



**HAL**  
open science

# Etude et construction de schémas de subdivision quasi-linéaires sur des maillages bi-réguliers

Yacine Boumzaid

► **To cite this version:**

Yacine Boumzaid. Etude et construction de schémas de subdivision quasi-linéaires sur des maillages bi-réguliers. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Bourgogne, 2012. Français. NNT : 2012DIJOS093 . tel-00905806

**HAL Id: tel-00905806**

**<https://theses.hal.science/tel-00905806>**

Submitted on 18 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

U N I V E R S I T É   D E   B O U R G O G N E

# Étude et construction de schémas de subdivision quasi-linéaires sur des maillages bi-réguliers

■ Yacine BOUMZAID



# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques  
UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

THÈSE présentée par  
**Yacine BOUMZAID**

pour obtenir le  
Grade de Docteur de  
l'Université de Bourgogne

Spécialité : **Informatique**

### Étude et construction de schémas de subdivision quasi-linéaires sur des maillages bi-réguliers

Soutenue le 20 décembre 2012 devant le Jury :

Loïc BARTHE	Rapporteur	Maître de Conférence de l'Université de Toulouse
Stefanie HAHMANN	Rapporteur	Professeur de l'Université de Grenoble INP
Géraldine MORIN	Examineur	Maître de Conférence à l'Université de Toulouse
Gudrun ALBRECHT	Examineur	Professeur de l'Université de Valenciennes
Marc NEVEU	Directeur	Professeur de l'Université de Bourgogne
Sandrine LANQUETIN	Co-Directrice	Maître de Conférence à l'Université de Bourgogne



# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants de thèse, M. Marc Neveu, Professeur de l'Université de Bourgogne et Mme Sandrine Lanquetin, Maître de Conférence de l'Université de Bourgogne, qui m'ont dirigé durant ce travail. Je leur suis reconnaissant pour leurs encouragements. Je voudrais également remercier M. Loïc Barthe, Maître de conférence de l'Université de Toulouse et Mme Stefanie Hahmann, Professeur de l'Université de Grenoble INP, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je souhaite adresser également mes remerciements à Mme. Gudrun Albrecht, Professeur de l'Université de Valenciennes, et Mme Géraldine Morin, Maître de Conférence de l'Université de Toulouse de m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail. J'adresse mes remerciements à toute l'équipe du laboratoire Le2i : les enseignants chercheurs, et mes collègues doctorants pour leur sympathie, leur accueil chaleureux pendant mes années de thèse et notamment à Thomas Delamé et à François Destelle.

J'aimerais adresser une profonde pensée pour mon père décédé. Merci aussi à ma mère, ma grand-mère et mes frères et sœurs pour leur amour, leur soutien sans faille et tout ce qu'ils ont pu m'apporter pour franchir les obstacles les plus difficiles.

Je remercie également la famille Ouarti, véritable seconde famille ici en France, pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Merci à tous mes amis pour leur amitié et notamment à Toufik Bakir, karim el Alaoui, Ali Boussayoud, Halim ouarti et Hassan "Cool+".



# SOMMAIRE

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>17</b>
1.1	Contexte général . . . . .	17
1.1.1	Approximation et interpolation . . . . .	17
1.1.2	Subdivision inverse . . . . .	19
1.2	Contexte et problématique . . . . .	20
1.2.1	Schémas approximants et schémas interpolants . . . . .	20
1.2.2	Schémas de subdivision sur maillages irréguliers . . . . .	22
1.2.3	Schémas de subdivision quad/triangle . . . . .	23
1.2.4	Subdivision quad/triangle inverse . . . . .	23
1.3	Contributions . . . . .	24
1.3.1	Subdivision quasi-linéaire . . . . .	24
1.3.2	Subdivision inverse . . . . .	25
1.4	Organisation du mémoire . . . . .	25
<b>I</b>	<b>Subdivision linéaire</b>	<b>29</b>
<b>2</b>	<b>Schémas de subdivision et reproduction des polynômes</b>	<b>31</b>
2.1	Schémas de subdivision . . . . .	31
2.1.1	Interprétation polynomiale . . . . .	33
2.2	La convergence d'un schéma de subdivision . . . . .	34
2.2.1	Convergence uniforme . . . . .	34
2.2.2	Condition de reproduction des constantes . . . . .	34
2.2.3	Conditions nécessaires et suffisantes . . . . .	35
2.2.3.1	Convergence du schéma interprétée comme la convergence d'une suite de fonctions . . . . .	35
2.2.3.2	Les fonctions de base $\phi$ . . . . .	36
2.3	Classe de continuité de la fonction limite . . . . .	37
2.3.1	Outils d'étude de la continuité $C^m$ . . . . .	38
2.3.1.1	L'opérateur aux différences d'ordre $m$ . . . . .	38

## 8 SOMMAIRE

2.3.1.2	Le schéma aux différences d'ordre $m$ . . . . .	38
2.3.1.3	Fonction hölderienne . . . . .	39
2.3.1.4	Le rayon spectral . . . . .	39
2.3.1.5	Le rayon spectral conjoint . . . . .	40
2.3.2	Continuité $C^m$ . . . . .	40
2.3.2.1	Continuité $C^m, m < 1$ . . . . .	40
2.3.2.2	Continuité $C^m, m > 1$ . . . . .	43
2.4	Théories de la reproduction des polynômes . . . . .	43
2.4.1	Génération des polynômes . . . . .	44
2.4.2	La reproduction des polynômes . . . . .	45
2.4.2.1	Reproduction exacte . . . . .	45
2.4.2.2	Reproduction simple . . . . .	47
2.4.3	Reproduction des polynômes et continuité $C^m$ . . . . .	48
2.4.4	Reproduction des polynômes et ordre d'approximation . . . . .	49
2.5	Conclusion . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Quasi-interpolation et reproduction des polynômes</b> . . . . .	<b>51</b>
3.1	Reproduction et quasi-interpolation . . . . .	52
3.2	Equation de la fonction limite d'un schéma de subdivision . . . . .	53
3.3	Construction des schémas de subdivision convergents . . . . .	59
3.4	Quasi-interpolant discret . . . . .	61
3.4.1	Estimations d'erreurs et ordre d'approximation . . . . .	63
3.5	Différents schémas de subdivision linéaires . . . . .	63
3.5.1	Schémas approximants . . . . .	64
3.5.2	Schémas interpolants . . . . .	67
3.5.3	Schémas approximants inspirés des schémas interpolants . . . . .	70
3.6	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Généralisation des schémas de subdivision à des maillages irréguliers</b> . . . . .	<b>73</b>
4.1	Notions de maillage . . . . .	73
4.1.1	Géométrie et topologie . . . . .	74
4.1.2	Connectivité et maillage régulier . . . . .	74
4.1.3	Maillage non-régulier . . . . .	74
4.1.3.1	Maillage semi-régulier . . . . .	75
4.1.3.2	Maillage bi-régulier (quad/triangle) . . . . .	75
4.2	Différents schémas de subdivision . . . . .	76

4.2.1	Schéma de Catmull-Clark . . . . .	77
4.2.2	Schéma de Doo-Sabin . . . . .	77
4.2.3	Schéma de Kobbelt . . . . .	78
4.2.4	Schéma de Loop . . . . .	79
4.2.5	Schéma Butterfly et schéma Butterfly modifié . . . . .	79
4.3	Amélioration des schémas de subdivision aux voisinages des points irréguliers . . . . .	81
4.4	Subdivision quad/triangle . . . . .	82
4.4.1	Schéma quad/triangle approximant/approximant . . . . .	82
4.4.1.1	Schéma de Stam-Loop . . . . .	82
4.4.1.2	Schéma de Levin-Levin . . . . .	83
4.4.1.3	Schéma de Schaefer-Warren . . . . .	84
4.4.2	Schéma quad/triangle interpolant/interpolant . . . . .	84
4.4.2.1	Schéma de Q. Jiang et al . . . . .	84
4.5	Conclusion . . . . .	85
<b>II Subdivision Quasi-linéaire</b>		<b>87</b>
<b>5 Schémas de Subdivision Quasi-linéaire sur un maillage bi-régulier</b>		<b>89</b>
5.1	Introduction . . . . .	89
5.2	Définitions . . . . .	89
5.2.1	Subdivision linéaire sur une grille régulière . . . . .	90
5.2.2	Fonction limite sur une grille régulière . . . . .	91
5.3	Schémas de subdivision quasi-linéaire . . . . .	93
5.3.1	Définitions . . . . .	93
5.3.1.1	Grilles bi-régulières . . . . .	93
5.3.1.2	Schéma quasi-linéaire . . . . .	95
5.3.2	La convergence uniforme . . . . .	95
5.3.3	Fonctions limites et reproduction des polynômes . . . . .	96
5.3.4	Quasi-interpolation et ordre d'approximation . . . . .	101
5.4	Construction des schémas de subdivision quasi-linéaires . . . . .	105
5.4.1	Repérage des nouveaux points dans la zone de raccord (mixte) . . . . .	106
5.4.2	Calcul des nouveaux points . . . . .	108
5.4.3	Le choix du support $\Lambda$ . . . . .	110
5.5	Continuité $C^m$ . . . . .	112

5.5.1	Conditions nécessaires . . . . .	112
5.5.2	Conditions suffisantes . . . . .	112
5.6	Exemples : schémas quasi-linéaires . . . . .	114
5.6.1	Premier exemple . . . . .	114
5.6.1.1	Construction . . . . .	114
5.6.1.2	Continuité . . . . .	118
5.6.1.3	Ordre d'approximation . . . . .	120
5.6.1.4	Résultats . . . . .	122
5.6.2	Deuxième exemple . . . . .	123
5.6.2.1	Construction . . . . .	126
5.6.2.2	Continuité . . . . .	132
5.6.3	Troisième exemple . . . . .	133
5.6.3.1	Construction . . . . .	133
5.6.3.2	Résultats . . . . .	138
5.6.4	Quatrième exemple . . . . .	141
5.6.4.1	Construction . . . . .	141
5.6.4.2	Continuité et résultats . . . . .	147
5.7	Conclusion . . . . .	148
<b>6</b>	<b>Subdivision quasi-linéaire sur un maillage <math>n</math>-régulier</b>	<b>151</b>
6.1	Définition . . . . .	151
6.1.1	Grilles 4-régulières . . . . .	152
6.1.2	Grille 6-régulière . . . . .	153
6.2	Schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille $n$ -régulière ( $n = 4, 6$ ) . . . . .	154
6.2.1	Schémas quasi-linéaires sur une grille 4-régulière . . . . .	154
6.2.2	Schémas quasi-linéaires sur une grille 6-régulière . . . . .	156
6.2.3	Les fonctions limites et la reproduction de polynômes . . . . .	159
6.2.4	Quasi-interpolation et ordre d'approximation . . . . .	161
6.3	Construction . . . . .	162
6.3.1	Schémas quasi-linéaires sur une grille 4-régulière . . . . .	162
6.3.2	Schémas quasi-linéaires sur une grille 6-régulière . . . . .	167
6.4	Continuité $C^m$ . . . . .	177
6.4.1	Conditions nécessaires . . . . .	177
6.4.2	Conditions suffisantes . . . . .	178
6.5	Schémas de subdivision quasi-linéaires sur une grille $n$ -régulière ( $n \neq 4, 6$ ) . . . . .	180

6.5.1	Schémas de subdivision quasi-linéaires sur une grille $n$ -régulier quad	181
6.6	Résultats	184
6.7	Continuité autour d'un point central irrégulier	186
6.8	Conclusion	186
<b>III</b>	<b>Subdivision inverse</b>	<b>189</b>
<b>7</b>	<b>Subdivision inverse quad/triangle (mixte)</b>	<b>191</b>
7.1	Introduction	191
7.2	Subdivision inverse : état de l'art	192
7.3	Définitions et principe général	192
7.4	Schéma inverse de Catmull-Clark	193
7.4.1	Schéma de Catmull-Clark inverse sur un maillage quelconque	194
7.4.2	Schéma de Catmull-Clark sur un maillage quadrangulaire	195
7.5	Schéma de subdivision quad moyennage inverse	198
7.6	Subdivision inverse et théories de la reproduction des polynômes	200
7.6.1	Subdivision linéaire inverse	200
7.6.2	Quasi-Interpolation et subdivision inverse	202
7.6.3	Subdivision inverse sur une grille régulière	205
7.7	Subdivision quad/triangle inverse	210
7.7.1	Formules des schémas quad/triangle inverses	212
7.8	Conclusion	220
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>223</b>
8.1	Résumé et contributions	223
8.1.1	Subdivision	223
8.1.2	Subdivision inverse	224
8.2	Tendances et perspectives	224



# NOTATIONS

Dans cette thèse :

- Un schéma de subdivision est dit "linéaire" s'il est : uniforme, stationnaire et défini sur un maillage régulier. Le principe de subdivision est dit uniforme si les mêmes règles sont appliquées sur tout le réseau de contrôle. De plus, si les règles sont identiques à chaque itération, on parle de principe stationnaire.
- Un schéma de subdivision "quasi-linéaire" est un schéma qui unifie deux schémas linéaires de type géométriques différents dont l'un est approximant et l'autre est interpolant.
- Un maillage "bi-régulier" est un maillage homéomorphe à une grille bi-régulière.
- Une grille régulière dans les deux moitiés d'un plan est appelée grille "bi-régulière". Lorsque tous les éléments de la grille bi-régulière sont des triangles (resp. quadrilatères), on parle de grille "triangle/triangle" (resp. "quad/quad") et lorsque nous avons les deux types d'éléments on parle de grille "mixte" ("quad/triangle").

## NOTATIONS GÉNÉRALES

$k$	Étape ou niveau de subdivision
$i$	Indice
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	Ensemble des entiers positifs et non nuls : $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	Ensemble des entiers négatifs et non nuls : $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -2, -1\}$
$\mathbb{Z}_0^+$	Ensemble des entiers positifs et nuls : $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}_0^-$	Ensemble des entiers négatifs et nuls : $\mathbb{Z}_0^- = \{\dots, -2, -1, 0\}$
$l(.)$	Espace des suites
$l^\infty(.)$	Espace des suites bornées
$l^1(.)$	Espace des suites à support fini
$D$	Domaine ouvert et borné

$X^k$	Grille de pas $2^{-k}$ : $X^k = \{x_i^k = 2^{-k}i, i \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}^s\}$
$A_\alpha$	Matrice inversible $A_\alpha \in \mathbb{R}^{s \times s}$
$X_{A_\alpha}$	Grille définie en fonction d'une matrice $A_\alpha$ , $X_{A_\alpha} = A_\alpha \mathbb{Z}^s$
$X_{(A_\alpha, A_\beta)}$	Grille bi-régulière : $X_{(A_\alpha, A_\beta)} = A_\alpha(\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}^{s-1}) \cup A_\beta(\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}^{s-1})$
$\xi_i$	Domaine fermé borné d'une grille quadrangulaire
$\partial\xi_i$	Frontière du domaine $\xi_i$
$\Gamma_i$	Zone d'une grille quadrangulaire
$\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)$	Grille 4-régulière : $\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i) = \bigcup_{i=1}^4(\xi_i \cup \partial\xi_i)$
$\xi'_i$	Domaine fermé borné d'une grille triangulaire
$\partial\xi'_i$	Frontière du domaine $\xi'_i$
$\Gamma'_i$	Zone d'une grille triangulaire
$\bigcup_{i=1}^6(\Gamma'_i)$	Grille 6-régulière : $\bigcup_{i=1}^6(\Gamma'_i) = \bigcup_{i=1}^6(\xi'_i \cup \partial\xi'_i)$
$C_i^j$ ou $\binom{i}{j}$	Combinaison : $\frac{i!}{(i-j)!j!}$
$[x]$	Partie entière de $x$
$a * b$	Produit de convolution
$a \otimes b$	Produit tensoriel
$C^\alpha = C^\alpha(\mathbb{R}^s)$	Espace de Hölder

## NOTATIONS SCHÉMAS DE SUBDIVISION

$S$	Schéma ou opérateur de subdivision
$S _{A_\alpha}$	Schéma de subdivision sur une grille régulière $X_{A_\alpha}$
$S _{(A_\alpha, A_\beta)}$	Schéma de subdivision sur une grille bi-régulière $X_{(A_\alpha, A_\beta)}$
$S _{\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)}$	Schéma de subdivision sur une grille 4-régulière
$S _{\bigcup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}$	Schéma de subdivision sur une grille 6-régulière
$p^0$ ou $p$	Points de contrôle initiaux
$p^k$ ou $(S^k p)$ ou $(S p^{k-1})$	Points de contrôle à l'étape $k$

$S^\infty p$	Fonction limite de $(S^k p)$ quand $p \rightarrow \infty$
$S^\infty$	Opérateur de subdivision limite de $S$
$Q$	Opérateur quasi-interpolant
$Q^*$	Opérateur quasi-interpolant discret
$T$	opérateur de subdivision inverse
$\delta_{i,0}$	Symbôle de Kronecker ( $\delta_{0,0} = 1, \delta_{i,0} = 0$ pour $i \neq 0$ )
$\phi$	Fonction de base (échelle) d'un schéma de subdivision Fonction limite d'un schéma de subdivision associée aux aux données initiales $p = \delta_{i,0}$
$\phi_m$	Fonction B-spline de base de degré $m$
$d^m p$	Opérateur aux différences d'ordre $m$
$S_m$	Schéma aux différences d'ordre $m$ associé au schéma $S$
$\rho(S)$	Rayon spectral du schéma de subdivision $S$
$\rho(A_\alpha, A_\beta)$	Rayon spectral conjoint des deux matrices associées à $S$
$M^k$	Maillage à l'étape $k : M^k = (F^k, p^k)$
$F^k$	Faces du maillage $M^k$
$a$	Masque de subdivision
$supp(a)$	Support $a \in l^1(\mathbb{Z}^s)$
$\mathcal{M}$	Matrice de subdivision
$\mathcal{M}^1$ et $\mathcal{M}^2$	Les deux matrices de passage entre deux étapes

## DIVERS

Soient  $i = (i_1, i_2, \dots, i_s) \in \mathbb{Z}^s, k \in \mathbb{Z}^s$  et  $x \in \mathbb{R}^s$ ,

$$|i| = |i_1| + |i_2| + \dots + |i_s| \Leftrightarrow x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s}.$$

Soient  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^s, z \in \mathbb{R}^s$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} X + Y &= \{x + y | x \in X, y \in Y\}, \\ X + z &= \{x + z | x \in X\}, \\ \theta X &= \{\theta x | x \in X\}. \end{aligned}$$

On définit  $C^m(\mathbb{R}^s)$  comme l'espace des fonctions de classe  $C^m$  de  $\mathbb{R}^s$  vers  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\pi_m$  l'espace des polynômes de degré total au plus égal à  $m$ . On suppose que  $\pi_m$  est engendré par la famille des monômes. i.e :

$$\pi_m(X) = span\{f | f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^i, i \in \mathbb{Z}^s, 0 \leq |i| \leq m\}.$$

$Id : X \subset \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$  est l'opérateur d'identité défini par :

$$Id(x) = x, \forall x \in X$$

Pour  $i \geq 0$  et pour  $x \in \mathbb{R}^s$ , les dérivées partielles sont données par :

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_s} x_s}.$$

Considérons que  $\nabla$  est le vecteur des dérivées partielles :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right),$$

et définissons  $\Delta$  comme le produit scalaire avec lui-même du vecteur des dérivées partielles :

$$\Delta = \nabla(\nabla^t) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_s}.$$

Pour  $X \subseteq \mathbb{R}^s$ , nous définissons  $l(X)$  comme l'espaces des suites à valeurs réelles :

$$l(X) = \{f | f : X \rightarrow \mathbb{R}\},$$

Soit  $l^\infty(X)$  l'espace des suites bornées que l'on munit de la norme correspondante :

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

et soit  $l^1(X)$  l'espace des suites bornées à support fini.

Pour tout  $p \in l(\mathbb{Z}^s)$ ,  $p_i$  (resp.  $(Sp)_i$ ) représente une valeur de  $p$  (resp.  $(Sp)$ ) pour  $i \in \mathbb{Z}^s$ , où  $S$  est l'opérateur de subdivision.

Soit  $\sigma$  un opérateur de dilatation défini sur l'ensemble  $C(\mathbb{R}^s)$  par :

$$\sigma f(\cdot) = f\left(\frac{\cdot}{2}\right).$$

Soit  $\sigma^{-1}$  l'opérateur inverse de l'opérateur de dilatation  $\sigma$  défini par :

$$\sigma^{-1} f(\cdot) = f(2\cdot)$$

Nous définissons un opérateur de translation  $\xi$  de sorte qu'il renvoie tous les points  $(i, j)$  d'un ensemble vers les points  $(i, j + 1)$  dans le même ensemble par :

$$\xi X \equiv \{(i, j + 1) | (i, j) \in X\},$$

Toute au long de ce document, nous utilisons la norme du maximum suivante :

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i \in \mathbb{N}\}.$$

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## 1.1/ CONTEXTE GÉNÉRAL

Les outils de modélisation 3D sont essentiels pour de nombreuses applications telles que l'animation, la géoscience, la médecine ou l'architecture. Néanmoins, l'utilisation de gros modèles peut devenir compliquée lorsque l'utilisateur fait face aux problèmes de stockage ou de transmission. C'est pourquoi les schémas de subdivision et les schémas de subdivision inverses sont largement utilisés ; soit pour lisser des objets 3D pour les uns, soit pour minimiser le coût d'encodage de l'information pour les autres.

### 1.1.1/ APPROXIMATION ET INTERPOLATION

Les problèmes d'interpolation et d'approximation représentent un vaste sujet qui s'étend de l'ajustement de mesures à la conception d'images de synthèse, en passant par la création de polices de caractères. Au XVIIIème siècle, Lagrange s'est intéressé au problème d'interpolation. À cette époque, l'interpolation et l'approximation servaient surtout à relier ou approcher des mesures. Cependant, il faudra attendre jusqu'au XXème siècle, avec l'arrivée des machines à commandes numériques, pour que les chercheurs et les dessinateurs s'intéressent de près aux courbes et surfaces approximantes et interpolantes afin de dessiner les pièces pour pouvoir les produire. Puis, les courbes et les surfaces approximantes et interpolantes ont vu leurs domaines s'étendre avec l'apparition de l'informatique et l'introduction des schémas de subdivision.

Les schémas de subdivision interpolants sont généralement utilisés lorsqu'on veut faire passer la courbe ou la surface limite par les points de contrôle initiaux. L'avantage d'un schéma de subdivision interpolant est donc de pouvoir aisément contraindre la forme à passer par certains points donnés même si parfois des renflements imprévus peuvent apparaître sur la surface limite générée par ce type de schémas de subdivision. Le choix se porte cependant sur l'utilisation des schémas approximants lorsqu'on veut obtenir une courbe ou une surface limite de continuité maximale même si on a moins de contrôle sur la courbe ou la surface limite, dans le sens où nous ne pouvons pas contraindre la surface limite à passer par des points bien choisis. Dans ces approches, toute combinaison de portions de surfaces interpolées et de portions de surfaces approchées peut être désirée.

En ingénierie inverse, les points de données sur les surfaces viennent souvent de mesures par capteurs (par exemple scanner laser 3D). Il peut être utile d'utiliser des schémas interpolants pour ajuster les données 3D obtenues avec suffisamment de précision et de confiance et seulement des schémas approximants pour les données bruitées par

exemple. En CAO, des contraintes peuvent être imposées à certaines parties des objets. Ces contraintes peuvent avoir une tolérance variable allant de 0 pour des contraintes d'interpolation, à  $\epsilon$  pour des inexactitudes géométriques tolérées sur des positions relatives ou sur des caractéristiques d'objets conduisant alors à des contraintes d'approximation.

Parallèlement la qualité visuelle d'une surface de subdivision dépend fortement du maillage initial. Les régions composées de triangles sont souvent utilisées pour récupérer des maillages obtenus par des procédés d'acquisition divers (lasers notamment) ou pour bénéficier des propriétés géométriques des triangles. À l'inverse, que ce soit pour des raisons de symétrie (en particulier pour les personnages en production audiovisuelle, ou pour des raisons de préservation d'orientations "naturelles" pour des surfaces de CAO), certains designers préfèrent utiliser des régions composées de carreaux quadrilatéraux. Il est donc parfois très utile de considérer des surfaces avec une structure de maillage initial mixte (ou quad/triangle).

Le cadre de la première partie de cette thèse concerne la modélisation des formes et des objets à partir de maillages bi-réguliers ou  $n$ -réguliers avec des conditions de contraintes mixtes (Approximant/interpolant)(voir figure 1.1).

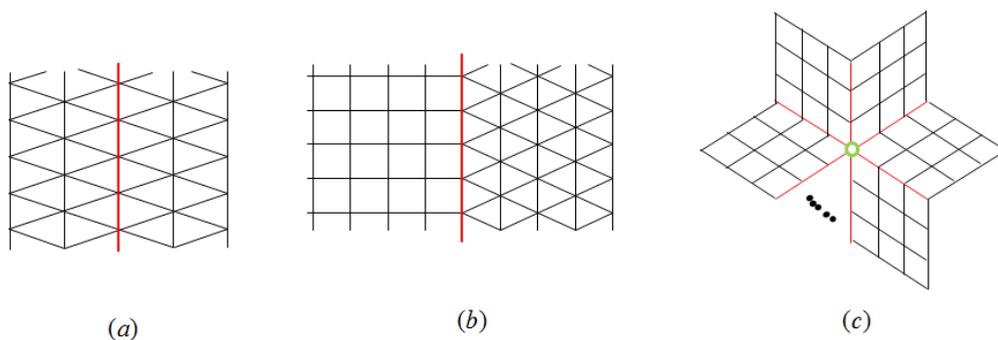


FIGURE 1.1 – Quelques exemples de grilles associées à des maillages bi-réguliers et  $n$ -réguliers. (a)-grille bi régulière triangle/triangle, (b)- grille bi-régulière quad/triangle, (c)- grille  $n$ -régulière quad

L'objectif est d'introduire des schémas de subdivision qui unifient deux schémas linéaires de types géométriques différents, à savoir un schéma interpolant et un schéma approximant sur des zones différentes du même maillage. L'application de deux schémas de subdivision de types géométriques différents sur le même réseau de contrôle se ramène à un problème de raccord entre les deux schémas. Les frontières communes entre les zones d'application d'un schéma de subdivision approximant et un schéma de subdivision interpolant sont appelés les zones de raccord et le nombre de ces zones varie en fonction de la valence d'un sommet intérieur et du nombre de zones d'application des deux schémas approximant et interpolant (voir figure 1.2). Ce qui nous donne la possibilité de définir ces schémas de subdivision de plusieurs façons sur une grille et donc de construire des formes et des objets différents à partir d'un seul maillage.

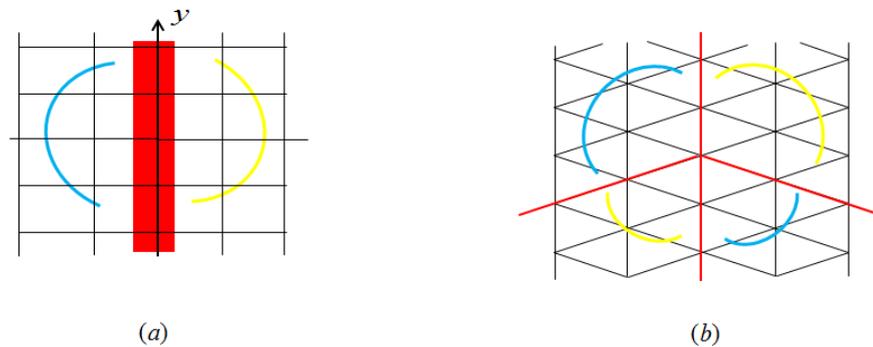


FIGURE 1.2 – Quelques exemples de zone d'application de deux schémas approximant et interpolant ainsi que les zones de raccord. Les arcs bleus clairs pour les zones d'application d'un schéma interpolant, les arcs jaunes pour les zones d'application d'un schéma approximant, les droites rouges pour les frontières communes et le rectangle rouge pour la zone de raccord.

### 1.1.2/ SUBDIVISION INVERSE

L'utilisation de modèles 3D complexes peut poser un problème quand l'utilisateur doit faire face aux problèmes de stockage et de transmission. Il peut donc être intéressant, inversement aux principes de subdivision, de passer d'un maillage fin à un maillage de plus en plus grossier, minimisant ainsi le coût d'encodage de l'information de connectivité. La subdivision inverse nous permet de reconstruire exactement un maillage grossier du niveau précédent à partir d'un maillage fin issu de subdivision. Après chaque étape de subdivision inverse, on conserve les éléments (faces, arêtes, sommets) et on recrée le maillage du niveau précédent.

La problématique liée à la subdivision inverse dans cette thèse est de reconstruire un maillage quad/triangle grossier à partir d'un maillage plus fin issu d'une subdivision quad/triangle de Levin-Levin [Levin 2003b] et de Schaefer-Warren [Schaefer 2005] (voir figure 1.3).

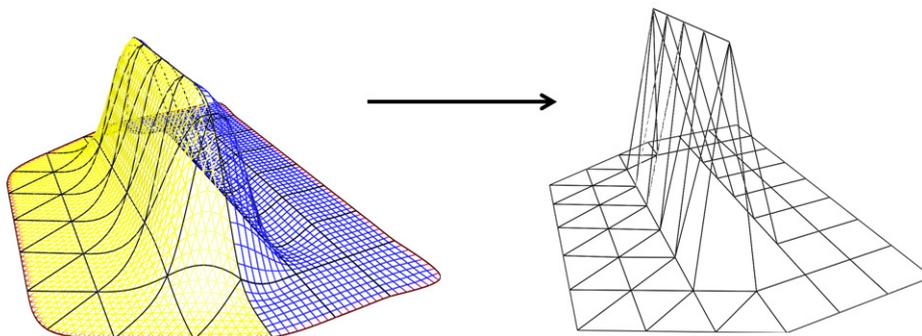


FIGURE 1.3 – Subdivision quad/triangle inverse

Les schémas quad/triangle de Levin-Levin et de Schaefer-Warren sont deux schémas qui combinent les règles du principe de Catmull-Clark [Catmull 1978] et celles de Loop

[Loop 1987] sur une grille quad/triangle (figure 1.1-(b)). La reconstruction d'un maillage grossier à partir d'un maillage quad/triangle fin issu de l'application d'un de ces deux schémas nécessite l'application de trois schémas de subdivision inverse différents. Le schéma inverse de Loop sur la zone triangulaire de la grille, le schéma inverse de Catmul-Clark sur la zone quadriangulaire de la grille ainsi qu'un schéma inverse intermédiaire dans la zone qui contient des quads et des triangles en même temps.

## 1.2/ CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

Dans le domaine de la CAO et des mathématiques, les surfaces de subdivision représentent une façon de créer des surfaces lisses développant de plus en plus un maillage linéaire par morceaux. La surface lisse finale peut être calculée comme étant la limite du procédé itératif de subdivision de chaque face polygonale en un sous-ensemble de faces approchant au mieux la surface lisse finale. Les procédés de subdivision sont par nature des algorithmes récursifs. La méthode débute à partir d'un maillage donné. Un schéma de subdivision ( $p \in I^\infty(\mathbb{Z}^s) \mapsto (Sp) \in I^\infty(\mathbb{Z}^s)$ ) est alors appliqué à ce maillage. Ce procédé agit sur le maillage en le subdivisant, en créant de nouveaux points et de nouvelles faces. La position des nouveaux points est calculée à partir de celle des anciens points qui sont les plus proches. L'itération ( $p^{k+1} = S^k p$ ), représente un algorithme de raffinement, qui permet de définir une courbe ou une surface à partir des points de contrôle initiaux. Initialement, la notion de schéma de subdivision a été introduite par [Chaikin 1974] pour accélérer la construction de courbes splines. La courbe obtenue est alors définie aux points dyadiques.

Diverses propriétés mathématiques comme la convergence, la classe de continuité, l'ordre d'approximation, la reproduction des polynômes et la quasi-interpolation sont intéressantes à étudier :

- La convergence implique l'existence d'une fonction de base  $\phi = S^\infty \delta_{i,0}$  définie comme la fonction limite du schéma appliqué aux points initiaux  $(\delta_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}}$ . Pour les schémas linéaires, l'étude des propriétés se ramène à l'étude de la fonction de base  $\phi$ . Ainsi, diverses techniques ont été développées pour analyser la convergence et la classe de continuité d'un schéma de subdivision.
- L'ordre d'approximation, permet de contrôler les erreurs pour des points initiaux provenant de l'échantillonnage d'une fonction.
- La reproduction des polynômes de degré donné est une condition importante liée à la classe de continuité et à l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision.
- La quasi-interpolation ou les théories de l'approximation est une condition très importante liée à la reproduction des polynômes et à l'ordre d'approximation.

### 1.2.1/ SCHÉMAS APPROXIMANTS ET SCHÉMAS INTERPOLANTS

Les schémas de subdivision peuvent être classés en deux catégories : les schémas interpolants et les schémas approximants. Pour les schémas interpolants, les valeurs  $p_{2i}^{k+1}$  vérifient  $p_{2i}^{k+1} = p_i^k$ . On est alors amené pour construire  $p_{2i}^{k+1}$  à un problème d'interpolation. La reproduction des polynômes conduit à favoriser une interpolation polynomiale, en général de Lagrange. Pour les schémas approximants, les premiers ont été définis à partir des coefficients d'une relation de raffinement vérifiée par les fonctions B-splines

uniformes de base. La fonction limite  $\phi$  est alors la fonction B-spline correspondante. Connaissant ses propriétés, on peut en déduire les propriétés des schémas B-splines.

Chaque catégorie de ces schémas a ses avantages et ses inconvénients : les schémas approximatifs ont une courbe (surface) limite de continuité optimale pour le nombre de coefficients qui interviennent mais un mauvais ordre d'approximation, tandis que les schémas interpolants présentent un ordre d'approximation maximal mais une mauvaise continuité de la surface limite (voir figure 1.4).

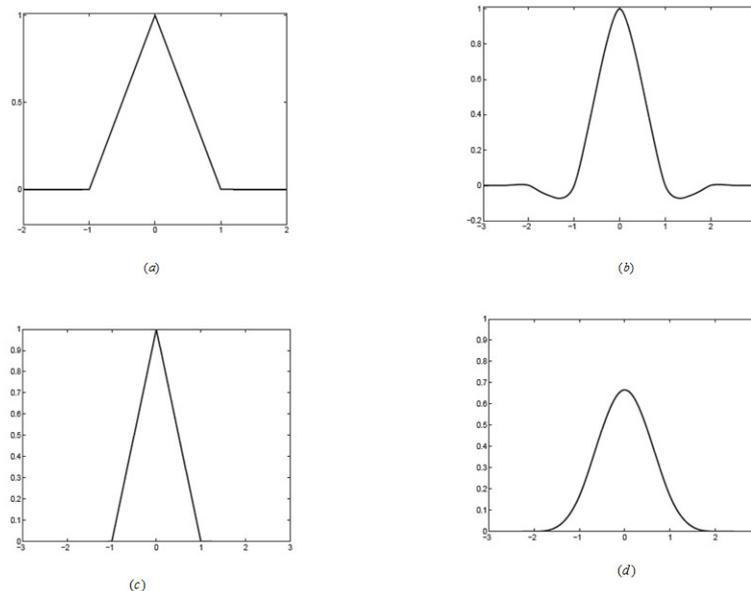


FIGURE 1.4 – En haut, le schéma interpolant 4 points avec un bon ordre d'approximation mais une mauvaise continuité de la courbe limite. En bas, le schéma approximatif B-spline cubique avec une bonne continuité de la courbe limite mais un mauvais ordre d'approximation

Afin d'améliorer la continuité de la courbe limite des schémas de subdivision interpolants, des schémas hybrides ont été construits [DFH05, CLY06]. Une première idée due à N. Dyn et al. [DFH05] est de mixer le schéma 4 points avec un schéma B-spline quadratique pour améliorer la continuité de la courbe limite. On obtient un schéma de subdivision appelé schéma 4 points approximatif de continuité  $C^2$  et d'ordre d'approximation optimal 3 (voir figure 1.5). Autrement dit, on gagne au niveau de la continuité de la courbe limite par rapport au schéma 4 points interpolant mais on perd au niveau de l'ordre d'approximation.

À notre connaissance il n'existe que des schémas qui visent à améliorer la continuité de la courbe limite d'un schéma de subdivision au détriment de l'ordre d'approximation.

Nous nous intéressons à un problème différent, au lieu de mixer les règles d'un schéma approximatif et un schéma interpolant, nous les combinons afin de construire des schémas de subdivision d'une continuité maximale dans certaines régions et d'ordre d'approximation maximal dans d'autres régions.

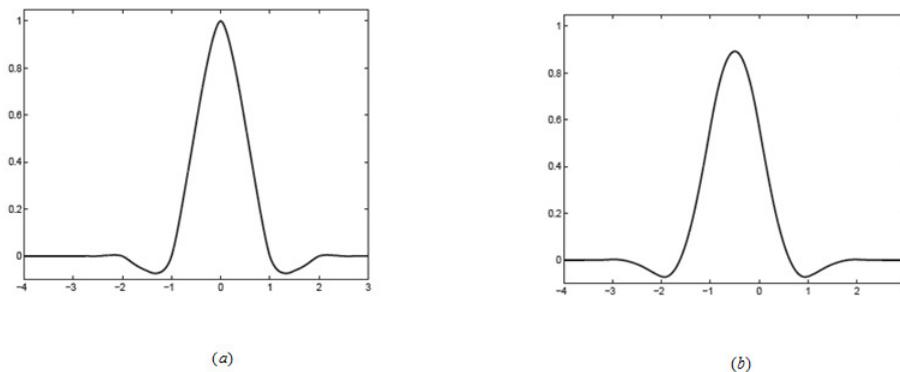


FIGURE 1.5 – À gauche la courbe limite générée par l'application du schéma interpolant 4 points pour  $p = (\delta_{i,0})_i$  ([Dyn 1987]). À droite la courbe limite générée par l'application du schéma approximant 4 points pour  $p = (\delta_{i,0})_i$  ([Dyn 2005]).

C'est dans cette dernière problématique que se place la première partie de nos travaux : Peut-on créer des schémas de subdivision qui combinent un schéma approximant et un schéma interpolant sur un réseau de contrôle ? Quelles contraintes peut-on raisonnablement imposer si on raccorde deux schémas de subdivision de types géométriques différents ?

### 1.2.2/ SCHÉMAS DE SUBDIVISION SUR MAILLAGES IRRÉGULIERS

Les propriétés mathématiques (convergence, continuité) d'une surface de subdivision à la limite sont simplement observables dans les zones régulières. Les problèmes surviennent aux alentours des sommets dits extraordinaires. En effet, dans les zones où le maillage est irrégulier, les règles de subdivision ne permettent pas de trouver l'équation reproduite par le schéma de subdivision. Il faut donc proposer des règles qui permettent d'optimiser le comportement de la surface limite dans le cas irrégulier.

Les schémas B-spline bi-cubique et B-spline bi-quadratique ont été adaptés pour être appliqués à des maillages irréguliers grâce aux travaux de Catmull et Clark [Catmull 1978] et Doo et Sabin [Doo 1978]. Un peu plus tard, Loop [Loo87] a utilisé l'analyse propre afin de généraliser les règles de subdivision du schéma Box-spline triangulaire quartique aux sommets extraordinaires.

Il faudra attendre les années 90 ([N. Dyn 1990], [D. Zorin 1996a], [D. Zorin 1997], [Kobbelt 1996]) pour que les chercheurs proposent des schémas de subdivision surfaciques interpolants (schéma de Butterfly et schéma de Kobbelt) et généralisent les règles de subdivision de ces schémas à des maillages irréguliers.

Cependant, nous nous intéressons au même problème mais pour des schémas qui unifient un schéma approximant et un schéma interpolant. Autrement dit, nous nous intéressons à la généralisation des règles de subdivision d'un schéma approximant/interpolant aux sommets irréguliers dans la zone de raccord.

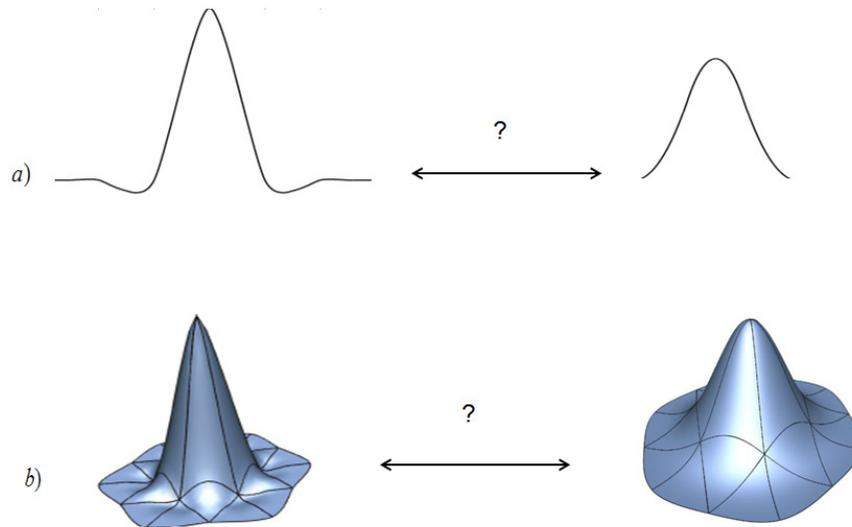


FIGURE 1.6 – Problème de raccord d'une courbe (resp. surface) issue de l'application d'un schéma approximant et une courbe (resp. surface) issue de l'application d'un schéma interpolant.

### 1.2.3/ SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUAD/TRIANGLE

Récemment, l'étude et la construction des schémas de subdivision quad/triangle ont attiré l'attention. À partir d'un maillage quad/triangle (figure 1.3 à droite) composé de quadrangles et de triangles, le schéma de subdivision quad/triangle produit un maillage mixte de plus en plus fin. La construction et l'étude des propriétés mathématiques de ces types de schéma de subdivision ont été établies (dans le cas régulier) [Levin 2003b], [Schaefer 2005], [Q.T. Jiang 2009]. Des règles de subdivision particulières dans la zone mixte entre deux schémas de subdivision de même type géométrique (approximant-approximant, interpolant-interpolant) ont été données. Ces schémas de subdivision sont connus pour être définis sur des support trop large.

La construction de ces schémas est motivée par le fait que l'application de certains schémas de subdivision classiques sur un maillage quad/triangle fait apparaître de multiples défauts comme la présence d'oscillations radiales au niveau des sommets irréguliers situés dans la zone mixte qui contient des quadrangle et des triangles.

Dans cette thèse la structure quad/triangle est doublement utilisée. D'un côté, nous nous demandons comment raccorder deux schémas de subdivision de types géométriques différents sachant que l'un est défini sur un maillage triangulaire et l'autre sur un maillage quadrangulaire (voir figure 1.7) et d'un autre côté, nous allons utiliser la structure quad/triangle pour la subdivision inverse.

### 1.2.4/ SUBDIVISION QUAD/TRIANGLE INVERSE

Reconstruire un maillage grossier  $M^k$  à partir d'un maillage fin  $M^{k+1}$  issu d'une subdivision revient à trouver les positions exactes des points de contrôles  $p^k$  à partir des positions des

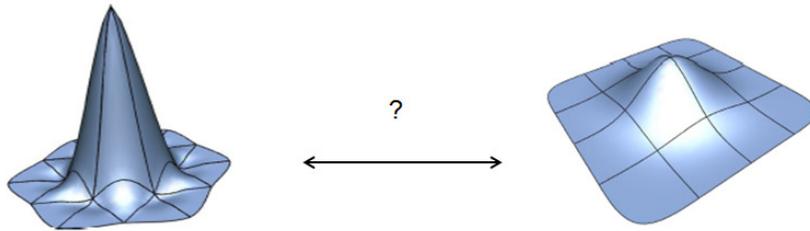


FIGURE 1.7 – Problème de raccord d'une surface issue de l'application d'un schéma interpolant sur un maillage triangulaire et une surface issue de l'application d'un schéma interpolant sur un maillage quadrangulaire.

points de contrôles ( $S p^k$ ). Pour cela, nous utilisons les formules des règles de subdivision qui donnent les positions des points ( $S p^k$ ) sur le maillage  $M^{k+1}$  et les formules inverses qui donnent les positions des points ( $p^k$ ) du maillage  $M^k$  afin de construire un système d'équations. La solution de ce système d'équations donne la position exacte des points  $p^k$  sur le maillage  $M^k$ . Cependant, nous ne pouvons pas utiliser cette méthode pour inverser les schémas de subdivision quad/triangle à cause de leurs supports trop larges. En effet, le support trop large de ces schémas de subdivision implique l'existence de plusieurs règles de subdivision d'où un système d'équations difficile à résoudre.

Ceci constitue la problématique de la deuxième partie de nos travaux. À partir d'un maillage fin issu d'une subdivision quad/triangle peut-on reconstruire le maillage grossier ? Et quelle est la méthode utilisée pour cela ?

### 1.3/ CONTRIBUTIONS

Dans cette thèse, nous nous sommes penchés sur deux aspects distincts : d'une part, la construction d'un nouveau type de schémas de subdivision que nous avons appelé schémas de subdivision quasi-linéaires et d'autre part, la construction de schémas de subdivision quad/triangle inverse.

#### 1.3.1/ SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE

La contribution majeure de cette thèse est l'introduction de la notion de schémas quasi-linéaires. En particulier :

- Nous introduisons un cadre général de schémas de subdivision quasi-linéaires (section 5.3). Sa généralité donne lieu à de nombreux schémas intéressants applicables sur de multiples maillages.
- Nous montrons que ces schémas de subdivision reproduisent des polynômes de degré donné (chapitre 5, section 5.3, Lemme 6).
- Nous étudions les propriétés d'approximation d'une large classe de schémas quasi-linéaires (chapitre 5, section 5.3.4).

- Nous décrivons comment des schémas quasi-linéaires peuvent être construits et nous donnons quelques exemples (chapitre 5, section 5.5 et section 5.6).
- Nous verrons que nous pouvons construire différents schémas quasi-linéaires sur le même maillage et nous donnons des exemples et de multiples cas possibles pour cela (chapitre 6).
- Nous proposons des règles qui généralisent quelques schémas quasi-linéaires à des maillages  $n$ -réguliers (irréguliers) (Chapitre 6).

### 1.3.2/ SUBDIVISION INVERSE

Notre contribution dans la partie subdivision inverse est de proposer :

- Une formule du schéma inverse de Catmull-Clark d'un maillage quadrangulaire. Cette formule est paramétrable, et peut être appliquée directement pour inverser le schéma quad moyennage de Warren et Wimer [Warren 2002].
- Une nouvelle méthode basée sur les théories de l'approximation et de la reproduction des polynômes afin de déterminer les formules inverses pour certains schémas de subdivision linéaire et quad/triangle.

## 1.4/ ORGANISATION DU MÉMOIRE

Ce mémoire est divisé en trois parties.

### PREMIÈRE PARTIE : SUBDIVISION LINÉAIRE

La première partie en elle même est composée de trois chapitres.

#### CHAPITRE 2 : SCHÉMAS DE SUBDIVISION ET REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Nous introduisons les notations et les techniques d'études des schémas de subdivision qui seront utilisées tout au long de cette thèse. Après un bref rappel des définitions et des techniques d'étude de la convergence, nous nous intéressons à l'étude de la classe de continuité des fonctions limites associées aux schémas de subdivision. Nous donnons quelques conditions nécessaires et suffisantes de la continuité  $C^m$ . Nous mettons l'accent sur une technique d'étude des conditions suffisantes à savoir le test du rayon spectral conjoint et une propriété très importante liée aux conditions nécessaires à savoir la reproduction des polynômes.

#### CHAPITRE 3 : QUASI-INTERPOLATION ET REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons aux théories de quasi-interpolations ainsi qu'aux théories de reproduction des polynômes. Nous mettons en évidence les différents liens entre les notions de reproduction des polynômes, la quasi-interpolation, l'ordre d'approximation. Nous verrons que ces théories représentent un moyen efficace

pour construire des schémas de subdivision convergents. Par la suite, nous abordons deux grandes familles de schémas de subdivision à savoir les schémas approximants et les schémas interpolants. Nous mettons l'accent sur les avantages et les inconvénients de chaque catégorie de ces schémas et nous donnons quelques schémas de subdivision existants dans la littérature qui répondent à différents problèmes issus de l'application de ces schémas de subdivision. Notre contribution dans ce chapitre sera de proposer des formules aux fonctions limites d'un schéma de subdivision ainsi qu'aux opérateurs quasi-interpolants. Ces formules seront utilisées pour la construction ainsi que pour montrer certaines propriétés sur les schémas que nous allons proposer dans la deuxième partie de cette thèse.

#### CHAPITRE 4 : GÉNÉRALISATION DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION LINÉAIRES À DES MAILLAGES IRRÉGULIERS

Dans ce chapitre, nous faisons un rapide tour d'horizon des schémas de subdivision surfaciques les plus courants qui seront utilisés pour la construction des schémas quasi-linéaires. Ensuite, nous abordons quelques travaux qui portent sur l'amélioration des schémas de subdivision aux voisinages des points irréguliers. Nous mettons l'accent sur les schémas quad/triangle (approximant-approximant) qui seront utilisés dans la partie subdivision inverse.

#### DEUXIÈME PARTIE : SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE

La deuxième partie est le cœur de la présente thèse.

#### CHAPITRE 5 : SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRES SUR DES MAILLAGES BI-RÉGULIERS

Nous présentons la définition des schémas de subdivision quasi-linéaires et les hypothèses que nous formulons à leur sujet. Dans un premier temps, nous donnons un cadre général pour les schémas de subdivision quasi-linéaires définis sur des maillages bi-réguliers que nous allons développer dans ce chapitre. Pour cette classe de schémas, nous établissons des théorèmes de convergence, de reproduction des polynômes, de quasi-interpolation et d'ordre d'approximation. Nous les appliquons ensuite pour la construction et l'étude de différents schémas que nous allons proposer. Nous proposons notamment la construction et l'étude des schémas quasi-linéaires définis sur des maillages bi-réguliers (quad/quad, quad/triangle, triangle/quad, triangle/triangle). Pour finir, nous donnerons divers exemples de ces schémas de subdivision.

#### CHAPITRE 6 : SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE SUR UN MAILLAGE $n$ -RÉGULIER

Dans le chapitre 6, on s'intéresse surtout à la généralisation des règles de subdivisions de quelques schémas quasi-linéaires proposés dans le chapitre 5 à des maillages  $n$ -réguliers. Dans un premier temps, nous généralisons ces schémas à des maillages

4-régulier (resp. 6-régulier). Nous verrons que nous pouvons construire différents schémas quasi-linéaires sur ces maillages. Ensuite, nous proposons une méthode pour généraliser ces schémas de subdivision à des maillages irréguliers.

## TROISIÈME PARTIE : SUBDIVISION INVERSE

Dans cette partie de thèse, nous nous intéressons au problème de la subdivision inverse.

### CHAPITRE 7 : SUBDIVISION QUAD/TRIANGLE INVERSE

Le chapitre 7 est consacré à la construction des schémas de subdivision inverse. Après un bref rappel des définitions et l'état de l'art, on s'intéresse à un résultat donné dans [Lanquetin 2006]. On complète ce résultat, dans le but de l'étendre à d'autres schémas quadrangulaires. Par la suite, nous développons une nouvelle méthode basée sur les théories de la reproduction des polynômes pour inverser des schémas de subdivision uniforme et mixte.

## QUATRIÈME PARTIE : CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce document se termine sur une conclusion qui résume le document, mentionne les objectifs atteints et ouvre des perspectives à notre travail.





## SUBDIVISION LINÉAIRE



## SCHÉMAS DE SUBDIVISION ET REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Dans ce chapitre, nous donnons des notations, des définitions et quelques propriétés de la subdivision linéaire ainsi que quelques notions de reproduction des polynômes. Nous donnons également des techniques pour étudier la convergence et la continuité des schémas de subdivision linéaires.

### 2.1/ SCHÉMAS DE SUBDIVISION

Les schémas de subdivisions ( $p \in l(\mathbb{Z}^s) \mapsto (Sp) \in l(\mathbb{Z}^s) : p^{k+1} = (Sp^k)$ ) ont été introduits pour la construction de courbes ou de surfaces. Quand on les applique successivement, on construit un algorithme de raffinement, qui permet de définir une courbe ou une surface à partir de points initiaux. Initialement, la notion de schémas de subdivision a été introduite pour accélérer la construction de courbes B-splines. La courbe obtenue est alors définie aux points dyadiques.

En effet, les premiers schémas de subdivision ont été définis à partir des coefficients de relation de raffinement vérifiée par les fonctions B-splines.

Une courbe B-spline uniforme est définie par :

$$C(t) = \sum_{i=1}^N \phi_m(t-i)p_i, \quad (2.1)$$

où  $p_i$  sont les points de contrôle initiaux et  $\phi_m$  sont les fonctions B-spline de base uniforme de degré  $m$ .

Une fonction B-spline de base de degré  $m$  est le résultat de la convolution de la fonction  $\phi_{m-1}$  par la fonction  $\phi_0$  :

$$\phi_m(t) = \phi_{m-1}(t) * \phi_0(t) = \int_{t-1}^t \phi_{m-1}(x)dx = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \phi_{m-1}(x + \frac{1}{2})dx,$$

avec :

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\phi_m$  une fonction B-spline de degré  $m$ , alors nous avons les propriétés suivantes :

1.  $\phi_m \in C^{m-1}$  est polynômiale par morceaux.
2.  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_m(t) > 0$  et  $\text{supp}(\phi_m) = \llbracket -\lceil \frac{1}{2}m \rceil - 1, m - \lceil \frac{1}{2}m \rceil \rrbracket$ .
3.  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi_m(t - i) = 1, i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ .
4. Les fonctions B-splines vérifient la relation de raffinement suivante :

$$\phi_m(t) = 2^{-m} \sum_{j = -\lceil \frac{1}{2}m \rceil - 1}^{m - \lceil \frac{1}{2}m \rceil} \binom{m+1}{j+1 + \lceil \frac{1}{2}m \rceil} \phi_m(2t - j). \quad (2.2)$$

À partir de l'équation (2.1) qui représente la définition d'une courbe B-spline et la relation de raffinement d'une fonction B-spline de base (2.2), nous obtenons la relation suivante :

$$C(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi_m(t - i) p_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi_m(2t - i) p_i^1 = \dots = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi_m(2^k t - i) p_i^k, \quad (2.3)$$

où  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est l'ensemble des points de contrôle initiaux et  $\{p_i^k\}_{i \in \mathbb{Z}}$  l'ensemble des points de contrôle à la  $k$ -ième itération.

À partir de l'équation (2.3) nous pouvons montrer que les nouveaux points  $p_i^1$  peuvent être donnés par la relation suivante :

$$p_i^1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{i-2j,m} p_j, \quad (2.4)$$

avec :

$$a_{i,m} = \begin{cases} 2^{-m} \binom{m+1}{i+1 + \lceil \frac{1}{2}m \rceil} & \forall i \in \llbracket -\lceil \frac{1}{2}m \rceil - 1, m - \lceil \frac{1}{2}m \rceil \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un schéma de subdivision est défini comme la généralisation de la définition donnée par la relation (2.4). Afin de généraliser cette définition, nous supposons que les points de contrôle sont indexés sur la grille  $\mathbb{Z}^s$  et on travaillera avec des suites de  $l(\mathbb{Z}^s)$ . Nous définissons un opérateur de subdivision  $S : l(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z}^s)$  de sorte que les points de contrôle à la  $k$ -ième itération sont donnés par :

$$p^{k+1} = (S p^k).$$

Alors, on a la définition suivante :

**Définition 1** Un schéma de subdivision  $S : l(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  est un opérateur linéaire défini en fonction d'une suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$  et un ensemble de points de contrôle par :

$$\forall p \in l(\mathbb{Z}^s), \forall i \in \mathbb{Z}^s \quad : (S p)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j} p_j. \quad (2.5)$$

La suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$  est appelée le masque du schéma de subdivision. Le support du masque est l'ensemble  $\{i \in \mathbb{Z}^s / a_i \neq 0\}$ . Dans la suite, on supposera que  $\text{supp}(a) = \llbracket \epsilon_1, \epsilon_2 \rrbracket^s$  avec

$\{|e_1|, |e_2|\} < +\infty$  c'est-à-dire que la construction de  $(Sp)_i$  fait intervenir un nombre fini de points.

**Définition 2** *Un schéma de subdivision stationnaire est défini comme l'application répétée d'un opérateur de subdivision  $S$  sur un ensemble de points de contrôle initiaux  $p \in l(\mathbb{Z}^s)$*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+, \quad p^{k+1} = (Sp^k) = \dots = (S^k p). \quad (2.6)$$

**Remarque 1** *Faisant intervenir les indices pairs et impairs de la suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$ , la relation (2.5) peut être vue comme un système de  $2^s$  relations*

– Dans le cas des courbes  $s = 1$

$$(Sp)_{2i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2i-2j} p_j = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} a_{2\mu} p_{i-\mu}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

et

$$(Sp)_{2i+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2i-2j+1} p_j = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} a_{2\mu+1} p_{i-\mu}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

– Dans le cas des surfaces  $s = 2$

$$(Sp)_{2i+\eta} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} a_{2i+\eta-2j} p_j = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} a_{2\mu+\eta} p_{i-\mu}, \quad \eta \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}. \quad (2.9)$$

Les relations (2.7) à (2.9) représentent les formules qui donnent les règles de subdivision.

Enfin, il est nécessaire d'introduire une notion polynômiale à un schéma de subdivision. En effet, la notion polynômiale est d'une importance cruciale pour étudier la convergence et la régularité d'un schéma de subdivision.

### 2.1.1/ INTERPRÉTATION POLYNOMIALE

Dans cette sous-section nous travaillerons avec  $s = 1$ , mais le résultat énoncé sera vrai pour  $s$  quelconque après adaptation.

Soit  $S$  un schéma de subdivision et  $a = \{a_i, i \in \mathbb{Z}\}$  son masque. Ce schéma de subdivision peut être représenté par un polynôme de Laurent, dit transformée en  $z$ . La transformée en  $z$  d'une suite  $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est donnée par :

$$a(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i z^i. \quad (2.10)$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire la relation (2.5) comme :

$$(Sp)(z) = a(z)p(z^2), \quad (2.11)$$

où  $a(z)$  est appelé le polynôme caractéristique du schéma de subdivision  $S$ .

## 2.2/ LA CONVERGENCE D'UN SCHÉMA DE SUBDIVISION

Après avoir introduit la notion des schémas de subdivision, nous nous intéressons maintenant à la convergence d'un schéma de subdivision. Dans cette section, nous présentons une définition de la convergence uniforme, une condition nécessaire de convergence appelée condition de reproduction des constantes et une condition nécessaire et suffisante de convergence d'un schéma de subdivision. La définition et les deux critères de convergence que nous allons présenter ici seront d'une grande utilité dans la suite de ce document.

- La définition de la convergence uniforme est un outil très important pour démontrer certaines propriétés sur les schémas de subdivision linéaire comme elle sera utilisée après adaptation pour démontrer certaines propriétés sur les schémas de subdivision que nous allons proposer dans cette thèse.
- La condition de reproduction des constantes est la condition de convergence la plus importante même si elle est nécessaire mais pas suffisante. Cette condition peut être vue comme un cas particulier de reproduction des polynômes que nous allons aborder dans ce chapitre.
- La condition nécessaire et suffisante de convergence que nous allons présenter ici fournit un moyen intuitif et efficace pour construire la fonction limite d'un schéma de subdivision.

### 2.2.1/ CONVERGENCE UNIFORME

Démontrer la convergence uniforme d'un schéma de subdivision revient à montrer l'existence d'une fonction limite continue approchant les itérations du schéma. La définition suivante donne une notion de convergence uniforme qui sera utilisée pour démontrer certaines propriétés sur les schémas de subdivision.

**Définition 3 (Convergence uniforme)** *On dit qu'un schéma de subdivision  $S$  converge uniformément si pour toute suite de points initiaux  $p = \{p_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}^s\}$ , il existe une fonction continue  $F \in C(\mathbb{R}^s)$  telle que pour tout compact  $D \in \mathbb{R}$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $K(\epsilon, D)$  tel que :*

$$|(S^k p)_i - F(2^{-k}i)| < \epsilon, k > K(\epsilon, D), i \in \mathbb{Z}^s \cap 2^k D. \quad (2.12)$$

Ceci est équivalent à :

$$\forall p \in l(\mathbb{Z}^s), \exists F \in C(\mathbb{R}^s) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|(S^k p)_i - F(2^{-k}i)\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D} = 0. \quad (2.13)$$

La fonction  $F = S^\infty p$  est dite fonction limite du schéma  $S$  associée aux points initiaux  $p$ .

### 2.2.2/ CONDITION DE REPRODUCTION DES CONSTANTES

La condition de reproduction de constantes est mieux connue sous le nom de condition de masque. On dit que  $S$  reproduit les constantes si :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^s, p_i = c \Rightarrow (S p)_i = c. \quad (2.14)$$

Cette propriété est équivalente à une condition simple sur le masque  $a$  donnée dans une des deux propositions suivante :

**Proposition 1** *Soit  $S$  un schéma de subdivision convergeant uniformément vers une fonction non nulle alors son masque vérifie :*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^s} a_{2i+\mu} = 1 \quad \text{avec } \mu \in \{0, 1\}^s. \quad (2.15)$$

**Proposition 2 (Interprétation en polynômes de Laurent)** *Soit  $S$  un schéma de subdivision et  $a(z)$  son polynôme caractéristique, alors son masque vérifie :*

$$a(1) = 2^{-s}, \quad a(-1) = 0. \quad (2.16)$$

La condition de reproduction des constantes est une condition nécessaire mais elle n'est pas suffisante à la convergence. Pour plus de détails, voir [Cavaretta 1991].

### 2.2.3/ CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES

Les propositions 1 et 2 nous ont fourni une condition nécessaire pour qu'un schéma de subdivision soit uniformément convergent. Ici, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction limite d'un schéma de subdivision converge uniformément ainsi que la méthode de construction de cette fonction.

#### 2.2.3.1/ CONVERGENCE DU SCHÉMA INTERPRÉTÉE COMME LA CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Avant d'énoncer la proposition qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un schéma de subdivision soit uniformément convergent, donnons la définition suivante :

**Définition 4** *On définit une suite de fonctions  $(S^k p)_i, i \in \mathbb{Z}^s$  par :*

$$(S^k p)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} (S^k p)_j \Phi(2^k i - j), \quad (2.17)$$

**Proposition 3** *Soit une fonction continue  $\Phi \in C(\mathbb{R}^s)$  à support compact vérifiant :*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^s} \Phi(x - j) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^s \quad (2.18)$$

*et soit  $S$  un schéma de subdivision reproduisant des constantes. Alors la convergence uniforme du schéma de subdivision  $S$  implique la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(S^k p)_{k \in \mathbb{N}}$ ,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} (S^k p)_j \Phi(2^k i - j) = S^\infty p, \quad (2.19)$$

Réciproquement, si  $\Phi$  vérifie la condition de stabilité  $L^\infty$  :

$$\exists A, B > 0, \forall p \in l(\mathbb{Z}^s) \text{ tel que } A\|p\|_\infty \leq \left\| \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} p_j \Phi(x - j) \right\|_\infty \leq B\|p\|_\infty, \quad (2.20)$$

alors la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(S^k p)_{k \in \mathbb{Z}_+}$  entraîne la convergence uniforme du schéma de subdivision  $S$ .

**Preuve 1** Pour une preuve, voir [Dyn 1992].

En pratique, puisque l'on trouve facilement des fonctions qui vérifient la relation (2.18), on peut utiliser ce critère pour construire des schémas de subdivision. Dans la suite, nous allons introduire des fonctions qui vérifient la relation (2.18). Ces fonctions sont appelées fonctions de base et permettent de relier un schéma de subdivision à la fonction qu'il engendre à la limite.

### 2.2.3.2/ LES FONCTIONS DE BASE $\phi$

Soit  $\Phi$  une fonction continue  $\Phi \in C(\mathbb{R}^s)$ , à support compact vérifiant la relation (2.18). On considère que cette fonction est engendrée par un choix particulier de points de contrôle initiaux  $p = \delta_{i,0}$  et on définit une fonction  $\Phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  comme la fonction limite du schéma associée à la suite initiale  $(\delta_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}^s}$  par (voir figure 2.1) :

$$\phi = S^\infty \delta_{i,0} \text{ avec } \delta_{i,0} = \begin{cases} 1 & i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.21)$$

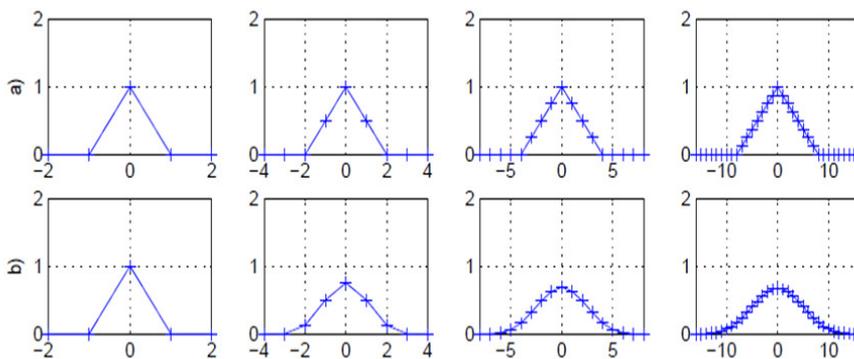


FIGURE 2.1 – Les deux lignes représentent un polygone défini par le vecteur de points de contrôle initiaux  $p = \delta_{i,0}$  et trois pas de subdivision successifs :  $S \delta_{i,0}$ ,  $S^2 \delta_{i,0}$  et  $S^3 \delta_{i,0}$ . a)  $S$  représente le schéma défini par le masque  $a_i = [\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}]$ . b)  $S$  représente le schéma défini par le masque  $a_i = \frac{1}{8}[1, 4, 6, 4, 1]$ .

La construction des fonctions de base d'un schéma de subdivision peut être vue comme le processus inverse qui relie une courbe de subdivision à un schéma de subdivision. Autrement dit, à partir d'un schéma de subdivision qui reproduit des constantes, on introduit un opérateur  $\Gamma$  qui va permettre de relier un schéma de subdivision  $S$  à la fonction de base  $\phi$ .

La méthode de construction utilise la fonctionnelle définie par :

$$\Gamma(\Phi)(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^s} a_i \Phi(2t - i)$$

avec  $\Phi$  une fonction continue, à support compact vérifiant la propriété (2.18). Trouver les fonctions de base  $\phi$  revient à résoudre le problème fonctionnel  $\Gamma\Phi = \phi$ .

Dans la suite, s'il existe une fonction de base et si  $S$  converge uniformément alors  $\phi$  vérifie les propriétés suivantes :

**Corollaire 1** 1.  $\phi$  a un support compact.

2.  $\phi$  vérifie la relation de raffinement :  $\forall t \in \mathbb{R}^s, \phi(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^s} a_i \phi(2t - i)$ .

3.  $\forall t \in \mathbb{R}^s, \forall p \in \mathbb{Z}^s, \sum_{i \in \mathbb{Z}^s} p_i \phi(t - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^s} (Sp)_i \phi(2t - i)$ .

4.  $\forall t \in \mathbb{R}^s, \sum_{i \in \mathbb{Z}^s} \phi(t - i) = 1$ .

5.  $\forall t \in \mathbb{R}^s, \forall p \in \mathbb{Z}^s, (S^\infty p)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} p_j \phi(t - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} (S^k p)_j \phi(2^k t - j)$ .

(La méthode de construction des fonctions de base est donnée de façon détaillée dans [Dyn 1992]).

L'existence de cette fonction ne suffit pas à avoir la convergence du schéma de subdivision. Afin de montrer la convergence uniforme, on a besoin d'avoir une condition supplémentaire sur la fonction de base  $\phi$ . Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un schéma de subdivision  $S$  engendré par la fonction de base  $\phi$  soit uniformément convergent.

**Théorème 1** On suppose qu'il existe une fonction de base  $\phi \in C(\mathbb{R}^s)$  à support compact vérifiant la relation de raffinement (corollaire 1, propriété 2), avec la suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$  vérifiant la condition nécessaire de convergence (2.15). De plus, si  $\phi$  vérifie la condition de stabilité  $L^\infty$  (2.20), alors le schéma de subdivision  $S$  converge uniformément.

**Preuve 2** Pour une preuve voir [Dyn 1992].

Dans la suite, nous allons donner des techniques pour étudier la classe de continuité d'un schéma de subdivision. On parle de classe de continuité d'un schéma de subdivision convergeant pour parler de la continuité  $C^m$  des fonctions limites associées.

## 2.3/ CLASSE DE CONTINUITÉ DE LA FONCTION LIMITE

Une fois que l'on s'est assuré de la convergence d'un schéma de subdivision, on s'intéresse à la classe de continuité de ce schéma. Comme pour la convergence uniforme, il existe des conditions nécessaires et des conditions suffisantes. Les conditions nécessaires sont généralement basées sur l'étude des polynômes trigonométriques (masques) ou les matrices de subdivision (valeurs propres) associées à un schéma de subdivision. Tandis que les conditions suffisantes sont basées sur l'étude des fonctions limites associées à ce schéma.

Dans cette section, nous donnerons des outils et des techniques pour étudier les conditions suffisantes de la continuité  $C^m$  des schémas de subdivision. Ces techniques utilisent soit des schémas aux différences, soit le test du rayon spectral, soit encore le test du rayon spectral conjoint. Nous nous intéressons plus particulièrement à la technique basée sur le test du rayon spectral conjoint. Ce test est connu pour être difficile à calculer et il est rarement utilisé pour vérifier la continuité des schémas de subdivision linéaires. Néanmoins, il est le seul moyen connu pour vérifier la continuité  $C^m$  des schémas de subdivision que nous allons proposer dans les chapitres 4 et 5. Nous revenons ensuite (section 2.4) sur les conditions nécessaires de la continuité et nous verrons que la reproduction des polynômes donne une condition nécessaire à la continuité  $C^m$ .

Dans la suite, nous nous placerons dans le cas  $s = 1$ . Mais les résultats restent vrais pour  $s$  quelconque.

### 2.3.1/ OUTILS D'ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ $C^m$

Dans cette partie, on fait un rapide tour d'horizon de quelques outils nécessaires pour démontrer les propriétés les plus importantes de la fonction limite  $S^\infty p$ .

#### 2.3.1.1/ L'OPÉRATEUR AUX DIFFÉRENCES D'ORDRE $m$

Un opérateur aux différences d'ordre  $m$  noté  $d^m$  est un opérateur qui correspond à l'opérateur différentiel  $D^m$  de degré  $m$  dans le cas discret.

On définit un opérateur aux différences d'ordre  $m$ , noté  $d^m$  par :

$$(d^m p^k)_i = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} p_{i-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + j}^k, \quad d^m p^k = d(d^{m-1} p^k).$$

Pour  $m = 1$ , l'opérateur aux différences d'ordre 1 est défini comme la distance entre deux points de contrôle successifs par  $(dp^k) = (p_{i+1}^k - p_i^k)$ . Le polynôme de Laurent associé à  $d$  est donné par  $d(z) = 1 - z$ .

#### 2.3.1.2/ LE SCHÉMA AUX DIFFÉRENCES D'ORDRE $m$

Nous donnons ici la définition d'un schéma aux différences d'ordre  $m$  et son polynôme caractéristique.

On appelle schéma aux différences d'ordre  $m$ , le schéma  $S_m$  (s'il existe) défini à partir d'un schéma de subdivision  $S$  en fonction d'un opérateur aux différences divisées d'ordre  $m$ ,  $2^m(d^m p^k)$  par :

$$p^k = S p^{k-1} \implies (d^m p^k) = S_m 2^m (d^m p^{k-1}). \quad (2.22)$$

Le polynôme caractéristique du schéma aux différences  $S_m$  d'ordre  $m$  est donné dans la proposition suivante :

**Proposition 4 (Interprétation en polynômes de Laurent)** *Soit  $S$  un schéma de subdivi-*

vision et  $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$  son masque. Si  $a(z)$  est le polynôme caractéristique du schéma de subdivision  $S$ , alors  $a_m(z) = 2^m z a(z)(z+1)^{-m}$  est le polynôme caractéristique du schéma  $S_m$ .

### 2.3.1.3/ FONCTION HÖLDERIENNE

Dans cette partie, on s'intéresse aux classes de fonction  $\alpha$ -hölderienne. La classe de continuité hölderienne ou la condition de Hölder est une condition suffisante mais pas nécessaire pour qu'une application définie entre deux espaces métriques soit continue. Elle est souvent utilisée pour montrer que la fonction limite est plus que continue.

Nous noterons par  $C^\alpha$  la continuité hölderienne et  $C^{m+\alpha_m}$  la continuité hölderienne d'ordre  $m$ .

**Définition 5 (Continuité hölderienne  $C^\alpha$ )** Soit  $D \subset \mathbb{R}^s$  un ensemble. La fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^s$  est dite  $\alpha$ -hölderienne ( $f \in C^\alpha$ ), s'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :

$$\forall x, y \in D, \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \beta. \quad (2.23)$$

La continuité hölderienne d'une fonction dépend d'un paramètre réel strictement positif  $\alpha \in ]0, 1[$ , et prend en compte toutes les variations de la valeur de la fonction sur son ensemble de définition.

**Définition 6 (Continuité hölderienne  $C^{m+\alpha_m}$ )** Soit  $f$  une fonction  $m$  fois continûment différentiable sur un ensemble  $D \subset \mathbb{R}^s$ . La fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^s$  est dite de continuité hölderienne  $C^{m+\alpha_m}$ , s'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que :

$$\forall x, y \in D, \frac{|\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x) - \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(y)|}{|x - y|^{\alpha_m}} \leq \beta. \quad (2.24)$$

Notons que l'application des deux définitions 5 et 6 à un schéma de subdivision nécessite une définition appropriée pour le cas discret.

### 2.3.1.4/ LE RAYON SPECTRAL

On appellera rayon spectral de  $S_m$  la quantité :

$$\rho(S_m) = \lim_{J \rightarrow \infty} \|S_m^J\|_\infty^{\frac{1}{J}}, \quad (2.25)$$

qui vérifie :

$$\rho(S_m) = \inf\{\rho/\exists j, \forall j \geq J, \forall p \in l(\mathbb{Z}^s) \quad \|S_m^j p\|_\infty \leq \rho^j \|p\|_\infty\}, \quad (2.26)$$

où  $j$  est la constante de contraction. Plus la constante de contraction est petite, plus la continuité est grande.

### 2.3.1.5/ LE RAYON SPECTRAL CONJOINT

Le rayon spectral conjoint est une quantité qui donne le plus grand taux de croissance asymptotique que l'on peut obtenir en multipliant des matrices choisies dans un ensemble. C'est une quantité qui apparaît dans un grand nombre d'applications, en théorie des ondelettes, en théorie des nombres, etc. Il est aussi utilisé pour montrer les conditions nécessaires et suffisantes de la convergence et la continuité d'un certain type de schémas de subdivision.

Par définition le rayon spectral conjoint de deux matrices  $Y_0, Y_1$  est donné par :

$$\rho(Y_0, Y_1) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sup(\max\{\|Y_{\epsilon_j} Y_{\epsilon_{j-1}} \dots Y_{\epsilon_1}\|_\infty, \epsilon_j \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, j\})^{\frac{1}{j}}, \quad (2.27)$$

Ce test a été introduit pour être appliqué à des schémas de subdivision linéaire grâce aux travaux de Goodman et al [Goodman 1994] et Rong-Qing Jia [Jia 1995] et adapté par A. Levin et D. Levin [Levin 2003b] pour être appliqué à des schémas de subdivision quad/triangle (bi-régulier). Depuis le test du rayon spectral conjoint est le seul moyen connu pour vérifier la continuité  $C^m$  d'un schéma de subdivision (bi-régulier).

### 2.3.2/ CONTINUITÉ $C^m$

#### 2.3.2.1/ CONTINUITÉ $C^m, m < 1$

Les schémas aux différences et le test du rayon spectral sont des outils efficaces pour montrer la convergence, et ceci grâce au théorème suivant :

**Théorème 2** *Si  $S$  vérifie la condition de reproduction des constantes (2.15) alors le schéma aux différences d'ordre 1 existe et les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Le schéma  $S$  converge uniformément.*
2. *Le schéma aux différences  $S_1$  converge uniformément vers zéro.*
3.  *$\rho(S_1) < 1$ .*

*De plus,  $S^\infty p \in C^\alpha$  avec  $\alpha = -\log_2 \rho(S_1)$  et on dira que la fonction limite  $S^\infty p$  est de continuité  $C^\alpha$ .*

**Preuve 3** *Pour une preuve, voir ([Dyn 1992], [Cavaretta 1991]).*

### UNE CONDITION SUFFISANTE BASÉE SUR LE TEST DU RAYON SPECTRAL CONJOINT

#### Forme matricielle d'un schéma de subdivision

Pour effectuer le test du rayon spectral conjoint, nous avons besoin de deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$ . Pour cela, nous utilisons la définition matricielle d'un schéma de subdivision. N. Dyn [Dyn 1992] a montré que pour un schéma convergeant, l'expression

$$(S^\infty p)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} p_j \phi(t - j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} (S^k p)_j \phi(2^k t - j)$$

(corollaire 1, propriété (5)), permet d'écrire la relation(2.5) sous forme matricielle en faisant intervenir un nombre fini de points. En effet, pour un schéma de subdivision  $S$  défini en fonction d'un masque  $a$  à support fini, il existe un ensemble fini des points de contrôle initiaux  $P_i$ , qui contient tous les points de contrôle correspondant aux valeurs dyadiques dans l'intervalle  $[i, i + 1]$ . L'application d'un schéma de subdivision linéaire à l'ensemble  $P_i$  donne deux nouveaux ensembles de points de contrôle à l'échelle 1,  $(SP)_{2i}$  et  $(SP)_{2i+1}$  correspondant aux deux intervalles dyadiques  $[i, (2i + 1)2^{-1}]$  et  $[(2i + 1)2^{-1}, (i + 1)]$ .

On peut alors en déduire l'existence de deux matrices de passage entre deux échelles,  $M^1$  et  $M^2$ . Supposons que  $supp(a) = \llbracket \epsilon_1, \epsilon_2 \rrbracket$ . Les relations (2.7) et (2.8) peuvent être données sous forme matricielle par (voir figure 2.2) :

$$(SP)_{2i} = M^1 P_i \quad \text{et} \quad (SP)_{2i+1} = M^2 P_i \tag{2.28}$$

où  $P_i = \{p_{i+j} : j \in \llbracket \epsilon_1 + 1, \epsilon_2 \rrbracket\}$  et  $\begin{cases} M^1_{j,l} = a_{j-2l} & j, l \in \llbracket \epsilon_1 + 1, \epsilon_2 \rrbracket \\ M^2_{j,l} = a_{j+1-2l} & j, l \in \llbracket \epsilon_1 + 1, \epsilon_2 \rrbracket \end{cases}$

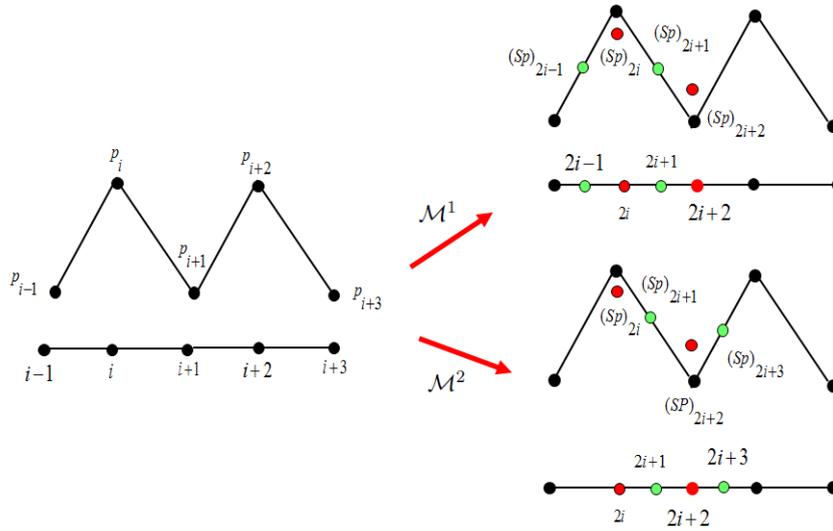


FIGURE 2.2 – Un polygone de contrôle et l'application des deux matrices  $M^1$  et  $M^2$

**Exemple 1** Soit  $S$  un schéma de subdivision linéaire défini en fonction d'un masque  $a$  sur le support  $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , alors on a :

$$\begin{pmatrix} (SP)_{2i-1} \\ (SP)_{2i} \\ (SP)_{2i+1} \\ (SP)_{2i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{-1} & a_1 & 0 & 0 \\ a_{-2} & a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_{-1} & a_1 & 0 \\ 0 & a_{-2} & a_0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

et

$$\begin{pmatrix} (Sp)_{2i} \\ (Sp)_{2i+1} \\ (Sp)_{2i+2} \\ (Sp)_{2i+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{-2} & a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_{-1} & a_1 & 0 \\ 0 & a_{-2} & a_0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_{-1} & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

On peut alors remarquer que les composantes de la matrice  $\mathcal{M}^1$  apparaissent dans la matrice  $\mathcal{M}^2$  mais décalées d'une ligne.

### Test du rayon spectral conjoint

La condition sur le rayon spectral conjoint qui donne la convergence uniforme d'un schéma de subdivision est donnée dans [Jia 1995]. Rong-Qing Jia [Jia 1995] a montré que si  $S$  reproduit les constantes alors le rayon spectral du schéma aux différences  $S_1$  est le même que le rayon spectral conjoint de deux matrices  $Y_0$  et  $Y_1$  associées au schéma aux différences  $S_1$  et que le rayon spectral conjoint de ces dernières matrices est le même que le rayon spectral conjoint des deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  associée à  $S$  sur une nouvelle base  $V$ , i.e.

$$\rho(S_1) = \rho(Y_0, Y_1) = \rho(\mathcal{M}^1|_V, \mathcal{M}^2|_V). \quad (2.31)$$

Nous savons que  $S$  reproduit des constantes donc 1 est valeur propre des matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$ . L'idée est d'utiliser une matrice de passage  $V$  afin de représenter les matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  dans une autre base de sorte que :

$$(\mathcal{M}^1)' = V^{-1}\mathcal{M}^1V = \begin{pmatrix} 1 & C_0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{M}^2)' = V^{-1}\mathcal{M}^2V = \begin{pmatrix} 1 & C_1 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

où  $Y_0, Y_1$  sont les matrices associées au schéma aux différences  $S_1$ .

Enfin, nous calculons le rayon spectral conjoint des deux matrices  $Y_0$  et  $Y_1$  (avec l'équation (2.27)). D'après le théorème 2 et l'équation (2.32), il est nécessaire et suffisant que  $\rho(Y_0, Y_1) < 1$  pour que le schéma  $S$  converge uniformément.

De plus,  $S^\infty p \in C^\alpha$  avec  $\alpha = -\log_2(\rho(Y_0, Y_1))$  et on dira que la fonction limite  $S^\infty p$  est  $C^\alpha$  continue.

**Exemple 2** À partir de l'exemple précédent et pour  $a = [\frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8}]$ , les deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  sont données par :

$$\mathcal{M}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour  $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , il est possible de vérifier que :

$$(\mathcal{M}^1)' = V^{-1}\mathcal{M}^1V = \begin{pmatrix} 1 & C_0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$(\mathcal{M}^2)' = V^{-1}\mathcal{M}^2V = \begin{pmatrix} 1 & C_1 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

À partir du polynôme caractéristique du schéma aux différences  $\frac{1}{2}S_1$ ,  $\frac{1}{2}a_1(z) = za(z)(z + 1)$ , nous pouvons facilement vérifier que les deux matrices  $Y_0$  et  $Y_1$  sont les matrices associées au polynôme caractéristique du schéma aux différences  $\frac{1}{2}S_1$ .

### 2.3.2.2/ CONTINUITÉ $C^m$ , $m > 1$

Soit  $S$  un schéma de subdivision convergent uniformément. Pour conclure sur la continuité  $C^m$  du schéma, on a besoin de montrer que  $S_{m+1}$  existe et que  $2^m S_{m+1}$  converge vers 0. Ou de façon équivalente :

**Théorème 3** *S'il existe un schéma aux différences  $S_{m+1}$  d'ordre  $m + 1$  tel que  $2^m S_{m+1}$  converge vers 0 alors :*

$$S^\infty p \in C^m.$$

De plus,  $S^\infty p \in C^{m+\alpha_m}$  avec  $\alpha_m = -m - \log_2 \rho(S_{m+1})$ , on dira que la fonction limite  $S^\infty p$  est de continuité  $C^{m+\alpha_m}$ .

Le théorème précédent donne un moyen efficace pour montrer les conditions suffisantes de la  $C^m$  continuité des schémas de subdivision linéaires. Malheureusement, nous ne pouvons pas utiliser les résultats de ce lemme dans le cas de la subdivision quasi-linéaire (partie 2). Dans la partie 2 (section 5.5), nous verrons comment le test du rayon spectral conjoint peut être adapté afin de montrer les conditions suffisantes de la  $C^m$  continuité de ce type de schéma de subdivision.

## 2.4/ THÉORIES DE LA REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Dans cette section, nous allons voir que la reproduction des polynômes de degré donné est une condition importante liée aux conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  ainsi qu'à l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision.

Compte tenu de ce qui va suivre, nous évoquerons la paramétrisation d'un schéma de subdivision et nous donnerons la définition d'une suite de polynômes.

Soit  $\{p_i^k\}_{i \in \mathbb{Z}^s}$  une suite de points de contrôle à la  $k$ -ième itération. On associe les points de contrôle  $p_i^k$  à des valeurs de paramètres  $x_i^k$  avec  $x_i^k < x_{i+1}^k$  et  $x_{i+1}^k - x_i^k = 2^{-k}$ .

Dans le cas où les valeurs de paramètres sont données par :

$$x_i^k = \frac{1}{2^k}i, \quad i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, \quad (2.33)$$

on dit que la paramétrisation est primale (voir la figure 2.3 en bas à droite).

Dans le cas où les valeurs de paramètres sont donnés par :

$$x_i^k = \frac{1}{2^k}(i - \frac{1}{2}), \quad i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, \quad (2.34)$$

on dit que la paramétrisation est duale (voir la figure 2.3 en bas à gauche).

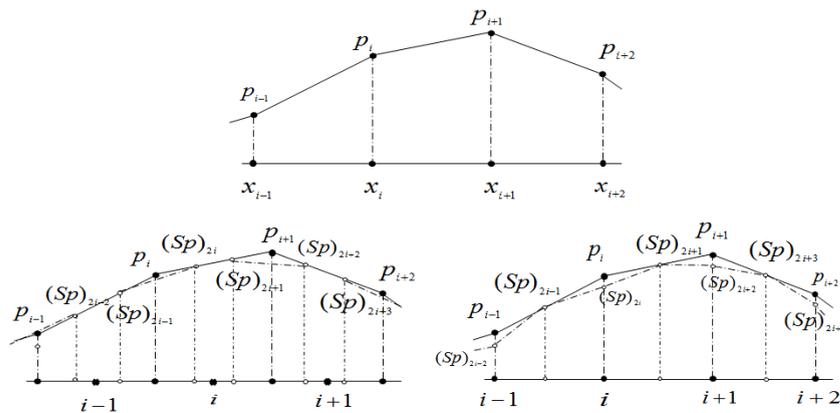


FIGURE 2.3 – Paramétrisation d'un schéma de subdivision. À gauche, paramétrisation duale et à droite, paramétrisation primale .

**Définition 7** Soit  $p = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$  une suite de points de contrôle. On dit que la suite  $p = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$  est une suite de polynômes de degré  $m$  s'il existe un polynôme  $f \in \pi_m$  de sorte que  $p_i = f(x_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}^s$ .

### 2.4.1/ GÉNÉRATION DES POLYNÔMES

Une condition nécessaire pour qu'un schéma de subdivision  $S$  reproduise des polynômes de degré  $m$  est qu'il génère des polynômes du même degré que les fonctions limites pour certaines données initiales. Pour les schémas de subdivision linéaires, cette propriété est équivalente à une condition simple sur le masque  $a$  en utilisant le formalisme algébrique de la transformée en  $z$ .

**Définition 8** On dit qu'un schéma de subdivision  $S$  défini par son masque  $a$  génère des polynômes de degré  $m$  si :

$$a(z) \text{ est divisible par } : (1 + z)^{m+1}. \quad (2.35)$$

**Preuve 4** Pour une preuve, voir [Cavaretta 1991].

La condition (2.35), assure tout simplement l'existence d'un schéma aux différences  $S_m$  d'ordre  $m$ .

Le théorème suivant montre que sous certaines conditions sur le masque d'un schéma de subdivision  $a$ , tout schéma de subdivision convergent  $S$  qui génère des polynômes de degré  $m$ , garantit la reproduction des polynômes du même degré.

**Théorème 4** *Soit  $S$  un schéma de subdivision qui génère des polynômes de degré  $m$ , les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1.  $a(z)$  est divisible par  $(1 + z)^{1+m}$ .
2.  $S$  reproduit des polynômes de degré au plus  $m$ . i.e.  $\forall f \in \pi_{m_1}, m_1 \leq m$  il existe un ensemble des points de contrôle initiaux  $p$  de sorte que  $S^\infty p = f$ . Par ailleurs,  $p$  est échantillonnée à partir d'un polynôme du même degré et avec le même coefficient dominant. En d'autres termes, il existe  $g \in \pi_{m_1}$  de sorte que  $p_i = g(x_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et  $(f - g) \in \pi_{m_1-1}$ .

**Preuve 5** *Pour une preuve, voir [Cavaretta 1991](chapitre 6).*

## 2.4.2/ LA REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Dans la littérature, la notion de reproduction des polynômes se décline de deux façons. Pour faire la différence entre les deux définitions nous utilisons les termes suivants : reproduction exacte et reproduction simple.

### 2.4.2.1/ REPRODUCTION EXACTE

**Définition 9** *On dit qu'un schéma de subdivision  $S$  reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  à chaque itération si pour tout polynôme de degré au plus  $m$*

$$Si \quad \forall i \in \mathbb{Z}^s, p_i^k = f(x_i^k), \quad \text{alors} \quad (S p^k)_i = f(x_i^{k+1}), \quad (2.36)$$

*pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ .*

Ce qui veut dire qu'à chaque étape de subdivision on conserve les points de contrôle à l'échelle  $k$  comme un sous-ensemble des points de contrôle à l'échelle  $k + 1$ .

**Définition 10** *Soit  $S$  un schéma de subdivision convergent, on dit que  $S$  reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  si pour tout polynôme  $f$  de degré  $m$   $\forall i \in \mathbb{Z}^s, p_i = f(x_i)$ , alors  $S^\infty p = f$ .*

Cela signifie que les points du réseau de contrôle initial sont sur la surface limite et le principe de subdivision est dit interpolant (voir figure 2.4). À partir de ces deux définitions, nous pouvons facilement montrer les affirmations données dans le lemme suivant :

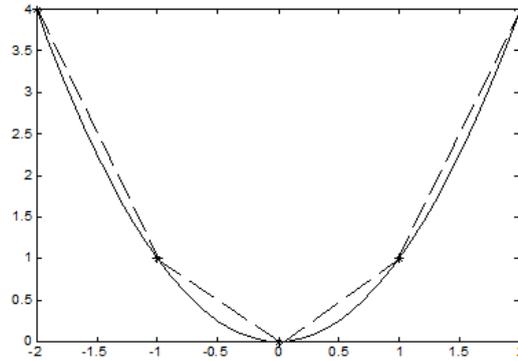


FIGURE 2.4 – Illustration de la reproduction exacte des polynômes. Les étoiles représentent les points de contrôles initiaux  $p_i$ . La courbe représente la fonction limite  $S^\infty p = f$  du schéma 4 points pour  $p_i = f(x_i) = f(i) = i^2$ .

**Lemme 1** Un schéma de subdivision  $S$  qui reproduit de façon exacte les polynômes de degré  $m$  à chaque itération reproduit également de façon exacte les polynômes de degré  $m$  et inversement. i.e  $\forall i \in \mathbb{Z}, p_i^k = f(x_i^k)$  :

$$(S p^k)_i = f(x_i^{k+1}) \iff S^\infty p = f, \quad (2.37)$$

pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ . De plus, pour  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$  et  $p_i = f(x_i)$ ,  $S^\infty p$  est un polynôme ayant le même coefficient dominant que  $f$ .

**Preuve 6** Pour une preuve, voir [Dyn]

Ce lemme peut être interprété de la façon suivante, si on connaît la fonction limite d'un schéma de subdivision qui reproduit les polynômes de façon exacte, on peut trouver le schéma associé à cette fonction limite et inversement, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 3 (Schéma 4 points)** On considère le schéma 4 points défini sur le support  $[-3, 3]$ . Les règles de subdivision de ce schéma sont données par :

$$\begin{cases} (S p)_{2i} = p_i, \\ (S p)_{2i+1} = a_{-3} p_{i-1} + a_{-1} p_i + a_1 p_{i+1} + a_3 p_{i+2}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Ce schéma est connu pour reproduire les polynômes de degré 3 de façon exacte. À partir des équations (2.33) et (2.36), nous avons :

$$\begin{cases} x_i^k = \frac{1}{2^k} i, \\ p_i^k = f(x_i^k), \\ (S p^k)_i = f(x_i^{k+1}), \end{cases}$$

pour  $k = 0$  nous aurons

$$\begin{cases} x_i^0 = i, \\ p_i = f(x_i^0) = f(i), \\ (S p)_i = f(x_i^1) = f(\frac{1}{2}i), \end{cases}$$

dans cet exemple, nous voulons montrer la relation suivante :

$$S^\infty p = f \Leftrightarrow \begin{cases} (S p)_{2i} = p_i, \\ (S p)_{2i+1} = f(\frac{1}{2}(2i+1)) \end{cases}$$

Calcul de  $S$  à partir de  $S^\infty$

Nous avons déjà  $(S p)_{2i} = p_i$ , il nous reste à trouver les poids de la règle

$$(S p)_{2i+1} = a_{-3}p_{i-1} + a_{-1}p_i + a_1p_{i+1} + a_3p_{i+2}.$$

Les poids de cette règle sont donnés à partir de la condition suivante :

$$(S f(2i+1)) = f(\frac{1}{2}(2i+1)). \quad (2.39)$$

À partir de cette dernière relation et pour  $f(x) = x^m, m \in \{0, 1, 2, 3\}$ , nous aurons :

$$\begin{cases} 1 : & a_{-3} + a_{-1} + a_1 + a_3 = 1, \\ x : & -a_{-3} + a_1 + 2a_3 = \frac{1}{2}, \\ x^2 : & a_{-3} + a_1 + 4a_3 = \frac{1}{4}, \\ x^3 : & -a_{-3} + a_1 + 8a_3 = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

La solution de ce système est donnée par :  $\{a_{-3}, a_{-1}, a_1, a_3\} = \{-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, \frac{-1}{16}\}$ , ce qui représente les poids de la règle impaire du schéma 4 points.

Calcul de  $S^\infty$  à partir de  $S$

Pour l'opération inverse il est facile de vérifier que :

$$\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}) : \begin{cases} (S^k p)_{2i} = f(i), \quad i \in \llbracket -3, 3 \rrbracket \\ (S^k f(2i+1)) = \frac{1}{2^{k+1}} f(\frac{1}{2}(2i+1)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} (S^k p)_{2i} = f(i) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (S^k f(2i+1)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(\frac{1}{2}(2i+1)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S^\infty p = f, \quad f \in \pi_3(\mathbb{R}).$$

Rappelons que les seuls résultats connus concernent les schémas qui reproduisent les polynômes de façon exacte, sont sur les schémas de Lagrange centrés, c'est-à-dire ceux où l'interpolation de Lagrange utilise le même nombre de points à droite et à gauche du point à construire.

#### 2.4.2.2/ REPRODUCTION SIMPLE

Les schémas B-splines sont parmi les schémas qui reproduisent les polynômes de degré donné de façon simple. En effet, le principe de ces schémas de subdivision est d'approximation, les points du réseau de contrôle initial ne sont pas sur la surface limite et à chaque itération, ceux de l'itération précédente sont déplacés ou éventuellement supprimés (voir figure 2.5). L'inconvénient majeur de ce principe réside dans le fait que la fonction limite est très difficile à prévoir à partir du réseau de contrôle initial.

**Définition 11** On dit que  $S$  reproduit de façon simple les polynômes de degré au plus  $m$  si pour tout polynôme  $f$  de degré au plus  $m$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}^s$ ,  $p_i = f(x_i)$ , il existe  $g \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$  tel que  $S^\infty p = g$ .

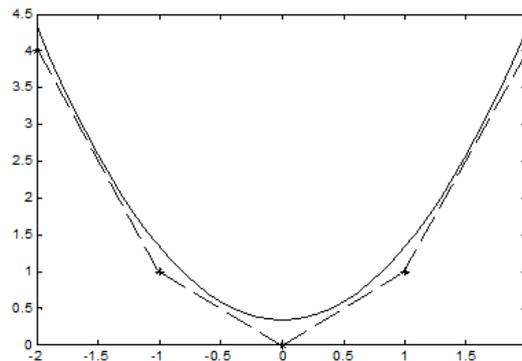


FIGURE 2.5 – Illustration de la reproduction simple des polynômes. Les étoiles représentent les points de contrôles initiaux  $p_i$ . La courbe représente la fonction limite  $S^\infty p$  du schéma B-spline cubique (pour  $p_i = f(i) = i^2$ , les points de contrôle  $p_i$  convergent vers une fonction  $g$ ,  $S^\infty p = g = i^2 + \frac{1}{3}$ ).

Dans ce cas, on ne peut pas déduire les résultats donnés dans le lemme précédent. Une question se pose alors : peut-on construire un schéma de subdivision  $S$  qui reproduise les polynômes de façon simple à partir de sa fonction limite et inversement ?

La réponse à cette question fera l'objet des trois premières sections du chapitre suivant. Elle sera aussi l'idée que nous allons adapter pour construire les schémas de subdivision quasi-linéaires dans la deuxième partie.

Dans la suite on dira que  $S$  reproduit les polynômes de façon exacte pour parler de la reproduction exacte et on dira reproduit les polynômes pour parler des deux types de reproduction.

### 2.4.3/ REPRODUCTION DES POLYNÔMES ET CONTINUITÉ $C^m$

Nous avons vu dans la section (2.2) que si  $S$  reproduit les constantes, il existe un schéma aux différences  $S_1$  d'ordre 1 (théorème 2). Dans le cas de la reproduction des polynômes de degré quelconque, on peut généraliser cette affirmation, de la façon suivante :

**Proposition 5** Si  $S$  reproduit les polynômes de degré au plus  $m$  alors il existe un schéma aux différences d'ordre au plus  $m + 1$ .

**Preuve 7** Pour une preuve, voir [Cavaretta 1991] (proposition 1).

Les deux propositions suivantes donnent les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  d'un schéma de subdivision qui reproduit des polynômes de degré au plus  $m$ .

**Proposition 6** Soit  $S$  un schéma de subdivision uniformément convergent défini en fonction d'un masque  $\{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$  et une fonction de base  $\phi$ . Si  $\phi \in C^m$  alors  $S$  reproduit les polynômes de degré au plus  $m$ .

**Preuve 8** Pour une preuve, voir [Cavaretta 1991] (corollaire 8.2).

**Corollaire 2** Soit  $S$  un schéma de subdivision linéaire. Si  $S$  reproduit les polynômes de degré au plus  $m$ , alors les valeurs  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$  sont les valeurs propres de la matrice de subdivision associée à ce schéma. De plus, si  $S$  reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  alors les valeurs  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$  sont les valeurs propres des deux matrices  $M^1$  et  $M^2$ .

Le simple fait que les valeurs propres  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$  soient les valeurs propres de la matrice de subdivision associée à un schéma de subdivision qui reproduit les polynômes de degré au plus  $m$  ne suffit pas à avoir les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  du schéma. On a besoin d'avoir une condition supplémentaire sur les valeurs propres.

**Proposition 7** Soit  $S$  un schéma de subdivision convergent reproduisant les polynômes de degré au plus  $m$  dont la fonction limite est  $C^m$  alors  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$  sont les valeurs propres de la matrice de subdivision associée à  $S$ . De plus, toutes les valeurs propres  $\lambda_j$ , différentes de  $\{2^{-l}, l = 0, \dots, m\}$ , sont de modules strictement plus petits que  $2^{-m}$ .

**Remarque 2** Les valeurs  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$  sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres  $z^k, z \in \mathbb{R}^s, k \in \mathbb{Z}^s, 0 \leq |k| \leq m$ . Ce qui correspond à :

1. Pour  $s = 1$ ,  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-m}\}$  sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres  $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^m\}$ .
2. Pour  $s = 2$ ,  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-2}, 2^{-2}, \dots, 2^{-m}\}$  sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres  $\{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^{k_1}y^{k_2}, |k_1 + k_2| \leq m\}$ .

#### 2.4.4/ REPRODUCTION DES POLYNÔMES ET ORDRE D'APPROXIMATION

Une fois que l'on s'est assuré de la convergence et de la continuité d'un schéma de subdivision, on souhaite aussi contrôler les erreurs provenant de l'échantillonnage d'une fonction. L'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision permet de mieux contrôler les erreurs sur les points initiaux provenant de l'échantillonnage d'une fonction. Avant de donner le théorème qui fait le lien entre la reproduction des polynômes et l'ordre d'approximation, nous donnons une définition de l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision.

Soit  $S$  un schéma de subdivision uniformément convergent. On associe les points de contrôle  $p_i$  à des valeurs de paramètres  $x_i$  avec  $x_i < x_{i+1}$  et  $h = \max_i \{x_{i+1} - x_i\}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ . Alors on a la définition suivante :

**Définition 12** On dit que  $S$  est un schéma de subdivision approximant d'ordre  $m$  s'il existe une constante  $c$  tel que :

$$\forall f \in C^m([0, 1]), \forall p_i = f(ih), i \in \mathbb{Z}^s \implies \|S^\infty(p) - f\|_\infty \leq ch^m.$$

Cela veut dire qu'une approximation dont le terme d'erreur est  $O(h^m)$  est dite d'ordre  $m$ .

Pour les schémas linéaires qui reproduisent les polynômes de façon exacte, on obtient en utilisant la formule de Taylor [Kui98].

**Théorème 5** *Si  $S$  reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  alors il est approximant d'ordre  $m + 1$ .*

**Preuve 9** *Pour une preuve, voir [Kuijt 1998].*

Dans le cas de la reproduction simple des polynômes, on ne peut pas déduire cette propriété sur l'ordre d'approximation. Il est donc naturel de se poser la question suivante : peut-on estimer l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision qui reproduit les polynômes de façon simple ?

La réponse à cette question sera donnée dans la section 4 du chapitre suivant. La reproduction des polynômes de façon générale donne donc :

- \* reproduction exacte,
  - une condition suffisante pour l'ordre d'approximation (théorème 5),
  - la possibilité de construire un schéma de subdivision à partir de sa fonction limite
- \* reproduction exacte et simple :
  - une condition suffisante pour l'existence de schémas aux différences (proposition 5)
  - une condition nécessaire à la  $C^m$  continuité (proposition 6,7).

## 2.5/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions sur schémas de subdivision linéaires qui sont des outils fondamentaux pour la construction de courbes et de surfaces. Nous avons mis l'accent sur une technique et une approche qui donnent les conditions nécessaires et suffisantes de la continuité  $C^m$  d'un schéma de subdivision à savoir le test du rayon spectral conjoint et la reproduction des polynômes qui seront utilisés pour vérifier les conditions de la continuité  $C^m$  des schémas que nous allons proposer dans la partie 2. Dans le chapitre suivant, nous donnerons un moyen de construction de schémas de subdivision.

## QUASI-INTERPOLATION ET REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Nous avons présenté les principales techniques que nous allons utiliser pour étudier la convergence et la continuité des schémas de subdivision quasi-linéaires. Nous nous intéressons maintenant à la méthode qui sera utilisée pour construire ces schémas de subdivision. Il sera aussi question d'un moyen pour contrôler l'erreur pour des points initiaux provenant de l'échantillonnage d'une fonction, à savoir l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que tout schéma de subdivision  $S$  qui reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  à chaque itération reproduit également de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  et inversement ainsi que tout schéma qui reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  est approximant d'ordre  $m + 1$ .

Dans ce chapitre nous allons voir que tout schéma de subdivision  $S$  convergent qui reproduit de façon simple les polynômes de degré au plus  $m$  "peut également" reproduire des polynômes du même degré, si les points de contrôle initiaux  $p$  sont traités par un opérateur optimal adapté, appelé opérateur quasi-interpolant  $Q$ . Ce qui nous permet de construire un schéma de subdivision qui présente un ordre d'approximation optimal à partir de sa fonction limite. Un quasi-interpolant  $Q$  est un opérateur d'approximation obtenu comme combinaison linéaire de fonctions à support borné,

$$Qf = \sum_i b_i D^i f. \quad (3.1)$$

Cet opérateur a été introduit dans le domaine des théories de l'approximation afin de montrer que toute fonction  $f$  peut être approchée par une fonction limite  $Qf$  de sorte que  $Qf$  représente la meilleure approximation polynômiale de  $f$ .

Dans la section 3.1, nous allons voir qu'on peut construire des données initiales  $Qp$  à partir des points de contrôle initiaux  $p$  pour que l'opérateur limite d'un schéma de subdivision  $S^\infty$  vérifie ( $S^\infty Qp = f \Leftrightarrow S Qf = Q\sigma f$ ) pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ . Dans la section 3.2, nous utilisons les paramétrisations paire et impaire ainsi que les propriétés de symétrie sur des schémas de subdivision afin de proposer une formule de la fonction limite des schémas de subdivision. Dans la section 3.3, nous verrons comment l'identification des relations entre un opérateur de subdivision limite  $S^\infty$ , un opérateur de subdivision  $S$  et un opérateur quasi-interpolant  $Q$  peuvent être appliqués pour construire un schéma de subdivision convergent. Dans la section 3.4, nous allons voir comment l'extension de l'opérateur quasi-interpolant  $Q$  à un opérateur quasi-interpolant discret  $Q^*$  peut être uti-

lisée afin de montrer que tout schéma de subdivision reproduisant de façon simple les polynômes de degré au plus  $m$  possède un ordre d'approximation optimal.

### 3.1/ REPRODUCTION ET QUASI-INTERPOLATION

On dispose de deux résultats fondamentaux pour la reproduction exacte des polynômes : le théorème 4 et le lemme 1. Deux questions dans le cas de la reproduction simple des polynômes se posent alors :

- Comment montrer que  $S^\infty p$  est un polynôme ayant le même coefficient dominant que  $f$  ?
- Comment montrer que tout schéma de subdivision  $S$  qui reproduit les polynômes de degré au plus  $m$  à chaque itération reproduit également des polynômes de degré au plus  $m$  et inversement ?

La réponse à ces deux questions revient à montrer que pour tout schéma de subdivision  $S$  convergent qui génère des polynômes de degré au plus  $m$  "peut également" reproduire des polynômes du même degré, si les points de contrôle initiaux  $p$  sont traités par un opérateur quasi-interpolant optimal adapté  $Q$ , de sorte que :

$$\forall Qp_i = Qf(i), S^\infty Qp_i = S^\infty Qf = f \Leftrightarrow SQf = Q\sigma f,$$

où  $\sigma$  est un opérateur de dilatation défini par :

$$\sigma f(\cdot) = f\left(\frac{\cdot}{2}\right).$$

L'idée est de traiter les points de contrôle initiaux  $p_i$  par un opérateur  $Q$  qui peut être vu ici comme un opérateur d'échantillonnage afin de prévoir la fonction limite générée par l'application d'un schéma de subdivision approximant à un ensemble de points de contrôle initiaux (voir figure 3.1). Autrement dit, au lieu d'appliquer le schéma de subdivision sur un ensemble de points de contrôle  $p_i$  et chercher par la suite vers quelle fonction limite ces points de contrôles convergent, on applique le schéma de subdivision sur un ensemble de points de contrôle bien choisi dont on connaît déjà la fonction limite générée par l'application de ce schéma de subdivision.

L'utilisation de l'opérateur quasi-interpolant sera d'une grande utilité dans la suite de ce document. En effet, traiter les points de contrôle par un opérateur quasi-interpolant donne un moyen efficace pour construire des schémas de subdivision convergents à partir de leurs fonctions limites (section 3.3). De plus, l'extension de cet opérateur à un opérateur quasi-interpolant discret  $Q^*$  donne un moyen concret pour montrer l'ordre d'approximation de ces schémas de subdivision (section 3.4).

Revenons aux deux questions posées précédemment, la première question a un lien direct avec la génération des polynômes.

**Lemme 2** Soit  $\pi_m(\mathbb{Z}^s)$  un espace de polynômes de degré au plus  $m$ . Si  $S : \pi_m(\mathbb{Z}^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{Z}^s)$  une application de  $\pi_m(\mathbb{Z}^s)$  vers  $\pi_m(\mathbb{Z}^s)$ , et  $S$  convergent, alors  $S^\infty$  est une application de  $\pi_m(\mathbb{Z}^s)$  vers  $\pi_m(\mathbb{R}^s)$  et  $S$  génère des polynômes de même degré que les fonctions limites  $S^\infty p$  pour certaines données initiales  $p$ , pour tout  $p \in \pi_m(\mathbb{Z}^s)$ .

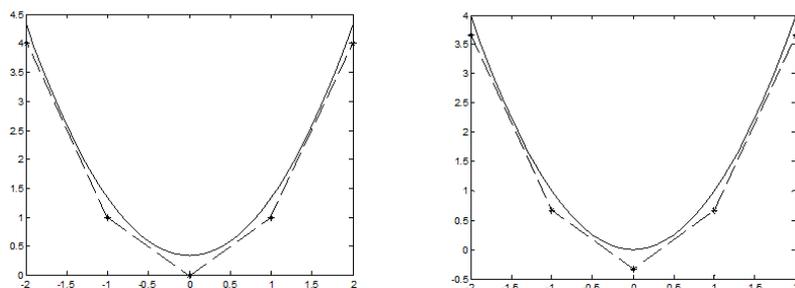


FIGURE 3.1 – La figure à gauche représente la fonction limite  $S^\infty p$  du schéma B-spline cubique (pour  $p_i = f(i) = i^2$ , les points de contrôle  $p_i$  convergent vers une fonction  $g$ ,  $S^\infty p = g = i^2 + \frac{1}{3}$ ). La figure à droite représente la fonction limite  $S^\infty Qp$  du schéma B-spline cubique appliqué à l'ensemble de points de contrôle échantillonné par l'application d'un opérateur  $Q$  (pour  $p_i = f(i)$ ,  $Qp_i = Qf(i) = i^2 - \frac{1}{3}$ , les points de contrôle  $Qp_i$  convergent vers une fonction  $f$ ,  $S^\infty Qp = f = i^2$ ).

**Preuve 10** Pour la preuve, voir [Levin 2000].

Ce lemme montre tout simplement que le schéma de subdivision  $S$  génère des polynômes du même degré que les fonctions limites  $S^\infty p$ .

La réponse à la deuxième question est donnée dans le lemme suivant :

**Lemme 3** Si  $S^\infty$  est une application injective de  $\pi_m(\mathbb{Z}^s)$  vers  $\pi_m(\mathbb{R}^s)$ , alors il existe un opérateur  $Q : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{Z}^s)$  qui représente l'opérateur inverse de  $S^\infty$  de sorte que :

$$S^\infty Q = Id \iff SQ = Q\sigma, \quad \text{sur } \pi_m(\mathbb{R}^s). \quad (3.2)$$

De plus, pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$  les coefficients dominants de  $Qf$  sont les mêmes que ceux de  $f$ .

**Preuve 11** Pour la preuve, voir [Levin 2000]

Cela signifie qu'il existe un opérateur  $Q$  qui représente l'opérateur inverse de  $S^\infty$  tel que :

1.  $SQ = Q\sigma$  dans l'espace  $\pi_m(\mathbb{R}^s)$ , c'est-à-dire que les deux opérateurs  $S$  et  $\sigma$  sont similaires dans l'espace  $\pi_m(\mathbb{R}^s)$ .
2.  $S^\infty Qf = f, \forall f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ , c'est-à-dire que  $S$  reproduit des polynômes de degré au plus  $m$  et que les coefficients dominants de  $Qf$  sont les mêmes coefficients dominants de  $f$  pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ .

### 3.2/ EQUATION DE LA FONCTION LIMITE D'UN SCHÉMA DE SUBDIVISION

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la fonction limite d'un schéma de subdivision jouait un rôle important dans l'étude de la continuité d'un schéma de subdivision.

Dans cette section nous donnerons une formule à l'équation de la fonction limite  $S^\infty p$  dans le but de l'utiliser pour la construction des schémas de subdivision.

A. Levin a montré dans [Levin 2003a], que la fonction limite  $S^\infty p$  peut être donnée comme une fonction polynomiale par l'équation suivante :

$$\forall f \in \pi_m, S^\infty f(\cdot) = f + \sum_{1 < |i| \leq m} \frac{m_i}{i!} D^i f(\cdot) \quad (3.3)$$

où les moments  $m_i$  sont donnés par :

$$m_i = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^s} \phi(-\beta) \beta^i. \quad (3.4)$$

Dans ce qui suit, nous travaillons sur l'espace des polynômes de degré au plus 3, afin de proposer une autre formule plus adaptée à la fonction limite d'un schéma de subdivision reproduisant les polynômes de degré au plus 3. Cette formule sera utilisée par la suite (partie 2) pour montrer certaines propriétés sur les schémas de subdivision que nous allons proposer dans cette thèse.

**Proposition 8** *Soit  $S$  un schéma de subdivision défini par son masque  $a$  sur un support  $\Omega$ . Si  $S$  vérifie la condition de raffinement 5 (corollaire 1), alors la fonction limite  $S^\infty p$  peut être donnée comme une fonction polynomiale par :*

$$\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s), S^\infty f(\cdot) = f(\cdot) + \nabla L \nabla^t f(\cdot), \quad (3.5)$$

où  $L \in \mathbb{R}^s$  est une matrice carrée de dimension  $(s, s)$  et

$$\Delta = \nabla(\nabla^t) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_s}.$$

Afin de montrer cette proposition, nous donnons la définition et le corollaire suivants.

**Définition 13 (schémas symétriques)** *Soit  $S$  un schéma de subdivision défini en fonction d'un masque  $a$  sur un support  $\Omega$ .*

– *On dit que le schéma  $S$  est de symétrie impaire si :*

$$a_{-\alpha} = a_\alpha, \quad \alpha \in \Omega. \quad (3.6)$$

– *On dit que le schéma  $S$  est de symétrie paire si :*

$$a_{-\alpha} = a_{\alpha-1}, \quad \alpha \in \Omega. \quad (3.7)$$

**Corollaire 3** *Soit  $S$  un schéma de subdivision défini en fonction d'un masque  $a$  sur un support  $\Omega$ . Soit  $\phi$  la fonction de base associée à  $S$  alors :*

– *le schéma  $S$  est primal :*

$$a_{-\alpha} = a_\alpha \Leftrightarrow \phi(-\beta) = \phi(\beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega, \quad (3.8)$$

– *le schéma  $S$  est dual :*

$$a_{-\alpha} = a_{\alpha-1} \Leftrightarrow \phi(-\beta) = \phi(\beta - 1), \quad \alpha, \beta \in \Omega. \quad (3.9)$$

**Preuve 12** Soit  $S$  un schéma de subdivision uniformément convergent. Son masque  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  détermine une unique fonction continue à support compact  $\phi$  qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\forall \beta \in \Omega, \phi(\beta) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(2\beta - \alpha) \quad (3.10)$$

$$\sum_{\beta \in \Omega} \phi(\beta) = 1. \quad (3.11)$$

– Pour montrer que  $\begin{cases} a_{-\alpha} = a_\alpha \implies \phi(-\beta) = \phi(\beta) \\ a_{-\alpha} = a_{1-\alpha} \implies \phi(-\beta) = \phi(\beta - 1) \end{cases}$ , nous avons seulement besoin de calculer les valeurs de  $\phi$  à partir des deux équations (3.10) et (3.11).

– Pour montrer que  $\begin{cases} \phi(-\beta) = \phi(\beta) \implies a_{-\alpha} = a_\alpha \\ \phi(-\beta) = \phi(1 - \beta) \implies a_{-\alpha} = a_{\alpha-1} \end{cases}$ , nous supposons que :

$$\begin{cases} \phi(-\beta) = \phi(\beta) \\ \phi(-\beta) = \phi(\beta - 1) \end{cases},$$

pour tout  $\alpha, \beta \in \Omega$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(-2\beta - \alpha) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(2\beta - \alpha) \\ \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(-2\beta - \alpha) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(2\beta - \alpha - 1) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Omega} a_{-\alpha} \phi(-2\beta + \alpha) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(2\beta - \alpha) \\ \sum_{\alpha \in \Omega} a_{-\alpha} \phi(-2\beta + \alpha) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(2\beta - \alpha - 2) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Omega} a_{-\alpha} \phi(-(2\beta - \alpha)) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \phi(2\beta - \alpha) \\ \sum_{\alpha \in \Omega} a_{-\alpha} \phi(-(2\beta - \alpha)) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_{\alpha-1} \phi((2\beta - \alpha) - 1) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} a_{-\alpha} = a_\alpha \\ a_{-\alpha} = a_{\alpha-1} \end{cases}. \end{aligned}$$

**Preuve 13 (preuve de la proposition)** Soit  $S$  un schéma de subdivision primal défini sur un support  $\Omega = \llbracket -\epsilon, \epsilon \rrbracket$  qui vérifie la condition 5 (corollaire 1), alors :

$$S^\infty p. = S^\infty f(.) = \sum_{\alpha \in \Omega} f(\alpha) \phi(. - \alpha) = \sum_{\beta \in \Omega} f(\beta + .) \phi(-\beta), \forall f \in \pi_m, m \leq 3. \quad (3.12)$$

Étant donné un polynôme  $f$  de degré au plus  $m \leq 3$ , le développement de  $f$  en série de

Taylor est donné par :

$$f(\cdot + \beta) = \sum_{0 \leq |i| \leq m} \frac{\beta^i}{i!} D^i f(\cdot) = f(\cdot) + \sum_{1 \leq |i| \leq m} \frac{\beta^i}{i!} D^i f(\cdot).$$

Par substitution dans l'équation (3.12), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} S^\infty f(\cdot) &= \sum_{\beta \in \Omega} (f(\cdot) + \sum_{1 \leq |i| \leq m} \frac{\beta^i}{i!} D^i f(\cdot)) \phi(-\beta) \\ &= f(\cdot) \sum_{\beta \in \Omega} \phi(-\beta) + \sum_{\beta \in \Omega} \left( \sum_{1 \leq |i| \leq m} \frac{\beta^i}{i!} D^i f(\cdot) \right) \phi(-\beta) \\ &= f(\cdot) + \sum_{1 \leq |i| \leq m} \left( \sum_{\beta \in \Omega} \frac{\beta^i}{i!} \phi(-\beta) D^i f(\cdot) \right) \\ &= f(\cdot) + \sum_{1 \leq |i| \leq m} \left( \sum_{\beta \in \Omega^-} \frac{\beta^i}{i!} \phi(-\beta) D^i f(\cdot) \right) + \sum_{\beta \in \Omega^+} \frac{\beta^i}{i!} \phi(-\beta) D^i f(\cdot), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \Omega = \llbracket -\epsilon, \epsilon \rrbracket \\ \Omega^- = \llbracket -\epsilon, 0 \rrbracket, \\ \Omega^+ = \llbracket 0, \epsilon \rrbracket \end{cases}$$

$$\Rightarrow S^\infty f(\cdot) = f(\cdot) + \sum_{1 \leq |i| \leq m} \left( \sum_{\beta \in \Omega^+} \frac{(-\beta)^i}{i!} D^i f(\cdot) \right) \phi(\beta) + \frac{\beta^i}{i!} D^i f(\cdot) \phi(-\beta).$$

À partir de l'équation (3.8) (Corollaire 3) nous avons  $\phi(-\beta) = \phi(\beta)$ , alors :

$$\begin{aligned} S^\infty f(\cdot) &= f(\cdot) + \sum_{1 \leq |i| \leq m} \left( \sum_{\beta \in \Omega^+} \frac{(-\beta)^i + \beta^i}{i!} \phi(-\beta) D^i f(\cdot) \right) \\ &= f(\cdot) + \sum_{1 \leq |2i| \leq m} \left( \sum_{\beta \in \Omega^+} \frac{(2\beta^{2i})}{2i!} \phi(-\beta) D^{2i} f(\cdot) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall f \in \pi_m(\mathbb{R}^s), S^\infty f(\cdot) = f + \sum_{1 < |2i| \leq m} \frac{m_{2i}}{(2i)!} D^{2i} f(\cdot), \quad (3.13)$$

où les moments  $m_{2i}$  sont donnés par :

$$m_{2i} = \sum_{\beta \in \Omega^+} 2\phi(-\beta) \beta^{2i}.$$

Pour  $i = (i_1, i_2, \dots, i_s) \in \mathbb{Z}^s$  et  $x \in \mathbb{R}^s$ .  $|i| = |i_1| + |i_2| + \dots + |i_s|$ ,  $i! = i_1! i_2! \dots i_s!$ , et  $x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s}$ .  
Pour  $i \geq 0$ , les dérivées partielles  $D^i$  sont données par :

$$D^i f = \frac{\partial^{|i|} f}{\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_s} x_s}.$$

Par substitution dans l'équation (3.13) nous aurons :

$$\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s), S^\infty f(\cdot) = f(\cdot) + \nabla L \nabla^t f(\cdot),$$

$$L = C \begin{pmatrix} m_{2,0,0,\dots,0} & m_{1,1,0,\dots,0} & \cdot & \cdot & m_{0,0,\dots,1,1} \\ m_{1,1,0,\dots,0} & m_{0,2,0,\dots,0} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{0,0,\dots,1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{0,\dots,2} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Dans le cas d'un schéma dual, on utilise la même preuve pour le cas d'un schéma primal avec :

$$\begin{cases} \Omega = \llbracket -\epsilon, \epsilon - 1 \rrbracket \\ \phi(-\beta) = \phi(\beta - 1) \end{cases} .$$

**Exemple 4** Soit  $S : l(\mathbb{Z}) \rightarrow l(\mathbb{Z})$  l'opérateur de subdivision B-spline cubique défini par un masque  $a = [\frac{1}{8} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{8}]$  sur le support  $\Omega = \llbracket -2, 2 \rrbracket$ . Soit  $\phi$  une fonction de base polynômiale par morceaux.

À partir des équations (3.10) et (3.11), on peut voir que :

$$\begin{cases} \phi(-2) = \phi(2) = 0 \\ \phi(-1) = \phi(1) = \frac{1}{6} \\ \phi(0) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Comme l'opérateur de subdivision B-spline cubique  $S$  reproduit des polynômes de degré 3, d'après la propriété 2,  $S^\infty$  reproduit des polynômes de degré 3, et  $(S^\infty p)_x$  est donné à partir de l'équation (3.13) par :

$$\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}), (S^\infty p)_x = S^\infty f(x) = f(x) + \sum_{1 < |2i| \leq 3} \frac{m_{2i}}{(2i)!} D^{2i} f(x) \quad (3.15)$$

où les moments  $m_{2i}$  sont donnés par :

$$m_{2i} = \sum_{\beta \in \Omega^+} 2\phi(-\beta)\beta^{2i}. \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) donne :

$$m_2 = 2\phi(1) + 2\phi(2) = \frac{1}{3}$$

Par substitution dans l'équation (3.15), on trouve :

$$(S^\infty P)_x = (S^\infty f(x)) = f(x) + \frac{1}{6}\Delta f(x), \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}). \quad (3.17)$$

Pour  $p_x = f(x) = x^k, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$  alors :

$$\begin{aligned} S^\infty(x^0) &= 1 \\ S^\infty(x^1) &= x \\ S^\infty(x^2) &= x^2 + \frac{1}{3} \\ S^\infty(x^3) &= x^3 + x \end{aligned}$$

À partir de la proposition 8 et la première partie de l'équivalence donnée dans l'équation (3.2)(lemme 3), nous donnons une proposition qui nous permettra par la suite de calculer l'opérateur quasi-interpolant  $Q$  à partir d'un schéma de subdivision  $S$ .

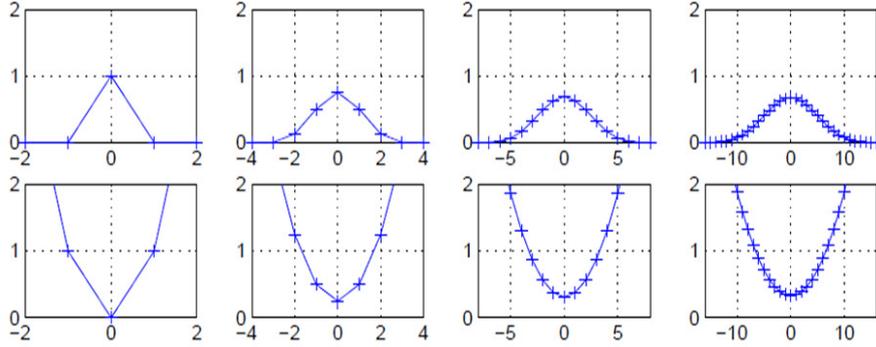


FIGURE 3.2 – Chaque ligne représente un polygone défini par le vecteur de points de contrôle initiaux  $p$  et trois pas de subdivision successive :  $(S^1 p)$ ,  $(S^2 p)$  et  $(S^3 p)$  où  $S$  est le schéma B-spline cubique. La première ligne :  $p = \delta_{i,0}$ . La deuxième ligne  $p = x^2$  converge vers  $S^\infty p = x^2 + \frac{1}{3}$ .

**Proposition 9** Soient  $S^\infty : \pi_3(\mathbb{R}^s) \rightarrow \pi_3(\mathbb{Z}^s)$  une application injective,  $Q : \pi_3(\mathbb{Z}^s) \rightarrow \pi_3(\mathbb{R}^s)$  un opérateur quasi-interpolant. Alors la relation  $S^\infty Q = Id$  implique :

$$S^\infty f(\cdot) = f(\cdot) + \nabla L \nabla^t f(\cdot) \Leftrightarrow Qf(\cdot) = f(\cdot) - \nabla L \nabla^t f(\cdot), \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s), L \in \mathbb{R}^{s \times s}. \quad (3.18)$$

**Preuve 14** On a  $S^\infty Q = Id$ , alors  $\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s)$  :

$$\begin{aligned} S^\infty Qf(\cdot) &= f(\cdot) \\ \Leftrightarrow S^\infty(Qf(\cdot)) &= S^\infty(f(\cdot) - \nabla L \nabla^t f(\cdot)) \\ \Leftrightarrow S^\infty(Qf(\cdot)) &= S^\infty(f(\cdot)) - S^\infty(\nabla L \nabla^t f(\cdot)) \\ \Leftrightarrow S^\infty(Qf(\cdot)) &= (f(\cdot) + \nabla L \nabla^t f(\cdot)) - (\nabla L \nabla^t f(\cdot) + \sum_{|4i|=4} \frac{m_{4i}}{(4i)!} D^{4i} f(\cdot)), \end{aligned}$$

on a  $\forall f \in \pi_3, D^{4i} f(\cdot) = 0$ , d'où la preuve de la relation (3.18).i.e.

$$Si \quad S^\infty = Id + \nabla L \nabla^t : \quad Q = Id - \nabla L \nabla^t.$$

**Remarque 3** Notez que l'opérateur quasi-interpolant des schémas qui reproduisent de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  est donné par :

$$Qf = f \quad \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s). \quad (3.19)$$

En effet, à partir du lemme 1, nous avons  $S^\infty p = S^\infty f = f$ . De plus nous avons  $S^\infty Qf = f$  donc  $\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s), Qf = f$ .

### 3.3/ CONSTRUCTION DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION CONVERGENTS

Les théories de la reproduction des polynômes représentent un moyen efficace pour construire des schémas de subdivision convergents. Dans le chapitre précédent (exemple 3), nous avons vu qu'on peut construire un schéma de subdivision qui reproduit de façon exacte les polynômes de degré donné à partir de sa fonction limite.

Dans cette section nous allons voir comment l'identification des relations entre un opérateur de subdivision  $S$  et un opérateur quasi-interpolant  $Q$  peut être appliquée pour construire des schémas de subdivision convergents dans le cas de la reproduction simple des polynômes. Nous donnons également un exemple d'application, pour mieux comprendre la relation entre l'opérateur quasi-interpolant  $Q$  et l'opérateur de subdivision  $S$ .

La deuxième partie de l'équivalence donnée dans l'équation (3.2) va nous permettre de calculer l'opérateur de subdivision  $S$  à partir d'un opérateur quasi-interpolant  $Q$  à l'équation connue. En effet, la relation :

$$SQ = Q\sigma, \quad (3.20)$$

donne des informations importantes sur les valeurs et vecteurs propres de  $S$ . Soient  $f(x) = x^k$ ,  $k \leq 3$ ,  $x \in \mathbb{R}^s$ , et  $\sigma f(x) = f(\frac{x}{2})$ , par substitution dans l'équation (3.20) :

$$SQf(x) = Q\sigma f(x) = 2^{-k}Q(x^k), \quad k \leq 3. \quad (3.21)$$

À partir de l'équation (3.21) nous pouvons voir que pour tout  $k \leq 3$ ,  $Q(x^k)$  est le vecteur propre de  $S$  associé à la valeur propre  $2^{-k}$ .

**Proposition 10** Soit  $(Sp)_\tau \in l(\mathbb{Z}^s)$  une règle de subdivision en un point  $\tau \in \mathbb{Z}^s$  défini sur un support fini  $\Lambda = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\} \in \mathbb{Z}^s$  par :

$$(Sp)_\tau = a_1 p_{\tau_1} + \dots + a_n p_{\tau_n}. \quad (3.22)$$

Soit  $(Pr)_\alpha$  un vecteur-colonne de dimension  $|\tau|$ , qui représente les poids de la règle  $(Sp)_\tau$ ,

$$(Pr)_\tau = (a_1, \dots, a_n)^t, \quad (3.23)$$

Si  $S$  vérifie la relation (3.21), alors les poids  $(Pr)_\tau$  sont définis comme étant solutions de l'équation suivante :

$$\Sigma_{Q(\Lambda)}(Pr)_\tau = d_{Q(\tau)}, \quad (3.24)$$

où  $\Sigma_{Q(\Lambda)}$  est une matrice de dimension  $(C_{m+s}^s \times |\Omega|)$  et  $d$  est un vecteur-colonne de dimension  $C_{m+s}^s$  tel que :

$$\begin{cases} \Sigma_{kj} = Q(x^k)(\tau_j) \\ d_k = 2^{-k}Q(x^k)(\tau) \end{cases},$$

pour tout  $0 \leq |k| \leq m$ , et  $j \in \{1, \dots, |\Lambda|\}$ .

**Exemple 5** Pour un ensemble de points de contrôle  $p \in \mathbb{Z}$ , nous définissons un ensemble de nouveaux points de contrôle  $(Sp)_\tau$ , pour  $\tau \in [2i - 1, 2i + 1]$ , par le schéma B-spline cubique. L'ensemble des nouveaux points de contrôle  $(Sp)_\tau$  contient deux types de règles

de subdivision (voir la figure 3.3) :

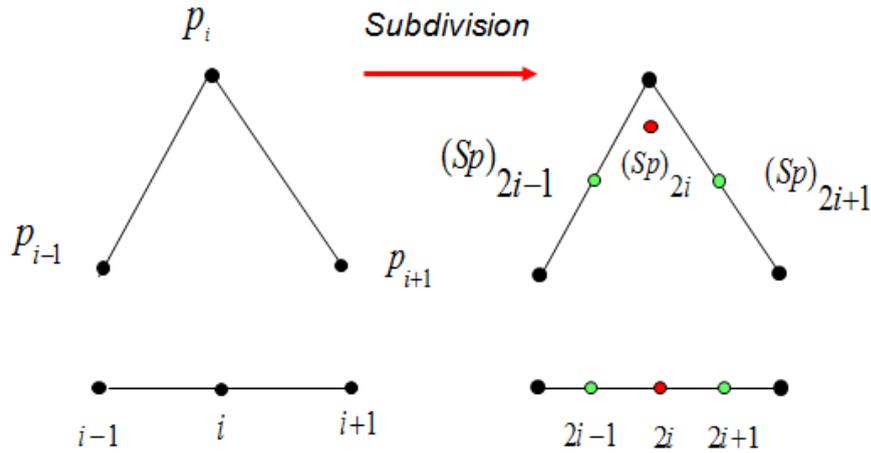


FIGURE 3.3 – Un exemple de subdivision : schéma B-spline cubique sur le support  $[i - 1, i + 1]$

- Règle pour les points pairs :

$$(Sp)_{2i} = a_0 p_{i-1} + a_0 p_i + a_1 p_{i+1}.$$

- Règle pour les points impairs :

$$\begin{cases} (Sp)_{2i-1} = b_0 p_{i-1} + b_1 p_i \\ (Sp)_{2i+1} = c_0 p_i + c_1 p_{i+1} \end{cases}.$$

À partir de l'équation (3.21) les variables  $\{a_j, j = 0, 1, 2\}$ ,  $\{b_j, j = 0, 1\}$  et  $\{c_j, j = 0, 1\}$  sont déterminées par les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} S(Qp)_{2i} &= \frac{1}{2^k}(Qp)_{2i} \\ S(Qp)_{2i-1} &= \frac{1}{2^k}(Qp)_{2i-1} \\ S(Qp)_{2i+1} &= \frac{1}{2^k}(Qp)_{2i+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(Qf)(2i) &= \frac{1}{2^k}(Qf)(2i) \\ S(Qf)(2i-1) &= \frac{1}{2^k}(Qf)(2i-1) \\ S(Qf)(2i+1) &= \frac{1}{2^k}(Qf)(2i+1) \end{cases}$$

Notons que  $Q$  est l'opérateur quasi-interpolant B-spline cubique donné dans l'exemple 4 par l'équation suivante,

$$Qp = Qf = f - \frac{1}{6}\Delta f.$$

Supposons que :  $f(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . La substitution de  $f(x)$  par  $x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$

donne :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 & = 1 \\ (i-1)a_0 + ia_1 + (i+1)a_2 & = i \\ ((i-1)^2 - \frac{1}{3})a_0 + ((i)^2 - \frac{1}{3})a_1 + ((i+1)^2 - \frac{1}{3})a_2 & = \frac{1}{4}((2i)^2 - \frac{1}{3}) \end{cases},$$

$$\begin{cases} b_0 + b_1 & = 1 \\ (i-1)b_0 + ib_1 & = \frac{1}{2}(2i-1) \\ ((i-1)^2 - \frac{1}{3})b_0 + ((i)^2 - \frac{1}{3})b_1 & = \frac{1}{4}((2i-1)^2 - \frac{1}{3}) \end{cases},$$

$$\begin{cases} c_0 + c_1 & = 1 \\ ic_0 + (i+1)c_1 & = \frac{1}{2}(2i+1) \\ ((i)^2 - \frac{1}{3})c_0 + ((i+1)^2 - \frac{1}{3})c_1 & = \frac{1}{4}((2i+1)^2 - \frac{1}{3}) \end{cases}.$$

Les solutions de ces trois systèmes sont données par

$$\begin{aligned} a_j &= [\frac{1}{8} \frac{3}{4} \frac{1}{8}], \\ b_j = c_j &= [\frac{1}{2} \frac{1}{2}], \end{aligned}$$

d'où les règles de subdivision B-spline cubique.

### 3.4/ QUASI-INTERPOLANT DISCRET

Dans le chapitre précédent (section 2.4.4), nous avons vu que tout schéma de subdivision  $S$  qui reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $m$  est approximant d'ordre  $m+1$ . Dans le cas de la reproduction simple de polynômes, on ne peut pas déduire une telle propriété mais on peut introduire un opérateur quasi-interpolant discret  $Q^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  afin de montrer que nous pouvons avoir un ordre d'approximation optimal. Ceci sera particulièrement intéressant pour les schémas B-splines.

Dans la section précédente nous avons défini l'opérateur  $Q$  comme un opérateur de  $\pi_m(\mathbb{Z}^s)$  vers  $\pi_m(\mathbb{R}^s)$ .

Dans cette section, nous allons voir comment l'extension de cet opérateur dans  $C(\mathbb{R}^s)$  de  $l(\mathbb{Z}^s)$  peut être utilisée afin de montrer que nous pouvons avoir un ordre d'approximation optimal. Supposons que  $S$  est un schéma de subdivision approximant uniformément convergent, alors nous avons l'égalité  $S^\infty Qf = f$  pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ . Étant donné que  $S^\infty$  est un opérateur invariant par translation sur l'espace de polynôme  $\pi_m$ , alors l'opérateur  $Q$  qui représente l'opérateur inverse de  $S^\infty$  est aussi invariant par translation sur  $\pi_m$ .

La proposition 8 montre que  $Q$  peut être représenté comme une somme d'opérateurs différentiels,

$$Q = \sum_{|i| \leq m} b_i D^i. \quad (3.25)$$

Pour l'extension de l'opérateur  $Q$  à un opérateur invariant par translation  $Q^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$ , on utilise les opérateurs aux différences  $d^m$  d'ordre  $m$  à la place des opérateurs différentiels donnés dans l'équation (3.25). L'utilisation des opérateurs aux différences dans cette équation, donne une preuve du lemme suivant :

**Lemme 4 (Extension à  $C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(\mathbb{R}^s)$ )** L'opérateur  $Q : \pi_m(\mathbb{Z}^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$  peut être étendu à un opérateur invariant par translation  $Q^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  qui est bornée et local, à savoir, qu'il existe un domaine ouvert et borné  $D \in \mathbb{R}^s$  et une constante  $c > 0$ , de sorte que :

$$|Q^* f(i)| \leq c \|f\|_{\infty, i+D}.$$

**Exemple 6** L'opérateur quasi-interpolant B-spline cubique est donné par

$$Qf = f - \frac{1}{6} \Delta f \quad \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}), \quad (3.26)$$

avec  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}$ . Pour tout  $p_i = f(x_i)$  l'opérateur aux différences d'ordre 2,  $d^2$  est donné par :

$$d^2 f(x_i) = f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}) \quad (3.27)$$

On remplace l'opérateur différentiel  $\frac{\partial^2}{\partial^2 x}$  donné dans l'équation (3.25) par l'opérateur aux différences  $d^2$  d'ordre 2, l'opérateur quasi-interpolant discret B-spline cubique est donné par :

$$Q^* f(x_i) = -\frac{1}{6} f(x_{i-1}) + \frac{4}{3} f(x_i) - \frac{1}{6} f(x_{i+1}) \quad \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}). \quad (3.28)$$

Par un calcul simple, on montre qu'il existe un domaine ouvert et borné  $D \in \mathbb{R}$  et une constante  $c = \frac{4}{3} > 0$ , de sorte que :

$$|Q^* f(i)| \leq \frac{4}{3} \|f\|_{\infty, i+D}$$

L'extension de l'opérateur  $Q$  à  $C(\mathbb{R}^s)$  donne un ordre d'approximation optimal. C'est-à-dire que nous pouvons approcher toute fonction continue  $f$  par  $S^\infty Q^* f$ . Cette méthode est connue sous le nom de quasi-interpolation (pour plus de détail sur la quasi-interpolation voir les travaux de C. de Boor et al. ([deBoor 1990], [deBoor 1992])). Pour les schémas B-splines, on obtient en utilisant les résultats du lemme précédent et la formule de Taylor [Levin 2000].

**Lemme 5** Soit  $S$  un schéma de subdivision uniformément convergent, soit  $Q^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  un opérateur borné (dans le sens du Lemme 4) de sorte que :

$$S^\infty Qf = f \quad f \in \pi_m(\mathbb{R}^s).$$

Alors il existe une constante  $c$  de sorte que :

$$\|S^\infty Q^* f - f\| \leq c \|D^{m+1} f\|_\infty,$$

pour tout  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$ ,  $\|D^{m+1} f\|_\infty \leq \infty$  avec la notation  $\|D^{m+1} f\|_\infty = \max\{\|D^s f\|_\infty, |s| = m+1\}$  (le maximum des opérateurs différentiels de degré  $m+1$ ).

**Preuve 15** Pour une preuve, voir [Levin 2000].

Le lemme précédent montre que  $S^\infty Q^* f$  est très proche localement de la meilleure approximation uniforme de  $f$  dans  $C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$ . Tandis que dans le cas de la reproduction exacte des polynômes  $S^\infty Q^* f$  est la meilleure approximation uniforme de  $f$  (voir figure 3.4).

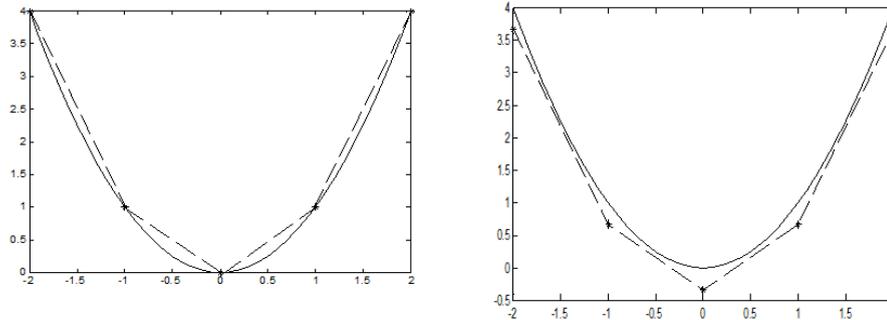


FIGURE 3.4 – Les ensembles de points de contrôle  $Qp_i = Qf(i) = Q(i^2)$  qui génèrent des fonctions limites  $S^\infty Q^*f$ . À gauche, l'ensemble de points de contrôle qui génère la fonction limite d'un schéma interpolant. À droite, l'ensemble de points de contrôle qui génère la fonction limite d'un schéma approximant (ici le schéma B-spline cubique).

### 3.4.1/ ESTIMATIONS D'ERREURS ET ORDRE D'APPROXIMATION

À partir du lemme 5, nous pouvons estimer les erreurs provenant de l'échantillonnage des points de contrôle  $p_i$ . En effet, pour  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$ , et pour tout  $p_i^k = f(x_i^k)$ ,  $x_i^k = \frac{1}{2^k}i = ih$ , on démontre les estimations d'erreurs suivantes, avec la notion  $\|D^{m+1}f\|_\infty = \max\{\|D^s f\|_\infty, |s| = m + 1\}$ .

- Pour les fonctions :

$$\|S^\infty Q^*f - f\| \leq ch^{m+1}\|D^{m+1}f\|_\infty.$$

- Pour les dérivées partielles d'ordre  $j < m + 1$  :

$$\|D^j S^\infty Q^*f - D^j f\| \leq ch^{m+1-j}\|D^{m+1}f\|_\infty.$$

Après avoir introduit les notions et les propriétés les plus importantes des schémas de subdivision, nous nous intéressons dans la section suivante à deux familles de ces schémas de subdivision : les schémas approximants et les schémas interpolants. Nous présentons les avantages et les inconvénients de chacune de ces catégories. Nous donnons également quelques schémas de subdivision existants dans la littérature qui répondent à quelques-uns des inconvénients des schémas interpolants.

## 3.5/ DIFFÉRENTS SCHÉMAS DE SUBDIVISION LINÉAIRES

Dans cette section, on fait un rapide tour d'horizon des schémas linéaires les plus courants ainsi que quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes. Compte-tenu de ce qui va suivre, nous évoquerons un moyen d'obtenir des schémas à plusieurs variables convergents.

Un moyen pour construire des schémas à plusieurs variables convergents est de les définir comme produit tensoriel. Soient  $S_1 : l(\mathbb{Z}^{s_1}) \rightarrow l(\mathbb{Z}^{s_1})$  et  $S_2 : l(\mathbb{Z}^{s_2}) \rightarrow l(\mathbb{Z}^{s_2})$  deux schémas de subdivision définis par leurs masques  $a_1 \in l(\mathbb{Z}^{s_1})$  et  $a_2 \in l(\mathbb{Z}^{s_2})$ . Le schéma

de subdivision  $S = S_1 \otimes S_2 : l(\mathbb{Z}^{s_1+s_2}) \rightarrow l(\mathbb{Z}^{s_1+s_2})$  est défini comme produit tensoriel des deux schémas  $S_1$  et  $S_2$  par :

$$(Sp)_{i_1, i_2} = \sum_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^{s_1+s_2}} a_{1, i_1-2j_1} a_{2, i_2-2j_2} p_{j_1, j_2}. \quad (3.29)$$

De plus si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les fonctions de base de  $S_1$  et  $S_2$ , alors la fonction de base  $\phi$  de  $S$  est donnée par :

$$\phi(t) = \phi(t_1)\phi(t_2), \forall t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{s_1+s_2}. \quad (3.30)$$

### 3.5.1/ SCHÉMAS APPROXIMANTS

Les schémas B-splines uniformes représentent un bon exemple des schémas de subdivision approximants. En effet, comme nous avons vu précédemment, les schémas B-splines sont les premiers schémas développés pour construire une approximation de la courbe B-spline grâce à une relation de raffinement vérifiée par les fonctions B-splines de base  $\phi_m$ . À partir de cette relation de raffinement, on construit les schémas de subdivision B-splines de degré au plus  $m$  en fonction d'un masque  $a_{i,m}$ ,  $i \in \mathbb{Z}^s$  sur un support  $\Omega = \llbracket -\lceil \frac{1}{2}m \rceil - 1, m - \lceil \frac{1}{2}m \rceil \rrbracket^s$ , avec :

Pour  $s = 1$

$$a_{i,m} = \begin{cases} 2^{-m} \binom{m+1}{i+1+\lceil \frac{1}{2}m \rceil} & \forall i \in \llbracket -\lceil \frac{1}{2}m \rceil - 1, m - \lceil \frac{1}{2}m \rceil \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $s = 2$

$$a_{i,m} = \begin{cases} a_{i_1,m} a_{i_2,m} & \forall i \in \llbracket -\lceil \frac{1}{2}m \rceil - 1, m - \lceil \frac{1}{2}m \rceil \rrbracket^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les schémas de subdivision B-splines sont définis en fonction d'un masque  $a_{i,m}$  par :

$$\forall p \in l(\mathbb{Z}^s), \forall i \in \mathbb{Z}^s \quad (Sp)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j,m} p_j$$

**Propriété 1 (Schémas B-spline)** Soit  $S$  un schéma de subdivision B-spline de degré  $m$  défini en fonction d'un masque  $a_{i,m}$ , alors nous avons :

1.  $\forall i \in \text{supp}(a_{i,m}), a_{i,m} > 0$  c'est-à-dire que toutes les valeurs du masque sont positives.
2. Le schéma  $S$  défini en fonction du masque  $a_{i,m}$  reproduit des constantes (satisfait la condition du masque 1.15).
3.  $S$  reproduit de façon simple les polynômes de degré au plus  $m$ .
4.  $S$  garantit l'existence d'un schéma aux différences d'ordre  $m+1$ .
5.  $S^\infty p \in C^{m-1}(\mathbb{R}^s)$ .

### SCHÉMA B-SPLINE QUADRATIQUE ( $m = 2$ )

Le masque de ce schéma de subdivision vaut :

$$[ a_{-2} \ a_{-1} \ a_0 \ a_1 ] = [ \frac{1}{4} \ \frac{3}{4} \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{4} ],$$

et les règles de subdivision sont données par :

$$(Sp)_{2i} = \frac{3}{4}p_i + \frac{1}{4}p_{i+1} \quad \text{et} \quad (Sp)_{2i+1} = \frac{1}{4}p_i + \frac{3}{4}p_{i+1} .$$

La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :

$$\begin{cases} S^\infty f(\cdot) = f(\cdot - \frac{1}{2}) + \frac{1}{8}\Delta f(\cdot - \frac{1}{2}) \\ Qf(\cdot) = f(\cdot - \frac{1}{2}) - \frac{1}{8}\Delta f(\cdot - \frac{1}{2}) \end{cases} \quad \forall f \in \pi_2(\mathbb{R}) \quad (3.31)$$

### SCHÉMA B-SPLINE CUBIQUE ( $m = 3$ ) :

Le masque de ce schéma de subdivision vaut :

$$[ a_{-2} \ a_{-1} \ a_0 \ a_1 \ a_2 ] = [ \frac{1}{8} \ \frac{1}{2} \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{8} ],$$

et les règles de subdivision sont données par :

$$(Sp)_{2i} = \frac{1}{8}p_{i-1} + \frac{3}{4}p_i + \frac{1}{8}p_{i+1} \quad \text{et} \quad (Sp)_{2i+1} = \frac{1}{2}p_i + \frac{1}{2}p_{i+1} .$$

La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :

$$\begin{cases} S^\infty f(\cdot) = f + \frac{1}{6}\Delta f \\ Qf(\cdot) = f - \frac{1}{6}\Delta f \end{cases} \quad \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}) \quad (3.32)$$

### SCHÉMA B-SPLINE BI-CUBIQUE

Le schéma B-spline bi-cubique est généré par le produit tensoriel de deux schémas B-splines cubiques uniformes. Son masque  $a$  est donné par :

$$a = \frac{1}{8}[1, 4, 6, 4, 1] \otimes \frac{1}{8}[1, 4, 6, 4, 1] = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} .$$

La fonction limite  $S^\infty p$  est définie sur le support  $[-2, 2]^2$ . La surface limite de ce schéma de subdivision est de continuité  $C^2$ . Les opérateurs limite et quasi-interpolant de ce

schéma de subdivision sont donnés par :

$$\begin{cases} S^\infty f(\cdot) = f(\cdot) + \frac{1}{6} \nabla \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^t f(\cdot) \\ Qf(\cdot) = f(\cdot) - \frac{1}{6} \nabla \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla^t f(\cdot) \end{cases} \quad \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^2) \quad (3.33)$$

### SCHÉMA BOX-SPLINE QUARTIQUE À TROIS DIRECTIONS

Une Box spline est une spline définie comme la "densité d'ombre" générée par une boîte. Dans le cas particulier d'une boîte de dimension  $m$  projetée sur une droite, cette densité correspond exactement à la fonction B-spline de base de degré  $m-1$ . Pour plus de détails sur les Box-spline voir [Boor 93]. La Box-spline définie sur un maillage triangulaire régulier par la matrice de direction :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

est connue pour être une fonction polynomiale par morceaux de continuité  $C^2$ .

Le masque de ce schéma de subdivision peut être représenté par le polynôme de Laurent suivant,

$$a(z_1, z_2) = 4 \prod_{\{e_1, e_2\} \in \Sigma} \frac{1 + z_1^{e_1} z_2^{e_2}}{2}, \quad (3.34)$$

sur le support  $[[ -2, 2 ]]^2$ . Par substitution, nous avons :

$$a = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 10 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'opérateur quasi interpolant de ce schéma de subdivision qui représente l'opérateur inverse de  $S^\infty$  est défini sur l'ensemble des polynômes de degré 3 par :

$$Qf(\cdot) = f(\cdot) - \frac{1}{6} \nabla \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \nabla^t f(\cdot), f \in \pi_3(\mathbb{R}^2). \quad (3.35)$$

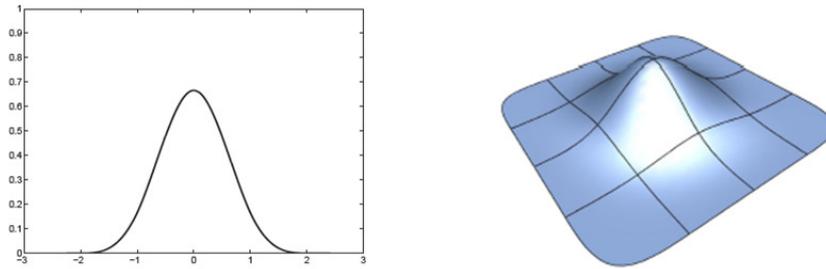


FIGURE 3.5 – À gauche, la courbe limite générée par l'application du schéma B-spline cubique (pour  $p = (\delta_{i,0})_i$ ). À droite, la surface limite générée par l'application du schéma B-spline bi-cubique.

L'un des nombreux avantages des fonctions B-splines est qu'elles permettent de construire des schémas dont on connaît la fonction limite et la classe de continuité. De plus, la continuité de la surface limite est maximale pour le nombre de points qui intervient dans leurs construction. L'inconvénient majeur de ces schémas de subdivision est lié à l'ordre d'approximation. En effet, les schémas B-splines de degré  $m$  reproduisent les polynômes de degré  $m$  mais pas de façon exacte. Par conséquent, il est difficile de connaître leur ordre d'approximation (voir figure 3.5). C'est pour pallier ce défaut que l'on se tourne vers l'utilisation des schémas de subdivision définis comme une interpolation polynômiale.

### 3.5.2/ SCHÉMAS INTERPOLANTS

Contrairement aux schémas approximatifs, à chaque étape de subdivision on conserve les points de contrôle à l'échelle  $k$  comme un sous-ensemble des points de contrôle à l'échelle  $k + 1$ , donc le masque vérifie :

$$a_{2j} = \delta_{0,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La forme générale des règles de subdivision d'un schéma de subdivision interpolant est donnée par :

$$\begin{aligned} (Sp)_{2i} &= p_i, \\ (Sp)_{2i+1} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{1+2j} p_{i-j}. \end{aligned}$$

Compte tenu du travail qui va suivre et leur lien avec le schéma 4 points, l'utilisation des polynômes de Lagrange centrés donne un bon moyen pour la construction des schémas interpolants.

Soit  $f_{i,r,l}$  le polynôme de Lagrange de degré  $(2l + 2r - 1)$  construit à partir des points  $\{i + j, (p_{i+j})_{j=-l+1, \dots, r}\}$ . Pour  $l = r$ , on dit que le polynôme de Lagrange est centré. Dans ce cas-là on prend  $r$  points à gauche et  $r$  points à droite afin de construire des nouveaux points  $\{i + \frac{1}{2}, (Sp)_{2i+1}\}$ . Les nouveaux points sont donnés par :

$$(Sp)_{2i+1} = f_{i,r,r}(i + \frac{1}{2}) = \sum_{j=-r+1}^r L_{-j}(i + \frac{1}{2})p_{i-j}, \quad (3.36)$$

où  $L_j$  est un polynôme de Lagrange :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k = -r+1 \\ k \neq j}}^r \frac{x - k}{j - k}$$

On définit alors le schéma correspondant par :

$$\begin{aligned} (S_{r,r}p)_{2i} &= p_i \\ (S_{r,r}p)_{2i+1} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} L_{-j}(\frac{1}{2})p_{i-j}, \end{aligned}$$

où  $a_{2j+1} = L_{-j}(\frac{1}{2})$  et  $S_{r,r}$  est le schéma de Lagrange centré.

Le support du masque de ces schémas de subdivision est alors  $\text{supp}(a) = \llbracket -2r+1, 2r-1 \rrbracket$  et contient  $4r+1$  termes.

**Propriété 2 (Schémas de Lagrange centré)** Soit  $S$  un schéma de subdivision de Lagrange centré de degré  $2r-1$ , alors nous avons :

1. Le schéma  $S$  reproduit des constantes.
2.  $S$  reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus  $2r-1$ .
3.  $S$  garantit l'existence d'un schéma aux différences d'ordre  $2r$ .
4.  $S^\infty p \in C^{m(r)}(\mathbb{R}^s)$  avec  $m(r) \leq r$ .

### SCHÉMA DE LAGRANGE CENTRÉ 4 POINTS ( $l = r = 2$ )

Le masque de ce schéma de subdivision vaut :

$$[a_{-3} \ a_{-2} \ a_{-1} \ a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3] = [ -\frac{1}{16} \ 0 \ \frac{9}{16} \ 1 \ \frac{9}{16} \ 0 \ -\frac{1}{16} ],$$

et les règles de subdivision sont données par :

$$(Sp)_{2i} = p_i \quad \text{et} \quad (Sp)_{2i+1} = -\frac{1}{16}p_{i-1} + \frac{9}{16}p_i + \frac{9}{16}p_{i+1} - \frac{1}{16}p_{i+2}.$$

La fonction limite de ce schéma de subdivision est  $C^1$ . Rappelons que la courbe B-spline qui utilise le même nombre de points est  $C^2$ . Le schéma de Lagrange centré 4 points est parmi les schémas de subdivision interpolants les plus utilisés. Dans la littérature on trouve différentes variantes de ce schéma de subdivision, basées sur l'introduction d'un paramètre  $w$ . Ce schéma de subdivision correspond au schéma 4 points proposé dans [Dyn 1987] pour  $w = \frac{1}{16}$ . Le masque du schéma 4 points de N. Dyn, J.A. Gregory et D. Levin [Dyn 1987] est défini en fonction d'un paramètre de tension  $w$  sur un support  $\llbracket -3, 3 \rrbracket$  par :

$$a = [-w, 0, \frac{1}{2} + w, 1, \frac{1}{2} + w, 0, -w].$$

La courbe limite du schéma 4-points est  $C^1$  pour  $0 < w < \frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ , et son opérateur quasi-interpolant pour  $w = \frac{1}{16}$  est donné par :

$$Qf(\cdot) = f(\cdot), \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}). \quad (3.37)$$

### SCHÉMA DE KOBBELT

Le schéma de Kobbelt est généré par le produit tensoriel de deux schémas 4 points [Kobbelt 1996]. Son masque est donné par :

$$a = [-w, 0, \frac{1}{2} + w, 1, \frac{1}{2} + w, 0, -w] \otimes [-w, 0, \frac{1}{2} + w, 1, \frac{1}{2} + w, 0, -w] =$$

$$\begin{bmatrix} w^2 & 0 & -w(w + \frac{1}{2}) & -w & -w(w + \frac{1}{2}) & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w(w + \frac{1}{2}) & 0 & (w + \frac{1}{2})^2 & w + \frac{1}{2} & (w + \frac{1}{2})^2 & 0 & -w(w + \frac{1}{2}) \\ -w & 0 & w + \frac{1}{2} & 1 & w + \frac{1}{2} & 0 & -w \\ -w(w + \frac{1}{2}) & 0 & (w + \frac{1}{2})^2 & w + \frac{1}{2} & (w + \frac{1}{2})^2 & 0 & -w(w + \frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w^2 & 0 & -w(w + \frac{1}{2}) & -w & -w(w + \frac{1}{2}) & 0 & w^2 \end{bmatrix},$$

sur le support  $\Omega = \llbracket -3, 3 \rrbracket^2$ .

Pour  $w = \frac{1}{16}$  le schéma de Kobbelt reproduit des polynômes de degré 3. Dans ce cas l'opérateur quasi-interpolant de Kobbelt qui représente l'opérateur inverse de  $S^\infty$  est l'opérateur d'identité.

$$\forall f \in \pi_3, Qf = f. \quad (3.38)$$

### SCHÉMA DE BUTTERFLY

Le schéma de Butterfly est un schéma interpolant appliqué uniquement sur des réseaux triangulaires [N. Dyn 1990]. Ce schéma est généré à partir du schéma 4 points. Le masque du schéma de Butterfly défini en fonction d'un paramètre de tension  $w$  sur un support  $\Omega = \llbracket -3, 3 \rrbracket^2$  est donné par :

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -w & -w & 0 \\ 0 & 0 & -w & 0 & 2w & 0 & -w \\ 0 & -w & 2w & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2w & -w \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -w & 2w & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2w & -w & 0 \\ -w & 0 & 2w & 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & -w & -w & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le schéma de Butterfly est de régularité  $C^1$  pour tout  $0 < w < -\frac{1+\sqrt{5}}{8}$ , et son schéma aux différences d'ordre 1 est de continuité höldorienne d'ordre  $1 - \epsilon$  pour tout  $0 < \epsilon < 1$ .

Pour  $w = \frac{1}{16}$  le schéma de Butterfly reproduit des polynômes de degré 3. L'opérateur

quasi-interpolant de Butterfly qui représente l'opérateur inverse de  $S^\infty$  est l'opérateur d'identité c'est-à-dire que :

$$\forall f \in \pi_3, Qf = f. \quad (3.39)$$

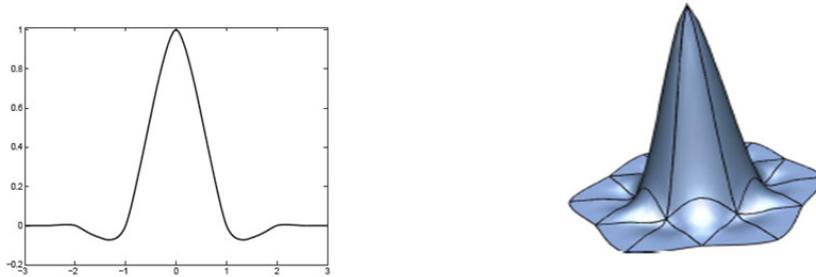


FIGURE 3.6 – À gauche, la courbe limite générée par l'application du schéma 4 points (pour  $p = (\delta_{0,n})_n$ ). À droite, la surface limite générée par l'application du schéma de Butterfly pour  $w = \frac{1}{16}$ .

Ces schémas de subdivision présentent l'avantage d'avoir un bon ordre d'approximation, mais ils ont une continuité faible (voir figure 3.6).

### 3.5.3/ SCHÉMAS APPROXIMANTS INSPIRÉS DES SCHÉMAS INTERPOLANTS

Afin d'améliorer la régularité d'un schéma de subdivision interpolant, N. Dyn et al. [Dyn 2005] ont proposé un schéma approximant inspiré d'un schéma interpolant (schéma 4 points approximant). L'idée est de mixer le schéma 4 points de Lagrange centré  $S_{2,2}$  avec un schéma B-spline de degré 2 en translatant de  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{3}{4}$  les valeurs du polynôme de Lagrange  $f_{i,2,2}$  dans les nouveaux points  $(Sp)_{2i}$  et  $(Sp)_{2i+1}$  respectivement, i.e.

$$(Sp)_{2i} = f_{i,2,2}(\frac{1}{4}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} L_{-j}(\frac{1}{4}) p_{i-j} \quad \text{et} \quad (Sp)_{2i+1} = p_{i,2,2}(\frac{3}{4}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} L_{-j}(\frac{3}{4}) p_{i-j}. \quad (3.40)$$

On obtient les règles suivantes :

$$\begin{aligned} (Sp)_{2i} &= -\frac{7}{128} p_{i-1} + \frac{105}{128} p_i + \frac{35}{128} p_{i+1} - \frac{5}{128} p_{i+2}, \\ (Sp)_{2i+1} &= -\frac{5}{128} p_{i-1} + \frac{35}{128} p_i + \frac{105}{128} p_{i+1} - \frac{7}{128} p_{i+2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Par l'introduction d'un paramètre de tension  $w$  ce schéma de subdivision peut être donné par :

$$\begin{aligned} (Sp)_{2i} &= -7w p_{i-1} + (\frac{3}{4} + 3w) p_i + (\frac{1}{4} + 3w) p_{i+1} - 5w p_{i+2}, \\ (Sp)_{2i+1} &= -5w p_{i-1} + (\frac{1}{4} + 3w) p_i + (\frac{3}{4} + 3w) p_{i+1} - 7w p_{i+2}. \end{aligned}$$

Ce qui correspond au schéma B-spline de degré 2 pour  $w = 0$  et au schéma 4 points approximant représenté par ces règles dans l'équation (3.41) pour  $w = \frac{1}{128}$ .

Ce schéma de subdivision est de continuité  $C^2$  et de continuité höldorienne  $C^{2.67}$  (voir

figure 3.7). L'ordre d'approximation est égal à 3, à condition de prendre les données initiales  $p = (g((i - \frac{1}{2})h))_i$ . On peut étendre cette méthode en utilisant des polynômes de Lagrange centrés  $p_{i,r,r}$  mais on ne peut rien dire sur la convergence et la régularité dans le cas général.

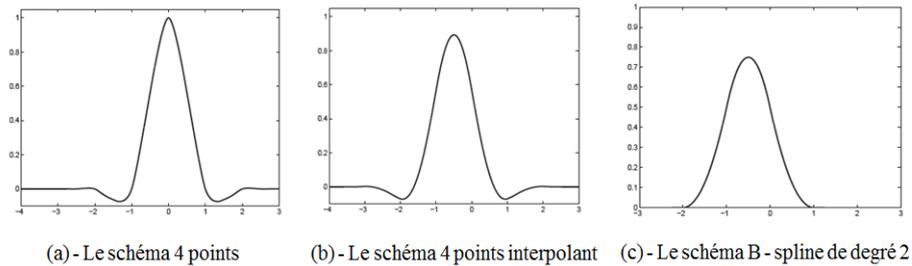


FIGURE 3.7 – À gauche, le schéma interpolant 4 points avec un ordre d'approximation optimal mais une mauvaise continuité. Au milieu, le schéma 4 points approximant. À droite, le schéma approximant B-spline quadratique avec une continuité optimale mais un mauvais ordre d'approximation

### 3.6/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons donné un moyen concret pour la construction des schémas de subdivision à partir de leurs fonctions limites. Nous avons mis l'accent sur deux familles de schémas de subdivision : les schémas approximants et les schémas interpolants. Nous avons donné quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes ainsi que les avantages et les inconvénients de chaque famille.

Dans le chapitre suivant, nous donnons quelques notions de maillages, ainsi que quelques schémas de subdivision surfaciques les plus courants. Ils seront utilisés par la suite dans le cadre de notre travail.



## GÉNÉRALISATION DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION À DES MAILLAGES IRRÉGULIERS

Les propriétés mathématiques d'une surface de subdivision à la limite sont simplement observables dans les zones régulières. Les problèmes surviennent aux alentours des sommets dits extraordinaires. En effet, dans les zones où le maillage est régulier, l'opérateur de subdivision  $S^\infty$  reproduit les polynômes de degré  $m$ , et ainsi on connaît l'équation et la continuité de la surface limite. Dans les zones où le maillage est irrégulier, les règles de subdivision ne permettent pas de trouver l'équation reproduite par  $S^\infty$ . Il faut donc proposer des règles qui permettent d'optimiser le comportement de la surface limite dans le cas irrégulier.

### 4.1/ NOTIONS DE MAILLAGE

Un maillage est constitué de points de contrôle, connectés les uns aux autres par des faces ou facettes de forme polygonale. Lorsque toutes les faces sont des triangles (quadrangle), on parle de maillage triangulaire (resp. quadrilatéral), et lorsque nous avons les deux types de facettes on parle d'un maillage mixte (quad/triangle, quelconque).

Soit  $M$  un maillage composé d'un ensemble d'éléments  $E_n$  appartenant au domaine  $\Sigma$  fermé borné par la frontière  $\partial\xi_i$ . Chaque élément  $E_i$  est composé de nœuds, notés  $p$ . La définition mathématique d'un maillage est donnée par [Castillo, 1991, George and Borouchaki, 1997].

**Définition 14 (Maillage définition mathématique)** *On dit que le maillage  $M$  est conforme au domaine  $\xi_i$ , si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  $M = \cup E_n$  est homéomorphe à  $\Sigma$ .
2.  $p \in \xi_i$ .
3. Pour tout élément  $E_i$  de  $\{E_n\}$ , nous définissons par  $K_i$  sa partie intérieure, alors pour tout  $K_i \in M$  pour tout  $i \neq j : K_i \cap K_j = \emptyset$  (Condition de recouvrement entre les éléments du maillage).
4. Pour tout  $E_i \in M$ ,  $\|K_i\| \neq \emptyset$ .

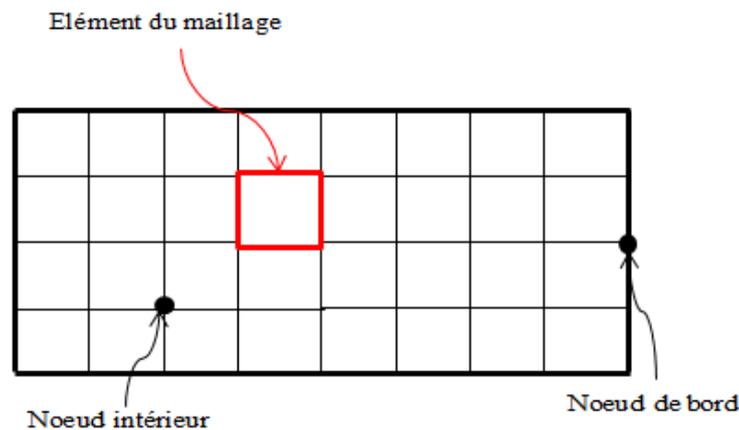


FIGURE 4.1 – Illustration de la notion de maillage

#### 4.1.1/ GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE

Nous faisons la différence entre la géométrie qui caractérise la forme du domaine et la topologie qui est le résultat du découpage spatial du domaine sur lequel s'appuie le maillage. La topologie est donc une classification des objets de type arêtes, faces, etc. Nous distinguons plusieurs types de maillages, définis par le nombre de nœuds associés à chaque élément et par le nombre de liaisons pour chaque nœud.

#### 4.1.2/ CONNECTIVITÉ ET MAILLAGE RÉGULIER

La connectivité décrit les liaisons entre les sommets des éléments. On parle de maillage à connectivité régulière si les nœuds de même type (dans le domaine) ont toujours le même nombre de nœuds voisins, ou sont associés au même nombre d'éléments. Autrement dit lorsqu'il est homéomorphe à une grille régulière du plan euclidien. Ici nous parlons de deux types de ces grilles : les grilles quadrangulaires et les grilles triangulaires. Pour les maillages quadrangulaires (resp. triangulaires), la valence de sommets est 4 (resp. 6) et il est possible d'établir une base vectorielle  $(u, v)$  qui repère les sommets par un vecteur de coordonnées (voir figure 4.2). Le principal avantage des maillages réguliers est une connaissance immédiate du voisinage et des indices de chaque nœud. En effet, le nombre de nœuds est constant dans chaque direction de maillage. La connaissance des indices d'un nœud donne la position relative dans la grille. Cet avantage se trouve être aussi son principal inconvénient car les maillages réguliers ne sont pas adaptés à tous les types de géométrie.

#### 4.1.3/ MAILLAGE NON-RÉGULIER

Dans le cas d'un maillage non-régulier, la connectivité est de type quelconque, et le nombre de voisins de chaque nœud diffère localement. Comme exemples des maillages

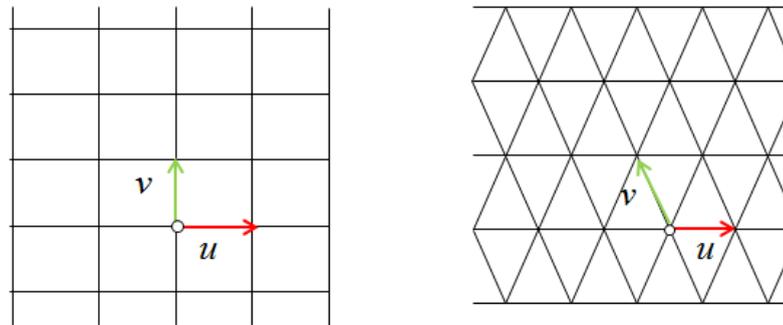


FIGURE 4.2 – Les grilles régulières.

non-réguliers : les maillages semi-réguliers et les maillages bi-réguliers.

#### 4.1.3.1/ MAILLAGE SEMI-RÉGULIER

Un maillage semi-régulier est un maillage qui a une connectivité régulière par morceaux (voir figure 4.3). Un tel maillage possède un ou plusieurs sommets extraordinaires, au voisinage desquels les sommets sont réguliers.

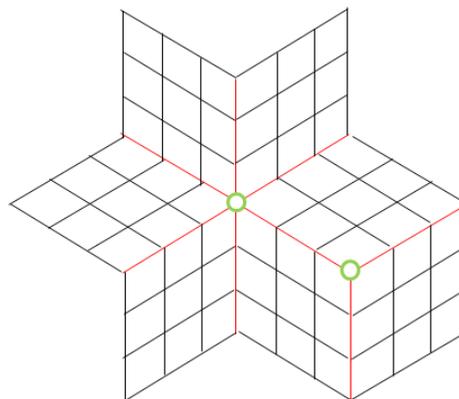


FIGURE 4.3 – Grille semi-régulière.

#### 4.1.3.2/ MAILLAGE BI-RÉGULIER (QUAD/TRIANGLE)

Nous parlons de maillage à connectivité bi-régulière lorsqu'il est homéomorphe à une grille bi-régulière du plan. Une grille bi-régulière est une grille qui contient deux zones régulières et chaque zone contient un type d'élément comme dans la figure 4.4.

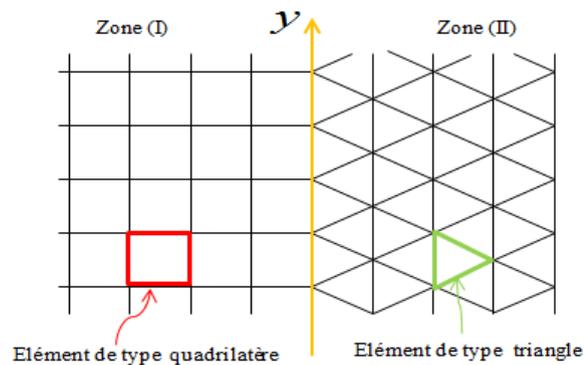


FIGURE 4.4 – Grille bi-régulière (quad/triangle).

## 4.2/ DIFFÉRENTS SCHÉMAS DE SUBDIVISION

Les travaux sur les surfaces de subdivision ont trouvé leurs motivations dans le besoin de représenter des surfaces lisses (continuité  $C^1$  ou plus) et arbitraires (topologie et genre quelconque). La subdivision est adaptée aux surfaces grâce aux travaux de Catmull et Clark [Catmull 1978]. La surface spline sous-jacente est basée sur le produit tensoriel bi-cubique. L'extension des règles aux points extraordinaires permet au maillage de contrôler de maîtriser les frontières et les courbures.

Dans la même année, Doo et Sabin [Doo 1978] ont analysé le comportement des principes de subdivision quadratiques aux points extraordinaires à l'aide du calcul matriciel. Ils ont réussi à écrire le procédé de raffinement comme multiplication de matrices et l'analyse du spectre de ces matrices permet de prévoir l'allure de ces surfaces. En 1987, Loop [Loop 1987] décrit un principe de subdivision défini sur une grille triangulaire. Loop a utilisé l'analyse propre pour déterminer les coefficients de ce principe autour des points extraordinaires. Ce principe généralise les Box-splines triangulaires quartiques étudiées par Boehm [Boeh83] et Prautzsch [Prau84].

Dyn, Levin et Gregory [N. Dyn 1990] généralisent le principe du schéma 4 points aux surfaces. Ils proposent le principe interpolant de Butterfly en 1990. Ce principe ne peut être appliqué que sur des maillages triangulaires. La surface limite est de continuité  $C^1$  sur les mailles régulières mais pas aux points extraordinaires. Par la suite Zorin et al. ([D. Zorin 1996b]; [D. Zorin 1997]) ont proposé une modification de ce principe pour générer des surfaces de continuité  $C^1$  à partir des maillages arbitraires. En 1996, [Kobbelt 1996], propose un schéma d'interpolation défini sur des maillages quadrangulaires comme le produit tensoriel du principe 4 points. Ce schéma est de continuité  $C^1$  pour tous les sommets intérieurs indépendamment de leur valence et il peut être appliqué sur des maillage ouverts.

Dans le cadre de notre travail nous nous intéressons à quelques surfaces de subdivision. Nous faisons un rapide tour d'horizon des schémas de subdivision les plus courants, et nous donnons quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes (masques, règles, continuité). Pour plus de détails, voir les cours Siggraph 2000 [Zorin 2000b], et les articles cités par la suite.

## 4.2.1/ SCHÉMA DE CATMULL-CLARK

Ce schéma est proposé en 1978 par Catmull et Clark [Catmull 1978]. C'est l'un des schémas les plus utilisés dans l'industrie. Il s'agit d'un schéma primal approximant. La surface limite est  $C^2$  partout sauf au voisinage des points extraordinaires où le schéma est  $C^1$ . La continuité du plan tangent de ce schéma a été analysée par Ball et Storry [Ball 1988], et la continuité  $C^1$  par Peters et Reif [Peters 1997]. Le schéma B-spline cubique peut être utilisé comme le schéma de bord pour le schéma de Catmull-Clark. Ce principe s'applique à des maillages quadrilatéraux mais les règles de subdivision sont généralisées à des maillages quelconques. Les règles de subdivision de ce schéma de subdivision sont données dans la figure 4.5.

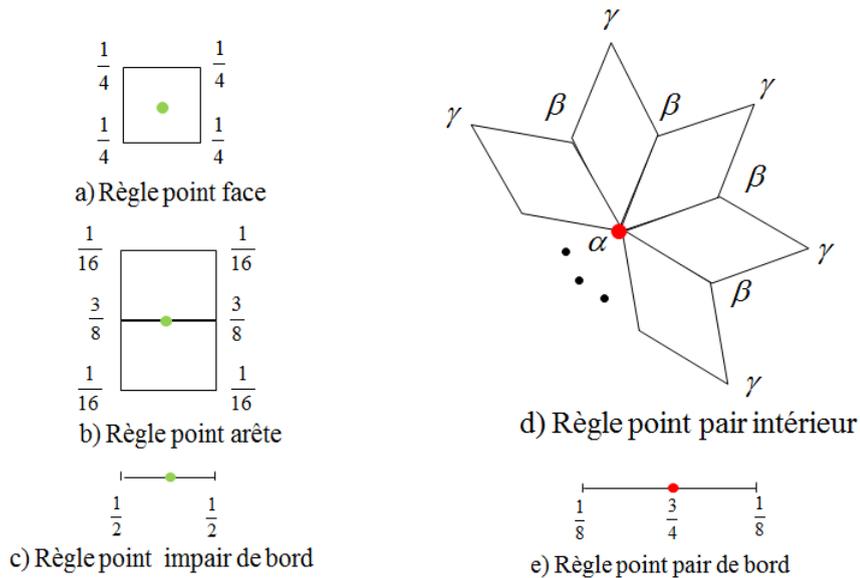


FIGURE 4.5 – Les règles de subdivision intérieures et de bords de Catmull-Clark :  $\alpha = 1 - n(\alpha + \beta)$ ,  $\beta = \frac{3}{2n^2}$  et  $\gamma = \frac{1}{4n^2}$  où :  $n$  représente la valence du schéma. Ces valeurs assurent la continuité  $C^1$  de la surface limite.

## 4.2.2/ SCHÉMA DE DOO-SABIN

Le schéma dual de Doo-Sabin [Doo 1978] permet de générer par produit tensoriel des surfaces B-splines bi-quadratiques uniformes. Il s'applique à des maillages quadrilatéraux mais les règles de subdivision ont été adaptées pour des maillages quelconques. Seuls les bords nécessitent une règle spéciale. Doo a observé que sur les bords, on peut utiliser le schéma B-spline quadratique et Nasri dans [Na87] a proposé d'autres règles de bord. La figure 4.6 présente les règles à utiliser pour appliquer ce schéma. Simultanément la continuité  $C^1$  de ce schéma est prouvée par Peters et Reif [Peters 1997].

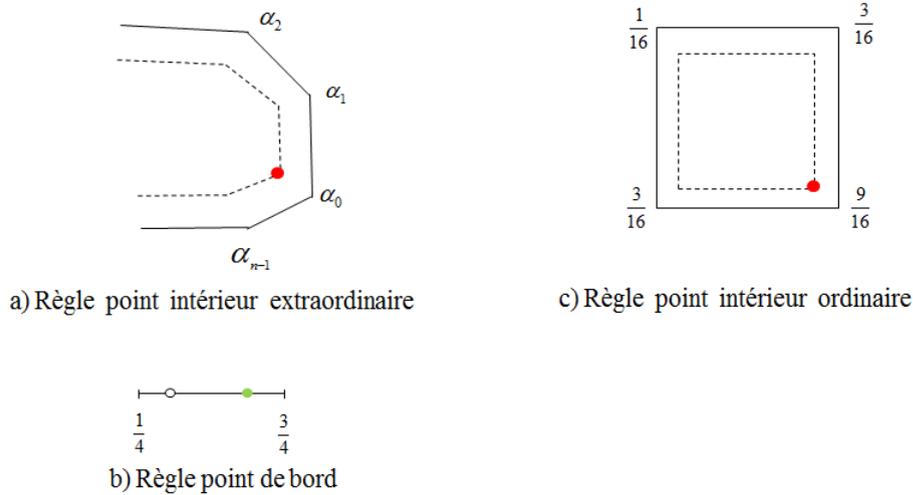


FIGURE 4.6 – Les différentes règles de subdivision de Doo-Sabin :  $\alpha_0 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4n}$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{4k}(3 + 2\cos(\frac{2\pi i}{n}))$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Catmull et Clark proposent des coefficients plus simples pour ce schéma :  $\alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{n-1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4n}$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{4n}$ ,  $i = 2, \dots, n - 2$ .

#### 4.2.3/ SCHÉMA DE KOBBELT

Le schéma de Kobbelt est un schéma primal interpolant proposé par Kobbelt [Kobbelt 1996] pour des maillages quadrangulaires. Le schéma est basé sur le produit tensoriel du schéma 4 points et il est de continuité  $C^1$ . Ce schéma de subdivision peut s'appliquer en deux temps. D'abord on calcule les points arêtes, puis on calcule les points faces à partir des points arêtes déjà calculés. Les règles de subdivision de ce schéma de subdivision sont donnés dans la figure 4.7.

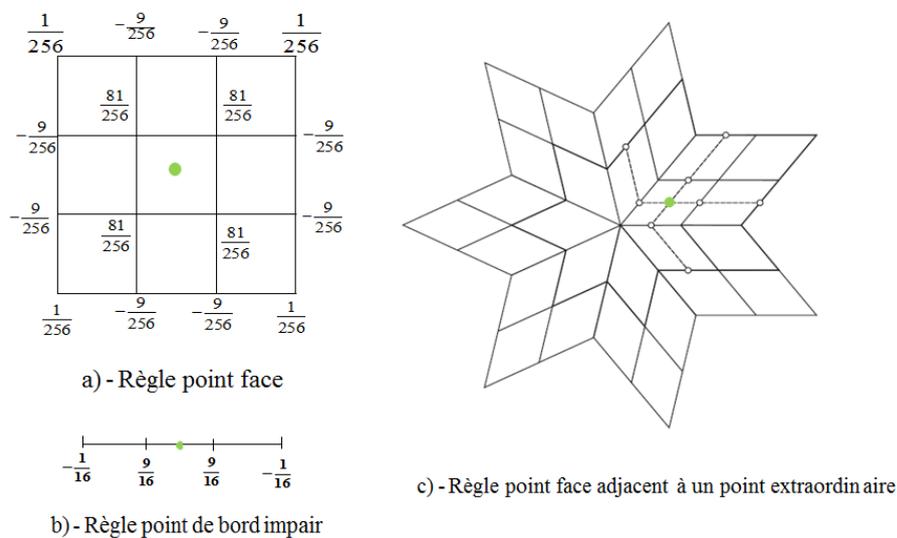


FIGURE 4.7 – Les règles de Kobbelt. S'agissant d'un schéma interpolant, seules les règles pour les points impairs sont nécessaires.

## 4.2.4/ SCHÉMA DE LOOP

Le schéma de Loop proposé en 1987 par Charles Loop [Loop 1987], s'applique uniquement sur des maillages triangulaires. Les faces créées lors de la subdivision sont toujours triangulaires et les surfaces générées sont des Box-splines quartiques uniformes. Ce schéma est le plus courant aujourd'hui pour les maillages triangulaires. Il assure une continuité  $C^2$  partout sauf aux points extraordinaires. Les règles intérieures et de bords du schéma de Loop sont représentées dans la figure 4.8.

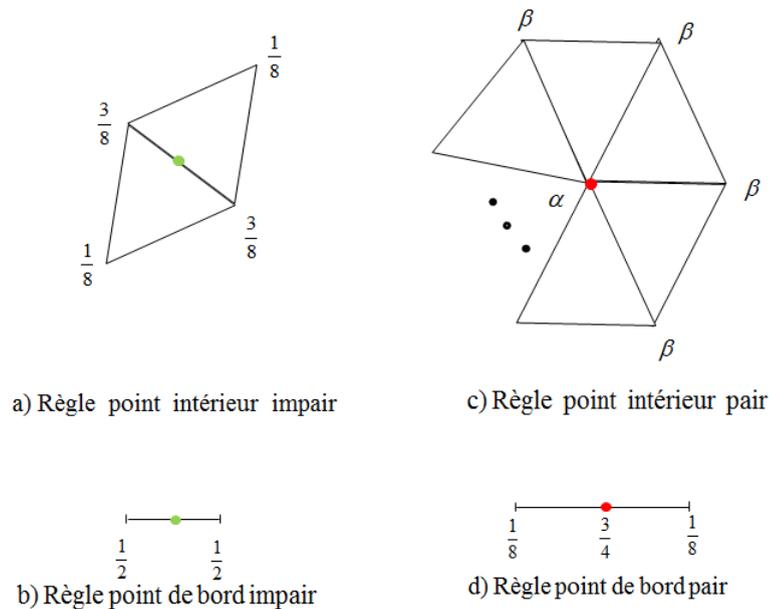


FIGURE 4.8 – Les règles du schéma de Loop.  $\alpha = \frac{1}{n}(\frac{5}{8} - (\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos(\frac{2\pi}{n}))^2)$ ,  $\beta = 1 - n\alpha$ ,  $n$  représente la valence.

Hoppe et al. [H. Hoppe 1994] ont proposé une modification de ces règles aux bords des surfaces, pour assurer la continuité du plan tangent. Mais ces modifications rendent l'évaluation des bords dépendant des sommets intérieurs proches.

## 4.2.5/ SCHÉMA BUTTERFLY ET SCHÉMA BUTTERFLY MODIFIÉ

Dyn, Levin et Gregory ([N. Dyn 1990]) généralisent aux surfaces le principe 4 points qu'ils ont proposé pour les courbes. Ils proposent le principe interpolant de Butterfly en 1990. Il ne peut être appliqué que sur des réseaux triangulaires. La surface limite est de continuité  $C^1$  aux points ordinaires mais pas aux points extraordinaires de valence égale à 3 ou supérieure à 7 ([D. Zorin 1997]). Zorin, Schröder et Sweldens ont proposé une modification de ce principe pour générer des surfaces de continuité  $C^1$  à partir des maillages arbitraires ([D. Zorin 1996a]; [D. Zorin 1997]).

Pour ce schéma, seules les règles pour les points impairs sont nécessaires (la position d'un point pair lorsqu'il est généré est sa position sur la surface limite (voir figure 4.9).

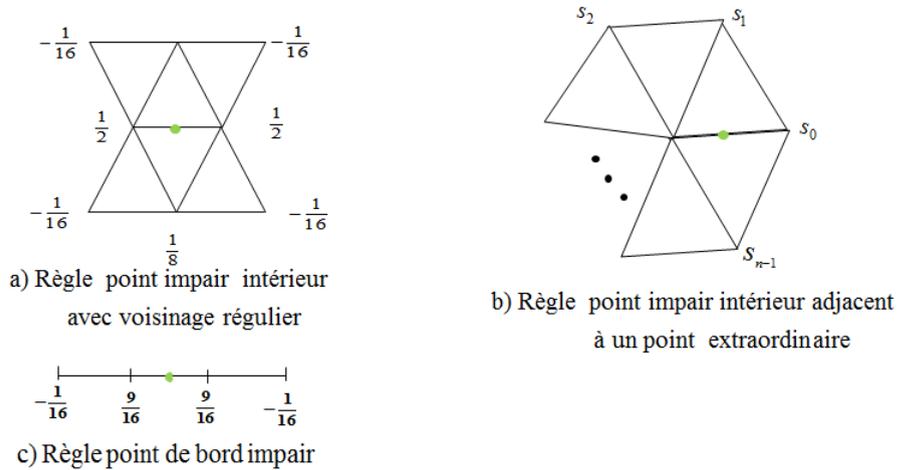


FIGURE 4.9 – Le schéma de Butterfly modifié : pour  $n = 3$ ,  $s_0 = \frac{5}{12}$ ,  $s_{1,2} = -\frac{1}{12}$ , pour  $n = 4$ ,  $s_0 = \frac{3}{8}$ ,  $s_2 = -\frac{1}{8}$ ,  $s_{1,3} = 0$  et pour  $n > 5$ ,  $s_i = \frac{1}{n}(\frac{1}{4} + \cos(\frac{2\pi i}{k}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{4\pi i}{n}))$ .

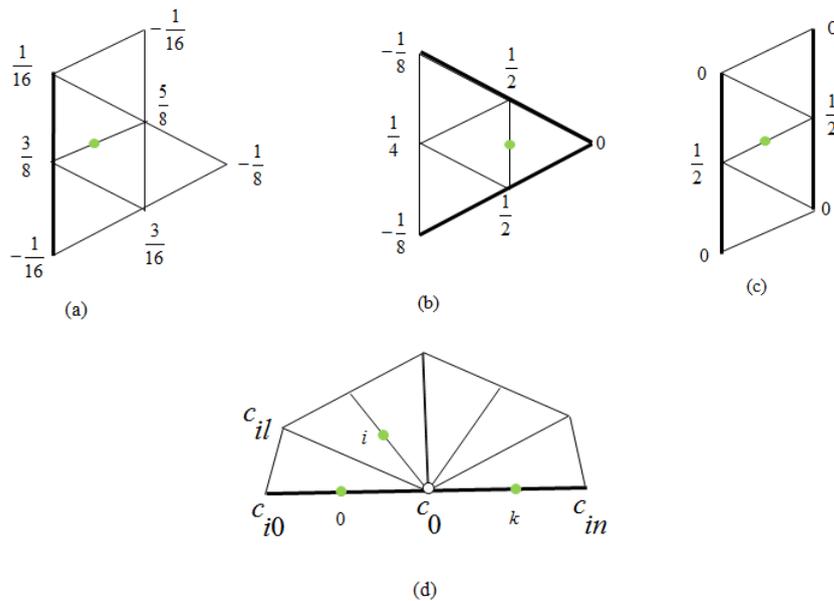


FIGURE 4.10 – Le schéma de Butterfly modifié : règles points crêtes. a)-c) : règles points crêtes ordinaires. d) règles points crêtes extraordinaires,  $c_0 = 1 - (1/(n-1)) \sin \theta_n \sin i\theta_n / (1 - \cos \theta_n)$ ,  $c_{i0} = c_{in} = 1/4 \cos i\theta_n - (1/4(n-1)) \sin 2i\theta_n / (\cos \theta_n - \cos 2\theta_n)$  et  $c_{ij} = 1/n(\sin i\theta_n \sin j\theta_n + 1/2 \sin 2i\theta_n \sin 2j\theta_n)$  avec  $j = 0, \dots, n$  et  $\theta_n = \pi/(n-1)$ .

Sur les bords, on peut utiliser le schéma 4 points. Pour atteindre la continuité  $C^1$  sur les bords, des règles de crête spéciales doivent être utilisées (figure 4.10).

### 4.3/ AMÉLIORATION DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION AUX VOISINAGES DES POINTS IRRÉGULIERS

L'étude du comportement de la surface de subdivision à la limite au voisinage d'un point de contrôle extraordinaire porte sur la matrice de subdivision dont on évalue les vecteurs et valeurs propres. En effet, la décomposition de la matrice de subdivision en valeurs et vecteurs propres est un outil standard et efficace pour analyser les propriétés de la surface limite. Certaines propriétés de la surface limite, telles que la continuité, sont liées à ces éléments propres. Ainsi, on peut chercher à construire un schéma de subdivision à partir des vecteurs et valeurs propres répondant à un ensemble de propriétés particulières. De nombreux travaux ont fixé les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes de la continuité d'une surface limite. La continuité d'un schéma de subdivision est liée à l'existence d'une paramétrisation autour d'un point de contrôle irrégulier. À partir d'un point de contrôle pair intérieur irrégulier, on considère des anneaux autour de lui pour avoir suffisamment de points de contrôle afin de construire une bande de surface régulière. La matrice qui contient les coefficients du calcul des mêmes anneaux topologiques après un pas de subdivision représente la matrice de subdivision. À la limite, les vecteurs propres de cette matrice de subdivision définissent la position des sommets autour du point irrégulier, tandis que ses valeurs propres donnent le coefficient de diminution de ces vecteurs propres à chaque étape de subdivision.

David Doo et Malcolm Sabin, ont à l'origine, donné des conditions nécessaires de convergence d'un schéma de subdivision vers une surface limite de continuité  $C^2$  en estimant les deux premières dérivées de la surface limite autour d'un point extraordinaire. Ball et Storry [Ball 1988] ont proposé les conditions suffisantes à la continuité des tangentes. Par la suite, Reif [Reif 1995] a déterminé les conditions nécessaires et suffisantes de la continuité  $C^1$  d'une surface limite. Vers la fin des années 90, Prautzsch [Prautzsch 1998] et Zorin [Zorin 1998] ont proposé des conditions nécessaires et suffisantes de la régularité  $C^m$  de la surface limite. Récemment, Gérot et al [C.Gérot 2005] ont proposé un ensemble de conditions nécessaires à la convergence  $C^2$  afin d'améliorer le comportement de la surface limite.

Malgré les nombreuses contributions apportées par l'ensemble des travaux sur l'amélioration du comportement de la surface limite, un schéma de subdivision stationnaire reste limité. En effet, l'application de ce type de schéma de subdivision à un maillage irrégulier fait apparaître de multiples défauts, comme la présence d'oscillations, des effets indésirables "artéfacts" au niveau des sommets irréguliers. Il existe plusieurs types d'oscillations, leurs origines sont diverses, et pour la plupart mal connues (pour plus de détails voir [Sabin 2002] et [Destelle 2010]). Nous citerons ici seulement les oscillations radiales. Ces oscillations viennent de l'interaction entre points de contrôle irréguliers quand ils sont voisins. La figure 4.11 illustre les oscillations radiales que l'on obtient lorsque l'on subdivise une forme simple constituée uniquement de sommets irréguliers avec un anneau de sommets de faible valence.

L'application d'un schéma de subdivision linéaire sur un maillage bi-régulier (quad/triangle) fait apparaître des oscillations radiales, au niveau des sommets irréguliers situés dans la zone mixte qui contient des quadrangles et des triangles. C'est pour palier à ce défaut que l'on se tourne vers les schémas quad/triangle.

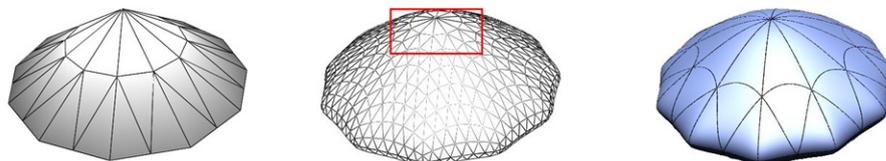


FIGURE 4.11 – Exemple d'un artefact polaire (cadre rouge) et d'oscillations radiales[Destelle 2010].

#### 4.4/ SUBDIVISION QUAD/TRIANGLE

Récemment, l'étude et la construction des schémas de subdivision quad/triangle définis sur un maillage bi-régulier ont attiré l'attention. À partir d'un maillage mixte composé de quadrangles et de triangles, le schéma de subdivision quad/triangle produit un maillage bi-régulier de plus en plus fin. L'utilisation de la structure quad/triangle pour la conception des surfaces est motivée par le fait que dans la modélisation CAO, les concepteurs veulent souvent travailler sur des modèles avec des maillages quadrilatéraux dans certaines régions et triangulaires dans d'autres. Ceci afin d'obtenir des surfaces de subdivision avec une meilleure qualité visuelle. La construction et l'étude des propriétés mathématiques de ces types de schéma de subdivision (dans le cas régulier) ont été établies, des masques de subdivision particuliers dans la zone mixte entre deux schémas de subdivision du même type géométrique (approximant-approximant, interpolant-interpolant) ont également été donnés. Dans cette section, nous citerons quelques schémas de subdivision quad/triangle.

##### 4.4.1/ SCHÉMA QUAD/TRIANGLE APPROXIMANT/APPROXIMANT

Nous allons présenter ici trois schémas de subdivision quad/triangle. Considérons la grille quad/triangle donnée dans la figure 4.4. Nous définissons un schéma de subdivision sur cette grille qui coïncide avec le schéma de Catmull-Clark sur la moitié gauche de la grille, et le schéma de Loop sur la moitié droite de la même grille.

##### 4.4.1.1/ SCHÉMA DE STAM-LOOP

En 2003, J. Stam et C. Loop [Stam 2003] ont introduit un schéma de subdivision quad/triangle sur une grille bi-régulier. Ce schéma de subdivision reproduit le schéma de Catmull-Clark sur la moitié gauche de la grille pour  $x < 0$  et le schéma de Loop sur la moitié droite de la grille pour tout  $x > 0$ . La zone bi-régulière ( $x = 0$ ) a été subdivisée par un masque de moyennage des deux schémas de subdivision. Le principe de ce schéma de subdivision comprend deux étapes. La première étape consiste à subdiviser chaque arête en deux, chaque quad en quatre et chaque triangle en quatre. Puis dans la seconde étape, chaque sommet est déplacé par une combinaison linéaire de lui-même et ses voisins directs. Lorsque le sommet est entièrement entouré par des triangles ou des quads, les auteurs utilisent les deux premières règles présentées dans la figure 4.13 (4.12-(a) et 4.12-(b)). Sinon lorsque le sommet est entouré par trois triangles et deux quads, J. Stam et C. Loop ont introduit une troisième règle. Cette règle est définie comme le moyennage

simple des deux premières règles (voir la figure 4.12-(c)). Afin de généraliser ce schéma de subdivision à des maillages irréguliers, les auteurs ont utilisé une relation simple entre les poids des trois règles dans le cas général. Les auteurs ont montré que leur schéma de subdivision est de continuité  $C^2$  partout, sauf aux points extraordinaires et dans la zone bi-régulière où leur schéma est  $C^1$ . Ils ont donné une preuve formelle pour montrer que leur schéma ne peut pas être de continuité  $C^2$ .

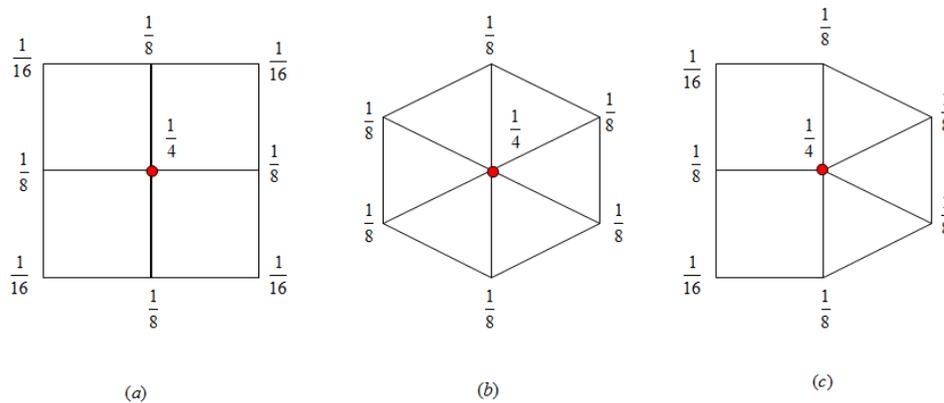


FIGURE 4.12 – Règles de subdivision du schéma quad/triangle de Stam-Loop.

#### 4.4.1.2/ SCHÉMA DE LEVIN-LEVIN

Afin d'améliorer la continuité du schéma quad/triangle qui combine les règles du principe de Catmull-Clark et celles de Loop le long des arêtes quad/triangle ordinaire, A. Levin et D. Levin [Levin 2003b] ont présenté un nouveau concept de décompression appelé "unzipping". Décompresser un maillage ici signifie que la position initiale de chaque sommet est déformée (déplacée) par des combinaisons affines. Ce concept reproduit des nouvelles règles de subdivision dans la zone bi-régulière le long des arêtes quad/triangle ordinaires.

Contrairement au choix de la définition du schéma quad/triangle donné dans [Stam 2003], A. Levin et D. Levin ont défini un schéma de subdivision  $S$  sur la grille quad/triangle qui coïncide avec le schéma de Catmull-Clark pour  $x \leq 0$  et le schéma de Loop pour  $x > 0$ .

Le fait de choisir une autre définition de  $S$  sur la grille quad/triangle donne des règles différentes de celles proposées par J. Stam et C. Loop (voir la figure 4.13).

Le principe de ce schéma de subdivision comprend trois étapes. La première étape consiste à appliquer la règle de décompression (figure 4.13-(c)) le long des arêtes quad/triangle ordinaires afin de séparer les deux maillages. Après l'application de cette règle le long des arêtes quad/triangle ordinaires, les sommets des polygones quadrilatères conservent leur position initiales, tandis que les sommets des maillages le long des arêtes quad/triangle sont déplacés. La deuxième étape consiste à appliquer les règles des deux schémas de subdivision de Catmull-Clark et de Loop de façon séparée dans les deux moitiés de la grille. Une fois que nous avons appliqué les deux schémas de sub-

division dans les deux moitiés de la grille, nous appliquons les deux règles particulières présentées dans la figure 4.13 (4.13-(a) et 4.13-(b)) de sorte que ces deux règles utilisent uniquement les sommets du maillage initial.

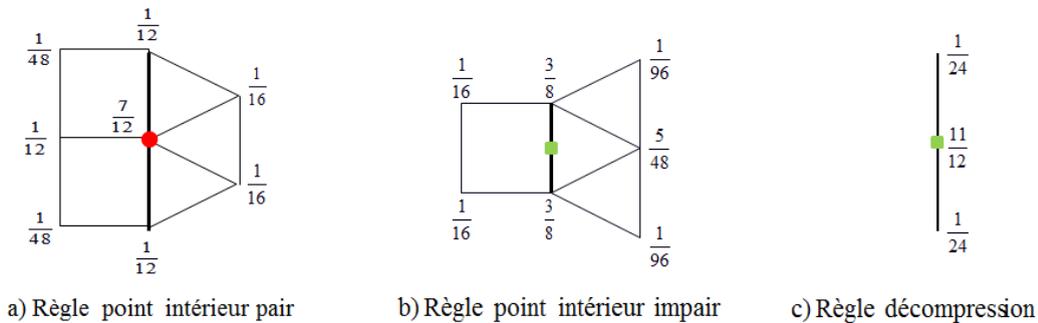


FIGURE 4.13 – Règles de subdivision le long des arêtes quad/triangle ordinaires du schéma quad/triangle de Levin-Levin. a) règle point intérieur, b) règle point arête et c) règle de décompression "unzipping"

Ensuite, les auteurs ont utilisé le test de rayon spectral conjoint, pour prouver que leurs règles et l'application du concept de décompression "unzipping" génèrent une surface de continuité  $C^2$  dans la zone bi-régulière (le long des arêtes quad/triangle ordinaire).

#### 4.4.1.3/ SCHÉMA DE SCHAEFER-WARREN

En 2005, S. Schaefer et J. Warren [Schaefer 2005] ont utilisé les règles donnés par J. Stam et C. Loop dans [Stam 2003] et le concept de décompression "unzipping" donné dans [Levin 2003b] afin de proposer des nouvelles règles de subdivision dans la zone bi-régulière le long des arêtes quad/triangle ordinaires. Les règles de leur schéma de subdivision dans la zone bi-régulière sont données dans la figure 4.14.

Pour montrer que leur schéma est de continuité  $C^2$ , les auteurs utilisent encore les résultats de A. Levin et D. Levin [Levin 2003b].

#### 4.4.2/ SCHÉMA QUAD/TRIANGLE INTERPOLANT/INTERPOLANT

##### 4.4.2.1/ SCHÉMA DE Q. JIANG ET AL

Récemment Q. Jiang et al. [Q.T. Jiang 2009] ont proposé un schéma de subdivision quad/triangle qui unifie deux schémas de subdivision interpolants, à savoir le schéma de Kobbelt [Kobbelt 1996] et le schéma de Butterfly [Dyn 1991]. Les auteurs ont utilisé une autre méthode pour définir les schémas et les règles de subdivision. Cette méthode est développé par C.K. Chui et Q.T. Jiang ([Chui 2003],[Chui 2008]) et consiste à définir l'équation de raffinement de la fonction de base d'un schéma de subdivision par un autre formalisme appelé "Matrix-valued" (sous une forme matricielle). Leur idée

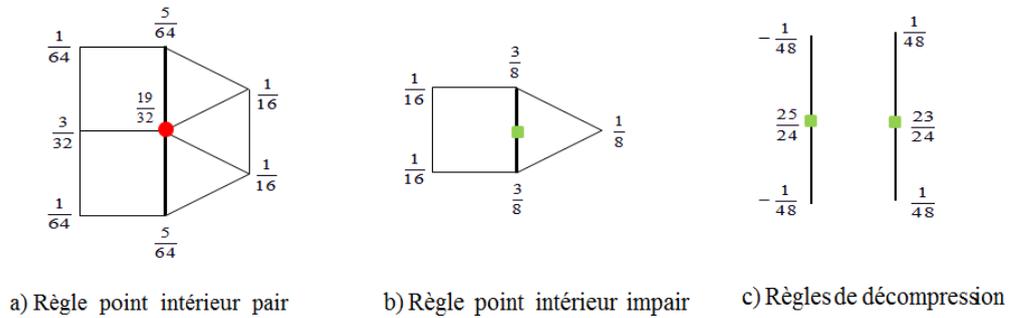


FIGURE 4.14 – Règles de subdivision le long des arêtes quad/triangle ordinaires du schéma quad/triangle de Schaefer-Warren. a) règle point intérieur, b) règle point arête et c) les deux règles de décompression "unzipping".

est d'écrire le formalisme d'un schéma de subdivision quad/triangle comme une fonction de raffinement non homogène. Les auteurs ont proposé des règles de subdivision dans la zone mixte afin de raccorder deux schémas de subdivision interpolants. Pour montrer la continuité de leurs schémas, les auteurs ont adapté le test du rayon spectral conjoint ([Levin 2003b]) afin de l'appliquer à leurs schémas. Pour plus de détails sur la méthode utilisée pour la construction de ces schémas voir [Q.T. Jiang 2009], [Chui 2003], [Chui 2008], [Chui 2006].

## 4.5/ CONCLUSION

Dans ce chapitre on s'est intéressé à quelques schémas de subdivision surfaciques ainsi qu'à quelques travaux sur l'amélioration des schémas de subdivision aux voisinages des points irréguliers. Les schémas de subdivision évoqués dans ce chapitre seront utilisés soit pour la construction des schémas quasi-linéaires (partie 2), soit pour la construction des schémas inverses (partie 3).





## SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE



# SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE SUR UN MAILLAGE BI-RÉGULIER

## 5.1/ INTRODUCTION

Parmi les schémas linéaires évoqués dans la partie I, deux grandes familles se distinguent clairement : les schémas interpolants et les schémas approximants. Chaque catégorie de ces schémas a ses avantages et ses inconvénients. Les inconvénients de ces deux types de schémas de subdivision sont liés à la continuité et à l'ordre d'approximation des fonctions limites générées par chacun de ces schémas de subdivision.

La construction et l'étude des schémas de subdivision dans le but d'améliorer la continuité des fonctions limites pour les uns et mieux contrôler les erreurs sur les points initiaux provenant de l'échantillonnage d'une fonction pour les autres, ont été établies. Mais dans la littérature il n'existe aucun travail consacré à l'étude et à la construction des schémas de subdivision qui combinent ces deux types.

Dans cette partie, on s'intéresse surtout à la construction et à l'étude des schémas de subdivision quasi-linéaires permettant de combiner deux schémas de subdivision de types géométriques différents.

Dans un premier temps, nous donnons un cadre général pour ces schémas de subdivision. Pour cette classe de schémas, nous établirons des propriétés de convergence, de préservation des coefficients dominants, de reproduction des polynômes, de continuité, de quasi-interpolation et d'ordre d'approximation. Ensuite, nous proposons la méthode de construction de ces schémas de subdivision et nous donnons des exemples d'applications.

## 5.2/ DÉFINITIONS

Dans la suite, nous considérons une grille régulière  $X$  comme un ensemble de points de  $\mathbb{R}^s$  et nous remplaçons l'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}^s$  utilisé dans la partie I par l'ensemble des points  $X$ .

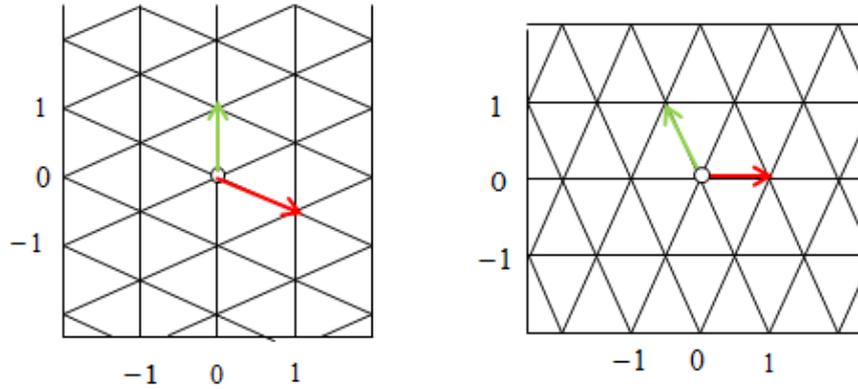


FIGURE 5.1 – Les grilles triangulaires.

### 5.2.1/ SUBDIVISION LINÉAIRE SUR UNE GRILLE RÉGULIÈRE

Considérons une grille régulière  $X$  dans  $\mathbb{R}^s$ , et définissons cette grille en fonction d'une matrice inversible  $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$  par :

$$X_A = AZ^s \quad (5.1)$$

Nous avons vu dans le chapitre 4 qu'une grille régulière du plan peut être définie à partir d'une base vectorielle  $(u, v)$  qui repère les sommets par un vecteur de coordonnées. Ici, nous parlons de deux types de grilles : les grilles quadrangulaires et les grilles triangulaires et nous les définissons en fonction de deux matrices inversibles :  $A_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  pour les grilles quadrangulaires et  $A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  pour les grilles triangulaires.

Dans le cas des grilles quadrangulaires, la matrice est donnée par  $A_1 = (u_1|v_1)$  où les deux vecteurs  $u_1, v_1$  sont les deux vecteurs unitaires  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , la grille quadrangulaire est alors définie par :

$$X_{A_1} = A_1\mathbb{Z}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^2 = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} \quad (5.2)$$

Dans le cas des grilles triangulaires la matrice est donnée par  $A_2 = (u_2|v_2)$ . Les valeurs des vecteurs  $u_2$  et  $v_2$  dépendront de la forme de la grille et de la direction de chacun des vecteurs.

La figure 5.1, représente deux grilles triangulaires régulières, les vecteurs  $u_2, v_2$  associés à ces deux grilles sont donnés par :  $u_2 = (1, -\frac{1}{2})$  et  $v_2 = (0, 1)$  pour la grille donnée dans la partie gauche de la figure 5.1 et par  $u_2 = (1, 0)$  et  $v_2 = (-\frac{1}{2}, 1)$  pour la grille donnée dans la partie droite de la figure 5.1.

Pour la suite, posons  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$  et nous définissons la grille triangulaire associée à cette matrice par :

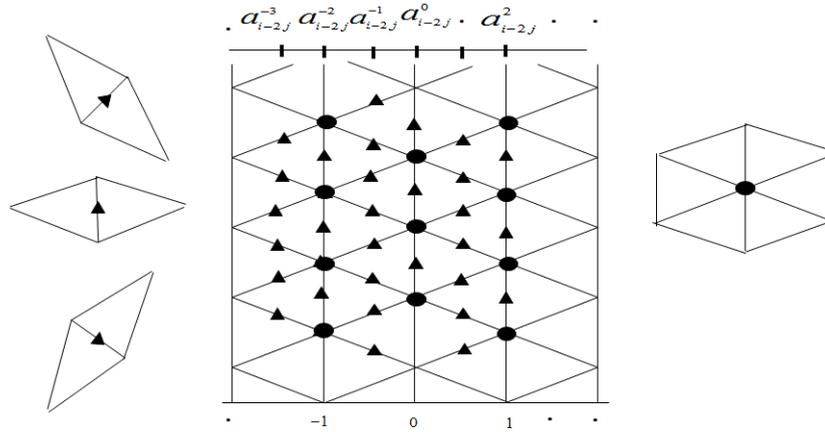


FIGURE 5.2 – Visualisation graphique d'un schéma de subdivision linéaire sur une grille triangulaire. Les points noirs représentent les différents nouveaux points (points pairs et impairs).  $(\dots a_{i-2j}^{-3}, \dots, a_{i-2j}^2, \dots)$  représentent les règles qui déterminent les nouveaux points.

$$X_{A_2} = A_2 \mathbb{Z}^2 = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \mathbb{Z}^2 = \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}. \quad (5.3)$$

Dans ce qui suit, nous donnons la définition d'un schéma de subdivision linéaire sur une grille régulière  $X_{A_\alpha}, A_\alpha \in \mathbb{R}^{s \times s}, \alpha = \{1, 2\}$ . L'objectif est de définir ce schéma de subdivision en fonction d'un ensemble de règles  $\{a_i^{i_1}\}_{i_1 \in \Lambda, i \in \mathbb{Z}^s}$  sur l'axe des abscisses ( $Ox$ ). Chaque masque de cet ensemble contient une ou plusieurs règles et chaque règle détermine un nouveau point sur l'axe ( $Oy$ ).

Pour tout  $i = (i_1, \dots, i_s) \in X_{A_\alpha}, \alpha = 1, 2$ , pour tout  $p \in l(X_{A_\alpha})$  et pour  $i_1 \in \Lambda = \llbracket \omega_1, \omega_2 \rrbracket$  nous définissons un schéma de subdivision linéaire sur la grille  $X_{A_\alpha}$  en fonction d'un ensemble de règles  $\{a_i^{i_1}\}_{i_1 \in \Lambda, i \in \mathbb{Z}^s}$  par :

$$\forall p \in l(X_{A_\alpha}), \forall i \in \mathbb{Z}^s, \forall i_1 \in \Lambda, \quad (Sp)_{A_\alpha i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1} (p)_{A_\alpha j}. \quad (5.4)$$

Cette définition joue un rôle important dans la visualisation des nouveaux points sur la grille comme le montre la figure 5.2. Nous expliquons cela de façon plus détaillée dans la section 5.4.

### 5.2.2/ FONCTION LIMITE SUR UNE GRILLE RÉGULIÈRE

Dans le chapitre 3, nous avons donné des formules pour les fonctions limites des schémas de subdivision linéaires. Dans ce qui suit nous allons voir que ces formules dépendent aussi de la grille associée à la définition d'un schéma de subdivision.

**Définition 15** Pour tout opérateur  $S^\infty : \pi_m(\mathbb{Z}^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$ , pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$  et

pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$  nous définissons l'opérateur  $S_{|A}^\infty : \pi_3(\mathbb{A}Z^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$ ,  $m \leq 3$  par :

$$S_{|A}^\infty f(z) = S^\infty f_{|Az} = S^\infty f(g(z)), \quad (5.5)$$

avec  $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $g(z) = Az$ .

**Proposition 11** Soit  $S^\infty : \pi_m(\mathbb{Z}^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$ ,  $m \leq 3$  défini comme dans la proposition 8 par :

$$\forall f \in \pi_m, m \leq 3, S^\infty f = f + \nabla L \nabla^t f,$$

avec  $L \in \mathbb{R}^{s \times s}$ . Alors l'opérateur  $S_{|A}^\infty$  est donné par :

$$S_{|A}^\infty f(z) = f_{|Az} + (\nabla A L A^t \nabla^t) f_{|Az}, \quad (5.6)$$

et l'opérateur quasi-interpolants  $Q : \pi_m(\mathbb{A}Z^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$ ,  $m \leq 3$  est donné par :

$$Q_{|A} f(z) = f_{|Az} - (\nabla A L A^t \nabla^t) f_{|Az}. \quad (5.7)$$

**Preuve 16** Pour tout  $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ ,  $g(z) = Az$ ,  $\nabla g(z) = A$ ,

$$\begin{aligned} S_{|Az}^\infty f(z) &= S^\infty f(g(z)) = f(g(z)) + (\nabla L \nabla^t) f(g(z)) \\ &= f(g(z)) + [(\nabla f(g(z))) L (\nabla^t f(g(z)))] \\ &= f(g(z)) + [(\nabla f(Az)) L (\nabla^t f(Az))] \\ &= f_{|Az} + (\nabla A L A^t \nabla^t) f_{|Az}. \end{aligned}$$

Par la même méthode ou par l'utilisation de la relation  $S_{|A}^\infty Q_{|A} = Id$  (proposition 9), nous pouvons facilement montrer la relation (5.7).

La proposition 11 montre que les formules des opérateurs  $S^\infty$  et  $Q$  dépendront du choix de la matrice qui définit la grille  $X_A$ .

**Exemple 7** Revenons au choix de la matrice  $A_2$  dans le cas d'une grille triangulaire. Cet exemple montre que le choix de la matrice  $A_2$  donne des formules différentes aux opérateurs  $S^\infty$  et  $Q$  d'un schéma Box-spline quartique à trois directions.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que les formules des opérateurs  $S^\infty$  et  $Q$  d'un schéma Box-spline quartique à trois directions sont données par :

$$S^\infty f = f + \frac{1}{6} \nabla \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \nabla^t f,$$

$$Qf = f - \frac{1}{6} \nabla \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \nabla^t f.$$

Pour  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et à partir des relations (5.6) et (5.7), on trouve :

$$S_{|A_2}^\infty f(z) = f_{|A_2 z} + \nabla \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \nabla^t f_{|A_2 z},$$

$$Q_{|A_2}f(z) = f_{|A_2z} - \nabla \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \nabla^t f_{|A_2z}.$$

Par contre, pour  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$  les opérateurs  $S_{|A_2}^\infty$  et  $Q_{|A_2}$  sont donnés par :

$$S_{|A_2}^\infty f(z) = f_{|A_2z} + \nabla \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \nabla^t f_{|A_2z}, \quad (5.8)$$

$$Q_{|A_2}f(z) = f_{|A_2z} - \nabla \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \nabla^t f_{|A_2z}. \quad (5.9)$$

Pour la suite, nous utilisons la formule donnée dans l'équation (5.9) comme l'opérateur quasi-interpolant du schéma de Loop.

**Remarque 4** Notons que pour les schémas de subdivision linéaires définis sur une grille quadrangulaire, ainsi que pour les schémas interpolants, nous avons :

$$\begin{cases} S_{|A_1}^\infty = S^\infty, \\ Q_{|A_1} = Q. \end{cases}$$

## 5.3/ SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE

### 5.3.1/ DÉFINITIONS

Dans la littérature, une grille régulière dans les deux moitiés du plan qui contient deux types d'éléments différents est appelée grille bi-régulière.

À la différence des autres définitions nous considérons toute grille régulière dans les deux moitiés du plan  $x > 0$  et  $x < 0$  comme grille bi-régulière. Nous appelons schéma de subdivision quasi-linéaire régulier tout schéma de subdivision composé de deux schémas linéaires de types géométriques différents (approximant, interpolant) de chaque côté de l'axe  $y$  d'une grille bi-régulière.

#### 5.3.1.1/ GRILLES BI-RÉGULIÈRES

Considérons les deux grilles régulières  $X_{A_1}$  et  $X_{A_2}$  définies précédemment par les équations (5.2) et (5.3) et définissons chacune de ces grilles comme l'union de deux grilles (voir figure 5.3) :

$$\begin{aligned} X_{A_1} &= X_{(A_1, A_1)} = X_{A_1}^- \cup X_{A_1}^+ = A_1(\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}) \cup A_1(\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}) \\ &= \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0\} \cup \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

et

$$\begin{aligned} X_{A_2} &= X_{(A_2, A_2)} = X_{A_2}^- \cup X_{A_2}^+ = A_2(\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}) \cup A_2(\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}) \\ &= \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0\} \cup \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

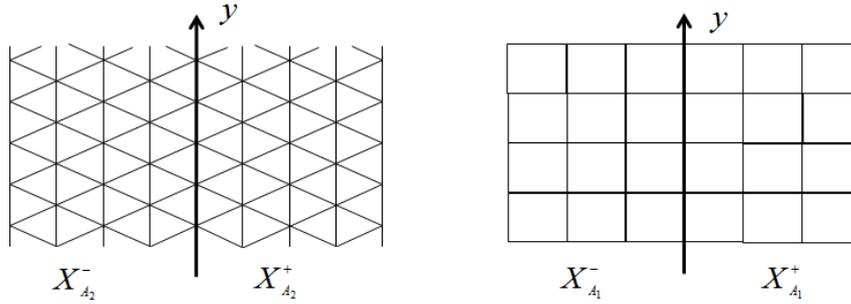


FIGURE 5.3 – À gauche la grille triangle/triangle et à droite la grille quad/quad.

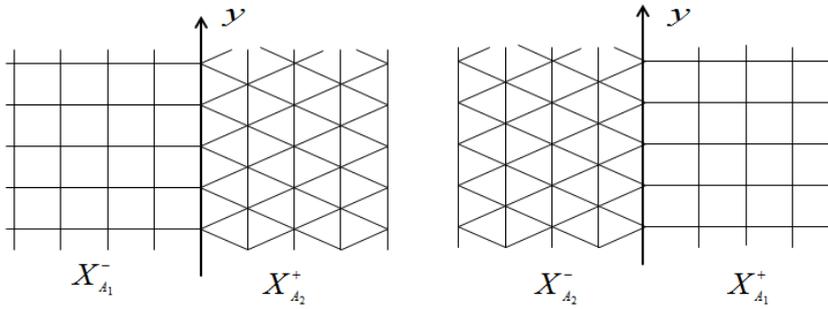


FIGURE 5.4 – À gauche la grille quad/triangle et à droite la grille triangle/quad.

Nous appelons la grille définie par l'équation (5.10) grille quad/quad et la grille définie par l'équation (5.11) grille triangle/triangle.

Nous définissons les deux grilles bi-régulières quad/triangle et triangle/quad données dans la figure 5.4, par :

$$\begin{aligned} X_{(A_1, A_2)} &= X_{A_1}^- \cup X_{A_2}^+ = A_1(\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}) \cup A_2(\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}) \\ &= \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0\} \cup \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

et

$$\begin{aligned} X_{(A_2, A_1)} &= X_{A_2}^- \cup X_{A_1}^+ = A_2(\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}) \cup A_1(\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}) \\ &= \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0\} \cup \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Les définitions (5.10)-(5.13) garantissent que les grilles sont uniformes dans les deux moitiés du plan  $\{x < 0\}$  et  $\{x > 0\}$  et que les deux moitiés des grilles sont alignées sur une frontière commune, i.e.

$$A_\alpha(\{0\} \times \mathbb{Z}) = A_\beta(\{0\} \times \mathbb{Z}), \alpha, \beta = 1, 2. \quad (5.14)$$

### 5.3.1.2/ SCHÉMA QUASI-LINÉAIRE

Considérons un schéma de subdivision quasi-linéaire  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  défini sur une grille bi-régulière  $X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Supposons que ce schéma coïncide avec un schéma interpolant  $S_{|A_\alpha}^-$  sur la moitié gauche de la grille et un schéma de subdivision approximant  $S_{|A_\beta}^+$  sur la moitié droite de cette grille. En se basant sur les définitions des grilles bi-régulières et la définition d'un schéma de subdivision linéaire sur une grille régulière (équation (5.4)), nous donnons une définition symbolique de ce schéma de subdivision.

**Définition 16** On définit un schéma de subdivision quasi-linéaire  $S$  sur un support  $\Lambda = \llbracket \omega_1, \omega_2 \rrbracket \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  en fonction d'un ensemble de règles  $\{a_i^{i_1}\}_{i_1 \in \Lambda, i \in \mathbb{Z}^2}$ , par :

$$(Sp)_{\varphi(i)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1}(p)_{\varphi(j)}, \quad \forall p \in l(X_{(A_\alpha, A_\beta)}), \forall i \in \mathbb{Z}^s, \forall i_1 \in \Lambda, \quad (5.15)$$

où  $\varphi : \mathbb{Z}^s \rightarrow X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  est défini par :

$$\varphi(i) = \begin{cases} A_\alpha i & i_1 < 0, \\ (\gamma A_\alpha + \theta A_\beta) i & i_1 = 0, \\ A_\beta i & i_1 > 0, \end{cases} \quad (5.16)$$

avec  $(\gamma, \theta) \in [0, 1] \times [0, 1]$  et  $\gamma + \theta = 1$ .

Alors pour  $\theta = 1 - \gamma$  :

$$\varphi(i) = \begin{cases} A_\alpha i & i_1 < 0, \\ (\gamma A_\alpha + (1 - \gamma) A_\beta) i & i_1 = 0, \\ A_\beta i & i_1 > 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

La définition de ce schéma de subdivision en fonction d'un ensemble de règles, nous permettra de visualiser la façon d'obtenir l'équation (5.15) graphiquement (figure 5.5), comme elle nous permet de donner la définition suivante :

**Définition 17** Un schéma de subdivision quasi-linéaire est dit stationnaire si les règles de ce schéma de subdivision sont identiques à chaque itération c'est-à-dire si les règles  $a^{\omega_1}, \dots, a^{\omega_2}$  sont identiques à chaque itération.

### 5.3.2/ LA CONVERGENCE UNIFORME

Nous avons vu dans la définition 3 (chapitre 2) qu'un schéma de subdivision  $S$  converge uniformément si :

$$\forall p \in l(\mathbb{Z}^s), \exists F \in C(\mathbb{R}^s) : \lim_{j \rightarrow \infty} \|(S^k p)_i - F(2^{-k} i)\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D} = 0.$$

Nous avons vu aussi que cette définition est utilisée pour exprimer la fonction limite  $F = S^\infty p$  à partir d'une fonction de base et de sa relation d'échelle (propriété 5 (corollaire 1)). La définition de la convergence uniforme d'un schéma de subdivision défini sur une grille bi-régulière est donnée de la même façon par la définition :

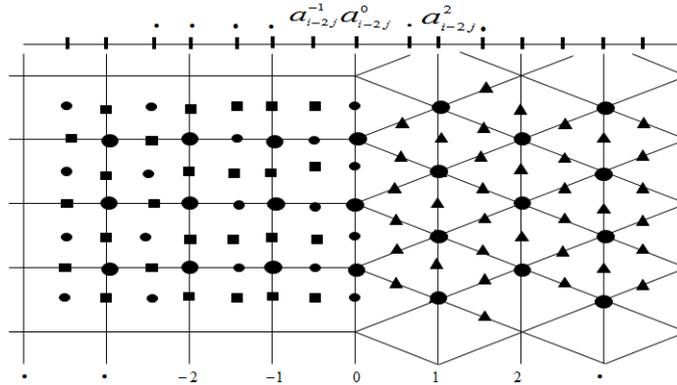


FIGURE 5.5 – Visualisation graphique d'un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille bi-régulière. Les points noirs représentent les différents nouveaux points.  $(\dots a_{i-2,j}^{-3}, \dots, a_{i-2,j}^2, \dots)$  représentent les règles qui déterminent ces nouveaux points.

**Définition 18** On dit qu'un schéma de subdivision  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  converge uniformément si :

$$\forall p \in l(X_{(A_\alpha, A_\beta)}), \exists F \in C(\mathbb{R}^s) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|((S^k p)_{|(A_\alpha, A_\beta)})_i - F(2^{-k}i)\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D} = 0, \quad (5.18)$$

à condition que la limite de  $2^{-k}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ ,  $k \rightarrow \infty$  converge vers un sous-ensemble dense de  $\mathbb{R}^s$ . Cette condition garantit que si la fonction limite existe, alors elle est unique.

Contrairement à la subdivision linéaire, la fonction limite  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty p$  d'un schéma de subdivision défini sur une grille bi-régulière ne peut pas être exprimée à partir des fonctions de base (propriété 5, corollaire 1). Alors, nous ne pouvons pas non plus exprimer cette fonction comme une fonction polynômiale (chapitre 3(section 3.4)). Dans la sous-section suivante, nous définissons l'opérateur limite  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty$  à partir de la définition des opérateurs limites  $S_{|A_\alpha}^\infty$  et  $S_{|A_\beta}^\infty$  des deux schémas linéaires.

### 5.3.3/ FONCTIONS LIMITES ET REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Nous observons une différence significative entre le cas linéaire et le cas non-linéaire. Dans les deux cas, nous nous demandons comment choisir les points de contrôle de sorte que nous obtenons un polynôme à la limite. La réponse se présente sous la forme d'un opérateur  $Q$  qui représente l'opérateur inverse de  $S^\infty$  sur un sous-espace de polynômes. Dans le cas linéaire, afin d'obtenir un polynôme à la limite, nous avons dû prendre des points de contrôle qui se trouvent sur un polynôme, alors que ce n'est plus pareil dans le cas quasi-linéaire.

L'opérateur  $Q$  n'est pas un opérateur de  $\pi_m(\mathbb{R}^s)$  dans  $\pi_m(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$ , et nous considérons de façon plus générale :

$$Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)}).$$

Cependant, nous aurons besoin d'une notion parallèle de la préservation de coefficient dominant. On dit que  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  préserve les coefficients dominants, si

$$\forall f \in \pi_k(\mathbb{R}^s) \Rightarrow |Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f(x) - f(x)| = O(\|x\|^k) \quad \forall k \leq m. \quad (5.19)$$

Dans ce qui suit nous allons montrer que sous certaines conditions, un schéma de subdivision quasi-linéaire reproduit des polynômes de degré au plus  $m$ . Cela revient à montrer la relation suivante :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id \Leftrightarrow S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma. \quad (5.20)$$

Soient  $S_{|A_\alpha}^-$  un schéma de subdivision linéaire interpolant défini sur une grille régulière  $X_{A_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$  et  $S_{|A_\beta}^+$  un schéma de subdivision linéaire approximant défini sur une grille régulière  $X_{A_\beta}$ ,  $\beta = 1, 2$ . Nous avons montré dans le chapitre 3 que :

1.  $S_{|A_\alpha}^-$  reproduit des polynômes de degré  $m$  si pour tout  $(S_{|A_\alpha}^-)^\infty : l(X_{A_\alpha}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$  il existe  $Q_{|A_\alpha}^- : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{A_\alpha})$  de sorte que :

$$(S_{|A_\alpha}^-)^\infty Q_{|A_\alpha}^- = Id \Leftrightarrow S_{|A_\alpha}^- Q_{|A_\alpha}^- = Q_{|A_\alpha}^- \sigma. \quad (5.21)$$

2.  $S_{|A_\beta}^+$  reproduit des polynômes de degré  $m$  si pour tout  $(S_{|A_\beta}^+)^\infty : l(X_{A_\beta}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$  il existe  $Q_{|A_\beta}^+ : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{A_\beta})$  de sorte que :

$$(S_{|A_\beta}^+)^\infty Q_{|A_\beta}^+ = Id \Leftrightarrow S_{|A_\beta}^+ Q_{|A_\beta}^+ = Q_{|A_\beta}^+ \sigma. \quad (5.22)$$

Nous définissons l'opérateur de subdivision  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty : l(X_{(A_\alpha, A_\beta)}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$  par :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty = \begin{cases} (S_{|A_\alpha}^-)^\infty & x < 0, \\ (S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty = \gamma(S_{|A_\alpha}^-)^\infty + (1 - \gamma)(S_{|A_\beta}^+)^\infty & x = 0, \\ (S_{|A_\beta}^+)^\infty & x > 0, \end{cases} \quad (5.23)$$

et nous supposons qu'il existe un opérateur  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  de sorte que  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id$ .

**Proposition 12** Soient  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty : l(X_{(A_\alpha, A_\beta)}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$  une application injective,  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  un opérateur quasi-interpolant. Alors la relation  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id$ , implique :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty = \begin{cases} (S_{|A_\alpha}^-)^\infty & x < 0 \\ (S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty = \gamma(S_{|A_\alpha}^-)^\infty + (1 - \gamma)(S_{|A_\beta}^+)^\infty & x = 0 \\ (S_{|A_\beta}^+)^\infty & x > 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\Leftrightarrow Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = \begin{cases} Q_{|A_\alpha}^- & x < 0, \\ Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0 = \gamma Q_{|A_\alpha}^- + (1 - \gamma) Q_{|A_\beta}^+ & x = 0, \\ Q_{|A_\alpha}^+ & x > 0, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty &= \begin{cases} (S_{|A_\alpha}^-)^\infty & x < 0 \\ \gamma(S_{|A_\alpha}^-)^\infty + (1 - \gamma)(S_{|A_\beta}^+)^\infty & x = 0 \\ (S_{|A_\beta}^+)^\infty & x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} Id & x < 0, \\ Id + (1 - \gamma)(\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) & x = 0, \\ Id + (\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) & x > 0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

et

$$\begin{aligned}
 Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} &= \begin{cases} Q_{|A_\alpha}^- & x < 0, \\ \gamma Q_{|A_\alpha}^- + (1 - \gamma)Q_{|A_\beta}^+ & x = 0, \\ Q_{|A_\alpha}^+ & x > 0, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} Id & x < 0, \\ Id - (1 - \gamma)(\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) & x = 0, \\ Id - (\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) & x > 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

**Preuve 17** Nous montrons la relation (5.24) pour l'ensemble des polynômes de degré au plus 3.  $\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^2)$ , pour tout  $A_\alpha, A_\beta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et pour tout  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned}
 S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty f(z) &= \begin{cases} (S^-)^\infty f(A_\alpha z) & x < 0 \\ \gamma(S^-)^\infty f(A_\alpha z) + (1 - \gamma)(S^+)^\infty f(A_\beta z) & x = 0 \\ (S^+)^\infty f(A_\beta z) & x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(A_\alpha z) & x < 0 \\ \gamma(S^-)^\infty f(A_\alpha z) + (1 - \gamma)(S^+)^\infty f(A_\beta z) & x = 0 \\ f(A_\beta z) + (\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) f(A_\beta z) & x > 0 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Pour  $x = 0$  et à partir de l'équation (5.14),  $A_\alpha z = A_\beta z$ , alors  $\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(A_\alpha z) = f(A_\beta z)$ ,

$$\begin{aligned}
 S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty f(z) &= \begin{cases} f(A_\alpha z) & x < 0 \\ f(A_\beta z) + (1 - \gamma)(\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) f_{A_\beta z} & x = 0 \\ f(A_\beta z) + (\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) f(A_\beta z) & x > 0 \end{cases} \\
 \Rightarrow S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty f(z) &= \begin{cases} f_{|A_\alpha z} & x < 0, \\ f_{|A_\beta z} + (1 - \gamma)(\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z} & x = 0, \\ f_{|A_\beta z} + (\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z} & x > 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

d'où la preuve de la relation (5.25). De la même manière nous pouvons montrer la relation (5.26).

Maintenant, nous supposons que :

$$Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f(z) = \begin{cases} f_{|A_\alpha z} & x < 0, \\ f_{|A_\beta z} - (1 - \gamma)(\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z} & x = 0, \\ f_{|A_\beta z} - (\nabla A_\beta LA_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z} & x > 0, \end{cases} ,$$

et nous montrons que  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id$

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f(z) = \begin{cases} (S^-)_{|A_\alpha}^\infty f_{|A_\alpha z} & x < 0 \\ S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty [f_{|A_\beta z} - (1 - \gamma)(\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z}] & x = 0 \\ (S^+)_{|A_\beta}^\infty [f_{|A_\beta z} - (\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z}] & x > 0 \end{cases} .$$

À partir de la remarque (3) (chapitre 3) et la remarque (4), nous avons :

$$(S^-)_{|A_\alpha}^\infty f_{|A_\alpha z} = Id,$$

et à partir de la proposition (11) on a :

$$(S^+)_{|A_\beta}^\infty [f_{|A_\beta z} - (\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z}] = Id.$$

Il nous reste à montrer que :

$$(S^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty [f_{|A_\beta z} - (1 - \gamma)(\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z}] = Id. \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} (S^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty [f_{|A_\beta z} - (1 - \gamma)(\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z}] &= (S^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty (f_{|A_\beta z}) \\ &\quad - (1 - \gamma)(S^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty (\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z} \\ &= f_{|A_\beta z} + (1 - \gamma)(\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z} - (1 - \gamma)[(\nabla A_\beta L A_\beta^t \nabla^t) f_{|A_\beta z} \\ &\quad + \sum \frac{m_{A_i}}{(A_i)!} D^{4i} f_{|A_\beta z}], \end{aligned}$$

nous avons, pour tout  $x = 0$  et pour tout  $f \in \pi_3(\mathbb{R}^2)$ ,  $D^4 f_{|A_\beta z} = 0$ , alors,

$$(S^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty (Q^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)} f(z) = f_{|A_\beta z},$$

d'ou la preuve de la relation (5.27).

Afin de montrer la relation (5.20), nous montrons que l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  d'un schéma de subdivision quasi-linéaire préserve les coefficients dominants (relation 5.19)

**Proposition 13** Soit  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  un opérateur de  $\pi_m(\mathbb{R}^s)$  dans  $l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  défini par l'équation (5.26). Si  $Q_{|A_\alpha}^-$  et  $Q_{|A_\beta}^+$  préservent les coefficients dominants alors  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  préserve les coefficients dominants.

**Preuve 18**  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  préserve les coefficients dominants si :

$$\forall f \in \pi_k(\mathbb{R}^s) \Rightarrow |Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f(z) - f(z)| = O(\|z\|^k) \text{ pour tout } k \leq m.$$

Cela revient à démontrer que :

$$\forall f \in \pi_k(\mathbb{R}^s) \Rightarrow |Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0 f(z) - f(z)| = O(\|z\|^k) \text{ pour tout } k \leq m$$

On a,

$$|Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0 f(z) - f(z)| = |\gamma Q_{|A_\alpha}^- f(z) + (1 - \gamma) Q_{|A_\beta}^+ f(z) - f(z)|$$

$$\Rightarrow |\gamma Q_{|A_\alpha}^- f + (1 - \gamma) Q_{|A_\beta}^+ f - \gamma f - (1 - \gamma) f| \leq \gamma |Q_{|A_\alpha}^- f - f| + (1 - \gamma) |Q_{|A_\alpha}^+ f - f|,$$

Par hypothèse,  $Q_{|A_\alpha}^-$  et  $Q_{|A_\beta}^+$  préservent les coefficients dominants alors,

$$|\gamma Q_{|A_\alpha}^- f + (1 - \gamma) Q_{|A_\beta}^+ f - \gamma f - (1 - \gamma) f| = O(\|z\|^k) \text{ pour tout } k \leq m.$$

**Lemme 6** Soit  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty : l(X_{(A_\alpha, A_\beta)}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^s)$ , soit  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  l'opérateur inverse de  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty$ . Si  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  préserve les coefficients dominants pour tout  $f \in \pi_3(\mathbb{R}^s)$  alors :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id \Leftrightarrow S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma \quad (5.28)$$

**Preuve 19** Nous considérons  $\sigma, S_{|(A_\alpha, A_\beta)}, S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty$  et  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  comme des opérateurs définis sur l'espace des polynômes de degré au plus 3.

$$\underline{S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id \Rightarrow S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma}$$

Supposons que  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id$ . Nous multiplions les deux côtés de l'égalité

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty S_{|(A_\alpha, A_\beta)} = \sigma S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty,$$

par l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  nous aurons :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = \sigma S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$$

Pour tout  $f \in \pi_3(\mathbb{R}^s)$  :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f = \sigma S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f = \sigma f.$$

D'un autre côté nous avons,

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id \Rightarrow S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma f = \sigma f$$

alors :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f = S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma f$$

$$\Rightarrow S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma$$

$$\underline{S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma \Rightarrow S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id}$$

Pour tout  $f \in \pi_3(\mathbb{R}^s)$  et pour tout  $n \leq 3$ ,  $\sigma f = 2^{-n} f$ , nous supposons que

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^k Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma^k f, \quad (5.29)$$

et nous montrons que  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = Id$ , à partir de la définition de la convergence uniforme (équation 5.18), i.e :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|((S^k p)_{|(A_\alpha, A_\beta)})_i - f(2^{-k}i)\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D} = 0. \quad (5.30)$$

À partir de l'équation (5.29) et de la définition de l'opérateur de dilatation  $\sigma f = 2^{-n} f$ ,  $n \leq 3$ ,

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^k Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} 2^{-nk} f$$

$$\Rightarrow \|((S^k p)_{|(A_\alpha, A_\beta)})_i - f(2^{-k}i)\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D} = 2^{-nk} \|Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f - f\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D}.$$

À partir de la proposition 11,  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  préserve les coefficients dominants, alors :

$$\|Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f - f\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D} = O(2^{-nk}),$$

d'où la preuve de la relation (5.30).

#### 5.3.4/ QUASI-INTERPOLATION ET ORDRE D'APPROXIMATION

Dans le chapitre 3, nous avons vu que les schémas de subdivision B-splines ont un ordre d'approximation optimal, tandis que les schémas interpolants présentent un ordre d'approximation maximal. Précédemment, il a été montré que si  $Q : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow \pi_m(\mathbb{Z}^s)$  satisfait,  $\forall f \in \pi_m, S^\infty Q f = f$ , alors  $Q$  peut être étendu à un opérateur invariant par translation  $Q^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  qui est borné et local. L'extension de cet opérateur est utilisée afin de montrer l'ordre d'approximation  $m + 1$  des schémas de subdivision approximants (section 2.5).

Ici, nous verrons que l'extension de l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  à un opérateur quasi-interpolant discret  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^*$  peut être utilisée afin de montrer que nous pouvons estimer l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision quasi-linéaire.

Dans le cas de la subdivision quasi-linéaire, l'opérateur  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  n'est pas nécessairement invariant par translation. Alors nous supposons que l'opérateur  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  peut être étendu à un opérateur borné et local  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  et nous montrons qu'il existe un domaine ouvert et borné  $D \in \mathbb{R}^s$  et une constante  $c > 0$  de sorte que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  :

$$|Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f(i)| \leq c \|f\|_{\infty, i+D}.$$

**Lemme 7** L'opérateur  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  peut être étendu à un opérateur invariant par translation  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  qui est borné et local, à savoir, qu'il existe un domaine ouvert et borné  $D \in \mathbb{R}^s$  et une constante  $c > 0$ , de sorte que :

$$|Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f(i)| \leq c \|f\|_{\infty, i+D}.$$

Afin de montrer ce lemme, nous donnons la définition suivante :

**Définition 19** On dit qu'un schéma de subdivision linéaire  $S$  défini sur un support  $\Omega$  est local, si pour tout  $i \in \mathbb{R}^s$  et pour tout  $p \in l(X_{A_j})$ ,  $j \in \{\alpha, \beta\}$ ,

$$p|_{(i+\Omega) \cap X_{A_j}} = 0 \Rightarrow (S|_{A_j}^\infty p)_i = 0. \quad (5.31)$$

**Preuve 20** Soit  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} : \pi_m(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(X_{(A_\alpha, A_\beta)})$  l'opérateur quasi-interpolant d'un schéma de subdivision quasi-linéaire défini par :

$$Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = \begin{cases} Q_{|A_\alpha}^- & i_1 < 0, \\ Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0 & i_1 = 0, \\ Q_{|A_\alpha}^+ & i_1 > 0, \end{cases}$$

où  $Q_{|A_\alpha}^-$  est l'opérateur quasi-interpolant d'un schéma interpolant,  $Q_{|A_\beta}^+$  l'opérateur quasi-interpolant d'un schéma approximant et  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0$  l'opérateur quasi-interpolant mixte.

Nous supposons qu'il existe un opérateur quasi-interpolant discret  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^*$  de sorte que :

$$Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* = \begin{cases} (Q_{|A_\alpha}^-)^* & i_1 < 0, \\ (Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* & i_1 = 0, \\ (Q_{|A_\beta}^+)^* & i_1 > 0, \end{cases}$$

et nous montrons que :

$$|Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f(i)| \leq c \|f\|_{\infty, (i+\Omega) \cap X_{(A_\alpha, A_\beta)}} \quad (5.32)$$

• Pour  $i_1 < 0$ , l'opérateur  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^*$  correspond à l'opérateur quasi-interpolant discret d'un schéma interpolant  $(Q_{|A_\alpha}^-)^*$ ,

$$|Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f(i)| = |(Q_{|A_\alpha}^-)^* f(i)|,$$

alors il est possible de montrer qu'il existe une constante  $c_1 = 1$  de sorte que :

$$|(Q_{|A_\alpha}^-)^* f(i)| = |f(i)| \leq \|f\|_{\infty, (i+\Omega^-) \cap X_{A_\alpha}}, \quad (5.33)$$

où  $\Omega^-$  représente le support du schéma interpolant  $(S_{|A_\alpha}^-)^*$

• Pour  $i_1 > 0$ , l'opérateur  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^*$  correspond à l'opérateur quasi-interpolant discret d'un schéma approximant  $(Q_{|A_\beta}^+)^*$ , alors à partir de la définition 19 et le lemme 4 (chapitre 3), nous pouvons montrer qu'il existe  $c_2 > 0$ , tel que :

$$|(Q_{|A_\beta}^+)^* f(i)| \leq c_1 \|f\|_{\infty, (i+\Omega^+) \cap X_{A_\beta}}, \quad (5.34)$$

où  $\Omega^+$  représente le support du schéma approximant  $(S_{|A_\beta}^+)$ . Il nous reste à montrer la relation (5.32) pour  $i_1 = 0$ ,

$$|(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* f(i)| = |\gamma (Q_{|A_\alpha}^-)^* f(i) + (1 - \gamma) (Q_{|A_\beta}^+)^* f(i)|$$

$$\Rightarrow |(Q^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f(i)| \leq \gamma |(Q^-)_{|A_\alpha}^* f(i)| + (1 - \gamma) |(Q^+)_{|A_\beta}^* f(i)|.$$

À partir des deux équations (5.33) et (5.34), nous aurons :

$$|(Q^0_{|(A_\alpha, A_\beta)})^* f(z)| \leq \gamma \|f\|_{\infty, (i+\Omega^-) \cap X_{A_\alpha}} + (1 - \gamma) c_2 \|f\|_{\infty, (i+\Omega^+) \cap X_{A_\beta}}. \quad (5.35)$$

On a d'un côté  $X_{A_\alpha} \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  et  $X_{A_\beta} \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  et d'un autre côté,  $\Omega^+ \subseteq \Omega^-$  alors :

$$\begin{cases} ((i + \Omega^+) \cap X_{A_\beta}) \subseteq ((i + \Omega^-) \cap X_{(A_\alpha, A_\beta)}), \\ ((i + \Omega^+) \cap X_{A_\beta}) \subseteq (i + \Omega^+) \cap X_{(A_\alpha, A_\beta)}. \end{cases} \quad (5.36)$$

À partir de ces dernières équations et l'équation (5.35), nous pouvons affirmer que :

$$|(Q^0_{|(A_\alpha, A_\beta)})^* f(i)| \leq c \|f\|_{\infty, (i+\Omega^+) \cap X_{(A_\alpha, A_\beta)}}, \quad (5.37)$$

d'ou l'existence d'une constante  $c = \gamma + c_2(1 - \gamma)$  et d'un domaine ouvert et borné  $D$ .

Après avoir montré que l'opérateur  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  peut être étendu à un opérateur quasi-interpolant discret  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^*$ , nous montrons dans le lemme suivant que nous pouvons approcher toute fonction  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$  par  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^*$ .

**Lemme 8** Soit  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  un schéma de subdivision quasi-linéaire, soit  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* : C(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{A_\alpha, A_\beta})$  un opérateur borné (dans le sens du Lemme 7) de sorte que :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f = f \quad f \in \pi_m(\mathbb{R}^s).$$

Alors il existe une constante  $c$  telle que :

$$\|S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f - f\| \leq c \|D^{m+1} f\|_\infty,$$

pour toute  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$ ,  $\|D^{m+1} f\|_\infty \leq \infty$  avec la notation  $\|D^{m+1} f\|_\infty = \text{Max}\{\|D^s f\|_\infty, |s| = m + 1\}$  (le maximum des opérateurs différentiels de degré  $m + 1$ ).

**Preuve 21** Afin de montrer ce lemme, nous supposons que :

$$\|S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f - f\|_\infty = \begin{cases} \|(S_{|A_\alpha}^-)^\infty (Q_{|A_\alpha}^-)^* f - f\|_\infty & x < 0 \\ \|(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty (Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* f - f\|_\infty & x = 0 \\ \|(S_{|A_\beta}^+)^\infty (Q_{|A_\beta}^+)^* f - f\|_\infty & x > 0 \end{cases}$$

et nous montrons que :

$$\begin{cases} \|(S_{|A_\alpha}^-)^\infty (Q_{|A_\alpha}^-)^* f - f\|_\infty = c_1 \|D^{m+1} f\|_\infty & x < 0 \\ \|(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty (Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* f - f\|_\infty \leq c_2 \|D^{m+1} f\|_\infty & x = 0 \\ \|(S_{|A_\alpha}^+)^\infty (Q_{|A_\alpha}^+)^* f - f\|_\infty \leq c_3 \|D^{m+1} f\|_\infty & x > 0 \end{cases}$$

Nous avons :

• Pour  $x < 0$ , le schéma  $(S_{|A_\alpha}^-)^\infty$  reproduit les polynôme de degré  $m$  de façon exacte. Alors il est approximant d'ordre  $m + 1$  et  $(S_{|A_\alpha}^-)^\infty(Q_{|A_\alpha}^-)^* f$  représente la meilleure approximation uniforme de  $f$  dans  $C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$  sur la moitié gauche de la grille, i.e

$$\|(S_{|A_\alpha}^-)^\infty(Q_{|A_\alpha}^-)^* f - f\|_\infty \leq c_1 \|D^{m+1} f\|_\infty$$

• Pour  $x > 0$ , le schéma  $(S_{|A_\beta}^+)^\infty$  reproduit les polynômes de degré  $m$  de façon simple. Alors d'après le lemme 5, nous pouvons estimer son ordre d'approximation et  $(S_{|A_\beta}^+)^\infty(Q_{|A_\beta}^+)^* f$  est plus proche de la meilleure approximation uniforme de  $f$  dans  $C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$  sur la moitié droite de la grille, i.e

$$\|(S_{|A_\beta}^+)^\infty(Q_{|A_\beta}^+)^* f - f\|_\infty \leq c_3 \|D^{m+1} f\|_\infty.$$

Il nous reste à montrer qu'il existe une constante  $c_2$  telle que :

$$\|(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* f - f\|_\infty \leq c_2 \|D^{m+1} f\|_\infty. \quad (5.38)$$

Pour cela, nous utilisons la propriété de reproduction des polynômes et le polynôme de Taylor. Nous avons montré précédemment (proposition 12) que pour tout  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$  :

$$(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0 f = f.$$

Soit  $T_{m,z} f(\cdot)$  le polynôme de Taylor de degré  $m$  autour de  $z$  défini par :

$$T_{m,z} f(\cdot) = \sum_{|i| \leq m} \frac{1}{i!} (\cdot - z)^i D^i f(z).$$

À partir des deux dernières relations et pour tout  $f \in C^m(\mathbb{R}^s)$  nous pouvons écrire :

$$(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* f(z) - f(z) = (S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* (f - T_{m,z} f)(z)$$

À partir de la définition 19 et la preuve du lemme 7, nous pouvons montrer qu'il existe un domaine ouvert et borné et une constante  $c'_2$  de sorte que pour tout  $z \in \mathbb{R}^s$  :

$$|(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* (f - T_{m,z} f)(z)| \leq c'_2 \|(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* (f - T_{m,z} f)\|_{\infty, z+\Omega}.$$

De plus,  $(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^*$  est borné et local (relation 5.37), alors :

$$\|(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* (f - T_{m,z} f)\|_{\infty, z+\Omega} \leq c''_2 \|f - T_{m,z}\|_{\infty, (z+\Omega^+)}.$$

Nous savons que pour tout  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$ ,

$$\|f - T_{m,z}\|_{\infty, (z+\Omega^+)} \leq c'''_2 \|D^{m+1} f\|_\infty.$$

Alors les deux dernières relations fournissent la preuve de l'équation (5.38).

Le lemme précédent montre que  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty(Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^*)^* f$  est très proche localement de la meilleure approximation uniforme de  $f$  dans  $C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$  sur la grille entière  $X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ . Main-

tenant, nous nous intéressons à l'estimation d'erreurs et à l'ordre d'approximation des schémas quas-linéaires. Comme pour le cas de la subdivision linéaire, nous pouvons estimer les erreurs provenant de l'échantillonnage des points de contrôle d'un schéma de subdivision quasi-linéaire. Pour  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^s)$ , pour tout  $p_i^k = f(x_i^k)$ ,  $x_i^k = \frac{1}{2^k}i = hi$ , on démontre les estimations d'erreurs suivantes, avec la notion  $\|f\|_\infty = \max\{\|D^\gamma f\|_\infty, |\gamma| = m+1\}$ , à partir du Lemme 8.

- Pour les fonctions :

$$\|S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f - f\|_\infty = \begin{cases} \|(S_{|A_\alpha}^-)^\infty (Q_{|A_\alpha}^-)^* f - f\|_\infty \leq c_1 h^{m+1} \|D^{m+1} f\|_\infty & x < 0 \\ \|(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty (Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* f - f\|_\infty \leq c_2 h^{m+1} \|D^{m+1} f\|_\infty & x = 0 \\ \|(S_{|A_\alpha}^+)^\infty (Q_{|A_\alpha}^+)^* f - f\|_\infty \leq c_3 h^{m+1} \|D^{m+1} f\|_\infty & x > 0 \end{cases}$$

- Pour les dérivées partielles d'ordre  $j$ ,  $j < m+1$  :

$$\|D^j S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^* f - D^j f\|_\infty = \begin{cases} \|(D^j S_{|A_\alpha}^-)^\infty (Q_{|A_\alpha}^-)^* f - f\|_\infty \leq c_1 h^{m+1-|j|} \|D^{m+1} f\|_\infty & x < 0 \\ \|(D^j S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^\infty (Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0)^* f - f\|_\infty \leq c_2 h^{m+1-|j|} \|D^{m+1} f\|_\infty & x = 0 \\ \|(D^j S_{|A_\alpha}^+)^\infty (Q_{|A_\alpha}^+)^* f - f\|_\infty \leq c_3 h^{m+1-|j|} \|D^{m+1} f\|_\infty & x > 0 \end{cases}$$

Rappelons ici que l'estimation des erreurs ne rentre pas dans le cadre de notre travail, pour plus de détails sur ce sujet voir par exemple les travaux de de Boor [deBoor 1990, deBoor 1992].

## 5.4/ CONSTRUCTION DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRES

Pour un ensemble de points de contrôle  $\{p_i, i = (i_1, i_2) \in X_{(A_\alpha, A_\beta)}\}$ , nous définissons un ensemble de nouveaux points de contrôle  $\{(S p)_{\varphi(i)}\}$  sur la grille  $\frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  : par un schéma interpolant  $(S^- p)_{A_\alpha i}$ ,  $i \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  sur la moitié gauche de la grille ( $i_1 < 0$ ),

$$(S^- p)_{A_\alpha i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1} (p)_{A_\alpha(j)} \quad \text{pour } i_1 < 0,$$

et par un schéma de subdivision approximant  $(S^+ p)_{A_\beta i}$  sur la moitié droite de la grille ( $i_1 > 0$ ),

$$(S^+ p)_{A_\beta i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1} (p)_{A_\beta(j)} \quad \text{pour } i_1 > 0.$$

La fonction limite de ce schéma de subdivision est donnée par :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty = \begin{cases} (S_{|A_\alpha}^-)^\infty & i_1 < 0 \\ (S^0)_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty = \gamma (S_{|A_\alpha}^-)^\infty + (1-\gamma) (S_{|A_\beta}^+)^\infty & i_1 = 0 \\ (S_{|A_\beta}^+)^\infty & i_1 > 0 \end{cases}, \quad (5.39)$$

et son opérateur quasi-interpolant est donné par :

$$Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} = \begin{cases} Q_{|A_\alpha}^- & i_1 < 0 \\ Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0 = \gamma Q_{|A_\alpha}^- + (1 - \gamma) Q_{|A_\beta}^+ & i_1 = 0 \\ Q_{|A_\alpha}^+ & i_1 > 0 \end{cases} . \quad (5.40)$$

Notre objectif est de trouver des règles de subdivision particulières sur la zone mixte (sur l'axe  $y$  ( $i_1 = 0$ ) et au voisinage de cet axe) qui assurent le bon raccord de deux schémas de subdivision de types géométriques différents.

#### 5.4.1/ REPÉRAGE DES NOUVEAUX POINTS DANS LA ZONE DE RACCORD (MIXTE)

Dans un premier temps, nous utilisons les équations (5.4) et (5.15) et la notion de localité d'un schéma de subdivision afin de trouver un ensemble de règles qui déterminent les nouveaux points dans la zone mixte.

**Définition 20** Soit  $S_{|A_\alpha}^-$ ,  $\alpha = 1, 2$  un schéma de subdivision interpolant défini sur un support  $\Omega^- = \llbracket \epsilon_1^-, \epsilon_2^- \rrbracket^2$ . Soit  $\Lambda^- = \llbracket \omega_1^-, \omega_2^- \rrbracket \times \mathbb{Z} \subseteq X_{A_\alpha}$ . On dit que  $S_{|A_\alpha}^-$ ,  $\alpha = 1, 2$  est local sur le support  $\Lambda^-$ , si :

- les nouveaux points de contrôle impairs  $(S_{|A_\alpha}^- p)_{2i-1}$ ,  $i \in \Lambda^- \subseteq X_{A_\alpha}$ ,  $i_1 < 0$  dépendent seulement des points  $p_{\frac{1}{2}((2i-1)+\Omega^-) \cap \Lambda^-}$ ,
- les nouveaux points de contrôle pairs  $(S_{|A_\alpha}^- p)_{2i}$ ,  $i \in \Lambda^- \subseteq X_{A_\alpha}$ ,  $i_1 < 0$  dépendent seulement des points  $p_i$  i.e  $((S_{|A_\alpha}^- p)_{2i} = p_i)$ .

**Définition 21** Soit  $S_{|A_\beta}^+$ ,  $\beta = 1, 2$  un schéma de subdivision approximant défini sur un support  $\Omega^+ = \llbracket \epsilon_1^+, \epsilon_2^+ \rrbracket^2$ . Soit  $\Lambda^+ = \llbracket \omega_1^+, \omega_2^+ \rrbracket \times \mathbb{Z}$  un support qui représente un sous ensemble de la grille  $X_{A_\beta}$ . On dit que  $S_{|A_\beta}^+$ ,  $\beta = 1, 2$  est local sur le support  $\Lambda^+$ , si :

- les nouveaux points de contrôle impairs  $(S_{|A_\beta}^+ p)_{2i+1}$ ,  $i \in \Lambda^+ \subseteq X_{A_\beta}$ ,  $i_1 > 0$  dépendent seulement des points  $p_{\frac{1}{2}((2i+1)+\Omega^+) \cap \Lambda^+}$ ,
- les nouveaux points de contrôle pairs  $(S_{|A_\beta}^+ p)_{2i}$ ,  $i \in \Lambda^+ \subseteq X_{A_\beta}$ ,  $i_1 > 0$  dépendent seulement des points  $p_{\frac{1}{2}(2i+\Omega^+) \cap \Lambda^+}$ .

À partir de ces deux définitions et pour  $\Lambda^- = \llbracket \omega_1^-, -1 \rrbracket \times \mathbb{Z}$ ,  $\Lambda^+ = \llbracket 1, \omega_2^+ \rrbracket \times \mathbb{Z}$ , nous pouvons affirmer que :

$$\begin{cases} p_{\frac{1}{2}(2i-1+\Omega^-) \cap \Lambda^-} = 0 \Rightarrow (S_{|A_\alpha}^- p)_{2i-1} = 0 & i_1 \in \llbracket \omega_1^-, -1 \rrbracket \\ p_i = 0 \Rightarrow (S_{|A_\alpha}^- p)_{2i} = 0 & i_1 \in \llbracket \omega_1^-, -1 \rrbracket \end{cases} , \quad (5.41)$$

et

$$\begin{cases} p_{\frac{1}{2}((2i+1)+\Omega^+) \cap \Lambda^+} = 0 \Rightarrow (S_{|A_\beta}^+ p)_{2i+1} = 0 & i_1 \in \llbracket 1, \omega_2^+ \rrbracket \\ p_{\frac{1}{2}(2i+\Omega^+) \cap \Lambda^+} = 0 \Rightarrow (S_{|A_\beta}^+ p)_{2i} = 0, & i_1 \in \llbracket 1, \omega_2^+ \rrbracket \end{cases} . \quad (5.42)$$

Nous nous intéressons maintenant aux deux extrémités des deux intervalles  $\llbracket \omega_1^-, -1 \rrbracket$  et  $\llbracket 1, \omega_2^+ \rrbracket$ , afin de définir les règles de bords  $\{(S_{|A_\alpha}^- p)_{2i}, (S_{|A_\alpha}^- p)_{2i-1}\}$  pour  $i = (i_1, i_2)$ ,  $i_1 = \omega_1^-, -1$ ,  $i_2 \in \mathbb{Z}$  et  $\{(S_{|A_\alpha}^+ p)_{2i}, (S_{|A_\alpha}^+ p)_{2i+1}\}$  pour  $i = (i_1, i_2)$ ,  $i_1 = 1, \omega_2^+$ ,  $i_2 \in \mathbb{Z}$ . En effet :

- Pour  $i_1 = \omega_1^-$ ,  $\{(S_{|A_\alpha}^- p)_{2i-1}, (S_{|A_\alpha}^- p)_{2i}\}$  représentent les règles de bords extérieurs du schéma  $S_{|A_\alpha}^-$ .

- Pour  $i_1 = \omega_2^+$ ,  $\{(S_{|A_\beta}^+ p)_{2i-1}, (S_{|A_\beta}^+ p)_{2i}\}$  représentent les règles de bords extérieurs du schéma  $S_{|A_\beta}^+$ .
- Pour  $i_1 = -1$ ,  $\{(S_{|A_\alpha}^- p)_{2i-1}, (S_{|A_\alpha}^- p)_{2i}\}$  représentent les règles de bords intérieurs du schéma  $S_{|A_\alpha}^-$ .
- Pour  $i_1 = 1$ ,  $\{(S_{|A_\beta}^+ p)_{2i-1}, (S_{|A_\beta}^+ p)_{2i}\}$  représentent les règles de bords intérieurs du schéma  $S_{|A_\beta}^+$ .

Des modifications de la plupart des schémas de subdivision ont été proposées pour tenir compte des bords extérieurs de la surface, dont on ne souhaite pas que leur raffinement dépende des sommets intérieurs, pour pouvoir coller des morceaux de surfaces sans risque de trou ("crack") au cours de la subdivision. Par conséquent, des schémas de subdivision de dimension 1 ( $s = 1$ ) peuvent être utilisés comme des règles de bord extérieur pour les schémas  $S_{|A_\alpha}^-$  et  $S_{|A_\beta}^+$ .

À l'opposé des règles de bords extérieurs, il est nécessaire que les règles de bords intérieurs dépendent des sommets intérieurs pour pouvoir raccorder les deux schémas de subdivision  $S_{|A_\alpha}^-$  et  $S_{|A_\beta}^+$ . Par conséquent, nous supposons que :

$$\begin{cases} (S_{|A_\alpha}^- p)_{2i-1} = 0, & \text{pour } i_1 = -1, \\ (S_{|A_\alpha}^- p)_{2i} = p_i, & \text{pour } i_1 = -1, \end{cases} \quad (5.43)$$

et

$$(S_{|A_\beta}^+ p)_{2i} = 0, \quad \text{pour } i_1 = 1. \quad (5.44)$$

Le repérage des nouveaux points issus de l'application d'un schéma de subdivision quasi-linéaire dans la zone mixte passe par trois étapes :

Première étape : À partir de l'équation (5.4), nous définissons les deux schémas de subdivision  $S_{|A_\alpha}^-$  et  $S_{|A_\beta}^+$  en fonction de deux ensembles de règles  $\mathcal{X}^- = \{a_i^{i_1}\}_{i_1 \in \Lambda^-, i \in \mathbb{Z}^2}$  pour  $S_{|A_\alpha}^-$  et  $\mathcal{X}^+ = \{a_i^{i_1}\}_{i_1 \in \Lambda^+, i \in \mathbb{Z}^2}$  pour  $S_{|A_\beta}^+$  par :

$$\forall p \in l(X_{A_\alpha}), \forall i \in \mathbb{Z}^s, \forall i_1 \in \Lambda^-, \quad (Sp)_{A_\alpha i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1}(p)_{A_\alpha j}, \quad (5.45)$$

et

$$\forall p \in l(X_{A_\beta}), \forall i \in \mathbb{Z}^s, \forall i_1 \in \Lambda^+, \quad (Sp)_{A_\beta i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1}(p)_{A_\beta j}, \quad (5.46)$$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda^- = \llbracket w_1^-, -1 \rrbracket \\ \Lambda^+ = \llbracket 1, w_1^+ \rrbracket \end{cases}.$$

Deuxième étape : À partir des deux équations (5.42) et (5.43), nous obtenons :

pour  $i_1 = -1$ ,

$$(S_{|A_\alpha}^- p)_{2i-1} = 0 \Rightarrow a_i^{-3} = 0 \quad (5.47)$$

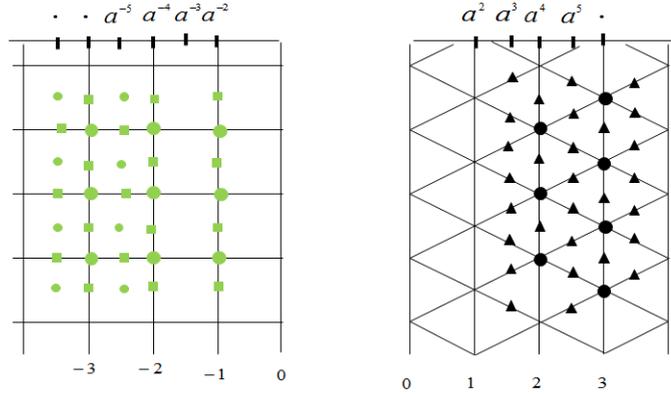


FIGURE 5.6 – Visualisation graphique des deux schémas de subdivision  $S_{|A_\alpha}^-$  et  $S_{|A_\beta}^+$ .

et pour  $i_1 = 1$ ,

$$(S_{|A_\beta}^+ p)_{2i} = 0 \Rightarrow a_i^2 = 0. \quad (5.48)$$

Donc, à partir des équations (5.44) à (5.47) les nouveaux points issus de l'application des deux schémas  $S_{|A_\alpha}^-$  et  $S_{|A_\beta}^+$  sont déterminés par les deux ensembles de règles :  $\chi^- = \{a^{2\omega_1^-}, \dots, a^{-5}, a^{-4}, a^{-2}\}$  et  $\chi^+ = \{a^3, a^4, a^5, \dots, a^{2\omega_2^+}\}$  (voir figure 5.6).

Troisième et dernière étape : À partir de l'équation (5.15) et pour  $\Lambda = \llbracket w_1^-, w_2^+ \rrbracket$ , nous définissons le schéma de subdivision quasi-linéaire en fonction d'un ensemble de règles  $\chi = \{a^{2\omega_1^-}, \dots, a^0, \dots, a^{2\omega_2^+}\}$  alors,

1.  $\chi \cap \chi^- = \chi^-$ , représente l'ensemble des règles de subdivision qui déterminent les nouveaux points issus de l'application du schéma interpolant  $S_{|A_\alpha}^-$  sur la moitié gauche de la grille (figure 5.6 à gauche).
2.  $\chi \cap \chi^+ = \chi^+$ , représente l'ensemble des règles de subdivision qui déterminent les nouveaux points issus de l'application du schéma approximant  $S_{|A_\beta}^+$  sur la moitié droite de la grille (figure 5.6 à droite).
3.  $\chi \setminus (\chi^- \cup \chi^+) = \chi^0 = \{a^{-3}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2\}$ , représente l'ensemble des règles de subdivision qui déterminent les nouveaux points dans la zone mixte (voir figure 5.7).

#### 5.4.2/ CALCUL DES NOUVEAUX POINTS

Après avoir repéré les différents ensembles de nouveaux points dans la zone mixte, nous nous intéressons maintenant aux règles de subdivision qui définissent ces nouveaux points ainsi qu'à la méthode que nous allons utiliser pour le calcul de ces règles.

Comme exposé précédemment, l'ensemble des règles de subdivision particuliers  $\{a^{-3}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2\}$  contient cinq règles réparties sur l'axe des abscisses. Chacun de ces règles représente une ou plusieurs règles réparties sur l'axe des ordonnées et chaque règle détermine un nouveau point. Donc nous aurons cinq ensembles de nouveaux

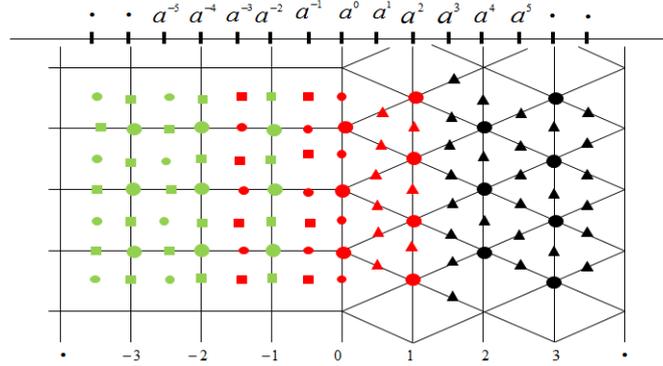


FIGURE 5.7 – Visualisation graphique d'un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille quad/triangle. (les points verts représentent les nouveaux points issus de l'application d'un schéma interpolant  $S_{|A_\alpha}^-$ , les points rouges représentent les nouveaux points dans la zone mixte et les points noirs représentent les nouveaux points issus de l'application d'un schéma approximant  $S_{|A_\beta}^+$ ).  $(\dots a^{-5}, \dots, a^5, \dots)$  représentent les règles qui déterminent ces nouveaux points.

points :  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3, j}\}, \{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-1, j}\}, \{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0, j}\}, \{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1, j}\}, \{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2, j}\}$ , pour tout  $j \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ .

Pour calculer les règles de subdivision qui déterminent ces nouveaux points, nous utilisons la relation entre l'opérateur de subdivision quasi-linéaire  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  et l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  associé à ce schéma de subdivision ainsi que la propriété de localité d'un schéma de subdivision.

Nous avons vu dans le chapitre 3 (proposition 10) que la détermination d'une règle de subdivision à un point  $\tau$  sur un support  $\Lambda = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ ,

$$(Sp)_\tau = b_1 p_{\tau_1} + \dots + b_n p_{\tau_n}, \quad (5.49)$$

revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\Sigma_{Q(\Lambda)}(Pr)_\tau = d_{Q(\tau)}, \quad (5.50)$$

dont les inconnues sont les poids de la règle  $(Pr)_\tau = \{b_1, \dots, b_n\}$ .

Dans le cas quasi-linéaire l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  est défini par les trois opérateurs  $Q_{|A_\alpha}^-$ ,  $Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0$  et  $Q_{|A_\beta}^+$  qui déterminent son évaluation le long de la grille  $X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ . Alors le support  $\Lambda \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  d'une règle de subdivision à un point  $\tau$  implique aux plus les trois opérateurs quasi-interpolants, d'où la nécessité de décomposer le support en trois sous supports  $\Lambda = \{\Lambda^-, \Lambda^0, \Lambda^+\}$ .

Soit  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_\tau$ ,  $\tau \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  une règle de subdivision en un point  $\tau$  défini sur un support fini  $\Lambda \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  par :

$$(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}p)_\tau = b_1 p_{\tau_1} + \dots + b_n p_{\tau_n}. \quad (5.51)$$

Nous définissons les poids d'une règle de subdivision  $(Pr)_\tau$  sur le support  $\Lambda \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)} = \{\Lambda^-, \Lambda^0, \Lambda^+\}$  par :

$$(Pr)_\tau = \{(Pr)_{\tau|\Lambda^-}, (Pr)_{\tau|\Lambda^0}, (Pr)_{\tau|\Lambda^+}\},$$

avec :

$$\begin{cases} (Pr)_{\tau|\Lambda^-} = \{b_i, i = 1, \dots, |\Lambda_1^-|\}, \\ (Pr)_{\tau|\Lambda^0} = \{b_i, i = |\Lambda_1^-|, \dots, |\Lambda^0|\}, \\ (Pr)_{\tau|\Lambda^+} = \{b_i, i = |\Lambda^0|, \dots, |\Lambda_1^+|\}. \end{cases} \quad (5.52)$$

Si  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  vérifie la relation (5.28) et pour tout  $f(z) = x^{k_1} y^{k_2}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 \leq |k| = |k_1| + |k_2| \leq m$ , nous aurons la relation suivante :

$$S_{|(A_\alpha, A_\beta)} Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} f(z) = Q_{|(A_\alpha, A_\beta)} \sigma f(z) = 2^{-|k_1+k_2|} f(z). \quad (5.53)$$

À partir des deux équations (5.51) et (5.52), les poids  $(Pr)_\tau$  de la règle de subdivision sont définis comme étant solutions de l'équation suivante :

$$\Sigma_{Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}(\Lambda)} (Pr)_\tau = d_{Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}(\tau)}, \quad (5.54)$$

où :  $(Pr)_\tau$  est un vecteur-colonne  $(1 : |\Lambda|)$  de dimension  $|\Lambda|$ ,

$$(Pr)_\tau = (a_1, \dots, a_n)^t, \quad (5.55)$$

$\Sigma_{Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}(\Lambda)}$  une matrice de dimension  $(C_{m+s}^s \times |\Lambda|)$  composée de trois sous matrices  $\Sigma_{Q_{|\Lambda_\alpha}^-}(\Lambda^-)$ ,  $\Sigma_{Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0}(\Lambda^0)$  et  $\Sigma_{Q_{|\Lambda_\beta}^+}(\Lambda^+)$  de dimension  $(C_{m+s}^s |\Lambda_2^-|)$ ,  $(C_{m+s}^s |\Lambda^0|)$  et  $(C_{m+s}^s |\Lambda_1^+|)$  (respectivement) telle que :

$$\Sigma_{|k|j} = \begin{cases} Q_{|\Lambda_\alpha}^- (x^{k_1} y^{k_2})(\tau_j) & \tau_j \in \Lambda^-, \\ Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}^0 (x^{k_1} y^{k_2})(\tau_j) & \tau_j \in \Lambda^0, \\ Q_{|\Lambda_\beta}^+ (x^{k_1} y^{k_2})(\tau_j) & \tau_j \in \Lambda^+, \end{cases} \quad (5.56)$$

et  $d_{Q_{|(A_\alpha, A_\beta)}(\tau)}$  est un vecteur-colonne de dimension  $C_{m+s}^s$  :

$$d_{|k|} = 2^{-|k|} Q(x^{k_1} y^{k_2})(\tau). \quad (5.57)$$

Comme nous venons de le voir, la définition et le calcul d'une règle de subdivision dépendent du choix du support  $\Lambda$ . Le choix des différents supports donne des règles de subdivision différentes. L'enjeu est de trouver des règles de subdivision définies sur les plus petits supports possibles.

#### 5.4.3/ LE CHOIX DU SUPPORT $\Lambda$

Compte tenu de la définition d'un schéma de subdivision quasi-linéaire (équations (5.15) et (5.17)), nous pouvons distinguer deux cas particuliers :

Premier cas : Pour  $\gamma = 0$ , le schéma de subdivision quasi-linéaire est défini par :

$$(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{\varphi(i)} = \begin{cases} (S_{|A_\alpha}^- p)_{A_\alpha i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1} p_{A_\alpha(j)} & i_1 < 0. \\ (S_{|A_\beta}^+ p)_{A_\beta i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j}^{i_1} p_{A_\beta(j)} & i_1 \geq 0. \end{cases} \quad (5.58)$$

Dans ce cas ci, nous avons trois ensembles des nouveaux points à déterminer :  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-1,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0,j}\}$ , pour tout  $j \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ .

Deuxième cas : Pour  $\gamma = 1$ , le schéma de subdivision quasi-interpolant est défini par :

$$(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{\varphi(i)} = \begin{cases} (S_{|A_\alpha}^- p)_{A_\alpha i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{(i_1), i-2j}(p)_{A_\alpha(j)} & i_1 \leq 0. \\ (S_{|A_\beta}^+ p)_{A_\beta i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{(i_1), i-2j}(p)_{A_\beta(j)} & i_1 > 0. \end{cases} \quad (5.59)$$

Alors les ensembles des nouveaux points à déterminer dans ce cas sont :

$\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-1,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2,j}\}$ , pour tout  $j \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ .

Mais comme nous avons déjà vu, dans le cas général ( $\gamma \in [0, 1]$ ) il existe au moins cinq ensembles de nouveaux points à déterminer :  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-1,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2,j}\}$ , pour tout  $j \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ . Nous constatons donc que :

• Pour  $\gamma = 0$ , les nouveaux points  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0,j}\}$  coïncident avec les nouveaux points  $\{(S_{|A_\alpha}^- p)_{-3,j}\}$ ,  $\{(S_{|A_\alpha}^- p)_{0,j}\}$  pour tout  $j \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ . i.e :

$$\begin{cases} \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}) \equiv \text{supp}((S_{|A_\alpha}^- p)_{-3,j}) \\ \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0,j}) \equiv \text{supp}((S_{|A_\alpha}^- p)_{0,j}) \end{cases} \quad (5.60)$$

• Pour  $\gamma = 1$ , les nouveaux points  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1,j}\}$ ,  $\{(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2,j}\}$  coïncident avec les nouveaux points  $\{(S_{|A_\beta}^+ p)_{1,j}\}$ ,  $\{(S_{|A_\beta}^+ p)_{2,j}\}$  pour tout  $j \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ . i.e :

$$\begin{cases} \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1,j}) \equiv \text{supp}((S_{|A_\beta}^+ p)_{1,j}). \\ \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2,j}) \equiv \text{supp}((S_{|A_\beta}^+ p)_{2,j}). \end{cases} \quad (5.61)$$

Alors pour tout  $\gamma \in [0, 1]$  et pour tout  $j \in \frac{1}{2}X_{(A_\alpha, A_\beta)}$ , nous pouvons affirmer que :

$$\begin{cases} \text{supp}((S_{|A_\beta}^+ p)_{1,j}) \subseteq \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1,j}) \\ \text{supp}((S_{|A_\beta}^+ p)_{2,j}) \subseteq \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2,j}) \\ \text{supp}((S_{|A_\alpha}^- p)_{-3,j}) \subseteq \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}) \\ \text{supp}((S_{|A_\alpha}^- p)_{0,j}) \subseteq \text{supp}((S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0,j}) \end{cases} \quad (5.62)$$

Les équations (5.60) et (5.61) peuvent être interprétées comme suit : les support des règles de subdivision qui déterminent les nouveaux points  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}$ ,  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0,j}$ ,  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1,j}$ ,  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2,j}$  ont une forme très proche de la forme des supports des règles qui déterminent les nouveaux points  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}$ ,  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{0,j}$ ,  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{1,j}$ ,  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{2,j}$  respectivement. De plus :

1. Pour  $\gamma = 0$ , les supports des règles qui déterminent  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)P})_{-3,j}$  (resp.

- $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)} P)_{0,j}$ ) sont identiques aux supports des règles qui déterminent  $(S_{|A_\alpha}^- P)_{-3,j}$  (resp.  $S_{|A_\alpha}^- P)_{0,j}$ ),
2. pour  $\gamma = 1$ , les supports des règles qui déterminent  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)} P)_{1,j}$  (resp.  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)} P)_{2,j}$ ) sont identiques aux supports des règles qui déterminent  $(S_{|A_\beta}^+ P)_{2,j}$  (resp.  $S_{|A_\beta}^+ P)_{1,j}$ ).

Pour les supports des règles qui déterminent les nouveaux points  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)} P)_{-1,2j+1}$  nous choisissons des petits supports de sorte que l'équation (5.53) admette une solution unique.

## 5.5/ CONTINUITÉ $C^m$

Un schéma de subdivision quasi-linéaire est défini en fonction de deux schémas de subdivision linéaires sur les deux moitiés de la grille dont on connaît déjà les continuités. Dans cette section, nous nous intéressons aux conditions nécessaires et suffisantes de la  $C^m$  continuité de ce schéma de subdivision dans la zone mixte (sur l'axe  $y$ ).

### 5.5.1/ CONDITIONS NÉCESSAIRES

Le procédé utilisé pour déterminer les conditions nécessaires de la  $C^m$  continuité d'une surface limite d'un schéma de subdivision quasi-linéaire est basé sur les théories de la reproduction des polynômes ainsi que les conditions sur les valeurs propres de la matrice associée à ce schéma de subdivision. Pour cela, nous fixons une arête  $N$  sur l'axe  $y$  et nous définissons une matrice de subdivision  $M$  associée au schéma  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  de sorte qu'après un pas de subdivision la matrice  $M$  contienne tous les points de contrôle de la surface qui influencent l'arête  $N$ .

Dans la section 5.3.3, nous avons montré que les schémas de subdivision quasi-linéaires reproduisent des polynômes de degré au plus  $m$  si la fonction limite associée à ce schéma de subdivision  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)} P)$  vérifie la relation (5.28).

À partir des deux propositions 7 et 13, nous donnons la proposition suivante :

**Proposition 14** *Soit  $S_{|(A_\alpha, A_\beta)}$  un schéma de subdivision quasi-linéaire dont la fonction limite  $(S_{|(A_\alpha, A_\beta)}^\infty P) \in C^m$  vérifie la condition de reproduction de polynômes (5.28), alors les valeurs  $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$  sont les valeurs propres de la matrice de subdivision  $M$ . De plus toutes les valeurs propres de  $M$  différentes de  $\{2^{-d}, d = 0, \dots, m\}$  sont de module strictement inférieur à  $2^{-m}$ .*

### 5.5.2/ CONDITIONS SUFFISANTES

Pour vérifier les conditions suffisantes de la  $C^m$  continuité d'un schéma de subdivision quasi-linéaire, nous allons utiliser le test du rayon spectral conjoint. Ce test a été adapté à des schémas quad/triangle par Levin-Levin [Levin 2003b] et utilisé ensuite, par Schaefer-Warren [Schaefer 2005] et Jiang et al [Q.T. Jiang 2009], pour prouver les conditions suffisantes de la continuité  $C^2$ .

L'application de ce test aux schémas de subdivision quasi-linéaires passe par trois étapes :

1. La première étape consiste à définir deux matrices de subdivision  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  qui transforment une arête  $N$  située sur l'axe  $y$  en deux plus petites arêtes  $N_1$  et  $N_2$ . Après un pas de subdivision, les deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  contiennent tous les points de contrôle de la surface qui influencent les deux arêtes  $N_1$  et  $N_2$ . Pour cela, nous définissons un ensemble de points  $L$  afin de définir les deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$ . L'ensemble  $L$  représente un sous ensemble de points de contrôle de la grille initiale et elle dépend des supports des règles de la subdivision considérée.

Soit  $L \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  défini par :

$$L = \{(i_1, j_1), \dots, (i_{|L|}, j_{|L|})\}. \quad (5.63)$$

Soient  $\mathcal{M}^1$  une matrice de subdivision prenant ses valeurs de  $L$  dans  $L$  après un pas de subdivision, et  $\mathcal{M}^2$  une matrice de subdivision prenant ses valeurs de  $L$  dans  $\zeta L$ , où  $\zeta$  est un opérateur de décalage donné par :  $\zeta L = \{(i, j+1)/(i, j) \in L\}$ .

Pour tout  $p = \delta_{(i_k, j_k), (i_l, j_l)} = \begin{cases} 1 & (i_k, j_k) = (i_l, j_l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , la matrice  $\mathcal{M}^1$  est définie par :

$$\mathcal{M}^1 = (m_{l,k}^1)_{1 \leq l \leq |L|, 1 \leq k \leq |L|} = (S_{|(A_\alpha, A_\beta)} \delta_{(i_k, j_k)})(i_l, j_l), \quad (5.64)$$

et la matrice  $\mathcal{M}^2$  par :

$$\mathcal{M}^2 = (m_{l,k}^2)_{1 \leq l \leq |L|, 1 \leq k \leq |L|} = (S_{|(A_\alpha, A_\beta)} \delta_{(i_k, j_k)})(i_l, j_l+1), \quad (5.65)$$

2. Ensuite, nous cherchons une matrice de passage  $V$  afin de diagonaliser les deux matrices de subdivision  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$ . Le choix évident pour la construction de la matrice  $V$  est d'utiliser simplement tous les vecteurs propres de  $\mathcal{M}^1$ . Toutefois, cette approche peut être numériquement instable si la matrice est composée de petites valeurs propres. Pour éviter les problèmes d'instabilité, nous utilisons les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice  $\mathcal{M}^1$ . L'utilisation de ces vecteurs propres donne une matrice  $V$  telle que :

$$(\mathcal{M}^1)' = V^{-1} \mathcal{M}^1 V = \begin{pmatrix} \Upsilon & C_0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

avec  $\Upsilon = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^m})$ .

La matrice  $V$  est composée des vecteurs propres à droite de la matrice  $\mathcal{M}^1$  associés aux valeurs propres de  $\Upsilon$  et complétée par le noyau de vecteurs propres à gauche de la matrice  $\mathcal{M}^1$  associés aux valeurs propres de  $\Upsilon$ . Pour diagonaliser la matrice  $\mathcal{M}^2$  on utilise tout simplement la matrice  $V$ . L'utilisation de cette matrice donne :

$$(\mathcal{M}^2)' = V^{-1} \mathcal{M}^2 V = \begin{pmatrix} \Theta & C_1 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

où  $\Theta$  est une matrice triangulaire supérieure qui a les mêmes valeurs que  $\Upsilon$  sur sa diagonale.

3. Enfin, on utilise les matrices  $Y_0$  et  $Y_1$  pour calculer le rayon spectral conjoint,

$$\rho^{[k]}(Y_0, Y_1) = (\text{Max} \|Y_{\epsilon_k} Y_{\epsilon_{k-1}} \dots Y_{\epsilon_1}\|_\infty)^{\frac{1}{k}}, \quad (5.68)$$

avec  $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ .

A. Levin et D. Levin ont montré dans [Levin 2003b] que, s'il existe  $k$  tel que :

$$\rho^{[k]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2^m},$$

alors le schéma de subdivision est de continuité  $C^m$  sur l'axe de raccord  $y$ . De plus, s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  et  $\rho^{[k]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2^m}$  alors  $S^\infty p \in C^{m+\alpha}$  avec  $\alpha = -m - \log_2(\rho^{[k]})$  si  $\frac{1}{2^{m+1}} < \rho^{[k]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2^m}$ .

## 5.6/ EXEMPLES : SCHÉMAS QUASI-LINÉAIRES

Dans cette section, nous proposons divers exemples de schémas de subdivision quasi-linéaires définis sur des maillages bi-réguliers.

Notre objectif est de trouver des règles de subdivision particulières sur l'axe  $y$  et au voisinage de cet axe de sorte que l'ensemble de ces règles forme un schéma de subdivision d'une meilleure continuité possible ( $C^1$  ou  $C^2$ ). Les schémas de subdivision que nous allons présenter dans cette section sont des schémas qui reproduisent des polynômes de degré au plus 3. Mais d'après la section précédente, pour construire des schémas de continuité  $C^2$ , nous pouvons nous contenter de schémas qui reproduisent des polyômes de degré 2. Notons qu'il est possible de définir des schémas qui reproduisent des polyômes jusqu'au degré 3, mais cela ne peut pas améliorer la continuité sur l'axe  $y$  au-delà de  $C^2$ .

Dans le premier exemple, nous proposons des schémas qui reproduisent des polynômes de degré 3 ainsi que des schémas qui reproduisent des polynômes de degré 2. Nous verrons que le fait de définir l'un ou l'autre de ces schémas de subdivision ne change pas grand chose au niveau de la continuité de la courbe limite dans la zone de raccord. Par contre, au niveau de cette zone le degré d'ordre d'approximation n'est pas le même dans les deux cas.

Pour le reste des exemples nous ne proposons que des schémas qui reproduisent des polynômes de degré 2. Le choix de privilégier ce type de schémas dans cette thèse est dû à la simplicité de la construction et de l'implémentation de ces schémas de subdivision par rapport aux schémas qui reproduisent les polynômes de degré 3.

### 5.6.1/ PREMIER EXEMPLE

Dans cet exemple, nous construisons des schémas de subdivision quasi-linéaires univariés en fonction d'un paramètre  $\gamma$ , qui coïncident avec le schéma interpolant 4 points et le schéma approximant B-spline cubique. Les règles de ces schémas de subdivision seront utilisées par la suite comme les règles de bords extérieurs des schémas quasi-linéaires bi-variés.

#### 5.6.1.1/ CONSTRUCTION

Dans le cas des courbes la grille bi-régulière correspond à un intervalle  $X = \llbracket -\alpha, \alpha \rrbracket$ .

Considérons la grille bi-régulière  $X$  donnée dans la figure 5.8. Nous définissons un

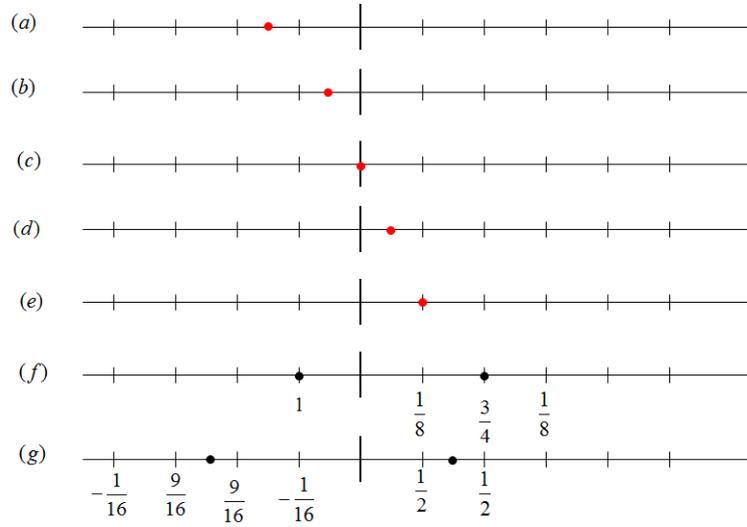


FIGURE 5.8 – (a)-(e) : les nouveaux points de contrôles dans la zone de raccord, (f)-(g) : les règles de subdivision des schémas 4 points et B-spline cubique.

schéma de subdivision quasi-linéaire  $S_{\gamma|X}$  sur la grille  $X$  par le schéma interpolant 4 points  $S_{|X}^-$  sur la moitié gauche de la grille et par le schéma de subdivision approximant B-spline cubique  $S_{|X}^+$  sur la moitié droite de la grille.

La fonction limite de ce schéma de subdivision est donnée en fonction d'un paramètre  $\gamma$  par :

$$S_{\gamma|X}^\infty f(x) = \begin{cases} f(x) & x < 0 \\ f(x) + \frac{1}{6}(1 - \gamma)\Delta f(x) & x = 0 \\ f(x) + \frac{1}{6}\Delta f(x) & x > 0 \end{cases} \quad f \in \pi_3 \quad (5.69)$$

et son opérateur quasi-interpolant par :

$$Q_{\gamma|X} f(x) = \begin{cases} f(x) & x < 0 \\ f(x) - \frac{1}{6}(1 - \gamma)\Delta f(x) & x = 0 \\ f(x) - \frac{1}{6}\Delta f(x) & x > 0 \end{cases} \quad f \in \pi_3 \quad (5.70)$$

### RÈGLES DE SUBDIVISION DANS LE CAS DE REPRODUCTION DES POLYNÔMES DE DEGRÉ 3 ( $f \in \pi_3$ ) (SCHÉMAS CUBIQUES)

Nous définissons les règles  $(S_{\gamma|X} p)_i, i \in \llbracket -3, 2 \rrbracket$  sur les supports  $\Lambda_j, j \in \llbracket -3, 2 \rrbracket$  avec :

$$\Lambda_i = \begin{cases} \Lambda_{-3} & = \{-3, -2, -1, 0\}, \\ \Lambda_{-1} & = \{-2, -1, 0, 1\}, \\ \Lambda_0 & = \{-2, -1, 0, 1\}, \\ \Lambda_1 & = \{-1, 0, 1, 2\}, \\ \Lambda_2 & = \{-1, 0, 1, 2\}, \end{cases} \quad (5.71)$$

par :

$$(S_{\gamma|X}P)_i = \begin{cases} (S_{\gamma|X}P)_{-3} &= b_1p_{-3} + b_2p_{-2} + b_3p_{-1} + b_4p_0, \\ (S_{\gamma|X}P)_{-1} &= c_1p_{-2} + c_2p_{-1} + c_3p_0 + c_4p_1, \\ (S_{\gamma|X}P)_0 &= d_1p_{-2} + d_2p_{-1} + d_3p_0 + d_4p_1, \\ (S_{\gamma|X}P)_1 &= e_1p_{-1} + e_2p_0 + e_3p_1 + e_4p_2, \\ (S_{\gamma|X}P)_2 &= f_1p_{-1} + f_2p_0 + f_3p_1 + f_4p_2. \end{cases} \quad (5.72)$$

À partir de l'équation (5.52) les variables  $b_j, c_j, d_j, f_j, j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , sont déterminées par les conditions suivantes :

$$(S_{\gamma|X}P)_i = \begin{cases} S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}P)|_{\Lambda_{-3}} &= (Q_{\gamma|X}\sigma p)_{-3}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}P)|_{\Lambda_{-1}} &= (Q_{\gamma|X}\sigma p)_{-1}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}P)|_{\Lambda_0} &= (Q_{\gamma|X}\sigma p)_0, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}P)|_{\Lambda_1} &= (Q_{\gamma|X}\sigma p)_1, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}P)|_{\Lambda_2} &= (Q_{\gamma|X}\sigma p)_2. \end{cases} \quad (5.73)$$

Pour tout  $f(x) = x^k, x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 3$ , nous aurons les relations suivantes :

$$(S_{\gamma|X}P)_i = \begin{cases} S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)|_{\Lambda_{-3}} &= 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_{-3}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)|_{\Lambda_{-1}} &= 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_{-1}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)|_{\Lambda_0} &= 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_0, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)|_{\Lambda_1} &= 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_1, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)|_{\Lambda_2} &= 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_2. \end{cases} \quad (5.74)$$

Notons que  $Q_{\gamma|X}$  est l'opérateur quasi-interpolant donné dans l'équation (5.70). La solution de chaque équation du système (5.74) est donnée à partir de l'équation (5.55) où les inconnues sont les poids  $(Pr)_i$  des règles  $(S_{\gamma|X}P)_i, i \in \llbracket -3, 2 \rrbracket$ . Les poids des règles du schéma quasi-linéaire  $S_{\gamma|X}$  sont donnés en fonction d'un paramètre  $\gamma$  dans le tableau 5.1.

$b_1 = b_4 = -\frac{3}{32}\left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right), b_2 = b_3 = \frac{1}{16}\left(\frac{16+11\gamma}{2+\gamma}\right)$	$c_1 = -\frac{1}{8}\left(\frac{-19+10\gamma}{-37+13\gamma}\right), c_2 = \frac{3}{8}\left(\frac{-63+31\gamma}{-37+13\gamma}\right)$ $c_3 = -\frac{123}{8(-37+13\gamma)}, c_4 = \frac{3}{8}\left(\frac{-1+7\gamma}{-37+13\gamma}\right)$
$d_1 = -\frac{3}{4}\left(\frac{-1+\gamma}{-37+13\gamma}\right), d_2 = 6\left(\frac{-1+\gamma}{-37+13\gamma}\right),$ $d_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{-109+13\gamma}{-37+13\gamma}\right), d_4 = \frac{9}{2}\left(\frac{-1+\gamma}{-37+13\gamma}\right)$	$e_1 = \frac{3\gamma}{-48+11\gamma}, e_2 = \frac{-24}{-48+11\gamma},$ $e_3 = \frac{3}{2}\left(\frac{-16+5\gamma}{-48+11\gamma}\right), e_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{-48+11\gamma}\right)$
$f_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{\gamma}{-48+11\gamma}\right), f_2 = \frac{-6}{-48+11\gamma},$ $f_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{-144+35\gamma}{-48+11\gamma}\right), f_4 = \frac{3}{2}\left(\frac{-4+\gamma}{-48+11\gamma}\right)$	

TABLE 5.1 – Les poids des règles de subdivision particulières du schéma quasi-linéaire univarié.

## RÈGLES DE SUBDIVISION DANS LE CAS DE REPRODUCTION DES POLYNÔMES DE DEGRÉ 2 ( $f \in \pi_2$ ) (SCHÉMAS QUADRATIQUES)

Nous définissons les règles  $(S_{\gamma|X}P)_i, i \in \llbracket -3, 2 \rrbracket$  sur les supports  $\Lambda'_j, j \in \llbracket -3, 2 \rrbracket$  avec :

$$\Lambda_i = \begin{cases} \Lambda'_{-3} & = \{-3, -2, -1, 0\}, \\ \Lambda'_{-1} & = \{-2, -1, 0\}, \\ \Lambda'_0 & = \{-1, 0, 1\}, \\ \Lambda'_1 & = \{-1, 0, 1\}, \\ \Lambda'_2 & = \{0, 1, 2\}, \end{cases} \quad (5.75)$$

par :

$$(S_{\gamma|XP})_i = \begin{cases} (S_{\gamma|XP})_{-3} & = b'_1 p_{-3} + b'_2 p_{-2} + b'_3 p_{-1} + b'_4 p_0, \\ (S_{\gamma|XP})_{-1} & = c'_1 p_{-2} + c'_2 p_{-1} + c'_3 p_0, \\ (S_{\gamma|XP})_0 & = d'_1 p_{-1} + d'_2 p_0 + d'_3 p_1, \\ (S_{\gamma|XP})_1 & = e'_1 p_{-1} + e'_2 p_0 + e'_3 p_1, \\ (S_{\gamma|XP})_1 & = f'_1 p_0 + f'_2 p_1 + f'_3 p_2. \end{cases} \quad (5.76)$$

À partir de l'équation (5.52) les variables  $b'_j, j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  et  $c'_j, d'_j, e'_j, f'_j, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$  sont déterminées par les conditions suivantes

$$(S_{\gamma|XP})_i = \begin{cases} S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|XP})_{|\Lambda'_{-3}} & = (Q_{\gamma|X}\sigma p)_{-3}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|XP})_{|\Lambda'_{-1}} & = (Q_{\gamma|X}\sigma p)_{-1}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|XP})_{|\Lambda'_0} & = (Q_{\gamma|X}\sigma p)_0, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|XP})_{|\Lambda'_1} & = (Q_{\gamma|X}\sigma p)_1, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|XP})_{|\Lambda'_2} & = (Q_{\gamma|X}\sigma p)_2. \end{cases} \quad (5.77)$$

De la même façon que pour les schémas qui reproduisent des polynômes de degré 3, pour tout  $f(x) = x^k, x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq 2$ , nous aurons les relations suivantes :

$$(S_{\gamma|XP})_i = \begin{cases} S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)_{|\Lambda'_{-3}} & = 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_{-3}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)_{|\Lambda'_{-1}} & = 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_{-1}, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)_{|\Lambda'_0} & = 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_0, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)_{|\Lambda'_1} & = 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_1, \\ S_{\gamma|X}(Q_{\gamma|X}f)_{|\Lambda'_2} & = 2^{-k}(Q_{\gamma|X}f)_2. \end{cases} \quad (5.78)$$

La solution de chaque équation de ce système est donnée à partir de l'équation (5.55) où les inconnues sont les poids  $(Pr)_i$  des règles  $(S_{\gamma|XP})_i, i \in \llbracket -3, 2 \rrbracket$ . Les poids des règles de subdivision sont donnés dans le tableau 5.2.

$b'_1 = b'_4 = -\frac{3}{4}(\frac{1}{11+\gamma}), b'_2 = b'_3 = \frac{1}{4}(\frac{25+2\gamma}{11+\gamma})$	$c'_1 = -\frac{1}{4}(\frac{1+2\gamma}{5+\gamma}), c'_2 = \frac{3}{2}(\frac{2+\gamma}{5+\gamma})$ $c'_3 = \frac{9}{4(5+\gamma)}$
$d'_1 = d'_2 = \frac{3}{4}(\frac{-1+\gamma}{-7+2\gamma}),$ $d'_3 = \frac{1}{2}(\frac{-11+\gamma}{-7+2\gamma})$	$e'_1 = \frac{1}{2}(\frac{-\gamma}{-7+2\gamma}), e'_2 = -\frac{7}{2}(\frac{1}{-7+2\gamma}),$ $e'_3 = \frac{1}{2}(\frac{-7+3\gamma}{-7+2\gamma})$
$f'_1 = f'_3 = \frac{3}{4}(\frac{1}{6+2\gamma}), f'_2 = \frac{1}{2}(\frac{9+2\gamma}{6+\gamma})$	

TABLE 5.2 – Les poids des règles de subdivision particulières du schéma quasi-linéaire univarié.

### 5.6.1.2/ CONTINUITÉ

#### CONDITIONS NÉCESSAIRES

Pour vérifier les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  des courbes limites de ces schémas de subdivision au voisinage du point origine, nous fixons une arête  $[-1, 1]$  et nous définissons une matrice de subdivision  $\mathcal{M}$  de taille  $6 \times 6$  de sorte qu'après un pas de subdivision la matrice contienne tous les points de contrôle de la courbe qui influencent l'arête  $[-1, 0]$ . Les matrices de subdivision des schémas quasi-linéaires univariés qui reproduisent les polynômes de degré 3 sont données par :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{32}\left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right) & \frac{1}{16}\left(\frac{16+11\gamma}{2+\gamma}\right) & \frac{1}{16}\left(\frac{16+11\gamma}{2+\gamma}\right) & -\frac{3}{32}\left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8}\left(\frac{-19+10\gamma}{-37+13\gamma}\right) & \frac{3}{8}\left(\frac{-63+31\gamma}{-37+13\gamma}\right) & -\frac{123}{8(-37+13\gamma)} & \frac{3}{8}\left(\frac{-1+7\gamma}{-37+13\gamma}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4}\left(\frac{-1+\gamma}{-37+13\gamma}\right) & 6\left(\frac{-1+\gamma}{-37+13\gamma}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{-109+13\gamma}{-37+13\gamma}\right) & \frac{9}{2}\left(\frac{-1+\gamma}{-37+13\gamma}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\gamma}{-48+11\gamma} & \frac{-24}{-48+11\gamma} & \frac{3}{2}\left(\frac{-16+5\gamma}{-48+11\gamma}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{-48+11\gamma}\right) \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\left(\frac{\gamma}{-48+11\gamma}\right) & \frac{-6}{-48+11\gamma} & \frac{1}{4}\left(\frac{-144+35\gamma}{-48+11\gamma}\right) & \frac{3}{2}\left(\frac{-4+\gamma}{-48+11\gamma}\right) \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont :

$$\forall \gamma \in [0, 1], \lambda_i = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{3}{32}\left(\frac{1+\gamma}{2+\gamma}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{25\gamma^2 - 127\gamma + 444}{143\gamma^2 - 1031\gamma + 1776}\right).$$

Tandis que les matrices des schémas qui reproduisent les polynômes de degré 2 sont données en fonction d'un paramètre  $\gamma$  par :

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{11+\gamma}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{25+2\gamma}{11+\gamma}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{25+2\gamma}{11+\gamma}\right) & -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{11+\gamma}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\left(\frac{1+2\gamma}{5+\gamma}\right) & \frac{3}{2}\left(\frac{2+\gamma}{5+\gamma}\right) & \frac{9}{4(5+\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\left(\frac{-1+\gamma}{-7+2\gamma}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{-11+\gamma}{-7+2\gamma}\right) & \frac{3}{4}\left(\frac{-1+\gamma}{-7+2\gamma}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{-7+2\gamma}\right) & -\frac{7}{2}\left(\frac{1}{-7+2\gamma}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{-7+2\gamma}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6+2\gamma}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{9+2\gamma}{6+\gamma}\right) & \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6+2\gamma}\right) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de ces matrices sont :

$$\lambda'_i = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4(6+\gamma)}, -\frac{3}{4(6+\gamma)}, \frac{1}{4}\left(\frac{-19 - 35\gamma + 6\gamma^2}{2\gamma^2 + 3\gamma - 35}\right), \gamma \in [0, 1].$$

À partir des valeurs propres  $\lambda_i, \lambda'_i$ , pour tout  $\gamma \in [0, 1]$  et pour tout  $i = 1, \dots, 6$ , nous avons

$$\begin{cases} \lambda_i = 1, \frac{1}{2}, \theta_j, & \theta_j < \frac{1}{2} \text{ pour } j = 3, \dots, 6 \\ \lambda'_i = 1, \frac{1}{2}, \theta'_j, & \theta'_j < \frac{1}{2} \text{ pour } j = 3, \dots, 6 \end{cases}$$

d'où les conditions nécessaires de la continuité  $C^1$ .

CONDITIONS SUFFISANTES

Pour les conditions suffisantes, nous effectuerons le test du rayon spectral conjoint. Pour cela, nous définissons un ensemble de points  $L$  afin de définir les deux matrices  $M^1$  et  $M^2$ . Pour les schémas quasi-linéaires univariés présentés ici nous choisissons  $L$  comme un ensemble de  $|L| = 7$  points :  $L = \{i, i \in \llbracket -3, 3 \rrbracket\}$ , et nous définissons les deux matrices après un pas de subdivision par (voir figure 5.9) :

$$\begin{cases} M^1 : L \rightarrow L \\ M^2 : L \rightarrow \zeta L \end{cases},$$

avec  $\zeta L = \{i + 1, i \in \llbracket -3, 3 \rrbracket\}$ . À partir des valeurs propres de ces deux matrices et la proposition 14, nous constatons que :

1. Pour tout  $\gamma \in ]0, 1]$ , les schémas de subdivision quasi-linéaires univariés ne peuvent pas être de continuité  $C^2$  et les deux matrices  $M^1$  et  $M^2$  sont données sur la nouvelle base  $V$  par les deux équations (5.66) et (5.67) avec :

$$\begin{cases} \Upsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \Theta = \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

2. Pour  $\gamma = 0$ , les valeurs propres des deux matrices  $M^1$  et  $M^2$  sont :

$$\begin{cases} \lambda_{i|M^1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{3}{64}, 0 \\ \lambda_{i|M^2} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{29}{592} \mp \frac{71}{6131i}, 0 \end{cases} \text{ pour } m = 3$$

et

$$\begin{cases} \lambda'_{i|M^1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{19}{140}, -\frac{3}{44}, 0 \\ \lambda_{i|M^2} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{28}, -\frac{1}{20}, 0 \end{cases} \text{ pour } m = 2$$

d'où les conditions nécessaires de la continuité  $C^2$ .

Appliquons la technique du rayon spectral conjoint à des schémas de subdivision quasi-linéaires univariés qui reproduisent les polynômes de degré au plus 3 ( $m = 2, 3$ ) pour  $\gamma = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ , nous aurons les résultats de continuité présentés dans le tableau suivant,

Schémas	Schémas 5.72 ( $m = 3$ )			Schémas 5.76 ( $m = 2$ )		
	0	1/2	1	0	1/2	1
$\rho^k < \frac{1}{2}$	$\rho^2 = \frac{1069}{281}$	$\rho^3 = \frac{1613}{4246}$	$\rho^3 = \frac{607}{1282}$	$\rho^2 = \frac{679}{1574}$	$\rho^3 = \frac{752}{1635}$	$\rho^3 = \frac{144}{317}$
$C^{1+\alpha}$	$C^{1,9252}$	$C^{1,8726}$	$C^{1,7063}$	$C^{1,8927}$	$C^{1,7725}$	$C^{1,3022}$

TABLE 5.3 – Continuité des schémas quasi-linéaires univariés.

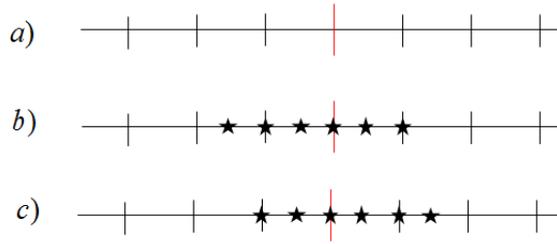


FIGURE 5.9 – Les ensembles de définition des deux matrices  $M^1$  et  $M^2$  associées aux schémas quasi-linéaires univariés. a) L'ensemble  $L$ , b) l'ensemble de définition de la matrice  $M^1$  et c) l'ensemble de définition de la matrice  $M^2$ .

Rappelons ici que pour  $\gamma = 0$  les schémas quasi-linéaires univariés satisfont les conditions nécessaires de la continuité  $C^2$ . Alors il est possible de montrer que ces schémas peuvent être de continuité  $C^2$  à condition de trouver une matrice de passage  $V$  qui vérifie les relations (5.66) et (5.67).

### 5.6.1.3/ ORDRE D'APPROXIMATION

Nous verrons ici que l'extension de l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{\gamma|X}$  à un opérateur quasi-interpolant discret  $Q_{\gamma|X}^*$  peut être utilisée afin de montrer que nous pouvons estimer l'ordre d'approximation d'un schéma de subdivision quasi-linéaire univarié.  $S_{\gamma|X}$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  sont des schémas de subdivision quasi-linéaires univariés qui reproduisent des polynômes de degré au plus 3. Par le lemme 8, les schémas  $S_{\gamma|X}$  sont approximants d'ordre au plus 4.

Pour obtenir un ordre d'approximation au plus 4, nous avons besoin d'étendre les opérateurs  $Q_{\gamma|X}$  à des opérateurs bornés et locaux  $Q_{\gamma|X}^*$  dans le sens du lemme 7. Pour  $p_i = f(x_i) = f(i)$ , on remplace l'opérateur différentiel  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 i}$  donné dans l'équation (5.70) par l'opérateur aux différences  $d^2$  d'ordre 2, les opérateurs quasi-interpolants discrets associés aux schémas quasi-linéaires univariés sont donnés en fonction d'un paramètre  $\gamma, \gamma \in [0, 1]$  par :

$$Q_{\gamma|X}^* f(i) = \begin{cases} f(i) & i < 0 \\ -\frac{1}{6}(1-\gamma)f(i-1) + \frac{4-\gamma}{3}f(i) - \frac{1}{6}(1-\gamma)f(i+1) & i = 0 \\ -\frac{1}{6}f(i-1) + \frac{4}{3}f(i) - \frac{1}{6}f(i+1) & i > 0 \end{cases} \quad (5.79)$$

Par un calcul simple, on montre facilement qu'il existe des domaines ouverts et bornés  $D_\gamma$  et des constantes  $c_\gamma$  de sorte que  $|Q_{\gamma|X}^*|_\infty \leq c_\gamma \|f\|_{\infty, i+D_\gamma}$ ,

$$|Q_{\gamma|X}^* f|_\infty = \begin{cases} |(Q^-)_{\gamma|X}^* f|_\infty \leq \|f\|_{\infty, i+D_\gamma} & i < 0 \\ |(Q^0)_{\gamma|X}^* f|_\infty \leq \frac{4-\gamma}{3} \|f\|_{\infty, i+D_\gamma} & i = 0 \\ |(Q^+)_{\gamma|X}^* f|_\infty \leq \frac{4}{3} \|f\|_{\infty, i+D_\gamma} & i > 0 \end{cases} \quad (5.80)$$

Pour toute fonction continue  $f$ , nous utilisons  $Qf$  comme points de contrôle initiaux. Nous avons  $S_{\gamma|X}^\infty Q_{\gamma|X} f = f$ , alors la fonction  $f$  est la fonction limite du schéma  $S_{\gamma|X}$ . Par exemple,

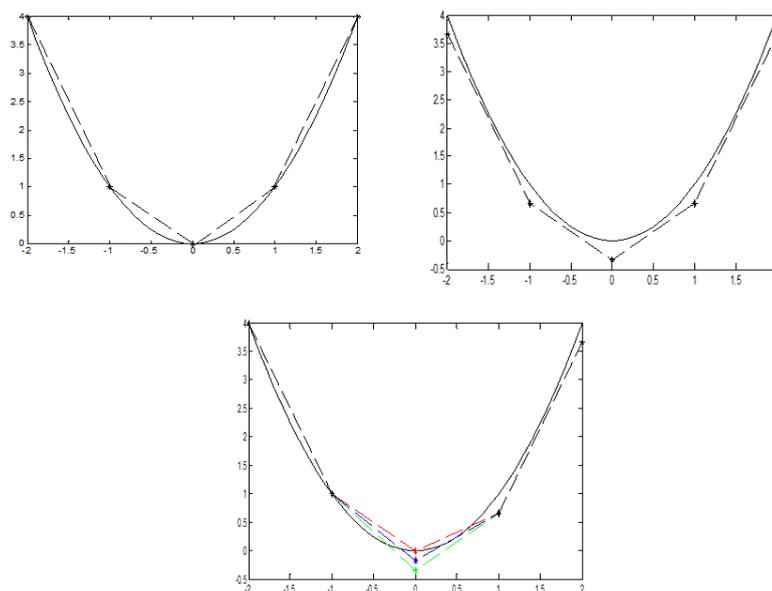


FIGURE 5.10 – En haut à gauche, les points qui génèrent la fonction limite du schéma 4-points. En haut à droite les points qui génèrent la fonction limite du schéma B-spline cubique. En bas, les points qui génèrent la fonction limite des schémas quasi-linéaires univariés (les schémas qui unifient le schéma 4-point pour  $i < 0$  et le schéma B-spline cubique pour  $i > 0$ ). Le point rouge représente le point de contrôle  $Q_{p_0}$  pour  $\gamma = 1$ , le point bleu représente le point de contrôle  $Q_{p_0}$  pour  $\gamma = 1/2$  et le point vert représente le point de contrôle  $Q_{p_0}$  pour  $\gamma = 0$ .

afin d'obtenir la fonction  $f = x^2$  à la limite, les points de contrôle que nous avons besoin sont (voir figure 5.10) :

$$Qf = (\dots, 4, 1, -\frac{1}{3}\gamma, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \dots).$$

La figure 5.10 montre que l'ordre d'approximation dans la zone mixte des schémas de subdivision quasi-linéaires qui unifient le schéma 4 points et le schéma B-spline cubique dépend d'un paramètre  $\gamma$ . En effet, à partir de cette figure et du lemme 8, nous pouvons montrer que plus la constante  $\gamma$  est grande, plus l'approximation est bonne. Autrement dit, plus  $\gamma$  est petite, plus l'erreur issue de l'échantillonnage des points de contrôle est grande.

Les schémas de subdivision quasi-linéaires univariés que nous avons proposés dans cet exemple sont des schémas qui reproduisent des polynômes de degré au plus 3. Nous concluons donc que ces schémas ont un ordre d'approximation au plus 4 dans la zone de raccord (4 pour les schémas qui reproduisent les polynômes de degré 3 et 3 pour les schémas qui reproduisent les polynômes de degré 2).

#### 5.6.1.4/ RÉSULTATS

La figure 5.11 représente les courbes générées à l'aide de l'application de différents schémas quasi-linéaires uni-variés, définis en fonction d'un paramètre  $\gamma$  sur un polygone de contrôle. Le principe de ces schémas de subdivision combine les règles du principe du schéma 4 points, et celles du schéma B-spline cubique sur deux parties différentes du même polygone de contrôle. En bleu (resp. jaune), les courbes ou une partie interpolante (resp. approximante) de la courbe et le point en rouge représente le point de raccord des deux courbes.

Dans la figure 5.12, nous présentons deux exemples de comparaisons. Dans la première ligne de cette figure, nous affichons les trois courbes générées par l'application du schéma quasi-linéaire uni-varié qui reproduit les polynômes de degré 3 (resp. degré 2) pour des valeurs différentes de  $\gamma$ . Dans la deuxième ligne de la même figure, nous affichons des courbes générées par l'application des schémas quasi-linéaires de degré différents pour la même valeur du paramètre  $\gamma$ .

Afin de mieux aborder les avantages et les inconvénients liés à la continuité et à l'ordre d'approximation de chacun de ces schémas, nous supposons que le point  $p_i$  pour  $i = 0$  est le point de la frontière qui sépare les deux parties de chaque polygone de contrôle.

#### CONTINUITÉ

Pour  $|i| > 0$  : La continuité de la courbe limite de ces schémas est la même que celle des deux schémas linéaires qui les définissent. C'est à dire  $C^2$  pour tout  $i > 0$  et  $C^1$  pour tout  $i < 0$ .

Pour  $i = 0$  : La continuité des schémas quasi-linéaires uni-variés au point de raccord dans les deux cas (reproduction des polynômes de degré 2 et 3) est  $C^1$  pour tout  $\gamma \in [0, 1]$ . Mais la différence entre ces schémas porte sur la continuité numérique. En effet, les courbes limites présentées dans les figures 5.11 et 5.12 confirment les résultats donnés dans le tableau 5.3. La continuité numérique de ces schémas de subdivision dépend de deux paramètres différents. D'un côté le degré  $m$  de la reproduction des polynômes et d'un autre côté le paramètre  $\gamma$ . À partir des deux figures 5.11 et 5.12 et le tableau 5.3, deux cas se distinguent clairement, le premier cas est lié au paramètre  $\gamma$  tandis que le deuxième est lié aux deux paramètres  $m$  et  $\gamma$  en même temps.

1. Pour le premier cas, nous constatons que plus le paramètre  $\gamma$  est petit, plus la continuité numérique est grande. Ce qui est logique, en effet pour  $\gamma = 1$  nous appliquons le schéma 4 points pour  $i \leq 0$  et le schéma B-spline cubique pour  $i > 0$ . Dans ce cas, le point de raccord se comporte comme un point interpolant, et les règles du schéma 4 points influencent sur les règles du schéma B-spline cubique dans la zone de raccord, et pour  $\gamma$  de plus en plus inférieur à 1, c'est le cas contraire.
2. Pour le deuxième cas, nous constatons que pour  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$  la courbe limite des schémas de subdivision quasi-linéaires uni-variés qui reproduisent les polynômes de degré 2 est proche de la courbe limite des schémas qui reproduisent les polynômes de degré 3, même si la continuité numérique d'un schéma qui reproduit les polynômes de degré 2 pour  $\gamma = 0$  est plus proche de la continuité numérique du schéma qui reproduit le polynôme de degré 3 pour  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Nous rappelons aussi que pour  $(\gamma \in [0, \frac{1}{2}], m = 2)$  et pour  $(\gamma \in [0, 1], m = 3)$ , la continuité numérique au point de raccord est supérieure ou égale à la continuité numérique du schéma 4 points.

### ORDRE D'APPROXIMATION

Pour  $i \leq -1$  et  $i \geq 1$  : Dans ces deux cas, l'ordre d'approximation des schémas quasi-linéaires uni-variés est le même que celui du schéma 4 points pour  $i \leq -1$  et celui de B-spline cubique pour  $i \geq 1$  (voir figures 5.11 et 5.12).

Pour  $i \in [-1, 1]$  : Comme dans le cas de la continuité numérique, l'ordre d'approximation des schémas quasi-linéaires uni-variés dans l'intervalle  $[-1, 1]$  dépend des deux paramètres  $\gamma$  et  $m$ . À l'opposé de la continuité numérique et à partir des figures 5.11 et 5.12, nous pouvons voir que plus  $\gamma$  est petite, plus l'ordre d'approximation est faible. Revenons maintenant au lien entre l'ordre d'approximation et le degré de la reproduction des polynômes. On observe immédiatement qu'il y a une confusion possible entre le degré et l'ordre et il faudra donc veiller à être précis. Nous avons vu dans la sous-section précédente que les schémas quasi-linéaires uni-variés reproduisent les polynômes de degré au plus 3 alors ils ont un ordre d'approximation au plus 4 (4 pour les schémas de degré 3 et 3 pour les schémas de degré 2). Nous avons aussi vu dans la section 1.2.3 que l'erreur d'approximation ou l'ordre d'approximation dépend d'une fonction d'erreur  $ch^{m+1} \|D^{m+1} f\|_\infty$ . Lorsque  $h$  est assez petit, la fonction d'erreur décroît comme  $ch^{m+1}$ . Plus  $m$  est grand, plus la décroissance est rapide. Ainsi, une fonction  $ch^4$  décroît plus vite qu'une fonction  $ch^3$ . Pour avoir une idée intuitive du comportement de telles fonctions, il suffit d'observer que lorsque  $h$  est divisée par deux, la fonction  $ch^{m+1}$  diminue selon un facteur approximatif de  $2^{m+1}$ . Donc l'erreur est plus petite quand le degré  $m$  est plus grand. Ce qui confirme les résultats données dans les figures 5.11 et 5.12. En se basant sur cette constatation, nous pouvons justifier les deux petits défauts qui apparaissent au niveau des points de raccord des schémas quasi-linéaires qui reproduisent les polynômes de degré 2 pour  $\gamma = \frac{1}{2}, 1$ . Autrement dit, dans le cas des schémas qui reproduisent les polynômes de degré 2, nous avons trois fonctions d'erreurs qui décroissent à deux vitesses différentes.

#### 5.6.2/ DEUXIÈME EXEMPLE

Dans cette partie, nous construisons un schéma de subdivision quasi-linéaire, qui unifie le schéma interpolant de Butterfly et le schéma approximant de Loop.

Considérons la grille triangle/triangle  $X_{(A_2, A_2)}$  donnée dans la figure 5.3. Nous définissons un opérateur quasi-interpolant sur cette grille qui coïncide avec le schéma de Butterfly sur la moitié gauche de la grille et le schéma de Loop sur la moitié droite de la grille. Les règles de ces deux schémas de subdivision sont données dans les figures 4.8-4.10. Les opérateurs quasi-interpolants de Butterfly et Loop sont donnés à partir des équations (3.39) et (5.9) par :

$$\begin{cases} Q_{|A_2}^- f = f & \text{Butterfly} \\ Q_{|A_2}^+ f = f - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f & \text{Loop} \end{cases} \quad (5.81)$$

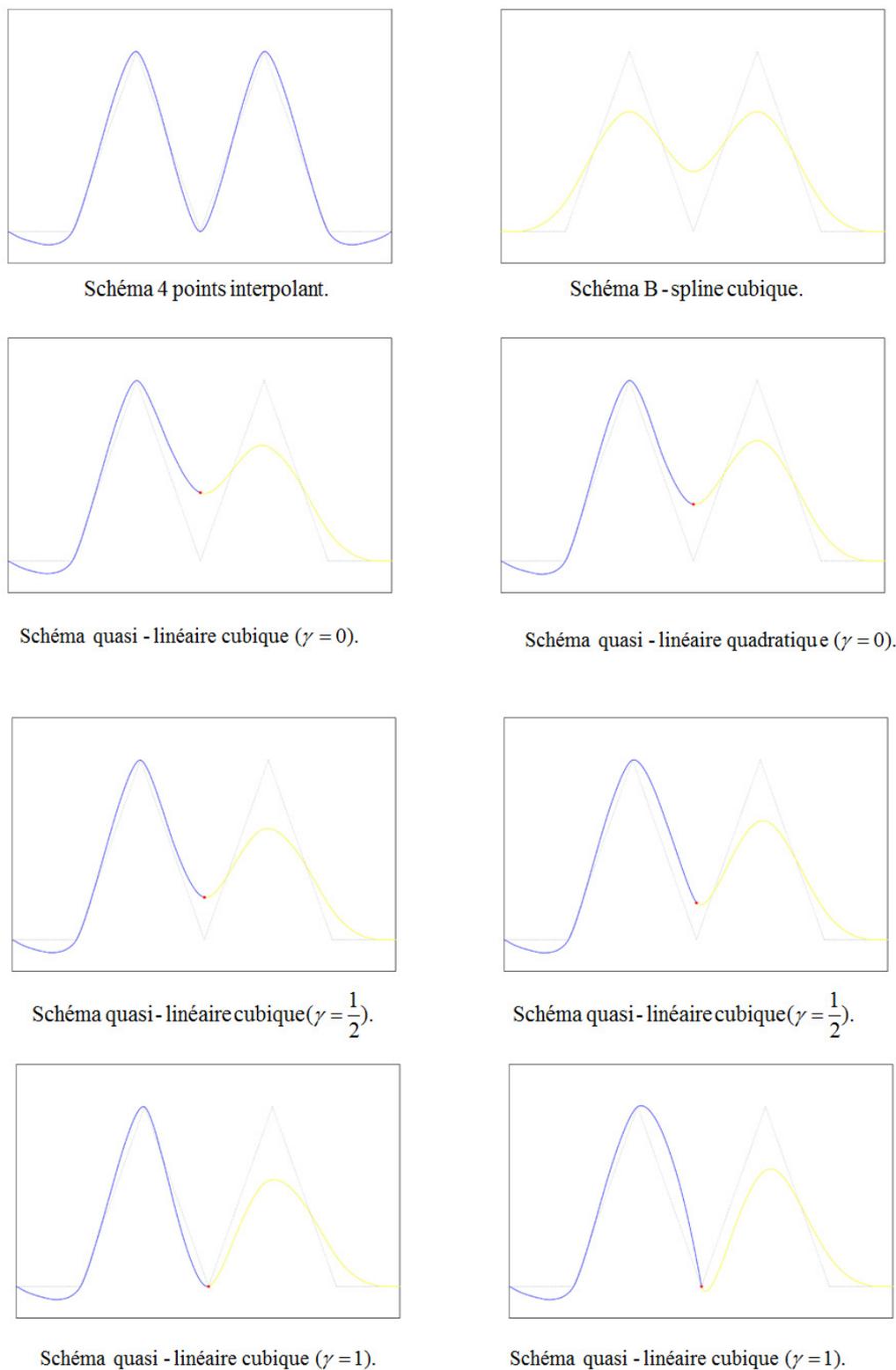


FIGURE 5.11 – Différentes courbes générées par l'application des schémas de subdivision quasi-linéaires uni-variés en fonction d'un paramètre  $\gamma$ . De haut en bas : schémas linéaires, schémas quasi-linéaires uni-variés pour  $\gamma = 0$ , schémas quasi-linéaires uni-variés pour  $\gamma = \frac{1}{2}$  et schémas quasi-linéaires uni-variés pour  $\gamma = 1$ . De gauche à droite, la première ligne : schéma interpolant 4 points et schéma B-spline cubique, lignes 2, 3 et 4 schémas quasi-linéaires uni-variés qui reproduisent les polynômes de degré 3 et schémas quasi-linéaires uni-variés qui reproduisent les polynômes de degré 2.

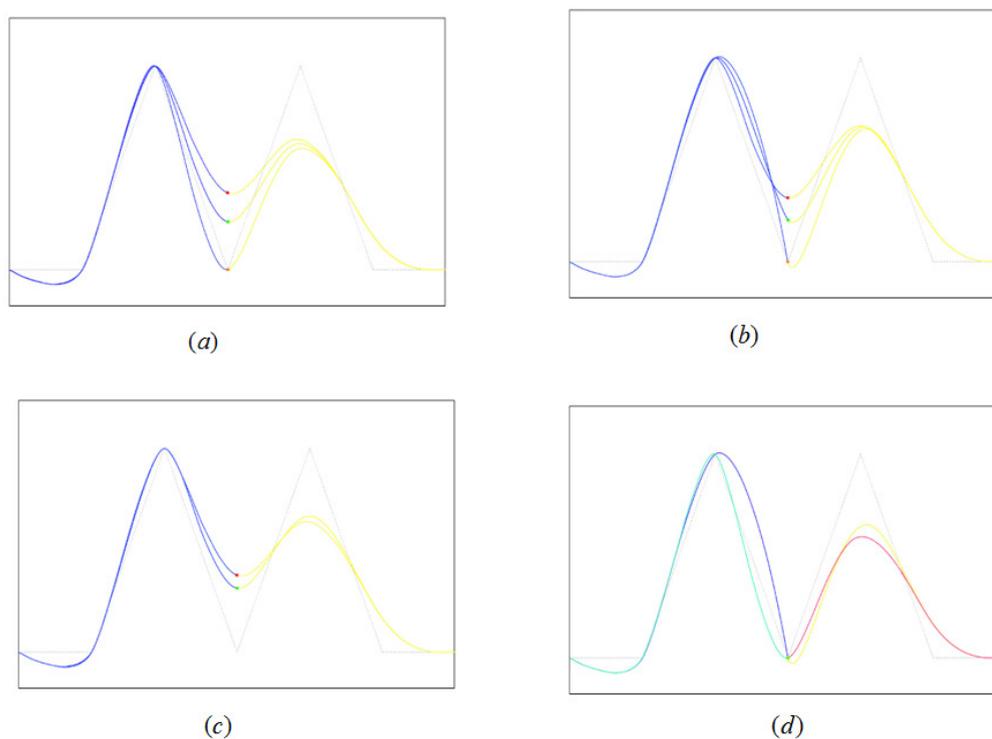


FIGURE 5.12 – (a) (resp. (b)) Les trois courbes générées par l'application du schéma quasi-linéaire uni-varié qui reproduit les polynômes de degré 3 (resp. degré 2) (les points : rouge, vert et orange représentent les points de raccord des deux schémas 4 points et B-spline cubique pour  $\gamma = 0, \frac{1}{2}, 1$  respectivement). (c) comparaison entre le schéma quasi-linéaire qui reproduit les polynômes de degré 3 et celui de degré 2 pour  $\gamma = 0$  (point de raccord rouge pour le schéma qui reproduit les polynômes de degré 3 et point de raccord vert pour celui qui reproduit les polynômes de degré 2). (d) comparaison entre le schéma quasi-linéaire qui reproduit les polynômes de degré 3 et celui de degré 2 pour  $\gamma = 1$  (la courbe vert rouge pour le schéma qui reproduit les polynômes de degré 3 et la courbe bleu jaune pour celui qui reproduit les polynômes de degré 2)

## 5.6.2.1/ CONSTRUCTION

Nous définissons un schéma de subdivision quasi-linéaire ( $S_{\gamma(A_2, A_2)}$ ) en fonction d'un paramètre  $\gamma$  sur la grille  $X_{(A_2, A_2)}$  : par le schéma interpolant de Butterfly ( $S_{\frac{1}{2}A_2}^-$ ) sur la moitié gauche de la grille et le schéma de subdivision approximant de Loop ( $S_{\frac{1}{2}A_2}^+$ ) sur la moitié droite de la grille. La fonction limite de ce schéma de subdivision est donnée par :

$$S_{\gamma(A_2, A_2)}^\infty f(z) = \begin{cases} f(z) & x < 0 \\ f(z) + (1 - \gamma) \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_3 \\ f(z) + \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0 \end{cases}, \quad (5.82)$$

et son opérateur quasi-interpolant est donné par :

$$Q_{\gamma(A_2, A_2)}^\infty f(z) = \begin{cases} f(z) & x < 0 \\ f(z) - (1 - \gamma) \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_3 \\ f(z) - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0 \end{cases}, \quad (5.83)$$

Pour un ensemble de points de contrôle  $\{p_{i, \hat{j}}, (i, \hat{j}) \in X_{(A_2, A_2)}\}$  avec  $\hat{j} = j - \frac{1}{2}i, j \in \mathbb{Z}$ , nous définissons un ensemble de nouveaux points de contrôle  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)})p_{i, \hat{j}}, (i, \hat{j}) \in \frac{1}{2}X_{(A_2, A_2)}\}$ . Par la même méthode exposée plus haut (section 5.3.5) les ensembles des nouveaux points à déterminer sont :  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-3, \hat{j}}, (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-2, \hat{j}}, (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-1, \hat{j}}, (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, \hat{j}}, (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{1, \hat{j}}, (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{2, \hat{j}},$  pour tout  $\hat{j} \in \frac{1}{2}X_{(A_2, A_2)}$  (voir figure 5.13).

Il existe trois ensembles de nouveaux points dans la moitié gauche de la grille  $\frac{1}{2}X_{(A_2, A_2)}$ , deux ensembles sur la moitié droite et un ensemble sur l'axe  $y$ . Chaque ensemble contient un ou deux types de nouveaux points différents (points pairs et points impairs) et chaque nouveau point est déterminé par une règle de subdivision sur un support.

 LES RÈGLES DE SUBDIVISION AU VOISINAGE DE L'AXE  $y$  ( $i < 0$ ) :

Les ensembles des nouveaux points dans cette partie de la grille sont  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-3, \hat{j}}, (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-2, \hat{j}}\}$  et  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-1, \hat{j}}\}$ .

L'ensemble des nouveaux points  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-3, \hat{j}}\}$  : Cet ensemble ne contient que des points impairs  $(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-3, 2\hat{j}+1}$  et  $(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-3, 2\hat{j}-1}$ ,  $\hat{j} \in X_{(A_2, A_2)}$ . En raison de l'invariance des indices, les règles qui déterminent ces deux points sont identiques. Les points  $(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{-3, 2\hat{j}+1}$  sont déterminés par la formule suivante (figure 5.14-(a)) :

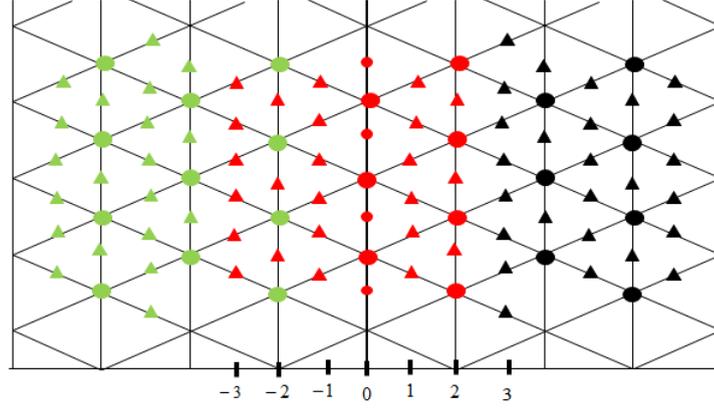


FIGURE 5.13 – Visualisation graphique des ensembles de nouveaux points du schéma de subdivision quasi-linéaire triangle/triangle (les points verts représentent l'ensemble des nouveaux points issus de l'application du schéma de Butterfly  $S_{|A_2}^-$ , les points rouges représentent l'ensemble des nouveaux points dans la zone mixte et les points noirs représentent l'ensemble des nouveaux points issus de l'application du schéma de Loop  $S_{|A_2}^+$ ).

$$\begin{aligned} (S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-3, 2\hat{j}+1} &= (S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-3, 2j+\frac{1}{2}} = a_{00}p_{-3, j+\frac{1}{2}} + a_{01}p_{-2, j+1} + \\ &a_{02}p_{-2, j} + a_{03}p_{-2, j-1} + a_{04}p_{-1, j+\frac{3}{2}} + a_{05}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + \\ &a_{06}p_{-1, j-\frac{1}{2}} + a_{07}p_{0, j}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

L'ensemble des nouveaux points  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-2, \hat{j}}\}$  : Cet ensemble contient deux types de points de contrôle : les points pairs  $(S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-2, 2\hat{j}} = p_{-1, \hat{j}}$  et les points impairs  $(S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-2, 2\hat{j}+1}$ . La règle qui détermine les nouveaux points impairs est donnée par (figure 5.14-(b)) :

$$\begin{aligned} (S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-2, 2\hat{j}-1} &= (S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-2, 2j+\frac{1}{2}} = a_{11}p_{-2, j+1} + a_{12}p_{-2, j} + \\ &a_{13}p_{-2, j-1} + a_{14}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + a_{15}p_{-1, j-\frac{1}{2}} + a_{16}p_{0, j+1} + \\ &a_{17}p_{0, j} + a_{18}p_{0, j-1}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

L'ensemble des nouveaux points  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-1, \hat{j}}\}$  : Cet ensemble ne contient que des points impairs  $(S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-1, 2\hat{j}+1}$  et  $(S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-1, 2\hat{j}-1}$ ,  $\hat{j} \in X_{(A_2, A_2)}$ . En raison de l'invariance des indices, les règles qui déterminent ces deux points sont identiques. Les points  $(S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-1, 2\hat{j}+1}$  sont déterminés par la formule suivante (figure 5.14-(c)) :

$$\begin{aligned} (S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-1, 2\hat{j}+1} &= (S_{\gamma(A_2, A_2)} p)_{-1, 2j+\frac{1}{2}} = a_{21}p_{-2, j} + a_{22}p_{-1, j+\frac{3}{2}} + \\ &a_{23}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + a_{24}p_{-1, j-\frac{1}{2}} + a_{25}p_{0, j+1} + a_{26}p_{0, j} + \\ &a_{27}p_{0, j-1}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

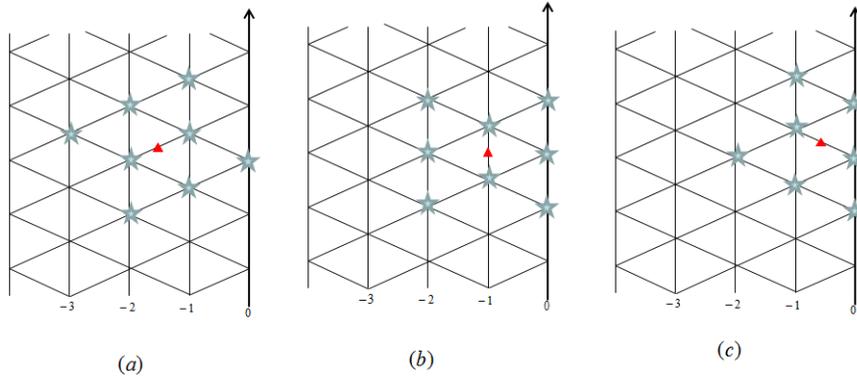


FIGURE 5.14 – Les supports des règles de subdivision particulières au voisinage de l'axe  $y$  ( $i < 0$ ).

### LES RÈGLES DE SUBDIVISION SUR L'AXE $y$ ( $i = 0$ ) :

Sur l'axe  $y$  il existe un seul ensemble de nouveaux points  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, \hat{j}}\}$ , cet ensemble contient deux types de points de contrôle  $(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, 2\hat{j}}$  et  $(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, 2\hat{j}+1}$ . Les supports qui définissent ces deux nouveaux points sont donnés dans la figure 5.15 et les formules qui les déterminent sont données par :

$$(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, 2\hat{j}} = (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, 2j} = a_{31}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + a_{32}p_{-1, j-\frac{1}{2}} + a_{33}p_{0, j+1} + a_{34}p_{0, j} + a_{35}p_{0, j-1} + a_{36}p_{1, j+\frac{1}{2}} + a_{37}p_{1, j-\frac{1}{2}}, \quad (5.87)$$

$$(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, 2\hat{j}+1} = (S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{0, 2j+1} = a_{41}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + a_{42}p_{-1, j+2} + a_{43}p_{0, j+1} + a_{44}p_{0, j} + a_{45}p_{0, j-1} + a_{46}p_{1, j+\frac{1}{2}}. \quad (5.88)$$

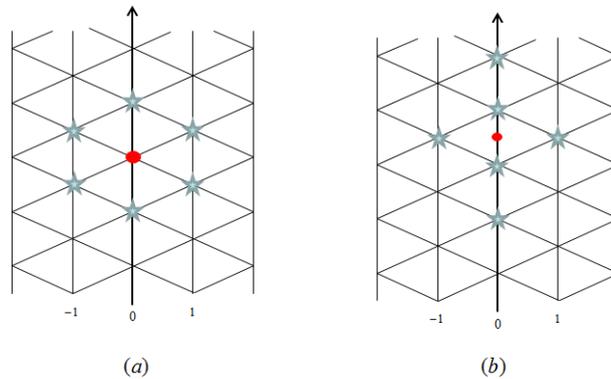


FIGURE 5.15 – Les supports des règles de subdivision particulières sur l'axe  $y$  ( $i = 0$ ).

### LES RÈGLES DE SUBDIVISION AU VOISINAGE DE L'AXE $y$ ( $i > 0$ ) :

Dans cette partie de la grille, les ensembles de nouveaux points à déterminer sont  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{1, \hat{j}}\}, \{(S_{\gamma(A_2, A_2)}P)_{2, \hat{j}}\}$ .

L'ensemble des nouveaux points  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{1,2\hat{j}+1}\}$  : En raison de l'invariance des indices, nous avons besoin d'une seule règle pour déterminer les nouveaux points de cet ensemble (figure 5.16-(a)) :

$$(S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{1,2\hat{j}+1} = (S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{1,2j+\frac{1}{2}} = a_{51}p_{0,j+1} + a_{52}p_{0,j} + a_{53}p_{0,j-1} + a_{54}p_{1,j+\frac{3}{2}} + a_{55}p_{1,j+\frac{1}{2}} + a_{56}p_{1,j-\frac{1}{2}} + a_{57}p_{2,j}. \quad (5.89)$$

L'ensemble des règles  $\{(S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{2,\hat{j}}\}$  : Cet ensemble contient deux types de points  $(S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{2,2\hat{j}}$  et  $(S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{2,2\hat{j}+1}$ . Ces deux nouveaux points sont définis sur les deux supports présentés dans les figures 5.16-(b) et 5.16-(c) par les formules suivantes :

$$(S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{2,2\hat{j}} = (S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{-2,2(j+\frac{1}{2})} = a_{61}p_{0,j+1} + a_{62}p_{0,j} + a_{63}p_{1,j+\frac{3}{2}} + a_{64}p_{1,j+\frac{1}{2}} + a_{65}p_{1,j-\frac{1}{2}} + a_{66}p_{2,j+1} + a_{67}p_{0,j}, \quad (5.90)$$

et

$$(S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{2,2\hat{j}+1} = (S_{\gamma(A_2, A_2)} P)_{-2,2j} = a_{71}p_{0,j+1} + a_{72}p_{0,j} + a_{73}p_{0,j-1} + a_{74}p_{1,j+\frac{1}{2}} + a_{75}p_{1,j-\frac{1}{2}} + a_{76}p_{2,j}. \quad (5.91)$$

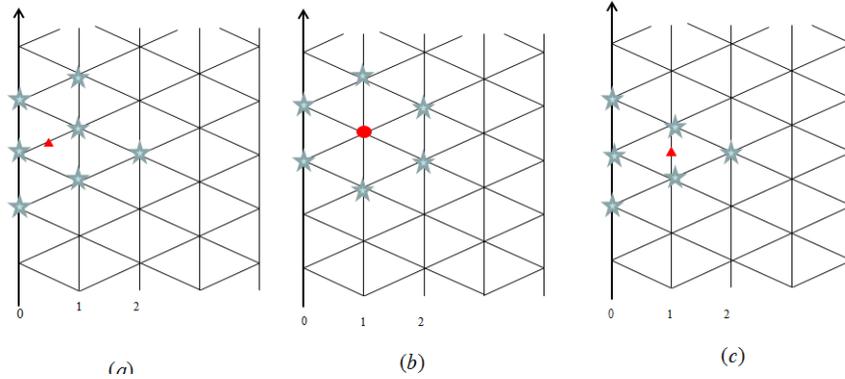


FIGURE 5.16 – Les supports des règles de subdivision au voisinage de l'axe  $y$  ( $i > 0$ ).

Les équations (5.84) à (5.91) représentent les règles de subdivision particulières dans la zone mixte (sur l'axe  $y$  et au voisinage de cet axe). Les poids de ces règles de subdivision sont calculés à partir de la définition et du choix de l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{\gamma(A_2, A_2)}$  sur la grille triangle/triangle  $X_{(A_2, A_2)}$ , de sorte que la condition  $S_{\gamma(A_2, A_2)} Q_{\gamma(A_2, A_2)} = Q_{\gamma(A_2, A_2)} \sigma$  soit satisfaite sur l'espace des polynômes de degré 2. Dans cet exemple, l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{\gamma(A_2, A_2)}$  est défini comme dans l'équation (5.81). Compte tenu de la définition de cet opérateur, les règles de subdivision particulières sont trouvées à partir de l'équation (5.54), pour  $k = |k_1 + k_2| = 2$  en fonction d'un paramètre  $\gamma$ . Les poids de ces règles de subdivision sont donnés dans le tableau 5.4.

## LES RÈGLES DE BORDS

Les règles du schéma 4 points et les règles du schéma B-spline cubique peuvent être utilisées respectivement comme des règles de bords extérieurs pour les schémas de

Butterfly et Loop. Par conséquent les schémas quasi-linéaires univariés qui reproduisent des polynômes de degré 2 (figure 5.8 et tableau 5.2) peuvent être utilisés à leur tour comme des règles de bord extérieur pour les schémas quasi-linéaires triangle/triangle.

Le support trop large des schémas quasi-linéaires nous impose la définition de règles de bords supplémentaires plus complexes. Un certain nombre de cas doivent être considérés de façon séparée, voir figure 5.17 pour les supports de ces règles de bords et le tableau 5.5 pour les poids qui définissent ces règles.

$a_{00} = a_{03} = a_{04} = a_{07} = -\frac{3}{4(11+\gamma)}, a_{02} = a_{05} = \frac{3}{8}(\frac{15+\gamma}{11+\gamma}), a_{01} = a_{06} = \frac{1}{8}$
$a_{11} = a_{13} = a_{16} = a_{18} = -\frac{1}{16}, a_{12} = a_{17} = \frac{1}{8}, a_{13} = a_{15} = \frac{1}{2}$
$a_{21} = -\frac{1}{4}(\frac{2\gamma+1}{5+\gamma}), a_{22} = a_{27} = -\frac{1}{8}(\frac{2\gamma+1}{5+\gamma}), a_{23} = \frac{1}{8}(\frac{19+\gamma}{5+\gamma})$ $, a_{24} = \frac{3}{8}(\frac{\gamma+2}{5+\gamma}), a_{25} = -\frac{1}{8}(\frac{\gamma-4}{5+\gamma}), a_{26} = \frac{3}{8}$
$a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{35} = a_{36} = a_{37} = \frac{3}{4}(\frac{1-\gamma}{14-4\gamma}), a_{34} = 1 - \frac{9}{2}(\frac{1-\gamma}{14-4\gamma})$
$a_{41} = a_{46} = \frac{3}{4}(\frac{-1+\gamma}{-7+2\gamma}), a_{42} = a_{45} = \frac{1}{16}(\frac{1+4\gamma}{-7+2\gamma}), a_{43} = a_{44} = a_{45} = -\frac{45}{16}(\frac{1}{-7+2\gamma}),$
$a_{51} = -\frac{1}{8}(\frac{-6+\gamma}{6+\gamma}), a_{52} = \frac{3}{8}, a_{53} = a_{54} = -\frac{1}{4}(\frac{\gamma}{6+\gamma}), a_{55} = \frac{1}{8}(\frac{18+11\gamma}{6+\gamma}), a_{56} = \frac{3}{8}(\frac{2+\gamma}{6+\gamma}),$ $a_{57} = -\frac{2}{2}(\frac{\gamma}{6+\gamma})$
$a_{61} = a_{62} = a_{63} = a_{65} = a_{66} = a_{67} = \frac{3}{8(6+\gamma)}, a_{64} = \frac{1}{4}(\frac{15+4\gamma}{6+\gamma})$
$a_{71} = a_{73} = -\frac{1}{8}(\frac{\gamma}{6+\gamma}), a_{72} = \frac{1}{4}(\frac{3+\gamma}{6+\gamma}), a_{74} = a_{75} = \frac{1}{4}(\frac{9+2\gamma}{6+\gamma}), a_{76} = \frac{3}{4(6+\gamma)}$

TABLE 5.4 – Les poids des règles de subdivision particulières du schéma quasi-linéaire triangle/triangle en fonction d'un paramètre  $\gamma$ .

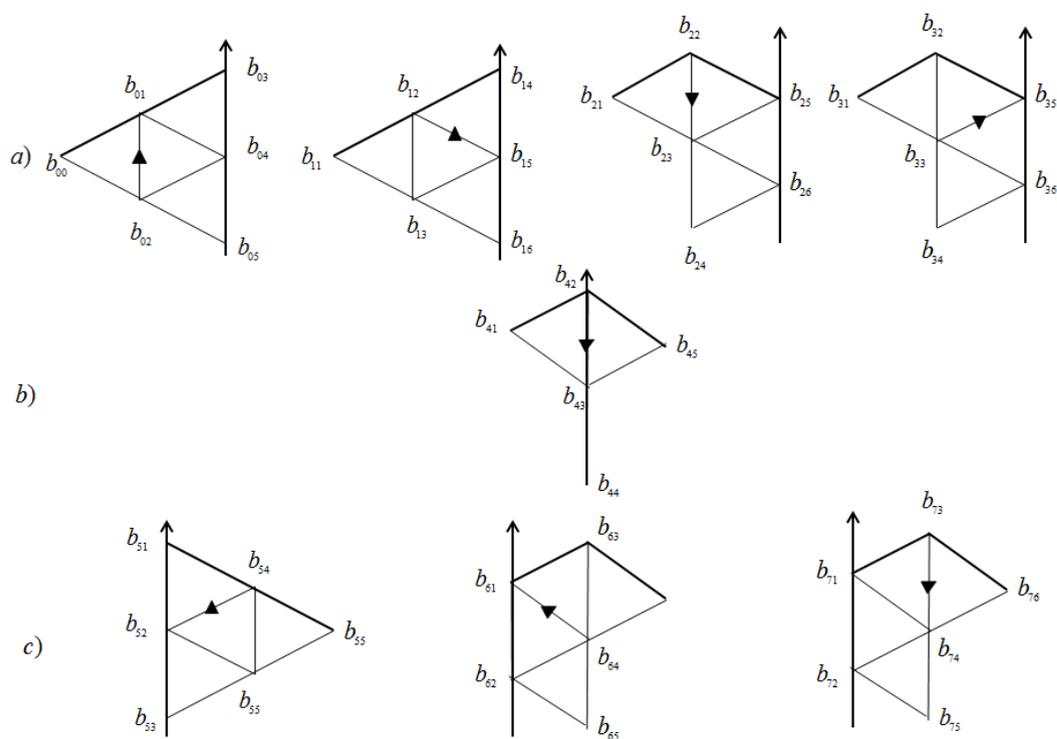


FIGURE 5.17 – Les supports des règles de bords sur l'axe  $y$  et au voisinage de cet axe. a) les règles de bords dans la moitié gauche de la grille triangle/triangle, b) une règle de bord sur l'axe  $y$  et c) les règles de bords sur la moitié droite de la grille.

$b_{00} = 0, b_{01} = b_{02} = -\frac{1}{2}, b_{03} = b_{05} = -\frac{1}{8}, b_{04} = \frac{1}{4}$
$b_{11} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1+2\gamma}{\gamma+5}\right), b_{12} = \frac{1}{8}\left(\frac{17+7\gamma}{\gamma+5}\right), b_{13} = \frac{1}{8}\left(\frac{7+5\gamma}{\gamma+5}\right), b_{14} = -\frac{3}{8}\left(\frac{-1+\gamma}{\gamma+5}\right)$ $b_{15} = \frac{1}{8}\left(\frac{17+7\gamma}{\gamma+5}\right), b_{16} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1+2\gamma}{\gamma+5}\right)$
$b_{21} = 0, b_{22} = \frac{2}{5}, b_{23} = \frac{2}{3}, b_{24} = -\frac{1}{15}, b_{25} = 0, b_{26} = 0$
$b_{31} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1+2\gamma}{\gamma+5}\right), b_{32} = \frac{9}{40}\left(\frac{3+\gamma}{\gamma+5}\right), b_{33} = \frac{1}{24}\left(\frac{59+37\gamma}{\gamma+5}\right), b_{34} = -\frac{2}{15}\left(\frac{1+2\gamma}{\gamma+5}\right)$ $b_{35} = -\frac{1}{8}\left(\frac{-13+\gamma}{\gamma+5}\right), \frac{1}{8}$
$b_{41} = \frac{3}{4}\left(\frac{-1+\gamma}{-7+2\gamma}\right), b_{42} = 0, b_{43} = \frac{3}{8}, b_{44} = -\frac{3}{4}\left(\frac{4+\gamma}{-7+2\gamma}\right), b_{45} = \frac{1}{8}\left(\frac{1+4\gamma}{-7+2\gamma}\right)$ $b_{46} = \frac{3}{4}\left(\frac{1+4\gamma}{-7+2\gamma}\right)$
$b_{51} = -\frac{3}{8}\left(\frac{\gamma-2}{6+\gamma}\right), b_{52} = \frac{1}{8}\left(\frac{18+7\gamma}{6+\gamma}\right), b_{53} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{6+\gamma}\right), b_{54} = \frac{1}{8}\left(\frac{18+\gamma}{6+\gamma}\right)$ $b_{55} = \frac{1}{8}\left(\frac{6+5\gamma}{6+\gamma}\right), b_{56} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{6+\gamma}\right)$
$b_{61} = -\frac{1}{8}\left(\frac{-18+\gamma}{6+\gamma}\right), b_{62} = \frac{1}{8}, b_{63} = \frac{1}{8}, b_{64} = \frac{3}{8}\left(\frac{6+5\gamma}{6+\gamma}\right), b_{65} = b_{66} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{6+\gamma}\right)$
$b_{71} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6+\gamma}\right), b_{72} = 0, b_{73} = \frac{3}{8}, b_{74} = \frac{3}{4}\left(\frac{3+\gamma}{6+\gamma}\right), b_{75} = -\frac{1}{8}\left(\frac{\gamma}{6+\gamma}\right), b_{76} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6+\gamma}\right)$

TABLE 5.5 – Les poids des règles de bords du schéma quasi-linéaire triangle/triangle en fonction d'un paramètre  $\gamma$ .

## 5.6.2.2/ CONTINUITÉ

Comme dans le cas des courbes (exemple précédent), les conditions nécessaires de continuité sont basées sur les valeurs propres des matrices de subdivision. Pour les conditions suffisantes, nous effectuerons le test du rayon spectral conjoint. Pour les schémas de cet exemple nous choisissons  $L$  comme un ensemble de  $|L| = 45$  points :

$$L = \{(i, j + \frac{1}{2}i), -2 \leq i \leq 2, -4 \leq j \leq 4\},$$

et nous définissons les deux matrices après un pas de subdivision par :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^1 : L \rightarrow L \\ \mathcal{M}^2 : L \rightarrow \zeta L \end{cases}$$

avec  $\zeta L = \{(i, j + 1), (i, j) \in L\}$ . La continuité de différents schémas en fonction du paramètre  $\gamma$  est donnée dans le tableau 5.6.

Schémas	Schémas 5.72			
$\gamma$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$\rho^k < \frac{1}{2^m}$	$\rho^{14} = \frac{1673}{6760} < \frac{1}{4}$	$\rho^{10} = \frac{522}{1117} < \frac{1}{2}$	$\rho^{12} = \frac{848}{1747} < \frac{1}{2}$	$\rho^2 < 1$
$C^{m+\alpha}$	$C^{2,1148}$	$C^{1,3002}$	$C^{1,2792}$	$C^{0,8927}$

TABLE 5.6 – Continuité du schéma quasi-linéaire triangle/triangle en fonction d'un paramètre  $\gamma$ .

Notons ici, qu'à partir des valeurs propres des matrices de subdivision, nous pouvons montrer que :

- Pour tout  $\gamma \in ]0, 1[$ , le schéma quasi-linéaire triangle/triangle ne peut pas être de continuité  $C^2$ .
- Pour  $\gamma = 0$ , les valeurs propres de  $M^1$  et  $M^2$  sont  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} > \lambda_j, j = 5, \dots, 45$ , avec  $\frac{1}{2}$  comme valeur propre triple. D'après la proposition 14, ce schéma de subdivision ne peut avoir une fonction limite de continuité  $C^1$ .

Nous verrons dans la section conclusion et perspectives, que le fait de choisir d'autres supports nous permet d'améliorer la continuité de la fonction limite de quelques schémas de subdivision.

### 5.6.3/ TROISIÈME EXEMPLE

Dans cet exemple, nous proposons un schéma de subdivision quasi-linéaire défini sur un maillage triangle/quad, qui unifie le schéma interpolant de Butterfly et le schéma approximant de Catmull-Clark.

Les règles de ces deux schémas de subdivision sont données par les figures 4.9, 4.10 et 4.5 et leurs opérateurs quasi-interpolants sont donnés par :

$$\begin{cases} Q_{|A_2}^- f = f & \text{Butterfly} \\ Q_{|A_1}^+ f = f - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f & \text{Catmull - Clark} \end{cases} \quad (5.92)$$

#### 5.6.3.1/ CONSTRUCTION

Nous définissons ainsi un schéma de subdivision quasi-linéaire  $(S_{|(A_2, A_1)})$  sur la grille  $X_{(A_2, A_1)}$  : par le schéma interpolant de Butterfly  $(S_{|A_2}^-)$  sur la moitié gauche de la grille et par le schéma de subdivision approximant de Catmull-Clark  $(S_{|A_1}^+)$  sur la moitié droite de la grille. La fonction limite de ce schéma de subdivision est donnée par :

$$S_{|(A_2, A_1)}^\infty f(z) = \begin{cases} f(z) & x < 0 \\ f(z) + (1 - \gamma) \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_2 \\ f(z) + \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0 \end{cases} \quad (5.93)$$

et son opérateur quasi-interpolant est donné par :

$$Q_{|(A_2, A_1)} f(z) = \begin{cases} Q_{|A_2}^- f = f(z) & x < 0 \\ Q_{|(A_2, A_1)}^0 f = f(z) - (1 - \gamma) \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_2 \\ Q_{|A_1}^+ f = f(z) - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0 \end{cases}, \quad (5.94)$$

L'opérateur quasi-interpolant  $Q^0$  sur l'axe  $y$  est choisi pour être défini comme une combinaison des deux opérateurs  $Q^-$  et  $Q^+$ . Pour les schémas que nous avons proposés précédemment, nous avons vu que différents choix de l'opérateur  $Q^0$  donnent différentes règles de subdivision. Afin de construire un schéma de subdivision quasi-linéaire qui unifie le schéma de Butterfly et le schéma de Catmull-Clark, nous supposons que  $Q^0 = Q^+$  ( $\gamma = 0$ ). En effet, en expérimentant avec d'autres choix de  $Q^0$  sur l'axe  $y$ , nous avons constaté que pour certains d'entre eux, il n'existe pas de solution unique aux systèmes d'équations qui déterminent les règles de subdivision dans la zone de raccord. Pour  $\gamma = 0$  et à partir de l'équation (5.94), nous aurons

$$Q_{|(A_2, A_1)} f(z) = \begin{cases} Q_{|A_2}^- f = f(z) & x < 0 \\ Q_{|A_1}^+ f = f(z) - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x \geq 0 \end{cases} \quad (5.95)$$

Dans ce cas et comme nous avons vu dans la section (5.3.5), les deux ensembles de nouveaux points  $\{(S_{|(A_2, A_1)} P)_{1,j}\}$  et  $\{(S_{|(A_2, A_1)} P)_{2,j}\}$  coïncident avec les deux ensembles issus de l'application du schéma de Catmull-Clark dans la moitié droite de la grille  $\{(S_{|A_1}^+ P)_{1,j}\}$  et  $\{(S_{|A_1}^+ P)_{2,j}\}$ . Il nous reste à déterminer quatre ensembles de nouveaux points dont trois ensembles au voisinage de l'axe  $y$  et un ensemble sur l'axe  $y$  (voir figure 5.18).

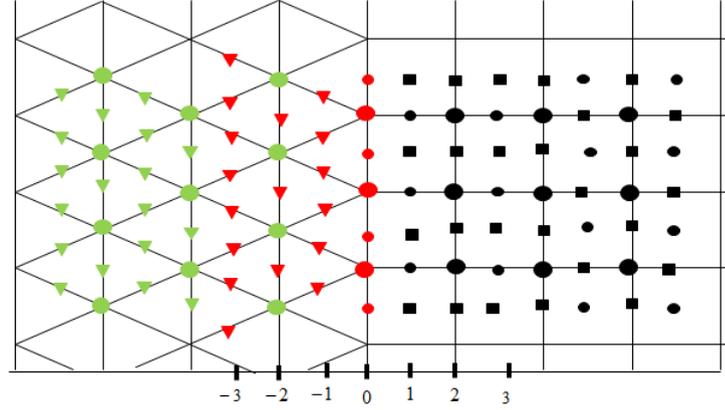


FIGURE 5.18 – Les ensembles des règles de subdivision sur la grille triangle/quad (les points verts représentent les règles du schéma de Butterfly, les points rouges représentent l'ensemble des règles de subdivision dans la zone mixte et les points noirs représentent l'ensemble des règles de subdivision du schéma de Catmull-Clark).

### LES RÈGLES DE SUBDIVISION AU VOISINAGE DE L'AXE $y$

Les ensembles des nouveaux points au voisinage de l'axe  $y$  sont  $\{(S_{|(A_2, A_1)P})_{-3, \hat{j}}\}$ ,  $\{(S_{|(A_2, A_1)P})_{-2, \hat{j}}\}$  et  $\{(S_{|(A_2, A_1)P})_{-1, \hat{j}}\}$ ,  $\hat{j} \in \frac{1}{2}X_{(A_2, A_1)}$ .

Afin de déterminer les nouveaux points de ces ensembles, nous définissons un ensemble de points de contrôle  $p_{i, \hat{j}}$ ,  $i \in X_{(A_2, A_1)}$ ,  $\hat{j} = j - \frac{1}{2}i$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  sur une zone régulière de la grille triangulaire et nous prenons les mêmes supports donnés dans la figure 5.14. De la même façon que pour l'exemple précédent, les règles de subdivision qui déterminent les ensembles de nouveaux points au voisinage de l'axe  $y$  sont données par :

- Règles points arêtes  $(S_{|(A_2, A_1)P})_{-3, 2\hat{j}+1}$  (figure 5.14-(a)) :

$$\begin{aligned} (S_{|(A_2, A_1)P})_{-3, 2\hat{j}+1} &= (S_{|(A_2, A_1)P})_{-3, 2j+\frac{1}{2}} = a_{81}p_{-3, j+\frac{1}{2}} + a_{82}p_{-2, j+1} + \\ & a_{83}p_{-2, j} + a_{84}p_{-2, j-1} + a_{85}p_{-1, j+\frac{3}{2}} + a_{86}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + \\ & a_{87}p_{-1, j-\frac{1}{2}} + a_{88}p_{0, j}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

- Règles points arêtes  $(S_{|(A_2, A_1)P})_{-2, 2\hat{j}+1}$  (figure 5.14-(b)) :

$$\begin{aligned} (S_{|(A_2, A_1)P})_{-2, 2\hat{j}+1} &= (S_{|(A_2, A_1)P})_{-2, 2j+\frac{1}{2}} = a_{91}p_{-2, j+1} + a_{92}p_{-2, j} + \\ & a_{93}p_{-2, j-1} + a_{94}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + a_{95}p_{-1, j-\frac{1}{2}} + \\ & a_{96}p_{0, j+1} + a_{97}p_{0, j} + a_{98}p_{0, j-1}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

- Règles points arêtes  $(S_{|(A_2, A_1)P})_{-1, 2\hat{j}+1}$  (figure 5.14-(c)) :

$$\begin{aligned} (S_{|(A_2, A_1)P})_{-1, 2\hat{j}+1} &= (S_{|(A_2, A_1)P})_{-1, 2j+\frac{1}{2}} = a_{101}p_{-2, j} + a_{102}p_{-1, j+\frac{3}{2}} + \\ & a_{103}p_{-1, j+\frac{1}{2}} + a_{104}p_{-1, j-\frac{1}{2}} + a_{105}p_{0, j+1} + a_{106}p_{0, j} + \\ & a_{107}p_{0, j-1}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

### LES RÈGLES SUR L'AXE $y$

Pour construire l'ensemble des nouveaux points sur l'axe  $y$ , nous définissons un ensemble de points de contrôle

$p_{(i,\tilde{j})}$ ,  $i \in \llbracket -1, 1 \rrbracket$ ,  $\tilde{j} = \begin{cases} j - \frac{1}{2}i & i < 0 \\ j & i \geq 0 \end{cases}$   $j \in \mathbb{Z}$ , sur une zone quad/triangle régulière (valence=5). L'ensemble des nouveaux points de contrôle  $\{(S_{|(A_2,A_1)}p)_{0,\tilde{j}}\}$  est déterminé par les deux règles suivantes :

- Règles points pairs  $(S_{|(A_2,A_1)}p)_{0,2\tilde{j}}$  (figure 5.19-(a)) :

$$(S_{|(A_2,A_1)}p)_{0,2\tilde{j}} = (S_{|(A_2,A_1)}p)_{0,2j} = a_{111}p_{-1,j+\frac{1}{2}} + a_{112}p_{-1,j-\frac{1}{2}} + a_{113}p_{0,j+1} + a_{114}p_{0,j} + a_{115}p_{0,j-1} + a_{116}p_{1,j+1} + a_{117}p_{1,j} + a_{118}p_{1,j-1}. \quad (5.99)$$

- Règles points arêtes  $(S_{|(A_2,A_1)}p)_{(0,2\tilde{j}+1)}$  (figure 5.19-(b)) :

$$(S_{|(A_2,A_1)}p)_{0,2\tilde{j}+1} = (S_{|(A_2,A_1)}p)_{0,2j+1} = a_{121}p_{-1,j+\frac{1}{2}} + a_{122}p_{0,j+2} + a_{123}p_{0,j+1} + a_{124}p_{0,j} + a_{125}p_{0,j-1} + a_{126}p_{1,j+1} + a_{127}p_{1,j}. \quad (5.100)$$

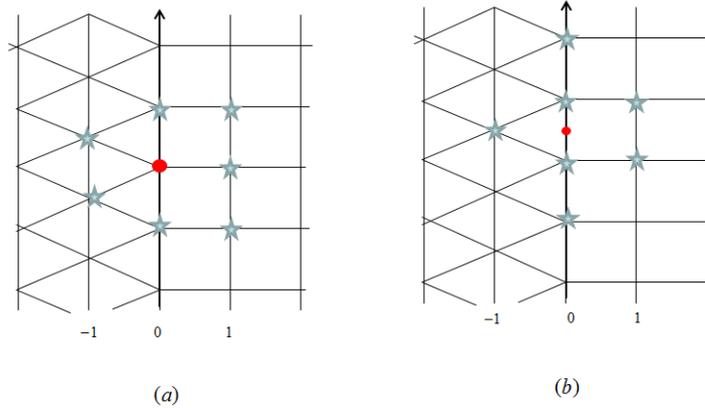


FIGURE 5.19 – Les supports des règles de subdivision particulières sur l'axe  $y(i = 0)$ .

Les équations (5.96) à (5.101) représentent les règles de subdivision particulières dans la zone mixte (sur l'axe  $y$  et au voisinage de cet axe). Les poids de ces règles de subdivision sont donnés à partir de l'équation (5.54) de sorte que la condition  $S_{|(A_2,A_1)}Q_{|(A_2,A_1)} = Q_{|(A_2,A_1)}\sigma$  soit satisfaite sur l'espace des polynômes  $\pi_2$ . Les poids de ces règles de subdivision sont donnés dans la figure 5.20.

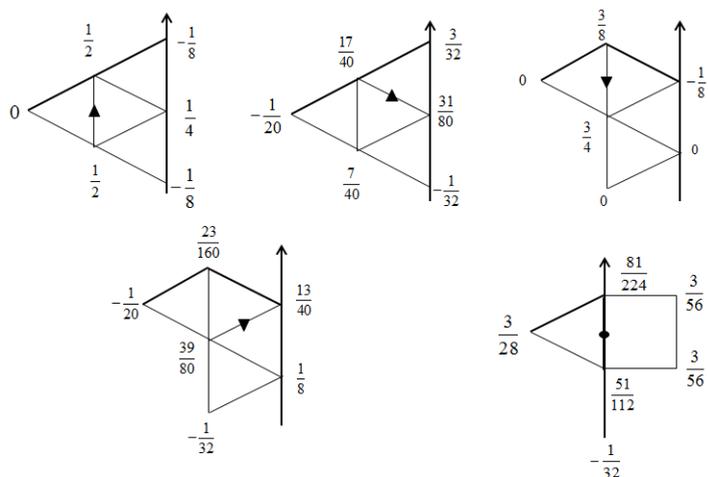


FIGURE 5.21 – Les règles de bords.

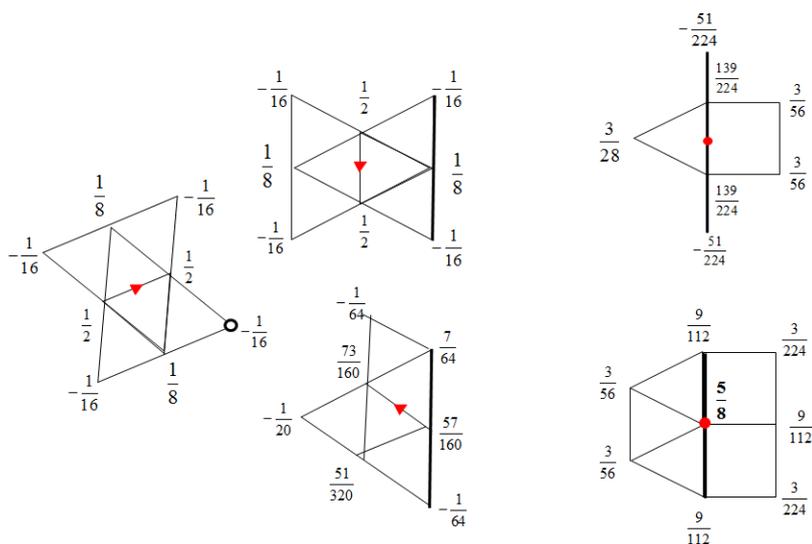


FIGURE 5.20 – Les règles de subdivision particulières appliquées le long et au voisinage de l'axe  $y$ .

### LES RÈGLES DE BORDS

Pour les règles de bords extérieurs de ce schéma de subdivision, nous utilisons le schéma de subdivision univarié qui reproduit les polynômes de degré 2 présentés dans la figure 5.8 et le tableau 5.2 pour  $\gamma = 0$ . Pour le reste, nous proposons des règles de bords supplémentaires plus complexes, voir figure 5.21.

### 5.6.3.2/ RÉSULTATS

Le schéma de subdivision quasi-linéaire présenté dans cette partie est de continuité  $C^2$  dans la zone de raccord (sur l'axe  $y$ ). En effet, pour

$$l = \{(i, j + \frac{1}{2}i), i = -2, -1, -4 \leq j \leq 4\} \cup \{(i, j), 0 \leq i \leq 2, -4 \leq j \leq 4\},$$

et pour tout :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^1 : L \rightarrow L \\ \mathcal{M}^2 : L \rightarrow \zeta L \end{cases} ,$$

il existe une matrice  $V$  telle que :

$$\begin{cases} (\mathcal{M}^1)' = V^{-1} \mathcal{M}^1 V = \begin{pmatrix} \Upsilon & C_0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} \\ (\mathcal{M}^2)' = V^{-1} \mathcal{M}^2 V = \begin{pmatrix} \Theta & C_1 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où  $\Upsilon = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  et  $\Theta$  est une matrice triangulaire supérieure qui a les mêmes valeurs que  $\Upsilon$  sur sa diagonale :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0.16 & 0.19 & -0.06 & 0.05 & -0.05 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.19 & 0.09 & -0.19 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.16 & 0.16 & -0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Appliquons le test du rayon spectral conjoint (équation 5.68) aux deux matrices  $Y_0$  et  $Y_1$ . Nous constatons qu'il existe  $k = 14$ , tel que :  $\rho^{[14]}(Y_0, Y_1) = \frac{411}{1654} < \frac{1}{4}$ . Nous concluons donc que ce schéma est  $C^2$  dans la zone mixte.

Le schéma proposé dans cet exemple est stationnaire et facile à mettre en œuvre. Nous utilisons un grand nombre de règles de subdivision sur les bords mais leur support est compact.

La figure 5.22 montre que ce schéma est aussi performant que les schémas de Catmull-Clark et Butterfly.

La figure 5.23 représente les surfaces créées à l'aide de l'application du schéma quasi-linéaire triangle/quad qui unifie le schéma de Butterfly et le schéma de Catmull-Clark. Les images qui présentent les lignes de réflexion dans les figures 5.21 et 5.22 montrent la bonne qualité de la courbure des surfaces générées par ce schéma de subdivision le long de la frontière triangle/quad. Rappelons ici que les lignes de réflexion sont basées sur la réflexion de lumière sur la surface par rapport à un observateur et permettant de détecter les irrégularités géométriques de la surface. Dans les deux dernières lignes de la figure 5.23, nous distinguons clairement toutes les caractéristiques des deux types de surfaces générées par le schéma interpolant de Butterfly d'un côté et le schéma approximant de Catmull-Clark de l'autre (bon ordre d'approximation et continuité faible d'un côté, et bonne continuité et ordre d'approximation faible de l'autre).

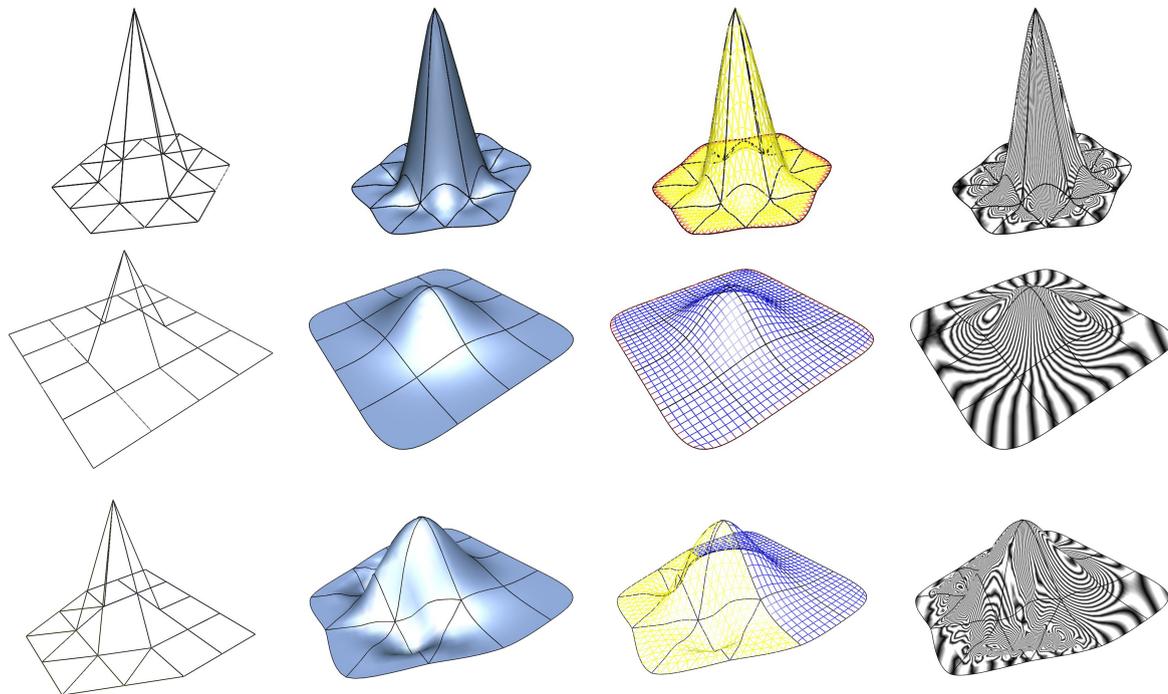


FIGURE 5.22 – Comparaison entre le schéma de Butterfly (en haut), schéma de Catmull-Clark (au centre) et le schéma quasi-linéaire qui unifie le schéma interpolant de Butterfly et le schéma approximant de Catmull-Clark sur un maillage triangle/quad (en bas). De gauche à droite : les mailles de contrôle, les surfaces limites, des mailles de couleur (jaune pour les triangles, bleu pour les quads), et les lignes de réflexion.

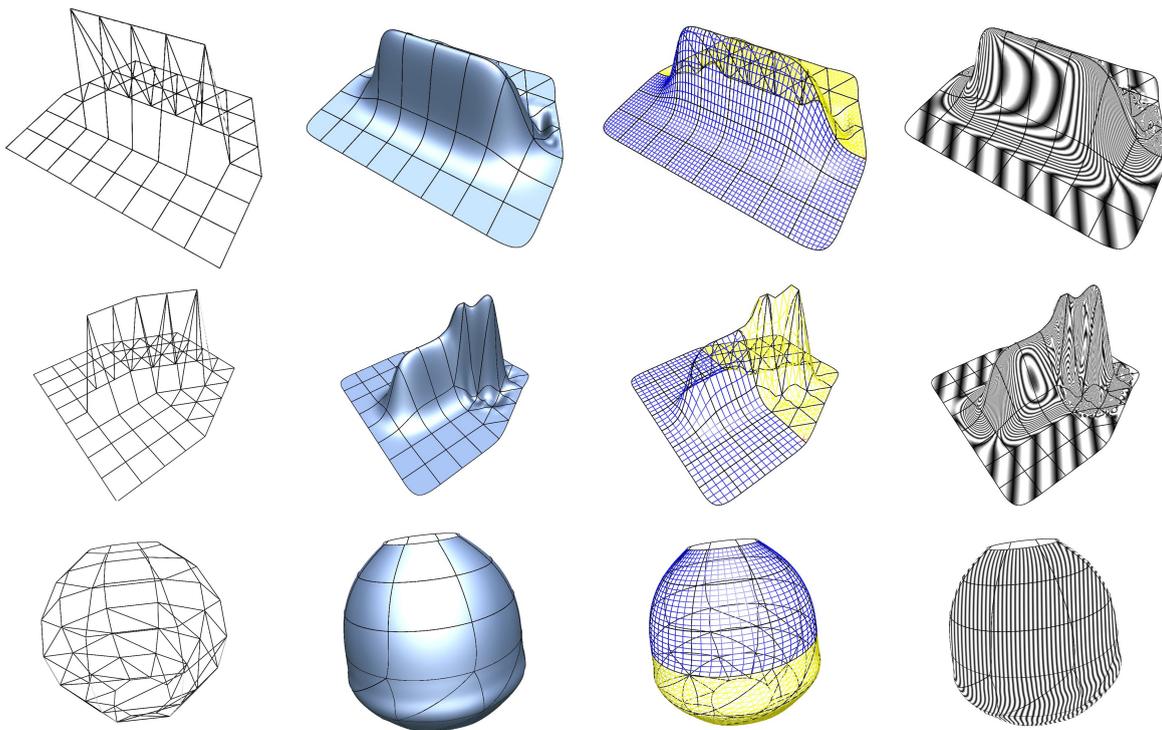


FIGURE 5.23 – Différentes surfaces générées par l'application du schéma quasi-linéaire triangle/quad.

## 5.6.4/ QUATRIÈME EXEMPLE

Dans cet exemple, nous proposons deux schémas de subdivision quasi-linéaires. Le premier schéma unifie le schéma de Kobbelt et le schéma de Catmull-Clark et le deuxième unifie le schéma de Kobbelt et le schéma de Loop. Pour la construction de ces deux schémas de subdivision nous allons utiliser les théories de la reproduction des polynômes ainsi que la propriété du produit tensoriel.

Les règles de subdivision des schémas de Kobbelt, Loop et Catmull-Clark sont données dans les figures 4.7, 4.8 et 4.5 respectivement et leur opérateurs quasi-interpolants sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Q_{|A_1}^- f = f & \text{Kobbelt} \\ Q_{|A_2}^+ f = f - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f & \text{Loop} \\ Q_{|A_1}^+ f = f - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f & \text{Catmull - Clark} \end{array} \right. \quad (5.101)$$

## 5.6.4.1/ CONSTRUCTION

Nous définissons deux schémas de subdivision quasi-linéaires ( $S_{|(A_1, A_1)}$ ) et ( $S_{|(A_1, A_2)}$ ) sur les grilles  $X_{(A_1, A_1)}$  et  $X_{(A_1, A_2)}$  par le schéma interpolant de Kobbelt ( $S_{|A_1}^-$ ) sur la moitié gauche de la grille et le schéma de subdivision approximant de Catmull-Clark ( $S_{|A_1}^+$ ) sur la moitié droite de la grille pour le premier schéma et par le schéma interpolant de Kobbelt ( $S_{|A_1}^-$ ) sur la moitié gauche de la grille et le schéma de subdivision approximant de Loop ( $S_{|A_2}^+$ ) sur la moitié droite de la grille pour le deuxième schéma. Les fonctions limites de ces deux schémas de subdivision sont données par :

$$S_{|(A_1, A_1)}^\infty f(z) = \begin{cases} f(z) & x < 0 \\ f(z) + (1 - \gamma) \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_2 \\ f(z) + \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0 \end{cases}, \quad (5.102)$$

pour le premier schéma et par :

$$S_{|(A_1, A_2)}^\infty f(z) = \begin{cases} f(z) & x < 0 \\ f(z) + (1 - \gamma) \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_2 \\ f(z) + \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0 \end{cases}, \quad (5.103)$$

pour le deuxième schéma de subdivision quasi-linéaire. Comme pour l'exemple précédent, nous supposons que  $\gamma = 0$  et nous définissons les deux opérateurs quasi-interpolants de ces deux schémas de subdivision par :

$$\mathcal{Q}_{|(A_1, A_1)} f(z) = \begin{cases} \mathcal{Q}_{|A_2}^- f = f(z) & x < 0 \\ \mathcal{Q}_{|A_1}^+ f = f(z) - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x \geq 0 \end{cases}, \quad (5.104)$$

pour le schéma quasi-linéaire qui unifie le schéma de Kobbelt et le schéma de Catmull-Clark et par :

$$\mathcal{Q}_{|(A_1, A_2)} f(z) = \begin{cases} \mathcal{Q}_{|A_2}^- f = f(z) & x < 0 \\ \mathcal{Q}_{|A_1}^+ f = f(z) - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x \geq 0 \end{cases}, \quad (5.105)$$

pour le deuxième schéma quasi-linéaire qui unifie le schéma de Kobbelt et le schéma de Loop. À la différence des autres schémas proposés précédemment, nous utilisons le produit tensoriel pour construire les règles de subdivision particulières de ces deux schémas de subdivision au voisinage de l'axe  $y$  sur la moitié gauche de la grille. En effet, à cause des supports trop larges des règles de subdivision qui définissent le schéma de Kobbelt, nous ne pouvons pas trouver une solution unique aux systèmes d'équations (5.54), qui donnent les poids des règles de subdivision particulières dans la moitié gauche de la grille. D'où la nécessité d'utiliser le produit tensoriel. La particularité de ces deux schémas de subdivision est qu'ils partagent deux règles de subdivision dans la moitié gauche de la grille.

Les ensembles de nouveaux points dans la zone de raccord de ces deux schémas de subdivision sont donnés dans la figure 5.24 pour le premier schéma, et dans la figure 5.7 pour le deuxième schéma où les deux ensembles  $\{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{1,j}\}$  et  $\{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{2,j}\}$  coïncident avec les deux ensembles issus de l'application du schéma de Loop  $\{(S_{|A_2}^+ p)_{1,j}\}$  et  $\{(S_{|A_2}^+ p)_{2,j}\}$ . Il nous reste à déterminer trois ensembles de nouveaux points pour chaque schéma dont deux ensembles dans la moitié gauche de la grille  $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,j}\}, \{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-1,j}\}$ , pour le premier schéma et  $\{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{-3,j}\}, \{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{-3,j}\}$   $j \in X_{(A_2, A_1)}$  pour le deuxième schéma et un ensemble  $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{0,j}\}$  (resp.  $\{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{0,j}\}$ ) sur l'axe  $y$ .

### LES RÈGLES DE SUBDIVISION AU VOISINAGE DE L'AXE $y$

Les ensembles des nouveaux points au voisinage de l'axe  $y$  des deux schémas de subdivision sont  $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,j}\}, \{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-1,j}\}$  (resp.  $\{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{-3,j}\}, \{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{-1,j}\}$ ).

### CONSTRUCTION DE $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,j}\}$ ET $\{(S_{|(A_1, A_2)} p)_{-3,j}\}$

Pour déterminer les ensembles  $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,j}\}$  et  $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,j}\}$ , nous considérons une partie régulière de la grille quadrangulaire dont les points  $\{p_{i,j}\}_{(i,j) \in X_{A_1}}$ ,  $i \in \llbracket -3, 0 \rrbracket$ . Les ensembles des nouveaux points  $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,j}\}$  et  $\{(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,j}\}$  peuvent être classés en deux groupes distincts :

- Les points arêtes  $(S_{|(A_1, A_1)} p)_{-3,2j}$  (resp.  $(S_{|(A_1, A_2)} p)_{-3,2j}$ ) sont donnés sur le support  $\llbracket -3, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}$  par la première équation du système (5.76) :

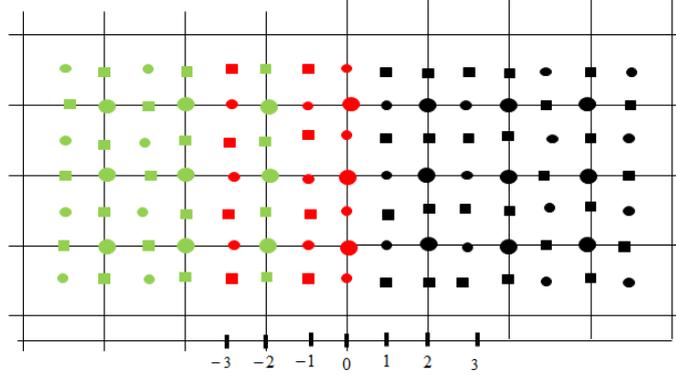


FIGURE 5.24 – Les ensembles des règles de subdivision sur la grille quad/quad (les points verts représentent les règles du schéma Kobbelt, les points rouges représentent l'ensemble des règles de subdivision dans la zone mixte et les points noirs représentent l'ensemble des règles de subdivision du schéma de Catmull-Clark).

$$\begin{aligned} (S_{|(A_1, A_1)P})_{-3, 2j} |_{\llbracket -3, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}} &= (S_{|(A_1, A_2)P})_{-3, 2j} |_{\llbracket -3, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}} \\ &= b'_1 p_{-3, j} + b'_2 p_{-2, j} + b'_3 p_{-1, j} + b'_4 p_{0, j}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

- Les points faces  $(S_{|(A_1, A_1)P})_{-3, 2j+1} ((S_{|(A_1, A_2)P})_{-3, 2j+1})$  sur le support  $\llbracket -3, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z} \subset X_{A_1}$  sont calculés en appliquant le produit tensoriel de  $(S_{|(A_1, A_1)P})_{-3, 2j}$  et  $(S_{|(A_1, A_1)P})_{2i, 2j+1}$  (resp.  $(S_{|(A_1, A_2)P})_{-3, 2j}$  et  $(S_{|(A_1, A_2)P})_{2i, 2j+1}$ ) où les points  $(S_{|(A_1, A_1)P})_{2i, 2j+1}$  (resp.  $(S_{|(A_1, A_2)P})_{2i, 2j+1}$ ) sont calculés en appliquant le schéma 4 points dans la direction des règles de la grille correspondante,

$$(S_{|(A_1, A_1)P})_{2i, 2j+1} = (S_{|(A_1, A_2)P})_{2i, 2j+1} = \alpha p_{i, j-1} + \beta p_{i, j} + \beta p_{i, j+1} + \alpha p_{i, j+2}, \quad (5.107)$$

avec :  $\alpha = -\frac{1}{16}, \beta = \frac{9}{16}$ .

Les points faces sont donnés par :

$$\begin{aligned} (S_{|(A_1, A_1)P})_{-3, 2j+1} |_{\llbracket -3, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}} &= (S_{|(A_1, A_2)P})_{-3, 2j+1} |_{\llbracket -3, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}} \\ &= (S_{|(A_1, A_1)P})_{2i, 2j+1} \otimes (S_{|(A_1, A_1)P})_{-3, 2j} |_{\llbracket -3, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}} \\ &= [\alpha, \beta, \beta, \alpha] \otimes [b'_1, b'_2, b'_3, b'_4]. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Les poids de ces règles de subdivision sont présentés dans la figure 5.25.

### CONSTRUCTION DE $\{(S_{|(A_1, A_1)P})_{-1, j}\}$ ET $\{(S_{|(A_1, A_2)P})_{-1, j}\}$

Chacun de ces ensembles contient deux types de points :

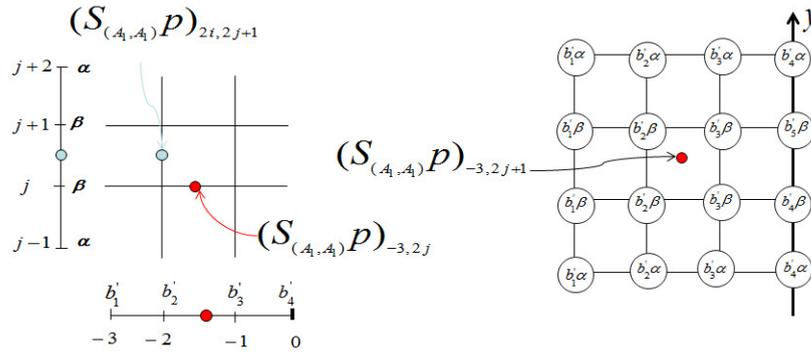


FIGURE 5.25 – Les poids des règles de subdivision au voisinage de l'axe  $y$ .  $\alpha = -\frac{1}{16}, \beta = \frac{9}{16}$ .

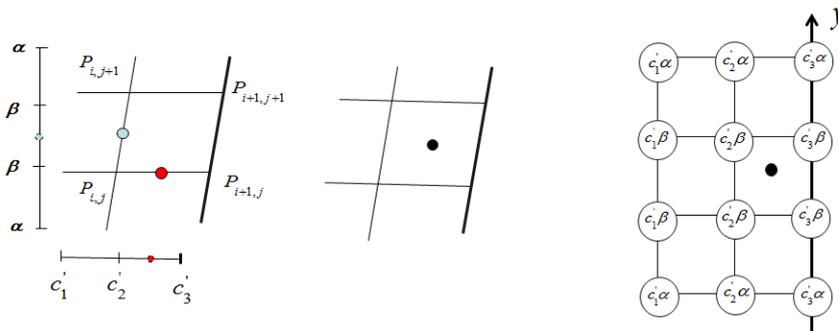


FIGURE 5.26 – Les poids des règles de subdivision au voisinage de l'axe  $y$ . (a) les poids règles points faces  $(S_{|(A_1, A_1)} P)_{-1, 2j+1}$ , (b) les poids règles points arêtes  $(S_{|(A_1, A_1)} P)_{-1, 2j}$ , (c) les poids règles points faces  $(S_{|(A_1, A_2)} P)_{-1, 2j+1}$ .

- Les règles points arêtes  $(S_{|(A_1, A_1)} P)_{-1, 2j}$  (resp.  $(S_{|(A_1, A_2)} P)_{-1, 2j}$ ) sont données sur le support  $\llbracket -2, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}$  par la deuxième équation du système (5.76) :

$$(S_{|(A_1, A_1)} P)_{-1, 2j} | \llbracket -2, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z} = (S_{|(A_1, A_2)} P)_{-1, 2j} | \llbracket -2, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z} = c'_1 p_{-2, j} + c'_2 p_{-1, j} + c'_3 p_{0, j}. \quad (5.109)$$

- Les règles points faces  $(S_{|(A_1, A_1)} P)_{-1, 2j+1}$  et  $(S_{|(A_1, A_2)} P)_{-1, 2j+1}$  sur le support  $\llbracket -2, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z}$  sont données par :

$$\begin{aligned} (S_{|(A_1, A_1)} P)_{-1, 2j+1} | \llbracket -2, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z} &= (S_{|(A_1, A_2)} P)_{-1, 2j+1} | \llbracket -2, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z} \\ &= (S_{|(A_1, A_1)} P)_{2i, 2j+1} \otimes (S_{|(A_1, A_1)} P)_{-1, 2j} | \llbracket -2, 0 \rrbracket \times \mathbb{Z} \\ &= [\alpha, \beta, \beta, \alpha] \otimes [0, c'_1, c'_2, b'_3]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Les poids de ces règles de subdivision sont donnés dans la figure 5.26.

### LES RÈGLES DE SUBDIVISION SUR L'AXE Y

Pour la construction des ensembles des règles de subdivision  $\{(S_{|(A_1,A_1)}p)_{0,j}\}$  et  $\{(S_{|(A_1,A_2)}p)_{0,j}\}$ , nous considérons une partie régulière de la grille quad/quad  $X_{(A_1,A_1)}$  (resp. quad/triangle  $X_{(A_1,A_2)}$ ) dont les points  $\{p_{i,\tilde{j}}\}, i \in \llbracket -1, 1 \rrbracket$  avec :

$$\tilde{j} = j \text{ pour tout } j \in X_{(A_1,A_1)} \text{ et } \tilde{j} = \begin{cases} j & , i \leq 0 \\ j - \frac{1}{2}i & , i > 0 \end{cases} \text{ pour tout } j \in X_{(A_1,A_2)}.$$

Les ensembles de nouveaux points  $\{(S_{|(A_1,A_1)}p)_{0,j}\}$  et  $\{(S_{|(A_1,A_2)}p)_{0,j}\}$  sont classés en deux groupes distincts :

- Les nouveaux points pairs intérieurs  $(S_{|(A_1,A_1)}p)_{0,2\tilde{j}}$  et  $(S_{|(A_1,A_2)}p)_{0,2\tilde{j}}$  sont donnés par :

$$(S_{|(A_1,A_1)}p)_{0,2\tilde{j}} = (S_{|(A_1,A_1)}p)_{0,2j} = a_{151}p_{-1,j+1} + a_{152}p_{-1,j} + a_{153}p_{-1,j-1} + a_{154}p_{0,j+1} + a_{155}p_{0,j} + a_{156}p_{0,j-1} + a_{157}p_{1,j+1} + a_{158}p_{1,j} + a_{159}p_{1,j-1}, \quad (5.111)$$

sur la grille quad/quad et par :

$$(S_{|(A_1,A_2)}p)_{0,2\tilde{j}} = (S_{|(A_1,A_2)}p)_{0,2j} = a_{161}p_{-1,j+1} + a_{162}p_{-1,j} + a_{163}p_{-1,j-1} + a_{164}p_{0,j+1} + a_{165}p_{0,j} + a_{166}p_{0,j-1} + a_{167}p_{1,\tilde{j}+1} + a_{168}p_{1,\tilde{j}}, \quad (5.112)$$

sur la grille quad/triangle.

- Les règles points arêtes  $S_{|(A_1,A_1)}(p)_{0,2\tilde{j}+1}$  et  $S_{|(A_1,A_2)}(p)_{0,2\tilde{j}+1}$  sont données par :

$$(S_{|(A_1,A_1)}(p))_{0,2\tilde{j}+1} = S_{|(A_1,A_1)}(p)_{0,2j+1} = a_{171}p_{-1,j+1} + a_{172}p_{-1,j} + a_{173}p_{0,j+2} + a_{174}p_{0,j+1} + a_{175}p_{0,j} + a_{176}p_{0,j-1} + a_{177}p_{1,j+1} + a_{178}p_{1,j+1}, \quad (5.113)$$

sur la grille quad/quad et par :

$$(S_{|(A_1,A_2)}(p))_{0,2\tilde{j}+1} = a_{181}p_{-1,j+1} + a_{182}p_{-1,j} + a_{183}p_{0,j+2} + a_{184}p_{0,j+1} + a_{185}p_{0,j} + a_{186}p_{0,j-1} + a_{187}p_{1,\tilde{j}+1}, \quad (5.114)$$

sur la grille quad/triangle. La figure 5.27 représente les supports des nouvelles règles de subdivision sur l'axe y avec des poids inconnus.

Les poids de ces règles de subdivision sont donnés à partir de l'équation (5.54), de sorte que les conditions  $S_{|(A_1,A_1)}Q_{|(A_1,A_1)} = Q_{|(A_1,A_1)}\sigma$  pour le schéma quad/quad et  $S_{|(A_1,A_2)}Q_{|(A_1,A_2)} = Q_{|(A_1,A_2)}\sigma$  pour le schéma quad/triangle soient satisfaites sur l'espace des polynômes  $\pi_2$ . Les poids de ces règles de subdivision sont donnés dans les figures 5.25, 5.26 et le tableau 5.7 pour le schéma quad/quad, ainsi que dans les figures 5.24, 5.26 et le tableau 5.8 pour le schéma quad/triangle.

### RÈGLES DE BORDS

Pour les règles de bords extérieurs de ces deux schémas de subdivision, nous appliquons les règles de bords extérieurs utilisées dans l'exemple précédent. Pour les règles de bords supplémentaires de ces deux schémas de subdivision, voir la figure 5.28.

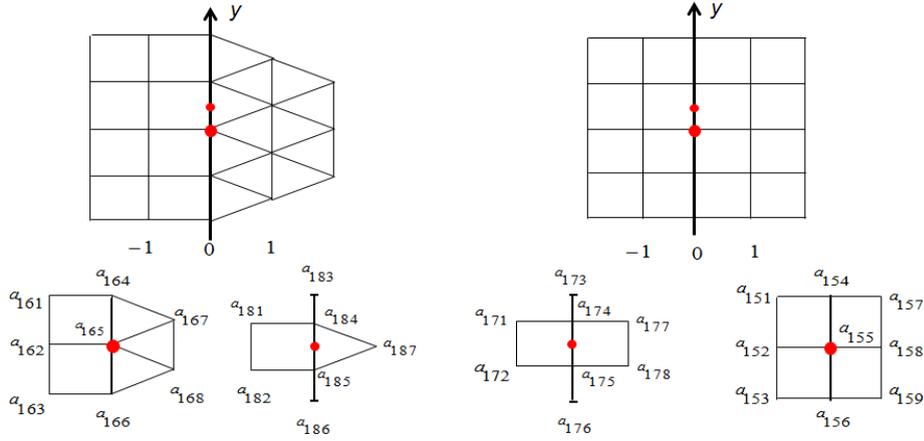


FIGURE 5.27 – Les poids des règles de subdivision sur l'axe  $y$ .

$a_{131} = a_{134} = -\frac{37}{280}, a_{132} = a_{133} = a_{135} = a_{138} = \frac{3}{28}, a_{136} = a_{137} = a_{1310} = a_{1311} = \frac{27}{140},$ $a_{139} = a_{1312} = \frac{27}{280}$
$a_{171} = a_{172} = \frac{3}{56}, a_{173} = a_{176} = -\frac{1}{112}, a_{174} = a_{175} = \frac{45}{112}, a_{177} = a_{178} = \frac{3}{56}$
$a_{151} = a_{152} = a_{153} = a_{154} = a_{156} = a_{157} = a_{158} = a_{159} = \frac{1}{28}, a_{155} = \frac{5}{7}$

TABLE 5.7 – Les poids des règles de subdivision du schéma quasi-linéaire quad/quad.

$a_{141} = a_{144} = -\frac{29}{320}, a_{142} = a_{143} = a_{145} = a_{148} = \frac{21}{320}, a_{146} = a_{147} = a_{1410} = a_{1411} = \frac{15}{64},$ $a_{149} = a_{1412} = \frac{3}{320}$
$a_{181} = a_{182} = \frac{3}{56}, a_{183} = a_{186} = -\frac{1}{64}, a_{184} = a_{185} = \frac{183}{448}, a_{187} = \frac{3}{28}$
$a_{161} = a_{163} = \frac{3}{244}, a_{162} = \frac{9}{112}, a_{164} = a_{166} = a_{167} = a_{168} = \frac{3}{56}, a_{165} = \frac{19}{28}$

TABLE 5.8 – Les poids des règles de subdivision du schéma quasi-linéaire quad/triangle.

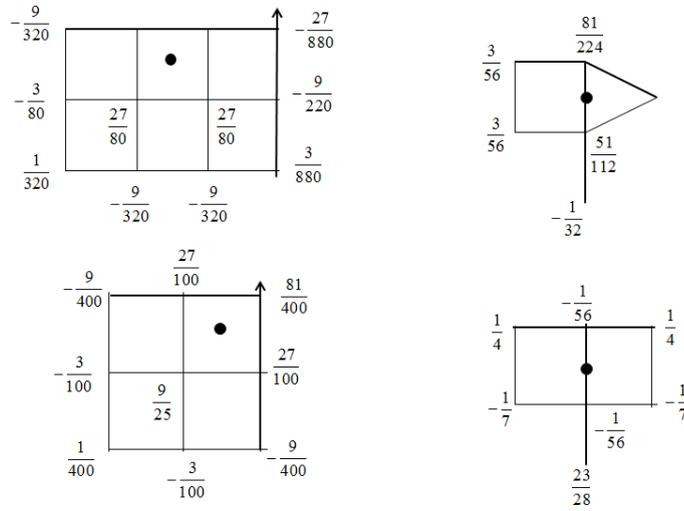


FIGURE 5.28 – Les poids des règles de subdivision sur l'axe  $y$ .

5.6.4.2/ CONTINUITÉ ET RÉSULTATS

Comme pour les schémas précédents et pour  $o = 1, 2$  :

$$L_o = \{(i, j), -3 \leq i \leq 0, -3 \leq j \leq 3\} \cup \{(i, \widehat{j}), i = 1, 2, 3, -3 \leq j \leq 3\}$$

avec :

$$\widehat{j} = \begin{cases} j & \text{pour } o = 1 \\ j + \frac{1}{2}i & \text{pour } o = 2 \end{cases}$$

ce qui correspond à l'ensemble de définition de la matrice de subdivision  $M_1^1$  associée au schéma quasi-linéaire quad/quad pour  $o = 1$ , et à l'ensemble de définitions de la matrice de subdivision  $M_2^1$  associée au schéma quasi-linéaire quad/triangle pour  $o = 2$ . Les valeurs  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ , sont les valeurs propres dominantes des deux matrices  $M_o^1$  et  $M_o^2$  pour  $o = 1, 2$ , donc il existe une matrice  $V_o$  telle que :

$$\begin{cases} (M^1)'_o = V_o^{-1} M_o^1 V_o = \begin{pmatrix} \Upsilon_o & C_o^o \\ 0 & Y_o^o \end{pmatrix} \\ (M^2)'_o = V_o^{-1} M_o^2 V_o = \begin{pmatrix} \Theta_o & C_o^o \\ 0 & Y_o^o \end{pmatrix} \end{cases}$$

où  $\Upsilon_o = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  et  $\Theta_o$  est une matrice triangulaire supérieure qui a les mêmes valeurs que  $\Upsilon_o$  sur sa diagonale.

L'application du test du rayon spectral conjoint (équation 5.68) aux deux matrices  $Y_o^o$  et  $Y_1^o$  donne :  $\rho_1^{[17]}(Y_0^1, Y_1^1) < \rho_1^{[18]}(Y_0^2, Y_1^2) < \frac{1}{4}$ . Nous concluons donc que les deux schémas quasi-linéaires quad/quad et quad/triangle sont  $C^2$  dans la zone mixte. Les schémas proposés dans cet exemple sont stationnaires et faciles à mettre en oeuvre. La figure 5.29 représente les surfaces générées par l'application du schéma de subdivision quasi-

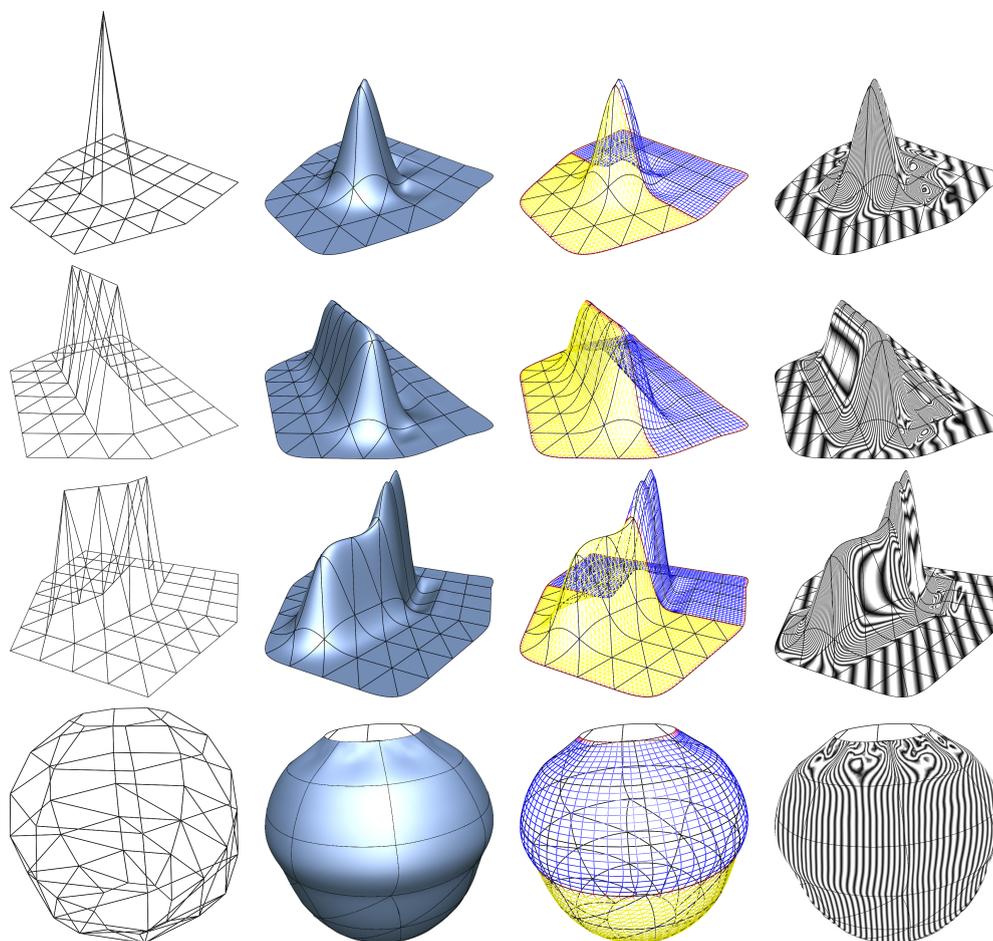


FIGURE 5.29 – Différentes surfaces générées par l'application du schéma de subdivision quasi-linéaire quad/triangle (Kobbelt/Loop). De gauche à droite : les mailles de contrôle, les surfaces limites, des mailles de couleur (jaune pour les triangles, bleu pour les quads), et les lignes de réflexion.

linéaire quad/triangle, et la figure 5.30 représente les surfaces générées par l'application du schéma de subdivision quasi-linéaire quad/quad. Les deux figures montrent que les deux schémas quasi-linéaires quad/quad et quad/triangle sont aussi performant que le schéma quasi-linéaire triangle/quad présenté dans le troisième exemple, même si la constante de contraction du rayon spectral conjoint qui détermine leur classes de continuité est plus élevée que celle du schéma quasi-linéaire triangle/quad.

## 5.7/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons introduit un nouveau type de schémas de subdivision. Pour cette classe de schémas, nous avons établi des propriétés de convergence, de reproduction des polynômes, de quasi-interpolation et d'ordre d'approximation. Nous avons notamment donné des exemples d'application qui montrent la bonne qualité visuelle des surfaces limites générées par ces schémas de subdivision.

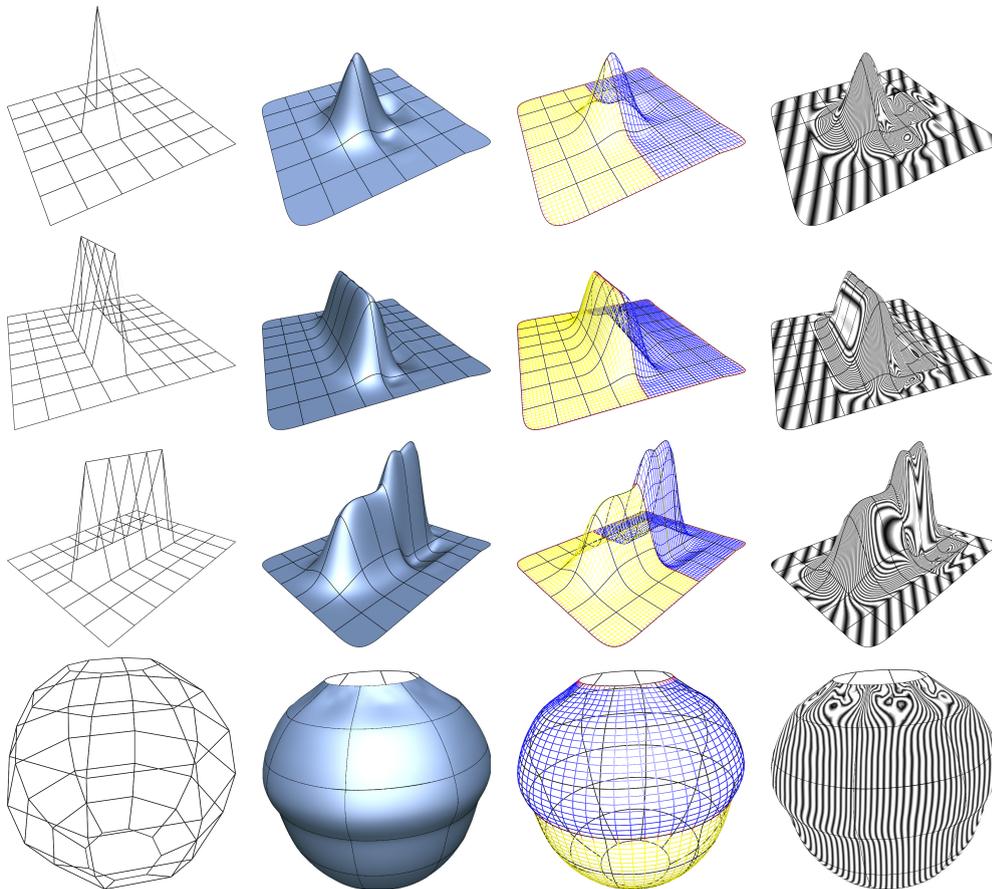


FIGURE 5.30 – Différentes surfaces générées par l'application du schéma de subdivision quasi-linéaire quad/quad (Kobbelt/Catmull-Clark). De gauche à droite : les mailles de contrôle, les surfaces limites, des mailles de couleur (jaune pour les triangles, bleu pour les quads), et les lignes de réflexion.

La méthode que nous avons utilisée pour trouver les règles de schémas de subdivision quasi-linéaires est basée sur les propriétés de la reproduction des polynômes. Dans les zones où le maillage est bi-régulier, l'opérateur de subdivision  $S$  reproduit les polynômes de degré au plus  $m$ , et ainsi on connaît l'équation et la régularité de la surface limite. Dans les zones où le maillage est irrégulier, les règles de subdivision ne permettent pas de trouver l'équation reproduite par  $S$ . Il faut donc proposer des règles qui permettent d'optimiser le comportement de la surface limite dans le cas irrégulier. Dans le chapitre suivant, nous étendrons les règles de subdivision de quelques schémas quasi-linéaires proposés précédemment à des maillages  $n$ -réguliers.

## SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE SUR UN MAILLAGE $n$ -RÉGULIER

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé des schémas de subdivision quasi-linéaires définis sur des maillages bi-réguliers. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la généralisation de quelques uns de ces schémas de subdivision à des maillages irréguliers. Les schémas quasi-linéaires que nous allons traiter ici sont : le schéma qui combine les règles du principe de Kobbelt et celles de Catmull-Clark sur un maillage quad/quad, ainsi que le schéma qui combine les règles du principe de Butterfly et celles de Loop sur un maillage triangle/triangle. La généralisation de ces schémas de subdivision à des maillages irréguliers se fait en deux temps. Dans un premier temps, nous généralisons les règles de ces schémas à des maillages  $n$ -réguliers avec  $n = 4, 6$  ( $n = 4$  pour les maillages quadrangulaires et  $n = 6$  pour les maillages triangulaires). Autrement dit, au lieu de définir les schémas quasi-linéaires sur des grilles bi-régulières, nous les définissons sur des grilles régulières de sorte que chaque schéma unifie deux schémas linéaires de types géométriques différents et chaque schéma linéaire est défini sur au moins une zone régulière de ces grilles. Ensuite, nous proposons une méthode pour généraliser les règles de subdivision de ces schémas à des maillage irréguliers.

### 6.1/ DÉFINITION

Un maillage  $n$ -régulier peut être vu comme un maillage semi-régulier. À la différence de la définition d'un maillage semi-régulier (section 4.2.3), nous définissons un maillage  $n$ -régulier comme un maillage qui possède un seul sommet extraordinaire au voisinage duquel les sommets sont réguliers. Nous parlons de maillage à connectivité  $n$ -régulière lorsque le maillage est homéomorphe à une grille  $n$ -régulière du plan. Une grille  $n$ -régulière est une grille qui contient  $n$  zones régulières du même type d'élément (voir figure 6.1). Par abus de langage, on dira que la grille est " $n$ -régulière triangle" (resp. " $n$ -régulière quad") lorsque la grille contient  $n$  zones triangulaires régulières (resp.  $n$  zones quadrangulaires régulières) et on dira que la grille est " $6$ -régulière" (resp. " $4$ -régulière") lorsque la grille contient 6 zones triangulaires régulières (resp. 4 zones quadrangulaires régulières) .

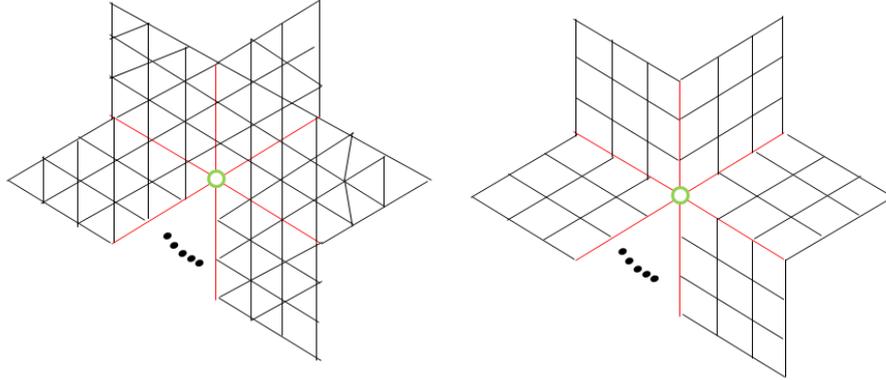


FIGURE 6.1 – Les grilles  $n$ -régulières : à gauche la grille  $n$ -régulière triangle et à droite la grille  $n$ -régulière quad.

### 6.1.1/ GRILLES 4-RÉGULIÈRES

Considérons la grille quadrangulaire régulière  $X_{A_1}$  définie précédemment par l'équation (5.2) (chapitre 5). À la différence de la définition de la grille bi-régulière, nous considérons une grille 4-régulière comme l'union des 4 zones  $\bigcup_{i=1}^4 (\Gamma_i)$  de sorte que chaque zone  $\Gamma_i$  est définie par un domaine  $\xi_i$  fermé borné par une frontière  $\partial\xi_i$  (voir figure 6.2) :

$$X_{A_1} = \bigcup_{i=1}^4 (\Gamma_i) = \bigcup_{i=1}^4 (\xi_i \cup \partial\xi_i) = (\xi_1 \cup \partial\xi_1) \cup \dots \cup (\xi_4 \cup \partial\xi_4), \quad (6.1)$$

avec

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \xi_1 \cup \partial\xi_1 = A_1(\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^+) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0, y \geq 0\} \\ \Gamma_2 = \xi_2 \cup \partial\xi_2 = A_1(\mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z}_0^-) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0, y \leq 0\} \\ \Gamma_3 = \xi_3 \cup \partial\xi_3 = A_1(\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^-) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0, y \leq 0\} \\ \Gamma_4 = \xi_4 \cup \partial\xi_4 = A_1(\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0, y \geq 0\} \end{cases} \quad (6.2)$$

Rappelons ici que les domaines  $\xi_i, i = 1 \dots 4$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \xi_1 = A_1(\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^+) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x < 0, y > 0\} \\ \xi_2 = A_1(\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x < 0, y < 0\} \\ \xi_3 = A_1(\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^-) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x > 0, y < 0\} \\ \xi_4 = A_1(\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+) = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x > 0, y > 0\} \end{cases} \quad (6.3)$$

et leurs frontières sont définies par des demi-droites comme suit :

$$\begin{cases} \partial\xi_1 = \{([Ox], [Oy]) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0, y \geq 0\} \\ \partial\xi_2 = \{([Ox], [Oy]) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0, y \leq 0\} \\ \partial\xi_3 = \{([Ox], [Oy]) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0, y \leq 0\} \\ \partial\xi_4 = \{([Ox], [Oy]) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0, y \geq 0\} \end{cases} \quad (6.4)$$

Les définitions (6.1) et (6.2) garantissent la régularité des 4 zones de la grille. De plus,

les quatres zones de la grille sont alignées entre elles sur des frontières communes.

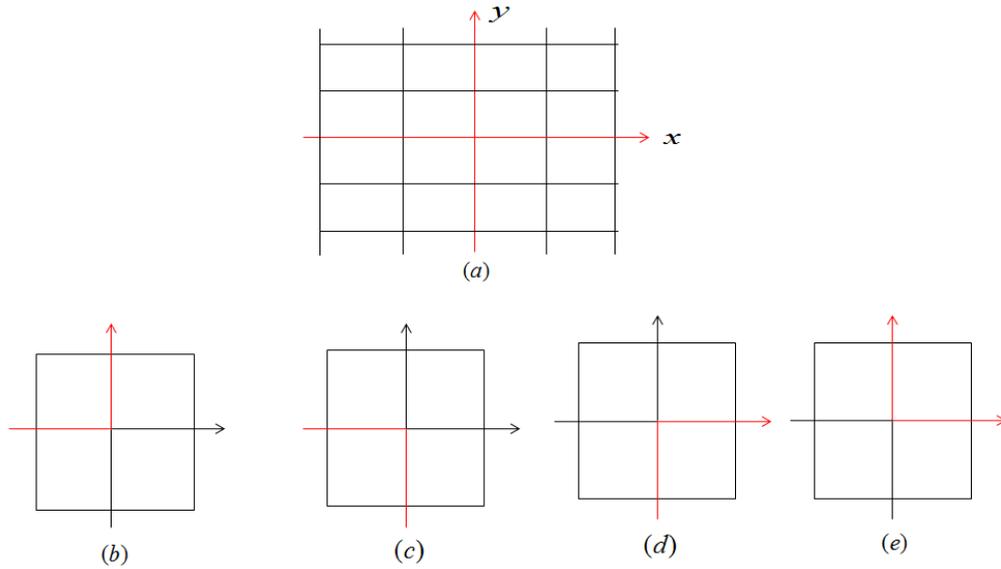


FIGURE 6.2 – (a) la grille 4-régulière quad, (b) la zone  $\xi_1$ , (c) la zone  $\xi_2$ , (d) la zone  $\xi_3$  et (e) la zone  $\xi_4$ .

### 6.1.2/ GRILLE 6-RÉGULIÈRE

De la même façon que pour la grille 4-régulière, nous considérons une grille triangulaire régulière  $X_{A_2}$  (figure 5.3 à droite) et nous définissons cette grille en fonction de 6 zones par (voir figure 6.3) :

$$X_{A_2} = \bigcup_{i=1}^6 (\Gamma'_i) = \bigcup_{i=1}^6 (\xi'_i \cup \partial \xi'_i) = (\xi'_1 \cup \partial \xi'_1) \cup \dots \cup (\xi'_6 \cup \partial \xi'_6), \quad (6.5)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'_1 = \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x < 0, y > -\frac{1}{2}x\} \\ \xi'_2 = \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x < 0, \frac{1}{2}x < y < -\frac{1}{2}x\} \\ \xi'_3 = \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x < 0, y < \frac{1}{2}x\} \\ \xi'_4 = \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x > 0, y < -\frac{1}{2}x\} \\ \xi'_5 = \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x > 0, -\frac{1}{2}x < y < \frac{1}{2}x\} \\ \xi'_6 = \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x > 0, y > \frac{1}{2}x\} \end{array} \right. , \quad (6.6)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \xi'_1 = \{([Ox], [-\frac{1}{2}x]) | x \leq 0\} \\ \partial \xi'_2 = \{([-\frac{1}{2}x], [\frac{1}{2}x]) | x \leq 0\} \\ \partial \xi'_3 = \{([\frac{1}{2}x], [Ox]) | x \leq 0\} \\ \partial \xi'_4 = \{([Ox], [-\frac{1}{2}x]) | x \geq 0\} \\ \partial \xi'_5 = \{([-\frac{1}{2}x], [\frac{1}{2}x]) | x \geq 0\} \\ \partial \xi'_6 = \{([\frac{1}{2}x], [Ox]) | x \geq 0\} \end{array} \right. , \quad (6.7)$$

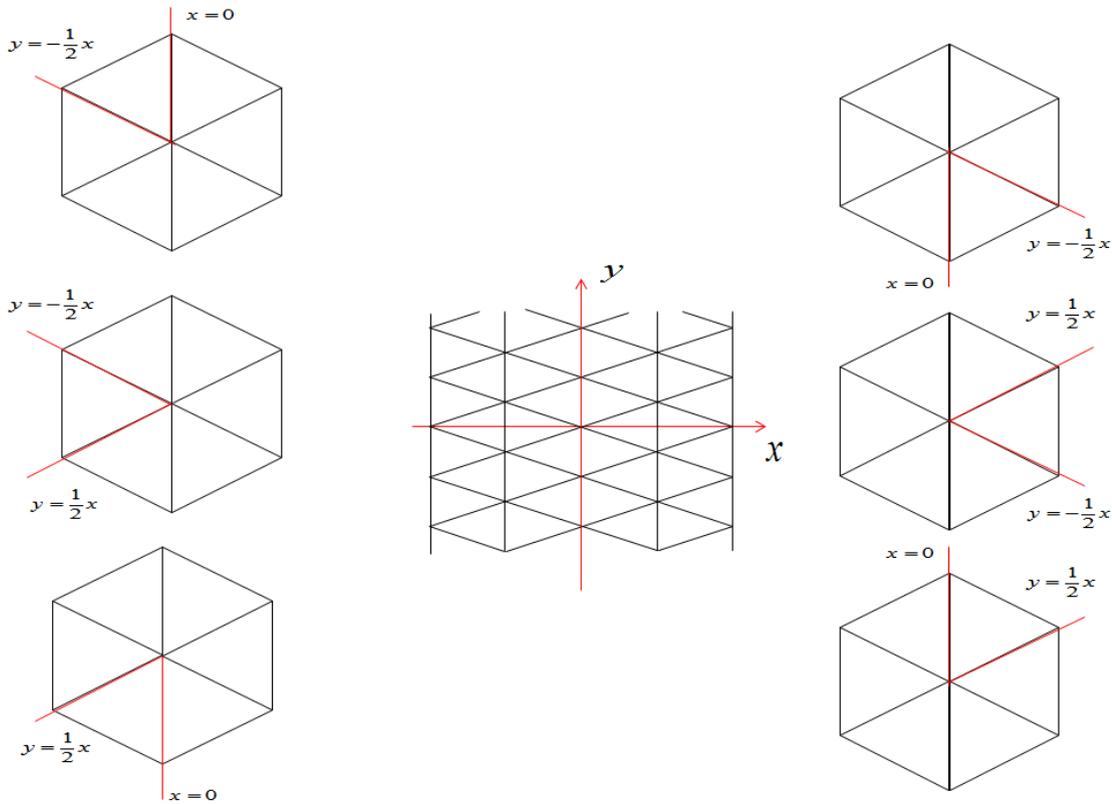


FIGURE 6.3 – La grille 6-régulière, les zones  $\xi'_i$  et les frontières de ces zones  $\partial\xi'_i$ .

## 6.2/ SCHÉMA DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRE SUR UNE GRILLE $n$ -RÉGULIÈRE ( $n = 4, 6$ )

### 6.2.1/ SCHÉMAS QUASI-LINÉAIRES SUR UNE GRILLE 4-RÉGULIÈRE

Considérons un schéma de subdivision quasi-linéaire  $S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}$  défini sur une grille 4-régulière  $\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)$  qui coïncide avec un schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur un nombre fini de zones et un schéma de subdivision approximant  $S_{|\Gamma_j}^+$  sur le reste des zones pour tout  $j \neq l$ . Nous définissons le schéma de subdivision  $S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}$  sur la grille  $\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)$  en fonction des deux schémas  $S_{|\Gamma_j}^-$  et  $S_{|\Gamma_j}^+$  par :

$$\forall r < 4, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} p)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^- p)_{(\cup_{i=1}^r(\Gamma_i) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l))_\rho} & j \neq l \\ (S_{|\cup_{i=r}^4(\Gamma_i)}^+ p)_{(\Gamma_i)_\rho} & \end{cases} \quad (6.8)$$

de sorte que :

– Le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  est défini en fonction d'un ensemble de masques sur

chaque zone  $\Gamma_j$  comme dans l'équation 5.5, par :

$$\forall p \in l^\infty\left(\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)\right), \forall \rho \in \mathbb{Z}^2, \quad (S_{|\Gamma_j}^- p)_{(\bigcup_{j=1}^r(\Gamma_j) \setminus \bigcup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l))\rho} = \sum_{\theta \in \mathbb{Z}^s} \alpha_{\rho-2\theta}^{\rho_1}(p)_{(\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i))\theta}, \quad (6.9)$$

– le schéma approximant  $S_{(\Gamma_l)}^+$  est défini en fonction d'un ensemble de masques sur chaque zone  $\Gamma_l$  par :

$$\forall p \in l^\infty\left(\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)\right), \forall \rho \in \mathbb{Z}^2, \quad (S_{|\Gamma_l}^+ p)_{(\bigcup_{l=1}^4(\Gamma_l))\rho} = \sum_{\theta \in \mathbb{Z}^s} \alpha_{\rho-2\theta}^{\rho_1}(p)_{(\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i))\theta}, \quad (6.10)$$

À partir de la définition d'un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille 4- régulière (équation 6.8), nous constatons qu'il existe plusieurs façons pour définir ce schéma de subdivision. Compte tenu de la symétrie des zones de la grille 4- régulière, nous dénombrons deux façons possibles.

La première façon : elle consiste à appliquer le schéma interpolant sur une zone ou des zones qui partagent les mêmes frontières et le schéma approximant sur le reste des zones. Ce qui nous donne les trois cas possibles suivants :

1. Le premier cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur le domaine  $\xi_1$  et le schéma approximant  $S_{|\Gamma_l}^+$  sur les zones  $\Gamma_l, l = 2, 3, 4$  et leurs frontières (voir figure 6.4-(a)),

$$(S_{|\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)} p)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^- p)_{\xi_1\rho} \\ (S_{|\Gamma_l}^+ p)_{(\Gamma_l)\rho} \quad l = 2, 3, 4 \end{cases} \quad (6.11)$$

2. Le deuxième cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur les deux domaines  $\xi_1$  et  $\xi_2$  ainsi que sur la frontière commune entre ces deux domaines  $\partial\xi_1 \cap \partial\xi_2$  et le schéma approximant  $S_{(\Gamma_l)}^+$  sur les deux zones  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  (voir figure 6.4-(b)),

$$(S_{|\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)} p)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^- p)_{(\bigcup_{j=1}^2(\xi_j) \cup (\partial\xi_1 \cap \partial\xi_2))\rho} \\ (S_{|\Gamma_l}^+ p)_{(\bigcup_{l=3}^4(\Gamma_l))\rho} \end{cases} \quad (6.12)$$

ce qui coïncide avec le schéma quasi-interpolant quad/quad présenté dans le quatrième exemple du chapitre précédent.

3. Pour le troisième cas, nous appliquons le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur les domaines  $\xi_1, \xi_3$  et la zone  $\Gamma_2$  et le schéma approximant  $S_{(\Gamma_l)}^+$  sur la zone  $\Gamma_4$  (voir figure 6.4-(c)),

$$(S_{|\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)} p)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^- p)_{(\xi_1 \cup \Gamma_2 \cup \xi_3)\rho} \\ (S_{|\Gamma_l}^+ p)_{(\Gamma_4)\rho} \end{cases} \quad (6.13)$$

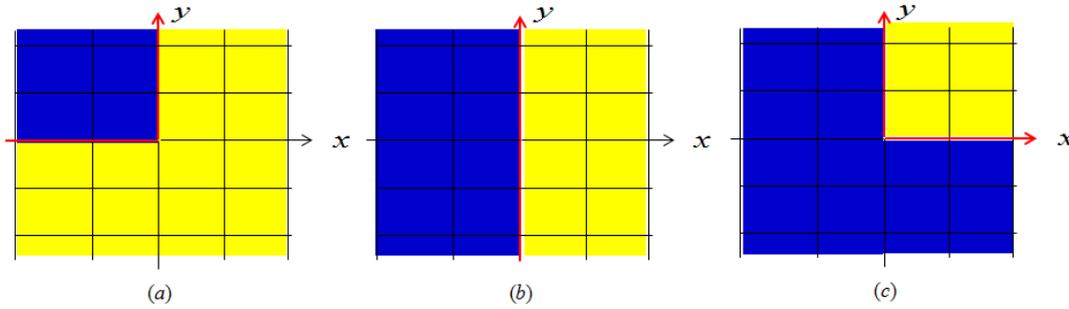


FIGURE 6.4 – Les trois cas de l'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 4-régulière (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleus et les zones d'application d'un schéma approximant en jaunes).

La deuxième façon : elle consiste à appliquer les deux schémas interpolant et approximant de façon arbitraire. Ce qui donne quatre cas possibles, les trois cas exposés précédemment ainsi que le cas que nous donnons dans l'équation suivante (voir figure 6.5),

$$(S_{|\cup_{i=1}^4(\xi_i \cup \partial \xi_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^- P)_{(\xi_1 \cup \xi_3)_\rho} \\ (S_{|\Gamma_j}^+ P)_{(\Gamma_2 \cup \Gamma_4)_\rho} \end{cases} \quad j = 2, 4 \quad (6.14)$$

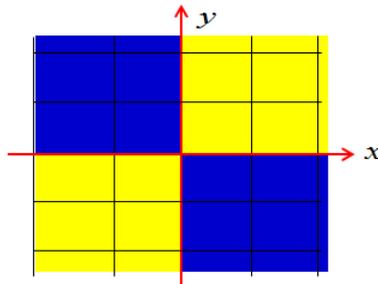


FIGURE 6.5 – Un exemple qui montre des zones d'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 4-régulière de façon arbitraire (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleus et les zones d'application d'un schéma approximant en jaunes).

### 6.2.2/ SCHÉMAS QUASI-LINÉAIRES SUR UNE GRILLE 6-RÉGULIÈRE

Considérons un schéma de subdivision quasi-linéaire  $S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}$  défini sur une grille 6-régulière  $\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)$  qui coïncide avec un schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur un nombre fini de zones et un schéma de subdivision approximant  $S_{|\Gamma_j}^+$  sur le reste des zones pour tout  $j \neq l$ . Nous définissons le schéma de subdivision  $S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}$  sur la grille  $\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)$  en fonction des deux schémas  $S_{|\Gamma_j}^-$  et  $S_{|\Gamma_j}^+$  par :

$$\forall r < 6, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- P)_{(\cup_{j=1}^r(\Gamma'_j) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l))\rho} \\ (S_{|\Gamma'_l}^+ P)_{(\cup_{j=r+1}^6(\Gamma'_l) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l))\rho} \end{cases} \quad (6.15)$$

Les deux schémas de subdivision  $S_{|\Gamma'_j}^-$  et  $S_{|\Gamma'_l}^+$  sont définis sur des zones de la grille  $\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)$  comme dans les équations (6.9) et (6.10).

Comme dans le cas de la subdivision quasi-linéaire sur une grille 4-régulière, il y a deux façons pour appliquer un schéma quasi-linéaire sur une grille 6-régulière.

La première façon : elle consiste à appliquer le schéma interpolant sur des zones qui partagent les mêmes frontières et le schéma approximant sur le reste des zones.

$$\forall r < 6, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- P)_{(\cup_{j=1}^r(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_r \cap \partial\xi'_{r+1})))\rho} \\ (S_{|\Gamma'_l}^+ P)_{(\cup_{j=r+1}^6(\Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_r \cap \partial\xi'_{r+1})))\rho} \end{cases} \quad (6.16)$$

Ce qui nous donne les cinq schémas suivants :

1. Le premier schéma (voir figure 6.6-(a)),

$$\text{Pour } r = 1, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- P)_{(\cup_{j=1}^1(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_2)))\rho} \\ (S_{|\Gamma'_l}^+ P)_{(\cup_{j=2}^6(\Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_2)))\rho} \end{cases} \quad (6.17)$$

2. Le deuxième schéma (voir figure 6.6-(b)),

$$\text{Pour } r = 2, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- P)_{(\cup_{j=1}^2(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3)))\rho} \\ (S_{|\Gamma'_l}^+ P)_{(\cup_{j=3}^6(\Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3)))\rho} \end{cases} \quad (6.18)$$

3. Le troisième schéma (voir figure 6.6-(c) ),

$$\text{Pour } r = 3, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- P)_{(\cup_{j=1}^3(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4)))\rho} \\ (S_{|\Gamma'_l}^+ P)_{(\cup_{j=4}^6(\Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4)))\rho} \end{cases} \quad (6.19)$$

ce qui coïncide avec le schéma quasi-interpolant triangle/triangle présenté dans le deuxième exemple du chapitre précédent.

4. Le quatrième schéma (voir figure 6.6-(d)),

$$\text{Pour } r = 4, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- P)_{(\cup_{j=1}^4(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5)))\rho} \\ (S_{|\Gamma'_l}^+ P)_{(\cup_{j=5}^6(\Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5)))\rho} \end{cases} \quad (6.20)$$

5. Le cinquième schéma (voir figure 6.6-(e)),

$$\text{Pour } r = 5, \forall j \neq l, (S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} p)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- p)_{(\cup_{j=1}^5(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6)))}_\rho \\ (S_{|\Gamma'_j}^+ p)_{((\Gamma'_6) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6)))}_\rho \end{cases} . \quad (6.21)$$

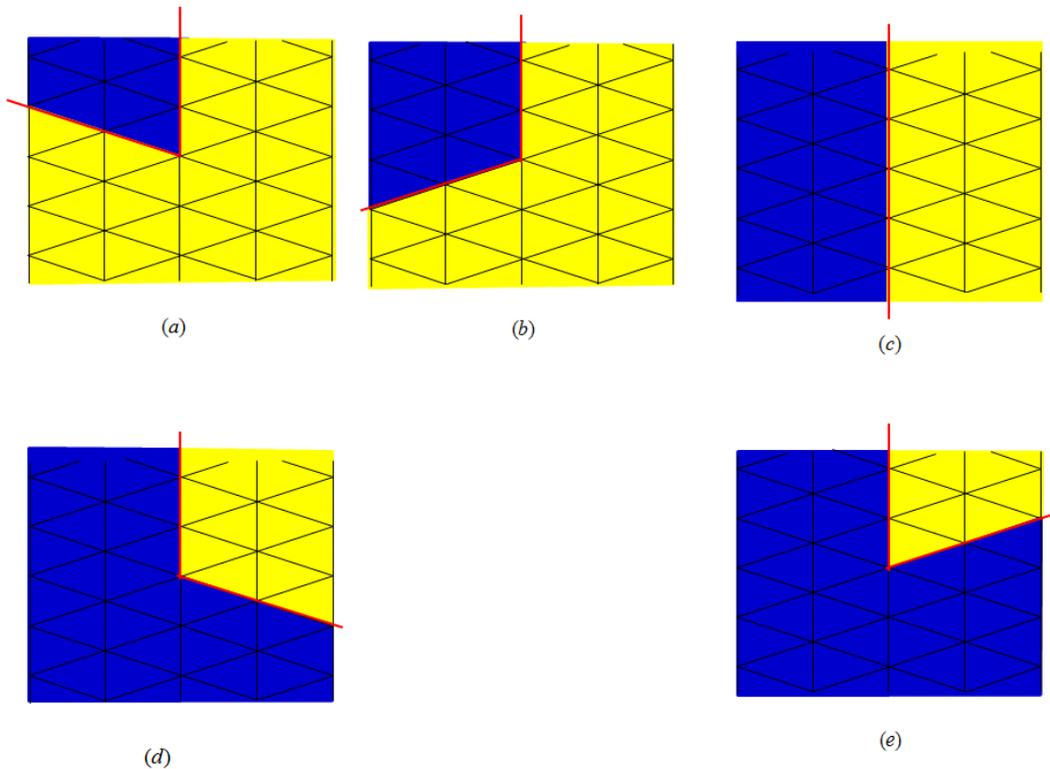


FIGURE 6.6 – Les cinq cas d'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 6-régulière (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleu et les zones d'application d'un schéma approximant en jaune).

La deuxième façon : la deuxième façon consiste à appliquer les deux schémas de subdivision  $S_{|\Gamma'_j}^-$  et  $S_{|\Gamma'_j}^+$  de façon arbitraire. Dans ce cas, nous pouvons définir plusieurs schémas de subdivision quasi-linéaires sur la grille 6-régulière. Nous donnerons ici deux exemples (voir figure 6.7) :

$$(S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} p)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- p)_{((\Gamma'_1 \cup \Gamma'_3 \cup \Gamma'_5) \setminus \cup_{j=1}^5((\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_{j+1})))}_\rho \\ (S_{|\Gamma'_j}^+ p)_{((\Gamma'_2 \cup \Gamma'_4 \cup \Gamma'_6) \setminus \cup_{j=1}^5((\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_{j+1})))}_\rho \end{cases} , \quad (6.22)$$

et

$$(S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} P)_\rho = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^- P)_{((\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 \cup \Gamma'_4) \setminus ((\partial \xi'_1 \cap \partial \xi'_6) \cup (\partial \xi'_3 \cap \partial \xi'_4) \cup (\partial \xi'_4 \cap \partial \xi'_5)))_\rho} \\ (S_{|\Gamma'_j}^+ P)_{((\Gamma'_3 \cup \Gamma'_5 \cup \Gamma'_6) \setminus ((\partial \xi'_1 \cap \partial \xi'_6) \cup (\partial \xi'_3 \cap \partial \xi'_4) \cup (\partial \xi'_4 \cap \partial \xi'_5)))_\rho} \end{cases} . \quad (6.23)$$

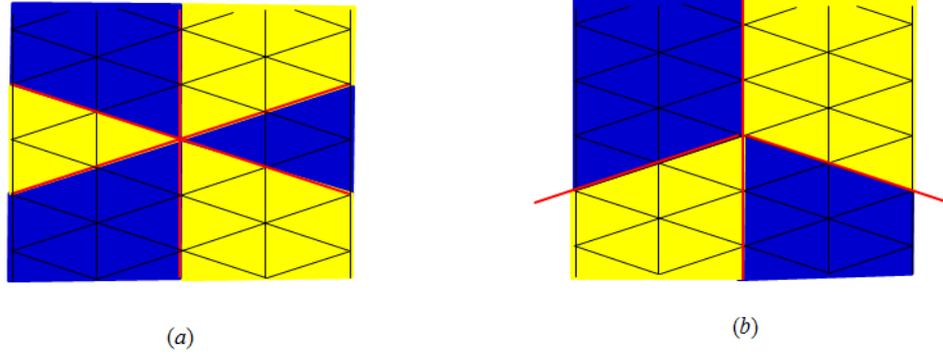


FIGURE 6.7 – Deux exemples qui montrent des zones d'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 6-régulière de façon arbitraire (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleu et les zones d'application d'un schéma approximant en jaune).

### 6.2.3/ LES FONCTIONS LIMITES ET LA REPRODUCTION DE POLYNÔMES

Nous observons une légère différence entre la subdivision quasi-linéaire sur une grille bi-régulière que nous avons présentée dans le chapitre précédent et la subdivision quasi-linéaire sur une grille  $n$ -régulière ( $n = 4, 6$ ) donnée dans ce chapitre.

Dans les deux cas, un schéma de subdivision quasi-linéaire est défini en fonction de deux schémas linéaires de types géométriques différents. La seule différence entre les deux variantes de ces schémas de subdivision réside dans la façon de définir les deux schémas linéaires. En effet, un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille bi-régulière est défini en fonction de deux schémas de subdivision linéaires de sorte que chaque schéma est défini sur une grille régulière. Par contre, un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille  $n$ -régulière est défini en fonction de deux schémas de subdivision linéaires de sorte que chaque schéma est défini sur une ou plusieurs zones régulières d'une grille.

Dans le chapitre précédent (proposition 11), nous avons donné une formule générale à la fonction limite d'un schéma de subdivision linéaire sur une grille régulière. À partir de cette proposition et les définitions (6.2) et (6.6), nous donnons la définition suivante :

**Définition 22** Soient  $X_A$  une grille régulière,  $\Gamma \subset X_A$  une zone régulière de cette grille et  $S$  un schéma de subdivision linéaire. Pour tout opérateur  $S^\infty : \pi_m(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ , pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et pour tout  $z \in \Gamma$ , nous définissons l'opérateur  $S_{|\Gamma}^\infty : \pi_3(A\mathbb{Z}^2) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,  $m \leq 3$  par :

$$S_{|\Gamma}^\infty f(z) = f_{|Az} + (\nabla A L A' \nabla') f_{|Az}, z \in \Gamma, \quad (6.24)$$

et l'opérateur quasi-interpolants  $Q : \pi_m(\mathbb{A}Z^2) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,  $m \leq 3$  par :

$$Q_{|\Gamma} f(z) = f_{|_{Az}} - (\nabla A L A^t \nabla') f_{|_{Az}}, z \in \Gamma. \quad (6.25)$$

Nous notons par  $S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty$ ,  $Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}$ , les opérateurs limite et quasi-interpolant d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 4-régulière et par  $S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty$ ,  $Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}$  les opérateurs limite et quasi-interpolant d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 6-régulière.

Nous définissons ces opérateurs par :

$$1. \forall r < 4, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2),$$

$$(S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty) f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^-)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=1}^r(\Gamma_j) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l)) \\ (S_{|\Gamma_{j,l}}^0)^\infty f(z), z \in \cup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l) \\ (S_{|\Gamma_l}^+)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=r+1}^6(\Gamma_l) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l)) \end{cases}, \quad (6.26)$$

$$\text{et } \forall r < 4, \forall j \neq l, Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} : \pi_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)),$$

$$(Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}) f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma_j}^-) f(z), z \in (\cup_{j=1}^r(\Gamma_j) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l)) \\ (Q_{|\Gamma_{j,l}}^0) f(z), z \in \cup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l) \\ (Q_{|\Gamma_l}^+) f(z), z \in (\cup_{j=r+1}^6(\Gamma_l) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l)) \end{cases}. \quad (6.27)$$

$$2. \forall r < 6, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2),$$

$$(S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty) f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^-)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=1}^r(\Gamma'_j) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l)) \\ (S_{|\Gamma'_{j,l}}^0)^\infty f(z), z \in \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l) \\ (S_{|\Gamma'_l}^+)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=r+1}^6(\Gamma'_l) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l)) \end{cases}, \quad (6.28)$$

$$\text{et } \forall r < 6, \forall j \neq l, Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} : \pi_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)),$$

$$(Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}) f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma'_j}^-) f(z), z \in (\cup_{j=1}^r(\Gamma'_j) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l)) \\ (Q_{|\Gamma'_{j,l}}^0) f(z), z \in \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l) \\ (Q_{|\Gamma'_l}^+) f(z), z \in (\cup_{j=r+1}^6(\Gamma'_l) \setminus \cup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l)) \rho \end{cases}. \quad (6.29)$$

Notons ici que les deux opérateurs  $(S_{|\Gamma_{j,l}}^0)^\infty$ ,  $(Q_{|\Gamma_{j,l}}^0)$  coïncident avec les opérateurs  $(S_{|\Gamma_l}^+)^\infty$ ,  $(Q_{|\Gamma_l}^+)$  .i.e

$$\begin{cases} (S_{|\Gamma_{j,l}}^0)^\infty = (S_{|\Gamma_l}^+)^\infty \\ (Q_{|\Gamma_{j,l}}^0) = (Q_{|\Gamma_l}^+) \end{cases}, \quad (6.30)$$

et les deux opérateurs  $(S_{|\Gamma'_{j,l}}^0)^\infty$ ,  $(Q_{|\Gamma'_{j,l}}^0)$  sont définis par :

$$\begin{cases} (S_{|\Gamma'_{j,l}}^0)^\infty = \gamma(S_{|\Gamma'_j}^-)^\infty + (1 - \gamma)(S_{|\Gamma_l}^+)^\infty \\ (Q_{|\Gamma'_{j,l}}^0) = \gamma Q_{|\Gamma'_j}^- + (1 - \gamma) Q_{|\Gamma_l}^+ \end{cases}. \quad (6.31)$$

À cause de l'existence de plusieurs façons possible de définir un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille 4-régulière (6-régulière), nous rappelons ici que les opérateurs quasi-interpolants  $Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}$ ,  $Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}$  préservent les coefficients dominants pour tout  $f \in \pi_3(\mathbb{R}^2)$  et que les résultats du lemme 6 restent vrais dans le cas de la subdivision quasi-linéaire sur une grille  $n$ -régulière pour  $n = 4, 6$ , i.e pour tout  $f \in \pi_3(\mathbb{R}^2)$ ,

$$\begin{cases} S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} f = f \Leftrightarrow S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} f = Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} \sigma f \\ S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} f = f \Leftrightarrow S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} f = Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} \sigma f \end{cases} \quad (6.32)$$

#### 6.2.4/ QUASI-INTERPOLATION ET ORDRE D'APPROXIMATION

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que les schémas quasi-linéaires ont un ordre d'approximation maximal sur une moitié de la grille et un ordre d'approximation optimal sur la deuxième moitié. Afin de généraliser ces résultats à des schémas quasi-linéaires définis sur une grille 4-régulière (resp. 6-régulière), nous supposons que l'opérateur  $Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} : \pi_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^4(\Gamma_i))$  (resp.  $Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} : \pi_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i))$ ) peut être étendu à un opérateur borné et local  $Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^* : C(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^4(\Gamma_i))$  (resp.  $Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^* : C(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i))$ ) de sorte que : si  $Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)} : \pi_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^4(\Gamma_i))$  (resp.  $Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} : \pi_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i))$ ) satisfait la relation (6.32), il existe un domaine ouvert et borné  $D' \in \mathbb{R}^2$  (resp.  $D'' \in \mathbb{R}^2$ ) et une constante  $c'$  (resp.  $c''$ ) tel que :

$$\begin{cases} |Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^* f(\alpha)|_\infty \leq c' \|f\|_{\infty, \alpha + D'} \\ |Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^* f(\alpha)|_\infty \leq c'' \|f\|_{\infty, \alpha + D''} \end{cases} \quad (6.33)$$

Ensuite, nous montrons que nous pouvons approcher toute fonction  $f$  par  $S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^* f$  (resp.  $S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^* f$ ).

**Lemme 9** Soit  $S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty$  (resp.  $S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty$ ) un schéma de subdivision quasi-linéaire défini sur une grille 4-régulière (resp. 6-régulière), soit  $Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^* : C(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^4(\Gamma_i))$  (resp.  $Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^* : C(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^\infty(\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i))$ ) un opérateur borné. Alors il existe une constante  $c$  telle que :

$$\begin{cases} \|S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^* f - f\| \leq c_1 \|D^{m+1} f\|_\infty, \\ \|S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^* f - f\| \leq c_2 \|D^{m+1} f\|_\infty \end{cases} \quad (6.34)$$

pour tout  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\|f\|_\infty \leq \infty$  avec la notation  $\|f\|_\infty = \max\{\|D^\gamma f\|_\infty, |\gamma| = m + 1\}$  (le maximum des opérateurs différentiels de degré  $m + 1$ ).

**Preuve 22** À partir des définitions et du choix des opérateurs  $S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty$ ,  $Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^*$ ,  $S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty$ ,  $Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^*$  (équations (6.27)-(6.32)) et la preuve du lemme 7 (chapitre 5), nous pouvons montrer que pour tout  $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^2)$  :

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \|S_{\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty Q_{\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^* f(z) - f(z)\|_\infty = \\
 & \begin{cases} \|(S_{|\Gamma_j}^-)^\infty (Q_{|\Gamma_j}^*)^- f(z) - f(z)\|_\infty \leq c'_1 \|D^{m+1} f\|_\infty, & z \in (\bigcup_{j=1}^r(\Gamma_j) \setminus \bigcup_{j,l}(\partial\xi_j \cap \partial\xi_l)) \\ \|(S_{|\Gamma_j}^+)^\infty (Q_{|\Gamma_j}^*)^+ f(z) - f(z)\|_\infty \leq c''_1 \|D^{m+1} f\|_\infty, & z \in \bigcup_{j=r+1}^6(\Gamma_l) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \|S_{\bigcup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^\infty Q_{\bigcup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}^* f(z) - f(z)\|_\infty = \\
 & \begin{cases} \|(S_{|\Gamma'_j}^-)^\infty (Q_{|\Gamma'_j}^*)^- f(z) - f(z)\|_\infty = c'_2 \|D^{m+1} f\|_\infty, & z \in (\bigcup_{j=1}^r(\Gamma'_j) \setminus \bigcup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l)) \\ \|(S_{|\Gamma'_j}^0)^\infty (Q_{|\Gamma'_j}^*)^+ f(z) - f(z)\|_\infty \leq c''_2 \|D^{m+1} f\|_\infty, & z \in \bigcup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l) \\ \|(S_{|\Gamma'_j}^+)^\infty (Q_{|\Gamma'_j}^*)^+ f(z) - f(z)\|_\infty \leq c'''_2 \|D^{m+1} f\|_\infty, & z \in (\bigcup_{j=r+1}^6(\Gamma'_l) \setminus \bigcup_{j,l}(\partial\xi'_j \cap \partial\xi'_l)) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Comme dans le cas bi-régulier, à partir du lemme précédent nous pouvons estimer les erreurs provenant de l'échantillonnage des points de contrôle d'un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille 4-régulière (resp. 6-régulière) et donc l'ordre d'approximation de ces schémas de subdivision.

## 6.3/ CONSTRUCTION

Dans cette section, nous nous intéressons tout particulièrement aux différents cas possibles pour la construction d'un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille 4-régulière (resp. 6-régulière). La méthode que nous allons utiliser pour la construction de ces schémas de subdivision est la même que celle utilisée pour la construction des schémas quasi-linéaires sur des grilles bi-régulières (section 5.4).

### 6.3.1/ SCHÉMAS QUASI-LINÉAIRES SUR UNE GRILLE 4-RÉGULIÈRE

#### PREMIER CAS (SCHÉMA (6.11))

Le premier cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur le domaine  $\xi_1$  et le schéma approximant  $S_{|\Gamma_l}^+$  sur les zones  $\Gamma_l, l = 2, 3, 4$  (voir figure 6.4-(a)). La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :

pour  $r = 1, \forall j \neq l, S_{\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty : I^\infty(\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2),$

$$(S_{\bigcup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty) f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^-)^\infty f(z), & z \in (\Gamma_l \setminus (\partial\xi_1 \cap \xi_4) \cup (\partial\xi_1 \cap \xi_2)) \\ (S_{|\Gamma_l}^+)^\infty f(z), & z \in \bigcup_{l=2}^4 \Gamma_l \end{cases} \tag{6.37}$$

$$(Q_{\cup_{i=1}^4 \Gamma_i})f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma_i}^-)f(z), z \in (\Gamma_l \setminus (\partial\xi_1 \cap \xi_4) \cup (\partial\xi_1 \cap \xi_2)) \\ (Q_{|\Gamma_l}^+)f(z), z \in \cup_{l=2}^4 \Gamma_l \end{cases} \tag{6.38}$$

Les règles de subdivision dans la partie interpolante de ce schéma de subdivision sont données dans la figure 6.8 et les règles sur la frontière commune sont données dans la figure 6.9. Notez que dans la partie approximante, nous appliquons tout simplement les règles de Catmull-Clark.

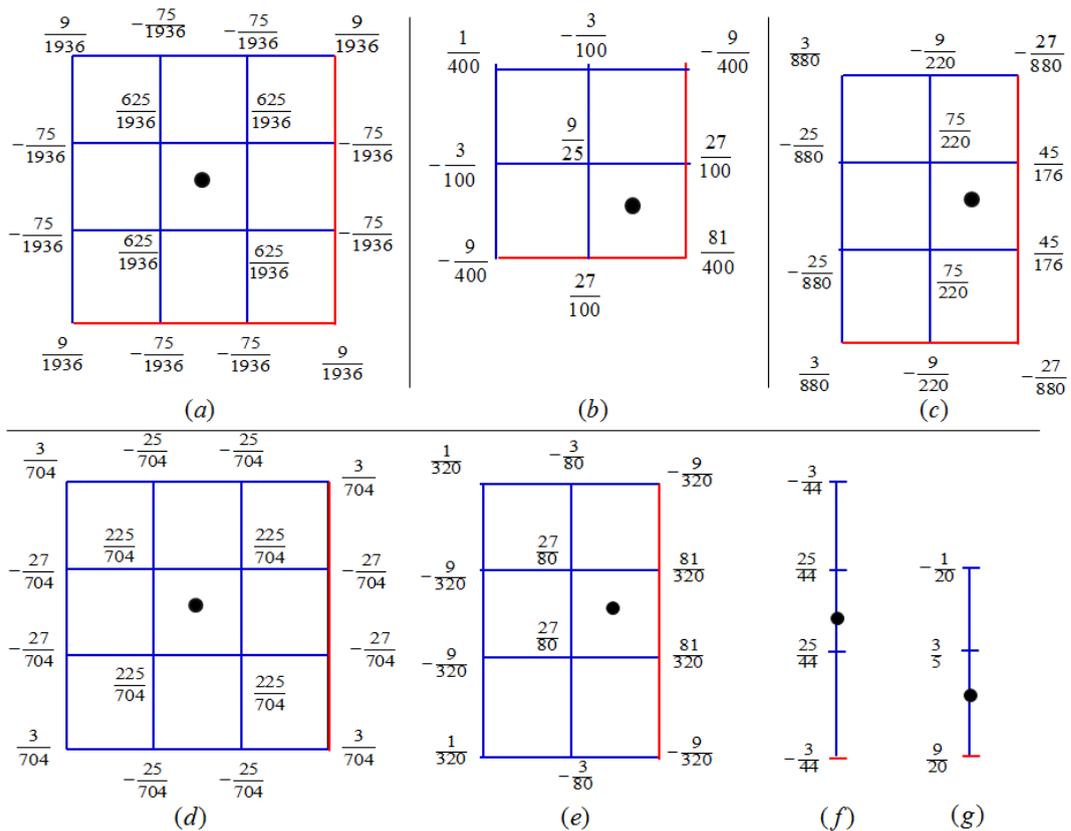


FIGURE 6.8 – Les règles de subdivision dans la partie interpolante du schéma 4-régulier quad/quad défini dans l'équation (6.12).

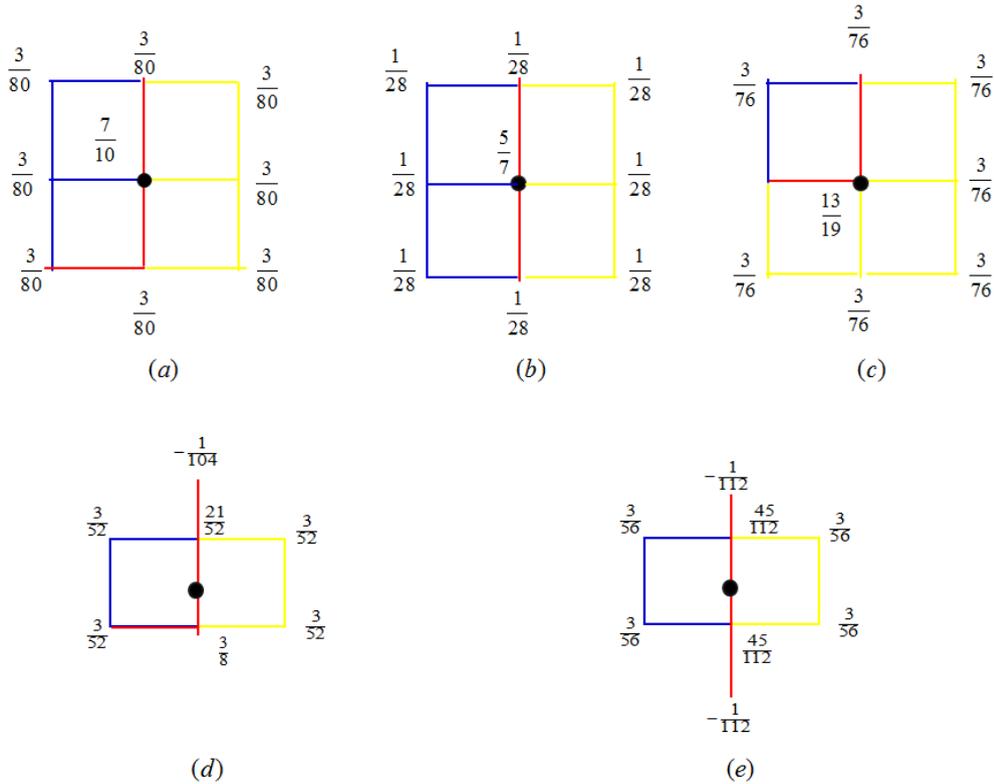


FIGURE 6.9 – Les règles de subdivision sur les frontières communes du schéma 4-régulier défini dans l'équation 6.11.

### DEUXIÈME CAS (SCHÉMA (6.12))

Le deuxième cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur les deux domaines  $\xi_1$  et  $\xi_2$  et la frontière commune entre ces deux domaines  $\partial\xi_1 \cap \partial\xi_2$  et le schéma approximant  $S_{(\Gamma)}^+$  sur les deux zones  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  (voir figure 6.4-(b)). Ce qui coïncide avec le schéma quasi-interpolant quad/quad présenté dans le quatrième exemple du chapitre précédent. Les règles de subdivision de ce schéma sont données dans le tableau 5.7.

### TROISIÈME CAS (SCHÉMA (6.13))

Pour le troisième cas, nous appliquons le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur les domaines  $\xi_1, \xi_3$  et la zone  $\Gamma_2$  et le schéma approximant  $S_{(\Gamma)}^+$  sur la zone  $\Gamma_4$  (voir figure 6.4-(c)).

La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :

pour  $r = 3, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}^\infty)f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^-)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=2}^4 \Gamma_j \setminus (\partial\xi_1 \cap \xi_4) \cup (\partial\xi_3 \cap \xi_4)) \\ (S_{|\Gamma_1}^+)^\infty f(z), z \in \Gamma_4 \end{cases} \quad (6.39)$$

$$(Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma_j}^-)f(z), z \in (\cup_{j=2}^4 \Gamma_j \setminus (\partial\xi_1 \cap \xi_4) \cup (\partial\xi_3 \cap \xi_4)) \\ (Q_{|\Gamma_1}^+)f(z), z \in \Gamma_4 \end{cases} \quad (6.40)$$

Dans ce cas, les nouveaux points à déterminer dans la partie interpolante sont données dans les figures 6.8-(d,e,f,g) et 6.10. Les règles de subdivision sur la frontière commune sont données dans les figures 6.9-(b,e) et 6.11.

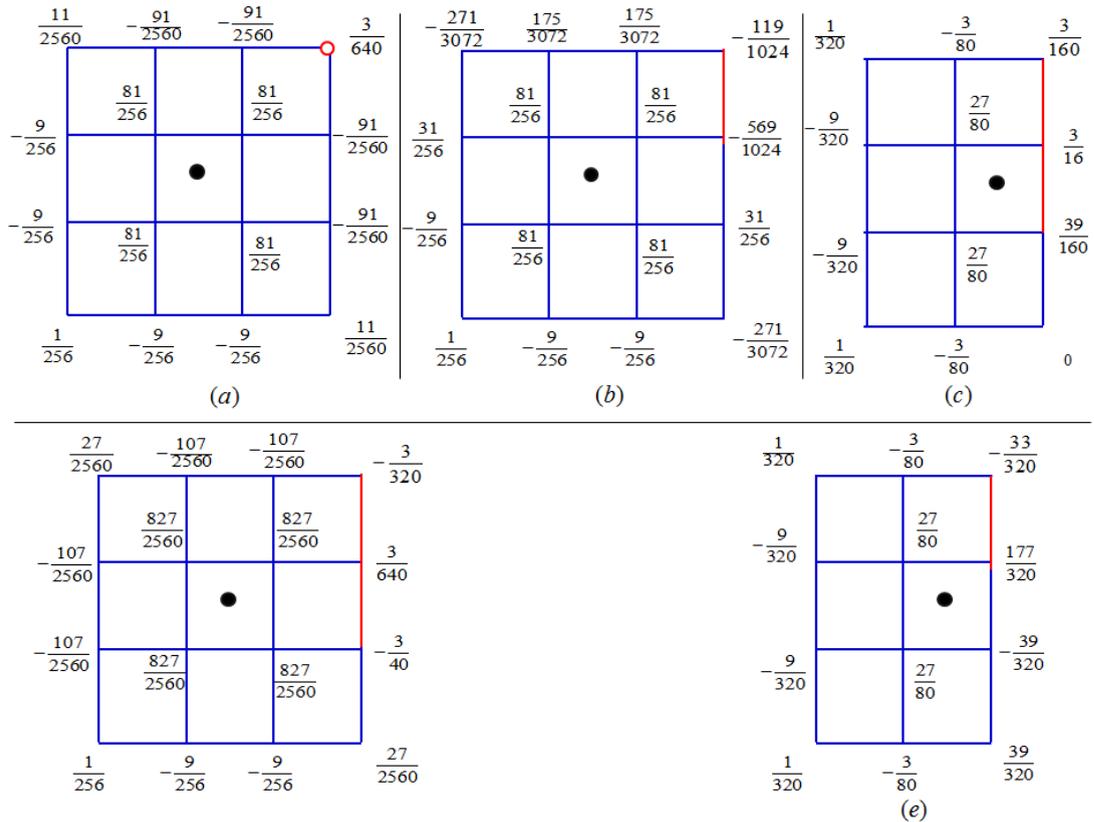


FIGURE 6.10 – les nouveaux points à déterminer dans la partie interpolante du schéma (6.13).

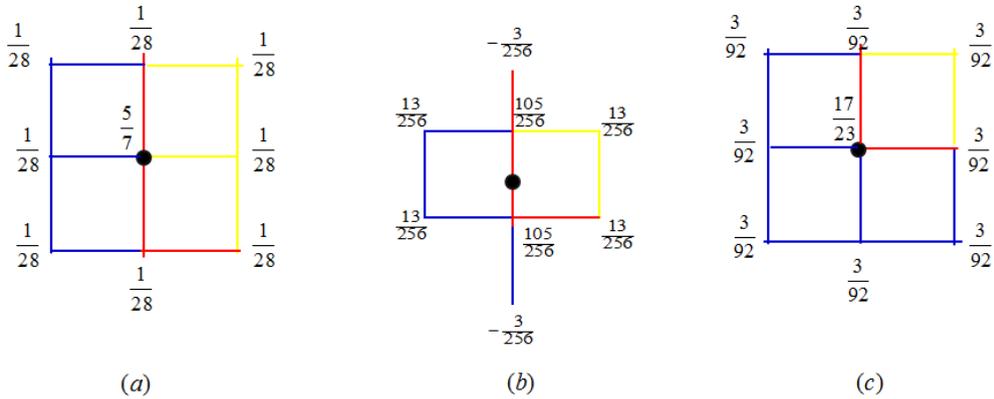


FIGURE 6.11 – les nouveaux points à déterminer dans la partie interpolante du schéma (6.13).

#### QUATRIÈME CAS (SCHÉMA (6.14))

Le quatrième et dernier cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j}^-$  sur les deux domaines  $\xi_1, \xi_3$  et le schéma approximant  $S_{|\Gamma_i}^+$  sur les zones  $\Gamma_2, \Gamma_4$  (voir figure 6.4-(a)). La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :

pour  $r = 1, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^4 \Gamma_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2),$

$$(S_{|\cup_{i=1}^4 \Gamma_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma_j}^-)^\infty f(z), z \in (\partial\xi_1 \cap \xi_3) \\ (S_{|\Gamma_i}^+)^\infty f(z), z \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \end{cases} \quad (6.41)$$

$$(Q_{|\cup_{i=1}^4 \Gamma_i})f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma_j}^-)f(z), z \in (\partial\xi_1 \cap \xi_3) \\ (Q_{|\Gamma_i}^+)f(z), z \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \end{cases} \quad (6.42)$$

Les règles de subdivision à appliquer dans les parties interpolantes de la grille sont les règles du premier cas données dans la figure 6.8. Les règles particulières de ce schéma sur la frontière commune sont données dans la figure 6.12.

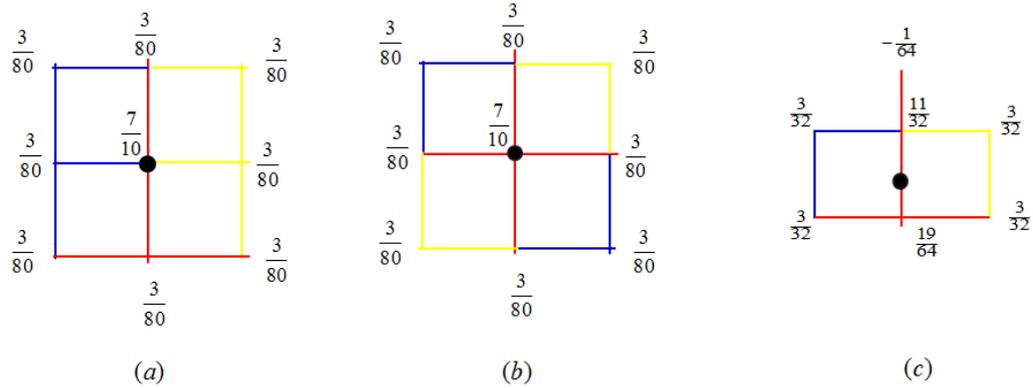


FIGURE 6.12 – Règles de subdivision particulières du schéma (6.14) sur la frontière commune .

### 6.3.2/ SCHÉMAS QUASI-LINÉAIRES SUR UNE GRILLE 6-RÉGULIÈRE

#### PREMIER CAS (SCHÉMA (6.17))

Le premier cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma'_j}^-$  sur le domaine  $\xi'_1$  et le schéma approximant  $S_{|\Gamma'_l}^+$  sur le reste de la grille excepté les deux frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  (voir figure 6.6 – (a)). La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :  $\forall r = 1, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^-)^\infty f(z), z \in ((\Gamma'_1) \setminus (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6)) \\ (S_{|\Gamma'_{jl}}^0)^\infty f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \\ (S_{|\Gamma'_l}^+)^\infty f(z), z \in (\cup_{l=2}^6 \Gamma'_l) \setminus (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \end{cases} \quad (6.43)$$

et  $\forall r = 1, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(Q_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma_i})f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma'_j}^-)f(z), z \in ((\Gamma'_1) \setminus (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6)) \\ (Q_{|\Gamma'_{jl}}^0)f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \\ (Q_{|\Gamma'_l}^+)f(z), z \in (\cup_{l=2}^6 \Gamma'_l) \setminus (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \end{cases} \quad (6.44)$$

où les opérateurs  $(S_{|\Gamma'_{jl}}^0)^\infty$  et  $Q_{|\Gamma'_{jl}}^0$  sont définis dans l'équation (6.32). Les différents types de règle de ces schémas de subdivision sont donnée dans les figures suivantes :

- figure 6.13 , les règles particulières dans la zone choisie pour appliquer le schéma interpolant ( $\xi'_1$ )
- figure 6.14, les règles particulières sur les frontières communes entre les deux zones ( $\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6$ )
- figure 6.15, les règles particulières dans les zones choisies pour appliquer le schéma approximant  $\cup_{l=2}^6 \Gamma'_l \setminus (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6)$

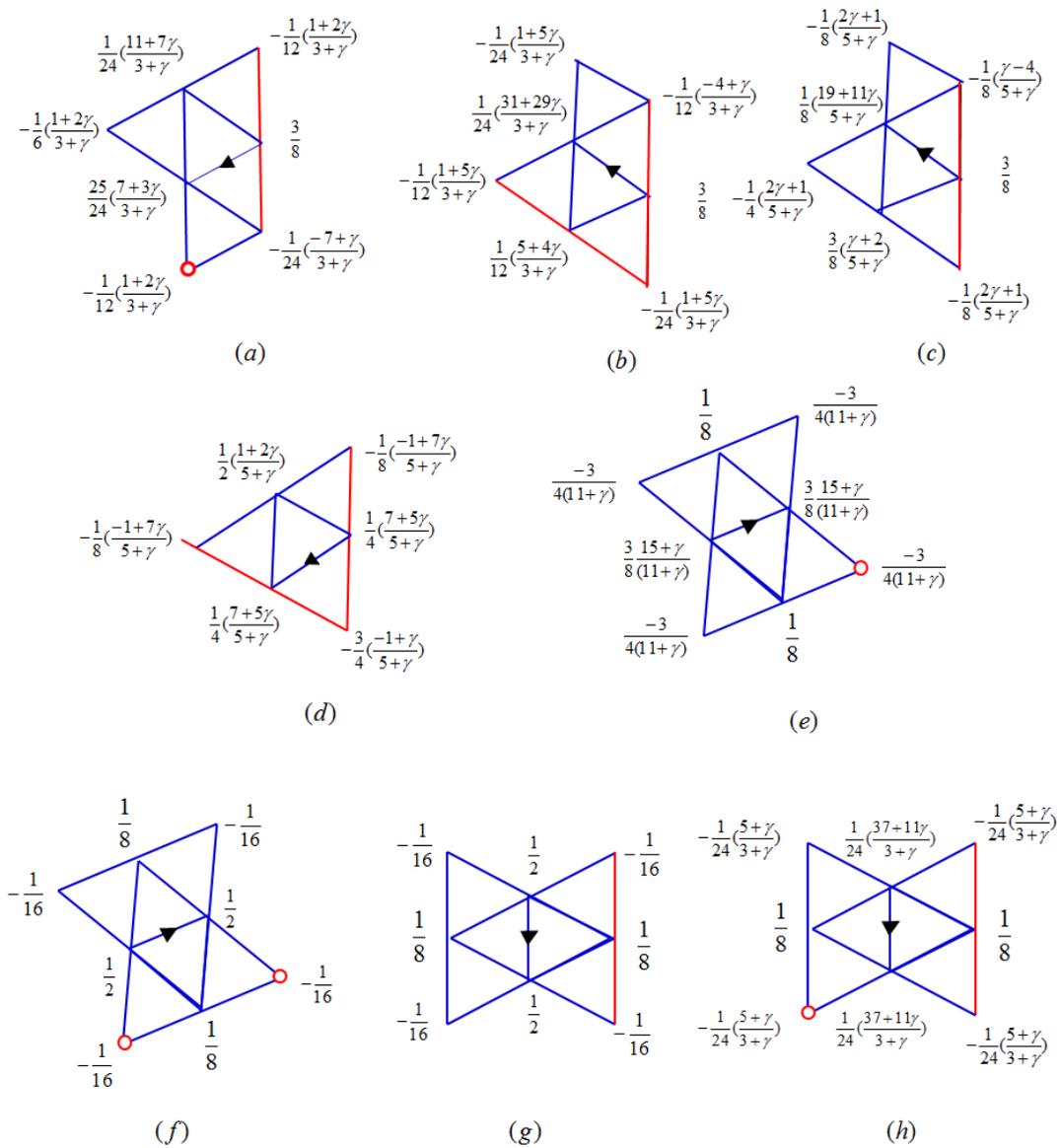


FIGURE 6.13 – Règles de subdivision particulières du schéma (6.17) dans les zones d'application d'un schéma interpolant.

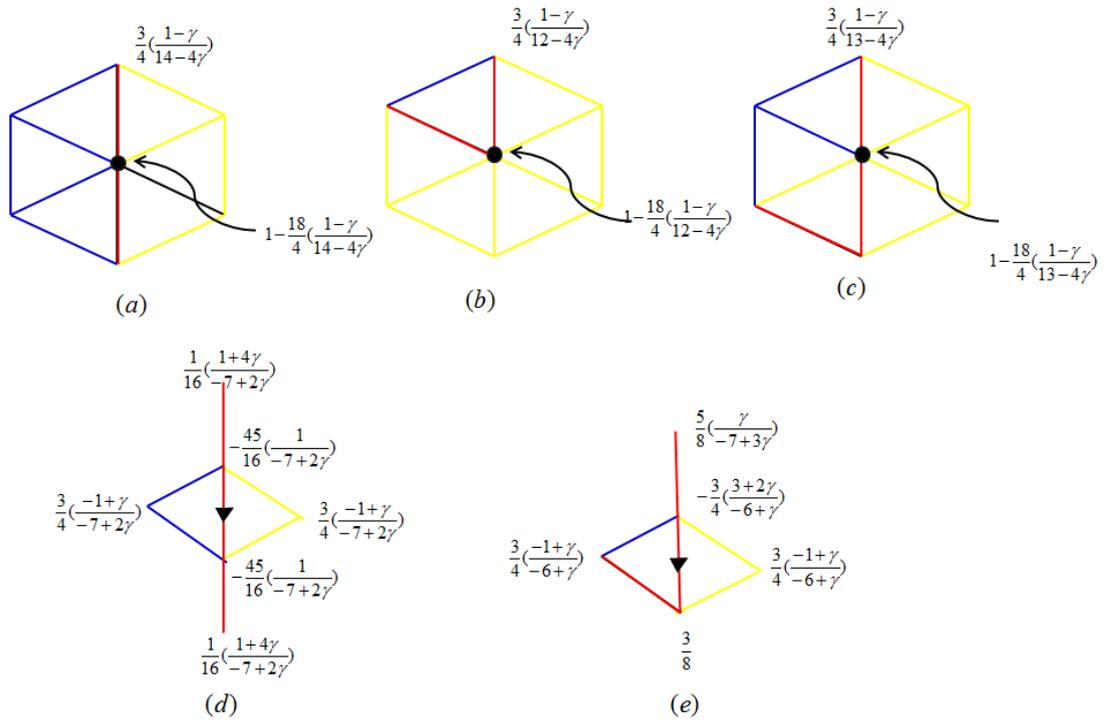


FIGURE 6.14 – Règles de subdivision particulières du schéma (6.17) sur les frontières communes.

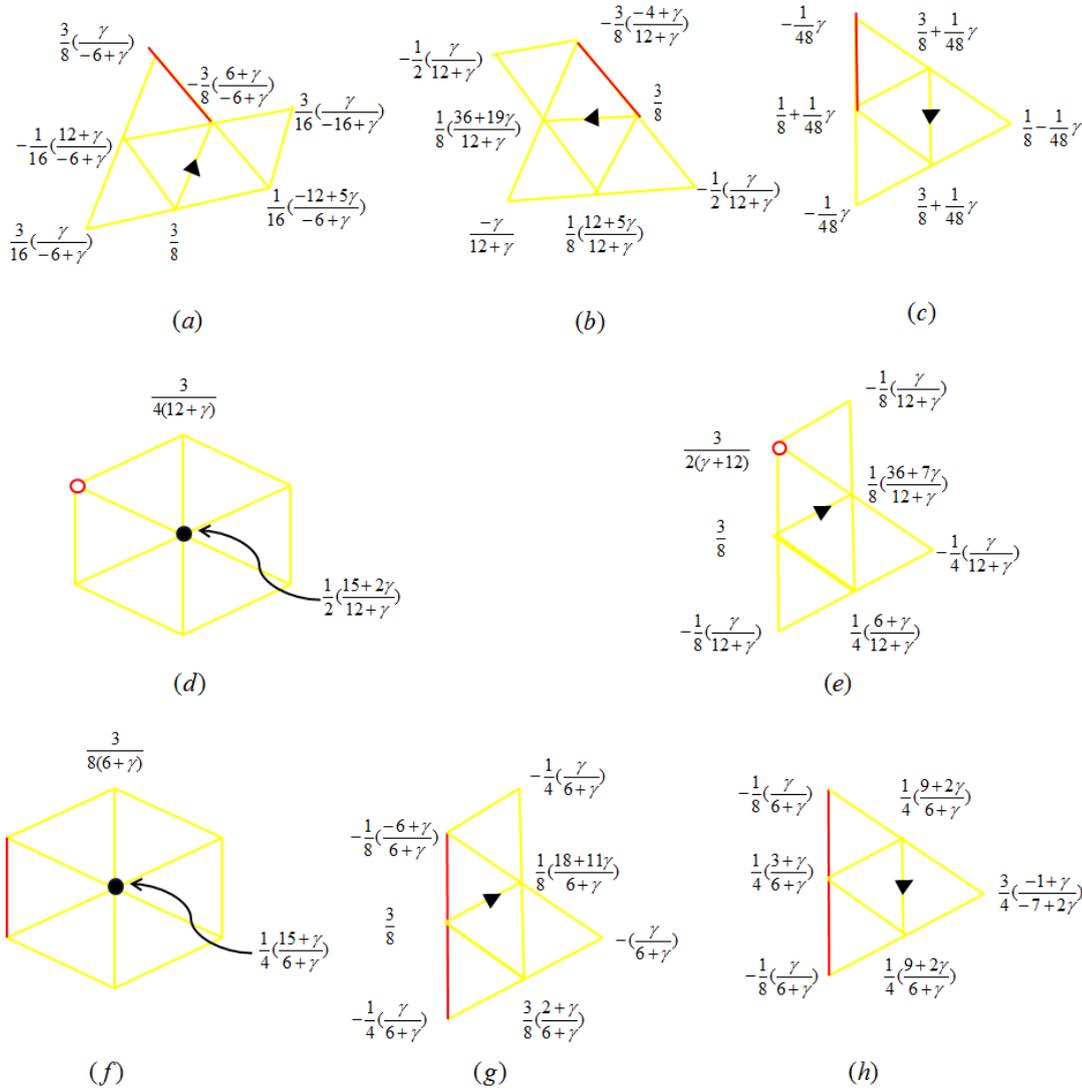


FIGURE 6.15 – Règles de subdivision particulières du schéma (6.17) dans les zones d'application d'un schéma approximant.

## DEUXIÈME CAS (SCHÉMA (6.18))

Le deuxième cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma_j^-}^-$  sur les deux zones  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  sans les frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  et le schéma approximant  $S_{|\Gamma_l}^+$  sur le reste de la grille, excepté les deux frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  (voir figure 6.6-(a)). La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :  $\forall r = 2, \forall j \neq l$ ,  $S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma'_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S^{\infty}_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)})f(z) = \begin{cases} (S^-_{|\Gamma'_j})^{\infty} f(z), z \in (\cup_{j=1}^2(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3))) \\ (S^0_{|\Gamma'_{jl}})^{\infty} f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3) \\ (S^+_{|\Gamma'_l})^{\infty} f(z), z \in (\cup_{j=3}^6(\Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3))) \end{cases} \quad (6.45)$$

et  $\forall r = 2, \forall j \neq l, Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)} : \pi_m(\mathbb{R}^2) \rightarrow l^{\infty}(\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i))$ ,

$$(Q_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)})f(z) = \begin{cases} (Q^-_{|\Gamma'_j})f(z), z \in (\cup_{j=1}^2(\Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3))) \\ (Q^0_{|\Gamma'_{jl}})f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3) \\ (Q^+_{|\Gamma'_l})f(z), z \in (\cup_{j=3}^6(\Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_2 \cap \partial\xi'_3))) \end{cases} \quad (6.46)$$

Les règles de subdivision de ce schéma de subdivision sont données dans le tableau 6.1.

Règles	Côté interpolant	Côté approximant	Frontières communes
Figures	6.13 – (c, e, g), 6.16 – (a, b, c) 6.16 – (a, b, c)	6.15 – (b, c, d, f, g, h), 6.16 – (d)	6.14 – (a, d), 6.16 – (e, f)

TABLE 6.1 – Les règles de subdivision particulières du schéma (6.18).

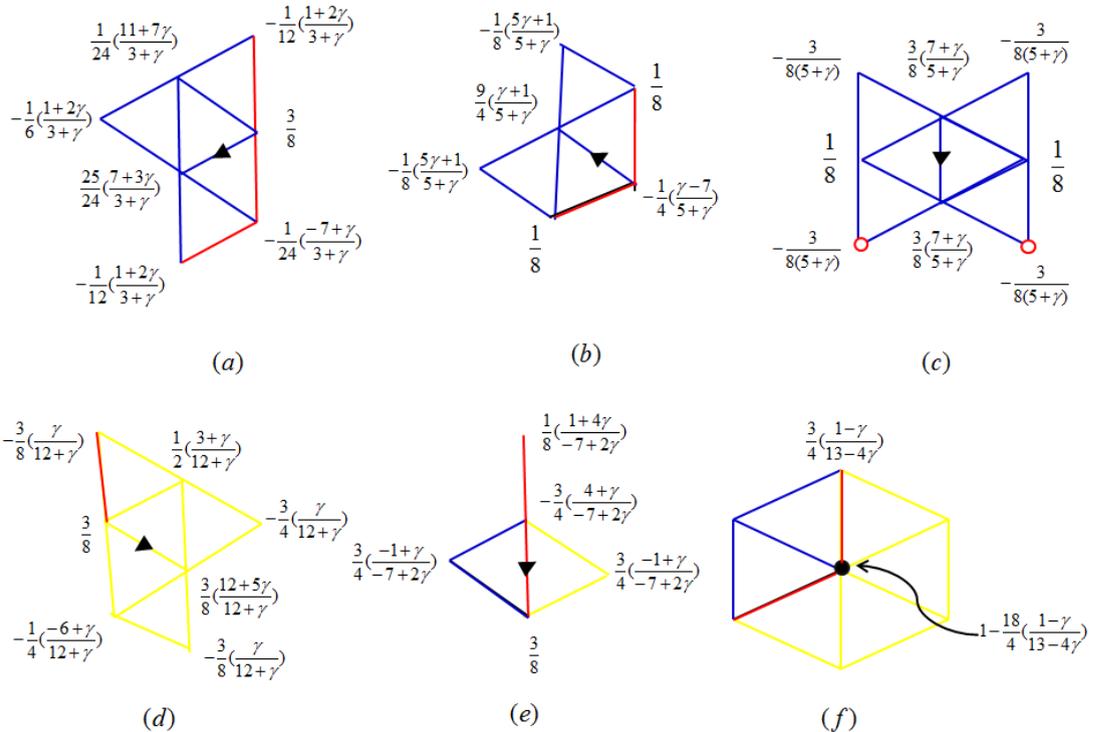


FIGURE 6.16 – Différentes règles de subdivision particulières des schémas (6.18).

## TROISIÈME CAS (SCHÉMAS (6.19))

Le troisième cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma'_j}^-$  sur les deux zones  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  sans les frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  le schéma approximant  $S_{|\Gamma_l}^+$  sur le reste de la grille excepté les deux frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  (voir figure 6.6-(a)). La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :  $\forall r = 3, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma'_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^-)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=1}^3 \Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4)) \\ (S_{|\Gamma'_{jl}}^0)^\infty f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4) \\ (S_{|\Gamma'_l}^+)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=4}^6 \Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4)) \end{cases} \quad (6.47)$$

et  $\forall r = 2, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma'_j}^-)f(z), z \in (\cup_{j=1}^3 \Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4)) \\ (Q_{|\Gamma'_{jl}}^0)f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4) \\ (Q_{|\Gamma'_l}^+)f(z), z \in (\cup_{j=4}^6 \Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_3 \cap \partial\xi'_4)) \end{cases} \quad (6.48)$$

Ce qui coïncide avec les schémas quasi-interpolant triangle/triangle présentés dans le deuxième exemple du chapitre précédent. Les règles de subdivision de ce schéma sont données dans le tableau (5.4).

## QUATRIÈME CAS (SCHÉMA (6.20))

Le quatrième cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma'_j}^-$  sur les deux zones  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  sans les frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  et le schéma approximant  $S_{|\Gamma_l}^+$  sur le reste de la grille excepté les deux frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  (voir figure 6.6-(a)). La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :  $\forall r = 4, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma'_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^-)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=1}^4 \Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5)) \\ (S_{|\Gamma'_{jl}}^0)^\infty f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5) \\ (S_{|\Gamma'_l}^+)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=5}^6 \Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5)) \end{cases} \quad (6.49)$$

et  $\forall r = 4, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma'_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma'_j}^-)f(z), z \in (\cup_{j=1}^4 \Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5)) \\ (Q_{|\Gamma'_{jl}}^0)f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5) \\ (Q_{|\Gamma'_l}^+)f(z), z \in (\cup_{j=5}^6 \Gamma'_l) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_4 \cap \partial\xi'_5)) \end{cases} \quad (6.50)$$

Les règles de subdivision de ce schéma de subdivision sont données dans le tableau 6.2.

Règles	Côté interpolant	Côté approximant	Frontières communes
Figures	6.13 – (c, e, g), 6.17 – (a, b, c)	6.15 – (f, g, h), 6.17 – (f, g, h)	6.14 – (a, d), 6.17 – (d, e)

TABLE 6.2 – Les règles de subdivision particulières du schéma (6.20).

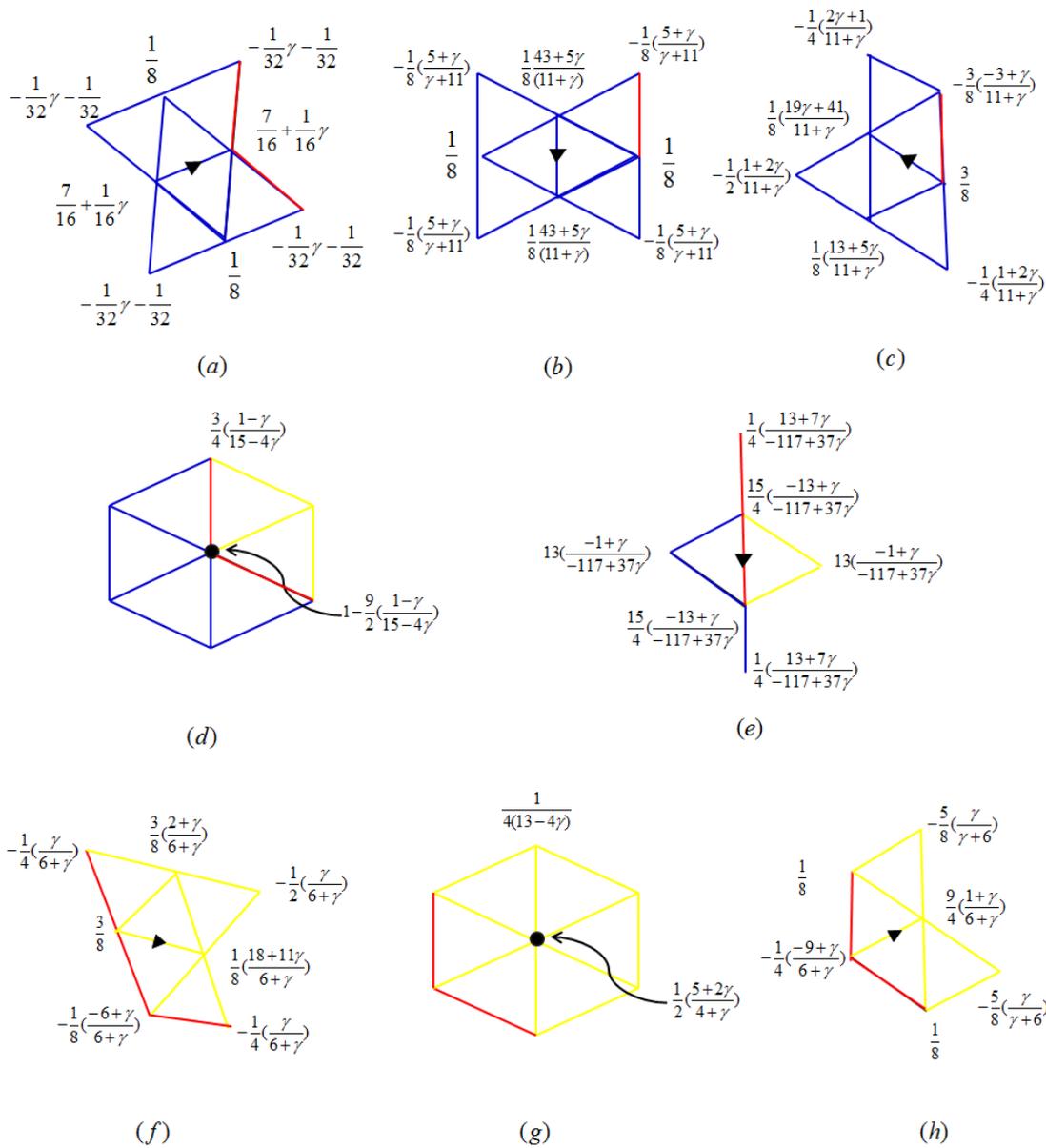


FIGURE 6.17 – Différentes règles de subdivision particulières du schéma (6.20)

CINQUIÈME CAS (SCHÉMA 6.21)

Le cinquième cas consiste à appliquer le schéma interpolant  $S_{|\Gamma'_j}^-$  sur les deux zones  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_2$  sans les frontières  $\partial\xi'_5$  et  $\partial\xi'_6$  le schéma approximant  $S_{|\Gamma'_l}^+$  sur le reste de la grille excepté les deux frontières  $\partial\xi'_1$  et  $\partial\xi'_6$  (voir figure 6.6-(a)). La fonction limite et l'opérateur quasi-interpolant de ce schéma de subdivision sont donnés par :  $\forall r = 5, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma'_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (S_{|\Gamma'_j}^-)^\infty f(z), z \in (\cup_{j=1}^5 \Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6)) \\ (S_{|\Gamma'_{j,l}}^0)^\infty f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6) \\ (S_{|\Gamma'_l}^+)^\infty f(z), z \in (\Gamma'_6) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6)) \end{cases} \quad (6.51)$$

et  $\forall r = 5, \forall j \neq l, S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty : l^\infty(\cup_{i=1}^4 \Gamma'_i) \rightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2)$ ,

$$(S_{|\cup_{i=1}^6 \Gamma'_i}^\infty)f(z) = \begin{cases} (Q_{|\Gamma'_j}^-)f(z), z \in (\cup_{j=1}^5 \Gamma'_j) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6)) \\ (Q_{|\Gamma'_{j,l}}^0)f(z), z \in (\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6) \\ (Q_{|\Gamma'_l}^+)f(z), z \in (\Gamma'_6) \setminus ((\partial\xi'_1 \cap \partial\xi'_6) \cup (\partial\xi'_5 \cap \partial\xi'_6)) \end{cases} \quad (6.52)$$

Les règles de subdivision de ce schéma de subdivision sont données dans le tableau 6.3.

Règles	Côté interpolant	Côté approximant	Frontières communes
Figures	6.13 – (c, e, g), 6.17 – (b, c), 6.18 – (a, b)	6.15 – (f, g, h), 6.17 – (f), 6.18 – (c, d, e)	6.14 – (a, d), 6.18 – (f, g)

TABLE 6.3 – Les règles de subdivision particulières du schéma (6.21).

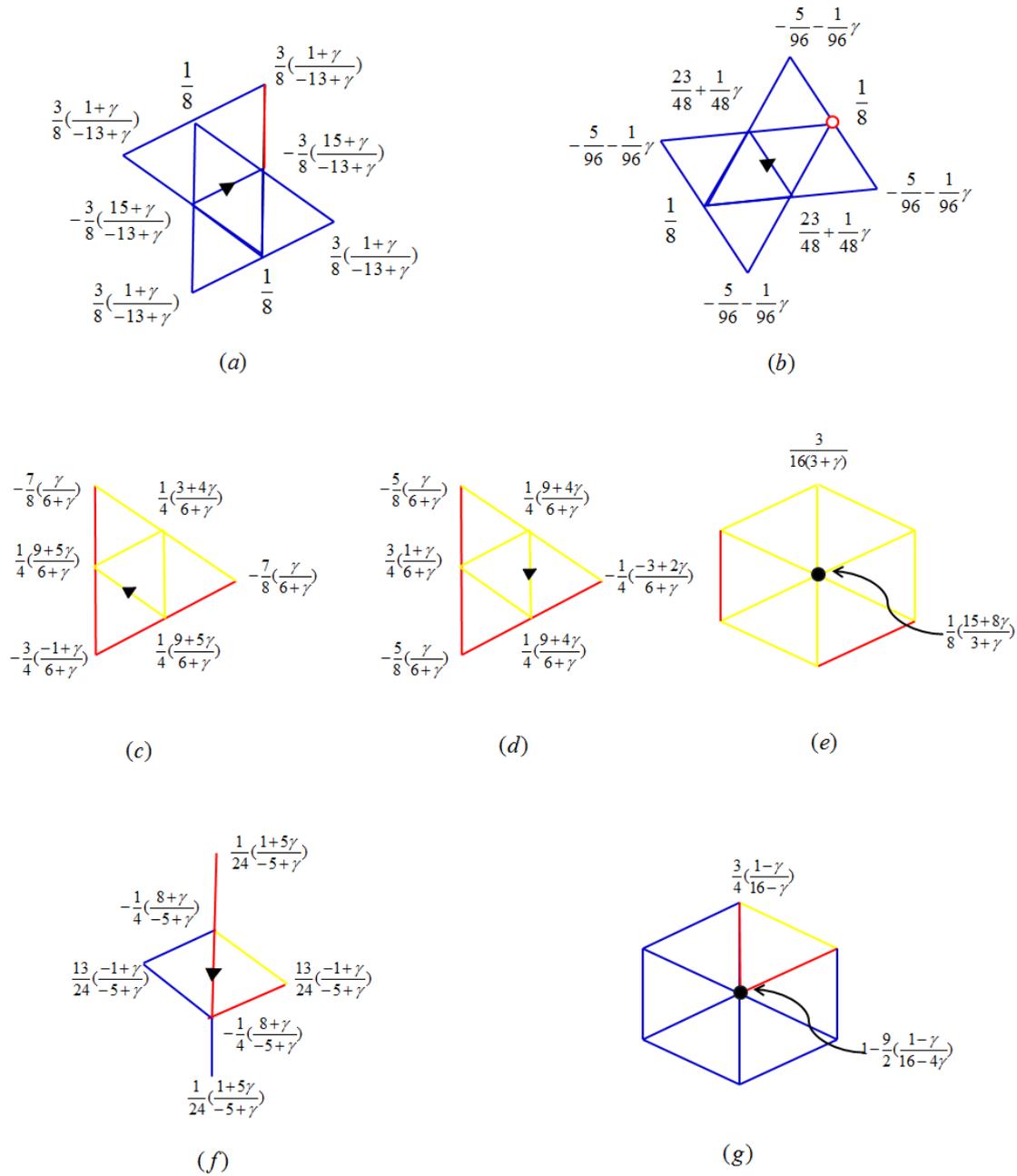


FIGURE 6.18 – Différentes règles de subdivision particulières du schéma (6.20)

### AUTRES CAS (SCHÉMA (6.22) ET (6.23))

Précédemment, nous avons vu qu'il existe d'autres cas possibles pour définir un schéma de subdivision 6-régulier, nous avons aussi donné deux exemples : le schéma (6.22) et le schéma (6.23) (voir figure 6.7). Pour les schémas quasi-linéaires 6-régulier que nous avons proposés précédemment, nous avons vu que différents choix des zones d'appli-

cation des deux schémas  $S_{|\Gamma'_j}^-$  et  $S_{|\Gamma_j}^+$  donnent différentes règles de subdivision. En expérimentant avec d'autres choix des zones d'application des deux schémas  $S_{|\Gamma'_j}^-$  et  $S_{|\Gamma_j}^+$ , nous avons constaté que la plupart des règles de subdivision pour tous les cas restants sont données dans un des schémas 6-régulier présentés précédemment. Par contre, nous avons besoin de définir des règles supplémentaires au point origine et au voisinage de ce point pour chaque cas. Il est possible de traiter tous les cas, mais nous nous contentons de donner ici les règles des deux schémas (6.22) et (6.23). Les règles de subdivision de ces deux schémas de subdivision sont données dans les tableaux 6.4 et 6.5.

Schéma (6.22)	Côté interpolant	Côté approximant	Frontières communes
Figures	6.13 – (a, b, c, d, e, f, g, h)	6.15 – (f, g, h), 6.18 – (c, d, e)	6.14 – (a, d), 6.19 – (a, c)

TABLE 6.4 – Les règles de subdivision particulières du schéma (6.22).

Schéma (6.23)	Côté interpolant	Côté approximant	Frontières communes
Figures	6.13 – (a, b, c, d, e, f, g, h) 6.16 – (a, b, c), 6.17 – (f, g, h)	6.15 – (f, g, h), 6.17 – (g, f)	6.14 – (a, d, e), 6.17 – (e), 6.19 – (b, c)

TABLE 6.5 – Les règles de subdivision particulières du schéma (6.23).

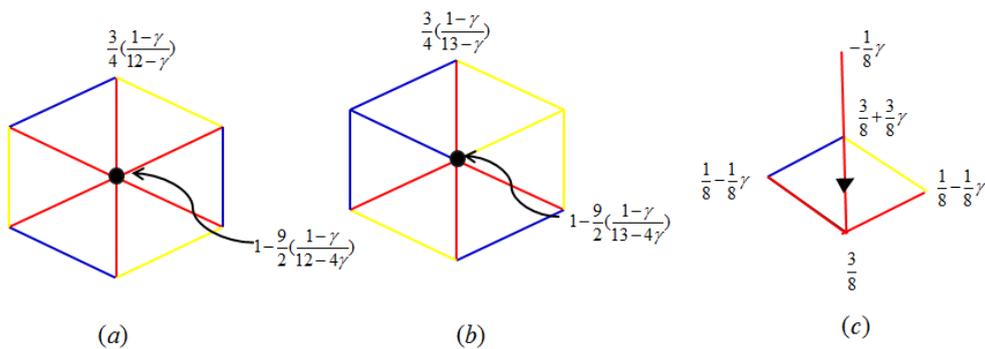


FIGURE 6.19 – Différentes règles de subdivision particulières des schémas (6.22) et (6.23).

## 6.4/ CONTINUITÉ $C^m$

Les schémas de subdivision que nous allons étudier ici sont définis en fonction de deux schémas de subdivision linéaires sur deux ou plusieurs zones séparées de la grille dont on connaît déjà les continuités et la continuité dans les zones de raccord éloignées du point de contrôle central. Dans cette section, nous nous intéressons aux conditions nécessaires et suffisantes de la continuité  $C^m$  de ces schémas de subdivision autour d'un point de contrôle central régulier (voir figure 6.20).

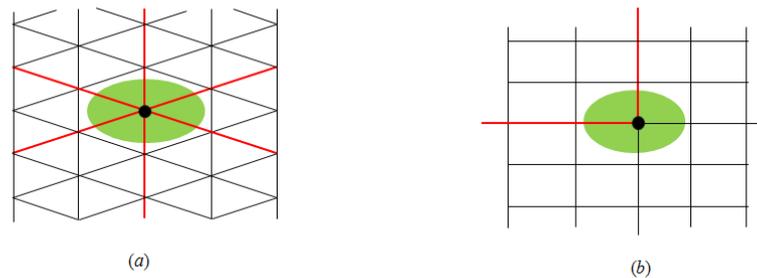


FIGURE 6.20 – Situation autour d'un point central.

### 6.4.1/ CONDITIONS NÉCESSAIRES

Pour vérifier les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  de ces schémas de subdivision au point de contrôle central, nous définissons des matrices de subdivision qui contiennent tous les points de contrôle de la surface qui influencent ce point de contrôle après un pas de subdivision. Pour les schémas de subdivision quasi-linéaires présentés dans ce chapitre nous choisissons un ensemble de 49 points pour les schémas définis sur les maillages 4-réguliers et de 61 points pour les schémas définis sur les maillages 6-réguliers. Puis, nous calculons les valeurs propres de ces matrices. Si les valeurs propres vérifient les conditions de la proposition 14 alors nous concluons que les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  sont satisfaites. Les valeurs propres et les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  de différents schémas quasi-linéaires présentés précédemment sont données dans les tableaux 6.6 et 6.7.

Schémas	Valeurs propres	Continuité $C^m$
Schéma (6-11)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} <  \lambda_i , i = 3, \dots, 48.$	$C^1$
Schéma (6-12)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} <  \lambda_i , i = 6, \dots, 48.$	$C^2$
Schéma (6-13)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} <  \lambda_i , i = 3, \dots, 48.$	$C^1$
Schéma (6-14)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} <  \lambda_i , i = 3, \dots, 48.$	$C^1$

TABLE 6.6 – Les valeurs propres et les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  des schémas quasi-linéaires définis sur une grille 4-régulière.

Schémas	$\gamma$	Valeurs propres	Continuité $C^m$
Schéma (6.17) à (6.19)	$\gamma = 0$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} <  \lambda_i , i = 6, \dots, 60.$	$C^2$
Schéma (6.20) et (6.21)	$\gamma = 0$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} <  \lambda_i , i = 3, \dots, 60.$	$C^1$
Schéma (6.22) et (6.23)	$\gamma = 0$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} <  \lambda_i , i = 6, \dots, 60.$	$C^2$
Schéma (6.17) à (6.23)	$\gamma = \frac{1}{2}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} <  \lambda_i , i = 3, \dots, 60.$	$C^1$

TABLE 6.7 – Les valeurs propres et les conditions nécessaires de la continuité  $C^m$  des schémas quasi-linéaires définis en fonction d'un paramètre  $\gamma$  sur une grille 6-régulière.

### 6.4.2/ CONDITIONS SUFFISANTES

Ici nous n'abordons que les conditions suffisantes de la continuité  $C^m$  des schémas quasi-linéaires définis dans un des cas présentés dans les figures 6.4 et 6.6 au point de contrôle central. Autrement dit dans les cas où nous n'avons que deux frontières communes entre les zones d'application des deux schémas linéaires. Pour vérifier les conditions suffisantes de ces schémas de subdivision, nous fixons deux arêtes de la frontière commune adjacentes au point de contrôle central. Compte tenu de la symétrie et de l'invariance de reparamétrisation, nous supposons que la première arête est située sur l'axe  $y$ . Puis, nous définissons deux matrices de subdivision  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  de sorte qu'après un pas de subdivision les deux matrices devraient contenir tous les points de contrôle de la surface qui influencent les deux arêtes. Dans ce cas les deux matrices de subdivision sont définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^1 : L \rightarrow L \\ \mathcal{M}^2 : L \rightarrow \zeta' L \end{cases}$$

où  $L \subseteq X_{(A_\alpha, A_\beta)}$  est défini par :

$$L = \{(i_1, j_1), \dots, (i_{|L|}, j_{|L|})\},$$

et  $\zeta'$  est un opérateur de translation donné par :

$$\zeta' L = \{(i + \theta, j + 1), (i, j) \in L\},$$

avec :

- $\theta = 1$ , si la deuxième arête est sur la moitié gauche de la grille (voir figure 6.21).
- $\theta = 0$ , si la deuxième arête est sur l'ax  $y$ .
- $\theta = -1$ , si la deuxième arête est sur la moitié droite de la grille.

Les ensembles de points  $L$  et  $\zeta' L$  qui déterminent les deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  de différents schémas sont donnés dans le tableau 6.8.

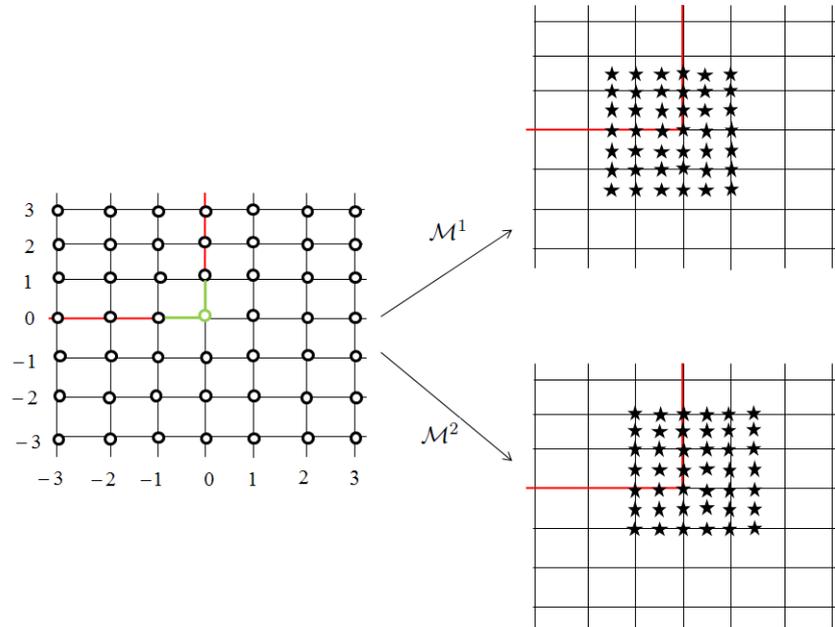


FIGURE 6.21 – A gauche : l'ensemble de points  $L$  qui représente un sous ensemble de la grille 4-régulière quad ( $\circ$ , les points de contrôle qui déterminent l'ensemble de points  $L$ , les deux droites rouges représentent les frontières communes, en vert les deux arêtes de la frontière adjacente au point central). A droite, l'ensemble de point  $L$  après un pas de subdivision (les étoiles représentent les 49 points de contrôle des deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$ ).

Schémas	Ensembles $L$	Ensembles $\zeta' L$
(6-11)	$\{(i, j), i \in \llbracket -3, 3 \rrbracket, j \in \llbracket -3, 3 \rrbracket\}$	$\{(i+1, j+1), (i, j) \in L\}$
(6-12)	$\{(i, j), i \in \llbracket -3, 3 \rrbracket, j \in \llbracket -3, 3 \rrbracket\}$	$\{(i, j+1), (i, j) \in L\}$
(6-13)	$\{(i, j), i \in \llbracket -3, 3 \rrbracket, j \in \llbracket -3, 3 \rrbracket\}$	$\{(i-1, j+1), (i, j) \in L\}$
(6-17)	$\{(i, j - \frac{1}{2}i), i \in \llbracket -3, 2 \rrbracket, j \in \llbracket -4, 4 \rrbracket\}$	$\{(i+1, j'+1), (i, j') \in L\}$
(6-18)	$\{(i, j + \frac{1}{2}i), i \in \llbracket -3, 2 \rrbracket, j \in \llbracket -4, 4 \rrbracket\}$	$\{(i+1, j'+1), (i, j') \in L\}$
(6-19)	$\{(i, j - \frac{1}{2}i), i \in \llbracket -3, 0 \rrbracket, j \in \llbracket -4, 4 \rrbracket\} \cup$ $\{(i, j + \frac{1}{2}i), i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, j \in \llbracket -4, 4 \rrbracket\}$	$\{(i, j'+1), (i, j') \in L\}$
(6-20)	$\{(i, j - \frac{1}{2}i), i \in \llbracket -2, 3 \rrbracket, j \in \llbracket -4, 4 \rrbracket\}$	$\{(i-1, j'+1), (i, j') \in L\}$
(6-21)	$\{(i, j + \frac{1}{2}i), i \in \llbracket -2, 3 \rrbracket, j \in \llbracket -4, 4 \rrbracket\}$	$\{(i-1, j'+1), (i, j') \in L\}$

TABLE 6.8 – Les ensembles de points  $L$  et  $\zeta' L$  qui déterminent les deux matrices  $\mathcal{M}^1$  et  $\mathcal{M}^2$  de différents schémas quasi-linéaires.

Ensuite, nous appliquons le test du rayon spectral conjoint exposé dans la section 5.2.2. Si le rayon spectral conjoint vérifie la relation :

$$\rho^{[k]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2^m},$$

nous concluons que le schéma est de continuité  $C^m$  sur la frontière commune au voisinage du point central. Le rayon spectral conjoint et la continuité de schémas quasi-linéaires sur un maillage 4-régulier (resp. 6-régulier) sont donnés dans le tableau 6.9. (resp. 6.10).

Schémas	Rayon spectral conjoint	Continuité $C^m$
Schéma (6.11)	$\rho^{[6]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2}$	$C^1$
Schéma (6.12)	$\rho^{[17]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{4}$	$C^2$
Schéma (6.13)	$\rho^{[8]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2}$	$C^1$

TABLE 6.9 – Le rayon spectral conjoint et la continuité  $C^m$  de quelques schémas quasi-linéaires sur un maillage 4-régulier.

Schémas	$\gamma$	Rayon spectral conjoint	Continuité $C^m$
Schéma (6.17)	0	$\rho^{[10]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{4}$	$C^2$
Schéma (6.18)	0	$\rho^{[16]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{4}$	$C^2$
Schéma (6.19)	0	$\rho^{[14]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{4}$	$C^2$
Schéma (6.20)	0	$\rho^{[5]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2}$	$C^1$
Schéma (6.21)	0	$\rho^{[9]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2}$	$C^1$
Schémas (6.17) à (6.21)	$\frac{1}{2}$	$\exists k/\rho^{[k]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2}$	$C^1$

TABLE 6.10 – Le rayon spectral conjoint et la continuité  $C^m$  de quelques schémas quasi-linéaires sur un maillage 6-régulier (pour  $\gamma = 0, \frac{1}{2}$ ).

À partir des conditions nécessaires et suffisantes de la continuité  $C^m$  autour d'un point central présentés dans les tableaux 6.6, 6.7, 6.9 et 6.10, nous concluons que :

- Les schémas quasi-linéaires sur la grille 4-régulière sont de continuité  $C^2$  dans le cas bi-régulier (deux zones interpolantes et deux zones approximantes) et  $C^1$  dans les autres cas.
- Pour  $\gamma = 0$ , les schémas quasi-linéaires sur la grille 6-régulière sont de continuité  $C^2$  si le nombre de zones d'application du schéma interpolant est inférieur ou égal au nombre de zones d'application du schéma interpolant et  $C^1$  dans les autres cas.
- Pour  $\gamma = \frac{1}{2}$  tous les schémas définis sur la grille 6-régulière sont de continuité  $C^1$ .

Nous rappelons que dans le cas où nous avons plus que deux frontières communes sur la grille, on ne peut rien dire sur les conditions suffisantes de la classe de continuité.

## 6.5/ SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRES SUR UNE GRILLE $n$ -RÉGULIÈRE ( $n \neq 4, 6$ )

Dans cette section nous généralisons les schémas de subdivision présentés précédemment à des maillages  $n$ -réguliers avec  $n \neq 4$  dans le cas quad/quad et  $n \neq 6$  dans le cas triangle/triangle. Généraliser ces schémas de subdivision à des maillages irréguliers

revient à proposer des règles de subdivision adaptées à ces types de maillages. En expérimentant avec différents cas irréguliers (différents choix de la valence  $n$  d'un point central), nous avons constaté que les règles de subdivision au voisinage de ce point sont données dans un des cas exposés précédemment. Il nous reste à proposer une règle d'un point central dans le cas général (valence quelconque). Pour cela, nous utilisons une relation simple entre le poids du sommet intérieur et les poids des sommets qui forment son voisinage direct.

### 6.5.1/ SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRES SUR UNE GRILLE $n$ -RÉGULIER QUAD

Considérons la situation d'un point de contrôle central  $p_{0,0}$  donnée dans la figure 6.22 et supposons que le nouveau point pair  $(Sp)_{0,0}$  est donné par l'équation suivante :

$$(S_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)}p)_{0,0} = \beta p_{-1,1} + \beta p_{-1,0} + \beta p_{-1,-1} + \beta p_{0,1} + \alpha p_{0,0} + \beta p_{0,-1} + \beta p_{1,1} + \beta p_{1,0} + \beta p_{1,-1}. \quad (6.53)$$

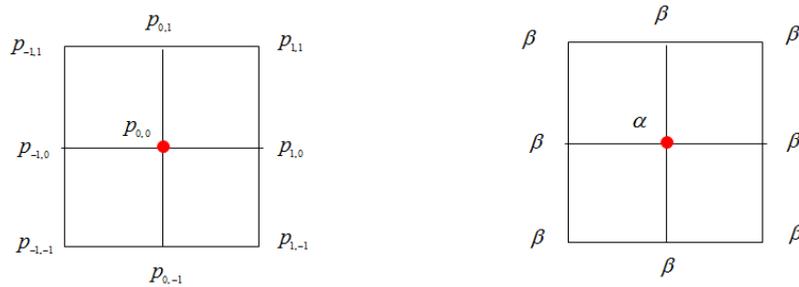


FIGURE 6.22 – Situation générale pour un point de contrôle ordinaire au point central  $(0,0)$ .

Les poids de cette règle de subdivision sont calculés à partir de la définition et du choix de l'opérateur quasi-interpolant  $(Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)})$  sur la grille 4-régulière  $\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)$ , de sorte que la condition (6.32) soit satisfaite sur l'espace des polynômes de degré 2. Dans ce cas l'opérateur quasi-interpolant  $(Q_{|\cup_{i=1}^4(\Gamma_i)})$  est défini comme dans l'équation (6.27). Compte tenu de la définition de cet opérateur, les règles de subdivision particulières sont trouvées à partir de l'équation (6.53), pour  $k = |k_1 + k_2| = 2$  qui représente un système d'équations. À partir des trois premiers cas qui définissent les trois schémas (6.11) à (6.13) (section 6.4.1) nous aurons les trois systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 13 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

où les relations (6.54) à (6.56) sont les équations qui déterminent les poids des règles présentées dans les figures 6.9-(a), 6.9-(b) et 6.11-(c) respectivement. À partir des équations (6.54) à (6.56), nous pouvons introduire un paramètre  $\iota$  qui représente le nombre des points de contrôle qui forment le voisinage direct d'un point intérieur et qui appartient aux zones d'application du schéma interpolant de sorte que :

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 10 + \iota & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

La solution de ce système est donnée par :

$$\begin{cases} \beta = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{18 + \iota} \right) \\ \alpha = \frac{12 + \iota}{18 + \iota} \end{cases} \quad (6.58)$$

Pour  $\iota = 1, 2, 3$  et par substitution dans l'équation (6.58), nous trouvons les poids des règles présentées dans les figures 6.9-(a,b,c), 6.11-(a,c) et 6.12-(a,b). Afin de généraliser la règle d'un point pair central à une grille  $n$ -quad régulière ( $n \neq 4$ ) (valence quelconque), nous considérons la situation d'un point de contrôle  $p_{0,0}$  donnée dans la figure 6.23 de sorte que :

$$\alpha = 1 - 2n\beta. \quad (6.59)$$

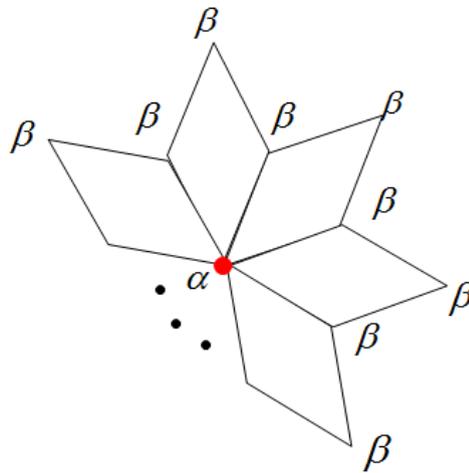


FIGURE 6.23 – Situation générale pour un point de contrôle extraordinaire au point central  $(0,0)$ .

À partir de l'équation (6.58) nous avons :

$$\beta = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{12 + \iota} \right) \alpha \quad (6.60)$$

À partir des deux équations (6.59) et (6.60), nous aurons :

$$\begin{cases} \beta = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{24+2t+3n} \right) \\ \alpha = \frac{24+2t}{24+2t+3n} \end{cases} \quad (6.61)$$

### SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRES SUR UNE GRILLE $n$ -TRIANGLE

Comme dans le cas précédent, nous considérons la situation d'un point de contrôle central  $p_{0,0}$  donnée dans la figure 6.24. La formule de la règle qui détermine le nouveau point pair  $(Sp)_{0,0}$  est donnée par l'équation suivante :

$$(S_{|\cup_{i=1}^6(\Gamma'_i)}p)_{0,0} = \beta' p_{-1, \frac{1}{2}} + \beta' p_{-1, -\frac{1}{2}} + \beta' p_{0,1} + \alpha' p_{0,0} + \beta' p_{0,-1} + \beta' p_{1, \frac{1}{2}} + \beta' p_{1, -\frac{1}{2}}, \quad (6.62)$$

avec :

$$\alpha' = 1 - 6\beta'. \quad (6.63)$$

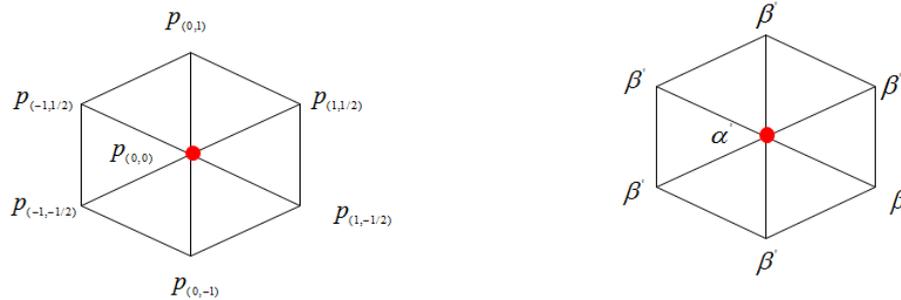


FIGURE 6.24 – Situation générale pour un point de contrôle ordinaire au point central  $(0,0)$ .

À partir des règles de subdivision des points pairs intérieurs données dans les figures 6.14-(a,b,c), 6.16-(f), 6.17-(d) et 6.18-(g), nous pouvons montrer que :

$$\begin{cases} \beta' = \frac{3}{4} \left( \frac{1-\gamma}{12+t-4\gamma} \right) \\ \alpha' = 1 - \frac{9}{2} \left( \frac{1-\gamma}{12+t-4\gamma} \right) \end{cases} \quad (6.64)$$

où  $t$  est le nombre des points de contrôle qui forment le voisinage direct d'un point intérieur et qui appartient aux zones d'application du schéma interpolant.

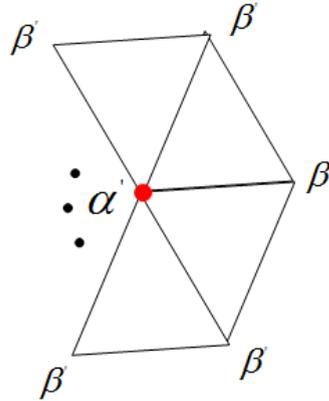


FIGURE 6.25 – Situation générale pour un point extraordinaire au point central  $(0,0)$ .

Pour la généralisation de la règle du point pair intérieur à une grille  $n$ -régulière triangle ( $n \neq 6$ , valence quelconque), nous considérons la situation du point de contrôle  $p_{0,0}$  donnée dans la figure 6.25 de sorte que :

$$\alpha' = 1 - n\beta'. \tag{6.65}$$

À partir de l'équation (6.64) nous pouvons montrer la relation suivante entre les poids  $\alpha'$  et  $\beta'$  :

$$\beta' = \frac{3}{2} \left( \frac{1-\gamma}{15+\gamma+2t} \right) \alpha', \tag{6.66}$$

À partir des deux équations (6.65) et (6.66), nous avons :

$$\begin{cases} \beta' = \frac{3(1-\gamma)}{30+2\gamma+4t+3n(1-\gamma)} \\ \alpha' = 1 - \frac{3n(1-\gamma)}{30+2\gamma+4t+3n(1-\gamma)} \end{cases} \tag{6.67}$$

## 6.6/ RÉSULTATS

La figure 6.26, représente les surfaces créées à l'aide de l'application d'un schéma quasi-linéaire sur un maillage 4-régulier quad qui unifie le schéma interpolant de Kobbelt et le schéma approximant de Catmull-Clark. Ce schéma est défini par le schéma de Kobbelt sur une zone régulière du maillage et par le schéma de Catmull-Clark sur les trois zones restants. La surface limite de ce schéma quasi-linéaire est de continuité  $C^2$  dans les zones d'application du schéma de Catmull-Clark (les zones en jaune) ainsi que sur les frontières communes intérieurs (en rouge) excepté le point central, et de continuité  $C^1$  dans la zone d'application du schéma de Kobbelt (la zone en bleu) et au point central. L'ordre d'approximation de ce schéma de subdivision est maximal dans la zone d'application du schéma de Kobbelt et optimal sur les frontières communes et les zones d'application du schéma de Catmull-Clark.

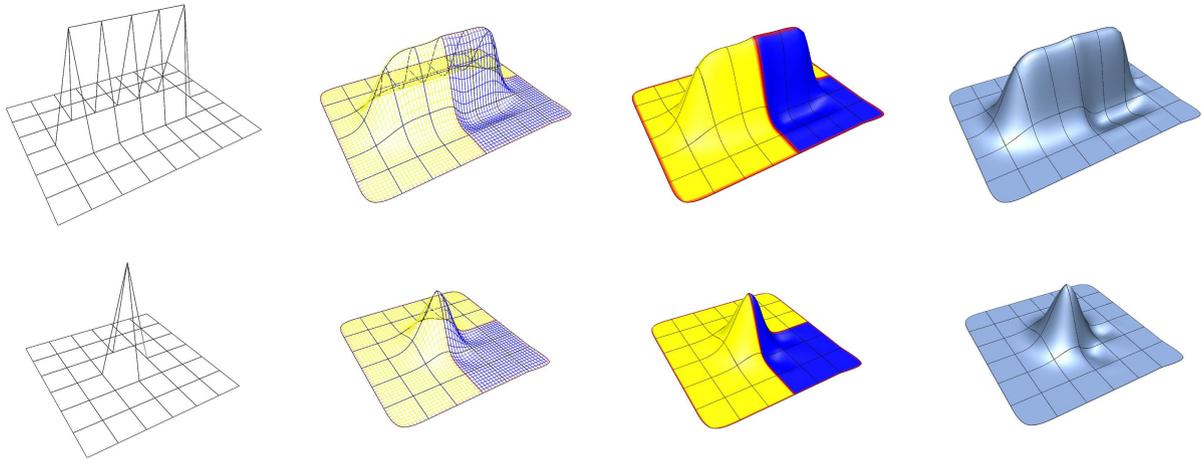


FIGURE 6.26 – Exemple d'un schéma quasi-linéaire sur un maillages 4-régulier (schéma (6.11)). De gauche à droite : les mailles de contrôle, des mailles de couleur (jaune pour les zones d'application du schéma de Catmull-Clark, bleu pour les zones d'application du schéma de Kobbelt), les surfaces limites avec les deux zones en bleu et jaune et les frontières en rouge, et les surfaces limites.

La figure 6.27, représente les surfaces créées à l'aide de l'application de différents schémas quasi-linéaires sur un maillage 5-régulier quad. Dans cette figure le maillage de départ contient un seul point irrégulier (valance 5). Les schémas quasi-linéaires sont définis par le schéma interpolant de Kobbelt sur certains zones régulières du maillage et par le schéma approximant de Catmull-Clark sur d'autres zones. Dans cette figure, nous avons appliqué les schémas approximant et interpolant de la façon suivant :

- a) le schéma approximant sur une zone et le schéma interpolant sur trois zones.
- b) le schéma approximant sur trois zones et le schéma interpolant sur deux zones.
- c) le schéma approximant sur quatre zones et le schéma interpolant sur une zone

L'application de chaque schéma quasi-linéaire donne une forme différente à la surface limite. En effet, dans les lignes des images a) et b), nous distinguons clairement les zones d'application des deux schémas approximant et interpolant, et nous trouvons toutes les caractéristiques des deux types de surfaces générées par des schémas interpolants d'un côté et des schémas approximants d'un autre (bon ordre d'approximation et continuité faible d'un côté, et bonne continuité et ordre d'approximation faible d'un autre). Dans la ligne des images c), la forme générale de la surface limite est plus proche de la forme de la surface limite générée par l'application du schéma de Catmull-Clark (ligne d)) même si la surface limite est de continuité  $C^1$  dans la zone d'application du schéma interpolant.

Dans la figure 6.28, les images présentent les surfaces limites générées par l'application des schémas quasi-linéaires sur un maillage 7-régulier quad et les lignes de réflexion et montrent la bonne qualité de la surface générées par ces schémas sur les frontières communes.

## 6.7/ CONTINUITÉ AUTOUR D'UN POINT CENTRAL IRRÉGULIER

Dans les sections précédentes, nous avons proposé des règles pour les points de contrôles centraux irréguliers. L'étude de la continuité au voisinage de ces points de contrôle dépend de la valence de ces derniers et du nombre de zones d'application des deux schémas linéaires. Nous n'avons fourni aucune preuve formelle de la continuité au voisinage de ces points. Cependant, nous avons étudié les valeurs propres de quelques un de ces schémas de subdivision. L'étude que nous avons menée concerne les schémas quasi-linéaires quad/quad (resp. triangle/triangle) pour des valeurs de valence  $n = 5, \dots, 10$  (resp.  $n = 7, \dots, 10$ ), dans le cas où nous avons deux zones d'application d'un schéma interpolant sachant que les deux zones sont adjacentes à une frontière commune. Les valeurs propres de ces schémas de subdivision vérifient les conditions nécessaires de la continuité  $C^1$ , présentées par D. Zorin dans [Zorin 2000a]. De plus, les cartes caractéristiques semble être régulières et injectives. Quelques unes de ces cartes sont présentées dans la figure 6.29.

Enfin, l'étude menée dans ce chapitre et le chapitre 5, montrent que les schémas quasi-linéaires triangle/triangle donnent de meilleurs résultats que les schémas quasi-linéaires quad/quad. Il reste cependant à donner des exemples qui montrent la qualité visuelle des surfaces limites générées par ces schémas de subdivision afin de confirmer ces résultats.

## 6.8/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons généralisé la définition des schémas quasi-linéaires à des maillages quadrangulaires (resp. triangulaires) réguliers. Cette généralisation nous a permis de construire de nombreux schémas intéressants applicables sur des maillages réguliers. La méthode que nous avons utilisée pour construire ces schémas de subdivision est la même que celle utilisée lors de la construction des schémas quasi-linéaires sur des maillages bi-réguliers (chapitre précédent). Ensuite, nous avons adapté le test du rayon spectral conjoint afin de l'appliquer pour vérifier la classe de continuité de ces schémas de subdivision.

Enfin, nous avons proposé une méthode permettant de généraliser les règles de subdivision des schémas quasi-linéaires à des maillages irréguliers. Cette méthode est basée sur une relation simple entre les poids d'une règle point pair central et les poids des points de contrôle qui forment son voisinage direct.

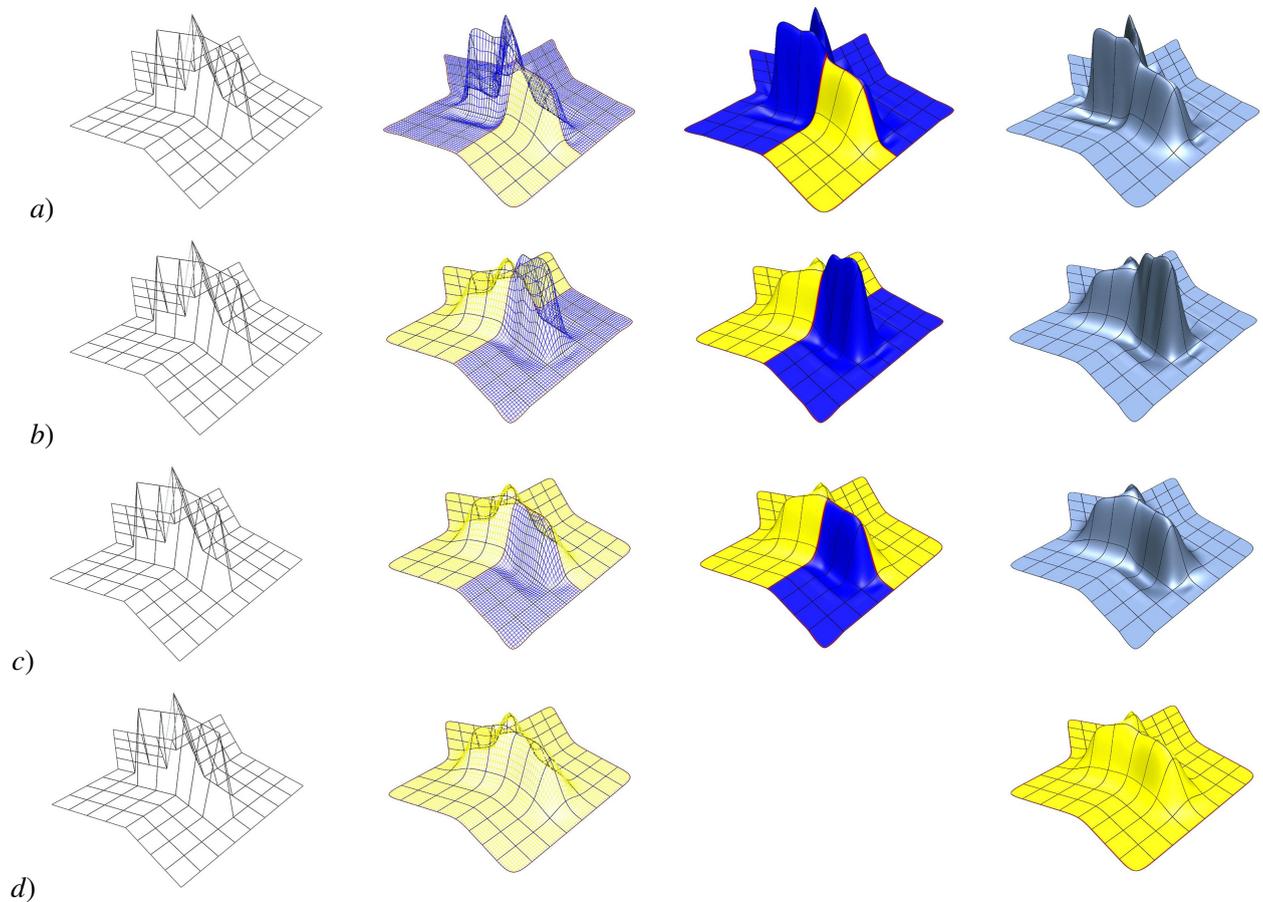


FIGURE 6.27 – Différents schémas quasi-linéaires sur un maillage 5-régulier quad (valance 5) et comparaison avec le schéma de Catmull-Clark. De gauche à droite : le maillage 5-régulier quad, des mailles de couleur (jaune pour les zones d'application du schéma de Catmull-Clark, bleu pour les zones d'application du schéma de Kobbelt), les surfaces limites avec les deux zones en bleu et jaune et les frontières en rouge, et les surface limites. a) schéma quasi-linéaire avec une zone approximante et quatre zones interpolantes. b) schéma quasi-linéaire avec trois zone approximantes et deux zones interpolantes. b) schéma quasi-linéaire avec quatre zone approximantes et une zone interpolantes. c) schéma de Catmull-Clark sur un maillage 5-régulier quad.

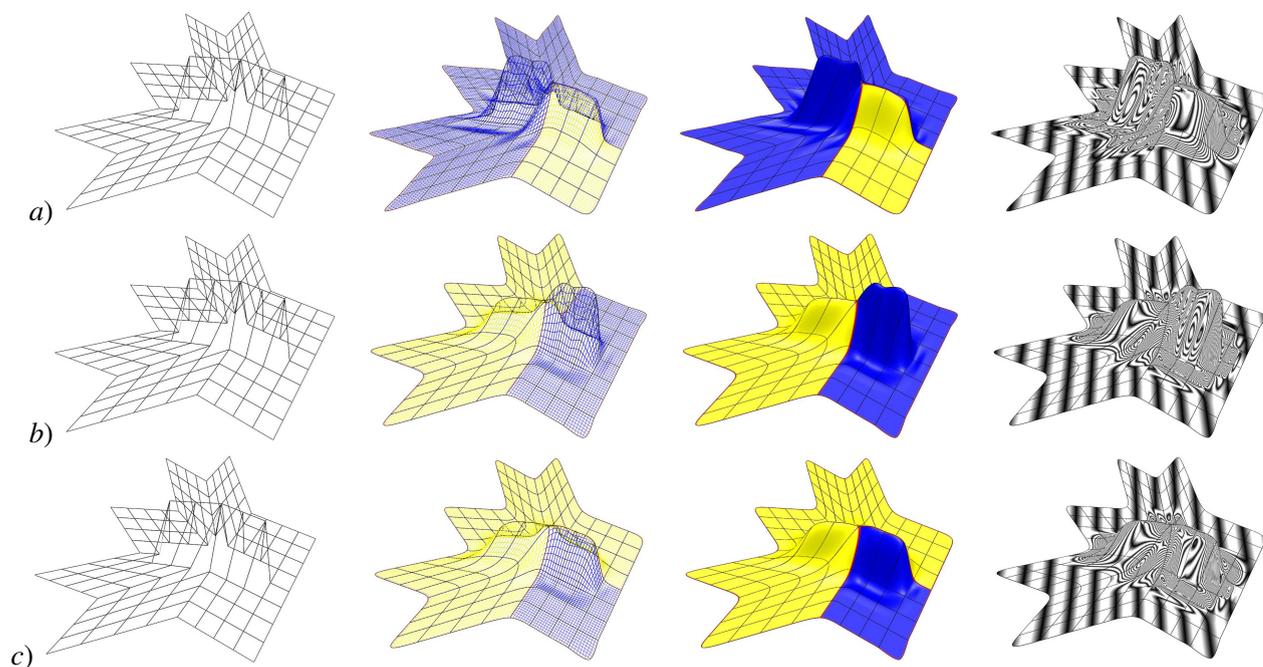


FIGURE 6.28 – Différents schémas quasi-linéaires sur un maillage 7-régulier quad (valance 7). De gauche à droite : le maillage 7-régulier quad, des mailles de couleur (jaune pour les zones d'application du schéma de Catmull-Clark, bleu pour les zones d'application du schéma de Kobbelt), les surfaces limites avec les deux zones en bleu et jaune et les frontières en rouge, et les lignes de réflexion.

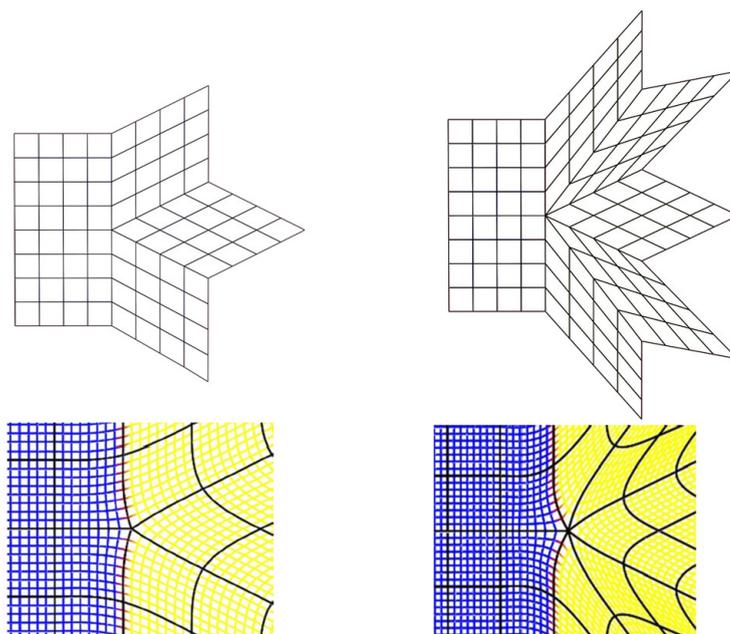


FIGURE 6.29 – Deux cartes caractéristiques au voisinage de deux points de contrôle centraux irréguliers de valence 5 et 7.



## SUBDIVISION INVERSE



# SUBDIVISION INVERSE QUAD/TRIANGLE (MIXTE)

## 7.1/ INTRODUCTION

Les procédés de subdivision inverse sont par nature des algorithmes récursifs. La méthode débute à partir d'un maillage fin donné  $M^{k+1} = (F^{k+1}, (S^k p))$ . Un schéma de subdivision inverse  $T : (S p) \in l(\mathbb{Z}^s) \mapsto (p) \in l(\mathbb{Z}^s)$  est alors appliqué à ce maillage afin de recréer le maillage grossier  $M^k = (F^k, p^k)$ . La position des points  $p^k$  au niveau  $k$  de subdivision est calculée à partir de celles des points au niveau  $k + 1$  de subdivision.

Les études menées dans les chapitres précédents ont montré que les schémas de subdivision quad/triangle, malgré de nombreux avantages, présentent aussi quelques défauts à cause de leurs supports trop larges. En effet, cet inconvénient rend difficile l'utilisation des méthodes classiques pour trouver les formules inverses d'un schéma de subdivision.

Dans cette partie, nous présentons une nouvelle méthode basée sur les théories de la reproduction des polynômes afin de déterminer les formules inverses pour certains schémas de subdivision linéaires et quad/triangle. Dans ce chapitre nous allons montrer la relation suivante :

$$TSQ = Q \Leftrightarrow TQ = Q\sigma^{(-1)}, \quad (7.1)$$

où  $\sigma^{(-1)}$  est l'opérateur de dilatation inverse défini par :  $\sigma^{(-1)}f(\cdot) = f(2\cdot), \forall f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ .

Dans un premier temps, nous supposons qu'il existe un opérateur de subdivision inverse  $T$ . Puis nous montrons comment l'identification des relations entre  $T$ ,  $S$  et  $Q$  peuvent être appliquées pour inverser les schémas de subdivision linéaires et mixtes (quad/triangle).

La relation  $TQ = Q\sigma^{(-1)}$  est considérée comme une équation linéaire où l'inconnue est l'opérateur de subdivision inverse  $T$ . La solution de cette équation donne les masques des schémas de subdivision linéaires inverses (B-splines cubique, Catmull-Clark, et Loop). La même méthode peut être utilisée pour calculer différents masques de subdivision inverse mixtes.

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler les notions ainsi que l'état de l'art de la subdivision inverse linéaire. Nous nous intéressons plus particulièrement aux travaux de S. Lanquetin et M. Neveu [Lanquetin 2006], afin de proposer une autre formule du schéma inverse de Catmull-Clark. Nous verrons également que la méthode utilisée pour inverser les schémas de subdivision linéaires ne peut pas être appliquée pour inverser

des schémas de subdivision à supports trop larges. Par la suite, nous proposons une nouvelle méthode pour inverser des schémas de subdivision linéaires et mixtes et nous donnons des exemples d'application.

## 7.2/ SUBDIVISION INVERSE : ÉTAT DE L'ART

Récemment, l'étude et la construction des schémas de subdivision inverse ont trouvé leurs motivations dans le besoin de représenter des maillages grossiers, en conservant les propriétés du maillage de subdivision précédent. Cette approche autorise de nombreuses extensions : la simplification du maillage, la déformation du modèle polyédrique, la compression des données du modèle polyédrique et la construction d'un modèle simplifié basse résolution. En appliquant un schéma de subdivision sur un maillage de contrôle, la surface de subdivision converge vers une surface paramétrique. Le principe de subdivision inverse représente la multirésolution entre le modèle paramétrique et le modèle polyédrique. Après les deux premiers articles de [D. Zorin 1997] et [DeRose 1997], qui décrivent la représentation en multirésolution d'un maillage triangulaire basé sur le schéma de subdivision de Loop, la construction des schémas de subdivision inverse ont attiré l'attention. En se basant sur la représentation en multirésolution, de nombreux travaux de construction des schémas de subdivision inverse sont proposés : Samavati et al [Samavati 1999] et Hassan et al [Hassan 2005] ont présenté une méthode pour inverser le schéma de Chaikin. Les travaux de Hassan et al sont étendus à la construction d'un masque inverse basé sur le principe de subdivision de Loop [Hassan 2005]. En se basant sur la méthode décrite dans [Samavati 1999], les mêmes auteurs ont proposé les masques inverse du schéma de Doo-Sabin [Samavati 2002]. Chen et al ont proposé une méthode pour inverser le schéma interpolant  $\sqrt{3}$  permettant la compression d'un maillage triangulaire arbitraire [Chen]. Une méthode progressive a été construite pour stocker des maillages dans un environnement réseau. Samavati et Bartels ont présenté des masques dans le cas régulier (valence six) afin d'inverser les schémas de Butterfly et de Loop [Samavati 2006]. Par la suite Samavati et al, ont généralisé le masque inverse du schéma de Loop pour les points ordinaires et extraordinaires [Samavati 2007]. Ces masques de subdivision inverse peuvent être utilisés pour les maillages géométriques et pour les coordonnées de texture. S. Lanquetin et M. Neveu ont présenté des formules générales permettant de recréer les maillages grossiers issus de la subdivision inverse de Catmull-Clark [Lanquetin 2006]. Dans ces travaux, les auteurs ont considéré les cas de subdivision inverse pour les points ordinaires et extraordinaires d'un maillage quelconque. Récemment, Samavati et al ont introduit une approche de la subdivision inverse utilisant les opérations de décomposition et de reconstruction pour la représentation de la multirésolution d'un maillage géométrique [Samavati 2009]. Les formules de décomposition par la subdivision inverse sont construites en se basant sur le principe des moindres carrés.

## 7.3/ DÉFINITIONS ET PRINCIPE GÉNÉRAL

**Définition 23 (Maillage de subdivision inverse)** *Un maillage de subdivision  $M^k$  est un maillage polyédrique à l'étape de subdivision  $k$  ( $k \geq 1, k \in N$ ). Ce maillage est défini par un ensemble de points de contrôle  $p^k$  muni de la topologie induite par le maillage*

$M^k$  auquel il est associé. Pour  $s = 2$ , le maillage de subdivision à l'étape  $k$  peut être défini par l'ensemble  $M^k = (F^k, p^k)$  où  $F^k$  représentent les faces du maillage  $M^k$ , et  $p^k$  représentent l'ensemble des points de contrôle de  $M^k$ . Le processus de la subdivision inverse représente progressivement une suite de maillages intermédiaires, d'un maillage dense  $M^k$  vers un maillage plus grossier :

$$M^k \rightarrow M^{k-1} \rightarrow M^{k-2} \rightarrow \dots M^1 \rightarrow M^0.$$

**Définition 24 (Subdivision inverse)** La subdivision inverse est un processus de décomposition d'un maillage de subdivision en un maillage grossier à l'étape de subdivision précédente. Un schéma de subdivision inverse à l'étape  $k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) est une suite d'opérateurs  $\{(S^k)^{-1}\}$  qui calculent inversement un ensemble de points  $(S p^k) \in M^{k+1}$ , afin de recréer un ensemble de points de contrôle  $p^k \in M^k$ . C'est-à-dire que pour un ensemble de points de contrôle  $(S p^k)$  de  $M^{k+1}$ , on définit un ensemble de points de contrôle  $p^k$  de  $M^k$  par l'application d'un opérateur de subdivision inverse  $T \in l(\mathbb{Z}^s)$  :

$$p^k = T(S p^k) \quad (7.2)$$

**Proposition 15** Soit  $\{(S p^k)_i, i = 0, \dots, l\}$  un ensemble de points de contrôle de  $M^{k+1}$  issu de l'application d'un schéma de subdivision à l'étape  $k + 1$ . Pour le processus inverse, il est nécessaire de construire un masque défini de  $p^{k+1}$  vers  $p^k$  afin de calculer les points inverses  $\{p_i^k, i = 0, \dots, n\}$ . Le nouveau masque doit satisfaire les conditions suivantes :

1. L'opération du nouveau masque doit être affine c'est-à-dire que la somme des poids qui forment le masque inverse est égale à 1.
2. Supposons que les poids d'une règle d'un schéma de subdivision sont donnés de façon symétrique, alors les poids qui forment le masque inverse de ce schéma de subdivision conservent la même symétrie.

## 7.4/ SCHÉMA INVERSE DE CATMULL-CLARK

Le principe du schéma de Catmull-Clark s'applique à des maillages quadrilatéraux mais les règles de subdivision sont généralisées à des maillages quelconques. Même si le maillage de départ n'est pas quadrilatéral, à partir de la première subdivision tous les maillages le deviennent. Les sommets issus d'un côté sont toujours de valence 4. Ceux issus d'un sommet conservent la même valence et les sommets générés par une face ont une valence correspondant au nombre de côtés de cette face. Ce principe permet de générer par produit tensoriel des surfaces B-splines bi-cubiques uniformes. S. Lanquetin et M. Neveu ont présenté les formules générales permettant de recréer les maillages grossiers de la subdivision inverse de Catmull-Clark [Lanquetin 2006]. Dans leurs travaux, les auteurs ont proposé un masque de subdivision inverse de Catmull-Clark pour les points ordinaires et extraordinaires d'un maillage quelconque. Mais ce masque ne peut pas être appliqué pour inverser d'autres schémas de subdivision quadrilatéraux tels que le schéma de Warren et Weimer [Warren 2002]. Dans ce qui suit, nous présentons deux formules inverses du schéma de Catmull-Clark. La première formule donnée dans [Lanquetin 2006] est définie sur un maillage quelconque alors que la deuxième est définie sur un maillage quadrangulaire. Cette deuxième formule peut être également utilisée pour inverser le schéma de Warren et Weimer [Warren 2002].

### 7.4.1/ SCHEMA DE CATMULL-CLARK INVERSE SUR UN MAILLAGE QUELCONQUE

Soit  $M^k = (F^k, p^k)$  un maillage de subdivision quelconque à l'étape  $k$ . Chaque face, arête ou point intérieur du maillage  $M^k$  peut produire un point du maillage  $M^{k+1} = (F^{k+1}, (Sp^k))$ . À l'étape  $(k + 1)$  de subdivision de Catmull-Clark, trois types de nouveaux points sont créés : les points faces, les points arêtes et les points pairs intérieurs (figure 7.1). Ces points sont notés  $f_i^{k+1}$ ,  $e_i^{k+1}$ ,  $(Sp^k)_i$  respectivement. Les nouveaux points du maillage  $M^{k+1}$  sont calculés de la façon suivante :

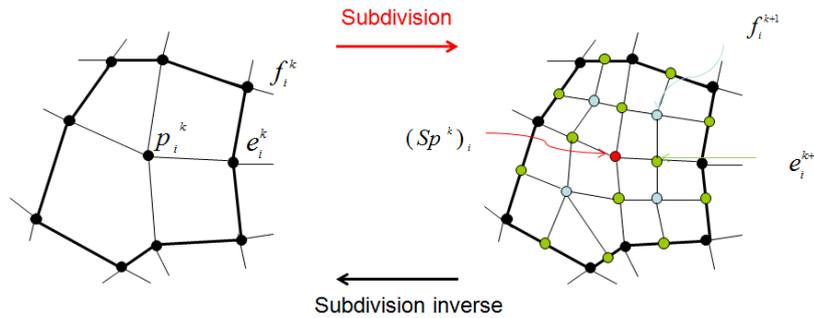


FIGURE 7.1 – La situation générale pour un point de contrôle extraordinaire  $p_i^k$  avant et après subdivision (maillage quelconque).

#### UN NOUVEAU POINT FACE $f_i^{k+1}$

Pour chaque face du maillage  $M^k$  un nouveau point face est créé en faisant la moyenne des  $n$  sommets du polygone :

$$f_i^{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^k. \quad (7.3)$$

#### UN NOUVEAU POINT ARÊTE $e_i^{k+1}$

Un point arête est créé en faisant la moyenne des extrémités de l'arête et des points faces adjacents nouvellement créés :

$$e_i^{k+1} = \frac{1}{4}(p_i^k + e_i^k + f_i^{k+1} + f_{i+1}^{k+1}). \quad (7.4)$$

#### UN NOUVEAU POINT PAIR INTÉRIEUR $(Sp^k)_i$

Un point intérieur est donné par la formule suivante :

$$(Sp^k)_i = \frac{n-2}{n} p_i^k + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n e_j^k + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n f_j^{k+1}. \quad (7.5)$$

### FORMULES DU SCHÉMA INVERSE DE CATMULL-CLARK SUR UN MAILLAGE QUELCONQUE

Soit  $M^{k+1} = (F^{k+1}, (Sp^k))$  un maillage issu de l'application du schéma de subdivision de Catmull-Clark à l'étape  $(k + 1)$ . Considérons la situation autour d'un point extraordinaire donnée dans la figure 7.1. À partir de cette figure, nous avons les nouveaux points  $(Sp^k)_i, f_i^{k+1}, e_i^{k+1}$  et nous voulons trouver la position du point intérieur  $p_i^k$  par un nouveau masque affine. La formule inverse du schéma de Catmull-Clark est donnée par :

$$p_i^k = \alpha' (Sp^k)_i + \beta' \sum_{i=1}^n e_i^{k+1} + \gamma' \sum_{i=1}^n f_i^{k+1}, \quad (7.6)$$

où  $\alpha', \beta', \gamma'$ , sont les poids de la règle inverse.

Afin de calculer les poids de cette règle inverse, nous remplaçons par les formules (7.3)-(7.5) dans l'équation (7.6) nous obtenons :

$$p_i^k = \left(\frac{(n-2)\alpha'}{n} + \frac{n\beta'}{4}\right)(Sp^k)_i + \left(\frac{\alpha'}{n^2} + \frac{\beta'}{4}\right) \sum_{i=1}^n e_i^{k+1} + \left(\frac{\alpha'}{n^2} + \frac{\beta'}{2} + \gamma'\right) \sum_{i=1}^n f_i^{k+1}. \quad (7.7)$$

Par comparaison, il suffira d'établir une égalité à partir de l'équation (7.7) :

$$\begin{cases} \frac{(n-2)\alpha'}{n} + \frac{n\beta'}{4} = 1 \\ \frac{\alpha'}{n^2} + \frac{\beta'}{4} = 0 \\ \frac{\alpha'}{n^2} + \frac{\beta'}{2} + \gamma' = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système d'équations est donnée par :

$$\forall n \neq 3, (\alpha', \beta', \gamma') = \left(\frac{n}{n-3}, -\frac{4}{n(n-3)}, \frac{1}{n(n-3)}\right),$$

et la formule inverse du schéma de Catmull-Clark est donnée par :

$$p_i^k = \left(\frac{n}{n-3}\right)(Sp^k)_i - \left(\frac{4}{n(n-3)}\right) \sum_{i=1}^n e_i^{k+1} + \left(\frac{1}{n(n-3)}\right) \sum_{i=1}^n f_i^{k+1}. \quad (7.8)$$

#### 7.4.2/ SCHÉMA DE CATMULL-CLARK SUR UN MAILLAGE QUADRANGULAIRE

Afin de généraliser la formule inverse de Catmull-Clark à d'autres schémas de subdivision quadrangulaires. Nous supposons que  $M^k = (F^k, p^k)$  est un maillage de subdivision quadrilatéral à l'étape  $k$ . Dans ce cas les nouveaux points du maillage  $M^{k+1}$  sont donnés par les formules suivantes :

$$(7.3) \Leftrightarrow f_i^{k+1} = \frac{1}{4}(p_i^k + e_i^k + e_{i+1}^k + f_i^k). \quad (7.9)$$

$$(7.4) \Leftrightarrow e_i^{k+1} = \frac{3}{8}p_i^k + \frac{3}{8}e_i^k + \frac{1}{16}e_{i+1}^k + \frac{1}{16}e_{i-1}^k + \frac{1}{16}f_{i-1}^k + \frac{1}{16}f_i^k. \quad (7.10)$$

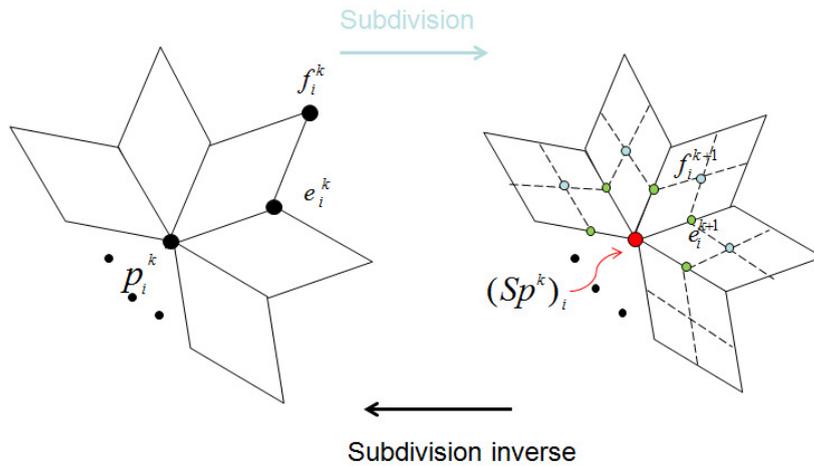


FIGURE 7.2 – La situation générale pour un point de contrôle extraordinaire  $p_i^k$  avant et après subdivision (maillage quadrangulaire).

$$(7.5) \Leftrightarrow (Sp^k)_i = \alpha p_i^k + \beta \sum_j e_j^k + \gamma \sum_j f_j^k, \quad (7.11)$$

avec :  $\alpha = 1 - n(\beta + \gamma)$ ,  $\beta = \frac{3}{2n^2}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4n^2}$ .

### FORMULES DU SCHÉMA INVERSE DE CATMULL-CLARK SUR UN MAILLAGE QUADRANGULAIRE

Soit  $M^{k+1} = (F^{k+1}, (Sp^k))$  un maillage issu de la subdivision de Catmull-Clark à l'étape  $k+1$ . Considérons la situation autour d'un point extraordinaire donnée dans la figure (7.2). Pour le processus inverse nous avons  $(Sp^k)_i, f_i^{k+1}, e_i^{k+1}$  et nous voulons trouver la position du point intérieur  $p_i^k$  par un nouveau masque affine. Nous supposons que la position du point intérieur  $p_i^k$  est donnée par :

$$p_i^k = \alpha' (Sp^k)_i + \beta' \sum_{i=1}^n e_i^{k+1} + \gamma' \sum_{i=1}^n f_i^{k+1}, \quad (7.12)$$

où  $\alpha', \beta', \gamma'$ , sont les poids de la règle inverse (voir figure 7.3). À partir des équations (7.9) à (7.12) nous obtenons :

$$p_i^k = (\alpha\alpha' + \frac{3}{8}\beta'n + \frac{1}{4}\gamma'n)(Sp^k)_i + (\alpha'\beta + \frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{2}\gamma') \sum_{i=1}^n e_i^{k+1} + (\alpha'\gamma + \frac{1}{8}\beta' + \frac{1}{4}\gamma') \sum_{i=1}^n f_i^{k+1}. \quad (7.13)$$

Par comparaison, il suffira d'établir une égalité à partir de l'équation (7.13) :

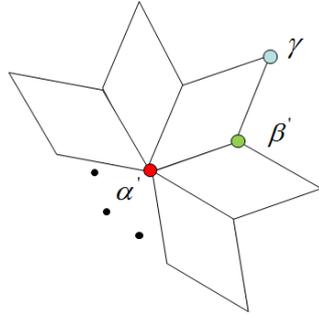


FIGURE 7.3 – Masque inverse de Catmull-Clark dans le cas général.

$$\begin{cases} \alpha' + \frac{3}{8}\beta' n + \frac{1}{4}\gamma' n = 1, \\ \alpha'\beta' + \frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{2}\gamma' = 0, \\ \alpha'\gamma' + \frac{1}{8}\beta' + \frac{1}{4}\gamma' = 0. \end{cases}$$

La solution de ce système d'équation, pour  $\alpha = 1 - n(\beta + \gamma)$ , est donnée par :

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{1}{1-2n\beta}, \\ \beta' = 4 \frac{2\gamma-\beta}{1-2n\beta}, \\ \gamma' = -2 \frac{4\gamma-\beta}{1-2n\beta}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Pour  $\beta = \frac{3}{2n^2}$  et  $\gamma = \frac{1}{4n^2}$ , la formule inverse de Catmull-Clark est donnée par :

$$p_i^k = \frac{n}{n-3} (Sp^k)_i - \frac{4}{n(n-3)} \sum_{i=1}^n e_i^{k+1} + \frac{1}{n(n-3)} \sum_{i=1}^n f_i^{k+1}, \quad (7.15)$$

et le masque inverse dans le cas régulier (pour  $n = 4$ ) est donné dans la figure 7.4.

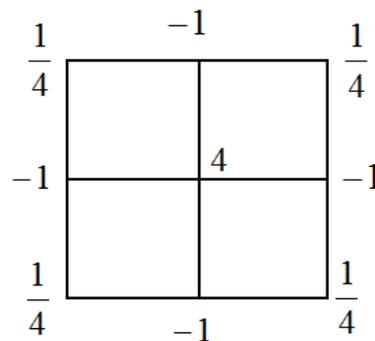


FIGURE 7.4 – Le masque inverse de Catmull-Clark dans le cas régulier.

La figure 7.5 illustre un exemple de la subdivision inverse de Catmull-Clark. La figure représente la surface limite et l'application de deux étapes de subdivision inverse de Catmull-Clark.

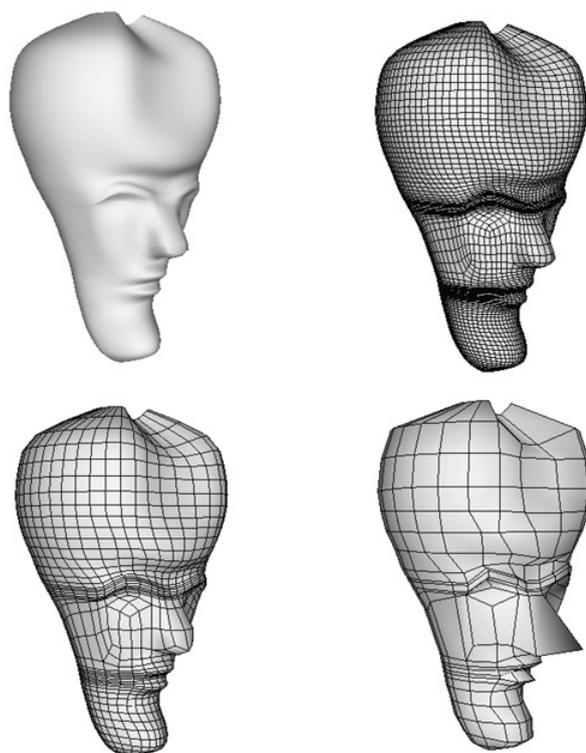


FIGURE 7.5 – La surface limite et l'application de deux étapes de subdivision inverse de Catmull-Clark.

Dans cette section nous avons utilisé deux formules différentes du schéma de Catmull-Clark, afin de trouver la formule inverse de ce schéma de subdivision. La première formule donnée dans [Lanquetin 2006] est définie sur un maillage quelconque tandis que la deuxième est définie sur un maillage quadrangulaire. Le fait de proposer une formule du schéma inverse de Catmull-Clark sur un maillage quadrangulaire nous permet de généraliser cette formule à d'autres schémas quadrilatéraux comme le schéma de moyennage de Warren et Wimer [Warren 2002]. En effet dans la section suivante, nous allons voir que cette formule est paramétrisable, et peut être appliquée directement pour inverser le schéma quadrangulaire de moyennage de Warren et Wimer [Warren 2002].

## 7.5/ SCHÉMA DE SUBDIVISION QUAD MOYENNAGE INVERSE

Le schéma de subdivision quad moyennage est introduit en 2003 par Warren et Weimer [Warren 2002]. Le principe de ce schéma de subdivision est basé sur le principe de Catmull-Clark. Le processus de subdivision de moyennage, présenté par Warren et

Weimer génère des surfaces de régularité  $C^2$ , mais pas nécessairement aux points extraordinaires.

### FORMULES DE SCHÉMA DE SUBDIVISION INVERSE QUAD MOYENNAGE

Soit  $M^k = (F^k, p^k)$  un maillage de subdivision quadrilatéral à l'étape  $k$ . Chaque face, arête ou sommet intérieur du maillage  $M^k$  peut produire un point du maillage  $M^{k+1} = (F^{k+1}, p^{k+1})$ . À l'étape  $(k + 1)$  de la subdivision quad moyennage, les formules des points faces, points arêtes et points sommets sont donnés par les formules de Catmull-Clark dans le cas d'un maillage quadrilatéral (équations (7.9)-(7.11)) avec :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{9}{16} \\ \beta = \frac{3}{8n} \\ \gamma = \frac{1}{16n} \end{cases} .$$

La formule (7.12) est paramétrable, et peut être appliquée directement pour inverser le schéma quad moyennage. Les poids de la formule inverse de ce schéma de subdivision sont donnés à partir du système (7.14) par :

$$\begin{cases} \alpha' = 4, \\ \beta' = -\frac{4}{n}, \\ \gamma' = \frac{1}{n}. \end{cases} .$$

Notons que nous pouvons obtenir les mêmes résultats à partir de la décomposition et la généralisation du masque inverse de Catmull-Clark dans le cas régulier. En effet, le masque inverse de Catmull-Clark peut être décomposé en somme de quatre sous-masques :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 4 & -1 \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

et le masque inverse du schéma quad moyennage dans le cas général (valence  $n$ ) peut être donné comme la somme de  $n$  masques comme l'illustre la figure 7.6.

La méthode décrite précédemment pour inverser le schéma de Catmull-Clark peut être utilisée pour inverser d'autres schémas de subdivision comme le schéma B-spline quadratique, le schéma B-spline cubique et le schéma de Loop. Cette méthode est basée sur un principe simple. À partir des formules qui définissent un ensemble de points de contrôle  $\{(S p^k)_i, i = 0, \dots, l\}$  à l'étape  $k + 1$  de subdivision, et sous certaines conditions nous définissons une formule inverse pour recréer un ensemble de points  $\{p_i^k, i = 1, \dots, n\}$  à l'étape  $k$  de subdivision. Cette formule est définie comme combinaison affine des points de l'ensemble  $\{(S p^k)_i, i = 0, \dots, l\}$ . Les termes de cette formule inverse représentent les poids d'une règle de subdivision inverse et ils sont donnés comme étant solution d'un système d'équation. Dans le cas des schémas de subdivision définis sur des supports trop large comme les schémas quad/triangle, l'ensemble de point de contrôle  $\{(S p^k)_i\}$  contient plusieurs règles de subdivision, il est donc impossible d'établir un système d'équation. D'où

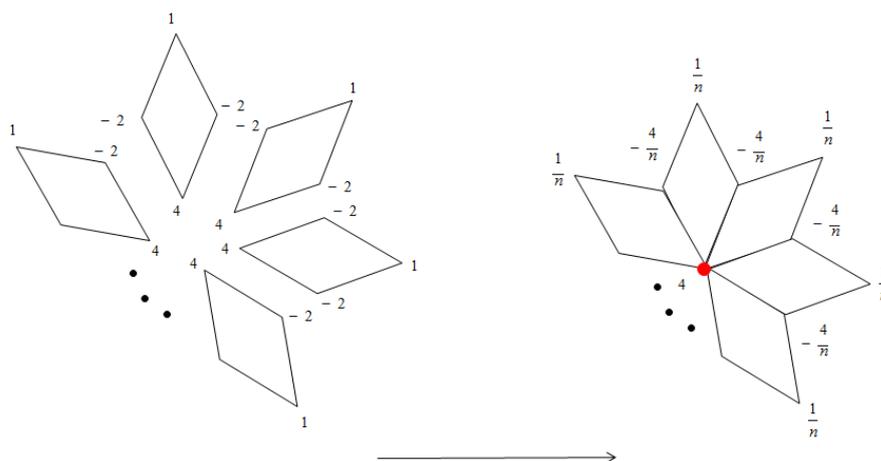


FIGURE 7.6 – La généralisation du masque inverse de Catmull-Clark à un masque général quad moyennage.

la nécessité de proposer une autre méthode afin d'inverser ces schémas de subdivision.

## 7.6/ SUBDIVISION INVERSE ET THÉORIES DE LA REPRODUCTION DES POLYNÔMES

Dans cette section, nous présentons une nouvelle méthode pour inverser certains schémas de subdivision linéaires. Cette méthode est basée sur les théories de la reproduction des polynômes. Dans un premier temps, nous supposons qu'il existe un opérateur de subdivision inverse  $T$  de sorte que la relation (7.1) soit satisfaite. Puis, nous montrons comment l'identification des relations entre les opérateurs  $T$ ,  $S$  et  $Q$  peuvent être appliquées afin d'inverser des schémas de subdivision.

### 7.6.1/ SUBDIVISION LINÉAIRE INVERSE

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que  $s = 1$ , mais tous les résultats seront vrais pour  $s$  quelconque. Nous rappelons également que les résultats qui vont suivre ne sont applicables que pour les schémas approximatants primaux.

Soit  $\{p_i^k, i \in \Lambda\}$  un ensemble de points de contrôle qui représente un polygone (maillage) de contrôle d'un schéma de subdivision à l'étape  $k$ . Nous définissons un schéma de subdivision  $S : l(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  de sorte que les points de contrôle à la  $(k + 1)$ -ième itération sont donnés par :  $p^{k+1} = (S p^k)$ . L'application de ce schéma de subdivision à l'ensemble de points de contrôle  $\{p_i^k, i \in \Lambda\}$  donne un nouveau ensemble  $\{S p_i^k, i \in \Lambda'\}$ .

Pour le processus inverse, il est nécessaire de construire un opérateur de subdivision inverse  $T : l(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  de sorte que les points de contrôle à la  $k$ -ième itération sont donnés par :  $p^k = T(S p^k)$ . L'application de l'opérateur  $T$  à l'ensemble des points de contrôle

$\{p_i^{k+1}, i \in \Lambda'\}$  permet de reconstruire l'ensemble  $\{p_i^k, i \in \Lambda\}$ .

L'idée est d'utiliser la propriété de localité d'un schéma de subdivision afin d'écrire l'opérateur inverse en fonction d'un masque  $b = \{b_j, j \in \mathbb{Z}^s\}$ , défini sur un support fini.

Soient  $\{p_{\tau_i}, \tau_i \in \Lambda\}, \Lambda = \{\tau_1, \dots, \tau, \dots, \tau_n\}$  un ensemble de points de contrôle et  $\{(Sp)_{\tau'_i}, \tau'_i \in \Lambda'\}, \Lambda' = \{\tau'_1, \dots, \tau', \dots, \tau'_n\}$  un ensemble de nouveaux points de contrôle. Supposons que les points de contrôle  $p_{\tau_1}, \dots, p_{\tau_n}$  sont les voisins directs du point  $p_\tau$ . Supposons que  $(Sp)_\tau$  est le nouveau point pair correspondant au point de contrôle  $p_\tau$  et  $(Sp)_{\tau'_1}, \dots, (Sp)_{\tau'_n}$  sont les nouveaux points impairs correspondant aux points  $p_{\tau_1}, \dots, p_{\tau_n}$  après un pas de subdivision (voir figure 7.7). À chaque étape de subdivision, des nouveaux points impairs sont insérés, et le nouveau point pair  $(Sp)_{\tau'}$  est déplacé par combinaison affine des anciens points.

**Proposition 16** Si la formule de la règle point pair  $(Sp)_{\tau'}$  après une étape de subdivision est donnée en fonction des poids des points de contrôles qui forment le voisinage directe de  $p_\tau$  sur le support  $\Lambda$  alors la position du point  $p_\tau$  est donnée en fonction de  $(Sp)_{\tau'_i}$  sur le support  $\Lambda' = \tau + \Lambda$ . C'est-à-dire que :

Si le nouveau point de contrôle  $(Sp)_{\tau'}$  dépend des points  $\{p_{\tau_i}, \tau_i \in \Lambda\}$  alors le point  $p_\tau$  dépend seulement des points  $\{(Sp)_{\tau'_i}, \tau'_i \in \Lambda'\}, \Lambda' = \tau + \Lambda$ , et nous supposons que la formule du point  $p_\tau$  est donnée par :

$$(p)_\tau = \sum_{\tau'_i \in \tau + \Lambda} b_{\tau'_i - 2\tau} (Sp)_{\tau'_i} \tag{7.16}$$

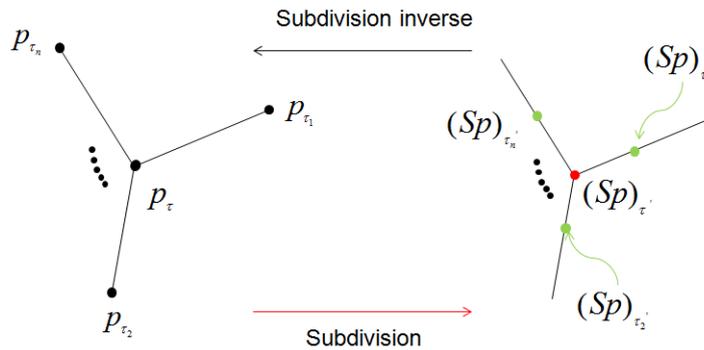


FIGURE 7.7 – Situation générale pour un point de contrôle pair.

**Preuve 23** La situation générale pour un point de contrôle pair (figure 7.7) change d'un schéma à un autre. Ce qui nécessite une preuve différente pour chaque situation et pour chaque schéma. Ici, nous montrons la proposition 16 pour le schéma B-spline cubique. Considérons la situation d'un point de contrôle  $p_i$  donnée dans la figure 7.8. Soit  $\{p_\tau, \tau \in \Lambda\}, \Lambda = [i - 1, i + 1]$  un ensemble de points de contrôle qui représente une portion d'un polygone de contrôle. L'application d'un schéma de subdivision B-spline cubique à cet ensemble de points de contrôle donne un ensemble de nouveaux points  $(Sp)_{\tau'_i}$ . Les nouveaux points de contrôle sont donnés par les formules suivantes :

$$(Sp)_{2i|[i-1,i+1]} = a_2 p_{i-1} + a_0 p_i + a_{-2} p_{i+1}, \tag{7.17}$$

$$(Sp)_{2i-1|[i-1,i]} = a_1 p_{i-1} + a_1 p_i, \quad (7.18)$$

$$(Sp)_{2i+1|[i,i+1]} = a_1 p_i + a_{-1} p_{i+1}. \quad (7.19)$$

À partir des équations (7.17)-(7.19), il est facile de montrer qu'il existe un masque inverse qui représente l'ensemble des poids inverses  $\{b_j\}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  de sorte que la position du point  $p_i$  est donnée en fonction des points  $\{(Sp)_{\tau'_i}\}$  sur le support  $\Lambda' = i + [i-1, i+1]$  par :

$$p_i = \sum_{\tau'_i \in [2i-1, 2i+1]} b_{\tau'_i - 2i} (Sp)_\beta. \quad (7.20)$$

L'équation (7.20) peut-être représentée sous forme matricielle par :

$$p = T(Sp), \quad (7.21)$$

où  $T$  est l'opérateur de subdivision inverse.

### 7.6.2/ QUASI-INTERPOLATION ET SUBDIVISION INVERSE

Dans le chapitre 3, nous avons utilisé une relation entre l'opérateur de subdivision  $S$ , l'opérateur limite  $S^\infty$  et l'opérateur quasi-interpolant  $Q$  pour construire des schémas de subdivision linéaires. Dans cette section, nous montrons comment la relation entre l'opérateur de subdivision inverse  $T$  et l'opérateur quasi-interpolant  $Q$  peut être appliquée afin de construire un schéma de subdivision linéaire inverse.

**Théorème 6** Soit  $S : l(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  un opérateur de subdivision convergent uniformément, supposons que  $S^\infty Q = Id$ , où l'opérateur quasi-interpolant  $Q : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$  préserve les coefficients dominants. S'il existe un opérateur de subdivision inverse  $T : l(\mathbb{Z}^s) \rightarrow l(\mathbb{Z}^s)$ , alors on a l'équivalence suivante :

$$TSQ = Q \Leftrightarrow TQ = Q\sigma^{-1} \quad (7.22)$$

**Preuve 24** Nous considérons  $\sigma$ ,  $S$ ,  $Q$  et  $T$  comme des opérateurs définis sur l'espace des polynômes de degré au plus  $m$ .

$TSQ = Q \Rightarrow TQ = Q\sigma^{(-1)}$  :

Supposons qu'il existe un opérateur de subdivision inverse  $T$  tel que :

$$TSQ = Q,$$

D'après le lemme 3 (chapitre 3), nous savons que :

$$SQ = Q\sigma,$$

alors :

$$T(SQ) = T(Q\sigma) = Q,$$

En multipliant les deux côtés de l'égalité par l'opérateur de dilatation inverse  $(\sigma)^{-1}$ , nous aurons :

$$TQ = Q\sigma^{-1}.$$

$TQ = Q\sigma^{-1} \Rightarrow TSQ = Q$

Soient  $T$  un opérateur de subdivision inverse,  $Q$  un opérateur quasi-interpolant et  $\sigma^{-1}$  un opérateur de dilatation inverse. Supposons que :

$$TQ = Q\sigma^{-1},$$

multiplions les deux côtés de l'égalité par l'opérateur de dilatation  $(\sigma)$ , et remplaçons  $Q\sigma$  par  $SQ$ , alors :

$$TSQ = Q$$

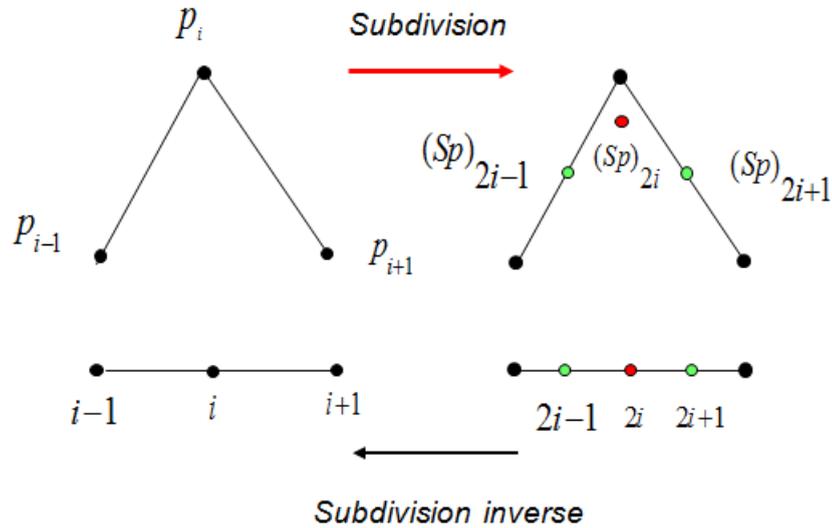


FIGURE 7.8 – Situation générale pour un point de contrôle B-spline cubique.

À partir de ce théorème, nous obtenons des informations importantes sur les valeurs et vecteurs propres de  $T$ .  $\forall x \in \mathbb{R}^s, \forall k \in \mathbb{R}^s$ , on définit un monôme  $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$  par :

$$f(x) = x^k, k \leq m \text{ et } \sigma f(x) = 2^{(k)} f(x),$$

par substitution dans l'équation (7.22) :

$$TQf(x) = Q\sigma^{-1}f(x) = 2^{(k)}Qf(x); k \leq m \tag{7.23}$$

$$\Leftrightarrow TQ(x^k) = 2^{(k)}Q(x^k), \tag{7.24}$$

à partir de la dernière relation nous pouvons constater que pour tout  $k \leq m$ ,  $Q(x^k)$  représente un vecteur propre de  $T$  associé à la valeur propre  $2^{(-k)}$ .

La relation  $TQ = Q\sigma^{-1}$  est considérée comme une équation linéaire où l'inconnue est l'opérateur de subdivision inverse  $T$ . À partir de l'équation (7.24), on établit un système d'équations linéaires dont la solution correspond aux poids d'une règle de subdivision inverse  $b_j$  qui détermine l'opérateur de subdivision inverse  $T$ .

**Proposition 17** Soit  $(Pr)'_{\tau} \in l(\mathbb{Z}^s)$  les poids d'une règle inverse en un point  $\tau' \in \mathbb{Z}^s$  défini sur un support fini  $\Lambda' = \{\tau'_1, \dots, \tau', \dots, \tau'_n\} \in \mathbb{Z}^s$ .

Les poids de la règle inverse  $(Pr)'_{\tau}$  sont définis comme étant solutions de l'équation suivante :

$$\Sigma'_{Q(\Lambda')} (Pr)'_{\tau} = d'_{Q(\tau')}, \quad (7.25)$$

où  $(Pr)'_{\tau}$  est un vecteur-colonne  $(1 : |\Lambda'|)$  de dimension  $|\Lambda'|$ ,  $\Sigma'_{Q(\Lambda')}$  une matrice  $(C_{m+s}^s \times |\Lambda'|)$  et  $d'$  est un vecteur-colonne de dimension  $C_{m+s}^s$  tel que :

$$\begin{cases} \Sigma'_{kj} = Q(x^k)(\tau'_j) \\ d'_k = 2^k Q(x^k)(\tau') \end{cases}, \quad (7.26)$$

pour tout  $0 \leq |k| \leq m$ , et  $j \in \{1, \dots, |\Lambda'|\}$ .

**Exemple 8 (Schéma inverse B-spline Cubique)** Considérons la situation d'un point de contrôle  $p_i$  donnée dans la figure 7.8. D'après la Proposition 16, la formule inverse du schéma B-spline cubique peut être définie en fonction d'un masque sur le support  $[2i - 1, 2i + 1]$  par :

$$p_i|_{[2i-1, 2i+1]} = b_{-1}(Sp)_{2i-1} + b_0(Sp)_{2i} + b_1(Sp)_{2i+1},$$

Les trois variables  $\{b_{-1}, b_0, b_1\}$  qui représentent les poids de la règle inverse du schéma B-spline cubique sont déterminées par la condition suivante :

$$TQf(\beta)|_{[2i-1, 2i+1]} = 2^{|k|} Qf(i), \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s), k = 1, \dots, 3,$$

où  $Q$  est l'opérateur quasi-interpolant B-spline cubique donné par l'équation suivante,

$$Qf = f - \frac{1}{6} \nabla f, \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s).$$

En substituant par les monômes de degré inférieur ou égal 3 (ici de degré 2), nous obtenons un système de trois équations :

$$\begin{aligned} 1 : & \quad b_{-1} + b_0 + b_1 = 1, \\ x : & \quad (2i - 1)b_{-1} + (2i)b_0 + (2i + 1)b_1 = 2i, \\ x^2 : & \quad ((2i - 1)^2 - \frac{1}{3})b_{-1} + ((2i)^2 - \frac{1}{3})b_0 + ((2i + 1)^2 - \frac{1}{3})b_1 = 4(i^2 - \frac{1}{3}). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ce système peut-être représenté sous forme matricielle (comme dans l'équation (6.25)) par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i-1 & i & i+1 \\ ((2i-1)^2 - \frac{1}{3}) & ((2i)^2 - \frac{1}{3}) & ((2i+1)^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix} (Pr)'_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 4(i^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système d'équations qui représente les poids de la règle inverse  $(Pr)'_i$  en un point  $i$  sur le support  $\Lambda' = [2i-1, 2i, 2i+1]$  est donnée par :

$$w'_i = (b_{-1}, b_0, b_1) = \left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right).$$

### 7.6.3/ SUBDIVISION INVERSE SUR UNE GRILLE RÉGULIÈRE

Comme dans le cas de la subdivision (chapitre 5), nous considérons une grille régulière  $X_{A_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$  comme un ensemble de points  $X_{A_\alpha} \subset \mathbb{R}^s$  et nous remplaçons l'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}^s$  par l'ensemble de points  $X_{A_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Où  $X_{A_1}$  est une grille quadrangulaire régulière définie dans l'équation (5.2) et  $X_{A_2}$  est une grille triangulaire régulière définie dans l'équation (5.3).

Nous définissons un schéma de subdivision  $S_{|A_1}$  qui coïncide avec le schéma B-spline bi-cubique sur la grille  $X_{A_1}$  et un schéma de subdivision  $S_{|A_2}$  qui coïncide avec le schéma de Loop sur la grille  $X_{A_2}$ .

Les opérateurs quasi-interpolants de ces deux schémas de subdivision sont définis sur les deux grilles  $X_{A_1}$  et  $X_{A_2}$  par :

$$\begin{cases} Q_{|A_1} f = f - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f & \begin{array}{l} B\text{-spline bi-cubique} \\ f \in \pi_3(\mathbb{R}^s) \end{array} \\ Q_{|A_2} f = f - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f & \text{Loop} \end{cases} \quad (7.28)$$

Rappelons ici que :

1. les formules inverses d'un point pair de ces deux schémas de subdivision sont données par l'équation (7.16) (proposition 16),
2. pour tout  $S_{|A_\alpha} : l(X_{A_\alpha}) \rightarrow l(X_{A_\alpha})$  et pour tout  $Q_{A_\alpha} = (S_{|A_\alpha}^\infty)^{(-1)} : \pi_m(\mathbb{R}^s) \rightarrow l(X_{A_\alpha})$ . S'il existe un opérateur de subdivision inverse  $T_{|A_\alpha} : l(X_{A_\alpha}) \rightarrow l(X_{A_\alpha})$ , alors on a l'équivalence suivante :

$$T_{|A_\alpha} S_{|A_\alpha} = Id \Leftrightarrow T_{|A_\alpha} Q_{|A_\alpha} = Q_{|A_\alpha} \sigma^{-1} \quad (7.29)$$

**Exemple 9 (Schéma inverse de B-spline bi-cubique)** Pour un point ordinaire, considérons la situation générale représentée dans la figure 7.9. Soit  $p \in l(X_{A_1})$  un ensemble de points de contrôle définis sur le support  $\Lambda_1 \subset X_{A_1}$ ,

$$\Lambda_1 = \{(i-1, j+1), (i-1, j), (i-1, j-1), (i, j+1), (i, j), (i, j-1), (i+1, j), (i+1, j+1), (i+1, j-1)\}$$

D'après la figure 7.9 les points de contrôle  $\{p_{t_1, t_2}\}_{(t_1, t_2) \in \Lambda_1 \setminus \{(i, j)\}}$  forment le voisinage direct du point  $p_{i, j}$ .

Après l'application de l'algorithme B-spline bi-cubique à l'ensemble de points de contrôle  $\{p_{t_1, t_2}\}_{(t_1, t_2) \in \Lambda_1}$ , nous aurons un ensemble de nouveaux points  $\{(S_{|A_1} p)\}$ .

L'ensemble des nouveaux points de contrôle  $\{(S_{|A_1} p)\}$  contient trois types de points de contrôle :

- Points faces  $(S_{|A_1} p)_{2i-1, 2j+1}, (S_{|A_1} p)_{2i-1, 2j-1}, (S_{|A_1} p)_{2i+1, 2j+1}, (S_{|A_1} p)_{2i+1, 2j-1}$ .
- Points arêtes  $\{(S_{|A_1} p)_{2i-1, 2j}, (S_{|A_1} p)_{2i, 2j+1}, (S_{|A_1} p)_{2i, 2j-1}, (S_{|A_1} p)_{2i+1, 2j}\}$ .
- Point pair intérieur  $(S_{|A_1} p)_{2i, 2j}$ .

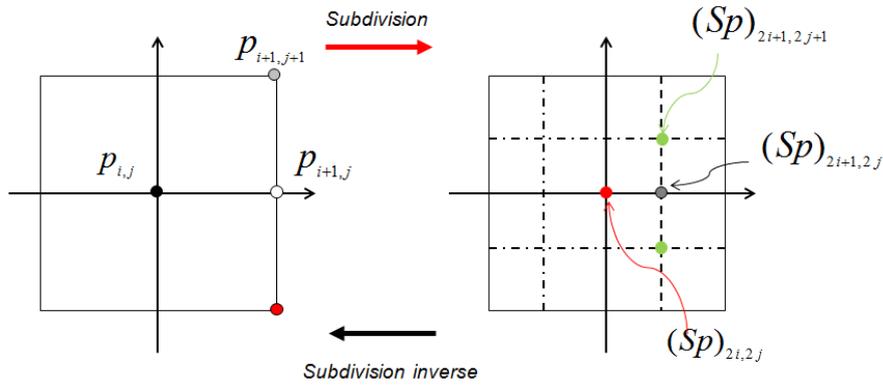


FIGURE 7.9 – Situation générale pour un point intérieur du schéma B-spline bi-cubique.

La position du point pair intérieur  $(S_{|A_1} p)_{(2i, 2j)}$  est donnée en fonction des points qui forment le voisinage direct du point  $p_{i, j}$  sur le support  $\Lambda_1$  par :

$$(S_{|A_1} p)_{2i, 2j} = a_0 p_{i-1, j+1} + a_1 p_{i-1, j} + a_2 p_{i-1, j-1} + a_3 p_{i, j+1} + a_4 p_{i, j} + a_5 p_{i, j-1} + a_6 p_{i+1, j+1} + a_7 p_{i+1, j} + a_8 p_{i+1, j-1},$$

alors d'après la proposition 16, la position du point  $p_{i, j}$  est donnée sur le support  $\Lambda'_1$ , par :

$$p_{i, j} = b_0 (S_{|A_1} p)_{2i-1, 2j+1} + b_1 (S_{|A_1} p)_{2i-1, 2j} + b_2 (S_{|A_1} p)_{2i-1, 2j-1} + b_3 (S_{|A_1} p)_{2i, 2j+1} + b_4 (S_{|A_1} p)_{2i, 2j} + b_5 (S_{|A_1} p)_{2i, 2j-1} + b_6 (S_{|A_1} p)_{2i+1, 2j+1} + b_7 (S_{|A_1} p)_{2i+1, 2j} + b_8 (S_{|A_1} p)_{2i+1, 2j-1},$$

avec :

$$\Lambda'_1 = \{(2i-1, 2j+1), (2i-1, 2j), (2i-1, 2j-1), (2i, 2j+1), (2i, 2j), (2i, 2j-1), (2i+1, 2j+1), (2i+1, 2j), (2i+1, 2j-1)\}.$$

Soient  $(Pr)_2(i, j) = (b_i, i = 1, \dots, |\Lambda'_1|)$  les poids de la règle inverse du schéma B-spline bi-cubiques en un point  $(i, j)$ . En raison de l'invariance des indices sur la grille  $X_{A_1}$ , nous calculons les poids de cette règle inverse pour  $(i, j) = (0, 0)$ . Dans ce cas le support  $\Lambda'_1$

est donné par :

$$\Lambda'_2 = \{(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, 1), (0, 0), (0, -1), (1, 1), (1, 0), (1, -1)\}. \quad (7.30)$$

Les poids de la règle inverse  $(Pr)'_1(0, 0) = (b_j, j = 1, \dots, 9)^t$  de ce schéma de subdivision sont donnés à partir de la condition suivante :

$$TQ_{|A_1}f(i, j)|_{\Lambda'_1} = 2^k Q_{|A_1}f(0, 0), \forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s), |k| \leq 2,$$

où l'opérateur quasi-interpolant est donné dans l'équation (7.28). La solution est donnée par le système suivant :

$$\Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)}(Pr)'_2(0, 0) = d'_{Q_{|A_1}(0,0)}. \quad (7.31)$$

avec :

$$\Sigma_{k,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$(Pr)'_1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix},$$

et

$$d_k = 2^k Q_{|A_1}(x^k)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Sous certaines conditions de symétrie, les poids de la règle inverse de ce schéma de subdivision qui représentent la solution de ce système sont donnés par :

$$\begin{cases} b_0 = b_2 = b_6 = b_8 = \frac{1}{4}, \\ b_4 = 4, \\ b_1 = b_3 = b_5 = b_7 = -1. \end{cases}$$

Le masque inverse de ce schéma de subdivision est donné dans la figure (7.10).

**Exemple 10 (Schéma inverse de Loop)** De la même façon que pour le schéma B-spline bi-cubique, nous considérons la situation générale représentée dans la figure 7.11. Soit  $\{p_{(\tau_1, \tilde{\tau}_2)}\}_{(\tau_1, \tilde{\tau}_2) \in \Lambda_1}$  un ensemble de points de contrôle défini sur la grille  $X_{A_2}$  avec :

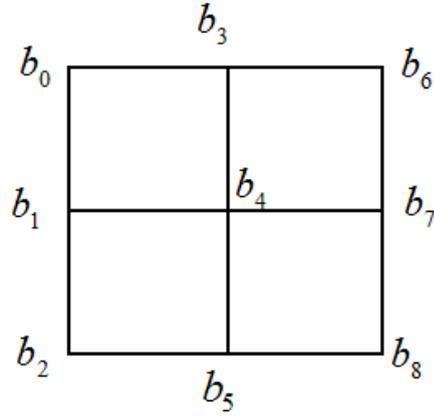


FIGURE 7.10 – Le masque inverse du schéma B-spline bi-cubique.

$$\tilde{\tau}_2 = \tau_2 - \frac{1}{2}\tau_1,$$

$$\Lambda_2 = \left\{ (i-1, \tilde{j} + \frac{1}{2}), (i-1, \tilde{j} - \frac{1}{2}), (i, \tilde{j} + 1), (i, \tilde{j}), (i, \tilde{j} - 1), \right. \\ \left. (i+1, \tilde{j} + \frac{1}{2}), (i+1, \tilde{j} - \frac{1}{2}) \right\}. \quad (7.32)$$

Supposons que les points de contrôles  $\{p_{(\tau_1, \tilde{\tau}_2)}\}_{(\tau_1, \tilde{\tau}_2) \in \Lambda_2 \setminus (i, \tilde{j})}$  forment le voisinage du point  $p_{i, \tilde{j}}$ .

L'application de l'algorithme de Loop à cet ensemble donne un ensemble de nouveaux points de contrôle  $\{S_{|A_2} p_{(\tau_1, \tilde{\tau}_2)}\}_{(\tau_1, \tilde{\tau}_2) \in \Lambda'_2}$ , avec

$$\Lambda'_2 = \left\{ (2i-1, 2\tilde{j} + \frac{1}{2}), (2i-1, 2\tilde{j} - \frac{1}{2}), (2i, 2\tilde{j} + 1), (2i, 2\tilde{j}), (2i, 2\tilde{j} - 1), \right. \\ \left. (2i+1, 2\tilde{j} + \frac{1}{2}), (2i+1, 2\tilde{j} - \frac{1}{2}) \right\}. \quad (7.33)$$

La formule des nouveaux points pair  $(S_{|A_2} p)_{2i, 2\tilde{j}}$  correspondant au point  $(p)_{i, \tilde{j}}$  après un pas de subdivision est donnée par :

$$(S_{|A_2} p)_{2i, 2\tilde{j}} = a_0(p)_{i-1, \tilde{j} + \frac{1}{2}} + a_1(p)_{i-1, \tilde{j} - \frac{1}{2}} + a_3(p)_{i, \tilde{j} + 1} + a_4(p)_{i, \tilde{j}} + \\ a_5(p)_{i, \tilde{j} - 1} + a_6(p)_{i+1, \tilde{j} + \frac{1}{2}} + a_7(p)_{i+1, \tilde{j} - \frac{1}{2}},$$

alors d'après la proposition 16, la formule inverse qui donne la position du point  $p_{i, \tilde{j}}$  est donnée sur le support  $\Lambda'_2$  par :

$$p_{i, \tilde{j}} = b'_0(S_{|A_2} p)_{2i-1, 2\tilde{j} + \frac{1}{2}} + b'_1(S_{|A_2} p)_{2i-1, 2\tilde{j} - \frac{1}{2}} + b'_3(S_{|A_2} p)_{2i, 2\tilde{j} + 1} + b'_4(S_{|A_2} p)_{2i, 2\tilde{j}} + \\ b'_5(S_{|A_2} p)_{2i, 2\tilde{j} - 1} + b'_6(S_{|A_2} p)_{2i+1, 2\tilde{j} + \frac{1}{2}} + b'_7(S_{|A_2} p)_{2i+1, 2\tilde{j} - \frac{1}{2}}.$$

Soit  $(Pr)'_2(i, \tilde{j}) = (b'_i, i = 1, \dots, |\Lambda'_2|)$  les poids de la règle inverse du schéma de Loop en un point  $(i, \tilde{j})$ .

En raison de l'invariance des indices sur la grille  $X_{A_2}$ , nous avons seulement besoin de

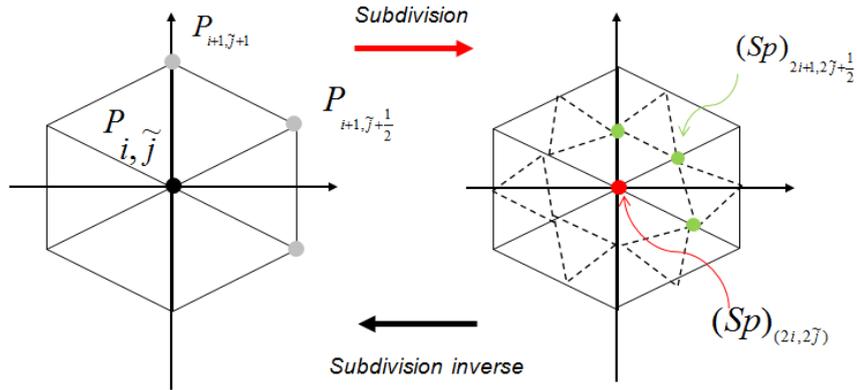


FIGURE 7.11 – Situation générale pour un point intérieur du schéma de Loop dans le cas régulier.

calculer les poids de cette règle inverse pour  $(i, \tilde{j}) = (0, 0)$ . Dans ce cas le support  $\Lambda'_2$  est donné par :

$$\Lambda'_2 = \left\{ \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, -\frac{1}{2}\right), (0, 1), (0, 0), (0, -1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (7.34)$$

Les poids de la règle inverse en un point  $(0, 0)$  sont déterminés par la condition suivante :

$$TQ_{|\Lambda_2} f_{|\Lambda'_2} = 2^{|k_1+k_2|} Q_{|\Lambda_2} f(0, 0), \forall f \in \pi_2,$$

et la solution est donnée par le système suivant :

$$\Sigma_{Q_{|\Lambda_2}(\Lambda'_2)} (Pr)'_2 = d'_{Q_{|\Lambda_2}(0,0)} \quad (7.35)$$

avec :

$$\Sigma_{k,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Pr)'_2 = \begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \\ b'_5 \\ b'_6 \end{pmatrix},$$

et

$$d_k = 2^k Q^+(x^k)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

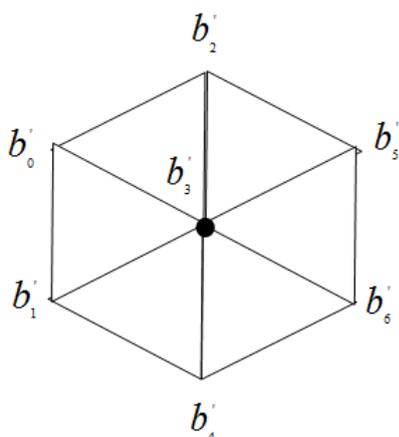


FIGURE 7.12 – Le masque inverse du schéma de Loop dans le cas régulier.

Sous certaines conditions sur la symétrie des poids de la règle inverse, la solution de ce système d'équations est donnée par :

$$\begin{cases} b'_0 = b'_1 = b'_2 = b'_3 = b'_5 = b'_6 = b'_7 = b'_8 = -\frac{1}{4}, \\ b'_4 = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Le masque du schéma de Loop dans le cas régulier est donné dans la figure 7.12.

## 7.7/ SUBDIVISION QUAD/TRIANGLE INVERSE

Dans cette section, nous adapterons la méthode utilisée précédemment pour inverser des schémas de subdivision linéaires afin d'inverser les schémas quad/triangle de Schaefer-Warren [Schaefer 2005] et Levin-Levin [Levin 2003b] présentés dans le chapitre 4.

Considérons une grille quad/triangle  $X_{(A_1, A_2)} \subset \mathbb{R}^2$ , qui est uniforme dans les deux moitiés du plan, comme dans la figure 5.4. Les schémas quad/triangle de Schaefer-Warren [Schaefer 2005] et Levin-Levin [Levin 2003b] sont des schémas qui unifient le schéma de Catmull-Clark et celui de Loop.

Nous définissons un opérateur de subdivision  $S_{|(A_1, A_2)}$  sur la grille  $X_{(A_1, A_2)}$  qui coïncide avec le schéma de Catmull-Clark  $S_{|A_1}$  sur la moitié gauche de la grille, et le schéma de Loop  $S_{|A_2}$  sur la moitié droite de la grille. Le schéma  $S_{|(A_1, A_2)}$  est de régularité  $C^2$  dans les

deux moitiés de la grille  $X_{(A_1, A_2)}$  et il reproduit des polynômes  $\pi_2$  de degré 2, ce qui implique l'existence d'un opérateur inverse de  $S_{|(A_1, A_2)}^\infty$  qui reproduit des polynômes  $\pi_2$ . Nous définissons un opérateur quasi-interpolant sur cette grille qui coïncide avec l'opérateur quasi-interpolant du schéma de Catmull-Clark  $Q_{|A_1}$  sur la moitié gauche de la grille, et l'opérateur quasi-interpolant du schéma de Loop  $Q_{|A_2}$  sur la moitié droite de cette grille. Afin de traiter les deux schémas quad/triangle en même temps, nous définissons un opérateur quasi-interpolant sur l'axe  $y$ ,  $Q_{|(A_1, A_2)}^0$  comme une combinaison convexe des deux opérateurs  $Q_{|A_1}$  et  $Q_{|A_2}$  de la forme symbolique suivante :

$$Q_{|(A_1, A_2)}^0 = \gamma Q_{|A_1} + (1 - \gamma) Q_{|A_2}.$$

Le choix de l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_1, A_2)}^0$  correspond à  $\gamma = 0$  pour le schéma quad/triangle de Levin-Levin et  $\gamma = \frac{1}{2}$  pour le schéma quad/triangle de Schaefer-Warren. Pour tout  $f(z) = f(x, y)$ , les fonctions limites de ces deux schémas de subdivision sont données par :

$$S_{|(A_2, A_2)}^\infty f(z) = \begin{cases} S_{|A_1}^\infty f(z) = f(z) + \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x < 0, \\ S_{|(A_1, A_2)}^\infty f(z) = \gamma S_{|A_1}^\infty f(z) + (1 - \gamma) S_{|A_2}^\infty f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_2, \\ S_{|A_2}^\infty f(z) = f(z) + \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0, \end{cases} \quad (7.36)$$

et leurs opérateurs quasi-interpolants par :

$$Q_{|(A_1, A_2)} f(z) = \begin{cases} Q_{|A_1} f(z) = f(z) - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x < 0, \\ Q_{|(A_1, A_2)}^0 f(z) = \gamma Q_{|A_1} f(z) + (1 - \gamma) Q_{|A_2} f(z) & x = 0 \quad f \in \pi_2, \\ Q_{|A_2}^\infty f(z) = f(z) - \nabla \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \nabla^t f(z) & x > 0. \end{cases} \quad (7.37)$$

Nous définissons un opérateur de subdivision inverse  $T_{|(A_1, A_2)}$  sur la grille raffiner  $\frac{1}{2}X_{(A_1, A_2)}$  qui coïncide avec le schéma inverse de Catmull-Clark  $T_{|A_1}$  sur la moitié gauche de cette grille, et le schéma inverse de Loop  $T_{|A_2}$  sur la moitié droite du même grille. Les masques de ces deux schémas de subdivision inverse sont donnés dans les figures 7.10 et 7.12. Notre objectif est de trouver les règles de subdivision inverses particulières sur la zone mixte (sur l'axe  $y$ ) qui correspond aux règles de subdivision particulières de Levin-Levin et Schaefer-Warren. Ces règles de subdivision inverses particulières sont construites à partir de la définition et du choix de l'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_1, A_2)}$  sur la grille quad/triangle  $X_{(A_1, A_2)}$ , de sorte que la condition de la proposition suivante soit satisfaite.

**Proposition 18** Soit  $S_{|(A_1, A_2)} : l(X_{(A_1, A_2)}) \rightarrow l(X_{(A_1, A_2)})$  un opérateur de subdivision convergent uniformément. Supposons que  $S_{|(A_1, A_2)}^\infty Q_{|(A_1, A_2)} = Id$ . Alors il existe un opérateur de subdivision inverse  $T : l(X_{(A_1, A_2)}) \rightarrow l(X_{(A_1, A_2)})$  de sorte que :

$$T_{|(A_1, A_2)} S_{|(A_1, A_2)} = Id \Leftrightarrow T_{|(A_1, A_2)} Q_{|(A_1, A_2)} = Q_{|(A_1, A_2)} \sigma^{-1} \quad (7.38)$$

**Preuve 25** La preuve de cette proposition est similaire à la preuve du théorème 6.

### 7.7.1/ FORMULES DES SCHÉMAS QUAD/TRIANGLE INVERSES

Pour construire les règles de subdivision inverses particulières d'un schéma quad/triangle sur l'axe  $y$ , nous définissons un ensemble de points de contrôle

$\{p_{\alpha, \tilde{\beta}}\}_{\Lambda}$ ,  $\alpha \in [-1, 1]$ ,  $\tilde{\beta} = \begin{cases} \beta - \frac{1}{2}\alpha & \alpha > 0 \\ \beta & \alpha \leq 0 \end{cases}$   $j \in \mathbb{Z}$ , sur une zone quad/triangle régulière (figure 7.13),

$$\Lambda = \{(-1, j+1), (-1, j), (-1, j-1), (0, j+1), (0, j), (0, j-1), (1, j+\frac{1}{2}), (1, j-\frac{1}{2})\}.$$

Les points  $\{p_{\alpha, \tilde{\beta}}\}_{\Lambda \setminus (0, j)}$  forment le voisinage du point  $p_{0, j}$ .

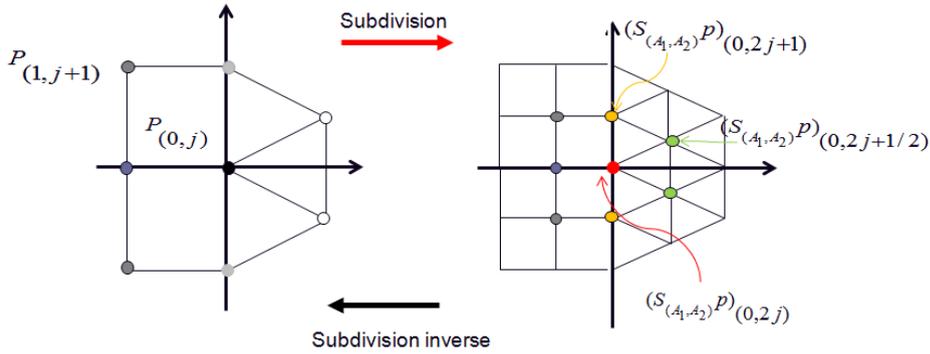


FIGURE 7.13 – Situation générale pour un point de contrôle intérieur.

La règle particulière du point pair  $S_{|(A_1, A_2)P)0, 2j}$  est donnée sur le support  $\Lambda$  par :

$$(S_{|(A_1, A_2)P)0, 2j} = c_0 p_{-1, j+1} + c_1 p_{-1, j} + c_2 p_{-1, j-1} + c_3 p_{0, j+1} + c_4 p_{0, j} + c_5 p_{0, j-1} + c_6 p_{1, j+\frac{1}{2}} + c_7 p_{1, j-\frac{1}{2}}. \quad (7.39)$$

D'après la proposition 16, la formule inverse est donnée sur le support  $\Lambda'$  par :

$$p_{0, 0} = b_0'' (S_{|(A_1, A_2)P)-1, 2j+1} + b_1'' (S_{|(A_1, A_2)P)-1, 2j} + b_2'' (S_{|(A_1, A_2)P)-1, 2j-1} + b_3'' (S_{|(A_1, A_2)P)0, 2j+1} + b_4'' (S_{|(A_1, A_2)P)0, 2j} + b_5'' (S_{|(A_1, A_2)P)0, 2j-1} + b_6'' (S_{|(A_1, A_2)P)1, 2j+\frac{1}{2}} + b_7'' (S_{|(A_1, A_2)P)1, j-\frac{1}{2}}. \quad (7.40)$$

Soit  $(Pr)'(0, j)$  les poids de la règle inverse du schéma quad/triangle en un point  $(0, j)$ . Comme dans les cas précédent, nous avons seulement besoin de calculer les poids de cette règle inverse pour  $(i, \tilde{j}) = (0, 0)$  sur le support  $\Lambda'$ ,

$$\Lambda' = \{(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, 1), (0, 0), (0, -1), (1, \frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})\}. \quad (7.41)$$

Les poids de la règle inverse  $(Pr)'(0, j)$  sont déterminés à partir de la condition suivante :

$$T_{|(A_1, A_2)} Q_{|(A_1, A_2)} f_{|\Lambda'} = 2^{|k_1+k_2|} Q_{|(A_1, A_2)} f(0, 0), \forall f \in \pi_2,$$

avec :

$$f(x, y) = x^{k_1} y^{k_2}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq |k_1 + k_2| \leq 2,$$

et la solution est donnée par le système suivant :

$$\Sigma'_{Q_{|(A_1, A_2)}(\Lambda')} (Pr)'(0, 0) = d'_{Q_{|(A_1, A_2)}(0, 0)}. \quad (7.42)$$

L'opérateur quasi-interpolant  $Q_{|(A_1, A_2)}$  est défini par les trois opérateurs  $Q_{|A_1}$ ,  $Q_{|(A_1, A_2)}^0$  et  $Q_{|A_2}$  qui déterminent sont évaluation le long de la grille  $X_{(A_1, A_2)}$ . Le support  $\Lambda'$  de la règle de subdivision inverse implique les trois opérateurs quasi-interpolants, d'où la nécessité de décomposer le support en trois sous-supports,

$$\begin{cases} (\Lambda')^- = \{(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1)\}, \\ (\Lambda')^0 = \{(0, 1), (0, 0), (0, -1)\}, \\ (\Lambda')^+ = \{(1, \frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})\}. \end{cases} \quad (7.43)$$

Nous décomposons également l'ensemble des poids de la règle inverse particulière en trois sous-ensemble de sorte que chaque sous ensemble est défini sur un sous-support,

$$(Pr)'(0, 0)_{|\Lambda'} = \{(Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^-}, (Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^0}, (Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^+}\}, \quad (7.44)$$

avec :

$$\begin{cases} (Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^-} = \{b''_i, i = 1..|(\Lambda')^-|\}, \\ (Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^0} = \{b''_i, i = |(\Lambda')^-|+1..|(\Lambda')^0|\}, \\ (Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^+} = \{b''_i, i = |(\Lambda')^0|+1..|(\Lambda')^+|\}. \end{cases}$$

À partir des équations (7.43) et (7.44), nous pouvons écrire l'équation (7.42) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\Sigma'_{Q_{|A_1}((\Lambda')^-)} \Sigma'_{Q_{|(A_1, A_2)}^0((\Lambda')^0)} \Sigma'_{Q_{|A_2}((\Lambda')^+)}] \times [(Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^-} | (Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^0} | (Pr)'(0, 0)_{|(\Lambda')^+}] \\ = d'_{Q^0(0, 0)}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

avec :

$$\Sigma'_{Q_{|(A_1, A_2)}(\Lambda')} = [\Sigma'_{Q_{|A_1}((\Lambda')^-)} \Sigma'_{Q_{|(A_1, A_2)}^0((\Lambda')^0)} \Sigma'_{Q_{|A_2}((\Lambda')^+)}]$$

Nous savons que  $\Sigma'_{Q_{|(A_1, A_2)}(\Lambda')}$  est une matrice de dimension  $(C_{m+s}^s | \Lambda')$  alors :

$\Sigma'_{Q_{|A_1}((\Lambda')^-)}$ ,  $\Sigma'_{Q_{|(A_1, A_2)}^0((\Lambda')^0)}$  et  $\Sigma'_{Q_{|A_2}((\Lambda')^+)}$  sont des sous matrices de dimension respectives  $(C_{m+s}^s | (\Lambda')^-)$ ,  $(C_{m+s}^s | (\Lambda')^0)$  et  $(C_{m+s}^s | (\Lambda')^+)$ .

$d'_{Q^0(0, 0)}$  est un vecteur-colonne de dimension  $|C_{m+s}^s|$ .

À partir de l'équation (7.45), pour  $\gamma = \frac{1}{2}$  les poids de la règle inverse du schéma de

Shaefer-Warren sur l'axe  $y$  sont donnés par le système suivant :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{24} & -\frac{7}{24} & \frac{17}{24} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \times (Pr)'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{7}{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.46)$$

et pour  $\gamma = 1$  les poids de la règle inverse du schéma de Levin-Levin sur l'axe  $y$  sont donnés par le système suivant :

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \times (Pr)'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

Les deux relations (7.46) et (7.47) représentent deux systèmes de 6 équations avec 8 inconnues. Ces deux systèmes n'admettent pas une solution unique.

D'après la proposition 15, nous savons que si les poids d'une règle d'un schéma de subdivision sont donnés de façon symétrique, alors les poids de la règle inverse de ce schéma de subdivision conservent la même symétrie.

### SCHÉMA INVERSE DE LEVIN-LEVIN

Pour le schéma de Levin-Levin, à partir de la figure 4.13 et l'équation (7.39), nous avons

$$\begin{cases} c_0 = c_2, \\ c_1 = c_3 = c_5, \\ c_6 = c_7, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} b_0'' = b_2'', \\ b_1'' = b_3'' = b_5'', \\ b_6'' = b_7''. \end{cases}$$

Sous ces conditions de symétrie entre les poids de la règle inverse particulière du schéma de Levin-Levin, la solution du système d'équation (7.44) est donnée par :

$$\begin{cases} b_0'' = b_2'' = -\frac{1}{12}, \\ b_1'' = b_3'' = b_5'' = -\frac{1}{3}, \\ b_4'' = \frac{8}{3}, \\ b_6'' = b_7'' = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

La règle inverse particulière de ce schéma de subdivision est donné dans la figure 7.14.

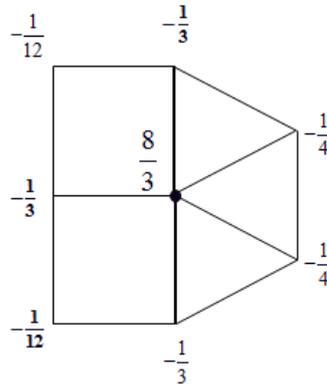


FIGURE 7.14 – Règle inverse particulière du schéma de Levin-Levin.

### SCHÉMA INVERSE DE SCHAEFER-WARREN

Pour le schéma inverse de Schaefer-Warren, même si on utilise les conditions de symétrie entre les poids de la règle inverse, nous ne trouvons pas de solution unique au système d'équations (7.46). Afin de résoudre ce système d'équations, nous utilisons les deux systèmes (7.31) et (7.35) qui donnent les poids des règles inverses des deux schémas de Loop et B-spline bi-cubique respectivement.

Sur l'axe  $y$  et pour  $\gamma = \frac{1}{2}$ , l'opérateur quasi-interpolant intermédiaire  $\mathcal{Q}_{(A_1, A_2)}^0$  est donné par :

$$\mathcal{Q}_{(A_1, A_2)}^0 = \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{|A_1} + \frac{1}{2}\mathcal{Q}_{|A_2}. \quad (7.48)$$

Cet opérateur est choisi de sorte que la règle inverse en un point sur la frontière d'une grille quad/triangle puisse être construite à partir des deux règles inverses B-spline bi-cubique et de Loop sur les deux moitiés de la grille. Compte tenu de la proposition qui va suivre nous donnons la définition suivante :

**Définition 25** Pour tout  $i \in \mathbb{Z}^2$ , pour tout  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , on définit un demi-moment  $\theta_i$  en un point  $i$  associé à une règle inverse de subdivision sur la moitié droite d'une grille raffinée par :

$$\theta_i = \sum_{z \in \mathbb{Z}^{s-1} \times \mathbb{Z}_0^+} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{0,z}\right) b(i-z)e_z,$$

où  $\delta$  est le delta de Kronecker.

**Exemple 11** Pour les deux schémas inverses de Catmull-Clark et Loop, les demi-moments au point  $(0, 0)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \theta_{1|(0,0)} &= \frac{1}{2}(-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta'_{1|(0,0)} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Proposition 19** Soit  $Q_{|(A_1, A_2)}^0$  un opérateur quasi-interpolant intermédiaire défini dans l'équation (7.48). Soit  $\theta_{(0,0)}$  et  $\theta_{(0,0)}$  les deux demi-moments des deux schémas inverses B-spline bi-cubiques et Loop respectivement. Si  $\theta_{(0,0)} = \theta_{(0,0)}$  alors la solution du système :

$$\begin{cases} \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)}(Pr)'_1 = d'_{Q_{|A_1}(0,0)} \\ \Sigma'_{Q_{|A_2}(\Lambda'_2)}(Pr)'_2 = d'_{Q_{|A_2}(0,0)} \end{cases} \quad (7.49)$$

implique la solution du système (7.45).

**Preuve 26** Nous avons vu dans les deux exemples précédents (exemple 9 et 10) que les poids  $(Pr)'_1$  et  $(Pr)'_2$  des deux règles inverses B-spline bi-cubiques et de Loop sont donnés de façon symétrique. Les fonctions monômes de degré pair sont des fonctions paires, et les fonctions monômes de degré impair sont des fonctions impaires dans  $\mathbb{R}^s$ . Les propriétés des fonctions paires et impaires sont conservées par l'application d'un opérateur quasi-interpolant  $Q_{|A_1}$  dans le sens que nous aurons  $\forall z \in \mathbb{Z}^2$  :

$$\begin{cases} Q_{|A_1}f(z) = Q_{|A_1}f(-z) & \text{pour toute } f \in \pi_2(\mathbb{R}^2) \text{ paire} \\ Q_{|A_1}f(z) = -Q_{|A_1}f(-z) & \text{pour toute } f \in \pi_2(\mathbb{R}^2) \text{ impaire} \end{cases}$$

Pour des raisons de symétrie du support  $\Lambda'_1$ , nous avons pour tout  $\alpha \in \Lambda'_1$ ,  $-\alpha \in \Lambda'_1$ . La première équation du système (7.49) peut être décomposée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)}(Pr)'_1 &= [\Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^-} | \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^0} | \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^+}] \\ &\quad \times [(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^-} | (Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0} | (Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^+}] \\ &= d'_{Q_{|A_1}(0,0)} \end{aligned} \quad (7.50)$$

où  $\Lambda'_1$  est le support de la règle inverse du schéma B-spline bi-cubique inverse,

$$\begin{cases} (\Lambda'_1)^- = \{(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1)\} \\ (\Lambda'_1)^0 = \{(0, 1), (0, 0), (0, -1)\} \\ (\Lambda'_1)^+ = \{(1, 1), (1, 0), (1, -1)\} \end{cases} \quad (7.51)$$

La dernière équation peut-être donnée par :

$$\begin{aligned} &([\Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^-} | \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^0} | 0] + [0 | \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^0} | \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^+}]) \\ &\quad \cdot [(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^-} | (Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0} | (Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^+}] = d'_{Q_{|A_1}(0,0)} \\ \Rightarrow &[\Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^-} | \Sigma'_{Q_{|A_1}(\Lambda'_1)^0}] \times [(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^-} | \frac{1}{2}(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0}] + \end{aligned}$$

$$[\Sigma'_{Q_{A_1}((\Lambda'_1)^0)} | \Sigma'_{Q_{A_1}((\Lambda'_1)^+)}] \times [\frac{1}{2}(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0} | (Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^+}] = d'_{Q_{A_1}(0,0)}.$$

À partir de la propriété de symétrie entre  $(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^-}$  et  $(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^+}$  et la définition du demi-moment  $\theta_{(0,0)}$  nous pouvons assurer l'égalité suivante :

$$[\Sigma'_{Q_{A_1}(\Lambda'_1)^-} | \Sigma'_{Q_{A_1}(\Lambda'_1)^0}] [(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^-} | \frac{1}{2}(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0}] = \bar{d}_{1Q_{A_1}(0,0)}. \quad (7.52)$$

Le vecteur  $\bar{d}_{1Q_{A_2}(0,0)}$  est construit à partir du vecteur  $\frac{1}{2}d'_{Q_{A_1}(0,0)}$  et le demi-moment du schéma B-spline bi-cubique sur la moitié gauche de la grille  $-\theta_{(0,0)}$  de sorte que les composantes du vecteur  $\bar{d}_{Q_{A_1}(0,0)}$  correspondent aux composantes du vecteur  $\frac{1}{2}d'_{Q_{A_1}(0,0)}$  pour les monômes pairs et pour les monômes impairs ici  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  coïncide avec le demi-moment  $-\theta_{(0,0)}$ .

Les mêmes considérations valent pour la deuxième équation du système (7.49).

$$[\Sigma'_{Q_{A_2}(\Lambda'_2)^0} | \Sigma'_{Q_{A_2}(\Lambda'_2)^+}] [\frac{1}{2}(Pr)'_{2|(\Lambda'_2)^0} | (Pr)'_{2|(\Lambda'_2)^+}] = \bar{d}_{2Q_{A_2}(0,0)}. \quad (7.53)$$

dans laquelle le vecteur  $\bar{d}_{2Q_{A_2}(0,0)}$  est construit à partir du vecteur  $\frac{1}{2}d'_{Q_{A_2}(0,0)}$ , et le demi-moment sur la moitié droite de la grille  $\theta'_{(0,0)}$

où  $\Lambda'_2$  est le support de la règle inverse du schéma de Loop inverse,

$$\begin{cases} (\Lambda'_2)^- = \{(-1, \frac{1}{2}), (-1, -\frac{1}{2})\} \\ (\Lambda'_2)^0 = \{(0, 1), (0, 0), (0, -1)\} \\ (\Lambda'_2)^+ = \{(-1, \frac{1}{2}), (-1, -\frac{1}{2})\} \end{cases} \quad (7.54)$$

En utilisant les équations (7.52) et (7.53) nous pouvons écrire :

$$[\Sigma'_{Q_{A_1}(\Lambda'_1)^-} | \Sigma'_{Q_{A_1}(\Lambda'_1)^0} | \Sigma'_{Q_{A_2}(\Lambda'_2)^0} | \Sigma'_{Q_{A_2}(\Lambda'_2)^+}].$$

$$[(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^-} | \frac{1}{2}(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0} | \frac{1}{2}(Pr)'_{2|(\Lambda'_2)^0} | (Pr)'_{2|(\Lambda'_2)^+}] = \bar{d}_{1Q_{A_1}(0,0)} + \bar{d}_{2Q_{A_2}(0,0)}$$

de sorte que :

$$[\Sigma'_{Q_{A_1}(\Lambda'_1)^0} | \Sigma'_{2Q_{A_2}(\Lambda'_2)^0}] \cdot [\frac{1}{2}(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0} | \frac{1}{2}(Pr)'_{2|(\Lambda'_2)^0}] = [\Sigma'_{Q^0|(A_1,A_2)}((\Lambda')^0)] \cdot [(Pr)'(0,0)_{|(\Lambda')^0}] \quad (7.55)$$

avec

$$(Pr)'(0,0)_{|(\Lambda')^0} = \frac{1}{2}(Pr)'_{1|(\Lambda'_1)^0} + \frac{1}{2}(Pr)'_{2|(\Lambda'_2)^0}$$

À partir des équations (7.43), (7.51), (7.54) et les deux dernières équations nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} & [\Sigma'_{Q_{A_1}((\Lambda')^-)} | \Sigma'_{Q^0|(A_1,A_2)}((\Lambda')^0) | \Sigma'_{Q_{A_2}((\Lambda')^+)}] [(Pr)'(0,0)_{|(\Lambda')^-} | (Pr)'(0,0)_{|(\Lambda')^0} | (Pr)'(0,0)_{|(\Lambda')^+}] \\ & = d'_{Q^0|(A_1,A_2)}(0,0), \end{aligned}$$

qui est le système (7.48) pour  $Q_{(A_1, A_2)}^0 = \frac{1}{2}Q_{|A_1} + \frac{1}{2}Q_{|A_2}$ . D'où la preuve de la proposition 19.

La définition des vecteurs demi-moments et la proposition 19, montrent tout simplement que le masque inverse particulier (dans la zone mixte) du schéma de Schaefer-Warren peut-être donné comme le moyennage des deux règles inverses des deux schémas B-spline bi-cubique et Loop. Dans l'exemple suivant, nous donnons la méthode pour calculer les poids de la règle inverse du schéma quad/triangle de Schaefer-Warren au point  $(0, 0)$ .

**Exemple 12** Le système d'équations linéaires (7.35) qui fournit les poids de la règle inverse du schéma de Loop au point  $(0, 0)$  est :

$$\left( \begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) (Pr)'_{(0,0)} \begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \\ b'_5 \\ b'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La première ligne de cette matrice est calculée à partir de la relation  $Q_{|A_2}(1) = 1$  qui représente le vecteur identiquement égal à 1 sur le long du support  $\Lambda'_2$ . L'action de  $Q_{|A_2}(f)$  sur les monômes de degré un sur le support  $\Lambda'_2$  reproduit la grille elle-même. Par conséquent, nous interprétons les lignes 2 et 3 comme le support  $\Lambda_1$ . Les lignes 4, 5 et 6 correspondent aux évaluations de  $Q_{|A_2}(f)$  pour un monôme  $f$  de degré deux sur le support  $\Lambda'_2$ .

Selon la répartition effectuée dans l'équation (7.53), on enlève les deux premières colonnes de la matrice, on multiplie les poids de la règle inverse sur la frontière et le vecteur de la seconde égalité par  $\frac{1}{2}$ , et on insère le demi-moment  $\theta'_{(0,0)}$  dans les lignes 2 et 3 du vecteur de la seconde égalité, nous aurons :

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b'_2 \\ \frac{1}{2}b'_3 \\ \frac{1}{2}b'_4 \\ b'_5 \\ b'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le même type de considérations s'applique sur le système (7.31), nous aurons alors :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \frac{1}{2}b_3 \\ \frac{1}{2}b_4 \\ \frac{1}{2}b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons ici que le vecteur de la seconde égalité donné dans le système (7.31) qui

fournit les poids du schéma inverse de Catmull-Clark au point  $(0,0)$  est multiplié par  $\frac{1}{2}$ , et le vecteur demi-moment  $-\theta_{(0,0)}$  est inséré dans les lignes 2 et 3.

D'après la proposition (7.54) et pour

$$\Lambda_1^0 = \Lambda_2^0 = \Lambda_0' = \{(1,0), (0,0), (-1,0)\},$$

les poids de la règle inverse du schéma de Schaefer-Warren au point  $(0,0)$  sont donnés par le système suivant :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{17}{24} & -\frac{7}{24} & \frac{17}{24} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}b_2' \\ \frac{1}{2}b_4 + \frac{1}{2}b_3' \\ \frac{1}{2}b_5 + \frac{1}{2}b_4' \\ b_5' \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{7}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

À partir de ce dernier système et le système (7.46), les poids de la règle inverse du schéma de Schaefer-Warren au point  $(0,0)$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} b_0'' \\ b_1'' \\ b_2'' \\ b_3'' \\ b_4'' \\ b_5'' \\ b_6'' \\ b_7'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}b_2' \\ \frac{1}{2}b_4 + \frac{1}{2}b_3' \\ \frac{1}{2}b_5 + \frac{1}{2}b_4' \\ b_5' \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{8} \\ \frac{13}{4} \\ -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Le masque inverse de Schaefer-Warren est donné dans la figure 7.15.

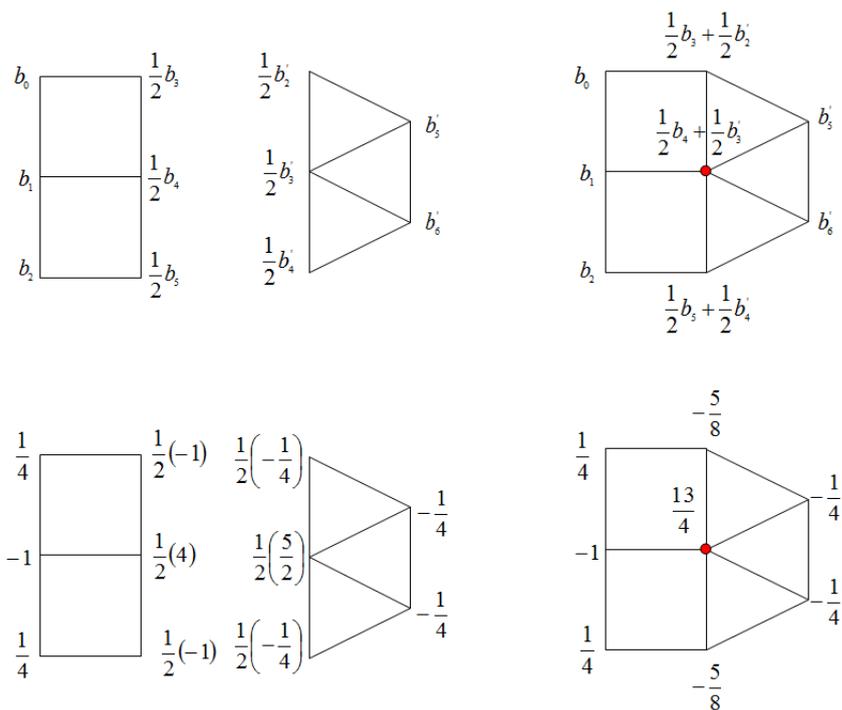


FIGURE 7.15 – Le masque inverse du schéma de Schaefer-Warren qui est donné comme le moyennage des masques inverse B-spline bi-cubique et Loop .

## 7.8/ CONCLUSION

Dans ce chapitre, et dans un premier temps nous nous sommes intéressés aux travaux de S. Lanquetin et M. Neveu [Lanquetin 2006], afin de proposer une autre formule du schéma inverse de Catmull-Clark sur un maillage quadrangulaire. Cette formule est paramétrisable et peut être appliquée directement pour inverser le schéma quad moyennage de Warren et Wimer [Warren 2002]. Par la suite, nous avons présenté une nouvelle méthode basée sur les théories de la reproduction des polynômes et la localité d'un schéma de subdivision afin de déterminer les formules inverse pour certains schémas de subdivision. Nous avons montré comment l'identification des relations entre les opérateurs  $T$ ,  $S$  et  $Q$  peuvent être appliquées pour construire les masques inverses de quelques schémas de subdivision linéaires. La relation  $TQ = Q\sigma^{-1}$  est considérée comme une équation linéaire ou l'inconnue est l'opérateur de subdivision inverse  $T$ . La solution de cette équation donne les poids des règles de subdivision inverse (B-spline cubique, Catmull-Clark et Loop). Enfin, nous avons utilisé cette méthode pour calculer différentes règles de subdivision inverses mixtes (quad/triangle). En particulier, nous avons proposé cette méthode afin d'inverser des schémas de subdivision définis sur des supports trop larges.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES



## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

### 8.1/ RÉSUMÉ ET CONTRIBUTIONS

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à deux aspects différents : d'une part la construction des schémas de subdivision quasi-linéaires qui unifient deux schémas de types géométriques différents, à savoir un schéma interpolant et un schéma approximant et d'autre part à la façon de construire des schémas de subdivision quad/triangle inverses.

#### 8.1.1/ SUBDIVISION

Les travaux présentés dans le cadre de la subdivision décrivent la construction d'un nouveau type de schémas de subdivision, et leurs applications, soit pour la résolution de quelques problèmes provenant de l'application des schémas de subdivision linéaires sur des zones bien choisies d'un maillage de contrôle, soit pour la modélisation et la construction d'objets composés de zones issues de l'application d'un schéma approximant et de zones issues de l'application d'un schéma interpolant.

Dans un contexte linéaire, on a, tout d'abord, proposé une formule de la fonction limite d'un schéma de subdivision linéaire (proposition 8). Ce qui nous a permis de l'utiliser afin de construire et d'étudier les schémas de subdivision quasi-linéaires.

Dans une seconde partie, après avoir donné un cadre général pour les schémas de subdivision linéaires définis sur des maillages réguliers, on s'est intéressé à l'étude et à la construction d'une classe de schémas qui unifient deux schémas linéaires de type géométriques différents sur des maillages bi-réguliers. On a alors établi des propriétés de convergence, de préservation des coefficients, de reproduction des polynômes et d'ordre d'approximation. Nous avons proposé notamment, la méthode de construction de ces schémas de subdivision et nous avons présenté différents schémas de subdivision. Ensuite, nous avons utilisé le test du rayon spectral conjoint, pour prouver la classe de continuité de ces schémas de subdivision dans les zones bi-régulières (les zones de raccord de ces schémas de subdivision).

Les schémas de subdivision quasi-linéaires définis sur des grilles bi-régulières que nous avons proposé dans cette thèse sont :

1. Schémas de subdivision uni-variés qui unifient le schéma 4 points et le schéma B-spline cubique.

2. Schéma de subdivision qui unifie le schéma interpolant de Butterffy et le schéma approximant de Loop sur un maillage triangle/triangle.
3. Schéma de subdivision qui unifie le schéma de Butterffy et le schéma de Catmull-Clark sur un maillage triangle/quad.
4. Schéma de subdivision qui unifie le schéma de Kobbelt et le schéma de Catmull-Clark sur un maillage quad/quad.
5. Schéma de subdivision qui unifie le schéma de Kobbelt et le schéma de Loop sur un maillage quad/triangle.

Par la suite, on s'est intéressé aux deux schémas quasi-linéaires quad/quad et triangle/triangle. Nous avons dans un premier temps généralisé les règles de subdivision de ces deux schémas à des maillages  $n$ -réguliers ( $n = 4$  pour le schéma quad/quad et  $n = 6$  pour le schéma triangle/triangle). Cette généralisation des règles nous a permis de définir plusieurs schémas de subdivision sur le même maillage. Dans un deuxième temps, nous avons proposé des règles de subdivision pour le cas général (de valence quelconque).

### 8.1.2/ SUBDIVISION INVERSE

Les travaux présentés dans le cadre de la subdivision inverse décrivent la façon de construire des schémas de subdivision quad/triangle inverse.

Dans un premier temps, nous avons proposé une formule du schéma inverse de Catmull-Clark dans le but de l'utiliser afin d'inverser d'autres schémas quadrangulaires comme le schéma quad moyennage de Warren et Weimer [WW02].

Dans un deuxième temps, nous avons présenté une nouvelle méthode basée sur les théories d'approximation et la localité d'un schéma de subdivision afin de déterminer les formules inverse pour certains schémas de subdivision linéaires (schéma inverse B-spline cubique, schéma inverse de Loop, schéma inverse de B-spline bi-cubique). Pour cela nous avons établi des propositions et un théorème afin de montrer que les poids d'une règle inverse d'un schéma de subdivision peuvent être donnés à partir d'une relation simple entre l'opérateur de subdivision  $S$ , l'opérateur quasi-interpolant  $Q$  et l'opérateur de subdivision inverse  $T$ . Enfin, nous avons utilisé cette méthode afin d'inverser les schémas quad/triangle de Levin-Levin et Schaefer-Warren.

## 8.2/ TENDANCES ET PERSPECTIVES

Chacune de ces parties ouvrent de nombreuses perspectives. Tout d'abord, concernant les schémas de subdivision quasi-linéaires plusieurs questions restent ouvertes ; en particulier, le choix des supports associés aux règles de subdivision dans les zones de raccord, la généralisation des règles de subdivision des schémas quasi-linéaires quad/triangle à des maillages irréguliers ou encore l'étude du comportement de la surface limite de ces schémas de subdivision au voisinage d'un point extraordinaire.

## LE CHOIX DES SUPPORTS

Dans le chapitre 4, nous avons proposé une méthode pour la construction et le choix des supports des règles de subdivision des schémas quasi-linéaires dans la zone de raccord. Différents choix de ces supports donnent différentes règles de subdivision. En expérimentant avec d'autres choix de ces supports, nous avons constaté que pour certains d'entre eux il n'existe pas de solution unique aux systèmes d'équations qui déterminent les poids des règles de subdivision. Nous avons aussi constaté que le fait de choisir d'autres supports nous permet d'améliorer la continuité de la fonction limite de certains schémas de subdivision. En effet, remplacer le support de la règle point impair au voisinage de l'axe  $y$  ( $i > 0$ ) (figure 5.14-(a)) par le support donné dans la figure 8.1, nous permet d'avoir une continuité  $C^{1.1824}$  de la surface limite du schéma triangle/triangle présentés dans le deuxième exemple (section 5.6.2) pour  $\gamma = 0$  au lieu de  $C^{0.8927}$ . Parallèlement, les systèmes d'équations qui donnent les poids des règles de subdivision associées à ce support n'admettent pas de solution unique pour tout  $\gamma \in ]0, 1[$ .

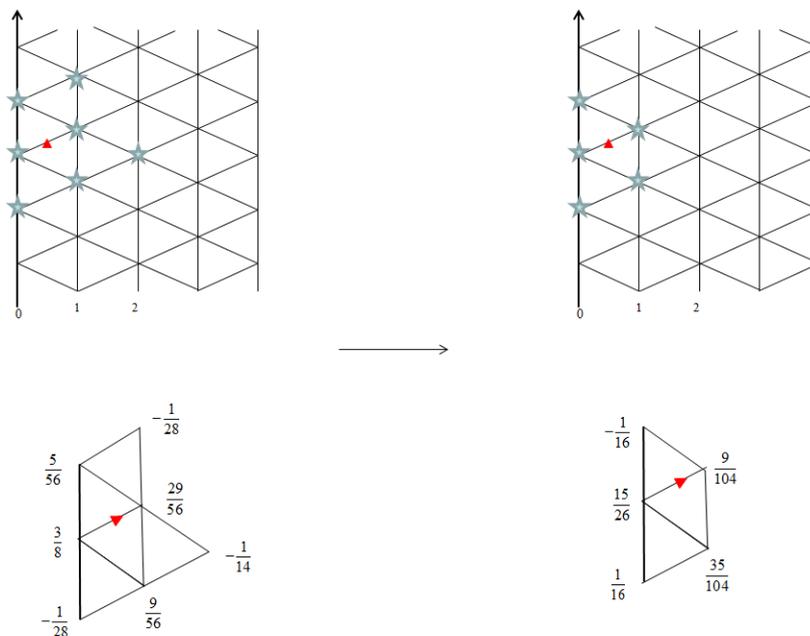


FIGURE 8.1 – En haut les deux supports possible d'une règle de subdivision particulière sur l'axe  $y$  ( $i > 0$ ). En bas les règles de subdivision associées à ces deux supports.

Deux questions naturelles se posent alors. La première question porte sur la possibilité de trouver d'autres règles de subdivision définies sur d'autres supports qui donnent une meilleure continuité possible aux surfaces limites. La deuxième concerne la possibilité de traiter les schémas de subdivision de façon séparée afin de proposer des règles appropriées pour chaque schéma et pour chaque cas.

### SCHÉMAS DE SUBDIVISION QUASI-LINÉAIRES QUAD/TRIANGLE

Dans le chapitre 6, nous avons proposé une méthode de généralisation des règles de schémas quasi-linéaires quad/quad et triangle/triangle à des maillages irréguliers. Cette méthode est basée sur une constatation et une relation simple entre les poids des règles de subdivision. En effet, pour les règles points impairs au voisinage d'un point de contrôle central irrégulier nous avons constaté que ces règles sont données tout simplement à partir des règles de subdivision points impairs au voisinage d'un point de contrôle central 4-régulier pour les schémas quad/quad et 6-régulier pour les schémas triangle/triangle. Pour les nouveaux points pairs les règles de subdivision sont données à partir d'une relation entre le poids du point irrégulier central et les poids des points qui forment son voisinage direct. Malheureusement cette méthode ne peut pas être utilisée afin de proposer des règles de subdivision à des schémas quad/triangle. Cela revient aux nombres de différents poids qui interviennent dans la définition de la règle de subdivision d'un point central de ces schémas de subdivision (voir figure 8.2). En effet, il est difficile de trouver une relation entre le poids du point de contrôle pair et les poids des points de contrôles qui forment son voisinage direct. Il faut donc proposer une autre méthode qui permette de définir des règles de subdivision des schémas quad/triangle adaptées à des maillages irréguliers.

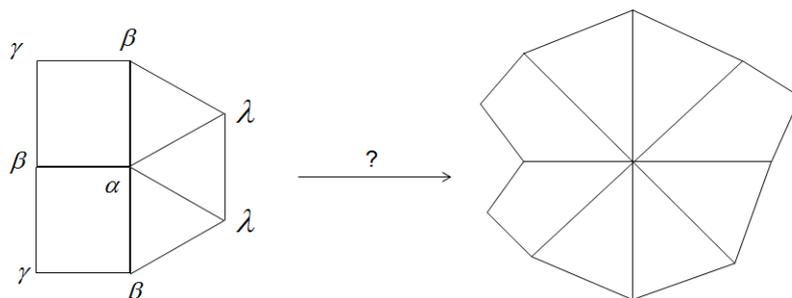


FIGURE 8.2 – À gauche les poids d'une règle point intérieur d'un schéma quasi-linéaire quad/triangle. À droite la situation au tour d'un point intérieur irrégulier.

### CONTINUITÉ AUTOUR D'UN POINT CENTRAL RÉGULIER

Tout au long de cette thèse, nous avons utilisé le test du rayon spectral conjoint afin de vérifier les conditions suffisantes de la continuité  $C^m$ . Mais à notre connaissance ce test s'applique que dans le cas où nous avons qu'une seule frontière commune entre les zones d'application des deux schémas de subdivision. Il faut donc proposer une autre méthode pour vérifier les conditions suffisantes de la continuité  $C^m$  pour les autres cas. Nous avons quelques idées qui restent à prouver. Une de ces idées est d'estimer le rayon spectral conjoint de quatre matrices. Pour cela, nous définissons quatre ensembles de points  $L$ ,  $\zeta_1 L$ ,  $\zeta_2 L$  et  $\zeta_1 \zeta_2 L$ . De sorte que l'ensemble  $L$  représente un sous ensemble de points de contrôle de la grille initiale au voisinage du point central et  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ , et  $\zeta_1 \zeta_2$  sont trois opérateurs de translation, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \{(i, j), (i, j) \in X_{(A_\alpha, A_\alpha)}\} \\ \zeta_1 L = \{(i+1, j), (i, j) \in L\} \\ \zeta_2 L = \{(i, j+1), (i, j) \in L\} \\ \zeta_1 \zeta_2 L = \{(i+1, j+1), (i, j) \in L\} \end{array} \right. .$$

Ensuite, nous définissons quatre matrices  $\mathcal{M}^1$ ,  $\mathcal{M}^2$ ,  $\mathcal{M}^3$  et  $\mathcal{M}^4$  sur ces ensembles de points par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}^1 : L \rightarrow L \\ \mathcal{M}^2 : L \rightarrow \zeta_1 L \\ \mathcal{M}^3 : L \rightarrow \zeta_2 L \\ \mathcal{M}^4 : L \rightarrow \zeta_1 \zeta_2 L \end{array} \right.$$

de sorte que les matrices  $\mathcal{M}^i, i = 1, \dots, 4$  sont données sur une autre base par :

$$(\mathcal{M}^i)' = V^{-1} \mathcal{M}^i V = \begin{pmatrix} \Theta^i & C^i \\ 0 & Y^i \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous calculons le rayon spectral conjoint des quatre matrices  $Y^i, i = 1, \dots, 4$ .



# TABLE DES FIGURES

1.1	Quelques exemples de grilles associées à des maillages bi-réguliers et $n$ -réguliers. (a)-grille bi régulière triangle/triangle, (b)- grille bi-régulière quad/triangle, (c)- grille $n$ -régulière quad . . . . .	18
1.2	Quelques exemples de zone d'application de deux schémas approximant et interpolant ainsi que les zones de raccord. Les arcs bleus clairs pour les zones d'application d'un schéma interpolant, les arcs jaunes pour les zones d'application d'un schéma approximant, les droites rouges pour les frontières communes et le rectangle rouge pour la zone de raccord. . . . .	19
1.3	Subdivision quad/triangle inverse . . . . .	19
1.4	En haut, le schéma interpolant 4 points avec un bon ordre d'approximation mais une mauvaise continuité de la courbe limite. En bas, le schéma approximant B-spline cubique avec une bonne continuité de la courbe limite mais un mauvais ordre d'approximation . . . . .	21
1.5	À gauche la courbe limite générée par l'application du schéma interpolant 4 points pour $p = (\delta_{i,0})_i$ ([Dyn 1987]). À droite la courbe limite générée par l'application du schéma approximant 4 points pour $p = (\delta_{i,0})_i$ ([Dyn 2005]). . . . .	22
1.6	Problème de raccord d'une courbe (resp. surface) issue de l'application d'un schéma approximant et une courbe (resp. surface) issue de l'application d'un schéma interpolant. . . . .	23
1.7	Problème de raccord d'une surface issue de l'application d'un schéma interpolant sur un maillage triangulaire et une surface issue de l'application d'un schéma interpolant sur un maillage quadrangulaire. . . . .	24
2.1	Les deux lignes représentent un polygone défini par le vecteur de points de contrôle initiaux $p = \delta_{i,0}$ et trois pas de subdivision successifs : $S \delta_{i,0}$ , $S^2 \delta_{i,0}$ et $S^3 \delta_{i,0}$ . a) $S$ représente le schéma défini par le masque $a_i = [\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}]$ . b) $S$ représente le schéma défini par le masque $a_i = \frac{1}{8}[1, 4, 6, 4, 1]$ . . . . .	36
2.2	Un polygone de contrôle et l'application des deux matrices $\mathcal{M}^1$ et $\mathcal{M}^2$ . . . . .	41
2.3	Paramétrisation d'un schéma de subdivision. À gauche, paramétrisation duale et à droite, paramétrisation primale . . . . .	44
2.4	Illustration de la reproduction exacte des polynômes. Les étoiles représentent les points de contrôles initiaux $p_i$ . La courbe représente la fonction limite $S^\infty p = f$ du schéma 4 points pour $p_i = f(x_i) = f(i) = i^2$ . . . . .	46

2.5	<i>Illustration de la reproduction simple des polynômes. Les étoiles représentent les points de contrôles initiaux <math>p_i</math>. La courbe représente la fonction limite <math>S^\infty p</math> du schéma B-spline cubique (pour <math>p_i = f(i) = i^2</math>, les points de contrôle <math>p_i</math> convergent vers une fonction <math>g, S^\infty p = g = i^2 + \frac{1}{3}</math>).</i> . . . . .	48
3.1	<i>La figure à gauche représente la fonction limite <math>S^\infty p</math> du schéma B-spline cubique (pour <math>p_i = f(i) = i^2</math>, les points de contrôle <math>p_i</math> convergent vers une fonction <math>g, S^\infty p = g = i^2 + \frac{1}{3}</math>). La figure à droite représente la fonction limite <math>S^\infty Qp</math> du schéma B-spline cubique appliqué à l'ensemble de points de contrôle échantillonné par l'application d'un opérateur <math>Q</math> (pour <math>p_i = f(i)</math>, <math>Qp_i = Qf(i) = i^2 - \frac{1}{3}</math>, les points de contrôle <math>Qp_i</math> convergent vers une fonction <math>f, S^\infty Qp = f = i^2</math>).</i> . . . . .	53
3.2	<i>Chaque ligne représente un polygone défini par le vecteur de points de contrôle initiaux <math>p</math> et trois pas de subdivision successive : <math>(Sp)</math>, <math>(S^2p)</math> et <math>(S^3p)</math> où <math>S</math> est le schéma B-spline cubique. La première ligne : <math>p = \delta_{i,0}</math>. La deuxième ligne <math>p = x^2</math> converge vers <math>S^\infty p = x^2 + \frac{1}{3}</math>.</i> . . . . .	58
3.3	<i>Un exemple de subdivision : schéma B-spline cubique sur le support <math>[i - 1, i + 1]</math></i> . . . . .	60
3.4	<i>Les ensembles de points de contrôle <math>Qp_i = Qf(i) = Q(i^2)</math> qui génèrent des fonctions limites <math>S^\infty Q^*f</math>. À gauche, l'ensemble de points de contrôle qui génère la fonction limite d'un schéma interpolant. À droite, l'ensemble de points de contrôle qui génère la fonction limite d'un schéma approximant (ici le schéma B-spline cubique).</i> . . . . .	63
3.5	<i>À gauche, la courbe limite générée par l'application du schéma B-spline cubique (pour <math>p = (\delta_{i,0})_i</math>). À droite, la surface limite générée par l'application du schéma B-spline bi-cubique.</i> . . . . .	67
3.6	<i>À gauche, la courbe limite générée par l'application du schéma 4 points (pour <math>p = (\delta_{0,n})_n</math>). À droite, la surface limite générée par l'application du schéma de Butterfly pour <math>w = \frac{1}{16}</math>.</i> . . . . .	70
3.7	<i>À gauche, le schéma interpolant 4 points avec un ordre d'approximation optimal mais une mauvaise continuité. Au milieu, le schéma 4 points approximant. À droite, le schéma approximant B-spline quadratique avec une continuité optimale mais un mauvais ordre d'approximation</i> . . . . .	71
4.1	<i>Illustration de la notion de maillage</i> . . . . .	74
4.2	<i>Les grilles régulières.</i> . . . . .	75
4.3	<i>Grille semi-régulière.</i> . . . . .	75
4.4	<i>Grille bi-régulière (quad/triangle).</i> . . . . .	76
4.5	<i>Les règles de subdivision intérieures et de bords de Catmull-Clark : <math>\alpha = 1 - n(\alpha + \beta)</math>, <math>\beta = \frac{3}{2n^2}</math> et <math>\gamma = \frac{1}{4n^2}</math> où <math>n</math> représente la valence du schéma. Ces valeurs assurent la continuité <math>C^1</math> de la surface limite.</i> . . . . .	77

4.6 Les différentes règles de subdivision de Doo-Sabin :  $\alpha_0 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4n}$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{4k}(3 + 2\cos(\frac{2\pi i}{n}))$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Catmull et Clark proposent des coefficients plus simples pour ce schéma :  $\alpha_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{n-1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4n}$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{4n}$ ,  $i = 2, \dots, n - 2$ . . . . . 78

4.7 Les règles de Kobbelt. S'agissant d'un schéma interpolant, seules les règles pour les points impairs sont nécessaires. . . . . 78

4.8 Les règles du schéma de Loop.  $\alpha = \frac{1}{n}(\frac{5}{8} - (\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos(\frac{2\pi}{n}))^2)$ ,  $\beta = 1 - n\alpha$ ,  $n$  représente la valence. . . . . 79

4.9 Le schéma de Butterfly modifié : pour  $n = 3$ ,  $s_0 = \frac{5}{12}$ ,  $s_{1,2} = -\frac{1}{12}$ , pour  $n = 4$ ,  $s_0 = \frac{3}{8}$ ,  $s_2 = -\frac{1}{8}$ ,  $s_{1,3} = 0$  et pour  $n > 5$ ,  $s_i = \frac{1}{n}(\frac{1}{4} + \cos(\frac{2\pi i}{k}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{4\pi i}{n}))$ . . . . . 80

4.10 Le schéma de Butterfly modifié : règles points crêtes. a)-c) : règles points crêtes ordinaires. d) règles points crêtes extraordinaires,  $c_0 = 1 - (1/(n - 1))\sin\theta_n \sin i\theta_n/(1 - \cos\theta_n)$ ,  $c_{i0} = c_{in} = 1/4 \cos i\theta_n - (1/4(n - 1))\sin 2\theta_n \sin 2i\theta_n/(\cos\theta_n - \cos 2\theta_n)$  et  $c_{ij} = 1/n(\sin i\theta_n \sin j\theta_n + 1/2 \sin 2i\theta_n \sin 2j\theta_n)$  avec  $j = 0, \dots, n$  et  $\theta_n = \pi/(n - 1)$ . . . . . 80

4.11 Exemple d'un artefact polaire (cadre rouge) et d'oscillations radiales[Destelle 2010]. . . . . 82

4.12 Règles de subdivision du schéma quad/triangle de Stam-Loop. . . . . 83

4.13 Règles de subdivision le long des arêtes quad/triangle ordinaires du schéma quad/triangle de Levin-Levin. a) règle point intérieur, b) règle point arête et c) règle de décompression "unzipping" . . . . . 84

4.14 Règles de subdivision le long des arêtes quad/triangle ordinaires du schéma quad/triangle de Schaefer-Warren. a) règle point intérieur, b) règle point arête et c) les deux règle de décompression "unzipping". . . . . 85

5.1 Les grilles triangulaires. . . . . 90

5.2 Visualisation graphique d'un schéma de subdivision linéaire sur une grille triangulaire. Les points noirs représentent les différents nouveaux points (points pairs et impairs).  $(\dots a_{i-2,j}^{-3}, \dots, a_{i-2,j}^2, \dots)$  représentent les règles qui déterminent les nouveaux points. . . . . 91

5.3 À gauche la grille triangle/triangle et à droite la grille quad/quad. . . . . 94

5.4 À gauche la grille quad/triangle et à droite la grille triangle/quad. . . . . 94

5.5 Visualisation graphique d'un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille bi-régulière. Les points noirs représentent les différents nouveaux points.  $(\dots a_{i-2,j}^{-3}, \dots, a_{i-2,j}^2, \dots)$  représentent les règles qui déterminent ces nouveaux points. . . . . 96

5.6 Visualisation graphique des deux schémas de subdivision  $S_{|A_\alpha}^-$  et  $S_{|A_\beta}^+$ . . . . . 108

- 5.7 Visualisation graphique d'un schéma de subdivision quasi-linéaire sur une grille quad/triangle. (les points verts représentent les nouveaux points issus de l'application d'un schéma interpolant  $S_{|A_\alpha}^-$ , les points rouges représentent les nouveaux points dans la zone mixte et les points noirs représentent les nouveaux points issus de l'application d'un schéma approximant  $S_{|A_\beta}^+$ ). ( $\dots a^{-5}, \dots, a^5, \dots$ ) représentent les règles qui déterminent ces nouveaux points. . . . . 109
- 5.8 (a)-(e) : les nouveaux points de contrôles dans la zone de raccord, (f)-(g) : les règles de subdivision des schémas 4 points et B-spline cubique. . . . . 115
- 5.9 Les ensembles de définition des deux matrices  $M^1$  et  $M^2$  associées aux schémas quasi-linéaires univariés. a) L'ensemble  $L$ , b) l'ensemble de définition de la matrice  $M^1$  et c) l'ensemble de définition de la matrice  $M^2$ . . . . . 120
- 5.10 En haut à gauche, les points qui génèrent la fonction limite du schéma 4-points. En haut à droite les points qui génèrent la fonction limite du schéma B-spline cubique. En bas, les points qui génèrent la fonction limite des schémas quasi-linéaires univariés (les schémas qui unifient le schéma 4-point pour  $i < 0$  et le schéma B-spline cubique pour  $i > 0$ ). Le point rouge représente le point de contrôle  $Q_{p_0}$  pour  $\gamma = 1$ , le point bleu représente le point de contrôle  $Q_{p_0}$  pour  $\gamma = 1/2$  et le point vert représente le point de contrôle  $Q_{p_0}$  pour  $\gamma = 0$ . . . . . 121
- 5.11 Différentes courbes générées par l'application des schémas de subdivision quasi-linéaires uni-variés en fonction d'un paramètre  $\gamma$ . De haut en bas : schémas linéaires, schémas quasi-linéaires uni-variés pour  $\gamma = 0$ , schémas quasi-linéaires uni-variés pour  $\gamma = \frac{1}{2}$  et schémas quasi-linéaires uni-variés pour  $\gamma = 1$ . De gauche à droite, la première ligne : schéma interpolant 4 points et schéma B-spline cubique, lignes 2, 3 et 4 schémas quasi-linéaires uni-variés qui reproduisent les polynômes de degré 3 et schémas quasi-linéaires uni-variés qui reproduisent les polynômes de degré 2. . . . . 124
- 5.12 (a) (resp. (b)) Les trois courbes générées par l'application du schéma quasi-linéaire uni-varié qui reproduit les polynômes de degré 3 (resp. de degré 2) (les points : rouge, vert et orange représentent les points de raccord des deux schémas 4 points et B-spline cubique pour  $\gamma = 0, \frac{1}{2}, 1$  respectivement). (c) comparaison entre le schéma quasi-linéaire qui reproduit les polynômes de degré 3 et celui de degré 2 pour  $\gamma = 0$  (point de raccord rouge pour le schéma qui reproduit les polynômes de degré 3 et point de raccord vert pour celui qui reproduit les polynôme de degré 2). (d) comparaison entre le schéma quasi-linéaire qui reproduit les polynômes de degré 3 et celui de degré 2 pour  $\gamma = 1$  (la courbe vert rouge pour le schéma qui reproduit les polynômes de degré 3 et la courbe bleu jaune pour celui qui reproduit les polynômes de degré 2) . . . . . 125
- 5.13 Visualisation graphique des ensembles de nouveaux points du schéma de subdivision quasi-linéaire triangle/triangle (les points verts représentent l'ensemble des nouveaux points issus de l'application du schéma de Butterfly  $S_{|A_2}^-$ , les points rouges représentent l'ensemble des nouveaux points dans la zone mixte et les points noirs représentent l'ensemble des nouveaux points issus de l'application du schéma de Loop  $S_{|A_2}^+$ ). . . . . 127

5.14	<i>Les supports des règles de subdivision particulières au voisinage de l'axe <math>y</math> (<math>i &lt; 0</math>).</i>	128
5.15	<i>Les supports des règles de subdivision particulières sur l'axe <math>y(i = 0)</math>.</i>	128
5.16	<i>Les supports des règles de subdivision au voisinage de l'axe <math>y</math> (<math>i &gt; 0</math>).</i>	129
5.17	<i>Les supports des règles de bords sur l'axe <math>y</math> et au voisinage de cet axe. a) les règles de bords dans la moitié gauche de la grille triangle/triangle, b) une règle de bord sur l'axe <math>y</math> et c) les règles de bords sur la moitié droite de la grille.</i>	131
5.18	<i>Les ensembles des règles de subdivision sur la grille triangle/quad (les points verts représentent les règles du schéma de Butterfly, les points rouges représentent l'ensemble des règles de subdivision dans la zone mixte et les points noirs représentent l'ensemble des règles de subdivision du schéma de Catmull-Clark).</i>	135
5.19	<i>Les supports des règles de subdivision particulières sur l'axe <math>y(i = 0)</math>.</i>	136
5.21	<i>Les règles de bords.</i>	137
5.20	<i>Les règles de subdivision particulières appliquées le long et au voisinage de l'axe <math>y</math>.</i>	137
5.22	<i>Comparaison entre le schéma de Butterfly (en haut), schéma de Catmull-Clark (au centre) et le schéma quasi-linéaire qui unifie le schéma interpolant de Butterfly et le schéma approximant de Catmull-Clark sur un maillage triangle/quad (en bas). De gauche à droite : les mailles de contrôle, les surfaces limites, des mailles de couleur (jaune pour les triangles, bleu pour les quads), et les lignes de réflexion.</i>	139
5.23	<i>Différentes surfaces générées par l'application du schéma quasi-linéaire triangle/quad.</i>	140
5.24	<i>Les ensembles des règles de subdivision sur la grille quad/quad (les points verts représentent les règles du schéma Kobbelt, les points rouges représentent l'ensemble des règles de subdivision dans la zone mixte et les points noirs représentent l'ensemble des règles de subdivision du schéma de Catmull-Clark).</i>	143
5.25	<i>Les poids des règles de subdivision au voisinage de l'axe <math>y</math>. <math>\alpha = -\frac{1}{16}, \beta = \frac{9}{16}</math>.</i>	144
5.26	<i>Les poids des règles de subdivision au voisinage de l'axe <math>y</math>. (a) les poids règles points faces <math>(S_{ (A_1, A_1)P})_{-1, 2j+1}</math>, (b) les poids règles points arêtes <math>(S_{ (A_1, A_1)P})_{-1, 2j}</math>, (c) les poids règles points faces <math>(S_{ (A_1, A_2)P})_{-1, 2j+1}</math>.</i>	144
5.27	<i>Les poids des règles de subdivision sur l'axe <math>y</math>.</i>	146
5.28	<i>Les poids des règles de subdivision sur l'axe <math>y</math>.</i>	147
5.29	<i>Différentes surfaces générées par l'application du schéma de subdivision quasi-linéaire quad/triangle (Kobbelt/Loop). De gauche à droite : les mailles de contrôle, les surfaces limites, des mailles de couleur (jaune pour les triangles, bleu pour les quads), et les lignes de réflexion.</i>	148

5.30	<i>Différentes surfaces générées par l'application du schéma de subdivision quasi-linéaire quad/quad (Kobbelt/Catmull-Clark). De gauche à droite : les mailles de contrôle, les surfaces limites, des mailles de couleur (jaune pour les triangles, bleu pour les quads), et les lignes de réflexion.</i> . . . . .	149
6.1	<i>Les grilles n-régulières : à gauche la grille n-régulière triangle et à droite la grille n-régulière quad.</i> . . . . .	152
6.2	<i>(a) la grille 4-régulière quad, (b) la zone <math>\xi_1</math>, (c) la zone <math>\xi_2</math>, (d) la zone <math>\xi_3</math> et (e) la zone <math>\xi_4</math>.</i> . . . . .	153
6.3	<i>La grille 6-régulière, les zones <math>\xi'_i</math> et les frontières de ces zones <math>\partial\xi'_i</math>.</i> . . . . .	154
6.4	<i>Les trois cas de l'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 4-régulière (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleus et les zones d'application d'un schéma approximant en jaunes).</i> . . . . .	156
6.5	<i>Un exemple qui montre des zones d'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 4-régulière de façon arbitraire (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleus et les zones d'application d'un schéma approximant en jaunes).</i> . . . . .	156
6.6	<i>Les cinq cas d'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 6-régulière (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleu et les zones d'application d'un schéma approximant en jaune).</i> . . . . .	158
6.7	<i>Deux exemples qui montrent des zones d'application d'un schéma quasi-linéaire sur une grille 6-régulière de façon arbitraire (les zones d'application d'un schéma interpolant en bleu et les zones d'application d'un schéma approximant en jaune).</i> . . . . .	159
6.8	<i>Les règles de subdivision dans la partie interpolante du schéma 4-régulier quad/quad définit dans l'équation (6.12).</i> . . . . .	163
6.9	<i>Les règles de subdivision sur les frontières communes du schéma 4-régulier défini dans l'équation 6.11.</i> . . . . .	164
6.10	<i>les nouveaux points à déterminer dans la partie interpolante du schéma (6.13).</i> . . . . .	165
6.11	<i>les nouveaux points à déterminer dans la partie interpolante du schéma (6.13).</i> . . . . .	166
6.12	<i>Règles de subdivision particulières du schéma (6.14) sur la frontière commune</i> . . . . .	167
6.13	<i>Règles de subdivision particulières du schéma (6.17) dans les zones d'application d'un schéma interpolant.</i> . . . . .	168
6.14	<i>Règles de subdivision particulières du schéma (6.17) sur les frontières communes.</i> . . . . .	169
6.15	<i>Règles de subdivision particulières du schéma (6.17) dans les zones d'application d'un schéma approximant.</i> . . . . .	170
6.16	<i>Différentes règles de subdivision particulières des schémas (6.18).</i> . . . . .	171
6.17	<i>Différentes règles de subdivision particulières du schéma (6.20)</i> . . . . .	173

6.18	<i>Différentes règles de subdivision particulières du schéma (6.20)</i>	175
6.19	<i>Différentes règles de subdivision particulières des schémas (6.22) et (6.23)</i>	176
6.20	<i>Situation autour d'un point central.</i>	177
6.21	<i>A gauche : l'ensemble de points <math>L</math> qui représente un sous ensemble de la grille 4-régulière quad (<math>\circ</math>, les points de contrôle qui déterminent l'ensemble de points <math>L</math>, les deux droites rouges représentent les frontières communes, en vert les deux arêtes de la frontière adjacente au point central). A droite, l'ensemble de point <math>L</math> après un pas de subdivision (les étoiles représentent les 49 points de contrôle des deux matrices <math>M^1</math> et <math>M^2</math>).</i>	179
6.22	<i>Situation générale pour un point de contrôle ordinaire au point central (0,0).</i>	181
6.23	<i>Situation générale pour un point de contrôle extraordinaire au point central (0,0).</i>	182
6.24	<i>Situation générale pour un point de contrôle ordinaire au point central (0,0)</i>	183
6.25	<i>Situation générale pour un point extraordinaire au point central (0,0).</i>	184
6.26	<i>Exemple d'un schéma quasi-linéaire sur un maillages 4-régulier (schéma (6.11)). De gauche à droite : les mailles de contrôle, des mailles de couleur (jaune pour les zones d'application du schéma de Catmull-Clark, bleu pour les zones d'application du schéma de Kobbelt), les surfaces limites avec les deux zones en bleu et jaune et les frontières en rouge, et les surfaces limites.</i>	185
6.27	<i>Différents schémas quasi-linéaires sur un maillage 5-régulier quad (valence 5) et comparaison avec le schéma de Catmull-Clark. De gauche à droite : le maillage 5-régulier quad, des mailles de couleur (jaune pour les zones d'application du schéma de Catmull-Clark, bleu pour les zones d'application du schéma de Kobbelt), les surfaces limites avec les deux zones en bleu et jaune et les frontières en rouge, et les surface limites. a) schéma quasi-linéaire avec une zone approximante et quatre zones interpolantes. b) schéma quasi-linéaire avec trois zone approximantes et deux zones interpolantes. b) schéma quasi-linéaire avec quatre zone approximantes et une zone interpolantes. c) schéma de Catmull-Clark sur un maillage 5-régulier quad.</i>	187
6.28	<i>Différents schémas quasi-linéaires sur un maillage 7-régulier quad (valence 7). De gauche à droite : le maillage 7-régulier quad, des mailles de couleur (jaune pour les zones d'application du schéma de Catmull-Clark, bleu pour les zones d'application du schéma de Kobbelt), les surfaces limites avec les deux zones en bleu et jaune et les frontières en rouge, et les lignes de réflexion.</i>	188
6.29	<i>Deux cartes caractéristiques au voisinage de deux points de contrôle centraux irréguliers de valence 5 et 7.</i>	188
7.1	<i>La situation générale pour un point de contrôle extraordinaire <math>p_i^k</math> avant et après subdivision (maillage quelconque).</i>	194
7.2	<i>La situation générale pour un point de contrôle extraordinaire <math>p_i^k</math> avant et après subdivision (maillage quadrangulaire).</i>	196

7.3	<i>Masque inverse de Catmull-Clark dans le cas général.</i>	197
7.4	<i>Le masque inverse de Catmull-Clark dans le cas régulier.</i>	197
7.5	<i>La surface limite et l'application de deux étapes de subdivision inverse de Catmull-Clark.</i>	198
7.6	<i>La généralisation du masque inverse de Catmull-Clark à un masque général quad moyennage.</i>	200
7.7	<i>Situation générale pour un point de contrôle pair.</i>	201
7.8	<i>Situation générale pour un point de contrôle B-spline cubique.</i>	203
7.9	<i>Situation générale pour un point intérieur du schéma B-spline bi-cubique.</i>	206
7.10	<i>Le masque inverse du schéma B-spline bi-cubique.</i>	208
7.11	<i>Situation générale pour un point intérieur du schéma de Loop dans le cas régulier.</i>	209
7.12	<i>Le masque inverse du schéma de Loop dans le cas régulier.</i>	210
7.13	<i>Situation générale pour un point de contrôle intérieur.</i>	212
7.14	<i>Règle inverse particulière du schéma de Levin-Levin.</i>	215
7.15	<i>Le masque inverse du schéma de Schaefer-Warren qui est donné comme le moyennage des masques inverse B-spline bi-cubique et Loop</i>	220
8.1	<i>En haut les deux supports possible d'une règle de subdivision particulière sur l'axe <math>y</math> (<math>i &gt; 0</math>). En bas les règles de subdivision associées à ces deux supports.</i>	225
8.2	<i>À gauche les poids d'une règle point intérieur d'un schéma quasi-linéaire quad/triangle. À droite la situation au tour d'un point intérieur irrégulier.</i>	226

# LISTE DES TABLEAUX

5.1	<i>Les poids des règles de subdivision particulières du schéma quasi-linéaire univarié.</i>	116
5.2	<i>Les poids des règles de subdivision particulières du schéma quasi-linéaire univarié.</i>	117
5.3	<i>Continuité des schémas quasi-linéaires univariés.</i>	119
5.4	<i>Les poids des règles de subdivision particulières du schéma quasi-linéaire triangle/triangle en fonction d'un paramètre <math>\gamma</math>.</i>	130
5.5	<i>Les poids des règles de bords du schéma quasi-linéaire triangle/triangle en fonction d'un paramètre <math>\gamma</math>.</i>	132
5.6	<i>Continuité du schéma quasi-linéaire triangle/triangle en fonction d'un paramètre <math>\gamma</math>.</i>	133
5.7	<i>Les poids des règles de subdivision du schéma quasi-linéaire quad/quad.</i>	146
5.8	<i>Les poids des règles de subdivision du schéma quasi-linéaire quad/triangle.</i>	146
6.1	<i>Les règles de subdivision particulières du schéma (6.18).</i>	171
6.2	<i>Les règles de subdivision particulières du schéma (6.20).</i>	173
6.3	<i>Les règles de subdivision particulières du schéma (6.21).</i>	174
6.4	<i>Les règles de subdivision particulières du schéma (6.22).</i>	176
6.5	<i>Les règles de subdivision particulières du schéma (6.23).</i>	176
6.6	<i>Les valeurs propres et les conditions nécessaires de la continuité <math>C^m</math> des schémas quasi-linéaires définis sur une grille 4-régulière.</i>	177
6.7	<i>Les valeurs propres et les conditions nécessaires de la continuité <math>C^m</math> des schémas quasi-linéaires définis en fonction d'un paramètre <math>\gamma</math> sur une grille 6-régulière.</i>	178
6.8	<i>Les ensembles de points <math>L</math> et <math>\zeta' L</math> qui déterminent les deux matrices <math>\mathcal{M}^1</math> et <math>\mathcal{M}^2</math> de différents schémas quasi-linéaires.</i>	179
6.9	<i>Le rayon spectral conjoint et la continuité <math>C^m</math> de quelques schémas quasi-linéaires sur un maillage 4-régulier.</i>	180
6.10	<i>Le rayon spectral conjoint et la continuité <math>C^m</math> de quelques schémas quasi-linéaires sur un maillage 6-régulier (pour <math>\gamma = 0, \frac{1}{2}</math>).</i>	180



# BIBLIOGRAPHIE

- [Ball 1988] A. A. Ball et D. J. T. Storry. *Conditions for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces*. ACM Transactions on Graphics, vol. vol.7,no.2,pp.83102, 1988.
- [Catmull 1978] E. Catmull et J. Clark. *Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological surfaces*. Computer Aided Geometric Design, vol. vol.10,no.6,pp.350355, 1978.
- [Cavaretta 1991] A.S. Cavaretta, W. Dahmen et C.A. Micchelli. *Stationary subdivision*. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. vol.93(453), 1991.
- [C.Gérot 2005] C.Gérot, L. Barthe, N. Dodgson et M. Sabin. *Subdivision as a sequence of sampled  $C^p$  surfaces*. N. Dodgson, M. Floater and M. Sabin, Eds. Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, springer-Verlag, vol. vol.,pp.259-270, 2005.
- [Chaikin 1974] G. Chaikin. *An algorithm for high speed curve generation*. Computer Graphics and Image Processing, vol. vol.3,pp.346-349, 1974.
- [Chen ] R. Chen, X. Luo, G. Zheng et R. Ling. *Multi-resolution compression of meshes based on reverse interpolatory  $\sqrt{3}$  subdivision scheme*. International Journal of Computer Science and Network Security.
- [Chui 2003] C.K. Chui et Q.T. Jiang. *Surface subdivision schemes generated by reffinable bivariate spline function vectors*. Appl. Comput. Harmonic Anal, vol. vol.15,pp.147-162, 2003.
- [Chui 2006] C.K. Chui et Q.T. Jiang. *Matrix-valued subdivision schemes for generating surfaces with extraordinary vertices*. Comput. Aided Geom. Design, vol. vol.23,pp.419-438, 2006.
- [Chui 2008] C.K. Chui et Q.T. Jiang. *From extension of Loop's approximation scheme to interpolatory subdivisions*. Comput. Aided Geom. Design, vol. vol.25,pp.96-115, 2008.
- [D. Zorin 1996a] P. Schroder D. Zorin et W. Sweldens. *Interpolating Subdivision for Meshes with Arbitrary Topology*. Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 96), vol. vol., pp.189-192, 1996.
- [D. Zorin 1996b] P. Schröder D. Zorin et W. Sweldens. *Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology*. In Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques ACM Press, vol. vol.,pp.189192, 1996.
- [D. Zorin 1997] P. Schroder D. Zorin et W. Sweldens. *Interactive Multiresolution Mesh Editing*. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 1997.
- [deBoor 1990] C. deBoor. *Quasiinterpolants and approximation power of multivariate splines*. M. Gasca and C. A. Micchelli, editors, Computation of curves and surfaces, Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers, vol. vol.,pp.313-345, 1990.

- [deBoor 1992] C. deBoor et A. Ron. *The exponentials in the span of the multiinteger translates of a compactly supported function : quasiinterpolation and approximation order*. Journal of London Mathematical Society (2), vol. vol.45,pp.519-535, 1992.
- [DeRose 1997] T. DeRose, M. Lounsbery et J. Warren. *Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type*. ACM Trans. Graph, vol. vol.16,no. 1,pp.77-85, 1997.
- [Destelle 2010] F. Destelle. *Adaptation de schémas de subdivision pour la reconstruction d'objet sans artefact*. PhD thèse, Institut national polytechnique de Grenoble, Gipsa-lab, France, 2010.
- [Doo 1978] D. Doo et M. Sabin. *Behaviour of recursive subdivision surfaces near extraordinary points*. Computer Aided Design, vol. vol.,pp 356-360, 1978.
- [Dyn ] N. Dyn, M. A. Sabin, K. Hormann et Z. Shen. *Polynomial Reproduction by Symmetric Subdivision Schemes*.
- [Dyn 1987] N. Dyn, J. A. Gregory et D. Levin. *A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design*. Computer Aided Geometric Design, vol. vol.4,pp.257-268, 1987.
- [Dyn 1991] N. Dyn, J. A. Gregory et D. Levin. *Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design*. Constr. Approx, vol. vol.7,pp.127-147, 1991.
- [Dyn 1992] N. Dyn. *Subdivision schemes in computer aided geometric design*. Computer Aided Geometric Design, vol. vol.20(4),pp.36-104, 1992.
- [Dyn 2005] N. Dyn, M. S. Floater et K. Hormann. *A C2 four-point subdivision scheme with fourth order accuracy and its extensions*. In M. Döhlen, K. Mörken, and L. L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces : Tromsø 2004, Modern Methods in Mathematics*, vol. vol.,pp.145-156. Nashboro Press, Brentwood, TN, 2005.
- [Goodman 1994] T. N. T. Goodman, C. A. Micchelli et J. D. Ward. *Spectral radius formulas for subdivision operators, in Recent Advances in Wavelet Analysis*". edited by L. L. Schumaker and G. Webb, Academic Press, vol. vol.,pp.335-360, 1994.
- [H. Hoppe 1994] M. Halstead H. Jin J. McDonald J. Schweitzer H. Hoppe T. DeRose et W. Stuetzle. *Piecewise Smooth Surface Reconstruction*. In Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, vol. vol., pp.295-302, 1994.
- [Hassan 2005] M.F. Hassan et N. A. Dodgson. *Reverse subdivision*. Advances in Multi-resolution for Geometric Modelling. Springer, vol. vol.,pp.271-283, 2005.
- [Jia 1995] Rong-Qing Jia. *Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design*. Adv. Comput. Math, vol. vol.3,pp.309-341, 1995.
- [Kobbelt 1996] L. Kobbelt. *A variational approach to subdivision*. Comput. Aided Geom. Des, vol. vol.18,no.8,pp.743-761, 1996.
- [Kuijt 1998] F. Kuijt. *Convexity Preserving Interpolation*. Stationary Nonlinear Subdivision and Splines, vol. PhD thesis, University of Twente (The Netherlands), 1998.
- [Lanquetin 2006] S. Lanquetin et M. Neveu. *Reverse Catmull-Clark subdivision*. In The 14-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer (WSCG), 2006.
- [Levin 2000] A. Levin. *Combined Subdivision schemes*. PhD thesis, Tel-Aviv University, 2000.

- [Levin 2003a] A. Levin. *Polynomial generation and quasi-interpolation in stationary non-uniform subdivision*. Comput. Aided Geom., vol. vol.20(1), pp.41-60, 2003.
- [Levin 2003b] A. Levin et D. Levin. *Analysis of quasi-uniform subdivision*. Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. vol.15(1), pp.18-32, 2003.
- [Loop 1987] C. Loop. *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. M.S. thesis, university of Utah, 1987.
- [N. Dyn 1990] D. Levin N. Dyn et J. Gregory. *A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control*. ACM Trans. Graph, vol. vol.9,no.2,pp.160-169, 1990.
- [Peters 1997] J. Peters et U. Reif. *Analysis of generalized B-spline subdivision algorithms*. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1997.
- [Prautzsch 1998] H. Prautzsch. *Smoothness of subdivision surfaces at extraordinary points*. Advances in Computational Mathematics, vol. vol.9,pp.377-389, 1998.
- [Q.T. Jiang 2009] B.B. Li Q.T. Jiang et W.W. Zhu. *Interpolatory quad/triangle subdivision schemes for surface design*. Computer Aided Geometric Design, vol. vol.26, pp.904-922, 2009.
- [Reif 1995] U. Reif. *A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices*. Computer Aided Geometric Design, vol. vol.12,no.2,pp.153-174, 1995.
- [Sabin 2002] M. A. Sabin et L. Barthe. *Artifacts in Recursive Subdivision Surfaces*. curves and Surfaces Fitting : St Malo 2002, editors A. Cohen, J.L. Merrien and L.L. Schumaker, vol. vol.,pp.353-362, 2002.
- [Samavati 1999] F. Samavati et R. Bartels. *Multiresolution curve and surface representation by reversing subdivision rules*. Computer Graphics Forum, vol. vol.18,pp.97-120, 1999.
- [Samavati 2002] F. Samavati, M. A. Nezam et R. Bartels. *Multiresolution surfaces having arbitrary topologies by a reverse Doo subdivision method*. Computer Graphics Forum, vol. vol.21,no.2,pp.121-134, 2002.
- [Samavati 2006] F. Samavati et R. Bartels. *Diagrammatic tools for generating biorthogonal multiresolutions*. International Journal of Shape Modeling, vol. vol.12,no.1,pp.47-73, 2006.
- [Samavati 2007] F. Samavati, H. Pakdel et C. Smith. *Reverse of Loop subdivision*. Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, vol. vol.2,no.1,, 2007.
- [Samavati 2009] F. Samavati. *CPSC589/689 Course notes*. University of Calgary, 2009.
- [Schaefer 2005] S. Schaefer et J. Warren. *On  $C^2$  Subdivision for Triangle/Quad Meshes*. Transaction on Graphics, vol. vol.24, pp.28-36, 2005.
- [Stam 2003] J. Stam et C. Loop. *Quad/triangle subdivision*. Computer Graphics, vol. vol.22(1), pp.79-85, 2003.
- [Warren 2002] J. Warren et H. Weimer. *Subdivision Methods for Geometric design*. Morgan Kaufmann, New York, 2002.
- [Zorin 1998] D. Zorin. *Stationary subdivision and multiresolution surface representations*. PhD thesis, Pasadena, Ca, USA, 1998.
- [Zorin 2000a] D. Zorin. *Smoothness of subdivision on irregular meshes*. Construt. Approx, vol. vol.16,no.3,pp.359-397, 2000.
- [Zorin 2000b] D. Zorin et P. Schröder. *Subdivision for modeling and animation*. In SIGGRAPH Courses Notes, 2000.





## Résumé :

Les schémas de subdivision et les schémas de subdivision inverse sont largement utilisés en informatique graphique; les uns pour lisser des objets 3D, et les autres pour minimiser le coût d'encodage de l'information. Ce sont les deux aspects abordés dans cette thèse.

Les travaux présentés dans le cadre de la subdivision décrivent l'études et la construction d'un nouveau type de schémas de subdivision. Celui-ci unifie deux schémas de subdivision de type géométriques différents. Cela permet de modéliser des objets 3D composés de zones issues de l'application d'un schéma approximant et de zones issues de l'application d'un schéma interpolant. Dans le cadre de la subdivision inverse, Nous présentons une méthode de construction des schémas de subdivision bi-réguliers inverses (quadrilatères et triangles).

**Mots-clefs :** Schémas de subdivision, schémas de subdivision inverse, reproduction des polynômes, génération des polynômes, subdivision quad/triangle, approximation, interpolation, quasi-interpolation.

## Abstract:

Subdivision schemes are commonly used to generate a smooth shape from a much more coarse one. The reverse subdivision is designed to describe a high resolution mesh from a coarse one. Both of these tools are used in numerous graphical modelisation domains. In this thesis, we focused on two distinct aspects: on one hand the construction of quasi-linear subdivision schemes and on the other hand the construction of reverse quad/triangle subdivision schemes. The work, presented in the context of the subdivision, describes the construction of a new type of subdivision schemes, and theirs applications to solve some problems coming from the application of linear subdivision schemes. The work presented in the context of the reverse subdivision describes a new method to reverse the quad/triangle subdivision schemes.

**Keywords:** Subdivision schemes, reverse subdivision, polynomial reproduction, polynomial generation, quad/triangle subdivision, approximation, interpolation, quasi-interpolation.

The logo for SPIM (École doctorale SPIM) features the letters 'S', 'P', 'I', and 'M' in a large, white, sans-serif font. The 'S' is stylized with a thick orange horizontal bar to its left. The letters are arranged in a slightly staggered, overlapping manner.