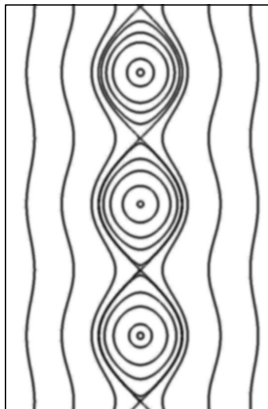

Propriétés analytiques de l'espace des
séries entières convergentes
et dynamiques holomorphes locales
Soutenance d'habilitation à diriger des recherches

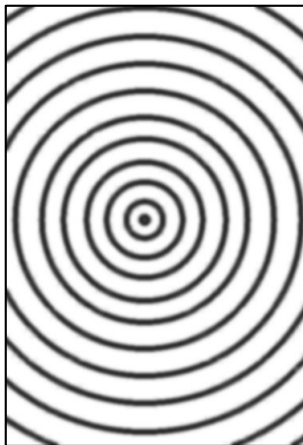
Loïc TEYSSIER

8 novembre 2013

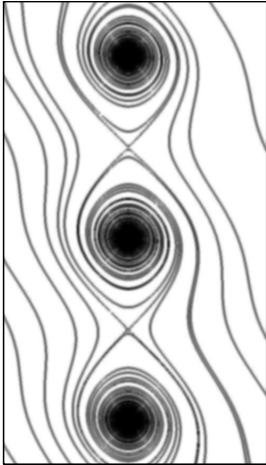
Introduction



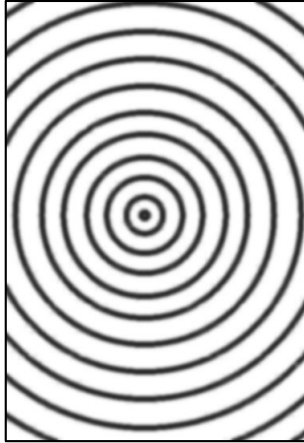
$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$$



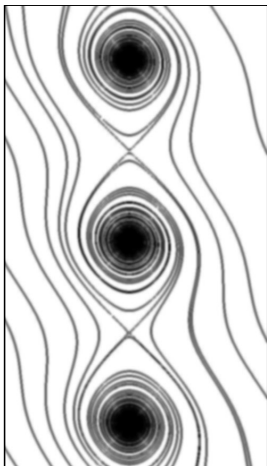
$$\ddot{\theta} + \theta = 0$$



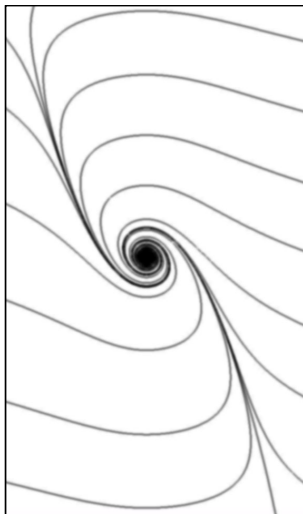
$$\ddot{\theta} + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 + \sin \theta = 0$$



$$\ddot{\theta} + \theta = 0$$



$$\ddot{\theta} + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 + \sin \theta = 0$$



$$\ddot{\theta} + \alpha \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \dot{\theta}^2 + \theta = 0$$

Question

Existe-t-il un système dynamique qui n'est pas qualitativement équivalent à un système d'expression polynomiale (ou algébrique) ?

Question

Comment déterminer si un système dynamique se transforme localement en un système d'expression polynomiale (ou algébrique) ?

Question

Peut-on déterminer un exemple « explicite » ?

Question

Existe-t-il un système dynamique qui n'est pas qualitativement équivalent à un système d'expression polynomiale (ou algébrique) ?

Question

Comment déterminer si un système dynamique se transforme localement en un système d'expression polynomiale (ou algébrique) ?

Question

Peut-on déterminer un exemple « explicite » ?

Question

Existe-t-il un système dynamique qui n'est pas qualitativement équivalent à un système d'expression polynomiale (ou algébrique) ?

Question

Comment déterminer si un système dynamique se transforme localement en un système d'expression polynomiale (ou algébrique) ?

Question

Peut-on déterminer un exemple « explicite » ?

Définition

Un germe d'objet méromorphe X (fonction, champ de vecteurs...) est **glocal** s'il existe un objet méromorphe \hat{X} de même nature sur une variété projective complexe M (compacte) dont X est l'expression dans une carte locale

$$\hat{X} = \Psi^* X$$

glocal = global + local

Définition

Un germe d'objet méromorphe X (fonction, champ de vecteurs...) est **glocal** s'il existe un objet méromorphe \hat{X} de même nature sur une variété projective complexe M (compacte) dont X est l'expression dans une carte locale

$$\hat{X} = \Psi^* X$$

glocal = global + local

Notations

$$\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_m)$$

$$\mathbb{C}[\mathbf{z}] := \{\text{polynômes en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\mathbf{z})$$

$$\mathbb{C}[[\mathbf{z}]] := \{\text{séries formelles en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}((\mathbf{z}))$$

$$\mathbb{C}\{\mathbf{z}\} := \{\text{séries convergentes en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\{\mathbf{z}\})$$

Notations

$$\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_m)$$

$$\mathbb{C}[\mathbf{z}] := \{\text{polynômes en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\mathbf{z})$$

$$\mathbb{C}[[\mathbf{z}]] := \{\text{séries formelles en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}((\mathbf{z}))$$

$$\mathbb{C}\{\mathbf{z}\} := \{\text{séries convergentes en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\{\mathbf{z}\})$$

Notations

$$\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_m)$$

$$\mathbb{C}[\mathbf{z}] := \{\text{polynômes en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\mathbf{z})$$

$$\mathbb{C}[[\mathbf{z}]] := \{\text{séries formelles en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}((\mathbf{z}))$$

$$\mathbb{C}\{z\} := \{\text{séries convergentes en } z\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\{z\})$$

Notations

$$\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_m)$$

$$\mathbb{C}[\mathbf{z}] := \{\text{polynômes en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\mathbf{z})$$

$$\mathbb{C}[[\mathbf{z}]] := \{\text{séries formelles en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}((\mathbf{z}))$$

$$\mathbb{C}\{\mathbf{z}\} := \{\text{séries convergentes en } \mathbf{z}\} \quad \text{fractions } \mathbb{C}(\{\mathbf{z}\})$$

Exemples : fonctions

- 1 Tout germe $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est glocal

$$\left(\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0), P \in \mathbb{C}[x, y] \right) \quad \begin{aligned} \psi^* f &:= f \circ \psi \\ &= P \end{aligned}$$

- 2 Tout germe $f \in \mathbb{C}\{z\}$ tel que $\{f = 0\}$ ait au plus une singularité isolée en 0 est glocal (Arnold, Mather, Yau)
- 3 Exemple non glocal de Whitney

$$f(x, y, z) = xy(x + y)(x - yz)(x - y \exp z)$$

Exemples : fonctions

- ① Tout germe $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est glocal

$$\left(\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0), P \in \mathbb{C}[x, y] \right) \quad \begin{aligned} \psi^* f &:= f \circ \psi \\ &= P \end{aligned}$$

- ② Tout germe $f \in \mathbb{C}\{z\}$ tel que $\{f = 0\}$ ait au plus une singularité isolée en 0 est glocal (Arnold, Mather, Yau)
- ③ Exemple non glocal de Whitney

$$f(x, y, z) = xy(x + y)(x - yz)(x - y \exp z)$$

Exemples : fonctions

- 1 Tout germe $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est glocal

$$\left(\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0), P \in \mathbb{C}[x, y] \right) \quad \begin{aligned} \psi^* f &:= f \circ \psi \\ &= P \end{aligned}$$

- 2 Tout germe $f \in \mathbb{C}\{z\}$ tel que $\{f = 0\}$ ait au plus une singularité isolée en 0 est glocal (Arnold, Mather, Yau)
- 3 Exemple non glocal de Whitney

$$f(x, y, z) = xy(x + y)(x - yz)(x - y \exp z)$$

Exemples : fonctions

- 1 Tout germe $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est glocal

$$\left(\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0), P \in \mathbb{C}[x, y] \right) \quad \begin{aligned} \psi^* f &:= f \circ \psi \\ &= P \end{aligned}$$

- 2 Tout germe $f \in \mathbb{C}\{z\}$ tel que $\{f = 0\}$ ait au plus une singularité isolée en 0 est glocal (Arnold, Mather, Yau)
- 3 Exemple non glocal de Whitney

$$f(x, y, z) = xy(x + y)(x - yz)(x - y \exp z)$$

Question

Existe-t-il des germes méromorphes $f \in \mathbb{C}(\{x, y\})$ qui ne sont pas locaux ?

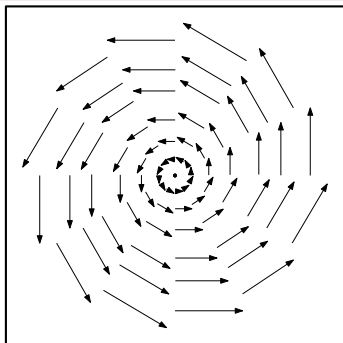
- 1 Cerveau-Mattei : génériquement $f \in \mathbb{C}(\{x, y\})$ est local

Question

Existe-t-il des germes méromorphes $f \in \mathbb{C}(\{x, y\})$ qui ne sont pas locaux ?

- 1 Cerveau-Mattei : génériquement $f \in \mathbb{C}(\{x, y\})$ est local

Exemples : champs de vecteurs / feuilletages



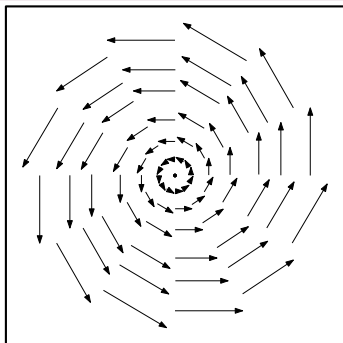
Un champ de vecteurs de \mathbb{C}^2

$$X(x,y) = \begin{bmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{bmatrix}$$

s'écrit aussi sous forme de dérivée directionnelle

$$X(x,y) = A(x,y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Exemples : champs de vecteurs / feuilletages



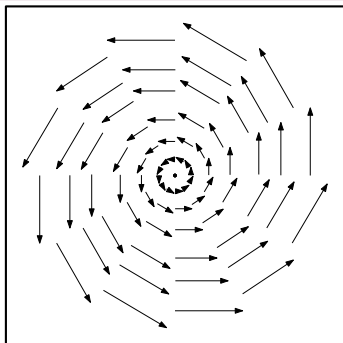
Un champ de vecteurs de \mathbb{C}^2

$$X(x,y) = \begin{bmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{bmatrix}$$

s'écrit aussi sous forme de dérivée directionnelle

$$X(x,y) = A(x,y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Exemples : champs de vecteurs / feuilletages



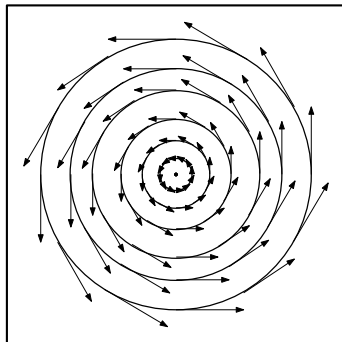
Un champ de vecteurs de \mathbb{C}^2

$$X(x,y) = \begin{bmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{bmatrix}$$

s'écrit aussi sous forme de dérivée directionnelle

$$X(x,y) = A(x,y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Exemples : champs de vecteurs / feuilletages



Le feuilletage induit par X est l'ensemble de ses courbes intégrales

Cas régulier

En dehors d'un point stationnaire

$$X(0,0) \neq 0$$

Théorème de redressement du flot (Cauchy-Lipschitz) : X est glocal

$$\begin{aligned}
 (\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)) \quad \psi^* X &:= (D\psi)^{-1} (X \circ \psi) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}
 \end{aligned}$$

La difficulté survient pour les singularités
(= points stationnaires)

Cas régulier

En dehors d'un point stationnaire

$$X(0,0) \neq 0$$

Théorème de redressement du flot (Cauchy-Lipschitz) : X est glocal

$$\begin{aligned}
 (\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)) \quad \psi^* X &:= (D\psi)^{-1} (X \circ \psi) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}
 \end{aligned}$$

La difficulté survient pour les singularités
(= points stationnaires)

Cas régulier

En dehors d'un point stationnaire

$$X(0,0) \neq 0$$

Théorème de redressement du flot (Cauchy-Lipschitz) : X est glocal

$$\begin{aligned}
 (\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)) \quad \psi^* X &:= (D\psi)^{-1} (X \circ \psi) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}
 \end{aligned}$$

La difficulté survient pour les singularités
(= points stationnaires)

Cas régulier

En dehors d'un point stationnaire

$$X(0,0) \neq 0$$

Théorème de redressement du flot (Cauchy-Lipschitz) : X est glocal

$$\begin{aligned}
 (\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)) \quad \psi^* X &:= (D\psi)^{-1} (X \circ \psi) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}
 \end{aligned}$$

La difficulté survient pour les **singularités**
 (= points stationnaires)

Cas singulier $X(0,0) = 0$

La partie linéaire de X en $(0,0)$

$$X(x,y) = (\alpha x + \beta y + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma x + \delta y + \dots) \frac{\partial}{\partial y}$$

s'identifie à la matrice

$$L := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Hypothèses

- 1 Singularité isolée
- 2 L non nilpotente
- 3 spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_2 \neq 0$

Cas singulier $X(0,0) = 0$

La partie linéaire de X en $(0,0)$

$$X(x,y) = (\alpha x + \beta y + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma x + \delta y + \dots) \frac{\partial}{\partial y}$$

s'identifie à la matrice

$$L := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Hypothèses

- 1 Singularité isolée
- 2 L non nilpotente
- 3 spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_2 \neq 0$

Cas singulier $X(0,0) = 0$

La partie linéaire de X en $(0,0)$

$$X(x,y) = (\alpha x + \beta y + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma x + \delta y + \dots) \frac{\partial}{\partial y}$$

s'identifie à la matrice

$$L := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Hypothèses

- 1 Singularité isolée
- 2 L non nilpotente
- 3 spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_2 \neq 0$

Cas singulier $X(0,0) = 0$

La partie linéaire de X en $(0,0)$

$$X(x,y) = (\alpha x + \beta y + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma x + \delta y + \dots) \frac{\partial}{\partial y}$$

s'identifie à la matrice

$$L := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Hypothèses

- 1 Singularité isolée
- 2 L non nilpotente
- 3 spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_2 \neq 0$

Cas singulier $X(0,0) = 0$

La partie linéaire de X en $(0,0)$

$$X(x,y) = (\alpha x + \beta y + \dots) \frac{\partial}{\partial x} + (\gamma x + \delta y + \dots) \frac{\partial}{\partial y}$$

s'identifie à la matrice

$$L := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Hypothèses

- 1 Singularité isolée
- 2 L non nilpotente
- 3 spectre $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_2 \neq 0$

Théorème de Poincaré

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}$ (hyperbolicité) $\Rightarrow X$ conjugué à sa partie linéaire

Théorème de Dulac-Poincaré

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}_{\leq 0} \Rightarrow X$ global

Théorème de Poincaré

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}$ (hyperbolicité) $\Rightarrow X$ conjugué à sa partie linéaire

Théorème de Dulac-Poincaré

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}_{\leq 0} \Rightarrow X$ glocal

Un premier résultat

Théorème (Y. Genzmer-L.T., 2009)

Il existe des singularités de type nœud-col ($\lambda_1 = 0$) qui ne sont pas locales

Également vrai pour toutes les selles résonantes
($\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ non linéarisable)

Un premier résultat

Théorème (Y. Genzmer-L.T., 2009)

Il existe des singularités de type nœud-col ($\lambda_1 = 0$) qui ne sont pas locales

Également vrai pour toutes les selles résonantes
($\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ non linéarisable)

Un premier résultat

Théorème (Y. Genzmer-L.T., 2009)

Il existe des singularités de type nœud-col ($\lambda_1 = 0$) qui ne sont pas locales

Également vrai pour toutes les selles résonantes
($\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ non linéarisable)

Idée de preuve (D. Cerveau)

$$NC_1 := \{\text{nœuds-cols typiques}\}$$

- ① Classification de Martinet-Ramis (1982)

$$\begin{aligned} MR : NC_1 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

- ② Théorème de Baire :

$$\begin{aligned} MR(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap NC_1) &= \bigcup_{d \in \mathbb{N}} MR(\mathbb{C}[x, y]_{\leq d}^2 \cap NC_1) \\ &= \text{maigre} \\ &\neq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Idée de preuve (D. Cerveau)

$$NC_1 := \{\text{nœuds-cols typiques}\}$$

1 Classification de Martinet-Ramis (1982)

$$\begin{aligned} MR : NC_1 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

2 Théorème de Baire :

$$\begin{aligned} MR(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap NC_1) &= \bigcup_{d \in \mathbb{N}} MR(\mathbb{C}[x, y]_{\leq d}^2 \cap NC_1) \\ &= \text{maigre} \\ &\neq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Idée de preuve (D. Cerveau)

$$NC_1 := \{\text{nœuds-cols typiques}\}$$

- ① Classification de Martinet-Ramis (1982)

$$\begin{aligned} \text{MR} : NC_1 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

- ② Théorème de Baire :

$$\begin{aligned} \text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap NC_1) &= \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \text{MR}(\mathbb{C}[x, y]_{\leq d}^2 \cap NC_1) \\ &= \text{maigre} \\ &\neq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Problème

$\text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \simeq \mathbb{C}\{h\}$ n'est pas de Baire
(pour une topologie raisonnable)

Problème

$\text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \simeq \mathbb{C}\{h\}$ n'est pas de Baire
(pour une topologie raisonnable)

Propriétés analytiques de $\mathbb{C}\{z\}$

- 1 Traiter les relations entre germes comme l'annulation de fonctions analytiques
- 2 Exemples :

$$f \circ g - g \circ f = 0$$

$$\cos\left(f''(z) - z^2\right) + \frac{1 - f'(z)^{\pi/e}}{(1+z)^{\sqrt{\pi}}} = 0$$

- 3 Bonnes topologies : si $\frac{\partial}{\partial z}$ et \circ analytiques

Propriétés analytiques de $\mathbb{C}\{z\}$

- ① Traiter les relations entre germes comme l'annulation de fonctions analytiques
- ② Exemples :

$$f \circ g - g \circ f = 0$$

$$\cos\left(f''(z) - z^2\right) + \frac{1 - f'(z)^{\pi/e}}{(1+z)^{\sqrt{\pi}}} = 0$$

- ③ Bonnes topologies : si $\frac{\partial}{\partial z}$ et \circ analytiques

Propriétés analytiques de $\mathbb{C}\{z\}$

- 1 Traiter les relations entre germes comme l'annulation de fonctions analytiques
- 2 Exemples :

$$f \circ g - g \circ f = 0$$

$$\cos\left(f''(z) - z^2\right) + \frac{1 - f'(z)^{\pi/e}}{(1+z)^{\sqrt{\pi}}} = 0$$

- 3 Bonnes topologies : si $\frac{\partial}{\partial z}$ et \circ analytiques

Propriétés analytiques de $\mathbb{C}\{z\}$

- 1 Traiter les relations entre germes comme l'annulation de fonctions analytiques
- 2 Exemples :

$$f \circ g - g \circ f = 0$$

$$\cos\left(f''(z) - z^2\right) + \frac{1 - f'(z)^{\pi/e}}{(1+z)^{\sqrt{\pi}}} = 0$$

- 3 Bonnes topologies : si $\frac{\partial}{\partial z}$ et \circ analytiques

Fonctions analytiques

Définition

E, F espaces localement convexes complexes et séparés,
 $\Lambda : E \rightarrow F$

- ① Λ est analytique en $f \in E$ s'il existe $F_p \in \mathcal{L}_p(E \rightarrow F), p \in \mathbb{N}$

$$\Lambda(f+h) = \sum_{p=0}^{\infty} F_p(h, h, \dots, h) \quad \text{pour } h \text{ petit}$$

- ② $E := \mathbb{C}\{z\}, F := \mathbb{C}\{x\}, \Lambda$ continue est fortement analytique si pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}\{z\}$ tels que

$$\varphi(w)(z) \in \mathbb{C}\{w, z\}$$

on a aussi

$$\Lambda(\varphi(w))(x) \in \mathbb{C}\{w, x\}$$

Fonctions analytiques

Définition

E, F espaces localement convexes complexes et séparés,
 $\Lambda : E \rightarrow F$

- ① Λ est **analytique** en $f \in E$ s'il existe $F_p \in \mathcal{L}_p(E \rightarrow F)$, $p \in \mathbb{N}$

$$\Lambda(f+h) = \sum_{p=0}^{\infty} F_p(h, h, \dots, h) \quad \text{pour } h \text{ petit}$$

- ② $E := \mathbb{C}\{z\}$, $F := \mathbb{C}\{x\}$, Λ continue est **fortement analytique** si pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}\{z\}$ tels que

$$\varphi(w)(z) \in \mathbb{C}\{w, z\}$$

on a aussi

$$\Lambda(\varphi(w))(x) \in \mathbb{C}\{w, x\}$$

Fonctions analytiques

Définition

E, F espaces localement convexes complexes et séparés,
 $\Lambda : E \rightarrow F$

- ① Λ est **analytique** en $f \in E$ s'il existe $F_p \in \mathcal{L}_p(E \rightarrow F)$, $p \in \mathbb{N}$

$$\Lambda(f+h) = \sum_{p=0}^{\infty} F_p(h, h, \dots, h) \quad \text{pour } h \text{ petit}$$

- ② $E := \mathbb{C}\{z\}$, $F := \mathbb{C}\{x\}$, Λ continue est **fortement analytique** si pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}\{z\}$ tels que

$$\varphi(\mathbf{w})(z) \in \mathbb{C}\{w, z\}$$

on a aussi

$$\Lambda(\varphi(\mathbf{w}))(x) \in \mathbb{C}\{w, x\}$$

Proposition

Si la topologie de $\mathbb{C}\{z\}$ est plus fine que la topologie projective,

Λ fortement analytique $\implies \Lambda$ analytique

Ensembles (sous-)analytiques

Définition

Un fermé $\Omega \subset E$ est un **ensemble analytique** si au voisinage de chaque point $f \in \Omega$ on peut trouver $\Lambda : (E, f) \rightarrow F$ analytique avec

$$\Omega = \Lambda^{-1}(0)$$

Définition

La projection d'un ensemble analytique est un ensemble sous-analytique

Ensembles (sous-)analytiques

Définition

Un fermé $\Omega \subset E$ est un **ensemble analytique** si au voisinage de chaque point $f \in \Omega$ on peut trouver $\Lambda : (E, f) \rightarrow F$ analytique avec

$$\Omega = \Lambda^{-1}(0)$$

Définition

La projection d'un ensemble analytique est un **ensemble sous-analytique**

Objets locaux

Exemple

$\Omega := \{X \text{ glocal}\}$ est sous-analytique :

$$X \text{ glocal} \iff (\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0), P \in \mathbb{C}[z, y]^k) P(z, \psi^* X(z)) = 0$$

$$\Lambda : \mathbb{C}\{z\}^m \times \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0) \times \mathbb{C}[z, y]^m \longrightarrow \mathbb{C}\{z\}^m$$

$$(X, \psi, P) \longmapsto P(z, \psi^* X(z))$$

$$\Omega = \Pi_1(\Lambda^{-1}(0))$$

Objets locaux

Exemple

$\Omega := \{X \text{ glocal}\}$ est sous-analytique :

$$X \text{ glocal} \iff (\exists \psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0), P \in \mathbb{C}[z, y]^k) P(z, \psi^* X(z)) = 0$$

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{C}\{z\}^m \times \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0) \times \mathbb{C}[z, y]^m &\longrightarrow \mathbb{C}\{z\}^m \\ (X, \psi, P) &\longmapsto P(z, \psi^* X(z)) \end{aligned}$$

$$\Omega = \Pi_1(\Lambda^{-1}(0))$$

Des topologies sur $\mathbb{C}\{z\}$

Définition

- ❶ Pour $f := \sum_n f_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$, $a := (a_n)_n \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}^m}$ on définit la a -norme

$$\|f\|_a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n |f_n|$$

- ❷ $\mathcal{A} := \{a : \limsup_{|n| \rightarrow \infty} a_n^{1/|n|} = 0\}$
- ❸ $A \subset \mathcal{A}$ définit la A -topologie (localement convexe et séparée)

$$\mathbb{C}\{z\}_A := (\mathbb{C}\{z\}, (\|\bullet\|_a)_{a \in A})$$

Des topologies sur $\mathbb{C}\{z\}$

Définition

- ❶ Pour $f := \sum_n f_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$, $a := (a_n)_n \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}^m}$ on définit la a -norme

$$\|f\|_a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n |f_n|$$

- ❷ $\mathcal{A} := \{a : \limsup_{|n| \rightarrow \infty} a_n^{1/|n|} = 0\}$
- ❸ $A \subset \mathcal{A}$ définit la A -topologie (localement convexe et séparée)

$$\mathbb{C}\{z\}_A := (\mathbb{C}\{z\}, (\|\bullet\|_a)_{a \in A})$$

Des topologies sur $\mathbb{C}\{z\}$

Définition

- ❶ Pour $f := \sum_n f_n z^n \in \mathbb{C}\{z\}$, $a := (a_n)_n \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}^m}$ on définit la a -norme

$$\|f\|_a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n |f_n|$$

- ❷ $\mathcal{A} := \{a : \limsup_{|n| \rightarrow \infty} a_n^{1/|n|} = 0\}$
- ❸ $A \subset \mathcal{A}$ définit la A -topologie (localement convexe et séparée)

$$\mathbb{C}\{z\}_A := (\mathbb{C}\{z\}, (\|\bullet\|_a)_{a \in A})$$

Lemme

La topologie factorielle

$$A := \left\{ \left(n!^{-1/k} \right)_n : k \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

est une bonne topologie ($\frac{\partial}{\partial z}$ et \circ analytiques)

Proposition

Au champ de vecteurs X de \mathbb{C}^m on associe son flot $\exp(tX)$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{z\}^m &\longrightarrow \mathbb{C}\{z, t\}^m \\ X &\longmapsto \exp(tX)(z) \end{aligned}$$

est fortement analytique pour la topologie factorielle

Lemme

La topologie factorielle

$$A := \left\{ \left(n!^{-1/k} \right)_n : k \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

est une bonne topologie ($\frac{\partial}{\partial z}$ et \circ analytiques)

Proposition

Au champ de vecteurs X de \mathbb{C}^m on associe son flot $\exp(tX)$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{z\}^m &\longrightarrow \mathbb{C}\{z, t\}^m \\ X &\longmapsto \exp(tX)(z) \end{aligned}$$

est fortement analytique pour la topologie factorielle

Lemme

La topologie factorielle

$$A := \left\{ \left(n!^{-1/k} \right)_n : k \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

est une bonne topologie ($\frac{\partial}{\partial z}$ et \circ analytiques)

Proposition

Au champ de vecteurs X de \mathbb{C}^m on associe son flot $\exp(tX)$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{z\}^m &\longrightarrow \mathbb{C}\{z, t\}^m \\ X &\longmapsto \exp(tX)(z) \end{aligned}$$

est fortement analytique pour la topologie factorielle

Espaces de Baire analytiques

Définition

- 1 Un ensemble $\Omega \subset E$ est **analytiquement maigre** s'il existe des $\Lambda_n : E \rightarrow F$ analytiques non nuls, $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n^{-1}(0)$$

- 2 E est un espace de Baire analytique si tout Ω analytiquement maigre est d'intérieur vide
- 3 Une propriété \mathcal{P} exprimée sur E est **générique** si $\{f \in E : \mathcal{P}(f) \text{ fausse}\}$ est analytiquement maigre

Espaces de Baire analytiques

Définition

- 1 Un ensemble $\Omega \subset E$ est **analytiquement maigre** s'il existe des $\Lambda_n : E \rightarrow F$ analytiques non nuls, $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n^{-1}(0)$$

- 2 E est un **espace de Baire analytique** si tout Ω analytiquement maigre est d'intérieur vide
- 3 Une propriété \mathcal{P} exprimée sur E est **générique** si $\{f \in E : \mathcal{P}(f) \text{ fausse}\}$ est analytiquement maigre

Espaces de Baire analytiques

Définition

- ① Un ensemble $\Omega \subset E$ est **analytiquement maigre** s'il existe des $\Lambda_n : E \rightarrow F$ analytiques non nuls, $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$\Omega \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n^{-1}(0)$$

- ② E est un **espace de Baire analytique** si tout Ω analytiquement maigre est d'intérieur vide
- ③ Une propriété \mathcal{P} exprimée sur E est **générique** si $\{f \in E : \mathcal{P}(f) \text{ fausse}\}$ est analytiquement maigre

Théorèmes principaux

Théorème

$\mathbb{C}\{z\}_A$ est un espace de Baire analytique pour tout $A \subset \mathcal{A}$

Théorème

$\Lambda : E \rightarrow F$ analytique, $V < E$ de dimension dénombrable. Alors $\Lambda(V)$ est analytiquement maigre

Théorèmes principaux

Théorème

$\mathbb{C}\{z\}_A$ est un espace de Baire analytique pour tout $A \subset \mathcal{A}$

Théorème

$\Lambda : E \rightarrow F$ analytique, $V < E$ de dimension dénombrable. Alors $\Lambda(V)$ est analytiquement maigre

Corollaires

Pour la topologie factorielle sur les espaces de germes les propriétés suivantes sont génériques :

- 1 $f \in \mathbb{C}\{x\}$ n'est solution d'aucune équation différentielle

$$y^{(n+1)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$$

où F est polynomiale / algébrique / élémentaire

- 2 $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle < \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0)$ est libre
- 3 Les équations différentielles de partie linéaire nulle

$$y' = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$$

n'ont pas de solution générale « explicite » (= liouvillienne)

Corollaires

Pour la topologie factorielle sur les espaces de germes les propriétés suivantes sont génériques :

- 1 $f \in \mathbb{C}\{x\}$ n'est solution d'aucune équation différentielle

$$y^{(n+1)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$$

où F est polynomiale / algébrique / élémentaire

- 2 $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle < \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0)$ est libre
- 3 Les équations différentielles de partie linéaire nulle

$$y' = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$$

n'ont pas de solution générale « explicite » (= liouvillienne)

Corollaires

Pour la topologie factorielle sur les espaces de germes les propriétés suivantes sont génériques :

- 1 $f \in \mathbb{C}\{x\}$ n'est solution d'aucune équation différentielle

$$y^{(n+1)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$$

où F est polynomiale / algébrique / élémentaire

- 2 $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle < \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0)$ est libre
- 3 Les équations différentielles de partie linéaire nulle

$$y' = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$$

n'ont pas de solution générale « explicite » (= liouvillienne)

Corollaires

Pour la topologie factorielle sur les espaces de germes les propriétés suivantes sont génériques :

- 1 $f \in \mathbb{C}\{x\}$ n'est solution d'aucune équation différentielle

$$y^{(n+1)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$$

où F est polynomiale / algébrique / élémentaire

- 2 $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle < \text{Diff}(\mathbb{C}^m, 0)$ est libre
- 3 Les équations différentielles de partie linéaire nulle

$$y' = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}$$

n'ont pas de solution générale « explicite » (= liouvillienne)

Existence de singularités non globale

1 L'application de Martinet-Ramis

$$\begin{aligned} \text{MR} : \text{NC}_1 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

est fortement analytique (donc analytique)

- 2 L'image $\text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$ est analytiquement maigre
- 3 $\mathbb{C}_{\neq 0} \times \mathbb{C}\{h\} \simeq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ espace de Baire analytique
 $\implies \text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \neq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$

Problème

Cette méthode n'a rien d'explicite!

Existence de singularités non globale

1 L'application de Martinet-Ramis

$$\begin{aligned} \text{MR} : \text{NC}_1 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

est fortement analytique (donc analytique)

- 2 L'image $\text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$ est analytiquement maigre
- 3 $\mathbb{C}_{\neq 0} \times \mathbb{C}\{h\} \simeq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ espace de Baire analytique
 $\implies \text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \neq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$

Problème

Cette méthode n'a rien d'explicite!

Existence de singularités non globale

1 L'application de Martinet-Ramis

$$\begin{aligned} \text{MR} : \text{NC}_1 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

est fortement analytique (donc analytique)

- 2 L'image $\text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$ est analytiquement maigre
- 3 $\mathbb{C}_{\neq 0} \times \mathbb{C}\{h\} \simeq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ espace de Baire analytique
 $\implies \text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \neq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$

Problème

Cette méthode n'a rien d'explicite!

Existence de singularités non globale

1 L'application de Martinet-Ramis

$$\begin{aligned} \text{MR} : \text{NC}_1 &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}) \\ X &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

est fortement analytique (donc analytique)

- 2 L'image $\text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$ est analytiquement maigre
- 3 $\mathbb{C}_{\neq 0} \times \mathbb{C}\{h\} \simeq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ espace de Baire analytique
 $\implies \text{MR}(\mathbb{C}[x, y]^2 \cap \text{NC}_1) \neq \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C})$

Problème

Cette méthode n'a rien d'explicite!

Synthèse de nœuds-cols

$$\hat{NC}_1 := \{X \in NC_1 \text{ de type convergent}\} = MR^{-1}(\text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \{\text{Id}\})$$

Théorème (R. Schäfke-L.T., 2010-2013)

- ① Il existe une application fortement analytique

$$S : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \hat{NC}_1$$

où

$$MR \circ S = \text{Id}$$

- ② Pour tout $\varphi^0 \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ calculable, $ST(\varphi^0)$ l'est aussi
- ③ Pour tout $X \in \hat{NC}_1$ calculable $MR(X)$ est encore calculable

Synthèse de nœuds-cols

$$\hat{NC}_1 := \{X \in NC_1 \text{ de type convergent}\} = MR^{-1}(\text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \{\text{Id}\})$$

Théorème (R. Schäfke-L.T., 2010-2013)

- ① Il existe une application fortement analytique

$$S : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \hat{NC}_1$$

où

$$MR \circ S = \text{Id}$$

- ② Pour tout $\varphi^0 \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ calculable, $ST(\varphi^0)$ l'est aussi
- ③ Pour tout $X \in \hat{NC}_1$ calculable $MR(X)$ est encore calculable

Synthèse de nœuds-cols

$$\hat{NC}_1 := \{X \in NC_1 \text{ de type convergent}\} = MR^{-1}(\text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \{\text{Id}\})$$

Théorème (R. Schäfke-L.T., 2010-2013)

- ① Il existe une application fortement analytique

$$S : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \longrightarrow \hat{NC}_1$$

où

$$MR \circ S = \text{Id}$$

- ② Pour tout $\varphi^0 \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ calculable, $ST(\varphi^0)$ l'est aussi
- ③ Pour tout $X \in \hat{NC}_1$ calculable $MR(X)$ est encore calculable

Conjecture

Soit X un champ de vecteurs polynomial sur \mathbb{C}^2 contenant une singularité résonante. Alors la surface de Riemann de $\text{MR}(X)$ a un bord discret

Cas plus dégénérés

- 1 X a une partie linéaire nilpotente : réduction de la singularité
- 2 Classification de Marín-Mattei par la monodromie π_X dans certains cas
 - 1 pas de nœud-col ni de «petits diviseurs» dans la réduction
 - 2 structure transverse rigide

Cas plus dégénérés

- 1 X a une partie linéaire nilpotente : réduction de la singularité
- 2 Classification de Marín-Mattei par la monodromie m_X dans certains cas
 - 1 pas de nœud-col ni de «petits diviseurs» dans la réduction
 - 2 structure transverse rigide

Cas plus dégénérés

- 1 X a une partie linéaire nilpotente : réduction de la singularité
- 2 Classification de Marín-Mattei par la monodromie \mathfrak{m}_X dans certains cas
 - 1 pas de nœud-col ni de «petits diviseurs» dans la réduction
 - 2 structure transverse rigide

Théorème

Pour que la construction de Marín-Mattei soit possible il suffit que la réduction de X ne contienne pas de nœud-col dont la séparatrice forte soit une composante du diviseur exceptionnel
(condition presque optimale)

Théorème

Pour que la construction de Marín-Mattei soit possible il suffit que la réduction de X ne contienne pas de nœud-col dont la séparatrice forte soit une composante du diviseur exceptionnel (condition presque optimale)

Holonomie forte

- 1 $\Delta_X := \exp(2i\pi X)$ holonomie forte d'un nœud-col X

$$\Delta_X(z) = z + \dots$$

- 2 Classification d'Écalle-Voronin des difféomorphismes tangents à l'identité (1981)

$$\begin{aligned} \text{EV} : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)_{\text{Id}} &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}, \infty) \\ \Delta &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

- 3 On a

$$\text{MR}(X) = \text{EV}(\Delta_X)$$

Holonomie forte

- ① $\Delta_X := \exp(2i\pi X)$ holonomie forte d'un nœud-col X

$$\Delta_X(z) = z + \dots$$

- ② Classification d'Écalle-Voronin des difféomorphismes tangents à l'identité (1981)

$$\begin{aligned} \text{EV} : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)_{\text{Id}} &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}, \infty) \\ \Delta &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

- ③ On a

$$\text{MR}(X) = \text{EV}(\Delta_X)$$

Holonomie forte

- ① $\Delta_X := \exp(2i\pi X)$ holonomie forte d'un nœud-col X

$$\Delta_X(z) = z + \dots$$

- ② Classification d'Écalle-Voronin des difféomorphismes tangents à l'identité (1981)

$$\begin{aligned} \text{EV} : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)_{\text{Id}} &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}, \infty) \\ \Delta &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

- ③ On a

$$\text{MR}(X) = \text{EV}(\Delta_X)$$

Holonomie forte

- ① $\Delta_X := \exp(2i\pi X)$ holonomie forte d'un nœud-col X

$$\Delta_X(z) = z + \dots$$

- ② Classification d'Écalle-Voronin des difféomorphismes tangents à l'identité (1981)

$$\begin{aligned} \text{EV} : \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)_{\text{Id}} &\longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \times \text{Diff}(\mathbb{C}, \infty) \\ \Delta &\longmapsto (\varphi^0, \varphi^\infty) \end{aligned}$$

- ③ On a

$$\text{MR}(X) = \text{EV}(\Delta_X)$$

Théorème (A. Epstein, 1993)

Si $\Delta \in \mathbb{C}(z) \cap \text{Diff}(\mathbb{C})_{\text{Id}}$ admet un ensemble de Julia non vide, $\text{EV}(\Delta)$ admet une frontière naturelle

Conséquence de la conjecture

Soit X un champ de vecteurs polynomial sur \mathbb{C}^2 contenant un nœud-col d'holonomie forte Δ_X localement conjuguée à $\Delta \in \mathbb{C}(z)$. Alors $\text{MR}(X) = (\text{Id}, \text{Id})$ et Δ est une homographie

Théorème (A. Epstein, 1993)

Si $\Delta \in \mathbb{C}(z) \cap \text{Diff}(\mathbb{C})_{\text{Id}}$ admet un ensemble de Julia non vide, $\text{EV}(\Delta)$ admet une frontière naturelle

Conséquence de la conjecture

Soit X un champ de vecteurs polynomial sur \mathbb{C}^2 contenant un nœud-col d'holonomie forte Δ_X localement conjuguée à $\Delta \in \mathbb{C}(z)$. Alors $\text{MR}(X) = (\text{Id}, \text{Id})$ et Δ est une homographie