bar{f}_{i,j}^n. \end{aligned}$$

Les valeurs aux interfaces  $\bar{f}_{i+1/2,j}^n$  sont des approximations à différents ordres de

$\frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(x_{i+1/2}, y) dy$  (on mentionne ici les ordres 2, 4 et 6) utilisant les valeurs moyennes

$$\begin{aligned}
\text{PPM 0 : } \quad \bar{f}_{i+1/2,j}^n &= \frac{1}{2}(\bar{f}_{i,j}^n + \bar{f}_{i+1,j}^n), \\
\text{PPM 1 : } \quad \bar{f}_{i+1/2,j}^n &= \frac{7}{12}(\bar{f}_{i,j}^n + \bar{f}_{i+1,j}^n) - \frac{1}{12}(\bar{f}_{i-1,j}^n + \bar{f}_{i+2,j}^n), \\
\text{PPM 2 : } \quad \bar{f}_{i+1/2,j}^n &= \frac{37}{60}(\bar{f}_{i,j}^n + \bar{f}_{i+1,j}^n) - \frac{8}{60}(\bar{f}_{i-1,j}^n + \bar{f}_{i+2,j}^n) + \frac{1}{60}(\bar{f}_{i-2,j}^n + \bar{f}_{i+3,j}^n).
\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

Ces formules peuvent être retrouvées dans [16].

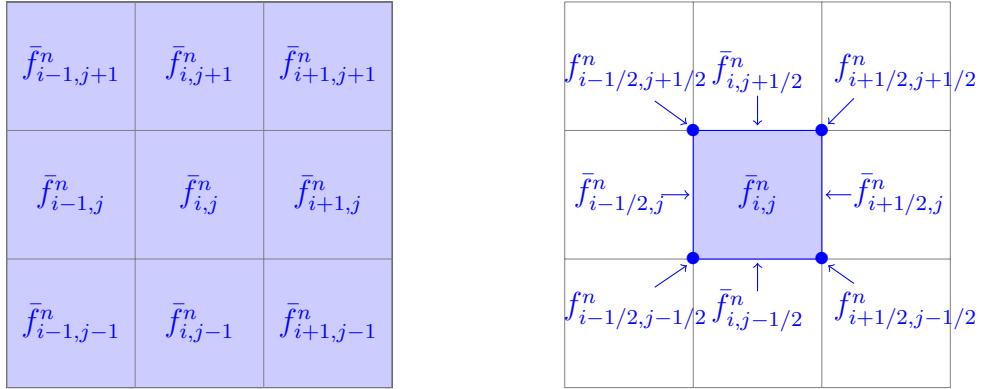


FIGURE 2.11: Contraintes sur la fonction de reconstruction  $P_{i,j}$  dans les cas LAG 3 (à gauche) et PPM (à droite).

**Remarque 2.4.3.** *Les formules (2.4.26) permettent de déterminer les valeurs aux arêtes verticales (2.4.24). On obtient les valeurs aux arêtes horizontales par des formules analogues. Pour déterminer les valeurs aux sommets (2.4.25), on utilise à nouveau les conditions (2.4.26) en remplaçant les valeurs moyennes par mailles par les valeurs aux arêtes déterminées précédemment. Des calculs simples montrent qu'il est alors équivalent d'utiliser pour cette étape les valeurs aux arêtes horizontales ou verticales.*

### Reconstruction de type "Lauritzen" [36]

Les reconstructions classiques précédentes présentent un inconvénient certain dans le cadre bidimensionnel : leur (relative) complexité. En effet, dans leur cas, le calcul de neuf coefficients est nécessaire, ce qui peut s'avérer coûteux en temps de calcul. C'est pourquoi on

mentionne maintenant un autre type de reconstruction, dit de "Lauritzen". Pour une cellule donnée  $(i, j)$ , on considère l'approximation suivante (voir [7, 34]) :

$$\begin{aligned}
P_{i,j}(x_{i-1/2} + \alpha\Delta x, y_{j-1/2} + \beta\Delta y) &= \bar{f}_{ij}^n + \delta a_{ij}^x \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + b_{ij}^x \left(-\frac{1}{6} + \alpha - \alpha^2\right) \\
&+ \delta a_{ij}^y \left(-\frac{1}{2} + \beta\right) + b_{ij}^y \left(-\frac{1}{6} + \beta - \beta^2\right) + \frac{1}{2}(c_{ij}^{xy} + c_{ji}^{yx}) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \alpha\beta\right),
\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

avec les notations :

$$\left\{ \begin{array}{ll}
c_{ij}^{xy} = \frac{1}{2}(\Delta a_{i,j+1}^x - \Delta a_{i,j-1}^x), & c_{ij}^{yx} = \frac{1}{2}(\Delta a_{i+1,j}^y - \Delta a_{i-1,j}^y), \\
\Delta a_{i,j}^x = \frac{1}{2}(\bar{f}_{i+1,j}^n - \bar{f}_{i-1,j}^n), & \Delta a_{i,j}^y = \frac{1}{2}(\bar{f}_{i,j+1}^n - \bar{f}_{i,j-1}^n), \\
\delta a_{i,j}^x = f_{i+1/2,j}^x - f_{i-1/2,j}^x, & \delta a_{i,j}^y = f_{i,j+1/2}^y - f_{i,j-1/2}^y, \\
b_{i,j}^x = 6\bar{f}_{i,j}^n - 3(f_{i-1/2,j}^x + f_{i+1/2,j}^x), & b_{i,j}^y = 6\bar{f}_{i,j}^n - 3(f_{i,j-1/2}^y + f_{i,j+1/2}^y), \\
f_{i-1/2,j}^x = \frac{1}{2}(\bar{f}_{i-1,j}^n + \bar{f}_{i,j}^n) & f_{i,j-1/2}^y = \frac{1}{2}(\bar{f}_{i,j-1}^n + \bar{f}_{i,j}^n) \\
-\frac{1}{6}(\Delta a_{i,j}^x - \Delta a_{i-1,j}^x), & -\frac{1}{6}(\Delta a_{i,j}^y - \Delta a_{i,j-1}^y).
\end{array} \right.$$

Cette reconstruction présente l'intérêt de n'avoir que six coefficients à calculer, tout en ayant un comportement relativement lisse au niveau des angles des cellules, contrairement à certaines reconstructions à quatre coefficients.

Il est également intéressant de remarquer l'importante proximité de cette reconstruction avec PPM 1, qui sera à nouveau soulignée dans les résultats numériques. En effet, la reconstruction de Lauritzen supra se fonde sur la reconstruction quadratique unidimensionnelle suivante

(avec des notations découlant directement de celles ci-dessus, voir également [34])

$$P_i(x_{i-1/2} + \alpha\Delta x) = \bar{f}_i^n + \delta a_i^x \left( -\frac{1}{2} + \alpha \right) + b_i^x \left( -\frac{1}{6} + \alpha - \alpha^2 \right), \quad (2.4.28)$$

qui n'est autre que PPM 1 unidimensionnel (on remarque en passant que dans (2.4.28), intervient  $f_{i-1/2}^x = \frac{1}{2}(\bar{f}_{i-1}^n + \bar{f}_i^n) - \frac{1}{6}(\Delta a_i^x - \Delta a_{i-1}^x)$  qui est la valeur aux interfaces de type PPM 1 de (2.4.26)). La reconstruction de Lauritzen peut donc être vue comme une approximation de la reconstruction PPM 1 bidimensionnelle.

### Formulations Hermite

Des reconstructions de type Lagrange et PPM peuvent être exprimées dans le même formalisme, dit *de Hermite*. En effet, dans le cas 1D, on écrit comme dans [23]

$$g_i(x) = (3x^2 - 4x + 1)g_{i-1/2^+} + (-6x^2 + 6x)\bar{g}_i + (3x^2 - 2x)g_{i+1/2^-},$$

on obtient les reconstructions LAG 3 et PPM en prenant le produit tensoriel

$$P_{i,j}(x_{i-1/2} + \alpha\Delta x, y_{j-1/2} + \beta\Delta y) = g_i(\alpha) * g_j(\beta),$$

avec

$$g_{i-1/2^+} = \frac{5}{6}\bar{f}_i^n - \frac{1}{6}\bar{f}_{i+1}^n + \frac{1}{3}\bar{f}_{i-1}^n, \quad \bar{g}_i = \bar{f}_i^n, \quad g_{i+1/2^-} = \frac{5}{6}\bar{f}_i^n + \frac{1}{3}\bar{f}_{i+1}^n - \frac{1}{6}\bar{f}_{i-1}^n$$

pour les reconstructions de type LAG 3, et

$$g_{i-1/2^+} = f_{i-1/2}^n, \quad \bar{g}_i = \bar{f}_i^n, \quad g_{i+1/2^-} = f_{i+1/2}^n$$

pour les reconstructions de type PPM.

Dans ce formalisme, on peut donner une formule générale pour les expressions du type  $g_{i+1/2^{+/-}}$  en fonction du degré choisi. En effet, si on écrit

$$f(t^n, x_{i+1/2}) \approx \sum_{j=r}^s a_j \bar{f}_{i+j}^n, \quad (2.4.29)$$

on peut déterminer les coefficients  $a_j$  en résolvant le système

$$\frac{1}{2^k} = \sum_{j=r}^s a_j \int_{j-1/2}^{j+1/2} x^k dx, \quad k = 0, \dots, r-s.$$

On a vu ci-dessus qu'au degré 3, ces coefficients mènent à la reconstruction LAG 3 du paragraphe 2.4.1. Lorsqu'on fait varier le degré dans (2.4.29), on peut obtenir d'autres reconstructions de type Lagrange. Ainsi, dans le cas où  $r = -d$  et  $s = d+1$ , on va obtenir une reconstruction que l'on va noter LAGH  $2d+1$ .

**Remarque 2.4.4.** *Il est important de noter ici que les LAGH  $2d+1$  et les LAG  $2d+1$  du paragraphe 2.4.1 ne sont pas les mêmes reconstructions. En particulier, dans le cas des LAGH  $2d+1$ , la reconstruction reste cubique et  $2d+1$  réfère au degré de reconstruction aux interfaces.*

Explicitons ces coefficients dans ce cas. On a alors  $r = -d$  et  $s = d+1$ . Si on écrit, pour  $k \neq 0$

$$C(k) = \frac{\prod_{j=r, j \neq k, 0}^s (-j)}{\prod_{j=r, j \neq k}^s (k-j)},$$

puis

$$CC(k) = -\sum_{j=r}^k C(j) \quad \text{pour } r \leq k \leq -1, \quad CC(k) = \sum_{j=k}^s C(j) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq s,$$

on obtient les expressions de  $g_{i+1/2^+}$  et de  $g_{i+1/2^-}$  par :

$$g_{i+1/2^-} = \sum_{k=r}^{s-1} CC(r+s-1-k) \bar{f}_{i+k-1,j}^n, \quad g_{i+1/2^+} = \sum_{k=r}^{s-1} CC(k) \bar{f}_{i+k,j}^n. \quad (2.4.30)$$

**Remarque 2.4.5.** *Bien que les schémas de types LAG et LAGH diffèrent, la reconstruction LAGH constitue un bon compromis qualité/coût de calcul (voir 2.7.3). En effet, alors qu'avec la montée en ordre, les méthodes LAG deviennent très vite inutilisables en pratique pour cause de temps de calcul excessif, les méthodes de type LAGH représentent une complexité de calcul comparable quel que soit l'ordre choisi (voir 5.2).*

*De plus, les méthodes de type LAGH  $2d+1$  donnent des résultats proches des LAG  $2d+1$ , ce d'autant plus que l'on choisit un pas de temps  $\Delta t$  petit. On peut en effet montrer que ces deux représentations sont équivalentes à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ . On privilégiera donc les schémas de type LAGH dans la suite.*

## 2.4.2 Calcul des intégrales le long des frontières

Dans ce paragraphe, on suppose que  $f^n(x, y)$  est approchée sur chaque cellule cartésienne par une approximation polynomiale  $P_{i,j}(x, y)$  (voir le paragraphe 2.4.1), et on décrit la façon d'intégrer exactement cette fonction polynomiale sur un segment afin de calculer (2.3.13).

**Remarque 2.4.6.** *Il est important que cette étape soit exacte, sinon, des instabilités peuvent se produire (voir [39]).*

D'une manière générale, les différentes reconstructions peuvent être écrites sous la forme

$$f_{i,j}^n(x, y) = \sum_{p,q} c_{i,j}^{(p,q)} x^p y^q, \quad (2.4.31)$$

avec un nombre fini de termes  $c_{i,j}^{(p,q)}$  non nuls. En intégrant (2.4.31) sur une sous-cellule  $a_{k,l}$ ,



on peut donc écrire

$$\iint_{a_{k,l}} f_l^n(x, y) dx dy = \sum_{p,q} c_l^{(p,q)} w_{k,l}^{(p,q)}, \quad (2.4.32)$$

avec

$$w_{k,l}^{(p,q)} = \iint_{a_{k,l}} x^p y^q. \quad (2.4.33)$$

On introduit tout d'abord quelques notations; notons  $(x_{k,l,h}, y_{k,l,h}), h = 0, \dots, S_{k,l} - 1$ , les  $S_{k,l}$  sommets de la sous-cellule  $a_{k,l}$  déterminés précédemment. On suppose dans la suite que  $x_{k,l,0} = x_{k,l,S_{k,l}}$  et  $y_{k,l,0} = y_{k,l,S_{k,l}}$ .

Calculons maintenant  $w_{k,l}^{(p,q)}$  dans deux exemples illustrateurs.

Le cas  $p = 1, q = 1$  correspond à

$$\begin{aligned} w_{k,l}^{(1,1)} &= \iint_{a_{k,l}} xy \, dx dy \\ &= \iint_{\partial a_{k,l}} (P^{(1,1)}(x, y) dx + Q^{(1,1)}(x, y) dy) \\ &= \sum_{h=1}^{S_{k,l}} \int_{(x_{k,l,h-1}, y_{k,l,h-1})}^{(x_{k,l,h}, y_{k,l,h})} \frac{x^2 y}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} \int_0^1 [x_{k,l,h-1} + t(x_{k,l,h} - x_{k,l,h-1})]^2 \\ &\quad [y_{k,l,h-1} + t(y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1})](y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1}) dt \\ &= \frac{(y_h - y_{h-1})}{2} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} [y_{k,l,h-1}(3x_{k,l,h-1}^2 + 2x_{k,l,h-1}x_{k,l,h} + x_{k,l,h}^2) \\ &\quad + y_{k,l,h}(x_{k,l,h-1}^2 + 2x_{k,l,h-1}x_{k,l,h} + 3x_{k,l,h}^2)], \end{aligned}$$

où le changement de variables  $x = x_{k,l,h-1} + t(x_{k,l,h} - x_{k,l,h-1})$  et  $y = y_{k,l,h-1} + t(y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1})$  a été effectué.

Le choix  $P^{(p,0)}(x, y) = 0$  et  $Q^{(p,0)} = x^{p+1}/(p+1)$  permet de considérer les cas  $p, q = 0$  par

$$\begin{aligned}
w_{k,l}^{(p,0)} &= \iint_{a_{k,l}} x^p dx dy \\
&= \sum_{h=1}^{S_{k,l}} \int_{(x_{k,l,h-1}, y_{k,l,h-1})}^{(x_{k,l,h}, y_{k,l,h})} [P^{(p,0)}(x, y) dx + Q^{(p,0)}(x, y) dy] \\
&= \sum_{h=1}^{S_{k,l}} \int_{(x_{k,l,h-1}, y_{k,l,h-1})}^{(x_{k,l,h}, y_{k,l,h})} \frac{x^{p+1}}{p+1} dy. \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} \int_0^1 (x_{k,l,h-1} + t(x_{k,l,h} - x_{k,l,h-1}))^{p+1} (y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1}) dt \\
&= \frac{y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1}}{(p+1)(p+2)} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} \sum_{k=0}^{p+1} x_{k,l,h}^k x_{k,l,h-1}^{p+1-k},
\end{aligned}$$

où le changement de variables  $x = x_{k,l,h-1} + t(x_{k,l,h} - x_{k,l,h-1})$  et  $y = y_{k,l,h-1} + t(y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1})$  a été effectué. Remarquons que les coefficients du type  $w_{k,l}^{0,q}$  sont obtenus de façon symétrique.

On trouvera en Appendice 7 les expressions d'autres coefficients  $w_{k,l}$ .

**Remarque 2.4.7.** *Les choix de  $P$  et  $Q$  satisfaisant (2.3.14) sont libres et donnent toujours pratiquement les mêmes résultats. Les expressions retenues permettent d'obtenir d'importantes simplifications sur les coefficients  $w$  dans le cas des arêtes internes. On a en effet  $w^{(p,0)} = 0$  pour une arête horizontale interne  $[(x_{h-1}, y_{h-1}), (x_h, y_h)]$ , car  $y_{h-1} = y_h$ , et  $w^{(0,q)} = 0$  pour une arête verticale interne.*

**Remarque 2.4.8.** *Dans (2.4.31), on a choisi de décomposer  $f_{i,j}^n(x, y)$  dans la base canonique. Cependant, d'autres choix peuvent être envisageables : puisque l'on a vu que les reconstructions de types Lagrange et PPM peuvent être exprimées dans le même "formalisme PPM", un choix naturel pour la base de décomposition peut être une "base de Hermite" construite à partir des polynômes*

$$\begin{cases} P_{-1/2}(\alpha) = (1 - \alpha)(1 - 3\alpha), \\ P_0(\alpha) = 6\alpha(1 - \alpha), \\ P_{1/2}(\alpha) = \alpha(3\alpha - 2). \end{cases}$$

De cette façon, les coefficients  $c$  de (2.4.31) sont tous égaux à 1. Cependant, on va obtenir en contrepartie des coefficients  $w$  très compliqués (et en particulier, on n'aura plus la simplification obtenue pour les arêtes internes vue supra). Comme les résultats obtenus sont très proches de ceux utilisant la base canonique, on ne va pas retenir ce choix.

**Remarque 2.4.9.** Le calcul des intégrales  $\int_{\partial\alpha_{k,l}} (Pdx + Qdy)$  sur les contours peut également être effectué en utilisant des points de Gauss. Les résultats obtenus sont très proches de ceux donnés par l'intégration exacte.

**Remarque 2.4.10.** Dans le cas de reconstructions "centrées" du type PPM, la reconstruction polynomiale par morceaux est continue sur le domaine. Par conséquent, le calcul des arêtes internes est inutile dans ce cas. Dans le cas de la Figure 2.9, on a par exemple

$$\int_P^{I_{34,1}} f_{i,j+1} = \int_{I_{34,1}}^P f_{i+1,j+1}.$$

## 2.5 Résumé de l'algorithme

Pour calculer  $\bar{f}_{i,j}^{n+1}$  pour tous  $i = 0, \dots, N_x - 1$  et  $j = 0, \dots, N_y - 1$ , l'algorithme consiste donc à suivre la procédure suivante

- Partie lagrangienne
  - Calculer les quatre sommets de  $a_{k=(i,j)}$  en résolvant en arrière les caractéristiques en temps (2.2.7),
  - Déterminer l'intersection entre le maillage lagrangien et cartésien, *i.e.*
    - Trouver les  $N_k$  cellules cartésiennes  $A_l$  intersectées par la cellule lagrangienne  $a_k$ ,
    - Déterminer les points d'intersection entre le maillage lagrangien et les axes cartésiens (localement),
    - En déduire les sommets  $x_{k,l,h}, y_{k,l,h}$ , pour  $h = 0, \dots, S_{k,l} - 1$ .
- Partie eulérienne
  - Calculer une fonction d'approximation polynomiale de la forme (2.4.31) sur le domaine,
  - Calculer les coefficients  $w_{k,l}^{(p,q)}$  grâce à (2.4.33),
  - En déduire  $\bar{f}_{i,j}^{n+1}$  en utilisant (2.4.32), (2.3.12) et (2.1.3).

## 2.6 Cas particuliers

Plusieurs types de "cas particuliers" peuvent se produire quant au positionnement des mailles lagrangiennes  $a_k$  par rapport au maillage cartésien. La Figure 2.12 en donne deux exemples (rangée supérieure). Ces situations peuvent sembler très particulières, mais elles se produisent en fait assez souvent, en particulier dans le cas où le champ d'advection est nul (au moins localement) et donc que l'advecté en arrière d'une cellule cartésienne reste la cellule elle-même ! Il est donc important que l'algorithme soit robuste à ce type de cas. Sur la Figure 2.12, la rangée inférieure indique par des zooms sur les situations du haut comment de tels cas sont traités par l'algorithme présenté supra.

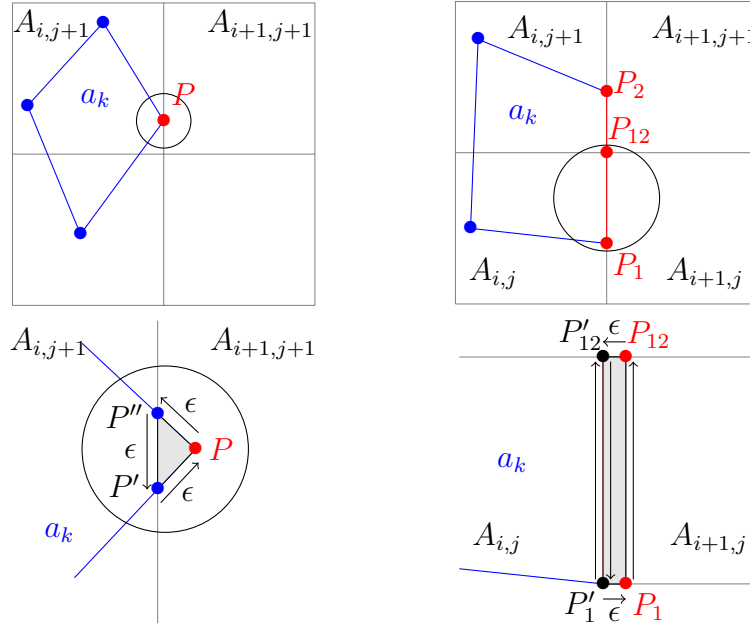


FIGURE 2.12: En haut : exemples de cas particuliers du positionnement d'une cellule lagrangienne; en bas : traitement de ces situations par l'algorithme.

Dans la situation de gauche, un sommet  $P$  de la cellule  $a_k$  se trouve sur l'axe  $i + 1$  du maillage cartésien ("sur" ayant ici le sens de "à  $\epsilon$  près"). Il peut arriver dans ce cas que le point  $P$  soit détecté comme faisant partie de la cellule cartésienne  $A_{i+1,j+1}$ , alors que la cellule lagrangienne  $a_k$  est en fait entièrement contenue dans  $A_{i,j+1}$ . En effet, la localisation des points est réalisée par le calcul de leur indice par la formule (2.3.15), qui confère une convention d'appartenance à la cellule "de droite" aux points situés aux interfaces.

Le cas est présenté en bas à droite de la Figure 2.12 : on voit cependant que cette sous-maille constituée du triangle formé par le point  $P$  et les deux points (fictifs)  $P'$  et  $P''$  (qui sont considérés comme étant des points d'intersection de  $a_k$  avec l'axe  $i + 1$ ) a une contribution nulle au calcul de l'intégrale sur  $a_k$ , puisque  $P$  étant situé à  $\epsilon$  de l'axe  $i + 1$ , les distances  $P'P$ ,  $PP''$  et  $P''P'$  sont toutes les trois également négligeables.

Dans la situation de droite, deux sommets  $P_1$  et  $P_{12}$  de la cellule  $a_k$  se trouvent sur le même axe  $i + 1$  du maillage cartésien, ce qui implique que le côté  $[P_1P_{12}]$  est entièrement

inclus dans l'axe du maillage cartésien. Ici encore, les points  $P_1$  et  $P_{12}$  sont en réalité situés "à  $\epsilon$  en-deçà de l'axe  $i + 1$ ", ce qui implique que  $[P_1 P_{12}]$  est détecté comme faisant partie de  $A_{i+1,j}$ , alors que la cellule  $a_k$  est entièrement incluse dans les cellules cartésiennes  $A_{i,j}$  et  $A_{i,j+1}$ . Dans le schéma du bas, on constate ici encore (dans le cas de l'arête extérieure  $[P_1 P_{12}]$ ), que de nouveaux points  $P'_1$  et  $P'_{12}$  sont apparus. Cependant, comme  $P_1$  et  $P_{12}$  sont situés à  $\epsilon$  de l'axe  $i + 1$ , les distances  $P'_1 P_1$  et  $P_{12} P'_{12}$  sont elles aussi négligeables. La contribution de la sous-maille grisée correspond donc à  $\int_{P'_1}^{P'_{12}} f_{i,j} + \int_{P_1}^{P_{12}} f_{i+1,j} + \int_{P_{12}}^{P_1} f_{i+1,j} \approx \int_{P'_1}^{P'_{12}} f_{i,j}$ .

Dans ces deux cas, les points  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'_1$  et  $P'_{12}$  jouent donc un rôle "transparent".

## 2.7 Résultats numériques

Cette Section est consacrée à la présentation de résultats numériques concernant la méthode que l'on vient de décrire dans les Sections précédentes (elle sera abrégée "CSL", pour "Conservative Semi-Lagrangian" dans la suite). En particulier, des comparaisons avec une méthode de la littérature ("BSL", pour "Backward Semi-Lagrangian" (voir [52]) utilisant des reconstructions par splines cubiques bidimensionnelles) seront réalisées. La méthode BSL avec splitting peut être considérée comme une référence pour les cas-tests relatifs à Vlasov-Poisson, mais on va ici effectuer la comparaison avec BSL sans splitting, employée pour les cas plus complexes.

On s'intéresse à différents types de problèmes : des cas-tests "de base", puis les modèles dits de Vlasov-Poisson (en particulier le cas "Plasma Sheath" avec des conditions non périodiques) et du Centre-Guide.

### 2.7.1 Algorithme pour les problèmes non linéaires

On a présenté dans la Section 2.2 quelques schémas numériques pour calculer le pied des caractéristiques en gelant la dépendance temporelle du champ de vecteurs. C'est en

particulier le cas lorsqu'un champ de vecteurs non linéaire  $U = U(f)$  est considéré. Voyons quelques algorithmes qui peuvent alors être mis en œuvre.

1. Premier ordre : au pas de temps  $t^n$ , on calcule le champ de vecteurs  $U(\bar{f}^n)$  grâce à  $\bar{f}^n$ .  
En utilisant un schéma d'Euler explicite (2.2.9) ou de Verlet symplectique (2.2.11), on calcule  $\bar{f}^{n+1}$ .
2. Prédicteur-correcteur (deuxième ordre) : au pas de temps  $t^n$ , on calcule  $U(\bar{f}^n)$  à partir de  $\bar{f}^n$ . On calcule ensuite  $\bar{f}^{n+1/2}$  puis  $U(\bar{f}^{n+1/2})$  (calcul intermédiaire sur un demi pas de temps). On utilise finalement  $\bar{f}^n$  et  $U(\bar{f}^{n+1/2})$  pour en déduire  $\bar{f}^{n+1}$ .
3. Saute-mouton (deuxième ordre) : au pas de temps  $t^n$ , on utilise  $\bar{f}^{n-1}$  et  $U(\bar{f}^n)$  pour calculer  $\bar{f}^{n+1}$  (calcul sur deux pas de temps).

**Remarque 2.7.1.** *Pour les cas-tests qui suivent, si rien n'est mentionné, on utilisera l'algorithme prédicteur-correcteur.*

## 2.7.2 Périodicité aux frontières

Dans les différents cas-tests qui vont suivre, des conditions périodiques aux frontières du domaine sont imposées dans les directions  $x$  et  $y$  pour la fonction de reconstruction. Cependant, il arrive fréquemment que le champ  $U$  présente un comportement non périodique aux frontières. Un exemple typique est le cas-test de Vlasov-Poisson avec conditions initiales de types Landau, Bump On Tail ou Two Stream Instability du paragraphe 2.7.4. Dans ce cas, le champ  $U$  s'écrit  $U(t, x, y) = (y, E(t, x))$ . Pour ces conditions initiales, le champ  $E$  est périodique suivant la direction  $x$  (voir par exemple Figure 2.13 l'évolution du champ  $E$  pour le cas-test Landau non linéaire défini en 2.7.4). C'est donc également le cas de la composante  $U_2$  du champ. Cependant, il apparaît clairement que dans ce cas,  $U_1$  n'est pas périodique suivant la direction  $y$ . On est donc amené à considérer des conditions aux frontières différentes en fonction de la situation rencontrée : on choisira alors des conditions

du type

$$U_1(t, x, -1) = U_1(t, x, 0), \quad U_1(t, x, N_y) = U_1(t, x, N_y - 1)$$

dans un cas non périodique, et du type

$$U_2(t, -1, y) = U_2(t, N_x - 1, y), \quad U_2(t, N_x, y) = U_2(t, 0, y)$$

dans un cas périodique.

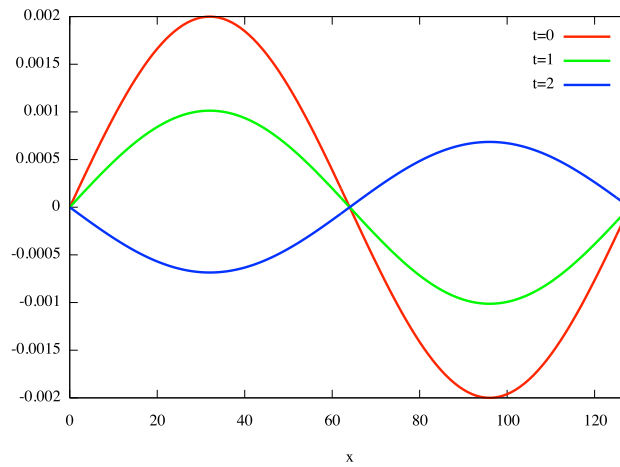


FIGURE 2.13: Maintien de la périodicité du champ  $E = E(t, x)$  à différents instants  $t$  pour le cas-test Landau non linéaire.

### 2.7.3 Cas-tests "de base" : Rotation et "Swirling Deformation Flow" (SDF)

#### Rotation

On s'intéresse tout d'abord au cas de la rotation, pour lequel le champ  $U$  est constant dans le temps. On a :

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} - y \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x} + x \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} = 0,$$



avec une fonction gaussienne comme condition initiale :

$$f(t = 0, x, y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Le domaine est tronqué à  $[-x_{max}, x_{max}] \times [-y_{max}, y_{max}]$ , et on choisit  $x_{max} = y_{max} = 10$ .

Il faut remarquer que le domaine est choisi de telle sorte que l'on ait  $f = 0$  sur la frontière. Néanmoins, le champ  $U$  n'est pas périodique dans ce cas ; c'est pourquoi on doit définir  $U$  sur un domaine de plus grande taille que  $[-x_{max}, x_{max}] \times [-y_{max}, y_{max}]$ . Cette remarque restera valable pour les cas-tests de Vlasov-Poisson que l'on considèrera dans la suite.

Pour ce cas-test, on s'intéresse à rechercher l'ordre des différentes reconstructions type CSL. Pour ce faire, on se fixe un pas de temps  $\Delta t$  et un nombre d'itérations (ici, respectivement : 0.01 et 100) et on calcule l'erreur en norme absolue entre la fonction reconstruite et la donnée initiale (qui est la solution analytique de ce problème), à savoir

$Err = \|f(t, ., .) - f(t = 0, ., .)\|_{\infty}$ , ce, pour différentes valeurs de  $N_x$  et  $N_y$  (on choisit  $N_x = N_y$ ). Les résultats sont présentés sur la Figure 2.14.

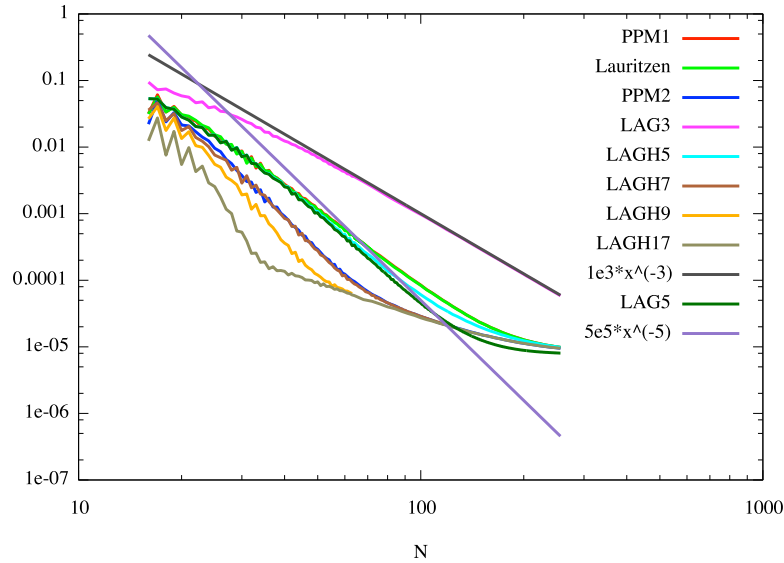


FIGURE 2.14: Erreurs de reconstruction pour le cas-test de la rotation avec diverses reconstructions de type CSL.

Comme attendu, la méthode de type LAG 3 est d'ordre 3. On constate pour les autres méthodes que la montée en ordre pour les dérivées se traduit par une diminution conséquente de l'erreur, jusqu'à la saturation, qui se produit environ vers  $10^{-4}$ . Celle-ci provient de l'erreur en temps, et empêche d'atteindre l'erreur machine. Par ailleurs, les reconstructions type Lauritzen, PPM 1 et LAGH 5 d'une part, PPM 2 et LAGH 7 d'autre part, donnent des résultats très similaires. Enfin, il est à noter que la méthode LAG 5 n'est pas exactement d'ordre 5, ceci étant dû à des approximations d'ordre 2 au cours de l'algorithme (voir 2.7.3). Les reconstructions LAG 5 et LAGH 5 ont ainsi des comportements très proches, confirmant que cette dernière fournit une bonne approximation de LAG 5 à un bien moindre coût.

### Swirling Deformation Flow

On s'intéresse maintenant au cas-test "Swirling Deformation Flow" (voir [46]).

Dans ce cas, la condition initiale va être déformée au cours du temps, puis revenir à sa position d'équilibre après une période  $T$  (voir Figure 2.15 dans le cas d'une solution initiale

gaussienne). L'équation de transport considérée ici est

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} - \frac{\partial(\cos^2(\frac{x}{2}) \sin(y)g(t)f(t, x, y))}{\partial x} + \frac{\partial(\sin(x) \cos^2(\frac{y}{2})g(t)f(t, x, y))}{\partial y} = 0,$$

avec

$$g(t) = \pi \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right).$$

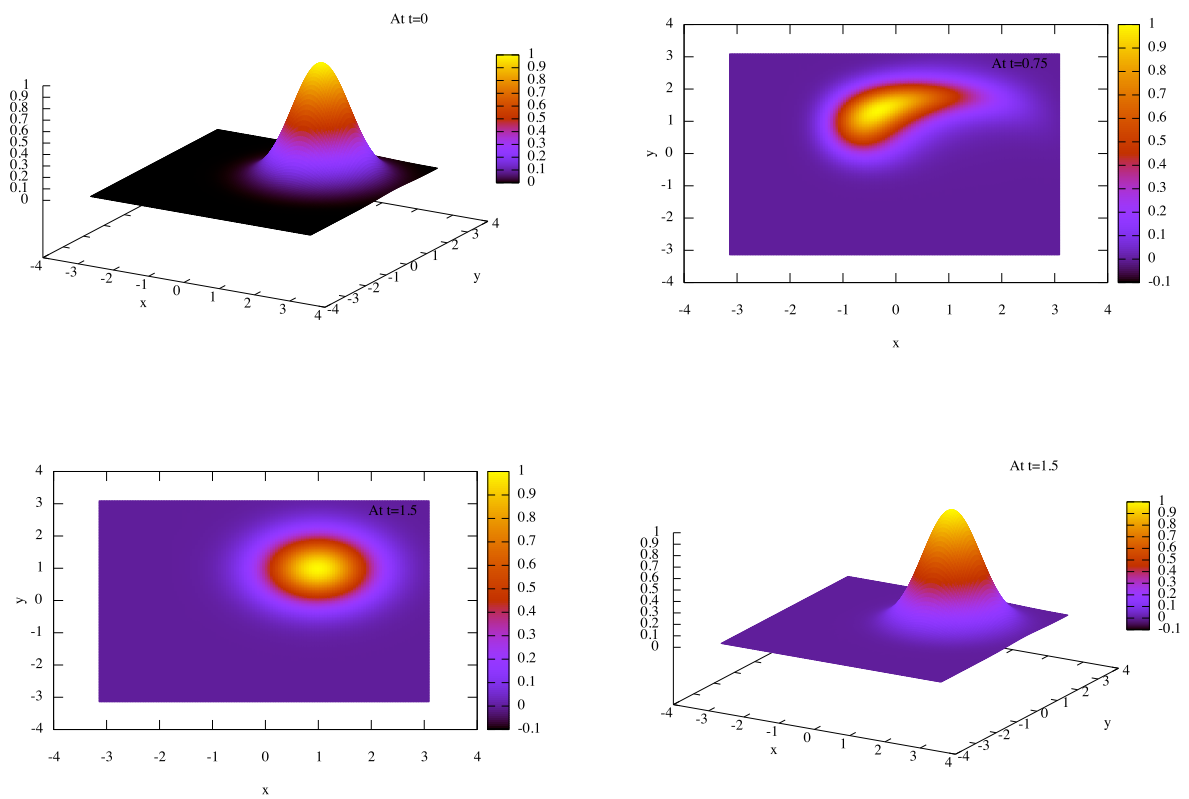


FIGURE 2.15: Du haut en bas et de gauche à droite : condition initiale (profil gaussien  $f(t = 0, x, y) = e^{-((x-1)^2+(y-1)^2)}$  avec le paramètre  $T = 1.5$ ), solution déformée au temps 0.75, lignes de niveau et profil 3D de la solution au temps final 1.5.

Dans la suite, on va considérer un profil initial de type "cos bell" (voir [46])

$$\begin{cases} f(t = 0, x, y) = \cos^6(r) & \text{si } r < \pi/2, \\ f(t = 0, x, y) = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $r = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 0.2)^2}$ , et les paramètres

$$T = 1.5, \quad x_{min} = y_{min} = -\pi, \quad x_{max} = y_{max} = \pi.$$

On s'intéresse maintenant à l'erreur en norme infinie de la reconstruction à  $T = 1.5$ . Pour ce faire, on se fixe un nombre de points du maillage (première colonne des tableaux, on choisit  $N_x = N_y = N$  ici), ainsi qu'une valeur  $CFL$  définie par  $CFL = \Delta t / \Delta x$ . Trois valeurs seront considérées : 1, 2 et 4. On peut ainsi en déduire pour chaque simulation un nombre d'itérations à effectuer pour atteindre  $T = 1.5$ .

Dans les tableaux ci-dessous, on présente trois valeurs pour ces différents paramètres : l'erreur en norme infinie, l'ordre en espace et l'ordre en temps dans cet ordre (voir [46]).

$N / CFL$	1	2	4
48	1.24e-2/-(-0.5)	8.63e-3/-1.8	9.16e-2
96	1.76e-3/2.8-(-0.15)	1.56e-3/2.45-2.6	9.27e-3/3.3-
192	2.47e-4/2.8-(-0.15)	2.65e-4/2.6-4	1.6e-3/2.5-
384	3.21e-5/2.9-0.58	4.7e-5/2.5-2.6	2.98e-4/2.4-

TABLEAU 2.2: LAG 3

$N / CFL$	1	2	4
48	3.86e-3/-1.5	1.09e-2/-3.4	9.13e-2
96	6.2e-4/2.6-1.8	2.12e-3/2.4-2.2	9.71e-3/3.2-
192	8.27e-5/2.9-1.9	3.03e-4/2.8-2.5	1.67e-3/2.5-
384	1.07e-5/2.9-2.3	5.2e-5/2.5-2.5	3.01e-4/2.5-

TABLEAU 2.3: LAGH 5

$N / CFL$	1	2	4
48	2.94e-3/-2	1.21e-2/-2.9	9.13e-2
96	5.83e-4/2.3-1.9	2.22e-3/2.5-2.1	9.83e-3/3.2-
192	8.31e-5/2.8-1.85	3.04e-4/2.9-2.5	1.69e-3/2.5-
384	1.10e-5/2.9-2.2	5.12e-5/2.5-2.5	3.01e-4/2.5-

TABLEAU 2.4: LAGH 17

$N / CFL$	1	2	4
48	3.73e-3/-1.6	1.12e-2/-3	9.23e-2
96	6.15e-4/2.6-1.8	2.11e-3/2.4-2.2	9.75e-3/3.2-
192	8.26e-5/2.8-1.9	3.03e-4/2.8-2.5	1.68e-3/2.5-
384	1.07e-5/2.9-2.3	5.2e-5/2.3-2.5	3.01e-4/2.5-

TABLEAU 2.5: Lauritzen

$N / CFL$	1	2	4
48	3.69e-3/-1.6	1.13e-2/-3	9.23e-2
96	6.14e-4/2.6-1.8	2.12e-3/2.4-2.2	9.77e-3/3.3-
192	8.28e-5/2.9-1.8	3.02e-4/2.8-2.5	1.68e-3/2.5-
384	1.07e-5/2.9-2.3	5.18e-5/2.5-2.5	3.01e-4/2.5-

TABLEAU 2.6: PPM 1

$N / CFL$	1	2	4
48	3.11e-3/-1.9	1.18e-2/-2.9	9.16e-2
96	5.86e-4/2.4-1.88	2.17e-3/2.4-2.2	9.81e-3/3.2-
192	8.26e-5/2.8-1.8	3e-4/2.8-2.5	1.69e-3/2.5-
384	1.09e-5/2.9-2.2	5.13e-5/2.5-2.6	3.01e-4/2.5-

TABLEAU 2.7: PPM 2

L'étude de ces deux cas-tests (rotation et Swirling Deformation Flow) permet de mettre en évidence que l'on obtient essentiellement de l'ordre 3 en espace et de l'ordre 2 en temps, avec cependant les approximations d'ordre 2 suivantes (voir le paragraphe 2.2.2) :

- Pour la recherche des caractéristiques, le champ est interpolé linéairement par morceaux dans l'étape du point fixe (ce n'est pas valable pour la rotation pour laquelle le champ est déjà linéaire).
- Les sommets sont advectés comme moyenne des centres.
- Il y a une ambiguïté liée au fait que l'on considère la valeur moyenne des cellules comme valeur ponctuelle.

## 2.7.4 Vlasov-Poisson

On s'intéresse maintenant au modèle Vlasov-Poisson (1.1.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} + y \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial E(t, x)}{\partial x} = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, y) dy - 1, \end{array} \right.$$

où  $x \in [0, L]$  et  $y \in \mathbb{R}$ . La condition initiale est choisie comme étant une perturbation d'un équilibre homogène  $f_0(y)$

$$f(t = 0, x, y) = f_0(y)(1 + \alpha \cos(kx)), \quad (2.7.34)$$

$k$  étant le nombre d'onde.

L'équilibre  $f_0(y)$  peut être une maxwellienne (cas-tests Landau)

$$f_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad (2.7.35)$$

pour laquelle  $L = 2\pi/k$ ,  $k = 0.5$  et où la perturbation est choisie égale à  $\alpha = 10^{-3}$  (Landau linéaire) ou  $\alpha = 0.5$  (Landau non linéaire).

On peut également choisir pour  $f_0(y)$  une bi-maxwellienne (cas-test "Bump On Tail" (BOT))

$$f_0(y) = \frac{9}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + \frac{2}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{|y-u|^2}{2y_t^2}\right), \quad (2.7.36)$$

avec  $u = 4.5$ ,  $y_t = 0.5$ , et  $L = 20\pi$ ,  $k = 0.3$  et  $\alpha = 0.03$  (voir [23]).

Enfin, on considère le cas-test de l'instabilité double faisceaux ou "Two Stream Instability" (TSI) pour lequel l'équilibre est

$$f_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) y^2, \quad (2.7.37)$$

avec  $L = 2\pi/k$ ,  $k = 0.5$  et une perturbation égale à  $\alpha = 0.01$ .

Pour ces cas-tests, on s'intéresse à la conservation au cours du temps de quantités telles que les normes  $L^p$   $\|f(t)\|_{L^p}$ ,  $p \geq 0$  mais aussi à l'énergie totale  $\mathcal{E}(t)$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_k(t) + \mathcal{E}_e(t),$$

où  $\mathcal{E}_k(t)$  représente l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_k(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^L |y|^2 f(t, x, y) dx dy$  et  $\mathcal{E}_e(t)$  représente l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e(t) = \int_0^L E^2(t, x) dx$ . Au niveau numérique, ces quantités ne sont pas exactement préservées, mais leur comportement permet de faire une distinction entre les différentes méthodes.

Les paramètres numériques sont choisis comme suit : le domaine en  $y$  est tronqué à  $[-y_{\max}, y_{\max}]$  avec  $y_{\max} = 6$  et le pas de temps est choisi égal à  $\Delta t = 0.1$  pour tous les cas-tests. Le domaine des phases est maillé par  $N_x = N_y = 64$  points pour le cas-test Landau linéaire, et par  $N_x = N_y = 128$  points dans les autres cas.

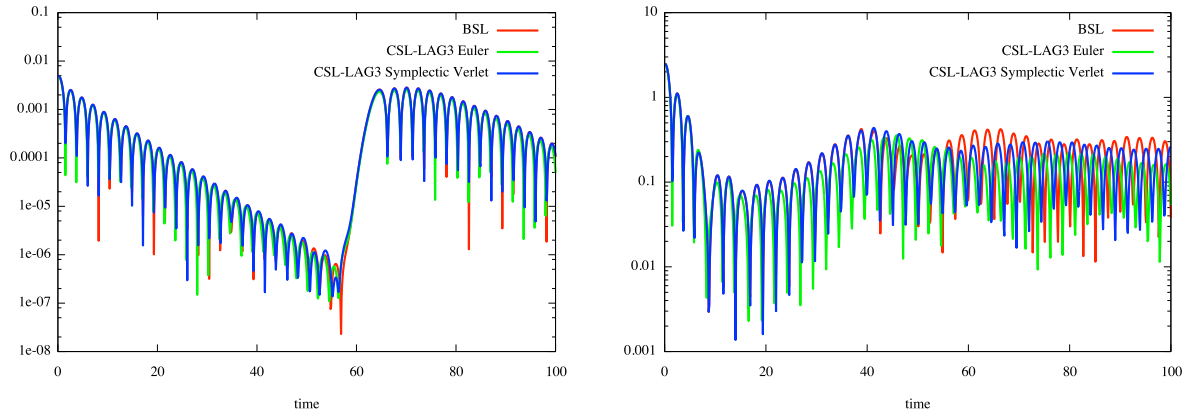


FIGURE 2.16: Evolutions temporelles de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e(t)$  pour les cas-tests Landau linéaire (à gauche) et non linéaire (à droite) obtenues pour une reconstruction de type BSL (en rouge), et des reconstructions de type CSL-LAG 3 utilisant Euler explicite (en vert) et Verlet symplectique avec deux itérations de point fixe pour le calcul des caractéristiques (en bleu).



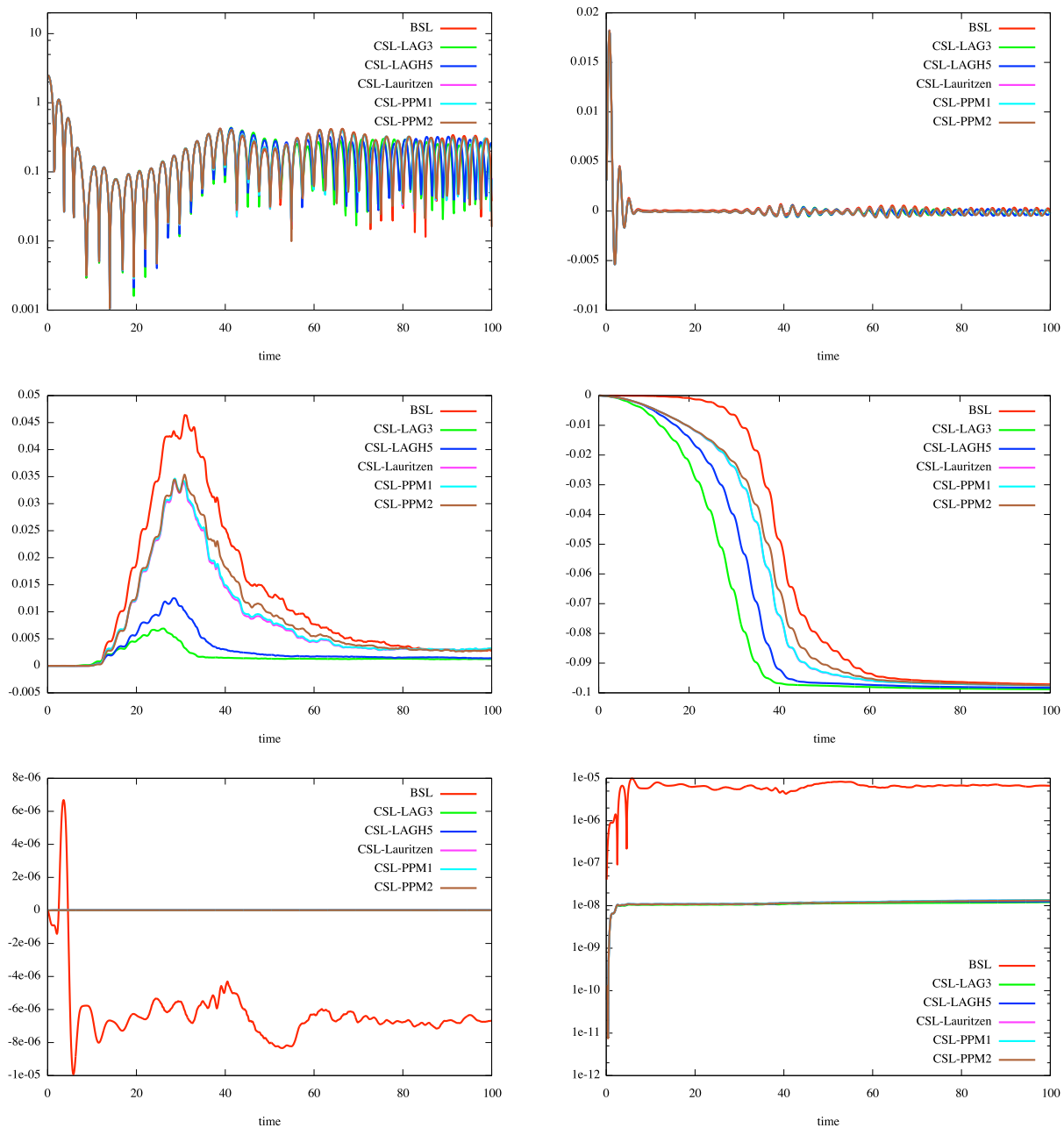


FIGURE 2.17: Évolutions temporelles (de haut en bas et de gauche à droite) de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e(t)$ , de l'énergie totale  $\mathcal{E}(t)$ , des normes  $L^1$  et  $L^2$  et de la masse totale (avec échelles standard et logarithmique pour sa valeur absolue) obtenues pour des reconstructions de type BSL (en rouge), CSL-LAG 3 (en vert), CSL-LAGH 5 (en bleu foncé), CSL-Lauritzen (en violet), CSL-PPM 1 (en bleu clair) et CSL-PPM2 (en marron) pour le cas-test Landau non linéaire.

On montre également l'évolution temporelle de l'énergie électrique pour différentes reconstructions, pour le cas-test Landau linéaire avec 256 points dans chaque direction (Figure

2.18). On choisit alors un pas de temps  $\Delta t = 0.01$ .

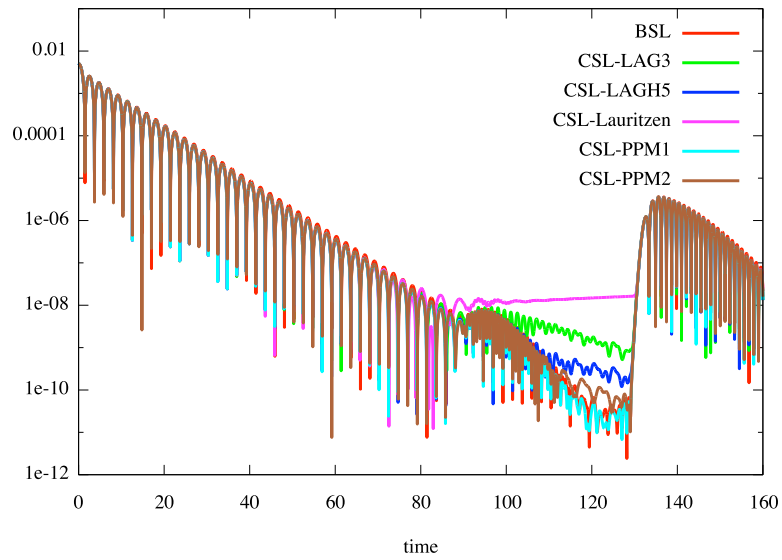


FIGURE 2.18: Evolution temporelle de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e(t)$  pour le cas-test Landau linéaire obtenue pour des reconstructions de type BSL (en rouge), CSL-LAG 3 (en vert), CSL-LAGH 5 (en bleu), CSL-Lauritzen (en violet), CSL-PPM 1 (en bleu clair) et CSL-PPM2 (en marron) avec 256 points dans chaque direction et  $\Delta t = 0.01$ .

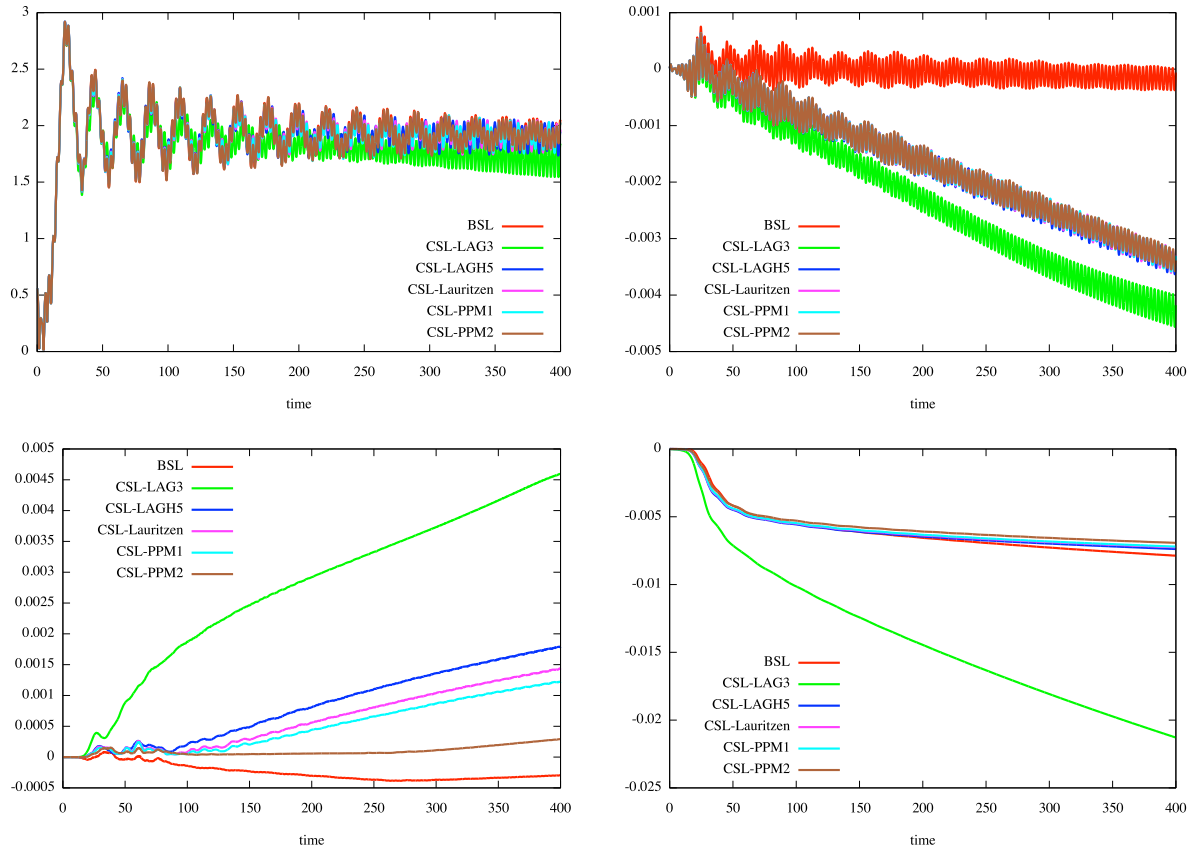


FIGURE 2.19: Evolutions temporelles (de haut en bas et de gauche à droite) de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e(t)$ , de l'énergie totale  $\mathcal{E}(t)$  et des normes  $L^1$  et  $L^2$  obtenues pour des reconstructions de type BSL (en rouge), CSL-LAG 3 (en vert), CSL-LAGH 5 (en bleu foncé), CSL-Lauritzen (en violet), CSL-PPM 1 (en bleu clair) et CSL-PPM2 (en marron) pour le cas-test BOT. Le nombre de points du maillage en  $x$  et  $y$  est de 128 pour tous les graphiques.

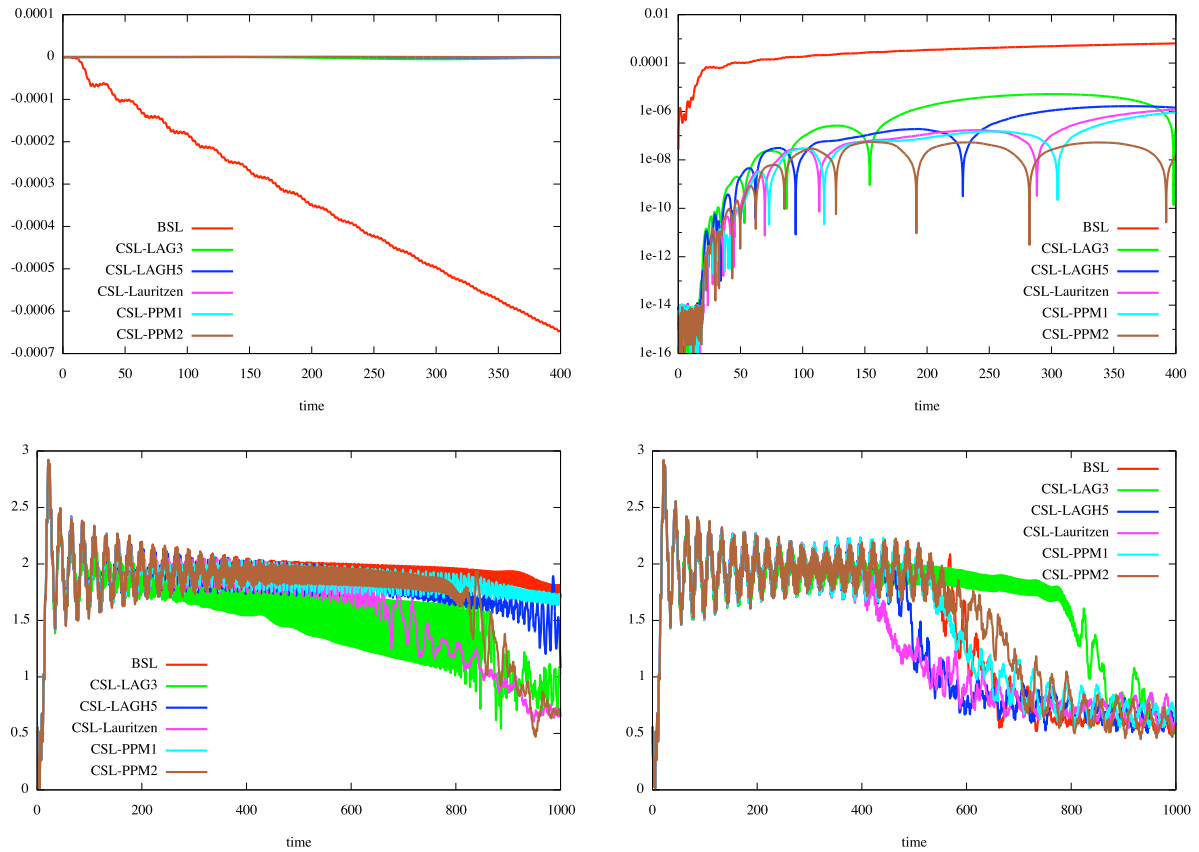


FIGURE 2.20: Evolutions temporelles (de haut en bas et de gauche à droite) de la masse totale avec échelles standard, de la masse totale avec échelle logarithmique de la valeur absolue) et de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e(t)$  en temps long obtenues pour des reconstructions de type BSL (en rouge), CSL-LAG 3 (en vert), CSL-LAGH 5 (en bleu foncé), CSL-Lauritzen (en violet), CSL-PPM 1 (en bleu clair) et CSL-PPM2 (en marron) pour le cas-test BOT. Le nombre de points du maillage en  $x$  et  $y$  est de 128 pour tous les graphiques, sauf le dernier : 256 points en  $x$  et en  $y$ .

Sur les Figures 2.21 et 2.22, on représente la solution au temps  $t = 53$  pour différentes reconstructions dans le cas TSI.

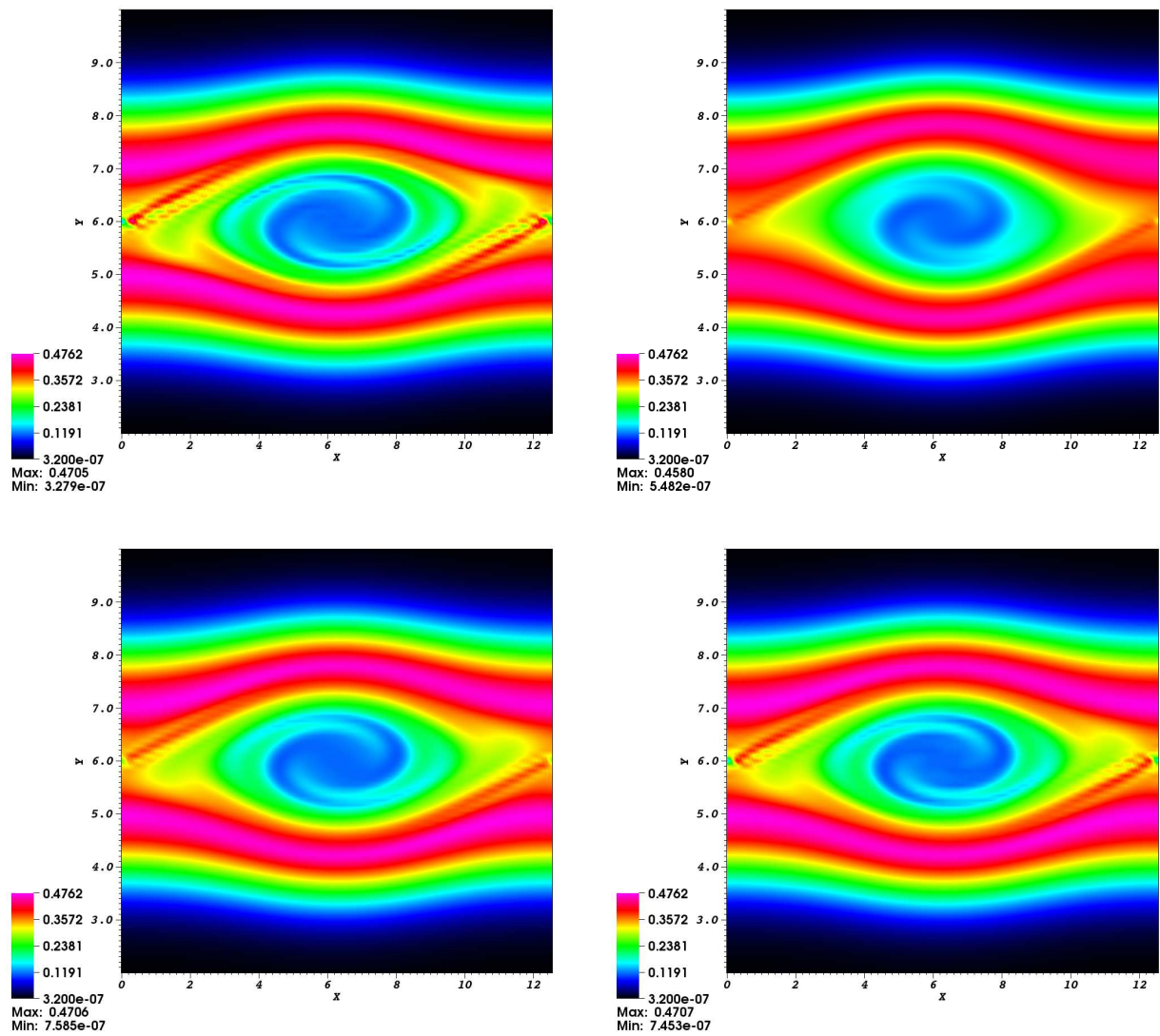


FIGURE 2.21: Solution en fonction de  $x$  et  $y$  au temps  $t = 53$  obtenues (de haut en bas et de gauche à droite) pour des reconstructions BSL, CSL-LAG 3, CSL-LAGH 5 et CSL-Lauritzen. Le maillage utilisé comporte  $128 \times 128$  points.

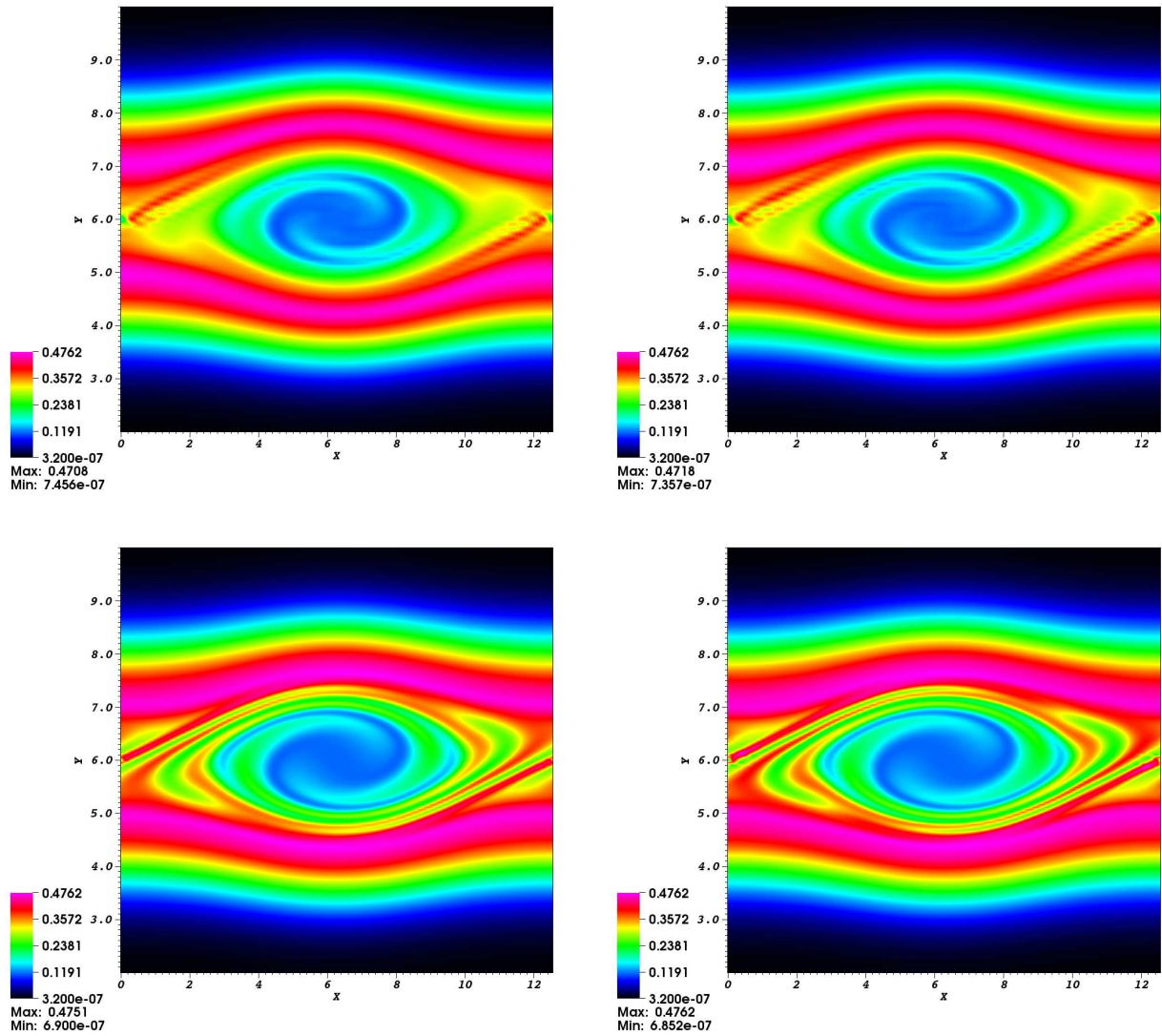


FIGURE 2.22: Solution en fonction de  $x$  et  $y$  au temps  $t = 53$  obtenues (de haut en bas et de gauche à droite) pour des reconstructions CSL-PPM 1 ( $128 \times 128$  points) et CSL-PPM 2 ( $128 \times 128$  points), CSL-LAGH 5 ( $256 \times 256$  points) et CSL-PPM 2 ( $256 \times 256$  points) pour le cas-test TSI.

On observe d'importantes similitudes entre toutes les méthodes. Le comportement de l'énergie électrique est classique : dans une première phase, l'énergie électrique décroît globalement avec des oscillations régulières, ensuite on note une sorte de rebond qui peut être expliqué numériquement, suivi par une nouvelle décroissance avec oscillations, etc..

Plus précisément, on peut faire quelques observations importantes :

- On peut voir sur la Figure 2.16 l'évolution de l'énergie électrique pour les méthodes BSL (en rouge) et CSL (avec des reconstructions Euler ou Verlet symplectique pour les caractéristiques en vert et bleu respectivement), dans le cas de Landau linéaire (à gauche) et non linéaire (à droite). On observe que les courbes sont très proches pour toutes les méthodes dans le cas linéaire. Cependant, pour le cas non linéaire, il apparaît clairement que le choix de la méthode utilisée pour le calcul des caractéristiques est crucial pour la qualité des résultats des méthodes CSL, Verlet symplectique présentant un comportement nettement meilleur. C'est pourquoi on retiendra ce choix dans les simulations suivantes.
- On peut voir sur les Figures 2.17, 2.19 et 2.20 l'évolution de l'énergie électrique, de la masse totale, des normes  $L^1$  et  $L^2$  pour les reconstructions BSL (rouge), CSL-LAG 3 (vert), CSL-LAGH 5 (bleu foncé), CSL-Lauritzen (violet), et CSL-PPM 1 (bleu clair) pour les cas-tests de Landau non linéaires et de BOT respectivement. On peut tout d'abord remarquer qu'un des principaux avantages obtenu par les méthodes de type CSL est la très bonne conservation de la masse totale, contrairement aux méthodes BSL. En outre, la qualité de la reconstruction est intimement liée au choix de la reconstruction utilisée dans le cas des méthodes CSL. CSL-LAG 3 semble donner des résultats relativement peu satisfaisants pour ces cas-tests. CSL-LAGH 5 semble déjà meilleur, mais les résultats les plus convaincants sont obtenus avec des reconstructions type PPM ou Lauritzen (l'importante ressemblance entre ces deux types de reconstructions apparaît ici clairement).
- Pour le cas-test BOT, on note le comportement diffusif de la méthode LAG 3 qui a été établi dans [23] ; quand de petites structures apparaissent, elles sont éliminées plus rapidement que lorsque l'on utilise une reconstruction de degré plus élevé (CSL-LAGH 5). C'est pourquoi le comportement en temps long de l'énergie électrique est meilleur.
- Lorsque l'on considère l'évolution temporelle de l'énergie électrique pour les différentes méthodes pour le cas-test BOT, on note que cette quantité est très bien conservée pour

- toutes les reconstructions de type CSL, excepté pour CSL-LAG 3. Il faut remarquer qu'une telle conservation est relativement difficile à obtenir et que l'usage de reconstructions d'ordre élevé permet d'obtenir un bon comportement de l'énergie totale.
- Le dernier graphique de la Figure 2.20 montre que le comportement en temps long de toutes les méthodes type CSL considérées est satisfaisant (ce qui est relativement délicat à obtenir en général), puisque l'énergie électrique ne chute pas aux temps longs, mis à part CSL-Lauritzen et CSL-LAG 3 (cette dernière méthode s'est déjà révélée comme étant peu performante). Il est intéressant de noter cette distinction de comportement entre CSL-PPM 1 et CSL-Lauritzen, car les graphiques précédents sur les Figures 2.19 et 2.20 auraient pu laisser penser que ces reconstructions étaient quasiment identiques et interchangeables.
  - Sur les Figures 2.21 et 2.22, on constate que les résultats obtenus par les différentes méthodes sont proches. Cependant, il est à noter que l'emploi d'une reconstruction de type LAG 3 donne une reconstruction de qualité inférieure à la moyenne : en effet, on constate qu'à  $t = 53$ , la plupart des petites structures ont disparu de la reconstruction et l'aspect général de la solution semble lissé. A l'inverse, les résultats obtenus dans les cas CSL-LAGH 5 et CSL-PPM 2 avec 256 points sont très bons et permettent de disposer de nombreuses très petites structures de la fonction de distribution.

### 2.7.5 Plasma Sheath

Dans les cas-tests présentés précédemment, les conditions étaient périodiques en  $x$  et en  $y$ . Cependant, notre méthode peut également s'appliquer à des conditions non périodiques, comme dans le cas du "Plasma Sheath" pour lequel il y a non périodicité suivant la direction  $x$ . On reprend ici les conditions données dans [14]. On se place toujours sur un domaine  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$  dans lequel  $f(t, x, y)$  représente la densité de particules. On suppose en outre qu'aucune particule ne peut entrer dans le domaine, ce qui se traduit par les



conditions de flux

$$f(t, x = x_{min}, y) = f(t, x = x_{max}, y) = 0. \quad (2.7.38)$$

On considère ici comme condition initiale une maxwellienne adimensionnée

$$f(t = 0, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\theta_0}\right), \quad (2.7.39)$$

avec  $\theta_0 = 5.526350206 \cdot 10^{-4}$ . On choisit comme domaine  $[0, 1] \times [-0.2, 0.2]$  que l'on maille par 1024 points dans chaque direction, et on réalise la simulation jusqu'au temps  $t = 140$  avec un pas de temps  $\Delta t = 0.05$ .

Figure 2.23, on observe la solution obtenue à cet instant ainsi qu'une "tranche" en  $x = 0.5$ , c'est-à-dire au milieu du domaine. On montre également le champ  $E$  obtenu à la fin de la simulation.

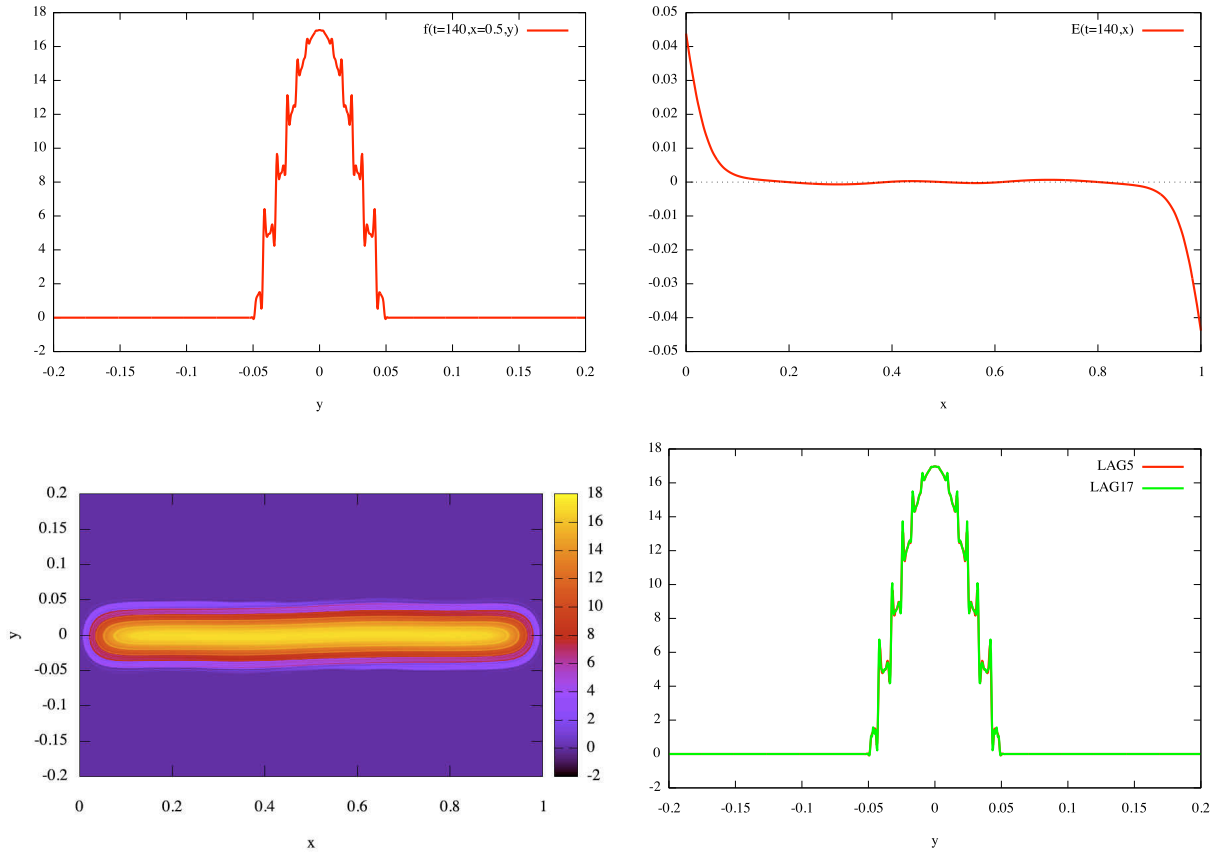


FIGURE 2.23: De haut en bas et de gauche à droite : coupe en  $x = 0.5$  de la solution (LAGH 5), représentation du champ  $E(x)$  (LAGH 5), représentation 3d de la solution (LAGH 5) et comparaison LAGH 5/LAGH 17 de la coupe en  $x = 0.5$  de la solution. Pour tous ces graphiques,  $t = 140$  et  $N_x = N_y = 1024$ .

Les résultats obtenus sont similaires à ceux mentionnés dans [14, 49], ce qui prouve la bonne adaptation de la méthode à des conditions aux bords non périodiques.

### 2.7.6 Centre-Guide

On s'intéresse désormais à un autre type d'équation de transport pour laquelle le champ d'advection dépend de toutes les variables. Le modèle Centre-Guide est le plus classique parmi ceux concentrant toutes les difficultés, car les deux composantes du champ d'advection dépendent ici de la solution.

Ce modèle a pour équation

$$\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial t} + E(t, x, y)^\perp \cdot \nabla_{x,y} f(t, x, y) = 0, \quad (2.7.40)$$

où des conditions aux frontières périodiques sont considérées pour les deux variables  $x, y$ .

En d'autres termes, ce modèle se réécrit

$$\partial_t f + E_y \partial_x f - E_x \partial_y f = 0, \quad (2.7.41)$$

avec un champ  $E = (E_x(t, x, y), E_y(t, x, y))$  dépendant des deux variables d'espace  $x$  et  $y$  suivant l'équation dite de Poisson

$$-\Delta \Phi = f, \quad E = -\nabla \Phi, \quad (2.7.42)$$

$\Phi = \Phi(t, x, y)$  étant le potentiel électrique.

La condition initiale est choisie suivant le cas-test de Kelvin-Helmoltz (voir [50])

$$f(t = 0, x, y) = \sin(y) + \epsilon \cos(kx),$$

$$x \in [0, L_x], \quad y \in [0, 2\pi],$$

avec les paramètres :

$$N_x = N_y = 128, \Delta t = 0.02, k = \frac{2\pi}{L_x} = 0.5, \epsilon = 0.015.$$

Lorsque l'on utilise une procédure d'Euler explicite pour obtenir le pied des caractéristiques, on note pour ce cas-test l'apparition d'instabilités numériques après un certain temps de déroulement de l'algorithme. Celles-ci disparaissent en choisissant un schéma symplectique. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que lorsqu'un schéma explicite est choisi, la méthode conserve la masse au cours du temps, mais pas nécessairement le volume. L'emploi

d'un schéma symplectique permet d'améliorer la situation.

Sur les Figures 2.24, 2.25 et 2.26, on observe des vues tridimensionnelles de la fonction de distribution à différents instants  $t = 24$ ,  $t = 30$  et  $t = 60$ , pour diverses reconstructions.

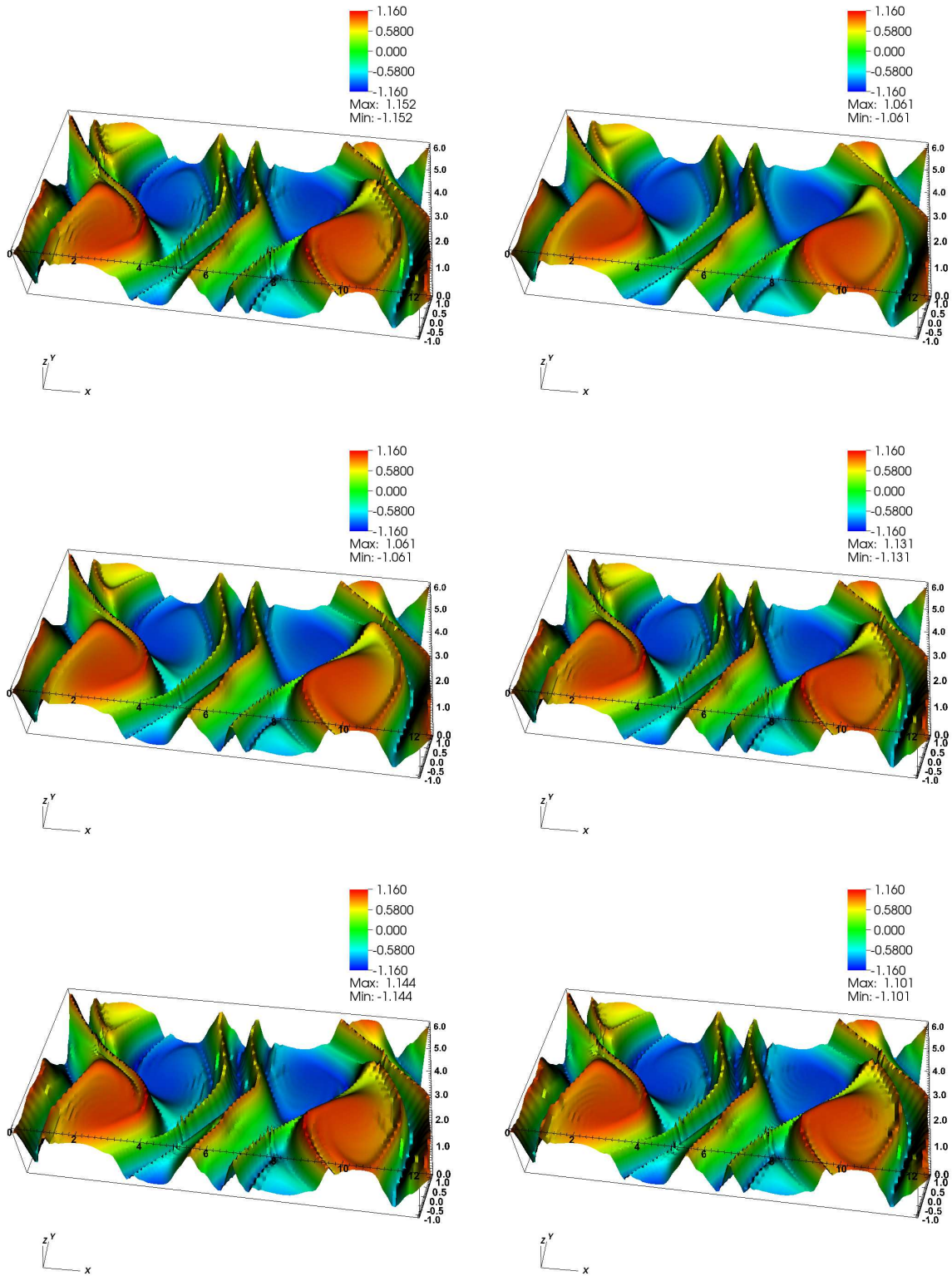


FIGURE 2.24: Fonctions de distribution pour le cas-test d'instabilité de Kelvin-Helmholtz au temps  $t = 24$ . Respectivement du haut en bas et de gauche à droite : BSL, CSL-LAG 3, CSL-LAGH 5, CSL-Lauritzen, CSL-PPM 1 et CSL-PPM 2.

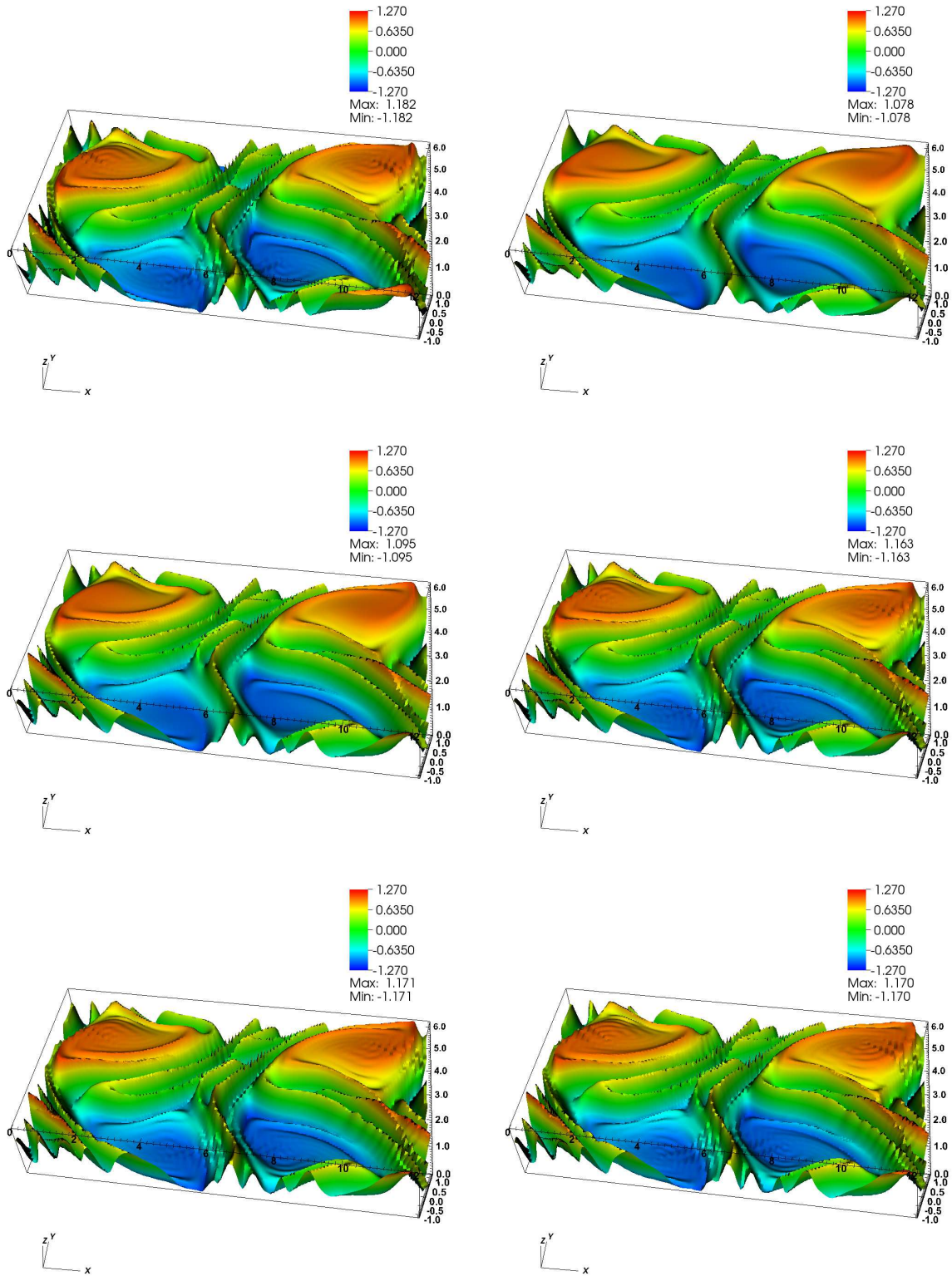


FIGURE 2.25: Fonctions de distribution pour le cas-test d'instabilité de Kelvin-Helmholtz au temps  $t = 30$ . Respectivement du haut en bas et de gauche à droite : BSL, CSL-LAG 3, CSL-LAGH 5, CSL-Lauritzen, CSL-PPM 1 et CSL-PPM 2.

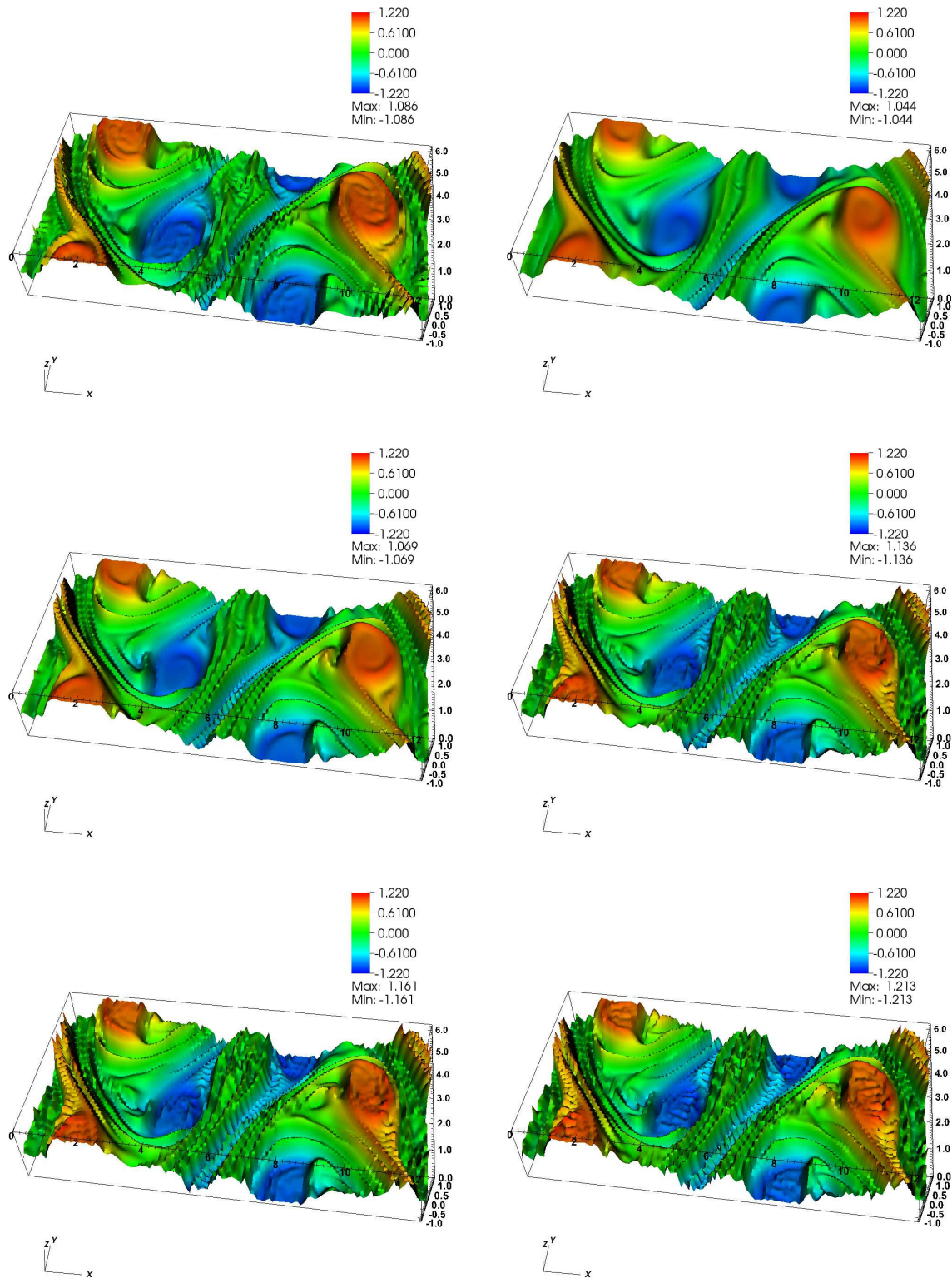


FIGURE 2.26: Fonctions de distribution pour le cas-test d'instabilité de Kelvin-Helmholtz au temps  $t = 60$ . Respectivement du haut en bas et de gauche à droite : BSL, CSL-LAG 3, CSL-LAGH 5, CSL-Lauritzen, CSL-PPM 1 et CSL-PPM 2.

Les résultats présentés sur les Figures 2.21, 2.22, 2.24, 2.25 et 2.26 montrent que les méthodes type CSL ont tendance à "lisser" les solutions plus que la méthode BSL. L'utilisation d'une reconstruction d'ordre élevé empêche ainsi de perdre trop d'informations provenant des petites structures dans le cas Lagrange, ce qui permet d'obtenir des résultats très satisfaisants pour le cas-test TSI. Néanmoins, les reconstructions de type Lauritzen et PPM semblent donner d'au moins aussi bons résultats que CSL-LAGH 5 pour le cas-test du Centre-Guide.

On observe enfin sur la Figure 2.27 l'évolution de diverses quantités qui sont supposées être conservées autant que possible : les normes  $L^1$  et  $L^2$  et la masse totale. Dans la première partie de la simulation, les normes  $L^1$  et  $L^2$  restent constantes au cours du temps, puis subissent une phase de décroissance qui correspond à l'apparition de fines structures qui ne peuvent toutes être préservées dans le cas d'un maillage trop grossier. La méthode BSL se montre légèrement plus performantes que les CSL pour ce critère. Par contre, la masse est mieux conservée dans le cas des méthodes CSL.



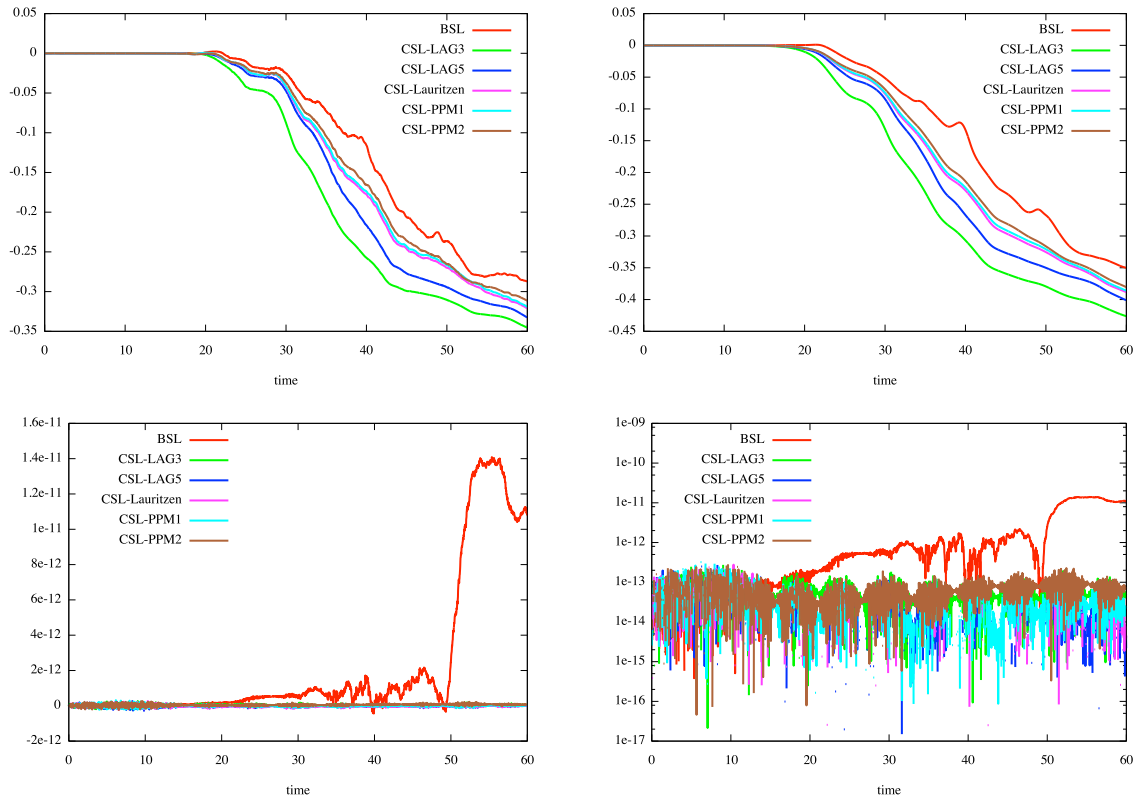


FIGURE 2.27: Evolutions temporelles, respectivement de haut en bas et de gauche à droite, des normes  $L^1$  et  $L^2$  et de la masse totale en échelles standard puis logarithmique, pour le cas-test d'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Il apparaît des résultats numériques présentés dans ce Chapitre que la méthode CSL a un comportement très satisfaisant dans le cas cartésien bidimensionnel. Ceci nous incite à étudier des extensions de la méthode à d'autres géométries afin de tester sa robustesse. Ce travail est effectué dans le Chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Extensions de la méthode de remapping conservatif

Ce Chapitre vise à étendre la méthode développée au Chapitre 2 à des situations plus complexes. Dans ce cadre, le code a été intégré dans la librairie SeLaLib (simulation du modèle gyrocinétique par méthodes semi-lagrangiennes) développée par l'équipe CALVI de l'INRIA ([HTTP://SELALIB.GFORGE.INRIA.FR/](http://selalib.gforge.inria.fr/)). Dans un premier temps, on abordera le cas d'un problème en géométrie polaire, puis on traitera le passage au 4D.

### 3.1 Cas polaire bidimensionnel

#### 3.1.1 Passage du cas cartésien au cas polaire

Dans cette Section, on cherche à résoudre l'équation du Centre-Guide en coordonnées polaires.

On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, le problème s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x, y) + E_y(t, x, y) \partial_x f(t, x, y) - E_x(t, x, y) \partial_y f(t, x, y) = 0, \\ -\Delta \Phi(t, x, y) = f(t, x, y), \quad E(t, x, y) = -\nabla \Phi(t, x, y). \end{cases}$$

On pose  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$  dans le système précédent. Après simplifications, on obtient l'équation du Centre-Guide en coordonnées polaires pour l'inconnue  $\tilde{f}(t, r, \theta) = f(t, x, y)$  (on omettra les tildes de  $f$  et de  $\Phi$  dans les notations qui suivent)

$$\partial_t f - \frac{\partial_\theta \Phi}{r} \partial_r f + \frac{\partial_r \Phi}{r} \partial_\theta f = 0, \quad (3.1.1)$$

couplée avec l'équation de Poisson pour le potentiel  $\Phi = \Phi(t, r, \theta)$

$$-\partial_r^2 \Phi - \frac{1}{r} \partial_r \Phi - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Phi = f. \quad (3.1.2)$$

On obtient donc les équations des caractéristiques suivantes :

$$r'(t) = -\frac{\partial_\theta \Phi(t, r(t), \theta(t))}{r(t)}, \quad \theta'(t) = \frac{\partial_r \Phi(t, r(t), \theta(t))}{r(t)} \quad (3.1.3)$$

On a toujours la propriété de constance le long des courbes caractéristiques  $(r(t), \theta(t))$  :

$$\frac{d}{dt} f(t, r(t), \theta(t)) = \partial_t f + r'(t) \partial_r f + \theta'(t) \partial_\theta f = 0,$$

ainsi que son analogue pour les volumes, transcription en coordonnées polaires de (2.1.2). Ces propriétés nous permettent d'étendre la méthode développée dans le Chapitre 2 à cette géométrie. Pour ce faire, on introduit des notations similaires à celles du Chapitre précédent.

On note ainsi (voir Figure 3.1)

- $[r_{min}, r_{max}] \times [\theta_{min}, \theta_{max}] = [r_{min}, r_{max}] \times [0, 2\pi]$  le domaine considéré  
(avec  $0 < r_{min} < r_{max}$ ),
- $N_r$  et  $N_\theta$  le nombre de points du maillage initial dans chaque direction,
- $\Delta r = (r_{max} - r_{min})/N_r$  et  $\Delta\theta = 2\pi/N_\theta$  les pas du maillage dans chaque direction,
- $r_i = r_{min} + i\Delta r$ ,  $i \in [0, N_r - 1]$  et  $\theta_j = j\Delta\theta$ ,  $j \in [0, N_\theta - 1]$  les nœuds du maillage,

- $A_{i,j} = [r_i, r_{i+1}] \times [\theta_j, \theta_{j+1}]$  une cellule du maillage initial.

L'introduction de ces notations nous permet de constater que l'on peut finalement se ramener à la situation cartésienne en considérant la "transformation" de la Figure 3.1. Le calcul des caractéristiques sera alors effectué par les formules (3.1.3), l'étape de reconstruction étant quant à elle similaire au cas cartésien.

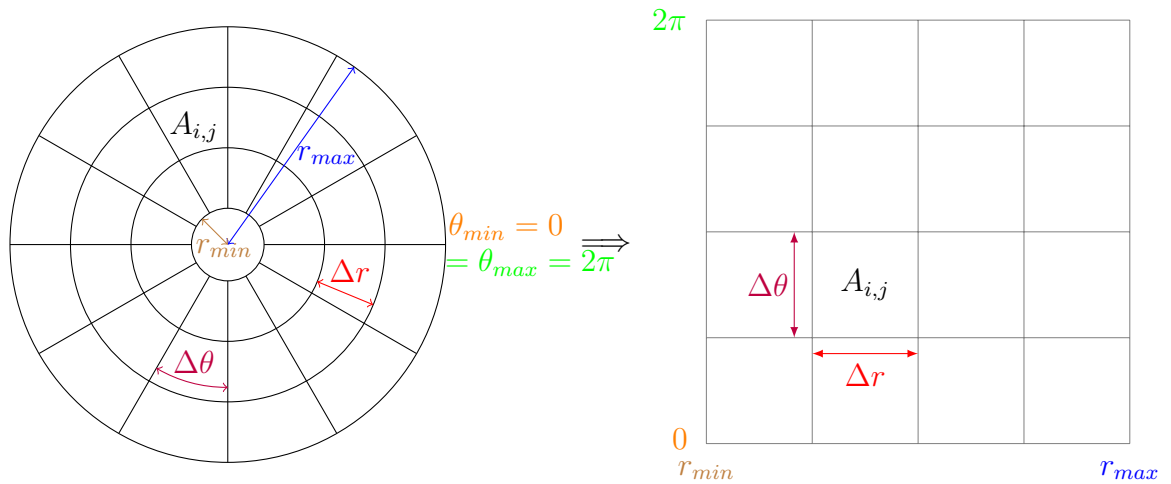


FIGURE 3.1: "Transformation" d'une géométrie polaire en une géométrie cartésienne.

**Remarque 3.1.1.** *Il est à noter que l'on se trouve dans une situation où le champ est périodique suivant  $\theta$ , mais pas suivant  $r$ . Des conditions aux bords différentes devront donc être considérées (voir 2.7.2).*

### 3.1.2 Taux d'instabilité des modes de Fourier

Dans [24], il a été mis en évidence que dans le cas d'une géométrie polaire, les modes de Fourier des quantités  $\int_{r_{min}}^{r_{max}} \Phi(t, r, \theta) dr$  présentent, dans le cas d'une condition initiale d'un équilibre légèrement perturbé, un taux d'instabilité qui peut être déterminé par la résolution d'un problème aux valeurs propres obtenu à partir du problème linéarisé. La démonstration

se trouve dans [38]. On la rappelle ici pour commodité de lecture.

On part du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{\partial_\theta \Phi}{r} \partial_r f + \frac{\partial_r \Phi}{r} \partial_\theta f = 0, \\ -\partial_r^2 \Phi - \frac{\partial_r \Phi}{r} - \frac{\partial_\theta^2 \Phi}{r^2} = \gamma f, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

avec  $\gamma = \pm 1$  (dans la pratique on prendra toujours  $\gamma = 1$ ).

On considère d'abord un état d'équilibre  $(n_0(r), \gamma \Phi_0(r))$  qui ne dépend pas de  $\theta$ , où  $n_0$  et  $\Phi_0$  sont reliés par l'équation de Poisson

$$-\partial_r(r \partial_r \Phi_0(r)) = r n_0(r).$$

En tant qu'équilibre, le couple  $(f, \Phi) = (n_0, \gamma \Phi_0)$  vérifie (3.1.4). On va maintenant perturber cet équilibre et rechercher une solution approchée de (3.1.4) sous la forme

$$\rho(t, r, \theta) \approx n_0(r) + \epsilon n_1(t, r, \theta).$$

On pose également

$$\Phi(t, r, \theta) \approx \gamma \Phi_0(r) + \epsilon \gamma \Phi_1(t, r, \theta).$$

En injectant ces approximations dans (3.1.4), on obtient après calculs

$$\begin{cases} \gamma \partial_t n_1 - \frac{\partial_\theta \Phi_1}{r} \partial_r n_0 + \frac{\partial_r \Phi_0}{r} \partial_\theta n_1 = O(\epsilon), \\ -\partial_r^2 \Phi_1 - \frac{\partial_r \Phi_1}{r} - \frac{\partial_\theta^2 \Phi_1}{r^2} = n_1 + O(\epsilon). \end{cases}$$

On recherche maintenant une solution particulière du problème linéarisé

$$\begin{cases} \gamma \partial_t n_1 - \frac{\partial_\theta \Phi_1}{r} \partial_r n_0 + \frac{\partial_r \Phi_0}{r} \partial_\theta n_1 = 0, \\ -\partial_r^2 \Phi_1 - \frac{\partial_r \Phi_1}{r} - \frac{\partial_\theta^2 \Phi_1}{r^2} = n_1, \end{cases}$$

sous la forme

$$n_1(t, r, \theta) = \hat{n}_{1,\ell}(r) \exp(i\ell\theta) \exp(-i\omega t/\gamma), \quad \Phi_1(t, r, \theta) = \hat{\Phi}_{1,\ell}(r) \exp(i\ell\theta) \exp(-i\omega t/\gamma).$$

Ce type de solution peut être obtenu par une transformation de Laplace en temps et une transformée de Fourier en  $\theta$ . On recherche un équilibre instable, ce qui signifie que l'on veut une solution avec  $Im(\omega)/\gamma > 0$ . On obtient

$$\begin{cases} -i\omega \hat{n}_{1,\ell} - i\ell \frac{\partial_r n_0}{r} \hat{\Phi}_{1,\ell} + i\ell \frac{\partial_r \Phi_0}{r} \hat{n}_{1,\ell} = 0, \\ -\partial_r^2 \hat{\Phi}_{1,\ell} - \frac{\partial_r \hat{\Phi}_{1,\ell}}{r} + \frac{\ell^2}{r^2} \hat{\Phi}_{1,\ell} = \hat{n}_{1,\ell}. \end{cases}$$

On exprime  $\hat{n}_{1,\ell}$  en fonction de  $\hat{\Phi}_{1,\ell}$  afin d'obtenir une équation sur  $\hat{\Phi}_{1,\ell}$

$$\left( -i\omega + i\ell \frac{\partial_r \Phi_0}{r} \right) \left( -\partial_r^2 \hat{\Phi}_{1,\ell} - \frac{\partial_r \hat{\Phi}_{1,\ell}}{r} + \frac{\ell^2}{2} \hat{\Phi}_{1,\ell} \right) = i\ell \frac{\partial_r n_0}{r} \hat{\Phi}_{1,\ell}. \quad (3.1.5)$$

On peut effectuer la résolution numérique du problème en faisant la discrétisation suivante (pour chaque  $\ell$ , on considère  $\Phi_i$ , ce qui permet de se ramener au système linéaire  $A\Phi = cB\Phi$  à résoudre pour chaque  $\ell$ )

$$\hat{\Phi}_{1,\ell}(r_i) = \Phi_i, \quad \partial_r \hat{\Phi}_{1,\ell}(r_i) = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta r}, \quad \partial_r^2 \hat{\Phi}_{1,\ell} = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta r^2}, \quad (3.1.6)$$

où  $\Delta r = (r_{max} - r_{min})/N_r$ .

Pour chaque mode  $\ell$ , le problème se réécrit  $A\Phi = cB\Phi$ , où  $(\Phi)_i = \Phi_i$ . On doit donc trouver

les valeurs propres  $c$  du problème  $B^{-1}A\Phi = c\Phi$ , où  $c = \omega/\ell$ . On recherche une valeur propre  $c$  telle que  $c/\gamma$  a la plus grande partie imaginaire qui doit être strictement positive.

### 3.1.3 Cas-test Diocotron

On considère maintenant la distribution initiale "en anneau" suivante (voir [42, 43])

$$\begin{cases} f(t, r, \theta) = 0 \text{ si } r_{min} \leq r \leq r_1, \\ f(t, r, \theta) = 1 + \epsilon \cos(\ell\theta) \text{ si } r_1 \leq r \leq r_2, \\ f(t, r, \theta) = 0 \text{ si } r_2 \leq r \leq r_{max}, \end{cases} \quad (3.1.7)$$

avec les paramètres suivants :  $r_{min} = 1$ ,  $r_{max} = 10$ ,  $(r_1, r_2) \in [4, 9]^2$  et  $\ell \in [2, 7]$  (*mode* de ce cas-test).

On impose également des conditions aux frontières pour le potentiel :

- Une condition de type Dirichlet en  $r_{max}$ , autrement dit

$$\Phi(t, r_{max}, \theta) = 0.$$

- Une condition de type Neumann inhomogène en  $r_{min}$  pour le mode 0 en  $\theta$ , c'est-à-dire

$$\int_0^{2\pi} \partial_r \Phi(t, r_{min}, \theta) d\theta = Q,$$

où  $Q$  est une constante.

- Une condition de type Dirichlet en  $r_{min}$  pour les autres modes, soit

$$\Phi(t, r_{min}, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(t, r_{min}, \theta') d\theta'.$$

Dans un tel cas, des formules explicites permettent de résoudre (3.1.5) (voir [38]). Les valeurs propres solutions sont fonction du mode  $\ell$  ainsi que des rayons  $r_1$  et  $r_2$ . Quelques unes de

ces valeurs sont répertoriées dans le tableau 3.1 (on prend  $Q = 0$ )

$\ell$	$r_1$	$r_2$	$\omega$
2	4	5	0.0718
3	4	5	0.2267
4	4	5	0.2989
5	7	9	0.0579
7	6	7	0.3308

TABLEAU 3.1: Valeurs de taux d'instabilité en fonction des paramètres du problème.

Ces valeurs fournissent un critère intéressant permettant de tester la qualité des méthodes : on trace l'évolution temporelle du module au carré de différents modes de Fourier, et on compare le taux d'accroissement de la partie linéaire avec les valeurs théoriques (voir la Figure 3.2). On présente ici les résultats obtenus pour les paramètres  $r_1 = 6$ ,  $r_2 = 7$ ,  $\ell = 7$ .

**Remarque 3.1.2.** *On doit ici effectuer une modification à l'algorithme décrit au Chapitre 2 (voir [35]). En effet, on cherche à résoudre la forme conservative de l'équation (3.1.1), qui a dans ce cas comme inconnue  $rf(t, r, \theta)$ ,  $r$  correspondant au jacobien de la transformation permettant de passer de la géométrie cartésienne à la géométrie polaire (voir Figure 3.1).*

*Plus précisément, à chaque itération, on va suivre la procédure suivante*

- *On multiplie l'inconnue  $f(t, r, \theta)$  par le jacobien  $r$ .*
- *On fait l'advection sur  $g(t, r, \theta) = rf(t, r, \theta)$ ,  $g$  satisfaisant*

$$\partial_t g - \partial_r \left( \frac{\partial_\theta \Phi}{r} g \right) + \partial_\theta \left( \frac{\partial_r \Phi}{r} g \right) = 0.$$

- *On divise par le jacobien pour obtenir  $f$ .*



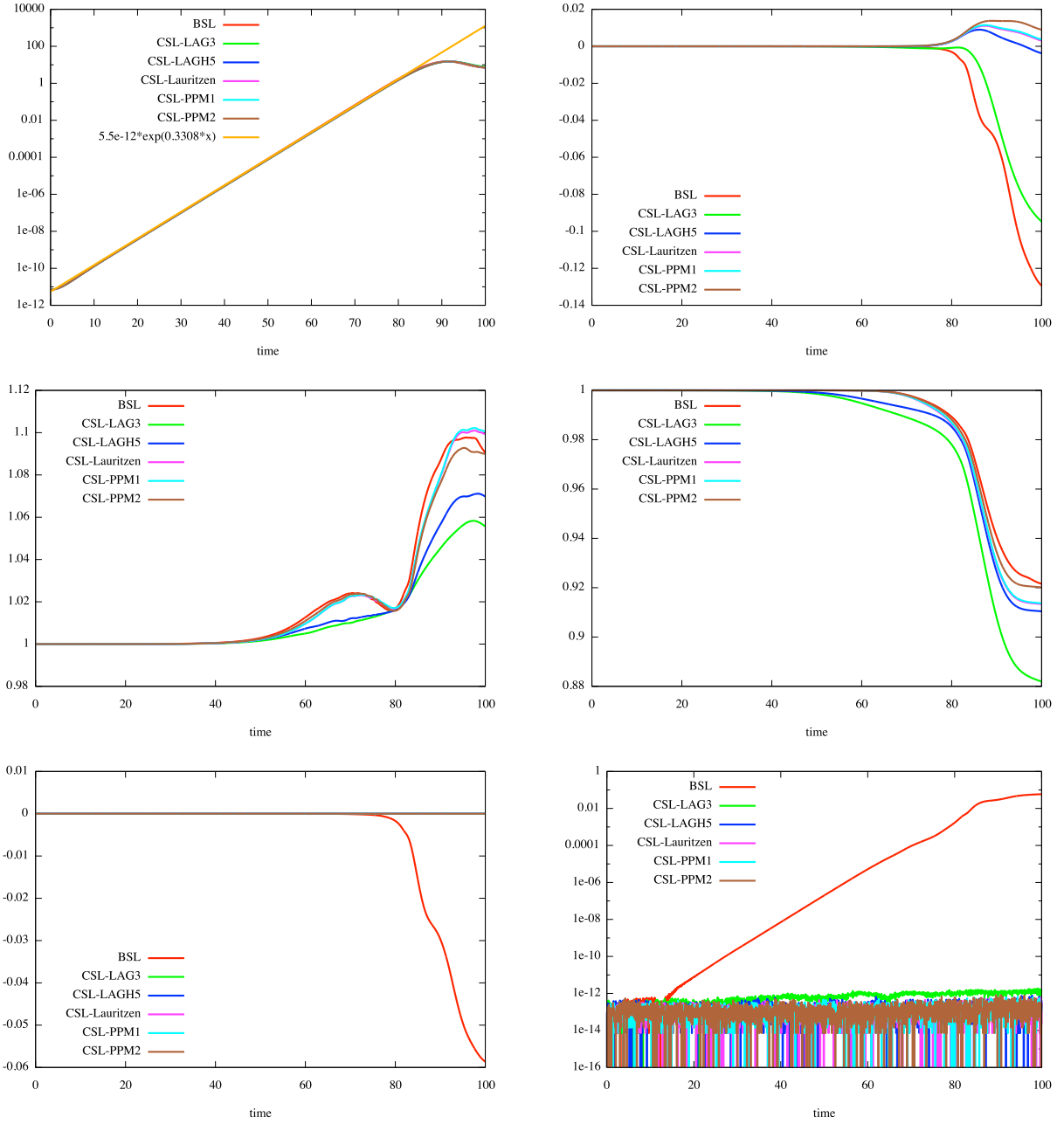


FIGURE 3.2: De haut en bas et de gauche à droite : pour  $\ell = 7$  dans (3.1.7), évolutions temporelles du septième mode de Fourier de  $\int \Phi(t, r, \theta) r dr$ , de l'énergie électrique, des normes  $L^1$  et  $L^2$  et de la masse en échelles standard et logarithmique.

On retrouve bien empiriquement les valeurs fournies par la théorie comme pente de la partie linéaire : 0.3308 pour le septième mode de Fourier, voir Tableau 3.1 (les simulations effectuées avec les autres séries de paramètres  $r_1$ ,  $r_2$  et  $\ell$  du Tableau 3.1 permettent également de

retrouver les valeurs théoriques). On constate en outre que les différentes quantités (énergie, normes  $L^1$  et  $L^2$ ) sont bien conservées durant la partie linéaire, puis varient de façon plus importante ensuite.

Le modèle continu de ce cas-test conserve exactement la masse : on s'attend donc à ce que cette propriété soit encore vérifiée dans le cas des méthodes CSL, ce qui est le cas.

Sur la Figure 3.3, on peut voir également la représentation 3D de la fonction de répartition pour ce cas-test à  $t = 95$  pour différentes reconstructions dans ce cas  $\ell = 7$ .

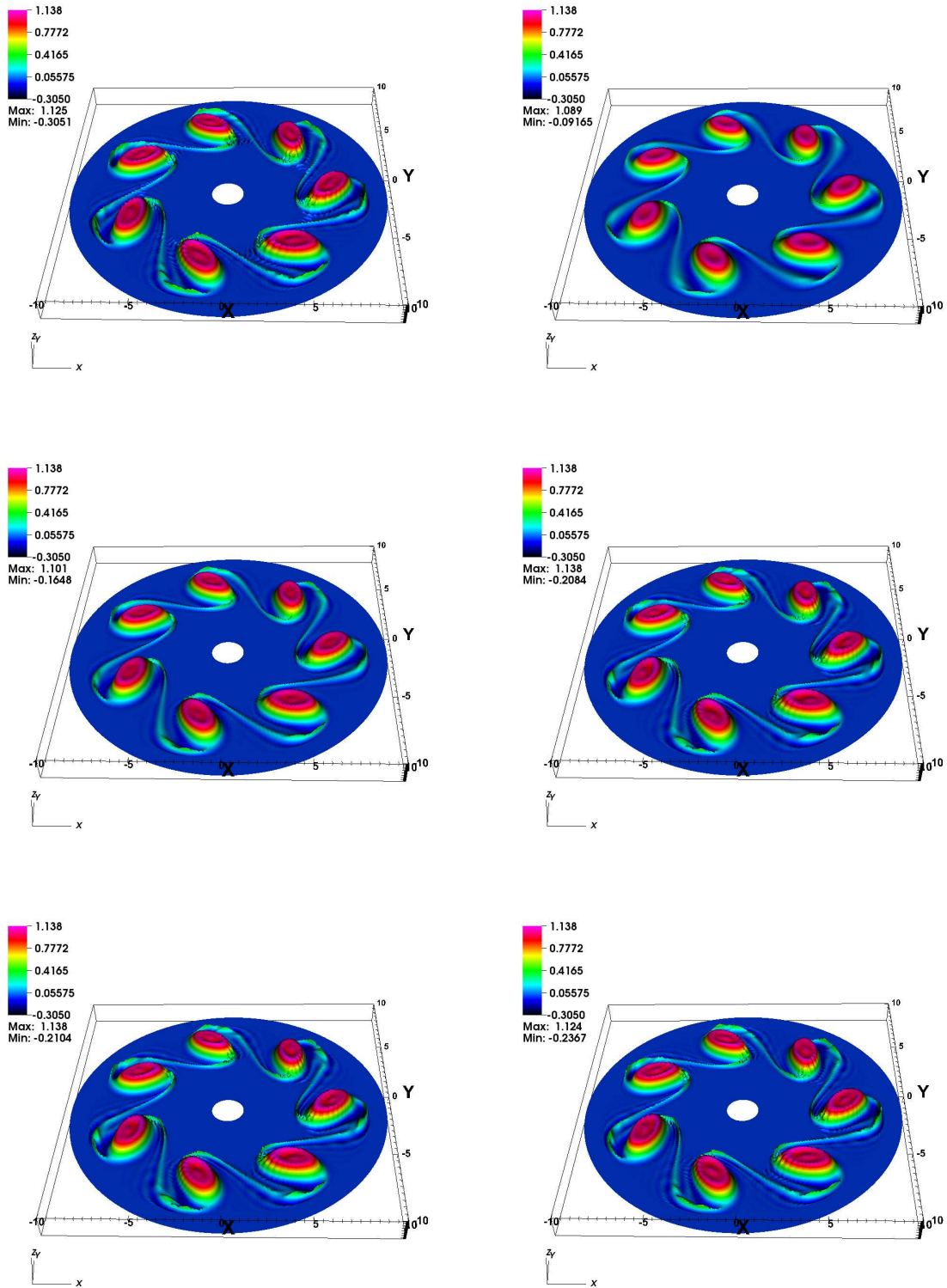


FIGURE 3.3: Représentations 3D de la fonction densité à  $t = 95$  pour différentes reconstructions dans le cas  $\ell = 7$ . De haut en bas et de gauche à droite : BSL, CSL-LAG 3, CSL-LAGH 5, CSL-Lauritzen, CSL-PPM 1 et CSL-PPM 2 ( $N_r = N_\theta = 256$ ,  $\Delta t = 0.05$ ).

## 3.2 Extension au cas 4D

### 3.2.1 4D et parallélisation

Jusqu'à présent, on a toujours considéré le cas d'un domaine des phases  $\Omega$  bidimensionnel. Dans une telle situation, le maillage du domaine se fait de façon naturelle (cas cartésien 2D du Chapitre 2) ou peut être obtenu par une transformation géométrique (cas polaire 3.1). On va maintenant se concentrer sur le cas où  $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ .

Dans ce cas, la fonction de distribution  $f$  s'écrit d'une manière générale

$$f = f(t, x_1, x_2, y_1, y_2), \quad t > 0, \quad (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^4.$$

Afin de traiter ce type de problèmes, on va effectuer un splitting qui va diviser le problème en une succession d'advections 1D et 2D. Plus concrètement, on va stocker la fonction de distribution sous la forme d'un tableau 4D dont les deux premières dimensions correspondent aux variables  $(x_1, x_2)$ , les deux dimensions suivantes correspondant à  $(y_1, y_2)$  (d'où ce choix de notations). Ensuite, suivant le cas considéré, des advections 1D ou 2D seront mises en oeuvre, tantôt dans le domaine  $(x_1, x_2)$ , tantôt dans  $(y_1, y_2)$ .

On effectue alors une parallélisation : à chaque étape, ce tableau 2D est découpé en sous-domaines qui sont chacun attribués à un processeur. Pour les équations que l'on va résoudre, les variables  $(y_1, y_2)$  jouent le rôle de paramètres lors des advections en  $(x_1, x_2)$  et vice et versa. Ainsi, si l'advection s'effectue par rapport aux variables  $(x_1, x_2)$ , la parallélisation est réalisée suivant les directions  $(y_1, y_2)$ , et inversement. L'avantage de ce type de parallélisation vient du fait que la seule étape de communication entre les processeurs est lors de la transposition du tableau 2D, que l'on effectue lors d'un changement de domaine d'advection. Dans la suite, on va voir deux exemples d'algorithmes différents.

### 3.2.2 Cas-test Vlasov-Poisson

Dans un premier temps, on considère le cas où  $f$  vérifie l'équation de Vlasov 4D suivante

$$\partial_t f + y_1 \partial_{x_1} f + y_2 \partial_{x_2} f + E_1(t, x_1, x_2) \partial_{y_1} f + E_2(t, x_1, x_2) \partial_{y_2} f = 0, \quad (3.2.8)$$

avec  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in [x_{1,min}, x_{1,max}] \times [x_{2,min}, x_{2,max}] \times [y_{1,min}, y_{1,max}] \times [y_{2,min}, y_{2,max}]$ .

Dans ce cas, les advections sont bidimensionnelles. Le schéma général s'écrit alors

A chaque pas de temps, effectuer

- Advection dans le domaine  $(x_1, x_2)$  durant  $\Delta t/2$ ,
- Transposition,
- Calcul des champs  $E_1$  et  $E_2$ ,
- Advection dans le domaine  $(y_1, y_2)$  durant  $\Delta t$ ,
- Transposition,
- Advection dans le domaine  $(x_1, x_2)$  durant  $\Delta t/2$ .

Il est à noter que dans ce cas, toutes les advections effectuées sont à coefficients constants par rapport aux variables advectées. En effet, lors des advections dans le domaine  $(x_1, x_2)$  les champs considérés sont  $y_1$  et  $y_2$ , valeurs qui sont gelées sur tout le domaine lors de cette étape; de même, lorsque l'on considère le domaine en  $(y_1, y_2)$ , les champs d'advection  $E_1$  et  $E_2$  ne dépendent que de  $x_1$  et  $x_2$ .

On considère maintenant la fonction initiale suivante (voir [30, 41])

$$f(t=0, x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} (1 + \epsilon (\cos(k_{x_1} x_1) + \cos(k_{x_2} x_2))) \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right),$$

avec les paramètres suivants

$$x_{1,min} = x_{2,min} = 0, \quad x_{1,max} = x_{2,max} = 4\pi, \quad y_{1,min} = y_{2,min} = -6, \quad y_{1,max} = y_{2,max} = 6,$$

$$N_{x_1} = N_{x_2} = 32, \quad N_{y_1} = N_{y_2} = 128, \quad \epsilon = 0.5, \quad k_x = k_y = 0.5, \quad \Delta t = 0.1.$$

Les calculs sont effectués sur le serveur de calculs IRMA-HPC2 de l'IRMA de Strasbourg dont les caractéristiques techniques sont : quatre processeurs six cœurs AMD Opteron(tm) 8439 SE. On utilise l'ensemble des processeurs pour les simulations. Sur la Figure 3.4, on trace l'évolution temporelle de l'énergie électrique  $\int \int E_1^2(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int \int E_2^2(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2$  pour ce cas-test.

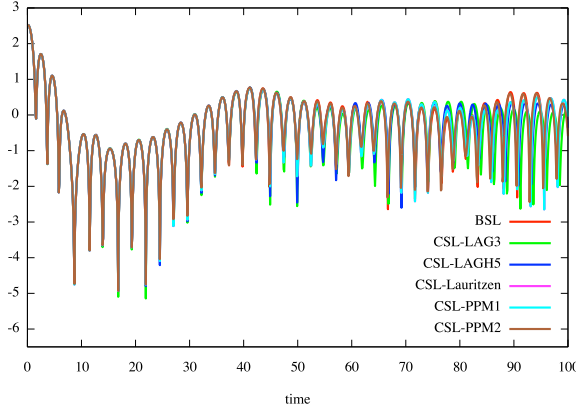


FIGURE 3.4: Evolution de l'énergie électrique  $\int \int E_1^2(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int \int E_2^2(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2$  au cours du temps dans un cas-test de type Vlasov-Poisson 4D.

Les résultats obtenus avec les méthodes CSL sont très encourageants, ce qui nous amène à nous intéresser à un cas-test quadridimensionnel en géométrie polaire : le Drift-Kinetic.

### 3.2.3 Cas-test Drift-Kinetic

On va maintenant considérer un cas plus complexe, où à chaque étape d'advection, le champ considéré dépend non seulement des inconnues gelées, mais également des variables du domaine courant : l'équation dite Drift-Kinetic (voir [10, 31]). Celle-ci représente une

description physique du plasma très intéressante puisque sous certaines hypothèses (collisions non prises en compte, fluctuations du champ magnétique négligeables), elle est vérifiée par fonction de distribution du plasma placé dans un tokamak.

Dans ce cas, on recherche  $f = f(t, r, \theta, z, v)$ , satisfaisant l'équation

$$\partial_t f - \frac{\partial_\theta \Phi}{r} \partial_r f + \frac{\partial_r \Phi}{r} \partial_\theta f + v \partial_z f - \partial_z \Phi \partial_v f = 0, \quad (3.2.9)$$

avec

$$(t, r, \theta, z, v) \in [0, T] \times [r_{\min}, r_{\max}] \times [0, 2\pi] \times [0, L] \times [-v_{\max}, v_{\max}].$$

Le potentiel  $\Phi = \Phi(r, \theta, z)$  vérifie l'équation dite de quasi-neutralité (3D) suivante

$$-\left( \partial_r^2 \Phi + \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial_r n_0(r)}{n_0(r)} \right) \partial_r \Phi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Phi \right) + \frac{1}{T_e(r)} (\Phi - \lambda \langle \Phi \rangle) = \frac{1}{n_0(r)} \int f dv - 1,$$

où  $\lambda = 1$  et

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \Phi(r, \theta, z) dz.$$

On choisit comme fonction initiale

$$f(0, r, \theta, z, v) = \frac{n_0(r) \exp\left(-\frac{v^2}{2T_i(r)}\right)}{(2\pi T_i(r))^{1/2}} \left( 1 + \epsilon \exp\left(-\frac{(r-r_p)^2}{\delta r}\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L} z + m\theta\right) \right),$$

où les profils  $n_0(r)$ ,  $T_i(r)$  et  $T_e(r)$  satisfont

$$\frac{\partial_r P(r)}{P(r)} = -\kappa_P \cosh^{-2}\left(\frac{r-r_p}{\delta r_P}\right), \text{ pour } P = n_0, T_i \text{ and } T_e, \quad (3.2.10)$$

ainsi que la normalisation

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} n_0(r)rdr = r_{\max} - r_{\min}, \quad T_i(r_p) = T_e(r_p) = 1.$$

Ceci donne les formules

$$P(r) = C_P \exp(-\kappa_P \delta r_P \tanh(\frac{r-r_p}{\delta r_P})),$$

$$C_{T_i} = C_{T_e} = 1, \quad C_{n_0} = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \exp(-\kappa_{n_0} \delta r_{n_0} \tanh(\frac{r-r_p}{\delta r_{n_0}})) dr}.$$

La fonction initiale ainsi choisie correspond à une fonction d'équilibre

$$f_{eq}(r, v) = \frac{n_0(r) \exp\left(-\frac{v^2}{2T_i(r)}\right)}{(2\pi T_i(r))^{1/2}}.$$

perturbée par une fonction

$$f_{perturb}(r, \theta, z) = \varepsilon \exp\left(-\frac{(r - r_p)^2}{\delta r}\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}z + m\theta\right)$$

comportant des modes en  $\theta$  (coefficient  $m$ ) et en  $z$  (coefficient  $n$ ).

On va effectuer une opération de splitting sur ce cas-test. On obtient alors trois étapes correspondant aux équations suivantes

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{\partial_\theta \Phi}{r} \partial_r f + \frac{\partial_r \Phi}{r} \partial_\theta f = 0, \\ \partial_t f + v \partial_z f = 0, \\ \partial_t f - \partial_z \Phi \partial_v f = 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour résoudre (3.2.9), on va effectuer tantôt des advections unidimensionnelles (suivant  $z$  et suivant  $v$ ), et des advections bidimensionnelles (dans le domaine  $(r, \theta)$ ). Les premières seront réalisées par des advections de type BSL 1D avec reconstruction par splines cubiques,



le choix entre les advections BSL (2D) ou CSL (2D) se portant sur les secondes.

**Remarque 3.2.1.** *Les advections 1D sont ici conservatives, puisqu'elles sont à coefficients constants et que l'on se situe dans un cas périodique.*

**Remarque 3.2.2.** *Il est à noter que les advections dans le domaine  $(r, \theta)$  correspondent en fait au cas Diocotron 3.1.3.*

Afin d'obtenir un schéma global d'ordre 2, on va ainsi suivre l'algorithme suivant (dans ce cas, les domaines bidimensionnels sont  $(r, \theta)$  d'une part, et  $(z, v)$  d'autre part)

A chaque pas de temps, effectuer

- Advection 1D suivant  $z$  durant  $\Delta t/2$ ,
- Advection 1D suivant  $v$  durant  $\Delta t/2$ ,
- Calcul de  $\Phi$ ,
- Transposition,
- Advection 2D dans le domaine  $(r, \theta)$  durant  $\Delta t$ ,
- Transposition,
- Advection 1D suivant  $v$  durant  $\Delta t/2$ ,
- Advection 1D suivant  $z$  durant  $\Delta t/2$ .

**Remarque 3.2.3.** *Pour ce cas-test, lors de chaque advection 2D du temps  $t^n$ , on ne va pas effectuer l'étape de reconstruction à partir de la donnée  $f^n(r, \theta, z, v)$ , mais d'une fonction  $\delta f^n = f^n - f_{eq}$ , qui représente l'écart entre  $f^n$  et la fonction d'équilibre  $f_{eq}$ . Une fois cette étape réalisée, on obtient une fonction  $\delta f^{n+1}$  qui permet de calculer  $f^{n+1}$  par la formule  $f^{n+1} = f_{eq} + \delta f^{n+1}$ . Cela permet de considérer des conditions aux bords nulles en  $r_{min}$  et  $r_{max}$ , comme dans [35].*

La fonction initiale de ce cas-test comprend des instabilités de petites tailles qui vont se développer jusqu'à un stade de saturation. On observe ainsi dans un premier temps une croissance exponentielle de la quantité  $\sqrt{\int \Phi(t, r_p, \theta, z)^2 d\theta dz}$  qui correspond à une phase dite linéaire. En considérant le problème linéarisé perturbé, [19], effectue la même analyse que dans le cas 3.1 et propose des taux d'instabilité en fonction des modes  $m$  et  $n$ . On teste ainsi nos algorithmes en tentant de retrouver ces valeurs.

On choisit les paramètres suivants (voir le cas "medium" de [19], p.12) :

$$r_{\min} = 0.1, \quad r_{\max} = 14.5, \quad \kappa_{n_0} = 0.055, \quad \kappa_{T_i} = \kappa_{T_e} = 0.27586,$$

$$\delta r_{T_i} = \delta r_{T_e} = \frac{\delta r_{n_0}}{2} = 1.45, \quad \epsilon = 10^{-6},$$

avec

$$n = 1, \quad m = 5, \quad L = 1506.759067, \quad r_p = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}, \quad \delta r = \frac{4\delta r_{n_0}}{\delta r_{T_i}},$$

et

$$\Delta t = 8, \quad N_r = N_\theta = N_z = 32, \quad N_v = 64.$$

On présente sur les deux premiers graphiques de la Figure 3.5 l'évolution temporelle de la quantité  $\sqrt{\int \Phi(t, r_p, \theta, z)^2 d\theta dz}$ . Les résultats sont effectivement cohérents avec ceux de [19], p.19. De plus, on trace également l'évolution temporelle de la masse, de l'énergie totale ainsi que des normes  $L^1$  et  $L^2$  : pour toutes les méthodes, ces quantités sont bien préservées durant la partie linéaire (jusqu'à  $t = 3000$  environ), alors que c'est moins le cas pour la phase non linéaire. Ceci s'explique par le fait que les structures deviennent plus petites que le maillage et ne peuvent alors plus être décrites. Néanmoins, on peut remarquer que les méthodes type CSL se révèlent alors beaucoup plus performantes.

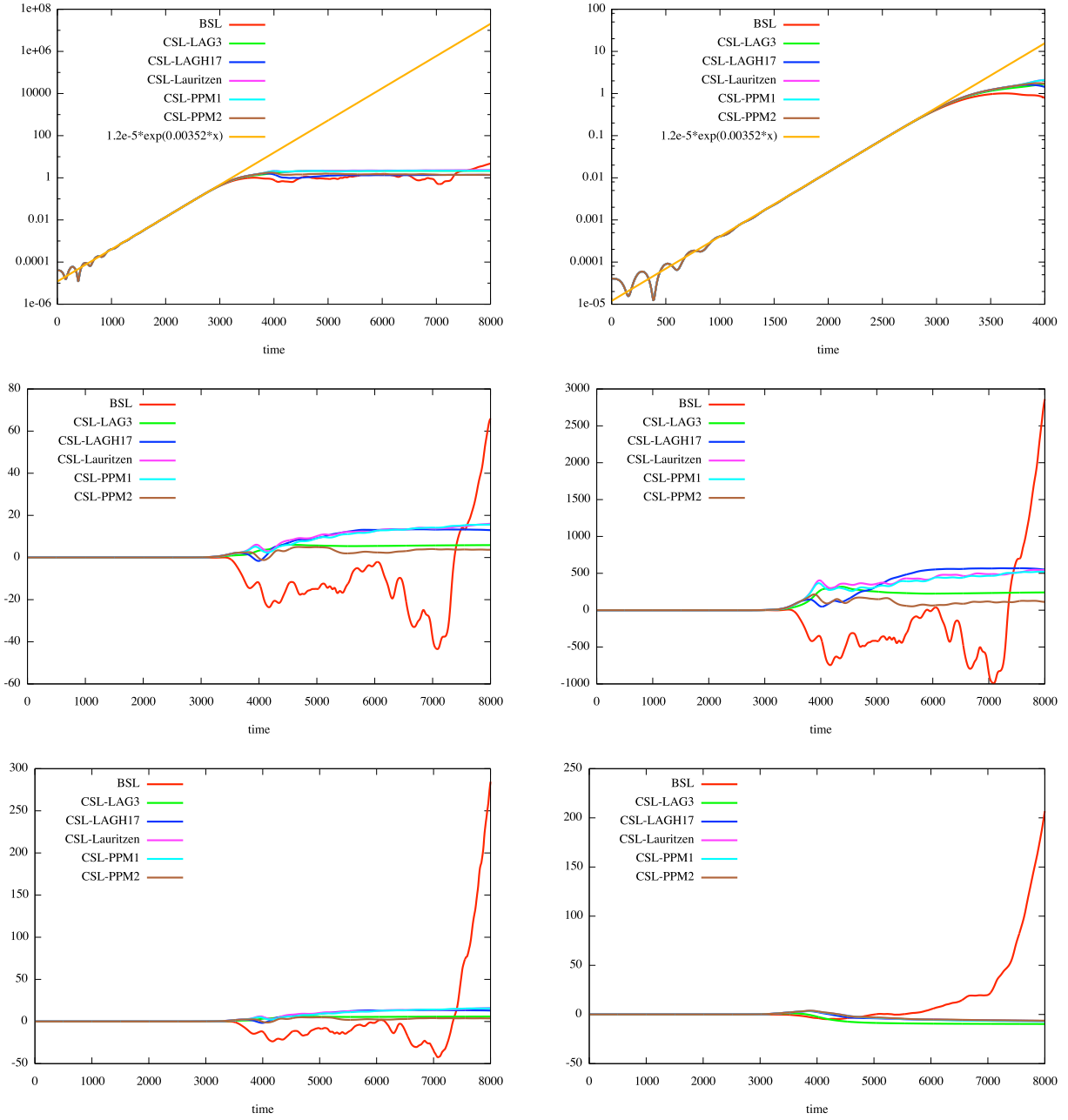


FIGURE 3.5: De haut en bas et de gauche à droite : évolutions temporelles de  $\sqrt{\int \Phi^2(t, r_p, \theta, z) d\theta dz}$ , puis en zoom sur la partie linéaire, de la masse, de l'énergie totale et des normes  $L^1$  et  $L^2$  pour le cas-test Drift-Kinetic.

On effectue également une comparaison de temps de calculs pour les différentes méthodes dans ce cas. L'ensemble des processeurs de la machine IRMA-HPC2 est à nouveau utilisé pour les simulations.

BSL	CSL-LAG 3	CSL-LAGH 17	CSL-Lauritzen	CSL-PPM 1
9min 29s	14min 18s	17min 7s	14min 4s	14min 43s

TABLEAU 3.2: Comparaisons de temps de calculs pour différents cas-test et différents algorithmes ( $N_r = N_\theta = N_z = 32, N_v = 64$ , quatre processeurs de six cœurs).

Les temps de calculs sont relativement proches entre les différentes méthodes. En particulier, il y a assez peu d'écart entre la méthode BSL et les diverses méthodes CSL, ce qui rend l'emploi de ces dernières particulièrement intéressant dans ce cas.

# Chapitre 4

## Méthodes de type volumes finis

Comme on l'a rappelé dans le Chapitre 1, certaines situations ne permettent pas l'emploi de splitting ([33, 10]). Il est donc important de développer des approches permettant de s'affranchir de cette contrainte, telle que la méthode présentée au Chapitre 2. Le présent chapitre traite quant à lui de méthodes à base de volumes finis non splittées. De telles approches ont été proposées par [27] et plus récemment par [3], dont s'inspire la première méthode que l'on présente. La deuxième stratégie présentée ici consiste en l'usage de points de Gauss en temps permettant d'éviter de traiter le cas de transports de volume 2D menant à des calculs d'intersections de maillages tels qu'au Chapitre 2. On terminera ce Chapitre par de nombreux résultats numériques concernant ces méthodes.

### 4.1 La méthode des volumes finis de Banks (voir [3])

Cette Section Chapitre est consacré à la présentation et à l'analyse d'une méthode à base de volumes finis. Le cas unidimensionnel sera abordé conjointement avec une analyse de stabilité. Ensuite, on traitera le cas bidimensionnel.

### 4.1.1 L'advection linéaire unidimensionnelle

On s'intéresse d'abord à résoudre le problème unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = 0, \\ f(t = 0, x) = f^0(x), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où  $f : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a$  est une constante réelle. Les inconnues sont

$\bar{f}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t_n, x) dx$ , et on note :

$$\bar{f}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(t, x) dx.$$

En intégrant (4.1.1) sur un volume de contrôle et en divisant par sa taille  $\Delta x$ , on obtient :

$$\frac{d\bar{f}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} a \partial_x f dx = -\frac{a}{\Delta x} [f(t, x_{i+1/2}) - f(t, x_{i-1/2})], \quad (4.1.2)$$

Le but principal est de donner un sens aux flux  $f(t, x_{i\pm 1/2})$  pour une suite donnée  $(\bar{f}_i(t))_i$  (remarquons que l'on considère ici des conditions aux limites périodiques).

Différentes conditions en espace ont été testées, parmi lesquelles trois schémas centrés

$$\begin{aligned} CD2 : f(t, x_{i+1/2}) &\approx \frac{1}{2}(\bar{f}_i(t) + \bar{f}_{i+1}(t)), \\ CD4 : f(t, x_{i+1/2}) &\approx \frac{7}{12}(\bar{f}_i(t) + \bar{f}_{i+1}(t)) - \frac{1}{12}(\bar{f}_{i-1}(t) + \bar{f}_{i+2}(t)), \\ CD6 : f(t, x_{i+1/2}) &\approx \frac{37}{60}(\bar{f}_i(t) + \bar{f}_{i+1}(t)) - \frac{8}{60}(\bar{f}_{i-1}(t) + \bar{f}_{i+2}(t)) + \frac{1}{60}(\bar{f}_{i-2}(t) + \bar{f}_{i+3}(t)). \end{aligned}$$

et trois schémas "upwind"

$$UP1 (a < 0) : f(t, x_{i+1/2}) \approx \bar{f}_{i+1}(t),$$

$$UP3 (a < 0) : f(t, x_{i+1/2}) \approx \frac{1}{3}\bar{f}_i(t) + \frac{5}{6}\bar{f}_{i+1}(t) - \frac{1}{6}\bar{f}_{i+2}(t),$$

$$UP5 (a < 0) : f(t, x_{i+1/2}) \approx -\frac{1}{20}\bar{f}_{i-1}(t) + \frac{9}{20}\bar{f}_i(t) + \frac{47}{60}\bar{f}_{i+1}(t) - \frac{13}{60}\bar{f}_{i+2}(t) + \frac{1}{30}\bar{f}_{i+3}(t),$$

$$UP1 (a > 0) : f(t, x_{i+1/2}) \approx \bar{f}_i(t),$$

$$UP3 (a > 0) : f(t, x_{i+1/2}) \approx -\frac{1}{6}\bar{f}_{i-1}(t) + \frac{5}{6}\bar{f}_i(t) + \frac{1}{3}\bar{f}_{i+1}(t),$$

$$UP5 (a > 0) : f(t, x_{i+1/2}) \approx \frac{1}{30}\bar{f}_{i-2}(t) - \frac{13}{60}\bar{f}_{i-1}(t) + \frac{47}{60}\bar{f}_i(t) + \frac{9}{20}\bar{f}_{i+1}(t) - \frac{1}{20}\bar{f}_{i+2}(t).$$

**Remarque 4.1.1.** Bien que la terminologie soit différente par rapport à celle utilisée dans le Chapitre 2, on retrouve ici le même type de reconstructions, les schémas CD étant les analogues des reconstructions PPM du Chapitre 2 et les schémas de type UP ceux des reconstructions LAGH.

Une discrétisation temporelle classique avec un algorithme de Runge-Kutta explicite est ensuite effectuée et mène au calcul de

$$\bar{f}^n = (\bar{f}_0^n, \dots, \bar{f}_{N-1}^n), \quad f_j^n \simeq f_j(t_n), \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Plus précisément, l'approximation numérique de  $y_n \approx y(t_n)$  du système différentiel obtenu de (4.1.2) écrit sous la forme  $y'(t) = \phi(y(t))$  est donnée par

$$y_{n+1} \approx y_n + \Delta t \sum_{j=1}^s b_j k_j, \quad k_j = \phi(y_n + \Delta t \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j,\ell} k_\ell), \quad j = 1, \dots, s.$$

	up 1	CD 2	up 3	CD 4	up 5	CD 6
RK 1	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
RK 2	1.00	0.00	0.87	0.00	0.00	0.00
RK 3	1.25	1.73	1.62	1.26	1.43	1.09
RK 4	1.39	2.82	1.74	2.06	1.73	1.78

TABLEAU 4.1: Conditions CFL pour ce schéma à volumes finis.

On a considéré les exemples suivants

$$RK1 (s = 1) : \quad b_1 = 1,$$

$$RK2 (s = 2) : \quad a_{2,1} = 1/2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1,$$

$$RK3 (s = 3) : \quad a_{2,1} = 1/2, \quad a_{3,1} = -1, \quad a_{3,2} = 2, \quad b_1 = 1/6, \quad b_2 = 2/3, \quad b_3 = 1/6,$$

et le schéma RK4 classique (s=4)

$$RK4 : (s = 4) : \quad a_{2,1} = 1/2, \quad a_{3,1} = 0, \quad a_{3,2} = 1/2,$$

$$a_{4,1} = a_{4,2} = 0, \quad a_{4,3} = 1, \quad b_1 = b_4 = 1/6, \quad b_2 = b_3 = 1/3.$$

### 4.1.2 Stabilité et ordre

Il s'est tout d'abord agi de trouver une valeur limite supérieure au-dessus de laquelle ces schémas sont instables, c'est-à-dire de déterminer une condition CFL pour tous ces schémas. On peut voir dans le Tableau 4.1 quelles valeurs de CFL ont été trouvées (voir également [2]).

Un exemple de tel calcul est maintenant proposé dans le cas CD4 RK1 (Euler). On effectue une analyse de stabilité de Von Neumann. Pour ce faire, on introduit

$$f_j^n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k^n \exp(ikj\Delta x), \quad \text{avec} \quad \hat{f}_j^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k^n \exp(-ikj\Delta x),$$



de façon que  $\hat{f}_{k+p}^n = \hat{f}_k^n e^{ikp\Delta x}$ . Le schéma numérique devient alors dans l'espace de Fourier

$$\hat{f}_k^{n+1} = h_k \hat{f}_k^n, \text{ avec } h_k = 1 - \frac{a\Delta t}{6\Delta x} i (6 \sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x)).$$

Puisque  $\Delta t > 0$  et  $k \neq 0$ , le facteur d'amplification  $|h_k|$  est strictement supérieur à 1, on voit donc que ce schéma est inconditionnellement instable.

Il est important de mentionner que l'utilisation de schémas Runge-Kutta d'ordre élevé permet de remédier à ce manque de stabilité apparaissant dans les schémas de Runge-Kutta d'ordre faible (voir [2]). Il faut également remarquer que le schéma RK2 est instable, ce qui n'est généralement pas le cas pour les schéma semi-lagrangiens.

Considérant les cas stables CD2 RK4 et CD4 RK4, on cherche à déterminer numériquement l'ordre de la méthode. On choisit la condition initiale périodique  $f^0(x) = \sin(2\pi x)$  sur le domaine unidimensionnel  $[0, 1]$ , avec les paramètres suivants

$$\begin{cases} a = 1 \\ \Delta t = 0.001 \\ t_{\max} = 16, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Sur la Figure 4.1, on a représenté en rouge l'erreur de la norme  $L^1$  obtenue pour des reconstructions avec différents nombres de points en espace avec la méthode CD2 RK4 (à gauche) et la méthode CD4 RK4 (à droite). On retrouve effectivement les ordres correspondants : CD2 RK4 est d'ordre 2 et CD4 RK4 d'ordre 4.

### 4.1.3 Advection 2D

L'extension au cas bidimensionnel est détaillé ici en vue d'applications au système Vlasov-Poisson. Le modèle général envisagé peut s'écrire sous la forme

$$\partial_t f(t, x, y) + \partial_x(a_x(t, x, y)f(t, x, y)) + \partial_y(a_y(t, x, y)f(t, x, y)) = 0, \quad (4.1.4)$$

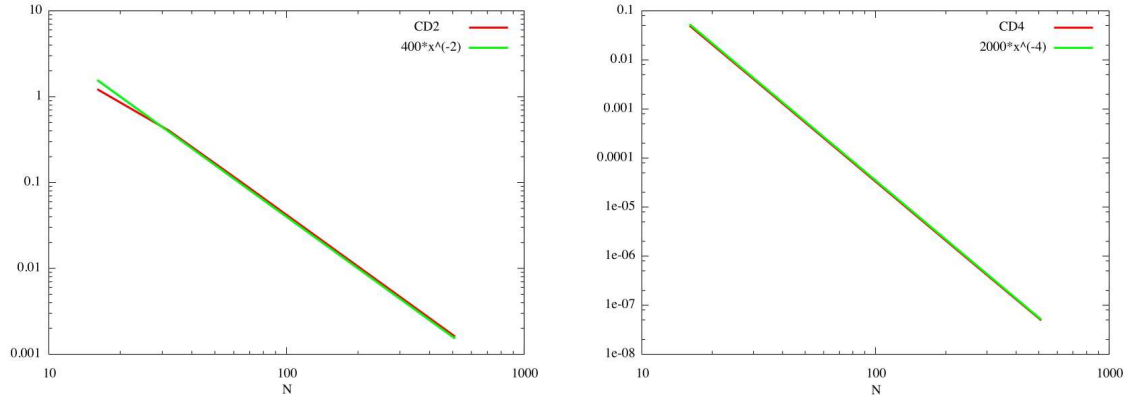


FIGURE 4.1: Norme  $L^1$  de l'erreur pour une advection linéaire comme fonction de  $N$  avec un schéma CD2 RK4 (à gauche) et un schéma CD4 RK4 (à droite) .  $\Delta t = 0.001$  et  $t_{\max} = 16$ .

avec  $a = (a_x, a_y)$  un champ de vecteurs satisfaisant à la condition de divergence

$\nabla \cdot a = \partial_x a_x + \partial_y a_y = 0$ . Les inconnues sont alors

$$\bar{f}_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(t_n, x, y) dx dy.$$

On introduit également

$$\bar{f}_{i,j}(t) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(t, x, y) dx dy.$$

En intégrant (4.1.4) sur un volume de contrôle et en divisant par son volume  $\Delta x \Delta y$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_{i,j}(t)}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} [a_x(t, x_{i+1/2}, y) f(t, x_{i+1/2}, y) - a_x(t, x_{i-1/2}, y) f(t, x_{i-1/2}, y)] dy \\ & - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [a_y(t, x, y_{j+1/2}) f(t, x, y_{j+1/2}) - a_y(t, x, y_{j-1/2}) f(t, x, y_{j-1/2})] dy. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

On utilise ensuite une formule permettant d'exprimer l'intégrale d'un produit en produit d'intégrales

**Proposition 4.1.1.** *On a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} b(x)g(x)dx &= \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} b(x)dx \cdot \frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} g(x)dx \\ &+ \frac{1}{48} \left( \int_{z_{i+1/2}}^{z_{i+3/2}} b(x)dx - \int_{z_{i-3/2}}^{z_{i-1/2}} b(x)dx \right) \left( \int_{z_{i+1/2}}^{z_{i+3/2}} g(x)dx - \int_{z_{i-3/2}}^{z_{i-1/2}} g(x)dx \right) + O(h^4). \end{aligned}$$

**Remarque 4.1.2.** *De telles formules (et d'autres plus générales) sont détaillées dans [3, 15] et permettent une approximation spatiale d'ordre élevé.*

Voici une preuve de cette proposition.

*Preuve de la Proposition 4.1.1.* On commence par utiliser l'approximation classique du point-milieu

$$\frac{1}{h} \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} f(x)dx = f(z_i) + \frac{h^2}{24} \partial_x^2 f(z_i) + O(h^4).$$

Le membre de gauche donne

$$b(z_i)g(z_i) + \frac{h^2}{24} (b''(z_i)g(z_i) + 2b'(z_i)g'(z_i) + b(z_i)g''(z_i)) + O(h^4),$$

tandis que celui de droite donne

$$\begin{aligned} &\left( b(z_i) + \frac{h^2}{24} b''(z_i) \right) \left( g(z_i) + \frac{h^2}{24} g''(z_i) \right) + O(h^4) \\ &+ \frac{1}{48} \left( b(z_{i+1}) - b(z_{i-1}) + \frac{h^2}{24} (b''(z_{i+1}) - b''(z_{i-1})) \right) \left( g(z_{i+1}) - g(z_{i-1}) + \frac{h^2}{24} (g''(z_{i+1}) - g''(z_{i-1})) \right) \\ &= b(z_i)g(z_i) + \frac{h^2}{24} b''(z_i) (b'(z_i)g(z_i) + b(z_i)g''(z_i)) + O(h^4) \\ &\quad + \frac{h^2}{48} (2b'(z_i) + O(h^2)) (2g'(z_i) + O(h^2)), \end{aligned}$$

ce qui mène au résultat. □

Enfin, on procède comme dans le cas 1D. A titre d'exemple, l'approximation CD4 donne

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(t, x_{i+1/2}, y) dy \approx \frac{7}{12}(\bar{f}_{i,j}(t) + \bar{f}_{i+1,j}(t)) - \frac{1}{12}(\bar{f}_{i-1,j}(t) + \bar{f}_{i+2,j}(t)),$$

On obtient donc un système d'EDO qui est discrétisé en temps par un schéma Runge-Kutta comme dans le cas 1D.

#### 4.1.4 Application au système Vlasov-Poisson

Dans le cas du système Vlasov-Poisson, on a  $a_x(t, x, y) = y$  et  $a_y(t, x, y) = E(t, x)$  dans (4.1.4). Le champ électrique est calculé en utilisant la densité de charges  $\int f(t, x, y) dy$  qui est recalculée après chaque étape de la méthode Runge-Kutta.

## 4.2 Les méthodes des points de Gauss en temps

Le but de cette Section est de présenter une méthode à base de volumes finis fondée sur une intégration semi-lagrangienne des flux. La méthode est tout d'abord présentée dans un cadre unidimensionnel pour lequel une analyse de stabilité est effectuée. Ensuite, le cas bidimensionnel est traité.

### 4.2.1 L'advection linéaire unidimensionnelle

Partant de l'équation d'advection (4.1.2), l'intégration en temps entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  mène au calcul de  $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, x_{i+1/2}) dt$ . Par le changement de variables  $t = t^n + \Delta t(1 + s)/2$  avec  $s \in [-1, 1]$ , une quadrature de Gauss est réalisée : l'introduction des  $K$  points de Gauss et des masses correspondantes  $(\omega_k, \tau_k)$  pour l'intervalle  $[-1, 1]$  permet d'obtenir

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, x_{i+1/2}) dt \approx \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k f \left( t^n + \frac{\Delta t}{2} (1 + \tau_k), x_{i+1/2} \right).$$

En utilisant le fait que  $f$  est constante le long des caractéristiques, le membre de droite peut être exprimé en fonction de  $f(t^n)$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, x_{i+1/2}) dt \approx \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^K \omega_k f \left( t^n, x_{i+1/2} - a \left( \frac{\Delta t}{2} (1 + \tau_k) \right) \right),$$

de telle sorte que le schéma numérique est

$$\bar{f}_i^{n+1} = \bar{f}_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \sum_{k=1}^K \omega_k \left[ f \left( t^n, x_{i+1/2} - \frac{a\Delta t}{2} (1 + \tau_k) \right) - f \left( t^n, x_{i-1/2} - \frac{a\Delta t}{2} (1 + \tau_k) \right) \right]. \quad (4.2.6)$$

Les quantités  $f(t^n, x_{i+1/2} - a\Delta t(1 + \tau_k)/2)$  doivent être reconstruites en utilisant les valeurs moyennes connues  $\bar{f}_i^n$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$  grâce à un opérateur d'interpolation. Plusieurs reconstructions seront détaillées dans la suite.

**Remarque 4.2.1.** Par exemple, en choisissant  $N_k = 1$  point de Gauss,  $\omega_k = 2$  et  $\tau_k = 0$ , on obtient la formule du point milieu :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, x_{i+1/2}) dt \approx \Delta t f \left( t^n, x_{i+1/2} - a \frac{\Delta t}{2} \right). \quad (4.2.7)$$

Si l'on choisit  $N_k = 2$  points de Gauss,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $\tau_1 = -1/\sqrt{3}$  et  $\tau_2 = 1/\sqrt{3}$ , on aboutit à :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, x_{i+1/2}) dt \approx \frac{\Delta t}{2} \left( f \left( t^n, x_{i+1/2} - a \frac{\Delta t(3 - \sqrt{3})}{6} \right) + f \left( t^n, x_{i+1/2} - a \frac{\Delta t(3 + \sqrt{3})}{6} \right) \right). \quad (4.2.8)$$

**Remarque 4.2.2.** L'introduction de points de Gauss en temps pour l'advection linéaire n'est pas vraiment utile, puisque l'on a la relation suivante entre intégrations en temps et en espace (voir la Section 4.3 pour une preuve)

$$a \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x_{i+1/2}) dt = \int_{x_{i+1/2}^*}^{x_{i+1/2}} f(t_n, y) dy, \quad (4.2.9)$$

où  $x_{i+1/2}^* = x_{i+1/2} - a\Delta t$  est le pied de la caractéristique se terminant en  $x_{i+1/2}$ . Puisque les valeurs  $\bar{f}_i^n, i = 0, \dots, N-1$  sont connues, le membre de droite peut être approché par une reconstruction appropriée comme détaillé ci-après. En particulier, il n’y a pas de restriction CFL. Cependant, l’extension au cas bidimensionnel implique le calcul de l’intersection entre les maillages cartésien et lagrangien, comme cela a été vu supra. L’utilisation de points de Gauss permet de s’affranchir de cette étape technique et constitue donc une alternative que l’on présente maintenant.

## Reconstruction

La méthode doit être complétée par un opérateur de reconstruction permettant de calculer  $f(t^n, x_{i+1/2} - a\Delta t(1 + \tau_k)/2)$ . Beaucoup d’opérateurs d’interpolations peuvent être considérés (voir [16, 23, 30]). On recherche des polynômes  $P_i$  sur  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  satisfaisant

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} P_i(x) dx = \bar{f}_i^n. \quad (4.2.10)$$

De telles reconstructions ont été présentées dans le cadre de la méthode CSL2D. On les rappelle ici par commodité de lecture. Les reconstructions de type Lagrange (LAG  $2d + 1$ ) consistent à choisir  $P_i$  de degré  $\leq 2d$  satisfaisant les contraintes

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} P_i(x) dx = \bar{f}_j^n, \quad j = i - d, \dots, i + d.$$

Les reconstructions de type PPM consistent à choisir  $P_i$  de degré  $\leq 2$  satisfaisant (4.2.10) ainsi que

$$P_i(x_{i-1/2}) = f_{i-1/2}^n, \quad P_i(x_{i+1/2}) = f_{i+1/2}^n,$$

c’est-à-dire

$$P_i(x_{i-1/2} + \alpha\Delta x) = (3\alpha^2 - 4\alpha + 1)f_{i-1/2}^n + (3\alpha^2 - 2\alpha)f_{i+1/2}^n + (6\alpha - 6\alpha^2)\bar{f}_i^n \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1].$$

$K$	LAG 1	LAG 3	LAG 5	LAG 7	PPM 0	PPM 1	PPM 2
1	1.00	0.68	0.00	0.00	0.72	0.66	0.66
2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.63	1.70	1.73
3	1.00	1.00	1.00	1.00	2.00	1.54	1.54
4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.77	1.83	1.88
5	1.85	2.00	2.00	2.00	2.69	2.69	2.69

TABLEAU 4.2: Conditions CFL  $K$  points de Gauss

Les valeurs aux interfaces  $f_{i+1/2}^n \approx f(t^n, x_{i+1/2})$  sont alors données par

$$\begin{aligned}
 PPM0 : \quad f_{i+1/2}^n &= \frac{1}{2}(\bar{f}_i^n + \bar{f}_{i+1}^n), \\
 PPM1 : \quad f_{i+1/2}^n &= \frac{7}{12}(\bar{f}_i^n + \bar{f}_{i+1}^n) - \frac{1}{12}(\bar{f}_{i-1}^n + \bar{f}_{i+2}^n), \\
 PPM2 : \quad f_{i+1/2}^n &= \frac{37}{60}(\bar{f}_i^n + \bar{f}_{i+1}^n) - \frac{8}{60}(\bar{f}_{i-1}^n + \bar{f}_{i+2}^n) + \frac{1}{60}(\bar{f}_{i-2}^n + \bar{f}_{i+3}^n).
 \end{aligned}$$

### Analyse de stabilité et ordre

Comme dans 4.1.2, les conditions CFL ont été étudiées en calculant des facteurs d'amplification. Les résultats sont présentés dans le Tableau 4.2.

Sur la Figure 4.2, l'erreur spatiale en norme  $L^1$  est représentée dans un cas d'advection constante (avec une condition initiale gaussienne). Dans le cas de deux points de Gauss en temps, on retrouve les ordres attendus : LAG 3 est d'ordre 3 et LAG 5 d'ordre 5.

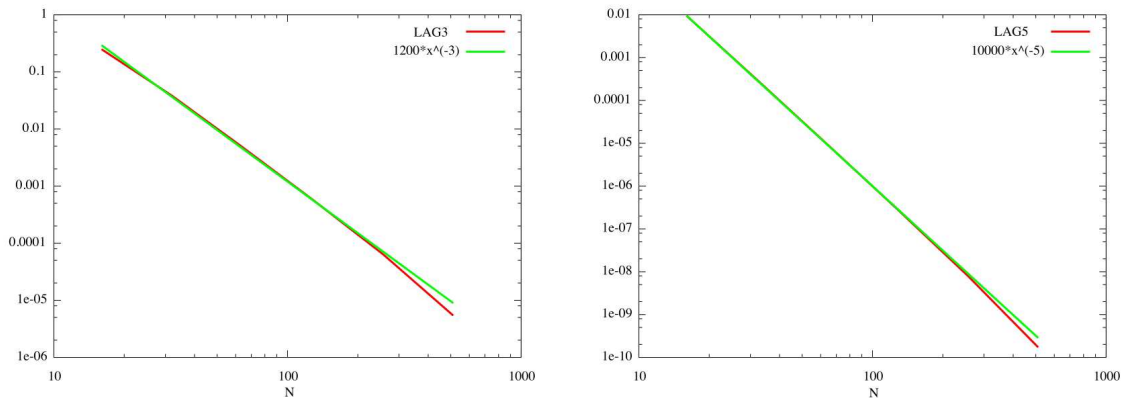


FIGURE 4.2: Norme  $L^1$  de l'erreur pour l'advection linéaire en fonction de  $N$  avec (à gauche) une reconstruction LAG 3 et (à droite) une reconstruction LAG 5.  $\Delta t = 0.001$  et  $t_{\max} = 16$ .

## 4.2.2 Advection 2D

On considère ici l'extension au cas bidimensionnel. Comme précédemment on intègre sur un volume de contrôle et on divise par son volume  $\Delta x \Delta y$ . On obtient le schéma semi-discret suivant

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_{i,j}(t)}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} (a_x(t, x_{i+1/2}, y) f(t, x_{i+1/2}, y) - a_x(t, x_{i-1/2}, y) f(t, x_{i-1/2}, y)) dy \\ & - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (a_y(t, x, y_{j+1/2}) f(t, x, y_{j+1/2}) - a_y(t, x, y_{j-1/2}) f(t, x, y_{j-1/2})) dx. \end{aligned}$$

Pour calculer les deux intégrales, on introduit ici des points de Gauss en *espace* :  $d_x$  points  $(\omega_{x,\ell}, \tau_{x,\ell})$  pour la direction  $x$ , et  $d_y$  points  $(\omega_{y,\ell}, \tau_{y,\ell})$  pour la direction  $y$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}_{i,j}(t)}{dt} \approx & -\frac{1}{2\Delta x} \sum_{\ell=1}^{d_y} \omega_{y,\ell} \left[ a_x \left( t, x_{i+1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right) f \left( t, x_{i+1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right) \right. \\ & \left. - a_x \left( t, x_{i-1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right) f \left( t, x_{i-1/2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right) \right] \\ & - \frac{1}{2\Delta y} \sum_{\ell=1}^{d_x} \omega_{x,\ell} \left[ a_y \left( t, x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j+1/2} \right) f \left( t, x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j+1/2} \right) \right. \\ & \left. - a_y \left( t, x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j-1/2} \right) f \left( t, x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j-1/2} \right) \right] \end{aligned}$$

Ensuite, on applique la même stratégie que dans le cas unidimensionnel : en utilisant  $K$  points de Gauss en *temps*  $(\omega_k, \tau_k)$  pour la quadrature en temps, on obtient alors

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i,j}^{n+1} \approx & \bar{f}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^{d_y} \omega_k \omega_{y,\ell} \left[ a_x \left( t^n + \frac{\Delta t}{2}(1 + \tau_k), x_{i+\frac{1}{2}}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right) f \left( t^n, \left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right)^{*k} \right) \right. \\ & \left. - a_x \left( t^n + \frac{\Delta t}{2}(1 + \tau_k), x_{i-\frac{1}{2}}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right) f \left( t^n, \left( x_{i-\frac{1}{2}}, y_j + \frac{\Delta y}{2}(1 + \tau_{y,\ell}) \right)^{*k} \right) \right] \\ & - \frac{\Delta t}{4\Delta y} \sum_{k=1}^K \sum_{\ell=1}^{d_x} \omega_k \omega_{x,\ell} \left[ a_y \left( t^n + \frac{\Delta t}{2}(1 + \tau_k), x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j+\frac{1}{2}} \right) f \left( t^n, \left( x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j+\frac{1}{2}} \right)^{*k} \right) \right. \\ & \left. - a_y \left( t^n + \frac{\Delta t}{2}(1 + \tau_k), x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j-\frac{1}{2}} \right) f \left( t^n, \left( x_i + \frac{\Delta x}{2}(1 + \tau_{x,\ell}), y_{j-\frac{1}{2}} \right)^{*k} \right) \right], \end{aligned}$$



où  $(x, y)^{*k}$  représente le pied au temps  $t^n$  de la caractéristique se terminant en  $(x, y)$  au temps  $t^n + \Delta t(1 + \tau_k)/2$ .

En utilisant un schéma prédicteur-correcteur par exemple, on va supposer que les champs  $a_x$  et  $a_y$  sont constants sur le domaine temporel  $[t^n, t^{n+1}]$  :  $a_x(t, x, y) \simeq a_x(t^{n+1/2}, x, y)$  et  $a_y(t, x, y) \simeq a_y(t^{n+1/2}, x, y)$  pour tout  $t \in [t^n, t^{n+1}]$ , et les champs  $a_x(t^{n+1/2}, x, y)$  et  $a_y(t^{n+1/2}, x, y)$  sont prédits avec une méthode adéquate.

**Remarque 4.2.3.** *Le cas d'un point de Gauss en espace sera essentiellement utilisé. Le schéma numérique s'écrit alors*

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i,j}^{n+1} \approx \bar{f}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_{k=1}^K \omega_k \left[ a_x(t^{n+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) f(t^n, (x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)^{*k}) - a_x(t^{n+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, y_j) f(t^n, (x_{i-\frac{1}{2}}, y_j)^{*k}) \right] \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \sum_{k=1}^K \omega_k \left[ a_y(t^{n+\frac{1}{2}}, x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) f(t^n, (x_i, y_{j+\frac{1}{2}})^{*k}) - a_y(t^{n+\frac{1}{2}}, x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) f(t^n, (x_i, y_{j-\frac{1}{2}})^{*k}) \right], \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

où  $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j)^{*k}$  représente le pied au temps  $t^n$  de la caractéristique se terminant en  $(x_{i+1/2}, y_j)$  au temps  $t^n + \frac{\Delta t(1+\tau_k)}{2}$ .

### 4.2.3 Application au cas Vlasov-Poisson

On va maintenant s'intéresser au cas de l'équation de Vlasov-Poisson qui correspond à  $a_x(t, x, y) = y$  et  $a_y(t, x, y) = E(t, x)$ .

Dans ce cas, (4.2.11) peut être simplifiée en

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i,j}^{n+1} \approx \bar{f}_{i,j}^n - \frac{\Delta t y_j}{2\Delta x} \sum_{k=1}^K \omega_k \left[ f(t^n, (x_{i+1/2}, y_j)^{*k}) - f(t^n, (x_{i-1/2}, y_j)^{*k}) \right] \\ - \frac{\Delta t E(t^{n+1/2}, x_i)}{2\Delta v} \sum_{k=1}^K \omega_k \left[ f(t^n, (x_i, y_{j+1/2})^k) - f(t^n, (x_i, y_{j-1/2})^k) \right]. \end{aligned}$$

**Prediction de  $E(t^{n+1/2})$ .** Le champ électrique  $E(t^{n+1/2})$  est approché par une prédiction : on calcule  $\bar{f}_{i,j}^{n+1/2}$  en utilisant le schéma avec  $\Delta t/2$  au lieu de  $\Delta t$  et on considère le champ électrique en utilisant la densité de charges au temps  $t^n$ . Cela permet de calculer la densité

de charges et ainsi l'approximation de  $E(t^{n+1/2})$  en utilisant  $\bar{f}_{i,j}^{n+1/2}$ , qui sert dans l'étape de "correction".

**Calcul des caracteristiques** Un schéma de Verlet est utilisé pour le calcul des caractéristiques; ainsi, en écrivant  $(X^{n+1}, Y^{n+1}) = (x_{i+1/2}, y_j)$  et  $(X^n, Y^n) = (x_{i+1/2}, y_j)^{*k}$ , on a

$$\begin{cases} X^{n+1/2} = X^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} Y^{n+1} \\ Y^n = Y^{n+1} - \Delta t E(X^{n+1/2}) \\ X^n = X^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} Y^n, \end{cases}$$

où  $E$  correspond soit à  $E(t^n)$  (étape de prediction) ou à  $E(t^{n+1/2})$  (étape de correction).

## Reconstruction 2D

La reconstruction 2D effectuée ici consiste en un produit tensoriel de reconstructions 1D.

**Remarque 4.2.4.** *On a constaté que toutes les méthodes PPM sont instables dans le cas bidimensionnel. Réalisons une analyse de Von Neumann pour  $a_x = 1, a_y = 0$  et une constante CFL valant  $A = \Delta t / \Delta x$ . On utilise la condition initiale  $\exp(ik_x x) \exp(ik_y y)$ . En choisissant  $k_x = \pi/6$  et  $k_y = 4\pi/6$ , on trouve que le facteur d'amplification  $h_{k_x, k_y}$  vérifie la formule suivante*

$$1 - |h_{\pi/6, 4\pi/6}|^2 = \begin{cases} \left( \frac{16335}{4096} \sqrt{3} - \frac{14157}{2048} \right) A^6 + \left( \frac{14157}{512} - \frac{16335}{1024} \sqrt{3} \right) A^5 + \left( -\frac{13915}{512} + \frac{16093}{1024} \sqrt{3} \right) A^4 \\ + \left( \frac{649}{256} \sqrt{3} - \frac{583}{128} \right) A^3 + \left( -\frac{33}{8} \sqrt{3} + \frac{1815}{256} \right) A^2, & (\text{cas PPM } 0), \\ \left( \frac{188307}{32768} + \frac{217413}{65536} \sqrt{3} \right) A^6 + \left( -\frac{217413}{16384} \sqrt{3} + \frac{188307}{8192} \right) A^5 + \left( \frac{213591}{16384} \sqrt{3} - \frac{184975}{8192} \right) A^4 \\ + \left( -\frac{4193}{1024} + \frac{9639}{4096} \sqrt{3} \right) A^3 + \left( \frac{25389}{4096} - \frac{931}{256} \sqrt{3} \right) A^2, & (\text{cas PPM } 1), \\ \left( -\frac{25861743}{5120000} + \frac{746487}{256000} \sqrt{3} \right) A^6 + \left( \frac{25861743}{1280000} - \frac{746487}{64000} \sqrt{3} \right) A^5 + \left( -\frac{25517833}{1280000} + \frac{3682727}{320000} \sqrt{3} \right) A^4 \\ + \left( \frac{166379}{80000} \sqrt{3} - \frac{231251}{64000} \right) A^3 + \left( -\frac{1040553}{320000} \sqrt{3} + \frac{887043}{160000} \right) A^2, & (\text{cas PPM } 2). \end{cases}$$

Puisque le terme dominant dans  $A^2$  est toujours négatif, il existe  $A_0 > 0$  tel que pour  $0 < A < A_0$ , la méthode est instable. Il est à noter qu'un tel phénomène ne se produit pas dans le cas unidimensionnel.

### 4.3 Liens et comparaisons entre volumes finis et schémas semi-lagrangiens

On établit tout d'abord la relation (4.2.9), qui fait le lien entre les volumes finis et la formulation semi-lagrangienne du flux. Ce résultat, valable pour un champ quelconque  $a(t, x)$ , a été prouvé dans [46] par exemple, en utilisant le théorème de la divergence. On donne ici une nouvelle preuve.

**Proposition 4.3.1.** *On a*

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(t, x_{i+1/2}) f(t, x_{i+1/2}) dt = \int_{x_{i+1/2}^*}^{x_{i+1/2}} f(t_n, y) dy,$$

avec

$$\partial_t f(t, x) + \partial_x(a(t, x) f(t, x)) = 0, \quad X'(t) = a(t, X(t)), \quad X(t_{n+1}) = x_{i+1/2}, \quad X(t_n) = x_{i+1/2}^*.$$

DÉMONSTRATION. On écrit  $X(t, s, x)$  la caractéristique satisfaisant

$$\partial_t X(t, s, x) = a(t, X(t, s, x)), \quad X(s, s, x) = x.$$

On a tout d'abord, d'après [29]

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(t, x_{i+1/2}) f(t, x_{i+1/2}) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(t, x_{i+1/2}) f(t_n, X(t_n, t, x_{i+1/2})) \partial_x X(t_n, t, x_{i+1/2}) dt.$$

On fait ensuite le changement de variable  $y = X(t_n, t, x_{i+1/2})$ , de manière à transformer l'intégrale en temps en intégrale en espace. Il faut remarquer que l'on a

$$X(t_n, t', X(t', t, x_{i+1/2})) = X(t_n, t, x_{i+1/2}), \quad \forall t',$$

ce qui signifie que cette quantité ne dépend pas de  $t'$ . La dérivée par rapport à  $t'$  est donc nulle, d'où

$$\partial_s X(t_n, t', X(t', t, x_{i+1/2})) + \partial_t X(t', t, x_{i+1/2}) \partial_x X(t_n, t', X(t', t, x_{i+1/2})) = 0,$$

soit

$$\partial_s X(t_n, t', X(t', t, x_{i+1/2})) = -a(t, X(t', t, x_{i+1/2})) \partial_x X(t_n, t', X(t', t, x_{i+1/2})).$$

En choisissant  $t' = t$ , on obtient

$$\partial_s X(t_n, t, x_{i+1/2}) = -a(t, x_{i+1/2}) \partial_x X(t_n, t, x_{i+1/2}),$$

et par conséquent  $dy = -a(t, x_{i+1/2}) \partial_x X(t_n, t, x_{i+1/2}) dt$ . Comme l'on a  $X(t_n, t_n, x_{i+1/2}) = x_{i+1/2}$  et  $X(t_n, t_{n+1}, x_{i+1/2}) = x_{i+1/2}^*$ , on obtient

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(t, x_{i+1/2}) f(t, x_{i+1/2}) dt = - \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2}^*} f(t_n, y) dy,$$

d'où le résultat. On peut lire [8] pour de tels calculs sur les caractéristiques. □

### Intégrateur exponentiel

Etablissons maintenant un lien entre le système d'équations aux dérivées partielles découlant de la formulation par volumes finis (Section 4.1) et le schéma semi-lagrangien (la limite où le nombre de points de Gauss tend vers l'infini de la Section 4.2) pour une discrétisation en espace.

On considère le problème d'advection constant. On a alors la proposition suivante

**Proposition 4.3.2.** *Considérons le schéma semi-lagrangien avec une reconstruction de type*

LAG  $2d + 1$  appliqué  $M$  fois avec le pas de temps  $\Delta t/M$ , ce qui peut être écrit sous la forme

$$(f_j^{n+1,M})_{j=0,\dots,N-1} = \prod_{k=1}^M \mathcal{T}_{\Delta t/M}(f_j^{n,M})_{j=0,\dots,N-1}.$$

On a alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f_j^{n,M} = \bar{f}_j(t_n), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

où  $(\bar{f}_j)_{j=0,\dots,N-1}$  résout (4.1.2) en choisissant l'approximation "upwind" UP- $2d + 1$  (2.4.29) avec  $s = -r = d$  (pour  $a > 0$ ).

DÉMONSTRATION. Considérons tout d'abord le système semi-discret de la méthode par volumes finis, on a

$$\frac{d\bar{f}_i}{dt} = -a(\bar{f}_{i+1/2} - \bar{f}_{i-1/2}), \quad a > 0,$$

où les flux sont approchés par un schéma "upwind"  $f(t, x_{i+1/2}) \approx \sum_{j=-d}^d a_j \bar{f}_{i+j}(t)$  les coefficients satisfaisant

$$\frac{1}{2^k} = \sum_{j=-d}^d a_j \int_{j-1/2}^{j+1/2} x^k dx, \quad k = 0, \dots, 2d.$$

La solution du système d'EDOs (intégrateur exponentiel) peut être vue comme une approximation d'Euler en temps avec le pas de temps  $\Delta/M$  en regardant à la limite  $M \rightarrow +\infty$ .

Ceci peut être réalisé facilement grâce à une analyse de Von Neumann.

En effet, la relation  $f_{i+1/2} = \sum_{j=-d}^d c_j \bar{f}_{i+j}^n$  donne  $(\hat{f}_{i+1/2})_k = \sum_{j=-d}^d c_j \hat{f}_k^n e^{Bkj\Delta x}$  et

$$(\hat{f}^{n+1})_k = \hat{f}_k^n \left( 1 - \nu \left( \sum_{j=-d}^d c_j (e^{Bjk\Delta x} - e^{B(j-1)k\Delta x}) \right) \right) = \hat{f}_k^n (1 - \nu h(k)),$$

où  $\nu = a\Delta t/(M\Delta x)$  et  $h(k)$  représente la transformation de Fourier des flux.

On a ensuite

$$\begin{aligned}
\lim_{M \rightarrow +\infty} (1 - \nu h(k))^M &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \exp(M \ln(1 - \nu h(k))) \\
&= \lim_{M \rightarrow +\infty} \exp(-M \nu h(k)) \\
&= \exp(-a \Delta t / \Delta x h(k)).
\end{aligned}$$

On observe alors que l'intégrateur est donné par l'exponentielle de  $-a \Delta t / \Delta x$  en facteur de la transformée de Fourier des flux.

Parallèlement, on considère la méthode semi-lagrangienne

$$\bar{f}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2} - a \Delta t / M}^{x_{i+1/2} - a \Delta t / M} f(t^n, x) dx,$$

où  $f(t^n, x)$  est reconstruit par une fonction polynomiale  $p_i$  de degré  $2d$  satisfaisant les contraintes

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2} + j}^{x_{i+1/2} + j} p_i(x) dx = \bar{f}_{i+j}^n = \frac{1}{\Delta x} (P_i(x_{i+1/2} + j) - P_i(x_{i-1/2} + j)), \quad j = -d, \dots, d,$$

avec  $P_i$  représentant une primitive de  $p_i$ . Ainsi, le schéma numérique s'écrit également, en termes de  $P_i$

$$\bar{f}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} (P_i(x_{i+1/2} - a \Delta t / M) - P_i(x_{i-1/2} - a \Delta t / M)),$$

où l'on a supposé  $a > 0$  et  $a \Delta t / M < \Delta x$ . Grâce à un développement de Taylor de  $P_i(x_{i+1/2} - a \Delta t / M)$ , on obtient

$$\bar{f}_i^{n+1} = \bar{f}_i^n - \nu (p_i(x_{i+1/2}) - p_i(x_{i-1/2})) + O(\nu^2),$$

avec  $\nu = a \Delta t / (M \Delta x)$ . Une analyse de Von Neuman donne

$(\widehat{f}^{n+1})_k = (\widehat{f}^n)_k (1 - \nu h(k) + O(\nu^2))$  où  $h(k) \widehat{f}_k^n$  représente la transformée de Fourier de

$[p_i(x_{i+1/2}) - p_i(x_{i-1/2})]$ . Ainsi, en considérant la limite  $M \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} (1 - \nu h(k) + O(\nu^2))^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \exp(M \ln(1 - \nu h(k) + O(\nu^2))) = \exp(-a\Delta t/\Delta x h(k)).$$

Il est donc suffisant de prouver que  $p_i(x_{i+1/2})$  (dans la méthode conservative) est égal à l'approximation de  $f(x_{i+1/2})$  (dans la méthode par volumes finis). La quantité  $p_i(x_{i+1/2})$  peut être écrite comme  $p_i(x_{i+1/2}) = \sum_{j=-d}^d a_j \bar{f}_{i+j}^n$ , où  $a_j$  satisfait le système de Vandermonde, qui correspond bien à l'approximation des flux  $f(x_{i+1/2})$  obtenue dans la méthode par volumes finis. □

**Remarque 4.3.1.** *Une correspondance similaire peut être établie pour les schémas aux différences centrées (CD). En particulier, les analogues de CD2, CD4 et CD6 sont PPM 0, PPM 1 et PPM 2 respectivement.*

**Remarque 4.3.2.** *Pour les schémas semi-lagrangiens, on peut également utiliser les approximations upwind dans la reconstruction au lieu des reconstructions PPM :*

$$P_i(x_{i-\frac{1}{2}} + \alpha\Delta x) = (3\alpha^2 - 4\alpha + 1)f_{(i-\frac{1}{2})+}^n + (3\alpha^2 - 2\alpha)f_{(i+\frac{1}{2})-}^n + (6\alpha - 6\alpha^2)\bar{f}_i^n \quad \alpha \in [0, 1],$$

où  $f_{(i+1/2)+}^n$  (resp.  $f_{(i+1/2)-}^n$ ) sont reconstruits en utilisant (2.4.29) avec  $s = d + 1, r = -d + 1$  (resp.  $s = -r = d$ ). Dans le cas  $d = 0, 1$ , le schéma est équivalent à LAG  $2d + 1$ . Pour des  $d$  supérieurs, il n'est pas équivalent à LAG  $2d + 1$  (puisque la reconstruction est encore de degré trois, donc différent de celui de LAG  $2d + 1$ ). Cependant, la limite de l' "intégrateur exponentiel" (comme définie dans la Proposition 4.3.2) le sera. En particulier, on peut obtenir un meilleur ordre de précision à la limite (voir également [11]).

**Remarque 4.3.3.** *On peut vérifier que les schémas "CD" préservent exactement la norme  $L^2$  discrète  $\sum_{j=0}^{N-1} |f_j(t)|^2$ . Par contre, les schéma upwind font décroître la norme  $L^2$  : on*

peut vérifier que

$$\sum_{j=-d}^d a_j (\cos(j\omega) - \cos((j-1)\omega)) \geq 0, 0 \leq \omega \leq 2\pi,$$

pour  $d = 3$  par exemple, et cette relation reste vraie par la stabilité du schéma LAG  $2d + 1$ , pour tout  $d \in \mathbb{N}$ . La conservation de la norme  $L^2$  qui est à première vue une bonne propriété n'est pas si satisfaisante, car cela peut en conduire à des oscillations non désirées. À l'inverse, la petite dissipation obtenue avec une approximation upwind d'ordre élevé des dérivées semble meilleure au régime limite. Le lecteur pourra également consulter [26], pour une discussion concernant les schémas d'interpolation de degrés pairs et impairs. Il faut remarquer que c'est un point clé dans [3]; ici, un schéma non linéaire est considéré : une approximation centrale est utilisée où la solution est lisse et une approximation upwind d'un degré inférieur est utilisée lorsque la solution n'est pas lisse. On peut également remarquer que lorsque des pas de temps relativement grands sont utilisés, la norme  $L^2$  décroît généralement pour un schéma semi-lagrangien avec reconstruction centrée des dérivées (par exemple splines cubiques, PPM) et cela peut empêcher les oscillations non désirées qui sont observées dans le cas volumes finis.

**Remarque 4.3.4.** On peut s'interroger quant à l'existence d'une discrétisation temporelle du schéma à volumes finis de sorte qu'il coïncide avec le schéma semi-lagrangien, au moins pour  $|a|\Delta t \leq \Delta x$ . Ceci peut être réalisé par une procédure de Cauchy-Kovalevsky [48], comme mentionné dans [26].

**Remarque 4.3.5.** On n'a pas indiqué comment calculer la donnée initiale  $\bar{f}_j^0$ ,  $j = 0, \dots, N-1$ .

Puisque l'on travaille avec des volumes finis, un choix naturel serait d'utiliser

$$\bar{f}_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(0, x) dx.$$

Cependant, avec un tel choix, on perd l'approximation d'ordre élevé. On va donc utiliser à



la place l'approximation du point-milieu

$$\bar{f}_j^0 = f(0, x_j),$$

qui mène à une précision d'ordre élevé, puisque, dans le contexte semi-lagrangien, le schéma est alors équivalent au schéma semi-lagrangien ponctuel, comme il est mentionné dans [23]. Dans [45], les auteurs classent ce type de méthodes dans les schémas semi-lagrangiens aux différences finies (et non aux volumes finis) et présentent ce type de schémas en introduisant une fonction  $h$  satisfaisant

$$f(t_n, x_j) \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h(t_n, x) dx,$$

qui est ensuite mise à jour in d'une manière "volumes finis". Il faut souligner que l'équivalence vaut uniquement dans le cas de l'advection constante. Voir [45] pour des détails et d'autres reconstructions similaires, dans le contexte WENO.

## 4.4 Résultats numériques

On s'intéresse maintenant aux résultats numériques des différents schémas présentés supra. On s'intéresse aux cas-tests Vlasov-Poisson. Les résultats seront comparés à des méthodes semi-lagrangiennes de référence "Lag3" et "Lag5" (voir [29, 23] pour plus de détails).

Dans le cas de la méthode VFSL2, on va considérer le cas de deux points de Gauss points en temps et un algorithme de Verlet pour la recherche des pieds des caractéristiques. La reconstruction est réalisée pour les cas Lagrange 3 et 5. Deux versions sont ensuite envisagées : avec ou sans splitting. Ces méthodes seront appelées Vfsl3 et Vfsl5 pour l'approche avec splitting, et Vfsl3-ns, Vfsl5-ns pour la version non splittée. Quelques résultats seront également présentés en utilisant une reconstruction de type PPM 1 avec splitting.

Pour la méthode des points de Gauss, on présente les résultats dans les cas CD4 et UP5

avec une intégration temporelle de type RK4. Il faut remarquer que pour nos cas-tests, le dernier terme de la Proposition 4.1.1 influence peu les résultats numériques.

Deux cas-tests sont étudiés, le "Bump on tail" (BOT) (voir [50]), et l'instabilité double faisceaux (TSI) (voir [23]).

#### 4.4.1 Bump on tail

La condition initiale s'écrit

$$f_0(x, y) = \left( \frac{9}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + \frac{2}{10\sqrt{2\pi}} \exp(-2(y - 4.5)^2) \right) (1 + 0.03 \cos(0.3x)), \quad (4.4.12)$$

avec  $(x, y) \in [0, L] \times [-9, 9]$  et  $L = 20\pi$ .

On considère les paramètres numériques suivants :  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.01$ . Le modèle Vlasov-Poisson préserve certaines quantités physiques au cours du temps qui vont être utilisées pour comparer les différents modèles. Tout d'abord, on observe l'évolution au cours du temps des normes  $L^p$  de  $f$  ( $p = 1, 2$ ), et également l'énergie totale  $\mathcal{E}$  du système, qui est la somme de l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_k$  et de l'énergie électrique  $\mathcal{E}_e$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_k(t) + \mathcal{E}_e(t) = \int_0^L \int_{\mathbb{R}} f(t, x, y) \frac{y^2}{2} dy dx + \frac{1}{2} \int_0^L E^2(t, x) dx.$$

Sur la Figure 4.3, on représente l'évolution temporelle de l'énergie électrique. Tout d'abord, on peut remarquer l'assez bon comportement de toutes les méthodes pour ce diagnostic. L'énergie électrique augmente au départ (phase linéaire) et présente un comportement oscillatoire aux temps longs. Cela fait référence à un équilibre de type BGK composé de trois sommets qui bougent à la vitesse initiale  $y_t = 4.5$  de la "bosse". On remarque également le fait que up5, Lag5 et Vfl5 sont très similaires. En effet, Vfl5 et Lag5 ont la même reconstruction ; pour up5 et Lag5, le lien a été mis en évidence dans la Proposition 4.3.2. Bien

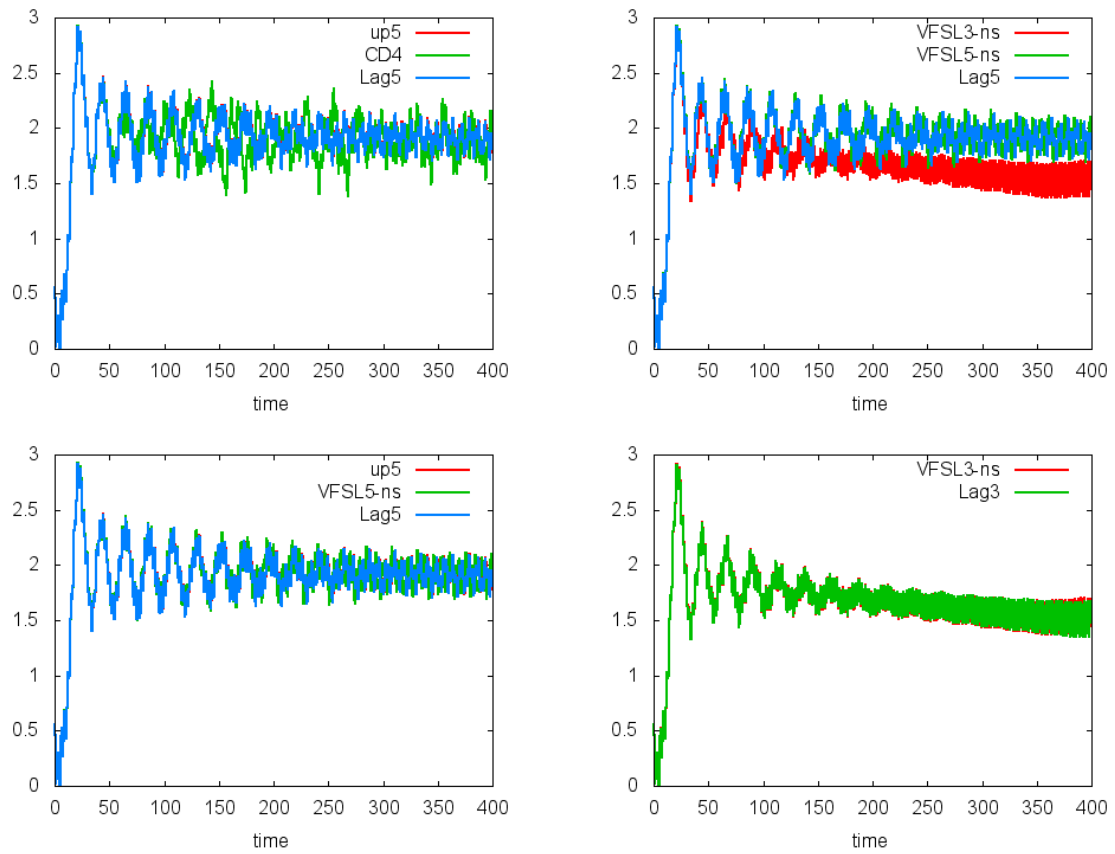


FIGURE 4.3: Cas-test Bump On Tail : évolution temporelle de l'énergie électrique pour les méthodes de type "Banks" (CD4 et up5), pour les méthodes VfsL non splittées (VfsL3-ns et VfsL5-ns) et pour la méthode semi-lagrangienne (Lag5).  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.01$ .

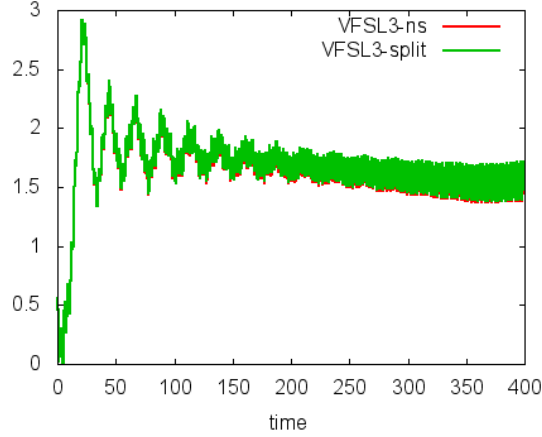


FIGURE 4.4: Cas-test Bump On Tail : évolution temporelle de l'énergie électrique pour les méthodes VfsL (méthodes VfsL non splittées (VfsL3-ns et VfsL5-ns) et méthode semi-lagrangienne Lag5.  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.01$ .

entendu, cela reste vrai pour les méthode de reconstruction d'ordre trois VfsL3-ns et Lag3.

Remarquons également le comportement diffusif des méthodes d'ordre trois (VfsL3-ns et Lag3) qui a été mis en évidence dans in [23] ; quand de petites structures se développent, elles sont éliminées plus rapidement que lorsqu'une reconstruction d'ordre supérieur est employée (des méthodes de type Lagrange 5 telles que up5, Lag5, VfsL5-ns). Ainsi, le comportement en temps long de l'énergie électrique est meilleur.

Sur la Figure 4.4, on compare les versions splittée et non splittée de VfsL3. On peut observer que les deux versions sont très similaires, ce qui valide notre approche. En effet, dans le contexte Vlasov-Poisson, la procédure de splitting peut être utilisée et considérée comme une solution de référence. Une figure similaire est obtenue pour VfsL5.

Sur la Figure 4.5, on représente l'évolution temporelle de l'énergie totale pour les différentes méthodes. Hormis le cas des méthodes de type Lagrange 3, on constate que cette quantité est très bien préservée. Il faut remarquer que cette conservation est assez difficile à obtenir et que l'emploi de reconstructions d'ordre élevé permet d'obtenir un bon comportement de l'énergie totale.

Sur la Figure 4.6, on s'intéresse à l'évolution temporelle de la norme  $L^2$ . On observe que la méthode CD4 préserve très bien la norme  $L^2$ , alors que dans les autres cas, cette quantité

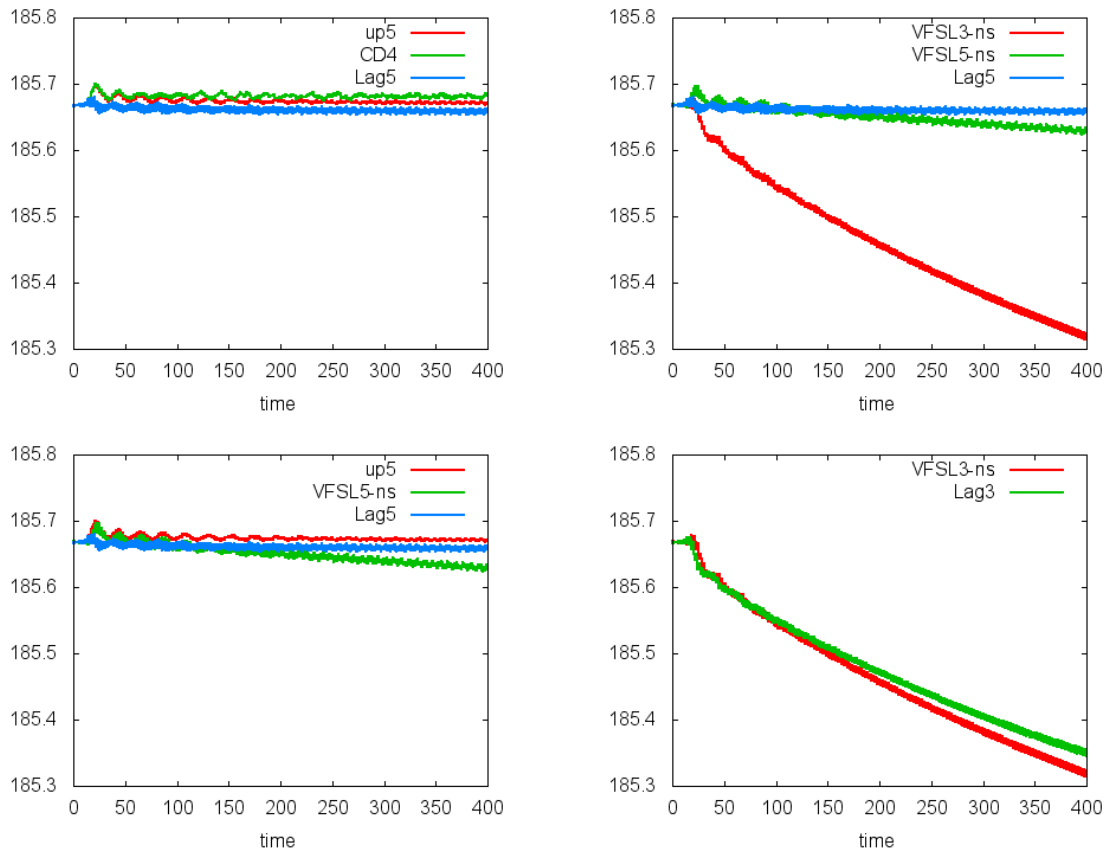


FIGURE 4.5: Cas-test Bump On Tail : évolution temporelle de l'énergie totale pour les méthodes de type "Banks" (CD4 et up5), pour les méthodes Vfl non splittées (Vfl3-ns et Vfl5-ns) et pour les méthodes semi-lagrangiennes Lag3 et Lag5.  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.01$ .

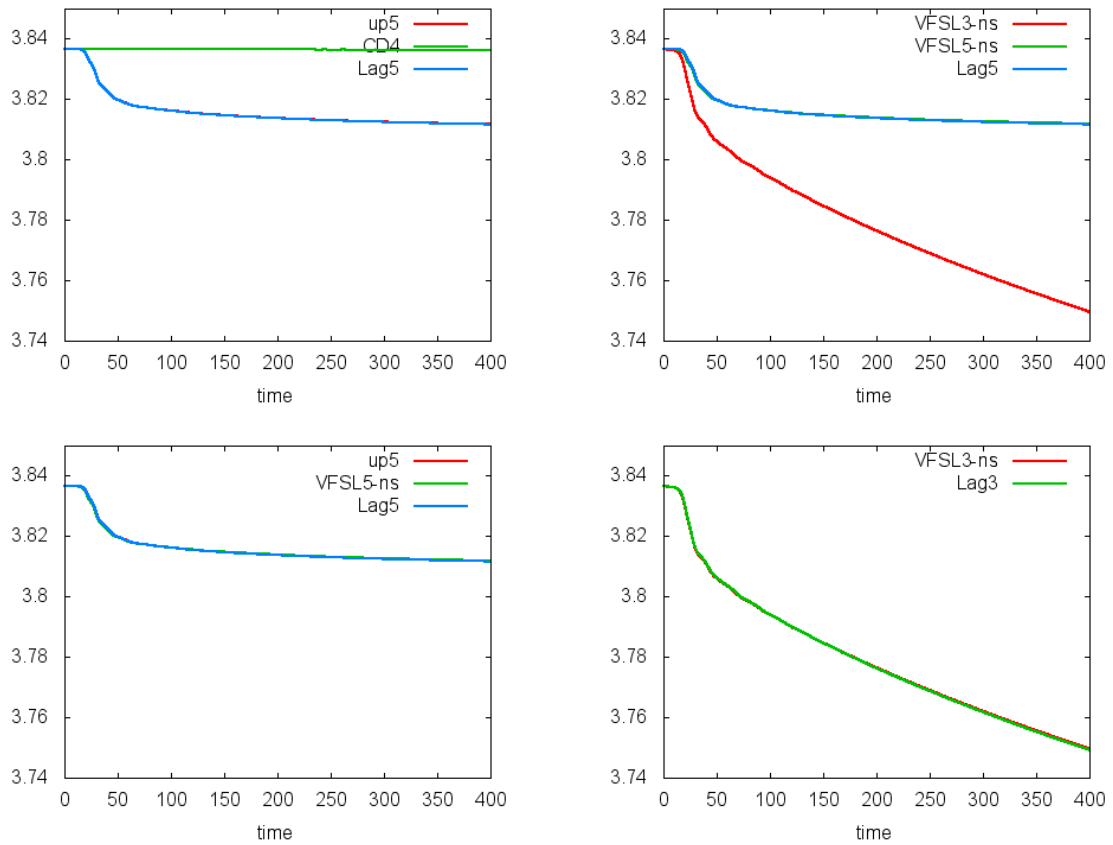


FIGURE 4.6: Cas-test Bump On Tail : évolution temporelle de la norme  $L^2$  pour les méthodes de type "Banks" (CD4 et up5), pour les méthodes VfsL non splittées (Vfsl3-ns et Vfsl5-ns) et pour les méthodes semi-lagrangiennes Lag3 et Lag5.  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.01$ .

décroit avec le temps. Pour les méthodes de type Lagrange 5, après la décroissance qui se produit aux alentours de  $t = 50$  (qui correspond à la création de structures plus petites que la taille de la grille qui sont ainsi éliminées), on peut observer que la norme  $L^2$  est pratiquement constante, ce qui n'est pas le cas des méthodes de type Lagrange 3. Ceci motive également l'utilisation de reconstructions d'ordre élevé.

Sur la Figure 4.7, on peut voir l'évolution de la norme  $L^1$ . On observe ici une tendance contraire à celle des diagnostics précédents : CD4 présente un comportement assez mauvais en ce qui concerne la positivité, en comparaison des autres méthodes. En effet, comme il est mentionné dans [3], CD4 présente des oscillations qui ne peuvent pas être détectées par le diagnostic de la norme  $L^2$ , mais qui sont amplifiées dans le cas de la norme  $L^1$ . On peut

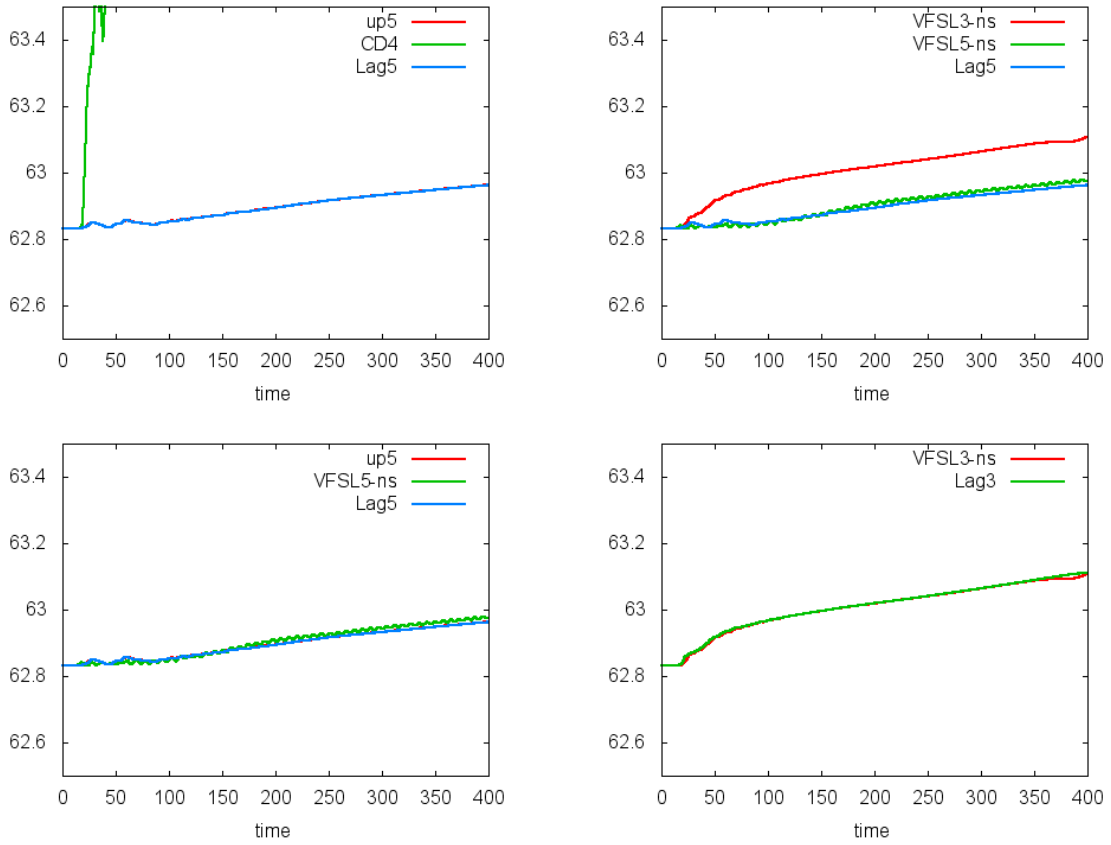


FIGURE 4.7: Cas-test Bump On Tail : évolution temporelle de la norme  $L^1$  pour les méthodes de type "Banks" (CD4 et up5), pour les méthodes VfsL non splittées (VfsL3-ns et VfsL5-ns) et pour les méthodes semi-lagrangiennes Lag3 et Lag5.  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.01$ .

également observer les résultats des méthodes up5, VfsL5-ns et Lag5 qui sont très proches.

#### 4.4.2 Instabilité double faisceaux (TSI)

La condition initiale est donnée par

$$f_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) (1 + 0.05 \cos(0.5x)), \quad (x, y) \in [0, L] \times [-9, 9],$$

avec  $L = 4\pi$ .

On considère les paramètres numériques suivants :  $N_x = N_y = 128$  et  $\Delta t = 0.005$ . On présente ici des diagnostics 2D de la fonction de distribution complète.

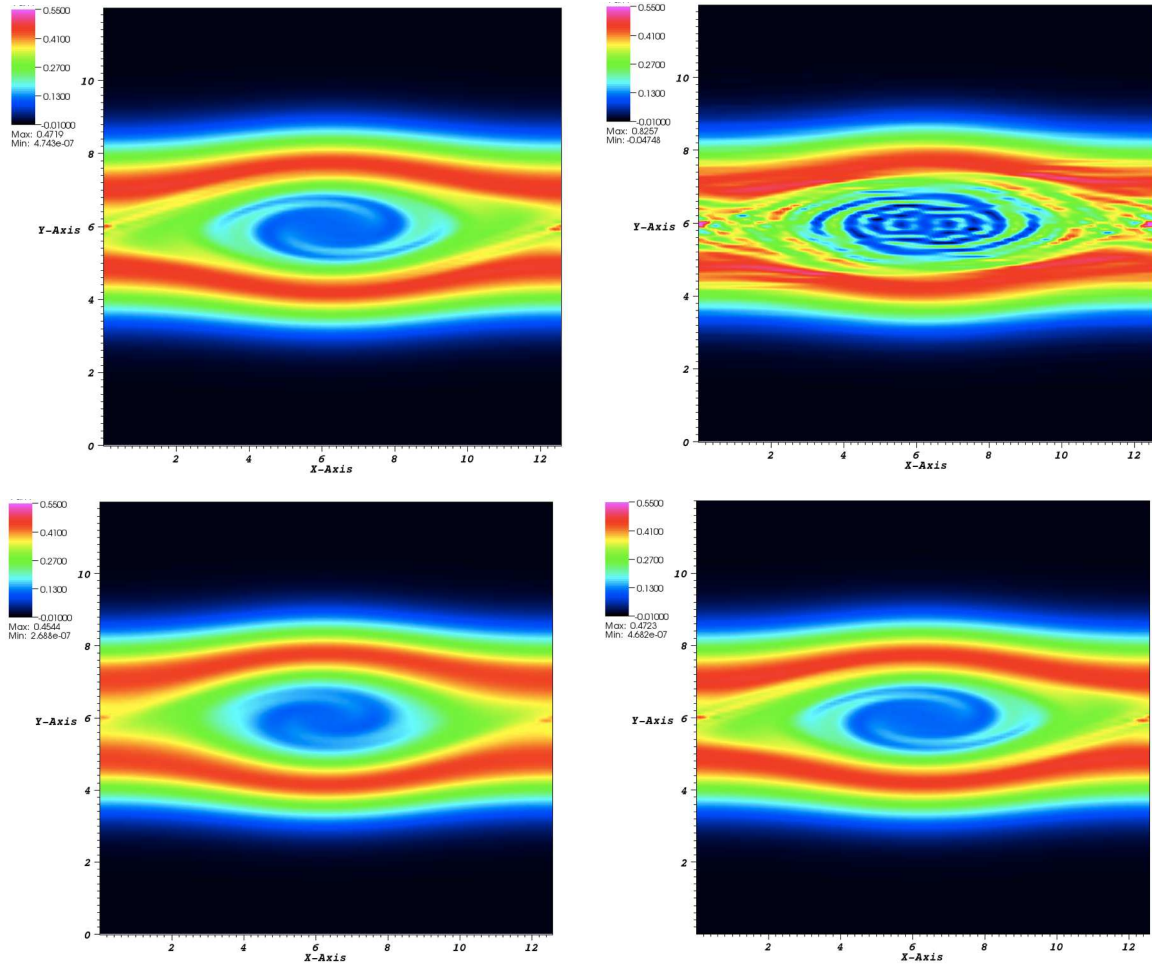


FIGURE 4.8: Cas-test instabilité double faisceaux : fonction de distribution en fonction de  $x$  et de  $y$  au temps  $t = 53$  pour (du haut en bas et de gauche à droite) : up5, CD4, Vfl3-ns, Vfl5-ns.  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.005$ .

Les résultats exposés Figure 4.8 confirment les observations des cas-test précédents. En effet, CD4 présente beaucoup d'oscillations, ce qui induit une mauvaise qualité. De plus, l'utilisation d'une reconstruction d'ordre trois (telle que Vfl3-ns) conduit à une solution très lisse ; lorsque celle-ci est comparée à une solution de référence (présentée sur la Figure 4.9), on constate que les détails ont été éliminés. Lorsque l'on utilise un ordre supérieur (tel que pour up5 ou Vfl5-ns), de petite structures supplémentaires sont représentées. Sur les Figures 4.10 et 4.11, on observe à nouveau les liens entre LAG 3 et up3, LAG 5 et up5 et aussi CD4 et PPM 1 pour de petits  $\Delta t$  comme expliqué dans la Remarque 4.3.1. En particulier, les "mauvaises" oscillations de la reconstruction centrée PPM 1 sont accentuées lorsque de



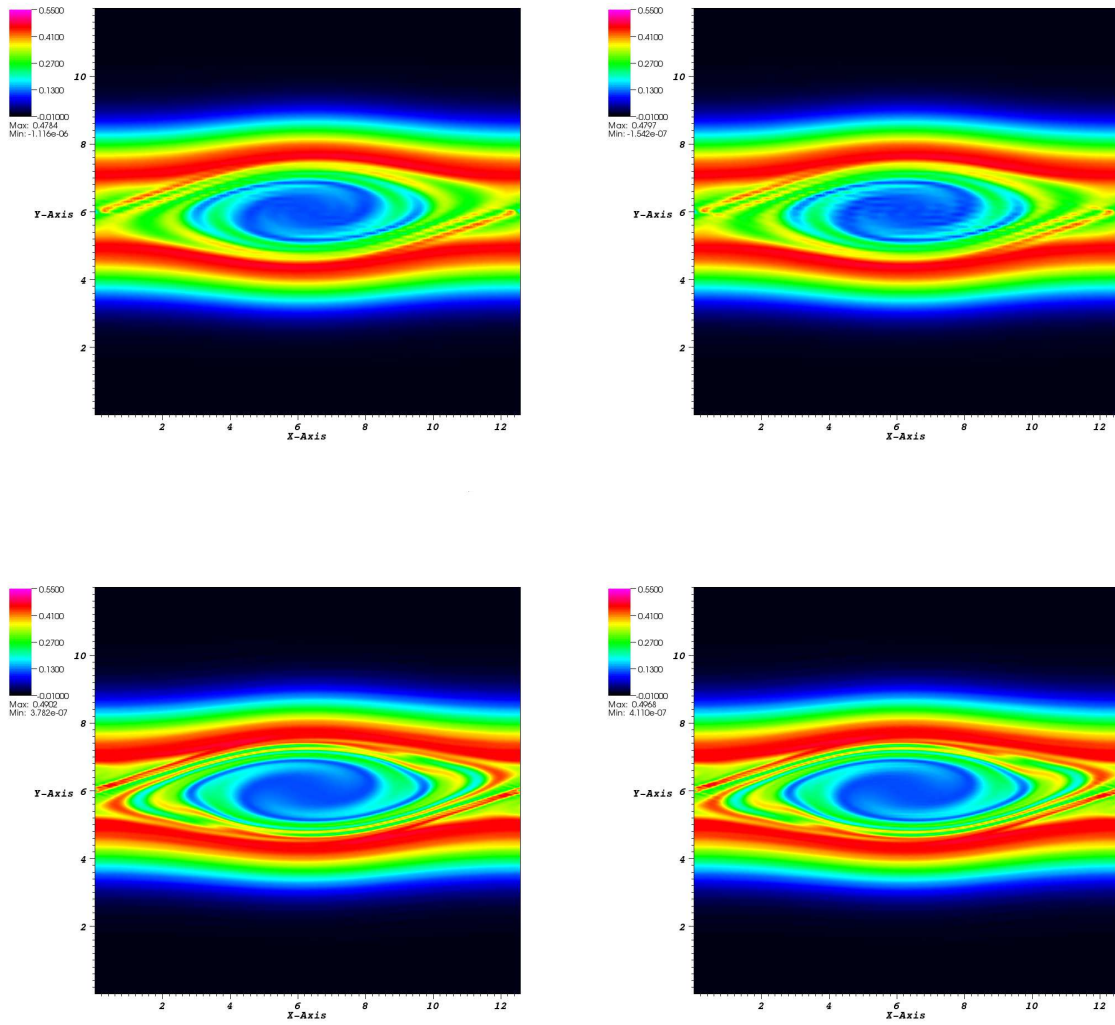


FIGURE 4.9: Cas-test instabilité double faisceaux : fonction de distribution en fonction de  $x$  et de  $y$  au temps  $t = 53$  pour une méthode semi-lagrangienne avec une reconstruction de Lagrange d'ordre 17 avec  $\Delta t = 0.1$  (gauche),  $\Delta t = 0.005$  (droite), and  $N_x = N_y = 128$  (haut),  $N_x = N_y = 256$  (bas).

(très) petits pas de temps sont utilisés, alors que les reconstructions décentrées LAG 3 et LAG 5 sont insensibles à la décroissance du pas de temps. Il faut aussi remarquer que la reconstruction PPM 1 se comporte bien lorsque le pas de temps n'est pas trop petit, ce qui est possible pour un schéma semi-lagrangien.

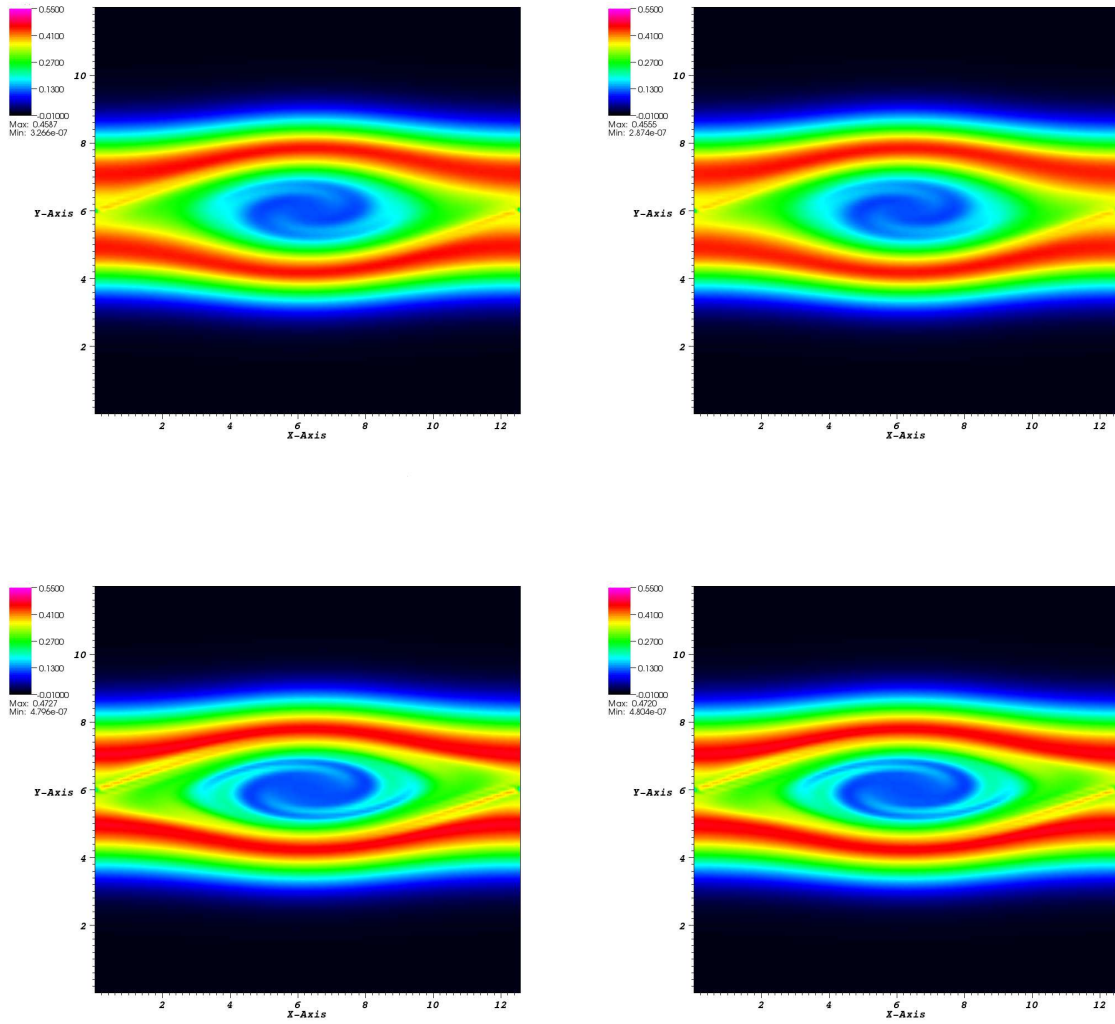


FIGURE 4.10: Cas-test instabilité double faisceaux : fonction de distribution en fonction de  $x$  et de  $y$  au temps  $t = 53$  pour une méthode semi-lagrangienne avec  $N_x = N_y = 128$  et une reconstruction de Lagrange d'ordre 3 (haut), 5 (bas) avec  $\Delta t = 0.1$  (gauche),  $\Delta t = 0.005$  (droite).

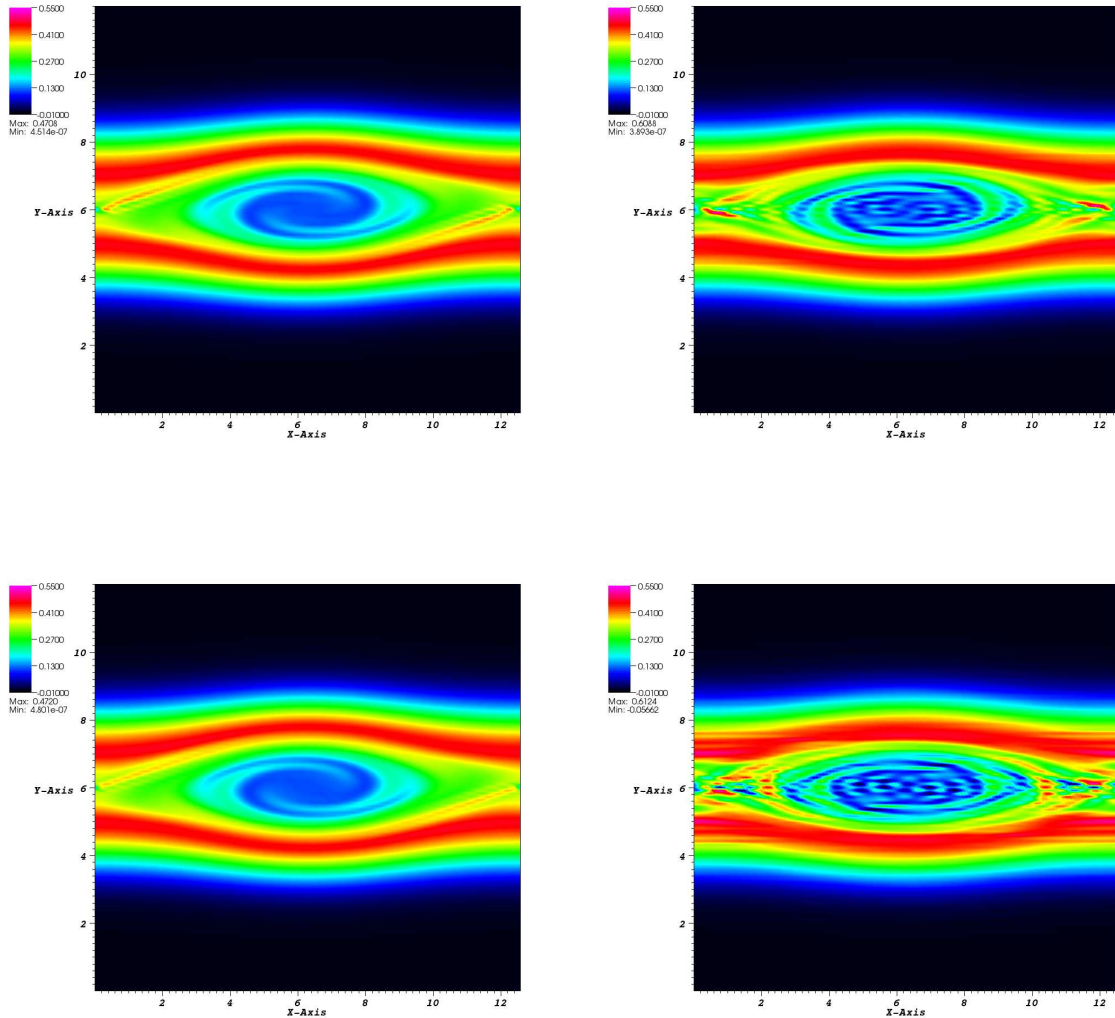


FIGURE 4.11: Cas-test instabilité double faisceaux : fonction de distribution en fonction de  $x$  et de  $y$  au temps  $t = 53$  pour une méthode semi-lagrangienne avec  $N_x = N_y = 128$  et une reconstruction de type PPM 1 avec  $\Delta t = 0.1$  (coin supérieur gauche),  $\Delta t = 0.005$  (coin supérieur droit),  $\Delta t = 0.0001$  (coin inférieur droit), et une reconstruction de Lagrange d'ordre 5 avec  $\Delta t = 0.0001$  (coin inférieur gauche).

# Chapitre 5

## Comparaisons entre méthode de remapping conservative 2D et volumes finis

Dans ce dernier Chapitre, on présente une comparaison entre les différentes méthodes conservatives développées : la méthode semi-lagrangienne du Chapitre 2 et les volumes finis du Chapitre 4. On s'intéresse d'abord à l'aspect numérique des méthodes, puis on abordera la question du temps de calcul.

### 5.1 Comparaisons numériques

On a mis en évidence dans la Section 4.3 les similitudes existant entre méthodes par volumes finis et schémas semi-lagrangiens. Ainsi, comme on l'a vu, les terminologies LAG 1, LAG 3, LAGH 5, ... du Chapitre 2 correspondent aux schémas upwind UP1, UP3, UP5, etc. des volumes finis, alors que les analogues des reconstructions PPM 0, PPM 1, PPM 2, ... sont les schémas centrés CD2, CD4, CD6, etc.. Cette similitude a en outre été confirmée par les résultats numériques de la Section 4.4.

De ce fait, il paraît intéressant de comparer directement les résultats des méthodes par volumes finis (pour lesquels on considérera un schéma en temps RK 4) à ceux obtenus dans le cas de la méthode de remapping conservative du Chapitre 2. On expose ci-dessous ces comparaisons pour les trois cas-tests suivants : Landau non linéaire, Bump On Tail et le Centre-Guide. On garde la même terminologie pour les différentes méthodes que précédemment et on se concentre sur les méthodes par volumes finis de type "Banks".

### Landau non linéaire

Rappelons l'expression de la condition initiale de ce cas-test

$$f(t = 0, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) (1 + 0.5 \cos(0.5x)),$$

considérée sur le domaine  $[0, 4\pi] \times [-6, 6]$  avec  $N_x = N_y = 128$ . On choisit ici un pas de temps  $\Delta t = 0.02$ , car  $\Delta t = 0.1$  mène à une instabilité dans le cas des volumes finis. A ce propos, il est intéressant de noter que le passage du pas de temps  $\Delta t = 0.1$  à  $\Delta t = 0.02$  entraîne des changements relativement importants dans le comportement des normes  $L^1$  et  $L^2$  dans les cas BSL et CSL-PPM. Les reconstructions CSL-LAG quant à elles sont relativement peu sensibles à ce changement.

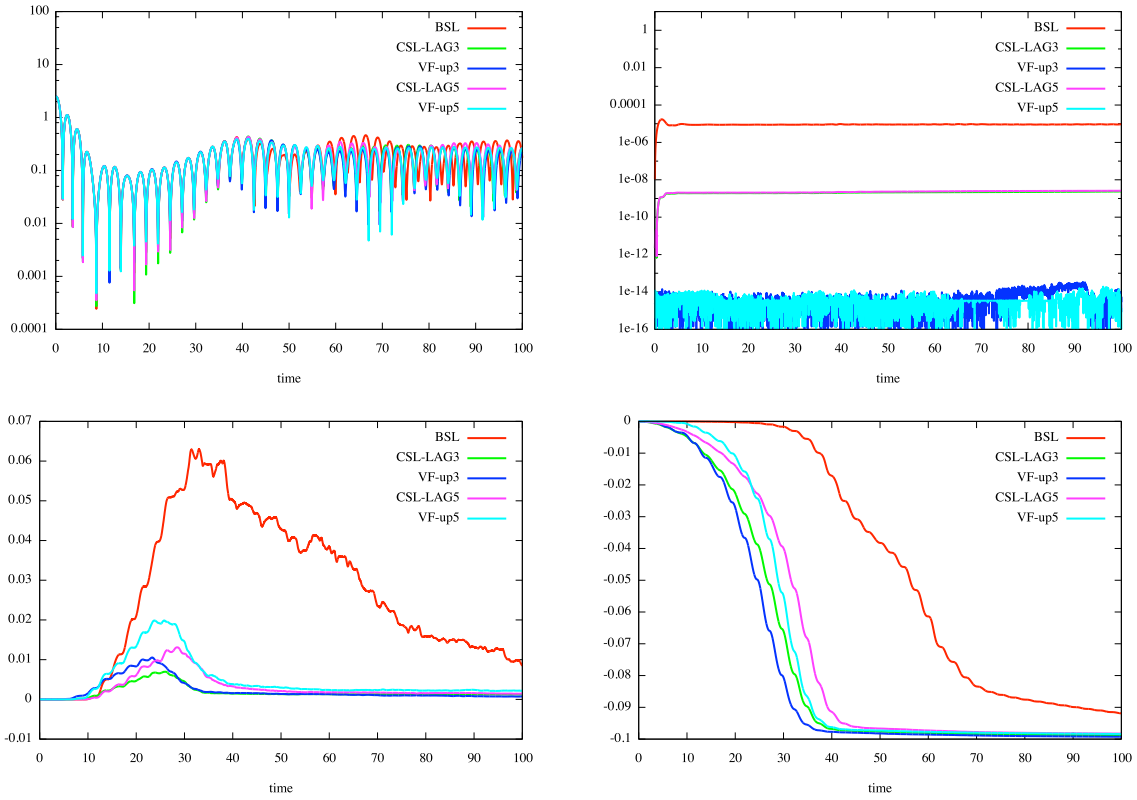


FIGURE 5.1: Comparaison pour le cas-test Landau non linéaire, de la méthode BSL, de la méthode par remapping avec les reconstructions LAG 3 et LAGH 5 et des méthodes par volumes finis de type "Banks" avec les reconstructions up3 et up5. Respectivement de haut en bas et de gauche à droite : énergie électrique, masse totale (en valeur absolue), norme  $L^1$  et norme  $L^2$ .

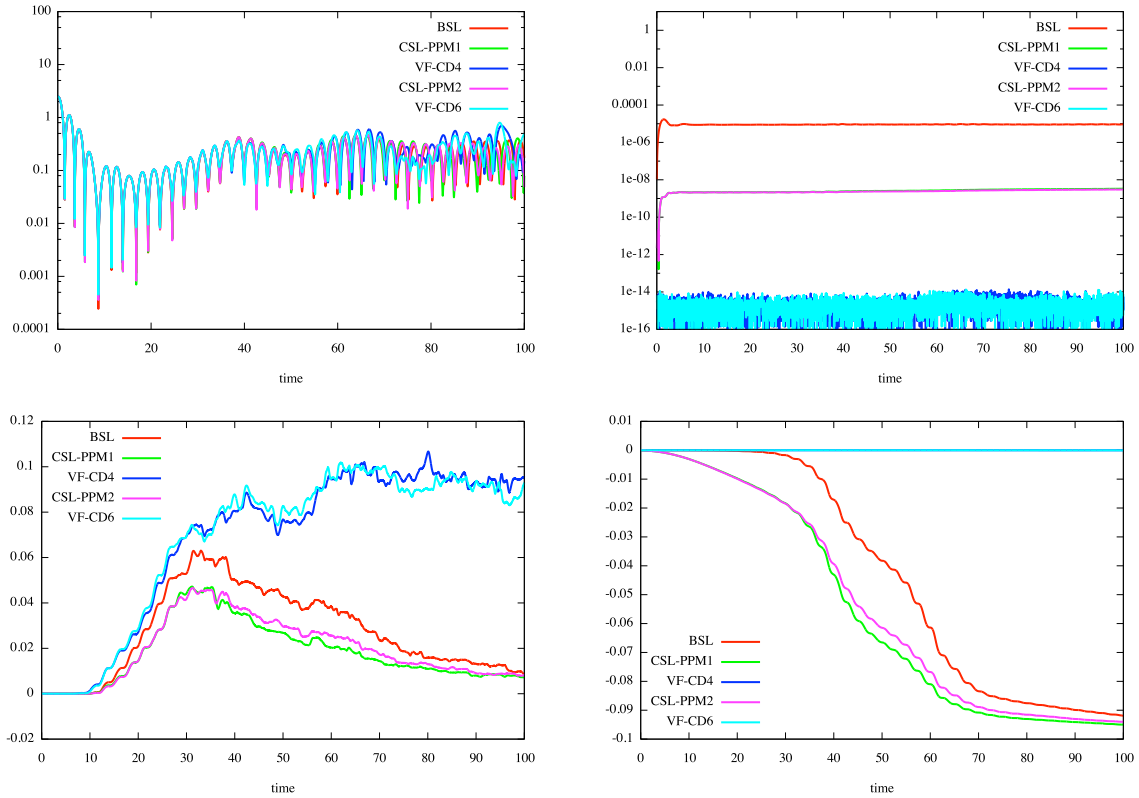


FIGURE 5.2: Comparaison pour le cas-test Landau non linéaire, de la méthode BSL, de la méthode par remapping avec les reconstructions PPM 1 et PPM 2 et des méthodes par volumes finis de type "Banks" avec les reconstructions CD4 et CD6. Respectivement de haut en bas et de gauche à droite : énergie électrique, masse totale (en valeur absolue), norme  $L^1$  et norme  $L^2$ .

Les résultats obtenus sur les Figures 5.1 et 5.2 confirment tout d'abord que toutes les méthodes sont de bonne qualité, puisqu'on n'observe relativement peu de différences dans l'évolution temporelle de l'énergie électrique. Les méthodes CSL sont intermédiaires concernant la conservation de la masse : certes meilleures que BSL (comme on a déjà pu le constater), elles sont moins performantes que les volumes finis pour ce cas-test. Le fait que la masse ne soit pas exactement conservée dans le cas Vlasov-Poisson vient du fait que les conditions ne sont pas périodiques suivant la direction  $y$ . Concernant l'évolution des normes, on retrouve les résultats annoncés dans [3] concernant les schémas centrés : ils présentent beaucoup d'oscillations qui engendrent un mauvais comportement de la norme  $L^1$  bien que la norme  $L^2$

soit exactement conservée. Les schémas upwind sont eux relativement proches des CSL-LAG, sans qu'il y ait une réelle similitude.

### Bump On Tail

On reprend ici la condition initiale (4.4.12) avec les paramètres suivants :  $\Delta t = 0.01$  et  $N_x = N_y = 128$  ( $\Delta t = 0.1$  mène à une instabilité dans le cas des volumes finis).

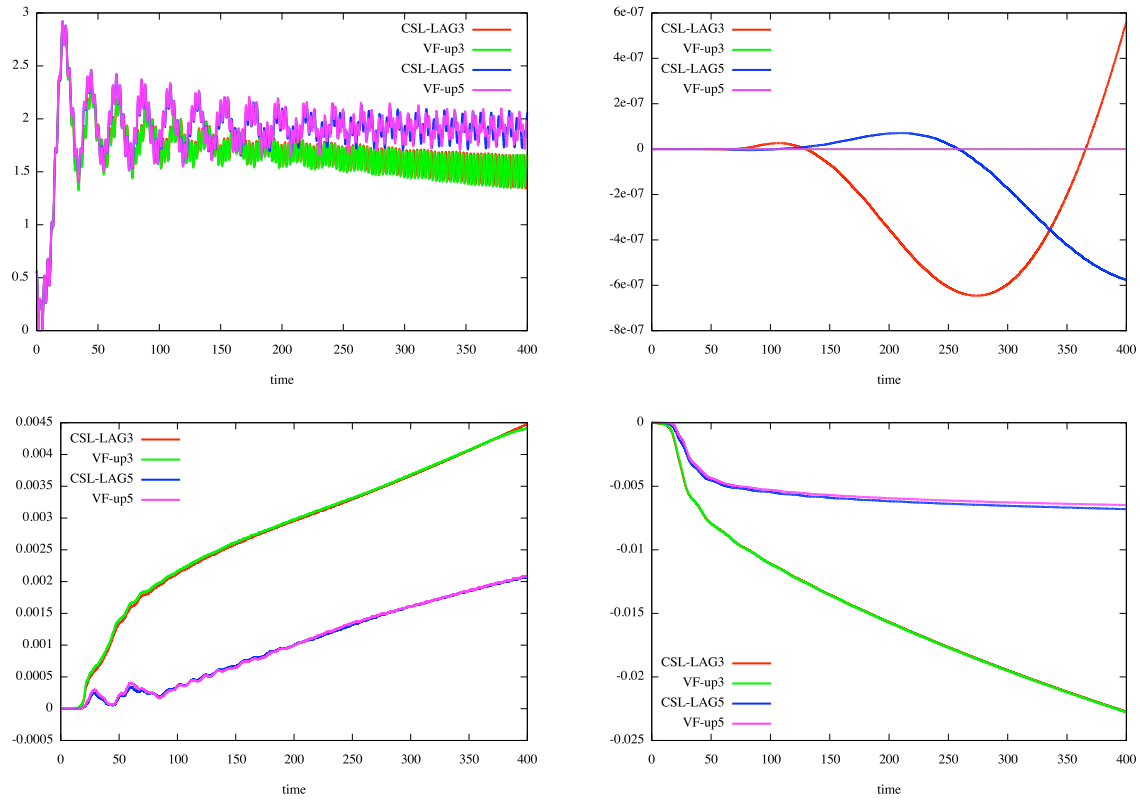


FIGURE 5.3: Comparaison pour le cas test BOT, de la méthode BSL, de la méthode par remapping avec les reconstructions LAG 3 et LAGH 5 et des méthodes par volumes finis de type "Banks" avec les reconstructions up3 et up5. Respectivement de haut en bas et de gauche à droite : énergie électrique, masse totale, norme  $L^1$  et norme  $L^2$ .



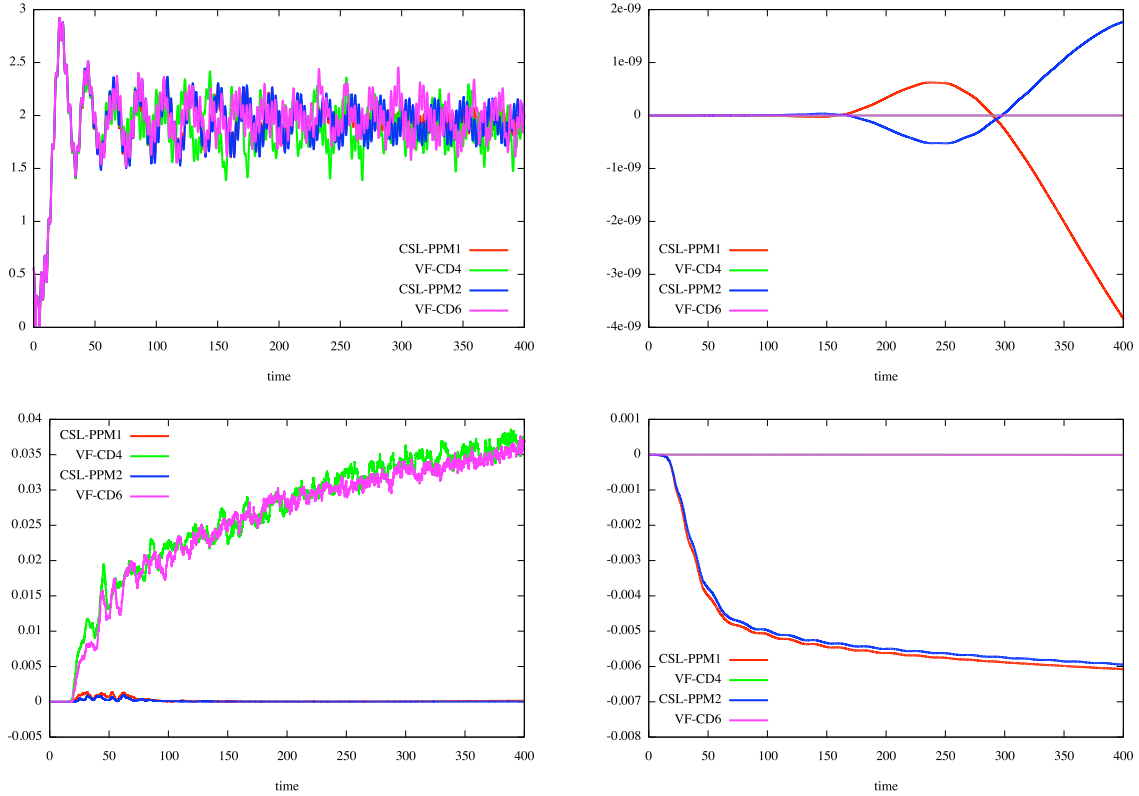


FIGURE 5.4: Comparaison pour le cas test BOT, de la méthode BSL, de la méthode par remapping avec les reconstructions PPM 1 et PPM 2 et des méthodes par volumes finis de type "Banks" avec les reconstructions CD4 et CD6. Respectivement de haut en bas et de gauche à droite : énergie électrique, masse totale, norme  $L^1$  et norme  $L^2$ .

Les résultats obtenus sur les Figures 5.3 et 5.4 permettent de confirmer les tendances déjà évoquées dans la Section 4.4 : on retrouve pour ce cas-test une très grande similitude entre les schémas CSL-LAG 3 et VF-up3 d'une part, et CSL-LAGH 5 et VF-UP5 d'autre part, tant du point de vue de l'évolution de l'énergie électrique que des normes. Comme il était prévisible, les schémas CSL-PPM se comportent bien mieux que les volumes finis centrés. Par contre, pour ce cas-test à nouveau, il n'y a pas de conservation exacte de la masse dans le cas des schémas CSL (malgré cela, elle est très bien préservée).

### Centre-Guide

On considère le même cas-test que celui développé dans le paragraphe 2.7.6, avec des paramètres identiques :  $N_x = N_y = 128$ ,  $\Delta t = 0.02$ .

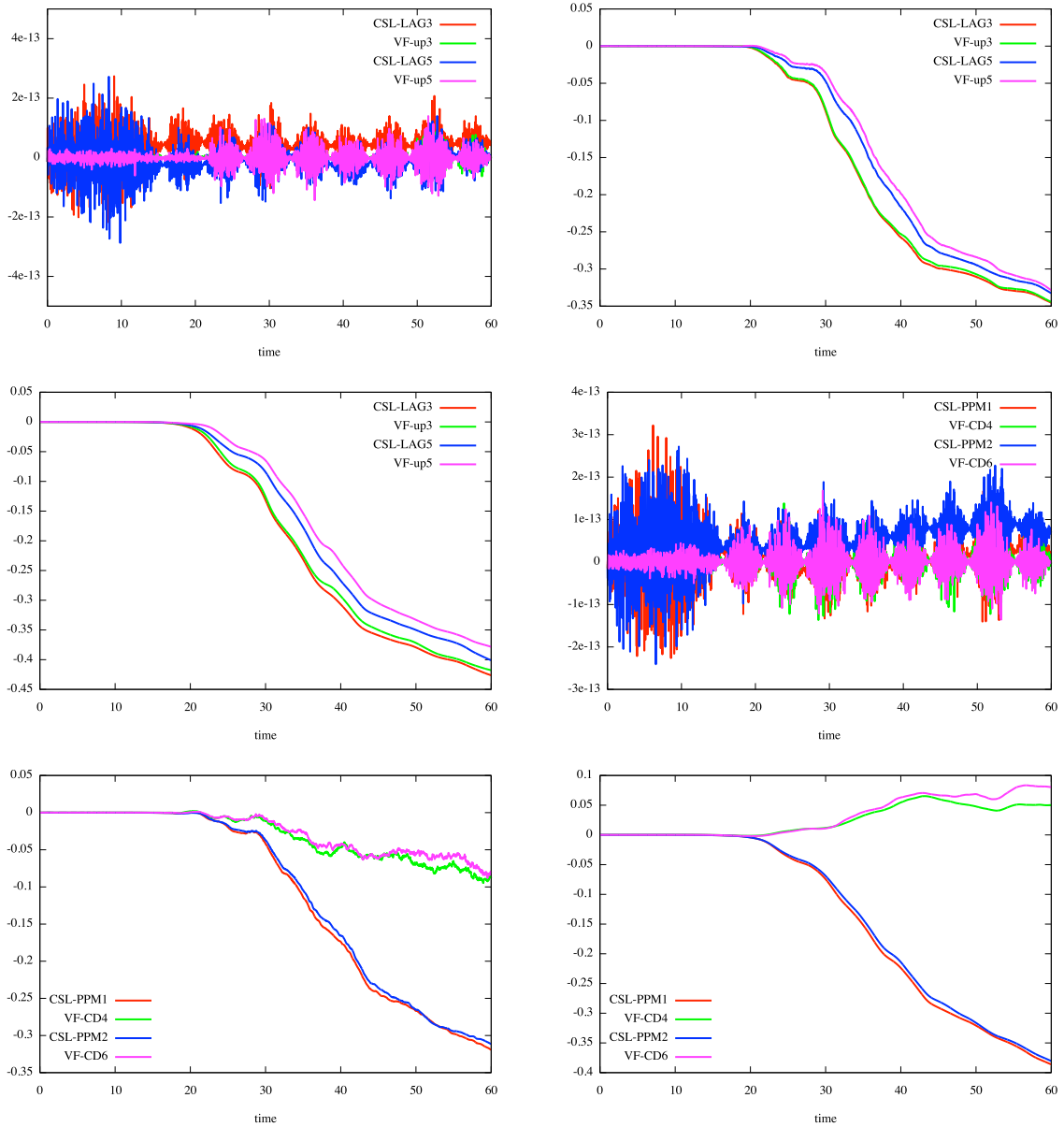


FIGURE 5.5: Comparaison, pour le cas-test du Centre-Guide de la méthode par remapping avec les reconstructions LAG 3 et LAGH 5 et des méthodes par volumes finis de type "Banks" avec les reconstructions up3 et up5 puis de la méthode par remapping avec les reconstructions PPM 1 et PPM 2 et des méthodes par volumes finis de type "Banks" avec les reconstructions CD4 et CD6. Respectivement de haut en bas et de gauche à droite : masse totale, norme  $L^1$  et norme  $L^2$  pour les méthodes type "upwind" puis pour les méthodes type "centrées".

Pour ce cas test, on observe sur la Figure 5.5 qu'il y a conservation exacte de la masse dans le cas CSL. Globalement, les résultats sont ainsi relativement proches dans les cas CSL-LAG/VP-up. Par contre, les volumes finis ne donnent à nouveau pas satisfaction dans le cas

centré. Cela apparaît en considérant l'évolution des normes  $L^1$  et  $L^2$ , mais mieux encore sur la Figure 5.6 où les oscillations deviennent de plus en plus nombreuses sur la fonction de distribution au cours du temps, jusqu'à rendre le résultat inexploitable (à partir de  $t = 30$  environ). Par contre, dans les cas CSL-LAG/VP-up, les résultats obtenus sur les Figures 5.7 et 5.8 sont très convenables relativement proches.

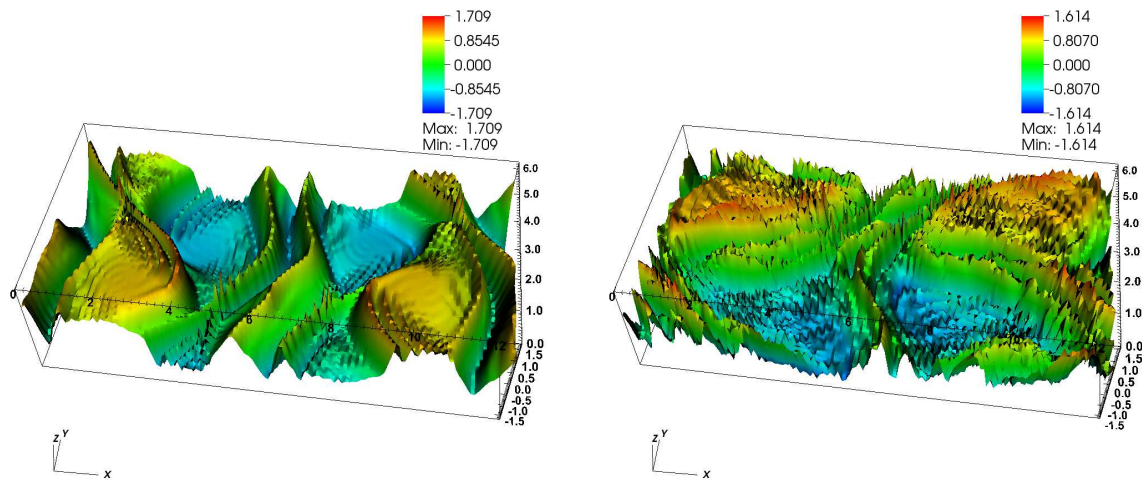


FIGURE 5.6: Evolution au cours du temps de la fonction de distribution pour le cas-test d'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans le cas VF-CD4. De gauche à droite :  $t = 24$  puis  $t = 30$ .

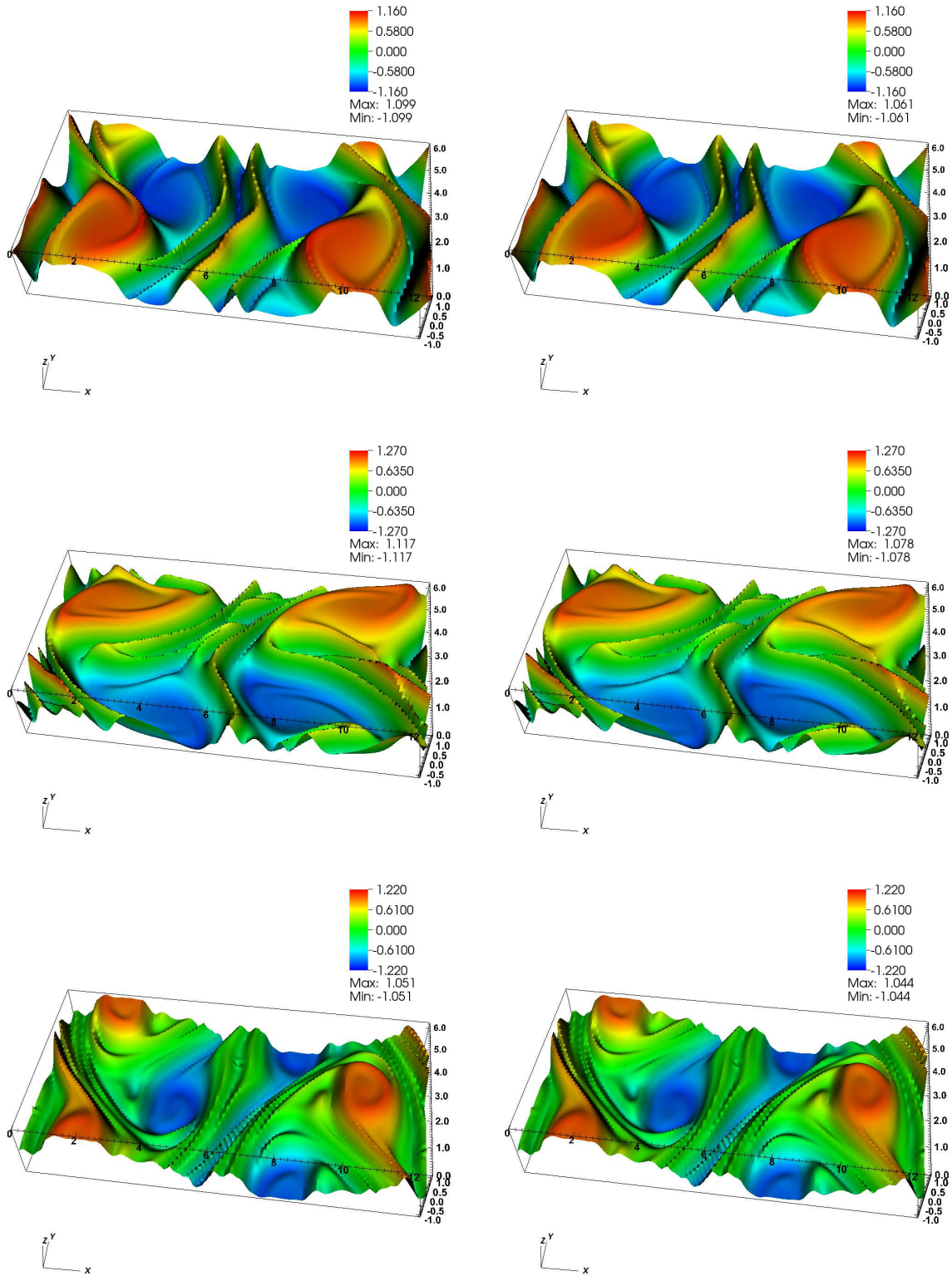


FIGURE 5.7: Evolutions temporelles comparées des fonctions de distribution pour le cas-test d'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans les cas VF-up3 (colonne de gauche) et CSL-LAG 3 (colonne de droite). De haut en bas :  $t = 24$ ,  $t = 30$  et  $t = 60$ .

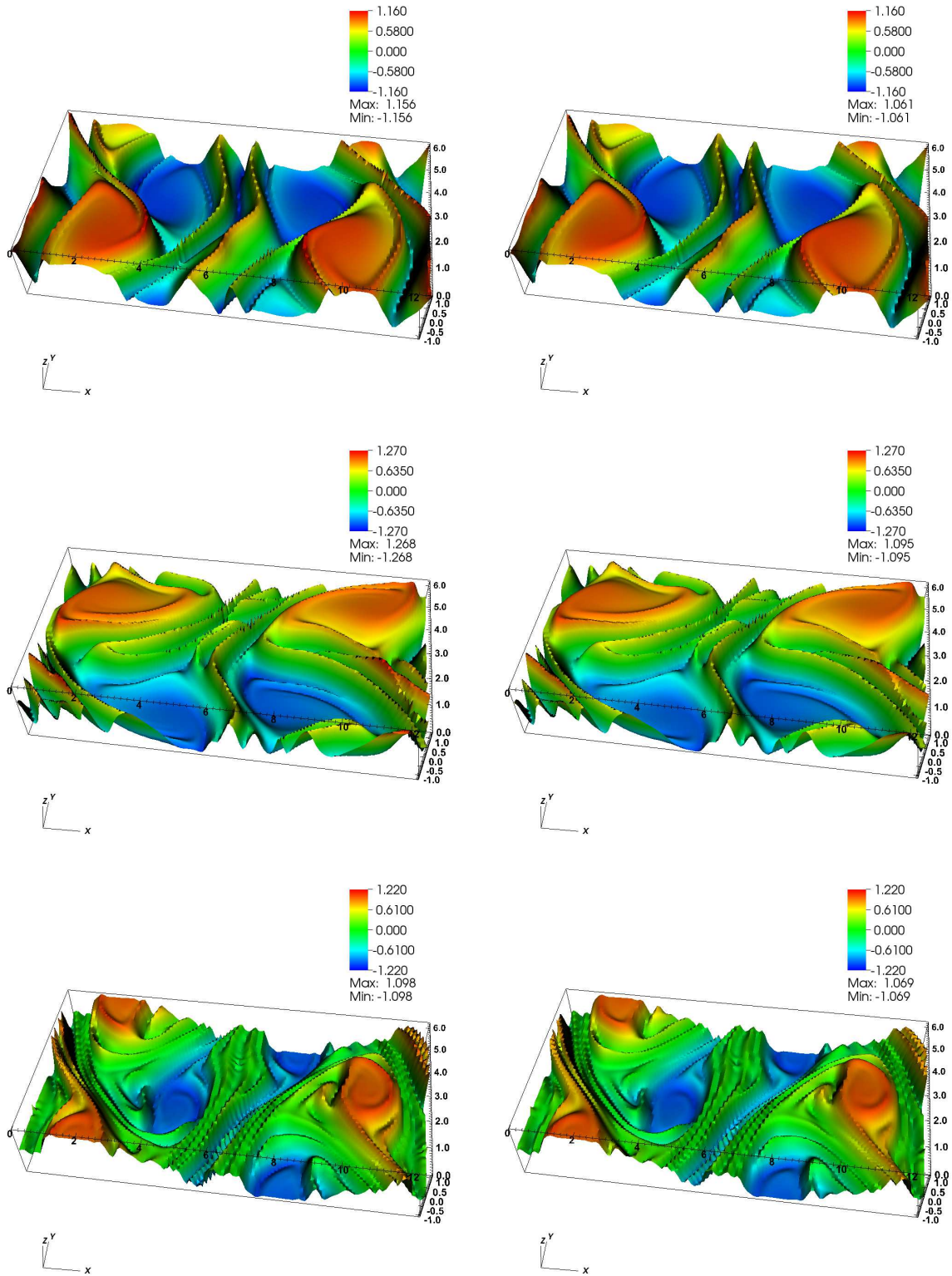


FIGURE 5.8: Evolutions temporelles comparées des fonctions de distribution pour le cas-test d'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans les cas VF-up5 (colonne de gauche) et CSL-LAGH 5 (colonne de droite). De haut en bas :  $t = 24$ ,  $t = 30$  et  $t = 60$ .

## 5.2 Temps de calcul

Dans ce paragraphe, les temps de calcul sont donnés pour des calculs effectués sur un ordinateur Mac OS X avec processeur 2.2 GHz Intel Core 2 Duo.

### Impact de différents paramètres sur le temps de calcul

Avant de comparer les temps de calculs des différentes méthodes évoquées précédemment, il est intéressant de connaître l'impact de différents paramètres de l'algorithme sur le temps de calcul pour une méthode donnée. Pour ce faire, on considère le cas-test Landau non linéaire de la Section 2.7, avec les mêmes paramètres numériques :  $N_x = N_y = 128$  points, 1000 itérations. On utilise une reconstruction de type CSL-LAG 3.

- **Algorithme 1** : Ordre 1 en temps (voir 2.7.1), calcul des caractéristiques : Euler (voir 2.2.2). **Temps de calcul : 23s.**
- **Algorithme 2** : Ordre 2 en temps par un schéma prédicteur-correcteur (voir 2.7.1), calcul des caractéristiques : Euler (voir 2.2.2). **Temps de calcul : 46s.** L'emploi d'un schéma d'ordre 2 en temps est incontournable ; cette étape est donc obligatoire et logique du point de vue de l'augmentation du temps de calcul : on double les opérations effectuées à chaque pas de temps.
- **Algorithme 3** : Ordre 2 en temps par un schéma prédicteur-correcteur (voir 2.7.1), calcul des caractéristiques : Verlet Symplectique avec 2 itérations de point fixe (voir 2.2.2). **Temps de calcul : 51s.** On a vu dans la Section 2.7 que l'emploi d'un schéma d'ordre 2 pour les caractéristiques était également requis. On notera que l'amélioration du calcul des caractéristiques a relativement peu d'impact sur le temps de calcul global.
- **Algorithme 4** : Ordre 2 en temps par un schéma prédicteur-correcteur (voir 2.7.1), calcul des caractéristiques : Verlet Symplectique avec 10 itérations de point fixe (voir 2.2.2). **Temps de calcul : 1min 10s.** L'augmentation du nombre d'itérations pour l'algorithme du point fixe lors du calcul des caractéristiques a un impact modéré mais

non négligeable sur le temps de calcul global. De plus, on a vu (voir 2.2.2) que la convergence était obtenue dans la plupart des cas avec 2 itérations de point fixe.

Comme depuis le début de ce manuscrit, on poursuit donc ce paragraphe en se concentrant sur des algorithmes de type 3.

### Comparaisons temps de calcul

On s'intéresse pour finir à la comparaison de temps de calculs entre les différentes méthodes vues précédemment. Pour ce faire, on se concentre sur les trois cas-tests suivants : Landau non linéaire, Bump On Tail et le Centre-Guide. Les paramètres utilisés sont les suivants

- Pour Landau non linéaire :  $N_x = N_y = 128$ , 5000 pas de temps.
- Pour Bump On Tail :  $N_x = N_y = 128$ , 40000 pas de temps.
- Pour le Centre-Guide :  $N_x = N_y = 128$ , 3000 pas de temps.

	BSL	CSL-LAG3	CSL-LAGH5	CSL-Laur.	CSL-PPM1	VF-up5
Landau NL	1min 4s	4min 9s	4min 40s	4min 3s	4min 4s	1min
BOT	8min 32s	33min 21s	37min 31s	32min 54s	33min 2s	8min 10s
Centre-Guide	1min 19s	3min 13s	3min 23s	3min 15s	3min 15s	1min 8s

TABLEAU 5.1: Comparaisons de temps de calculs pour différents cas-tests et algorithmes.

Les informations fournies par le Tableau 5.1 sont intéressantes. Il faut tout d'abord noter que les méthodes par volumes finis de type "Banks" telles que VF-up5 sont très performantes en termes de temps de calcul, puisqu'elles sont légèrement plus rapides que la méthode BSL. De plus, l'écart observé entre les méthodes BSL et VF d'une part et CSL d'autre part se réduit de manière importante dans le cas du Centre-Guide par rapport aux cas-tests de type Vlasov-Poisson. Plus précisément, on peut noter que les différentes méthodes CSL présentent des temps de calcul proches. L'écart observé entre les méthodes de type CSL-LAG 3 et CSL-LAGH 5 vient du fait que CSL-LAGH 5 est implémenté dans le formalisme Hermite qui permet facilement d'obtenir un ordre quelconque pour les dérivées dans les reconstructions de type Lagrange (voir 2.4.1) ; or celui-ci requiert légèrement plus de calculs.

Il apparaît de ce double comparatif qualitatif/temps de calcul que la méthode CSL est particulièrement intéressante par rapport à des méthodes de type volumes finis dans le cas du Centre-Guide. En effet, dans ce cas, les résultats qualitatifs sont de qualités identiques (cas CSL-LAG/VF-up) ou supérieure (cas CSL-PPM/VF-CD), alors que la différence de temps de calcul avec les méthodes BSL ou de volumes finis se réduit singulièrement. Dans un tel cas, la possibilité de bénéficier d'une méthode performante permettant de s'affranchir de la contrainte du splitting apparaît ainsi particulièrement intéressante. De plus, il est également important de noter que les méthodes par volumes finis présentent des contraintes CFL restrictives, ce qui n'est pas le cas de la méthode semi-lagrangienne.

Afin d'illustrer ce constat, on présente une dernière Figure qui compare la méthode VF-up5 pour un pas de temps  $\Delta t = 0.02$  et différentes reconstruction CSL avec un pas de temps sensiblement plus grand, comme autorisé pour cette méthode : 0.1. Le nombre de pas en espace est toujours  $N_x = N_y = 128$ .



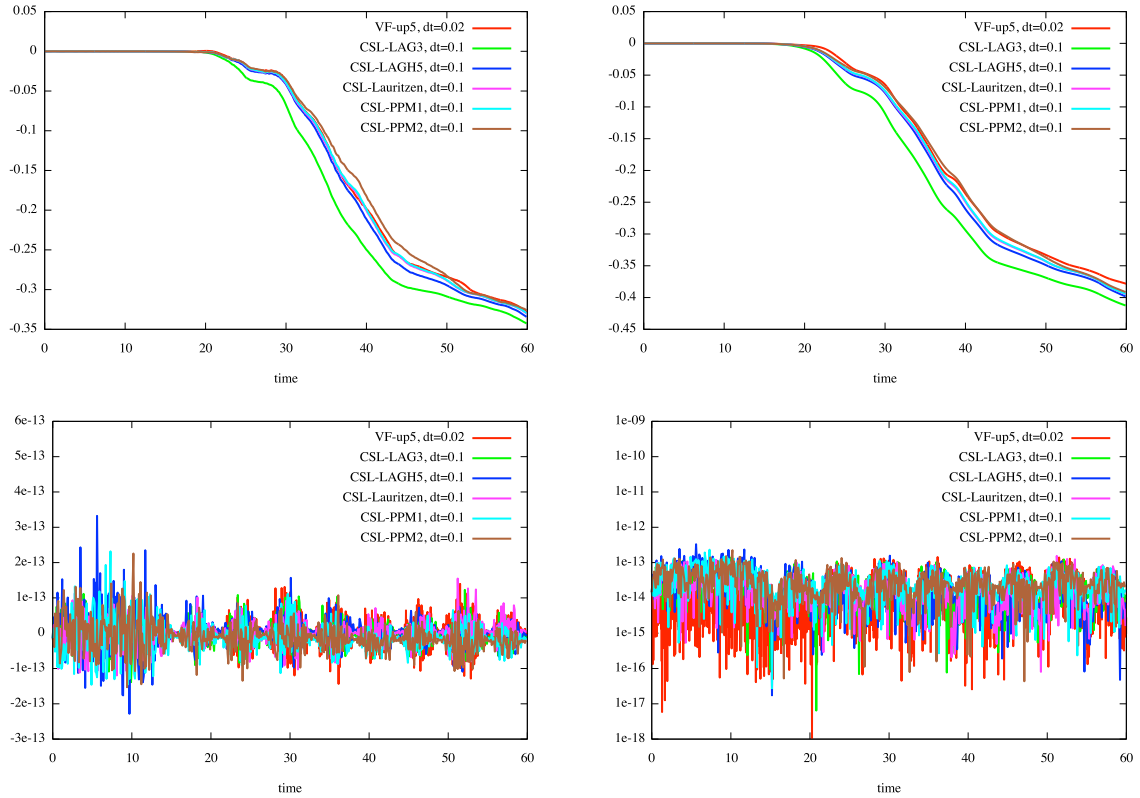


FIGURE 5.9: De haut en bas et de gauche à droite : évolutions temporelles de des normes  $L^1$  et  $L^2$  et de la masse en échelle standard et logarithmique pour la reconstruction par volumes finis up5 avec  $\Delta t = 0.02$  et les reconstructions type CSL avec  $\Delta t = 0.1$ .

VF-up5	CSL-LAG3	CSL-LAGH5	CSL-Laur.	CSL-PPM1	CSL-PPM2
1min 8s	39s	42s	40s	40s	41s

TABLEAU 5.2: Comparaisons des temps de calculs pour le cas-test Centre-Guide dans le cas des méthodes de la Figure 5.9 (3000 itérations pour VF-up5 et 600 pour les méthodes type CSL).

Ce dernier comparatif confirme le constat précédent : les méthodes type CSL permettent de s'affranchir de la contrainte CFL, donc de choisir un pas de temps sensiblement plus grand (0.1) que pour VF-up5 (0.02). Malgré tout, la qualité de ces différentes reconstructions est très proche, puisque, d'une part, la masse est presque exactement conservée dans tous les cas, et d'autre part, l'évolution temporelle des normes  $L^1$  et  $L^2$  est très similaire pour les

volumes finis et le cas semi-lagrangien (voir Figure 5.9). De plus, avec de tels paramètres (temps final identique) , les méthodes CSL deviennent plus rapides que la méthode VF-up5. Il apparaît donc clairement que dans le cas du Centre-Guide, les méthodes CSL sont particulièrement performantes.

# Chapitre 6

## Conclusion et perspectives

Cette thèse a été consacrée à l'étude et l'implémentation d'une méthode fondée sur une approche semi-lagrangienne permettant de résoudre numériquement des équations de transport bidimensionnelles. Ce travail généralise ainsi celui développé dans [23]. On a appliqué l'algorithme développé à de nombreux cas-tests issus de la physique et l'avons comparé à d'autres méthodes, de référence ou par volumes finis. En particulier, une méthode s'inspirant de [3] a également été développée et étudiée et a ainsi permis d'établir une comparaison directe entre des méthodes conservatives 2D non splittées. Les résultats obtenus sont encourageants et permettent d'envisager diverses applications dans le domaine des plasmas.

Ce travail permet notamment de traiter différents types d'équations de transport tels que des modèles relativistes ou gyrocinétiques. Ce dernier est composé d'une partie de type Centre-Guide dans le plan perpendiculaire au champ magnétique, pour laquelle la stratégie présentée ici se révèle particulièrement compétitive et peut être employée, et d'advections constantes dans la direction parallèle au champ pour lesquelles une méthode conservative (ou advective) peut être mise en œuvre par une procédure de splitting.

De plus, puisque la stratégie développée ne repose pas sur l'utilisation de grilles régulières, des extensions à des domaines polaires propres au contexte gyrocinétique sont possibles.

Parmi les améliorations envisagées de la méthode développée ici, on peut citer (en s'ins-

pirant de [54]) la prise en compte de la déformation des arêtes sous l'action du champ de vecteur par l'introduction de points supplémentaires situés sur les arêtes (voir Figure 6.1).

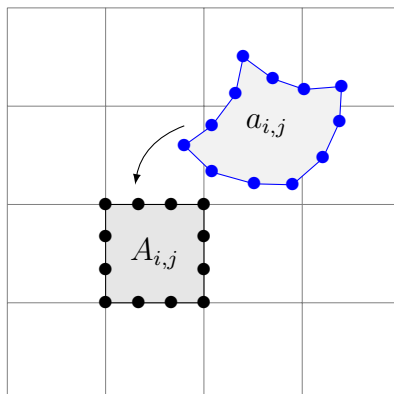


FIGURE 6.1: D'autres points situés sur les arêtes de  $A_{i,j}$  sont advectés : les mailles  $a_{i,j}$  ne sont donc plus des quadrilatères convexes.

D'autres améliorations sont également envisagées : la montée de l'ordre en temps ([21]), l'utilisation de précalculs afin de diminuer le coût de la méthode, le traitement des conditions aux bords, notamment.

# Chapitre 7

## Appendice

Les termes  $w_{k,l}^{(p,q)}$  peuvent être retrouvés dans [36]. On en rappelle certains ci-dessous (on numérote de 1 à  $S_{k,l}$  les sommets de  $a_{k,l}$  dans le sens trigonométrique) :

$$\begin{aligned}w_{k,l}^{(0,0)} &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} (x_{k,l,h} + x_{k,l,h-1})(y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1}), \\w_{k,l}^{(1,0)} &= \frac{1}{6} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} (x_{k,l,h}^2 + x_{k,l,h}x_{k,l,h-1} + x_{k,l,h-1}^2)(y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1}), \\w_{k,l}^{(0,1)} &= -\frac{1}{6} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} (y_{k,l,h}^2 + y_{k,l,h}y_{k,l,h-1} + y_{k,l,h-1}^2)(x_{k,l,h} - x_{k,l,h-1}), \\w_{k,l}^{(2,0)} &= \frac{1}{12} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} (x_{k,l,h} + x_{k,l,h-1})(x_{k,l,h}^2 + x_{k,l,h-1}^2)(y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1}), \\w_{k,l}^{(0,2)} &= -\frac{1}{12} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} (y_{k,l,h} + y_{k,l,h-1})(y_{k,l,h}^2 + y_{k,l,h-1}^2)(x_{k,l,h} - x_{k,l,h-1}), \\w_{k,l}^{(1,1)} &= \frac{1}{24} \sum_{h=1}^{S_{k,l}} (y_{k,l,h}(3x_{k,l,h}^2 + 2x_{k,l,h}x_{k,l,h-1} + x_{k,l,h-1}^2) \\&\quad + y_{k,l,h-1}(x_{k,l,h}^2 + 2x_{k,l,h}x_{k,l,h-1} + 3x_{k,l,h-1}^2))(y_{k,l,h} - y_{k,l,h-1}).\end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] T. D. ARBER, R. G. VANN, *A critical comparison of Eulerian-grid-based Vlasov solvers*, J. Comput. Phys. **180**, pp. 339-357, (2002).
- [2] M. BALDAUF, *Stability analysis for linear discretisations of the advection equation with Runge-Kutta time integration*, J. Comput. Phys. **227**, pp. 6638-6659, (2008).
- [3] J. W. BANKS, J. A. F. HITTINGER, *A new class of nonlinear finite-volume methods for Vlasov simulation*, IEEE Trans. Plasma Sc **38**, (2010).
- [4] N. BESSE, M. MEHRENBERGER, *Convergence of classes of high order semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation*, Math. of Comp. **77**, pp. 93-123, (2008).
- [5] N. BESSE, E. SONNENDRÜCKER, *Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space*, J. Comput. Phys. **191**, pp. 341-376, (2003).
- [6] C. K. BIRDSALL, A. B. LANGDON, *Plasma Physics via Computer Simulation*, Inst. of Phys. Publishing, Bristol/Philadelphia, 1991.
- [7] S. F. BOCKMAN, *Generalizing the formula for areas of polygons to moments*, Am. Math. Mon. **96**, (1989).
- [8] A. S. BONNET-BEN DHIA, S. FLISS, P. JOLY, P. MOIREAU, *Introduction aux équations aux dérivées partielles et à leur approximation numérique*, polycopié, cours ENSTA, 2011.
- [9] J. P. BORIS, D. L. BOOK, *Flux-corrected transport. I : SHASTA, a fluid transport algorithm that works*, J. Comput. Phys. **11**, pp. 38-69, (1973).

- [10] J. P. BRAEUNIG, N. CROUSEILLES, V. GRANDGIRARD, G. LATU, M. MEHRENB-  
GER, E. SONNENDRÜCKER, *Some numerical aspects of the conservative PSM scheme in  
a 4D drift kinetic code*, INRIA Research Report **7109**.
- [11] F. CHARLES, B. DESPRÉS, M. MEHRENB-  
GER, *Enhanced convergence estimates for  
semi-Lagrangian schemes Application to the Vlasov-Poisson equation*, SIAM J. Numer.  
Anal. **51** no.2 , pp. 840-863, (2013).
- [12] F. F. CHEN, *Plasmas Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, (1984).
- [13] C.Z. CHENG, G. KNORR, *The integration of the Vlasov equation in configuration space*,  
J. Comput. Phys. **22**, pp. 330-351, (1976).
- [14] A. J. CHRISTLIEB, R. KRASNY, J. P. VERBONCOEUR, J. W. EMHOFF, I. D. BOYD,  
*Grid-free plasma simulation techniques*, Plasma Science **34**, pp.149-165, (2006).
- [15] P. COLELLA, M. R. DORR, J. A. F. HITTINGER, D. F. MARTIN, *High-Order, Finite-  
Volume Methods in Mapped Coordinates*, J. Comput. Phys. **230**, pp. 2952-2976, (2011).
- [16] P. COLELLA, M. D. SEKORA, *A limiter for PPM that preserves accuracy at smooth  
extrema*, J. Comput. Phys. **227**, pp. 7069-7076, (2008).
- [17] P. COLELLA, P. R. WOODWARD, *The piecewise parabolic method (PPM) for gas-  
dynamical simulations*, J. Comput. Phys. **54**, pp. 174-201, (1984).
- [18] F. COQUEL, P. HELLUY, J. SCHNEIDER, *Second order entropy diminishing scheme for  
the Euler equations*, Intern. J. Numer. Meth. in Fluids, **50**, pp. 1029-1061, (2006).
- [19] D. COULETTE, N. BESSE, *Numerical comparisons of gyrokinetic multi-water-bag mo-  
dels*, J. Comput. Phys. **248**, pp. 1-32, (2013).
- [20] R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, H. LEWY, *On the partial difference equations of  
mathematical physics*, Math. Annalen **100**, pp. 32-74, (1928).
- [21] P.E. CROUCH, R. GROSSMAN, *Numerical integration of ordinary differential equations  
on manifolds*, J. Nonlinear Sci. **3**, pp. 1-33, (1993).

- [22] N. CROUSEILLES, E. FAOU, M. MEHREBERGER, *High order Runge-Kutta-Nyström splitting methods for the Vlasov-Poisson equation*, INRIA Research Report-00633934, version 1, October 2011.
- [23] N. CROUSEILLES, M. MEHREBERGER, E. SONNENDRÜCKER, *Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations*, J. Comput. Phys. **229**, pp. 1927-1953, (2010).
- [24] R. C. DAVIDSON, *Physics of non neutral plasmas*, (1990).
- [25] J.-L. DELCROIX, A. BERS, *Physique des Plasmas*, EDP Sciences, (1994).
- [26] B. DESPRÉS, *Uniform asymptotic stability of Strang's explicit compact schemes for linear advection*, SIAM J. Numer. Anal. **47**, pp. 3956-3976, (2009).
- [27] N. ELKINA, J. BÜCHNER, *A new conservative unsplit method for the solution of the Vlasov equation*, J. Comput. Phys. **213**, pp. 862-875, (2006).
- [28] E. FIJALKOW, *A numerical solution to the Vlasov equation*, Comput. Phys. Commun. **116**, pp. 329-335, (1999).
- [29] F. FILBET, E. SONNENDRÜCKER, P. BERTRAND, *Conservative numerical schemes for the Vlasov equation*, J. Comput. Phys. **172**, pp. 166-187, (2001).
- [30] F. FILBET, E. SONNENDRÜCKER, *Comparison of Eulerian Vlasov solvers*, Comput. Phys. Commun. **151**, pp. 247-266, (2003).
- [31] V. GRANDGIRARD ET AL., *A drift-kinetic Semi-Lagrangian 4D code for ion turbulence simulation*, J. Comput. Phys. **217**, pp. 395-423, (2006).
- [32] E. HAIRER, C. LUBICH, G. WANNER, *Geometric numerical integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer Series in Computational Mathematics, (2006).
- [33] F. HUOT, A. GHIZZO, P. BERTRAND, E. SONNENDRÜCKER, O. COULAUD, *Instability of the time splitting scheme for the one-dimensional and relativistic Vlasov-Maxwell system*, J. Comput. Phys. **185**, pp. 512-531, (2003).



- [34] C. JABLONOWSKI, *Adaptive grids in weather and climate modeling* Ph.D. Thesis, University of Michigan, (1989).
- [35] G. LATU ET AL., *Accuracy of unperturbed motion of particles in a gyrokinetic semi-Lagrangian code*, INRIA Research Report **8054**, (2012).
- [36] P. H. LAURITZEN, D. N. RAMACHANDRAN, P. A. ULLRICH, *A conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme on the cubed-sphere grid*, J. Comput. Phys. **229**, pp. 1401-1424, (2010).
- [37] M. LENTINE, J. T. GRÉTARSSON, R. FEDKIW *An Unconditionally Stable Fully Conservative Semi-Lagrangian Method*, J. Comput. Phys. **230**, pp. 2857-2879, (2011).
- [38] E. MADAULE, S. HIRSTOAGA, M. MEHRENBERGER, J. PÉTRI *Semi-Lagrangian simulations of the diocotron instability*, INRIA Research Report-00841504, version 1, (2013).
- [39] K. W. MORTON, A. PRIESTLEY, E. SÜLI, *Stability of the Lagrange-Galerkin scheme with inexact integration*, RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique **22**, pp. 625-653, (1988).
- [40] T. NAKAMURA, R. TANAKA, T. YABE, K. TAKIZAWA, *Exactly conservative semi-lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique*, J. Comput. Phys. **174**, pp. 171-207, (2001).
- [41] T. NAKAMURA, T. YABE, *Cubic Interpolated Propagation Scheme for Solving the Hyper-Dimensional Vlasov-Poisson Equation in Phase Space*, Comput. Phys. Comm. **120**, pp.122-154 (1999).
- [42] J. PÉTRI, *The diocotron instability in a pulsar "cylindrical" electrosphere*, Astronomy & Astrophysics, February 5, (2008).
- [43] J. PÉTRI, *Non-linear evolution of the diocotron instability in a pulsar electrosphere : 2D PIC simulations*, Astronomy & Astrophysics, May 7, (2009).
- [44] P. M. PRENTER, *Spline and Variational Methods.*, 1975.

- [45] J. M. QIU, C. W. SHU, *Conservative semi-Lagrangian finite difference WENO formulations with applications to the Vlasov equation*, Comm. Comput. Phys. **10**, pp.979-1000, (2011).
- [46] J. M. QIU, C. W. SHU, *Positivity preserving semi-Lagrangian discontinuous Galerkin formulation : Theoretical analysis and application to the Vlasov-Poisson system*, J. Comput. Phys., **230**, pp. 8386-8409, (2011).
- [47] A. ROBERT, *A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations*, Atmos. Ocean. **19**, pp. 35-46, (1981).
- [48] T. SCHWARTZKOPFF, M. DUMBSER, C.D. MUNZ, *Fast high order ADER schemes for linear hyperbolic equations and their numerical dispersion and dissipation*, J. Comput. Phys. **197**, pp. 532-538, (2004).
- [49] D. SEAL, *Discontinuous Galerkin methods for Vlasov models of plasma*, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, (2012).
- [50] M. SHOUCRI, *A two-level implicit scheme for the numerical solution of the linearized vorticity equation*, Int. J. Numer. Meth. Eng. **17**, p. 1525, (1981).
- [51] M. SHOUCRI, *Eulerian codes for the numerical solution of the Vlasov equation*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **13** no. 1, pp. 174-182, (2008).
- [52] E. SONNENDRÜCKER, J. ROCHE, P. BERTRAND, A. GHIZZO, *The semi-Lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation*, J. Comput. Phys. **149**, pp. 201-220, (1999).
- [53] A. STANFORTH, J. CÔTÉ, *Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-A review*, Mon. Weather Rev. **119**, (1991).
- [54] P. A. ULLRICH, P. H. LAURITZEN, C. JABLONOWSKI, *Some considerations for high-order "incremental remap"-based transport schemes : edges, reconstructions and area integration*, International Journal for Numerical Methods in Fluids : in press, DOI : 10.1002/flid.3703, (2012).