

Modélisation de la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau et contrôle optimal de l'irrigation

Zhongping Li

▶ **To cite this version:**

Zhongping Li. Modélisation de la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau et contrôle optimal de l'irrigation. Autre. Ecole Centrale Paris, 2013. Français. NNT : 2013ECAP0003 . tel-00909261

HAL Id: tel-00909261

https://theses.hal.science/tel-00909261

Submitted on 26 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES « ÉCOLE CENTRALE PARIS »

Thèse

présentée par Zhongping LI
pour l'obtention du GRADE DE DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques Appliquées
Laboratoire d'accueil : Mathématiques Appliquées aux Systèmes (MAS)

Modélisation de la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau et contrôle optimal de l'irrigation

Soutenue le 14/01/2013
Devant un jury composé de :

M. Baogang HU	(Rapporteur)
M. Philippe DE REFFYE	(Rapporteur)
Mme. Véronique LETORT-LE CHEVALIER	
M. Paul-Henry COURNÈDE	(Directeur)
M. Jean-Claude MAILHOL	(Co-directeur)

N° ordre : 2013 ECAP 0003

Modélisation de la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau et contrôle optimal de l'irrigation

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet Digiplante au laboratoire MAS de l'École Centrale Paris, en collaboration avec l'unité de recherche G-eau au sein de l'IRSTEA. Dans un contexte de raréfaction de la ressource en eau, il est important de mieux valoriser l'usage de l'eau dans la production agricole. Pour la conception d'outils d'aide à la décision pour les agriculteurs ou les gestionnaires agricoles, il est nécessaire de développer une démarche quantitative permettant de décrire l'interaction de la ressource en eau avec la production végétale. Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse multidisciplinaire est de proposer une méthodologie basée sur la modélisation de l'interaction plante-sol-atmosphère par couplage de modèles et sur le contrôle optimal pour gérer les stratégies d'irrigation.

La première contribution de cette thèse consiste en le développement et l'étude de modèles couplés plante-sol, à différentes échelles. A titre de comparaison avec le modèle Pilote qui simule le rendement en se basant sur l'indice de récolte et la description empirique de l'indice foliaire LAI, on a proposé deux autres niveaux de modélisation pour la partie plante, ainsi que leur couplages avec le module sol de Pilote. D'une part, on a introduit un modèle par compartiments qui permet à la fois une gestion plus fine de l'allocation et une meilleure adaptation aux données expérimentales. D'autre part, le couplage a aussi été effectué avec le modèle GreenLab qui décrit la croissance architecturale de la plante. Ceci a nécessité le développement d'une version continue de GreenLab qui facilite en particulier l'intégration de l'effet du stress hydrique. Un jeu de données expérimentales a permis la paramétrisation de ces modèles, sous différents régimes d'irrigation et donc différents niveaux de stress hydrique.

La deuxième contribution majeure a été le développement d'un cadre méthodologique pour le contrôle optimal des apports d'eau, dans le cas déterministe et le cas stochastique. La résolution proposée est basée sur la programmation dynamique qui permet de traiter différentes formulations du critère à optimiser, sans contraintes ou avec contraintes (par exemple logistiques ou réglementaires, comme les quotas d'irrigation). Une version itérative de l'algorithme a également été proposée afin d'améliorer la performance de la résolution numérique, mais également afin de pouvoir gérer les systèmes dynamiques à retards (qui peuvent apparaître pour certaines formulations du processus de sénescence dans les modèles de croissance).

Notre méthodologie générique a pu être appliquée pour des problématiques concrètes, et permet d'envisager l'élaboration d'outils d'aide à la décision en agriculture afin de gérer les ressources en eau de façon plus efficace.

Mots-clés : Interaction plante-sol, stress hydrique, Greenlab, Pilote, stratégie d'irrigation, programmation dynamique

Modeling of plant growth interacting with water resources and optimal control of irrigation scheduling

This thesis is part of the project Digiplante in the MAS laboratory of Ecole Centrale Paris, in collaboration with the research unit G-water in the IRSTEA. In a context of scarcity of water resources, it is important to better promote the use of water in agricultural production. When designing decision support tools for farmers or farm managers, it is necessary to develop a quantitative approach to describe the interaction of water resources with crop production. In this context, the objective of this thesis is to propose a multidisciplinary methodology based on modeling the soil-plant-atmosphere interaction with coupled models and on the strategy optimization for managing irrigation.

The first contribution of this thesis is the development and study of plant-soil coupled models at different scales. In comparison with the Pilote model that simulates the crop yield based on the harvest index and the empirical description of the leaf area index LAI, we proposed two other levels of modeling for the plant part and their coupling with the soil module of Pilote. On the one hand, we have introduced a compartment model which allows both a finer management of the allocation and better adaptation to the experimental data. On the other hand, the coupling was also carried out with the GreenLab model which describes the architectural growth of the plant. This has necessitated the development of a continuous version of GreenLab which facilitates in particular the integration of the effect of water stress. A set of experimental data has allowed the parametrization of these models under different irrigation regimes and thus different levels of water stress.

The second major contribution was the development of a methodological framework for the optimal control of water supplies in both deterministic and stochastic case. The proposed resolution is based on dynamic programming that can handle different optimization criterion either without or under constraints (for example regulatory or logistical constraints, such as irrigation quotas). An iterative version of the dynamic programming algorithm has also been proposed to improve the performance of the numerical solution, but also in order to deal with dynamical systems with delay (which can occur in some formulations of senescence in growth models).

Our generic methodology could be applied to concrete problems, and allows the development of decision support tools in agriculture for a more efficient water resources management.

Keywords: Plant-soil interaction, water stress, Greenlab, Pilote, irrigation strategy, dynamic programming

Remerciements

C'est avec plaisir que j'exprime ici ma gratitude envers tous ceux qui ont permis l'aboutissement de cette thèse.

Je remercie le laboratoire MAS de l'École Centrale Paris qui m'a accueilli pendants ces années, ainsi que l'Irstea (ex Cemagref) Montpellier qui a financé en partie cette thèse.

Je remercie mes directeurs de thèse Paul-Henry Cournède et Jean-Claude Mailhol pour leur encadrement, que ce soit au niveau de grandes lignes directrices ou de nombreux points sur lesquels leur avis m'ont éclairée et inspirée. Je leur remercie également pour leur patience et encouragement.

Je remercie Baogang Hu et Philippe De Reffye d'avoir accepté d'être mes rapporteurs, et d'avoir approuvé mon travail avec beaucoup d'intérêt.

Je remercie Véronique Letort-Le Chevalier en tant que membre de jury, d'avoir examiné mon manuscrit avec minutie, et d'avoir fait beaucoup de remarques intéressantes.

Je remercie Jean-Claude Mailhol ainsi que ses collègues de l'Irstea, Feng Lu et Hervé Rey du Cirad, Sébastien Lemaire de l'ITB qui m'ont aidée pour les mesures de maïs à Lavalette en 2009 et en 2011.

Je remercie celles qui m'ont aidée pour les démarches administratives en me témoignant beaucoup de gentillesse, je pense notamment à Sylvie, Annie, Christine et Catherine.

Je remercie tous les membres de l'équipe Digiplante, les membres actuels comme les anciens, pour toutes ces heures qu'on a passé ensemble dans le bureau le plus verdoyant des doctorants, et bien d'autres occasions où on s'est retrouvé toujours avec beaucoup de bonheur.

Enfin, je remercie tous mes proches d'avoir cru en moi et de m'avoir soutenue.

Un grand merci à tous.

Even if I knew that tomorrow the world would go to pieces, I would still plant my apple tree.

Martin Luther King

Go down deep enough into anything and you will find mathematics.

Dean Schlicter

L'eau tu es la plus grande richesse qui soit au monde et tu es la plus délicate, toi si pure au ventre de la terre. Ce qu'ils (les hommes) cherchent pourrait être trouvé dans une seule rose ou un peu d'eau.

Antoine de Saint-Exupéry (Le Petit Prince)

Table des matières

1 Introduction **11**

1.1 Contexte et enjeux . . . 11

1.2 Analyse de l'existant et problématiques soulevées . . . 12

1.2.1 Problématiques liées à la modélisation . . . 12

1.2.1.1 Les modèles de croissance de plantes . . . 12

1.2.1.2 Modélisation de l'effet de l'irrigation sur le rendement 14

1.2.1.3 Le rôle de l'évapotranspiration et les modèles de bilan hydriques . . . 15

1.2.1.4 Couplage de modèles. . . . 16

1.2.1.5 Robustesse et complexité. . . . 17

1.2.1.6 Echelle du temps. . . . 17

1.2.2 Problématiques liées au problème d'optimisation . . . 17

1.2.2.1 Choix du critère à optimiser et des contraintes . . . 17

1.2.2.2 Diverses méthodes d'optimisation pour l'irrigation . . . 19

1.3 Notre approche . . . 20

2 Modélisation continue de la croissance des plantes **25**

2.1 GreenLab continu . . . 25

2.1.1 De discret à continu . . . 25

2.1.2 Description du modèle continu . . . 26

2.1.2.1 Organogenèse . . . 28

2.1.2.2 Demande et allocation . . . 28

2.1.2.3 Phase initiale . . . 29

2.1.2.4 Production . . . 29

2.1.2.5 Sénescence . . . 30

2.1.2.6 Indice foliaire . . . 31

2.2 Étude numérique . . . 32

2.2.1 Les équations différentielles à retard . . . 32

2.2.2 Schéma de résolution pour GL continu . . . 33

2.2.2.1 le système à retard de GreenLab continu . . . 33

2.2.2.2 Intervalles de temps . . . 34

2.2.2.3 Résolution de EDD sur chaque intervalle . . . 35

2.2.3 Modèle journalier . . . 36

2.2.4 Cas test sur betterave . . . 37
2.2.5 Analyse numérique . . . 39

3 Modélisation de la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau 45
3.1 Transfert hydrique sol-plante-atmosphère . . . 45
3.2 Développement de la plante et stress hydrique . . . 47
3.3 Module sol . . . 47
3.3.1 Les réservoirs . . . 47
3.3.2 Evapotranspiration . . . 51
3.3.3 Répartition d'évapotranspiration . . . 51
3.4 Module plante . . . 54
3.4.1 Le sous-modèle de Pilote . . . 55
3.4.2 Un modèle par compartiment . . . 62
3.4.2.1 Les trois compartiments . . . 63
3.4.2.2 Production . . . 63
3.4.2.3 Allocation . . . 64
3.4.2.4 Sénescence . . . 67
3.4.3 Le modèle GreenLab . . . 68
3.5 Les modèles plante-sol . . . 68
3.5.1 Pilote . . . 69
3.5.2 GreenLab-Pilote . . . 69
3.5.2.1 Résolution numérique . . . 72
3.5.2.2 Simulation . . . 72
3.5.3 Modèle compartiment-Pilote . . . 74

4 Contribution à l'optimisation des stratégies d'irrigation 81
4.1 Irrigation . . . 81
4.1.1 Contexte et objectif . . . 81
4.1.2 Contraintes . . . 82
4.2 Optimisation déterministe . . . 83
4.2.1 Fonction objectif . . . 84
4.2.2 Programmation dynamique . . . 85
4.2.2.1 L'équation de la programmation dynamique . . . 85
4.2.2.2 Les problématiques de l'implémentation . . . 86
4.2.2.3 Le calcul préalable . . . 87
4.2.2.4 Deux algorithmes pour le cœur du calcul . . . 88
4.2.2.5 Génération et Adaptation de maillage . . . 90
4.2.2.6 Convergence des solutions . . . 91
4.2.3 Programmation dynamique itérative . . . 93
4.2.3.1 Première itération et Programmation dynamique . . . 94
4.2.3.2 Itérations avec réduction de domaine systématique . . . 95
4.2.4 Cas d'optimisation sous contraintes . . . 96

4.3 Optimisation stochastique 100
4.3.1 le modèle WGEN 101
4.3.1.1 Précipitation 101
4.3.1.2 Températures et Radiation solaire 102
4.3.2 Programmation dynamique stochastique 103
4.3.3 Optimisation adaptative 105

5 Conclusion et perspectives **107**
5.1 Contributions 107
5.2 Discussion et perspectives 109
5.2.1 Pour la modélisation de l'interaction plante-ressource en eau . . 109
5.2.1.1 Estimation des paramètres 109
5.2.1.2 D'autres impacts du stress hydrique de la croissance de plante 109
5.2.1.3 Prise en compte de la variabilité environnementale . . 110
5.2.2 Pour l'optimisation des stratégies d'irrigation 110
5.2.2.1 Alternatives d'objectif et de contrainte 110
5.2.2.2 Amélioration de la performance des algorithmes de programmation dynamique 110
5.2.2.3 Choix du générateur climatique 110
5.2.2.4 Analyse de risques pour les stratégies d'irrigation . . . 111

Liste des figures **113**

Bibliographie **115**

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et enjeux

Les plantes jouent un rôle indispensable à la survie de l'être humain et l'équilibre de notre écosystème. Depuis les débuts de l'agriculture, l'homme cultive certaines variétés de plantes pour subvenir à ses besoins, en particulier pour se nourrir, se vêtir, se chauffer, ou, plus récemment, produire des biocarburants ou extraire des molécules d'intérêt thérapeutique. Bien souvent, pour le bon déroulement de leur développement, ces plantes nécessitent au cours de leur cycle de croissance des quantités d'eau que les seules précipitations ne peuvent satisfaire. Ainsi, pour remédier à cette lacune, l'irrigation a toujours joué un rôle primordial dans l'agriculture. Néanmoins, les ressources en eau sont de plus en plus précieuses dans bien des endroits du monde, et l'agriculture représente aujourd'hui 70% de la consommation d'eau dans le monde via l'irrigation, loin devant l'industriel (20%) et les usages domestiques (10%). Ainsi, une meilleure utilisation en agriculture des ressources en eau devient une nécessité.

L'agriculture est non seulement la principale consommatrice d'eau, en volume, dans le monde, mais elle en fait aussi un usage relativement peu valorisant, peu efficace et de surcroît fortement subventionné. En effet, une fois achevés, les projets d'irrigation comptent parmi les activités économiques les plus lourdement subventionnées au monde (Repetto [1986]). Malgré des investissements et des subventions considérables, les indicateurs de résultats concernant l'irrigation sont très en deçà de ce que l'on pourrait attendre en matière d'accroissement des rendements, de superficies irriguées et d'efficacité technique d'utilisation de l'eau (Smith et al. [1991]).

Globalement, on attend de l'agriculture irriguée qu'elle produise dans l'avenir beaucoup plus qu'actuellement, en utilisant toujours moins d'eau, ce qui peut paraître paradoxal. Pour s'attaquer à ce défi, il est nécessaire de mettre en place des démarches visant à optimiser la performance de l'irrigation, ce qui peut passer par l'introduction de matériel plus performant, de nouvelles technologies, ou la mise en place de nouvelles organisations. Notre démarche s'inscrit dans le dernier cas.

Pour ces raisons, l'optimisation des stratégies d'irrigation constitue un enjeu important en agronomie, que les approches basées sur la modélisation pourraient permettre de traiter.

1.2 Analyse de l'existant et problématiques soulevées

Dans ce cadre, la recherche des stratégies optimales d'irrigation est un problème multidisciplinaire: en effet, cette approche repose sur la combinaison d'un cadre de modélisation et de méthodes mathématiques pour l'optimisation. Il s'agit en effet d'une part d'être capable de modéliser la croissance d'une culture en prenant en compte la ressource en eau, et d'autre part d'identifier une ou la stratégie optimale de gestion de cette ressource. La définition, le développement et la mise en œuvre pratique de solutions adéquates pour chacun de ces deux grands axes, et leur combinaison, constitue l'objectif principal de cette thèse.

Nous allons tout d'abord présenter les approches existantes pour ces deux grands axes et préciser les différentes problématiques soulevées.

1.2.1 Problématiques liées à la modélisation

Parmi les modèles qui simulent les système de culture en intégrant les fonctionnalités par rapport aux diverses gestions agricoles dont celle d'irrigation, on peut citer Stockle et al. [1994], Keating et al. [2003].

Ici, on s'intéresse uniquement à la gestion des ressources en eau pour l'irrigation, la phase de modélisation consiste donc à décrire le système dynamique plante-ressources en eau. Dans la modélisation d'un tel système, on peut naturellement décomposer ce dernier en un module plante qui donnera la récolte finale et un module sol qui fournit l'information sur l'état hydrique du système dans lequel la plante puise la ressource nécessaire à sa croissance. Pour ce faire, on peut procéder au couplage de deux modèles dont l'un modélise la croissance des plantes et l'autre l'évolution du bilan hydrique du sol.

1.2.1.1 Les modèles de croissance de plantes

En agriculture et en botanique, de nombreuses études sont consacrées à la modélisation de la croissance des cultures en relation avec les conditions environnementales. Les performances croissantes des ordinateurs modernes permettent le développement de modèles permettant de reproduire sous forme virtuelle la croissance de la plante en prenant en compte un grand nombre de différents facteurs et processus interagissants entre eux. Parmi les différentes approches de modélisation de la croissance des plantes,

les modèles qu'on explore dans cette thèse font partie des modèles dits PBM (process-based) et des modèles dits FSPM (functional-structural plant model). Les PBMs ont été les premiers modèles conçus pour simuler les processus physiologiques de sorte à pouvoir faire le bilan du métabolisme de la croissance des plantes en terme de biomasse par surface unitaire au champ. Dans la plupart des PBMs, le taux de croissance des plantes est calculé en fonction de la radiation interceptée; puis des règles sont définies pour la répartition incrémentale de cette croissance sur les différents compartiments végétaux, en fonction des différents facteurs qui régulent la croissance (e.g. la température, les substances nutritives, l'eau, la concentration ambiante de CO_2 (Bouman et al. [1996], Marcelis et al. [1998], Van Ittersum et al. [2003].

Les FSPMs ont été développés à partir des années 60 (Lindenmayer [1968a], Lindenmayer [1968b], Honda [1971], Borchert and Honda [1984], Kurth [1994]). Ces modèles décrivent explicitement le développement au cours du temps de l'architecture et la mise des différents organes constitutifs des plantes, en interaction avec les processus physiologiques(Prusinkiewicz and Lindenmayer [1990], Sievänen et al. [2000], Godin and Sinoquet [2005], Hanan and Prusinkiewicz [2008]).

Les FSPM considèrent que la régulation de la croissance des plantes régie par les facteurs environnementaux passe non seulement par leur fonctions physiologiques (par exemple photosynthèse, transpiration, allocation de l'azote), mais aussi par leur structures (avortement ou débourrement des bourgeon, durée de survie des organes ou des branches, la forme et l'orientation des organes). De plus, ces adaptations structurales modifient à leur tour les conditions (par exemple l'interception lumineuse) influant sur les fonctions physiologiques. Ainsi, ce type de modèles permet de modéliser ces rétro-actions complexes entre le développement structural et la physiologie de la plante. De plus, ces rétro-actions peuvent être traitées soit au niveau local des organes individuels soit au niveau de la plante en tant qu'entité.

Chacune de ces deux familles de modèles permet d'aborder différents types d'objectifs. Les PBMs classiques simulent la croissance des cultures à l'échelle de l'unité de surface, tandis que les FSPMs ont pour unité de base de modélisation les organes et simulent la croissance de plantes individuelles. Les FSPMs peuvent permettre également de modéliser la compétition entre différentes plantes voisines. Feng [2011] propose une possibilité de modélisation qui illustre cet avantage.

Comme ils n'intègrent pas de représentation de l'architecture des plantes, les PBMs contiennent généralement moins de paramètres, ils nécessitent donc moins de données pour la calibration. Ainsi, la robustesse des PBMs leur garantit a priori une meilleure capacité prédictive, en particulier Baey et al. [2012] donne un aperçu sur ce point en comparant différents modèles FSPMs et PBMs.

Dans les deux cas, il s'agit de modèles dynamiques pouvant s'écrire sous une forme générique exprimant l'état du système au temps $t + \Delta t$ à partir de l'état du système au temps t et du taux de croissance de la plante durant le pas de temps Δt.

Ainsi, lorsqu'on construit un modèle de plante-sol en couplant un modèle de plante avec un modèle de sol, on est amené à choisir un modèle de plante donc a fortiori la famille de modèles à laquelle il appartient.

D'un point de vue théorique, il est intéressant d'intégrer un modèle FSPM dans le système sol-plante-atmosphère pour élucider l'impact du stress hydrique sur le développement structural de la plante et plus particulièrement sur certains organes comme les fruits. Sur cet aspect là on peut parier qu'un FSPM peut se révéler plus performant qu'un PBM concernant la prédiction de l'indice de récolte, maillon faible des PBMs. Ce choix pourrait aussi être plus adapté à certains objectifs spécifiques comme l'étude de la compétition entre les plantes individuelles. Cela contribuerait certainement à apporter un peu plus de fonctionnalité dans les PBMs concernant les relations entre densités et indices foliaires (LAI) maximaux (Mailhol et al. [2011]).

Cependant, si l'étude a traité l'effet global du stress à l'échelle du champ de culture, un PBM pourra fournir suffisamment d'information sur le développement de la culture en place par le biais de son LAI moyen par exemple. Pour calibrer et valider un modèle de sol-plante-atmosphère modélisant l'impact du stress hydrique, il est préférable de disposer des données relatives à plusieurs traitements d'irrigations. Étant donnée la lourdeur relative au calage et la validation d'un FSPM liée à son grand nombre de paramètres (Cournède et al. [2011]), pour un objectif bien défini (rendement et LAI par exemple), il apparaît plus réaliste de valider un FSPM à partir d'un PBM lorsque ce dernier s'est montré performant sur les différents traitements.

1.2.1.2 Modélisation de l'effet de l'irrigation sur le rendement

Modélisation basée sur l'indice de récolte et ses limitations.

Dans de nombreuses études consacrées à la modélisation des impacts de l'irrigation sur le rendement, on est amené à exprimer l'effet du stress hydrique sur le rendement en grain (ou fruit). Dans la plupart des PBMs on utilise pour cela l'indice de récolte (Hay [2008], Passioura [1977], Zhang et al. [2008]). En effet, une fois calculée la matière sèche totale (MST) de la plante, le rendement en grain (ou fruit) se déduit alors directement par l'indice de récolte. Contrairement à un FPSM il n'y a pas de fonction d'allocation complexe dans un PBM. Pour une variété donnée, l'indice de récolte potentiel est une référence qu'on peut trouver dans la littérature ou mesurer sur un traitement sans stress (Mailhol et al. [1997a], Khaledian et al. [2009b]). On peut introduire un peu de fonctionnalité dans le PBM en réduisant l'indice de récolte en fonction du niveau de stress subi par la plante tout au long de sa croissance dans le cas d'un traitement stressé(Khaledian et al. [2009b], Passioura [1977]). Il s'agit cependant d'approches empiriques qui répercutent l'effet du stress hydrique au moment de la maturité physiologique calculée sur la base d'un cumul thermique.

Ainsi, ces approches représentent évidemment le défaut de ne pas pouvoir prendre en compte la différence de sensibilité au stress hydrique sur les différents stades du

développement de la plante. Il apparaît dans ce cas difficile de bien cibler les apports d'eau en vue d'optimiser le rendement. Cette différence de sensibilité peut être plus ou moins importante en fonction de la variété. Certaines grandes cultures comme le maïs, sorgho, tournesol ou soja ont une sensibilité qui peut varier tout au long de la période de croissance, jalonnée de stades plus ou moins sensibles. Ainsi, plusieurs études ont été consacrées à la modélisation de croissance de la plante en fonction de conditions hydriques sur les différents stades de la croissance de culture (Çakir [2004], Sionit and Kramer [1977], Doss et al. [1974], Nielsen and Nelson [1998], Siddique et al. [2000], Gupta et al. [2008]). Cette prise en compte de la sensibilité sera discutée par la suite dans nos différentes étapes de modélisation.

Modélisation basée sur WUE et ses limitations.

Une autre alternative pour modéliser l'impact du stress hydrique sur la croissance des plantes consiste à simuler la production végétale en utilisant un coefficient appelé Water Use Efficiency (WUE). Il s'agit un indice empirique qui correspond au rapport entre le rendement d'une culture en matière sèche totale et la quantité d'eau évapotranspirée. Cette approche de modélisation nécessite évidemment l'estimation de l'évapotranspiration.

Selon le type de modèle et l'échelle de temps choisie, WUE peut être représentée soit comme un coefficient global sur le cycle de croissance entier, soit comme un coefficient qui dépend du pas de temps en question. Dans le premier cas, le problème d'intégrer a posteriori (une fois la croissance terminée) l'effet du stress hydrique se pose comme dans le cas de l'indice de récolte. Dans le second cas, WUE est un coefficient dynamique. Compte tenu de la variation de cette efficience, il semble plus adéquat de le faire varier selon la phase de croissance, mais dans ce cas la calibration de ses valeurs serait extrêmement difficile (Mastrorilli et al. [1999]).

1.2.1.3 Le rôle de l'évapotranspiration et les modèles de bilan hydriques

Les limitations des approches présentées ci-dessus suggèrent que la modélisation de l'impact du stress hydrique doit s'inscrire dans une démarche de compréhension des mécanismes de croissance des plantes et de leurs interactions avec l'environnement. Nous avons vu dans le paragraphe 1.2.1.1 que l'on peut classer les modèles de croissance de plantes selon leur type (PBM, FSPM). Pour chacune de ces grandes familles, on peut également distinguer les études dont le principal objectif est la représentation de la croissance et/ou du développement de la plante en tant que système (par exemple Sievänen et al. [2008], Prusinkiewicz [2004], Godin and Sinoquet [2005], de Reffye et al. [2008], Stöckle et al. [2003]) de celles qui mettent l'accent sur la modélisation de l'interaction entre la plante et son environnement, comme par exemple WAN and Smith [2004], Roose and Schnepf [2008], Thornley et al. [1990].

L'un des processus-clés à intégrer dans un modèle qui étudie l'impact du stress hydrique sur la croissance des plantes est l'évapotranspiration (Thornthwaite [1948]). Elle est définie comme le résultat de deux phénomènes: les cultures consomment de l'eau via le processus de transpiration, et l'eau s'évapore également depuis le sol. Seule la proportion transpirée de l'évapotranspiration a une influence directe sur la production (de Wit et al. [1958]). Bien que l'évaporation du sol puisse être diminuée, il est en pratique impossible de l'éliminer totalement, même avec des dispositifs coûteux tels que la mise en place d'un mulch (Klocke et al. [1985]). Même la mise en place d'un dispositif d'irrigation enterré ne l'élimine pas totalement car des irrigations de levées par aspersion sont souvent nécessaires (Khaledian et al. [2009a]).

Pour optimiser l'utilisation d'eau en agriculture, il est donc crucial d'élucider la relation entre la production et l'évapotranspiration, et par extension la relation entre la production et l'eau d'irrigation appliquée. Une vaste littérature est consacrée à ce sujet (Howell and Musick [1984], HOWELL [1990], Doorenbos and Kassam [1979],

La quantité d'eau évapotranspirée par le système sol-plante-atmosphère en provenance du sol (souvent assimilé à un réservoir) peut s'obtenir par modélisation du bilan hydrique. La modélisation du bilan hydrique selon des approches plus ou moins sophistiquées a été étudié par Ritchie [1985], Ritchie [1998] et Hillel et al. [1971] entre autres.

1.2.1.4 Couplage de modèles.

D'une manière générale, lorsqu'on cherche à obtenir un modèle intégré par couplage de différents modèles représentant chacun une partie du système intégral, on considère que ces différents sous-modèles fonctionnent indépendamment et ne sont pas initialement prévus pour communiquer de l'information avec l'extérieur. Il est donc important, lorsqu'on couple des modèles, d'identifier dans chacun de ces modèles quels sont les éléments et comment les faire communiquer avec les autres modèles.

Le système dynamique du bilan d'eau dans le sol et celui relatif à la plante doivent également avoir des interactions entre eux, c'est-à-dire que le développement de la culture dans le temps doit avoir une possible rétro-action sur le taux réel de l'eau utilisée sur la production.

Contrairement aux modèles statiques, comme ceux qui utilisent l'indice de récolte, qui intègrent le stress hydrique comme un effet global au stade final de la croissance de la plante, on cherche à modéliser, dans un modèle dynamique, l'effet instantané (à la résolution du pas du temps) du stress sur le développement végétal, de façon à modéliser la façon dont la plante peut s'adapter au stress hydrique au cours du temps.

1.2.1.5 Robustesse et complexité.

En règle générale, on voudrait avoir des modèles de bilan hydrique du sol et des modèles de croissance de plante les plus simples possibles, dans le but d'avoir le plus faible nombre de paramètres à caler.

Une fois les modèles calés et validés, il est alors pratique de mener des tests numériques sur l'ordinateur. Ainsi, les effets des différentes stratégies d'irrigation sur la récolte peuvent être évalués rapidement.

1.2.1.6 Echelle du temps.

La modélisation du système sol-plante-atmosphère en fonction de la régime d'irrigation peut être réduite à la considération "Comment peut-on quantifier les effets des changements dans la gestion de l'eau sur la croissance des cultures et la récolte?" Cette problématique est directement liée à la question de l'échelle de temps. Cherchons-nous à connaître l'effet sur une saison de croissance complète, un mois, une semaine ou juste un jour? En réalité, cette échelle de temps va déterminer l'approche de modélisation. Dans cette thèse, on s'attachera à optimiser l'effet final en terme de profit ou de rendement résultant d'une stratégie d'irrigation, en modélisant l'impact du stress hydrique de façon dynamique (continue) au pas de temps qui pourra varier selon le besoin, qu'on illustrera par le modèle journalier.

1.2.2 Problématiques liées au problème d'optimisation

Souvent en pratique, dans beaucoup de modèles heuristiques, la gestion de l'irrigation est basée sur un suivi régulier de l'état hydrique du sol. Les méthodes mises en œuvre consistent à simuler ou mesurer la teneur en eau du sol et à se donner des valeurs seuils de cette variable, ainsi que des dosages d'irrigation à appliquer lorsque la teneur en eau du sol est en dessous de ce seuil (Campbell and Campbell [1982], Martin et al. [1990]).

Il est certes possible d'optimiser l'allocation d'eau en comparant les performances des différents régimes d'irrigation combinant différents choix de valeurs de seuil et de doses (Fares and Alva [2000], Rao et al. [1988]). Cependant cette approche demeure empirique et ne permet pas d'élucider la relation entre l'impact d'une stratégie d'irrigation et le niveau de production, elle manque donc de généricité.

1.2.2.1 Choix du critère à optimiser et des contraintes

La première question à résoudre est la formulation rigoureuse du problème. On doit préciser l'objectif à optimiser, et les éventuelles contraintes qu'on doit prendre en compte.

Pour quantifier l'efficacité de l'utilisation de l'eau en agriculture. Il est commun d'utiliser le concept de WUE, qui est défini comme le ratio de matière sèche récoltée sur l'évapotranspiration (Viets [1962], Sinclair et al. [1984]). Néanmoins, chercher à augmenter WUE relève du registre de l'optimisation des autres critères influents cités précédemment, comme la variété et le génotype de la culture. De plus, des résultats de recherche ont démontré que dans certaines conditions comprenant notamment des conditions où l'eau pour l'irrigation est limitée, la réalisation d'une WUE élevée peut conduire à une récolte relativement réduite et une résistance réduite de la culture face au stress hydrique (Ferrio et al. [2003], Solomon and Labuschagne [2003], Myers et al. [1984], Summerfield et al. [1999], Ismail et al. [1994], Blum [2009]).

Ainsi, au lieu d'optimiser WUE, on vise dans notre approche à maximiser le profit d'agriculteur, qui prendra en compte non seulement la quantité de matière sèche récoltée et d'irrigation utilisée, mais aussi les prix unitaires de ces deux quantités dernières. Ce choix intègre donc une dimension économique dans l'objectif d'optimisation. On illustra également notre approche de contrôle optimal pour optimiser le rendement avec certaines contraintes. A noter qu'une optimisation uniquement fondée sur la productivité de l'eau d'irrigation (IWP) pourrait conduire à la même stratégie, IWP étant définie comme le ratio de l'écart de rendement entre l'irrigué et le pluvial au volume d'eau apporté (m3/ha) (Khaledian et al., Playán and Mateos [2006]).

Le développement et la production végétative d'une plante étant limités par sa variété, chaque plante possède un niveau de besoin en eau qui garantit son développement optimal, ce niveau est a priori fixé à chaque pas de temps. Pour un pas de temps donné, lorsque ce niveau est atteint, le système plante-sol évapotranspire à son taux maximal. En effet, le besoin en eau des plantes est conditionné par de nombreux processus physiologiques, il est donc important de comprendre ces processus, et de pouvoir calculer dans un premier temps la quantité d'eau apportée à la plante à chaque pas de temps pour que la plante se développe de façon optimale.

Cependant, les ressources en eau sont souvent limitées et coûteuses. Aussi, chercher à optimiser le profit de l'agriculteur sans tenir compte de la contrainte hydrique ne va permettre d'identifier qu'une stratégie d'irrigation visant à obtenir le rendement maximal. On recherche donc plutôt à avoir le meilleur compromis possible entre l'économie de l'eau d'irrigation et la maximisation du rendement de sorte à satisfaire (ou maximiser) le profit de l'agriculteur. Il importe donc de prendre en compte les contraintes imposées par la ressource : son coût et sa disponibilité. On retrouve cette optique de maximisation du profit sous contrainte dans de nombreuses études comme ELMAHDI et al. [2005], Chaves-Morales [1985], Bontemps and Couture [2002], Montazar and Rahimikob [2008], et English [2002].

Ainsi, parmi les nombreuses problématiques concernant l'optimisation de la gestion des ressources en eau pour l'irrigation, on focalisera sur un point crucial qui consiste à planifier de façon optimale (dans un sens à préciser) de la quantité d'eau à apporter

à une culture (sur une surface donnée) sur chaque intervalle de temps, et en prenant en compte les différentes contraintes (techniques, logistiques, règlementaires...).

D'un point de vue global, la pratique d'irrigation a de multiples impacts environnementaux et économiques. Comme cité ci-dessus, on s'intéresse dans cette thèse au profit de l'agriculteur et on ne considère que l'impact sur le développement fonctionnel de la plante et le coût d'irrigation par rapport aux quantités d'eau apportées à la culture. Les impacts de l'irrigation sur la production agricole sont également conditionnés par de nombreux facteurs: la salinité du sol, l'uniformité des applications d'irrigation, la variabilité spatiale des propriétés physiques du sol, les caractéristique variétales d'une culture spécifique, ainsi que diverses pratiques comme le contrôle d'insectes nuisibles et de mauvaises herbes, la fertilité, la population des plantes, l'espacement des plantes, les méthodes d'irrigation (aspersion, goutte-à-goutte...), etc. Dans cette thèse, on se concentre uniquement sur l'effet de la dose apportée au jour le jour sur le développement, et on considère que les critères cités précédemment sont fixés. La modélisation pourra différer légèrement en fonction de la méthode d'irrigation, mais le principe reste le même suivant notre approche.

1.2.2.2 Diverses méthodes d'optimisation pour l'irrigation

De nos jours, les programmes prévisionnels de planification de la fourniture de l'eau d'irrigation pour une campagne agricole constituent une préoccupation majeure dans la gestion des ressources en eau au sein des périmètres irrigués.

Différentes méthodes d'optimisation ont été utilisées pour déterminer des stratégies d'irrigations pertinentes (Mandl [1981]). En passant par des approches heuristiques (Naadimuthu et al. [1999], Hiessl and Plate [1990], Anwar and De Vries [2004]), jusqu'aux combinaisons des différentes méthodes d'optimisation mathématiques.

Beaucoup sont basées sur des modèles de culture orientés management. Comme dans Bergez et al. [2004], on propose une méthode de simulation stochastique basée sur l'échantillonnage du domaine des paramètres stratégiques du modèle (Bergez et al. [2001], Bergez et al. [2002]) et sur la décomposition hiérarchique du domaine.

La méthode de la programmation mathématique positive a été explorée dans Howitt [1995], pour optimiser l'utilisation de ressources naturelles dans l'agriculture. On pourrait aussi associer cette méthode d'optimisation avec les techniques d'irrigation déficiente (Cortignani and Severini [2009]).

L'économie d'eau agricole peut aussi être réalisée en adaptant la stratégie d'irrigation par la programmation récursive associée à l'utilisation de nouvelles technologies d'irrigation avancées (Hornbaker and Mapp [1988]).

Différentes méthodes d'optimisation mathématiques ont été envisagées sur les différents modèles de culture et de gestion de l'irrigation. A titre d'exemple, dans Anwar

and Clarke [2001] on utilise la programmation linéaire, dans Talpaz and Mjelde [1988] et Mergos [1987] on utilse la programmation quadratique. L'algorithme génétique est aussi largement employé pour déterminer les stratégies d'irrigation (Srinivasa Raju and Nagesh Kumar [2004], Kuo et al. [2000], Pandey et al. [2011], Kuo et al. [2000], Kuo and Liu [2003]). Dans Yakowitz [1982] et McGuckin et al. [1987], on utilise la programmation dynamique.

On peut aussi combiner ces différentes méthodes d'optimisation. Cai et al. [2001] combine la programmation linéaire et l'algorithme génétique. On peut par exemple combiner la programmation dynamique avec d'autres méthodes d'optimisation, en fonction des caractéristiques des modèles de culture sous-jacents et des techniques d'irrigation employées. Dans le cadre de l'irrigation déficitaire, Azaiez [2008] propose d'associer la programmation linéaire avec la programmation dynamique pour trouver le meilleur compromis entre l'étendue de la zone irriguée et la quantité d'apport d'eau sur une aire unitaire, étant donné que la quantité d'eau est fixée et qu'on cherche à mieux exploiter la surface agricole disponible.

L'incertitude est un élément inhérent aux modèles de culture. Les sources d'incertitudes dans les modèles de culture concernant la gestion de l'irrigation sont multiples. Ces incertitudes sont à prendre en compte non seulement pour pouvoir simuler la croissance des plantes, mais aussi dans la conception de méthodes d'optimisation d'une stratégie d'irrigation.

Dans Ganji et al. [2006], l'évapotranspiration est évaluée avec l'incertitude, dans l'optimisation stochastique de stratégie d'irrigation en menant une analyse du système avec le niveau d'eau du sol comme variable d'état. Dans Ganji and Shekarriz fard [2010], on considère que l'incertitude porte à la fois sur la hauteur d'irrigation et le niveau d'humidité de sol. Paul et al. [2000] propose un modèle basé à la fois sur la programmation dynamique stochastique et la programmation dynamique déterministe pour déterminer l'assolement et la programmation de l'irrigation. Kipkorir et al. [2002] développe un modèle d'optimisation par la programmation dynamique pour l'aide à la décision concernant la répartition des cultures ainsi que l'irrigation dans une région où la quantité d'eau disponible pour la saison entière d'irrigation est fixée au début de cette période.

1.3 Notre approche

Cette thèse contient essentiellement deux parties, une partie "modélisation" qui consiste à explorer les potentialités de la modélisation dynamique de la croissance des plantes en interaction avec leur environnement, et plus précisément avec les ressources en eau. La seconde partie "optimisation" qui a pour vocation de déterminer des stratégies d'irrigation optimales basées sur les modèles d'interaction plante-ressources en eau développés dans la première partie.

Avant d'intégrer l'effet du stress hydrique, on s'intéresse dans un premier temps à la modélisation de la croissance de la plante dans des conditions d'environnement optimales, en prenant le modèle GreenLab comme exemple.

GreenLab est un FSPM qui décrit la croissance d'une plante "individu" comme un système dynamique au niveau d'organes (de Reffye and Hu [2003]). Il se distingue des autres FSPMs par sa généricité, sa formulation mathématique compacte, et le nombre relativement restreint des paramètres du modèle. Un des avantages du modèle est sa méthode de construction de la morphogénèse de la plante basée sur la notion de similarité entre les différentes structures de la plante (Yan et al. [2002]). En effet, une plante "individu" est décomposée en composantes élémentaires appelées *phytomères* (White [1979], Barthélémy and Caraglio [2007], Vos et al. [2007]). Chaque plante possède sa propre topologie par rapport à sa variété, et l'apparition successive de ces composantes suit des règles d'organogenèse qui sont également propres à la variété.

Ainsi, selon le modèle GreenLab, la dynamique de la croissance de la plante est rythmée par la morphogénèse. Le tempo de cette dynamique est ce qu'on appelle *cycle de croissance* qui correspond à une durée fixée en temps thermique.

Parallèlement à la morphogénèse, GreenLab décrit également les différents processus fonctionnels comme la production de biomasse, l'allocation de biomasse aux différents organes, la sénescence, etc. Dans la version originale du modèle GreenLab, la croissance de la plante est représentée comme un système discret, avec le cycle de croissance comme pas de temps. Cette représentation discrète est particulièrement pertinente pour décrire la morphogénèse de la plante comme expliqué ci-dessus. Néanmoins, cette discrétisation en cycle de croissance peut s'avérer inadaptée et manque de précision, dans la modélisation de ces processus physiologiques.

Le GreenLab discret assure une description fidèle de la croissance fonctionnelle et structurelle de la plante, lorsque la plante se développe dans des conditions environnementales optimales. Cependant, lorsque la plante est soumise aux différentes conditions défavorables comme la lacune nutritive, l'attaque des pestes ou le stress hydrique, le développement normal de la plante serait fort perturbé, sans parler de l'effet combiné de ces conditions défavorables.

Compte tenu de l'enjeu par rapport à la gestion des ressources en eau pour l'irrigation, il se révèle crucial d'ajuster la modélisation de la croissance des plantes à l'état hydrique qui la conditionne. Cette faculté de modélisation par rapport à la sensibilité de la plante au stress hydrique est indispensable afin d'envisager des démarches d'optimisation de stratégies d'irrigation basées sur un système dynamique comme celui proposé dans GreenLab.

Pour modéliser l'effet du stress sur la croissance des plantes, on a besoin d'un facteur de stress qui témoigne de l'intensité du stress subi par la plante. Néanmoins, l'état hydrique d'une plante elle-même est difficilement accessible que ce soit par mesure ou

par simulation (Koide et al. [1989], Turner [1981]). Ainsi, comme dans la plupart des études qui traitent de la relation entre la croissance de la plante et la disponibilité de la ressource en eau, l'état hydrique de la plante sera inféré par l'état hydrique du sol, qui est lui beaucoup plus accessible par mesure et par simulation (Slayter et al. [1967], Gollan et al. [1986], Jordan and Ritchie [1971]). Ce transfert d'information est commode et pertinent pour l'étude des effets du stress hydrique sur la croissance des plantes (Jones [2007], Kramer and Boyer [1995]).

Pour obtenir un tel indice qui reflète l'état hydrique du sol, on couple le modèle GreenLab avec un modèle de sol. Dans cette thèse, on va utiliser le modèle Pilote (Mailhol [2001], Mailhol et al. [2011]), qui nous fournit à la fois un sous module de sol, et un modèle végétal pour la prévision de production agricole qu'on étudiera à titre de comparaison avec d'autres modèles.

Comme la plupart des modèles de cultures, Pilote utilise la loi de Beer pour simuler la production de matière sèche totale, et la quantité de matière récoltée s'en déduit grâce à l'indice de récolte. Pour ce dernier, on le calcule à partir d'une valeur de référence qui correspond à l'indice de récolte potentiel. Et la décroissance de l'indice de récolte réel à partir de l'indice de récolte potentiel dépend de l'intensité et la durée du stress hydrique subi tout au long du cycle de culture. Cette intensité de stress est donnée par l'évolution de l'indice foliaire (LAI), simulée empiriquement par Pilote, en comparaison avec une évolution optimale de LAI.

Qu'il s'agisse de la matière sèche totale ou du LAI, tous deux sont simulés au pas de temps journalier selon Pilote. Lorsqu'on se propose d'associer ou de coupler le sous-modèle sol de PILOTE au modèle GreenLab discret par cycle de croissance, on est confronté à une incompatibilité de pas de temps. Cette incompatibilité, ainsi que les problèmes d'imprécision et de variabilité (individu vs. population) que soulèvent le modèle discret, nous incitent à formaliser les principes de GreenLab sous une forme plus souple par rapport au temps.

On présente dans un premier temps la version continue du modèle GreenLab. Par rapport à la version discrète originale, les principaux processus physiologiques sont repris de manière similaire, comme la production de biomasse, l'organogenèse, et l'allocation de biomasse. Pour la sénescence des feuilles, on introduit un mécanisme continu qui est à la fois plus adapté à l'écriture du système continu, et qui permet de décrire de manière plus exacte ce phénomène qui a un impact significatif sur les autres processus physiologiques et donc sur la prévision de récolte.

A la place des équations récurrentes qu'on emploie dans GreenLab discret cycle par cycle, dans le GreenLab continu, on décrit la dynamique de la croissance des plantes par des équations différentielles, l'axe du temps étant le temps calendaire. On obtient les résultats numériques en résolvant ces équations avec un pas de temps quelconque, le modèle journalier peut donc en découler directement.

Selon le modèle GreenLab continu, l'évolution de la biomasse de chaque organe est régit par une équation différentielle, qui dépend de la masse foliaire totale de la plante, ou de la manière équivalente dépend du LAI connaissant la densité au champ. C'est donc l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la masse foliaire qui pilote le système dynamique tout entier. Le mécanisme continu de la sénescence dans ce système dynamique introduit un terme de délai dans les équations différentielles.

La résolution numérique de ce système différentiel à délai soulève donc un défit en analyse numérique qu'on discutera à part.

Une fois que les systèmes dynamiques des deux modèles à coupler sont synchronisés en temps, on est amené à se focaliser sur la question cruciale du couplage, c'est à dire comment faire interagir ces deux modèles, de sorte que chaque modèle apporte des éléments constructifs à l'autre modèle, et le modèle couplé résultant devrait assurer plus de fiabilité pour modéliser les nuances dans le développement de la plante sous différentes conditions hydriques.

Dans notre approche, on utilise donc l'indice de stress fourni par le module sol de Pilote, et le fait impacter sur les différents processus physiologiques suivant leurs sensibilités respectives au stress. Pour cela, lorsqu'on couple le modèle Pilote avec GreenLab, dans le calcul de la production de biomasse, uniquement le taux de photosynthèse est réduit par rapport à cet indice de stress, compte tenu de l'importance première de l'effet du stress sur la photosynthèse (Chaves et al. [2002], Wardlaw [1969]).

Cette simplification de l'effet de stress sur la croissance des plantes peut paraître trop réductrice. Néanmoins elle reste intéressante en termes de méthodologie de couplage entre modèle de plante et module sol.

Compte tenu du nombre relativement important des paramètres du modèle GreenLab, on ne va pas chercher à rendre compte de l'effet du stress hydrique sur tous les organes. Il apparait en effet plus raisonnable de chercher plutôt à intégrer ces impacts dans un modèle plus compact pour la prédiction de récolte sans se soucier du développement structural de la plante. Pour cela on présente un nouveau modèle de plante qui divise une plante en trois compartiments, un compartiment feuilles, qui détermine la production de biomasse relative aux feuilles par photosynthèse, et un compartiment relatif au fruit ou au grain qui nous intéresse plus particulièrement pour la prévision de la récolte plus un compartiment pour la partie reste. Les composantes de la plante ne sont donc plus les organes mais les compartiments. Cette simplification de modèle nous réduit le nombre de paramètres propres au développement sans stress. Avec les mêmes jeux de données, on devrait pouvoir donc valider un modèle qui contient plus de précision au niveau des modélisation des effets du stress hydrique. Ainsi, dans ce modèle de compartiment, l'indice de stress qu'on obtient grâce au module sol du modèle Pilote, intervient aussi dans les équations qui décrivent l'allocation de la biomasse vers les différents compartiments et la sénescence des feuilles.

L'interaction entre le modèle de plante et le module sol est réciproque. En effet, que ce soit dans le modèle GreenLab-Pilote ou le modèle compartiment-Pilote, l'évolution de l'indice foliaire n'est plus simulée par la courbe empirique de Pilote, mais fourni par le modèle de plante, qui déduit le LAI à partir de la masse foliaire totale.

En se donnant comme objectif la maximisation du profit qui prend en compte à la fois le bénéfice de la récolte et la dépense de la quantité d'eau pour l'irrigation, ces systèmes dynamiques plante-ressources en eau sont adaptés pour l'application des méthodes d'optimisation mathématique. Ce cadre vérifie également le principe optimal de Bellman. Ce qui nous incite à utiliser la programmation dynamique pour optimiser les stratégies d'irrigation.

Cette représentation de la problématique ainsi que la méthode d'optimisation dans le cas déterministe est aussi facilement adaptable pour une étude plus réaliste dans le cas stochastique.

Dans notre approche, on va intégrer un modèle climatique stochastique WGEN qui nous fournit une prévision stochastique des valeurs de variables environnementales en question, en prenant en compte les statistiques des historiques et les corrélations des différentes variables (Richardson and Wright [1984]). A partir de ce modèle aléatoire, on peut facilement adapter notre approche d'optimisation à la programmation dynamique stochastique.

Chapitre 2

Modélisation continue de la croissance des plantes

2.1 GreenLab continu

2.1.1 De discret à continu

Le modèle GreenLab s'écrit à l'origine comme un système récurrent discret (de Reffye et al. [2003], Cournède et al. [2006]). En effet, en tant que modèle de croissance du type structure-fonction, le modèle doit décrire dynamiquement le développement de la plante. Celui-ci est caractérisé par deux aspects. Un aspect structurel: comment se constitue une plante de variété donnée, c'est-à-dire comment ces composants élémentaires se mettent en place en fonction de l'âge de la plante. Un aspect fonctionnel: comment le développement de la plante est régi par les différents processus physiologiques, comme la photosynthèse, la transpiration, etc.

Pour décrire l'organisation structurelle d'une plante, GreenLab considère une plante comme une architecture composée de différents types d'organes, les principaux types d'organes étant: feuilles, racine, entre-noeuds, et fruits.

Le choix de travailler à l'échelle de l'organe est judicieux pour au moins deux raisons. D'une part, chaque type d'organe assure une ou plusieurs fonctions physiologiques. Les feuilles par exemple intercepte la lumière tout en produisant de la biomasse par photosynthèse. La racine prélève l'eau du sol et les substances nutritives nécessaires à la croissance. D'autre part, le modèle simule l'allocation de biomasse à chaque organe en fonction de son âge physiologique, permettant ainsi de prédire le rendement: la biomasse de l'organe fruit.

Ainsi, cette échelle de modélisation nous ramène naturellement à considérer la croissance d'une plante comme un processus rythmé par l'organogenèse, c'est-à-dire l'apparition successive des différents types d'organes au sein de la plante. En effet, l'architecture d'une plante se décompose en *unités de croissance* (Barthélémy and

Caraglio [2007]), chaque unité de croissance est formée à partir d'un bourgeon et est constituée de un ou plusieurs métamères. Pour les plantes à croissance continue et dans des conditions non stressées, le nombre de métamères est proportionnel à la somme de températures au delà d'une température de base, et cette somme de température constante entre deux apparitions successives de métamères est appelée *cycle de croissance* ou *phyllochrone* (Skinner and Nelson [1995]).

Notez que le concept de phyllochrone est beaucoup utilisé pour décrire et comprendre le développement de la plante. Celui-ci peut varier en fonction des facteurs environnementaux (la température, la disponibilité en eau, la durée du jour) et de la génétique (Wilhelm et al. [1995], Birch et al. [1998], Weixing Cao [1989]). On a constaté sur le cas de la betterave qu'on peut diviser la durée de croissance en deux périodes, et sur ces deux périodes, le phyllochrone a deux valeurs distinctes. Ce phénomène peut être bien pris en compte dans le modèle GreenLab. Il a par ailleurs été montré que cette alternance est à liée à la densité au champs (Lemaire et al. [2008], Lemaire et al. [2009], Lemaire [2010]). Par souci de clarté, on se contentera dans le cadre de cette thèse d'une durée constante de phyllochrone.

La construction de l'organogenèse d'une plante est la mise en place successive des différents organes. Dans le modèle GreenLab, les organes de base, à partir desquels la construction de la plante se fait, sont les bourgeons. Le début d'un cycle est marqué par l'éclosion de ces bourgeons : chacun d'eux donne naissance à une unité de croissance qui est elle-même une succession de métamères de différents types (Mathieu [2006]). Un métamère est l'unité élémentaire de la plante (White [1979], Groenendael [2006], Mathieu et al. [2009]), il est composé d'un organe entrenœud (section de tige entre deux nœuds) qui porte des organes latéraux (feuilles, fruits, bourgeons axillaires).

Les types de métamère, le nombre de métamères de chaque type, le mécanisme de leurs mises en place ainsi que la constitution de chaque métamère sont propres à chaque variété. A titre exemple, le développement du maïs peut être considéré comme un automate illustré par la figure 2.1.

2.1.2 Description du modèle continu

Le modèle GreenLab s'écrit à l'origine comme un système récurrent discret (de Reffye et al. [2003], Cournède et al. [2006]), le pas de temps étant le cycle de croissance. La dynamique est donc rythmée par rapport à l'organogenèse de la plante. Néanmoins, cette approche de discrétisation s'avère être mal adaptée, l'intégration des facteurs environnementaux émanant d'autre modèles (ou modules) qui fonctionnent selon une base de temps calendaire (Le Chevalier et al. [2007]). Il en va ainsi par exemple pour le niveau d'eau dans les réservoirs du sol du modèle Pilote. En outre, le temps calendaire, correspondant à un cycle de croissance, est variable. Il varie en effet de l'ordre des quelques jours à un an selon la variété de la plante.

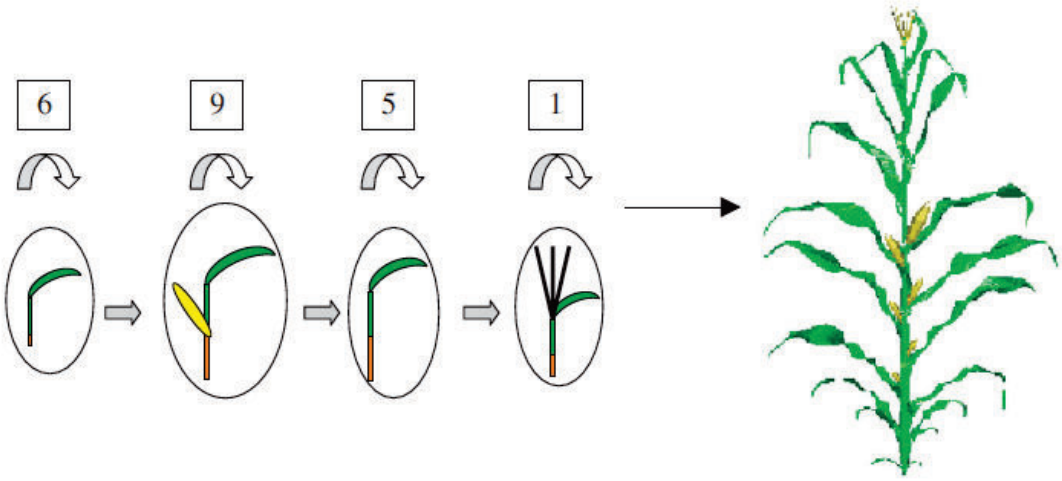


FIGURE 2.1: Le développement du maïs. L'organogenèse est simulée comme un automate qui produit successivement différents types de métamères. Les six premiers métamères sont végétatifs et contiennent chacun une feuille, une gaine et un entre-nœuds court. Les neuf métamères suivants contiennent en plus un épi avec un entre-noeud long. Les cinq métamères qui suivent sont végétatifs comme les six premiers mais avec des entre-nœuds longs, et le dernier métamère contient une feuille, une gaine et une fleur mâle, d'après Guo et al. [2006].

Ainsi, avons-nous dû adapter le modèle discret de GreenLab à une version continue (Li et al. [2009]). Celle-ci non seulement se prête mieux au couplage avec des modèles environnementaux, mais en plus, permet de pallier les imprécisions de l'écriture discrète, notamment en introduisant un mécanisme de sénescence continue comme expliqué par la suite.

Une autre spécificité de l'écriture continue est qu'on peut obtenir la biomasse foliaire, par résolution d'une seule équation différentielle avec retard.

Avant de décrire le modèle continu, on doit spécifier la mesure du temps. En effet, la description du développement fonctionnel et architectural des plantes se fait au niveau de l'organe pour l'organogenèse et l'allocation de biomasse, en fonction du temps thermique (Mac Master and Wilhelm [1998]) défini comme

$$\tau(t) := \int_0^t \max(0, T(s) - T_b)ds \tag{2.1}$$

avec $T(s)$ la température et T_b la température de base donnée par la littérature.

Par convention, nous prenons $\tau(t_e) = \gamma$, avec t_e le temps d'émergence et γ le phyllochrone, c'est à dire le temps thermique nécessaire pour la mis en place d'une nouvelle unité de croissance.

Les processus physiologiques de la croissance des plantes pris en compte dans notre modèle sont l'organogenèse, la production et l'allocation de biomasse, ainsi que la sénescence. Notons que la biomasse allouée aux organes est produite par la photosynthèse sauf durant la période de croissance avant émergence, pendant laquelle c'est la graine qui fournit la biomasse initiale. Ainsi, on décrira à part cette phase initiale. Et on soulignera le calcul de l'indice foliaire LAI, qui joue le rôle central dans la description de l'état du développement de la plante, puisqu'il s'agit de la variable clé permettant de calculer l'interception lumineuse (Monteith [1977]).

2.1.2.1 Organogenèse

Selon GreenLab, le développement architectural de la plante est considéré comme une succession d'apparitions d'unités de croissance avec les expansions des organes constitutifs (de Reffye et al. [2008], Yan et al. [2004]). Les éléments du modèle décrivant l'organogenèse sont

- Unité de croissance (composée de différents types d'organes, en prenant le maïs comme exemple, o = limbe, gaine, entre-nœud, épi ...)
- Cycle de croissance (γ phyllochrone: temps thermique constant entre les apparitions de deux unités de croissance successives.)
- $N_o(k)$: nombre d'organes du type o générés au cycle k.

2.1.2.2 Demande et allocation

Quantifier la répartition de matière sèche vers chacun des organes de la plante est un composant clé de la simulation de la croissance (Cao et al. [2002]). Selon le principe de GreenLab, chaque organe est vu comme un puits dont la force dépend du type d'organe et varie en fonction de son âge thermique pendant la période de son expansion. La biomasse produite par photosynthèse (fournie par la graine avant l'émergence (voir 2.1.2.3 pour plus de détails)) est allouée aux organes proportionnellement à la force du puits de chacun (Yan et al. [2004]).

Si on note τ_o le temps d'expansion d'un organe du type o, supposé fixé, alors la demande d'un organe à l'âge thermique u est

$$\mathrm{P}_o(u) = p_o f_{a_o,b_o}(u)$$

pour $0 \leq u \leq \tau_o$ et vaut 0, sinon. p_o est un coefficient de force de puits de l'organe du type o, et la fonction bêta

$$f_{a_o,b_o}(u) = \frac{1}{M_o}\left(\frac{u}{\tau_o}\right)^{a_o-1}\left(1-\frac{u}{\tau_o}\right)^{b_o-1}$$

décrit la force de puits de l'organe, avec $M_o = \sup_{u\in[0,\tau_o]}(\frac{u}{\tau_o})^{a_o-1}(1-\frac{u}{\tau_o})^{b_o-1}$. a_o, b_o sont les paramètres de la fonction bêta.

La demande de tous les organes du type o s'obtient en sommant leurs demandes selon le rang de chaque organe. En effet, au temps thermique u, l'organe du rang k a l'âge $u - k\gamma$ en temps thermique, par

$$P_o(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} N_o(k)\mathrm{P}_o(u - k\gamma)$$

enfin la demande de la plante entière s'obtient en sommant les demandes respectives de tous les types d'organe.

$$D(u) = \sum_o P_o(u)$$

Remarquons que l'utilisation de la fonction bêta pour décrire la courbe d'allocation est pertinente, car elle permet de décrire à la fois la physiologie et la caractéristique génétique de la plante à travers les paramètres τ_o, a_o, b_o de la fonction bêta. On retrouve une conception similaire dans Yin et al. [2003].

Pour passer au temps calendaire, si on note $q_o(t)$ le flux de biomasse allouée aux organes de type o à l'instant t (qui correspond au temps thermique $\tau(t)$), et $\frac{dQ(t)}{dt}$ la production de biomasse instantanée au temps t, alors on a

$$q_o(t) = \frac{P_o}{D}(\tau(t)) \cdot \frac{dQ(t)}{dt} \tag{2.2}$$

2.1.2.3 Phase initiale

La phase initiale est la période qui correspond au moment d'initiation ($t = 0$) jusqu'au moment de l'émergence ($t = \tau^{-1}(\gamma)$). Durant cette période qui correspond à la formation de la première métamère, la biomasse totale est constante et vaut le poids de la graine. Et on suppose que la graine distribue la masse aux organes du premier métamère, de façon uniforme selon le temps thermique. On a donc, par exemple, pour chaque organe du type o:

$$Q_o(t) = \int_0^{\tau(t)} \frac{Q^{seed}}{\gamma}\frac{P_o}{D}(u)du,$$

pour $t \in [0, \tau^{-1}(\gamma)[$.

Cette intégrale peut être facilement approximée, par la méthode des trapèzes par exemple.

2.1.2.4 Production

La production de biomasse par photosynthèse dépend non seulement du stade de croissance (la surface foliaire), mais aussi de l'énergie (la radiation), et de l'eau disponible (Lemaire et al. [2008], Souch and Stephens [1998]). Remarquons que le

rendement (partie de la plante utile pour la finalité agricole) est intimement lié à la production de biomasse, et qu'il est évalué au niveau de la population, à l'échelle du champ par exemple. Ici, on choisit de considérer un individu type moyen dans la population, et on suppose que l'environnement est homogène sur l'ensemble du champs. La production instantanée est donnée par

$$dQ(t) = \mu \cdot PAR(t) \cdot S_p \cdot \left(1 - \exp\left(-k\frac{S(t)}{S_p}\right)\right) \tag{2.3}$$

μ est le coefficient lié à l'efficience de l'utilisation de radiation pour la photosynthèse, PAR désigne le rayonnement photosynthétiquement actif (le rayonnement utilisé par le feuillage vert des plantes lors de la photosynthèse), S_p est un coefficient empirique de GreenLab qui correspond à une surface caractéristique, k est le coefficient d'extinction de Beer-Lambert, et $S(t)$ est la surface foliaire totale de la plante à l'instant t. Si on suppose que la masse foliaire surfacique est constante et vaut e, $S(t) = \frac{Q_b(t)}{e}$, et on a

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \mu \cdot PAR(t) \cdot S_p \cdot \left(1 - \exp\left(-k\frac{Q_b(t)}{e \cdot S_p}\right)\right) \tag{2.4}$$

$Q(t)$ représente alors la biomasse totale de la plante (sans prendre en compte la sénescence), avec $Q(\tau^{-1}(\tau_e)) = Q_0$.

Remarquons qu'ici la variation est décrite en fonction du temps calendaire et non plus du temps thermique. En effet, ce choix a été fait en particulier afin de s'adapter au bilan hydrique de sol régissant pour partie la transpiration de la plante, lors du couplage avec un module sol dans le chapitre suivant.

2.1.2.5 Sénescence

On introduit pour le modèle GreenLab continu un nouveau mécanisme de sénescence autre que celui du modèle GreenLab discret. Dans le modèle discret, les organes sont éliminés d'une plante individuelle à la fin de leurs durées de vie respectives. Ces durées sont exprimées en temps thermiques, supposées homogènes ou variables en fonction de l'organe (Lemaire et al. [2008]). Ce mécanisme de sénescence brutale non seulement introduit de l'imprécision dans la description du développement de la plante, mais en plus il s'adapte mal à un formalisme continu du modèle. Dans le modèle GreenLab continu, la sénescence est introduite de façon progressive. Les tissus des organes entre en sénescence selon leur propre durée de vie, et non de la durée de vie de l'organe auquel les cellules appartiennent. Remarquons que cette idée de sénescence graduelle a déjà été considérée dans des modèles de plante discrets (Letort [2008], Bertheloot et al. [2008]).

Concernant le modèle GreenLab continu, on suppose que tous les tissus d'organe ont la même longévité τ_o^{sen}, ce qui correspond à la durée en temps thermique entre son initiation et sa sénescence (Lizaso et al. [2003]).

Pour une culture donnée, il serait possible d'envisager d'autres hypothèses concernant le mode de sénescence. Pour le betterave par exemple, on peut supposer que la sénescence ne concerne que la partie feuille et la partie pétiole, mais pas la partie racine(Lemaire et al. [2008], Milford [1973]). En supposant que la partie feuille et la partie pétiole ont la même longévité, on a donc $\tau_b^{sen} = \tau_p^{sen} = \tau^{sen}$ et $\tau_i^{sen} = \tau_r^{sen} = \infty$.

Si Q_o est la biomasse accumulée des organes du type o, alors on a pour un organe dont on considère la sénescence, $o = b, p$ (feuille, pétiole), dans le cas de la betterave, cela donne :

$$\frac{dQ_o(t)}{dt} = q_o(t) \tag{2.5}$$

pour tout $t \in [0, \tau^{-1}(\tau^{sen})[$, et

$$\frac{dQ_o(t)}{dt} = q_o(t) - q_o(\eta(t)) \tag{2.6}$$

pour tout $t \in [\tau^{-1}(\tau^{sen}), +\infty[$ et $\eta(t) := \tau^{-1}(\tau(t) - \tau^{sen})$.

Tandis que s'il s'agit d'un organe dont on ne considère pas la sénescence, $o = r$ (racine) toujours sur le cas de la betterave, on a l'équation 2.5 pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2.1.2.6 Indice foliaire

L'indice de surface foliaire (LAI) est le ratio de la surface totale supérieure des feuilles à la surface du sol sur laquelle la végétation se développe. C'est une grandeur sans dimension qui varie en général de 0 pour le sol nu à 8 pour une forêt tempérée dense, et à 5.5 pour une grande culture comme le maïs. Le LAI est un bon indicateur de la croissance et de la biomasse végétale, ainsi que de la densité d'un peuplement (Asrar et al. [1984], Weiss [1998]). Divers processus physiologiques comme l'évapotranspiration dépendent donc de la valeur de cet indice (Wiegand et al. [1979]).

La quantité d'eau transpirée par plante sur un m^2 de sol varie en particulier en fonction du LAI. On calcule d'abord la masse foliaire Q_b d'une plante type en prenant compte la sénescence, puis

$$LAI(t) = \frac{Q_b(t)}{e} \cdot d$$

avec e la masse foliaire spécifique et d la densité du champs. Concrètement, si on suppose que les feuilles ont la même longévité τ^{sen} (en temps thermique), la partie devenant sénescente au temps t est donc celle allouée au temps $\eta(t) := \tau^{-1}(\tau(t) - \tau^{sen})$ (Lizaso et al. [2003]). En somme, l'évolution de masse foliaire est donnée par

$$\frac{dQ_b(t)}{dt} = f(t, Q_b(t)) - f(\eta(t), Q_b(\eta(t))) \tag{2.7}$$

avec

$$f(t, Q_b(t)) := \frac{P_b}{D}(\tau(t)) \cdot \frac{dQ(t)}{dt} \tag{2.8}$$

On remarque que 2.7 est une équation différentielle du premier ordre en Q_b avec retard dû au terme $\eta(t)(< t)$. Ceci introduit un nouveau problème sur la résolution numérique du système qui fait l'objet de la section suivante.

2.2 Étude numérique

2.2.1 Les équations différentielles à retard

Les équations différentielles à retard interviennent souvent dans la modélisation mathématique, surtout dans des champs d'application comme les sciences du vivant. Ces applications ont été traitées dans de nombreux ouvrages comme entre autres Driver [1977], Halanay [1966], Kolmanovskiĭ [b], Kolmanovskiĭ [a], Bellen and Zennaro [2003].

Dans les équations différentielles ordinaires (EDO), les variations de variables à tout instant dépendent uniquement de leurs valeurs à cet instant, tandis que dans les équations différentielles à retard (EDD), les variations de variables dépendent aussi de leurs valeurs à un instant antérieur. En d'autres termes, dans les EDO, les variables réagissent sur les conditions présentes, alors que dans les EDD, on est confronté au problème qu'il y a un effet postérieur sur les variables. Certains modélisateurs ont choisi d'ignorer cet effet de retard, et de remplacer une EDD par une EDO. Néanmoins, cette substitution s'avère dangereuse, dans certain cas, même si le délai est relativement court, le fait de l'ignorer risque d'introduire des erreurs considérables (Elsgolts and Norkin [1973]). D'autres modélisateurs choisissent de remplacer une EDD scalaire par un système d'EDOs. Non seulement l'augmentation dimensionnelle de système alourdit le calcul, mais plus gênant encore, cette approche risque d'introduire des différences qualitatives entre les solutions données par une EDD et par un système d'EDOs (Gopalsamy [1992], Kuang [1993], Kaplan and Yorke [1974]).

Ainsi, les méthodes numériques pour résoudre les EDOs ne sont pas directement transposables aux EDDs. Compte tenu de l'étendu des champs d'application des EDDs, de nombreuse études ont été consacrées à l'étude des solutions numériques des EDDs (Baker et al. [1995], Cryer [1972], Paul [1992]). Comme chaque méthode numérique est conçue pour un type de problème particulier, et inversement, chaque problème possède ses particularités auxquelles on doit adapter la méthode numérique choisie, il est donc intéressant d'illustrer l'approche qu'on a adoptée pour résoudre numériquement le système à retard que représente le modèle GreenLab continu. Avant cela, on se propose de donner un bref aperçu du cadre général relatif aux équations différentielles à retard.

Une des formes générales des équations différentielles à délai unique peut être donnée par

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t), y(t - \gamma(t, y(t)))) \quad \text{si } t \geq t_0 \\ y(t) &= \Psi(t) \quad \text{si } t \in [\min_{s \geq t_0}(s - \gamma(s, y(s))), t_0] \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarquons que dans cette écriture, on a fixé le temps initial t_0 lorsque le terme de retard $y(t - \tau(t, y(t)))$ intervient dans la dynamique du système. $\Psi(t)$ est la fonction initiale qui décrit le comportement du système avant l'apparition de l'effet retard. $\Psi(t)$ est défini sur l'intervalle initial $[\min_{s \geq t_0}(s - \gamma(s, y(s))), t_0]$, la définition de cette fonction est indispensable pour déterminer de façon unique la solution de l'équation du système pour $t \geq t_0$.

Pour les équations différentielles à multi-retard, la forme générale est

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t), y(\tau_1(t, y(t))), \ldots, y(\tau_k(t, y(t)))) \quad \text{si } t \geq t_0 \\ y(t) &= \Psi(t) \quad \text{si } t \in [\min_{s \geq t_0, 1 \leq l \leq k}(\tau_l(t, y(t))), t_0] \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

avec $\tau_l(t, y(t)) = t - \gamma_l(t, y(t))$ pour tout $1 \leq l \leq k$.

Selon la forme de la fonction délai $\gamma(t, y(t))$ (prenons les équations différentielles à délai unique à titre d'exemple), on peut aussi classer certaines EDD dans des catégories particulières. On distingue notamment trois cas particuliers pour les EDDs: avec délai constant ($\gamma(t, y(t)) \equiv \gamma_c$), avec délai dépendant uniquement de l'état ($\gamma(t, y(t)) \equiv \gamma(y(t))$), et avec délai dépendant uniquement du temps ($\gamma(t, y(t)) \equiv \gamma(t)$). L'équation 2.7 de GreenLab continu fait donc partie du troisième cas, par l'intermédiaire du temps thermique, avec

$$\gamma(t) = \tau^{-1}(\tau_{sen})$$

2.2.2 Schéma de résolution pour GL continu

2.2.2.1 le système à retard de GreenLab continu

Selon le modèle GreenLab continu décrit dans la section 2.1, décrire le développement continu d'une plante au niveau des organes revient essentiellement à résoudre des équations différentielles pour la masse foliaire accumulée. L'axe du temps est divisé en trois phases, qui correspondent successivement à l'état de graine, croissance pure sans sénescence, et croissance avec sénescence. Pour la première phase $t \in [0, \tau^{-1}(\gamma)[$, on a

$$Q_b(t) = \int_0^{\tau(t)} \frac{Q^{seed}}{\gamma} \frac{P_b(u)}{D(u)} du \tag{2.11}$$

Pour la seconde phase de croissance sans sénescence $t \in [\tau^{-1}(\gamma), \tau^{-1}(\tau^{sen})[$,

$$\frac{dQ_b(t)}{dt} = f(t, Q_b(t)) \tag{2.12}$$

avec la fonction f définie précédemment par 2.8.

Et enfin, lorsque la sénescence intervient, c'est à dire quand $t \in [\tau^{-1}(\tau^{sen}+\gamma), +\infty[$, on distingue également deux phases, suivant le cas où la partie sénescente a été générée à l'état de graine ou après l'émergence.

Pour $t \in [\tau^{-1}(\tau^{sen}), \tau^{-1}(\tau^{sen} + \gamma)[$, on a

$$\frac{dQ_b(t)}{dt} = f(t, Q_b(t)) - \frac{Q^{seed}}{\gamma}\frac{P_b}{D}(\eta(t)) \tag{2.13}$$

Puis pour $t \in [\tau^{-1}(\tau^{sen} + \gamma), +\infty[$

$$\frac{dQ_b(t)}{dt} = f(t, Q_b(t)) - f(\eta(t), Q_b(\eta(t))) \tag{2.14}$$

Dans un souci de simplification de l'écriture, on peut synthétiser ces différentes phases d'évolution de masse foliaire (représentées respectivement par les équations 2.11, 2.12, 2.13, 2.14) en une seule équation.

$$\frac{dQ_b(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, Q_b(t), Q_b(\eta(t))) \tag{2.15}$$

pour $t \in [0, +\infty[$.

2.2.2.2 Intervalles de temps

On montre dans cette section comment on peut résoudre ces équations numériquement, en traitant en particulier le terme de délai. On ne peut pas donner un schéma général pour résoudre numériquement une équation différentielle à retard, pour tout instant, à cause de son terme de retard. La variation de variable d'état ne dépend pas uniquement de son état actuel, mais dépend aussi de son état à un instant antérieur. L'idée pour obtenir une solution approximée consiste à découper l'axe du temps en des intervalles appropriés, et ensuite à résoudre le système intervalle par intervalle.

Plus précisément, pour résoudre l'équation qui décrit l'évolution de la masse foliaire cumulée, on découpe l'axe du temps à la fois par rapport au terme de retard et à l'état de la plante (avant ou après l'émergence).

Le premier intervalle $[0, \tau^{-1}(\gamma)[$ où est définie l'équation 2.11 et le deuxième intervalle $[\tau^{-1}(\gamma), \tau^{-1}(\tau^{sen})[$ où est définie l'équation 2.12 représentent respectivement

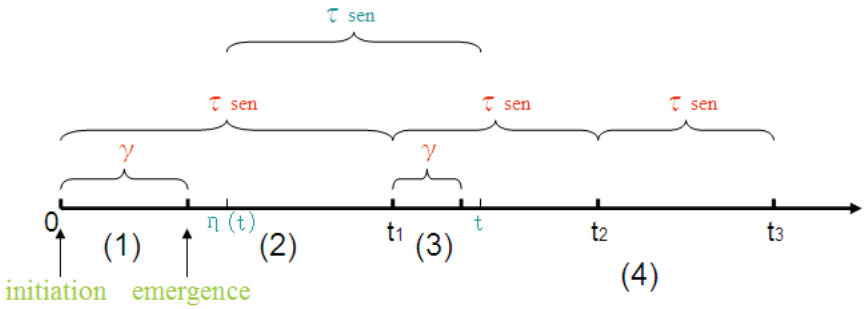


FIGURE 2.2: Les intervalles de temps pour la résolution du système à retard du GreenLab continu.

l'état graine et l'état de croissance pure sans sénescence. Pour le reste de l'axe de temps $[\tau^{-1}(\tau^{sen}+\gamma), +\infty[$ où est définie l'équation 2.14, on doit le diviser de façon à pouvoir traiter le terme de retard. On part de l'hypothèse que le temps de sénescence correspond à une durée fixée en temps thermique, selon le mécanisme continu décrit dans la section 2.1.2.5.

L'axe du temps est divisé en deux temps. D'abord, l'axe du temps est scindé en intervalles sur lesquels sont définis les équations 2.11-2.14. Ensuite, le dernier intervalle $[\tau^{-1}(\tau^{sen}+\gamma), +\infty[$ est de nouveau divisé en intervalles $[t_k, t_{k+1}[$ dont les longueurs correspondent au temps de sénescence, de sorte à adapter la solution numérique de l'équation 2.14. Pour chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$, on a

$$t_k := \tau^{-1}(k\tau^{sen}), k = 0, 1, \ldots$$

La figure 2.2 illustre notre façon de scinder l'axe du temps en récapitulant les différents éléments cités ci-dessus.

2.2.2.3 Résolution de EDD sur chaque intervalle

Les schémas numériques ne concernent ici que des pas de temps simples. On choisit un pas de temps constant h pour toutes les équations, sauf le dernier pas de chaque intervalle qui peut être inférieur à h. En effet, on prend le temps restant après un nombre maximal de pas de temps de longueur h pour recouvrir complètement l'intervalle, sans empiéter sur l'intervalle adjacent.

On résout successivement les équations qui définissent le système dynamique de GreenLab continu intervalle par intervalle. On utilise les méthodes classiques de l'analyse numérique pour résoudre les équations intégrales et les équations différentielles ordinaires. Par exemple, on peut d'abord approximer l'intégrale 2.11 par la méthode des trapèzes, puis résoudre l'EDO 2.12 par les méthodes de Runge-Kutta.

Pendant la phase après l'émergence de la plante, on résoud les équations différentielles à délai par la méthode d'étapes (Baker et al. [1999]). Concrètement, avec l'interpolation de solutions pour l'équation (2.11) et (2.12), on obtient la valeur approximée de Q_b sur tout l'intervalle $[t_0, t_1[$. Ensuite, (2.13) et (2.14) peuvent s'écrire sous la forme de

$$\frac{dQ_b(t)}{dt} = F(t, Q_b(t)) - G(t) \tag{2.16}$$

pour $[t_1, t_2[$, où la fonction G a déjà été approximée dans l'étape précédente.

On applique de nouveau par exemple Runge-Kutta à l'équation 2.17 sur $[t_1, t_2[$, avant de passer à l'intervalle $[t_2, t_3[$.

D'une manière générale, lorsqu'on est sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}[, k = 1, \ldots$, l'équation 2.14 est sous la forme

$$\frac{dQ_b(t)}{dt} = F(t, Q_b(t)) - G_k(t) \tag{2.17}$$

avec G_k une équation qui a déjà été approximée sur l'intervalle $[t_{k-1}, t_k[$.

Pour le reste de la plante autre que les feuilles, la biomasse accumulée d'un organe de type o se calcule de la même manière que pour la partie feuille Q_b lorsque $t \in [0, \tau^{-1}(\gamma)[$. Pour $t \in [\tau^{-1}(\gamma), +\infty[$, elle est sous la forme de

$$\frac{dQ_o(t)}{dt} = H(t, Q_b(t))$$

se déduisant successivement des équations 2.5, 2.6, 2.2, et 2.4. on peut ainsi approximer la valeur de Q_o une fois que les équations pour la dynamique de Q_b sont résolues.

2.2.3 Modèle journalier

Comme les données environnementales dont on dispose sont souvent journalières, aussi bien pour la température que pour la radiation PAR, on s'intéresse au modèle journalier pour le développement de la plante. On illustre ici à titre d'exemple la résolution du système dynamique de GreenLab continu représenté par les équations (2.11)-(2.14) en prenant le pas de temps $h = 1$ (l'axe du temps étant en unité jour). Ce schéma est particulièrement utile pour les applications agronomiques. Et on détaille à l'aide de cet exemple pour le cas journalier comment les fonctions environnementales peuvent être approximées.

Si $\bar{T}(i) := \int_i^{i+1} T(t)dt$ est la température moyenne du jour i, alors on approxime $\tau(t)$ comme

$$\tau(t) \approx \sum_{i=0}^{\mathbf{E}(t)} \bar{T}(i) + (t - \mathbf{E}(t))\bar{T}(\mathbf{E}(t))$$

$\mathbf{E}(t)$ étant la partie entière de t.

Quant à PAR, on prend pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{dPAR(t)}{dt} \approx \overline{PAR}(i), t \in [i, i+1[$$

avec $\overline{PAR}(i) := PAR(i+1) - PAR(i)$.

On remarque qu'il n'est pas judicieux d'employer ici les méthodes qui font intervenir les valeurs intermédiaires à chaque pas de temps comme la méthode de Simpson pour l'approximation intégrale ou la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre pour la résolution d'équations différentielles. En effet, la température ainsi que $dPAR$ sont approximées à partir d'une valeur constante à chaque pas de temps.

2.2.4 Cas test sur betterave

Les simulations sont menées en se basant sur le modèle GreenLab pour la betterave (Lemaire et al. [2008]), afin de comparer l'impact de différentes méthodes de résolution lorsqu'on calcule la production de biomasse et la masse accumulée de chaque organe. Sous plusieurs conditions environnementales différentes, on simule simultanément la production de biomasse, la masse foliaire et la masse racinaire avec trois méthodes. La première méthode est basée sur le modèle discret avec le mode de sénescence progressive mentionné dans la section 2.1.2.5. La seconde ainsi que la troisième méthode sont basées sur le modèle continu en résolvant numériquement les équations dynamiques correspondantes avec la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (la méthode d'Heun) respectivement.

Pour l'organogenèse, chaque unité de croissance de la betterave est constituée d'une feuille et d'un pétiole. Ainsi, on a $N_b(k) = N_p(k) = 1$ pour tout k et $N_r(0) = 1, N_r(k) = 0$ pour $k > 0$. Et $T_b = 0$.

Dans tous les scénarios de croissance, on simule pendant 83 cycles de croissance. Les valeurs des paramètres de GreenLab continu pour la betterave sont données dans 2.1. μ est le coefficient empirique lié à l'efficience de radiation (RUE), k est le coefficient d'extinction de Beer-Lambert classique, S_p est le coefficient empirique qui correspond à une surface foliaire caractéristique, c'est un paramètre propre à GreenLab.

TABLE 2.1: Paramèters pour les simulations de croissance de la betterave avec GreenLab discret et GreenLab continu (Lemaire et al. [2008])

Parameter	Value	Unit
μ	16.8	g/MJ
k	0.7	-
S_p	0.023	m^2
e	0.0083	g/cm^2
Q^{seed}	0.003	g
γ	34	$°C.days$
p_b	1	-
p_p	0.842	-
p_r	400	-
a_b	5.4	-
b_b	5	-
a_p	3.96	-
b_p	5	-
a_r	6	-
b_r	3.7	-
τ_b	680	$°C.days$
τ_p	680	$°C.days$
τ_r	4080	$°C.days$
τ^{sen}	1020	$°C.days$

2.2.5 Analyse numérique

Lorsqu'on veut simuler l'évolution de la biomasse d'un organe avec le modèle GreenLab, le choix entre sa version discrète et sa version continue se pose, ainsi que le choix de la méthode numérique dans le cas de GreenLab continu.

Pour illustrer la différence entre ces choix de modèle et de méthode numérique, on considère le cas test virtuel suivant. En appliquant le modèle GreenLab à la betterave avec les valeurs des paramètres donnés précédemment on prend une température constante $\bar{T} \equiv 17$ et $\gamma = 34.days$, ainsi $h = 2$ correspond à un cycle de croissance. On prendra aussi une valeur constante pour PAR interceptée pendant chaque cycle de croissance $\overline{PAR}_{GC}$. Ainsi on a $\overline{PAR}_{day} = \frac{1}{2}\overline{PAR}_{GC}$, le modèle discret et la discrétisation numérique du modèle continu possèdent donc le même pas de temps et les même conditions environnementales. Les simulations par les trois méthodes sont illustrées dans les figures 2.3, 2.4 et 2.5, en faisant varier les valeurs de $\overline{PAR}_{GC}$.

Par souci de simplification dans la description, on adopte la terminologie suivante. On désigne la première phase du développement comme *phase croissante* lorsque la production de biomasse augmente, et la dernière phase du développement comme *phase décroissante*, et enfin *phase saturée* pour la phase intermédiaire lorsque la production de la plante atteint sa saturation.

L'analyse de ces résultats de simulation permet de relever des points intéressants.

1. Pour la production de biomasse accumulée $Q(t)$ (qui correspond à l'intégrale de la courbe de production dans les figures 2.3, 2.4 et 2.5), il y a un écart important entre la méthode RK2 et la méthode d'Euler pendant la phase croissante pour tous les trois cas. Rappelons que lorsqu'on résout l'équation 2.3 sous la forme de:
$$\frac{dQ(t)}{dt} = f(t, Q(t)) \tag{2.18}$$
RK2 donne:
$$Q^{RK}_{t_{n+1}} = Q^{RK}_{t_n} + \frac{k_1 + k_2}{2}h$$
avec $k_1 := f(t_n, Q_{t_n}), k_2 := f(t_n + h, Q_{t_n} + k_1 h)$.
Alors que la méthode d'Euler donne:
$$Q^{E}_{t_{n+1}} = Q^{E}_{t_n} + k_1 h$$

Si l'on note $q_{t_{n+1}} := Q_{t_{n+1}} - Q_{t_n}$ pour la production de biomasse durant le pas de temps $n + 1$ dans les tests, qui est représentée par la courbe de production dans les Figures 2.3 - 2.5.
Si $q^{RK}_{t_n} = q^{E}_{t_n}$, alors:
$$q^{RK}_{t_{n+1}} - q^{E}_{t_{n+1}} = \frac{h}{2}\left[f(t_n + h, y_n + k_1 h) - f(t_n, y_n)\right]$$

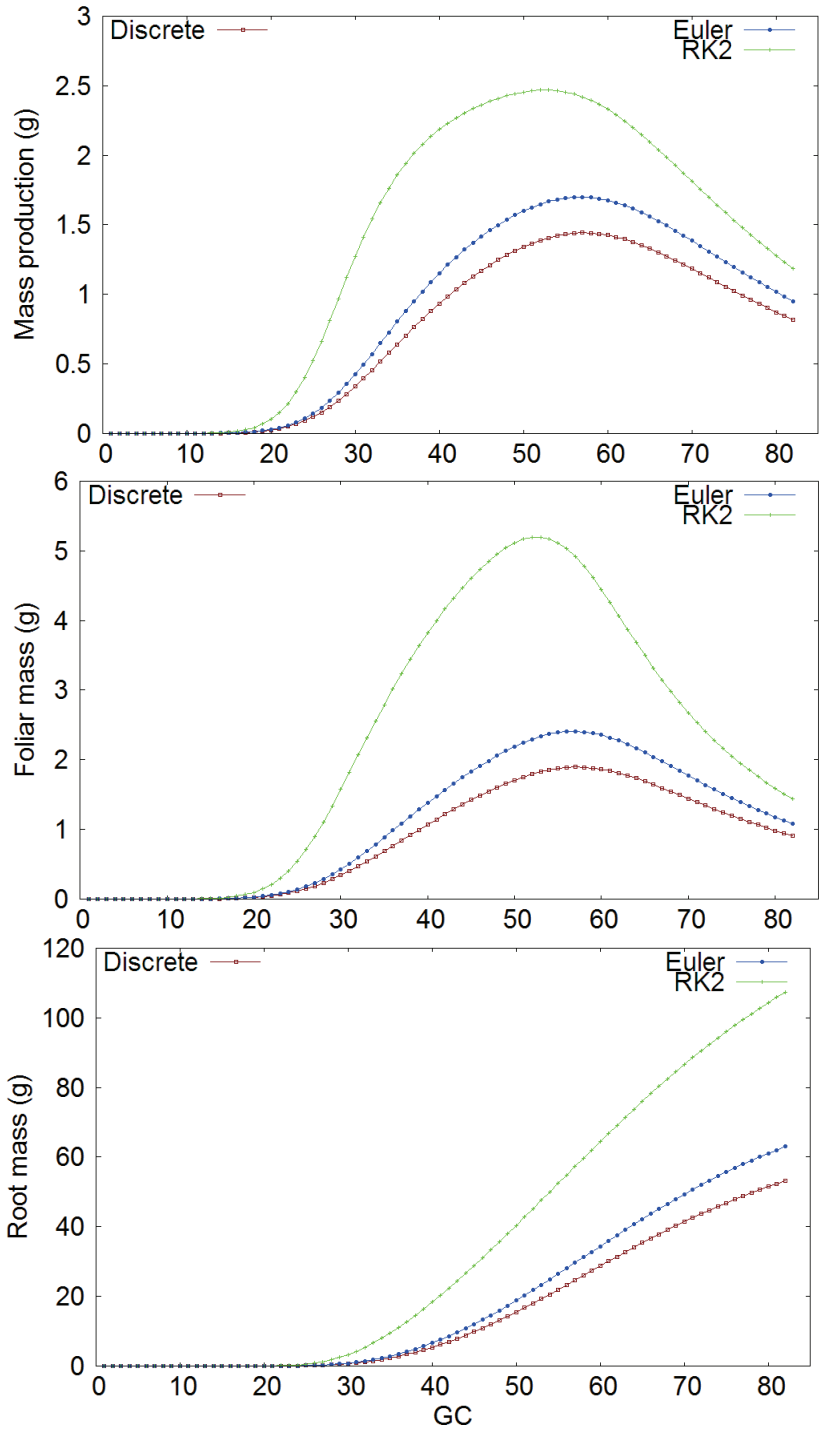


FIGURE 2.3: Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire par cycle de croissance (pas du temps) pour $\overline{PAR}_{GC} \equiv 7.5 MJ/m^2$.

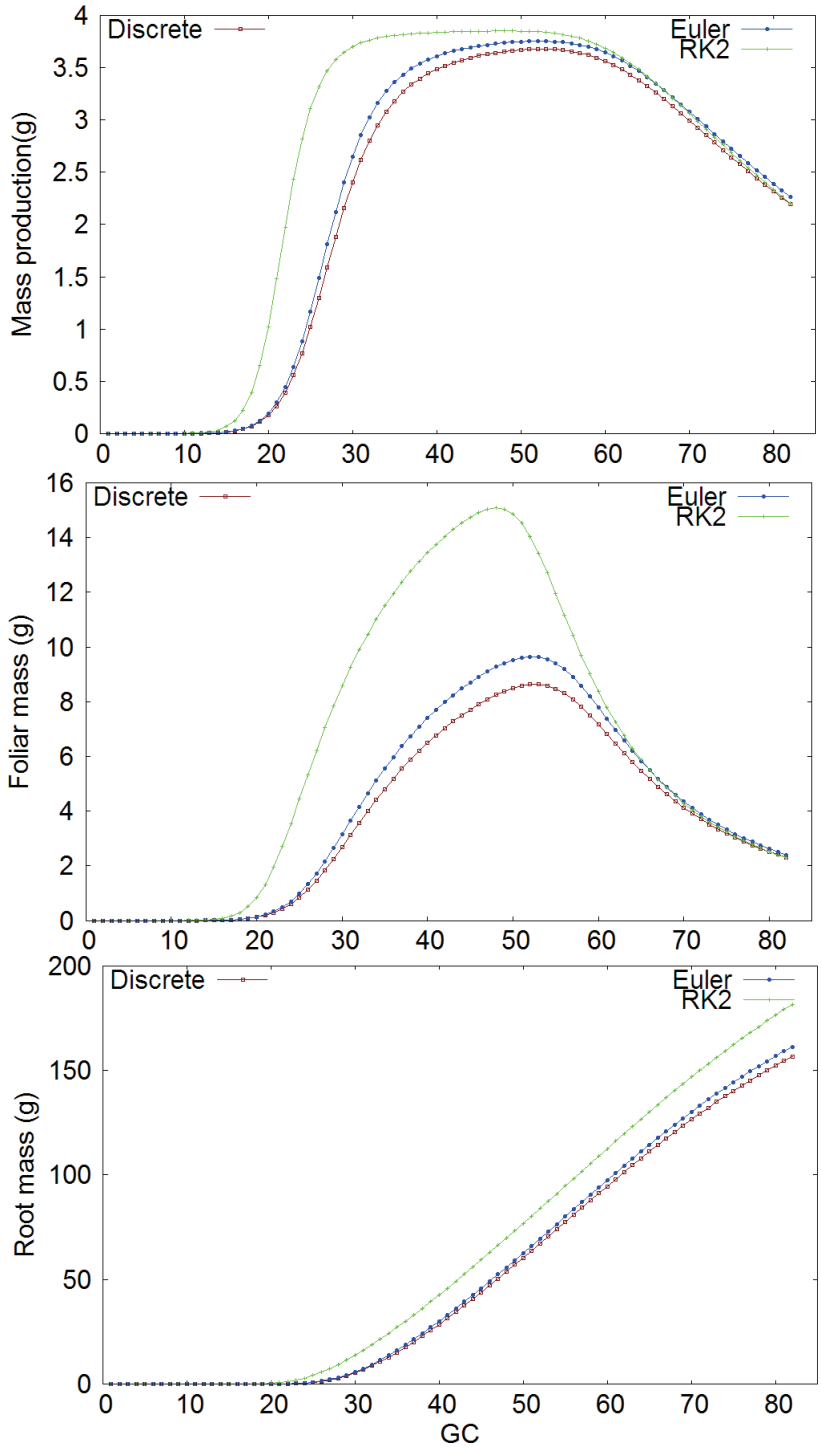


FIGURE 2.4: Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire par cycle de croissance (pas du temps) pour $\overline{PAR}_{GC} \equiv 10MJ/m^2$.

comme f croit en t durant la phase croissante, la production par RK2 croît plus rapidement que la production par Euler. De plus, si la croissance atteint la phase saturée (Figure 2.5), alors par la suite pendant la phase décroissante, la production par RK2 décroît plus rapidement par rapport à la production par Euler, puisque f décroît en t pendant la phase décroissante.

2. Pour la masse foliaire accumulée, comme l'allocation favorise la partie feuille pendant les premiers stades de la croissance, l'écart de production de biomasse entre le résultat par RK2 et celui par Euler pendant la phase croissante se répercute dans l'écart sur la masse foliaire.
3. Pour la masse racinaire, l'écart entre RK2 et Euler est moindre pour les $\overline{PAR}$ plus importants. Ceci s'explique par le fait que durant le dernier stade de croissance, la surface foliaire est suffisamment importante pour donner un taux de production de biomasse $\frac{dQ(t)}{dt}$ constant. En effet, lorsque la valeur de LAI croît au delà de 4, la valeur pour la production de biomasse reste sensiblement constante. Ainsi, il y a peu de différence entre les valeurs générées par RK2 et par Euler. Quant à l'allocation pour la partie racinaire, elle est plus importante durant la dernière phase de croissance, donc la masse racinaire croît presque linéairement pendant la phase saturée (réf. figure 2.5).
4. Il y a peu de différence entre le résultat de simulation donné par la méthode d'Euler et celui donné par le modèle discret, alors que les différences avec les résultats de RK2 sont plus marquantes. En effet, pour calculer la production de biomasse, la formule par la méthode discrète et la formule de discrétisation par Euler coïncident pour ces cas test. Néanmoins, l'allocation est instantanée lorsqu'il s'agit de la méthode d'Euler, alors que pour le modèle discret, la répartition de biomasse est calculée à mi-temps de chaque cycle de croissance.

Simulation avec données réelles

On utilise dans cette simulation des données typiques observées au nord de la France pour $\bar{T}$ et pour $\overline{PAR}_{day}$ pour une durée de croissance standard pour la betterave (qui commence le début d'avril et se termine début d'octobre. Les résultats de simulation sont illustrés dans la figure 2.6 pour 83 cycles de croissance qui correspond à 170 jours dans ce cas de figure. On remarque que dans ce cas réaliste, les valeurs de $\overline{PAR}_{day}$ sont suffisamment grandes pour atteindre la phase saturée.

Pour conclure, on a construit et illustré dans ce chapitre une nouvelle version continue du modèle GreenLab, qui facilite en particulier son couplage avec un modèle de bilan hydrique dans le sol pour la modélisation de l'interaction plante-environnement, qui fait l'objet du chapitre suivant.

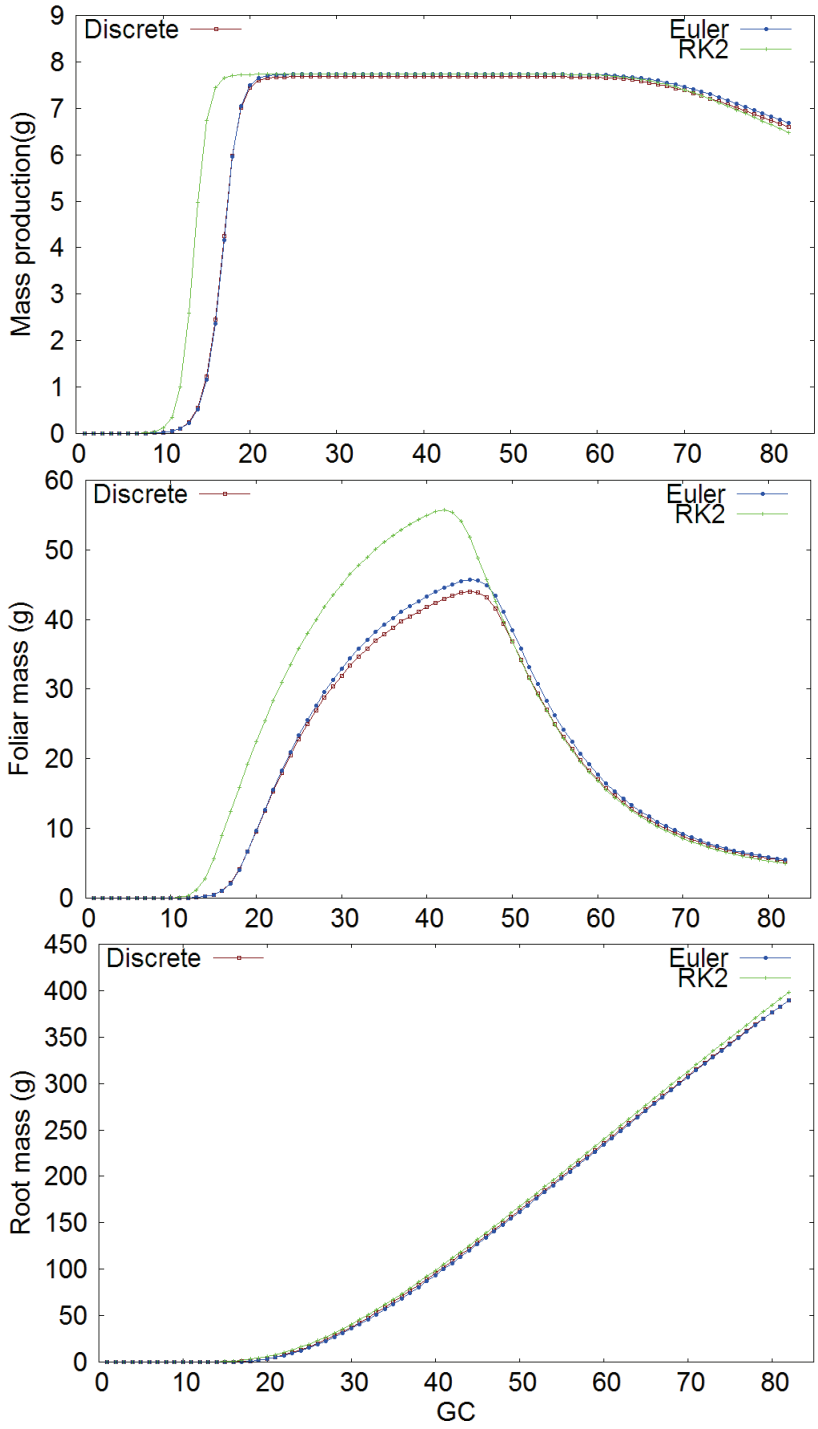


FIGURE 2.5: Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire par cycle de croissance (pas du temps) pour $\overline{PAR}_{GC} \equiv 20MJ/m^2$.

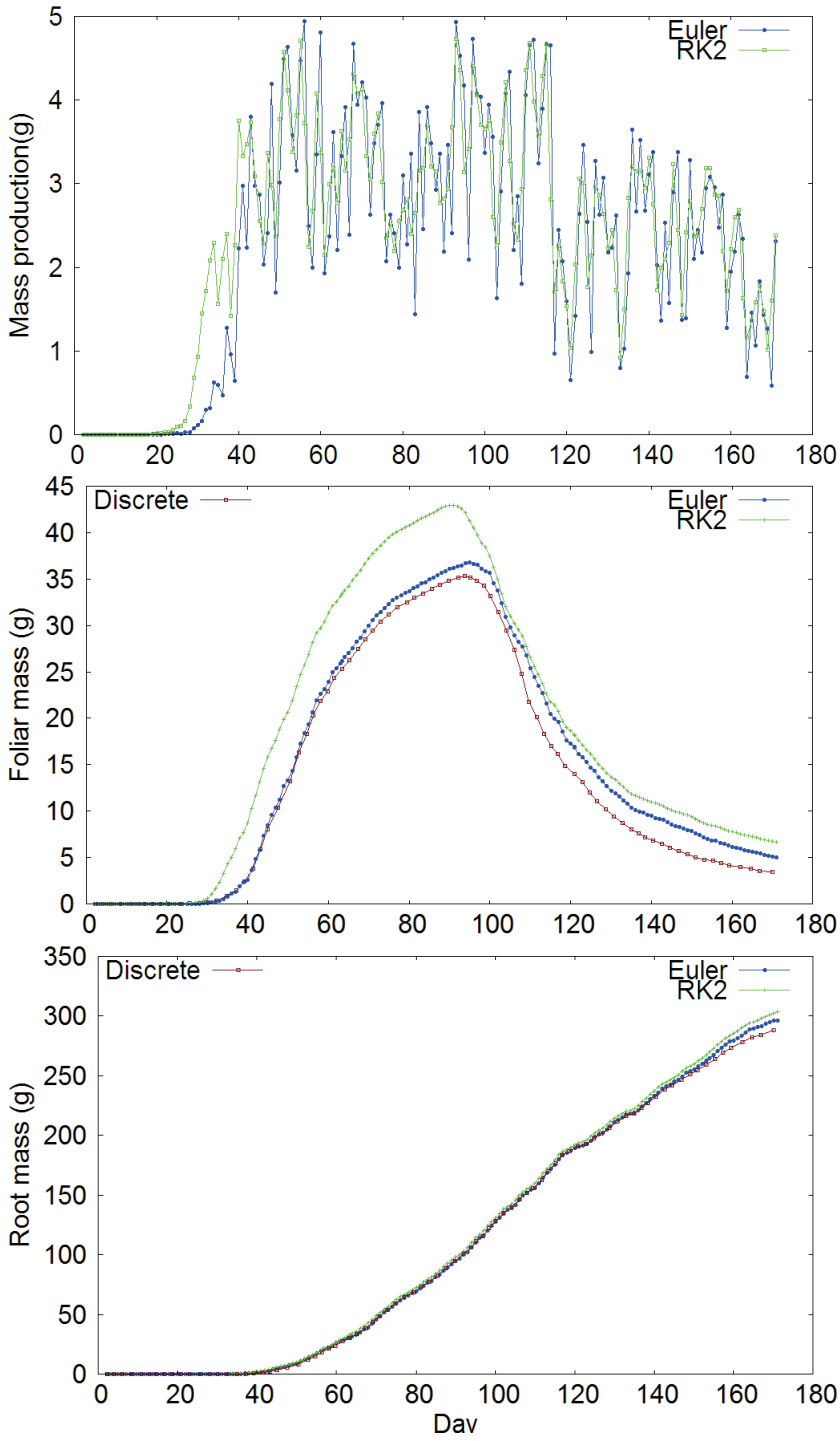


FIGURE 2.6: Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire avec données réelles journalières pour $\bar{T}$ et $\overline{PAR}_{day}$.

Chapitre 3

Modélisation de la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau

3.1 Transfert hydrique sol-plante-atmosphère

Pour une meilleure gestion des ressources en eau en agriculture, il est important de pouvoir simuler la dynamique de l'eau dans le système sol-plante-atmosphère. La problématique de l'eau en agriculture est liée aux conditions météorologiques et à la réserve d'eau dans le sol disponible pour les plantes (Eagleson [1978]). On peut illustrer le cycle de l'eau dans son environnement (sol-atmosphère) par la figure 3.1.

Toute l'eau des précipitations ou de l'irrigation (par aspersion) n'est pas absorbée par le sol: une part est évaporée directement pendant et après la pluie ou l'arrosage, les gouttes d'eau peuvent aussi être interceptées en partie par le feuillage pour ensuite évaporer directement dans l'atmosphère, une partie de l'eau qui atteint le sol peut ruisseler. Les vitesses de ces échanges entre l'atmosphère et le sol impliquant de nombreux facteurs sont difficilement évaluables. En outre, les quantités d'eau impliquées dans certains de ces mécanismes d'échanges sont faibles voire négligeables par rapport à celles infiltrées dans le sol, dans la majorité des cas agricoles (Fischer and Hagan [1965]). Ainsi dans le modèle, on suppose que l'eau de pluie et d'irrigation est quasi entièrement absorbée par le sol, l'évaporation n'intervenant qu'en début de cycle lorsque le développement foliaire est encore limité et de façon plus conséquente en conditions pluvieuses hors cycle cultural.

La consommation en eau de la culture est relative à la quantité d'eau transpirée depuis le sol à laquelle on peut ajouter, la quantité d'eau contenue dans les tissus de la plante. Néanmoins, la quantité d'eau retenue dans les tissus des plantes cultivées représente en général moins de 1% de la quantité totale évaporée durant une saison de croissance normale (Hsiao [1973]). Dans ce qui suit, on va donc négliger cette partie d'eau. Ainsi la consommation en eau d'une culture se réfère à l'eau transpirée par

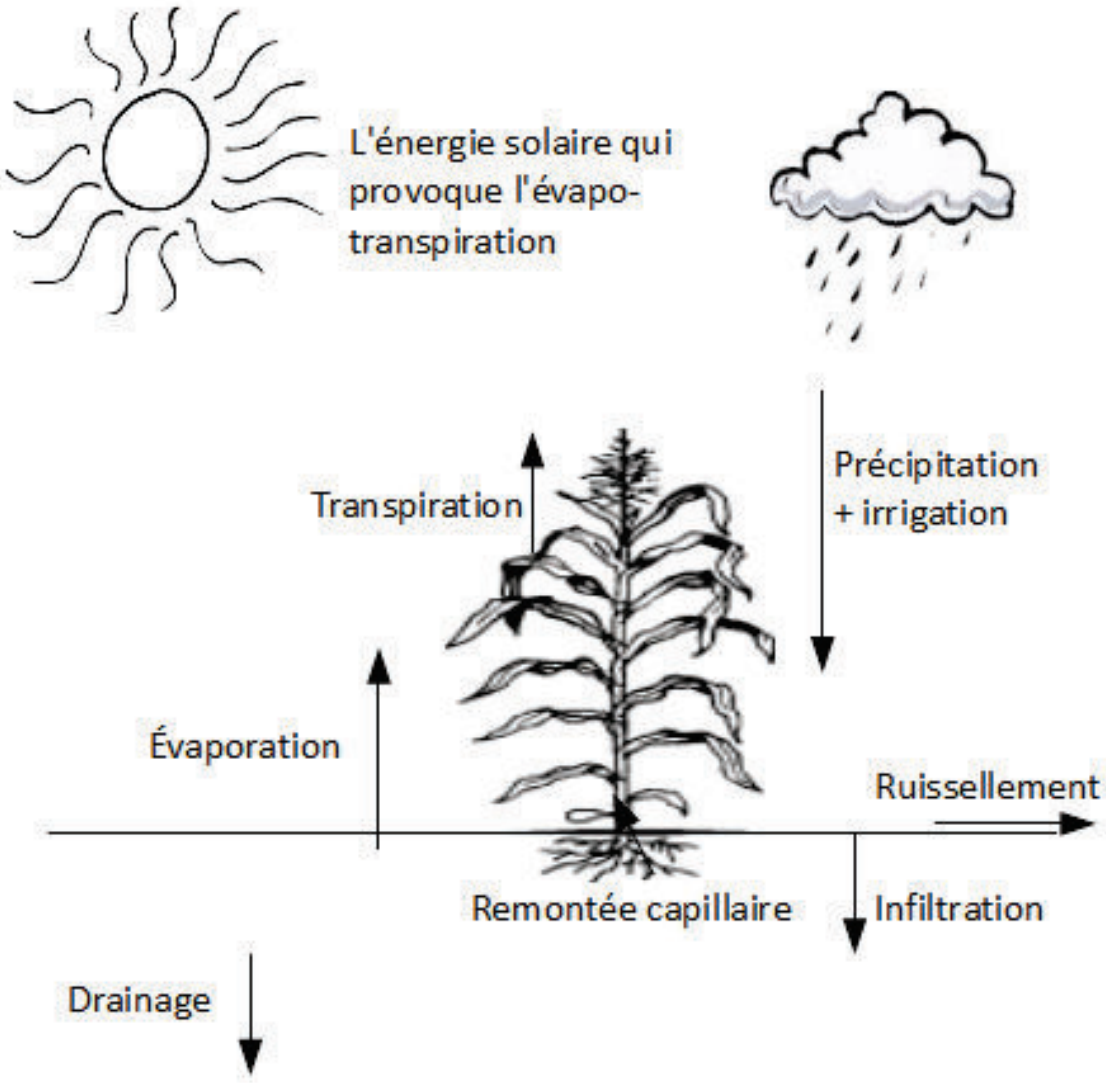


FIGURE 3.1: Le cycle d'eau sol-plante-environnement.

ses tissus. Cependant, en système irrigué, où l'on s'intéresse plus particulièrement à l'évaluation de la demande en eau agricole il convient de rajouter l'évaporation du sol, composante non négligeable du bilan hydrique qui peut représenter 10% à 20% de l'évapotranspiration totale au cours du cycle cultural (Chineke et al. [1996]).

3.2 Développement de la plante et stress hydrique

Il existe différentes grandeurs permettant d'évaluer par la mesure l'état hydrique de la plante, comme le potentiel de base et la conductance stomatique (Schulze et al. [1994], El-Sharkaway and Cock [1984], O'Toole and Cruz [1980], Ludlow et al. [1980]). Cependant ces grandeurs ne sont pas pertinentes ici. Notre approche de modélisation se propose seulement d'établir une relation de cause à effet entre l'état hydrique du sol et les mécanismes de production et d'allocation de biomasse (Kramer et al. [1969]).

3.3 Module sol

Une modélisation précise et robuste du bilan hydrique est toutefois primordiale pour la prédiction du rendement, et l'établissement d'une stratégie efficace d'irrigation, et bien au-delà dans la gestion d'eau à différentes échelles (Lal [1991]). Il est en outre souhaitable que cette modélisation soit la plus générique et la plus opérationnelle qui soit, afin de s'affranchir autant que faire se peut des calibrations locales souvent longues et fastidieuses selon le nombre de paramètres impliqués.

3.3.1 Les réservoirs

Les problèmes d'eau en agriculture résultent à la fois de conditions météorologiques défavorables et(ou) de réserves hydriques du sol peu disponibles ou inaccessibles aux plantes. Le concept de réservoir adopté pour modéliser le devenir de l'eau du sol est à la fois robuste et pertinent pour la modélisation du transfert d'eau dans le système sol-plante-atmosphère (Ritchie [1981], Cowan [1965]). Il peut en outre être aisément couplé à un compartiment régissant la croissance de la plante. Comme évoqué ci-dessus, seule une petite quantité d'eau peut être stockée dans la plante, par rapport à son taux de transpiration. C'est donc essentiellement la quantité d'eau stockée dans l'espace poreux du sol qui permet à la plante de continuer à transpirer pendant plusieurs jours en absence de recharge par la précipitation ou l'irrigation. Cependant, l'accessibilité de l'eau du sol par la plante va dépendre de la quantité d'eau stockée dans le sol. Moins il y a d'eau dans le sol et plus il est difficile pour la plante de la prélever. Il est donc important de pouvoir modéliser ce phénomène.

Le module sol du modèle Pilote est utilisé dans ce travail de thèse pour simuler le bilan hydrique du sol. Le module régit les transferts d'eau au pas de temps journalier, mais son expression discrète peut s'écrire facilement sous forme différentielle. Le bilan

hydrique qui décrit l'évolution du stock dans le sol est unidimensionnel. Le sol est conceptualisé selon trois réservoirs. A partir de la surface, on a successivement le réservoir superficiel ($R1$), le réservoir sous-jacent ($R2$), et le réservoir profond ($R3$).

Dans le modèle Pilote, ces trois réservoirs sont homogènes dans la façon de contenir l'eau, c'est-à-dire la teneur en eau volumique (mm/m) à un point donné varie toujours entre deux valeurs de seuil indépendamment de la profondeur et du réservoir où se situe le point. D'autres modèles comme STICS prennent en compte des capacités au champ et point de flétrissement par différentes zones (Brisson et al. [2008]).

On introduit ainsi un paramètre clé du sol selon ce concept de réservoir, qui est la *réserve utile* (RU). Exprimée en millimètres d'eau par mètre de sol, la RU correspond à la quantité d'eau maximale que le sol peut retenir et restituer à la plante. La RU est donc la quantité d'eau comprise entre l'humidité à la capacité au champ ($\theta_{\max}$) et l'humidité au point de flétrissement ($\theta_{\min}$). En dessous du point de flétrissement, l'eau n'est plus extractible par la plante. Et au delà de cette capacité, l'eau est drainée vers la couche inférieure du sol. On a donc, si θ_i est la teneur en eau volumique du $i-$ème réservoir,

$$\theta_{\min} \leq \theta_i(t) \leq \theta_{\max}$$

$i = 1, 2, 3$.

Ces deux valeurs seuils de la teneur en eau dépendent de la texture du sol Les sols sableux présentent de faibles capacités de rétention en eau, ce qui implique de plus faibles RU. Tandis que les sols à forte proportion de particules fines (limons et argiles) emmagasinent davantage d'eau, en contrepartie, une grande partie de ces réserves en eau restent indisponibles pour les plantes. Un aperçu de ces valeurs en fonction du type de sol est donné dans la figure 3.2.

Notons que pour calibrer ou vérifier l'adéquation du module sol, la teneur en eau ou le potentiel hydraulique doit être mesuré. En effet, l'énergie avec laquelle le sol retient l'eau est exprimée au travers d'une tension. Celle-ci est mesurée en bar à l'aide d'un tensiomètre ou d'une sonde tensio-électrique. La tension ou pression matricielle limite la disponibilité de l'eau pour la plante. Cette mesure nous indique donc l'état hydrique du sol et par là même nous renseigne quant à la disponibilité de l'eau pour la plante.

La profondeur totale des trois réservoirs est P_x

$$P_x = \min\{P_x^{pl}, P_x^{sol}\}$$

P_x^{pl} représente l'enracinement maximal qu'est susceptible d'atteindre la plante, on considère cette profondeur fixe pour une variété de culture (donnée par la littérature ou la mesure), et P_x^{sol} est la profondeur du sol. Le réservoir superficiel a une profondeur fixe ($P_s = 0.1m$ quelle que soit la variété). Quant à la frontière entre le réservoir sous-jacent et le réservoir profond, elle évolue en fonction de l'enracinement (P_r). Pour

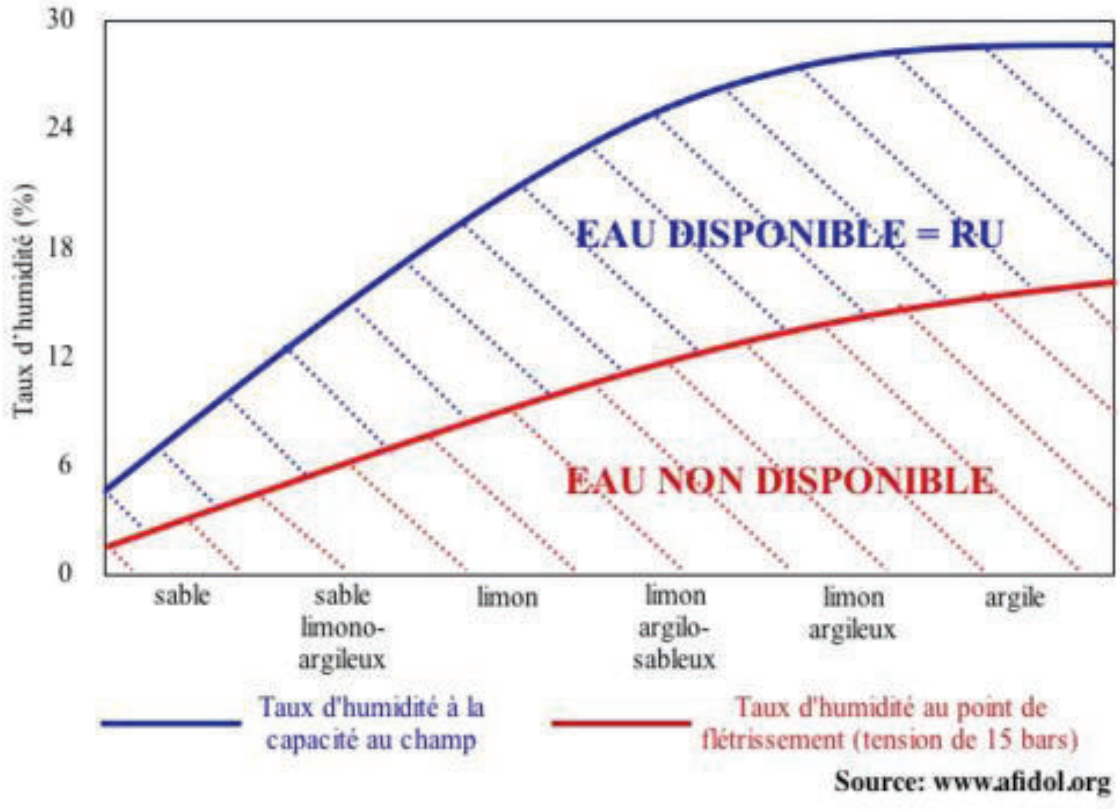


FIGURE 3.2: Réserve utile selon la texture du sol.

simplifier, on suppose dans un premier temps que la racine progresse à une vitesse constante V_r avant d'atteindre la profondeur maximale.

$$P_r(t + \Delta t) = P_r(t) + V_r \Delta t$$

$$P_r(t) \leq P_x, \forall t$$

On a alors la teneur totale en eau de chaque réservoir

$$R_i(t) = \theta_i(t) P_i(t)$$

avec

$$\begin{aligned} P_1(t) &= P_s \\ P_2(t) &= \max(0, P_r(t) - P_s) \\ P_3(t) &= \min(P_x - P_s, P_x - P_r(t))) \end{aligned}$$

L'évolution de la teneur en eau de chaque réservoir est alors donnée en faisant le bilan des quantités d'apport et de perte. Ainsi, la précipitation et l'irrigation alimentent le réservoir superficiel, de manière exclusive, c'est-à-dire qu'on ignore la partie d'eau non absorbée par le sol, perdue par exemple par ruissellement. Le réservoir sous-jacent est alimenté par le drainage depuis le réservoir superficiel et le réservoir profond est lui-même alimenté par le drainage du réservoir sous-jacent ou réservoir superficiel lorsque l'enracinement n'a pas encore atteint le seuil du réservoir superficiel.

Le transfert d'eau entre les réservoirs est donc essentiellement du drainage. Quant à l'échange avec l'extérieur, l'apport d'eau dans le sol est la précipitation et l'irrigation. La perte d'eau de ces trois réservoirs se scinde en deux parties. D'une part, une partie d'eau est évapotranspirée dans l'atmosphère par le sol et la plante. D'autre part l'eau peut être drainée du réservoir racinaire vers la couche du sol en dessous, lorsque le niveau d'eau dépasse la capacité au champ. Cette partie d'eau n'est pas totalement perdue puisqu'elle peut en partie ou en totalité recharger le réservoir profond.

On a donc le système d'équations qui exprime les évolutions respectives des trois réservoirs.

$$\begin{aligned} \frac{dR_1(t)}{dt} &= P(t) + I(t) - T_{p1}(t) - E_s(t) - d_1(t) \\ \frac{dR_2(t)}{dt} &= d_1(t) + \theta_3(t) V_r - T_{p2}(t) - d_2(t) \\ \frac{dR_3(t)}{dt} &= d_2(t) - \theta_3(t) V_r - d_3(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

On note P pour la précipitation, I pour l'irrigation, T_{pi} pour la transpiration depuis le $i-$ième réservoir, E_s pour l'évaporation du sol, d_i pour le drainage depuis le $i-$ième réservoir vers celui en-dessous.

3.3.2 Evapotranspiration

A l'évidence l'estimation de l'évapotranspiration a une importance primordiale pour avoir une simulation fiable du bilan hydrique. Lorsque les réservoirs disposent d'assez d'eau pour les cultures, l'évapotranspiration est en grande partie déterminée par les variables climatiques (Thornthwaite et al. [1957]). Cette quantité d'eau évapotranspirée par le sol et la plante lorsque l'eau n'est pas un facteur limitant. Pour un climat donné, l'évapotranspiration potentielle peut être assimilée à l'évapotranspiration maximale (ETM).

La quantité réellement évapotranspirée (ETR) par la plante et le sol peut ne pas être égale à l'évapotranspiration maximale possible au cours du cycle, soit en raison d'un faible indice foliaire, soit en raison d'un déficit hydrique de la zone racinaire. Notre modélisation du bilan hydrique repose sur le concept du coefficient cultural pour déduire l'ETR à partir de l'évapotranspiration de référence (gazon) ET_0, qui est à son tour déduite de la formule de Penman-Monteith (Allen et al. [1998]). Le coefficient cultural (K_c) est un paramètre étroitement lié au développement foliaire, son évolution suivant parfaitement celle du LAI.

3.3.3 Répartition d'évapotranspiration

Pour avoir les quantités évaporées et transpirées, il convient d'estimer la fraction d'énergie interceptée par la canopée et les facteurs carctérisant l'état hydrique du sol (Ritchie [1972], Tanner and Jury [1976]). Cette approche s'est révélée efficace, en utilisant les mesures du LAI pour estimer la fraction d'énergie interceptée (Al-Khafaf and PJ Williams [1978], Kanemasu et al. [1976], Monteith [2006]).

Cependant, on n'a pas toujours le matériel et le temps requis pour disposer de suffisamment de mesures du LAI. Dans ce cas, il est utile de disposer d'un modèle fiable permettant de le simuler.

Différentes façons de déduire le LAI à partir de données expérimentales ont été exploitées (Ritchie [1981], Marshall and Waring [1986]). La méthode basée sur la plante individu consiste à obtenir la surface foliaire d'une plante en faisant la régression avec d'autres variables qui sont plus faciles à mesurer, comme la hauteur de la plante, longueur d'une certaine feuille, le nombre de feuilles et le diamètre de la tige (Gower et al. [1999]). On peut aussi se placer à un autre niveau d'échelle. Certaines études ont été menées pour estimer le LAI par télédétection (Price [1993]). Allen and Richardson [1968] ont proposé une possibilité théorique pour télé-détecter le LAI en se basant sur la différence des facteurs de réflexion entre la canopée et le sol. Wiegand et al. [1979] a démontré que ces indices végétaux sont bien corrélés avec le LAI en vue de l'intégrer dans un modèle d'évapotranspiration lorsque le LAI est supérieur à 0.3. Il est évident que ces moyens de contourner la mesure directe du LAI ne sont ni économes, ni suffisamment satisfaisants en terme de précision.

Après avoir vérifié que le modèle simulait de façon satisfaisante le LAI, l'option de la modélisation pourra être adoptée pour suivre son évolution. Comme il s'agit d'un indice reflétant l'état de croissance de la plante, on détaillera ce point dans la section 3.4. A chaque instant, à partir du LAI, on peut donc estimer les quantités d'eau évaporée et transpirée, respectivement par le sol et la plante, en combinant l'information relative à l'enracinement, et à l'état hydrique du sol.

Selon le modèle Pilote (Mailhol [2001]), l'évaporation du sol est modélisée de façon simplifiée, mais elle s'avère être robuste et est consistante avec des théories plus élaborées (Hillel [1980], Campbell [1985]). Lorsque le réservoir superficiel n'est pas épuisé (c'est-à-dire sa teneur en eau est au-dessus du point de flétrissement permanent), l'évapotranspiration a lieu uniquement dans $R1$. Dans ce cas, la plante ne subit pas de stress hydrique et transpire au régime maximal, le régime de l'évaporation du sol n'étant que sous le contrôle du LAI via le coefficient de partage qu'on note par C_p (Novak [1981], Varlet-Grancher et al. [1982], Sepaskhah and Ilampour [1995]), on a

$$C_p(t) = 1 - \exp(-kLAI(t))$$

k étant le coefficient d'extinction qui varie à priori selon la variété (Kutílek and Nielsen [1994]). Pour simplifier, on adopte une valeur moyenne $k = 0.7$ dans le modèle Pilote, proposé aussi par Ashktorab et al. [1994], mais cela peut être adapté selon les cultures.

La transpiration réelle de la plante dépend non seulement du coefficient de répartition, mais aussi directement de l'état de croissance de la plante. Cette dernière dépendance est traduite par le coefficient cultural (Allison [1993]):

$$K_c(t) = K_{c\max}(1 - \exp(-LAI(t)))$$

$K_{c\max}$ est la valeur maximale de K_c, qui dépend de la culture mais aussi de conditions locales traduisant l'importance des effets d'advection (Kato and Kamichika [2006]).

A l'aide de ces deux paramètres, on peut expliciter la transpiration de la plante et l'évaporation du sol selon son état hydrique. Durant le cycle cultural, l'évaporation du sol a lieu uniquement dans le réservoir superficiel, alors que l'eau transpirée par la plante provient soit du réservoir superficiel, soit du réservoir racinaire, la contribution du réservoir racinaire n'intervenant que de façon très atténuée hors période végétative.

$$Tp = Tp_1 + Tp_2 \tag{3.2}$$

- Dans $R1$
  - Lorsque
    $$\theta_1(t) > \theta_{\min}$$
    La quantité d'eau réellement transpirée par la plante est la quantité de transpiration dans $R1$.
    $$Tp(t) = Tp_1(t) = ET_0(t) \cdot K_c(t) \cdot C_p(t)$$
    Et pour l'évaporation du sol, on a
    $$Es(t) = ET_0(t) \cdot (1 - C_p(t))$$

– Lorsque

$$\theta_1(t) = \theta_{\min}$$

on a

$$Tp_1 = Es(t) = 0$$

– Dans $R2$
  – Lorsque $R1$ est disponible, c'est-à-dire

$$\theta_1(t) > \theta_{\min}$$

la plante ne transpire pas dans $R2$

$$Tp_2(t) = 0$$

  – Lorsque

$$\theta_1(t) = \theta_{\min} \text{ et } \theta_2(t) > \theta_{\min}$$

On a

$$Tp = Tp_2 > 0$$

Pour déterminer Tp_2, on va distinguer deux cas selon le niveau d'eau du réservoir racinaire. On introduit alors le concept de *réserve facilement utilisable* qui correspond au seuil de remplissage en dessous duquel on considère que la plante est sujette au stress hydrique, et donc transpire à un régime inférieur à la transpiration maximale (Mailhol et al. [2004]). Si on note θ_{fu} la réserve facilement utilisable, et $\theta_u = \theta_{\max} - \theta_{\min}$ la réserve utile. Alors, on a, référence faite dans Doorenbos and Kassam [1979].

$$K_{ru} = \frac{\theta_{fu}}{\theta_u}$$

On peut retrouver dans la littérature la valeur de ce paramètre qui peut varier entre 0.5 et 0.67, et donc en déduire la valeur de θ_{fu}. Notons que la valeur de θ_{fu} est déterminante dans le calcul de transpiration depuis le réservoir sous-jacent, car elle représente le seuil pour le passage de régime de transpiration sous stress hydrique. Concrètement,
  – lors $\theta_2(t) - \theta_{\min} \geqslant (1 - K_{ru})\theta_u$, la plante transpire à la vitesse normale, comme il n'y a pas d'évaporation depuis le réservoir sous-jacent, uniquement le coefficient cultural intervient dans le calcul. On a

$$Tp_2 = Kc \cdot ET_0$$

  – si $\theta_2(t) - \theta_{\min} < (1 - K_{ru})\theta_u$, la plante transpire à une moindre vitesse. La vitesse décroît linéairement selon le rapport entre la teneur en eau volumique et la réserve facilement utilisable. On a

$$Tp_2 = Kc \cdot ET_0 \cdot \frac{\theta_2(t) - \theta_{\min}}{(1 - K_{ru})\theta_u}$$

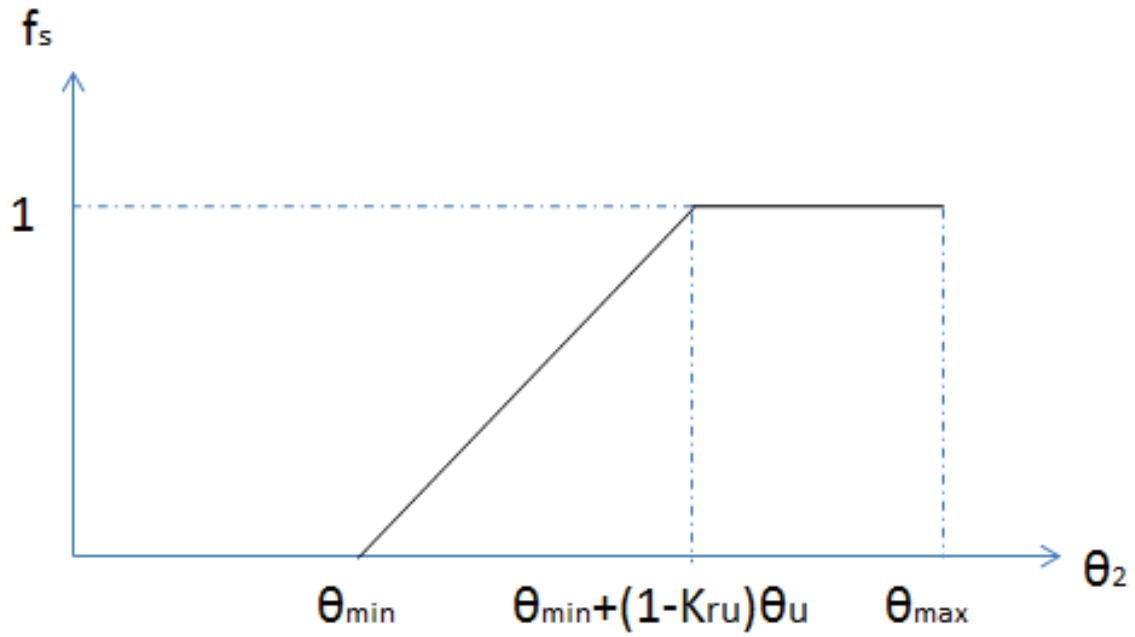


FIGURE 3.3: La fonction stress qui ajuste la transpiration dans le réservoir racinaire.

En somme, on a, en rassemblant les deux cas,

$$Tp_2 = Kc \cdot ET_0 \cdot f_s(t)$$

avec

$$f_s(t) = \min[1, \frac{\theta_2(t) - \theta_{\min}}{(1 - K_{ru})\theta_u}] \tag{3.3}$$

On illustre cette fonction de stress par la figure 3.3, qui est une traduction simplifiée de la relation entre le taux d'évapotranspiration et la teneur volumique en eau du sol (réf. figure 3.4).

3.4 Module plante

Après avoir exploré la modélisation du bilan hydrique de Pilote, on se consacre à la modélisation de la croissance de la plante dans cette section. Remarquons que le module sol par Pilote qui donne à la fois une modélisation robuste du bilan hydrique et une fonction de stress hydrique qui pourrait être facilement intégrée dans un modèle couplé plante-sol. Toujours dans l'objectif de coupler un modèle sol avec un modèle plante, on est confronté à des nouveaux défis dans la modélisation de la partie plante.

Dans le chapitre précédent, on a présenté une version continue du modèle GreenLab, qui permet une description fine de la mise en place de différents composants

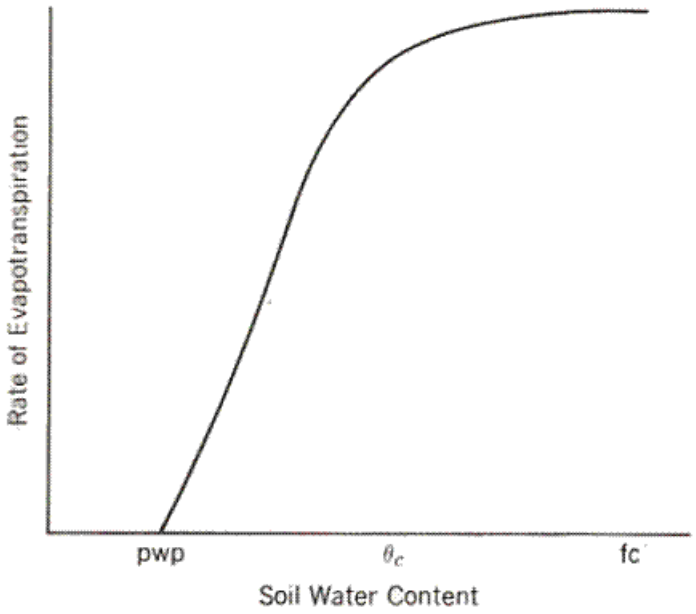


FIGURE 3.4: Taux d'évapotranspiration en fonction de la teneur en eau volumique du sol.

de la plante au niveau de l'organe. Mais ce modèle contient un nombre relativement grand de paramètres, qui peut rendre le calage difficile compte tenu du fait que les prélèvement doivent se faire sur plusieurs traitements. Parallèlement, le modèle Pilote simule également la croissance de la plante moyennant une courbe de LAI qui intègre le stress hydrique. Néanmoins l'estimation du rendement est basée sur l'indice de récolte. Si on cherche une modélisation plus dynamique des composantes du rendement, on voudrait se tourner vers un modèle structure-fonction comme GreenLab. Pour ces raisons, on propose également une modélisation à un niveau intermédiaire qui consiste essentiellement à décomposer une plante individuelle en compartiments, et à modéliser de façon continue l'allocation de biomasse vers ces compartiments.

Ainsi, on présente ces trois niveaux de modélisation pour la partie plante, dans l'ordre croissant au niveau de la complexité de modélisation: le sous-modèle de Pilote, un modèle de compartiments et GreenLab. Ces différents choix de modélisation représentent des alternatives qui s'adaptent à différentes finalités et à différents niveaux de contraintes liés à la collecte des données expérimentales.

3.4.1 Le sous-modèle de Pilote

En tant que modèle de culture, Pilote a pour objectif majeur de prédire le rendement (Rd). Pour ce faire, on calcule la matière sèche totale (MST_{tot}) produite tout au long du cycle de croissance, l'indice de récolte (IR) n'étant utilisé que pour estimer le rendement en grain final. On a alors

$$Rd = MST_{tot} \cdot IR \tag{3.4}$$

Pilote est un modèle qui simule le rendement en fonction du stress hydrique subi par la plante tout au long de son développement. Pour cela, on recourt à un modèle de croissance de la biomasse totale et à un indice de stress déduit de l'état hydrique du sol utilisé pour pénaliser cette croissance.

Dans le module plante de Pilote, l'indice foliaire LAI joue un rôle majeur. En effet, le LAI est l'indicateur phare de l'état de développement de la plante, qui témoigne de manière visible des potentialités productives (quantité de matière sèche) de la plante au cours de sa croissance.

Contrairement aux FSPMs, le noyau du modèle Pilote consiste à simuler l'évolution du LAI de manière à prendre en compte l'effet du stress hydrique sur cette évolution. On suppose en outre que tous les facteurs de production autres que l'eau sont à leur optimum. Il s'agit d'une courbe du LAI empirique avec trois paramètres à caler. L'expression du LAI du $j-$ème jour est donnée par

$$LAI_j = LAI_{\max}\{(\tfrac{\tau(j)-t_s}{t_m})^{\beta} \exp[\tfrac{\beta}{\alpha}(1-(\tfrac{\tau(j)-t_s}{t_m})^{\alpha})] - (1-WSI^{\lambda})\} \tag{3.5}$$

$\tau(j)$ est le temps thermique depuis le semis (réf. équation 2.1).

Le LAI croît lorsque $\tau(j)$ dépasse une valeur seuil t_s, ce seuil correspond à la température de levée, qui est fixée à 100 degrés-jours pour la plupart des grandes cultures. $LAI_{\max}$ est la valeur maximale du LAI pour une culture croissant sous conditions non limitées, on obtient cette valeur soit par la mesure, soit à partir de la littérature. t_m représente la somme des températures nécessaire pour atteindre le $LAI_{\max}$. Comme $LAI_{\max}$, t_m est déductible de la littérature ou par la mesure. Pour la plupart des cultures et en particulier le maïs, sa valeur correspond au cumul de températures entre semis et floraison femelle.

Les paramètres α, β et λ sont à caler. α, β donne l'allure de la courbe lorsqu'il n'y a pas de stress. En particulier le paramètre α permet de simuler à la fois la croissance et la sénescence. Pour ce faire, le modèle assure un passage de $\alpha = \alpha_1$ à $\alpha = \alpha_2$ lorsque $\tau(j)$ dépasse t_m. Le calage de α_2 peut être séparé de celui de α_1 plus β. En effet, c'est la valeur de α_2 qui permet de moduler la vitesse de sénescence, par exemple une valeur faible de α_2 ($\alpha_2 < \alpha_1/30$)) simule une sénescence lente. Quant à λ, c'est un paramètre empirique qui traduit l'aversion de la plante au stress hydrique. La pratique du modèle tend à montrer qu'on pourrait adopter une valeur constante de 1.25 pour λ indépendamment du type de culture. L'indice de stress est donné par

$$WSI = \frac{\sum_{j-10}^{j} Tp(j)}{\sum_{j-10}^{j} Tp_{max}(j)} \tag{3.6}$$

La description dans cette section concerne uniquement la modélisation de la croissance pour la partie aérienne de la plante, la partie souterraine qui se réfère au développement racinaire étant modélisée de manière simple dans la section 3.3.1.

Dans d'autres approches de modélisation (détaillées dans les parties suivantes), cette façon de modéliser la partie souterraine de la plante peut soit être reprise par souci de simplification, soit être remplacée par une approche plus souple et mécaniste qui permet d'établir un lien avec l'état du développement de la partie aérienne. Par exemple, et plus particulièrement pour les cultures d'hiver, Pilote fait en sorte que l'atteinte de l'enracinement maximal coïncide avec celle du $LAI_{\max}$. Concernant les grandes cultures, toute l'énergie est mobilisée à ce stade pour assurer la croissance des organes aériens.

Enfin pour obtenir le rendement par l'équation (3.4), on se sert de la valeur du LAI simulée par (3.5) dans le calcul de la matière sèche totale produite puis, à maturité, de l'indice de récolte pour calculer le rendement final en grain (fruit). La matière sèche totale, est calculée selon:

$$MST(j) = MST(j-1) + RUE \cdot WSI^{\lambda} \cdot PAR(j)(1 - \exp(-kLAI(j)) \quad (3.7)$$

$j = j_0, \ldots, j_{mat}$.

Où WSI est l'indice de stress calculé par le module sol. j_0 est le jour de semis, et j_{mat} est le jour qui correspond à la maturité de la culture, en supposant que le temps thermique $\tau(j_{mat})$ soit fixe et donné par l'observation ou la littérature.

Dans cette formulation, la valeur potentielle de matière sèche totale est affectée par un indice de stress dont l'exposant a la même signification et la même valeur que celle utilisée dans l'expression du LAI (3.5).

L'évaluation de l'indice de récolte est réalisée selon:

$$IR = \min[IR_{pot}; IR_{pot} - a_r(LAI_{st} - LAI_{av})] \quad (3.8)$$

Dans cette équation, IR_{pot} est l'indice de récolte potentiel, une donnée de la culture pour une densité de plantation standard, celle correspondant au $LAI_{\max}$. LAI_{av} est le LAI moyen calculé sur une période critique (liée à l'impact du stress hydrique sur le rendement) dont les bornes correspondent à des stades phénologiques définis en somme de températures (notées t_{s_1}, t_{s_2}). On a

$$LAI_{av} = \frac{1}{N_j} \sum_{j=\tau^{-1}(t_{s_1})}^{\tau^{-1}(t_{s_2})} LAI(j) \quad (3.9)$$

t_{s_1} peut être par exemple le début de l'épiaison et t_{s_2} correspondre au stade grain pâteux. Ce LAI_{av} mémorise en quelque sorte le trajet de la plante au

cours d'éventuelles périodes de stress qui se solderont par un impact sur IR_{pot}. LAI_{st} est la valeur seuil de LAI_{av} en dessous de laquelle l'indice de récolte décroît linéairement selon le paramètre a_r depuis sa valeur potentielle, a_r étant un paramètre de calage pour la variété considérée.

Calage des paramètres de la courbe LAI

Etant donné l'importance de la simulation de l'évolution de LAI dans la prédiction de rendement par Pilote, la paramétrisation de la courbe LAI est cruciale. Pour ce faire, on choisit souvent de mesurer la valeur de LAI à plusieurs dates réparties toute au long du cycle de croissance avec un appareil spécifique (Chen et al. [1997]). Dans ce paragraphe, on propose un alternative pour le suivi de l'évolution de cet indice.

En effet, on a collecté des échantillons de maïs pour le calibrage du modèle GreenLab. Pour cela, on a donc prélevé des plantes à différents stades de la croissance, on a décomposé ces échantillons par organe, et mesuré la masse de ces organes, on a également scanné la surface des feuilles par plante. Hormis l'objectif de calibrer le modèle GreenLab, ces mesures peuvent aussi être servies pour reconstituer la courbe de LAI et donc pour calibrer les paramètres de LAI selon Pilote.

Les données expérimentales sont obtenues sur maïs pour l'année 2009 à Lavalette, on illustre ici comment on peut reconstituer la courbe du LAI, et ensuite caler les paramètres du LAI selon le modèle Pilote. Cette méthode pourrait être à titre de comparaison, une alternative à la paramétrisation de la méthode traditionnelle, qui consiste à prendre les mesures de LAI avec le LI-COR LAI-2000 (LI-COR [1989], Deblonde et al. [1994]). Cette approche de reconstitution de la courbe LAI et de paramétrisation comprend cinq étapes.

1. **Détermination du phyllochrone**
   On a 6 points pour le nombre de phytomères par date et pour 6 dates. On remarque la linéarité entre les trois premiers points et entre les trois derniers points qui correspond à deux rythmes de croissance, cette dichotomie a été discutée dans Lemaire et al. [2008] pour la betterave. Néanmoins, on fera l'hypothèse que le phyllochrone est constant et égal à la valeur de la première phase. Ainsi, en faisant la régression linéaire sur les 3 premières dates qui se situent pendant la phase d'organogenèse, on obtient le phyllochrone qui vaut 53.19 degrés-jours (3.5). A l'aide des données de température journalière, on a le temps thermique et le cycle de croissance correspondant pour chacune des 6 dates. L'origine de l'abscisse correspond au semis, et le temps d'initiation est négatif car plusieurs métamère sont préformés dans la graine.

2. **La courbe de surface foliaire**
   Pour la surface foliaire, on dispose des images scannées ou photographiées

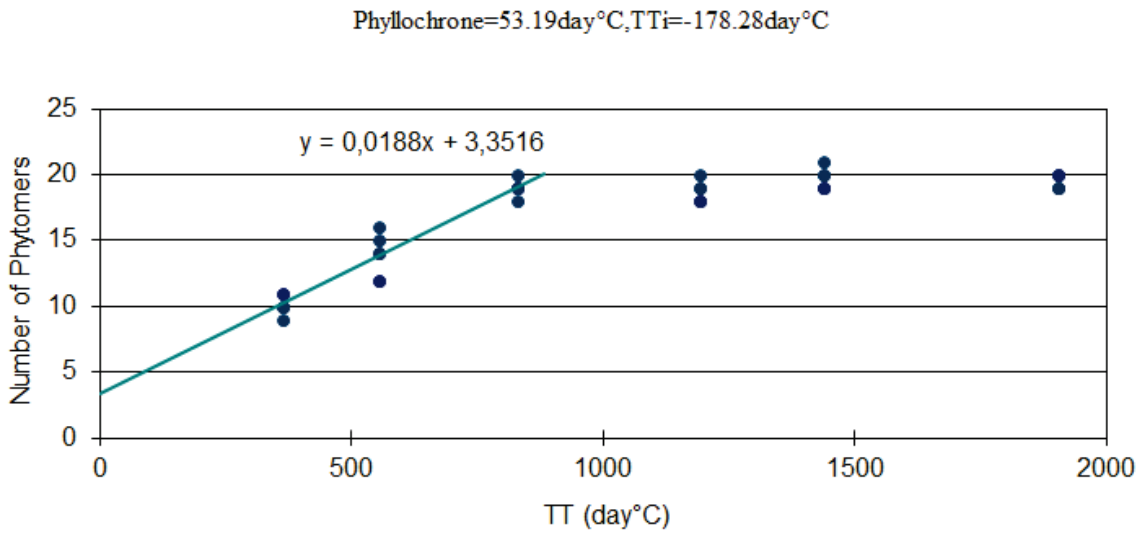


FIGURE 3.5: Nombre de phythomères en fonction du temps thermique.

pour une plante par date (5 dates au total) et pour tous leurs organes découpés et étalés. On mesure les surfaces de limbe à l'aide du logiciel *ImageJ* (Abràmoff et al. [2004]). Les surfaces foliaires totales de ces 5 plantes nous donnent une courbe expérimentale de surface foliaire (3.6).

3. **Détermination de *MPA* (Mass per Unit Area) globale**
   On a mesuré les masses fraîches des plantes organe par organe. En divisant les masses des limbes par les surfaces foliaires mesurées, on a une série de MPA individuelles qui montrent une forte variation à la fois au sein d'une seule plante à une date donnée et par rapport au stade de croissance (3.7).

   La variation au sein d'une seule plante à une date donnée est due à la différence d'âge chronologique et de rang (remarquons que l'écart se réduit en phase décroissante de LAI). La re-mobilisation de masse vers l'épi est sans doute la cause principale de la variation par rapport au stade de croissance.

   En groupant ces points par rapport aux rangs des feuilles, on remarque une forte similitude de forme pour ces courbes, ce qui traduit une organisation globale de la plante (3.8). Sauf pour les feuilles des premiers rangs pour lesquelles on dispose de peu de données, et dont la détermination du rang manque probablement d'exactitude à causes des premiers entrenœuds courts.

   Malgré l'écart sur l'ensemble des MPA individuelles, la linéarité de la masse d'une feuille par rapport à sa surface est bien marquée si on sépare les points en deux groupes, un pour les 2 premières dates, et l'autre pour les 3 dates postérieures pendant la période de re-mobilisation (3.9).

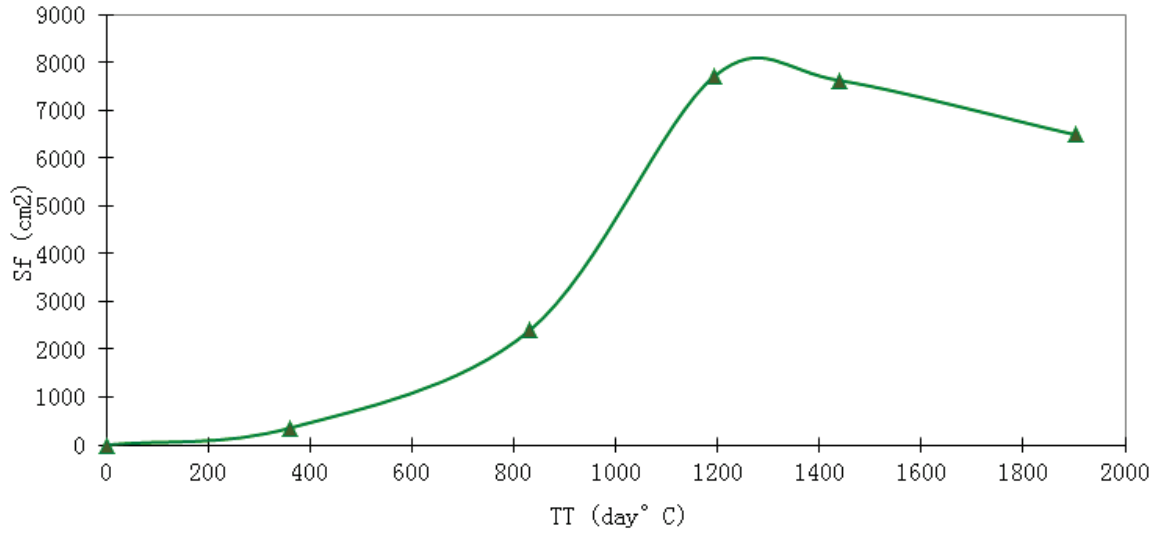


FIGURE 3.6: L'évolution de la surface foliaire d'une plante en fonction du temps thermique.

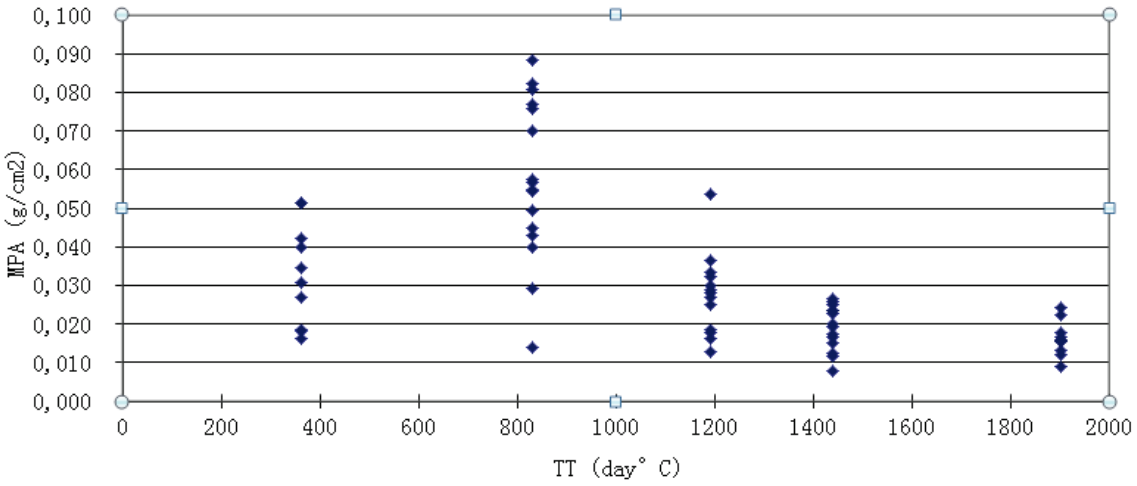


FIGURE 3.7: MPA de six plantes individuelles à cinq dates au long du cycle.

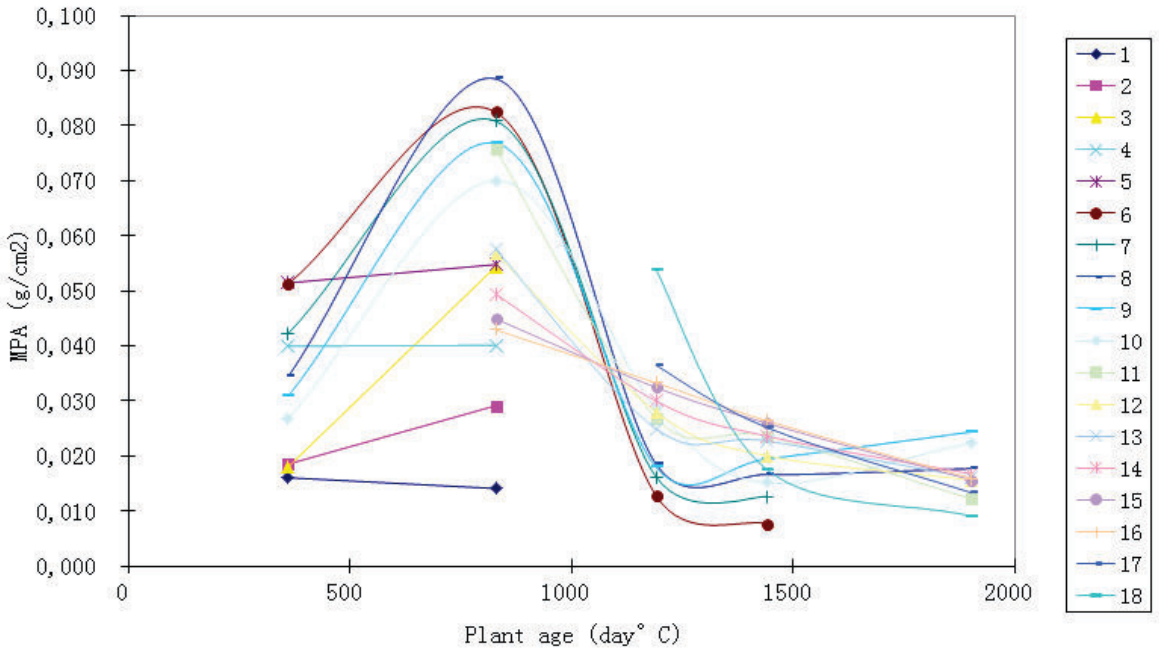


FIGURE 3.8: L'évolution de MPA d'une feuille individuelle en fonction du rang.

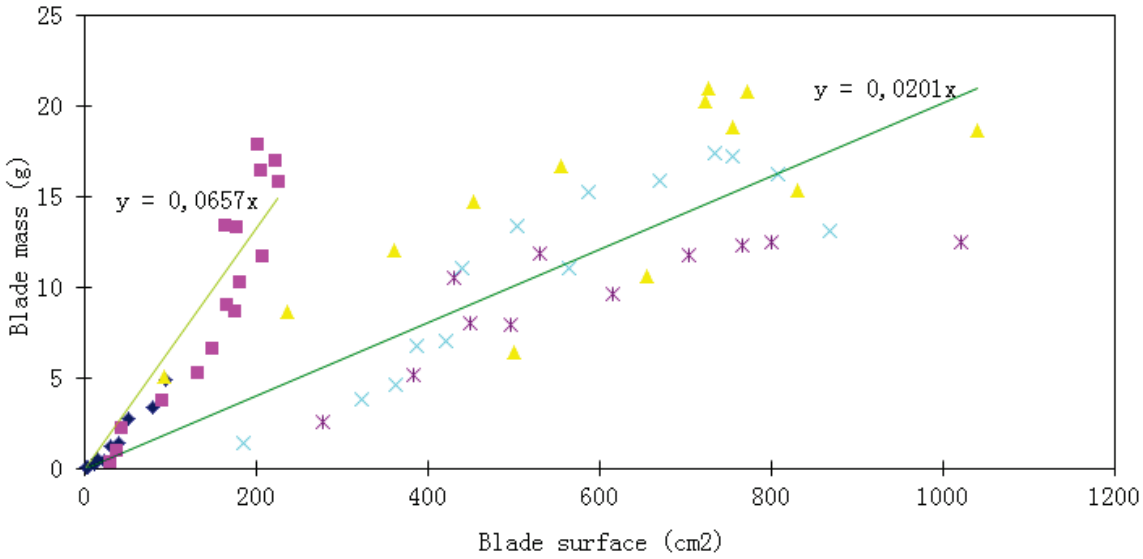


FIGURE 3.9: MPA global(g/cm2) = 0.0657 pour la première phase; = 0.0201 pour la phase postérieure.

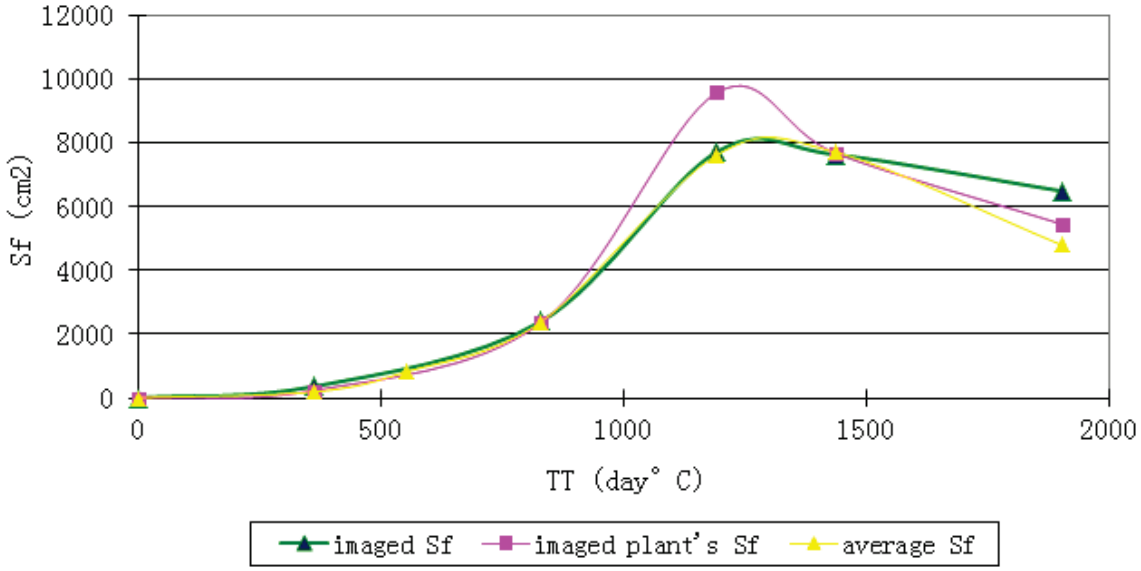


FIGURE 3.10: Comparaison de l'évolution de Sf obtenue avec trois méthodes différentes.

4. **Construction de la courbe de Sf avec les MPA globales**
   On peut aussi obtenir deux courbes de Sf autres que celle mesurée, en divisant soit le poids de la plante scannée (ou photographiée), soit le poids moyen des six plantes à chaque date, par les deux valeurs de MPA Globales respectivement pour les trois premières et les trois dernières mesures (3.10).

   On remarque que la courbe de Sf globale est très proche de celle de Sf mesurée. L'écart important entre le rose et le jaune pour la quatrième mesure est dû à la sous-estimation de MPA, puisqu'on est encore à ce stade en phase de décroissance pour MPA. Globalement la courbe du Sf moyen est en dessous des deux autres.

5. **Calage de la courbe LAI avec la formule de Pilote**
   En se donnant la densité qui vaut 5 plantes par m^2 ($d = 5$), et 1300 degrés-jours pour le temps thermique où le $LAI_{\max}$ est atteint, on calibre la courbe de LAI de Pilote avec les points de Sf en vert par exemple ($LAI = Sf \cdot d$ avec les valeurs de Sf en m^2), ce qui donne $\alpha 1 = 3.68, \alpha 2 = 0.96, \beta = 4.82, LAI_{\max} = 4.68$ (3.11).

3.4.2 Un modèle par compartiment

Dans cette section, on introduit un nouveau modèle de plante qui a un niveau de complexité intermédiaire entre le module plante de Pilote, et le modèle GreenLab. Ce modèle se révèle pertinent lorsqu'on ne dispose que d'un jeu de données insuffisant pour calibrer un modèle plante-sol avec un module de plante issu d'un FSPM comme GreenLab, et lorsqu'en même temps on voudrait modéliser les principaux processus physiologiques de la plante de façon dynamique, en

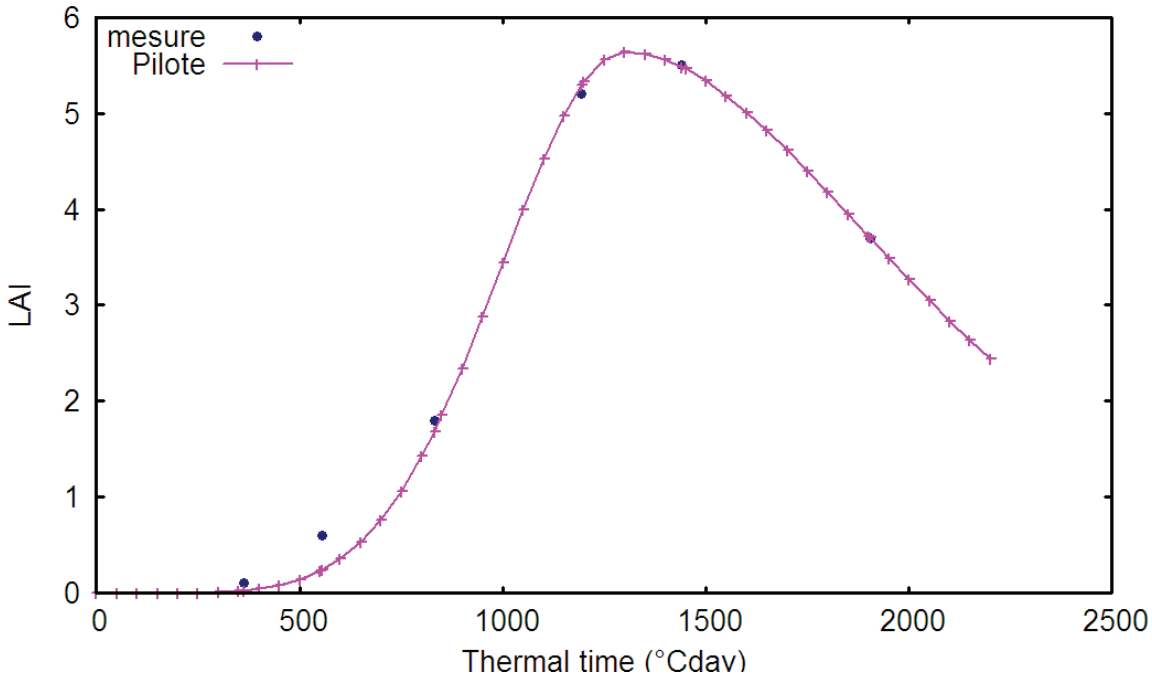


FIGURE 3.11: Les mesures de LAI et sa courbe avec la paramétrisation correspondante.

particulier l'allocation. Par ailleurs, nous introduisons l'effet du stress hydrique dans le modèle à trois niveaux: d'une part sur l'efficience, dans l'équation de production (Larcher [2003]); d'autre part au niveau de la fonction d'allocation; et finalement pour la sénescence qui est accélérée en cas de stress hydrique.

3.4.2.1 Les trois compartiments

Le choix de décomposer la plante en trois compartiments dont un compartiment de grain (ou de fruit) est suffisant lorsqu'on ne cherche qu'à prédire le rendement, sans se soucier de l'évolution de biomasse de chaque organe. En outre, considérer la partie feuille de la plante comme un compartiment est indispensable, car ce compartiment détermine la quantité de biomasse produite par photosynthèse. Ainsi qu'un troisième compartiment pour le reste de la plante.
On utilisera la fonction de stress qui pourrait être fournie par le modèle Pilote par example en simulant le bilan hydrique du sol, donné par l'équation 3.3.

3.4.2.2 Production

Le mécanisme pour la production de biomasse totale étant toujours basé sur la loi de Beer, on introduit un coefficient λ_{prod} afin de pouvoir nuancer l'impact du stress hydrique sur la production selon la variété. Ainsi, on a

$$q(t) = RUE \cdot PAR(t) \cdot f_s(t)^{\lambda_{prod}} \cdot (1 - \exp(-kLAI(t))) \qquad (3.10)$$

λ_{prod} pourrait prendre des valeurs différentes avant et après l'atteinte du LAI max, pour des cultures dont la différence de sensibilité par rapport au stress hydrique est remarquée durant ces deux phases (Mastrorilli et al. [1995]).

3.4.2.3 Allocation

La modélisation de l'allocation de biomasse vers les différents composants d'une plante individu est un caractère propre des FSPM (Evers et al. [2008]). En effet, pour ce modèle de compartiment qui vise un suivi dynamique de l'impact du stress sur les biomasses accumulées des trois compartiments, l'allocation joue un rôle essentiel.

Pour le maïs, l'allocation de biomasse se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on décompose d'abord une plante en compartiment épi et un compartiment correspondant à la partie végétative. Dans un deuxième temps, on décompose la partie végétative en compartiment feuilles et le reste.

A noter que même si pour le bilan hydrique nous définissons une vitesse de propagation du front racinaire, il n'y a pas de modélisation du compartiment racinaire. L'efficience dans l'équation de production correspond donc à une efficience partielle, ne considérant que la partie hors sol. Cette approche est classique, en particulier pour GreenLab maïs (Guo et al. [2006], Ma et al. [2008]).

1. **Compartiment pour la récolte et partie non récoltée**
   De la biomasse produite à chaque pas de temps, la proportion de biomasse allouée à la partie pour la récolte est donnée par une courbe du type logistique en intégrant dynamiquement le facteur du stress hydrique.

   En prenant maïs comme exemple, si on note Q_c pour la masse accumulée de l'épi, alors sa variation est

   $$\frac{dQ_c}{dt} = q(t)\gamma_{cob}(\tau(t))$$

   $\tau(t)$ donne le temps thermique du temps calendaire t, et γ_{cob} est la fonction qui représente la proportion de biomasse allouée au compartiment d'épi. On choisit de modéliser cette proportion par une généralisation de la fonction logistique.

   En effet, la fonction logistique de Verhulst, dont la forme générale est représentée par l'équation 3.11,

   $$f(t) = K\frac{1}{1 + a\exp(-rt)} \tag{3.11}$$

   est très largement utilisée dans la modélisation, et plus particulièrement en écologie (Reed and Pearl [1927],Roughgarden [1979]).

Notons également qu'à partir de la calibration des relations sources-puits dans GreenLab (Guo et al. [2006], Ma et al. [2008]), on peut reconstituer l'historique d'allocation aux différents compartiments. La courbe du ratio entre la biomasse allouée à l'épi et la biomasse produite peut être bien modélisée par une courbe de type logistique.

La fonction logistique permet également d'intégrer l'impact de stress hydrique de façon cohérente. La fonction de proportion γ_{cob} est donnée par la forme variante de la fonction logistique,

$$\gamma_{cob}(\tau(t)) = \frac{1}{1 + a_{cob} \exp\left(-\frac{b_{cob}}{\tau_2 - \tau_1}\left(\tau(t) - \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{f_s(t)^{\lambda_{cob}}}}}$$

Remarquons que cette fonction est définie par rapport au temps thermique $\tau(t)$. τ_1 est la somme de température correspondant à l'apparition de l'épi, et τ_2 est celle correspondant au moment d'atteinte de $LAI_{\max}$, leurs valeurs sont données par la littérature. a_{cob} et b_{cob} sont les paramètres de la fonction logistique. λ_{cob} est un paramètre pour moduler l'effet de stress sur l'allocation de biomasse vers le compartiment de l'épi.

La forme de la fonction logistique assure que pour tout t, tel que $\tau(t) < \tau_1$, $\gamma_{cob}(\tau(t))$ est proche de 0 et que pour tout t, tel que $\tau(t) > \tau_2$, $\gamma_{cob}(\tau(t))$ est proche de 1. En effet, on peut considérer qu'au delà de $LAI_{\max}$, la matière est presque entièrement allouée à l'épi.

On peut illustrer l'impact du facteur de stress sur cette fonction par un cas test simple.

Soit sur une durée qui va jusqu'à 2000 degrés-jours, on prend $\frac{1}{f_s(t)^{\lambda_{cob}}} = 1.2$, si $t \in [500, 700] \cup [900, 1100] \cup [1200, 1500]$, et $\frac{1}{f_s(t)^{\lambda_{cob}}} = 1$, sinon. Ce cas contient donc trois périodes de stress d'une intensité constante. Alors on obtient la courbe de λ_{cob} en comparaison avec le cas où il n'y a pas de stress, dans la figure 3.12.

On remarque que l'apparition de stress pénalise l'allocation de biomasse vers le compartiment d'épi en terme de proportion, et on revient à la courbe de proportion par défaut (sans stress), lorsque la période de stress se termine, ce qui correspond au comportement souhaité.

2. **Deux compartiments pour la partie non récoltée**
   Après avoir séparé un compartiment pour la partie destinée à la récolte, on divise ensuite la partie non récoltée en deux compartiments, dont un compartiment feuilles, et un compartiment pour le reste.

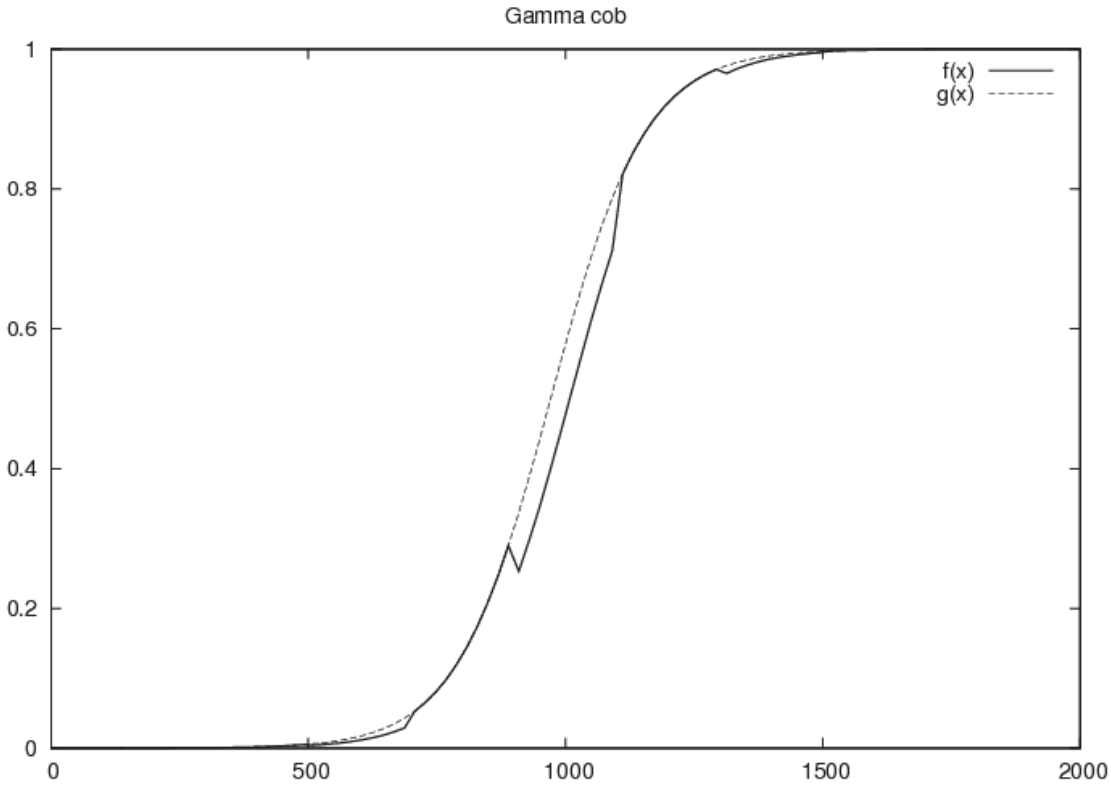


FIGURE 3.12: Fonction de proportion pour l'allocation de biomasse vers le compartiment épi dans le cas sans stress ($f(x)$) et dans un cas de stress ($g(x)$).

En effet, c'est le compartiment feuilles qui donnera la quantité de matière verte. Dans un premier temps, on calcule la quantité de biomasse allouée à ce compartiment selon un coefficient de proportionnalité constant.

Si on note $Q_{g_{acc}}$ pour la masse accumulée des feuilles (sans sénescence), on a

$$\frac{dQ_{g_{acc}}}{dt} = q(t)(1 - \gamma_{cob}(\tau(t)))\gamma_g$$

En effet, on a choisi de supposer que ce coefficient de ratio γ_g soit constant, selon les observations expérimentales.

3.4.2.4 Sénescence

De la masse accumulée des feuilles sans sénescence $Q_{g_{acc}}$, on doit soustraire la partie sénescente pour avoir la masse de la partie verte qui participe à la photosynthèse, et donc qui donnera la valeur de LAI.

On note Γ_{sen} pour la proportion de la partie sénescente par rapport à $Q_{g_{acc}}$, Q_g pour la masse verte accumulée. L'évolution de $Q_{g_{acc}}$ et de Q_g est décrite en fonction du temps thermique. On note également $\tau_f = \tau(t_f)$ pour le temps thermique de la fin du cycle, alors on a

$$Q_g(\tau) = Q_{g_{acc}}(\tau)\left(1 - \Gamma_{sen}\left(\frac{g(\tau)}{\tau_f}\right)\right) \tag{3.12}$$

Γ_{sen} est modélisé par la fonction de répartition de la loi bêta, avec un changement de temps d'intégration potentiellement contrôlé par le stress hydrique. Soit

$$\Gamma_{sen}(z) = \int_0^z f_{\alpha,\beta}(x)dx$$

où $f_{\alpha,\beta}$ est la densité de la loi Bêta de paramètres α, β,

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}}$$

la fonction g permet de modéliser l'accélération du temps d'intégration, qui traduit le fait que lorsque le stress hydrique apparait, le processus de sénescence foliaire est accéléré (Hall et al. [1984], d'Oro and Trippi [1987]). La valeur de la fonction g est calculée de façon successive. Notons τ_s le premier moment où le stress hydrique apparaît, c'est à dire

$$\tau_s = \tau(\inf\{t : f_s(t) < 1\})$$

Alors on a pour tout $\tau \in [0, \tau_s]$

$$g(\tau) = \tau$$

et pour tout $\tau \in]\tau_s, \tau_f]$

$$\frac{dg(\tau(t))}{dt} = \frac{T(t)}{f_s(t)^{\lambda_{sen}}}$$

$T(t)$ étant la température du jour t, et λ_{sen} le coefficient qui module l'effet du stress hydrique sur l'accélération de la sénescence foliaire.

Notons que la notion de biomasse *accumulée* est importante dans la définition de $Q_{g_{acc}}$ et de Q_g, elle permet de relier les deux grandeurs de façon simple et cohérente avec l'équation 3.12, en introduisant une fonction de proportion globale Γ_{sen} pour la sénescence.

Enfin, on retrouve la valeur du LAI en supposant que la masse foliaire surfacique (MPA) est constante, on a donc

$$LAI(t) = \frac{Q_g(\tau(t))}{MPA}.$$

Notons qu'une version proche de ce modèle a été développé pour la betterave, avec des fonctions log-normale pour l'allocation et la sénescence (Baey et al. [2012]).

3.4.3 Le modèle GreenLab

En tant que modèle de croissance structure-fonction, GreenLab permet de décrire de manière fine le développement de la plante au niveau des organes et leur croissance. Il offre un niveau de précision supérieur aux deux niveaux de modélisation précédents. La version continue du modèle a déjà été présentée dans la section 2.1.

3.5 Les modèles plante-sol

L'enjeu de modéliser l'interaction plante-sol en couplant un modèle de plante avec un modèle de sol est multiple. Il s'agit de retrouver dans le modèle résultant de ce couplage à la fois deux modules fonctionnels et une mise en relation efficace des deux modèles.

Dans les deux sections précédentes, on a présenté un sous-modèle de sol issu du modèle Pilote, ainsi que trois façons de modéliser la croissance de la plante; le module plante de Pilote, un modèle de plante par compartiment et le modèle GreenLab continu. On peut donc combiner ce module sol avec un de ces modules de plante. On obtiendra ainsi trois modèles couplés différents pour le système plante-sol.

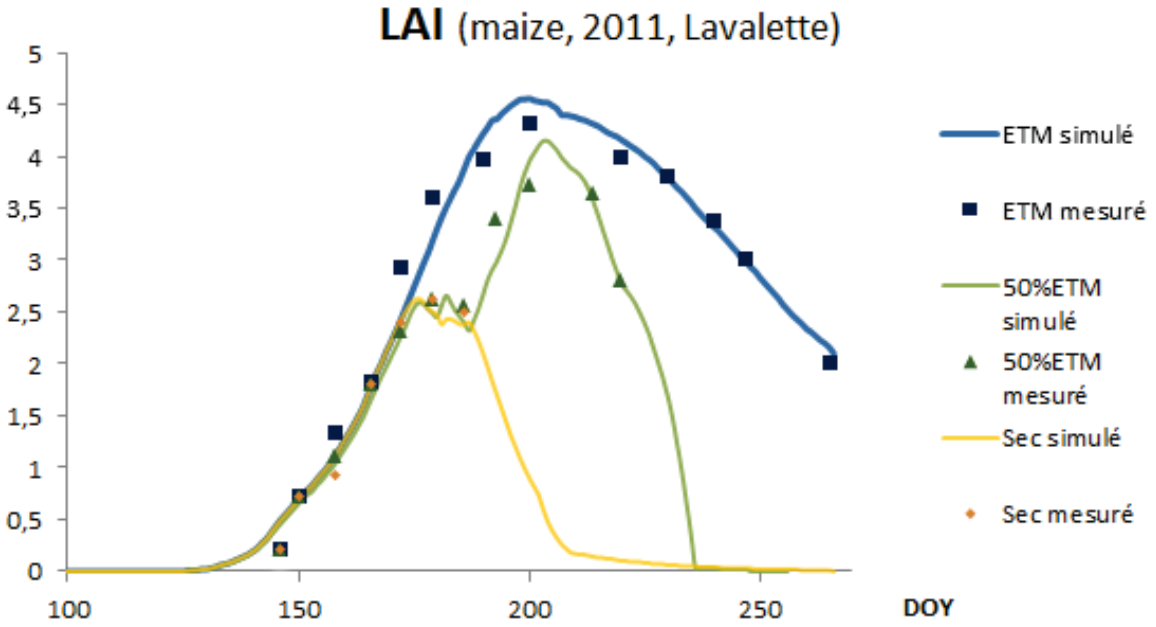


FIGURE 3.13: les valeurs simulées (par Pilote) et mesurées de LAI pour trois traitements hydriques (à l'ETM, à 50%ETM, et sans irrigation) pour le maïs en 2011 à Lavalette.

3.5.1 Pilote

En tant que modèle de production végétale, Pilote a l'avantage d'être très robuste et de contenir un nombre assez restreint de paramètres à caler (Mailhol et al. [1997b],Khaledian et al. [2009b]). On a déjà présenté le modèle en deux parties complémentaires: son module sol (3.3) et son module plante (3.4.1). L'objectif de Pilote est donc de prédire le bilan hydrique et le rendement en se basant sur la simulation du LAI. La figure 3.13 est un exemple qui illustre la performance de Pilote pour simuler la courbe du LAI relatif à des traitements contrastés vis à vis de l'irrigation.

3.5.2 GreenLab-Pilote

Le modèle Pilote peut également être couplé avec le modèle GreenLab. En utilisant le bilan hydrique du sol de Pilote, le modèle couplé permet d'évaluer le stress hydriques impactant la production. D'autre part, contrairement à Pilote, dans le modèle couplé avec le modèle GreenLab (qui est un modèle du type structure-fonction), on peut décrire de façon fine la mise en place architecturale de la plante (de Reffye et al. [2003], Cournède et al. [2006]). Néanmoins, le modèle GreenLab classique repose sur l'hypothèse que la lumière est le seul acteur limitant (Cournède et al. [2008]).

Or, les répercussions du stress hydrique sont fortes au niveau architectural (sénescence, MPA (la Surface Spécifique Foliaire qui correspond à la surface de

feuille réalisée par masse de matière sèche), établissement du LAI...), et il est donc primordial pour un modèle structure-fonction de bien prendre en compte l'interaction avec ressource en eau. La formulation dynamique du modèle de couplage permettra également la mise en œuvre des méthodes de contrôle optimal de l'irrigation pour favoriser telle ou telle composante du système (les grains ou fruits plus particulièrement).

Les deux modèles Pilote et GreenLab, sont très complémentaires de ce point de vue. En particulier, on calcule la transpiration de la plante en utilisant le LAI obtenu dynamiquement par la mise en place architecturale de GreenLab, et en prenant en compte le stress hydrique estimé selon Pilote. La quantité transpirée permettra ensuite d'évaluer la matière sèche produite et de remettre à jour, par allocation de la biomasse, l'architecture de la plante et par là même le LAI. Les composantes du rendement pourront être obtenue simplement par GreenLab qui évalue dynamiquement la biomasse de chaque organe.

Il est également intéressant de remarquer que l'idée de coupler ces deux modèles, GreenLab et Pilote, provient à l'origine d'un besoin d'étendre le domaine d'application (le cas de GreenLab, pour simuler la croissance des plantes sous contrainte hydrique), ou d'améliorer les performances des modèles (le cas de PILOTE, pour se passer de l'utilisation de l'indice de récolte).

Dans ce modèle couplé, les variables environnementales dont on a besoin sont la température (le temps thermique détermine le rythme du développement structurale de la plante), le PAR et les précipitations (le taux de production de biomasse est calculé par rapport à la radiation absorbée et affecté par le stress hydrique).

Le modèle Pilote qui calcule un indice de récole en fin de cycle sur la base d'un indice de récolte réel calculé empiriquement à partir d'un indice de récolte potentiel (l'indice de récolte potentiel étant fixé à priori en fonction du variétal). Au contraire, le couplage Pilote-GreenLab doit permettre un suivi de l'évolution de cet indice de récolte selon des bases plus fonctionnelles ou mécanistes, ce qui devrait légitimer des apports d'eau ciblés aux cours du cycle de croissance par la mise en œuvre de techniques de contrôle optimal.

D'un côté on doit avoir un module de plante qui donne une description du processus de la croissance de la plante avec le juste niveau de détail. C'est-à-dire qu'on peut extraire du module de plante de l'information pertinente sur l'état de plante, pour pouvoir la communiquer au module sol. Réciproquement, on doit pouvoir aussi extraire de l'information concernant le stress hydrique à partir de l'état du sol, et la communiquer au module plante.

Comme décrit dans la section 2.1, les différentes grandeurs caractéristiques de la plante peuvent se déduire de la masse sèche accumulée par les feuilles. Par

conséquent, afin d'avoir une description complète du système dynamique plante-sol, on peut adopter comme vecteur d'état

$$x = (Q_b, R_1, R_2, R_3)$$

ou bien de manière équivalente

$$x = (LAI, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

ce choix d'alternatif sera reconsidéré plus loin dans le cadre de l'optimisation de l'irrigation.

Comme la sénescence foliaire fait partie de l'évolution de la masse foliaire, a fortiori, elle fait aussi partie de l'évolution du système plante-sol. La modélisation de l'interaction plante-sol par le couplage des modèles GreenLab-Pilote peut donc se résumer à la résolution d'un système à retard à l'aide du vecteur d'état $x = (Q_b, R_1, R_2, R_3)$. On a donc en combinant 2.15 et 3.1,

$$\begin{cases} dQ_b(t) &= \mathbf{F}(t, Q_b(t), Q_b(\eta(t)), R_2(t)) \\ dR_1(t) &= f_1(t, Q_b(t), R_1(t), u(t)) \\ dR_2(t) &= f_2(t, Q_b(t), R_1(t), R_2(t), R_3(t)) \\ dR_3(t) &= f_3(t, Q_b(t), R_2(t), R_3(t)) \end{cases}$$

avec la variable $u = I$ pour l'irrigation qui sera considérée comme la variable de contrôle. On peut expliciter l'écriture des fonctions f_1, f_2, f_3 en incluant le

passage de l'évapotranspiration dans le réservoir superficiel à la transpiration dans le réservoir racinaire.

$$f_1(t, x, r_1, u) = P(t) + u - d_1(t) - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(r_1) ET_0(t) \left(1 - \exp\left(-\frac{kd}{e}x\right)\right) + \exp\left(-\frac{kd}{e}x\right)$$

$$\begin{aligned} f_2(t, x, r_1, r_2, r_3) &= d_1(t) + \frac{V_r(t)}{P_3(t)} r_3 - d_2(t) \\ &\quad - \delta_0(r_1) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(r_2) ET_0(t) K_{c\max} \left(1 - \exp\left(-\frac{d}{e}x\right)\right) \min\left(1, \frac{r_2}{P_2(t) \cdot \Theta_U}\right) \\ f_3(t, x, r_2, r_3) &= d_2(t) - \frac{V_r(t)}{P_3(t)} r_3 - d_3(t) \end{aligned}$$

L'utilisation des fonctions indicatrices $-\delta_0$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ permet donc d'écrire ce mécanisme de passage entre réservoirs pour l'évapotranspiration décrit dans la section 3.3.3.

3.5.2.1 Résolution numérique

Le schéma de résolution du système avec retard a déjà été abordé dans le cadre de GreenLab continu. Ici, pour résoudre le système représenté par l'équation 3.13, on peut grosso modo reprendre ce schéma. Ainsi, on découpe l'axe du temps, et on résout le système intervalle après intervalle en utilisant la méthode d'Euler en prenant le pas $t_h = 1$.

En revanche, avec l'intégration du module sol de Pilote dans le modèle couplé, on doit adapter le schéma de résolution afin d'assurer les transitions de régime (après avoir épuisé le réservoir superficiel, on passe au réservoir sous-jacent pour la transpiration). Lorsqu'on déduit la valeur du vecteur d'état au temps $n+1$ à partir de sa valeur au temps n, on passe par le calcul d'une valeur candidate pour la valeur approximée du vecteur d'état.

Plus précisément, si on note X_n la valeur approximée de X en $t_n = t_0 + nt_h$, et $\widetilde{X}_{n+1}$ un candidat potentiel pour X_n ($Q_o^n, \widetilde{Q}_o^n$ pour Q_o, etc), alors à chaque pas de temps, on calcule d'abord

$$\widetilde{X}_{n+1} = X_n + F(X_n, E_n, u_n) - F(X_{\bar{\eta}(n)}, E_{\bar{\eta}(n)}, u_{\bar{\eta}(n)})$$

où $E_n = \int_n^{n+1} E(t)dt$ est la valeur moyenne sur le pas (idem pour u_n), et $\bar{\eta}(n)$ est la partie entière de $\eta(n)$.

On fait également le bilan journalier pour le drainage, en posant

$$d_i(n) = \int_n^{n+1} d_i(t)dt = \max(0, R_i^n - R_{i\,\max}(n)) \tag{3.13}$$

A chaque pas de temps, on doit s'assurer que $X_n \in \mathbb{R}_+^N$.
Ainsi on pose:

- $Q_o^n = \max(0, \widetilde{Q}_o^n)$
- $R_1^n = \max(0, \widetilde{R}_1^n)$
- $R_2^n = \begin{cases} \max\{0, R_2^{n-1} + P_{n-1} + u_{n-1} - d_1^{n-1} \\ \quad -[ET_0^{n-1} K_{c\,\max}\left(1 - \exp\left(-\frac{kd}{e} Q_b^{n-1}\right)\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{d}{e} Q_b^{n-1}\right)\right) \\ \quad - \max(0, R_1^{n-1} - ET_0^n \exp(-\frac{kd}{e} Q_b^n))]\}, & \text{si } \widetilde{R}_1^n < 0 \\ \max(0, \widetilde{R}_2^n), & \text{sinon.} \end{cases}$;

3.5.2.2 Simulation

Ce modèle couplé est générique, s'applique aussi bien au maïs qu'aux plantes étudiées avec le modèle GreenLab comme la betterave (Lemaire et al. [2008]).

On illustre ici ce modèle couplé par une simulation de la croissance de betterave, d'abord avec les vraies données d'apport d'eau, ensuite, on simule en introduisant des coupures d'apport d'eau pendant une période. Pour les simulations,

nous utilisons les paramètres du GreenLab betterave donnés dans Lemaire et al. [2008]. La figure 3.14 illustre l'évolution du LAI et de la masse racinaire cumulée de betterave.

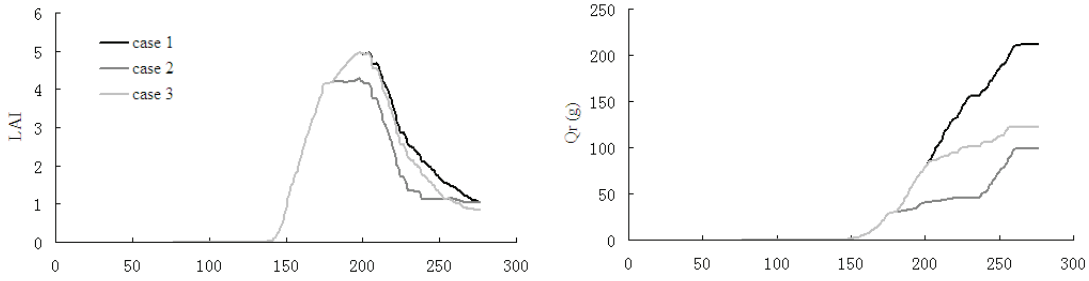


FIGURE 3.14: LAI et masse racinaire. Cas 1: en conditions de culture optimales sans stress hydrique; Cas 2: sans apport d'eau du jour 156 au jour 216 de l'année; Cas 3: sans apport d'eau pendant du jour 179 au jour 276.

Parallèlement, le tableau 3.1 récapitule les valeurs déterminantes de la croissance de betterave sous différents régimes d'irrigation. Le temps thermique nécessaire pour atteindre la valeur maximale du LAI est défini phénologiquement par rapport à la variété, et le $LAI_{\max}$ indique le niveau maximal du développement végétal de la plante. Les simulations sont menées avec un apport d'eau journalier constant, sauf éventuellement pendant une période.

Concrètement, le premier jour correspondant au jour d'initiation, on simule la croissance de la betterave durant 180 jours, en irriguant 2mm par jour sauf une période de coupure de 20 ou 40 jours consécutifs (les dates du début et de la fin de cette coupure sont indiquées dans le tableau 3.1). Et les réservoirs du sol sont remplis à la moitié de leur capacité maximale au temps initial.
On remarque que

- Pour la masse racinaire, on trouve la valeur maximale dans le traitement n°3 (mieux que le traitement n°0).
- La coupure affecte peu la récolte au début (n°1, n°2, n°10, n°11), grâce à l'eau disponible dans les réservoirs.
- Lorsque qu'on arrête l'irrigation juste avant d'atteinte de LAImax (n°4 et n°13), la descente de LAI est ralentie et l'accumulation de masse racinaire est défavorisée.
- La récolte est relativement peu affectée si la coupure intervient juste après LAImax, et ne dure pas longtemps (n°5).
- Dans la suite, plus la coupure intervient tard, plus la récolte est affectée (n°6-n°8, n°14-n°16).
- Sauf en fin du développement (n°9, n°17).

Ce type de modèle couplé permet ainsi d'explorer de façon fine l'impact des stratégies d'irrigation sur la croissance des plantes.

n°	début stress (jour)	fin stress (jour)	apport déficitaire (mm)	tLAImax (jour)	LAImax	LAI final	Qprod total	Qr final (g)
0			0	85	5.04	0.86	346	254
1	1	20	40	85	4.98	0.85	343	253
2	21	40	40	85	4.97	0.9	343	253
3	41	60	40	85	5.15	0.80	351	258
4	61	80	40	85	4.13	1.16	299	222
5	81	100	40	85	5.05	0.87	318	231
6	101	120	40	85	5.04	0.73	309	220
7	121	140	40	85	5.04	0.74	308	218
8	141	160	40	85	5.04	0.72	298	209
9	161	180	40	85	5.04	0.75	311	220
10	1	40	80	85	3.02	0.23	320	251
11	21	60	80	85	3.32	0.95	303	239
12	41	80	80	85	4.28	1.16	304	228
13	61	100	80	85	4.12	1.23	271	198
14	81	120	80	85	5.05	0.76	280	195
15	101	140	80	85	5.04	0.63	270	182
16	121	160	80	85	5.04	0.63	258	170
17	141	180	80	85	5.04	0.64	264	175

TABLE 3.1: Simulations de croissance de bettrave sous différents traitements d'irrigation déficitaires.

3.5.3 Modèle compartiment-Pilote

En combinant le modèle de plante par compartiment 3.4.2 et le module sol de Pilote 3.3, on obtient une alternative de modélisation du système plante-sol. Par rapport au modèle couplé GreenLab-Pilote, ce modèle est conçu avec plus d'empirisme. En revanche, ce modèle est pertinent dans une optique de prévision du rendement ou d'optimisation de la stratégie d'irrigation explorée plus loin. En effet, par rapport à ces deux optiques, le modèle permet de simuler la masse du compartiment qu'on récolte, de façon dynamique.

Paramétrisation du modèle pour maïs

On calibre ce modèle compartiment-Pilote sur le maïs. La disponibilité en eau est un facteur limitant majeur pour la croissance et la productivité des plantes, et particulièrement pour le maïs, qui termine son cycle à une période de faible pluviométrie. Ainsi une gestion adéquate des données d'entrée en particulier pour l'irrigation est essentielle pour maximiser la production.

Pour valider le modèle compartiment-Pilote, on dispose des mesures de LAI et de biomasse relatives à chaque compartiment. Les compartiments sont feuilles, épi et le reste. La matière sèche du compartiment feuille contient en particulier la partie sénescente, ce qui correspond donc à $Q_{g_{acc}}$.

λ_{prod}	1.12
a_{cob}	14.8
b_{cob}	1
τ_1	742
τ_2	1200
γ_g	0.33
τ_s	795
τ_f	1749
α	10
β	3.2
λ_{sen}	1.2

TABLE 3.2: Valeurs des paramètres du modèle compartiments-Pilote pour le maïs avec une calibration sur des données de 2009 et de 2011 à Lavalette avec différents traitements hydriques

Données expérimentales Les mesures de maïs ont été réalisées en 2009 et en 2011 à Lavalette, à six dates réparties sur le cycle du culture en 2009, et deux dates en 2011 (vers $LAI_{\max}$ et vers la maturité). Il y a trois traitements: ETM (cas non-stressé), 50%ETM (cas partiellement stress en 2011) et Sec. Pour chaque date, on a prélevé six plantes par traitement, on les décompose en compartiment, puis on les passe à l'étuve pour avoir la matière sèche. Enfin, les valeurs des grandeurs sont obtenues en prenant la moyenne des six plantes, puis converties au m^2 en utilisant la densité mesurée au champ.

Les valeurs des paramètres qu'on a retrouvé par cette calibration sont données dans le tableau 3.2. Il est essentiel de noter que cette calibration a pu prendre en compte des traitements contrastés et sur deux années, d'où l'intérêt de ce modèle compartiment-Pilote.

A noter qu'une paramétrisation du modèle GreenLab dans le cas non stressé a pu être réalisé par les données 2009 (Feng [2011]), mais sans prendre en compte les données hydriques.

Les figures ci-dessous (3.15-3.18) illustrent le résultat du calage pour les évolutions de LAI, de biomasse accumulée des feuilles et de l'épi. Pour les courbes de LAI, on les compare également avec celles qui sont simulées par Pilote. En particulier, concernant les valeurs expérimentales de LAI, pour l'an 2009 on utilise les valeurs reconstituées par la méthode illustrée dans 3.4.1, tandis que pour l'an 2011 on utilise les données mesurées par l'appareil Li-Cor LAI-2000. On a alors un meilleur suivi de l'évolution du LAI dans le second cas, la paramétrisation du modèle est aussi plus performante (3.18).

Conclusion

On a donc dans ce chapitre, après avoir étudié la dynamique de l'eau dans le système sol-plante-atmosphère et l'impact du stress hydrique sur le développement

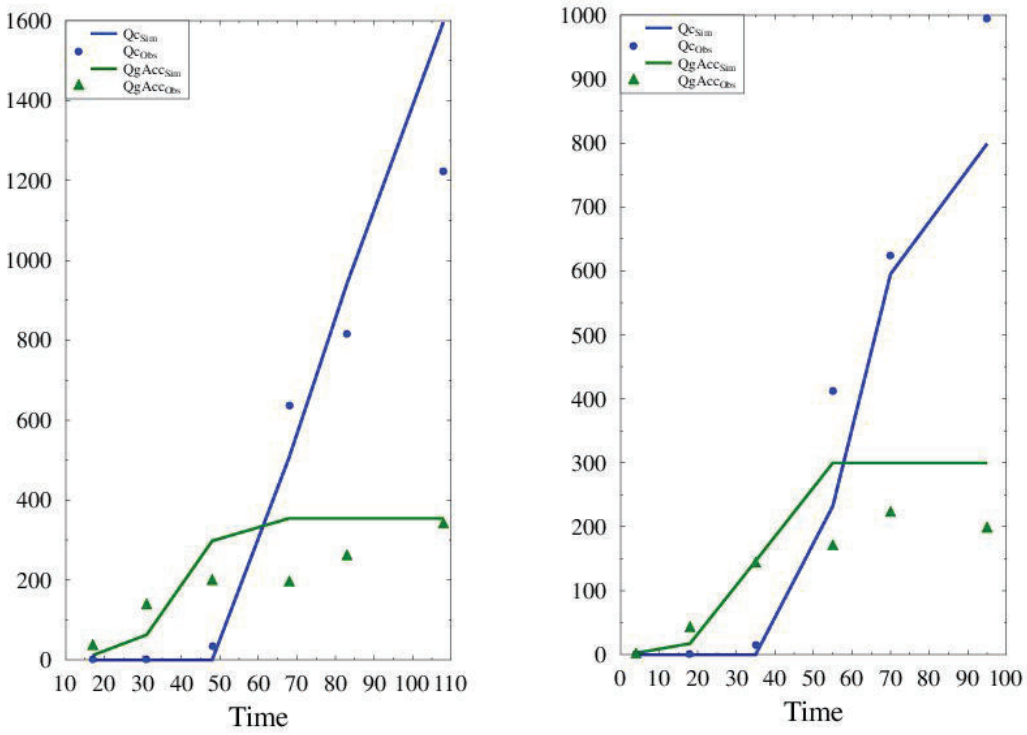


FIGURE 3.15: Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote et des données observées sur la biomasse des compartiments de feuilles et d'épi, pour deux traitements hydriques en 2009 à Lavalette: ETM (gauche) et 50%ETM (droite).

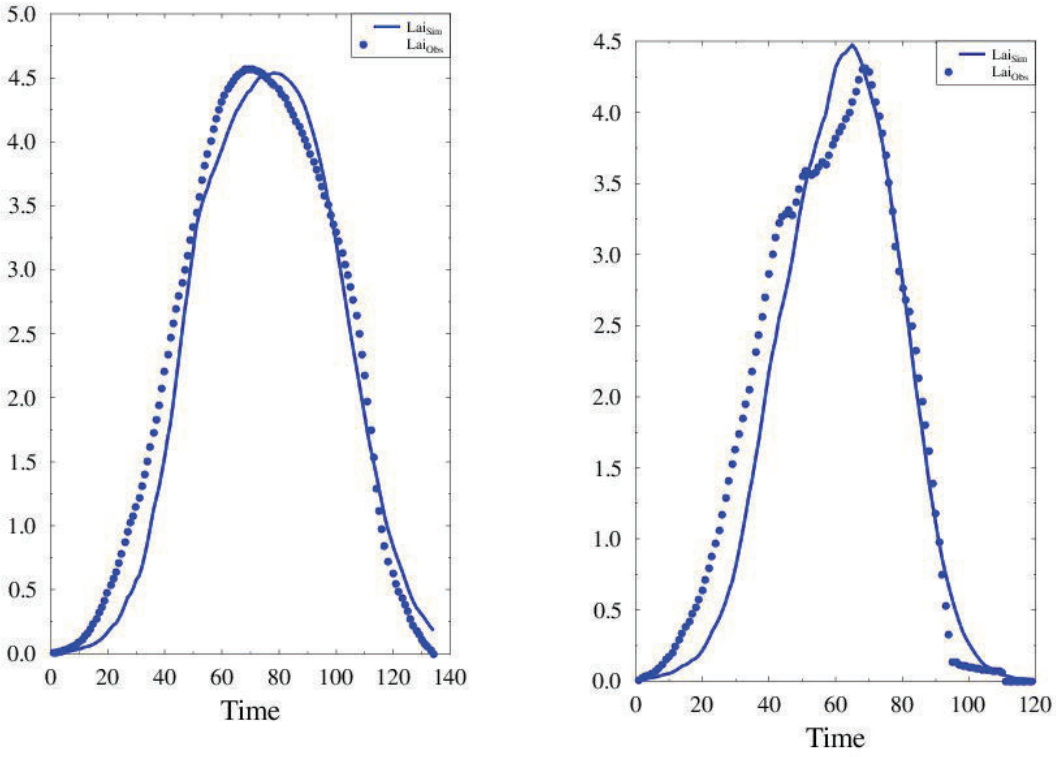


FIGURE 3.16: Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote et des données simulées par Pilote sur le LAI pour deux traitements hydriques en 2009 à Lavalette: ETM (gauche) et 50%ETM (droite).

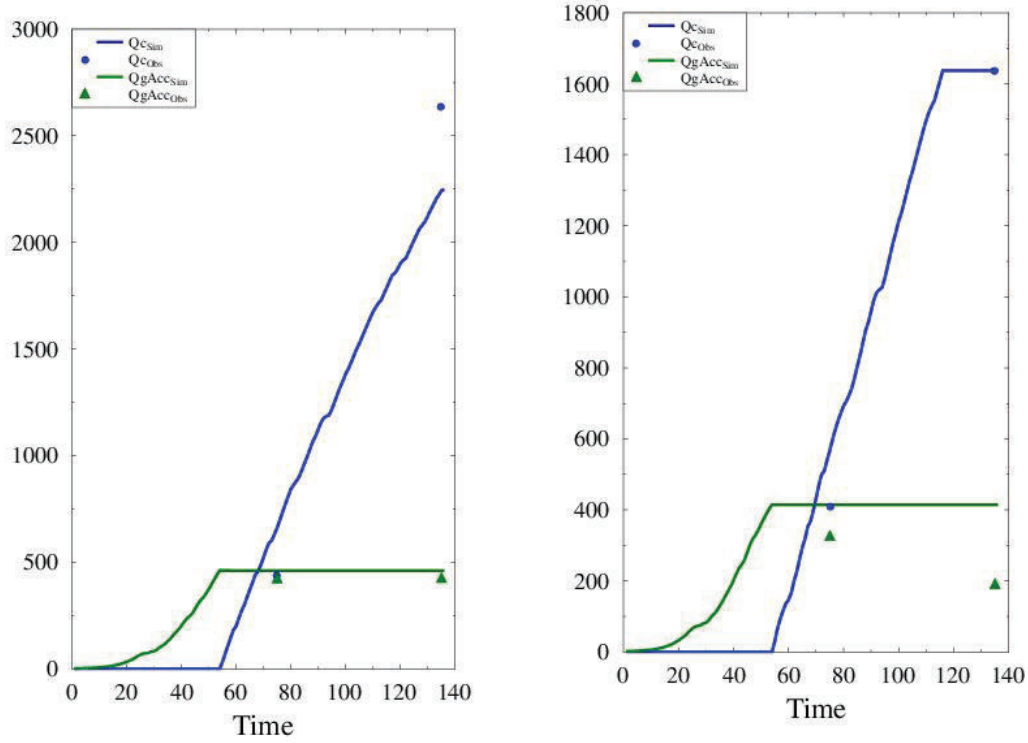


FIGURE 3.17: Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote et des données observées sur la biomasse des compartiments de feuilles et d'épi, pour deux traitements hydriques en 2011 à Lavalette: ETM (gauche) et 50%ETM (droite).

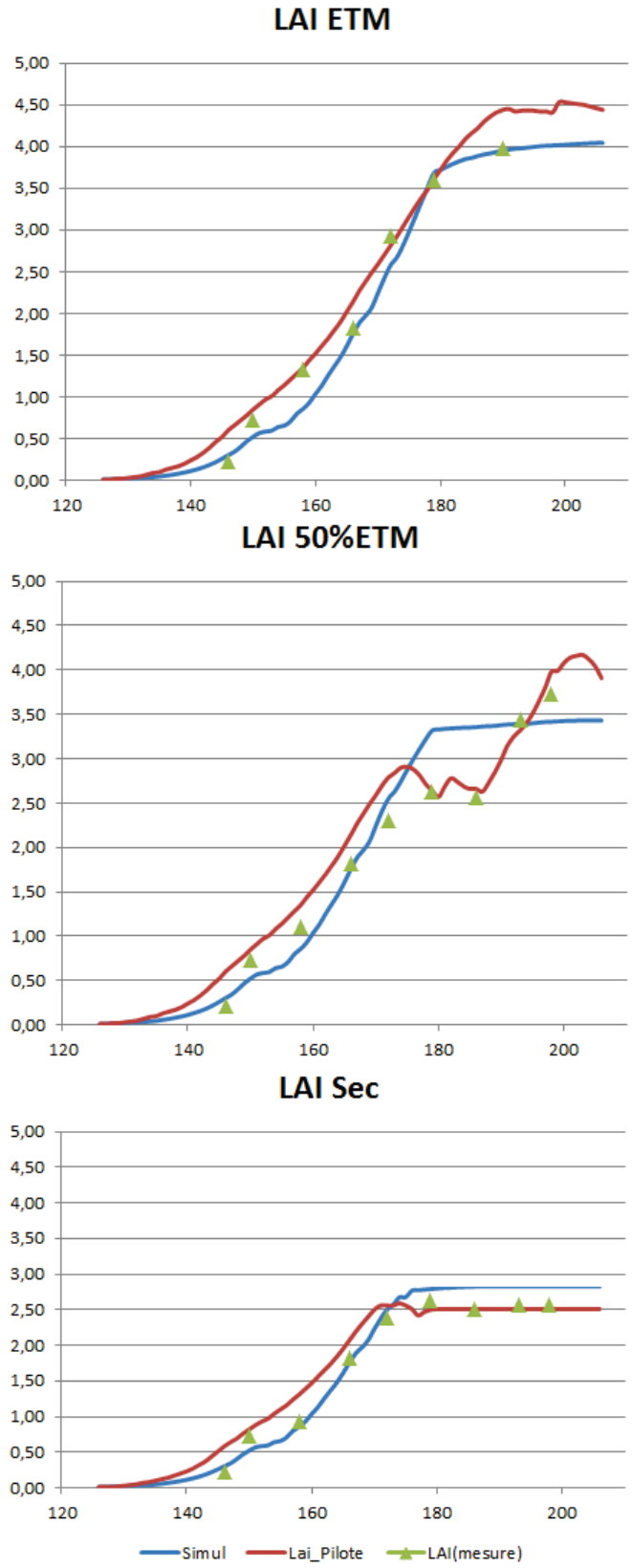


FIGURE 3.18: Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote, des données simulées par Pilote et des données mesurées sur le LAI pour trois traitements hydriques en 2011 à Lavalette: ETM, 50%ETM et sec.

fonctionnel de la plante, proposé une approche de modélisation de la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau par le couplage d'un modèle de plante avec un modèle de sol. En particulier, trois niveaux de modélisation pour la croissance de la plante ont été proposés selon différents besoins et contraintes. On a souligné la façon de coupler ces modèles, en faisant communiquer les éléments clés entre le module plante et module sol. Les résolutions numériques de ces système dynamiques ont été étudiées, ainsi que la simulation et la paramétrisation des modèles.

Ces modèles plante-sol permettent non seulement de simuler la croissance des plantes et donc de prédire le rendement sous différentes conditions hydriques, et de simuler la dynamique de la ressources en eau dans le système sol-plante-atmosphère. Ils fournissent également un cadre en vue d'application des méthodes d'optimisation pour les stratégies d'irrigation.

Chapitre 4

Contribution à l'optimisation des stratégies d'irrigation

4.1 Irrigation

4.1.1 Contexte et objectif

L'objectif de l'irrigation est d'assurer un niveau de production acceptable pour l'agriculteur. Confronté aux aléas climatiques, l'agriculteur cherche à stabiliser sa production à un niveau économiquement acceptable à l'aide de l'irrigation.

D'un point de vue pratique, cela peut être réalisé en maintenant le sol à certaines périodes du cycle végétatif, à un niveau d'humidité propre à le conduire à l'objectif de rendement souhaité. Il est connu que le rendement maximal peut être atteint lorsqu'on maintient ce niveau d'humidité entre le point de flétrissement permanent et la capacité au champ. Cependant, compte tenu des contraintes diverses, liées au coût de l'eau, à sa disponibilité ainsi qu'à celle du matériel, viser le rendement maximal ne correspond pas toujours à la solution économiquement optimale pour l'agriculteur. L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthodologie générale et des méthodes de résolution permettant d'optimiser la stratégie d'irrigation dans un cadre de contraintes technico-économiques bien spécifiées.

De nos jours, la plupart des régions de France sont confrontées à des pénuries d'eau. Réaliser des économies d'eau en irrigation devient une nécessité. L'amélioration des systèmes d'irrigation contribue pour une modeste part à ces économies. Mais l'imposition de quotas s'avère être la mesure la plus efficace. Elle consiste à doter l'agriculteur d'un volume limité, libre à lui d'en faire le meilleur usage. On peut en conséquence et, dans un premier temps, s'intéresser à la façon la plus adéquate de répartir ce volume d'eau limité au cours d'un cycle de culture en jouant sur le doublet : dose-fréquence, la plupart des cultures ayant en outre des stades de sensibilité différentes au stress hydrique.

D'un point de vue purement agronomique, lorsque l'agriculteur est confronté à

un problème de pénuries, il est conduit à pratiquer ce que l'on nomme l'irrigation déficiente. Celle-ci consiste à réduire l'évapotranspiration en irriguant de façon déficiente et à adapter les stratégies d'irrigation en identifiant pour chaque culture les stades de croissance les plus sensibles par rapport au stress hydrique, afin d'augmenter la productivité agricole avec moins d'eau (Jalota et al. [2006], Fereres and Soriano [2007], Kirda [2002], Geerts and Raes [2009]). La planification de l'irrigation selon cette méthode consiste à faire en sorte que la plante utilise au mieux l'eau disponible du sol.

Une option du logiciel PILOTE permet de procéder ainsi. Ce dernier apporte une dose d'irrigation lorsque la réserve en eau du sol colonisée par les racines passe en dessous d'un seuil prédéfini. Cependant, il n'est pas si évident de répartir un volume disponible à l'aide de ce logiciel afin d'optimiser le rendement. Et quand bien même cela serait possible, cette approche n'a qu'un intérêt limité car la solution obtenue peut ne pas être applicable compte tenu des autres contraintes existantes à l'échelle de l'exploitation (logistique, règlementation...). Il s'avère donc plus réaliste d'intégrer des contraintes technico-économiques pour résoudre un problème de gestion optimale d'un volume d'eau limité.

4.1.2 Contraintes

Contraintes agronomiques liées à la variété

Pour quantifier l'efficacité de l'utilisation de l'eau par la plante, on se rapporte à deux indices qui sont l'efficience d'utilisation de l'eau (WUE) et la productivité de l'eau d'irrigation (IWP pour Irrigation Water Productivity).

$$WUE = \frac{Y_i}{ETR_{tot}}$$
$$IWP = \frac{Y_i - Y_d}{I_{tot}}$$

Dans ces définitions, Y_i est la récolte de la culture irriguée, Y_d la récolte de la culture non irriguée (système pluvial), ETR_{tot} correspond à la quantité totale d'eau évapotranspirée depuis le semis jusqu'à la récolte, I_{tot} la dose totale d'irrigation depuis le semis jusqu'à la récolte.

L'indice IWP est intéressant lorsqu'on souhaite comparer des techniques d'irrigation entre elles. Tandis que l'indice WUE relève davantage de la stratégie d'apport elle-même, c'est-à-dire de la combinaison dose-date d'apport, étant entendu que le rendement est très positivement corrélé à la transpiration.

Les études ont montré que ces indices d'efficience ou d'efficacité sont non seulement fortement influencés par le nombre de phases durant lesquelles l'irrigation déficiente est appliquée, mais aussi par le degré de sensibilité de ces phases de croissance par rapport au stress hydrique. Le rôle de ces deux facteurs peut être

plus important que la quantité totale d'eau apportée à la culture. Il est connu qu'une culture est spécialement sensible au début de la croissance. Ainsi, même dans un régime d'irrigation déficiente, on ne suspend pas l'irrigation pendant la phase d'établissement, de sorte que la plante puisse se développer avant être soumise au stress hydrique (Igbadun et al. [2008]).

Contraintes économiques

Comme évoqué précédemment l'objectif d'optimiser un indice d'efficience comme WUE ou IWP, n'est pas toujours très réaliste. Outre l'objectif d'optimiser le rendement avec un volume total limité, il convient aussi de chercher à maximiser le profit de l' agriculteur. Dans cette optique, la performance d'une stratégie d'irrigation, doit permettre de générer la meilleure récolte, mais en tenant compte du coût lié à l'irrigation et bien évidemment du prix de vente du produit. Dans ce qui suit, on se contentera de se donner un prix unitaire fixe pour l'eau, et un prix unitaire fixe pour la récolte, enfin de pouvoir focaliser l'étude des effets de la stratégie d'irrigation sur les différents processus physiologiques de la plante et sur les différentes phases de son développement.

D'autres études ont été menées en vue d'examiner les facteurs qui jouent sur le revenu des agriculteurs. Par example, on essaie de déterminer une allocation optimale de la ressource en eau ainsi que l'assolement, en tenant compte de la variation du prix de l'eau dans Doppler et al. [2002]. Dans Kipkorir et al. [2001], on considère la variation du prix du marché pour la récolte.

4.2 Optimisation déterministe

Dans notre approche, pour déterminer les dates et les dosages d'apport d'eau à la culture afin d'optimiser un certain objectif sous des éventuelles contraintes, on part d'un modèle plante-sol présenté dans le chapitre précédent. Ce système dynamique étant mis en équation avec la quantité d'eau irriguée à chaque pas de temps comme la variable de contrôle, on peut donc y appliquer des méthodes de contrôle optimal.

Remarquons que dans les modèles d'interaction plante-sol, on fait intervenir à la fois des données et paramètres caractérisant la culture, le sol et les conditions météorologiques (Jensen et al. [1970]). Pour les données météorologiques, on peut les voir ou les modéliser de deux façons différentes. Soit on se donne un scénario fixe pour ces grandeurs météorologiques concernées, dans ce cas, on parle d'optimisation déterministe pour les stratégies d'irrigation. Soit dans l'optique de planifier une stratégie d'irrigation optimale a priori, on représente les grandeurs météorologiques par des variables aléatoires, il s'agit alors de l'optimisation stochastique.

Dans cette section, on traite d'abord le cas déterministe, et le cas stochastique sera traité dans la section suivante.

4.2.1 Fonction objectif

D'après ce qui est présenté dans le chapitre précédent, le système déterministe continu pour l'interaction plante-sol peut être écrit comme

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \tag{4.1}$$

$$x(0) = x_0$$

$u(t)$ est la variable de contrôle (l'irrigation), et le vecteur d'état

$$x = (LAI, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \tag{4.2}$$

est composé de l'indice foliaire et les niveaux d'eau des trois réservoirs respectifs.

Remarquons qu'on peut facilement convertir l'écriture du système avec le vecteur d'état $x = (Q_b, R_1, R_2, R_3)$ sous la forme avec $x = (LAI, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$. En effet, il sera plus aisé de fixer les bornes et définir les maillages pour le vecteur $x = (LAI, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, dans l'algorithme d'optimisation.

On se donne l'objectif d'optimiser le profit de la récolte finale, compte tenu de la quantité d'eau apportée à la culture tout au long de sa croissance (Li et al. [2011]). La pénurie d'eau se traduit par son coût élevé à la période correspondante.

On définit donc la fonction profit instantanée comme

$$g(t, x, u) = a\frac{\bar{P}_c}{\bar{D}}(t)\alpha\frac{dPAR(t)}{dt}(1 - \exp(-\beta LAI(t)))\min(\frac{\theta_2(t)}{\theta_s}, 1) - c(t)u(t)$$

$\frac{\bar{P}_c}{\bar{D}}(t)\alpha\frac{dPAR(t)}{dt}(1 - \exp(-\beta LAI(t)))\min(\frac{\theta_2(t)}{\theta_s}, 1)$ étant la quantité de biomasse allouée au compartiment d'intérêt pour la récolte (l'épi pour le maïs et la racine pour la betterave par exemple) au temps t, a est le prix unitaire de la récolte, et $c(t)$ le prix unitaire de l'eau qui peut varier au cours du cycle de croissance de la culture.

Alors, la quantité à optimiser est

$$\int_0^{t_f} g(t, x(t), u(t))dt$$

Ici, on considère uniquement le contrôle constant par morceau. L'intervalle de temps $[0, t_f]$ est donc divisé en N sous-intervalles $[0, t_1[, [t_1, t_2[, \ldots, [t_{N-1}, t_N]$. Dans l'algorithme de la programmation dynamique explicité ci-dessous, on prendra toujours le pas de temps journalier (constant), *i.e.* $t_n = n$.

Le prix unitaire de l'eau et la quantité irriguée sont constants sur chaque sous-intervalle. Soit pour $t_{n-1} \leqslant t < t_n$,

$$c(t) = c(t_{n-1}) = c_{n-1}, u(t) = u(t_{n-1}) = u_{n-1}$$

Alors dans ce cas, si on part de la condition initiale x_0, on note $J^*(x_0)$ pour le profit maximal qu'on recherche. On a

$$J^*(x_0) = \max_{u_0,u_1,\ldots u_{N-1}} \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(t, x(t), u_{n-1})dt \tag{4.3}$$

Les domaines pour les valeurs prises par u_n peuvent se réduire de manière naturelle. En effet, on pourrait calculer préalablement les $u_{n\max}$, la quantité irriguée à chaque pas de temps afin que les réservoirs soient toujours à leur capacité maximale et qu'il n'y ait pas de perte depuis le 3-ième réservoir.

Selon les circonstances, on peut proposer d'autres critères à optimiser, dont les solutions optimales doivent satisfaire certaines contraintes. On illustrera l'adaptation de l'algorithme d'optimisation avec un cas test sous contraintes dans la section 4.2.4. Dans un premier temps, on se positionne dans le cadre sans contraintes présenté ci-dessus, en proposant une méthodologie de résolution du contrôle optimal par la programmation dynamique.

En effet, la fonction objectif (4.3) est additive par rapport au temps, ainsi ce problème d'optimisation vérifie bien le principe d'optimalité de Bellman. La programmation dynamique est donc applicable (Bellman [1953]).

Notez que sur la base d'un modèle GreenLab couplé avec un modèle de réservoir simplifié, une formulation variationnelle du problème de contrôle optimal de l'irrigation du tournesol a été proposée (Wu et al. [2005], Wu et al. [2012]). Mais le problème étant non convexe, la résolution numérique directe n'a pu être effectuée. La programmation dynamique s'avère donc comme une alternative intéressante pour le contrôle optimal d'irrigation.

4.2.2 Programmation dynamique

4.2.2.1 L'équation de la programmation dynamique

Pour l'application de la programmation dynamique en vue du contrôle optimal des stratégies d'irrigation, on va souligner l'aspect implémentation de la méthode. Les problématiques soulevées seront discutées, on proposera deux algorithmes équivalents pour le cœur du calcul. La façon de générer les maillages ainsi que l'adaptation seront également discutées. En effet, les maillages des variables d'état et de contrôle jouent un rôle déterminant pour la précision des solutions, on examinera la convergence de la solution optimale en faisant varier les paramètres liés au réglage des maillages.

Dans un premier temps, on établit l'équation de la programmation dynamique en question. Pour calculer $J^*(x_0)$, on définit successivement les fonctions $J_N, J_{N-1}, \ldots, J_0$ de façon récurrente. Pour tout $n = 0, \ldots, N$, J_n est une fonction positive définie sur le domaine des valeurs que peut prendre le vecteur d'état au temps n. Alors la valeur de la fonction J_0 au point x_0 n'est rien d'autre que le profit maximal qu'on cherche.

Concrètement, pour tout x_0, on a

$$J(x_0) = J_0(x_0)$$

J_0 étant obtenu par la dernière étape de l'algorithme, qui s'effectue à rebours du temps $N-1$ au temps 0: pour tout $y \in \mathbb{R}_+^4$ (on réduira le domaine ultérieurement),

$$J_N(y) = 0$$

$$J_n(y) = \max_{u_n \in \mathcal{U}_n} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t, x_y(t), u_n)dt + J_{n+1}\left(x_y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x_y(t), u_n)dt \right) \right\}, \tag{4.4}$$

$n = N-1, \ldots, 0$.
où $x_y : [t_n, t_f] \to \mathcal{X}_n \subset \mathbb{R}_+^4$ est la solution de (4.1) telle que $x_y(t_n) = y$. Le domaine de variation $\mathcal{X}_n$ pour le vecteur d'état et le domaine de variation $\mathcal{U}_n$ pour la variable de contrôle au temps n seront précisés ultérieurement.

4.2.2.2 Les problématiques de l'implémentation

L'implémentation de cet algorithme de programmation dynamique dans l'optique de trouver la meilleur stratégie d'irrigation est intéressante et importante pour plusieurs raisons.

Premièrement, reposant sur le principe de Bellman, la programmation dynamique est facilement adaptée aux différents cadres traitant du problème d'optimisation. Néanmoins, son implémentation est moins directe, et doit être adaptée et spécifiée par rapport au système dynamique concerné. On va détailler dans ce qui suit les différentes étapes de l'implémentation, en passant par la définition du maillage, le cœur de l'algorithme à rebours, jusqu'à la récapitulation du résultat final.

Deuxièmement, la façon d'implémenter l'algorithme a un fort impact sur la performance de l'algorithme. Cet impact est conséquent en particulier dans le choix du maillage à la fois pour le vecteur d'état et pour la variable de contrôle. En effet, le choix du maillage introduit de nouveaux paramètres non par rapport au système dynamique en question mais propres à l'implémentation elle-même. Plusieurs questions se posent:

– Quels sont ces paramètres propres à l'implémentation? Le choix de ces paramètres doit être pertinent à la fois par rapport au mécanisme de la programmation dynamique et au système dynamique plante-sol en question.

– Quelles valeurs choisit-on pour ces paramètres? Pour implémenter l'algorithme, on est obligé de passer par le maillage pour répartir les valeurs prises à chaque pas de temps, et aussi pour approximer la valeur de l'état au pas de temps prochain dans le calcul. En même temps, le maillage est lui-même la source de décalage entre le profit optimal donné par la programmation dynamique et le profit retrouvé en relançant le calcul du système plante-sol. Comme les valeurs de ces paramètres déterminent le niveau du maillage, lorsqu'on contracte le maillage au fur et à mesure, cette erreur doit être réduite conjointement.

– Le choix de valeurs de ces paramètres est confronté à un autre défi de nature différente, celui de la relation entre la variable d'état et la variable de contrôle. Ceci est dû au fait que la valeur prise par la variable de contrôle influence directement la valeur de la variable d'état prise au prochain pas de temps, ce qui revient dans notre cas au fait que la quantité d'eau apportée conditionne en partie les fonctions d'état de la plante et donc en particulier le rendement, elle conditionne aussi les niveaux d'eau des réservoirs du sol.

  Il en résulte que le choix des pas pour le maillage du vecteur d'état doit être compatible avec celui de la variable de contrôle. Autrement dit, si par exemple on réduit seulement le pas pour le maillage de la variable de contrôle sans que ce pas soit compatible avec ceux des composantes du vecteur d'état, la solution optimale risque de ne pas converger, donc la réduction partielle n'apporte pas forcément une amélioration de la performance de l'algorithme.

L'implémentation de l'algorithme peut être divisée en deux principales étapes, le calcul préalable et le cœur du calcul.

4.2.2.3 Le calcul préalable

La première étape peut s'assimiler à une préparation du terrain pour le cœur du calcul. Cette étape contient deux éléments. L'un consiste à lancer des cas tests avec deux stratégies d'irrigation extrêmes, c'est-à-dire une stratégie sans aucun apport d'eau, et l'autre stratégie consiste à apporter chaque jour la quantité d'eau de sorte que le niveau hydrique du sol soit maintenu à son optimum, et que la plante ne subisse pas de stress. Ces simulations ont pour but de fixer les valeurs des bornes pour le domaine dans lequel varient les variables d'état du système dynamique plante-sol. On note $x_{i\,\max}$ et $x_{i\,\min}$ pour la borne supérieure et la borne inférieure de la $i-$ième composante du vecteur d'état au temps n.

Une fois dessiné le profil du domaine, il convient de définir le maillage pour le vecteur d'état. Concrètement, à chaque pas de temps, on a deux valeurs limites pour chaque composante du vecteur d'état. On divise alors convenablement

l'intervalle délimité par ces deux valeurs, un point du maillage correspond alors à une combinaison d'une valeur intermédiaire pour chaque composante.

Notons qu'il y a deux usages pour les maillage du vecteur d'état, pour le choix des valeurs du vecteur d'état à chaque pas de temps, et pour un point donné, l'approximation de la valeur au pas de temps suivant.

A chaque pas de temps n, on prend dans 4.4

$$y = x_n$$

les $x_n \in \mathcal{X}_n$ étant les points sur le maillage du vecteur d'état au temps n. Alors pour calculer $J_n(x_n)$ selon l'équation 4.4. On prendra

$$x_y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x_y(t_n), u_n)dt \simeq x_{n+1}$$

x_{n+1} étant le point le plus proche de $x_y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x_y(t_n), u_n)dt$ sur le maillage du vecteur d'état au temps $n+1$. La notion de proximité étant liée à une distance définie sur l'espace $\mathcal{X} = \cup_{n=0,\ldots,N}\mathcal{X}_n$.

On prendra la distance euclidienne normalisée composante par composante. Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{X}$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathcal{X}$, on a

$$d_{\mathcal{X}}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{x_i - y_i}{x_{i\,\max} - x_{i\,\min}} \right)^2} \tag{4.5}$$

On remarque que cette distance est sans unité et permet d'équilibrer le poids de chaque composant. x_{n+1} est donc le point sur le maillage du domaine $\mathcal{X}_n$ qui minimise la distance avec le point $x_y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x_y(t_n), u_n)dt$.

4.2.2.4 Deux algorithmes pour le cœur du calcul

La deuxième étape est le cœur du calcul. A chaque pas de temps, on doit parcourir tout le maillage pour le vecteur d'état, et à chaque point du maillage, on apporte une quantité d'eau à la culture, en faisant varier cette quantité d'irrigation, on obtient un optimum de profit sur ce pas de temps.

Notons que nous sommes alors confrontés à un problème d'optimisation simple à résoudre, ce qui différencie notre méthode de l'approche développée dans Wu [2005].

Pour reconstituer les contrôles optimaux sur tout le cycle de croissance, on introduit la notion de trajectoire. Soit $x : [0, t_f] \to \mathbb{R}_+^4$ la solution du système 4.1, à une stratégie d'irrigation donnée, alors on appelle, pour le cadre discret, le vecteur

$$(x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_f))$$

une trajectoire. Cette étape de calcul consiste alors à associer à tout point lambda les informations optimales qui lui sont associées si ce point lambda se trouve sur la trajectoire de la solution optimale.

Pour ce faire, on a essayé deux algorithmes équivalents qui diffèrent structurellement. On appellera l'un l'algorithme *successif* et l'autre l'algorithme *adjacent*. Pour ces deux algorithmes, il s'agit de parcourir tous les points des maillages au cours de la durée d'un cycle de croissance, et d'obtenir une *collection* de ces points associés avec leur informations optimales respectives.

Algorithme successif
Dans l'algorithme *successif*, un élément de collection est de la forme

$$(x_n, (J_n(x_n), u_n^{opt}, u_{n+1}^{opt}, \cdots, u_N^{opt})) \tag{4.6}$$

Ainsi, dans l'itération de la programmation dynamique, lorsqu'on passe du temps $n+1$ au temps n et qu'on se donne un point x_n sur le maillage du temps n, alors d'après la dynamique du système, on a la valeur de la variable d'état au temps $n+1$

$$x_{n+1} = x_n + \int_n^{n+1} f_n(x_n, u_n^{opt}) \tag{4.7}$$

u_n^{opt} étant le contrôle optimal trouvé par l'équation 4.4. Par abus de notation, si x_{n+1} est le point du maillage qui approxime sa valeur donnée par le calcul de l'équation 4.7 selon la distance définie par 4.5, alors pour obtenir le vecteur 4.6, il suffit de retrouver dans la collection le vecteur

$$(x_{n+1}, (J_{n+1}(x_{n+1}), u_{n+1}^{opt}, u_{n+2}^{opt}, \cdots, u_N^{opt})) \tag{4.8}$$

et on a alors

$$J_n(x_n) = J_{n+1}(x_{n+1}) + g(n, x_n, u_n^{opt})$$

Ainsi, on a pu ajouter à la $(N-n)$-ième itération un nouvel élément indexé au temps n dans la collection des solutions par l'algorithme successif sous la forme de 4.6 à partir d'un élément indexé au temps $n+1$ qui se trouve déjà dans la collection, obtenu à la $(N-n-1)$-ième itération.

A chaque itération, on parcourt le maillage du vecteur d'état jusqu'à remonter au temps 0, on peut donc déduire du dernier élément ajouté à la collection des solutions, avec l'état initial connu du vecteur d'état x_0

$$(x_0, (J_0(x_0), u_0^{opt}, u_1^{opt}, \cdots, u_N^{opt})) \tag{4.9}$$

Alors on obtient le profit maximal $J_0(x_0)$, et la stratégie d'irrigation optimale est

$$(u_0^{opt}, u_1^{opt}, \cdots, u_N^{opt})$$

Cet algorithme permet de trouver la solution d'optimisation de façon directe, mais il ne conserve pas les états de maillage passés par les différentes trajectoires. En particulier on voudrait comparer la trajectoire optimale obtenue par la programmation dynamique avec les états successifs sur le maillage et la trajectoire simulée avec la stratégie optimale. Or cette comparaison s'avère importante pour évaluer la performance de l'algorithme et la pertinence du choix de maillage. Pour cela, on introduit un autre algorithme dit adjacent.

Algorithme adjacent
Dans cet algorithme, on construit aussi une collection d'éléments de solution. Mais contrairement à l'algorithme successif dans lequel chaque élément de collection de solutions contient la stratégie optimale jusqu'au temps N en partant de ce point, dans l'algorithme adjacent, chaque élément de collection de solutions ne contient que le contrôle optimal pour passer au pas de temps suivant, mais il contient également la valeur du vecteur d'état approximé par un point sur le maillage au prochain pas de temps, ainsi que la valeur du profit maximal en partant de ce point. Un élément de la collection est sous la forme

$$(x_n, (u_n^{opt}, x_{n+1}, J_n(x_n)))$$

A la fin des itérations lorsqu'on arrive au temps 0, on obtient

$$(x_0, (u_0^{opt}, x_{n+1}, J_0(x_0)))$$

le profit optimal final est donc $J_0(x_0)$. Enfin, pour retrouver la stratégie d'irrigation qui engendre ce profit, on doit relancer une recherche dans la collection de solutions. La structure du couple des valeurs du vecteur d'état sur deux pas de temps adjacents rend cette recherche facile.

4.2.2.5 Génération et Adaptation de maillage

Pour mettre en évidence la façon de générer et adapter les maillages, ainsi que la comparaison de l'effet de maillage sur la précision des résultats numériques et la convergence du schéma numérique sans alourdir le calcul, on fera une simplification dans le sous-modèle du modèle couplé plante-sol. Dans ce qui suit, on considère le sol comme un unique réservoir qui fonctionne de la même manière que le réservoir racinaire R_2 du modèle Pilote, qui prend donc en compte le stress hydrique, mais avec une profondeur fixe qui correspond à la profondeur racinaire maximale P_x.

Dans ce cadre, le vecteur d'état se réduit à

$$x = (LAI, \theta)$$

qui ne contient que deux composantes: l'indice foliaire et le niveau d'eau volumique du réservoir sol, qui représentent respectivement l'état de croissance de la plante et l'état hydrique du sol.

Pour appliquer l'algorithme de programmation dynamique, qu'il s'agisse soit de l'algorithme successif ou de l'algorithme adjacent, le choix du maillage est crucial, en raison de son effet sur la précision des solutions numériques et sur la convergence du schéma numérique utilisé lors du calcul.

L'adaptation des maillages au comportement dynamique du système étudié est un moyen de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques. Ici, on se restreint à la comparaison de l'effet de différents maillages uniquement sur la précision des résultats numériques et la convergence du schéma numérique. Ces différents maillages et leur temps de calcul correspondants sont en effet assez comparables.

Comme mentionné plus haut, les bornes des maillages sont déterminées par deux cas test, sans irrigation et avec irrigation à la capacité au champs assurant une croissance sans stress de sorte que les réservoirs soient toujours pleins. Ensuite, à chaque pas de temps, pour chaque composante du vecteur d'état, on divise l'intervalle uniformément. Pour diviser ces intervalles convenablement sans avoir recours à un grand nombre de paramètres de réglage pour le maillage, on se donne pour la composante LAI (resp. θ) du vecteur d'état, un pas de longueur δLAI (resp. $\delta\theta$) et un nombre de pas N^{LAI} (resp. N^{θ}), alors on a les longueur de pas de maillage pour les deux composantes du vecteur d'état au temps n,

$$\delta LAI_n = \min(\delta LAI, \frac{LAI_{n,\max} - LAI_{n,\min}}{N^{LAI}}) \tag{4.10}$$

$$\delta\theta_n = \min(\delta\theta, \frac{\theta_{n,\max} - \theta_{n,\min}}{N^{\theta}}) \tag{4.11}$$

$LAI_{n,\max}, \theta_{n,\max}, LAI_{n,\min}, \theta_{n,\min}$ étant les bornes données par les simulation des deux cas d'extrémité. On utilise le même procédé pour la variable de contrôle u.

4.2.2.6 Convergence des solutions

Dans le calcul de la programmation dynamique, on a vu que les valeurs des variables d'état et de contrôle sont prises sur les maillages ou approximées par les maillages. Ceci introduit évidemment des erreurs lorsqu'on relance les simulations du système plante-sol avec les stratégies d'irrigation optimales trouvées.

Cet écart est inhérent à la méthode du calcul, mais peut néanmoins être réduit en raffinant les maillages des variables d'état et de contrôle. D'après la méthode de maillage selon 4.10 et 4.11, on a besoin de six paramètres a priori pour régler le maillage du vecteur d'état et la variable de contrôle. Si de plus on fixe $u_{n,\max} = 30mm$ par example, pour tout n, alors on peut se restreindre à cinq paramètres de réglage pour le maillage, N^u pour la variable contrôle u, N^{LAI}, δ_{LAI} pour la composante LAI du vecteur d'état, et N^l, δ_l pour la composante θ.

	N^u	N^{LAI}	N^l	δ_{LAI}	δ_l	J_0^{DP}	J_0^{sim}	$\mid J_0^{DP} - J_0^{sim} \mid$
1	50	50	160	0,5	0,5	9,36701	7,17045	2,19656
2	50	50	320	0,05	0,5	8,59724	7,74916	0,84808
3	50	50	320	0,025	0,5	8,60846	7,68474	0,92372
4	50	50	640	0,05	0,5	8,19704	7,93176	0,26528
5	50	50	1280	0,05	0,5	8,00183	8,01627	0,01444

TABLE 4.1: Convergence entre le profit J_0^{DP} donné par l'algorithme de la programmation dynamique et le profit donné par la simulation avec la stratégie optimale J_0^{sim}, avec différents choix de paramètres de réglage.

Pour examiner l'imprécision de la solution optimale due aux maillages, on note J_0^{DP} le profit donné par l'algorithme de la programmation dynamique, et J_0^{sim} le profit donné par la simulation relancée avec la stratégie optimale trouvée.

Le tableau 4.1 illustre quelques exemples de simulations avec différents choix de valeurs pour ces paramètres de réglage.

Plusieurs remarques peuvent être formulées à partir de ces résultats:

– Pour raffiner le maillage, on peut soit augmenter le nombre de pas N^i des composantes du vecteur d'état (comme le passage du cas 1 au cas 2, du cas 2 au cas 4 et du cas 4 au cas 5 pour la composante niveau d'eau du réservoir sol), soit diminuer la longueur du pas δ_n (comme du cas 1 au cas 2, du cas 2 au cas 3 pour la composante LAI).

– Globalement on retrouve la tendance souhaitée de l'effet de maillage sur la précision de la simulation, c'est-à-dire qu'en raffinant le maillage, on réduit l'écart entre le profit donné par l'algorithme et celui par la simulation.

– Cette tendance de convergence n'est pas vérifiée pour le passage du cas 2 au cas 3, cette contradiction est due à la dépendance des deux composantes du vecteur d'état.

  En effet, le niveau d'eau du réservoir influence l'indice stress, par conséquence il impacte la production de biomasse, la masse foliaire et donc le LAI. L'erreur d'approximation pour LAI et celle pour le niveau d'eau sont donc liées. Il s'ensuit que les niveaux de maillage pour ces deux composantes doivent être compatibles. Autrement dit, comme le passage du cas 2 au cas 3, si on réduit la longueur du pas d'une seule composante sans que ce soit consistant avec le niveau de maillage de l'autre composante, la précision de la solution risque de ne pas s'améliorer.

Dans la figure 4.1, on illustre les évolutions de l'indice de stress de la plante au cours du temps sous trois stratégies d'irrigation différentes: irriguer de façon

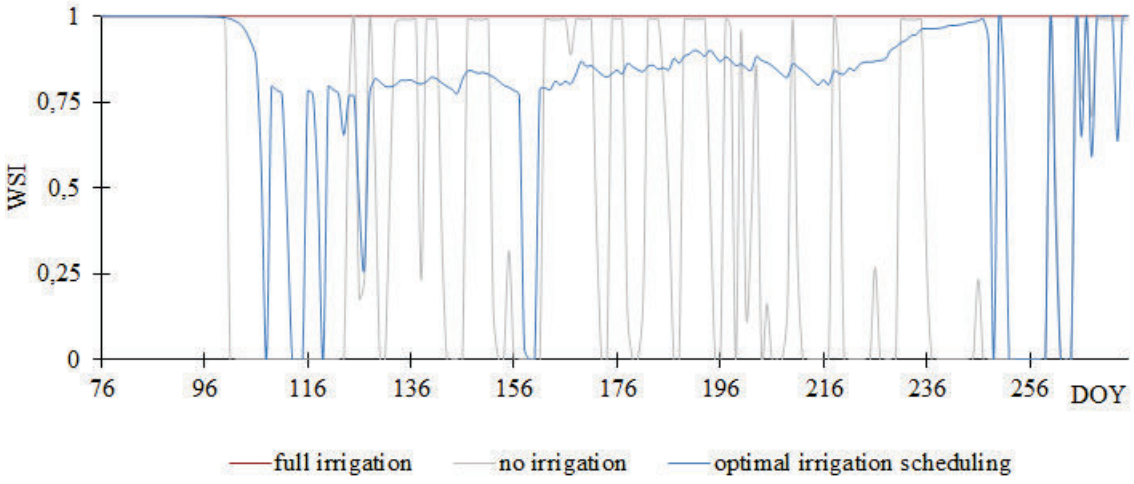


FIGURE 4.1: Evolutions de WSI sous trois traitements d'irriguation.

qu'il n'y ait pas de stress, sans irrigation et irriguer avec une stratégie optimale obtenue avec la programmation dynamique en utilisant les paramètres de maillage qui correspondent au cas test n°5 dans le tableau 4.1.

4.2.3 Programmation dynamique itérative

Une version dite itérative de la programmation dynamique est généralement adoptée pour confronter le problème de grande dimension (Luus [1990a], Bojkov and Luus [1995]), ainsi que l'existence de ces termes de retard dans certains systèmes. En effet, les termes de retard peuvent avoir un effet significatif sur le contrôle du système en question, il est donc important d'incorporer ces termes dans la modélisation du système et d'adapter les méthodes d'optimisation en conséquence.

Le choix de la programmation dynamique pour optimiser les stratégies d'irrigation à partir d'un modèle plante-sol s'avère souple pour cette adaptation. Luus [2000] donne une présentation générale de la méthode de la programmation dynamique itérative. Dans Dadebo and Luus [1992], on traite plus particulièrement l'application de cette méthode pour les systèmes à retard.

Selon la programmation dynamique itérative, on applique à plusieurs reprise la programmation dynamique de façon itérative. A chaque itération, on peut se contenter d'un maillage grossier pour le vecteur d'état et d'un petit nombre de trajectoires pré-calculées pour traiter le terme de retard. L'obtention de l'optimum global reposera sur la convergence des solutions par itérations (Luus [1992]).

Concernant les maillages, à un scénario climatique donné, on simule préalablement les bornes des maillages de l'état et du contrôle pour la première ité-

ration. Les domaines de maillage seront réduits lorsqu'on réitère le processus d'optimisation.

On présente alors la méthode en deux temps. D'abord la première itération et l'algorithme de la programmation dynamique qui est au cœur de chaque itération. Ensuite, on expliquera comment on réitère l'algorithme de la programmation dynamique à partir de l'itération précédente.

4.2.3.1 Première itération et Programmation dynamique

Pour la première itération, on définit dans un premier temps les bornes de maillage pour le vecteur d'état. Pour ne pas alourdir les notations, on se place toujours dans le cas simplifié avec le vecteur d'état à deux composantes.

$$x = (LAI, \theta)$$

de la façon suivante. Soit la borne inférieure

$$x^{\mathbf{1}}_{n,\min} = (LAI^{\mathbf{1}}_{n,\min}, \theta^{\mathbf{1}}_{n,\min})$$

la valeur d'état au temps n, obtenue en prenant $u_n = 0$, et ceci pour tout n. Et avec $u_n = u_{n\max}$ on a la borne supérieure

$$x^{\mathbf{1}}_{n,\max} = (LAI^{\mathbf{1}}_{n,\max}, \theta^{\mathbf{1}}_{n,\max})$$

L'indice en haut **1** de ces valeurs signifient qu'il s'agit des valeurs bornes pour la première itération.

Passons ensuite au calcul par programmation dynamique au cœur de chaque itération. Sauf pour l'état initial fixé x_0, à chaque pas de temps n, on fait parcourir la valeur d'état sur le maillage à deux dimensions. Soit $x^{\mathbf{1}}_n(j,k)$ un point sur le maillage,

$$x^{\mathbf{1}}_n(j,k) = (LAI^{\mathbf{1}}_n(j), \theta^{\mathbf{1}}_n(k))$$

On fait parcourir les indice j et k, de sorte que pour tout j, k

$$LAI^{\mathbf{1}}_{n,\min} \leqslant LAI^{\mathbf{1}}_n(j) \leqslant LAI^{\mathbf{1}}_{n,\max}, LAI^{\mathbf{1}}_n(j+1) = LAI^{\mathbf{1}}_n(j) + \delta LAI^{\mathbf{1}} \qquad (4.12)$$

$$\theta^{\mathbf{1}}_{n,\min} \leqslant \theta^{\mathbf{1}}_n(k) \leqslant \theta^{\mathbf{1}}_{n,\max}, \theta^{\mathbf{1}}_n(k+1) = \theta^{\mathbf{1}}_n(k) + \delta\theta^{\mathbf{1}} \qquad (4.13)$$

avec $\delta LAI^{\mathbf{1}}, \delta\theta^{\mathbf{1}}$ les longueurs de pas de maillage qui sont fixées, et peuvent être choisies relativement larges, selon le principe de la programmation dynamique itérative.

Pour le cœur du calcul de la programmation dynamique, en prenant l'algorithme successif par exemple, on associe à chaque $x^{\mathbf{1}}_n$ le vecteur

$$(J_n(x_n^{\mathbf{1}}), u_n^{\mathbf{1}}(x_n^{\mathbf{1}}), u_{n+1}^{\mathbf{1}}(x_n^{\mathbf{1}}), \ldots, u_N^{\mathbf{1}}(x_n^{\mathbf{1}})) \tag{4.14}$$

le profit courant maximal associé $J_n(x_n^{\mathbf{1}})$ désigne abusivement sa valeur approximée. Si on approxime l'intégrale par exemple par la formule du rectangle, on obtient

$$J_n(x_n^{\mathbf{1}}) = \max_{u_n}\{g(t_n, x_n^{\mathbf{1}}, u_n) + J_{n+1}(x_{n+1}^{\mathbf{1}})\} \tag{4.15}$$

avec $x_{n+1}^{\mathbf{1}}$ le point le plus proche de $x_n^{\mathbf{1}} + f(t_n, x_n^{\mathbf{1}}, u_n)$ sur le maillage de x au temps $n+1$ selon la distance 4.5.

Et les $u^{\mathbf{1}}$ désignent la stratégie optimale obtenue après la première itération par la programmation dynamique.

4.2.3.2 Itérations avec réduction de domaine systématique

Après la première application, on réitère l'application de la programmation dynamique en réduisant les domaines de variation et les maillages pour les variables d'état et de contrôle. Grâce à ce procédé itératif avec réduction de domaine systématique, on peut se contenter des maillages grossiers lorsqu'on applique la programmation dynamique à chaque itération, et l'étude a prouvé qu'on peut converger vers la solution optimale en un nombre raisonnable d'itérations (Luus [1990b]).
Concrètement, si on obtient à l'**i**-ième itération, la stratégie optimale

$$(u_0^{\mathbf{i}}, u_1^{\mathbf{i}}, \ldots, u_{N-1}^{\mathbf{i}})$$

qui donne la trajectoire

$$x_0, x_1^{\mathbf{i}}, x_2^{\mathbf{i}}, \ldots, x_N^{\mathbf{i}}$$

Alors à la $(\mathbf{i}+\mathbf{1})$-ième itération, les domaines de maillage sont réduits avec des coefficients constants. De plus, les domaine de variation pour le vecteur d'état (*resp.* de contrôle) sont centrées sur la trajectoire obtenue à l'**i**-ième itération, et le domaine de variation pour la variable contrôle est centré sur la stratégie obtenue à l'**i**-ième itération.
En prenant la composante LAI par exemple, si on note les bornes de l'**i**-ième itération par $LAI_{n,\min}^{\mathbf{i}}$ et $LAI_{n\max}^{\mathbf{i}}$, alors pour tout n, on a

$$LAI_{n,\min}^{\mathbf{i+1}} = \max\left\{LAI_{n,\min}^{\mathbf{i}}, LAI_n^{\mathbf{i}} - \frac{\rho_{LAI}}{2}(LAI_{n,\max}^{\mathbf{i}} - LAI_{n,\min}^{\mathbf{i}})\right\} \tag{4.16}$$

$$LAI_{n\max}^{\mathbf{i+1}} = \min\left\{LAI_{n\max}^{\mathbf{i}}, LAI_n^{\mathbf{i}} + \frac{\rho_{LAI}}{2}(LAI_{n\max}^{\mathbf{i}} - LAI_{n\min}^{\mathbf{i}})\right\} \tag{4.17}$$

avec $LAI_{n\min}^{\mathbf{1}} = LAI_{\min}^n, LAI_{n\max}^{\mathbf{1}} = LAI_{\max}^n$.

Ainsi le domaine de variation pour la variable LAI est réduit à l'aide du coefficient

$$\rho_{LAI} \in]0, 1[$$

De plus, la longueur du pas de maillage est également réduit en fonction de ce coefficient. Si on note $\delta LAI^{\mathbf{i}}$, on a

$$\delta LAI^{\mathbf{i+1}} = \rho_{LAI} \delta LAI^{\mathbf{i}}$$

On introduit également le coefficient ρ_θ pour la composante niveau d'eau volumique du vecteur d'état, et on réduit systématiquement son domaine de variation et la longueur du pas de maillage de la même façon.

Une fois qu'on a construit les nouveaux maillages de taille plus réduite et plus fins par rapport à l'itération précédente, on peut donc appliquer de nouveau la programmation dynamique avec ces nouveaux maillages.

4.2.4 Cas d'optimisation sous contraintes

Un problème pour l'optimisation de stratégie d'irrigation qu'on rencontre souvent dans la pratique consiste à maximiser le rendement avec un volume d'eau total limité, et éventuellement avec d'autres contraintes par rapport au mode d'irrigation.

Dans ce cadre, les contraintes se portent directement sur les domaines de variation de la variable de contrôle. Ces contraintes peuvent être multiples, et sous différentes formes, soit à chaque pas de temps, soit sur l'ensemble des périodes. Pour simplifier l'écriture de l'algorithme, on utilisera la représentation discrète qui correspond au modèle journalier dans cette section.

On illustre l'adaptation de l'algorithme de la section précédente avec un cas test, qui correspond à une situation concrète dans la pratique. On dispose d'un volume d'eau limité U, par exemple $2170m^3$ d'eau par hectare, ce qui correspond à $U = 217mm$ sur $1m^2$ dans un contexte pédo-climatique donné. Une stratégie d'irrigation admissible $(u_n)_{n=0,\dots,N}$ doit donc vérifier

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq U \tag{4.18}$$

On cherche à répartir ce volume tout au long du cycle de croissance de maïs afin d'optimiser le rendement en grain. On suppose que la dose (notée par $\hat{u}$) est fixée compte tenu des contraintes imposées par le système d'irrigation en question (par exemple, $\hat{u} = 31mm$ pour le canon enrouleur, ou $\hat{u} = 10mm$ en goutte-à-goutte). On a donc

$$u_n \in \{0, \hat{u}\}, \forall n \tag{4.19}$$

En outre sur le cas de l'enrouleur par exemple, l'agriculteur ne peut pas irriguer avec une fréquence inférieure à n_f jours (par exemple $n_f = 6$). Cette contrainte peut être représentée par l'inégalité suivante en conjonction avec la contrainte 4.19.

$$\sum_{n=j}^{j+n_f-1} u_n \leq \hat{u}, \forall j = 0, \ldots, N - n_f + 1 \tag{4.20}$$

Puisqu'on souhaite maximiser le rendement en grain du maïs, la fonction objectif instantanée ne dépend plus des u_n. Si on note

$$h(n, x(n)) = \frac{\bar{P}_c}{\bar{D}}(n)\alpha PAR(n)(1 - \exp(-\beta LAI(n))) \min(\frac{\theta_2(t)}{\theta_s}, 1) \tag{4.21}$$

alors on cherche à optimiser la quantité

$$\sum_{n=0}^{N} h(n, x(n))$$

sous les contraintes représentées par les équations 4.18, 4.19, 4.20.

La modélisation du système dynamique plante-sol sous-jacent reste inchangée. Cependant, afin de pouvoir appliquer l'algorithme de la programmation dynamique exposé ci-dessus, on ajoute deux composantes supplémentaires dans le vecteur d'état. Ces deux composantes feront en sorte que les choix des valeurs des variables de contrôle u_n satisfassent les contraintes 4.18 et 4.20.

On note pour le vecteur d'état,

$$\hat{x} = (LAI, \theta, U_r, \Delta_u)$$

avec la composante $U_r(n)$ qui indique la quantité d'eau restante au temps n par rapport à la quantité totale U, et la composante Δ_u qui mémorise le nombre de jours de décalage par rapport à la dernière irrigation.

Pour ce nouveau système

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{f}(n, \hat{x}_n, u_n)$$

les dynamiques des deux premières composantes restent inchangées, et pour les deux composantes supplémentaires on a

$$U_r(n+1) = U_r(n) - u_n$$

avec

$$U_r(0) = U$$

et

$$\Delta_u(n+1) = (\Delta_u(n) + 1)\mathbf{1}_{\{u_n=0\}}$$

avec

$$\Delta_u(0) = 0$$

Δ_u est bien une variable de compteur qui se remet à zero si on a irrigué la veille, et qui est incrémentée dans le cas contraire.

Dans cette formulation du problème à optimiser, on a augmenté la dimension du vecteur d'état pour traiter les contraintes. En même temps, ces contraintes réduisent les domaines de variations de ces composantes supplémentaires du vecteur d'état. Le calcul par programmation dynamique n'est pas alourdi par rapport au cadre général.

Pour les domaines de variation des deux composantes supplémentaires du vecteur d'état, si on note k la partie entière de $\frac{U}{\hat{u}}$, on a pour tout n,

$$U_r(n) \in \{U, U - \hat{u}, \ldots, U - (k-1)\hat{u}, U - k\hat{u}\}$$

et

$$\Delta_u(n) \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

On fait ensuite varier la valeur de la variable de contrôle u_n pour trouver l'optimal. En réalité, avec les contraintes de ce cas test, on a

$$\begin{cases} u_n = 0 & \text{si } \Delta_u(n) \leq n_f - 1 \text{ ou si } U_r(n) - \hat{u} < 0 \\ u_n \in \{0, \hat{u}\} & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.22}$$

Remarquons que ce soit pour les composantes de la variable d'état $U_r(n)$ et $\Delta_u(n)$ ou pour la variable de contrôle u_n, elles ne prennent que des valeurs discrètes selon les contraintes imposées, la question du choix du maillage ne se pose donc pas.

On peut donc appliquer les algorithmes de la programmation dynamique détaillés dans les deux sections précédentes, avec ces ajustements concernant à la fois la représentation du système dynamique et les choix de valeur pour la variable de contrôle, pour résoudre ce problème d'optimisation sous contraintes.

On illustre dans la figure 4.2 ce cas test sur le maïs avec les données météorologiques de l'année 2009 à Lavalette. Pour comparer avec la stratégie optimale obtenue avec la programmation dynamique, on illustre également deux autres traitements. L'un correspond à un traitement réel en aspersion, l'autre correspond à un traitement simulé où on répartit les 7 dosages uniformément au cours du temps. Le rendement en grain de ces trois traitements sont 11.2 t/ha pour le traitement réel, 10.4 t/ha pour le traitement régulier, et 11.9 t/ha pour le traitement optimal.

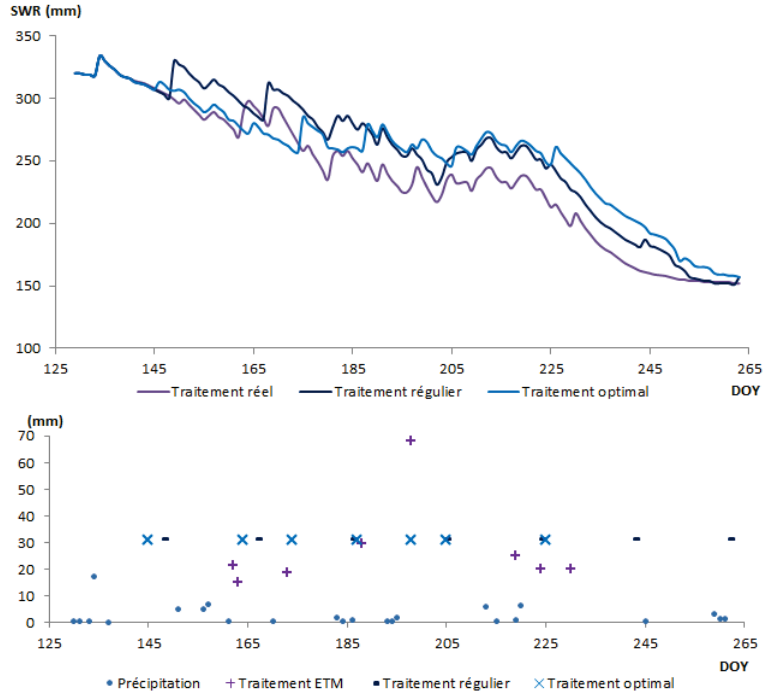


FIGURE 4.2: Comparaison des trois traitements pour un cas test d'optimisation sous contraintes sur le maïs avec les données météorologiques de l'année 2009 à Lavalette. La figure en haut illustre les variations de $SWR = R_1 + R_2 + R_3$ tout au long du cycle de croissance, et la figure en bas donne les quantités de précipitation et d'irrigation des trois traitements.

4.3 Optimisation stochastique

Pour se placer dans un cadre plus réaliste où la gestion des irrigations se fait en temps réel, on doit décrire le système avec un scénario climatique probabiliste, le climat à venir étant une inconnue. Cela présente un intérêt certain pour prédéfinir un calendrier d'arrosage. S'agissant de piloter les irrigations pour un objectif de rendement donné, on réactualise ce calendrier au cours de la campagne, sitôt connues les doses réellement appliquées, ainsi que le climat réel de la semaine écoulée. L'incertitude émanant du scénario climatique à venir est la principale source d'incertitude concernant la prévision des calendriers d'irrigation et la cause de la faible efficacité des méthode de gestions de l'eau à l'échelle des systèmes irrigués (Harwood et al. [2010]).

Dans la partie optimisation déterministe, le système discret peut s'écrire sous la forme

$$x_{n+1} = \mathrm{f}_n(x_n, u_n)$$

Pour chaque jour i, la fonction f_n contient en particulier les données météo, le scénario climatique étant fixé tout au long de la croissance de culture.

Dans un cadre prévisionnel, on est amené à déterminer une stratégie d'irrigation face à l'incertitude du climat à venir. Pour cela, on introduit un vecteur climatique aléatoire w_n, dont la loi de probabilité est donnée par un générateur climatique stochastique. Et on optimisera la stratégie d'irrigation sur le système

$$x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, w_n) \tag{4.23}$$

L'important est donc de décrire la dynamique de la composante aléatoire w_n. Pour cela, il existe différents générateurs climatiques stochastiques. Ce sont des modèles probabilistes destinés à simuler des données climatiques sur un site spécifique ou une région, en analysant d'abord l'historique des données climatiques, et en générant ensuite une série temporelle des variables climatiques qui possède les mêmes propriétés statistiques que les données historiques (Wilks and Wilby [1999], Semenov et al. [1998], Hartkamp et al. [2003]).

Parmi ces générateurs, on cite le modèle WGEN développé par Richardson (Richardson [1981], Richardson and Wright [1984]). Il est intégré dans de nombreuses études en écologie et en agriculture, domaines impliquant largement la modélisation et la simulation des processus physiologiques, l'aide à la décision agricole, l'analyse de l'incertitude, l'analyse des risques en agriculture, et l'effet du changement climatique (Stöckle et al. [2003], Krinner et al. [2005], Jones [1993], Finger and Schmid [2007], Mavromatis and Jones [1998], Wilks [1992]). Des études ont aussi été menées sur le modèle WGEN lui-même. Dans Birt et al. [2010], on propose une version simplifiée qui est plus adaptée à l'utilisation de

certains modèles en agriculture. Les limites spécifiques du modèle dans le climat aride et l'adaptation des paramètres sont discutées dans Taulis and Milke [2005], l'applicabilité du modèle a aussi été étudiée dans Chineke et al. [1999]. Dans Wilks [1999], l'utilisation du modèle est généralisée aux sites multiples possédant des composantes spatialement corrélées.

4.3.1 le modèle WGEN

On va donc intégrer le modèle WGEN dans nos modèles de plante-sol pour générer les variables météo journalières en fonction de la structure stochastique des processus météorologiques. On présente dans un premier temps le modèle WGEN qui permet de conserver à la fois la dépendance temporelle, la corrélation entre les variables et les caractéristiques saisonnières par rapport aux données météo d'un site.

La condition météorologique a un impact significatif sur la croissance de la culture. Pour justifier l'impact de la variabilité climatique sur la production, les variables agro-météorologiques sont des données d'entrée clé dans les modèles de cultures. Ces variables sont la températures maximale ($t_{\max}$), la température minimale ($t_{\min}$), la radiation solaire (r) et la précipitation (p).
Notez qu'on utilise la température journalière dans les modèles de plante-sol qu'on a présenté, il suffit alors de prendre la moyenne de $t_{\max}$ et de $t_{\min}$.

4.3.1.1 Précipitation

La précipitation est la variable climatique qui a reçu le plus d'attention des chercheurs intéressés par l'interpolation et l'exploration stochastiques des données temporaires (Arnold and Elliot [1996], Young et al. [2002], Woolhiser et al. [1988]).

Dans WGEN, la précipitation est la variable de base qu'on détermine dans un premier temps indépendamment des autres variables, la température maximale et minimale ainsi que la radiation solaire sont ensuite générées selon si le jour est sec ou non.

La composante précipitation dans WGEN est un modèle Gamma-Chaîne de Markov. La chaîne de Markov du premier ordre est utilisée pour générer l'occurrence de jour sec ou jour pluvieux, autrement dit, la probabilité qu'un jour soit pluvieux dépend du statut sec ou non du jour précédent. Soit $p_n^{1/1}$ la probabilité de pluie au jour n étant donné que le jour $n-1$ est pluvieux, $p_n^{1/0}$ la probabilité de pluie au jour n étant donné que le jour $n-1$ est sec. Alors, si on note $p_n^{0/1}$ la probabilité que le jour n soit sec étant donné que le jour $n-1$ est pluvieux, et $p_n^{0/0}$ la probabilité que le jour n soit sec étant donné que le jour $n-1$ est sec, on a

$$\begin{aligned} p_n^{0/1} &= 1 - p_n^{1/1} \\ p_n^{0/0} &= 1 - p_n^{1/0} \end{aligned}$$

Ainsi, les probabilités de transition sont complètement définies avec $p_n^{1/1}$, $p_n^{1/0}$ donnés.

Quant à la quantité de précipitation, sa densité est représentée par la loi de gamma

$$f_{\alpha,\beta}(p) = \frac{p^{\alpha-1}e^{-p\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)},\ p, \alpha, \beta > 0 \tag{4.24}$$

En particulier, on a $f_{\alpha,\beta}(p)$ décroissante, lorsque $0 < \alpha < 1$.

4.3.1.2 Températures et Radiation solaire

Quant aux variables températures (minimale et maximale) et radiation solaire, on décompose chacune de ces variables en deux parties, une partie dont la variation au fil du temps représente la tendance moyenne saisonnière, et une partie résiduelle qui représente le bruit.

En effet, le modèle WGEN génère les séries des résidus (bruits) pour les températures maximale et minimale et la radiation selon un processus faiblement stationnaire. Soit χ_n le vecteur à trois composantes qui représente les résidus du $n-$ième jour, $\chi_n(1)$ pour le résidu de $t_{n,\max}$, $\chi_n(2)$ pour le résidu de $t_{n,\min}$, et $\chi_n(3)$ pour le résidu de r_n. Alors pour tout n,

$$\chi_n = A\chi_{n-1} + B\epsilon_n$$

avec ϵ_n un vecteur gaussien composé de 3 variables normales standards indépendantes, et A, B sont des matrices 3×3 définies de façon que la suite χ_n satisfasse la corrélation temporelle de chaque composante et la corrélation entre les composantes. En effet, on définit A, B à l'aide des matrices M_0, M_1.

Soient

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_0(1,2) & \rho_0(1,3) \\ \rho_0(2,1) & 1 & \rho_0(2,3) \\ \rho_0(3,1) & \rho_0(3,2) & 1 \end{bmatrix} \\ M_1 &= \begin{bmatrix} \rho_1(1) & \rho_1(1,2) & \rho_1(1,3) \\ \rho_1(2,1) & \rho_1(2) & \rho_1(2,3) \\ \rho_1(3,1) & \rho_1(3,2) & \rho_1(3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\rho_0(j,k)$ est le coefficient de corrélation sans décalage entre la $j-$ième et la $k-$ième composante de χ_n, $\rho_1(j,k)$ le coefficient de corrélation entre la $j-$ième et la $k-$ième composante avec un jour de retard de la variable k par rapport à la variable j, et $\rho_1(j)$ la corrélation temporelle avec un jour de retard pour la variable j.

Alors on a

$$A = M_1 M_0^{-1}$$

$$BB^T = M_0 - M_1 M_0^{-1} M_1^T$$

Enfin, pour obtenir les valeurs journalières des températures $t_{\max}, t_{\min}$ et de la radiation r, on multiplie les valeurs résiduelles par l'écart type saisonnier (s), puis on y ajoute la moyenne saisonnière (m).

Soit $v_n = (t_{n,\max}, t_{n,\min}, r_n)$, pour son $j-$ième composant $v_n(j)$, on a

$$\begin{aligned} v_n(j) &= \chi_n(j) \cdot \mathrm{s}_n(j) + \mathrm{m}_n(j) && (4.25)\\ &= \mathrm{m}_n(j)\left[\chi_n(j) \cdot \mathrm{c}_n(j) + 1\right] && (4.26) \end{aligned}$$

avec $\mathrm{c} = \mathrm{s}/\mathrm{m}$ le coefficient de variation.

Ce coefficient de variation saisonnier et la moyenne saisonnière peuvent être modélisés par des oscillations sinusoïdales dont la période vaut 365 jours (Belcher et al. [2005]). Soit u_n la valeur de $\mathrm{m}_n(j)$ ou de $\mathrm{c}_n(j)$, alors on décrit la variation saisonnière de ces coefficients de la façon suivante :

$$\mathrm{u}_n = \bar{\mathrm{u}} + C\cos\left(\frac{2\pi}{365}(n-T)\right) \tag{4.27}$$

Les valeurs de ces paramètres peuvent dépendre de l'emplacement et/ou de l'état du jour (sec ou pluvieux). On récapitule ces éventuelles dépendances dans le tableau 4.2. Dans ce tableau, on a par exemple l'intersection de la première colonne (indexée par $t_{\max}$) et la première ligne (indexée par $\bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{m}}$) qui représente le paramètre $\bar{\mathrm{u}}$ dans l'équation 4.27, pour la moyenne saisonnière dans l'équation 4.26 de la variable $t_{\max}$.

4.3.2 Programmation dynamique stochastique

Pour intégrer WGEN dans un modèle de culture couplé plante sol, on peut poser dans l'équation (4.23)

$$w_n = (\chi_n, p_n \delta_n)$$

	tmax	tmin	r
$\bar{u}_m$			
C_m			
T_m			
$\bar{u}_c$			
C_c			
T_c			

	tmax	tmin	r
$\bar{u}_m$			
C_m			
T_m			
$\bar{u}_c$			
C_c			
T_c			

TABLE 4.2: Une case rayée dans le tableau à gauche (resp. à droite) signifie que la valeur de la variable correspondante ne dépend pas de l'emplacement (resp. l'état humid du jour).

où p_n est la quantité de précipitation dont la densité est donnée par l'équation 4.24, et $\delta_n = 1$ si le jour est pluvieux, $\delta_n = 0$ sinon.

On voudrait réécrire l'équation 4.23 sous la forme classique, où la loi de la composante aléatoire est connue. Pour cela, on utilise le fait que par WGEN, les χ_n sont corrélés, et que la valeur de δ_n donne la probabilité de δ_{n+1}. On représente ce processus de prévision en introduisant une nouvelle composante prévisionnelle y, et on a pour tout $n = 0, \ldots, N$,

$$y_n = \delta_{n-1}$$

avec δ_{-1} qui désigne l'état pluvieux de la veille de l'émergence de plante.
A partir de l'équation 4.23, on introduit le vecteur d'état $\tilde{x}_n$ en ajoutant à x_n le vecteur résiduel χ_n et la composante prévisionnelle y_n.

$$\tilde{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \chi_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(x_n, u_n, \chi_n, p_n\delta_n) \\ A\chi_n + B\epsilon_n \\ \delta_n \end{pmatrix} = \tilde{f}_n(\tilde{x}_n, u_n, \tilde{w}_n)$$

avec

$$\tilde{w}_n = (p_n, \epsilon_n, \delta_n)$$

Afin d'isoler la variable y pour la prévision du vecteur d'état $\tilde{x}$, on introduit un autre nouveau vecteur d'état $\bar{x}$,

$$\bar{x}_n = (x_n, \chi_n)$$

ainsi qu'un nouveau vecteur aléatoire $\bar{u}$,

$$\bar{w}_n = (p_n, \epsilon_n)$$

Alors pour tout $n = 0, \ldots, N$, notre système dynamique peut s'écrire sous la forme

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{f}_n(\bar{x}_n, u_n, \bar{w}_n, y_n) \tag{4.28}$$

La fonction $\bar{f}$ dépend donc à la fois du vecteur d'état, de la variable contrôle, de la variable aléatoire pour la météo, et de la variable prévisionnelle.

A partir du système dynamique 4.28, on peut donc réécrire l'algorithme de la programmation dynamique dans le cadre stochastique.
On définit successivement les fonctions $\bar{J}_N, \bar{J}_{N-1}, \ldots, \bar{J}_0$ de la façon suivante

$$\bar{J}_N(\bar{x}_N, y_N) = \bar{g}_N(\bar{x}_N)$$

$$\begin{aligned}\bar{J}_n(\bar{x}_n, y_n) = \max_{u_n} \mathbb{E}_{\bar{w}_n} \Big\{ & \bar{g}_n(\bar{x}_n) + p_{n+1}^{0/y_n} \bar{J}_{n+1}[\bar{f}_n(\bar{x}_n, u_n \bar{w}_n, y_n), 0] \\ & + p_{n+1}^{1/y_n} \bar{J}_{n+1}[\bar{f}_n(\bar{x}_n, u_n \bar{w}_n, y_n), 1] \mid y_n \Big\} \end{aligned} \tag{4.29}$$

pour $n = N-1, \ldots, 0$. Avec $\bar{g}_n(\bar{x}_n) = g_n(x_n)$.
Alors on a le profit optimal

$$J(x_0) = \bar{J}_0(\bar{x}_0, y_0)$$

Remarquons que dans le cas stochastique, la fonctions du meilleur profit $\bar{J}_n$ au pas de temps n dépend non seulement du vecteur d'état $\bar{x}_n$, mais aussi de la variable prévisionnelle. En effet, $\bar{J}_n$ est le maximum d'une moyenne conditionnelle par rapport à la variable prévisionnelle.

4.3.3 Optimisation adaptative

L'algorithme d'optimisation par la programmation dynamique stochastique permet donc de donner une stratégie d'irrigation qui optimise le rendement final, au sens de la moyenne, compte tenu des lois de probabilité de scénarios climatiques tout au long du cycle de croissances des cultures. Néanmoins, au cours du temps de la croissance, à chaque instant, un scénario s'est réalisé depuis le semis. On voudrait donc naturellement adapter notre stratégie optimale en fonction de ce qui s'est produit au niveau météorologique. L'algorithme de la programmation dynamique stochastique expliqué ci-dessus est souple pour être facilement ajusté dans cette optique.

En effet, il y a différentes façons de lancer le calcul. Si on cherche une stratégie complète qui va jusqu'au jour N au temps initial 0, on applique la programmation dynamique stochastique selon l'équation 4.29, en partant du temps N jusqu'au temps 0, et en prenant chaque pas de temps les deux valeurs possibles pour y_n. La stratégie trouvée est donc "optimale" au sens de la moyenne sur tout le cycle.

Il y a une autre façon de procéder si on veut adapter la stratégie en fonction de ce qui s'est déjà produit jusqu'au jour n ($n > 0$). Au temps 0, on lance alors une première fois le calcul du temps N jusqu'au temps 0, et on applique cette

stratégie jusqu'au temps n. Ensuite, on relance la programmation dynamique stochastique en partant du temps N jusqu'au temps n, avec le nouvel état initial $\bar{x}_n, y_n$ qui est connu. En effet, on peut simuler le système avec le modèle plante-sol jusqu'au jour n, avec le scénario climatique produit jusqu'ici.

Cette procédure d'actualisation de stratégie peut évidemment être réitérée à différents moments au long du cycle. Plus souvent on actualise la stratégie, plus la stratégie obtenue au temps final sera proche de la stratégie optimale qu'on aurait trouvée dans le cadre déterministe.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Contributions

Pour répondre aux enjeux d'une meilleure gestion de la production et des ressources en eau en agriculture, et de l'amélioration de l'efficacité des pratiques d'irrigation, on a proposé dans cette thèse une approche innovante qui permet de prédire le rendement des cultures en fonction du régime d'irrigation, et d'obtenir des stratégies d'irrigations optimales.

La démarche consiste à modéliser le développement de la plante en intégrant l'impact du stress hydrique tout au long de son cycle de croissance. L'état du stress hydrique de la plante étant reflété par celui du sol, on a donc choisi de coupler un modèle de plante avec un modèle du sol, et la dynamique résultant de ce système plante-sol a permis une meilleure prise en compte de l'état hydrique de la plante dans la modélisation de sa croissance. Par conséquent, on peut donc simuler le rendement à partir de tout scénario climatique et de stratégies d'irrigation.

La mise en équation de ce système d'interaction plante-sol-atmosphère a également donné un cadre approprié pour appliquer des méthodes d'optimisation mathématique. On a choisi d'appliquer la programmation dynamique au modèle plante-sol pour trouver la stratégie d'irrigation, qui indique les dates et le dosage à apporter à chacune de ces dates.

Que ce soit dans la partie modélisation ou dans la partie optimisation, diverses considérations ont été prises en compte dans notre démarche multidisciplinaire. Notre méthodologie est donc intéressante que ce soit du point de vue de l'agronomie, de la modélisation, de la simulation, de l'analyse numérique et de l'optimisation.

En particulier, le modèle GreenLab a été adapté en une version continue pour pouvoir mieux intégrer les facteurs environnementaux. Avec un nouveau mécanisme de sénescence introduit dans ce modèle continu, on a obtenu un système

dynamique avec retard. Une méthode pour résoudre numériquement ce système à retard a aussi été proposée.

Dans la modélisation de l'impact du stress hydrique pour un modèle de croissance de plante, on a repéré et hiérarchisé les principaux processus physiologiques affectés par le stress. Pour la modélisation de la partie plante dans le couplage, différents niveaux de complexité ont été mis en place selon les différents besoins. Non seulement on a utilisé le modèle GreenLab continu qui décrit de façon fine la mise en place des différents organes, mais on a également construit un nouveau modèle de compartiments qui est pertinent pour la prédiction du rendement. Au détriment d'un plus grand empirisme, le système plante-sol avec le modèle de compartiments peut aussi être plus facilement calibré, lorsqu'on ne dispose que des moyens limités pour la collecte des données expérimentales.

Pour une meilleure prise en compte de l'état hydrique de la plante dans la modélisation de la croissance des plantes, on a exploré un modèle d'interaction plante-sol, en couplant le modèle de plante structural-fonctionnel GreenLab et le modèle Pilote qui simule un bilan hydrique du sol et fournit un indicateur de l'état stress de plante. Le modèle GreenLab est en particulier adapté en une version continue pour mieux intégrer les facteurs environnementaux. Le couplage pouvant se faire à plusieurs niveaux, on a proposé ici de faire impacter le stress estimé par le modèle Pilote à la production de biomasse selon GreenLab. D'autres façons de modéliser l'impact du stress hydrique sur la croissance de plantes pourrait être envisagées.

La motivation et l'intérêt de notre méthode consistent à décrire mathématiquement l'interaction de la plante avec l'évolution de son environnement tout au long de son cycle de croissance, en vue d'une mise en place de stratégie d'irrigation optimale, contrairement aux approches empiriques qu'on trouve le plus souvent dans la littérature (Bergez et al. [2001], Li et al. [2005], Playán and Mateos [2006], Zhang and Oweis [1999]). A partir d'un système dynamique plante-sol, on a appliqué la méthode de programmation dynamique qui est adaptée à différents objectifs. On a alors illustré deux cas d'optimisation, dont l'un consiste à optimiser le profit de l'agriculteur en prenant en compte à la fois le gain en rendement et la dépense en eau à irriguer, l'autre cas consiste à maximiser le rendement en se donnant une quantité totale fixe de la ressource en eau pour l'irrigation à répartir sur tout le cycle sur le principe des quotas. Pour le cœur de l'algorithme, on a proposé deux algorithmes équivalents. Une version itérative de la programmation dynamique a aussi été présentée pour surmonter les difficultés introduites par le retard et la grande dimension du système.

Dans l'optique de planifier des stratégies d'irrigation en amont, on a adapté la méthode de programmation dynamique dans un cadre stochastique, qui consiste essentiellement à intégrer un générateur climatique et à introduire une composante prévisionnelle dans le vecteur d'état du système. La stratégie obtenue sera

donc optimale au sens de la moyenne, en considérant tous les scénarios climatiques possibles avec leurs probabilités d'occurrence respectives. Cette méthode peut également être réitérée tout au long du cycle de croissance de la culture, afin d'intégrer au fur et à mesure le scénario climatique qui s'est produit. Cette méthode d'optimisation s'avère alors souple et pertinente.

5.2 Discussion et perspectives

Notre méthodologie pour modéliser l'impact du stress hydrique sur la croissance des plantes et de recherche de contrôle optimal d'irrigation basé sur un système dynamique plante-sol est intéressante et générique. L'utilisation de la programmation dynamique est adaptée et souple. On a notamment illustré cette approche en explorant trois niveaux de modélisation pour le système plante-sol, et deux cas d'optimisation sans contrainte et avec contraintes. Il existe néanmoins d'autres alternatives et divers points à améliorer ou à approfondir.

5.2.1 Pour la modélisation de l'interaction plante-ressource en eau

5.2.1.1 Estimation des paramètres

Parmi les différents modèles qu'on a explorés dans cette thèse, on a surtout calibré le modèle couplé avec le modèle de plante par compartiments, compte tenu des données expérimentales qu'on dispose. Il aurait été intéressant de paramétrer le modèle de plante GreenLab continu et son couplage avec le modèle Pilote avec des jeux de données adaptés.

5.2.1.2 D'autres impacts du stress hydrique de la croissance de plante

Dans le modèle couplé compartiments-Pilote, nous avons modélisé les principaux processus physiologiques concernant l'évolution de biomasse des différents compartiments, ainsi que les impacts du stress hydrique sur ces processus. Ces processus sont la production de biomasse, l'allocation de biomasse vers les compartiments ainsi que la sénescence des feuilles. Tandis que pour le modèle couplé GreenLab-Pilote, on n'a considéré jusqu'ici que l'impact du stress hydrique sur la production. On pourrait alors examiner de plus près les différentes réponses de la plante face à un déficit d'apport d'eau (Hsiao [1973], Hsiao and Acevedo [1974]) et tenter d'intégrer d'autres impacts, non seulement concernant les processus fonctionnels comme pour le modèle compartiments-Pilote, mais aussi l'impact du stress sur le développement structural de la plante, en explorant la potentialité de GreenLab en tant que FSPM (Song et al. [2008], Birch et al. [2008], Song et al. [2010]).

5.2.1.3 Prise en compte de la variabilité environnementale

La variabilité environnementale joue un rôle important dans la prédiction du rendement cultural et l'efficacité des stratégies d'irrigation. Les sources de variabilité sont diverses, à la fois au niveau temporel et spatial.

Jusqu'ici, on n'a pas pris en compte ces variabilités dans la modélisation du système plante-sol. Les valeurs des grandeurs simulées doivent alors être considérées comme des moyennes sur une surface unitaire au champs. Il serait donc intéressant dans de futurs travaux d'intégrer ces variabilités dans les modèles plante-sol, comme cela a été introduit par de Reffye et al. [2009] pour le modèle GreenLab betterave.

Concernant la variabilité temporelle, on note notamment les différences des dates de levées, ce point ayant été exploré dans Feng [2011] pour le modèle GreenLab. Au niveau spatial, on peut citer entre autres l'hétérogénéité de l'emplacement du semis qui peut avoir une influence importante sur la compétition entre plantes notamment pour l'eau. L'hétérogénéité de l'état hydrique du sol peut avoir un fort impact sur l'efficacité des stratégies d'irrigation.

5.2.2 Pour l'optimisation des stratégies d'irrigation

5.2.2.1 Alternatives d'objectif et de contrainte

On a illustré l'utilisation de la programmation dynamique pour la partie contrôle optimal d'irrigation pour deux cas, l'optimisation du profit, et l'optimisation du rendement avec des contraintes pratiques sur l'irrigation. L'implémentation de l'algorithme dans le premier cas étant assez directe, la technique d'augmentation du vecteur d'état qu'on a employée pour le deuxième cas pourrait être ajustée pour résoudre d'autres problèmes d'optimisation.

5.2.2.2 Amélioration de la performance des algorithmes de programmation dynamique

Douée d'une grande adaptabilité et facilité d'utilisation, la programmation dynamique est pourtant une méthode d'optimisation qui est lourde en terme de calcul. Pour optimiser le temps de calcul, on pourrait donc examiner de plus près la structure du système dynamique en question afin de réduire les domaines de variation pour les variables d'état et de contrôle. L'implémentation parallèle de l'algorithme serait aussi intéressante.

5.2.2.3 Choix du générateur climatique

Pour la partie optimisation stochastique, on a choisi d'intégrer le modèle WGEN dans le système plante-sol pour décrire le comportement des principales variables climatiques telles que la température maximale, la température minimale, la radiation solaire et la précipitation. Néanmoins, la simulation du bilan hydrique

du sol par le modèle Pilote repose sur une variable dépendante des conditions climatiques qui est l'évapotranspiration de référence (ET0). En effet, l'ET0 est une fonction de la radiation, la température minimale, la température maximale, le taux d'humidité et de la vitesse du vent (Hargreaves and Samani [1982], Tanner and Pelton [1960]). Pour considérer l'ET0 comme une variable aléatoire dans notre modèle plante-sol, l'utilisation de WGEN est donc insuffisante, il serait alors intéressant d'intégrer un autre générateur climatique qui traite le taux d'humidité et la vitesse du vent (Stöckle et al. [2004].

5.2.2.4 Analyse de risques pour les stratégies d'irrigation

On a présenté une méthodologie pour retrouver une stratégie d'irrigation qui optimise le rendement ou le profit au sens de la moyenne. Il serait alors intéressant de récapituler la pertinence de cette stratégie optimale par rapport à tous les scénarios possibles en fonction de leurs probabilités d'occurrence respectives, il s'agit alors de mener une analyse de risques climatiques ainsi que l'analyse de la réduction de risque par rapport à l'adoption de notre approche de contrôle optimal d'irrigation.

Pour répondre à l'enjeu majeur de la réduction des apports d'eau en agriculture dans une approche d'environnement durable, on a proposé dans cette thèse pluridisciplinaire une méthodologie qui consiste à modéliser la croissance des plantes en interaction avec la ressource en eau, à intégrer les impacts du stress hydrique dans la croissance des plantes, et à optimiser les stratégies d'irrigation par la programmation dynamique à partir d'un système dynamique plante-sol. Cette approche de modélisation et de contrôle optimal est d'autant plus intéressante dans des cas où le système d'irrigation est du goutte-à-goutte, et dans les serres lorsque les conditions climatiques sont parfaitement contrôlés. La même démarche pourrait être mise en œuvre sur les apports d'azote en enrichissant le modèle plante-sol.

Table des figures

2.1 Le développement du maïs. L'organogenèse est simulée comme un automate qui produit successivement différents types de métamères. Les six premiers métamères sont végétatifs et contiennent chacun une feuille, une gaine et un entre-nœuds court. Les neuf métamères suivants contiennent en plus un épi avec un entrenoeud long. Les cinq métamères qui suivent sont végétatifs comme les six premiers mais avec des entre-nœuds longs, et le dernier métamère contient une feuille, une gaine et une fleur mâle, d'après Guo et al. [2006]. 27
2.2 Les intervalles de temps pour la résolution du système à retard du GreenLab continu. 35
2.3 Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire par cycle de croissance (pas du temps) pour $\overline{PAR}_{GC} \equiv 7.5MJ/m^2$. . . 40
2.4 Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire par cycle de croissance (pas du temps) pour $\overline{PAR}_{GC} \equiv 10MJ/m^2$. . . 41
2.5 Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire par cycle de croissance (pas du temps) pour $\overline{PAR}_{GC} \equiv 20MJ/m^2$. . . 43
2.6 Production de biomasse, masse foliaire et masse racinaire avec données réelles journalières pour $\bar{T}$ et $\overline{PAR}_{day}$. 44

3.1 Le cycle d'eau sol-plante-environnement. 46
3.2 Réserve utile selon la texture du sol. 49
3.3 La fonction stress qui ajuste la transpiration dans le réservoir racinaire. 54
3.4 Taux d'évapotranspiration en fonction de la teneur en eau volumique du sol. 55
3.5 Nombre de phythomères en fonction du temps thermique. 59
3.6 L'évolution de la surface foliaire d'une plante en fonction du temps thermique. 60
3.7 MPA de six plantes individuelles à cinq dates au long du cycle. . 60
3.8 L'évolution de MPA d'une feuille individuelle en fonction du rang. 61
3.9 MPA global(g/cm2) = 0.0657 pour la première phase ; = 0.0201 pour la phase postérieure. 61
3.10 Comparaison de l'évolution de Sf obtenue avec trois méthodes différentes. 62
3.11 Les mesures de LAI et sa courbe avec la paramétrisation correspondante. 63
3.12 Fonction de proportion pour l'allocation de biomasse vers le compartiment épi dans le cas sans stress ($f(x)$) et dans un cas de stress ($g(x)$). 66
3.13 les valeurs simulées (par Pilote) et mesurées de LAI pour trois traitements hydriques (à l'ETM, à 50%ETM, et sans irrigation) pour le maïs en 2011 à Lavalette. 69

3.14 LAI et masse racinaire. Cas 1 : en conditions de culture optimales sans stress hydrique ; Cas 2 : sans apport d'eau du jour 156 au jour 216 de l'année ; Cas 3 : sans apport d'eau pendant du jour 179 au jour 276. 73
3.15 Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote et des données observées sur la biomasse des compartiments de feuilles et d'épi, pour deux traitements hydriques en 2009 à Lavalette : ETM (gauche) et 50%ETM (droite). 76
3.16 Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote et des données simulées par Pilote sur le LAI pour deux traitements hydriques en 2009 à Lavalette : ETM (gauche) et 50%ETM (droite). 77
3.17 Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote et des données observées sur la biomasse des compartiments de feuilles et d'épi, pour deux traitements hydriques en 2011 à Lavalette : ETM (gauche) et 50%ETM (droite). 78
3.18 Comparaison des données simulées par le modèle compartiments-Pilote, des données simulées par Pilote et des données mesurées sur le LAI pour trois traitements hydriques en 2011 à Lavalette : ETM, 50%ETM et sec. 79

4.1 Evolutions de WSI sous trois traitements d'irriguation. 93
4.2 Comparaison des trois traitements pour un cas test d'optimisation sous contraintes sur le maïs avec les données météorologiques de l'année 2009 à Lavalette. La figure en haut illustre les variations de $SWR = R_1 + R_2 + R_3$ tout au long du cycle de croissance, et la figure en bas donne les quantités de précipitation et d'irrigation des trois traitements. 99

Bibliographie

M. Abràmoff, P. Magalhães, and S. Ram. Image processing with imagej. *Biophotonics international*, 11(7):36–42, 2004.

S. Al-Khafaf and B. PJ Williams. Evaporative flux from irrigated cotton as related to leaf area index, soil water, and evaporative demand1. *Agronomy Journal*, 70(6):912, 1978.

R. Allen, L. Pereira, D. Raes, and M. Smith. Crop evapotranspiration. guidelines for computing crop water requirements. In *FAO Irrigation and Drainage*, volume 300 of *56*, page 6541. FAO (Rome, Italy), 1998.

W. Allen and A. Richardson. Interaction of light with a plant canopy. *JOSA*, 58(8):1023–1028, 1968.

F. J. L. A. S. M. Allison, B.E. The use of the ceres-millet model for production strategy analysis in south west niger. In *15th Congress on Irrigation and Drainage. 2nd Workshop on Crop Water Models*, page 17. The Hague, the Netherlands 1993. Session III., 1993.

A. Anwar and D. Clarke. Irrigation scheduling using mixed-integer linear programming. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 127(2):63–69, 2001.

A. Anwar and T. De Vries. Irrigation scheduling. ii: Heuristics approach. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 130(1):17–25, 2004.

C. Arnold and W. Elliot. Cligen weather generator predictions of seasonal wet and dry spells in uganda. *Transactions of the ASAE*, 39(3):969–972, 1996.

H. Ashktorab et al. Partitioning of evapotranspiration using lysimeter and micro-bowen-ratio system. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 120:450, 1994.

G. Asrar, M. Fuchs, E. Kanemasu, and J. Hatfield. Estimating absorbed photosynthetic radiation and leaf area index from spectral reflectance in wheat. *Agronomy Journal*, 76(2):300–306, 1984.

M. Azaiez. Modeling optimal allocation of deficit irrigation: Application to crop production in saudi arabia. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 7:277–289, 2008. ISSN 1570-1166. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s10852-008-9085-x`. 10.1007/s10852-008-9085-x.

C. Baey, A. Didier, L. Song, S. Lemaire, F. Maupas, and P.-H. Cournède. Evaluation of the predictive capacity of five plant growth models for sugar beet. In *IEEE 4th International Symposium on Plant Growth Modeling, Simulation, Visualization and Applications*, 2012.

C. Baker, C. Paul, and D. Willé. A bibliography on the numerical solution of delay differential equations. 1995.

C. Baker, C. Paul, and D. Wille. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. Numerical Analysis 248, University of Manchester, Department of Mathematics, 1999.

D. Barthélémy and Y. Caraglio. Plant architecture: a dynamic, multilevel and comprehensive approach to plant form, structure and ontogeny. *Annals of Botany*, 99(3):375–407, 2007.

S. Belcher, J. Hacker, and D. Powell. Constructing design weather data for future climates. *Building Services Engineering Research and Technology*, 26 (1):49–61, 2005.

A. Bellen and M. Zennaro. *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford University Press, USA, 2003.

R. Bellman. Bottleneck problems and dynamic programming. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 39(9):947, 1953.

J. Bergez, P. Debaeke, J. Deumier, B. Lacroix, D. Leenhardt, P. Leroy, and D. Wallach. Moderato: an object-oriented decision tool for designing maize irrigation schedules. *Ecological Modelling*, 137(1):43–60, 2001.

J. Bergez, J. Deumier, B. Lacroix, P. Leroy, and D. Wallach. Improving irrigation schedules by using a biophysical and a decisional model. *European journal of Agronomy*, 16(2):123–135, 2002.

J. Bergez, F. Garcia, and L. Lapasse. A hierarchical partitioning method for optimizing irrigation strategies. *Agricultural Systems*, 80(3):235–253, 2004.

J. Bertheloot, B. Andrieu, F. Fournier, and P. Martre. A process-based model to simulate nitrogen distribution in wheat (triticum aestivum) during grain-filling. *Functional Plant Biology*, 35:781–796, 2008.

C. Birch, J. Vos, J. Kiniry, H. Bos, and A. Elings. Phyllochron responds to acclimation to temperature and irradiance in maize. *Field Crops Research*, 59(3):187 – 200, 1998. ISSN 0378-4290. doi: 10.1016/S0378-4290(98)00120-8. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378429098001208`.

C. Birch, D. Thornby, S. Adkins, B. Andrieu, and J. Hanan. Architectural modelling of maize under water stress. *Animal Production Science*, 48(3): 335–341, 2008.

A. Birt, M. Valdez-Vivas, R. Feldman, C. Lafon, D. Cairns, R. Coulson, M. Tchakerian, W. Xi, and J. Guldin. A simple stochastic weather generator for ecological modeling. *Environmental Modelling & Software*, 25(10): 1252–1255, 2010.

A. Blum. Effective use of water (euw) and not water-use efficiency (wue) is the target of crop yield improvement under drought stress. *Field Crops Research*, 112(2):119–123, 2009.

B. Bojkov and R. Luus. Time optimal control of high dimensional systems by iterative dynamic programming. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 73(3):380–390, 1995.

C. Bontemps and S. Couture. Irrigation water demand for the decision maker. *Environment and Development Economics*, 7(04):643–657, 2002.

R. Borchert and H. Honda. Control of development in the bifurcating branch system of tabebuia rosea. *Botanical Gazette*, 145(2):184–195, 1984.

B. Bouman, H. Van Keulen, H. Van Laar, and R. Rabbinge. The [] school of de wit'crop growth simulation models: A pedigree and historical overview. *Agricultural Systems*, 52(2-3):171–198, 1996.

N. Brisson, M. Launay, B. Mary, and N. Beaudoin, editors. *Conceptual Basis, Formalisations and Parameterization of the Stics Crop Model*. Éditions QUAE, Versailles, FRANCE, 2008.

X. Cai, D. McKinney, and L. Lasdon. Solving nonlinear water management models using a combined genetic algorithm and linear programming approach. *Advances in Water Resources*, 24(6):667–676, 2001.

R. Çakir. Effect of water stress at different development stages on vegetative and reproductive growth of corn. *Field Crops Research*, 89(1):1–16, 2004.

G. Campbell. *Soil physics with BASIC: transport models for soil-plant systems*, volume 14. Elsevier, 1985.

G. Campbell and M. Campbell. Irrigation scheduling using soil moisture measurements: theory and practice. *Advances in irrigation*, 1, 1982.

W. Cao, T. Liu, W. Luo, S. Wang, J. Pan, and W. Guo. Simulating organ growth in wheat based on the organ weight fraction concept. *PLANT PRODUCTION SCIENCE-TOKYO-*, 5(3):248–256, 2002.

M. Chaves, J. Pereira, J. Maroco, M. Rodrigues, C. Ricardo, M. Osorio, I. Carvalho, T. Faria, and C. Pinheiro. How plants cope with water stress in the field? photosynthesis and growth. *Annals of Botany*, 89(7):907–916, 2002.

J. Chaves-Morales. Optimization and simulation methodology for irrigation planning. *Available from University Microfilms International 300 N. Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106, Order*, (8607573), 1985.

J. Chen, P. Plummer, M. Rich, S. Gower, and J. Norman. Leaf area index measurements. *Journal of Geophysical Research*, 102(D24):29–429, 1997.

T. Chineke, S. Jagtap, and J. Aina. On the importance of soil evaporation and rainfall interception in irrigation scheduling. *Proc. of Intern. Conf. of ASAE San Antonio*, pages 281–288, 1996.

T. Chineke, S. Jagtap, and J. Aina. Applicability of a weather simulation model based on observed daily meteorological data in humid tropical climate. *Theoretical and applied climatology*, 64(1):15–25, 1999.

R. Cortignani and S. Severini. Modeling farm-level adoption of deficit irrigation using positive mathematical programming. *Agricultural Water Management*, 96(12):1785–1791, 2009.

P.-H. Cournède, A. Mathieu, F. Houllier, D. Barthélémy, and P. de Reffye. Computing competition for light in the GreenLab model of plant growth: a contribution to the study of the effects of density on resource acquisition and architectural development. *Annals of Botany*, 101(8), 2008.

P. Cournède, V. Letort, A. Mathieu, M. Kang, S. Lemaire, S. Trevezas, F. Houllier, P. De Reffye, E. Digiplante, F. Grignon, et al. Some parameter estimation issues in functional-structural plant modelling. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 6(2):133–159, 2011.

P.-H. Cournède, M.-Z. Kang, A. Mathieu, J.-F. Barczi, H.-P. Yan, B.-G. Hu, and P. de Reffye. Structural Factorization of Plants to Compute their Functional and Architectural Growth. *Simulation*, 82(7):427–438, 2006.

I. Cowan. Transport of water in the soil-plant-atmosphere system. *Journal of Applied Ecology*, pages 221–239, 1965.

C. Cryer. Numerical methods for functional differential equations. *Delay and functional differential equations and their applications*, pages 17–101, 1972.

S. Dadebo and R. Luus. Optimal control of time-delay systems by dynamic programming. *Optimal Control Applications and Methods*, 13(1):29–41, 1992.

P. de Reffye and B. Hu. Relevant choices in botany and mathematics for building efficient dynamic plant growth models: the greenlab case. In B. Hu and M. Jaeger, editors, *Plant Growth Models and Applications*, pages 87–107. Tsinghua University Press and Springer, 2003.

P. de Reffye, M. Goursat, J. Quadrat, and B. Hu. The Dynamic Equations of the Tree Morphogenesis Greenlab Model. Technical Report 4877, INRIA, 2003.

P. de Reffye, E. Heuvelink, D. Barthélémy, and P.-H. Cournède. Plant growth models. In S. Jorgensen and B. Fath, editors, *Ecological Models. Vol. 4 of Encyclopedia of Ecology (5 volumes)*, pages 2824–2837. Elsevier (Oxford), 2008.

P. de Reffye, S. Lemaire, N. Srivastava, F. Maupas, and P. Cournede. Modeling inter-individual variability in sugar beet populations. In *Plant Growth Modeling, Simulation, Visualization and Applications (PMA), 2009 Third International Symposium on*, pages 270–276. IEEE, 2009.

C. de Wit et al. Transpiration and crop yields. *Versl. Landbouwk. Onderz. 64. 6.*, 1958.

G. Deblonde, M. Penner, and A. Royer. Measuring leaf area index with the li-cor lai-2000 in pine stands. *Ecology*, 75(5):1507–1511, 1994.

J. Doorenbos and A. Kassam. Yield response to water. In *Food and Agriculture Organisation, Rome, Italy*, 1979.

W. Doppler, A. Salman, E. Al-Karablieh, and H. Wolff. The impact of water price strategies on the allocation of irrigation water: the case of the jordan valley. *Agricultural Water Management*, 55(3):171–182, 2002.

G. d'Oro and V. Trippi. Effect of stress conditions induced by temperature, water and rain on senescence development. *Plant and cell physiology*, 28(8): 1389–1396, 1987.

B. Doss, R. Pearson, and H. Rogers. Effect of soil water stress at various growth stages on soybean yield. *Agronomy journal*, 66(2):297–299, 1974.

R. Driver. *Ordinary and delay differential equations*, volume 20. Springer-Verlag New York, 1977.

P. Eagleson. Climate, soil, and vegetation: 1. introduction to water balance dynamics. *Water Resources Research*, 14(5):705–712, 1978.

M. El-Sharkaway and J. Cock. Water use efficiency of cassava. i. effects of air humidity and water stress on stomatal conductance and gas exchange. *Crop Science*, 24(3):497–502, 1984.

A. ELMAHDI, H. Malano, T. Etchells, et al. System dynamics optimisation approach to irrigation demand management. *MODSIM 05*, 2005.

L. Elsgolts and S. Norkin. *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*, volume 105. Academic Press New York, 1973.

M. English. Irrigation advisory services for optimum use of limited water. In *INTERNATIONAL WORKSHOP ON IRRIGATION ADVISORY SERVICES AND PARTICIPATORY EXTENSION IN IRRIGATION MANAGEMENT*, 2002.

J. Evers, J. Vos, and G. Buck-Sorlin. Considering plant structure in models of plant growth and development. *40 Years Theory and Model at Wageningen UR*, page 15, 2008.

A. Fares and A. Alva. Soil water components based on capacitance probes in a sandy soil. *Soil Science Society of America Journal*, 64(1):311–318, 2000.

L. Feng. *Combining an empirical crop model with a functional structural plant model to account for individual variability.* PhD thesis, CIRAD, UMR AMAP (Montpellier), 2011.

E. Fereres and M. Soriano. Deficit irrigation for reducing agricultural water use. *Journal of Experimental Botany*, 58(2):147–159, 2007.

J. Ferrio, N. Aparicio, L. del Moral, Y. Rharrabti, C. Royo, D. Villegas, S. El Hani, and J. Araus. Environmental factors determining carbon isotope discrimination and yield in durum wheat under mediterranean conditions. *Crop Science*, 43(1):170–180, 2003.

R. Finger and S. Schmid. Modelling agricultural production risk and the adaptation to climate change. 2007.

R. Fischer and R. Hagan. Plant water relations, irrigation management and crop yield. *Experimental Agriculture*, 1(03):161–177, 1965.

A. Ganji and M. Shekarriz fard. A modified constrained state formulation of stochastic soil moisture for crop water allocation. *Water Resources Management*, 24:547–561, 2010. ISSN 0920-4741. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s11269-009-9458-6`. 10.1007/s11269-009-9458-6.

A. Ganji, K. Ponnambalam, D. Khalili, and M. Karamouz. Grain yield reliability analysis with crop water demand uncertainty. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 20:259–277, 2006. ISSN 1436-3240. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00477-005-0020-7`. 10.1007/s00477-005-0020-7.

S. Geerts and D. Raes. Deficit irrigation as an on-farm strategy to maximize crop water productivity in dry areas. *Agricultural Water Management*, 96(9):1275–1284, 2009.

C. Godin and H. Sinoquet. Fonctional-strucutural plant modelling. *New Phytologist*, 166:705–708, 2005.

T. Gollan, R. Richards, J. Passioura, H. Rawson, R. Munns, and D. Johnson. Soil water status affects the stomata1. *Functional Plant Biology*, 13(4):459–464, 1986.

K. Gopalsamy. *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. Springer, 1992.

S. Gower, C. Kucharik, and J. Norman. Direct and indirect estimation of leaf area index,< i> f</i>< sub> apar</sub>, and net primary production of terrestrial ecosystems. *Remote Sensing of Environment*, 70(1):29–51, 1999.

J. Groenendael. Teratology and metameric plant construction. *New phytologist*, 99(1):171–178, 2006.

Y. Guo, Y. Ma, Z. Zhan, B. Li, M. Dingkuhn, D. Luquet, and P. de Reffye. Parameter optimization and field validation of the functional-structural model greenlab for maize. *Annals of Botany*, 97:217–230, 2006.

N. Gupta, S. Gupta, and A. Kumar. Effect of water stress on physiological attributes and their relationship with growth and yield of wheat cultivars at different stages. *Journal of Agronomy and Crop Science*, 186(1):55–62, 2008.

A. Halanay. *Differential equations. Stability, oscillations, time lags*, volume 23. Academic Press, 1966.

M. Hall, T. Alwan, M. Miah, A. Smith, and J. Taylor. Senescence. In *Symposium on Tomato Production on Arid Land 190*, pages 235–242, 1984.

J. Hanan and P. Prusinkiewicz. Foreword: studying plants with functional–structural models. *Functional Plant Biology*, 35(10):vi–viii, 2008.

G. Hargreaves and Z. Samani. Estimating potential evapotranspiration. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 108(3):225–230, 1982.

A. Hartkamp, J. White, and G. Hoogenboom. Comparison of three weather generators for crop modeling: a case study for subtropical environments. *Agricultural Systems*, 76(2):539–560, 2003.

T. Harwood, F. Al Said, S. Pearson, S. Houghton, and P. Hadley. Modelling uncertainty in field grown iceberg lettuce production for decision support. *Computers and Electronics in Agriculture*, 71(1):57–63, 2010.

R. Hay. Harvest index: a review of its use in plant breeding and crop physiology. *Annals of Applied Biology*, 126(1):197–216, 2008.

H. Hiessl and E. Plate. A heuristic closed-loop controller for water distribution in complex irrigation systems. *Water Resources Research*, 26(7):1323–1333, 1990.

D. Hillel. Fundamentals of soils physics. *Academic, New York*, 1980.

D. Hillel et al. Soil and water; physical principles and processes. *Soil and water; physical principles and processes*, 1971.

H. Honda. Description of the form of trees by the parameters of tree-like body: Effects of the branching angle and the branche length on the shape of the tree-like body. *J. theor. Biol.*, 31:331–338, 1971.

R. Hornbaker and H. Mapp. A dynamic analysis of water savings from advanced irrigation technology. *Western Journal of Agricultural Economics*, pages 307–315, 1988.

T. HOWELL. 14 relationships between crop production and transpiration, evapotranspiration, and irrigation. 1990.

T. Howell and J. Musick. Relationship of dry matter production of field crops to water consumtion. In *Les besoins en eau des cultures, Paris*, September 1984.

R. Howitt. Positive mathematical programming. *American journal of agricultural economics*, 77(2):329–342, 1995.

T. Hsiao. Plant responses to water stress. *Annual review of plant physiology*, 24 (1):519–570, 1973.

T. Hsiao and E. Acevedo. Plant responses to water deficits, water-use efficiency, and drought resistance. *Agricultural Meteorology*, 14(1-2):59–84, 1974.

H. Igbadun, B. Salim, A. Tarimo, and H. Mahoo. Effects of deficit irrigation scheduling on yields and soil water balance of irrigated maize. *Irrigation Science*, 27(1):11–23, 2008.

A. Ismail, A. Hall, and E. Bray. Drought and pot size effects on transpiration efficiency and carbon isotope discrimination of cowpea accessions and hybrids. *Functional Plant Biology*, 21(1):23–35, 1994.

S. Jalota, A. Sood, G. Chahal, and B. Choudhury. Crop water productivity of cotton (< i> gossypium hirsutum</i> l.)–wheat (< i> triticum aestivum</i> l.) system as influenced by deficit irrigation, soil texture and precipitation. *Agricultural water management*, 84(1):137–146, 2006.

M. Jensen, D. Robb, and C. Franzoy. Scheduling irrigations using climate-crop-soil data. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Irrigation and Drainage Division*, 96(IRI):25–38, 1970.

H. Jones. Monitoring plant and soil water status: established and novel methods revisited and their relevance to studies of drought tolerance. *Journal of Experimental Botany*, 58(2):119–130, 2007.

J. Jones. Decision support systems for agricultural development. *Systems Approaches for Agricultural Development*, 2:459–471, 1993.

W. Jordan and J. Ritchie. Influence of soil water stress on evaporation, root absorption, and internal water status of cotton. *Plant physiology*, 48(6):783, 1971.

E. Kanemasu, L. Stone, and W. Powers. Evapotranspiration model tested for soybean and sorghum. *Agron. J*, 68(4):569–572, 1976.

J. Kaplan and J. Yorke. Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 48(2):317–324, 1974.

T. Kato and M. Kamichika. Determination of a crop coefficient for evapotranspiration in a sparse sorghum field. *Irrigation and drainage*, 55(2):165–175, 2006.

B. Keating, P. Carberry, G. Hammer, M. Probert, M. Robertson, D. Holzworth, N. Huth, J. Hargreaves, H. Meinke, Z. Hochman, et al. An overview of apsim, a model designed for farming systems simulation. *European Journal of Agronomy*, 18(3-4):267–288, 2003.

M. Khaledian, J. Mailhol, P. Ruelle, and C. Dejean. Effect of cropping strategies on the irrigation water productivity of durum wheat.

M. Khaledian, J. Mailhol, P. Ruelle, I. Mubarak, and S. Perret. The impacts of direct seeding into mulch on the energy balance of crop production system in the se of france. 2009. *Soil and Tillage Research. In Press, Corrected Proof, Available online*, 9, 2009a.

M. Khaledian, J. Mailhol, P. Ruelle, and P. Rosique. Adapting Pilote model for water and yield management under direct seeding system: The case of corn and durum wheat in a mediterranean context. *Agricultural Water Management*, 96(5):757 – 770, 2009b.

E. Kipkorir, D. Raes, and J. Labadie. Optimal allocation of short-term irrigation supply. *Irrigation and Drainage Systems*, 15(3):247–267, 2001.

E. Kipkorir, A. Sahli, and D. Raes. Mios: a decision tool for determination of optimal irrigated cropping pattern of a multicrop system under water scarcity constraints. *Irrigation and Drainage*, 51(2):155–166, 2002.

C. Kirda. Deficit irrigation scheduling based on plant growth stages showing water stress tolerance. *Irrigation Science*, pages 3–10, 2002.

N. Klocke, D. Heermann, and H. Duke. Measurement of evaporation and transpiration with lysimeters. *Transactions of the American Society of Agricultural Engineers*, 28(1), 1985.

R. Koide, R. Robichaux, S. Morse, C. Smith, et al. Plant water status, hydraulic resistance and capacitance. *Plant physiological ecology: field methods and instrumentation.*, pages 161–183, 1989.

Kolmanovskiĭ. *Stability of functional differential equations*. a.

Kolmanovskiĭ. *Applied theory of functional differential equations*. b.

P. Kramer and J. Boyer. *Water relations of plants and soils*. Academic Press, Inc., 1995.

P. Kramer et al. Plant and soil water relationships: a modern synthesis. *Plant and soil water relationships: a modern synthesis.*, 1969.

G. Krinner, N. Viovy, N. de Noblet-Ducoudré, J. Ogée, J. Polcher, P. Friedlingstein, P. Ciais, S. Sitch, and I. Prentice. A dynamic global vegetation model for studies of the coupled atmosphere-biosphere system. *Global Biogeochem. Cycles*, 19(1):33, 2005.

Y. Kuang. *Delay differential equations: with applications in population dynamics*, volume 191. Academic Pr, 1993.

S. Kuo and C. Liu. Simulation and optimization model for irrigation planning and management. *Hydrological processes*, 17(15):3141–3159, 2003.

S.-F. Kuo, G. P. Merkley, and C.-W. Liu. Decision support for irrigation project planning using a genetic algorithm. *Agricultural Water Management*, 45(3):243 – 266, 2000. ISSN 0378-3774. doi: 10.1016/S0378-3774(00)00081-0. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378377400000810`.

W. Kurth. Morphological models of plant growth: Possibilities and ecological relevance. *Ecological Modelling*, 75/76:299–308, 1994.

M. Kutílek and D. Nielsen. *Soil hydrology*. Catena Verlag, 1994.

R. Lal. Current research on crop water balance and implications for the future. In *Proceedings of the International Workshop of the Soil Water Balance in the Sudano-Sahelian Zone, Niamey, Niger*, pages 31–44, 1991.

W. Larcher. *Physiological plant ecology: ecophysiology and stress physiology of functional groups*. Springer, 2003.

V. Le Chevalier, M. Jaeger, X. Mei, and P.-H. Cournède. Simulation and visualisation of functional landscapes: effects of the water resource competition between plants. *Journal of computer science and technology*, 22(6):835–845, Nov. 2007.

S. Lemaire. *Système Dynamique de la Croissance et du Développement de la Betterave Sucriere (Beta vulgaris L.)*. PhD thesis, AgroParisTech, 2010.

S. Lemaire, F. Maupas, P.-H. Cournède, and P. de Reffye. A morphogenetic crop model for sugar-beet (*beta vulgaris l.*). In *International Symposium on Crop Modeling and Decision Support: ISCMDS 2008, April 19-22, 2008, Nanjing, China*, 2008.

S. Lemaire, F. Maupas, P.-H. Cournède, J.-M. Allirand, P. de Reffye, and B. Ney. Analysis of the density effects on the source-sink dynamics in sugar-beet growth. In *Plant Growth Modeling, Simulation, Visualization and Applications (PMA), 2009 Third International Symposium on*, pages 285 –292, nov. 2009. doi: 10.1109/PMA.2009.77.

V. Letort. *Multi-scale analysis of source-sink relationships in plant growth models for parameter identification. Case of the GreenLab model.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2008.

J. Li, S. Inanaga, Z. Li, and A. Eneji. Optimizing irrigation scheduling for winter wheat in the North China Plain. *Agricultural water management*, 76(1):8–23, 2005. ISSN 0378-3774.

Z. Li, V. Le Chevalier, and P.-H. Cournède. Towards a continuous approach of functional-structural plant growth. In B.-G. Li, M. Jaeger, and Y. Guo, editors, *3rd international symposium on Plant Growth and Applications(PMA09), Beijing, China*. IEEE, November 9-12 2009. to appear.

Z. Li, P. Cournède, and J. Mailhol. Irrigation optimization by modeling of plant-soil interaction. In *Applied Simulation and Modelling*. ACTA Press, 2011.

LI-COR. *LAI-2000 Plant canopy analyzer: Instruction manual*. Li-Cor, Lincoln, NE, USA, June 1989.

A. Lindenmayer. Mathematical models for cellular interactions in development. i. filaments with one-sided inputs. *Journal of Theoretical Biology*, 18:280–289, 1968a.

A. Lindenmayer. Mathematical models for cellular interactions in development. i. simple and branching filaments with two-sided inputs. *Journal of Theoretical Biology*, 18:300315, 1968b.

J. Lizaso, W. Batchelor, and M. Westgate. A leaf area model to simulate cultivar-specific expansion and senescence of maize leaves. *Field Crops Research*, 80, 2003.

M. Ludlow, N. Turner, P. Kramer, et al. Adaptive significance of stomatal responses to water stress. *Adaptation of plants to water and high temperature stress.*, pages 123–138, 1980.

R. Luus. Application of dynamic programming to high-dimensional non-linear optimal control problems. *International Journal of Control*, 52(1):239–250, 1990a.

R. Luus. Optimal control by dynamic programming using systematic reduction in grid size. *International Journal of Control*, 51(5):995–1013, 1990b.

R. Luus. On the application of iterative dynamic programming to singular optimal control problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(11): 1802–1806, 1992.

R. Luus. *Iterative dynamic programming*. CRC Press, 2000.

Y. Ma, M. Wen, Y. Guo, B. Li, P.-H. Cournède, and P. de Reffye. Parameter optimization and field validation of the functional-structural model greenlab for maize at different population densities. *Annals of Botany*, 101(8), 2008.

G. Mac Master and W. Wilhelm. Growing degree-days: one equation, two interpretations. *Agricultural and Forest Meteorology*, 87(4):291–300, 1998.

J. Mailhol. *Contribution à l'amélioration des pratiques d'irrigation à la raie par une modélisation simplifiée à l'échelle de la parcelle et de la saison*. PhD thesis, University of Montpellier II, 2001.

J. Mailhol, A. Olufayo, and P. Ruelle. Sorghum and sunflower evapotranspiration and yield from simulated leaf area index. *Agri. Water Manag.*, 35:167–182, 1997a.

J. Mailhol, O. Olufayo, and P. Ruelle. Aet and yields assessments based on the lai simulation. application to sorghum and sunflower crops. *Agric Water Manag*, 35:167–182, 1997b.

J. Mailhol, A. Zairi, A. Slatni, B. Ben Nouma, and H. El Amani. Analysis of irrigation systems and irrigation strategies for durum wheat in tunisia. *Agricultural water management*, 70(1):19–37, 2004.

J. Mailhol, P. Ruelle, S. Walser, N. Schütze, and C. Dejean. Analysis of aet and yield predictions under surface and buried drip irrigation systems using the crop model pilote and hydrus-2d. *Agricultural Water Management*, 98(6): 1033–1044, 2011.

C. Mandl. A survey of mathematical optimization models and algorithms for designing and extending irrigation. *Water resources research*, 17(4):769–775, 1981.

L. Marcelis, E. Heuvelink, and J. Goudriaan. Modelling of biomass production and yield of horticultural crops: a review. *Scientia Horticulturae*, 74:83–111, 1998.

J. Marshall and R. Waring. Comparison of methods of estimating leaf-area index in old-growth douglas-fir. *Ecology*, pages 975–979, 1986.

D. Martin, E. Stegman, and E. Fereres. Irrigation scheduling principles. *IN: Management of Farm Irrigation Systems. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, MI. 1990. p 155-203, 19 fig, 9 tab, 81 ref.*, 1990.

M. Mastrorilli, N. Katerji, and G. Rana. Water efficiency and stress on grain sorghum at different reproductive stages. *Agricultural water management*, 28 (1):23–34, 1995.

M. Mastrorilli, N. Katerji, and G. Rana. Productivity and water use efficiency of sweet sorghum as affected by soil water deficit occurring at different vegetative growth stages. *European journal of Agronomy*, 11(3):207–215, 1999.

A. Mathieu. *Essai sur la modélisation des interactions entre la croissance d'une plante et son développement dans le modèle GreenLab.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2006.

A. Mathieu, P.-H. Cournède, V. Letort, D. Barthélémy, and P. de Reffye. A dynamic model of plant growth with interactions between development and functional mechanisms to study plant structural plasticity related to trophic competition. *Annals of Botany*, 2009.

T. Mavromatis and P. Jones. Comparison of climate change scenario construction methodologies for impact assessment studies. *Agricultural and forest meteorology*, 91(1-2):51–67, 1998.

J. McGuckin, C. Mapel, R. Lansford, and T. Sammis. Optimal control of irrigation scheduling using a random time frame. *American journal of agricultural economics*, 69(1):123–133, 1987.

G. Mergos. Evaluation of irrigation projects under uncertainty: a symmetric quadratic programming approach. *Water resources management*, 1(1):45–56, 1987.

G. Milford. The growth and development of the storage root of sugar beet. *Annals of Applied Biology*, 75(3):427–438, 1973.

A. Montazar and A. Rahimikob. Optimal water productivity of irrigation networks in arid and semi-arid regions. *Irrigation and drainage*, 57(4):411–423, 2008.

J. Monteith. Climate and the efficiency of crop production in britian. *Proceedings of the Royal Society of London B*, 281:277–294, 1977.

J. Monteith. The reflection of short-wave radiation by vegetation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 85(366):386–392, 2006.

R. Myers, M. Foale, and A. Done. Responses of grain sorghum to varying irrigation frequency in the ord irrigation area. ii: Evapotranspiration, water use efficiency and root distribution of different cultivars. *Australian journal of agricultural research*, 35(1):31–42, 1984.

G. Naadimuthu, K. Raju, and E. Lee. A heuristic dynamic optimization algorithm for irrigation scheduling. *Mathematical and computer modelling*, 30(7): 169–183, 1999.

D. Nielsen and N. Nelson. Black bean sensitivity to water stress at various growth stages. *Crop Science*, 38(2):422–427, 1998.

V. Novak. The structure of evapotranspiration: I and ii. vodohosp. Cas, 1981.

J. O'Toole and R. Cruz. Response of leaf water potential, stomatal resistance, and leaf rolling to water stress. *Plant physiology*, 65(3):428, 1980.

A. Pandey, M. Ostrowski, R. Pandey, et al. Simulation and optimization for irrigation and crop planning. *Irrigation and Drainage*, 61(2):178–188, 2011.

J. Passioura. Grain yield, harvest index, and water use of wheat. *J. Aust. Inst. Agric. Sci.*, 43:117–120, 1977.

C. Paul. Developing a delay differential equation solver. *Applied Numerical Mathematics*, 9(3-5):403–414, 1992.

S. Paul, S. Panda, D. Kumar, et al. Optimal irrigation allocation: a multilevel approach. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 126(3):149–156, 2000.

E. Playán and L. Mateos. Modernization and optimization of irrigation systems to increase water productivity. *Agricultural water management*, 80(1-3):100–116, 2006. ISSN 0378-3774.

J. Price. Estimating leaf area index from satellite data. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 31(3):727–734, 1993.

P. Prusinkiewicz. Modeling plant growth and development. *Current opinion in plant biology*, 7(1):79–84, 2004.

P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer. *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, New-York, 1990.

N. Rao, P. Sarma, and S. Chander. Irrigation scheduling under a limited water supply. *Agricultural Water Management*, 15(2):165–175, 1988.

L. Reed and R. Pearl. On the summation of logistic curves. *Journal of the Royal Statistical Society*, 90(4):729–746, 1927.

R. Repetto. *Skimming the Water: Rent-seeking and the Performance of Public Irrigation Sysstems*. World Resources Institute, 1986.

C. Richardson. Stochastic simulation of daily precipitation, temperature, and solar radiation. *Water Resources Research*, 17(1):182–190, 1981. ISSN 0043-1397.

C. Richardson and D. Wright. Wgen: A model for generating daily weather variables. *Agriculture*, 1984.

J. Ritchie. Model for predicting evaporation from a row crop with incomplete cover. *Water Resources Research*, 8(5), 1972.

J. Ritchie. Water dynamics in the soil-plant-atmosphere system. *Plant and Soil*, 58(1):81–96, 1981.

J. Ritchie. A user-orientated model of the soil water balance in wheat. *NATO advanced study institutes series. Series A. Life sciences*, 86, 1985.

J. Ritchie. Soil water balance and plant water stress jt ritchie. *Understanding options for agricultural production*, 7:41, 1998.

T. Roose and A. Schnepf. Mathematical models of plant–soil interaction. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1885):4597–4611, 2008.

J. Roughgarden. Theory of population genetics and evolutionary ecology. *New York*, 1979.

E. Schulze, F. Kelliher, C. Korner, J. Lloyd, and R. Leuning. Relationships among maximum stomatal conductance, ecosystem surface conductance, carbon assimilation rate, and plant nitrogen nutrition: a global ecology scaling exercise. *Annual Review of Ecology and Systematics*, pages 629–660, 1994.

M. Semenov, R. Brooks, E. Barrow, and C. Richardson. Comparison of the wgen and lars-wg stochastic weather generators for diverse climates. *Climate Research*, 10:95–107, 1998.

A. Sepaskhah and S. Ilampour. Effects of soil moisture stress on evapotranspiration partitioning. *Agricultural water management*, 28(4):311–323, 1995.

M. Siddique, A. Hamid, and M. Islam. Drought stress effects on water relations of wheat. *Botanical Bulletin of Academia Sinica*, 41, 2000.

R. Sievänen, E. Nikinmaa, P. Nygren, H. Ozier-Lafontaine, J. Perttunen, and H. Hakula. Components of a functional-structural tree model. *Annals of Forest Sciences*, 57:399–412, 2000.

R. Sievänen, J. Perttunen, E. Nikinmaa, and P. Kaitaniemi. Toward extension of a single tree functional-structural model of scots pine to stand level: effect of the canopy of randomly distributed, identical trees on development of tree structure. *Functional Plant Biology*, 35(10):964–975, 2008.

T. Sinclair, C. Tanner, and J. Bennett. Water-use efficiency in crop production. *BioScience*, pages 36–40, 1984.

N. Sionit and P. Kramer. Effect of water stress during different stages of growth of soybean. *Agronomy Journal*, 69(2):274–278, 1977.

R. Skinner and C. Nelson. Elongation of the grass leaf and its relationship to the phyllochron. *Crop Science*, 35(1):4–10, 1995.

R. Slayter et al. Plant-water relationships. *Plant-Water Relationships.*, 1967.

M. Smith, A. Segeren, L. Santos Pereira, A. Perrier, and R. Allen. Report on the expert consultation on procedures for revision of fao guidelines for prediction of crop water requirements. rome, italy, 28-31 may 1990. 1991.

K. Solomon and M. Labuschagne. Variation in water use and transpiration efficiency among durum wheat genotypes grown under moisture stress and non-stress conditions. *Journal of Agricultural Science*, 141(1):31–41, 2003.

Y. Song, C. Birch, and J. Hanan. Analysis of maize canopy development under water stress and incorporation into the adel-maize model. *Functional Plant Biology*, 35(10):925–935, 2008.

Y. Song, C. Birch, and J. Hanan. Maize canopy production under contrasted water regimes. *Annals of Applied Biology*, 157(1):111–123, 2010.

C. Souch and W. Stephens. Growth, productivity and water use in three hybrid poplar clones. *Tree physiology*, 18(12):829–835, 1998.

K. Srinivasa Raju and D. Nagesh Kumar. Irrigation planning using genetic algorithms. *Water Resources Management*, 18:163–176, 2004. ISSN 0920-4741. URL `http://dx.doi.org/10.1023/B:WARM.0000024738.72486.b2`. 10.1023/B:WARM.0000024738.72486.b2.

C. Stockle, S. Martin, and G. Campbell. Cropsyst, a cropping systems simulation model: water/nitrogen budgets and crop yield. *Agricultural Systems*, 46(3): 335–359, 1994.

C. Stöckle, M. Donatelli, and R. Nelson. Cropsyst, a cropping systems simulation model. *European Journal of Agronomy*, 18(3-4):289–307, 2003.

C. Stöckle, J. Kjelgaard, and G. Bellocchi. Evaluation of estimated weather data for calculating penman-monteith reference crop evapotranspiration. *Irrigation science*, 23(1):39–46, 2004.

R. Summerfield, J. Williams, P. Craufurd, T. Wheeler, and R. Ellis. Effect of temperature and water deficit on water-use efficiency, carbon isotope discrimination, and specific leaf area in peanut. *Crop Science*, 39(1):136–142, 1999.

H. Talpaz and J. Mjelde. Crop irrigation scheduling via simulation-based experimentation. *Western Journal of Agricultural Economics*, pages 184–192, 1988.

C. Tanner and W. Jury. Estimating evaporation and transpiration from a row crop during incomplete cover. *Agronomy Journal*, 68(2):239–243, 1976.

C. Tanner and W. Pelton. Potential evapotranspiration estimates by the approximate energy balance method of penman. *Journal of geophysical research*, 65 (10):3391–3413, 1960.

M. Taulis and M. Milke. Estimation of wgen weather generation parameters in arid climates. *Ecological modelling*, 184(2):177–191, 2005.

J. Thornley, I. Johnson, et al. Plant and crop modelling: a mathematical approach to plant and crop physiology. *Plant and crop modelling: a mathematical approach to plant and crop physiology.*, 1990.

C. Thornthwaite. An approach toward a rational classification of climate. *Geographical review*, 38(1):55–94, 1948.

C. Thornthwaite, J. Mather, and D. Carter. Instructions and tables for computing potential evapotranspiration and the water balance. 1957.

N. Turner. Techniques and experimental approaches for the measurement of plant water status. *Plant and Soil*, 58(1):339–366, 1981.

M. Van Ittersum, P. Leffelaar, H. Van Keulen, M. Kropff, L. Bastiaans, and J. Goudriaan. On approaches and applications of the wageningen crop models. *European Journal of Agronomy*, 18(3-4):201–234, 2003.

C. Varlet-Grancher, R. Bonhomme, M. Chartier, and P. Artis. Efficience de la conversion de l'énergie solaire par un couvert végétal. *Oecol. Plant*, 3(17):1, 1982.

F. Viets. Fertilizers and the efficient use of water. *Advances in Agronomy*, 14: 223–264, 1962.

J. Vos, L. Marcelis, and J. Evers. Functional-structural plant modelling in crop production. In J. Vos, L. Marcelis, P. de Visser, P. Struik, and J. Evers, editors, *Functional-structural plant modelling in crop production, Wageningen*, volume Chapter 1. Springer, 2007.

E. WAN and C. Smith. Modelling the growth and water uptake function of plant root systems: a review. *Australian journal of agricultural research*, 55 (5):501–523, 2004.

I. Wardlaw. The effect of water stress on translocation in relation to photosynthesis and growth. *Australian journal of biological sciences*, 22(1):1–16, 1969.

M. Weiss. *Développement d'un algorithme de suivi de la végétation à large échelle*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1998.

D. N. M. Weixing Cao. Daylength effect on leaf emergence and phyllochron in wheat and barley. *Crop Science*, 29(4):1021–1025, 1989.

J. White. The plant as a metapopulation. *Annu. Rev. Ecol. Syst*, 10:109–145, 1979.

C. Wiegand, A. Richardson, E. Kanemasu, et al. Leaf area index estimates for wheat from landsat and their implications for evapotranspiration and crop modeling. *Agronomy Journal*, 71(2):336–342, 1979.

W. Wilhelm, G. McMaster, and A. USDA. Importance of the phyllochron in studying in development and growth in grasses. 1995.

D. Wilks. Adapting stochastic weather generation algorithms for climate change studies. *Climatic Change*, 22(1):67–84, 1992.

D. Wilks. Simultaneous stochastic simulation of daily precipitation, temperature and solar radiation at multiple sites in complex terrain. *Agricultural and Forest Meteorology*, 96(1-3):85–101, 1999.

D. Wilks and R. Wilby. The weather generation game: a review of stochastic weather models. *Progress in Physical Geography*, 23(3):329–357, 1999.

D. Woolhiser, C. Hanson, and C. Richardson. Microcomputer program for daily weather simulation usda agric. res. serv. *ARS*, 75:49, 1988.

L. Wu. *Variational methods applied to plant functional-structural dynamics: parameter identification, control and data assimilation*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2005.

L. Wu, P. de Reffye, B. Hu, F.-X. Le Dimet, and P.-H. Cournède. A water supply optimization problem for plant growth based on greenlab model. *ARIMA*, 3: 194–207, 2005.

L. Wu, F.-X. Le Dimet, P. de Reffye, B. Hu, and P.-H. Cournède. An optimal control methodology for plant growth - Case study of a water supply problem of sunflower. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82:909–923, 2012.

S. Yakowitz. Dynamic programming applications in water resources. *Water Resources Research*, 18(4):673–696, 1982.

H. Yan, J.-F. Barczi, P. de Reffye, and B. Hu. Fast Algorithms of Plant Computation Based on Substructure Instances. *Journal of WSCG*, 10:145–152, 2002.

H. Yan, M. Kang, P. De Reffye, and M. Dingkuhn. A dynamic, architectural plant model simulating resource-dependent growth. *Annals of Botany*, 93: 591–602, 2004.

X. Yin, J. Goudriaan, E. Lantinga, J. Vos, and H. Spiertz. A flexible sigmoid function of determinate growth. *Annals of Botany*, 91(3):361–371, 2003.

M. Young, J. Gowing, G. Wyseure, and N. Hatibu. Parched-thirst: development and validation of a process-based model of rainwater harvesting. *Agricultural water management*, 55(2):121–140, 2002.

H. Zhang and T. Oweis. Water-yield relations and optimal irrigation scheduling of wheat in the Mediterranean region. *Agricultural Water Management*, 38 (3):195–211, 1999. ISSN 0378-3774.

X. Zhang, S. Chen, H. Sun, D. Pei, and Y. Wang. Dry matter, harvest index, grain yield and water use efficiency as affected by water supply in winter wheat. *Irrigation Science*, 27(1):1–10, 2008.