Propriétés analytiques de l'espace des séries entières convergentes et dynamiques holomorphes glocales

Loïc Jean Dit Teyssier

▶ **To cite this version:**

Loïc Jean Dit Teyssier. Propriétés analytiques de l'espace des séries entières convergentes et dynamiques holomorphes glocales. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Strasbourg, 2013. tel-00905353v1

HAL Id: tel-00905353

https://theses.hal.science/tel-00905353v1

Submitted on 18 Nov 2013 (v1), last revised 20 Nov 2013 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à diriger des recherches

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Loïc JEAN DIT TEYSSIER

Propriétés analytiques de l'espace des séries entières convergentes et dynamiques holomorphes glocales

Soutenue le 8 novembre 2013
devant la commission d'examen

Adam EPSTEIN, rapporteur
Jean-François MATTEI, rapporteur
Daniel PANAZZOLO, examinateur
Jean-Pierre RAMIS, examinateur
Claude SABBAH, président
Reinhard SCHÄFKE, garant
Sergei YAKOVENKO, rapporteur

www-irma.u-strasbg.fr

cnrs dépasser les frontières

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Remerciements

Ne voulant froisser les sentiments de personne, et manquant de place pour citer tous les gens que j'ai rencontrés professionnellement ou non tout au long de ma formation de mathématicien, j'exprime mes meilleurs sentiments à tous les humains de cette planète [1].

Je tiens ensuite à remercier les membres de mon jury d'avoir accepté d'en être. Je voudrais plus particulièrement exprimer à A. Epstein, J.-F. Mattei et S. Yakovenko ma gratitude pour m'avoir fait l'amitié de rapporter sur ce travail.

Il me faut aussi souligner l'estime que je porte à R. Schäfke, grand découvreur de contre-exemples, détenteur d'un regard éclairant sur l'analyse complexe, et d'une intuition redoutablement efficace pour débusquer les points faibles des arguments mathématiques. Son intérêt constant durant ces dix années m'a accompagné et permis d'éviter certains écueils.

En arrivant à Strasbourg j'ai également bénéficié de la gentillesse et de la disponibilité de C. Mitschi, de sa connaissance du milieu et des relations humaines qu'elle a pu tisser ici. Elle a aussi su exercer sur le présent mémoire sa redoutable connaissance de l'écriture du français...

Je ne peux que les remercier tous deux vivement pour leur amitié.

Enfin, un grand merci à Emeline, dont la patience et le dévouement matériel ont permis l'achèvement de ce mémoire dans les temps, sans que notre foyer ne s'effondre. Merci Emeline ; tu vois, maintenant que c'est fini, je fais à nouveau le ménage...

Loïc Teyssier
Laboratoire IRMA
Université de Strasbourg

teyssier@math.unistra.fr

http://www-irma.u-strasbg.fr/~teyssier/

1. Sauf bien sûr aux requins de la finance.

Table des matières

I Introduction 4

II Présentation des principaux résultats 10

1 Propriétés analytiques de $\mathbb{C}\{z\}$ 16
- 1.1 Préliminaires . . . 17
  - 1.1.1 Considérations topologiques . . . 17
  - 1.1.2 Applications et ensembles analytiques . . . 18
- 1.2 Espaces de Baire analytiques . . . 19
- 1.3 Analyticité forte . . . 20
- 1.4 Applications en analyse et dynamique complexes . . . 22
  - 1.4.1 Solutions holomorphes d'équations différentielles . . . 22
  - 1.4.2 Espaces analytiques modelés . . . 23
  - 1.4.3 Familles de germes holomorphes premiers entre eux . . . 24
  - 1.4.4 Résolubilité des groupes de biholomorphismes . . . 25
  - 1.4.5 Résolubilité des feuilletages . . . 25

2 Application aux feuilletages résonants glocaux 28
- 2.1 Existence de feuilletages résonants non glocaux . . . 30
  - 2.1.1 Mise sous forme de Dulac . . . 31
  - 2.1.2 Analyticité des applications $\mathrm{MRD}_{(0,k)}$ . . . 32
- 2.2 Forme normale des feuilletages de type nœud-col convergent . . . 33
  - 2.2.1 Calculabilité . . . 34
  - 2.2.2 Esquisse de la preuve du théorème de normalisation . . . 34

3 Germes de feuilletages présentables du plan complexe 37
- 3.1 Présentation des principaux résultats . . . 39
- 3.2 Esquisse des preuves . . . 40
  - 3.2.1 Théorème 3.1.1 . . . 40
  - 3.2.2 Théorème 3.1.4 . . . 40
  - 3.2.3 Théorème 3.1.2 . . . 42

4 Le reste du chemin 45
- 4.1 Vers une géométrie analytique dans $\mathbb{C}\{z\}$ . . . 45
  - 4.1.1 Points singuliers . . . 45
  - 4.1.2 Paramétrisation . . . 45
  - 4.1.3 Distributions intégrables . . . 46

4.2 Feuilletages glocaux 46
4.2.1 Caractérisation des invariants de Martinet-Ramis glocaux 47
4.2.2 Un théorème d'Hermite-Lindemann feuilleté 47

Annexe **49**

Mes articles scientifiques **54**

Première partie

Introduction

Description du contexte

Ce mémoire propose d'étudier la question suivante dans le cadre de l'étude des feuilletages holomorphes sur des surfaces complexes.

Question. *À quoi reconnaît-on qu'un objet local provient d'un objet global modifié par un changement des coordonnées locales ?*

Soyons plus précis. Un germe d'objet holomorphe X (fonction méromorphe, biholomorphisme, champ de vecteurs…) au voisinage d'un point $p \in \mathbb{C}^m$, est **glocal** s'il existe un objet $\hat{X}$ de même nature, holomorphe sur une variété projective complexe $\mathcal{M}$ de dimension m, tel que X soit l'expression de $\hat{X}$ dans une carte holomorphe de $\mathcal{M}$. En d'autres termes, X est localement équivalent à un objet à coefficients algébriques.

Le terme «glocal» provient de la contraction des termes «global» et «local». Un objet est glocal s'il existe un germe de carte holomorphe $\psi : U \subset \mathcal{M} \to V \subset (\mathbb{C}^m, p)$ tel que $\hat{X} = \psi^* X$. Précisons cette action pour quelques cas classiques qui joueront un rôle prépondérant dans la suite.

- Statique
  $X : (\mathbb{C}^m, p) \to \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est une fonction méromorphe :
  $$\psi^* X \quad := \quad X \circ \psi .$$
- Dynamique discrète (itérations)
  $X : (\mathbb{C}^m, p) \to (\mathbb{C}^m, p)$ est un biholomorphisme (ou plus généralement une fonction holomorphe) :
  $$\psi^* X \quad := \quad \psi^{\circ -1} \circ X \circ \psi .$$
- Dynamique continue (équations différentielles)
  $X : (\mathbb{C}^m, p) \to \mathcal{T}\mathbb{C}^m$ est un champ de vecteurs :
  $$\psi^* X \quad := \quad (\mathrm{D}\psi)^{\circ -1} (X \circ \psi) .$$

La «question glocale» se prête à deux approches différentes.

- **Invariants locaux**. L'objet X est glocal si, et seulement si, $\varphi^* X$ l'est pour chaque germe de biholomorphisme $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^m, p)$ fixant p : la question est donc posée au niveau des classifiants locaux de X (les invariants pour l'action des changements des coordonnées locales). Une première approche consiste alors à caractériser ces invariants de façon analytique, topologique, géométrique ou dynamique.
- **Géométrie sous-analytique en dimension infinie**. À titre d'illustration, prenons le cas des germes de fonctions holomorphes f à l'origine de $\mathbb{C}^m$. Notons $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ l'algèbre des polynômes complexes en la multi-variable $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ et $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ l'algèbre des germes. Les germes glocaux pour la statique forment un ensemble sous-analytique de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, obtenu comme la projection sur le premier facteur de l'ensemble analytique défini par l'annulation de la flèche
  $$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \times \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^m, 0) \times \mathbb{C}[\mathbf{z}, y] & \longrightarrow & \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \\ (f, \psi, P) & \longmapsto & (\mathbf{z} \mapsto P(\mathbf{z}, f(\psi(\mathbf{z})))) . \end{array}$$
  Cette affirmation nécessite de doter les espaces de germes mis en jeu d'une topologie localement convexe pour laquelle Ψ est analytique.

La liste de réponses connues à la question glocale est assez courte. Citons-en quelques exemples classiques, et renvoyons à l'Annexe pour une liste plus exhaustive.

- **Statique**. Tout élément f de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, définissant un germe de variété analytique $\{f=0\}$ ayant au plus une singularité isolée en 0, est glocal (en fait, un tel germe est localement équivalent à un jet d'ordre fini assez grand [MY82]). Pour $m \geq 3$ il existe des germes non glocaux, comme l'exemple [2] de H. Whitney [Whi65] :

$$f(x,y,z) \quad = \quad xy(x+y)(x-yz)(x-y\exp z)\,.$$

- **Itération de biholomorphismes**. Une condition générique portant sur la partie linéaire d'un germe de biholomorphisme Δ assure sa linéarisabilité locale (hyperbolicité). Lorsque $m := 1$ et que Δ est parabolique, les travaux de A. Epstein [Eps93] permettent de donner des conditions nécessaires pour que Δ soit rationnel dans une coordonnée locale. En particulier les invariants d'un tel germe parabolique (ayant un ensemble de Julia non vide) doivent posséder une frontière naturelle. Par ailleurs J.-C. Yoccoz a prouvé l'existence d'une famille non dénombrable de classes de conjugaison de germes de biholomorphismes au voisinage d'un point fixe de Cremer, dont aucun représentant n'est une fonction entière [Per92].
- **Germes de champs de vecteurs**. En un point régulier, le théorème de redressement du flot (Cauchy-Lipschitz) nous assure que X est conjugué à un champ de vecteurs constant. La question glocale se concentre donc sur les cas où X possède une singularité. Le théorème de linéarisation de Poincaré entraîne, sous des conditions génériques d'hyperbolicité portant sur la partie linéaire de X, l'existence d'une conjugaison locale entre X et sa partie linéaire.

Objectifs du mémoire

Ce mémoire met l'accent sur la question glocale associée aux champs de vecteurs en dimension $m := 2$ (en fait aux germes de feuilletages holomorphes singuliers $\mathcal{F}$ sous-jacents [3]). Il existe un lien naturel entre la dynamique continue de $\mathcal{F}$ et la dynamique discrète en dimension 1 : les germes de biholomorphismes d'holonomie obtenus par le transport le long de chemins tangents à $\mathcal{F}$, joignant une section transversale à une autre dans une fibration holomorphe transverse. Leurs classes analytiques locales respectives sont en général intimement liées. On pourrait penser que ce lien permet de transférer les propriétés de glocalité d'un type de dynamique vers l'autre. Il n'en est rien. Bien au contraire il existe une heuristique plaçant ces deux catégories «en somme directe» : les seuls feuilletages glocaux portant des holonomies glocales semblent être tous analytiquement triviaux (par exemple conjugués à leur modèle formel). J'énoncerai une conjecture précise à ce sujet dans le cas des singularités résonantes (Paragraphe 4.2.2). Il est toutefois notable que cette heuristique s'apparente au théorème d'Hermite-Lindemann : pour tout nombre algébrique $z \in \bar{\mathbb{Q}}$ non nul le nombre $\exp z$ est transcendant. L'analogie est particulièrement frappante lorsque les holonomies associées à $\mathcal{F}$ sont comprises comme des éléments du groupoïde de Lie engendré par les flots $\exp Z$ des éléments de l'algèbre de Lie des champs Z tangents à $\mathcal{F}$.

2. La trace de $\{f=0\}$ sur l'hyperplan $\{z=\lambda\}$, pour $\lambda \neq 0$, est une union de cinq droites distinctes. Si ce germe est conjugué à une fonction algébrique, le birapport de quatre d'entre elles varie algébriquement en fonction de λ. Mais ceci est impossible car parmi les birapports se trouvent λ et $\exp\lambda$.

3. Une feuille correspond à la surface de Riemann formée par l'image d'une courbe intégrale de X.

Dynamiques holomorphes glocales

L'objectif principal de ce travail est, d'une part, de prouver l'existence de feuilletages holomorphes non glocaux, d'autre part de construire explicitement un tel $\mathcal{F}$. Ce problème est trivial en-dehors du lieu singulier, et la première classe de singularités suffisamment bien connue pour se prêter à notre étude est celle des singularités résonantes, dont la classification analytique locale a été donnée par J. Martinet et J.-P. Ramis [MR83, MR82]. Ces singularités non linéarisables se caractérisent par une partie linéaire non nilpotente dont le rapport des valeurs propres λ appartient à $\mathbb{Q}_{\leq 0}$.

Malgré la formulation relativement élémentaire de la question, ces deux points présentent des difficultés techniques considérables. Dans le cas de singularités résonantes seule l'existence de feuilletages non glocaux a pu être établie (Chapitre 2) par un argument de type Baire. Cette méthode n'offre donc pas d'information concrète sur la nature des feuilletages non glocaux. Je donnerai néanmoins des pistes prometteuses pour la construction d'exemples explicites (Paragraphe 4.2.1).

Considérons le cas, plus difficile, de singularités nilpotentes. Une possibilité consiste à généraliser la construction de la monodromie de Marín-Mattei [MM08, MM21], qui permet d'obtenir des invariants locaux dans les cas génériques (Chapitre 3). Cette construction s'appuie de façon essentielle sur l'existence [Sei68] d'un morphisme rationnel de réduction de la singularité de $\mathcal{F}$ en dimension 2, ainsi que sur des conditions génériques portant sur le type des singularités finales (non nilpotentes) du feuilletage réduit, excluant en particulier le cas des nœuds-cols ($\lambda = 0$) et des selles quasi-résonantes ($\lambda \in \mathbb{R}_{<0}\backslash\mathbb{Q}$) pour des raisons techniques. Ce mémoire fournit une classe plus large, presque optimale, de feuilletages admettant une monodromie au sens de Marín-Mattei, en incorporant à la construction initiale des blocs finaux contenant des selles quasi-résonantes et certains nœuds-cols [4]. On peut attendre d'une telle théorie, qui s'attache initialement à étudier l'incompressibilité des feuilles de $\mathcal{F}$, des caractérisations topologiques ou géométriques (au moins partielles) des feuilletages glocaux.

Propriétés analytiques des espaces de germes

L'autre objectif de ce mémoire est de poser des fondations sur lesquelles construire une géométrie analytique dans l'espace des séries convergentes $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ (Chapitre 1). Une telle théorie permettrait, à partir d'une relation entre deux germes $f, g \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, par exemple $f \circ g = g' \circ (f \times f'')$, de pouvoir déterminer f comme «fonction analytique» de g. Un exemple moins artificiel concerne les déformations isoholonomiques, analogues non linéaires des déformations isomonodromiques de systèmes différentiels linéaires. Dans le cas des singularités résonantes cela revient à considérer des déformations à invariants de Martinet-Ramis constants, induisant une lamination de l'espace des feuilletages résonants. Le fait que les invariants de Martinet-Ramis dépendent analytiquement du feuilletage doit permettre de doter cette lamination d'une structure transversalement analytique.

L'argument d'existence de feuilletages résonants non glocaux repose sur la structure analytique de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, plus précisément sur sa structure «d'espace de Baire analytique», expliquée ci-dessous. Cette propriété donne naissance à une notion de généricité, pour laquelle le feuilletage résonant générique n'est pas glocal. Plus généralement on montrera que les objets holomorphes génériques ne satisfont aucune relation analytique raisonnable.

4. Des exemples de feuilletages ne se prêtant pas à la construction seront exhibés.

La propriété de Baire analytique s'appuie sur la notion d'analyticité entre espaces localement convexes, et sur les ensembles analytiques associés : un espace est de Baire analytique si toute union dénombrable d'ensembles analytiques propres est d'intérieur vide. J'ai rapporté de ce petit voyage dans l'holomorphie en dimension infinie une collection de concepts et de résultats classiques d'analyse fonctionnelle, afin de les appliquer aux espaces $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$. Je présenterai des topologies localement convexes sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ qui sont plus aisées à manipuler dans certaines cas que la topologie inductive [5] usuelle. Ces topologies, que l'on peut choisir métrisables dans beaucoup d'applications (ce qui les distingue de la topologie inductive), dotent $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ d'une structure d'algèbre différentielle topologique dans laquelle la composition (à droite et à gauche) est analytique.

Le principal écueil à surmonter pour l'avènement de cette géométrie analytique est l'impossibilité d'appliquer le théorème d'inversion locale de Nash-Moser. Je ne suis pas complètement parvenu à une construction alternative, comme un résultat de paramétrisation des ensembles (sous-)analytiques analogue au cas de la dimension finie (Paragraphe 4.1.2). En revanche, à cette notion classique d'analyticité s'ajoute la notion de forte analyticité, propre à $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ à travers l'évaluation ponctuelle. Cette dernière est très naturelle et déjà présente dans les conclusions de nombreux théorèmes d'analyse et de dynamique : les applications fortement analytiques $\Lambda : \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \to \mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$ sont celles qui, non seulement continues, préservent les familles analytiques dépendant holomorphiquement d'un nombre fini de paramètres. Cette structure supplémentaire est un bon candidat à partir duquel bâtir une géométrie analytique en dimension infinie.

5. Héritée de la limite directe des espaces de Banach des fonctions holomorphes et bornées sur des polydisques de taille tendant vers 0.

[Eps93] A. Epstein, *Towers of Finite Type Complex Analytic Maps*, Ph.D. thesis, 1993

[MM08] D. Marín and J.-F. Mattei, *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), vol. 41, #6 : pp. 855–903, 2008

[MM21] D. Marín and J.-F. Mattei, *Topology of singular holomorphic foliations along a compact divisor*, PrePrint 2012, arxiv :1206.2121

[MR82] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., , #55 : pp. 63–164, 1982

[MR83] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), vol. 16, #4 : pp. 571–621, 1983

[MY82] J. Mather and S. Yau, *Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras*, Invent. Math., vol. 69, #2 : pp. 243–251, 1982

[Per92] R. Perez Marco, *Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J.-C. Yoccoz)*, Astérisque, , #206 : pp. Exp. No. 753, 4, 273–310, séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92, 1992

[Sei68] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation $A\,dy = B\,dx$*, Amer. J. Math., vol. 90 : pp. 248–269, 1968

[Whi65] H. Whitney, *Local properties of analytic varieties*, *in* Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), pp. 205–244, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965

Deuxième partie

Présentation des principaux résultats

Je n'ai sélectionné que quelques articles parmi les travaux rédigés depuis ma thèse [GT10, ST13, RT08, Tey11, Tey13b, Tey13c, Tey13d, Tey13a], ceux dont la thématique se rapporte directement au présent mémoire. Cette partie résume les résultats et techniques des travaux suivants [6] :

- «Existence of non-algebraic singularities of differential equation» [GT10]
- «Analyticity between spaces of convergent power series and applications» [Tey13b]
- «Analytic normal forms for convergent saddle-node vector fields» [ST13]
- «Germes de feuilletages présentables du plan complexe» [Tey13c]

La plupart des démonstrations sont seulement évoquées. Le lecteur trouvera dans le corps du mémoire des preuves courtes de certains résultats illustrant quelques aspects de la théorie et de ses applications, ou des preuves de résultats qui ne sont pas contenus dans les articles cités, mais nécessaires à l'unité thématique de ce mémoire.

Après une brève description de la façon dont ces travaux s'interconnectent pour répondre à la problématique abordée ici, nous exposons les définitions et résultats précis de chacun, dans trois chapitres ayant leur propre bibliographie.

- Le Chapitre 1 est consacré à [Tey13b].
- Le Chapitre 2 traite [GT10] et [ST13].
- Le Chapitre 3 concerne [Tey13c].

Nous terminons ce mémoire par le Chapitre 4 dans lequel sont présentées des conjectures et pistes pour des travaux futurs.

Articulation des différents travaux

L'article [GT10], écrit en collaboration avec Y. Genzmer, a initié le travail présenté ici. Le but était de rendre effective l'heuristique concernant la «taille» de l'espace des invariants des singularités résonantes, due à D. Cerveau. En effet cet espace de module est un produit fini de $\mathbb{C}\{h\}$, et si ce dernier était un espace de Baire, l'image des feuilletages polynomiaux par MR, l'application «invariants de Martinet-Ramis», serait maigre et ne pourrait pas couvrir toutes les classes de conjugaison locale des germes de feuilletages. La solution retenue a été de munir $\mathbb{C}\{h\}$ d'une topologie normée, pour laquelle l'espace n'est pas de Baire sans en être trop éloigné : l'image d'un sous-espace vectoriel de dimension dénombrable par une application «quasi-fortement analytique» est d'intérieur vide [7]. Il suffit ensuite de prouver que MR satisfait cette propriété. La partie difficile est contenue dans le résultat original de Martinet-Ramis [MR82] : si le feuilletage est préparé (sous forme de Dulac) alors c'est bien le cas. Il restait à établir que la procédure de préparation jouit également de cette propriété. Ce dernier point a été écrit pour les nœuds-cols génériques, mais il s'adapte sans peine à tous les cas. La conclusion principale de l'article est donc la suivante : il existe un grand nombre de feuilletages nœuds-cols qui ne sont conjugués à aucun feuilletage polynomial.

A posteriori ce résultat se généralise pour traiter des singularités résonantes glocales. Puisque l'espace des fonctions algébriques (ou élémentaires) est de dimension dénombrable, le même

6. Disponibles sur mon site internet professionnel.
7. La preuve repose en fin de compte sur l'application du théorème de Baire à un espace de Banach bien choisi.

raisonnement conduit à l'existence de feuilletages nœuds-cols non glocaux. Enfin, l'éclatement ponctuel d'une selle résonante produit un nœud-col placé sur le diviseur exceptionnel : la rationalité du morphisme d'éclatement permet alors de conclure dans ce cas également.

Beaucoup de constructions de [GT10] me paraissaient généralisables à d'autres situations, ou pour des notions d'ensembles analytiques plus vastes : au lieu de considérer des images d'applications quasi-fortement analytiques, on peut s'intéresser au lieu d'annulation d'une application analytique, au sens des espaces localement convexes. Cette approche est détaillée dans [Tey13b], dont le résultat principal affirme que $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, muni par exemple de la topologie inductive (mais pas seulement), est un espace de Baire analytique, notion qui englobe le résultat de [GT10]. La dérivation et la composition des germes sont analytiques pour ces topologies, ce qui permet d'étudier la généricité d'une plus grande classe de propriétés exprimées sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$. Parmi les applications de ce théorème figurent les résultats suivants, tendant à montrer que les objets holomorphes génériques ne satisfont aucune relation analytique raisonnable.

- **Statique**. Un germe de fonction holomorphe de la droite complexe n'est génériquement solution d'aucune équation différentielle $y^{(n)}(z) = F\left(z, y(z), \dots, y^{(n-1)}(z)\right)$, où F est une fonction élémentaire.
- **Dynamique discrète**. Un sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^m, 0)$ est génériquement libre.
- **Dynamique continue**. Les germes de feuilletages du plan complexe, de partie linéaire nulle au voisinage d'une singularité, admettant une structure transverse résoluble sont contenus dans un ensemble analytique propre.

Les considérations précédentes prouvent que, génériquement, un feuilletage résonant n'est pas glocal. Les arguments de Baire invoqués ne permettent pas de construire des exemples explicites. Dans l'optique d'une caractérisation partielle (à venir) des invariants de Martinet-Ramis des feuilletages résonants glocaux (par exemple l'absence de singularité essentielle dans leur prolongement analytique), et dans la mesure où il est possible d'en déterminer certains ne satisfaisant pas ces hypothèses (par exemple $h \mapsto h \exp \frac{1}{1+h}$), se pose la question de la construction effective de feuilletages réalisant ces invariants. L'objet de [ST13], article co-écrit avec R. Schäfke, est de fournir une réponse à ce problème dans le cas de nœuds-cols de type convergent [8]. Les preuves habituelles de «synthèse» pour ces objets reposent

- soit sur des arguments géométriques de type Ahlfors-Bers ou Newlander-Nirenberg [MR82, MR83] qui, sans être aussi purement existentiels qu'un argument de Baire, ne se prêtent pas facilement à une exploitation effective (en particulier calculatoire),
- soit sur la théorie d'Écalle [Éca85] du calcul moulien et étranger, offrant des formules explicites mettant en jeu des sommes infinies dont l'évaluation ou l'approximation effective n'est pas nécessairement aisée.

Au contraire la méthode proposée ici consiste à appliquer une méthode de point fixe, qui converge à la fois pour la topologie de Krull sur l'espace des séries formelles et pour la topologie de la convergence uniforme, vers un germe holomorphe. Cette méthode est constructive et a été implémentée, permettant de mener des calculs soit numériques avec précision arbitraire sur les coefficients de Taylor des fonctions définissant le feuilletage, soit symboliques en prenant comme blocs élémentaires des intégrales itérées de fonctions de type $z \mapsto z^{-k} P(z) \exp z^{\alpha}$, avec $(k, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ et $P \in \mathbb{C}[z]$.

8. Bien que cela ne réponde pas à la question posée en toute généralité, les techniques présentées seront prochainement généralisées.

Nous avons non seulement écrit un théorème de synthèse, dont le principe peut se généraliser à d'autres types de singularités ainsi qu'à un contexte semi-global, mais nous contrôlons également de manière très précise la forme que revêtent les coefficients définissant les feuilletages, offrant une famille explicite de formes normales calculables pour la classification analytique des nœuds-cols convergents. Cette famille généralise les résultats connus de J. Écalle [Éca85] améliorés par F. Loray [Lor04].

Finalement nous cherchons à étendre aux cas plus dégénérés les arguments déployés ci-dessus. Cela nécessite de comprendre les invariants analytiques locaux des germes de feuilletages du plan complexe. Notons que le résultat principal de [GT10] a déjà été adapté par G. Calsamiglia [Cal10] à une certaine classe de singularités dicritiques réduites après un éclatement, dont les invariants locaux contiennent les classes de conjugaison de paires d'involution (l'espace des modules de ces dernières est un espace fonctionnel [Vor82] comparable à $\mathbb{C}\{h\}$).

La construction des invariants locaux en toute généralité est une tâche ardue, mais D. Marín et J.-F. Mattei ont réalisé récemment [MM21] cette classification dans le cas générique. Le classifiant, la monodromie d'un feuilletage $\mathcal{F}$, est l'action du groupe fondamental $\pi_1(U\backslash S)$ du complémentaire des séparatrices [9] de $\mathcal{F}$ dans un (germe de) voisinage de la singularité, par automorphismes holomorphes de l'espace des feuilles. Sous les conditions d'incompressibilité des feuilles [10] et d'existence d'une transversale complète à $\mathcal{F}$, l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$ peut en effet être muni d'une structure de variété analytique (en général non séparée). Nous dirons qu'un feuilletage vérifiant ces propriétés est présentable. Le but essentiel de [Tey13c] est de caractériser les germes de feuilletages présentables, en incorporant à la preuve de l'incompressibilité des courbes généralisées sans petits diviseurs [MM08] le cas des nœuds-cols et des selles quasi-résonantes. Nous montrons que la seule obstruction à la présentabilité est la présence de nœuds-cols dont la séparatrice forte est une composante du diviseur exceptionnel.

9. Au moins dans le cas non dicritique.
10. Le groupe fondamental de chaque feuille s'injecte dans $\pi_1(U\backslash S)$.

Notations

- Dans toute la suite m est un entier strictement positif.
- On note $\overline{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- Les symboles écrits en caractères gras représentent des multi-variables ou vecteurs de dimension m. En particulier $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ représentera une multi-variable complexe de $\mathbb{C}^m$.
- Pour $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ on rappelle les notations standard
  - $|\mathbf{n}| := \sum_{\ell=1}^{m} n_\ell$,
  - $\mathbf{n}! := \prod_{\ell=1}^{m} n_\ell$,
  - $\mathbf{z}^{\mathbf{n}} := \prod_{\ell=1}^{m} z_\ell^{n_\ell}$.
- La concaténation des vecteurs est représentée par le symbole $\oplus$. Ainsi $(a_1, \dots, a_k) \oplus (b_1, \dots, b_\ell)$ désignera le vecteur $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell)$. Par extension on écrira $h^{\oplus m}$ pour le vecteur $(h, \dots, h)$ de dimension m.
- L'algèbre des polynômes à coefficients complexes en $\mathbf{z}$ est écrite $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$. Le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus d sera noté $\mathbb{C}[\mathbf{z}]_{\leq d}$.
- L'algèbre des séries entières formelles (*resp.* convergentes) à coefficients complexes en $\mathbf{z}$ sera notée $\mathbb{C}[[\mathbf{z}]]$ (*resp.* $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$).
- On fera référence à la projection canonique $J_N : \mathbb{C}[[\mathbf{z}]] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[\mathbf{z}]_{\leq N}$, définie par

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m} f_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}} \quad \longmapsto \quad \sum_{|\mathbf{n}| \leq N} f_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}},$$

  comme le «N-jet» ou «jet d'ordre N».

[Cal10] G. Calsamiglia, *Non agebrizable dicritical singularities*, PrePrint, 2010

[Éca85] J. Écalle, Les fonctions résurgentes. Tome III, *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*, vol. 85, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, l'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects], 1985

[GT10] Y. Genzmer and L. Teyssier, *Existence of non-algebraic singularities of differential equation*, J. Differential Equations, vol. 248, #5 : pp. 1256–1267, doi :10.1016/j.jde.2009.10.001, 2010

[Lor04] F. Loray, *Versal deformation of the analytic saddle-node*, Astérisque, , #297 : pp. 167–187, analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. II, 2004

[MM08] D. Marín and J.-F. Mattei, *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), vol. 41, #6 : pp. 855–903, 2008

[MM21] D. Marín and J.-F. Mattei, *Topology of singular holomorphic foliations along a compact divisor*, PrePrint 2012, arxiv :1206.2121

[MR82] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., , #55 : pp. 63–164, 1982

[MR83] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), vol. 16, #4 : pp. 571–621, 1983

[RT08] C. Rousseau and L. Teyssier, *Analytical moduli for unfoldings of saddle-node vector fields*, Mosc. Math. J., vol. 8, #3 : pp. 547–614, 616, 2008

[ST13] R. Schäfke and L. Teyssier, *Analytic normal forms for convergent saddle-node vector fields*, PrePrint (soumis) 2013

[Tey11] L. Teyssier, *An example of a topologically non-rigid foliation of the complex projective plane*, Int. Math. Res. Not. IMRN, , #18 : pp. 4089–4104, doi :10.1093/imrn, 2011

[Tey13a] L. Teyssier, *Computing Dulac's maps of (almost every) non-degenerate singularities*, PrePrint 2013

[Tey13b] L. Teyssier, *Analyticity between spaces of convergent power series and applications*, PrePrint (soumis) 2013

[Tey13c] L. Teyssier, *Germes de feuilletages présentables du plan complexe*, PrePrint (soumis) 2013

[Tey13d] L. Teyssier, *Holomorphic infinitesimal affine actions of the plane*, PrePrint (soumis) 2013

[Vor82] S. Voronin, *Analytic classification of pairs of involutions and its applications*, Moscow State University. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, vol. 16, #2 : pp. 21–29, 1982

Chapitre 1

Propriétés analytiques de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$

L'algèbre différentielle $\left(\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}, \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_{1\leq j\leq m}\right)$ sera munie d'une topologie localement convexe générée par une famille de normes

$$\left\| \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} f_{\mathbf{n}} \mathbf{z}^{\mathbf{n}} \right\|_a := \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} a_{\mathbf{n}} |f_{\mathbf{n}}| , \qquad (\star)$$

où $a = (a_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m}$ est une suite de réels strictement positifs satisfaisant la condition de croissance

$$\lim_{|\mathbf{n}|\to\infty} a_{\mathbf{n}}^{1/|\mathbf{n}|} = 0 .$$

Cette condition assure la convergence de la série $(\star)$. On notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des telles suites.

Définition. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathcal{A}$. On appellera A-**topologie** sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ la topologie localement convexe engendrée par la famille de normes $(\|\bullet\|_a)_{a\in A}$. L'espace topologique associé sera noté $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$.

Ce choix particulier de topologie, qui diffère des topologies «usuelles», est motivé par la théorie de l'analyticité entre espaces vectoriels localement convexes $E \to F$, développée dans les années 1970 par plusieurs mathématiciens (entre autres S. Dineen, L. Nachbin et J. Silva) dans le sillage des travaux de J.-P. Ramis sur les espaces analytiques banachiques [Ram70]. Une application analytique $\Lambda : U \subset E \to F$ définie sur un ouvert est alors la somme d'une «série entière convergente» dans laquelle le rôle des parties homogènes de degré p est joué par les applications p-linéaires continues $E \to F$. Nous renvoyons au paragraphe 1.1.2 pour une définition précise.

Il est facile de se convaincre que les opérateurs

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} : \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \\ f &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial z_j} \end{aligned}$$

et, pour $g \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}^m$ avec $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} g^* : \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \\ f &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

ne peuvent être continus si on dote $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ d'une topologie normée [1] (pas nécessairement de la forme ($\star$)). Au contraire la **topologie factorielle**, donnée par la F-topologie où $F = (a_k)_{k\in\mathbb{N}_{>0}}$ avec $a_k := \left(\mathbf{n}!^{-1/k}\right)_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m}$, rend ces opérateurs continus [Tey13b, Proposition 2.24]. D'autres topologies localement convexes séparées sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ jouissent de la même propriété, elles seront qualifiées d'**utiles**.

Exemple. À $f \in \mathbb{C}\{z\}$ fixé avec rayon de convergence $\mathcal{R}(f) > 0$, l'application

$$\begin{array}{rcl} f_* : \{g \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} : |g(0)| < \mathcal{R}(f)\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

est analytique avec un développement convergent dans $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ pour toute topologie utile :

$$f_* g \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(g(0))}{p!} (g - g(0))^p \,.$$

La principale difficulté de la théorie, dans le cas particulier des espaces de germes, est le constat élémentaire suivant [Tey13b, Proposition 2.15] :

Fait. *L'image de tout ouvert non vide $U \subset \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ par l'application «rayon de convergence» $\mathcal{R}(\bullet)$ est* $]0, \infty]$.

On aura l'occasion de souligner à de multiples reprises en quoi l'absence de borne inférieure non nulle à $\mathcal{R}(\bullet)$ est gênante, en tout premier lieu parce qu'elle empêche l'espace $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ d'être de Baire.

1.1 Préliminaires

Afin de présenter les principaux résultats il nous faut donner quelques définitions et propriétés élémentaires de l'analyticité entre espaces localement convexes.

1.1.1 Considérations topologiques

La topologie inductive (localement convexe et séparée) sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ est plus fine que toute A-topologie, plus précisément l'inégalité de Cauchy se traduit par

$$\|f\|_a \;\leq\; \left\| z \mapsto \frac{r}{r-z} \right\|_a^m \sup_{r\mathbb{D}^m} |f|$$

pour tous $f \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ et $0 < r < \mathcal{R}(f)$ [Tey13b, Proposition 2.16]. Toute application analytique pour la seconde l'est donc aussi pour la première, et en particulier la topologie inductive est utile. Le principal avantage des A-topologies sur la topologie inductive est que si A est au plus dénombrable (comme la topologie factorielle) $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ est métrisable ; le principal désavantage est que la seule A-topologie complète est celle engendrée par $\mathcal{A}$: aucun $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ n'est un espace de Fréchet. Par contre toute A-topologie utile dote $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ d'une structure d'espace nucléaire [Tey13b, Proposition 2.23] qui entraîne, dans le cas où A est dénombrable, que $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ est un espace de Montel [2].

1. Ou engendrée par un nombre fini de normes.
2. Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Lemme. [Tey13b, Proposition 2.15] *$\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ n'est pas de Baire.*

Démonstration. Pour $N \in \mathbb{N}$ l'ensemble $F_N := \left\{\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} f_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} : |f_{\mathbf{n}}| \leq N^{|\mathbf{n}|}\right\}$ est un fermé. Son intérieur est vide puisque $\mathcal{R}(\bullet)$ prend des valeurs arbitrairement proches de 0 sur tout ouvert non vide. Pourtant $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} F_n$. □

Bien que $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ ne soit pas complet on montre sans peine que son complété topologique s'identifie canoniquement à un sous-espace des séries formelles $\mathbb{C}[[\mathbf{z}]]$

$$\widehat{\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}}_A \quad := \quad \bigcap_{a\in A}\left\{\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} f_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}[[\mathbf{z}]] : \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} a_{\mathbf{n}}|f_{\mathbf{n}}| < \infty\right\}.$$

Remarque. Quand A est au plus dénombrable l'espace $\widehat{\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}}_A$ est un cas particulier d'espace séquentiel de Köthe [Köt69], dont certains ont été particulièrement étudiés, comme l'espace des suites à décroissance rapide. Ce dernier cas est particulièrement important car il est l'exemple-type d'espace «tempéré» dans lequel le théorème d'inversion locale de Nash-Moser [Ham82] s'applique. Malheureusement il est bien connu que les espaces de Köthe présentés ici ne satisfont pas les hypothèses de ce théorème.

1.1.2 Applications et ensembles analytiques

Ici $(E, (\|\bullet\|_a)_{a\in A})$ et $(F, (\|\bullet\|_b)_{b\in B})$ sont deux espaces localement convexes séparés. Nous résumons les définitions et propriétés principales des fonctions analytiques $E \to F$ et de leurs zéros. Les références suivies sont [Bar85] et [Maz84].

Définition. Une application Λ définie sur un ouvert $U \subset E$ et à valeurs dans F est analytique sur U si elle est analytique en tout point $f \in U$, à savoir s'il existe

- pour tout $p \in \mathbb{N}$ une application p-linéaire continue $P_p \in \mathcal{L}_p(E \to F)$,
- pour tout $b \in B$ un voisinage W de 0 dans E assez petit,

tels que

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\Lambda(f+h) - \sum_{p=0}^{N} P_p\left(h^{\oplus p}\right)\right\|_b \quad = \quad 0$$

uniformément en $h \in W$. On écrira alors l'égalité

$$\Lambda(f+h) = \sum_{p=0}^{\infty} P_p\left(h^{\oplus p}\right). \tag{□}$$

Les applications analytiques $E \to F$ possèdent les bonnes propriétés attendues :

- Le développement (□) est unique. En particulier, si Λ s'annule sur un ensemble d'intérieur non vide alors $\Lambda = 0$.
- Les fonctions analytiques sont continues.
- La composition d'applications analytiques entre domaines compatibles est analytique.
- Il existe une formule de Cauchy.
- Toute application analytique $\Lambda : U \subset E \to F$ se prolonge de façon unique en une application analytique $\hat{\Lambda} : \hat{U} \to \hat{F}$ entre complétés topologiques [3].

3. $\hat{U} \supset U$ est un ouvert de $\hat{E}$ qui n'est pas forcément un complété de U.

- Une application $E_1 \times E_2 \to F$ est analytique pour la topologie produit si, et seulement si, chaque application partielle $E_\ell \to F$ est analytique.
- Une application $\Lambda : U \subset E \to F$ est analytique si, et seulement si, Λ est continue et pour tout sous-espace vectoriel $V < E$ de dimension finie la restriction $\Lambda|_{U\cap V}$ est analytique.

Remarque. Dans le dernier point, la condition de continuité peut être affaiblie : Λ doit seulement être **amplement bornée**, c'est-à-dire que pour tout $b \in B$ et $f \in U$ il existe un voisinage assez petit $W \subset E$ de 0 tel que

$$\sup_{h\in W} \|\Lambda(f+h)\|_b \quad < \quad \infty .$$

Toute application continue est amplement bornée.

Définition. Un fermé $\Omega \subset \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ est un **ensemble analytique** si pour tout $f \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert U de f et une collection $(\Lambda_\iota)_{\iota\in I}$ de fonctions analytiques telles que

$$\Omega \cap U \quad = \quad \bigcap_{\iota\in I} \Lambda_\iota^{-1}(0) .$$

Il sera **propre** si son intérieur est vide.

1.2 Espaces de Baire analytiques

Définition. Soit E un espace localement convexe séparé.

1. E est un **espace de Baire analytique** lorsque toute union dénombrable d'ensembles analytiques propres de E est d'intérieur vide.
2. On dira alors qu'une propriété $\mathcal{P}$ exprimée sur des éléments de E est **générique**[4] si $\{f \in E : \mathcal{P}(f)$ est fausse$\}$ est **analytiquement maigre**, c'est-à-dire inclus dans une union dénombrable d'ensembles analytiques propres.

Les résultats principaux de ce chapitre sont les suivants :

Théorème 1.2.1. [Tey13b, Theorem A] *L'espace topologique $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ muni soit d'une A-topologie soit de la topologie inductive, est un espace de Baire analytique.*

Ce théorème se démontre en utilisant le fait que l'inclusion de l'espace de Banach $\mathcal{B} := \{\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} f_{\mathbf{n}}\mathbf{z}^{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} : (f_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}}$ est bornée$\}$ dans $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ induit une application continue d'image dense. On ramène alors la preuve à un argument de Baire sur $\mathcal{B}$.

Théorème 1.2.2. [Tey13b, Theorem B] *Soit $V < \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}_A$ un espace vectoriel de dimension au plus dénombrable et $\Lambda : U \subset V \to \mathbb{C}\{\mathbf{w}\}_B$ une application analytique pour la topologie induite. Alors l'image $\Lambda(U)$ est analytiquement maigre.*

La preuve de ce résultat découle du fait que pour tout sous-espace de dimension finie $F < V$ l'image $\Lambda(U \cap F)$ est analytiquement maigre. Ceci s'obtient en restreignant Λ à des compacts K de $U \cap F$ sur lesquels la différentielle de Λ est de rang maximal. Le théorème des fonctions implicites en dimension finie permet alors de trouver un ensemble analytique propre de $\mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$

4. Par abus de terminologie on dira aussi qu'un élément satisfaisant $\mathcal{P}$ est générique.

contenant $\Lambda(K)$. Comme $U \cap F$ s'écrit comme union dénombrable de tels compacts, le résultat suit.

Une application typique de ces résultats est de prouver que l'image de $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ par une certaine application analytique $\Lambda : \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \to \mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$ est d'intérieur vide, et en particulier que $\Lambda|_{\mathbb{C}[\mathbf{z}]}$ ne peut être surjective.

1.3 Analyticité forte

Définition. On munit $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ et $\mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$ d'une topologie localement convexe. Une application $\Lambda : U \subset \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \to \mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$ est dite **quasi-fortement analytique** si pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et toute **famille holomorphe** $(f_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in(\mathbb{C}^n,0)}$, c'est-à-dire telle que

- $f_{\mathbf{x}} \in U$
- $((\mathbf{x},\mathbf{z}) \mapsto f_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x},\mathbf{z}\}$,

la famille $(\Lambda(f_{\mathbf{x}}))_{\mathbf{x}\in(\mathbb{C}^n,0)}$ est également holomorphe, c'est-a-dire $\Lambda(f_{\mathbf{x}})(\mathbf{w}) \in \mathbb{C}\{\mathbf{x},\mathbf{w}\}$. Si de plus Λ est amplement bornée alors on dira qu'elle est **fortement analytique**.

Ces définitions sont assez naturelles, au point que de nombreux auteurs prennent pour définition d'holomorphie de Λ la quasi-forte analyticité. Il faut d'ailleurs constater que cette notion ne nécessite pas de considérer les espaces de germes comme des espaces topologiques.

Exemple. Chaque dérivation $\frac{\partial}{\partial z_j}$ ainsi que les morphismes g^* et f_* sont trivialement quasi-fortement analytiques.

Remarque 1.3.1. En fait le Théorème 1.2.2 est vrai si Λ est seulement supposée quasi-fortement analytique. Pour cela on utilise le fait [Tey13b, Proposition 3.16] qu'une application quasi-fortement analytique est analytique en restriction aux sous-espaces de dimension finie de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, à condition que ce dernier soit muni d'une topologie moins fine que l'inductive.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.3.2. [Tey13b, Theorem D] *Toute application fortement analytique est analytique.*

Ce résultat est une conséquence de la formule de Cauchy dans $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$. Si l'on dispose du développement $\Lambda(f+h) = \sum_{p\in\mathbb{N}} P_p(h^{\oplus p})$ alors pour η assez petit on a

$$P_p\left(h^{\oplus p}\right) \quad = \quad w \mapsto \oint_{\eta\mathbb{S}^1} \Lambda(f+xh)(w)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^{p+1}}.$$

L'hypothèse portant sur le caractère amplement borné de Λ permet de donner un sens à l'intégrale dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus.

L'obstruction majeure au défaut de (quasi-)forte analyticité est le contrôle de la borne inférieure du rayon de convergence de la famille $(\Lambda(f_{\mathbf{x}}))_{\mathbf{x}\in(\mathbb{C}^n,0)}$.

Proposition 1.3.3. [Tey13b, Propositions 3.15 et 3.19] *Considérons une application $\Lambda : U \subset \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \to \mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$ et écrivons $\Lambda(f) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^m} T_{\mathbf{n}}(\Lambda(f))\mathbf{w}^{\mathbf{n}}$ pour $f \in U$. Munissons chaque espace de germes d'une topologie localement convexe séparée.*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- Λ *est quasi-fortement analytique,*
- *pour toute famille holomorphe* $(f_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in(\mathbb{C}^n,0)}$ *les conditions suivantes sont vérifiées :*
  - *chaque application* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mapsto T_{\mathbf{n}}(\Lambda(f_{\mathbf{x}})) \in \mathbb{C}$ *est holomorphe sur un polydisque dont la taille ne dépend pas de* $\mathbf{n}$*,*
  -

$$\liminf_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \mathcal{R}(\Lambda(f_{\mathbf{x}})) \;>\; 0.$$

2. *Supposons de plus que la topologie sur* $\mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$ *soit moins fine que la topologie inductive. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
   - Λ *est fortement analytique,*
   - Λ *est analytique et pour toute famille holomorphe* $(f_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in(\mathbb{C}^n,0)}$ *on a simultanément :*

$$\begin{aligned} \liminf_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \mathcal{R}(\Lambda(f_{\mathbf{x}})) &> 0 \\ \limsup_{\mathbf{x}\to\mathbf{0},r\to 0} \left(\sup_{r\mathbb{D}^m} |\Lambda(f_{\mathbf{x}})| \right) &< \infty. \end{aligned}$$

À titre d'illustration nous présentons un résultat qui sera utile pour traiter des propriétés de feuilletages.

Théorème 1.3.4. [Tey13b, Theorem C] *Munissons les espaces de germes de la topologie factorielle. Soit* VF *l'espace vectoriel des germes de champs de vecteurs holomorphes à l'origine de* $\mathbb{C}^m$*, naturellement identifié à* $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}^m$*. Pour* $X \in \mathsf{VF}$ *on note* Φ_X *le flot de* X*, c'est-à-dire l'unique germe en* $(\mathbf{0}, 0)$ *de fonctions holomorphes* $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^m$

$$\Phi_X : (\mathbf{p}, t) \;\longmapsto\; \Phi_X^t(\mathbf{p})$$

satisfaisant le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{p}, t) &= X(\mathbf{z}(\mathbf{p}, t)) \\ \mathbf{z}(\mathbf{p}, 0) &= \mathbf{p}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Phi_\bullet : \mathsf{VF} &\longrightarrow \mathbb{C}\{\mathbf{z}, t\}^m \\ X &\longmapsto \Phi_X \end{aligned}$$

est fortement analytique.

La partie «quasi-forte analyticité» de la preuve est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres, la partie «amplement bornée» découle d'estimations explicites sur les normes de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z_j}$ ainsi que de la formule de Lie

$$\Phi_X^t \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X \cdot^n \mathrm{Id},$$

où $X \cdot^n \mathrm{Id}$ est l'application itérée n fois de la dérivation $X\cdot$ sur l'identité de $\mathbb{C}^m$. Ce théorème reste vrai pour toute topologie utile pour laquelle on dispose de «bonnes» estimations sur les normes des dérivations $\frac{\partial}{\partial z_j}$.

1.4 Applications en analyse et dynamique complexes

1.4.1 Solutions holomorphes d'équations différentielles

Corollaire 1.4.1. [Tey13b, Corollary B] *Munissons les espaces de germes de la topologie factorielle . Un élément générique $f \in \mathbb{C}\{z\}$ n'est solution d'aucune équation différentielle*

$$y^{(n)}(z) \quad = \quad F\Big(z, y(z), \dots, y^{(n-1)}(z)\Big),$$

F une fonction élémentaire différentiable au point $\Big(0, f(0), \dots, f^{(n-1)}(0)\Big)$ et $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

En fait on prouve un résultat plus fort. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit $V_n < \mathbb{C}\{z, \delta_0, \dots, \delta_n\}$ un sous-espace vectoriel de dimension au plus dénombrable. Alors l'ensemble S_n des germes $f \in \mathbb{C}\{z\}$ solution d'au moins une équation différentielle

$$P\Big(z, f - f(0), \dots, f^{(n)} - f^{(n)}(0)\Big) \quad = \quad 0$$

avec

$$P \in V_n^* \quad := \quad V_n \setminus \left\{ Q : \frac{\partial Q}{\partial \delta_n}(\mathbf{0}) = 0 \right\},$$

est analytiquement maigre. L'union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ fournit l'ensemble recherché, étant donné que les fonctions élémentaires en $n+2$ variables, différentiables en $\mathbf{0}$, forment un sous-espace V_n de dimension dénombrable de $\mathbb{C}\{z, \delta_0, \dots, \delta_n\}$.

Remarque. Pour $n := 0$ et $V_0 := \mathbb{C}[z, y]$ on démontre en particulier que les germes algébriques constituent un ensemble analytiquement maigre.

Démonstration. Introduisons l'application $F_n^f : z \mapsto \Big(z, f(z) - f(0), \dots, f^{(n)}(z) - f^{(n)}(0)\Big)$, dépendant analytiquement de f. En différentiant la relation $P \circ F_n^f(z) = 0$ par rapport à z on trouve que F_n^f est la courbe intégrale du flot du champ de vecteurs compagnon

$$\mathfrak{X}(P) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{j+1} \frac{\partial}{\partial \delta_j} - \frac{\frac{\partial P}{\partial z} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial P}{\partial \delta_j} \delta_{j+1}}{\frac{\partial P}{\partial \delta_n}} \frac{\partial}{\partial \delta_n}$$

passant par la condition initiale $\mathbf{0}$. Bien sûr l'application $P \in V_n^* \mapsto \mathfrak{X}(P)$ est fortement analytique, de même que

$$\begin{aligned} \Phi_n : \mathbb{C}[z]_{\leq n} \times V_n^* &\longrightarrow \mathbb{C}\{z\} \\ (J, P) &\longmapsto \Big(z \mapsto J(z) + \Pi \circ \Phi^z_{\mathfrak{X}(P)}(\mathbf{0})\Big), \end{aligned}$$

d'après le Théorème 1.3.4, en notant Π la projection canonique $(z, \delta_0, \dots, \delta_n) \mapsto \delta_0$. Par construction, si f est solution de $P \circ F_n^f = 0$ pour un certain $P \in V_n^*$, alors $f = \Phi_n(J_n(f), P)$. Ainsi S_n est égal à l'image de Φ_n, qui est analytiquement maigre d'après le Théorème 1.2.2. □

La preuve de ce résultat repose de manière essentielle sur le fait que l'ensemble sous-analytique Ω, obtenu comme la projection sur le second facteur de l'ensemble analytique correspondant à l'annulation de

$$\begin{aligned} V_n^* \times \mathbb{C}\{z\} &\longrightarrow \mathbb{C}\{z\} \\ (P, f) &\longmapsto P \circ F_n^f, \end{aligned}$$

est paramétré par l'application analytique Φ_n. Un théorème de paramétrisation général permettrait de prouver la maigreur des sous-analytiques provenant de considérations similaires, parmi lesquelles la question glocale.

1.4.2 Espaces analytiques modelés

La définition de l'analyticité nécessite de se placer sur un ouvert de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$. Pourtant on aimerait parler d'analyticité par rapport à une fonction f qui, par exemple, s'annule en l'origine. Dans ce cas précis l'option naturelle est de considérer l'idéal maximal $\mathfrak{Z}$ de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ en tant qu'espace vectoriel muni de la topologie induite par l'inclusion $\mathfrak{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$. Cette approche se limite toutefois aux espaces affines. Or on peut vouloir traiter l'analyticité par rapport à une fonction méromorphe ; c'est en particulier le cas lorsqu'on étudie les feuilletages de $\mathbb{C}^2$, qui correspondent à des équations différentielles de la forme

$$y' = \frac{P}{Q}(x, y)$$

avec P et Q holomorphes. L'approche algébro-géométrique standard, consistant à étudier la structure des faisceaux de fonctions holomorphes sur une variété analytique, est abordée dans [Maz84]. Néanmoins c'est une théorie difficile et, pour les cas considérés ici, trop puissante. C'est pourquoi nous introduisons la notion de structure analytique modelée sur un espace localement convexe séparé.

Définition. Soient E, F deux espaces localement convexes séparés, X un espace topologique et $\Psi : U \twoheadrightarrow X$ une application continue et surjective d'un ouvert U de E dans X.

1. On dit qu'une application $\Lambda : X \to F$ est analytique pour la structure analytique induite sur X par Ψ si $\Psi^*\Lambda := \Lambda \circ \Psi$ est analytique.
2. Soit $\tilde{U} \subset F$ un ouvert et $\Lambda : \tilde{U} \to X$. On dit que Λ est analytique pour la structure analytique induite sur X par Ψ s'il existe une application analytique $\tilde{\Lambda} : \tilde{U} \to U$ telle que $\tilde{\Lambda}^*\Psi = \Lambda$.
3. On dit que X est un **espace analytique modelé sur** E si ses fonctions analytiques sont données par (1) et (2).
4. Ces définitions permettent de parler d'applications analytiques entre espaces analytiques. Une application $\Lambda : X \to Y$ est analytique s'il existe, avec des notations évidentes, une application analytique $\tilde{\Lambda} : U_X \subset E \to U_Y \subset F$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Lambda} & Y \\ {\scriptstyle \Psi_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Psi_Y} \\ U_X & \xrightarrow[\tilde{\Lambda}]{} & U_Y \end{array}$$

Aussi peut-on doter le corps $\mathbb{C}(\{\mathbf{z}\})$ des germes de fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}^m$ d'une structure d'espace analytique modelé sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ à travers l'application quotient

$$\begin{array}{rcl} \text{Quot} : \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \times (\mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{C}(\{\mathbf{z}\}) \\ (P, Q) & \longmapsto & \dfrac{P}{Q}. \end{array}$$

En pratique il s'avère que cette définition n'est pas suffisante car un grand nombre de constructions naturelles ne sont définies que si P et Q sont premiers entre eux (nous en verrons des exemples plus tard). Nous devons donc restreindre Quot au sous-ensemble des couples (P, Q) premiers entre eux. Pour cela nous devons vérifier que ces couples forment un ouvert de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \times \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, ce qui est énoncé dans le paragraphe suivant.

Remarque. Il faut prendre garde au fait qu'un ensemble analytique d'un espace X modelé sur E *n'est pas* défini comme le lieu d'annulation d'une collection d'application analytiques. Par exemple on a envie de dire que les germes méromorphes $\frac{P}{Q}$ ayant un N-jet nul [5] forment un ensemble analytique propre de $\mathbb{C}(\{\mathbf{z}\})$. Or l'application «$N$-jet» $(P, Q) \mapsto (J_N(P), J_N(Q))$ ne laisse pas Quot invariant et ne passe donc pas au quotient. Par contre si P et Q sont premiers entre eux et si $u \in \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \setminus \mathfrak{Z}$ alors $J_N(P) = J_N(Q) = 0$ si, et seulement si, $J_N(uP) = J_N(uQ) = 0$. Cette situation, analogue au problème de la définition d'une variété algébrique dans les espaces projectifs de dimension finie, motive la définition suivante.

Définition. Soit X un espace analytique modelé sur un espace localement convexe séparé E à travers une application $\Psi : U \twoheadrightarrow X$. Un fermé $\Omega \subset X$ est un **ensemble analytique** de X si $\Psi^{-1}(\Omega)$ est un ensemble analytique. On étend alors la notion d'espace de Baire analytique à X de manière évidente.

Par construction tout espace analytique modelé sur un espace de Baire analytique est encore un espace de Baire analytique, de sorte que le Théorème 1.2.2 reste vrai dans ce cadre.

1.4.3 Familles de germes holomorphes premiers entre eux

Théorème 1.4.2. [Tey13b, Theorem 6.1] *Soit $\mathfrak{Z}$ l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ muni de la topologie induite par une A-topologie sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$. Pour tous entiers $m, k \geq 2$ les k-uples de germes de fonctions holomorphes en m-variables qui ne sont pas premiers entre eux forment un ensemble analytique propre de $\mathfrak{Z}^k$.*

En fait il est possible de montrer que cet ensemble analytique Ω est «algébrique» dans le sens où pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $d(N) \in \mathbb{N}$ et un polynôme $\Lambda_N : \mathbb{C}[\mathbf{z}]^k_{\leq N} \to \mathbb{C}^{d(N)}$ tels que

$$\Omega \quad = \quad \bigcap_{N \in \mathbb{N}} (\Lambda_N \circ J_N)^{-1}(0),$$

où $J_N : \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}^k \to \mathbb{C}[\mathbf{z}]^k_{\leq N}$ est l'opérateur dont les composantes sont données par le N-jet des éléments de chaque facteur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$. En raison de la factorialité de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ et $\mathbb{C}[[\mathbf{z}]]$ il suffit de prouver le théorème au niveau formel pour la topologie projective de $\mathbb{C}[[\mathbf{z}]]^k$.

La preuve de ce résultat est un exercice (un peu technique) d'algèbre linéaire. Comme pour les théories usuelles sur les résultants, la clef de la démonstration repose sur l'évaluation du rang d'une matrice (ici une suite de matrices de taille croissante), dont la construction est analogue à celle des matrices de Macaulay-Sylvester.

5. Dans le sens où P et Q ont un N-jet nul.

1.4.4 Résolubilité des groupes de biholomorphismes

On identifie un groupe G de type fini à la donnée de ses générateurs $\left(\Delta_j\right)_{1\leq j\leq n} \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^m,0)^n$. On munit $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^m,0)$ de la structure analytique induite par l'application

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{GL}_m(\mathbb{C})\times\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}^m & \longrightarrow & \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^m,0) \\ (L,f_1,\ldots,f_m) & \longmapsto & L+(f_1-J_1(f_1),\ldots,f_m-J_1(f_m))\,, \end{array}$$

où $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ est muni d'une topologie utile.

Corollaire 1.4.3. [Tey13b, Corollary A]

1. *Le sous-groupe générique de type fini de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^m,0)$ *est libre.*
2. *Les sous-groupes résolubles engendrés par deux éléments de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ *forment un ensemble analytique propre.*
3. *Le résultat (2) reste valable pour les sous-groupes de type fini de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ *engendrés par des germes tangents à l'identité.*

Démonstration.

1. Toute relation algébrique entre les générateurs de G s'écrit
$$\bigcirc_{\ell=1}^{k} \Delta_{j_\ell}^{\circ n_\ell} - \mathrm{Id} \;=\; 0$$
pour $k\in\mathbb{N}_{>0}$ et une collection de couples $(j_\ell,n_\ell)\in\mathbb{N}_{\leq n}\times\mathbb{Z}_{\neq 0}$. Chacun de ces choix, en quantité dénombrable, définit un ensemble analytique. Celui-ci est propre si la relation algébrique ne se réduit pas, après simplification récursive des blocs triviaux $\Delta\circ\Delta^{\circ -1}=\mathrm{Id}$, à la relation triviale $\mathrm{Id}-\mathrm{Id}=0$. On applique alors le Théorème 1.2.1.
2. et 3. Il est bien connu [CM88, Lor94] que G est résoluble si, et seulement si, il est méta-abélien, c'est-à-dire $[[G,G],[G,G]]$ est trivial. Cette propriété est satisfaite pour $G=\langle\Delta_1,\Delta_2\rangle$ si, et seulement si,
$$\left[\Delta_1,\left[\Delta_1,\Delta_2^{\circ 2}\right]\right]-\mathrm{Id} \;=\; 0\,.$$
Enfin si G est engendré par des germes tangents à l'identité, il est résoluble si, et seulement si, il est abélien.

□

De ce résultat on déduit le suivant, portant sur la structure transverse des feuilletages.

1.4.5 Résolubilité des feuilletages

Corollaire 1.4.4. [Tey13b, Corollary C] *Considérons une équation différentielle*

$$y' \;=\; \frac{P}{Q}(x,y)$$

où P et Q ont un 1-jet nul. L'ensemble des $\frac{P}{Q}$ pour lesquels l'équation admet une solution générale appartenant à une extension liouvillienne (solution «explicite») est contenu dans un ensemble analytique propre.

Ce résultat est une conséquence des faits suivants :

- L'ensemble de ces équations s'identifie à l'ensemble analytique

$$\mathcal{M}_1 : \quad = \quad \left\{ \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(\{x,y\}) : J_1(P) = J_1(Q) = 0 \right\}$$

  muni de la structure analytique induite par l'application

$$(P,Q) \quad \longmapsto \quad \mathrm{Quot}\left(P - J_1(P), Q - J_1(Q)\right),$$

  où l'espace source est muni de la topologie factorielle.
- Les feuilletages de $\mathcal{M}_1$ non dicritiques, réduits après un éclatement et possédant exactement trois singularités, dont aucune n'est un nœud-col, constituent un ouvert dense U dont le complémentaire est un espace analytique propre.
- Si la représentation d'holonomie projective $\mathrm{Hol}(\mathcal{F})$ de la réduction d'un feuilletage $\mathcal{F} \in U$, identifiée à un sous-groupe $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$, n'est pas résoluble l'équation différentielle sous-jacente n'a pas de solution générale liouvillienne. Ce fait est bien connu [Cas06].
- Du Théorème 1.3.4 on déduit que l'application $\mathcal{F} \in U \mapsto \mathrm{Hol}(\mathcal{F})$ est fortement analytique. Du théorème de synthèse de Lins-Neto [Lin87b] on déduit que son image contient les groupes tels que $\Delta_1'(0)$ ou $\Delta_2'(0)$ n'appartient pas à $\exp(i\mathbb{R})$. En particulier, l'image réciproque par Hol des sous-groupes résolubles est un ensemble analytique propre.

[Bar85] J. A. Barroso, Introduction to holomorphy, *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 106, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, notas de Matemática [Mathematical Notes], 98, 1985

[Cas06] G. Casale, *Feuilletages singuliers de codimension un, groupoïde de Galois et intégrales premières*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 56, #3 : pp. 735–779, 2006

[CM88] D. Cerveau and R. Moussu, *Groupes d'automorphismes de* $(\mathbf{C}, 0)$ *et équations différentielles* $ydy + \cdots = 0$, Bull. Soc. Math. France, vol. 116, #4 : pp. 459–488 (1989), 1988

[Ham82] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), vol. 7, #1 : pp. 65–222, doi :10.1090/S0273-0979-1982-15004-2, 1982

[Köt69] G. Köthe, Topological vector spaces. I, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969

[Lin87b] A. Lins-Neto, *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*, J. Differential Geom., vol. 26, #1 : pp. 1–31, 1987

[Lor94] F. Loray, *Feuilletages holomorphes á holonomie résoluble*, Ph.D. thesis, 1994

[Maz84] P. Mazet, Analytic sets in locally convex spaces, *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 89, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, notas de Matemática [Mathematical Notes], 93, 1984

[Ram70] J.-P. Ramis, Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe, Springer-Verlag, Berlin, ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 53, 1970

[Tey13b] L. Teyssier, *Analyticity between spaces of convergent power series and applications*, Pre-Print (soumis) 2013

Chapitre 2

Application aux feuilletages résonants glocaux

Identifions de manière canonique l'ensemble des germes de feuilletages holomorphes $\mathcal{F}$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ à $\mathbb{C}(\{x,y\})$, en associant à $\mathcal{F}$ le germe d'équation différentielle

$$y' \;=\; \frac{P}{Q}(x,y) \qquad\qquad P \wedge Q = 1$$

dont les graphes de solutions maximales donnent les feuilles de $\mathcal{F}$. Il est d'usage d'écrire cette équation sous la forme $\omega = 0$, où la 1-forme différentielle holomorphe ω est $P\mathrm{d}x - Q\mathrm{d}y$. Les changements de coordonnées formels $\Psi = \left(\Psi_x, \Psi_y\right) \in \widehat{\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)}$ agissent sur le feuilletage à travers l'action sur ω donnée par

$$\Psi^*\omega \;:=\; (P \circ \Psi)\,\mathrm{d}\Psi_x - (Q \circ \Psi)\,\mathrm{d}\Psi_y\,.$$

On note $\Psi^*\mathcal{F}$ le feuilletage (*a priori* formel) correspondant et on dit que $\mathcal{F}$ lui est **formellement conjugué** par Ψ. Lorsque $\Psi \in \mathrm{Diff}\left(\mathbb{C}^2, 0\right)$ le feuilletage $\Psi^*\mathcal{F}$ est holomorphe et on dit que $\mathcal{F}$ lui est (**analytiquement**) **conjugué**.

La partie linéaire de $\mathcal{F}$ s'identifie à la classe de la matrice

$$L(P,Q) \;:=\; \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array}\right](0,0)$$

sous l'action des homothéties $L \mapsto \alpha L$ avec $\alpha \in \mathbb{C}_{\neq 0}$. Les feuilletages singuliers **non dégénérés** constituent le sous-ensemble $\mathtt{ND}$ de ceux pour lesquels $L(P,Q)$ n'est pas nilpotente. À un tel feuilletage on associe la classe $\lambda(\mathcal{F})$ du rapport des valeurs propres de $L(P,Q)$ *modulo* l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\overline{\mathbb{C}}$ engendrée par $\lambda \mapsto 1/\lambda$. Cette classe est un invariant pour la conjugaison formelle. On peut munir $\mathtt{ND}$ de la structure analytique induite par

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}\{x,y\} \times \mathbb{C}\{x,y\} & \longrightarrow & \mathtt{ND} \\ (M, \lambda, A, B) & \longmapsto & \mathrm{Quot}\left(M^{-1}\left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]M + (A - J_1(A), B - J_1(B))\right) \end{array}$$

où les espaces de germes sont munis d'une A-topologie arbitraire. On notera $\mathtt{ND}_\lambda$ l'espace analytique modelé sur $\mathbb{C}\{x,y\}^2$ obtenu en fixant la valeur de λ dans la flèche ci-dessus.

Définition.

1. Les **feuilletages résonants** forment le sous-ensemble défini par

$$\mathtt{Res} \quad := \quad \{\mathcal{F}\in \mathtt{ND} : \lambda(\mathcal{F})\subset \mathbb{Q}_{\leq 0}\cup\{\infty\} \text{ et } \mathcal{F} \text{ n'est pas linéarisable}\},$$

   par quoi l'on entend que $\mathcal{F}$ n'est formellement conjugué à aucun feuilletage linéaire $\lambda_1 y\mathrm{d}x-\lambda_2 x\mathrm{d}y=0$.
2. Les feuilletages de type **selle résonante** sont ceux pour lesquels $\lambda(\mathcal{F})\subset\mathbb{Q}_{<0}$, dont l'ensemble est noté $\mathtt{SR}:=\coprod_{\lambda\in\mathbb{Q}_{<0}}\mathtt{ND}_\lambda$.
3. Lorsque $\lambda(\mathcal{F})=\{0,\infty\}$ on parle de feuilletage de type **nœud-col**, dont l'ensemble est noté $\mathtt{NC}:=\mathtt{ND}_0$.

Rappelons quelques faits :

- Pour $\lambda\in\mathbb{Q}_{<0}$, les feuilletages formellement linéarisables de $\mathtt{ND}_\lambda$ forment un ensemble analytique propre. De tels feuilletages sont toujours analytiquement linéarisables. Par ailleurs $\mathcal{F}\in\mathtt{NC}$ n'est jamais formellement linéarisable.
- Tout $\mathcal{F}\in\mathtt{Res}$ est formellement conjugué à un unique feuilletage sous forme normale de Dulac-Poincaré [Dul04] donné par $\hat{\omega}=0$,

$$\hat{\omega} \quad := \quad xu^k\mathrm{d}x - y\left(1+\mu u^k\right)(qy\mathrm{d}x+px\mathrm{d}y),$$

  où :
  - $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_{>0}$ et $p\wedge q=1$ satisfont $-\frac{p}{q}\in\lambda(\mathcal{F})$,
  - dans le cas d'un nœud-col on prend $(p,q):=(0,1)$,
  - $u:=x^qy^p$ est le monôme résonant,
  - $(k,\mu)\in\mathbb{N}_{>0}\times\mathbb{C}$.

  On appelle $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{F}):=(-p/q,k,\mu)$ l'**invariant formel** de $\mathcal{F}$ et $\hat{\omega}$ le **modèle formel** de $\mathcal{F}$.
- Tout $\mathcal{F}\in\mathtt{Res}$ est conjugué à un **feuilletage préparé sous forme de Dulac** [Dul04] de la forme
  - si $\mathcal{F}\in\mathtt{SR}$

$$\hat{\omega}+u^{k+1}R\times(qy\mathrm{d}x+px\mathrm{d}y) \quad = \quad 0$$

    avec $R\in\mathbb{C}\{x,y\}$ et $R(0,0)=0$,
  - si $\mathcal{F}\in\mathtt{NC}$

$$\hat{\omega}+x^{k+1}R\mathrm{d}x \quad = \quad 0$$

    avec $R\in\mathbb{C}\{x,y\}$ et $\frac{\partial R}{\partial y}(0,0)=0$.

Définition. Pour $\mathfrak{m}:=(\lambda,k)\in\mathbb{Q}_{\leq 0}\times\mathbb{N}_{>0}$ donné $\mathtt{Dul}_\mathfrak{m}\subset\mathtt{Res}$ désigne l'ensemble des feuilletages sous forme préparée de Dulac dont l'invariant formel appartient à $\mathfrak{m}\oplus\mathbb{C}$. Ce dernier est naturellement muni d'une structure d'espace analytique *via* la paramétrisation par R.

Énonçons maintenant le théorème fondamental suivant :

Théorème de Martinet-Ramis. [MR83, MR82] *Fixons* $\mathfrak{m} := (\lambda, k) \in \mathbb{Q}_{\leq 0} \times \mathbb{N}_{>0}$. *Il existe une application quasi-fortement analytique et surjective*

$$\mathrm{MR}_{\mathfrak{m}} : \mathtt{Dul}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathtt{Mod}_{\mathfrak{m}},$$

où

$$\mathtt{Mod}_{\mathfrak{m}} := \begin{cases} \left(\mathbb{C}\{h\} \times \mathbb{C}\left\{h^{-1}\right\}\right)^{kq} & si\ \lambda \neq 0 \\ \left(\mathbb{C}\{h\} \times \mathbb{C}h^{-1}\right)^{k} & si\ \lambda = 0 \end{cases},$$

telle que $\mathcal{F}$ *est conjugué à* $\tilde{\mathcal{F}}$ *si, et seulement si,* $\mathrm{MR}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{F})$ *est conjugué à* $\mathrm{MR}_{\mathfrak{m}}\left(\tilde{\mathcal{F}}\right)$ *sous l'action de* $\mathtt{Aut}_{\mathfrak{m}} := \mathbb{Z}/kq\mathbb{Z} \times \mathbb{C}_{\neq 0}$ *définie pour* $(\theta, c) \in \mathtt{Aut}_{\mathfrak{m}}$ *par permutation circulaire sur les indices* $j \mapsto j + \theta$ *et reparamétrage* $h \mapsto ch$.

Remarque. Le premier facteur $\mu(\mathcal{F}) \in \mathbb{C}$ de $\mathrm{MR}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{F})$ n'est autre que le reste de l'invariant formel de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{F}) = \mathfrak{m} \oplus \mu(\mathcal{F})$. Par ailleurs, l'invariant du modèle formel $\hat{\omega} = 0$ est $\mu \oplus \mathbf{0}$.

2.1 Existence de feuilletages résonants non glocaux

Les ensembles

$$\mathtt{Res}_{\mathfrak{m}} := \hat{\mathcal{M}}^{-1}(\mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}) \qquad , \mathfrak{m} \in \mathbb{Q}_{\leq 0} \times \mathbb{N}_{>0}$$

forment une partition de $\mathtt{Res}$, de quotient dénombrable.

Lemme 2.1.1. [Dul04] *Pour chaque* $\mathfrak{m} \in \mathbb{Q}_{\leq 0} \times \mathbb{N}_{>0}$ *il existe une application* $\mathrm{D}_{\mathfrak{m}}$ *de mise sous forme préparée de Dulac*

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{m}} : \mathtt{Res}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathtt{Dul}_{\mathfrak{m}}.$$

Nous esquissons au Paragraphe 2.1.1 la méthode de construction. D'après le Théorème 1.2.2 (et la Remarque 1.3.1), le feuilletage résonant générique est non glocal si pour chaque $\mathfrak{m}$ fixé l'application

$$\mathrm{MRD}_{\mathfrak{m}} := \mathrm{MR}_{\mathfrak{m}} \circ \mathrm{D}_{\mathfrak{m}}$$

est quasi-fortement analytique.

Remarque.

1. Pour $\lambda \in \lambda(\mathcal{F})$ fixé le feuilletage générique appartient à $\mathtt{Res}_{(\lambda,1)}$. Le théorème à venir est plus précis : pour $\mathfrak{m}$ fixé le feuilletage générique de $\mathtt{Res}_{\mathfrak{m}}$ n'est pas glocal.
2. Pour mettre en œuvre l'idée d'une différence de taille entre l'image des feuilletages glocaux par l'application $\mathrm{MRD}_{\mathfrak{m}}$ et $\mathtt{Mod}_{\mathfrak{m}}$, l'utilisation d'une théorie analytique n'est pas superflue. Le théorème de Hahn-Mazurkievicz-Menger-Moore-Sirpieński [SK76] garantit en effet [GT10, Lemma 7] l'existence d'une surjection continue $\mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, pour toute topologie sur $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ plus fine que celle induite par la topologie projective de $\mathbb{C}[[\mathbf{z}]]$. Le Théorème 1.2.2 interdit l'existence d'une telle « courbe de Peano » de classe quasi-fortement analytique.

Un premier résultat est le suivant :

Théorème. [GT10, Theorem 13] *L'application* $\mathrm{MRD}_{(0,1)}$ *est quasi-fortement analytique.*

On montre en fait un résultat plus fort :

Théorème 2.1.2. *Chaque* $\mathrm{MRD}_{\mathfrak{m}}$ *est une application fortement analytique pour la topologie inductive.*

Pour que ces théorèmes aient un sens il faut munir $\mathtt{Res}_{\mathfrak{m}}$ d'une structure d'espace analytique.

Remarque. La preuve de ce dernier théorème est donnée au Paragraphe 2.1.2 pour $\mathfrak{m} := (0,k)$. Elle se généralise sans difficulté à tous les $\mathfrak{m}$.

2.1.1 Mise sous forme de Dulac [1]

La préparation de Dulac s'effectue en quatre étapes, que nous expliquons maintenant. À cet effet introduisons, pour $d \in \mathbb{N}_{>0}$, les espaces

$$E_d \quad := \quad (y + \ker J_1) \times x^d \mathfrak{Z}^*$$

où $\mathfrak{Z}^* := \mathbb{C}\{x,y\} \setminus \ker J_0$, et la famille de fonctions surjectives

$$\Lambda_d : E_d \quad \longrightarrow \quad E_{d+1} \oplus \left(0, x^{d+1}\mathbb{C}\right)$$

où l'image par Λ_d de (P,Q) s'écrit $\left(\hat{P},\hat{Q}\right)$ avec

$$\begin{aligned}
\hat{P}(x,y) &:= P \circ \psi(x,y) \\
\hat{Q}(x,y) &:= \left(1 + d x^{d-1} \varphi(y)\right)^{d-1} Q \circ \psi(x,y) - \frac{\hat{P}(x,y)}{\left(1 + d x^{d-1}\varphi(y)\right) P(0,y)} Q(0,y) \\
\psi(x,y) &:= \left(x + x^d \varphi(y), y\right) \\
\varphi(y) &:= \int_0^y \left(\frac{Q}{x^d}\right)(0,u) \frac{\mathrm{d}u}{P(0,u)}.
\end{aligned}$$

1. La partie linéaire $L(P,Q)$ de $\mathcal{F}$ est diagonalisable, et les coefficients d'une matrice diagonalisante dépendent rationnellement des coefficients de $L(P,Q)$. On supposera donc dans la suite que $L(P,Q)$ est diagonale et que l'espace propre associé à la valeur propre nulle est $\{y = 0\}$.
2. Il existe une unique feuille de $\mathcal{F}$ donnée par le graphe $\left\{x = s_{\mathcal{F}}(y)\right\}$ d'un germe d'application holomorphe avec $s_{\mathcal{F}}(0) = s'_{\mathcal{F}}(0) = 0$. Le changement de coordonnées $(x,y) \mapsto \left(x + s_{\mathcal{F}}(y), y\right)$ transforme $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_1$ défini par $Q_1 \mathrm{d}y - P_1 \mathrm{d}x = 0$ avec $(P_1,Q_1) \in E_1$.
3. En cherchant à factoriser d'autres puissances de x dans Q_1 on trouve une obstruction après un nombre fini k d'étapes. Le feuilletage $\mathcal{F}_1$ est alors conjugué à $\mathcal{F}_{k+1}$ donné par

$$x^{k+1}\mathrm{d}y - \left(y + x^2 r(x) + y\tilde{r}(x,y)\right)\mathrm{d}x \quad = \quad 0$$

1. Le cas $(0,1)$ est décrit dans [GT10, Section 3.2] avec une erreur de calcul mineure.

avec $\tilde{r}(0,0) = 0$.
Cette partie de la préparation s'effectue de proche en proche $\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{F}_2 \mapsto \cdots$, chaque passage $\mathcal{F}_d \mapsto \mathcal{F}_{d+1}$ s'obtenant grâce au changement de variables $\psi : (x,y) \mapsto \left(x + x^d \varphi(y), y\right)$ construit plus haut, de sorte que $(P_{d+1}, Q_{d+1}) = \Lambda_d(P_d, Q_d)$. Puisque

$$Q_{d+1} - \frac{\partial x^{-d} Q_d}{\partial x}(0,0) \quad \in \quad x^{d+1}\mathfrak{Z}^*$$

le processus s'arrête quand $\frac{\partial x^{-d} Q_d}{\partial x}(0,0) \neq 0$. On pose $k := d$.

4. On conjugue enfin $\mathcal{F}_{k+1}$ à un élément $\mathrm{D}_{\mathfrak{m}}(\mathcal{F})$ bien déterminé.
Ici encore on procède par récurrence $\mathcal{D}_0 := \mathcal{F}_{k+1} \mapsto \mathcal{D}_1 \mapsto \cdots \mapsto \mathcal{D}_{k+1}$, chaque $\mathcal{D}_d$ étant induit par $x^{k+1}\mathrm{d}y - \left(y + x^d R_d(x,y)\right)\mathrm{d}x$. La transition $\mathcal{D}_d \mapsto \mathcal{D}_{d+1}$ s'effectue grâce à un changement de variable $(x,y) \mapsto \left(x, y + x^d \varphi(y)\right)$ solution de

$$y\varphi'(y) \quad = \quad \varphi(y) + R_d(0,y)\,.$$

Cette équation différentielle affine admet une solution holomorphe si, et seulement si, $\frac{\partial R_d}{\partial y}(0,0) = 0$. Pour garantir que cette condition est remplie on opère au préalable un changement de variables $(x,y) \mapsto (x, y\psi(x))$, où $\psi(0) \neq 0$, solution de

$$x^{k+1}\psi'(x) + \left(1 + \mu x^k\right)\psi(x) \quad = \quad 1 + x^d \frac{\partial R_d}{\partial y}(x,0)\,.$$

Cette équation différentielle affine admet toujours une solution holomorphe à condition de bien choisir μ. L'expression de (φ, ψ, μ) et de R_{d+1} en fonction de R_d est explicite et unique. Elle est tout à fait analogue à l'expression de Λ_d donnant la transformation en (3), dans le sens où les mêmes types d'opérations sont mises en jeu.

2.1.2 Analyticité des applications $\mathrm{MRD}_{(0,k)}$

Reprenons les étapes introduites dans le paragraphe précédent. L'association $s_\bullet : \mathcal{F} \in \mathtt{NC} \mapsto s_{\mathcal{F}}$ de l'étape (2) est fortement analytique. Les calculs menés pour la preuve de [GT10, Lemma 17] montrent en effet que c'est le cas par la Proposition 1.3.3. La seule difficulté restant à lever pour établir la forte analyticité de $\mathrm{D}_{\mathfrak{m}}$ est d'obtenir celle de la construction menée aux étapes (3) et (4).

Proposition 2.1.3. [GT10, Proposition 14 pour le cas (0,1)] *Munissons les espaces de germes d'une topologie utile. L'ensemble* $\mathtt{Res}_{(0,k)}$ *admet une structure naturelle d'espace analytique modelé sur* $\mathbb{C}\{x,y\}^2$ *pour laquelle* $\mathrm{D}_{(0,k)}$ *est fortement analytique.*

Démonstration. Définissons les ouverts $E_d^\star$ de E_d formés des couples de germes premiers entre eux ; ils sont naturellement munis d'une structure d'espace analytique modelé sur $\mathbb{C}\{x,y\}^2$ que l'on va propager par Quot. Observons d'abord que l'image F_1 de $\mathcal{F} \in \mathtt{NC} \mapsto \mathcal{F}_1$ coïncide avec l'image par Quot de $E_1^\star$. De plus nous constatons que l'application Λ_d se relève en une application surjective $\tilde{\Lambda}_d := \mathrm{Quot}_* \Lambda_d$ entre les espaces $F_d := \mathrm{Quot}\left(E_d^\star\right)$ et $\mathrm{Quot}\left(E_{d+1}^\star \oplus \left(0, x^{d+1}\mathbb{C}\right)\right)$, qui est visiblement fortement analytique. Pour $d < k$ on a $\tilde{\Lambda}_d(F_d) = F_{d+1}$ et par suite

$$\mathcal{F}_{k+1} \quad = \Upsilon_k(\mathcal{F}) \quad := \tilde{\Lambda}_k\left(\cdots \tilde{\Lambda}_1\left(s_{\mathcal{F}}\right)\right)$$

si $\mathcal{F} \in \mathtt{Res}_{(0,\mathtt{k})}$. Pour terminer la preuve il reste à munir $\mathtt{Res}_{(0,\mathtt{k})}$ de la structure d'espace analytique induite par la surjection continue

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Quot}\left(E^{\star}_{k+1} \oplus \left(0, x^{k+1}\mathbb{C}_{\neq 0}\right)\right) \times \mathrm{Diff}\left(\mathbb{C}^2, 0\right) & \longrightarrow & \mathtt{Res}_{(0,\mathtt{k})} \\ (\mathcal{F}, \Psi) & \longmapsto & \Psi^{*}\mathcal{F} \end{array}$$

(on notera que cette application n'est pas une section de Υ_k). L'étape (4) se traite exactement de la même manière. □

Enfin la représentation intégrale des invariants de Martinet-Ramis démontrée dans [Tey04a] permet de conclure que $\mathrm{MR}_{(0,k)}$ est amplement bornée pour la topologie inductive. Ceci achève la preuve du théorème.

2.2 Forme normale des feuilletages de type nœud-col convergent

L'application $\mathrm{MRD}_{\mathfrak{m}}$ n'est malheureusement pas injective. Une question difficile consiste à trouver une section explicite de cette application. Une telle section sera qualifiée de **famille de formes normales**. Dans [ST13] nous répondons à cette question dans le cas non générique d'un feuilletage nœud-col de type convergent, c'est à dire un nœud-col admettant deux séparatrices holomorphes lisses et transverses passant par la singularité. Nous pensons pouvoir adapter cette construction au cas général de tous les feuilletages résonants.

Remarque.

1. Il se trouve [MR82] que les nœuds-cols convergents $\mathcal{F}$ de $\mathtt{Res}_{(0,\mathtt{k})}$ forment un espace analytique propre, noté $\mathtt{NCConv}_{\mathtt{k}}$, obtenu comme le lieu d'annulation des composantes selon φ_j^{∞} de $\mathrm{MRD}_{(0,k)}(\mathcal{F})$.
2. L'article [ST13] exhibe une famille de formes normales dans le contexte plus général des *champs de vecteurs* de type nœud-col convergent, mais nous n'aborderons pas cet aspect du travail ici.

Théorème 2.2.1. [ST13, Main Theorem] *Soit $\mathcal{F} \in \mathtt{NCConv}_{\mathtt{k}}$ d'invariant formel $(0, k, \mu)$. Définissons l'entier positif*

$$\sigma \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \notin \mathbb{R}_{\leq 0} \\ \lfloor -\mu \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il existe un feuilletage $\mathcal{F}_R$ essentiellement unique, conjugué à $\mathcal{F}$ et de la forme

$$\hat{\omega} + xyR(x, x^{\sigma}y)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$$

avec $R(x,t) = \sum_{n>0} R_n(x)\,t^n \in t\mathbb{C}[x]_{<k}\{t\}$, c'est-à-dire tel que chaque R_n est un polynôme de degré au plus $k-1$. La clause d'unicité précise est la suivante : deux feuilletages $\mathcal{F}_R$ et $\mathcal{F}_{\tilde{R}}$ sont conjugués si, et seulement si, R et $\tilde{R}$ sont conjugués par l'action de $\mathtt{Aut}_{(0,k)} := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{C}_{\neq 0}$ définie pour $(\theta, c) \in \mathtt{Aut}_{(0,k)}$ par $(x,t) \mapsto \left(e^{2i\pi\theta/k}x,\, ct\right)$.

Remarque.

1. L'élément $(\theta, c) \in \mathtt{Aut}_{(0,k)}$ réalisant l'équivalence entre R et $\tilde{R}$ dans la clause d'unicité du théorème correspond exactement à celui réalisant celle entre $\mathrm{MRD}_{(0,k)}(\mathcal{F}_R)$ et $\mathrm{MRD}_{(0,k)}(\mathcal{F}_{\tilde{R}})$ dans le théorème de Martinet-Ramis.
2. Le théorème ci-dessus généralise le beau résultat [Lor04] de F. Loray pour $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{F}) = (0, 1, \mu)$, de facture essentiellement géométrique. Sa méthode n'est toutefois pas explicite, dans le sens que nous précisons plus bas. Ce théorème était déjà une généralisation des formes normales de J. Écalle [Éca85] lorsque $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{F}) = (0, 1, 0)$.
3. La famille de formes normales $\{\mathcal{F}_R : R \in t\mathbb{C}[x]_{<k}\{t\}\}$ est naturellement munie d'une structure d'espace analytique modelé sur $\mathbb{C}[x]_{<k} \times \mathbb{C}\{t\}$. Notre construction garantit l'existence d'une application $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_R$ fortement analytique (à invariant formel $\hat{\mathcal{M}}$ fixé).
4. Le feuilletage $\mathcal{F}_R$ n'est pas sous forme de Dulac, mais les calculs menés pour la preuve du théorème assurent que l'on peut tout à fait construire une famille de formes normales préparées.

Nous résumons la preuve pour $k > 1$ et $\Re\mathfrak{e}(\mu) > 0$, le cas général étant exposé dans [ST13], mais avant cela discutons du problème du calcul effectif de ces formes normales.

2.2.1 Calculabilité

Définition.

1. On dira qu'un nombre réel x est **calculable** s'il existe une machine de Turing [2] $\mathtt{N}_x$ qui prend comme entrée un entier m et renvoie un décimal $w \in 10^{-m}\mathbb{Z}$ tel que $|x - w| < 10^{-m}$. Cette définition s'étend bien sûr aux points de $\mathbb{R}^n$.
2. On dira qu'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est **calculable** si pour tout argument calculable $\mathbf{x} \in \Omega$ la valeur $f(\mathbf{x})$ est calculable, dans le sens suivant : f est entièrement déterminée par une machine de Turing $\mathtt{F}_f$ qui prend comme entrée $\mathtt{N}_{\mathbf{x}}$ et renvoie une machine de Turing $\mathtt{N}_{f(\mathbf{x})}$.

Théorème 2.2.2. [ST13, Computation Theorem] *L'application* $\mathrm{MRD}_{(0,k)}$ *et le procédé de réduction sous forme normale sont explicitement* [3] *calculables, dans le sens suivant :*

1. *Il existe une machine de Turing explicite* `Module` *qui prend la machine de Turing* $\mathtt{F}_\omega$ *d'une* 1*-forme différentielle* ω*, définissant un feuilletage de* $\mathtt{NCC}_{\mathtt{k}}$*, et renvoie* $\mathtt{F}_{\mathrm{MRD}_{(0,k)}(\omega)}$.
2. *Il existe une machine de Turing explicite* `FormeNormale` *qui prend la machine de Turing* $\mathtt{F}_M$ *d'un module calculable* $M \in \mathtt{Mod}_{(0,k)}$ *et renvoie* $\mathtt{F}_\omega$*, où* ω *est sous forme normale.*

Remarque. D'après les calculs menés au paragraphe précédent, l'application $\mathrm{D}_{(0,k)}$ est explicitement calculable. Ce dernier théorème découle donc de l'étude de $\mathrm{MR}_{(0,k)}$.

2.2.2 Esquisse de la preuve du théorème de normalisation

Rappelons quelques faits bien connus au sujet des feuilletages nœuds-cols convergents $\mathcal{F}$ sous forme de Dulac :

2. Il s'agit de machines de Turing ayant un alphabet fini et une mémoire potentiellement infinie.
3. Dans l'article nous produisons des algorithmes répondant à la question.

- [HKM61] Il existe une famille de k secteurs ouverts $\left(V_j(r)\right)_{j\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ en la variable x, ayant leur sommet en 0, un rayon $r>0$ et une ouverture d'au moins $\frac{2\pi}{k}$, centrés sur les directions $(-1)^{1/k}$, il existe $\rho>0$ et une famille de k biholomorphismes Ψ_j fibrés en x qui conjuguent $\mathcal{F}$ à $\hat{\omega}=0$ sur
$$\mathcal{V}_j(r,\rho) \quad := \quad V_j(r)\times\rho\mathbb{D}.$$
- Au-dessus de chaque secteur $V_j(r)\times\rho\mathbb{D}$ l'espace des feuilles est conformément équivalent à $\mathbb{C}$ *via* une intégrale première holomorphe à fibres connexes $H_j : \mathcal{V}_j(r,\rho) \twoheadrightarrow \mathbb{C}$.
- [MR82] L'application de transition $\Psi_{j+1}^{\circ -1}\circ\Psi_j$ induit un germe de biholomorphisme $\psi_j\in \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ tel que
  - $\psi_j(0)=0$ et $\psi_j'(0)=e^{2\mathrm{i}\pi\mu/k}$,
  - $H_{j+1}=\psi_j\circ H_j$.

  Les invariants de Martinet-Ramis sont alors définis par les ψ_j. En reprenant les notations de ce mémoire on a
$$\mathrm{MR}_{(0,k)}(\mathcal{F}) \quad = \quad \mu\oplus\left(h\mapsto\frac{\log\frac{\psi_j(h)}{h}-2\mathrm{i}\pi\mu/k}{h},0\right)_{j\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}.$$
  La relation d'équivalence provient de la liberté dans le choix d'une numérotation consécutive des secteurs et d'une coordonnée linéaire [4] sur $\mathbb{C}$.

L'idée pour montrer que l'application $\mathrm{MR}_{(0,k)}$ est surjective est de construire des applications sectorielles H_j vérifiant $H_{j+1}=\psi_j\circ H_j$ à partir de la donnée des ψ_j, mais en imposant un rayon $r:=\infty$ aux secteurs dans la variable x. Ces intégrales premières « abstraites » sont obtenues comme points fixes de l'itération d'une transformation de Cauchy-Heine, en résolvant à chaque étape un problème de Cousin additif sur les intersections consécutives des secteurs. Pour assurer la convergence du procédé on détermine explicitement un $\rho>0$ en fonction du rayon de convergence minimum des ψ_j.

L'opérateur de Cauchy-Heine (continu entre espaces de Banach bien choisis) permet en outre un contrôle d'une norme uniforme sur H_j et ses dérivées premières, de sorte que les feuilletages sectoriels correspondant à $\mathrm{d}H_j=0$ vérifient les propriétés suivantes :

- ils coïncident dans les intersections consécutives des $\mathcal{V}_j(\infty,\rho)$,
- ils se prolongent par Riemann à un feuilletage holomorphe sur $\mathrm{adh}\left(\bigcup_j V_j(\infty,\rho)\right)\times\rho\mathbb{D}=\mathbb{C}\times\rho\mathbb{D}$,
- ce feuilletage est de la forme $\mathcal{F}_R$ avec $R\in y\mathcal{O}(\mathbb{C})\{y\}$.

Les estimations de norme permettent de conclure que $x\mapsto\left|R(x,y)\right|$ est de l'ordre de $|x|^{k-1}$, c'est-à-dire $R\in y\mathbb{C}[x]_{<k}\{y\}$ comme attendu. La clause d'unicité se démontre au plan formel en observant que l'association $R\mapsto\mathrm{MR}_{(0,k)}(\mathcal{F}_R)$ est triangulaire par blocs inversibles. La résolution de l'équation $\mathrm{MR}_{(0,k)}(\mathcal{F}_R)=\mu\oplus\left(\varphi_j^0,0\right)_{j\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, pour un membre de droite donné, débouche sur le Théorème 2.2.2 (1).

Remarque. La construction ci-dessus garantit que les normalisantes sectorielles Ψ_j entre $\mathcal{F}_R$ et son modèle formel, dont l'existence n'est *a priori* assurée que localement par le théorème de Hukuhara-Kimura-Matuda, sont en fait injectives, holomorphes et bornées sur $\mathcal{V}_j(\infty,\rho)$.

4. Simultanément pour tous les espaces de feuilles sectoriels puisque la restriction sur $\psi_j'(0)$ impose des choix compatibles d'un espace à l'autre.

[Dul04] H. Dulac, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, Journal de l'École Polytechnique, 1904

[Éca85] J. Écalle, Les fonctions résurgentes. Tome III, *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*, vol. 85, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, l'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects], 1985

[GT10] Y. Genzmer and L. Teyssier, *Existence of non-algebraic singularities of differential equation*, J. Differential Equations, vol. 248, #5 : pp. 1256–1267, doi :10.1016/j.jde.2009.10.001, 2010

[HKM61] M. Hukuhara, T. Kimura and T. Matuda, Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, Publications of the Mathematical Society of Japan, 7. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961

[Lor04] F. Loray, *Versal deformation of the analytic saddle-node*, Astérisque, , #297 : pp. 167–187, analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. II, 2004

[MR82] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., , #55 : pp. 63–164, 1982

[MR83] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), vol. 16, #4 : pp. 571–621, 1983

[SK76] W. Sierpiński and K. Kuratowski, Oeuvres choisies. Tome III. Théorie des ensembles et ses applications, travaux des années 1930–1966, PWN-Éditions Scientifiques de Pologne, Warsaw, 1976

[ST13] R. Schäfke and L. Teyssier, *Analytic normal forms for convergent saddle-node vector fields*, PrePrint (soumis) 2013

[Tey04a] L. Teyssier, *Analytical classification of singular saddle-node vector fields*, J. Dynam. Control Systems, vol. 10, #4 : pp. 577–605, doi :10.1023/B:JODS.0000045365.56394.b4, 2004

Chapitre 3

Germes de feuilletages présentables du plan complexe

Par beaucoup d'aspects, un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ semble généraliser, en son lieu régulier, la notion de fibration localement triviale. Prenons à titre d'illustration le feuilletage donné par les niveaux d'une submersion holomorphe

$$f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$$

admettant une fibre singulière (non nécessaire irréductible) $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$. Ici f est holomorphe sur (un voisinage de) la boule euclidienne fermée $\mathrm{adh}(\mathcal{B})$ de rayon choisi suffisamment petit pour que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient transverses à la sphère $\partial\mathcal{B}$. Un résultat classique de J. Milnor [Mil68] assure l'incompressibilité de $\mathcal{F}$: il existe une famille de **tubes de Milnor** $\mathcal{T}_\eta$ de $\mathcal{S}$, images réciproques d'un petit disque $\eta\mathbb{D}$, telle que le groupe fondamental de chaque feuille régulière de $\mathcal{F}|_{\mathcal{T}_\eta}$ s'injecte dans celui de $\mathcal{T}_\eta \backslash \mathcal{S}$, lui-même isomorphe à $\pi_1(\mathcal{B}\backslash\mathcal{S})$.

Dans deux travaux récents [MM08, MM21], D. Marín et J.-F. Mattei ont dégagé des conditions suffisantes sous lesquelles ce résultat se généralise lorsque $\mathcal{F}$ n'admet pas d'intégrale première holomorphe non triviale. Précisons cela.

Définition. Dans tout cet article $\mathcal{F}$ désigne un germe de feuilletage holomorphe singulier en $(0,0)$. On dit que $\mathcal{F}$ est **incompressible** s'il existe

- une union finie $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ de courbes analytiques invariantes par $\mathcal{F}$ et contenant la singularité, disons d'équation $\{f = 0\}$ pour fixer les notations, appelées **séparatrices distinguées**,
- une famille de tubes de Milnor $\left(\mathcal{T}_\eta\right)_{0<\eta\leq\eta_0}$ de $\mathcal{S}$ (au sens précédent : $T_\eta = f^{-1}(\eta\mathbb{D})$), sur lesquels $\mathcal{F}$ est bien défini,
- une voisinage $\mathcal{U}$ de la singularité,

tels que, en notant $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\eta_0}$,

1. $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, cette inclusion induisant un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux $\pi_1(\mathcal{U}\backslash\mathcal{S}) \simeq \pi_1(\mathcal{T}\backslash\mathcal{S})$,
2. $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{U}$ pour tout η assez petit,
3. pour chaque feuille $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}\backslash\mathcal{S}}$ le morphisme canonique induit par l'inclusion $\iota : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{U}\backslash\mathcal{S}$

$$\iota^* : \pi_1(\mathcal{L}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{U}\backslash\mathcal{S})$$

soit injectif.

Pour préciser les notations nous serons parfois amenés à dire que $\mathcal{F}$ est incompressible dans $(\mathcal{U},\mathcal{S})$.

Remarque. La condition (1) stipule que l'on ne s'autorise pas à prendre des voisinages $\mathcal{U}$ volontairement tordus pour accommoder la topologie éventuellement compliquée des feuilles. La topologie de l'espace ambiant doit être « la plus simple possible ».

Théorème de Marín-Mattei. *Tout feuilletage dont la réduction ne comporte pas de nœud-col ou de selle quasi-résonante est incompressible.*

Ce théorème est traité dans [MM08] pour les feuilletages n'ayant pas de composante dicritique dans leur réduction, et dans [MM21] pour les cas restants en faisant l'hypothèse technique supplémentaire que les éventuelles composantes initiales sont dynamiquement isolées. Nous revenons plus bas sur ce dernier point.

Remarque.

1. Il est possible de décrire explicitement l'ensemble $\mathcal{S}$. En notant E le morphisme de réduction de la singularité de $\mathcal{F}$, l'ensemble $\mathcal{S}$ est l'union des adhérences des images par $\mathcal{E}$ des séparatrices de $E^*\mathcal{F}$ croisant des composantes non dicritiques, auxquelles s'ajoute l'image par $\mathcal{E}$ d'un germe de feuille transverse par composante dicritique.
2. L'hypothèse du théorème portant sur le type des singularités finales est générique (mais pas dans le sens considéré au Chapitre 1), à donnée combinatoire de l'arbre de réduction et à nombre de singularités finales fixé.

L'incompressibilité assure l'existence d'un revêtement universel feuilleté. Par cela on entend que le revêtement universel $\pi_{\mathcal{U}} : \widetilde{\mathcal{U}\backslash\mathcal{S}} \to \mathcal{U}\backslash\mathcal{S}$ est aussi un revêtement universel en restriction à chaque feuille de $\mathcal{F}$. Le groupe des automorphismes de ce revêtement est alors constitué de symétries du feuilletage $\pi_{\mathcal{U}}^*\mathcal{F}$, et à ce titre agit naturellement sur l'espace de ses feuilles $\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}$. On dispose alors d'une action

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{U}} : \mathrm{Aut}(\pi_{\mathcal{U}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}\right)$$

que l'on nomme **monodromie** de $(\mathcal{F},\mathcal{U},\mathcal{S})$. Le quotient $\Omega_{\mathcal{U}} := {}^{\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}}/_{\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}}$ s'identifie canoniquement à l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$.

Cette construction ne revêt qu'un intérêt modeste si l'on ne dote pas les espaces de feuilles d'une structure analytique. Cette structure supplémentaire va faire de la monodromie un invariant analytique du triplet $(\mathcal{F},\mathcal{U},\mathcal{S})$, dont la « germification » quand $\eta_0 \to 0$ est un classifiant local (au voisinage de $\mathcal{S}$) complet pour un choix générique de feuilletages [MM21]. Sa construction est donc une étape importante vers une compréhension plus globale des germes de singularités de feuilletages.

L'ingrédient nécessaire à l'existence d'une structure analytique canonique sur $\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}$ est celle d'une courbe transverse $\mathcal{C}$ (non nécessairement irréductible) qualifiée ici de complètement connexe. Les composantes de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ doteront l'espace des feuilles de cartes analytiques, à condition que chaque feuille de $\pi^*\mathcal{F}$ coupe au plus une fois chaque composante de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Ce sont ces propriétés qui sont isolées par la définition suivante :

Définition 3.0.3. Un germe de courbe analytique $\mathcal{C}$ (non nécessairement irréductible) est une **transversale complètement connexe** de $\mathcal{F}$ s'il existe un couple $(\mathcal{U},\mathcal{S})$, dans lequel $\mathcal{F}$ est incompressible, tel que :

1. $\mathcal{C}\backslash\mathcal{S}$ soit une courbe analytique lisse transverse aux feuilles de $\mathcal{F}$,
2. $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}\cap\mathcal{C}\backslash\mathcal{S}) = \mathcal{U}\backslash\mathcal{S}$,
3. $\mathcal{C}\backslash\mathcal{S}$ soit 1-connexe dans $\mathcal{U}\backslash\mathcal{S}$ relativement à $\mathcal{F}$.

Notons qu'il existe toujours une courbe $\mathcal{C}$ satisfaisant les deux premières conditions (1) et (2), quitte à munir $\mathcal{C}$ de suffisamment de composantes (voir [Lor10, p161]), courbe que l'on nomme alors **transversale complète**. La notion de 1-connexité est définie dans [MM08], et revient ici à demander que chaque feuille de $\pi^*\mathcal{F}$ coupe au plus une fois chaque composante de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Un corollaire du théorème de Marín-Mattei est alors l'existence, sous les mêmes hypothèses, d'une transversale complètement connexe [MM08, Théorème 6.1.1, p900].

3.1 Présentation des principaux résultats

Théorème 3.1.1. [Tey13c, Théorème A] *Les germes de feuilletages, de type nœud-col ou selle quasi-résonante, sont incompressibles.*

Un tel résultat laisserait espérer que le théorème de Marín-Mattei se généralise sans contrainte. Ce n'est malheureusement pas le cas.

Théorème 3.1.2. [Tey13c, Théorème B] *Il existe des feuilletages $\mathcal{F}$ singuliers non dicritiques qui sont compressibles.*

Les premiers exemples que nous avons pu construire possédaient tous un nœud-col divergent dans leur réduction. On pouvait alors penser qu'il suffit de proscrire les nœuds-cols divergents pour assurer l'incompressibilité du feuilletage, suivant l'idée que ceux-ci privent de façon injuste l'ensemble $\mathcal{S}$ d'une séparatrice. Il n'en est rien : nous construisons également des exemples de feuilletages compressibles n'ayant aucun nœud-col divergent.

Pour autant nous avons pu affaiblir l'hypothèse du théorème de Marín-Mattei : l'incompressibilité et l'existence d'une transversale complètement connexe vont dépendre de manière cruciale de la façon dont les nœuds-cols sont positionnés dans l'arbre de réduction.

Définition. On dit qu'un germe de feuilletage $\mathcal{F}$ est **présentable** si les séparatrices fortes des nœuds-cols apparaissant dans sa réduction ne sont jamais des composantes du diviseur exceptionnel [1].

Un feuilletage présentable non réduit ne contient donc jamais de nœud-col divergent dans sa réduction, et les singularités apparaissant aux points de croisement de deux composantes du diviseur exceptionnel (les « coins ») ne sont pas des nœuds-cols.

Remarque 3.1.3. La définition de feuilletage présentable n'est curieusement pas invariante par éclatement ponctuel. Plus précisément, l'éclatement d'un nœud-col produit un diviseur possédant d'une part une selle non linéarisable, d'autre part un nœud-col dont la séparatrice forte est un diviseur. Il faut donc considérer la réduction minimale d'un feuilletage pour décrire le fait qu'il soit présentable ou non, ou en tout cas une réduction de la singularité où aucun nœud-col n'a été éclaté après apparition.

1. C'est en particulier le cas si $\mathcal{F}$ est une singularité réduite.

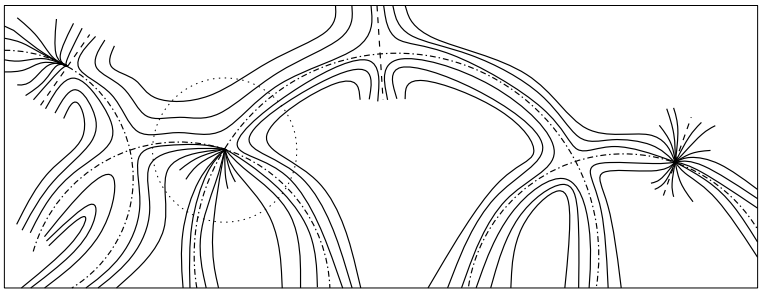

FIGURE 3.1.1 – Ce feuilletage n'est pas présentable car il exhibe un nœud-col dans un coin.

Théorème 3.1.4. [Tey13c, Théorème C]*Tout germe de feuilletage présentable est incompressible et admet une transversale complètement connexe.*

Comme le souligne la remarque précédente la condition d'être présentable n'est pas nécessaire. Cependant les exemples que nous construisons montrent qu'elle n'est pas superflue. Caractériser complètement les feuilletages incompressibles admettant une transversale complètement connexe est une question difficile car ces propriétés sont globales et les limitations imposées par le fait d'être présentable sont encore partiellement techniques.

3.2 Esquisse des preuves

3.2.1 Théorème 3.1.1

On montre directement que le tiré-en-arrière d'un feuilletage nœud-col convergent ou selle quasi-résonante par le revêtement universel d'un polydisque $\rho\mathbb{D}\times r\mathbb{D}$ assez petit, épointé de la séparatrice forte $\{x=0\}$, ne possède que des feuilles simplement connexes. On invoque un argument de transversalité avec les fibres de la projection $\Pi : (\log x, y) \mapsto \log x$ pour prouver dans un premier temps que le bord d'une feuille $\mathcal{L}$ est contenu dans le bord du polydisque. Un argument variationnel immédiat permet alors d'identifier des familles de chemins complètement contenues dans $\Pi(\mathcal{L})$, que l'on nomme « faisceaux de stabilité », le long desquels le module de l'ordonnée de $\mathcal{L}$ diminue : ces chemins sont donc contenus dans $\mathcal{L}$. Pour prouver que tout cycle γ de $\mathcal{L}$ est tangentiellement trivial, on construit une homotopie entre $\Pi\circ\gamma$ et un lacet bordant une région d'intérieur vide en suivant des faisceaux de stabilité, ce qui garantit qu'elle se relève dans $\mathcal{L}$ en une trivialisation de γ.

Le cas divergent se ramène au cas précédent en redressant au-dessus de secteurs dans la variable x les resommées sectorielles de la séparatrice « faible ». Puisque les faisceaux de stabilité restent à l'intérieur d'un secteur donné, et comme le redressement des séparatrices se fait à travers une application fibrée dans la coordonnée x, l'argument est essentiellement le même. $\mathcal{U}\setminus\{x=0\}$ est alors l'union des pré-images du polydisque $\rho\mathbb{D}\times r\mathbb{D}$ par les redressements sectoriels.

3.2.2 Théorème 3.1.4

En adaptant la construction originelle de Marín-Mattei, on montre assez facilement l'existence d'une transversale complètement connexe à un feuilletage présentable, en incorporant un nouveau type de bloc élémentaire B renfermant des nœuds-cols convergents ou des selles

quasi-résonantes. La propriété d'incompressibilité s'obtient en utilisant également les propriétés d'origine de collage bord-à-bord. Il faut pour cela garantir que le bloc élémentaire B (ou plutôt son bord) se prête à cet assemblage. Le cas des selles irrationnelles non linéarisables est très proche du cas des selles résonantes traitées dans [MM08], puisque les feuilles se rétractent radialement sur leur bord (feuilles de type collier). Expliquons maintenant le cas, plus complexe, du nœud-col.

Le bord de B est formé de deux composantes connexes : une composante forte $\partial B \cap \left\{\left|y\right| = r\right\}$ et une composante faible $\partial B \cap \{|x| = \rho\}$. On peut faire en sorte de choisir B pour que l'une ou l'autre de ces composantes soit de type suspension. Cela signifie grossièrement que cette composante, disons forte (*resp.* faible), s'obtient comme le balayage par le transport holonome d'un petit disque conforme transverse Σ en effectuant une fois le tour du cercle $\left\{\left|y\right| = r\right\}$ (*resp.* $\{|x| = \rho\}$). Dès que cette propriété est assurée il faut contrôler que l'intersection de Σ avec son image par l'holonomie est connexe (afin de ne pas créer de topologie artificielle dans l'espace ambiant). Nous montrons ces propriétés en utilisant les outils (notamment la notion de rugosité) introduits par D. Marín et J.-F. Mattei.

Ceci étant dit, arrive ensuite l'obstruction majeure forçant les nœuds-cols à être placés de la bonne façon. Il faut en effet pouvoir garantir également la 1-connexité dans B de la composante du bord que l'on souhaite assembler aux autres blocs. Cette propriété est vérifiée par la composante faible. En contraste, la composante forte du bord n'est jamais 1-connexe dans B. Dans chaque feuille d'un nœud-col existent en effet des « chemins inamovibles dont les extrémités $\{p_1, p_2\}$ sont situées dans une transversale donnée $\{y = \text{cte}\}$ et qui sont homotopes dans B, privé de la séparatrice qui n'est pas un diviseur, à un chemin les joignant dans la transversale. Cependant il n'est pas possible d'opérer cette homotopie tangentiellement au feuilletage. La coexistence d'un comportement « col » et « nœud » au sein de certaines feuilles prévient en effet cette possibilité. Le point de vue topologique est le suivant : certaines feuilles de nœud-col ne peuvent se rétracter tangentiellement sur la composante forte du bord, en d'autres termes les feuilles ne sont pas de type collier vis-à-vis de cette composante (alors qu'ils le sont pour la composante faible). Ainsi, quelle que soit la forme du bloc B, la composante forte de son bord ne sera jamais 1-connexe dans B, ce qui interdit d'appliquer le procédé de localisation sur lequel se base le théorème de Marín-Mattei. Néanmoins cette obstruction est d'ordre technique, comme l'a souligné la Remarque 3.1.3.

L'induction de Marín-Mattei nécessite, pour démarrer, que les composantes initiales de la réduction du feuilletage soient dynamiquement isolées. Une **composante initiale** est une composante du diviseur exceptionnel à laquelle sont attachées au moins deux branches mortes (une branche morte est une union maximale de composantes adjacentes du diviseur exceptionnel qui ne contiennent aucune autre singularité du diviseur que leurs points de croisement mutuels). Cette composante doit de plus contenir exactement une singularité du feuilletage. On dira que ces composantes initiales sont **dynamiquement isolées** si elles apparaissent toutes dans des composantes connexes distinctes du diviseur exceptionnel auquel on a retiré les composantes dicritiques. Dans le cas d'une courbe généralisée non dicritique il est bien connu qu'il n'existe qu'au plus une composante initiale, et celle-ci est attachée à exactement deux branches mortes, l'une d'elles ayant comme maillon final le diviseur apparu lors du premier éclatement. Nous généralisons mot pour mot cette propriété à toutes les singularités de feuilletages présentables :

Proposition 3.2.1. *Un germe de feuilletage présentable n'a qu'au plus une composante initiale, et celle-ci est attachée à exactement deux branches mortes, l'une d'elles ayant comme maillon final le*

diviseur apparu lors du premier éclatement.

Il est facile de construire des exemples de feuilletages présentables (dicritiques ou non) admettant autant de composantes initiales que souhaité, chacune pouvant elle-même être attachée à un nombre arbitraire de branches mortes.

3.2.3 Théorème 3.1.2

Dans un premier temps la compressibilité des feuilles est fournie par un argument de taille de groupe (impossibilité d'injecter un groupe libre de rang 2 dans un groupe commutatif), en réalisant un tel groupe de biholomorphismes comme l'holonomie projective d'un feuilletage admettant au moins un nœud-col divergent dans sa réduction. L'argument est ici d'utiliser la non existence d'une seconde séparatrice pour forcer la compressibilité. Il est à noter que nous parvenons à exhiber dans certains cas un lacet non trivial dans le noyau de ι^*.

Nous construisons ensuite une famille d'exemples de feuilletages compressibles n'ayant que des nœuds-cols convergents dans leur réduction. À cette fin nous exploitons le fait déjà évoqué de l'absence de 1-connexité de la composante forte du bord dans un bloc renfermant un nœud-col. On met en regard deux nœuds-cols modèles d'invariants $(0,k,0)$ partageant la même séparatrice forte, de façon à connecter deux chemins inamovibles pour former un cycle. Celui-ci est trivial dans l'espace privé des séparatrices mais pas dans la feuille le contenant. Nous présentons brièvement cet exemple pour $k := 1$.

Le tiré-en-arrière du modèle formel $\hat{\omega}$ par $\psi : (x,y) \longmapsto \left(x, 1-y^2\right)$ est la 1-forme différentielle

$$\psi^*\hat{\omega} \;=\; \left(y^2-1\right)\mathrm{d}x - 2yx^2\mathrm{d}y\,.$$

Ce feuilletage possède les trois séparatrices $\{x=0\}$ et $\{y=\pm 1\}$. Pour $c \in]0,1[$ considérons les deux chemins inamovibles suivants :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_c^{\pm} : [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{D}\times\mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \left(c\exp(\mathrm{i}t)\,, \pm\sqrt{1-\exp\left(-\dfrac{1}{c}\left(1+\exp(-\mathrm{i}t)\right)\right)}\right), \end{array}$$

ainsi que le cycle

$$\begin{array}{rcl} \gamma_c : [-2\pi,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{D}\times\mathbb{C} \\ t \le 0 & \longmapsto & \Gamma_c^-(\pi+t) \\ t \ge 0 & \longmapsto & \Gamma_c^+(\pi-t)\,. \end{array}$$

Par construction γ_c est d'indice nul autour de chaque branche de $\left\{x\left(y^2-1\right)=0\right\}$, mais étant la concaténation de deux chemins inamovibles «distants» il n'est pas tangentiellement trivial. Puisque c peut-être pris arbitrairement proche de 0, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ défini par $\psi^*\hat{\omega}=0$ n'est incompressible dans aucun voisinage de $S := \{x=0\}$.

Cette association de deux singularités $p_0=(0,-1)$ et $p_1=(0,1)$ forme un bloc, muni du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, auquel nous pouvons adjoindre un autre bloc afin de plonger l'ensemble dans la réduction d'un germe de feuilletage singulier, le diviseur exceptionnel coïncidant avec $S\cup\{\infty\}$. L'holonomie de $\tilde{\mathcal{F}}$ le long du chemin $t\in[0,2\pi]\mapsto(0,2\exp(\mathrm{i}t))$ est conjuguée à $\Delta^{\circ 2}$, en

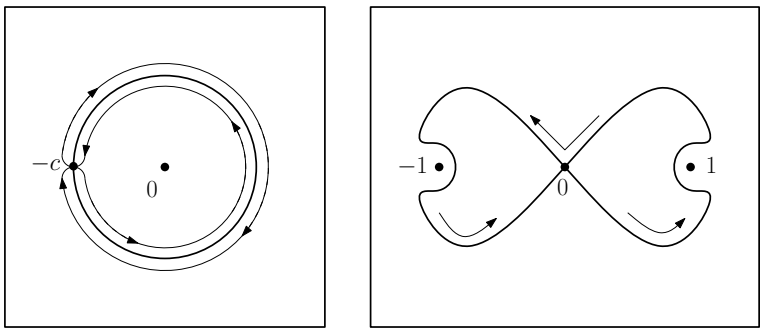

FIGURE 3.2.1 – Projeté de γ_c sur $\{y = 0\}$ (à gauche) et sur $\{x = 0\}$ (à droite).

notant Δ l'holonomie forte de $\hat{\omega}$. On choisit pour p_2 une selle résonante tangente à $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$ et d'holonomie $\Delta^{\circ -2}$ tangente à l'identité (le théorème de Martinet-Ramis en assure l'existence). L'invocation du théorème de Lins-Neto [Lin87b], sous sa forme améliorée [Lor10, p159], achève alors la construction.

[Lin87b] A. Lins-Neto, *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*, J. Differential Geom., vol. 26, #1 : pp. 1–31, 1987

[Lor10] F. Loray, *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*, PrePrint 2010

[Mil68] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968

[MM08] D. Marín and J.-F. Mattei, *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), vol. 41, #6 : pp. 855–903, 2008

[MM21] D. Marín and J.-F. Mattei, *Topology of singular holomorphic foliations along a compact divisor*, PrePrint 2012, arxiv :1206.2121

[Tey13c] L. Teyssier, *Germes de feuilletages présentables du plan complexe*, PrePrint (soumis) 2013

Chapitre 4

Le reste du chemin

4.1 Vers une géométrie analytique dans $\mathbb{C}\{z\}$

4.1.1 Points singuliers

Étant donnée une application analytique $\Lambda : \mathbb{C}\{z\} \to \mathbb{C}\{w\}$ on peut introduire deux espaces tangents en un point $p \in \Omega := \Lambda^{-1}(0)$:

- ▹ l'espace tangent algébrique

$$\mathcal{T}_p^A(\Omega) \quad := \quad \ker D\Lambda$$

  donné par le noyau de la différentielle, au sens de Fréchet, de Λ,
- ▹ l'espace tangent géométrique

$$\mathcal{T}_p^G(\Omega) \quad := \quad \{\lambda'(0) : \lambda \text{ germe de courbe inscrit dans } \Omega,\ \lambda(0) = p\}$$

  où un germe de courbe inscrit dans Ω est simplement une application analytique $\lambda : (\mathbb{C}, 0) \to \Omega$.

Remarquons tout de suite que $\mathcal{T}^G \subset \mathcal{T}^A$. En dimension finie, et lorsque Λ est irréductible, ces deux espaces coïncident si, et seulement si, p est un point régulier de Ω. Nous proposons donc la

Définition. Supposons que Λ soit irréductible. Un **point régulier** de $\Lambda^{-1}(0)$ est un point p pour lequel les espaces tangents algébriques et géométriques sont égaux.

Conjecture 4.1.1. *Mettons sur les espaces de germes une A-topologie utile et métrisable. L'ensemble des points réguliers d'un ensemble analytique est un sous-ensemble analytique propre.*

L'idée est d'exploiter le fait que le complété topologique $\widehat{\mathbb{C}\{z\}}$ est un espace de Fréchet nucléaire. La différentielle $\mathrm{D}_p\Lambda$ devient alors un opérateur à trace, ce qui permet raisonnablement d'espérer obtenir une caractérisation des points non réguliers en termes de dépendance linéaire des « colonnes » de $D_p\Lambda$.

4.1.2 Paramétrisation

À défaut d'un théorème d'inversion locale, la structure des ensembles (sous-)analytiques peut être contrôlée par un théorème de paramétrisation analytique. La conjecture suivante est probablement vraie, peut-être en ajoutant une hypothèse de forte analyticité sur Λ :

Conjecture 4.1.2. *Les espaces de germes sont munis d'une topologie localement convexe séparée et métrisable. Prenons une fonction analytique $\Lambda : U \subset \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \to \mathbb{C}\{\mathbf{w}\}$ de type fini : pour tout $b \in \mathbb{N}$ il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $J_b \circ \Lambda = \Lambda \circ J_s$. Soit $p \in \Lambda^{-1}(0)$ un point régulier. Alors il existe une application analytique $\varphi : U \subset \mathbb{C}\{\mathbf{x}\} \to W \subset \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ d'un ouvert U dans un ouvert W telle que $\varphi(U) = W \cap \Omega$.*

Pour un voisinage W de p ne contenant aucune singularité on restreint $W \cap \Omega$ aux sous-espaces de jets finis. On peut alors appliquer le théorème de Fornaess-Stout [FS77] : toute variété complexe connexe de dimension d est l'image du polydisque standard $\mathbb{D}^d$ de dimension d par une application φ_d, localement biholomorphe. Si on peut montrer que la construction de Fornaess-Stout est compatible avec les filtrations par sous-variétés analytiques $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ avec $\dim M_d = d$, alors l'application $\varphi : \mathbb{D}^\infty \twoheadrightarrow \Omega \cap W$, induite sur la limite projective canonique $\mathbb{D}^\infty$ de la chaîne de polydisques $\left(\mathbb{D}^d \times \mathbb{D} \twoheadrightarrow \mathbb{D}^d\right)_{d\in\mathbb{N}}$, réalise la paramétrisation cherchée. La difficulté restante consiste à munir $\mathbb{D}^\infty$ d'une structure d'espace analytique modelée sur $\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}$.

Cette conjecture implique que les ensembles sous-analytiques obtenus comme projection d'ensembles analytiques réguliers seraient eux aussi paramétrables.

4.1.3 Distributions intégrables

Je propose de caractériser les distributions analytiques de sous-espaces affines fermés pouvant être intégrées dans $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, autrement dit les feuilletages analytiques.

Conjecture 4.1.3. *L'ensemble des distributions intégrables forme un sous-ensemble analytique.*

Il n'est pas clair que cet ensemble soit propre. S'il l'est un problème intéressant serait de déterminer l'équivalent des conditions d'intégrabilité de Frobenius. Cette dernière question est liée à l'étude des déformations isoholonomiques de selles résonantes, plus précisément à la structure transverse de la lamination de Res correspondante. On notera que le Théorème 2.2.1 de mise sous forme normale fournit une transversale analytique (affine) complète à la lamination induite sur $\mathtt{NCConv}_\mathtt{k}$.

4.2 Feuilletages glocaux

Nous présentons ici deux conjectures concernant la relation entre les feuilletages résonants et leurs holonomies. Mentionnons d'abord que la question de l'algébrisation des feuilletages réguliers, qui est triviale dans le contexte local, peut se poser pour les feuilletages réguliers semi-globaux.

Conjecture 4.2.1. *Tout feuilletage holomorphe régulier jusqu'au bord d'un domaine $\mathcal{D} := U \times V \subset \mathbb{C}^2$, simplement connexe et relativement compact, est conjugué sur $\mathcal{D}$ à un feuilletage polynomial.*

Cette conjecture sera étudiée dans la thèse à venir d'A. Bittmann, comme conséquence de la définition et de l'étude géométrique de la notion de singularité mobile apparaissant dans la partie régulière des feuilletages semi-globaux de $\mathbb{C}^2$.

4.2.1 Caractérisation des invariants de Martinet-Ramis glocaux

À défaut de déterminer les « équations » des ensembles analytiques propres dont l'union dénombrable contient les feuilletages résonants glocaux, tâche qui semble ardue, on peut tenter de trouver d'autres caractérisations portant sur la nature des invariants de Martinet-Ramis des feuilletages glocaux, en s'intéressant en particulier à leur prolongement analytique. On dira qu'un germe de fonction holomorphe $f \in \mathbb{C}\{h\}$ est **résurgent** si le bord de sa surface de Riemann [1] est discret (en particulier f n'a pas de frontière naturelle). La conjecture suivante me paraît raisonnable, au moins pour les feuilletages polynomiaux sous-forme de Dulac :

Conjecture 4.2.2. *Les invariants de Martinet-Ramis d'un feuilletage résonant glocal sont résurgents et leurs singularités sont au pire logarithmiques.*

Les invariants de Martinet-Ramis sont construits localement par une application d'holonomie reliant deux transversales dans des «secteurs de normalisation» consécutifs. Le caractère algébrique du feuilletage permet de considérer le prolongement analytique de cette holonomie sur des ensembles de «grande taille». Bien qu'il existe des feuilletages holomorphes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dont les holonomies admettent une frontière naturelle [CDFG13], ces exemples ne contiennent pas de singularité résonante. La dynamique très attractive des singularités de feuilletages résonants pourrait permettre de prolonger l'holonomie de manière résurgente au-dessus d'un domaine (éventuellement borné) de la transversale, couvrant tout l'espace des feuilles sectorielles locales.

Si une telle conjecture est vraie, la calculabilité de la mise sous forme normale produira, au moins de façon numérique, des exemples de feuilletages nœuds-cols convergents qui ne sont pas glocaux.

4.2.2 Un théorème d'Hermite-Lindemann feuilleté

La conjecture suivante se déduit de la précédente :

Conjecture 4.2.3. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage polynomial dont l'une des singularités p est résonante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *une des holonomies de $\mathcal{F}$ calculée au voisinage de p relativement à une séparatrice forte [2] est conjuguée à une application rationnelle Δ,*
- *$\mathcal{F}$ est analytiquement conjugué à son modèle formel $\hat{\omega}$ d'invariant $\hat{\mathcal{M}} = (\lambda, 1, 0)$, autrement dit $\mathrm{MRD}(\mathcal{F}) = \mathbf{0}$ et $k = 1$.*

Dans ce cas Δ ne peut qu'être une homographie.

Les travaux d'A. Epstein [Eps93] montrent en effet que les invariants d'Écalle-Voronin [Éca85, Mal82, Vor81a, Vor81b] d'une application rationnelle de degré supérieur à 2 doivent avoir une frontière naturelle. Comme ces invariants sont égaux aux invariants de Martinet-Ramis de $\mathcal{F}$ en p, la conjecture précédente entraîne que Δ est nécessairement une homographie. La trivialité de la classe analytique de $\mathcal{F}$ au voisinage de p en découle immédiatement.

1. Compris comme les singularités rencontrées à l'extrémité des chemins le long desquels on effectue le prolongement analytique de f.

2. Une courbe analytique régulière contenant une feuille de $\mathcal{F}$, tangente en p à l'espace propre d'une valeur propre non nulle de la partie linéaire de $\mathcal{F}$ en p.

[CDFG13] G. Calsamiglia, B. Deroin, S. Frankel and A. Guillot, *Singular sets of holonomy maps for algebraic foliations*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), vol. 15, #3 : pp. 1067–1099, doi :10.4171/JEMS, 2013

[Éca85] J. Écalle, Les fonctions résurgentes. Tome III, *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*, vol. 85, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, l'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects], 1985

[Eps93] A. Epstein, *Towers of Finite Type Complex Analytic Maps*, Ph.D. thesis, 1993

[FS77] J. E. Fornaess and E. L. Stout, *Spreading polydiscs on complex manifolds*, Amer. J. Math., vol. 99, #5 : pp. 933–960, 1977

[Mal82] B. Malgrange, *Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*, *in* Bourbaki Seminar, Vol. 1981/1982, *Astérisque*, vol. 92, pp. 59–73, Soc. Math. France, Paris, 1982

[Vor81a] S. Voronin, *Analytic classification of germs of conformal mappings* $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, Functional Anal. Appl., vol. 15, #1 : pp. 1–13, 1981

[Vor81b] S. M. Voronin, *Analytic classification of germs of conformal mappings* $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, Funktsional. Anal. i Prilozhen., vol. 15, #1 : pp. 1–17, 96, 1981

Annexe : résultats connus concernant la question glocale

Germes de fonctions

- Tout élément f de $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$, définissant un germe de variété analytique $\{f = 0\}$ ayant au plus une singularité isolée en 0, est glocal (en fait, un tel germe est localement équivalent à un jet d'ordre fini assez grand [MY82]). Pour $m \geq 3$ il existe des germes non glocaux, comme l'exemple [3] de H. Whitney [Whi65] :

$$f(x,y,z) \quad = \quad xy(x+y)(x-yz)(x-y\exp z)\,.$$

- Le cas des germes méromorphes est trivial pour $m := 1$, et totalement ouvert dans le cas $m \geq 2$. Dans le cas $m = 2$, un résultat de D. Cerveau et J.-F. Mattei [CM82] donne cependant une condition (générique) nécessaire et suffisante pour qu'un tel germe soit équivalent à un jet d'ordre fini. Des constructions *ad hoc* permettent par ailleurs de conclure à la glocalité de certains germes dont les courbes de niveaux sont désingularisées après un éclatement de l'origine et dont seulement un certain nombre des transformées strictes sont tangentes au diviseur exceptionnel [Cas13].

Germes de bihilomorphisnes

- Une condition générique portant sur la partie linéaire d'un germe de biholomorphisme Δ assure sa linéarisabilité locale (hyperbolicité).
- Dans le cas $m := 1$ les différentes classes dynamiques sont déterminées par le multiplicateur $\Delta'(p) =: \exp(2i\pi\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.
  - Lorsque λ n'est pas réel, Δ est hyperbolique.
  - Les germes périodiques (pour l'itération) sont glocaux car linéarisables. Ce cas sera écarté dans la suite.
  - Les germes admettant un point-fixe parabolique ($\lambda \in \mathbb{Q}$) sont complètement classifiés (invariants fonctionnels d'Écalle-Voronin [Éca85, Mal82, Vor81b, Vor81a] en bijection avec un produit $\mathbb{C}\{h\}^k$) et les travaux de A. Epstein [Eps93] sur les fonctions de «type fini» permettent de donner des conditions nécessaires pour que Δ soit rationnel dans une coordonnée locale. En particulier, les invariants d'un tel germe parabolique (ayant un ensemble de Julia non vide) doivent posséder une frontière naturelle. Il

3. La trace de $\{f = 0\}$ sur l'hyperplan $\{z = \lambda\}$, pour $\lambda \neq 0$, est une union de cinq droites distinctes. Si ce germe est conjugué à une fonction algébrique alors le birapport de quatre d'entre elles varie algébriquement en fonction de λ. Mais ceci est impossible car parmi les birapports se trouvent λ et $\exp\lambda$.

n'est toutefois pas clair que l'on sache comment en déduire des exemples concrets de germes non glocaux, étant donné que la synthèse d'un germe ayant des invariants prescrits est un procédé hautement non explicite.
  - Pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ le germe Δ admet un point fixe de type Siegel ; ces germes sont donc linéarisables. Dans les cas résiduels d'un point fixe irrationnel indifférent de type Cremer (problème des «petits diviseurs»), la description des invariants locaux est un problème très délicat qui n'a pas encore été résolu. J.-C. Yoccoz a néanmoins prouvé l'existence d'une famille non dénombrable de classes de conjugaison de tels germes dont aucun représentant n'est une fonction entière [Per92].
- ▹ À ma connaissance le cas $m \geq 2$ est complètement ouvert, mêmes si des constructions récentes d'invariants de certaines familles de biholomorphismes «paraboliques» [Rib08, Rib09] pourraient amener des réponses similaires.

Germes de champs de vecteurs

- ▹ En un point régulier, d'après le théorème de redressement du flot (Cauchy-Lipschitz), X est conjugué à un champ de vecteurs constant. La question glocale se concentre donc sur les cas où X possède une singularité (*i.e.* au voisinage des points où X s'annule). Dans la suite cette singularité sera supposée isolée et placée en $p := 0$.
- ▹ Le théorème de linéarisation de Poincaré garantit, sous des conditions génériques d'hyperbolicité portant sur la partie linéaire de X en 0, l'existence d'une conjugaison locale entre X et sa partie linéaire.
- ▹ Quand $m := 2$, après identification de la partie linéaire

$$X_1 \quad := \quad (ax+by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx+dy)\frac{\partial}{\partial y}$$

de X à la matrice $L := \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, on peut donner une description plus précise dans le cas non nilpotent. En notant $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ le spectre de L avec $\lambda_2 \neq 0$, la quantité $\lambda := {}^{\lambda_1}/_{\lambda_2}$ gouverne, comme précédemment, le type dynamique de X.
  - Lorsque $\lambda \notin \mathbb{R}$ le champ de vecteurs est hyperbolique.
  - Lorsque $\lambda > 0$ le champ de vecteurs est ou bien localement linéarisable (c'est en particulier le cas si λ ou λ^{-1} n'est pas un entier) ou bien conjugué à un champ polynomial (forme normale de Dulac-Poincaré [Dul04, Dul09]). Ici encore X est glocal.
  - Pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}\backslash\mathbb{Q}$, le champ X est localement linéarisable. Dans les autres cas X est une selle quasi-résonante, soumise à la dure loi des «petits diviseurs». Ici aussi les invariants locaux de X ne sont pas décrits, rendant plus difficile la question glocale. Ceci étant dit X est *formellement* linéarisable [4].
  - Quand $\lambda \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$, et en dehors des cas marginaux [5] où X est linéarisable, l'espace des invariants locaux de X est en bijection avec un produit $\mathbb{C}\{h\}^k$ (classification de Martinet-Ramis [MR82, MR83] et de Meshcheryakova-Teyssier-Voronin [MV03, Tey04a]). On parle alors d'une singularité résonante. Notons que X est pourtant formellement conjugué à une forme normale polynomiale de Dulac-Poincaré [Dul04, Dul09].

4. C'est-à-dire que ψ est donnée par des séries entières qui sont, en général, divergentes.
5. Ils forment un ensemble analytique propre des germes de champs de vecteurs à partie linéaire fixée.

- Mentionnons finalement que si X possède une structure transverse affine[6], X est glocal [BT99, Tey04c, Tey13d].
- Rien n'est connu lorsque L est nilpotente. Il est tout à fait probable que la plupart de ces champs ne soient même pas formellement glocaux, en raison du fait que la dimension du conoyau de la dérivation $X\cdot$ agissant sur les séries formelles est en général infinie[7].

6. Il existe un champ méromorphe Y tel que $[X, Y] = Y$. Cette condition assure que le flot de X est une fonction multivaluée de classe liouvillienne, c'est-à-dire obtenue par quadratures (et leurs exponentielles) de fonctions algébriques.

7. Heuristiquement une section du conoyau de la dérivation fournit une famille de candidats auxquels X peut se ramener par changement de coordonnées.

[BT99] M. Berthier and F. Touzet, *Sur l'intégration des équations différentielles holomorphes réduites en dimension deux*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), vol. 30, #3 : pp. 247–286, doi : 10.1007/BF01239006, 1999

[Cas13] G. Casale, *Simple meromorphic functions are algebraic*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), vol. 44, #2 : pp. 309–319, 2013

[CM82] D. Cerveau and J.-F. Mattei, Formes intégrables holomorphes singulières, *Astérisque*, vol. 97, Société Mathématique de France, Paris, with an English summary, 1982

[Dul04] H. Dulac, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, Journal de l'École Polytechnique, 1904

[Dul09] H. Dulac, *Sur les points singuliers d'une équation différentielle*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3), vol. 1 : pp. 329–379, 1909

[Éca85] J. Écalle, Les fonctions résurgentes. Tome III, *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*, vol. 85, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, l'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects], 1985

[Eps93] A. Epstein, *Towers of Finite Type Complex Analytic Maps*, Ph.D. thesis, 1993

[Mal82] B. Malgrange, *Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*, *in* Bourbaki Seminar, Vol. 1981/1982, *Astérisque*, vol. 92, pp. 59–73, Soc. Math. France, Paris, 1982

[MR82] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., , #55 : pp. 63–164, 1982

[MR83] J. Martinet and J.-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), vol. 16, #4 : pp. 571–621, 1983

[MV03] Y. Meshcheryakova and S. Voronin, *Analytic classification of germs of holomorphic vector fields with a degenerate elementary singular point*, Vestnik Chelyab. Univ. Ser. 3 Mat. Mekh. Inform., , #3(9) : pp. 16–41, 2003

[MY82] J. Mather and S. Yau, *Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras*, Invent. Math., vol. 69, #2 : pp. 243–251, 1982

[Per92] R. Perez Marco, *Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J.-C. Yoccoz)*, Astérisque, , #206 : pp. Exp. No. 753, 4, 273–310, séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92, 1992

[Rib08] J. Ribón, *Modulus of analytic classification for unfoldings of resonant diffeomorphisms*, Mosc. Math. J., vol. 8, #2 : pp. 319–395, 400, 2008

[Rib09] J. Ribón, *Unfoldings of tangent to the identity diffeomorphisms*, Astérisque, , #323 : pp. 325–370, 2009

[Tey04a] L. Teyssier, *Analytical classification of singular saddle-node vector fields*, J. Dynam. Control Systems, vol. 10, #4 : pp. 577–605, doi :10.1023/B:JODS.0000045365.56394.b4, 2004

[Tey04c] L. Teyssier, *Examples of non-conjugated holomorphic vector fields and foliations*, J. Differential Equations, vol. 205, #2 : pp. 390–407, doi :10.1016/j.jde.2004.03.033, 2004

[Tey13d] L. Teyssier, *Holomorphic infinitesimal affine actions of the plane*, PrePrint (soumis) 2013

[Vor81a] S. Voronin, *Analytic classification of germs of conformal mappings* $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, Functional Anal. Appl., vol. 15, #1 : pp. 1–13, 1981

[Vor81b] S. M. Voronin, *Analytic classification of germs of conformal mappings* $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, Funktsional. Anal. i Prilozhen., vol. 15, #1 : pp. 1–17, 96, 1981

[Whi65] H. Whitney, *Local properties of analytic varieties*, *in* Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), pp. 205–244, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965

Mes articles scientifiques

Articles disponibles sur ma page internet professionnelle

http://www-irma.u-strasbg.fr/~teyssier/redirect.php?to=publications

Articles sélectionnés pour ce mémoire

[GT10] Y. Genzmer and L. Teyssier, *Existence of non-algebraic singularities of differential equation*, J. Differential Equations, vol. 248, #5 : pp. 1256–1267, doi :10.1016/j.jde.2009.10.001, 2010

[ST13] R. Schäfke and L. Teyssier, *Analytic normal forms for convergent saddle-node vector fields*, PrePrint (soumis) 2013

[Tey13b] L. Teyssier, *Analyticity between spaces of convergent power series and applications*, PrePrint (soumis) 2013

[Tey13c] L. Teyssier, *Germes de feuilletages présentables du plan complexe*, PrePrint (soumis) 2013

Autres articles écrits depuis la fin de ma thèse

[RT08] C. Rousseau and L. Teyssier, *Analytical moduli for unfoldings of saddle-node vector fields*, Mosc. Math. J., vol. 8, #3 : pp. 547–614, 616, 2008

[Tey08] L. Teyssier, *Convergence(s)... en série*, l'OUVERT, vol. 117 : pp. 47–68, 2008

[Tey11] L. Teyssier, *An example of a topologically non-rigid foliation of the complex projective plane*, Int. Math. Res. Not. IMRN, , #18 : pp. 4089–4104, doi :10.1093/imrn, 2011

[Tey13a] L. Teyssier, *Computing Dulac's maps of (almost every) non-degenerate singularities*, PrePrint 2013

[Tey13d] L. Teyssier, *Holomorphic infinitesimal affine actions of the plane*, PrePrint (soumis) 2013

Articles issus de ma thèse

[Tey03] L. Teyssier, *Analytical classification of saddle-node vector fields*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, vol. 336, #8 : pp. 619–624, doi :10.1016/S1631-073X(03)00134-1, 2003

[Tey04a] L. Teyssier, *Analytical classification of singular saddle-node vector fields*, J. Dynam. Control Systems, vol. 10, #4 : pp. 577–605, doi :10.1023/B:JODS.0000045365.56394.b4, 2004

[Tey04b] L. Teyssier, *Équation homologique et cycles asymptotiques d'une singularité nœud-col*, Bull. Sci. Math., vol. 128, #3 : pp. 167–187, doi :10.1016/j.bulsci.2003.10.002, 2004

[Tey04c] L. Teyssier, *Examples of non-conjugated holomorphic vector fields and foliations*, J. Differential Equations, vol. 205, #2 : pp. 390–407, doi :10.1016/j.jde.2004.03.033, 2004

Ce mémoire étudie les dynamiques holomorphes glocales, celles qui sont l'expression (locale) dans un germe de carte d'une dynamique holomorphe (globale) sur une variété projective complexe. On y établit l'existence de germes de feuilletages holomorphes du plan complexe qui ne sont localement conjugués à aucun feuilletage algébrique. Cette preuve repose sur un théorème de type Baire, dans lequel les unions dénombrables de fermés analytiques propres (ensembles analytiquement maigres) sont d'intérieur vide. La notion d'analyticité (en dimension infinie) utilisée est celle associée à des topologies localement convexes particulières sur l'algèbre différentielle des germes de fonctions holomorphes en un point. On en déduit par ailleurs que les germes holomorphes satisfaisant des relations analytiques «raisonnables» constituent un ensemble analytiquement maigre.
Ce mémoire discute ensuite la description «explicite» d'un exemple de système non glocal. Une méthode calculable de réalisation de feuilletages nœuds-cols, d'invariants de Martinet-Ramis prescrits, est décrite. La production d'un exemple est donc ramenée à la caractérisation effective des invariants de Martinet-Ramis de feuilletages glocaux. Une conjecture de type Hermite-Lindemann, allant dans ce sens, est ensuite présentée. Enfin ce mémoire présente une généralisation de la construction de la monodromie de Marín-Mattei, cet objet étant un invariant local des feuilletages singuliers du plan complexe. On espère ici encore pouvoir obtenir des caractérisations partielles des monodromies de feuilletages glocaux. Les hypothèses permettant de réaliser la construction, portant sur le type de réduction de la singularité, sont affaiblies et des exemples montrant leur optimalité sont présentés.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28

www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr

IRMA 2013/013
ISSN 0755-3390
http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-