



**HAL**  
open science

# Mesure adaptative non destructive du nombre de photons dans une cavité

Bruno Peaudecerf

► **To cite this version:**

Bruno Peaudecerf. Mesure adaptative non destructive du nombre de photons dans une cavité. Physique Quantique [quant-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. Français. NNT : . tel-00908255

**HAL Id: tel-00908255**

**<https://theses.hal.science/tel-00908255>**

Submitted on 22 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI**

Spécialité : **PHYSIQUE QUANTIQUE**

présentée par

**Bruno Peaudecerf**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris VI**

Sujet :

**Mesure adaptative non destructive du  
nombre de photons dans une cavité**

Soutenue le 30 septembre 2013 devant le jury composé de :

Dr. PHILIPPE BOUYER	Rapporteur
Dr. DANIEL ESTÈVE	Examineur
Dr. JEAN-CLAUDE GARREAU	Examineur
Pr. SERGE HAROCHE	Directeur de thèse
Pr. ENRIQUE SOLANO	Rapporteur
Pr. JÉROME TIGNON	Examineur



*À ma grand-mère,  
À mes parents,*



# Remerciements

*Homo sum, humani nihil a me alienum puto.*  
(Térence)

Ce mémoire présente le travail effectué durant ma thèse. Il va sans dire que ce n'est pas là l'œuvre d'une seule personne, mais celui d'une équipe dans laquelle j'ai eu la chance de vivre pendant ces quatre années. Aux expériences de physique que nous nous sommes attachés à réaliser se sont ajoutées aussi des expériences humaines qui ont fait toute la richesse de ces années de doctorat. Qu'il me soit donc permis de remercier ici les collègues et amis grâce à qui ce travail a été possible.

Je remercie tout d'abord Serge Haroche, Jean-Michel Raimond et Michel Brune de m'avoir accueilli dans leur groupe d'électrodynamique quantique en cavité au Laboratoire Kastler Brossel. La manipe «S15», sur laquelle j'ai eu la chance de travailler, réunit les fruits de dizaines d'années de recherche. Grâce à eux, et à leur grande expérience, elle a été une source d'apprentissage permanent pendant ces quatre années. Je remercie particulièrement Serge pour avoir accepté de diriger cette thèse. Malgré des engagements nombreux, il s'est toujours tenu au fait de l'avancement des expériences. Ses cours au Collège de France m'ont souvent permis d'approfondir mes connaissances et de mettre en perspective notre travail. Jean-Michel et Michel ont toujours été présents au cours de cette thèse, passant régulièrement en S15. Merci à Jean-Michel pour ses intuitions physiques fulgurantes, sa grande disponibilité, et son sens de l'autodérision. Merci à Michel, véritable mémoire de la manipe, dont souvent seuls les doigts experts savaient régler un bouton contrariant, sous nos yeux incrédules.

Sébastien Gleyzes a rejoint le groupe peu après mon arrivée. Son énergie débordante et son talent ont permis d'établir deux nouvelles expériences dans une salle dont j'ai maintenant du mal à me convaincre que je l'aie vue entièrement vide. Je le remercie pour les occasions que nous avons eu de travailler ensemble, pour son aide souvent précieuse, pour sa bonne humeur et son humour inimitable.

Je tiens à remercier Philippe Bouyer et Enrique Solano pour avoir accepté la tâche de rapporteurs, malgré leurs emplois du temps chargés. Je remercie également Daniel Estève, Jean-Claude Garreau et Jérôme Tignon pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je souhaite aussi remercier les personnes avec lesquelles j'ai partagé en S15 le travail, les bonnes et les mauvaises surprises — de l'implosion du cryostat à l'annonce du prix Nobel. Pour les anciens, Samuel Deléglise, qui finissait sa thèse quand je suis arrivé, puis mes

«maîtres», Clément Sayrin et Xingxing Zhou, qui m'ont appris progressivement, et sans se lasser, à maîtriser les différents éléments de l'expérience. Pour les nouveaux, je remercie Théo Rybarczyk, «descendu» en S15, pour m'avoir aidé et supporté (surtout vers la fin). Avec Stefan Gerlich, qui nous a rejoint en postdoc, ils ont tous deux permis que la bonne atmosphère qui a toujours régné en salle de manipe soit préservée. C'est avec eux que ces expériences ont été réalisées, lors de quelques-unes de ces soirées de prises de données où l'on dîne devant la manipe... Je leur souhaite ainsi qu'à Mariane Penasa, nouvelle venue en thèse cette année, beaucoup de réussite pour la suite.

Igor Dotsenko a été notre postdoc, et mon voisin de bureau durant ces quelques années. Avec un enthousiasme qui semble inépuisable, il a apporté une aide cruciale à tous les niveaux de la réalisation de ces travaux. Je le remercie chaleureusement pour son exemple, et le plaisir que j'ai eu de pouvoir échanger et débattre avec lui au cours de ma thèse.

Je remercie également les membres des autres équipes du groupe, en compagnie desquels j'ai passé de nombreux bons moments, au labo ou ailleurs. En R14, merci à Raul (mon partenaire de piscine, si, si...) et à Carla (à l'optimisme communicatif) pour toutes les pauses café partagées. Je leur souhaite, alors que leurs efforts continuent, bon courage pour la fin de leur thèse et un succès mérité. Merci à Sha, partie vers d'autres horizons, et aux nouveaux venus, Thanh-Long et Tigrane. En P10, merci à Brian et Jay, aussi appelés Adrien, à qui je souhaite de bien beaux résultats, ainsi qu'à Dorian. Merci aussi à Ina, partie en Suisse pour sa thèse, dont je ne doute pas qu'elle sera très réussie, et à Luciana.

Une expérience comme la nôtre ne pourrait pas exister sans l'aide des services techniques du laboratoire. Merci donc à Olivier pour les milliers de litres d'hélium engloutis dans la manipe, à Jean-Michel Isac et l'atelier pour la mécanique, Bernard Trégon, Yo et Toufik pour l'électronique, et Didier Courtiade et son équipe pour de nombreux dépannages qui nous ont été d'un grand secours. Merci également à toute l'équipe du secrétariat : Thierry, Christophe, Dominique, Françoise, Monique...

Je n'oublie pas non plus les amis hors du labo. L'équipe du contre-pôt des premières années à l'ENS : Micha, Emmanuel, Emmanuel (le vrai), Mathias, Rémi. Merci à Emmanuel (l'autre), pour nos discussions mêlées de coups de gueule. Merci à Micha pour les voyages qu'il a suscités, entre autres qualités. Karine et le C2 de Montrouge. Les amis du M2, Gatien (pour quelques verres de bière...), Nancy, Anne-Florence. Les bordelais, Anne-Laure, Loïc, Dimitri, Violaine, Gabriel, Julie. À Royan, Charlotte et Fabien. Enfin merci aux amis de toujours, Pierre et Salomé. À Claudia, pour bien des choses et pour une amitié préservée malgré la distance (voilà au moins un mot que je connais en brésilien...), de bien loin mais du fond du cœur : *obrigado*.

Je pense aussi à ceux qui furent mes professeurs en classe préparatoire, dont l'enseignement et l'influence bienveillante ont permis que je m'aventure à faire de la physique à l'École Normale Supérieure, et que j'ai la chance de compter aujourd'hui parmi mes amis : Claire Cruvelier, à qui je dois mes premiers émerveillements en physique, Nicolas Choimet et Denis Favennec. De Denis Favennec, je retiendrai que tout est possible, puisque l'on peut prétendre enseigner les mathématiques en spé à Bordeaux et être en fait historien de l'art et vénitien. Qu'il soit ici remercié pour nos nombreux échanges, les multiples visites de musées que j'ai eu la chance de faire en sa compagnie à Paris, et pour le prêt des clefs

du petit coin de paradis duquel j'écris ces lignes.

Enfin je remercie de tout cœur ma famille. Mes parents et mes grands-parents ont toujours été un soutien inestimable tout au long de ce parcours. J'ai une pensée pour mon grand-père, auquel j'aurais été ravi de présenter ce qui me tient lieu de salle des machines. Merci aussi à mes parrain et marraine, Lydia et Alain, pour leur soutien. Merci à ma grande sœur, pour les discussions, les apéros, et les kilos de poisson cru que nous avons dû avaler en sushis en quatre ans. Merci enfin à mon frère François, avec qui nous avons pu partager nos expériences respectives bien qu'il soit souvent à l'autre bout du monde, et y aller aussi, ensemble, lors d'un mémorable voyage en Californie. Il est maintenant engagé à son tour dans une thèse, et je lui souhaite tout le succès possible et imaginable.

*Venise, le 15 septembre 2013*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Atomes et photons en cavité</b>	<b>15</b>
I.1 Vue d'ensemble du dispositif expérimental . . . . .	15
I.2 Une cavité Fabry-Pérot de grande finesse . . . . .	18
I.2.1 Caractéristiques . . . . .	18
I.2.1.a Géométrie . . . . .	18
I.2.1.b Une très grande finesse . . . . .	20
I.2.1.c Contrôle de la fréquence . . . . .	22
I.2.2 Description théorique . . . . .	23
I.2.2.a L'oscillateur harmonique quantique . . . . .	23
I.2.2.b Couplage à l'environnement . . . . .	25
I.3 Des atomes à deux niveaux . . . . .	29
I.3.1 Atomes de Rydberg circulaires . . . . .	29
I.3.1.a Propriétés . . . . .	29
I.3.1.b Un système à deux niveaux bien contrôlé . . . . .	30
I.3.1.c Préparation . . . . .	33
I.3.1.d Détection . . . . .	38
I.3.2 Modèle de l'atome à deux niveaux . . . . .	40
I.3.2.a Espace des états – sphère de Bloch . . . . .	40
I.3.2.b Contrôle de l'état interne . . . . .	42
I.3.3 Interférométrie de Ramsey . . . . .	45
I.3.3.a Contrôle de la phase de Ramsey . . . . .	46
I.3.3.b Une mesure du pseudospin atomique . . . . .	49
I.4 Deux systèmes fortement couplés . . . . .	50
I.4.1 Modèle de Jaynes et Cummings . . . . .	51
I.4.2 Régimes d'interaction . . . . .	53
<b>II Mesure quantique non destructive du nombre de photons</b>	<b>59</b>
II.1 Mesure passive . . . . .	59
II.1.1 Une mesure quantique non-destructive . . . . .	60
II.1.1.a Mesure projective – mesure faible . . . . .	60
II.1.1.b Mesure non-destructive . . . . .	62
II.1.1.c Mesure généralisée du champ par interférométrie de Ramsey	62

II.1.1.d	Mesure du nombre de photons par décimation . . . . .	64
II.1.1.e	Convergence de la décimation . . . . .	68
II.1.2	Trajectoires quantiques . . . . .	72
II.1.3	Moyennes d'ensemble . . . . .	73
II.1.3.a	Reconstruction par maximum de vraisemblance . . . . .	73
II.1.3.b	Suivi temporel des populations . . . . .	75
II.1.4	Interprétation en termes de pseudospin atomique . . . . .	77
II.1.4.a	Retour à la sphère de Bloch . . . . .	77
II.1.4.b	Mesure du déphasage par photon par tomographie de spin . . . . .	78
II.2	Mesure adaptative . . . . .	80
II.2.1	Principe général . . . . .	80
II.2.1.a	Extraction d'information lors d'une mesure faible . . . . .	80
II.2.1.b	Adaptation de la phase . . . . .	81
II.2.1.c	Mesure optimale du nombre de photons . . . . .	83
II.2.2	Expériences proposées . . . . .	85
II.2.3	Estimateur quantique . . . . .	86
II.2.3.a	Décimation et détections atomiques . . . . .	87
II.2.3.b	Relaxation . . . . .	89
<b>III</b>	<b>Mise en œuvre expérimentale</b>	<b>91</b>
III.1	Contrôle en temps réel . . . . .	91
III.1.1	Deux systèmes de contrôle . . . . .	92
III.1.1.a	Répartition des tâches . . . . .	92
III.1.1.b	L'ordinateur de contrôle en temps réel . . . . .	93
III.1.1.c	Fonctionnement simultané des deux systèmes . . . . .	95
III.1.1.d	Une rétroaction retardée . . . . .	98
III.1.2	Fonctionnement en boucle . . . . .	99
III.1.3	Contrôle du temps de calcul . . . . .	102
III.2	Calibration des paramètres expérimentaux . . . . .	102
III.2.1	Franges de Ramsey . . . . .	102
III.2.1.a	Restriction à deux jeux de paramètres . . . . .	103
III.2.1.b	Influence entres échantillons voisins . . . . .	104
III.2.1.c	Déphasage par photon et phase de Ramsey . . . . .	105
III.2.2	Injection micro-onde . . . . .	105
III.2.3	Dérive de la phase de Ramsey . . . . .	107
III.2.3.a	Dérive initiale . . . . .	108
III.2.3.b	Fluctuations de long terme . . . . .	110
<b>IV</b>	<b>Résultats expérimentaux</b>	<b>113</b>
IV.1	Mesure d'un état sélectionné sans relaxation . . . . .	113
IV.1.1	Structure de l'expérience . . . . .	113
IV.1.1.a	Principe de la sélection . . . . .	113
IV.1.1.b	Structure . . . . .	114

IV.1.1.c	Choix des phases de Ramsey . . . . .	119
IV.1.1.d	Caractéristiques de la préparation initiale : . . . . .	120
IV.1.2	Trajectoires individuelles . . . . .	122
IV.1.3	Réduction de l'entropie moyenne . . . . .	123
IV.1.3.a	Comparaison aux simulations . . . . .	123
IV.1.3.b	Facteur d'accélération . . . . .	125
IV.1.4	Évolution des probabilités moyennes . . . . .	126
IV.1.4.a	Reconstruction de l'état sélectionné . . . . .	128
IV.1.4.b	Une meilleure illustration de la convergence des probabilités	129
IV.1.5	Choix de la phase d'adaptation . . . . .	132
IV.1.5.a	Fréquence des changements de phase . . . . .	132
IV.1.5.b	Statistique des choix de phase . . . . .	133
IV.1.5.c	Corrélations . . . . .	135
IV.2	Projection d'un état de Fock . . . . .	137
IV.2.1	Structure de l'expérience . . . . .	137
IV.2.2	Accélération de la préparation . . . . .	139
IV.2.2.a	Facteur d'accélération . . . . .	140
IV.2.2.b	Temps moyen de succès . . . . .	141
IV.2.3	Fidélité de la préparation . . . . .	142
<b>Conclusion</b>		<b>145</b>
<b>A</b>	<b>La décimation : un produit de fonctions sinusoïdales</b>	<b>149</b>
<b>B</b>	<b>Mesure du nombre moyen de photons à l'équilibre thermique</b>	<b>153</b>
<b>C</b>	<b>Reconstruction de l'état sélectionné par maximum de vraisemblance</b>	<b>155</b>
<b>D</b>	<b>Statistiques alternatives sur les choix de phases</b>	<b>157</b>
<b>E</b>	<b>Taux de convergence pour la mesure passive</b>	<b>161</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>184</b>

# Table des figures

1	Principe de notre expérience de CQED . . . . .	3
2	Rétroaction quantique à actionneurs atomiques : dispositif expérimental .	6
3	Rétroaction quantique à actionneurs atomiques : exemple de trajectoire .	8
4	Exemple de mesure adaptative d'une phase aléatoire . . . . .	10
5	Schéma de l'expérience de mesure adaptative du nombre de photons . . .	13
I.1	Schéma du dispositif expérimental . . . . .	16
I.2	Schéma des miroirs de la cavité micro-onde supraconductrice . . . . .	20
I.3	Contrôle de la fréquence du mode . . . . .	23
I.4	Spectre de résonance de la cavité micro-onde . . . . .	24
I.5	Niveaux de Rydberg circulaires utilisés . . . . .	31
I.6	Diagramme d'énergie des niveaux de Rydberg en présence d'un champ électrique . . . . .	32
I.7	Préparation des atomes dans les niveaux de Rydberg circulaires . . . . .	34
I.8	Sélection de vitesse . . . . .	36
I.9	Distribution de vitesse des atomes . . . . .	38
I.10	Détection des atomes . . . . .	39
I.11	Représentation de l'état d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch	41
I.12	Manipulation de l'état interne de l'atome . . . . .	44
I.13	Schéma des zones de Ramsey . . . . .	45
I.14	Schéma de l'interféromètre de Ramsey . . . . .	46
I.15	Franges de Ramsey . . . . .	48
I.16	L'interférométrie de Ramsey comme mesure du pseudospin atomique . . .	50
I.17	Énergie des états habillés . . . . .	53
I.18	Évolution du spin atomique lors de l'interaction dispersive avec le champ quantique . . . . .	55
I.19	Passage adiabatique de $ g, n + 1\rangle$ à $ e, n\rangle$ . . . . .	57
I.20	Modification du désaccord atome–champ pour les atomes absorbeurs par effet Stark quadratique . . . . .	57

II.1	Évolution des populations $P(n)$ par décimation . . . . .	66
II.2	Réduction progressive de la distribution des nombres de photons . . . . .	68
II.3	Histogramme du nombre moyen de photons après décimation . . . . .	71
II.4	Évolution temporelle du nombre de photons obtenue par décimation . . . . .	73
II.5	Reconstruction par maximum de vraisemblance . . . . .	76
II.6	Décimation et sphère de Bloch . . . . .	77
II.7	Histogrammes des phases des spins atomiques mesurés après interaction avec un champ quantique contenant quelques photons . . . . .	79
II.8	Calibration du déphasage par photon . . . . .	79
II.9	Optimisation de la phase de Ramsey . . . . .	82
II.10	Décimation optimale du nombre de photons . . . . .	83
II.11	Schéma de l'expérience de mesure adaptative. . . . .	85
II.12	Structure schématique des expériences proposées . . . . .	87
III.1	Répartition des tâches entre les systèmes de contrôle . . . . .	92
III.2	Vue de la façade de l'ordinateur de contrôle ADwin Pro-II . . . . .	94
III.3	Comptage des atomes . . . . .	95
III.4	Chronologie des évènements pour une préparation atomique unique . . . . .	96
III.5	Comparaison des franges de Ramsey mesurées par les deux systèmes de contrôle . . . . .	97
III.6	Retard de l'adaptation de phase . . . . .	99
III.7	Chronologie d'une boucle de contrôle . . . . .	101
III.8	Décalage des franges de Ramsey selon l'alternance des potentiels . . . . .	104
III.9	Calibration de l'injection à l'aide des franges de Ramsey . . . . .	107
III.10	Dérive initiale de la phase de Ramsey . . . . .	109
III.11	Fluctuations de la phase de Ramsey . . . . .	111
IV.1	Structure de l'expérience de mesure d'un état sélectionné . . . . .	115
IV.2	Paramètres des franges de Ramsey . . . . .	119
IV.3	Reconstruction de l'état à l'issue de la préparation initiale . . . . .	121
IV.4	Exemples de mesures adaptatives . . . . .	124
IV.5	Évolution de l'entropie moyenne . . . . .	125
IV.6	Facteur d'accélération . . . . .	126
IV.7	Évolution de la distribution moyenne du nombre de photons . . . . .	127
IV.8	Reconstruction de l'état sélectionné par maximum de vraisemblance . . . . .	129
IV.9	Évolution de la distribution moyenne du nombre de photons relatif au nombre de photons dominant à la fin de la mesure . . . . .	131

IV.10	Fréquence des changements de phase durant la mesure adaptative . . . .	133
IV.11	Fréquence d'utilisation des phases de Ramsey . . . . .	134
IV.12	Corrélations entre phases relatives . . . . .	136
IV.13	Structure de l'expérience de préparation d'état de Fock . . . . .	138
IV.14	Fraction des séquences convergées . . . . .	140
IV.15	Facteur d'accélération . . . . .	141
IV.16	Reconstruction de l'état préparé par maximum de vraisemblance . . . .	143
IV.17	Histogrammes des états reconstruits après préparation . . . . .	144
B.1	Mesure du nombre moyen de photons à l'équilibre thermique . . . . .	154
C.1	Reconstruction de l'état sélectionné par maximum de vraisemblance . . .	156
D.1	Fréquence d'utilisation des phases de Ramsey . . . . .	158
D.2	Corrélations entre phases relatives . . . . .	159
E.1	Convergence des moyennes d'ensemble pour la mesure passive . . . . .	172

# Introduction

La mécanique quantique est née au début du XX<sup>e</sup> siècle pour apporter une réponse à certains problèmes laissés en suspens par les théories classiques de la mécanique de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell. L'introduction des *quanta* de rayonnement par Planck dans la description du rayonnement du corps noir n'a été qu'une première étape menant à une nouvelle interprétation des spectres atomiques, ou de l'effet photoélectrique par Einstein [1], qui consacra la notion de *photon*, grain de lumière élémentaire. La théorie développée par la suite dans les années 1920 a révolutionné notre compréhension du monde microscopique. Ceci a conduit à de nombreuses innovations technologiques qui ont façonné le monde moderne : le laser et le transistor ne sont que deux exemples, omniprésents dans notre quotidien, de technologies reposant sur la mécanique quantique.

Jamais mise en défaut par l'expérience jusqu'à aujourd'hui (c'est d'ailleurs l'une des théories les mieux vérifiées de la physique), la mécanique quantique conserve pourtant une part de mystère, car elle bouleverse un certain nombre de notions que la physique classique, fondée sur l'observation des phénomènes macroscopiques, considérait comme allant de soi. C'est particulièrement le cas de la notion de mesure.

La *mesure* en physique est de façon générale l'acquisition d'information sur les propriétés d'un système. En physique classique, il s'agit pour l'observateur de connaître la valeur que prend une certaine grandeur (position, énergie) dans le système, en le faisant interagir avec un appareil de mesure. L'interaction laisse sur l'appareil de mesure une «empreinte» associée à la valeur prise dans le système, sans que l'état de celui-ci ne soit modifié.

La mécanique quantique apporte des modifications fondamentales à cette formulation. On peut toujours y définir un état du système par la valeur que prend une grandeur observable dans cet état (on parle alors d'*état propre* de l'observable en question). Cependant, toute superposition d'états étant possible, la valeur d'une observable dans un état donné peut présenter une indétermination fondamentale. Les résultats d'une mesure idéale, dite de von Neumann [2], sont décrits par les postulats suivants [3] :

- le résultat de la mesure d'une grandeur physique sur un système ne peut donner que l'une des valeurs propres de l'observable associée  $\hat{O}$ , notées  $\{o_i\}$  ;
- la probabilité d'obtention du résultat est liée à la décomposition de l'état du système sur la base des vecteurs propres  $\{|o_i\rangle\}$  : notant  $|\psi\rangle$  l'état du système, elle vaut  $P(o_i) = |\langle o_i|\psi\rangle|^2$  ;
- après la mesure le système est projeté dans l'état propre  $|o_i\rangle$  correspondant au résultat obtenu.

Le dernier de ces postulats, le *postulat de projection*, indique en particulier que contrairement au cas classique, une mesure sur un système peut en *modifier* l'état.

Par ailleurs, si dans l'état obtenu la grandeur mesurée a une valeur bien définie, rien ne garantit que cette valeur soit préservée ultérieurement. La mesure a en effet une *action en retour* [4] sur le système, liée aux inégalités de Heisenberg : si deux observables  $\hat{O}$  et  $\hat{Q}$  ne commutent pas, la mécanique quantique impose une borne minimale aux incertitudes sur les grandeurs associées :

$$\Delta O \cdot \Delta Q \geq \left| \langle [\hat{O}, \hat{Q}] \rangle \right| / 2.$$

Suite à une mesure de l'observable  $\hat{O}$  l'incertitude sur  $O$  est réduite, et celle sur  $Q$  est donc augmentée. Or la dynamique du système peut faire que cette indétermination se transmette ultérieurement à la grandeur  $O$ . Par exemple, après une mesure de position sur une particule, l'indétermination de son impulsion est augmentée : lors de l'évolution ultérieure cette dispersion des impulsions conduit à une indétermination de la position, qui ne prendra pas nécessairement la même valeur lors d'une mesure suivante.

La notion de *mesure quantique non destructive* (mesure QND), pour laquelle la *répétabilité* de la mesure est imposée, est apparue dans les années 1970 [5, 6, 7, 8] . Pour que la mesure puisse donner le même résultat, il faut que l'observable affectée par l'action en retour n'influe pas sur l'évolution de l'observable mesurée. Ceci est le cas si cette dernière est une constante du mouvement : le système, une fois projeté dans un état propre, n'évolue plus, et toute mesure ultérieure donnera le même résultat. La mesure QND minimise donc les fluctuations de l'observable mesurée. Elle permet plus généralement la préparation d'états pour lesquels les fluctuations de la grandeur mesurée sont réduites : états comprimés de la lumière [9], de spin atomique collectif, état de nombre de photons déterminé. Cette diminution du bruit est très intéressante dans le domaine de la métrologie, où les fluctuations fondamentales de l'état quantique fixent la limite de précision atteignable [10, 11]. La mesure QND a d'ailleurs initialement été introduite dans ce but, dans le contexte de la détection d'ondes gravitationnelles. Il s'agissait, dans les premiers détecteurs, constitués de grandes barres d'aluminium à température cryogénique appelées barres de Weber, d'effectuer une mesure d'incertitude minimale du nombre d'excitations mécaniques, celui-ci étant modifié par le passage d'une onde gravitationnelle. Des stratégies de mesure analogues sont toujours d'actualité pour les détecteurs interférométriques modernes [12].

De nombreuses mesures QND ont été réalisées depuis les années 1990 dans toutes sortes de systèmes [13]; nous ne donnerons ici que quelques exemples. Les premiers résultats mettant en évidence un caractère QND ont été obtenus dans le domaine de l'optique quantique [14]. Un exemple typique de mesure exploite l'effet Kerr dû aux non-linéarités d'un milieu. Un faisceau *signal* traversant un tel milieu induit une modification de l'indice optique fonction de l'intensité du faisceau ; un deuxième faisceau *sonde* d'intensité faible verra sa phase modifiée en fonction de l'amplitude du faisceau signal. Cette phase peut être mesurée à l'aide d'un interféromètre, et l'on réalise ainsi une mesure non destructive des fluctuations d'intensité du signal. Ce sont les non-linéarités du milieu qui permettent le

couplage du signal à la sonde : c'est pourquoi les conditions de la mesure QND ont pu être atteintes, non avec un milieu cristallin, mais avec des atomes dans un jet atomique [15] ou un nuage d'atomes froids [16].

Des mesures QND ont pu être effectuées sur des ions piégés [17, 18], permettant la première observation de *sauts quantiques* : ceux-ci surviennent lorsque la mesure QND est répétée en présence d'une perturbation (par exemple la relaxation due à l'environnement). Le système peut transiter brusquement d'un état propre à un autre, donnant aux résultats obtenus (dans le cas des ions piégés, la valeur de l'énergie de l'électron) l'allure de paliers successifs.

Mentionnons enfin la mesure non-destructive des états propres du mouvement cyclotron d'un électron dans un piège de Penning [19] : l'existence d'un couplage entre le mouvement cyclotron et les oscillations dans l'axe du piège permet, par un suivi de cette fréquence axiale, d'observer les sauts quantiques entre les états de Fock correspondant au nombre d'excitations du mouvement cyclotron.

Dans notre dispositif expérimental d'électrodynamique quantique en cavité (CQED), des mesures quantiques non destructives de la lumière à l'échelle du photon unique ont pu être réalisées . Le champ micro-onde piégé entre les miroirs d'une cavité Fabry-Pérot de grande finesse est sondé par des atomes de Rubidium, comme schématisé à la figure 1. Les atomes sont placés dans des états de Rydberg circulaires, constituant en pratique un

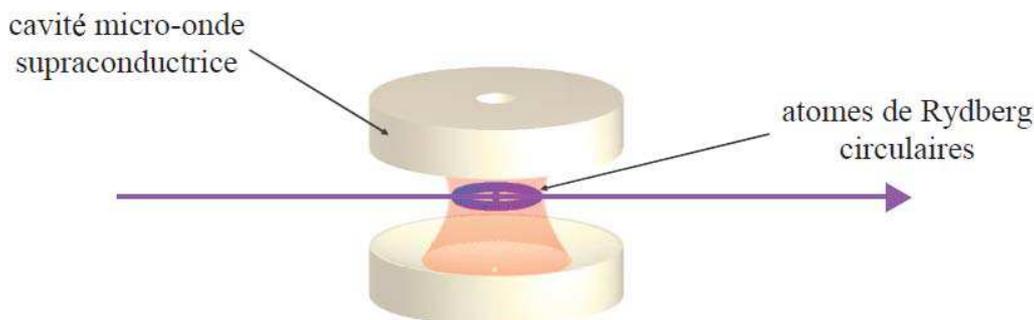


FIGURE 1 – Principe de notre expérience d'électrodynamique quantique en cavité. Des atomes de Rydberg circulaires interagissent avec un mode du champ électromagnétique piégé dans une cavité Fabry-Pérot micro-onde de très haute finesse.

système à deux niveaux très stable. Ces états ont un grand temps de vie et un fort dipôle électrique qui les couple au champ piégé. Dans ces conditions, nous pouvons atteindre le régime de *couplage fort*, où les deux systèmes se comportent de façon quantique : l'atome est sensible à la présence de quelques photons seulement dans la cavité. Lorsque l'on se place en régime dispersif, où la transition atomique est désaccordée par rapport à la fréquence de la cavité, l'atome n'échange pas d'énergie avec le champ, mais subit un effet de déplacement lumineux de ses niveaux d'énergie, proportionnel au nombre de photons  $n$  dans la cavité [13]. Ce déphasage peut être mesuré à l'aide d'un interféromètre atomique

(interféromètre de Ramsey [20]), ce qui permet d'effectuer une mesure QND du nombre de photons. Cette technique a d'abord été appliquée à la mesure répétée des états à 0 ou 1 photon [21], qui peuvent être corrélés aux états orthogonaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  de l'atome. Les sauts quantiques de la lumière ont été observés. Puis elle a permis la mesure des états de Fock contenant de 0 à 7 photons [22]. Une particularité de cette mesure, la périodicité du déphasage subi par l'atome, a été exploitée pour préparer des états chats de Schrödinger du champ, par une mesure de parité du nombre de photons [23].

Cette dernière remarque souligne l'intérêt des mesures QND sur le plan fondamental. Elles permettent d'illustrer les postulats de la théorie sur des systèmes simples et bien contrôlés. Les mesures du nombre de photons réalisées dans notre groupe sont ainsi un exemple de *mesure généralisée*. La mesure d'un atome après son intrication avec le champ permet une mesure «partielle» du champ qui n'est en général pas une mesure projective. C'est la répétition de telles mesures *faibles*<sup>1</sup> qui permet de réaliser la projection de l'état du champ.

De plus, la mesure étant non destructive, le champ piégé dans la cavité peut être mesuré en continu. De cette façon, on peut étudier la *décohérence* du système induite par le couplage avec l'environnement : les sauts quantiques en sont une manifestation, mais une étude d'ensemble des mesures consécutives à la préparation d'un état de Fock permet en fait de caractériser complètement le processus de décohérence [25]. Les résultats de mesures QND peuvent également être exploités pour caractériser complètement les états quantiques préparés, par des méthodes de *reconstruction d'état*. Ceci a été appliqué dans notre laboratoire aux états chats de Schrödinger, dont le «film» de la décohérence a pu être reconstitué [23].

Des mesures QND ont par la suite été réalisées sur d'autres systèmes, par exemple sur le spin collectif d'un nuage d'atomes froids [26], permettant de produire des états comprimés de spin. Dans le domaine de l'électrodynamique des circuits, les conditions de la mesure QND ont été atteintes pour la mesure d'un qubit supraconducteur [27], ainsi que, plus récemment, pour des photons uniques dans un guide d'onde coplanaire [28].

Les mesures quantiques non-destructives sont d'un grand intérêt dans le contexte de l'*information quantique*. En optique, par exemple, la possibilité de mesurer non destructivement un faisceau propageant permettrait de distribuer l'information en différents points d'un réseau sans la modifier [29]. Le *calcul quantique* [30] exploite quant à lui les propriétés quantiques de systèmes simples, comme la superposition d'états, pour dépasser les limites d'un ordinateur classique dans la résolution de certains problèmes, comme la factorisation des grands nombres [31]. La réalisation du calcul quantique requiert de pouvoir préparer de façon bien contrôlée l'état de *mémoires quantiques* (système à deux niveaux formant un bit quantique, ou *qubit*, oscillateur harmonique) servant de support au calcul, et de pouvoir leur faire subir les opérations définies par des *portes quantiques* élémentaires. La préparation d'états non classiques peut être effectuée par des mesures QND, projetant le

---

1. La notion de mesure *faible* est définie ici par opposition à la mesure «forte» que constitue une mesure projective. Elle n'a pas en particulier de lien direct avec la notion de mesure faible, comme mesure des *valeurs faibles* (*weak values*) d'une observable [24].

système dans un état propre de la mesure. La possibilité de répéter la mesure permet en outre d'améliorer la qualité de la préparation en présence d'imperfections [32]. L'intrication qui est établie dans ces mesures entre le système mesuré et un système «mètre» peut être également vue comme la réalisation d'une opération élémentaire de calcul quantique. Ainsi la mesure dans notre dispositif d'un champ contenant 0 ou 1 photon [21] réalise-t-elle l'opération à 2 qubits C-NOT :

$$\begin{array}{ll} \text{C - NOT :} & |0, g\rangle \rightarrow |0, g\rangle & |0, e\rangle \rightarrow |0, e\rangle \\ & |1, g\rangle \rightarrow |1, e\rangle & |1, e\rangle \rightarrow |1, g\rangle. \end{array}$$

Dans cette opération, la modification de l'état d'un qubit (l'atome dans l'état  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ ) est conditionnée à l'état du second (le champ contenant 0 ou 1 photon). Cette porte à deux qubits est essentielle, puisqu'elle forme avec les portes à un qubit «phase» et «rotation» :

$$\begin{array}{ll} \text{phase :} & |0\rangle \rightarrow |0\rangle & |1\rangle \rightarrow e^{i\varphi}|1\rangle, \\ \text{rotation :} & |0\rangle \rightarrow \cos\theta|0\rangle - \sin\theta|1\rangle & |1\rangle \rightarrow \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle, \end{array}$$

un ensemble de portes «universel», permettant en principe par combinaison la réalisation de tout protocole de calcul quantique [33].

## Contrôle quantique

Le développement de modèles théoriques de la mesure [4] et la réalisation expérimentales de mesures quantiques ont également permis d'ouvrir un nouveau champ de recherche, le *contrôle quantique* [34]. Il s'agit là d'exploiter les mesures réalisées sur un système, l'information qu'elles apportent mais aussi leur action en retour, pour manipuler le système ou l'appareil de mesure afin d'atteindre un but précis. Ce contrôle prend donc généralement la forme d'une boucle de rétroaction.

Dans une première classe d'expériences, la rétroaction quantique s'effectue directement sur le système, à l'aide d'opération unitaires, afin de contrôler son état ou son évolution [35]. Ce n'est que dans les années 2000 que certains aspects de la rétroaction quantique ont pu être réalisés. Smith *et al.* [36] sont ainsi parvenus à bloquer l'évolution d'un système formé d'un nuage atomique en couplage fort avec le champ piégé dans une cavité optique. Dans cette expérience la cavité est pompée en permanence, et il s'établit un état stationnaire du système atomes-champ. Si un photon s'échappe de la cavité, un état non classique est préparé, dans lequel le système effectue des oscillations de Rabi quantiques. Ces oscillations peuvent être «gelées» en modifiant l'amplitude du forçage. Cette rétroaction est conditionnée à la détection d'un photon unique s'échappant de la cavité, qui prépare l'état non classique : cette expérience ne fait donc intervenir qu'une seule opération de la boucle de rétroaction. Dans une autre expérience, Gillett *et al.* [37] ont réalisé la correction de l'état de qubits optiques par rétroaction quantique. Un qubit est soumis à des déphasage en traversant une fibre, puis une mesure faible permet de choisir la rétroaction optimale permettant de restaurer au mieux l'état initial, quel qu'il soit parmi les deux états (non-orthogonaux) considérés.



mélange statistique d'états nombres, et la correction des sauts quantiques est plus efficace.

Le principe de cette expérience est schématisé à la figure 2. Des atomes sondes traversent la cavité  $C$  réalisant une mesure QND faible du nombre de photons. Ceci permet l'estimation de l'état du champ en temps réel par l'ordinateur  $K$ . À intervalles réguliers celui-ci peut décider de l'envoi d'atomes «actionneurs» résonants pouvant augmenter ou diminuer le nombre de photons dans la cavité. La détection de ces atomes est également prise en compte dans l'estimation d'état. Le régime d'interaction, dispersif pour les atomes sondes, ou résonant, est contrôlé par effet Stark *via* le potentiel  $V$  appliqué à l'un des miroirs de la cavité. Les cavités  $R_1$  et  $R_2$  formant un interféromètre de Ramsey permettent le contrôle de l'état de l'atome. Ce protocole de contrôle a permis la stabilisation des états de Fock contenant jusqu'à 7 photons, comme illustré à la figure 3.

Depuis ces résultats, le fonctionnement de boucles de rétroaction quantique a aussi pu être démontré sur des qubits supraconducteurs. Vijay *et al.* [41] sont parvenus, par la mesure en continu d'un qubit couplé à une cavité micro-onde à stabiliser les oscillations de Rabi du système : une mesure faible de l'état du qubit permet d'ajuster en temps réel l'amplitude du champ résonant. Les oscillations ainsi «régulées» persistent sur des durées bien plus longues que le temps caractéristique de déphasage du qubit lié au couplage à l'environnement. La stabilisation «stroboscopique» de trajectoires d'un qubit supraconducteur a également été réalisée [42] : dans ce protocole, le système subit à intervalles réguliers, au cours de son évolution, une rotation devant l'amener dans l'état fondamental  $|g\rangle$ . Une mesure QND du qubit est effectuée, suivie, si l'état n'est pas celui attendu, d'une correction : on ramène le système dans l'état fondamental, puis le système est ensuite replacé sur la trajectoire que l'on souhaite stabiliser (en l'occurrence les oscillations de Ramsey de l'état superposé  $1/\sqrt{2}(|e\rangle + |g\rangle)$ ).

## Mesure adaptative

Outre son grand intérêt dans la préparation et le contrôle de l'état d'un système, la rétroaction trouve d'autres applications qui se rapportent à la *mesure* de l'état. Schématiquement, on peut suite à une mesure partielle agir non pas sur le système, mais sur l'appareil de mesure. On parle dans ce cas de *mesure adaptative*. Ceci est d'un grand intérêt pour le domaine de la métrologie quantique. En effet les limites de précision de la plupart des mesures interférométriques ou spectroscopiques sont données non pas par les inégalités fondamentales d'Heisenberg, mais sont liées au protocole de mesure, ce qui définit une *limite quantique standard*. Si l'utilisation d'états non classiques (tels qu'on peut en préparer par exemple à l'aide de mesures QND) permet en principe d'améliorer la précision des mesures pour atteindre la limite de Heisenberg [43, 44], cet objectif peut également être atteint à l'aide de méthodes adaptatives où les caractéristiques de l'appareil réalisant la mesure sont variées au cours de celle-ci [45].

La notion de mesure adaptative a été initialement formulée dans le cadre de la mesure de la phase d'un mode optique, dont l'optimisation peut être utile par exemple à la communication à l'aide de variables continues.

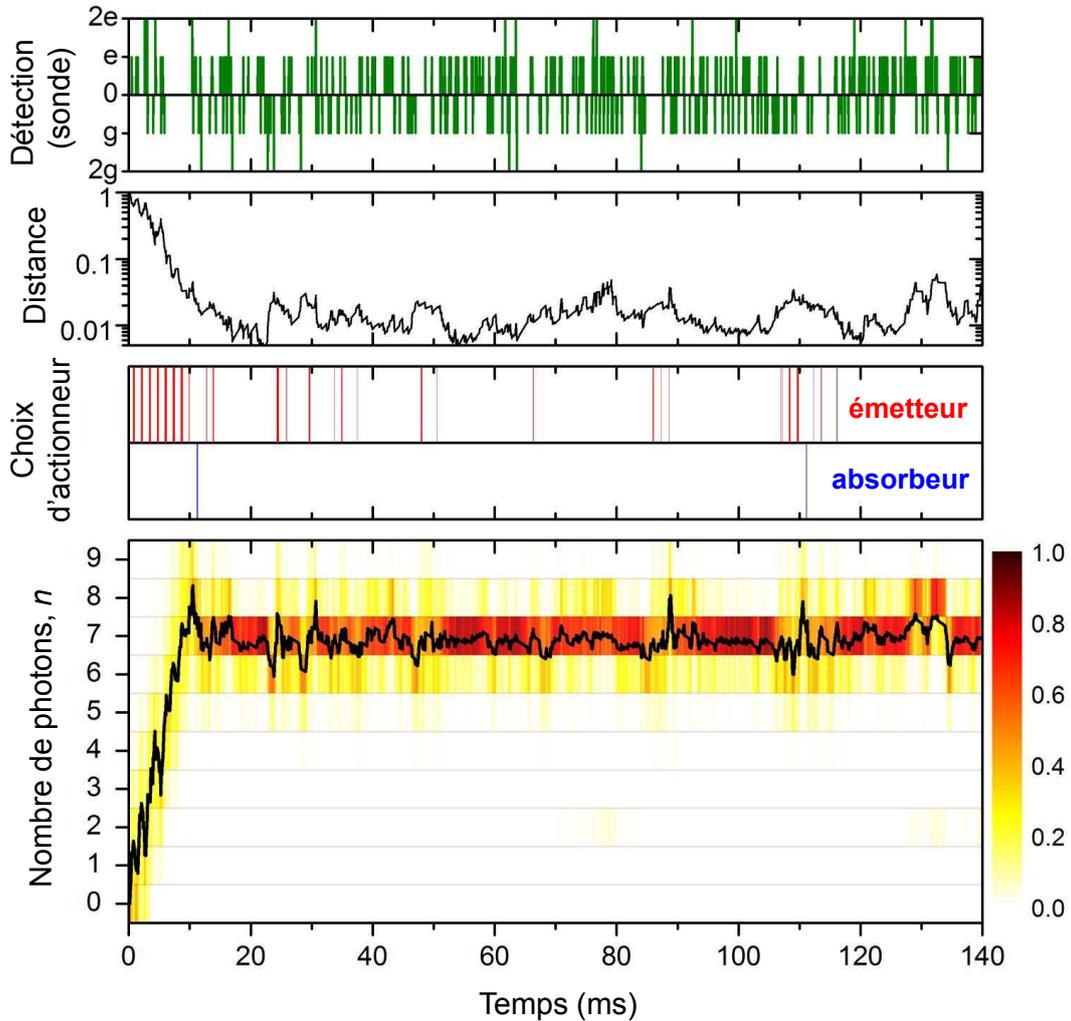


FIGURE 3 – Exemple de trajectoire de rétroaction quantique à actionneurs atomiques [40]. De haut en bas on a représenté les détections des atomes sondes réalisant une mesure QND du nombre de photons, la distance à l'état cible (ici l'état de Fock à 7 photons) que l'on cherche à minimiser connaissant une estimation de l'état, le choix d'actionneur fait en temps réel (on peut émettre ou absorber un photon), et enfin l'évolution des populations estimées dans les différents nombres de photons en niveaux de couleur. Partant du vide de photons, le champ évolue rapidement vers un état de Fock à 7 photons avec une très bonne fidélité, qui est stabilisé sur une durée arbitraire (en l'absence de rétroaction, le temps caractéristique de la décohérence de l'état à 7 photons est de 10 ms environ).

Une telle mesure s'effectue en combinant le faisceau dont on veut déterminer la phase à un «oscillateur local», de fréquence voisine, sur une lame semi-réfléchissante (cette configuration est représentée, au sein d'un dispositif plus complexe, à la figure 4). Les signaux mesurés par deux photodiodes en sortie du dispositif peuvent être soustraits l'un à l'autre pour obtenir le signal issu de l'interférence des faisceaux, que l'on filtre pour obtenir la composante basse fréquence

$$I(t) = E_{\text{OL}}E_S \cos((\omega_{\text{OL}} - \omega_S)t + (\Phi - \varphi)),$$

où  $E_{\text{OL}}$  et  $\Phi$  désignent la phase et l'amplitude de l'oscillateur local,  $E_S$  et  $\varphi$  celles du signal mesuré.

Dans une mesure *homodyne* du champ, les fréquences de l'oscillateur local et du signal sont les mêmes. Pour la valeur de phase  $\Phi = \varphi + \pi/2$ , la mesure est sensible à des variations  $\delta\varphi$  de la phase autour de la valeur  $\varphi$  :

$$I(t) \simeq E_{\text{OL}}E_S\delta\varphi.$$

Cette sensibilité n'est cependant optimale qu'au voisinage d'une valeur connue. Dans le cas d'une mesure *hétérodyne*, les fréquences sont distinctes : l'analyse de Fourier de  $I(t)$  permet d'obtenir l'amplitude et la phase du signal mesuré. Si la variable d'intérêt est la phase, cette méthode extrait donc plus d'information que nécessaire. Si la mesure s'effectue à nombre de «ressources» (les détections de photons) constant, l'incertitude sur la mesure de la phase est donc plus grande que pour une mesure homodyne. Elle permet cependant la mesure d'une phase inconnue.

Wiseman [46] a montré qu'une mesure homodyne *adaptive*, où l'oscillateur local est ajusté selon l'estimation courante de la phase de sorte à mesurer la quadrature de phase seulement permettait d'approcher une mesure optimale. Ceci a été réalisé expérimentalement pour de petits champs cohérents par Armen *et al.* [47] dont les résultats montrent que la variance sur l'estimation d'une phase inconnue est effectivement réduite par l'emploi d'une mesure adaptative.

Ces idées ont été ensuite étendues à la mesure d'une phase variable dans différents contextes tels l'homodynage d'un champ ou l'interférométrie [48]. La réduction d'incertitude apportée par la mesure adaptative à l'estimation d'une phase variant aléatoirement a été montrée par Wheatley [49]. Les performances de cette mesure peuvent être encore améliorées par l'emploi d'états comprimés du champ [50] : on réduit dans ce cas à la fois les incertitudes liées à la méthode de mesure et celles intrinsèques à l'état mesuré ; la démonstration expérimentale du suivi d'une phase aléatoire à l'aide d'états comprimés a été faite par Yonezawa *et al.* [51]. Le principe de cette expérience est schématisé à la figure 4.

Cette problématique d'estimation de phase se retrouve en interférométrie, où l'on cherche à estimer un déphasage introduit dans l'un des bras d'un interféromètre. Les méthodes de mesures adaptatives s'y appliquent donc facilement : c'est ici un élément déphaseur contrôlable, présent dans l'autre bras de l'interféromètre, sur lequel s'effectue la rétroaction. L'optimisation se pose ici en termes de ressources, c'est-à-dire du nombre de

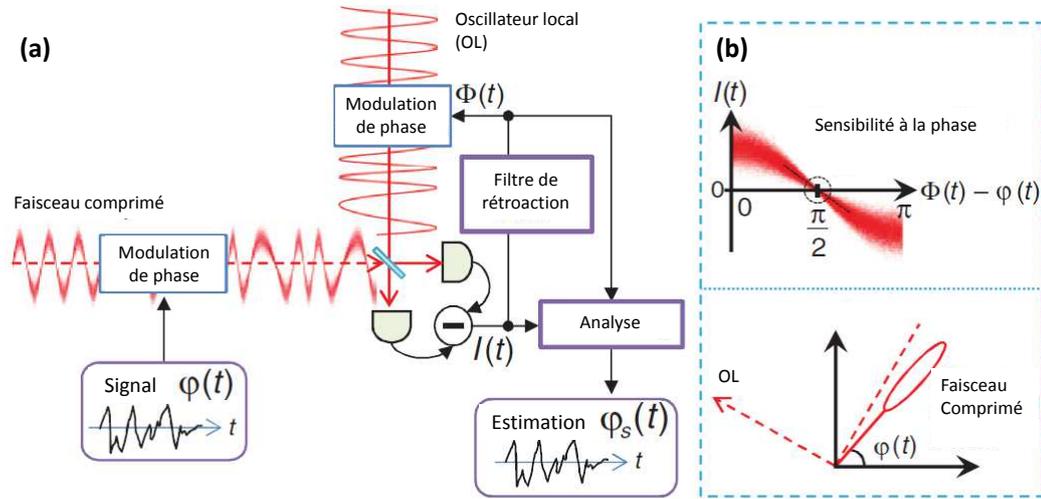


FIGURE 4 – Mesure adaptative d’une phase aléatoire [51] **(a)** Schéma expérimental de la mesure homodyne adaptative : un état comprimé en phase, dont la phase  $\varphi(t)$  varie aléatoirement est combiné sur une lame semi-réfléchissante à un oscillateur local (OL) de même fréquence, dont la phase  $\Phi(t)$ , peut être modulée en temps réel. La différences des intensités détectées sur les deux voies fournit un signal  $I(t)$  dont la sensibilité aux variations de la phase est maximale pour  $\Phi(t) = \varphi(t) + \pi/2$ . **(b)** Courant mesuré en fonction de la phase relative, et représentation dans le plan de phase des signaux au voisinage de la condition optimale. L’analyse en temps réel des signaux détectés permet d’optimiser la phase de l’oscillateur local pour assurer une sensibilité maximale aux variations de  $\varphi(t)$ . Par contraste, dans une mesure hétérodyne, l’oscillateur local est désaccordé par rapport au signal mesuré. Le vecteur qui le représente dans le plan de phase est en rotation : la sensibilité à la phase n’est pas toujours optimale.

photons  $N$  devant traverser l’interféromètre et être détectés pour fournir une incertitude donnée sur la mesure de la phase. Les méthodes usuelles de comptage des photons en sortie de l’interféromètre imposent une limite «de bruit de grenaille» (shot noise limit) à cette précision, qui évolue en fonction du nombre de ressources employées comme  $1/\sqrt{N}$ . L’utilisation d’états intriqués permet en principe d’atteindre la limite fondamentale de  $1/N$  liée à une inégalité de Heisenberg. La mesure adaptative a permis dans ce contexte de réaliser la mesure d’une phase inconnue avec une précision meilleure que le bruit de grenaille à l’aide d’états intriqués de quelques photons et du simple comptage de photons [52, 53]. L’estimation d’une phase au sein d’un interféromètre a également été réalisée avec une précision approchant la limite de Heisenberg par une mesure adaptative sur des photons uniques *non intriqués* [54].

L'estimation d'un paramètre d'un système dont on possède plusieurs copies peut également bénéficier d'une stratégie de mesure adaptative. L'*estimation adaptative* de la polarisation d'un photon a ainsi été réalisée par Okamoto *et al.* [55, 56].

Un problème lié est celui de la discrimination entre deux états non-orthogonaux [57] d'un système dont on possède plusieurs copies. Il a été étudié expérimentalement par Higgins *et al.* [58] sur les états de polarisation de photons uniques. Ces expériences ont montré la supériorité d'une mesure adaptative *locale* – c'est-à-dire pour laquelle la mesure est adaptée à chaque copie pour optimiser le résultat de la détection *suivante* – pour la discrimination entre des états purs. En présence de bruit, *i.e.* pour des états dépolarisés, cette supériorité est perdue, et ces auteurs ont recours à une optimisation *globale* du protocole de mesure : les mesures locales sont optimisées (numériquement) de façon à conduire à la plus faible probabilité d'erreur après la mesure de *toutes les copies* disponibles. Signalons que de manière similaire, il a été proposé [59] d'appliquer des algorithmes d'apprentissage à l'optimisation des mesures adaptatives dans le contexte de l'interférométrie, ce qui peut conduire à de meilleures performances.

Notons que le problème de la discrimination entre états se pose aussi en optique, où deux états cohérents de faible amplitude ne sont pas orthogonaux. La distinction optimale entre états peut être réalisée en principe à l'aide d'états chats de Schrödinger, superpositions cohérentes des deux états à distinguer, ce qu'il est très difficile de faire en pratique. Cook *et al.* [60] ont montré expérimentalement que la performance optimale peut être obtenue par rétroaction quantique sur le système, la mesure effectuée étant simplement le comptage de photons : le champ est déplacé en continu en fonction des résultats donnés par le compteur. Bien que cette expérience réalise une rétroaction *sur le système* et non l'appareil de mesure, elle optimise en fait l'acquisition d'information dans le même esprit que les mesures adaptatives présentées ci-dessus.

Si les expériences décrites jusqu'ici s'attachent seulement à la mesure de paramètres classiques, comme la phase d'un champ, ou à l'estimation de paramètres lorsque la nature quantique des sondes entre en jeu (phase d'un interféromètre, polarisation d'un photon), les résultats présentés dans ce mémoire appartiennent à une dernière catégorie d'expériences qui exploitent l'idée d'une mesure adaptative dans le contexte de la mesure quantique non destructive de systèmes quantiques simples.

Celle-ci est souvent obtenue comme la répétition de mesures faibles non projectives, qui fournissent une information partielle sur l'état. Si l'on peut acquérir plus rapidement une information sur le système en adaptant la mesure, alors en vertu du principe d'action en retour, l'état du système sera plus rapidement projeté dans l'état propre correspondant. Des méthodes d'optimisation de la mesure d'un qubit [61], ou d'un système de dimension finie supérieure [62] ont ainsi été proposées. Ces *mesures adaptatives non destructives* permettent donc d'optimiser la projection, ou la préparation de l'état. Remarquons que la préparation déterministe d'états par mesure adaptative seulement est également possible [63, 64]. La répétition de mesures QND bien choisies peut amener progressivement un qubit dans un état cible : la seule rétroaction sur le système dans cette situation est l'action en retour de la mesure.

L'idée de mesure adaptative a en fait été exploitée dès les premières mesures QND sur des systèmes d'ions, par Hume *et al.* [32]. Ces expériences montrent l'amélioration de la fidélité de la mesure d'un qubit par répétition d'une mesure QND non projective. Elles appliquent également ce principe à un système de deux ions : dans ce cas-là trois états sont accessibles au système, et à chaque répétition de la mesure le temps d'interaction entre les deux ions et un qubit auxiliaire servant à la mesure QND est choisi (entre deux valeurs) pour distinguer optimalement les états les plus probables, étant donné l'information déjà acquise.

Une mesure adaptative peut être également d'un grand intérêt dans notre dispositif d'électrodynamique en cavité. La mesure projective dans un état de Fock du champ est obtenue comme la limite de multiples interactions et détectations atomiques, chaque atome de Rydberg réalisant une mesure faible du nombre de photons. En optimisant les paramètres de cette mesure partielle on peut accélérer la projection du système dans un état de Fock. On extrait en fait plus rapidement de l'information du système : ceci pourrait également permettre d'améliorer le temps de réponse, et donc les performances, des algorithmes de rétroactions quantiques [65].

Nous avons donc réalisé une mesure adaptative non destructive du nombre de photons. La figure 5 donne le schéma de principe de nos expériences. Des atomes de Rydberg traversant la cavité supraconductrice  $C$  permettent de réaliser une mesure faible du champ piégé à l'aide de interféromètre de Ramsey constitué des deux cavités  $R_1$  et  $R_2$ . Les résultats des détectations successives permettent une estimation en temps réel de l'état du champ, prenant en compte toutes les informations disponibles. À partir de cette estimation, nous pouvons *adapter* notre appareil de mesure, en modifiant en temps réel la phase de l'interféromètre, par application d'un potentiel aux miroirs de  $R_2$ . La phase est choisie pour optimiser l'acquisition d'information sur le nombre de photons. Le temps nécessaire à la préparation d'états non classiques du champ de nombre de photons déterminé est ainsi nettement réduit par rapport à une mesure usuelle non adaptative.

Mon arrivée au laboratoire a coïncidé avec la mise en place du dispositif de contrôle en temps réel permettant les expériences de rétroaction quantique [65]. La participation aux expériences de rétroaction quantique à actionneurs classiques [38] ou quantiques [40] a donc constitué une partie importante de mon travail de thèse. Ces travaux sont décrits en détail dans les thèses de Clément Sayrin [66] pour la rétroaction par injection de champ cohérent, et Xingxing Zhou [67] pour la rétroaction à actionneurs atomiques. Il ne seront donc pas discutés dans ce mémoire, consacré à la présentation de la mesure adaptative non destructive du nombre de photons.

Le premier chapitre sera consacré à la présentation du dispositif expérimental. Les propriétés des deux systèmes en présence, le champ piégé dans une cavité Fabry-Pérot et les atomes de Rydberg seront décrites ainsi que la façon dont elles peuvent être contrôlées. Une description théorique des atomes et du champ et de leur interaction sera également présentée.

Dans un second chapitre nous nous intéresserons au régime d'interaction *dispersif* qui permet la réalisation d'une mesure quantique non destructive du nombre de photons. Les

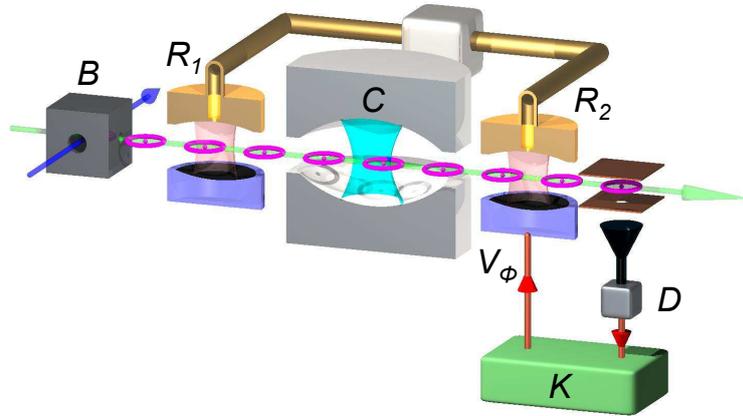


FIGURE 5 – Schéma de l'expérience de mesure adaptative : le champ piégé dans la cavité Fabry-Pérot  $C$  de grande finesse interagit avec des atomes de Rydberg préparés dans la boîte  $B$ . Un interféromètre de Ramsey (cavités  $R_1$  et  $R_2$ ) permet de mesurer l'effet de déplacement lumineux induit par le champ sur les atomes. L'information issue des détections successives permet l'estimation de l'état en temps réel par l'ordinateur  $K$ , qui optimise la phase de l'interféromètre en modifiant les potentiels appliqués aux miroirs de  $R_2$  (on représente l'un de ces potentiels, noté  $V_\phi$ ).

résultats antérieurs, obtenus par une méthode non adaptative au cours des thèses de Christine Guerlin [68] et Julien Bernu [69] seront rappelés. Nous montrerons ensuite comment l'extraction d'information par une mesure faible peut être optimisée, ce qui nous amènera à formuler le principe des expériences réalisées.

La mise en œuvre expérimentale de ces expériences fera l'objet du troisième chapitre. Nous y présenterons le dispositif mis en place pour permettre le contrôle en temps réel de l'expérience, ainsi que la calibration des paramètres expérimentaux nécessaires à l'estimation d'état.

Le dernier chapitre de ce mémoire présentera finalement les résultats expérimentaux obtenus. Nous montrerons comment une mesure adaptative permet effectivement d'améliorer la rapidité de convergence de la mesure QND, et permet donc la préparation plus efficace d'états de Fock.



# Chapitre I

## Atomes et photons en cavité

Les objets étudiés dans nos expériences d'électrodynamique en cavité sont en principe extrêmement simples. Nous parvenons dans notre dispositif à mettre en présence les photons d'un seul mode du champ électromagnétique, et un atome réduit à sa plus simple expression, où seuls deux niveaux électroniques jouent un rôle. Par contre, cette simplicité conceptuelle a pour pendant une grande complexité expérimentale. En effet, ces systèmes simples doivent être *isolés* de l'environnement extérieur, où ils interagissent usuellement avec beaucoup d'atomes et de nombreux modes du champ. Il nous faut aussi pouvoir *contrôler* les états quantiques du champ et de l'atome pour mener à bien nos expériences.

Ce chapitre a donc pour but de présenter les deux constituants fondamentaux que sont le champ et les atomes utilisés, tant sur le plan théorique qu'expérimental, ainsi que les outils que nous possédons pour les manipuler. Après un aperçu de la structure globale du dispositif, une première partie sera consacrée à la description du mode du champ électromagnétique, qui est notre véritable objet d'étude. Nous passerons ensuite aux atomes, qui nous permettent de sonder le champ. Nous présenterons les états atomiques utilisés, et comment nous préparons et contrôlons l'état atomique. Nous décrirons enfin dans une dernière partie l'interaction entre les deux systèmes, ainsi que le régime limite utilisé dans nos expériences.

### I.1 Vue d'ensemble du dispositif expérimental

Avant d'étudier plus en détail les constituants de l'expérience, il est utile de présenter l'architecture globale du dispositif expérimental. Ce montage, dans son état actuel, est le fruit du travail de thèse de Sébastien Gleyzes, dans le mémoire duquel [70] on pourra trouver de nombreux détails. Il a permis, bien avant les travaux présentés dans ce manuscrit, de nombreuses expériences marquantes pour l'électrodynamique en cavité, dont les thèses de mes prédécesseurs [68, 69, 71, 66, 67] ont rendu compte.

Les principaux constituants du montage sont schématisés à la figure I.1. Nous reviendrons en détail sur la majorité d'entre eux dans la suite de ce chapitre, nous contentant ici d'une brève description.

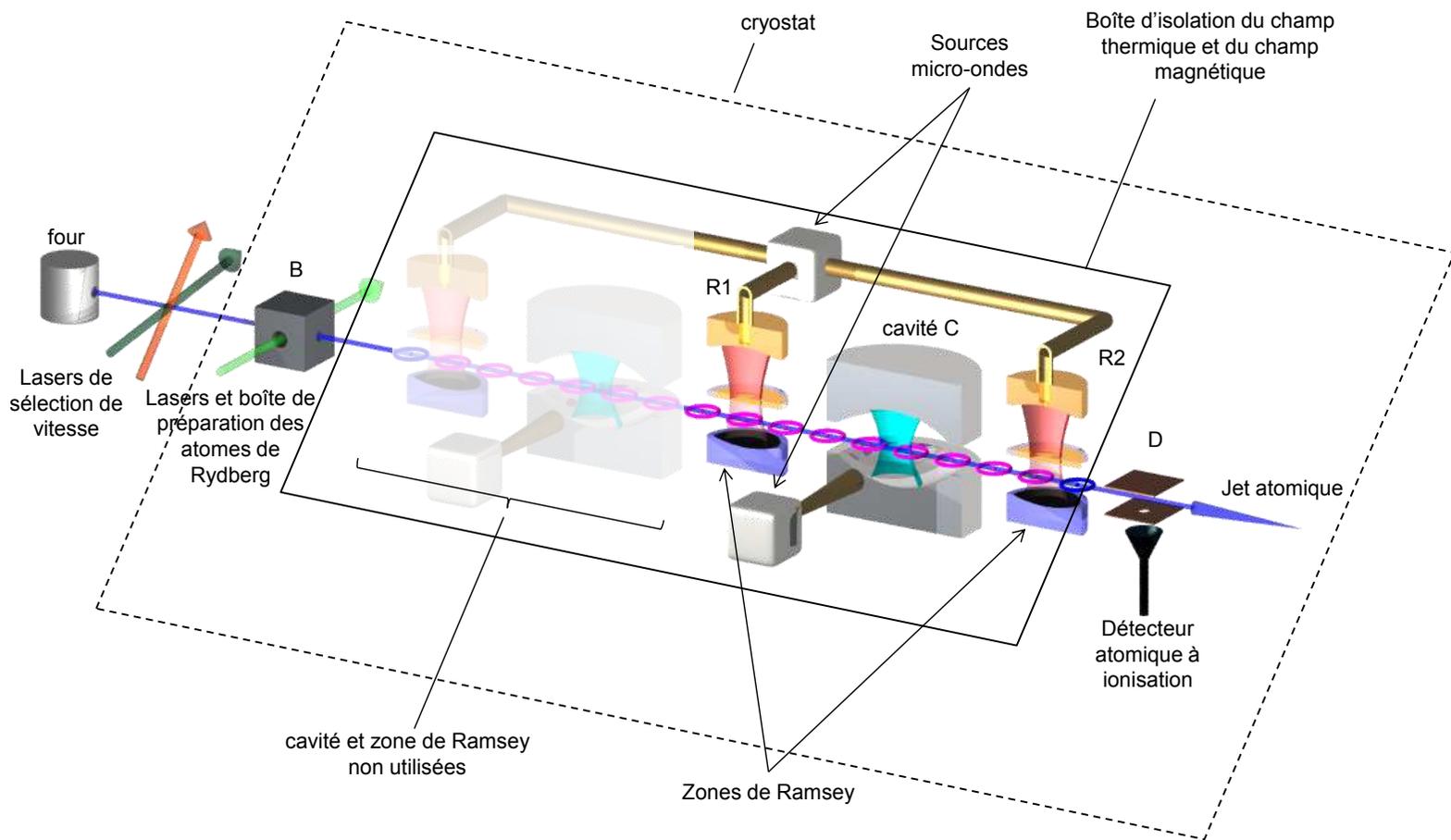


FIGURE I.1 – Schéma du dispositif expérimental

Des atomes de rubidium sont issus d'une enceinte à vide chauffée à  $225\text{ }^{\circ}\text{C}$ <sup>1</sup>. Un ensemble de diaphragmes permet la collimation d'un faisceau atomique se propageant dans le reste de l'expérience, également sous vide poussé<sup>2</sup>. Un premier ensemble de faisceaux lasers permet de sélectionner des atomes de vitesse  $250\text{ m/s}$ . Ces atomes subissent ensuite une préparation pulsée dans les états dits *de Rydberg*, au centre d'un «boîte à circulariser» où ils sont soumis à des impulsions de champs laser, radiofréquence, et micro-onde. Un «train» d'atomes de Rydberg est ainsi préparé, et traverse le cœur de l'expérience.

Celui-ci est articulé autour d'une cavité micro-onde supraconductrice de grande finesse, contenant le champ piégé que nous étudions. Les atomes traversent la cavité et interagissent avec le champ. De part et d'autre de la cavité  $C$  de grande finesse se trouvent deux autres cavités micro-onde,  $R_1$  et  $R_2$ , de finesse volontairement modérée : dans ces zones des impulsions de champ classique permettent la manipulation de l'état interne de l'atome. Les cavités  $R_1$  et  $R_2$  définissent, comme nous le verrons plus tard, un *interféromètre de Ramsey* ; nous leur donnons donc couramment le nom de *zones de Ramsey*. Une même source micro-onde alimente les deux zones de Ramsey, dont l'un des miroirs, percé, permet l'injection de champ. L'injection de champ dans  $C$  se fait à l'aide d'une autre source, latérale, couplée par diffraction. Après avoir traversé les cavités, les atomes sont ionisés dans le détecteur  $D$ , ce qui permet la mesure de leur état interne, et le signal électronique résultant, amplifié, est envoyé à un ordinateur de contrôle.

Comme le montre la figure I.1, le dispositif actuel est en fait conçu pour accueillir deux cavités supraconductrices et trois zones de Ramsey. Cependant lors de la mise en place du montage qui a abouti aux expériences présentées ici, la finesse de la première cavité s'est avérée trop faible pour permettre son utilisation dans des expériences. Elle fut donc placée hors de résonance pour ne pas perturber les atomes la traversant, et nous étudierons ici le champ d'une seule cavité.

Isoler notre système des interactions avec l'environnement passe, comme déjà mentionné, par une mise sous vide poussé. Ceci requiert également un dispositif cryogénique. En effet, la très grande finesse de la cavité micro-onde est obtenue par l'emploi de niobium, qui est supraconducteur en dessous de  $9,3\text{ K}$ . Par ailleurs, si nous voulons contrôler l'état du champ, il faut réduire au maximum le nombre de photons «thermiques» issu du rayonnement de corps noir dans la cavité. Les expériences se déroulent donc au sein d'un cryostat constitué d'un cylindre creux contenant de l'azote liquide à  $77\text{ K}$ , dans lequel s'insère un cœur à hélium au bas duquel est monté le dispositif expérimental. Le cœur du cryostat comprend un bain de  $^4\text{He}$  à  $4,2\text{ K}$ , qui alimente une boîte sur laquelle on pompe pour atteindre  $1,5\text{ K}$ . Ceci permet de liquéfier de l' $^3\text{He}$ , qui est également pompé pour atteindre la température finale de  $0,8\text{ K}$  environ, température à laquelle sont réalisées nos expériences. Afin d'éviter que des photons issus des parties plus chaudes du cryostat ne soient piégés dans la cavité, le dispositif est placé dans une boîte d'écrantage, thermalisée à  $0,8\text{ K}$ , dont les trous d'accès sont sous-coupure à la fréquence de la cavité, soit  $51,1\text{ GHz}$ .

---

1. Cette température a été augmentée comparativement à des expériences précédentes, où elle était de  $185\text{ }^{\circ}\text{C}$ , pour compenser une baisse des détections atomiques.

2. Le vide au cœur de l'expérience est de l'ordre de  $10^{-9}\text{ mbar}$ .

De nombreuses précautions sont également prises pour éviter que des photons des parties hautes du cryostat n'arrivent à la cavité, par les guides micro-ondes ou les câbles coaxiaux descendant au cœur du montage, précautions au sujet desquelles on trouvera plus de détails dans la thèse de Sébastien Gleyzes [70].

## I.2 Une cavité Fabry-Pérot de grande finesse

Nous consacrons cette partie à la description de la pièce maîtresse de notre dispositif : la cavité micro-onde supraconductrice. Véritable «boîte à photons» à l'image de celle utilisée dans les expériences de pensée du début du XX<sup>e</sup> siècle, elle permet le piégeage du champ, et une fort couplage aux atomes. À ce titre elle répond à plusieurs contraintes. Nous présenterons dans un première section les caractéristiques de cette cavité : la géométrie et le mode retenus, comment elle est fabriquée et incluse dans le montage expérimental. Dans une deuxième section nous donnerons la description théorique d'un mode du champ quantifié, qui est véritablement l'objet de notre étude.

### I.2.1 Caractéristiques

Nous voulons isoler dans la cavité un mode du champ électromagnétique, pour le sonder avec des atomes. Ce mode doit donc avoir un volume faible, et un temps de vie aussi grand que possible, pour que de nombreux atomes puissent interagir avec le champ pendant son évolution. De manière équivalente, la finesse de la cavité, et la réflectivité des miroirs, doivent être maximales. L'utilisation, courante dans les domaines micro-onde et radio-fréquence, d'un matériau supraconducteur, le niobium, confère à nos miroirs cette grande réflectivité. Une stratégie possible pour augmenter davantage la finesse serait l'emploi d'une cavité fermée, où le passage des atomes se fait par des trous sous coupure [72, 73]. Ceci nous est interdit, car nous verrons que la préservation des états atomiques utilisés requiert l'application d'un champ électrique directeur, ce qui est impossible avec une cavité fermée. Les inhomogénéités de champ électrique au voisinage des trous de passage risqueraient également de détruire les cohérences atomiques. La solution retenue a donc été une cavité ouverte, constituée de deux miroirs en configuration Fabry-Pérot, en cuivre recouvert de niobium [74].

#### I.2.1.a Géométrie

La géométrie des miroirs est présentée à la figure I.2. Dans l'approximation paraxiale, les modes propres d'une cavité Fabry-Pérot sont les modes «transverses électromagnétiques» [75],  $TEM_{qnm}$ , où  $q$  désigne le nombre de ventres de l'onde stationnaire entre les miroirs, et  $n$  et  $m$  décrivent le profil transverse. Nous utilisons un mode de profil gaussien ( $n = m = 0$ ), dont la fréquence est donnée par :

$$\nu_q = \frac{c}{2d} \left( q + \frac{1}{\pi} \arccos \left( 1 - \frac{d}{R} \right) \right), \quad (\text{I.1})$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $R$  le rayon de courbure des miroirs, et  $d$  la distance les séparant. Le rayon de courbure de nos miroirs est d'environ 40mm et la distance  $d$  de 28 mm, permettant d'obtenir une fréquence de 51,1 GHz pour le mode  $TEM_{900}$ . Cette fréquence est choisie pour permettre comme nous le verrons l'interaction résonante avec les atomes, et le choix d'un mode impair assure que les atomes, passant au centre de la cavité orthogonalement à son axe, traversent un ventre du champ et soient maximalelement couplés.

L'amplitude du champ  $\mathcal{E}$  pour le mode considéré est donnée en coordonnées cylindriques (l'axe  $(Oz)$  coïncidant avec l'axe de la cavité, et l'origine étant prise en son centre) par :

$$\mathcal{E}(r, z) \equiv \mathcal{E}_m f(r, z) = \mathcal{E}_m \frac{w_0}{w(z)} \cos \left( kz - \arctan \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} + \frac{r^2 k}{2R(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}, \quad (\text{I.2})$$

où  $\mathcal{E}_m$  est l'amplitude au centre de la cavité ( $r = z = 0$ ),  $\lambda = 5,87$  mm est la longueur d'onde, et  $k = 2\pi/\lambda$  le vecteur d'onde associé.  $f$  est une fonction sans dimension définissant le profil du mode, normalisée à 1 en son maximum. Le terme exponentiel décrit le profil transverse gaussien du mode, dont le col, ou «waist» varie le long de l'axe :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2}, \quad \text{avec } w_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R - d)}. \quad (\text{I.3})$$

$w_0$  est le col du mode au centre de la cavité, valant 5,96 mm. Le terme sinusoïdal dans l'équation (I.2) décrit lui les neuf ventres de champ de l'onde stationnaire et notamment l'évolution du rayon de courbure du front d'onde lorsque l'on s'éloigne du centre de la cavité :

$$R(z) = z \left( 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right). \quad (\text{I.4})$$

Ces aspects du profil du mode sont représentés schématiquement sur la figure I.2.

Dans ces conditions, le volume du mode vaut :

$$\mathcal{V} = \int |f(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = \frac{\pi w_0^2 d}{4} \simeq 770 \text{ mm}^3, \quad (\text{I.5})$$

soit l'équivalent de quelques  $\lambda^3$ . Le champ est donc très bien confiné dans cette géométrie, ce qui contribue à ce que l'interaction avec les atomes soit importante. On peut en effet montrer (voir plus bas, au paragraphe I.2.2.a) que l'amplitude des fluctuations de point zéro au centre du mode est donnée par [13] :

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\text{cav}}}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} \simeq 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}, \quad (\text{I.6})$$

où  $\omega_{\text{cav}} = 2\pi\nu_{\text{cav}}$  est la pulsation du mode considéré et  $\hbar$  la constante de Planck réduite. Pour les paramètres de notre cavité, les fluctuations du champ ont donc une valeur déjà d'ordre macroscopique !

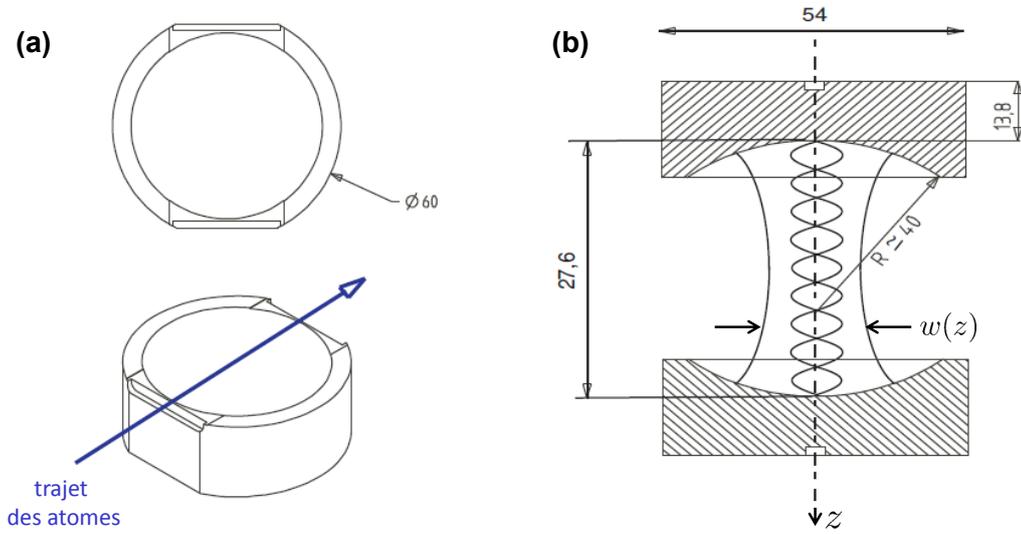


FIGURE I.2 – Schéma des miroirs de la cavité micro-onde supraconductrice. **(a)** Vue de dessus et vue de trois-quarts. **(b)** Schéma du résonateur. Les cotes sont en millimètres.  $w(z)$  est le col du mode à la cote  $z$ . Le schéma n'est pas à l'échelle par souci de lisibilité.

Nous avons jusqu'ici passé sous silence l'existence de deux modes dégénérés à la fréquence considérée, correspondant aux deux polarisations linéaires possibles dans le plan orthogonal à l'axe de la cavité. Cette dégénérescence, exacte pour des miroirs idéalement sphériques, est une nuisance dans la pratique : en effet, l'usinage des miroirs ne peut être parfait, et les défauts géométriques créent une levée de dégénérescence accidentelle de l'ordre de la dizaine de kHz. C'est aussi, comme nous le verrons, l'ordre de grandeur de la fréquence caractéristique du couplage atome – champ ce qui signifie que les atomes peuvent se coupler différemment aux deux modes en même temps. Pour éviter cette situation, on fait le choix de lever explicitement la dégénérescence : la surface des miroirs est en fait toroïdale, avec deux rayons de courbure de 39,4 mm et 40,6 mm, ce qui sépare en fréquence les deux modes de polarisation de 1,2 MHz. Cette séparation, grande comparée au couplage atome – champ, nous permet de nous ramener au cas idéal d'un unique mode du champ en interaction avec les atomes : dans les expériences présentées ici, il s'agit du mode basse fréquence (BF).

### I.2.1.b Une très grande finesse

Pour obtenir les temps de vie les plus élevés possibles avec une cavité ouverte, il faut minimiser les pertes de photons, qui ont deux sources : l'absorption à la surface du miroir, ou la diffraction hors du mode de la cavité. L'emploi de niobium supraconducteur vise à combattre la première, mais la seconde impose également que les miroirs aient une forme très précise et une excellente qualité de surface. C'est ce qui a conduit au développement des miroirs actuels, à base d'un substrat de cuivre, l'usinage du cuivre étant en effet bien plus aisé que celui du niobium. Un usinage au diamant permet d'obtenir des miroirs avec

une rugosité très faible de 6 nm rms, et une précision sur la forme à grande échelle de l'ordre de 300 nm crête à crête. Sur ces miroirs en cuivre nous déposons finalement deux couches de niobium de 6  $\mu\text{m}$  chacune, par pulvérisation cathodique magnétron<sup>3</sup> [77].

De cette façon ont été obtenues des cavités aux temps de vie exceptionnels pouvant atteindre 130 ms [74]. Le temps de vie  $T_{\text{cav}}$  est plus précisément le temps d'amortissement de l'énergie moyenne du champ dans la cavité : il est relié à sa largeur spectrale  $\Delta\nu_{\text{cav}}$  par la relation  $2\pi\Delta\nu_{\text{cav}}T_{\text{cav}} = 1$  [78]. La largeur spectrale de la cavité actuelle, de 2,5 Hz pour le mode BF, correspond à un temps de vie de 65 ms<sup>4</sup>.

Une telle mesure spectrale étant délicate (très sensible aux bruits éventuels qui élargissent la raie), nous avons plus souvent recours à une méthode utilisant l'absorption du champ par les atomes [74] : on enregistre après une injection de micro-onde à la fréquence du mode dans la cavité l'évolution de la population détectée dans un niveau atomique excité à cette fréquence en fonction du temps. Cette population  $\zeta(t)$  est une fonction  $\eta$  de l'intensité, laquelle décroît exponentiellement. On a donc formellement :

$$\zeta(t) = \eta(I_0 \exp(-t/T_{\text{cav}})),$$

pour une intensité initiale  $I_0$ . Si nous reproduisons l'expérience pour une intensité  $I_0 e^p$ , avec  $p$  entier relatif, on observera une évolution  $\zeta'(t)$  de la population, donnée par :

$$\zeta'(t) = \eta(I_0 \exp((pT_{\text{cav}} - t)/T_{\text{cav}})) = \zeta(t - pT_{\text{cav}}).$$

On obtient donc un ensemble de courbes translatées les unes par rapport aux autres d'un nombre entier de fois le temps de vie, qui peut être ainsi aisément déterminé. C'est ici la largeur intrinsèque de la cavité qui fixe le temps de décroissance exponentielle du champ  $T_{\text{cav}}$ , donc l'espacement des courbes. Cette méthode est insensible aux éventuelles fluctuations de la fréquence de la cavité si la transitions atomique reste sensible au champ sur une gamme de fréquence assez large.

La qualité du résonateur obtenue peut être quantifiée à l'aide d'autres paramètres, tels la finesse

$$\mathcal{F} = \frac{ISL}{\Delta\nu_{\text{cav}}} = 2,3 \cdot 10^9, \quad (\text{I.7})$$

où  $ISL = c/2d = \nu/q$  est l'intervalle spectral libre, ou le facteur de qualité

$$Q = \frac{\nu_{\text{cav}}}{\Delta\nu_{\text{cav}}} = 2,1 \cdot 10^{10}. \quad (\text{I.8})$$

---

3. Ce procédé, initialement développé et réalisé dans l'équipe de P. Bosland, E. Jacques et B. Visentin au CEA, était utilisé dans la fabrication de cavité accélératrices pour les accélérateurs de particules [76]. Le dépôt est depuis peu effectué dans notre laboratoire.

4. La cavité «historique» au temps de vie de 130 ms, grâce à laquelle de nombreuses expériences (et thèses) ont pu être réalisées, s'est malheureusement détériorée lors d'une ouverture du cryostat : encore présente dans le montage actuel, c'est la cavité inutilisée mentionnée à la partie I.1.

Les valeurs obtenues pour ces paramètres sont remarquables pour une cavité ouverte, tous domaines de fréquences confondus, et comparables aux meilleurs résultats pour des cavités fermées dans ce domaine de fréquence [73].

Remarquons pour finir que la contrainte sur la forme des miroirs est telle qu'elle interdit le perçage d'un trou de couplage permettant l'injection contrôlée de micro-onde dans la cavité : cette injection est donc réalisée à l'aide d'un guide d'onde latéral, dont les photons se couplent au mode de la cavité. Ce couplage s'effectue par des modes de diffraction de la cavité (responsables réciproquement d'une partie des pertes de la cavité, et de la limitation du temps de vie). Il s'est avéré robuste en termes d'amplitude et de phase, et permet avec les puissances micro-ondes disponibles de réaliser des injections allant de la fraction à la centaine de photons (on pourra se reporter pour plus de détails aux thèses de Julien Bernu [69] et Clément Sayrin [66]).

### I.2.1.c Contrôle de la fréquence

La façon dont interagissent les atomes et le champ piégé dans la cavité dépend de la différence entre les fréquences de la transition atomique et du mode de la cavité. Ce *désaccord* doit donc être contrôlé avec précision : la fréquence caractérisant le couplage étant d'environ 50 kHz, nous devons ajuster la fréquence de la cavité avec une précision de l'ordre du kHz, ce qui correspond à un ajustement nanométrique de la distance entre les miroirs. Pour cela les miroirs sont montés dans le dispositif sur un *bloc cavité* présenté à la figure I.3.a. Dans le bloc, la plaque portant le miroir supérieur est pressée à l'aide de ressorts sur des tubes piézo-électriques. Des cales en cuivres, intercalées entre les tubes et les plaques portant les miroirs, permettent de régler grossièrement la fréquence de la cavité avant le montage final : leur épaisseur est ajustée au  $\mu\text{m}$  *via* des décapages chimiques, soit une précision de l'ordre du MHz sur la fréquence finale. Les tubes piézo-électriques permettent ensuite le réglage fin de la fréquence lorsque le montage est à froid. Une source de haute tension contrôlée au volt près permet d'accéder à une gamme de fréquences de 5 MHz, avec un facteur de conversion de 2,5 kHz/V environ.

Pour suivre et contrôler la fréquence de la cavité à froid, une mesure est réalisée à l'aide des atomes. Nous reviendrons en détail sur la méthode dont nous donnons ici le principe (voir la section I.4.2). Les atomes se comportent comme ayant deux niveaux,  $|g\rangle$  (état fondamental) et  $|e\rangle$  (état excité). Dans l'expérience considérée, la fréquence de la transition entre ces niveaux est proche de la résonance de la cavité, et ils peuvent échanger de l'énergie avec le champ : un atome initialement dans l'état  $|g\rangle$  peut être transféré dans l'état  $|e\rangle$  avec une probabilité d'autant plus grande qu'il y a de photons dans le mode. L'expérience consiste alors à réaliser dans la cavité des injections micro-ondes de fréquence variable et de durée fixée, puis à sonder le champ dans la cavité à l'aide d'un ensemble d'environ 40 atomes préparés dans l'état  $|g\rangle$  : quand la fréquence injectée  $\nu$  est proche de la résonance de la cavité, la probabilité  $\pi_e$  que les atomes soient dans l'état  $|e\rangle$  en sortie de la cavité augmente, du fait des nombreux photons piégés. Le tracé de  $\pi_e$  en fonction de  $\nu$  donne le spectre de la cavité présenté à la figure I.4 (la durée d'injection est de 500 ms) : un ajustement lorentzien permet d'accéder à la largeur spectrale, qui prend pour cet exemple

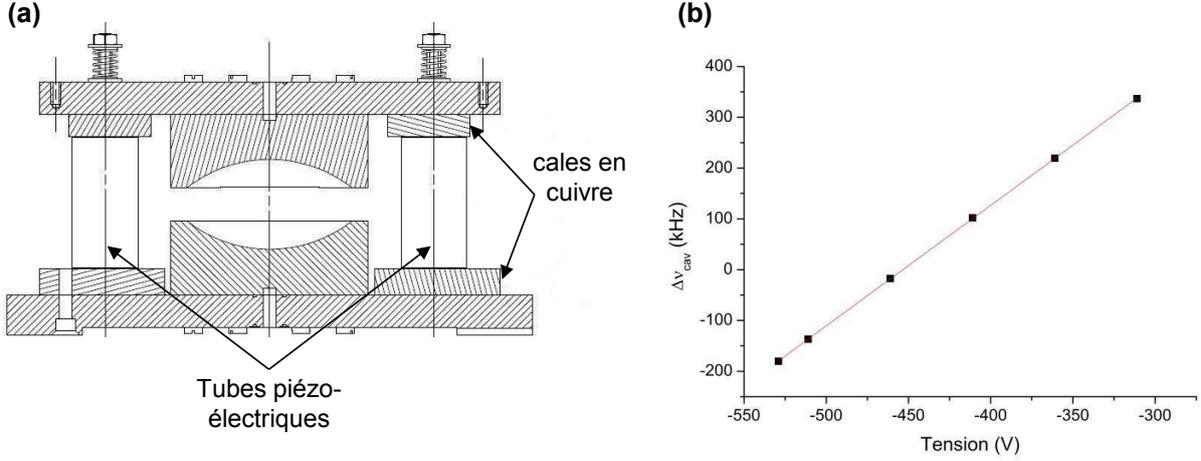


FIGURE I.3 – Contrôle de la fréquence du mode. **(a)** : éléments du montage fixant la distance entre les deux miroirs. **(b)** : variation de la fréquence du mode avec la tension appliquée aux tubes piézo-électriques. L'écart  $\Delta\nu_{\text{cav}}$  est pris par rapport à la fréquence de 51,099 GHz. Un ajustement linéaire donne un facteur de conversion de 2,37 kHz/V.

sa valeur limitée par le temps de vie, soit 2,5 Hz. En répétant cette mesure pour différentes valeurs de la tension appliquée aux tubes piézo-électriques nous pouvons accéder au facteur de conversion entre tension et fréquence ; la figure I.3.b en donne un exemple, sur une plage de quelques centaines de volts.

## I.2.2 Description théorique

Après avoir présenté comment nous parvenons à isoler et contrôler un mode du champ électromagnétique, il nous faut maintenant donner les éléments de théorie qui permettent sa description dans le cadre de la mécanique quantique.

### I.2.2.a L'oscillateur harmonique quantique

La dynamique d'un mode du champ électromagnétique comme celui que nous considérons ici est celle d'un oscillateur harmonique. L'évolution du champ dans la cavité peut s'écrire :

$$\mathcal{E}(r, z) = i\mathcal{E}_0\epsilon f(r, z) (\alpha(t) - \alpha^*(t)), \quad (\text{I.9})$$

où  $\mathcal{E}_0$  est un facteur de normalisation,  $\epsilon$  le vecteur unitaire décrivant la polarisation du mode, et  $f$  la fonction de profil définie par l'équation (I.2). L'amplitude complexe  $\alpha$  est appelée *variable normale* du mode, et son évolution,  $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega_{\text{cav}} t}$  (avec  $\omega_{\text{cav}} = 2\pi\nu_{\text{cav}}$ ) décrit les oscillations du champ.

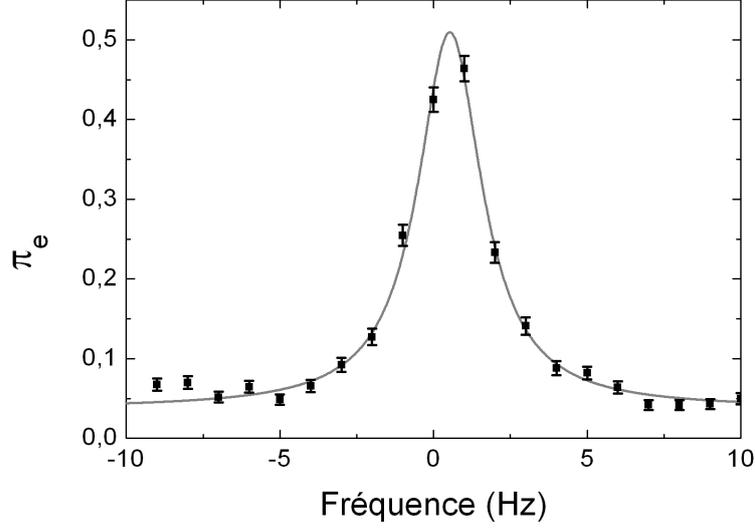


FIGURE I.4 – Spectre de résonance de la cavité micro-onde (mode BF). La probabilité qu’un atome préparé dans l’état  $|g\rangle$  quitte la cavité dans l’état  $|e\rangle$  après avoir interagi de façon résonante avec le champ qu’elle contient est tracée en fonction de la fréquence de l’injection remplissant le mode au préalable. Le longueur de l’injection est de 500 ms.

La quantification du champ peut alors être effectuée [79], en remplaçant  $\alpha$  et son conjugué  $\alpha^*$  par deux opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$ , hermitiens conjugués l’un de l’autre, vérifiant la relation de commutation :

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1}. \quad (\text{I.10})$$

Le calcul de l’énergie du champ électromagnétique fournit alors le hamiltonien de l’oscillateur harmonique quantique :

$$H_{\text{cav}} = h\nu_{\text{cav}} \left( a^\dagger a + \frac{\mathbb{1}}{2} \right), \quad (\text{I.11})$$

où  $h$  est la constante de Planck. Cette écriture impose de fait la valeur de  $\mathcal{E}_0$ , mentionné dans l’équation (I.6). Les relations de commutation (I.10) permettent alors de démontrer que les valeurs propres de  $\hat{N} \equiv a^\dagger a$  sont les entiers naturels  $n \in \mathbb{N}$ . Les états propres associés (qui sont donc des états propres du hamiltonien), notés  $|n\rangle$ , sont appelés *états de Fock*, ou encore *états nombres*. Ils possèdent donc un nombre entier de quanta d’énergie  $h\nu_{\text{cav}}$ , ou *photons*. Ce sont ces états que nous cherchons à mesurer de façon optimale dans les expériences présentées ici.

L’action des opérateurs  $a$ ,  $a^\dagger$  et  $\hat{N}$  sur les états  $|n\rangle$ ,

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (\text{I.12})$$

leur vaut respectivement les noms d'opérateurs *création*, *annihilation* et *nombre de photons*.

Les états propres que nous avons obtenus sont des états *non-classiques*. On se convaincra en effet à l'aide des relations ci-dessus que la valeur moyenne du champ électrique dans ces états,  $\langle n | \hat{\mathbf{E}} | n \rangle$ , est nulle<sup>5</sup>. Pour décrire dans le cadre quantique l'analogie d'un champ classique, nous avons besoin d'une autre classe d'états, appelés *états cohérents*, introduits par Glauber [80]. Ils peuvent être définis comme les états propres de l'opérateur d'annihilation de valeur propre  $\alpha$  complexe :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (\text{I.13})$$

Ils peuvent se décomposer sur la base des états de Fock sous la forme :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{I.14})$$

Dans ces états le nombre de photons peut par conséquent prendre plusieurs valeurs, avec une loi de probabilité poissonnienne :

$$P(n) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (\text{I.15})$$

La valeur moyenne et l'écart-type du nombre de photons dans l'état  $\alpha$  valent alors :

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad \langle \Delta \hat{N} \rangle = |\alpha|. \quad (\text{I.16})$$

Finalement, l'évolution d'un état cohérent sous l'action du hamiltonien  $H_{\text{cav}}$  prend la forme :

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_{\text{cav}}t}{2}} |\alpha e^{-i\omega_{\text{cav}}t}\rangle. \quad (\text{I.17})$$

Ce résultat met en évidence l'intérêt des états cohérents pour décrire un champ «semi-classique» : dans l'état  $|\alpha\rangle$ , la valeur moyenne  $\langle \alpha | \hat{\mathbf{E}} | \alpha \rangle$  du champ électrique redonne la valeur du champ classique de l'équation (I.9). Ce que nous appellerons dorénavant l'*amplitude*  $\alpha$  du champ cohérent est maintenant directement liée aux nombre de photons. À la limite des grands nombres de photons, les fluctuations de  $N$  deviennent négligeables devant sa valeur moyenne, et l'état cohérent s'approche de plus en plus d'un champ classique d'amplitude complexe  $\alpha$  macroscopique.

### I.2.2.b Couplage à l'environnement

Nous avons décrit ci-dessus un mode du champ *isolé*. Ce n'est bien évidemment pas le cas en pratique : nous couplerons le mode à une source micro-onde afin d'y injecter des photons, et nous aurons également à prendre en compte l'interaction du mode avec l'environnement.

---

5. La valeur moyenne du carré du champ, à laquelle est liée l'énergie du champ, n'est pas nulle, y compris en particulier pour le vide de photons  $|0\rangle$ , d'où l'existence des fluctuations de point zéro.

**Relaxation** Étant donné le couplage avec les degrés de liberté de l'environnement (par exemple les modes extérieurs auxquels le mode étudié est couplé par diffraction), des photons peuvent quitter le mode de la cavité. Un photon de l'environnement peut inversement se coupler dans le mode. Si l'environnement est à température  $T$ , l'équilibre est atteint quand les populations de nombres de photons obéissent à la statistique de Bose-Einstein :

$$P_{\text{th}}(n) = e^{-\frac{n\hbar\omega_{\text{cav}}}{k_{\text{B}}T}} \left( 1 - e^{-\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{k_{\text{B}}T}} \right), \quad (\text{I.18})$$

où  $k_{\text{B}}$  est la constante de Boltzmann. Le nombre moyen de photons dans cet état d'équilibre thermique est :

$$n_{\text{th}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{\text{cav}}}{k_{\text{B}}T}} - 1}. \quad (\text{I.19})$$

Dans les conditions de nos expériences,  $\omega_{\text{cav}} = 2\pi \cdot 51,1 \text{ GHz}$  et  $T = 0,8 \text{ K}$ , il y a donc seulement  $n_{\text{th}} = 0,05$  photons d'origine thermique.

Pour effectuer nos expériences, nous ne nous contenterons cependant pas de l'état d'équilibre thermique. Comme nos mesures s'effectueront sur des échelles de temps comparables au temps de vie, il nous faut pouvoir décrire la relaxation du champ. Du fait du couplage avec l'environnement s'établissent en principe de nombreuses corrélations entre le système et des degrés de liberté extérieurs, ce qui rendrait très complexe la description du champ. On peut cependant montrer [13, 81] que si l'environnement auquel le système est couplé est suffisamment grand (avec de nombreux degrés de libertés), et «sans mémoire» (hypothèse de Markov : cela revient à dire que les corrélations dans l'environnement persistent sur un temps très court devant le temps d'évolution du système), il est possible d'établir une équation d'évolution pour le système seul.

Cette *équation maîtresse* pour la matrice densité  $\rho$  du champ prend la forme dite de Lindblad [82] :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \mathbf{L}\rho, \quad (\text{I.20})$$

$$\mathbf{L}\rho = \sum_{\mu} \left( L_{\mu}\rho L_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2}L_{\mu}^{\dagger}L_{\mu}\rho - \frac{1}{2}\rho L_{\mu}^{\dagger}L_{\mu} \right). \quad (\text{I.21})$$

On reconnaît dans cette équation un premier terme qui décrit l'évolution hamiltonienne. Il peut être éliminé simplement en passant en représentation d'interaction par rapport au hamiltonien  $H_{\text{cav}}$ . L'évolution élémentaire en représentation d'interaction sera donc donnée par :

$$\rho(t + dt) = (\mathbb{1} + dt\mathbf{L})\rho(t), \quad (\text{I.22})$$

résultat qui nous sera utile par la suite

Les opérateurs  $L_{\mu}$  décrivent les processus élémentaires pouvant survenir du fait du couplage à l'environnement. Ici, le mode peut perdre ou gagner un photon, au profit ou

aux dépens de l'environnement<sup>6</sup>. Ceci conduit à la définition de deux *opérateurs de saut*  $L_+$  et  $L_-$  proportionnels aux opérateurs de création et d'annihilation :

$$L_- = \sqrt{\kappa_-}a, \quad L_+ = \sqrt{\kappa_+}a^\dagger. \quad (\text{I.23})$$

La probabilité qu'il y ait gain ou perte d'un photon est alors donnée par :

$$p_+ = \text{Tr} \left( L_+^\dagger L_+ \rho \right) = \kappa_+ \text{Tr} (aa^\dagger \rho) = \kappa_+ (1 + \langle n \rangle), \quad (\text{I.24})$$

$$p_- = \text{Tr} \left( L_-^\dagger L_- \rho \right) = \kappa_- \text{Tr} (a^\dagger a \rho) = \kappa_- \langle n \rangle. \quad (\text{I.25})$$

Ceci permet de relier les taux  $\kappa_+$  et  $\kappa_-$  entre eux : en effet, à l'équilibre thermique à la température  $T$  fixée par l'environnement,  $\langle n \rangle = n_{\text{th}}$  et les probabilités de saut doivent être égales, ce qui implique :

$$\frac{\kappa_+}{\kappa_-} = \frac{n_{\text{th}}}{n_{\text{th}} + 1}. \quad (\text{I.26})$$

On peut donc définir un unique *taux de relaxation*  $\kappa$ , avec

$$\kappa_+ = n_{\text{th}}\kappa \quad \kappa_- = (n_{\text{th}} + 1)\kappa. \quad (\text{I.27})$$

Prenant en compte toutes ces réécritures, nous pouvons établir des équations simples sur les populations de nombres de photons, puisque seuls les états de Fock vont véritablement nous intéresser ici :

$$\frac{dp(n)}{dt} = \kappa(1 + n_{\text{th}})(n + 1)p(n + 1) + \kappa n_{\text{th}}np(n - 1) - [\kappa(1 + n_{\text{th}})n + \kappa n_{\text{th}}(n + 1)]p(n). \quad (\text{I.28})$$

Ceci permet notamment d'établir l'évolution du nombre de photons moyen :

$$\frac{d\langle \hat{N} \rangle}{dt} = -\kappa \left( \langle \hat{N} \rangle - n_{\text{th}} \right). \quad (\text{I.29})$$

L'énergie contenue dans le mode décroît donc exponentiellement : le temps caractéristique de cette décroissance est le *temps de vie*  $T_{\text{cav}}$  introduit précédemment. On a donc  $\kappa^{-1} = T_{\text{cav}}$ .  $T_{\text{cav}}$  peut aussi s'interpréter comme le temps de vie d'un photon : en effet, à température nulle, l'équation (I.28) donne pour un état de Fock contenant initialement  $n$  photons ( $p(n) = 1$  à  $t = 0$ ) une décroissance exponentielle de  $p(n)$ , en  $T_{\text{cav}}/n$ <sup>7</sup>. S'il y a un photon dans la cavité, il est donc perdu en un temps caractéristique  $T_{\text{cav}}$ .

6. Cette interprétation du couplage à l'environnement, et donc les opérateurs choisis, ne sont en général pas uniques. Il conduisent cependant tous à la même équation maîtresse et à la même évolution moyenne du système (voir [13], section 7.5, ou [83]).

7. A température non-nulle, l'évolution n'est plus exactement exponentielle, et le taux de départ est faiblement modifié : d'après l'équation (I.28), il devient  $(T_{\text{cav}}/(n + n_{\text{th}}(2n + 1)))^{-1}$ .

**Injection** L'injection de photons dans la cavité se fait à l'aide de sources micro-ondes, qui émettent à une pulsation  $\omega$  dans les modes des guides d'ondes descendant dans le cryostat, eux-mêmes faiblement couplés à la cavité. *In fine*, le hamiltonien d'interaction décrivant l'injection est simplement donné par le couplage à un courant classique [13] :

$$H_{inj}^I = - \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}_I(\mathbf{r}), \quad (\text{I.30})$$

$$\mathbf{A}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_c} \boldsymbol{\epsilon} f(r, z) (a e^{-i\omega_{cav} t} + a^\dagger e^{i\omega_{cav} t}), \quad (\text{I.31})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{J}_0^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (\text{I.32})$$

$\mathbf{A}_I$  est le potentiel vecteur du champ dans la cavité, écrit en représentation d'interaction par rapport au hamiltonien libre  $H_{cav}$ , et  $\mathbf{J}_0$  est l'amplitude complexe du courant associé à l'injection. Dans le hamiltonien d'interaction se trouvent donc quatre termes : pour  $\omega$  proche de  $\omega_{cav}$ , deux d'entre eux ont une fréquence élevée de l'ordre de  $2\omega$ , et deux une fréquence proche de zéro. On peut considérer que l'effet sur l'évolution des termes oscillant rapidement est négligeable<sup>8</sup>. Cette approximation conduit à la forme suivante pour l'interaction résonante (en représentation d'interaction) :

$$H_{inj}^I = i\hbar(\gamma a^\dagger - \gamma^* a). \quad (\text{I.33})$$

Le taux  $\gamma$  s'obtient en prenant en compte l'intégrale spatiale et les produits scalaires dans l'équation (I.30). L'opérateur d'évolution du système lors d'une injection résonante est donc donné par :

$$U_{inj} = \exp(-iH_{inj}^I t/\hbar) = e^{\gamma t a^\dagger - \gamma^* t a} \equiv \mathcal{D}(\gamma t), \quad (\text{I.34})$$

où nous avons défini *l'opérateur déplacement*  $\mathcal{D}(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ . Il doit son nom au fait que son action sur un champ cohérent prend la forme très simple d'une translation dans l'espace des phases :

$$\mathcal{D}(\alpha)|\beta\rangle = e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} |\alpha + \beta\rangle. \quad (\text{I.35})$$

En particulier, on a :

$$\mathcal{D}(\gamma t)|0\rangle = |\gamma t\rangle. \quad (\text{I.36})$$

Par conséquent, le couplage de la cavité vide à une source classique aboutit à la création d'un champ cohérent dans la cavité. Pour des durées d'injection  $t_{inj}$  faibles devant le temps de vie de la cavité, l'amplitude du champ croît linéairement<sup>9</sup> :  $\alpha = \gamma t_{inj}$ . Nous pourrions

8. Cette approximation est connue sous le nom d'*approximation de l'onde tournante*, ou RWA pour *rotating wave approximation* en optique quantique.

9. Dans le cas général où le temps de vie fini est pris en compte, l'amplitude injectée s'écrit :  $\alpha(t) = 2\gamma T_{cav}(1 - e^{-t/2T_{cav}})$ .

contrôler le *taux d'injection*  $\gamma$  en variant la phase et la puissance de la source micro-onde. Nous considérerons ici l'approximation  $t \ll T_{\text{cav}}$  toujours vérifiée.

En pratique, la source classique nous est fournie par un synthétiseur de fréquence 12,8 GHz environ (Anritsu3692). À sa sortie est montée une diode PIN qui nous permet d'émettre de façon contrôlée des impulsions micro-onde avec une précision temporelle de l'ordre de 100 ns. Ces impulsions sont ensuite quadruplées en fréquence, puis leur intensité modulée par un atténuateur variable de précision (0–80 dB), avant d'être envoyées dans les guides d'onde du cryostat.

## I.3 Des atomes à deux niveaux

Pour étudier le mode du champ de la cavité décrit dans la section précédente, nos expériences exploitent l'interaction dipolaire électrique entre le champ et les atomes le traversant. Le but de cette section est de décrire les états atomiques utilisés, appelés *états de Rydberg circulaires*. Nous présenterons dans une première partie les caractéristiques de ces états, et comment ils sont préparés dans notre montage expérimental. Nous verrons alors que la description de l'atome peut être réduite à celle, très simple, d'un système à deux niveaux, qui sera donnée dans une deuxième partie. Nous introduirons enfin la notion d'interférométrie de Ramsey, à la base de toutes nos mesures.

### I.3.1 Atomes de Rydberg circulaires

Afin de constituer une bonne «sonde» pour le champ, un atome doit avoir deux caractéristiques essentielles :

- il est nécessaire qu'il existe une transition atomique au voisinage de la fréquence micro-onde du mode considéré,
- le couplage avec le champ doit être fort, pour que l'atome soit sensible au niveau du photon unique ; pour cela, il faut minimiser la relaxation des niveaux considérés, *i.e.* avoir des temps de vie longs, et maximiser autant que possible le dipôle atomique.

Les *états circulaires de Rydberg*, dans lesquels nous excitions des atomes de Rubidium 85 permettent, comme nous allons le voir, de satisfaire ces critères.

#### I.3.1.a Propriétés

On appelle états de Rydberg des états électroniques de grand nombre quantique principal<sup>10</sup>  $n$  [84]. Dans le cas d'un atome alcalin comme le Rubidium, l'électron de valence se retrouve sur une orbite très éloignée du noyau atomique. Ces états présentent donc de fortes valeurs de dipôle électrique. L'état est de plus dit *circulaire* [85] s'il est de moment angulaire maximal : les nombres quantiques orbital et magnétique sont alors maximaux ( $l = |m| = n - 1$ ) et la fonction d'onde de l'électron prend la forme d'un tore, d'où le

---

10. Dans cette section consacrée à la description des niveaux atomiques, la notation  $n$  désignera le nombre quantique principal. Elle est réservée dans toute la suite de ce mémoire au nombre de photons.

nom «circulaire». L'atome correspond bien dans cet état à l'image «planétaire» du modèle de Bohr. De fait, les principales propriétés de ces états circulaires (que nous noterons dorénavant  $|nC\rangle$ ) peuvent être déduites du modèle de Bohr.

**Orbite :** Le rayon de l'orbitale de l'état  $|nC\rangle$  peut être obtenu en écrivant la condition de quantification du nombre de longueur d'ondes de De Broglie sur l'orbite circulaire : il vaut  $r_n = n^2 a_0$ , où  $a_0 = 0,53 \text{ \AA}$  est le rayon de Bohr. Il est donc très grand pour les états de grand  $n$  considérés : pour  $n = 50$  on trouve un diamètre d'environ  $0,25 \mu\text{m}$ .

**Énergie :** Du fait de cette orbite éloignée, le cœur atomique constitué du noyau et des autres électrons se comporte comme un noyau ponctuel de charge  $+1$ . L'énergie de l'état  $|nC\rangle$  est donnée en bonne approximation par<sup>11</sup> :  $E_n = -R_{Rb}/n^2$  où  $R_{Rb}$  est l'unité d'énergie de Rydberg  $R_{Rb} \approx hcR_\infty \approx 13,6 \text{ eV}$ , modifiée pour prendre en compte la masse finie du noyau atomique ( $R_\infty$  est la constante de Rydberg). Par conséquent la fréquence de transition  $|nC\rangle \leftrightarrow |(n-1)C\rangle$  varie comme :

$$\omega_n \approx 2 \frac{R_{Rb}}{\hbar} \frac{1}{n^3}.$$

Cette fréquence est dans le domaine micro-onde pour  $n$  de l'ordre de 20 à 60 : nous utilisons les états  $|50C\rangle \equiv |g\rangle$  et  $|51C\rangle \equiv |e\rangle$ , déjà mentionnés au paragraphe I.2.1.c, pour lesquels la fréquence de transition est au voisinage de celle de la cavité (voir la figure I.5).

**Dipôle :** Le dipôle de la transition  $|nC\rangle \leftrightarrow |(n-1)C\rangle$ , polarisée  $\sigma^+$  peut être calculé : il vaut ([13, p. 254])  $d_n = n^2 \frac{|q|a_0}{\sqrt{2}}$ , où  $q$  est la charge de l'électron, et croît donc, comme le rayon, en  $n^2$ . Pour la transition  $e \leftrightarrow g$  considérée,  $d_{51} \approx 1800|q|a_0$ , soit près de 500 fois la valeur du dipôle de la transition  $D_2$  du rubidium, couramment utilisée dans le refroidissement atomique. Les atomes circulaires de Rydberg se comportent donc comme de véritables antennes, très sensibles au champ, ce qui permet de le sonder au niveau du photon unique.

**Temps de vie :** Enfin, du fait des règles de sélection pour les transitions dipolaires électriques, le seul canal de relaxation de l'état  $|nC\rangle$  est la transition  $|nC\rangle \leftrightarrow |(n-1)C\rangle$ . Par conséquent, le temps de vie de ces niveaux, qui peut également être obtenu par un calcul classique, est très élevé : il évolue comme  $n^{-5}$ . Les temps de vie respectifs de nos niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  sont de 31,5 ms et 28,5 ms, respectivement, ce qui signifie que la relaxation atomique est négligeable durant la traversée du montage par les atomes (qui dure environ 1 ms).

### I.3.1.b Un système à deux niveaux bien contrôlé

Les états circulaires paraissent donc des états idéaux pour sonder le champ piégé. Il faut cependant s'assurer, indépendamment de la relaxation, que nous pouvons nous restreindre

11. Ce résultat ne prend pas en compte les structures fine et hyperfine, ni une correction du type *défaut quantique* liée à la pénétration du cœur par l'électron de valence : elles sont négligeables pour les états circulaires considérés (voir à ce sujet par exemple [86] ou [87]).

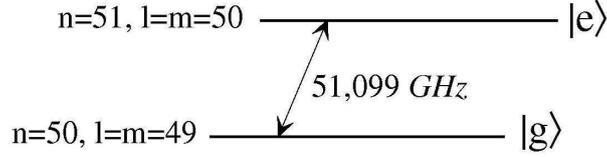


FIGURE I.5 – Niveaux de Rydberg circulaires utilisés dans nos expériences. La transition atomique à 51,099 GHz est dans le domaine micro-onde.

à un système de niveaux circulaires. Ceci est grossièrement faux en champ nul, où l'état  $|nC\rangle$  est dégénéré avec les 2500 états de la «multiplicité» de même nombre quantique  $n$ . Puisqu'expérimentalement les champs électrique et magnétiques ne sont jamais nuls, cela signifie que le moindre perturbation de ces champs peut transférer l'atome de l'état circulaire vers les autres états, dits *elliptiques*, de la multiplicité [88].

Cette dégénérescence peut être levée en appliquant à l'atome un champ électrique statique  $F$  : c'est l'*effet Stark*. La symétrie sphérique étant brisée, le nombre quantique orbital  $l$  n'est plus conservé : il doit être remplacé par le *nombre quantique parabolique*  $n_1$  [84, chap. 6], prenant des valeurs entières entre 0 et  $n - |m| - 1$ , pour  $n$  et  $m$  donnés (ceux-ci demeurent de bons nombres quantiques). La figure I.6 donne l'exemple de la répartition des niveaux d'énergie en champ électrique pour les multiplicités  $n = 50$  et  $n = 51$ .

En présence du champ électrique, il est possible de montrer que les énergies  $E$  des niveaux  $|n, m, n_1\rangle$  admettent un développement d'ordre 2 en fonction du champ électrique  $F$ ,  $E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)}$ , avec

$$E^{(0)} = -\frac{1}{2n^2}, \quad (\text{I.37})$$

$$E^{(1)} = \frac{3}{2}knF, \quad (\text{I.38})$$

$$E^{(2)} = -\frac{1}{16}(17n^2 - 3k^2 - 9m^2 + 19)n^4F^2, \quad (\text{I.39})$$

où  $k = 2n_1 - n + |m| + 1$ , et les énergies  $E$  et les champs  $F$  sont exprimés en unités atomiques ( $E_0 = 27,2 \text{ eV}, F_0 = 5,14 \cdot 10^9 \text{ V/cm}$ ). L'effet Stark *linéaire* (premier ordre) introduit une levée de dégénérescence entre les niveaux circulaires et les deux niveaux de  $m$  immédiatement inférieur ( $m=n-2$ ) de l'ordre de  $100 \text{ MHz/(V/cm)}$ . La transition circulaire-circulaire ( $\Delta m = +1$ ) peut donc être aisément distinguée des transitions vers les niveaux elliptiques pour lesquelles  $\Delta m = 0$ . La dégénérescence entre le niveau circulaire et le niveau  $|n, m = n - 3, n_1 = 1\rangle$  n'est levée qu'au second ordre : l'effet étant beaucoup plus faible, la transition  $\Delta m = -1$  à partir du niveau  $|50C\rangle$  est très proche de la transition circulaire-circulaire (la levée de dégénérescence est d'une centaine de  $\text{kHz/(V/cm)}^2$ ). Cependant, l'éléments de matrice du dipôle de la transition circulaire-circulaire s'avère environ 70 fois plus élevé que celui de cette transition parasite (voir la figure I.6). On peut donc considérer en bonne approximation la transition  $\sigma^+$  entre niveaux circulaires comme une transition fermée.

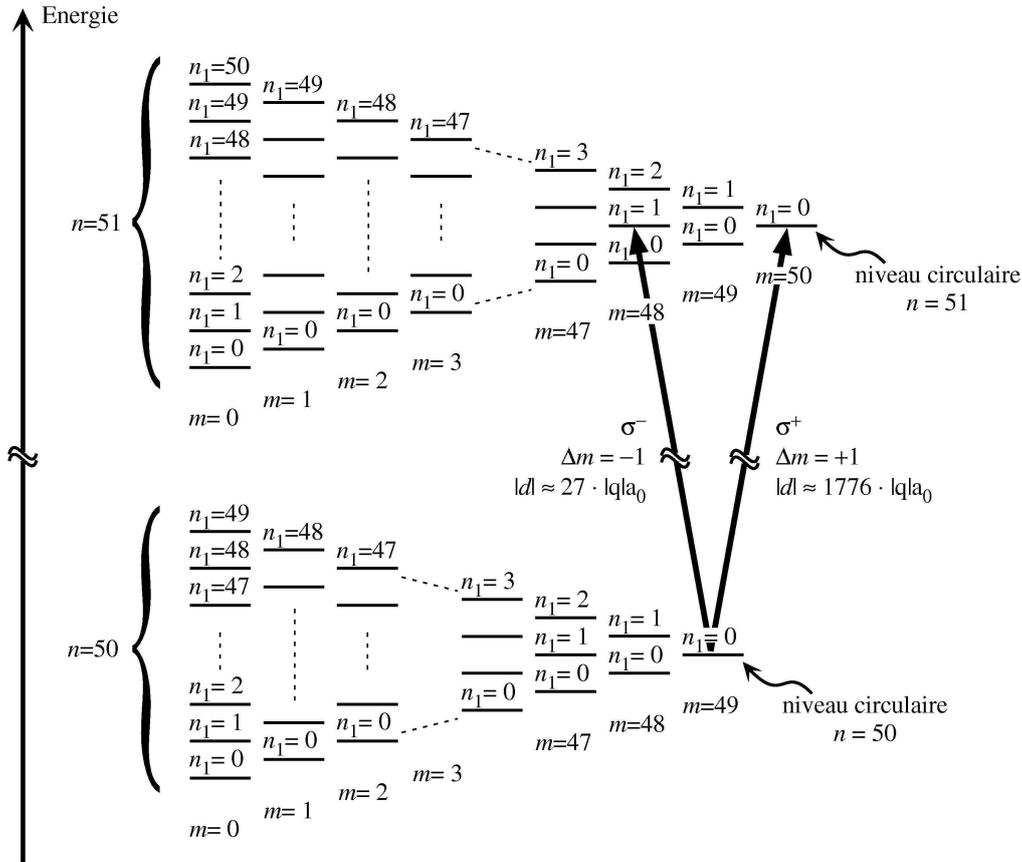


FIGURE I.6 – Diagramme d’énergie des niveaux de Rydberg  $n = 50$  et  $n = 51$  pour un atome hydrogénoïde en présence d’un champ électrique. L’effet Stark quadratique, correction de second ordre, n’est pas représenté. Le dipôle de la transition  $\sigma^+$   $|50C\rangle \rightarrow |51C\rangle$ , de  $1776|q|a_0$ , est 66 fois plus grand que le dipôle de la transition  $\sigma^-$  de même fréquence  $|50C\rangle \rightarrow |n = 51, m = 48, n_1 = 1\rangle$ . Préparé dans un des états circulaires, l’atome se comporte comme un atome à deux niveaux.

**Contraintes expérimentales :** Comme nous venons de le voir, un champ électrique, définissant un axe de quantification, est nécessaire à la préservation des états circulaires constituant notre système à deux niveaux. Il faut donc qu’au long du trajet des atomes à travers le montage nous appliquions un champ électrique bien défini, dont les variations soient lentes à l’échelle des énergies entre niveaux voisins, afin d’éviter le transfert vers les états elliptiques.

Le champ doit également être aussi homogène que possible : en effet la fréquence de la transition  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  est insensible à l’effet Stark au premier ordre ( $E^{(1)} = 0$  pour les niveaux circulaires), mais le terme quadratique conduit à une modification de la fréquence de transition de  $-255\text{kHz}/(\text{V}/\text{cm})^2$ . Toute inhomogénéité de champ sur la largeur du jet atomique conduira donc à des dispersions d’énergie et (*cf.* section I.3.3) à des déphasages des niveaux nuisant à notre mesure. Nous appliquons donc un potentiel électrique bien

défini à toutes les pièces du montage, pour fixer ce *champ électrique directeur*<sup>12</sup>. Cette contrainte impose notamment la géométrie ouverte de nos cavités, comme mentionné à la section I.2.1. L'effet Stark quadratique sur la transition à l'avantage de nous permettre d'accorder la transition atomique à l'échelle de la centaine de kHz, soit l'ordre de grandeur du couplage atome – champ. Nous pouvons donc à loisir placer l'atome à ou hors résonance avec le champ par l'application d'un potentiel à l'un des miroirs de la cavité<sup>13</sup>.

**Choix de  $n$  :** Finalement, le choix des atomes circulaires avec  $n = 50$  et  $n = 51$  s'explique par un compromis : nous avons vu qu'augmenter  $n$  permettait d'augmenter le temps de vie et le couplage au champ. Cependant, la fréquence de la transition diminue, ce qui signifie que des températures de plus en plus basses sont requises si l'on veut que le champ thermique soit négligeable. Par ailleurs un couplage très élevé peut conduire à une trop grande sensibilité aux inhomogénéités de champ résiduelles, et à la détérioration des signaux expérimentaux.

### I.3.1.c Préparation

**Circularisation des atomes de rubidium** Expliquons maintenant comment nous parvenons à préparer des atomes de Rubidium dans les états circulaires. La procédure de «circularisation» mise en place dans notre expérience, adaptée de [89], permet d'exciter l'atome dans un niveau d'énergie élevé puis de lui transférer de nombreux quanta de moment angulaires menant à l'état circulaire. Elle se déroule intégralement dans une boîte en niobium supraconducteur (que nous appelons *boîte à circulariser*), où l'atome subit des transitions optiques et micro-ondes en présence de champs électriques lentement variables et d'un champ magnétique statique de 18 G<sup>14</sup>. La mise en œuvre de cette procédure est complexe, et nous n'en donnons ici que les grandes lignes. Elle est décrite précisément dans la thèse de Paulo Nussenzeig [87], et l'on trouvera également des détails expérimentaux dans la thèse de Tristan Meunier [90]. Elle est schématisée à la figure I.7.

---

12. On trouvera plus de détails sur le réglage de ces potentiels dans la thèse de Sébastien Gleyzes [70].

13. Cette discussion n'a pas mentionné la sensibilité au champ magnétique (effet Zeeman) : pour la transition considérée  $\Delta m = +1$ , la sensibilité est donc d'un magnéton de Bohr, soit 1,4 MHz/G. Pour les mêmes raisons que celles mentionnées pour le champ électrique, le champ magnétique doit donc être bien contrôlé sur le trajet des atomes. Plusieurs précautions sont donc prises afin d'annuler le champ magnétique et de minimiser les gradients résiduels au cœur de l'expérience (emploi de bobines externes pour compenser le champ terrestre et nombreux blindages magnétiques, voir [70]).

14. L'emploi d'un supraconducteur vise à confiner le champ magnétique pour éviter de perturber les atomes circulaires préparés par effet Zeeman.

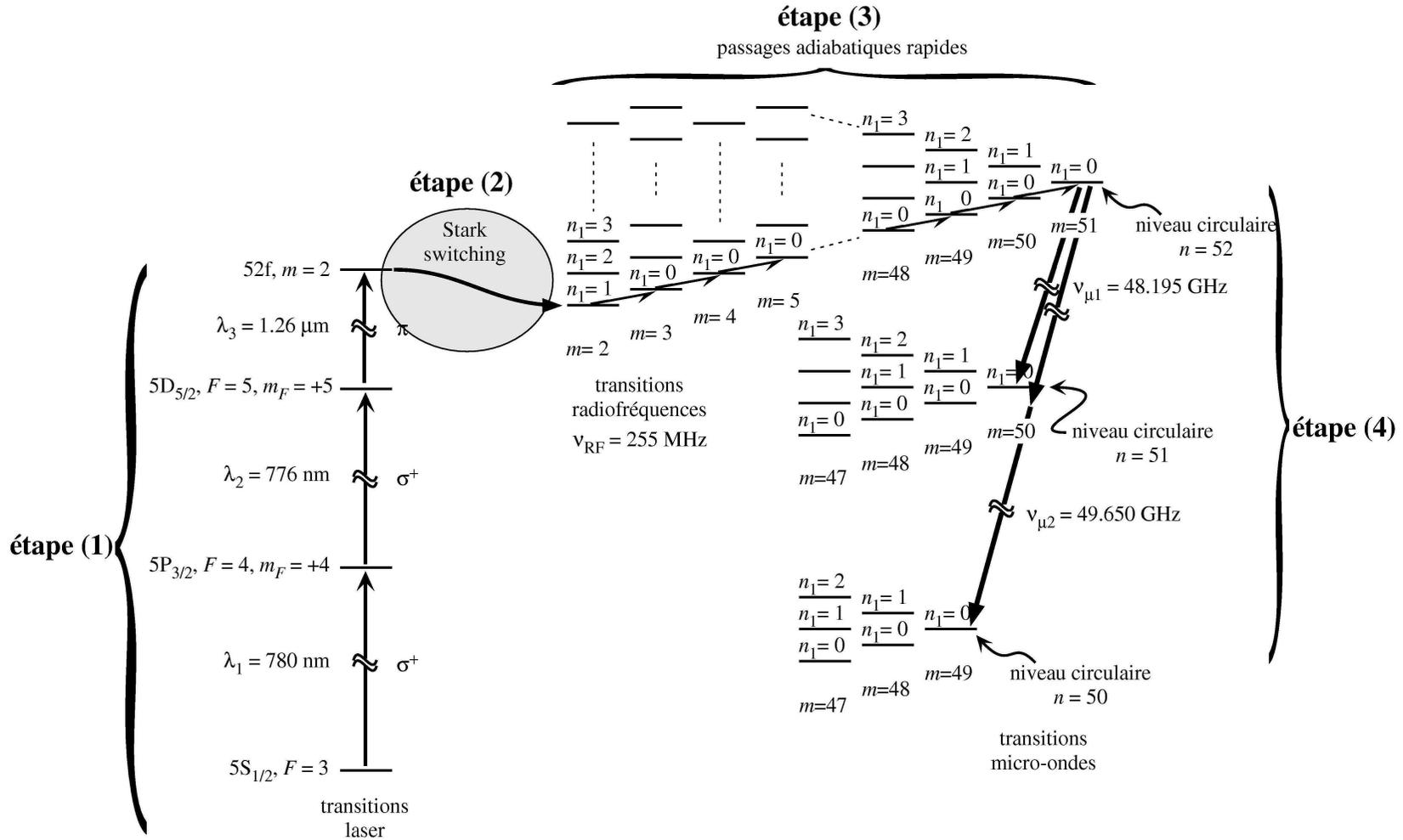


FIGURE I.7 – Préparation des atomes dans les niveaux de Rydberg circulaires.

La première étape de la circularisation s'effectue en champ électrique nul et a pour point de départ le niveau hyperfin de l'état fondamental du rubidium  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$ . À l'aide de trois faisceaux de longueurs d'ondes 780 nm, 776 nm, et 1,26  $\mu\text{m}$  issus de diodes laser, les atomes sont d'abord excités dans l'état de Rydberg  $|52f, m = 2\rangle$ <sup>15</sup>. Les deux premiers faisceaux de polarisation  $\sigma^+$  réalisent un pompage optique des atomes dans les transitions  $|5S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$  puis  $|5P_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle \rightarrow |5D_{5/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$ ; le dernier faisceau de polarisation  $\pi$  conduit à l'état de Rydberg  $|52f, m = 2\rangle$  (étape 1). Dans cette étape le laser à 780 nm est pulsé pour une durée typique de 2  $\mu\text{s}$ , qui constitue l'origine des temps pour la préparation et les étapes ultérieures du parcours des atomes.

Il est alors nécessaire, pour distinguer les états de différents moments angulaires de la multiplicité de Rydberg, de continuer la préparation en champ électrique non-nul : un champ électrique est établi adiabatiquement, et l'état  $|52f, m = 2\rangle$  se branche sur l'état elliptique  $|n = 52, m = 2, n_1 = 1\rangle$ . C'est l'étape 2, appelée *Stark switching*.

C'est à ce stade que le champ magnétique joue un rôle crucial : pour arriver dans l'état circulaire, l'atome doit absorber 49 photons de radiofréquence en effectuant les transitions  $\sigma^+$  schématisées sur la figure I.7. Le champ magnétique permet de lever la dégénérescence avec les transitions  $\sigma^-$  : seules les transitions  $\sigma^+$  entre niveaux de  $m$  voisins sont alors résonantes à 255 MHz pour  $m \geq 3$ . Le champ électrique est alors varié adiabatiquement autour d'une valeur (2,4 V/cm) qui amène la transition  $|n = 52, m = 2, n_1 = 1\rangle \leftrightarrow |n = 52, m = 3, n_1 = 1\rangle$  à résonance avec les transitions suivantes, ce qui permet d'effectuer un anticroisement géant des niveaux de l'atome habillé par la radiofréquence. Ce *passage adiabatique rapide* conduit de façon déterministe à l'état circulaire  $|52C\rangle$  (étape 3).

L'état préparé n'est pas complètement pur : c'est pourquoi l'atome est finalement sélectivement amené dans les états circulaires de  $n$  inférieur à l'aide d'impulsion micro-ondes dans une étape appelée *purification* (étape 4). Celle-ci s'effectue dans un champ électrique plus grand (5 V/cm environ), afin que les transitions soient bien résolues, et conduit par une transition à un photon de fréquence 48,2 GHz ou à deux photons de fréquence 49,6 GHz, aux états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  respectivement. On obtient finalement des états circulaires très purs : les expériences présentées dans ce mémoire partent d'un état  $|g\rangle$  d'une pureté de 95% environ.

**Contrôle de la position et de la vitesse** Dans nos expériences, nous souhaitons pouvoir appliquer à un atome traversant le montage différents champs (dans les zones de Ramsey, le détecteur...) pour des durées et à des instants bien précis. La connaissance à chaque instant de la position exacte des atomes dans le montage est donc indispensable.

La position transverse des atomes dépend des caractéristiques du faisceau atomique. Les atomes sont issus d'un «four», chambre à vide contenant du rubidium chauffé à 225 °C dont la vapeur s'échappe par un trou de diamètre 0,7 mm. La partie divergente de ce faisceau atomique est coupée par une succession de diaphragmes refroidis à la température de l'azote liquide, puis un diaphragme final de diamètre 0,7 mm à l'entrée de la boîte à

15. Les effets de structure fine et hyperfine sont négligeables dans cet état de haute énergie, justifiant l'abandon d'une notation spectroscopique plus précise.

circulariser définit un «jet atomique». L'axe de ce jet est aligné sur le cœur de l'expérience afin que les atomes passent par le centre des modes des cavités successives (ce qui maximise le couplage aux champs). Ce diamètre réduit nous permet de minimiser les dispersions de couplage au champ entre atomes successifs (rappelons-nous que la taille du lobe central du mode de la cavité est  $\lambda/2 \approx 3$  mm).

La position longitudinale des atomes doit être connue avec précision pour pouvoir manipuler l'atome sur son trajet. La préparation des atomes étant pulsée à l'aide du laser à 780 nm, il nous suffit que les atomes aient une vitesse connue pour connaître leur position à chaque instant dans le montage. Or en sortie du four, la distribution des vitesses atomiques est maxwellienne, et s'étend typiquement de 200 m/s à 600 m/s. On doit donc sélectionner une classe de vitesse bien plus étroite. Pour ce faire, on utilise la séparation entre les deux niveaux hyperfins du rubidium  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$  et  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$ , d'environ 3 GHz. Seuls les atomes dans l'état  $F = 3$ , point de départ de la circularisation, seront excités. On réalise donc avant la préparation des états de Rydberg un pompage optique sélectif en vitesse [91] à l'aide de deux lasers à 780 nm, qui exploite l'effet Doppler pour n'exciter dans le niveau  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$  que les atomes d'une certaine classe de vitesse. La figure I.8 représente les niveaux électroniques mis en jeu pour cette sélection de vitesse.

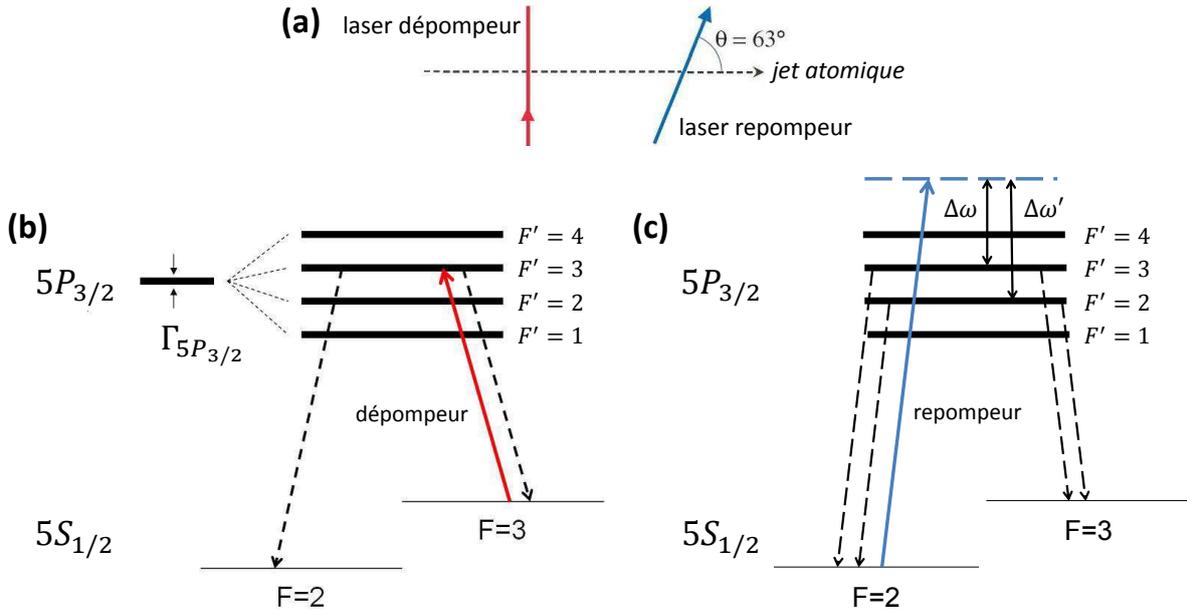


FIGURE I.8 – Sélection de vitesse. (a) Dispositif utilisé pour la sélection en vitesse des atomes. (b) Un premier laser dépompeur perpendiculaire au jet atomique amène tous les atomes dans le niveau  $F = 2$  via  $F' = 3$ . (c) Un second laser repompeur faisant un angle  $\theta$  avec le jet ramène dans  $F = 3$  via  $F' = 3$  les atomes de vitesse  $v = \Delta\omega\lambda_{\text{rep}}/2\pi \cos\theta$  souhaitée. Une seconde classe de vitesse est également sélectionnée via  $F' = 2$  :  $v' = \Delta\omega'\lambda_{\text{rep}}/2\pi \cos\theta$ .

Le premier laser, dit *dépompeur*, est accordé sur la transition entre les niveaux hy-

perfins  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$  et  $|5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ . Appliqué orthogonalement à l'axe du jet, il transfère donc indifféremment toutes les classes de vitesses dans le niveau  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ . Le deuxième faisceau, dit *repompeur*, est lui légèrement désaccordé vis-à-vis de la transition  $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \leftrightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ . Ce faisceau faisant un angle de  $63^\circ$  environ avec l'axe du jet, seuls les atomes pour lesquels l'effet Doppler compense ce désaccord  $\Delta\omega \approx 2\pi \cdot 145$  MHz sont effectivement excités. Finalement ne sont pompés dans le niveau de départ  $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$  que des atomes de vitesse 250 m/s environ.

La largeur de la classe de vitesses sélectionnée est de quelques dizaines de mètres par seconde (voir la figure I.9). La traversée de l'expérience durant 1 ms en moyenne, on obtiendrait dans ces conditions des dispersions longitudinales centimétriques au niveau des détecteurs. Cette largeur peut être réduite encore davantage par une *sélection en temps de vol* : si le dépompeur reste allumé en continu, le repompeur est pulsé, pour une durée de  $4 \mu\text{s}$ . Cette impulsion de repompeur est émise environ  $1400 \mu\text{s}$  avant l'impulsion laser à 780 nm de l'excitation vers les états circulaires, de sorte que seuls les atomes ayant la bonne vitesse pour subir les deux impulsions soient finalement excités. Cette sélection en temps de vol a par ailleurs l'avantage d'éliminer une classe parasite de vitesse plus élevée pour laquelle l'effet Doppler compense le désaccord avec la transition vers  $|5P_{3/2}, F' = 2\rangle$  (voir la figure I.8). Ce sont alors la durée des impulsions de la sélection en temps de vol qui fixent la largeur de la distribution de vitesses. On parvient ainsi à sélectionner des atomes de vitesse  $(250 \pm 2)$  m/s. L'extension de l'échantillon atomique au niveau des détecteurs est alors de 4 mm environ ; quelle que soit la position de l'atome dans l'échantillon, il pourra donc être détecté, le diamètre du trou du détecteur étant de 6 mm (voir plus bas le paragraphe I.3.1.d).

*Taux de répétition* : Le champ que nous cherchons à mesurer à l'aide des atomes étant sujet à la relaxation, il est avantageux d'envoyer les atomes dans la cavité le plus fréquemment possible. Les facteurs limitant le taux de répétition proviennent essentiellement de la procédure de circularisation : les variations de champ électriques qui accompagnent cette préparation s'effectuent en un temps de  $70 \mu\text{s}$ . Par ailleurs l'impulsion de purification n'est pas bien confinée dans la boîte à circulariser mais remplit une grande partie du montage de photons micro-onde. À la sortie de la boîte à circulariser les atomes traversent une zone de gradients de champ électrique, dans laquelle leur état pourrait être modifié par ces photons. La période de répétition est donc optimisée pour éviter ce phénomène, et la préparation est finalement répétée toutes les  $83 \mu\text{s}$ <sup>16</sup>.

**Nombre d'atomes par échantillon** L'excitation des atomes vers les états circulaires de Rydberg est en fait un processus poissonien (c'est le cas de chaque excitation laser dans la préparation). À l'issue de la circularisation on obtient donc en fait un «échantillon» atomique qui contient un nombre  $n_a$  aléatoire d'atomes obéissant à une statistique de

---

16. Des «croisements» entre les impulsions du repompeur et du laser à 780 nm d'atomes successifs peuvent conduire à l'excitation d'atomes parasites, ou «fantômes», pouvant apparaître dans les signaux de détection. Ces effets doivent également être pris en compte dans le choix de la période de préparation

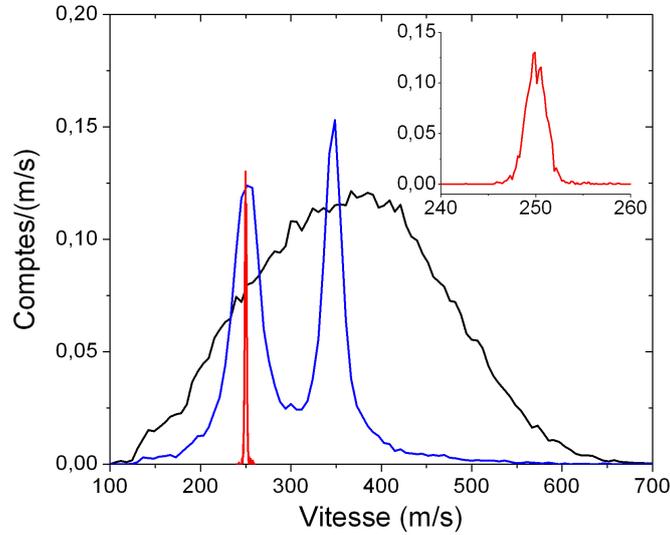


FIGURE I.9 – Distribution de vitesse des atomes : en noir, sans sélection de vitesse ; en bleu, avec le laser repompeur allumé en continu ; en rouge (et dans l’encart), avec le laser repompeur allumé  $4 \mu\text{s}$ .

Poisson :

$$P_a(n_a) = e^{-\bar{n}_a} \frac{\bar{n}_a^{n_a}}{n_a!}$$

de moyenne  $\bar{n}_a$  et d’écart-type  $\sqrt{\bar{n}_a}$ . Ce nombre d’atomes peut être ajusté en variant la durée des impulsions laser du repompeur et du laser à 780 nm, dont le choix résulte donc d’un compromis entre le nombre d’atomes et la dispersion des vitesses. En pratique il est préférable d’avoir un nombre d’atomes réduit et avec peu de fluctuations pour pouvoir décrire correctement leur interaction avec le champ. Nous verrons que pour les expériences présentées dans ce mémoire nous souhaitons éviter les événements à plus de deux atomes. Ceci a conduit au choix de valeurs de  $\bar{n}_a$  de l’ordre de 1, pour une dispersion de vitesse de 4 m/s environ (cette valeur est obtenue pour les durées d’impulsion de  $4 \mu\text{s}$  pour le repompeur et le premier laser d’excitation).

### I.3.1.d Détection

Expliquons pour conclure cette section comment nous pouvons mesurer l’état de l’atome après sa traversée de l’expérience. Cette détection se fait par ionisation : les atomes de Rydberg étant fortement excités, il suffit d’un champ de l’ordre de 100 V/cm pour arracher l’électron de valence, pour  $n \approx 50$ . Le champ d’ionisation dépend de l’énergie de l’électron [84], ce qui permet de distinguer les multiplicités de  $n$  différents. Si l’on s’assure de manipuler des états circulaires suffisamment purs, la valeur du champ indique donc l’état,  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ , détecté.

Le montage expérimental comporte deux détecteurs, dont la conception est décrite en détail dans la thèse d’Alexia Auffèves-Garnier [92]. Nous nous contenterons de donner le principe du détecteur utilisé dans les expériences présentées ici, schématisé sur la figure I.10.a. Après qu’ils ont interagi avec la cavité, les atomes passent entre une cathode plate et une anode percée d’un trou de 6 mm. Le potentiel de l’anode étant fixé, on applique lors de la traversée d’un échantillon atomique une rampe temporelle de tension à l’anode. Le champ électrique variable créé par cette *rampe de détection* arrache alors l’électron de l’atome à un instant de la rampe qui dépend de l’état atomique. L’électron est ensuite collecté par un ensemble de lentilles électrostatiques puis amplifié à l’aide d’un multiplicateur d’électrons. L’instant auquel nous recevons le signal de détection nous indique donc le niveau d’énergie de l’atome. La figure I.10.b montre la forme de la rampe de détection ainsi que les signaux d’ionisation, bien séparés, associés aux niveaux  $|50C\rangle$ ,  $|51C\rangle$ , et  $|52C\rangle$ . En pratique nous définissons des *fenêtres temporelles* (également symbolisées figure I.10.b) le long de la rampe de détection : la réception d’un signal électronique dans l’une de ces fenêtres correspond à la détection de l’état circulaire associé.

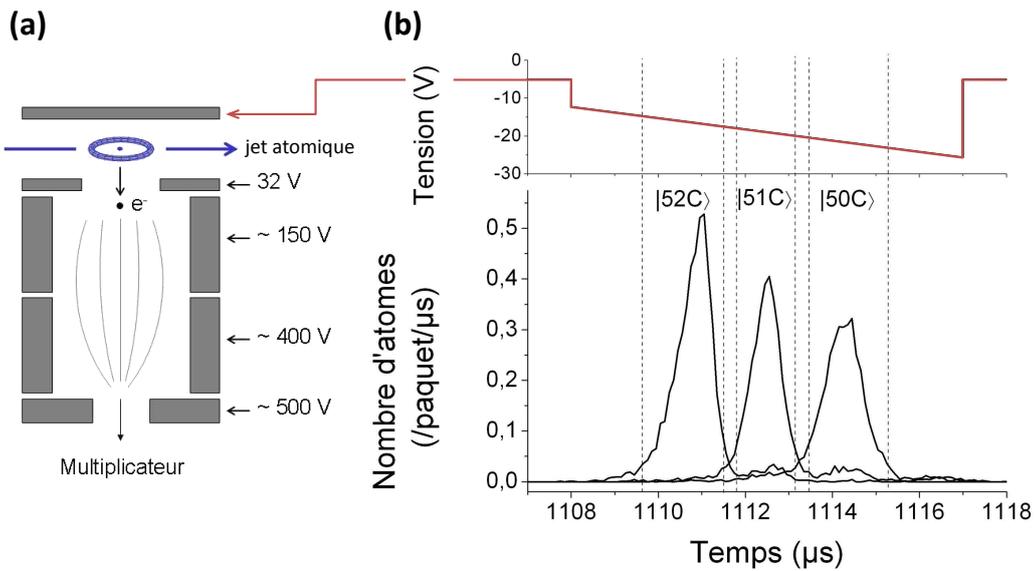


FIGURE I.10 – Détection des atomes. **(a)** Schéma de principe du détecteur. Un potentiel électrique variable appliqué sur une des électrodes du détecteur permet l’ionisation des atomes présents au dessus du trou de l’anode. L’électron arraché est focalisé par des lentilles électrostatiques vers un multiplicateur d’électrons. **(b)** Signal temporel de détection enregistré pour une rampe de potentiel donnée et moyenné sur  $\approx 5000$  échantillons. Les trois niveaux circulaires  $|52C\rangle$ ,  $|51C\rangle$ , et  $|50C\rangle$  sont bien distinguables *via* la définition de trois fenêtres de détection.

*Élimination des atomes elliptiques résiduels* : Nous avons déjà indiqué que la détection par ionisation permet la mesure des états circulaires, *si ceux-ci sont suffisamment purs*.

En effet les états elliptiques ont sensiblement le même champ d'ionisation que les états circulaires pour une multiplicité donnée. L'étape de *purification* dans la préparation des atomes a précisément pour but d'obtenir des atomes circulaires de bonne pureté : elle transfère sélectivement les atomes dans l'état  $|52C\rangle$  aux états  $|51C\rangle$  ou  $|50C\rangle$ . L'échantillon atomique peut, après cette étape, encore contenir des atomes dans des états elliptiques de la multiplicité  $n = 52$ . Ceux-ci pourraient lors de la traversée de l'expérience être transférés vers les multiplicités inférieures, où la détection ne permettrait pas de les distinguer des états circulaires, alors que leur évolution est différente. Il est donc nécessaire de les éliminer : à cette fin deux électrodes (dites électrodes «balais») sont placées à la sortie de la boîte à circulariser, grâce auxquelles on applique un champ électrique ionisant la multiplicité  $n = 52$ . Les échantillons atomiques ne contiennent alors plus que des atomes circulaires.

### I.3.2 Modèle de l'atome à deux niveaux

Nous avons montré comment il était possible expérimentalement d'isoler un système fermé de deux niveaux atomiques très sensibles au champ, reliés par une transition micro-onde. Formellement, nous considérerons donc que la cavité interagit avec une série d'*atomes à deux niveaux* idéaux. Le but de cette section est de donner le formalisme associé à ce système très simple en mécanique quantique. Il nous permettra de décrire la manipulation de l'état interne de l'atome.

#### I.3.2.a Espace des états – sphère de Bloch

L'espace de Hilbert considéré a pour base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ . Un état pur s'écrit dans cette base :

$$|\Psi_{\text{at}}\rangle = c_e|e\rangle + c_g|g\rangle,$$

avec  $|c_e|^2 + |c_g|^2 = 1$ . Sans perte de généralité l'on peut prendre  $c_e$  réel et paramétrer l'état par deux angles  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\phi \in [0, 2\pi]$ , sous la forme

$$|\Psi_{\text{at}}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|e\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|g\rangle. \quad (\text{I.40})$$

Notre système à deux niveaux est formellement analogue à un spin  $\frac{1}{2}$ . On peut donc définir dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$  les opérateurs de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.41})$$

qui constituent avec l'identité  $\mathbb{1}_{\text{at}}$  une base des observables du système. Le hamiltonien s'écrit en particulier :

$$H_{\text{at}} = \frac{h\nu_{\text{at}}}{2}\sigma_z, \quad (\text{I.42})$$

où  $\nu_{\text{at}} = \omega_{\text{at}}/2\pi$  est la fréquence de la transition atomique, et où nous avons choisi pour origine des énergies la moyenne des énergies des niveaux  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ . On peut également

construire par analogie avec le spin  $\frac{1}{2}$  le *pseudospin atomique*  $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ , où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le vecteur de composantes cartésiennes  $\sigma_x, \sigma_y$ , et  $\sigma_z$ . L'état de l'atome est alors défini sans ambiguïté indifféremment par la donnée des angles  $\theta$  et  $\phi$  de l'équation (I.40) ou par celle des valeurs moyennes des composantes du pseudospin (on omettra dorénavant le préfacteur  $\hbar/2$ , artificiel ici) :

$$\langle S_x \rangle = \sin \theta \cos \phi, \quad \langle S_y \rangle = \sin \theta \sin \phi, \quad \langle S_z \rangle = \cos \theta. \quad (\text{I.43})$$

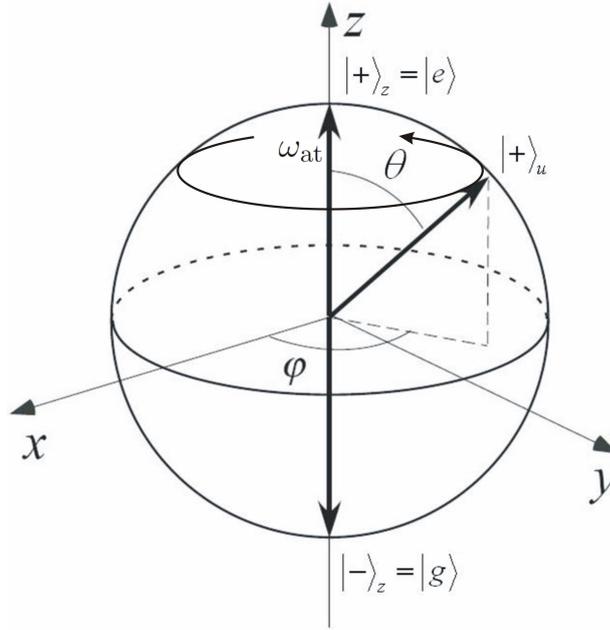


FIGURE I.11 – Représentation de l'état d'un système à deux niveaux sur la sphère de Bloch et de son évolution libre.

Ceci conduit à une représentation géométrique simple de l'espace des états : la sphère de Bloch [93] (voir la figure I.11). Chaque état pur  $|\Psi_{\text{at}}\rangle$  est représenté par un vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  de coordonnées sphériques  $\theta$  et  $\phi$ . Les valeurs moyennes du spin dans cet état sont données par les projections du vecteur  $\mathbf{u}$ . L'état associé est donc noté  $|+\mathbf{u}\rangle$  par analogie aux états propres de spin  $|\pm_{x,y,z}\rangle$ . L'état  $|-\mathbf{u}\rangle = |+\mathbf{-u}\rangle$  représenté par le vecteur opposé est orthogonal à  $|+\mathbf{u}\rangle$  et forme avec lui une base de l'espace des états. Nous aurons besoin de la suite de la probabilité de mesure dans l'état  $|+\mathbf{v}\rangle$  pour un état  $|\Psi_{\text{at}}\rangle$  quelconque. Elle est liée à la projection du spin selon  $\mathbf{v}$  par :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{v}} &= |\langle \Psi | +_{\mathbf{v}} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle S_{\mathbf{v}} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

L'évolution libre sous l'effet du hamiltonien (I.42) prend une forme simple :

$$|\Psi_{\text{at}}(t)\rangle = e^{-i\omega_{\text{at}}t/2} \cos \frac{\theta}{2} |e\rangle + e^{i(\phi+\omega_{\text{at}}t)} \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle, \quad (\text{I.45})$$

ce qui s'interprète comme la précession de Larmor du pseudospin atomique : le vecteur  $\mathbf{u}(t)$  effectue une rotation à la fréquence  $\omega_{\text{at}}$  autour de l'axe  $Oz$ .

Nous pouvons finalement définir les opérateurs de création et de destruction d'excitation atomique,  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  respectivement, comme

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \sigma_- = |g\rangle\langle e|. \quad (\text{I.46})$$

L'opérateur dipôle électrique  $\mathbf{D} = q\mathbf{R}$ , hermitien, est non-diagonal dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , ces états étant de parité opposée, et peut donc s'écrire

$$\mathbf{D} = d(\boldsymbol{\epsilon}_a\sigma_- + \boldsymbol{\epsilon}_a^*\sigma_+), \quad (\text{I.47})$$

où l'on a introduit le paramètre réel  $d$  et le vecteur complexe unitaire  $\boldsymbol{\epsilon}_a$  *via*

$$q\langle g|\mathbf{R}|e\rangle = d\boldsymbol{\epsilon}_a. \quad (\text{I.48})$$

### I.3.2.b Contrôle de l'état interne

Dans les expériences que nous présentons ici, l'étude du champ est permise par son interaction avec les atomes préparés dans des superpositions des états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  bien contrôlés. L'état interne de l'atome, initialement préparé dans  $|g\rangle$ , est modifié avant (et après) la traversée de la cavité à l'aide d'un champ électrique classique. Cette interaction est décrite par le hamiltonien dipolaire

$$H_r = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_r(t), \quad (\text{I.49})$$

faisant intervenir le dipôle atomique et le champ électrique classique

$$\mathbf{E}_r(t) = i\mathcal{E}_r (\boldsymbol{\epsilon}_r e^{-i(\omega_r t + \varphi)} - \boldsymbol{\epsilon}_r^* e^{i(\omega_r t + \varphi)}). \quad (\text{I.50})$$

Le passage pour l'atome dans le référentiel tournant à  $\omega_r$ <sup>17</sup> permet de simplifier l'interaction : le hamiltonien dans ce référentiel fait intervenir des termes constants et des termes oscillant rapidement à une pulsation de l'ordre de  $2\omega_r$ . Nous faisons alors une nouvelle fois (*cf.* paragraphe I.2.2.b), une approximation *séculaire*, ou de l'onde tournante, et négligeons ces termes pour obtenir le hamiltonien (dans le référentiel tournant) :

$$\tilde{H} = \frac{\hbar\Delta_r}{2}\sigma_z - i\frac{\hbar\Omega_r}{2} [e^{-i\varphi}\sigma_+ - e^{i\varphi}\sigma_-], \quad (\text{I.51})$$

---

17. Le vecteur d'état dans le référentiel tournant est défini par  $|\tilde{\Psi}\rangle = \exp(i\omega_r t\sigma_z/2)|\psi\rangle$ , avec  $|\Psi\rangle$  le vecteur d'état dans le référentiel initial.

où nous avons noté  $\Delta_r = \omega_{\text{at}} - \omega_r$  le désaccord atome/champ.  $\Omega_r$  est la pulsation de Rabi classique, donnée par :

$$\Omega_r = \frac{2d}{\hbar} \mathcal{E}_r \epsilon_a^* \cdot \epsilon_r. \quad (\text{I.52})$$

$\Omega_r$  peut être supposée réelle sans perte de généralité. On peut alors mettre  $\tilde{H}$  sous la forme :

$$\tilde{H} = \frac{\hbar \Omega'_r}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (\text{I.53})$$

avec

$$\Omega'_r = \sqrt{\Omega_r^2 + \Delta_r^2}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\Omega'_r} [\Delta_r \mathbf{e}_z + \Omega_r (-\sin \varphi_0 \mathbf{e}_x + \cos \varphi_0 \mathbf{e}_y)]. \quad (\text{I.54})$$

La forme (I.53) est similaire à celle du hamiltonien libre  $H_{\text{at}} = \frac{\hbar \nu_{\text{at}}}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_z$ . L'évolution dans le référentiel tournant est donc une *rotation* autour de l'axe engendré par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$ , de pulsation  $\Omega'_r$ . Pour des désaccords élevés  $\mathbf{n} \approx \mathbf{e}_z$  et  $\Omega'_r \approx \Delta$  : on retrouve la précession de Larmor dans le référentiel tournant, et il n'y a pas d'interaction. Pour  $\Delta = 0$ ,  $\mathbf{n}$  est dans le plan équatorial de la sphère de Bloch ; il est directement orthogonal à la direction repérée par la phase du champ  $\varphi$ . L'atome effectue alors une rotation autour de cet axe à la pulsation de Rabi classique : ce sont les *oscillations de Rabi classiques*. Un exemple d'une telle évolution est donné à la figure I.12, dans le cas particulier où  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$  ( $\varphi = 0$ ) et où l'état de départ est  $|e\rangle$ .

L'évolution des états propres atomiques à résonance se résume donc à :

$$|e\rangle \rightarrow \cos \frac{\Omega_r t}{2} |e\rangle + \sin \frac{\Omega_r t}{2} e^{i\varphi} |g\rangle, \quad |g\rangle \rightarrow -e^{-i\varphi} \sin \frac{\Omega_r t}{2} |e\rangle + \cos \frac{\Omega_r t}{2} e^{i\varphi} |g\rangle. \quad (\text{I.55})$$

En particulier, pour le temps  $t_{\pi/2}$  tel que :

$$\Omega_r t_{\pi/2} = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{I.56})$$

les états circulaires sont transformés en des superpositions à poids égaux :

$$|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + e^{i\varphi} |g\rangle), \quad |g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (-e^{-i\varphi} |e\rangle + |g\rangle). \quad (\text{I.57})$$

Cette manipulation, que nous appellerons dans la suite *impulsion*  $\pi/2$ , est l'élément de base des expériences que nous voulons réaliser.

**Mise en œuvre : les zones de Ramsey** L'atome peut être soumis à deux impulsions de champ classique, avant et après la cavité, dans deux cavités appelées *zones de Ramsey*. Le champ dans ces cavités doit être bien confiné, afin de n'interagir qu'avec un atome à la fois. Il suffit alors de quelques photons pour modifier l'état atomique, et il est cependant

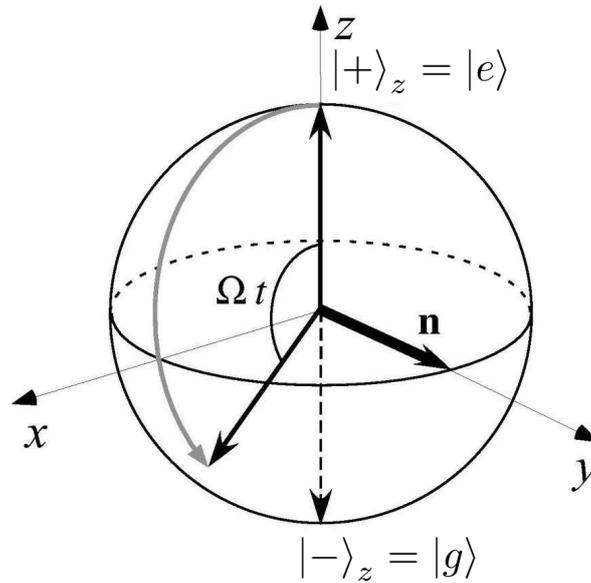


FIGURE I.12 – Manipulation de l'état interne de l'atome. Un champ électrique oscillant résonant avec l'atome à deux niveaux induit une oscillation de Rabi classique de pulsation  $\Omega_r$  : un atome initialement dans l'état  $|e\rangle$  passe continûment des états  $|e\rangle$  à  $|g\rangle$  via la superposition à poids égaux  $1/\sqrt{2}(|e\rangle + e^{i\varphi}|g\rangle)$ . La phase  $\varphi$  (prise ici égale à 0) du champ fixe l'axe de rotation à résonance.

nécessaire de pouvoir considérer le champ comme classique. D'autre part un fort facteur de qualité risque d'augmenter l'émission spontanée des atomes dans l'état excité par effet Purcell [94]. Un comportement classique est en fait possible aux faibles nombres de photons, dans la mesure où l'on impose au champ une forte dissipation [95]. La réalisation des cavités Ramsey impose donc d'avoir un mode bien localisé, mais pour lequel le facteur de qualité est faible. Cette double contrainte est satisfaite par la fabrication d'une cavité mixte [70], représentée à la figure I.13. Une première cavité de bon facteur de qualité ( $Q \approx 1000$ ), constituée d'un miroir en cuivre et d'une lame dorée (une lame de verre de silice sur laquelle on a déposé  $17,5 \mu\text{m}$  d'or), définit un mode bien confiné spatialement, qui permet de n'agir que sur un échantillon atomique à la fois. Ce mode fuit ensuite dans la partie inférieure de la zone de Ramsey, où passent les atomes. Dans cette deuxième cavité, constituée de la lame dorée et d'un miroir en graphite peu réfléchissant, le facteur de qualité est de l'ordre de 100, ce qui, pour les paramètres de nos expériences [70] permet de considérer le champ comme classique.

Les facteurs de qualité requis n'étant pas du même ordre que ceux de la cavité principale, l'injection de micro-onde peut se faire par un trou de couplage dans le miroir en cuivre. De la même façon que pour la cavité supraconductrice, les injections issues d'une source classique sont contrôlées par l'emploi d'une diode PIN, quadruplées en fréquence, atténuées, puis envoyées dans le cryostat.

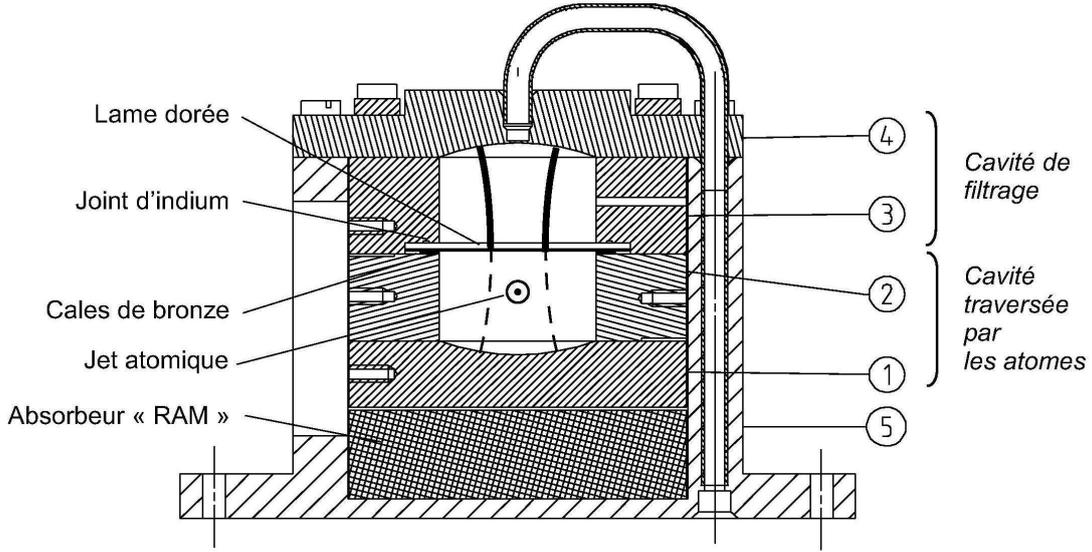


FIGURE I.13 – Schéma des zones de Ramsey. Le champ micro-onde est d’abord mis en forme dans une cavité de filtrage. La lame dorée transmet partiellement la micro-onde qui fuit dans la cavité traversée par les atomes. Une partie du champ est réfléchi dans le mode par le miroir en araldite recouvert de graphite (1), le reste étant finalement absorbé par un absorbeur micro-onde.

### I.3.3 Interférométrie de Ramsey

Nous pouvons maintenant montrer comment les deux zones de Ramsey de part et d’autre de la cavité peuvent être utilisées pour former un *interféromètre de Ramsey*. Considérons un atome initialement dans l’état  $|e\rangle$ . L’application d’une impulsion  $\pi/2$  résonante dans la première zone de Ramsey le place dans l’état

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle). \quad (\text{I.58})$$

où nous avons pris par simplicité  $\varphi = 0$  (cette impulsion est notre référence de phase).

Si nous appliquons à cet état  $|\psi_0\rangle$  une deuxième impulsion résonante  $\pi/2$  de phase  $\varphi$  dans la seconde zone de Ramsey, l’état atomique devient

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} \left( (1 - e^{-i\varphi})|e\rangle + (1 + e^{i\varphi})|g\rangle \right). \quad (\text{I.59})$$

Nous pouvons ensuite estimer la probabilité de mesurer l’état atomique  $|g\rangle$  dans le détecteur. Elle est donnée par :

$$\pi_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi. \quad (\text{I.60})$$

La probabilité de détection de  $|g\rangle$  est donc une fonction sinusoïdale de la phase de la seconde impulsion  $\pi/2$ . Ces oscillations sont appelées *franges de Ramsey* et sont à la base des horloges atomiques [96]. Ces franges peuvent être interprétées comme le résultat d'interférences d'amplitudes de probabilité atomique. L'évolution de l'atome dans les zones de Ramsey est en effet analogue à celle d'un faisceau lumineux dans un interféromètre de Mach-Zehnder (voir la figure I.14). La première zone de Ramsey «divise» l'amplitude de probabilité en deux amplitudes égales sur les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ . La seconde «recombine» ces amplitudes, donnant des oscillations dans chaque voie de sortie de l'interféromètre (état  $|e\rangle$  ou état  $|g\rangle$ ).

L'interféromètre de Ramsey est donc tout naturellement utile pour détecter un éventuel déphasage entre les deux voies atomiques. La présence d'un élément déphasant l'état  $|g\rangle$  par rapport à l'état  $|e\rangle$ , noté  $\Phi$  sur la figure I.14, revient à appliquer avant la deuxième impulsion  $\pi/2$  l'opération unitaire  $U(\phi) = \exp(i\Phi|g\rangle\langle g|)$ . La probabilité de détection de  $|g\rangle$  s'en trouve modifiée :

$$\pi_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\varphi - \Phi). \quad (\text{I.61})$$

Un décalage des franges en fonction de la phase  $\varphi$  est donc la signature d'un déphasage entre états atomiques. C'est là le cœur des expériences que nous voulons présenter ici.

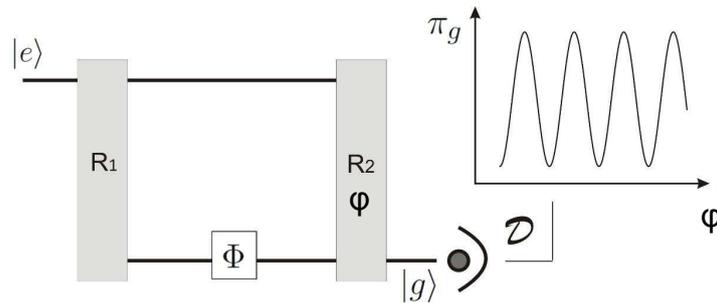


FIGURE I.14 – Schéma de l'interféromètre de Ramsey. Les atomes initialement dans  $|e\rangle$  subissent deux impulsions  $\pi/2$  (de phases 0 et  $\varphi$  respectivement) dans les zones de Ramsey  $R_1$  et  $R_2$ . L'axe vertical porte l'état atomique. En  $\mathcal{D}$  est détectée la fraction d'atomes dans l'état  $|g\rangle$ . Celle-ci oscille en fonction de la phase de Ramsey  $\varphi$ . Ces *franges de Ramsey* sont sensible à un déphasage relatif des états atomiques  $\Phi$ .

### I.3.3.a Contrôle de la phase de Ramsey

Revenons un moment au cas simple  $\Phi = 0$ . La probabilité de détection  $\pi_g$  est une fonction sinusoïdale de  $\varphi$ . La mesure des franges de Ramsey requiert donc de pouvoir changer la phase de la seconde impulsion à l'envi. L'emploi de deux sources micro-ondes distinctes est relativement compliqué, puisqu'il faudrait alors faire appel à des techniques de verrouillage de phase. Il est plus pratique d'utiliser une seule et même source pour alimenter les deux zones de Ramsey. Plutôt que de recourir à des déphaseurs variables, il

est plus astucieux d'exploiter la différence d'ordre de grandeur entre le temps de parcours  $T_{vol}$  entre les deux zones de Ramsey (environ 360  $\mu\text{s}$ ), et la durée d'une impulsion  $\pi/2$  (de l'ordre de 2  $\mu\text{s}$ ).

Si l'on impose une désaccord faible entre atome et champ :

$$\Delta_r = \omega_{at} - \omega_r \ll \Omega_r, \quad (\text{I.62})$$

les interactions dans les deux zones de Ramsey peuvent être toujours considérées comme résonantes. Par contre, entre les deux zones de Ramsey, l'évolution libre de l'atome (dans le référentiel tournant, décrite par l'équation (I.51)) se résume au terme  $\frac{\hbar\Delta_r}{2}\sigma_z$ . Dans le plan de la sphère de Bloch, le pseudospin représentant l'état atomique tourne donc d'une phase  $\phi_r = \Delta_r T_{vol}$ . La source utilisée pour la seconde impulsion  $\pi/2$  étant la même que la première, la seconde impulsion a *la même phase*  $\phi = 0$  que la première dans le référentiel tournant. Le résultat de la seconde impulsion de Ramsey est donc *équivalent* à celui qu'on obtiendrait en appliquant à un atome exactement résonant une impulsion  $\pi/2$  de phase  $\varphi = -\phi_r$ . On a donc en sortie de l'interféromètre (en incluant à nouveau le déphasage éventuel  $\Phi$ ) :

$$\pi_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\phi_r + \Phi). \quad (\text{I.63})$$

avec

$$\phi_r = (\omega_{at} - \omega_r)T_{vol}, \quad (\text{I.64})$$

que nous appellerons dorénavant *phase de Ramsey*.

On peut calculer qu'étant donné le temps de vol, il suffit d'un désaccord de 2,8 kHz seulement pour que la phase accumulée soit de  $2\pi$ . La durée d'une impulsion  $\pi/2$  étant de 2  $\mu\text{s}$ , la fréquence de Rabi classique est de l'ordre de 125 kHz. La condition (I.62) est donc bien vérifiée.

On peut ainsi, en comptant le nombre de détections  $N_e$  et  $N_g$  dans les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  pour un grand nombre d'échantillons atomiques, estimer la probabilité  $\pi_g(\phi_r)$ , et en variant la fréquence  $\omega_r$  de la source, enregistrer les franges de Ramsey. Chacune des quatre traces représentées à la figure I.15 a été enregistrée de cette façon.

Cependant, dans nos expériences, nous aurons besoin de modifier la phase de Ramsey entre deux échantillons atomiques. La modification de la fréquence des sources micro-ondes ne permet pas une telle rapidité<sup>18</sup>. Nous avons donc recours à l'effet Stark dans la seconde zone de Ramsey pour modifier la fréquence atomique : la phase de Ramsey est en effet plus exactement donnée par :

$$\phi_r = \int_0^{t_{vol}} (\omega_{at}(t) - \omega_S) dt \equiv (\overline{\omega_{at}} - \omega_S)T_{vol}. \quad (\text{I.65})$$

---

18. Cette modification est contrôlée par GPIB, avec des temps de latence de l'ordre de 1 ms

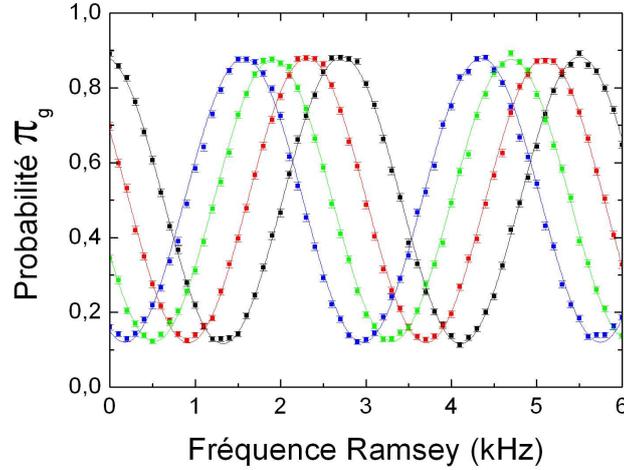


FIGURE I.15 – Franges de Ramsey. Probabilité  $\pi_g$  de détecter un atome dans  $|g\rangle$  en sortie de l'interféromètre en fonction de la fréquence de la source micro-onde (l'origine des abscisses est arbitraire), et pour quatre déplacements Stark différents. Les barres d'erreurs sont calculées en fonction des nombres de détections par la loi binômiale :  $\sigma_{\pi_g} = \sqrt{N_e N_g / (N_e + N_g)^3}$ . Les traits continus sont des ajustements sinusoïdaux de contraste moyen 76 % et sans décalage (moyenne à 50%).

où l'intégrale porte sur tout le parcours atomique entre les deux impulsions Ramsey. Selon la valeur du champ électrique la fréquence de transition moyenne  $\bar{\nu}_{\text{at}} = \bar{\omega}_{\text{at}}/2\pi$  est modifiée. On impose donc un champ électrique bien défini dans la seconde zone de Ramsey, de l'entrée de l'atome dans celle-ci à l'application de l'impulsion micro-onde au centre de la cavité (soit une durée égale à l'intervalle entre atomes de 83  $\mu\text{s}$ ). La valeur de ce champ, contrôlée par les potentiels électriques appliqués à la cavité Ramsey, peut être modifiée entre les atomes successifs. On obtient un déphasage de l'ordre de  $\pi$  avec une modification de potentiel de l'ordre de 0,1 V, ce qui peut être effectué en un temps de l'ordre de la microseconde (voir le chapitre III). Le décalage des quatre franges de Ramsey représentées à la figure I.15 en fonction de la fréquence  $\nu_r = \omega_r/2\pi$  de la source correspond à l'application de 4 valeurs différentes de champ Stark dans la seconde zone de Ramsey.

**Effet des imperfections expérimentales :** La figure I.15 permet de constater qu'expérimentalement l'interféromètre de Ramsey n'est pas parfait : les franges de Ramsey ont en général un contraste  $C$  réduit et une probabilité moyenne  $\pi_0 \neq 1/2$ . Diverses imperfections expérimentales peuvent être à l'origine de ces modifications.

**Erreurs de détection :** on peut remarquer sur la figure I.10 que les pics d'ionisation correspondant aux différents niveaux circulaires se recouvrent légèrement : il est donc possible qu'une fraction d'atomes dans l'état  $|e\rangle$  produise un signal dans la fenêtre associée à  $|g\rangle$  et réciproquement. Ceci aboutit à une réduction du contraste et à un

décalage  $\pi_0 \neq 1/2$ .

**Erreurs de préparation :** si la préparation atomique est imparfaite, quelques atomes elliptiques peuvent être produits malgré les précautions prises. Comme ils sont couplés différemment à la cavité, ils n'évoluent pas comme les états circulaires mais sont faussement détectés comme  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ , ce qui résulte en un décalage des franges.

**Déphasages inhomogènes :** revers de la médaille, si la phase de la superposition atomique peut être contrôlée à l'aide de champs électriques, elle est également très sensible aux éventuelles inhomogénéités de champ. Or, le faisceau atomique a un diamètre non-nul, et des atomes traversant l'expérience à des niveaux différents peuvent accumuler des phases différentes. Cette dispersion de phase a pour conséquence une réduction de contraste des franges.

De même, d'éventuelles fluctuations temporelles des potentiels appliqués produiront des déphasages aléatoires, qui seront moyennés dans le temps par la prise de données. Nous prenons donc des précautions pour réduire autant que possible de tels bruits. En particulier, des diviseurs de tension de gain 1/10 sont placés sur les lignes appliquant les potentiels dans la seconde zone de Ramsey.

Tous ces effets ont pour conséquence la modification des franges de Ramsey, que nous noterons donc dans le cas général :

$$\pi_g = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi_r + \Phi). \quad (\text{I.66})$$

### I.3.3.b Une mesure du pseudospin atomique

Nous concluons cette section par une réinterprétation de la mesure de  $\pi_g$  dans l'interféromètre de Ramsey. Comme nous l'avons déjà vu l'atome à deux niveaux est bien décrit en termes de pseudospin atomique. C'est cette analogie que nous voulons faire au sujet des franges de Ramsey. Considérons donc la situation représentée figure I.16, qui est celle de l'atome dans la seconde zone de Ramsey. La superposition atomique a subi un déphasage  $\Phi$ , et la seconde impulsion  $\pi/2$  est réglée avec une phase  $\varphi = -\phi_r$ . Sous l'effet de cette impulsion, le pseudospin atomique effectue une rotation autour de l'axe défini par le vecteur  $\mathbf{n}$ . À la fin de l'impulsion  $\pi/2$  il se trouve dans le plan engendré par  $\mathbf{n}$  et l'axe  $Oz$ . La valeur de la projection du vecteur tourné  $|\Psi'\rangle$  sur l'axe  $Oz$  est la même (en module) que la projection du vecteur initial  $|\Psi\rangle$  sur l'axe  $\mathbf{u}_\varphi$  orthogonal à  $\mathbf{n}$ . Or ces projections sont directement liées aux probabilités de mesure dans les état  $|g\rangle$  et  $|+\mathbf{u}_\varphi\rangle$ , comme on l'a vu à l'équation (I.44). La probabilité de détection dans l'état  $|g\rangle$  en sortie de l'interféromètre est donc égale à la probabilité de présence dans l'état  $|+\mathbf{u}_\varphi\rangle$  avant la seconde zone de Ramsey. En effet on peut vérifier graphiquement que l'on a

$$\langle S_{\mathbf{u}_\varphi} \rangle = \cos(\varphi - \Phi),$$

et donc (*cf.* équation (I.44)) :

$$|\langle \Psi | +\mathbf{u}_\varphi \rangle|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\phi_r + \Phi) = \pi_g. \quad (\text{I.67})$$

L'accumulation de nombreuses détection atomiques pour un réglage  $\phi_r$  de l'interféromètre permet donc d'estimer la projection de la superposition atomique selon un axe donné. C'est pourquoi nous nous référerons souvent à la direction portée par le vecteur  $\mathbf{u}_\varphi$  comme à la *direction de mesure*. On peut alors réinterpréter les franges de Ramsey comme les oscillations de la projection du spin sur la direction de mesure lorsque celle-ci est variée. On comprend bien également comment les éventuelles fluctuations de phase de mesure liées aux homogénéités de champ conduisent à un brouillage de cette projection, et donc à une réduction du contraste des oscillations. Nous aurons l'occasion de ré-employer cette représentation de la mesure interférométrique de Ramsey dans la suite de ce manuscrit.

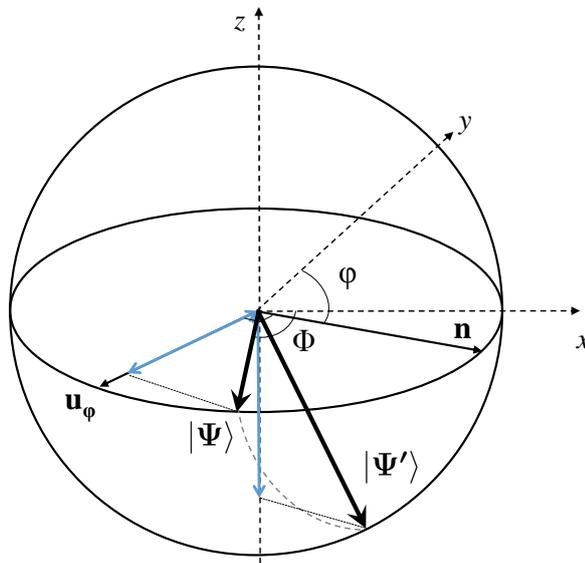


FIGURE I.16 – Interprétation de l'interférométrie de Ramsey comme une mesure de la projection du pseudospin atomique : l'état superposé  $|\Psi\rangle$  effectue dans la seconde zone de Ramsey une rotation autour de l'axe  $\mathbf{n}$  défini par la phase de Ramsey. Les normes des projections indiquées par les doubles flèches bleues sont égales. La probabilité de détection de l'état final  $|\Psi'\rangle$  dans l'état  $|g\rangle$  (obtenue dans notre mesure) et la probabilité de présence de l'état initial dans l'état  $|+_{\mathbf{u}_\varphi}\rangle$  sont donc égales.

## I.4 Deux systèmes fortement couplés

Après avoir décrit en détail les deux systèmes quantiques que nous voulons mettre en présence, nous pouvons étudier leur interaction. Nous verrons que le couplage fort entre

l'atome et le champ conduit à leur *intrication* : l'on ne peut plus les considérer indépendamment. C'est bien ce que nous voulons, puisque nous cherchons à étudier le champ par l'intermédiaire des atomes. Nous présenterons donc tout d'abord la description quantique du couplage atome–champ, et sa solution générale. Dans un deuxième temps nous nous intéresserons à différents régimes d'interaction pouvant advenir dans nos expériences.

### I.4.1 Modèle de Jaynes et Cummings

Le hamiltonien du système total est la somme des hamiltoniens libres  $H_{\text{cav}}$  (équation (I.11)),  $H_{\text{at}}$  (équation (I.42)), et d'un terme d'interaction  $H_{\text{int}}$ . L'interaction de l'atome et du champ est décrite, comme pour le cas d'un champ classique vu au paragraphe I.3.2.b par le hamiltonien dipolaire électrique :

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -id\mathcal{E}(\mathbf{r})(\epsilon_a\sigma_- + \epsilon_a^*\sigma_+) \cdot (\epsilon a - \epsilon^*a^\dagger). \quad (\text{I.68})$$

Nous sommes amenés comme précédemment à faire certaines approximations : en effet si nous passons en représentation d'interaction par rapport aux hamiltoniens libres, les opérateurs décrivant l'atome et le champ deviennent  $\tilde{\sigma}_I^+ = \sigma^+ e^{i\omega_{\text{at}}t}$  et  $\tilde{a}_I = a e^{i\omega_{\text{cav}}t}$ . Si l'on étudie les deux systèmes près de la résonance  $\omega_{\text{cav}} \approx \omega_{\text{at}}$ , le hamiltonien  $\tilde{H}_{\text{int}}^I$  comprend donc deux termes oscillant lentement en fonction du temps, et deux termes de fréquence rapide. Une *approximation de champ tournant* [13] conduit une nouvelle fois à négliger ces derniers termes. Nous conserverons donc pour hamiltonien d'interaction :

$$H_{\text{int}} = -i \frac{\hbar\Omega_0(\mathbf{r})}{2} (\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger), \quad (\text{I.69})$$

avec

$$\Omega_0(\mathbf{r}) = \frac{2\mathcal{E}_0 d\epsilon_a \cdot \epsilon}{\hbar} f(\mathbf{r}) \equiv \Omega_0 f(\mathbf{r}), \quad (\text{I.70})$$

où  $f(\mathbf{r})$  est, rappelons-le, le profil du mode, et où nous avons introduit la pulsation caractéristique du couplage  $\Omega_0$ . La fréquence caractéristique correspondante est appelée *fréquence de Rabi du vide*, et vaut pour les expériences présentées ici<sup>19</sup> :

$$\Omega_0/2\pi = 47 \text{ kHz}. \quad (\text{I.71})$$

Le hamiltonien décrivant le système atome–champ prend donc la forme simplifiée dite de Jaynes-Cummings [97] :

$$H_{\text{JC}} = \frac{\hbar\omega_{\text{at}}}{2}\sigma_z + \hbar\omega_{\text{cav}} \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - i \frac{\hbar\Omega_0}{2} (\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger) f(\mathbf{r}). \quad (\text{I.72})$$

---

19. Cette valeur a varié légèrement au cours de l'histoire du montage. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'on aligne l'axe du four pour optimiser les signaux de détection, ce qui ne correspond pas forcément à un passage par le centre du mode, d'où la variation du couplage.

*Remarque :* À ce stade, et avant de déterminer l'évolution du système sous ce hamiltonien, il nous faut préciser justement que cette description hamiltonienne n'est valide que dans les conditions de *couplage fort*. Celles-ci stipulent simplement que le temps caractéristique de l'évolution cohérente engendrée par  $H_{JC}$  est faible devant les temps caractéristiques du couplage à l'environnement. Nous voyons donc que c'est quantitativement l'inverse de la fréquence de Rabi (soit 20  $\mu\text{s}$  environ) qui doit être faible devant les temps de vie de l'atome comme de la cavité pour accéder au couplage fort : cette condition est bien vérifiée ici, ces temps étant d'environ 30 et 60 ms respectivement.

Le hamiltonien de Jaynes-Cummings possède une propriété de symétrie particulière : le nombre total d'excitations du système  $a^\dagger a + |e\rangle\langle e|$  est conservé. Le couplage peut donc s'interpréter comme l'échange d'excitations entre l'atome et le champ : sous l'action de  $\sigma^+ a$  le champ perd une excitation au profit de l'atome,  $\sigma a^+$  décrivant le processus opposé<sup>20</sup>

Conséquence de cette symétrie, le hamiltonien peut être diagonalisé dans chaque sous-espace de nombre d'excitation fixé  $\mathcal{S}_n = \{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ ,  $n \geq 0$  (avec l'exception  $\mathcal{S}_{-1} = \{|g, 0\rangle\}$  : l'état  $|g, 0\rangle$  est déjà un état stationnaire du système couplé). Dans le sous-espace  $\mathcal{S}_n$ ,  $H_{JC}$  s'écrit sous forme matricielle :

$$H_n = \hbar \begin{pmatrix} \omega_{\text{cav}}(n+1) + \delta/2 & -i\Omega_n f(\mathbf{r})/2 \\ i\Omega_n f(\mathbf{r})/2 & \omega_{\text{cav}}(n+1) - \delta/2 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.73})$$

où nous avons noté  $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_{\text{cav}}$  le désaccord atome-champ, et  $\Omega_n = \Omega\sqrt{n+1}$ . Le hamiltonien  $H_n$  s'exprime simplement en fonction des matrices de Pauli comme  $H_n = \hbar\omega_{\text{cav}}(n+1) + (\hbar/2)\mathbf{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , avec  $\mathbf{\Omega}'_n = (\delta\mathbf{u}_x + \Omega_n f(\mathbf{r})\mathbf{u}_y)$ . Le problème est donc formellement analogue à celui d'un spin dans un champ magnétique pointant dans la direction  $\mathbf{\Omega}'_n$ . On peut en déduire les états propres de  $H_n$  (correspondant à un spin aligné ou anti-aligné avec le champ) :

$$|+, n\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle, \quad (\text{I.74})$$

$$|-, n\rangle = \sin \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle - \cos \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle, \quad (\text{I.75})$$

où l'angle  $\theta_n$  compris entre 0 et  $\pi$  est défini par :

$$\tan \theta_n = \frac{\Omega_n}{\delta}. \quad (\text{I.76})$$

en considérant que l'atome est au centre du mode, *i.e.*  $|f(\mathbf{r})| = 1$ .

Ces états intriqués du système atome-champ sont appelés *états habillés*. Les valeurs propres de  $H_n$  associées sont données par :

$$E_{\pm, n} = \hbar\omega_{\text{cav}}(n+1) \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega_n^2 + \delta^2}. \quad (\text{I.77})$$

---

20. Les termes omis par l'approximation de champ tournant voient le système perdre ou gagner deux excitations à la fois, une de l'atome, une du champ. L'énergie est cependant bien évidemment conservée dans l'évolution sous le hamiltonien total si ces termes sont conservés, mais elle ne peut simplement plus être liée intuitivement aux nombres d'excitations des systèmes non-couplés.

### I.4.2 Régimes d'interaction

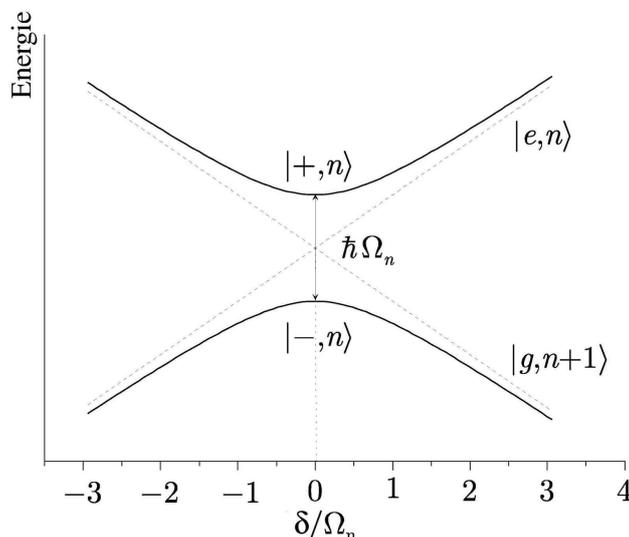


FIGURE I.17 – Énergie des états habillés de la  $n^{\text{e}}$  multiplicité en fonction du désaccord atome/champ  $\delta$  ramené à la pulsation de Rabi  $\Omega_n$ .

Les énergies des états habillés sont représentées à la figure I.17 en fonction du désaccord et de la pulsation de Rabi. Nous nous intéressons d'abord aux deux régimes apparaissant clairement sur cette figure :

#### Interaction résonante

Dans la limite  $\delta \approx 0$ , l'effet du couplage est maximal : le spectre d'énergie montre un anticroisement des niveaux d'énergie découplés, et les états habillés sont des états maximale-ment intriqués de l'atome et du champ. Le hamiltonien  $H_n$  est alors analogue à celui d'un spin  $1/2$  placé dans un champ porté par  $\mathbf{u}_y$ . Cette analogie a déjà été rencontrée au paragraphe I.3.2.b dans la description du couplage de l'atome à un champ classique résonant, et l'on peut donc en déduire simplement l'évolution temporelle. Un système initialement dans l'état  $|e, n\rangle$  effectue des oscillations entre les états  $|e, n\rangle$  et  $|g, n+1\rangle$  à la fréquence  $\Omega_n$ , appelées *oscillations de Rabi quantiques* (d'où le nom donné à  $\Omega_0$  de *pulsation de Rabi du vide*). En particulier, pour un temps d'interaction correspondant à une demi-période (*impulsion*  $\pi$ ), l'atome et le champ échangent exactement un quantum d'excitation.

#### Interaction dispersive

Dans la limite où  $\delta \gg \Omega_n$ , les états propres et énergies propres du système rejoignent asymptotiquement leur valeur pour le système non-couplé, comme le montre la figure I.17.

On a donc (selon le signe de  $\delta$ ) :

$$|+, n\rangle \simeq |e, n\rangle \quad \text{et} \quad |-, n\rangle \simeq |g, n+1\rangle \quad \text{pour} \quad \delta > 0, \quad (\text{I.78})$$

$$|+, n\rangle \simeq |g, n+1\rangle \quad \text{et} \quad |-, n\rangle \simeq |e, n\rangle \quad \text{pour} \quad \delta < 0, \quad (\text{I.79})$$

On peut effectuer un développement au second ordre en  $\frac{\Omega_n}{\delta}$  des énergies propres associées, qui s'écrivent alors :

$$E_{e,n} = E_{e,n}^0 + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta}(n+1), \quad (\text{I.80})$$

$$E_{g,n} = E_{g,n}^0 - \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\delta}n. \quad (\text{I.81})$$

où l'exposant 0 dénote la valeur en l'absence de couplage. Dans ce régime, le hamiltonien de Jaynes-Cummings peut donc se mettre sous la forme approchée<sup>21</sup> :

$$H_{\text{JC}}^{\text{disp}} = H_{\text{cav}} + \frac{\hbar}{2} \left[ \omega_{\text{at}} + \frac{\Omega_0^2}{2\delta} \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \right] \sigma_z, \quad (\text{I.82})$$

dont les états découplés sont des états propres. Sous cette forme, l'interaction dispersive entre l'atome et le champ apparaît comme un effet de *déplacement lumineux* : la fréquence de transition atomique se trouve modifiée en présence d'un champ contenant  $n$  photons d'une quantité :

$$\Delta\omega_{\text{at}}(n) = \frac{\Omega_0^2}{2\delta} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{I.83})$$

Il y a en particulier une modification de cette fréquence due au couplage avec la cavité ne contenant aucun photon : c'est le *déplacement de Lamb* [98].

Par conséquent, l'interaction dispersive de l'atome avec le champ contenant  $n$  photons pendant un temps  $t_{\text{int}}$  conduit à l'accumulation d'une phase relative entre états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , qui s'écrit :

$$\Delta\phi(n) = \phi_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) \equiv \frac{\phi_0}{2} + \phi(n), \quad (\text{I.84})$$

avec

$$\phi_0 = \frac{\Omega_0^2 t_{\text{int}}}{2\delta}, \quad (\text{I.85})$$

où nous avons séparé le terme lié au déplacement de Lamb  $\frac{\phi_0}{2}$  du terme purement linéaire  $\phi(n) = n\phi_0$ . Le déphasage élémentaire  $\phi_0$  sera appelé dans ce qui suit *déphasage par photon*.

---

21. On omet dans cette réécriture un terme constant valant  $\frac{\Omega_0^2}{8\delta}$ , ce qui revient à redéfinir l'origine des énergies.

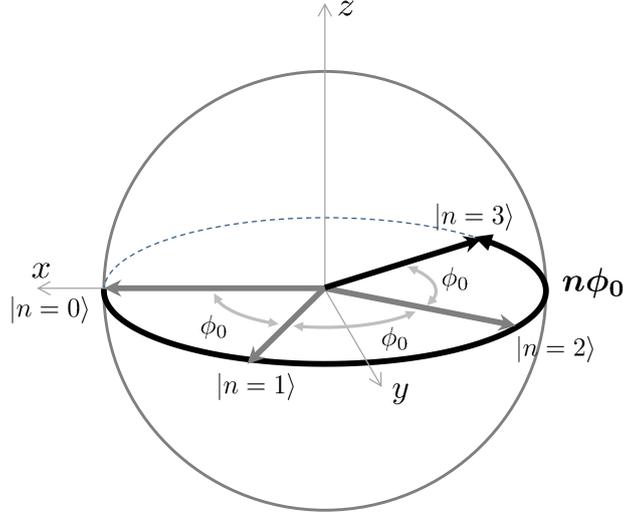


FIGURE I.18 – Évolution du spin atomique lors de l'interaction dispersive avec le champ quantique préparé dans un état de Fock  $|n\rangle$ , dans le référentiel tournant à  $\omega_{\text{at}}$ . Le déplacement  $\phi_0/2$  commun à tous les états nombre n'est pas représenté.

Cet effet peut être visualisé sur la sphère de Bloch représentée figure I.18 : dans le référentiel tournant à la pulsation  $\omega_{\text{at}}$ , une superposition atomique  $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$  effectuée lors de son interaction avec le champ une rotation d'un angle  $n\phi_0$  (en omettant le terme de déplacement de Lamb commun à tous les nombres de photons). On a donc, à une phase globale près, l'évolution :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + e^{i\phi(n)}|g\rangle), \quad (\text{I.86})$$

qui est (intentionnellement) réminiscente de l'action de l'élément déphasant évoqué dans le cadre de l'interféromètre de Ramsey (section I.3.3).

*Interaction effective* : Nous avons considéré dans la discussion précédente que l'atome est au centre du mode  $|f(\mathbf{r})| = 1$ . En pratique, les atomes de vitesse  $v$  traversent le profil gaussien du mode, et le couplage au champ varie au cours du trajet atomique, comme  $\Omega_0(x) = \Omega_0 \exp(-(vt)^2/w_0^2)$  où  $w_0$  est le waist du mode. Cette variation peut être intégrée et conduit à la définition d'un *temps d'interaction effectif* [13] : on peut considérer que le couplage est constant, de valeur  $\Omega_0$ , et le temps d'interaction correspondant à la traversée du mode est donné par :

$$t_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{w_0}{v}. \quad (\text{I.87})$$

Nous avons donc à notre disposition deux façons de modifier le déphasage par photon : varier le temps d'interaction effectif *via* la vitesse des atomes (pour les atomes à 250 m/s utilisés ici,  $t_{\text{eff}} \approx 30 \mu\text{s}$ ), ou bien varier le désaccord entre transition atomique et cavité.

*Adiabaticité* : En toute rigueur, les probabilités de présence des états habillés dans le régime dispersif sont aussi modifiées au second ordre. Cependant, la variation du couplage liée au profil du champ permet en fait l'existence d'un régime dispersif, *i.e.* sans échange d'énergie entre atome et champ, jusqu'à des désaccords de l'ordre de  $\Omega_0$  [68]. En effet, loin du centre de la cavité le couplage est négligeable, et les états propres sont les états découplés. En entrant dans le mode, l'état découplé suit adiabatiquement l'état habillé correspondant : l'état atome–champ évolue, et peut alors être intriqué au centre de la cavité, où le couplage est important. En quittant le mode, le couplage diminue, et l'état habillé revient à l'état découplé : pour  $\delta \sim \Omega_0$  et la vitesse considérée, des simulations ont montré un taux de transfert parasite de  $2 \cdot 10^{-7}$  [68] seulement. Le seul effet sur l'état final est donc la phase supplémentaire accumulée entre  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ .

Lorsque  $\delta \approx \Omega_0$ , le déphasage n'est par contre plus linéaire en fonction du nombre de photons (ce qui requiert  $\Omega_n \ll \delta$ ). Les valeurs exactes des énergies propres doivent alors être employées, et le déphasage calculé à partir des déplacements lumineux sur les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  en présence de  $n$  photons (donnés ici pour  $\delta > 0$ ) :

$$\Delta E_{e,n} = \frac{\hbar}{2} \left( \sqrt{\Omega_n^2 + \delta^2} - |\delta| \right), \quad \Delta E_{g,n} = -\frac{\hbar}{2} \left( \sqrt{\Omega_{n-1}^2 + \delta^2} - |\delta| \right). \quad (\text{I.88})$$

### Passage adiabatique rapide

Nous terminons cette discussion en décrivant la technique de *passage adiabatique rapide*, qui est une méthode efficace pour absorber les éventuels photons contenus dans la cavité, utilisée notamment dans nos expériences pour «initialiser» la cavité dans le vide de photons. Considérons donc une situation où le désaccord  $\delta$  est varié continûment lors du passage d'un atome, initialement dans l'état  $|g\rangle$ , à travers la cavité contenant  $n$  photons. Ceci peut être réalisé en variant le potentiel appliqué aux miroirs de la cavité, ce qui désaccorde la transition atomique par effet Stark. Si on a initialement  $\delta \gg \Omega_n$ , l'état propre du système est l'état découplé  $|g, n\rangle$ . Si le potentiel est varié de façon à traverser la résonance lors du passage de l'atome pour atteindre un désaccord final négatif  $-\delta \gg \Omega_n$ , l'état du système suit adiabatiquement l'état habillé correspondant à l'état de départ (voir la figure I.19) : l'état final est l'état découplé  $|e, n-1\rangle$ . On a alors enlevé un photon à la cavité.

La figure I.20 montre la variation de potentiel typique appliquée aux miroirs pour réaliser le passage adiabatique : la forme en est ajustée (l'effet Stark sur la transition étant quadratique) pour réaliser la variation linéaire du désaccord également représentée. La résonance est traversée au moment où l'atome est au centre de la cavité.

Cette méthode est robuste, car indépendante du nombre de photons pour des valeurs de désaccord limites assez grandes<sup>22</sup>. Une série d'atomes préparés dans  $|g\rangle$  et interagissant de cette façon avec la cavité absorbera un à un les photons pour amener la cavité dans le vide

22. De sorte que  $\delta \ll \Omega_n$  pour tous les nombres de photons présents. Par contraste, une interaction purement résonante permet d'absorber un photon, mais nécessite un ajustement du temps d'interaction au nombre de photons

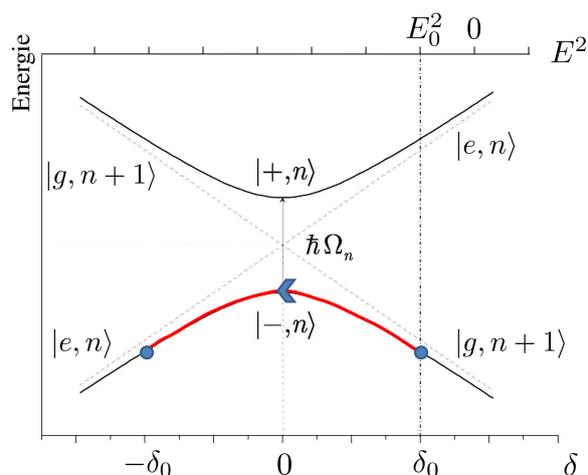


FIGURE I.19 – Transition adiabatique de  $|g, n + 1\rangle$  à  $|e, n\rangle$ .  $\delta_0$  et  $E_0$  sont respectivement les désaccords et champ électrique initiaux, correspondant à ceux utilisés pour les sondes Ramsey.

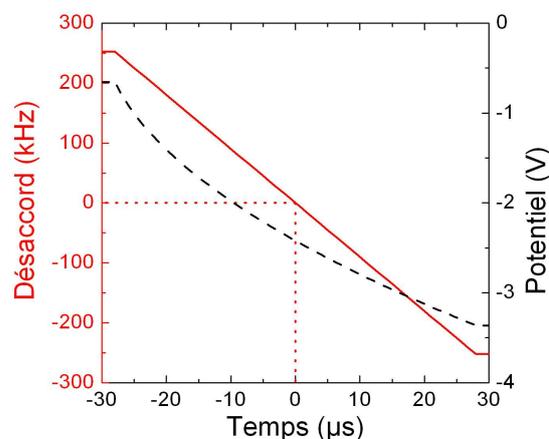


FIGURE I.20 – Modification du désaccord atome–champ pour les atomes absorbeurs par effet Stark quadratique. L’origine des temps correspond au passage du centre du nuage atomique par le centre du mode de la cavité.

de photons  $|0\rangle$ . C’est cette méthode que nous avons utilisée pour réaliser la spectroscopie de la cavité (paragraphe I.2.1.c). Nous appelons communément une telle série d’atomes absorbeurs *atomes serpillères*, pour des raisons évidentes.

## Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter les deux protagonistes de nos expériences : le champ quantique que nous voulons étudier, et les atomes qui nous servent de sondes. Le champ, piégé dans une cavité Fabry-Pérot de grande surtension et de faible volume, a un temps de vie de 65 ms pendant lequel nous pouvons le faire interagir avec de nombreux atomes. Les atomes de Rydberg utilisés nous permettent quant à eux de réaliser un système à deux niveaux quasi-idéal, possédant un long temps de vie et un très grand dipôle électrique. Ceci permet d’atteindre le régime de couplage fort entre l’atome et le champ : nous nous sommes intéressés plus particulièrement au régime dispersif, où l’interaction atome–champ se fait sans échange d’énergie, et résulte simplement en un déphasage du dipôle atomique en fonction du nombre de photons.

Nous avons également pu présenter les différents outils nous permettant de contrôler avec précision les deux systèmes. Nous pouvons modifier la fréquence du mode comme la fréquence de transition atomique. Nous pouvons initialiser le mode dans le vide de photons

ou y injecter un état cohérent. Enfin, l'état atomique peut être manipulé à l'aide de sources classiques, ce qui permet la réalisation d'un interféromètre de Ramsey.

Nous avons donc tous les éléments permettant de réaliser une mesure quantique non-destructive de l'état du champ, par la mesure de l'effet dispersif à l'aide de l'interféromètre de Ramsey. C'est l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre II

## Mesure quantique non destructive du nombre de photons

Nous avons introduit dans le chapitre précédent tous les outils nécessaires à la description de nos expériences. Celles-ci visent à mesurer le nombre de photons contenu dans la cavité, par l'intermédiaire du déphasage que celui-ci induit sur le dipôle atomique. Plus précisément, dans les expériences présentées ici, nous optimisons la vitesse de convergence de cette mesure en modifiant en temps réel le réglage de l'interféromètre. Le présent chapitre a pour but de décrire le principe de ces expériences.

Dans une première partie nous présenterons donc la notion de mesure quantique non destructive du nombre de photons, et comment elle a été précédemment réalisée dans notre groupe. Nous donnerons alors quelques résultats utiles pour l'interprétation de nos expériences. Dans une seconde partie, nous verrons comment cette mesure quantique non destructive peut être améliorée à l'aide d'un protocole adaptatif. Ceci nous amènera à la présentation du principe des expériences ayant conduit aux résultats présentés dans ce mémoire.

### II.1 Mesure passive

À l'aide des notions introduites dans le chapitre précédent, il est facile de comprendre comment nous pouvons acquérir de l'information sur le nombre de photons contenus dans le champ. Nous avons construit un interféromètre de Ramsey, sensible à la phase de la superposition atomique (section I.3.3), pour lequel le champ dans la cavité, en interaction dispersive avec l'atome, joue le rôle d'un élément déphaseur (section I.4.2). Dans le régime dispersif, le signal de franges de Ramsey (équation (I.66)) est donc plus précisément donné par :

$$\pi_g(n, \phi_r) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi_r + \Delta\phi(n)) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos\left(\phi_r + \frac{\phi_0}{2} + \phi(n)\right). \quad (\text{II.1})$$

La mesure de  $\pi_g$  apporte donc clairement une information sur le nombre de photons.

La représentation de l'état atomique comme un spin  $1/2$  procure une bonne illustration du phénomène : le pseudospin représentant la superposition atomique préparée dans la première cavité Ramsey est comme l'aiguille d'une horloge, qui se déplace lors de son couplage au champ d'autant de «graduations» qu'il y a de photons dans la cavité. La seconde impulsion Ramsey de phase  $\phi_r$  et la détection de l'atome nous donnent accès à la projection de cette «aiguille» selon un axe du plan. La complication vient ici du fait que notre «aiguille» est quantique : une détection atomique unique donne un résultat binaire  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  et ne permet pas de déterminer  $\pi_g$  (qui ne peut-être obtenue que comme moyenne d'une grand nombre d'expériences). La mesure de l'atome dans l'état atome–champ généralement intriqué exerce de plus une action en retour sur le champ. Il nous faut donc décrire plus précisément le processus de mesure au niveau quantique.

## II.1.1 Une mesure quantique non-destructive

### II.1.1.a Mesure projective – mesure faible

L'un des postulats de la mécanique quantique est la description de la mesure idéale d'une observable sur un système  $\mathcal{S}$ . Considérons une observable  $O$ , de valeurs propres  $o_i$  associées aux vecteurs propres  $|o_i\rangle$ .  $O$  se décompose donc en une somme de projecteurs sur les états  $|o_i\rangle$  :

$$O = \sum_i o_i P_i, \quad P_i = |o_i\rangle\langle o_i|, \quad \sum_i P_i = \mathbb{1}. \quad (\text{II.2})$$

La mesure de  $O$  sur le système  $\mathcal{S}$  de matrice densité  $\rho$  ne peut alors donner que l'un des résultats  $o_i$  avec une probabilité

$$\pi(o_i) = \text{Tr}(\rho P_i), \quad (\text{II.3})$$

et l'état du système est projeté lors de la mesure dans le sous espace propre correspondant

$$\rho \mapsto \rho' = \frac{P_i \rho P_i}{\pi(o_i)}. \quad (\text{II.4})$$

Lors de cette mesure idéale, dite de von Neumann [2], le système quantique étudié est couplé directement à un appareil de mesure macroscopique. Une autre manière de la réaliser (ou de l'interpréter) est d'utiliser le couplage à un système intermédiaire, quantique également, qui est ensuite mesuré par un appareil de mesure classique. Supposons donc que l'on dispose d'un système «mètre»  $\mathcal{M}$  dont l'espace des états est de dimension supérieure ou égale au nombre de projecteurs  $P_i$ . Le mètre  $\mathcal{M}$  est couplé à  $\mathcal{S}$  de sorte à réaliser l'évolution unitaire

$$|u_j\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\psi_0\rangle_{\mathcal{M}} \xrightarrow{U_P} \sum_i P_i |u_j\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |v_i\rangle_{\mathcal{M}},$$

où  $\{|u_j\rangle_{\mathcal{S}}\}$  (resp.  $\{|v_i\rangle_{\mathcal{M}}\}$ ) est une base orthonormée de l'espace des états de  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{M}$ ), et  $|\psi_0\rangle$  un vecteur de référence de  $\mathcal{M}$ <sup>1</sup>. Pour plus de simplicité notre discussion se limitera ici à des états purs du système  $\mathcal{S}$ . Elle est généralisable dans difficulté à des états décrits par une matrice densité. Si on effectue après l'évolution  $U_P$  une mesure destructive du mètre  $\mathcal{M}$  dans la base  $\{|v_i\rangle_{\mathcal{M}}\}$ , on réalise pour le système  $\mathcal{S}$  la projection (II.4) dans l'état  $|o_i\rangle$ , avec la probabilité  $\pi(o_i)$ , soit l'équivalent de la mesure de von Neumann.

Cette approche nous amène en fait à considérer une classe de mesures plus grande. En effet supposons maintenant que le système et le mètre évoluent de la façon suivante ( $|\phi\rangle$  étant un état générique de  $\mathcal{S}$ ) :

$$|\phi\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\psi_0\rangle_{\mathcal{M}} \xrightarrow{U_G} \sum_i M_i |\phi\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |v_i\rangle_{\mathcal{M}},$$

les opérateurs  $M_i$  n'étant plus nécessairement des projecteurs, ni même hermitiens. Leur nombre est quelconque, contrairement au cas de la mesure projective où l'on a un projecteur par valeur propre. Cette transformation est unitaire à la condition d'avoir

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{1}. \quad (\text{II.5})$$

Lors de la mesure du mètre dans l'état  $|v_i\rangle$ , un état de matrice densité  $\rho$  du système  $\mathcal{S}$  est projeté dans l'état

$$\rho' = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(M_i \rho M_i^\dagger)}, \quad (\text{II.6})$$

avec une probabilité

$$\pi(i) = \text{Tr}(M_i \rho M_i^\dagger) = \text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho). \quad (\text{II.7})$$

Une telle mesure est appelée *mesure généralisée*. À chaque résultat de mesure  $i$  est associé un *opérateur de Kraus*  $M_i$  [99]. L'ensemble des opérateurs de Kraus vérifie la condition de normalisation (II.5), qui s'interprète au vu de l'équation (II.7) comme la conservation de la probabilité. Les opérateurs  $E_i = M_i^\dagger M_i$ , dont la valeur moyenne donne la probabilité des résultats de mesure, sont hermitiens, positifs, et sont appelés par métonymie POVM pour *positive-operator valued measure*.

On peut remarquer que la mesure de von Neumann apparaît comme un cas particulier de mesure généralisée, où les opérateurs  $M_i$  sont des projecteurs (on parle parfois de *projector-valued measure* dans ce cas). Réciproquement, nous avons en fait introduit la mesure généralisée comme une mesure projective sur un système plus grand. L'intérêt du formalisme de la mesure généralisée est qu'il permet de décrire des situations plus réalistes où la mesure ne consiste pas en une projection du système (comme par exemple le comptage de photons à l'aide d'un photodétecteurs où les photons sont détruits après la mesure). La description du couplage irréversible à l'environnement peut également être établie à l'aide de ce formalisme [13].

---

1. Afin que  $\{|v_i\rangle_{\mathcal{M}}\}$  soit une base, il peut être nécessaire d'associer formellement à certains vecteurs un projecteur nul (l'espace des états de  $\mathcal{M}$  étant de dimension supérieure au nombre de projecteurs  $P_i$ ). L'unitarité est alors assurée par la relation (II.2).

### II.1.1.b Mesure non-destructive

Il nous faut à ce stade pour mieux caractériser notre mesure préciser la notion de *mesure quantique non-destructive* (QND). Elle fut introduite initialement dans les années 1970 par Braginsky [5] dans une étude des limites quantiques de bruit pouvant être atteintes dans des mesures ultrasensibles. Le concept est apparu en particulier dans le cadre de la détection d'ondes gravitationnelles, où l'on mesure l'état de vibration d'un oscillateur harmonique macroscopique [8, 6]. Il existe des définitions plus ou moins contraignantes de ce qui constitue une mesure QND [7, 100]. En ce qui nous concerne, une mesure d'une observable d'un système  $O_S$ , via la mesure de celle d'un mètre  $O_M$  sera dite QND si elle respecte deux critères assez intuitifs :

- elle est *non-destructive*, ce qui signifie plus précisément (la mesure modifiant en général l'état quantique par action en retour) qu'elle ne modifie pas la valeur de l'observable mesurée, donc l'état du système si celui-ci est dans un état propre,
- elle peut être *répétée* : une fois le système dans un état propre, une mesure ultérieure redonne avec certitude le même résultat.

Ceci peut se traduire par des contraintes sur le hamiltonien du système couplé {système+mètre} :  $H = H_S + H_M + H_I$ , qui est la somme des hamiltoniens libres et d'un terme d'interaction.

Il est tout d'abord nécessaire, pour que la mesure ait quelque intérêt, qu'elle apporte de l'information sur l'observable. Il faut donc que le hamiltonien d'interaction dépende de l'observable  $O_S$ , et qu'il modifie les états du mètre, ce qui se traduit par la condition :

$$[H_I, O_M] \neq 0.$$

La condition de répétabilité se traduit simplement par le fait que l'observable mesurée est une constante du mouvement entre les mesures, soit

$$[H_S, O_S] = 0.$$

La condition de mesure non-destructive signifie quant à elle que l'interaction avec le mètre ne perturbe pas les états propres de l'observable  $O_S$ . Une condition suffisante pour satisfaire à cela, si l'observable est une constante du mouvement pour le système non-couplé [100], est que le hamiltonien d'interaction commute avec l'observable à mesurer :

$$[H_I, O_S] = 0.$$

Nous allons voir que la mesure réalisée dans notre expérience constitue précisément une mesure (généralisée) non-destructive du nombre de photons selon cette définition. Nous dérivons d'abord les POVM décrivant cette mesure.

### II.1.1.c Mesure généralisée du champ par interférométrie de Ramsey

L'interaction dispersive entre l'atome et le champ dans notre expérience réalise précisément les conditions d'une mesure généralisée : le système (le champ) est couplé au mètre

(l'atome) lors d'une évolution unitaire, puis on effectue une mesure projective du mètre (la détection par ionisation). Nous pouvons donc déterminer quels sont les opérateurs de Kraus associés à cette mesure généralisée (nous considérons dans un premier temps pour cela à un interféromètre parfait, de contraste 1 et sans décalage).

Considérons d'abord l'interaction dans la cavité entre un état de Fock  $|n\rangle$  et la superposition atomique produite par la première zone de Ramsey. L'évolution de l'état est donnée par :

$$|n\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|n\rangle \otimes (e^{-i(\phi(n)+\phi_0)/2}|e\rangle + e^{i\phi(n)/2}|g\rangle). \quad (\text{II.8})$$

Dans la seconde zone de Ramsey, l'impulsion  $\pi/2$  de phase  $\varphi = -\phi_r$  modifie l'état atomique et l'on obtient :

$$|n\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \longrightarrow \dots \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned} &\longrightarrow -ie^{i(\phi_r-\phi_0/2)/2} \sin\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(n)}{2}\right) |n\rangle \otimes |e\rangle \\ &\quad + e^{-i(\phi_r+\phi_0/2)/2} \cos\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(n)}{2}\right) |n\rangle \otimes |g\rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Le détecteur réalise la mesure du «mètre» atomique dans la base  $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ , et l'on peut donc définir, les termes de phase n'étant pas significatifs, les opérateurs de Kraus associés à la détection de  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  comme :

$$M_e(\phi_r) = \sin\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(\hat{N})}{2}\right), \quad M_g(\phi_r) = \cos\left(\frac{\phi_r + \phi_0/2 + \phi(\hat{N})}{2}\right). \quad (\text{II.11})$$

On vérifie sans peine la condition sur les opérateurs de Kraus (II.5). Les POVM associés sont donnés par :

$$E_e(\phi_r) = M_e^\dagger M_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\phi_0}{2} + \phi(\hat{N}) + \phi_r\right), \quad E_g(\phi_r) = M_g^\dagger M_g = \mathbb{1} - E_e(\phi_r). \quad (\text{II.12})$$

On retrouve en particulier la probabilité de détection de  $|g\rangle$  en présence de  $n$  photons pour le réglage  $\phi_r$  :

$$\pi(g|n, \phi_r) = \text{Tr}(E_g(\phi_r)|n\rangle\langle n|) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\phi_0}{2} + \phi(n) + \phi_r\right), \quad (\text{II.13})$$

qui n'est autre que la probabilité donnée à l'équation (II.1), dans le cas de l'interféromètre parfait considéré ici.

**Imperfections de l'interféromètre** Nous avons décrit, dans le cadre de la présentation de l'interféromètre de Ramsey, les différentes imperfections expérimentales qui peuvent aboutir à un contraste réduit, ou un décalage. Il est important de savoir comment ces imperfections modifient les opérateurs de Kraus dérivés ci-dessus. On peut en fait montrer [71] que la prise en compte de ces sources d'erreurs conserve le caractère diagonal des POVM dans la base des états de Fock, et aboutit à des opérateurs dont les seuls paramètres modifiés sont le contraste  $C$  et le décalage  $\pi_0$  (mesurés) des franges de Ramsey :

$$E_g = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos\left(\phi_r + \phi(\hat{N})\right), \quad E_e = 1 - \pi_0 - \frac{C}{2} \cos\left(\phi_r + \phi(\hat{N})\right). \quad (\text{II.14})$$

Dans ces dernières formules, le terme de déplacement de Lamb, subi par l'atome quel que soit le nombre de photons, a été inclus dans une redéfinition de la phase de Ramsey  $\phi_r$ .

La mesure généralisée décrivant l'interaction dispersive vérifie précisément les critères, donnés au paragraphe précédent définissant une mesure QND du nombre de photons [101]. En effet, le hamiltonien libre est fonction du nombre de photons, celui-ci est donc conservé entre des mesures successives. De plus, le terme de couplage, *dans l'approximation dispersive* (I.82) où l'atome et le champ n'échangent pas d'énergie, conserve également le nombre de photons. Cette mesure n'est par contre (en général) pas une mesure projective, au vu des POVM (II.14).

La détection d'un atome unique ne permet donc pas la détermination complète du nombre de photons : nous parlons dans le contexte de nos expériences de *mesure faible*<sup>2</sup>. Nous allons voir cependant que la succession de nombreuses mesures faibles aboutit à la projection du champ dans un état de nombre de photons donné (qui est donc bien l'observable mesurée), de la même façon qu'une mesure de von Neumann.

#### II.1.1.d Mesure du nombre de photons par décimation

Nous avons établi la forme des POVM décrivant la mesure du champ par interaction dispersive avec les atomes, qui laisse invariants les états nombres de photons. Dans le cas où l'état fait intervenir plusieurs nombres de photons, il est instructif d'explicitier l'effet de la mesure sur les populations des différents nombres de photons  $P(n) \equiv \rho_{n,n}$ .

Après interaction avec le champ, un atome est détecté dans l'état  $i = e, g$  avec une probabilité  $\pi(i|\phi_r) = \text{Tr}(E_i(\phi_r)\rho)$ . L'état du champ est modifié selon l'équation (II.6), ce qui permet d'écrire pour la population  $P'(n) = \text{Tr}(\rho'|n\rangle\langle n|)$  :

$$P'(n) = \text{Tr}\left(\frac{M_i(\phi_r)\rho M_i(\phi_r)^\dagger}{\text{Tr}(E_i(\phi_r)\rho)}|n\rangle\langle n|\right). \quad (\text{II.15})$$

La mesure étant non-destructive pour le nombre de photons, les opérateurs de Kraus commutent avec  $|n\rangle\langle n|$  (les matrices représentant ces opérateurs dans la bases des états

---

2. Rappelons que la mesure est dite *faible* ici par opposition à la mesure «forte» que constitue une mesure projective. Elle ne doit pas être confondue avec la notion de mesure faible, comme mesure des *valeurs faibles* (*weak values*) d'une observable [24].

de Fock sont diagonales). On peut donc en effectuant une commutation et en utilisant la cyclicité de la trace, écrire :

$$P'(n) = \frac{1}{\text{Tr}(E_i(\phi_r)\rho)} \text{Tr}(E_i(\phi_r)\rho|n\rangle\langle n|) = \frac{\text{Tr}(E_i(\phi_r)|n\rangle\langle n|)}{\text{Tr}(E_i(\phi_r)\rho)} \text{Tr}(\rho|n\rangle\langle n|),$$

où l'on a utilisé à nouveau le caractère diagonal des POVM. On peut reconnaître dans cette dernière expression  $P(n) = \text{Tr}(\rho|n\rangle\langle n|)$ , la probabilité de la détection  $i$  dans l'état  $\rho$   $\pi(i|\phi_r) = \text{Tr}(E_i(\phi_r)\rho)$ , et la probabilité de la détection  $i$  dans l'état contenant  $n$  photons  $\pi(i|\phi_r, n) = \text{Tr}(E_i(\phi_r)|n\rangle\langle n|)$ . On a donc la nouvelle distribution de probabilité après la détection  $i$  :

$$P'(n) = P(n|i, \phi_r) = \frac{\pi(i|n, \phi_r)}{\pi(i|\phi_r)} P(n). \quad (\text{II.16})$$

Ce qu'on obtient ainsi n'est rien d'autre que la *loi de Bayes* d'inversion des probabilités conditionnelles [102]. Ce résultat classique est obtenu à la condition que la mesure soit non-destructive. Dans ce cas en effet, la modification des populations ne fait pas intervenir des cohérences entre états de Fock, et l'on obtient donc le même résultat que celui que donnerait une superposition statistique (classique) d'états de Fock de même distribution  $P(n)$ .

On peut noter que la distribution correspondant à un état de Fock contenant  $n_0$  photons,  $P(n) = \delta_{n,n_0}$  est bien inchangée par la transformation (II.16). On a également, dans le cas d'une mesure «non-lue», c'est-à-dire une interaction atomique après laquelle l'atome n'est pas détecté,

$$P'_{\text{NL}}(n) = \sum_i E_i(\phi_r) P(n|i, \phi_r) = P(n).$$

La distribution du nombre de photons est donc inchangée. Ceci est à nouveau une conséquence de la nature non-destructive de la mesure : les états de Fock étant préservés, les populations des nombres de photons ne sont pas modifiées en moyenne.

La nouvelle distribution du nombre de photons s'obtient donc à une normalisation près (remarquons que  $\pi(i|\phi_r) = \sum_n \pi(i|\phi_r, n)P(n)$ ) en modulant la distribution antérieure par les probabilités conditionnelles de détection du résultat  $i$ . Ceci est relativement intuitif : si la détection  $i$  est très peu probable dans l'état de Fock  $|n_0\rangle$ , alors le fait de détecter  $i$  rend peu vraisemblable la présence de  $n_0$  photons.

Ceci est illustré à la figure II.1. Pour un déphasage par photon  $\phi_0 = \pi/4$  et une phase de Ramsey  $\phi_r = 0$ , nous montrons la modification des populations consécutive à la détection de l'état  $|g\rangle$  ou  $|e\rangle$ . La distribution initiale est prise uniforme pour  $n$  de 0 à 7, ce qui correspond à un champ totalement inconnu *a priori* restreint à 7 photons maximum. On visualise bien alors l'effet de la mesure, qui est une modulation par les probabilités conditionnelles (également représentées pour une détection dans  $|g\rangle$  à la figure II.1 (a)) : les états de Fock pour lesquels le résultat de détection est très probable voient leur population augmenter (c'est ici le cas de  $|4\rangle$  pour la détection  $|e\rangle$ ), aux dépens des nombres de photons pour lesquels cette détection est peu probable ( $|0\rangle$  pour la détection  $|e\rangle$ ). Certains

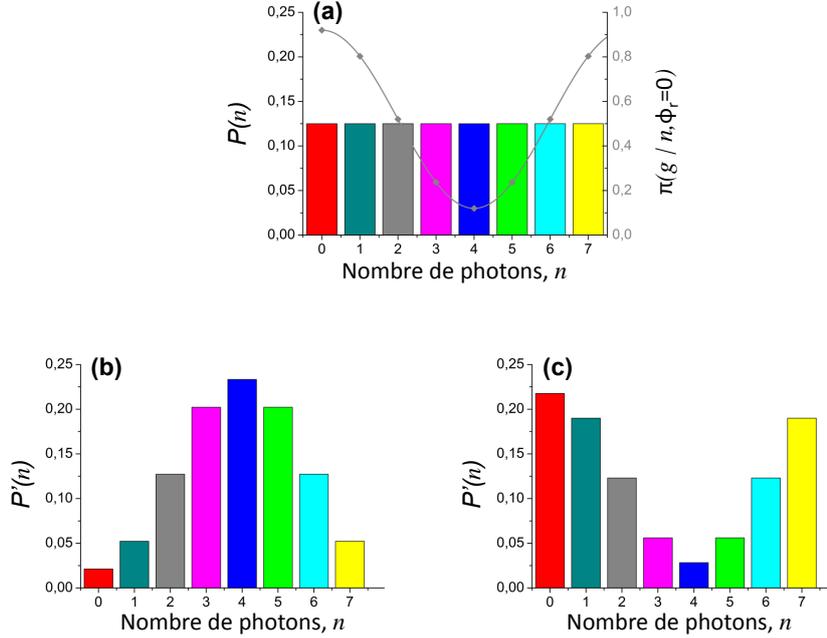


FIGURE II.1 – Évolution des populations  $P(n)$  par décimation lors de la détection d'un atome pour un déphasage par photon  $\phi_0 = \pi/4$  et un interféromètre de phase  $\phi_r = 0$ , de contraste  $C = 0,7$  et de décalage  $\pi_0 = 0,51$ . **(a)** Histogramme de la distribution initiale du nombre de photons correspondant à un champ inconnu contenant au plus 7 photons. Les points sont les probabilités conditionnelles  $\pi(g|n, \phi_r)$  de détecter un atome dans  $|g\rangle$  pour la phase de mesure  $\phi_r$  et un état de Fock  $|n\rangle$ . **(b)** Populations  $P'(n)$  des états de Fock après détection dans  $|e\rangle$ . **(c)** Populations  $P'(n)$  des états de Fock après détection dans  $|g\rangle$ .

nombre de photons peuvent même être totalement exclus pour un interféromètre parfait (si  $\pi(g|\phi_r, 4) = 0$  et que l'on détecte  $|g\rangle$ , alors il ne peut y avoir 4 photons dans la cavité). La mesure est *faible*, puisqu'une seule détection ne permet pas la détermination complète du nombre de photons, mais nous pouvons envoyer plusieurs atomes successifs : la série de mesures faibles aboutit à la conservation d'un seul état de Fock. Nous parlons de *mesure par décimation*.

**Dégénérescences** Nous avons dans cet exemple restreint les nombres de photons possibles à 7 au maximum. En effet, pour un déphasage par photon linéaire, les POVM sont périodiques de période  $2\pi/\phi_0$  soit 8 ici. Il n'est donc pas possible de distinguer les états  $|n\rangle$  et  $|n+8\rangle$  s'ils sont tous les deux présents : la mesure du nombre de photons se fait *modulo 8*. Il est donc nécessaire de limiter le nombre d'états de Fock possibles pour lever cette indétermination. En pratique cette restriction est réalisée en injectant et manipulant des champs tels que  $P(8) \ll 1$ .

Il faut par ailleurs noter sur les figures II.1 (b) et (c) que le résultat de la décimation est le même pour certains couples de nombres : les populations  $P(1)$  et  $P(7)$ ,  $P(2)$  et  $P(6)$ ,  $P(3)$  et  $P(5)$  sont égales deux à deux. En effet pour ces nombres de photons les probabilités conditionnelles  $\pi(i|\phi_r, n)$  sont égales. On ne peut donc pas les distinguer avec ce réglage de mesure<sup>3</sup>. Pour une valeur différente de la phase de Ramsey, la forme de la fonction de décimation est modifiée, et ces probabilités conditionnelles peuvent prendre des valeurs différentes. Ainsi pour une phase  $\phi_r = \pi/2$  on aura  $\pi(g|\phi_r, 2) \neq \pi(g|\phi_r, 6)$ , et l'on pourra distinguer ces deux nombres de photons. Il est donc nécessaire de varier la phase de Ramsey si nous voulons «compter» les photons de 0 à 7. Notons par ailleurs que la discrimination entre  $|2\rangle$  et  $|3\rangle$  ou  $|4\rangle$  se fait efficacement dans l'exemple donné ici car les probabilités conditionnelles associées sont bien distinctes. Si deux phases différentes (0 et  $\pi/2$  par exemple) suffisent en principe à distinguer tous les nombres de photons dans le cas illustré ici, on utilise donc en pratique quatre phases séparées de  $\pi/4$ , chacune d'entre elles étant plus efficace au voisinage d'un nombre de photon différent, définissant 4 mesures POVM à deux opérateurs différentes. Nous proposerons une autre interprétation de cette décimation au paragraphe II.1.4.a.

La figure II.2 donne deux exemples de la décimation du nombre de photons. Ces résultats ont été obtenus durant la thèse de Christine Guerlin [68, 22]. Dans ces expériences, le temps de vie du mode était de 130 ms. Le déphasage par photon  $\phi_0$  vaut  $\pi/4$ , ce qui correspond à un désaccord de 272 kHz. La mesure utilise quatre phases de Ramsey, notées  $a, b, c, d$ , alternées dans cet ordre à chaque préparation d'un échantillon atomique, et telles que

$$a - b = b - c = c - d \simeq \pi/4.$$

Les échantillons contenant aléatoirement zéro ou un atome, les phases de mesures correspondant aux atomes successivement détectés sont aléatoires. La figure II.2(a) montre les 50 premières phases  $j = a, b, c, d$  de mesure et les résultats  $i = e, g$  correspondant. On injecte initialement un état cohérent contenant environ 3 photons, de façon à pouvoir négliger les nombres de photons supérieurs à 7. La figure II.2(b) montre les évolutions de l'estimation  $P(n)$  du nombre de photons, initialement uniforme, à mesure qu'elle est modifiée par les détections. Après la détection d'environ 50 atomes, les distributions ont quasiment convergé vers un nombre de photons (5 et 7 respectivement). Les populations résiduelles sur les nombres voisins sont totalement éliminées à la fin de la mesure de 110 atomes (soit un temps de mesure de 26 ms environ) montrée ici. Le champ est alors dans un état de Fock  $|n\rangle$ .

Il est important de souligner que si nous nous intéressons aux états nombres, et donc aux populations dans ces états, la mesure ne permet pas de distinguer entre une superposition quantique ou un mélange statistique d'états de Fock. Lorsque nous discuterons de l'évolution des populations lors la mesure nous pourrons donc soit considérer qu'elle s'effectue sur l'état cohérent injecté, soit sur un mélange statistique avec les mêmes populations

---

3. En principe, une différence même mineure de probabilité conditionnelle – par exemple due à une non-linéarité du déphasage par photon – permet de les distinguer. Cependant plus cette différence est faible plus il est nécessaire d'accumuler des mesures pour déterminer le nombre de photons

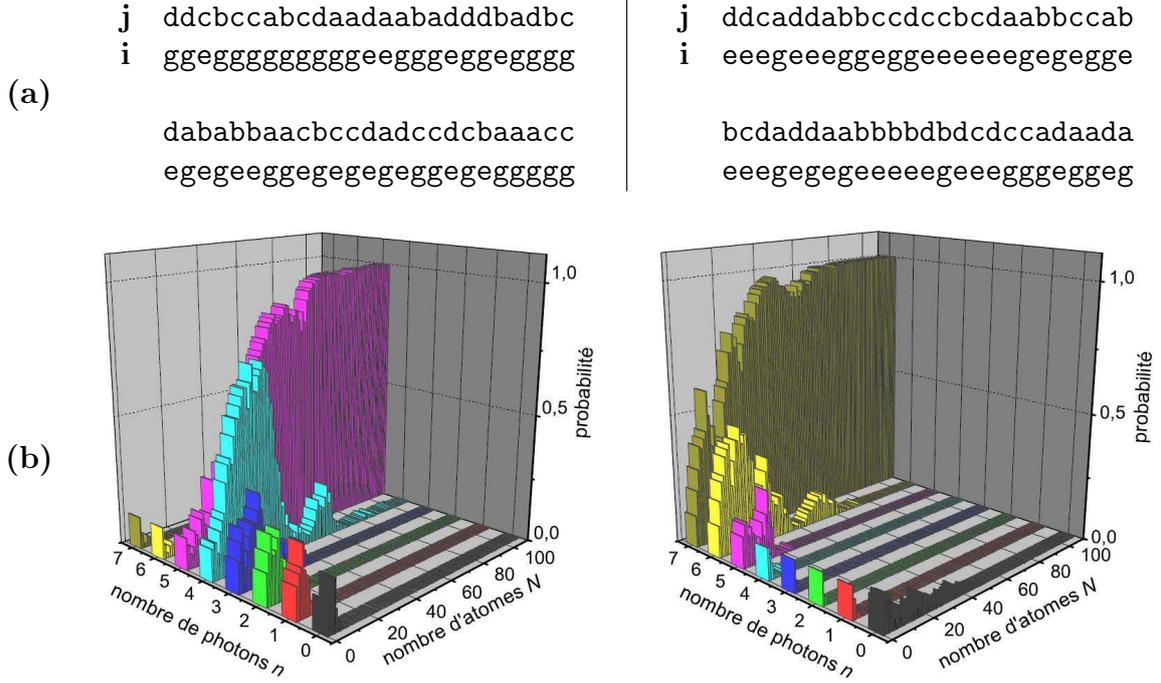


FIGURE II.2 – Réduction progressive de la distribution des nombres de photons vers celle d'un état nombre pour deux réalisations particulières. (a) Résultats des 50 premières détections atomiques  $(i, j)$  où l'on note  $i$  l'état atomique et  $j$  la phase de mesure. (b) Distribution des nombres de photons en fonction du nombre d'atomes détectés pour un ensemble de 110 atomes.

initiales. Un tel mélange statistique peut être vu comme contenant à chaque réalisation un nombre bien défini – mais inconnu – de photons, avec un probabilité reproduisant les population initiales. On peut donc envisager dans nos expérience la mesure du nombre de photons comme la projection de l'état cohérent initial dans un état de Fock, ou de manière équivalente comme la détermination d'un nombre de photons bien défini, mais inconnu, présent initialement dans la cavité.

### II.1.1.e Convergence de la décimation

Nous nous intéressons ici plus précisément à cette convergence vers un état de Fock sous l'effet de la décimation des populations. Nous donnons d'abord un argument simple [103] expliquant la convergence de la décimation en présence d'un nombre de photons donné. Puis nous présentons une preuve plus mathématique, adaptée de [104].

**La décimation : un produit de fonctions sinusoïdales** Intéressons-nous d'abord au comportement de la distribution de nombres de photons au bout d'un nombre  $N$  de détections. La phase de l'atome détecté étant maintenant une variable aléatoire de valeur  $j$  ( $j = a, b, c, d$ ) distribuée uniformément ( $P(j) = 1/4$ ), indépendamment de l'état quantique,

il nous faut réécrire la règle d'actualisation (II.16) sous la forme :

$$P'(n) = P(n|i, j) = \frac{\pi(i, j|n)}{\pi(i, j)} P(n), \quad (\text{II.17})$$

avec une probabilité  $\pi(i, j|n) = \pi(i|j, n)P(j) = 1/4\pi(i|j, n)$ . Si l'on accumule l'effet de  $N$  détections, la seule dépendance en  $n$  étant contenue dans les probabilités conditionnelles, la distribution finale de  $n$  s'écrit :

$$P''(n) = \frac{1}{Z} \prod_{k=1}^N \pi(i_k, j_k|n) P(n), \quad (\text{II.18})$$

où  $i_k, j_k$ , dénotent l'état atomique détecté et la phase de Ramsey pour la  $k^e$  détection,  $P(n)$  la distribution initiale (supposée uniforme) du nombre de photons, et  $Z$ , indépendante de  $n$ , assure la normalisation. Toute l'information sur la «forme» de la distribution finale en  $n$  est donc contenue dans la *fonction de décimation*

$$\Pi_N(n) \equiv \prod_{k=1}^N \pi(i_k, j_k|n). \quad (\text{II.19})$$

Nous considérons maintenant que la cavité contient un nombre de photons donné  $n_c$ . On peut alors montrer (voir l'annexe A) que pour  $N$  assez grand, la distribution  $\Pi_N(n)$  est une fonction piquée autour de la valeur  $n_c$ , de largeur  $\delta n \sim 1/\phi_0\sqrt{N}$ . Par conséquent, la mesure est résolue si :

$$\delta n < 1 \rightarrow N \gg 1/\phi_0^2 \sim 1.$$

La répétition des mesures pour un grand nombre d'atomes conduit donc à la convergence de la distribution de probabilité vers un pic unique sur le nombre de photons mesuré. Une succession de mesures faibles est donc équivalente à une mesure projective du nombre de photons.

**L'évolution des populations : une martingale** L'évolution des populations sous la série de mesures faibles est un processus stochastique, gouverné par la récurrence (II.17) que nous rappelons :

$$P'(n) = \frac{\pi(i, j|n)}{\pi(i, j)} P(n), \quad \text{avec une probabilité } \pi(i, j) = \sum_m \pi(i, j|m) P(m). \quad (\text{II.20})$$

Cette récurrence est markovienne : la valeur de la distribution après une détection ne dépend que de sa valeur précédente. Elle possède de plus une autre propriété intéressante. Calculons, lors d'une détection, l'espérance de la nouvelle distribution  $P'(n)$  :

$$\mathbb{E}(P'(n)) = \sum_{\substack{i, j \\ \pi(i, j) \neq 0}} \pi(i, j) \frac{\pi(i, j|n)}{\pi(i, j)} P(n) \quad (\text{II.21})$$

$$= \sum_{\substack{i, j \\ \pi(i, j) \neq 0}} \pi(i, j|n) P(n). \quad (\text{II.22})$$

La somme peut être en fait être étendue à toutes les valeurs  $i, j$ , en effet  $\pi(i, j) = \sum_m \pi(i, j|m)P(m) = 0$  n'est possible que si le terme sommé est nul. On a donc :

$$\mathbb{E}(P'(n)) = \sum_{i,j} \pi(i, j|n)P(n) = P(n). \quad (\text{II.23})$$

À chaque étape l'espérance de  $P(n)$  n'est donc déterminée que par sa valeur précédente. Ceci définit mathématiquement une *martingale*.  $P(n)$  est de plus une quantité bornée (entre 0 et 1). Il existe alors un théorème mathématique applicable, qui énonce que : *Toute martingale bornée converge presque sûrement. Sa limite est une variable aléatoire  $P_\infty(n)$ , vérifiant :*

$$\mathbb{E}(P_\infty(n)) = P_0(n).$$

$P_0(n)$  est ici la distribution initiale du nombre de photons dans le système.

On peut alors aller plus loin dans la description de la convergence. La convergence de  $P(n)$  implique celle de  $\pi(i, j) = \sum_m \pi(i, j|m)P(m)$  vers une variable aléatoire que nous noterons  $\pi_\infty(i, j)$ .

Notons d'abord que  $P(n) = 0$  (et donc aussi  $P_\infty(n) = 0$ ) est une solution toujours valide, mais triviale, de la relation de récurrence. Intéressons nous donc aux entiers  $n$  tel que  $P_\infty(n) \neq 0$ <sup>4</sup>.

Considérons d'abord un couple  $(i, j)$  tel que  $\pi_\infty(i, j) = 0$ . Comme nous nous sommes restreints au cas tel que  $P_\infty(n) \neq 0$ , ceci implique  $\pi(i, j|n) = 0$  (si la détection  $(i, j)$  n'a jamais lieu, seuls les  $n$  lui donnant une probabilité nulle peuvent participer à la distribution asymptotique). On a donc

$$\pi_\infty(i, j) = \pi(i, j|n) = 0.$$

Prenant maintenant un couple  $(i, j)$  tel que  $\pi_\infty(i, j) \neq 0$ , on peut passer à la limite dans la relation de récurrence, pour obtenir :

$$P_\infty(n) = \frac{\pi(i, j|n)}{\pi_\infty(i, j)} P_\infty(n). \quad (\text{II.24})$$

Si  $P_\infty(n) \neq 0$ , on obtient à nouveau la condition :

$$\pi_\infty(i, j) = \pi(i, j|n).$$

Quel que soit le cas,  $\pi_\infty(i, j) = 0$  ou  $\pi_\infty(i, j) \neq 0$ , on obtient donc la même conclusion générale pour tout  $n$  :

$$P_\infty(n) = 0 \quad \text{ou} \quad (P_\infty(n) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall(i, j), \pi(i, j|n) = \pi_\infty(i, j)). \quad (\text{II.25})$$

Interrogeons-nous maintenant sur la signification de la seconde condition ci-dessus. Les  $\pi(i, j|n)$  sont des données du problème, décrivant les probabilités de détection des différents résultats en présence de  $n$  photons. Si pour deux nombres de photons toutes ces probabilités

---

4. Il en existe puisque  $\sum_n P(n) = 1$ .

sont les mêmes, cela signifie que les détections ne permettront pas de les distinguer (comme nous avons pu le voir sur l'exemple d'une unique phase de détection au paragraphe II.1.1.d). Nous pouvons supposer que nos choix de mesures permettent de faire une différence entre tous les nombres de photons considérés, *i.e.* :

$$\forall(n, m), \exists(i, j) / \pi(i, j|n) \neq \pi(i, j|m). \quad (\text{II.26})$$

Or, nous avons obtenu que la valeur limite  $\pi_\infty(i, j)$ , indépendante de  $n$ , doit être égale à  $\pi(i, j|n)$  si  $\pi_\infty(n) \neq 0$ . Si les probabilités conditionnelles sont distinctes, ceci n'est possible que pour un seul nombre de photons, noté  $n_c$ . On obtient donc finalement pour les variables aléatoires limites

$$P_\infty(n) = \delta_{n, n_c}, \quad (\text{II.27})$$

$$\pi_\infty(i, j) = \pi(i, j|n_c), \quad (\text{II.28})$$

pour  $n_c$  un entier aléatoire. La condition sur l'espérance  $\mathbb{E}(P_\infty(n)) = P_0(n)$  permet de préciser la probabilité de ce résultat, qui est donc de  $P(n_c)$ .

Prenant un peu de recul, on réalise que le résultat obtenu décrit précisément celui d'une mesure de von Neuman du nombre de photons. L'accumulation des mesures faibles conduit à la convergence de la distribution de probabilité vers un état de Fock (projection dans l'état propre), avec une probabilité déterminée par la distribution initiale  $P_0(n)$ .

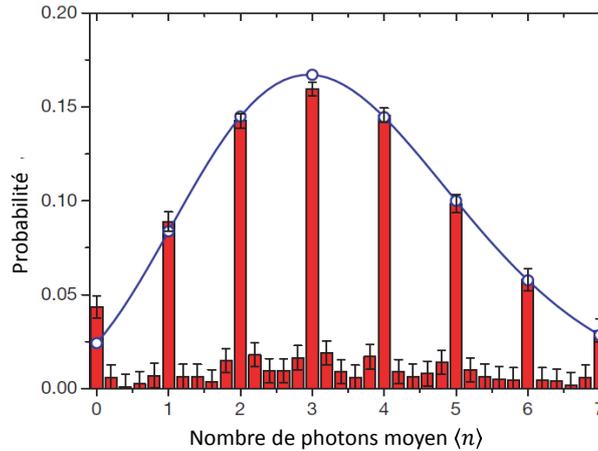


FIGURE II.3 – Histogramme du nombre moyen de photons estimé après détection par la détection de 110 atomes. L'estimation est initialement uniforme entre 0 et 7 photons, l'histogramme est issu de la moyenne de 2000 trajectoires. Les pics observés pour  $\langle n \rangle$  entier mettent en évidence la convergence vers des états de Fock. La statistique de ces états de Fock est en excellent accord avec une loi de Poisson (courbe bleue), correspondant à l'état cohérent initial, contenant  $\langle n \rangle = 3,46 \pm 0,04$  photons en moyenne

Dans nos mesures, nous initialisons notre *estimation* avec une distribution uniforme, qui ne décrit pas l'état initial. Par contre les probabilités des résultats de mesure sont

déterminés par l'état réel. La convergence de notre estimation étant déterminée comme nous l'avons vu par la fonction de décimation, et celle-ci étant fonction de l'état réel, on a nécessairement convergence de l'estimateur vers  $n_c$  avec la probabilité issue de l'état réel initial (à la condition que l'estimation initiale le permette, c'est-à-dire que  $P^{\text{est}}(n_c) \neq 0$ ). Ceci peut-être vérifié en considérant la figure II.3, où l'on a représenté l'histogramme, issu de 2000 trajectoires, du nombre moyen de photons obtenu après décimation par 110 atomes d'une distribution uniforme : les pics pour  $\langle n \rangle$  entier signalent la convergence vers les états de Fock, et la statistique obtenue reproduit bien celle d'un état cohérent (état initialement injecté dans la cavité).

### II.1.2 Trajectoires quantiques

La relaxation du champ dans la cavité est potentiellement un obstacle à notre mesure du nombre de photons : pour un état nombre  $|n\rangle$  de  $n$  élevé, de temps de vie  $T_n \simeq T_{\text{cav}}/n$ , il est possible que le nombre de photons  $n$  change avant qu'on ait pu le mesurer. La détection des atomes ne doit donc pas prendre trop longtemps, afin de permettre à la mesure de converger avant que  $n$  ne change. En principe, l'augmentation du nombre d'atomes par échantillon permettrait d'accélérer le processus. Cependant, les effets dispersifs exploités dans la mesure ont été établis pour l'interaction d'un atome unique avec la cavité, et peuvent être fortement modifiés en présence de plusieurs atomes. Le nombre d'atomes par échantillon doit donc rester faible. La valeur du nombre d'atomes détectés dans les exemples précédents résulte donc d'un compromis : la détection de 110 atomes permet d'accumuler une quantité suffisante d'information, en un temps (26 ms) relativement court devant le temps de vie de la cavité (130 ms dans ces expériences).

Si nous continuons de détecter les atomes au-delà des 110 premiers, nous pouvons regrouper les détections dans des «fenêtres» temporelles successives contenant chacune 110 atomes, sur lesquelles le processus de décimation peut être effectué à nouveau. Chaque fenêtre donne une valeur du nombre de photons à un instant donné, et l'on peut ainsi obtenir l'évolution du nombre de photons au cours du temps, sous l'effet de la relaxation. La figure II.4 donne un exemple d'une telle *trajectoire quantique* : le champ est initialement projeté dans l'état  $|4\rangle$ , puis la poursuite de la mesure du nombre de photons permet d'observer des *sauts quantiques* : sous l'effet de la relaxation la cavité perd aléatoirement un quantum d'excitation, pour se retrouver à la fin de la trajectoire dans l'état vide de photons. Remarquons que les plateaux visibles sur cette figure sont de durée au moins double de celle d'une mesure de 110 atomes. Ceci démontre la *répétabilité* de notre mesure : en l'absence des sauts quantiques dus à la relaxation, deux mesures successives et indépendantes du nombre de photons donnent bien le même résultat.

Ces trajectoires quantiques permettent en principe également d'étudier la relaxation des états nombres. En effet, la mesure du nombre de photons étant QND, elle ne modifie pas les propriétés moyennes du système. Une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de trajectoires résolues en nombre de photons reproduit donc l'évolution décrite par l'équation maîtresse [21]. Cette méthode est cependant limitée : la fenêtre de décimation utilisée dure 26 ms, soit le temps de vie de l'état  $|n = 5\rangle$ . Pour  $n = 5$  ou plus, on ne pourra donc pas

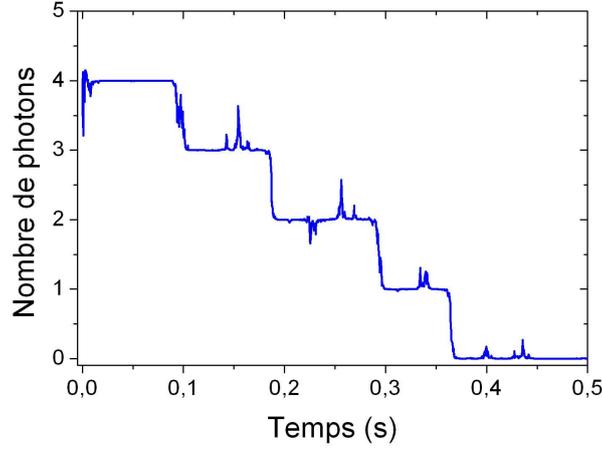


FIGURE II.4 – Évolution temporelle du nombre de photons dans la cavité. Le nombre moyen de photons  $\langle n \rangle$  est évalué à chaque instant en utilisant l'information fournie par les  $N_{\text{at}} = 110$  derniers atomes détectés. Cette trajectoire correspond à une projection initiale du champ cohérent vers l'état de Fock  $|4\rangle$ . La cascade de sauts quantiques est la signature de la relaxation.

obtenir des trajectoires quantiques résolues en nombre de photons.

On peut cependant employer une autre approche si l'on veut accéder à l'évolution de la moyenne d'ensemble de l'état [69, 25]. Cette méthode est fondée sur le principe de maximum de vraisemblance [105], et permet de déterminer l'état le plus vraisemblable au vu des résultats obtenus pour un *ensemble* de trajectoires.

### II.1.3 Moyennes d'ensemble

#### II.1.3.a Reconstruction par maximum de vraisemblance

Nous avons déjà écrit, au paragraphe II.1.1.e, la valeur de la distribution de probabilité après  $N$  détections. Considérant ici un ensemble de trajectoires, la distribution obtenue après décimation par  $N$  détections atomiques pour la trajectoire d'indice ( $p$ ) est donnée par :

$$P_1^{(p)}(n) = \prod_{k=1}^N \left[ \frac{\pi(i_k^{(p)}, j_k^{(p)} | n)}{\pi(i_k^{(p)}, j_k^{(p)})} \right] P_0(n) \quad (\text{II.29})$$

$$= \frac{1}{Z^{(p)}} \Pi_N^{(p)}(n) P_0(n), \quad (\text{II.30})$$

où,  $i_k^{(p)}$  et  $j_k^{(p)}$  dénotent respectivement l'état détecté et la phase de mesure pour la détection  $k$ , et où la fonction de décimation à  $N$  atomes  $\Pi_N^{(p)}(n)$  pour la  $p^{\text{e}}$  trajectoire est définie

par :

$$\Pi_N^{(p)}(n) = \prod_{k=1}^{N_{\text{at}}} \pi \left( i_k^{(p)}, j_k^{(p)} | n \right). \quad (\text{II.31})$$

Si  $N$  est assez grand, la décimation converge vers un nombre de photons unique ; une moyenne sur l'ensemble des trajectoires permet alors d'obtenir la distribution moyenne du nombre de photons. Si  $N$  est trop faible pour aboutir à la convergence vers un nombre de photons, les valeurs des distributions  $P_1^{(p)}(n)$  sont en parties déterminées par le choix de distribution initiale  $P_0(n)$ . Malgré cette «mémoire» de  $P_0$ , elles portent aussi une information sur la distribution réelle. Cela signifie que la moyenne d'ensemble sur toutes les réalisations  $(p)$  (dénotée ici par une barre)

$$P_1 = \overline{P_1^{(p)}(n)}. \quad (\text{II.32})$$

est plus proche de la distribution réelle que ne l'est  $P_0(n)$ . On peut alors répéter les étapes (II.30) et (II.32) en prenant pour nouvelle estimation de départ la distribution  $P_1$ , ce qui fournit à une distribution  $P_2$ , en principe moins dépendante du choix de  $P_0$ . On peut ensuite réaliser de multiples itérations :

$$P_{m+1}(n) = \frac{1}{Z^{(p)}} \overline{\Pi_N^{(p)}(n) P_m(n)}^{(p)}. \quad (\text{II.33})$$

Quel est le comportement de cette suite ? On peut remarquer que la distribution réelle est, par construction, un point fixe de la transformation (II.33) : la mesure étant QND, les détections ne modifient pas les populations en moyenne. Ainsi, si l'on prend soin de prendre  $N$  assez grand pour que ce point fixe soit unique, la distribution  $P_m(n)$  doit converger vers la distribution réelle moyenne décrivant l'ensemble de trajectoires étudié au bout d'un nombre suffisant d'itérations.

L'état déterminé par cet algorithme est en fait celui de *maximum de vraisemblance*. C'est par définition l'état qui est le plus susceptible d'avoir conduit aux résultats de mesure observés. Il rend maximum la *fonction de vraisemblance*, définie par

$$\mathcal{L}(\rho) = \prod_i \text{Tr}(\rho E_i)^{f_i},$$

où le produit porte sur tous les POVM employés, et  $f_i$  est la fréquence d'observation du résultat  $i$ .  $\mathcal{L}(\rho)$  est donc le produit, pour tous les résultats de mesure obtenus, des probabilités conditionnées à l'état  $\rho$ . La maximisation de  $\mathcal{L}$  s'interprète bien comme la recherche de l'état le plus vraisemblable au vu des résultats obtenus.

Une procédure générale pour accéder à cet état, donnée par Lvovsky [105], est de rechercher par itération le point fixe de transformations

$$\rho \mapsto R(\rho)\rho \quad \rho \mapsto \rho R(\rho) \quad \rho \mapsto R(\rho)\rho R(\rho), \quad (\text{II.34})$$

où  $R$  est un opérateur construit à partir de tous les POVM de mesures et des fréquences des différents résultats, semblable à notre fonction de décimation  $\Pi_N$ . La méthode détaillée ici est l'exact analogue de cette procédure, restreinte aux populations des nombres de photons.

L'état de maximum de vraisemblance est déterminé par les résultats de mesure seulement : dans notre cas, les POVM employés étant tous diagonaux dans la base des états nombres, l'état obtenu ne peut donc pas contenir d'information sur les cohérences de la matrice densité. Nous n'accédons en fait qu'à une reconstruction des populations. La reconstruction d'états, tels les états cohérents, de matrice densité non-diagonale, doit passer par des procédures plus complexes [71, 23] (il faut essentiellement diversifier les mesures, donc les POVM, pour pouvoir contraindre aussi les cohérences de la matrice densité).

**Nombres d'atomes détectés** L'intérêt de cette méthode de maximum de vraisemblance est qu'elle permet, sur une fenêtre temporelle contenant beaucoup moins d'atomes que nécessaire pour une décimation complète, d'obtenir une estimation *en moyenne* de la distribution du nombre de photons. Ceci peut donc être réalisé même pour des états nombres relaxant rapidement, et l'on peut, en répétant l'algorithme sur des fenêtres temporelles successives, suivre l'évolution des populations avec une bonne résolution en temps. Ceci a été réalisé dans [25], où la décohérence des états nombres contenant jusqu'à 7 photons a pu être étudiée avec une résolution temporelle de 6 ms.

Comme nous l'avons mentionné, il est cependant nécessaire de s'assurer que la méthode itérative ne possède qu'un seul point fixe. Ceci impose en fait une contrainte sur le nombre d'atomes minimum par fenêtre, et donc sur la durée minimale d'une fenêtre [66, 106]. Afin que les fréquences observées dans la fenêtre de  $N$  atomes permettent de déterminer l'état de maximum de vraisemblance de manière univoque, ce nombre d'atomes doit être au moins de

$$N_{\min} = E \left( \frac{n_{\max} + 1}{2} \right),$$

où  $E$  dénote la partie entière, et  $n_{\max}$  est le nombre de photons maximum auquel on a tronqué l'espace de Hilbert du champ (7 dans notre cas, soit  $N_{\min} = 4$ ).

### II.1.3.b Suivi temporel des populations

Illustrons la méthode de maximum de vraisemblance sur l'exemple d'une injection de champ cohérent. Dans cette expérience, on enregistre après l'injection d'un champ cohérent, les détections associées à 1100 échantillons atomiques. Ceci est effectué pour 6000 trajectoires. Puis on analyse ces données par la méthode introduite ci-dessus : on recherche l'état de maximum de vraisemblance associé à chaque fenêtre de 20 échantillons atomiques (le nombre d'atomes détectés par échantillon étant de l'ordre de 0,3, on dépasse bien le nombre d'atomes  $N_{\min} = 4$  requis dans chaque fenêtre). La détection du premier échantillon atomique définissant l'origine des temps, on calcule cette distribution à partir de la première fenêtre complète de 20 échantillons (centrée sur 830  $\mu$ s) puis sur les fenêtres suivantes obtenues en décalant les détections d'un échantillon. La procédure itérative est

effectuée 2000 fois, et l'on obtient la trajectoire représentée à la figure II.5(a). Le bruit sur l'évolution obtenue résulte du fait que la recherche du maximum de vraisemblance s'effectue à l'aide d'un ensemble fini de trajectoires. La figure II.5(b) donne en outre l'évolution de la valeur moyenne du nombre de photons obtenue par cette reconstruction d'état.

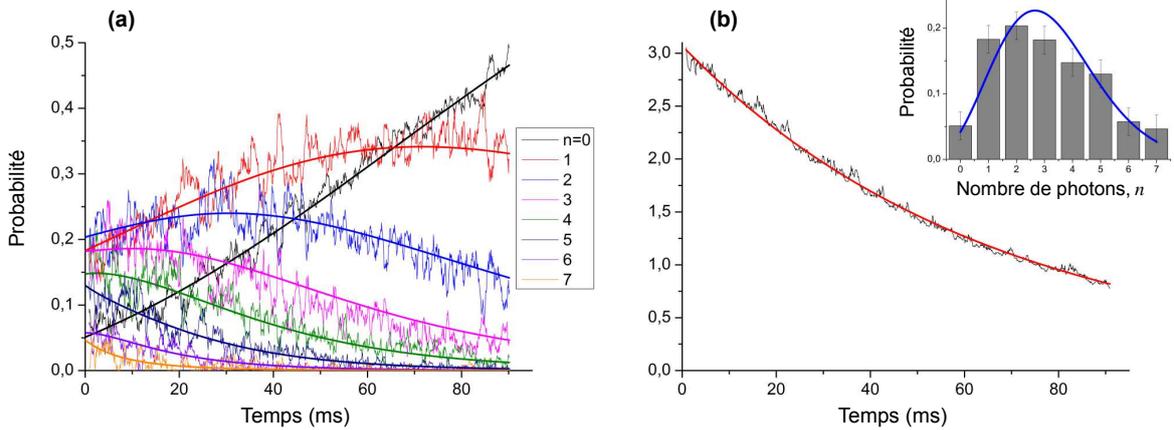


FIGURE II.5 – Reconstruction par maximum de vraisemblance sur l'exemple d'une injection de champ cohérent : **(a)** Évolution de la distribution du nombre de photons suite à l'injection (traits fins), obtenue par maximum de vraisemblance sur chaque fenêtre de 20 échantillons atomiques. On effectue pour cela 2000 itérations sur un ensemble de 6000 trajectoires. En traits épais est représenté l'ajustement d'une évolution selon l'équation maîtresse dont les seuls paramètres libres sont les valeurs de  $P(n)$  à l'origine. **(b)** Évolution du nombre moyen de photons donné par la méthode du maximum de vraisemblance (trait fin), et ajustement exponentiel (trait épais), le temps  $T_{\text{cav}}$  de décroissance étant fixé; on constate un très bon accord. En encart, on a représenté les valeurs obtenues de  $P(n, t = 0)$ . Les barres d'erreurs indiquées figurent l'écart quadratique moyen, minimisé lors de l'ajustement.

Cette reconstruction peut être exploitée afin d'estimer la distribution initiale du nombre de photons : on peut ajuster aux courbes obtenues l'évolution prédite par l'équation maîtresse, dont les paramètres  $n_{\text{th}} = 0,08$  et  $T_{\text{cav}} = 65$  ms sont connus par ailleurs<sup>5</sup>. Les paramètres libres sont alors les valeurs  $P(n, t = 0)$  de la distribution du nombre de photons à l'origine. Dans cet exemple, l'ajustement est effectué sur les 500 premiers points des courbes obtenues. L'histogramme obtenu à l'origine (en encart sur la figure II.5(b)) est compatible avec une loi de Poisson de nombre de photons moyen  $\langle n \rangle = 3,00 \pm 0,16$ . On peut également ajuster une loi exponentielle à l'évolution du nombre de photons moyen, avec pour seul paramètre libre la valeur moyenne initiale : on obtient un excellent accord pour la

5. La valeur du nombre de photons moyen à l'équilibre thermique utilisée ici est légèrement supérieure à la valeur théorique de 0,05. C'est la valeur obtenue à l'aide d'une calibration directe, dont le principe est donnée en annexe (Annexe B).

valeur initiale  $\langle n \rangle = 3,071 \pm 0,003$ , compatible avec la précédente. Le temps de décroissance exponentiel est fixé à  $T_{\text{cav}} = 65$  ms; la reconstruction (dans laquelle  $T_{\text{cav}}$  n'intervient pas) est comme on pouvait s'y attendre en très bon accord avec cette valeur.

## II.1.4 Interprétation en termes de pseudospin atomique

Pour clore cette partie, il est instructif de voir comment le processus de mesure que nous avons présenté peut se réinterpréter si l'on considère les détections atomiques comme des mesures sur un pseudospin.

### II.1.4.a Retour à la sphère de Bloch

Nous avons vu au paragraphe I.3.3.b, que la détection d'un atome après la traversée d'un interféromètre de Ramsey de phase  $\phi_r = -\varphi$ , peut s'interpréter comme la mesure du pseudospin atomique selon la direction  $\mathbf{u}_\varphi$ . Dans la section I.4.2, nous avons également interprété l'interaction dispersive d'une superposition atomique avec la cavité comme un simple déphasage du pseudospin dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. Finalement, lors de la mesure faible, nous essayons pour connaître le nombre de photons de mesurer la projection du pseudospin atomique qui lui est corrélé.

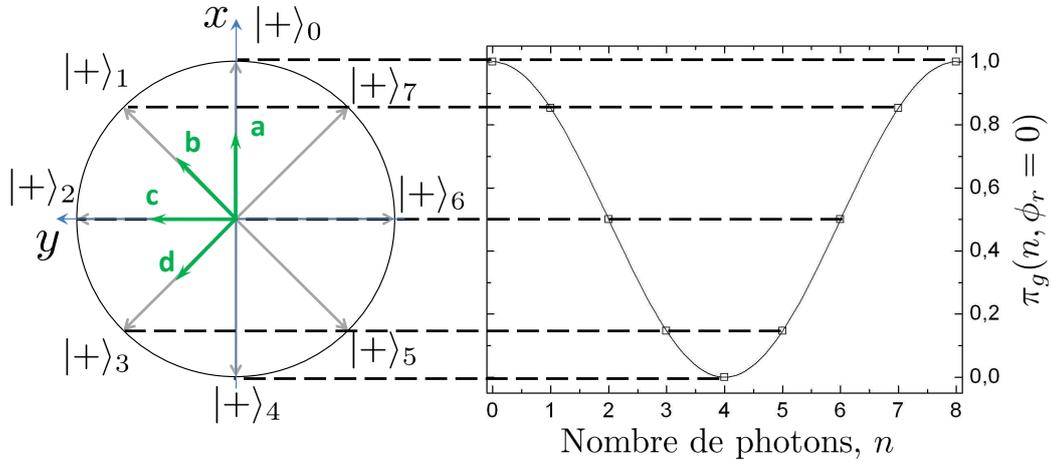


FIGURE II.6 – Décimation et sphère de Bloch. À gauche : Plan équatorial de la sphère de Bloch. La position des spins atomiques après interaction avec le champ préparé dans les états de Fock  $|0\rangle$  à  $|7\rangle$  est donnée pour un déphasage par photon  $\phi_0 = \pi/4$ . Les directions de mesures associées aux quatre phases de Ramsey  $a, b, c, d$  utilisées sont représentées. À droite : Probabilités conditionnelles  $\pi(g|n, \phi_a = 0)$ . Elles sont égales à une constante près à la composante  $S_x$  du spin atomique.

La figure II.6 illustre le lien entre probabilités conditionnelles de détection et projection du spin, pour un interféromètre de phase  $\phi_r = 0$  et un déphasage par photons  $\phi_a = \pi/4$ .

On a alors (*cf.* équation (I.67)) :

$$\pi(g|n, \phi_r = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\phi(n)) = \frac{1}{2} + \langle S_x \rangle.$$

La position du pseudospin dépendant de  $n$ , connaître précisément le pseudospin, c'est connaître le nombre de photons. On peut donc interpréter la nécessité d'effectuer de nombreuses mesures faibles comme découlant de l'impossibilité d'estimer la projection d'un spin  $1/2$  à l'aide d'une détection unique. L'estimation précise de la projection du spin ne peut se faire que par la mesure de nombreux atomes (ou pseudospins) ayant interagi avec  $n$  photons. De même, pour différencier les différents états de spin dans le plan de la sphère de Bloch, il est nécessaire d'en estimer au moins deux projections, d'où le besoin que nous avons de varier la phase de Ramsey au cours d'une mesure.

### II.1.4.b Mesure du déphasage par photon par tomographie de spin

Cette nouvelle interprétation nous fournit en outre une méthode pour mesurer les déphasages  $\phi(n)$  correspondant aux différents nombres de photons, et ainsi calibrer ces paramètres importants de l'expérience [65]. Si nous estimons assez précisément les projections orthogonales  $\langle S_x \rangle$  et  $\langle S_y \rangle$  du pseudospin atomique, nous pouvons en déduire sa direction  $\varphi$  :

$$\varphi = \arctan \frac{\langle S_y \rangle}{\langle S_x \rangle}.$$

En pratique, nous utilisons comme précédemment quatre phases de Ramsey  $a, b, c$ , et  $d$ , séparées de  $\pi/4$  environ, telles que les directions de mesures associées soient approximativement alignées sur les directions du pseudospin correspondant à 0,1,2 et 3 photons (situation représentée à la figure II.6). On a alors pour chaque direction de mesure  $j$  :

$$\langle S_j \rangle = \pi(g|j) - \pi(e|j).$$

Regroupant deux à deux les directions orthogonales entre elles, on peut obtenir deux estimations des composantes  $\langle S_x \rangle$  et  $\langle S_y \rangle$ . Notant  $(\phi_1, \phi_2) = (\phi_a, \phi_c)$  ou  $(\phi_b, \phi_d)$  :

$$\langle S_x \rangle = \frac{\langle S_1 \rangle \sin(\phi_2) - \langle S_2 \rangle \sin(\phi_1)}{\sin(\phi_2 - \phi_1)}, \quad \langle S_y \rangle = \frac{\langle S_1 \rangle \cos(\phi_2) - \langle S_2 \rangle \cos(\phi_1)}{\sin(\phi_1 - \phi_2)}. \quad (\text{II.35})$$

La moyenne de ces deux valeurs nous fournit une estimation des composantes du pseudospin.

Lors de la séquence expérimentale de calibration, l'injection d'un champ contenant environ 3,5 photons est suivi par l'envoi de 1800 échantillons atomiques interagissant dispersivement avec la cavité. La phase de Ramsey est alternée ( $a, b, c, d, a, \dots$ ), et prend donc des valeurs aléatoires pour les quelques 600 atomes effectivement détectés (la statistique du nombre d'atomes par échantillon étant poissonnienne). Pour chaque ensemble de 60 atomes détectés successifs, on estime les valeurs des projections du spin comme expliqué précédemment. Cette expérience est répétée 2000 fois, et l'on accumule toutes les valeurs de spin moyen estimées.

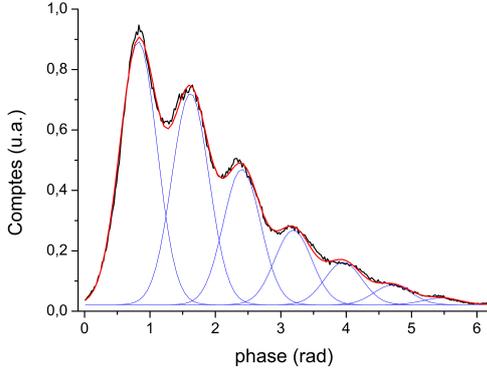


FIGURE II.7 – Histogrammes des phases des spins atomiques (estimés sur des ensembles de 60 atomes détectés successivement) après interaction avec un champ quantique contenant quelques photons. Des pics sont clairement visibles, mettant en évidence le nombre fini des positions possibles du spin dans le plan équatorial de la sphère de Bloch, *i.e.* la quantification du nombre de photons dans la cavité.

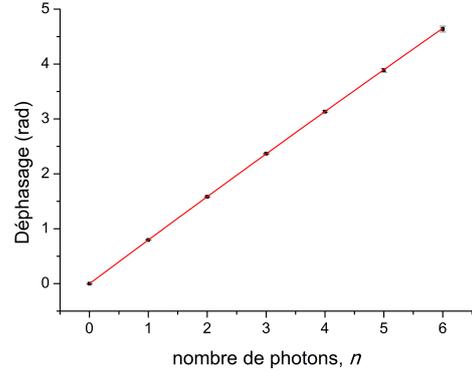


FIGURE II.8 – Calibration du déphasage par photon. Les points sont les positions des centres des gaussiennes obtenues à la figure II.7. La ligne continue correspond à un ajustement polynomial d'ordre 2. Le déphasage induit par  $n$  photons est trouvé valant :  $\phi(n) = (0,255 \pm 0,003) \pi n - (0,0015 \pm 0,0005) \pi n^2$ .

Ceci permet de représenter un histogramme des phases estimées (figure II.7), pour des intervalles de comptage de largeur  $0,02\pi$ . Celui-ci fait apparaître très clairement plusieurs pics régulièrement espacés. On met ainsi en évidence que le pseudospin occupe préférentiellement des positions discrètes bien déterminées dans le plan de la sphère de Bloch. L'effet dispersif dépendant de l'énergie du champ, et étant l'analogue d'un effet classique de déplacement lumineux, c'est en fait la quantification de l'énergie du champ qui est directement visible ici. Afin d'extraire de cette mesure les déphasages  $\phi(n)$ , on ajuste à cette courbe une somme de courbes gaussiennes de même largeur (représentées, ainsi que leur somme, à la figure II.7). Ceci permet d'extraire les positions des centres des pics en fonction du nombre de photons. Ces valeurs, tracées à la figure II.8, sont bien ajustées par une fonction quadratique de  $n$  :

$$\phi(n) = (0,255 \pm 0,003)\pi n - (0,0015 \pm 0,0005)\pi n^2.$$

Le terme quadratique est inclus pour décrire simplement l'éventuelle non-linéarité du déphasage par photon issue du développement des énergies propres. Ici, l'effet reste faible : pour  $n = 7$ , la contribution non-linéaire ne vaut que 4% de la valeur du terme linéaire. C'est cette forme simplifiée du déphasage par photon, obtenue pour un désaccord  $\delta = 2\pi \cdot 238$  kHz que nous utilisons dans nos expériences.

Le nombre d'atomes choisi pour effectuer l'estimation du spin résulte comme pour la décimation du nombre de photons d'un compromis : d'une part, l'augmentation du nombre

d'atomes permet de préciser l'estimation, et donc d'affiner les pics de l'histogramme ; d'autre part, si le temps nécessaire à l'accumulation de ces détections est trop élevé, le nombre de photons peut changer au beau milieu d'une fenêtre, et brouiller l'estimation. Ici la mesure de 60 atomes permet d'obtenir de pics bien distincts en une durée d'environ 15 ms, relativement courte par rapport au temps de vie de la cavité (65 ms).

Cette partie nous a permis de présenter le principe de la mesure quantique non-destructive «passive» du nombre de photons, telle qu'elle a été utilisée précédemment dans le groupe [107, 21, 22]. Nous avons également pu introduire des outils d'analyse des résultats dont nous nous resservons dans la suite de ce manuscrit. Nous allons maintenant présenter comment la possibilité de contrôler en temps réel notre dispositif expérimental peut être mise à profit pour améliorer cette mesure.

## II.2 Mesure adaptative

### II.2.1 Principe général

L'algorithme présenté ci-dessus est complètement pré-déterminé : l'alternance des directions de mesure est fixée, et l'accumulation des détections renseigne progressivement sur le nombre de photons. Or cette succession de mesures faibles n'est pas forcément la plus efficace pour projeter le champ dans l'état nombre de photons. Reprenant l'image du pseudospin, si après quelques détections la projection  $\langle S_x \rangle$  est déjà fortement contrainte, il est plus informatif de choisir pour les atomes suivants une mesure selon l'axe  $Oy$ . Ceci implique une *rétroaction* sur l'appareil de mesure (l'interféromètre de Ramsey). Cette notion de *mesure adaptative* a été initialement formulée dans le cadre de l'estimation de la phase d'un mode optique par Wiseman [46]. Elle peut également s'appliquer à notre système, où nous pouvons optimiser l'information apportée par chaque mesure faible.

#### II.2.1.a Extraction d'information lors d'une mesure faible

On peut considérer la mesure du nombre de photons que nous réalisons sous l'angle de l'information : d'un état quantique contenant potentiellement différents nombre de photons (en superposition quantique ou en mélange statistique), nous cherchons à extraire un seul nombre  $n_c$ . La mesure projective du nombre de photons (à l'aide de mesures faibles) fait donc passer notre *connaissance* du nombre de photons d'imprécise (l'estimation initiale uniforme de la distribution  $P(n)$ ) à exacte (projection dans un nombre de photon donné). Une grandeur usuelle pour quantifier ce manque d'information sur le nombre de photons est l'*entropie de Shannon* de la distribution  $P(n)$  :

$$S[P] \equiv \sum_n -P(n) \log_2 P(n). \quad (\text{II.36})$$

À l'aide de cette grandeur, on peut quantifier l'information manquante à chaque étape de la décimation. Une distribution uniforme pour les nombre de photons de 0 à  $n_{max}$  a pour

entropie  $\log_2(n_{max} + 1)$ . La distribution convergée  $P(n) = \delta_{n,n_c}$  est d'entropie nulle. Ainsi pour notre mesure des nombres de 0 à 7, l'entropie de la distribution uniforme est de 3 bits : il nous faut acquérir trois bits d'information pour connaître le nombre de photons (on peut les voir comme les 3 chiffres binaires de la décomposition de  $n_c$  en base 2)<sup>6</sup>.

Il est facile de montrer que la mesure faible introduite précédemment réduit systématiquement *en moyenne* l'entropie de la distribution. En effet, en notant  $P$  (resp.  $P'$ ) la distribution de nombre de photons avant et après la mesure à l'aide des deux POVM  $E_e$  et  $E_g$ , on peut écrire la valeur moyenne de l'entropie après la mesure :

$$\langle S[P'] \rangle = \pi_e S[P'_e] + \pi_g S[P'_g]. \quad (\text{II.37})$$

où nous avons noté  $P'_i$  ( $i = e, g$ ) la matrice densité obtenue après détection de l'état  $i$  et  $\pi_i$  la probabilité de cette détection. On a alors, en utilisant l'actualisation des probabilités  $P'_i(n) = E_i(n)P(n)/\pi_i$

$$\langle S[P'] \rangle = \sum_n \sum_i \pi_i \left( -\frac{E_i(n)P(n)}{\pi_i} \right) \log_2 \frac{E_i(n)P(n)}{\pi_i}. \quad (\text{II.38})$$

La fonction  $x \mapsto -x \log_2(x)$  est concave pour  $x \in [0, 1]$ , ce qui est le cas des termes sommés  $E_i(n)P(n)/\pi_i$ . De plus  $\sum_i \pi_i = 1$ . On peut alors écrire une inégalité de concavité (inégalité de Jensen) pour la somme sur  $i$  :

$$\langle S[P'] \rangle \leq \sum_n \left( -\sum_i E_i(n)P(n) \right) \log_2 \left( \sum_i E_i(n)P(n) \right) = S[P], \quad (\text{II.39})$$

puisque par définition des POVM  $\sum_i E_i(n) = 1$ . On a donc  $\langle S[P'] \rangle \leq S[P]$  : Il y a toujours réduction de l'entropie en moyenne par une mesure faible. Chaque mesure réalisée apporte de l'information sur le nombre de photons. Nous allons maintenant nous intéresser aux façons d'optimiser cette acquisition d'information dans le cadre de notre expérience.

### II.2.1.b Adaptation de la phase

Un premier paramètre sur lequel nous pouvons jouer est la phase de Ramsey  $\phi_r$ . On peut se convaincre de l'intérêt de l'ajustement de cette phase à l'aide de la figure II.9. Sur cette figure nous avons estimé pour une distribution  $P_k(n)$  (qui peut être vue comme le résultat de la décimation d'une distribution initiale uniforme par  $k$  détections), les distributions  $P_{k+1}(n)$  obtenues après détection de l'atome suivant, selon la direction de mesure employée. Pour cet exemple,  $\phi(n) = n \times \pi/4$  et les quatre directions de mesures sont alignées sur

---

6. Remarquons qu'il existe dans le cadre de la mécanique quantique une définition similaire de l'entropie appliquée aux matrices densités :  $S_q[\rho] = \text{Tr}(\rho \log \rho)$ . Cette entropie permet de quantifier la différence entre des mélanges statistiques et des états purs. Elle n'est ici d'aucune utilité puisque si l'état du champ est pur, il le reste sous l'effet de la décimation, et  $S_q = 0$  à tout instant. Ce que nous cherchons à quantifier est bien une entropie *d'information* sur le nombre de photons.

les pseudospins correspondant à 0,1,2 et 3 photons. Il illustre de manière claire le fait que certaines directions de mesures sont plus informatives que d'autres : la distribution étant piquée sur les nombres de photons 0 et 4, le choix de la direction de mesure  $a$ , alignée sur les pseudospins correspondants, permet de faire une distinction claire entre ces deux nombres. L'entropie moyenne après détection est donc minimale pour ce choix de phase. À l'inverse la direction  $c$ , orthogonale à ces deux contributions principales, n'apporte que très peu d'information : l'entropie moyenne est à peine réduite.

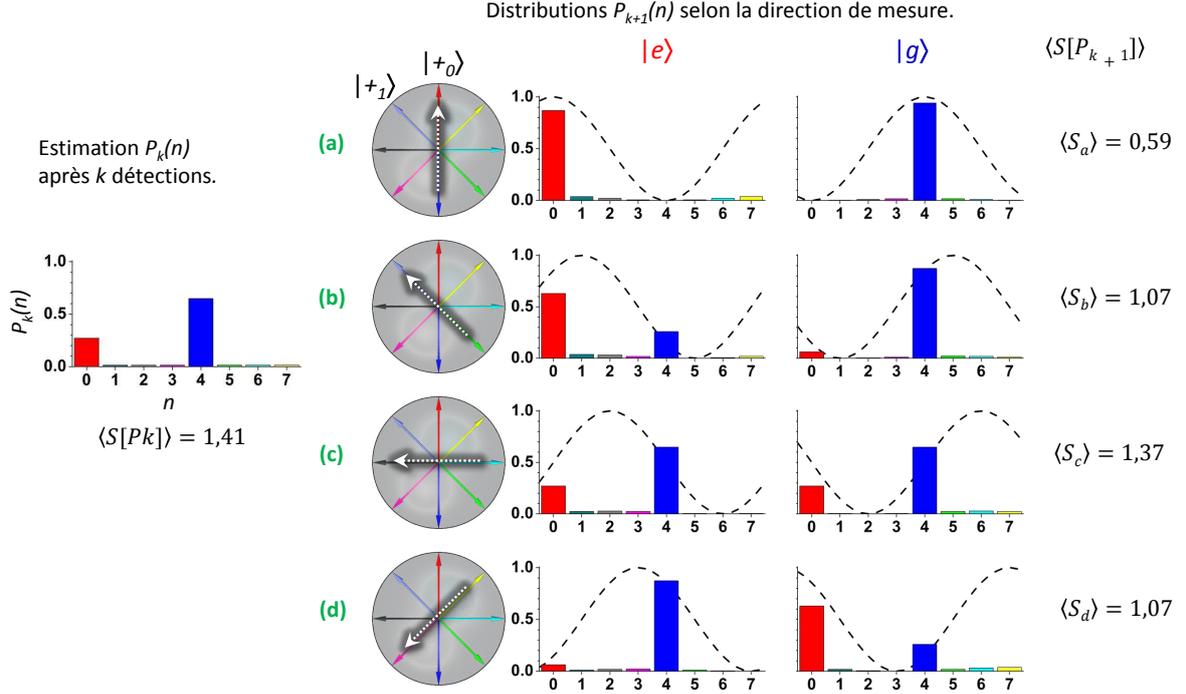


FIGURE II.9 – Optimisation de la phase de Ramsey : étant donnée la distribution après  $k$  détections atomiques  $P_k(n)$ , on peut calculer les distributions après détection de l'atome  $k+1$ , et l'entropie moyenne associée. Ceci fait permet de distinguer clairement les directions de mesure favorables (a) ou défavorables (c) à la réduction de l'entropie en moyenne.

On peut donc envisager d'«accélérer» la mesure, en faisant à *chaque détection* le choix de phase de Ramsey qui minimise l'entropie moyenne, dans le but de converger plus rapidement vers un état de Fock, d'entropie nulle :

$$\phi^{\text{opt}} = \arg \min_{\phi=a,b,c,d} \langle S[P'] \rangle(\phi). \quad (\text{II.40})$$

La direction de mesure optimale dépendant évidemment de la distribution du nombre de photons, ceci implique de pouvoir effectuer ce choix en temps réel. Cela est rendu possible par l'utilisation d'un ordinateur de contrôle en temps réel, capable d'effectuer les calculs d'entropie moyenne illustrés à la figure II.9, et de contrôler en fonction de l'optimum choisi les potentiels appliqués à la seconde zone de Ramsey pour ajuster la direction de mesure. C'est ce qui a été fait dans les expériences présentées dans ce mémoire.

## II.2.1.c Mesure optimale du nombre de photons

Il serait également envisageable de modifier d'un atome à l'autre la valeur du déphasage par photon  $\phi_0$ . Celui-ci dépend en effet linéairement du temps d'interaction effectif  $t_{\text{eff}} = \sqrt{\pi/2}w_0/v$ . L'utilisation d'atomes de vitesses différentes peut donc donner accès à différentes valeurs de  $\phi_0$ . En contrôlant à la fois le déphasage par photon et la direction de mesure en temps réel, il est possible de réaliser une mesure optimale du nombre de photons [108]. Nous en décrivons ici le principe, bien qu'elle n'ait pu être réalisée dans le cadre de cette thèse.

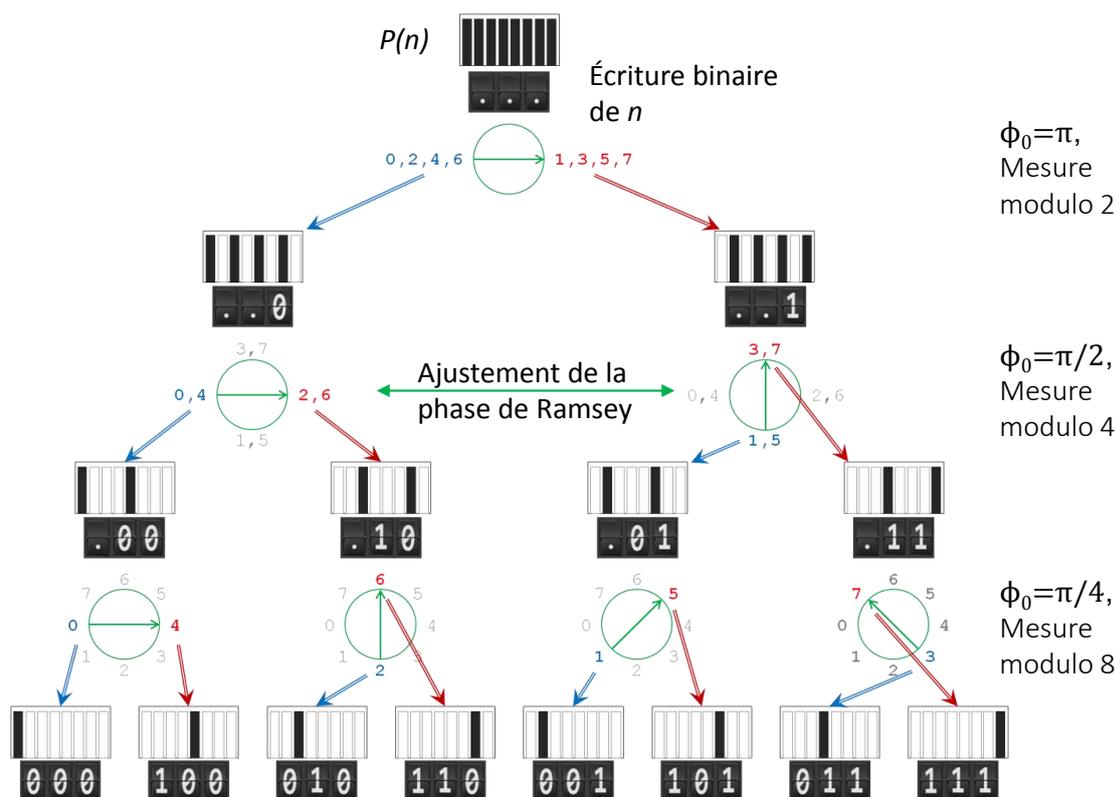


FIGURE II.10 – Décimation optimale du nombre de photons, illustrée pour  $n_{\text{max}} = 7$  : trois détections atomiques permettent la mesure des coefficients de l'écriture binaire du nombre de photons  $n$ . Pour cela le déphasage par photon est varié afin que les trois atomes effectuent une mesure de  $n$  modulo 2, 4 et 8 respectivement. Cette mesure est informative seulement si la direction de mesure est alignée sur des nombres de photons qui n'ont pas été exclus à la détection précédente, ce qui requiert également un ajustement de la phase de Ramsey à chaque étape.

Cette méthode permet de mesurer le nombre de photons entre 0 et  $n_{\text{max}} + 1 = 2^p$  à l'aide d'exactly  $p$  atomes (nous considérons pour cette description un interféromètre parfait). Elle est donc optimale en termes d'information. Elle consiste à chaque étape à

choisir le déphasage par photon de façon à ce que tous les nombres de photons possibles (à cette étape) soient corrélés à deux directions opposés seulement du pseudospin atomique. Le choix d'une direction de mesure alignée sur ces pseudospins permet alors une dichotomie des nombres de photons lors de la détection de l'atome. Une illustration de cette méthode est donnée à la figure II.10 pour  $n_{max} = 7$ . L'algorithme en est le suivant :

- À l'étape 1, la distribution du nombre de photons étant supposée uniforme, le déphasage par photon est fixé à  $\phi_0 = \pi$  ; les nombres de photons de 0 à  $n_{max} + 1$  sont donc corrélés à deux états orthogonaux de l'atome en sortie de la cavité, représentés par deux orientations opposées du pseudospin atomique. En mesurant l'atome selon cet axe à l'aide de la seconde zone de Ramsey, on réalise une mesure de parité de  $n$ , et la détection dans l'état  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  décime donc la moitié des nombres de photons possibles.
- À l'étape 2, le déphasage par photon est pris égal à  $\pi/2$ . Les nombres de photons restant possibles sont à une distance 2 les uns des autres, et sont donc à nouveau corrélés à deux états orthogonaux de l'atome. L'axe portant ces états *est conditionné par le résultat de la mesure précédente*. Connaissant le résultat de la mesure précédente, on peut ajuster la phase de Ramsey et mesurer l'atome selon cet axe, réalisant ainsi une mesure modulo 4 de  $n$ , et supprimant la moitié des possibilités restantes.
- À l'étape  $q$  le déphasage par photon est pris égal à  $\pi/q$ . Les nombres de photons restant possibles sont à une distance  $q$  les uns des autres, et sont corrélés à deux états orthogonaux de l'atome. La connaissance *de l'ensembles des résultats précédents* permet de déterminer l'axe portant ces états, et de réaliser une mesure modulo  $2^q$  de  $n$ , qui supprime la moitié des possibilités restantes.

De cette façon, chaque atome  $q$  détecté apporte exactement un «bit» d'information, qui est le coefficient de  $2^q$  dans l'écriture binaire de  $n$ . Il suffit donc en principe de  $n_{at} = \log_2(n_{max} + 1)$  pour déterminer complètement le nombre de photons.

En pratique l'interféromètre de Ramsey n'est pas parfait. Le contraste étant fini, on peut alors utiliser des groupes de quelques atomes pour chaque classe de vitesse (chaque déphasage par photon) pour préciser chacun des bits de  $n$  avec une fiabilité suffisante. On peut par exemple effectuer un vote majoritaire sur les détections de ces atomes, les deux possibilités à chaque étape étant corrélées aux deux états orthogonaux de l'atome. Le nombre d'atomes nécessaires à la mesure du nombre de photons est alors *proportionnel* au logarithme du nombre maximum de photons, le préfacteur dépendant du nombre d'atomes détectés par bit<sup>7</sup>. La mise en place de cette expérience requiert la préparation d'atomes circulaires pour au moins trois classes de vitesses différentes, et des contraintes de temps ont empêché sa réalisation dans la durée de cette thèse.

---

7. Ceci est vrai si l'on fixe la précision requise (le taux d'erreur) sur chacun des bits. Si l'on impose la contrainte sur le taux d'erreur *global* dans la détermination de  $n$ , plus le nombre de bits à déterminer sera grand, plus il faudra déterminer chacun d'eux avec un taux d'erreur plus faible pour satisfaire au taux d'erreur global. Le préfacteur au  $\log_2(n_{max} + 1)$ , issu du nombre  $p$  d'atomes mesurés par bit devient alors lui-même une fonction de  $n_{max}$ , qui croît cependant plus lentement que le logarithme.

## II.2.2 Expériences proposées

L'expérience que nous nous proposons de réaliser consiste donc à ajouter à la mesure QND une boucle de rétroaction classique, représentée à la figure II.11. Le système étudié est constitué par la cavité  $C$  et l'interféromètre atomique, le signal extrait de ce système (les résultats des détections), passe à travers un *filtre* (l'ordinateur de contrôle en temps réel  $K$ ), qui produit un paramètre de *contrôle* appliqué au système (la tension réglant la phase de Ramsey  $V_\phi$  – ce sont en fait les potentiels appliqués aux deux miroirs qui sont ajustés). Le filtre actualise son estimation de la distribution du nombre de photons  $P_k(n)$  (où  $k$  est l'indice de la détection), et détermine la phase optimale pour la mesure suivante,  $\phi_{k+1}^{\text{opt}}$  en minimisant selon cette estimation l'entropie moyenne :

$$\phi_{k+1}^{\text{opt}} = \arg \min_{\phi=a,b,c,d} \langle S[P_{k+1}] \rangle(\phi). \quad (\text{II.41})$$

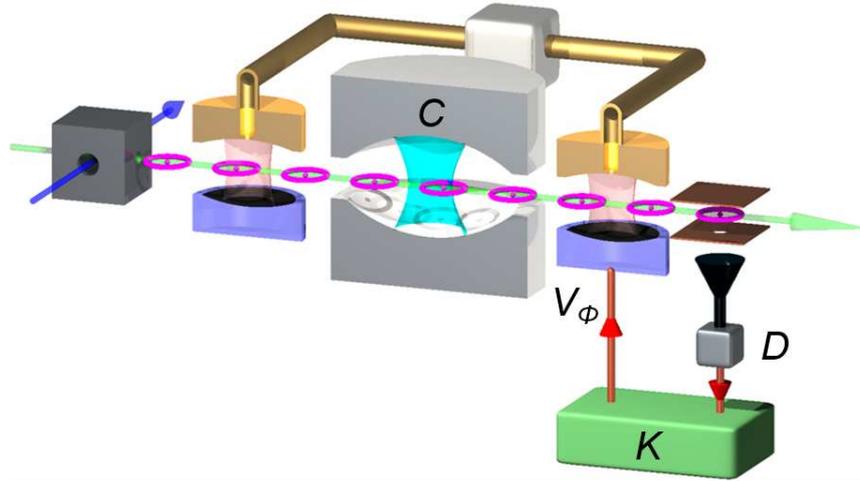


FIGURE II.11 – Schéma de l'expérience de mesure adaptative.

La relaxation n'est pas négligeable en général dans nos expériences : nous avons vu qu'une centaine d'atomes sont requis pour la convergence de la mesure « passive » du nombre de photons, ce qui correspond à une durée de 25 ms environ, durée qu'il faut comparer au temps de vie actuel de la cavité, 65 ms. Les sauts quantiques au cours de la mesure sont donc fort probables, même pour les petits nombres de photons.

Ceci a conduit à la réalisation de deux expériences distinctes dont nous donnons d'abord le principe (voir la figure II.12). Leur description détaillée sera donnée avec les résultats expérimentaux au chapitre IV.

**Mesure d'un état sélectionné :** Nous pouvons d'abord chercher à sélectionner des trajectoires pour lesquelles la relaxation n'a pas eu lieu. La mesure passive du nombre de photon permet comme nous l'avons vu d'observer les sauts quantiques entre deux nombres de photons. Si nous voulons nous assurer qu'il n'y a pas eu relaxation, nous

pouvons donc d'abord projeter le champ dans un état de Fock  $n = n_I$  à l'aide d'une mesure passive, puis tenter d'en faire une mesure adaptative (en «oubliant le résultat» de cette première projection), et enfin, par une nouvelle mesure passive pour laquelle  $n = n_F$ , vérifier que le nombre de photons n'a pas changé pendant la mesure adaptative ( $n_I = n_F$ ). Cette élimination *a posteriori* des phénomènes de relaxation nous permettra de jauger les effets de la mesure adaptative dans un contexte simple.

**Préparation d'un état de Fock :** La mesure précédente, où certaines trajectoires seulement sont sélectionnées, ne peut être envisagée que comme mesure de test. Dans la perspective plus réaliste de la préparation d'états de Fock, comme ressource quantique par exemple, ou si nous souhaitons intégrer la mesure adaptative à des algorithmes existants de rétroaction quantique utilisant la mesure faible [38, 40, 65], comme une amélioration de la mesure par décimation, il nous faut pouvoir estimer l'état correctement, en présence de relaxation, en temps réel. L'estimation guidant l'adaptation de la phase doit alors être aussi fidèle que possible à l'état réel ; ceci requiert de prendre en compte la relaxation à chaque étape, ainsi que la distribution de l'état initial.

Pour vérifier l'efficacité d'une telle mesure «réaliste» avec adaptation de phase, nous nous proposons de préparer le champ dans un état de Fock  $|n = n_c\rangle$  à l'aide d'une mesure adaptative. Nous espérons ainsi obtenir une convergence plus rapide vers un état nombre avec un certaine pureté :

$$P(n_c) \geq P_{\text{seuil}}.$$

Pour les expériences présentées dans ce mémoire, le seuil de 80% a été choisi. Après convergence, nous pourrions utiliser une mesure passive pour reconstruire l'état par maximum de vraisemblance et ainsi vérifier le résultat.

**Expériences témoins :** Il sera bien sûr nécessaire de réaliser des expériences pour lesquelles la phase ne sera pas adaptée (mesure passive usuelle), afin de caractériser l'amélioration apportée par l'adaptation de la phase. Ceci devra être fait tant dans des circonstances où nous nous affranchissons de la relaxation que dans le cas plus réaliste de la préparation d'états de Fock. Dans ce dernier cas il faudra également prendre en compte l'état initial et la relaxation.

### II.2.3 Estimateur quantique

Nous précisons dans cette section quelques éléments de l'estimation des probabilités, telle qu'elle sera effectuée en temps réel dans notre expérience. Nous expliciterons d'abord la prise en compte de détections atomiques multiples, puis celle de la relaxation. Soulignons que ces précisions sont valables aussi bien pour nos expériences que pour les expériences passives déjà présentées [22, 25].

Remarquons avant toute chose que l'action des POVM de mesure ou de la relaxation ne couple les populations du champ qu'entre elles, sans qu'interviennent les cohérences du champ. Notre but étant la mesure d'états de Fock, donc essentiellement la convergence

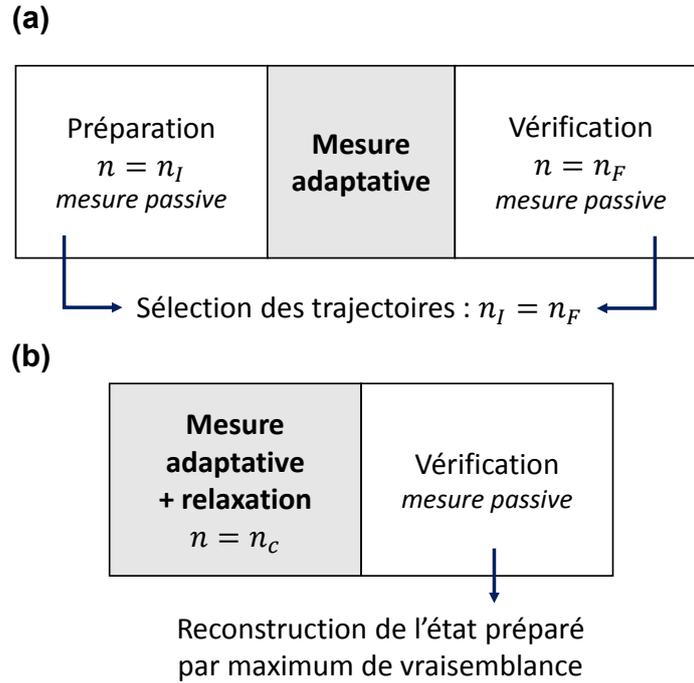


FIGURE II.12 – Structure schématique des expériences proposées. Dans une première expérience (a), nous pouvons effectuer avant et après une mesure adaptative de durée fixe deux mesures passives du nombre de photon ; en sélectionnant les traces pour lesquelles ce nombre n'a pas changé entre les mesures passives, on «enlève» la relaxation du système. Dans l'expérience (b), la décimation des populations avec une phase adaptée s'accompagne d'une prise en compte de la relaxation ; une mesure passive permet ensuite la reconstruction de l'état préparé.

d'une population vers 1, nous pouvons nous contenter simplement de manipuler les populations  $P(n)$  dans notre estimation d'état. Ceci a l'avantage de simplifier grandement les calculs, puisque les objets traités sont des vecteurs de taille  $N_{\mathcal{H}} = n_{\max} + 1$ , taille de l'espace de Hilbert tronqué ( $N_{\mathcal{H}} = 8$  ici), au lieu de matrices densité de taille  $N_{\mathcal{H}}^2$ . Ceci apporte une réduction du temps de calcul bienvenue pour parvenir au contrôle en temps réel de l'expérience.

### II.2.3.a Décimation et détections atomiques

Nous avons donné, à l'équation (II.14) les POVM  $E_g(\phi_r)$  et  $E_e(\phi_r)$  associés à la détection d'un atome unique après interaction avec le champ. En pratique, les échantillons atomiques traversant la cavité contiennent un nombre aléatoire d'atomes suivant une distribution de Poisson ( $P_a(n_a) = e^{-\bar{n}_a} \bar{n}_a^{n_a} / n_a!$ ), et il faut nous assurer de pouvoir encore décrire correctement la mesure dans ce cadre. En effet, le passage de deux atomes dans la cavité est *a priori* plus complexe à décrire : le couplage global entre atomes et champ est aug-

menté, et des phénomènes de collisions assistées [109] peuvent par exemple se produire, lors desquels les deux atomes échangent leurs excitations par le biais de photons virtuels. Nous avons cependant pu vérifier par des simulations que pour la valeur de désaccord employée ( $\delta = 2\pi \cdot 238$  kHz), le couplage simultané de deux atomes induit la même modification de l'état du champ que le passage successif de deux atomes en couplage dispersif.

Cette approximation est valide pour deux atomes effectivement couplés à la cavité. Or, tous les atomes traversant la cavité ne sont pas nécessairement détectés. Les composants des détecteurs (lentilles et multiplicateurs d'électrons) ne fonctionnent pas parfaitement, et conduisent à une efficacité de détection  $\epsilon_d < 1$ . Dans le cas général, pour estimer précisément la matrice densité du champ en présence d'erreurs de détection, il faut construire une *carte quantique* réalisant le mélange statistique de tous les résultats ayant pu conduire à la détection constatée (voir par exemple [65]). Cette description est considérablement simplifiée dans notre cas. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe II.1.1.d, les POVM à un atome  $E_e$  et  $E_g$  ne modifient pas les populations lors d'une mesure non-lue. Les détections à deux atomes pouvant être considérées comme deux mesures successives à un atome, ceci reste vrai dans la mesure où l'on a pas plus de deux atomes *réellement couplés* à la cavité. Si l'on ne s'intéresse qu'aux probabilités, on a donc formellement :

$$\mathbb{M}_{nl}P = P. \quad (\text{II.42})$$

c'est-à-dire que l'action d'une mesure non-lue (équivalente à la non-détection d'un atome ayant interagi avec la cavité) ne modifie pas les probabilités des nombres de photons.

Ainsi, *seuls les atomes effectivement détectés* modifient notre estimation de la distribution du nombre de photons. Nous n'avons formellement pas à prendre en compte l'efficacité de détection pour suivre l'évolution des populations.

À la *détection*  $\mu$  correspond donc la modification des populations :

$$P \mapsto P' = \mathbb{M}_\mu P = \frac{E_\mu P}{\|E_\mu P\|_1}. \quad (\text{II.43})$$

où l'on note pour un vecteur  $Q$  de composantes  $Q(n)$  positives  $\|Q\|_1 = \sum_n Q(n)$ . Les POVM associés aux résultats de détection doubles  $\mu \in \{ee, gg, eg\}$  s'écrivent simplement :

$$E_{ee}(\phi_r) = E_e(\phi_r)^2, \quad E_{gg}(\phi_r) = E_g(\phi_r)^2, \quad E_{eg}(\phi_r) = E_e(\phi_r)E_g(\phi_r).$$

**Efficacité de détection :** Les résultats simples donnés ci-dessus sont valides dans la limite où l'on a *pas plus de deux atomes* à la fois dans la cavité. Il faut donc nous soucier du nombre d'atomes *réel* (et non pas mesuré) traversant la cavité. Ce nombre moyen d'atomes réels  $\overline{n_a^{(r)}}$  est lié au nombre moyen d'atomes *détectés*  $\overline{n_a^{(d)}}$  par l'efficacité de détection :

$$\overline{n_a^{(r)}} = \frac{\overline{n_a^{(d)}}}{\epsilon}.$$

La valeur de l'efficacité de détection a varié au cours de l'histoire du montage : valant initialement 0,85, elle a diminué pour atteindre dernièrement la valeur  $\epsilon_d = 0,30 \pm 0,05$  pour les expériences présentées ici<sup>8</sup>. On trouvera plus de détails sur sa mesure précise par exemple dans la thèse de Clément Sayrin [66]. Cette valeur nous a amené à limiter le nombre d'atomes *défectés* par échantillon à  $\overline{n_a^{(d)}} = 0,35$ . Une telle valeur assure d'une part suffisamment de détections pour que la mesure converge sur un temps plus court que le temps de vie de la cavité, et d'autre part que les évènements à plus de 2 atomes ne représentent que 8% des cas. Nous négligerons ces évènements dans la suite.

### II.2.3.b Relaxation

Nous devons dans certaines étapes de nos expériences prendre en compte la relaxation du champ dans la cavité. Pour cela nous utiliserons le développement au premier ordre de l'équation maîtresse (I.22), pour l'intervalle de temps  $T_a = 83 \mu\text{s} \ll T_{\text{cav}}$ . Si l'on se limite aux populations, cette relaxation élémentaire prend la forme [25] :

$$\mathbb{T}P = (\mathbb{1} + \tau L)P, \quad (\text{II.44})$$

où  $\tau = T_a/T_{\text{cav}}$  et la matrice  $L$  est donnée par ses éléments non-nuls (l'indice  $n$  est ici tel que  $0 < n < n_{\text{max}}$ ) :

$$\begin{aligned} L_{0,0} &= -n_{\text{th}}, & L_{0,1} &= 1 + n_{\text{th}}, & (\text{II.45}) \\ L_{n,n-1} &= n n_{\text{th}}, & L_{n,n} &= -[n(1 + n_{\text{th}}) + (n + 1)n_{\text{th}}], & L_{n,n+1} &= (1 + n)(1 + n_{\text{th}}), \\ L_{n_{\text{max}},n_{\text{max}}-1} &= n_{\text{max}} n_{\text{th}}, & L_{n_{\text{max}},n_{\text{max}}} &= -n_{\text{max}}(n_{\text{th}} + 1). \end{aligned}$$

Notons qu'il est tout à fait possible de mener le développement à un ordre supérieur. Toutefois, le paramètre  $\tau$  étant de l'ordre de  $10^{-3}$ , nous nous contenterons du premier ordre, notamment afin d'assurer la rapidité du calcul numérique.

**Remarque :** Nous avons donné les lois nécessaires à l'actualisation de la distribution de probabilités. De manière générale, dans nos expériences, c'est une distribution *estimée* que nous manipulons : les expériences présentées plus haut portaient ainsi d'une distribution plate du nombre de photons, qui ne correspond pas à l'état réel initialement injecté. Nous nous sommes déjà convaincus que la distribution estimée convergeait vers le même nombre de photons que la distribution réelle lors de la mesure QND (voir le paragraphe II.1.1.e). Il est intéressant de mentionner une propriété plus générale. Définissons la fidélité [110] :

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr} \left( \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right),$$

---

8. On peut probablement accuser le vieillissement des multiplicateurs d'électrons, ainsi que des défauts d'alignement résiduels des détecteurs, suite à un accident grave survenu sur le cryostat à azote.

pour deux matrices densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . Cette définition, qui coïncide avec la définition usuelle pour des états purs, est l'une des généralisations possibles de la fidélité aux matrices densités. Alors, si l'on considère à chaque étape de notre processus discret de mesure l'état réel  $\rho^{(r)}$  et l'état estimé  $\rho^{(e)}$ , on peut montrer [111] que la fidélité  $\mathcal{F}(\rho^{(r)}, \rho^{(e)})$  entre état réel et estimé ne peut qu'augmenter en moyenne au cours de la mesure, aussi différents soient-ils au départ (à condition qu'ils aient le même support).

## Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter comment le couplage dispersif des atomes et du champ peut être exploité pour réaliser une mesure idéale (de von Neumann) du nombre de photons dans la cavité. Celle-ci s'obtient comme le résultat d'un grand nombre de mesures faibles effectuées par des atomes individuels. Nous avons vu comment des expériences où la phase de Ramsey définissant la mesure prend des valeurs discrètes séparées de  $\pi/4$  de façon aléatoire ont déjà permis d'observer de nombreuses caractéristiques du comportement quantique du champ : quantification du nombre de photons et sauts quantiques, relaxation des populations en moyenne suivant un équation maîtresse.

Nous avons pu constater ensuite que cette méthode n'est cependant pas optimale en termes d'acquisition d'information : on peut envisager d'aboutir plus vite au résultat recherché (un nombre de photons) en modifiant les caractéristiques de notre appareil de mesure (l'interféromètre de Ramsey) en fonction de l'information déjà acquise. Nous avons donc présenté le principe de deux expériences dans lesquelles nous voulons adapter en temps réel la phase de Ramsey. Le but du prochain chapitre est de préciser les détails de leur mise en œuvre dans notre montage expérimental.

# Chapitre III

## Mise en œuvre expérimentale

Dans le chapitre précédent nous avons établi le principe des expériences que nous voulons réaliser. Elles se fondent essentiellement sur l'estimation d'état et le contrôle en temps réel de la phase de Ramsey. Ce chapitre a pour objectif de préciser comment nous réalisons ce contrôle en pratique. Une première partie sera donc consacrée à la présentation du système de contrôle en temps réel de l'expérience et de son fonctionnement.

Dans une seconde partie nous tâcherons de décrire la calibration des différents paramètres expérimentaux qui interviennent dans notre estimation d'état, au premier rang desquels les franges de Ramsey. Nous évoquerons également les problèmes de dérives de phase qui ont été rencontrés, et les solutions qu'on y a apporté.

### III.1 Contrôle en temps réel

Les expériences menées au sein du groupe jusqu'en 2010, telle la mesure «passive» du nombre de photons, s'effectuaient en temps différé. Un logiciel développé au laboratoire par Stefan Kuhr, permettait de régler l'enchaînement des opérations nécessaires à la réalisation d'une expérience (impulsions digitales, rampes de potentiel), puis de charger ces informations dans une carte National Instruments (NI). On déclenchait ensuite l'exécution par la carte de cette séquence pré-programmée. Les résultats (les détections atomiques) étaient enregistrés puis analysés *a posteriori*. Nous appellerons dans ce qui suit les opérations réalisées par ce système *contrôle passif*.

Le développement d'expériences de rétroaction quantique [66, 67] au laboratoire a nécessité l'acquisition d'un système capable d'effectuer l'analyse de données et la modification de paramètres *en temps réel*. Il s'agit d'un système ADwin-Pro II de la société Jäger Messtechnik. À l'aide de ce système on peut en principe contrôler l'ensemble de l'expérience de la même façon qu'avec le système NI. Cependant afin de simplifier la mise en place des expériences, nous avons fait le choix de faire fonctionner de concert ancien et nouveau système, ce dernier ne réalisant que les opérations nécessitant un contrôle en temps réel, ou *contrôle actif*. L'adaptation de ce système à notre expérience a été réalisée par Igor Dotsenko.

Dans les sections qui suivent nous décrirons le principe du fonctionnement simultané des deux systèmes : après le partage des opérations entre contrôle passif et actif, nous présenterons plus en détails le système ADwin, puis comment sont synchronisés les deux systèmes dans une séquence expérimentale de mesure adaptative.

### III.1.1 Deux systèmes de contrôle

#### III.1.1.a Répartition des tâches

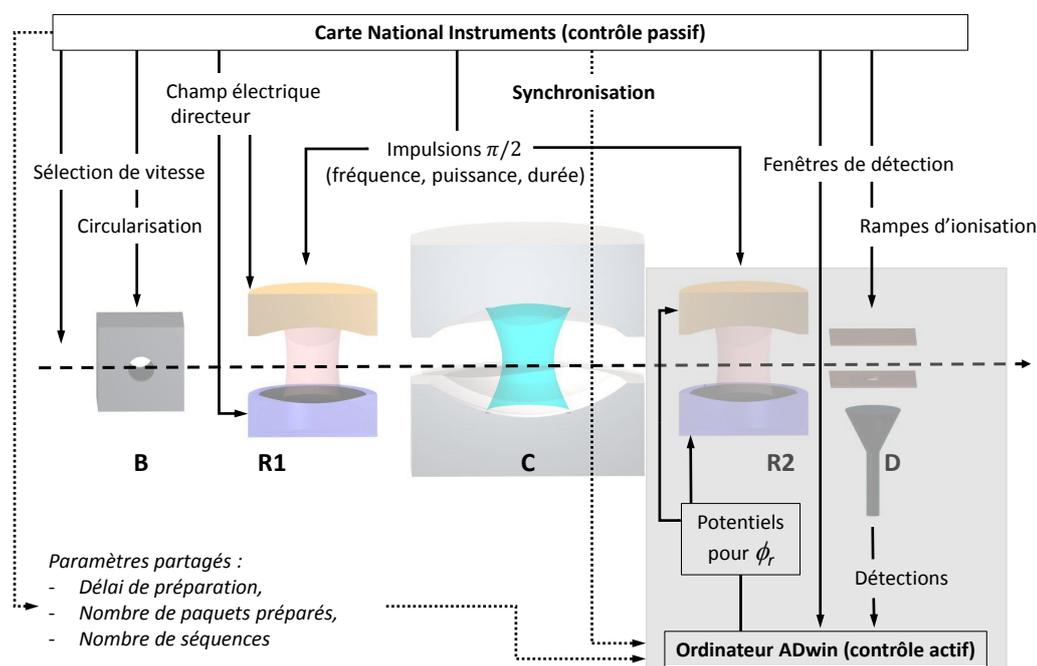


FIGURE III.1 – Répartition des tâches entre les deux systèmes de contrôle. L'essentiel des événements sur le parcours d'un atome est pré-programmé et contrôlé par la carte National Instruments. Le système temps réel ne contrôle que les paramètres nécessaires à la rétroaction (rectangle grisé). Un certain nombre de paramètres sont partagés entre les deux systèmes, qui doivent également être synchronisés.

La figure III.1 donne la répartition des tâches à exécuter sur un échantillon atomique lors d'une expérience entre les systèmes de contrôle passif et actif. Un grand nombre de paramètres restent « passifs », et ne requièrent pas un contrôle en temps réel : c'est le cas de tous les paramètres de préparation des atomes, des potentiels maintenant le champ électrique directeur dans le montage, des impulsions  $\pi/2$  dans les zones de Ramsey, des rampes d'ionisation détectant les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ . L'ancien système National Instruments peut parfaitement continuer à assurer ces opérations, dont le déroulement temporel est donc pré-défini, puis exécuté de façon passive.

Nous n'utilisons le système ADwin que pour ce qui est nécessaire à la rétroaction en temps réel. Afin d'estimer l'état, l'ordinateur ADwin doit connaître les résultats de détection ; il est donc connecté à la sortie du détecteur à ionisation (dont les rampes de potentiel restent contrôlées par le système National Instruments). C'est également lui qui contrôle la valeur des potentiels des miroirs de la seconde zone de Ramsey, afin de pouvoir fixer la phase de Ramsey optimale.

Ces deux systèmes partagent des paramètres généraux de l'expérience, tels le nombre d'échantillons atomiques par séquence, de répétitions d'une même séquence, où le délai entre deux échantillons (celui-ci est fixé par la préparation, contrôlée par le système passif, mais est nécessaire à l'estimation de la relaxation par le système actif). Enfin, il est évident que le fonctionnement des deux systèmes de concert nécessite une synchronisation : c'est le système ADwin qui est référencé sur l'ancien système. Nous reviendrons en détail sur le déroulement temporel du fonctionnement conjoint des deux systèmes, après avoir présenté les caractéristiques techniques du système de contrôle actif.

### III.1.1.b L'ordinateur de contrôle en temps réel

Le système de contrôle en temps réel doit essentiellement analyser les résultats de détection pour choisir les potentiels à appliquer à la seconde zone de Ramsey. L'ADwin a une structure modulaire, et nous utilisons ici trois modules, mis en évidence à la figure III.2 sur la face avant du système complet.

**La carte du processeur central, ou CPU** C'est la pièce maîtresse du système, contrôlant les autres modules. C'est là que s'effectue l'estimation d'état nécessaire à l'optimisation de la phase.

Ce processeur, cadencé à 300 MHz, a pour principale caractéristique (et intérêt) d'être très fiable temporellement, tant au niveau du délai d'exécution entre opérations, qui est très stable, que du temps de réponse à une requête (qui est de  $(300 \pm 30)$  ns). Ceci est évidemment capital pour nos expériences, l'instant de déclenchement et la durée d'une boucle de rétroaction devant être bien définis et reproductibles tout au long d'une séquence.

Cette carte comporte différents espaces de mémoire : une mémoire interne à accès rapide et stable de 250 kB, où peuvent être stockées les variables nécessaires au calcul rapide en temps réel, et une mémoire externe pour laquelle les temps d'accès sont plus longs et moins stables, de 250 MB. L'ensemble peut donc contenir aisément le code source à exécuter, les variables temporaires nécessaires au calcul en temps réel, et tous les résultats d'une séquence expérimentale.

Lors de son fonctionnement au sein de l'expérience, le processeur exécute en fait un code pré-compilé : préparé sur un ordinateur externe, celui-ci est enregistré en mémoire de l'ADwin avant le début de toute séquence. Ce code est subdivisé en *processus* (sous-programmes entre lesquels on peut basculer), chaque processus étant lui-même composé d'*événements*. L'exécution du code correspondant à un événement est déclenché par un signal TTL reçu sur l'entrée «Event IN» du module CPU,

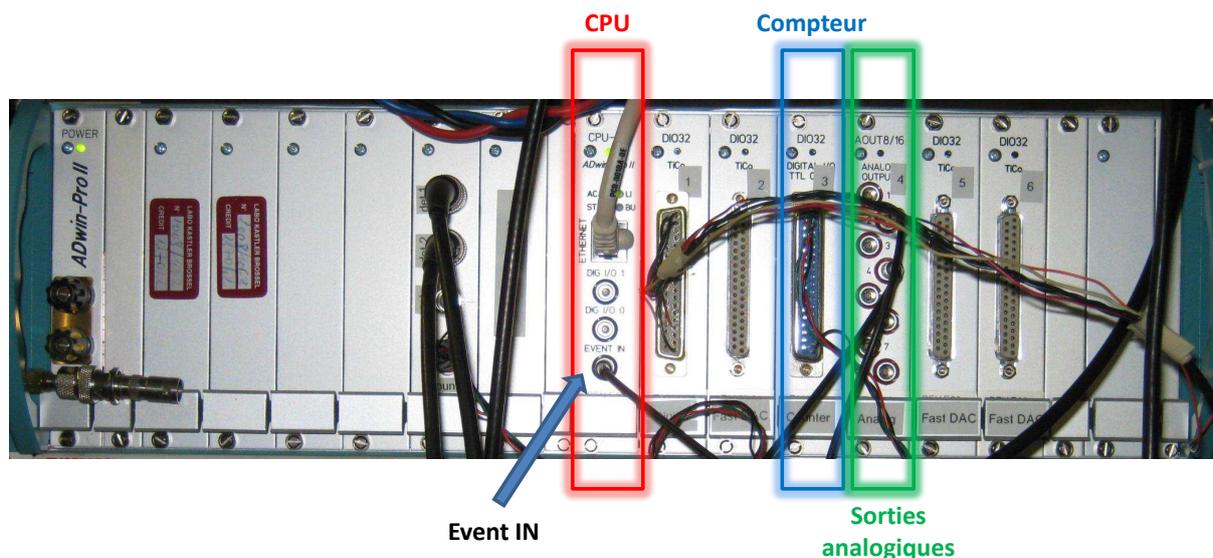


FIGURE III.2 – Vue de la façade de l’ordinateur de contrôle ADwin Pro-II. Cinq types de cartes peuvent être utilisés : en rouge, la carte CPU contenant le processeur principal, dont l’entrée «Event IN» est indiquée par une flèche (voir texte) ; en bleu la carte compteur ; en orange, une carte à 8 sorties analogiques utilisée pour contrôle des potentiels définissant la phase de Ramsey. Les quatre cartes restantes, essentiellement des sorties digitales, n’ont pas été utilisées dans les travaux présentés ici.

indiquée sur la figure III.2. C’est par l’intermédiaire de ce signal, émis par le système passif, que les deux ordinateurs sont synchronisés. Nos expériences n’emploient qu’un processus, un évènement étant associé à une préparation atomique, ou, de manière équivalente, une exécution de la boucle de rétroaction.

**La carte compteur, ou CNT** Cette carte permet au système ADwin de compter le nombre d’atomes détectés dans les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ . Nous avons donné au paragraphe I.3.1.d le principe de ce comptage : des fenêtres de détections sont définies dans le temps d’exécution de la rampe d’ionisation, et la détection d’un signal électronique est associée à  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  selon l’instant de sa réception.

En pratique, nous n’utilisons que deux entrées de la carte compteur. Elle reçoit d’une part sur une entrée «Compteur», le signal issu du détecteur à ionisation, et mis en forme : à une impulsion TTL correspond la détection d’un atome. D’autre part, elle reçoit sur une entrée «Porte» des impulsions TTL (impulsions portes) correspondant au début et à la fin de chaque fenêtre de détection.

Ces entrées sont exploitées de la façon suivante : La carte dispose d’un horloge interne déclenchée par le CPU. À partir de ce déclenchement, les impulsions qui arrivent sur l’entrée «Compteur» incrémentent un entier  $n$  (avec une résolution temporelle de 20 ns). Par la suite, à chaque réception d’une impulsion sur l’entrée «Porte», la valeur de cet entier est stockée dans une pile FIFO (*First-In-First-Out*). La différence entre deux valeurs successives de cette pile fournit donc le nombre d’atomes par fenêtre.

Ce fonctionnement est illustré à la figure III.3. C'est le processeur central qui vide à chaque boucle de rétroaction la pile FIFO pour lire les quatre dernières valeurs inscrites, et en déduit les comptes d'atomes  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ .

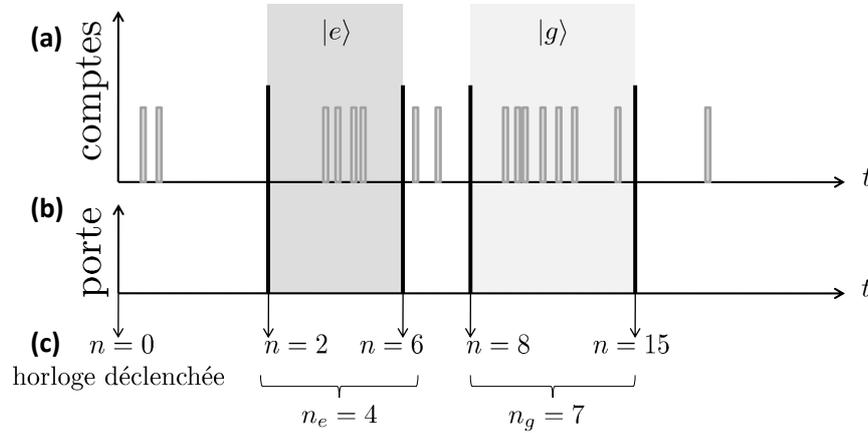


FIGURE III.3 – Comptage des atomes. (a) Signaux TTL reçus sur l'entrée «Compteur» de la carte du même nom. Chaque impulsion correspond à un atome détecté par le détecteur à ionisation. (b) Signaux TTL reçus sur l'entrée «Porte» de la carte compteur. Elles définissent deux fenêtres de détection (en grisé), l'une pour les atomes  $|e\rangle$ , l'autre pour les atomes  $|g\rangle$ . (c) À chaque impulsion porte reçue, le nombre  $n$  de comptes est enregistré. La différence entre deux comptes successifs donne le nombre d'atomes détectés dans la fenêtre temporelle correspondante. Ici,  $n_e = 4$  atomes  $|e\rangle$  et  $n_g = 7$  atomes  $|g\rangle$  sont détectés.

**La carte de sorties analogiques** Ce module comporte 8 sorties analogiques, directement contrôlées par le CPU. Elles ont un temps de réponse relativement lent (établissement du potentiel en un temps de l'ordre de  $2\ \mu\text{s}$ ), qui convient cependant au contrôle des potentiels dans la seconde zone de Ramsey. Nous utiliserons donc deux de ses sorties, notées  $AO1$  et  $AO2$ .

### III.1.1.c Fonctionnement simultané des deux systèmes

Nous représentons sur la figure III.4 le déroulement temporel des événements subis par un échantillon atomique lors de sa traversée de l'expérience, en prenant comme référence l'impulsion laser à  $780\ \text{nm}$  qui constitue le premier échelon de la préparation atomique. Ces événements font maintenant intervenir deux systèmes de contrôle, et doivent être exécutés à des instants bien déterminés. Plus précisément, de nombreuses expériences visant à régler les paramètres expérimentaux sont habituellement menées avec le système passif seul. C'est le cas du choix des fenêtres de détection, et de l'instant de commutation des potentiels de la zone de Ramsey. Il nous faut donc prendre soin que le déroulement temporel de ces événements reste le même lorsque nous utilisons le système actif. C'est l'objet de cette section.

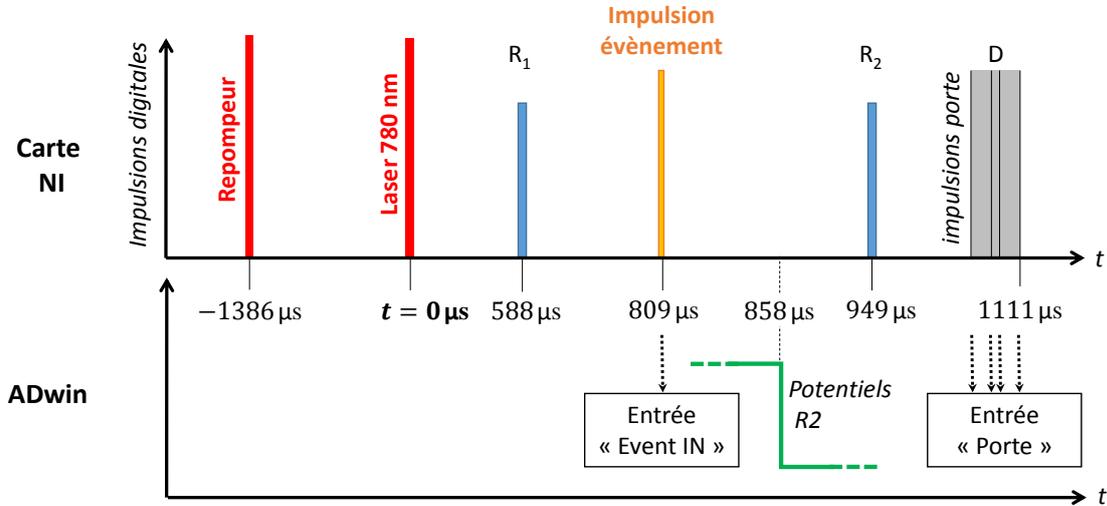


FIGURE III.4 – Chronologie des événements pour une préparation atomique unique (l'échelle n'est pas respectée pour faciliter la lecture) : la référence temporelle est l'impulsion du laser à 780 nm ; elle est précédée à  $t = -1386 \mu\text{s}$  de l'impulsion du repompeur, ce qui permet la sélection par temps de vol ; l'échantillon subit une impulsion  $\pi/2$  en  $R_1$  centrée sur  $588 \mu\text{s}$ , et traverse la cavité (non représentée) ; la tension sur les miroirs de la zone de Ramsey est commutée (si nécessaire) à  $858 \mu\text{s}$ , peu avant l'entrée dans la zone de Ramsey (on ne représente ici schématiquement que la tension appliquée à un des miroirs) ; une seconde impulsion  $\pi/2$  centrée sur  $949 \mu\text{s}$  ferme l'interféromètre atomique ; la détection de l'échantillon s'achève quant à elle à  $1111 \mu\text{s}$ . La commutation des potentiels est déclenchée par une impulsion évènement envoyée à l'ADwin  $809 \mu\text{s}$  après la préparation atomique.

**Comptage des atomes** Le système actif est chargé de compter pour chaque échantillon atomique, le nombre d'atomes dans  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , le contrôle des paramètres de détection (rampe d'ionisation, fenêtres de détection) restant à la charge du système passif. Pour obtenir les mêmes résultats de détection avec le nouveau système, il est en principe suffisant de fournir à la carte compteur ADwin les mêmes signaux de détection, et les mêmes impulsions porte qu'à la carte NI, comme nous l'avons également représenté à la figure III.4.

Les cartes compteur sont cependant distinctes, et peuvent avoir des comportements différents. En particulier le temps de latence entre la réception d'une impulsion porte et la lecture du compte associé peut différer d'une carte à l'autre. Si ces temps de latence sont trop dissemblables, des comptes détectés dans  $|e\rangle$  avec le système passif peuvent être lus comme des compte dans  $|g\rangle$  avec le système actif.

La comparaison précise des comptes fournis par les deux cartes compteur a été effectuée durant la thèse de Clément Sayrin [66]. Le comptage du système actif identique à celui du

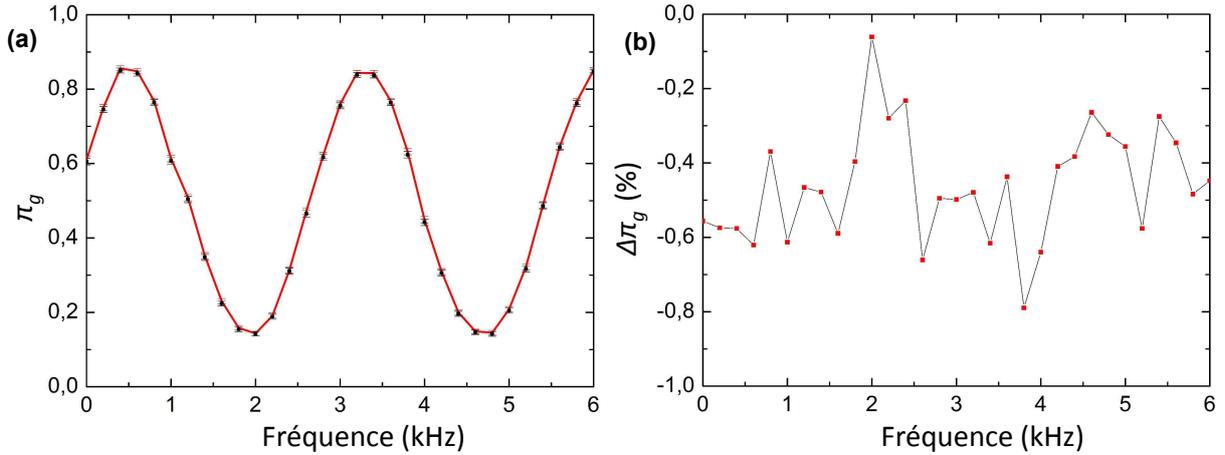


FIGURE III.5 – (a) Comparaison entre les franges de Ramsey enregistrées par la carte compteur National Instruments (points) et la carte ADwin (traits continus). Chaque point est le résultat d'environ 4000 détections atomiques. (b) Différence entre les probabilités mesurées par les deux systèmes.

système passif à une fraction de pourcent près. La figure III.5(a) montre un exemple de frange de Ramsey enregistrée par les deux cartes compteurs en parallèle. La différence entre les valeurs obtenues est à peine perceptible : on représente à la figure III.5(b) la différence des probabilités mesurées. L'ordre de grandeur de cette différence est aussi celui des barres d'erreurs sur la mesure. Un ajustement sinusoïdal fournit dans ces conditions des valeurs de phase de Ramsey identiques pour les deux courbes, à la précision de la mesure.

**Contrôle de la phase de Ramsey** La direction de mesure d'un échantillon atomique est déterminée par les champs électriques auxquels il est soumis au long de son trajet avant la seconde impulsion  $\pi/2$ . Les atomes entrants dans la seconde zone de Ramsey accumulent une phase déterminée par les potentiels appliqués aux miroirs de  $R_2$ . Le champ électrique créé est en fait également «visible» par d'éventuels atomes proches, qui ne sont pas encore à l'intérieur de la zone de Ramsey, ses lignes de champ fuyant hors de la zone située entre les miroirs de  $R_2$ .

Dans nos expériences, cette phase de Ramsey  $\phi_r$  devra être régulièrement changée, que ce soit de manière passive (phases alternées pour les mesures QND de vérification) ou active (mesure adaptative). La durée minimale entre deux changements correspond à la période de préparation des échantillons atomiques, soit  $83 \mu\text{s}$ . Sachant cela, il faut déterminer quel est le meilleur moment pour effectuer cette commutation.

Il s'avère en fait que c'est à l'entrée de la zone de Ramsey que l'atome est le plus sensible au champ, et que l'on obtient les plus grands déphasages entre franges pour une variation de potentiel donné. Dans cette zone de transition entre la cavité supraconductrice et Ramsey, les lignes de champ sont en effet resserrées et le champ plus intense. Le minutage choisi a donc été de commuter les potentiels pour un délai  $\tau_r = 858 \mu\text{s}$  après la préparation

atomique. À cet instant  $t = \tau_r$  l'échantillon atomique préparé à  $t = 0$  est près de sortir d'entre les miroirs de la cavité supraconductrice. On évite ainsi que la commutation ait lieu entre les deux cavités où le champ est le plus inhomogène. L'échantillon voit essentiellement le champ entre les miroirs de  $C$  lors de la commutation, et la phase de Ramsey résulte de l'accumulation de l'effet Stark lors du passage ultérieur entre les miroirs de  $R_2$ , dont les potentiels sont fixés.

Notons cependant qu'étant donné le taux de répétition, la commutation pour l'échantillon suivant  $k + 1$  a lieu  $7 \mu\text{s}$  avant l'arrivée du l'échantillon  $k$  au centre de  $R_2$ . La phase de Ramsey d'un échantillon dépend donc partiellement de la valeurs des potentiels Ramsey de l'échantillon qui le suit. Après application de l'impulsion  $\pi/2$  l'échantillon subit toujours l'effet Stark, mais cela ne modifie pas les populations dans les états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , ce qui est la seule information à laquelle notre détection est sensible. Demeure donc une influence mineure entre les réglages des potentiels de  $R_2$  pour deux échantillons consécutifs, qui devra être prise en compte, comme nous le verrons dans la partie suivante consacrée aux calibrations des paramètres expérimentaux.

L'instant de commutation des potentiels de  $R_2$  ayant été optimisé avec le système passif, il faut nous assurer qu'il soit correctement reproduit par le système actif. La chose est aisée, les sorties analogiques étant contrôlées directement par le CPU. Celui-ci est synchronisé avec l'ancien système par l'impulsion événement, nous pouvons programmer le CPU de sorte que les potentiels soient modifiés à l'instant précis correspondant à un délai  $\tau_r$  après la préparation. L'impulsion événement est donc envoyée avant la commutation des potentiels, à  $t = 809 \mu\text{s}$ . Elle est également représentée à la figure III.4. Le choix de cet instant d'application sera justifié dans les sections suivantes.

#### III.1.1.d Une rétroaction retardée

Les échantillons atomiques, émis à un intervalle de  $83 \mu\text{s}$  les uns des autres, parcourent la distance du centre de la cavité supraconductrice au détecteur ( $86 \text{ mm}$ ) en  $344 \mu\text{s}$ . Il y a donc plusieurs échantillons volant à chaque instant *entre* la cavité et le détecteur. La figure III.6 montre la configuration des échantillons atomiques juste après la détection d'un échantillon, d'indice  $k$ . Deux échantillons ont déjà passé la zone de Ramsey : leur direction de mesure est donc fixée. L'échantillon  $k + 3$  est déjà engagé dans  $R_2$ . L'adaptation de la phase (le changement de valeur des potentiels) devant se faire préférentiellement lorsque l'échantillon sort de la cavité supraconductrice, elle ne peut donc se faire qu'avec un *retard* de 4 échantillons atomiques.

Ce retard n'a en principe pas d'incidence sur notre estimation, étant donné que les échantillons intermédiaires ne peuvent nous apporter d'information, n'ayant pas encore été détectés (une mesure non-lue ne modifiant pas les population). Il serait par contre envisageable d'exploiter aussi ces échantillons intermédiaires dans l'optimisation de la phase. De fait, nous optimisons après la détection de l'échantillon  $k$  la phase de l'échantillon  $k + 4$ , *en supposant que c'est là la phase de la prochaine détection*. Une optimisation plus exhaustive devrait prendre en compte l'ensemble des détections possibles sur les échantillons  $k + 1$ ,  $k + 2$ ,  $k + 3$  dont la phase de Ramsey a déjà été choisie, pour choisir la phase de

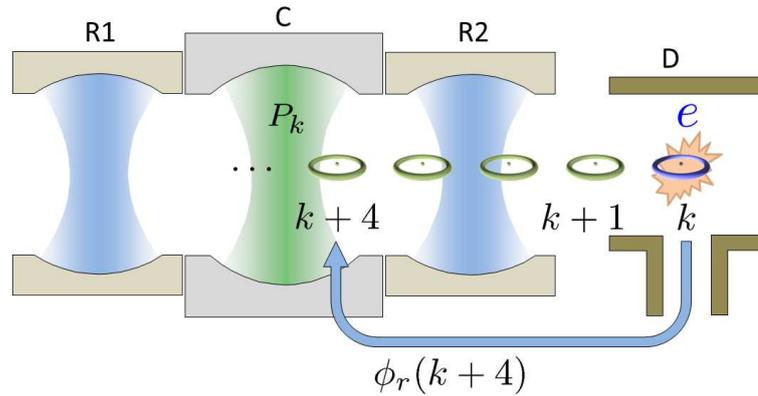


FIGURE III.6 – Retard de l’adaptation de phase : schéma des positions des échantillons atomiques traversant le montage lors de la détection d’un échantillon atomique d’indice  $k$ . L’échantillon d’indice  $k + 3$  est déjà engagé dans la zone de Ramsey et subit l’effet Stark dû aux potentiels appliqués. La modification de la phase de Ramsey ne peut donc être effectuée que sur l’échantillon  $k + 4$ , qui n’est pas encore entré dans la zone de Ramsey.

l’échantillon  $k + 4$ . En effet, si les atomes non détectés laissent invariantes les probabilités en moyenne (la mesure étant QND), il n’en va pas de même de l’entropie. C’est là encore une conséquence de la concavité de la fonction entropie. Nous pourrions en principe calculer l’espérance de l’entropie en incluant ces échantillons non-encore détectés, dont les réglages sont connus. Cela impliquerait cependant de calculer la moyenne de l’entropie des distributions correspondant aux  $4^2$  détections possibles<sup>1</sup> pour chaque choix de phase. Pour des raisons de simplicité de mise en œuvre, et notamment de temps de calcul (cf. section III.1.3), les expériences présentées dans ce mémoire utilisent la loi d’optimisation plus locale minimisant l’entropie moyenne pour la détection de l’échantillon  $k + 4$ .

### III.1.2 Fonctionnement en boucle

Ayant présenté les deux systèmes de contrôle, les tâches qu’ils ont à accomplir, et comment nous pouvons les synchroniser, nous pouvons maintenant donner le détail de leur fonctionnement conjoint, dans le cas d’une mesure adaptative, où nous introduisons la boucle de rétroaction.

**Vue d’ensemble d’une séquence expérimentale** On peut distinguer trois grandes étapes dans l’exécution d’une séquence expérimentale :

- Dans l’étape d’initialisation, l’ordinateur ADWin est préparé : le code compilé est chargé dans le CPU, qui initialise toutes les variables nécessaires au calcul en temps

1. Le nombre de cas à prendre en compte est encore plus important si l’on considère que la détection d’un atome dans un échantillon est aléatoire : il faudrait alors considérer toutes les séquences de détections possibles sur les quatre échantillons successifs.

réel ; les valeurs de potentiels nécessaires à la réalisation des différentes phases de Ramsey sont mises en mémoire tampon de la carte analogique ; enfin, l'horloge de la carte compteur est déclenchée, et l'on commence à compter les détections. À ce stade l'ADWin est «prêt», et un signal sur l'entrée événement peut déclencher l'exécution de calculs et de commandes.

- La phase d'expérience proprement dite est déclenchée par le système de contrôle passif : celui-ci commence à préparer des échantillons atomiques avec une période de répétition  $T_a = 83 \mu\text{s}$ . Au moment où le premier échantillon sort de la cavité supraconductrice, une première impulsion événement est envoyée sur l'entrée «Event IN» de l'ADwin. C'est cette impulsion, associée à chaque échantillon, qui assure la synchronisation des deux systèmes, et déclenche l'exécution de la boucle de rétroaction.
- La phase de terminaison a lieu à la fin de l'expérience, après que la dernière impulsion événement a été reçue. Le processus est alors arrêté, et les données enregistrées au cours de l'expériences, stockées dans l'ADwin, peuvent être collectées par un ordinateur externe.

Pour les résultats présentés ici, une séquence expérimentale correspond à la réalisation de 1500 trajectoires de mesure QND, passive ou adaptative. De nombreuses séquences ont été réalisées pour obtenir des statistiques suffisantes.

**Boucle de contrôle** Rappelons le principe de la boucle de rétroaction mise en œuvre dans nos expériences : l'ADwin est chargé de lire les détections atomiques pour estimer la distribution du nombre de photons et en déduire la phase de Ramsey optimale devant être appliquée *via* les potentiels des miroirs de R2. Cette rétroaction est de plus retardée comme nous l'avons vu ci-dessus (au paragraphe III.1.1.d) : la lecture des comptes associés à l'échantillon  $k$  détermine la phase de Ramsey pour l'échantillon  $k + 4$ .

L'exécution d'une boucle de rétroaction est déclenchée par une impulsion événement envoyée sur l'entrée «Event IN» et associée à chaque échantillon atomique, et se décompose de la façon suivante, représentée à la figure III.7 :

- Les comptes associés à la détection du dernier échantillon atomique  $k$  sont d'abord lus, le CPU accédant à la carte compteur. La soustraction des comptes associés aux bords de chaque fenêtre de détection fournit les nombres d'atomes détectés,  $n_e$  et  $n_g$ , pour cet échantillon. L'impulsion événement doit donc arriver *après* l'exécution de la rampe de détection par le système NI.
- Ces comptes permettent au CPU de réaliser l'estimation de la distribution du nombre de photons, et l'optimisation de la phase de Ramsey pour l'échantillon  $k + 4$ . Le nombre de calculs nécessaires est toujours le même, et cette étape a donc une durée fixe de  $40 \mu\text{s}$  environ.
- Les potentiels correspondant à la phase optimale sont appliqués aux électrodes de la zone de Ramsey à un instant  $\tau_r = 858 \mu\text{s}$  après la préparation de l'échantillon  $k + 4$ . L'impulsion événement doit donc avoir lieu *avant* cet instant, et laisser un intervalle de temps suffisant pour l'exécution des calculs.

Le déroulement temporel choisi en définitive est le suivant : prenant comme référence

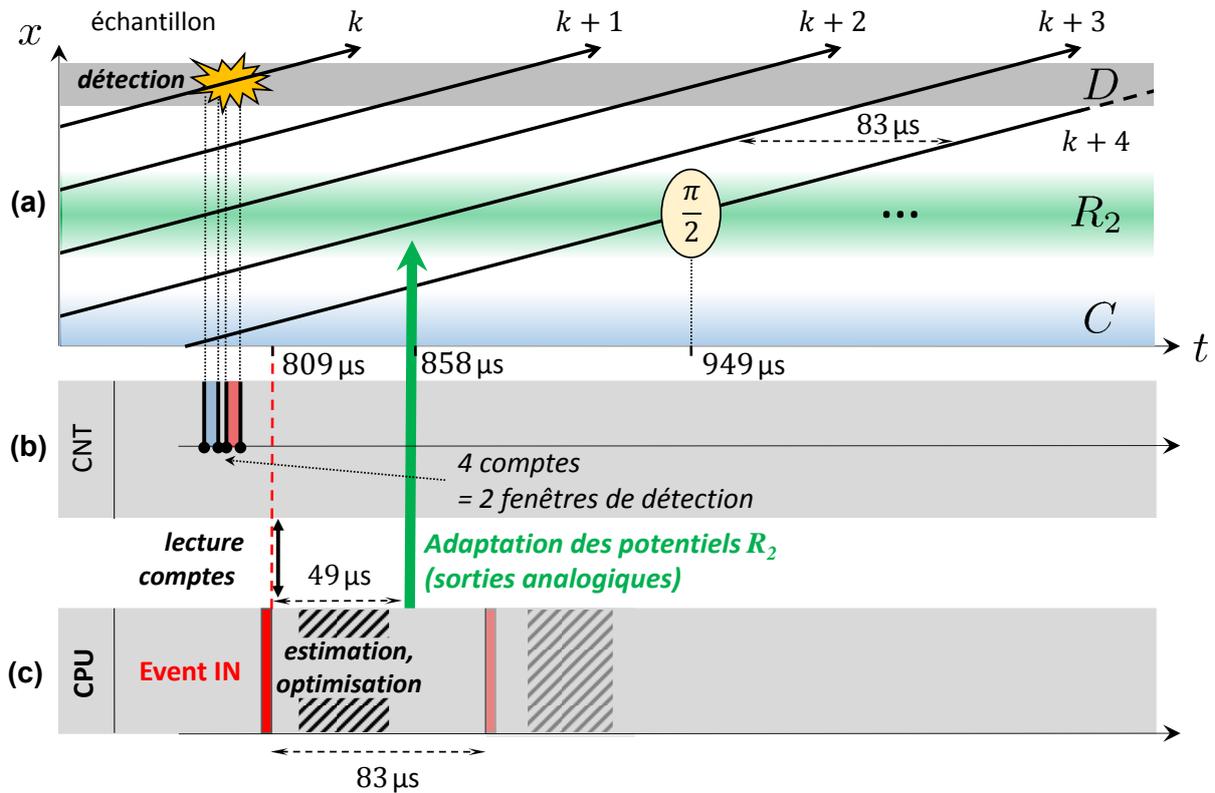


FIGURE III.7 – Chronologie d’une boucle de contrôle : (a) Diagramme espace-temps illustrant le trajet des échantillons atomiques ; la référence temporelle est la préparation de l’échantillon noté  $k + 4$ . Les éléments d’une boucle de rétroaction sont les suivants : à  $t = 809 \mu\text{s}$  le système NI envoie une impulsion sur l’entrée événement du processeur ADwin (c) (barre rouge «Event IN»). Le CPU lit alors les détections associées à l’échantillon  $k$  et stockées dans la carte compteur (b). Ces valeurs ont été enregistrées auparavant lors de la réception de 4 impulsions portes associées aux bords des deux fenêtres de détection. Le CPU déduit les nombres de détections dans  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  pour l’échantillon  $k$  puis effectue l’estimation d’état correspondante, et l’optimisation de la phase pour l’échantillon  $k + 4$  (rectangle hachuré).  $49 \mu\text{s}$  après réception de l’impulsion événement, le CPU applique les potentiels correspondants, *via* les sorties analogiques, aux miroirs de  $R_2$ . Toutes ces étapes se répètent avec la période de la préparation,  $83 \mu\text{s}$ .

( $t = 0$ ) l’instant de préparation d’un échantillon d’indice  $k + 4$ , l’impulsion événement est envoyée à l’ADwin à  $t = 809 \mu\text{s}$ . L’échantillon d’indice  $k$  a alors été préparé depuis  $1141 \mu\text{s}$  et les résultats correspondant à sa détection ont déjà été enregistrés par la carte compteur. Avant l’application des potentiels Ramsey à  $t = 858 \mu\text{s}$ , le système ADwin dispose donc de  $49 \mu\text{s}$  pour effectuer l’optimisation de la phase. Ceci est amplement suffisant en pratique, le calcul dans un espace de Hilbert de dimension 8 prenant typiquement  $40 \mu\text{s}$ .

Cette boucle est répétée à chaque réception d’une impulsion événement, soit toutes

les  $83 \mu\text{s}$ . Notons que cette impulsion est associée à chaque échantillon *préparé* : pour les quatre toutes premières impulsions de chaque séquence, il n'y aura donc pas exécution de la boucle de rétroaction, puisqu'aucun échantillon n'est encore arrivé dans le détecteur<sup>2</sup>.

### III.1.3 Contrôle du temps de calcul

Dans la boucle de rétroaction décrite ci-dessus, le processeur dispose d'une durée de  $49 \mu\text{s}$  pour effectuer les calculs permettant l'optimisation de la phase. Soulignons ici que le facteur limitant la rapidité de ces calculs est en fait l'emploi du logarithme dans l'estimation des entropies moyennes. On a pu en effet constater que le simple calcul du logarithme d'un scalaire  $p$  prend  $0,48 \mu\text{s}$  au processeur ADwin. Ce temps est considérable, comparé au cycle d'horloge de  $10/3 \text{ ns}$  (le calcul d'un seul logarithme prend plus d'une centaine de cycles). Le temps de calcul d'une valeur de l'entropie augmente ainsi quasi-linéairement avec la taille de l'espace de Hilbert, à raison de  $0,57 \mu\text{s}$  par dimension. Pour nos expériences ( $N_H = 8$ ) le calcul de l'entropie moyenne pour les deux cas de détection  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  et pour les quatre directions de mesure possible prend donc à lui seul  $36 \mu\text{s}$  : c'est là l'essentiel du temps d'exécution de la boucle de rétroaction, qui dure en pratique  $40 \mu\text{s}$ .

Ceci implique que le passage à des stratégies plus élaborées d'optimisation, comme la prise en compte des échantillons intermédiaires, ne pourrait se faire qu'en modifiant la façon dont ces entropies sont calculées, en ayant par exemple recours à des tables de valeurs du logarithme et pré-calculées et incluses dans le code du processus. Pour les expériences proposées ici le temps de calcul reste bien inférieur au temps disponible, et nous pouvons donc laisser le système de contrôle actif effectuer le calcul.

## III.2 Calibration des paramètres expérimentaux

Que ce soit pour la mesure passive ou adaptative du nombre de photons, la connaissance précise de l'appareil de mesure, c'est-à-dire des paramètres de l'interféromètre de Ramsey, est capitale. L'effet du champ sur l'interféromètre est décrit par le déphasage par photon, qui doit donc être également calibré. Enfin il est également nécessaire de connaître l'état initial du champ pour estimer correctement l'évolution de la distribution du nombre de photons au cours du temps. Nous décrirons donc dans cette section les diverses calibrations qui doivent être réalisées. Nous signalerons dans une dernière partie les problèmes de stabilité de la phase de Ramsey rencontrés lors de la réalisation de ces expériences, et comment nous les avons corrigés.

### III.2.1 Franges de Ramsey

Nous avons déjà donné, à la figure I.15 (ou, pour une frange unique, à la figure III.5(a)) l'exemple d'un signal de franges de Ramsey : la probabilité de détection dans l'état  $|g\rangle$  est

---

2. Par ailleurs la carte compteur n'a pas encore reçu à ce stade d'impulsions porte : il n'y a en fait pas de comptes à lire.

mesurée en fonction de la fréquence de la micro-onde appliquée dans les zones de Ramsey. Le champ électrique appliqué sur l'échantillon atomique dans la seconde zone de Ramsey contrôle par effet Stark la phase de Ramsey de l'interféromètre, donc le décalage de ces franges entre elles. Dans l'expérience qui a fourni l'exemple de la figure I.15, les potentiels appliqués à la seconde zone de Ramsey sont modifiés de façon séquentielle, les échantillons atomiques successifs étant donc mesurés selon les directions de mesure  $a, b, c, d, a, \dots$  de la même façon que lors d'une mesure QND passive. La mesure du contraste et du décalage des franges permet donc de caractériser l'interféromètre pour tous les échantillons dans ces expériences.

Dans le cas de la mesure adaptative, ce changement régulier n'a plus lieu d'être : c'est l'estimateur qui choisit la phase optimale devant être appliquée. Or, nous avons déjà vu que, les échantillons atomiques se succédant à relativement courte distance dans le montage, ils sont sensibles au champ Stark destiné à l'échantillon suivant (*cf.* paragraphe III.1.1.c). Les paramètres des franges de Ramsey dépendent donc *a priori* de la succession des potentiels appliqués.

### III.2.1.a Restriction à deux jeux de paramètres

Le problème suivant se pose en principe : les atomes traversant le montage sont sensibles aux potentiels Ramsey appliquée à l'échantillon qui les suit. Nous ne pouvons plus connaître *a priori* cet enchaînement. Il y a alors 16 combinaisons possibles de réglages des potentiels pour deux échantillons atomiques voisins, chacune de ces combinaisons correspondant en principe à des paramètres différents pour chaque frange. Nous ne pouvons nous permettre de calibrer toutes ces possibilités : cela prendrait un temps considérable (la mesure d'un ensemble de franges prenant environ 15 min).

Fort heureusement, nous avons pu constater, d'abord à l'aide de simulations Monte-Carlo des expériences proposées, puis sur les résultats expérimentaux eux-mêmes, que le contrôleur applique fréquemment la même valeur de potentiels à plusieurs échantillons atomiques successifs. Pour un tel ensemble, la phase de Ramsey sera donc proche de celle que l'on obtiendrait lors d'une mesure avec des potentiels constants.

C'est pourquoi nous avons fait en pratique le choix de calibrer les franges d'une part à potentiels constants pour les réglages  $a, b, c$  et  $d$ , et d'autre part lorsque ces 4 réglages se succèdent séquentiellement (ce qui se produit pour la mesure passive). Ce dernier cas se rencontre de nombreuses fois dans nos expériences, il est logique de le calibrer ; dans le premier cas, les mesures indépendantes à potentiels fixés fourniront des calibrations qui seront la plupart du temps correctes dans la mesure où les changements de potentiels sont relativement peu fréquents entre échantillons atomiques successifs.

Nous incluons donc dans l'estimateur deux jeux de paramètres pour les franges de Ramsey. À partir des paramètres des franges sont construits deux jeux de POVM, et l'analyse d'une détection atomique se fera donc avec le POVM associé à la *préparation* de l'échantillon détecté, selon qu'il fasse partie d'un bloc où le choix des phases est *passif* (on utilisera la calibration à potentiels variés) ou *adaptatif* (on utilisera la calibration à potentiels constants).

### III.2.1.b Influence entres échantillons voisins

La figure III.8 fournit une illustration de le dépendance entre échantillons voisins : on a enregistré *pour les mêmes valeurs de potentiels* les franges de Ramsey obtenues lorsque ces potentiels sont variés séquentiellement, et lorsqu'ils sont constants pour chaque frange. Pour des raisons de clarté, la figure ne présente que deux des quatre franges enregistrées.

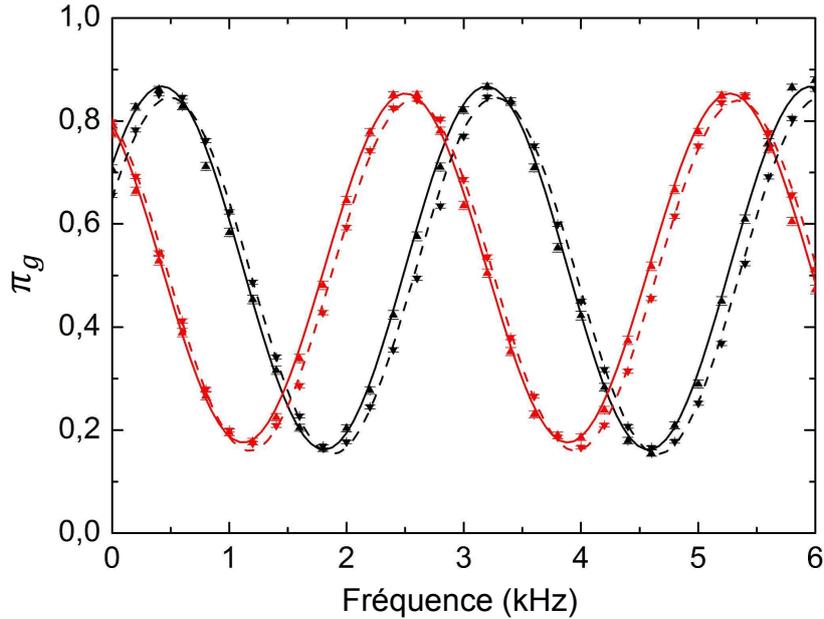


FIGURE III.8 – Décalage des franges de Ramsey selon l’alternance des potentiels. On a représenté deux signaux correspondant à des phases de Ramsey  $\phi_a$  (couleur noire) et  $\phi_c$  (couleur rouge) séparées de  $\pi/2$  environ, dans deux situations : la probabilité  $\pi_g$  pour chaque réglage est enregistrées à potentiels Ramsey constants en fonction de la fréquence de la source (traits continus), ou bien elle est extraite d’une mesure où les potentiels Ramsey sont séquentiellement alternés pour les échantillons atomiques successifs (traits pointillés). Les courbes sont des ajustements sinusoïdaux des points de mesure. La référence de phase est arbitraire.

On constate que les deux jeux de paramètre obtenus sont différents : les contrastes et le décalage des franges sont modifiés lorsque l’on alterne les potentiels ; la phase à l’origine des franges, liée à la phase de Ramsey, se trouve également changée. Pour les réglages  $a$  et  $c$  représentés on trouve les écarts :

$$|\Delta\phi_a| = (0,054 \pm 0,002)\pi, \quad |\Delta\phi_c| = (0,043 \pm 0,002)\pi. \quad (\text{III.1})$$

Nous avons jusqu’ici supposé pouvoir aligner les directions de mesure avec les directions associées aux divers nombres de photons, choix logique car il permet d’utiliser au maximum le contraste des franges pour distinguer les différents nombres de photons. Le décalage ci-dessus n’est pas négligeable si nous le comparons au déphasage par photon de  $\pi/4$ , et

nous devons donc en principe le prendre en compte nous voulons réaliser des mesures adaptatives et passives suffisamment précises. C'est pourquoi nous choisissons deux jeux de potentiels *distincts* pour les mesures passive et adaptative, de façon à pouvoir choisir indépendamment les deux jeux de paramètres calibrés afin que les directions de mesure soient identiques dans les deux cas.

Décrivons plus précisément le choix de cette direction de mesure, *i.e.* de la phase de Ramsey. Lors de la calibration des franges de Ramsey, la cavité étant dans le vide de photons (état préparé par l'envoi d'une série d'atomes absorbeurs, *cf.* section I.4.2) on enregistre les franges en fonction de la fréquence de la source micro-onde  $\nu_r$  alimentant les zones de Ramsey. La cavité étant vide, on a  $\phi(n) = 0$  et

$$\pi_g(\phi_r) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi_r).$$

La fréquence devant prendre une valeur fixe lors de la réalisation d'une séquence expérimentale, on choisit alors les potentiels et la fréquence  $\nu_r$  de manière à obtenir la phase de Ramsey souhaitée pour chaque réglage : par exemple, si pour le réglage  $a$  et à la fréquence choisie la probabilité de détection de  $|g\rangle$  est maximale, alors on a  $\phi_a = 0$ .

### III.2.1.c Déphasage par photon et phase de Ramsey

Le déphasage induit sur les franges par la présence de  $n$  photons,  $\phi(n)$  est un paramètre clé de notre estimation. C'est le paramètre dépendant du champ dans nos POVM :

$$E_g(\phi_r) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi(n) + \phi_r), \quad E_e(\phi_r) = \mathbb{1} - E_g(\phi_r).$$

Le principe de la mesure de  $\phi(n)$  [65] a déjà été donné au paragraphe II.1.4.b, lorsque nous avons interprété ce déphasage en termes de pseudospin atomique. Nous effectuons pour cette mesure une tomographie de spin en présence d'un petit champ cohérent, et nous représentons ensuite l'histogramme des phases des dipôles atomiques en sortie de l'interféromètre de Ramsey. Cet histogramme fait apparaître plusieurs pics correspondant aux différentes valeurs de  $n$ , et son ajustement par une somme de courbes gaussiennes fournit une mesure de  $\phi(n)$ .

Dans les expériences réalisées ici, nous souhaitons pouvoir distinguer les nombres de photons de 0 à 7, ce qui nous a conduit à choisir un déphasage par photon proche de  $\pi/4$ . Pour un désaccord  $\delta = 2\pi \cdot 238$  kHz, les valeurs mesurées de  $\phi(n)$  (*cf.* paragraphe II.1.4.b) sont bien ajustées par l'approximation au second ordre

$$\phi(n) = (0,255 \pm 0,003)\pi n - (0,0015 \pm 0,0005)\pi n^2.$$

## III.2.2 Injection micro-onde

Dans toutes les expériences que nous voulons réaliser, la connaissance de l'état initialement injecté est essentielle à l'estimation exacte de l'évolution des populations  $P(n)$  des

nombres de photons. Il nous faut donc calibrer le taux d'injection  $\gamma$  de micro-onde dans la cavité [65]. Ce taux, que nous avons introduit au paragraphe I.2.2.b, donne l'échelle de temps caractéristique de l'injection :  $\gamma^{-1}$  s'interprète comme le temps nécessaire à l'injection d'un champ d'amplitude unité<sup>3</sup>. Pour cette calibration, nous mesurons le signal  $\pi_g$  d'une frange de Ramsey (la phase  $\phi_r$  étant fixée) pour différentes durées d'injections de champ cohérent (la puissance de la source étant fixée). En présence d'un champ cohérent  $|\alpha = \gamma t_{\text{inj}}\rangle$ , la valeur du signal de Ramsey  $\pi_g(\alpha)$  est donnée par la somme pondérée des valeurs correspondant aux nombres de photons présents dans le champ :

$$\pi_g(\alpha) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n \geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \pi_g(n), \quad (\text{III.2})$$

$$\text{où } \pi_g(n) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi_r + \phi(n)). \quad (\text{III.3})$$

En faisant l'hypothèse d'un déphasage par photon linéaire  $\phi(n) = n\phi_0$  (dont nous sommes proches en pratique), la somme ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\pi_g(\alpha = \gamma t_{\text{inj}}) = \pi_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi_r + (\gamma t_S)^2 \sin \phi_0) e^{(\gamma t_S)^2 (\cos \phi_0 - 1)}. \quad (\text{III.4})$$

Les paramètres  $\pi_0$ ,  $C$  et  $\phi_r$ , peuvent être mesurés préalablement sur les franges de Ramsey, le déphasage par photon est quant à lui mesuré indépendamment, comme nous l'avons rappelé ci-dessus. L'enregistrement des valeurs  $\pi_g(\alpha = \gamma t_{\text{inj}})$  pour une durée d'injection variable et l'ajustement des points obtenus par l'équation (III.4) fournit donc le seul paramètre libre,  $\gamma$ .

La figure III.9 donne un exemple d'une telle calibration, pour lequel on a choisi  $\phi_r = 0$ . On obtient par ajustement la valeur

$$\gamma^{-1} = (24,3 \pm 0,2) \mu\text{s}. \quad (\text{III.5})$$

La durée d'injection nécessaire à l'obtention d'un champ initial contenant  $\langle n \rangle \simeq 3$  photons est donc de  $t_{\text{inj}} = 42,1 \mu\text{s}$ .

**Reconstruction d'état** Nous avons en fait déjà présenté une autre méthode de détermination du taux d'injection. Au paragraphe II.1.3.b nous avons illustré la méthode de reconstruction par maximum de vraisemblance sur l'exemple d'une injection de champ cohérent. Cette méthode permet de reconstruire directement les populations de l'état initial. Elle est plus contraignante puisqu'elle requiert la connaissance précise du temps de vie de la cavité et les paramètres des quatre franges de Ramsey utilisées, et nécessite le calcul de l'état de maximum de vraisemblance. Elle ne fait cependant pas appel à l'hypothèse simplificatrice d'un déphasage par photon linéaire. Les estimations fournies par les deux méthodes sont de précision comparable, mais la méthode présentée ici a l'avantage d'être plus rapide, nécessitant à la fois moins de données une analyse moins complexe.

---

3. On peut sans perte de généralité prendre  $\gamma$  réel, en prenant la phase du champ initial comme référence. Ceci a peu d'importance pour notre estimation d'état, où la phase du champ n'intervient pas.

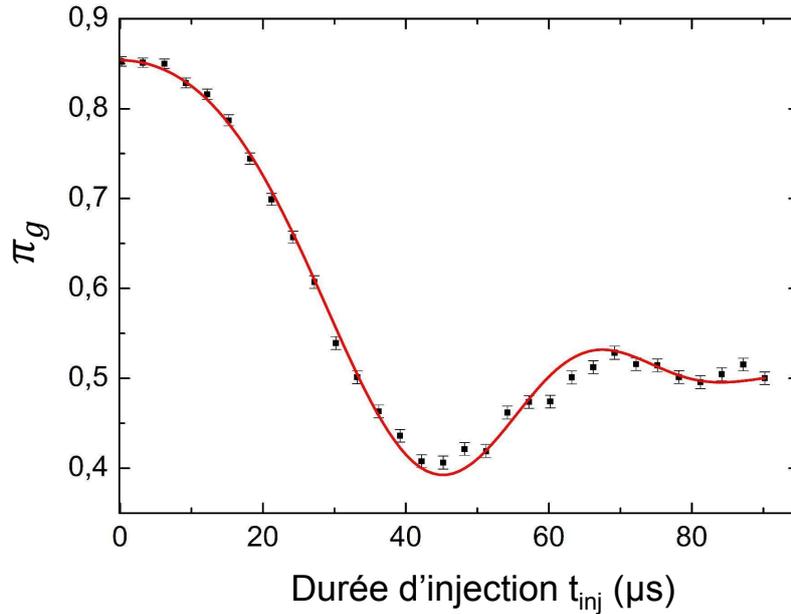


FIGURE III.9 – Calibration des injections de champ cohérent à l’aide des franges de Ramsey : probabilité de détection de  $|g\rangle$  en sortie de l’interféromètre en fonction de l’amplitude du champ cohérent, exprimé ici en termes de durée d’injection  $t_{inj}$ . La courbe continue est un ajustement à un paramètre fournissant le taux d’injection  $\gamma$ . On obtient ici  $\gamma^{-1} = (24,3 \pm 0,2) \mu s$ .

### III.2.3 Dérive de la phase de Ramsey

Nous concluons ce chapitre en présentant deux imperfections expérimentales qu’il a fallu combattre dans la réalisation de nos expériences. Insistons tout d’abord sur l’importance capitale qu’a la connaissance exacte de la phase de Ramsey : c’est ce paramètre, inclus dans nos POVM, qui nous permet d’identifier dans quelle direction «pointe» le pseudospin atomique et d’en déduire une information sur le contenu en photons de la cavité. Il nous faut donc limiter au maximum l’imprécision ou les fluctuations de ce paramètre (à une échelle non négligeable devant le déphasage par photon).

Les paramètres ayant une influence sur la valeur de la phase de Ramsey sont tous ceux liés à l’interféromètre. Une grande attention doit donc être prêtée :

- à la stabilité des impulsions  $\pi/2$  : si la fréquence de la source et la durée des impulsions sont facilement bien contrôlées (les générateurs micro-ondes sont précis au Hz, et l’on emploie des diodes PIN aux temps de commutation brefs – de l’ordre de 100 ns – pour appliquer l’impulsion), la puissance effectivement couplée aux cavités Ramsey dépend de toute la chaîne d’acheminement. Il a donc fallu s’assurer de l’insensibilité des guides micro-ondes employés à des perturbations, qu’il s’agisse de vibration ou de fluctuations de température tout au long du trajet menant au cryostat ;
- à la présence de champs électriques parasites (qui peuvent modifier la phase accumulée entre les deux zones de Ramsey) : si l’on a veillé à diminuer le bruit sur les

potentiels appliqués aux électrodes des zones de Ramsey (par l'ajout de diviseurs de tension), nous n'avons pas accès aux électrodes elles-mêmes en cas de problème, le montage étant sous vide et à froid<sup>4</sup>.

Malgré toutes ces précautions, nous allons voir que des fluctuations de la phase de Ramsey demeurent, desquelles il faudra nous accommoder.

### III.2.3.a Dérive initiale

Une première anomalie a pu être mise en évidence lors de mesures de contrôle sur la cavité dans son état d'équilibre thermique. La reconstruction de l'état de maximum de vraisemblance à l'aide ces mesures faisait apparaître l'état de Fock à 0 photons, et celui à 7 photons. Ce résultat est absurde : on ne devrait avoir, outre le vide de photons, qu'environ 8% de  $|1\rangle$ . Son origine est illustrée à la figure III.10 : dans cette expérience nous avons mesuré l'histogramme de spin issu de la mesure d'une série d'atomes interagissant avec la cavité vide de photons. Cette mesure, dont le principe a été donné au paragraphe II.1.4.b, est celle que nous avons utilisé pour déterminer le déphasage par photon. Elle est ici effectuée à l'aide d'une séquence courte (120 échantillons, figure III.10 (a)) ou longue (800 échantillons, figure III.10 (b)) d'échantillons atomiques pour lesquels la phase de mesure est régulièrement alternée ; cette séquence est répétée de façon à avoir le même nombre de fenêtres d'estimation du pseudospin dans les deux expériences (de l'ordre de  $10^5$ ).

On constate de manière frappante le déplacement du pic principal de l'histogramme associé au vide de photons. Rappelons-nous que cette représentation est construite à l'aide des projections du spin selon les directions de mesures ; les phases de Ramsey des quatre réglages employés sont donc des paramètres de ces histogrammes. Si nous voyons le pseudospin associé au vide se déplacer (initialement les phases de Ramsey sont choisies de sorte que  $\langle S_x \rangle$  soit maximal pour le vide de photons), c'est qu'en fait ces phases de Ramsey évoluent globalement, selon le nombre d'échantillons employé pour la mesure.

La figure III.10(c) apporte une information plus précise. Nous y représentons pour une expérience similaire utilisant 800 échantillons de mesure, l'évolution temporelle de la phase *moyenne* du pseudospin atomique  $\langle \phi \rangle$ . Cette phase moyenne est obtenue de la façon suivante : on associe à chaque instant  $t$  un groupe de 4 échantillons mesurés avec les phases successives  $a, b, c, d$  (le premier étant détecté à l'instant  $t$ , le second à  $t + 83 \mu\text{s}$ ...). Les résultats de détection selon chaque direction de mesure sont moyennés sur 12000 trajectoires. Ces estimations des projections du pseudospin *global* (tous nombres de photons confondus) à l'instant  $t$  nous fournissent une valeur de phase moyenne,  $\langle \phi \rangle(t)$ . C'est la moyenne de l'histogramme de phase que l'on obtiendrait en réalisant une tomographie de spin du champ à l'instant  $t$ .

Nous avons ainsi accès à l'évolution temporelle de cette phase moyenne, qui reflète notamment celle de la phase de Ramsey. On constate effectivement à la figure III.10(c) une évolution initiale systématique et non négligeable de l'ordre de  $0,05\pi$  au début de la séquence. Dans un second temps la phase croît sur une échelle de temps bien plus

---

4. Lors de la réalisation des expériences présentées ici le montage était à froid depuis deux ans et cinq mois. Il l'est encore à l'heure où nous écrivons ces lignes.

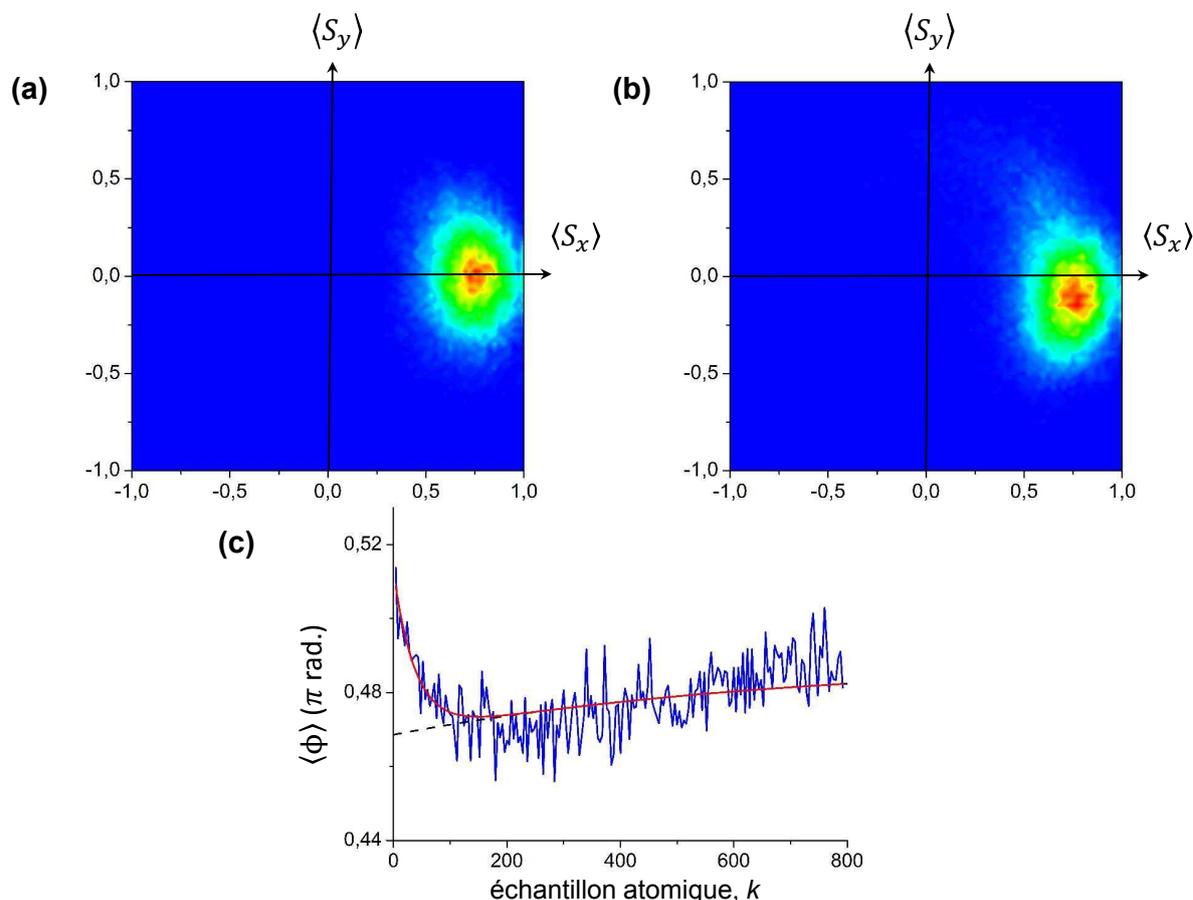


FIGURE III.10 – Dérive initiale de la phase de Ramsey : l’histogramme de spin pour une cavité vide est mesuré **(a)** par des séquences de 120 échantillons, les phases de mesure étant alternées, **(b)** par des séquences de 800 échantillons dans les mêmes conditions. On constate une dérive du pic associé au vide de photons, qui signale une variation de la phase de Ramsey des franges utilisée selon le nombre d’échantillons utilisés pour la mesure ; **(c)** Évolution de la phase *moyenne* (voir texte) estimée à l’aide des projections de spin, en fonction du temps (en termes d’échantillons atomiques). Pour plus de clarté, les calculs sont effectués de sorte que  $\varphi_{|0\rangle} \simeq \pi/2$  : on constate effectivement une croissance initiale systématique de la phase moyenne mesurée à l’échelle d’une centaine d’échantillons. Elle subit ensuite une évolution lente, qui peut être imputée à la réapparition de l’état thermique dans la cavité : on a tracé en pointillés noir cette contribution. La courbe rouge est la somme de cette contribution et d’un terme exponentiel ; l’ajustement fournit pour ce terme une constante de temps de 50 échantillons environ.

longue : ceci peut être imputé à la réapparition du champ thermique dans la cavité, de durée caractéristique  $T_{\text{cav}} = 65 \text{ ms} \simeq 780$  échantillons. Nous observons en effet une phase *moyenne* : la retour progressif à l'état d'équilibre thermique, avec essentiellement l'état de Fock à 1 photon dans une faible proportion, modifie l'histogramme de phase, et donc  $\langle \phi \rangle$ . Nous avons tracé sur la figure III.10(c) cette contribution en pointillés noirs.

La variation de phase initiale est un phénomène différent (et inattendu) associé à la succession des échantillons atomiques. Une analyse plus précise a montré qu'il suffisait d'alterner le potentiel de la seconde zone de Ramsey pour déclencher cette évolution, sans qu'il soit nécessaire d'avoir effectivement des atomes traversant le montage. Une explication probable de ce phénomène réside dans la polarisation indirecte d'une électrode voisine de la zone de Ramsey, pour laquelle le contact électrique n'est plus correctement réalisé, sous l'effet de l'alternance des potentiels. L'ajustement de la courbe  $\langle \phi \rangle(t)$  (courbe rouge) par la somme de la contribution liée au champ thermique et d'une exponentielle qui caractérise la dérive initiale de la phase de Ramsey fournit pour celle-ci une constante de temps de 50 échantillons atomiques environ. La phase de Ramsey peut donc être considérée comme stable après une centaine d'échantillons.

Ceci explique les résultats aberrants trouvés pour la reconstruction des populations de l'état d'équilibre thermique de la cavité : cette mesure s'effectue en effet avec des séquences longues d'échantillons atomiques (800 ou plus), alors que la calibration des franges de Ramsey se fait à l'aide de séquences courtes (afin que le vide de photon préparé n'ait pas le temps de revenir à l'état d'équilibre thermique). Le choix de phases de Ramsey que nous faisons est donc erroné, et la valeur utilisée pour l'analyse par reconstruction diffère de la valeur effectivement prise sur une séquence longue. La reconstruction par maximum de vraisemblance interprétait en fait ce décalage du pseudospin comme l'apparition de 7 photons dans la cavité.

Pour remédier à ce problème nous avons systématiquement inclus avant toute séquence de mesure une série de 120 échantillons atomiques auxiliaires, pour lesquels les potentiels de la zone de Ramsey sont alternés : ceci a pour but que l'évolution initiale parasite de la phase de Ramsey soit achevée pour les premiers échantillons atomiques «utiles». De cette façon, la calibration des franges de Ramsey sera bien conforme aux potentiels effectivement vus par les atomes lors d'une mesure QND.

### III.2.3.b Fluctuations de long terme

Mentionnons finalement que nous avons pu observer malgré les précautions prises une fluctuation des phases de Ramsey sur le long terme. À l'aide de mesures QND passives, nous pouvons en effet reconstruire régulièrement l'histogramme de phase des pseudospins atomiques, comme nous l'avons fait ci-dessus. Le choix de phases de Ramsey fait avant toute expérience revient à fixer la position du pic associé au vide de photons dans cet histogramme. La comparaison de la position mesurée à la position attendue permet de constater une éventuelle dérive globale des phases de Ramsey par rapport aux calibrations précédentes. La figure III.11 donne ainsi à voir la variation de cette phase associée à  $|0\rangle$  au cours d'une série de prises de données, par rapport à une référence de phase initiale

arbitraire. On peut observer des fluctuations résiduelles d'une fraction de  $\pi$  qui peuvent fausser nos mesures si elles ne sont pas prises en compte.

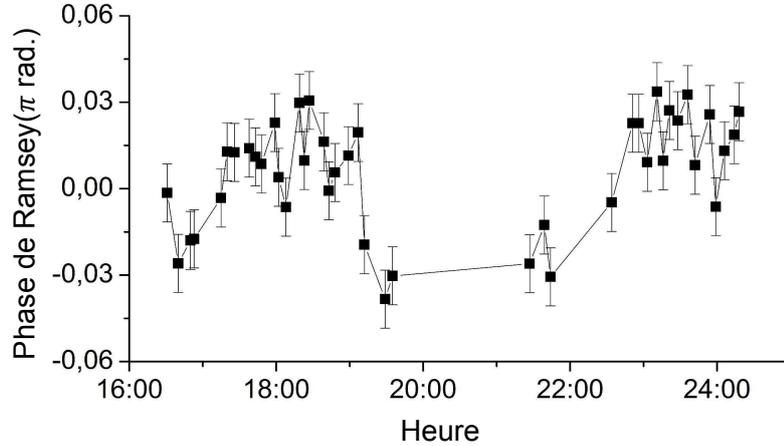


FIGURE III.11 – Fluctuations de la phase de Ramsey : évolution de la phase du pseudospin associé au vide de photon au cours de 8 heures d'expérience. Cette phase est calculée à partir de mesures QND «passives» donnant accès à l'histogramme des phases pour les différents nombres de photons ; toutes les valeurs représentées ici sont référencées à une phase arbitraire. Les fluctuations observées s'interprètent comme une variation de la phase de Ramsey  $\phi_r$  et conduisent à une recalibration périodique des franges de Ramsey.

L'accumulation d'une quantité de données suffisante pour un traitement statistique des résultats de nos expériences peut prendre plusieurs heures. Nous avons donc été amenés à recalibrer régulièrement les franges de Ramsey, c'est-à-dire à vérifier le réglage des phases de Ramsey, au cours d'une série d'expériences.

## Conclusion

Ce chapitre nous a permis de décrire précisément l'implémentation d'une boucle de rétroaction sur la mesure faible des atomes dans notre expérience. Nous avons d'abord présenté le système de contrôle actif qui permet le choix en temps réel des paramètres de la rétroaction (les potentiels de  $R_2$  pour la phase optimale). Nous avons montré comment il fonctionne de façon synchrone avec un système passif chargé des opérations systématiquement associées à chaque échantillon atomique. On a pu également voir que la rétroaction est retardée du fait d'échantillons intermédiaires entre l'échantillon détecté et celui sur lequel la phase de Ramsey est adaptée ; ce décalage a conduit au choix d'un déroulement temporel précis pour la boucle de rétroaction.

Dans un second temps nous avons donné le principe de la calibration des paramètres expérimentaux intervenant dans l'estimation d'état. Un soin particulier a dû être apporté

aux franges de Ramsey, qui nous permettent de déduire l'évolution des populations du champ lors d'une détection. À la fin de ce chapitre, nous avons mis en évidence une dérive systématique de la phase de Ramsey lors d'une séquence expérimentale, qui a été corrigée, ainsi que des dérives aléatoires plus lentes, qui nous conduiront à calibrer régulièrement les franges de Ramsey.

# Chapitre IV

## Résultats expérimentaux

Nous avons à ce stade présenté tous les éléments nécessaires à la réalisation d'une mesure adaptative du nombre de photons dans notre expérience. Nous pouvons maintenant présenter la structure des expériences, telles qu'elles ont été réalisées, et les principaux résultats de notre travail.

Nous avons donné, à la section II.2.2, le principe des deux expériences proposées. Dans la première, nous sélectionnons des trajectoires n'ayant pas subi de saut quantique à l'aide de mesures annexes, afin d'observer l'effet de la mesure adaptative dans le contexte simplifié de la mesure d'un état sans relaxation. Une fois le principe de la mesure adaptative validé, nous pourrions dans une seconde expérience réaliser la projection du champ dans un état de Fock à l'aide d'une mesure adaptative, en présence de la relaxation.

Ces deux expériences seront présentées dans cet ordre : on donnera d'abord leur structure détaillée, puis les différentes analyses que l'on a pu effectuer sur les résultats, qui montrent notamment l'amélioration nette apportée par la mesure adaptative.

### IV.1 Mesure d'un état sélectionné sans relaxation

#### IV.1.1 Structure de l'expérience

##### IV.1.1.a Principe de la sélection

Dans cette expérience, nous cherchons à tester l'impact de l'adaptation de phase sur la décimation, dans les conditions les plus simples possibles, c'est-à-dire en l'absence de relaxation. On peut en principe atteindre cet objectif de la façon suivante : on *prépare* d'abord la cavité dans un état de Fock  $|n = n_I\rangle$  à l'aide d'une mesure passive. Puis on effectue une mesure adaptative, sans connaissance a priori, sur l'état préparé. Enfin on *vérifie* que l'état préparé n'a pas relaxé pendant la mesure adaptative en effectuant une nouvelle mesure passive : on obtient un état de Fock  $|n = n_F\rangle$ . On sélectionne finalement les trajectoires pour lesquelles  $n_I = n_F$ . C'est sur cet ensemble de trajectoires que l'on étudiera l'effet de l'adaptation de phase.

Les mesures passives de *préparation* et de *vérification* ont les caractéristiques suivantes :

*Relaxation* : Ces mesures s'effectuent en présence de relaxation : pendant la mesure, le nombre de photons peut changer du fait d'un saut quantique. Il faudrait cependant détecter plusieurs atomes pour que ce changement soit perceptible sur les taux de transferts mesurés à l'aide de l'interféromètre, et modifie notre estimation de l'état. La prise en compte systématique de la relaxation consiste donc à inclure à chaque étape dans notre estimation la probabilité de la relaxation du champ donnée par l'équation maîtresse, comme nous l'avons présenté au paragraphe II.2.3.b.

*Seuil de convergence* : La décimation converge en principe vers un état de Fock pur. Cependant la relaxation tend à contrarier cette convergence : il est plus difficile d'atteindre des fidélités très proches de 1 en un temps donné, et plus le temps de mesure est long, plus il est probable que le nombre de photons change suite à un saut quantique. Il nous faut donc définir un critère pour lequel nous considérons que la préparation (ou la vérification) d'un état de Fock est réalisée, en faisant en sorte qu'il soit vérifié en un temps raisonnable. Dans nos expériences nous nous donnons comme critère de convergence que la fidélité estimée sur un état de Fock  $|n_c\rangle$  a atteint 80 % :

$$P^{\text{est}}(n_c) \geq 0,8. \quad (\text{IV.1})$$

*Estimation initiale* : L'estimation initiale à partir de laquelle nous réalisons la décimation doit reproduire au mieux la distribution réelle du nombre de photons, afin de ne pas biaiser notre estimation. Il nous faudra définir cette initialisation pour les deux mesures de préparation et de vérification.

#### IV.1.1.b Structure

Nous donnons ici la structure détaillée d'une séquence de mesure. Avant toute chose une «initialisation» du système est réalisée : le champ thermique est d'abord éliminé à l'aide d'une série d'environ 20 atomes absorbeurs réalisant un passage adiabatique rapide dans la cavité (voir la section I.4.2), puis un champ cohérent calibré (voir la section III.2.2) est injecté dans la cavité. En raison de la dérive initiale de phase constatée au paragraphe III.2.3.a, un ensemble de 120 échantillons auxiliaires en interaction dispersive avec le champ, et pour lesquels les phases de Ramsey sont alternées, est également envoyé avant les échantillons atomiques de mesure, pour stabiliser la phase de Ramsey<sup>1</sup>.

L'expérience proprement dite s'organise en trois «blocs» d'échantillons atomiques successifs (voir la figure IV.1) :

**Le bloc initial (I)** effectue une mesure passive du nombre de photons, à partir d'un état cohérent initial.

---

1. Du fait du délai introduit par ces échantillons auxiliaires, le champ injecté dans la cavité au début de la séquence contient en fait 3,5 photons, de sorte que le nombre de photons moyen soit 3 au début de la mesure proprement dite.

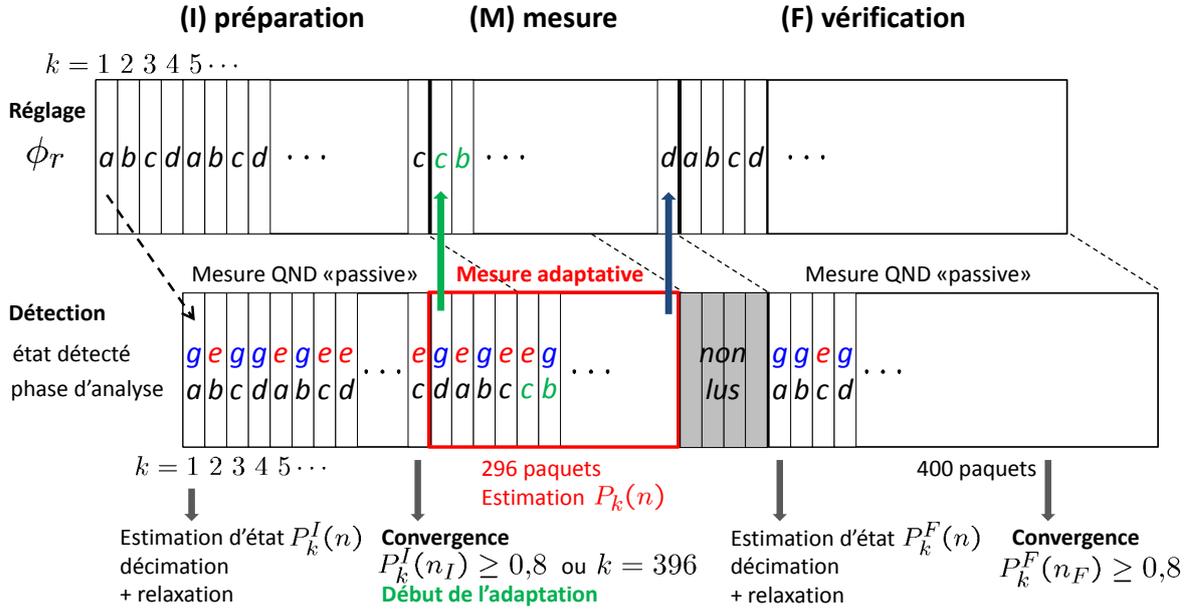


FIGURE IV.1 – Structure de l'expérience de mesure d'un état sélectionné : un premier ensemble d'échantillons atomiques (I) réalise une mesure passive du nombre de photons à partir d'un champ cohérent, la relaxation et la statistique initiale du nombre de photons étant prises en compte. Après convergence dans un nombre de photon  $n_I$ , une nouvelle mesure du nombre de photons est réalisée (bloc (M)). Il s'agit d'une mesure adaptative, à partir d'une distribution uniforme, ne prenant pas en compte la relaxation. À la fin du bloc de mesure, le bloc (F) réalise à nouveau une mesure de vérification du nombre de photon  $n_F$ , en partant d'une estimation réaliste de l'état, et en prenant en compte la relaxation. Le tri des trajectoires pour lesquelles  $n_I = n_F$  permet d'étudier les résultats de la mesure adaptative (cadre rouge) en l'absence *effective* de relaxation. Les phases de Ramsey notées  $a, b, c, d$  sont choisies identiques pour les trois blocs de mesure, mais deux jeux de POVM (dont le contraste ou le décalage peuvent différer) sont employés selon que la mesure est passive (blocs (I) et (F)) ou adaptative (bloc (M) – voir la section III.2.1)

1. L'estimation initiale reproduit la distribution poissonnienne du champ cohérent, contenant  $\langle n \rangle = 3$  photons<sup>2</sup> :

$$P_0^I(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}.$$

2. À chaque détection d'un échantillon atomique (d'indice  $k$ , éventuellement vide) de résultat  $\mu$ , cette estimation est actualisée par décimation à l'aide du POVM correspondant (*cf.* équation (II.43)), qui dépend de la phase de Ramsey appli-

2. Plus précisément, la distribution de Poisson exacte est tronquée à  $n = n_{\max}$  et renormalisée.

quée à cet échantillon :

$$P_{k-\frac{1}{2}}^I = \mathbb{M}_\mu(\phi_r(k))P_{k-1}^I.$$

Rappelons qu'initialement deux jeux de POVM sont calibrés, selon que le choix de phase est passif ou adaptatif : les POVM employés dans cette section sont ceux calibrés pour un choix de phase passif (les phases de Ramsey sont choisies identiques dans les deux cas (*cf.* section III.2.1), mais les contrastes et décalages peuvent être légèrement différents).

3. L'évolution élémentaire due à la relaxation (équation (II.44)) est ensuite prise en compte, et appliquée à cette estimation intermédiaire  $P_{k-\frac{1}{2}}^I$  :

$$P_k^I = \mathbb{T}P_{k-\frac{1}{2}}^I.$$

4. Le bloc de *préparation* (I) s'arrête lorsque la condition de convergence (IV.1) est vérifiée pour un nombre de photons  $n_I$ , ou que 396 échantillons ont été mesurés.

**Le bloc de mesure (M)** est celui où nous testons la mesure adaptative du nombre de photons préparé en (I).

1. L'objectif de la mesure est de «retrouver» le nombre de photons sélectionné. On initialise donc l'estimation des populations est à une distribution uniforme, qui rend maximale l'entropie, *i.e.* l'information manquante sur ce nombre de photons :

$$P_0(n) = \frac{1}{n_{\max} + 1}.$$

2. À chaque détection d'un échantillon atomique (éventuellement vide), de résultat  $\mu$  l'estimation est actualisée à l'aide du POVM correspondant :

$$P_k = \mathbb{M}_\mu(\phi_r(k))P_{k-1}.$$

les POVM employés dans cette section sont ceux calibrés pour un choix de phase actif, à potentiels constants.

3. *On n'applique pas* ici d'opérateur décrivant la relaxation, et la phase de Ramsey est adaptée en temps réel en fonction de l'estimation  $P_k$ . La minimisation de l'entropie moyenne détermine la phase de Ramsey à appliquer à l'échantillon  $k + 4$  :

$$\phi_{k+4}^{\text{opt}} = \arg \min_{\phi=a,b,c,d} \langle S[\tilde{P}_{k+4}] \rangle(\phi),$$

où l'on note  $\tilde{P}_{k+4}$  la distribution que l'on obtiendrait à partir de  $P_k$  en détectant l'échantillon  $k + 4$  immédiatement après la détection de l'échantillon  $k$ .

Ce bloc est de durée fixe et comporte  $N_M = 296$  échantillons.

**Le bloc final (F)** a pour rôle de vérifier que le nombre de photon n'a pas changé durant la mesure en (M).

1. À compter de l'échantillon final du bloc (M), les phases de Ramsey des échantillons atomiques préparés sont à nouveau alternées : on applique ainsi la phase  $d$  à l'échantillon <sup>3</sup>  $k_c + 4$ ,  $a$  à  $k_c + 5$ ...
2. Du fait du retard de quatre échantillons entre détection et rétroaction, les quatre détections correspondant aux derniers échantillons pour lesquels on a adapté la phase, qui ne respectent donc pas la séquence  $a, b, c, d...$  ne sont pas lues.
3. L'estimation de la distribution est à nouveau réinitialisée : le nombre  $n_I$  étant connu, l'estimation la plus précise de l'état serait donnée par la distribution estimée lors de la convergence du bloc (I), ayant subi une relaxation sur la durée du bloc (M). Ceci augmenterait cependant le nombre de calculs à effectuer en temps réel. Nous prenons donc une estimation initiale prédéfinie (fonction de  $n_I$ ). On considère d'abord une distribution  $Q$  piquée en  $n_I$  (qui décrit l'état réel issu de la préparation – voir le paragraphe IV.1.1.d ci-dessous) : et prenons comme initialisation du bloc (F) le résultat de la relaxation de cette distribution sur la durée du bloc de mesure :

$$P_0^F = \mathbb{T}^{N_M+4}Q.$$

4. Les détections correspondant à 400 échantillons atomiques avec des phases de Ramsey alternées sont enregistrées : la distribution  $P_k^F(n)$  est actualisée en temps réel en prenant en compte les résultats de détection (les POVM employés dans cette section sont ceux calibrés pour un choix de phase passif) et la relaxation.
5. La convergence est atteinte lorsqu'un nombre de photons  $n_F$  vérifie la condition (IV.1) :

$$P_k^{(F)}(n_F) \geq 0,8.$$

L'analyse *a posteriori* des résultats nous permet de ne conserver dans ces expériences que les trajectoires pour lesquelles  $n_I = n_F$ .

Bien évidemment, plus la durée de la mesure adaptative, et donc l'intervalle entre les mesures de contrôle sera grand, plus la probabilité qu'un saut quantique ait lieu pendant la mesure centrale sera importante. Cette durée doit donc être limitée, mais suffisamment longue pour que l'on puisse observer la progression de la mesure. Nous avons choisi une section de mesure adaptative de 296 échantillons atomiques, soit une durée de 24,6 ms. La préparation produisant de 0,3 à 0,4 atomes détectés par échantillon, on aura donc une centaine de détections atomiques en moyenne sur cette section, soit le bon ordre de grandeur pour arriver à la convergence. La proportion de sauts quantiques sur cette durée

---

3. De cette façon on anticipe sur l'alternance des phases de Ramsey : le premier échantillon détecté dans le bloc final est l'échantillon  $k_c + 5$ , de phase  $a$ . En choisissant le réglage de l'échantillon précédent de manière à déjà respecter la succession des phases de la mesure passive, nous minimisons l'erreur sur la phase de Ramsey de ce premier échantillon détecté.

est alors de 60 % environ <sup>4</sup>.

La période de préparation (I) est de durée variable (aussitôt l'état préparé, on effectue la mesure adaptative). Elle est cependant limitée à un maximum de 396 échantillons, essentiellement pour des raisons de durée totale de la séquence expérimentale. La vérification (F) comporte systématiquement 400 échantillons, même si l'indice  $n_F$  peut être déterminé plus rapidement, afin de permettre systématiquement la calibration de la phase de Ramsey. En effet, nous avons vu au paragraphe III.2.3.b que des fluctuations de la phase de Ramsey peuvent se produire à l'échelle d'une expérience (l'acquisition d'une série de 1500 trajectoires s'effectue en un quart d'heure environ). Nous utilisons donc les détections issues de la mesure passive de vérification pour effectuer une tomographie de spin, et vérifier l'ajustement de la phase de Ramsey. Nous pouvons ainsi corriger d'éventuelles fluctuations d'une série de trajectoires à l'autre.

**Régulation des changements de phase :** Nous avons vu à la section III.2.1 que la phase de Ramsey d'un échantillon est influencée par celle de l'échantillon qui le suit : toutes les alternances de réglage n'étant pas calibrées, des changements trop fréquents introduiraient des imprécisions dans notre estimation d'état. La simulation de principe de la mesure montre que le contrôleur minimisant l'entropie (à la précision numérique de la simulation) continue de varier les phases de Ramsey y compris pour des gains très faibles sur l'espérance de l'entropie. À titre d'exemple une entropie de  $10^{-3}$  correspond à une distribution piquée sur un nombre de photons dont les deux voisins ont une probabilité de l'ordre de  $10^{-4}$  seulement. Des valeurs inférieures à cet ordre de grandeur n'ont que peu de sens pour notre expérience, et pourraient cependant déclencher un changement de phase. Nous ajoutons donc à l'algorithme de choix de phase la condition supplémentaire que le changement d'entropie moyenne espéré doit être supérieur à  $1 \cdot 10^{-3}$ . Nous avons pu vérifier sur des simulations que cette limitation ne modifiait pas les performances de la mesure adaptative, mais réduisait efficacement la fréquence des sauts de phase à la fin de la trajectoire.

**Optimisation de la sélection :** Dans le cas où la phase de Ramsey se trouve décalée, du fait de fluctuations lentes, par rapport aux calibrations incluses dans l'estimateur, nous ne pouvons évidemment pas revenir sur les décisions prises en temps réel durant la mesure. Par contre, le tri des trajectoires s'effectuant *a posteriori*, nous pouvons *réanalyser* les mesures passives de préparation et de vérification en incluant un décalage éventuel. Les indices  $n_I$  et  $n_F$  peuvent s'en trouver modifiés, et on effectue ainsi une meilleure sélection des trajectoires sans saut quantiques.

**Mesure témoin :** La mesure témoin passive correspond simplement à l'absence d'adaptation de la phase dans la section de mesure (M), qui est donc alternée pour des échantillons

---

4. La probabilité de saut après projection initiale dans l'état  $n$  est  $1 - \exp(-nt/T_{cav})$  (en négligeant l'état thermique). On peut ensuite sommer les contributions de  $n$  différents issus de l'état cohérent initial  $|\alpha = \sqrt{\bar{n}}\rangle$  pour obtenir  $P_{saut} = 1 - \exp(-\bar{n}(1 - \exp(-t/T_{cav})))$ .

successifs ( $a, b, c, d, \dots$ ). L'estimation d'état est conduite à l'aide des POVM correspondants selon la structure présentée ci-dessus.

#### IV.1.1.c Choix des phases de Ramsey

Avant de présenter les principaux résultats obtenus, indiquons les paramètres que nous avons choisi pour cette mesure. Nous avons représenté sur la figure IV.2 les orientations des états atomiques corrélés aux différents nombres de photons dans le plan équatorial de la sphère de Bloch, en prenant en compte la non-linéarité du déphasage par photon. Nous utilisons quatre phases de Ramsey comme précédemment, séparées de  $\pi/4$  environ. Elles ont été choisies de la façon suivante : pour tout nombre de photons  $n$ , la phase de Ramsey telle que  $\pi(g|n, \phi_r) \simeq \pi(e|n, \phi_r) \simeq 0,5$  permet de distinguer au mieux le nombre de photon  $n$  de ses plus proches voisins. Pour une distribution piquée autour de  $n$  et suffisamment symétrique, c'est aussi la phase qui assure la plus grande réduction d'entropie en moyenne. On peut ainsi associer à chaque nombre de photons un phase de Ramsey  $\phi_n$  telle que pour un champ contenant ce nombre de photons l'interféromètre soit sur un milieu de franges :

$$\phi_n \equiv -\phi(n) - \frac{\pi}{2}. \quad (\text{IV.2})$$

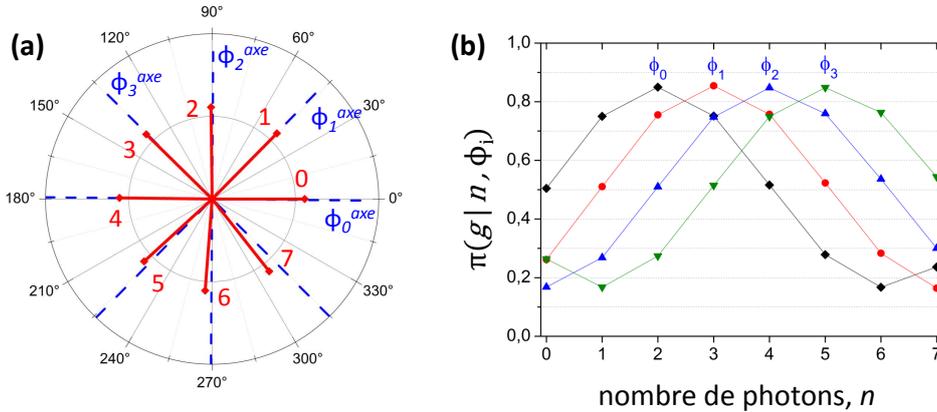


FIGURE IV.2 – Paramètres des franges de Ramsey : (a) orientation des pseudospin atomiques associés aux différents nombres de photons (traits pleins rouges), et directions des axes de rotation pour l'impulsion  $\pi/2$  dans la seconde zone de Ramsey pour les quatre choix de phases de Ramsey  $\phi_0^{axe}$ ,  $\phi_1^{axe}$ ,  $\phi_2^{axe}$ ,  $\phi_3^{axe}$  (pointillés bleus). (b) Probabilités conditionnelles  $\pi(g|n, \phi_i)$  de mesure dans  $|g\rangle$  pour ce jeu de paramètres et les différentes phases de mesure. Les phases de Ramsey choisies sont identiques pour les POVM de la mesure passive ou active ; le contraste et le décalage des franges peuvent différer. Pour des raisons de clarté on ne représente ici que les POVM correspondant à la mesure active.

De même que nous avons précédemment associé à la phase de Ramsey  $\phi_r$  une *direction de mesure* dans le plan équatorial de la sphère de Bloch, nous pouvons lui associer l'*axe de*

la rotation effectuée dans la seconde zone de Ramsey. La direction de cet axe de rotation dans le plan de la sphère de Bloch est donnée par la phase

$$\phi^{axe} = -\pi/2 - \phi_r.$$

La condition (IV.2) se réécrit donc :

$$\phi_n^{axe} = \phi(n),$$

c'est-à-dire que les phases de Ramsey  $\phi_n$  vérifiant cette condition ont leurs axes de rotation alignés avec la direction du pseudospin associés au nombre de photon  $n$ .

Nous avons choisi d'utiliser quatre phases de Ramsey ainsi associées aux premiers nombres de photons, que nous noterons donc dorénavant  $\phi_0 \equiv a$ ,  $\phi_1 \equiv b$ ,  $\phi_2 \equiv c$ ,  $\phi_3 \equiv d$ . Nous avons représenté sur la figure IV.2(a) cette direction  $\phi^{axe}$  correspondant au milieu de franges ( $\pi(g|n, \phi_i) = \pi_0$ ) pour les quatre phases utilisées lors de la mesure active, pour un exemple de réglage typique issu de nos résultats. Sont également représentées pour ces réglages, à la figure IV.2(b), les probabilités conditionnelles  $\pi(g, |n, \phi_i)$ , c'est-à-dire les éléments du POVM de la détection dans  $|g\rangle$  pour les phases choisies, faisant apparaître les contrastes et les décalages calibrés des franges.

Lors d'une série d'expériences on effectue initialement le réglage des potentiels de  $R_2$  pour les deux jeux de franges de Ramsey des mesures passive et active (voir le paragraphe III.2.1.b) pour ajuster les écarts entre phases de Ramsey aux écarts entre déphasages par photon. Les phases de Ramsey choisies sont identiques pour les deux jeux de franges. Puis on choisit la fréquence de la source Ramsey pour fixer la valeur de  $\phi_0$ . Rappelons que du fait des fluctuations de phase décrites au chapitre précédent, nous corrigeons périodiquement la valeur de cette fréquence pour assurer l'alignement souhaité.

#### IV.1.1.d Caractéristiques de la préparation initiale :

Comme nous l'avons dit, il est utile pour préciser l'initialisation de la mesure de vérification (bloc (F)) de connaître le résultat de la préparation passive d'un nombre de photon avec un seuil de 80% à l'issue du bloc initial (I). Afin d'obtenir une estimation de l'état préparé en moyenne, on effectue une mesure annexe, où la mesure de préparation est suivie dès la convergence d'une série de 400 échantillons atomiques aux phases alternées. Nous utilisons ensuite ces échantillons pour reconstruire l'état convergé, à l'aide de la méthode de maximum de vraisemblance présentée au paragraphe II.1.3.b. Ceci fournit en fonction de  $n_I$  l'histogramme  $P(n)$  de la distribution moyenne obtenue à l'issue de la préparation. Les résultats sont représentés à la figure IV.3.

Cette reconstruction a pu être effectuée pour les nombres de photons de 0 à 4 (les statistiques étant trop faibles pour les valeurs de  $n_I$  supérieures). Les distributions obtenues font essentiellement apparaître les deux nombres de photons voisins de  $n_I$ . La fidélité obtenue est un peu inférieure à la fidélité attendue de 0,8 (celle prévue par l'estimateur), selon le nombre de photons. Les nombres de photons plus élevés, comme 3 et 4 sont plus instables et leur mesure est donc probablement plus sensible aux imperfections résiduelles.

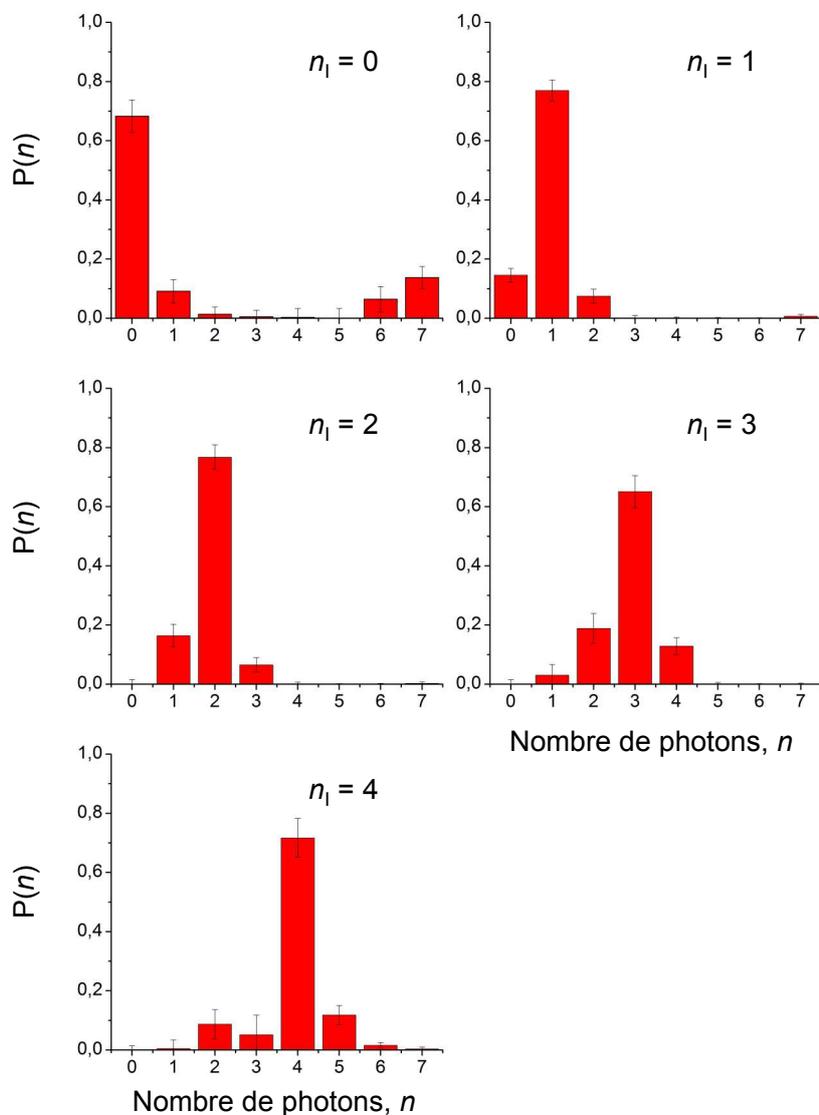


FIGURE IV.3 – Reconstruction de l'état à l'issue de la préparation initiale : on donne en fonction du résultat de la préparation atomique  $n_I$  l'histogramme  $P(n)$  de la distribution obtenue à l'aide d'une reconstruction par maximum de vraisemblance (voir le paragraphe II.1.3.b pour la méthode), sur 826, 2212, 2681, 2279, et 1454 traces pour  $n_c = 0, 1, 2, 3$ , et 4 respectivement. Les barres d'erreurs indiquent, pour chaque nombre de photons, l'écart quadratique moyen entre l'évolution temporelle issue de la reconstruction et la courbe ajustée (c'est cet écart qui est minimisé lors de l'ajustement). Le seuil de convergence pour l'estimateur réalisant la préparation est de 80%.

Il en va autrement du vide de photons  $n_I = 0$ , qui ne relaxe pas : la fidélité plus basse obtenue ici est due à la confusion faite par le filtre entre l'état  $|8\rangle$  et l'état  $|0\rangle$  pour lequel les probabilités de détection de  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$  sont très proches. L'estimateur les confond car il n'a pas connaissance de  $|8\rangle$  (l'espace de Hilbert est limité à 7 photons au maximum). Ainsi pour un état cohérent initial de nombre de photons moyen  $\langle n \rangle = 3$ , environ 1 trajectoire sur 6 paraissant ne contenir aucun photon en contient en fait 8. Lors de la reconstruction, cet état à 8 photon a relaxé : on retrouve de fait une population non nulle sur l'état à 7 photons. C'est cette sélection erronée qui est responsable de la moins bonne préparation de  $|0\rangle$ .

Étant donnés ces résultats, nous avons fait le choix d'une distribution systématique  $Q(n)$  pour décrire cette préparation et initialiser la mesure de vérification finale selon la valeur de  $n_I$  :

$$Q(n_I) = 0,7, \quad Q(n_I \pm 1 \pmod{8}) = 0,15. \quad (\text{IV.3})$$

On sous-estime un peu pour les états à 1 et 2 photons la qualité de la préparation en faisant ce choix, mais cela a la vertu d'assurer une meilleure sélection des trajectoires : la dernière étape de vérification requiert quelques étapes de décimation supplémentaires, pour bien vérifier le nombre  $n_F$ . Ce choix est particulièrement utile pour les convergences vers 0 en présence de 8 photons mentionnées ci-dessus. En effet, une distribution telles que  $Q(0) = 0,8$ , subissant la relaxation sur le temps de la mesure (M), ne peut voir qu'augmenter la population de  $|0\rangle$ <sup>5</sup>. La condition de sélection finale à 80% serait donc automatiquement satisfaite pour la mesure de vérification (F). On sélectionnerait ainsi comme trajectoire sans saut quantique dans le vide de photons une trajectoire où le nombre de photons part en fait de 8 et relaxe toute au long de la mesure. Du fait de la description choisie pour l'état préparé à l'issue de (I), la vérification est effectuée même pour  $|0\rangle$ , et permet d'éliminer ce type de trajectoires.

### IV.1.2 Trajectoires individuelles

Nous présentons à la figure IV.4 deux exemples d'évolutions de l'estimation d'état lors d'une mesure adaptative, obtenues pour  $n_I = n_F = 2$  et  $n_I = n_F = 3$ . En parallèle nous montrons les choix de phase (repérés par l'indice  $i$  de  $\phi_i$ ) effectués par le contrôleur, ainsi que l'évolution de l'entropie de la distribution, normalisée à 1 pour la distribution uniforme (à l'instant initial). Comme on pouvait s'y attendre l'évolution de l'estimateur n'est pas qualitativement différente de celle observée pour une décimation passive, comme on a pu en voir au chapitre II (figure II.2). La distribution se resserre progressivement, ce qui conduit à une compétition entre deux états voisins, dont l'un atteint finalement une fidélité proche de 1 (c'est ici l'état au nombre de photons majoritaire sélectionné  $|n = n_I = n_F\rangle$ ).

Les choix de phase effectués par le contrôleur présentent des tendances communes. La phase est variée plus fréquemment en début de trajectoire, et prend à la fin de celle-ci

---

5. Ceci est vrai de toute distribution piquée en 0 si la population initiale de  $|0\rangle$  est inférieure à celle de l'état d'équilibre thermique.

une valeur fixe. Les périodes pendant lesquelles cette phase est stable sont corrélées à des périodes où la forme de la distribution varie peu malgré les détections.

L'entropie, quand à elle, décroît progressivement pour atteindre une valeur quasi-nulle correspondant à la fidélité proche de 1 atteinte en fin de trajectoire. Son évolution n'est cependant pas monotone : nous ne minimisons l'entropie qu'en *moyenne* et elle peut donc croître localement selon les résultats des détections atomiques.

Pour mieux décrire et quantifier l'impact de l'adaptation de phase, nous allons consacrer la suite de cette partie à une analyses d'ensemble des trajectoires ainsi sélectionnées (pour les mesures adaptative et passive 19500 trajectoires ont été enregistrées, desquelles on a extrait environ 6000 trajectoires vérifiant  $n_I = n_F$ ). Nous nous intéresserons premièrement à l'entropie de la distribution, à laquelle est lié notre algorithme. Puis nous observerons l'évolution des population moyennes des nombres de photons lors de cette mesure, que nous comparerons à l'état préparé. Enfin, nous proposerons quelques analyses sur les choix de phase effectués par le contrôleur.

### IV.1.3 Réduction de l'entropie moyenne

Notre algorithme de contrôle repose sur la minimisation de l'espérance de l'entropie à chaque détection, ou de façon équivalente la maximisation de l'information apportée par la mesure en moyenne. Nous nous intéressons donc d'abord à l'évolution moyenne de l'entropie de la distribution : l'évolution de l'entropie de la distribution  $S[P_k]$  est calculée pour chaque trajectoire, puis moyennée, pour chaque échantillon  $k$ , sur l'ensemble des trajectoires. L'évolution de cette entropie moyenne, notée  $\bar{S}(t)$ , est représentée à la figure IV.5(a) pour les mesures passive et adaptative. Pour des raisons de simplicité elle est normalisée à 1 pour la distribution uniforme (à l'instant initial). Il est manifeste que l'on obtient à un instant donné une entropie moyenne plus basse en ayant recours à la mesure adaptative, qui joue donc bien son rôle : on acquiert plus rapidement l'information sur le nombre de photons en adaptant la phase de Ramsey.

#### IV.1.3.a Comparaison aux simulations

Nous représentons en traits pointillés sur cette même figure IV.5(a) les évolutions de  $\bar{S}$  données par une simulation Monte-Carlo de nos deux mesures, pour des paramètres expérimentaux typiques. Nous pouvons constater un très bon accord jusqu'à une valeur de  $\bar{S}$  de 0,2 environ. Pour des valeurs inférieures, la décroissance de l'entropie est légèrement moindre que celle prédite par la simulation. L'accélération apportée par la mesure adaptative reste cependant du même ordre. Ce petit décalage n'est pas vraiment surprenant : l'expérience réelle est sujette à des imperfections que la simulation ignore, à commencer par les fluctuations de la phase de Ramsey (auxquelles on peut ajouter les incertitudes résiduelles sur les paramètres calibrés).

Ceci est confirmé par la figure IV.5(b). Nous y rappelons les résultats de l'expérience et de la simulation pour la mesure passive. En outre, nous représentons le résultat obtenu lorsque les données du bloc de mesure (M) sont réanalysés en incluant le décalage éventuel

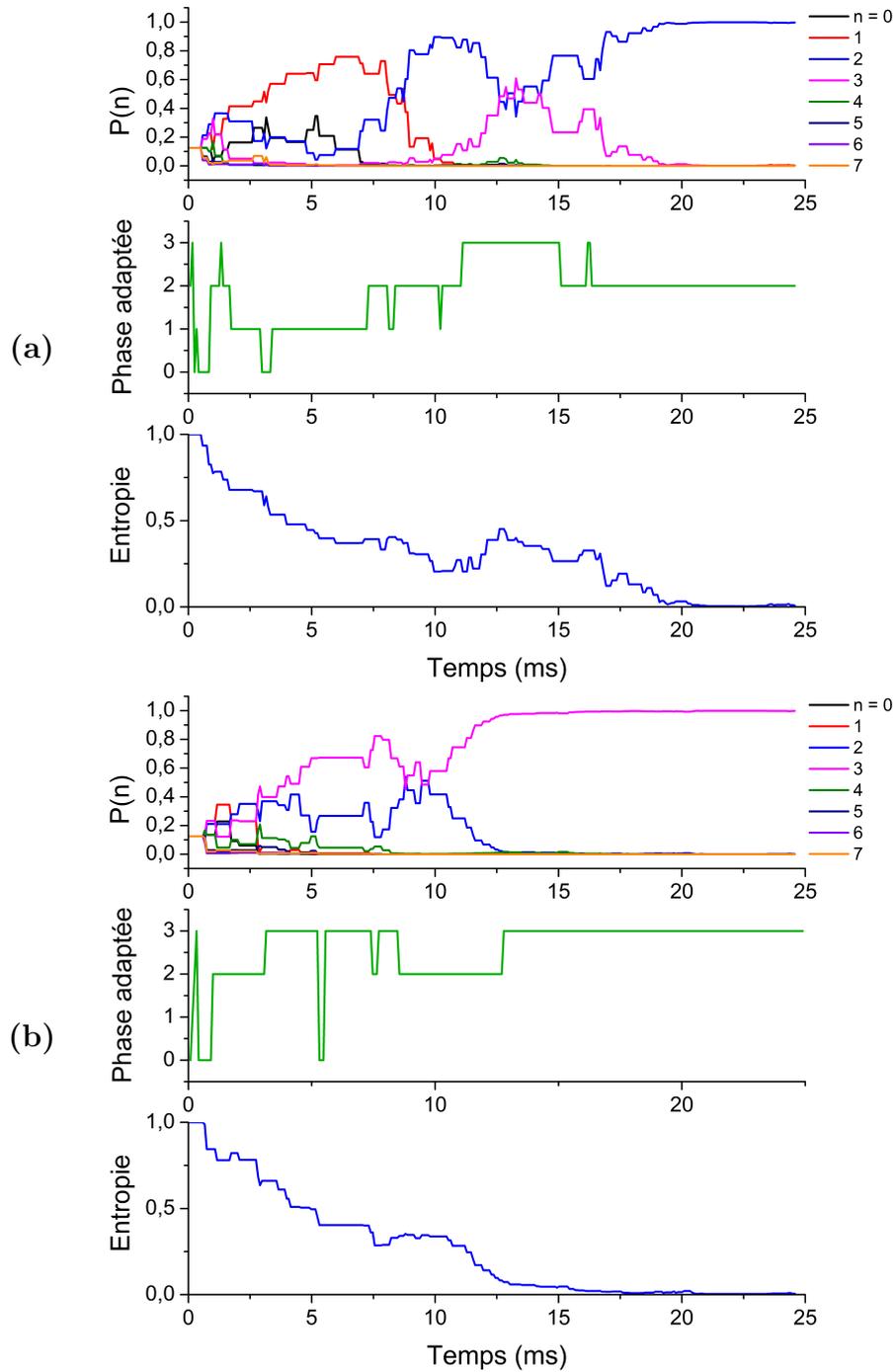


FIGURE IV.4 – Exemples de mesures adaptatives : évolution de l'estimation de la distribution du nombre de photons au cours du temps, du choix de phase repéré par l'indice (0, 1, 2, 3) de  $\phi_i$ , et de l'entropie de la distribution estimée pour deux cas où **(a)**  $n_I = n_F = 2$  et **(b)**  $n_I = n_F = 3$ .

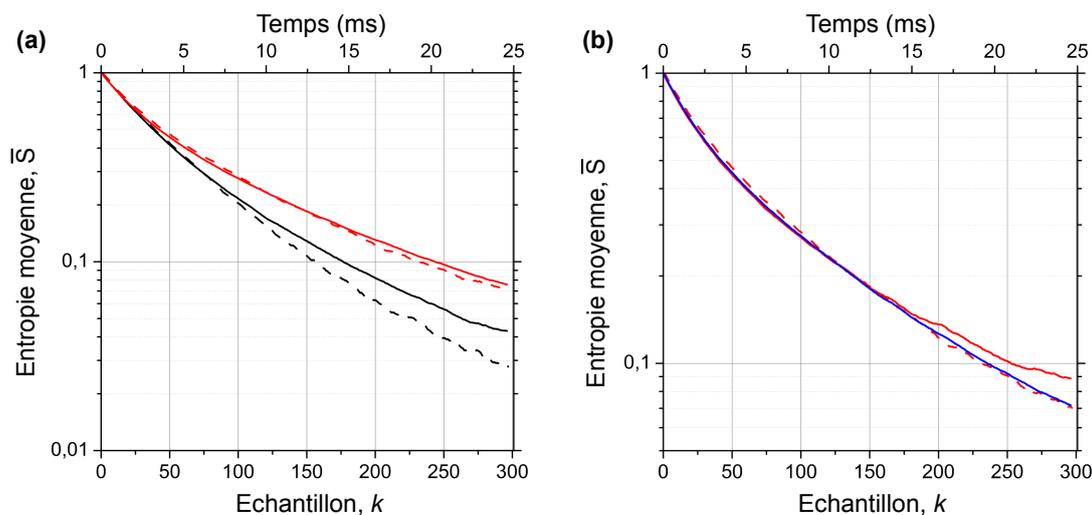


FIGURE IV.5 – (a) Évolution de l'entropie moyenne (représentée en échelle logarithmique) au cours d'une mesure adaptative (trait plein noir) ou passive (trait plein rouge). Les courbes tracées en pointillées sont issues d'une simulation Monte-Carlo de l'expérience pour des paramètres expérimentaux typiques. (b) Évolution de l'entropie moyenne lors d'une mesure passive : on représente les résultats issus de la simulation (pointillés rouges), des données expérimentales (trait plein rouge), et des données expérimentales *réanalysées* pour tenir compte du décalage de la phase de Ramsey (trait plein bleu). L'échelle verticale est modifiée pour plus de visibilité par rapport à (a). L'accord avec la simulation est alors très bon y compris pour la fin de la mesure.

de la phase de Ramsey, calibré *sur ces mêmes données* (ceci ne peut être effectué que pour les mesures passives). On obtient alors une évolution de  $\bar{S}$  très proche de celle donnée par la simulation, y compris pour les valeurs faibles finalement atteintes par l'entropie. Les fluctuations résiduelles de la phase de Ramsey semblent donc être la principale cause d'erreur dans notre mesure.

### IV.1.3.b Facteur d'accélération

Afin de quantifier le gain apporté par la mesure adaptative, nous pouvons comparer les temps que mettent les deux méthodes à atteindre une certaine valeur d'entropie moyenne. Pour chaque valeur de  $\bar{S}$  nous définissons un *facteur d'accélération* égal au rapport des temps pour lesquels cette valeur est atteinte par les mesures passive et adaptative. Nous obtenons ainsi les résultats présentés à la figure IV.6 pour l'expérience et la simulation. Ce rapport est initialement proche de 1 : Pour des valeurs élevées de  $\bar{S}$ , correspondant au début de la trajectoire, l'information manquante sur le nombre de photons est en effet élevée et toute mesure est informative ; l'acquisition d'information se fait aussi efficacement avec une mesure passive qu'avec la mesure adaptative (les courbes d'évolution de l'entropie sont presque confondues). Ce rapport prend ensuite des valeurs supérieures à 1 : la mesure

adaptative est plus efficace. Par exemple la valeur  $\bar{S} = 0,2$  (correspondant par exemple à un pic de probabilité à 0,9 pour  $n_I$  et une probabilité de 0,05 pour les nombres voisins  $n_I \pm 1$ ) est atteinte 30% plus rapidement à l'aide la mesure adaptative. Le facteur d'accélération est encore plus élevé pour les valeurs plus faibles de l'entropie moyenne : plus la mesure est longue plus il est avantageux d'utiliser l'adaptation de phase pour réduire l'entropie de la distribution.

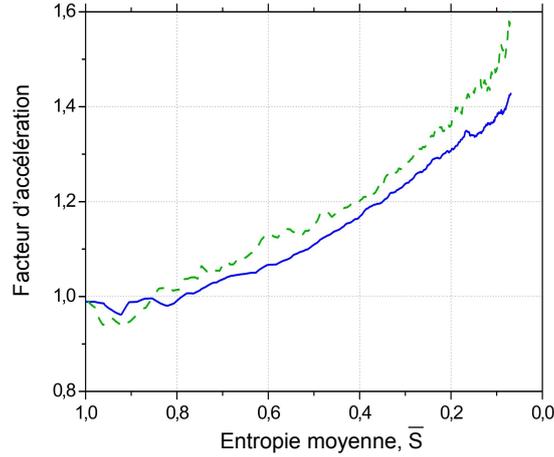


FIGURE IV.6 – Facteur d'accélération dû à la mesure adaptative : rapport, en fonction de  $\bar{S}$  des temps mis à atteindre cette valeur par les mesures passive et adaptative, pour les données expérimentales (traits pleins), et une simulation Monte-Carlo (traits pointillés).

#### IV.1.4 Évolution des probabilités moyennes

Nous pouvons également étudier l'évolution de la distribution moyenne des nombres de photons lors de la mesure adaptative. Comme nous avons sélectionné les traces de façon à «supprimer» la relaxation, nous pouvons les traiter de façon indifférente à la valeur exacte de  $n_I$  (c'est ce que nous avons déjà fait pour la moyenne d'ensemble de l'entropie). Cependant il est certain que l'évolution moyenne de  $P(n)$  dépend de cette valeur (on s'attend à voir croître la probabilité du nombre de photons sélectionné). Pour pouvoir effectuer une moyenne d'ensemble nous définissons un nombre de photons *relatif*  $\Delta n(n, n_I)$ , compris entre -3 et 4, tel que  $n = (n_I + \Delta n) \bmod 8$  : il définit un écart relatif au nombre sélectionné modulo 8. On peut expliciter sa construction :

$$\Delta n = ((n - n_I + 3) \bmod 8) - 3.$$

Ce nombre relatif prend tout son sens dans la représentation de la sphère de Bloch, où nous pouvons visualiser la mesure modulo 8 du nombre de photons que nous réalisons : pour tout  $n_I$ , corrélé à une direction dans le plan équatorial, par construction, le nombre de photons tel que  $\Delta n = +1$  est associé au pseudospin le plus proche dans le sens positif,

$\Delta n = -1$  au plus proche voisin dans le sens négatif. Ainsi si  $n_I = 0$  par exemple, on associe à l'état à 7 photons la valeur  $\Delta n = -1$ .

De cette façon nous pouvons définir sur l'ensemble des trajectoires sélectionnées une distribution du nombre de photons relatif  $P'_k(\Delta n)$ . Nous pouvons ensuite effectuer pour chaque échantillon une moyenne sur l'ensemble des trajectoires. On obtient ainsi une distribution  $\overline{P}'_k(\Delta n)$ .

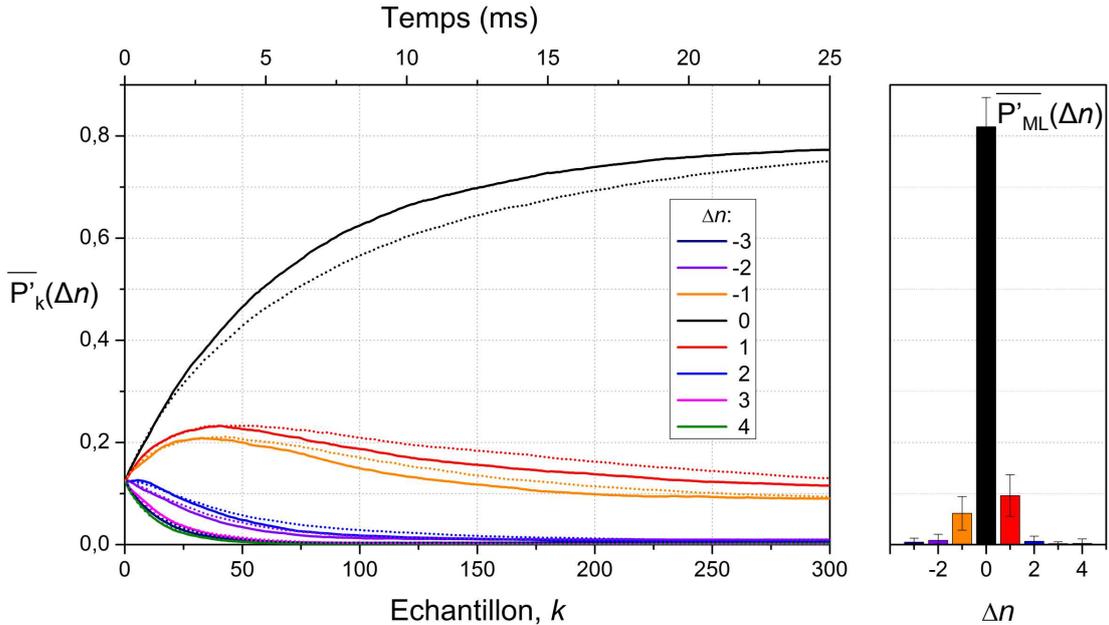


FIGURE IV.7 – (gauche) Évolution de la distribution moyenne  $\overline{P}'$  du nombre de photons relatif  $\Delta n$ .  $\Delta n = 0$  est associé au nombre de photons sélectionné  $n_I$  (voir le texte pour plus de détails). On représente en traits pleins l'évolution pour une mesure adaptative, en traits pointillés pour une mesure passive. On peut constater que  $\overline{P}'_k(0)$  sature plus rapidement pour une mesure adaptative. (droite) Histogramme moyen  $\overline{P}'_{ML}(\Delta n)$  obtenu par reconstruction par maximum de vraisemblance de l'état préparé pour chaque  $n_I$ ; les résultats sont exprimés en fonction de  $\Delta n$  sont ensuite moyennés sur  $n_I$ . Les probabilités obtenues sont en bon accord avec les valeurs limites de  $\overline{P}'_k(\Delta n)$ .

Nous donnons à la figure IV.7 les évolutions de cette distribution obtenues pour les mesures passive et adaptative. Dans les deux cas la probabilité  $\overline{P}'_k(0)$  croît de façon monotone jusqu'à une valeur de 0,8 environ : l'estimateur retrouve bien majoritairement l'état sélectionné. On peut remarquer l'évolution particulière de  $\overline{P}'_k(\pm 1)$ , qui croît d'abord à partir de la distribution initiale uniforme, avant de décroître vers une valeur asymptotique de 0,1 environ. Cela se comprend facilement : les détections atomiques indiquent en moyenne majoritairement le nombre de photons  $n_I$  (probabilité finale élevée), mais au début de la trajectoire l'estimateur ne possède pas assez d'information pour distinguer efficacement cet état ( $\Delta n = 0$ ) des états voisins. La distribution estimée se resserre donc autour de  $n_I$  en faisant croître également les probabilités de  $\Delta n = \pm 1$ . Ce n'est qu'une fois suffisamment

d'information accumulée (environ 50 échantillons) que ces probabilités décroissent pour atteindre leur valeur asymptotique.

Outre ces caractéristiques communes, il faut noter sur cette figure que si les courbes  $\overline{P}'_k(0)$  ont la même asymptote, que la mesure soit passive ou adaptative, celle-ci est atteinte plus rapidement dans le cas de la mesure adaptative. Les probabilités pour les nombres de photons voisins  $\Delta n = \pm 1$  sont réduites plus efficacement. Nous visualisons ainsi d'une autre façon l'apport de la mesure adaptative.

#### IV.1.4.a Reconstruction de l'état sélectionné

Nos mesures de sélection ont pour but de tester la décimation adaptative sur un état qui n'est pas (ou peu) soumis à la relaxation. Idéalement, la sélection d'un état de Fock  $n_I$  avec une fidélité très proche de 1 et la vérification du nombre de photons  $n_F$  permettraient de sélectionner une trajectoire où l'on mesure effectivement l'état de Fock pur à  $n_I$  photons. Ici le seuil de sélection est une fidélité de 80%, et les probabilités moyennes  $\overline{P}'_k(0)$  tendent vers une valeur de 0,8 (et non pas 1 comme ce serait le cas pour la mesure d'un état de Fock pur). Il est donc intéressant de caractériser indépendamment l'état mesuré dans cet ensemble de trajectoires, pour s'assurer que l'on élimine correctement les effets de la relaxation, et que les valeurs limites de  $\overline{P}'_k$  trouvées par l'estimateur sont correctes.

À cette fin, nous pouvons exploiter les données de la mesure passive, pour effectuer une reconstruction par maximum de vraisemblance des états sélectionnés sur l'ensemble des trajectoires. Comme précédemment, nous appliquons la méthode présentée au paragraphe II.1.3.a à des «fenêtres» successives de 20 échantillons atomiques. Nous obtenons ainsi l'état de maximum de vraisemblance en fonction du temps pour le bloc de mesure (M). On caractérise ainsi l'état mesuré tant dans le cas passif que dans le cas actif, puisque la méthode de sélection est la même, et indépendante du type de mesure effectuée. De même que pour les mesures de sélection, et afin d'optimiser les paramètres de la reconstruction, la phase de Ramsey est réajustée sur chaque ensemble de données issu de mesures passives. Un exemple de résultat pour cette reconstruction est donné à la figure IV.8 pour  $n_I = 2$ .

Nous pouvons constater que l'état sélectionné n'évolue pas en moyenne au cours du bloc de mesure : nous avons semble-t-il effectivement bloqué la relaxation par notre double sélection. Il demeure en principe, même sous la contrainte de cette sélection, quelques possibilités d'évolution faisant intervenir des sauts quantiques : sur la durée de la mesure, il y a par exemple une probabilité d'environ 5% que survienne la perte d'un photon suivie de l'absorption d'un photon thermique (ou réciproquement) ; la sélection se faisant avec un seuil de 80%, nous pouvons sélectionner initialement l'état  $|n_I + 1\rangle$  qui relaxe pendant la mesure vers  $|n_I\rangle$ . Cependant ces événements ne modifient pas nécessairement la distribution *moyenne* du nombre de photons au cours du temps<sup>6</sup> : on peut considérer que nous effectuons la mesure d'un état stationnaire, et comparer les valeurs de probabilités reconstruites par maximum de vraisemblances aux valeurs limites estimées dans nos deux expériences.

---

6. Ils ont potentiellement plus d'impact sur l'évolution de l'entropie moyenne.

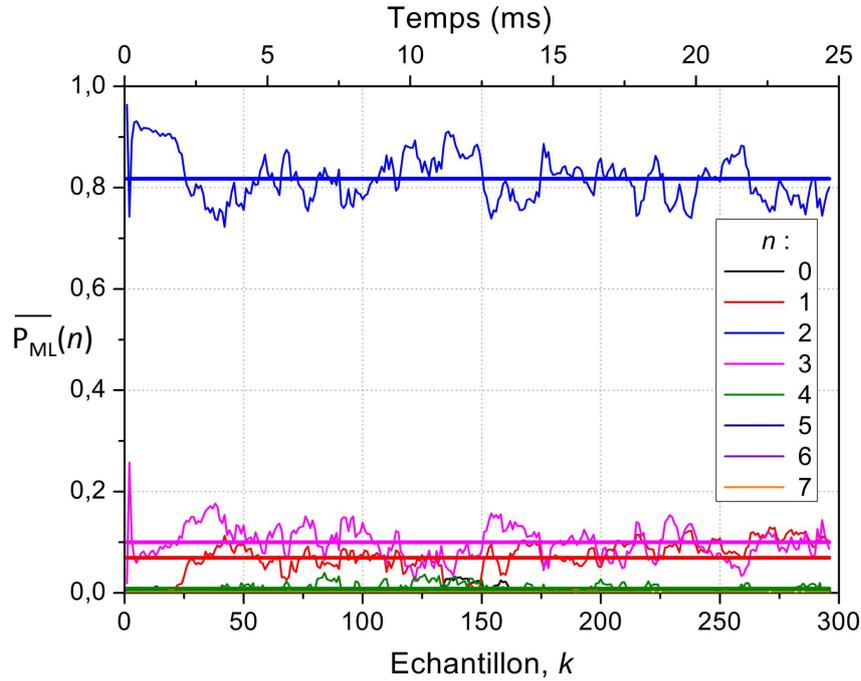


FIGURE IV.8 – Reconstruction de l'état sélectionné : évolution temporelle (traits fins) de l'état de maximum de vraisemblance dans le bloc de mesure (M), pour  $n_I = 2$ , et ajustement par une distribution stationnaire (traits gras).

Nous avons donc reconstruit par maximum de vraisemblance l'état mesuré pour  $n_I$  allant de 0 à 4 (la reconstruction n'a pas été possible pour des valeurs plus élevées, faute de statistiques suffisantes). Les résultats, semblables à la figure IV.8 sont ajustés par des valeurs constantes, et nous calculons l'écart quadratique moyen à la reconstruction. Les histogrammes détaillés obtenus pour chaque valeur de  $n_I$ , sont reportés à l'annexe C. Ces statistiques sont ensuite moyennées pour construire un histogramme global fonction du nombre de photons relatif  $\Delta n$  de ces probabilités obtenues par maximum de vraisemblance, que nous notons  $\overline{P'_{ML}}(\Delta n)$ . Cet histogramme est présenté à la figure IV.7, à côté des évolutions moyennes estimées par nos deux mesures. Les valeurs limites atteintes en moyenne par la décimation, adaptative ou passive, sont en bon accord avec celles issues de la reconstruction. Le léger écart qui demeure peut être en partie attribué aux fluctuations de la phase de Ramsey, qui ne sont pas corrigées sur le bloc de mesure (M).

#### IV.1.4.b Une meilleure illustration de la convergence des probabilités

La distribution moyenne estimée par le filtre lors de la mesure converge donc bien vers l'état de maximum de vraisemblance obtenu à partir de l'ensemble des trajectoires, qui est l'état mesuré en moyenne. Cette évolution n'illustre cependant pas bien la convergence de l'estimateur sur une trajectoire individuelle. Pour s'en convaincre on pourra se reporter

aux exemples de trajectoires individuelles donnés à la figure IV.4 : pour ces exemples (et de manière générale) la probabilité d'un nombre de photons atteint une valeur très proche de 1 à la fin du bloc de mesure. Ceci est également corroboré par les valeurs prises par l'entropie normalisée  $\bar{S}$ , qui décroît sous la valeur de 0,1 alors que l'entropie de la distribution limite  $\overline{P'_{k=296}}$  est de 0,3 environ. Sur les trajectoires individuelles on obtient donc des distributions finales plus piquées (d'entropie plus faible) que la distribution  $\overline{P'_{k=296}}$  : les valeurs de celle-ci sont donc en fait la moyenne de trajectoires où l'estimateur converge vers  $\Delta n = 0$  ou  $\Delta n = \pm 1$  avec une grande fidélité.

Nous pouvons mettre ce phénomène en évidence de la façon suivante : sur l'ensemble des trajectoires sélectionnées, nous réalisons un nouveau tri, non plus en fonction de  $n_I$ , mais du nombre de photons pour lequel la probabilité finale  $P_{k=296}(n)$  est maximale, noté  $n_{\text{sup}}$ . Nous définissons comme précédemment pour chaque trajectoire un nombre de photons relatif  $\Delta n_{\text{sup}}(n, n_{\text{sup}})$  tel que  $n = n_{\text{sup}} + \Delta n_{\text{sup}} \pmod{8}$ , ou de façon réciproque :

$$\Delta n_{\text{sup}} = ((n - n_{\text{sup}} + 3) \pmod{8}) - 3.$$

Notant  $P''_k(\Delta n_{\text{sup}})$  la distribution de ce nombre de photon relatif, nous pouvons effectuer pour chaque échantillon une moyenne sur l'ensemble des trajectoires, notée  $\overline{P''_k(\Delta n_{\text{sup}})}$ . Il s'agit de la moyenne des distributions estimées «centrées» sur le nombre de photon dont la probabilité est maximale à la fin de la mesure.

Le résultat de cette analyse est représenté à la figure IV.9. On peut constater que par ce simple tri en fonction du maximum *relatif* de probabilité, on obtient une distribution qui de manière frappante converge vers une probabilité proche de 1 pour  $\Delta n_{\text{sup}} = 0$  : elle atteint 96% pour la mesure adaptative, valeur qui est en outre limitée par la durée de la mesure, la courbe n'ayant visiblement pas atteint son asymptote. Pour l'ensemble des trajectoires l'estimateur converge donc à la fin de la mesure vers *un unique* nombre de photon. La distribution de maximum de vraisemblance, fonction du nombre de photons relatif au nombre de photons sélectionné  $n_I$ , s'interprète donc comme un véritable *mélange statistique* : nous effectuons pour chaque trajectoire la mesure d'un état de Fock de  $\Delta n$  donné, quasiment pur, aléatoire, avec une distribution de probabilité  $\overline{P_{\text{ML}}(\Delta n)}$ .

La probabilité limite  $\overline{P''_{k=296}}(0)$  reste légèrement inférieure à 1 . D'une part des sauts quantiques résiduels restent possibles : s'ils surviennent à la fin de la mesure, la valeur maximale de la probabilité finale peut être différente de 1 D'autre part, dans le temps imparti pour la mesure, les courbes  $\overline{P''_k}(0)$  n'atteignent pas tout à fait leur valeur asymptotique. Néanmoins, dans cette représentation aussi, la mesure adaptative est plus efficace que la mesure passive :  $\overline{P''_k}(0)$  croît plus rapidement lorsque la phase est adaptée.

Cette représentation, bien que davantage conforme à l'image que l'on se fait de la décimation d'après les trajectoires individuelles, ne rend pas encore tout à fait justice à l'évolution de l'entropie moyenne : en effet la distribution moyenne  $\overline{P''_{k=296}}$  correspondrait à une entropie normalisée  $\bar{S}$  de 0,1 environ, soit une valeur encore supérieure aux valeurs limites effectivement atteintes par  $\bar{S}$ . Ceci est en fait tout à fait normal et est lié aux propriétés de l'entropie : celle-ci est en effet une fonction *concave* pour les distributions de

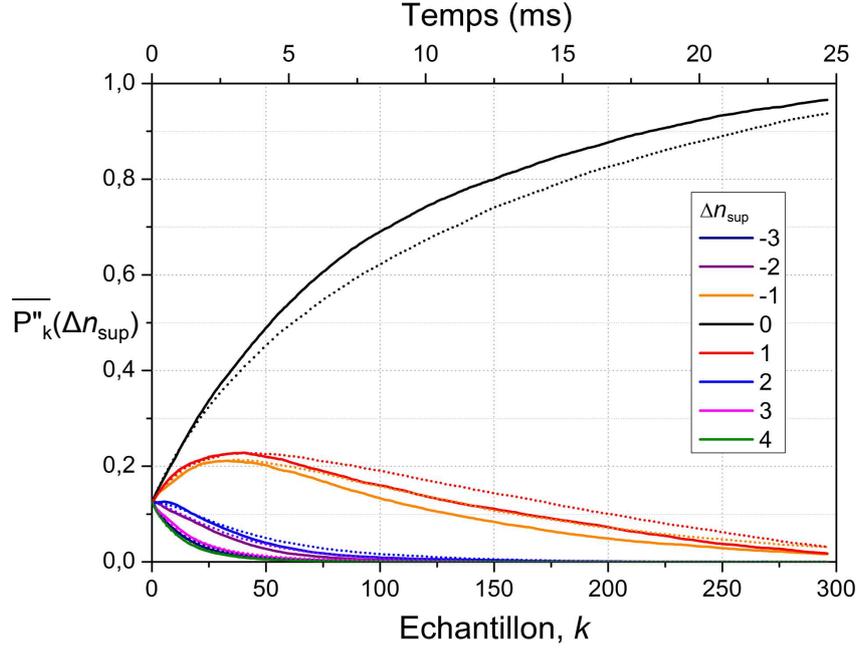


FIGURE IV.9 – Évolution de la distribution moyenne  $\overline{P''}$  du nombre de photons relatif  $\Delta n_{\text{sup}}$ . La valeur  $\Delta n_{\text{sup}} = 0$  est associée au nombre de photons dont la probabilité estimée est maximale à la fin de la mesure (voir le texte pour plus de détails). On représente en traits pleins l'évolution pour une mesure adaptative, en traits pointillés pour une mesure passive. Cette moyenne d'ensemble met en évidence que cette valeur maximale est très proche de 1 à la fin de la mesure pour la plupart des trajectoires.

probabilités, c'est-à-dire que pour toute paire de distributions  $(P_1, P_2)$  et tout réel  $t \in [0, 1]$  :

$$S[tP_1 + (1-t)P_2] \geq tS[P_1] + (1-t)S[P_2]. \quad (\text{IV.4})$$

Nous avons déjà utilisé une telle inégalité de concavité pour montrer que l'entropie ne peut que décroître lors d'une mesure faible. Le résultat (IV.4) ci-dessus s'étend naturellement au cas des variables aléatoires : si  $P$  est maintenant une variable aléatoire (c'est le cas en particulier, d'une trajectoire à l'autre de  $P''_{k=296}$ ), on a l'inégalité suivante (*inégalité de Jensen*) :

$$S[\mathbb{E}(P)] \geq \mathbb{E}(S[P]), \quad (\text{IV.5})$$

avec égalité si  $P$  est constante (presque partout). L'entropie de la distribution moyenne finale ne peut donc prendre la valeur finale de l'entropie moyenne que si cette distribution est la même pour toutes les trajectoires obtenues. Les sauts quantiques résiduels déjà mentionnés (ou les imperfections du filtre) font que ce n'est évidemment pas le cas pour la distribution  $P''_{k=296}$ . La distribution moyenne surestime donc systématiquement la valeur de l'entropie par rapport aux valeurs prises sur les trajectoires individuelles.

*Remarque : taux de convergence* Les courbes obtenues présentent un comportement exponentiel pour  $k$  suffisamment grand. On peut donc chercher à déterminer la valeur théorique de ces exposants caractéristiques. Dans l'annexe E, nous présentons une méthode d'obtention de ces taux de convergence, dans le cas de la mesure *passive*, où l'on peut écrire explicitement l'évolution moyenne de la distribution estimée lors de la mesure d'un nombre de photons déterminé. Cette méthode ne peut être étendue à la mesure adaptative, où l'évolution moyenne est plus difficile à déterminer, puisqu'elle dépend des choix du contrôleur. On obtient néanmoins de cette façon l'échelle de temps de la convergence des probabilités moyennes pour la mesure passive. La comparaison avec des prédictions de comportements asymptotiques [104] permet en outre de montrer que cette échelle de temps dépend fortement du type de moyenne d'ensemble réalisé.

### IV.1.5 Choix de la phase d'adaptation

Nous concluons l'analyse de cette expérience en nous intéressant aux choix de phase effectués par le contrôleur au cours de la mesure adaptative. Ce sont ces choix qui permettent d'améliorer la convergence de la décimation. Nous étudierons d'abord la fréquence des changements de phase effectués par le contrôleur avant d'en décrire principales caractéristiques.

#### IV.1.5.a Fréquence des changements de phase

Nous avons expliqué, en donnant la structure de l'expérience à la section IV.1.1, que nous imposons une limite aux changements de phase effectués par le contrôleur. Des changements trop fréquents sont en principe à éviter, car ils introduisent des imprécisions dans notre estimation d'état (nous ne calibrons pas les POVM correspondants à toutes les successions de phase possibles). Nous limitons donc les changements de phase à des valeurs significatives de la diminution attendue de l'entropie moyenne : celle-ci doit être supérieure à  $10^{-3}$ .

La fréquence de changement de phase calculée sur l'ensemble des traces sélectionnées dans ces conditions est représentée à la figure IV.10. Nous constatons effectivement que les changements de phase sont de moins en moins fréquents au cours de la mesure. Le tracé obtenu est en bon accord avec une courbe exponentielle de temps caractéristique 55 échantillons ce qui est également l'échelle de temps typique de la convergence des probabilités. Les premiers échantillons voient leur phase modifiée en moyenne une fois sur cinq. Étant donné que l'on détecte en moyenne 0,35 atomes par échantillon, et que le contrôleur ne peut modifier la phase que lorsqu'il y a détection, la fréquence de changement ne peut pas dépasser ce nombre (que l'on obtiendrait en alternant les phases comme pour une mesure passive). Les changements sont donc plutôt fréquents en début de trajectoire, mais leur fréquence décroît ensuite rapidement ; il ne s'en produit pour ainsi dire plus dès l'échantillon 200. La régulation des sauts joue donc bien son rôle : à titre de comparaison, si l'on simule l'algorithme non régulé, la fréquence de saut atteint une valeur asymptotique de 0.05 (soit le quart de sa valeur initiale).

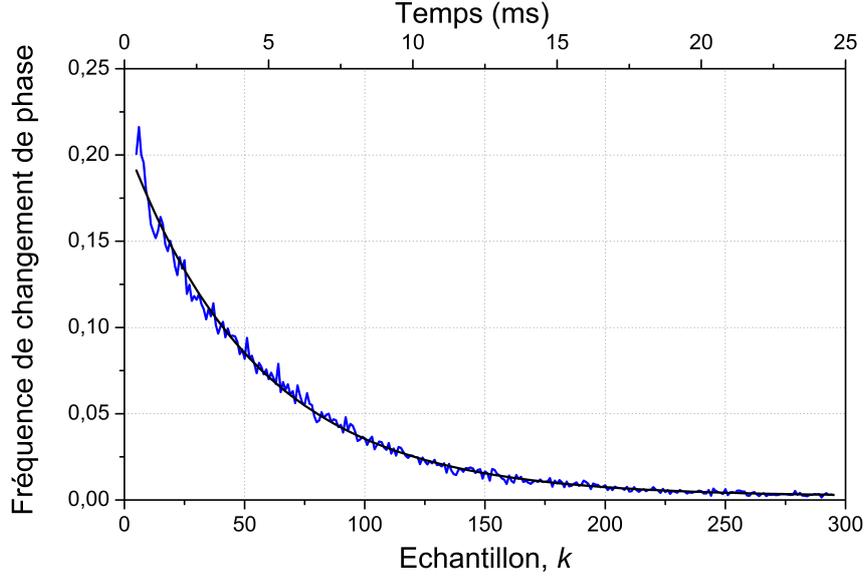


FIGURE IV.10 – Fréquence moyenne des changements de phase durant la mesure adaptative, et ajustement exponentiel (noir). Les modifications de la phase de Ramsey sont restreintes dans l'algorithme de contrôle à des diminution de l'entropie supérieures à  $10^{-3}$ .

#### IV.1.5.b Statistique des choix de phase

Les réglages typiques des phases de Ramsey employées ont été présentés à la figure IV.2 : les phases  $\phi_0$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , et  $\phi_3$  sont choisies de façon à ce que l'interféromètre soit sur un milieu de franges si le champ contient les nombres de photons 0, 1, 2, et 3 respectivement. Afin de pouvoir traiter les trajectoires sélectionnées de façon globale, nous définissons pour chaque  $n_I$  un indice de phase relatif  $\delta p(n_I)$  variant de -1 à 2 (il y a quatre directions de mesure possibles), tel que la phase relative  $\phi'_{\delta p}$  corresponde à un axe de rotation dans le plan équatorial de la sphère de Bloch aligné sur le nombre de photons relatif  $\Delta n$ .  $\phi'_0$  est donc la phase pour laquelle l'axe de rotation est aligné sur le pseudospin associé à  $n_I$  et  $\phi'_2$  correspond à la direction orthogonale. Ainsi on a pour  $n_I = 7$ ,  $\phi'_0 = \phi_3$  (axe aligné sur le pseudospin correspondant à  $n_I$ ),  $\phi'_1 = \phi_1$ ,  $\phi'_2 = \phi_2$  et  $\phi'_{-1} = \phi_3$ . Explicitement, en notant  $p$  l'indice des phases initiales  $\phi_p$ , on a :

$$\delta p = ((p - n_I + 1) \bmod 4) + 1.$$

Nous nous intéressons d'abord à la fréquence d'utilisation de chaque phase relative. Pour cela nous définissons formellement l'entier  $m_k(\delta p)$  qui vaut 1 si la phase de détection de l'échantillon  $k$  est la phase  $\phi'_{\delta p}$  et 0 sinon. La *fréquence d'utilisation* de la phase  $\phi'_{\delta p}$  (pour l'échantillon  $k$ ) est alors la moyenne de  $m_k(\delta p)$  sur l'ensemble des trajectoires, notée  $\overline{m_k}(\delta p)$ . L'évolution de cette moyenne pour les différentes valeurs de  $\delta p$  est représentée à la figure IV.11.

La succession des phases pour les quatre premiers échantillons est fixée par la fin du bloc de préparation d'état (I) dont ce sont les derniers échantillons préparés, ce qui explique les

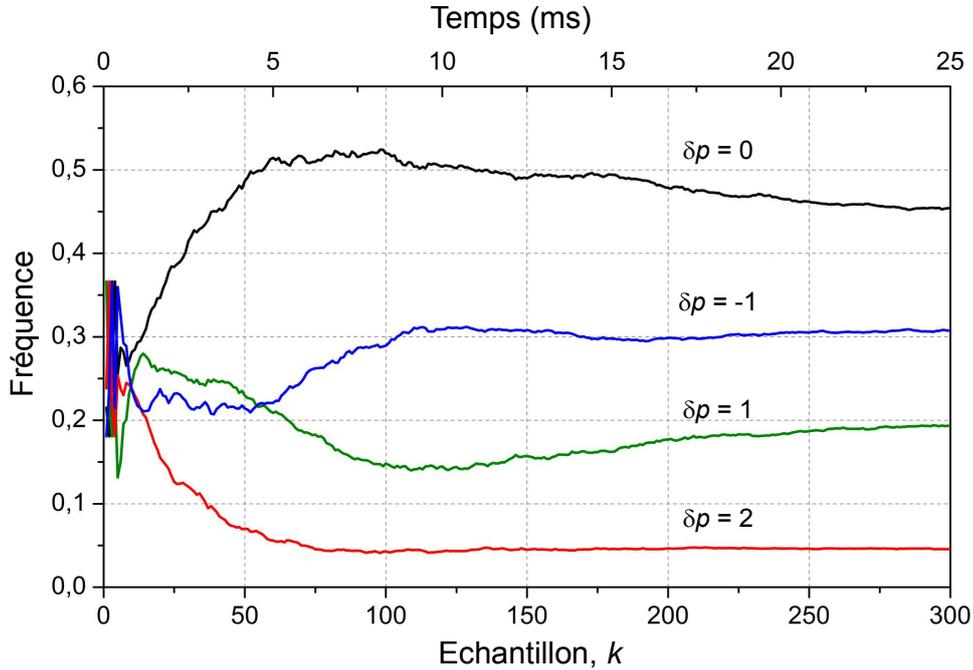


FIGURE IV.11 – Fréquences d'utilisation des valeurs de phase de Ramsey par le contrôleur, repérées par l'indice  $\delta p(n_I)$  de la phase relative  $\phi'$  (voir texte), en fonction de l'indice  $k$  de l'échantillon détecté. Après une durée correspondant à dizaine d'échantillons environ, la phase telle que  $\delta p = 0$  est utilisée préférentiellement tout au long de la trajectoire.

variations rapides initiales de la fréquence. Dès  $k = 5$ , le contrôleur est responsable des choix de phase. Après la détection d'une dizaine d'échantillons le choix  $\delta p = 0$  est progressivement privilégié, représentant plus de la moitié des réglages pour les échantillons entre 50 et 100, ce qui correspond véritablement à la période de «projection» de la distribution de probabilité : l'entropie moyenne atteint à la fin de cette phase  $\bar{S} \simeq 0,2$  (voir la figure IV.5) ce qui correspond à une probabilité de 90% environ pour le nombre de photons majoritaire. La phase  $\delta p = 0$  réalise donc en moyenne la meilleure décimation pour le nombre sélectionné  $n_I$ . La direction de mesure orthogonale  $\delta p = 2$  est très rapidement peu utilisée : pour cette phase en effet l'interféromètre est à un extremum de frange si le champ est dans l'état  $n_I$ . Cette direction de mesure distingue donc mal l'état  $|n_I\rangle$  de ses voisins directs, et n'est quasiment plus utilisée par le contrôleur après une durée typique de l'ordre de 50 échantillons.

Les phases  $\delta p = 1$  et  $\delta p = -1$  continuent d'être employées par le filtre jusqu'à la fin de la trajectoire, ce qui peut avoir plusieurs causes : des fluctuations de  $P_k(n)$  peuvent se produire suite à un enchaînement particulier de détections, mais la convergence peut aussi avoir lieu vers les nombres de photons voisins  $\Delta n = \pm 1$  (qui sont présents dans la distribution moyenne sélectionnés). La limitation imposée sur les changements de phase est également en partie responsable de ce comportement : la phase peut être «immobilisée» à une valeur

$\delta p$  donnée si l'espérance de la diminution d'entropie est insuffisante. Ces comportements des fréquences d'utilisation sont bien reproduits par les simulations de l'expérience, et dépendent effectivement de la limitation imposéesur les changements d'entropie . C'est le seul effet visible de cette limitation, qui ne modifie pas, par ailleurs, les performances de la mesure en termes de réduction d'entropie moyenne ou de convergence des probabilités.

*Remarque* : Nous avons utilisé ici des phases relatives d'indice  $\delta p$  défini par rapport à l'indice  $n_I$  de la sélection. De cette façon nous n'introduisons pas de connaissances de l'estimateur dans notre sélection, et étudions le comportement du contrôleur sur l'état sélectionné, que nous avons reconstruit indépendamment.

Le comportement du contrôleur est cependant directement lié à l'estimation de la distribution de probabilité. Nous pouvons donc aussi envisager une autre représentation de ces choix de phase, par rapport à l'état dont la probabilité estimée est maximale à la fin de la trajectoire. Ceci revient à définir, de façon analogue à ce qui a été fait ci-dessus pour les probabilités moyennes, un indice de phase relatif  $\delta p_{\text{sup}}$ . Pour chaque trajectoire, en fonction du nombre de photons  $n_{\text{sup}}$  dominant à la fin de la trajectoire, la phase d'indice  $\delta p_{\text{sup}}(n_{\text{sup}})$  correspond à un axe de rotation aligné sur le nombre de photons relatif  $\Delta n_{\text{sup}}(n, n_{\text{sup}})$ .

On obtient avec ce nouveau tri des courbes très similaires à celles représentées ici, à une exception notable : la phase relative d'indice  $\delta p_{\text{sup}} = 2$  voit sa fréquence moyenne tomber à une valeur très proche de 0. Ceci est assez logique, puisque ce choix de phase est inefficace pour les nombres de photons au voisinage de  $n_{\text{sup}}$ , vers lequel l'estimation converge avec une probabilité proche de 1. On peut donc associer l'emploi de  $\delta p = 2$  ci-dessus aux seuls cas de convergence vers  $\Delta n = \pm 1$ . Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode étant très semblables à ceux présentés ici, ils sont reportés à l'annexe D.

#### IV.1.5.c Corrélations

Les valeurs moyennes étudiées ci-dessus ne nous renseignent pas sur la succession des choix de phase. Intéressons-nous donc dans un second temps aux corrélations qui peuvent exister entre les choix de phases. Nous cherchons à savoir si lorsqu'il a utilisé à l'échantillon  $k$  la phase  $\phi'_{\delta p_1}$ , le contrôleur choisira de préférence la phase  $\phi'_{\delta p_2}$  pour un échantillon ultérieur d'indice  $k + l$ . Nous calculons dans ce but les fréquences moyennes  $\overline{m_k(\delta p_1)m_{k+l}(\delta p_2)}$ . Si le choix effectué par le filtre pour l'échantillon  $k + l$  était indépendant de son choix à l'échantillon  $k$ , autrement dit si les variables  $m_k$  et  $m_{k+l}$  étaient indépendantes, on aurait :

$$\overline{m_k(\delta p_1)m_{k+l}(\delta p_2)} = \overline{m_k(\delta p_1)} \cdot \overline{m_{k+l}(\delta p_2)}.$$

Nous définissons donc la *corrélation* entre les choix de phases  $\delta p_1$  et  $\delta p_2$  comme :

$$C(\delta p_1, k; \delta p_2, k + l) \equiv \overline{m_k(\delta p_1)m_{k+l}(\delta p_2)} - \overline{m_k(\delta p_1)} \cdot \overline{m_{k+l}(\delta p_2)}. \quad (\text{IV.6})$$

Ces corrélations ont été calculées sur l'ensembles des trajectoires : nous les représentons à la figure IV.12 pour les indices  $\delta p_1$  et  $\delta p_2$  allant de  $-1$  à  $1$  seulement ( $\delta p = 2$  étant très peu utilisé) et pour des délais  $l$  allant jusqu'à 100 échantillons. Nous pouvons constater

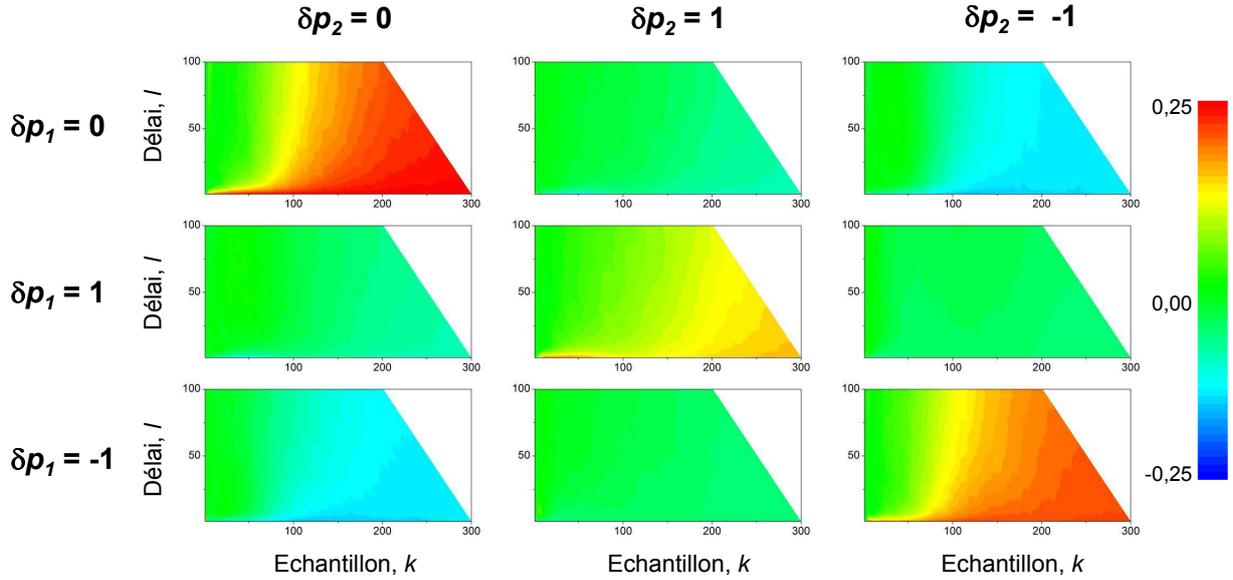


FIGURE IV.12 – Corrélations entre utilisations des phases relatives : on trace la corrélation moyenne  $C(\delta p_1, k; \delta p_2, k+l)$  entre les phases relatives  $\phi'$  d'indices  $\delta p_1$  et  $\delta p_2$ , en fonction de l'indice  $k$  de l'échantillon détecté et d'un délai  $l$  allant jusqu'à 100 échantillons. On constate essentiellement une tendance à réemployer la même phase pour plusieurs échantillons successifs (zones rouges pour les graphes sur la diagonale), qui s'accroît à la fin de la mesure.

que le contrôleur tend de manière générale à réemployer le même réglage de phase sur des échantillons successifs : on obtient des corrélations positives pour  $\delta p_1 = \delta p_2$ . Ceci se fait évidemment au détriment des autres phases d'où les corrélations négatives hors de la diagonale. On peut distinguer deux périodes typiques dans la trajectoire d'après ces corrélations. Jusqu'à 100 échantillons environ, le réglage de phase est conservé préférentiellement à l'échelle de quelques échantillon atomiques : ceci est principalement lié au fait que le changement de phase ne peut se faire qu'après la détection effective d'un atome, ce qui se produit en moyenne tous les trois échantillons environ : la corrélation ne s'étend donc pas plus loin que quelques échantillons. Puis, au niveau du centième échantillon, on constate une augmentation soudaine de la longueur de corrélation : à cette échelle de temps, comme nous l'avons vu plus haut, la distribution est déjà fortement piquée sur un nombre de photons. Il est alors semble-t-il de plus en plus avantageux pour la décimation de conserver le même choix de phase pour les échantillons ultérieurs. Ce phénomène est également amplifié par la restriction que nous avons imposée sur les changements de phase.

*Remarque :* Comme pour les fréquences d'utilisation de chaque phase, nous pouvons également étudier les corrélations entre phases en définissant l'indice de phase relativement au nombre de photons dominant pour l'estimateur  $n_{\text{sup}}$  à la fin de la trajectoire. Les résultats obtenus sont qualitativement les mêmes que ceux présentés ici. L'annexe D regroupe les statistiques de choix de phases calculées avec cette méthode de tri.

## IV.2 Projection d'un état de Fock

L'expérience précédente nous a permis d'étudier le fonctionnement de la mesure adaptative dans un cas simple, où les effets de la relaxation sont (quasiment) éliminés. Ceci a requis par contre une analyse *a posteriori* et une sélection des données, et constitue donc seulement une expérience de principe. En effet l'intérêt de la décimation adaptative réside plutôt dans son utilisation pour préparer des états nombres, voire les stabiliser *en présence de relaxation* à l'aide de protocoles de rétroaction quantique [65].

Cette première expérience a montré que l'adaptation de phase a effectivement un impact sur la vitesse de convergence de la décimation : nous pouvons donc envisager de l'intégrer à une expérience plus réaliste. C'est ce que nous présentons dans cette partie : nous avons modifié la séquence de préparation d'état présentée dans la partie précédente, qui prend en compte la relaxation, pour y intégrer l'adaptation de phase. Nous donnerons donc d'abord la structure de cette séquence de *préparation adaptative*, avant de présenter les principaux résultats obtenus.

### IV.2.1 Structure de l'expérience

L'expérience visant à la *préparation* d'états de Fock, est constituée de deux «blocs» (voir la figure IV.13) :

**Le bloc de mesure (M)** : il effectue une mesure adaptative d'un champ cohérent initial, analogue à la préparation d'état «passive» déjà présentée.

1. L'estimation initiale reproduit la distribution poissonnienne du champ cohérent, contenant  $\langle n \rangle = 3$  photons<sup>7</sup> :

$$P_0(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}.$$

2. À chaque détection d'un échantillon atomique (d'indice  $k$ , éventuellement vide), de résultat  $\mu$ , cette estimation est actualisée par décimation à l'aide du POVM correspondant (*cf.* équation (II.43)), qui dépend de la phase de Ramsey appliquée à cet échantillon :

$$P_{k-\frac{1}{2}} = \mathbb{M}_\mu(\phi_r(k))P_{k-1}.$$

les POVM employés dans cette section sont ceux calibrés pour un choix de phase actif, à potentiels constants (*cf.* paragraphe III.2.1.a).

3. L'évolution élémentaire due à la relaxation (*cf.* équation (II.44)) est ensuite prise en compte, et appliquée à cette estimation intermédiaire  $P_{k-\frac{1}{2}}$  :

$$P_k = \mathbb{T}P_{k-\frac{1}{2}}.$$

---

7. Plus précisément, la distribution de Poisson exacte est tronquée à  $n = n_{\max}$  et renormalisée.

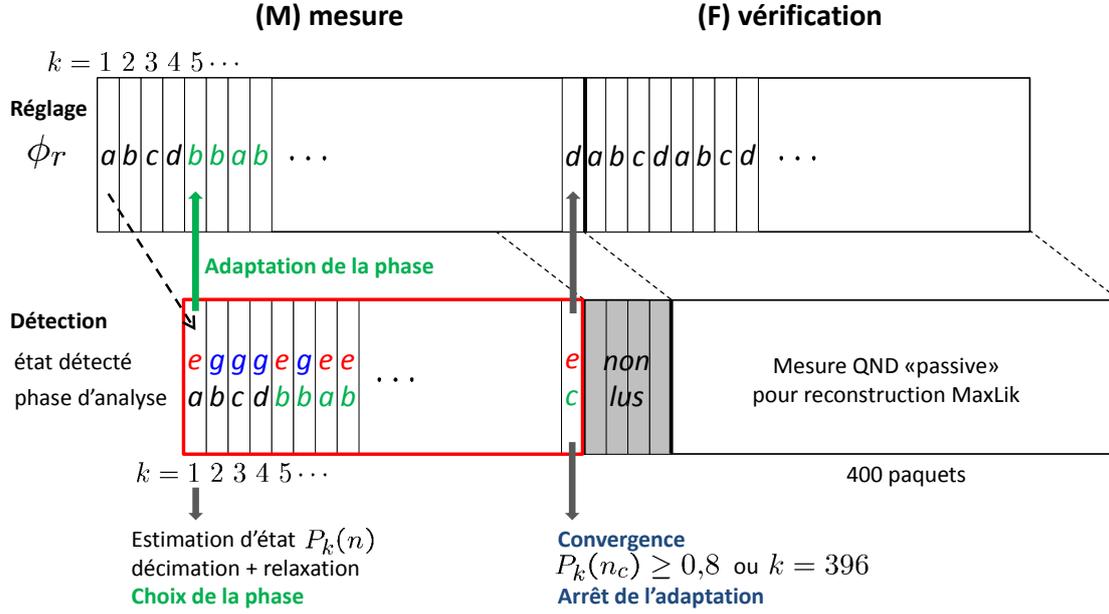


FIGURE IV.13 – Structure de l’expérience de préparation d’état de Fock : un premier ensemble d’échantillons atomiques (M) réalise une mesure adaptative du nombre de photons à partir d’un champ cohérent. Outre les détections atomiques, la relaxation et la statistique initiale du nombre de photons sont prises en compte dans l’estimation  $P_k(n)$ . L’ensemble des détections conduisant à une estimation d’état et une adaptation de la phase est encadré en rouge. Un deuxième ensemble (F) pour lesquels la phase de Ramsey est alternée réalise une mesure passive du nombre de photons après que l’estimation initiale à convergé vers un état de Fock avec une pureté de 80%. Nous pouvons ainsi reconstruire par maximum de vraisemblance les populations de l’état juste après convergence.

4. La phase de Ramsey est adaptée en temps réel en fonction de l’estimation  $P_k$ . La minimisation de l’entropie moyenne détermine la phase de Ramsey à appliquer à l’échantillon  $k + 4$  :

$$\phi_{k+4}^{\text{opt}} = \arg \min_{\phi=a,b,c,d} \langle S[\tilde{P}_{k+4}] \rangle(\phi),$$

où, rappelons-le,  $\tilde{P}_{k+4}$  est la distribution que l’on obtiendrait à partir de  $P_k$  en détectant l’échantillon  $k + 4$  immédiatement après la détection de l’échantillon  $k$ .

5. Le bloc de mesure (M) s’arrête lorsque la condition de convergence (IV.1) (seuil à 80% atteint pour un nombre de photons  $n_c$ ) est vérifiée, ou que 396 échantillons ont été mesurés. On note  $k_c$  l’indice de l’échantillon pour lequel cette condition est vérifiée.

**Le bloc final (F) :** Il effectue une mesure passive du champ.

1. Dès la fin du bloc (M) les phases de Ramsey des échantillons atomiques préparés sont à nouveau alternées.
2. Les quatre détections correspondant aux derniers échantillons pour lesquels on a adapté la phase ne sont pas lues.
3. Les détections correspondant à 400 échantillons atomiques avec des phases de Ramsey alternées sont enregistrées : elles nous permettent de reconstruire, par la méthode de maximum de vraisemblance, l'état du champ juste après la convergence. Ceci nous permettra de *vérifier* que l'état préparé correspond bien à notre estimation.

**Mesure témoin :** La mesure témoin passive est en tout point similaire à l'exception que la phase n'est pas adaptée, mais alternée en permanence. L'état est cependant estimé en temps réel dans le bloc (M), ce qui permet l'identification de la convergence, après laquelle les détections du bloc (F) sont enregistrées pour reconstruction.

## IV.2.2 Accélération de la préparation

Pour l'analyse de cette expérience de préparation d'état, il n'est pas possible d'effectuer des moyennes d'ensembles, comme nous l'avons fait pour l'expérience précédente : en effet, ici, la boucle d'adaptation de phase est arrêtée aussitôt le critère de convergence satisfait. Les séquences de préparation ont donc des durées distinctes, ce qui rend difficile le calcul d'évolutions moyenne de l'entropie ou des probabilités.

Nous avons donc recours à un autre critère, plus pratique, pour évaluer la rapidité de la préparation : pour chaque durée  $t$  après le début de la mesure, nous calculons la fraction  $\eta_{\text{conv}}$  de l'ensemble des trajectoires qui a convergé *avant* cet instant. Cette fraction  $\eta_{\text{conv}}$  est naturellement croissante, et tend vers 1 pour un temps de mesure assez long (même en présence de relaxation la convergence est toujours réalisée : pour des temps de mesure longs, l'état d'équilibre thermique remplit le critère de convergence pour  $|0\rangle$ ) : la rapidité avec laquelle les résultats positifs s'accumulent nous permet de comparer les performances des algorithmes de contrôle passif et actif. Pour cette expérience, 9000 séquences ont été enregistrées pour les deux cas où la phase de Ramsey est adaptée, ou alternée de manière passive sur les échantillons successifs.

L'évolution de  $\eta_{\text{conv}}$  est représentée à la figure IV.14(a) pour la mesure adaptative et la mesure témoin aux phases alternées. De manière évidente, l'emploi de l'adaptation de phase améliore les performance de la préparation d'état : on obtient beaucoup plus rapidement un résultat (la convergence vers un nombre de photons à 80% de fidélité) en adaptant la phase de Ramsey.

Nous avons également représenté à la figure IV.14(b) les distributions brutes du nombre de traces convergées en fonction du nombre de photons  $n_c$  (allant de 0 à 4, les statistiques étant faibles pour les autres nombres de photons) pour les deux mesures adaptative (traits pleins) et passive (traits pointillés). Sur cette représentation plus détaillée des résultats nous pouvons constater :

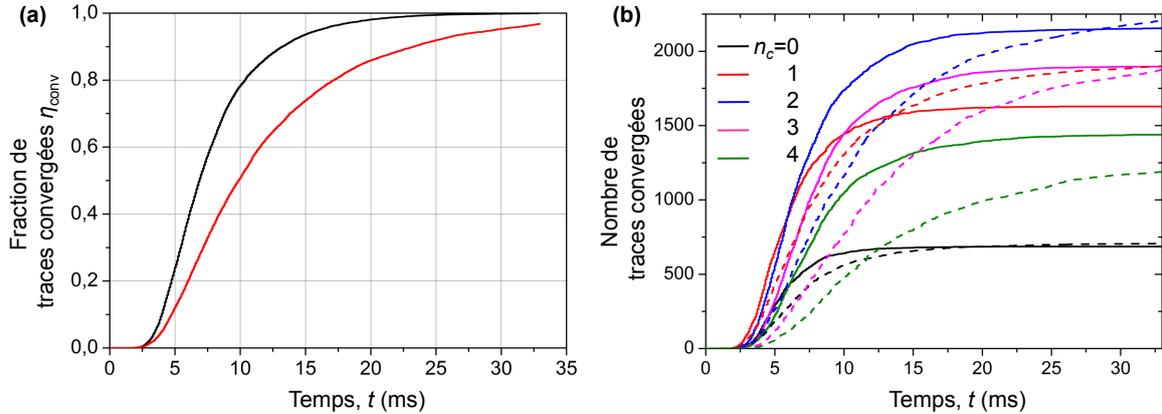


FIGURE IV.14 – **(a)** Fraction  $\eta_{\text{conv}}$  des séquences ayant déjà rempli le critère de convergence à l’instant  $t$ . Cette quantité est calculée sur un ensemble de 9000 trajectoires et représentée en fonction du temps  $t$  pour une mesure adaptative (noir) et une mesure passive où la phase est alternée (rouge). L’accélération obtenue grâce à la mesure adaptative est manifeste. **(b)** Nombres de trajectoires ayant déjà convergé à un instant  $t$ , selon le nombre de photons  $n_c$  (de 0 à 4), pour une mesure adaptative (traits pleins) ou passive (pointillés) : on note l’accumulation plus rapide des convergences pour la préparation adaptative, ainsi que davantage de convergences vers les nombres de photons plus élevés.

- que le nombre de traces convergées croît initialement plus vite pour la mesure adaptative, et ce quel que soit le nombre de photons,
- que la statistique finale des traces favorise les nombres de photons plus élevés pour la mesure adaptative (comptes plus élevés pour  $n_c = 4$ , au détriment de  $n_c = 1$ ), ce qui peut s’expliquer simplement : la convergence étant plus rapide, le champ a en moyenne moins le temps de relaxer avant la convergence.

Nous nous proposons maintenant de quantifier l’accélération apportée par la mesure adaptative.

#### IV.2.2.a Facteur d’accélération

À l’aide des données de la figure IV.14(a), nous pouvons calculer pour chaque fraction  $\eta_{\text{conv}}$  de traces convergées le rapport des temps nécessaires pour l’atteindre à l’aide d’une mesure passive ou adaptative. Nous voyons par exemple que la moitié des traces ( $\eta_{\text{conv}} = 0,5$ ) ont convergé après 6,9 ms pour la mesure adaptative, ce qui prend 10 ms environ pour la mesure passive, soit un temps 45% plus long.

Nous représentons à la figure IV.15 l’ensemble des valeurs que prend ce rapport en fonction du taux de succès  $\eta_{\text{conv}}$ . Il vaut initialement 1, ce qui signifie que le temps minimum nécessaire à l’obtention de la convergence est le même quelle que soit la méthode de mesure : cela se comprend dans la mesure où les premières convergences sont observées pour  $t = 2,5$  ms, instant auquel seuls 9 atomes ont été détectés en moyenne : il s’agit là de séries de

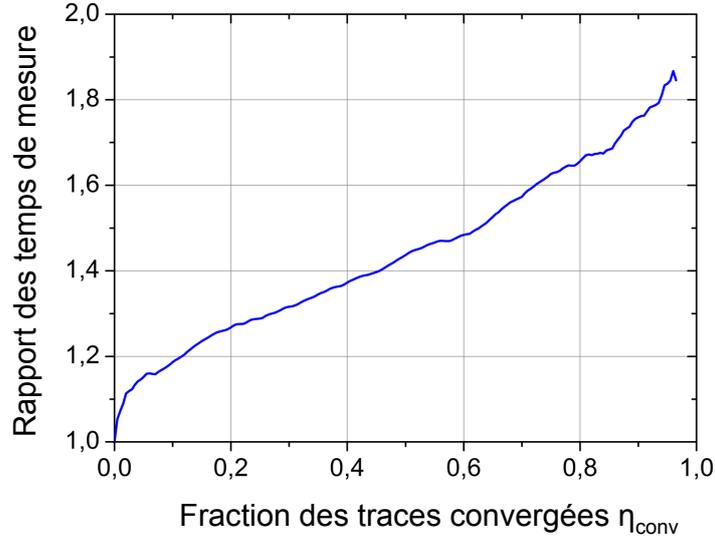


FIGURE IV.15 – Facteur d'accélération obtenu pour une mesure adaptative : on représente le rapport du temps que met la mesure passive à atteindre une fraction des séquences convergées  $\eta_{\text{conv}}$  et de celui obtenu avec une mesure adaptative.

détections atypiques menant à la convergence plutôt que d'un véritable effet de l'adaptation de phase.

Cependant ce facteur d'accélération croît rapidement : la mesure adaptative est d'autant plus avantageuse que l'on souhaite des taux de succès élevés. On obtient une accélération de 50% pour un taux de succès de 65% environ, et le temps de mesure est quasiment doublé si l'on souhaite que toutes les trajectoires aient convergé ( $\eta_{\text{conv}} \simeq 1$ ).

#### IV.2.2.b Temps moyen de succès

La fraction  $\eta_{\text{conv}}$  que nous avons construite est en fait la fonction de répartition du temps de convergence  $t_{\text{conv}}$  :

$$\eta_{\text{conv}}(t) = P(t_{\text{conv}} \leq t).$$

Nous pouvons donc utiliser les accroissements de cette fonction pour estimer le temps de convergence moyen :

$$\overline{t_{\text{conv}}} = \int_0^{\infty} t \, d\eta_{\text{conv}} \simeq \sum_t t \Delta\eta_{\text{conv}}, \quad (\text{IV.7})$$

la somme portant sur les instants  $t$  de détection des échantillons successifs. On a ainsi accès au temps nécessaire *en moyenne* pour obtenir la convergence de la mesure. On obtient les

valeurs suivantes pour les mesures passive et adaptative, respectivement <sup>8</sup> :

$$\overline{t_{\text{conv}}^{\text{pass}}} = 12,3 \text{ ms}, \quad \overline{t_{\text{conv}}^{\text{adapt}}} = 7,9 \text{ ms}. \quad (\text{IV.8})$$

Le temps moyen de préparation est réduit de 36% à l'aide de la mesure adaptative comparativement à la mesure passive usuelle. On améliore donc considérablement l'efficacité de la mesure.

### IV.2.3 Fidélité de la préparation

L'adaptation de phase permet d'accélérer significativement la convergence de la mesure, donc la préparation d'un état de Fock. Cette convergence est déterminée par notre estimation en temps réel. Nous contrôlons, par une mesure indépendante, la qualité de l'état préparé. Dans ce but, pour chaque séquence expérimentale, la convergence est suivie par l'envoi de 400 échantillons atomiques pour lesquels les phases de Ramsey sont alternées ( $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3 \dots$ )<sup>9</sup>. On rassemble ensuite les trajectoires selon l'indice de convergence  $n_c$  puis on applique sur chaque ensemble de trajectoires la méthode de reconstruction d'état présentée au paragraphe II.1.3.b : l'évolution de l'état de maximum de vraisemblance est déterminée au cours du temps, puis ajustée selon l'équation maîtresse par des courbes dont les seuls paramètres libres sont les probabilités à l'origine  $P(n, t = 0)$  [106]. À titre d'exemple, la courbe obtenue pour  $n_c = 2$  et l'ajustement correspondant sont montrés à la figure IV.16. Ceci permet d'extraire la distribution reconstruite de l'état juste après la convergence (l'histogramme correspondant est donné en insert à la figure IV.16).

Cette reconstruction est effectuée pour les deux mesures, passive et adaptative. Les histogrammes obtenus pour les nombres de photons préparés de 0 à 4 (les statistiques étant insuffisantes pour la reconstruction pour  $n_c$  plus grand), sont présentés à la figure IV.17.

Remarquons tout d'abord le bon accord entre les résultats obtenus pour les deux méthodes de préparation : le fait d'ajouter l'adaptation de phase à notre méthode ne diminue pas la fidélité de préparation de l'état. On peut ensuite constater que si les résultats obtenus sont identiques, ils ne correspondent pas tout à fait à ce que l'on attend d'après l'estimation faite par le filtre : on devrait en principe obtenir une fidélité de 80% pour  $n_c$ . Nous avons déjà donné à la section IV.1.1 une justification à la moins bonne préparation de  $|0\rangle$  : du fait de la limitation de l'espace de Hilbert à 7 photons pour l'estimateur, l'état à 8 photons peut être confondu avec le vide. Les résultats obtenus pour  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  sont satisfaisants, mais la fidélité obtenue diminue pour  $|3\rangle$  et  $|4\rangle$ . Peut-être la reconstruction, faisant

8. Pour la mesure passive, nous n'avons pas la fonction de répartition complète, les trajectoires étant interrompues avant d'avoir pu toutes converger : ceci concerne cependant une faible fraction (2%) des trajectoires, et apporte donc une correction négligeable au temps moyen calculé (si la fonction de répartition demeure régulière, ce qui est probable) pour la mesure passive. Cette contribution éventuelle ne peut de plus que le rallonger, c'est-à-dire avantager comparativement la mesure adaptative.

9. Du fait du décalage entre réglage de la phase de Ramsey et la détection, il y a un délai de 4 préparations atomiques entre l'instant de la convergence et la première détection de cette mesure de contrôle.

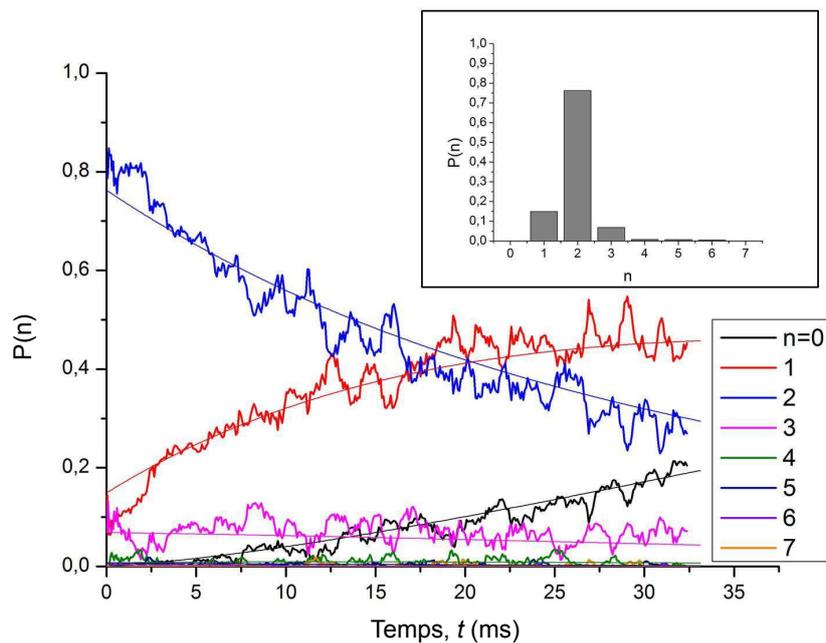


FIGURE IV.16 – Exemple de reconstruction de l'état préparé par la mesure adaptative, pour  $n_c=2$  : on reconstruit l'état de maximum de vraisemblance sur chaque fenêtre de 20 échantillons consécutifs (traits gras), puis cette évolution temporelle est ajustée à l'aide de l'équation maîtresse par des courbes dont les seuls paramètres libres sont les probabilités  $P(n, t = 0)$  (traits fins). L'histogramme obtenu est présenté en encart.

appel à l'ensemble des trajectoires, est-elle plus sensible aux incertitudes résiduelles sur la calibration des paramètres des POVM. La fidélité de l'état préparé à l'état demandé reste bonne, et identique pour les deux méthodes employées. C'est là le point essentiel : nous pouvons donc à l'aide de la mesure adaptative accélérer considérablement la vitesse de convergence de la mesure QND, sans pour autant détériorer la qualité de la préparation.

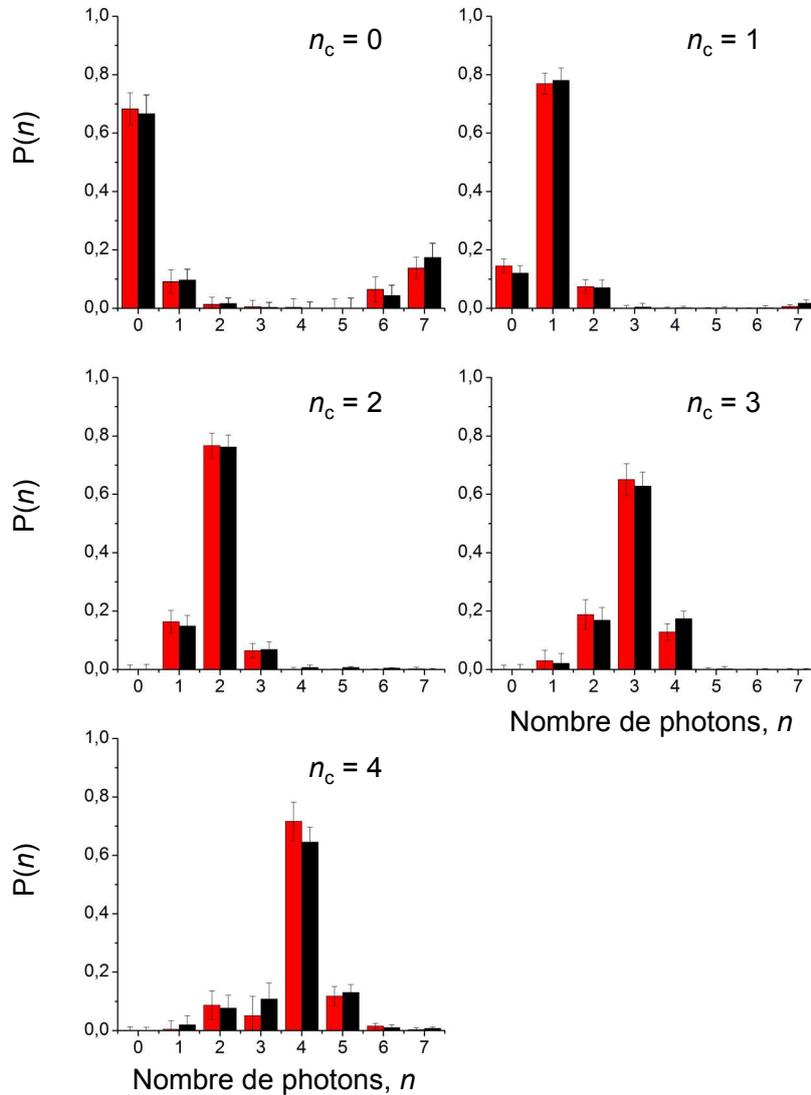


FIGURE IV.17 – Distribution du nombre de photons pour les états reconstruits après préparation : nous avons appliqué la méthode de reconstruction d'état (*cf.* paragraphe II.1.3.b) aux états préparés par la mesure adaptative (histogrammes noirs) ou passive (histogrammes rouges). Ici les reconstructions ont été effectuées sur 911(827), 1497(2212), 2836(2681), 2519(2279), et 1942(1454) trajectoires pour  $n_c = 0, 1, 2, 3$ , et 4 respectivement, pour la mesure adaptée (resp. passive). Les barres d'erreurs indiquent, pour chaque nombre de photons, l'écart quadratique moyen entre l'évolution temporelle issue de la reconstruction et la courbe ajustée. Les résultats de la préparation passive ont déjà été présentés au paragraphe IV.1.1.d. On remarquera la grande similarité des résultats entre mesure passive et adaptative : l'accélération de la mesure due à l'adaptation de phase change pas la qualité de la préparation.

# Conclusion

Le système d'électrodynamique quantique en cavité dont nous disposons permet de réaliser une mesure quantique non destructive (QND) du nombre de photon. Par cette mesure, nous pouvons préparer des états non-classiques du champ, tels les états de Fock, au nombre de photons déterminé, ou des états «chats de Schrödinger» du champ, superposition quantique de deux états cohérents. La mesure QND, outre la préparation de ces états, a permis d'étudier leur évolution sous l'effet de la décohérence : les sauts quantiques entre états de Fock ont été observés sur des trajectoires quantiques individuelles [21, 22], et l'on a également pu reconstituer par des analyse d'ensemble le processus complet de la décohérence de ces états [25, 23].

La mesure projective idéale des états de Fock est obtenue dans notre expérience par l'accumulation d'une série de mesures dites *faibles*, réalisées par des atomes successifs, qui réduisent progressivement l'indétermination du nombre de photons. Il s'agit donc d'un processus d'acquisition d'information, qui a déjà été exploité dans des expériences de contrôle quantique stabilisants les états nombres [106, 40], et qui peut naturellement bénéficier de stratégies adaptatives.

Dans ce mémoire, nous avons présenté la réalisation d'une mesure adaptative du nombre de photons piégé dans la cavité. La phase de l'interféromètre de Ramsey, paramètre clef des mesures faibles réalisées par les atomes, est variée en fonction d'une estimation de la distribution du nombre de photons, exploitant l'ensemble des connaissances disponibles (état initial, relaxation, détections antérieures). À chaque nouvelle détection, cette phase est optimisée afin que la mesure suivante apporte le plus d'information possible en moyenne, information qui est quantifiée en termes d'entropie manquante. Nous avons montré que la rapidité de la convergence de la série de mesures faibles est nettement augmentée par l'emploi de cette méthode.

La réalisation de ces expériences passe par la mise en place d'une boucle de rétroaction modifiant en temps réel les potentiels contrôlant la phase de l'interféromètre. Nous avons présenté le détail de la boucle choisie ainsi que le système de contrôle qui réalise les calculs permettant l'optimisation de la phase, et applique les potentiels choisis après chaque détection.

Une estimation correcte de l'état requiert également la calibration exacte des paramètres expérimentaux, afin d'obtenir l'estimation la plus fiable possible. Une attention particulière a été prêtée aux franges de Ramsey, qui nous permettent de décrire l'action en retour de la mesure sur le champ. Il a fallu tenir compte notamment d'une influence mutuelle entre

échantillons voisins, qui peut modifier les caractéristiques de la mesure.

Nous avons d'abord présenté une expérience de principe dans laquelle nous sélectionnons un état au nombre de photons bien déterminé. L'application à cet état préparé du protocole de mesure adaptative a mis en évidence une acquisition plus rapide de l'information : le gain de temps sur la réduction d'entropie moyenne est de l'ordre de 30%. L'étude des choix réalisés par le contrôleur en fonction de l'état préparé a montré que celui-ci privilégie les phases de mesures qui sont logiquement les plus informatives, et tend à conserver la même phase pour plusieurs atomes successivement détectés.

Dans une seconde expérience, la mesure adaptative a été véritablement appliquée à la préparation d'états de Fock en présence de relaxation. Dans ces conditions réalistes, la supériorité de la mesure adaptative a encore été confirmée, le temps moyen de convergence de la mesure QND étant par exemple réduit de 36% par rapport à la méthode passive «usuelle». Cette accélération est obtenue sans perte de fidélité sur les états de Fock préparés.

## Perspectives

Dans la continuité de ces résultats, on peut envisager d'améliorer l'algorithme d'adaptation. Nous avons mentionné qu'il serait possible, par exemple, d'inclure dans le choix de la phase de Ramsey l'information sur les échantillons intermédiaires non encore détectés. Une modification aux conséquences plus riches consiste à modifier non seulement les paramètres de l'appareil de mesure constitué par l'interféromètre atomique, mais aussi son couplage au système mesuré, c'est-à-dire au champ. Ce couplage est quantifié par le déphasage par photon  $\phi_0$ , dont la valeur est restée constante dans les expériences présentées ici. L'utilisation d'atomes de différentes vitesses permettrait de contrôler la valeur de ce déphasage. En adaptant à la fois la phase de Ramsey et le déphasage par photons on pourrait ainsi s'approcher d'une mesure du nombre de photons optimale en termes d'information [108], que nous avons également présentée, pour laquelle seuls  $\log_2(N)$  détections atomiques sont nécessaires pour distinguer  $N$  nombres de photons.

Des simulations de ce protocole ont été réalisées pour des conditions expérimentales réalistes : en utilisant trois classes de vitesses distinctes, une mesure adaptative permet de distinguer entre les nombres de photons de 0 à 7 à l'aide de 13 atomes seulement. À titre de comparaison, la convergence de la mesure adaptative telle que nous l'avons définie dans ce mémoire est achevée en moyenne après la détection de 28 atomes. La mise en place d'une telle mesure, pour laquelle le nombre d'atomes nécessaire varie de plus comme le logarithme du nombre d'états possibles, améliorerait donc considérablement les performances de la mesure QND. L'estimation d'état pourrait également être réalisée plus efficacement, ce dont pourraient bénéficier les protocoles de rétroaction quantiques [65]. La réalisation de ces expériences est parfaitement envisageable dans le dispositif actuel.

Plus généralement, la notion de mesure adaptative souligne l'intérêt d'optimiser l'acquisition d'information dans nos expériences, pour réaliser l'estimation de l'état du champ à partir des résultats de mesure. Nous présentons dans ce qui suit deux stratégies d'optimisation, qui peuvent être bénéfiques à différents niveaux dans nos expériences.

La première de ces stratégies est appelée *lissage quantique* (quantum smoothing) [112]. Elle s'applique à l'estimation d'état pour une réalisation individuelle d'une séquence expérimentale. Prenons par exemple l'observation de sauts quantiques du champ [22] : celle-ci est généralement effectuée en prenant en compte l'ensemble des résultats de détection précédents, et la relaxation, pour déterminer à un instant donné  $t$  dans quel nombre de photons se trouve le champ. Cette estimation est *causale* : l'état obtenu est la conséquence des résultats observés jusqu'à  $t$ . Cependant, une séquence expérimentale contient aussi *après* l'instant  $t$  des résultats de détection, qui peuvent être mis à profit pour mieux déterminer l'état à un instant donné. Lors d'une mesure de parité par exemple, si les résultats passés indiquent qu'à l'instant  $t$  le système contient 0 modulo 2 photons, mais que ce résultat est suivi rapidement par un saut vers l'état à 1 photon, alors il est plus probable que l'état contenait 2 photons à l'instant  $t$ , et que l'on a observé ultérieurement un saut quantique vers  $|1\rangle$ . Ceci implique de déterminer l'état dans le passé à partir des résultats de mesure [113]. Il s'agit donc d'une méthode de traitement *a posteriori* des mesures, qui n'est pas applicable en temps réel, mais permet de mieux décrire le comportement du système.

Ce lissage quantique a été appliqué dans le contexte de l'estimation de phase. Les expériences de Wheatley [49] et Yonezawa [51], dans lesquelles une phase aléatoire est estimée en temps réel par une mesure homodyne adaptative pour (respectivement) des états cohérents et comprimés, ont montré que le lissage quantique appliqué aux résultats de mesure permettait de réduire encore davantage l'incertitude sur l'estimation de la phase. En ce qui concerne nos expériences, cette idée pourrait être mise à profit afin de mieux détecter les sauts quantiques sur une trajectoire individuelle, par exemple pour sélectionner *a posteriori*, comme nous l'avons fait avec une décimation causale, les trajectoires pour lesquelles l'état n'a pas relaxé.

On peut également optimiser l'acquisition d'information à l'échelle d'un ensemble de trajectoires, par exemple pour la reconstruction d'états quantiques. Les méthodes usuelles de reconstruction réalisent l'estimation de l'état à partir d'un ensemble de mesures dont les paramètres sont décidés *a priori*. Ces résultats imposent des contraintes qui doivent être vérifiées par l'état du système, à partir desquelles on détermine cet état selon différentes méthodes :

- la méthode de *maximum de vraisemblance*, qui a été employée dans ce mémoire, où l'état déterminé est le plus à même d'avoir conduit aux résultats observés. Pour l'obtenir on maximise en fonction de l'état  $\rho$  la vraisemblance  $\mathcal{L}(\rho)$  construite à partir des résultats obtenus ;
- la méthode de *maximum d'entropie*, où l'on maximise l'information manquante, l'état estimé contient donc l'information minimale apportée par les résultats ; ces deux premières méthodes ont été appliquées à la reconstruction d'états chats de Schrödinger dans notre expérience, effectuée par Samuel Deléglise [71] ;
- la méthode d'*estimation bayésienne moyenne* (BME) [114] : cette méthode est inspirée de celle de maximum de vraisemblance. Elle cherche à corriger les défauts de cette dernière : en effet du fait du nombre fini d'observations, l'état de maximum de vraisemblance peut associer à certains états une probabilité nulle, si les résultats qui

leur correspondent n'ont jamais été observés. Partant du principe qu'une telle certitude est impossible en pratique, l'estimation bayésienne moyenne utilise la fonction de vraisemblance pour définir une distribution de probabilité sur l'espace des états  $\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{L}(\rho)\mathcal{P}_0(\rho)$ , où  $\mathcal{P}_0$  est une distribution décrivant l'état d'ignorance initial de l'observateur. L'estimation BME de l'état est donnée par une moyenne sur tous les états pondérée par cette distribution.

Toutes ces méthodes peuvent en principe bénéficier d'une stratégie adaptative : on construit à partir d'un sous-ensemble de résultats une première estimation «grossière» de l'état, à partir de laquelle les paramètres de la mesure sont choisis pour un ensemble suivant, afin d'extraire un maximum d'information. Cette procédure est répétée jusqu'à la détermination précise de l'état. On réduit ainsi la quantité de mesures à effectuer pour atteindre une précision donnée dans la reconstruction de l'état.

Selon ce principe une *tomographie adaptative* d'un état a pu être réalisée sur des qubit optiques, à l'aide de la méthode d'estimation bayésienne moyenne [115] ou de la méthode de maximum de vraisemblance [116]. La réduction du nombre de ressources nécessaires à la reconstruction d'état serait également d'une grande utilité dans notre expérience, où l'on pourrait envisager d'appliquer de telles méthodes à l'étude d'états intriqués à deux cavités [117], pour lesquels l'espace de paramètres sur lequel il nous faut contraindre l'état (l'espace des phases des deux modes, à quatre dimensions) est très vaste.

# Annexe A

## La décimation : un produit de fonctions sinusoïdales

Nous nous intéressons au comportement de la distribution de nombres de photons au bout d'un nombre  $N$  de détections. La phase de l'atome détecté étant maintenant une variable aléatoire de valeur  $j$  ( $j = a, b, c, d$ ) distribuée uniformément ( $P(j) = 1/4$ ), indépendamment de l'état quantique, il nous faut réécrire la règle d'actualisation (II.16) sous la forme :

$$P'(n) = P(n|i, j) = \frac{\pi(i, j|n)}{\pi(i, j)} P(n), \quad (\text{A.1})$$

avec une probabilité  $\pi(i, j|n) = \pi(i|j, n)P(j) = 1/4\pi(i|j, n)$ . Si l'on accumule l'effet de  $N$  détections, la seule dépendance en  $n$  étant contenue dans les probabilités conditionnelles, la distribution finale de  $n$  s'écrit :

$$P''(n) = \frac{1}{Z} \prod_{k=1}^N \pi(i_k, j_k|n) P(n), \quad (\text{A.2})$$

où  $i_k$  et  $j_k$  dénotent respectivement l'état atomique détecté et la phase de Ramsey pour la  $k^e$  détection,  $P(n)$  la distribution initiale (supposée uniforme) du nombre de photons, et  $Z$ , indépendante de  $n$ , assure la normalisation. Toute l'information sur la «forme» de la distribution finale en  $n$  est donc contenue dans la *fonction de décimation*

$$\Pi_N(n) \equiv \prod_{k=1}^N \pi(i_k, j_k|n). \quad (\text{A.3})$$

Dans ce produit les termes peuvent être regroupés en fonction de l'état atomique  $i$  et de la phase de Ramsey  $j$ , qui interviennent un nombre  $q_{ij}$  de fois :

$$\Pi_N(n) = \prod_{\substack{i=e,g \\ j=a,b,c,d}} \pi(i, j|n)^{q_{ij}}. \quad (\text{A.4})$$

On peut alors rechercher le maximum de cette fonction. Pour cela, il est plus commode de l'extrémaliser en fonction des  $\pi(i, j|n)$ . Il faut dans ce cas préserver la somme des probabilités  $\sum_{i,j} \pi(i, j|n) = 1$ , ce qui peut se faire à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, noté  $\lambda$ . On extrémalise donc

$$\prod_{\substack{i=e,g \\ j=a,b,c,d}} \pi(i, j|n)^{q_{ij}} - \lambda \left( \sum_{i,j} \pi(i, j|n) - 1 \right).$$

L'annulation de la dérivée par rapport à  $\lambda$  redonne la condition sur la somme des probabilités, et l'on obtient par dérivation par rapport à  $\pi(i', j'|n)$  :

$$\frac{\partial \Pi_N}{\partial \pi(i, j|n)} = \Pi_N \frac{q_{ij}}{\pi(i, j|n)} - \lambda.$$

L'annulation de ces dérivées partielles implique pour tous couples  $(i, j)$  et  $(i', j')$  :

$$\frac{q_{ij}}{\pi(i, j|n)} = \frac{q_{i'j'}}{\pi(i', j'|n)} = \mu.$$

Or les  $q_{ij}$  vérifient

$$\sum_{i,j} q_{ij} = N = \mu \sum_{i,j} \pi(i, j|n) = \mu.$$

On obtient donc la condition pour tout  $(i, j)$

$$\pi(i, j|n) = q_{ij}/N.$$

ce qui s'interprète facilement : la fonction  $\Pi_N(n)$  est maximale pour  $n$  telle que les fréquences observées  $q_{ij}/N$  soient égales aux probabilités conditionnelles  $\pi(i, j|n)$ . En présence de  $n_c$  photons on a précisément  $q_{ij}/N \rightarrow \pi(i, j|n_c)$  pour un grand nombre de détections, et la distribution  $\pi_N(n)$  est donc piquée en  $n_c$ .

On peut s'intéresser à la dérivée seconde de la fonction de décimation, toujours en prenant comme variables les probabilités  $\pi(i, j|n)$ . Il vient, au point de maximum précédemment trouvé :

$$\frac{\partial^2 \pi_N(n)}{\partial \pi(i, j|n)^2} = -\frac{q_{ij}}{\pi(i, j|n)^2} \Pi_N(n) = -\frac{N^2}{q_{ij}} \Pi_N(n),$$

les termes de dérivées croisées étant nuls. Il peut être instructif de calculer alors la dérivée seconde en fonction de  $n$  :

$$\frac{\partial^2 \pi_N(n)}{\partial n^2} = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial \pi(i, j|n)}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial^2 \pi_N(n)}{\partial \pi(i, j|n)^2}$$

qui est bien négative (on a obtenu un maximum). Explicitant la forme de  $\pi(i, j|n)$  :

$$\pi(i, j|n) = \frac{1}{4} \cos^2 \left( \frac{n\phi_0 + j\pi/4 - i\pi}{2} \right),$$

on obtient

$$\left(\frac{\partial\pi(i,j|n)}{\partial n}\right)^2 = \phi_0^2\pi(i,j|n)\pi(\bar{i},j|n),$$

où  $\bar{i}$  dénote la détection atomique opposée à  $i$  ( $\bar{e} = g$ ).

Toujours au maximum trouvé, on a donc :

$$\frac{\partial^2\pi_N(n)}{\partial n^2} = -N\phi_0^2 \sum_{i,j} \pi(\bar{i},j|n)\Pi_N(n) = -N\phi_0^2\Pi_N(n).$$

Écrivant le développement de Taylor de la fonction  $\pi_N(n)$  au voisinage de son maximum, on a donc :

$$\Pi_N(n) \simeq \Pi_N(n_{\max}) - N\phi_0^2 \frac{(n - n_{\max})^2}{2} \Pi_N(n_{\max}) \simeq \Pi_N(n_{\max}) \exp\left(-N\frac{\phi_0^2(n - n_{\max})^2}{2}\right).$$

Cette distribution est donc une quasi gaussienne de largeur  $\delta n \sim 1/\phi_0\sqrt{N}$ .



## Annexe B

# Mesure du nombre moyen de photons à l'équilibre thermique

Nous donnons ici la méthode et les résultats obtenus pour la calibration du nombre moyen de photons dans la cavité à l'équilibre thermique. Pour calibrer cette valeur, nous utilisons la tomographie de spin présentée au paragraphe II.1.4.b. La champ, dans l'état d'équilibre thermique, est sondé par une série d'atomes réalisant une mesure QND. À partir de l'histogramme de spin obtenu on peut construire l'histogramme des phases associées.

Pour cette calibration, cet histogramme est ajusté par une somme de fonctions gaussiennes, dont les centres sont fixés par les valeurs calibrées du déphasage par photon  $\phi(n)$ . Les seuls paramètres libres sont alors les amplitudes des pics (ainsi qu'une phase de référence). Nous représentons à la figure B.1 l'histogramme de phases obtenu et la courbe ajustée correspondante. En encart, nous donnons la distribution des nombres de photons à l'équilibre thermique déduite de la hauteur des pics. Celle-ci est ajustée par la distribution à l'équilibre thermique [13]

$$P(n) = \frac{n_{\text{th}}^n}{(n_{\text{th}} + 1)^{n+1}}, \quad (\text{B.1})$$

dont le seul paramètre libre est le nombre de photons moyen à l'équilibre thermique  $n_{\text{th}}$ . L'ajustement fournit la valeur :

$$n_{\text{th}} = 0,080 \pm 0,001.$$

C'est cette valeur calibrée qui est utilisée pour calculer l'évolution selon l'équation maîtresse utilisée dans la reconstruction par maximum de vraisemblance, comme nous le décrivons au paragraphe II.1.3.b.

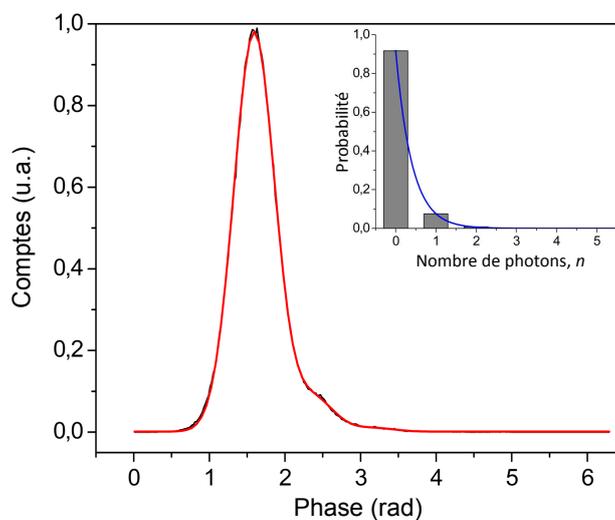


FIGURE B.1 – Mesure du nombre moyen de photons à l'équilibre thermique. On représente l'histogramme de phases obtenu par tomographie de spin (en noir, voir le paragraphe II.1.4.b), et l'ajustement qui en est fait par une somme de gaussiennes (en rouge). Les centres de ces gaussiennes sont fixés, par rapport à une phase de référence arbitraire, en fonction du déphasage par photon calibré  $\phi(n)$ . L'histogramme des hauteurs des pics obtenus, correspondant aux différents nombres de photons, est ajusté par la distribution (B.1). On obtient  $\langle n \rangle = n_{\text{th}} = 0.080 \pm 0.002$ .

## Annexe C

# Reconstruction de l'état sélectionné par maximum de vraisemblance

Nous comparons, au paragraphe IV.1.4.a, les valeurs limites de l'estimateur à celles obtenues après reconstruction par maximum de vraisemblance de l'état sélectionné. Nous donnons ici le détail de ces résultats.

Les traces sélectionnées, telles que  $n_I = n_F$ , sont regroupées en fonction de la valeur de  $n_I$ . Pour chaque ensemble de traces, on effectue la reconstruction par maximum de vraisemblance de l'état (*cf.* paragraphe II.1.3.a) au cours du temps. Les résultats obtenus sont ajustés par une distribution  $P(n)$  stationnaire, pour chaque  $n_I$ . On obtient de cette façon les histogrammes représentés à la figure C.1, pour  $n_I$  allant de 0 à 4 (la reconstruction n'a pas pu être effectuée pour des valeurs plus élevées par manque de statistiques). L'histogramme montré à la figure IV.7 est une moyenne effectuée sur les valeurs  $n_I$ , en fonction du nombre de traces obtenues dans chaque cas.

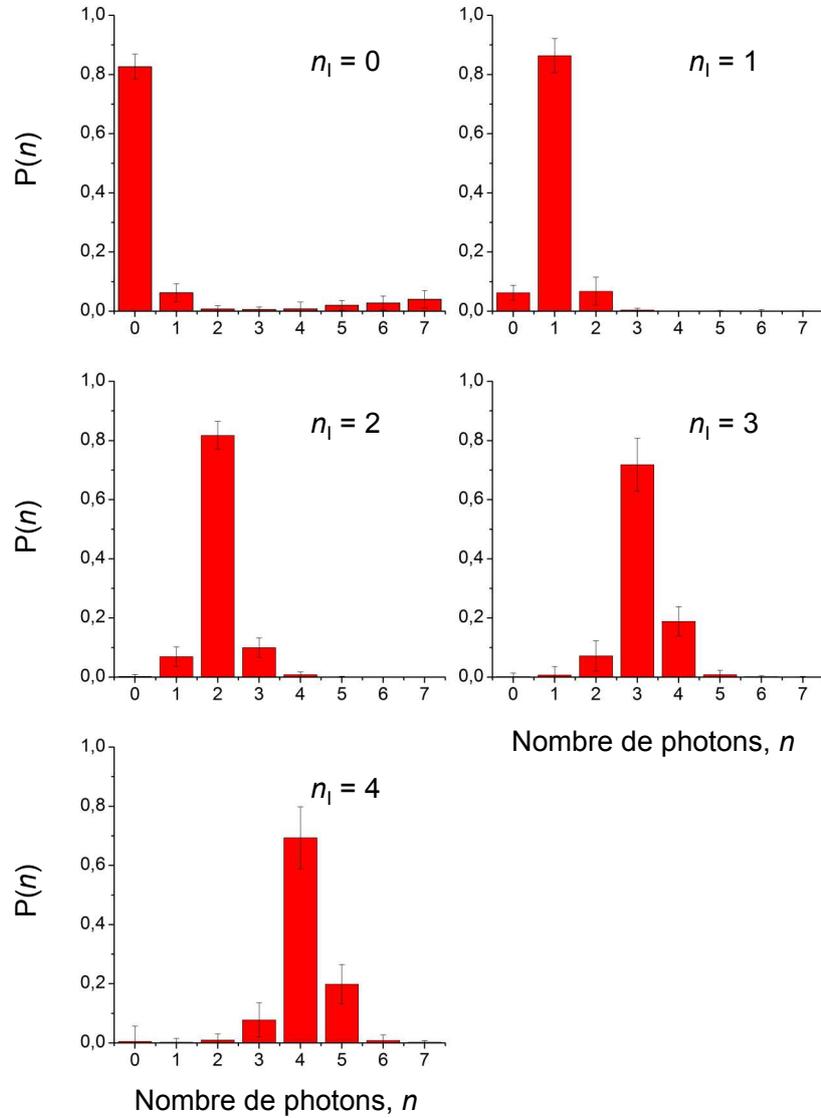


FIGURE C.1 – Reconstruction de l'état sélectionné par maximum de vraisemblance : histogrammes des distributions obtenues par la méthode de maximum de vraisemblance pour l'état sélectionné,  $n_I$  allant de 0 à 4. L'évolution reconstruite (voir le paragraphe IV.1.4.a) est ajustée par des distributions stationnaires. Les barres d'erreurs indiquent, pour chaque nombre de photons  $n$ , l'écart quadratique moyen entre l'évolution temporelle issue de la reconstruction et la courbe ajustée. Les reconstructions ont été effectuées sur 1376, 2177, 1603, 752, et 309 trajectoires pour  $n_I = 0, 1, 2, 3,$  et 4 respectivement.

## Annexe D

# Statistiques alternatives sur les choix de phases

À la section IV.1.5 nous nous sommes intéressés aux fréquences d'utilisation des différentes phases de Ramsey et aux corrélations entre elles. Pour cela, les phases ont été «réordonnées» en fonction de l'indice de l'état sélectionné,  $n_I$ . Les choix effectués par le contrôleur dépendent en effet logiquement du nombre de photons vers lequel la mesure converge. Nous pouvons connaître par la reconstruction indépendante de la distribution du nombre de photons les caractéristiques de l'état préparé, donc le nombre de photons dominant. Cette première méthode de tri est donc indépendante de l'estimation réalisée en temps réel lors de la mesure adaptative

Cependant, c'est par rapport à son estimation que le contrôleur prend ses décisions. Nous proposons donc ici une autre analyse des choix de phase. Comme nous l'avons fait au paragraphe IV.1.4.b pour les probabilités moyennes, nous nous proposons de réordonner les phases de Ramsey en fonction du nombre de photons dont la probabilité est maximale à la fin de la mesure. Pour cela nous définissons un indice de phase relatif  $\delta p_{\text{sup}}$  (variant de -1 à 2) fonction de  $n$  et de  $n_{\text{sup}}$ , le nombre de photons de probabilité maximale à la fin de la trajectoire. Cet indice est tel que pour chaque trajectoire, la phase relative  $\phi''(\delta p_{\text{sup}})$  correspond à un axe de rotation dans le plan équatorial de la sphère de Bloch aligné sur le nombre de photons relatif  $\Delta n_{\text{sup}}$ . En notant  $p$  l'indice des phases initiales  $\phi_p$ , on a explicitement :

$$\delta p_{\text{sup}} = ((p - n_{\text{sup}} + 1) \bmod 4) + 1.$$

### Statistiques des choix de phases

À la figure D.1 nous avons représenté les fréquences d'utilisation des phases relatives  $\phi''(\delta p_{\text{sup}})$  ainsi définies. Le résultat est très similaire à celui obtenu lorsque les phases sont réordonnées par rapport à  $n_I$ . Ceci est parfaitement logique puisque dans ce dernier cas l'estimateur converge vers le nombre de photons  $n_I$  dans 80% des cas. On remarquera cependant que la phase d'indice  $\delta p_{\text{sup}} = 2$  voit ici sa fréquence d'utilisation tomber à 0. La fréquence limite d'utilisation observée à la section IV.1.5 est donc le fait uniquement des

trajectoires convergeant vers les nombres de photons relatifs  $\Delta n = \pm 1$ . On met ainsi en évidence de façon plus claire encore que cette phase, pour laquelle la direction de mesure est alignée sur le nombre de photons majoritaire, et qui distingue donc mal ce nombre de photons de ces voisins, n'est logiquement jamais choisie par le filtre dès qu'un nombre de photons devient majoritaire.

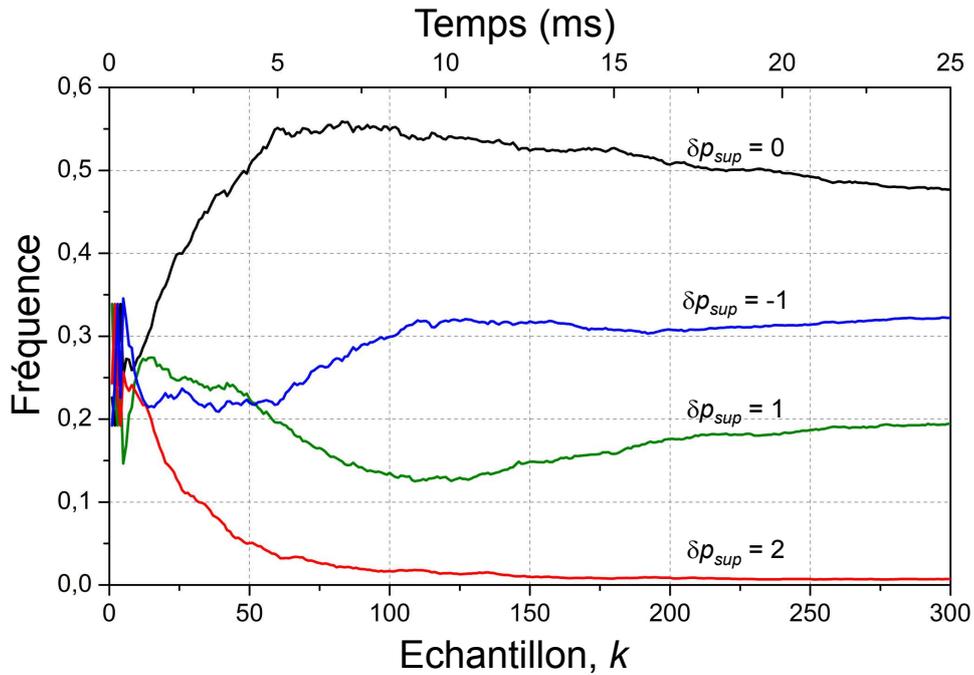


FIGURE D.1 – Fréquences d'utilisation des valeurs de phase de Ramsey par le contrôleur, repérées par l'indice de phase relative  $\delta p_{sup}$ , en fonction de l'indice  $k$  de l'échantillon détecté.

### Corrélations

De la même manière, nous pouvons calculer les corrélations  $C(\delta p_{sup,1}, k; \delta p_{sup,2}, k + l)$  entre les phases relatives  $\phi''$  ainsi définies. Le résultat obtenu est représenté à la figure D.2.

Les comportements observés sont qualitativement identiques à ce qui a été décrit au paragraphe IV.1.5.c pour la méthode de tri en fonction de  $n_I$ . Le contrôleur choisit préférentiellement de réemployer la même phase pour plusieurs échantillons consécutifs. C'est d'abord le cas sur une distance de quelques échantillons, correspondant à la distance typique entre deux détections. Puis à compter d'une centaine d'échantillons, cette longueur de corrélation croît rapidement : il est souvent plus avantageux pour achever la convergence de conserver le même réglage de phase.

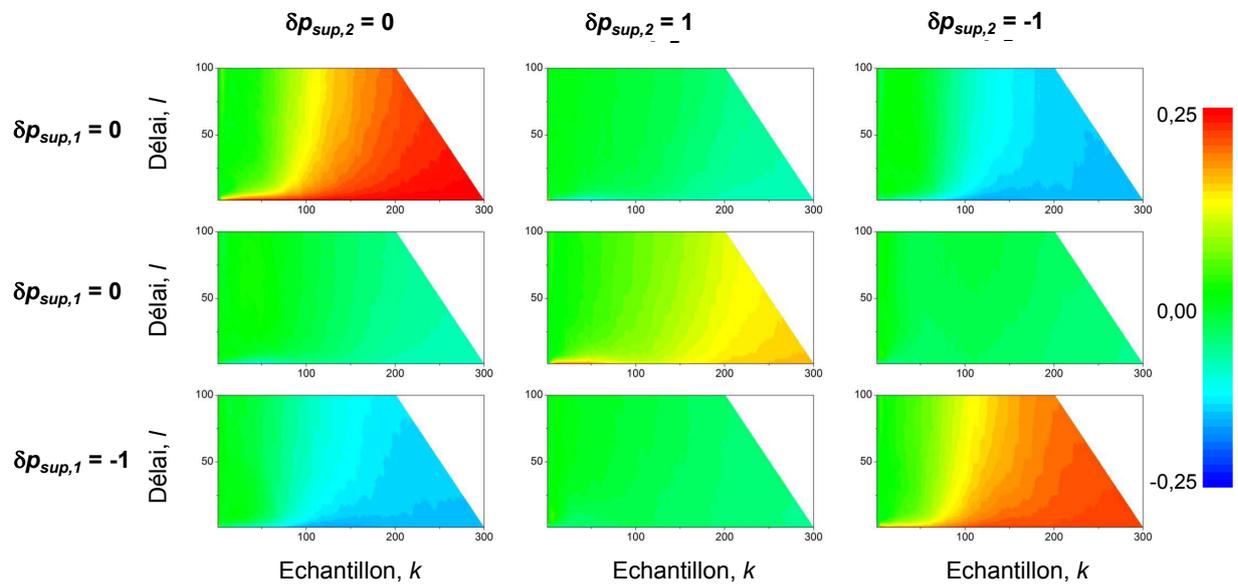


FIGURE D.2 – Corrélations entre utilisations des phases relatives : on trace la corrélation moyenne  $C(\delta p_{sup,1}, k; \delta p_{sup,2}, k + l)$  entre les phases relatives  $\delta p_{sup,1}$  et  $\delta p_{sup,2}$ , en fonction de l'indice  $k$  de l'échantillon détecté et d'un délai  $l$  allant jusqu'à 100 échantillons.



# Annexe E

## Taux de convergence pour la mesure passive

Dans cet annexe, nous cherchons à caractériser la vitesse de convergence de la mesure par décimation. Nous nous plaçons pour cela dans le contexte de la mesure d'un état sélectionné (voir la partie IV.1), et nous intéressons à l'évolution des populations moyennes  $\overline{P}_k(n)$ . Nous montrons ici que dans le cas d'une mesure *passive* d'un état nombre de photons sélectionné  $|n_c\rangle$ , ces populations moyennes ont un comportement exponentiel caractérisé par des exposants  $\overline{\lambda}_n$  définis de la façon suivante :

$$\overline{\lambda}_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log (\overline{P}_k(n)).$$

Dans une première partie, nous présenterons, sur l'exemple d'une décimation à une direction de mesure seulement, le principe de la détermination de ces exposants. Ceci sera généralisé dans une seconde partie au cas de plusieurs directions de mesures, ce qui correspond à la décimation passive que nous réalisons expérimentalement. Nous comparerons enfin dans une dernière partie les résultats obtenus par cette méthode aux données expérimentales. Nous évoquerons notamment la distinction qui doit être faite entre ces taux de convergence des probabilités moyennes, et une autre définition possible d'un taux de convergence [118], reliée en fait à la moyenne du logarithme des probabilités.

Ces résultats sont le fruit d'une collaboration avec Pierre Rouchon, de l'École des Mines – Paritech, que je tiens donc à remercier ici particulièrement.

### E.1 Décimation à une direction de mesure

#### E.1.1 Position du problème – écriture explicite

Nous considérons ici la mesure du champ contenu dans une cavité idéale (sans relaxation). Le champ est dans l'état de Fock  $|n_c\rangle$ . Une série d'atomes de Rydberg interagit de façon dispersive avec la cavité. Nous considérons dans un premier temps que la phase de

l'interféromètre est fixe pendant toute la mesure. La probabilité de détection des états atomiques  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ , conditionnée à la présence de  $n$  photons, est donnée par<sup>1</sup> :

$$p(g|n) \equiv p_g(n) = p_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi(n) + \phi_r), \quad p(e|n) = 1 - p(g|n). \quad (\text{E.1})$$

La mesure QND est réalisée à partir d'une estimation initiale  $P_0(n)$  de la distribution du nombre de photons : nous considérons ici qu'elle prend des valeurs non-nulles pour  $n$  allant de 0 à  $n_{\max}$ . Après un nombre  $k$  de détections, l'estimation  $P_k(n)$  est actualisée selon la loi de Bayes :

$$P_{k+1}(n) = \frac{p(i|n)P_k(n)}{\sum_m p(i|m)P_k(m)}, \quad (\text{E.2})$$

lorsque l'état atomique  $i = e, g$  est détecté, ce qui se produit avec une probabilité  $p(i|n_c)$ . Nous noterons dorénavant  $p(i|n) \equiv p_i(n)$ , et en particulier  $p_i(n_c) \equiv p_{i,c}$ , pour simplifier les notations.

Une trajectoire obéissant à la récurrence (E.2) converge presque sûrement vers  $P_\infty(n) = \delta_{n,n_c}$ . Nous nous intéressons ici au comportement qu'a la distribution  $\overline{P}_k(n)$  obtenue par une moyenne sur un ensemble de telles trajectoires. On peut écrire explicitement la valeur de cette moyenne d'ensemble. Il faut pour cela considérer l'ensemble des résultats possibles  $I \in \{e, g\}^k$  après  $k$  détections. Chaque  $I$  décrit une trajectoire qui survient avec une certaine probabilité. La mesure étant QND, les trajectoires pour lesquelles le même nombre  $l$  d'atomes ont été détectés dans  $|g\rangle$  (et  $k - l$  dans  $|e\rangle$ ) après  $k$  détections ont même probabilité, et conduisent à la même distribution  $P_k(n)$ . Il suffit donc de dénombrer les trajectoires de  $l$  donné, et de sommer toutes les contributions avec leurs probabilités. On obtient l'évolution moyenne :

$$\overline{P}_k(n) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} p_{g,c}^l (1 - p_{g,c})^{k-l} \frac{p_g(n)^l (1 - p_g(n))^{k-l} P_0(n)}{\sum_m p_g(m)^l (1 - p_g(m))^{k-l} P_0(m)}. \quad (\text{E.3})$$

Cette équation est assez transparente : on somme des distributions normalisées (fraction à droite) correspondant à la détection de  $l$  fois  $|g\rangle$  sur les  $k$  détections. Cette somme est pondérée par la loi binomiale de paramètre  $p_{g,c}$  qui donne la probabilité d'avoir  $l$  détections dans  $|g\rangle$  après  $k$  mesures.

## E.1.2 Réécriture asymptotique

La loi binomiale pour la variable  $l$

$$\mathcal{B}_{k,p_{g,c}}(l) \equiv \binom{k}{l} p_{g,c}^l (1 - p_{g,c})^{k-l}$$

---

1. Nous utilisons dans cette annexe la notation  $p$  au lieu de  $\pi$  pour les probabilités de détection, afin d'éviter les confusions (nous serons amenés à utiliser la notation produit  $\Pi$ ).

peut être approximativement décrite, pour  $k$  grand, par une distribution gaussienne de moyenne et d'écart-type donnés par :

$$\langle l \rangle = kp_{g,c}, \quad \sigma_l = \sqrt{kp_{g,c}(1-p_{g,c})}.$$

La variable réduite  $\alpha = l/k$  suit donc pour  $k$  grand une loi de probabilité gaussienne, de moyenne et d'écart-type :

$$\langle \alpha \rangle = p_{g,c}, \quad \sigma_\alpha = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{p_{g,c}(1-p_{g,c})}.$$

Nous pouvons réécrire la somme (E.3) sous la forme d'une intégrale sur  $\alpha$ , faisant intervenir cette distribution gaussienne :

$$\overline{P}_k(n) \simeq \sqrt{\frac{k}{2\pi p_{g,c}(1-p_{g,c})}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \exp\left(-\frac{k(\alpha-p_{g,c})^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})}\right) \frac{p_g(n)^{\alpha k} (1-p_g(n))^{(1-\alpha)k} P_0(n)}{\sum_m p_g(m)^{\alpha k} (1-p_g(m))^{(1-\alpha)k} P_0(m)}, \quad (\text{E.4})$$

Sous cette forme, la distribution  $\overline{P}_k(n)$  est la somme de distributions élémentaires  $P_{k,\alpha}$  subissant à chaque détection  $k$  une décimation *moyenne* correspondant à la multiplication par  $p_g(n)^\alpha (1-p_g(n))^{(1-\alpha)}$  :

$$P_{k,\alpha}(n) = \frac{(p_g(n)^\alpha (1-p_g(n))^{1-\alpha})^k P_0(n)}{\sum_m (p_g(m)^\alpha (1-p_g(m))^{1-\alpha})^k P_0(m)}.$$

Ces distributions sont sommées en fonction de  $\alpha$  avec une distribution gaussienne. À mesure que  $k$  augmente, la contribution correspondant à  $\alpha = p_{g,c}$  devient prépondérante. Or le terme  $p_g(n)^{p_{g,c}} (1-p_g(n))^{1-p_{g,c}}$  est maximum en fonction de  $p_g(n)$  pour  $p_g(n) = p_{g,c}$ . La contribution dominante :

$$P_{k,p_{g,c}}(n) = \frac{(p_g(n)^{p_{g,c}} (1-p_g(n))^{1-p_{g,c}})^k P_0(n)}{\sum_m (p_g(m)^{p_{g,c}} (1-p_g(m))^{1-p_{g,c}})^k P_0(m)},$$

converge donc vers la distribution  $\delta_{n,n_c}$ , s'il n'y a pas de dégénérescence, c'est-à-dire que les  $p_g(n)$  sont tous distincts. Cette contribution étant dominante pour  $k$  grand, on vérifie que  $\overline{P}_k(n)$  converge donc bien vers  $\delta_{n,n_c}$ .

### E.1.3 Taux de convergence

Les termes intégrés dans l'équation (E.4) prennent tous la forme d'une fonction exponentielle de  $k$ . Nous cherchons donc à faire ressortir le comportement exponentiel de  $\overline{P}_k(n)$ .

La difficulté rencontrée dans cette démarche provient de la somme au dénominateur de la fraction (terme de normalisation des distributions). Définissant la fonction  $f_m(\alpha)$  par :

$$f_m(\alpha) \equiv \alpha \log(p_g(m)) + (1 - \alpha) \log(1 - p_g(m)),$$

cette somme s'écrit  $\sum_m \exp(kf_m(\alpha))$ . On a  $f_m \leq 0$ . Le terme dominant dans la somme pour  $k$  grand est donc celui pour lequel  $f_m(\alpha)$  est maximum.

Ceci nous amène à définir la fonction :

$$\psi(\alpha) \equiv \max_{n \in \{0, \dots, n_{\max}\}} f_m(\alpha). \quad (\text{E.5})$$

Nous réécrivons alors (E.4) sous la forme :

$$\bar{P}_k(n) \simeq \sqrt{\frac{k}{2\pi p_{g,c}(1-p_{g,c})}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \frac{\exp(-k\phi_n(\alpha)) P_0(n)}{\sum_m g_m^k(\alpha) P_0(m)}, \quad (\text{E.6})$$

où nous définissons :

$$\phi_n(\alpha) \equiv \frac{(\alpha - p_{g,c})^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})} + \max_{m \in \{0, \dots, n_{\max}\}} \left( \alpha \log\left(\frac{p_g(m)}{p_g(n)}\right) + (1 - \alpha) \log\left(\frac{1-p_g(m)}{1-p_g(n)}\right) \right), \quad (\text{E.7})$$

$$g_m(\alpha) \equiv \exp(\alpha \log(p_g(m)) + (1 - \alpha) \log(1 - p_g(m)) - \psi(\alpha)). \quad (\text{E.8})$$

Au vu de ces définitions nous avons les propriétés suivantes :

- $g_m(\alpha) = \exp(f_m(\alpha) - \psi(\alpha)) \leq 1$ , et pour tout  $\alpha$  il existe  $m$  tel que  $g_m(\alpha) = 1$ ,
- $\phi_n(\alpha) = (\alpha - p_{g,c})^2 / (2p_{g,c}(1 - p_{g,c})) + \psi(\alpha) - f_n(\alpha) \geq 0$ ,

En outre  $-f_n(\alpha)$  est convexe, et  $\psi(\alpha)$  est également convexe comme maximum d'un ensemble de fonctions convexes. De par sa définition,  $\phi_n(\alpha)$  est donc une fonction continue, fortement convexe et localement quadratique de  $\alpha$ . Elle admet donc un unique minimum strict noté  $\bar{\alpha}_n$ .

Notons que pour  $n = n_c$ ,  $\bar{\alpha}_{n_c} = p_c$ . En effet des deux termes sommés dans  $\phi_n$ , le terme en «max» vaut systématiquement 0 en  $\alpha = p(n)$ , ce qui est sa valeur minimum. Le terme quadratique est lui minimum en  $\alpha = p_c$ . Le minimum de  $\phi_{n_c}$  est donc bien atteint en  $p_c$  et  $\phi(\bar{\alpha}_{n_c}) = 0$ . Pour  $n \neq n_c$ , les deux termes sommés ne peuvent s'annuler simultanément (si les  $p(n \neq n_c)$  sont tous différents de  $p_c$ ). On a donc  $\phi(\bar{\alpha}_n) > 0$ .

On peut alors décomposer  $\phi_n$  au voisinage de son minimum de la façon suivante :

$$\phi_n(\alpha) = \phi(\bar{\alpha}_n) + |\alpha - \bar{\alpha}_n| A_n(\alpha) + \frac{(\alpha - \bar{\alpha}_n)^2}{2p_{g,c}(1 - p_{g,c})}, \quad (\text{E.9})$$

où  $A_n(\alpha)$  est une fonction positive bornée de  $\alpha$ . Introduisant cette décomposition dans l'intégrale (E.6), on obtient :

$$\bar{P}_k(n) = \exp(-k\phi_n(\bar{\alpha}_n)) \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \sqrt{\frac{k}{2\pi p_{g,c}(1-p_{g,c})}} \frac{\exp\left(-k|\alpha - \bar{\alpha}_n| A_n(\alpha) - k \frac{(\alpha - \bar{\alpha}_n)^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})}\right) P_0(n)}{\sum_m g_m^k(\alpha) P_0(m)}. \quad (\text{E.10})$$

Nous avons isolé dans cette dernière formule la contribution exponentielle, qui donne le taux de convergence de  $\overline{P}_k(n)$ . En effet l'intégrale qui suit ce terme exponentiel se réécrit, en posant  $\beta = \sqrt{k}(\alpha - \bar{\alpha}_n)$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \sqrt{\frac{1}{2\pi p_{g,c}(1-p_{g,c})}} \frac{\exp\left(-\sqrt{k}|\beta|A_n(\bar{\alpha}_n + \frac{1}{\sqrt{k}}\beta) - \frac{\beta^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})}\right) P_0(n)}{\sum_m g_m^k(\bar{\alpha}_n + \frac{1}{\sqrt{k}}\beta) P_0(m)}.$$

Pour tout  $m$  on a  $0 < g_m(\alpha) \leq 1$  et pour tout  $\beta$  il existe  $m$  tel que  $g_m(\beta) = 1$ . On a par conséquent l'encadrement suivant :

$$\exp\left(-\sqrt{k}|\beta|\max_{\alpha} A_n(\alpha) - \frac{\beta^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})}\right) \leq \frac{\exp\left(-\sqrt{k}|\beta|A_n(\bar{\alpha}_n + \frac{1}{\sqrt{k}}\beta) - \frac{\beta^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})}\right)}{\sum_m g_m^k(\bar{\alpha}_n + \frac{1}{\sqrt{k}}\beta) P_0(m)} \leq \frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})}\right)}{\min_m P_0(m)}.$$

On a donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left( \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \sqrt{\frac{1}{2\pi p_{g,c}(1-p_{g,c})}} \frac{\exp\left(-\sqrt{k}|\beta|A_n(\bar{\alpha}_n + \frac{1}{\sqrt{k}}\beta) - \frac{\beta^2}{2p_{g,c}(1-p_{g,c})}\right) P_0(n)}{\sum_m g_m^k(\bar{\alpha}_n + \frac{1}{\sqrt{k}}\beta) P_0(m)} \right) = 0. \quad (\text{E.11})$$

Ceci implique finalement que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \overline{P}_k(n) = -\phi_n(\bar{\alpha}_n). \quad (\text{E.12})$$

La convergence vers 0 des probabilités pour  $n \neq n_c$  est donc exponentielle, et l'exposant peut être recherché numériquement comme le minimum de la fonction  $\phi_n(\alpha)$ .

### E.1.4 Une définition alternative de taux de convergence

Dans la référence [118], il est montré que pour presque toutes les trajectoires, la limite de  $1/k \log(P_k(n)/P_k(n_c))$  tend vers :

$$\sum_i p_{i,c} \log \left( \frac{p_i(n)}{p_{i,c}} \right) \equiv -S(n_c|n),$$

où  $i = e, g$ .  $S(n_c|n)$  est l'entropie relative des distributions des résultats de mesure obtenues pour  $n_c$  et  $n$  photons.

Comme en outre  $P(n_c)$  tend presque sûrement vers 1 on a la convergence presque sûre :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(P_k(n)) = -S(n_c|n).$$

De ce fait , pour  $k$  grand, si l'on réalise la moyenne d'ensemble, non plus des probabilités  $P_k$  mais de  $\log(P_k)$ , on doit avoir :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \overline{\log(P_k(n))} = -S(n_c|n). \quad (\text{E.13})$$

C'est ici une autre façon de définir un taux de convergence (*via* le logarithme), et le résultat obtenu est différent. En effet on a  $S(n_c|n) = \phi_n(p_c)$ . Du fait de la forte convexité de  $\phi_n$  on a donc les inégalités suivantes :

$$0 < \phi_n(\bar{\alpha}_n) < S(n_c|n) = \phi_n(p_c), \quad (\text{E.14})$$

pour  $n \neq n_c$ .

Ces inégalités sont fondamentalement issues de la concavité du logarithme :

$$\overline{\log(P_k(n))} \geq \log(\overline{P_k(n)}).$$

Nous pourrions constater sur les données expérimentales que les taux de convergence du logarithme moyen sont effectivement nettement plus grands que ceux des probabilités moyennes (voir la section E.3).

## E.2 Plusieurs directions de mesure

Dans le cas de la mesure passive utilisée dans ce manuscrit, nous utilisons plusieurs directions de mesure, définies par plusieurs phases de Ramsey, que nous repérons par un indice  $j$ . La probabilité de détection des états  $|e\rangle$  et  $|g\rangle$ , pour le choix de mesure  $j$  et conditionnée à la présence de  $n$  photons dans la cavité s'écrit :

$$p(g|j, n) \equiv p_g(n) = p_0 + \frac{C}{2} \cos(\phi(n) + \phi_j), \quad p(e|j, n) = 1 - p(g|j, n). \quad (\text{E.15})$$

On peut considérer en toute généralité que l'on utilise un nombre  $r$  de phases de Ramsey différentes pour effectuer la mesure. Dans le cas de la mesure passive, le choix des phases pour les échantillons successifs est prédéterminé. On utilise chaque phase avec une fréquence  $f_j$ , avec  $\sum_j f_j = 1$ . Du fait de la présence aléatoire d'un atome dans les échantillons, la phase de Ramsey des atomes successivement détectés est une variable aléatoire, de loi de probabilité  $f_j$ . À chaque détection, la distribution estimée du nombre de photons  $P_k(n)$  est actualisée selon

$$P_{k+1}(n) = \frac{p(i, j|n)P_k(n)}{\sum_m p(i, j|m)P_k(m)}, \quad (\text{E.16})$$

lorsque l'état atomique  $i = e, g$  est détecté avec le réglage  $j$ , ce qui se produit avec une probabilité  $p(i, j|n_c) = p(i|j, n_c)f_j$ . Nous noterons dorénavant  $p(i, j|n) \equiv p_\sigma(n)$ , et en particulier  $p_\sigma(n_c) \equiv p_{\sigma, c}$ , pour simplifier l'écriture des résultats ultérieurs. L'indice  $\sigma$  prend  $q = 2r$  valeurs décrivant tous les résultats de mesure. Par convention on peut prendre pour

$\sigma \in \{1, \dots, r\}$ ,  $p_\sigma(n) = p(g, \sigma|n)$  et pour  $\sigma \in \{r+1, \dots, 2r\}$ ,  $p_\sigma(n) = p(e, \sigma|n)$ . Notons que l'on a  $\sum_\sigma p_\sigma(n) = 1$  pour tout  $n$ , ce qui est la condition de normalisation des POVM.

L'évolution de la distribution moyenne s'obtient comme précédemment en sommant les évolutions correspondant à l'ensemble des résultats possibles après  $k$  détections, avec leurs probabilités. À l'étape  $k$  on peut avoir obtenu le résultat  $\sigma$  un nombre  $l_\sigma$  de fois. On a nécessairement  $\sum_\sigma l_\sigma = k$ . Deux trajectoires pour lesquels on a eu les mêmes résultats  $l_\sigma$ , sans considérer leur ordre, aboutissent à la même distribution et ont la même probabilité. Le nombre de combinaisons possibles aboutissant aux résultats  $l_\sigma$  est donné par le coefficient *multinomial* :

$$\binom{k}{l_1, \dots, l_q} = \frac{k!}{l_1! \dots l_q!}.$$

L'évolution moyenne  $\overline{P}_k(n)$  est donc donnée par :

$$\overline{P}_k(n) = \sum_{l_1 + \dots + l_q = k} \binom{k}{l_1, \dots, l_q} \prod (p_{\sigma,c})^{l_\sigma} \frac{(p_\sigma(n))^{l_\sigma} P_0(n)}{\sum_m (p_\sigma(m))^{l_\sigma} P_0(m)}. \quad (\text{E.17})$$

Comme précédemment nous sommons ici des distributions correspondant à la détection du résultat  $\sigma$  un nombre  $l_\sigma$  de fois. Cette somme est pondérée par la loi *multinomiale* de paramètres  $p_{\sigma,c}$  donnant la probabilité du résultat  $l_\sigma$  après  $k$  détections.

### E.2.1 Réécriture asymptotique

La loi multinomiale pour les variables  $l_\sigma$  :

$$\mathcal{M}_{k,p_{\sigma,c}}(l_\sigma) = \binom{k}{l_1, \dots, l_q} \prod (p_{\sigma,c})^{l_\sigma}$$

est caractérisée par les valeurs moyennes

$$\langle l_\sigma \rangle = kp_{\sigma,c},$$

et les covariances

$$\text{cov}(l_\sigma, l_{\sigma'}) \equiv \langle l_\sigma l_{\sigma'} \rangle - \langle l_\sigma \rangle \langle l_{\sigma'} \rangle = k(p_{\sigma,c} \delta_{\sigma,\sigma'} - p_{\sigma,c} p_{\sigma',c}).$$

Nous noterons  $\mathbf{C}$  la matrice des covariances.

L'analogie avec le cas d'une dimension de mesure est claire : pour  $k$  grand, le théorème central limite s'applique et l'on a pour  $k$  grand (on note  $p_c = (p_{\sigma,c}) \in [0, 1]^q$ , et de même  $l = (l_\sigma) \in \{0, \dots, k\}^q$ ) :

$$\mathcal{M}_{k,p_c}(l) \sim \mathcal{N}(kp_c, \mathbf{C}),$$

où  $\mathcal{N}$  dénote la loi normale multidimensionnelle décrite par la densité

$$N(l) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^q |\det \mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(l - kp_c)^T \mathbf{C}^{-1}(l - kp_c)\right). \quad (\text{E.18})$$

$$(\text{E.19})$$

Par conséquent, on peut on notant  $\alpha_\sigma \equiv l_\sigma/k$  et  $\alpha$  le vecteur des  $\alpha_\sigma$ , réécrire l'évolution moyenne  $\overline{P}_k(n)$  sous la forme :

$$\overline{P}_k(n) \simeq \int d\alpha \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{q-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{|\det \mathbf{C}'|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha - p_c)^T \mathbf{C}'^{-1}(\alpha - p_c)\right) \frac{\prod_\sigma p_\sigma(n)_\sigma^\alpha P_0(n)}{\sum_m \prod_\sigma p_\sigma(m)_\sigma^\alpha P_0(m)}, \quad (\text{E.20})$$

où l'on a noté  $\mathbf{C}'$  la matrice des covariances :

$$C'_{\sigma_1, \sigma_2} = p_{\sigma, c} \delta_{\sigma, \sigma'} - p_{\sigma, c} p_{\sigma', c}.$$

Cette forme est tout à fait similaire à celle obtenue dans le cas d'une seule direction de mesure. On a cependant apparemment perdu la condition de somme  $\sum_\sigma \alpha_\sigma = 1$  qui provient de la loi multinomiale. Celle-ci est en fait incluse dans la distribution gaussienne : on peut remarquer en effet que le vecteur  $v$  à  $q$  composantes égales à 1 est vecteur propre de  $\mathbf{C}'$  pour la valeur propre 0. La formule ci-dessus est donc à prendre avec précaution, la matrice  $\mathbf{C}'$  n'étant en fait pas inversible.

### E.2.1.a Une réécriture plus rigoureuse

Définissant les variables  $u_\sigma = \alpha_\sigma - p_{\sigma, c}$ , l'approximation gaussienne s'écrit rigoureusement :

$$\overline{P}_k(n) \simeq \int_V du \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{\det Q} \exp\left(-\frac{k}{2}Q(u)\right) \frac{\prod_\sigma p_\sigma(n)^{p_{\sigma, c} + u_\sigma}}{\sum_m \prod_\sigma p_\sigma(m)^{p_{\sigma, c} + u_\sigma}}, \quad (\text{E.21})$$

avec

- le vecteur  $u = (u_\sigma)$  de  $\mathbb{R}^q$  appartenant à  $V$ , l'hyperplan d'équation  $\sum_\sigma u_\sigma = 0$  ;
- $du$  l'élément de volume euclidien dans  $V$  ;
- $Q(u)$  la forme quadratique définie positive sur  $V$ , inverse de la restriction de  $\mathbf{C}'$  à  $V$ .

$Q$  est bien définie pour les raisons suivantes :

- Comme  $0 < p_\sigma < 1$  (dans un cas réaliste l'interféromètre de Ramsey n'est jamais parfait),  $\mathbf{C}'$  est symétrique, avec des éléments non-diagonaux négatifs, des éléments diagonaux positifs et la somme de ses lignes (et de ses colonnes) est nulle.  $C$  est donc une matrice laplacienne irréductible. Son noyau est réduit à  $\mathbb{R}(1, \dots, 1)$ , et son image coïncide avec  $V$ , l'hyperplan orthogonal au noyau.
- Comme  $\mathbf{C}'(V) = V$ , la restriction de  $\mathbf{C}'$  à  $V$  est un opérateur symétrique inversible, qui définit sur  $V$  une forme quadratique définie positive. Son inverse  $(C|_V)^{-1}$  définit également sur  $V$  une forme quadratique définie positive notée  $Q(u)$  pour  $u \in V$ , de déterminant  $\det Q$ .

## E.2.2 Taux de convergence

Une fois établie la forme (E.21), la démarche pour obtenir l'exposant caractéristique de la convergence est sensiblement la même que dans le cas d'une seule direction de mesure. Nous définissons donc les fonctions :

$$\psi(u) \equiv \max_{m \in 0, \dots, n_{\max}} \sum_{\sigma} (p_{\sigma,c} + u_{\sigma}) \log(p_{\sigma}(m)), \quad (\text{E.22})$$

$$\phi_n(u) \equiv \frac{1}{2}Q(u) - \sum_{\sigma} (p_{\sigma,c} + u_{\sigma}) \log(p_{\sigma}(m)) + \psi(u), \quad (\text{E.23})$$

$$g_m(u) \equiv \exp\left(\sum_{\sigma} (p_{\sigma,c} + u_{\sigma}) \log(p_{\sigma}(m)) - \psi(u)\right). \quad (\text{E.24})$$

Nous avons les propriétés :

- $g_m$  est comprise entre 0 et 1, et quelque soit  $u$ , la valeur 1 est atteinte pour un  $m$  ;
- $\phi_n(u)$  est une forme positive ;  $\psi(u)$  étant localement affine, elle est convexe, donc  $\phi_n(u)$  est fortement convexe et localement quadratique ; par conséquent elle possède un unique minimum sur  $V$ , noté  $\bar{u}_n$ .

L'équation (E.21) se réécrit alors :

$$\bar{P}_k(n) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{\det Q} \int_V du \frac{\exp(-k\phi_n(u))P_0(n)}{\sum_m (g_m(u))^k P_0(m)}. \quad (\text{E.25})$$

Du fait de l'existence du minimum  $\bar{u}_n$ , on peut décomposer  $\phi_n$  de la façon suivante :

$$\phi_n(u) = \phi_n(\bar{u}_n) + (u - \bar{u}_n)^T A_n(u) + \frac{1}{2}Q(u - \bar{u}_n), \quad (\text{E.26})$$

où  $A_n(u)$  est un vecteur et il existe  $a_n > 0$  tel que, pour tout  $u$ ,  $0 \leq (u - \bar{u}_n)^T A_n(u) \leq a_n \|u - \bar{u}_n\|$ . En posant  $v = \sqrt{k}(u - \bar{u}_n)$ , l'évolution moyenne se réécrit :

$$\bar{P}_k(n) = \exp(-\phi_n(\bar{u}_n)) \sqrt{\det Q} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{q-1}{2}} \int_V dv \frac{\exp\left(-\sqrt{k}v A_n(\bar{u}_n + \frac{v}{\sqrt{k}}) - \frac{1}{2}Q(v)\right) P_0(n)}{\sum_m (g_m(u))^k P_0(m)}. \quad (\text{E.27})$$

Grâce aux propriétés mentionnées ci-dessus on a l'encadrement :

$$\exp\left(\sqrt{k}a_n \|v\| - \frac{1}{2}Q(v)\right) \leq \frac{\exp\left(-\sqrt{k}v A_n(\bar{u}_n + \frac{v}{\sqrt{k}}) - \frac{1}{2}Q(v)\right)}{\sum_m (g_m(u))^k P_0(m)} \leq \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}Q(v)\right)}{\min_m P_0(m)}.$$

On a par conséquent :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left( \int_V dv \sqrt{Q} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{q-1}{2}} \frac{\exp\left(-\sqrt{k}v A_n(\bar{u}_n + \frac{v}{\sqrt{k}}) - \frac{1}{2}Q(v)\right) P_0(n)}{\sum_m (g_m(u))^k P_0(m)} \right) = 0. \quad (\text{E.28})$$

Ceci implique finalement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \overline{P}_k(n) = -\phi_n(\bar{u}_n). \quad (\text{E.29})$$

De la même façon qu'avec une seule direction de mesure, l'exposant caractéristique de la décroissance des probabilités moyennes pour  $n \neq n_c$  est donné par le minimum de la fonction  $\phi_n$ , qui peut être recherché numériquement.

### E.2.3 Taux de convergence du logarithme moyen

On peut également dans le cas de plusieurs directions de mesure obtenir des taux de convergence pour la moyenne d'ensemble du *logarithme* des probabilités (*cf.* [118]). On a alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \overline{\log(P_k(n))} = \sum_{\sigma} p_{\sigma,c} \log \left( \frac{p_{\sigma}(n)}{p_{\sigma,c}} \right) \equiv -S(n_c|n). \quad (\text{E.30})$$

De même, du fait de la forte convexité de  $\phi_n$  on les inégalités strictes (pour  $n \neq n_c$ ) :

$$0 < \phi_n(\bar{\alpha}_n) < S(n_c|n) = \phi_n(p_c). \quad (\text{E.31})$$

## E.3 Comparaison à l'expérience

Les données de l'expérience réalisée sur un état sélectionné (partie IV.1) sont proches de la situation idéale décrite ci-dessus : nous mesurons un état sélectionné, ne subissant pas la relaxation, voisin d'un état de Fock. Nous pouvons donc les exploiter pour comparer les prédictions théoriques à l'expérience.

Afin d'augmenter la taille de l'ensemble statistique, nous utilisons toutes les traces sélectionnées, triées en fonction du nombre de photons dont la probabilité est maximale à la fin de la trajectoire  $n_{\text{sup}}$ . Comme nous l'avons fait au paragraphe IV.1.4.b, nous définissons pour chaque trajectoire la distribution du nombre de photons relatif  $\Delta n_{\text{sup}}$ , notée  $P''(\Delta n_{\text{sup}})$ . C'est sur ces distributions que sont réalisées les moyennes d'ensemble  $\overline{P''(\Delta n_{\text{sup}})}$  et  $\overline{\log(P''(\Delta n_{\text{sup}}))}$ .

Ces moyennes sont donc issues de mesures de différents nombre de photons sélectionnés, et d'un ensemble d'expériences où les paramètres des franges (contraste, décalage, phase de Ramsey) ont pu légèrement varier d'une prise de données à l'autre. Pour comparer nos prédictions à l'expérience, nous calculons les différents exposants obtenus dans le cas de la mesure «idéale» suivante :

- nous calculons les exposants pour  $n_c = 0$ ,
- les phases de Ramsey sont prises égales à  $p\pi/4$  pour  $p$  allant de 0 à 3,
- le déphasage par photon prend sa valeur calibrée  $\phi(n) = 0,255\pi n - 0,0015\pi n^2$ ,

- le contraste et le décalage des franges prennent les valeurs typiques  $C = 0,685$  et  $\pi_0 = 0,505$ .

La figure E.1 montre, en fonction de l'indice  $k$  de l'échantillon atomique détecté, l'évolution de deux grandeurs logarithmiques :  $\log(\overline{P''})$  d'une part et  $\overline{\log(P'')}$ , d'autre part. Pour obtenir ces courbes, on a effectué une moyenne d'ensemble sur 6021 trajectoires. On indique également la correspondance entre nombre d'échantillons et nombre d'atomes détectés, sachant que l'on détecte  $n_a^{(d)} = 0,35$  atomes par échantillon en moyenne. C'est en fonction de ce nombre de détections que nous avons établis nos taux de convergence. On peut faire les constatations suivantes :

**Vitesse de convergence :** On peut constater (pour  $\Delta n_{\text{sup}} \neq 0$ ) que les taux de décroissance issus de la moyenne des logarithmes sont systématiquement plus grands que ceux du logarithme de la moyenne des probabilités, conformément aux inégalités établies en (E.31).

**Fluctuations statistiques :** De manière frappante, les courbes pour la moyenne du logarithme sont bien plus lisses que celles obtenues par la moyenne des probabilités, où les fluctuations deviennent très importantes pour  $P \simeq e^{-8}$ . Cette différence est qualitativement reproduite par une simulation Monte-Carlo de la mesure «idéale» décrite ci-dessus pour un ensemble statistique de même taille (6000 trajectoires simulées).

**Taux de convergence :** Finalement, nous voulons comparer à nos résultats théoriques des taux de convergence issus de ces données. La chose est aisée pour  $\log(\overline{P''})$  : nous pouvons ajuster des droites aux différentes courbes représentées, ici sur un intervalle allant de 25 à 100 détections. Du fait des importantes fluctuations, l'ajustement des courbes de  $\log(\overline{P''})$  est plus difficile : nous avons choisi des intervalles identiques pour  $\Delta n_{\text{sup}} = \pm 1$ ,  $\Delta n_{\text{sup}} = \pm 2$  et  $\Delta n_{\text{sup}} = -3, 3$  et 4. Les droites d'ajustement sont représentées en pointillés noirs.

La table E.1 regroupe les taux ainsi mesurés, que nous notons  $\lambda_n$  pour  $\log(\overline{P''})$ , et  $\overline{\lambda}_n$  pour  $\overline{\log(P'')}$ . Les barres d'erreurs sont fournies par les ajustements linéaires sur les intervalles choisis. Elle présente également les taux attendus, que nous avons calculés pour  $n_c = 0$  comme décrit ci-dessus, et que nous associons à chaque valeur de  $\Delta n_{\text{sup}}$ . En principe on doit avoir :

$$\lambda_n = S(0|n), \quad \overline{\lambda}_n = \phi_n(\overline{\alpha}_n).$$

Nous donnons l'écart relatif (ramené à la valeur théorique) entre ces deux nombres dans chaque cas.

En premier lieu il ressort de ces résultats qu'il y a une grande différence entre les exposants caractéristiques selon la moyenne d'ensemble réalisée. Comme attendu,  $S(0|n) > \phi_n(\overline{\alpha}_n)$ , ces deux coefficients étant reliés par un facteur de l'ordre de 3. Les coefficients  $S(0|n)$ , qui apparaissent dans l'étude de la convergence des trajectoires individuelles (*cf.* [118]), ne décrivent donc pas correctement l'échelle de temps caractéristiques de la convergence d'une moyenne d'ensemble.

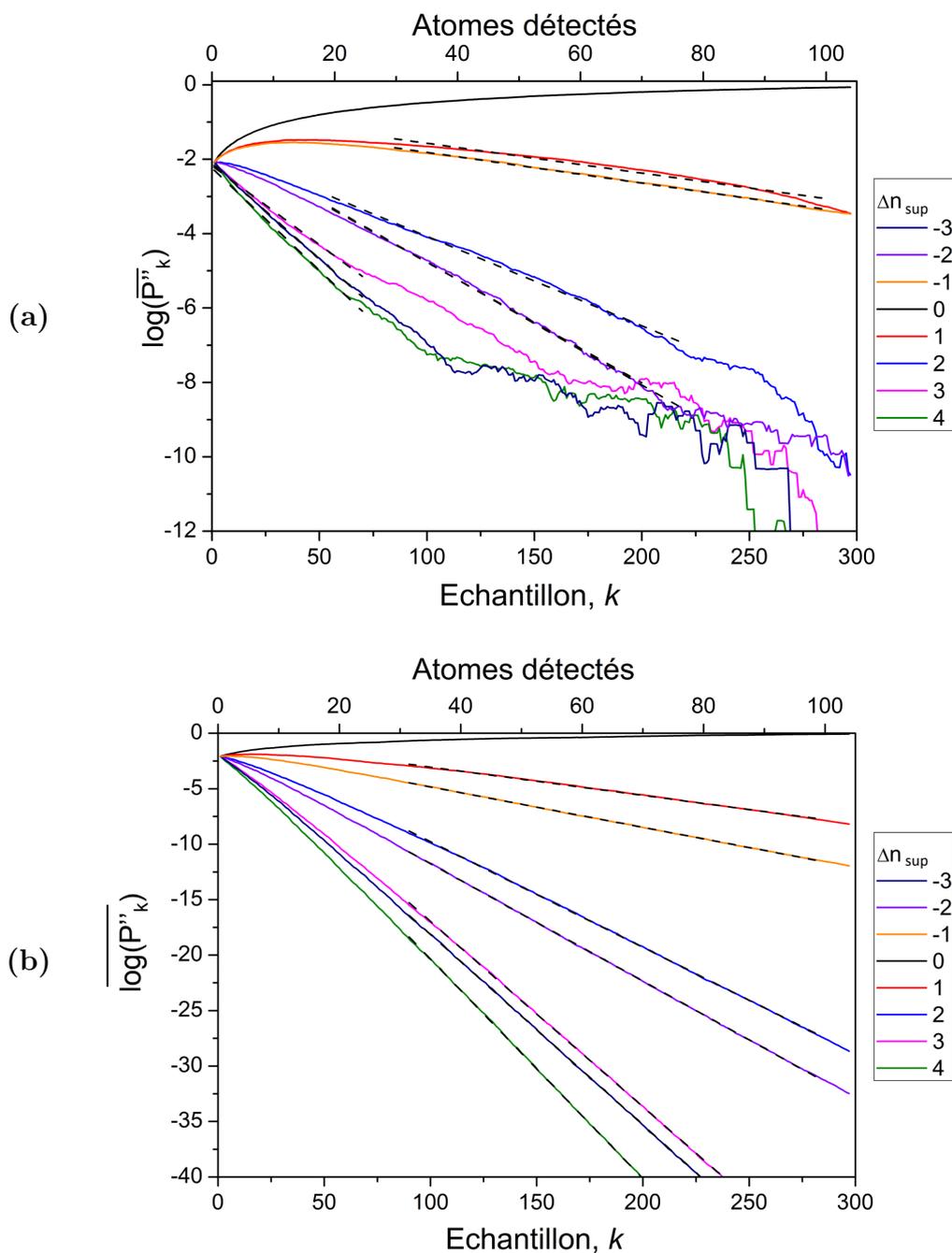


FIGURE E.1 – Convergence des moyennes d'ensemble pour la mesure passive : **(a)** Évolution du logarithme des populations moyennes,  $\log(\overline{P''_k})$ , en fonction du nombre de photons relatif  $\Delta n_{\text{sup}}$  **(b)** Évolution de la moyenne du logarithme des populations,  $\overline{\log(P''_k)}$ . Les ajustements linéaires réalisés sur une chaque courbe sont représentés en pointillés noirs.

$\Delta n_{\text{sup}}$	$\lambda_n$	$S(0 n)$	écart(%)	$\overline{\lambda}_n$	$\phi_n(\bar{\alpha}_n)$	écart(%)
-3	$0,4907 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	0,4689	-4,6	$0,1465 \pm 6 \cdot 10^{-4}$	0,1409	4
-2	$0,3025 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	0,2929	-3,3	$0,0944 \pm 4 \cdot 10^{-4}$	0,1183	-20
-1	$0,1041 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	0,1049	0,8	$0,0236 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	0,0267	-12
0		0			0	
1	$0,0728 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	0,0818	11	$0,0229 \pm 3 \cdot 10^{-4}$	0,2085	9
2	$0,2724 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	0,2738	0,5	$0,0687 \pm 4 \cdot 10^{-4}$	0,1149	-40
3	$0,4777 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	0,4620	-3,4	$0,1215 \pm 1,0 \cdot 10^{-3}$	0,1410	-14
4	$0,5655 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	0,5400	-4,7	$0,1572 \pm 1,3 \cdot 10^{-3}$	0,1536	2

TABLE E.1 – Comparaison entre les exposants caractéristiques mesurées sur les moyennes d'ensembles expérimentales et les prédictions théoriques.

L'accord des coefficients mesurés  $\lambda_n$  aux prédictions théoriques est très bon, avec des écarts de quelques pourcents. C'est un peu moins le cas des coefficients  $\overline{\lambda}_n$  que nous nous sommes attachés à calculer ici. Les écarts assez grands constatés peuvent en fait être imputés au manque de statistiques. Les courbes de  $\log(\overline{P''})$  sont en effet bien plus bruitées que celles de  $\log(\overline{P'})$ , ce qui nous a d'ailleurs imposé de restreindre l'intervalle d'ajustement. Les coefficients  $\overline{\lambda}_n$  obtenus sont donc moins fiables. Comme nous l'avons déjà dit, cette différence de fluctuations entre les courbes obtenues selon nos deux méthodes est reproduite par une simulation «idéale» sur un ensemble de même taille (6000 traces). Si nous réalisons une comparaison entre *simulation* et théorie, en extrayant des coefficients ajustés sur les courbes simulées, on obtient comme pour les données présentées ici, des écarts de l'ordre du pourcent pour  $\lambda_n$ , et de l'ordre de 15% pour  $\overline{\lambda}_n$ . Seul l'écart de 40% constaté pour  $\Delta n_{\text{sup}} = 2$  est donc quelque peu surprenant. Plusieurs facteurs peuvent ceci dit être responsables d'écarts éventuels : nous exploitons les données tous nombres de photons confondus, de plusieurs séries d'expériences entre lesquelles les paramètres des franges de Ramsey ont pu varier. Nos données ne reproduisent donc pas parfaitement les conditions idéales dans lesquelles nous calculons les coefficients théoriques.

## Conclusion

Nous avons défini dans cet appendice les exposants caractérisant la convergence de la distribution des nombres de photons obtenue par une moyenne d'ensemble sur les trajectoires individuelles. Ces exposants s'obtiennent par la recherche du minimum d'une fonction qui dépend de tous les paramètres de la mesure. Les résultats obtenus sont en assez bon accord avec l'expérience, le principal facteur limitant la comparaison étant le manque de statistiques. Ces résultats sont limités à la méthode passive de décimation : en effet dans le cas d'une mesure active, il n'est plus possible d'écrire directement le résultat exact pour la moyenne d'ensemble.

Nous avons également pu mettre en évidence que les exposants caractéristiques peuvent dépendre fortement de la façon dont est réalisée la moyenne d'ensemble : dans le cas particulier de la moyenne d'ensemble du logarithme des probabilités, les exposants obtenus, qui sont liés à la convergence des trajectoires individuelles, sont considérablement plus grands que ceux décrivant la convergence des probabilités moyennes.

# Bibliographie

- [1] A. EINSTEIN. “Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt”. *Annalen der Physik*, **322**, n° 6, 132 (1905). URL <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053220607>.
- [2] J. VON NEUMANN. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press (1955).
- [3] C. COHEN-TANNOUJDI, B. DIU, et F. LALOË. *Mécanique quantique*. Hermann (1997).
- [4] J. A. WHEELER et W. H. ZUREK. *Quantum Theory and Measurement*. Princeton University Press (1983).
- [5] V. B. BRAGINSKY et Y. I. VORONTSOV. “Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique”. *Soviet Physics Uspekhi*, **17**, n° 5, 644 (1975). URL <http://stacks.iop.org/0038-5670/17/i=5/a=R02>.
- [6] V. B. BRAGINSKY, Y. I. VORONTSOV, et K. S. THORNE. “Quantum nondemolition measurements”. *Science*, **209**, n° 4456, 547 (1980). URL <http://www.sciencemag.org/content/209/4456/547>.
- [7] C. M. CAVES, K. S. THORNE, R. W. P. DREVER, V. D. SANDBERG, et M. ZIMMERMANN. “On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. i. issues of principle”. *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 341 (Apr 1980). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.52.341>.
- [8] K. S. THORNE, R. W. P. DREVER, C. M. CAVES, M. ZIMMERMANN, et V. D. SANDBERG. “Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators”. *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 667 (Mar 1978). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.667>.
- [9] D. WALLS. “Squeezed states of light”. *Nature*, **306**, 141 (1983).
- [10] V. GIOVANNETTI, S. LLOYD, et L. MACCONE. “Quantum-enhanced measurements : Beating the standard quantum limit”. *Science*, **306**, n° 5700, 1330 (2004). URL <http://www.sciencemag.org/content/306/5700/1330>.
- [11] V. GIOVANNETTI, S. LLOYD, et L. MACCONE. “Advances in quantum metrology”. *Nature Photonics*, **5**, 222 (2011).
- [12] T. CORBITT et N. MAVALVALA. “Review : Quantum noise in gravitational-wave interferometers”. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **6**, n° 8, S675 (2004). URL <http://stacks.iop.org/1464-4266/6/i=8/a=008>.

- [13] S. HAROCHE et J.-M. RAIMOND. *Exploring the Quantum*. Oxford Graduate Texts (2006).
- [14] P. GRANGIER, J. A. LEVENSON, et J.-P. POIZAT. “Quantum non-demolition measurements in optics”. *Nature*, **396**, 537 (1998).
- [15] P. GRANGIER, J.-F. M. C. ROCH, et G. ROGER. “Observation of backaction-evading measurement of an optical intensity in a three-level atomic nonlinear system”. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 1418 (Mar 1991). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.1418>.
- [16] J.-F. ROCH, K. VIGNERON, P. GRELU, A. SINATRA, J.-P. POIZAT, et P. GRANGIER. “Quantum nondemolition measurements using cold trapped atoms”. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 634 (Jan 1997). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.634>.
- [17] W. NAGOURNEY, J. SANDBERG, et H. DEHMELT. “Shelved optical electron amplifier : Observation of quantum jumps”. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 2797 (Jun 1986). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.56.2797>.
- [18] J. C. BERGQUIST, R. G. HULET, W. M. ITANO, et D. J. WINELAND. “Observation of quantum jumps in a single atom”. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1699 (Oct 1986). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.1699>.
- [19] S. PEIL et G. GABRIELSE. “Observing the quantum limit of an electron cyclotron : Qnd measurements of quantum jumps between fock states”. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 1287 (Aug 1999). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.1287>.
- [20] A. D. CRONIN, J. SCHMIEDMAYER, et D. E. PRITCHARD. “Optics and interferometry with atoms and molecules”. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 1051 (Jul 2009). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1051>.
- [21] S. GLEYZES, S. KUHR, C. GUERLIN, J. BERNU, S. DELÉGLISE, U. B. HOFF, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity”. *Nature*, **446**, 297 (2007).
- [22] C. GUERLIN, J. BERNU, S. DELÉGLISE, C. SAYRIN, S. GLEYZES, S. KUHR, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting”. *Nature*, **448**, 889 (2007).
- [23] S. DELÉGLISE, I. DOSTENKO, C. SAYRIN, J. BERNU, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence”. *Nature*, **455**, 510 (2008).
- [24] Y. AHARONOV, D. Z. ALBERT, et L. VAIDMAN. “How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-  $1/2$  particle can turn out to be 100”. *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1351 (Apr 1988). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.1351>.
- [25] M. BRUNE, J. BERNU, C. GUERLIN, S. DELÉGLISE, C. SAYRIN, S. GLEYZES, S. KUHR, I. DOSTENKO, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Process tomography of field damping and measurement of fock state lifetimes by quantum nondemolition

- photon counting in a cavity”. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 240402 (Dec 2008). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.240402>.
- [26] J. APPEL, P. J. WINDPASSINGER, D. OBLAK, U. B. HOFF, N. KJÆRGAARD, et E. S. POLZIK. “Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standard quantum limit”. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **106**, n° 27, 10960 (2009). URL <http://www.pnas.org/content/106/27/10960>.
- [27] A. LUPASCU, S. SAITO, T. PICOT, P. DE GROOT, C. HARMANS, et J. MOOJI. “Quantum non-demolition measurement of a superconducting two level system”. *Nature Physics*, **3**, 119 (2007).
- [28] B. JOHNSON, M. REED, A. HOUCK, D. SCHUSTER, L. BISHOP, E. GINOSSAR, J. GAMBETTA, L. DICARLO, L. FRUNZIO, S. GIRVIN, et R. SCHOELKOPF. “Quantum non-demolition detection of single microwave photons in a circuit”. *Nature Physics*, **6**, 663 (2010).
- [29] K. BENCHEIKH, C. SIMONNEAU, et J. A. LEVENSON. “Cascaded amplifying quantum optical taps : A robust noiseless optical bus”. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 34 (Jan 1997). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.34>.
- [30] D. P. DIVINCENZO. “Quantum computation”. *Science*, **270**, n° 5234, pp. 255 (1995). URL <http://www.jstor.org/stable/2888530>.
- [31] P. W. SHOR. “Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring”. Dans *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, p. 124–134. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA (1994). URL <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1398518.1399018>.
- [32] D. B. HUME, T. ROSENBAND, et D. J. WINELAND. “High-fidelity adaptive qubit detection through repetitive quantum nondemolition measurements”. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 120502 (Sep 2007). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.120502>.
- [33] D. P. DIVINCENZO. “Two-bit gates are universal for quantum computation”. *Phys. Rev. A*, **51**, 1015 (Feb 1995). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.1015>.
- [34] A. SERAFINI. “Feedback control in quantum optics : An overview of experimental breakthroughs and areas of application”. *ISRN Optics*, **2012**, 275016 (2012).
- [35] R. VAN HANDEL, J. K. STOCKTON, et H. MABUCHI. “Modelling and feedback control design for quantum state preparation”. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, **7**, n° 10, S179 (2005). URL <http://stacks.iop.org/1464-4266/7/i=10/a=001>.
- [36] W. P. SMITH, J. E. REINER, L. A. OROZCO, S. KUHR, et H. M. WISEMAN. “Capture and release of a conditional state of a cavity qed system by quantum feedback”. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 133601 (Sep 2002). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.133601>.

- [37] G. G. GILLETT, R. B. DALTON, B. P. LANYON, M. P. ALMEIDA, M. BARBIERI, G. J. PRYDE, J. L. O'BRIEN, K. J. RESCH, S. D. BARTLETT, et A. G. WHITE. "Experimental feedback control of quantum systems using weak measurements". *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 080503 (Feb 2010). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.080503>.
- [38] C. SAYRIN, I. DOTSENKO, X. ZHOU, B. PEAUDECERF, T. RYBARCZYK, S. GLEYZES, P. ROUCHON, M. MIRRAHIMI, H. AMINI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. "Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states". *Nature*, **477**, 73 (2011).
- [39] J. GEREMIA. "Deterministic and nondestructively verifiable preparation of photon number states". *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 073601 (Aug 2006). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.073601>.
- [40] X. ZHOU, I. DOTSENKO, B. PEAUDECERF, T. RYBARCZYK, C. SAYRIN, S. GLEYZES, J. M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. HAROCHE. "Field locked to a fock state by quantum feedback with single photon corrections". *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 243602 (Jun 2012). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.243602>.
- [41] R. VIJAY, C. MACKLIN, D. SLICHTER, S. WEBER, K. MURCH, R. NAIK, A. KOROTKOV, et I. SIDDIQI. "Stabilizing rabi oscillations in a superconducting qubit using quantum feedback". *Nature*, **490**, 77 (2012).
- [42] P. CAMPAGNE-IBARCQ, E. FLURIN, N. ROCH, D. DARSON, P. MORFIN, M. MIRRAHIMI, M. H. DEVORET, F. MALLET, et B. HUARD. "Persistent control of a superconducting qubit by stroboscopic measurement feedback". *Phys. Rev. X*, **3**, 021008 (May 2013). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.3.021008>.
- [43] J. J. . BOLLINGER, W. M. ITANO, D. J. WINELAND, et D. J. HEINZEN. "Optimal frequency measurements with maximally correlated states". *Phys. Rev. A*, **54**, R4649 (Dec 1996). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.R4649>.
- [44] V. GIOVANNETTI, S. LLOYD, et L. MACCONE. "Quantum metrology". *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 010401 (Jan 2006). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.010401>.
- [45] H. WISEMAN, D. BERRY, S. BARTLETT, B. HIGGINS, et G. PRYDE. "Adaptive measurements in the optical quantum information laboratory". *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, **15**, n° 6, 1661 (2009).
- [46] H. M. WISEMAN. "Adaptive phase measurements of optical modes : Going beyond the marginal  $Q$  distribution". *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4587 (Dec 1995). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4587>.
- [47] M. A. ARMEN, J. K. AU, J. K. STOCKTON, A. C. DOHERTY, et H. MABUCHI. "Adaptive homodyne measurement of optical phase". *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 133602 (Sep 2002). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.133602>.

- [48] D. W. BERRY et H. M. WISEMAN. “Adaptive quantum measurements of a continuously varying phase”. *Phys. Rev. A*, **65**, 043803 (Mar 2002). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.043803>.
- [49] T. A. WHEATLEY, D. W. BERRY, H. YONEZAWA, D. NAKANE, H. ARAO, D. T. POPE, T. C. RALPH, H. M. WISEMAN, A. FURUSAWA, et E. H. HUNTINGTON. “Adaptive optical phase estimation using time-symmetric quantum smoothing”. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 093601 (Mar 2010). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.093601>.
- [50] D. W. BERRY et H. M. WISEMAN. “Adaptive phase measurements for narrowband squeezed beams”. *Phys. Rev. A*, **73**, 063824 (Jun 2006). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.73.063824>.
- [51] H. YONEZAWA, D. NAKANE, T. A. WHEATLEY, K. IWASAWA, S. TAKEDA, H. ARAO, K. OHKI, K. TSUMURA, D. W. D. W. B. C. RALPH, H. M. H. M. W. H. HUNTINGTON, et A. FURUSAWA. “Quantum-enhanced optical-phase tracking”. *Science*, **337**, 1514 (2012).
- [52] D. W. BERRY et H. M. WISEMAN. “Optimal states and almost optimal adaptive measurements for quantum interferometry”. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 5098 (Dec 2000). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.5098>.
- [53] G. Y. XIANG, B. L. B. L. H. W. BERRY, et H. M. H. M. W. J. PRYDE. “Entanglement-enhanced measurement of a completely unknown optical phase”. *Nature Photonics*, **5**, 43 (2010).
- [54] B. L. HIGGINS, D. W. BERRY, S. D. BARTLETT, H. M. WISEMAN., et J. PRYDE. “Entanglement-free heisenberg-limited phase estimation”. *Nature*, **450**, 393 (2007).
- [55] A. FUJIWARA. “Strong consistency and asymptotic efficiency for adaptive quantum estimation problems”. *Journal of Physics A*, **39**, 12489 (2006).
- [56] R. OKAMOTO, M. IEFUJI, S. OYAMA, K. YAMAGATA, H. IMAI, A. FUJIWARA, et S. TAKEUCHI. “Experimental demonstration of adaptive quantum state estimation”. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 130404 (Sep 2012). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.130404>.
- [57] A. ACÍN, E. BAGAN, M. BAIG, L. MASANES, et R. MUÑOZ TAPIA. “Multiple-copy two-state discrimination with individual measurements”. *Phys. Rev. A*, **71**, 032338 (Mar 2005). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.032338>.
- [58] B. L. HIGGINS, B. M. BOOTH, A. C. DOHERTY, S. D. BARTLETT, H. M. WISEMAN, et G. J. PRYDE. “Mixed state discrimination using optimal control”. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 220503 (Nov 2009). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.220503>.
- [59] A. HENTSCHEL et B. C. SANDERS. “Machine learning for precise quantum measurement”. *Phys. Rev. Lett.*, **104**, 063603 (Feb 2010). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.063603>.

- [60] R. L. COOK, P. J. MARTIN, et J. M. GEREMIA. “Optical coherent state discrimination using a closed-loop quantum measurement”. *Nature*, **446**, 774 (2007).
- [61] K. JACOBS. “How to project qubits faster using quantum feedback”. *Phys. Rev. A*, **67**, 030301 (Mar 2003). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.030301>.
- [62] J. COMBES et K. JACOBS. “Rapid state reduction of quantum systems using feedback control”. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 010504 (Jan 2006). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.010504>.
- [63] K. JACOBS. “Feedback control using only quantum back action”. *New Journal of Physics*, **12**, 043005 (2010).
- [64] S. TANAKA et N. YAMAMOTO. “Robust adaptive measurement scheme for qubit-state preparation”. *Phys. Rev. A*, **86**, 062331 (Dec 2012). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.062331>.
- [65] B. PEAUDECERF, C. SAYRIN, X. ZHOU, T. RYBARCZYK, S. GLEYZES, I. DOTSENKO, J. M. RAIMOND, M. BRUNE, et S. HAROCHE. “Quantum feedback experiments stabilizing fock states of light in a cavity”. *Phys. Rev. A*, **87**, 042320 (Apr 2013). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042320>.
- [66] C. SAYRIN. *Préparation et stabilisation d’un champ non classique en cavité par rétroaction quantique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2011).
- [67] X. ZHOU. *Champ asservi sur un état de Fock par rétroaction quantique utilisant des corrections à photon unique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2012).
- [68] C. GUERLIN. *Mesure quantique non destructive répétée de la lumière : états de Fock et trajectoires quantiques*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2007).
- [69] J. BERNU. *Mesures QND en électrodynamique quantique en cavité : production et décohérence d’états de Fock - effet Zénon*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2008).
- [70] S. GLEYZES. *Vers la préparation de cohérences quantiques mésoscopiques : réalisation d’un montage à deux cavités supraconductrices*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2006).
- [71] S. DELÉGLISE. *Reconstruction d’états non classiques du champ en électrodynamique quantique en cavité*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2010).
- [72] D. MESCHEDÉ, H. WALTHER, et G. MÜLLER. “One-atom maser”. *Physical Review Letters*, **54**, n° 6, 551 (1985).
- [73] S. BRATTKE, B. T. VARCOE, et H. WALTHER. “Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics”. *Physical Review Letters*, **86**, n° 16, 3534 (2001).
- [74] S. KUHR, S. GLEYZES, C. GUERLIN, J. BERNU, U. B. HOFF, S. DELÉGLISE, S. OSNAGHI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, S. HAROCHE, E. JACQUES, P. BOSLAND, et B. VISENTIN. “Ultrahigh finesse fabry-pérot superconducting resonator”. *Applied Physics Letters*, **90**, 164101 (2007).

- [75] H. KOGELNIK et T. LI. "Laser beams and resonators". *Applied Optics*, **5**, n° 10, 1550 (1966).
- [76] P. BOSLAND, A. ASPART, E. JACQUES, et M. RIBEAUDEAU. "Preparation and rf tests of l-band superconducting niobium-coated copper cavities". *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, **9**, n° 2, 896 (1999).
- [77] J. A. THORNTON. "Magnetron sputtering : basic physics and application to cylindrical magnetrons". *Journal of Vacuum Science & Technology*, **15**, n° 2, 171 (1978).
- [78] J. D. JACKSON. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 3 édition (1999).
- [79] C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPONT-ROC, et G. GRYNBERG. *Photons et atomes - Introduction à l'électrodynamique quantique*. CNRS Editions (2001).
- [80] R. J. GLAUBER. "Coherent and incoherent states of the radiation field". *Physical Review*, **131**, n° 6, 2766 (1963).
- [81] C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPONT-ROC, et G. GRYNBERG. *An introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley (1992).
- [82] G. LINDBLAD. "On the generators of quantum dynamical semigroups". *Communications in Mathematical Physics*, **48**, 119 (1976).
- [83] K. MØLMER, Y. CASTIN, et J. DALIBARD. "Monte carlo wave-function method in quantum optics". *J. Opt. Soc. Am. B*, **10**, n° 3, 524 (Mar 1993).
- [84] T. GALLAGHER. *Rydberg Atoms*. Cambridge Monographs on Atomic, Molecular and Chemical Physics. Cambridge University Press (1994).
- [85] R. G. HULET et D. KLEPPNER. "Rydberg atoms in "circular" states". *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 1430 (Oct 1983). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1430>.
- [86] J. HARE. *Étude théorique et expérimentale des atomes de Rydberg circulaires : vers une mesure directe de la constante de Rydberg en unités de fréquence*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (1991).
- [87] P. NUSSENZVEIG. *Mesures de champ au niveau du photon par interférométrie atomique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (1994).
- [88] M. GROSS et J. LIANG. "Is a circular rydberg atom stable in a vanishing electric field?" *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 3160 (Dec 1986). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.3160>.
- [89] P. NUSSENZVEIG, F. BERNARDOT, M. BRUNE, J. HARE, J.-M. RAIMOND, S. HAROCHE, et W. GAWLIK. "Preparation of high-principal-quantum-number " circular states of rubidium". *Physical Review A*, **48**, n° 5, 3991 (1993).
- [90] T. MEUNIER. *Oscillations de Rabi induites par un renversement du temps : un test de la cohérence d'une superposition quantique mésoscopique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2004).

- [91] M. PINARD, C. G. AMINOFF, et F. LALOË. “Velocity-selective optical pumping and doppler-free spectroscopy”. *Phys. Rev. A*, **19**, 2366 (Jun 1979). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.19.2366>.
- [92] A. AUFFÈVES-GARNIER. *Oscillations de Rabi à la frontière classique-quantique Génération de chats de Schrödinger*. Thèse de doctorat, Université Paris VI (2004).
- [93] M. A. NIELSEN et I. L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press (2000).
- [94] E. M. PURCELL. “Spontaneous emission probabilities at radio frequencies”. *Physical Review*, **69**, 681 (1946).
- [95] J. I. KIM, K. M. FONSECA ROMERO, A. M. HORIGUTI, L. DAVIDOVICH, M. C. NEMES, et A. F. R. DE TOLEDO PIZA. “Classical behavior with small quantum numbers : The physics of Ramsey interferometry of Rydberg atoms”. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4737 (1999). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4737>.
- [96] W. ITANO et N. RAMSEY. “Accurate measurement of time”. *Scientific American*, **269**, n° 1, 56 (1993).
- [97] E. JAYNES et F. CUMMINGS. “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser”. *Proceedings of the IEEE*, **51**, n° 1, 89 (1963).
- [98] M. BRUNE, P. NUSSENZVEIG, F. SCHMIDT-KALER, F. BERNARDOT, A. MAALI, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “From lamb shift to light shifts : Vacuum and sub-photon cavity fields measured by atomic phase sensitive detection”. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 3339 (May 1994). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.3339>.
- [99] K. KRAUS. *States, effects and operations*. Springer, Berlin (1983).
- [100] V. B. BRAGINSKY et F. Y. KHALILI. “Quantum nondemolition measurements : the route from toys to tools”. *Rev. Mod. Phys.*, **68**, 1 (Jan 1996). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.68.1>.
- [101] M. BRUNE, S. HAROCHE, J. M. RAIMOND, L. DAVIDOVICH, et N. ZAGURY. “Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling : Quantum-nondemolition measurements and generation of “schrödinger cat” states”. *Phys. Rev. A*, **45**, 5193 (Apr 1992). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.5193>.
- [102] M. BAYES et M. PRICE. “An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. by the late rev. mr. bayes, f. r. s. communicated by mr. price, in a letter to john canton, a. m. f. r. s.” *Philosophical Transactions*, **53**, 370 (1763). <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/53/370.full.pdf+html>, URL <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/53/370.short>.
- [103] S. HAROCHE. “Mesures quantiques non destructives”. Dans *Cours de Physique Quantique, Collège de France* (2007-2008).

- [104] M. BAUER et D. BERNARD. “Convergence of repeated quantum non demolition measurement and wave-function collapse”. *Physical Review A*, **84** (2011).
- [105] A. I. LVOVSKY. “Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography”. *Journal of Optics B*, **6**, S556 (2004).
- [106] C. SAYRIN, I. DOTSENKO, S. GLEYZES, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Optimal time-resolved photon number distribution reconstruction of a cavity field by maximum likelihood”. *New Journal of Physics*, **14**, n° 11, 115007 (2012). URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/14/i=11/a=115007>.
- [107] G. NOGUES, A. RAUSCHENBEUTEL, S. OSNAGHI, M. BRUNE, J.-M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Seeing a single photon without destroying it”. *Nature*, **400**, 239 (1999).
- [108] S. HAROCHE, M. BRUNE, et J.-M. RAIMOND. “Measuring photon numbers in a cavity by atomic interferometry : optimizing the convergence procedure”. *J. Phys. II France*, **2**, n° 4, 659 (1992).
- [109] S. OSNAGHI, P. BERTET, A. AUFFEVEES, P. MAIOLI, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “Coherent control of an atomic collision in a cavity”. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 037902 (Jun 2001). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.037902>.
- [110] R. JOZSA. “Fidelity for mixed quantum states”. *Journal of Modern Optics*, **41**, 2315 (1994).
- [111] P. ROUCHON. “Fidelity is a sub-martingale for discrete-time quantum filters”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **56**, 2743 (2011). URL <http://arxiv.org/abs/1005.3119>.
- [112] M. TSANG. “Time-symmetric quantum theory of smoothing”. *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 250403 (Jun 2009). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.250403>.
- [113] S. GAMMELMARK, B. JULSGAARD, et K. MØLMER. “Past quantum states”. *Arxiv* (2013). URL <http://arxiv.org/abs/1305.0681>.
- [114] R. BLUME-KOHOUT. “Optimal, reliable estimation of quantum states”. *New Journal of Physics*, **12**, n° 4, 043034 (2010). URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=4/a=043034>.
- [115] F. HUSZÁR et N. M. T. HOULSBY. “Adaptive bayesian quantum tomography”. *Phys. Rev. A*, **85**, 052120 (May 2012). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.052120>.
- [116] D. H. MAHLER, L. A. ROZEMA, A. DARABI, C. FERRIE, R. BLUME-KOHOUT, et A. M. STEINBERG. “Adaptive quantum state tomography improves accuracy quadratically”. *Arxiv* (2013). URL [arXiv:1303.0436](https://arxiv.org/abs/1303.0436).
- [117] P. MILMAN, A. AUFFEVEES, F. YAMAGUCHI, M. BRUNE, J. M. RAIMOND, et S. HAROCHE. “A proposal to test bell’s inequalities with mesoscopic non-local states in

- cavity qed”. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, **32**, n° 2, 233 (2005). URL <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2004-00171-6>.
- [118] M. BAUER, T. BENOIST, et D. BERNARD. “Repeated quantum non-demolition measurements : Convergence and continuous time limit”. *Annales Henri Poincaré*, p. 1–41 (2013).



# Mesure adaptative non destructive du nombre de photons dans une cavité

**Résumé** Une mesure adaptative vise à optimiser l'acquisition d'information sur un système à l'aide d'une boucle de rétroaction sur l'appareil de mesure. Dans notre dispositif d'électrodynamique en cavité, nous avons réalisé une mesure adaptative sur un système quantique, le champ micro-onde piégé dans une cavité supraconductrice de très grande finesse. Des atomes de Rydberg circulaires, interagissant dispersivement avec le champ, réalisent une série de mesures dites «faibles», aboutissant à la mesure quantique non destructive du nombre de photons dans le mode. La prise en compte des résultats des mesures successives, de l'action en retour sur le système, et de l'ensemble des imperfections expérimentales, permet à un ordinateur de contrôle d'effectuer une estimation en temps réel de l'état du champ. La phase de l'interféromètre de Ramsey qui définit la mesure réalisée sur les atomes est alors optimisée afin d'extraire un maximum d'information des détections ultérieures. Nous montrons que préparation d'états de Fock est nettement accélérée avec la méthode adaptative, par rapport à un protocole passif utilisant une alternance prédéfinie des phases de mesure. Cette réduction du temps de mesure est d'un grand intérêt en présence de décohérence, et pourrait par exemple être exploitée dans des protocoles de rétroaction quantique existants, où la rapidité de l'estimation d'état est cruciale.

**Mots-clés** CQED, mesure adaptative, mesure quantique non destructive, atomes de Rydberg, états de Fock, décohérence.

## Adaptive non destructive measurement of the photon number in a cavity

**Abstract** An adaptive measurement aims at optimizing the acquisition of information on a system, with the help of a feedback loop on the measuring apparatus. In our cavity quantum electrodynamics setup we have achieved an adaptive measurement of a quantum system, the microwave field trapped in a high finesse superconducting cavity. Circular Rydberg atoms interact dispersively with the field and achieve a quantum nondemolition measurement of the photon number by a succession of «weak» measurements. Taking into account all measurement outcomes, the measurement back-action and all experimental imperfections, a control computer estimates the field state in real-time. The phase of the Ramsey interferometer defining the atomic measurement is then optimized so that the following detections bring maximal information. We demonstrate that the preparation of Fock states is clearly accelerated using an adaptive technique, compared to a passive protocol where the choice of measurement phase is predefined. Such an adaptive measurement is of great interest in presence of decoherence, and could be used for example in quantum feedback protocols where the speed of state estimation is crucial.

**Keywords** CQED, adaptive measurement, quantum non demolition measurement, Rydberg atoms, Fock states, decoherence.