Université Lille1
Sciences et Technologies

Numéro d'ordre : 40852

UFR DE MATHÉMATIQUES
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE I

Spécialité : Mathématiques appliquées

par

Nicolas Perpète

Construction et étude de quelques processus multifractals

Soutenue le 19 février 2013 devant le jury composé de :

M. Emmanuel BACRY	(Rapporteur)
M. Pierre CHAINAIS	(Examinateur)
Mme Laure COUTIN	(Examinatrice)
Mme Carenne LUDENA	(Rapporteur)
M. François SCHMITT	(Directeur)
M. Charles SUQUET	(Examinateur)
M. Vincent VARGAS	(Examinateur)
Mme Marie-Claude VIANO	(Directrice)

Remerciements

Je remercie d'abord Marie-Claude Viano. Pendant toutes ces années, son soutien a été constant. Lors de mes visites à Lille ou dans nos échanges par mail, elle a passé des centaines d'heures à guider mon travail, à lire et relire mes brouillons, à corriger mon anglais approximatif... Qu'elle sache ici que je suis conscient de l'immense cadeau qu'elle m'a fait.

C'est François Schmitt qui m'a proposé de travailler sur les multifractals. Il a lui aussi été d'une aide constante tout au long de ma thèse. Je le remercie d'avoir bien voulu partager ses très bonnes idées avec moi ; je le remercie également pour sa disponibilité et son état d'esprit positif.

Je suis très honoré que Carenne Ludena et Emmanuel Bacry aient accepté de rapporter mon travail. Je suis heureux que ce travail les ait intéressés et qu'ils y apportent leur caution scientifique. Je remercie également à ce titre les autres membres du jury : Pierre Chainais, Laure Coutin, Charles Suquet et Vincent Vargas. Je dis plus particulièrement ma reconnaissance à Carenne Ludena et Charles Suquet pour leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer la qualité de mon manuscrit.

Malgré mon manque d'assiduité au *thé du jeudi*, j'ai eu de nombreuses occasions d'apprécier la convivialité et la gentillesse des membres du laboratoire Paul Painlevé de l'Université Lille 1. Je les salue tous très amicalement.

Je remercie enfin ma famille et mes amis proches. En particulier mes parents, dont le soutien a été le plus indéfectible ; et évidemment mon épouse Caroline. C'est elle qui m'a accompagné chaque jour dans cette longue aventure, avec fidélité, *dans la joie et la souffrance...* Marie (aujourd'hui six ans, née le 21 décembre au matin alors que j'avais passé la journée du 20 à Lille) et Chloé (trois ans) sont venues éclairer notre paysage. Elles sont, bien au-delà du travail exposé dans les cent-vingt pages qui suivent, et malgré mon attachement à ce travail, les merveilles que je garderai de ces sept années...

Résumé

Mis en évidence dans les années 80 dans les domaines de la turbulence et des attracteurs étranges, les multifractals ont rapidement gagné en popularité. On les trouve aujourd'hui en finance, en géophysique, dans l'étude du trafic internet et dans bien d'autres domaines des sciences appliquées. Cet essor s'est accompagné de la nécessité de construire des modèles théoriques adaptés. La Mesure Aléatoire Multifractale de Bacry et Muzy est l'un de ces modèles. Du fait de son caractère très général, de sa grande souplesse et de sa relative simplicité, elle est devenue un outil central du domaine des multifractals depuis dix ans.

Après un chapitre introductif, on propose dans cette thèse la construction de deux familles de processus multifractals. Ces constructions reposent sur les travaux de Schmitt et de ses co-auteurs et sur ceux de Bacry et Muzy. Dans le chapitre 2, on construit des processus multifractals à partir de moyennes mobiles $\alpha-$stables, tandis que le chapitre 3 est consacré à la construction des Marches Aléatoires Fractionnaires Multifractales d'indice de Hurst $0 < H < 1/2$. Ces travaux sont complétés par l'étude de versions affines par morceaux et par des simulations numériques. De nombreux problèmes connexes sont également étudiés.

Abstract

Since their emergence in the 80's in the areas of turbulence and of strange attractors, multifractals have gained popularity. They appear now in finance, geophysics, study of network traffic and in many other areas of applied sciences. This development required adapted theoretical models. Bacry and Muzy's Multifractal Random Walk is one of these models. Thanks to its generality, its flexibility and to its relative simplicity, it became central in the domain of multifractals over the past ten years.

In this PhD thesis, two families of multifractal processes are proposed. Their construction is based on the works of Schmitt and co-authors and on those of Bacry and Muzy. After the introduction (chapter 1), we use in chapter 2 $\alpha-$stable moving averages to build multifractal processes ; whereas chapter 3 is devoted to the construction of Multifractal Fractional Random Walks with Hurst index $0 < H < 1/2$. This work is complemented by the study of linear versions and by numerical simulations. We also study numerous related problems.

Table des matières

1 Introduction **11**

1.1 Les processus multifractals 11

1.1.1 Des fractals... 11

1.1.2 ... aux multifractals 12

1.1.3 Propriétés usuelles des signaux multifractals 15

1.2 Etude de quelques exemples 16

1.2.1 Le mouvement Brownien fractionnaire (fBm) 16

1.2.2 Etude de deux exemples concrets 18

1.2.3 La cascade canonique 19

1.3 La mesure aléatoire multifractale (MRM) 25

1.3.1 Un bref historique 25

1.3.2 MRM : construction de la cascade 27

1.3.3 MRM : définition et propriétés 29

1.3.4 MRM : deux exemples 29

1.3.5 MRM : version discrète et simulation 30

1.4 Plan et résultats de la thèse 32

1.4.1 Chapitre 2 : Processus multifractals construits à partir de moyennes mobiles $\alpha-$stables 32

1.4.2 Chapitre 3 : Marche aléatoire fractionnaire multifractale (MFRW) 37

2 Processus multifractals construits à partir de moyennes mobiles $\alpha-$stables **43**

2.1 Les variables et les processus $\alpha-$stables 44

2.1.1 Définition des lois stables 44

2.1.2 Propriétés des lois stables, intégrales stables 45

2.2 Etude du processus principal 46

2.2.1 Définition de la suite de processus X_l^S et de sa limite . 46

2.2.2 Propriété multifractale 49

2.3 Etude d'une version affine par morceaux 54
2.3.1 Définition de la version affine par morceaux 54
2.3.2 Des problèmes de prévision 58
2.4 Le cas gaussien 66
2.4.1 Définition 66
2.4.2 Propriété multifractale 67
2.5 Représentations sous forme de moyennes mobiles 70
2.6 Démonstrations des lemmes 73
2.6.1 Démonstration du Lemme 2.8 73
2.6.2 Démonstration du Lemme 2.11 76
2.6.3 Démonstration du Lemme 2.21 81
2.6.4 Démonstration du Lemme 2.27 83

3 Marche aléatoire fractionnaire multifractale (MFRW) 85
3.1 Intégration par rapport au fBm 87
3.1.1 Intégration par rapport au fBm 87
3.1.2 Processus gaussiens fractionnaires 89
3.1.3 Vers une définition de X_l^κ 91
3.2 Résultats principaux 94
3.2.1 Propriétés de base de Y_l et de X_l^κ 95
3.2.2 Convergence en loi de X_l^κ et étude de la limite X^κ . . 99
3.3 Etude d'une version affine par morceaux de X^κ 105
3.4 Démonstrations des lemmes 107
3.4.1 Démonstration des Lemmes 3.1, 3.4, 3.7 et 3.10 108
3.4.2 Démonstration du Lemme 3.15 112
3.4.3 Démonstration du Lemme 3.16 117
3.4.4 Démonstration du Lemme 3.6 118
3.4.5 Démonstration du Lemme 3.11 119

Chapitre 1

Introduction

Le but principal de cette thèse est de construire et d'étudier de nouveaux processus stochastiques possédant des propriétés multifractales. Dans ce chapitre introductif, on présente le cadre de travail : on explique ce qu'est un processus multifractal (sous-chapitre 1.1), puis on donne quelques exemples de séries temporelles réelles ou théoriques entrant (ou non) dans le domaine des multifractals (sous-chapitre 1.2). Le sous-chapitre 1.3 présente le processus à la base de notre travail : la mesure aléatoire multifractale (MRM) de Bacry et Muzy. On trouve dans le sous-chapitre 1.4 un plan détaillé de la thèse et l'énoncé des résultats principaux.

1.1 Les processus multifractals

1.1.1 Des fractals...

Le mot *fractal* a été inventé par B. B. Mandelbrot dans les années 1970 pour qualifier certaines formes dont la description échappait à la géométrie traditionnelle. Pour reprendre ses propos, « les nuages ne sont pas des sphères, ni les montagnes des cônes, ni les îles des cercles ». Bien qu'une structure apparaisse souvent dans la forme de ces objets, l'omniprésence d'irrégularités rend leur description complexe ; c'est la recherche d'une description fidèle et rigoureuse qui a conduit au développement de la géométrie fractale [1]. Depuis lors, l'étude des fractals a connu un incroyable essor et ces notions se sont popularisées.

Il n'existe cependant pas de définition unique du terme *fractal* en mathématiques. Si nous nous restreignons aux courbes de $\mathbb{R}^2$, on peut choisir

1. Un ouvrage de référence sur le sujet est le livre de Falconer [13].

de dire qu'une telle courbe est fractale si sa dimension de Hausdorff dépasse strictement 1, ou si des irrégularités apparaissent à toutes les échelles ; ou encore si la courbe possède une structure auto-similaire. Les exemples les plus simples, issus de la nature, appartiennent (au moins) à cette dernière catégorie ; on pensera par exemple aux feuilles de fougères, aux flocons de neige ou aux vaisseaux sanguins.

Une autre approche possible, sur laquelle nous nous focalisons désormais, consiste à définir les courbes fractales en termes d'oscillation (ou de régularité) locale : considérons une fonction f et définissons *l'exposant ponctuel de Hölder* $H_f(t_0)$ de f en t_0 comme étant le sup des réels $\alpha > 0$ pour lesquels il existe un polynôme P et une constante C tels que, sur un voisinage de t_0,

$$|f(t) - \mathrm{P}(t)| \leq C\,|t - t_0|^{\alpha}\,. \tag{1.1}$$

La fonction f sera d'autant plus régulière en t_0 que la valeur de $H_f(t_0)$ sera grande. Par exemple, la condition $H_f(t_0) > 0$ implique la continuité de f en t_0 ; et $H_f(t_0) > 1$ implique sa dérivabilité. La situation intéressante dans le domaine des fractals est celle où $H_f(t_0) < 1$ et où le polynôme P est constant en chaque point t_0, signe d'une grande irrégularité. Cette dernière situation se rencontre par exemple en probabilités lorsqu'on étudie le mouvement Brownien fractionnaire B_H – présenté dans le sous-chapitre 1.2. La figure 1.1 montre de fortes oscillations des trajectoires de B_H, et ce d'autant plus que H est petit. En fait, presque toute trajectoire de B_H possède un unique exposant ponctuel de Hölder, égal à H.

1.1.2 ... aux multifractals

Bien qu'il soit un objet central dans les modélisations, le fait que le mouvement Brownien fractionnaire possède un unique exposant de Hölder limite son utilisation. En effet, les signaux observés dans la réalité possèdent des structures souvent plus riches (voir figures 1.2 et 1.3), présentant un continuum d'exposants de Hölder [2]. On dit dans ce cas que le signal est *multifractal*. Ces considérations ont amené Frisch et Parisi, travaillant dans le contexte de la turbulence, à faire le raisonnement suivant [41] : on considére à nouveau une fonction f, define sur $[0,1]$ et l'on suppose que la fonction suivante (*fonction de partition*) existe

$$\tau(q) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\log n} \log \sum_{1\leq j\leq n} \left| f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right|^{q}. \tag{1.2}$$

2. Il est possible de définir un mouvement Brownien multifractionnaire, c'est-à-dire un mouvement Brownien fractionnaire dont l'exposant H est variable [42]. Les gammes d'applications possibles deviennent alors très vastes.

On définit également

$$\mathrm{E}(\alpha) = \{t \in [0,1], H_f(t) = \alpha\}. \tag{1.3}$$

Autrement dit, $\mathrm{E}(\alpha)$ est l'ensemble des points t en lesquels f a un exposant ponctuel de Hölder égal à α.

Soit $D(\alpha)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\mathrm{E}(\alpha)$ (avec la convention $D(\varnothing) = -\infty$). Pour n grand, si $j/n \in \mathrm{E}(\alpha)$, on a l'approximation $\left|f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right| \approx n^{-\alpha}$. De plus, par définition de la dimension de Hausdorff, il existe environ $n^{D(\alpha)}$ intervalles de la forme $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right[$ pour lesquels on a un exposant de Hölder égal à α. Ceci nous amène à réécrire la fonction de partition sous la forme

$$\tau(q) \approx \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{\log n} \log \sum_{\alpha} n^{D(\alpha)-\alpha q}. \tag{1.4}$$

On peut s'attendre à ce que la somme ci-dessus se comporte comme

$$n^{\sup_\alpha (D(\alpha)-\alpha q)} \tag{1.5}$$

(méthode du point-selle). Il viendrait donc

$$\tau(q) = \inf_{\alpha} (\alpha q - D(\alpha)). \tag{1.6}$$

La fonction τ apparaît finalement comme la transformée de Legendre de D.[3] Suivant ce raisonnement informel, on peut dire que :

- la situation où il y a un unique exposant de Hölder α_0 correspond à celle où τ est affine : $\tau(q) = \alpha_0 q - 1$. On parle alors de fonction *monofractale* ;
- lorsqu'il y a plusieurs exposants de Hölder, τ est concave non affine et l'on parle de fonction *multifractale*[4].

En général, on dit que le *formalisme multifractal* est vérifié lorsque D et τ sont concaves et transformées de Legendre réciproques l'une de l'autre. Depuis 1985, le formalisme multifractal a reçu des démonstrations rigoureuses dans de nombreuses situations (on peut consulter notamment [49] et [23]). On remplace parfois l'accroissement $f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)$ par un coefficient

3. La transformée de Legendre se trouve également en thermodynamique statistique ; c'est ce qui a donné à Parisi l'idée de cette méthode.

4. Avec ces conventions, une fonction possédant deux exposants de Hölder seulement est multifractale. On peut être plus exigeant et demander aux multifractals de posséder un continuum d'exposants de Hölder.

d'ondelettes [5], ou la dimension de Hausdorff par des concepts voisins. Il est aussi possible, avec une présentation légèrement différente, de considérer une mesure μ sur la droite réelle à la place de la fonction f ; dans ce cas on parle de *mesure multifractale* [6].

Depuis leur introduction dans le cadre de la turbulence et dans celui de la théorie du chaos [19] au début des années 1980, les multifractals se sont développés [15, 52] et ont gagné d'autres domaines, en particulier les sciences naturelles [59, 30] et la finance [35, 54, 39, 10, 12] [7].

On étend de façon naturelle ce qui précède aux processus stochastiques réels en donnant la définition [35] :

Définition 1.1 *Soit $T > 0$ et soit $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique. On dit que X est multifractal lorsqu'il existe des constantes C_q et une fonction strictement concave ζ, appelée spectre multifractal, telles que*

$$\mathbb{E}\left|X(t+h) - X(t)\right|^q = C_q h^{\zeta(q)} \tag{1.7}$$

pour tous $0 \leq t < t+h \leq T$, $q \in \mathcal{Q}$; $\mathcal{Q}$ étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient $[0,1]$.
Sous les mêmes hypothèses, mais avec une fonction affine ζ, le processus X est dit monofractal.

Les moments des incréments de X sont appelés « fonctions de structure » depuis les travaux de Kolmogorov en turbulence [29]. On notera que la fonction τ (Eq. (1.2)) a été remplacée par $\zeta = \tau + 1$.

Une question importante est de savoir si un processus qui vérifie (1.7) est réellement multifractal « au sens géométrique » : presque toute trajectoire possède au moins deux exposants ponctuels de Hölder, et les fonctions D et $\tau = \zeta - 1$ sont concaves et transformées de Legendre réciproques l'une de l'autre (on parle alors encore de *formalisme multifractal*). Une réponse positive à cette question a été apportée dans le cas de la cascade canonique [20, 36], ainsi que pour une famille particulière de mesures aléatoires multifractales [9] – les démonstrations utilisent notamment des méthodes de grandes déviations. Ceci est brièvement exposé au sous-chapitre 1.2. Il semble

5. Les ondelettes sont en fait majoritairement utilisées dans la littérature récente, à la fois pour les parties théorique (formalisme multifractal) et pratique (estimation du spectre multifractal).

6. Voir par exemple le sous-chapitre 1.2, où l'on présente la cascade canonique et la mesure associée.

7. Nous donnons un infime échantillon de la littérature existante ; une bibliographie exhaustive contiendrait des milliers de références.

qu'aucune autre réponse n'ait été apportée concernant les autres processus apparaissant dans cette thèse.

Le chapitre 3 de la thèse est entièrement consacré à l'étude d'un processus multifractal au sens de la Définition 1.1. Dans le chapitre 2, on rencontrera des processus vérifiant la condition plus faible :

Définition 1.2 *Soit $T > 0$ et soit $X = \{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique. On dit que X est faiblement multifractal lorsqu'il existe des constantes c_q, C_q et une fonction strictement concave ζ telles que*

$$c_q h^{\zeta(q)} \leq \mathbb{E}\left|X(t+h) - X(t)\right|^q \leq C_q h^{\zeta(q)} \tag{1.8}$$

pour tous $0 \leq t < t+h \leq T$, $q \in \mathcal{Q}$; $\mathcal{Q}$ étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient $[0,1]$.

Remarque 1.3 *Pour simplifier la présentation et alléger les calculs, on construira tous nos processus sur l'intervalle $[0,1]$. On notera qu'un processus multifractal X_1 étant ainsi construit, on en obtient un autre sur l'intervalle $[0,T]$ en posant $X_2(t) = X_1(t/T)$. Le fait de se ramener à l'intevalle $[0,1]$ n'enlève donc rien à la généralité du travail.*

1.1.3 Propriétés usuelles des signaux multifractals

Considérons un signal déterministe ou la réalisation d'un processus stochastique (x_t) (dans le cas d'un processus, $x_t = X(t,\omega)$). Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'on observe les $x_{i/n}$, pour $i = 0, 1, \ldots, n$. Si l'on veut mettre en évidence (ou au contraire infirmer) le caractère multifractal du signal, on commence par calculer

$$m_n(q, \Delta t) = \langle |x_{t+\Delta t} - x_t|^q \rangle \tag{1.9}$$

pour différentes valeurs de q et de Δ_t. On représente ensuite sur un même graphique $\log[m_n(q,\Delta t)]$ en fonction de $\log \Delta t$, pour chaque valeur de q considérée (graphiques en haut à droite des figures 1.2 et 1.3). Un processus multifractal (resp. monofractal) est caractérisé par (voir Définiton 1.1)

$$\log\left[\mathbb{E}\left|X(t+h) - X(t)\right|^q\right] = \log C_q + \zeta(q)\log h,\ q \in \mathcal{Q}, \tag{1.10}$$

avec ζ_q strictement concave (resp. affine), relation qui devrait se traduire par

$$\log[m_n(q,\Delta t)] \approx \log C_q + \zeta(q)\log \Delta t. \tag{1.11}$$

On reconnaîtra graphiquement un signal multifractal (ou monofractal) au fait que, pour toutes les valeurs de q considérées, le graphe de $\log\left[m_n\left(q,\Delta t\right)\right]$ en fonction de $\log\Delta t$ est affine [35].

On estimera le spectre $\zeta\left(q\right)$ en évaluant la pente de la courbe obtenue dans (1.11) par la méthode des moindres carrés. Un spectre strictement concave (resp. affine) est signe d'un signal multifractal (resp. monofractal).

De façon plus élémentaire, les indices graphiques immédiats des signaux multifractals sont un caractère intermittent (c'est-à-dire des périodes de forte activité suivies de périodes plus calmes) et une grande variabilité à toutes les échelles. Dans les chapitres 2 et 3, des simulations numériques nous permettront de mettre en évidence ces propriétés graphiques pour les processus multifractals que nous construirons.

1.2 Etude de quelques exemples

1.2.1 Le mouvement Brownien fractionnaire (fBm)

Le fBm d'indice de Hurst $0<H<1$, noté B_H, est le processus gaussien centré de covariance

$$\mathrm{cov}\left(B_H\left(t\right),B_H\left(s\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\left|t\right|^{2H}+\left|s\right|^{2H}-\left|t-s\right|^{2H}\right). \tag{1.12}$$

C'est le seul processus gaussien à accroissements stationnaires possédant la propriété d'auto-similarité

$$\left\{B_H\left(at\right)\right\}_t=^d a^H\left\{B_H\left(t\right)\right\}_t\ \left(a>0\right) \tag{1.13}$$

($=^d$ désigne l'égalité en loi entre processus). On rappelle également que $B_{1/2}$ est le mouvement Brownien standard. Ces résultats, combinés à certaines propriétés de mémoire (voir [51], chapitre 7), expliquent l'omniprésence du fBm depuis son introduction par Kolmogorov en 1940 et sa popularisation dans le domaine des sciences appliquées par Mandelbrot et Van Ness en 1968 [33].

En utilisant la propriété d'auto-similarité, la stationnarité des incréments et le fait que $B_H\left(0\right)=0$ p.s., on obtient

$$\mathbb{E}\left|B_H\left(t+h\right)-B_H\left(t\right)\right|^q=\mathbb{E}\left|B_H\left(h\right)\right|^q=h^{qH}\mathbb{E}\left|B_H\left(1\right)\right|^q. \tag{1.14}$$

Le fBm est donc monofractal au sens de la Définition 1.1, avec $\zeta\left(q\right)=qH$.

Nous proposons à présent une illustration numérique, basée sur une estimation de la fonction de partition (Eq. (1.2)). Sur la figure 1.1, nous avons

utilisé la méthode de simulation des processus gaussiens par matrice circulante pour simuler des trajectoires de B_H sur l'intervalle $[0,1]$, avec les valeurs $H = 0.3$, $H = 0.6$ et $H = 0.9$. Nous avons estimé chaque fonction de partition en calculant

$$\tau_n(q) = -\frac{1}{\log n} \log \sum_{1 \leq j \leq n} \left| B_H\left(\frac{j+1}{n}\right) - B_H\left(\frac{j}{n}\right) \right|^q, \tag{1.15}$$

avec $n = 2^{17}$ et pour $q = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 3$. Les trois courbes sont proches de la fonction affine $\tau(q) = qH - 1$, signe d'un processus monofractal (avec un unique exposant de Hölder, égal à H).

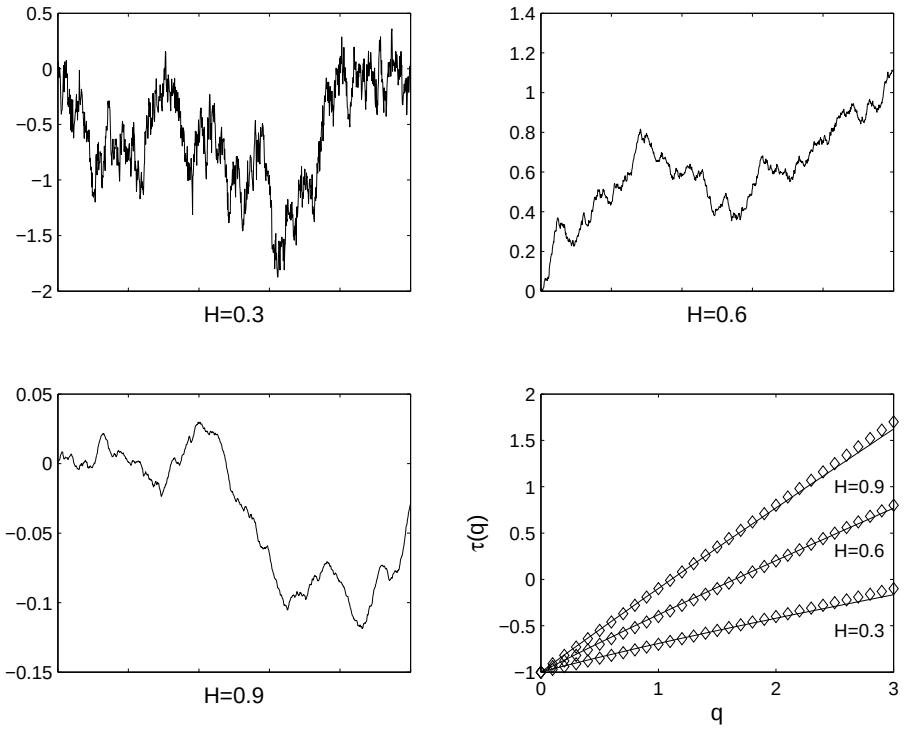


FIGURE 1.1 – **Simulation du fBm.** Chaque trajectoire du fBm semble possèder une irrégularité homogène (exposant de Hölder unique) ; et cette irrégularité est d'autant plus grande que H est petit. Ces résultats sont confirmés par les calculs de $\tau_n(q)$ (Eq. (1.15)) (diamants), qui s'ajustent bien sur les fonctions affines $\tau(q) = qH - 1$ (lignes continues).

Remarque 1.4 *Dans cette remarque, on explique dans quelle mesure* $\tau_n(q)$ *est un bon estimateur de* $\tau(q) = qH - 1$ *dans le cas du fBm d'indice* H. *Soit* $0 < H < 1$, $q > 0$. *Le Théorème ergodique entraîne la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires*

$$S_n = n^{qH-1} \sum_{1 \leq j \leq n} \left| B_H\left(\frac{j+1}{n}\right) - B_H\left(\frac{j}{n}\right) \right|^q \tag{1.16}$$

vers $\mathbb{E}\,|B_H(1)|^q$ *(on renvoie au calcul p.4 de [40] pour les détails). Par conséquent* $\log S_n$ *converge en probabilité vers* $\log \mathbb{E}\,|B_H(1)|^q$; *et comme* $\tau_n(q) = qH - 1 - \log S_n / \log n$, $\tau_n(q)$ *converge en probabilité vers* $qH - 1$. [8]

1.2.2 Etude de deux exemples concrets

Nous nous intéressons maintenant à deux séries de données réelles [9], issues des domaines de la finance et de la turbulence (figures 1.2 et 1.3). La première série donne le logarithme du taux de change euros/dollars jour par jour de janvier 1993 à janvier 2005 (figure 1.2). La représentation graphique de $\log[m_n(q, \Delta t)]$ (définie par (1.9)) en fonction de $\log \Delta t$ pour différentes valeurs de q, puis l'estimation du spectre $\zeta(q)$, mettent en évidence le caractère multifractal de la série. En effet, on obtient sur le premier graphique des fonctions affines pour chaque valeur de q ; et sur le second une fonction strictement concave.

L'introduction des multifractals en finance remonte à [16] et à [35], avec l'étude d'un grand nombre de situations analogues à celle que nous venons de présenter, mettant en lumière le caractère multifractal des signaux étudiés – citons également [54], avec de nombreux exemples. Ceci pose, depuis plusieurs années, la question de la pertinence des modèles de type ARCH, habituellement utilisés en finance ; et dont les trajectoires ne sont pas multifractales.

Le deuxième exemple que nous présentons est un champ de vitesse du vent, mesuré en m/s toutes les 0.1 s pendant 25 min (figure 1.3). La même méthode que celle utilisée pour la série de taux de change ci-dessus met en évidence le caractère multifractal du signal.

8. Ce qui précède se veut être une illustration simple de l'utilisation que l'on peut faire de la fonction de partition. On trouve dans l'article de Huang et al. [22] une étude numérique bien plus poussée, avec notamment une comparaison systématique des différentes méthodes possibles d'estimation du spectre du fBm.

9. Ces données m'ont été transmises par François Schmitt.

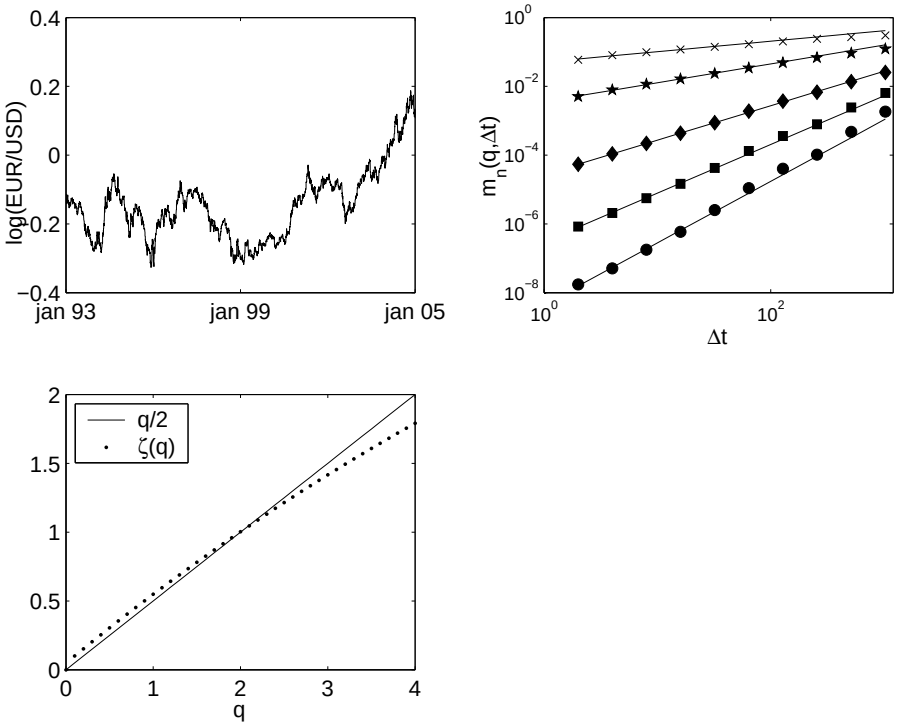


FIGURE 1.2 – **Taux de change.** On étudie le logarithme du taux de change euro/dollar de 1993 à 2005. Le graphique en haut à droite montre $\log\left[m_n\left(q,\Delta t\right)\right]$ (Eq. (1.9)) en fonction de $\log\Delta t$, pour les valeurs $q = 0.5, 1, 2, 3, 4$ (de bas en haut) et les ajustements affines correspondants. Pour chaque valeur de q, la série de points correspond de façon assez précise à une fonction affine, ce qui indique la propriété d'échelle attendue. La fonction ζ est estimée en bas à gauche ; sa stricte concavité confirme le caractère multifractal du signal. Pour les valeurs de $0 \leq q \leq 2$, $\zeta\left(q\right)$ est proche de $q/2$, résultat classique en finance.

1.2.3 La cascade canonique

La cascade canonique a été introduite dans le cadre de la turbulence par Yaglom en 1966 [61]. Ses propriétés mathématiques et celles de la mesure associée ont ensuite été étudiées par Mandelbrot [34], puis par Kahane et Peyrière [24]. Ci-dessous, nous définissons la cascade comme dans [24].

On se donne un entier $b \geq 2$ et une variable aléatoire positive W d'espé-

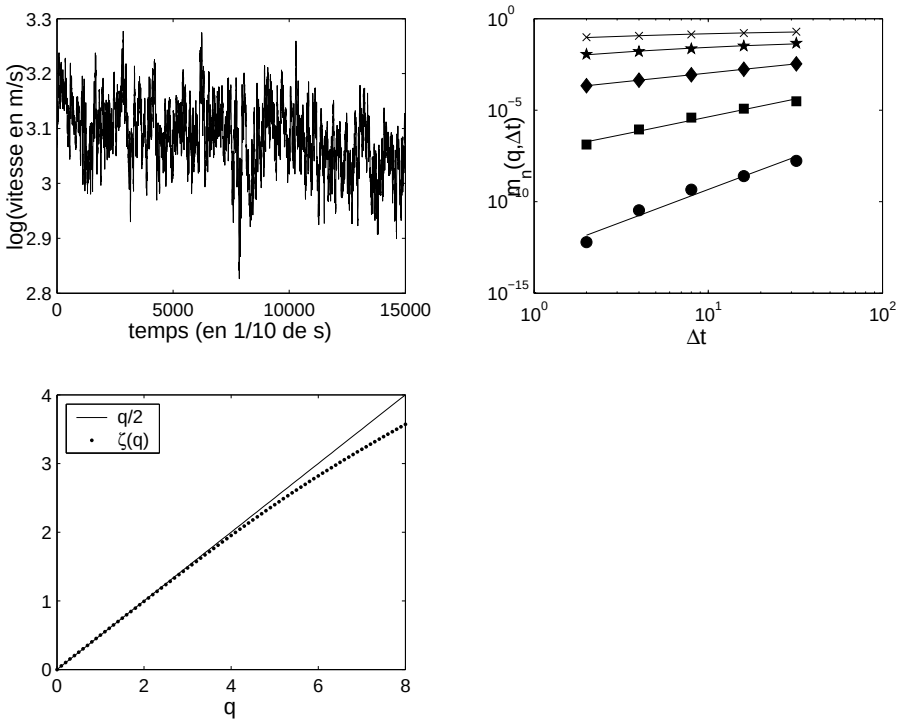


FIGURE 1.3 – **Vitesse du vent.** On étudie un champ de vent pendant 25 min. Comme sur la figure 1.2, la propriété d'échelle apparaît sur le graphique en haut à droite ; on doit cependant limiter la valeur de l'incrément Δt ($\Delta t \leq 2^5$) pour avoir des résultats probants (c'est-à-dire des droites). L'estimation de la fonction ζ (en bas) indique le caractère multifractal de la série – ce dernier n'apparaissant qu'au-delà du moment d'ordre 4.

rance 1. On considère les intervalles $b-$adiques de $[0,1]$:

$$I(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \left[\sum_{k=1}^{n} j_k b^{-k}, \sum_{k=1}^{n} j_k b^{-k} + b^{-n}\right[\tag{1.17}$$

($n = 1, 2 \ldots,\ j_k = 0, 1, \ldots, b-1$). On désigne ensuite par $W(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi que W.

La mesure μ_n associée à cette cascade est définie sur $[0,1]$ comme étant la mesure aléatoire dont la densité est

$$W(j_1)\, W(j_1, j_2) \cdots W(j_1, j_2, \ldots, j_n) \tag{1.18}$$

sur l'intervalle $I(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ (premier graphique de la figure 1.4).

Autrement dit, on part du segment $[0,1]$, que l'on divise en b pavés, puis à nouveau en b pavés, etc., chaque pavé se voyant associer une variable aléatoire ; puis on calcule un produit « en cascade ». Cette construction est appelée *cascade canonique*.

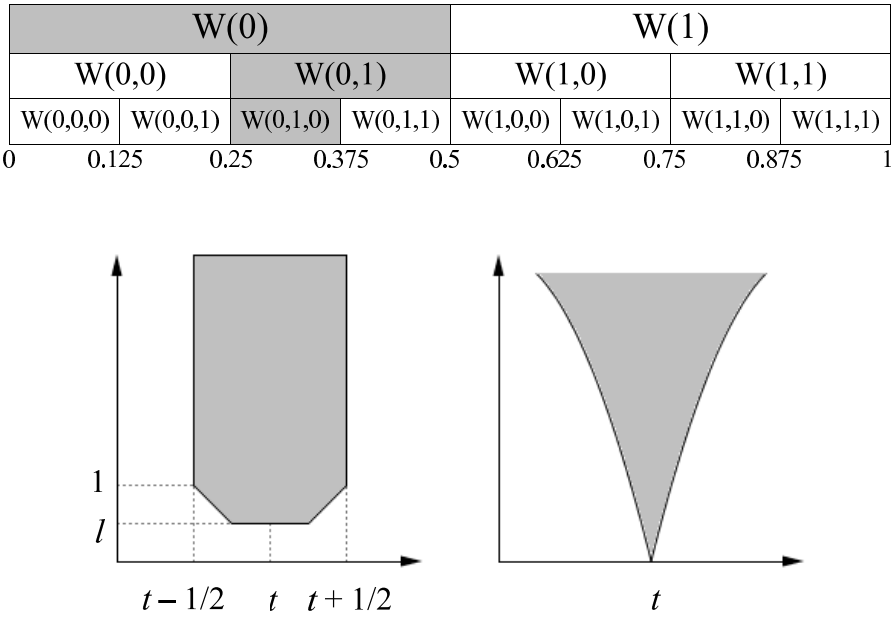


FIGURE 1.4 – **Les différentes cascades.** On a représenté en haut la cascade canonique dans le cas $b = 2, n = 3$. La densité de μ_3 sur l'intervalle $[0.25, 0.375[$ est égale à $W(0) W(0,1) W(0,1,0)$. Le cône $A_l(t)$ de la MRM [8] est représenté sur le graphique en bas à gauche ; tandis que le cône A_t défini par Schmitt et Marsan [55] est représenté en bas à droite.

Sur les quatre premiers graphiques de la figure 1.5, on a représenté la densité de μ_n et sa fonction de répartition dans les cas $b = 2, n = 3$, puis $b = 2, n = 12$, avec W log-normale : $W = \log G$, où $G \sim \mathcal{N}(-0.5, 1)$.

On s'intéresse à présent à la mesure μ_n et à une éventuelle mesure limite μ. On considère pour cela un réel $x \in [0,1]$, dont le développement $b-$adique s'écrit $x = \sum x_k b^{-k}$. La densité de μ_n en x est

$$\mathrm{d}\mu_n(x) = W(x_1) W(x_1, x_2) \cdots W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ; \qquad (1.19)$$

et si la loi de W n'est pas dégénérée, cette suite de variables aléatoires

converge presque sûrement vers 0.[10] Comme nous avons un ensemble dénombrable de variables $W(.)$, presque sûrement, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{d}\mu_n(x)$ converge vers 0. Cette convergence est en partie visible sur la figure 1.5, puisque la densité de μ_{12} y est presque partout proche de 0 (elle l'est bien davantage que celle de μ_3). Par contraste, la densité de μ_{12} semble portée par quelques intervalles où elle est très élevée et la masse totale de μ_{12} est plus importante que celle de μ_3 (valant un peu moins de 0.8) – le même travail pour μ_{16} (non représenté) donne des résultats sensiblement identiques. Cette apparente contradiction se comprend mieux si l'on étudie la suite $\mu_n(I)$, où I est un intervalle $b-$adique quelconque : cette suite est une martingale positive d'espérance $|I|$, elle converge donc presque sûrement vers une limite $\mu(I)$; par conséquent μ_n converge presque sûrement vers une mesure μ, au sens de la topologie faible.

Cette situation complexe a été étudiée dans [34, 24]. La question de la non-dégénérescence de la mesure limite μ, l'étude géométrique de sa densité et l'existence du moment d'ordre q sont résumés dans la propriété suivante :

Propriété 1.5 (Kahane et Peyrière (1976)) *On pose* $Z = \mu([0,1])$ *et pour* $q \geq 0$:

$$\psi_b(q) = \log_b \mathrm{E}W^q \tag{1.20}$$

(qui peut éventuellement être infini). On considère également un intervalle $b-$*adique* I.

1. *(Condition de non dégénérescence) Si* $\psi_b'(1-0) < 1$, *alors* $\mathrm{E}Z > 0$; *et réciproquement.*
2. *(Existence des moments) Soit* $q > 1$. *Si* $\psi_b(q) < q-1$, *alors* $\mu(I)$ *a un moment d'ordre* q *et* $\mu_n(I)$ *converge vers* $\mu(I)$ *dans* L^q.
3. *(Etude de la mesure* μ*) On suppose que* $\mathrm{E}(Z\log Z) < \infty$. *Alors* μ *est presque sûrement portée par un Borélien de dimension de Hausdorff* $D = 1 - \psi_b'(1-0)$.

La mesure aléatoire μ vérifie la propriété

$$\mu(I_n) =^d b^{-n} W_1 \times \cdots \times W_n \times \mu([0,1]) \tag{1.21}$$

pour tout intervalle $b-$adique I_n de longueur $|I_n| = b^{-n}$; et où les W_i sont des copies indépendantes de W, également indépendantes de $\mu([0,1])$. La propriété (1.21) de type auto-similaire (ou d'invariance d'échelle), dans

10. En effet, avec la convention $\log 0 = -\infty$, $\log[\mathrm{d}\mu_n(x)]$ apparaît comme une somme de variables i.i.d. D'après l'inégalité de Jensen, $\mathrm{E}(\log W) < \log(\mathrm{E}W) = 0$, donc la loi forte des grands nombres donne $\lim_n \log[\mathrm{d}\mu_n(x)] = -\infty$, p.s.

laquelle le coefficient d'échelle est aléatoire est la clef pour obtenir un processus multifractal. En effet, si $\mu([0,1])$ a un moment d'ordre q, on obtient directement à partir de (1.21)

$$\mathrm{E}\left[\mu\left(I_n\right)\right]^q = |I_n|^{q-\psi_b(q)}\,\mathrm{E}\left[\mu\left([0,1]\right)\right]^q. \tag{1.22}$$

Malheureusement, rien ne permet d'affirmer que l'on puisse remplacer l'intervalle *b−adique* I_n par un intervalle quelconque dans cette égalité ; par conséquent il n'est pas certain que μ (vu comme un processus) soit strictement multifractal au sens de la Définition 1.1. La mesure μ est pourtant devenue l'archétype du processus multifractal, la plupart des constructions effectuées dans ce domaine étant des généralisations de la cascade canonique [11]. La construction d'une cascade dans laquelle on puisse s'affranchir de l'hypothèse I_n *intervalle b−adique* n'a été pleinement achevée qu'avec la mesure aléatoire multifractale (voir le sous-chapitre 1.3).

Holley et Waymire [20] ont démontré des résultats de formalisme multifractal géométrique pour la mesure μ dans le cas où W est bornée, puis Molchan [36] a traité le cas général. Leurs résultats sont illustrés sur les deux derniers graphiques de la figure 1.5 : on rappelle que l'on a pris un poids W log-normal et que l'on s'intéresse à la mesure μ_{12} lorsque $b = 2$. Pour vérifier le caractère multifractal et mettre en lumière le fait que l'on devrait pouvoir se passer de l'hypothèse I_n *intervalle b−adique* dans l'équation (1.21), on a représenté [12]

$$m_{12}(q,\Delta t) = \left\langle \mu\left([t,t+\Delta t[\right)^q \right\rangle \tag{1.23}$$

pour différentes valeurs de q et pour :

- $\Delta t = 1, 2^{-1}, \ldots, 2^{-7}$ et $[t, t+\Delta t[$ intervalle de la forme $[k\Delta t, (k+1)\,\Delta t[$ dans un premier temps ;
- $\Delta t = 1, 3^{-1}, \ldots, 3^{-7}$ et $[t, t+\Delta t[$ intervalle quelconque dans un deuxième temps.

On a $\mathrm{E}W^q = e^{\frac{1}{2}\left(q^2-q\right)}$, donc d'après le Point 2 de la Propriété 1.5, les moments de μ_n divergent lorsque $\frac{1}{2\log 2}\left(q^2-q\right) < q-1$. Pour cette raison, nous avons restreint le calcul de $m_{12}(q,\Delta t)$ à $q \leq 1.3$. On constate que le fait de choisir $\Delta t = 2^{-k}$ ou non, et des intervalles comme dans l'équation (1.21) ou non, ne change en rien l'allure des séries de points obtenues (graphique en bas à gauche de la figure 1.5). C'est un bon argument en faveur du fait que l'on puisse se passer de l'hypothèse I_n *intervalle b−adique* dans l'équation

11. Aucun des processus que nous considérerons à partir de maintenant n'échappera à cette règle.

12. Pour être cohérent avec les notations utilisées plus tôt, il faudrait normalement écrire $m_{2^{12}}(q,\Delta t)$, puisqu'il y a 2^{12} données.

(1.21). Le fait que les séries de points soient alignées (graphique en bas à gauche de la figure 1.5) et l'allure strictement concave de ζ (estimée sur le graphique en bas à droite) illustrent le caractère multifractal de la mesure μ.

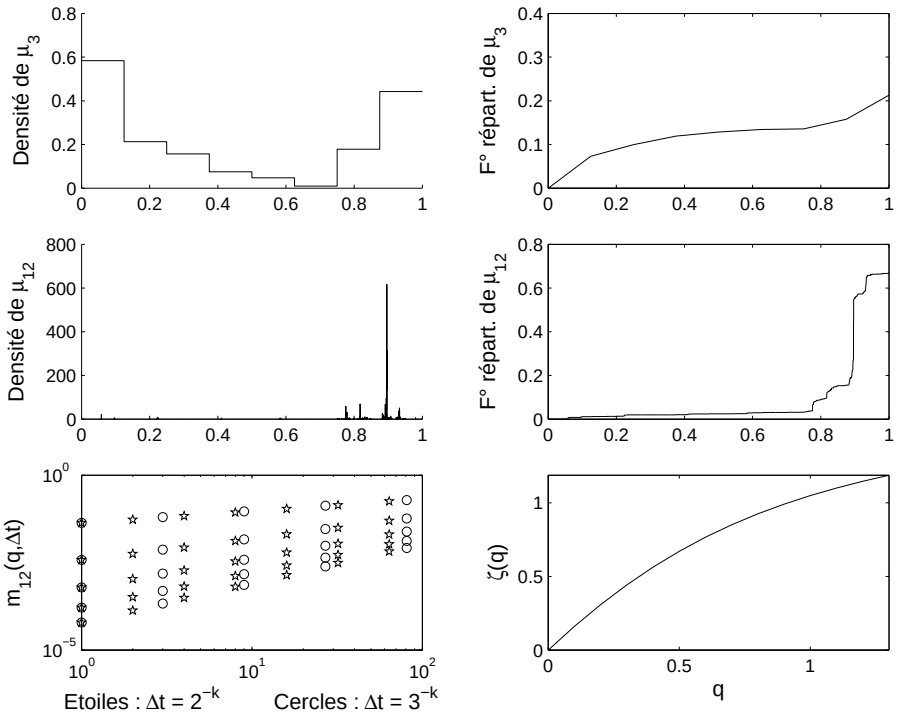


FIGURE 1.5 – **Cascade canonique.** Les quatre graphiques du haut montrent les densités et les fonctions de répartition de μ_3 et μ_{12} dans le cas d'une cascade log-normale, avec $b = 2$. La nature géométrique complexe de la mesure limite μ (Propriété 1.5) apparaît bien sur les graphiques du milieu. Sur le graphique en bas à gauche, on a construit $m_{12}(q, \Delta t)$, pour $q = 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1,\ 1.25$, avec deux familles d'intervalles différentes (l'une correspondant à l'équation (1.21) et l'autre non). Le peu de différences entre les deux séries de points laisse penser qu'il est peut-être possible de généraliser l'équation (1.21). Le spectre ζ, associé à la mesure limite μ, est estimé sur le graphique en bas à droite.

1.3 La mesure aléatoire multifractale (MRM)

1.3.1 Un bref historique

La cascade canonique, présentée dans la section précédente, possède le défaut de faire jouer à l'entier b un rôle privilégié (Eq. (1.21),(1.22)). Une généralisation de la cascade, évitant cet écueil, a été proposée par Kahane dès 1985 [25] : on considère une famille de processus gaussiens réels indépendants $X_1, X_2, \ldots$ On définit ensuite les poids aléatoires

$$P_n(t) = e^{X_n(t) - \frac{1}{2}\mathrm{E}{X_n}^2(t)}, \tag{1.24}$$

et la mesure

$$\nu_n([0,t]) = \int_0^t Q_n(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.25}$$

où

$$Q_n = P_1 \ldots P_n. \tag{1.26}$$

On retrouve l'idée de la cascade, mais les variables associées aux pavés du $k-$ième étage ont été remplacées par une mesure aléatoire sur l'étage complet. Kahane donne des conditions d'existence de la mesure $\nu = \lim_n \nu_n$ et étudie ses propriétés géométriques. Il explique également le lien avec la turbulence et, ce faisant, propose pratiquement une méthode de construction de processus multifractal : il note

$$p_i(t,s) = \mathrm{cov}\left(X_i(t), X_i(s)\right) \tag{1.27}$$

et

$$q_n(t,s) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t,s), \tag{1.28}$$

et montre qu'il est possible de choisir les processus X_i de telle sorte que

$$\lim_n q_n(t,s) = -\log^+|t-s| + \mathrm{O}(1). \tag{1.29}$$

Kahane indique que « ce dernier exemple est convenable comme modèle de la turbulence isotrope ». Au moment de cet article, les multifractals ne sont pas encore développés et Kahane n'aborde pas ce domaine. Or sa construction est très proche de la MRM [8], présentée dans la section suivante ; et il suffirait de choisir judicieusement les X_i pour obtenir un processus multifractal.

Quelques années plus tard, Bacry, Delour et Muzy [7] font une autre avancée. Ils définissent (nous modifions légèrement leur présentation, sans en altérer le sens)

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \epsilon_n(i)\, e^{\omega_n(i)}, \tag{1.30}$$

où ϵ_n est un bruit blanc gaussien centré de variance $1/n$, indépendant du processus gaussien ω_n d'espérance $\mathrm{E}(\omega_n(i)) = -\lambda^2 \log n$ et de covariance

$$\mathrm{cov}(\omega_n(i), \omega_n(j)) = \begin{cases} -\lambda^2 \left[\log\left(\frac{|i-j|+1}{n}\right)\right] & \text{si } |i-j| \leq n-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.31}$$

Les auteurs de [7] étudient les moments entiers et les propriétés de mémoire d'un « processus limite » X et vérifient son caractère multifractal avec le même type de simulations numériques que celles que nous avons faites dans le sous-chapitre 1.2. Ce processus est très proche de la marche aléatoire multifractale (MRW), présentée dans le chapitre 3 (et proche parente de la MRM).

La percée décisive est menée la même année par Schmitt et Marsan [55], avec l'idée suivante : la densité en un point x du $n-$ième étage de la cascade canonique s'écrit sous forme de produit (voir Eq. (1.19))

$$\mathrm{d}\mu_n(x) = W(x_1)\, W(x_1, x_2) \cdots W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ; \tag{1.32}$$

autrement dit comme le produit de variables aléatoires associées à des pavés dessinant un « cône » au-dessus de x (en haut de la figure 1.4). Schmitt et Marsan remplacent le produit (1.32) par

$$e^{M(A_x)}, \tag{1.33}$$

où A_x est un « cône plus régulier » construit au-dessus de x (en bas à droite de la figure 1.4) et M est une mesure aléatoire infiniment divisible. Les auteurs de [55] vérifient que le processus obtenu est bien multifractal et proposent d'écrire (1.33) sous forme de moyenne mobile dans le cas log-stable.

Un an plus tard [13], Barral et Mandelbrot [9] proposent une définition voisine en utilisant toute une famille de mesures aléatoires construites à partir d'un processus de Poisson. Ils vérifient ensuite les propriétés géométriques

13. Nous présentons les différentes constructions dans leur ordre de publication, sans attribuer de paternité à tel ou tel auteur. L'examen des dates des premières soumissions des articles des uns et des autres permet de voir que les différents travaux [7, 55, 9] sont indépendants.

des mesures limites ainsi contruites. Leur travail est un cas particulier de la MRM ; à ma connaissance ce sont les seules MRM pour lesquelles le formalisme multifractal ait été démontré.

Ce long processus de recherche est conclu en 2002 par Bacry et Muzy [8]. Dans cet article aujourd'hui fondamental, ils présentent une méthode de construction de processus multifractals, appelés MRM, qui englobe et généralise les travaux précédents sur le sujet [14]. Leur construction, à la base de mon travail de thèse, est rappelée de façon détaillée dans les sections suivantes.

1.3.2 MRM : construction de la cascade

Notre présentation suit [8] [15]. Soit $S^+ = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in]0,\infty[\}$ le demi-plan supérieur dans $\mathbb{R}^2$. On définit sur S^+ la mesure

$$\mathrm{d}\mu(x,y) = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}. \tag{1.34}$$

On se donne à présent une variable aléatoire infiniment divisible W. On peut écrire $\mathrm{E}e^{iqW} = e^{\varphi(q)}$, où

$$\varphi(q) = imq + \int \frac{e^{iqx} - 1 - iq\sin x}{x^2}\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.35}$$

et où m est un réel et ν, la mesure de Lévy associée à W, vérifie

$$\int_{|x|>y} \frac{\nu(\mathrm{d}x)}{x^2} < \infty \tag{1.36}$$

pour tout $y > 0$. Dans la suite, on suppose que ν n'est pas dégénérée.

Rappelons qu'une mesure aléatoire infiniment divisible sur S^+ est un processus $\{P(A)\}_A$ indexé par les boréliens de S^+ tel que, pour tous boréliens disjoints $A_1, A_2, \ldots$:

- les variables $P(A_1), P(A_2), \ldots$ sont infiniment divisibles et mutuellement indépendantes ;
- $P(\cup_{i=1} A_i) = \sum_i P(A_i)$, p.s.

D'après la Proposition 2.1 de [48], on définit une unique mesure aléatoire infiniment divisible P sur S^+ par la formule :

$$\mathrm{E}e^{iqP(A)} = e^{\varphi(q)\mu(A)} \tag{1.37}$$

14. Un travail très voisin a été proposé par Chainais et al. à la même époque [11].

15. Nous faisons cependant la petite simplification qui consiste à prendre $T = 1$, c'est-à-dire à travailler sur l'intervalle $[0,1]$ uniquement (voir Remarque 1.3).

pour tout $q \in \mathbb{R}$, A borélien de S^+.

Pour tout couple (t, l) dans $\mathbb{R}\times]0, \infty[$, Bacry et Muzy définissent le sous-ensemble $A_l(t)$ de S^+ par

$$A_l(t) = \{(x, y), l \leq y, |x - t| \leq \inf(y/2, 1/2)\} \tag{1.38}$$

(graphique en bas à gauche de la figure 1.4) et la variable aléatoire

$$\omega_l(t) = P(A_l(t)). \tag{1.39}$$

Leur construction est une généralisation de la cascade canonique (voir sous-chapitre précédent) : $A_l(t)$ est le « cône » et $\omega_l(t)$ doit être vu comme le logarithme de la densité d'une mesure au point t. Cette construction s'inspire de [55] en l'améliorant.

Finalement, Bacry et Muzy définissent la mesure

$$M_l(I) = \int_I e^{\omega_l(x)} \mathrm{d}x. \tag{1.40}$$

Pour que cette mesure soit bien définie, des hypothèses sont nécessaires sur la loi de ω_l :

1. D'après la définition p.454 de [8], le processus ω_l admet une modification càdlàg. C'est cette modification que l'on utilise dans la définition de M_l pour éviter tout problème d'intégrabilité.
2. Il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$ telle que, pour tout borélien A dans S^+ tel que $0 < \mu(A) < \infty$,

   $$\mathrm{E}e^{qP(A)} = e^{\psi(q)\mu(A)} \tag{1.41}$$

   si $\psi(q) < \infty$ et $\mathrm{E}e^{qP(A)} = \infty$ autrement. On définit

   $$q_{\max} = \max_{q \geq 0} \{\mathrm{E}e^{qP(A)} < \infty\}, \tag{1.42}$$

   où A est un borélien quelconque tel que $0 < \mu(A) < \infty$. Il est possible d'étendre la définition de φ de telle sorte que $\psi(q) = \varphi(-iq)$ pour tout $q \in [0, q_{\max}[$ (comparez les équations (1.41) et (1.37)). Le processus $M_l(t)$ est bien défini dès que $q_{\max} \geq 1$. Dans la suite, on fera l'hypothèse plus forte

   $$q_{\max} > 1 \tag{1.43}$$

   et l'on supposera de plus que

   $$\psi(1) = 0. \tag{1.44}$$

1.3.3 MRM : définition et propriétés

Les auteurs de [8] prouvent que, pour $0 < \lambda \leq 1, 0 < l \leq 1$, on a l'égalité en loi entre processus

$$\{\omega_{\lambda l}(\lambda t)\}_t =^d \{\omega_l(t) + \Omega_\lambda\}_t \tag{1.45}$$

où Ω_λ est indépendante du processus ω_l (défini par (1.39)) et a pour fonction caractéristique

$$\mathrm{E}e^{iq\Omega_\lambda} = \lambda^{-\varphi(q)}. \tag{1.46}$$

L'égalité (1.45) est l'outil clef pour obtenir une mesure limite multifractale. En utilisant (1.45) et des techniques de Kahane et Peyrière notamment [24, 26], Bacry et Muzy démontrent :

Théorème 1.6 (Bacry et Muzy (2002)) *On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\psi(1+\epsilon) < \epsilon$.*

1. *Presque sûrement, la mesure $M_l(dt)$, définie sur l'intervalle $[0,1]$, converge faiblement lorsque l tend vers 0 vers une mesure limite non dégénérée $M(dt)$, appelée MRM.*
2. *Le processus M vérifie la propriété multifractale (1.1) avec $\zeta(q) = q - \psi(q)$, c'est-à-dire que*

$$\mathrm{E}\,|M([0,t[)|^q = \mathrm{E}\,|M([0,1[)|^q\, t^{q-\psi(q)} \tag{1.47}$$

pour tout $0 \leq q \leq 1$ et tout $1 < q < q_{\max}$ tel que $\psi(q) < q - 1$.

1.3.4 MRM : deux exemples

La mesure aléatoire P (Eq. (1.37)) est entièrement définie par les égalités $\mathrm{E}e^{iqP(A)} = e^{\varphi(q)\mu(A)}$ et $\mathrm{E}e^{P(A)} = 1$ – cette dernière condition est en effet équivalente à (1.44). Ainsi obtient-on une grande famille de MRM, dont chaque membre correspond à un choix particulier de la mesure ν (Eq. (1.35)). Voici deux exemples, liés aux travaux que nous ménerons dans les chapitres 2 et 3 :

1. Le cas log-normal. On prend $\nu(\mathrm{d}x) = \lambda^2 \mathrm{d}\delta_0(x)$, avec $\lambda^2 > 0$. Dans ce cas, $\psi(q) = mq + \lambda^2 q^2/2$ et P est une mesure aléatoire gaussienne. On a donc $q_{\max} = +\infty$ et la condition $\psi(1) = 0$ impose la relation $m = -\lambda^2/2$. Le spectre est donc défini par

$$\zeta(q) = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) q - \frac{\lambda^2}{2} q^2. \tag{1.48}$$

On retrouve bien l'expression de $\zeta(q)$ telle que trouvée par Kolmogorov en 1962 [29]. Pour des raisons historiques et du fait du caractère central des processus gaussiens, ce modèle log-normal est la MRM la plus étudiée et la plus utilisée dans les applications.

2. Le cas log-stable. On prend $\nu(\mathrm{d}x) = \sigma |x|^{1-\alpha} \mathbf{1}_{\{x<0\}} \mathrm{d}x$, avec $\sigma > 0$ et $0 < \alpha < 2$. Dans ce cas $q_{\max} = +\infty$ et l'on a $\psi(q) = \sigma^{\alpha}(q^{\alpha} - q)$; la mesure P est alors une mesure aléatoire $\alpha-$stable (chapitre 3 de [51]). Le spectre de la MRM est donné par la formule

$$\zeta(q) = (1 + \sigma^{\alpha}) q - \sigma^{\alpha} q^{\alpha}. \tag{1.49}$$

On retrouve l'expression de $\zeta(q)$ telle que donnée dans les articles en turbulence sur le sujet [52, 28, 53].

1.3.5 MRM : version discrète et simulation

Il est intéressant d'avoir des versions simples des processus [16] , en particulier pour faire des simulations et fournir des modèles utilisables en pratique. Bacry et Muzy [8] prouvent que s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\psi(2 + \epsilon) < 1 + \epsilon$,

$$\tilde{M}_{1/2^n}([0, t[) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\lfloor 2^n t \rfloor - 1} e^{\omega_{1/2^n}(k/2^n)} \tag{1.50}$$

converge en moyenne quadratique vers la MRM M lorsque n tend vers l'infini. Nous proposons sur la figure 1.6 une illustration numérique basée sur ce résultat : nous représentons le processus gaussien $\{\omega_l(kl)\}_{k=1,\ldots,2^{10}}$, son exponentielle et la mesure $\tilde{M}_l$ lorsque $l = 1/2^{10}$. On construit aussi un histogramme à partir de 10000 valeurs de $\tilde{M}_l([0, 1[)$. Le processus ω_l est simulé en utilisant la méthode de simulation des processus gaussiens par matrice circulante, à partir de son espérance

$$\mathrm{E}\omega_l(s) = -\frac{\lambda^2}{2}(1 - \log l) \tag{1.51}$$

et de sa fonction de covariance (voir le Lemme 1 dans [8])

$$\mathrm{cov}(\omega_l(s), \omega_l(u)) = \lambda^2 r_l(s - u), \tag{1.52}$$

16. Dans toute la thèse, le mot *version* sera à prendre dans son sens usuel en français. Il ne faudra donc pas le confondre avec le mot *modification*, qu'on emploiera toujours dans son sens mathématique.

où r_l est la fonction paire définie par

$$r_l(u) = \begin{cases} 1 - \log l - u/l & \text{si } 0 \leq u \leq l \\ -\log u & \text{si } l < u \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < u. \end{cases} \tag{1.53}$$

D'autres exemples de MRM et une méthode générale de simulation – adaptée également à des processus non gaussiens – sont proposés dans [38].

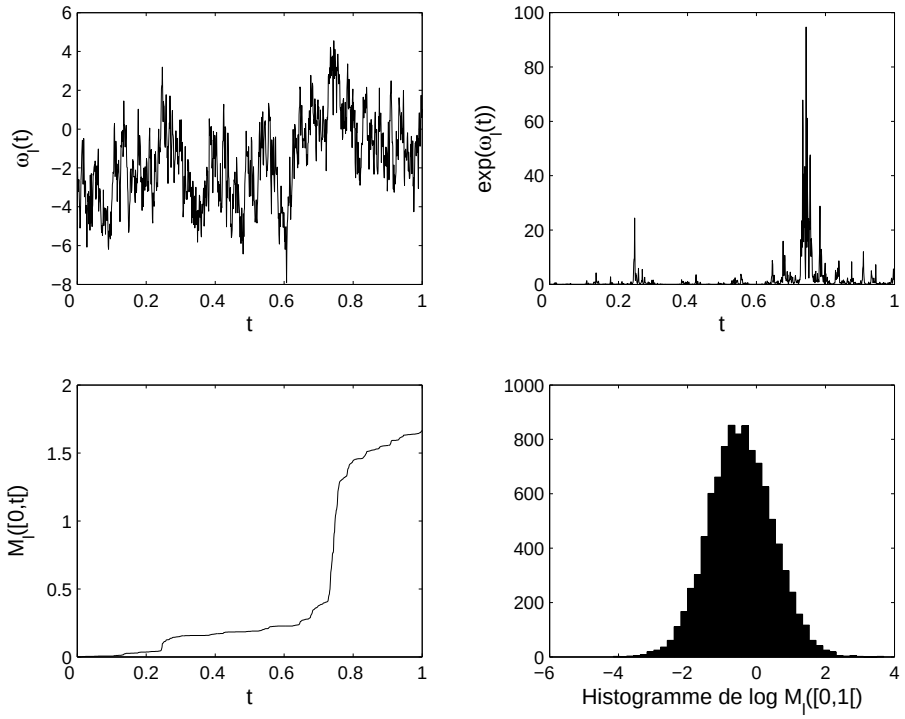


FIGURE 1.6 – **MRM : le cas log-normal.** On a représenté sur les graphiques du haut une trajectoire du processus gaussien $\omega_{1/2^{10}}$ (avec $\lambda = \sqrt{0.5}$) et de son exponentielle sur l'intervalle $[0, 1]$, en prenant un pas de $1/2^{10}$. On observe sur le graphique en haut à droite de fortes variations et un caractère intermittent, propriétés usuelles des processus multifractals. Sur les graphiques du bas sont représentés : à gauche, la fonction de répartition de la mesure $\tilde{M}_l$, construite à partir du processus e^{ω_l} simulé au-dessus ; à droite un histogramme de $\log \tilde{M}_l([0, 1[)$, réalisé à partir d'un échantillon de taille 10000.

1.4 Plan et résultats de la thèse

A l'image de la MRM (sous-chapitre 1.3), les processus multifractals sont souvent définis comme limites de processus de la forme

$$X_l(t) = \int_0^t \exp \gamma_l(s)\, \mathrm{d}\mu(s) \tag{1.54}$$

lorsque l tend vers 0, γ_l étant un processus stochastique et μ une mesure (éventuellement aléatoire).

Le travail principal de cette thèse est la construction de deux familles de processus basées sur ce modèle : dans le chapitre 2, on construit des processus multifractals en prenant pour γ_l une moyenne mobile $\alpha-$stable et pour μ la mesure de Lebesgue ; dans le chapitre 3, on a $\gamma_l = \frac{1}{2}\omega_l - (2H-1)\log l$ (ω_l est défini par (1.39)) et μ est le fBm d'indice de Hurst $0 < H < 1/2$. Dans chacun de ces deux chapitres, le plan d'étude est sensiblement le même :

- on prouve d'abord que X_l (Eq. (1.54)) est bien défini et qu'il admet une modification continue ;
- on établit la convergence en loi dans $C[0,1]$ de X_l vers une limite X ;
- on démontre une propriété de type multifractal pour le processus X.

Des problèmes connexes sont également étudiés. Certains sont résolus complètement, tandis que d'autres sont simplement évoqués sous forme de questions ouvertes.

1.4.1 Chapitre 2 : Processus multifractals construits à partir de moyennes mobiles $\alpha-$stables

Dans ce chapitre, on construit une famille de processus multifractals en remplaçant, dans la définition de la MRM (sous-chapitre 1.3), le processus ω_l (Eq. (1.39)) par une simple moyenne mobile ρ_l. On étudie le cas général où ρ_l est $\alpha-$stable, puis le cas particulier où il est gaussien. On prouve que les processus multifractals ainsi construits sont les limites en loi de processus affines par morceaux particulièrement simples ; on s'intéresse également à des problèmes de prévision. On fournit ainsi un nouveau modèle de processus multifractal, proche de la MRM, mais dont l'utilisation semble plus aisée du fait de sa simplicité.

Ce chapitre reprend l'article [43], mais avec une présentation différente, pour établir un lien précis avec la MRM. Il est aussi plus complet, de nombreux résultats établis ici n'apparaissant pas dans [43]. Ce travail trouve ses sources dans plusieurs articles écrits par Schmitt notamment [55, 56, 57]. C'est d'ailleurs François Schmitt qui m'a guidé vers cette étude au début

de ma thèse, suggérant l'idée de la moyenne mobile stable et d'un lien avec les processus FARIMA (lien qui apparaîtra à plusieurs reprises au cours du chapitre).

Le sous-chapitre 2.1 est consacré à des rappels sur les variables aléatoires et certains processus $\alpha-$stables.

Dans le sous-chapitre 2.2, on étudie la suite de processus indexés par $0 < l < 1$:

$$X_l^S(t) = \int_0^t e^{\rho_l(s)} \mathrm{d}s,\ t \in [0,1], \tag{1.55}$$

où ρ_l est la moyenne mobile décentrée

$$\rho_l(s) = \mu \int_{s-1}^{s} f_l(s-u)\, \mathrm{d}M_\alpha(u) + \frac{\mu^\alpha (1 - \log l)}{\cos(\pi\alpha/2)}, \tag{1.56}$$

la fonction f_l étant définie par

$$f_l(u) = \begin{cases} l^{-1/\alpha} & \text{si } 0 \leq u < l \\ u^{-1/\alpha} & \text{si } l \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \tag{1.57}$$

$\mu > 0$ étant un paramètre et M_α étant une mesure aléatoire $\alpha-$stable de paramètres $1 < \alpha \leq 2$, $\beta = -1$. [17]

Le processus ρ_l a été proposé par Schmitt et Marsan en 2001 [55] comme substitut à la cascade canonique (voir section 1.3.1) ; il a ensuite été étudié par Schmitt et Chainais [57] .

Dans ce sous-chapitre 2.2, on démontre les résultats suivants :

Résultat 1 (Propriété 2.6) *Il est possible de choisir ρ_l de telle sorte que X_l^S soit bien défini et qu'il soit presque sûrement dérivable.*

Le spectre multifractal est défini par

$$\zeta(q) = q + \frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)} (q^\alpha - q). \tag{1.58}$$

Résultat 2 (Propriété 2.7) *Sous l'hypothèse $\zeta(2) > 1$, X_l^S converge en moyenne quadratique et en loi dans $C[0,1]$, lorsque l tend vers 0, vers un processus limite X^S.*

Résultat 3 (Propriété 2.9) *Soit $t \in [0,1]$. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\zeta(2) > 2 - 1/q$. Alors :*

17. Le « S » du nom X_l^S se réfère au fait que l'on travaille avec des variables stables.

1. *Pour tout réel* $0 < p \leq 2q$, $X^S(t)$ *a un moment d'ordre* p *et*

$$\lim_{l \to 0} \mathrm{E}\left|X^S(t) - X_l^S(t)\right|^p = 0. \tag{1.59}$$

2. *Pour tout entier* $0 < p \leq 2q$, *il existe deux réels strictement positifs* $c_{\alpha,p}$, $C_{\alpha,p}$ *(indépendants de* t*) tels que*

$$c_{\alpha,p} t^{\zeta(p)} \leq \mathrm{E}\left(X^S(t)\right)^p \leq C_{\alpha,p} t^{\zeta(p)}. \tag{1.60}$$

On note que l'on retrouve le même spectre que pour la MRM construite à partir d'une mesure $\alpha-$stable (Eq. (1.49) dans le sous-chapitre 1.3.4), suggérant un lien fort entre notre construction et celle de Bacry et Muzy [8].

On définit dans le sous-chapitre 2.3 une version affine par morceaux du processus $X_{1/n}^S$:

$$X_n^{S,d}(t) = \int_0^t e^{g_n(\lfloor ns \rfloor)} \mathrm{d}s, \tag{1.61}$$

où g_n est une moyenne mobile discrète (décentrée) par rapport à un bruit blanc $\alpha-$stable :

$$g_n(u) = \mu \sum_{k=1}^{n} k^{-1/\alpha} \epsilon_{u-k} + \frac{\mu^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 1/k, \tag{1.62}$$

avec $(\epsilon_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ suite de variables aléatoires indépendantes $S_\alpha(1, -1, 0)$. [18] Cette version affine par morceaux est définie dans [43]. On démontre :

Résultat 4 (Propriété 2.12) *Le processus* $X_n^{S,d}$ *converge en loi dans* $C[0,1]$ *vers* X^S *lorsque* n *tend vers l'infini.*

La simulation du processus $X_n^{S,d}(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ nécessite seulement de générer le bruit blanc stable $(\epsilon_u)_{u \in [\![-n, n-1]\!]}$ et ne comporte aucune difficulté technique. A notre connaissance, il n'existe pas d'autre modèle aussi simple de processus multifractal dans la littérature.

Par ailleurs, le processus g_n appartient à la famille des processus ARMA (*auto-regressive moving average*). En démontrant qu'un certain polynôme n'admet pas de racine dans le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, on obtient :

Résultat 5 (Propriété 2.16) *On pose*

$$\epsilon_t^\star = \mu \epsilon_{t-1} \tag{1.63}$$

$$g_n^\star(t) = g_n(t) - \frac{\mu^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 1/k. \tag{1.64}$$

18. Le « d » du nom $X_l^{S,d}$ se réfère au fait que g_n est discret.

Le processus $g_n^\star$ admet la représentation auto-régressive

$$\epsilon_t^\star = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} g_n^\star(t-k). \tag{1.65}$$

On utilise cette représentation dans des problèmes de prévision. On démontre :

Résultat 6 (PROPRIÉTÉ 2.17) *La solution du problème*

$$(\widehat{\gamma_{n,0}}, \widehat{\gamma_{n,1}}, \dots) = \underset{(\gamma_{n,0},\gamma_{n,1},\dots)}{\textbf{argmin}} \, \mathrm{E} \left| g_n^\star(t+h) - \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{n,k} \epsilon_{t-k}^\star \right|. \tag{1.66}$$

est donnée par

- $\widehat{\gamma_{n,k}} = 0, \ k \geq n-h,$
- $\widehat{\gamma_{n,k}} = (k+h+1)^{-1/\alpha}, \ 0 \leq k \leq n-h-1$

On déduit de ce résultat que le « meilleur prédicteur » de $g_n^\star(t+h)$ connaissant $g_n^\star(t), \dots, g_n^\star(1), g_n^\star(0), \dots$ est

$$\begin{aligned} \widehat{g_n^\star(t+h)} &= \sum_{k=0}^{n-h-1} (k+h+1)^{-1/\alpha} \epsilon_{t-k}^\star \\ &= \sum_{k=0}^{n-h-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (k+h+1)^{-1/\alpha} c_{n,j} g_n^\star(t-k-j). \end{aligned} \tag{1.67}$$

Si l'on suppose que l'on observe uniquement $g_n^\star(t), \dots, g_n^\star(1)$, on décide de prévoir $g_n^\star(t+h)$ par

$$\widehat{\widehat{g_n^\star(t+h)}} = \sum_{k=0}^{n-h-1} \sum_{j=0}^{t-k-1} (k+h+1)^{-1/\alpha} c_{n,j} g_n^\star(t-k-j). \tag{1.68}$$

Autrement dit, on remplace les $g_n^\star(i)$ non observés par leur espérance (qui est égale à 0). On prouve que cette troncature est d'un effet mineur lorsque le nombre d'observations est suffisamment grand :

Résultat 7 (PROPRIÉTÉ 2.18) *La quantité*

$$\mathrm{E} \left| \widehat{\widehat{g_n^\star(t+h)}} - \widehat{g_n^\star(t+h)} \right| \tag{1.69}$$

décroît vers 0 à vitesse exponentielle lorsque t tend vers l'infini.

Ce sous-chapitre s'achève avec une méthode de prédiction pour $e^{g_n^\star(t+h)}$.

Le sous-chapitre 2.4 est dédié au cas particulier $\alpha = 2$, c'est-à-dire au cas où ρ_l est gaussien. On obtient dans ce cas particulier des résultats plus forts que ceux du sous-chapitre 2.2. On définit

$$X_l^G(t) = \int_0^t e^{\lambda \int_{s-1}^s f_l(s-u)\mathrm{d}B(u) - \lambda^2(1-\log l)/2}\mathrm{d}s,\ t \in [0,1], \tag{1.70}$$

la fonction f_l étant comme dans (1.57), avec $\alpha = 2$, et B désignant le mouvement Brownien standard [19]. Avec une présentation légèrement différente, ce processus est étudié dans [43]. On démontre que le processus limite X^G vérifie la propriété multifractale faible suivante :

Résultat 8 (Propriété 2.22) *La variable aléatoire $X^G(t)$ a un moment d'ordre q sous chacune des deux conditions :*

1. $0 < q \leq 2$,
2. $q > 2$ *et* $\zeta(q) > 1$.

De plus, dans chaque cas on a la propriété multifractale faible

$$c_q t^{\zeta(q)} \leq \mathrm{E}\left[X^G(t)\right]^q \leq C_q t^{\zeta(q)}, \tag{1.71}$$

c_q et C_q étant deux constantes strictement positives indépendantes de t, le spectre ζ étant le même que pour la MRM (Eq. (1.48) dans la section 1.3.4) :

$$\zeta(q) = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) q - \frac{\lambda^2}{2} q^2. \tag{1.72}$$

Ce résultat est meilleur que celui obtenu dans le cas stable (Propriété 2.9 dans le sous-chapitre 2.2). La démonstration de la Propriété 2.22 utilise la théorie du chaos gaussien de Kahane [25] et consiste en une comparaison du processus ρ_l avec le processus gaussien ω_l défini en (1.39). Cela conforte l'idée que notre étude, sans être équivalente à celle menée dans [8], en est malgré tout très proche.

Le processus ρ_l (Eq. (1.56)) est défini par une moyenne mobile. Une question naturelle est de savoir si le processus gaussien ω_l (Eq. (1.51),(1.52)), défini dans la section 1.3.1, admet lui aussi une telle représentation. On démontre deux résultats à ce sujet dans le sous-chapitre 2.5 :

19. Le processus X_l^G ainsi défini est le même que X_l^S dans le cas particulier $\alpha = 2$ et avec le changement de paramètre $\lambda = \sqrt{2}\mu$. La lettre « G » fait rérérence au fait que l'on travaille avec des variables gaussiennes.

Résultat 9 (PROPRIÉTÉ 2.28) *Le processus gaussien ω_l admet une représentation sous la forme*

$$\omega_l(t) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \upsilon_l(t-x)\,\mathrm{d}B(x) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t), \tag{1.73}$$

B désignant le mouvement Brownien standard, la fonction υ_l étant à support dans $[-1/2, 1/2]$.

On notera que le noyau de la représentation (1.73) est à support compact. On démontre par ailleurs l'existence d'une représentation causale :

Résultat 10 (PROPRIÉTÉ 2.29) *Le processus gaussien ω_l admet une représentation sous la forme*

$$\omega_l(t) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \vartheta_l(t-x)\,\mathrm{d}B(x) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t), \tag{1.74}$$

B désignant le mouvement Brownien standard, la fonction ϑ_l étant à support dans $[0, \infty[$.

1.4.2 Chapitre 3 : Marche aléatoire fractionnaire multifractale (MFRW)

Nous avons présenté en détail dans le sous-chapitre 1.3 la construction de la MRM de Bacry et Muzy [8], définie comme la limite

$$M([0,t]) = \lim_{l\to 0} \int_0^t e^{\omega_l(s)}\mathrm{d}s. \tag{1.75}$$

La MRM est une mesure, elle est donc limitée à la modélisation de phénomènes qui évoluent comme des fonctions croissantes de la variable t. Une solution pour étendre cette construction à des processus multifractals non monotones a été proposée par Mandelbrot (voir par exemple [35]) : il suffit d'indexer un processus auto-similaire aux accroissements stationnaires en temps multifractal. Avec le mouvement Brownien par exemple, on obtient un processus multifractal dont les trajectoires ne sont pas monotones en posant [20]

$$X_B(t) = B\{M([0,t])\}\ ; \tag{1.76}$$

et avec le fBm en posant

$$X_H(t) = B_H\{M([0,t])\}. \tag{1.77}$$

20. Dans les formules (1.76) et (1.77), le processus M est indépendant de B et de B_H.

Le processus X_B est appelé *marche aléatoire multifractale* (MRW), tandis que X_H est appelé *marche aléatoire fractionnaire multifractale* (MFRW).

Dans leurs articles [8] et [38], Bacry et Muzy démontrent que X_B a la même loi que

$$\tilde{X}_B(t) = \lim_{l\to 0} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)} \mathrm{d}B(s). \tag{1.78}$$

Dans [38], ils proposent également d'étudier

$$\tilde{X}_H(t) = \lim_{l\to 0} \int_0^t e^{\omega_l(s)} \mathrm{d}B_H(s). \tag{1.79}$$

Mais contrairement à ce qui se passe avec le mouvement Brownien (les études de X_B et $\tilde{X}_B$ sont équivalentes), Bacry et Muzy montrent qu'il y a une différence fondamentale entre X_H et $\tilde{X}_H$ (visible en calculant les spectres multifractals). Une étude approfondie de $\tilde{X}_H$ est laissée comme un problème ouvert à la fin de la section IV.B de [38].

Les travaux de Ludena [31] d'abord, puis d'Abry et al. [1], apportent une solution assez complète à ce problème dans le cas $1/2 < H < 1$.

Dans cette thèse, on se propose d'étudier le cas $0 < H < 1/2$. Ce travail reprend l'article [44] (à paraître), avec de nombreux compléments : rappels sur le calcul stochastique, étude mathématique plus rigoureuse des processus considérés, définition d'une version affine par morceaux et simulations numériques. Selon l'usage dans ce domaine on effectue le changement de notation

$$\kappa = H - 1/2. \tag{1.80}$$

On définit

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)} \mathrm{d}B^\kappa(s),\ t \in [0,1]. \tag{1.81}$$

Cette suite de processus (et sa limite en loi dans $C[0,1]$) sont les objets centraux de notre chapitre 3.

Le sous-chapitre 3.1 est consacré à la construction de l'intégrale de fonctions déterministes par rapport au fBm d'indice $-1/2 < \kappa < 0$ et à la définition de processus gaussiens de la forme $t \mapsto \int_0^t g(s)\mathrm{d}B^\kappa(s)$. Parmi les diverses constructions possibles de l'intégrale, nous avons choisi de suivre celle de Pipiras et Taqqu [45, 46]. Elle permet de définir

$$\int f(s)\, \mathrm{d}B^\kappa(s) \tag{1.82}$$

pour les fonctions $f \in \mathcal{L}^\kappa$, où

$$\mathcal{L}^\kappa = \left\{ f : f = I_-^{-\kappa}\phi, \phi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \right\}\ ; \tag{1.83}$$

l'intégrale fractionnaire I_-^η étant définie pour $0 < \eta < 1$ (quand cela a un sens) par

$$(I_-^\eta g)(s) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}} g(u)(s-u)_-^{\eta-1} \mathrm{d}u. \tag{1.84}$$

Comme on le voit, ce travail fait appel à des techniques du calcul fractionnaire ; notre référence principale sur le sujet est le livre de Samko et al. [50]. En utilisant les méthodes de cet ouvrage notamment, on démontre :

Résultat 11 (Propriété 3.2) *On considère deux réels $0 < -\kappa < \gamma < 1/2$ et une fonction g dont le supremum essentiel sur $[0,1]$ est fini. On suppose que la quantité*

$$\int_0^1 \int_0^1 u^{-\gamma-1} v^{-\gamma-1} \int_0^{1-\max(u,v)} |g(s) - g(s+u)|\, |g(s) - g(s+v)|\, \mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.85}$$

est également finie. Dans ce cas, pour tout $t \in [0,1]$, $g\mathbf{1}_{[0,t[}$ appartient à $\mathcal{L}^\kappa$. Il est alors possible de définir le processus gaussien centré indexé par $t \in [0,1]$:

$$X_g(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}B^\kappa(s) := \int g(s)\mathbf{1}_{[0,t[}(s)\mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{1.86}$$

De plus, ce processus admet une modification continue.

On discute à la fin de ce sous-chapitre des définitions possibles de X_l^κ (Eq. (1.81)). On porte une attention particulière au problème de la mesurabilité de ce processus.

L'étude principale est menée dans le sous-chapitre 3.2. On construit X_l^κ comme limite au sens L^2 de processus mesurables. Plus précisément, on définit d'abord ω_l sur un premier espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathrm{P}_1)$; on considère ensuite une base orthonormée (b_i) de fonctions simples dans l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^\kappa$ et on définit le processus $\int b_i \mathrm{d}B^\kappa$ sur un deuxième espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_2)$. Le processus X_l^κ est alors défini sur $[0,1]$ comme la limite dans $\mathrm{L}^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$:

$$X_l^\kappa(t)(\omega_1, \omega_2) = \lim_{n\to\infty} l^{-\kappa} \sum_{i=1}^n \langle e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)}(\omega_1)\, \mathbf{1}_{[0,t[}(.), b_i \rangle_\kappa \int b_i \mathrm{d}B^\kappa(\omega_2). \tag{1.87}$$

Pour simplifier on note

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)} \mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{1.88}$$

On prouve d'abord :

Résultat 12 (Propriété 3.5) *L'équation (1.88) définit un processus stochastique mesurable par rapport à la tribu cylindrique. De plus, pour* P_1-*presque tout* ω_1*, la restriction de ce processus à l'ensemble* $\mathbb{D}$ *des nombres dyadiques rationnels a la même loi que le processus gaussien* $l^{-\kappa}\int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)}\mathbf{1}_{[0,t[}(s)\,(\omega_1)\,\mathrm{d}B^\kappa(s)$ *défini sur* $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mathrm{P}_2)$.

Ce résultat nous permet de ramener le problème de l'existence d'une modification continue pour X_l^κ au problème identique pour le processus gaussien sous-jacent. On obtient :

Résultat 13 (Propriété 3.8) *Le processus* X_l^κ *admet une modification continue sur l'intervalle* $[0,1]$.

On s'intéresse ensuite à la convergence en loi de X_l^κ. On distingue les deux situations (la fonction ψ est définie par (1.41)) :

(A) $-1/2<\kappa<-1/4$ et $\psi\left(\frac{1}{2\kappa+1}\right)<\frac{1}{2\kappa+1}-1$.

(B) $-1/4\leq\kappa<0$ et $\psi(2)<1$.

Les techniques de mesures majorantes pour les processus gaussiens (chapitre 4 du livre d'Adler [3]) nous conduisent au

Résultat 14 (Propriété 3.12) *Dans chacune des deux situations (A) ou (B), la suite* $\{X_l^\kappa\}$ *est équitendue dans* $C[0,1]$.

Par ailleurs on démontre :

Résultat 15 (Propriété 3.14) *Si* $\psi(2)<1$*, les lois marginales finidimensionnelles du processus* X_l^κ *convergent.*

Le spectre multifractal est défini par

$$\zeta(q)=\frac{q}{2}-\psi\left(\frac{q}{2}\right). \tag{1.89}$$

On aboutit enfin au résultat principal du chapitre (et de la thèse) :

Résultat 16 (Propriété 3.17) *On suppose que l'on est dans l'une des deux situations (A) ou (B). Alors :*

1. X_l^κ *converge en loi dans* $C[0,1]$*, lorsque* l *tend vers* 0*, vers un processus limite* X^κ *non dégénéré.*
2. *On a l'égalité en distribution entre processus*

$$\{X^\kappa(\lambda t)\}_t=^d\left\{\lambda^{1/2}e^{\frac{1}{2}\Omega_\lambda}X^\kappa(t)\right\}_t, \tag{1.90}$$

où Ω_λ *est une variable aléatoire définie par (1.46), indépendante de* X^κ.

3. X^κ *satisfait la propriété multifractale*

$$\mathrm{E}\,|X^\kappa(t)|^{2q} = \mathrm{E}\,|X^\kappa(1)|^{2q}\, t^{\zeta(q)} \tag{1.91}$$

pour tout $0 \leq q < q_{\max}$ *tel que* $X^\kappa(1)$ *ait un moment d'ordre* $2q$ *fini.*

On définit dans le sous-chapitre 3.3 une version affine par morceaux du processus $X^\kappa_{1/n}$:

$$\tilde{X}^\kappa_n(t) = n^\kappa \int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_{1/n}\left(\lfloor n^2 s\rfloor/n^2\right)} \mathrm{d}B^\kappa(s) \tag{1.92}$$

et on propose des simulations numériques basées sur cette version affine par morceaux.

Chapitre 2

Processus multifractals construits à partir de moyennes mobiles $\alpha-$stables

On construit dans ce chapitre une large famille de processus multifractals, proche de la MRM, mais qui contraste avec les autres modèles multifractals définis dans la littérature de par sa simplicité. L'idée principale est que la cascade canonique peut être représentée – tout au moins de façon approximative – sous forme de moyenne mobile. Ce travail trouve ses sources dans [55, 56, 57] et il reprend [43] [1].

En remplaçant le processus ω_l (Eq. (1.39)) – autrement dit la cascade de Bacry et Muzy – par une moyenne mobile

$$\rho_l(s) = \mu \int_{s-1}^{s} f_l(s-u)\,\mathrm{d}M_\alpha(u) + \frac{\mu^\alpha(1-\log l)}{\cos(\pi\alpha/2)} \tag{2.1}$$

(f_l est définie par (1.57), M_α est une mesure aléatoire $\alpha-$stable), on définit une famille de processus entrant dans le cadre des multifractals :

$$X_l^S(t) = \int_0^t e^{\rho_l(s)}\mathrm{d}s,\ t \in [0,1]. \tag{2.2}$$

On prouve dans le sous-chapitre 2.2 la convergence de X_l^S vers une limite X^S et on démontre une propriété de type multifractal. Dans le sous-chapitre 2.3, on étudie une version affine par morceaux $X_n^{d,S}$ et on s'intéresse à des problèmes de prévision. Le sous-chapitre 2.4 est dédié à l'étude du cas particulier

1. Cependant la présentation diffère sensiblement de [43] et permet d'établir un lien clair entre la MRM [8] (sous-chapitre 1.3) et les processus étudiés dans [55, 56, 57, 43].

gaussien ($\alpha = 2$) ; ce sous-chapitre est prolongé par le 2.5, dans lequel on établit l'existence de deux représentations particulières sous forme de moyennes mobiles pour le processus ω_l (Eq. (1.39)) dans le cas gaussien. Pour alléger la présentation, les démonstrations des lemmes du chapitre 2 sont reléguées au sous-chapitre 2.6. Avant cela, nous faisons quelques rappels sur les variables et certains processus $\alpha-$stables. Un ouvrage de référence sur le sujet est [51].

2.1 Les variables et les processus $\alpha-$stables

2.1.1 Définition des lois stables

Les variables stables sont une généralisation des variables gaussiennes. Elles possèdent des propriétés en commun avec ces dernières, mais les variables stables non gaussiennes ont aussi certaines particularités ; notamment leur queue de distribution est en loi de puissance et elles n'ont pas de moment d'ordre 2.

On dit qu'une variable aléatoire X est stable si, pour toute valeur de n, pour toutes copies indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de X, il existe deux réels $C_n > 0$, D_n tels que l'on ait l'égalité en loi

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n =^d C_n X + D_n. \tag{2.3}$$

Cette propriété, combinée à leur grande variabilité, explique l'omniprésence des lois stables dans un large champ d'applications.

Une autre caractérisation des lois stables est fournie par leur fonction caractéristique. Cette dernière est de la forme

$$\mathrm{E}e^{iuX} = \begin{cases} e^{-\sigma^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta(\mathrm{sign}u)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu u} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ e^{-\sigma|u|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\mathrm{sign}u)\log|u|\right) + i\mu u} & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

où les paramètres $0 < \alpha < 2$, $0 \leq \sigma$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont respectivement appelés indice de stabilité, paramètre d'échelle, paramètre d'asymétrie et paramètre de position. On note $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Dans cette thèse, on travaille exclusivement avec des variables de paramètres $1 < \alpha \leq 2$, $\beta = -1$.[2] Parmi ces variables, les seules dont on connaît la densité sont les variables de paramètre $\alpha = 2$. L'examen de la fonction caractéristique montre que dans ce cas X est gaussienne. Plus précisément $S_2(\sigma, -1, \mu) = \mathcal{N}\left(\mu, 2\sigma^2\right)$.

2. On choisit de travailler avec $\beta = -1$ du fait que le moment exponentiel d'ordre 1 d'une variable stable, $\mathrm{E}e^X$, n'existe que pour cette valeur de β – voir Propriété 2.2 un peu plus loin. La condition $\alpha > 1$ est quant à elle essentielle dans de nombreuses démonstrations du chapitre.

2.1.2 Propriétés des lois stables, intégrales stables

On aura besoin des trois propriétés suivantes :

Propriété 2.1 *Soit* $X \sim S_\alpha(\sigma_X, -1, 0)$ *et* $Y \sim S_\alpha(\sigma_Y, -1, 0)$ *deux variables indépendantes, avec* $\alpha > 1$ *et soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$, $c \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $X + Y + c \sim S_\alpha(\sigma, -1, c)$, *avec* $\sigma = (\sigma_X^\alpha + \sigma_Y^\alpha)^{1/\alpha}$.
2. $aX \sim S_\alpha(\sigma_a, -1, 0)$, *avec* $\sigma_a = a\sigma_X$.

Propriété 2.2 *Soit* $X \sim S_\alpha(\sigma, -1, c)$ *avec* $\alpha > 1$ *et soit* q *un réel strictement positif. Alors la variable* e^X *a un moment d'ordre* q *et*

$$\mathrm{E}e^{qX} = \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}q^\alpha + qc\right). \tag{2.5}$$

Propriété 2.3 *Si* $X \sim S_\alpha(\sigma, -1, 0)$, $\alpha > 1$, *alors* X *a un moment d'ordre* 1 *et l'on a d'une part*

$$\mathrm{E}X = 0, \tag{2.6}$$

d'autre part

$$\mathrm{E}|X| = c_\alpha\sigma, \tag{2.7}$$

avec $c_\alpha = \frac{2\sin(\pi/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)}{\pi|\cos(\pi\alpha/2)|^{1/\alpha}}$.

Nous faisons maintenant un rappel très succinct des propriétés des intégrales stables – tout ce qui suit est une conséquence immédiate des résultats du chapitre 3 de [51]. On fixe $\alpha > 1$. Il existe une mesure aléatoire M_α, indexée par les boréliens A de $\mathbb{R}$ dont la mesure de Lebesgue $\lambda(A)$ est finie, vérifiant

$$M_\alpha(A) \sim S_\alpha\left((\lambda(A))^{1/\alpha}, -1, 0\right) \tag{2.8}$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On fixe une telle mesure M_α et on considère l'espace vectoriel

$$E_\alpha = \left\{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h \text{ est mesurable et } \int_{\mathbb{R}} |h(x)|^\alpha \,\mathrm{d}x < \infty\right\}. \tag{2.9}$$

Propriété 2.4 *Il existe un processus* $\{I(h)\} = \left\{\int h\mathrm{d}M_\alpha\right\}$, *indexé par les fonctions* $h \in E_\alpha$, *dont les lois marginales fini-dimensionnelles sont* $\alpha-$*stables et satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Les lois marginales uni-dimensionnelles sont données par*

$$I(h) \sim S_\alpha\left(\|h\|_\alpha, -1, 0\right), \tag{2.10}$$

où $\|h\|_\alpha = \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^\alpha \, \mathrm{d}x\right)^{1/\alpha}$.

2. *Pour tous réels* $a_1, \ldots, a_n$, *pour toutes fonctions* $h_1, \ldots, h_n$ *dans* E_α, *on a l'égalité presque sûre*

$$I\left(\sum a_i h_i\right) = \sum a_i I(h_i). \tag{2.11}$$

Dans la section suivante, on s'intéressera à des moyennes mobiles, c'est-à-dire à des processus de la forme

$$Z_h(t) = \int h(t-x) \, \mathrm{d}M_\alpha(x). \tag{2.12}$$

On rappelle qu'une fonction Φ est dite absolument continue sur l'intervalle $[0,1]$ s'il existe une fonction $\dot{\Phi}$ intégrable telle que

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \int_0^t \dot{\Phi}(s) \, \mathrm{d}s, \ t \in [0,1]. \tag{2.13}$$

La propriété qui suit est la conséquence des résultats de la Propriété 2.4 ci-dessus et de l'exemple 11.7.7 de [51].

Propriété 2.5 *Soit* h *une fonction à support dans* $[0,1]$ *absolument continue sur cet intervalle et telle que* $\left|\dot{h}\right|^\alpha$ *soit intégrable sur* $[0,1]$. *Alors l'équation (2.12) définit un processus sur l'intervalle* $[0,1]$. *De plus, ce processus admet une modification presque sûrement absolument continue.*

2.2 Etude du processus principal

2.2.1 Définition de la suite de processus X_l^S et de sa limite

On fixe un réel $1 < \alpha \leq 2$ et on considère une mesure aléatoire stable M_α comme en (2.8). Pour $0 < l < 1$, on définit la fonction à support dans $[0,1]$

$$f_l(u) = \begin{cases} l^{-1/\alpha} & \text{si } 0 \leq u < l \\ u^{-1/\alpha} & \text{si } l \leq u \leq 1, \end{cases} \tag{2.14}$$

puis la moyenne mobile décentrée

$$\rho_l(s) = \mu \int_{s-1}^{s} f_l(s-u) \, \mathrm{d}M_\alpha(u) + \frac{\mu^\alpha (1 - \log l)}{\cos(\pi\alpha/2)} \tag{2.15}$$

($\mu > 0$ est un paramètre).

On définit la suite de processus indexés par $0 < l < 1$:

$$X_l^S(t) = \int_0^t e^{\rho_l(s)} \mathrm{d}s,\ t \in [0,1]. \tag{2.16}$$

C'est cette suite de processus, ainsi que sa limite en loi, qui nous intéressent dans ce sous-chapitre.

Propriété 2.6 *Il est possible de choisir ρ_l de telle sorte que le processus (2.16) soit bien défini et qu'il soit presque sûrement dérivable.*

Démonstration. On prend $h = f_l$ (Eq. (2.14)) dans la Propriété 2.5. On peut écrire $f_l(t) = f_l(0) + \int_0^t \dot{f}_l(s)\,\mathrm{d}s,\ t \in [0,1]$, où $\dot{f}_l$ est la fonction à support dans $[l,1]$, définie par $\dot{f}_l(s) = -\frac{1}{\alpha} s^{-1/\alpha - 1}$. Les hypothèses de la Propriété 2.5 sont vérifiées, donc la moyenne mobile $\int f_l(s-u)\,\mathrm{d}M_\alpha(u)$ est bien définie et elle admet une modification presque sûrement continue sur $[0,1]$. Avec ce choix de ρ_l, X_l^S est bien défini et il est presque sûrement dérivable. ■

On définit le spectre multifractal

$$\zeta(q) = q + \frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\left(q^\alpha - q\right). \tag{2.17}$$

Il est commode également d'introduire la notation

$$\Sigma_l = 1 - \log l \tag{2.18}$$

Propriété 2.7 *Sous l'hypothèse $\zeta(2) > 1$, le processus X_l^S (Eq. (2.16)) converge en moyenne quadratique et en loi dans $C[0,1]$ vers un processus non dégénéré X^S lorsque l tend vers 0.*

Démonstration.

Preuve de la convergence en moyenne quadratique. Prenons deux réels $0 \le x < y \le 1$. D'après les Propriétés 2.1 et 2.4

$$\begin{aligned}&\rho_l(x) + \rho_{l'}(y)\\ &\sim S_\alpha\left(\mu \left\|f_l(x-.) + f_{l'}(y-.)\right\|_\alpha, -1, \mu^\alpha\left(\Sigma_l + \Sigma_{l'}\right)/\cos(\pi\alpha/2)\right).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Donc d'après la Propriété 2.2

$$\mathrm{E}e^{\rho_l(x)+\rho_{l'}(y)} = \exp\left[-\mu^\alpha\left(\left\|f_l(x-.) + f_{l'}(y-.)\right\|_\alpha^\alpha - \Sigma_l - \Sigma_{l'}\right)/\cos(\pi\alpha/2)\right]. \tag{2.20}$$

Or d'une part

$$\|f_l(x-.)+f_{l'}(y-.)\|_\alpha^\alpha = \int_{x-1}^{y-1} f_l(x-u)^\alpha \,\mathrm{d}u + \int_{y-1}^{x} [f_l(x-u)+f_{l'}(y-u)]^\alpha \,\mathrm{d}u + \int_{y-1}^{y} f_{l'}(y-u)^\alpha \,\mathrm{d}u \tag{2.21}$$

et d'autre part

$$\Sigma_l = \int_{x-1}^{x} f_l(x-u)^\alpha \,\mathrm{d}u \qquad \Sigma_{l'} = \int_{y-1}^{y} f_{l'}(y-u)^\alpha \,\mathrm{d}u. \tag{2.22}$$

Donc

$$\mathrm{E}e^{\rho_l(x)+\rho_{l'}(y)} = e^{-\mu^\alpha \int_{y-1}^{x}\{[f_l(x-u)+f_{l'}(y-u)]^\alpha - f_l(x-u)^\alpha - f_{l'}(y-u)^\alpha\}\mathrm{d}u/\cos(\pi\alpha/2)}. \tag{2.23}$$

Pour toute valeur de $z \neq 0$, $f_l(z)$ converge en croissant vers $z^{-1/\alpha}$ lorsque l tend vers 0. Par ailleurs, pour une valeur donnée de $a > 0$, la fonction $x \mapsto (x+a)^\alpha - x^\alpha$ est croissante. Donc d'après le Théorème de Beppo Levi, lorsque l et l' tendent vers 0, $\mathrm{E}e^{\rho_l(x)+\rho_{l'}(y)}$ converge vers

$$\begin{aligned} p(x,y) &= e^{-\mu^\alpha \int_{y-1}^{x}\left\{\left[(x-u)^{-1/\alpha}+(y-u)^{-1/\alpha}\right]^\alpha - (x-u)^{-1} - (y-u)^{-1}\right\}\mathrm{d}u/\cos(\pi\alpha/2)} \\ &= e^{-\mu^\alpha \int_0^{1/(y-x)-1} u^{-1}\left\{\left[1+(1+1/u)^{-1/\alpha}\right]^\alpha - 1 - (1+1/u)^{-1}\right\}\mathrm{d}u/\cos(\pi\alpha/2)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

La fonction

$$D : u \mapsto u^{-1}\left\{\left[1+(1+1/u)^{-1/\alpha}\right]^\alpha - 1 - (1+1/u)^{-1}\right\} - (2^\alpha - 2)(1+u)^{-1} \tag{2.25}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $D(u) \underset{0}{\sim} \alpha u^{-1+1/\alpha} + c_{1,\alpha}$ et $D(u) \underset{+\infty}{\sim} c_{2,\alpha} u^{-2}$ ($c_{1,\alpha}$ et $c_{2,\alpha}$ sont deux constantes). En écrivant

$$p(x,y) = e^{-\mu^\alpha \int_0^{1/(y-x)-1}\left[D(u)+(2^\alpha-2)(1+u)^{-1}\right]\mathrm{d}u/\cos(\pi\alpha/2)} \tag{2.26}$$

on obtient

$$p(x,y) = (y-x)^{\zeta(2)-2} e^{O(1)}, \tag{2.27}$$

ce qui implique l'intégrabilité de p sur $\{(x,y), 0 \leq x < y \leq 1\}$ lorsque $\zeta(2) > 1$. On écrit enfin

$$\mathrm{E}X_l^S(t) X_{l'}^S(t) = \int_0^t \int_0^t \mathrm{E}e^{\rho_l(x)+\rho_{l'}(y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.28}$$

D'après le Théorème de Beppo Levi, les rôles de x et y étant interchangeables dans le travail ci-dessus, lorsque l et l' tendent vers 0, $\mathrm{E}X_l^S(t)\,X_{l'}^S(t)$ converge vers la limite non nulle

$$2\int_0^t\int_0^y p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.29}$$

Il s'ensuit que, sous l'hypothèse $\zeta(2)>1$, $X_l^S(t)$ converge en moyenne quadratique vers une limite non dégénérée $X^S(t)$.

Preuve de la convergence en loi. La convergence en moyenne quadratique implique celle des lois marginales fini-dimensionnelles. Par ailleurs, le processus X_l^S étant stationnaire,

$$\mathrm{E}\left[X_l^S(t')-X_l^S(t)\right]^2=\mathrm{E}\left[X_l^S(t'-t)\right]^2\ ; \tag{2.30}$$

et d'après la première partie de la démonstration, comme $\zeta(2)>1$, le terme dans le membre de droite est majoré par $K\int_0^{t'-t}\int_0^y(y-x)^{\zeta(2)-2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=K'(t'-t)^{\zeta(2)}$ (K,K' constantes). En utilisant de nouveau l'hypothèse $\zeta(2)>1$, on obtient l'équitension de X_l^S dans $C[0,1]$. Combinée à la convergence des lois marginales fini-dimensionnelles, cette équitension implique la convergence en loi dans $C[0,1]$ vers la limite X^S. ■

2.2.2 Propriété multifractale

Nous mettons en évidence une propriété de type multifractal pour le processus X^S. On verra apparaître dans les calculs

$$\begin{aligned}G_l(s_1,s_2,\ldots,s_q)=&\sum_{k=2}^{q}\int_{s_k-1}^{s_{k-1}-1}\left[\left(\sum_{i=k}^{q}f_l(s_i-u)\right)^{\alpha}-\sum_{i=k}^{q}f_l(s_i-u)^{\alpha}\right]\mathrm{d}u\\&+\int_{s_1-1}^{s_q}\left[\left(\sum_{i=1}^{q}f_l(s_i-u)\right)^{\alpha}-\sum_{i=1}^{q}f_l(s_i-u)^{\alpha}\right]\mathrm{d}u\\&+\sum_{k=2}^{q}\int_{s_k}^{s_{k-1}}\left[\left(\sum_{i=1}^{k-1}f_l(s_i-u)\right)^{\alpha}-\sum_{i=1}^{k-1}f_l(s_i-u)^{\alpha}\right]\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{2.31}$$

$(0 < s_q < \cdots < s_1 < 1)$ et sa limite lorsque l tend vers 0 :

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2, \ldots, s_q) = &\sum_{k=2}^{q} \int_{s_k - 1}^{s_{k-1}-1} \left[\left(\sum_{i=k}^{q} f(s_i - u) \right)^{\alpha} - \sum_{i=k}^{q} f(s_i - u)^{\alpha} \right] \mathrm{d}u \\ &+ \int_{s_1 - 1}^{s_q} \left[\left(\sum_{i=1}^{q} f(s_i - u) \right)^{\alpha} - \sum_{i=1}^{q} f(s_i - u)^{\alpha} \right] \mathrm{d}u \\ &+ \sum_{k=2}^{q} \int_{s_k}^{s_{k-1}} \left[\left(\sum_{i=1}^{k-1} f(s_i - u) \right)^{\alpha} - \sum_{i=1}^{k-1} f(s_i - u)^{\alpha} \right] \mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{2.32}$$

où f_l est la fonction définie par (2.14) et

$$f(u) = u^{-1/\alpha}. \tag{2.33}$$

Les fonctions G_l et G sont des fonctions de q variables. La valeur de q étant appelée à varier au cours de notre travail, il eût été plus rigoureux de noter $G_{l,q}$ et G_q. Nous ne l'avons pas fait pour alléger le texte.

Lemme 2.8 *Soit p et q deux entiers, avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq q$. On considère la fonction de q variables G définie par (2.32) et le processus X_l^S (Eq. (2.16)). Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a l'égalité (la limite dans le membre de gauche ci-dessous étant bien définie)*

$$\begin{aligned} &\lim_{(l,l') \to 0} \mathrm{E} \left[\left(X_l^S(t) \right)^p \left(X_{l'}^S(t) \right)^{q-p} \right] \\ &\qquad = q! \int_{0 < s_q < \cdots < s_1 < t} e^{-\mu^{\alpha} [G(s_1, \ldots, s_q)] / \cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_q. \end{aligned} \tag{2.34}$$

De plus, sous l'hypothèse $\zeta(2) > 2 - 2/q$ (ζ est définie par (2.17)), chacune des deux quantités apparaissant dans l'égalité (2.34) est finie.

Le Lemme 2.8 est démontré dans le sous-chapitre 2.6.

Propriété 2.9 *Soit $t \in [0,1]$. On considère le processus X_l^S (Eq. (2.16)), sa limite X^S (Propriété 2.18) et la fonction ζ (Eq. (2.17)). On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\zeta(2) > 2 - 1/q$. Alors :*

1. *Pour tout réel $0 < p \leq 2q$, $X^S(t)$ a un moment d'ordre p et*

$$\lim_{l \to 0} \mathrm{E} \left| X^S(t) - X_l^S(t) \right|^p = 0. \tag{2.35}$$

2. *Pour tout entier* $0 < p \leq 2q$, *il existe deux réels strictement positifs* $c_{\alpha,p}$, $C_{\alpha,p}$ *(indépendants de* t*) tels que*

$$c_{\alpha,p} t^{\zeta(p)} \leq \mathrm{E}\left(X^S(t)\right)^p \leq C_{\alpha,p} t^{\zeta(p)}. \tag{2.36}$$

DÉMONSTRATION.

Démonstration du Point 1. Il suffit de prouver que $\left\{X_l^S(t)\right\}_l$ est une suite de Cauchy dans L^{2q}. D'après la formule du binôme de Newton

$$\mathrm{E}\left|X_l^S(t) - X_{l'}^S(t)\right|^{2q} = \sum_{p=0}^{2q} (-1)^p \binom{2q}{p} \mathrm{E}\left[\left(X_l^S(t)\right)^p \left(X_{l'}^S(t)\right)^{2q-p}\right]. \tag{2.37}$$

Par hypothèse $\zeta(2) > 2 - 1/q$, donc d'après le Lemme 2.8 les termes $\mathrm{E}\left[\left(X_l^S(t)\right)^p \left(X_{l'}^S(t)\right)^{2q-p}\right]$ dans la somme ci-dessus convergent tous, lorsque l et l' tendent vers 0, vers une même limite finie. On en déduit le résultat souhaité :

$$\lim_{(l,l')\to 0} \mathrm{E}\left|X_l^S(t) - X_{l'}^S(t)\right|^{2q} = 0. \tag{2.38}$$

Démonstration du Point 2. D'après le Lemme 2.8

$$\begin{aligned}\lim_{l\to 0} \mathrm{E}\left(X_l^S(t)\right)^p &= p! \int_{0<s_p<\cdots<s_1<t} e^{-\mu^\alpha [G(s_1,\ldots,s_p)]/\cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_p \\ &= p! t^p \int_{0<s_p<\cdots<s_1<1} e^{-\mu^\alpha [G(ts_1,\ldots,ts_p)]/\cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_p.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Fixons momentanément $s_1, \ldots, s_p$. On effectue le changement de variable $u = tv$ dans les intégrales qui définissent $G(ts_1, \ldots, ts_p)$ (Eq. (2.32)). On obtient alors

$$G(ts_1, \ldots, ts_p) = G(s_1, \ldots, s_p) + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{s_k - 1/t}^{s_k - 1} H_{p,k}(v)\, \mathrm{d}v, \tag{2.40}$$

$H_{p,k}$ étant définie par

$$H_{p,k}(v) = \left(\sum_{i=k}^{p} f(s_i - v)\right)^\alpha - \left(\sum_{i=k+1}^{p} f(s_i - v)\right)^\alpha - f(s_k - v)^\alpha \tag{2.41}$$

(on rappelle que $f(v) = v^{-1/\alpha}$). Un simple changement de variable donne

$$G(ts_1, \ldots, ts_p) = G(s_1, \ldots, s_p) + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{1}^{1/t} I_{p,k}(v)\, \mathrm{d}v, \tag{2.42}$$

avec

$$I_{p,k}(v) = \left(\sum_{i=k}^{p} f(v + s_i - s_k)\right)^{\alpha} - \left(\sum_{i=k+1}^{p} f(v + s_i - s_k)\right)^{\alpha} - f(v)^{\alpha}. \tag{2.43}$$

Or il n'est pas difficile de voir que

$$I_{p,k}(v) - [(p-k+1)^{\alpha} - (p-k)^{\alpha} - 1]\, v^{-1} \tag{2.44}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$; et que l'intégrale en question est uniformément bornée en $s_1, \ldots, s_p$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} \int_1^{1/t} I_{p,k}(v)\, \mathrm{d}v &= \sum_{k=1}^{p-1} \int_1^{1/t} [(p-k+1)^{\alpha} - (p-k)^{\alpha} - 1]\, v^{-1} + O(1) \\ &= -(p^{\alpha} - p) \log t + O(1) \ ; \end{aligned} \tag{2.45}$$

et donc que

$$G(ts_1, \ldots, ts_p) = G(s_1, \ldots, s_p) - (p^{\alpha} - p) \log t + O(1). \tag{2.46}$$

Revenant à l'équation (2.39), on obtient

$$\lim_{l \to 0} \mathrm{E}\left(X_l^S(t)\right)^p = t^{\zeta(p)} e^{O(1)} \int_{0 < s_p < \cdots < s_1 < 1} e^{-\mu^{\alpha}[G(s_1, \ldots, s_p)]/\cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_p. \tag{2.47}$$

Enfin, d'après le Point 1, $\mathrm{E}\left(X^S(t)\right)^p = \lim_{l \to 0} \mathrm{E}\left(X_l^S(t)\right)^p$; et d'après le Lemme 2.8 l'intégrale dans le membre de droite de (2.47) est finie. Il existe donc deux réels $c_{\alpha,p}$, $C_{\alpha,p}$ (indépendants de t) tels que

$$c_{\alpha,p} t^{\zeta(p)} \leq \mathrm{E}\left(X^S(t)\right)^p \leq C_{\alpha,p} t^{\zeta(p)}. \tag{2.48}$$

■

Question ouverte 2.10 *Il serait intéressant d'étendre le Point 2 de la Propriété 2.9 aux moments non entiers. Nous avons envisagé plusieurs solutions pour résoudre ce problème, sans qu'aucune n'aboutisse :*

La première idée vise à établir une égalité analogue à (1.45) en s'inspirant de la méthode utilisée par Bacry et Muzy (démonstration du Théorème 4

dans [8]). De façon informelle, on peut écrire (les égalités ci-dessous sont des égalités en loi entre processus) :

$$\begin{aligned}\rho_{\lambda l}(\lambda s) &=^d \mu \int_{\lambda s-1}^{\lambda s} f_{\lambda l}(\lambda s-u)\,\mathrm{d}M_\alpha(u) + \frac{\mu^\alpha(1-\log\lambda l)}{\cos(\pi\alpha/2)} \qquad [u=\lambda v]\\ &=^d \mu \int_{s-1/\lambda}^{s} f_l(s-v)\,\mathrm{d}M_\alpha(v) + \frac{\mu^\alpha(1-\log l)}{\cos(\pi\alpha/2)} - \frac{\mu^\alpha\log\lambda}{\cos(\pi\alpha/2)}\\ &=^d \rho_l(s) + \Xi_\lambda(s), \end{aligned} \tag{2.49}$$

avec

$$\Xi_\lambda(s) = \mu \int_{s-1/\lambda}^{s-1} (s-v)^{-1/\alpha}\,\mathrm{d}M_\alpha(v) - \frac{\mu^\alpha\log\lambda}{\cos(\pi\alpha/2)}. \tag{2.50}$$

Le problème est que, contrairement à ce qui se passe avec la MRM (Eq. (1.45)), le processus Ξ_λ n'est pas indépendant de ρ_l. Donc, bien que l'on puisse reproduire les techniques de [8] et écrire

$$\begin{aligned} X^S_{\lambda l}(\lambda t) &=^d \int_0^{\lambda t} e^{\rho_{\lambda l}(s)}\mathrm{d}s \qquad [s=\lambda x]\\ &=^d \lambda \int_0^t e^{\rho_l(x)+\Xi_\lambda(x)}\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.51}$$

on se retrouve bloqué puisque le terme $\Xi_\lambda(x)$ ne peut ni sortir de l'intégrale (il est variable), ni être encadré par son min et son max (puisqu'après on devra calculer une espérance, et que Ξ_λ et ρ_l sont dépendants). Cette première voie semble finalement sans issue.

La deuxième idée que nous avons consiste à adapter la méthode utilisée dans le cas gaussien (voir sous-chapitre 2.4) au cas stable. Comme nous le verrons, dans le cas gaussien, on comparera la covariance de ρ_l (Eq. (2.15)) à celle de ω_l (Eq. (1.39)). La différence entre ces covariances étant uniformément majorée par une constante indépendante de l, on pourra appliquer la technique du chaos gaussien de Kahane [25] et établir la propriété de moments de X^S à partir de celle de la MRM de Bacry et Muzy (définie dans le Théorème 1.6). Les variables stables non gaussiennes n'ayant pas de moment d'ordre 2, la covariance n'est pas définie dans ce cas ; les indices de dépendance couramment utilisés pour la remplacer sont la covariation et la codifférence (voir [51]). Il semble donc naturel d'essayer de généraliser les méthodes gaussiennes de [25] au cas stable, en remplaçant la covariance par la covariation ou la codifférence. Malheureusement, les idées géométriques qui font marcher les choses dans le cas gaussien semblent difficilement généralisables au cas stable, ce qui conduit à une deuxième impasse.

2.3 Etude d'une version affine par morceaux

Une utilisation pratique du processus X^S défini dans la section précédente (Propriété 2.7) n'est possible que si l'on en donne une version simple[3]. On définit dans cette section une telle version ; on s'intéresse également à un problème de prévision.

2.3.1 Définition de la version affine par morceaux

Suivant [43] on définit

$$X_n^{S,d}(t) = \int_0^t e^{g_n(\lfloor ns \rfloor)} \mathrm{d}s, \tag{2.52}$$

où g_n est la moyenne mobile discrète (décentrée) par rapport à un bruit blanc $\alpha-$stable :

$$g_n(u) = \mu \sum_{k=1}^{n} k^{-1/\alpha} \epsilon_{u-k} + \sigma_n,\ u \in \mathbb{Z} \tag{2.53}$$

avec $(\epsilon_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ suite de variables aléatoires indépendantes $S_\alpha(1,-1,0)$ et

$$\sigma_n = \frac{\mu^\alpha}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 1/k. \tag{2.54}$$

La fonction $X_n^{S,d}$ est continue et affine par morceaux, avec une pente constante sur chaque intervalle de la forme $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. La Propriété 2.12 ci-dessous dit que le processus $X_n^{S,d}$ converge en loi vers X^S dans $C[0,1]$. On aura besoin pour démontrer cette propriété des deux processus

$$\tilde{g}_n(u) = \mu \int_{u/n-1}^{u/n} \left(\frac{\lfloor u - nx + 1 \rfloor}{n} \right)^{-1/\alpha} \mathrm{d}M_\alpha(x) + \sigma_n,\ u \in \mathbb{Z} \tag{2.55}$$

$$\tilde{X}_n^{S,d}(t) = \int_0^t e^{\tilde{g}_n(\lfloor ns \rfloor)} \mathrm{d}s, \tag{2.56}$$

la mesure $\alpha-$stable M_α étant comme en (2.8). On rappelle également que la fonction p est définie pour $0 \le x < y \le 1$ par

$$\begin{aligned} p(x,y) &= e^{-\mu^\alpha \int_{y-1}^{x} \left\{ \left[(x-u)^{-1/\alpha} + (y-u)^{-1/\alpha} \right]^\alpha - (x-u)^{-1} - (y-u)^{-1} \right\} \mathrm{d}u / \cos(\pi\alpha/2)} \\ &= e^{-\mu^\alpha \int_{0}^{1-(y-x)} \left\{ \left[z^{-1/\alpha} + (z+y-x)^{-1/\alpha} \right]^\alpha - z^{-1} - (z+y-x)^{-1} \right\} \mathrm{d}z / \cos(\pi\alpha/2)}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

3. Autrement dit, une version qui peut être simulée facilement et qui converge – par exemple en loi dans $C[0,1]$ – vers X^S.

Lemme 2.11 *Le processus $X^S_{1/n}$ est défini par (2.16). Avec les notations ci-dessus :*

1. *Les processus $\tilde{g}_n$ et g_n d'une part, $\tilde{X}^{S,d}_n$ et $X^{S,d}_n$ d'autre part, ont même loi.*
2. *Pour tous réels $0 \leq x < y \leq 1$:*
$$\mathrm{E}e^{g_n(\lfloor nx \rfloor)+g_n(\lfloor ny \rfloor)} \leq kp(x,y) \tag{2.58}$$
avec $k = e^{-\frac{\mu^\alpha(2^\alpha-2)}{\cos(\pi\alpha/2)}}$.
3. *Pour tout réel $0 \leq t \leq 1$:*
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}\left(X^S_{1/n}(t) - \tilde{X}^{S,d}_n(t)\right)^2 = 0. \tag{2.59}$$

Ce lemme est démontré dans le sous-chapitre 2.6.

Propriété 2.12 *On suppose que $\zeta(2) > 1$ (Eq. (2.17)). Lorsque n tend vers l'infini, le processus $X^{S,d}_n$ (Eq. (2.52)) converge en loi dans $C[0,1]$ vers le processus X^S (défini dans la Propriété 2.7).*

Démonstration. On sait que :
- $\tilde{X}^{S,d}_n$ et $X^{S,d}_n$ ont même loi (Point 1 du Lemme 2.11) ;
- $X^S_{1/n} - \tilde{X}^{S,d}_n$ converge en moyenne quadratique vers 0 (Point 3 du Lemme 2.11) ;
- $X^S_{1/n}$ converge en moyenne quadratique vers X^S (Propriété 2.7).

On en déduit que les lois marginales fini-dimensionnelles de $X^{S,d}_n$ convergent vers celles de X^S. Par ailleurs, d'après le Point 2 du lemme 2.11, pour $0 \leq t < t' \leq 1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^{S,d}_n(t') - X^{S,d}_n(t)\right)^2 &= \int_t^{t'}\int_t^{t'} \mathrm{E}e^{g_n(\lfloor nx \rfloor)+g_n(\lfloor ny \rfloor)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq \int_t^{t'}\int_t^{y} 2kp(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}\tag{2.60}$$

Or d'après l'inégalité (2.27), $p(x,y) \leq K(y-x)^{\zeta(2)-2}$ (K constante) ; donc comme $\zeta(2) > 1$,

$$\mathrm{E}\left(X^{S,d}_n(t') - X^{S,d}_n(t)\right)^2 \leq K'(t'-t)^{\zeta(2)} \tag{2.61}$$

(K' constante) et la suite $X^{S,d}_n$ est équitendue dans $C[0,1]$. On a vu ci-dessus que les lois marginales fini-dimensionnelles de $X^{S,d}_n$ convergeaient vers celles de X^S, on en déduit que $X^{S,d}_n$ converge en loi vers X^S dans $C[0,1]$. ■

On a simulé sur la figure 2.1 un bruit blanc 1.5−stable ϵ en suivant la méthode de Chambers, Mallows et Stuck [60]. Cette même figure montre les processus g_n, $\exp(g_n)$ et $X_n^{S,d}$ dans le cas $n = 1000$, $\mu = 0.5$; ainsi que les histogrammes de $\log X_{100}^{S,d}(1)$ et $\log X_{1000}^{S,d}(1)$.

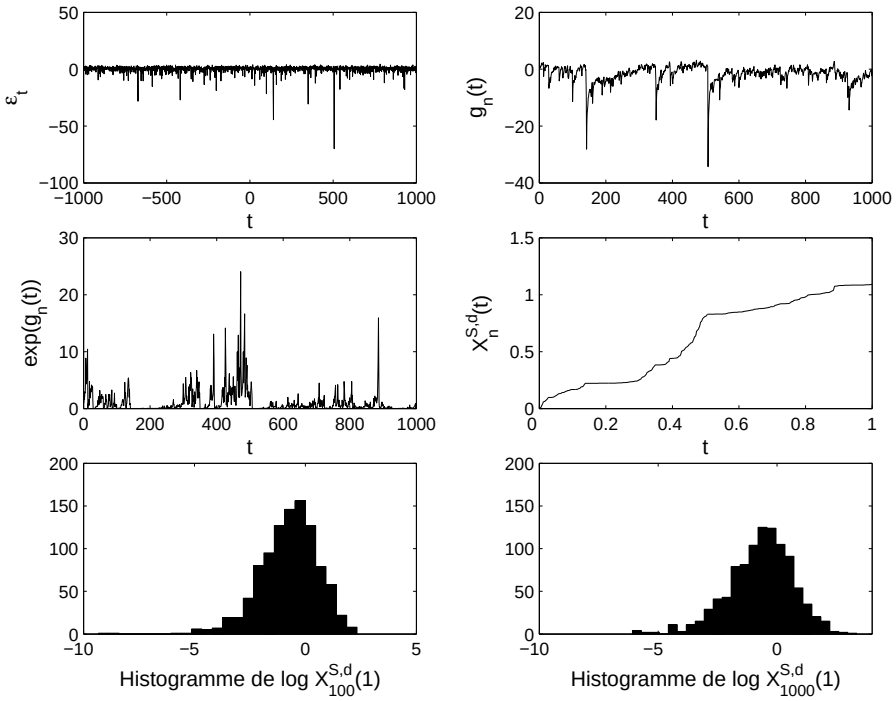


FIGURE 2.1 – **Simulation de la version affine par morceaux.** Nous avons simulé la version affine par morceaux avec $\alpha = 1.5$, $n = 1000$ et $\mu = 0.5$. Le processus g_n (en haut à droite) présente de larges fluctuations, marquées par des explosions négatives héritées du bruit ϵ (en haut à gauche) – conséquences de la valeur $\beta = -1$. La trajectoire de $\exp(g_n)$ (au milieu à gauche) montre aussi de larges fluctuations, à de multiples échelles, ainsi qu'un caractère intermittent, caractéristiques des multifractals. Les histogrammes de $\log X_n^{S,d}(1)$ pour $n = 100$ (graphique en bas à gauche) et $n = 1000$ (graphique en bas à droite), réalisés à partir d'échantillons de taille 1000, donnent une idée de la distribution limite : pour $n = 1000$, la valeur moyenne est -0.69 et la queue de distribution est étalée vers la gauche (le coefficient de dissymétrie est égal à -0.56 environ).

Question ouverte 2.13 *On explique le lien entre le processus g_n et les processus FARIMA. On envisage ensuite la possibilité de considérer* $\lim g_n$ *comme un processus FARIMA généralisé.*

Rappelons qu'un processus FARIMA $(0, 1-1/\alpha, 0)$ *est une moyenne mobile infinie*

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \beta_{u-k}, \tag{2.62}$$

où les β_i sont des variables aléatoires i.i.d. et les v_k sont les coefficients dans le développement en série entière de $(1-z)^{1/\alpha-1}$ *(il faut bien sûr que la série (2.62) converge p.s. – on renvoie au chapitre 7.13 de [51] pour plus de détails au sujet des FARIMA). D'après les résultats p.381 de [51],* $v_k = \frac{\Gamma(k+1-1/\alpha)}{\Gamma(1-1/\alpha)\Gamma(k+1)}$ *; et la formule de Stirling donne l'équivalent*

$$v_k \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{k^{-1/\alpha}}{\Gamma(d)}. \tag{2.63}$$

On rappelle à présent que le processus g_n est défini par

$$g_n(u) = \mu \sum_{k=1}^{n} k^{-1/\alpha} \epsilon_{u-k} + \sigma_n. \tag{2.64}$$

On constate une grande similarité entre (2.62) et (2.64), suggérant une approche différente et un élargissement possible de notre travail :

L'approche alternative consisterait à remplacer g_n par

$$h_n(u) = \mu \sum_{k=0}^{n} v_k \epsilon_{u-k} + \tau_n, \tag{2.65}$$

les v_k étant les coefficients du processus FARIMA définis ci-dessus, τ_n étant déterminé par l'égalité $\mathrm{E}e^{h_n(u)} = 1$*. On obtient avec cette suite de processus des résultats sensiblement analogues à ceux que nous démontrons dans ce chapitre – les preuves sont toutefois plus difficiles.*

Il est tentant d'établir un lien encore plus fort avec les FARIMA, en étudiant non plus h_n, mais sa limite

$$h_\infty(u) = \mu \sum_{k=0}^{\infty} v_k \epsilon_{u-k} + \tau_\infty. \tag{2.66}$$

Mais l'écriture (2.66) n'a pas de sens, puisque la série diverge p.s. (nous serions bien en peine également de définir τ_∞). Toutefois, il est peut-être

possible de donner un sens rigoureux à (2.66), en travaillant dans un espace de distributions à support dans $\mathbb{N}$ *; on pourrait alors parler de processus FARIMA généralisé. Cette idée s'inspire de l'approche suivie par Duchon et al. [12] dans l'étude du chaos gaussien et son application en économie. Si cette voie aboutissait à des résultats intéressants, on pourrait aussi peut-être généraliser les résultats en matière de prévision obtenus dans la section suivante 2.3.2 – en cela on suivrait encore le travail de Duchon et al. [12].*

Question ouverte 2.14 *On peut généraliser la moyenne mobile (2.53) en dimensions supérieures. Par exemple, on peut étudier dans* $\mathbb{R}^2$ *la cascade*

$$G_n(x,y) = \mu \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j)^{-2/\alpha} e_{x-i} f_{y-j} - S_n, \tag{2.67}$$

où e *et* f *sont des bruits blancs stables indépendants et la constante* S_n *est telle que* $\mathrm{E}e^{G_n(x,y)} = 1$*. La surface* $z = G_n(x,y)$ *est représentée sur la figure 2.2.*

On peut penser que (2.67) est une bonne version discrète de

$$R_l(x,y) = \int_{x-1}^{x} \int_{y-1}^{y} \left[f_l(x+y-t-s)\right]^2 \mathrm{d}M_\alpha(t,s) - C_l \tag{2.68}$$

(à un facteur d'échelle de temps près), M_α *étant une mesure aléatoire stable dans le plan et* C_l *étant une constante telle que* $\mathrm{E}e^{R_l(x,y)} = 1$*. Par ailleurs, en faisant le même type de raisonnement informel que dans la Question ouverte 2.10, on devine une propriété de type multifractal pour un éventuel processus limite*

$$\lim_l \int_0^t \int_0^s e^{R_l(x,y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.69}$$

Autrement dit, (2.67) semble être un bon candidat de cascade multifractale dans le plan.

2.3.2 Des problèmes de prévision

On rappelle que g_n est défini par (2.53). On définit deux nouveaux processus :

$$\epsilon_t^\star = \mu \epsilon_{t-1} \tag{2.70}$$

$$g_n^\star(t) = g_n(t) - \sigma_n. \tag{2.71}$$

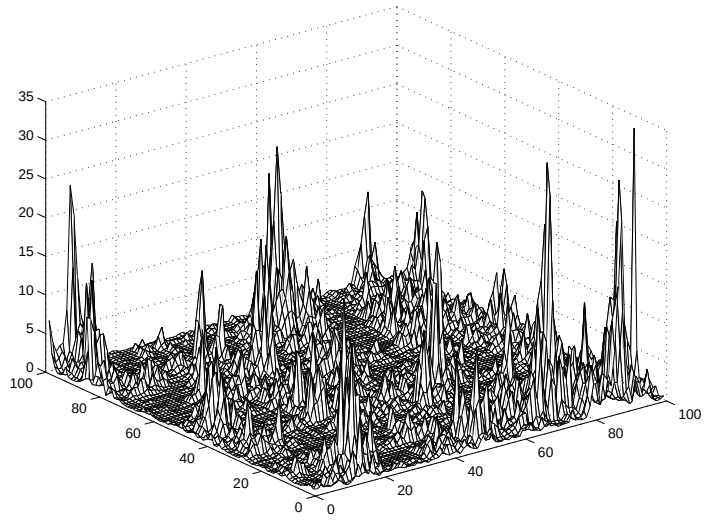


FIGURE 2.2 – **Cascade dans le plan.** On représente la cascade définie par (2.67) sur $[0,100] \times [0,100]$, avec $n = 10$ et dans le cas où les bruits e et f sont gaussiens. Le comportement intermittent et la grande variabilité à toutes les échelles, propriétés graphiques habituelles des multifractals, sont bien visibles sur le graphique.

L'égalité (2.53) est équivalente à

$$g_n^\star(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-1/\alpha}\, \epsilon_{t-k}^\star. \tag{2.72}$$

Dans cette section, on établit l'existence d'une représentation auto-régressive pour le processus $g_n^\star$, c'est-à-dire une représentation de la forme

$$\epsilon_t^\star = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} g_n^\star(t-k),\ t \in \mathbb{Z}, \tag{2.73}$$

pour certains réels $c_{n,k}$. On propose ensuite une méthode de prévision de $g_n^\star(t+h)$ à partir de $g_n^\star(t), \ldots, g_n^\star(1), g_n^\star(0), \ldots$ dans un premier temps, puis à partir de $g_n^\star(t), \ldots, g_n^\star(1)$ uniquement dans un deuxième temps. On s'intéresse enfin à la prévision de $e^{g_n^\star(t+h)}$.

Remarque 2.15 *L'objet central de cette section est g_n, et non $g_n^\star$. Cependant l'étude de $g_n^\star$ entraîne moins de complications techniques et allège le*

texte ; c'est pourquoi nous nous focalisons désormais sur ce processus. Les méthodes présentées ci-après pour $g_n^\star$ s'adaptent cependant de façon quasi immédiate à g_n – nous ne donnerons aucun détail à ce sujet.

Le processus $g_n^\star$ appartient à la famille des ARMA (voir [51], chapitre 7), donc l'existence de la représentation (2.73) est conditionnée au fait qu'un certain polynôme n'admet pas de racine dans le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Cette idée est la ligne directrice de la preuve de la propriété suivante.

Propriété 2.16 *Le processus $g_n^\star$, défini par (2.72), admet une représentation auto-régressive de la forme (2.73).*

DÉMONSTRATION. On définit le polynôme $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-1/\alpha} z^k$. Pour tout $0 \leq k \leq n-2$, $\frac{(k+1)^{-1/\alpha}}{(k+2)^{-1/\alpha}} > 1$. De plus, les coefficients $(k+1)^{-1/\alpha}$ de P_n sont positifs. Donc d'après les résultats p.107 de [47], P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de rayon 1 de $\mathbb{C}$. Par conséquent, d'après le Théorème 7.12.4 de [51], le processus ARMA $g_n^\star$ admet la représentation auto-régressive

$$\epsilon_t^\star = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} g_n^\star(t-k),\ t \in \mathbb{Z}, \tag{2.74}$$

où les $c_{n,k}$ sont les coefficients dans le développement en série entière de $\frac{1}{P_n(z)}$, pour $|z| < 1$. ■

Les coefficients $c_{n,k}$ de la représentation (2.73) sont ceux du développement en série entière de

$$\frac{1}{P_n(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-1/\alpha} z^k}, |z| < 1. \tag{2.75}$$

Ils se calculent donc par récurrence :

- $c_{n,0} = 1$;
- $c_{n,k} = -2^{-1/\alpha} c_{n,k-1} - \cdots - (k+1)^{-1/\alpha} c_{n,0},\ 1 \leq k \leq n-1$;
- $c_{n,k} = -2^{-1/\alpha} c_{n,k-1} - \cdots - n^{-1/\alpha} c_{n,k-n+1},\ n \leq k$.

On en vient à présent à la méthode de prévision [4]. Supposons avoir observé $g_n^\star(t), \ldots, g_n^\star(1), g_n^\star(0), \ldots$ On souhaiterait estimer la valeur de

4. Le prédicteur que nous donnons ci-dessous est le même que celui déjà proposé par Hosking dans le domaine des FARIMA [21]. Toutefois l'apparente similitude entre notre travail et [21] n'est qu'une façade : Hosking étudie un processus FARIMA défini par le filtrage d'un bruit blanc de carré intégrable, le prédicteur optimal étant défini par une projection dans L^2 ; à l'opposé notre processus $g_n^\star$ est un processus ARMA défini à partir de variables stables n'ayant pas de moment d'ordre 2 (sauf dans le cas gaussien) et notre prédicteur optimal est défini par une projection dans L^1. Ainsi le fait que nos prédicteurs soient les mêmes ne doit-il pas laisser penser que nos travaux sont équivalents.

$g_n^\star(t+h)$. Le processus $g_n^\star$ étant une moyenne mobile de longueur n, nous nous restreignons au cas où $h < n \leq t$. Par définition, on a

$$g_n^\star(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-1/\alpha} \epsilon_{t-k}^\star \tag{2.76}$$

et d'après la Propriété 2.16

$$\epsilon_t^\star = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} g_n^\star(t-k).$$

D'où l'égalité entre tribus

$$\sigma(g_n^\star(t), \dots, g_n^\star(1), g_n^\star(0), \dots) = \sigma(\epsilon_t^\star, \dots, \epsilon_1^\star, \epsilon_0^\star, \dots). \tag{2.77}$$

On rappelle ensuite que les variables $\epsilon_i^\star$ sont centrées (Propriété 2.3) et n'ont pas de moment d'ordre 2. Ceci nous amène naturellement à définir comme *meilleur prédicteur* de $g_n^\star(t+h)$ connaissant $\sigma(g_n^\star(t), \dots, g_n^\star(1), g_n^\star(0), \dots)$ la moyenne mobile infinie

$$\widehat{g_n^\star(t+h)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{\gamma_{n,k}} \epsilon_{t-k}^\star, \tag{2.78}$$

où

$$(\widehat{\gamma_{n,0}}, \widehat{\gamma_{n,1}}, \dots) = \underset{(\gamma_{n,0}, \gamma_{n,1}, \dots)}{\textbf{argmin}} \ \mathrm{E} \left| g_n^\star(t+h) - \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{n,k} \epsilon_{t-k}^\star \right|. \tag{2.79}$$

Propriété 2.17 *Le problème (2.79) admet l'unique solution :*

- $\widehat{\gamma_{n,k}} = 0, \ k \geq n-h,$
- $\widehat{\gamma_{n,k}} = (k+h+1)^{-1/\alpha}, \ 0 \leq k \leq n-h-1$

et l'on a donc

$$\widehat{g_n^\star(t+h)} = \sum_{k=0}^{n-h-1} (k+h+1)^{-1/\alpha} \epsilon_{t-k}^\star. \tag{2.80}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} g_n^\star(t+h) - \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{n,k} \epsilon_{t-k}^\star &= \sum_{k=-h}^{-1} (k+h+1)^{-1/\alpha} \epsilon_{t-k}^\star \\ &+ \sum_{k=0}^{n-h-1} \left((k+h+1)^{-1/\alpha} - \gamma_{n,k} \right) \epsilon_{t-k}^\star + \sum_{k=n-h}^{+\infty} \gamma_{n,k} \epsilon_{t-k}^\star, \end{aligned} \tag{2.81}$$

donc en vertu des Propriétés 2.1 et 2.3

$$\left(\mathrm{E}\left|g_n^\star(t+h)-\sum_{k=0}^{+\infty}\gamma_{n,k}\epsilon_{t-k}^\star\right|\right)^\alpha = c_\alpha^\alpha\sum_{k=-h}^{-1}(k+h+1)^{-1}$$
$$+\,c_\alpha^\alpha\sum_{k=0}^{n-h-1}\left((k+h+1)^{-1/\alpha}-\gamma_{n,k}\right)^\alpha + c_\alpha^\alpha\sum_{k=n-h}^{+\infty}{\gamma_{n,k}}^\alpha. \qquad (2.82)$$

On obtient donc les $\widehat{\gamma_{n,k}}$ et le prédicteur $\widehat{g_n^\star(t+h)}$ annoncés. ■

Il est facile de voir que $\widehat{g_n^\star(t+h)} = \mathrm{E}\left(g_n^\star(t+h) \mid g_n^\star(t),\dots,g_n^\star(0),\dots\right)$, ce qui renforce l'idée que $\widehat{g_n^\star(t+h)}$ est un bon prédicteur. En utilisant la représentation auto-régressive on obtient

$$\widehat{g_n^\star(t+h)} = \sum_{k=0}^{n-h-1}(k+h+1)^{-1/\alpha}\,\epsilon_{t-k}^\star$$
$$= \sum_{k=0}^{n-h-1}\sum_{j=0}^{+\infty}(k+h+1)^{-1/\alpha}\,c_{n,j}g_n^\star(t-k-j). \qquad (2.83)$$

Supposons maintenant que l'on observe uniquement $g_n^\star(1),\dots,g_n^\star(t)$, ce qui semble plus réaliste en pratique. Dans ce cas $\widehat{g_n^\star(t+h)}$ ne peut pas être utilisé pour faire la prédiction. On choisit de remplacer les $g_n^\star(k)$ non observés par leur espérance 0. Ainsi décide-t-on de remplacer $\widehat{g_n^\star(t+h)}$ par

$$\widehat{\widehat{g_n^\star(t+h)}} = \sum_{k=0}^{n-h-1}\sum_{j=0}^{t-k-1}(k+h+1)^{-1/\alpha}\,c_{n,j}g_n^\star(t-k-j). \qquad (2.84)$$

Cette troncature a un effet mineur lorsqu'on observe suffisamment de données :

Propriété 2.18 *Soit $\widehat{g_n^\star(t+h)}$ (Eq. (2.83)) le prédicteur non tronqué et $\widehat{\widehat{g_n^\star(t+h)}}$ (Eq. (2.84)) le prédicteur tronqué de $g_n^\star(t+h)$. La quantité*

$$\mathrm{E}\left|\widehat{\widehat{g_n^\star(t+h)}} - \widehat{g_n^\star(t+h)}\right| \qquad (2.85)$$

décroît vers 0 à vitesse exponentielle lorsque t tend vers l'infini.

DÉMONSTRATION. Soit $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-1/\alpha} z^k$. On a prouvé dans la démonstration de la Propriété 2.16 que toutes les racines de P_n étaient de modules strictement plus grand que 1. Posons $Q_n(z) = zP_n(z) = \sum_{k=1}^{n} k^{-1/\alpha} z^k$. On a $Q'_n(z) = \sum_{k=1}^{n} k^{1-1/\alpha} z^{k-1}$ et $\frac{k^{1-1/\alpha}}{(k+1)^{1-1/\alpha}} < 1$, donc d'après les résultats p.107 de [47], toutes les racines de Q'_n se trouvent à l'intérieur du disque fermé de rayon 1 de $\mathbb{C}$. Le polynôme P_n a donc n racines simples, que l'on note $r_{n,1}, \ldots, r_{n,n}$. Ainsi a-t-on, pour $k \geq n$:

$$c_{n,k} = p_{n,1} r_{n,1}^{-k} + \cdots + p_{n,n} r_{n,n}^{-k}, \tag{2.86}$$

les $p_{n,i}$ étant des réels fixés. On note

$$r_n = \min\left(|r_{n,1}|, \ldots, |r_{n,n}|\right). \tag{2.87}$$

On a $r_n > 1$ et

$$|c_{n,k}| \underset{k\to\infty}{\sim} p_n r_n^{-k} \tag{2.88}$$

pour une certaine constante $p_n > 0$.

Enfin, comme

$$\mathrm{E}\left|\widehat{\widehat{g_n^\star}(t+h)} - \widehat{g_n^\star(t+h)}\right| \leq \mathrm{E}\left|g_n^\star(1)\right| \sum_{k=t-n+h+1}^{+\infty} |c_{n,k}| \sum_{j=h+1}^{n} j^{-1/\alpha}, \tag{2.89}$$

la quantité $\mathrm{E}\left|\widehat{\widehat{g_n^\star}(t+h)} - \widehat{g_n^\star(t+h)}\right|$ décroît de façon exponentielle vers 0 lorsque t tend vers l'infini. ■

De façon à tester le prédicteur $\widehat{\widehat{g_n^\star}}$, on a simulé une trajectoire de longueur 110 du processus $g_n^\star$ puis on a estimé les 10 dernières valeurs à partir des 100 premières (figure 2.3). On a refait ce travail 10000 fois, calculant pour chaque trajectoire l'erreur commise dans l'estimation à horizon 1 ; on a vérifié à chaque fois si la trajectoire réelle se trouvait ou non dans un tunnel de confiance de niveau 95% construit autour de la trajectoire prévue (les quantiles utilisés pour définir le tunnel étaient ceux de $\widehat{g_n^\star(t+h)} - g_n^\star(t+h)$ [5]). Dans 95,13% des cas, la valeur de $g_n^\star(t+h)$ appartenait au tunnel, ce qui tend à prouver l'efficacité de $\widehat{\widehat{g_n^\star}}$ comme prédicteur.

5. Nous avons utilisé la table de quantiles proposée sur le site de John Nolan de l'Université de Virginie :
http ://www.hostsrv.com/webmac/app1/MSPScripts/webm1016/Stable/Quantile.jsp
Le prédicteur $\widehat{g_n^\star}$ est certainement le meilleur possible. En utilisant les quantiles de $\widehat{g_n^\star(t+h)} - g_n^\star(t+h)$, on compare donc $\widehat{\widehat{g_n^\star}}$ au meilleur prédicteur possible.

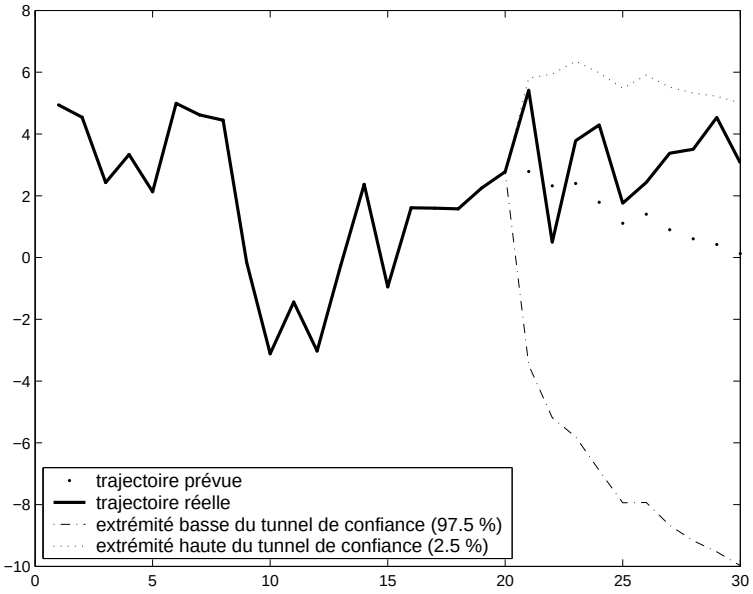


FIGURE 2.3 – **Simulation d'une trajectoire de longueur 110 du processus $\mathbf{g_n^\star}$ (avec n=11 et α=1.5).** Les 10 dernières valeurs sont estimées à partir des 100 premières. Le graphique montre les valeurs de la 80ème à la 110ème, ainsi que l'estimation de la 101ème à la 110ème. La trajectoire réelle se trouve à l'intérieur d'un tunnel de confiance de niveau 95% construit autour de la trajectoire prévue.

Remarque 2.19 *Il est possible que le processus g_n construit dans cette section soit utilisable en finance, pour modéliser la log-volatilité*[6]*. La méthode de prédiction proposée ci-dessus est donc susceptible d'avoir de réelles applications pratiques.*

Pour terminer, on s'intéresse à la prédiction de $e^{g_n^\star(t+h)}$. Supposons avoir observé les $e^{g_n^\star(k)},\ k \leq t$ ou, ce qui revient au même, les $g_n^\star(k),\ k \leq t$. Par définition

$$g_n^\star(t+h) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{-1/\alpha}\, \epsilon_{t+h-k}^\star, \tag{2.90}$$

6. Comme dans l'article de Duchon et al. [12], déjà cité dans la Question ouverte 2.13 – notre construction est cependant assez différente de la leur.

donc en utilisant la Propriété 2.2 on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(e^{g_n^\star(t+h)} \mid g_n^\star(t), \dots\right) &= \mathrm{E}\left(e^{g_n^\star(t+h)} \mid \epsilon_t^\star, \dots\right) \\
&= \mathrm{E}\left(e^{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{-1/\alpha}\epsilon_{t+h-k}^\star} \mid \epsilon_t^\star, \dots\right) \\
&= \mathrm{E}\left(e^{\sum_{k=0}^{h-1}(k+1)^{-1/\alpha}\epsilon_{t+h-k}^\star}\right) \times e^{\sum_{k=h}^{n-1}(k+1)^{-1/\alpha}\epsilon_{t+h-k}^\star} \\
&= e^{-\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\left(\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{k}\right)} \times e^{\widehat{g_n^\star(t+h)}}. \qquad (2.91)
\end{aligned}$$

On obtient donc facilement un prédicteur dans ce cas.

Si l'on convient que seuls les $e^{g_n^\star(k)}$, $1 \leq k \leq t$ ont été observés, il n'est certainement plus judicieux de remplacer les $g_n^\star(i)$ non observés par leur espérance 0. On rentre dans des difficultés tant théoriques que pratiques : il apparaît de façon naturelle des « paramètres d'échelle conditionnels » et les simulations numériques réalisées ne donnent aucune satisfaction (même dans le cas gaussien $\alpha = 2$). La recherche d'un bon prédicteur dans ce cas reste donc un problème ouvert.

Question ouverte 2.20 *Dans le domaine de la prédiction une autre voie, en lien avec les processus étudiés dans l'introduction et totalement indépendante de l'étude menée dans cette section, semble abordable : rappelons que la MRM M est la limite des processus $M_l(t) = \int_0^t e^{\omega_l(s)}\mathrm{d}s$, où ω_l est la cascade de Bacry et Muzy (on renvoie le lecteur aux sections 1.3.2 et 1.3.3). Sous l'hypothèse $\zeta(2) > 1$, $M(t)$ a un moment d'ordre 2 et il est facile de voir que*

$$\mathrm{E}M(t)\,M(s) = \frac{1}{\zeta(2)\left(\zeta(2)-1\right)}\left(t^{\zeta(2)} + s^{\zeta(2)} - |t-s|^{\zeta(2)}\right). \qquad (2.92)$$

On reconnaît, à un facteur multiplicatif près, la covariance du fBm d'indice $H = \zeta(2)/2$. Il est donc tentant d'utiliser les méthodes de prédiction géométriques[7] *des processus gaussiens pour prévoir $M(t+h)$. Cependant, le fait que $\mathrm{E}M(t) = t$ (alors que le fBm est centré) empêche d'appliquer directement les méthodes du fBm à M. Nos recherches dans ce domaine n'ayant pas abouti, nous ne donnons pas davantage de détails. La recherche d'un prédicteur sous une forme intégrale judicieusement choisie et une utilisation pertinente des articles [32, 18, 4]*[8] *pourrait peut-être permettre de résoudre ce problème.*

7. Au sens où l'on considère des projections dans des espaces de Hilbert.

8. Articles dans lesquels sont résolues de nombreuses équations intégrales – équations apparaissant de façon naturelle au cours de ce travail.

2.4 Le cas gaussien

On étudie le cas particulier où la moyenne mobile (2.15) est gaussienne, c'est-à-dire le cas où $\alpha = 2$. On améliore dans ce cas les résultats du sous-chapitre 2.2. Ce travail met en évidence un lien très étroit entre les processus étudiés dans ce chapitre et la MRM (sous-chapitre 1.3).

2.4.1 Définition

On définit le processus

$$X_l^G(t) = \int_0^t e^{\rho_l(s)} \mathrm{d}s,\ t \in [0,1], \tag{2.93}$$

où

$$\rho_l(s) = \lambda \int_{s-1}^{s} f_l(s-u)\,\mathrm{d}B(u) - \frac{\lambda^2}{2}(1 - \log l), \tag{2.94}$$

$\lambda > 0$ étant un paramètre, B désignant le mouvement Brownien standard et le noyau f_l étant la fonction à support dans $[0,1]$ définie par

$$f_l(u) = \begin{cases} l^{-1/2} & \text{si } 0 \leq u < l \\ u^{-1/2} & \text{si } l \leq u \leq 1. \end{cases} \tag{2.95}$$

Le processus ρ_l défini ici est le même que celui défini dans le sous-chapitre 2.2 dans le cas $\alpha = 2$, le paramètre μ de l'équation (2.15) étant remplacé par $\lambda/\sqrt{2}$ dans l'équation (2.94). Nous avons choisi ces notations pour être en cohérence avec les travaux antérieurs sur le sujet. En particulier, on verra apparaître le spectre multifractal déjà mentionné à plusieurs reprises dans l'introduction

$$\zeta(q) = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) q - \frac{\lambda^2}{2} q^2. \tag{2.96}$$

On suppose dans toute la suite que $\zeta(2) > 1$, c'est-à-dire que $0 < \lambda < 1$. Sous cette hypothèse et en vertu de la Propriété 2.7 on peut considérer la limite en loi dans $C[0,1]$ et en moyenne quadratique de X_l^G :

$$X^G(t) = \lim X_l^G(t). \tag{2.97}$$

On a simulé sur la figure 2.4 une trajectoire des processus g_n, $\exp(g_n)$ et $X_n^{S,d}$ définis dans la section 2.3.1, en prenant $\alpha = 2$, $\mu = 0.5$ et $n = 1000$. On a également construit un histogramme de $\log X_n^{S,d}$ à partir d'un échantillon de taille 1000.

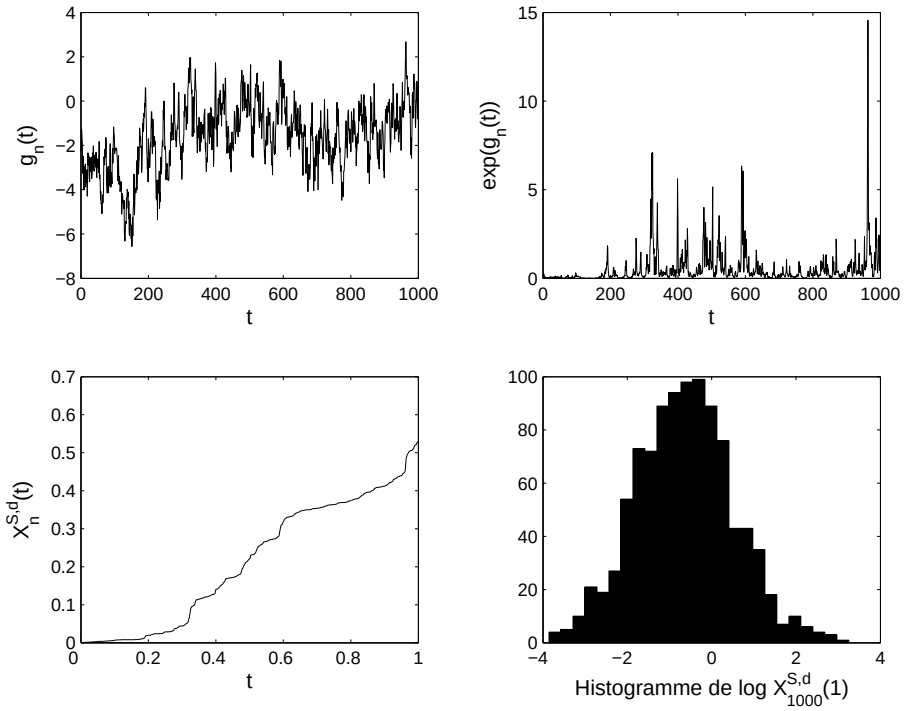


FIGURE 2.4 – **Simulation dans le cas gaussien.** Nous reprenons la version affine par morceaux définie dans la section 2.3.1 avec $\alpha = 2$, $n = 1000$ et $\mu = 0.5$ (qui peut aussi être considérée comme une version affine par morceaux de X_l^G (Eq. (2.93)), avec $\lambda = \sqrt{0.5}$). Comme sur la figure 2.1, le graphique en haut à droite possède les propriétés usuelles des multifractals ; on remarque d'ailleurs que les allures de $\exp(g_n)$ et de $X_n^{S,d}$ sont très proches de celles observées dans le cas stable. Cependant il y a de nombreuses différences avec la figure 2.1 : la trajectoire de g_n, centrée autour de -2 environ, n'a pas les bonds négatifs observés dans le cas stable. D'autre part $\exp(g_n)$ prend des valeurs moins élevées que dans le cas stable. Enfin et surtout, la distribution de $\log X_n^{S,d}(1)$ est plus aplatie dans le cas gaussien (kurtosis plus faible) et plus symétrique par rapport à la moyenne (le coefficient de dissymétrie vaut 0.15 environ).

2.4.2 Propriété multifractale

Pour démontrer que X^G (Eq. (2.97)) vérifie la propriété multifractale faible (1.2), on va comparer le processus ρ_l (Eq. (2.94)) à la version gaus-

sienne de la cascade de Bacry et Muzy. On rappelle qu'il s'agit du processus gaussien ω_l d'espérance

$$\mathrm{E}\omega_l(s) = -\frac{\lambda^2}{2}(1 - \log l) \tag{2.98}$$

et de fonction de covariance

$$\mathrm{cov}(\omega_l(s), \omega_l(u)) = \lambda^2 r_l(s-u), \tag{2.99}$$

où r_l est la fonction paire définie par

$$r_l(u) = \begin{cases} 1 - \log l - u/l & \text{si } 0 \le u \le l \\ -\log u & \text{si } l < u \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < u. \end{cases} \tag{2.100}$$

Lemme 2.21 *La fonction de covariance du processus ω_l s'écrit $\lambda^2 r_l$; on considère également la fonction s_l telle que la covariance du processus ρ_l (Eq. (2.94)) s'écrive $\lambda^2 s_l$. Avec ces notations, pour tout $0 < l < 1/2$, pour tout réel u :*

$$|s_l(u) - r_l(u)| \le 2 + 2\log 2. \tag{2.101}$$

Ce lemme est démontré dans le sous-chapitre 2.6.

Propriété 2.22 *Soit X^G le processus défini par (2.97) et le spectre ζ défini par (2.96). La variable aléatoire $X^G(t)$ a un moment d'ordre q sous chacune des deux conditions :*

1. $0 < q \le 2$,
2. $q > 2$ *et* $\zeta(q) > 1$.

De plus, dans chaque cas on a la propriété multifractale faible

$$c_q t^{\zeta(q)} \le \mathrm{E}\left[X^G(t)\right]^q \le C_q t^{\zeta(q)}, \tag{2.102}$$

c_q et C_q étant deux constantes strictement positives indépendantes de t.

Démonstration. L'idée de la démonstration est de comparer les moments de $X_l^G(t)$ et de $M_l(t) = \int_0^t e^{\omega_l(x)}\mathrm{d}x$ (Eq. (1.40)) en utilisant la technique du chaos gaussien de Kahane [25].

Démonstration dans le cas $q > 2$. La fonction ζ est continue, donc sous l'hypothèse $\zeta(q) > 1$ il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $\zeta(q+\epsilon) > 1$. D'après les

résultats de [8], $\sup_l \mathrm{E}\left[M_l(t)\right]^{q+\epsilon} < \infty$. La fonction $x \mapsto x^{q+\epsilon}$ est convexe, donc d'après le Lemme 2 de [25] et le Lemme 2.21

$$\sup_{l<1/2} \mathrm{E}\left[X_l^G(t)\right]^{q+\epsilon} \leq \sup_{l<1/2} K_{q+\epsilon} \mathrm{E}\left[M_l(t)\right]^{q+\epsilon} \tag{2.103}$$

pour une certaine constante $K_{q+\epsilon} > 0$. Combinée à la convergence en loi de $X_l^G(t)$ vers $X^G(t)$, cette inégalité entraîne que $X^G(t)$ a un moment d'ordre q et que

$$\mathrm{E}\left[X^G(t)\right]^q = \lim_{l\to 0} \mathrm{E}\left[X_l^G(t)\right]^q. \tag{2.104}$$

En utilisant le Lemme 2 de [25], le Lemme 2.21 et la convexité de $x \mapsto x^q$ on obtient

$$k_q \mathrm{E}\left[M_l(t)\right]^q \leq \mathrm{E}\left[X_l^G(t)\right]^q \leq K_q \mathrm{E}\left[M_l(t)\right]^q \tag{2.105}$$

(k_q et K_q sont deux constantes strictement positives indépendantes de l et t). Par ailleurs les résultats de [8] permettent d'affirmer que

$$\lim_{l\to 0} \mathrm{E}\left[M_l(t)\right]^q = \mathrm{E}\left[M(1)\right]^q t^{\zeta_q} \tag{2.106}$$

($\mathrm{E}\left[M(1)\right]^q$ est non nul). Les équations (2.104), (2.105) et (2.106) entraînent l'existence de deux constantes strictement positives c_q et C_q indépendantes de t telles que

$$c_q t^{\zeta(q)} \leq \mathrm{E}\left[X^G(t)\right]^q \leq C_q t^{\zeta(q)} \ ; \tag{2.107}$$

autrement dit on obtient la double inégalité souhaitée[9].

Démonstration dans le cas $0 < q \leq 2$. Cette fois l'existence du moment d'ordre q est immédiate, puisque $X^G(t)$ est la limite de $X_l^G(t)$ en moyenne quadratique. Concernant l'inégalité (2.102), on distingue deux sous-cas :

Sous-cas $1 \leq q \leq 2$. La même méthode que celle utilisée ci-dessus dans le cas $q > 2$ s'applique et l'on obtient le résultat souhaité.

Sous-cas $0 < q < 1$. La fonction $x \mapsto x^q$ étant cette fois concave, le Lemme 2 de [25] ne s'applique pas. Cependant ce lemme admet une modification triviale[10] ; combinée au Lemme 2.21 et aux résultats de [8], elle permet de conclure dans le cas $0 < q < 1$ également. ■

9. On peut trouver désagréable de ne pas avoir d'expression explicite pour c_q et C_q. Obtenir une telle expression est en réalité assez facile ; il ne nous a cependant pas semblé opportun de compliquer la présentation de la preuve dans ce seul but.

10. Modification dont je ne donne pas la démonstration, parce qu'elle consiste simplement à recopier la démonstration de Kahane en remplaçant le mot « convexe » par « concave » et à changer le sens de certaines inégalités.

2.5 Représentations sous forme de moyennes mobiles pour la cascade de Bacry et Muzy

La cascade gaussienne de Bacry et Muzy, définie dans le sous-chapitre 1.3 et évoquée à de nombreuses reprises dans les sections précédentes, est le processus gaussien stationnaire ω_l dont l'espérance et la covariance sont définies par (2.98) et (2.99). On s'intéresse dans ce sous-chapitre aux représentations sous forme de moyennes mobiles

$$\omega_l(t) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \nabla_l(t-x)\,\mathrm{d}B(x) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t), \tag{2.108}$$

B désignant un mouvement Brownien standard.

Si l'on n'impose d'autre condition à la fonction ∇_l que d'être de carré intégrable, l'existence d'une représentation de la forme (2.108) est facile à démontrer. Ici on va prouver les résultats moins évidents :

- il existe une représentation de la forme (2.108) avec ∇_l à support compact dans $[-1/2, 1/2]$ (Propriété 2.28) ;
- il existe une représentation de la forme (2.108) avec ∇_l à support dans $[0, +\infty[$ (Propriété 2.29).

La première représentation permet d'établir un lien supplémentaire avec les processus que nous avons construits dans les sections précédentes ; la deuxième représentation, qui est causale, pourrait être utile dans des problèmes de prévision.

Les preuves de cette section font appel à des techniques d'analyse harmonique : grâce au Théorème de Paley-Wiener et à un théorème de Krein-Achieser [2], on démontre la Propriété 2.28 ; quant à la Propriété 2.29, elle fait appel à un résultat sur les processus linéaires étudiés dans [17]. On commence par rappeler la notion de *fonction entière de type exponentiel* :

Définition 2.23 *Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite de type exponentiel d'exposant σ (en abrégé $f \in E_\sigma$) s'il existe une constante K telle que*

$$|f(z)| \leq K e^{\sigma|z|} \tag{2.109}$$

pour tout z dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.24 *On note B_σ l'ensemble des fonctions entières de la forme*

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iuz} h(u)\,\mathrm{d}u \tag{2.110}$$

(avec $\sigma \geq 0$ et h intégrable). On remarquera que

$$B_\sigma \subset E_\sigma. \tag{2.111}$$

Rappelons à présent que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)\, \mathrm{d}t. \tag{2.112}$$

L'application $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2 \mapsto \hat{f}$ se prolonge en un unique opérateur $\mathcal{F} : \mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2$, appelé transformée de Fourier-Plancherel. De plus, on a toujours $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = 2\pi\tilde{f}$. [11]

Théorème 2.25 (Paley et Wiener) *Si $g \in E_\sigma$ et si la restriction de g à $\mathbb{R}$ est de carré intégrable, alors il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support dans $[-\sigma, \sigma]$ telle que $g = \mathcal{F}(f)$.*

Théorème 2.26 (Krein et Achieser [2]) *Si $f \in B_\sigma$ et si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une fonction $g \in E_{\sigma/2}$ de carré intégrable, bornée sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x) = |g(x)|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

La clef de voûte de notre raisonnement est le lemme suivant. Il est démontré dans le sous-chapitre 2.6.

Lemme 2.27 *Soit r_l la fonction définie par (2.100). Alors :*

1. *La fonction $\hat{r}_l$ vérifie*

$$\hat{r}_l(u) \geq \frac{2(1-\cos u)}{u^2} \tag{2.113}$$

   pour tout $u \in \mathbb{R}^*$.

2. *Il existe une fonction entière $d_l \in E_{1/2}$, dont la restriction à $\mathbb{R}$ est de carré intégrable et telle que*

$$\hat{r}_l(x) = |d_l(x)|^2 \tag{2.114}$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. *On pose $\upsilon_l = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\tilde{d}_l\right)$. La fonction υ_l est à support dans $[-1/2, 1/2]$ et l'on a $\upsilon_l * \tilde{\upsilon}_l = r_l$.* [12]

11. Etant donnée une fonction g, on note $\tilde{g}(x) := g(-x)$.
12. Le symbole $*$ désigne le produit de convolution.

Propriété 2.28 *Le processus gaussien ω_l dont l'espérance est définie par (2.98) et la covariance par (2.99) admet une représentation sous la forme*

$$\omega_l(t) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \upsilon_l(t-x)\,\mathrm{d}B(x) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t), \tag{2.115}$$

le noyau de la représentation étant la fonction υ_l à support dans $[-1/2, 1/2]$ obtenue dans le Lemme 2.27.

Démonstration. D'après le Lemme 2.27, le processus gaussien défini par la moyenne mobile $\lambda \int_{\mathbb{R}} \upsilon_l(t-x)\,\mathrm{d}B(x) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t)$ a pour espérance $-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t)$ et pour covariance

$$\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \upsilon_l(u-x)\,\upsilon_l(-x)\,\mathrm{d}x = \lambda^2 \upsilon_l * \tilde{\upsilon}_l(u) = \lambda^2 r_l(u). \tag{2.116}$$

Il s'agit donc bien du processus ω_l. ■

On se tourne à présent vers l'autre type de représentation annoncé au début de la section :

Propriété 2.29 *Le processus gaussien ω_l dont l'espérance est définie par (2.98) et la covariance par (2.99) admet une représentation sous la forme*

$$\omega_l(t) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \vartheta_l(t-x)\,\mathrm{d}B(x) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t), \tag{2.117}$$

le noyau ϑ de la représentation étant à support dans $[0, +\infty[$.

Démonstration. D'après le Lemme 2.27, $\hat{r}_l(u) \geq \frac{2(1-\cos u)}{u^2}$. De plus pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\log(1-\cos u)|\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\pi} |\log(1-\cos u)|\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\pi/2} |\log(1-\cos u)|\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} |\log(1-\cos u)|\,\mathrm{d}u \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \left|\log\left(u^2/\pi\right)\right|\mathrm{d}u + \pi/2 \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(\hat{r}_l(u))}{1+u^2}\mathrm{d}u > -\infty. \tag{2.119}$$

La covariance de ω_l est la fonction $\lambda^2 r_l$ (Eq. (2.100)), donc d'après l'inégalité (2.119) et le Théorème 4 p.271 de [17], il existe une représentation du processus ω_l du type

$$\omega_l(t) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \vartheta_l(t-x)\,\mathrm{d}\epsilon_l(x) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{E}\omega_l(t), \tag{2.120}$$

avec ϑ à support dans $[0,+\infty[$ et ϵ_l processus standard aux accroissements orthogonaux [13] subordonné à ω_l [14]. Le fait que ϵ_l soit subordonné à ω_l entraîne que ϵ_l est gaussien. Et comme ce processus est standard à accroissements orthogonaux, ϵ_l est le mouvement Brownien standard. ■

Question ouverte 2.30 *Les Propriétés 2.28 et 2.29 sont des résultats théoriques : elles ne disent pas comment obtenir les noyaux υ_l et ϑ_l des deux représentations sous forme de moyennes mobiles. Il serait souhaitable de pouvoir tabuler ces fonctions en vue d'éventuelles applications pratiques ; je n'ai fait aucune avancée en ce sens et ne sais si ces tabulations sont possibles.*

2.6 Démonstrations des lemmes

2.6.1 Démonstration du Lemme 2.8

Preuve de la finitude de l'intégrale sous l'hypothèse $\zeta(2) > 2-2/q$. On démontre une première inégalité : étant donnés des réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a :

$$(a_1+\cdots+a_n)^\alpha - (a_2+\cdots+a_n)^\alpha - a_1^\alpha \leq \sum_{i=2}^{n}\left[(a_1+a_i)^\alpha - a_1^\alpha - a_i^\alpha\right]. \tag{2.121}$$

Pour démontrer cette inégalité, on note $R(u)$ le rectangle $[0,a_1]\times[0,u]$ pour $u \geq 0$. L'inégalité s'écrit alors $\mu_0(R(a_2+\cdots+a_n)) \leq \sum_{i=2}^{n}\mu_0(R(a_i))$, où μ_0 est la mesure dont la densité est $\alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2}$ sur $\mathbb{R}_+^2$. Comme $R(a_2+\cdots+a_n)$ est la réunion des $(0,a_2+\cdots+a_{i-1})+R(a_i)$, on obtient l'inégalité (2.121) en remarquant que la mesure d'un rectangle n'augmente

13. Le fait que ϵ_l est un processus standard aux accroissements orthogonaux signifie que $\mathrm{E}\epsilon_l(t) = 0$, $\mathrm{E}(\epsilon_l(t+h)-\epsilon_l(t))^2 = h$ et $\mathrm{E}(\epsilon_l(t_3)-\epsilon_l(t_2))(\epsilon_l(t_2)-\epsilon_l(t_1)) = 0$ lorsque $t_1 < t_2 < t_3$.

14. Pour un processus Z, $\mathrm{L}^2(Z)$ désigne la fermeture dans L^2 de l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires finies de la forme $\sum c_k Z(t_k)$. Le fait que ϵ_l est subordonné à ω_l signifie simplement que $\mathrm{L}^2(\epsilon_l) \subset \mathrm{L}^2(\omega_l)$.

pas lorsqu'on effectue une translation verticale ascendante (conséquence directe de la concavité de $x \mapsto x^{\alpha-1}$).

Venons-en maintenant à la finitude de l'intégrale. Une récurrence immédiate basée sur (2.121) donne

$$(a_1 + \cdots + a_n)^\alpha - a_1^\alpha - \cdots - a_n^\alpha \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[(a_i + a_j)^\alpha - a_i^\alpha - a_j^\alpha \right]. \quad (2.122)$$

En écrivant G sous la forme

$$G(s_1, \ldots, s_q) = \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{i=1}^{q} f(s_i - u) \mathbf{1}_{[0,1]}(s_i - u) \right]^\alpha - \sum_{i=1}^{q} f(s_i - u)^\alpha \mathbf{1}_{[0,1]}(s_i - u) \, \mathrm{d}u \quad (2.123)$$

et en prenant $a_i = f(s_i - u) \mathbf{1}_{[0,1]}(s_i - u)$ dans (2.122), on obtient la majoration

$$G(s_1, \ldots, s_q) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq q} \int_{s_i - 1}^{s_j} \left[(f(s_i - u) + f(s_j - u))^\alpha - f(s_i - u)^\alpha - f(s_j - u)^\alpha \right] \mathrm{d}u. \quad (2.124)$$

L'étude des intégrales qui apparaissent dans le membre de droite ci-dessus a été faite dans la démonstration de la Propriété 2.7. En reprenant cette étude on obtient

$$G(s_1, \ldots, s_q) \leq -(2^\alpha - 2) \sum_{1 \leq i < j \leq q} \log |s_i - s_j| + O(1), \quad (2.125)$$

le $O(1)$ désignant une quantité uniformément majorée sur $[0,1]^q$ par rapport à $(s_1, \ldots, s_q)$.

On peut donc majorer (à une constante multiplicative près) l'intégrale

$$I = \int_{0 \leq s_q \leq \cdots \leq s_1 \leq 1} e^{-\mu^\alpha G(s_1, \ldots, s_q) / \cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_q \quad (2.126)$$

par l'intégrale de Selberg

$$J = \int_{0 \leq s_q \leq \cdots \leq s_1 \leq 1} \prod_{1 \leq i < j \leq q} |s_i - s_j|^{\zeta(2) - 2} \, \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_q. \quad (2.127)$$

Un critère classique (voir [58]) assure la convergence de cette intégrale lorsque $\zeta(2) > 2 - 2/q$; l'intégrale I converge donc bien aussi dans ce cas.

Preuve de l'égalité (2.34). La propriété est évidente pour $q = 1$ (puisque $\mathrm{E}e^{\rho_l(s)} = 1$ d'après la Propriété 2.2 et que $G(s) = 0$). On fixe donc deux entiers $0 \leq p \leq q$ avec $q \geq 2$ et on calcule

$$\mathrm{E}\left[\left(X_l^S(t)\right)^p \left(X_{l'}^S(t)\right)^{q-p}\right] = \int_0^t \dots \int_0^t \mathrm{E}e^{\rho_{l_1}(x_1)+\dots+\rho_{l_q}(x_q)} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_q, \tag{2.128}$$

où certains des l_i sont égaux à l et les autres à l'. D'après les Propriétés 2.1 et 2.4

$$\rho_{l_1}(x_1)+\dots+\rho_{l_q}(x_q) \sim S_\alpha\left(\mu \left\|\sum f_{l_i}(x_i - .)\right\|_\alpha, -1, \sum \mu^\alpha \Sigma_{l_i} / \cos(\pi\alpha/2)\right) \tag{2.129}$$

(on rappelle que l'on a posé $\Sigma_l = 1 - \log l$). Donc d'après la Propriété 2.2,

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[\left(X_l^S(t)\right)^p \left(X_{l'}^S(t)\right)^{q-p}\right] \\ &\quad = \int_0^t \dots \int_0^t e^{-\mu^\alpha \left[\left\|\sum f_{l_i}(x_i - .)\right\|_\alpha^\alpha - \sum \Sigma_{l_i}\right] / \cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_q. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Lorsque $0 \leq s_q < s_{q-1} < \dots < s_1 \leq t$ et pour des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ donnés dans $]0, 1]$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum f_{\lambda_i}(s_i - .)\right\|_\alpha^\alpha &= \sum_{k=2}^q \int_{s_k - 1}^{s_{k-1}-1} \left[\sum_{i=k}^q f_{\lambda_i}(s_i - u)\right]^\alpha \mathrm{d}u \\ &+ \int_{s_1-1}^{s_q} \left[\sum_{i=1}^q f_{\lambda_i}(s_i - u)\right]^\alpha \mathrm{d}u + \sum_{k=2}^q \int_{s_k}^{s_{k-1}} \left[\sum_{i=1}^{k-1} f_{\lambda_i}(s_i - u)\right]^\alpha \mathrm{d}u \ ; \end{aligned} \tag{2.131}$$

mais on a aussi

$$\Sigma_{\lambda_i} = 1 - \log \lambda_i = \int_{s_i - 1}^{s_i} f_{\lambda_i}(s_i - u)^\alpha \, \mathrm{d}u \tag{2.132}$$

pour toute valeur i. Par ailleurs, pour une valeur donnée de z, $f_l(z)$ est une fonction décroissante de l ; et pour $a > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto (x + a)^\alpha - x^\alpha$ est croissante. Donc l'expression dans le membre de droite de l'équation (2.130) est minorée (resp. majorée) par la même expression dans laquelle on remplace chaque l_i par $\max(l, l')$ (resp. $\min(l, l')$). Ainsi peut-on ramener la

démonstration de l'égalité du Lemme 2.8 à une preuve de l'égalité

$$\lim_{l\to 0} \mathrm{E}\left(X_l^S(t)\right)^q = q! \int_{0<s_q<\cdots<s_1<t} e^{-\mu^\alpha [G(s_1,\ldots,s_q)]\cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_q. \tag{2.133}$$

Pour démontrer cette égalité on écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X_l^S(t)\right)^q &= \int_0^t \ldots \int_0^t e^{-\mu^\alpha \left[\|\sum f_l(x_i - .)\|_\alpha^\alpha - q\Sigma_l\right]/\cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_q \\
&= q! \int_{0<s_q<\cdots<s_1<t} e^{-\mu^\alpha \left[\|\sum f_l(s_i - .)\|_\alpha^\alpha - q\Sigma_l\right]/\cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_q \\
&= q! \int_{0<s_q<\cdots<s_1<t} e^{-\mu^\alpha [G_l(s_1,\ldots,s_q)]/\cos(\pi\alpha/2)} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_q. \quad (2.134)
\end{aligned}$$

On raisonne à présent comme dans la démonstration de la Propriété 2.7 : pour toute valeur de $z \neq 0$, $f_l(z)$ converge en croissant vers $f(z) = z^{-1/\alpha}$ lorsque l tend vers 0. On a aussi rappelé ci-dessus que pour une valeur donnée de $a > 0$, la fonction $x \mapsto (x+a)^\alpha - x^\alpha$ était croissante. Donc lorsque l tend vers 0, $G_l(s_1, \ldots, s_q)$ converge en croissant vers $G(s_1, \ldots, s_q)$. L'équation (2.134) et le Théorème de Beppo Levi entraînent alors l'égalité (2.133), ce qui achève la démonstration.

■

2.6.2 Démonstration du Lemme 2.11

Démonstration du Point 1. On a les égalités en loi entre processus

$$\begin{aligned}
g_n(u) &=^d \mu \sum_{k=1}^n k^{-1/\alpha} \epsilon_{u-k} + \sigma_n \\
&=^d \mu \sum_{k=1}^n k^{-1/\alpha} \int_{u-k}^{u-k+1} \mathrm{d}M_\alpha(x) + \sigma_n \\
&=^d \mu \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{-1/\alpha} \int_{(u-k)/n}^{(u-k+1)/n} \mathrm{d}M_\alpha(x) + \sigma_n. \quad (2.135)
\end{aligned}$$

Or la double inégalité $(u-k)/n < x \leq (u-k+1)/n$ équivaut à $k-1 \leq u-nx < k$, autrement dit à $k = \lfloor u-nx+1 \rfloor$. Par conséquent

$$\begin{aligned} g_n(u) &=^d \mu \sum_{k=1}^{n} \int_{(u-k)/n}^{(u-k+1)/n} \left(\frac{\lfloor u-nx+1 \rfloor}{n} \right)^{-1/\alpha} \mathrm{d}M_\alpha(x) + \sigma_n \\ &=^d \mu \int_{u/n-1}^{u/n} \left(\frac{\lfloor u-nx+1 \rfloor}{n} \right)^{-1/\alpha} \mathrm{d}M_\alpha(x) + \sigma_n \\ &=^d \tilde{g}_n(u). \end{aligned} \tag{2.136}$$

On a donc également l'égalité en loi entre les deux processus indexés par $0 \leq s \leq 1$

$$g_n(\lfloor ns \rfloor) =^d \tilde{g}_n(\lfloor ns \rfloor), \tag{2.137}$$

qui entraîne

$$X_n^{S,d} =^d \tilde{X}_n^{S,d}. \tag{2.138}$$

Démonstration du Point 2. Soit $x < y$. D'après les Propriétés 2.1 et 2.2

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}e^{g_n(\lfloor nx \rfloor)+g_n(\lfloor ny \rfloor)} \\ &= e^{-\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)} \sum_{k=1}^{n-(\lfloor ny \rfloor - \lfloor nx \rfloor)} \left[\left(k^{-1/\alpha} + (k+\lfloor ny \rfloor - \lfloor nx \rfloor)^{-1/\alpha} \right)^\alpha - k^{-1} - (k+\lfloor ny \rfloor - \lfloor nx \rfloor)^{-1} \right]}. \end{aligned} \tag{2.139}$$

On distingue à présent deux cas. Si $y-x \leq 1/n$, alors d'une part

$$\mathrm{E}e^{g_n(\lfloor nx \rfloor)+g_n(\lfloor ny \rfloor)} \leq e^{-\frac{\mu^\alpha(2^\alpha-2)}{\cos(\pi\alpha/2)} \sum_{k=1}^{n} k^{-1}} \leq e^{-\frac{\mu^\alpha(2^\alpha-2)}{\cos(\pi\alpha/2)}(\log n+1)} \tag{2.140}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} p(x,y) &= e^{-\mu^\alpha \int_0^{1-(y-x)} \left\{ \left[z^{-1/\alpha} + (z+y-x)^{-1/\alpha} \right]^\alpha - z^{-1} - (z+y-x)^{-1} \right\} \mathrm{d}z / \cos(\pi\alpha/2)} \\ &\geq e^{-\frac{\mu^\alpha(2^\alpha-2)}{\cos(\pi\alpha/2)} \int_0^{1-(y-x)} (z+y-x)^{-1} \mathrm{d}z} \\ &= e^{\frac{\mu^\alpha(2^\alpha-2)}{\cos(\pi\alpha/2)} \log(y-x)} \qquad (2.141) \\ &\geq e^{-\frac{\mu^\alpha(2^\alpha-2)}{\cos(\pi\alpha/2)} \log n}. \qquad (2.142) \end{aligned}$$

Donc on a dans ce cas

$$\mathrm{E}e^{g_n(\lfloor nx \rfloor)+g_n(\lfloor ny \rfloor)} \leq e^{-\frac{\mu^\alpha(2^\alpha-2)}{\cos(\pi\alpha/2)}} p(x,y). \tag{2.143}$$

On traite maintenant le cas $y-x>1/n$. Dans la somme

$$\sum_{k=1}^{n-(\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)}\left(k^{-\frac{1}{\alpha}}+(k+\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}-k^{-1}-(k+\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)^{-1}, \tag{2.144}$$

on majore par $2^{\alpha}-2$ le terme pour $k=1$ et par

$$\left((k-1)^{-\frac{1}{\alpha}}+(k-1+ny-nx)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}-(k-1)^{-1}-(k-1+ny-nx)^{-1} \tag{2.145}$$

les autres termes. En faisant le changement d'indice $j=k-1$ dans la somme $\sum_{k=2}^{n-(\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)}\cdots$ et en mettant $\frac{1}{n}$ en facteur, on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction décroissante

$$z\mapsto\left(z^{-\frac{1}{\alpha}}+(z+y-x)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}-z^{-1}-(z+y-x)^{-1}. \tag{2.146}$$

Comme on a pris soin de séparer le terme $k=1$, la somme $\sum_{k=2}^{n-(\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)}\cdots$ est majorée par

$$\int_0^{1-(y-x)}\left[\left(z^{-1/\alpha}+(z+y-x)^{-1/\alpha}\right)^{\alpha}-z^{-1}-(z+y-x)^{-1}\right]\mathrm{d}z. \tag{2.147}$$

Finalement on a prouvé dans le cas $y-x>1/n$:

$$\mathrm{E}e^{g_n(\lfloor nx\rfloor)+g_n(\lfloor ny\rfloor)}\leq e^{-\frac{\mu^{\alpha}(2^{\alpha}-2)}{\cos(\pi\alpha/2)}}p(x,y). \tag{2.148}$$

Démonstration du Point 3. On va prouver que $\lim_{n\to+\infty}\Lambda_n=0$, où

$$\begin{aligned}\Lambda_n&=\mathrm{E}\left(X^S_{1/n}(t)-\tilde{X}^{S,d}_n(t)\right)^2\\&=\int_0^t\int_0^t\left(\mathrm{E}e^{\rho_{\frac{1}{n}}(x)+\rho_{\frac{1}{n}}(y)}-2\mathrm{E}e^{\tilde{g}_n(\lfloor nx\rfloor)+\rho_{\frac{1}{n}}(y)}+\mathrm{E}e^{\tilde{g}_n(\lfloor nx\rfloor)+\tilde{g}_n(\lfloor ny\rfloor)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{2.149}$$

On pose

$$\Lambda_{n,1}(x,y)=\mathrm{E}e^{\rho_{\frac{1}{n}}(x)+\rho_{\frac{1}{n}}(y)}, \tag{2.150}$$

$$\Lambda_{n,2}(x,y)=\mathrm{E}e^{\tilde{g}_n(\lfloor nx\rfloor)+\rho_{\frac{1}{n}}(y)}, \tag{2.151}$$

$$\Lambda_{n,3}(x,y)=\mathrm{E}e^{\tilde{g}_n(\lfloor nx\rfloor)+\tilde{g}_n(\lfloor ny\rfloor)}. \tag{2.152}$$

Pour commencer, on s'intéresse à $\Lambda_{n,3}(x,y)$. D'après le Point 1, $\Lambda_{n,3}(x,y) = \mathrm{E}e^{g_n(\lfloor nx\rfloor)+g_n(\lfloor ny\rfloor)}$. De plus, si $y-x>1/n$, d'après l'équation (2.139)

$$\begin{aligned}&\Lambda_{n,3}(x,y)\\&= e^{-\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\sum_{k=1}^{n-(\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)}\left[\left(k^{-1/\alpha}+(k+\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)^{-1/\alpha}\right)^\alpha-k^{-1}-(k+\lfloor ny\rfloor-\lfloor nx\rfloor)^{-1}\right]}.\end{aligned} \tag{2.153}$$

En mettant $\frac{1}{n}$ en facteur et en reconnaissant (comme dans la démonstration du Point 2) une somme de Riemann – cette fois pour la fonction $f_{1/n}$ (Eq. (2.14)), on voit que $\Lambda_{n,3}(x,y)$ est majoré par

$$e^{-\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\int_0^{1-\left(y-x-\frac{1}{n}\right)}\left[\left(f_{\frac{1}{n}}(z)+f_{\frac{1}{n}}\left(z+y-x-\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha-\left(f_{\frac{1}{n}}(z)\right)^\alpha-\left(f_{\frac{1}{n}}\left(z+y-x-\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha\right]\mathrm{d}z}. \tag{2.154}$$

Or cette dernière quantité n'est autre que $\mathrm{E}e^{\rho_{\frac{1}{n}}(x)+\rho_{\frac{1}{n}}(y-1/n)}$; il vient donc

$$\Lambda_{n,3}(x,y) \leq \Lambda_{n,1}(x,y-1/n). \tag{2.155}$$

Les réels x et y jouant des rôles symétriques dans les expressions $\Lambda_{n,1}$ et $\Lambda_{n,3}$, on peut écrire en vertu de (2.155)

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^t \Lambda_{n,3}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&= \iint_{|x-y|>1/n}\Lambda_{n,3}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{|x-y|\leq 1/n}\Lambda_{n,3}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leq \int_0^t\int_0^t \Lambda_{n,1}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{2\sqrt{2}}{n}\mathrm{E}e^{2\tilde{g}_n(.)}.\end{aligned} \tag{2.156}$$

D'après les Propriétés 2.1 et 2.2 $\mathrm{E}e^{2\tilde{g}_n(.)} \leq e^{(1+\log n)(2-\zeta(2))}$, donc

$$\int_0^t\int_0^t \Lambda_{n,3}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \int_0^t\int_0^t \Lambda_{n,1}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\sqrt{2}e^{2-\zeta(2)}n^{1-\zeta(2)}. \tag{2.157}$$

On se tourne à présent vers $\Lambda_{n,2}(x,y)$, que l'on va minorer. On suppose pour commencer que $y-x>1/n$ et on note k l'unique entier tel que $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$. On a donc $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} < y$. D'après les Propriétés 2.1 et 2.2,

$$\begin{aligned}&\Lambda_{n,2}(x,y)\\&= e^{-\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\int_{y-1}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\left(\frac{\lfloor k-nz+1\rfloor}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}+f_{\frac{1}{n}}(y-z)\right)^\alpha-\left(\frac{\lfloor k-nz+1\rfloor}{n}\right)^{-1}-\left(f_{\frac{1}{n}}(y-z)\right)^\alpha\right]\mathrm{d}z}\end{aligned};\tag{2.158}$$

or

$$\left(\frac{\lfloor k-nz+1\rfloor}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{k}{n}-z+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = f_{\frac{1}{n}}\left(\frac{k+1}{n}-z\right), \tag{2.159}$$

donc

$$\begin{aligned}&\Lambda_{n,2}(x,y)\\ &\geq e^{-\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\int_{y-1}^{\frac{k}{n}}\left[\left(f_{\frac{1}{n}}\left(\frac{k+1}{n}-z\right)+f_{\frac{1}{n}}(y-z)\right)^\alpha-\left(f_{\frac{1}{n}}\left(\frac{k+1}{n}-z\right)\right)^\alpha-\left(f_{\frac{1}{n}}(y-z)\right)^\alpha\right]\mathrm{d}z}.\end{aligned} \tag{2.160}$$

Si l'on remplace la borne supérieure $\frac{k}{n}$ par $\frac{k+1}{n}$ dans l'intégrale ci-dessus, on trouve exactement $\Lambda_{n,1}\left(\frac{k+1}{n},y\right)$; on en déduit

$$\Lambda_{n,2}(x,y) \geq \Lambda_{n,1}\left(\frac{k+1}{n},y\right)e^{\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\delta_n(x,y)}, \tag{2.161}$$

avec

$$\begin{aligned}\delta_n(x,y) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} &\left(f_{\frac{1}{n}}\left(\frac{k+1}{n}-z\right)+f_{\frac{1}{n}}(y-z)\right)^\alpha\\ &-\left(f_{\frac{1}{n}}\left(\frac{k+1}{n}-z\right)\right)^\alpha-\left(f_{\frac{1}{n}}(y-z)\right)^\alpha\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{2.162}$$

Mais il est évident que $\Lambda_{n,1}(x,y)$ ne dépend que de la différence $|y-x|$; et il est facile de voir (en dérivant) que $\Lambda_{n,1}(x,y)$ est une fonction décroissante de $|y-x|$. Il vient donc finalement, pour $y-x>1/n$:

$$\Lambda_{n,2}(x,y) \geq \Lambda_{n,1}(x,y)\,e^{\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\delta_n(x,y)}. \tag{2.163}$$

On aura besoin un peu plus loin d'appliquer le Théorème de convergence dominée au membre de droite dans l'équation qui précède ; on s'intéresse donc à la limite de $\delta_n(x,y)$ lorsque n tend vers l'infini. Les nombres $y>x$ étant fixés, il existe un réel strictement positif $\Delta=\Delta(x,y)$ tel que, pour n assez grand, $y-\frac{k+1}{n}\geq\Delta$. Il vient donc, pour n assez grand,

$$\delta_n(x,y) \leq \int_0^{\frac{1}{n}}\left(\left(z^{-\frac{1}{\alpha}}+(\Delta+z)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha-z^{-1}-(\Delta+z)^{-1}\right)\mathrm{d}z. \tag{2.164}$$

Il s'ensuit (par application du Théorème de convergence dominée de Lebesgue) que $\lim_{n\to+\infty}\delta_n(x,y)=0$.

Lorsqu'on a minoré $\Lambda_{n,2}(x,y)$ ci-dessus, on a supposé que $y-x>1/n$. Si l'on intervertit le rôle de x et y (donc dans le cas $x-y>1/n$), on obtient des résultats légèrement différents ; cependant on peut encore écrire

$$\Lambda_{n,2}(x,y) \geq \Lambda_{n,1}(x,y)\, e^{\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\delta_n(x,y)}, \tag{2.165}$$

avec un $\delta_n(x,y)$ qui n'a pas la même expression que celle donnée en (2.162), mais qui converge vers 0 pour toutes valeurs de $x>y$ lorsque n tend vers l'infini (je ne détaille pas davantage pour ne pas trop alourdir la démonstration).

Reprenons à présent l'équation (2.149) et remplaçons les différentes quantités à l'aide des majorations et minorations obtenues précédemment :

$$\begin{aligned}\Lambda_n &\leq \int_0^t\int_0^t \left(\Lambda_{n,1}(x,y) - 2\Lambda_{n,2}(x,y)\,\mathbf{1}_{|y-x|>\frac{1}{n}} + \Lambda_{n,3}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq \int_0^t\int_0^t \Lambda_{n,1}(x,y)\left(2 - 2e^{\frac{\mu^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)}\delta_n(x,y)}\mathbf{1}_{|y-x|>\frac{1}{n}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + 2\sqrt{2}e^{2-\zeta(2)}n^{1-\zeta(2)}.\end{aligned} \tag{2.166}$$

La fonction $\Lambda_{n,1}$ est majorée par la fonction intégrable p (puisque nous travaillons sous l'hypothèse $\zeta(2)>1$) ; par ailleurs on a vu ci-dessus que $\delta_n(x,y)$ convergeait vers 0 lorsque $x\neq y$. Le Théorème de convergence dominée de Lebesgue permet donc de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty}\Lambda_n = 0. \tag{2.167}$$

■

2.6.3 Démonstration du Lemme 2.21

Le processus ρ_l est défini par la moyenne mobile

$$\rho_l(s) = \lambda\int_{\mathbb{R}} f_l(s-v)\,\mathrm{d}B(v) - \frac{\lambda^2}{2}(1-\log l), \tag{2.168}$$

avec

$$f_l(s) = \begin{cases} l^{-1/2} & \text{si } 0\leq s<l \\ s^{-1/2} & \text{si } l\leq s\leq 1 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{2.169}$$

Donc s_l est la fonction égale à

$$s_l(u) = \int_{\mathbb{R}} f_l(z)\, f_l(z+|u|)\, \mathrm{d}z. \tag{2.170}$$

On rappelle par ailleurs que la fonction r_l est définie par

$$r_l(u) = \begin{cases} 1 - \log l - |u|/l & \text{si } 0 \le |u| \le l \\ -\log|u| & \text{si } l < |u| \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < |u|. \end{cases} \tag{2.171}$$

Pour comparer $s_l(u)$ et $r_l(u)$, on suppose que $u \ge 0$ (ce qui est suffisant, puisque r_l et s_l sont paires) et on distingue plusieurs cas :

1er cas : $0 \le u \le l$. On écrit

$$\begin{aligned} s_l(u) &= \int_0^{l-u} l^{-1}\mathrm{d}z + \int_{l-u}^{l} l^{-1/2}(z+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}z + \int_l^{1-u} z^{-1/2}(z+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}z \\ &= 1 - \frac{u}{l} + 2\left[\left(1+\frac{u}{l}\right)^{1/2} - 1\right] + 2\log\left[\frac{1+(1-u)^{1/2}}{l^{1/2}+(l+u)^{1/2}}\right]. \end{aligned} \tag{2.172}$$

On a donc dans ce cas

$$s_l(u) - r_l(u) = 2\left[\left(1+\frac{u}{l}\right)^{1/2} - 1\right] + 2\log\left[\frac{1+(1-u)^{1/2}}{1+\left(1+\frac{u}{l}\right)^{1/2}}\right]\ ; \tag{2.173}$$

et comme $0 \le \frac{u}{l} \le 1$:

$$-2\log\left[1+2^{1/2}\right] \le s_l(u) - r_l(u) \le 2^{3/2} - 2. \tag{2.174}$$

2ème cas : $l \le u \le 1-l$. Cette fois on a

$$\begin{aligned} s_l(u) &= \int_0^{l} l^{-1/2}(z+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}z + \int_l^{1-u} z^{-1/2}(z+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\left[\left(1+\frac{u}{l}\right)^{1/2} - \left(\frac{u}{l}\right)^{1/2}\right] + 2\log\left[\frac{1+(1-u)^{1/2}}{l^{1/2}+(l+u)^{1/2}}\right]. \end{aligned} \tag{2.175}$$

On obtient alors

$$s_l(u) - r_l(u) = 2\left[\left(1+\frac{u}{l}\right)^{1/2} - \left(\frac{u}{l}\right)^{1/2}\right] + 2\log\left[\frac{1+(1-u)^{1/2}}{\left(\frac{l}{u}\right)^{1/2}+\left(1+\frac{l}{u}\right)^{1/2}}\right]. \tag{2.176}$$

Et comme $\frac{u}{l} \geq 1$:

$$-2\log\left[1+2^{1/2}\right] \leq s_l(u) - r_l(u) \leq 2 + 2\log 2. \tag{2.177}$$

3ème cas : $1-l \leq u \leq 1$. Dans ce dernier cas

$$s_l(u) = \int_0^{1-u} l^{-1/2}(z+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}z = 2l^{-1/2}\left[1-u^{1/2}\right], \tag{2.178}$$

donc

$$0 \leq s_l(u) \leq 2l^{-1/2}\left[1-(1-l)^{1/2}\right] \leq 2. \tag{2.179}$$

D'un autre côté

$$0 \leq r_l(u) = -\log u \leq -\log(1-l) \leq \log 2, \tag{2.180}$$

donc

$$-\log 2 \leq s_l(u) - r_l(u) \leq 2. \tag{2.181}$$

■

2.6.4 Démonstration du Lemme 2.27

Démonstration du Point 1. La fonction r_l étant paire et à support dans $[-1,1]$, nous sommes ramenés à prouver que

$$\int_0^1 r_l(t)\cos(tu)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1-\cos u}{u^2}. \tag{2.182}$$

Par définition de r_l l'intégrale dans le membre de gauche ci-dessus est égale à

$$\int_0^l \left(1-\log l - \frac{t}{l}\right)\cos(tu)\,\mathrm{d}t - \int_l^1 (\log t)\cos(tu)\,\mathrm{d}t\ ; \tag{2.183}$$

et en faisant plusieurs intégrations par parties cette expression se récrit

$$\frac{1}{u}\left[\frac{1}{ul} - \frac{\cos u}{u} - \int_{ul}^u \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\right]. \tag{2.184}$$

Or $\int_{ul}^u \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{ul} - \frac{1}{u}$, donc au final on obtient bien l'inégalité (2.182).

Démonstration du Point 2. D'après le Point 1, la fonction $\hat{r_l}$ est positive. On applique le Théorème de Krein-Achieser (Théorème 2.26, avec $\sigma = 1$) à

cette fonction : il existe une fonction $d_l \in E_{1/2}$, dont la restriction à $\mathbb{R}$ est de carré intégrable et telle que

$$\hat{r_l}(x) = |d_l(x)|^2 \tag{2.185}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration du Point 3. D'après le Point 2 et le Théorème de Paley-Wiener (Théorème 2.25), il existe une fonction $f_l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support dans $[-1/2, 1/2]$ telle que $d_l = \mathcal{F}(f_l)$. Par ailleurs $\mathcal{F}(\upsilon_l) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\tilde{d_l}\right)\right) = d_l$, donc $\upsilon_l = f_l$ puisque ces deux fonctions ont la même transformée de Fourier-Plancherel. Cela prouve que υ_l est à support dans $[-1/2, 1/2]$. Quant à l'égalité $\upsilon_l * \tilde{\upsilon_l} = r_l$, elle se déduit également du Point 2 en utilisant la transformée de Fourier-Plancherel : en effet, d'un côté on a

$$\mathcal{F}(\upsilon_l * \tilde{\upsilon_l}) = \mathcal{F}(\upsilon_l)\,\mathcal{F}(\tilde{\upsilon_l}) = \mathcal{F}(\upsilon_l)\,\overline{\mathcal{F}(\upsilon_l)} = |\mathcal{F}(\upsilon_l)|^2 = |d_l|^2 \ ; \tag{2.186}$$

et d'un autre côté

$$\mathcal{F}(r_l) = \hat{r_l} = |d_l|^2 . \tag{2.187}$$

Rassemblant ces deux égalités, on obtient $\mathcal{F}(\upsilon_l * \tilde{\upsilon_l}) = \mathcal{F}(r_l)$, et donc $\upsilon_l * \tilde{\upsilon_l} = r_l$. ■

Chapitre 3

Marche aléatoire fractionnaire multifractale (MFRW)

On s'intéresse dans ce chapitre à la limite éventuelle (lorsque l tend vers 0) de la suite de processus

$$l^{f(\alpha,\kappa)} \int_0^t e^{\alpha\omega_l(s)} \mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{3.1}$$

Dans cette formule ω_l désigne la cascade de Bacry et Muzy (Eq. (1.39)), B^κ est le fBm d'indice de Hurst $H = \kappa + 1/2$, $\alpha > 0$ est un paramètre et le terme $f(\alpha, \kappa)$ est « chargé d'assurer la convergence en loi » de la suite de processus ainsi définie.

Les limites, lorsqu'elles existent et lorsqu'elles sont multifractales au sens de la Définition 1.1, sont appelées *marches aléatoires fractionnaires multifractales* (MFRW).

L'étude de ces processus a été initiée par Bacry et Muzy : dans [8, 38] ils ont étudié en détail le cas $\kappa = 0$ (c'est-à-dire le cas où B^κ est le mouvement Brownien standard) et ont amorcé l'étude du cas $\kappa \neq 0$, mettant en évidence le fait qu'il allait falloir apporter dans ce cas des réponses à plusieurs questions mathématiques non évidentes. Ces réponses ont été données dans la littérature récente lorsque $\kappa > 0$; d'abord par Ludena [31], puis par Abry et al. [1].

Dans ce chapitre 3 on s'intéresse au cas $\kappa < 0$: on étudie la suite de processus

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)} \mathrm{d}B^\kappa(s), t \in [0,1] \tag{3.2}$$

(avec $\kappa < 0$), et on prouve qu'elle converge en loi dans $C[0,1]$ vers un processus limite multifractal.

On définit dans le sous-chapitre 3.1 l'intégrale fractionnaire $\int f(s)\,\mathrm{d}B^{\kappa}(s)$; on s'intéresse ensuite au processus gaussien $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B^{\kappa}(s)$ (définition et condition d'existence d'une modification continue). Après une discussion essentiellement consacrée à des problèmes de mesurabilité, nous sommes naturellement conduits dans le sous-chapitre 3.2 à définir X_l^{κ} comme la limite dans L^2 d'une suite de processus « simples ». On établit ensuite le résultat principal de la thèse : on démontre (sous certaines conditions) la convergence en loi du processus X_l^{κ} vers un processus limite multifractal X^{κ}. Le sous-chapitre 3.3 est consacré à l'étude d'une version affine par morceaux de X^{κ} et à des simulations numériques ; le sous-chapitre 3.4 contient les démonstrations des lemmes du chapitre 3.

Le travail mené ici reprend l'article [44], avec tout de même de nombreux compléments – en particulier concernant les questions de mesurabilité.

On a déjà présenté en détail la cascade ω_l (Eq. (1.39)) et la construction de la MRM dans le sous-chapitre 1.3. De façon à faciliter la lecture du chapitre 3, on rappelle ici les étapes principales dans la définition de ω_l :

- **Mesure de contrôle.** μ est la mesure définie sur $S^+ = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in]0,\infty[\}$ par
$$\mathrm{d}\mu(x,y) = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}. \tag{3.3}$$
- **Choix d'une loi infiniment divisible et définition de φ.** W est une variable aléatoire infiniment divisible dont la fonction caractéristique est donnée par
$$\mathrm{E}e^{iqW} = e^{\varphi(q)} = e^{imq + \int \frac{e^{iqx}-1-iq\sin x}{x^2}\nu(\mathrm{d}x)} \tag{3.4}$$
(m est un réel, ν est la mesure de Lévy associée à W ; on suppose dans la suite que ν n'est pas dégénérée).
- **Mesure aléatoire infiniment divisible.** P est la mesure aléatoire infiniment divisible indexée par les boréliens de S^+ définie par
$$\mathrm{E}e^{iqP(A)} = e^{\varphi(q)\mu(A)} \tag{3.5}$$
pour tout $q \in \mathbb{R}$, A borélien de S^+.
- **Cône multifractal.** Pour tout couple (t,l) dans $\mathbb{R}\times]0,\infty[$, $A_l(t)$ est le sous-ensemble de S^+ défini par
$$A_l(t) = \{(x,y), l \le y, |x-t| \le \inf(y/2, 1/2)\}. \tag{3.6}$$

- **Cascade multifractale.** La cascade de Bacry et Muzy est le processus
$$\omega_l(t) = P(A_l(t)). \tag{3.7}$$
- **Définition de ψ.** La fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est définie par
$$\mathrm{E}e^{qP(A)} = e^{\psi(q)\mu(A)} \tag{3.8}$$
pour tout A tel que $\mu(A) < \infty$.
- **Conditions sur ψ.** On peut étendre la définition de φ de telle sorte que $\psi(q) = \varphi(-iq)$. On suppose dans toute la suite que ψ est définie sur un intervalle de la forme $[0, q_{max}[$, avec $q_{max} > 1$ et que $\psi(1) = 0$.

3.1 Intégration par rapport au fBm et construction de processus gaussiens fractionnaires

Ce sous-chapitre est basé sur les articles de Pipiras et Taqqu [45, 46] et sur le livre de Samko et al. [50]. On fixe à présent un réel $0 < H < 1/2$ et on pose $\kappa = H - 1/2$; le fBm B_H est noté B^κ.

3.1.1 Intégration par rapport au fBm

On va rappeler dans cette section la définition de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport au fBm :
$$\int f(x)\mathrm{d}B^\kappa(x). \tag{3.9}$$

Parmi toutes les définitions possibles de l'intégrale (3.9), nous avons choisi de suivre celle de Pipiras et Taqqu [45, 46]. Leur méthode reprend le procédé de construction de l'intégrale de Wiener [1] : on commence par définir l'intégrale des fonctions simples, puis on prolonge la construction à toutes les fonctions f appartenant à la classe [2]
$$\mathcal{L}^\kappa = \left\{ f : f = I_-^{-\kappa}\phi, \phi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \right\}, \tag{3.10}$$
l'intégrale fractionnaire I_-^η étant définie pour $0 < \eta < 1$ (quand cela a un sens) par
$$(I_-^\eta g)(s) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \int_{\mathbb{R}} g(u)(s-u)_-^{\eta-1}\mathrm{d}u. \tag{3.11}$$

1. On entend par intégrale de Wiener l'intégrale de fonctions déterministes par rapport au mouvement Brownien standard.

2. On remarquera que, contrairement à ce qui se passe avec l'intégrale de Wiener, l'ensemble des fonctions intégrables n'est pas l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable.

On donne ci-dessous les grandes lignes de la construction du processus $\left\{\int f(x)\mathrm{d}B^\kappa(x)\right\}_{f\in\mathcal{L}^\kappa}$ – on renvoie le lecteur aux articles de Pipiras et Taqqu pour une présentation plus détaillée.

Le fBm admet une représentation sous forme de moyenne mobile par rapport au mouvement Brownien standard :

$$\{B^\kappa(t)\}_t =^d \left\{\frac{1}{c_1(\kappa)}\int_{\mathbb{R}}\left((t-s)_+^\kappa-(-s)_+^\kappa\right)\mathrm{d}B(s)\right\}_t, \tag{3.12}$$

avec $c_1(\kappa)=\left(\int_0^\infty\left((1+s)^\kappa-s^\kappa\right)^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2\kappa+1}\right)^{1/2}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$(t-s)_+^\kappa-(-s)_+^\kappa=\Gamma(\kappa+1)\big(\mathbf{D}_-^{-\kappa}\mathbf{1}_{[0,t[}\big)(s), \tag{3.13}$$

où $\mathbf{1}_{[0,t[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,t[$ et $\mathbf{D}_-^\eta f$ $(0<\eta<1)$ est la dérivée fractionnaire de Marchaud :

$$\big(\mathbf{D}_-^\eta f\big)(s)=\frac{\eta}{\Gamma(-\eta+1)}\int_0^\infty\frac{f(s)-f(s+u)}{u^{\eta+1}}\mathrm{d}u. \tag{3.14}$$

(Γ est la fonction d'Euler.) On a donc

$$\begin{aligned}\{B^\kappa(t)\}_t &=^d \left\{\frac{1}{c_1(\kappa)}\int_{\mathbb{R}}\big((t-s)_+^\kappa-(-s)_+^\kappa\big)\mathrm{d}B(s)\right\}_t\\ &=^d \left\{\frac{\Gamma(\kappa+1)}{c_1(\kappa)}\int_{\mathbb{R}}\big(\mathbf{D}_-^{-\kappa}\mathbf{1}_{[0,t[}\big)(s)\mathrm{d}B(s)\right\}_t,\end{aligned} \tag{3.15}$$

ce qui nous amène à la définition :

$$\left\{\int f(s)\mathrm{d}B^\kappa(s)\right\}_f =^d \left\{\frac{\Gamma(\kappa+1)}{c_1(\kappa)}\int_{\mathbb{R}}\big(\mathbf{D}_-^{-\kappa}f\big)(s)\mathrm{d}B(s)\right\}_f. \tag{3.16}$$

Le raisonnement qui précède peut être formalisé, à condition de restreindre la classe des fonctions intégrables : en utilisant l'identité $\mathbf{D}_-^\eta I_-^\eta\phi=\phi$, valable pour toute fonction $\phi\in\mathbf{L}^2$, on peut montrer que $\mathcal{L}^\kappa$, muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle_\kappa=\frac{\Gamma(\kappa+1)^2}{c_1(\kappa)^2}\int_{\mathbb{R}}\big(\mathbf{D}_-^{-\kappa}f\big)(s)\big(\mathbf{D}_-^{-\kappa}g\big)(s)\mathrm{d}s \tag{3.17}$$

et de la norme associée

$$\begin{aligned}\|f\|_\kappa^2&=\frac{\Gamma(\kappa+1)^2}{c_1(\kappa)^2}\int_{\mathbb{R}}\big(\mathbf{D}_-^{-\kappa}f\big)^2(s)\mathrm{d}s\\ &=\frac{\Gamma(\kappa+1)^2}{c_1(\kappa)^2}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty\frac{f(s)-f(s+u)}{u^{-\kappa+1}}\mathrm{d}u\right)^2\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{3.18}$$

est un espace complet. L'ensemble des fonctions simples est dense dans $(\mathcal{L}^\kappa, \|.\|_\kappa)$; il est donc possible de définir l'intégrale par rapport au fBm de la façon suivante : pour toute fonction simple de la forme $f(s) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)$, on pose

$$\int f(s)\mathrm{d}B^\kappa(s) := \sum_{i=1}^n a_i \left[B^\kappa(t_{i+1}) - B^\kappa(t_i)\right]. \tag{3.19}$$

Toute fonction $g \in \mathcal{L}^\kappa$ étant la limite de fonctions simples g_n, on définit (sans qu'il y ait d'ambiguïté)

$$\int g(s)\mathrm{d}B^\kappa(s) := \lim_{\mathbf{L}^2} \int g_n(s)\mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{3.20}$$

Avec cette définition, l'application $f \mapsto \int f(s)\mathrm{d}B^\kappa(s)$ est linéaire. De plus, le processus $\left\{\int f(s)\mathrm{d}B^\kappa(s)\right\}_{f\in\mathcal{L}^\kappa}$ est le processus gaussien centré de covariance

$$\left\langle \int f(s)\mathrm{d}B^\kappa(s), \int g(s)\mathrm{d}B^\kappa(s) \right\rangle = \langle f, g\rangle_\kappa. \tag{3.21}$$

3.1.2 Processus gaussiens fractionnaires

Le titre de cette section fait référence aux processus gaussiens de la forme $\left\{\int_0^t g(x)\mathrm{d}B^\kappa(x)\right\}_t$ pour une fonction donnée $g \in \mathcal{L}^\kappa$. On donne une condition suffisante pour qu'un tel processus existe et pour qu'il possède une modification continue.

Soit $0 < \gamma < 1$. On définit

$$\mathcal{L}^{-\gamma} = \left\{f : f = I_-^\gamma \phi, \phi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})\right\} \tag{3.22}$$

(I_-^γ et $\mathbf{D}_-^\gamma$ sont respectivement définis par les équations (3.11) et (3.14)). On définit également

$$\left(|\mathbf{D}|_-^\gamma f\right)(s) = \frac{\gamma}{\Gamma(-\gamma+1)} \int_0^\infty \frac{|f(s) - f(s+u)|}{u^{\gamma+1}}\mathrm{d}u \ ; \tag{3.23}$$

et pour $0 \le t < t'$ la quantité

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{t,t'}^\gamma f = &\int_0^{t'-t}\int_0^{t'-t} u^{-\gamma-1}v^{-\gamma-1} \\ &\times \int_t^{t'-\max(u,v)} |f(s) - f(s+u)|\,|f(s) - f(s+v)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Le lemme qui suit est en partie basé sur des résultats ou des méthodes du calcul fractionnaire empruntés au livre de Samko et al. [50]. Il est démontré dans le sous-chapitre 3.4.

Lemme 3.1 *Soit f une fonction de carré intégrable et dont le support est inclus dans $[0,1]$. On se donne deux réels $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1/2$. On a les résultats suivants (certaines quantités apparaissant ci-dessous peuvent être infinies) :*

1. *Si $|\mathbf{D}|_-^{\gamma_1} f$ est de carré intégrable, alors f appartient à $\mathcal{L}^{-\gamma_1}$.*
2. *Il existe une constante universelle finie $c(\gamma_1, \gamma_2)$ telle que*

$$|\mathbf{D}|_-^{\gamma_1} f \leq c(\gamma_1, \gamma_2) |\mathbf{D}|_-^{\gamma_2} f. \tag{3.25}$$

3. *Soit $0 \leq t < t' \leq 1$. Il existe une constante universelle finie $a(\gamma_1)$ telle que*

$$\left\| |\mathbf{D}|_-^{\gamma_1} \left(f \mathbf{1}_{[t,t'[} \right) \right\|_2^2 \leq a(\gamma_1) \left[\mathbf{N}_{t,t'}^{\gamma_1} f + \|f\|_\infty^2 \left(t' - t\right)^{-2\gamma_1 + 1} \right]. \tag{3.26}$$

4. *Soit $0 \leq t < t' \leq 1$. Il existe une constante universelle finie $b(\gamma_1, \gamma_2)$ telle que*

$$\left\| |\mathbf{D}|_-^{\gamma_1} \left(f \mathbf{1}_{[t,t'[} \right) \right\|_2^2 \leq b(\gamma_1, \gamma_2) \left(t' - t\right)^{2\gamma_2 - 2\gamma_1} \left[\left\| |\mathbf{D}|_-^{\gamma_2} f \right\|_2^2 + \|f\|_\infty^2 \right]. \tag{3.27}$$

On énonce à présent le résultat principal de cette section :

Propriété 3.2 *Soit κ et γ deux nombres réels tels que $0 < -\kappa < \gamma < 1/2$. On suppose que $g \mathbf{1}_{[0,1]} \in \mathbf{L}^\infty$ et que $\mathbf{N}_{0,1}^\gamma g < \infty$. Alors pour $t \in [0,1]$, $g \mathbf{1}_{[0,t[}$ appartient à $\mathcal{L}^\kappa$. On peut donc définir le processus gaussien centré indexé par $[0,1]$*

$$X_g(t) = \int_0^t g(s) \mathrm{d}B^\kappa(s) := \int g(s) \mathbf{1}_{[0,t[}(s) \mathrm{d}B^\kappa(s), \tag{3.28}$$

l'intégrale ayant été définie dans la section 3.1.1. De plus le processus X_g admet une modification continue.

Démonstration. Le support de $g \mathbf{1}_{[0,t[}$ est inclus dans $[0,t[$, donc il est évident que $\mathbf{N}_{0,t}^\gamma \left(g \mathbf{1}_{[0,t[} \right) = \mathbf{N}_{0,t}^\gamma g \leq \mathbf{N}_{0,1}^\gamma g$. D'après les hypothèses de la propriété et le Point 3 du Lemme 3.1 $|\mathbf{D}|_-^\gamma \left(g \mathbf{1}_{[0,t[} \right) \in \mathbf{L}^2$. Donc d'après le Point 2 de ce même lemme $|\mathbf{D}|_-^{-\kappa} \left(g \mathbf{1}_{[0,t[} \right) \in \mathbf{L}^2$; et finalement, d'après le Point 1, $g \mathbf{1}_{[0,t[} \in \mathcal{L}^\kappa$. Il s'ensuit que l'intégrale $\int g(s) \mathbf{1}_{[0,t[}(s) \mathrm{d}B^\kappa(s)$ est bien définie.

Le fait que le processus X_g admette une modification continue est la conséquence du Point 4 du Lemme 3.1 et du critère de Kolmogorov pour les processus gaussiens. En effet, par linéarité de l'intégrale,

$$X_g(t') - X_g(t) = \int g(s)\mathbf{1}_{[t,t'[}(s)\mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{3.29}$$

Par conséquent

$$\mathrm{E}\left|X_g(t') - X_g(t)\right|^2 = \left\|g\mathbf{1}_{[t,t'[}\right\|_\kappa^2 = \frac{\Gamma(\kappa+1)^2}{c_1(\kappa)^2}\left\|\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(g\mathbf{1}_{[t,t'[}\right)\right\|_2^2 \ ; \tag{3.30}$$

donc en vertu du Point 4 du Lemme 3.1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left|X_g(t') - X_g(t)\right|^2 &\leq \frac{\Gamma(\kappa+1)^2}{c_1(\kappa)^2}\left\||\mathbf{D}|_-^{-\kappa}\left(g\mathbf{1}_{[t,t'[}\right)\right\|_2^2 \\ &\leq d\left(\kappa,\gamma,g\right)\left(t'-t\right)^{2\gamma+2\kappa}\end{aligned} \tag{3.31}$$

pour une certaine constante $d\left(\kappa,\gamma,g\right)$. L'existence d'une modification continue de X_g découle de cette dernière inégalité. ■

3.1.3 Vers une définition de X_l^κ

Notre but est de définir un processus de la forme (voir Eq. (3.1))

$$X_l^\kappa(t) = l^{f(\alpha,\kappa)}\int_0^t e^{\alpha\omega_l(s)}\mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{3.32}$$

Remarquons pour commencer que le choix de la constante α a un caractère quelque peu artificiel : en effet, les deux étapes dans la construction de ω_l sont [3] :

1. La donnée d'une variable aléatoire infiniment divisible W dont la fonction caractéristique s'écrit $\mathrm{E}e^{iqW} = e^{\varphi(q)}$.
2. La définition proprement dite de ω_l par $\omega_l(t) = P\left(A_l(t)\right)$, où P est la mesure aléatoire de fonction caractéristique $\mathrm{E}e^{iqP(A)} = e^{\varphi(q)\mu(A)}$.

On impose aussi la condition $\mathrm{E}e^{P(A)} = 1$ (puisque $\psi(1) = 0$). Remplacer ω_l par $\tilde{\omega}_l = \alpha\omega_l$ revient donc à remplacer P par $\tilde{P} = \alpha P - \psi(\alpha)\mu$; autrement dit à remplacer la fonction φ par $\tilde{\varphi}(q) = \varphi(q\alpha) - q\varphi(\alpha)$. [4] Evidemment, ces

3. On renvoie le lecteur aux rappels faits au début du chapitre 3.

4. On peut aussi dire que l'on remplace ψ par $\tilde{\psi}(q) = \psi(q\alpha) - q\psi(\alpha)$, ou la variable W par $\tilde{W} = \alpha W - \psi(\alpha)$.

changements affectent la valeur du terme $l^{f(\alpha,\kappa)}$ en facteur dans (3.32). Mais au final le fait de changer la valeur de α ne revient en somme qu'à changer de loi infiniment divisible ; le modèle mathématique construit ne s'en trouve donc pas enrichi [5].

Pour la raison évoquée ci-dessus, nous faisons à partir de maintenant un choix définitif de α ; et pour la simplicité des formules qui en découle, nous choisissons $\alpha = 1/2$. La convergence en loi de X_l^κ n'est alors possible qu'en prenant (à une constante multiplicative près indépendante de l) $f(\alpha,\kappa) = -\kappa$. On étudie donc finalement

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)} \mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{3.33}$$

L'intégrale ci-dessus est l'intégrale d'une fonction aléatoire par rapport au fBm. Ludena [31], puis Abry et al. [1], ont donné des définitions différentes de cet objet mathématique lorsque $\kappa > 0$. Dans le cas $\kappa < 0$, qui est celui qui nous intéresse ici, on discute ci-dessous des démarches de Ludena et d'Abry et al. et de leur éventuelle validité.

Si l'on suivait la démarche de Ludena, on pourrait considérer X_l^κ comme un processus conditionnellement gaussien centré, dont la covariance conditionnellement à ω_l serait

$$\begin{aligned}\Gamma_l(t,t') &= l^{-2\kappa}\langle e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)}\mathbf{1}_{[0,t[}, e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)}\mathbf{1}_{[0,t'[}\rangle_\kappa \\ &= \frac{\Gamma(\kappa+1)^2}{c_1(\kappa)^2} l^{-2\kappa} \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)}\mathbf{1}_{[0,t[}\right)\right)(s) \left(\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)}\mathbf{1}_{[0,t'[}\right)\right)(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.34}$$

(la dérivée fractionnaire $\mathbf{D}_-^{-\kappa}$ est définie par (3.14)). On verra dans le sous-chapitre suivant que p.s., pour tout $t \in [0,1]$, on a $e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)}\mathbf{1}_{[0,t[} \in \mathcal{L}^\kappa$ (on rappelle que $\mathcal{L}^\kappa$, définie dans la section 3.1.1, est la classe des fonctions intégrables par rapport au fBm) ; la covariance conditionnelle (3.34) est donc bien définie. Malheureusement, les techniques de martingales utilisées par Ludena lorsque $\kappa > 0$ pour mettre en évidence un processus limite X^κ ne fonctionnent vraisemblablement plus ici : il semble que la covariance $\Gamma_l(t,t')$ diverge lorsque l tend vers 0, interdisant de considérer la limite escomptée X^κ et vouant l'étude du processus X_l^κ ainsi défini à l'échec [6].

5. Cette discussion sur le choix de α a déjà été faite par Abry et al. (section III.B.7 de [1]).

6. Les techniques de martingales de Kahane [26] sont essentielles pour prouver les convergences des processus dans les articles consacrés aux mesures et aux marches aléatoires multifractales [8, 38, 31, 1]. Une des difficultés du cas $\kappa < 0$ est que ces techniques semblent alors être inapplicables.

Si l'on suivait la démarche d'Abry et al., une deuxième possibilité pour définir X_l^κ consisterait à se donner deux processus indépendants ω_l et B^κ sur un même espace probabilisé Ω et à considérer, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)(\omega)} \mathbf{1}_{[0,t[}(s)\, \mathrm{d}B^\kappa(s)(\omega), \tag{3.35}$$

l'intégrale par rapport au fBm étant celle dont on a rappelé la définition dans la section 3.1.1. Comme on l'a déjà dit quelques lignes plus haut, on verra dans le sous-chapitre suivant que p.s., pour tout $t \in [0,1]$, $e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)}\mathbf{1}_{[0,t[} \in \mathcal{L}^\kappa$; il s'ensuit que p.s., pour tout $t \in [0,1]$, l'équation (3.35) a un sens.

Mais que dire de la mesurabilité de X_l^κ ainsi défini ? Certes, les applications $\omega \mapsto \omega_l$ et $\omega \mapsto \int f \mathrm{d}B^\kappa$ sont bien mesurables ; mais à mon sens on ne peut rien en conclure concernant X_l^κ – dont la mesurabilité est pourtant un pré-requis indispensable à son étude.

Revenons donc en arrière pour voir ce qui se cache derrière l'équation (3.35). Par définition de l'intégrale par rapport au fBm, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^\kappa$, $\int f \mathrm{d}B^\kappa$ est la limite dans L^2 d'une suite d'intégrales de fonctions simples $\int f_n \mathrm{d}B^\kappa$. En particulier, $\int f \mathrm{d}B^\kappa$ est la limite au sens p.s. d'une sous-suite convergente :

$$\int f \mathrm{d}B^\kappa(\omega) = \lim \int f_{k_n} \mathrm{d}B^\kappa(\omega), \text{ p.s. } \omega. \tag{3.36}$$

Mais si l'on reprend (3.35), les choses se compliquent : le rôle de la fonction f étant joué par $e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)(\omega)}\mathbf{1}_{[0,t[}$, les fonctions simples f_n sont différentes pour chaque valeur de ω ; finalement on n'arrive plus vraiment à appréhender (3.35) – et encore moins à voir que cela définit une variable aléatoire.

Pour éviter ce problème, une troisième approche serait possible : on définirait ω_l sur un premier espace probabilisé Ω_1, puis l'intégrale $\left\{\int f \mathrm{d}B^\kappa\right\}_{f \in \mathcal{L}^\kappa}$ sur un deuxième espace probabilisé Ω_2 et on considèrerait

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)(\omega_1)} \mathbf{1}_{[0,t[}(s)\, \mathrm{d}B^\kappa(s)(\omega_2). \tag{3.37}$$

Avec cette nouvelle définition, ω_1 étant fixé, si l'on pose $f = e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)(\omega_1)}\mathbf{1}_{[0,t[}$, l'intégrale $\int f \mathrm{d}B^\kappa(\omega_2)$ est la limite au sens presque sûr des intégrales $\int f_{k_n} \mathrm{d}B^\kappa(\omega_2)$.

Mais à nouveau se pose le problème de la mesurabilité de X_l^κ : certes le processus est mesurable par rapport à ω_2 lorsqu'on fixe un ω_1 ; mais cela n'assure pas la mesurabilité par rapport au couple (ω_1, ω_2).[7]

7. Nous ne sommes pas ici dans la situation du Théorème de Fubini – la mesurabilité par rapport au couple (ω_1, ω_2) entraîne la mesurabilité par rapport à ω_2 lorsque ω_1 est fixé ; mais dans la situation inverse.

Nous proposons la solution suivante pour contourner tous ces problèmes : d'après le Théorème 3.3 de [45], l'ensemble des fonctions simples est dense dans $\mathcal{L}^\kappa$ et cet espace est complet ; il possède donc une base dénombrable de fonctions simples (b_i). La définition définitive de X_l^κ est

$$X_l^\kappa(t) = \lim_{n\to\infty} l^{-\kappa} \sum_{i=1}^{n} \langle e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)(\omega_1)} \mathbf{1}_{[0,t[}(.), b_i\rangle_\kappa \int b_i \mathrm{d}B^\kappa(\omega_2), \tag{3.38}$$

la limite étant prise dans $\mathrm{L}^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.[8] Autrement dit, si l'on note π_n la projection sur $\mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_n)$, X_l^κ est défini par

$$X_l^\kappa(t) = \lim_{n\to\infty} l^{-\kappa} \int \pi_n \left(e^{\frac{1}{2}\omega_l(.)(\omega_1)} \mathbf{1}_{[0,t[}(.) \right) \mathrm{d}B^\kappa(s)(\omega_2). \tag{3.39}$$

Une présentation rigoureuse (consistance de la définition, preuve de la mesurabilité, etc.) est donnée dans le sous-chapitre suivant.

3.2 Résultats principaux

Comme dans le sous-chapitre 3.1, on pose $\kappa = H - 1/2$ et on travaille avec le fBm d'indice $0 < H < 1/2$. On note encore B^κ à la place de B_H.

On considère une modification càdlàg du processus ω_l (Eq. (1.39)), définie sur un espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathrm{P}_1)$ (une telle modification existe d'après la discussion p.454 de [8]) et on pose

$$Y_l(s) = e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)}. \tag{3.40}$$

D'après le Théorème 3.3 de [45], l'ensemble des fonctions simples est dense dans $\mathcal{L}^\kappa$ et cet espace est un espace de Hilbert ; il existe donc une base orthonormale (b_i) de fonctions simples. Pour ces fonctions, on définit $\int b_i \mathrm{d}B^\kappa$ comme dans la section 3.1.1 (Eq. (3.19)) sur un deuxième espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_2)$. En particulier, ω_l et B^κ sont indépendants.

Le processus principal $\{X_l^\kappa(t)\}_{t\in[0,1]}$ est défini sur l'espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = \left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \bigotimes \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2 \right) \tag{3.41}$$

par la formule

$$X_l^\kappa(t)(\omega_1, \omega_2) = \lim_{n\to\infty} l^{-\kappa} \sum_{i=1}^{n} \langle Y_l(.)(\omega_1) \mathbf{1}_{[0,t[}(.), b_i\rangle_\kappa \int b_i \mathrm{d}B^\kappa(\omega_2), \tag{3.42}$$

8. En « séparant » ω_1 et ω_2, on règle enfin le problème de la mesurabilité de X_l^κ.

la limite étant prise dans $\mathrm{L}^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Pour simplifier on utilise la notation

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int_0^t Y_l(s) \mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{3.43}$$

On va d'abord prouver que ce processus est bien défini et qu'il admet une modification continue (section 3.2.1). Ensuite on démontrera que la suite de processus X_l^κ converge en loi dans $C[0,1]$ vers un processus limite multifractal (section 3.2.2).

A partir de maintenant, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ sera toujours l'espace défini par (3.41) et l'expression $\mathrm{E}X$ (resp. $\mathrm{E}_1 X$, $\mathrm{E}_2 X$) désignera l'intégrale d'une variable aléatoire X par rapport à la mesure P (resp. P_1, P_2).

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres dyadiques rationnels apparaîtra souvent dans cette section et la suivante. On rappelle qu'il s'agit des nombres de la forme $p/2^j$ avec $p \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.3 *Par hypothèse, on travaille avec une modification càdlàg de Y_l. Par conséquent, les expressions du type $\mathrm{E}_1 \left\| Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_\infty^2$, $\mathrm{E}_1 \mathbf{N}_{0,1}^\gamma Y_l$, etc., qui apparaissent dans la suite du texte sont bien définies (il n'y a pas de problème de mesurabilité).*

3.2.1 Propriétés de base de Y_l et de X_l^κ

Dans cette section, on fixe un réel l dans l'intervalle $]0,1[$. On fera souvent usage du lemme suivant dans les démonstrations.

Lemme 3.4 *Soit $0 < \gamma < 1/2$ et soit Y_l le processus défini par (3.40). Alors $\mathrm{E}_1 \left\| Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_\infty^2 < \infty$ et $\mathrm{E}_1 \mathbf{N}_{0,1}^\gamma Y_l < \infty$ ($\mathbf{N}_{0,1}^\gamma$ est défini par (3.24)).*

Le Lemme 3.4 est démontré dans le sous-chapitre 3.4. La Propriété 3.5 ci-dessous affirme que (3.43) est bien défini et qu'il peut être considéré, P_1-p.s., comme un processus gaussien lorsqu'on le restreint aux nombres dyadiques rationnels. Ce résultat nous permettra d'utiliser plus loin certaines techniques gaussiennes dans les démonstrations.

Propriété 3.5 *L'équation (3.43) définit un processus sur l'intervalle $[0,1]$, mesurable par rapport à la tribu cylindrique*[9]*. De plus, pour P_1- presque tout ω_1, la restriction de ce processus à l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres dyadiques rationnels a la même loi que le processus gaussien $l^{-\kappa} \int_0^t Y_l(s)(\omega_1) \mathrm{d}B^\kappa(s)$, défini sur $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathrm{P}_2)$ comme dans la section 3.1.1.*

9. On rappelle que la tribu cylindrique est la plus petite tribu qui rend mesurables les applications coordonnées.

Démonstration Nous allons prouver que :

1. L'expression

$$X_{l,n}^{\kappa}(t)(\omega_1,\omega_2) := l^{-\kappa}\sum_{i=1}^{n}\left\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.),b_i\right\rangle_{\kappa}\int b_i \mathrm{d}B^{\kappa}(\omega_2) \quad (3.44)$$

   a un sens et définit une variable aléatoire.

2. $X_{l,n}^{\kappa}(t)$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)$ lorsque n tend vers l'infini.

3. Pour P_1- presque tout ω_1, $\{X_l^{\kappa}(t)(\omega_1,.)\}_{t\in\mathbb{D}\cap[0,1]}$ est un processus gaussien centré de covariance

$$l^{-2\kappa}\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.),Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t'[}(.)\rangle_{\kappa}. \quad (3.45)$$

Démonstration du Point 1. D'après la Propriété 3.2 et le Lemme 3.4, P_1 – p.s., pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.)$ appartient à $\mathcal{L}^{\kappa}$. Par conséquent, P_1 – p.s., $\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.),b_i\rangle_{\kappa}$ a un sens (sur le sous-ensemble de P_1-mesure nulle sur lequel on a aucune garantie d'appartenance de $Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.)$ à $\mathcal{L}^{\kappa}$ pour tout t, on remplace cette variable aléatoire par 0). De ce fait, pour tout couple (ω_1,ω_2), pour tout $t\in[0,1]$, $X_{l,n}^{\kappa}(t)(\omega_1,\omega_2)$ est bien défini. Enfin, le processus Y_l est càdlàg donc $X_{l,n}^{\kappa}(t)$, qui s'écrit comme somme et produit d'applications mesurables par rapport à $\mathcal{F}_1\bigotimes\mathcal{F}_2$, est elle-même mesurable par rapport à cette tribu pour chaque valeur de t.

Démonstration du Point 2. D'après le Point 3 du Lemme 3.1 et le Lemme 3.4, $\mathrm{E}_1\left\|Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.)\right\|_{\kappa}^2$ est finie. On peut donc considérer

$$P_{n,m} = \mathrm{E}X_{l,n}^{\kappa}(t)X_{l,m}^{\kappa}(t). \quad (3.46)$$

Les (b_i) formant une base orthonormale, $P_{n,m}$ se récrit

$$P_{n,m} = l^{-2\kappa}\mathrm{E}_1\sum_{i=1}^{\min(m,n)}\left|\left\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.),b_i\right\rangle_{\kappa}\right|^2. \quad (3.47)$$

En remarquant que $P_{n,n}=P_{n,m}\leq P_{m,m}$ pour $m\geq n$ et en utilisant le Théorème de Beppo Levi, on voit que $P_{n,m}$ converge vers la quantité finie $l^{-2\kappa}\mathrm{E}_1\left\|Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.)\right\|_{\kappa}^2$ lorsque n et m tendent vers l'infini. Il s'ensuit que $X_{l,n}^{\kappa}(t)$ converge dans $\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration du Point 3. Pour tout t, la variable aléatoire $X_l^{\kappa}(t)$ est définie comme la limite d'une sous-suite p.s. convergente $X_{l,p_n}^{\kappa}(t)$. L'ensemble $\mathbb{D}$ étant dénombrable, pour P_1- presque tout ω_1, pour tous $t_1,\ldots,t_p$ dans

$\mathbb{D}$, le vecteur $\left(X_l^\kappa(t_1)(\omega_1,.),\ldots,X_l^\kappa(t_p)(\omega_1,.)\right)$ est défini sur $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mathrm{P}_2)$ comme la limite d'une sous-suite P_2-p.s. convergente

$$\left(X_{l,m_n}^\kappa(t_1)(\omega_1,.),\ldots,X_{l,m_n}^\kappa(t_p)(\omega_1,.)\right). \tag{3.48}$$

Or ce vecteur est, P_1-p.s., le vecteur gaussien centré de covariance

$$l^{-2\kappa}\sum_{i=1}^{m_n}\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t_j[}(.),b_i\rangle_\kappa\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t_k[}(.),b_i\rangle_\kappa. \tag{3.49}$$

D'après l'Identité de Parseval, cette expression converge vers

$$l^{-2\kappa}\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t_j[}(.),Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t_k[}(.)\rangle_\kappa. \tag{3.50}$$

Il résulte de ce qui précède que pour P_1- presque tout ω_1, $\{X_l^\kappa(t)(\omega_1,.)\}_{t\in\mathbb{D}}$ est un processus gaussien centré de covariance

$$l^{-2\kappa}\langle Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t[}(.),Y_l(.)(\omega_1)\mathbf{1}_{[0,t'[}(.)\rangle_\kappa. \tag{3.51}$$

■

L'existence d'une modification continue pour le processus X_l^κ (Propriété 3.8) est basée sur les deux lemmes suivants. Le premier de ces lemmes donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus stochastique admette une modification continue sur l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres dyadiques rationnels. Le deuxième lemme permet de « contrôler » les nombres de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{D}$. Chacun de ces deux lemmes est démontré dans le sous-chapitre 3.4.

Lemme 3.6 *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $\{Z(t)\}_{t\in I}$ un processus stochastique défini sur un espace probabilisé $(\Omega_0,\mathcal{F}_0,\mathrm{P}_0)$. Pour tout $\epsilon>0, 0<\delta<1$, on définit*

$$F_\epsilon(\delta)=\mathrm{P}_0\left[\sup_{\substack{|s-t|<\delta\\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}}|Z(t)-Z(s)|\geq\epsilon\right]. \tag{3.52}$$

Alors $\lim_{\delta\to0}F_\epsilon(\delta)$ existe. De plus, $\{Z(t)\}_{t\in I}$ admet une modification continue sur $\mathbb{D}$ si, et seulement si, pour tout $\epsilon>0$, $\lim_{\delta\to0}F_\epsilon(\delta)=0$.

Lemme 3.7 *Soit X_l^κ le processus défini par (3.43). Pour tout réel $t_0\in[0,1]$*

$$\lim_{t\to t_0}\mathrm{E}\,|X_l^\kappa(t)-X_l^\kappa(t_0)|^2=0. \tag{3.53}$$

Propriété 3.8 *Le processus X_l^κ, défini par (3.43), admet une modification continue sur l'intervalle* $[0,1]$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et soit $0 < \delta \leq 1$. D'après la Propriété 3.5, pour presque tout ω_1, $\{X_l^\kappa(t)(\omega_1)\}_{t\in\mathbb{D}}$ a la même loi que le processus gaussien $\left\{l^{-\kappa}\int_0^t Y_l(s)(\omega_1)\,\mathrm{d}B^\kappa(s)\right\}_{t\in\mathbb{D}}$. D'après la Propriété 3.2 et le Lemme 3.4, ce processus admet une modification continue. On écrit alors

$$\mathrm{P}\left[\sup_{\substack{|s-t|<\delta\\ s,t\in\mathbb{D}}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| \geq \epsilon\right] = \mathrm{E}_1\left[\mathrm{P}_2\left(\sup_{\substack{|s-t|<\delta\\ s,t\in\mathbb{D}}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| \geq \epsilon\right)\right]. \tag{3.54}$$

D'après le Lemme 3.6 (partie directe),

$$\lim_{\delta\to 0}\mathrm{P}_2\left(\sup_{\substack{|s-t|<\delta\\ s,t\in\mathbb{D}}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| \geq \epsilon\right) = 0, \quad \mathrm{P}_1 - \text{p.s.}, \tag{3.55}$$

donc d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{\delta\to 0}\mathrm{P}\left[\sup_{\substack{|s-t|<\delta\\ s,t\in\mathbb{D}}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| \geq \epsilon\right] = 0. \tag{3.56}$$

D'après le Lemme 3.6 à nouveau (partie réciproque cette fois), X_l^κ admet une modification continue $\overline{X}_l^\kappa$ sur $\mathbb{D}$. On prolonge ce processus $\overline{X}_l^\kappa$ à l'intervalle $[0,1]$ tout entier en posant

$$\overline{X}_l^\kappa(t)(\omega) = \lim_{s\to t, s\in\mathbb{D}} \overline{X}_l^\kappa(s)(\omega). \tag{3.57}$$

On sait d'après le Lemme 3.7 que pour tout $t \in [0,1]$

$$\lim_{s\to t} X_l^\kappa(s) = X_l^\kappa(t) \text{ dans } \mathrm{L}^2, \tag{3.58}$$

donc

$$\text{p.s., } \overline{X}_l^\kappa(t) = X_l^\kappa(t). \tag{3.59}$$

■

Remarque 3.9 *La démonstration qui précède utilise le critère de Kolmogorov d'existence d'une modification continue. On notera que ce critère est*

appliqué non pas à X_l^κ (il n'est pas du tout évident que X_l^κ en vérifie les hypothèses), mais au processus gaussien sous-jacent.

On peut s'étonner par ailleurs de l'usage des nombres dyadiques rationnels dans la démonstration. En réalité, ce n'est pas une complication inutile : on sait seulement que, pour presque tout ω_1, on a l'égalité en loi entre processus

$$\left\{X_l^\kappa(t)(\omega_1)\right\}_{t\in\mathbb{D}} =^d \left\{l^{-\kappa}\int_0^t Y_l(s)(\omega_1)\,\mathrm{d}B^\kappa(s)\right\}_{t\in\mathbb{D}}; \tag{3.60}$$

mais rien ne permet d'affirmer que l'on peut remplacer $\mathbb{D}$ par $\mathbb{R}$ dans cette égalité. Par ailleurs il ne nous paraissait pas clair que l'événement

$$\left\{\sup_{|s-t|<\delta}|X_l^\kappa(t)-X_l^\kappa(s)|\geq\epsilon\right\} \tag{3.61}$$

fusse mesurable si s et t avaient été des réels quelconques dans $[0,1]$.

Afin de préserver la lisibilité du texte on notera encore X_l^κ la modification du processus obtenue dans la Propriété 3.8.

3.2.2 Convergence en loi de X_l^κ et étude de la limite X^κ

On fixe une nouvelle fois $-1/2<\kappa<0$. On prouve dans cette section que, sous l'une ou l'autre des deux hypothèses

(A) $-1/2<\kappa<-1/4$ et $\psi\left(\frac{1}{2\kappa+1}\right)<\frac{1}{2\kappa+1}-1$,

(B) $-1/4\leq\kappa<0$ et $\psi(2)<1$,

la suite de processus X_l^κ (Eq. (3.43)) converge en loi dans $C[0,1]$ vers une limite non dégénérée X^κ lorsque l tend vers 0. On démontre que X^κ est multifractal au sens de la Définition 1.1, le spectre étant défini par

$$\zeta(q)=\frac{q}{2}-\psi\left(\frac{q}{2}\right). \tag{3.62}$$

Le schéma de la démonstration de la convergence en loi est classique : on prouve d'abord que la suite $\{X_l^\kappa\}_l$ est équitendue dans $C[0,1]$, puis on établit la convergence des lois marginales fini-dimensionnelles. Pour démontrer l'équitension, on travaille « à ω_1 fixé » et on utilise des techniques de mesures majorantes pour les processus gaussiens (notre référence sur le sujet est le livre d'Adler [3]).

Observons pour commencer que chacune des deux conditions (A) ou (B) implique

(C) $\psi\left(\frac{1}{2\kappa+1}\right) < \frac{1}{2\kappa+1} - 1$ et $\psi(2) < 1$.

En effet, la fonction $F : x \mapsto x - \psi(x)$ est concave et $F(1) = 1$. Or dans la situation (A) on a $\frac{1}{2\kappa+1} > 2$ et $F\left(\frac{1}{2\kappa+1}\right) > 1$, donc $F(2) > 1$, soit $\psi(2) < 1$. Un raisonnement similaire s'applique dans la situation (B).

On a besoin d'une nouvelle notation : étant donnée une fonction f à support dans $[0,1]$, on définit pour $0 \leq t < t' \leq 1$:

$$\mathbf{M}_{t,t'}^{-\kappa} f = \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \int_t^{t'} |f(s) - f(s+u)|\,|f(s) - f(s+v)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3.63}$$

La preuve de l'équitension repose sur les deux lemmes (démontrés dans le sous-chapitre 3.4) :

Lemme 3.10 *Soit Y_l le processus défini par l'équation (3.40). Si $\psi(2) < 1$, la quantité $l^{-2\kappa}\mathrm{E}_1\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa}\left(Y_l \mathbf{1}_{[0,1]}\right)$ est uniformément majorée par rapport à l.*

Lemme 3.11 *Soit $f \in \mathcal{L}^\kappa$ une fonction à support dans $[0,1]$. On suppose que $\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} f < \infty$ et qu'il existe deux réels positifs p et q vérifiant :*

1. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
2. $q(\kappa - 1/2) > -1$;
3. $f \in \mathrm{L}^p$.

On considère le processus gaussien $G(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B^\kappa(s)$, défini sur un espace probabilisé $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathrm{P}_0)$.

Il existe une fonction $h(\kappa,\eta)$, indépendante de f, vérifiant $\lim_{\eta\to 0} h(\kappa,\eta) = 0$ et telle que

$$\mathrm{E}_0\left(\sup_{|t-s|<\eta} |G(t) - G(s)|\right) \leq h(\kappa,\eta)\left(\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} f + \|f\|_p^p + 1\right). \tag{3.64}$$

Propriété 3.12 *Sous chacune des deux conditions (A) ou (B), la suite $\{X_l^\kappa\}_l$ (Eq. (3.43)) est équitendue dans $C[0,1]$.*

Démonstration. On commence par prouver l'existence de deux réels p et q satisfaisant aux hypothèses du Lemme 3.11, avec $f = l^{-\kappa} Y_l \mathbf{1}_{[0,1]}$, et tels que

$$\sup_l \mathrm{E}_1 \left\| l^{-\kappa} Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_p^p < \infty. \tag{3.65}$$

On a vu au début de cette section que les conditions (A) et (B) entraînaient $\psi\left(\frac{1}{2\kappa+1}\right) < \frac{1}{2\kappa+1} - 1$. Cette inégalité se récrit $\psi\left(\frac{1}{2(\kappa+1/2)}\right) < \frac{-\kappa}{\kappa+1/2}$, donc

par raison de continuité il existe un réel $p > \frac{1}{\kappa+1/2}$ tel que $\psi(p/2) < -\kappa p$. Et comme

$$\mathrm{E}_1 \left\| l^{-\kappa} Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_p^p = l^{-\kappa p} \int_0^1 \mathrm{E}_1 e^{\frac{p}{2}\omega_l(s)} \mathrm{d}s = l^{-\kappa p} e^{\psi\left(\frac{p}{2}\right)(1-\log l)}, \tag{3.66}$$

on a bien (3.65). Enfin, l'inégalité $p > \frac{1}{\kappa+1/2}$ implique que le conjugué q de p (au sens où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) vérifie $q(\kappa - 1/2) > -1$.

Venons-on maintenant à la preuve de l'équitension proprement dite. D'après le Théorème 4.10 de [27], il suffit pour prouver cette équitension de montrer que

$$\lim_{\eta \to 0} \sup_l \mathrm{E} \sup_{\substack{|s-t|<\eta \\ s,t \in [0,1]}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| = 0. \tag{3.67}$$

Le processus X_l^κ étant continu, on peut remplacer l'espérance dans le membre de gauche de l'équation ci-dessus par

$$\mathrm{E} \sup_{\substack{|s-t|<\eta \\ s,t \in \mathbb{D} \cap [0,1]}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)|. \tag{3.68}$$

On a donc

$$\mathrm{E} \sup_{\substack{|s-t|<\eta \\ s,t \in [0,1]}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| = \mathrm{E}_1 \left[\mathrm{E}_2 \left(\sup_{\substack{|s-t|<\eta \\ s,t \in \mathbb{D} \cap [0,1]}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| \right) \right]. \tag{3.69}$$

On sait d'après la Propriété 3.5 que, pour presque tout ω_1, $\{X_l^\kappa(t)(\omega_1)\}_{t \in \mathbb{D}}$ a la même loi que le processus gaussien $\left\{ l^{-\kappa} \int_0^t Y_l(s) \mathrm{d}B^\kappa(s) \right\}_{t \in \mathbb{D}}$. Le raisonnement mené au début de la preuve montre que le Lemme 3.11 s'applique si l'on prend $f = l^{-\kappa} Y_l \mathbf{1}_{[0,1]}$.[10] Il vient alors :

$$\begin{aligned} &\mathrm{E} \sup_{\substack{|s-t|<\eta \\ s,t \in [0,1]}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| \\ &\quad \leq h(\kappa,\eta)\, \mathrm{E}_1 \left(l^{-2\kappa} \mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right) + \left\| l^{-\kappa} Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_p^p + 1 \right). \end{aligned} \tag{3.70}$$

L'équation (3.65) et le Lemme 3.10 donnent alors :

$$\lim_{\eta \to 0} \sup_l \mathrm{E} \sup_{\substack{|s-t|<\eta \\ s,t \in [0,1]}} |X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(s)| = 0. \tag{3.71}$$

■

10. Notons que le Lemme 3.11 concerne des processus indexés par $\mathbb{R}$, alors que l'on travaille ici avec un processus indexé par $\mathbb{D}$. Mais les résultats sur la majoration du module de continuité pour un processus indexé par $\mathbb{R}$ s'appliquent de façon évidente si l'on restreint l'ensemble d'indexation de ce processus aux dyadiques rationnels.

Remarque 3.13 *La démonstration qui précède, comme celle de l'existence d'une modification continue (Propriété 3.8), consiste à se ramener au processus gaussien sous-jacent en se restreignant aux nombres dyadiques rationnels. Notons deux choses importantes à ce sujet :*

- *il n'est pas fait usage dans la démonstration de l'équitension du critère habituel d'équitension de Kolmogorov – il semble ne pas pouvoir s'appliquer ici ; ni des inégalités de Borell ou de Slepian (qui, à l'inverse de ce qui se passe dans le cas $\kappa > 0$ – voir [1], semblent ne pas donner de résultat suffisamment fort ici). La démonstration de l'équitension repose en fait essentiellement sur le Lemme 3.11, dont la preuve fait appel aux techniques de mesures majorantes pour les processus gaussiens ;*
- *les mêmes techniques de mesures majorantes pourraient s'appliquer pour démontrer l'existence d'une modification continue des processus de la forme $\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B^\kappa(s)$ (Propriété 3.2). Nous ne les avons pas utilisées dans la démonstration de la Propriété 3.2 dans un souci de simplicité.*

On se tourne à présent vers la convergence des lois marginales finidimensionnelles. Dans le chapitre 2 de la thèse, celle-ci a toujours été la conséquence de la convergence en moyenne quadratique. Ici, cette convergence en moyenne quadratique n'a pas lieu ; on ne peut pas faire usage non plus des techniques de martingales abondamment utilisées dans les articles dédiés à la construction des marches aléatoires multifractales lorsque $\kappa \geq 0$ [8, 38, 31, 1]. Tout ceci entraîne quelques complications...

Propriété 3.14 *Soit X_l^κ le processus défini par (3.43). On suppose que $\psi(2) < 1$. Alors pour tous réels $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dans $[0,1]$, le vecteur aléatoire $(X_l^\kappa(t_1), X_l^\kappa(t_2), \ldots, X_l^\kappa(t_n))$ converge en loi, lorsque l tend vers 0, vers une limite non dégénérée.*

Démonstration. Il suffit de prouver que, pour tous $u_1, \ldots, u_n, t_1, \ldots, t_n$, la fonction caractéristique

$$\mathrm{E}e^{i\left\{u_1 X_l^\kappa(t_1) + u_2 X_l^\kappa(t_2) + \cdots + u_n X_l^\kappa(t_n)\right\}} \tag{3.72}$$

converge et que la limite des lois marginales uni-dimensionnelles n'est pas dégénérée.

En raisonnant comme dans la démonstration du Point 3 de la Propriété 3.5, on voit que pour P_1- presque tout ω_1, le vecteur $(X_l^\kappa(t_1), \ldots, X_l^\kappa(t_n))$ est gaussien centré de covariance

$$l^{-2\kappa}\langle Y_l(.)(\omega_1)\,\mathbf{1}_{[0,t_j[}(.), Y_l(.)(\omega_1)\,\mathbf{1}_{[0,t_k[}(.)\rangle_\kappa. \tag{3.73}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}e^{i\left\{u_1X_l^\kappa(t_1)+u_2X_l^\kappa(t_2)+\cdots+u_nX_l^\kappa(t_n)\right\}}\\
&\quad=\mathrm{E}_1\left(\mathrm{E}_2e^{i\left\{u_1X_l^\kappa(t_1)+u_2X_l^\kappa(t_2)+\cdots+u_nX_l^\kappa(t_n)\right\}}\right)\\
&\quad=\mathrm{E}_1e^{-l^{-2\kappa}\left\|\sum_i u_iY_l\mathbf{1}_{[0,t_i[}\right\|_\kappa^2}\\
&\quad=\mathrm{E}_1e^{-\frac{\Gamma(\kappa+1)^2}{c_1(\kappa)^2}l^{-2\kappa}\left\|\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(\sum_i u_iY_l\mathbf{1}_{[0,t_i[}\right)\right\|_2^2}. \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.15 ci-dessous, $l^{-2\kappa}\langle\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(Y_l\mathbf{1}_{[0,t[}\right),\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(Y_l\mathbf{1}_{[0,t'[}\right)\rangle_2$ converge dans $\mathrm{L}^1(\Omega_1)$ pour toutes valeurs de t,t'. C'est donc aussi le cas de $l^{-2\kappa}\left\|\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(\sum_i u_iY_l\mathbf{1}_{[0,t_i[}\right)\right\|_2^2$. Par conséquent, en vertu de l'inégalité

$$\left|e^{-x}-e^{-y}\right|\leq|x-y|,\quad x\geq0,y\geq0, \qquad (3.75)$$

la fonction caractéristique (3.72) converge. Enfin, d'après le Lemme 3.15, les limites des lois marginales uni-dimensionnelles ne sont pas dégénérées. ■

Lemme 3.15 *Soit Y_l le processus défini par (3.40). On suppose que $\psi(2)<1$. Pour $0<t<t'$, chacune des deux suites $l^{-2\kappa}\left\|\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(Y_l\mathbf{1}_{[0,t[}\right)\right\|_2^2$ et $l^{-2\kappa}\langle\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(Y_l\mathbf{1}_{[0,t[}\right),\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(Y_l\mathbf{1}_{[t,t'[}\right)\rangle_2$ converge dans $\mathrm{L}^1(\Omega_1)$ vers une limite non nulle lorsque l tend vers 0.*

La preuve du Lemme 3.15 est donnée dans le sous-chapitre 3.4. Le lemme qui suit est le point clef pour démontrer la propriété multifractale ; il est aussi démontré dans le sous-chapitre 3.4.

Lemme 3.16 *Pour tous réels $0<\lambda\leq1$, $0<l<1$, on a l'égalité en loi entre processus :*

$$\{X_{\lambda l}^\kappa(\lambda t)\}_t=^d\left\{\lambda^{\frac12}e^{\frac12\Omega_\lambda}X_l^\kappa(t)\right\}_t, \qquad (3.76)$$

où Ω_λ est une variable aléatoire de fonction caractéristique $\mathrm{E}e^{iq\Omega_\lambda}=\lambda^{-\varphi(q)}$, indépendante de X_l^κ.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de la thèse.

Propriété 3.17 *Soit X_l^κ le processus défini par (3.43). On suppose que l'une des deux conditions (A) ou (B) est remplie. Alors :*

1. *X_l^κ converge en loi dans $C[0,1]$, lorsque l tend vers 0, vers une limite non dégénérée X^κ.*

2. *On a l'égalité en loi entre processus*

$$\{X^\kappa(\lambda t)\}_t =^d \left\{\lambda^{1/2} e^{\frac{1}{2}\Omega_\lambda} X^\kappa(t)\right\}_t, \tag{3.77}$$

où la variable aléatoire Ω_λ, indépendante de X^κ, a pour fonction caractéristique $\mathrm{E}e^{i\lambda\Omega_\lambda} = \lambda^{-\varphi(q)}$.

3. *X^κ vérifie la propriété multifractale*

$$\mathrm{E}\,|X^\kappa(t)|^{2q} = \mathrm{E}\,|X^\kappa(1)|^{2q}\, t^{q-\psi(q)} \tag{3.78}$$

pour tout $0 \leq q < q_{\max}$ tel que $X^\kappa(1)$ ait un moment d'ordre $2q$ fini.

Démonstration.

Démonstration du Point 1. D'après la Propriété 3.12, la suite $\{X_l^\kappa\}_l$ est équitendue dans $C[0,1]$, donc il existe une sous-suite convergeant vers un processus limite X^κ. De plus, on sait d'après la Propriété 3.14 que les lois marginales fini-dimensionnelles convergent (la Propriété 3.14 s'applique bien puisqu'on a vu au début de la section 3.2.2 que la condition (A) entraînait l'inégalité $\psi(2) < 1$). Par un argument classique (voir par exemple la preuve du Théorème 4.15 dans [27]), X_l^κ converge en loi vers X^κ dans $C[0,1]$. Enfin, d'après la Propriété 3.14, le processus limite n'est pas dégénéré.

Démonstration du Point 2. Puisque X_l^κ et Ω_λ sont indépendants, en prenant la limite dans (3.76) on obtient (3.77).

Démonstration du Point 3. On prend $\lambda = t$ et $t = 1$ dans l'équation (3.77). ■

Remarque 3.18 *Le spectre multifractal est le même que celui obtenu par Bacry et Muzy [8, 38] dans l'étude de la MRW (autrement dit dans le cas $\kappa = 0$) :*

$$\zeta(q) = \frac{q}{2} - \psi\left(\frac{q}{2}\right). \tag{3.79}$$

Ceci est assez surprenant, puisqu'on aurait pu s'attendre à voir apparaître l'exposant κ dans l'expression du spectre (comme dans les articles de Ludena et d'Abry et al. [31, 1]).

Notons par ailleurs la relation $\zeta(2) = 1$, qui est un résultat classique en finance (on renvoie par exemple à la figure 2, dans le chapitre 1 de la thèse). Il est donc possible qu'il y ait des applications pratiques de notre travail dans ce domaine[11].

11. Si le spectre (3.79) est le même que celui de la MRW de Bacry et Muzy, notre processus limite est cependant fort différent du leur. Notre modèle est donc complètement nouveau.

On évoque enfin la question de l'existence des moments du processus limite X^κ obtenu dans la Propriété 3.17.

On remarque d'abord que les moments d'ordre $0 \leq p < 2$ sont finis. En effet, un corollaire quasi immédiat du Lemme 3.10 est que $\sup_l \mathrm{E}|X_l^\kappa(t)|^2$ est fini. Par conséquent la limite en loi $X^\kappa(t)$ de $X_l^\kappa(t)$ a un moment d'ordre p pour tout $0 \leq p < 2$. De plus, dans ce cas, $\mathrm{E}\,|X_l^\kappa(t)|^p$ converge vers $\mathrm{E}\,|X^\kappa(t)|^p$.

Une condition suffisante et une condition nécessaire d'existence du moment d'ordre $p \geq 2$ sont données dans [8] lorsque $\kappa = 0$ et dans [31, 1] lorsque $0 < \kappa < 1/2$ (dans ce dernier cas, la condition suffisante n'est donnée que dans le cas où p est un nombre pair). Dans cette thèse ($-1/2 < \kappa < 0$), notre seul résultat est :

$$\mathrm{E}\,|X^\kappa(t)|^p < \infty \Rightarrow \zeta\,(p) \geq 1. \tag{3.80}$$

En effet, en faisant le même raisonnement que dans la démonstration du Lemme 3 de [8], on obtient

$$\mathrm{E}\,|X^\kappa(t)|^p \geq 2^{1-\zeta(p)}\mathrm{E}\,|X^\kappa(t)|^p\,, \tag{3.81}$$

ce qui implique la relation (3.80).

Question ouverte 3.19 *La recherche d'une condition suffisante d'existence du moment d'ordre $p \geq 2$ dans le cas $\kappa < 0$ est une question ouverte. Un examen rapide du cas $p = 4$ (le plus simple a priori) laisse entrevoir la difficulté du problème ; il semble en tout cas que les* power counting techniques *de [14], qui ont permis de résoudre ce problème dans le cas $\kappa > 0$ (voir [31, 1]), soient inopérantes ici.*

Question ouverte 3.20 *La Propriété 3.17 est énoncée sous l'une des deux conditions (A) ou (B). Je pense que la condition plus faible $\psi\,(2) < 1$ est en réalité suffisante pour que les choses fonctionnent. Mais en dépit d'une longue recherche, je n'ai pas pu le démontrer.*

3.3 Etude d'une version affine par morceaux de X^κ

Comme c'était le cas pour le processus X^S (voir chapitre 2), une utilisation pratique du processus X^κ n'est possible que si l'on en donne une version simple. Nous consacrons ce sous-chapitre à l'étude d'une version affine par morceaux, dont nous nous servons pour faire des simulations.

On rappelle les notations du sous-chapitre précédent :

$$Y_l(s) = e^{\frac{1}{2}\omega_l(s)} \tag{3.82}$$

$$X_l^\kappa(t) = l^{-\kappa} \int_0^t Y_l(s) \mathrm{d}B^\kappa(s). \tag{3.83}$$

Le processus X^κ est la limite en loi dans $C[0,1]$ de la suite (X_l^κ) (voir Propriété 3.17).

On définit le processus affine par morceaux

$$\tilde{X}_n^\kappa(t) = n^\kappa \int_0^t e^{\frac{1}{2}\omega_{1/n}\left(\lfloor n^2 s \rfloor / n^2\right)} \mathrm{d}B^\kappa(s),\ t \in [0,1]\,. \tag{3.84}$$

Il est facile de voir que ce processus est bien défini (nous ne nous attardons pas sur ce problème). On admettra qu'il fournit une bonne version simple du processus X^κ. [12]

Venons-en aux simulations numériques. On pose

$$\Delta\tilde{X}\,(i) = \tilde{X}_n^\kappa\left(\frac{i}{n^2}\right) - \tilde{X}_n^\kappa\left(\frac{i-1}{n^2}\right). \tag{3.85}$$

Le vecteur

$$V_n = \left(\Delta\tilde{X}\,(1), \Delta\tilde{X}\,(2), \ldots, \Delta\tilde{X}\left(n^2\right)\right) \tag{3.86}$$

a même loi que

$$W_n = n^{-\kappa-1}\left(Y_{\frac{1}{n}}(0)\, e_1, Y_{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n^2}\right) e_2, \ldots, Y_{\frac{1}{n}}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) e_{n^2}\right), \tag{3.87}$$

e_i étant un bruit blanc gaussien fractionnaire – autrement dit un processus gaussien centré stationnaire de covariance

$$\mathrm{cov}\,(e_0, e_i) = \frac{1}{2}\left(|i+1|^{2\kappa+1} - 2\,|i|^{2\kappa+1} + |i-1|^{2\kappa+1}\right). \tag{3.88}$$

On représente sur la figure 3.1 deux trajectoires de $\tilde{X}_n^\kappa(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ à partir de W_n dans le cas où $Y_{1/n}$ est log-gaussien et avec $n = 2^7$. L'une des deux trajectoires correspond à $\kappa = -0.4$ et l'autre à $\kappa = -0.1$. Comme dans le chapitre 1, le processus $Y_{1/n}$ et le bruit blanc gaussien fractionnaire e_i sont simulés grâce à la méthode de simulation de processus gaussiens par matrice circulante. On estime aussi dans chaque cas la densité de $\tilde{X}_n^\kappa(1)$ à partir d'échantillons de taille 10000.

12. Malgré mes recherches en ce sens, je ne suis pas parvenu à démontrer de résultat de convergence au sujet de $\tilde{X}_n^\kappa$.

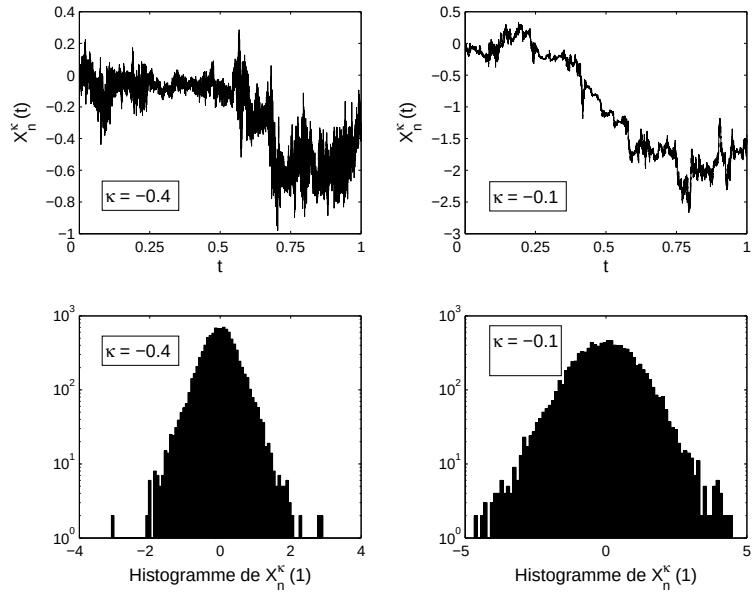


FIGURE 3.1 – **Simulation de la version affine par morceaux.** On a simulé $\tilde{X}_n^\kappa(t)$ pour $\kappa = -0.4$, $\kappa = -0.1$, avec $n = 2^7$ et dans le cas où $Y_{1/n}$ est log-gaussien de paramètre $\lambda = 0.5$. L'allure des trajectoires est typique des multifractals ; la courbe dans le cas $\kappa = -0.1$ étant d'ailleurs très proche du type de celles que l'on obtient lorsqu'on simule la MRW de Bacry et Muzy (donc lorsque $\kappa = 0$) – des trajectoires de cette MRW sont représentées dans [38]. Deux histogrammes, construits à partir d'échantillons de longueur 10000, donnent une idée de la distribution limite $X^\kappa(1)$; on y observe une différence significative entre les cas $\kappa = -0.4$ et $\kappa = -0.1$ (déjà nettement visible sur les figures du haut), mettant en évidence la diversité des processus limites que l'on peut obtenir avec notre étude.

3.4 Démonstrations des lemmes

Dans la section 3.4.1, on démontre le Lemme 3.1 et plusieurs résultats qui en découlent ou dont la preuve en est proche : les Lemmes 3.4, 3.7 et 3.10. Les sections 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4 et 3.4.5 sont respectivement consacrées aux démonstrations des Lemmes 3.15, 3.16, 3.6 et 3.11. Avant toutes ces preuves, on énonce deux résultats techniques qui seront utilisés de nombreuses fois dans la suite (le premier de ces résultats est une conséquence directe du Lemme 1 de [8]).

Lemme 3.21 *Soit* $0 < l < 1$. *Pour tous* s, u *dans* $\mathbb{R}$, $\mathrm{E}_1 \left(Y_l(s)\right)^2 = 1$ *et* $\mathrm{E}_1 Y_l(s) Y_l(s+lu) = e^{2\psi(1/2)[r_l(0) - r_l(lu)]}$, *où* r_l *est la fonction paire définie par*

$$r_l(u) = \begin{cases} 1 - \ln l - u/l & si\ 0 \leq u \leq l \\ -\ln u & si\ l < u \leq 1 \\ 0 & si\ 1 < u. \end{cases} \tag{3.89}$$

Lemme 3.22 *La quantité* $\mathrm{E}_1 \left|Y_l(s) - Y_l(s+lu)\right|^2$ *est majorée par* $\pi(u)$, *où* π *est définie par*

$$\pi(u) = \begin{cases} -4\psi(1/2)\, u & si\ 0 \leq u \leq 1 \\ 4 & si\ 1 < u. \end{cases} \tag{3.90}$$

De plus $\psi(1/2)$ *est strictement négatif.*

Démonstration. Lorsque $u > 1$, la majoration de $\mathrm{E}_1 \left|Y_l(s) - Y_l(s+lu)\right|^2$ est immédiate d'après le Lemme 3.21. Lorsque $0 \leq u \leq 1$, on a $r_l(0) - r_l(lu) = u$. Donc dans ce cas $\mathrm{E}_1 \left|Y_l(s) - Y_l(s+lu)\right|^2 = 2 - 2e^{2\psi(1/2)u}$. On rappelle à présent que ψ est convexe et que $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Par hypothèse, la mesure ν, dont on a rappelé la définition au début du chapitre 3, n'est pas dégénérée ; donc $\psi(1/2)$ est strictement négatif. Il vient donc l'inégalité $\mathrm{E}_1 \left|Y_l(s) - Y_l(s+lu)\right|^2 \leq -4\psi(1/2)\, u$. ■

3.4.1 Démonstration des Lemmes 3.1, 3.4, 3.7 et 3.10

Démonstration du Lemme 3.1

Notons d'abord que le Point 2 est évident.

Démonstration du Point 1. Si $|\mathbf{D}|_-^{\gamma_1} f$ appartient $\mathbf{L}^2$, alors on peut dire la même chose de $\mathbf{D}_-^{\gamma_1} f$. Donc d'après le Théorème 6.2 de [50], f appartient à $\mathcal{L}^{-\gamma_1}$.

Démonstration du Point 3. On note $k(\gamma_1) = \frac{\gamma_1}{\Gamma(-\gamma_1+1)}$. Par définition

$$\begin{aligned} &\left\| |\mathbf{D}|_-^{\gamma_1} f \mathbf{1}_{[t,t'[} \right\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[k(\gamma_1) \int_0^\infty \frac{\left| f(s)\mathbf{1}_{[t,t'[}(s) - f(s+u)\mathbf{1}_{[t,t'[}(s+u) \right|}{u^{\gamma_1+1}} \mathrm{d}u \right]^2 \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.91}$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left\||\mathbf{D}|_-^{\gamma_1} f \mathbf{1}_{[t,t'[}\right\|_2^2 \leq & \underbrace{2\int_t^{t'} \left[k(\gamma_1)\int_0^{t'-s} |f(s)-f(s+u)|\, u^{-\gamma_1-1}\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}s}_{A} \\ & \underbrace{+\,2\int_t^{t'} \left[k(\gamma_1)\int_{t'-s}^{\infty} |f(s)|\, u^{-\gamma_1-1}\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}s}_{B} \\ & \underbrace{+\int_{-\infty}^{t} \left[k(\gamma_1)\int_{t-s}^{t'-s} |f(s+u)|\, u^{-\gamma_1-1}\mathrm{d}u\right]^2 \mathrm{d}s}_{C}. \qquad (3.92)\end{aligned}$$

Des majorations grossières donnent

$$B \leq a_1(\gamma_1)\|f\|_\infty^2 \left(t'-t\right)^{-2\gamma_1+1} \qquad (3.93)$$

pour une certaine constante $a_1(\gamma_1)$ et

$$C \leq a_2(\gamma_1)\|f\|_\infty^2 \left(t'-t\right)^{-2\gamma_1+1} \qquad (3.94)$$

pour une autre constante $a_2(\gamma_1)$. Enfin

$$A = 2k(\gamma_1)^2 \mathbf{N}_{t,t'}^{\gamma_1} f. \qquad (3.95)$$

Démonstration du Point 4. On prouve d'abord que, pour toute fonction $g \in \mathcal{L}^{-\gamma_2}$,

$$\|g(.) - g(.+t)\|_2^2 \leq b\left(\gamma_2\right) t^{2\gamma_2} \left\|\mathbf{D}_-^{\gamma_2} g\right\|_2^2, \qquad (3.96)$$

la constante $b\left(\gamma_2\right)$ étant indépendante de g. Notre méthode s'inspire du paragraphe 6.2 de [50] : supposons que $g \in \mathcal{L}^{-\gamma_2}$. Alors d'après l'équation (6.1) et le Théorème 6.1 de [50], il existe une fonction $\phi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $g = I_-^{\gamma_2}\phi$ d'une part, et $\mathbf{D}_-^{\gamma_2} g = \phi$ d'autre part. Pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} & g\left(x\right) - g\left(x+t\right) \\ & = \frac{t^{\gamma_2}}{\Gamma\left(\gamma_2\right)}\left[\int_0^\infty \phi\left(x+tz\right) z^{\gamma_2-1}\mathrm{d}z - \int_1^\infty \phi\left(x+tz\right)\left(z-1\right)^{\gamma_2-1}\mathrm{d}z\right] \\ & = t^{\gamma_2}\int_0^\infty k(z)\phi\left(x+tz\right)\mathrm{d}z, \qquad (3.97)\end{aligned}$$

avec

$$k(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\gamma_2\right)}\begin{cases} z^{\gamma_2-1} & \text{si } 0 < z < 1 \\ z^{\gamma_2-1} - \left(z-1\right)^{\gamma_2-1} & \text{si } z > 1. \end{cases} \qquad (3.98)$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la mesure $\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{|k(x)|\mathrm{d}x}{\|k\|_1}$, on obtient

$$\|g(.) - g(. + t)\|_2^2 \leq \|k\|_1^2 t^{2\gamma_2} \int \int_0^\infty |\phi(x + tz)|^2 \mathrm{d}\lambda(z)\mathrm{d}x, \tag{3.99}$$

c'est-à-dire

$$\|g(.) - g(. + t)\|_2^2 \leq \|k\|_1^2 \|\phi\|_2^2 t^{2\gamma_2}. \tag{3.100}$$

Cela prouve (3.96).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Point 4. D'après le Point 3, il suffit de prouver que

$$\mathbf{N}_{t,t'}^{\gamma_1} f \leq b_1(\gamma_1, \gamma_2) \left(t' - t\right)^{2\gamma_2 - 2\gamma_1} \left\| |\mathbf{D}|_-^{\gamma_2} f \right\|_2^2, \tag{3.101}$$

pour une certaine constante universelle $b_1(\gamma_1, \gamma_2)$. Observons d'abord que

$$\mathbf{N}_{t,t'}^{\gamma_1} f \leq \left[\int_0^{t'-t} u^{-\gamma_1 - 1} \left(\int_t^{t'-u} |f(s) - f(s+u)|^2 \mathrm{d}s \right)^{1/2} \mathrm{d}u \right]^2, \tag{3.102}$$

en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En tenant compte de (3.96) on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{t,t'}^{\gamma_1} f &\leq \left[\int_0^{t'-t} u^{-\gamma_1 - 1} \|f(.) - f(. + u)\|_2 \mathrm{d}u \right]^2 \\ &\leq b(\gamma_2)^2 \left\| \mathbf{D}_-^{\gamma_2} f \right\|_2^2 \left[\int_0^{t'-t} u^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1} \mathrm{d}u \right]^2 \\ &\leq \frac{b(\gamma_2)^2}{2\gamma_2 - 2\gamma_1} \left\| \mathbf{D}_-^{\gamma_2} f \right\|_2^2 \left(t' - t\right)^{2\gamma_2 - 2\gamma_1}. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Cette inégalité entraîne (3.101) ; elle achève donc la démonstration du Point 4. ■

Démonstration des Lemmes 3.4 et 3.10

On pose $V_l = Y_l \mathbf{1}_{[0,1]}$ et on considère un réel $0 < \gamma < 1/2$. Avec les mêmes calculs que dans la démonstration du Point 3 du Lemme 3.1, on voit que

$$\mathbf{M}_{0,1}^{\gamma} V_l \leq 2\mathbf{N}_{0,1}^{\gamma} V_l + \frac{2}{\gamma^2} \int_0^1 V_l^2(s) (1 - s)^{-2\gamma} \mathrm{d}s. \tag{3.104}$$

Il suffit donc pour démontrer les Lemmes 3.4 et 3.10 de prouver que :

1. $\mathrm{E}_1 \|V_l\|_\infty < \infty$.
2. $\sup_l l^{2\gamma} \mathrm{E}_1 \left(\mathbf{N}_{0,1}^\gamma V_l \right) < \infty$.
3. $\sup_l l^{2\gamma} \mathrm{E}_1 \left(\int_0^1 V_l^2 \, (1-s)^{-2\gamma} \, \mathrm{d}s \right) < \infty$.

Le Point 1 a déjà été démontré par Bacry et Muzy (Lemme 5 dans [8]) et le Point 3 est immédiat, puisque $\mathrm{E}_1 V_l^2 \, (s) = 1$ (Lemme 3.21).

Voici la preuve du Point 2 : d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathrm{E}_1 \mathbf{N}_{0,1}^\gamma \, (V_l) \leq \left\{ \int_0^1 u^{-\gamma-1} \left(\int_0^{1-u} \mathrm{E}_1 \left| V_l(s) - V_l(s+u) \right|^2 \mathrm{d}s \right)^{1/2} \mathrm{d}u \right\}^2 . \tag{3.105}$$

Donc par le changement de variable $u = lv$ et d'après le Lemme 3.22

$$\begin{aligned} l^{2\gamma} \mathrm{E}_1 \mathbf{N}_{0,1}^\gamma \, (V_l) &\leq \left\{ \int_0^{1/l} v^{-\gamma-1} \left(\int_0^{1-lv} \mathrm{E}_1 \left| V_l(s) - V_l(s+lv) \right|^2 \mathrm{d}s \right)^{1/2} \mathrm{d}v \right\}^2 \\ &\leq \left\{ \int_0^{\infty} v^{-\gamma-1} \left(\int_0^1 \pi(v) \mathrm{d}s \right)^{1/2} \mathrm{d}v \right\}^2 \end{aligned} \tag{3.106}$$

(π est définie par (3.90)). La dernière expression ci-dessus est finie et ne dépend pas de l. Le Point 2 est donc démontré. ■

Démonstration du Lemme 3.7

Supposons par exemple que $t_0 < t$. En utilisant la même méthode que dans la preuve du Point 3 de la Propriété 3.5, on voit que $\mathrm{P}_1 -$p.s., la variable $X_l^\kappa(t) \, (\omega_1) - X_l^\kappa(t_0) \, (\omega_1)$ est gaussienne et que

$$\mathrm{E} \left| X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(t_0) \right|^2 = l^{-2\kappa} \mathrm{E}_1 \left\| \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[t_0,t[} \right) \right\|_2^2 . \tag{3.107}$$

Par conséquent

$$\mathrm{E} \left| X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(t_0) \right|^2 \leq l^{-2\kappa} \mathrm{E}_1 \left\| |\mathbf{D}|_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[t_0,t[} \right) \right\|_2^2 . \tag{3.108}$$

On fixe à présent une valeur de $-\kappa < \gamma < 1/2$. En vertu du Point 4 du Lemme 3.1,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_1 \left\| |\mathbf{D}|_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[t_0,t[} \right) \right\|_2^2 \\ &\leq b \, (-\kappa, \gamma) \, (t - t_0)^{2\gamma+2\kappa} \left[\mathrm{E}_1 \left\| |\mathbf{D}|_-^\gamma Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_2^2 + \mathrm{E}_1 \left\| Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_\infty^2 \right] . \end{aligned} \tag{3.109}$$

D'après le Point 3 du Lemme 3.1 et le Lemme 3.4, chacune des deux quantités $\mathrm{E}_1 \left\| |\mathbf{D}|_-^{\gamma} Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_2^2$ et $\mathrm{E}_1 \left\| Y_l \mathbf{1}_{[0,1]} \right\|_\infty^2$ est finie. Il s'ensuit que

$$\lim_{t \to t_0} \mathrm{E} \left| X_l^\kappa(t) - X_l^\kappa(t_0) \right|^2 = 0. \tag{3.110}$$

■

3.4.2 Démonstration du Lemme 3.15

On donne d'abord une preuve détaillée de la convergence de $l^{-2\kappa} \left\| \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[0,t[} \right) \right\|_2^2$. On définit

$$Z_{l,\kappa}(t) = l^{-2\kappa} \left\| \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[0,t[} \right) \right\|_2^2. \tag{3.111}$$

En adoptant la même approche que dans la démonstration du Point 3 du Lemme 3.1, on arrive à

$$Z_{l,\kappa}(t) = l^{-2\kappa} \left(D + E + F + G \right), \tag{3.112}$$

avec

$$D = \int_0^t \left[k(\gamma_1) \int_0^{t-s} \left(Y_l(s) - Y_l(s+u) \right) u^{\kappa-1} \mathrm{d}u \right]^2 \mathrm{d}s, \tag{3.113}$$

$$E = \int_0^t \left[k(\gamma_1) \int_{t-s}^{\infty} Y_l(s) u^{\kappa-1} \mathrm{d}u \right]^2 \mathrm{d}s, \tag{3.114}$$

$$F = 2 \int_0^t \left[k(\gamma_1) \right]^2 \int_0^{t-s} \int_{t-s}^{\infty} \left(Y_l(s) - Y_l(s+u) \right) Y_l(s) u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \mathrm{d}v \mathrm{d}u \mathrm{d}s, \tag{3.115}$$

$$G = \int_{-\infty}^t \left[k(\gamma_1) \int_{-s}^{t-s} Y_l(s+u) u^{\kappa-1} \mathrm{d}u \right]^2 \mathrm{d}s. \tag{3.116}$$

L'égalité $\mathrm{E}_1 Y_l^2(s) = 1$ (Lemme 3.21) entraîne la converge de $l^{-2\kappa}(E+G)$ vers 0 dans $\mathrm{L}^1(\Omega_1)$ quand l tend vers 0. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en faisant un changement de variable, on obtient

$$l^{-\kappa} \mathrm{E}_1 |F| \leq 2 \int_0^t \left[k(\gamma_1) \right]^2 \int_0^{(t-s)/l} \int_{t-s}^{\infty} \left(\mathrm{E}_1 \left| Y_l(s) - Y_l(s+lu) \right|^2 \right)^{1/2} \times \left(\mathrm{E}_1 \left| Y_l(s) \right|^2 \right)^{1/2} u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}s. \tag{3.117}$$

D'après les Lemmes 3.21 et 3.22, $\mathrm{E}_1 |Y_l(s)|^2 = 1$ et $\mathrm{E}_1 |Y_l(s) - Y_l(s+lu)|^2 \leq \pi(u)$ (π est défini par (3.90)). Cela donne

$$l^{-\kappa}\mathrm{E}_1 |F| \leq 2 \int_0^t [k(\gamma_1)]^2 \int_0^\infty \int_{t-s}^\infty \pi(u)^{1/2} u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \mathrm{d}v\mathrm{d}u\mathrm{d}s \; ; \tag{3.118}$$

donc $l^{-2\kappa}F$ converge vers 0 dans $\mathrm{L}^1(\Omega_1)$ quand l tend vers 0.

En développant, en changeant l'ordre d'intégration et en faisant un changement de variable, le dernier terme $l^{-2\kappa}D$ peut se récrire

$$\begin{aligned}\int_0^{t/l} \int_0^{t/l} & [k(\gamma_1)]^2 u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \\ & \times \int_0^{t-\max(lu,lv)} (Y_l(s) - Y_l(s+lu))\,(Y_l(s) - Y_l(s+lv))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{3.119}$$

Sa convergence dans $\mathrm{L}^1(\Omega_1)$ vers une limite non nulle découle du Lemme 3.23 ci-dessous. Ce résultat, combiné à ceux qui précèdent, entraîne la convergence de $l^{-2\kappa} \left\| \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[0,t[} \right) \right\|_2^2$.

On se tourne à présent vers

$$l^{-2\kappa} \langle \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[0,t[} \right), \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[t,t'[} \right) \rangle_2. \tag{3.120}$$

Dans ce cas on ne donne que les grandes lignes de la preuve. Cette expression peut se récrire

$$l^{-2\kappa} \langle \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[0,t[} \right), \mathbf{D}_-^{-\kappa} \left(Y_l \mathbf{1}_{[t,t'[} \right) \rangle_2 = I + II, \tag{3.121}$$

avec

$$\begin{aligned} I = & l^{-2\kappa} \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \\ & \times \int_{-\infty}^0 Y_l(s+u) \mathbf{1}_{[0,t[}(s+u) Y_l(s+v) \mathbf{1}_{[t,t'[}(s+v) \mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{3.122}$$

et

$$\begin{aligned} II = & l^{-2\kappa} \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \\ & \times \int_0^t \left(Y_l(s) - Y_l(s+u) \mathbf{1}_{[0,t[}(s+u) \right) Y_l(s+v) \mathbf{1}_{[t,t'[}(s+v) \mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{3.123}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on prouve que I converge vers 0 dans $\mathrm{L}^1(\Omega_1)$. La convergence de II vers une limite non nulle se démontre avec la même technique que celle employée un peu plus haut pour démontrer la convergence de $l^{-2\kappa}D$. ■

Lemme 3.23 *Soit* $0 < t \leq 1$, $-1/2 < \kappa < 0$ *et soit* Y_l *le processus défini par (3.40). On définit*

$$W_l = \int_0^{t/l} \int_0^{t/l} u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} W_l(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.124}$$

avec

$$W_l(u,v) = \int_0^{t-\max(lu,lv)} (Y_l(s) - Y_l(s+lu))(Y_l(s) - Y_l(s+lv))\,\mathrm{d}s. \tag{3.125}$$

Sous l'hypothèse $\psi(2) < 1$, *lorsque* l *tend vers* 0, W_l *converge dans* $\mathrm{L}^1(\Omega_1)$ *vers une limite non nulle.*

Démonstration. Supposons pour le moment que nous sachions que pour toutes valeurs de u et v, $W_l(u,v)$ converge dans L^2. Dans ce cas, cette suite converge aussi dans L^1. Par ailleurs

$$\mathrm{E}\,|W_l - W_{l'}| \leq \int_0^{t/l} \int_0^{t/l} u^{\kappa-1} v^{\kappa-1} \mathrm{E}\,|W_{l'}(u,v) - W_l(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.126}$$

et $\mathrm{E}\,|W_l(u,v)| \leq \pi(u)^{1/2}\,\pi(v)^{1/2}$ comme dans la preuve du Lemme 3.15 (π est définie par (3.90)). Donc d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, W_l converge dans L^1.

Donc le lemme sera démontré si on prouve que :

1. Pour toutes valeurs de u et v, $W_l(u,v)$ converge dans L^2.
2. $\mathrm{E}W_l$ converge vers une limite non nulle.

Preuve du Point 1. Il suffit de prouver que la limite suivante existe :

$$\lim_{(l,l')\to(0,0)} \mathrm{E}W_l(u,v)\,W_{l'}(u,v). \tag{3.127}$$

Pour cela on écrit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}W_l(u,v)\,W_{l'}(u,v) \\
&= \int_0^{t-\max(lu,lv)} \int_0^{t-\max(l'u,l'v)} \mathrm{E}\,(Y_l(s) - Y_l(s+lu))(Y_l(s) - Y_l(s+lv)) \\
&\times \left(Y_{l'}(s') - Y_{l'}(s'+l'u)\right)\left(Y_{l'}(s') - Y_{l'}(s'+l'v)\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}s',
\end{aligned} \tag{3.128}$$

puis on développe l'intégrande dans (3.128) et on étudie la convergence de chacun des 16 termes du développement.

Chacun de ces termes est de la forme

$$\int\int Y_l(x_1)Y_l(x_2)Y_{l'}(x_3)Y_{l'}(x_4), \tag{3.129}$$

où les x_i dépendent de u, v, s, s', l et l'. On démontre sa convergence à l'aide du Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il y a deux étapes : d'abord on prouve que l'intégrande dans (3.129) converge ; ensuite on montre qu'elle est majorée par une fonction intégrable. On suppose dans les calculs ci-dessous que $l' \leq l$ et que $s \neq s'$ (ce qui n'enlève rien à la généralité du raisonnement).

Pour commencer, on s'intéresse au problème de la convergence. Puisque $Y_l(z) = e^{\frac{1}{2}\omega_l(z)} = e^{\frac{1}{2}P(A_l(z))}$, le fait que P soit une mesure aléatoire nous permet d'écrire

$$\mathrm{E}Y_l(x_1)Y_l(x_2)Y_{l'}(x_3)Y_{l'}(x_4) = \frac{\mathrm{E}Y_l(x_1)Y_l(x_2)Y_l(x_3)Y_l(x_4) \times \mathrm{E}Y_{l'}(x_3)Y_{l'}(x_4)}{\mathrm{E}Y_l(x_3)Y_l(x_4)}. \tag{3.130}$$

D'après le Lemme 1 dans [8], en supposant sans perte de généralité que $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}Y_l(x_1)Y_l(x_2)Y_l(x_3)Y_l(x_4)\\ &\quad = e^{\psi(2)r_l(x_4-x_1)+\psi(3/2)[r_l(x_3-x_1)+r_l(x_4-x_2)-2r_l(x_4-x_1)]}\\ &\quad \times e^{\psi(1/2)[4r_l(0)-2r_l(x_2-x_1)-2r_l(x_3-x_2)-2r_l(x_4-x_3)+r_l(x_3-x_1)+r_l(x_4-x_2)]}.\end{aligned} \tag{3.131}$$

On calcule la limite de chaque intégrande dans le développement de (3.128) à partir de l'équation (3.131) et du Lemme 3.21. Par exemple, le terme le « plus simple »

$$\mathrm{E}Y_l(s)Y_l(s)Y_{l'}(s')Y_{l'}(s') \tag{3.132}$$

converge vers

$$\left|s - s'\right|^{-\psi(2)} \ ; \tag{3.133}$$

et le « plus compliqué »

$$\mathrm{E}Y_l(s + lu)Y_l(s + lv)Y_{l'}(s' + l'u)Y_{l'}(s' + l'v) \tag{3.134}$$

converge vers

$$\left|s - s'\right|^{-\psi(2)} e^{4\psi(1/2)\Delta(|v-u|)}, \tag{3.135}$$

avec

$$\Delta(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \log x & \text{si } 1 < x. \end{cases} \tag{3.136}$$

La limite des 14 autres termes peut être obtenue de la même façon (il ne nous semble pas utile de donner davantage de détails à ce sujet).

On se tourne à présent vers le problème de la majoration des intégrandes dans (3.128). Chacune d'elles est de la forme

$$\mathrm{E}Y_l(s+y_1)Y_l(s+y_2)Y_{l'}(s'+y_3)Y_{l'}(s'+y_4), \tag{3.137}$$

où y_1 et y_2 peuvent être égaux à 0, lu ou lv ; et y_3 et y_4 à 0, $l'u$ ou $l'v$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}Y_l(s+y_1)Y_l(s+y_2)Y_{l'}(s'+y_3)Y_{l'}(s'+y_4)\\&\quad\leq\left[\mathrm{E}Y_l(s+y_1)^2Y_{l'}(s'+y_3)^2\right]^{1/2}\left[\mathrm{E}Y_l(s+y_2)^2Y_{l'}(s'+y_4)^2\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.138}$$

Avec cette technique on obtient, pour le terme le plus simple

$$\begin{aligned}\mathrm{E}Y_l(s)Y_l(s)Y_{l'}(s')Y_{l'}(s')&\leq\left[\mathrm{E}Y_l(s)^2Y_{l'}(s')^2\right]^{1/2}\left[\mathrm{E}Y_l(s)^2Y_{l'}(s')^2\right]^{1/2}\\&\leq\left|s-s'\right|^{-\psi(2)}.\end{aligned} \tag{3.139}$$

Par hypothèse $\psi(2)<1$, donc $\int_0^t\int_0^t|s-s'|^{-\psi(2)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}s'<\infty$ et le Théorème de Lebesgue s'applique.

Pour le terme le plus compliqué (3.134), en utilisant (3.138) on obtient

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}Y_l(s+lu)Y_l(s+lv)Y_{l'}(s'+l'u)Y_{l'}(s'+l'v)\\&\quad\leq e^{\frac{1}{2}\psi(2)[r_l(s'-s+l'u-lu)+r_l(s'-s+l'v-lv)]}.\end{aligned} \tag{3.140}$$

Comme ce n'est pas suffisant pour appliquer le Théorème de Lebesgue, on coupe le domaine d'intégration en deux. On note

$$D_{l,l'}(u,v):=[0,t]\times[0,t]\cap\left\{\left(s,s'\right),\left|s-s'\right|<2\max\left(lu-l'u,lv-l'v\right)\right\}. \tag{3.141}$$

Alors

$$\mathrm{E}Y_l(s+lu)Y_l(s+lv)Y_{l'}(s'+l'u)Y_{l'}(s'+l'v)\leq e^{\psi(2)(1-\log l)} \tag{3.142}$$

à l'intérieur de $D_{l,l'}(u,v)$ et

$$\mathrm{E}Y_l(s+lu)Y_l(s+lv)Y_{l'}(s'+l'u)Y_{l'}(s'+l'v)\leq e^{\psi(2)r_l[|s'-s|/2]} \tag{3.143}$$

à l'extérieur de $D_{l,l'}(u,v)$.

Par hypothèse $\psi(2)<1$, donc

$$\lim_{(l,l')\to(0,0)}\int\int_{D_{l,l'}(u,v)}e^{\psi(2)(1-\log l)}\mathrm{d}s\mathrm{d}s'=0. \tag{3.144}$$

D'un autre côté

$$e^{\psi(2)r_l[|s'-s|/2]} \leq \left|s'-s\right|^{-\psi(2)} 2^{\psi(2)}, \tag{3.145}$$

donc le Théorème de Lebesgue s'applique finalement bien et on aboutit à la convergence de

$$\int_0^{t-\max(lu,lv)} \int_0^{t-\max(l'u,l'v)} \mathrm{E}Y_l(s+lu)Y_l(s+lv)Y_{l'}(s'+l'u)Y_{l'}(s'+l'v)\mathrm{d}s\mathrm{d}s'. \tag{3.146}$$

Un traitement similaire s'applique aux 14 autres termes dans le développement de (3.128). Il s'ensuit que $\mathrm{E}W_l(u,v)\,W_{l'}(u,v)$ a une limite lorsque l et l' tendent vers 0.

Preuve du Point 2. Le calcul de $\mathrm{E}W_l$ est immédiat en utilisant le Lemme 3.21. Le Théorème de convergence dominée de Lebesgue permet alors d'obtenir

$$\lim_{l\to 0}\mathrm{E}W_l = t\times \int_0^\infty \int_0^\infty u^{\kappa-1}v^{\kappa-1}\left[1-e^{2\psi(1/2)\Delta(u)}-e^{2\psi(1/2)\Delta(v)}+e^{2\psi(1/2)\Delta(|v-u|)}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3.147}$$

La fonction Δ étant strictement croissante sur $[0,\infty[$, avec $\Delta(0)=0$; et le nombre $\psi(1/2)$ étant strictement négatif (Lemme 3.22), la limite dans (3.147) est différente de 0. ■

3.4.3 Démonstration du Lemme 3.16

On se donne $t_1,t_2,\ldots,t_n$ dans $[0,1]$ et $u_1,u_2,\ldots,u_n$ dans $\mathbb{R}$. En raisonnant comme dans la démonstration de la Proprieté 3.14, on écrit :

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}e^{i\left\{u_1X_{\lambda l}^\kappa(\lambda t_1)+\cdots+u_nX_{\lambda l}^\kappa(\lambda t_n)\right\}}\\&\quad=\mathrm{E}_1\left[e^{-(\lambda l)^{-2\kappa}\sum_{k,j}u_ku_j\langle Y_{\lambda l}(.)\mathbf{1}_{[0,\lambda t_j[}(.),Y_{\lambda l}(.)\mathbf{1}_{[0,\lambda t_k[}(.)\rangle_\kappa}\right].\end{aligned} \tag{3.148}$$

Par définition du produit scalaire $\langle .,.\rangle_\kappa$,

$$\langle g(.),h(.)\rangle_\kappa = \lambda^{2\kappa+1}\langle g(\lambda.),h(\lambda.)\rangle_\kappa. \tag{3.149}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_1e^{i\left\{u_1X_{\lambda l}^\kappa(\lambda t_1)+\cdots+u_nX_{\lambda l}^\kappa(\lambda t_n)\right\}}\\&\quad=\mathrm{E}_1\left[e^{-\lambda l^{-2\kappa}\sum_{k,j}u_ku_j\langle Y_{\lambda l}(\lambda.)\mathbf{1}_{[0,\lambda t_j[}(\lambda.),Y_{\lambda l}(\lambda.)\mathbf{1}_{[0,\lambda t_k[}(\lambda.)\rangle_\kappa}\right]\ ;\end{aligned} \tag{3.150}$$

et d'après (1.45)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_1 e^{i\left\{u_1 X^{\kappa}_{\lambda l}(\lambda t_1)+\cdots+u_n X^{\kappa}_{\lambda l}(\lambda t_n)\right\}} \\
&\quad = \mathrm{E}_1\left[e^{-\lambda e^{\Omega_\lambda} l^{-2\kappa}\sum_{k,j} u_k u_j \langle Y_l(.)\mathbf{1}_{[0,t_j[}(.), Y_l(.)\mathbf{1}_{[0,t_k[}(.)\rangle_\kappa}\right] \\
&\quad = \mathrm{E} e^{i\lambda^{1/2} e^{(1/2)\Omega_\lambda}\left\{u_1 X^{\kappa}_{l}(t_1)+\cdots+u_n X^{\kappa}_{l}(t_n)\right\}}, \qquad (3.151)
\end{aligned}$$

qui est l'égalité attendue. ■

3.4.4 Démonstration du Lemme 3.6

La fonction $\delta \mapsto F_\epsilon(\delta)$ est positive et décroissante sur $[0, +\infty[$, donc $\lim_{\delta\to 0} F_\epsilon(\delta)$ existe.

On démontre d'abord la partie directe du Lemme : on suppose que $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{D}\cap I}$ admet une modification continue $\tilde{Z}$. Les processus Z et $\tilde{Z}$ ayant la même loi, pour tous $\epsilon > 0$, $0 < \delta \leq 1$,

$$\mathrm{P}_0\left[\sup_{\substack{|s-t|<\delta \\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}} |Z(t)-Z(s)| \geq \epsilon\right] = \mathrm{P}_0\left[\sup_{\substack{|s-t|<\delta \\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}} \left|\tilde{Z}(t)-\tilde{Z}(s)\right| \geq \epsilon\right]. \qquad (3.152)$$

Par conséquent

$$F_\epsilon(\delta) = \int \mathbf{1}\left\{\sup_{\substack{|s-t|<\delta \\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}} \left|\tilde{Z}(t)-\tilde{Z}(s)\right| \geq \epsilon\right\} \mathrm{dP}_0. \qquad (3.153)$$

L'intervalle I est compact, donc $\tilde{Z}$ est uniformément continu. Il s'ensuit que $\mathbf{1}\left\{\sup_{\substack{|s-t|<\delta \\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}} \left|\tilde{Z}(t)-\tilde{Z}(s)\right| \geq \epsilon\right\}$ converge vers 0 lorsque δ tend vers 0 ; puis d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\lim_{\delta\to 0} F_\epsilon(\delta) = 0$.

On reprend pour démontrer la partie réciproque la méthode de démonstration du Théorème de Kolmogorov-Centsov donnée dans [27] (Théorème 2.8) : on suppose que $\lim_{\delta\to 0} F_\epsilon(\delta) = 0$. Pour tout entier $n > 0$, il existe un $\delta_n > 0$ tel que

$$\mathrm{P}_0\left[\sup_{\substack{|s-t|<\delta_n \\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}} |Z(t)-Z(s)| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{2^n}. \qquad (3.154)$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, il existe un sous-ensemble mesurable Ω_ϵ de Ω tel que $\mathrm{P}_0(\Omega_\epsilon) = 1$ et tel que, pour tout $\omega \in \Omega_\epsilon$, il existe un entier $n^\star > 0$ pour lequel

$$\sup_{\substack{|s-t|<\delta_{n^\star} \\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}} |Z(t)(\omega) - Z(s)(\omega)| < \epsilon. \tag{3.155}$$

On définit à présent

$$\Omega^\star = \cap_{p\in\mathbb{N}^\star}\Omega_{1/p}. \tag{3.156}$$

On a $\mathrm{P}_0(\Omega^\star) = 1$. De plus, pour tout $\omega \in \Omega^\star$, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{|s-t|<\delta \\ s,t\in\mathbb{D}\cap I}} |Z(t)(\omega) - Z(s)(\omega)| < \frac{1}{p}. \tag{3.157}$$

Cela prouve que la fonction $t \mapsto Z(t)(\omega)$ est continue sur $\mathbb{D}$. On définit alors un processus $\tilde{Z}$ par

$$\tilde{Z}(s)(\omega) = \begin{cases} Z(s)(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega^\star, \\ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega^\star. \end{cases} \tag{3.158}$$

Le processus $\tilde{Z}$ est une modification de Z et il est continu sur $\mathbb{D}$. ■

3.4.5 Démonstration du Lemme 3.11

On utilise les techniques du chapitre IV du livre d'Adler [3]. Pour $\epsilon > 0$, on note $N(\epsilon)$ le nombre de $\epsilon-$boules nécessaires pour recouvrir l'intervalle $[0,1]$ pour la pseudo-métrique

$$\mathrm{d}(t,t') = \left(\mathrm{E}_0\left|G(t') - G(t)\right|^2\right)^{1/2}. \tag{3.159}$$

Dans un souci de clarté, on scinde la démonstration en trois étapes.

Première étape. On commence par majorer $\mathrm{d}(t,t')$: on observe d'abord (en raisonnant comme dans la démonstration du Lemme 3.1) que

$$\mathrm{d}(t,t')^2 = \left\|\mathbf{D}_-^{-\kappa}\left(f\mathbf{1}_{[t,t'[}\right)\right\|_2^2 \leq \left\||\mathbf{D}|_-^{-\kappa}\left(f\mathbf{1}_{[t,t'[}\right)\right\|_2^2 \leq$$
$$d(\kappa)\left(\mathbf{M}_{t,t'}^{-\kappa} f + \int_t^{t'}\int_t^{t'} |f(u)|\,|f(v)| \int_{-\infty}^{t} (u-s)^{\kappa-1}(v-s)^{\kappa-1}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right) \tag{3.160}$$

($d(\kappa)$, ainsi que $d_1(\kappa)$ et $d_2(\kappa)$ ci-dessous sont des constantes). L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au terme $\int_{-\infty}^{t}(u-s)^{\kappa-1}(v-s)^{\kappa-1}\,\mathrm{d}s$ donne alors

$$\mathrm{d}(t,t') \leq d_1(\kappa)\left[\left(\mathbf{M}_{t,t'}^{-\kappa}f\right)^{1/2} + \int_t^{t'} |f(u)|\,(u-t)^{\kappa-1/2}\,\mathrm{d}u\right] \;; \qquad (3.161)$$

et l'inégalité de Hölder conduit finalement à

$$\mathrm{d}(t,t') \leq d_2(\kappa)\left[\left(\mathbf{M}_{t,t'}^{-\kappa}f\right)^{1/2} + \|f\|_p\,(t'-t)^{\kappa-1/2+1/q}\right]. \qquad (3.162)$$

Deuxième étape. Compte tenu de l'inégalité (3.162), le nombre $N(\epsilon)$ de $\epsilon-$boules nécessaires pour recouvrir $[0,1]$ pour la pseudo-métrique $\mathrm{d}(t,t')$ est inférieur à la somme des nombres $N_A(\epsilon/2)$ et $N_B(\epsilon/2)$ de $\epsilon/2-$boules nécessaires dans ce même recouvrement pour les pseudo-métriques $\mathrm{d}_A(t,t') = d_2(\kappa)\left(\mathbf{M}_{t,t'}^{-\kappa}f\right)^{1/2}$ et $\mathrm{d}_B(t,t') = d_2(\kappa)\,\|f\|_p\,(t'-t)^{\kappa-1/2+1/q}$ respectivement.

De façon immédiate, $N_B(\epsilon) \leq \left(\frac{\epsilon}{d_2(\kappa)\|f\|_p}\right)^{-1/(\kappa-1/2+1/q)} + 1$. On va maintenant démontrer le résultat moins évident :

$$N_A(\epsilon) \leq d_2(\kappa)^2\,\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa}f/\epsilon^2 + 2. \qquad (3.163)$$

Pour cela, on prend $\epsilon' \in]0,\epsilon[$ et on définit une suite (t_n) de la façon suivante :

- $t_0 = 0$;
- t_n étant fixé, t_{n+1} est tel que $\mathbf{M}_{t_n,t_{n+1}}^{-\kappa}f = \left(\epsilon'/d_2(\kappa)\right)^2$.

Ce choix est possible pour des raisons de continuité de l'intégrale comme fonction de ses bornes. On peut également trouver un $\gamma > 0$ tel que

$$\mathbf{M}_{t_n-\gamma,t_{n+1}+\gamma}^{-\kappa}f < \left(\epsilon/d_2(\kappa)\right)^2 \;; \qquad (3.164)$$

autrement dit tel que

$$\mathrm{d}_A(t_n-\gamma, t_{n+1}+\gamma) < \epsilon \qquad (3.165)$$

pour tout n. On note p le plus petit entier tel que $t_p \geq 1$. Les intervalles $]t_n-\gamma, t_{n+1}+\gamma[$ réalisent un $\epsilon-$recouvrement de l'intervalle $[0,1]$ pour la pseudo-métrique d_A. Et comme

$$\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa}f \geq \sum_{n=0}^{p-2}\mathbf{M}_{t_n,t_{n+1}}^{-\kappa}f = (p-1)\left(\epsilon'/d_2(\kappa)\right)^2, \qquad (3.166)$$

on trouve

$$N_A(\epsilon) \leq d_2(\kappa)^2 \mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} f/\epsilon'^2 + 1. \tag{3.167}$$

Ce qui précède étant valable quelle que soit la valeur de ϵ', en choisissant ϵ' suffisamment proche de ϵ on arrive à

$$N_A(\epsilon) \leq d_2(\kappa)^2 \mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} f/\epsilon^2 + 2. \tag{3.168}$$

La conclusion de cette deuxième étape est qu'il existe deux constantes $d_3(\kappa)$ et $\beta(\kappa) \geq 2$ telles que

$$N(\epsilon) \leq d_3(\kappa) \left(\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} f + \|f\|_p^{\beta(\kappa)} + 1 \right) \epsilon^{-\beta(\kappa)}. \tag{3.169}$$

Troisième étape. D'après l'inégalité (4.48) et d'après l'inégalité en bas de la p.86 du livre d'Adler, il existe une constante universelle K telle que

$$\mathrm{E}_0 \left(\sup_{|t-s|<\eta} (G(t) - G(s)) \right) \leq K \left(|\eta \log \eta| + \int_0^\eta (\log N(\epsilon))^{1/2} \, \mathrm{d}\epsilon \right). \tag{3.170}$$

Par raison de symétrie et en tenant compte de (3.169), on obtient

$$\mathrm{E}_0 \left(\sup_{|t-s|<\eta} |G(t) - G(s)| \right) \leq 2K \left(|\eta \log \eta| + \int_0^\eta R_f(\epsilon) \, \mathrm{d}\epsilon \right), \tag{3.171}$$

avec

$$R_f(\epsilon) = 1 + \log \left[d_3(\kappa) \left(\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} f + \|f\|_p^{\beta(\kappa)} + 1 \right) \epsilon^{-\beta(\kappa)} \right]. \tag{3.172}$$

Il existe donc une fonction $h(\kappa, \eta)$, indépendante de f, vérifiant $\lim_{\eta \to 0} h(\kappa, \eta) = 0$ et telle que

$$\mathrm{E}_0 \left(\sup_{|t-s|<\eta} |G(t) - G(s)| \right) \leq h(\kappa, \eta) \left(\mathbf{M}_{0,1}^{-\kappa} f + \|f\|_p^p + 1 \right). \tag{3.173}$$

■

Bibliographie

[1] Abry, P., Chainais, P., Coutin, L., Pipiras, V. : Multifractal random walks as fractional Wiener integrals. IEEE Trans. Inf. Theory **55**, 3825–3846 (2009)

[2] Achieser, N., I. : *Theory of Approximation*, Frederik Ungar Publishing Co., 1956

[3] Adler, R. J. : *An introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*, ser. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes-Monograph Series, 12. Hayward, CA : Institute of Mathematical Statistics, 1990

[4] Anh, V., V., Inoue, A. : Prediction of fractional Brownian motion with Hurst index less than 1/2. Bull. Austral. Math. Soc. **70**, 321–328 (2004)

[5] Arneodo, A., Bacry, E., Manneville, S., Muzy, J.-F. : Analysis of random cascades using space-scale correlation functions. Phys. Rev. Lett. **80**, 708–711 (1998)

[6] Arneodo, A., Bacry, E., Muzy, J.-F. : Random cascades on wavelet dyadic trees. J. Math. Phys. **39**, 4142–4164 (1998)

[7] Bacry, E., Delour, J., Muzy, J.-F. : Multifractal random walks. Phys. Rev. E **64**, 026103 (2001)

[8] Bacry, E., Muzy, J.-F. : Log-infinitely divisible multifractal processes. Commun. Math. Phys. **236**, 449–475 (2003)

[9] Barral, J., Mandelbrot, B. : Multifractal products of cylindrical pulses. Prob. Th. Rel. Fields **124**, 409–430 (2002)

[10] Calvet, L., Fisher, A. : *Multifractal Volatility : Theory, Forecasting, and Pricing*. Academic Press, 2008.

[11] Chainais, P., Riedi, R., Abry, P. : On non-scale-invariant infinitely divisible cascades. IEEE Trans. Inform. Theory **51**, 1063–1083 (2005)

[12] Duchon, J., Robert, R., Vargas, V. : Forecasting volatility with the multifractal random walk model. Math. Finance **22**, 83–108 (2012)

[13] Falconer, K. : *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 1990.

[14] Fox, R., Taqqu, M. : Central limit theorems for quadratic forms in random variables having long range dependence. Probab. Th. Rel. Fields **74**, 213–240 (1987)

[15] Frisch, U. : *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995

[16] Ghashghaie, S., Breymann, W., Peinke, J., Talkner, P., Dodge, Y. : Turbulent cascades in foreign exchange markets. Nature **381**, 767–770 (1996)

[17] Gihman, I., I., Skorohod, A., V. : *The Theory of Stochastic Processes*, Springer-Verlag, 1974

[18] Gripenberg, G., Norros, I. : On the prediction of fractional Brownian motion. J. Appl. Probab. **33**, 400–410 (1996)

[19] Hentschel, H. G. E., Procaccia, I. : The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. Physica D **8**, 435–444 (1983)

[20] Holley, R., Waymire, E. C. : Multifractal Dimensions and Scaling Exponents for Strongly Bounded Random Cascades. Annals Appl. Probab. **2**, 819–845 (1992)

[21] Hosking, J. R. M. : Fractional differencing. Biometrika **68**, 165–176 (1981)

[22] Huang, Y. X., Schmitt, F. G., Hermand, J.-P., Gagne, Y., Lu, Z. M., Liu, Y. L. : Arbitrary-order Hilbert spectral analysis for time series possessing scaling statistics : Comparison study with detrended fluctuation analysis and wavelet leaders. Phys. Rev. E **84**, 016208 (2011)

[23] Jaffard, S. : On the Frisch-Parisi conjecture. J. Math. Pures et Appl. **79**, 525–552 (2000)

[24] Kahane, J.-P., Peyrière, J. : Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. Adv. Math. **22**, 131–145 (1976)

[25] Kahane, J.-P. (1985) : Sur le chaos multiplicatif. Ann. Sci. Math. Quebec **9**, 105–150 (1985)

[26] Kahane, J.-P. : Positive martingales and random measures. Chinese Ann. Math., Serie B **8** 1 (1987)

[27] Karatzas, I., Shreve, S. E. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer, 1998

[28] Kida, S. : Log-stable distribution and intermittency of turbulence. J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 5–8 (1991)

[29] Kolmogorov, A. N. : A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. J. Fluid Mech. **13**, 82–85 (1962)

[30] Lovejoy, S., Schertzer, D. : Towards a new synthesis for atmospheric dynamics : space-time cascades. Atmos. Res. **96**, 1–52 (2010)

[31] Ludena, C. : Lp-variations for multifractal fractional random walks. Ann. Appl. Probab. **18**, 1138–1163 (2008)

[32] Lundgren, T., Chiang, D. : Solution of a class of singular integral equations. Quart. J. Appl. Math. **24**, 303–313 (1967)

[33] Mandelbrot, B. B., Van Ness, J. W. : Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Rev. **10**, 422–437 (1968)

[34] Mandelbrot, B. B. : Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. J. Fluid. Mech. **62**, 331–358 (1974)

[35] Mandelbrot, B., Fisher, A., Calvet, L. : A Multifractal Model of Asset Returns. Cowles Foundation Discussion Paper n°1164 (1997)

[36] Molchan, G. M., : Scaling exponents and multifractal dimensions for independant random cascades. Comm. Math. Phys. **179**, 681–702 (1996)

[37] Muzy, J.-F., Delour, J., Bacry, E. : Modelling fluctuations of financial time series : from cascade process to stochastic volatility model. Eur. Phys. J. B **17**, 537–548 (2000)

[38] Muzy, J.-F., Bacry, E. : Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws. Phys. Rev. E **66**, 056121 (2002)

[39] Muzy, J.-F., Bacry, E., Kozhemyak, A. : Extreme values and fat tails of multifractal fluctuations. Phys. Rev. E **73**, 066114 (2006)

[40] Nualart, D. : Stochastic calculus with respect to the fractional Brownian motion and applications. Contemp. Math. **336**, 3–39 (2003)

[41] Parisi, G., Frisch, U. : Fully developped turbulence and intermittency. In : Ghil, M. et al. (eds.) *Proc. of Int. Summer school Phys. Enrico Fermi*, pp.84-87. North Holland (1985).

[42] Peltier, R. F., Lévy-Véhel, J. : Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results. Rapport de recherche INRIA N°2645 (1995)

[43] Perpète, N., Schmitt, F. G. : A discrete log-normal process to sequentially generate a multifractal time series. J. Stat. Mech. : Th. and Exp. **12**, 12013 (2011)

[44] Perpète, N. : Construction of Multifractal Fractional Random Walks with Hurst index smaller than 1/2. Stoch. Dyn. (à paraître)

[45] Pipiras, V., Taqqu, M.-S. : Integration questions related to fractional Brownian motion. Probab. Th. Rel. Fields **118**, 251–291 (2000)

[46] Pipiras, V., Taqqu, M.-S. : Fractional calculus and its connections to fractional Brownian motion. In : Doukhan, P. et al. (eds.) *Theory and Applications of Long Range Dependence*, 165–201 (2003)

[47] Polya, G., Szego, D. : *Problems and Theorems in Analysis*. Springer-Verlag, 1967

[48] Rajput, B., Rosinski, J. : Spectral representations of infinitely divisible processes. Probab. Th. Rel. Fields **82**, 451–487 (1989)

[49] Riedi, R. H. : Multifractal Processes. In : Doukhan, P. et al. (eds.) *Long range dependence : theory and applications*, 625–715 (1999)

[50] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. : *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993

[51] Samorodnitsky, G., Taqqu, M. S. : *Stable non-Gaussian random processes ; stochastic models with infinite variance*. Chapman and Hall, 1994

[52] Schertzer, D., Lovejoy, S. : Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling and multiplicative processes. J. Geophys. Res. **92**, 9692–9714 (1987)

[53] Schmitt, F,. Schertzer, D., Lovejoy, S., Brunet, Y. : Empirical study of multifractal phase transitions in atmospheric turbulence Nonlinear Proc. Geophys. **1**, 95–104 (1994)

[54] Schmitt, F., Schertzer, D., Lovejoy, S. : Multifractal analysis of foreign exchange data. Appl. Stoch. Models Data Anal. **15**, 29–53 (1999)

[55] Schmitt, F. G., Marsan, D. : Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades. Eur. Phys. J. B. **20**, 3–6 (2001)

[56] Schmitt, F. G. : A causal multifractal stochastic equation and its statistical properties. Eur. Phys. J. B. **34**, 85–98 (2003)

[57] Schmitt, F. G., Chainais, P. : On causal equations for log-stable multiplicative cascades. Eur. Phys. J. B **58**, 149–158 (2007)

[58] Selberg, A. : Remarks on a multiple integral. Norsk Mat. Tidsskr. **26**, 71–78 (1944)

[59] Seuront, L., Schmitt, F. G. : Eulerian and Lagrangian properties of biophysical intermittency in the ocean. Geophys. Res. Lett. **31**, L03306 (2004)

[60] Weron, R. : On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables. Stat. Proba. Lett. **28**, 165–171 (1996).

[61] Yaglom, A. M. : The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulence characteristics in the inertial interval. Sov. Phys. Dokl. **11**, 49–52 (1966)