



**HAL**  
open science

# Caracterisation dynamique et conception robuste d'interfaces de structures

Thomas Weisser

► **To cite this version:**

Thomas Weisser. Caracterisation dynamique et conception robuste d'interfaces de structures. Autre. Université de Franche-Comté, 2012. Français. NNT : 2012BESA2011 . tel-00912680

**HAL Id: tel-00912680**

**<https://theses.hal.science/tel-00912680>**

Submitted on 2 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



SPIM

Thèse de Doctorat



UFC

école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

**CARACTERISATION DYNAMIQUE  
ET CONCEPTION ROBUSTE  
D'INTERFACES DE STRUCTURES**

■ **THOMAS WEISSER**

# SPIM

## Thèse de Doctorat

UFC

école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques  
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

*Thèse présentée par*  
**Thomas WEISSER**

*pour obtenir le*  
GRADE DE DOCTEUR  
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ  
spécialité Mécanique

### **CARACTÉRISATION DYNAMIQUE ET CONCEPTION ROBUSTE D'INTERFACES DE STRUCTURES**

*Soutenue le 14 Septembre 2012 devant la Commission d'Examen :*

<b>Rapporteurs</b>	L. JÉZÉQUEL	Professeur, LTDS, École Centrale de Lyon
	A. MOORHOUSE	Professeur, Acoustic Research Center, University of Salford, Manchester, Royaume-Uni
<b>Examineurs</b>	S. COGAN	Chargé de recherche CNRS, HDR, Institut FEMTO-ST, Besançon
	F. GAUTIER	Professeur, LAUM, ENSIM, Le Mans
	L.-O. GONIDOU	Ingénieur, Centre National d'Études Spatiales, Paris
<b>Directeurs</b>	N. BOUHADDI	Professeur, Institut FEMTO-ST, Université de Franche-Comté, Besançon
	E. FOLTÊTE	Professeur, Institut FEMTO-ST, ENSMM, Besançon



# REMERCIEMENTS

C'est avec beaucoup de plaisir que je profite de ces premières pages pour exprimer mes remerciements à l'ensemble des personnes qui m'ont accompagné durant ces années de doctorat.

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein du Département Mécanique Appliquée de l'Institut FEMTO-ST de Besançon. Ils ont été initiés par l'intermédiaire d'une bourse de recherche du Centre National d'Études Spatiales - Direction des Lanceurs, cofinancée par la Sous-Direction Préparation du Futur - Recherche et Technologie.

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus vifs remerciements à mes directeurs de thèse, Noureddine Bouhaddi et Emmanuel Foltête, pour la liberté qu'ils m'ont accordé dans mon travail, tout en prenant le temps, chacun à sa manière, d'exercer des regards intéressés et critiques sur ces travaux. Ils ont également su, lors de nos nombreuses conversations (scientifiques ou non), me pousser à prendre le recul nécessaire, me communiquant ainsi leurs visions respectives du monde de la recherche.

Je remercie le Professeur François Gautier de l'École Nationale Supérieure des Ingénieurs du Mans de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, ainsi que les Professeurs Louis Jézéquel de l'École Centrale de Lyon et Andy Moorhouse de l'Université de Salford à Manchester pour l'intérêt qu'ils ont témoigné vis-à-vis de ces travaux en acceptant d'en rapporter le manuscrit. La justesse et la sincérité de leurs questions et de leurs remarques ont fait de cette soutenance un moment de discussion et d'échange particulièrement stimulant et agréable, ce dont je leur suis particulièrement reconnaissant.

Je remercie également Luc-Olivier Gonidou du CNES d'avoir suivi avec attention les avancées de ces travaux, ainsi que pour ses remarques avisées et son enthousiasme communicatif.

Durant ces années de doctorat, j'ai eu la chance d'être épaulé par des personnes d'une extrême générosité, qui m'ont apporté une aide précieuse, tant sur le plan professionnel que personnel. Je témoigne ainsi toute ma reconnaissance envers Scott Cogan : pendant ces nombreuses heures passées à ses côtés à (re)découvrir *ÆSOP*, j'espère avoir acquis, en plus de tout le reste, une infime partie de sa patience. Je remercie de même Morvan Ouisse pour sa disponibilité inconditionnelle

---

et pour avoir su, à chaque fois, donner des réponses claires, concises et précises à mes nombreuses « petites » questions. Je remercie profondément Émeline Sadoulet-Reboul pour sa présence et son soutien : son écoute attentive et ses relectures approfondies m'ont été d'un grand réconfort.

Je suis également très reconnaissant envers l'ensemble de l'équipe enseignante de mécanique de l'ENSM de Marseilles que j'ai eu le plaisir d'intégrer, en particulier Violaine Guicheret-Retel, Sylvaine Mallet et Frédérique Trivaudey, qui m'ont chaleureusement accueilli et ont accepté de partager avec moi leur expérience de l'enseignement.

Je remercie tout particulièrement mes « collègues » du fabuleux bureau 38H : Cécile Flamier, pour nos longues discussions et les tests comparatifs de croquants aux amandes ; Aurélien Hot pour son aide au combi précieuse durant toutes ces années passées ensemble, dans la joie et la bonne humeur !

Merci à Damien, Éric, Titouan et Wissam pour l'ambiance agréable et studieuse qui plane au-dessus du bureau 37H. J'adresse également une pensée à l'ensemble des thésards que j'ai eu le plaisir de côtoyer et dont la bonne humeur permanente a été une source quotidienne d'entrain : Antoine K., Antoine V., Agathe, Flaviano, Jean, Matthieu, Sid-Ahmed, Thibaud, Thierry, Virginie, Xavier, Yanxia, Youssef.

Je tiens à exprimer mes remerciements affectueux à l'ensemble de ma famille, mes parents et ma petite sœur Pauline pour leur présence et leur soutien constant : je ne doute pas que les années à venir seront aussi bien remplies que celles-ci !

Enfin, j'adresse un énoooooorme MERCI à ma petite famille : à France, pour son soutien, sa patience et sa confiance inébranlables, mais aussi à mon (tout) petit Thibaut qui a su contribuer, à sa manière, à la rédaction de cette thèse !

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Prédiction et maîtrise des niveaux vibratoires . . . . .	2
1.2 Conception robuste de structures complexes . . . . .	3
1.3 Contexte industriel . . . . .	3
1.4 Problématique générale et plan du mémoire . . . . .	5
<b>2 État de l’art et positionnement scientifique</b>	<b>7</b>
2.1 Introduction . . . . .	8
2.2 Isolation des structures vibrantes . . . . .	8
2.2.1 Transferts vibratoires . . . . .	8
2.2.2 Techniques d’isolation . . . . .	9
2.3 Analyse de structures couplées et flux de puissance . . . . .	13
2.3.1 Définition des domaines fréquentiels . . . . .	13
2.3.2 Méthodes basses fréquences . . . . .	16
2.3.3 Méthodes hautes fréquences . . . . .	20
2.3.4 Méthodes moyennes fréquences . . . . .	26
2.4 Méthodes d’analyse de flux de puissance . . . . .	30
2.4.1 Approches locales . . . . .	30
2.4.2 Approches globales . . . . .	33
2.4.3 Approches modales . . . . .	38
2.5 Discussion . . . . .	46

<b>3</b>	<b>Méthode des modes de flux de puissance</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	50
3.2	Systèmes discrétisés et bilans de puissance . . . . .	50
3.2.1	Modèle dissipatif linéaire . . . . .	50
3.2.2	Puissances actives et réactives . . . . .	53
3.2.3	Puissances transmises et dissipées . . . . .	58
3.3	Formulation théorique . . . . .	60
3.3.1	Détermination des modes de flux de puissance . . . . .	60
3.3.2	Étude paramétrique des modes propres de flux de puissance . . . . .	62
3.3.3	Phénomène d’hybridation des efforts propres . . . . .	68
3.4	Caractérisation des interfaces . . . . .	70
3.4.1	Détermination des modes de flux de puissance . . . . .	70
3.4.2	Décomposition des efforts d’interface . . . . .	73
3.4.3	Application . . . . .	74
3.5	Conclusions . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Propriétés des modes de flux de puissance</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	82
4.2	Sollicitations en efforts généralisés aux interfaces . . . . .	82
4.2.1	Matrice de flexibilité dynamique adimensionnelle . . . . .	83
4.2.2	Application . . . . .	84
4.2.3	Conclusion . . . . .	87
4.3	Approximations sur une bande de fréquence . . . . .	87
4.3.1	Filtrage des efforts propres . . . . .	88
4.3.2	Matrice de flexibilité large bande . . . . .	90
4.3.3	Application . . . . .	91
4.3.4	Conclusion . . . . .	93
4.4	Contrôlabilité par les efforts extérieurs . . . . .	94
4.4.1	Formulation théorique . . . . .	95
4.4.2	Application . . . . .	97
4.4.3	Conclusion . . . . .	100
4.5	Adaptation aux structures complexes . . . . .	101
4.5.1	Approche directe . . . . .	101
4.5.2	Approche par superposition modale . . . . .	102
4.5.3	Approche par condensation . . . . .	105
4.5.4	Conclusion . . . . .	108



---

<b>5</b>	<b>Vers une conception robuste des interfaces de structures</b>	<b>109</b>
5.1	Introduction . . . . .	110
5.2	Rappels bibliographiques . . . . .	110
5.2.1	Définition du problème de conception . . . . .	110
5.2.2	Prise en compte des incertitudes . . . . .	113
5.2.3	Méthodes de conception robuste . . . . .	115
5.3	Présentation de la structure test . . . . .	118
5.3.1	Modèle éléments finis . . . . .	118
5.3.2	Comportement dynamique . . . . .	120
5.4	Réanalyse de la sous-structure réceptrice . . . . .	124
5.4.1	Sensibilité des valeurs propres de flux de puissance . . . . .	125
5.4.2	Réanalyse robuste des modes de flux de puissance . . . . .	127
5.5	Optimisation par rapport aux paramètres d'interface . . . . .	130
5.5.1	Investigations préliminaires . . . . .	130
5.5.2	Optimisation mono-objectif . . . . .	132
5.5.3	Optimisation multiobjectif robuste . . . . .	136
5.6	Robustesse d'un choix de conception en présence de méconnaissances . . . . .	139
5.6.1	Approche <i>info-gap</i> . . . . .	139
5.6.2	Complexité des modèles d'incertitudes . . . . .	140
5.6.3	Définition du calcul . . . . .	141
5.6.4	Comparaison des solutions optimales . . . . .	142
5.7	Conclusions . . . . .	143
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>145</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>149</b>
	<b>Annexes</b>	<b>161</b>
<b>A</b>	<b>Bilans de puissance et systèmes discrets</b>	<b>161</b>
A.1	Système discret masse-ressort-amortisseur à 2 ddl . . . . .	161
A.2	Calcul des différentes composantes de la puissance injectée . . . . .	162
A.3	Système discret masse-ressort-amortisseur à 6 ddl . . . . .	164
<b>B</b>	<b>Calcul des modes de flux de puissance</b>	<b>165</b>
B.1	Procédure de tri des modes de flux de puissance . . . . .	165
B.2	Cas des structures libres . . . . .	166
<b>C</b>	<b>Procédure d'initialisation des raideurs d'interface</b>	<b>169</b>
<b>D</b>	<b>Méthodes numériques d'évaluation de la robustesse par approche <i>info-gap</i></b>	<b>173</b>



# LISTE DES FIGURES

1.1	Diagramme de fluctuation de poussée EAP - Vol 503 . . . . .	4
1.2	Schéma du lanceur Ariane 5 . . . . .	5
2.1	Critère de densité modale d'une plaque rectangulaire appuyée . . . . .	14
2.2	Réponse harmonique d'une plaque sollicitée en flexion . . . . .	15
3.1	Schéma d'un système discret masse-ressort-amortisseur à 2 ddl . . . . .	53
3.2	Réponse harmonique en vitesse du système discret à 2 ddl initial . . . . .	54
3.3	Évolution temporelle des grandeurs d'entrée et de sortie du système à 2 ddl . . . . .	54
3.4	Évolution temporelle des grandeurs quadratiques du système à 2 ddl . . . . .	56
3.5	Évolution fréquentielle des grandeurs quadratiques du système à 2 ddl . . . . .	57
3.6	Schéma d'un système couplé discret masse-ressort-amortisseur à 6 ddl . . . . .	58
3.7	Bilan de puissance du système à 6 ddl . . . . .	59
3.8	Évolution fréquentielle des valeurs propres de flux de puissance du système à 2 ddl . . . . .	62
3.9	Évolution fréquentielle des efforts propres du système à 2 ddl . . . . .	63
3.10	Influence d'une variation de $m_1$ sur les modes de flux de puissance . . . . .	63
3.11	Influence d'une variation de $k_3$ sur les modes de flux de puissance . . . . .	64
3.12	Influence d'une variation de $c_1$ sur les modes de flux de puissance . . . . .	65
3.13	Influence d'une variation de $\alpha$ sur les modes de flux de puissance . . . . .	65
3.14	Influence d'une variation de $\eta$ sur les modes de flux de puissance . . . . .	65
3.15	Cas particulier des modes de flux de puissance . . . . .	67
3.16	Interaction des valeurs propres de flux de puissance pour une variation de masse . . . . .	69
3.17	Critère d'hybridation des efforts propres . . . . .	69
3.18	Schéma général d'une structure couplée . . . . .	70
3.19	Modes propres de flux de puissance du système couplé à 6 ddl . . . . .	72
3.20	Comparaison des puissances transmises à l'interface du système à 6 ddl . . . . .	74
3.21	Schéma du système de poutres couplées . . . . .	74
3.22	Modes de flux de puissance du système de poutres couplées . . . . .	75

3.23	Coefficients de projection des efforts d'interface du système de poutres couplées .	76
3.24	Évolution fréquentielle des puissances modales du système de poutres couplées .	77
3.25	Effet de troncature des puissances modales du système de poutres couplées . . . .	78
3.26	Encadrement et valeur moyenne de la puissance transmise . . . . .	79
4.1	Puissances transmises suivant les ddl de translation et de rotation . . . . .	84
4.2	Valeurs propres de flux de puissance du problème pondéré . . . . .	85
4.3	Coefficients de projection du problème pondéré . . . . .	86
4.4	Coefficients de participation modale du problème pondéré . . . . .	86
4.5	Effet de la pondération sur les efforts propres . . . . .	88
4.6	Système couplé composé d'une source rigide et d'un récepteur souple . . . . .	91
4.7	Valeurs propres de flux de puissance de la sous-structure réceptrice souple . . . .	92
4.8	Approximation des modes de flux de puissance en basses fréquences . . . . .	93
4.9	Approximation des modes de flux de puissance en hautes fréquences . . . . .	94
4.10	Résultats de l'optimisation suivant $g_3$ à 2200 Hz . . . . .	98
4.11	Résultats de l'optimisation suivant $g_3$ à 1250 Hz . . . . .	98
4.12	Résultats de l'optimisation suivant $g_1$ à 1250 Hz . . . . .	98
4.13	Puissances transmises par différentes configurations d'efforts extérieurs . . . . .	99
4.14	Erreurs relatives sur les valeurs propres de flux de puissance - superposition modale	103
4.15	Erreurs relatives sur les valeurs propres de flux de puissance - superposition mo- dale avec résidus . . . . .	105
4.16	Erreurs relatives sur les valeurs propres de flux de puissance - condensation dy- namique . . . . .	107
4.17	Calcul des efforts d'interface . . . . .	108
5.1	Solutions dominantes au sens de Pareto . . . . .	112
5.2	Algorithme génétique NSGA . . . . .	118
5.3	Modèle simplifié de lanceur . . . . .	119
5.4	Réponse harmonique en accélération de la structure test . . . . .	121
5.5	Déformées propres de la structure test . . . . .	122
5.6	Puissance initiale transmise aux interfaces de la structure test . . . . .	122
5.7	Valeurs propres de flux de puissance du corps central . . . . .	123
5.8	Chemins de puissance initiaux aux interfaces de la structure test . . . . .	123
5.9	Investigation de l'évolution des coefficients de projection . . . . .	131
5.10	Analyses en composantes principales des puissances modales . . . . .	131
5.11	Investigation de la fonction coût sur 300 tirages aléatoires . . . . .	133
5.12	Procédure d'optimisation mono-objectif . . . . .	133
5.13	Optimisation de la fonction coût à partir de la position 195 . . . . .	134
5.14	Résultats de la procédure d'optimisation mono-objectif . . . . .	135

5.15	Procédure d'optimisation multiobjectif . . . . .	136
5.16	Fronts de Pareto du problème d'optimisation robuste . . . . .	137
5.17	Résultats de la procédure d'optimisation multiobjectif . . . . .	138
5.18	Comparaison de la robustesse <i>info-gap</i> des solutions optimales . . . . .	143
A.1	Évolution temporelle des énergies associées du système à 2 ddl, pour une excitation à $4,24 Hz$ . . . . .	161
A.2	Évolution temporelle des puissances associées du système à 2 ddl, pour une excitation à $7 Hz$ . . . . .	162
A.3	Amplitude de la réponse harmonique en vitesse du système discret à 6 ddl . . . . .	164
B.1	Modes de flux de puissance non triés . . . . .	165
C.1	Initialisation des raideurs d'interface - configuration initiale . . . . .	170
C.2	Initialisation des raideurs d'interface - configuration finale . . . . .	171
D.1	Comparaison des méthodes d'évaluation de la robustesse <i>info-gap</i> . . . . .	174



# LISTE DES TABLEAUX

2.1	Tableau de comparaison des méthodes de modes de flux de puissance . . . . .	45
3.1	Paramètres initiaux du système discret à 2 ddl . . . . .	53
3.2	Paramètres initiaux du système de poutres couplées . . . . .	75
4.1	Efforts extérieurs optimaux pour le système de poutres couplées . . . . .	99
4.2	Temps CPU relatifs des différentes approches de calcul des modes de flux de puissance . . . . .	101
5.1	Valeurs initiales des paramètres de raideur . . . . .	120
5.2	Chargement dynamique appliqué à la structure . . . . .	120
5.3	Valeurs relatives des paramètres de raideur optimaux - optimisation mono-objectif	135
5.4	Valeurs relatives des paramètres de raideur optimaux - optimisation multiobjectif	138
A.1	Paramètres initiaux du système discret à 6ddl . . . . .	164





Chapitre **1**

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Sommaire

---

1.1	Prédiction et maîtrise des niveaux vibratoires . . . . .	2
1.2	Conception robuste de structures complexes . . . . .	3
1.3	Contexte industriel . . . . .	3
1.4	Problématique générale et plan du mémoire . . . . .	5

---

## 1.1 Prédiction et maîtrise des niveaux vibratoires

Les structures mécaniques rencontrées dans le domaine de l'aérospatiale ou de l'automobile sont habituellement qualifiées de complexes. Elles sont le résultat d'un assemblage de plusieurs composants, possédant souvent des propriétés mécaniques différentes, reliés à leurs interfaces par différents types de jonctions. Il en résulte une hétérogénéité des comportements dynamiques de ces sous-structures, qui rend difficile la détermination de la réponse globale du système. Ces structures complexes sont également soumises à des sollicitations dynamiques importantes, qui peuvent varier suivant les différentes phases d'utilisation. Leur action va se traduire par des efforts conséquents sur la structure principale, ainsi que des accélérations importantes au niveau des équipements embarqués, qui peuvent affecter leur fonctionnement, leur fiabilité, leur sécurité. Il est donc nécessaire de les protéger d'un environnement hostile en les isolant du reste de la structure.

De nombreuses recherches ont été entreprises ces quarante dernières années, afin d'analyser, modéliser et contrôler ces transmissions vibratoires. Parmi celles-ci, on distingue l'étude du bruit d'origine structural (*structure-borne sound*) qui est défini comme étant l'énergie vibratoire se propageant sous la forme d'ondes élastiques à travers un milieu solide. Il provient ainsi typiquement des efforts internes qui s'exercent entre une sous-structure source (*booster* de lanceur spatial, moteur) et une sous-structure réceptrice (corps central du lanceur, caisse en blanc), au niveau des jonctions (bielles, *silentbloc*). Si cette thématique semble plus proche des problèmes vibroacoustiques, le but étant généralement de limiter les niveaux sonores émis par la structure réceptrice, elle fournit néanmoins une approche pertinente aux problèmes d'isolation des vibrations structurales.

Cependant, les hypothèses simplificatrices sur lesquelles sont basées les méthodes d'isolation classiques ne sont en général pas vérifiées dans le cas des structures complexes : structure réceptrice non assimilable à une structure rigide, complexité géométrique des interfaces entre sous-structures, nombre important de jonctions, ... De plus, les vitesses et les efforts d'interface sont des grandeurs vectorielles parfois difficilement comparables, qui ne permettent pas d'appréhender l'ensemble des phénomènes liés aux transferts vibratoires lorsqu'elles sont étudiées de manière indépendante. Des méthodes d'isolation plus élaborées ont donc été proposées, s'appuyant sur les notions de puissance dissipée et de puissance transmise entre les différentes sous-structures. Ces méthodes vont fournir de nouvelles grandeurs d'intérêt qui vont permettre de caractériser, souvent de manière indépendante, la sous-structure source, la sous-structure réceptrice et éventuellement les éléments de jonction. Si leur but final demeure la réduction des niveaux vibratoires, elles visent également à apporter plus d'informations sur les échanges vibratoires entre les sous-structures : nature du (ou des) couplage(s), chemins énergétiques principaux. . .

### 1.2 Conception robuste de structures complexes

Dès les phases d'avant projet, il est indispensable de s'assurer du bon dimensionnement des différents composants d'une structure complexe, ainsi que de leur assemblage, dans le but de respecter des critères de performance. Il est donc nécessaire d'adopter une démarche de conception à partir de modèles numériques afin d'envisager différentes configurations et de les évaluer. Les méthodes précédentes fournissent ainsi des modèles réduits, s'appuyant sur des quantités énergétiques liées aux interfaces, qui permettent d'exprimer les performances attendues, par exemple liées à l'isolation des sous-structures.

Des procédures d'optimisation sont alors mises en place afin de déterminer une ou plusieurs solutions optimales, à savoir quelles sont les valeurs des paramètres de conception associés aux interfaces qui assurent une isolation optimale, c'est-à-dire qui minimisent la puissance transmise entre ces différents composants. Les grandeurs énergétiques introduites ci-dessus permettent donc de diriger cette recherche de solution en élaborant des fonctions prenant en compte l'ensemble des informations associées aux transferts vibratoires aux jonctions.

Cette notion d'optimisation s'étend également aux procédures de résolution. Le nombre de variables de conception pouvant être élevé, de nombreuses analyses successives vont être réalisées, tant au niveau des composants que de la structure complète, pouvant se révéler prohibitives en coût et en temps de calcul. Des méthodes de réanalyse approchée et des algorithmes adaptés aux problèmes considérés doivent donc être mis en place.

Cependant, ces solutions optimales sont soumises aux variabilités des paramètres de conception, qui peuvent entraîner une importante dégradation des performances de la structure. Il est alors nécessaire de s'intéresser à leur robustesse vis-à-vis des méconnaissances et des incertitudes associées au modèle. L'approche conception robuste vise à déterminer des valeurs des paramètres d'interface pour lesquelles la puissance transmise est à la fois minimale et peu sensible aux incertitudes. Or, ces deux objectifs sont souvent antagonistes et impliquent un compromis entre performance et robustesse. Il est donc nécessaire de disposer d'outils d'aide à la décision adaptés afin de justifier certains choix de conception dans un contexte d'incertitude.

### 1.3 Contexte industriel

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de thèse visent à répondre à une problématique formulée par le Centre National d'Études Spatiales (CNES), concernant la maîtrise de l'environnement dynamique du lanceur européen Ariane 5. On propose ici d'en donner un résumé synthétique, illustrant les paragraphes précédents.

La structure mécanique du lanceur Ariane 5 est un **assemblage complexe de plusieurs composants**, parmi lesquels on distingue l'étage principal cryotechnique (EPC), le composite supérieur, la charge utile et la coiffe qui constituent le corps central, ainsi que les étages d'accélération à poudre (EAP) ou boosters (figure 1.2 (a)). Ceux-ci sont chargés de fournir la poussée nécessaire au décollage. Or, lors de la phase de vol atmosphérique, la combustion du propergol solide crée un écoulement de gaz turbulent qui va exciter les modes acoustiques internes de la cavité des EAP et entraîner des oscillations quasi-harmoniques de leur structure. Ces fluctuations de poussée vont donc générer un ensemble de **forces d'excitations aux points d'attache** avec l'EPC, qui peuvent avoir un **impact sur l'environnement dynamique** du corps central et de sa charge utile. La figure 1.1 représente l'évolution, en fonction de la fréquence et du temps de vol, de la fluctuation de poussée des boosters. On observe que l'excitation transmise au corps central est principalement due à la réponse en translation de l'EAP à son premier mode acoustique, situé entre  $17\text{ Hz}$  et  $25\text{ Hz}$ . Cependant l'excitation associée au second mode acoustique, situé entre  $35\text{ Hz}$  et  $53\text{ Hz}$ , peut parfois devenir importante, l'EAP possédant lui-même un mode structural longitudinal dans la même bande de fréquence. L'effort transmis au corps central peut alors être amplifié.

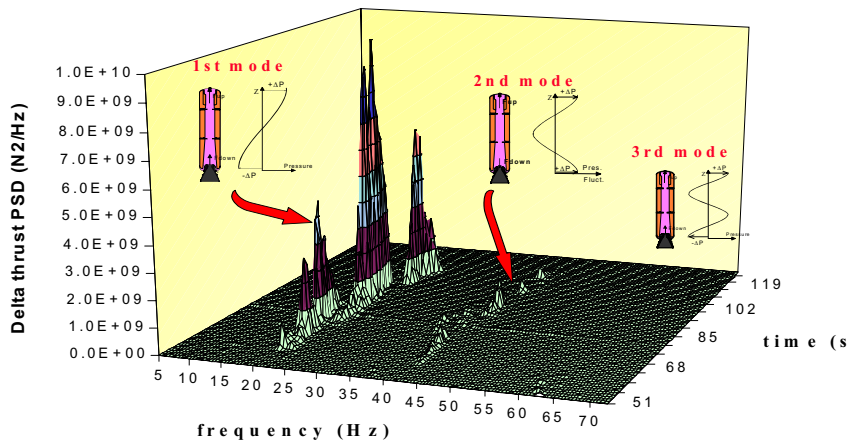


FIG. 1.1: Diagramme de fluctuation de poussée EAP - Vol 503

Afin de **contrôler ces excitations** et de les **réduire le plus possible**, des filtres mécaniques ont été introduits aux interfaces entre les EAP et l'EPC, ceci dès les **premières phases de conception**. La jonction haute s'effectue ainsi par l'intermédiaire d'un dispositif assouplisseur (DIAS), composé d'un ensemble de lamifiés d'élastomère et d'aluminium, permettant de transmettre les efforts tout en assurant une souplesse longitudinale (figure 1.2 (b)). Ses **caractéristiques** sont **particulièrement sensibles** à l'amplitude des efforts transmis, supérieure à  $3.10^6\text{ N}$  en fin de phase de vol atmosphérique « accélération maximale » ; à la fréquence d'intérêt ; aux **contraintes de dimensionnement** statiques et dynamiques du lanceur (lors d'une première conception). De ce fait, la souplesse longitudinale du DIAS varie entre  $2,3.10^{-8}\text{ m/N}$  et  $5.10^{-8}\text{ m/N}$  en fonction du point de fonctionnement considéré [112]. La jonction basse consiste, elle, en un dispositif d'accrochage (DAAR), composé de trois bielles (figure 1.2 (b)).

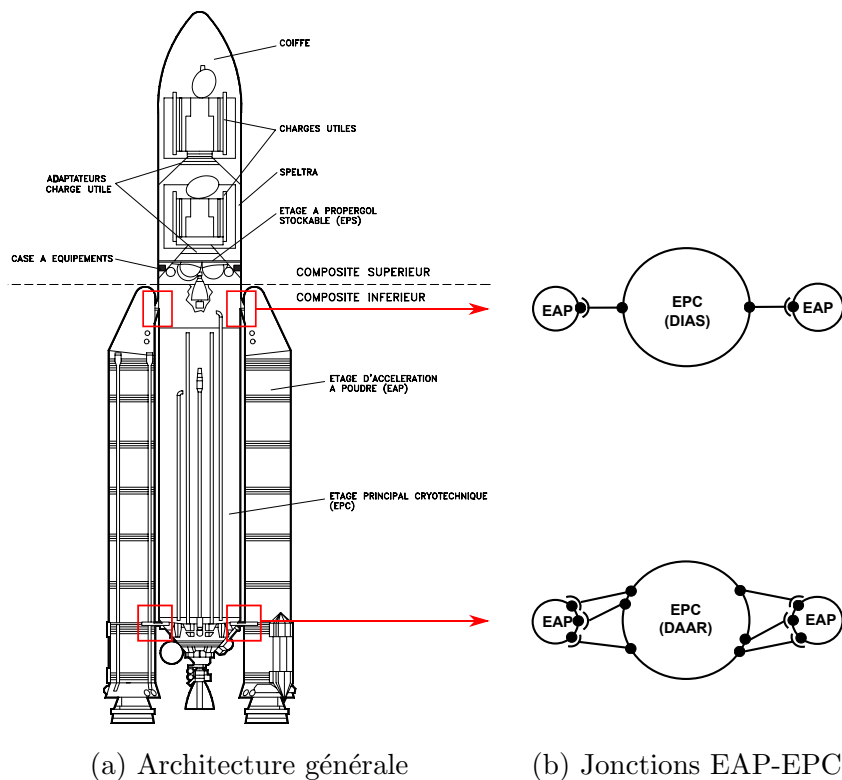


FIG. 1.2: Schéma du lanceur Ariane 5

Les attentes du CNES ont donc été formulées de la manière suivante : développer une méthode permettant de déterminer et de caractériser les efforts d'interface au sein des liaisons EAP-DIAS et EAP-DAAR, dans le but de minimiser la puissance transmise entre les boosters et le corps central, et de réduire les niveaux de réponse en pied de charge de utile [60].

## 1.4 Problématique générale et plan du mémoire

L'objectif de ces travaux est de présenter une méthode de caractérisation dynamique des interfaces de structures complexes et de l'intégrer dans une démarche de conception robuste visant à minimiser la puissance transmise entre une structure source et une structure réceptrice. Afin de répondre à cette problématique, ce mémoire est organisé de la manière suivante :

- Le **chapitre 2** vise tout d'abord à situer ces travaux de recherche par rapport aux différents domaines de la dynamique des structures auxquels ils se rapportent. Après avoir introduit les principales notions associées à l'étude des transferts vibratoires, il présente un bref aperçu des techniques classiques d'isolation vibratoire. Il propose ensuite une synthèse des méthodes de prédiction du comportement dynamique des structures couplées, ainsi que des méthodes d'analyse de flux de puissance. Bien que non exhaustive, celle-ci s'attache à détailler les différentes grandeurs propres à chaque méthode, permettant de caractériser

le comportement dynamique aux interfaces entre les différents composants. Il se termine enfin par une discussion critique dont le but est de positionner la méthode des modes de flux de puissance en la comparant aux autres approches citées.

- Le **chapitre 3** présente la formulation générale de la méthode des modes de flux de puissance. Une étude paramétrique sur un système discret permet d’observer leur comportement en fonction des différents paramètres. Un phénomène d’hybridation de ces modes est alors mis en évidence et étudié. Cette méthode est ensuite appliquée à la caractérisation des interfaces. De nouvelles grandeurs d’intérêt sont définies et utilisées afin d’exprimer le bilan de puissance à l’interface. L’étude de certains cas particuliers (structures souples/rigides) permet enfin d’obtenir des calculs simplifiés. L’ensemble de ces résultats est illustré par des simulations sur un exemple académique constitué de deux poutres couplées par trois jonctions.
- Le **chapitre 4** s’intéresse aux propriétés des modes de flux de puissance. Celles-ci concernent, dans un premier temps, les sollicitations mixtes aux interfaces (en efforts et en moments) et les approximations sur une bande de fréquence. Dans un deuxième temps, une méthode de contrôle des efforts d’interface par les efforts extérieurs est présentée. Ces différentes études sont illustrées à partir d’une structure couplée académique. Enfin, une adaptation des procédures de calcul relatives à la méthode des modes de flux de puissance est proposée, afin de permettre l’analyse de structures industrielles de complexité représentative.
- Le **chapitre 5** est consacré à l’intégration de la méthode des modes de flux de puissance dans une démarche de conception robuste des interface de structures complexes. Tout d’abord, un rappel bibliographique permet d’introduire les notions liées aux méthodes d’optimisation et à la prise en compte des incertitudes. Une procédure d’optimisation des interfaces d’une structure couplée complexe est ensuite présentée afin de minimiser la puissance transmise. Après une étude préliminaire permettant d’identifier les paramètres de conception retenus ainsi que de définir une fonction coût pertinente, des solutions à ce problème mono-objectif sont déterminées à l’aide d’un algorithme de programmation non-linéaire. Au regard de leur sensibilité vis-à-vis des incertitudes, une seconde approche est proposée afin d’optimiser à la fois cette performance et sa robustesse, grâce à un algorithme génétique basé sur le concept de solution dominante au sens de Pareto. Enfin, la notion de robustesse est approfondie par une approche non-probabiliste de type *info-gap*, visant à apporter une aide à la décision dans le cadre de la conception robuste en présence de méconnaissances.

Enfin, une conclusion générale termine ce mémoire. Elle présente également les principales perspectives concernant la poursuite de ces travaux et évoque les problématiques encore ouvertes.

# ÉTAT DE L'ART ET POSITIONNEMENT SCIENTIFIQUE

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2.2</b>	<b>Isolation des structures vibrantes</b>	<b>8</b>
2.2.1	Transferts vibratoires	8
2.2.2	Techniques d'isolation	9
<b>2.3</b>	<b>Analyse de structures couplées et flux de puissance</b>	<b>13</b>
2.3.1	Définition des domaines fréquentiels	13
2.3.2	Méthodes basses fréquences	16
2.3.3	Méthodes hautes fréquences	20
2.3.4	Méthodes moyennes fréquences	26
<b>2.4</b>	<b>Méthodes d'analyse de flux de puissance</b>	<b>30</b>
2.4.1	Approches locales	30
2.4.2	Approches globales	33
2.4.3	Approches modales	38
<b>2.5</b>	<b>Discussion</b>	<b>46</b>

---

## 2.1 Introduction

Le but de cette étude bibliographique est de positionner ces travaux de recherche par rapport aux différents domaines de la dynamique des structures auxquels ils se rapportent. Volontairement non exhaustive, elle s'attache à exposer différentes méthodes ayant chacune un rapport avec la méthode des modes de flux de puissance proposée. Elle s'appuie sur différents ouvrages de référence ou synthèses auxquels il est recommandé de se rapporter afin de disposer, pour chacune des thématiques abordées, d'un échantillon représentatif des principales publications : [38, 29, 126, 151, 72].

## 2.2 Isolation des structures vibrantes

### 2.2.1 Transferts vibratoires

Les transferts vibratoires au sein d'une structure complexe se décomposent globalement en trois étapes. Un mécanisme physique est tout d'abord à l'origine des oscillations. L'énergie associée à celles-ci est ensuite transmise à la structure. Enfin, le cas échéant, elle est distribuée à l'ensemble des différents composants de la structure. Dans le cas particulier du bruit d'origine structurale (*structure-borne sound*) une quatrième étape s'ajoute, décrivant la transmission par radiation de cette énergie vibratoire de la structure au milieu fluide environnant, sous forme de son audible. Au regard de la complexité de ce processus, il semble naturel de décomposer la structure complexe étudiée en sous-structures ou composants, afin d'analyser finement les phénomènes physiques en jeu au cours de ces différentes étapes. On distingue ainsi la structure source, souvent active, la structure réceptrice passive et les éléments de jonction. On souligne que cette approche est particulièrement adaptée au monde industriel dans lequel les différents composants d'une même structure assemblée proviennent souvent de compagnies différentes.

Dans leur ouvrage de référence, Cremer *et al.* [38] identifient, de manière générale, trois types de transferts vibratoires :

- entre une machine source et l'environnement particulier dans lequel elle est installée ;
- entre une sous-structure source d'une machine et le reste de la structure ;
- entre un équipement sensible et la structure source à laquelle il est attaché.

Les auteurs soulignent que si ces situations sont bien différentes, les définitions des sous-systèmes pouvant différer d'un problème à l'autre, l'approche par décomposition n'en demeure pas moins valide.



### 2.2.2 Techniques d'isolation

#### Limites des approches passives classiques

Une fois la décomposition en sous-systèmes effectuée, le problème d'isolation vibratoire revient souvent à modifier les distributions de masse, de raideur et d'amortissement dans un des composants du système (source, récepteur, jonction) afin de minimiser les vibrations transmises au récepteur. Brennan et Ferguson proposent, dans l'ouvrage commun [29], une description des solutions habituellement retenues.

Une première classe de ces solutions s'intéresse directement aux mécanismes de génération des oscillations. Il existe de nombreuses sources de vibrations, de différentes natures (structures excitatrices, machines tournantes, excitations aéroacoustiques, chocs, . . .). Une approche de type « boîte noire » est souvent adoptée afin de décrire leur fonctionnement. Par analogie avec la théorie des réseaux électriques, elles sont alors assimilées à des modèles équivalents de Thévenin ou Norton : le premier revient à considérer un effort bloqué en parallèle avec l'impédance<sup>1</sup> interne de la source, le second une vitesse libre en série avec l'impédance interne de la source. Cette description, facilement généralisable à l'étude de systèmes couplés en plusieurs points, permet d'introduire l'impédance comme unique paramètre caractéristique, d'où la possibilité de comparer simplement différents types de sources.

Les techniques d'isolation vibratoire visent, elles, à découpler les comportements dynamiques des sous-structures sources et réceptrices en introduisant si nécessaire un élément isolant à l'interface ou en modifiant ses paramètres. Dans le domaine des basses fréquences, une approximation usuelle consiste à se ramener à un système discret à un ou deux degrés de liberté, suivant qu'il s'agisse d'une machine vibrante vis-à-vis de son environnement ou d'un équipement sensible attaché à une structure vibrante. Le but est alors de diminuer au maximum la fréquence de résonance de l'ensemble du système, tout en respectant des contraintes de dimensionnement comme le déplacement statique maximum autorisé ou la stabilité latérale d'une machine ou d'un équipement. Une amélioration supplémentaire consiste à introduire un comportement dynamique à la jonction en remplaçant le ressort d'interface par un ensemble ressort-masse-ressort. Il en résulte cependant l'apparition d'une nouvelle fréquence de résonance, d'où une amplification de la réponse dans la bande fréquentielle associée. Celle-ci peut éventuellement être atténuée par l'ajout d'amortisseurs à la jonction.

Ainsi lorsque les structures sources et réceptrices exhibent des comportements résonants, elles ne peuvent plus être considérées comme rigides. Un modèle simple discret ne permet alors plus d'obtenir une prédiction fiable de l'efficacité du système d'isolation, définie par [29] :

$$E_i = \left| \frac{\text{vitesse du récepteur connecté rigidement à la source}}{\text{vitesse du récepteur connecté via le système d'isolation}} \right| \quad (2.1)$$

---

1. On trouvera dans [52] une étude détaillée du concept d'impédance mécanique, rappelé brièvement au chapitre 2.4.2.

Afin de rendre ce coefficient  $E_i$  le plus important possible, des méthodes plus complexes sont employées, comme l'approche par mobilités (quantités inverses de l'impédance), qui permet d'écrire :

$$E_i = \left| 1 + \frac{Y_i}{Y_s + Y_r} \right| \quad (2.2)$$

où  $Y_i$ ,  $Y_s$  et  $Y_r$  représentent respectivement les mobilités du système d'isolation, de la source et du récepteur. On constate ici clairement que l'efficacité dépend non seulement des paramètres du système d'isolation, mais également de la source et du récepteur.

On souligne que la masse de la jonction ne peut pas être négligée dans le cas des hautes fréquences, étant donné qu'elle sous-entend un comportement résonant du système d'isolation, réduisant ainsi son efficacité. Il est alors nécessaire de modéliser plus finement ce système, par exemple à l'aide des mobilités ponctuelles et des mobilités de transfert du système d'isolation.

À l'inverse, il est également envisageable de modifier les structures sources et réceptrices afin d'éviter les problèmes de transferts vibratoires identifiés soit en phase de conception, soit en conditions d'utilisation. Ces modifications structurales s'apparentent en général à l'une des actions suivantes :

- modifier la fréquence propre de la structure afin d'éviter d'exciter une fréquence de résonance (ou plusieurs, suivant la nature large bande de l'excitation) ;
- modifier les fréquences de résonance des différents composants afin d'éviter qu'elles soient identiques et donc fortement couplées ;
- modifier la structure réceptrice afin que la distribution spatiale de l'excitation ne soit pas couplée à une ou plusieurs déformées modales.

Les techniques généralement mises en œuvre visent à :

- réduire le nombre de modes résonants ;
- séparer ou « désaccorder » les fréquences propres de la structure réceptrice des fréquences d'excitation ;
- concevoir une structure réceptrice exhibant des nœuds de vibration aux points d'interface ;
- découpler les modes ayant des déformées similaires au niveau de l'interface ;
- optimiser la topologie des structures afin de minimiser les niveaux de réponse vibratoire.

On note que dans le cas d'excitations large bande il est impossible d'éviter toutes les fréquences de résonance de la structure. Sa réponse va donc être dominée par plusieurs modes. Dans le cas classique d'une rigidification de la structure, ceux-ci vont être déplacés vers le haut du spectre fréquentiel, d'où une diminution du nombre de fréquences propres et ainsi du niveau de réponse, dans la bande fréquentielle considérée. Il se peut toutefois que la réponse acoustique (hautes fréquences) devienne plus importante.

Enfin, quelle que soit l'approche adoptée, le rôle de l'amortissement est primordial. Les phénomènes dissipatifs rencontrés dans les structures complexes sont cependant nombreux et leur modélisation mathématique présente des difficultés considérables. Il existe de nombreux modèles d'amortissement, les plus usuels étant souvent uniquement valides en régime harmonique. L'amortissement visqueux, proportionnel à la vitesse et caractérisé par le taux d'amortissement, est couramment utilisé en dynamique des structures. On rencontre également fréquemment l'amortissement structural ou hystérétique, provenant de l'emploi de modules d'Young ou de modules de cisaillement complexes. La raideur du système devient alors complexe et les forces d'amortissement, caractérisées par un facteur de perte, sont alors proportionnelles au déplacement et en phase avec la vitesse.

### **Pertinence des grandeurs d'interface**

Il a été montré ci-dessus que quelle que soit la démarche retenue, il est nécessaire de pouvoir relier les caractéristiques de la source de vibrations à l'efficacité du système d'isolation mis en place ou des modifications structurales effectuées. Au regard de la décomposition initiale du problème de transferts vibratoires, il semble pertinent de considérer les grandeurs d'interface. Le comportement dynamique du système  $y$  est habituellement décrit par les vecteurs force et vitesse à ces jonctions. Cette approche à l'avantage de permettre l'emploi de différentes méthodes pour modéliser les différents composants (analytiques, éléments finis, mesures expérimentales). De plus, elle permet de traiter l'étude de la transmission d'énergie dans différentes directions. Le comportement dynamique peut alors être décrit par des fonctions de transfert entre les différentes excitations et les réponses aux points de connexion entre les différents composants, pour chaque degré de liberté.

Les calculs de puissance semblent cependant plus adaptés à la description des problèmes d'isolation. En effet, la structure source est souvent directement caractérisée par la puissance qu'elle injecte dans la structure assemblée. Celle-ci traverse le système d'isolation où elle va être en partie dissipée. Le reste est ensuite transmis à la structure réceptrice pour y être éventuellement partagé en puissance dissipée par l'amortissement interne ou en puissance rayonnée, due à l'interaction avec le milieu avoisinant. On constate donc que la puissance constitue une mesure pratique et efficace de la performance du système d'isolation. Cette grandeur scalaire permet de prendre en compte plusieurs points de jonctions, suivant différentes directions, ainsi que de comparer entre elles différentes structures sources ou réceptrices.

### **Stratégies de contrôle actif et hybride**

Bien que les techniques passives d'isolation aient montré leur aptitude à réduire les transferts vibratoires entre une structure source et des structures réceptrices, elles doivent souvent répondre à des objectifs antagonistes, ce qui entraîne une limitation des capacités de contrôle, en particulier lorsque les structures sont flexibles et qu'il existe des interactions dynamiques entre elles [78].

Les systèmes de contrôle actifs permettent de pallier ces limitations et d'augmenter l'efficacité

du contrôle vibratoire [50]. Ils sont généralement constitués d'un système source secondaire, libre de vibrer de différentes manières, connecté à la structure réceptrice principale en différents endroits par l'intermédiaire de plusieurs plots actifs. Le domaine d'application de ces méthodes est particulièrement large et recouvre à la fois la réduction des transferts vibratoires dans les structures, la prévention des transferts vibratoires entre une structure et son environnement, la protection des équipements sensibles dans des milieux vibratoires hostiles. Leur performance repose en partie sur la loi de contrôle permettant d'asservir les actionneurs aux sorties des capteurs, sous la forme d'un critère d'erreur ou d'une fonction coût à minimiser [50, 10].

Des approches par flux de puissance et transferts énergétiques ont été développées dans les années 1990, pour contrôler de manière active des systèmes décrits par des modèles dynamiques à un ou deux degrés de liberté. Pan et Hansen [118] ont étudié le fonctionnement d'un système d'isolation actif en observant les transmissions de puissance, étendant ainsi les méthodes associées aux bilans de puissance sur les systèmes passifs [133, 131]. Gardonio *et al.* ont ensuite montré que le comportement dynamique d'un système d'isolation distribué, composé de plusieurs plots suivant plusieurs directions, demeure particulièrement compliqué [54]. Or, par l'intermédiaire de la puissance transmise, la partie principale de l'information est conservée. Ainsi, si la puissance est non seulement considérée comme un paramètre pertinent pour la description des transferts vibratoires, sa minimisation constitue également un objectif pour les systèmes actifs d'isolation.

Les auteurs ont par ailleurs démontré que le meilleur moyen de réduire la puissance transmise consiste à minimiser une fonction erreur basée sur la puissance elle-même, plutôt que de minimiser soit la vitesse, soit la force s'exerçant aux jonctions [55]. En effet, bien que ces solutions semblent efficaces pour les hautes fréquences, les résultats sont moins performants lorsque la fréquence diminue. Dans le cas d'une minimisation des efforts d'interface, on note que les fréquences de résonance de la structure réceptrice, contrôlée par le dispositif actif, demeurent inchangées. Lorsqu'on minimise les vitesses d'interface, cela revient à imposer des conditions aux limites virtuelles aux points de jonctions, le mouvement de la structure réceptrice étant localement restreint par les actionneurs. Pour pallier ces difficultés, les auteurs ont proposé de minimiser simultanément ces deux quantités en implémentant comme fonction coût une combinaison linéaire des erreurs en efforts et en vitesses. Il a été montré que, moyennant la détermination d'un coefficient de pondération, cette méthode donne des résultats identiques à celle visant à minimiser directement la puissance transmise.

Enfin, il est possible d'envisager une combinaison de systèmes d'isolation actifs et passifs dans une approche qualifiée d'hybride. Beijers considère ainsi un système constitué de plots amortisseurs passifs associés à des capteurs et des actionneurs reliés par un contrôleur [10]. Il propose une étude détaillée de deux stratégies de contrôle *near-source*, pour lesquelles les capteurs sont situés prêt de la source de vibrations. L'une se base sur la minimisation de la puissance injectée, par l'intermédiaire d'une matrice de pondération de type impédance ou mobilité, permettant de limiter le nombre de capteurs à des mesures, respectivement, en vitesses seules ou en forces

seules. Le concept de modes de puissance est introduit afin de régulariser le calcul de cette matrice qui se révèle sensible aux erreurs de mesure. La mise en œuvre pratique de cette méthode demeure cependant difficile et ne permet pas d'assurer la robustesse des résultats.

## 2.3 Analyse de structures couplées et flux de puissance

### 2.3.1 Définition des domaines fréquentiels

Il existe de nombreuses méthodes permettant de traiter les problèmes de vibration de structures couplées, qu'il s'agisse de déterminer leur niveau de réponse ou d'analyser les flux de puissance associés. Leur application dépend principalement de trois critères : la complexité du problème modélisé (discret, continu, discrétisé, hybride), la nature des conditions aux limites (simples, complexes) et le domaine fréquentiel considéré. Ce dernier critère nécessite quelques définitions complémentaires. On distingue en effet trois domaines dans la réponse fréquentielle d'une structure réelle :

- les basses fréquences, caractérisées par un comportement résonant de la structure, où la réponse fréquentielle exhibe des fréquences propres bien espacées et des pics de résonances distincts ;
- les hautes fréquences, caractérisées par un recouvrement des modes qui deviennent alors difficiles à identifier, d'où un effet général de lissage de la réponse fréquentielle ;
- les moyennes fréquences, représentant la zone fréquentielle intermédiaire.

#### Critère de recouvrement modal

Bien entendu, ces zones fréquentielles ne sont pas identiques d'une structure à l'autre. Le critère de recouvrement modal est ainsi souvent proposé dans la littérature afin de déterminer l'étendue de ces différents domaines. Celui-ci s'appuie sur la notion de largeur de bande à  $-3dB$ ,  $\Delta\omega_i$ , associée au pic de résonance de la pulsation propre  $\omega_i$  :

$$\frac{\Delta\omega_i}{\omega_i} = 2\xi_i = \eta_i \quad (2.3)$$

où  $\xi_i$  correspond au taux d'amortissement modal et  $\eta_i$  au facteur de perte par dissipation associé.

On peut ainsi considérer que deux modes de pulsations  $\omega_i$  et  $\omega_j$  sont distincts si :

$$|\omega_i - \omega_j| > \frac{1}{2} (\Delta\omega_i + \Delta\omega_j) \quad (2.4)$$

En prenant en compte l'équation 2.3 on obtient :

$$|\omega_i - \omega_j| > \frac{1}{2} (\eta_i\omega_i + \eta_j\omega_j) = (\xi_i\omega_i + \xi_j\omega_j) \quad (2.5)$$

On propose donc de définir un critère de recouvrement modal sous la forme :

$$Rm(\omega_i, \omega_j) = \frac{1}{2} (\eta_i\omega_i + \eta_j\omega_j) - |\omega_i - \omega_j| = (\xi_i\omega_i + \xi_j\omega_j) - |\omega_i - \omega_j| \quad (2.6)$$

Celui-ci est évalué *a posteriori*, une fois les pulsations propres du système et les paramètres d'amortissement modaux associés déterminés, par exemple à partir de la méthode des éléments finis.

Afin d'illustrer et de valider cette approche on s'intéresse à l'étude de la densité modale d'une plaque rectangulaire en appui sur ses bords, ayant un taux d'amortissement modal constant arbitrairement fixé à 5%. La figure 2.1 montre les valeurs prises par le critère entre deux pulsations propres consécutives.

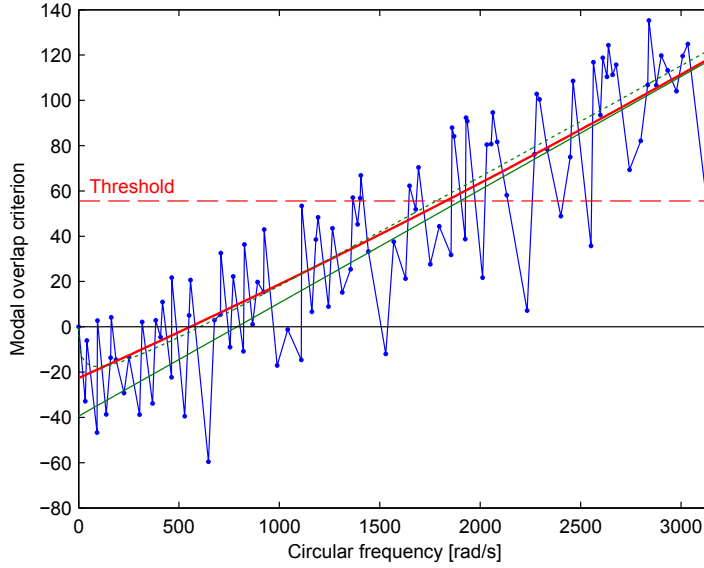


FIG. 2.1: Critère de densité modale d'une plaque rectangulaire appuyée  
 —●— critère (équation 2.6), — approximation, — analytique (équations 2.7 et 2.8),  
 ... analytique+CL (équations 2.9 et 2.8)

Au regard des calculs précédents, le domaine des basses fréquences se termine lorsque le critère est supérieur à zéro. Or, le caractère discrétisé du critère ne permet d'obtenir qu'une appréciation qualitative de cette limite. On propose donc de calculer une approximation polynômiale du critère afin d'obtenir une borne supérieure moyenne unique. Cette courbe lissée est comparée à celle obtenue à partir de l'expression analytique de la densité modale des mouvements de flexion d'une plaque, issue de la littérature [94] :

$$n(\omega) = \frac{S}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (2.7)$$

où  $S$ ,  $\rho$ ,  $h$  et  $D$  représentent, respectivement, la surface de la plaque, sa densité, son épaisseur et sa rigidité de flexion.

On en déduit alors le critère de recouvrement modal suivant :

$$Rm(\omega) = \eta\omega - \frac{1}{n(\omega)} \quad (2.8)$$

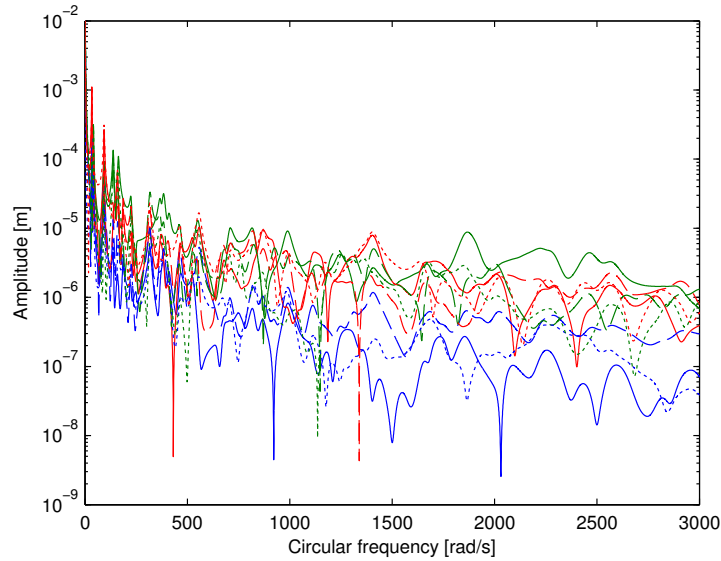


FIG. 2.2: Réponse harmonique d'une plaque sollicitée en flexion  
 — nœud 1, — nœud 2, — nœud 3

Cette expression analytique n'est cependant vérifiée asymptotiquement qu'en hautes fréquences, comme on peut l'observer figure 2.1. Afin d'améliorer l'expression précédente il est donc nécessaire de prendre en compte les conditions aux limites en appui de la plaque. L'expression de la densité modale associée a été proposée par Xie *et al.* [163] sous la forme :

$$n(\omega) = \frac{S}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho h}{D} \right)^{1/4} \frac{a+b}{\pi\sqrt{\omega}} \quad (2.9)$$

où  $a$  et  $b$  représentent la longueur et la largeur de la plaque. On constate que la courbe théorique est bien en accord avec le critère approché proposé.

On utilise enfin les valeurs « basses fréquences » du critère pour déterminer un seuil maximum de recouvrement modal égal à la moyenne de cet échantillon plus trois fois son écart-type. Cette limite marque alors le début du domaine des hautes fréquences, pour lequel le recouvrement modal est important. On en déduit donc finalement que la zone fréquentielle se situant entre zéro et la valeur seuil correspond au domaine des moyennes fréquences. La figure 2.2, représentant la réponse fréquentielle de la plaque à une sollicitation en flexion, permet de visualiser le comportement dynamique de la structure sur les trois différents domaines définis à partir du critère. On observe bien, sur  $0 - 600 \text{ rad/s}$  un comportement résonant, sur  $600 - 1900 \text{ rad/s}$  un recouvrement modal croissant et sur  $1900 - 3300 \text{ rad/s}$  un lissage complet de la réponse.

Ce critère de recouvrement modal, bien qu'évalué *a posteriori*, permet donc de déterminer les limites des différents domaines fréquentiels. Étant basé sur une discrétisation par éléments finis il s'applique non seulement aux systèmes simples mais également aux structures complexes.

### Définition alternative des moyennes fréquences

Un point de vue différent a été proposé par Langley et Brenner [89], s'appuyant sur une vision ondulatoire et non modale des vibrations. Il se rapporte à la notion de couplage entre deux structures exhibant des comportements dynamiques différents, rigides (grandes longueurs d'ondes) ou flexibles (courtes longueurs d'ondes). Le domaine des moyennes fréquences ne représente alors plus un intervalle dans lequel les méthodes de prédiction conventionnelles atteignent leurs limites puisque chaque type de structure est modélisé, respectivement, soit par une approche basses fréquences de type éléments finis, soit par une approche statistique hautes fréquences de type SEA [81].

### 2.3.2 Méthodes basses fréquences

#### Méthode des éléments finis

Initialement développée à la fin des années 1940, la méthode des éléments finis (*Finite Element Method*) est la plus couramment utilisée pour déterminer la réponse vibratoire d'une structure dans le domaine des basses fréquences et constitue un standard dans l'industrie. Elle se base sur la discrétisation spatiale des domaines continus issus de la géométrie des structures étudiées. Celles-ci sont alors représentées de manière approchée par un maillage constitué d'un ensemble d'éléments, délimités et reliés par leurs nœuds. La formulation intégrale associée permet d'obtenir les déplacements des différents degrés de liberté en chaque nœud par la résolution d'un système matriciel d'équations linéaires [9, 170]. Son principal avantage est qu'elle permet de prendre en compte la géométrie complexe des structures industrielles : il suffit pour cela d'adapter la densité du maillage afin de modéliser convenablement les détails. Cette méthode est aussi étroitement liée à l'analyse modale qui vise à exprimer la réponse dynamique d'une structure sous la forme d'une combinaison linéaire de ses modes propres de vibration.

Cependant, à mesure que l'intervalle fréquentiel d'intérêt augmente, il est nécessaire de raffiner le maillage afin de prendre en compte les vibrations ayant de courtes longueurs d'ondes. Un critère ingénieur classique préconise ainsi d'employer six à dix éléments par longueur d'onde. Il en résulte une augmentation significative de la taille du modèle, de l'ordre du million de degrés de liberté dans le cas d'une caisse en blanc d'automobile, rendant très coûteuse même la détermination des premiers modes propres. Une autre limitation de la méthode provient de l'hypersensibilité du modèle à une petite variation des paramètres structuraux : les incertitudes vont alors avoir un impact significatif sur la réponse du système [117]. On peut donc en conclure qu'au delà d'une certaine fréquence, le modèle issu de la méthode des éléments finis, qualifié de



déterministe, ne représente au mieux qu'un membre d'une population ayant les mêmes valeurs nominales de paramètres.

### Méthodes de réduction

Afin de pallier les difficultés liées au traitement de structures complexes et de grandes tailles par la méthode des éléments finis, des méthodes de réduction de modèle ont été développées, à l'image des méthodes de synthèse par modes de composants (*Component Mode Synthesis*). La structure globale est alors divisée en plusieurs composants ou sous-structures, chacun étant caractérisé par un ensemble de modes représentant son comportement, ainsi qu'un ensemble de vecteurs permettant d'assurer le couplage des différentes sous-structures à leurs interfaces.

Cette approche a été initialement introduite par Hurty, en prenant en compte les modes à interface fixe des composants [74]. Elle a ensuite été améliorée par Craig et Bampton en complétant cette base par des modes dits contraints [36]. Ceux-ci correspondent à la déformation de la sous-structure résultant d'un déplacement unitaire d'un degré de liberté de l'interface, tout en conservant les autres degrés de liberté d'interface fixes. Il y a ainsi autant de modes contraints que de degrés de liberté d'interface dans le modèle éléments finis. Chaque modèle de composant est ensuite réduit par projection et assemblé aux autres pour constituer un modèle global vérifiant la compatibilité des déplacements à l'interface. MacNeal a également proposé une méthode hybride autorisant la combinaison des modes à interface fixe et libre, et présenté une méthode prenant en compte la raideur des modes non retenus [100]. Cette méthode a été étendue par Rubin aux termes résiduels d'inertie et de dissipation [140]. On souligne qu'une étude critique des différentes méthodes CMS a été effectuée par Craig [35].

Ces méthodes permettent donc de réduire la taille du modèle éléments finis, tout en conservant une bonne prédiction des réponses de la structure sur l'intervalle fréquentiel considéré, mais aussi de considérer séparément chaque sous-structure. Ceci se révèle particulièrement intéressant dans un contexte de conception et/ou d'optimisation, où les nombreuses modifications des paramètres du modèle vont entraîner de nombreuses réanalyses successives. Leur principal inconvénient provient cependant du fait que l'ensemble des degrés de liberté d'interface entre les différents composants est conservé. De ce fait, s'il est possible de contrôler la taille du système réduit en sélectionnant le nombre de modes retenus pour un intervalle fréquentiel donné, le nombre de modes contraints demeure fixe et peut, dans certains cas, être trop important pour assurer une réduction significative.

Craig et Chang ont ainsi introduit des méthodes de réduction basées sur des modes de jonction. Ceux-ci sont déterminés à partir d'un problème aux valeurs propres associé aux matrices de masse et de raideur condensées par CMS, restreintes aux degrés de liberté de jonction [37]. Les modes obtenus peuvent alors servir de base de réduction pour les degrés de liberté d'interface, comme dans le cas d'une analyse modale classique. Une démarche identique a été proposée par Rixen dans le cadre d'une méthode de réduction hybride basée sur une formulation duale

[137, 138]. La compatibilité entre les différentes sous-structures est ici assurée au niveau des efforts d'interface à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Les modes d'interface sont alors des modes d'efforts, déterminés à partir d'un problème aux valeurs propres associé à la matrice de flexibilité restreinte aux degrés de liberté d'interface. Cette procédure s'avère moins coûteuse et permet une approche parallèle des calculs.

### Vers l'analyse de flux de puissance

Bien que les solutions obtenues par la méthode des éléments finis soient approchées du fait de la discrétisation du problème, elles permettent d'exprimer facilement, *a posteriori*, le bilan énergétique entre l'énergie fournie par les chargements extérieurs et l'énergie consommée par la structure [5]. Étant donné que les méthodes CMS fournissent un modèle réduit pour chaque sous-structure, il semble naturel d'utiliser ces derniers comme point de départ à une analyse des flux de puissance à l'intérieur de la structure globale. Mace et Shorter ont présenté un modèle énergétique basé sur une approche globale par éléments finis et faisant appel à une méthode de Craig-Bampton au niveau local [99]. L'ensemble des degrés de liberté étant partitionné pour ne retenir que les degrés de liberté maîtres de chaque composant, le modèle condensé résultant est particulièrement adapté à un post-traitement des déplacements obtenus sous la forme d'un bilan de puissance. L'application de cette méthode à un système de plaques a permis de mettre en évidence des résonances au niveau du comportement fréquentiel du flux de puissance.

Le cas des interfaces de grande taille demeurant un inconvénient, Tan *et al.* ont utilisé une méthode de réduction d'interface identique à celle mentionnée précédemment, pour proposer des modes contraints caractéristiques (*Characteristic Constraint modes*) [150].

Une méthode de type Craig-Bampton est tout d'abord appliquée à un ensemble de  $s$  sous-structure afin d'obtenir les matrices réduites assemblées de masse et de raideur, respectivement  $M_{CMS}$  et  $K_{CMS}$ . Une seconde analyse modale est ensuite effectuée sur les sous-matrices  $M_{CMS}^C$  et  $K_{CMS}^C$  associées aux degrés de liberté contraints, notés  $C$  :

$$K_{CMS}^C \psi_n = \lambda_n M_{CMS}^C \psi_n \quad (2.10)$$

Les vecteurs  $\psi_n$  ainsi obtenus constituent une base  $\Psi$  de modes contraints caractéristiques, sur laquelle il est possible de projeter le vecteur vitesse  $v^C$ , associé aux degrés de liberté d'interface :

$$v^C = \Psi v^{CC} \quad (2.11)$$

Une expression de la puissance transmise entre deux sous-structures  $a$  et  $b$  est alors proposée, sous la forme :

$$P_{ab}(\omega) = \frac{1}{2} \Re \left( v^{CC^H} f_{ab} \right) - \frac{1}{2} v^{CC^H} C_{ab} v^{CC} \quad (2.12)$$

où  $C_{ab}$  représente la matrice d'impédance et  $f_{ab}$  les efforts extérieurs associés à la sous-structure  $a$ , projetés dans la base des modes caractéristiques contraints ( $^H$  désigne la quantité transposée conjuguée).

Il a finalement été montré que les premiers modes CC contribuent de manière prépondérante au flux de puissance à l'interface et qu'il est donc possible de tronquer la base de réduction sans entraîner d'importantes pertes de précision. Bien que leur signification physique demeure peu évidente, ces modes apportent donc une meilleure description des mécanismes de transmission d'énergie vibratoire entre sous-structures et permettent, une fois le formalisme de la sous-structuration adopté, un calcul approché rapide et prédictif de la puissance transmise [150].

### Méthode des coefficients d'influence énergétique

Cette méthode, développée par Guyader *et al.* [69], se base sur une approche modale. Elle vise à simplifier l'approche déterministe en introduisant les énergies cinétiques moyennes de chaque sous-système, tout en prenant en compte les modes globaux de la structure. Elle permet, par sa formulation, de considérer de manière plus fine le couplage mécanique-mécanique (structure-structure) que le couplage mécanique-acoustique. Elle est de plus fondamentalement différente de la méthode SEA détaillée ci-après, dans la mesure où elle ne fait aucune hypothèse sur la nature du couplage, ni sur le type d'excitation. Ainsi, plusieurs types de couplage peuvent être pris en compte (spatial, spectral et d'excitation) afin de permettre une compréhension détaillée des phénomènes en jeu, selon l'influence des différents paramètres des structures.

En considérant des structures couplées linéaires ayant des caractéristiques indépendantes du temps, le coefficient d'influence énergétique  $C_{ij}$  représente l'énergie cinétique de la structure  $i$  lorsque la structure  $j$  est soumise à une excitation permanente, séparable en espace et en temps, décorrélée des autres excitations et de densité spectrale  $S_j$ . Celui-ci est fonction de la dépendance spatiale  $\beta_j(M'_j, M''_j)$  de ces forces d'excitations et de la réponse fréquentielle impulsionnelle en vitesse  $H_{ij}(M_i, M'_j, \omega)$  entre le point  $M_i$  de la structure  $i$  et le point  $M'_j$  de la structure  $j$ . Le coefficient associé à une bande de fréquence  $\Delta\omega$  est alors donné par :

$$C_{ij}(\Delta\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Delta\omega} \int_{\Omega_i} \int_{\omega_j} \rho_i(M_i) H_{ij}(M_i, M'_j, \omega) H_{ij}^*(M_i, M''_j, \omega) \beta_j(M'_j, M''_j) dM'_j dM''_j dM_i d\omega \quad (2.13)$$

où  $\rho_i$  est la densité de la structure  $i$  (\* désigne la quantité complexe conjuguée). Si la densité spectrale de puissance  $S_j$  est constante, on obtient l'énergie cinétique de la structure moyennée sur  $\Delta\omega$  sous la forme :

$$\langle E_{ci} \rangle = C_{ij} S_j \quad (2.14)$$

On souligne qu'une approche courante consiste à déterminer les fonctions de réponse en fréquence à partir d'une analyse modale de l'ensemble de la structure couplée. En introduisant  $\omega_k$ ,  $\Phi_k$  et  $m_k$ , représentant respectivement la pulsation, la déformée et la masse généralisée du mode  $k$ , on obtient alors :

$$C_{ij} = \sum_{k,p} \Psi_{kp}^{(i)} \frac{B_{kp}}{m_k m_p} G_{kp}^{(j)} \quad (2.15)$$

$\Psi_{kp}^{(i)}$  s'exprime ici en fonction des déformées modales  $k$  et  $p$  restreintes à la structure  $i$  et représente leur couplage spatial;  $B_{kp}$  s'exprime en fonction des pulsations et des amortissements des modes  $k$  et  $p$  et représente le couplage fréquentiel entre les modes  $k$  et  $p$ . Enfin,  $G_{kp}^{(j)}$  représente le couplage spatial entre les modes  $k$  et  $p$  dans la structure  $j$ , en fonction de l'excitation.

On constate donc que cette formulation permet de distinguer les différents mécanismes de transferts énergétiques. Son utilisation est cependant limitée par les temps de calcul nécessaires à l'analyse modale du système complet, ces données étant également difficiles à obtenir dans le cas de structures complexes.

### 2.3.3 Méthodes hautes fréquences

#### Méthode d'analyse statistique de l'énergie

Il a été souligné précédemment que le domaine des hautes fréquences est notamment caractérisé par une très forte sensibilité aux incertitudes existant sur les paramètres du système. Ainsi s'il est éventuellement possible, malgré le fort recouvrement modal, de déterminer les modes de la structure, ceux-ci peuvent varier de manière importante par rapport à leur caractéristiques nominales. Il est donc préférable d'employer des techniques de prédiction basées sur des approches énergétiques et statistiques.

La méthode SEA (*Statistical Energy Analysis*) est la plus reconnue et la plus couramment utilisée. Initiée au début des années 1960 dans le domaine de l'aérospatiale, elle a été conceptualisée par Lyon dans son ouvrage de référence [94]. L'étude de deux oscillateurs simples couplés linéairement à l'aide d'un élément non dissipatif a ainsi permis d'établir une relation entre la puissance moyenne  $P_{ij}$  échangée entre deux sous-systèmes  $i$  et  $j$  et leurs énergies totales respectives  $E_i$  et  $E_j$ , sous la forme :

$$P_{ij} = K_i E_i - K_j E_j \quad (2.16)$$

où  $K_i$  et  $K_j$  sont des paramètres propres à chaque sous-système.

Ce résultat fondamental a rapidement été étendu au cas des structures complexes. Celles-ci sont représentées par un assemblage de sous-systèmes couplés entre eux, comprenant chacun un ensemble dénombrable de modes ayant des propriétés énergétiques similaires. La notion de sous-système n'est alors plus associée à un découpage structural, qui ne permet pas de distinguer les différents modes de comportement vibratoire. Une plaque est par exemple modélisée à l'aide de trois sous-systèmes, respectivement associés au comportement en flexion, en compression et en cisaillement, et caractérisés chacun par une épaisseur, une surface, un amortissement, des paramètres matériaux ainsi qu'un coefficient de densité modale sur l'intervalle fréquentiel d'étude.

On considère maintenant deux sous-systèmes présentant plusieurs modes dans une bande de fréquence donnée. La relation précédente peut alors être utilisée pour évaluer la puissance échangée entre ces deux sous-systèmes si les modes des sous-systèmes vérifient certaines conditions :

- chaque mode est équiprobable dans la bande de fréquence considérée ;
- l'énergie du sous-système est équirépartie sur ses modes ;
- les amplitudes modales sont supposées incohérentes entre elles ;
- l'amortissement est le même pour chaque mode (cette hypothèse n'est pas indispensable mais elle permet de simplifier la mise en œuvre de la méthode).

Chacune de ces entités représente alors une quantité d'énergie qui va être échangée ou transformée en fonction de son comportement propre et de ses interactions avec les autres sous-systèmes. Ceci se traduit par un bilan de puissance exprimé, à la frontière d'un sous-système  $i$ , par :

$$P_{i,inj} = \sum_j P_{ij} + P_{i,diss} \quad (2.17)$$

où  $P_{i,inj}$  représente la puissance injectée au sous-système  $i$ ,  $P_{i,diss}$  la puissance dissipée et  $P_{ij}$  les puissances échangées avec les autres sous-systèmes  $j$ . Ces grandeurs sont exprimées en fonction des variables  $E_i$ , représentant les énergies totales, moyennées en espace, stockées dans chaque sous-système, et les paramètres SEA, que sont les facteurs de perte interne et les facteurs de perte par couplage.

Le facteur de perte interne  $\eta_i$  permet de caractériser les différentes sources de dissipation au sein d'un sous-système, telles l'amortissement structural ou les effets de friction et intervient donc dans l'écriture de la puissance dissipée, sous la forme :

$$P_{i,diss} = \omega \eta_i E_i \quad (2.18)$$

où  $\omega$  est la pulsation centrale de la bande de fréquence considérée. On souligne que cette relation, déjà proposée par Rayleigh [136] et Cremer [38], suppose que l'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique, ce qui demeure acceptable en hautes fréquences, pour une approche par moyennes.

Le facteur de perte par couplage permet quant à lui de caractériser les puissances échangées entre les différents sous-systèmes :

$$P_{ij} = \omega (\eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j) = \omega \eta_{ij} \left( E_i - \frac{n_i}{n_j} E_j \right) \quad (2.19)$$

où  $\eta_{ij}$  et  $\eta_{ji}$  sont les facteurs de perte par couplage entre les deux sous-systèmes  $i$  et  $j$ ,  $n_i$  et  $n_j$  leurs densités modales respectives et vérifiant la relation de réciprocité suivante :

$$n_i \eta_{ij} = n_j \eta_{ji} \quad (2.20)$$

Il est ensuite possible d'exprimer le bilan de puissance entre deux sous-systèmes sous la forme du système matriciel suivant :

$$\omega \begin{bmatrix} \eta_i + \eta_{ij} & -\eta_{ji} \\ -\eta_{ij} & \eta_j + \eta_{ji} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_i \\ E_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{i,inj} \\ P_{j,inj} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

On détermine finalement les énergies totales par inversion de la matrice des facteurs de perte, qui est symétrique lorsque la relation de réciprocité est vérifiée. Cette expression peut être facilement étendue à l'étude d'un système comportant plusieurs sous-systèmes.

De manière générale, les facteurs de perte peuvent être déterminés expérimentalement, sous réserve de pouvoir bien isoler les différents phénomènes physiques associés. Le facteur de perte par couplage  $\eta_{ij}$  peut également être déterminé par le calcul suivant différentes approches. Les approches ondulatoires sont généralement les plus utilisées, car elles ne nécessitent pas une description globale des sous-systèmes mais uniquement une description locale de la jonction [94]. En faisant l'hypothèse de champs diffus, il s'agit alors de calculer le coefficient de transmission  $\tau_{ij}$  entre deux sous-systèmes supposés infinis, en considérant le rapport entre la puissance transmise à travers la jonction  $\Pi_{trans}$  et la puissance incidente  $\Pi_{inc}$ , sous la forme [38] :

$$\tau_{ij} = \frac{\Pi_{trans}}{\Pi_{inc}} = \frac{\omega \eta_{ij} l_f}{c_{g_i}} \quad (2.22)$$

où  $c_{g_i}$  représente la vitesse de groupe au sein du système  $i$  et  $l_f$  le libre parcours moyen, correspondant à la distance de propagation d'une onde entre deux réflexions successives à l'interface. Les expressions des facteurs de perte par couplage pour des milieux mono-, bi- et tridimensionnels sont alors respectivement données par :

$$\eta_{ij} = \frac{c_{g_i} \tau_{ij}}{\omega L_i} \quad (2.23)$$

$$\eta_{ij} = \frac{c_{g_i} \tau_{ij} L_c}{\omega \pi S_i} \quad (2.24)$$

$$\eta_{ij} = \frac{c_{g_i} \tau_{ij} S_c}{\omega 4V_i} \quad (2.25)$$

où  $S_i$  et  $V_i$  représentent la surface totale et le volume total du sous-système  $i$  et  $L_c$  et  $V_c$  la longueur et la surface de couplage à l'interface. Cette méthode est donc particulièrement adaptée à l'étude de sous-systèmes et de jonctions simples et uniformes.

Une autre alternative consiste à exprimer ces coefficients en termes de mobilités, reliant la réponse en vitesse à la jonction aux forces d'excitation. Cependant, dans le cas de jonctions complexes, l'approche modale semble la plus appropriée. Maxit et Guyader proposent ainsi de calculer les facteurs de perte par couplage à partir des pulsations propres des systèmes découplés et des travaux d'interaction modale entre leurs modes respectifs, obtenus par la méthode des éléments finis [103]. Issue d'une analogie avec les problèmes de couplage fluide-structure, cette

méthode ne permet cependant de prendre en compte que des couplages en amortissement de type gyroscopique.

Le principal inconvénient de la méthode SEA demeure toutefois la vérification de l'ensemble de ses hypothèses de travail, dont une étude critique a été proposée par Fahy [46]. Celles-ci se rattachent principalement à la notion de champ diffus au sein de chaque sous-système (recouvrement spatial) et au nombre de modes présents dans la bande de fréquence considérée (recouvrement fréquentiel). Un fort recouvrement modal permet ainsi de vérifier l'hypothèse d'équiprobabilité des modes, dans l'intervalle fréquentiel considéré.

La notion de couplage entre sous-système est également une source de limitation, étant donné que la méthode SEA ne traite classiquement que les cas de couplages faibles. Or ce terme ne dispose pas d'une définition unique arrêtée. Chandiramani l'assimile aux cas où le facteur de perte interne est nettement supérieur au facteur de perte par couplage [33]. Fahy considère que le couplage est faible lorsque les modes des sous-systèmes couplés présentent des caractéristiques proches de ceux des sous-systèmes découplés. Wester et Mace ont introduit deux paramètres afin de quantifier la force de couplage [161]. Ceux-ci dépendent de coefficients de réflexion et de transmission à la jonction ainsi que des facteurs de recouvrement modal. À l'inverse, la présence de couplages forts nécessite l'étude et, le cas échéant, la prise en compte de couplages indirects entre sous-systèmes non physiquement liés.

### **Méthode SEA-like**

La méthode SEA-like est dérivée de la SEA mais, contrairement à celle-ci, elle ne s'applique pas à un ensemble moyenné de systèmes mais à un système en particulier. Elle s'appuie sur les méthodes de type basses fréquences, s'étend sur un domaine fréquentiel plus large que la SEA, tout en donnant une description énergétique du système. Elle permet en particulier d'étudier les systèmes ayant un comportement sensible aux caractéristiques de chaque mode, pour lesquels une modélisation statistique n'est plus pertinente.

Une première approche de la méthode SEA-like a été proposée par Fredö [47]. À partir d'un système de plaques couplées en L, il étudie l'influence du couplage modal entre les sous-systèmes sur les coefficients de perte par couplage issus de la SEA et des coefficients de flux d'énergie issus de la méthode SEA-like. Il montre ainsi que ces coefficients diffèrent en basses fréquences. Les coefficients de flux énergétiques peuvent alors être négatifs, indiquant que le flux de puissance se dirige d'un système à faible énergie à un système fortement énergétique. C'est le cas par exemple si le sous-système excité a un comportement non-résonant, tandis que l'autre sous-système contient un mode résonant : l'énergie est alors transmise d'un sous-système à faible énergie au sous-système non-excité, fortement énergétique. Un tel phénomène ne peut pas être modélisé par la SEA qui ne prend en compte que les comportements dynamiques associés aux

modes présents dans la bande de fréquence d'intérêt, et non les participations de modes hors bande.

Mace propose une approche similaire [98]. Il se base pour cela sur l'équation principale de la SEA (équation 2.21) qui relie le vecteur des puissances injectées aux énergies dans chacun des sous-systèmes :

$$P_{inj} = LE \quad (2.26)$$

Les conditions nécessaires pour que la matrice  $L$  soit considérée comme une matrice SEA ont été rappelées au paragraphe précédent. Cependant dans certains cas, en particulier lorsque le recouvrement modal est faible, il n'est plus possible de négliger le couplage indirect entre sous-systèmes et la matrice  $L$  est qualifiée de « quasi-SEA ». La méthode SEA-like peut alors être appliquée, introduisant un modèle de distribution d'énergie reliant les énergies des sous-systèmes aux puissances injectées sous la forme :

$$E = AP_{inj} \quad (2.27)$$

où  $A$  est la matrice des coefficients d'influence énergétique. On note que la matrice  $X = A^{-1}$  n'est pas forcément une matrice SEA. Le flux d'énergie entre deux sous-systèmes ne dépend alors plus uniquement des énergies présentes dans les deux sous-systèmes considérés, mais peut recevoir de l'énergie provenant d'autres sous-systèmes. Le coefficient  $A_{ij}$ , donnant l'énergie totale dans le sous-système  $i$  pour une puissance unitaire injectée au sous-système  $j$ , est alors donné par l'expression suivante :

$$A_{ij} = \frac{\langle E_i \rangle}{\langle P_{inj,j} \rangle} \quad (2.28)$$

où le symbole  $\langle . \rangle$  désigne la moyenne fréquentielle. Le calcul des énergies et des puissances injectées est effectué à l'aide de méthodes d'analyse basses fréquences, comme l'analyse modale ou l'analyse par éléments finis. On peut donc modéliser le problème couplé soit en utilisant les modes du système complet, soit les modes de chaque sous-système découplé.

Mace propose ainsi de calculer les coefficients SEA-like à partir des modes du système couplé [97, 98], sous la forme :

$$A_{ij} = \frac{1}{\eta\omega_c} \frac{\sum_k \sum_l \Gamma_{kl} \Psi_{kl}^{(i)} \Psi_{kl}^{(j)}}{\sum_k \Gamma_{kk} \Psi_{kk}^{(j)}} \quad (2.29)$$

où  $\omega_c$  représente la pulsation centrale,  $\eta$  le facteur de perte modal et  $\Gamma_{kl}$  décrit le couplage fréquentiel entre les modes  $k$  et  $l$ . Il dépend des fonctions de transfert des modes  $k$  et  $l$ , donc des fréquences propres et des amortissements modaux. Il renseigne sur le caractère résonnant ainsi que sur le recouvrement modal entre ces deux modes. Le terme  $\Psi_{kl}^{(i)}$  indique la corrélation spatiale (ou couplage spatial) entre les modes  $k$  et  $l$ . Ainsi, le terme  $\Psi_{kk}^{(i)}$  représente la proportion d'énergie cinétique associée au mode  $k$  dans le sous-système  $i$ . Il permet de distinguer les modes globaux, pour lesquels ce terme est équivalent dans chaque sous-système, des modes locaux.



La méthode utilisant les modes du système complet permet de donner une expression simple des coefficients de la matrice SEA-like. Cependant, lorsque le système étudié est complexe, ces modes peuvent être coûteux à déterminer. Il est dans ce cas plus judicieux d'utiliser une approche locale et de décomposer les équations sur les modes des sous-systèmes découplés [41].

### Approches issues de la conductivité vibratoire

Afin de compenser les limitations inhérentes aux méthodes précédemment décrites (éléments finis et moyennes fréquences, SEA et distribution spatiale de la réponse,...) des approches se basant sur une analogie avec l'équation de la chaleur ont été proposées.

Les premiers travaux relatifs à ce type d'analyse énergétique ont été entrepris à la fin des années 1970 par Belov et Ryback, dont la théorie s'appuie sur les concepts de densité d'énergie effective et de flux de puissance effectif. Nefske et Sung [113] ont ensuite développé une méthode énergétique hautes fréquences dans le domaine temporel visant à prédire les variations spatiales de la réponse vibratoire à l'intérieur de chaque sous-système, ainsi que le flux de puissance et la réponse vibratoire à travers l'ensemble du système. Cette approche peut être considérée comme une vision différentielle de la SEA.

Ces méthodes s'appuient sur l'expression du bilan énergétique local en régime permanent, donné par l'équation :

$$\operatorname{div} I + \Pi_{diss} = \Pi_{in} \quad (2.30)$$

où  $I$ ,  $\Pi_{diss}$  et  $\Pi_{in}$  représentent respectivement le vecteur d'intensité structurale et les densités de puissance dissipée et injectée. Le modèle de dissipation permet d'exprimer la densité de puissance dissipée en fonction de la densité d'énergie au sein du système  $W$ , du coefficient d'amortissement  $\eta$  et de la pulsation  $\omega$  :

$$\Pi_{diss} = \eta\omega W \quad (2.31)$$

L'hypothèse fondamentale de la méthode permet alors de relier l'intensité au gradient de la densité d'énergie, par une relation analogue à la loi de Fourier :

$$I = -D \nabla W \quad (2.32)$$

où  $D = c^2/\eta\omega$  correspond à un coefficient de diffusion dépendant des caractéristiques du milieu de propagation. En introduisant ces deux relations dans l'équation 2.30, on obtient finalement :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega} \Delta W + \eta\omega W = \Pi_{in} \quad (2.33)$$

Cette équation aux dérivées partielles du second ordre est bien analogue à l'équation de conduction de la chaleur avec un terme convectif. Elle peut donc être résolue à l'aide d'un code de calcul thermique. Une méthode d'éléments finis énergétiques (EFEM, *Energy Finite Element Method* ou PFFEM, *Power Flow Finite Element Method*) a ainsi été proposée par Nefske et Sung [113] et

approfondie par Bernhard *et al.* [162, 28]. Le faible coût de cette formulation, qui ne nécessite pas de raffiner le maillage en fonction de la fréquence, ainsi que la possibilité d'obtenir la répartition d'énergie au sein de chaque sous-système, rendent ces méthodes particulièrement attractives.

Si cette approche a été validée pour des structures couplées monodimensionnelles [113, 162, 75], ainsi que dans le cas particulier des ondes planes pour les structures bidimensionnelles [28], elle se révèle fautive dans le cas général. Il a ainsi été montré par Langley [88], que dans le cas d'une plaque infinie, soumise à une excitation ponctuelle ou fortement amortie, la nature de la décroissance de la densité d'énergie à l'infini est en contradiction avec la solution analytique. Par ailleurs, la détermination du coefficient de diffusion pose quelques difficultés.

### 2.3.4 Méthodes moyennes fréquences

#### Méthodes de réduction moyenne fréquence

Il a été souligné que les méthodes de réduction de modèle permettent, dans une certaine mesure, d'étendre l'application de la FEM vers les moyennes fréquences. La taille des bases de réduction demeure cependant problématique. Une idée consiste donc à adapter la base de réduction au comportement vibratoire exhibé par la structure, dans l'intervalle fréquentiel considéré [68]. Morand a ainsi proposé une méthode d'hybridation modale qui vise à réduire la taille de la base modale, en projetant la solution uniquement sur les modes propres de vibration qui maximisent un opérateur d'excitabilité [110]. Cela revient en fait à ne retenir que les modes ayant une participation importante dans la réponse de la structure. On note qu'une approche comparable a également été proposée par Guyader [68].

Une méthode de réduction de modèle adaptée aux moyennes fréquences a également été proposée par Soize [116, 144]. Celle-ci s'appuie sur une discrétisation du problème continu à l'aide d'une méthode de Ritz-Galerkin de type éléments finis. En partant du constat que l'utilisation des bases modales issues d'une formulation primale en déplacement est peu adaptée aux moyennes fréquences, un opérateur énergétique est introduit et discrétisé sur  $n$  degrés de liberté, sous la forme d'une matrice  $E_n$  réelle, symétrique et définie positive, définie sur l'intervalle fréquentiel d'étude  $\mathbb{B}$  de la manière suivante :

$$E_n = \int_{\mathbb{B}} e_n(\omega) d\omega \quad (2.34)$$

avec,

$$e_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \omega^2 |\chi(\omega)|^2 \Re (T_n(\omega)^H M T_n(\omega)) \quad (2.35)$$

où  $T_n(\omega)$  représente la matrice de flexibilité dynamique de la structure et  $M$  sa matrice de masse ( $\chi(\omega)$  est la fonction caractéristique délimitant l'intervalle  $\mathbb{B}$ ). Cet opérateur se rapporte à l'énergie cinétique totale du système pour une excitation unitaire et il admet, en raison de ses propriétés algébriques, des valeurs propres  $\lambda_\nu^n$  et des vecteurs propres  $P_\nu^n$  tels que :

$$E_n P_\nu^n = \lambda_\nu^n P_\nu^n \quad (2.36)$$

ceux-ci vérifiant les relations d'orthogonalité suivantes :

$$P_\nu^{nT} P_{\nu'}^n = \delta_{\nu\nu'} \quad (2.37)$$

$$P_\nu^{nT} E_n P_{\nu'}^n = \lambda_\nu^n \delta_{\nu\nu'} \quad (2.38)$$

où  $\delta_{\nu\nu'}$  est le symbole de Kronecker.

Un sous-espace dominant  $P^N$  de la base des vecteurs propres, de taille  $N \ll n$ , est ensuite constitué en ne retenant que les vecteurs associés aux plus grandes valeurs propres, vérifiant le critère :

$$\frac{\lambda_{N+1}^n}{\lambda_1^n} \ll 1 \quad (2.39)$$

Il est alors possible, par projection, de réduire la taille du problème discrétisé initial et d'exprimer de manière approchée l'énergie associée à la réponse du système sur l'intervalle fréquentiel  $\mathbb{B}$ , pour un effort  $f$  donné :

$$E_n \approx \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu^n |P_\nu^{nT} f|^2 \quad (2.40)$$

Cette méthode a par la suite été étendue par Soize et Mziou qui ont développé une méthode CMS de type Craig-Bampton faisant appel à ces fonctions propres énergétiques à la place des modes structuraux [147].

### Méthode d'analyse de chemins structuraux

La méthode d'analyse des chemins structuraux a été développée par Girard et Defosse en s'appuyant sur l'effet de lissage de la réponse d'un système en moyennes et hautes fréquences. Elle utilise pour cela les propriétés de la moyenne géométrique des fonctions de transfert afin de déterminer la réponse de structures de type treillis de poutres [58].

Elle se base sur une discrétisation de la structure permettant de déterminer, par bande de fréquence, des matrices de raideur dynamique lissées pour chaque élément. Une phase d'assemblage permet ensuite d'obtenir la matrice globale associée  $\bar{K}$ . Celle-ci est cependant mal conditionnée et ne permet pas de déterminer la réponse du système par un calcul direct classique. Un filtrage de cette matrice est donc proposé pour ne conserver que les « chemins structuraux principaux ».

$$\bar{K}_{ij} = \sum_{\substack{\text{chemins} \\ \text{structuraux}}} \bar{K}_{ip_1} \bar{K}_{p_1 p_1}^{-1} \bar{K}_{p_1 p_2} \bar{K}_{p_2 p_2}^{-1} \dots \bar{K}_{p_n j} \quad (2.41)$$

On constate que chaque chemin structural se décompose comme un produit entre une matrice de flexibilité ponctuelle  $\bar{K}_{pp}^{-1}$  et une matrice de raideur  $\bar{K}_{pq}$  liée aux transmissibilités des éléments parcourus. Or celles-ci font intervenir des termes d'amortissement à l'origine de la décroissance de l'amplitude de la réponse. La notion de temps de parcours amorti sur l'ensemble des éléments  $e$  d'un même chemin, est alors introduite,

$$T = \sum_e t_e \eta_e \quad (2.42)$$

où  $t_e = L_e/c_e$  et  $\eta_e$  représentent respectivement la période caractéristique et l'amortissement structural associé à l'élément. Il a ainsi été montré, dans le domaine des hautes fréquences, qu'il est uniquement nécessaire de retenir les chemins les plus courts. Au contraire, pour les fréquences plus basses des chemins plus longs doivent être conservés.

Cette méthode conduit à des courbes de réponses fréquentielles moyennes similaires à celles obtenues par la SEA. Elle a cependant l'avantage de donner des résultats sous forme vectorielle (déplacements, vitesses, accélérations) plutôt que sous la forme d'une quantité énergétique scalaire. Elle permet de plus d'observer la manière dont les vibrations sont transmises à travers la structure, en allant du point d'excitation aux points de réponse.

Bien qu'initialement appliquée à des réseaux de guides d'ondes de type treillis de barres ou de poutres, cette méthode peut être étendue à tout type d'élément, sous réserve de définir les matrices élémentaires lissées associées. Elle est toutefois limitée par la nécessité de définir l'augmentation importante du nombre de chemins structuraux dans le cas d'une structure complexe en deux ou trois dimensions.

### Analyse en composantes principales

Une approche probabiliste de l'analyse des vibrations, combinant des éléments de la FEM et de la SEA, a été introduite par Hasselman *et al.* sous le nom d'analyse en composantes principales (*Principal Component Analysis*) [71]. Elle vise à caractériser la réponse d'un assemblage de structures couplées par l'intermédiaire d'une métrique de type énergétique.

Celle-ci est déterminée à partir de la décomposition en valeurs singulières d'une matrice  $H$  constituée de fonctions de réponse en fréquence, sous la forme :

$$H(\omega) = \Phi D \gamma(\omega) \quad (2.43)$$

où  $\Phi$  est une matrice regroupant des déformées spatiales,  $D$  une matrice diagonale contenant les valeurs singulières et  $\gamma$  une matrice regroupant les « caractéristiques des réponses fréquentielles ». Elles vérifient de plus les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\Phi^T \Phi = I \quad (2.44)$$

$$\gamma \gamma^T = I \quad (2.45)$$

où  $I$  est la matrice identité. On en déduit que :

$$H H^T = \Phi D^2 \Phi^T \quad (2.46)$$

Il est ainsi possible de relier la trace de la matrice  $H H^T$  à l'énergie totale de chaque composant : celle-ci est proportionnelle à la somme des coefficients de la matrice diagonale  $D^2$ , rangés dans un ordre décroissant, de sorte que la plus grande partie de l'énergie soit associée aux premières déformées spatiales.

L'équation 2.43 représente donc une relation de décomposition modale sur un ensemble de modes en énergie. Ceux-ci constituent une base plus appropriée à la caractérisation de la réponse structurale en moyennes fréquences que celle des modes normaux issus de la méthode des éléments finis, qui demeure très sensible aux erreurs de modélisation dans cette partie du spectre fréquentiel. L'application de cette méthode à un système académique de plaques en L a montré que l'énergie associée à la première valeur singulière constitue plus de 80% de l'énergie totale du système [71].

Le principal lien entre cette méthode et la SEA provient de son caractère statistique et énergétique. Il a par la suite été renforcé par la proposition d'une méthode utilisant la PCA pour calculer les facteurs de perte par couplage et par amortissement de la SEA [70]. Le but de cette stratégie est de tirer avantage de modèles éléments finis raffinés afin d'améliorer les résultats des prédictions en moyennes fréquences.

### Méthodes hybrides

Dans le but de combler l'espace entre la FEM et la SEA, il semble intéressant d'élaborer des approches hybrides dans lesquelles les différents composants sont modélisés à l'aide de méthodes adaptées à leurs longueurs d'ondes de vibration respectives. La difficulté est alors de vérifier la compatibilité des déplacements aux interfaces.

Langley et Bremner ont proposé la *Resound Method*, associant la FEM à la SEA [89]. Elle s'appuie sur une décomposition de la réponse du système en fonction de ses longueurs d'onde pour distinguer des composants globaux, ensuite traités par une approche déterministe, et des composants locaux, décrits de manière statistique. Il est ainsi possible d'établir des analogies avec les méthodes moyennes fréquences de flou structural, développées par Soize [116], ou de lissage de réponse, développée par Belyaev. En effet, les composantes de grandes longueurs d'onde s'apparentent à la structure maître, tandis que les composantes locales jouent le rôle de structures floues, dont les comportements sont assimilables à un ensemble de perturbations.

Une autre méthode, combinant la FEM et la EFEM a été développée par Zhao et Vlahopoulos [169]. Cette formulation hybride suppose également que la structure est divisée en composants « longs » et « courts », ces termes se rapportant à l'échelle de la longueur d'onde caractéristique de chaque composant, par rapport à la longueur d'onde de vibration. Un composant court n'admet que quelques longueurs d'onde sur sa longueur et donc des fréquences de vibration basses, à l'inverse d'un composant long. La principale difficulté, consistant à retranscrire les transferts énergétiques aux jonctions entre ces différents composants, est ensuite traitée en reliant les déplacements issus de la FEM sur les composants courts, à l'amplitude de l'onde incidente associée à la formulation énergétique sur les composants longs. Cette jonction hybride conduit à des coefficients de transfert de puissance de type EFEM, qui s'ajoutent aux

coefficients de transfert de puissance aux jonctions entre composants longs. Ceux-ci sont calculés analytiquement en modélisant le composant long par une structure semi-infinie équivalente.

Cette méthode a été utilisée par les auteurs pour analyser le flux de puissance dans un système de poutres colinéaires [159]. Ils ont également examiné des phénomènes de ré-injection de puissance [96], où la puissance réfléchiée par une interface de composant court repasse à nouveau l'interface en étant partiellement transmise. La procédure de couplage peut cependant devenir lourde dans le cas de connections multiples et l'extension de la méthode aux structures complexes reste à investiguer.

On indique enfin que cette vision des moyennes fréquences, associée à l'idée d'un couplage entre des sous-systèmes déterministes et d'autres considérés comme statistiques, est à l'origine d'une méthode proposée par Shorter et Langley [143]. Celle-ci s'appuie sur une description du système global à l'aide de matrices de raideurs dynamiques (éventuellement obtenues par la FEM) permettant de déterminer des grandeurs quadratiques de type inter-spectre, afin de représenter la réponse moyenne du système. Le couplage est alors assuré à l'aide de coefficients de transfert de puissance issus de la résolution d'un bilan de puissance proche de celui de la SEA. On souligne que cette méthode peut être rapprochée de la formulation intégrale stochastique mentionnée au chapitre 2.4.1.

## 2.4 Méthodes d'analyse de flux de puissance

### 2.4.1 Approches locales

#### Méthodes énergétiques générales et simplifiées

Il a été exposé précédemment qu'en raison de l'hypothèse de champs diffus, valable pour un amortissement faible au sein des sous-systèmes, les résultats de la SEA ne permettent pas de distinguer la répartition spatiale de l'énergie ou d'identifier, de manière précise, le flux d'énergie au sein du système complet. Afin de pallier ces limitations, des méthodes basées sur une approche ondulatoire ont été développées, permettant de représenter localement la solution. Des hypothèses traduisant les différents types d'interaction entre les ondes, à l'intérieur ou aux frontières des éléments considérés, permettent au final d'exprimer de nouvelles équations du comportement dynamique sous la forme de bilans d'énergie.

Au milieu des années 1990, Jézéquel, Lase et Le Bot ont présenté des formulations alternatives aux méthodes de conductivité vibratoire (EFEM, PFFEM) afin de représenter les variations locales de l'énergie vibratoire en hautes et moyennes fréquences. Ces travaux ont abouti à une nouvelle méthode, dénommée méthode énergétique générale (*General Energy Method*) [90]. Celle-ci se base à la fois sur la densité d'énergie totale, égale à la somme des densités d'énergie cinétiques et potentielles, et sur la densité d'énergie lagrangienne, égale à leur différence. Elle

distingue deux types de flux de puissance : le flux de puissance active, relié à l'énergie totale et décrivant sa propagation au sein du système ; le flux de puissance réactive, relié à l'énergie lagrangienne, caractérisant le comportement modal de la structure. Les bilans de puissance associés aux parties actives et réactives sont ensuite établis et permettent de retrouver, pour la partie active, une forme équivalente à celle de la EFEM. Si les résultats obtenus sur des structures simples unidimensionnelles vérifient les solutions obtenues de manière classique par une approche en déplacement, la GEM se révèle très coûteuse en calcul.

Afin de limiter cet inconvénient, Ichchou *et al.* ont proposé une approche simplifiée en supposant qu'il n'y a pas d'interaction entre les ondes propagatives et que les ondes évanescentes sont négligeables loin des singularités [75]. Il a été souligné par Bocquillet *et al.* que ces hypothèses reviennent à réaliser des moyennes spatiales des quantités d'intérêt sur une longueur d'onde, ce qui a pour effet d'annuler la densité d'énergie lagrangienne et donc le flux de puissance réactive [21]. Cette méthode énergétique simplifiée (*Simplified Energy Method*) se réduit alors à l'étude de la densité d'énergie totale et de l'énergie active. Elle a été appliquée à des barres en traction-compression, des poutres en flexion pure, ainsi qu'à des membranes et des plaques [76].

Suivant le type d'ondes composant le champ ondulatoire et le modèle de réflexion utilisé, plusieurs approches de la SEM ont été introduites. La SEM différentielle se base sur un champ ondulatoire décrit par des ondes planes. Elle permet de retrouver l'équation correspondant au bilan de puissance issu de la méthode EFEM (équation 2.30). Elle autorise donc également une résolution par une méthode discrétisée de type éléments finis, dont le principe variationnel a été présenté par Moron [111]. Le couplage entre sous-systèmes s'effectue à l'aide de matrices de jonction issues des bilans de puissance aux interfaces. Cotroni a rappelé ainsi que dans le cas de systèmes monodimensionnels possédant un unique mode de propagation, il est possible de relier les densités d'énergie incidentes  $I_i^{inc}$  provenant du sous-système  $i$ , réfléchies  $I_i^{ref}$  et transmises  $I_j^{trans}$  au sous-système  $j$ , aux énergies associées [34] :

$$I_i^{inc} = c_i W_i^{inc} \quad (2.47)$$

$$I_i^{ref} = -c_i W_i^{ref} = -\tau_{ii} I_i^{inc} \quad (2.48)$$

$$I_j^{trans} = \tau_{ij} I_i^{inc} \quad (2.49)$$

où  $\tau_{ii}$  et  $\tau_{ij}$  représentent respectivement les efficacités de réflexion et de transmission. Les bilans d'énergie et de flux pour le sous-système  $i$  s'expriment alors :

$$W_i = W_i^{inc} + W_i^{ref} = (1 + \tau_{ii}) I_i^{inc} / c_i \quad (2.50)$$

$$I_i = I_i^{inc} + I_i^{ref} = (1 - \tau_{ii}) I_i^{inc} \quad (2.51)$$

Il est donc possible d'écrire les contributions provenant de chaque sous-système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_i \frac{(1-\tau_{ii})}{(1+\tau_{ii})} & c_j \frac{(1-\tau_{ji})}{(1+\tau_{jj})} \\ c_i \frac{(1-\tau_{ij})}{(1+\tau_{ii})} & c_j \frac{(1-\tau_{jj})}{(1+\tau_{jj})} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_i \\ W_j \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Cotoni a également souligné que dans les cas de dimensions supérieures, la matrice de jonction relie les projections des flux de puissance sur la normale à la jonction aux densités d'énergie. Il est alors nécessaire soit de connaître la directivité des puissances incidentes, ce que ne permet pas cette formulation, soit de la considérer comme uniforme.

La SEM différentielle mixte permet en revanche de prendre en compte à la fois le champ direct et le champ réverbéré. Le premier est modélisé à partir d'un champ créé par une source ponctuelle dans un milieu considéré comme infini, de dimension  $n$  :

$$W_d(r) = \frac{\Pi_{inj} e^{-mr}}{\gamma_n c r^{n-1}} \quad (2.53)$$

où  $\gamma_n$  correspond à l'angle solide de la source d'excitation et  $e^{-mr}$  représente un terme d'atténuation, fonction du coefficient d'absorption du milieu de propagation  $m$ . Le champ réverbéré  $W_r$  est lui décrit par la SEM différentielle classique où l'on considère que la puissance injectée provient de la réflexion aux frontières du champ ondulatoire total. Le bilan énergétique total est finalement obtenu en sommant ces deux participations.

Les formulations intégrales et fonctionnelles de la SEM décrivent également le champ ondulatoire comme la somme du champ direct et du champ indirect, mais celui-ci est obtenu par sommation de rayons émis par des sources surfaciques localisées sur les frontières. La densité d'énergie s'écrit alors à l'aide des fonctions de Green énergétiques :

$$G(r) = \frac{1}{\gamma_n} \frac{e^{-mr}}{r^{n-1}} \quad (2.54)$$

où  $r$  représente la distance entre le point d'observation et la source. La densité d'énergie en un point  $M$  s'écrit ici comme la somme du champ direct dû aux sources primaires et du champ réverbéré dû aux réflexions, sous la forme :

$$W(r) = \int_{\Omega} \rho(S, u_{SM}) G(S, M) d\Omega_S + \int_{\Gamma} \sigma(P, u_{PM}) G(P, M) d\Gamma_P \quad (2.55)$$

où  $\rho(S, u_{SM})$  désigne la puissance de la source primaire située en un point  $S$ , vue depuis le point  $M$ , et  $\sigma(P, u_{PM})$  désigne l'intensité spécifique associée aux réflexions sur la frontière au point  $M$ , vue par le point  $P$ .

Ces deux méthodes se différencient par leur manière de prendre en compte la réflexion sur les parois, qui permet de déterminer les sources secondaires. La SEM intégrale utilise un modèle de réflexion diffuse régie par la loi de Lambert : la directivité de l'énergie réfléchi est proportionnelle



au cosinus de l'angle avec la normale à la frontière. La SEM fonctionnelle utilise un modèle de réflexion spéculaire, régie par la loi de Snell-Descartes. Les modèles de réflexions permettent alors de déterminer la directivité des intensités spécifiques. L'amplitude peut ensuite être calculée à l'aide d'un bilan de puissance à la frontière [141].

Cette dernière approche s'apparente à une version structurale de la méthode de radiosité acoustique développée entre autre par Kuttruff dans les années 1990. Elle a été approfondie par Le Bot [24], qui en a proposé une comparaison détaillée vis-à-vis des méthodes de conduction vibratoire [25] et de la SEA [26]. Il a ainsi montré qu'en se plaçant dans le cas particulier des hypothèses fortes de la SEA, il est possible de retrouver l'expression des facteurs de perte par couplage obtenue par l'approche ondulatoire.

### **Formulation intégrale stochastique**

En reprenant le concept de sources primaires et secondaire, Viktorovitch *et al.* ont proposé une méthode basée sur une formulation par éléments de frontière aléatoire [155]. Les équations intégrales classiques de la dynamique y sont modifiées par l'introduction d'un paramètre géométrique aléatoire permettant de modéliser les effets liés aux incertitudes, à mesure que la fréquence d'étude augmente. Les moments statistiques d'ordre deux associés aux variables cinématiques constituent alors les inconnues du problème. Des résultats ont été présentés pour des structures mono- et multidimensionnelles. Le cas des structures assemblées à également été étudié, en supposant qu'une source primaire pour une sous-structure agit comme tel pour une autre sous-structure, au niveau de leur interface commune [156].

Les auteurs ont démontré que cette approche permet de restituer le comportement modal basses fréquences ainsi qu'une réponse hautes fréquences moyennée et lissée. Elle s'applique également aux assemblages de sous-structures ayant des densités modales très différentes. Elle semble donc particulièrement appropriée à la modélisation des moyennes fréquences. Cependant, sa formulation intégrale peut entraîner certaines difficultés dans le cadre d'une généralisation à des structures complexes.

### **2.4.2 Approches globales**

#### **Notion de flux de puissance**

Développées au début des années 1970, les méthodes d'analyse de flux de puissance partagent quelques similarités avec la SEA, à savoir l'approche par sous-structuration et l'utilisation de paramètres moyennés dans le temps, de type énergie vibratoire ou puissance, pour décrire la réponse de ces sous-structures. Ces méthodes ne sont cependant pas limitées aux hautes fréquences et permettent de prendre en compte les comportements résonants des structures à faibles densités modales.

On retrouve les premières idées associées à l'analyse de flux de puissance dans les travaux de Lyon et Maidanik sur la propagation des vibrations dans les systèmes simples [95]. Des études préliminaires ont également été réalisées par Noiseux [114], Pavic [119] et Verheij [154] dans le but de mesurer expérimentalement la puissance structurale. Les principaux concepts ont été introduits par Goyder et White [61, 62, 63] qui ont présenté une étude théorique détaillée et systématique de la puissance structurale dans les structures flexibles mono et bidimensionnelles. Celle-ci correspond à la puissance effective  $P$ , déterminée à partir de la partie réelle de la puissance complexe  $P_c$  [38]. En se plaçant dans le cas du régime harmonique, elle s'écrit sous la forme :

$$P = \frac{1}{2} \Re\{P_c\} = \frac{1}{2} \Re\{f^H v\} = \frac{1}{2} \left( \Re\{f\} \Re\{v\} + \Im\{f\} \Im\{v\} \right) \quad (2.56)$$

où  $f$  et  $v$  représentent respectivement les amplitudes complexes associées à la force et à la vitesse au point considéré. Les auteurs ont ainsi montré que cette puissance constitue un unique paramètre permettant de quantifier et comparer, de manière efficace, les principaux effets associés aux vibrations d'une structure. Ils se sont en particulier intéressés au cas d'une structure source rigide reliée à une structure réceptrice flexible, de type poutre ou plaque, par l'intermédiaire d'un élément d'isolation de type ressort suivant un degré de liberté. Seules les vibrations de flexion de la structure réceptrice ont été prises en compte.

Pinnington et White ont également utilisé cette approche pour décrire le flux de puissance entre deux poutres possédant ou non un comportement résonant. Ils ont étudié les conditions pour lesquelles ces structures peuvent être considérées comme infinies, tout en conservant une bonne prédiction de la puissance moyenne [133]. Pinnington a ensuite proposé une méthode s'appuyant sur l'enveloppe des fonctions de réponses en fréquence en accélération, obtenues expérimentalement, pour étudier la puissance absorbée par une structure finie. Il est ainsi possible d'exprimer cette dernière comme une somme de puissances introduites par les différents modes de vibrations mesurés, auxquelles sont associées des configurations particulières d'efforts généralisés. Cette méthode nécessite cependant de pouvoir clairement identifier les différents modes de vibrations, d'où un faible recouvrement modal [130].

### Méthodes basées sur la mobilité

La méthode des mobilités constitue une autre possibilité pour modéliser les structures couplées. Issue du concept d'impédance électrique [52], elle relie l'effort exercé sur un élément à sa réponse en un point précis. Si la structure est complexe et composée de plusieurs composants, il suffit alors de caractériser chaque jonction analytiquement ou expérimentalement avant de recomposer le comportement de la structure globale par des équations de continuité. On trouvera dans la thèse de Pinnington [129] une synthèse bibliographique de la méthode. La mobilité d'entrée associée à un élément poutre  $y$  est définie afin d'effectuer un calcul de flux de puissance. L'étude expérimentale confirme que la force injecte un maximum de puissance quand la mobilité du récepteur passe sur des résonances.

De manière générale, on définit la mobilité comme étant le rapport entre la vitesse complexe en point  $m$ , et la force appliquée en un point  $n$  :

$$Y^{mn} = \frac{v^m}{f^n} \quad (2.57)$$

On parle de mobilité ponctuelle lorsque  $m = n$ , de mobilité de transfert lorsque  $m \neq n$  et de mobilité croisée lorsque les directions considérées en chaque point ne sont pas identiques. La puissance complexe en un point peut alors être exprimée en fonction de la mobilité ponctuelle, sous la forme [61, 121] :

$$P = \frac{1}{2} \Re(f^H v) = |f|^2 \Re(Y) \quad (2.58)$$

Dans le cas d'une interface multi-points de dimension  $N$ , il est possible de distinguer séparément les contributions en chaque point en faisant intervenir les mobilités de transfert. On obtient ainsi, pour la puissance au point  $m$  :

$$P^m = \frac{1}{2} \Re \left( f^{mH} \sum_{n=1}^N Y^{mn} f^n \right) \quad (2.59)$$

On en déduit finalement la puissance totale en sommant sur l'ensemble des points d'interface :

$$P = \frac{1}{2} \Re \sum_{m=1}^N \left( f^{mH} \sum_{n=1}^N Y^{mn} f^n \right) \quad (2.60)$$

Cuschieri [39] propose de compléter la description des jonctions entre sous-structures en abordant les couplages non ponctuels entre éléments, décrits par des relations de fonction de mobilités. Les résultats obtenus à partir de l'étude de deux plaques couplées en L se montrent très satisfaisants, comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis ou la SEA.

### Méthode du descripteur de source

Afin d'obtenir une grandeur unique permettant de caractériser une structure source et de fournir une formulation appropriée pour le calcul de la puissance transmise, les concepts de descripteur de source et de fonction de couplage ont été introduits par Mondot et Petersson [106]. Dans le cas de deux sous-structures reliées en un unique point de contact, la puissance transmise dépend de la vitesse libre de la source et du rapport entre les mobilités des structures sources et réceptrices. Il est alors possible d'écrire la puissance complexe sous la forme :

$$P_c = S_d C_f \quad (2.61)$$

où  $S_d$  est le descripteur de source et  $C_f$  la fonction de couplage. Le descripteur de source dépend alors uniquement des données de la structure source et est défini par :

$$S_d = \frac{v_{Sf}^2}{Y_S^H} \quad (2.62)$$

où  $v_{Sf}$  représente la vitesse de la structure source libre au point de contact et  $Y_S$  la mobilité de la source en ce point. Cette grandeur est complexe, homogène à une puissance et constitue une caractéristique de la source, indépendamment du récepteur : elle représente la capacité de celle-ci à délivrer une puissance. À nouveau, le fait de considérer une puissance permet de comparer plus facilement différentes sources ou différents mécanismes, dont les unités peuvent être différentes (par exemple en force ou en moment) [122]. La fonction de couplage complexe est définie par :

$$C_f = \frac{Y_S^* Y_R}{|Y_S + Y_R|^2} \quad (2.63)$$

Elle correspond au rapport complexe de la puissance transmise à  $S_d$ , c'est-à-dire à la proportion de la puissance issue de la source transmise à une structure réceptrice donnée. Il est également possible de l'exprimer grâce au rapport entre les amplitudes des mobilités sources et réceptrices,  $\alpha = |Y_R|/|Y_S|$  et à leur déphasage,  $\Delta\phi = \phi_R - \phi_S$  :

$$C_f = \frac{\alpha e^{j\Delta\phi}}{\alpha^2 + 2\alpha \cos(\Delta\phi) + 1} \quad (2.64)$$

Cette fonction de couplage permet donc d'observer les relations entre les mobilités et ainsi d'évaluer l'efficacité d'une éventuelle transmission de puissance entre ces structures. On obtient finalement la puissance active sous la forme :

$$P = |S_d| |C_f| (\cos(\phi_S) \cos(\Delta\phi) - \sin(\phi_S) \sin(\Delta\phi)) \quad (2.65)$$

Cette information peut se révéler particulièrement utile dans un contexte de conception, lorsqu'il est nécessaire de déterminer la structure réceptrice la plus appropriée ou bien la meilleure localisation du point de jonction.

Lorsque les structures sources et réceptrices sont couplées en plusieurs points, suivant plusieurs degrés de liberté, l'analyse de la puissance transmise nécessite la prise en compte des différents couplages. Celle-ci s'écrit alors, au point  $n$  dans la direction  $i$ , pour une force agissant au point  $m$  dans la direction  $j$  [48] :

$$P_i^n = \frac{(v_{Sf_i}^n)^2}{2|Y_S\{f_j^m/f_i^n\} + Y_R\{f_j^m/f_i^n\}|^2} \Re\{Y_R\{f_j^m/f_i^n\}\} \quad (2.66)$$

où  $Y_S$  et  $Y_R$  sont respectivement les matrices de mobilité de la source et du récepteur et  $\{f_j^m/f_i^n\}$  est le vecteur du rapport entre les efforts. Bien que reflétant la complexité des phénomènes en jeu, cette équation ne permet pas de distinguer les chemins de transmission dominants.

Fulford et Gibbs ont introduit par la suite le concept de mobilité effective. Lorsqu'elle est associée au point  $n$  et à la direction  $i$ , celle-ci s'écrit :

$$Y_{ii}^{nn\Sigma} = Y_{ii}^{nn} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N Y_{ii}^{nm} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 Y_{ij}^{nn} \frac{f_j^n}{f_i^n} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 Y_{ij}^{nm} \frac{f_j^m}{f_i^n} \quad (2.67)$$

où  $Y_{ij}^{nm}$  représente la mobilité de transfert en un point  $n$  suivant la direction  $i$  pour une excitation en  $m$  suivant  $j$ . Les différents termes de cette équation permettent cette fois-ci de distinguer les chemins dominants. Le premier terme correspond au chemin direct et le deuxième terme aux couplages entre le point  $n$  et les autres points, dans la direction  $i$ . Le troisième terme représente le couplage au point  $n$  entre les différentes directions et le dernier terme, les couplages entre les autres points suivant les directions différentes de  $i$ .

Les fonctions descripteur de source et de couplage ont ensuite été déterminées, dans le cas de connections multiples, en faisant intervenir ces mobilités effectives. Elles s'écrivent alors, pour le point  $n$  suivant la direction  $i$  :

$$S_i^n = \frac{|v_{Sf,i}^n|^2}{2 \left( Y_{S,ii}^{nn\Sigma} \right)^*} \quad (2.68)$$

$$C_{f_i}^n = \frac{\left( Y_{S,ii}^{nn\Sigma} \right)^* Y_{R,ii}^{nn\Sigma}}{|Y_{S,ii}^{nn\Sigma} + Y_{R,ii}^{nn\Sigma}|^2} \quad (2.69)$$

La puissance complexe transmise au point  $n$  suivant la direction  $i$  est finalement obtenue sous la forme :

$$P_i^n = S_i^n C_{f_i}^n \quad (2.70)$$

Il est cependant nécessaire d'évaluer ou d'estimer le rapport des efforts figurant dans l'équation 2.67, celui-ci dépendant à la fois de la source et du récepteur. Des approximations ont donc été proposées afin de simplifier cette expression en ne considérant, par exemple, que les composantes en translation [48].

On souligne enfin que Bonhoff *et al.* ont proposé une variante de la méthode du descripteur de source adaptée aux interfaces continues ou éventuellement multi-points, basée sur le concept de mobilité d'interface [23]. Cette approche permet de décomposer la source physique des vibrations comme la somme des différents ordres d'une série. Ceux-ci sont directement liés à des comportements physiques de l'interface (mouvement de corps rigides, ...). Il est cependant nécessaire, afin de simplifier le calcul, de négliger certains termes croisés issus des produits de série, ce qui peut parfois conduire à de trop grandes approximations [22].

### Méthode de la puissance caractéristique

Moorhouse a introduit les concepts de puissance caractéristique, de puissance maximale disponible et de puissance « miroir » comme une extension du concept de descripteur de source, afin de remédier aux difficultés associées à la caractérisation intrinsèque des structures sources [108]. Ces trois descripteurs sont en effet des grandeurs indépendantes associées à la source.

La puissance maximale disponible fournie par une structure source est obtenue lorsque les mobilités des structures sources et réceptrices sont conjuguées, c'est-à-dire d'amplitude égale et de phase opposée [106]. La puissance « miroir » est définie comme la puissance délivrée par la

source lorsque celle-ci est connectée à une structure réceptrice de mobilité identique, en amplitude et en phase. La puissance caractéristique est définie comme étant le produit scalaire entre les efforts bloqués et les vitesses libres. Il a été montré qu'elle est égale à quatre fois la puissance « miroir ». Cette unique quantité constitue une représentation d'une source connectée par des points multiples. Elle ne s'appuie pas sur des approximations de calcul visant à déterminer à moindre coût la partie réelle de la mobilité et offre donc une caractérisation plus robuste. Elle nécessite cependant de mesurer les efforts bloqués et les vitesses libres en chaque point de la jonction, entraînant d'autres simplifications.

### 2.4.3 Approches modales

#### Notion de modes de flux de puissance

En s'appuyant sur l'égalité entre la puissance moyenne d'un système et l'énergie dissipée par son amortissement interne, Miller *et al.* ont proposé pour la première fois d'effectuer une analyse aux valeurs propres d'une matrice de puissance associée à la jonction, afin de déterminer les bandes de fréquences et les combinaisons de modes pour lesquelles la jonction dissipe de la puissance [105, 104].

À partir d'une approche par propagation d'ondes au niveau d'une jonction, il a été montré qu'il est possible d'exprimer l'amplitude  $w_o$  des ondes sortantes d'un système multi-corps en fonction de l'amplitude  $w_i$  des ondes entrantes et des efforts  $Q$  appliqués, de la manière suivante :

$$w_o(\omega) = S(\omega)w_i(\omega) + \Psi(\omega)Q(\omega) \quad (2.71)$$

où  $\omega$  est la pulsation considérée et  $S$  et  $\Psi$  sont les matrices de dispersion et de génération, complexes, dépendant de la fréquence et caractérisant respectivement les comportements homogènes et non-homogènes des ondes. Miller et von Flotow ont alors détaillé, dans le cas d'un composant récepteur ( $Q = 0$ ), une expression du flux de puissance à travers la jonction sous la forme [105]:

$$P = \frac{1}{2}w_i^H [I \quad S^H] P_j \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} w_i = \frac{1}{2}w_i^H P w_i \quad (2.72)$$

Celle-ci peut alors être utilisée pour étudier les caractéristiques de dissipation associées au comportement homogène ( $S$ ). Les auteurs proposent ainsi d'effectuer une analyse aux valeurs propres de la matrice de puissance  $P$ , afin de déterminer les bandes de fréquence et les combinaisons de modes d'ondes qui entraînent une conservation ou une dissipation de la puissance au niveau de la jonction qui, par définition, ne génère pas de puissance.

#### Méthode du multipôle

La méthode du multipôle, introduite par Pinnington [132], vise à simplifier la modélisation et l'évaluation de la puissance transmise à travers les plots isolants d'une machine. Elle décrit

les vibrations issues de la source comme transitant par un ensemble de pôles de vibrations, et assimile la structure réceptrice à un ensemble de mobilités ou d'impédances polaires.

Soit  $\Phi$  une matrice de Hadamard de taille  $N$ , c'est-à-dire une matrice orthogonale dont les éléments sont égaux à  $\pm 1$ . Elle vérifie les relations suivantes :

$$\Phi = \Phi^T \quad \text{et} \quad \Phi^{-1} = \frac{1}{N} \Phi \quad (2.73)$$

On effectue alors un changement de base afin d'obtenir les quantités polaires associées aux forces d'excitation  $f$  et à la matrice de mobilité  $Y$  :

$$q = \Phi f \quad \text{et} \quad \bar{Y} = \frac{1}{N^2} \Phi Y \Phi \quad (2.74)$$

ce qui permet d'écrire la puissance transmise sous la forme :

$$P = \frac{1}{2} \Re (f^H Y f) = \frac{1}{2} \Re (q^H \bar{Y} q) \quad (2.75)$$

Dans le cas où la structure réceptrice et les points d'excitation sont symétriques, la matrice  $\bar{Y}$  devient une matrice symétrique  $\Lambda$  et il est possible d'exprimer la puissance transmise par les  $N$  points sous la forme d'une puissance transmise par  $N$  pôles de vibration indépendants, où la  $n^{ieme}$  puissance polaire s'écrit sous la forme :

$$P_n = \frac{1}{2} |q_n|^2 \Re (\Lambda_{nn}) \quad (2.76)$$

Cette expression peut ensuite être étendue à l'étude du flux de puissance entre une structure source et une structure réceptrice :

$$P = \sum_{n=1}^N P_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} |u_{Sf,n}|^2 \frac{\Re (\Lambda_{R,nn})}{|\Lambda_{R,nn} + \Lambda_{S,nn}|^2} \quad (2.77)$$

où  $u_{Sf,n}$  est la quantité polaire associée au vecteur vitesse de la structure source libre, et  $\Lambda_S$  et  $\Lambda_R$  sont respectivement les matrices de mobilité polaires des structures sources et réceptrices, toutes ces quantités étant restreintes aux degrés de liberté d'interface.

Cette équation montre à nouveau que la puissance transmise vers chaque pôle de la structure réceptrice est directement liée au pôle associé de la structure source mais est indépendante de ces autres pôles. Dans le cas où ces deux structures sont symétriques, il est possible de caractériser la source par un ensemble de vitesses polaires libres, tandis que le récepteur peut être décrit sous la forme d'impédances polaires modifiées, prenant en compte les effets de couplage entre les deux structures. Si les hypothèses de symétrie ne sont pas vérifiées, les matrices de mobilité polaires ne sont plus diagonales et l'équation précédente fait apparaître des termes de couplage entre les différents pôles. La méthode du multipôle n'est alors plus avantageuse, à moins de pouvoir négliger ces termes extra-diagonaux, en considérant par exemple les densités modales des différentes structures [79, 80].

### Méthode en mobilité

Les méthodes de synthèse fréquentielle sont des outils pratiques pour l'analyse de structures couplées complexes, dans le cas où les fonctions de réponse en fréquence des différents sous-systèmes peuvent être obtenues facilement, de manière numérique ou expérimentale. Elles se basent sur les réponses découplées des sous-structures pour construire la réponse du système total en s'appuyant sur une formulation par matrices de raideur/flexibilité dynamique ou matrices d'impédance/mobilité [59]. Elles permettent d'exprimer la puissance transmise en fonction du vecteur vitesse sur les degrés de liberté de jonction  $v_I$  et du vecteur des efforts d'interface exercé par la structure source sur la structure réceptrice  $f_I$ , vérifiant :

$$v_I = v_{Sf} - Y_S f_I \quad (2.78)$$

$$v_I = Y_R f_I \quad (2.79)$$

où  $Y_S$  et  $Y_R$  représentent respectivement les matrices de mobilité des structures sources et réceptrices découplées et  $v_{Sf}$  représente la vitesse libre avant couplage de la source, ces grandeurs étant restreintes aux degrés de liberté d'interface. Il est alors possible d'exprimer la puissance transmise sous la forme [81] :

$$P = \frac{1}{2} v_{Sf}^H \Re \{ Z_{coup} \} v_{Sf} \quad (2.80)$$

où

$$Z_{coup} = \left[ (Y_S + Y_R)^{-1} \right]^H Y_R (Y_S + Y_R)^{-1} \quad (2.81)$$

Une description complète de la puissance transmise nécessite donc d'évaluer plusieurs termes différents ainsi que d'effectuer des inversions matricielles. Ces opérations peuvent se révéler prohibitives lorsque le nombre de degrés de liberté de couplage augmente. Il a également été souligné que des erreurs peuvent apparaître dans les calculs lors de l'inversion des matrices de mobilité, susceptibles d'être mal conditionnées. Il est généralement plus utile d'approximer les principales propriétés de la puissance transmise, plutôt que de prédire précisément sa réponse détaillée [38].

Le but est donc d'approximer simplement et de manière précise la puissance transmise entre une structure source rigide et une structure réceptrice flexible couplées en des points discrets ou de manière continue. Il a cependant été observé précédemment que les simplifications des matrices de mobilité peuvent rapidement devenir coûteuses. Su *et al.* ont donc proposé, dans une étude préliminaire [149], une généralisation de la méthode du multipôle où un ensemble de sources en forces ou en vitesses est transformé en un nouvel ensemble de puissances, associées à des forces ou des vitesses modales. Celles-ci sont pondérées par un ensemble de fonctions orthogonales issues de la décomposition en valeurs propres d'une matrice de mobilité.



Cette méthode se base sur l'expression de la puissance transmise par un ensemble de forces à une structure réceptrice, issue de la synthèse fréquentielle, soit :

$$P = \frac{1}{2} f^H \Re \{Y\} f \quad (2.82)$$

où  $F$  est le vecteur des amplitudes des efforts d'excitation (forces ou moments) et  $M$  la matrice de mobilité de la structure réceptrice. Sa partie réelle étant une matrice réelle, symétrique définie non-négative, l'équation précédente est une forme quadratique définie non négative. Ces propriétés matricielles permettent la décomposition suivante :

$$\Re \{Y\} = \Psi \Lambda \Psi^T \quad (2.83)$$

où  $\Lambda$  est une matrice réelle diagonale, comprenant les valeurs propres  $\lambda_n$ , et  $\Psi$  est une matrice orthogonale dont les colonnes représentent les vecteurs propres associés. Il est alors possible de pondérer l'ensemble des efforts  $f$  par cette base afin d'obtenir un nouvel ensemble d'efforts modaux de puissance  $q = \Psi^T f$ . On note ici que ces efforts dépendent de l'excitation. Cette relation permet d'exprimer la puissance transmise sous la forme :

$$P = \frac{1}{2} q^H \Lambda q = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N |q_n|^2 \lambda_n \quad (2.84)$$

Cette équation indique que la puissance vibratoire transmise à une structure par un ensemble de  $N$  forces peut être considérée comme la puissance injectée par  $N$  modes de puissance indépendants. Bien que conceptuellement intéressante, cette équation ne fournit d'alternative plus pratique que l'équation issue de la synthèse modale : il est toujours nécessaire de connaître exactement  $f$  et  $\Re \{Y\}$  afin de déterminer  $\Lambda$  et  $q$ . Une série d'approximations a donc été proposée suivant le spectre fréquentiel considéré [81] :

- basses fréquences : si les fréquences d'excitation sont en-dessous de la fréquence critique de la structure réceptrice,  $Y_{nn} \approx Y_{mn} \approx Y_{in}$ . Il est alors possible de montrer que la puissance est dominée par un unique chemin, d'où :

$$P \approx \frac{1}{2} |q_1|^2 \lambda_1 \approx \frac{1}{2N} \left| \sum_{n=1}^N f_n \right|^2 \sum_{n=1}^N \Re \{Y_{nn}\} \quad (2.85)$$

- hautes fréquences : les mobilités ponctuelles tendent alors à être plus importantes que les mobilités de transfert, d'où un découplage des différents points. Il en résulte que  $\lambda_n \approx Y_{nn}$  et  $q_n \approx f_n$ , qui indique que chaque mode contribue à la puissance transmise, d'où :

$$P = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N |q_n|^2 \lambda_n \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N |f_n|^2 \Re \{Y_{nn}\} \quad (2.86)$$

- moyennes fréquences : les mobilités ponctuelles et de transfert étant équivalentes, aucune simplification du type précédent ne peut être envisagée. Cependant, il a été constaté qu'un

petit groupe de valeurs propres se détache des autres par leur amplitude importante. Une bonne estimation de la puissance transmise peut alors être obtenue en effectuant une troncature de l'expression exacte sur ces  $L$  premiers modes :

$$P \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{L < N} |q_n|^2 \lambda_n \quad (2.87)$$

Il est cependant peu évident de calculer correctement, de manière approchée, ces quelques premières valeurs propres. Il semble donc plus intéressant d'employer les formules de valeur moyenne de la puissance ainsi que de ses bornes supérieures et inférieures, déduites à partir des modes de puissance.

Il est en effet possible de déduire les bornes supérieures et inférieures de la puissance transmise, à partir des propriétés de ces modes de puissance [82]. On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N |f_n|^2 \right) \lambda_N \leq P \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N |f_n|^2 \right) \lambda_1 \quad (2.88)$$

Cette expression peut enfin être réécrite en considérant la moyenne des valeurs propres  $\bar{\lambda}$  ainsi que leur écart type  $\sigma$  :

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N |f_n|^2 \right) (\bar{\lambda} - \sigma) \leq P \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N |f_n|^2 \right) (\bar{\lambda} + \sigma) \quad (2.89)$$

où :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_{nn} \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\|Y\|_2}{N} - \frac{1}{N^2} \left( \sum_{n=1}^N Y_{nn} \right)^2} \quad (2.90)$$

Des application numériques ont montré que pour des structures résonantes, un petit nombre de modes de puissance domine, alors que pour une structure non-résonante, plus de modes ont une importance significative. Il a également été observé qu'à certaines fréquences, les premiers modes de puissance peuvent transmettre moins de puissance à la structure réceptrice que les modes d'ordre élevé.

Une approche parallèle et complémentaire à celle de Su *et al.* a été proposée par Alfredsson [6, 5]. Elle se place en revanche sous l'angle de la dynamique des structures en basses fréquences plutôt que sous celui de la vibroacoustique en moyennes fréquences, comme précédemment. Elle considère la propagation des flux d'énergie active et réactive à travers un milieu solide. L'intensité active décrit la manière dont l'énergie instantanée se propage à travers la structure afin d'alimenter des « réserves d'énergie » où l'énergie mécanique est dissipée, rayonnée ou retirée de la structure par tout autre moyen. L'intensité réactive décrit une autre forme d'énergie, liée à la différence entre les moyennes des densités d'énergie élastiques et cinétiques. Les formes

quadratiques associées aux différents flux d'énergie ont été détaillées et des quantités homogènes aux modes de flux de puissance ont été déterminées. Il a ainsi été mis en évidence que les puissances active et réactive deviennent extrémales pour des configurations d'efforts différentes, qui varient de plus en fonction de la fréquence. Les propriétés de ces modes n'ont cependant pas été plus investiguées.

On souligne enfin qu'il est possible de retrouver une approche similaire, plus ancienne, dans le domaine de l'acoustique, concernant l'étude de la puissance rayonnée par une structure. On cite entre autre Elliott et Johnson [44] qui ont synthétisé un ensemble de travaux pour proposer des modes de rayonnement. En étudiant la puissance acoustique émise par une plaque et en lui appliquant une méthode de type superposition modale, il a été rappelé que celle-ci peut s'écrire :

$$\Pi = \dot{w}^H M \dot{w} \quad (2.91)$$

où  $\dot{w}$  représente le vecteur vitesse généralisé associés à  $N$  modes de vibration de la plaque et  $M$  est une matrice de rayonnement modal admettant des valeurs propres  $\Omega_n$  et des vecteurs propres  $P_n$  ( $n = 1 \dots N$ ). Il est alors possible d'exprimer la puissance rayonnée sous la forme :

$$\Pi = \sum_{n=1}^N \Omega_n |b_n|^2 \quad (2.92)$$

où  $b_n = P_n \dot{w}$  correspond à la  $n^{ieme}$  composante du vecteur issu de la transformation des modes de structure par les vecteurs propres de la matrice de rayonnement. On note que celle-ci dépend également de la fréquence d'excitation, des modes propres de la plaque et donc de l'ensemble des paramètres caractéristiques du système.

### Méthode en amortissement

Afin de pallier la dépendance des modes de flux de puissance vis-à-vis de l'ensemble des paramètres du système et de la fréquence, Xiong *et al.* ont proposé une méthode de modes de flux de puissance basée uniquement sur les paramètres d'amortissement [165].

Les auteurs commencent par rappeler l'expression de la puissance moyenne injectée à la structure, obtenue par la puissance complexe :

$$P = \frac{1}{2} \Re \{ f^H v \} = \frac{1}{2} \Re \{ v^H f \} = \frac{1}{4} \Re \{ v^H f + f^H v \} \quad (2.93)$$

où  $f$  et  $v$  représentent respectivement les vecteurs complexes des amplitudes des efforts appliqués et des vitesses résultantes. En exprimant l'équation d'équilibre du système par rapport à la vitesse sous la forme :

$$v^H \left[ -j\omega M^T + C^T - \frac{K^T}{j\omega} \right] = f^H \quad (2.94)$$

Il est alors possible, après quelques manipulations matricielles, d'obtenir la relation suivante :

$$v^H f + f^H v = v^H (C + C^T) v \quad (2.95)$$

On aboutit finalement à une nouvelle expression de la puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{2} \Re \{v^H \bar{C} v\} \quad (2.96)$$

où  $\bar{C} = 1/2 (C + C^T)$  est définie comme la matrice d'amortissement caractéristique. Les auteurs soulignent que cette expression confirme l'égalité entre puissance moyenne et puissance dissipée, conformément à la théorie générale des flux de puissance en milieux continus développée par Xing et Price [164].

Cette matrice étant réelle et symétrique, elle admet également une décomposition en valeurs propres, telle que :

$$\bar{C} = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (2.97)$$

où  $\Lambda$  et  $\Phi$  représentent les matrices regroupant respectivement les valeurs et les vecteurs propres constituant les modes de flux de puissance associés à  $\bar{C}$ . À nouveau, l'espace défini par les vecteurs propres de flux de puissance permet de représenter la puissance moyenne sous la forme d'une somme de composantes indépendantes. De même, il a été souligné que quelle que soit la complexité du système, il est possible de borner la puissance moyenne dissipée totale à l'aide des facteurs d'amortissement caractéristiques  $\lambda_i$ , respectivement du plus faible et du plus élevé. Ces résultats ne dépendent alors que des paramètres d'amortissement et non plus de l'excitation et des distributions de masse et de raideur du système. Le tableau 2.1, issu de [165], récapitule les correspondances entre les approches par modes de flux de puissance en mobilité et en amortissement.

En s'appuyant sur ces équations, des calculs ont été ensuite proposés par les auteurs dans le but de contrôler les niveaux des flux d'énergie dissipée, ainsi que les distributions spatiales associées, satisfaisant les exigences liées au contrôle vibratoire. Des méthodes d'isolation passive et active ont été exposées afin d'ajuster les valeurs des facteurs d'amortissement caractéristique et des facteurs de contrôle des modes  $q$ . Celui-ci permet de quantifier la cohérence entre un mode propre de vibration ou une déformée opérationnelle et un mode de flux de puissance. Il a ainsi été démontré qu'il est nécessaire de maximiser la trace de la matrice d'amortissement caractéristique afin d'obtenir une dissipation maximale. De plus, il est possible d'éliminer certains comportements vibratoires néfastes en modifiant la répartition de l'amortissement sur la structure. Ces démarches ont été illustrées à l'aide de structures académiques simples, mais n'ont pas fait l'objet d'applications sur des structures complexes.

Caractéristique	Méthode	
	Basée sur l'amortissement	Basée sur la mobilité
Matrice caractéristique	$\bar{C} = \frac{1}{2}(C + C^T)$	$\bar{Y} = \frac{1}{2}(Y + Y^H)$
Problème associé	$\bar{C} = \Phi \Lambda \Phi^T$	$\bar{Y} = \Psi \Lambda \Psi^T$
Valeurs propres	$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$	$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$
Unité	$Ns/m$	$m/Ns$
Vecteurs propres	$\Phi^T \Phi = \Phi \Phi^T = I$	$\Psi^T \Psi = \Psi \Psi^T = I$
Variable de puissance	$q = \Phi^T v$	$q = \Psi^T f$
Puissance	$P = \frac{1}{2} \Re (q^H \Lambda q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j  q_j ^2$	$P = \frac{1}{2} \Re (q^H \Lambda q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j  q_j ^2$

TAB. 2.1: Tableau de comparaison des méthodes de modes de flux de puissance [165]

### Méthode des valeurs propres et des vecteurs propres de couplage

Bessac *et al.* ont développé une nouvelle méthode dédiée à la caractérisation des transferts vibratoires entre deux sous-structures reliées par des jonctions en raideur pure [16]. Elle s'appuie sur l'étude des modes propres d'une matrice de couplage adimensionnelle, qui permettent de déterminer la force de couplage et les chemins de transmissions privilégiés.

En utilisant une formulation en vitesses, l'équation d'équilibre associée à l'assemblage de deux sous-structures  $i$  et  $j$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} \\ Z_{ji} & Z_{jj} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{0i} \\ f_{0j} \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

où  $Z_{ii}$  représente la matrice d'impédance de la sous-structure  $i$  lorsque la sous-structure  $j$  est bloquée et  $Z_{ij}$  représente la matrice d'impédance de transfert, décrivant le chargement sur la sous-structure  $i$  dû au mouvement de la sous-structure  $j$ . Les vecteurs  $w_i$  et  $f_i$  correspondent aux amplitudes des vitesses et des efforts extérieurs associés à la sous-structure  $i$ , décomposés sur la base de ces modes de vibrations. Il en va de même pour les quantités associées à la sous-structure  $j$ . L'équation de couplage s'écrit alors :

$$[I - C] \begin{pmatrix} w_i \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{0i} \\ w_{0j} \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

où  $w_{0i}$  et  $w_{0i}$  sont les vitesses des sous-structures découplées bloquées et où  $C$  représente la matrice de couplage adimensionnelle définie par :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_{ij} \\ C_{ji} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{aligned} C_{ij} &= -Z_{ii}^{-1}Z_{ij} \\ C_{ji} &= -Z_{jj}^{-1}Z_{ji} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Celle-ci admet autant de valeurs propres dites de couplage et de vecteurs propres, que de resorts de liaison, représentant respectivement la force de couplage et les chemins modaux de transmission associés.

Il est ainsi possible de reconstruire le comportement du système après couplage, à l'aide de ces nouvelles quantités et des informations des systèmes découplés bloqués. Il a également été montré que, dans le cas de jonctions multiples, le chemin dominant associé à la plus grande valeur propre suffit à restituer l'ensemble du comportement dynamique, pour une erreur inférieure à 3dB aux plus hautes fréquences.

## 2.5 Discussion

À la lecture de cette synthèse bibliographique, on constate que la prévision des transferts vibratoires au sein de structures complexes est une problématique particulièrement active. Elle se rapporte à différents enjeux qui visent tant à prédire les niveaux vibratoires (ou acoustiques) de ces structures, qu'à caractériser leurs différents composants (sources, récepteurs, jonctions) ou encore à les isoler les uns des autres. Se situant ainsi à l'intersection de grands thèmes de recherche de la dynamique des structures, elle a entraîné le développement de plusieurs méthodes, plus ou moins spécialisées. Aucune méthode universelle ne semble cependant se détacher parmi celles-ci, leur application dépendant principalement de la bande de fréquence considérée, de la complexité des structures étudiées et de la nature de l'excitation. L'absence d'une démarche de référence pour traiter ces problèmes rend ainsi difficiles certaines phases de conception où le manque d'information impose de simplifier la modélisation des phénomènes physiques dimensionnants.

Si la classification exposée dans ce chapitre permet de déterminer la méthode appropriée à un problème particulier, ce choix peut être décomposé en quatre étapes :

- **Dualité des approches.** Il a été mis en évidence par Lyon qu'un problème vibratoire peut être analysé soit par des approches modales, soit par des approches ondulatoires : les résultats obtenus sont *a priori* équivalents [94]. Or, si ces dernières conduisent à des charges de calcul relativement faibles, il a été montré précédemment qu'elles ne permettent pas, dans la majorité des cas, de modéliser les comportements vibratoires de structures complexes. Il semble alors qu'une approche modale soit plus appropriée aux problèmes industriels. Les méthodes de flux de puissance basées sur une modélisation éléments finis sont donc particulièrement intéressantes. Elles autorisent également des approches par

sous-structuration, d'où un traitement plus efficace des structures complexes. On note qu'étant donné les progrès des moyens informatiques de calculs, ces procédures connaissent actuellement un regain d'intérêt.

- **Nature des variables.** Les différentes approches exposées s'appuient sur deux types de variables. Les variables primales, complexes, souvent vectorielles (déplacements, efforts, . . .) donnent une description spatiale fine des phénomènes vibratoires. Les variables quadratiques et énergétiques, réelles, parfois vectorielles (puissance, intensité active, . . .) sont en revanche souvent moyennées en espace et/ou en temps/fréquence. Ces dernières se révèlent plus adaptées à la caractérisation des transferts vibratoires. Elle permettent en effet de représenter de manière simple et condensée une grande quantité d'informations, réduisant ainsi la taille des modèles, tout en conservant une importante robustesse.
- **Type de puissance.** La problématique de ces travaux de thèse vise non seulement à étudier la puissance dans les structures complexes mais aussi à déterminer les amplitudes vibratoires associées. Or, ces deux grandeurs sont accessibles à partir de la puissance complexe, sur laquelle se basent les méthodes d'analyse de flux de puissance. Celles-ci utilisent aussi bien des approches par mobilité, que modales (à l'aide des modes normaux de vibration) ou par modes de puissance. Elles s'intéressent alors soit à la puissance transmise entre les différents composants, soit à la puissance dissipée qui nécessite plus d'informations sur le comportement interne des différentes sous-structures. Il est bien entendu possible de relier ces deux approches en se ramenant à un bilan de puissance à l'interface sous la forme [139]:

$$P^{diss}(\omega) = P_{in}^{tr}(\omega) - P_{out}^{tr}(\omega) \quad (2.101)$$

Réduire la puissance transmise par les interfaces revient donc à découpler le plus possible les mobilités des différents composants. Cependant, ces jonctions n'étant pas des isolants parfaits, une partie de la puissance est transmise au récepteur où elle est éventuellement dissipée, en fonction de son comportement dynamique. Il s'agit donc tout d'abord de déterminer les chemins énergétiques prépondérants afin de les éviter, puis de déterminer les paramètres d'amortissement permettant de dissiper le plus de puissance.

- **Grandeurs caractéristiques.** Quelle que soit la méthode considérée, la modélisation du couplage entre deux composants demeure une étape difficile et critique. Afin d'analyser au mieux les phénomènes en jeu à ces jonctions, de nombreuses grandeurs ont été introduites, dont les formulations théoriques ou les méthodes de détermination reflètent toute la complexité. On observe ainsi qu'en plus des propriétés de la structure source, le comportement dynamique de la structure réceptrice est indispensable.

Enfin, un dernier point non abordé concerne la prise en compte des incertitudes dans l'étude des flux de puissance. Les approches comme la SEA permettent, dans une certaine mesure, de prédire le comportement vibratoire d'un système lorsque son dimensionnement n'est pas encore entièrement connu. Leur nature statistique permet alors de prendre en compte, dans la limite de validité des hypothèses détaillées précédemment, le manque de connaissances et les variabilités associées aux paramètres de conception.

De manière plus générale, de rares articles se sont intéressés à la modélisation des incertitudes au niveau des flux de puissance [51] issus de méthodes déterministes. Il est alors nécessaire d'inclure ces incertitudes dans les paramètres du modèle et de les propager afin d'examiner leur effet sur les grandeurs caractéristiques.



# MÉTHODE DES MODES DE FLUX DE PUISSANCE

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>50</b>
<b>3.2</b>	<b>Systèmes discrétisés et bilans de puissance</b>	<b>50</b>
3.2.1	Modèle dissipatif linéaire	50
3.2.2	Puissances actives et réactives	53
3.2.3	Puissances transmises et dissipées	58
<b>3.3</b>	<b>Formulation théorique</b>	<b>60</b>
3.3.1	Détermination des modes de flux de puissance	60
3.3.2	Étude paramétrique des modes propres de flux de puissance	62
3.3.3	Phénomène d'hybridation des efforts propres	68
<b>3.4</b>	<b>Caractérisation des interfaces</b>	<b>70</b>
3.4.1	Détermination des modes de flux de puissance	70
3.4.2	Décomposition des efforts d'interface	73
3.4.3	Application	74
<b>3.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>80</b>

---

## 3.1 Introduction

Conformément à la problématique générale formulée en introduction, la méthode des modes de flux de puissance présentée dans ce chapitre se rapporte à l'étude du comportement vibratoire basses fréquences de structures couplées complexes. Contrairement à certaines méthodes exposées au chapitre précédent, elle ne se place pas dans une perspective de prédiction : elle vise principalement à fournir une caractérisation des transferts vibratoires aux interfaces entre différents composants ou sous-structures. Au regard du contexte de conception dans lequel s'inscrivent ces travaux, on choisit de se focaliser sur les grandeurs dimensionnantes que constituent les efforts d'interface et les puissances transmises associées.

L'approche adoptée s'inscrit dans la continuité des méthodes de modes de puissance détaillées au chapitre 2.4.3. Celles-ci permettent en effet de combiner les avantages de la FEM (traitement de géométries complexes, description spatiale, quantités vectorielles) et des méthodes d'analyse de flux de puissance (variables quadratiques, grandeurs caractéristiques).

On propose donc une méthode basée sur une formulation en déplacement dont le but est de fournir des modes de flux de puissance permettant de caractériser, à la fois qualitativement et quantitativement, les efforts d'interface afin d'évaluer leur aptitude à transmettre de la puissance entre deux composants.

## 3.2 Systèmes discrétisés et bilans de puissance

### 3.2.1 Modèle dissipatif linéaire

Les travaux présentés dans ce mémoire s'appuient sur l'étude de structures mécaniques discrétisées, dont le comportement est supposé linéaire. Elles sont modélisées à l'aide d'un système matriciel différentiel d'ordre  $N$  égal au nombre total de degrés de liberté, en fonction du temps, sous la forme :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (3.1)$$

où  $M \in \mathbb{R}^{N,N}$  représente la matrice de masse, réelle, symétrique et définie positive ;  $C \in \mathbb{R}^{N,N}$  la matrice d'amortissement visqueux, réelle, symétrique ;  $K \in \mathbb{R}^{N,N}$  la matrice de raideur, éventuellement complexe, symétrique, semi-définie positive (si la structure admet des modes de corps rigide) ;  $f(t) \in \mathbb{R}^{N,1}$  et  $x(t) \in \mathbb{R}^{N,1}$  sont les vecteurs contenant respectivement les efforts appliqués et les déplacements, sur l'ensemble des degrés de liberté (ddl) du système.

Afin d'étudier la réponse forcée du système en régime harmonique stationnaire, il est nécessaire de se placer dans le domaine fréquentiel. Cela s'effectue de manière classique par passage en notation complexe :

$$f(t) = f_c \cos(\omega t) + f_s \sin(\omega t) = \Re(f e^{j\omega t}), \quad \text{avec: } f = f_c - j f_s \quad (3.2)$$

$$x(t) = x_c \cos(\omega t) + x_s \sin(\omega t) = \Re(x e^{j\omega t}), \quad \text{avec: } x = x_c - j x_s \quad (3.3)$$

où  $f \in \mathbb{C}^{N,1}$  et  $x \in \mathbb{C}^{N,1}$  sont les vecteurs des amplitudes complexes des excitations extérieures et des déplacements, pour une pulsation d'excitation  $\omega$  ( $j^2 = -1$ ). Afin d'alléger les notations, cette dépendance fréquentielle n'est plus indiquée par la suite pour les quantités vectorielles, sauf lorsque cela semble nécessaire à une meilleure compréhension.

L'équation d'équilibre 3.1 du système s'écrit alors :

$$(-\omega^2 M + j\omega C + K)x = Z(\omega)x = f \quad (3.4)$$

où  $Z(\omega) \in \mathbb{C}^{N,N}$  correspond à la matrice de raideur dynamique du système. On obtient finalement la réponse fréquentielle en inversant cette relation pour chaque pulsation  $\omega$  :

$$x = \Gamma(\omega)f \quad (3.5)$$

où  $\Gamma(\omega) = [Z(\omega)]^{-1} \in \mathbb{C}^{N,N}$  est la matrice de flexibilité ou de souplesse dynamique du système<sup>1</sup>.

Les matrices de masse et de raideur peuvent généralement être obtenues de manière fine et prédictive, notamment par la méthode des éléments finis. L'amortissement lié aux vibrations de structures demeure cependant un phénomène complexe dans lequel interviennent de nombreux facteurs tels que la fréquence, l'amplitude, le type de déformation considéré ou encore la température. De plus, l'amortissement lié à des éléments non ou mal modélisés, tels que les instruments de mesure et leur câblage ou les jonctions entre composants supposées parfaites, est souvent prédominant. L'élaboration de modèles dissipatifs demande donc de faire des hypothèses simplificatrices au niveau des lois de comportement ou des modèles discrets. La validité des modèles obtenus repose alors sur leur similitude avec le comportement expérimental et leur simplicité d'utilisation.

Comme il a été mentionné au chapitre 2.2.2, les modèles rhéologiques les plus couramment employés en dynamique des structures sont [7] :

- l'amortissement visqueux : il correspond à une force opposée au mouvement, proportionnelle à la vitesse et en phase avec celle-ci,  $f_v = -j\omega Cx$ . Il est dominé en basses fréquences par la raideur du système et à hautes fréquences par l'amortissement, qui tend vers l'infini.

---

1. Cette inversion n'est mathématiquement possible que si  $Z(\omega)$  n'est pas singulière, c'est-à-dire si la structure n'admet pas de modes de corps rigide (*cf.* annexe B.2).

- l’amortissement structural ou hystérétique : il correspond à une force opposée au mouvement, proportionnelle au déplacement et en phase avec la vitesse,  $f_h = -j\omega Hx$ . Il est en général associé à l’introduction d’un module de Young complexe au niveau de la loi de comportement, d’où une matrice de raideur également complexe de la forme  $K^* = K + jH = K(1 + j\eta)$ , où  $\eta$  représente le facteur de perte. Il donne un amortissement indépendant de la fréquence.
- l’amortissement viscoélastique : il permet de prendre en compte une dépendance significative vis-à-vis de la fréquence, ce qui peut être intéressant pour modéliser le comportement de certains polymères (on en trouvera une description détaillée dans [8]).

Il demeure cependant difficile de distinguer ces différentes formes d’amortissement qui s’avèrent, dans certains cas simples, presque équivalentes : il est alors possible de se ramener à un taux d’amortissement modal équivalent  $\xi$ . Cette hypothèse permet de découpler les équations d’équilibre en diagonalisant le système matriciel 3.4 dans l’espace décrit par la base  $\Phi$  des modes propres de vibration du système conservatif associé. On obtient en particulier :

$$\Phi^T C \Phi = \beta = \text{diag}(\beta_i) \quad (3.6)$$

où l’amortissement modal est défini par  $\beta_i = 2\xi_i\omega_i\mu_i$ , avec  $\omega_i$  et  $\mu_i$  représentant respectivement la  $i^{\text{ème}}$  pulsation propre du système et la masse modale associée. On considère alors que l’hypothèse dite de Basile est vérifiée. Celle-ci peut également être vérifiée *a priori* en considérant une matrice d’amortissement visqueux particulière, qui peut être décomposée sous la forme d’une série de Caughey :

$$C = \sum_{k=1}^n a_k M (M^{-1}K)^{k-1} \quad (3.7)$$

vérifiant alors la condition suivante :

$$CM^{-1}K = KM^{-1}C \quad (3.8)$$

Dans le cas particulier où  $n = 2$ , on retrouve le modèle d’amortissement proportionnel classique proposé par Rayleigh [136] :

$$C = aK + bM \quad (3.9)$$

Bien que pratique, ce dernier conduit à des amortissements élevés en très basses fréquences ainsi qu’en hautes fréquences. Il n’est enfin pas toujours possible de déterminer un ensemble de coefficients permettant de retrouver des taux d’amortissement similaires à ceux mesurés expérimentalement. Ce modèle demeure néanmoins relativement répandu et sera principalement utilisé dans la suite de ces travaux.

### 3.2.2 Puissances actives et réactives

On propose maintenant de rappeler et de clarifier les relations conduisant aux bilans d'énergie et de puissance dans les systèmes mécaniques discrets. Les développements qui suivent s'appuient sur les notations exposées par Bobrovnikskii [19]. Afin d'illustrer ces différents calculs, on utilise un système discret à deux degrés de liberté, de type masse-ressort-amortisseur, représenté figure 3.1 et dont les paramètres initiaux sont définis tableau 3.1.

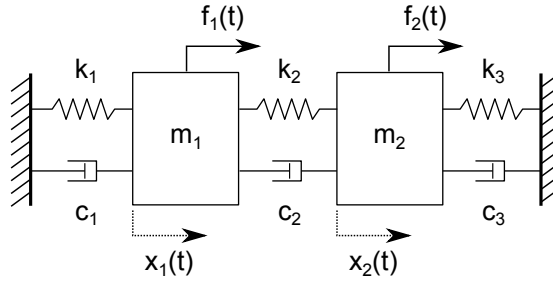


FIG. 3.1: Schéma d'un système discret masse-ressort-amortisseur à 2 ddl

<b>Masse</b>	(kg)	$m_1 = 6, m_2 = 4$
<b>Raideur</b>	(N/m)	$k_1 = 2000, k_2 = 8000, k_3 = 6000$
<b>Amortissement</b>	(Ns/m)	$c_1 = 6, c_2 = 8, c_3 = 2$

TAB. 3.1: Paramètres initiaux du système discret à 2 ddl

De manière identique aux équations 3.2 et 3.3, on exprime le vecteur réel des vitesses instantanées à l'aide de la notation complexe, sous la forme :

$$v(t) = v_c \cos(\omega t) + v_s \sin(\omega t) = \Re(v e^{j\omega t}), \quad \text{avec : } v = v_c - jv_s \quad (3.10)$$

La figure 3.2 représente l'amplitude et la phase des réponses en fréquence en vitesse  $v$  du système initial lorsque celui-ci est soumis à un effort extérieur du type  $f = [f_1 \ f_2]^T = [0 \ 1]^T$ . On constate typiquement qu'il admet bien deux fréquences propres de résonance à 4,24 Hz et 10,62 Hz.

La figure 3.3 illustre le déphasage temporel entre la force d'excitation et les déplacements puis les vitesses, pour une fréquence d'excitation de 3 Hz<sup>2</sup>. Elle permet de bien visualiser la période des oscillations ainsi que la quadrature entre les déplacements et les vitesses. On note également que le déphasage nul des déplacements (ou la quadrature avance des vitesses) par rapport aux

2. Les courbes temporelles présentées dans ce chapitre se rapportent à une excitation à 3 Hz. À titre de comparaison, on trouvera en annexe A.1 les mêmes courbes pour des excitations à 4,24 Hz (première fréquence propre) et 7 Hz.

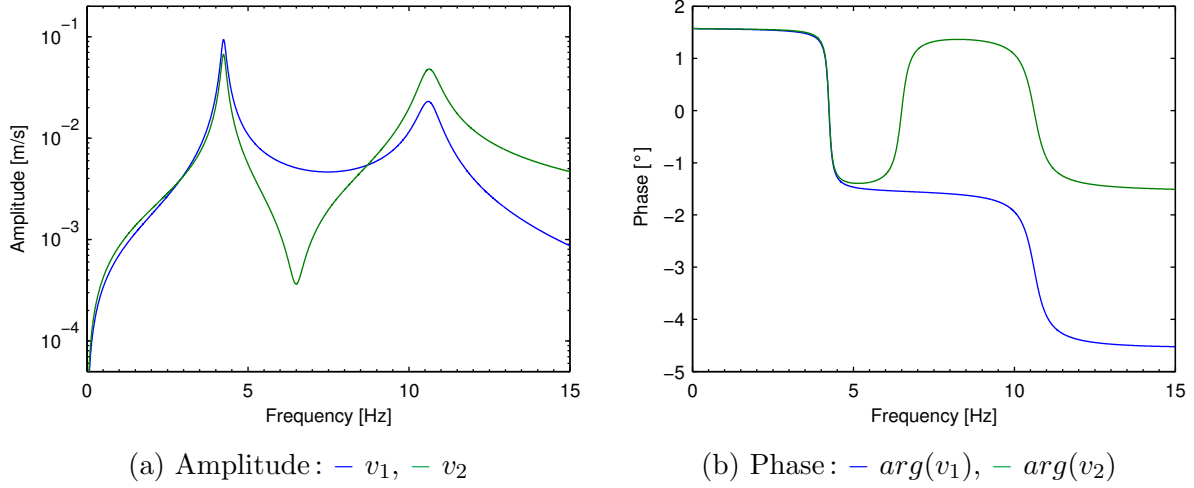


FIG. 3.2: Réponse harmonique en vitesse du système discret à 2 ddl initial

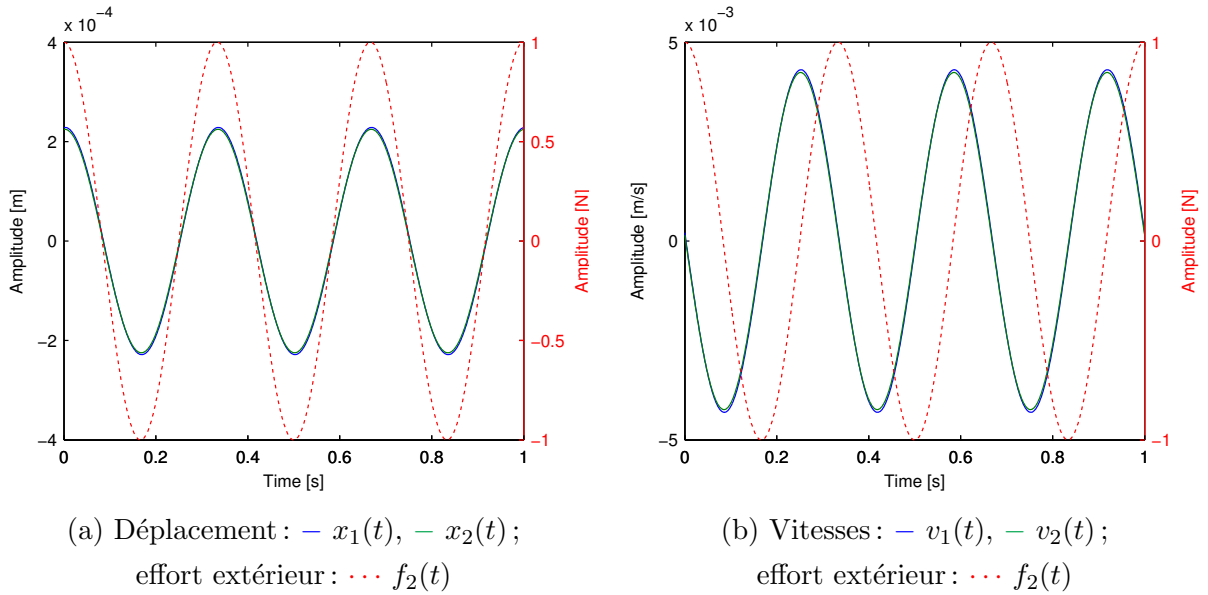


FIG. 3.3: Évolution temporelle des grandeurs d'entrée et de sortie du système à 2 ddl

efforts ainsi que leur amplitude quasi-identique sur chaque degré de liberté traduisent bien le comportement du système au voisinage de son premier mode de vibration.

La puissance instantanée injectée dans le système est définie comme étant le produit scalaire entre les grandeurs instantanées associées aux vitesses et aux efforts extérieurs :

$$\begin{aligned}
 P(t) &= v^T(t)f(t) = (v_c^T \cos(\omega t) + v_s^T \sin(\omega t)) (f_c \cos(\omega t) + f_s \sin(\omega t)) \\
 &= \frac{1}{2} (v_c^T f_c + v_s^T f_s) + \frac{1}{2} (v_c^T f_c - v_s^T f_s) \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} (v_c^T f_s - v_s^T f_c) \sin(2\omega t) \quad (3.11) \\
 &= P_0 + P_c \cos(2\omega t) + P_s \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

Celle-ci est donc caractérisée par une partie directe  $P_0$  indépendante du temps et deux parties oscillantes, de pulsations doubles et d'amplitudes  $P_c$  pour la composante en phase et  $P_s$  pour la composante en quadrature. On détermine alors la puissance moyenne dissipée sur un cycle de période  $T = 2\pi/\omega$  :

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} P(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_{\tau}^{\tau+2\pi/\omega} P_0 + P_c \cos(2\omega t) + P_s \sin(2\omega t) dt = P_0 \quad (3.12)$$

Les deux parties oscillantes ayant une moyenne nulle sur un cycle, on constate que la puissance moyenne, pour une fréquence d'excitation donnée, est égale à la partie directe de la puissance instantanée.

Afin de s'affranchir de cette étape d'intégration temporelle, on choisit d'utiliser le produit scalaire entre les grandeurs complexes associées (la multiplication par  $1/2$  étant issue de la moyenne temporelle) :

$$P = \frac{1}{2} v^T f = \frac{1}{2} (v_c^T - j v_s^T) (f_c - j f_s) = P_c - j P_s \quad (3.13)$$

On observe que la puissance obtenue ne prend en compte que le comportement oscillant de la puissance instantanée : son module est égal à la moitié de l'amplitude crête-à-crête de la puissance instantanée. Il est donc courant d'introduire la notion de puissance complexe, sous la forme :

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{1}{2} v^H f = \frac{1}{2} (v_c^T + j v_s^T) (f_c - j f_s) \\ &= \frac{1}{2} (v_c^T f_c + v_s^T f_s) + \frac{j}{2} (v_s^T f_c - v_c^T f_s) \\ &= P^{act} + j P^{react} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où  $P^{act} = \Re\{P^*\} = P_0$  est définie comme étant la puissance active et  $P^{react} = \Im\{P^*\} = -(v_c^T f_s - v_s^T f_c)/2$  la puissance réactive. On constate que si la partie active permet de retrouver la puissance moyenne à partir des grandeurs complexes en vitesse et en effort, la partie réactive ne peut être déterminée à partir des différentes composantes de la puissance instantanée.

Ces premières remarques n'étant basées que sur l'emploi de la notation complexe, on propose de relier la puissance injectée aux mécanismes énergétiques propres au système en détaillant les différents termes du bilan global de puissance :

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt} + P^{diss}(t) \quad (3.15)$$

où l'on distingue :

$$T(t) = \frac{1}{2}v^T(t)Mv(t), \quad \text{énergie cinétique} \quad (3.16)$$

$$W(t) = \frac{1}{2}x^T(t)Kx(t), \quad \text{énergie potentielle (élastique)} \quad (3.17)$$

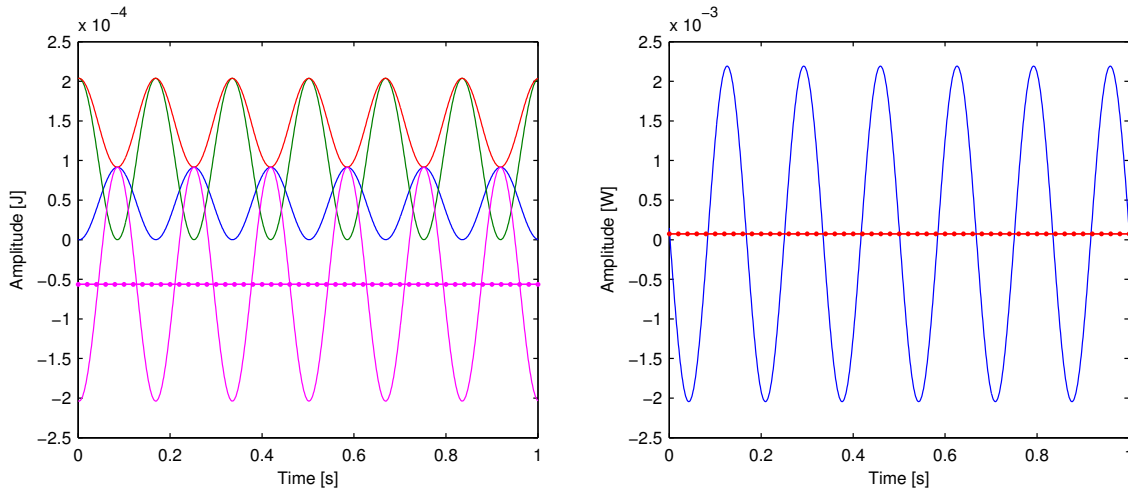
$$E(t) = T(t) + W(t), \quad \text{énergie totale} \quad (3.18)$$

$$L(t) = T(t) - W(t), \quad \text{énergie lagrangienne} \quad (3.19)$$

$$P^{diss}(t) = v^T(t)Cv(t), \quad \text{puissance dissipée} \quad (3.20)$$

La figure 3.4 (a) montre l'évolution temporelle de ces différentes énergies instantanées. Ces grandeurs quadratiques oscillent bien suivant la demie-période des grandeurs vectorielles. On observe les échanges entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique : l'énergie mécanique reste cependant toujours positive et l'énergie lagrangienne s'annule lorsque celles-ci sont égales. On vérifie enfin que la moyenne temporelle de l'énergie lagrangienne correspond bien à sa composante directe.

La figure 3.4 (b) illustre l'évolution temporelle de la puissance instantanée. On constate que sa moyenne temporelle est non nulle, égale à la composante continue  $P_0$ , et qu'elle vérifie  $P_{max} = P_0 + \sqrt{P_c^2 + P_s^2}$ .



(a) Énergies instantanées : —  $T(t)$ , —  $W(t)$ ,  
—  $E(t)$ , —  $L(t)$  ; énergie moyenne : — • —  $L_0$

(b) Puissance instantanée : —  $P(t)$  ;  
puissance moyenne : — • —  $P_0$

FIG. 3.4: Évolution temporelle des grandeurs quadratiques du système à 2 ddl



À nouveau, ces grandeurs quadratiques instantanées peuvent être décomposées en une partie directe et deux parties oscillantes en quadrature. On note cependant qu'elles ne possèdent pas de partie réactive, les matrices  $M$ ,  $K$  et  $C$  étant symétriques. Il est alors possible de donner un sens physique aux différentes composantes de la puissance injectée<sup>3</sup> :

$$P_c = P_c^{diss} + 2\omega E_s \quad (3.21)$$

$$P_s = P_s^{diss} - 2\omega E_c \quad (3.22)$$

$$P^{act} = P_0^{diss} \quad (3.23)$$

$$P^{react} = 2\omega L_0 \quad (3.24)$$

Les deux premières relations montrent que les parties oscillantes de la puissance instantanée traduisent les échanges entre la puissance dissipée et l'énergie totale contenue dans le système. La troisième relation montre bien que la puissance moyenne est égale à la puissance dissipée. Enfin, la dernière relation permet de proposer un sens physique pour la puissance réactive : caractérisant le déphasage entre les vitesses et les efforts, elle est proportionnelle à l'énergie lagrangienne, c'est-à-dire à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. De plus, ces deux énergies ayant la même amplitude aux fréquences propres du système, l'énergie lagrangienne permet d'en mesurer la proximité [5, 20].

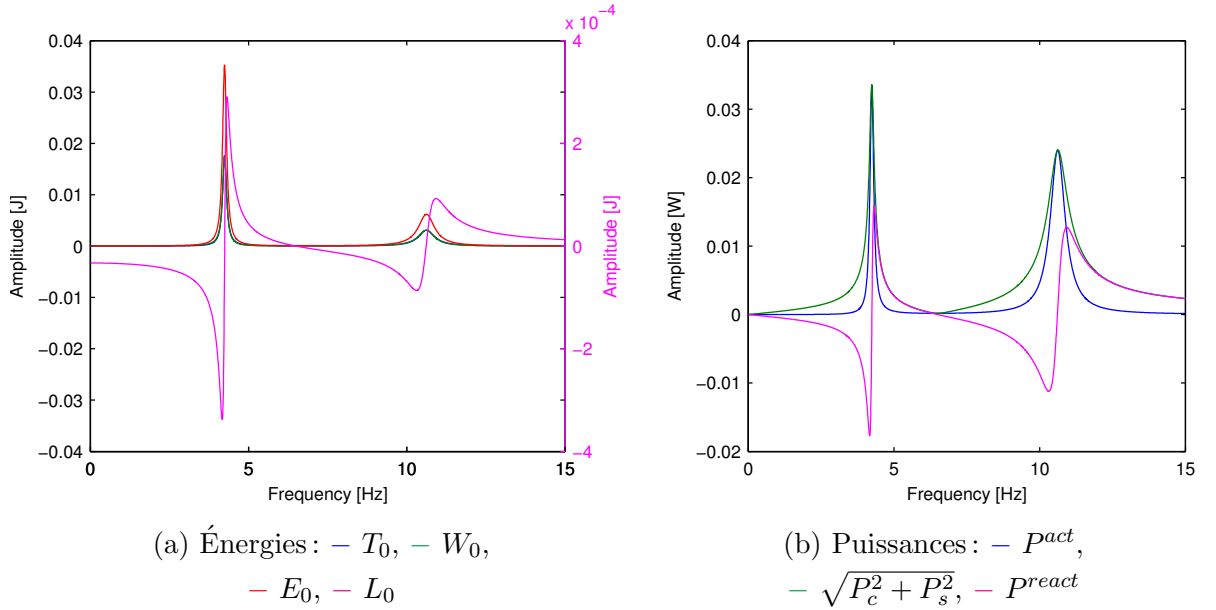


FIG. 3.5: Évolution fréquentielle des grandeurs quadratiques du système à 2 ddl

On visualise, figure 3.5, les évolutions fréquentielles des différentes énergies et puissances moyennes. On vérifie bien qu'aux fréquences propres du système, l'énergie mécanique est maximale et l'énergie lagrangienne est nulle. On souligne ici que cette propriété constitue une des

3. A titre d'exemple, le calcul permettant de déterminer l'expression de  $P_c$  est détaillé en annexe A.2.

hypothèses des méthodes hautes fréquences, à savoir l'égalité entre énergies cinétiques et potentielles lorsque le recouvrement modal est important [116]. De plus, la puissance active (ou injectée, moyenne ou dissipée) admet deux résonances aux fréquences propres. Enfin, on observe que la puissance réactive se comporte effectivement de la même manière que l'énergie lagrangienne, moyennant une dépendance fréquentielle supplémentaire.

### 3.2.3 Puissances transmises et dissipées

Les expressions détaillées ci-dessus ont permis de montrer l'équivalence entre la puissance moyenne injectée, la puissance moyenne dissipée et la puissance active : ces grandeurs ne diffèrent que par le point de vue adopté lors de l'écriture du bilan de puissance. Dans le cas de l'étude de structures couplées, il est également intéressant d'observer la répartition de cette puissance dans les différents composants. Afin de pouvoir facilement identifier ces derniers, on propose d'étudier le système discret à six degrés de liberté présenté figure 3.6<sup>4</sup>. On y distingue une sous-structure dite source et une sous-structure dite réceptrice, reliées par une interface composée de deux jonctions de type ressort-amortisseur. On suppose que seule la source est soumise à une excitation sur le 5<sup>ème</sup> degré de liberté.

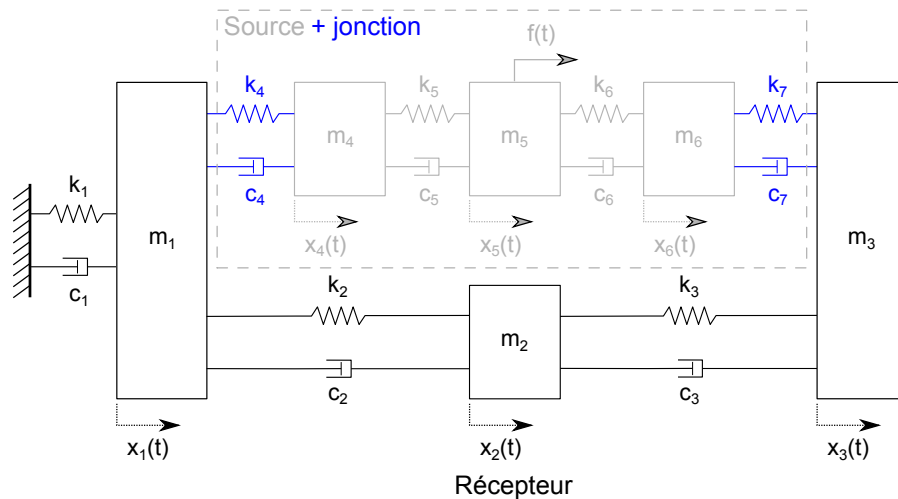


FIG. 3.6: Schéma d'un système couplé discret masse-ressort-amortisseur à 6 ddl

La figure 3.7 (a) représente l'évolution fréquentielle des différentes puissances du système. On observe tout d'abord que la puissance injectée majore les différentes puissance dissipées, respectant ainsi le bilan de puissance global. De plus, celles-ci admettent toutes des résonances d'amplitude aux alentours des fréquences propres de vibration du système couplé. Enfin on constate que suivant la fréquence, certains composants vont dissiper plus ou moins de puissance : si l'essentiel de la puissance est dissipée par la jonction, celle-ci est concentrée dans la structure source pour des fréquences supérieures à 20 Hz.

4. On trouvera en annexe A.3 les paramètres du système ainsi que des figures illustrant son comportement fréquentiel.

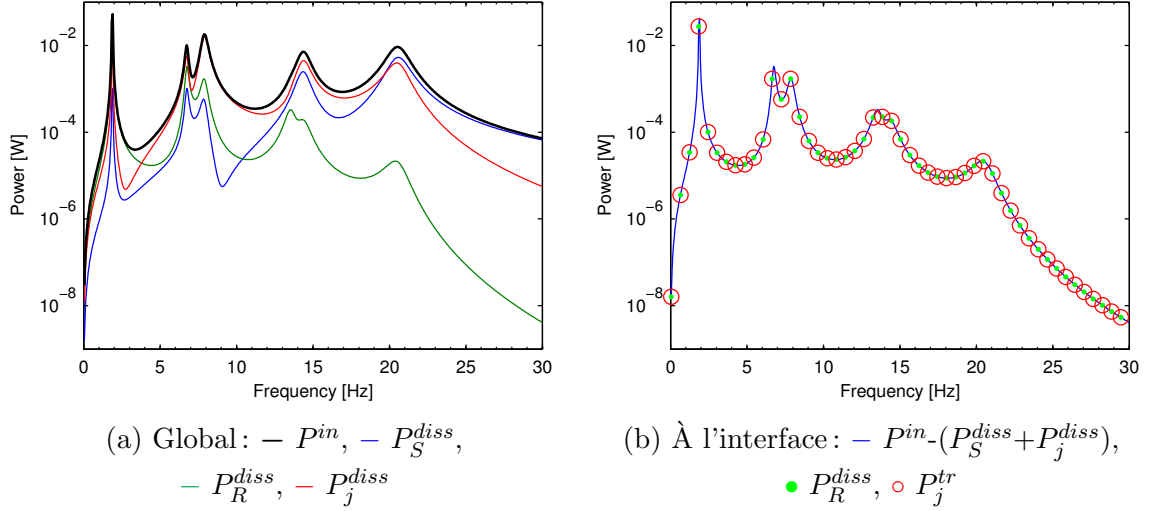


FIG. 3.7: Bilan de puissance du système à 6 ddl

On introduit alors la notion de puissance transmise à la sous-structure réceptrice, définie par :

$$P_{SR}^{tr}(\omega) = P^{in}(\omega) - P_S^{diss}(\omega) \quad (3.25)$$

où  $P^{in}$  est la puissance moyenne injectée par la force  $f$  et  $P_S^{diss}$  est la puissance dissipée à l'intérieur de la source. Bien entendu, ce bilan de puissance peut être modulé de différentes manières suivant le découpage adopté pour isoler les composants. On peut ainsi envisager différents cas suivant que l'on considère la jonction comme un composant à part entière ou faisant partie de la source ou du récepteur. On note également que lorsque le récepteur n'est pas relié à une autre sous-structure, l'ensemble de cette puissance transmise est dissipée :

$$P_{SR}^{tr}(\omega) = P_R^{diss}(\omega) \quad (3.26)$$

Il est toutefois possible de déterminer directement la puissance transmise sans avoir à effectuer de bilan global sur l'ensemble de la structure. On se rapporte pour cela à la puissance complexe associée à l'interface :

$$P_j^*(\omega) = \frac{1}{2} v_j^H f_j \quad (3.27)$$

où  $v_j$  représente le vecteur des amplitudes complexes des vitesses sur les degrés de liberté d'interface et  $f_j$  celui des efforts d'interface, calculé comme une force de rappel du type :

$$f_j = -(k + j\omega c)\Delta x \quad (3.28)$$

où  $\Delta x$  représente le déplacement relatif entre deux degrés de liberté situés de part et d'autre de la jonction. On retrouve alors la puissance transmise à l'interface en extrayant la partie réelle :

$$P_j^{tr}(\omega) = \frac{1}{2} \Re \{ v_j^H f_j \} = P_{SR}^{tr}(\omega) \quad (3.29)$$

On vérifie enfin, figure 3.7 (b), que ces trois définitions de la puissance transmise sont bien équivalentes.

### 3.3 Formulation théorique

#### 3.3.1 Détermination des modes de flux de puissance

Comme il a été exposé au paragraphe précédent, la puissance moyenne à une fréquence  $\omega$  donnée, qu'elle soit considérée comme dissipée ou transmise, peut être déterminée à partir de la partie réelle de la puissance complexe<sup>5</sup> :

$$P_0(\omega) = \Re \{P^*(\omega)\} = \frac{1}{2} \Re \{v^H f\} = \frac{1}{2} \Re \{f^H v\} \quad (3.30)$$

Cette partie réelle peut être explicitée de la manière suivante :

$$P_0(\omega) = \frac{1}{4} (f^H v + v^H f) \quad (3.31)$$

En rappelant qu'en régime harmonique  $v = j\omega x$ , avec  $x \in \mathbb{C}^{(N,1)}$  le vecteur déplacement, cette équation devient :

$$P_0(\omega) = \frac{j\omega}{4} (f^H x + x^H f) \quad (3.32)$$

Dans le but d'exprimer  $P_0$  en fonction des paramètres du système, on introduit la matrice de flexibilité dynamique (équation 3.5), dont on distingue la partie réelle et la partie imaginaire :

$$x = \Gamma(\omega) f = \left[ \Re \{\Gamma(\omega)\} + j \Im \{\Gamma(\omega)\} \right] f \quad (3.33)$$

En substituant cette équation dans l'équation (3.32), on obtient :

$$P_0(\omega) = \frac{j\omega}{4} f^H \left[ \Gamma(\omega) - \Gamma(\omega)^H \right] f \quad (3.34)$$

On aboutit donc à une expression de la puissance moyenne comme une forme quadratique associée à la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique :

$$P_0(\omega) = -\frac{\omega}{2} f^H \Im \{\Gamma(\omega)\} f \quad (3.35)$$

Il est important de noter qu'étant donné que la puissance moyenne est une grandeur positive ou éventuellement nulle et que la matrice  $\Im \{\Gamma(\omega)\}$  est réelle et symétrique, on en déduit que celle-ci est également semi-définie négative<sup>6</sup>.

La principale étape de la méthode consiste maintenant à optimiser cette puissance par rapport aux efforts extérieurs  $f$  [60]. En pondérant l'équation précédente par la norme de ces efforts au carré, on obtient un rapport entre deux formes quadratiques qui peut être interprété comme un pseudo-quotient de Rayleigh discrétisé relatif à  $\Im \{\Gamma(\omega)\}$  :

$$\mathcal{R}(\omega) = -\frac{\omega}{2} \frac{f^H \Im \{\Gamma(\omega)\} f}{f^H f} \quad (3.36)$$

5. Pour rester le plus général possible, on considère que les efforts extérieurs peuvent être des grandeurs complexes,  $f = f^{\Re} + j f^{\Im}$ .

6. On trouvera au chapitre 4.5.2 une démonstration de cette propriété dans un cas particulier.

Optimiser  $\mathcal{R}$ , à une fréquence  $\omega = \omega_0$  donnée, conduit alors à différentier l'équation précédente par rapport aux efforts. On traduit alors la condition d'extremum sur la partie réelle et la partie imaginaire du problème :

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\omega_0)}{\partial f^{\Re}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{R}(\omega_0)}{\partial f^{\Im}} = 0 \quad (3.37)$$

D'après les propriétés de stationnarité du quotient de Rayleigh, cela revient à résoudre, pour  $\omega = \omega_0$ , un même problème aux valeurs propres équivalent<sup>7</sup> :

$$\left[ \Im \{ \Gamma(\omega_0) \} - s_\nu I_N \right] g_\nu = 0, \quad \nu = 1, \dots, N \quad (3.38)$$

où  $I_N$  représente la matrice identité de dimension  $N$ . On obtient ainsi une matrice diagonale  $S = \text{diag}(s_\nu) \in \mathbb{R}^{(N,N)}$ , également semi-définie négative, constituée des valeurs propres triées par ordre croissant :

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_N \leq 0 \quad (3.39)$$

et une matrice  $G = [g_1 \dots g_N] \in \mathbb{R}^{(N,N)}$  orthogonale, constituée des efforts propres associés. Celles-ci satisfont les relations d'orthogonalités suivantes :

$$G^T G = I_N \quad (3.40)$$

$$G^T \Im \{ \Gamma(\omega_0) \} G = S \quad (3.41)$$

Ces modes de flux de puissance étant indépendants des efforts extérieurs appliqués, ils permettent de caractériser, à une fréquence  $\omega_0$  donnée, la puissance moyenne potentiellement disponible au sein de la structure :

- les valeurs propres donnent une information quantitative sur l'amplitude du flux de puissance associé à chaque mode ;
- les vecteurs propres ou efforts propres donnent une information qualitative : ils représentent les directions privilégiées par lesquelles transiteront les flux de puissance des valeurs propres associées.

L'étude de la puissance moyenne sur un intervalle fréquentiel nécessite donc de résoudre autant de problèmes aux valeurs propres équivalents que de fréquences considérées. Or, si ces résolutions sont mathématiquement indépendantes les unes des autres, les modes propres obtenus représentent des quantités physiques dont le comportement peut être supposé continu. Une procédure d'appariage des modes d'une fréquence à l'autre a donc été mise en place<sup>8</sup>.

---

7. Ce résultat découle en fait directement des propriétés des matrices symétriques. On trouvera une analyse détaillée des propriétés reliant matrices symétriques, formes quadratiques et quotient de Rayleigh dans la référence [87], p. 282-290.

8. On trouvera une description de cette procédure en annexe B.

Afin d'illustrer ces calculs on détermine les modes de flux de puissance du système discret à 2 degrés de liberté présenté précédemment (figure 3.1 et tableau 3.1). La figure 3.8 représente les valeurs propres de flux de puissance en fonction de la fréquence. On constate tout d'abord que celles-ci sont bien négatives et tendent vers zéro à une fréquence nulle. À l'image de la puissance moyenne représentée figure 3.5 (b), la première valeur propre  $s_1$  admet des résonances aux alentours des fréquences propres du système. On observe également que  $|s_1| \gg |s_2|$ , sauf dans une zone d'antirésonance où les deux valeurs propres tendent à avoir le même ordre de grandeur : la seconde valeur propre est alors maximale.

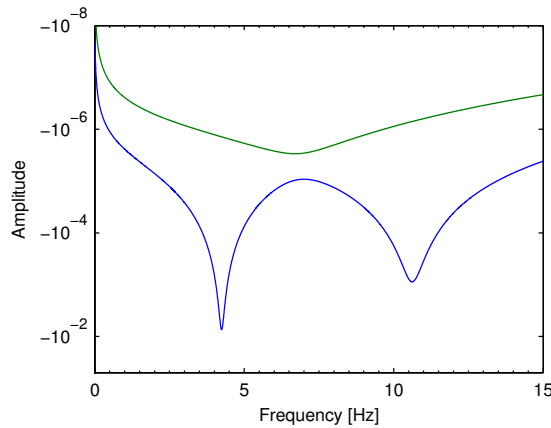


FIG. 3.8: Évolution fréquentielle des valeurs propres de flux de puissance du système à 2 ddl : —  $s_1$ , —  $s_2$

La figure 3.9 représente l'évolution de chacune des composantes des efforts propres. Celles-ci varient en fonction de la fréquence : ces vecteurs propres tournent et vont même jusqu'à échanger leur déformées initiales aux alentours de l'antirésonance. Cependant, aux fréquences de résonance, on constate que l'effort propre associé à la valeur propre dominante  $s_1$  est colinéaire aux modes propres de vibration. On vérifie ainsi le principe de l'appropriation modale selon lequel l'effort qui excite le plus une structure à une fréquence de résonance est colinéaire à la déformée propre de ce mode de vibration [135]. Les efforts propres constituant une base, on constate aussi que le second vecteur propre est orthogonal à cette direction : il représente donc les directions injectant le moins de puissance dans la structure.

### 3.3.2 Étude paramétrique des modes propres de flux de puissance

On propose ici une brève étude numérique permettant d'observer l'influence des différents paramètres du système sur le comportement fréquentiel de ces modes de flux de puissance. Celle-ci est complétée par la détermination d'une expression analytique des valeurs propres de flux de puissance dans le cas d'un système simplifié particulier.

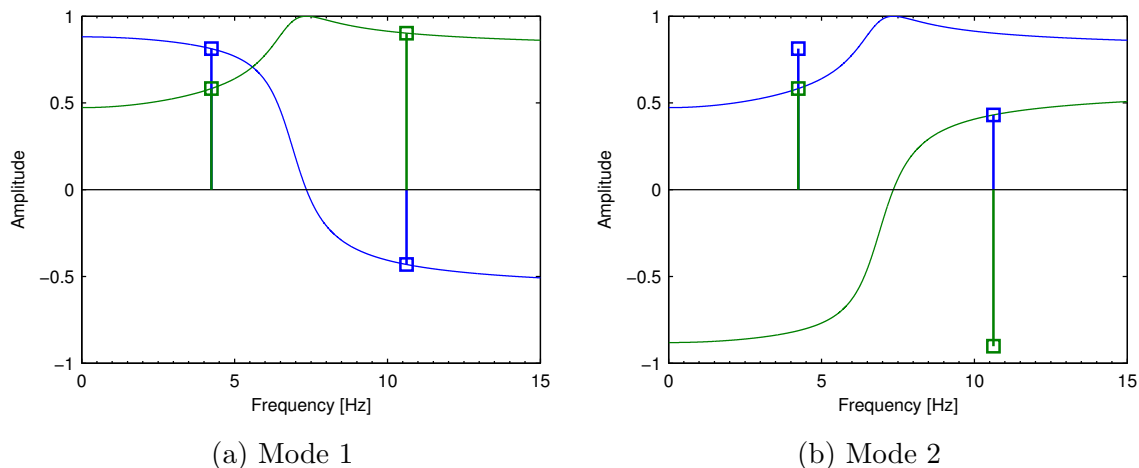
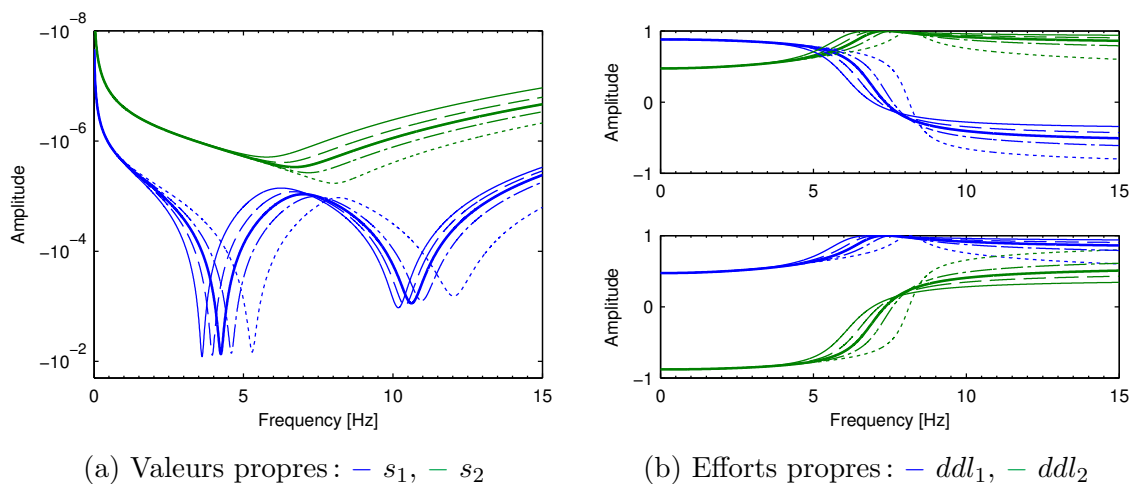


FIG. 3.9: Évolution fréquentielle des efforts propres du système à 2 ddl :

—  $ddl_1$ , —  $ddl_2$ ; □ modes propres de vibration

### Influence des paramètres de masse et de raideur

On s'intéresse tout d'abord à l'influence d'une variation de masse. On observe, figure 3.10 (a) qu'une augmentation de  $m_1$  diminue la fréquence des résonances de flux de puissance et inversement. L'écart entre les deux valeurs propres à l'antirésonance tend également à se resserrer lorsque  $m_1 \approx m_2$ . Au niveau des efforts propres, figure 3.10 (b), on constate que suivant la variation, les efforts propres n'échangent pas complètement leurs déformées. De plus la vitesse de leur rotation, liée à la pente aux points d'inflexion des différentes courbes, s'accélère lorsque  $m_1 \approx m_2$ .


 FIG. 3.10: Influence d'une variation de  $m_1$  sur les modes de flux de puissance :

— initial,  $\cdots$  -50%,  $\dashdot$  -20%,  $\dashdot$  +20%, — +50%

Concernant les paramètres de raideur, on observe figure 3.11 qu'une augmentation de  $k_3$  déplace les résonances de flux de puissance vers les hautes fréquences et inversement. De même, lorsque la valeur de  $k_3$  tend vers celle de  $k_1$ , la vitesse de rotation des efforts propres s'accélère.

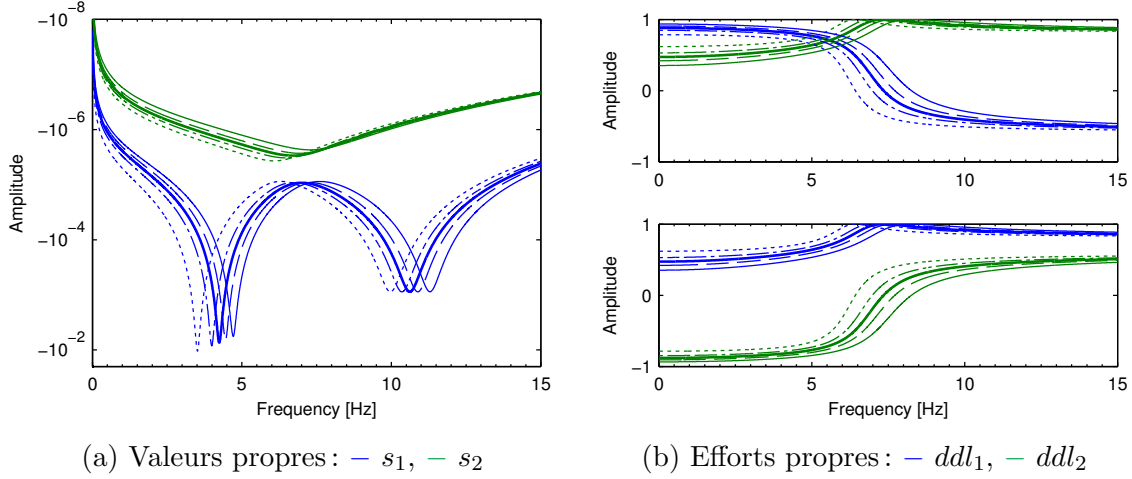


FIG. 3.11: Influence d'une variation de  $k_3$  sur les modes de flux de puissance :  
— initial,  $\cdots$  -50%,  $-\cdot-\cdot$  -20%,  $-\cdot-\cdot$  +20%,  $-\cdot-\cdot$  +50%

### Influence des paramètres d'amortissement

On étudie maintenant l'influence des paramètres d'amortissement. On considère, dans un premier cas, les variations de l'amortisseur localisé  $c_1$ , figure 3.12. Son action s'exerce principalement sur la première résonance de  $s_1$ , dont la largeur de bande s'élargit lorsque celui-ci augmente, et sur la position fréquentielle de son antirésonance. Au niveau des efforts propres on remarque que plus l'amortissement est important, plus la vitesse de rotation diminue. Ils finissent cependant par échanger complètement leurs déformées, quelle que soit la variation de  $c_1$ .

Dans un second cas, on utilise un modèle d'amortissement proportionnel (équation 3.9) dont les valeurs initiales des paramètres  $a$  et  $b$  sont déterminées de telle sorte que les taux d'amortissement modal initiaux soient conservés. On observe alors, figure 3.13 (a), qu'une variation de  $a$  agit bien sur l'ensemble des résonances : plus l'amortissement est important, plus la largeur de bande augmente et plus l'amplitude du pic diminue. De plus, si la fréquence de l'antirésonance est décalée, l'écart entre les deux valeurs propres reste constant, ce qui est confirmé figure 3.13 (b) par la pente constante des courbes associées aux composantes des efforts propres.

Enfin, on se place dans le cas d'un amortissement structural dépendant d'un unique paramètre  $\eta$ , dont la valeur initiale est également déterminée afin de conserver les taux d'amortissement modal initiaux. On note, figure 3.14 (a), que les valeurs propres de flux de puissance tendent vers une valeur constante non nulle à  $0\text{ Hz}$ . Ceci traduit le fait que ce modèle d'amortis-



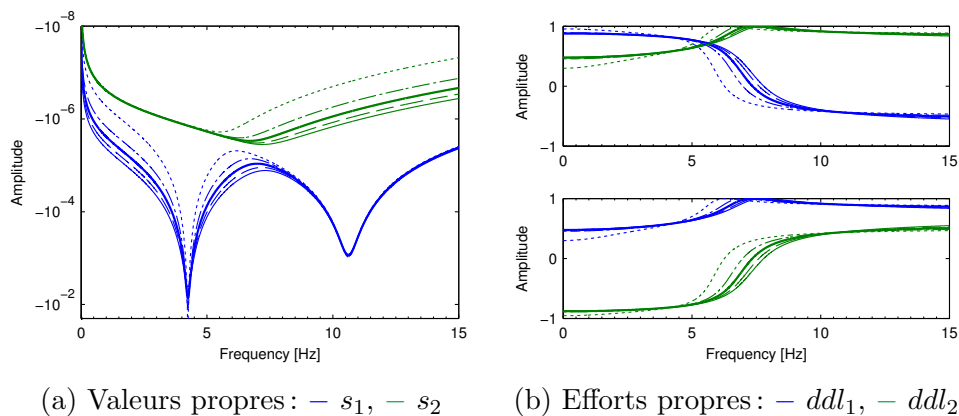


FIG. 3.12: Influence d'une variation de  $c_1$  sur les modes de flux de puissance :  
 — initial,  $\cdots$  -100%,  $-\cdot-$  -50%,  $---$  +50%,  $-$  +100%

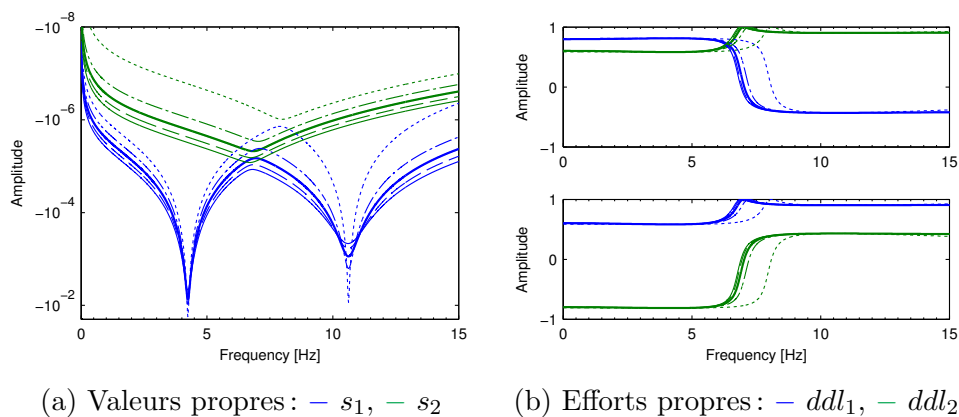


FIG. 3.13: Influence d'une variation de  $a$  sur les modes de flux de puissance :  
 — initial,  $\cdots$  -100%,  $-\cdot-$  -50%,  $---$  +50%,  $-$  +100%

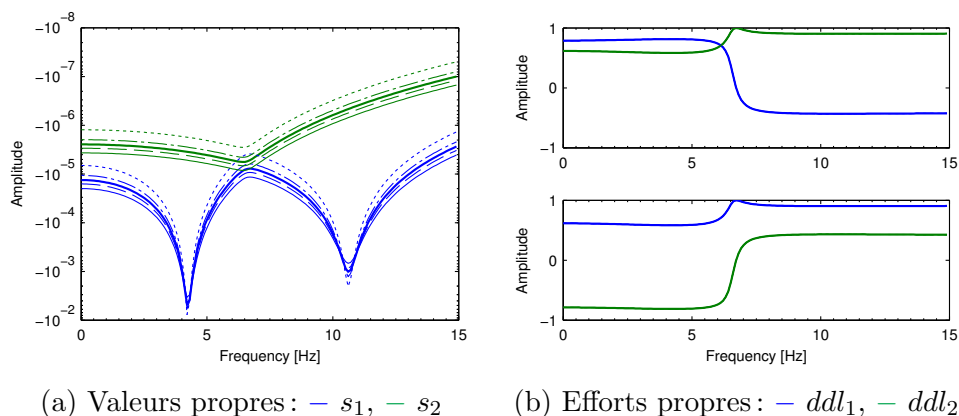


FIG. 3.14: Influence d'une variation de  $\eta$  sur les modes de flux de puissance :  
 — initial,  $\cdots$  -50%,  $-\cdot-$  -20%,  $---$  +20%,  $-$  +50%

sement est proportionnel au déplacement, initialement non nul, contrairement à la vitesse. Une variation de ce paramètre agit de manière identique à celle du paramètre  $a$  sur ces valeurs. Elle n'a cependant aucune influence sur les efforts propres associés, qui varient alors uniquement en fonction de la fréquence (figure 3.14 (b)).

### Approche analytique simplifiée

L'étude numérique précédente a permis de mettre en évidence un comportement des valeurs propres de flux de puissance identique à celui des réponses en fréquence du système. De plus, si la rotation des efforts propres rend leur évolution fréquentielle complexe, ils demeurent colinéaires aux déformées propres aux alentours des fréquences de résonances. On propose donc de détailler succinctement le calcul analytique des valeurs propres de flux de puissance afin d'établir leur lien avec les caractéristiques modales du système.

La taille et la complexité des expressions analytiques augmentant très rapidement avec le nombre de paramètres, on se place dans le cas particulier où :

$$\begin{cases} m_1 = m_2 = m \\ k_1 = k_3 = k_I \quad \text{et} \quad k_2 = k_{II} \\ c_1 = c_3 = c_I \quad \text{et} \quad c_2 = c_{II} \end{cases} \quad (3.42)$$

L'équation d'équilibre du système s'écrit alors :

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_I + c_{II} & -c_{II} \\ -c_{II} & c_I + c_{II} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_I + k_{II} & -k_{II} \\ -k_{II} & k_I + k_{II} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

On note que la matrice d'amortissement ainsi définie vérifie la condition de Caughey (équation 3.7). On calcule donc les modes propres de vibration du système conservatif associé :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k_I}{m}} \quad \text{et} \quad \phi_1 = [1 \quad 1]^T \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_I + 2k_{II}}{m}} \quad \text{et} \quad \phi_2 = [1 \quad -1]^T \end{cases} \quad (3.44)$$

Le système matriciel étant diagonalisable dans l'espace modal, une approche par superposition modale permet de déterminer à moindre coût la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique, sous la forme<sup>9</sup> :

$$\Gamma(\omega) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\omega) + \gamma_2(\omega) & \gamma_1(\omega) - \gamma_2(\omega) \\ \gamma_1(\omega) - \gamma_2(\omega) & \gamma_1(\omega) + \gamma_2(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

avec :

$$\gamma_1(\omega) = -\frac{\omega c_I}{2[(k_I - \omega^2 m)^2 + (\omega c_I)^2]} \quad (3.46)$$

9. On trouvera le détail de cette procédure au chapitre 4.5.2.

$$\gamma_2(\omega) = -\frac{\omega(c_I + 2c_{II})}{2 \left[ (k_I + 2k_{II} - \omega^2 m)^2 + (\omega(c_I + 2c_{II}))^2 \right]} \quad (3.47)$$

On obtient alors les valeurs propres de flux de puissance en résolvant l'équation 3.38 :

$$s_1(\omega) = 2\gamma_1(\omega) = -\frac{\omega c_I}{(k_I - \omega^2 m)^2 + (\omega c_I)^2} \quad (3.48)$$

$$s_2(\omega) = 2\gamma_2(\omega) = -\frac{\omega(c_I + 2c_{II})}{(k_I + 2k_{II} - \omega^2 m)^2 + (\omega(c_I + 2c_{II}))^2} \quad (3.49)$$

On constate que le dénominateur de chacune des valeurs propres est bien identique à celui de l'amplitude de la réponse en fréquence, ce qui confirme l'influence des différents paramètres illustrée ci-dessus. On vérifie ensuite numériquement la validité de ces expressions. On visualise, figure 3.15 les modes propres de flux de puissance associés à ce cas particulier. Dans ce cas particulier, chaque valeur propre de flux de puissance passe par une unique résonance et l'antirésonance est remplacée par un croisement à une fréquence admettant une valeur propre double. En effet on remarque, équations 3.48 et 3.49, que seule la seconde valeur propre dépend des paramètres d'interaction entre les deux degrés de liberté : elle est donc directement associée au second mode propre de vibration du système.

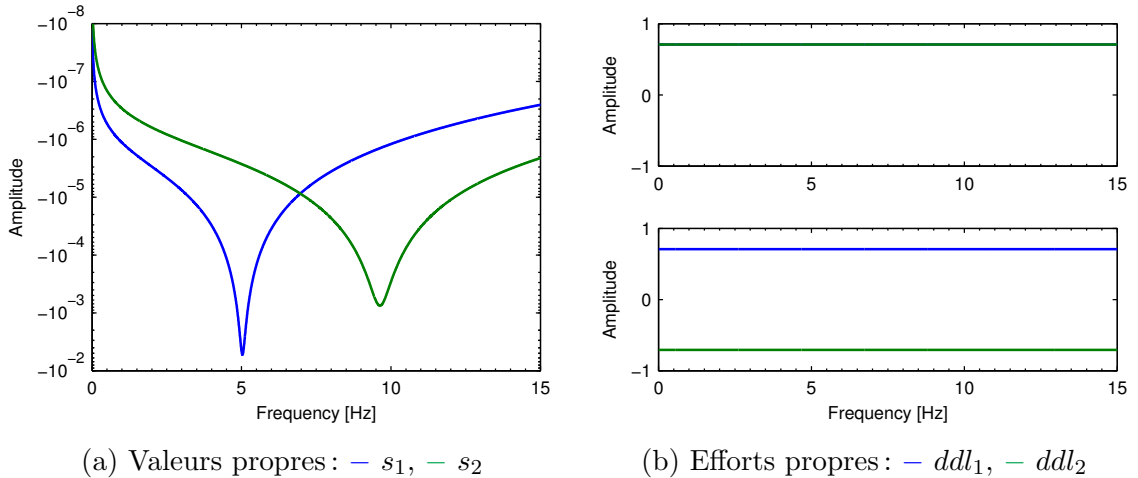


FIG. 3.15: Cas particulier des modes de flux de puissance

On cherche alors à déterminer si ces fréquences de résonance coïncident avec les fréquences propres de vibration du système conservatif associé, qui correspondent également aux fréquences de résonance d'amplitude en vitesse. En annulant les dérivées de  $s_1$  et  $s_2$  par rapport à la pulsation  $\omega$ , on obtient :

$$\omega_{s_1 max}^2 = \frac{1}{6m^2} \left( 2mk_I - c_I^2 + \sqrt{16m^2 k_I^2 - 4mk_I c_I^2 + c_I^4} \right) \quad (3.50)$$

$$\omega_{s_2max}^2 = \frac{1}{6m^2} \left( 2m(k_I + 2k_{II}) - (c_I + 2c_{II})^2 + \sqrt{16m^2(k_I + 2k_{II})^2 - 4m(k_I + 2k_{II})(c_I + 2c_{II})^2 + (c_I + 2c_{II})^4} \right) \quad (3.51)$$

Si ces valeurs sont numériquement proches, elles ne sont pas identiques. Elles tendent cependant vers ces pulsations propres lorsque l'amortissement tend vers zéro :

$$\lim_{\substack{c_I \rightarrow 0 \\ c_{II} \rightarrow 0}} \omega_{s_1max}^2 = \frac{k}{m} = \omega_1^2 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{c_I \rightarrow 0 \\ c_{II} \rightarrow 0}} \omega_{s_2max}^2 = \frac{k + 2k_j}{m} = \omega_2^2 \quad (3.52)$$

Les valeurs propres de flux de puissance étant chacune associée à un mode de vibration du système, on note enfin figure 3.15 (b) que les efforts propres associés sont indépendants de la fréquence et colinéaires aux déformées propres de vibration.

### 3.3.3 Phénomène d'hybridation des efforts propres

Il a été montré ci-dessus que lorsque les répartitions de masse, de raideur et d'amortissement sont symétriques au sein du système, les modes propres de flux de puissance admettent chacun un comportement fréquentiel particulier associé à un mode de vibration du système. Or, dès que cette symétrie est perturbée, un mode de flux de puissance dominant se détache et les efforts propres évoluent en fonction de la fréquence.

Ce type de phénomène a également été mis en évidence dans le cas des modes propres de vibration. De nombreux articles de la littérature [125, 93] montrent que, pour des systèmes possédant des valeurs propres de vibration d'ordre deux, de petites perturbations de la symétrie des paramètres de ces systèmes peuvent compromettre cette propriété. Ces modifications vont générer des interactions entre les valeurs propres, parfois de manière très localisée, dont les lieux vont se rapprocher jusqu'à atteindre une distance minimale, pour ensuite diverger. Ce phénomène, appelé *eigenvalue loci veering*, va également impliquer une hybridation des efforts propres associés, dont les déformées vont être interverties de manière rapide mais continue.

On constate effectivement, figure 3.16, que plus le caractère symétrique du système initial est rompu (ici par rapport à la masse), plus les paramètres ont une valeur différente ( $m_2 \ll m_1$ ), plus le saut entre les deux courbes des valeurs propres en fonction de la fréquence augmente et les valeurs propres se « repoussent ». Afin de visualiser l'hybridation des efforts propres associés, particulièrement importante dans cette zone d'antirésonance, on propose un critère basé sur le produit scalaire normalisé entre deux efforts propres  $g_k$  et  $g_l$  pour des fréquences  $\omega_i$  et  $\omega_j$  différentes, défini par :

$$\chi_{ij}^{(k,l)} = \frac{\left| g_k^{(\omega_i)T} g_l^{(\omega_j)} \right|^2}{\left\| g_k^{(\omega_i)} \right\|^2 \left\| g_l^{(\omega_j)} \right\|^2} \quad (3.53)$$

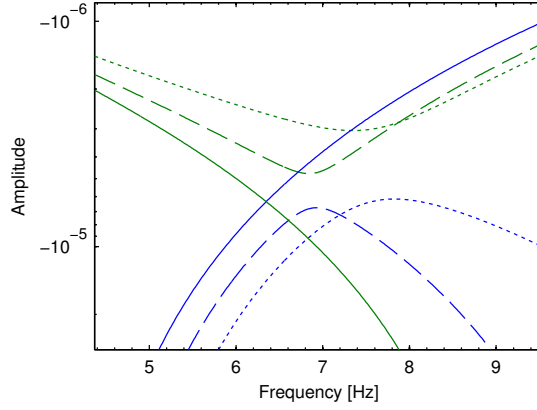


FIG. 3.16: Interaction des valeurs propres de flux de puissance pour une variation de masse :

$$- s_1, - s_2; \cdots m_2 = 1/3m_1, \text{---} m_2 = 2/3m_1, - m_2 = m_1$$

Les figures 3.17 (a) et (b) représentent la matrice  $\chi$  de ce critère pour les deux efforts propres du système, sur un intervalle fréquentiel de 0-15  $Hz$  : l'orthogonalité et la colinéarité entre ces derniers se traduisent respectivement par une couleur bleu profond ( $\chi = 0$ ) ou rouge profond ( $\chi = 1$ ). On vérifie tout d'abord, grâce à la diagonale bleue, que cette base des modes de flux de puissance est bien orthogonale à chaque fréquence, y compris dans la zone de décrochage entre 6 et 9  $Hz$ . Les zones rouges et intermédiaires illustrent le phénomène de déviation des efforts propres : l'apparition d'un dégradé de couleur indique une faible vitesse de rotation. On remarque enfin que plus le changement est brusque, plus l'hybridation finale est importante. Le premier effort propre aux alentours de 15  $Hz$  est alors identique au second tel qu'il était vers 1  $Hz$  et inversement.

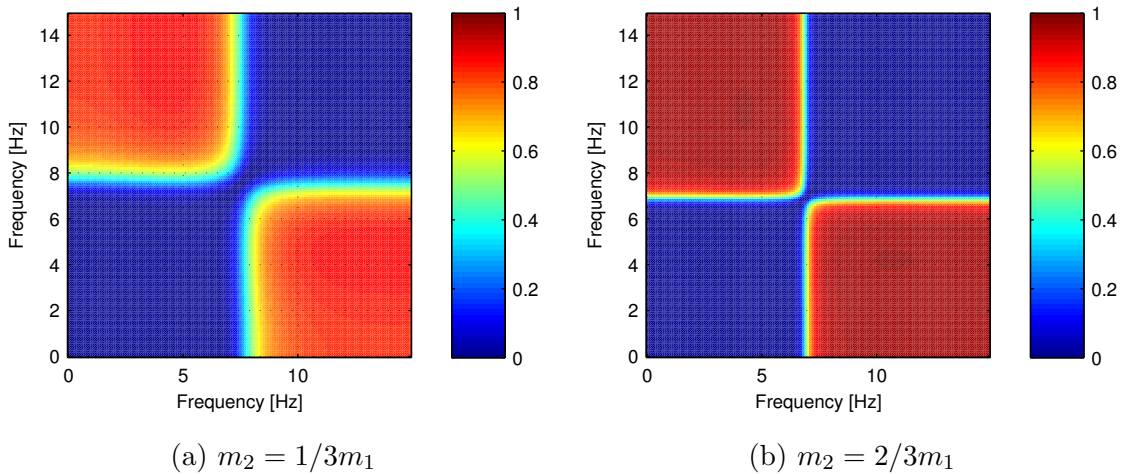


FIG. 3.17: Critère d'hybridation des efforts propres

### 3.4 Caractérisation des interfaces

On décide maintenant d'appliquer la méthode présentée à la caractérisation des efforts d'interface entre deux composants d'une structure couplée (figure 3.18). Celle-ci se compose d'une sous-structure source ( $S$ ) soumise à une excitation extérieure et d'une sous-structure réceptrice ( $R$ ) passive. Elles sont chacune constituées d'un ensemble de degrés de liberté parmi lesquels on distingue les degrés de liberté intérieurs, notés  $i$ , des degrés de liberté de jonction, notés  $j$ .

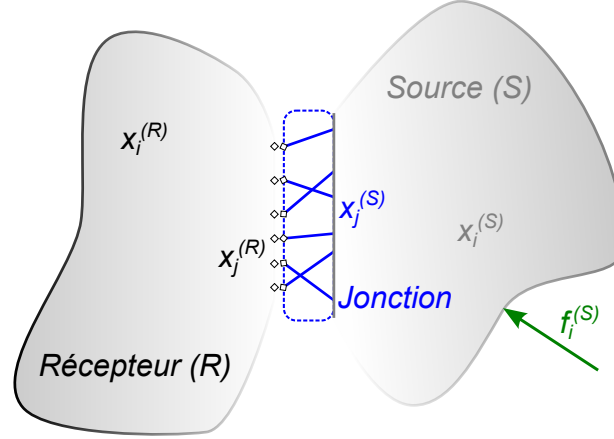


FIG. 3.18: Schéma général d'une structure couplée

La structure couplée globale vérifie donc l'équation d'équilibre suivante :

$$Zx = f \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Z_{ii}^{(S)} & Z_{ij}^{(S)} & 0 \\ Z_{ji}^{(S)} & Z_{jj}^{(S)} + Z_{jj}^{(R)} & Z_{ji}^{(R)} \\ 0 & Z_{ji}^{(R)} & Z_{ii}^{(R)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i^{(S)} \\ x_j \\ x_i^{(R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(S)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

#### 3.4.1 Détermination des modes de flux de puissance

On cherche à déterminer les modes du flux de puissance associés aux degrés de liberté d'interface entre ces deux sous-structures. Il est donc nécessaire d'exprimer la puissance transmise entre la source et le récepteur à partir des grandeurs d'interface. De la même manière qu'au chapitre 3.2.3, celle-ci est issue de la puissance complexe :

$$P_j^{tr}(\omega_0) = \frac{1}{2} \Re \{ f_j^H v_j \} = \frac{j\omega}{4} (f_j^H x_j + x_j^H f_j) \quad (3.55)$$

Afin de retrouver une forme quadratique analogue à celle exposée équation 3.35, on exprime le vecteur des déplacements d'interface  $x_j$  comme le produit entre une matrice faisant intervenir les paramètres de la structure et le vecteur des efforts d'interface. On commence par découpler les équations d'équilibre afin d'avoir accès à ces grandeurs d'interface. L'équation 3.54 devient :

$$\begin{bmatrix} Z_{ii}^{(S)} & Z_{ij}^{(S)} \\ Z_{ji}^{(S)} & Z_{jj}^{(S)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i^{(S)} \\ x_j^{(S)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(S)} \\ f_j^{(S)} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ii}^{(R)} & Z_{ij}^{(R)} \\ Z_{ji}^{(R)} & Z_{jj}^{(R)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i^{(R)} \\ x_j^{(R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_j^{(R)} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

où  $f_j^{(S)}$  représente les efforts extérieurs appliqués à la sous-structure source sur ses degrés de liberté intérieurs et  $f_j^{(S)}$  et  $f_j^{(R)}$  les efforts d'interface s'exerçant sur chaque sous-structure. En considérant les relations de continuité aux interfaces :

$$\begin{cases} x_j^{(S)} = x_j^{(R)} = x_j \\ -f_j^{(S)} = f_j^{(R)} = f_j \end{cases} \quad (3.58)$$

on obtient les relations suivantes, pour la sous-structure source :

$$\begin{cases} Z_{ii}^{(S)} x_i^{(S)} + Z_{ij}^{(S)} x_j = f_i^{(S)} \\ Z_{ji}^{(S)} x_i^{(S)} + Z_{jj}^{(S)} x_j = -f_j \end{cases} \quad (3.59)$$

et pour la sous-structure réceptrice :

$$\begin{cases} Z_{ii}^{(R)} x_i^{(R)} + Z_{ij}^{(R)} x_j = 0 \\ Z_{ji}^{(R)} x_i^{(R)} + Z_{jj}^{(R)} x_j = f_j \end{cases} \quad (3.60)$$

On déduit alors, à partir de la première équation 3.60 :

$$x_i^{(R)} = - \left[ Z_{ii}^{(R)} \right]^{-1} Z_{ij}^{(R)} x_j \quad (3.61)$$

Puis, par substitution dans la seconde équation 3.60 :

$$\left[ Z_{jj}^{(R)} - Z_{ji}^{(R)} \left[ Z_{ii}^{(R)} \right]^{-1} Z_{ij}^{(R)} \right] x_j = f_j \quad (3.62)$$

En inversant cette équation on obtient donc la relation recherchée. Or, on peut vérifier par un calcul matriciel d'inverse par bloc que cette expression correspond à la matrice de flexibilité dynamique de la sous-structure réceptrice, restreinte à ses degrés de liberté de jonction  $\Gamma_{jj}^{(R)}$  :

$$\Gamma_{jj}^{(R)} = \left[ Z_{jj}^{(R)} - Z_{ji}^{(R)} \left[ Z_{ii}^{(R)} \right]^{-1} Z_{ij}^{(R)} \right]^{-1} \quad (3.63)$$

On aboutit finalement à l'expression de la puissance transmise à l'interface suivante :

$$P_j^{tr}(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} f_j^H \Im \left\{ \Gamma_{jj}^{(R)}(\omega_0) \right\} f_j \quad (3.64)$$

Minimiser cette puissance conduit donc à résoudre, pour chaque fréquence considérée, un problème aux valeurs propres équivalent de la forme :

$$\left[ \Im \left\{ \Gamma_{jj}^{(R)}(\omega_0) \right\} - s_\nu I_{N_j} \right] g_\nu = 0, \quad \nu = 1, \dots, N_j \quad (3.65)$$

où  $N_j$  représente le nombre de degrés de liberté d'interface. Dans la suite de ce mémoire, on propose d'alléger les notations en posant :  $\Gamma^\Im = \Im \left\{ \Gamma_{jj}^{(R)} \right\}$ . Les modes de flux de puissance ainsi obtenus vérifient les mêmes relations d'orthogonalité que celles détaillées précédemment :

$$G^T G = I_{N_j} \quad (3.66)$$

$$G^T \Gamma^\Im G = S \quad (3.67)$$

où  $G = [g_1 \dots g_{N_j}] \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  et  $S = \text{diag}(s_\nu) \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$ .

De même qu'au chapitre 3.3.1, on souligne que ces modes de flux de puissance sont indépendants des efforts d'interface exercés par la sous-structure source sur la sous-structure réceptrice. Ils permettent de caractériser, à une fréquence  $\omega_0$  donnée, la puissance potentiellement transmise à l'interface. Les efforts propres représentent donc des directions privilégiées, ou chemins de puissance, par lesquels transiteront les flux de puissance proportionnels aux valeurs propres associées.

Pour illustrer cette étape on représente les modes propres de flux de puissance du système discret couplé introduit au chapitre 3.2.3.

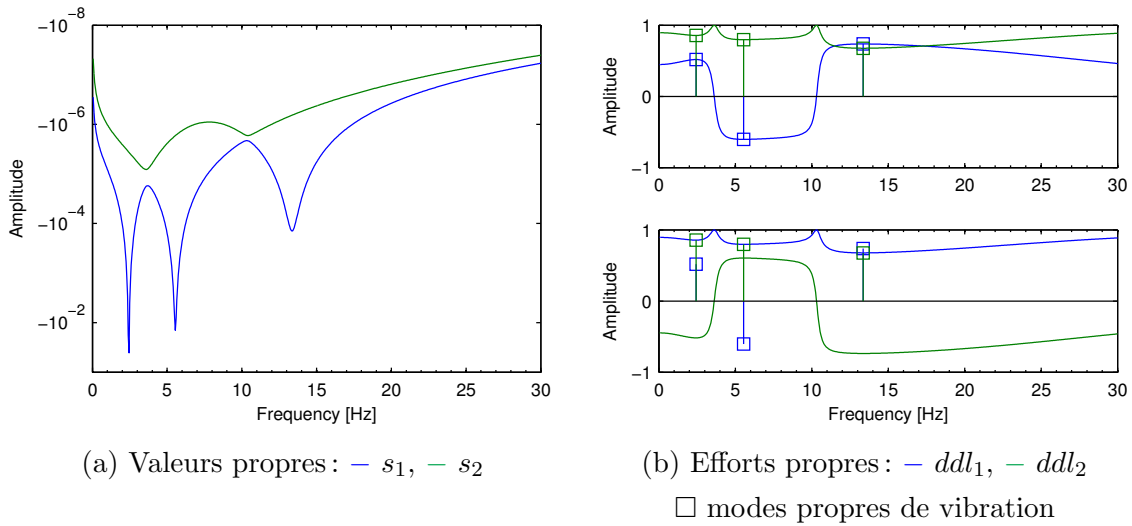


FIG. 3.19: Modes propres de flux de puissance du système couplé à 6 ddl

L'interface étant composée de deux degrés de liberté on retrouve bien, figure 3.19 (a), deux valeurs propres de flux de puissance, la première étant dominante ( $|s_1| \gg |s_2|$ ). On vérifie également que celle-ci admet une résonance d'amplitude aux alentours de chacune des fréquences propres



de la structure réceptrice découplée. De plus, on observe figure 3.19 (b), qu'à ces fréquences particulières, les efforts propres sont colinéaires aux modes propres de vibration restreints aux degrés de liberté d'interface.

### 3.4.2 Décomposition des efforts d'interface

La matrice  $G$  issue de la résolution du problème aux valeurs propres équivalent constitue, par définition, une base de taille  $N_j$ : les efforts propres qui la composent recouvrent donc, à une fréquence  $\omega_0$  donnée, l'espace des chemins de puissance associés à l'interface. On propose alors de décomposer les efforts réels d'interface  $f_j \in \mathbb{C}^{(N_j,1)}$ , s'exerçant au sein de la structure couplée, en les projetant sur cette base de la manière suivante :

$$f_j = G\alpha = \sum_{\nu=1}^{N_j} \alpha_\nu g_\nu \quad (3.68)$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}^{(N_j,1)}$  est un vecteur regroupant les coefficients de projection complexes  $\alpha_\nu = \alpha_\nu^{\Re} + j\alpha_\nu^{\Im}$ , représentant la participation de chaque effort propre  $g_\nu$  dans  $f_j$ . Ceux-ci sont facilement déterminés à l'aide de la relation d'orthogonalité donnée équation (3.67) :

$$g_\sigma^T f_j = \sum_{\nu=1}^{N_j} \alpha_\nu g_\sigma^T g_\nu = \alpha_\sigma \quad (3.69)$$

En injectant cette relation dans l'équation 3.64 on obtient alors une expression de la puissance transmise à l'interface en fonction des modes de flux de puissance :

$$\begin{aligned} P_j^{tr}(\omega_0) &= -\frac{\omega_0}{2} f_j^H \Gamma^{\Im}(\omega_0) f_j \\ &= -\frac{\omega_0}{2} \left( (f_j^{\Re})^T \Gamma^{\Im}(\omega_0) f_j^{\Re} + (f_j^{\Im})^T \Gamma^{\Im}(\omega_0) f_j^{\Im} \right) \\ &= -\frac{\omega_0}{2} \left( (G^T f_j^{\Re})^T S (G^T f_j^{\Re}) + (G^T f_j^{\Im})^T S (G^T f_j^{\Im}) \right) \\ &= -\frac{\omega_0}{2} \sum_{\nu=1}^{N_j} \left( \alpha_\nu^{\Re} \right)^2 s_\nu + \left( \alpha_\nu^{\Im} \right)^2 s_\nu \\ &= -\frac{\omega_0}{2} \sum_{\nu=1}^{N_j} |\alpha_\nu|^2 s_\nu \end{aligned} \quad (3.70)$$

On souligne que, les valeurs propres de flux de puissance  $s_\nu$  étant négatives ou nulles, le signe négatif en facteur permet de retrouver la positivité de la puissance transmise. Celle-ci correspond donc à la somme des puissances transmises indépendamment par chacun des  $N_j$  modes de flux de puissance, dénommées par la suite puissances modales  $P_\nu$  :

$$P_j^{tr}(\omega_0) = \sum_{\nu=1}^{N_j} P_\nu(\omega_0), \quad \text{avec: } P_\nu(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} |\alpha_\nu|^2 s_\nu \quad (3.71)$$

On vérifie, figure 3.20, que les puissances transmises déterminées à partir des équations 3.29 et 3.70 sont bien identiques :

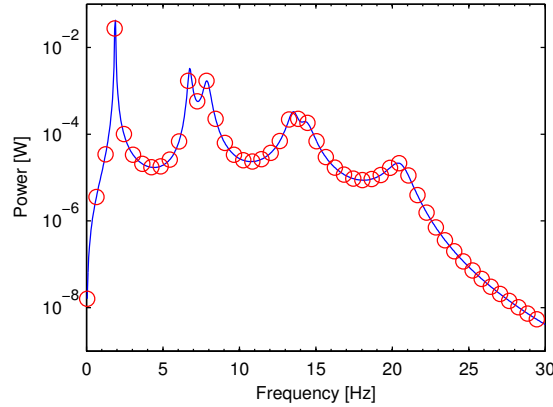


FIG. 3.20: Comparaison des puissances transmises à l'interface du système à 6 ddl :

—  $P_j^{tr}$  équation 3.70,  $\circ$   $P_j^{tr}$  équation 3.29

### 3.4.3 Application

#### Description du modèle numérique

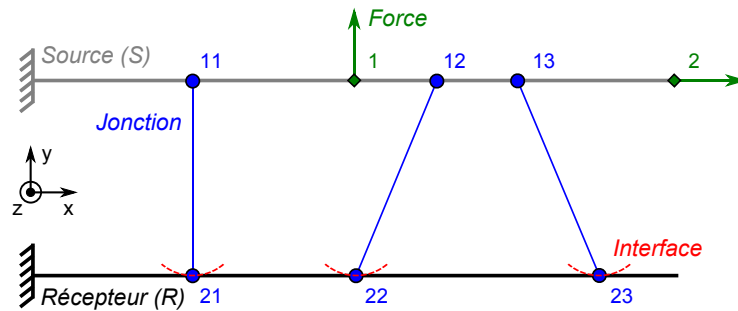


FIG. 3.21: Schéma du système de poutres couplées

On propose d'appliquer cette démarche au système couplé académique représenté figure 3.21, ayant un comportement dynamique plus riche que les systèmes discrets précédents. Celui-ci est constitué de deux poutres encastées-libres, dont les propriétés géométriques et matériaux sont données tableau 3.2, discrétisées de la même manière.

En se plaçant dans le cas d'un problème plan, on rappelle que chaque nœud possède trois degrés de liberté. La sous-structure source est initialement excitée par un effort extérieur de 10 N, ayant une composante suivant  $T_y$  au nœud 1 et suivant  $T_x$  au nœud 2. Elle est couplée à la sous-structure réceptrice par l'intermédiaire de trois jonctions en liaisons rotules. Celles-ci sont modélisées à l'aide d'éléments de type ressort localisé (sans masse), dont les raideurs sont exprimées suivant les directions  $T_x$  et  $T_y$ . L'ensemble de ce système est soumis à un amortissement proportionnel. On choisit d'étudier le domaine des basses fréquences associé aux sous-structures en considérant l'intervalle fréquentiel 0-2500 Hz. Le système global est discrétisé en 410 éléments.

Structure		Source	Récepteur
Dimensions	( $m$ )	$L = 1, l = 0,02$	
Épaisseur	( $m$ )	0,02	0,03
Module d'Young	( $Pa$ )	$2,1 \cdot 10^{11}$	$6,7 \cdot 10^{10}$
Densité	( $kg/m^3$ )	7800	2700
Amortissement		$a = 1 \cdot 10^{-5}, b = 1$	
Raideurs de jonction	( $N/m$ )	$k_j = 1 \cdot 10^{10}$	

TAB. 3.2: Paramètres initiaux du système de poutres couplées

### Modes de flux de puissance

Conformément aux développements précédents, on détermine les modes de flux de puissance en résolvant, à chaque pas fréquentiel, le problème aux valeurs propres équivalent donné équation 3.65. La structure réceptrice admettant des jonctions rotulées aux trois nœuds d'interface (21, 22, 23), on obtient bien six modes de flux de puissance, associés aux six efforts en translation.

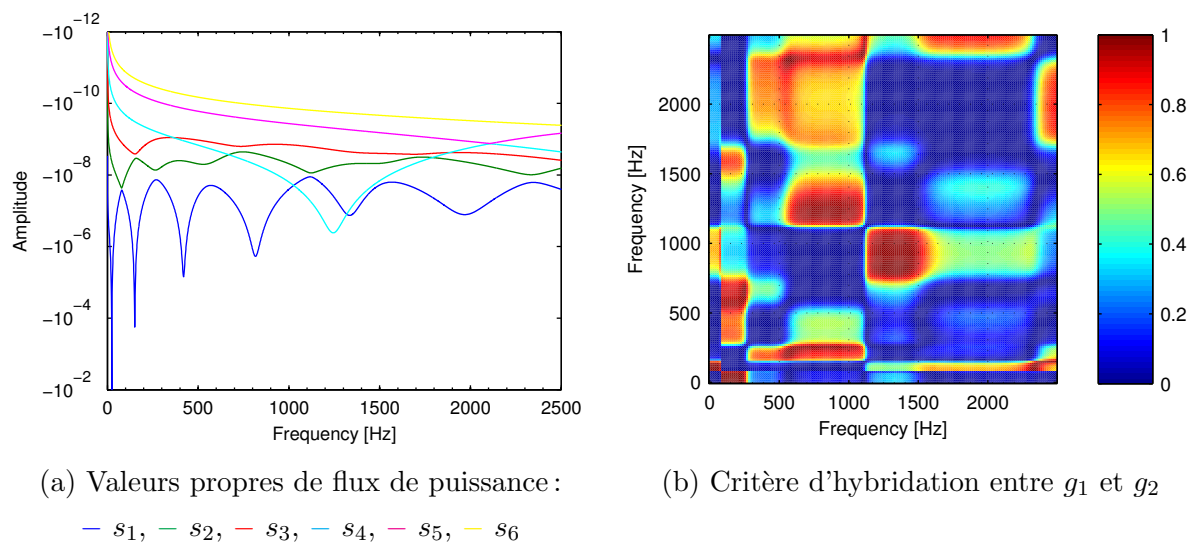


FIG. 3.22: Modes de flux de puissance du système de poutres couplées

On visualise, figure 3.22 (a), l'évolution fréquentielle des valeurs propres de flux de puissance. On remarque à nouveau qu'elles sont négatives et que la première,  $s_1$ , admet des résonances d'amplitude aux alentours de chaque fréquence propre de vibration de la structure réceptrice<sup>10</sup>,

10. On note que les premières fréquences propres de vibration sont situées à : 25, 150, 420, 815, 1250, 1335 et 1970  $Hz$ .

sauf à  $1250 \text{ Hz}$  où la résonance se situe sur  $s_4$ . Ceci s'explique par le découplage entre les vibrations transverses et longitudinales de la poutre : les trois premières valeurs propres sont ainsi plutôt associées au comportement en flexion et les trois suivantes au comportement en traction-compression, dont le premier mode se situe bien à  $1250 \text{ Hz}$ . On note que le comportement de ces valeurs propres tend à s'amortir lorsque la fréquence augmente.

On observe également des phénomènes de croisement et de déviation, notamment entre  $s_1$  et  $s_2$ . On applique, figure 3.22 (b), le critère de visualisation défini équation 3.53 entre les deux efforts propres associés  $g_1$  et  $g_2$ . Il permet de mettre en évidence un phénomène d'hybridation au niveau des antirésonances. Conformément aux remarques précédentes, on note que plus l'écart entre les valeurs propres est faible, plus le phénomène est important (par exemple à  $1100 \text{ Hz}$ ) et inversement (par exemple à  $600 \text{ Hz}$ ).

On constate enfin la prédominance des valeurs propres  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_4$ , qui ont des amplitudes plus importantes et des comportements fréquentiels plus prononcés que les autres.

### Caractérisation des efforts d'interface

On décompose maintenant, à chaque pas de fréquence, les efforts réels d'interface sur les bases des efforts propres afin d'obtenir les coefficients de projection  $\alpha_\nu$  définis équation 3.68. Au regard de leur nature complexe et de leur participation dans l'expression de la puissance transmise, équation 3.70, on choisit de s'intéresser à leur module.

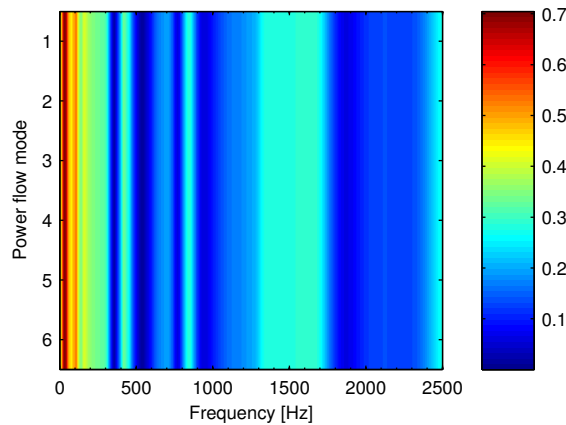


FIG. 3.23: Coefficients de projection des efforts d'interface du système de poutres couplées

La figure 3.23 représente l'évolution fréquentielle de ces grandeurs, normées de sorte que leur somme soit égale à 1, à chaque pas de fréquence. On observe ainsi les variations des chemins de puissance à l'interface. Ainsi à  $50 \text{ Hz}$  par exemple, les efforts réels d'interface se projettent principalement suivant  $g_3$ , alors qu'ils se répartissent suivant  $g_1$  et  $g_2$  à  $600 \text{ Hz}$ . On constate à nouveau le découplage entre les trois premiers modes, associés au comportement transverse, et les trois derniers, associés au comportement longitudinal. De plus, on remarque que le chemin le

plus sollicité n'est pas forcément associé à la valeur propre de plus forte amplitude : une puissance plus importante pourrait alors être transmise à la sous-structure réceptrice en considérant des propriétés de jonction, une sous-structure source ou des efforts extérieurs différents. Ceci est illustré aux alentours de 1200  $Hz$  où on note une décomposition à 45 % suivant  $g_6$  contre 20 % suivant  $g_4$  et  $g_5$ .

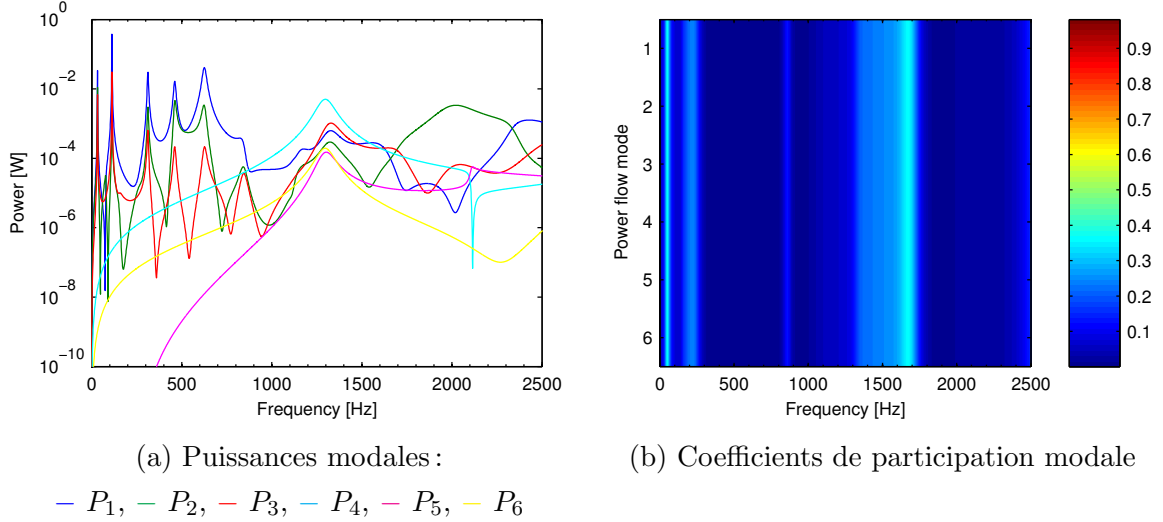


FIG. 3.24: Évolution fréquentielle des puissances modales du système de poutres couplées

La figure 3.24 (a) représente l'évolution fréquentielle des puissances modales, déterminées à partir de l'équation 3.71. À l'image des bilans de puissance effectués sur le système discret précédent, figures 3.7 et 3.20, on retrouve ici le comportement fréquentiel du système couplé. On propose, figure 3.24 (b), une représentation normée de ces quantités : on visualise ainsi les répartitions de la puissance totale transmise suivant les différents chemins de puissance. De la même manière que pour les valeurs propres de flux de puissance, on constate le caractère prépondérant des modes 1, 2 et 4 qui constituent un sous-espace principal par lequel transite la plus grande partie de la puissance transmise.

### Expressions approchées de la puissance transmise

Comme il a été souligné par Ji *et al.* [82], si les concepts liés à l'équation 3.70 exposés ci-dessus sont particulièrement intéressants, son coût de calcul est identique à l'équation 3.64 faisant intervenir la forme quadratique initiale. En effet, il est toujours nécessaire de connaître en intégralité la matrice  $\Gamma^{\mathfrak{S}}$  pour en déduire ces modes propres. Certaines approximations peuvent cependant être effectuées afin d'alléger les calculs et d'estimer la puissance transmise à l'interface.

On se rapporte tout d'abord à la notion de sous-espace dominant, qui revient à tronquer l'expression de la puissance transmise aux  $m \ll N_j$  modes de flux de puissance principaux :

$$P_j^{tr}(\omega_0) \approx \sum_{\nu=1}^{m \ll N_j} P_\nu(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} \sum_{\nu=1}^{m \ll N_j} |\alpha_\nu|^2 s_\nu \quad (3.72)$$

La figure 3.25 (a) représente la puissance transmise associée à un sous-espace composé successivement de  $g_1$ ,  $[g_1 \ g_2]$  et  $[g_1 \ g_2 \ g_4]$ . On observe, figure 3.25 (b), les erreurs relatives par rapport à la puissance totale transmise : on constate que dans le dernier cas, plus de 60 % de la puissance transmise est restituée. À l'inverse, on en déduit donc une propriété pratique du sous-espace complémentaire, à savoir que les directions d'efforts associées aux modes 3, 5 et 6 font transiter moins de 40 % de la puissance d'une sous-structure à l'autre.

Inversement, le sous-espace complémentaire recouvert par les modes 3, 5 et 6 concentre moins de 40 % de la puissance transmise, ce qui peut s'avérer utile dans un contexte d'isolation des vibrations.

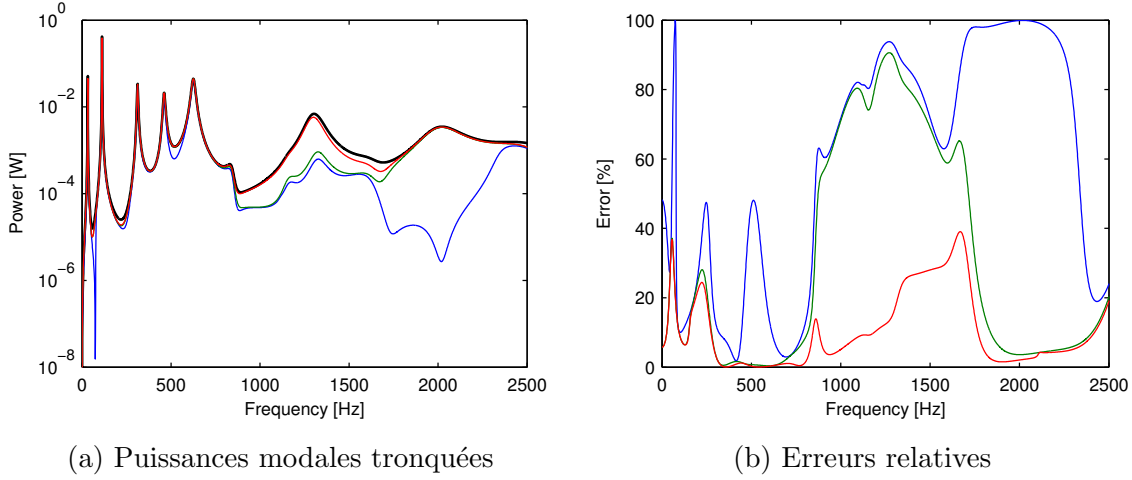


FIG. 3.25: Effet de troncature des puissances modales du système de poutres couplées :

$$- P_j^{tr}, - P_1, - (P_1 + P_2), - (P_1 + P_2 + P_4)$$

En se rappelant que les modes de flux de puissance sont issus de la minimisation du quotient de Rayleigh défini équation 3.36, une propriété simple des formes quadratiques peut être appliquée, afin d'encadrer la puissance transmise [87, 149] :

$$P_j^{tr}{}_{min}(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} \left( \sum_{\nu=1}^{N_j} |\alpha_\nu|^2 \right) \min_{\nu} s_\nu < P_j^{tr}(\omega_0) < -\frac{\omega_0}{2} \left( \sum_{\nu=1}^{N_j} |\alpha_\nu|^2 \right) \max_{\nu} s_\nu = P_j^{tr}{}_{max}(\omega_0) \quad (3.73)$$

où  $\min_{\nu} s_\nu$  et  $\max_{\nu} s_\nu$  représentent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de flux de puissance, à chaque pas de fréquence. Or, la matrice  $G$  étant orthogonale, on remarque que :

$$\alpha^H \alpha = f_j^H G G^T f_j = f_j^H f_j \quad (3.74)$$

d'où :

$$\sum_{\nu=1}^{N_j} |\alpha_\nu|^2 = \sum_{i=1}^{N_j} |f_{j_i}|^2 \quad (3.75)$$

Il est alors possible de récrire l'équation (3.73) sous la forme :

$$P_j^{tr}{}_{min}(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} \left( \sum_{i=1}^{N_j} |f_{j_i}|^2 \right) \min_{\nu} s_{\nu} < P_j^{tr}(\omega_0) < -\frac{\omega_0}{2} \left( \sum_{i=1}^{N_j} |f_{j_i}|^2 \right) \max_{\nu} s_{\nu} = P_j^{tr}{}_{max}(\omega_0) \quad (3.76)$$

On remarque ici que les bornes  $P_j^{tr}{}_{min}(\omega_0)$  et  $P_j^{tr}{}_{max}(\omega_0)$  ne dépendent que de la norme des efforts d'interface et non de leur répartition ou de leur déphasage.

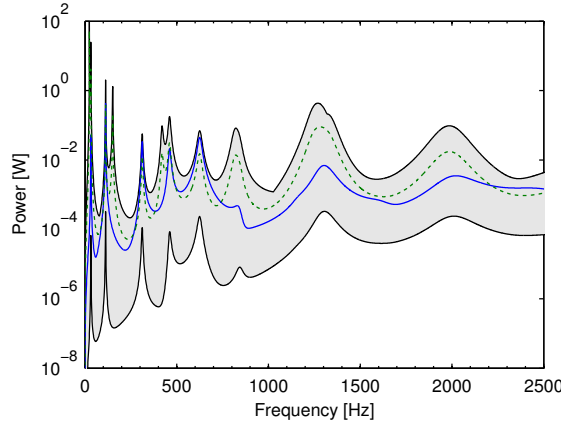


FIG. 3.26: Encadrement et valeur moyenne de la puissance transmise :

$$- P_j^{tr}, \blacksquare [P_j^{tr}{}_{min} - P_j^{tr}{}_{max}], \cdots P_j^{tr}{}_{moy}$$

On visualise, figure 3.26, l'encadrement de la puissance transmise déterminée à partir des expressions précédentes. Si la limite supérieure peut être considérée comme le pire cas envisageable et être ainsi assimilée à une grandeur dimensionnante, en particulier pour les très basses fréquences (0-600 Hz), ses bornes se révèlent trop large pour approximer la puissance transmise. On peut donc finalement se ramener à une sorte de valeur supérieure moyennée définie par :

$$P_j^{tr}{}_{moy}(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} \left( \sum_{i=1}^{N_j} |f_{j_i}|^2 \right) s_{moy} \quad (3.77)$$

où  $s_{moy}$  représente la moyenne des valeurs propres de flux de puissance à chaque pas de fréquence. Celle-ci peut-être facilement déterminée en utilisant la propriété d'invariance de la trace d'une matrice par changement de base :

$$s_{moy} = \frac{1}{N_j} \sum_{\nu=1}^{N_j} s_{\nu} = \frac{1}{N_j} \sum_{\nu=1}^{N_j} \Gamma_{(\nu,\nu)}^{\mathfrak{S}} \quad (3.78)$$

On constate que cette valeur tend encore globalement à surestimer la puissance transmise tout en étant plus proche que les bornes précédentes. Elle peut donc constituer un premier indicateur, nécessitant un faible coût de calcul. On note qu'on trouvera dans [81] d'autres expressions approchées plus précises, valables dans certains cas particuliers (source rigide, récepteur flexible) mais ne faisant pas intervenir les modes de flux de puissance.

### 3.5 Conclusions

Ce chapitre théorique a permis, dans un premier temps, de rappeler les principales notions associées aux bilans de puissance dans les systèmes discrets. En effet, si celles-ci demeurent relativement simples, les relations entre les différentes quantités associées et leurs significations sont rarement explicitées. Cela a permis de montrer que, sous réserve de définir correctement les différentes sous-structures intervenant dans le bilan global, la puissance moyenne transmise par une sous-structure source à une sous-structure réceptrice est donnée par la partie réelle de la puissance complexe.

La méthode des modes de flux de puissance a tout d'abord été exposée dans le cas d'un système académique simple. Celle-ci s'appuie sur une formulation en déplacement de la puissance moyenne, dont la minimisation par rapport aux efforts extérieurs conduit à résoudre un problème aux valeurs propres, associé à la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique. Les valeurs propres et les efforts propres ainsi déterminés fournissent, respectivement, des informations quantitatives et qualitatives sur les flux de puissance à l'intérieur de la structure. Une étude paramétrique a également mis en évidence des comportements complexes de ces grandeurs, tant vis-à-vis des paramètres du système que de la fréquence considérée.

Cette méthode a ensuite été appliquée à l'étude de la puissance transmise à l'interface entre deux sous-structures. Dans ce cas, les modes de flux de puissance ne dépendent plus que des propriétés de la sous-structure réceptrice et permettent de caractériser les efforts réels d'interface. Des coefficients de projections permettent alors d'identifier les directions associées aux différents chemins de puissance. Il a ainsi été constaté que certains d'entre eux constituent un sous-espace dominant, par lequel transite la majeure partie de la puissance. Il a enfin été souligné que ceux-ci permettent de déterminer rapidement et à moindre coût des expressions approchées de la puissance transmise.



# PROPRIÉTÉS DES MODES DE FLUX DE PUISSANCE

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>82</b>
<b>4.2</b>	<b>Sollicitations en efforts généralisés aux interfaces</b>	<b>82</b>
4.2.1	Matrice de flexibilité dynamique adimensionnelle	83
4.2.2	Application	84
4.2.3	Conclusion	87
<b>4.3</b>	<b>Approximations sur une bande de fréquence</b>	<b>87</b>
4.3.1	Filtrage des efforts propres	88
4.3.2	Matrice de flexibilité large bande	90
4.3.3	Application	91
4.3.4	Conclusion	93
<b>4.4</b>	<b>Contrôlabilité par les efforts extérieurs</b>	<b>94</b>
4.4.1	Formulation théorique	95
4.4.2	Application	97
4.4.3	Conclusion	100
<b>4.5</b>	<b>Adaptation aux structures complexes</b>	<b>101</b>
4.5.1	Approche directe	101
4.5.2	Approche par superposition modale	102
4.5.3	Approche par condensation	105
4.5.4	Conclusion	108

---

## 4.1 Introduction

Le chapitre précédent a permis de définir les nouvelles grandeurs d'intérêt que constituent les modes propres de flux de puissance et d'exposer leur comportement complexe par rapport aux paramètres physiques de la structure ainsi qu'à la fréquence. Leur application à la caractérisation des interfaces entre deux sous-structures a mis en évidence la notion de chemin de puissance. On propose dans ce chapitre de détailler certaines propriétés particulières de ces modes.

On s'intéresse dans un premier temps à l'influence du type de jonction sur les mécanismes de transfert de puissance. On étudie en particulier le rôle des moments à l'interface. On propose ensuite de s'affranchir des phénomènes d'hybridation des efforts propres à l'aide d'approximations sur une bande de fréquence. Cette démarche permet également d'aborder la question de l'extension de la méthode aux domaines des moyennes et hautes fréquences. Dans un second temps, on expose une technique d'optimisation des efforts d'interface vis-à-vis des efforts extérieurs appliqués à la sous-structure source, mettant en évidence la contrôlabilité des chemins de puissance. On présente enfin différentes approches de calcul de la matrice de flexibilité dynamique, adaptées aux cas de structures complexes et de grandes tailles et utilisables dans un contexte de conception robuste de structures industrielles.

## 4.2 Sollicitations en efforts généralisés aux interfaces

De manière générale, les efforts d'interface entre deux sous-structures sont susceptibles de s'exercer aussi bien sous la forme de forces suivant les degrés de liberté de translation non permis par la jonction, que de moments suivant les degrés de liberté de rotation. Une simplification courante vise à limiter ces efforts à leurs composantes transverses, plus significatives. Les composantes longitudinales peuvent toutefois avoir un impact, en particulier dans le cas de structures courbes ou résultant de l'assemblage entre une sous-structure exhibant des modes de traction-compression et une autre des modes de flexion. Les degrés de liberté de rotation sont en revanche plus difficiles à observer expérimentalement et ont ainsi fait l'objet de nombreuses études [49]. En particulier, les travaux de Petersson relatifs à la méthode du descripteur de source ont permis de mieux comprendre le rôle des moments dans les transferts vibratoires [122, 123, 124]. Il a ainsi été montré que si la puissance générée ou transmise par les moments tend à avoir une influence grandissante dans les hautes fréquences, elle se révèle également significative en basses fréquences, dans le cas où la jonction est positionnée près d'une discontinuité structurale.

Il est donc nécessaire de prendre en compte l'ensemble des degrés de liberté d'interface sollicités par les jonctions dans l'analyse des structures couplées. Or, les excitations mixtes en efforts et en moments ne sont pas directement comparables en raison de leurs différentes dimensions respectives, d'où l'intérêt de considérer les termes de puissance transmise associés.

En se plaçant dans le cadre d'une méthode en mobilité, Moorhouse a proposé de pallier cette incompatibilité en introduisant une matrice de mobilité adimensionnelle [109]. Celle-ci est obtenue en divisant les termes initiaux par les moyennes géométriques des mobilités ponctuelles associées : une mobilité croisée est ainsi pondérée par une mobilité ponctuelle en effort et une mobilité ponctuelle en moment. Il est alors possible de quantifier le couplage entre deux excitations différentes, quelle que soit leur dimension, et de déterminer dans quelle mesure un effort ou un moment appliqué en un endroit va affecter la puissance transmise par un autre effort ou un moment.

#### 4.2.1 Matrice de flexibilité dynamique adimensionnelle

De manière analogue à la méthode mentionnée ci-dessus on constate que, dans le cas général, la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique associée aux degrés de liberté d'interface en translation ou en rotation, se compose de termes non homogènes ayant des ordres de grandeur différents. Afin de ne pas privilégier une information par rapport à l'autre dans la détermination des modes de flux de puissance, on propose donc d'appliquer cette méthode de pondération au problème aux valeurs propres équivalent (équation 3.38) [109, 82].

Celle-ci consiste à pondérer la matrice  $\Gamma^{\mathfrak{S}}$  et le vecteur des efforts réels d'interface par une matrice diagonale adimensionnelle  $D \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$ , telle que :

$$D_{(i,i)} = \frac{1}{\sqrt{|\Gamma^{\mathfrak{S}}_{(i,i)}|}} \quad (4.1)$$

On obtient ainsi deux nouvelles quantités pondérées  $\bar{\Gamma}^{\mathfrak{S}} \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  et  $\bar{f}_j \in \mathbb{C}^{(N_j, 1)}$  :

$$\bar{\Gamma}^{\mathfrak{S}} = D\Gamma^{\mathfrak{S}}D \quad (4.2)$$

$$\bar{f}_j = D^{-1}f_j \quad (4.3)$$

à partir desquelles on peut exprimer la puissance transmise à l'interface, donnée par l'équation 3.70, sous la forme :

$$P_j^{tr}(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} f_j^H \Gamma^{\mathfrak{S}} f_j = -\frac{\omega_0}{2} \bar{f}_j^H \bar{\Gamma}^{\mathfrak{S}} \bar{f}_j \quad (4.4)$$

La matrice  $\bar{\Gamma}^{\mathfrak{S}}$  possédant les mêmes caractéristiques que  $\Gamma^{\mathfrak{S}}$  il est alors possible de reprendre la méthode des modes de flux de puissance (chapitre 3.4) pour obtenir les relations suivantes :

$$\bar{G}^T \bar{\Gamma}^{\mathfrak{S}} \bar{G} = \bar{S} \quad (4.5)$$

$$\bar{G}^T \bar{G} = I_{N_j} \quad (4.6)$$

où  $\bar{S} \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  est la matrice diagonale constituée des valeurs propres de flux de puissance et  $\bar{G} \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  la matrice orthogonale regroupant les efforts propres, associés au nouveau problème

pondéré. On retrouve également l'expression des coefficients de participation des différents chemins de puissance :

$$\bar{\alpha} = \bar{G}^T \bar{f}_j = \bar{G}^T D^{-1} f_j \quad (4.7)$$

À nouveau, ceux-ci permettent d'exprimer la puissance transmise à l'interface :

$$P_j^{tr}(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} \sum_{\nu=1}^{N_j} |\bar{\alpha}_\nu|^2 \bar{s}_\nu \quad (4.8)$$

On note que, conformément aux observations de Ji *et al.* [82], différentes matrices de pondération peuvent être utilisées, faisant appel à différentes normes de la matrice du problème aux valeurs propres initial : elles auront chacune un impact différent sur l'approximation de la puissance moyenne dissipée.

### 4.2.2 Application

Afin d'illustrer cette approche par pondération, on propose de reprendre l'étude du système de poutres couplées introduit au chapitre 3.4.3 en considérant cette fois-ci le cas de liaisons complètes. Celles-ci sont modélisées par des raideurs localisées aux nœuds de jonction, suivant les directions  $T_x$ ,  $T_y$  et  $R_z$ .

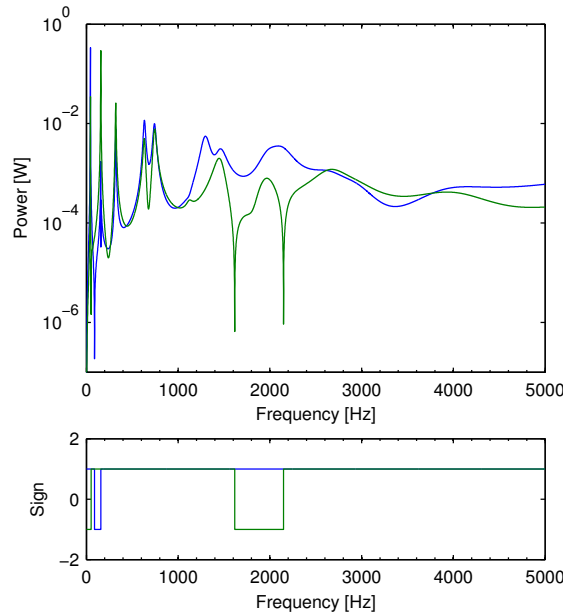


FIG. 4.1: Puissances transmises suivant les ddl de translation et de rotation :

$$- P_{trans}, - P_{rot}$$

On observe tout d'abord, figure 4.1, les puissances respectivement transmises suivant les degrés de liberté de translation et de rotation, déterminées à partir de l'équation 3.29, successivement restreinte aux différentes composantes. La nature complexe des vitesses et des efforts d'interface ne garantit cependant pas la positivité de ces quantités : les relations entre les déphasages des différents degrés de liberté entraînent alors des changements de direction de ces puissances. On visualise donc simultanément l'évolution fréquentielle de leurs amplitudes absolues respectives ainsi que des signes associés. En accord avec les remarques précédentes, on constate qu'elles sont du même ordre de grandeur et que la puissance transmise par les rotations majore même celle issue des translations à certaines fréquences. Il est donc nécessaire de prendre en compte l'ensemble des degrés de liberté dans la caractérisation des interfaces entre deux sous-structures.

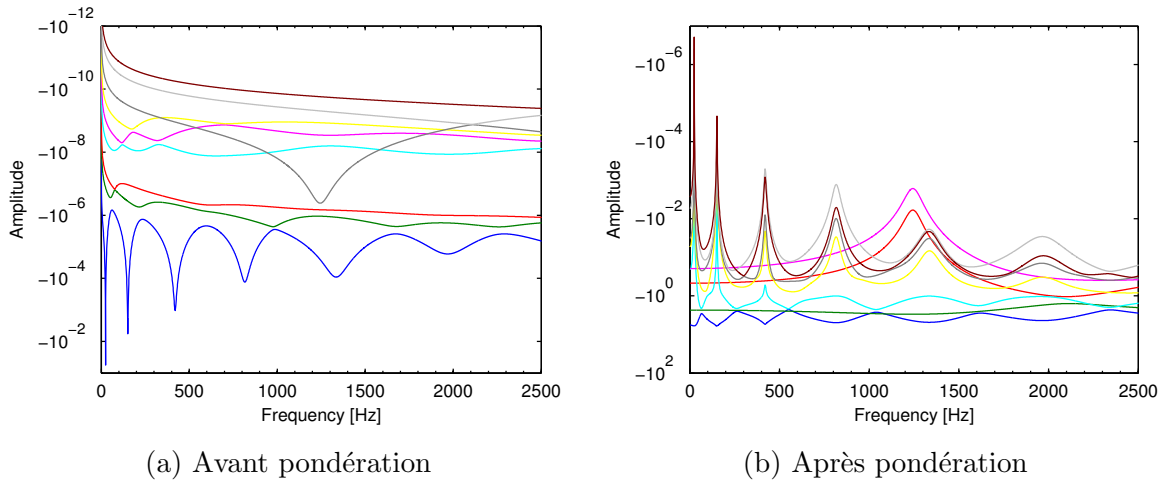


FIG. 4.2: Valeurs propres de flux de puissance généralisées :

—  $s_1$ , —  $s_2$ , —  $s_3$ , —  $s_4$ , —  $s_5$ , —  $s_6$ , —  $s_7$ , —  $s_8$ , —  $s_9$

On compare maintenant l'évolution fréquentielle des valeurs propres de flux de puissance, dont le nombre a augmenté avec celui des degrés de liberté d'interface, issues du problème initial, puis pondéré. On retrouve, figure 4.2 (a), le même comportement que celui présenté au chapitre 3.4.3. On note cependant que les amplitudes associées aux modes dominants sont plus importantes, ce qui semble cohérent avec l'augmentation des contraintes aux jonctions<sup>1</sup>. On constate, figure 4.2 (b), que bien que l'allure des valeurs propres du problème pondéré soit différente, celles-ci vérifient encore les principales caractéristiques : elles sont négatives, admettent des résonances et certaines constituent un sous-espace dominant. Ce dernier est d'autant plus distinct que les valeurs propres restantes passent alors par des antirésonances.

1. Le comportement en flexion est en effet fortement perturbé par la rigidification des liaisons au niveau des rotations, contrairement à la traction-compression dont le mode à 1250 Hz ne semble pas affecté (cf. figure 3.22 (a)).

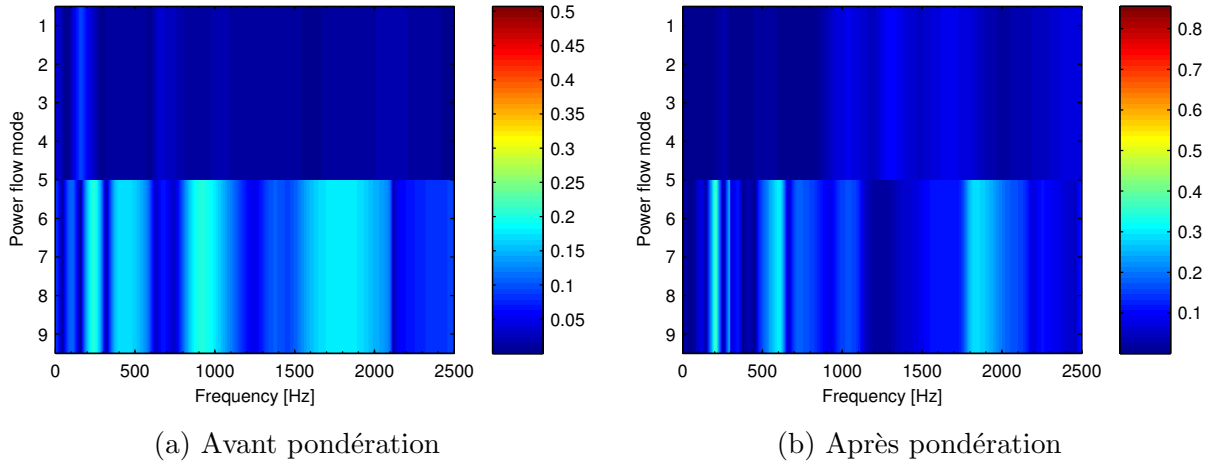


FIG. 4.3: Coefficients de projection du problème pondéré

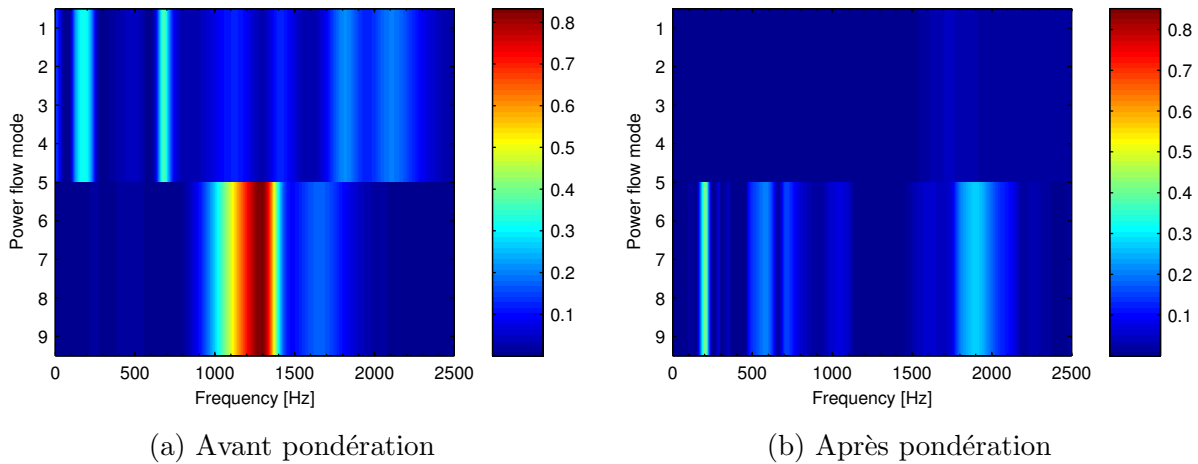


FIG. 4.4: Coefficients de participation modale du problème pondéré

On s'intéresse ensuite à la projection des efforts réels d'interface sur ces bases d'efforts propres. On remarque, figure 4.3 (a), qu'avant pondération ceux-ci se projettent essentiellement suivant les modes 4, 5, 6 et 9 qui n'appartiennent pas au sous-espace dominant. De plus, ces coefficients de projection restent relativement faibles ( $< 50\%$ ), ce qui indique que plusieurs chemins participent à la transmission de puissance à une fréquence donnée. Après pondération, figure 4.3 (b), on note à nouveau une faible projection suivant le sous-espace principal et une distribution globale sur l'ensemble des modes restant ( $< 50\%$ ), sauf à quelques fréquences localisées où un mode particulier transmet plus de 80 % de la puissance (40 Hz, 420 Hz et 1250 Hz).

Les coefficients de participation modale permettent à nouveau de distinguer le rôle prépondérant du sous-espace dominant. Bien entendu on observe que celui-ci ne regroupe pas les mêmes modes:  $[g_1 \ g_2 \ g_7]$  et  $[\bar{g}_1 \ \bar{g}_2 \ \bar{g}_4]$ , respectivement avant et après pondération. On décide alors d'étudier l'évolution fréquentielle des différentes composantes des efforts propres. On vérifie,

figures 4.5 (a) et (b), qu'avant pondération les efforts propres associés au comportement en flexion sont principalement portés soit par les rotations (par exemple pour  $g_1$ ), soit par les translations (par exemple pour  $g_5$ ). Ceci explique les différences entre la figure 4.3 (a), où l'on visualise la prépondérance des forces sur les moments à l'interface, et la figure 4.4 (a) où l'on retrouve l'importance des degrés de liberté de rotation dans la puissance transmise. A l'inverse, une fois le problème pondéré, on observe figure 4.5 (c) que les différentes composantes ont maintenant le même ordre de grandeur (par exemple pour  $\bar{g}_1$ ). La décomposition des efforts réels fait donc intervenir un nombre plus important d'efforts propres. Enfin, on souligne que le comportement en traction-compression demeure découplé de celui en flexion, mais que la pondération a permis de mieux mettre en évidence son importance en l'associant au mode 2, figure 4.5 (d).

### 4.2.3 Conclusion

Les moments d'interface jouent donc un rôle particulièrement important dans la transmission de puissance entre sous-structures. Les phénomènes associés demeurent néanmoins très complexes et particulièrement difficiles à mettre en évidence. Si cette démarche de pondération des modes de flux de puissance se justifie physiquement et est facile à mettre en œuvre, elle complique cependant la détermination des chemins de puissance dominants qui deviennent plus nombreux et donc moins actifs, en particulier lorsque les comportements vibratoires des différentes sous-structures se complexifient.

## 4.3 Approximations sur une bande de fréquence

Il a été montré au chapitre 3.4 que la méthode de caractérisation des interfaces proposée dans ces travaux se base sur la décomposition des efforts réels d'interface sur la base des efforts propres. Or, ceux-ci sont issus de la résolution du problème aux valeurs propres associé à la matrice  $\Gamma^{\mathfrak{S}}$  qui, par définition, dépend fortement de la fréquence. Il en résulte des phénomènes d'hybridation de ces vecteurs propres dont les effets vont se répercuter sur la détermination des chemins de puissance dominants. Il a cependant été constaté que les efforts propres varient peu au niveau des fréquences de résonance de la puissance transmise, où la réponse du système dépend d'un seul mode de vibration, à l'inverse des antirésonances. De même, ceux-ci tendent à se stabiliser au fur et à mesure que la fréquence d'étude se rapproche de l'intervalle des hautes fréquences associé à la sous-structure réceptrice, en raison de l'augmentation de sa densité modale. Dans ces cas, il semble intéressant de déterminer une unique base d'efforts propres, indépendante de la fréquence, qui soit représentative des configurations d'efforts d'interface sur l'intervalle fréquentiel considéré.

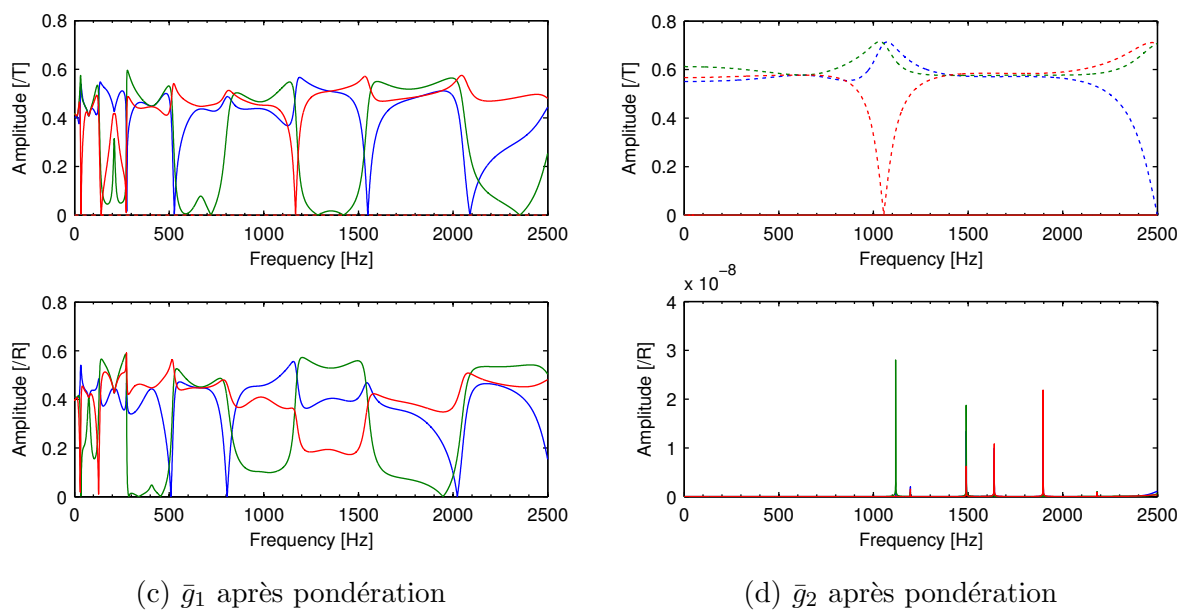
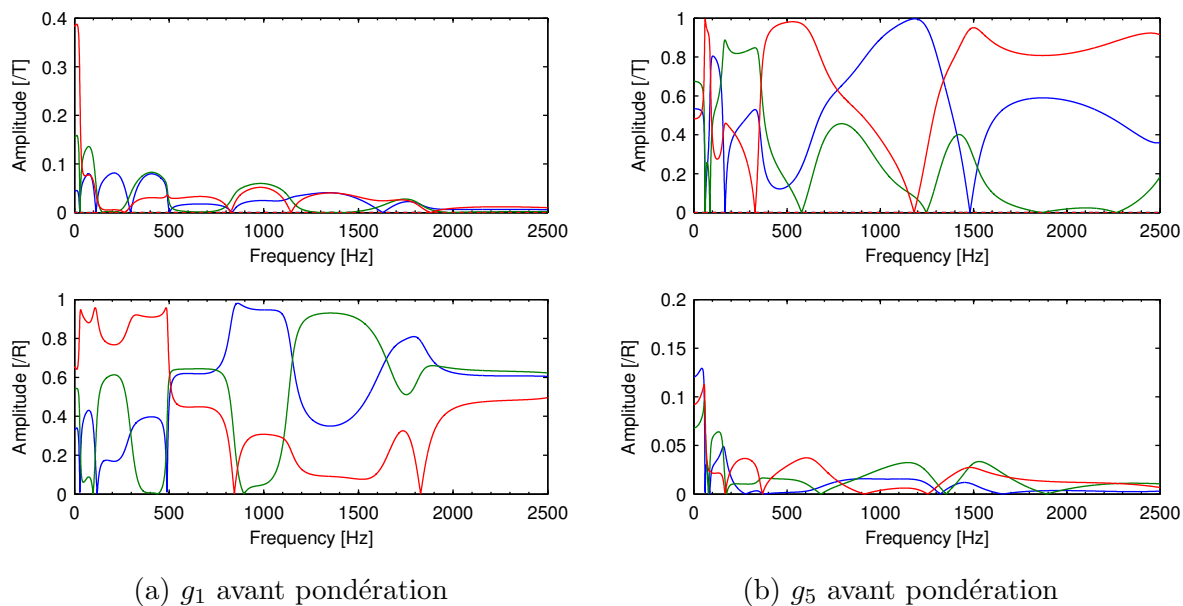


FIG. 4.5: Effet de la pondération sur les efforts propres :

— nœud 21, — nœud 22, — nœud 23;  $\cdots T_x, -T_y, -R_z$

### 4.3.1 Filtrage des efforts propres

Dans un contexte vibro-acoustique, Cazzolato et Hansen ont proposé de minimiser l'énergie potentielle acoustique intérieure à une cavité en minimisant l'amplitude de modes de rayonne-



ment déterminés à partir du comportement dynamique du système couplé<sup>2</sup>. Ces grandeurs ont ensuite été utilisées comme signaux d'erreur pour une stratégie de contrôle actif du bruit [32]. La mise en œuvre expérimentale de ce système nécessite cependant un nombre important de capteurs discrets afin de déterminer les déformées des modes de rayonnement, qui dépendent fortement de la fréquence. Une méthode de normalisation des bases des modes de rayonnement a donc été utilisée [30]. Celle-ci vise à projeter l'ensemble des bases comprises dans l'intervalle fréquentiel d'étude sur la base associée à une fréquence de référence. Ainsi, moyennant une erreur sur l'expression approchée de l'énergie potentielle, un faible nombre de capteurs de formes fixes peut être employé, d'où une simplification du système de contrôle.

On propose ici de reprendre cette méthode de normalisation en l'appliquant aux modes de flux de puissance. On choisit tout d'abord une fréquence de référence, correspondant typiquement à une fréquence de résonance de flux de puissance, dont la base des efforts propres  $G_{ref}$  est considérée comme représentative du comportement des modes de flux de puissance, sur une bande de fréquence. On construit ensuite une matrice de projection orthogonale  $P \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  reliant la base de référence, notée  $G_{ref}$ , à celle d'une autre fréquence de l'intervalle,  $G$  :

$$G = G_{ref} P \quad (4.9)$$

d'où, par orthogonalité de la base de efforts propres :

$$P = G_{ref}^{-1} G = G_{ref}^T G \quad (4.10)$$

On note que cette matrice de projection étant à diagonale dominante, voire strictement dominante si l'intervalle ne contient qu'une seule résonance, le phénomène d'hybridation des efforts propres reste relativement faible. Il est alors possible de récrire l'équation 3.67 sous la forme :

$$\Gamma^{\mathfrak{S}} = G S G^T = (G_{ref} G_{ref}^T) G S G^T (G_{ref} G_{ref}^T) \quad (4.11)$$

On en déduit une nouvelle expression de la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique :

$$\Gamma^{\mathfrak{S}} = G_{ref} S_{ref} G_{ref}^T \quad (4.12)$$

où  $S_{ref} = P S P^T \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  correspond à la nouvelle matrice des valeurs propres de flux de puissance. Celle-ci est cependant pleine et à diagonale dominante, sauf à la fréquence de référence où elle devient purement diagonale. Il est donc nécessaire de la rendre diagonale quelle que soit la fréquence considérée dans l'intervalle, afin d'obtenir un ensemble d'équations indépendantes :

$$\tilde{S}_{ref} = \text{diag}(S_{ref}) = \text{diag}(P S P^T) \quad (4.13)$$

---

2. Cette méthode s'apparente aux modes de rayonnement proposés par Elliott et Johnson [44], présentés brièvement au chapitre 2.4.3.

On obtient finalement une expression approchée de la puissance transmise, s'appuyant sur une seule base fixe d'efforts propres et faisant intervenir une matrice des valeurs propres de flux de puissance filtrée, dépendant encore de la fréquence :

$$P_j^{tr}(\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2} f_j^H G_{ref} \tilde{S}_{ref} G_{ref}^T f_j \quad (4.14)$$

Cette relation demeure acceptable dans la mesure où l'intervalle d'étude correspond au voisinage de la fréquence de référence, n'entraînant ainsi qu'une faible perte de précision sur la puissance transmise.

On note cependant que cette approche *a posteriori* nécessite de connaître, et donc de déterminer préalablement, l'ensemble des modes de flux de puissance sur l'intervalle fréquentiel. Une approche *a priori*, prenant en compte un comportement moyen de la sous-structure réceptrice, serait alors plus intéressante vis-à-vis du coût de calcul.

### 4.3.2 Matrice de flexibilité large bande

Une première possibilité s'appuie sur le fait qu'à chacune des résonances de la valeur propre de flux de puissance dominante, l'effort propre associé est colinéaire à la déformée du mode de vibration de la sous-structure réceptrice le plus proche, restreinte aux degrés de liberté d'interface. On peut ainsi envisager de construire une base de modes de flux de puissance à partir des déformées propres des principaux modes de vibration. Il a cependant été constaté que cette simplification entraîne des erreurs importantes sur l'approximation de la puissance transmise. Ceci est en partie dû au fait que les modes ainsi constitués ne sont pas orthogonaux par rapport à la matrice  $\Gamma^{\mathfrak{S}}$  et ne représentent donc pas suffisamment le sous-espace dominant des modes de flux de puissance.

Une seconde possibilité vise à déterminer un unique ensemble de modes de flux de puissance correspondant à une bande de fréquence. On propose pour cela de calculer une matrice de flexibilité dynamique moyenne  $\Gamma_{moy}^{\mathfrak{S}}$ , définie par :

$$\Gamma_{moy}^{\mathfrak{S}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Gamma^{\mathfrak{S}}(\omega_i) \quad (4.15)$$

On résout alors le problème aux valeurs propres équivalent suivant :

$$\left[ \Gamma_{moy}^{\mathfrak{S}} - s_{moy\nu} I_{N_j} \right] g_{moy\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, N_j \quad (4.16)$$

d'où l'on obtient les matrices  $S_{moy} \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  et  $G_{moy} \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  représentant respectivement les valeurs propres de flux de puissance et les efforts propres associés au comportement moyen de la sous-structure réceptrice.

On projette ensuite, à chaque fréquence, les efforts réels d'interface sur cette base  $G_{moy}$  et l'on retrouve finalement une expression approchée de la puissance transmise à l'interface sous la forme :

$$P_j^{tr}(\omega) \approx -\frac{\omega_0}{2} f_j^H G_{moy} S_{moy} G_{moy}^T f_j \quad (4.17)$$

Bien entendu, la notion de comportement moyen n'a aucun sens dans le domaine des basses fréquences, où la sous-structure admet des successions de résonances et d'antirésonances. Néanmoins, à mesure que les fréquences considérées s'apparentent aux domaines des moyennes et hautes fréquences, cette approche par matrice de flexibilité large bande rejoint les méthodes présentées au chapitre 2.3.4, en particulier les équations 2.34 et 2.35.

### 4.3.3 Application

On propose d'illustrer ces deux approches en se ramenant à l'étude du système de poutres couplées dont les propriétés ont été modifiées afin que la sous-structure source exhibe un comportement rigide et la sous-structure réceptrice un comportement souple<sup>3</sup>. On observe ainsi, figure 4.6 (a), les différents critères de densité modale : pour les sous-structures source et réceptrice, l'intervalle 2000-4000  $Hz$  correspond respectivement aux basses et aux hautes fréquences. Ceci est confirmé par la figure 4.6 (b), représentant l'amplitude des efforts réels d'interface. On constate en effet qu'à partir de 1500  $Hz$ , le comportement modal de la structure globale tend à s'estomper pour faire place à un comportement moyen.

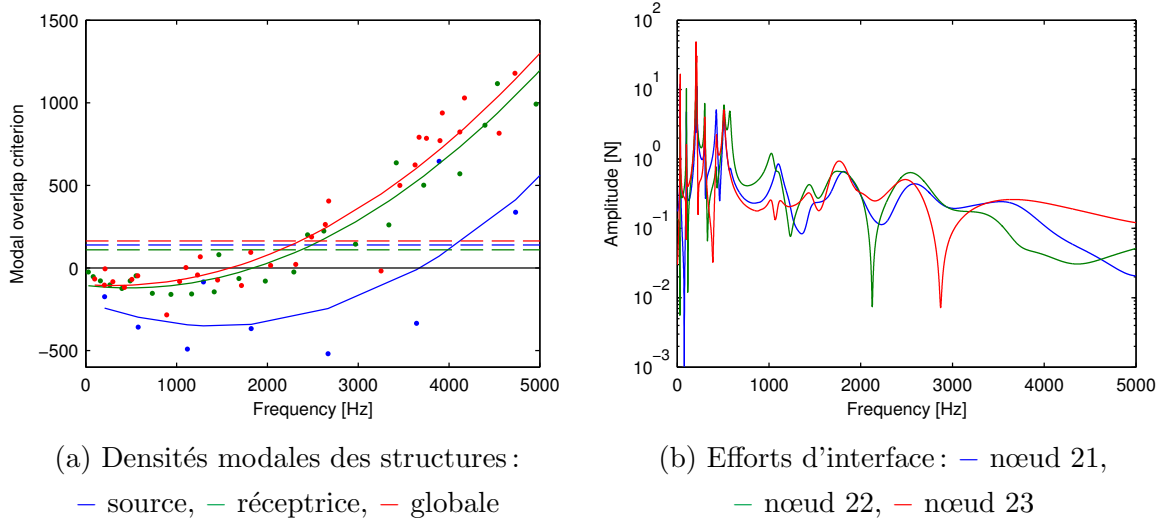


FIG. 4.6: Système couplé composé d'une source rigide et d'un récepteur souple

3. Pour simplifier les résultats suivants, on se place dans le cas de jonctions rotulées et la sous-structure source est uniquement excitée en flexion.

La figure 4.7 représente les valeurs propres de flux de puissance, calculées de manière exacte. Elle illustre également parfaitement les changements de domaines fréquentiels associés à la sous-structure réceptrice. On note en particulier qu'à partir de 2500  $Hz$ , les valeurs propres associées au comportement en flexion ( $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$ ) tendent à avoir le même ordre de grandeur.

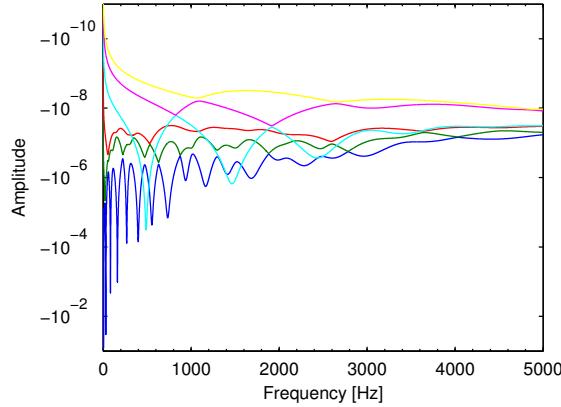


FIG. 4.7: Valeurs propres de flux de puissance de la sous-structure réceptrice souple :

—  $s_1$ , —  $s_2$ , —  $s_3$ , —  $s_4$ , —  $s_5$ , —  $s_6$

### Approximation au voisinage d'un mode de vibration

On s'intéresse dans un premier temps à un intervalle basses fréquences compris entre 120-440  $Hz$  et l'on cherche à approcher la puissance transmise au voisinage d'un mode de vibration situé à 267  $Hz$ . On compare, figure 4.8 (a), les évolutions fréquentielles des valeurs propres de flux de puissance normalisées à l'aide de la méthode de filtrage, par rapport aux valeurs exactes. On remarque tout d'abord que celles-ci sont égales près de la fréquence de référence. Les matrices  $G_{ref}$  et  $G$  sont alors pratiquement identiques et les matrices  $S_{ref}$  fortement diagonales. En revanche, en dehors de cette zone, on note que plusieurs valeurs propres admettent simultanément des résonances, d'où un nombre plus important de chemins de puissance contribuant de manière significative à la puissance transmise. On constate ainsi, figure 4.8 (b), que cette approche tend à sur-estimer très fortement la puissance transmise lorsque l'on s'écarte de la fréquence de référence. Les flux de puissance exacts sont alors associés à d'autres directions d'efforts propres, moins dominantes.

On souligne enfin que, dans ce cas précis, les calculs de puissance sont effectués à partir de la base complète des modes de flux de puissance. Or, dans le cas de structures complexes de grandes tailles, les sous-espaces principaux peuvent être composés d'un nombre important d'efforts propres, dont les directions vont également fortement varier suivant la bande de fréquence considérée. Il semble alors intéressant de normaliser les modes propres de flux de puissance non pas par rapport à une unique base de référence, mais par rapport à une matrice regroupant les différentes directions principales de l'intervalle fréquentiel.

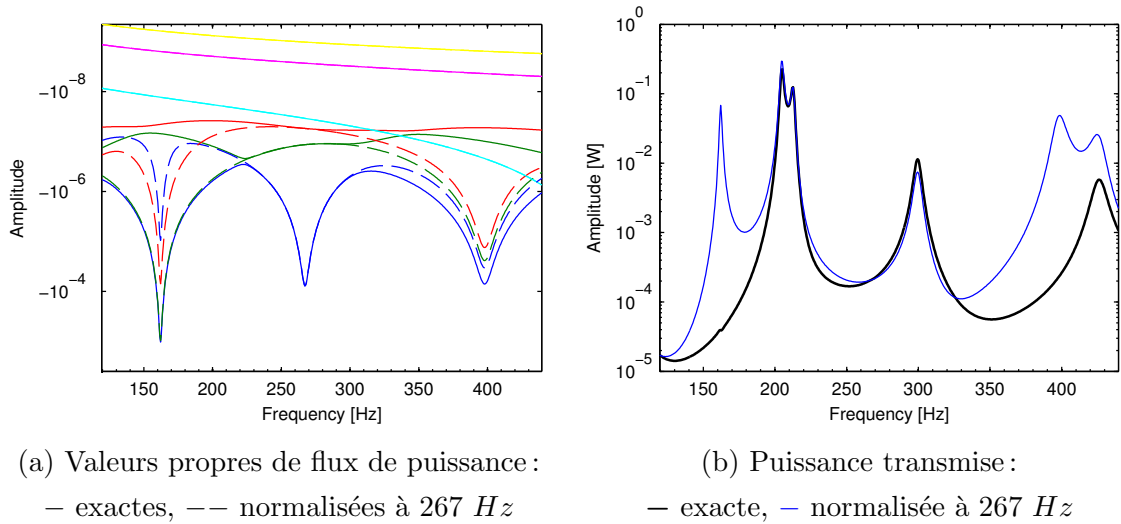


FIG. 4.8: Approximation des modes de flux de puissance en basses fréquences

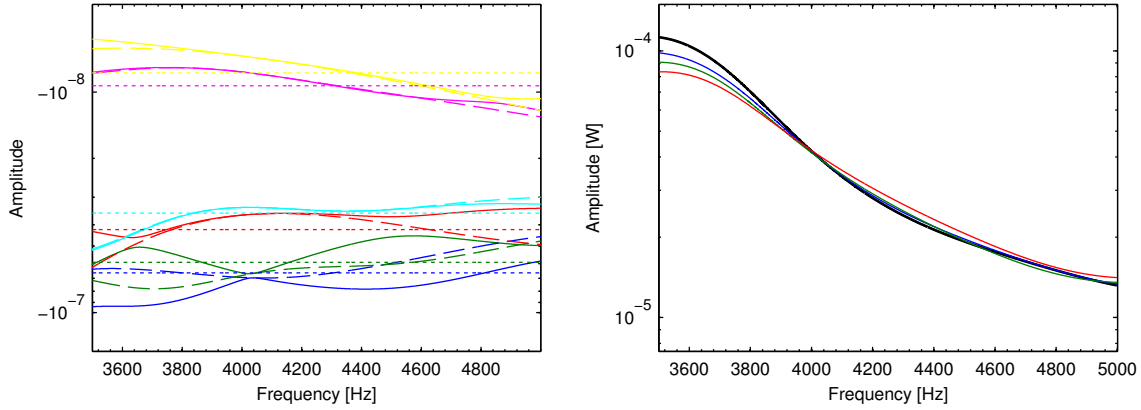
### Extension aux moyennes et hautes fréquences

Dans un second temps, on considère l'intervalle 3500-5000 Hz représentant le domaine des hautes fréquences. La figure 4.9 montre les valeurs propres de flux de puissance déterminées à partir des deux approches présentées. On remarque que si les valeurs normalisées à 4040 Hz sont du même ordre de grandeur que les valeurs exactes, elles ne sont pas identiques. Ceci est en partie dû au fait que la base de référence est très sensible au phénomène d'hybridation des efforts propres, puisqu'elle est associée à une fréquence d'antirésonance de la valeur propre dominante. On vérifie de plus que les valeurs moyennes donnent bien une image approchée du comportement sur cette bande de fréquence.

On visualise à nouveau, figure 4.9 (b), les différentes puissances transmises déterminées. Les erreurs relatives sont cette fois-ci moins importantes au regard de l'ordre de grandeur et l'évolution fréquentielle est respectée. Une variante de la méthode de filtrage est également illustrée. L'hybridation des efforts propres étant assez faible à ces fréquences, on propose ici de ne pas corriger la matrice  $S$  à chaque fréquence et donc de la conserver fixe, identique à celle déterminée à 4040 Hz. On constate que l'estimation associée tend à donner de meilleurs résultats que l'approche par matrice de flexibilité large bande.

#### 4.3.4 Conclusion

Cette étude visant à approximer les flux de puissance sur une bande de fréquence confirme bien les observations effectuées à l'issue du chapitre précédent : les phénomènes d'hybridation sont une caractéristique essentielle et complexe des efforts propres. Ils traduisent notamment l'action du comportement vibratoire sur les chemins de puissance à l'interface. Il est ainsi difficile de déterminer une base d'efforts propres de référence en basses fréquences, où les chemins de



(a) Valeurs propres de flux de puissance :  
 — exactes, — — normalisées à 4040  $Hz$ ,  
 ··· moyennes

(b) Puissance transmise : — exacte,  
 — efforts propres normalisés à 4040  $Hz$ ,  
 — fixés à 4040  $Hz$ , — moyens

FIG. 4.9: Approximation des modes de flux de puissance en hautes fréquences

puissance sont associés au mode de vibrations ayant la fréquence propre la plus proche. En revanche, lorsque les fréquences considérées s'approchent des moyennes et hautes fréquences, ce comportement modal tend à s'estomper, ce qui implique une stabilisation des chemins de puissance. Il est alors possible d'évaluer la puissance transmise suivant différents chemins fixes de puissance, de manière approchée. On remarque cependant que la notion de sous-espace principal semble moins pertinente dans ce cas.

On souligne enfin que cette approche peut se révéler utile dans un contexte d'isolation active des vibrations où il s'agirait d'évaluer rapidement la projection des efforts réels d'interface sur les modes de flux de puissance afin d'exercer, en temps réel, une force de rétroaction sur la structure. À l'image du dispositif proposé par Cazzolato et Hansen [32], le fait de considérer une base d'efforts propres fixe permettrait de s'affranchir de leur identification à chaque fréquence et donc de conserver des configurations d'excitateurs fixes, associées à chacun de ces chemins de puissance dominants. Une telle démarche a été mise en place par Burgemeister, dans un contexte vibro-acoustique, afin de minimiser la puissance acoustique émise par une structure, à l'aide de plaques perforées contrôlées activement en minimisant un critère d'erreur basé sur des modes de rayonnement [30].

## 4.4 Contrôlabilité par les efforts extérieurs

La méthode de caractérisation proposée dans ces travaux repose sur la capacité qu'ont les efforts réels d'interface à se projeter suivant des directions colinéaires à certains modes de flux de puissance. On rappelle de plus qu'il a été montré par Bardou *et al.* que le contrôle optimal des vibrations d'une structure est obtenu en minimisant la puissance introduite dans celle-ci. Or, les

valeurs propres de flux de puissance représentent la puissance potentiellement transmise à la sous-structure. Il semble alors particulièrement intéressant de solliciter en priorité les modes ayant les valeurs propres les plus faibles en valeur absolue. On propose ainsi d'étudier la contrôlabilité de ces chemins de puissance à l'interface, à partir des efforts extérieurs exercés sur la sous-structure source.

#### 4.4.1 Formulation théorique

Il s'agit donc ici de déterminer, à une fréquence d'intérêt donnée, pour une topologie de jonction donnée, les forces extérieures à exercer sur la structure afin de générer des efforts d'interface colinéaires à un chemin de puissance choisi *a priori*.

De la même manière qu'au chapitre précédent, on commence par déterminer les équations d'équilibre des différentes sous-structures, en distinguant les degrés de liberté internes des degrés de liberté de jonction et en tenant compte des relations de continuité aux interfaces (équation 3.58). On retrouve ainsi, pour la sous-structure source :

$$\begin{cases} Z_{ii}^{(S)} x_i^{(S)} + Z_{ij}^{(S)} x_j = f_i^{(S)} \\ Z_{ji}^{(S)} x_i^{(S)} + Z_{jj}^{(S)} x_j = -f_j \end{cases} \quad (4.18)$$

et pour la sous-structure réceptrice :

$$\begin{cases} Z_{ii}^{(R)} x_i^{(R)} + Z_{ij}^{(R)} x_j = 0 \\ Z_{ji}^{(R)} x_i^{(R)} + Z_{jj}^{(R)} x_j = f_j \end{cases} \quad (4.19)$$

Le but est alors d'exprimer le vecteur des efforts extérieurs appliqués à la sous-structure source  $f_i^{(S)}$ , en fonction des efforts d'interface  $f_j$  et de l'ensemble des paramètres physiques. En substituant l'expression de  $x_i^{(R)}$  obtenue à partir de la première ligne de l'équation 4.19 dans la seconde ligne, on obtient :

$$x_j = \left[ Z_{jj}^{(R)} - Z_{ji}^{(R)} \left[ Z_{ii}^{(R)} \right]^{-1} Z_{ij}^{(R)} \right]^{-1} f_j = \Gamma_{jj}^{(R)} f_j \quad (4.20)$$

On note qu'on retrouve ici la matrice de raideur dynamique condensée sur les degrés de liberté d'interface, dont l'inverse correspond à la restriction de la matrice de flexibilité dynamique sur ces mêmes degrés de liberté d'interface. On détermine ensuite  $x_i^{(S)}$  à partir de la première ligne de l'équation 4.18 :

$$x_i^{(S)} = \left[ Z_{ii}^{(S)} \right]^{-1} \left( f_i^{(S)} - Z_{ij}^{(S)} \Gamma_{jj}^{(R)} f_j \right) \quad (4.21)$$

que l'on substitue à son tour dans la seconde ligne :

$$Z_{ji}^{(S)} \left[ Z_{ii}^{(S)} \right]^{-1} f_i^{(S)} = - \left[ \left[ \Gamma_{jj}^{(S)} \right]^{-1} \Gamma_{jj}^{(R)} f_j + I_{N_j} \right] f_j \quad (4.22)$$

Or, d'après un calcul d'inverse par bloc, on relie les sous-matrices de raideur et de flexibilité par l'équation :

$$\Gamma_{ji}^{(S)} = -\Gamma_{jj}^{(S)} Z_{ji}^{(S)} \left[ Z_{ii}^{(S)} \right]^{-1} \quad (4.23)$$

On obtient donc la relation suivante :

$$\Gamma_{ji}^{(S)} f_i^{(S)} = \left[ \Gamma_{jj}^{(S)} + \Gamma_{jj}^{(R)} \right] f_j \quad (4.24)$$

On introduit maintenant le chemin de puissance voulu en remplaçant le vecteur des efforts d'interface  $f_j$  par l'effort propre associé  $g_\nu$ . Si l'on souhaite minimiser la puissance transmise à l'interface, il est nécessaire de choisir cet effort parmi le sous-espace non-dominant des modes de flux de puissance.

Il s'agit donc de résoudre, à une fréquence donnée, le problème inverse suivant :

$$A f_i^{(S)} = \bar{x}_j \quad (4.25)$$

où :

$$A = \Gamma_{ji}^{(S)} \quad (4.26)$$

$$\bar{x}_j = \left[ \Gamma_{jj}^{(S)} + \Gamma_{jj}^{(R)} \right] g_\nu \quad (4.27)$$

La matrice  $A \in \mathbb{C}^{(N_j, N_i^{(S)})}$  étant rectangulaire, le système d'équations est sous-déterminé et admet théoriquement une infinité de solutions. De ce fait, on se ramène à un problème d'optimisation de type moindres carrés, visant à minimiser la norme des efforts extérieurs  $f_i^{(S)}$ , tout en respectant la contrainte d'égalité initiale :

$$\begin{cases} \min \left\| f_i^{(S)} \right\| \\ \text{avec : } A f_i^{(S)} - \bar{x}_j = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Ce problème demeure cependant trop général et peu représentatif d'un cas réel. En effet, si  $N_j \ll N_i^{(S)}$ , la sous-structure n'est en principe sollicitée que suivant un nombre réduit de degrés de liberté, dont on connaît la localisation. On propose alors d'ajouter une seconde équation de contrainte permettant de sélectionner les degrés de liberté internes à la sous-structure source susceptibles d'être excités. On introduit pour cela une matrice booléenne  $C$  et un vecteur  $\bar{f}_e$ , imposant un chargement nul sur les degrés de liberté restant. Il en résulte une nouvelle formulation du problème d'optimisation avec contraintes d'égalité :

$$\begin{cases} \min \left\| f_i^{(S)} \right\| \\ \text{avec : } A f_i^{(S)} - \bar{x}_j = 0 \\ \quad C f_i^{(S)} - \bar{f}_e = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Résoudre ce problème d'optimisation revient donc à minimiser la fonction coût  $\mathcal{F}_c$ , correspondant au lagrangien, suivante :

$$\mathcal{F}_c = f_i^{(S)T} f_i^{(S)} + \lambda_1^T \left( A f_i^{(S)} - \bar{x}_j \right) + \lambda_2^T \left( C f_i^{(S)} - \bar{f}_e \right) \quad (4.30)$$



par rapport à  $f_i^{(S)}$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  qui correspondent aux multiplicateurs de Lagrange associés aux équations de contrainte, d'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial f_i^{(S)}} = 0 & \Leftrightarrow & 2f_i^{(S)} + A^T \lambda_1 + C^T \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \lambda_1} = 0 & \Leftrightarrow & Af_i^{(S)} - \bar{x}_j = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \lambda_2} = 0 & \Leftrightarrow & Cf_i^{(S)} - \bar{f}_e = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

On détermine ensuite l'expression de ces multiplicateurs en résolvant le sous-système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} AA^T & AC^T \\ CA^T & CC^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\bar{x}_j \\ -2\bar{f}_e \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

On obtient finalement l'expression du vecteur optimal des efforts extérieurs à exercer sur la sous-structure source par substitution :

$$f_i^{(S)} = -\frac{1}{2}A^T \lambda_1 - \frac{1}{2}C^T \lambda_2 \quad (4.33)$$

#### 4.4.2 Application

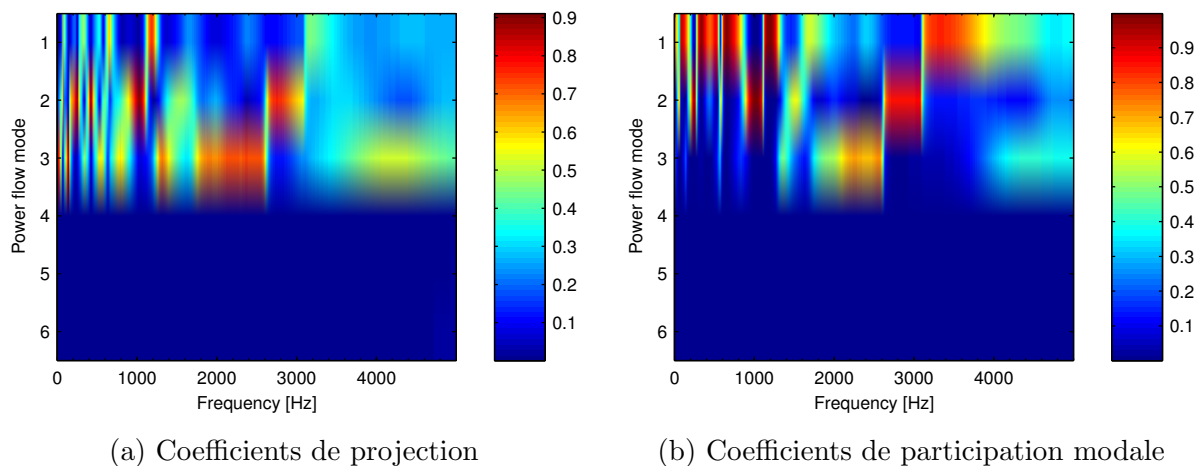
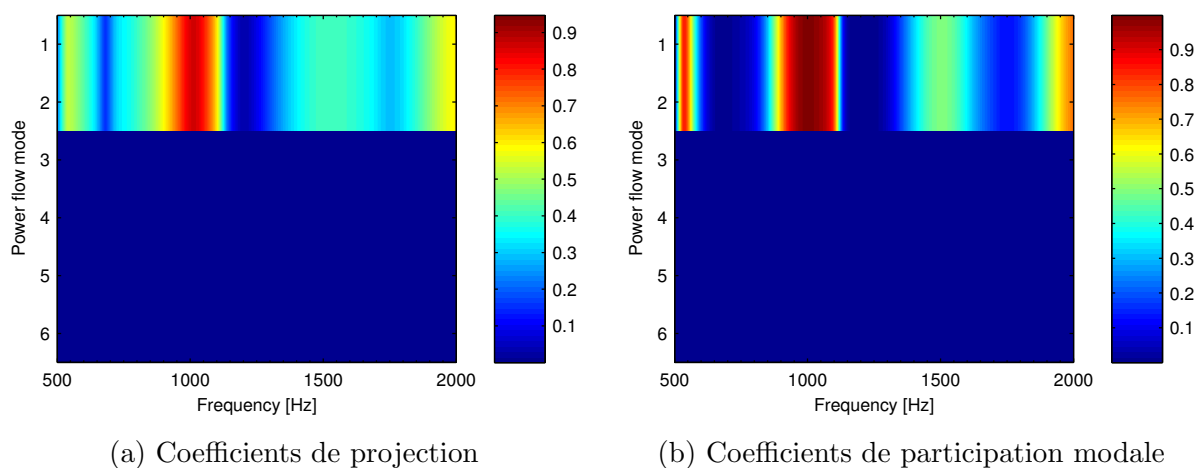
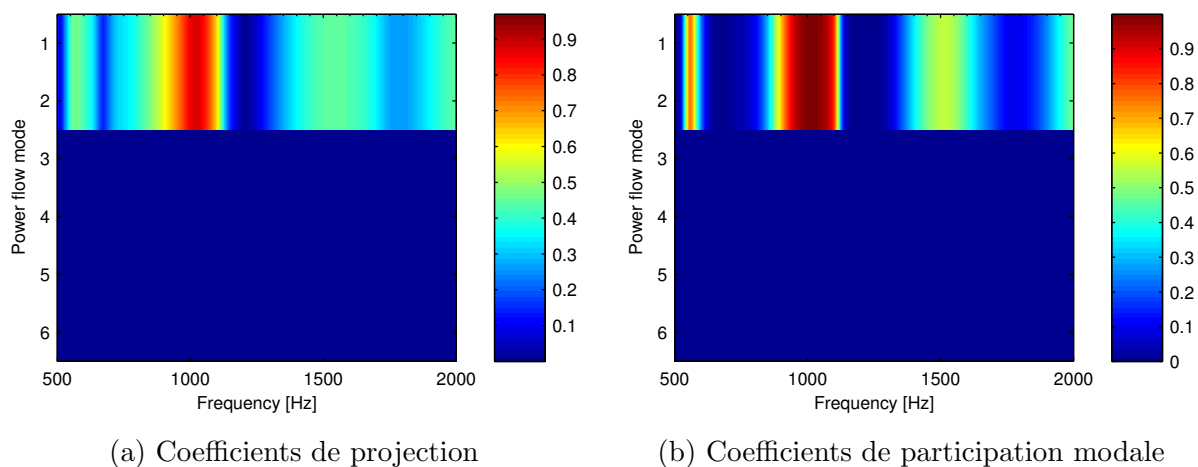
On propose maintenant d'illustrer cette méthode en l'appliquant au système de poutres couplées introduit au chapitre 3.4.3. Le but n'étant pas d'optimiser la localisation des points d'application des efforts extérieurs, on considère que seuls les degrés de liberté en translation  $T_x$  et  $T_y$  des nœuds 1 et 2 sont susceptibles d'être sollicités.

##### Cas 1: optimisation suivant $g_3$ à 2200 Hz

On décide dans un premier temps de minimiser la puissance transmise à la sous-structure réceptrice aux alentours de 2200 Hz. Il a été mis en évidence au chapitre 3.4.3 que les efforts propres  $g_1, g_2$  et  $g_4$  décrivent un sous-espace dominant des modes de flux de puissance. On constate en particulier, figures 3.23 et 3.24 (b), que le chemin de puissance principal à cette fréquence est associé au deuxième mode. On cherche donc à projeter les efforts réels d'interface suivant une direction orthogonale à cet espace, par exemple colinéaire à  $g_3$ .

On donne, tableau 4.1, la décomposition du vecteur optimal des efforts extérieurs obtenu par résolution du problème défini équation 4.29<sup>4</sup>. On constate qu'il représente un chargement en flexion, ce qui correspond au fait que le troisième mode de flux de puissance soit associé au comportement transverse de la sous-structure réceptrice. Ces efforts sont ensuite appliqués à la sous-structure source. En visualisant, figure 4.10 (a), les coefficients de projection, on vérifie que les efforts réels d'interface se projettent bien suivant  $g_3$  à 2200 Hz. Les coefficients de participation modale, figure 4.10 (b), montrent enfin que le troisième mode de flux de puissance constitue

4. Afin de pouvoir comparer par la suite les puissances transmises à l'interface associées à ces différents chargements, on choisit de normer les efforts extérieurs à une amplitude de 10 N.

FIG. 4.10: Résultats de l'optimisation suivant  $g_3$  à 2200  $Hz$ FIG. 4.11: Résultats de l'optimisation suivant  $g_3$  à 1250  $Hz$ FIG. 4.12: Résultats de l'optimisation suivant  $g_1$  à 1250  $Hz$

Amplitudes normées				
Nœud	Direction	Cas 1	Cas 2	Cas 3
1	$T_x$	0	0	0
	$T_y$	-5.97	-8.13	7.18
2	$T_x$	0	0	0
	$T_y$	8.02	5.82	-6.96

TAB. 4.1: Efforts extérieurs optimaux pour le système de poutres couplées

bien le chemin de puissance principal au voisinage de cette fréquence. On note également que les chemins associés au comportement transverse ne sont pas du tout sollicités.

On observe, figure 4.13 (a), l'évolution fréquentielle de la puissance transmise à la sous-structure réceptrice, pour différents chargements de la sous-structure source. On constate que si celle-ci est inférieure à sa valeur initiale vers 2200  $Hz$ , elle tend à la majorer sur le reste de l'intervalle fréquentiel. En effet, le vecteur optimal des efforts extérieurs est plus à même d'exciter les modes de flexion de la structure que le chargement initial. Ainsi, la partie de la puissance qui transitait par les chemins associés au comportement longitudinal est maintenant transférée sur les deux premiers modes de flux de puissance (figure 4.10 (b)).

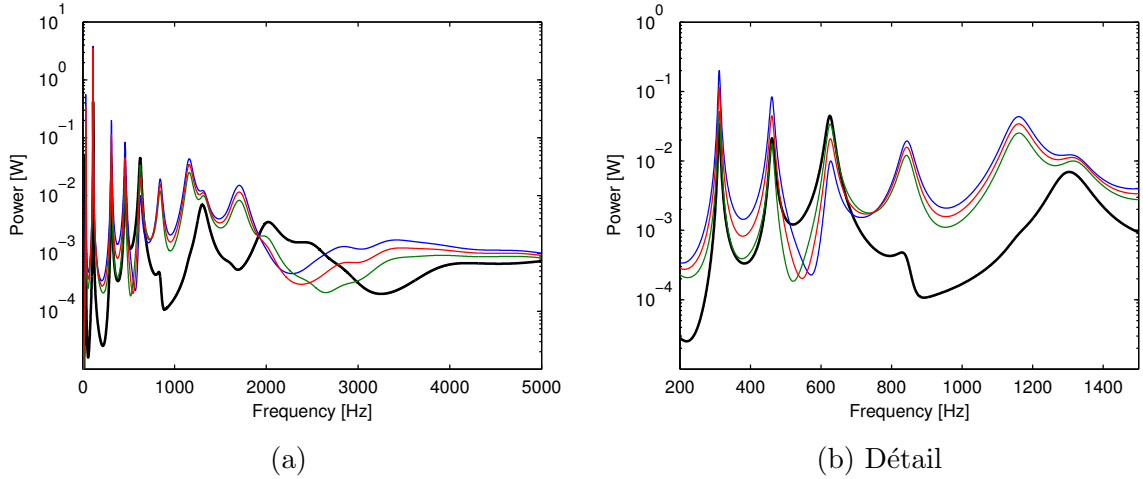


FIG. 4.13: Puissances transmises par différentes configurations d'efforts extérieurs :

— initiale, — cas 1, — cas 2, — cas 3

### Cas 2 : optimisation suivant $g_3$ à 1250 $Hz$

On poursuit le raisonnement précédent en se plaçant cette fois-ci à la fréquence de résonance du mode de flux de puissance  $g_4$  représentant le comportement en traction-compression (figure

3.22 (a)). À nouveau, le fait de se projeter suivant le chemin de puissance associé au troisième mode conduit à un chargement extérieur en flexion pure (tableau 4.1). On observe, figure 4.11 (a) que les efforts d'interface se projettent à 55 % suivant  $g_3$  et 35 % suivant  $g_1$ . La figure 4.11 (b) montre cependant que le chemin dirigé par  $g_1$  a une plus grande participation que celui dirigé par  $g_3$ . On retrouve ainsi l'impact des valeurs propres de flux de puissance dans l'expression de la puissance transmise, qui contrôlent en quelque sorte le débit associé à chaque chemin ( $s_3 \ll s_1$ ). On constate enfin, figure 4.13 (b), que même si le mode de flux de puissance dominant  $g_4$  n'est pas sollicité, l'excitabilité des modes de vibration en flexion est suffisamment importante pour transmettre plus de puissance à l'interface qu'initialement.

### Cas 3 : optimisation suivant $g_1$ à 1250 Hz

Enfin, en conséquence de la remarque précédente, on rappelle que si la caractérisation de la puissance transmise s'effectue au niveau de la structure couplée, les modes de flux de puissance ne dépendent que de la sous-structure réceptrice. Certains chemins de puissance peuvent alors se révéler en contradiction avec le comportement modal global : si l'on se place aux alentours d'une fréquence de résonance de la puissance transmise, c'est-à-dire proche d'un mode propre de vibration de la structure couplée, il est impossible d'inverser les participations des différents modes de flux de puissance.

Ainsi, étant donnés les résultats précédents, il est peu probable de parvenir à projeter entièrement les efforts d'interface à 1250 Hz suivant  $g_1$ . Ceci est confirmé par les figures 4.12 (a) et (b) qui représentent qualitativement le même comportement à cette fréquence que les deux figures précédentes. Ces coefficients de projections sont cependant légèrement différents et on constate, figure 4.13 (b), que la puissance transmise dans ce cas est plus importante que dans le cas 2, ce qui traduit bien le fait que  $s_1 \gg s_3$ .

#### 4.4.3 Conclusion

Cette procédure d'optimisation a permis de mettre en évidence la contrôlabilité des chemins de puissance à l'interface, ainsi que de valider l'approche visant à se projeter suivant des directions complémentaires au sous-espace dominant afin de minimiser la puissance transmise. Bien entendu, les applications ont à nouveau montré que la qualité des résultats est fortement influencée par le comportement modal de la structure globale. Néanmoins, cette étude complète la précédente en montrant qu'il est intéressant d'envisager une stratégie de contrôle actif des vibrations s'appuyant sur un critère d'erreur faisant intervenir les modes de flux de puissance. Ces méthodes ont déjà fait l'objet de nombreuses études parmi lesquelles on distingue particulièrement les travaux de Gardonio *et al.* [54, 55, 53], ainsi que de Beijers [10].

## 4.5 Adaptation aux structures complexes

### 4.5.1 Approche directe

Comme exposé au chapitre 3.4, équations 3.62 à 3.65, le calcul des modes de flux de puissance nécessite de déterminer la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique de la sous-structure réceptrice, restreinte à ses degrés de liberté de jonction. L'approche initialement proposée s'appuie sur des calculs d'inverse successifs des matrices de raideurs dynamiques, à chaque pas de fréquence considéré. Or, le coût associé à cette démarche, que l'on peut estimer par l'intermédiaire des temps CPU, s'avère prohibitif lorsque la taille des modèles éléments finis augmente. On illustre ainsi, tableau 4.2, que cette approche directe ne constitue pas une solution acceptable dans le cas de structures industrielles complexes.

Approche	Bande de fréquence	Temps CPU relatif (%)
Directe	$f$	100
Modale	$f$	4,2
Modale	$f$	4,9
avec résidus	$3f$	5,2
Condensation	$3f$	4,3

TAB. 4.2: Temps CPU relatifs des différentes approches de calcul des modes de flux de puissance

Il est toutefois intéressant de noter que ce calcul d'inverse peut être effectué numériquement en résolvant un système d'équations linéaires de la forme<sup>5</sup> :

$$\begin{bmatrix} Z_{ii} & Z_{ij} \\ Z_{ji} & Z_{jj} \end{bmatrix} \bar{U} = \bar{F} \quad (4.34)$$

où les colonnes de la matrice  $\bar{F} \in \mathbb{R}^{(N, N_j)}$  représentent des chargements unitaires successifs sur chacun des degrés de liberté d'interface. La matrice de raideur dynamique étant hermitienne et définie positive, il est possible de résoudre ce système par factorisation de Cholesky [77] afin d'obtenir la matrice suivante :

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} \\ \Gamma_{jj} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

dont la restriction aux lignes associées aux degrés de liberté de jonction donne la matrice de flexibilité dynamique recherchée.

5. Afin d'alléger les notations, on sous-entend le fait que ces différentes grandeurs se rapportent à la sous-structure réceptrice en omettant l'exposant  $^{(R)}$ .

Les efforts réels d'interface sont ensuite obtenus en multipliant le vecteur des déplacements sur les degrés de liberté d'interface par la matrice de raideur dynamique associée. Ceci implique donc de déterminer au préalable ces réponses fréquentielles à partir d'un calcul sur la structure couplée globale, soumise au chargement considéré<sup>6</sup>.

### 4.5.2 Approche par superposition modale

L'étude paramétrique effectuée au chapitre précédent a mis en évidence l'impact du comportement modal de la structure sur les modes de flux de puissance. On propose ainsi de déterminer la matrice de flexibilité dynamique par méthode de superposition modale.

De manière classique, on rappelle que le problème aux valeurs propres en vibration du système conservatif associé à la sous-structure réceptrice est donné par :

$$[K - \omega_i^2 M] \phi_i = 0 \quad (4.36)$$

On définit ainsi la matrice modale  $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_N] \in \mathbb{R}^{(N,N)}$ , vérifiant les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\Phi^T M \Phi = \mu = \text{diag}(\mu_i) \quad (4.37)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda = \text{diag}(\omega_i^2 \mu_i) \quad (4.38)$$

On effectue ensuite un changement de base en posant  $x = \Phi q$ , avec  $q \in \mathbb{R}^{(N,1)}$  le vecteur des coordonnées généralisées. On peut alors récrire l'équation d'équilibre dynamique à l'aide des matrices de masse, d'amortissement et de raideur modales, respectivement  $\mu$ ,  $\beta$  et  $\Lambda$ , sous la forme :

$$[-\omega^2 \mu + j\omega\beta + \Lambda] q = \Phi^T f \quad (4.39)$$

On en déduit l'expression de la flexibilité dynamique suivante :

$$\Gamma(\omega) = \Phi [-\omega^2 \mu + j\omega\beta + \Lambda]^{-1} \Phi^T \quad (4.40)$$

Étant donné que l'on se place dans l'hypothèse d'un amortissement proportionnel, la matrice  $\beta$  vérifie :

$$\Phi^T B \Phi = \beta = \text{diag}(\beta_i) = \text{diag}(2\xi_i \omega_i \mu_i) \quad (4.41)$$

On obtient alors une nouvelle expression de  $\Gamma^{\mathfrak{S}}$  en fonction de la fréquence :

$$\Gamma^{\mathfrak{S}}(\omega) = \Phi^T \Im \left\{ \text{diag} \left( \frac{1}{\mu_i (-\omega^2 + 2j\xi_i \omega_i \omega + \omega_i^2)} \right) \right\} \Phi \quad (4.42)$$

$$= \Phi^T \text{diag} \left( -\frac{2\xi_i \omega_i \omega}{\mu_i [(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i \omega_i \omega)^2]} \right) \Phi \quad (4.43)$$

6. Dans ces travaux, la commande *MPCForce* du logiciel *NASTRAN* a été utilisée afin de déterminer directement les efforts transitant par des éléments rigides (*RBE*) localisés sur les degrés de liberté de jonction.

Les différentes quantités modales étant positives par définition, on souligne que cette expression permet de démontrer, dans le cas d'un amortissement proportionnel, que la matrice de flexibilité dynamique est bien semi-définie négative.

Cependant, les coûts de calcul et de stockage propres à la méthode des éléments finis empêchent généralement la détermination complète de la matrice modale  $\Phi$ , en particulier pour les structures industrielles complexes. On effectue donc une troncature modale en supposant que seuls les  $m$  premiers modes sont connus, ce qui entraîne les découpages en sous-matrices suivants :

$$\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2] = [\phi_1 \dots \phi_m \ \phi_{m+1} \dots \phi_N] \quad (4.44)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

où l'indice  $.1$  représente la partie tronquée des différentes matrices et  $.2$  la partie complémentaire, inconnue car non calculée. On peut alors récrire l'équation (4.40) sous la forme suivante :

$$\Gamma(\omega) = \Phi_1 [-\omega^2 \mu_1 + j\omega \beta_1 + \Lambda_1]^{-1} \Phi_1^T + \Phi_2 [-\omega^2 \mu_2 + j\omega \beta_2 + \Lambda_2]^{-1} \Phi_2^T \quad (4.46)$$

$$= \Phi_1 [-\omega^2 \mu_1 + j\omega \beta_1 + \Lambda_1]^{-1} \Phi_1^T + R(\omega) \quad (4.47)$$

Une règle couramment utilisée en analyse modale consiste à calculer les  $m$  premiers modes de telle sorte que  $f_m = [1,5 - 3] f_{max}$ , où  $f_{max}$  est la fréquence maximale de l'intervalle d'étude. Dans ce cas, la matrice résiduelle  $R(\omega) \in \mathbb{C}^{(N,N)}$  représentant la participation des modes non pris en compte peut être négligée.

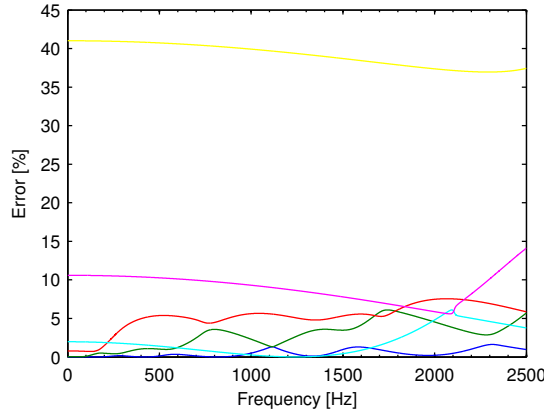


FIG. 4.14: Erreurs relatives sur les valeurs propres de flux de puissance - superposition

modale : —  $s_1$ , —  $s_2$ , —  $s_3$ , —  $s_4$ , —  $s_5$ , —  $s_6$

On visualise, figure 4.14, les erreurs relatives entre les valeurs propres de flux de puissance calculées par méthode directe puis par superposition modale, en retenant les modes compris entre 0 et 7500  $Hz$ . On constate que celles-ci sont globalement inférieures à 15 % (exceptée la

dernière qui se rapporte à une valeur propre de flux de puissance quasi-nulle et n'est donc pas à prendre en compte). Le nombre de modes propres de vibration retenus semble donc insuffisant pour garantir une bonne prédiction. On note cependant, tableau 4.2, que le temps de calcul a été sensiblement diminué. Ces résultats peuvent être améliorés en augmentant le nombre de modes pris en compte (par exemple sur un intervalle  $0-6f_{max}$ ), ce qui tend toutefois à augmenter les coûts de calcul.

### Prise en compte des erreurs de troncature

Une autre possibilité consiste à tronquer la base modale à une fréquence  $f_m = 3f_{max}$  et à déterminer une expression approchée du résidu  $R(\omega)$ . On se ramène ainsi généralement au développement à l'ordre 0 en  $\omega$  suivant<sup>7</sup> :

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \Phi_2 [-\omega^2 \mu_2 + j\omega \beta_2 + \Lambda_2]^{-1} \Phi_2^T \\ &= \Phi_2 \Lambda_2^{-1} [-\omega^2 \mu_2 \Lambda_2^{-1} + j\omega \beta_2 \Lambda_2^{-1} + I]^{-1} \Phi_2^T \\ &\approx \Phi_2 \Lambda_2^{-1} \Phi_2^T \end{aligned} \quad (4.48)$$

La matrice des résidus statiques ainsi obtenue est alors facilement calculable à partir des quantités modales tronquées :

$$R_s = K^{-1} - \Phi_1 \Lambda_1^{-1} \Phi_1^T \quad (4.49)$$

De même qu'au paragraphe précédent, on indique que le calcul d'inverse de la matrice de raideur peut être effectué par factorisation de Cholesky, lorsque la structure n'admet pas de modes de corps rigide. Le cas échéant, il est nécessaire de faire appel à une technique de filtrage afin de déterminer une matrice de pseudo-flexibilité statique<sup>8</sup>.

Or, on remarque que cette correction ne change en rien l'expression de la partie imaginaire de  $\Gamma(\omega)$  et est donc sans effet sur le calcul des modes de flux de puissance. On propose alors de recalculer une matrice de résidus dynamiques faisant intervenir la matrice d'amortissement :

$$\begin{aligned} R(\omega) &\approx \Phi_2 \Lambda_2^{-1} [I + j\omega \beta_2 \Lambda_2^{-1}]^{-1} \Phi_2^T \\ &\approx \Phi_2 \Lambda_2^{-1} [I - j\omega \beta_2 \Lambda_2^{-1}] \Phi_2^T \\ &\approx R_s - j\omega R_s C R_s \end{aligned} \quad (4.50)$$

En remplaçant  $R(\omega)$  dans l'équation (4.47), l'expression de la matrice de flexibilité dynamique par superposition modale devient :

$$\Gamma^{\mathfrak{S}}(\omega) \approx \mathfrak{S}m \left\{ \Phi_1 [-\omega^2 \mu_1 + j\omega \beta_1 + \Lambda_1]^{-1} \Phi_1^T + R_s - j\omega R_s C R_s \right\} \quad (4.51)$$

On observe, figure 4.15, que cette approche permet d'obtenir une erreur relative inférieure à 2 % sur les valeurs propres de flux de puissance, tout en conservant un faible coût de calcul (tableau 4.2).

7. On indique que Rubin a proposé de poursuivre ce développement en prenant également en compte les termes d'inertie et d'amortissement [140].

8. On trouvera un rappel de cette méthode en annexe B.2.



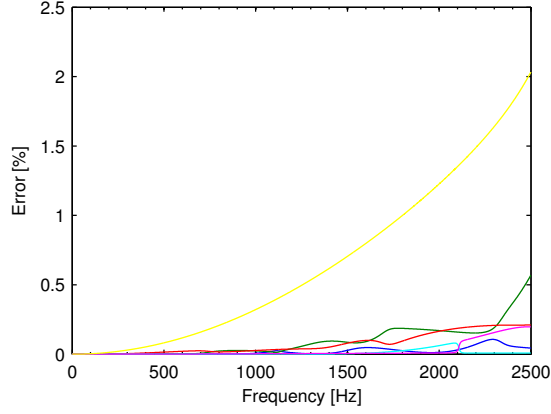


FIG. 4.15: Erreurs relatives sur les valeurs propres de flux de puissance - superposition modale avec résidus : —  $s_1$ , —  $s_2$ , —  $s_3$ , —  $s_4$ , —  $s_5$ , —  $s_6$

### 4.5.3 Approche par condensation

Si l'approche précédente permet de relier les modes de flux de puissance au comportement vibratoire de la sous-structure réceptrice, tout en étant prédictive et peu coûteuse en temps de calcul, elle ne permet de déterminer les quantités d'interface que par restriction du résultat obtenu sur l'ensemble de la sous-structure réceptrice. On propose donc une dernière approche par condensation qui vise à concentrer le comportement global afin de se ramener à un problème équivalent de taille réduite, associé aux degrés de liberté d'interface<sup>9</sup>.

On commence par rappeler l'équation d'équilibre de la sous-structure réceptrice :

$$\left[ \begin{bmatrix} K_{jj} & K_{ji} \\ K_{ji}^T & K_{ii} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{jj} & M_{ji} \\ M_{ji}^T & M_{ii} \end{bmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_j \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

La première ligne du système matriciel exprime alors l'équilibre à l'interface :

$$[K_{jj} - \omega^2 M_{jj}] x_j + [K_{ji} - \omega^2 M_{ji}] x_i = f_j \quad (4.53)$$

On constate que cette expression nécessite la réponse de la structure sur l'ensemble de ses degrés de liberté, dont le calcul se révèle bien souvent prohibitif. Les méthodes de synthèse modale de type interface bloquée [36] permettent alors d'exprimer le vecteur des déplacements, restreint aux  $N_i$  degrés de liberté intérieur  $i$  (ou esclaves), en fonction des  $N_j$  degrés de liberté d'interface  $j$  (ou maîtres), à l'aide d'une projection sur une base de Ritz de la forme :

$$x_i = \Psi x_j + \Phi c \quad (4.54)$$

où  $\Psi = -K_{ii}^{-1} K_{ji}^T$  correspond à la matrice des modes contraints (ou modes statiques de jonction),  $c \in \mathbb{R}^{N_p,1}$  est le vecteur des coordonnées généralisées associé à la matrice tronquée  $\Phi \in \mathbb{R}^{(N_j, N_p)}$

<sup>9</sup>. On trouvera dans l'article de De Klerk *et al.* [40] une revue historique ainsi qu'une classification des principales méthodes de sous-structuration.

constituée de  $N_p$  modes normaux de la structure à interface fixe. Ceux-ci sont issus du problème aux valeurs propres :

$$[K_{ii} - \sigma_\nu^2 M_{ii}] \Phi_\nu = 0, \quad \nu = 1, \dots, N_i \quad (4.55)$$

et vérifient les relations d'orthogonalité :

$$\Phi^T K_{ii} \Phi = \text{diag}(\sigma_\nu^2) = \Sigma \quad (4.56)$$

$$\Phi^T M_{ii} \Phi = I_{N_p} \quad (4.57)$$

On note ici que la relation 4.54 est exacte lorsque la base  $\Phi$  considérée est complète or, en général,  $N_p \ll N_i$ .

La méthode proposée par Petersmann et Leung [120, 92, 91] permet alors d'exprimer les coordonnées généralisées en fonction des degrés de liberté physiques  $x_j$  et aboutit au problème suivant :

$$\left[ K_G - \omega^2 [M_G + RE(\omega)R^T] \right] x_j = f_j \quad (4.58)$$

où  $R = \Psi^T M_{ii} \Phi + M_{ji} \Phi = -K_{ji} \Phi \Sigma^{-1} + M_{ji} \Phi$  et  $E(\omega) = \omega^2 [\Sigma - \omega^2 I_{N_p}]^{-1}$ . Celui-ci peut être interprété comme une correction de la matrice de masse de Guyan  $M_G$  prenant en compte le comportement dynamique des degrés de liberté esclaves<sup>10</sup>. On souligne cependant que cette expression n'est pas définie aux fréquences de résonance des modes de la sous-structure encastrée, issues du problème 4.55, pour lesquelles le terme général de la matrice  $E(\omega)$  tend vers l'infini :

$$E_{(i,i)}(\omega) = \frac{\omega^2}{\sigma_i^2 - \omega^2} \quad (4.59)$$

Les calculs précédents n'ayant pour but que d'exposer les différentes matrices de transformation, il est nécessaire d'introduire la matrice d'amortissement (du type  $C = aK + bM$ ) afin de retrouver des matrices de raideur et de flexibilité dynamiques complexes, permettant de déterminer la puissance transmise. On applique ainsi la transformation 4.54 au système dissipatif complet :

$$\left[ \left[ \begin{array}{cc} K_G & 0 \\ 0 & \Sigma \end{array} \right] + j\omega \left[ \begin{array}{cc} C_G & bR \\ bR^T & a\Sigma + bI_{N_p} \end{array} \right] - \omega^2 \left[ \begin{array}{cc} M_G & R \\ R^T & I_{N_p} \end{array} \right] \right] \begin{pmatrix} x_j \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

La seconde ligne de ce système permet à nouveau de supprimer les coordonnées généralisées à l'aide de la relation de substitution :

$$c = [(-\omega^2 + j\omega b)I_{N_p} + (j\omega a + 1)\Sigma]^{-1} (-\omega^2 + j\omega b)R^T x_j \quad (4.61)$$

<sup>10</sup>. Dans le cas particulier où  $p = 0$ , on retrouve la formulation du problème par la condensation statique de Guyan.

On obtient finalement, après réarrangement, le problème condensé suivant :

$$\left[ K_G + j\omega C_G - \omega^2 M_G + (j\omega b + \omega^2) R \bar{E}(\omega) R^T \right] x_j = f_j \quad (4.62)$$

où la nouvelle matrice de correction  $\bar{E}(\omega)$  est définie par :

$$\bar{E}(\omega) = \left[ \Sigma + j\omega [a\Sigma + bI_{N_p}] - \omega^2 I_{N_p} \right]^{-1} \quad (4.63)$$

Cette approche permet de calculer la matrice  $\Gamma^{\mathfrak{S}}$  en inversant, à chaque fréquence, une matrice de la taille du nombre de degrés de liberté d'interface. Si cette opération semble moins coûteuse que les précédentes (tableau 4.2), elle nécessite de déterminer au préalable un ensemble de modes de vibration à interface bloquée, dont le nombre conditionne la qualité de la condensation. On observe, figure 4.16 (a), qu'en retenant les modes compris entre  $0 - 3f$  on obtient une erreur relative sur les valeurs propres de flux de puissance inférieure à 9 %. On note que ce résultat peut être encore amélioré en ajoutant simplement des résidus statiques à cette base : l'erreur devient alors inférieure à 5 % (figure 4.16 (b)).

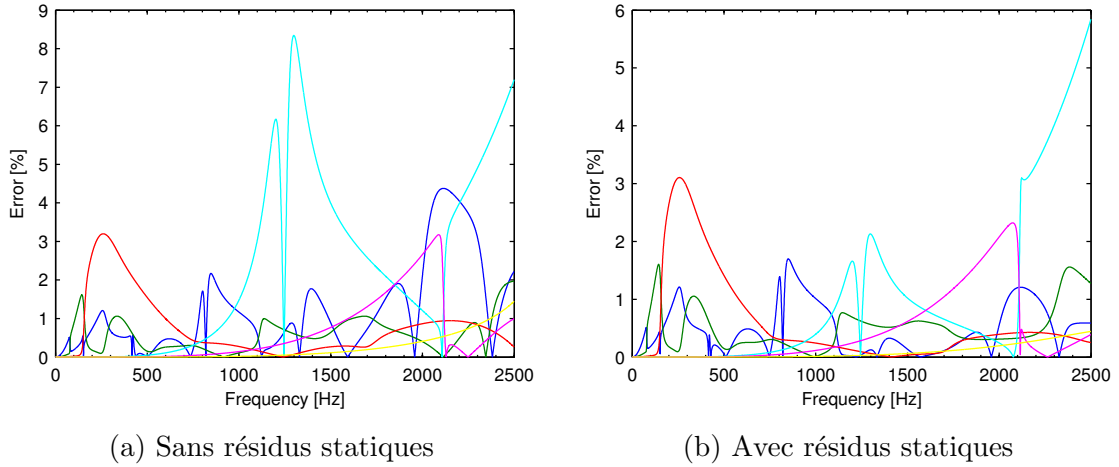


FIG. 4.16: Erreurs relatives sur les valeurs propres de flux de puissance - condensation dynamique : —  $s_1$ , —  $s_2$ , —  $s_3$ , —  $s_4$ , —  $s_5$ , —  $s_6$

On indique enfin qu'il est possible d'utiliser l'équation 4.62 afin de calculer les efforts réels d'interface. On visualise, figure 4.17 (a), l'évolution fréquentielle de leur amplitude et on remarque, figure 4.17 (b), que l'erreur par rapport au calcul exact est globalement inférieure à 4 % (sauf sur certains degrés de liberté qui admettent des antirésonances, d'où des erreurs relatives plus importantes).

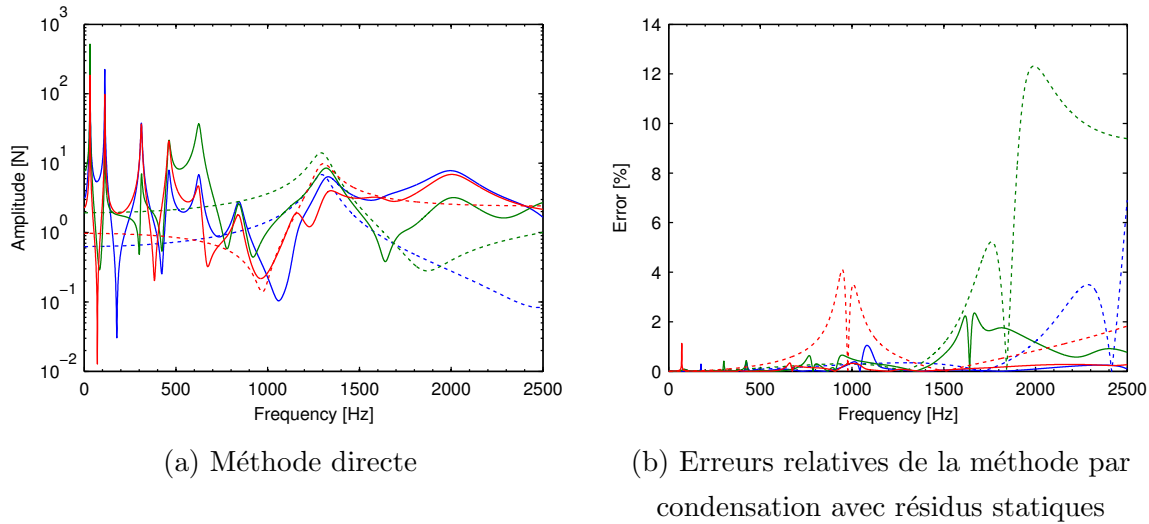


FIG. 4.17: Calcul des efforts d'interface : — nœud 21, — nœud 22, — nœud 23 ;  $\cdots T_x$ ,  $-T_y$

#### 4.5.4 Conclusion

Les différentes approches présentées dans ce paragraphe montrent l'intérêt d'utiliser le comportement modal de la sous-structure réceptrice afin d'exprimer, de manière efficace, la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique sur ses degrés de liberté d'interface. Il en résulte une diminution des coûts de calcul associés à la détermination des modes de flux de puissance, en particulier dans le cas de structures complexes dont le modèle éléments finis est de grande taille. Or, on montre dans le chapitre suivant que ceci se révèle particulièrement intéressant dans un contexte de conception robuste, où l'évaluation des modifications apportées au système initial nécessite de nombreuses analyses successives, dans le but de déterminer une solution optimale.

# VERS UNE CONCEPTION ROBUSTE DES INTERFACES DE STRUCTURES

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>110</b>
<b>5.2</b>	<b>Rappels bibliographiques</b>	<b>110</b>
5.2.1	Définition du problème de conception	110
5.2.2	Prise en compte des incertitudes	113
5.2.3	Méthodes de conception robuste	115
<b>5.3</b>	<b>Présentation de la structure test</b>	<b>118</b>
5.3.1	Modèle éléments finis	118
5.3.2	Comportement dynamique	120
<b>5.4</b>	<b>Réanalyse de la sous-structure réceptrice</b>	<b>124</b>
5.4.1	Sensibilité des valeurs propres de flux de puissance	125
5.4.2	Réanalyse robuste des modes de flux de puissance	127
<b>5.5</b>	<b>Optimisation par rapport aux paramètres d'interface</b>	<b>130</b>
5.5.1	Investigations préliminaires	130
5.5.2	Optimisation mono-objectif	132
5.5.3	Optimisation multiobjectif robuste	136
<b>5.6</b>	<b>Robustesse d'un choix de conception en présence de méconnaissances</b>	<b>139</b>
5.6.1	Approche <i>info-gap</i>	139
5.6.2	Complexité des modèles d'incertitudes	140
5.6.3	Définition du calcul	141
5.6.4	Comparaison des solutions optimales	142
<b>5.7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>143</b>

---

## 5.1 Introduction

Les chapitres précédents ont permis de présenter en détail la méthode des modes de flux de puissance développée dans ces travaux. Ils ont montré son aptitude à caractériser, de manière qualitative et quantitative, les transferts vibratoires aux interfaces entre différents composants d'une structure et mis en évidence l'intérêt d'utiliser ces nouvelles grandeurs dans une approche d'isolation dynamique basée sur la minimisation de la puissance transmise.

Ce dernier chapitre vise à intégrer cette méthode dans une démarche de conception des interfaces de structures complexes dont le but est de déterminer des paramètres optimaux, permettant de garantir les performances vibratoires recherchées. Cependant la variabilité de ces paramètres ainsi que des différents environnements ou conditions d'utilisation, susceptible d'être rencontrée dans des situations réelles, nécessite de rechercher des solutions qualifiées de robustes vis-à-vis de ces méconnaissances et incertitudes.

Après quelques rappels bibliographiques concernant les méthodes de conception robuste et la prise en compte des incertitudes, on se ramène à l'étude d'une structure test, représentative d'un modèle simplifié de lanceur spatial, dont on cherche à minimiser la puissance transmise aux interfaces entre les principaux composants. Dans un premier temps, on suggère une reconception de la sous-structure réceptrice, dont les paramètres définissent les chemins de puissance susceptibles d'être sollicités. Pour cela, on introduit une analyse de sensibilité ainsi qu'une méthode de réanalyse approchée des modes de flux de puissance, visant à limiter les coûts de calcul. Dans un deuxième temps on propose d'optimiser les paramètres de raideur des jonctions en comparant une approche mono-objectif à une approche multi-objectif robuste. Enfin, on s'intéresse plus en détail à la notion de robustesse et on montre l'intérêt de faire appel à une approche non-probabiliste de type *info-gap* afin de quantifier l'impact des méconnaissances sur ces solutions optimales.

## 5.2 Rappels bibliographiques

### 5.2.1 Définition du problème de conception

Dans le domaine de l'ingénierie et en particulier en mécanique, les démarches de conception visent à maximiser les performances d'une structure. Celles-ci sont issues d'un ensemble de spécifications et traduites sous forme d'objectifs et de contraintes à respecter. Le rôle du concepteur est alors de résoudre un problème d'optimisation qu'il est possible d'exprimer, en première approche, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^{(N_x,1)}} \mathcal{F}(x), \mathcal{F} \in \mathbb{R} \\ \text{avec :} \\ g(x) \leq 0, g \in \mathbb{R}^{(N_g,1)} \\ h(x) = 0, h \in \mathbb{R}^{(N_h,1)} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Il s'agit ici de déterminer le vecteur optimal des  $N_x$  paramètres (ou variables) de conception  $x$ , permettant de minimiser la fonction objectif (ou fonction coût)  $\mathcal{F}$  et vérifiant les contraintes d'inégalité et d'égalité  $g$  et  $h$ .

L'étape principale de ce processus consiste à définir une ou plusieurs fonctions objectif. On note qu'au regard de la diversité des enjeux sous-jacents, celles-ci peuvent être nombreuses ; de différentes natures, telles que des grandeurs physiques (fréquences propres, masse totale, ...), des critères économiques, ... ; complexes vis-à-vis des paramètres de conception (multimodales, non convexes, ... ) ; et bien souvent contradictoires. Le problème d'optimisation est alors qualifié de multiobjectif et peut être reformulé de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^{(N_x,1)}} \mathcal{F}(x) = [f_1(x), \dots, f_{N_f}]^T, \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{(N_f,1)} \\ \text{avec :} \\ g(x) \leq 0, g \in \mathbb{R}^{(N_g,1)} \\ h(x) = 0, h \in \mathbb{R}^{(N_h,1)} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Celui-ci n'admet plus une solution unique mais un ensemble de solutions correspondant aux meilleurs compromis parmi un ensemble de solutions potentielles. Il nécessite donc une prise de décision de la part du concepteur. L'approche la plus intuitive pour résoudre ce type de problèmes consiste à combiner les différentes fonctions objectif en une fonction mono-objectif pondérée, sous la forme [168] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^{(N_x,1)}} \mathcal{U}(x) = \sum_{i=1}^{N_f} w_i \frac{f_i(x)}{f_i^*}, \mathcal{U} \in \mathbb{R} \\ \text{avec :} \\ 0 \leq w_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{N_f} w_i = 1 \\ g(x) \leq 0, g \in \mathbb{R}^{(N_g,1)} \\ h(x) = 0, h \in \mathbb{R}^{(N_h,1)} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

où les  $f_i^*$  correspondent aux estimations des valeurs minimales des  $f_i$  et  $w_i$  représentent des coefficients de pondération. Dans ce cas, le concepteur choisit *a priori* le poids de chaque objectif. Cependant, dans la plupart des problèmes, il est impossible d'exprimer cette fonction en raison d'un manque d'expérience ou d'information et du caractère souvent non commensurable des fonctions objectif. De plus, dans les rares cas où l'espace de conception n'est pas convexe, cette méthode tend à ignorer la partie non convexe de l'ensemble optimal alors que celle-ci peut éventuellement représenter un compromis pertinent [43].

Une seconde approche vise à déterminer des solutions vérifiant l'ensemble des critères pour ensuite choisir, *a posteriori*, les solutions optimales au sens de Pareto, également qualifiées de « dominantes ». Ainsi, si l'on considère  $x$  et  $x_d$ , deux vecteurs des  $N_x$  paramètres de conception, solutions du problème d'optimisation 5.2, on dit que  $x_d$  domine  $x$  si et seulement si :

$$\forall i \in [1, \dots, N_f] \mid f_i(x_d) \leq f_i(x) \quad \text{et} \quad \exists j \in [1, \dots, N_f] \mid f_j(x_d) < f_j(x) \quad (5.4)$$

A titre d'illustration, on représente figure 5.1 un ensemble de solutions d'un problème bi-objectif. Le front de Pareto est ici constitué des solutions 1, 3 et 5 qui dominent les solutions 2 et 4.

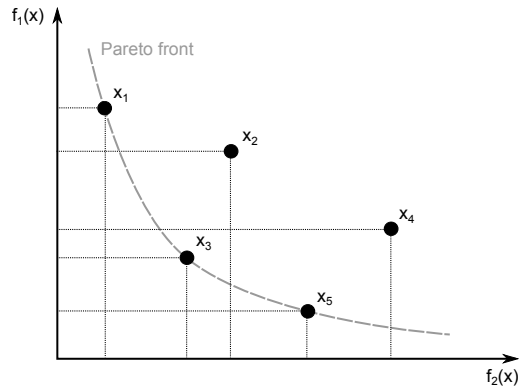


FIG. 5.1: Solutions dominantes au sens de Pareto

De nombreuses méthodes numériques permettent de résoudre ce type de problèmes d'optimisation. Les algorithmes de programmation non-linéaire sous contraintes en forment un premier groupe et sont fréquemment implémentés dans les logiciels commerciaux. On distingue en particulier les procédures dites « à direction de descente », telles que la méthode du gradient ou la méthode de Newton, dont les algorithmes « à région de confiance » constituent une variante<sup>1</sup>. Or, ces méthodes restent locales et ne permettent pas, dans le cas d'un problème multimodal, d'explorer l'ensemble de l'espace de conception à la recherche d'un optimum global.

Bien que cette première approche des problèmes de conception puisse donner des résultats probants, elle demeure cependant fortement entachée par sa nature déterministe. En effet, le problème d'optimisation posé initialement équation 5.1 est en réalité soumis à un ensemble de méconnaissances et d'incertitudes concernant la modélisation du problème physique ainsi que les valeurs de ces différents paramètres. Or les observations et les mesures expérimentales effectuées *a posteriori* sur les structures réelles reflètent couramment leur caractère variable et aléatoire. Ainsi, quelle que soit la qualité du modèle, la solution optimale obtenue précédemment peut se révéler particulièrement sensible, même à de légères perturbations, allant jusqu'à dégrader dangereusement la performance visée.

De ce fait, il est nécessaire d'introduire la notion de robustesse d'une solution, vis-à-vis des méconnaissances et des incertitudes. Dans leur article de synthèse, Zang *et al.* en rappellent la définition suivante [168] :

« Un produit ou un processus est qualifié de robuste lorsqu'il est insensible aux effets des différentes sources de variabilité, même si ces sources n'ont pas été éliminées ou réduites. »

1. Ceux-ci sont implémentés dans le logiciel *MATLAB* par l'intermédiaire de la fonction *fmincon* (*Optimization Toolbox* [102]), qui sera utilisée dans la suite de ces travaux.



Si les premières notions associées à la conception robuste ont été exposées dans les années 1950, en particulier à travers la méthode statistique *Six-Sigma* développée par Taguchi [83], l'augmentation des moyens informatiques a entraîné ces dix dernières années le développement de nouvelles méthodes, plus coûteuses en temps de calcul mais plus efficaces. Celles-ci impliquent cependant de considérer deux nouvelles étapes : modéliser les incertitudes afin de les prendre en compte dans la formulation du problème ; proposer une mesure de la robustesse du système, venant compléter la performance décrite par la ou les fonctions objectif.

## 5.2.2 Prise en compte des incertitudes

### Types et sources d'incertitudes

Il existe de nombreuses manières de classer les différentes méconnaissances et incertitudes rencontrées dans les problèmes de conception [17, 142]. Il est néanmoins courant, dans le cadre de la dynamique des structures, de considérer les deux catégories suivantes :

- les incertitudes aléatoires : elles proviennent de la variabilité physique intrinsèque du système étudié et de son environnement (propriétés physiques, procédures d'assemblage, conditions d'utilisation,...). On souligne qu'elles peuvent se rapporter aussi bien à des paramètres du modèle qu'au modèle lui-même. Elles sont en général caractérisées par un modèle mathématique et peuvent donc être en partie contrôlées ;
- les incertitudes épistémiques : elles proviennent d'un manque de connaissance du système étudié (valeurs erronées de paramètres, lois de probabilité inconnues, hypothèses de linéarité, absence d'éléments non-linéaires,...). Elles se rapportent aussi bien à des problèmes de modélisation du système qu'à des problèmes de calcul ou d'indisponibilité de données expérimentales. Ces incertitudes peuvent donc être réduites par une augmentation de la quantité d'information.

### Quantification et propagation des incertitudes

L'étape de quantification vise ensuite à choisir les modèles mathématiques les plus appropriés aux types d'incertitudes pris en compte, ainsi qu'au problème considéré. Puis, il s'agit de déterminer la manière dont ces incertitudes, présentent sur les entrées du problème, vont en affecter les sorties. Au regard des différents points de vue exposés dans la littérature et du nombre important d'approches proposées, il semble peu évident et restrictif d'en proposer une classification exhaustive. On choisit donc de détailler ici les principales approches se rapportant à la problématique globale de ces travaux. Pour plus de précisions on se reportera aux synthèses approfondies exposées dans les travaux de Oberkampf et Roy [115], Beyer et Sendhoff [17], Schuëller et Jensen [142], Puel [134].

Concernant les incertitudes aléatoires, il est habituel d'utiliser des méthodes probabilistes. L'approche la plus classique consiste à modéliser le système mécanique à l'aide d'une méthode déterministe de type éléments finis, pour ensuite introduire des incertitudes à l'aide de méthodes paramétriques ou non-paramétriques.

Dans le premier cas, les paramètres physiques (le module d'Young, l'épaisseur des éléments plaque, . . .) sont caractérisés par une valeur moyenne et un écart-type ou par une densité de probabilité (normale, uniforme, . . .). On souligne que ces entrées peuvent souvent être déterminées de manière expérimentale. Les incertitudes sont ensuite généralement propagées à travers le modèle, de manière simple et systématique, à l'aide d'une méthode d'échantillonnage de Monte-Carlo [18]. Celle-ci consiste à effectuer des tirages indépendants des variables aléatoires, en respectant leur loi de probabilité, puis à résoudre les problèmes déterministes associés à chaque tirage. Si cette méthode est souvent considérée comme une référence permettant de comparer et de valider d'autres approches, son principal inconvénient réside dans la convergence lente des solutions [166], qui nécessite ainsi un nombre important de tirages aléatoires, exponentiel vis-à-vis du nombre de variables considérées. Les temps de calcul associés peuvent donc s'avérer prohibitifs dans un contexte de conception. Des variantes telles que la méthode d'échantillonnage Latin Hypercube ont été proposées afin de pallier cette difficulté.

On note que le modèle est ici supposé comme étant parfaitement connu, les incertitudes ne portant que sur ses paramètres. Or, pour des structures complexes, de nombreux phénomènes ne sont pas pris en compte et ne correspondent pas à un paramètre précis. Ainsi, dans le second cas, les incertitudes ne sont plus associées à des paramètres physiques mais sont introduites au niveau du modèle mathématique. Ces méthodes, dont on trouvera une synthèse dans l'article de Soize [146], s'appuient sur des matrices aléatoires intervenant directement sur les matrices associées à des sous-ensembles du système global. Leur caractère aléatoire est alors contrôlé par des paramètres de dispersion auxquels sont associées des lois de probabilités [145, 31, 1].

Cependant, il est restrictif voire erroné d'utiliser des approches stochastiques pour tous les types de problèmes. De plus, dans le cas des incertitudes épistémiques où de grandes quantités d'informations sont manquantes, l'approche probabiliste n'est également plus appropriée. On fait donc appel à des méthodes non-probabilistes pour résoudre ce type de problèmes.

Parmi ces dernières, on distingue entre autre les approches par intervalles, où les paramètres incertains sont bornés par des intervalles déterministes ou aléatoires [107, 42]. Des mesures de croyance et de plausibilité permettent alors de définir les bornes d'un évènement. La théorie des ensembles flous, développée initialement par Zadeh [167], permet d'étendre cette approche en utilisant des données subjectives : une fonction d'appartenance permet d'associer à un nombre flou (considéré comme un paramètre incertain) borné par un support, un degré d'appartenance entre 0 et 1. La théorie des méconnaissances, introduite par Ladevèze, s'appuie elle sur des variables internes représentant différents sous-ensembles incertains d'une structure, celles-ci étant contenues dans des intervalles dont les bornes sont stochastiques [134, 45]. Enfin, les approches

convexes de type *info-gap* ont été développées afin de traiter des problèmes soumis à un important manque d'information [15]. Elles s'appuient sur une vision différente des incertitudes, ou plus généralement des méconnaissances, en cherchant à représenter l'écart (*gap*) entre ce qui est connu et la quantité d'information qui doit être connue, afin de satisfaire un critère de conception donné<sup>2</sup>.

On souligne enfin que des travaux récents exposent des approches hybrides, en proposant par exemple de coupler complètement ou partiellement des incertitudes aléatoires à des méthodes non-probabilistes. Les paramètres stochastiques associés à une variable aléatoire peuvent alors être quantifiés, par exemple, à l'aide d'un modèle *info-gap* pouvant dépendre ou non des paramètres de conception [128].

### 5.2.3 Méthodes de conception robuste

#### Choix du type d'approche

On décide maintenant d'inclure les modèles d'incertitudes mis en évidence ci-dessus dans le problème de conception. On aboutit ainsi à des méthodes d'optimisation plus complexes, dites stochastiques. Deux types d'approches sont alors envisageables, suivant l'objectif recherché par le concepteur.

Les premières s'appuient sur la notion de fiabilité (*Reliability-Based Design Optimization*) et peuvent être formulées de la manière suivante [152] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^{(N_x,1)}} \mathcal{F}(x), \mathcal{F} \in \mathbb{R} \\ \text{avec :} \\ g(x) \leq 0, g \in \mathbb{R}^{(N_g,1)} \\ h(x) = 0, h \in \mathbb{R}^{(N_h,1)} \\ \mathcal{P}_f(x,u) \leq \mathcal{P}_c \end{array} \right. \quad (5.5)$$

où  $\mathcal{P}_f(x,u)$  représente la probabilité de défaillance en fonction des variables de conception  $x$  et des variables aléatoire  $u$ , et  $\mathcal{P}_c$  est la valeur seuil que celle-ci ne doit pas dépasser. Au regard des remarques précédentes, on note que selon le problème considéré certaines variables de  $x$  peuvent être aléatoires et appartenir à  $u$ . Cette approche revient en fait à déplacer la valeur moyenne de la fonction objectif afin de diminuer la probabilité de défaillance.

---

2. Cette méthode sera exposée en détail au chapitre 5.6.

Les secondes se rapportent à la conception robuste à proprement parler (*Robust Design Optimization*) et sont formulées par le problème [152] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^{(N_x,1)}} [\mathcal{F}(x), m_\sigma(x, u)]^T, \mathcal{F} \in \mathbb{R}, m_\sigma \in \mathbb{R} \\ \text{avec :} \\ g(x) \leq 0, g \in \mathbb{R}^{(N_g,1)} \\ h(x) = 0, h \in \mathbb{R}^{(N_h,1)} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

où  $m_\sigma(x, u)$  représente une mesure de la variabilité de la ou des quantités d'intérêt. Le but ici est bien de diminuer cette variabilité.

On constate donc que, bien que différentes, ces deux approches demeurent complémentaires, le choix final d'une conception donnée étant caractérisé par sa mise en œuvre, sa fiabilité et sa robustesse. La seconde semble cependant plus simple car elle ne nécessite pas de déterminer des probabilités de défaillance, dont les calculs se révèlent particulièrement coûteux. On se limitera donc, dans la suite de ces travaux, à une approche d'optimisation basée sur la conception robuste.

### Définition et calcul de la robustesse

Le problème d'optimisation posé équation 5.6 nécessite de définir une mesure de la robustesse. Généralement, cela revient à minimiser simultanément la moyenne  $\mu_f$  et l'écart-type  $\sigma_f$  d'une fonction objectif  $f$ , ou d'autres quantités équivalentes. Ait-Brik *et al.* ont ainsi proposé de définir une fonction vulnérabilité  $f^v$ , associée à la fonction  $f$ , définie par :

$$f^v = \frac{\sigma_f}{\mu_f} = \frac{1}{f^r} \quad (5.7)$$

et correspondant à l'inverse de la fonction robuste  $f^r$ . Le problème d'optimisation est donc multiobjectif par définition, puisqu'il revient à minimiser simultanément une ou plusieurs fonctions objectif ainsi que leur fonctions vulnérabilité associées. Il admet alors, comme précédemment, un ensemble de solutions optimales au sens de Pareto.

Ces solutions peuvent ensuite être déterminées à l'aide de différentes méthodes numériques [17]. Une première catégorie d'approches s'appuie sur une évaluation de la robustesse à partir des réponses du systèmes pour une ou plusieurs conceptions données. Celles-ci sont typiquement déterminées à partir des méthodes parmi lesquelles on retrouve les simulations de Monte-Carlo, les éléments finis stochastiques [86, 153, 65], les développements en séries de type Karhunen-Loeve ou encore la méthode du chaos polynomial [56]. On note que lorsque la complexité du problème n'est pas trop importante, les méthodes de développement en série de Taylor ou les méthodes de perturbation représentent une alternative peu coûteuse en temps de calcul. Cette mesure de robustesse est ensuite utilisée comme variable d'entrée d'un algorithme d'optimisation déterministe.

D'autres approches consistent à utiliser des méta-modèles. Ceux-ci correspondent à une représentation du système, basée uniquement sur ses entrées et ses sorties. Ils sont ainsi souvent constitués à partir de fonctions simples des paramètres de conception, permettant ensuite de déterminer des solutions optimales de manière analytique : moyennant la qualité du méta-modèle, celles-ci correspondent à une bonne estimation des optima réels. Les méthodes les plus couramment rencontrées sont les méthodes de surfaces de réponses, les réseaux de neurones ou encore les modèles de krigeage [127]. Cette approche n'est cependant pas adaptée aux problèmes de grandes tailles, dont le nombre important de variables de conception nécessite de nombreuses simulations afin de construire un méta-modèle de qualité.

On considère enfin les approches directes par approximations stochastiques. Dans ce cas, les valeurs des paramètres aléatoires sont utilisées directement en entrée des algorithmes d'optimisation, parmi lesquels on retrouve classiquement les algorithmes évolutionnaires.

### Résolution par algorithme génétique

Les algorithmes évolutionnaires de type algorithmes génétiques semblent particulièrement adaptés aux problèmes multiobjectifs. Par analogie avec l'évolution naturelle, ces algorithmes vont faire évoluer une population initiale, composée d'individus représentant un ensemble de solutions potentielles du problème, afin de maximiser une fonction profit. Chaque individu se voit attribuer une mesure de son adaptation pour subir ensuite des transformations aléatoires, échanger des informations et être comparé au reste de la population. Au fur et à mesure des générations, l'évolution tend à se diriger vers la partie de l'espace de recherche correspondant à un optimum global. L'utilisation de ce type d'algorithme nécessite ainsi de définir préalablement :

- un principe de codage des individus ;
- un mécanisme permettant de générer une population initiale ;
- une fonction profit ou fonction d'adaptation ;
- des opérateurs génétiques (reproduction, mutation, croisement,...) ;
- un critère d'arrêt.

Il existe plusieurs types d'algorithmes génétiques. On utilise dans ces travaux l'algorithme NSGA (*Non Sorted Genetic Algorithm*), développé par Srinivas [148], dont la particularité réside dans son opérateur de sélection. A chaque itération, les individus d'une population sont classés selon un principe de dominance au sens de Pareto : les individus non-dominés sont affectés au rang 1, puis momentanément éliminés de la population. Les individus non-dominés de la population restante sont ensuite identifiés et affectés au rang 2, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les individus aient été classés. On attribue alors à chacun une valeur d'une fonction performance (*fitness*), inversement proportionnelle à son rang. Celle-ci, couplée à une fonction de niche (*sharing*) vient compléter les opérateurs classiques pour aboutir au fonctionnement de l'algorithme tel que représenté figure 5.2.

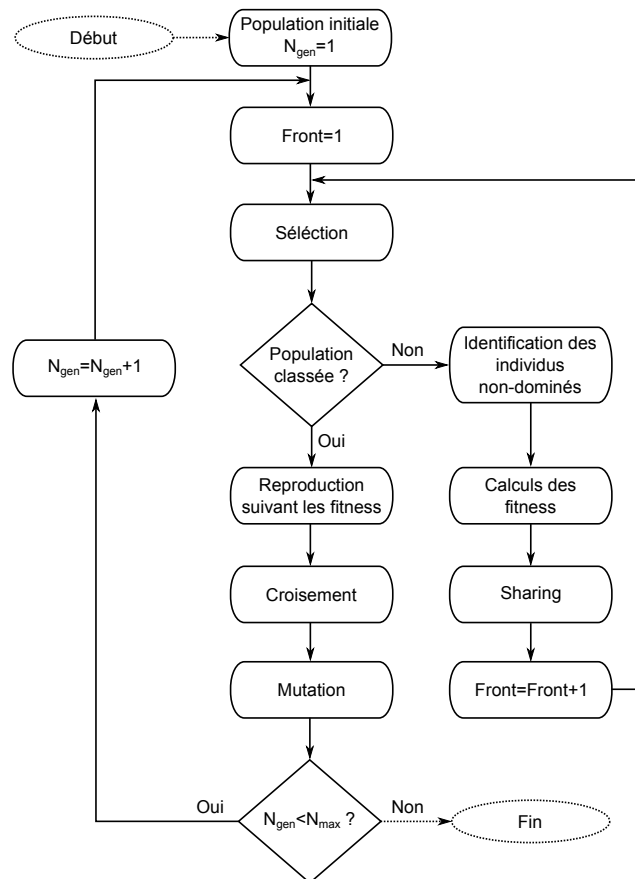


FIG. 5.2: Algorithme génétique NSGA [148]

On souligne que cet algorithme a été initialement mis en œuvre au Département Mécanique Appliquée de l'Institut FEMTO-ST par Ait-Brik [2, 3], implémenté dans le logiciel *ÆSOP*<sup>3</sup>, puis éprouvé sur des applications académiques et industrielles [67, 57].

## 5.3 Présentation de la structure test

### 5.3.1 Modèle éléments finis

Afin d'illustrer les différentes approches exposées dans ce chapitre, on propose d'étudier une structure test correspondant à un modèle simplifié de lanceur, représenté figure 5.3.

<sup>3</sup> *ÆSOP* (*Analytical-Experimental Structural Optimization Platform*) est une plate-forme logicielle développée sous *MATLAB* au Département Mécanique Appliquée de l'institut FEMTO-ST par S. Cogan.

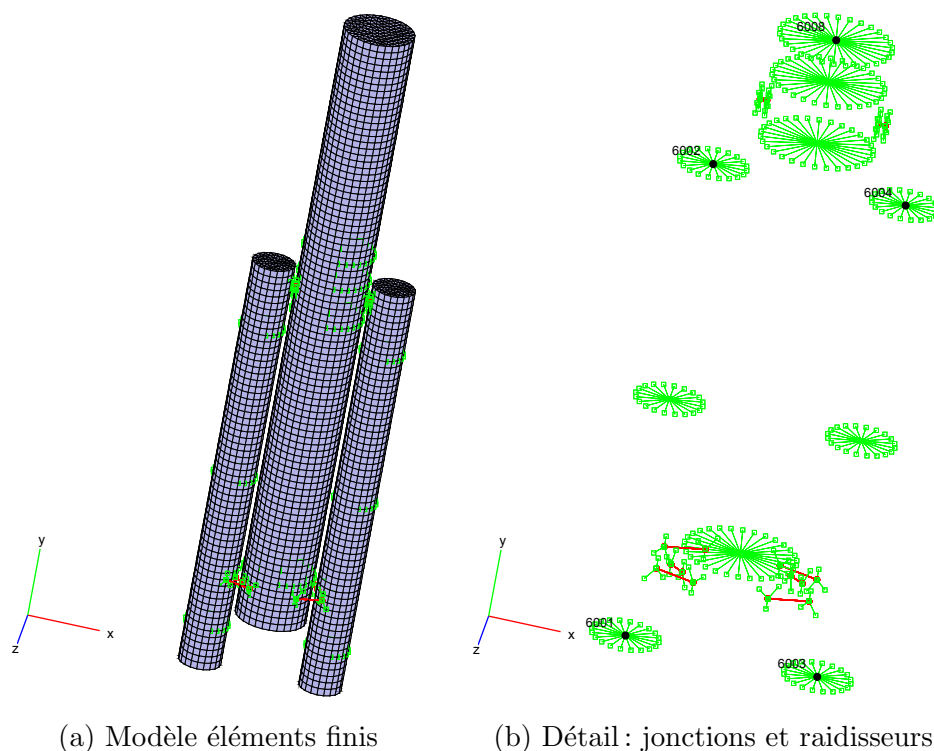


FIG. 5.3: Modèle simplifié de lanceur

Ses principales caractéristiques vérifient les hypothèses suivantes :

- **géométrie** : la structure se compose de trois cylindres fermés creux représentant les deux *boosters* (sous-structures sources) et le corps central (sous-structure réceptrice) du lanceur Ariane 5, dont les dimensions sont comparables à celles de la structure réelle.
- **maillage éléments finis** : on utilise des éléments coques afin de limiter le nombre total de degrés de liberté. La discrétisation est suffisamment fine (environ 6000 éléments, 5600 nœuds, 33600 degrés de liberté) pour prédire la réponse de la structure jusqu'à 100 Hz. Des raidisseurs sont ajoutés à l'aide de liens rigides afin de contrôler les modes de respiration des cylindres, privilégiant ainsi les comportements d'ensemble transversaux et axiaux des sous-structures.
- **propriétés physiques** : chaque cylindre se décompose en différentes zones se rapportant à différents sous-composants. Les masses volumiques sont représentatives des masses réelles de ces composants. Le module d'Young et l'épaisseur des éléments sont déterminés de manière empirique afin d'obtenir un comportement dynamique exhibant des modes d'ensemble dans un domaine basses fréquences proche du contexte industriel (cf. chapitre 1.3).
- **modélisation des jonctions** : 8 jonctions rotulées permettent de relier les *boosters* au corps central. Elles sont modélisées chacune par trois raidisseurs en translation, suivant

chaque direction du repère global. Leur topologie respecte les solutions technologiques retenues dans la réalité, à savoir trois jonctions (notées 1,2 et 3) pour chaque interface inférieure et une jonction (notée 4) pour chaque interface supérieure (cf. figure 1.2 (b)). Afin de simplifier le modèle et de limiter le nombre de paramètres de conception (12 au lieu de 24), on suppose que ces jonctions sont identiques deux à deux, de manière symétrique par rapport à l'axe du corps central. Leurs valeurs nominales, données tableau 5.1, sont déterminées à l'aide d'une procédure de sensibilisation dont on trouvera une description succincte en annexe C.

Dir.	Jonction 1	Jonction 2	Jonction 3	Jonction 4
$T_x$	2,9315e9	1,2328e9	2,1963e9	1e12
$T_y$	5,8617e9	1,404e11	1,394e10	1e12
$T_z$	1,7433e9	2,1963e9	2,4652e9	1e12

TAB. 5.1: Valeurs initiales des paramètres de raideur ( $N/m$ )

- **modélisation de l'amortissement** : de la même manière que pour les structures précédemment utilisées, on fait l'hypothèse d'un amortissement proportionnel du type  $C = aK + bM$ , identique pour l'ensemble de la structure, y compris les raideurs de jonction.
- **chargement dynamique** : afin d'observer un comportement dynamique comparable à celui exposé en introduction (cf. chapitre 1.3), on applique un même chargement harmonique sur chaque *booster*, sous la forme d'une force verticale de 1  $N$  répartie aux centres des brides supérieures et inférieures, à laquelle s'ajoute une perturbation horizontale en opposition de phase (tableau 5.2).

Nœud	6001		6002		6003		6004	
Dir.	$T_x$	$T_y$	$T_x$	$T_y$	$T_x$	$T_y$	$T_x$	$T_y$
Force ( $N$ )	-0.1	0,45	-0,1	0,55	0,1	0,45	0,1	0.55

TAB. 5.2: Chargement dynamique appliqué à la structure

### 5.3.2 Comportement dynamique

#### Réponse harmonique

On visualise, figure 5.4, la réponse harmonique en accélération de la structure test, soumise au chargement décrit précédemment. Les nœuds de visualisation correspondent aux centres des



brides inférieures (6001) et supérieures (6002) d'un *booster*, ainsi qu'à la base du dernier composant du corps central (6008), représentant l'embase de la charge utile. Bien que les efforts extérieurs s'exercent suivant différentes directions, on observe que ce nœud se déplace principalement suivant la direction verticale, ce qui confirme la quasi-symétrie du problème. Une analyse modale préliminaire a permis de mettre en évidence une centaine de modes compris entre 0-100  $Hz$ , dont seule une vingtaine est réellement excitée.

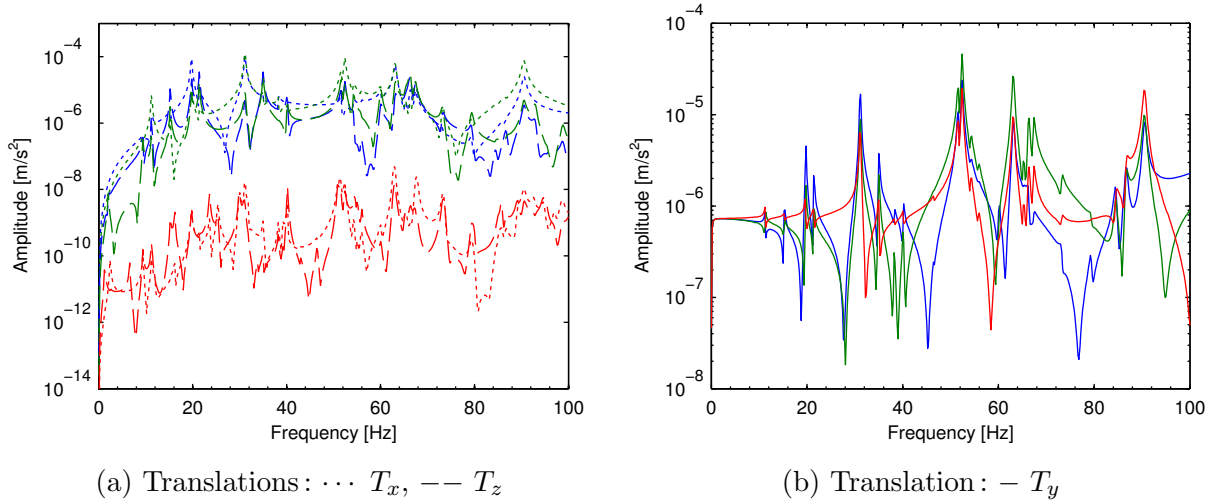


FIG. 5.4: Réponse harmonique en accélération de la structure test :

— nœud 6001, — nœud 6002, — nœud 6008

Afin de se placer dans un cas proche du contexte industriel, on s'intéresse à la bande de fréquence comprise entre 45  $Hz$  et 55  $Hz$ , exhibant les plus hauts niveaux de réponse suivant  $T_y$ , à la fois au niveau des *boosters* et du corps central. Ces résonances sont associées aux modes de vibration 41 et 42, respectivement situés à 51,6  $Hz$  et 52,4  $Hz$ . La figure 5.5 permet de visualiser les deux déformées associées tout en observant la répartition des énergies de déformation. On constate que les interfaces sont particulièrement sollicitées.

### Puissance transmise

La figure 5.6, représente l'évolution fréquentielle de la puissance transmise aux interfaces, situées entre les jonctions et le corps central. De même que dans les études précédentes, on vérifie qu'elle admet des résonances d'amplitude aux alentours des fréquences propres de vibration de la structure couplée, en particulier sur l'intervalle d'étude. On note cependant qu'un faible niveau d'accélération peut transmettre une puissance importante et inversement, par exemple à 10  $Hz$  et 90  $Hz$ .

Au regard de ces différentes remarques, on choisit donc d'optimiser les paramètres de raideurs des jonctions afin de minimiser la puissance transmise aux interfaces, sur une bande de fréquence comprise entre 45  $Hz$  et 55  $Hz$ , tout en observant l'impact de ces solutions sur une éventuelle baisse de la réponse en accélération au niveau du corps central.

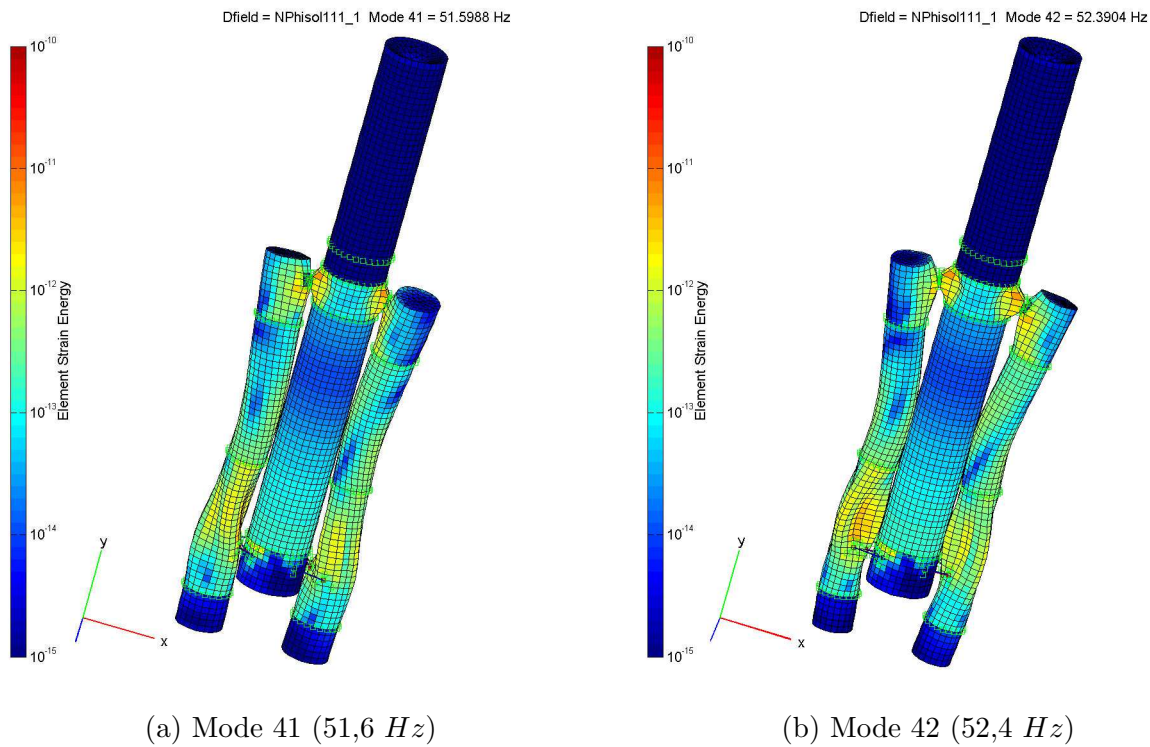


FIG. 5.5: Déformées propres de la structure test

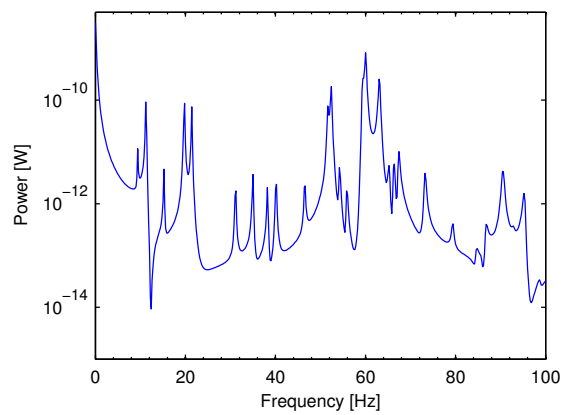


FIG. 5.6: Puissance initiale transmise aux interfaces de la structure test

### Modes de flux de puissance

On s'intéresse ensuite aux modes de flux de puissance du corps central, qui correspond à la sous-structure réceptrice. On observe, figure 5.7, les 24 valeurs propres associées aux degrés de liberté d'interface considérés. On constate qu'entre 0-100 Hz, seul un tiers de ces grandeurs admet un comportement modal et constitue donc un sous-espace dominant. On remarque également que les deux premières valeurs propres sont pratiquement identiques, ce qui provient

de la symétrie de la sous-structure. Enfin, on note la présence de résonances d'amplitude sur l'intervalle fréquentiel d'étude, expliquant en partie l'importante puissance transmise observée précédemment.

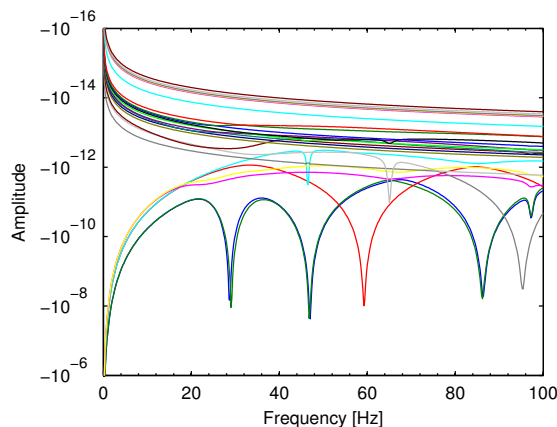


FIG. 5.7: Valeurs propres de flux de puissance du corps central

On considère maintenant la structure couplée afin de mettre en évidence les principaux chemins de puissance initiaux. On observe, grâce aux différents coefficients de projections représentés figure 5.8, que les modes de flux de puissance 6 et 8 sont particulièrement actifs. De plus, si les efforts d'interface tendent à se projeter principalement suivant le dernier mode (figure 5.8 (a)), le flux associé est trop faible pour que la part de puissance transmise par ce chemin soit prépondérante. A l'inverse le mode 3, globalement sollicité à moins de 10 % (figure 5.8 (a)), transmet ponctuellement plus de 60 % de la puissance (figure 5.8 (b)).

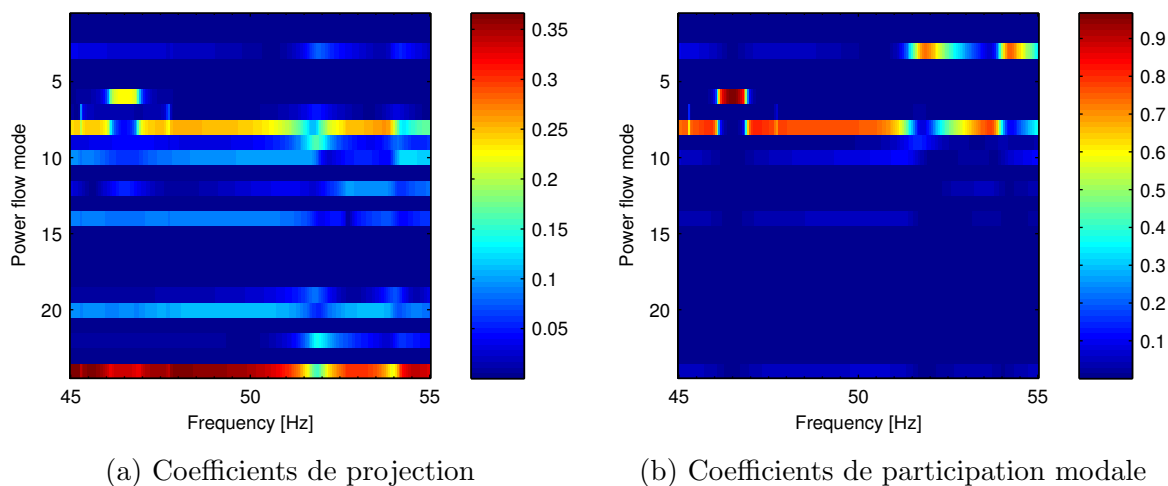


FIG. 5.8: Chemins de puissance initiaux aux interfaces de la structure test

Le sous-espace recouvert par ces 3 modes de flux de puissance transmet donc en moyenne plus de 60 % de la puissance entre les *boosters* au corps central. Il en résulte que les grandeurs associées à ces chemins de puissance s'avèrent particulièrement utiles à la mise en place d'une démarche d'optimisation.

## 5.4 Réanalyse de la sous-structure réceptrice

Avant d'aborder l'optimisation de la puissance transmise par rapport aux paramètres d'interface, on souligne à nouveau que les modes de flux de puissance dépendent uniquement des propriétés de la sous-structure réceptrice. Il semble donc pertinent, dans une phase de conception, de s'intéresser à l'impact que des modifications apportées à ce composant peuvent avoir sur les chemins de puissance, qui seront ou non sollicités par les efforts d'interface et transmettront ainsi plus ou moins de puissance.

On souligne au préalable qu'il est important de distinguer différents types de modification, suivant leur amplitude : si les modifications fortes tendent à changer le comportement global de la structure, les modifications faibles peuvent être considérées comme des perturbations. De manière générale, ces modifications peuvent concerner aussi bien les propriétés de raideur, de masse ou d'amortissement de la structure et se traduisent, au niveau du modèle éléments finis, par une nouvelle expression des matrices globales sous la forme :

$$K = K_0 + \Delta K \quad (5.8)$$

Dans le cas de modifications paramétriques de  $N_p$  paramètres de conception  $p_i$ , seules certaines zones du modèle vont être affectées, d'où la possibilité d'écrire :

$$\Delta K = \sum_{i=1}^{N_p} K_{\Delta p_i}^{zone} \quad (5.9)$$

où  $K_{\Delta p_i}^{zone}$  représente une matrice creuse dont seuls les coefficients associés aux degrés de liberté des éléments concernés sont non nuls. On note qu'il est courant de factoriser ces matrices à l'aide de matrices booléennes creuses  $K_i^{zone}$ , telles que :

$$K_{\Delta p_i}^{zone} = \frac{\Delta p_i}{p_i} \sum_{j=1}^{N_\alpha} \gamma_j p_i^{\gamma_j} K_i^{zone} \quad (5.10)$$

L'introduction des coefficients  $\gamma_j$  permet ici de prendre en compte le comportement non-linéaire de certains paramètres dans les matrices du système (par exemple l'épaisseur dans la matrice de raideur d'un élément plaque ou coque).

### 5.4.1 Sensibilité des valeurs propres de flux de puissance

Il a été montré au chapitre 3.4.3 que les équations 3.72-3.77 permettent d'obtenir des expressions approchées de la puissance transmise à l'interface. Or, si celles-ci constituent des premiers indicateurs à moindre coût, elles ne permettent pas d'évaluer l'impact d'une variabilité des paramètres sur cette puissance. On propose donc une analyse de sensibilité des valeurs propres de flux de puissance s'appuyant sur une approche par perturbations.

Après modification de certains paramètres de la structure, de type  $\Delta Z(\omega) = -\omega^2 \Delta M + j\omega \Delta C + \Delta K$ , l'équation d'équilibre du système modifié est donnée par :

$$y = [Z_0(\omega) + \Delta Z(\omega)]^{-1} f = [\Gamma_0(\omega) + \Delta \Gamma(\omega)] f \quad (5.11)$$

où l'indice  $.0$  représente les quantités associées au système initial. On cherche tout d'abord à exprimer la matrice de perturbation  $\Delta \Gamma(\omega)$  en fonction de la matrice de flexibilité dynamique initiale et des matrices de modification connues. En se plaçant dans l'hypothèse de petites modifications, vérifiant la condition suivante [4] :

$$\|\Delta Z(\omega)\| \ll \|Z_0(\omega)\|, \forall \omega \quad (5.12)$$

et en effectuant un développement en série de Neumann de l'équation précédente, on obtient :

$$y \approx \left[ I - \Gamma_0(\omega) \Delta Z(\omega) + [\Gamma_0(\omega) \Delta Z(\omega)]^2 + \dots \right] \Gamma_0(\omega) f \quad (5.13)$$

On détermine alors par identification avec l'équation 5.11 :

$$\Delta \Gamma(\omega) = - [\Gamma_0(\omega) \Delta Z(\omega)] \Gamma_0(\omega) + [\Gamma_0(\omega) \Delta Z(\omega)] [\Gamma_0(\omega) \Delta Z(\omega)] \Gamma_0(\omega) + \dots \quad (5.14)$$

Ainsi, sous condition nécessaire de convergence donnée par l'équation 5.12, il est possible d'améliorer l'estimation de  $\Delta \Gamma(\omega)$  en conservant des termes d'ordres supérieurs.

On s'intéresse maintenant à l'impact de ces perturbations sur les valeurs propres de flux de puissance. On rappelle que le problème aux valeurs propres associé au  $\nu^{ieme}$  mode de flux de puissance est donné par :

$$\left[ \Gamma_0^{\Im} - s_0^{(\nu)} I \right] g_0^{(\nu)} = 0 \quad (5.15)$$

où  $\Gamma_0^{\Im} \in \mathbb{C}^{(N_j, N_j)}$  représente la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique du système nominal, restreinte aux degrés de liberté d'interface. Une fois celle-ci perturbée, le problème devient :

$$\left[ \Gamma_0^{\Im} + \Delta \Gamma^{\Im} - s^{(\nu)} I_{N_j} \right] g^{(\nu)} = 0 \quad (5.16)$$

De manière classique, on exprime alors ces valeurs et efforts propres modifiés en fonction des grandeurs initiales sous la forme :

$$s^{(\nu)} = s_0^{(\nu)} + \Delta s^{(\nu)} \quad (5.17)$$

$$g^{(\nu)} = g_0^{(\nu)} + \Delta g^{(\nu)} \quad (5.18)$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation précédente, on obtient :

$$\left[ \Gamma_0^{\mathfrak{S}} + \Delta \Gamma^{\mathfrak{S}} - \left( s_0^{(\nu)} + \Delta s^{(\nu)} \right) I_{N_j} \right] \left( g_0^{(\nu)} + \Delta g^{(\nu)} \right) = 0 \quad (5.19)$$

Puis, après développement et troncature au premier ordre, on aboutit à :

$$\left[ \Delta \Gamma^{\mathfrak{S}} - \Delta s^{(\nu)} I_{N_j} \right] g_0^{(\nu)} = - \left[ \Gamma_0^{\mathfrak{S}} - s_0^{(\nu)} I_{N_j} \right] \Delta g^{(\nu)} \quad (5.20)$$

En considérant l'hypothèse de petites perturbations effectuée précédemment (équation 5.12), on admet que la variation  $\Delta g^{(\nu)}$  de l'effort propre peut se décomposer, de manière exacte, sur la base initiale complète  $G_0 \in \mathbb{R}^{(N_j, N_j)}$  (étant donné le faible nombre de degrés de liberté d'interface) des modes de flux de puissance :

$$\Delta g^{(\nu)} = G_0 a^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{N_j} g_0^{(j)} a_j^{(\nu)} \quad (5.21)$$

En substituant cette expression dans l'équation 5.20 et en la pré-multipliant par  $g_0^{(\nu)T}$ , on obtient l'équation suivante :

$$g_0^{(\nu)T} \left[ \Delta \Gamma^{\mathfrak{S}} - \Delta s^{(\nu)} I_{N_j} \right] g_0^{(\nu)} = -g_0^{(\nu)T} \left[ \Gamma_0^{\mathfrak{S}} - s_0^{(\nu)} I_{N_j} \right] \sum_{j=1}^{N_j} g_0^{(j)} a_j^{(\nu)} \quad (5.22)$$

qu'il est possible de simplifier en utilisant les relations d'orthogonalité associées au système initiales, données équation 3.67 :

$$g_0^{(\nu)T} \Delta \Gamma^{\mathfrak{S}} g_0^{(\nu)} - \Delta s^{(\nu)} = - \left( g_0^{(\nu)T} \Gamma_0^{\mathfrak{S}} g_0^{(\nu)} - s_0^{(\nu)} g_0^{(\nu)T} g_0^{(\nu)} \right) a_\nu^{(\nu)} = 0 \quad (5.23)$$

On en déduit finalement une expression des valeurs propres de flux de puissance du système modifié, à partir de la matrice de flexibilité perturbée, exprimée équation 5.14, sous la forme :

$$s^{(\nu)} = s_0^{(\nu)} + \Delta s^{(\nu)} \approx s_0^{(\nu)} + g_0^{(\nu)T} \Delta \Gamma^{\mathfrak{S}} g_0^{(\nu)} \quad (5.24)$$

Cette analyse de sensibilité permet donc d'étudier l'impact de petites modifications appliquées à la sous-structure réceptrice sur les valeurs approchées de la puissance transmise, données équations 3.76 et 3.77, tout en conservant un faible coût de calcul. Elle s'avère ainsi particulièrement adaptée à des approches par investigation basées sur des tirages de Monte-Carlo. En effet, elle nécessite uniquement de résoudre les problèmes aux valeurs de flux de puissance associés au système initial et de déterminer la matrice de raideur dynamique modifiée. On souligne cependant que le critère dynamique de l'équation 5.12 n'est pas toujours vérifié et ne garantit donc pas systématiquement la convergence des résultats.

### 5.4.2 Réanalyse robuste des modes de flux de puissance

Il est toutefois nécessaire, dans un cadre de conception ou de re-conception de la sous-structure réceptrice, de déterminer à la fois les valeurs et les efforts propres issus des divers modifications apportées au système. Or il a été mis en évidence au chapitre 4.5 que, malgré les approches par réduction modale ou condensation, les résolutions successives d'un nombre important de problèmes aux valeurs propres équivalents s'avèrent particulièrement coûteuses. On propose donc de faire appel à des méthodes de réanalyse robuste dont le but est d'approximer la réponse d'une structure dont certains paramètres ont été modifiés, sans résoudre à nouveau le système complet d'équations mises à jour, mais en s'appuyant uniquement sur les solutions initiales.

#### Type de réanalyse

On distingue classiquement deux grandes catégories de méthodes de réanalyse. La première regroupe les méthodes directes, applicables lorsqu'une petite partie de la structure est modifiée et permettant d'obtenir la solution exacte la plus proche du problème modifié [84]. Elles sont en général issues des formules de Sherman-Morrisson et de Woodbury traitant des réactualisations successives d'inverses de matrices. La seconde regroupe les méthodes approchées comme les méthodes d'approximations polynômiales, de surfaces de réponse, de bases réduites. Celles-ci se fondent sur l'analyse de la structure pour un ensemble de points de conception et sont valables pour l'ensemble de l'espace de conception. Elles nécessitent cependant un effort de calcul plus important, en particulier pour des grandes structures.

#### Approche par enrichissement d'une base initiale

Lorsque le niveau de perturbation est très faible, le comportement global de la structure et donc la nature des modes initiaux ne sont quasiment pas modifiés. De même, la base de réduction initiale demeure prédictive dans le cas de modification globales de la masse et/ou de la raideur : les fréquences propres vont varier, mais les déformées propres du système perturbé seront inchangées, identiques aux déformées initiales. Au contraire, dans tous les autres cas, la base de réduction initiale s'avère beaucoup moins performante. Il est alors nécessaire de l'enrichir. Une première possibilité consiste à retenir un plus grand nombre de modes normaux de vibration vérifiant le problème aux valeurs propres. Or, si la prédiction tend à s'améliorer dans les cas simples, la convergence des solutions demeure extrêmement lente, entraînant des coûts de calcul prohibitifs.

Une première méthode consiste à enrichir la base de réduction initiale par des vecteurs judicieusement choisis. Ainsi Balmès propose, par exemple, de calculer les bases de condensation d'un échantillon de modèles, correspondant à des valeurs particulières des paramètres de conception, puis de les combiner pour obtenir une unique base de réduction finale [7]. Le résultat est

alors précis pour chacune des valeurs échantillonnées et très bon pour les points intermédiaires. Néanmoins, lorsque le nombre de paramètres devient important, il est nécessaire de considérer plus d'échantillons, d'où une augmentation des calculs et de la taille du modèle réduit.

Une autre méthode, initiée par Masson *et al.* consiste à compléter une base de réduction initiale par une base de taille minimale, approximant l'effet statique des modes négligés en prenant en compte une information *a priori* sur les modifications réalisées. Elle s'appuie pour cela sur le calcul des forces associées aux modifications.

On rappelle que l'équation d'équilibre d'une structure dont certains paramètres de conception ont été modifiés peut s'écrire :

$$[Z_0(\omega) + \Delta(\omega)Z]y(\omega) = 0 \quad (5.25)$$

On exprime alors les forces associées aux modifications sous la forme :

$$f_\Delta(\omega) = -\Delta Z(\omega)y(\omega) \quad (5.26)$$

La réponse  $y(\omega)$  étant inconnue, elle peut être approximée à partir d'une base de condensation  $T_0$  classique, de type base modale tronquée, issue du système initial et enrichie de résidus statiques  $R(f_\Delta(\omega))$ , telle que :

$$y(\omega) \approx T_0 c(\omega) + R(f_\Delta(\omega)) \quad (5.27)$$

Ces résidus sont construits à partir d'une base de forces  $F_\Delta$  représentatives du sous-espace associé à l'ensemble des modifications. Cette matrice est définie par<sup>4</sup> :

$$R_\Delta^*(\omega) = K_0^{-1} F_\Delta \quad (5.28)$$

Celle-ci est ensuite soumise à une décomposition en valeurs singulières afin de garantir une taille optimale. La base de réduction finale est donc de rang maximal et de conditionnement faible :

$$T = [T_0 \ R_\Delta] \quad (5.29)$$

Cette méthode a été appliquée à une condensation à deux niveaux de type Craig-Bampton permettant d'éliminer l'ensemble des coordonnées généralisées associées aux vecteurs statiques résiduels [101]. On note également que Bouazizi *et al.* ont proposé une extension aux cas de structures présentant de faibles non-linéarités localisées [27].

### Approche par approximations combinées

La méthode des approximations combinées (méthode CA) développée par Kirsch [85] tente d'unifier les approches directes et approchées : elle considère les termes d'une approximation locale en série binomiale comme étant les vecteurs d'une base de réduction globale.

4. A nouveau, dans le cas où  $K_0$  est singulière, il est nécessaire de se ramener à la matrice de pseudo-flexibilité (cf. annexe B.2).



Comme précédemment, les modifications de la structure initiale entraînent la formulation d'un nouveau problème aux valeurs propres, pour chaque mode  $\nu$  de la structure modifiée :

$$[K_0 + \Delta K] \varphi^{(\nu)} = \lambda^{(\nu)} [M_0 + \Delta M] \varphi^{(\nu)} \quad (5.30)$$

Il est alors possible d'exprimer une solution approchée à l'aide d'un développement en série binomiale de la forme :

$$\varphi^{(\nu)} \approx [I + B]^{-1} r_0^{(\nu)} \quad (5.31)$$

où  $B = K_0^{-1} \Delta K$  représente l'impact des modifications apportées<sup>5</sup> et  $r_0^{(\nu)}$  correspond à la solution du système initial. Cette relation permet de construire une base de réduction  $r_B^{(\nu)}$ , à partir de la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} r_1^{(\nu)} = K_0^{-1} [M_0 + \Delta M] r_0^{(\nu)} \\ r_i^{(\nu)} = -B r_{i-1}^{(\nu)}, \quad i = 2, \dots, s \end{cases} \quad (5.32)$$

d'où :

$$r_B^{(\nu)} = [r_1^{(\nu)} \ r_2^{(\nu)} \ \dots \ r_s^{(\nu)}] \quad (5.33)$$

Cette transformation est ensuite appliquée au problème modifié et permet d'aboutir à un problème aux valeurs propres réduit dont la résolution donne la fréquence propre et le vecteur propre du mode modifié associé.

Il a été initialement constaté que, dans le cas général, seuls quelques vecteurs de base ( $s = 1, \dots, 6$ ) suffisent pour obtenir des résultats satisfaisants sur des structures académiques. Or, l'application de cette méthode à des structures complexes a mis en évidence des problèmes de convergence de la série binomiale, d'où une mauvaise prédictivité des solutions approchées, en particulier pour des modifications importantes. Une variante a donc été proposée, visant à ne conserver que la partie « pertinente » de l'information issue des bases de réduction de chacun des modes de vibration considérés et balayant ainsi au mieux l'espace des solutions [160].

Pour cela, on concatène tout d'abord les bases  $r_B^{(\nu)}$  de chacun des  $m$  modes étudiés dans la matrice de transformation suivante :

$$r_B^* = [r_B^{(1)} \ r_B^{(2)} \ \dots \ r_B^{(\nu)} \ \dots \ r_B^{(m)}] \quad (5.34)$$

à laquelle on applique une décomposition en valeurs singulières pour obtenir une base de réduction globale  $r_B$  :

$$r_B^* = U \Sigma V^T = U_1 \Sigma_1 V_1^T + U_2 \Sigma_2 V_2^T \quad (5.35)$$

$$r_B = U_1 \quad (5.36)$$

On souligne qu'il est nécessaire de régulariser préalablement les vecteurs des différentes sous-bases afin d'éviter que les valeurs singulières d'ordre élevé et l'information qui leur est associée

---

5. Idem

ne deviennent prépondérantes vis-à-vis des premières. On aboutit finalement à un problème aux valeurs propre réduit global, dont la taille dépend du nombre de valeurs singulières dominantes retenues dans  $\Sigma_1$ . Des applications sur des structures académiques ont montré que cette taille tend à être bien inférieure à  $s \times m$ .

Il semble donc particulièrement intéressant d'appliquer cette variante des approximations combinées afin d'effectuer une réanalyse des modes de flux de puissance, basée sur l'approche par condensation exposée au chapitre 4.5.3. En effet, celle-ci s'appuyant sur les modes de vibration à interface fixe de la sous-structure réceptrice, on propose de remplacer la matrice modale initiale  $\Phi$  par la matrice de transformation  $r_b$  dans l'expression de la matrice de flexibilité dynamique, donnée équation 4.62. Celle-ci étant robuste vis-à-vis des modifications, il ne reste plus qu'à réactualiser successivement les matrices globales du système en prenant en compte les modifications. Il est alors possible d'évaluer rapidement et à moindre coût l'impact de modifications en masse, raideur ou amortissement de la sous-structure réceptrice sur ces modes de flux de puissance.

## 5.5 Optimisation par rapport aux paramètres d'interface

### 5.5.1 Investigations préliminaires

Si les modes de flux de puissance ne dépendent que des propriétés de la sous-structure réceptrice, la détermination des chemins de puissance prépondérant fait intervenir celles de l'ensemble de la structure couplée, parmi lesquelles on distingue en particulier les paramètres de raideur d'interface. On cherche donc à étudier leur influence sur ces chemins en effectuant une investigation de l'espace de conception associé, à l'aide de 300 tirages aléatoires. Ceux-ci sont issus d'une procédure d'échantillonnage de type Latin Hypercube s'appuyant sur les valeurs nominales données tableau 5.1 auxquelles sont associées, par défaut, des lois de probabilités uniformes comprises dans l'intervalle relatif  $[0,01 - 100]$  (celui-ci correspond à l'intervalle obtenu à l'issue de la procédure de sensibilisation des raideurs d'interface, cf. annexe C). Ce calcul a nécessité 11h30<sup>6</sup> afin de déterminer, à chaque itération, les grandeurs nécessaires à la caractérisation des chemins de puissance. On souligne toutefois qu'il serait utile de vérifier la convergence de la procédure afin de justifier la représentativité des résultats ou, dans le cas contraire, de motiver un nombre de tirages plus important et donc plus coûteux.

On visualise, figure 5.9, l'évolution fréquentielle des coefficients de projection  $\alpha_3$  et  $\alpha_8$  en fonction des itérations. Elle indique que les directions des efforts propres associées sont relativement sollicitées et varient suivant les différentes valeurs aléatoires des raideurs d'interface. On précise que l'observation des autres coefficients, ne se rapportant pas au sous-espace dominant, ne montre aucune participation et aucune variation.

---

6. Pour un ordinateur équipé d'un processeur *IntelCore 2 Duo* de 3 GHz et de 1,96 Go de RAM.

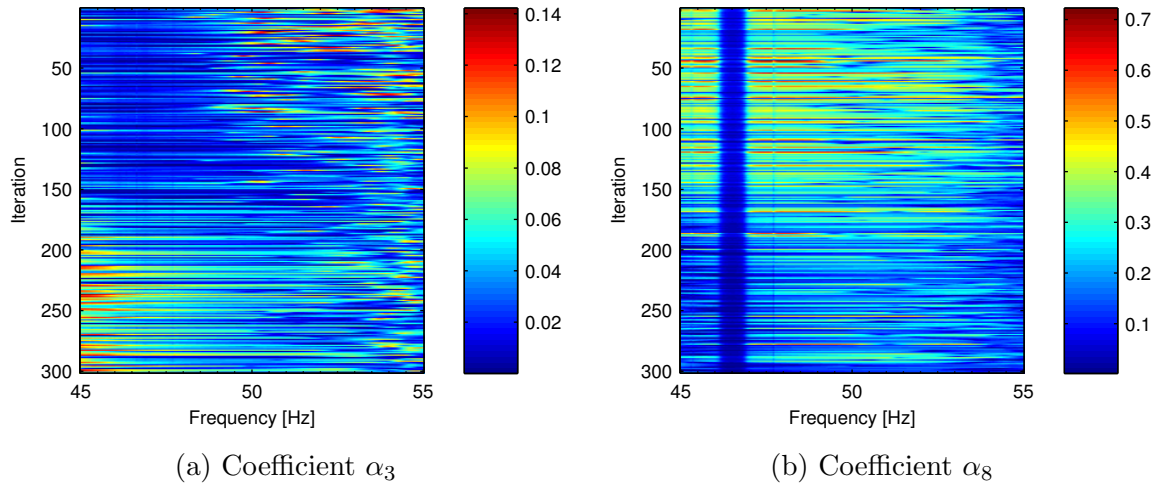


FIG. 5.9: Investigation de l'évolution des coefficients de projection

Afin d'estimer l'impact des variations des paramètres de conception sur les coefficients de participation modale de flux de puissance, on réalise une analyse en composantes principales sur ces sorties. Cette méthode d'analyse de données permet de filtrer un ensemble de variables d'entrée corrélées pour obtenir un nouvel ensemble de variables non corrélées, qualifiées de composantes principales et formant une base de l'espace observé. Celles-ci sont définies de telle sorte que la première d'entre elles ait la plus grande variance, représentant ainsi la plus grande part des informations contenues dans les données initiales ; les composantes suivantes, orthogonales les unes par rapport aux autres, sont ensuite rangées dans l'ordre des variances décroissantes<sup>7</sup>.

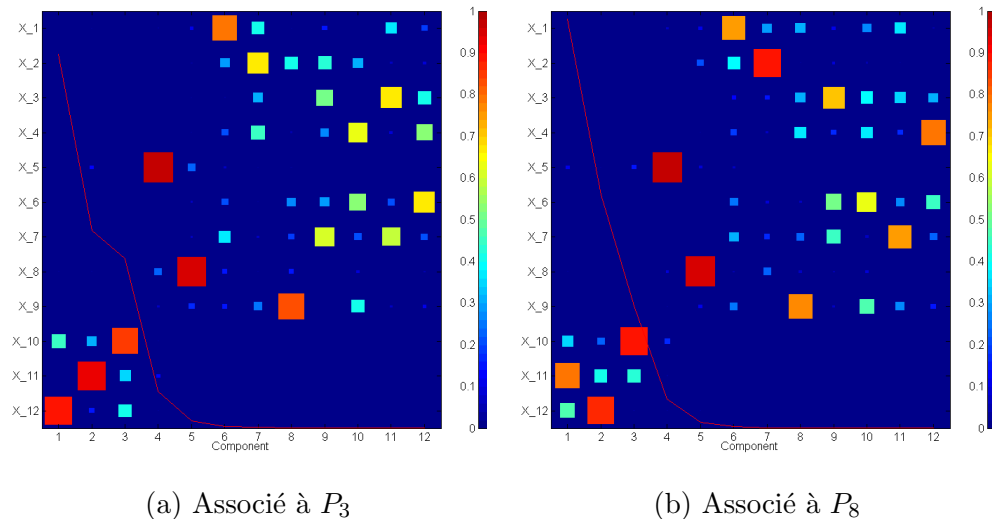


FIG. 5.10: Analyses en composantes principales des puissances modales

7. Mathématiquement, ce calcul revient à effectuer la décomposition en valeurs singulières de la matrice de covariance des données d'entrée, recentrées en zéro.

On observe, figure 5.10, les résultats de cette analyse sur les puissances modales  $P_3$  et  $P_8$ . On retrouve en ordonnée les paramètres de conception et en abscisse les différentes composantes principales. Les carrés représentent l'influence de ces paramètres sur chaque composante. La courbe rouge représente le tracé des valeurs singulières. On constate ainsi qu'il est nécessaire de conserver 4 composantes principales, afin de restituer 80 % des informations relatives aux chemins de puissance, et que chacune est influencée par un unique paramètre.

Ces puissances modales semblent donc représentatives de la puissance transmise sur l'intervalle fréquentiel d'étude. De plus, elles s'avèrent sensibles aux paramètres de conception retenus. On remarque éventuellement qu'il serait possible de restreindre ces derniers aux seules raideurs de la jonction supérieure, représentés figure 5.10 par les paramètres  $X_{10}, X_{11}$  et  $X_{12}$  afin de limiter le nombre de variable de conception. Cependant, dans une démarche générale d'optimisation, ce type d'analyse en composantes principales ne constitue qu'un outil et ne peut se substituer à une analyse de sensibilité approfondie.

### 5.5.2 Optimisation mono-objectif

Au regard des résultats de cette investigation préliminaire, on choisit de se ramener à la minimisation de la fonction coût  $f_c$  définie par :

$$\min_X f_c = \min_X \left( \max_{\omega} \frac{\sum_{\nu=1}^6 P_{\nu}(\omega)}{P_{tr}^{tot}(\omega)} \right) \quad (5.37)$$

$$= \min_X \left( \max_{\omega} \frac{\sum_{\nu=1}^6 |\alpha_{\nu}|^2 s_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^{24} |\alpha_{\nu}|^2 s_{\nu}} \right) \quad (5.38)$$

Celle-ci représente la participation maximale, sur l'intervalle de fréquence considéré, des chemins de puissance recouvrant le sous-espace composé des six premiers modes de flux de puissance. On espère ainsi, en minimisant cette quantité, projeter les efforts d'interface suivant les directions associées à des chemins de puissance moins importants. On note toutefois qu'afin de ne pas sur-contraindre le problème, le mode 8 n'a pas été conservé. Celui-ci correspond en effet au chemin ayant potentiellement le flux de puissance le plus faible du sous-espace dominant, car  $|s_8| < \dots \ll |s_1|$  (figure 5.7), tout en restant sensible aux paramètres de conception. Il constitue donc une bonne alternative pour la puissance déviée des autres chemins dominants, susceptible d'entraîner une diminution de la puissance transmise.

Dans un premier temps, on se ramène à l'investigation précédente et on visualise, figure 5.11, les valeurs prises par cette fonction coût. Celle-ci est bien sensible aux variations aléatoires des 24 paramètres de conception<sup>8</sup>. Plusieurs minima locaux se dégagent : on décide par la suite de ne retenir que ceux dont la valeur est inférieure au seuil de 80 %, fixé *a priori*.

8. La diminution de la valeur moyenne de  $f_c$  est due à un classement des tirages aléatoires suivant les valeurs croissantes du premier paramètre de conception, qui semble ainsi avoir une légère influence sur la puissance transmise.

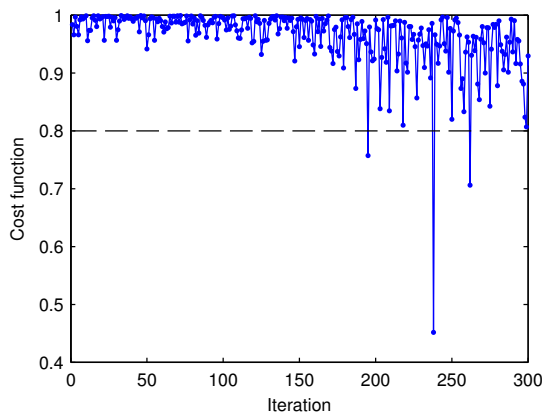


FIG. 5.11: Investigation de la fonction coût sur 300 tirages aléatoires

Dans un second temps, ces positions vont servir de points de départ successifs à une procédure d'optimisation déterministe, détaillée figure 5.12, faisant appel à l'algorithme *fmincon* disponible sous *MATLAB*. Celui-ci va chercher, à chaque solution intermédiaire, la direction ayant la pente la plus forte pour descendre vers un nouveau point de l'espace de conception, jusqu'à atteindre un critère de convergence. Les solutions ainsi obtenues constituent alors un ensemble de minima locaux.

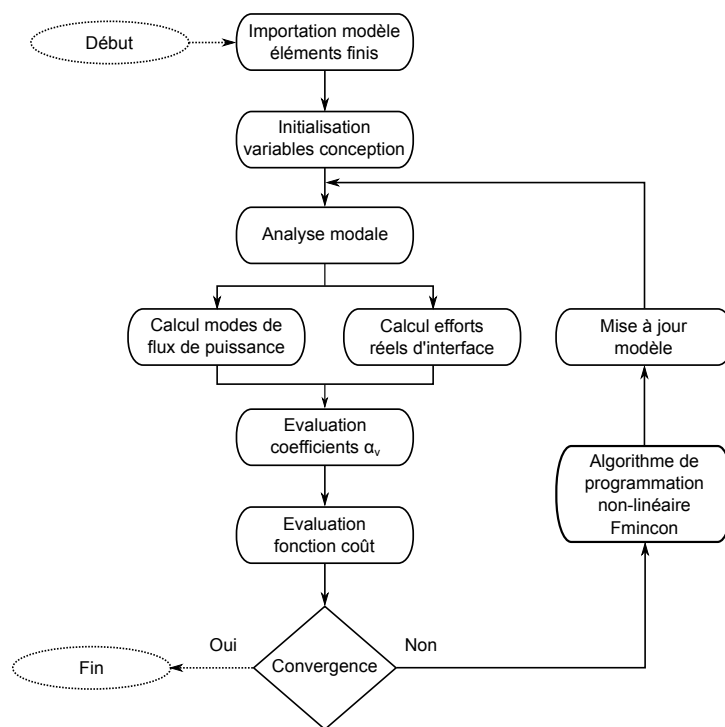


FIG. 5.12: Procédure d'optimisation mono-objectif

Les figures 5.13 représentent respectivement l'évolution des paramètres de conception ainsi que celle de la fonction coût, pour une optimisation initialisée à partir du point 195 de la phase d'investigation. On observe bien les paliers associés aux analyses locales de sensibilité suivis, d'une évolution importante dans une direction donnée. On note de plus que la convergence est atteinte au bout de 215 itérations.

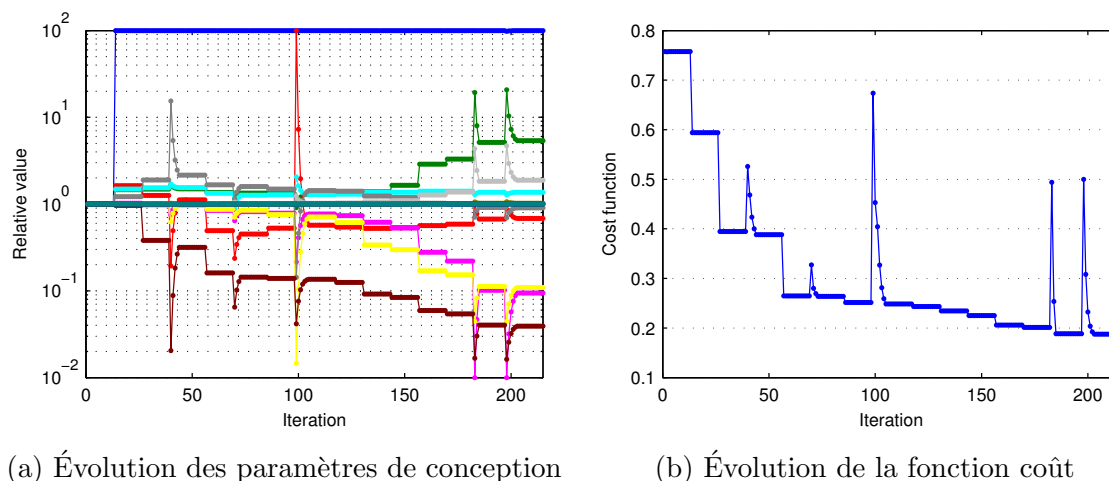


FIG. 5.13: Optimisation de la fonction coût à partir de la position 195

Les résultats obtenus pour les trois positions initialement retenues sont récapitulés tableau 5.3, en valeurs relatives. On constate tout d'abord que les valeurs finales atteintes par la fonction coût sont indépendantes des valeurs initiales. Ceci est dû au fait que le choix des positions initiales ne garantit pas la qualité de l'optimum local le plus proche. On peut ainsi imaginer aboutir à une meilleure performance en partant d'un point initial quelconque. La procédure sera cependant plus longue et donc plus coûteuse. En comparant rapidement ces solutions, on remarque qu'elles se ressemblent peu. On note toutefois que certaines variables ont atteint les bornes des intervalles de dispersion : ces points de conception peuvent éventuellement se trouver sur une pente menant à une meilleure solution.

La figure 5.14 (a) illustre l'impact de ces différentes valeurs optimales des paramètres de raideur sur la puissance transmise à l'interface. Si sa valeur maximale est bien minimisée sur l'intervalle d'étude 45-55 Hz, son comportement fréquentiel est très différent d'une solution à l'autre. Il en va de même concernant l'évolution de la réponse harmonique en accélération représentée figure 5.14 (b). On observe également que cette minimisation locale entraîne des modifications plus ou moins importantes du comportement dynamique sur le reste du spectre fréquentiel. Certaines résonances de puissance disparaissent, d'autres sont amplifiées ; de même, certains modes de vibrations subissent un important décalage fréquentiel, susceptible d'accentuer de nouveaux comportements, néfastes pour la structure.

Pos.	$f_c$ (%)	Dir.	Jonction 1	Jonction 2	Jonction 3	Jonction 4
238	45,15 → 23,64	$T_x$	8,19	95,79	5,77	0,01
		$T_y$	1,26	1,38	79,2	2,78
		$T_z$	8,17	0,47	10,07	0,02
262	70,63 → 27,91	$T_x$	4,82	61,5	11,68	3,5
		$T_y$	0,03	0,16	0,01	7,86
		$T_z$	2,28	14,77	20,6	0,52
195	75,75 → 18,74	$T_x$	100	54,2	0,8	13,64
		$T_y$	55,36	0	0,05	6,62
		$T_z$	2,02	5,74	0,01	25,61

TAB. 5.3: Valeurs relatives des paramètres de raideur optimaux - optimisation mono-objectif

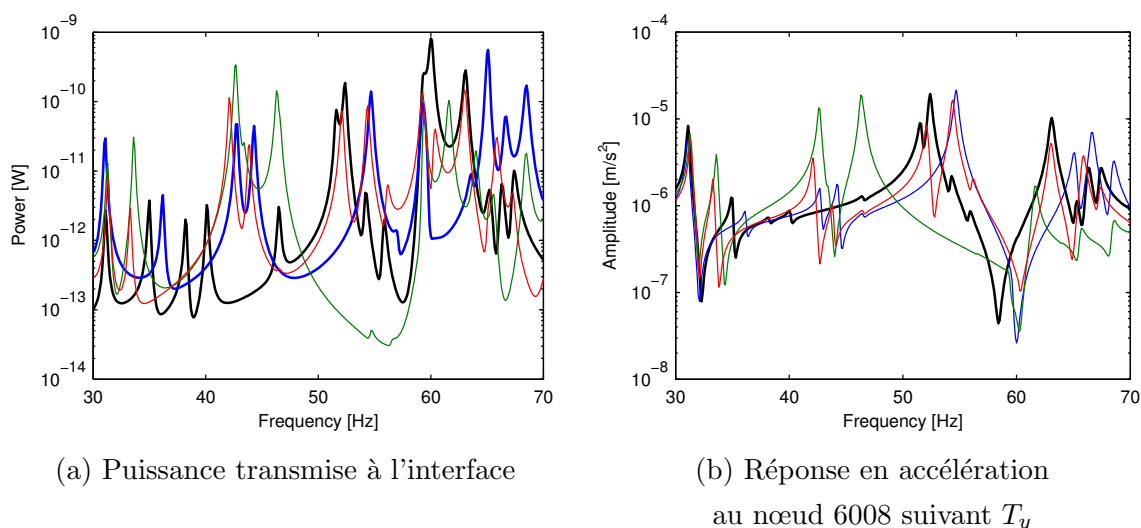


FIG. 5.14: Résultats de la procédure d'optimisation mono-objectif :

— initiale ; optima — 1, — 2, — 3

On en conclut donc que si ces solutions vérifient toutes le problème d'optimisation, le concepteur doit encore effectuer un choix parmi celles-ci afin de retenir la plus avantageuse au regard du comportement dynamique de l'ensemble de la structure. Il est également possible d'envisager l'ajout de contraintes, se rapportant par exemple à des déplacements maximaux de fréquences propres sensibles ou des niveaux de réponse moyens à ne pas dépasser, afin d'éliminer certains types de solutions.

### 5.5.3 Optimisation multiobjectif robuste

On propose maintenant d'appliquer une approche multi-objectif robuste, telle que celle décrite au chapitre 5.2.3, visant à optimiser à la fois la fonction coût et sa fonction vulnérabilité associée, respectivement définies équations 5.38 et 5.7. La figure 5.15 illustre la procédure mise en place. Comme annoncé précédemment, celle-ci s'appuie sur un algorithme génétique de type NSGA dont les valeurs des différents paramètres ont été fixés de la manière suivante :

- 50 individus par génération ;
- une probabilité de croisement  $p_c = 0,8$  ;
- une probabilité de mutation  $p_m = 0,1$  ;
- un paramètre de fonction de niche  $\sigma = 0,2$ .

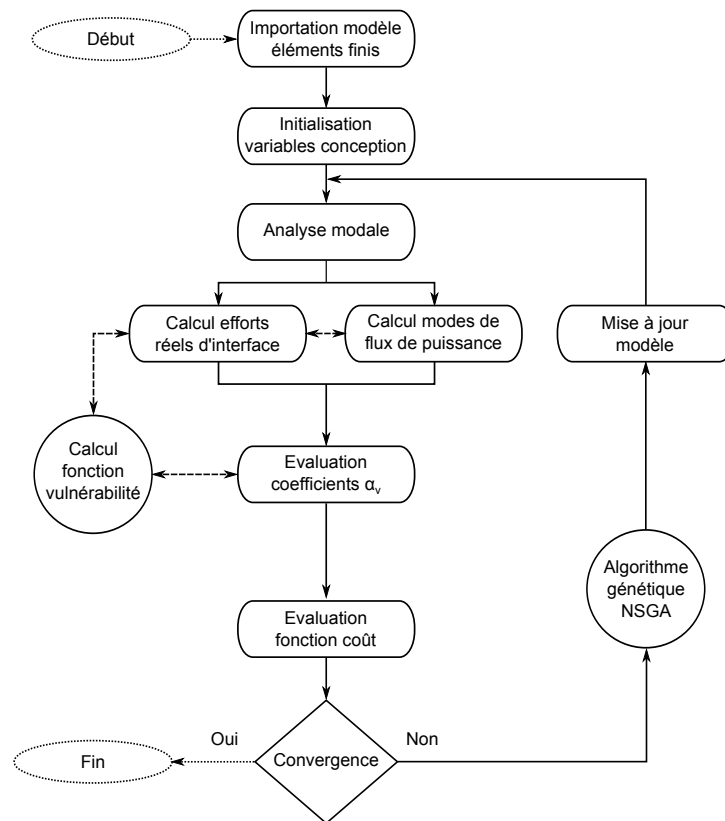


FIG. 5.15: Procédure d'optimisation multiobjectif

Le principal inconvénient de cette démarche réside cependant dans le coût de calcul lié à l'évaluation de la vulnérabilité. En effet, pour chaque individu, il est nécessaire de déterminer localement la moyenne et l'écart-type de la fonction coût. Ceci est réalisé à partir de 50 tirages aléatoires suivant une loi uniforme, pour une dispersion de 10 %. Or, cela implique de recalculer successivement les efforts réels d'interface. On choisit de pallier cette difficulté en déterminant



les efforts d'interface par superposition modale à l'aide de la méthode de réanalyse approchée présentée au chapitre 5.4.2. En effet, les modifications successives étant localisées au niveau des raideurs d'interface, les résidus statiques contiennent suffisamment d'information pour enrichir la base de réduction initiale de manière efficace.

On propose ci-dessous d'exposer les résultats obtenus à partir de deux lancements de cette procédure multi-objectif :

- le premier a convergé après 7 générations, ce qui est relativement peu, et a nécessité environ 16 heures de calcul ;
- le second a convergé après 14 générations et a nécessité environ 24 heures de calcul.

La figure 5.16 représente l'ensemble des solutions obtenues. On observe tout d'abord un nombre important de solutions peu performantes mais robustes. A l'inverse peu de solution très performantes, telles que  $f_c < 40\%$ , ont été trouvées. On constate ensuite que les fronts de Pareto finalement obtenus sont peu fournis (respectivement 13 et 14 individus), mais relativement homogènes.

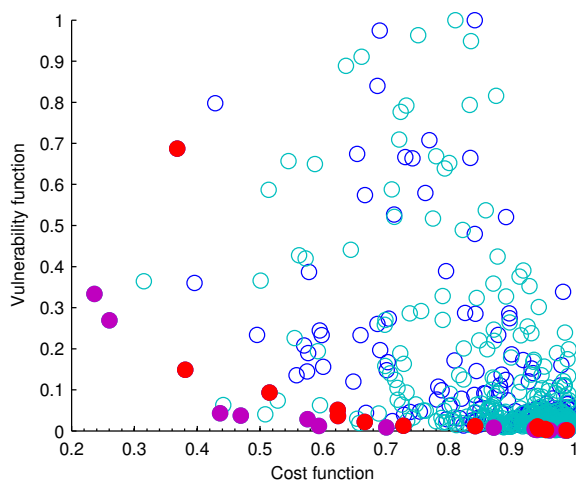


FIG. 5.16: Fronts de Pareto du problème d'optimisation robuste :

○ ● 1<sup>er</sup> lancement, ○ ● 2<sup>d</sup> lancement

Les paramètres associés aux quatre meilleurs compromis sont donnés tableau 5.4, en valeurs relatives. A nouveau, ces solutions semblent relativement différentes et certaines ont été limitées par les bornes de l'espace de conception. On observe enfin, figure 5.17, que ces solutions entraînent bien une diminution de la puissance transmise sur l'intervalle fréquentiel considéré, qui se traduit également par un abaissement du niveau de réponse en accélération. Cette fois-ci, l'impact sur le comportement de la structure semble être du même type pour l'ensemble des solutions. Il correspond globalement à un raidissement des modes de vibrations initialement présents à 55 Hz. On remarque également une diminution importante de la résonance de puissance à 60 Hz (sauf pour la solution 3).

Pos.	$[f_c - f_v]$ (%)	Dir.	Jonction 1	Jonction 2	Jonction 3	Jonction 4
428	23,63 - 33,32	$T_x$	4,4	52,54	1,82	6,8
		$T_y$	5,7	3,43	1,02	100
		$T_z$	48,07	3,15	13,97	0,13
505	26,04 - 26,93	$T_x$	22,63	100	5,94	63,85
		$T_y$	0,42	4,96	37,49	2,16
		$T_z$	2,27	0,53	0,15	74,77
157	38,09 - 14,87	$T_x$	70,48	87,12	0,01	1,01
		$T_y$	41,8	0,01	18,56	14,91
		$T_z$	39,81	7,04	2,85	0,91
176	43,63 - 4,28	$T_x$	17,42	74,21	2,07	0,35
		$T_y$	16,96	1,83	0,01	2,33
		$T_z$	0,11	53,86	1,42	0,24

TAB. 5.4: Valeurs relatives des paramètres de raideur optimaux - optimisation multiobjectif

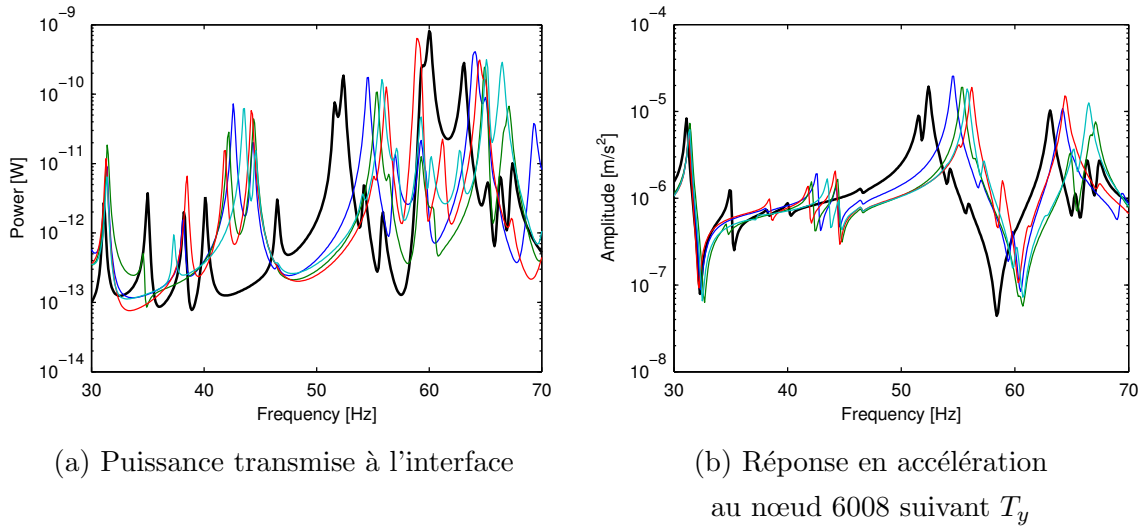


FIG. 5.17: Résultats de la procédure d'optimisation multiobjectif :

— initiale ; optima — 1, — 2, — 3, — 4

Cette procédure d'optimisation multiobjectif donne donc des solutions pertinentes, différentes de celles déterminées à l'aide de l'approche mono-objectif précédente. De plus, on note qu'elles se traduisent localement par une faible dispersion autour du comportement dynamique initial. Il reste cependant à vérifier si leur robustesse s'avère effectivement plus intéressante que celle des solutions précédentes.

## 5.6 Robustesse d'un choix de conception en présence de méconnaissances

### 5.6.1 Approche *info-gap*

Cette approche, développée initialement par Ben-Haim au début des années 1990, permet de quantifier la robustesse d'une décision basée sur un modèle mathématique, vis-à-vis du manque d'information s'exerçant sur ce système. Elle constitue ainsi un outil d'aide à la décision particulièrement utile puisqu'il permet non seulement d'étudier le compromis entre performance et robustesse mais également de comparer différents choix.

De manière générale une analyse *info-gap* nécessite de définir différentes composantes [11]. Tout d'abord, le modèle du système  $\mathcal{S}$ , qui permet de relier les grandeurs d'entrée du problème aux grandeurs de sortie. Ensuite, le modèle d'incertitude  $\mathcal{U}(\alpha, \bar{u})$  représentant le degré de variabilité d'une quantité incertaine  $u$  autour d'une position  $\bar{u}$ . Ce modèle étant convexe par définition, plus  $\alpha$  est grand, plus la plage de variation possible est importante. Ce dernier représente donc le paramètre incertain et exprime le manque d'information entre :

- **ce qui est connu**, à savoir la valeur nominale  $\bar{u}$  et la structure du modèle d'incertitude ;
- **ce qu'il est nécessaire de connaître**, pour obtenir une solution idéale, c'est-à-dire la valeur exacte  $u$ .

A cela s'ajoute le fait que la valeur du paramètre  $\alpha$  n'est généralement pas connue, d'où un second niveau d'incertitude : l'« horizon d'incertitude » n'est pas borné. Cette double lecture rend l'approche particulièrement attrayante pour traiter des problèmes en présence de grandes méconnaissances.

La notion de robustesse correspond alors à la plus grande valeur du paramètre incertain, pour laquelle la performance du système est jugée acceptable. Cette dernière est généralement exprimée par l'intermédiaire d'une fonction récompense scalaire  $R(q, u)$ , dépendant des paramètres de conception  $q$  et des grandeurs incertaines  $u$ , dont la valeur critique  $r_c$  est fixée *a priori* par le décideur, à partir de règles empiriques ou de calculs itératifs préliminaires. On définit l'ensemble  $\mathcal{A}(q, r_c)$  des valeurs du paramètre  $\alpha$  pour lesquelles le seuil critique est garanti :

$$\mathcal{A}(q, r_c) = \left\{ \alpha \mid \max_{u \in \mathcal{U}(\alpha, \bar{u})} R(q, u) \leq r_c \right\} \quad (5.39)$$

La fonction robustesse est donc définie de la manière suivante :

$$\hat{\alpha}(q, r_c) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}(q, r_c)} \alpha \quad (5.40)$$

Ainsi, si  $\hat{\alpha}(q, r_c)$  est grand la solution est qualifiée de robuste et à l'inverse, si  $\hat{\alpha}(q, r_c)$  est petit, même de faibles perturbations sont susceptibles d'entraîner un non respect des exigences de performance. De plus, cette fonction permet de classer différentes solutions, préférant ainsi un ensemble de paramètres  $q$  à un ensemble  $q'$  si  $\hat{\alpha}(q, r_c) > \hat{\alpha}(q', r_c)$ .

Il a été souligné par Ben-Haim que, dans certains cas particuliers, les variations dues aux incertitudes peuvent avoir des effets bénéfiques sur les performances recherchées. Il est alors intéressant d'étudier la fonction opportunité, définie comme le complément logique de la fonction robustesse par :

$$\hat{\beta}(q, r_c) = \min \left\{ \beta \mid \min_{u \in \mathcal{U}(\beta, \bar{u})} R(q, u) \leq r_c \right\} \quad (5.41)$$

Le caractère très général de cette approche explique en partie son utilisation dans de nombreux domaines (médical, management, ...). En dynamique des structures, des études ont été menées concernant le recalage de modèles [14, 127], la préparation d'essais et le placement optimal de capteurs [157] et plus récemment l'analyse de fiabilité [66] et la détermination de coefficients de sécurité [73].

### 5.6.2 Complexité des modèles d'incertitudes

Comme il a été exposé ci-dessus et comme le rappelle Ben-Haim [11], l'approche *info-gap* ne dépend d'aucune information probabiliste, d'où son aptitude à traiter des problèmes ayant des incertitudes non structurées ou de sévères manques d'information. Or, cela ne signifie pas pour autant qu'elle permette de résoudre, en l'état et sans poser d'hypothèses supplémentaires (éventuellement restrictives), ces problèmes où les méthodes conventionnelles se révèlent inadaptées. Elle n'échappe donc pas à la règle selon laquelle la qualité des résultats est fonction de la qualité des données d'entrée (*Garbage in, garbage out*).

En effet, la difficulté principale consiste ici à définir le modèle d'incertitude  $\mathcal{U}$ , caractérisant l'étendue de l'espace dans lequel la robustesse va être évaluée. Il correspond, par définition, à une famille non-bornée d'ensembles convexes, partageant tous la même structure, associés aux paramètres incertains  $u$ . Il s'agit alors de déterminer, suivant les informations initialement disponibles, la géométrie de ces ensembles. A titre d'exemple, le modèle de type intervalle est défini par :

$$\mathcal{U}(\alpha, \bar{u}) = \left\{ u \mid \left| \frac{u - \bar{u}}{\bar{u}} \right| \leq w\alpha \right\}, \alpha \geq 0 \quad (5.42)$$

où  $w$  représente un vecteur de pondération entre les différents paramètres incertains. On trouve également souvent des modèles de type enveloppe, ellipsoïde ou encore s'appuyant sur une norme [12].

Toutefois, il est possible que des densités de probabilité soient *a priori* associées à  $u$ , telle qu'une loi normale :

$$p(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (5.43)$$

Dans ce cas, les incertitudes peuvent s'exercer non plus directement sur les paramètres  $u$  mais sur les paramètres qui définissent la densité de probabilité, correspondant ici à la moyenne

$\mu$  et l'écart-type  $\sigma$ . Le modèle d'incertitude s'appuie alors sur une fonction pondérée de ces paramètres du type :

$$\mathcal{U}(\alpha, (\bar{\mu}, \bar{\sigma})) = \left\{ (\mu, \sigma) \mid w_\mu \left| \frac{\mu - \bar{\mu}}{\bar{\mu}} \right| + w_\sigma \left| \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right| \leq \alpha \right\} \quad (5.44)$$

On souligne qu'il est possible d'envisager une complexification du modèle en supposant, par exemple, que ces paramètres suivent à leur tour des lois de probabilité particulières (à l'image du module d'Young de pièces mécaniques, qui varierait non seulement en fonction de la production mais également en fonction du lot de production considéré).

Enfin, cette approche hybride peut être étendue en considérant que ce ne sont plus les paramètres qui sont incertains, mais leurs densités de probabilité, qui peuvent être amenées à évoluer au court du temps [13]. On parle alors d'incertitude sur un espace de fonctions. Pour cela, on commence par associer à une variable  $u$  sa densité de probabilité  $p(u)$ . On suppose ensuite que  $\tilde{p}(u)$  représente la meilleure estimation de  $p(u)$ , tout en sachant que celle-ci peut être considérablement fautive aux extrémités caractérisant les événements rares. On peut ainsi définir un modèle d'incertitude du type [12] :

$$\mathcal{U}(\alpha, \tilde{p}) = \left\{ \begin{array}{l} p(u) \mid p(u) \geq 0, \\ \int p(u) du = 1, \\ |p(u) - \tilde{p}(u)| \leq \alpha \tilde{p}(u), \text{ si } |u| \geq k\sigma, \\ p(u) = c\tilde{p}(u), \text{ si } |u| < k\sigma \end{array} \right\} \quad (5.45)$$

où les deux premières conditions visent à s'assurer que la fonction considérée est bien une densité de probabilité, et les deux suivantes à évaluer l'incertitude sur les parties extrêmes de la densité, situées à plus de  $k$  fois l'écart-type  $\sigma$ .

On constate donc que le principal enjeu de l'approche *info-gap* consiste à définir, de la manière la plus pertinente possible, le ou les modèles d'incertitudes associés au problème considéré. Si la souplesse de la formulation permet d'envisager toutes sortes d'ensembles, il demeure particulièrement difficile d'explorer cet espace, en particulier lorsqu'il se rapporte à des fonctions. Ainsi, dans la pratique, il est courant de se ramener à des incertitudes sur des paramètres, quitte à reconsidérer le contexte de « méconnaissances sévères ».

### 5.6.3 Définition du calcul

L'approche *info-gap* est adoptée dans cette étude afin de comparer la robustesse des différentes solutions obtenues précédemment à l'aide des deux procédures d'optimisation. Il s'agit donc de quantifier l'écart entre les valeurs optimales des paramètres de raideur d'interface et le critère de

conception que représente la fonction coût  $f_c$ , donnée équation 5.38. On précise qu'au regard des informations dont on dispose sur le modèle, on choisit de se limiter à une approche paramétrique directe sur les variables de conception.

Le modèle du système correspond ici au modèle éléments finis de la structure test, avec ses conditions aux limites et son chargement. On choisit de représenter les incertitudes sur les paramètres de conception  $x$ , constitués des différentes raideurs d'interface, à l'aide d'un modèle convexe simple de type intervalle, sous la forme :

$$\mathcal{U}(\alpha, x^0) = \left\{ x \mid \left| \frac{x - x^0}{x^0} \right| \leq \alpha \right\} ; \quad \alpha \geq 0 \quad (5.46)$$

Ainsi, si  $f(\mathcal{S}(x)) = f_c$  représente la mesure de performance du système, on définit  $f_{crit}$  comme étant la valeur critique que celle-ci peut prendre. La fonction robustesse est donc définie par :

$$\hat{\alpha}(x, f_{crit}) = \max \left\{ \alpha \mid \left( \max_{x \in \mathcal{U}(\alpha, x^0)} f(\mathcal{S}(x)) \right) \leq f_{crit} \right\} \quad (5.47)$$

On obtient finalement les courbes de robustesse en traçant l'évolution de  $\hat{\alpha}$  en fonction de  $f_{crit}$ . Or ce calcul nécessite de résoudre un problème non-linéaire dont il est généralement impossible de déterminer une solution analytique simple. On procède donc en pratique de manière inverse en résolvant, pour un ensemble défini de valeurs du paramètre  $\alpha$ , le problème d'optimisation suivant<sup>9</sup> :

$$f_{crit, \alpha_i} = \max_{x \in \mathcal{U}(\alpha, x^0)} f(\mathcal{S}(x)) \quad (5.48)$$

Étant donné que les raideurs d'interface considérées se rapportent à un modèle simplifié des jonctions réelles, on considère que l'incertitude associée peut être relativement importante. On décide donc d'évaluer la robustesse des valeurs optimales obtenues précédemment sur une plage de variation comprise, au maximum, entre plus ou moins 50 %.

#### 5.6.4 Comparaison des solutions optimales

On visualise, figure 5.18, les courbes de robustesse associées aux trois premières solutions de chaque démarche d'optimisation. Les différentes valeurs prises par le paramètre  $\alpha \in [0, 0,1, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1]$  permettent de discrétiser l'espace associé à la dispersion maximale de  $\pm 50\%$  autour des solutions optimales. On vérifie de manière globale que celles-ci sont, par définition, non robustes : une légère variation des raideurs ( $\alpha \neq 0$ ) entraîne immédiatement une dégradation de la performance. Puis, au fur et à mesure que l'horizon d'incertitude augmente, la robustesse est proportionnelle à la pente de chaque courbe. On retrouve alors le compromis classique selon lequel la robustesse augmente au détriment de la performance.

<sup>9</sup>. On trouvera en annexe D une remarque concernant les méthodes numériques permettant de résoudre ce problème d'optimisation.

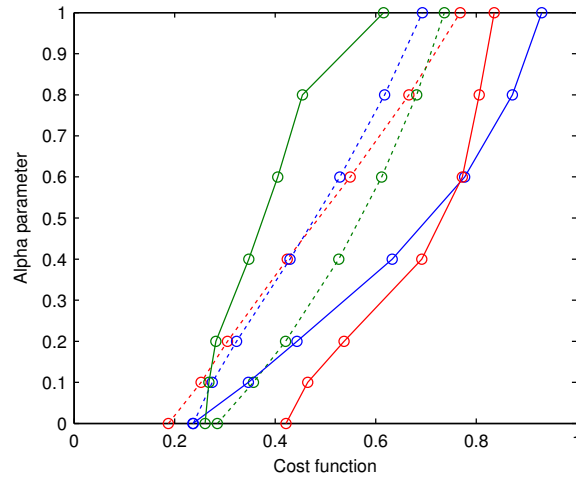


FIG. 5.18: Comparaison de la robustesse *info-gap* des solutions optimales :  
mono  $\cdots$  238,  $\cdots$  262,  $\cdots$  195 ; multiobjectif — 428, — 505, — 176

Il est également possible de comparer ces différentes solutions entre elles. Ainsi, pour une même performance initiale, on choisira plutôt la solution 238 qui est globalement plus robuste que la 428. De plus, si la solution 195 est initialement plus performante que la 238, on constate qu'elle s'avère moins intéressante lorsque  $\alpha > 0,4$ . Par conséquent, il peut être préférable de retenir une solution moins performante si l'on ne peut pas garantir un certain seuil d'incertitude.

On souligne enfin que cette approche *info-gap* reflète bien le caractère robuste des solutions 505 et 176, tel qu'observé sur le front de Pareto donné figure 5.16. On observe en particulier la présence d'un point d'inflexion supplémentaire pour un horizon d'incertitude  $\alpha = 0,2$ , correspondant à une dispersion maximale de 10 %. Toutefois, contrairement aux résultats donnés au tableau 5.4, la solution 505 semble globalement plus robuste que la solution 176 : ceci peut provenir d'un nombre insuffisant de tirages de Monte-Carlo dans l'évaluation de la fonction vulnérabilité, entraînant une sous-évaluation de la robustesse.

## 5.7 Conclusions

Ce chapitre a montré l'intérêt d'intégrer la méthode des modes de flux de puissance à une démarche de conception robuste de structures complexes. Conformément au contexte général de ces travaux, celle-ci vise à minimiser la puissance transmise aux interfaces entre les différentes sous-structures afin de contrôler leur comportement vibratoire.

Pour cela, il a été proposé dans un premier temps de reconsidérer la conception de la sous-structure réceptrice, dont les paramètres définissent les chemins de puissance par lesquels transite la puissance issue de la sous-structure source. Une analyse de sensibilité et une méthode de réanalyse approchée des modes de flux de puissance ont ainsi été introduites. Elles s'appuient

sur les propriétés présentées dans les chapitres précédents, plus particulièrement sur les liens forts entre modes de flux de puissance et modes de vibrations, et fournissent des outils rapides et robustes.

Dans un deuxième temps, deux démarches d'optimisation des raideurs d'interface ont été détaillées et illustrées sur une structure test se rapportant au contexte industriel initial. Une étude préliminaire a permis de montrer la pertinence de définir une fonction coût basée sur les coefficients de participation modale qui caractérisent, qualitativement et quantitativement, les chemins de puissance dominants. Une première approche mono-objectif a permis de valider cette démarche globale : les solutions obtenues minimisent bien la puissance transmise par les *boosters* et permettent de diminuer le niveau de réponse du corps central. On souligne toutefois que les hypothèses du modèle initial sont particulièrement influentes sur les résultats. Il est donc nécessaire de disposer à la fois d'un modèle fonctionnel représentatif, ainsi que de suffisamment d'informations concernant les chargements extérieurs. Afin de limiter l'impact de ces méconnaissances et incertitudes sur les solutions, une seconde approche multiobjectif a été présentée. Le but est alors d'optimiser simultanément la fonction coût et sa vulnérabilité à l'aide d'un algorithme génétique. Si de bons résultats ont également été obtenus, on note que cette approche demeure beaucoup plus lourde que la précédente. En effet, les paramètres de l'algorithme doivent être adaptés au problème et, en toute rigueur, plusieurs lancements seraient nécessaires afin d'obtenir une famille de solutions représentatives. Ainsi, malgré l'utilisation de méthodes approchées, cette démarche demeure particulièrement coûteuse.

Enfin, dans un dernier temps, une analyse de robustesse complémentaire basée sur une approche *info-gap* a été présentée. Si elle permet d'obtenir, localement, une estimation de la robustesse comparable à celle issue de la fonction vulnérabilité, la souplesse de sa formulation en fait un outil d'aide à la décision particulièrement intéressant dans un contexte d'incertitude ou de faible méconnaissance. Il a cependant été souligné que les principales difficultés de cette approche demeurent la détermination du ou des modèles d'incertitude ainsi que le choix de la procédure de résolution du problème d'optimisation associé.



Chapitre **6**

CONCLUSION GÉNÉRALE ET  
PERSPECTIVES

---

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de thèse s'inscrivent dans un contexte global de maîtrise des niveaux vibratoires de structures industrielles complexes. Leur objectif a été de fournir une méthode de caractérisation dynamique des interfaces entre différents composants de ces structures, puis de l'intégrer dans une démarche de conception robuste visant à minimiser la puissance transmise entre une sous-structure source et une sous-structure réceptrice.

Une étude bibliographique a tout d'abord permis de replacer cette problématique à l'intersection de plusieurs thématiques actuelles, telles que l'isolation vibratoire des structures, la prédiction de leur comportement en moyennes fréquences et l'étude des flux de puissance associés. Au regard de la synthèse critique proposée, l'approche adoptée se distingue tout d'abord par son intérêt pour les vibrations structurales basses fréquences, d'où le choix d'une formulation en déplacement basée sur la méthode des éléments finis. Elle se rapporte cependant à l'évaluation de grandeurs énergétiques quadratiques, plus adaptées à la caractérisation des transferts vibratoires dans l'espace dual associé aux efforts réels d'interface.

La formulation théorique de la méthode des modes de flux de puissance a ensuite été présentée de manière générale. Elle s'appuie sur la minimisation de la puissance moyenne par rapport aux efforts extérieurs et conduit à la résolution d'un problème aux valeurs propres, associé à la partie imaginaire de la matrice de flexibilité dynamique. Les valeurs et efforts propres ainsi déterminés fournissent, respectivement, des informations quantitatives et qualitatives sur les flux de puissance existant à l'intérieur de la structure.

La méthode a ensuite été appliquée à l'étude de la puissance transmise à l'interface entre deux sous-structures. Dans ce cas, il a été mis en évidence que les modes de flux de puissance ne dépendent plus que des propriétés de la sous-structure réceptrice et permettent de caractériser les efforts réels d'interface. Il est alors possible d'identifier et de quantifier, à l'aide de coefficients de projection, les directions associées aux différents chemins de puissance. Les plus sollicitées constituent ainsi un sous-espace dominant par lequel transite la majeure partie de la puissance.

Plusieurs propriétés particulières de ces modes de flux de puissance ont été investiguées afin d'approfondir l'étude de leur signification et de leur comportement. Si celles-ci s'avèrent rapidement complexes, elles tendent à mettre en évidence l'intérêt de faire appel à ces grandeurs pour caractériser des flux de puissance en moyennes fréquences ou encore élaborer des stratégies de contrôle actif.

L'ensemble de ces résultats a finalement été appliqué afin de proposer une méthodologie de conception robuste des interfaces de structures et de l'illustrer sur un modèle simplifié de lanceur spatial, représentatif du contexte industriel proposé par le CNES. Après avoir présenté des outils de réanalyse approchée dans l'optique d'une reconception de la sous-structure réceptrice, deux démarches d'optimisation ont été exposées afin de minimiser la puissance transmise aux interfaces par rapport aux paramètres de raideur des jonctions. Les résultats obtenus ont permis

de comparer une approche classique mono-objectif à une approche multiobjectif robuste. De plus, ceux-ci ont permis de valider la démarche visant à minimiser la puissance transmise par les *boosters* pour limiter la réponse dynamique au niveau du corps central. L'importance de considérer la robustesse des solutions retenues a été soulignée par une approche complémentaire de type *info-gap*.

On souligne également que tous les outils et les procédures présentés dans ces travaux ont été implémentés via la plate-forme logicielle *ÆOSP*, développée au Département Mécanique Appliquée de l'Institut FEMTO-ST. Ils sont donc directement applicables à l'étude de modèles éléments finis de structures industrielles complexes.

Enfin, l'ensemble de ces contributions et les différentes remarques soulevées tout au long de ces travaux permettent d'envisager des perspectives intéressantes, à court et moyen termes, parmi lesquelles on distingue principalement :

- **l'optimisation des paramètres d'amortissement** : en effet, ces travaux se sont limités à un modèle d'amortissement proportionnel peu représentatif de la réalité. Or, comme il a été exposé au chapitre 2.2, il semble particulièrement intéressant d'optimiser l'amortissement au niveau des jonctions afin de dissiper une partie de la puissance restante transitant à l'interface, une fois les comportements vibratoires décorrélés à l'aide d'une optimisation des paramètres de raideur. Toutefois cela implique de reconsidérer les procédures basées sur l'analyse modale de la structure conservative en faisant appel aux modes complexes de vibration ;
- **l'optimisation de la position des jonctions** : il s'agit ici d'appliquer la méthode des modes de flux de puissance sur différentes configurations de degrés de liberté d'interface. Cela sous-entend d'effectuer de nombreuses réanalyses qui s'avèrent à nouveau particulièrement coûteuses. Or, certaines études ont montré l'efficacité de la méthode des approximations combinées à traiter les problèmes de réanalyse topologique. On peut ainsi envisager d'adapter les procédures d'optimisation afin de comparer, rapidement et à moindre coût, différentes configurations d'interfaces ;
- **la gestion des limites du modèle éléments finis** : dès le début de ces travaux, il a été envisagé d'étendre cette méthode de caractérisation au domaine des moyennes fréquences. Si les approches par éléments finis s'avèrent peu compatibles, une certaine robustesse des grandeurs quadratiques que constituent les modes de flux de puissance a été mise en évidence. Il semble donc intéressant d'approfondir l'approche basée sur une matrice de flexibilité moyenne par bandes de fréquence, introduite au chapitre 4.3.2. De même, une modélisation non-paramétrique des incertitudes au niveau des interfaces des différents composants constituerait une alternative aux simplifications issues de la modélisation des jonctions ;

---

– **la poursuite des méthodologies de conception** : les résultats obtenus à partir des démarches d'optimisation présentées dans ces travaux se sont révélées particulièrement sensibles aux hypothèses du modèle initial. Elles peuvent ainsi être considérées comme faisant partie d'une phase de pré-dimensionnement, basée sur modèle fonctionnel d'ensemble. Il serait alors intéressant de poursuivre cette démarche sur une structure constituée de composants plus détaillés, en considérant cette fois-ci les chemins de puissance, estimés à la phase précédente, comme des contraintes à respecter, afin d'optimiser d'autres critères dimensionnants, par rapport à d'autres paramètres (par exemple la masse variable des *boosters*). Enfin, il serait également envisageable d'adopter des approches fiabilistes hybrides telles que celles mentionnées précédemment afin d'intégrer la notion de coefficient de sécurité directement dans les démarches de conception.

# RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] S. ADHIKARI : Generalized wishart distribution for probabilistic structural dynamics. *Computational Mechanics*, 45(5):495 – 511, 2010.
- [2] B. AIT-BRIK : *Méthodologies de conception robuste et d'optimisation dans un contexte de conception d'architectures mécaniques nouvelles en avant-projet*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 2005.
- [3] B. AIT-BRIK : Une méthodologie de conception robuste en dynamique des structures. *European Journal of Computational Mechanics*, 15(1-2-3):15 – 27, 2006.
- [4] H. AITRIMOUCHE, G. LALLEMENT et J. KOZANEK : Construction of the unobserved part of the square dynamic flexibility matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 204(1):73 – 84, 1997.
- [5] K.S. ALFREDSSON : Active and reactive structural energy flow. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119:70 – 79, 1997.
- [6] K.S. ALFREDSSON, B.L. JOSEFSON et M.A. WILSON : Use of the energy flow concept in vibration design. *AIAA Journal*, 34(6):1250 – 1255, 1996.
- [7] E. BALMÈS : *Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduits en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1997.
- [8] E. BALMÈS : Viscoelastic vibration toolbox, user manual. Rapport technique, SDTools, 2004-2009.
- [9] J.-L. BATOZ et G. DHATT : *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, Paris, 1990.
- [10] C. BEIJERS : *A modeling approach to hybrid isolation of structure-borne sound*. Thèse de doctorat, University of Twente, Pays-Bas, 2005.
- [11] Y. BEN-HAIM : Info-gap value of information in model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(3):457 – 474, 2001.
- [12] Y. BEN-HAIM : *Info-gap decision theory: Decision under severe uncertainty*. Academic Press, Oxford, Royaume-Uni, 2006.

- [13] Y. BEN-HAIM: Robust-satisficing in engineering design. *In 9th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, pages 9 – 12, Haifa, Israel, July 2008. ASME.
- [14] Y. BEN-HAIM, S. COGAN et L. SANSEIGNE: Usability of mathematical models in mechanical decision processes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):121 – 134, 1998.
- [15] Y. BEN-HAIM et I. ELISHAKOFF: *Convex models of uncertainty in applied mechanics*. Elsevier Science Publisher, 1990.
- [16] F. BESSAC: *Utilisation des valeurs propres et vecteurs propres de couplage pour étudier le comportement vibro-acoustique de systèmes couplés*. Thèse de doctorat, INSA, Lyon, 1996.
- [17] H.-G. BEYER et B. SENDHOFF: Robust optimization - a comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33-34):3190 – 3218, 2007.
- [18] G. BLATMAN, B. SUDRET et M. BERVEILLER: Quasi random numbers in stochastic finite element analysis. *Mécanique et Industries*, 8:289 – 297, 2007.
- [19] Y.I. BOBROVNITSKII: Some energy relations for mechanical systems. *In IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis*, Southampton, Royaume-Uni, 1997.
- [20] Y.I. BOBROVNITSKII: Estimating the vibrational energy characteristics of an elastic structure via the input impedance and mobility. *Journal of Sound and Vibration*, 217(2):351 – 386, 1998.
- [21] A. BOCQUILLET, M.N. ICHCHOU, P. MORON et L. JÉZÉQUEL: On the validity domain of some high frequency energy models. *In F.J. FAHY et W.G. PRICE, éditeurs: IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis*, Southampton, 1997. Kluwer.
- [22] H.A. BONHOFF et B.A.T. PETERSSON: The influence of cross-order terms in interface mobilities for structure-borne sound source characterization: Force-order distribution. *Journal of Sound and Vibration*, 322(1-2):241 – 254, 2009.
- [23] H.A. BONHOFF et B.A.T. PETERSSON: The influence of cross-order terms in interface mobilities for structure-borne sound source characterization. *Journal of Sound and Vibration*, 329(16):3280 – 3303, 2010.
- [24] A. Le BOT: A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):537 – 554, 1998.
- [25] A. Le BOT: Comparison of vibrational conductivity and radiative energy transfer methods. *Journal of Sound and Vibration*, 283:135 – 151, 2005.
- [26] A. Le BOT: Derivation of statistical energy analysis from radiative exchanges. *Journal of Sound and Vibration*, 300:763 – 779, 2007.
- [27] M.-L. BOUAZIZI, S. GHANMI et N. BOUHADDI: Multi-objective optimization in dynamics of the structures with nonlinear behavior: Contributions of the metamodels. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45(10):612 – 623, 2009.

- [28] O.M. BOUTHIER et R.J. BERNHARD: Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1):149 – 164, 1995.
- [29] M.J. BRENNAN et N.S. FERGUSON: *Advanced applications in acoustics, noise and vibration*, chapitre Vibration control, pages 530– 580. Spon Press, Londres, 2004.
- [30] K.A. BURGEMEISTER: *Novel methods of transduction for active vibration control of harmonic sound radiated by vibrating surfaces*. Thèse de doctorat, University of Adelaide, Australie, 1996.
- [31] E. CAPIEZ-LERNOUT, M. PELLISSETTI, H. PRADLWARTER, G.I. SCHUELLER et C. SOIZE: Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5):923 – 938, 2006.
- [32] B.S. CAZZOLATO et C.H. HANSEN: Active control of sound transmission using structural error sensing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(5):2878 – 2889, 1998.
- [33] K. L. CHANDIRAMANI: Some simple models describing the transition from weak to strong coupling in statistical energy analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(4): 1081–1083, 1978.
- [34] V. COTONI: *Modélisation de phénomènes vibroacoustiques en moyennes et hautes fréquences par une méthode énergétique locale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [35] R.R. CRAIG: Coupling of substructures for dynamic analyses: an overview. In *42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, volume 5, pages 3–14, Atlanta, 2000.
- [36] R.R. CRAIG et M.C.C. BAMPTON: Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6:1313 – 1319, 1968.
- [37] R.R. CRAIG et C.-J. CHANG: Substructure coupling for dynamic analysis and testing. Technical Report CR-2781, NASA, 1977.
- [38] L. CREMER, M. HECKL et B.A.T. PETERSSON: *Structure-borne sound*. Springer Verlag, Berlin, Allemagne, 3e édition édition, 2005.
- [39] J.M. CUSCHIERI: Vibration transmission through periodic structures using a mobility power flow approach. *Journal of Sound and Vibration*, 143(1):65 – 74, 1990.
- [40] D. de KLERK, D.J. RIXEN et S.N. VOORMEEREN: General framework for dynamic substructuring: history, review and classification of techniques. *AIAA Journal*, 46(5):1169 – 1181, 2008.
- [41] M. de ROCHAMBEAU: *Analyse des interactions fluide-structure en moyennes fréquences sous chargement aérodynamique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2010.
- [42] O. DESSOMBZ, F. THOUVEREZ, J.-P. LAÏNÉ et L. JÉZÉQUEL: Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):949 – 968, 2001.

- [43] I. DOLTSINIS et Z. KANG : Robust design of structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(23-26):2221 – 2237, 2004.
- [44] S.J. ELLIOTT et M.E. JOHNSON : Radiation modes and the active control of sound power. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94(4):2194 – 2204, 1993.
- [45] P. ENJALABERT : *Sur la théorie des méconnaissances en conception robuste*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009.
- [46] F.J. FAHY : Statistical energy analysis: a critical overview. *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, 346(1681):431 – 447, 1994.
- [47] C.R. FREDÖ : A sea-like approach for the derivation of energy flow coefficients with a finite element model. *Journal of Sound and Vibration*, 199(4):645 – 666, 1997.
- [48] R.A. FULFORD et B.M. GIBBS : Structure-borne sound power and source characterization in multi-point-connected systems, part i: case studies for assumed force distributions. *Journal of Sound and Vibration*, 204(4):659 – 677, 1997.
- [49] R.A. FULFORD et B.A.T. PETERSSON : The role of moments on the vibration transmission in built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 227(3):479 – 510, 1999.
- [50] C.R. FULLER, S.J. ELLIOTT et P.A. NELSON : *Active control of vibrations*. Academic Press, Londres, Royaume-Uni, 1996.
- [51] S. GABRIELE et A. CULLA : Comparison of statistical and interval analysis for the energy flow uncertainties in structural vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 314(3-5):672 – 692, 2008.
- [52] P. GARDONIO et M.J. BRENNAN : On the origins and developments of mobility and impedance methods in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 249(3):557 – 573, 2002.
- [53] P. GARDONIO et S.J. ELLIOTT : Passive and active isolation of structural vibration transmission between two plates connected by a set of mounts. *Journal of Sound and Vibration*, 237(3):483 – 511, 2000.
- [54] P. GARDONIO, S.J. ELLIOTT et R. J. PINNINGTON : Active isolation of structural vibration on a multiple-degree-of-freedom system, part i: the dynamics of the system. *Journal of Sound and Vibration*, 207(1):61 – 93, 1997.
- [55] P. GARDONIO, S.J. ELLIOTT et R.J. PINNINGTON : Active isolation of structural vibration on a multiple-degree-of-freedom system, part ii: effectiveness of active control strategies. *Journal of Sound and Vibration*, 207(1):95 – 121, 1997.
- [56] R.G. GHANEM et P.D. SPANOS : *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer Verlag, Berlin, Allemagne, 1991.
- [57] S. GHANMI, M. GUEDRI, M.-L. BOUAZIZI et N. BOUHADDI : Robust multi-objective and multi-level optimization of complex mechanical structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7):2444 – 2461, 2011.



- [58] A. GIRARD et H. DEFOSSE: Frequency response smoothing, matrix assembly and structural paths: A new approach for structural dynamics up to high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 137(1):53 – 68, 1990.
- [59] A. GIRARD et N. ROY: *Dynamique des structures industrielles*. Hermes Science Publication, 2003.
- [60] L.-O. GONIDOU: Dynamic characterization of structural interfaces. *Proceedings of the the Spacecraft and Launch Vehicle Dynamic Environments Workshop*, 2007.
- [61] H.G.D. GOYDER et R.G. WHITE: Vibrational power flow from machines into built-up structures, part i: Introduction and approximate analyses of beam and plate-like foundations. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1):59 – 75, 1980.
- [62] H.G.D. GOYDER et R.G. WHITE: Vibrational power flow from machines into built-up structures, part ii: Wave propagation and power flow in beam-stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1):77 – 96, 1980.
- [63] H.G.D. GOYDER et R.G. WHITE: Vibrational power flow from machines into built-up structures, part iii: Power flow through isolation systems. *Journal of Sound and Vibration*, 68(1):97 – 117, 1980.
- [64] M. GÉRADIN et D. RIXEN: *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.
- [65] M. GUEDRI, N. BOUHADDI et R. MAJED: Reduction of the stochastic finite element models using a robust dynamic condensation method. *Journal of Sound and Vibration*, 297(1-2):123 – 145, 2006.
- [66] M. GUEDRI, S. COGAN et N. BOUHADDI: Robustness of structural reliability analyses to epistemic uncertainties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 28(0):458 – 469, 2012.
- [67] M. GUEDRI, S. GHANMI, R. MAJED et N. BOUHADDI: Robust tools for prediction of variability and optimization in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(4):1123 – 1133, 2009.
- [68] J.-L. GUYADER: Modal sampling method for the vibration study of systems of high modal density. *Journal of the Acoustical Society of America*, 88:2269 – 2276, 1990.
- [69] J.L. GUYADER, C. BOISSON et C. LESUEUR: Energy transmission in finite coupled plates, part i: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 81(1):81 – 92, 1982.
- [70] T. HASSELMAN, K. YAP, H. YAN et A. PARRETT: Statistical energy analysis by principal components for mid-frequency analysis. In *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. AIAA, 2002.
- [71] T.K. HASSELMAN, M.C. ANDERSON et Y.-C. LAI: Linking fea and sea by principal component analysis. In *16th International Modal Analysis Conference*, volume 2, pages 1285 – 1291, Santa-Barbara, Etats-Unis, 1998. SEM.

- [72] B. HIVERNIAU : *Transmissions solidiennes : méthodologies de prévision vibroacoustiques moyennes et hautes fréquences sous excitations aéroacoustiques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2007.
- [73] A. HOT, S. COGAN, E. FOLTÊTE, G. KERSCHEN, F. BUFFE, J. BUFFE et S. BEHAR : Design of uncertain prestressed space structures: an info-gap approach. *In 30th International Modal Analysis Conference*, Jacksonville, Etats-Unis, 2012. SEM.
- [74] W.C. HURTY : Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3:678 – 685, 1965.
- [75] M.N. ICHCHOU, A. Le BOT et L. JÉZÉQUEL : Energy models of one-dimensional, multi-propagative systems. *Journal of Sound and Vibration*, 201(5):535 – 554, 1997.
- [76] M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL : Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and on simple models of the energetics of transversaly vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4):679 – 685, 1996.
- [77] J.-F. IMBERT : *Analyse des structures par éléments finis*. Eyrolles, 3e édition édition, 1995.
- [78] M.D. JENKINS, P.A. NELSON, R.J. PINNINGTON et S.J. ELLIOTT : Active isolation of periodic machinery vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 166(1):117 – 140, 1993.
- [79] L. JI, B.R. MACE et R.J. PINNINGTON : Power transmission between long-wavelength sources and short-wavelength receivers. Rapport technique, ISVR, Southampton, Royaume-Uni, 2001.
- [80] L. JI, B.R. MACE et R.J. PINNINGTON : Power transmission to flexible receivers by force sources. Rapport technique, ISVR, Southampton, Royaume-Uni, 2001.
- [81] L. JI, B.R. MACE et R.J. PINNINGTON : Estimation of power transmission to a flexible receiver from a stiff source using a power mode approach. *Journal of Sound and Vibration*, 268(3):525 – 542, 2003.
- [82] L. JI, B.R. MACE et R.J. PINNINGTON : A power mode approach to estimating vibrational power transmitted by multiple sources. *Journal of Sound and Vibration*, 265(2):387 – 399, 2003.
- [83] Z. KANG : *Robust design optimization of structures under uncertainties*. Thèse de doctorat, Universität Stuttgart, Allemagne, 2005.
- [84] A.M. Abu KASSIM et B.H.V. TOPPING : Static reanalysis: a review. *Journal of Structural Engineering*, 113:1029 – 1045, 1987.
- [85] U. KIRSCH : A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25:67 – 85, 2003.
- [86] M. KLEIBER et T.D. HEIN : *The stochastic finite element method, basic perturbation technique and computer implementation*. Wiley, New York, Etats-Unis, 1992.
- [87] P. LANCASTER et M. TISMENETSKY : *The theory of matrices*. Academic Press, 1985.

- [88] R.S. LANGLEY: On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182(4):637 – 657, 1995.
- [89] R.S. LANGLEY et P. BREMNER: A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(3):1657 – 1671, 1999.
- [90] Y. LASE, M.N. ICHCHOU et L. JÉZÉQUEL: Energy flow analysis of bars and beams: theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1):281 – 305, 1996.
- [91] A.Y.T. LEUNG: A simple dynamic substructure method. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 16:827 – 837, 1988.
- [92] Y.T. LEUNG: An accurate method of dynamic substructuring with simplified computation. *International journal for numerical methods in engineering*, 14:1241 – 1256, 1979.
- [93] X.L. LIU: Behavior of derivatives of eigenvalues and eigenvectors in curve veering and mode localization and their relation to close eigenvalues. *Journal of Sound and Vibration*, 256(3):551 – 564, 2002.
- [94] R.H. LYON et R.G. DEJONG: *Theory and application of statistical energy analysis*. Butterworth-Heinemann, Newton, Etats-Unis, 2e edition édition, 1995.
- [95] R.H. LYON et G. MAIDANIK: Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5):623 – 639, 1962.
- [96] B.R. MACE: The statistics of power flow between two continuous one-dimensional subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 154(2):321 – 341, 1992.
- [97] B.R. MACE: Statistical energy analysis, energy distribution models and system modes. *Journal of Sound and Vibration*, 264(2):391 – 409, 2003.
- [98] B.R. MACE: Statistical energy analysis: coupling loss factors, indirect coupling and system modes. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1-2):141 – 170, 2005.
- [99] B.R. MACE et P.J. SHORTER: Energy flow models from finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 233(3):369 – 389, 2000.
- [100] R.H. MACNEAL: A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1:581 – 601, 1971.
- [101] G. MASSON, B. Ait BRIK, S. COGAN et N. BOUHADDI: Component mode synthesis (cms) based on an enriched ritz approach for efficient structural optimization. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5):845 – 860, 2006.
- [102] MATHWORKS: Optimization toolbox - user's guide, r2012a. Rapport technique, Matlab, 2012.
- [103] L. MAXIT: *Extension et reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales*. Thèse de doctorat, INSA, Lyon, 2000.

- [104] D.W. MILLER, S.R. HALL et A.H. von FLOTOW : Optimal control of power flow at structural junctions. *Journal of Sound and Vibration*, 140(3):475 – 497, 1990.
- [105] D.W. MILLER et A. von FLOTOW : A travelling wave approach to power flow in structural networks. *Journal of Sound and Vibration*, 128(1):145 – 162, 1989.
- [106] J.M. MONDOT et B. PETERSSON : Characterization of structure-borne sound sources: The source descriptor and the coupling function. *Journal of Sound and Vibration*, 114(3):507 – 518, 1987.
- [107] R.M. MOORE : *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Etats-Unis, 1966.
- [108] A.T. MOORHOUSE : On the characteristic power of structure-borne sound sources. *Journal of Sound and Vibration*, 248(3):441 – 459, 2001.
- [109] A.T. MOORHOUSE : A dimensionless mobility formulation for evaluation of force and moment excitation of structures. *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3):972 – 980, 2002.
- [110] H.J.-P. MORAND : *New advances in computational structural mechanics*, chapitre A modal hybridization method for the reduction of dynamic models in the medium frequency range, pages 347 – 364. Elsevier, 1992.
- [111] P. MORON : *Mise en oeuvre de méthodes énergétiques dans l'étude du comportement vibratoire de structures complexes dans le domaine des moyennes et hautes fréquences*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- [112] P. MOUREY et E. LOUAAS : Recent evolutions of methodology in the ariane 5 low frequency dynamics environments predictions and qualification process. *In European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing*, pages 1–12, Noordwijk, Pays-Bas, Mai 2005.
- [113] D.J. NEFSKE et S.H. SUNG : Power flow finite element analysis of dynamic systems – basic theory and application to beams. *ASME, Transactions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 111:94 – 100, 1989.
- [114] D.U. NOISEUX : Measurement of power flow in uniform beams and plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47(1B):238 – 247, 1970.
- [115] W.L. OBERKAMPF et C.J. ROY : *Verification and validation in scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, Royaume-Uni, 2010.
- [116] R. OHAYON et C. SOIZE : *Structural acoustics and vibration*. Academic Press, Londres, Royaume-Uni, 1998.
- [117] M. OUISSE et J.L. GUYADER : An energy residual method for detection of the causes of vibration hypersensitivity. *Journal of Sound and Vibration*, 260(1):83 – 100, 2003.
- [118] J. PAN et C. H. HANSEN : Active control of power flow from a vibrating rigid body to a flexible panel through two active isolators. *Journal of the Acoustical Society of America*, 93(4):1947–1953, 1993.

- [119] G. PAVIC: Measurement of structure borne wave intensity, part i: Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49(2):221 – 230, 1976.
- [120] N. PETERSMANN: Calculation of eigenvalues using substructures and dynamic condensation. *In Second International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, pages 211 – 219, Southampton, Royaume-Uni, Avril 1984.
- [121] B. PETERSSON et J. PLUNT: On effective mobilities in the prediction of structure-borne sound transmission between a source structure and a receiving structure, part i: Theoretical background and basic experimental studies. *Journal of Sound and Vibration*, 82(4):517 – 529, 1982.
- [122] B.A.T. PETERSSON: Structural acoustic power transmission by point moment and force excitation, part i: beam- and frame-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 160(1): 43 – 66, 1993.
- [123] B.A.T. PETERSSON: Structural acoustic power transmission by point moment and force excitation, part ii: plate-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 160(1):67 – 91, 1993.
- [124] B.A.T. PETERSSON et B.M. GIBBS: Use of the source descriptor concept in studies of multi-point and multi-directional vibrational sources. *Journal of Sound and Vibration*, 168(1):157 – 176, 1993.
- [125] C. PIERRE: Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. *Journal of Sound and Vibration*, 126(3):485 – 502, 1988.
- [126] C. PIERRE et M.P. CASTANIER: Mid-frequency dynamics of complex structural systems: assessing the state of the art and defining future research directions. Rapport technique, University of Michigan, Air Force Office of Scientific Research, Ann Arbor, MI, Etats-Unis, 2002.
- [127] E. PILLET: *Méthodologie d'aide à la décision en conception robuste*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 2008.
- [128] E. PILLET: Conception robuste d'une structure spatiale en présence de méconnaissances de modèle. Rapport technique, Institut FEMTO-ST, Département Mécanique Appliquée - Centre National d'Etudes Spatiales, 2012.
- [129] R.J. PINNINGTON: *Vibrational power transmission between sources and substructures*. Thèse de doctorat, ISVR, University of Southampton, Royaume-Uni, Mai 1982.
- [130] R.J. PINNINGTON: Using the envelope of the frequency response in the measurement of power absorbed by a finite structure. *Journal of Sound and Vibration*, 109(1):127 – 139, 1986.
- [131] R.J. PINNINGTON: Vibrational power transmission to a seating of a vibration isolated motor. *Journal of Sound and Vibration*, 118(3):515 – 530, 1987.
- [132] R.J. PINNINGTON et D.C.R. PEARCE: Multipole expansion of the vibration transmission between a source and a receiver. *Journal of Sound and Vibration*, 142(3):461 – 479, 1990.

- [133] R.J. PINNINGTON et R.G. WHITE : Power flow through machine isolators to resonant and non-resonant beams. *Journal of Sound and Vibration*, 75(2):179 – 197, 1981.
- [134] G. PUEL : *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2004.
- [135] L. RATSIFANDRIHANA : *Amélioration des procédures d'identification modale des structures par appropriation automatique et utilisation de forces non contrôlées*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 1995.
- [136] Lord RAYLEIGH : *The theory of sound*. Dover, New York, Etats-Unis, 2e edition édition, 1945.
- [137] D.J. RIXEN : Force modes for reducing the interface between substructures. In Society for EXPERIMENTAL MECHANICS, éditeur : *20th International Modal Analysis Conference*, volume 2, Los-Angeles, Etats-Unis, 2002. SEM.
- [138] D.J. RIXEN : A dual craig-bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168(1-2):383 – 391, 2004.
- [139] T.E. ROOK et R. SINGH : Power flow through multidimensional compliant joints using mobility and modal approaches. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(5):2882 – 2891, 1995.
- [140] S. RUBIN : Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 13:995 – 1016, 1975.
- [141] E. SADOULET-REBOUL : *Vibroacoustique des mécaniques à hautes fréquences*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2005.
- [142] G.I. SCHUËLLER et H.A. JENSEN : Computational methods in optimization considering uncertainties - an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(1):2 – 13, 2008.
- [143] P.J. SHORTER et R.S. LANGLEY : Vibro-acoustic analysis of complex systems. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3):669 – 699, 2005.
- [144] C. SOIZE : Reduced models in the medium frequency range for general dissipative structural-dynamics systems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(4):657 – 685, 1998.
- [145] C. SOIZE : A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277 – 294, 2000.
- [146] C. SOIZE : A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3):623 – 652, 2005.
- [147] C. SOIZE et S. MZIOU : Dynamic substructuring in the medium-frequency range. *AIAA Journal*, 41(6):1113 – 1118, 2003.
- [148] N. SRINIVAS et K. DEB : Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3):221 – 248, 1994.

- [149] J. SU, A.T. MOORHOUSE et B.M. GIBBS: Towards a practical characterization for structure-borne sound sources based on mobility techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 185(4):737 – 741, 1995.
- [150] Y.-C. TAN, M.P. CASTANIER et C. PIERRE: Power flow analysis of complex structures using characteristic constraint modes. *AIAA Journal*, 43(6):1360 – 1370, 2005.
- [151] B. TROCLET: *Analyse énergétique des vibrations sous sollicitations aéroacoustiques et validation dans l'industrie spatiale*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2007.
- [152] Y. TSOMPANAKIS et M. Papadrakakis N.D. LAGAROS, éditeurs. *Structural design optimization considering uncertainties*. Taylor & Francis, Londres, Royaume-Uni, 2007.
- [153] B. van den NIEUWENHOF et J.-P. COYETTE: Modal approaches for the stochastic finite element analysis of structures with material and geometric uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(33-34):3705 – 3729, 2003.
- [154] J.W. VERHEIJ: Cross spectral density methods for measuring structure borne power flow on beams and pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 70(1):133 – 138, 1980.
- [155] M. VIKTOROVITCH, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL: A new random boundary element formulation applied to high frequency phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 223(2): 273 – 296, 1999.
- [156] M. VIKTOROVITCH, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL: An integral formulation with random parameters adapted to the study of the vibrational behaviour of structures in the middle- and high-frequency field. *Journal of Sound and Vibration*, 247(3):431 – 452, 2001.
- [157] P. VINOT: *Contributions à la validation des modèles en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 2001.
- [158] P. VINOT et S. COGAN: Procedure for initializing interface stiffness based on sensitizing inputs. *AIAA Journal*, 42(6):1246 – 1251, June 2004.
- [159] N. VLAHOPOULOS et X. ZHAO: An investigation of power flow in the mid-frequency range for systems of co-linear beams based on a hybrid finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 242(3):445 – 473, 2001.
- [160] T. WEISSER: Méthode robuste de réduction de modèle par approximations combinées - extension à la sous-structuration. *In 9eme Colloque National en Calcul de Structures*, Giens, France, Mai 2009.
- [161] E.C.N. WESTER et B.R. MACE: Statistical energy analysis of two edge-coupled rectangular plates: ensemble averages. *Journal of Sound and Vibration*, 193(4):793 – 822, 1996.
- [162] J.C. WOHLEVER et R.J. BERNHARD: Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, 153(1):1 – 19, 1992.
- [163] G. XIE, D.J. THOMPSON et C.J.C. JONES: Mode count and modal density of structural systems: relationships with boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3-5):621 – 651, 2004.

- 
- [164] J.-T. XING et W.G. PRICE : A power flow analysis based on continuum dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1982):401 – 436, 1999.
- [165] Y.P. XIONG, J.T. XING et W.G. PRICE : A power flow mode theory based on a system's damping distribution and power flow design approaches. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 461(2063):3381 – 3411, 2005.
- [166] B. YU et P. MYKLAND : Looking at markov samplers through cusum path plots: a simple diagnostic idea. *Statistics and Computing*, 8:275 – 586, 1998.
- [167] L.A. ZADEH : Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338 – 353, 1965.
- [168] C. ZANG, M.I. FRISWELL et J.E. MOTTERSHEAD : A review of robust optimal design and its application in dynamics. *Computers & Structures*, 83(4-5):315 – 326, 2005.
- [169] X. ZHAO et N. VLAHOPOULOS : A hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of systems with excitation applied on short members. *Journal of Sound and Vibration*, 237(2):181 – 202, 2000.
- [170] O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR : *The finite element method, Volume I: the basis*. Butterworth-Heinemann, Boston, Etats-Unis, 2000.



# BILANS DE PUISSANCE ET SYSTÈMES DISCRETS

## A.1 Système discret masse-ressort-amortisseur à 2 ddl

Les courbes présentées ci-dessous complètent la description du bilan de puissance associé au système discret à 2 degrés de liberté, introduit au chapitre 3.

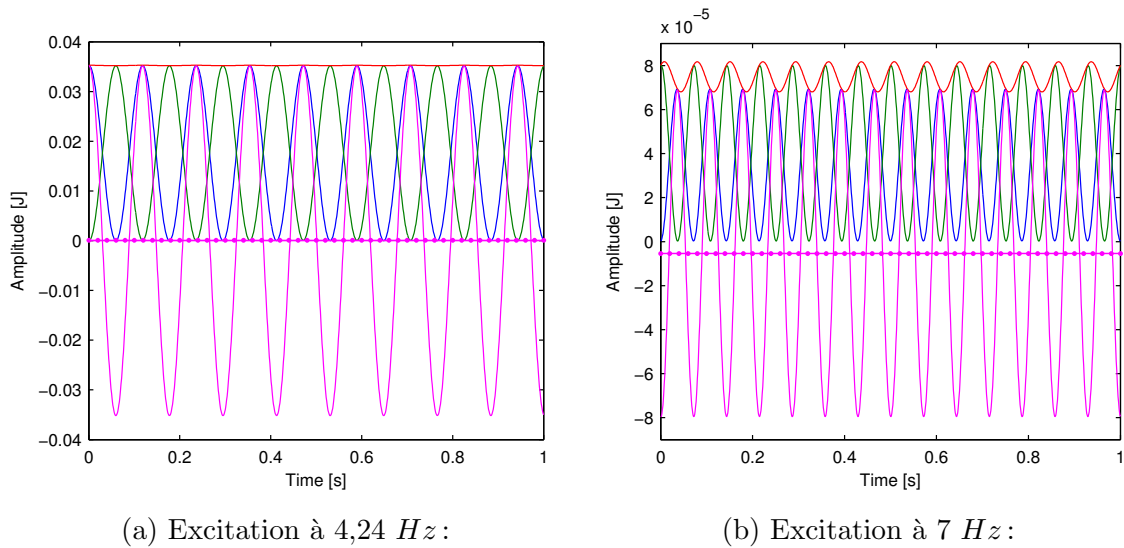


FIG. A.1: Évolution temporelle des énergies associées du système à 2 ddl, pour une excitation à 4,24 Hz : —  $T(t)$ , —  $W(t)$ , —  $E(t)$ , —  $L(t)$  ;  
 énergie moyenne : — • —  $L_0$

La figure A.1 représente l'évolution temporelle des différentes énergies instantanées définies au chapitre 3.2.2 pour des fréquences d'excitations correspondant à 4,24 Hz, première fréquence propre de vibration du système, et 7 Hz. On remarque à nouveau les échanges entre l'énergie

potentielle et l'énergie cinétique. Ainsi on vérifie figure A.1 (a), qu'à la résonance, l'énergie mécanique est constante et que l'énergie lagrangienne atteint une amplitude maximale, tout en ayant une moyenne nulle. On retrouve en revanche, figure A.1 (b), un comportement identique à celui observé figure 3.4. La valeur moyenne négative de l'énergie lagrangienne indique alors la proximité avec le second mode de vibration.

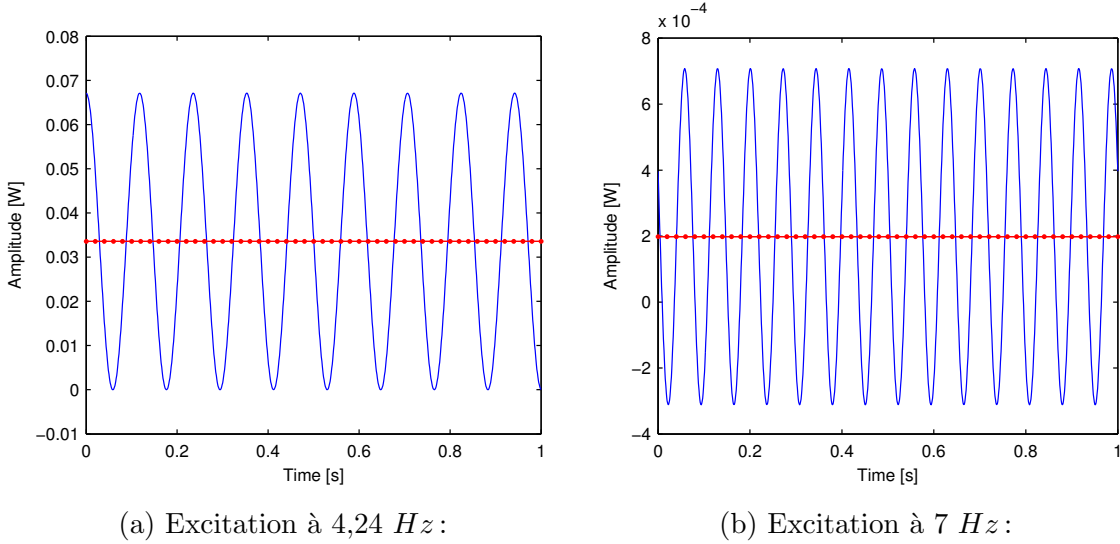


FIG. A.2: Évolution temporelle des puissances associées du système à 2 ddl, pour une excitation à 7 Hz : —  $P(t)$ ; puissance moyenne : — • —  $P_0$

De même, on visualise figure A.2 l'évolution temporelle de la puissance instantanée, qui atteint également son amplitude maximale à la résonance et dont la moyenne est toujours positive.

## A.2 Calcul des différentes composantes de la puissance injectée

On propose ici, à titre d'exemple, de détailler le calcul de la composante oscillante  $P_c^{diss}$ . D'après le bilan global donné équation 3.15 et les grandeurs définies chapitre 3.2.2, la puissance dissipée instantanée est donnée par :

$$\begin{aligned}
 P^{diss}(t) &= v^T(t) C v(t) \\
 &= (v_c^T \cos(\omega t) + v_s^T \sin(\omega t)) C (v_c \cos(\omega t) + v_s \sin(\omega t)) \\
 &= \frac{1}{2} (v_c^T C v_c + v_s^T C v_s) + \frac{1}{2} (v_c^T C v_c - v_s^T C v_s) \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} (v_c^T C v_s + v_s^T C v_c) \sin(2\omega t)
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

Par identification, on déduit les expressions de la partie directe  $P_0^{diss}$  et des deux parties oscillantes  $P_c^{diss}$  et  $P_s^{diss}$ , telles que :

$$P_0^{diss} = \frac{1}{2} (v_c^T C v_c + v_s^T C v_s) \quad (\text{A.2})$$

$$P_c^{diss} = \frac{1}{2} (v_c^T C v_c - v_s^T C v_s) \quad (\text{A.3})$$

$$P_s^{diss} = v_c^T C v_s \quad (\text{A.4})$$

Or, d'après l'équation d'équilibre du système en régime permanent :

$$(C + jR)v = f \quad (\text{A.5})$$

où  $R = \omega M + 1/\omega K$  correspond à la partie conservative du système. Il est alors possible de relier les efforts d'amortissement internes à la structure, aux efforts extérieurs appliqués :

$$C v_c = f_c - R v_s \quad \text{et} \quad C v_s = R v_c + f_s \quad (\text{A.6})$$

Ces équations permettent de récrire  $P_c^{diss}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} P_c^{diss} &= \frac{1}{2} (v_c^T C v_c - v_s^T C v_s) \\ &= \frac{1}{2} (v_c^T f_c - v_s^T f_s) - v_c^T R v_s \\ &= P_c - v_c^T \left( \omega M - \frac{1}{\omega} K \right) v_s \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où  $P_c$  représente une des parties oscillantes de la puissance injectée, définie équation 3.11. Or, d'après les décompositions des énergies cinétiques et potentielles, on a :

$$T_s = \frac{1}{2} v_s^T M v_s \quad (\text{A.8})$$

et :

$$W_s = \frac{1}{2} x_c^T K x_s = -\frac{1}{2\omega^2} v_c^T K v_s \quad (\text{A.9})$$

Ceci permet d'exprimer le second membre de l'équation précédente en fonction de l'énergie totale :

$$\begin{aligned} v_c^T \left( \omega M - \frac{1}{\omega} K \right) v_s &= \omega v_c^T M v_s + \frac{1}{\omega} v_c^T K v_s \\ &= 2\omega T_s + 2\omega W_s \\ &= 2\omega E_s \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

On aboutit donc finalement à une expression reliant la puissance dissipée à la puissance injectée et à l'énergie totale du système, sous la forme :

$$P_c^{diss} = P_c - 2\omega E_s \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Système discret masse-ressort-amortisseur à 6 ddl

Le tableau ci-dessous donne les paramètres initiaux du système discret à 6 degrés de liberté, introduit au chapitre 3.2.3. Les paramètres d'amortissement se rapportent à une hypothèse d'amortissement proportionnel propre à chaque composant, du type  $C. = a.K.$ , où l'indice  $.$  représente le récepteur  $r$ , la source  $s$  ou la jonction  $j$ .

<b>Récepteur</b>	<b>Masse</b>	( $kg$ )	$m_1 = 4 , m_2 = 1 , m_3 = 2$
	<b>Raideur</b>	( $N/m$ )	$k_1 = 2000 , k_2 = 4000 , k_3 = 2000$
	<b>Amortissement</b>	( $Ns/m$ )	$a_r = 6.10^{-4}$
<b>Source</b>	<b>Masse</b>	( $kg$ )	$m_4 = 1 , m_5 = 2 , m_6 = 2$
	<b>Raideur</b>	( $N/m$ )	$k_5 = 8000 , k_6 = 8000$
	<b>Amortissement</b>	( $Ns/m$ )	$a_s = 4.10^{-4}$
<b>Jonction</b>	<b>Raideur</b>	( $N/m$ )	$k_4 = 4000 , k_7 = 3000$
	<b>Amortissement</b>	( $Ns/m$ )	$a_j = 1,5.10^{-3}$

TAB. A.1: Paramètres initiaux du système discret à 6ddl

La figure A.3 représente l'amplitude de la réponse en fréquence en vitesse de l'ensemble des degrés de liberté du système. On retrouve bien les pics de résonance associés à chacune des six fréquences propres de vibration du système couplé, respectivement à  $1,8 Hz$ ,  $6,7 Hz$ ,  $7,9 Hz$ ,  $13,5 Hz$ ,  $14,4 Hz$  et  $20,6 Hz$ .

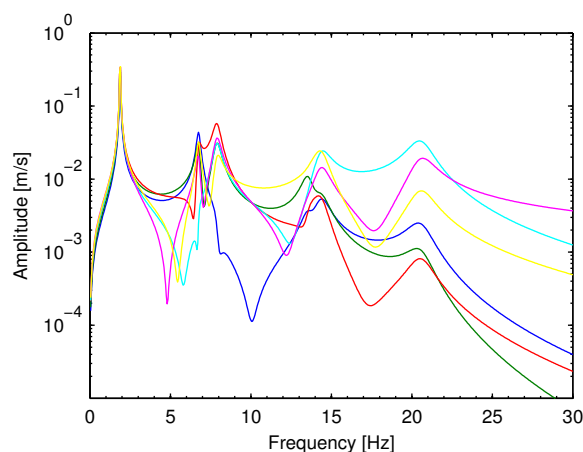


FIG. A.3: Amplitude de la réponse harmonique en vitesse du système discret à 6 ddl :

—  $ddl_1$ , —  $ddl_2$ , —  $ddl_3$ , —  $ddl_4$ , —  $ddl_5$ , —  $ddl_6$

# CALCUL DES MODES DE FLUX DE PUISSANCE

## B.1 Procédure de tri des modes de flux de puissance

Il a été souligné au chapitre 3.3.1 que les modes de flux de puissance, issus de la résolution du problème aux valeurs propres équivalent (équation 3.38 ou équation 3.65), sont déterminés de manière indépendante à chaque pas de fréquence. Il en résulte des échanges dans le classement des valeurs propres de flux de puissance et des efforts propres associés, comme illustré figure B.1, qui tendent à perturber la distinction des différents chemins de puissance.

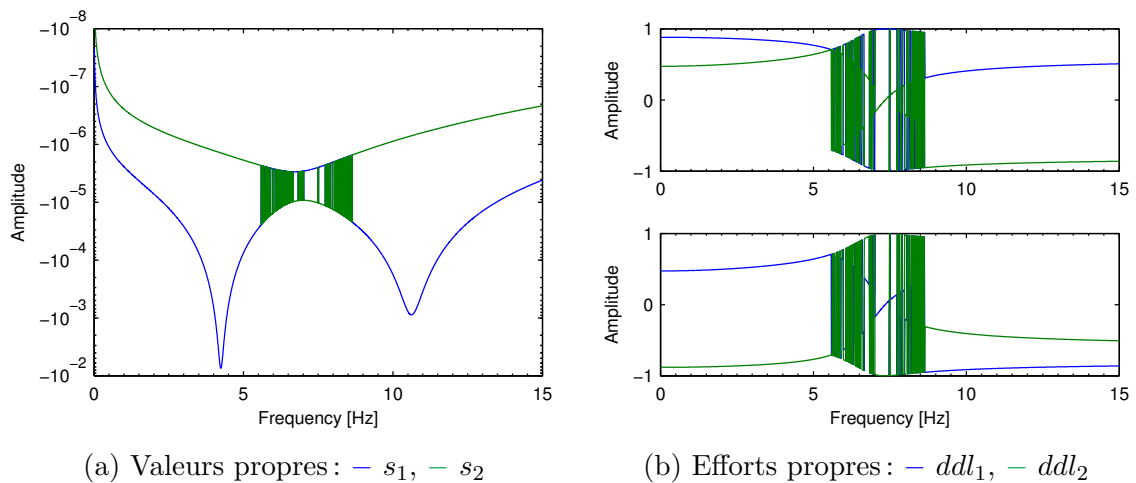


FIG. B.1: Modes de flux de puissance non triés

Ainsi, pour pallier ces difficultés, une procédure de tri a été mise en place afin d'apparier les modes d'une fréquence à l'autre et de leur restituer un comportement continu. Celle-ci comprend les étapes suivantes :

- initialisation par classement des valeurs propres de flux de puissance associées à la première fréquence considérée, dans l'ordre croissant (décroissant en valeur absolue) et modification identique de l'ordre des efforts propres ;
- classement des valeurs propres de flux de puissance de la fréquence suivante ;
- évaluation du produit scalaire normé entre chaque nouvel effort propre et la base de modes de flux de puissance précédente ;
- appariage des efforts propres fortement colinéaires d'une fréquence à l'autre ;
- ré-agencement des valeurs propres de flux de puissance ;
- normalisation des efforts propres afin d'obtenir une première composante positive et respectant la relation d'orthogonalité 3.41.

## B.2 Cas des structures libres

Les calculs d'inverse de la matrice de raideur  $K$  intervenant au chapitre 4.5.2 ne sont possibles que lorsque celle-ci est définie positive. Dans le cas contraire, la matrice est définie non négative, ce qui atteste de la présence de modes de corps rigide de la structure : la matrice de flexibilité statique ne peut donc pas être déterminée. Il convient alors de contraindre temporairement la structure, en filtrant la participation des modes de corps rigide  $\Phi_r$ , afin de calculer une matrice de pseudo-flexibilité associée au comportement issu des modes élastiques  $\Phi_e$ . On propose d'en rappeler le principe en se basant sur les références [64, 7].

On commence par récrire l'équation d'équilibre du système conservatif sous la forme :

$$Kx = f + \omega^2 M = \bar{f} \quad (\text{B.1})$$

où  $\bar{f}$  regroupe les efforts extérieurs et les forces d'inertie s'exerçant sur la structure. La matrice de raideur étant singulière, un théorème d'algèbre linéaire permet d'affirmer que cette équation admet une solution si et seulement si le second membre  $\bar{f}$  est orthogonal aux solutions du système linéaire associé,  $K^T \Phi_r = 0$ . Ceci revient à auto-équilibrer la charge  $\bar{f}$  telle que :

$$\Phi_r^T \bar{f} = 0 \quad (\text{B.2})$$

De manière générale, quelle que soit la charge initiale imposée à la structure, il est possible de la décomposer sous la forme d'une combinaison linéaire des modes rigides et élastiques de la structure :

$$\bar{f} = aM\Phi_r + bM\Phi_e \quad (\text{B.3})$$

En supposant que l'ensemble des modes vérifie la relation d'orthogonalité donnée par l'équation (4.38) et en retranchant à l'équation précédente la partie associée aux modes de corps rigide, on obtient une expression de la charge auto-équilibrée sous la forme,

$$\bar{f} = M\Phi_e f = D^T f \quad (\text{B.4})$$

où  $D \in \mathbb{R}^{(N,N)}$  est une matrice de filtrage définie par :

$$D = I_N - \Phi_r [\Phi_r^T M \Phi_r]^{-1} \Phi_r^T M \quad (\text{B.5})$$

On vérifie facilement la validité de cet opérateur, vis-à-vis de la condition d'orthogonalité, en développant les deux relations suivantes :

$$D\Phi_r = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$D\Phi_e = \Phi_e \quad (\text{B.7})$$

On distingue ensuite un ensemble de degrés de liberté  $r$ , sur lesquels va s'exercer la charge auto-équilibrée, du reste de la structure  $e$ . Après réarrangement, il est possible de calculer la réponse statique du système contraint par :

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ee}^{-1} \end{bmatrix} \bar{f} \quad (\text{B.8})$$

Afin d'obtenir une solution purement élastique, on élimine enfin l'influence des modes de corps rigide par orthonormalisation. On obtient finalement une expression de la matrice de pseudo-flexibilité statique du système libre sous la forme :

$$\bar{K}^{-1} = \left[ I - \Phi_r [\Phi_r^T M \Phi_r]^{-1} \Phi_r^T M \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ee}^{-1} \end{bmatrix} \left[ I - M\Phi_r [\Phi_r^T M \Phi_r]^{-1} \Phi_r^T \right] \quad (\text{B.9})$$

On note enfin que si la matrice  $K_{ee}$  est inversible par définition, son calcul peut se révéler impossible, même par décomposition par factorisation de Cholesky, en raison de la taille du modèle élément-finis de la structure. Il est alors nécessaire d'employer des techniques de réduction de modèle par sous-structuration [35].





## PROCÉDURE D'INITIALISATION DES RAIDEURS D'INTERFACE

Au regard de la complexité des solutions technologiques retenues au niveau des jonctions entre différents composants d'une structure industrielle, ainsi que des nombreux phénomènes physiques entrant en jeu, une simplification courante en dynamique des structures vise à modéliser ces interfaces à l'aide de raideurs et d'amortisseurs localisés. Or, ces propriétés sont généralement difficiles à estimer et font appel soit à des règles ingénieurs *a priori*, soit à des études préalables (numériques ou expérimentales). Par sécurité, ces valeurs sont souvent relativement élevées, conduisant à des effets de saturation : la réponse du modèle est alors insensible à leur variation. Ceci s'avère particulièrement problématique dans le cas où ces propriétés sont choisies comme paramètres de conception.

Une procédure de réinitialisation de ces valeurs a ainsi été proposée par Vinot *et al.* afin de les rendre sensibles, tout en ne modifiant pas le comportement global de la structure [158]. Elle s'appuie sur la notion de forces statiques de sensibilisation, permettant de comparer l'énergie de déformation locale, propre à un élément de jonction, à l'énergie de déformation totale de la structure.

Celle-ci s'appuie sur la détermination et le suivi de deux indicateurs. Le premier représente le rapport entre l'énergie de déformation associée à l'élément de raideur considéré  $E_i^{(k)} = y^{(k)T} K_i(\alpha) y^{(k)}$  et l'énergie de déformation totale :

$$\mathcal{M}_i^1 = \sum_{k=1}^{N_d} \frac{E_i^{(k)}}{E_{tot}^{(k)}} \quad (\text{C.1})$$

Le second quantifie le rapport entre cette même énergie de déformation locale et le maximum de l'énergie totale obtenu pour l'ensemble des variations du paramètre  $\alpha$  :

$$\mathcal{M}_i^2 = \sum_{k=1}^{N_d} \frac{E_i^{(k)}}{\max_{\alpha} E_{tot}^{(k)}} \quad (\text{C.2})$$

Il s'agit alors d'évaluer ces quantités en faisant varier les valeurs initiales des paramètres de raideur d'un facteur  $\alpha$ , jusqu'à ce que ces indicateurs dépassent un seuil fixé *a priori*. Il est alors nécessaire de se placer dans le cas d'un champ de déplacement adapté. Or, il a été constaté que bien souvent les déformées propres disponibles peuvent ne pas être sensibles aux paramètres de raideur considérés. Il a donc été proposé de se ramener à une base d'efforts statiques garantissant une excitation optimale des degrés de liberté associés aux raideurs, dont le calcul a été simplifié en faisant appel à une méthode de réduction (*cf.* [158]).

Les figures C.1 et C.2 (a) ci-dessous montrent l'évolution de  $\mathcal{M}_1$  en fonction du coefficient de correction  $\alpha$ . On constate que les courbes obtenues pour chaque paramètre de raideur sont symétriques, en forme de cloche. Ceci traduit le fait que l'énergie de déformation relative est pratiquement nulle pour des valeurs extrêmes de raideur, la structure étant alors soit trop souple, soit trop raide. La position du pic dépend quant à elle de la valeur initiale du paramètre, et sa valeur de la localisation topologique de la raideur. Les figures C.1 et C.2 (b) représentent l'évolution de  $\mathcal{M}_2$ . On note que toutes les courbes sont décroissantes, ce qui confirme à nouveau qu'il y a diminution de l'énergie de déformation lorsque la raideur augmente.

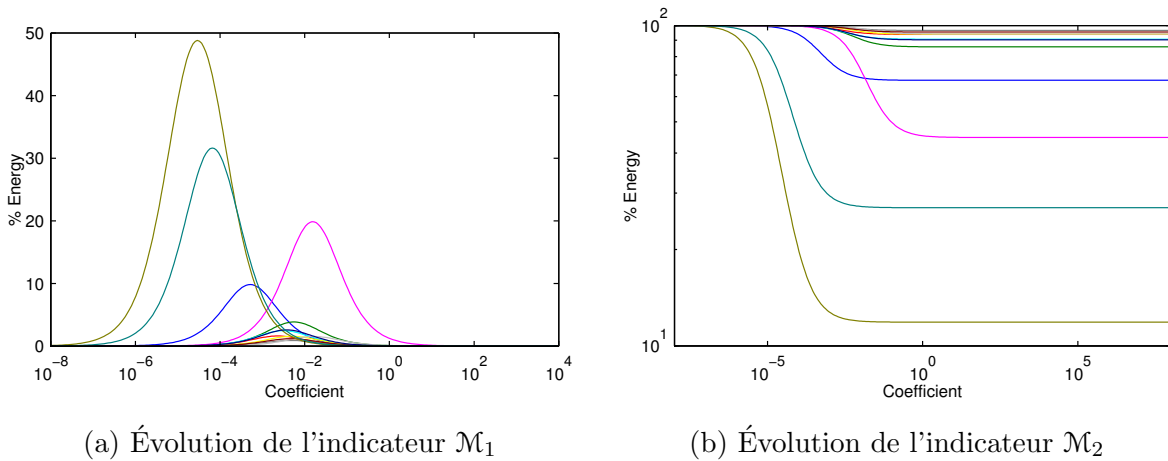
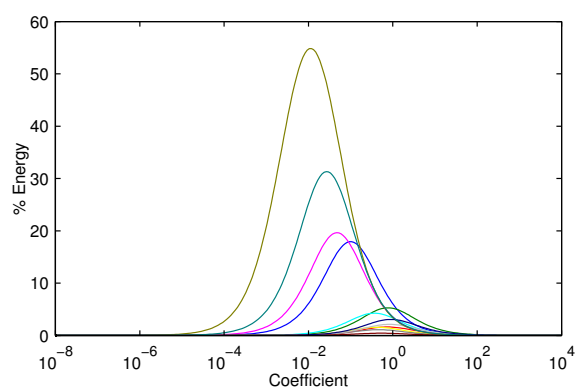
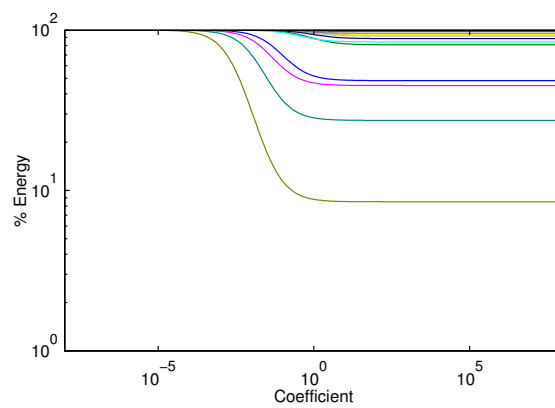


FIG. C.1: Initialisation des raideurs d'interface - configuration initiale

On remarque enfin, figure C.2, que les valeurs initiales insensibles ont été mises à jour, d'où le décalage des courbes associées, tel que celles-ci admettent une sensibilité initiale de 5 % (seuil choisi *a priori*).



(a) Évolution de l'indicateur  $\mathcal{M}_1$



(b) Évolution de l'indicateur  $\mathcal{M}_2$

FIG. C.2: Initialisation des raideurs d'interface - configuration finale



# MÉTHODES NUMÉRIQUES D'ÉVALUATION DE LA ROBUSTESSE PAR APPROCHE *info-gap*

Il a été souligné précédemment que, dans la pratique, le problème d'optimisation non-linéaire nécessaire à la détermination des courbes de robustesse *info-gap*, définie par :

$$\hat{\alpha}(x, f_{crit}) = \max \left\{ \alpha \mid \left( \max_{x \in \mathcal{U}(\alpha, x^0)} f(\mathcal{S}(x)) \right) \leq f_{crit} \right\} \quad (\text{D.1})$$

est remplacé par le problème d'optimisation suivant :

$$f_{crit, \alpha_i} = \max_{x \in \mathcal{U}(\alpha, x^0)} f(\mathcal{S}(x)) \quad (\text{D.2})$$

Or, celui-ci peut être résolu suivant différentes approches :

- par échantillonnage de Monte-Carlo ;
- par optimisation par un algorithme local de type *fmincon* ;
- par optimisation par un algorithme génétique ;
- par une méthode dite « borne », consistant à calculer la mesure de performance pour toutes les combinaisons où les paramètres atteignent leurs bornes.

On propose ici d'en effectuer une rapide comparaison, en déterminant la robustesse associée à une même solution optimale.

On souligne tout d'abord que les temps de calcul varient grandement, ceux-ci étant liés au nombre d'évaluations de la fonction coût. Ainsi, la méthode borne ne nécessite que 30 *min* contre 7 *h* pour la méthode de Monte-Carlo (avec 40 tirages par horizon d'incertitude) et 9 *h* pour une optimisation locale.

On visualise, figure D.1 les différents résultats obtenus. Au regard de la définition de la robustesse, on constate qu'aucune méthode n'est valable sur l'ensemble des valeurs du paramètre  $\alpha$ . En effet, jusqu'à  $\alpha = 0,45$ , la fonction *fmincon* donne les meilleurs résultats. La sous-estimation de la robustesse par la méthode borne est ici liée au fait que la fonction coût ne varie pas de manière monotone par rapport aux paramètres de raideur (à l'inverse par exemple d'un critère basé sur les fréquences propres du système). En revanche, il semble que pour  $\alpha > 0,45$  l'algorithme d'optimisation soit trop local pour explorer des zones accessibles avec ce niveau d'incertitude. Enfin, on note que le nombre de tirages de Monte-Carlo est insuffisant pour garantir, à chaque horizon d'incertitude, la convergence du calcul de robustesse.

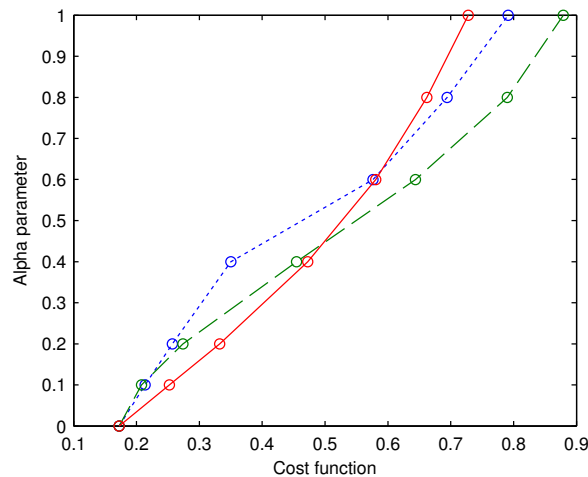


FIG. D.1: Comparaison des méthodes d'évaluation de la robustesse *info-gap* :  
 ··· échantillonnage de Monte-Carlo, — méthode borne, — algorithme *fmincon*

On peut donc conclure que l'approche borne, bien que rapide, ne semble pas adaptée à ce type de fonction coût et que la fonction *fmincon* tend à donner de bons résultats si le problème demeure faiblement multimodal. On souligne enfin que si les tirages de Monte-Carlo s'avèrent particulièrement coûteux, il semble intéressant d'envisager une approche par algorithme génétique, qui pourrait s'avérer plus efficace.

## Résumé :

Les structures mécaniques complexes couramment rencontrées dans les domaines de l'aérospatiale ou de l'automobile résultent de l'assemblage de plusieurs composants, possédant souvent des propriétés mécaniques différentes, reliés à leurs interfaces par différents types de jonctions. L'hétérogénéité des comportements dynamiques de ces sous-structures ainsi que les sollicitations dynamiques extérieures vont se traduire par des efforts conséquents sur la structure principale, ainsi que des accélérations importantes au niveau des équipements embarqués, qui peuvent affecter leur fonctionnement, leur fiabilité, leur sécurité. Il est alors nécessaire de les protéger d'un environnement hostile en les isolant du reste de la structure.

Ces travaux de recherche s'inscrivent dans un contexte global de maîtrise des niveaux vibratoires et ont pour objectif de fournir une méthode de caractérisation dynamique des interfaces entre différents composants d'une structure. Cette méthode est ensuite intégrée dans une démarche de conception robuste visant à minimiser la puissance transmise entre une sous-structure source et une sous-structure réceptrice.

Une méthode de modes de flux de puissance a été développée. Elle permet de déterminer des valeurs et des efforts propres qui fournissent, respectivement, des informations quantitatives et qualitatives sur les flux de puissance existant à l'intérieur d'une structure. Cette méthode a été appliquée à l'étude de la puissance transmise à l'interface entre deux sous-structures. Il est alors possible d'identifier les directions associées aux principaux chemins de puissance transitant par les jonctions et de quantifier leur participation.

Ces résultats ont été appliqués afin de proposer une méthodologie de conception robuste des interfaces de structures. Deux démarches d'optimisation ont été comparées, mono-objectif et multi-objectif robuste, visant à minimiser la puissance transmise entre une sous-structure source et une sous-structure réceptrice, par rapport aux paramètres de raideurs des jonctions. L'importance de considérer la robustesse des solutions retenues par rapport aux différentes sources d'incertitudes associées aux modèles éléments finis a enfin été soulignée à l'aide d'une approche complémentaire non-probabiliste.

**Mots clés :** dynamique des structures, flux de puissance, sous-structuration, optimisation, robustesse

## Abstract:

Complex mechanical structures usually encountered in the automotive or aerospace sectors are composed of an assembly of several components, often exhibiting different mechanical properties and joined at their interfaces by different junction types. The various dynamic behaviours of these substructures and the applied external dynamic loadings generate important efforts on the main structure, resulting in high acceleration responses of the on-board equipments, finally affecting their performance, reliability and security. It is therefore necessary to protect them from these harsh conditions by isolating them from the rest of the structure.

These researches are related to structural vibration control and aim at proposing a new method to dynamically characterize interfaces between different substructures. This method is then integrated to a robust design approach to minimize the power transmitted between a source and a receiver substructure.

A power flow mode method has been developed, which allows determining eigenvalues and eigenvectors respectively representing qualitative and quantitative information on the power flowing inside the structure. This has been further applied to study the power transmitted at the interface, making it possible to identify the direction associated to the dominant power flow pattern and to quantify their contribution.

These results have been applied to propose a robust design approach of structural interfaces. Both mono- and robust multi- objective procedures have been implemented and compared to minimize the power transmitted between a source and a receiver substructure with respect to the interface stiffness parameters. The importance of considering the robustness of the obtained solutions has been underlined by performing a complementary analysis based on a non-probabilistic approach.

**Keywords:** structural dynamics, power flow, substructuring, optimization, robustness

The logo for SPIM (École doctorale SPIM) features the letters 'S', 'P', 'I', and 'M' in a large, white, sans-serif font. The 'S' is stylized with a thick, yellow horizontal bar extending to the left, partially overlapping the letter.