



**HAL**  
open science

# Généralisation de la méthode Nitsche XFEM pour la discrétisation de problèmes d'interface elliptiques

Nelly Barrau

► **To cite this version:**

Nelly Barrau. Généralisation de la méthode Nitsche XFEM pour la discrétisation de problèmes d'interface elliptiques. Analyse numérique [math.NA]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2013. Français. NNT : 2013PAUU3025 . tel-00913387

**HAL Id: tel-00913387**

**<https://theses.hal.science/tel-00913387>**

Submitted on 3 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Pau et des Pays de l'Adour  
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET LEURS APPLICATIONS  
ED 211



# THÈSE

présentée en vue de l'obtention du titre de

## DOCTEUR

de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Mention : Mathématiques Appliquées

par

Nelly BARRAU

---

---

# GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE NITSCHÉ XFEM POUR LA DISCRÉTISATION DE PROBLÈMES D'INTERFACE ELLIPTIQUES

---

---

Après avis de :

soutenue le 10 octobre 2013

M.	HANSBO Peter	Professeur - Jönköping University
M.	LOZINSKI Alexei	Professeur - Université de Franche-Comté

Devant la commission d'examen composée de :

Mme	CAPATINA Daniela	Maître de Conférences HDR - Université de Pau	Examinatrice
M.	DUBACH Éric	Maître de Conférences - Université de Pau	Co-Directeur
M.	HANSBO Peter	Professeur - Jönköping University	Rapporteur
M.	LOZINSKI Alexei	Professeur - Université de Franche-Comté	Rapporteur
M.	LUCE Robert	Maître de Conférences HDR - Université de Pau	Directeur
M.	MAITRE Jean-François	Professeur Émérite - École Centrale de Lyon	Président

Équipe CONCHA, Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau,  
Unité Mixte de Recherche CNRS 5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)



# Remerciements

*Par ces quelques lignes, je souhaite exprimer toute ma gratitude envers les personnes dont la générosité, la bonne humeur et l'intérêt manifestés à l'égard de mes recherches m'ont permis de progresser dans cette phase délicate de "l'apprenti-chercheur", ces personnes qui m'ont soutenue professionnellement et personnellement tout au long de ces années d'études, me donnant ainsi les moyens d'atteindre mes objectifs.*

*Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de thèse Robert Luce. Je le remercie sincèrement pour la confiance qu'il m'a accordé en me donnant la possibilité d'entreprendre cette thèse, pour sa grande disponibilité et la patience dont il a fait preuve face à mes questions, parfois naïves.*

*Je souhaite vivement remercier mon co-directeur de thèse Éric Dubach, pour sa sympathie, sa disponibilité, ses idées et conseils, ainsi que pour son aide précieuse dans l'implémentation.*

*Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Peter Hansbo et Alexei Lozinski en acceptant la lourde tâche de rapporter mes travaux. Je tiens à les remercier chaleureusement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon manuscrit, pour les lectures méticuleuses, leurs remarques et leurs conseils qui ont sans aucun doute contribué à améliorer la qualité de ce manuscrit, et pour être allés bien au-delà de tout cela !*

*Je regrette néanmoins les péripéties des contrôleurs aériens et la découverte de la visioconférence qui ont empêché Alexei Lozinski d'être présent.*

*Je remercie Jean-François Maître de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*J'exprime toute ma gratitude à Daniela Capatina, tant pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, de l'intérêt qu'elle a porté à mes travaux et pour m'avoir initiée à la recherche lors de mon stage de master 2.*

*À tous les membres du jury, j'exprime ici mes vifs remerciements pour les questions, les remarques, ainsi que les pistes de recherche que vous m'avez suggérées durant la soutenance.*

*J'ai eu la chance immense de rencontrer beaucoup de personnes durant ces neuf années universitaires, des personnes qui ont compté pour moi, qui m'ont énormément apporté, et que j'aimerais remercier ici.*

*Tout d'abord, mes remerciements sincères vont à présent à Roland Becker, dont j'ai pu profiter de ses enseignements, de ses connaissances et de son savoir, et qui a co-écrit l'ensemble de mes publications. Je remercie le chef d'équipe dynamique et le grand mathématicien qu'il est.*

*J'exprime également ma profonde reconnaissance envers tous les membres de l'équipe pluridisciplinaire Concha, ceux qui forment actuellement l'équipe mais également les anciens membres. La liste est un peu longue, je ne peux citer tout le monde ici : sachez que je me suis sentie épanouie au sein du groupe et j'ai beaucoup appris auprès de chacun d'entre vous. Je vous remercie chaleureusement pour tous ces échanges scientifiques, philosophiques et souvent même gustatifs.*

*Henry Ford (je ne parlerai pas ici de ma voiture ...) a dit "Se réunir est un début, rester ensemble est un progrès, travailler ensemble est la réussite".*

*Je remercie le Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau, au sein duquel j'ai disposé des meilleures conditions pour effectuer cette thèse.*

*J'exprime ma gratitude envers mes collègues professeurs, qui ont partagé avec moi leurs enseignements, leurs savoirs et leurs compétences.*

*Un grand merci à Marie-Claire Hummel, Marie-Laure Rius, Sylvie Berton, Josy Baron, Chantal Blanchard, Bruno Demoisy pour m'avoir toujours facilité divers types de démarches.*

*Une mention particulière pour mes camarades doctorants. Trois ans, ça passe très vite, mais j'ai eu la chance de rencontrer des gens formidables ! Fabien, Loïc et Paul les trois mousquetaires sauveurs de l'univers ; Hai Ha, Mohammed et Nour toujours présents, attentifs et serviables ; Benoit l'anti-pomme geek de  $\text{\LaTeX}$ avec qui j'ai apprécié de pouvoir discuter programmation, et sa pétillante Alice pour les délicieuses pauses et soirées passées en leurs compagnies ; ma douce Caro pour ton soutien à toute épreuve, ta présence, ton optimisme et tes multiples talents qui ont été pour moi de merveilleux moments d'évasion dans ces difficiles années universitaires !*

*Je souhaite beaucoup de courage et de patience à ceux qui y sont encore : Ahmed dit aussi monsieur Stoke(s) aux conditions aux limites improbables ; le p-laplacien Brahim ; l'échangeur de bureau Cheik ; le trop discret Dong-Xuan ; Hammou le désormais seul représentant en simulation numérique ; Hind mademoiselle Stokes instationnaire ; Jeanne la parisienne stochastiquement électrique ; Juan la vaillant conquistador aux chemises topologiquement étranges ; Tom le temporaire expatrié québécois ; Zeina la petite nouvelle probabiliste !*

*J'aimerais également dédié quelques lignes à mes collègues de la scolarité de l'UFR Sciences qui m'ont accueillis durant quatre longs étés, ainsi que mes collègues vacataires. Ces riches expériences m'ont appris (entre autre chose) l'efficacité, le multi-tâche, la patience ... Et toujours avec le sourire ! Merci à vous !*

*J'aimerais clore ces remerciements professionnels en exprimant toute ma reconnaissance envers Alexandre Lapene, Luc Pauget et Indira Kospanova, pour m'avoir permis de découvrir de plus près le milieu industriel, grâce à une mission d'expertise au sein de l'équipe Réservoir Fracturé de l'entreprise Total. Ce fut une très belle expérience, bien qu'un peu courte et j'espère que nous aurons l'opportunité de continuer à développer des collaborations.*

*J'adresse à présent un grand merci à tous mes proches amis qui m'épaulent depuis de longues années.*

*À ma douce Karine pour ton amitié, pour toutes les soirées-films que nous avons partagé depuis le DEUG, pour être encore et toujours présente aujourd'hui alors que la distance nous sépare.*

*À Tanguy et Max pour nos divertissements fous et à qui je dois mon entière addiction aux*

*chocobons.*

*À ma tendre Chrystelle et ce cher Anthony que je porte très fort dans mon coeur depuis déjà un très long moment. Votre amitié m'est chère, et je suis profondément heureuse que les kilomètres qui nous séparent ne se sont jamais installés dans nos coeurs. J'aimerais par ces quelques mots vous remercier pour leurs grands soutiens et leurs immenses écoutes.*

*À ma fantastique Joëlle ! Tu as toujours été présente pour moi, aussi bien à l'université qu'en soirées dansantes, qu'en vacances et bien d'autres évènements ! Merci pour tes oreilles disponibles et attentives, merci pour tes conseils très souvent sages, pertinents et judicieux. Tu m'as offert le plus délicieux des pots de thèse, et tu m'as également donné la plus merveilleuse des filleules : ma petite Léa !*

*C'est ici aussi l'occasion pour moi d'exprimer mes remerciements les plus sincères et les plus affectueux à ma famille.*

*À mes parents, mon petit frère Nico ; À mes tendres grands-parents portugais Henri et Céleste ; À ma tante Fatie ; À mon oncle Antoine et mes cousins Paul et Julie ; À mon oncle Éric et mes deux grands cousins Warren et Dawson.*

*À ma douce grand-mère Mamou et son compagnon Justin ; À mon parrain Claude et ma tante Lisa ainsi qu'à mes deux cousins fous Philippe et Jean. Une belle pensée également pour ma famille de Lourdes. Leur soutien et leur affection à tous dépassent largement le cadre de cette thèse aussi je leur dirai simplement ... Merci pour tout !*

*Merci encore à tous et bonne lecture pour ceux qui ont le courage de continuer !*

*Nelly B. ♥*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1	Problématique - Objectifs - Perspectives . . . . .	2
1.1.1	Présentation du cadre . . . . .	2
1.1.2	Motivations et objectifs . . . . .	4
1.1.3	Perspectives . . . . .	4
1.2	Outils mathématiques communs aux modèles . . . . .	5
1.2.1	Problème modèle . . . . .	5
1.2.2	Approximation . . . . .	6
1.2.3	Tests numériques . . . . .	8
1.3	Structure de la librairie Concha et implémentation de NXFEM . . . . .	15
1.3.1	Structure du code C++ . . . . .	16
1.3.2	Les outils Python . . . . .	17
1.3.3	Implémentation de NXFEM . . . . .	17
<b>I</b>	<b>UNE MÉTHODE NXFEM ROBUSTE</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>La méthode originale NXFEM</b>	<b>21</b>
2.1	Problème modèle . . . . .	21
2.2	Approximation . . . . .	22
2.2.1	Formulation variationnelle discrète . . . . .	22
2.2.2	Méthode de Nitsche . . . . .	24
2.2.3	Formulation NXFEM . . . . .	25
2.3	Principaux résultats . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Une variante robuste</b>	<b>29</b>
3.1	Changements . . . . .	29
3.2	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>41</b>
4.1	Détails de la mise en œuvre . . . . .	41
4.2	Test de validation . . . . .	43
4.3	Tests de robustesse et de comparaisons . . . . .	45
4.3.1	Robustesse . . . . .	45
4.3.2	Test de comparaison . . . . .	47
4.4	Test de l'estimateur d'erreur . . . . .	50



4.4.1	Raffinement uniforme . . . . .	50
4.4.2	Raffinement adaptatif . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>55</b>
<b>II</b>	<b>GÉNÉRALISATION DE NXFEM À L'ORDRE SUPÉRIEUR</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Résolution en éléments fini continus</b>	<b>59</b>
	Introduction . . . . .	59
6.1	Maillages de N-simplexes . . . . .	62
6.1.1	Maillage triangulaire . . . . .	62
6.1.2	Maillage tétraédrique . . . . .	67
6.2	Maillages parallélotopes 2D-3D . . . . .	73
6.2.1	Maillage quadrangulaire . . . . .	74
6.2.2	Maillage hexaédrique . . . . .	76
6.3	Maillages non parallélotopiques . . . . .	80
6.3.1	Distorsion de parallélogrammes . . . . .	81
6.3.2	Distorsion sur l'interface . . . . .	83
6.3.3	Éléments d'analyse . . . . .	86
6.4	Résultats numériques . . . . .	89
6.4.1	Détail de la mise en œuvre en $\mathbb{Q}^1$ . . . . .	89
6.4.2	Maillages N-simpliciaux et parallélotopes . . . . .	93
6.4.3	Maillages non parallélotopiques . . . . .	97
6.4.4	Interface courbe . . . . .	100
6.5	Éléments d'analyse pour une interface courbe . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Résolution en non conforme et Galerkin Discontinue</b>	<b>107</b>
	Introduction . . . . .	107
7.1	Approximation Galerkin Discontinue . . . . .	108
7.2	Approximation non conforme . . . . .	108
7.3	Résultats numériques . . . . .	109
<b>8</b>	<b>Perspectives</b>	<b>113</b>
<b>III</b>	<b>AUTRES PROBLÈMES ÉTUDIÉS LIÉS AUX ÉCOULEMENTS EN MILIEUX POREUX FRACTURÉS.</b>	<b>115</b>
<b>9</b>	<b>Introduction aux écoulements en milieux poreux</b>	<b>117</b>
9.1	Contexte et rappels . . . . .	117
9.1.1	Notion de porosité . . . . .	117
9.1.2	Notion de saturation . . . . .	118
9.1.3	Loi de Darcy . . . . .	118
9.2	Le modèle Black-Oil . . . . .	120

<b>10 NXFEM pour la résolution d'un modèle asymptotique de faille</b>	<b>123</b>
10.1 Présentation du problème . . . . .	123
10.2 Etude asymptotique sur un problème modèle . . . . .	125
10.3 Interfaces courbes . . . . .	129
10.4 Approximation du type NXFEM pour la résolution du modèle asymptotique . . .	130
10.5 Résultats numériques . . . . .	130
10.5.1 Test de validation . . . . .	130
10.5.2 Tests de comparaisons . . . . .	133
<b>11 Problème instationnaire</b>	<b>137</b>
11.1 Problème modèle et formulation NXFEM . . . . .	138
11.2 Résultats numériques . . . . .	139
<b>12 Problème de diffusion-convection</b>	<b>143</b>
12.1 Étude préliminaire et choix d'approximation . . . . .	143
12.2 Problème modèle et formulation NXFEM . . . . .	145
12.3 Résultats numériques . . . . .	147
12.3.1 Test de validation et de comparaison . . . . .	147
<b>13 Prise en compte de plusieurs interfaces</b>	<b>149</b>
13.1 Détail de la mise en œuvre . . . . .	149
13.2 Résultats numériques . . . . .	150
13.2.1 Test de validation . . . . .	150
13.2.2 Transport 2D . . . . .	150
13.2.3 Autres simulations . . . . .	151
<b>14 Perspectives</b>	<b>157</b>
<b>Annexes</b>	<b>161</b>
<b>A Maillage, Notations et éléments finis</b>	<b>161</b>
A.1 Notations liées au maillage . . . . .	161
A.2 Éléments Finis . . . . .	162
<b>B Démonstrations des principaux résultats NXFEM</b>	<b>163</b>
B.1 Coercivité de $a_h$ . . . . .	163
B.2 Consistance . . . . .	166
<b>C Analogie du lemme de Warburton-Hesthaven</b>	<b>169</b>
<b>D Rappels utiles</b>	<b>171</b>
D.1 Opérateurs différentiels . . . . .	171
D.2 Espaces fonctionnels . . . . .	171
D.3 Un exemple classique d'estimateur d'erreur par résidu . . . . .	171





*« On ne juge pas un homme sur le nombre de fois qu'il tombe  
mais sur le nombre de fois qu'il se relève. »*

***Jigoro Kano***

*"Plus l'ascension est longue, plus la montée est difficile,  
plus grande sera la satisfaction et plus magnifique sera la vue une fois au sommet."*

***Jigoro Kano***



# Introduction Générale

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Problématique - Objectifs - Perspectives . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1.1	Présentation du cadre . . . . .	2
1.1.2	Motivations et objectifs . . . . .	4
1.1.3	Perspectives . . . . .	4
<b>1.2</b>	<b>Outils mathématiques communs aux modèles . . . . .</b>	<b>5</b>
1.2.1	Problème modèle . . . . .	5
1.2.2	Approximation . . . . .	6
1.2.3	Tests numériques . . . . .	8
<b>1.3</b>	<b>Structure de la librairie Concha et implémentation de NXFEM . . .</b>	<b>15</b>
1.3.1	Structure du code C++ . . . . .	16
1.3.2	Les outils Python . . . . .	17
1.3.3	Implémentation de NXFEM . . . . .	17

---

Cette thèse s'inscrit dans le domaine des mathématiques appliquées, elle a été financée par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche et a été effectuée au Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau<sup>1</sup>, au sein de l'équipe Concha.

Concha<sup>2</sup> est une équipe du LMAP de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. Son objectif est d'analyser et de développer des méthodes novatrices et des algorithmes efficaces pour la simulation d'écoulements complexes de fluides. Le développement de codes de calcul (en C++) représente une partie importante de ses activités. Une librairie portant également le nom de *CONCHA*<sup>®</sup> a été développée pour le prototypage rapide de codes de calcul et permet la comparaison de différents schémas de discrétisations, de diverses méthodes éléments finis (Galerkin continu, Galerkin discontinu, non-conformes, mixtes ...) et techniques d'estimateurs d'erreur, d'adaptation de maillages, ou encore de modèles appliqués à des problèmes spécifiques. Les plus significatifs concernent les équations d'Euler, de Navier-Stokes incompressibles et les écoulements de polymères pour divers problèmes liés à l'aérodynamique, aux milieux poreux et aux liquides viscoélastiques.

La modélisation et simulation numérique d'écoulements dans des domaines fracturés sont au coeur de nombreuses applications, qui peuvent être industrielles (aérospatiale, milieu pétrolier ...) mais également médicales (écoulement du sang, déformation des globules rouges ...). En outre, de nombreux projets de recherche nécessitent le développement des méthodes robustes pour la prise en compte de singularités telles que des fissures ou des perforations (on parle également de problème d'interface), ce qui fait partie des motivations et des objectifs de Concha, ainsi que de cette thèse.

---

1. LMAP - <http://lma-umr5142.univ-pau.fr/live/>

2. <http://sites.google.com/site/conchapau/>

Dans cette introduction générale, nous commençons dans un premier temps par exposer le cadre, la situation, mais également par argumenter les motivations de la résolution de problèmes dans de telles configurations, en rappelant les différentes études effectuées sur ce sujet. Nous y positionnerons nos analyses, améliorations et résultats obtenus par rapport aux travaux existants. Puis, nous détaillerons en quelques mots les applications et évolutions possibles avec de tels outils. Enfin, nous fixerons les outils et notations principaux.

## 1.1 Problématique - Objectifs - Perspectives

### 1.1.1 Présentation du cadre

Cette thèse porte sur l'étude théorique et numérique d'éléments finis non-conformes ([51],[52],[71],[63],[65], ...) ou pseudo-conformes ([34],[35]) pour des problèmes d'interface, en particuliers sur l'adaptation de la méthode NXFEM (Nitsche-eXtended FEM [53]) à ce type d'élément.

Les problèmes d'interface sont couramment rencontrés dans des domaines tels que le milieu pétrolier (modélisation de réservoirs, présence de failles, propagation d'un signal, repérage de couches ...), l'aérospatiale (problème de chocs, de rupture), en génie civil, mais également dans la biologie cellulaire (écoulement du sang, déformation des globules rouges) ...

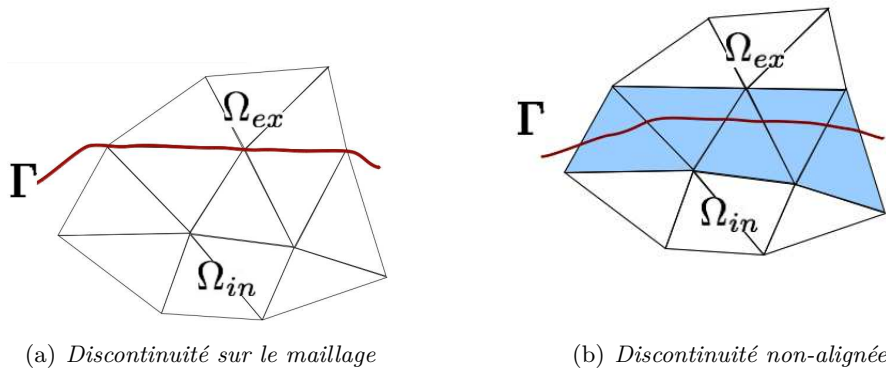


FIGURE 1.1 – Position discontinuité-maillage

Il est important de situer nos contributions par rapport aux travaux réalisés sur les problèmes d'interface.

↪ La première idée consiste à faire coïncider la singularité sur les lignes maillages (Figure 1.1(a)), on parle alors de maillages adaptés. De cette manière, la définition même des éléments finis permet de bien poser les espaces, et la résolution des problèmes se déroule dans de bonnes conditions. Babuška nous en a expliqué les résultats dans [3].

↪ La méthode Level Set [69] est apparue voici une trentaine d'années. Le principe de celle-ci est de définir une fonction interface dans le domaine de calcul dont la courbe de niveau zéro



est l'interface que l'on cherche à décrire. Cette méthode est une technique numérique pour le suivi des interfaces mobiles, elle s'avère particulièrement pratique pour représenter des fissures 3D et efficace pour la phase de propagation. La résolution d'une équation de convection permet alors de prédire les mouvements de l'interface dans un champ de vitesse donné. Elle manipule les changements topologiques naturellement, sa mise en œuvre est aussi directe en 2D qu'en 3D. De plus, le calcul des caractéristiques géométriques du problème est particulièrement simple et s'effectue à l'aide du calcul du gradient de la fonction Level Set. [78]

Mais il n'est hélas pas toujours évident d'être dans cette configuration de maillages adaptés. La simulation numérique sur des domaines à géométrie complexe reste un thème de recherche actif et l'ajout d'une interface ne simplifie en rien ces études. L'indépendance entre maillage et géométrie devient alors une configuration très attractive. Une méthode permettant de s'affranchir de maillages adaptés et conformes, amenant à utiliser des maillages non-adaptés et structurés, donc "simples", serait plus souple (en terme d'hypothèses sur le maillage et son raffinement) et donc plus facile à mettre en œuvre.

Parallèlement à ces travaux, certains se sont donc intéressés aux développements de méthode dans le cas où la discontinuité n'est pas alignée avec le maillage (Figure 1.1(b)).

•♦ Le premier réflexe a été de se ramener à la configuration précédente, à l'aide de raffinement successifs. Mais la présence de singularités dégrade fortement la convergence de la méthode élément fini, et il ne suffit pas de raffiner fortement le maillage à proximité des singularités pour obtenir une bonne solution. De plus, pour de grands domaines, avec des fractures multiples pouvant se croiser, la tâche devient rapidement coûteuse, difficile à gérer (les mailles pouvant être de plus en plus déformées et aplaties ...), voir même impossible à satisfaire.

Différentes approches ont été proposées pour pallier ce problème, la plupart reposant sur l'introduction de fonctions capables de représenter ce qu'il se passe au niveau de la fissure, mais souvent ces approches faisaient perdre la bonne prise en compte des conditions aux limites. Néanmoins, on retiendra que Barrett et Elliott [8] ont montré le premier ordre de convergence pour une méthode linéaire par morceaux, mais avaient une erreur de consistance et MacKinnon [62] a utilisé une approche alternative en construisant une nouvelle base FEM. Bramble et King ont prolongé leurs travaux [18].

•♦ En 1997, Babuška et Melenk ont introduit une méthode permettant d'avoir les fonctions décrivant la singularité tout en respectant les conditions aux limites [4]. Leur principe est d'introduire comme fonction de forme des fonctions capables de prendre en compte la singularité que l'on veut traiter (connues par différentes approches) et de les régulariser sur le bord grâce à une fonction (qui préserve les propriétés des fonctions introduites sur l'intérieur du domaine). Ils ont montré qu'avec cette méthode, on retrouvait le taux de convergence normal.

•♦ Plus récemment, le concept X-FEM (La méthode des éléments finis étendue - eXtended Finite Element Method) [66] a été proposé pour tenir compte des problèmes de convergence des éléments finis près d'éventuelles singularités du domaine. Cette méthode est une généralisation de l'idée de Babuška et Melenk, où l'on s'autorise à enrichir l'espace élément fini usuel avec des degrés de liberté supplémentaires et des fonctions singulières (des fonctions de heavyside, solutions asymptotiques ...).

Les méthodes numériques classiques tels que les méthodes éléments finis ou volumes finis présentent souvent une faible précision le long de discontinuités. La X-FEM permet d'obtenir une amélioration de cette précision.

L'un des points faibles de la méthode est l'absence de formulation faible discret.

Les travaux autour de cette nouvelle approche se multiplient [15], se diversifient [33, 50], s'améliorent [10].

• En 2002, A. Hansbo et P. Hansbo proposent une variante, basée sur la formulation de Nitsche : la NXFEM (Nitsche eXtended Finite Element Method) [53]. Dans cette méthode, on n'utilise que les fonctions de bases éléments finis, polynomiales, classiques. Ce qui permet de conserver l'emploi des espaces éléments finis standard. Cette méthode est bien étudiée sur des maillages triangulaires avec des approximations conformes des inconnues.

L'emploi de cette méthode se généralise, pour des applications diverses telles que les domaines fictifs [13, 14] et à différentes méthodes éléments finis [64].

### 1.1.2 Motivations et objectifs

Les algorithmes ont été mis en œuvre en C++ dans la librairie CONCHA (voir Section 1.3), en vue de résoudre des équations de type Darcy et Navier-Stokes. L'utilisation de maillages en quadrilatères et hexaèdres intervient dans beaucoup de domaines applicatifs, et il est indispensable de disposer d'éléments finis robustes et efficaces permettant de garantir des ordres de convergences optimaux (notamment dans le cas d'équations présentant des coefficients fortement discontinus ou anisotropiques) et d'obtenir des codes de calcul rapides.

L'utilisation d'éléments finis non-conformes est un choix judicieux dans de nombreuses applications. Mais dans le cas de maillages en quadrilatères ou en hexaèdres, la non-linéarité de l'application - qui transforme l'élément de référence en un élément du maillage - soulève des difficultés aussi bien théoriques que numériques, sur lesquelles nous nous sommes penchés.

La méthode NXFEM, qui permet le traitement de discontinuités sur un maillage fixe, a été principalement étudiée pour des maillages en triangles ou en tétraèdres avec des approximations conformes des inconnues. La généralisation de cette méthode aux cas des maillages quadrilatères ou en hexaèdres, avec des approximations non-conformes, restent un problème ouvert auquel nous souhaitons donner des réponses.

### 1.1.3 Perspectives

Plusieurs pistes de recherches sont envisageables. Elles peuvent porter sur des aspects théorique (amélioration des résultats et démonstrations établis), numérique (optimisation du code de calcul) mais également sur le développement d'applications telles que le milieu pétrolier, l'aéronautique, imagerie, globules rouges ...

Afin de mieux comprendre les perspectives à court et long termes, nous proposons d'exposer celles-ci au fil de ce manuscrit, en fin de chaque chapitre.

## 1.2 Outils mathématiques communs aux modèles

Nous donnons ici les principaux outils que nous allons utiliser dans la suite de ce manuscrit. Afin de ne pas alourdir la rédaction de ce mémoire, les notations les plus usuelles ont été rappelées dans en annexes : Annexe D.1 pour les opérateurs différentiels, Annexe D.2 pour les espaces fonctionnels.

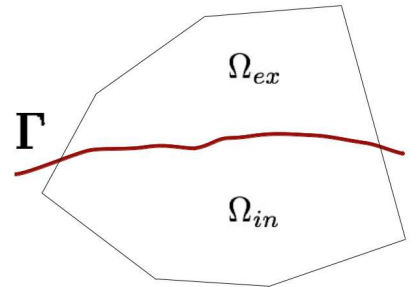
### 1.2.1 Problème modèle

Dans une large partie de ce manuscrit, nous considérerons le problème modèle elliptique d'interface suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = g_D & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = g_N & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

Afin de fixer les idées, nous pouvons par exemple assimiler ces équations à un problème de diffusion thermique stationnaire, dans lequel le coefficient de diffusion  $\mathfrak{K}$  serait discontinu le long d'une interface  $\Gamma$ .

Dans tout ce qui suit,  $\Omega$  sera un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N$  sera précisé dans chacun des cas étudiés), de frontière polygonale convexe  $\partial\Omega$  et une délimitation interne régulière  $\Gamma$  divisant  $\Omega$  en deux ensembles ouverts  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\Omega_{\text{ex}}$  (comme illustré sur la figure ci-contre).



Nous supposons  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g_D \in C(\Gamma)$  et  $g_N \in L^2(\Gamma)$  des fonctions données,  $n$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega_{\text{in}}$ .

Pour simplifier certains raisonnements, nous supposons que  $\mathfrak{K}$  est un coefficient discontinu positif et constant par morceaux, prenant respectivement les valeurs  $\mathfrak{K}_{\text{in}}$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}}$  sur chaque sous-domaine  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\Omega_{\text{ex}}$ .

Pour  $\varphi$  suffisamment régulière sur  $\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}$ , nous définissons :

- $\varphi|_{\Omega_{\text{in}}} = \varphi_{\text{in}}$  et  $\varphi|_{\Omega_{\text{ex}}} = \varphi_{\text{ex}}$ ,
- le saut le long de  $\Gamma$  :

$$[\varphi] := \varphi_{|\Gamma}^{\text{in}} - \varphi_{|\Gamma}^{\text{ex}}, \quad (1.2)$$

- la moyenne pondérée par le poids  $\kappa = (\kappa_{\text{in}}, \kappa_{\text{ex}})$  (avec  $\kappa_{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}} = 1$ ) :

$$\{\varphi\}_{\kappa} := \kappa_{\text{in}}\varphi_{|\Gamma}^{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}}\varphi_{|\Gamma}^{\text{ex}}. \quad (1.3)$$

Les poids  $\kappa_{\text{in}}$  et  $\kappa_{\text{ex}}$  seront précisés ultérieurement, en fonction des méthodes employées.

### 1.2.2 Approximation

L'annexe A - Section A.1 détaille les définitions les plus courantes ainsi qu'une brève bibliographie. Nous rappelons ici les notations usuelles que nous utiliserons par la suite :

$\mathcal{H}$	famille de maillage,
$\mathcal{K}_h$	ensemble des cellules. $K \in \mathcal{K}_h$ , $K$ élément de $\mathcal{K}_h$ ,
$d_K$	diamètre de $K$ , $d_h = \max d_K$ ,
$\rho_K$	rondeur de $K$ ,
$\mathcal{N}_h$	ensemble des noeuds (nodes),
$\mathcal{S}_h$	ensemble des côtés en 2D / face en 3D (sides). $S \in \mathcal{S}_h$ , $S$ élément de $\mathcal{S}_h$ ,
$\mathcal{S}_h^\partial$	ensemble des côtés/faces du bord,
$\mathcal{S}_h^{\text{int}}$	ensemble des côtés/faces intérieurs.

On ajoute les notations liées à la discontinuité :

$\Gamma$	la discontinuité,
$\Gamma_K$	$:= \Gamma \cap K$ , la partie de $\Gamma$ dans $K$ ,
$K^{\text{in}}$	$:= K \cap \Omega_{\text{in}}$ , la partie de $K$ dans $\Omega_{\text{in}}$ ,
$K^{\text{ex}}$	$:= K \cap \Omega_{\text{ex}}$ , la partie de $K$ dans $\Omega_{\text{ex}}$
$\mathcal{K}_h^{\text{cut}}$	$:= \{K \in \mathcal{K}_h : K \cap \Gamma \neq \emptyset\}$ , ensemble des cellules coupées par l'interface,
$\mathcal{S}_h^{\text{int,in}}$	$:= \{S \in \mathcal{S}_h^{\text{int}} : S \cap \Omega_{\text{in}} \neq \emptyset\}$ , l'ensemble des côtés/faces intérieurs dans $\Omega_{\text{in}}$ ,
$\mathcal{S}_h^{\text{int,ex}}$	$:= \{S \in \mathcal{S}_h^{\text{int}} : S \cap \Omega_{\text{ex}} \neq \emptyset\}$ , l'ensemble des côtés/faces intérieurs dans $\Omega_{\text{ex}}$ ,
$\mathcal{S}_h^{\text{int,cut}}$	$:= \{S \in \mathcal{S}_h^{\text{int}} : S \cap \Gamma \neq \emptyset\}$ , l'ensemble des côtés/faces intérieurs coupés.
$\mathcal{S}_h^{\partial,\text{in}}$	$:= \{S \cap \Omega_{\text{in}} : S \in \mathcal{S}_h^\partial \text{ tel que } S \cap \Omega_{\text{in}} \neq \emptyset\}$ , l'ensemble des côtés/faces du bord dans $\Omega_{\text{in}}$ ,
$\mathcal{S}_h^{\partial,\text{ex}}$	$:= \{S \cap \Omega_{\text{ex}} : S \in \mathcal{S}_h^\partial \text{ tel que } S \cap \Omega_{\text{ex}} \neq \emptyset\}$ , l'ensemble des côtés/faces du bord dans $\Omega_{\text{ex}}$ ,

$\mathcal{S}_h^{\partial, \text{cut}}$  :=  $\langle S \in \mathcal{S}_h^\partial : S \cap \Gamma \neq \emptyset \rangle$ , l'ensemble des côtés/faces du bord coupés.

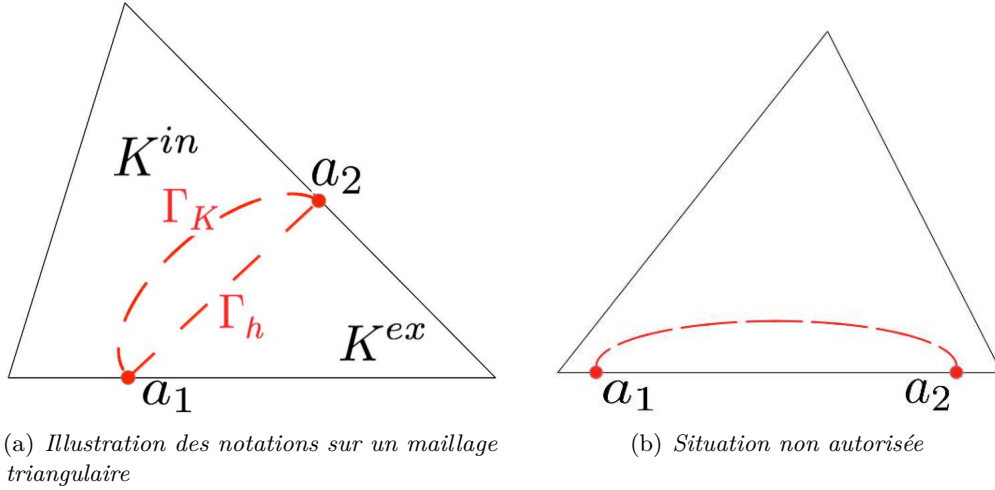


FIGURE 1.2 – *Intéraction Maillage-Discontinuité*

Nous avons également besoin d'établir des hypothèses sur la discontinuité :

A1 nous supposons que  $\mathcal{K}_h$  est non-dégénérée (au sens de Ciarlet [25]), ie

$$\frac{d_K}{\rho_K} \leq C, \quad \forall K \in \mathcal{K}_h,$$

A2 nous supposons que pour chaque cellule coupée  $K$ ,  $\Gamma$  coupe  $\partial K$  distinctement et exactement deux fois, et dont au plus une fois chaque face (ex : Figure 1.2(b) rejetée),

A3 soit  $\Gamma_h$  le segment de droite reliant les points d'intersection entre  $\Gamma$  et  $\partial K$  (Figure 1.2(a)). Nous supposons que  $\Gamma_K$  est une fonction dépendant de la longueur  $\Gamma_h$  :

$$\Gamma_K := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < |\Gamma_h|, \eta = \delta(\xi)\},$$

et

$$\Gamma_h := \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < |\Gamma_h|, \eta = 0\}.$$

**Remarque 1.1.** Dans le cas d'une interface rectiligne/plane,  $\Gamma_K$  et  $\Gamma_h$  sont confondues.

La courbure de  $\Gamma$  étant bornée, les hypothèses A2 et A3 sont toujours remplies quand  $d_h$  tend vers 0. Ainsi, les hypothèses sont naturelles et peu contraignantes, et s'assurent que la courbure de l'interface est bien prise en compte par le maillage.

Nous allons chercher une solution discrète  $u_h = (u_h^{\text{in}}, u_h^{\text{ex}})$  dans l'espace  $\mathbb{V}_h$ , qui sera précisé en fonction de la méthode employée.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on notera par  $\mathbb{P}^k$  (respectivement  $\mathbb{Q}^k$ ) l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}^N$  de degré plus petit ou égal à  $k$  ( respectivement de degré plus petit ou égal à  $k$  en chacune des variables).

De manière générale, nous noterons par  $C$  ou  $c$  les constantes génériques.

### 1.2.3 Tests numériques

Afin d'évaluer les erreurs commises, nous effectuerons principalement deux types de tests : un de validation, d'autres de robustesse et de comparaisons. Dans les deux cas, nous utiliserons des solutions exactes (que nous expliciterons le moment venu).

Les résultats seront décrits sous forme de tableaux où :

- $M$  représentera le nombre d'éléments du maillage (cardinal de  $\mathcal{K}_h$ ),
- $ENorm$  (noté  $e_h$ ) correspondra à la norme énergie et  $L2errorcut$  à la norme- $L^2$  du problème considéré,
- concernant les maillages adaptatifs,  $\eta_h$  présentera l'estimateur d'erreur,
- de manière générale,  $\blacktriangleright-RedR$  représentera le ratio entre deux itérations et  $\blacktriangleright-Order$  représentera l'ordre de convergence de l'objet  $\blacktriangleright$ ,
- sur les courbes de convergence,  $\blacktriangleright FEM$  représentera la vitesse de convergence de l'objet  $\blacktriangleright$  avec une méthode EF classique (avec la même approximation polynomiale que la NXFEM considérée).

L'ensemble des courbes de convergence, illustrant les données précédentes, sera représenté à l'échelle logarithmique, avec pour axes :

- En abscisse : Nombres d'éléments du maillage,
- En ordonnée : Norme considérée.

Nous ajouterons pour certains tests des illustrations sur la configuration pour faciliter la compréhension ; de la solution, des différentes erreurs ou même de l'estimateur d'erreur pour justifier et comparer nos travaux à la littérature existante.

Cette partie est divisée en plusieurs sous-sections : nous commencerons par présenter les maillages (géométries) sur lesquelles nous faisons l'ensemble de nos tests ; puis nous porterons notre attention sur les catégories d'essais effectués (tests de validation, tests de robustesse, de comparaisons) ; enfin, nous terminerons cette partie en détaillant la procédure de raffinement de maillage qui est utilisée pour tester les estimateurs d'erreur.

#### 1.2.3.1 Maillage

##### Découpage en triangles

Nous utiliserons deux types de maillages triangulaires : un maillage de type Criss Cross, et un autre plus classique.

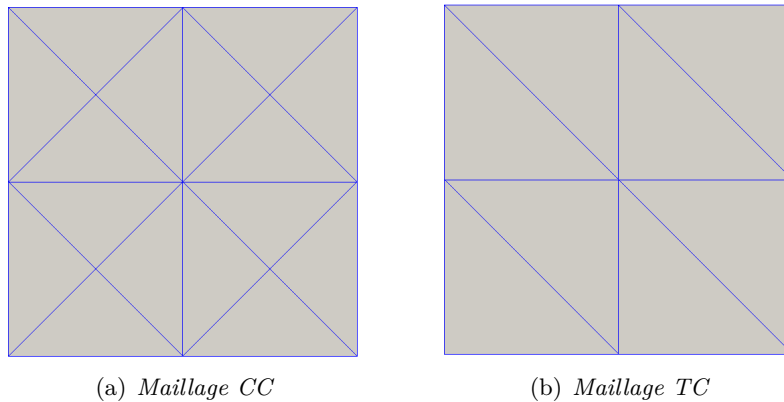


FIGURE 1.3 – Maillage en triangles

Le **maillage Criss Cross** est construit ainsi : le maillage de départ est un quadrangle régulier, dont on construit les diagonales pour obtenir un maillage triangulaire (Figure 1.3(a)). Ce genre de maillage sera par la suite nommé CC.

L'avantage d'un tel découpage est que l'on a un maillage parfaitement symétrique, ce qui permet de déceler les problèmes plus facilement. De plus, lors de raffinement de maillages adaptatifs, ce type de découpage permet de conserver les mêmes géométries de mailles et d'éviter lors de procédures adaptatives les "noeuds suspendus" (dit Hanging Node - voir plus loin). Le petit détail qui fâche, c'est que l'on a rapidement beaucoup de mailles ...

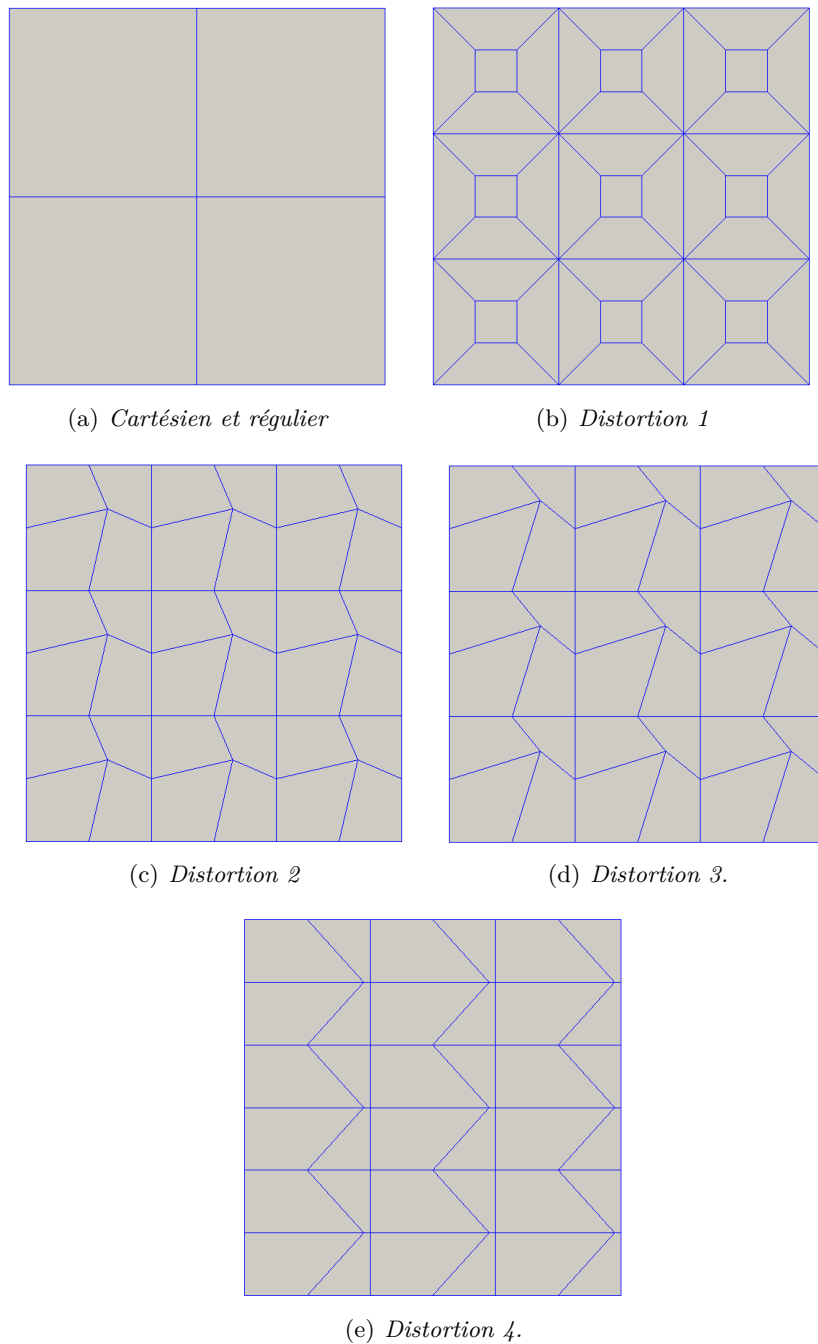
Le **maillage triangulaire classique** sera noté TC. Il n'est alors plus symétrique (Figure 4.7(b)) et présente des Hanging Node lors des raffinements adaptatifs.

### Découpage en quadrangles

La plupart des tests seront effectués sur un maillage cartésien et régulier (Figure 1.4(a)).

Afin de pouvoir justifier la robustesse de nos méthodes pour tout type de maillages en quadrangles, nous avons besoin de géométries plus complexes (Figures 1.4(b), 1.4(c), 1.4(d), 1.4(e)). En effet, la géométrie 1.4(a) présente de nombreux avantages (par exemple, la transformation  $\mathcal{F}$  de l'élément de référence à l'élément réel est alors affine), mais elle détourne et efface malheureusement certaines réalités compliquées à traiter. C'est pourquoi nous considérons également des maillages en quadrilatères déformés, qui conservent la bilinéarité de  $\mathcal{F}$ .

De plus, notons que la procédure de raffinement standard - qui consiste à raffiner en joignant les milieux des côtés - crée des maillages successifs dans lesquels tous les éléments tendent à devenir des parallélogrammes. La transformation  $\mathcal{F}$  tend vers une transformation affine. Afin de maintenir la déformation des mailles quadrangulaires à chaque niveau de raffinement, nous avons reproduit le même motif.

FIGURE 1.4 – *Maillages quadrangulaires*

### Découpage en hexaèdres

D'un point de vue mécanicien, un hexaèdre est usuellement l'image du cube biunité par une transformation  $\mathbb{Q}^1$ , et en général les faces d'un élément trilinéaire hexaédrique ne sont pas planes (voir par exemple [54]) et sont décrites par des paraboloides hyperboliques. Dans ce



manuscrit, nous appelons hexaèdre un polyèdre dont ses faces sont planes. Nous utiliserons des parallélépipèdes.

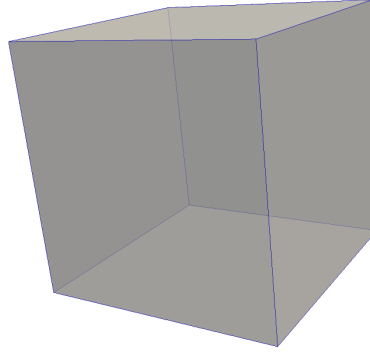


FIGURE 1.5 – Maillage hexaédrique

Toutefois, les tests 3D présentés ont été effectués sur ce maillage cartésien et régulier (Figure 1.5).

### 1.2.3.2 Tests de validation

On appellera test de validation une configuration simple, qui nous permet de vérifier facilement l'ensemble des quantités calculées (l'aire de la surface d'intersection, les volumes de part et d'autre de la discontinuité, calcul de la normale ...).

Nous emploierons pour cela un maillage cartésien (exemple avec un maillage CC ci-contre 1.6), une discontinuité affine (Définition 1.1) ainsi qu'une solution exacte (précisée ultérieurement).

#### Définition 1.1. Discontinuité affine

Nous appelons par discontinuité affine

- En 2D, une droite d'équation :  $ax + by + c = 0$ ,
- En 3D, un plan d'équation :  $ax + by + cz + d = 0$ ,

où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Considérons le problème modèle (1.1), avec  $g_D = g_N = 0$ .

Dans un premier temps, nous avons comparé les résultats entre une configuration classique sans discontinuité et celle avec interface, en prenant  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = \mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1$  et en variant la position et l'inclinaison de la discontinuité. Ces configurations sont importantes pour mettre en évidence les complications que l'on rencontre lorsque la discontinuité passe sur un noeud ou sur toute une arête (face) du maillage. Ces points, qui ne sont jamais détaillés dans la littérature, posent des

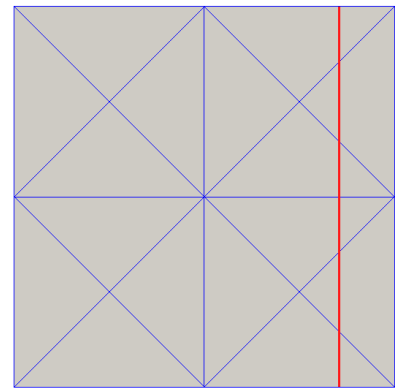


FIGURE 1.6 – Illustration

problèmes d'un point de vue de la mise en œuvre.

Ce n'est qu'après cette importante et essentielle étape que nous avons considéré  $\mathfrak{R}_{\text{in}} \neq \mathfrak{R}_{\text{ex}}$ . Ces résultats constituent la dernière phase des tests de validation, et correspondent aux simulations présentées dans ce qui suit.

### 1.2.3.3 Tests de comparaisons

Afin de conforter nos améliorations et nos analyses, nous avons cherché à situer et confronter nos travaux à la littérature existante pour la résolution de problèmes d'interface.

Pour cela, dans le cas d'un maillage triangulaire, nous avons utilisé l'exemple 2D proposé dans l'article des Hansbo [53], exemple lui-même issu du papier [60].

#### Définition 1.2. *Discontinuité courbe*

Le test de discontinuité courbe que nous considèrerons (Figure 1.7) sera le suivant

- En 2D, un cercle d'équation :

$$\frac{(x - cx)^2}{rx^2} + \frac{(y - cy)^2}{ry^2} - 1.0 = 0,$$

- En 3D, une sphère d'équation :

$$\frac{(x - cx)^2}{rx^2} + \frac{(y - cy)^2}{ry^2} + \frac{(z - cz)^2}{rz^2} - 1.0 = 0,$$

de centre  $O = (cx, cy, cz)$  et de rayon  $R = (rx, ry, rz)$ .

On considèrera pour ces tests le problème modèle (1.1), avec  $g_D = g_N = 0$ .

Cette situation sera employée pour des comparaisons en maillage triangulaire, et sur lesquelles nous confronterons la méthode originale et la nôtre. Pour les autres types de maillages, nous ne pourons pas confronter nos modifications à la méthode originale puisque celle-ci n'est donnée que pour des éléments finis  $\mathbb{P}^1$ , nous les comparerons donc aux résultats obtenus sur des maillages triangulaires avec notre méthode.

### 1.2.3.4 Tests de robustesse

Ces tests nous permettent de justifier l'efficacité de nos améliorations et seront effectués pour des maillages triangulaires et quadrangulaires.

Pour cela, nous avons repris le cadre des tests de comparaisons, et nous avons :

- tantôt pour un même maillage, comparé la formulation des Hansbo et la nôtre sur certaines quantités : erreurs énergie ou  $L^2$ , l'erreur- $L^2$  du flux, ou encore le saut du flux discret ...

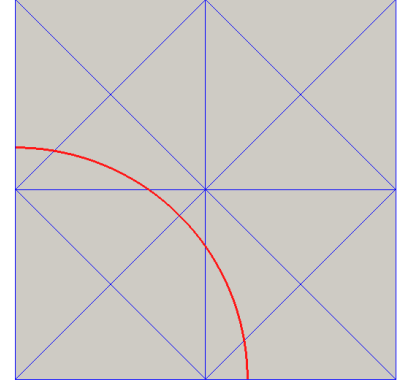


FIGURE 1.7 – Illustration

- tantôt pris des maillages différents, "déformés" (conservant néanmoins leur motif à chaque étage du raffinement - Figure 6.22)

La première configuration va pouvoir nous aider à montrer la robustesse de nos modifications, vis-à-vis des coefficients de diffusion mais également par rapport à la géométrie. En effet, en fonction de la position de l'interface (par rapport aux noeuds, aux arêtes du maillage ...), nous avons remarqué que certaines quantités étaient mal approchées, ce qui contribuait fortement à la dégradation de la solution ou/et des erreurs. Nous effectuerons ces comparaisons sur des maillages triangulaires, en confrontant la méthode originale et nos modifications.

Pour des maillages en quadrilatères, nous emploierons donc la seconde configuration. Comme énoncé précédemment, les maillages cartésiens effacent certaines difficultés comme la bilinéarité de la transformation. Des découpages "déformés" nous permettent de conserver les propriétés de tels maillages. Ainsi, pour justifier la robustesse de nos modifications, nous comparerons les résultats obtenus sur un maillage cartésien et ceux sur des maillages "déformés".

### 1.2.3.5 Procédure de raffinement de maillage

Il existe plusieurs procédures de raffinement de maillage.

Plaçons-nous dans un maillage TC.

Pour chaque cellule, la procédure de raffinement consiste à joindre naturellement le milieu de chaque côté (Figure 1.8). Cette procédure est la plus souvent rencontrée, elle est appelée **Red-Green**.

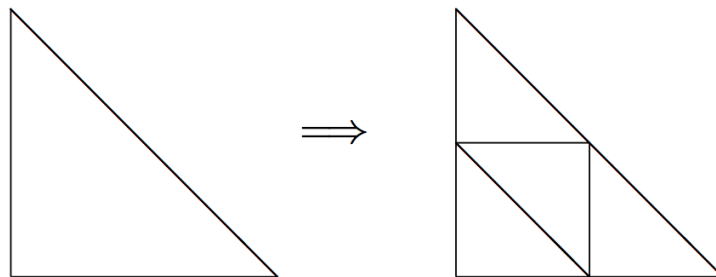
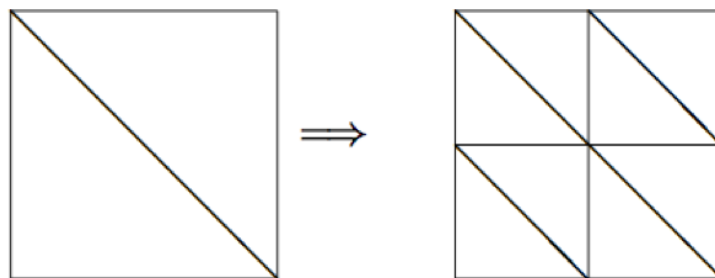
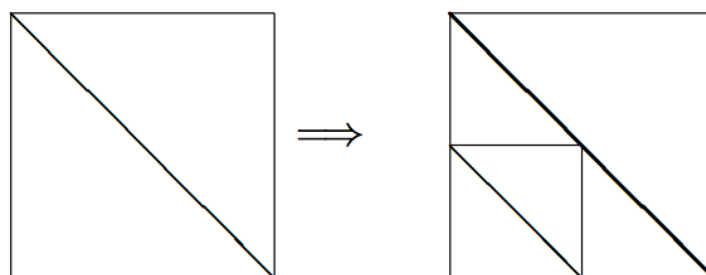
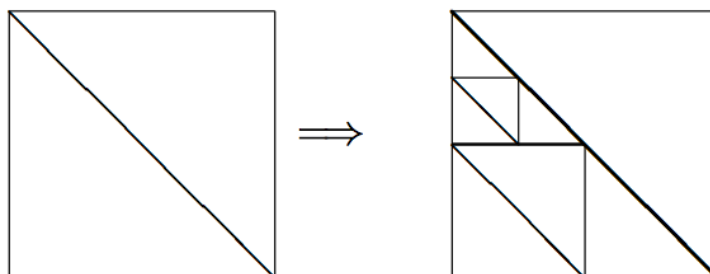


FIGURE 1.8 – Procédure classique de raffinement d'une cellule TC

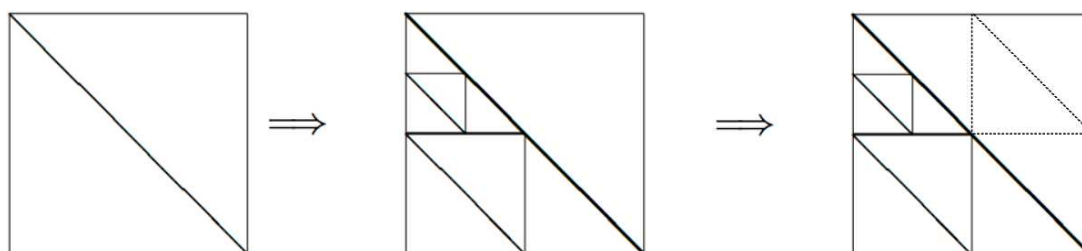
Dans le cadre d'un raffinement uniforme, on applique ce même procédé à toutes les cellules du maillage (Figure 1.9).

Dans le cadre d'un maillage adaptatif, on applique ce procédé seulement aux cellules marquées (Figure 1.10), c'est-à-dire celles qu'un indicateur (tel qu'un estimateur d'erreur) indique comme devant être raffinées. Il apparaît alors des **Hanging Nodes** ("noeuds suspendus").

Nous avons néanmoins supposé pour cette procédure qu'une arête pouvait avoir au plus un Hanging Node (la Figure 1.11 présente une situation que nous ne voulons pas rencontrer : une arête possédant deux Hanging Node).

FIGURE 1.9 – *Raffinement uniforme d'un maillage TC*FIGURE 1.10 – *Raffinement adaptatif d'un maillage TC*FIGURE 1.11 – *Situation non admise*

Si néanmoins la situation 1.11 devait se produire, nous raffinons alors une fois la cellule voisine (Figure 1.12).

FIGURE 1.12 – *Correction*

Concernant les maillages CC, ils sont construits de sorte qu'il n'y ait pas de Hanging Node. De cette manière, nous pouvons obtenir des résultats tout à fait satisfaisant pour des maillages adaptatifs, sans nous soucier de la gestion des Hanging Node.

Ces maillages sont construits ainsi :

- on part d'un maillage quadrangulaire,
- on dessine les deux diagonales de chaque cellule du maillage.

Lors d'un raffinement uniforme :

- on part d'un maillage quadrangulaire,
- on marque et raffine toutes les cellules quadrangulaires de ce maillage (en joignant les milieux des côtés),
- on dessine les deux diagonales de chaque cellule du maillage.

Lors d'un raffinement adaptatif :

- on part d'un maillage quadrangulaire,
- on raffine les cellules marquées de ce maillage,
- on dessine les deux diagonales de toutes les cellules,
- on élimine les Hanging Nodes, en découpant en deux les triangles ayant un HN sur une de ses arêtes.

Malgré cette procédure, il peut apparaître des Hanging Nodes, que l'on fait disparaître comme présent dans la Figure 1.13.

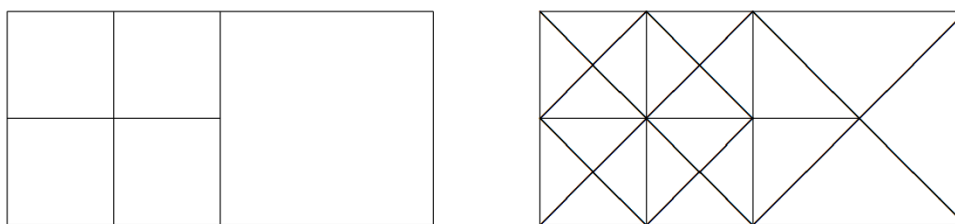


FIGURE 1.13 – Raffinement d'un maillage CC

### 1.3 Structure de la librairie Concha et implémentation de NX-FEM

La librairie Concha est composée d'un coeur de calcul écrit en C++ et d'outils de pilotage en Python. Nous donnons dans ce qui suit un bref aperçu de la structure de cette librairie de manière à expliquer les principes d'implémentation des méthodes NXFEM. L'article [12] pourra compléter nos propos.

### 1.3.1 Structure du code C++

La partie C++ de la librairie Concha est constituée d'une collection de classes qui peuvent être spécialisées, adaptées par le développeur en utilisant les possibilités d'héritage et de polymorphisme du C++. Parmi ces classes, les suivantes jouent un rôle fondamental :

- ◆ **Mesh** : maillage de type général, contenant les mailles, faces, arêtes, points, mais également un ensemble d'objets géométriques abstraits ("**GeometricObject**").

Selon ses besoins, le développeur peut enrichir le maillage par des entités géométriques supplémentaires. Par exemple, des informations sur les noeuds suspendus (*hanging nodes*) sont ajoutés aux maillages lors de raffinements locaux. C'est de cette manière également, que l'on définit les éventuelles courbes ou surfaces de discontinuité.

- ◆ **FiniteElement** : classe abstraite de description des éléments finis.

- ◆ **DofManager** : gère l'ensemble des degrés de liberté, à partir du maillage et des éléments finis utilisés.

- ◆ **Variable** : description des variables inconnues du problème, ainsi que les éventuels post-process comme les erreurs et estimateurs *a posteriori*. On y précise notamment le type d'élément fini rattaché à la variable et le nombre de composantes.

- ◆ **Integrator** : effectue, pour un jeu de variables donné, des calculs d'intégrales sur une entité géométrique du maillage (maille, face, arête). Les résultats sont stockés dans des matrices et vecteurs locaux que l'on assemble ensuite dans la matrice et second membre du système.

- ◆ **Application** : les conditions de bords, le second membre, les conditions initiales et éventuellement la solution exacte sont définis dans cette classe.

- ◆ **Model** : contenant la description du problème physique à résoudre et les "**Applications**" associées. C'est ici en particulier que l'on précise l'ensemble des "**Integrators**" à prendre en compte. Un certain nombre de modèles particuliers sont disponibles dans Concha. Nous avons des modèles d'équations scalaires de convection-diffusion-réaction, bien pratique dans la phase de tests et de validation, mais également des modèles plus complexes comme Stokes, Navier-Stokes, Euler et Polymères.

- ◆ **Solver** : le "**Model**" est un attribut de cette classe qui stocke l'essentiel de la mémoire allouée pour le système linéaire, à savoir la matrice et le second membre.

- ◆ **Loop** : boucle abstraite de laquelle dérivent, entre autres, les classes de gestion des marches en temps et des itérations de Newton.

Un outil de sélection de boucle ("**LoopSelector**") spécialise la **Loop** de manière dynamique en fonction du choix de l'utilisateur. Précisons que la résolution du problème et le calcul des quantités de post-processing sont effectués dans des "**Loop**" différentes et sont obtenus par deux exécutions distinctes du code.

L'utilisation de la librairie passe par la création d'un projet qui, dans sa plus simple expression, se résume en un programme principal de quelques lignes. On y précise un fichier de paramètres contenant le choix de modèle, d'application, l'élément fini rattaché à chaque variable, le fichier maillage, etc. Il est bien sûr possible dans un projet, de spécialiser les classes décrites ci-dessus en écrivant des classes dérivées. Des "**Integrator**" particuliers peuvent être mis en œuvre, leur prise en compte se faisant dans un nouveau "**Model**".

### 1.3.2 Les outils Python

Une exécution unique d'un projet n'est généralement pas suffisante. On peut être amené à effectuer par exemple une boucle d'adaptation de maillage en se basant sur un critère de raffinement fourni par un estimateur d'erreur. Cela sous-entend de résoudre le problème physique (première exécution), de calculer un certain nombre de post-process (deuxième exécution du code), d'utiliser un outil de raffinement de maillages, puis de revenir à la première étape. La gestion de ces boucles d'exécution, externes au code C++, est géré dans Concha par des outils Python.

Ces outils nécessitent leur propre ensemble de données que l'utilisateur devra également prendre en charge (nombre d'itérations de raffinement, outils de maillages, etc). Un certain nombre de boucles d'exécutions sont prédéfinies de manière à faciliter la tâche de l'utilisateur. On retiendra notamment les boucles suivantes :

- **AmrLoop** : boucle standard d'adaptation de maillages à partir d'un estimateur d'erreur *a posteriori*.
- **AmrLoopHierarchic** : boucle d'adaptation de maillages à partir d'un estimateur hiérarchique (calcul de variation sur deux maillages emboîtés).
- **ParameterLoop** : boucle permettant de lancer plusieurs exécutions en faisant varier un jeu de paramètres.

L'ensemble des tâches à effectuer dans une boucle donnée, est précisé comme une liste de chaînes de caractères, chacune précisant le nom d'une fonction Python. Pour la boucle "**AmrLoop**", la liste des tâches à effectuer, à chaque tour de boucle, est la suivante :

```
["solve", "postprocess", "estimateerror", "mark", "refineMesh"]
```

Chacun de ces mots-clés est le nom d'une fonction Python qu'il est possible de surcharger à loisir. La liste ci-dessus peut également être modifiée, pour supprimer ou ajouter des étapes de calcul.

La masse de données que l'utilisateur est contraint de gérer, à la fois pour les exécutable C++ et pour les pilotes python, devient inévitablement conséquente. Toutefois, de nombreux exemples de fichiers Python gérant l'ensemble de ces paramètres sont disponibles pour différents modèles et applications.

### 1.3.3 Implémentation de NXFEM

Dans ce qui suit, nous décrivons succinctement les points-clés de la mise en œuvre de NXFEM dans la librairie Concha.

Les principales difficultés à surmonter concernent la description des discontinuités, la gestion des degrés de liberté (NXFEM générant des dofs supplémentaires sur les entités géométriques traversées par une discontinuité) et enfin l'écriture des intégrales le long des discontinuités.

•♦ **Le maillage** : tout d'abord, des classes de description des interfaces, dérivées de la classe "GeometricObject" viennent enrichir le maillage et donnent accès à toutes les informations sur les entités de maillages coupées par les interfaces. À partir des équations de chaque discontinuité, un exécutable indépendant ("DiscontinuityConstructor") calcule les intersections entre les discontinuités et le maillage, et sauvegarde les résultats dans les fichiers maillages les données. Nous avons fait le choix ici de décrire les discontinuités de manière analytique à partir d'une équation implicite. Une autre possibilité est de donner un maillage de chaque courbe, ou surface de discontinuité. Cette option a, par exemple, été retenue dans le logiciel MetaGrid, développé en partenariat avec la Société Total et qui a pour objectif d'améliorer la prise en compte des failles dans les réservoirs pétroliers 3D.

•♦ **La gestion des degrés de liberté** : L'étape suivante, a consisté à construire un "DofManager" particulier capable de doubler les degrés de liberté associés à des entités géométriques coupées par une discontinuité. On ne présuppose pas de la dimension d'espace, ni du type d'éléments finis utilisés (CG, DG ou NC), ni de l'ordre de l'élément fini. Cela permet une mise en œuvre unique et générale de NXFEM.

•♦ **Les intégrales le long des discontinuités** : Les intégrales sur les mailles, faces et arêtes coupées et le long des discontinuités sont traitées dans des "Integrator" spécifiques qui dépendent du problème physique que l'on cherche à résoudre. De même, les calculs de post-process comme les erreurs ou les estimateurs *a posteriori* ont dû être adaptés. Enfin, la construction de nouvelles formules d'intégration numériques a été inévitable, pour intégrer sur des portions de mailles, de faces, d'arêtes et le long des discontinuités.

Pour ce qui concerne les outils de pilotage Python, la tâche a été plus légère. Elle a consisté essentiellement à lancer l'outil de construction des discontinuités. Celles-ci apparaissent alors en tant que "GeometricObject" dans les différents maillages employés. Par exemple, dans le cas de la boucle "AmrLoop" décrite ci-dessus, il est nécessaire de redéfinir la fonction "refineMesh" pour y ajouter l'appel à l'exécutable "DiscontinuityConstructor".



## Première partie

# UNE MÉTHODE NXFEM ROBUSTE

*D*ans cette partie, on présente la méthode NXFEM. Nous proposons trois chapitres :  
Le premier présente la méthode originale développée par A. et P. Hansbo, nous y rappelons les principaux outils, hypothèses et résultats obtenus sur des maillages en triangles [53]. Le second chapitre propose une amélioration de cette méthode, en y détaillant l'analyse et les résultats. Le chapitre trois confronte les deux méthodes dans quelques tests numériques. Enfin, le dernier chapitre propose quelques perspectives.



# La méthode originale NXFEM

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Problème modèle</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Approximation</b>	<b>22</b>
2.2.1	Formulation variationnelle discrète	22
2.2.2	Méthode de Nitsche	24
2.2.3	Formulation NXFEM	25
<b>2.3</b>	<b>Principaux résultats</b>	<b>26</b>

Ce premier chapitre présente la méthode originale développée par A. et P. Hansbo [53], nous y rappelons les principaux outils, hypothèses et résultats obtenus sur des maillages en triangles.

## 2.1 Problème modèle

Les principales notations et hypothèses concernant le problème modèle ont été rappelées dans la Section 1.2.1.

On s'intéresse au problème (1.1), avec  $g_D = 0$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = g_N & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.1)$$

On souhaite donc continuité de la solution  $u$  le long de l'interface, mais on s'autorise un saut non-nul  $g_N$  pour le flux.

On suppose  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g_N \in H^{1/2}(\Gamma)$ .

La formulation faible de (2.1) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = (f, v)_\Omega + (g_N, v)_\Gamma, \end{cases} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.2)$$

où  $a(u, v) = (\mathfrak{K}\nabla u, \nabla v)_\Omega$  est la forme bilinéaire correspondant à l'opérateur elliptique.

On rappelle que ce problème admet une unique solution  $u = (u^{\text{in}}, u^{\text{ex}}) \in H^2(\Omega_{\text{in}}) \times H^2(\Omega_{\text{ex}})$ , et vérifie l'estimation *a priori* suivante ([23]) :

$$\|u\|_{1,\Omega} + \|u\|_{2,\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} \leq C (\|f\|_{0,\Omega} + \|g_N\|_{1/2,\Gamma}).$$

où  $C$  est une constante générique strictement positive.

## 2.2 Approximation

Les notations et hypothèses standard concernant le maillage ont été rappelées en Annexe A - Section A.1 ainsi que dans la Section 1.2.1, celles concernant la discontinuité dans la Section 1.2.2.

Nous présentons les principaux résultats et étapes de la formulation variationnelle continue. Vous trouverez néanmoins le détail de certains calculs et démonstrations dans l'Annexe B.

### 2.2.1 Formulation variationnelle discrète

La formulation variationnelle 2.2 n'est utilisable en discret que si le maillage est adapté à la discontinuité. En effet,  $u$  n'est pas dans  $H^2(\Omega)$  mais seulement dans  $H^2(\Omega_{\text{in}}) \times H^2(\Omega_{\text{ex}})$ . Donc toutes mailles coupées par la discontinuité engendreraient une perte d'ordre d'approximation dans le cas d'une méthode élément fini standard.

Soit  $u \in H^2(\Omega_{\text{in}}) \times H^2(\Omega_{\text{ex}})$  solution du problème 2.1. Pour toute fonction  $v_{\text{in}} \in V_{\text{in}} = \{H^1(\Omega_{\text{in}}) \text{ avec } v_{\text{in}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{\text{in}}\}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\text{in}}} \text{div}(-\mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla u_{\text{in}}) v_{\text{in}} dx &= \int_{\Omega_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla u_{\text{in}} \cdot \nabla v_{\text{in}} dx - \int_{\partial\Omega_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial n_{\text{in}}} v_{\text{in}} ds, \\ &= \int_{\Omega_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla u_{\text{in}} \cdot \nabla v_{\text{in}} dx - \int_{\Gamma} \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial n_{\text{in}}} v_{\text{in}} ds - \int_{\partial\Omega_{\text{in}} \cap \partial\Omega} \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial n_{\text{in}}} v_{\text{in}} ds, \\ &= \int_{\Omega_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla u_{\text{in}} \cdot \nabla v_{\text{in}} dx - \int_{\Gamma} \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial n_{\text{in}}} v_{\text{in}} ds \end{aligned}$$

ie

$$\int_{\Omega_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla u_{\text{in}} \cdot \nabla v_{\text{in}} dx - \int_{\Gamma} \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial n_{\text{in}}} v_{\text{in}} ds = \int_{\Omega_{\text{in}}} f v_{\text{in}} dx, \quad \forall v_{\text{in}} \in V_{\text{in}}. \quad (2.3)$$

De même sur  $\Omega_{\text{ex}}$  :

$$\int_{\Omega_{\text{ex}}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla u_{\text{ex}} \cdot \nabla v_{\text{ex}} dx - \int_{\Gamma} \mathfrak{K}_{\text{ex}} \frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial n_{\text{ex}}} v_{\text{ex}} ds = \int_{\Omega_{\text{ex}}} f v_{\text{ex}} dx, \quad \forall v_{\text{ex}} \in V_{\text{ex}}, \quad (2.4)$$

où  $V_{\text{ex}}$  est définie de manière symétrique à  $V_{\text{in}}$ .

En sommant les contributions (2.3) et (2.4), il vient alors sur  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla u_{\text{in}} \cdot \nabla v_{\text{in}} dx + \int_{\Omega_{\text{ex}}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla u_{\text{ex}} \cdot \nabla v_{\text{ex}} dx - \int_{\Gamma} \left( \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial n_{\text{in}}} v_{\text{in}} + \mathfrak{K}_{\text{ex}} \frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial n_{\text{ex}}} v_{\text{ex}} \right) ds = \int_{\Omega_{\text{in}}} f v_{\text{in}} dx + \int_{\Omega_{\text{ex}}} f v_{\text{ex}} dx$$

$$i.e. \quad \sum_{i=\text{in},\text{ex}} \int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx - \int_{\Gamma} \left( \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{\partial u_{\text{in}}}{\partial n_{\text{in}}} v_{\text{in}} + \mathfrak{K}_{\text{ex}} \frac{\partial u_{\text{ex}}}{\partial n_{\text{ex}}} v_{\text{ex}} \right) ds = \int_{\Omega} f v dx$$

$$d'où \quad \sum_{i=\text{in},\text{ex}} \int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx - \int_{\Gamma} \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u}{\partial n} v \right] ds = \int_{\Omega} f v dx$$

où  $v = (v_{in}, v_{ex})$ .

En combinant les définitions du saut 1.2 et de la moyenne 1.3 données en introduction :

$$[u v] = \{u\}_\kappa [v] + [u] \{v\}_{\hat{\kappa}}. \quad (2.5)$$

où  $\hat{\kappa} = (\kappa_{ex}; \kappa_{in})$ .

*Démonstration.* En effet :

$$\begin{aligned} [u v] &= u_{in}v_{in} - u_{ex}v_{ex} = (\kappa_{in} + \kappa_{ex})u_{in}v_{in} - (\kappa_{in} + \kappa_{ex})u_{ex}v_{ex} \\ &= (\kappa_{in}u_{in} + \kappa_{ex}u_{ex})(v_{in} - v_{ex}) + \kappa_{in}u_{in}v_{ex} - \kappa_{ex}u_{ex}v_{in} + \kappa_{ex}u_{in}v_{in} - \kappa_{in}u_{ex}v_{ex} \\ &= \{u\}_\kappa [v] + (u_{in} - u_{ex})(\kappa_{ex}v_{in} - \kappa_{in}v_{ex}) \\ &= \{u\}_\kappa [v] + [u] \{v\}_{\hat{\kappa}}. \end{aligned}$$

□

Il vient alors dans notre situation :

$$\left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u}{\partial n} v \right] = \left\{ \mathfrak{K} \frac{\partial u}{\partial n} \right\}_\kappa [v] + \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \{v\}_{\hat{\kappa}}.$$

Or

$$\left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u}{\partial n} \right]_\Gamma = g_N.$$

Ainsi, on obtient :

$$\left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u}{\partial n} v \right]_\Gamma = \{ \mathfrak{K} \nabla_n u \}_\kappa [v] + g_N \{v\}_{\hat{\kappa}}.$$

Finalement, la solution du problème (2.1) vérifie :

$$\int_\Omega \mathfrak{K} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Gamma \{ \mathfrak{K} \nabla_n u \}_\kappa [v] \, ds = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g_N \{v\}_{\hat{\kappa}} \, ds, \quad \forall v \in V_{in} \times V_{ex}. \quad (2.6)$$

On s'appuie sur cette relation 2.6 pour donner la formulation variationnelle discrète.

On considère un espace d'élément fini  $\mathbb{V}_h$  d'approximation non conforme de  $V = H_0^1(\Omega)$ . Il s'agit bien d'une approximation non conforme de  $V$  car les fonctions de  $\mathbb{V}_h$  pourront admettre des discontinuités le long de  $\Gamma$ .

Pour tenir compte de la condition de raccord  $[u] = 0$  le long de  $\Gamma$  dans la formulation discrète, il sera nécessaire de l'imposer de manière faible. Pour cela, nous allons utiliser la méthode de Nitsche.

### 2.2.2 Méthode de Nitsche

Le but initial de la formulation de Nitsche [68] était de pouvoir résoudre le problème de Dirichlet sans imposer la condition aux limites dans la définition de l'espace élément fini (celle-ci impliquant d'un point de vue numérique une modification de la matrice et du second membre). Elle contourne alors cet aspect en imposant les conditions de bord au sens faible. Cela consiste à rajouter des formes bilinéaires et linéaires appropriées sans imposer de conditions dans l'espace.

Illustrons cette méthode sur deux exemples simples du laplacien, avec deux types de conditions aux limites.

#### Laplacien avec condition de Dirichlet non homogène

Considérons le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g_1 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $g_1$  connue.

Le raisonnement est le suivant : Soit  $V = H^1(\Omega)$ , on prend  $v \in V$  et on intègre par parties. Il vient pour tout  $v \in V$  :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.8)$$

La condition  $u = g_1$  sur  $\partial\Omega$  n'est pas exploitée. On symétrise de manière consistante la forme (2.8) :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} u \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} g_1 \, ds. \quad (2.9)$$

Enfin, on stabilise (pour garantir la coercivité discrète uniforme) et on obtient la formulation variationnelle pour  $u \in V$  et pour tout  $v \in V$  :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} u \, ds + \gamma \int_{\partial\Omega} u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} g_1 \, ds + \gamma \int_{\partial\Omega} g_1 v \, ds, \quad (2.10)$$

où  $\gamma > 0$  est un paramètre, dit de stabilisation.

#### Laplacien avec conditions de Dirichlet et Neumann

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g_1 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.11)$$

avec  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  et  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ;  $g_1, g_2$  connues.

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds &= \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v ds + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v ds \\ &= \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v ds + \int_{\Gamma_N} g_2 v ds. \end{aligned}$$

Il vient de manière similaire au paragraphe précédent :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial v}{\partial n} u ds + \gamma \int_{\Gamma_D} uv ds = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial v}{\partial n} g_1 ds + \gamma \int_{\Gamma_D} g_1 v ds + \int_{\Gamma_N} g_2 v ds.$$

**Remarque 2.1.** *Les conditions de Neumann sont donc traitées de la même manière que dans le cas classique (ie au second membre).*

De manière générale, on notera que cette formulation permet de faire apparaître (au sens faible) les conditions de bord initialement non exploitées. Les termes que l'on ajoute sont symétriques, conservent une formulation consistante et permettent d'obtenir les bonnes propriétés de coercivité de la forme bilinéaire.

### 2.2.3 Formulation NXFEM

La méthode décrite par Hansbo-Hansbo a été établie sur des maillages triangulaires. Ainsi, pour cette partie, on considère que  $\mathcal{H}$  est une famille régulière de maillages, constitués de triangles.

Les auteurs ont cherché une solution discrète  $u_h = (u_h^{\text{in}}, u_h^{\text{ex}})$  dans l'espace  $\mathbb{V}_h = \mathbb{V}_h^{\text{in}} \times \mathbb{V}_h^{\text{ex}}$  où :

$$\mathbb{V}_h^i := \left\{ \phi_i \in H^1(\Omega_i) : \phi_i|_{K_i} \text{ est linéaire}, \phi_i|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad i = \{\text{in}, \text{ex}\}. \quad (2.12)$$

**Remarque 2.2.** *Les fonctions dans  $\mathbb{V}_h$  peuvent être discontinues le long de  $\Gamma$ .*

La méthode de Nitsche va nous permettre d'imposer le long de  $\Gamma$  la condition de raccord au sens faible de la manière suivante : on **symétrise**, puis on **stabilise** de manière consistante la forme bilinéaire  $a$  et la forme linéaire  $l$  :

$$a(u_h; v_h) = \sum_{i=\text{in}, \text{ex}} \int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \int_{\Gamma} \{ \mathfrak{K} \nabla_n u_h \}_{\kappa} [v_h] ds - \int_{\Gamma} [u_h] \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \}_{\kappa} ds + \gamma \int_{\Gamma} [u_h] [v_h] ds,$$

et

$$l(v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx + \int_{\Gamma} g_N \{ v_h \}_{\hat{\kappa}} ds - \int_{\Gamma} [u_h] \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \}_{\kappa} ds + \gamma \int_{\Gamma} [u_h] [v_h] ds.$$

Or la solution exacte vérifie  $[u] = 0$  le long de  $\Gamma$ , les termes rajoutés sont donc consistants.

La méthode NXFEM est définie par la formulation variationnelle discrète suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tel que :} \\ a_h(u_h, v_h) = L(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \quad (2.13)$$

où :

$$a_h(u_h, v_h) = (\mathfrak{K}_i \nabla u_h^i, \nabla v_h^i)_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} - ([u_h], \{\mathfrak{K} \nabla_n v_h\}_\Gamma) - (\{\mathfrak{K} \nabla_n u_h\}_\kappa, [v_h])_\Gamma + (\gamma [u_h], [v_h])_\Gamma \quad (2.14)$$

avec  $i = \{in, ex\}$ ,  $\gamma$  suffisamment grand (voir Lemme 2.1), et

$$L(v_h) = (f, v_h)_\Omega + (\kappa_{\text{ex}} g_N, v_h^{\text{in}})_\Gamma + (\kappa_{\text{in}} g_N, v_h^{\text{ex}})_\Gamma. \quad (2.15)$$

Ainsi, pour cette méthode, les conditions de raccord et de saut le long de  $\Gamma$  sont satisfaites au sens faible au moyen d'une variante de la méthode de Nitsche.

De plus,  $\Gamma$  coupant le maillage de manière arbitraire (tout en respectant les hypothèses A1, A2 et A3 fixées dans la Section 1.2.2), les paramètres  $\kappa_{\text{in/ex}}$  doivent être choisis pour tenir compte de la manière dont les éléments sont coupés.

Ainsi, pour compléter la méthode, Hansbo-Hansbo ont introduit  $\kappa = (\kappa_{\text{in}}, \kappa_{\text{ex}})$ , défini sur chaque élément par :

$$\kappa_{i|K} = \frac{|K_i|}{|K|}, \quad i = \{in, ex\} \quad (2.16)$$

où  $|K| := \text{mesure}(K)$ .

Par définition, on a  $0 \leq \kappa_i \leq 1$  et  $\kappa_{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}} = 1$ , ce qui permet de donner une première version à l'expression de la moyenne 1.3 :

$$\{\varphi\}_\kappa = (\kappa_{\text{in}} \varphi_{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}} \varphi_{\text{ex}})_\Gamma \quad (2.17)$$

## 2.3 Principaux résultats

Nous rappelons ici les principales propriétés et résultats de la méthode des Hansbo. Les (\*\*) indiquent que vous pourrez trouver la démonstration en Annexe B. Pour le reste, vous pourrez vous reporter à l'article [53].

### Lemme 2.1. (\*\*) Coercivité de $a_h$

La forme discrète  $a_h(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $\mathbb{V}_h$  :

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \|v_h\|^2, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (2.18)$$

sous réserve que  $\gamma$  soit pris suffisamment grand. On a également continuité :

$$a_h(u, v) \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.19)$$



avec

$$\begin{aligned} \|v\|_{1/2,h,\Gamma}^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K^{-1} \|v\|_{0,\Gamma_K}^2, & \|v\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|v\|_{0,\Gamma_K}^2, \\ \|v\|^2 &:= \|\nabla v\|_{0,\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 + \|\{\nabla_n v\}_\kappa\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 + \|[v]\|_{1/2,h,\Gamma}^2. \end{aligned}$$

**Lemme 2.2. (\*\*) Consistance**

Le problème discret (2.13) est consistant, dans le sens où :

$$\begin{cases} \text{Pour } u \text{ solution de (2.1), } u \in H^2(\Omega_{\text{in}}) \times H^2(\Omega_{\text{ex}}) : \\ a_h(u, v_h) = L(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h.$$

Avec pour conséquence directe de ce lemme :

**Lemme 2.3. Orthogonalité de Garlerkin**

Pour  $u$  solution de solution de (2.1) et  $u_h \in \mathbb{V}_h$ ,  $u \in H^2(\Omega_{\text{in}}) \times H^2(\Omega_{\text{ex}})$  :

$$a_h(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h.$$

**Estimation d'erreur a priori**

**Théorème 2.4. Estimation d'erreur a priori**

D'après les hypothèses A1 – A3 donnée dans la Section 1.2.2, et pour  $u_h$  solution du problème (2.13), on obtient les estimations d'erreur a priori suivantes :

$$\| \|u - u_h\| \| \leq C d_h \|u\|_{2,\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} \quad (2.20)$$

et

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq C d_h^2 \|u\|_{2,\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} \quad (2.21)$$

**Estimation d'erreur a posteriori**

Cette estimation d'erreur a posteriori est obtenue en suivant les travaux de Becker et Rannacher [11].

Pour cela, considérons le problème du contrôle des fonctionnelles linéaires  $j(e)$  de l'erreur, et définissons les estimateurs locaux et globaux comme suit :

$$\begin{aligned} E_K(u_h) &= \left( d_K^2 \|f + \nabla \cdot (\mathfrak{K} \nabla u_h)\|_{0,K_{\text{in}} \cup K_{\text{ex}}}^2 + d_K \left\| [\mathfrak{K}_i \nabla u_h^i] \right\|_{0,\partial K}^2 \right. \\ &\quad \left. + d_K \|g_N - [\mathfrak{K} \nabla_n u_h]\|_{0,\Gamma_K}^2 + \frac{1}{d_K} \|[u_h]\|_{0,\Gamma_K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

et

$$E(u_h) = \left( \sum_{K \in \mathcal{K}_h} d_K^2 E_K(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

On obtient alors l'estimation d'erreur *a posteriori* suivante :

**Théorème 2.5. Estimation d'erreur a posteriori**

Pour une fonctionnelle linéaire  $j(\cdot)$  continue dans  $L^2(\Omega)$ , soit  $J \in L^2(\Omega)$  définie par le théorème de représentation de Riesz, c'est-à-dire  $j(\cdot) := (J, \cdot)_\Omega$ .

Alors il existe une constante positive  $C$  telle que :

$$j(e) \leq CE(u_h) \|J\|_{0,\Omega}. \quad (2.24)$$

On renvoie à l'article original [53] pour plus de détails.

# Une variante robuste

## Sommaire

3.1	Changements . . . . .	29
3.2	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	33

Ces travaux ont donné lieu à un article intitulé *A robust variant of NXFEM for the interface problem* soumis et accepté dans la revue *Comptes Rendus Mathématique - Académie des Sciences - Paris* (cf. [7]) dans lequel nous exposons une amélioration de la méthode ; ainsi qu'à un proceeding de ECCOMAS'12 *An adaptive NXFEM for the interface problem on locally refined triangular and quadrilateral meshes* (Proceedings of ECCOMAS'12 - cf. [6]) dans lequel nous proposons un estimateur d'erreur par résidu. Enfin, ces travaux ont été présentés dans la conférence avec comité de lectures ECCOMAS'12 (Viennes, Autriche, 2012).

### 3.1 Changements

On s'intéresse au problème (1.1) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = g_D & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = g_N & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Remarque 3.1.** *Le problème modèle de la méthode originale correspondait à ce problème (3.1) avec  $g_D = 0$ .*

La formulation variationnelle continue du problème (3.1) est à peu de chose près la même que pour l'étude précédente (voir 2.6).

On s'intéresse à la formulation discrète. Pour cela, plaçons nous dans le cas où  $\mathcal{H}$  est une famille de maillages réguliers  $\mathcal{K}_h$ , constituée de triangles. Considérons les mêmes notations et ensembles que précédemment, auxquels nous ajoutons :

$$\mathcal{K}_h^{\text{in}} := \{K \cap \Omega_{\text{in}} : K \in \mathcal{K}_h \text{ telle que } K \cap \Omega_{\text{in}} \neq \emptyset\}$$

l'ensemble des parties de cellules dans  $\Omega_{\text{in}}$ , et

$$\mathcal{K}_h^{\text{ex}} := \{K \cap \Omega_{\text{ex}} : K \in \mathcal{K}_h \text{ telle que } K \cap \Omega_{\text{ex}} \neq \emptyset\}$$

l'ensemble des parties de cellules dans  $\Omega_{\text{ex}}$ .

Nous travaillerons dans l'espace élément fini suivant :

$$\mathbb{V}_h := \{v_h \in L^2(\Omega), v_h|_{\Omega_{\text{in}}} \in C(\Omega_{\text{in}}), v_h|_{\Omega_{\text{ex}}} \in C(\Omega_{\text{ex}}), v_h|_M \in \mathbb{P}^1(M) \forall M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}\}. \quad (3.2)$$

Les fonctions de cet espace sont discontinues le long de l'interface  $\Gamma$ . Celle-ci est divisée en un ensemble de segments :

$$\mathcal{S}_h^\Gamma := \{\Gamma_h : K \in \mathcal{K}_h \text{ tel que } K \cap \Gamma \neq \emptyset\}.$$

Soit  $v_h \in \mathbb{V}_h$ . Pour chaque segment  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$  donné, nous fixons la normale unitaire  $n_S$  (que nous noterons simplement  $n$ ) et nous définissons pour  $x \in S$  :

$$v_h|_\Gamma^{\text{in}}(x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} v_h(x - \varepsilon n), \quad v_h|_\Gamma^{\text{ex}}(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} v_h(x + \varepsilon n).$$

De plus, les définitions du saut et de la moyenne restent inchangées de celles données en 1.2 et 1.3 :

$$[u](x) := u|_\Gamma^{\text{in}}(x) - u|_\Gamma^{\text{ex}}(x), \quad \{u\}_\kappa(x) := \kappa_{\text{in}} u|_\Gamma^{\text{in}}(x) + \kappa_{\text{ex}} u|_\Gamma^{\text{ex}}(x),$$

avec le poids  $\kappa_{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}} = 1$ . Tout comme pour la méthode originale, on remarque qu'avec  $\hat{\kappa} = (\kappa_{\text{ex}}; \kappa_{\text{in}})$  :

$$[uv] = [u] \{v\}_\kappa + \{u\}_{\hat{\kappa}} [v]. \quad (3.3)$$

Enfin, pour  $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$ , nous définissons la forme bilinéaire comme suit :

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S ([u_h] \partial_{n, \mathfrak{K}}^* v_h + \{\partial_{n, \mathfrak{K}} u_h\}_\kappa [v_h]) \, ds, \quad (3.4)$$

ainsi que la forme linéaire :

$$l(v_h) := \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} g_N \{v_h\}_{\hat{\kappa}} \, ds - \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} g_D \partial_{n, \mathfrak{K}}^* v_h \, ds, \quad (3.5)$$

dans laquelle nous utilisons pour  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ , les dérivées discrètes suivantes :

$$\partial_{n, \mathfrak{K}}^* v_h := \{\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h\}_\kappa - \gamma_S [v_h] \quad (\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h := \mathfrak{K} \nabla v_h \cdot n := \mathfrak{K} \nabla_n v_h), \quad (3.6)$$

qui dépendent de deux paramètres  $\kappa$  et  $\gamma_S$  (que nous noterons simplement  $\gamma$  dans la suite).

Quelque soit le choix de ces paramètres, la méthode demeure consistante :

**Lemme 3.1.** *Soit  $u$  une solution régulière du problème (3.1). Alors, pour tout  $v_h \in \mathbb{V}_h$ , on a :*

$$a_h(u, v_h) = l(v_h).$$

*Démonstration.* Utilisons les notations que nous venons d'introduire, et reprenons les arguments employés pour la démonstration de Lemme 2.2 de consistance (démonstration en Annexe B.2). Par intégration par partie, il vient naturellement :

$$\sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{K} \nabla u \cdot \nabla v_h \, dx = - \int_\Omega \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u) v_h \, dx + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S [\partial_{n, \mathfrak{K}} u v_h] \, ds,$$

En utilisant la définition (3.3), ainsi que la condition d'interface  $[\mathfrak{K} \nabla u] = g_N$ , nous obtenons :

$$[\partial_{n, \mathfrak{K}} u v_h] = \{\partial_{n, \mathfrak{K}} u\}_\kappa [v_h] + [\partial_{n, \mathfrak{K}} u] \{v_h\}_{\hat{\kappa}} = \{\partial_{n, \mathfrak{K}} u\}_\kappa [v_h] + g_N \{v_h\}_{\hat{\kappa}}.$$

De plus,  $[u] = g_D$  le long de  $\Gamma$ , il vient alors :

$$a_h(u, v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx + \int_{\mathcal{S}_h^{\Gamma}} g_N \{v_h\}_{\kappa} ds - \int_{\mathcal{S}_h^{\Gamma}} g_D (\{\partial_{n, \kappa} u_h\}_{\kappa} - \gamma [v_h]) ds = l(v_h).$$

□

Le choix des paramètres  $\kappa$  et  $\gamma$  n'en reste pas moins essentiel, et est naturellement guidé par l'analyse de la stabilité.

Pour cela, nous introduisons  $\|v_h\|_{h, \Gamma}^2 = \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \gamma \| [v_h] \|_S^2$ , ainsi que la norme discrète  $\|v_h\|^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \|\mathfrak{K} \nabla v_h\|_K^2 + \|v_h\|_{h, \Gamma}^2$ .

Tout d'abord, notons que :

$$a_h(u_h, u_h) = \|u_h\|^2 - 2 \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \int_S [u_h] \{\partial_{n, \kappa} u_h\}_{\kappa} ds.$$

En utilisant l'inégalité de Young, le dernier terme est borné :

$$\int_S [u_h] \{\partial_{n, \kappa} u_h\}_{\kappa} ds \leq \|u_h\|_{h, \Gamma} \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \frac{1}{\gamma} \|\{\partial_{n, \kappa} u_h\}_{\kappa}\|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{4} \|u_h\|_{h, \Gamma}^2 + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \frac{1}{\gamma} \|\{\partial_{n, \kappa} u_h\}_{\kappa}\|^2.$$

Ainsi, la coercivité de  $a_h$  dépend de la validité de l'estimation du type :

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \frac{1}{\gamma} \|\{\partial_{n, \kappa} u_h\}_{\kappa}\|^2 \leq \frac{1}{4} \|\mathfrak{K} \nabla u_h\|^2. \quad (3.7)$$

Soit  $S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}$  dans un élément coupé  $K = K_{\text{in}} \cup K_{\text{ex}}$ . On rappelle que le choix des paramètres pour la méthode d'A. & P. Hansbo est le suivant :

$$\kappa_{\text{in}} = \frac{|K_{\text{in}}|}{|K|}, \quad \kappa_{\text{ex}} = \frac{|K_{\text{ex}}|}{|K|}, \quad \gamma := \frac{C \max\{\mathfrak{K}_{\text{in}}, \mathfrak{K}_{\text{ex}}\}}{d_K}, \quad (3.8)$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de la géométrie et du maillage.

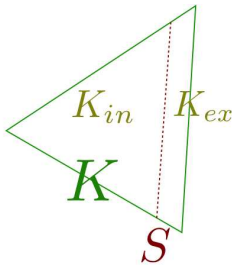


FIGURE 3.1 – Triangle coupé

Ce choix garantit la stabilité de la méthode et les bonnes convergences d'erreur, indépendamment de la position de l'interface et de la géométrie de l'élément coupé. En effet, (démonstration complète en Annexe B.1), comme  $\nabla u_h$  est constant sur chaque maille coupée, nous avons :

$$\int_S |\partial_n u_h|_{K_{\text{in}}}^2 ds \leq \frac{|S|}{|K_{\text{in}}|} \int_{K_{\text{in}}} |\nabla u_h|^2 dx, \quad \int_S |\partial_n u_h|_{K_{\text{ex}}}^2 ds \leq \frac{|S|}{|K_{\text{ex}}|} \int_{K_{\text{ex}}} |\nabla u_h|^2 dx. \quad (3.9)$$

(voir Lemme B.2 en Annexe B.1).

Et on sait également que pour un maillage non-dégénéré :

$$|S| \leq d_K, \quad |K_i| \leq d_K^2, \quad |K| \geq C d_K^2. \quad (3.10)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S \{ \partial_{n, \mathfrak{K}} u_h \}^2 ds &\leq (\kappa_{\text{in}})^2 \int_S \mathfrak{K}_{\text{in}}^2 |\partial_n u_h|_{K_{\text{in}}}^2 ds + (\kappa_{\text{ex}})^2 \int_S \mathfrak{K}_{\text{ex}}^2 |\partial_n u_h|_{K_{\text{ex}}}^2 ds \\ &\leq (\kappa_{\text{in}})^2 \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} |S|}{|K_{\text{in}}|} \int_{K_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} |\nabla u_h|^2 dx + (\kappa_{\text{ex}})^2 \frac{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{|K_{\text{ex}}|} \int_{K_{\text{ex}}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |\nabla u_h|^2 dx \\ &\leq \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} |S| |K_{\text{in}}|}{|K|^2} \int_{K_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} |\nabla u_h|^2 dx + \frac{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |S| |K_{\text{ex}}|}{|K|^2} \int_{K_{\text{ex}}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |\nabla u_h|^2 dx \\ &\leq \gamma \int_K \mathfrak{K} |\nabla u_h|^2 dx. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la méthode est robuste par rapport à la géométrie du maillage. Les estimations d'erreur d'ordre optimal sont démontrées dans [53]. Elles sont basées sur un opérateur d'interpolation particulier, qui provient de la généralisation de l'opérateur standard d'interpolation sur les triangles coupés et d'un opérateur de prolongement.

Soit  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$  dans un élément coupé  $K = K_{\text{in}} \cup K_{\text{ex}}$ . Choisissons à présent pour paramètres :

$$\kappa_{\text{in}} = \frac{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|}{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}| + \mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|}, \quad \kappa_{\text{ex}} = \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|}{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}| + \mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|}, \quad \gamma := C \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}| + \mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|}, \quad (3.11)$$

où  $C > 0$  est une constante dépendante du degré polynomial mais ni des coefficients de diffusion, ni de la géométrie du maillage.

L'expression des poids coïncide avec celle où l'interface suit avec les lignes du maillage. Elle est basée sur la méthode de Galerkin discontinue avec une pondération harmonique (voir [44]).

Notons que  $\kappa_{\text{in/ex}} \leq 1$ , et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S \{ \partial_{n, \mathfrak{K}} u_h \}^2 ds &\leq (\kappa_{\text{in}})^2 \int_S \mathfrak{K}_{\text{in}}^2 |\partial_n u_h|_{K_{\text{in}}}^2 ds + (\kappa_{\text{ex}})^2 \int_S \mathfrak{K}_{\text{ex}}^2 |\partial_n u_h|_{K_{\text{ex}}}^2 ds \\ &\leq (\kappa_{\text{in}})^2 \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} |S|}{|K_{\text{in}}|} \int_{K_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} |\nabla u_h|^2 dx + (\kappa_{\text{ex}})^2 \frac{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{|K_{\text{ex}}|} \int_{K_{\text{ex}}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |\nabla u_h|^2 dx \\ &\leq \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}| + \mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|} \int_{K_{\text{in}}} \mathfrak{K}_{\text{in}} |\nabla u_h|^2 dx + \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}| + \mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|} \int_{K_{\text{ex}}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |\nabla u_h|^2 dx \\ &\leq \gamma \int_K \mathfrak{K} |\nabla u_h|^2 dx. \end{aligned}$$

Cette estimation conduit à une stabilité uniforme par rapport aux paramètres de diffusion mais également par rapport à la géométrie des cellules coupées. En suivant l'analyse décrite dans [53], nous pouvons également obtenir des estimations d'erreur d'ordre optimal pour cette NXFEM modifiée.

### 3.2 Analyse d'erreur *a posteriori*

Supposons pour cette étude que  $g_D = g_N = 0$ .

Considérons la norme énergie suivante :

$$\| \|u - u_h\| \|_h^2 := \|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla(u - u_h)\|^2 + \|u - u_h\|_{h,\Gamma}^2, \quad \|u - u_h\|_{h,\Gamma}^2 := \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \gamma \| [u - u_h] \|^2. \quad (3.12)$$

Nous l'appellerons **ENorm** dans les essais numériques.

Nous souhaitons contrôler l'erreur et mettre en place un estimateur d'erreur *a posteriori*  $\eta_h$  de sorte que :

**Théorème 3.2.** *Il existe une constante  $C$  indépendante du maillage et des coefficients  $\mathfrak{K}_{\text{in/ex}}$ , telle que*

$$\| \|u - u_h\| \| \leq C \eta_h. \quad (3.13)$$

Dans la construction d'un tel estimateur  $\eta_h$ , la principale difficulté - induite par le NXFEM et l'emploi d'une méthode éléments finis continus - est le traitement de la non-conformité provenant du dédoublement des inconnues sur les cellules coupées.

Nous introduisons tout d'abord l'ensemble des arêtes coupées :

$$\mathcal{S}_h^{\text{in/ex}} := \{S \cap \Omega_{\text{in/ex}} : S \in \mathcal{S}_h\}. \quad (3.14)$$

Dans la suite, on notera  $\omega_K$  le patch de  $K$ , constitué des mailles ayant au moins un sommet commun avec  $K$  et on pose

$$\mathcal{K}_h^\Gamma := \{K \in \mathcal{K}_h : \omega_K \cap \Gamma \neq \emptyset\}, \quad (3.15)$$

l'ensemble composé des cellules  $K$  de  $\mathcal{K}_h$  dont le patch est coupé par  $\Gamma$ .

Pour  $K \in \mathcal{K}_h^\Gamma \cup \mathcal{K}_h \setminus \mathcal{K}_h^\Gamma$ ,  $S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}} \cup \mathcal{S}_h^\Gamma$ , et  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ , posons :

$$\eta_K^2 := e_K^2 \|f + \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u_h)\|_K^2, \quad \eta_S^2 := e_S \left\| \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right\|_S^2, \quad \zeta_S^2 := z_S \| [u_h] \|_S^2, \quad (3.16)$$

avec

$$e_K := \begin{cases} \frac{d_K}{\min\{\mathfrak{K}_{\text{in}}, \mathfrak{K}_{\text{ex}}\}^{1/2}} & \text{si } K \in \mathcal{K}_h^\Gamma, \\ \frac{d_K}{\mathfrak{K}^{1/2}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad e_S := \begin{cases} \frac{d_K}{\mathfrak{K}} & \text{si } S \cap \Gamma = \emptyset, \\ \frac{|S|}{|\hat{S}| \min\{\mathfrak{K}_{\text{in}}, \mathfrak{K}_{\text{ex}}\}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad z_S := \gamma \frac{|K|}{|S|^2}.$$

Nous définissons l'estimateur d'erreur comme suit :

$$\eta_h^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^\Gamma \cup \mathcal{K}_h \setminus \mathcal{K}_h^\Gamma} \eta_K^2 + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}} \cup \mathcal{S}_h^\Gamma} \eta_S^2 + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \zeta_S^2. \quad (3.17)$$

Il s'agit d'un estimateur d'erreur construit par résidu<sup>1</sup>. L'estimateur (3.17) vérifie le théorème 3.2.

Nous utilisons pour cela l'opérateur d'interpolation de Scott-Zhang  $I_h : V \rightarrow \mathbb{V}_h \cap V$  défini dans [76].

**Remarque 3.2.** *À partir d'un certain maillage  $h$ , on admettra que chaque sommet  $N_i \in \mathcal{N}_h$  appartient au moins à une arête non coupée.*

On note  $\omega_S$  le patch associé à  $K$  ( $S \subset K$ ). Celui-ci est constitué de cellules de  $\mathcal{K}_h$  ayant au moins un sommet  $N$  en commun avec  $K$  ( $N \in \mathcal{N}_h$ ,  $S \subset K$ ).

Nous avons également besoin des résultats techniques suivants :

**Lemme 3.3.** *Soient  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$  et  $K \in \mathcal{K}_h$  tels que  $S \subset K$ , il existe une constante  $C_1$  indépendante du maillage telle que :*

$$\|v - I_h v\|_S^2 \leq C_1 \frac{|S|}{|\hat{S}| \min\{\mathfrak{R}_{\text{in}}, \mathfrak{R}_{\text{ex}}\}} \|\mathfrak{R} \nabla v\|_{\omega_S}^2. \quad (3.18)$$

*Démonstration.* Démonstration de Lemme 3.3.

En utilisant le Lemme 3 de l'article de A. et P. Hansbo [53], on a :

$$\|v - I_h v\|_S^2 = \frac{|S|}{|\hat{S}|} \|\hat{v} - \hat{I}_h \hat{v}\|_{\hat{S}}^2 \leq C \frac{|S|}{|\hat{S}|} \|\hat{v} - \hat{I}_h \hat{v}\|_{0, \hat{K}}^2 \|\hat{v} - \hat{I}_h \hat{v}\|_{1, \hat{K}}^2.$$

Nous pouvons alors appliquer le Lemme 4.3 de Scott-Zhang [76] avec

–  $p = 2$ ,  $m = 0$  et  $l = 1$ , on obtient

$$\|v - I_h v\|_{0, K} \leq C_1 d_K \|\nabla v\|_{0, \omega_S},$$

–  $p = 2$ ,  $m = 1$  et  $l = 1$ , on obtient

$$\|v - I_h v\|_{1, K} \leq C_2 \|\nabla v\|_{0, \omega_S}.$$

Il vient alors

$$\|v - I_h v\|_{0, S}^2 \leq C \frac{|S|}{|\hat{S}|} \|\nabla v\|_{0, \omega_S}^2 \leq C \frac{|S|}{|\hat{S}|} \frac{1}{\min\{\mathfrak{R}_{\text{in}}, \mathfrak{R}_{\text{ex}}\}} \|\mathfrak{R} \nabla v\|_{0, \omega_S}^2.$$

□

**Remarque 3.3.** *Notons que pour cette démonstration, nous utilisons l'interpolé classique de Scott-Zhang, sur une arête non coupée. Il permet d'obtenir une inégalité dont la constante n'est pas optimale (perte d'information sur les éléments coupés et leurs géométries). Nous pourrions éventuellement améliorer cette dernière en considérant les arêtes coupées pour définir les valeurs aux noeuds appartenant à des mailles coupées.*

---

1. un exemple classique d'estimateur d'erreur par résidu est proposé en Annexe du manuscrit



**Remarque 3.4.** La quantité  $\frac{|S|}{|\hat{S}|}$  apparaissant dans  $d_S$  peut être majorée par  $C d_K$  où  $C$  est une constante indépendante du maillage, si ce dernier est régulier.

**Lemme 3.4.** Avec une constante  $C_2$  indépendante du maillage et des coefficients, on a pour tout  $v_h \in \mathbb{V}_h$

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \gamma^{-1} \left\| \left\{ \mathfrak{K} \frac{\partial v_h}{\partial n} \right\}_\kappa \right\|_S^2 \leq C_2 \|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h\|_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2. \quad (3.19)$$

*Démonstration.* Démonstration du Lemme 3.4.

Pour chaque  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ , au moyen de l'inégalité inverse et des définitions de  $\kappa$  et  $\gamma$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \left\{ \mathfrak{K} \frac{\partial v_h}{\partial n} \right\}_\kappa \right\|_S^2 &\leq (\kappa_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{in}})^2 \frac{|S|}{|K_{\text{in}}|} \|\nabla v_h\|_{K_{\text{in}}}^2 + (\kappa_{\text{ex}} \mathfrak{K}_{\text{ex}})^2 \frac{|S|}{|K_{\text{ex}}|} \|\nabla v_h\|_{K_{\text{ex}}}^2 \\ &= \kappa_{\text{in}}^2 \mathfrak{K}_{\text{in}} \frac{|S|}{|K_{\text{in}}|} \|(\mathfrak{K}_{\text{in}})^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{in}}}^2 + \kappa_{\text{ex}}^2 \mathfrak{K}_{\text{ex}} \frac{|S|}{|K_{\text{ex}}|} \|(\mathfrak{K}_{\text{ex}})^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{ex}}}^2 \\ &= \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{(\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}| + \mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|)^2} \left( \mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}| \|(\mathfrak{K}_{\text{in}})^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{in}}}^2 + \mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}| \|(\mathfrak{K}_{\text{ex}})^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{ex}}}^2 \right) \\ &\leq \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}| + \mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|} \left( \|\mathfrak{K}_{\text{in}}^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{in}}}^2 + \|\mathfrak{K}_{\text{ex}}^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{ex}}}^2 \right) \\ &= \gamma \left( \|\mathfrak{K}_{\text{in}}^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{in}}}^2 + \|\mathfrak{K}_{\text{ex}}^{1/2} \nabla v_h\|_{K_{\text{ex}}}^2 \right). \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.5.** Pour tout  $u_h \in \mathbb{V}_h$ , il existe  $v \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\sum_{i=1}^2 \|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla (u_h - v)\|_{0, \Omega_i}^2 \leq C_3 \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} e_S \| [u_h] \|_S^2, \quad (3.20)$$

où  $C_3$  est une constante indépendante du maillage et des coefficients.

*Démonstration.* Démonstration du Lemme 3.5.

Pour tout  $u_h \in \mathbb{V}_h$ ,  $u_h = u_{\text{in},h} \chi_{\text{in}} + u_{\text{ex},h} \chi_{\text{ex}}$ . On pose pour la suite  $I = \{\text{in}, \text{ex}\}$ .

On définit  $v$  comme suit :

- $v = v_{\text{in}} \chi_{\text{in}} + v_{\text{ex}} \chi_{\text{ex}}$ ,  $\chi_i$  étant l'indicatrice sur  $\Omega_i$ ,
- avec  $v_i \in H^1(\Omega_i)$ ,  $v_i = 0$  sur  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$  pour  $i \in I$ ,
- $v_i|_S = \tilde{\kappa}_{\text{ex}} u_{\text{in},h} + \tilde{\kappa}_{\text{in}} u_{\text{ex},h}$ ,  $\forall S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ , avec

$$\tilde{\kappa}_{\text{ex}} := \frac{(\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|)^{1/2}}{(\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|)^{1/2} + (\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|)^{1/2}} \quad \tilde{\kappa}_{\text{in}} := \frac{(\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|)^{1/2}}{(\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|)^{1/2} + (\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|)^{1/2}}$$

On a pour tout  $\varphi \in H_0^1(\Omega_i)$  :

$$\int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla v_i \nabla \varphi_i dx = \int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla u_{i,h} \nabla \varphi_i dx,$$

ie

$$\int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla (v_i - u_{i,h}) \nabla \varphi_i dx = 0.$$

Sachant que  $[v] := v_{in} - v_{ex}$ , on remarque que

$$(v_i - u_{i,h})|_S = \tilde{\kappa}_{ex} u_{in,h} + \tilde{\kappa}_{in} u_{ex,h} - u_{i,h} = \begin{cases} -\tilde{\kappa}_{in} [u_h] & \text{pour } i = in, \\ \tilde{\kappa}_{ex} [u_h] & \text{pour } i = ex. \end{cases}$$

Pour tout  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ , on pose

$$\mathbb{W}_h^{ex} := \{w_{ex} \in H^1(\Omega_{ex}), w_{ex} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{ex} \text{ et } w_{ex}|_S = \tilde{\kappa}_{ex} [u_h]\},$$

et

$$\mathbb{W}_h^{in} := \{w_{in} \in H^1(\Omega_{in}), w_{in} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{in} \text{ et } w_{in}|_S = -\tilde{\kappa}_{in} [u_h]\}.$$

On a pour tout  $w_i \in \mathbb{W}_h^i$  :

$$\int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla (v_i - u_{i,h} - w_i) \nabla \varphi_i dx = - \int_{\Omega_i} \mathfrak{K}_i \nabla w_i \nabla \varphi_i dx. \quad (3.21)$$

Posons  $\varphi_i = v_i - u_{i,h} - w_i \in H_0^1(\Omega_i)$ . En utilisant Cauchy-Schwarz, (3.21) s'écrit alors

$$\|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla (v_i - u_{i,h} - w_i)\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla w_i\|_{0,\Omega_i} \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla (v_i - u_{i,h} - w_i)\|_{0,\Omega_i}.$$

En ajoutant  $\|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla w_i\|_{0,\Omega_i}$  à chaque membre et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla (v_i - u_{i,h})\|_{0,\Omega_i} \leq \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla (v_i - u_{i,h} - w_i)\|_{0,\Omega_i} + \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla w_i\|_{0,\Omega_i} \leq 2 \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla w_i\|_{0,\Omega_i},$$

ie

$$\|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla (v_i - u_{i,h})\|_{0,\Omega_i} \leq 2 \inf_{w_i \in \mathbb{W}_h^i} \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla w_i\|_{0,\Omega_i}^2.$$

Alors en utilisant la définition de  $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$  donnée dans [25], il vient

$$\|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla (v_i - u_{i,h})\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \mathfrak{K}_i \|v_i - u_{i,h}\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 \leq \mathfrak{K}_i \|\tilde{\kappa}_i [u_h]\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2. \quad (3.22)$$

Enfin, pour obtenir une majoration d'erreur sur  $\|\cdot\|_{0,S}$ , on peut par exemple utiliser le résultat donné dans [17]

$$\|\tilde{\kappa}_i [u_h]\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 \leq \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \frac{C}{|S|} \|\tilde{\kappa}_i [u_h]\|_{0,S}^2,$$

où  $C$  indépendante de  $\Gamma$  et  $\Omega$ ,  $i = \{in, ex\}$ .

Finalement, (3.22) peut alors s'écrire

$$\|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla(v_i - u_{i,h})\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \mathfrak{K}_i \frac{C}{|S|} \|\tilde{\kappa}_i[u_h]\|_{0,S}^2 \leq \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \mathfrak{K}_i \tilde{\kappa}_i^2 \frac{C}{|S|} \| [u_h] \|_{0,S}^2.$$

Autrement dit :

$$\|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla(v - u_h)\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{i \in I} \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla(v_i - u_{i,h})\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \frac{C}{|S|} (\mathfrak{K}_{\text{ex}} \tilde{\kappa}_{\text{ex}}^2 + \mathfrak{K}_{\text{in}} \tilde{\kappa}_{\text{in}}^2) \| [u_h] \|_{0,S}^2. \quad (3.23)$$

Or

$$(\mathfrak{K}_{\text{ex}} \tilde{\kappa}_{\text{ex}}^2 + \mathfrak{K}_{\text{in}} \tilde{\kappa}_{\text{in}}^2) = \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |K|}{\left( (\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|)^{1/2} + (\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|)^{1/2} \right)^2} = \frac{|K|}{|S|} \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{\left( (\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|)^{1/2} + (\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|)^{1/2} \right)^2}.$$

Et on remarque que

$$\frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{\left( (\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}|)^{1/2} + (\mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|)^{1/2} \right)^2} \leq \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} |S|}{\mathfrak{K}_{\text{in}} |K_{\text{ex}}| + \mathfrak{K}_{\text{ex}} |K_{\text{in}}|} = \gamma.$$

Ainsi, on obtient finalement que :

$$\|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla(v - u_h)\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{i \in I} \|\mathfrak{K}_i^{1/2} \nabla(v_i - u_{i,h})\|_{0,\Omega_i}^2 \leq \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} C \frac{|K|}{|S|^2} \gamma \| [u_h] \|_{0,S}^2. \quad (3.24)$$

**Remarque 3.5.** La définition de  $v$ , donnée en début de démonstration, est importante et en particulier le choix de la moyenne impacte beaucoup l'expression de  $e_S$ .

En effet, si l'on considère une moyenne classique (pondérée par 1/2), il vient en suivant le raisonnement précédent que  $e_S = \frac{\mathfrak{K}_{\text{in}} + \mathfrak{K}_{\text{ex}}}{2}$  :  $e_S$  ne tient alors pas compte de la géométrie et est "sur-évalué".

□

Afin de traiter la non-conformité de la méthode, nous introduisons  $P(u_h) \in V$  défini pour tout  $v \in V$  par

$$a(P(u_h), v) = a(u_h, v). \quad (3.25)$$

Il s'agit d'une formulation faible des équations

$$\operatorname{div}(\mathfrak{K}(\nabla(P(u_h) - u_h))) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{K} \nabla_n(P(u_h) - u_h)] = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\| \|u - u_h\| \| \leq \| \|u - P(u_h)\| \| + \| \|P(u_h) - u_h\| \| =: I + II. \quad (3.26)$$

L'erreur de non-conformité  $II$  est bornée par le résultat du Lemme 3.5.

Concernant le premier terme  $I$ , nous utilisons le fait que pour  $v_h \in V \cap V_h$ ,  $v_h$  interpolé de Scott-Zhang, on a

$$a(u_h, v_h) = l_h(v_h) + E,$$

$$\text{où } E := \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S [u_h] \{ \partial_{n, \mathfrak{K}} v_h \}_\kappa ds.$$

En posant  $v := u - P(u_h)$ , il vient ensuite

$$I^2 = \| |u - P(u_h)| \|^2 = a(u - P(u_h), v) = a(u - u_h, v) = a(u - u_h, v - v_h) + E = l(v - v_h) - a(u_h, v - v_h) + E. \quad (3.27)$$

L'intégration par partie nous permet de décomposer les deux premiers termes de (3.27) comme suit :

$$l(v - v_h) - a(u_h, v - v_h) = \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M (f + \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u_h))(v - v_h) dx + \sum_{S \in \mathcal{S}_h \cup \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] (v - v_h) ds. \quad (3.28)$$

Le premier terme de 3.28 peut être ainsi majoré :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K (f + \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u_h))(v - v_h) dx &\leq C_I \sum_{K \in \mathcal{K}_h^\Gamma \cup \mathcal{K}_h \setminus \mathcal{K}_h^\Gamma} d_K \|f + \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u_h)\|_K \|\nabla v\|_{\omega_K} \\ &\leq C_I \left( \sum_{K \in \mathcal{K}_h^\Gamma \cup \mathcal{K}_h \setminus \mathcal{K}_h^\Gamma} \frac{d_K^2}{\mathfrak{K}} \|f + \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u_h)\|_K^2 \right)^{1/2} \times \|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla v\|_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}. \end{aligned}$$

Le second terme de 3.28 se décompose en deux parties : une partie sur les arêtes du maillage ( $S \in \mathcal{S}_h$ ), et une autre sur les arêtes de  $\Gamma$  ( $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ ).

Pour  $S \in \mathcal{S}_h$ , en utilisant le Lemme de Bramble-Hilbert, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}}} \int_S \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] (v - v_h) ds &\leq C_I \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}}} d_S^{1/2} \left\| \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \right\|_S \|\nabla v\|_{\omega_S} \\ &\leq C_I \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}}} \frac{d_S}{\mathfrak{K}} \left\| \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \right\|_S^2 \right)^{1/2} \times \|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla v\|_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}. \end{aligned}$$

Pour  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ , en utilisant le Lemme 3.3, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] (v - v_h) ds &\leq \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \left\| \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \right\|_S \|v - v_h\|_S \\ &\leq C_1 \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \left\| \left[ \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \right\|_S \frac{|S|^{1/2}}{\min\{\mathfrak{K}_{\text{in}}, \mathfrak{K}_{\text{ex}}\}} \|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla v\|_{\omega_S}. \end{aligned}$$

Pour majorer  $E$ , on utilise le Lemme 3.4 et l'inégalité de Young<sup>2</sup>. On obtient alors :

$$|E| \leq \frac{1}{4} \|\mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h\|_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 + C_2 \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \gamma \| [u_h] \|^2.$$

---

2.  $\forall \epsilon > 0 : ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}$

Il ne nous reste qu'à sommer les équations précédentes, à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les produits de normes, utiliser le Lemme 3.5 pour traiter les termes  $\|\mathfrak{K}^{1/2}\nabla v\|_{\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2$  pour terminer la démonstration du Théorème 3.2.

**Remarque 3.6.** *Numériquement, en comparant l'estimateur d'erreur avec la solution exacte, il semble que la constante  $e_K$  ne soit pas optimale et que l'on puisse prendre :*

$$e_K := \begin{cases} \frac{d_K}{\min\{\mathfrak{K}_{\text{in}}, \mathfrak{K}_{\text{ex}}\}^{1/2}} & \text{si } K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}, \\ \frac{d_K}{\mathfrak{K}^{1/2}} & \text{sinon,} \end{cases}$$



# Résultats numériques

## Sommaire

4.1	Détails de la mise en œuvre . . . . .	41
4.2	Test de validation . . . . .	43
4.3	Tests de robustesse et de comparaisons . . . . .	45
4.3.1	Robustesse . . . . .	45
4.3.2	Test de comparaison . . . . .	47
4.4	Test de l'estimateur d'erreur . . . . .	50
4.4.1	Raffinement uniforme . . . . .	50
4.4.2	Raffinement adaptatif . . . . .	50

## 4.1 Détails de la mise en œuvre

Nous proposons ici d'expliquer la mise en œuvre sur des éléments triangulaires, avec des éléments finis d'ordre 1. Nous généraliserons ces explications aux cas quadrangulaires, avec des éléments finis d'ordre supérieur, dans un chapitre ultérieur.

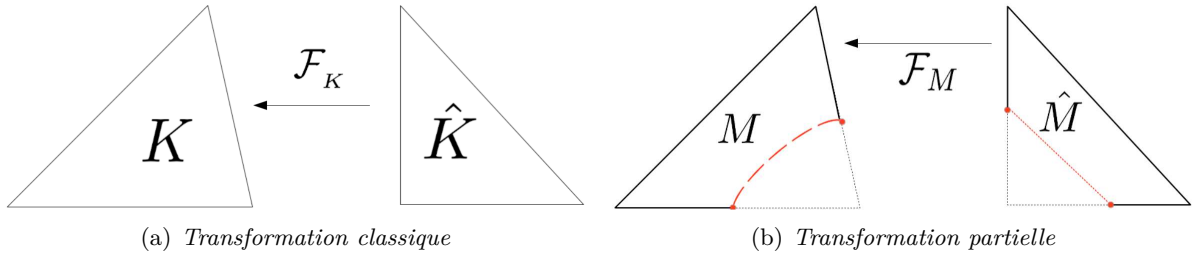


FIGURE 4.1 – Transformation pour maillages triangulaires

On note (Figure 4.1) :

- $K$  l'élément courant,
- $\hat{K}$  le triangle de référence,
- $\mathcal{F}_K$  une  $\mathcal{P}^1$ -transformation (affine) allant de  $\hat{K}$  vers  $K$ .

De plus,  $\forall M \subset K$ , on note :

- $\hat{M} = \mathcal{F}_K^{-1}(M)$ ,
- et  $\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_K|_{\hat{M}}$ .

On rappelle que l'on travaille dans l'espace élément fini suivant :

$$\mathbb{V}_h := \{v_h \in L^2(\Omega), v_h|_{\Omega_{\text{in}}} \in C(\Omega_{\text{in}}), v_h|_{\Omega_{\text{ex}}} \in C(\Omega_{\text{ex}}), v_h|_M \in P^1(M) \forall M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}\}. \quad (4.1)$$

Une base élément fini de  $\mathbb{V}_h$  est obtenue à partir d'une base élément fini standard, en remplaçant chaque fonction de base d'un élément coupé par deux nouvelles fonctions, à savoir ses restrictions sur  $\Omega_{in}$  et  $\Omega_{ex}$  respectivement. Ces deux nouvelles fonctions de base sont représentées dans la mise en œuvre en utilisant les mêmes nœuds de la triangulation initiale<sup>1</sup>.

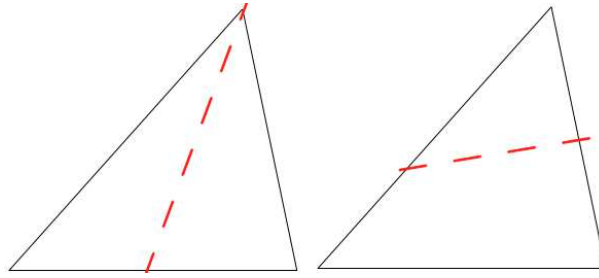


FIGURE 4.2 – *Intersection Discontinuité - Maillage triangulaire*

Pour mettre en œuvre l'approximation discontinue, nous avons d'abord déterminé l'ensemble des triangles traversés par  $\Gamma$ . Nous avons supposé qu'une cellule coupée  $K$  était divisée par  $\Gamma$  en deux polygones (voir Figure 4.2).

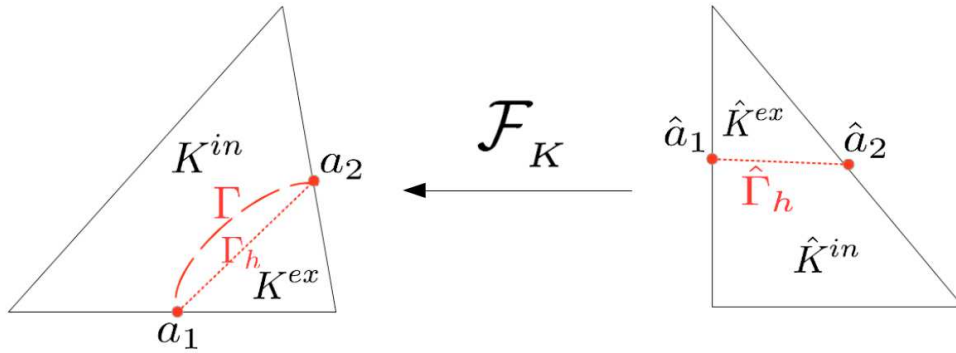


FIGURE 4.3 – *Transformation et notations*

Pour déterminer l'approximation  $\Gamma_h$  de  $\Gamma$  (Figure 4.3) sur un élément coupé  $K$ , nous suivons ces différentes étapes :

1.  $\{a_1, a_2\} = \Gamma \cap \partial K$ ,
2.  $a_i = \mathcal{F}_K(\hat{a}_i)$ , pour  $i = 1, 2$ ,
3.  $\hat{\Gamma}_h = [\hat{a}_1, \hat{a}_2]$ ,
4.  $\Gamma_h = \mathcal{F}_K(\hat{\Gamma}_h)$ .

1. On rappelle que les degrés de liberté (ddl) ainsi que les fonctions de base du  $P^1$  sont associées aux nœuds géométriques.



**Remarque 4.1.** *Nous travaillons avec des éléments finis  $\mathcal{P}^1$ . De ce fait, nous avons choisi d'approcher la discontinuité  $\Gamma$  par un segment sur chaque maille : nous avons donc seulement besoin de deux points  $\{\hat{a}_1, \hat{a}_2\}$  pour tracer la droite  $\hat{\Gamma}_h$ .  $\mathcal{F}_K$  étant affine,  $\Gamma_h$  sera également une droite.*

Pour évaluer numériquement les intégrales des formes bilinéaire (2.14) et linéaire (2.15) sur les éléments coupés ainsi que le long de la discontinuité, nous avons construit des formules d'intégration numérique sur chaque polygone et sur l'interface. Ce processus nous permet ainsi d'utiliser les techniques d'assemblage classiques des méthodes des éléments finis.

Pour tout  $v_h \in \mathbb{V}_h$ ,  $v_h|_{\Omega_{\text{in}}}$  est décomposée en utilisant les fonctions de base des cellules recouvrant  $\Omega_{\text{in}}$ , et respectivement  $v_h|_{\Omega_{\text{ex}}}$  est décrite en utilisant celles des cellules recouvrant  $\Omega_{\text{ex}}$ .

Dans un élément coupé,  $v_h$  peut être exprimée en utilisant la restriction des fonctions de base de  $K^{\text{in}}$  et  $K^{\text{ex}}$  comme suit :

$$v_h|_{K^{\text{in}}} = \sum_{i=0}^2 \alpha_i \varphi_i|_{K^{\text{in}}}, \quad v_h|_{K^{\text{ex}}} = \sum_{i=0}^2 \alpha'_i \varphi_i|_{K^{\text{ex}}}. \quad (4.2)$$

De ce fait, afin de définir  $v_h$  sur une cellule coupée, nous avons besoin de six degrés de liberté  $\alpha_i$  et  $\alpha'_i$  with  $i = 0, 1, 2$  (Figure 4.4).

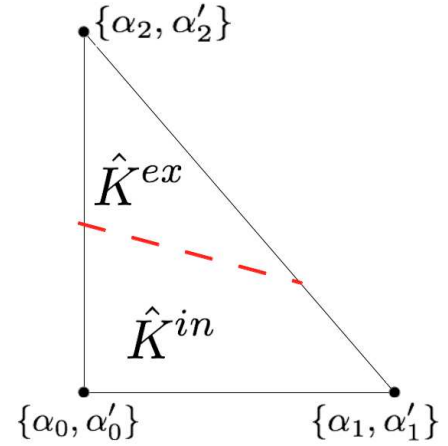


FIGURE 4.4 – Répartition des ddl

**Remarque 4.2.** *La continuité entre les éléments coupés et non-coupés est assurée grâce aux définitions (4.1) et (4.2).*

Afin d'obtenir une formule d'intégration sur chacun des polygones de  $\hat{K}$ , chacun d'entre eux a été découpé en triangles (Figure 4.5). Nous avons utilisé une formule de quadrature pour évaluer toutes les modalités sur le triangle de référence  $\hat{T}$ . Quant aux intégrales d'interface, nous avons utilisé des quadratures de Gauss.

## 4.2 Test de validation

Considérons le problème (1.1), avec  $g_D = g_N = 0$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.3)$$

Les données choisies sont de telle sorte que la fonction définie par

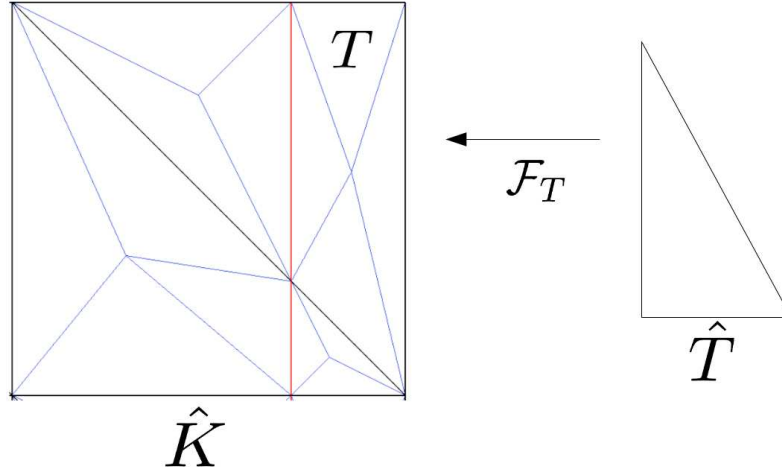


FIGURE 4.5 – Découpage en triangles de chaque polygone

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{pour } x \leq \xi_0 \\ \frac{x^2 - \xi_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{\xi_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.4)$$

est une solution exacte, linéaire.

Plaçons-nous sur le domaine  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$ .

Prenons  $\xi_0 = 0.91$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$ .

Les conditions de bord sont de type Dirichlet.

Enfin, le second membre de cette solution exacte est  $f = -4$ .

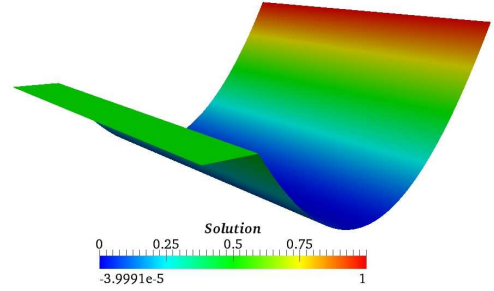


FIGURE 4.6 – Solution

**Remarque 4.3.** *De légères modifications ont été nécessaires pour tenir compte de la condition de non-homogène de Dirichlet, , traitées au sens faible dans la formulation variationnelle (quelques détails dans [53]).*

Nous proposons ici d'analyser  $ENorm$  la norme énergie (équation (3.12)),  $L2errorcut$  la norme- $L^2$ .

Nous obtenons les résultats attendus. En effet, la solution que nous avons choisie et continue et présente un raccord de son flux le long de l'interface. De plus, la discontinuité de son gradient est correctement approchée. De ce fait, nous retrouvons les ordres de convergence optimaux, ordre 1 pour la norme énergie  $ENorm$ , ordre 2 pour la norme- $L^2$  (voir Figure 4.7(a)).

**Remarque 4.4.** *Notons que ce résultat n'est pas propre au maillage CC. Pour confirmer cela, voici la même simulation faite sur un maillage triangulaire TC (Figure 4.7(b)).*

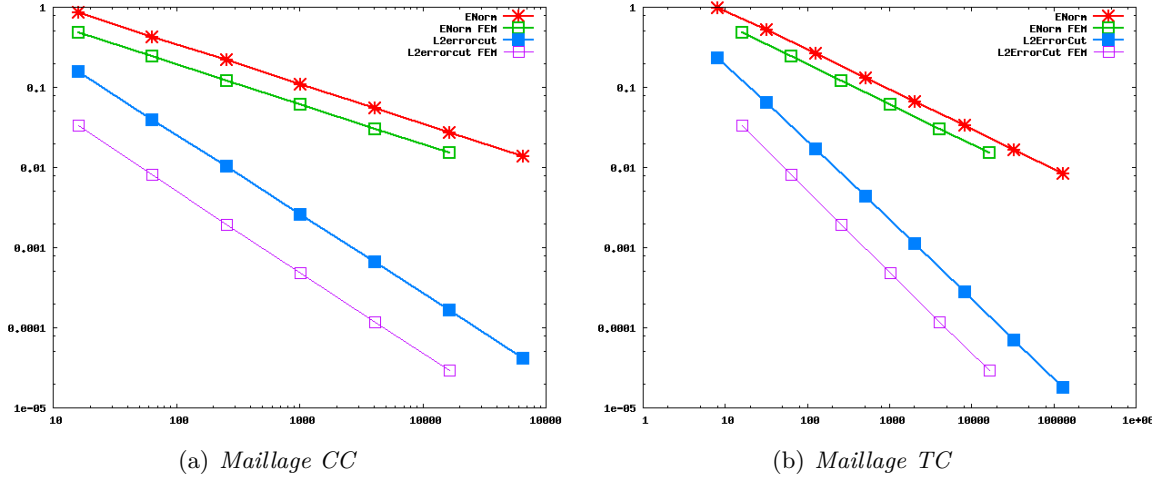


FIGURE 4.7 – Test de validation - Courbes de convergences sur des maillages triangulaires

### 4.3 Tests de robustesse et de comparaisons

#### 4.3.1 Robustesse

Nous avons deux points à tester pour illustrer la robustesse de notre méthode : celle par rapport aux coefficients, l'autre en fonction de la géométrie. De ce fait, nous avons choisi une forte variation des coefficients pour démontrer le premier point, et nous avons fait translater la discontinuité sur un maillage fixe pour faire varier la géométrie afin de justifier le second point. Puis nous avons comparé certaines quantités.

Afin de pouvoir comparer nos résultats avec la littérature, nous nous sommes inspirés de l'exemple 2D proposé dans l'article des Hansbo [53], exemple lui-même issu du papier [60].

Considérons le problème (1.1), avec  $g_D = g_N = 0$ . Plaçons-nous sur le domaine  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et considérons l'interface  $\Gamma_\xi := \xi \times [0, 1]$ , pour  $\xi \in \mathbb{R}$ . Nous prenons  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 0.1$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 10000$  et faisons varier la position de la discontinuité,  $\xi$  décrivant  $\xi_0 = 0.49999$  à  $\xi_1 = 0.6249$ .

Les données choisies sont de telle sorte que la fonction définie par

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{pour } x \leq \xi \\ \frac{x^2 - \xi^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{\xi^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{pour } x > \xi, \end{cases} \quad (4.5)$$

soit une solution exacte.

La Figure 4.8 (gauche) permet d'illustrer la position de l'interface et la Figure 4.8 (droite) compare l'erreur dans la norme énergie  $ENorm$  (équation (3.12)) pour la méthode originale [53] et notre formulation robuste. Comme la solution exacte dépend de la position de l'interface, les deux méthodes montrent une légère augmentation de erreur lorsque l'interface se déplace vers la droite. En effet, les deux méthodes présentent un comportement robuste et les différences dans

l'erreur énergie sont relativement faibles, mais augmente lorsque l'interface se rapproche d'une ligne de maillage.

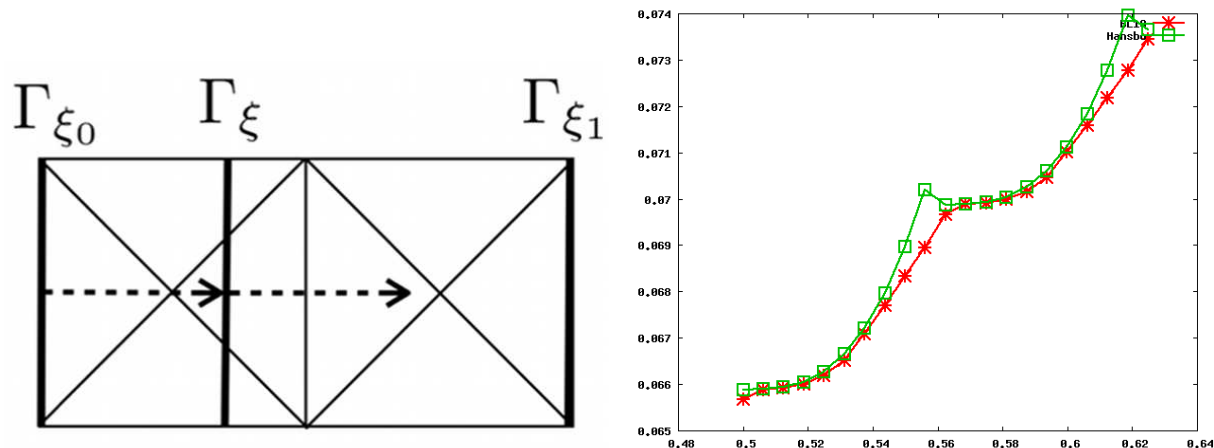


FIGURE 4.8 – Position de l'interface (zoom sur le maillage, gauche) et comparaison de l'erreur de la norme énergie avec les deux méthodes (droite)

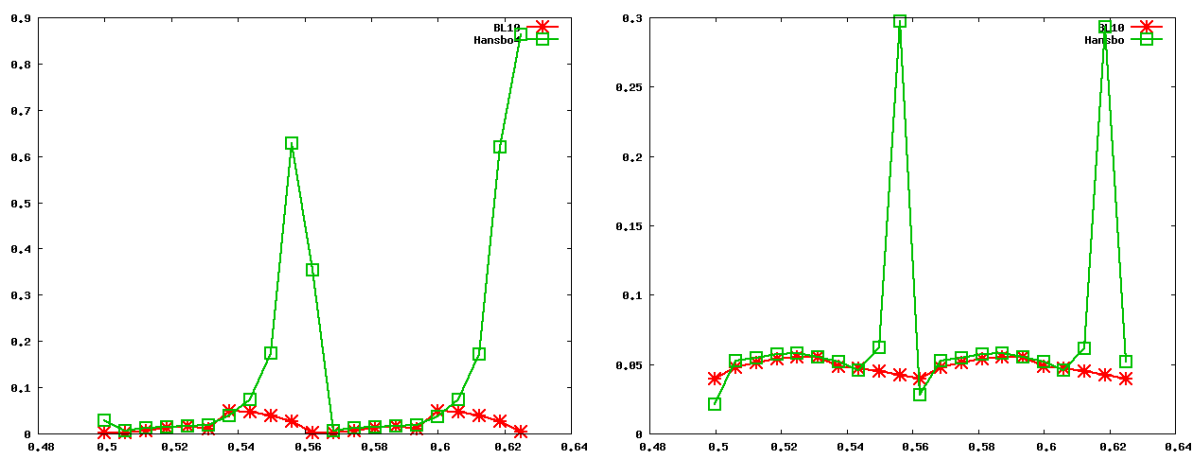


FIGURE 4.9 – Comparaison des deux méthodes avec variation de la position de l'interface : erreurs dans le flux reconstitué (gauche) et du saut dans le flux (droite)

La Figure 4.9 présente l'erreur de la norme- $L^2(\Gamma)$  dans le flux reconstitué  $\|\partial_{n,\mathcal{R}}u - \partial_{n,\mathcal{R}}^*u_h\|_S$  (Figure de gauche) et le saut du flux discret  $\|[\partial_{n,\mathcal{R}}u_h]\|_S$  (Figure de droite). Ici, les différences entre les deux méthodes sont plus marquées. Lorsque l'interface s'approche d'une ligne du maillage, la méthode NXFEM originale conduit à de larges erreurs, tandis que nos modifications mènent à la robustesse souhaitée.

### 4.3.2 Test de comparaison

Considérons le problème (1.1), avec  $g_D = g_N = 0$ , ainsi que la solution exacte suivante :

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^2 - r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ . Plaçons-nous sur le domaine  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , fixons  $r_0 = 0.75$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$ .

Les conditions de bord sont de type Dirichlet, traitées de manière faible dans la formulation.

Enfin, le second membre donnant la solution exacte précédente est  $f = -4$ .

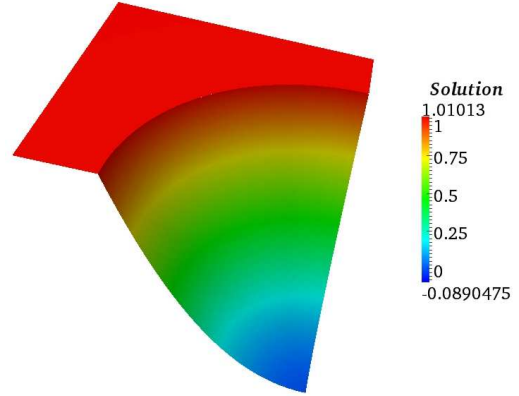


FIGURE 4.10 – Solution

M	ENorm	ENormRedR	L2errorcut	L2errorcutRedR
16	3.10e-01	1.00	2.41e-02	1.0
64	1.50e-01	2.07	4.61e-03	5.23290558198
256	7.13e-02	2.10	1.13e-03	4.09437377604
1024	3.51e-02	2.03	2.77e-04	4.06345551184
4096	1.75e-02	2.01	6.86e-05	4.03534756923
16384	8.73e-03	2.00	1.71e-05	4.01446312604
65536	4.36e-03	2.00	4.26e-06	4.01132132156

TABLE 4.1: Test de comparaison - Tableau de convergence pour maillage CC

Les convergences des normes énergie et  $L^2$  sont données dans le Tableau 4.1 ainsi que la Figure 4.11. Notons que leurs ordres de convergences respectifs semblent être approximativement égaux à ceux obtenus avec la méthode NXFEM originale (Figure 4.12). De plus, comme pour le test de validation, la solution que nous avons choisie est continue ainsi que son flux le long de l'interface. De ce fait, nous retrouvons les ordres de convergence optimaux des deux normes calculées (Figure 4.11).

Pour cet exemple, l'article des Hansbo [53] expose également une figure donnant l'élévation de la solution approchée, avec leur méthode. La Figure 4.10 propose cette même élévation, avec notre méthode.

Nous donnons également à titre indication la répartition de l'erreur ENorm et de l'erreur L2errorcut en Figure 4.13. La solution que nous avons choisi ne présente pas de singularité, et la

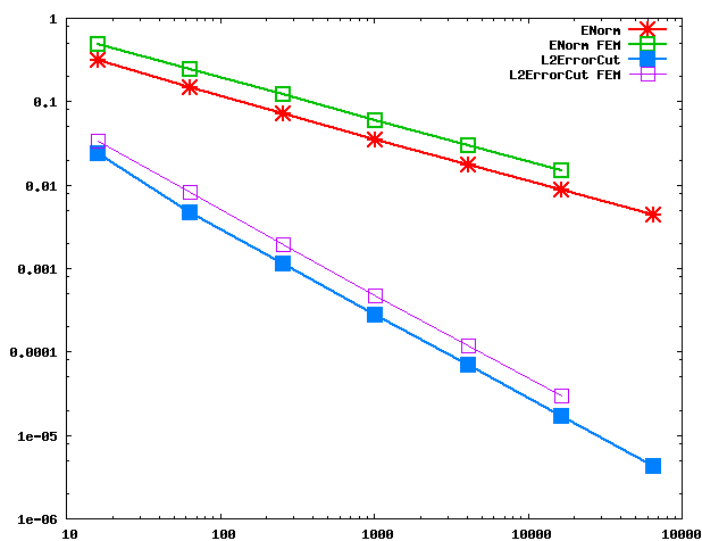


FIGURE 4.11 – Test de comparaison - Courbes de convergence pour maillage CC

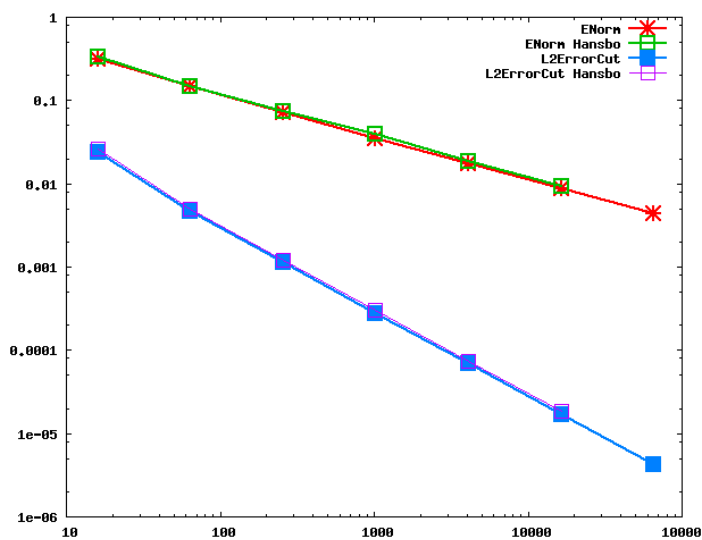
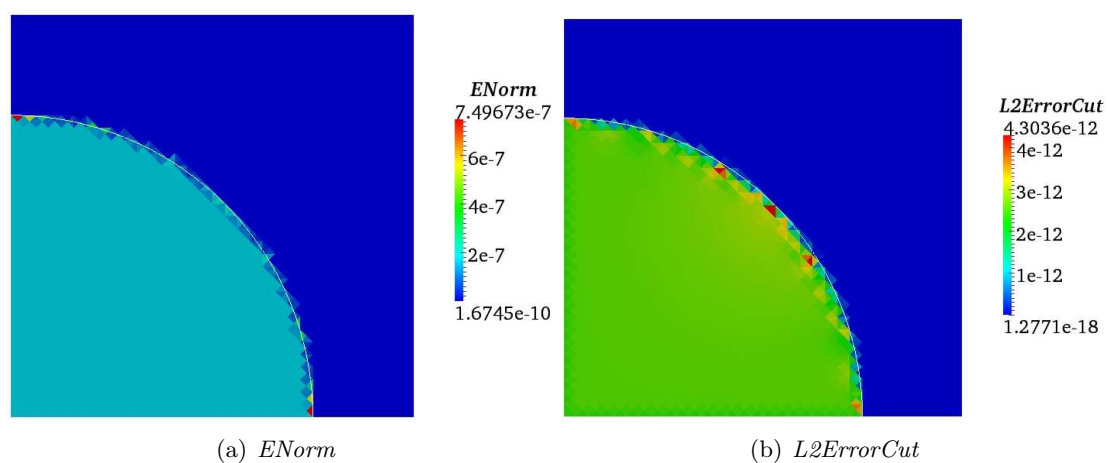
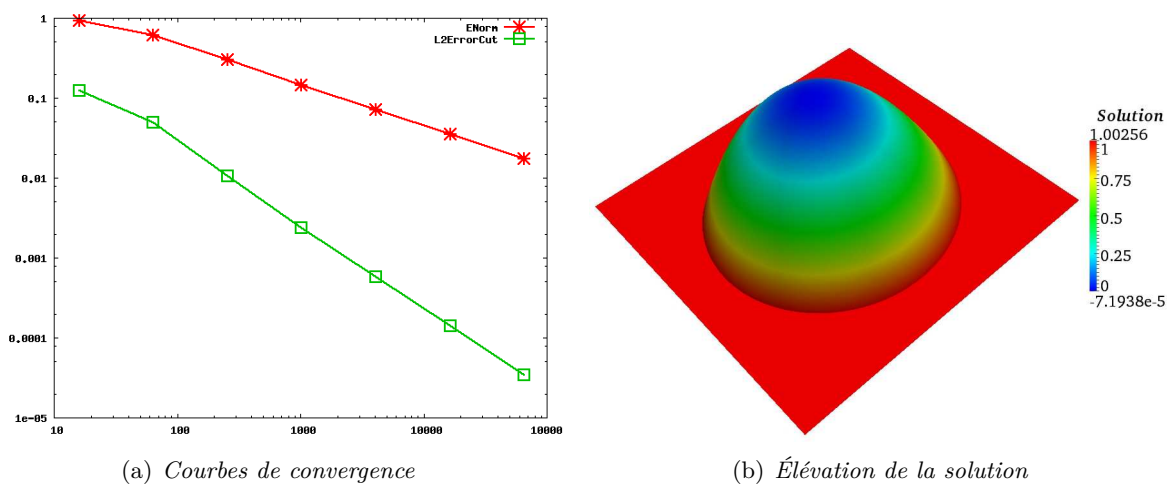


FIGURE 4.12 – Courbes de convergence pour maillage CC - Comparaison entre les deux méthodes

discontinuité est correctement approchée. De ce fait, les erreurs sont situées sur les cellules où la solution varie le plus, à savoir l'intérieur du dôme.

Ce test de comparaison a également été fait sur des maillages TC. Nous avons obtenu les mêmes résultats (Tableau et courbes de convergence, élévation de la solution approchée, répartition de la ENorm et la L2errorcut).

Nous avons également implémenté cette situation pour  $\Omega = ]-1; 1[ \times ]-1; 1[$ .

FIGURE 4.13 – Test de comparaison - Répartition de la  $ENorm$  et de  $L2ErrorCut$ FIGURE 4.14 – Simulation sur  $\Omega = ]-1; 1[^2$  pour un maillage CC

**Remarque 4.5.** Cette configuration a été la première que l'on a testé. Elle nous a permis d'obtenir des résultats de comparaisons (Courbes 4.14), en imposant des conditions de Dirichlet (de manière forte dans la formulation) dès l'instant où l'interface ne touchait pas de cellules du bord. Nous avons pu ainsi valider certaines parties du code.

#### 4.4 Test de l'estimateur d'erreur

Afin de tester notre estimateur d'erreur, reprenons l'exemple proposé par les Hansbo dans [53], dont la solution exacte est donnée par

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^2 - r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ . Plaçons-nous sur le domaine  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$ , et fixons  $r_0 = 0.78$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$ . Les conditions de bord sont toujours de type Dirichlet. Le second membre demeure toujours  $f = -4$ .

##### 4.4.1 Raffinement uniforme

Avec un raffinement uniforme de maillages triangulaires (nous rappelons que les procédures de raffinements de maillages sont détaillées en introduction - voir 1.2.3), nous remarquons que le comportement de convergence de l'estimateur  $\eta_h(\mathcal{M})$  est similaire à celui de l'erreur énergie  $e_h$ , comme le montre la première Figure 4.15 pour un maillage CC, ainsi que la seconde Figure 4.15 pour un maillage TC.

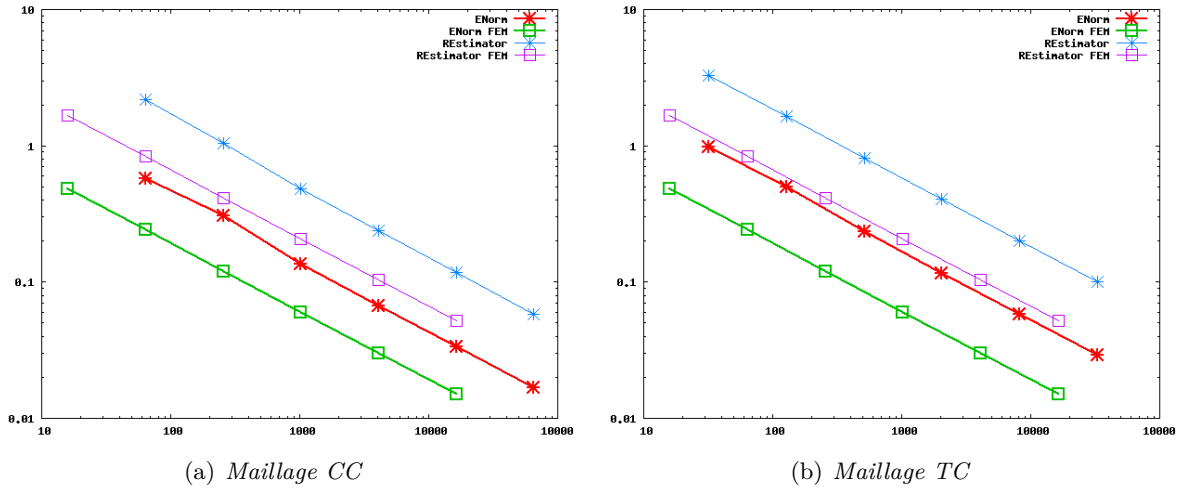


FIGURE 4.15 – Courbes de convergence pour des maillages uniformément raffinés

##### 4.4.2 Raffinement adaptatif

Pour cette section, nous proposons deux tests comparatifs : sur un problème d'interface, le premier test confronte la procédure de raffinement adaptatif entre une méthode éléments finis classique et la méthode NXFEM à l'aide du test précédent ; le second entre la méthode NXFEM originale et la méthode NXFEM robuste avec un autre jeu de données.



### Comparaison avec une méthode éléments finis standard

Reprenons le cas-test précédent et effectuons une procédure adaptative. On rappelle que pour cette procédure, l'un des avantages du maillage CC est qu'il n'a pas de nœuds suspendus. Ainsi ce maillage nous permet de comparer facilement la méthode NXFEM avec une méthode éléments finis classique.

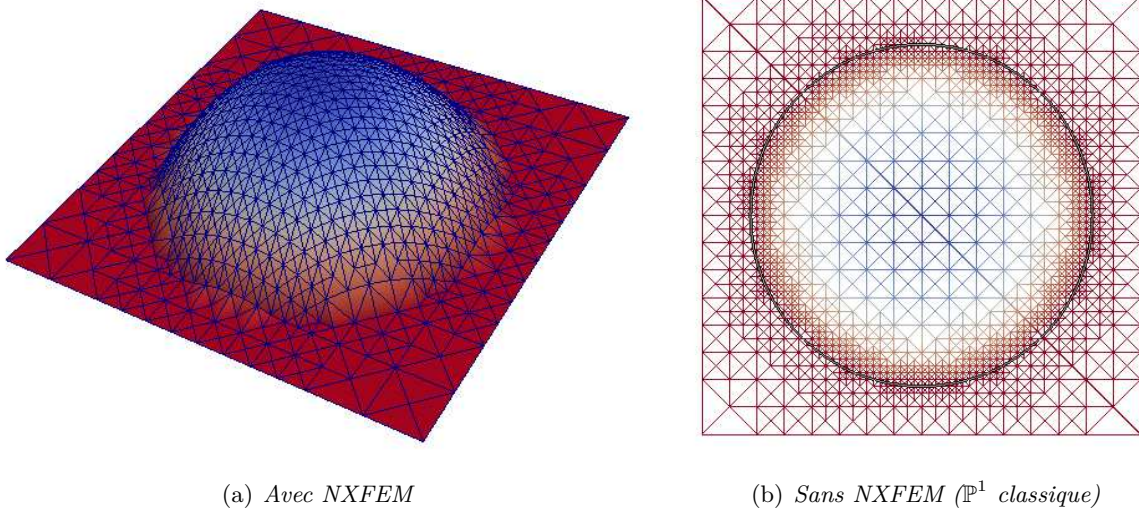


FIGURE 4.16 – Raffinement de maillage CC - Répartition des cellules

Dans cet exemple, la solution est parfaitement symétrique, elle ne comporte aucune singularité et la dérivée normale est bien approchée. Notre estimateur d'erreur concentre alors le raffinement sur les cellules où la solution présente le plus de variations : le domaine  $\Omega_{\text{in}}$  est donc uniformément raffiné (Figure 4.16(a)) et nous obtenons des courbes de convergences tout à fait satisfaisantes (Figure 4.17). En revanche, lors de l'utilisation d'éléments finis classiques  $\mathbb{P}^1$ , la procédure adaptative (avec l'estimateur résiduel correspondant) concentre le raffinement autour de la discontinuité (Figure 4.16(b)).

#### Choix des $\kappa$

Considérons le problème précédent sur le domaine  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$ , avec les coefficients  $\kappa_{\text{in}} = 10^9$  et  $\kappa_{\text{ex}} = 1$ .  $\Gamma$  est le cercle de centre  $(0; 0)$  et de rayon  $r_0 = 0.711$ . Les conditions de bord sont de type Dirichlet nul. Le second membre est donné par  $f = 10^6 e^{(-r/d)}$  avec  $d = 0.01$  et  $r = d(X - X_0)$  où  $X \in \Omega$  et  $X_0 = (r_0; 0)$ .

Notons que le domaine  $\Omega$  ne présente pas de singularité, la solution admet une très forte variation au point  $x_0$  (Figure 4.18).

Ce test confirme nos précédentes conclusions : la procédure de raffinement avec la formulation originale tend à raffiner autour de la discontinuité, indépendamment de la solution (Figure 4.19),

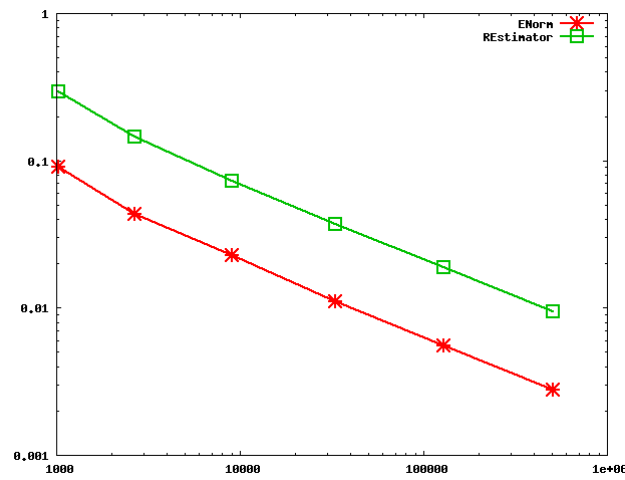


FIGURE 4.17 – Courbes de convergence d'un raffinement de maillage  $CC$

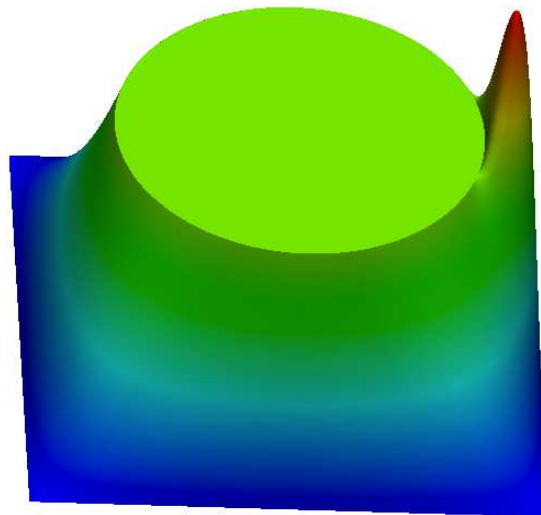


FIGURE 4.18 – Élévation de la solution

car celle-ci est de plus en plus proche des lignes et des nœuds du maillage. Nous avons déjà souligné ce comportement dans la section 4.3.

En revanche, la formulation robuste marque les cellules sur lesquelles la solution a le plus de variations (Figure 4.20), à savoir autour du point  $x_0$  ainsi que sur  $\Omega_{\text{ex}}$ .

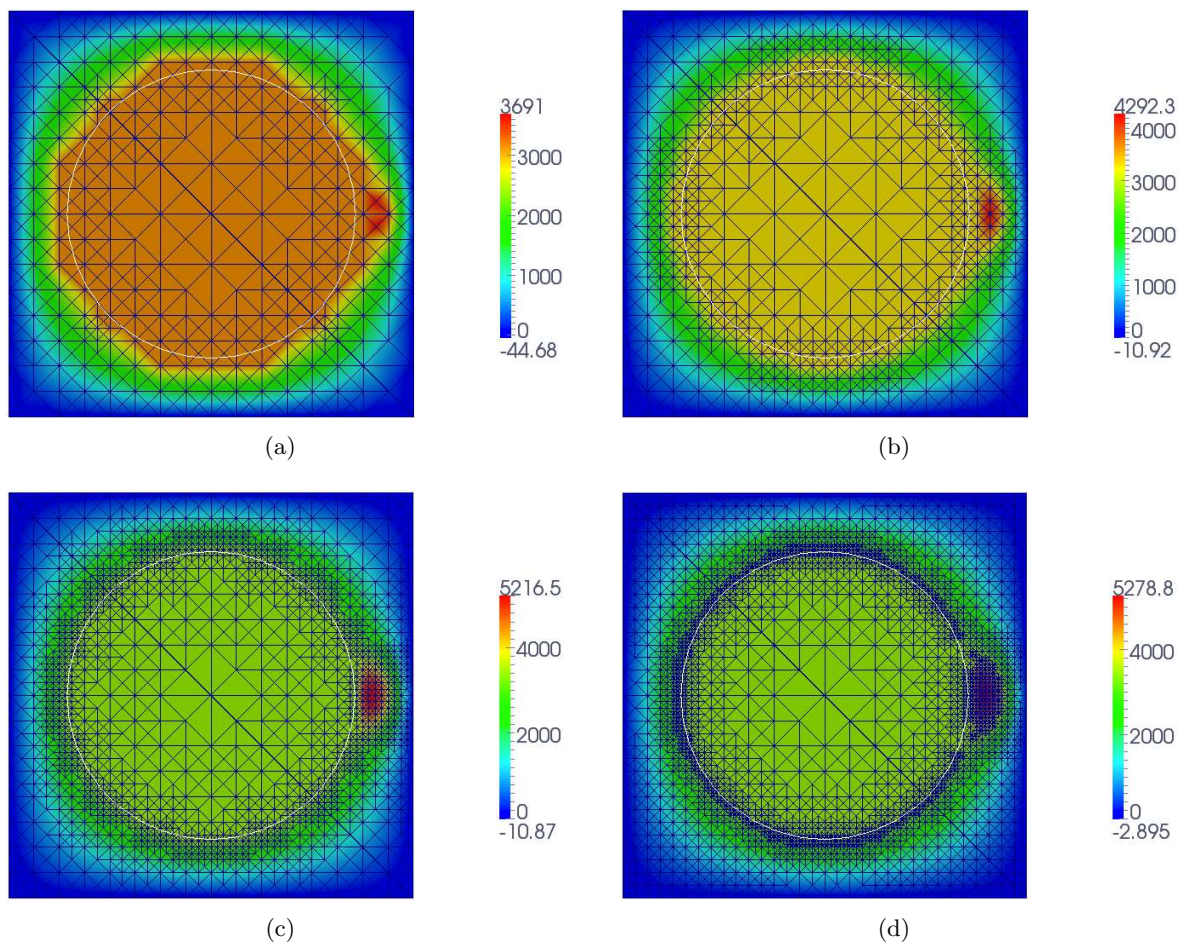
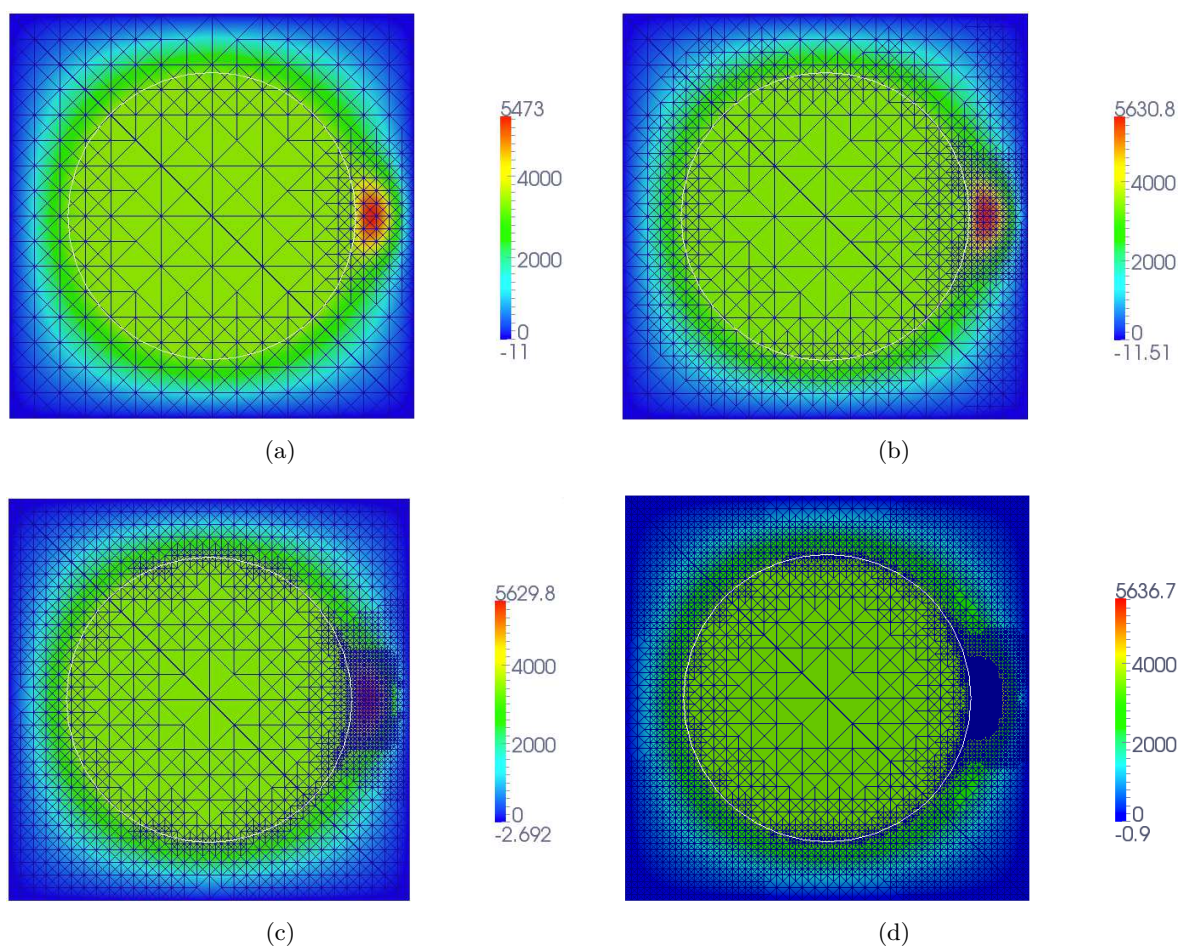


FIGURE 4.19 – Formulation originale - Raffinement d'un maillage CC

FIGURE 4.20 – *Formulation robuste - Raffinement d'un maillage CC*

# Perspectives

Pour un maillage en triangles et des éléments finis  $\mathbb{P}^1$  conformes, plusieurs pistes de recherche sont déjà envisageables.

↔ Dans la formulation robuste que nous avons proposé, nous avons étudié la problème elliptique en tenant compte des conditions non-homogènes le long de l'interface (i.e.  $g_D$  et  $g_N$  non-nuls), ce qui n'est pas le cas de l'estimateur d'erreur.

Dans un premier temps, celui-ci pourrait donc faire l'objet d'un "rapide" enrichissement afin qu'il prenne en compte ces conditions non-homogènes.

↔ Toujours concernant l'estimateur d'erreur, nous avons utilisé l'interpolé de Scott-Zhang sur des arêtes non coupées. La constante alors obtenue n'est pas optimale dans le sens où l'on ne tient compte d'aucun élément coupé. On pourrait éventuellement obtenir une meilleure constante si l'on construisait l'interpolé de Scott-Zhang en utilisant les arêtes coupées pour définir les valeurs aux noeuds appartenant à des mailles coupées.

↔ Ensuite, il serait intéressant d'étudier le cas où  $\mathfrak{K}$  n'est plus un scalaire mais une matrice. Cette situation est fréquente dans la résolution d'écoulements en milieu poreux par exemple, elle devient même indispensable lorsque le milieu est anisotrope (i.e. le fluide peut s'écouler plus rapidement dans une direction que dans une autre).

La matrice est en générale diagonale, mais les valeurs propres peuvent être différentes.

↔ Cette méthode mériterait également d'être étendue à différents types de maillages (quadrilatères, hexaèdres), à d'autres types d'éléments finis (conformes, non conformes, Galerkin discontinus) et à des éléments finis d'ordre plus élevé ( $k \geq 1$ ), y compris dans l'approximation de l'interface : cette piste fait en partie l'objet des Chapitres suivants.

↔ Enfin, une curiosité certaine nous pousserait à appliquer le principe de Nitsche à d'autres types de problèmes, tels que des problèmes instationnaires, non-linéaires, des problèmes de diffusion-convection, des problèmes de couplages ... Certaines de ces études seront abordées dans la Partie III.



## Deuxième partie

# GÉNÉRALISATION DE NXFEM À L'ORDRE SUPÉRIEUR

*Cette partie présente les généralisations que nous avons apportées et nous proposons quatre chapitres pour les exposer : le premier étend la méthode robuste précédente aux éléments finis continus  $\mathbb{P}^k - \mathbb{Q}^k$  sur des maillages 2D (triangles, quadrangles) et 3D (tétraèdres, hexaèdres), pour des interfaces planes et courbes ; les changements nécessaires pour une résolution en DG et NC sont détaillés dans le chapitre deux ; enfin, le dernier chapitre propose quelques pistes de recherches avec les outils développés dans cette partie.*





# Résolution en éléments fini continu

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>6.1 Maillages de N-simplexes</b> . . . . .	<b>62</b>
6.1.1 Maillage triangulaire . . . . .	62
6.1.2 Maillage tétraédrique . . . . .	67
<b>6.2 Maillages parallélotopes 2D-3D</b> . . . . .	<b>73</b>
6.2.1 Maillage quadrangulaire . . . . .	74
6.2.2 Maillage hexaédrique . . . . .	76
<b>6.3 Maillages non parallélotopiques</b> . . . . .	<b>80</b>
6.3.1 Distorsion de parallélogrammes . . . . .	81
6.3.2 Distorsion sur l'interface . . . . .	83
6.3.3 Éléments d'analyse . . . . .	86
<b>6.4 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>89</b>
6.4.1 Détail de la mise en œuvre en $\mathbb{Q}^1$ . . . . .	89
6.4.2 Maillages N-simpliciaux et parallélotopes . . . . .	93
6.4.3 Maillages non parallélotopiques . . . . .	97
6.4.4 Interface courbe . . . . .	100
<b>6.5 Éléments d'analyse pour une interface courbe</b> . . . . .	<b>100</b>

---

## Introduction

Nous souhaitons étendre la méthode NXFEM précédente à l'ordre supérieur, avec une approximation conforme (CG). Pour cela, replaçons-nous dans notre problème modèle 3.1 :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.1)$$

La formulation variationnelle continue du problème (6.1) est la même que dans les études précédentes (voir 2.6). On s'intéresse à la formulation discrète.

Nous définissons les espaces éléments finis suivants :

$$CG_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}), v_h|_K \circ \mathcal{F}_K \in R^k(K) \forall K \in \mathcal{K}_h\}, \quad (6.2)$$

où  $R^k$  est l'ensemble des polynômes  $\mathbb{P}^k$  ou  $\mathbb{Q}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  le degré du polynôme, et

$$\mathbb{V}_h := \{v_h|_{\Omega_{\text{in}}} + w_h|_{\Omega_{\text{ex}}}, v_h, w_h \in CG_h\}. \quad (6.3)$$

On rappelle que la formulation variationnelle discrète du problème (6.1) est la suivante : Pour  $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$ , on définit la forme bilinéaire :

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \left( [u_h] \partial_{n, \mathfrak{K}}^* v_h + \{ \partial_{n, \mathfrak{K}} u_h \}_\kappa [v_h] \right) ds, \quad (6.4)$$

ainsi que la forme linéaire :

$$l(v_h) := \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} g_N \{v_h\}_\kappa \, ds - \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} g_D \partial_{n, \mathfrak{K}}^* v_h \, ds, \quad (6.5)$$

où pour  $S \in \mathcal{S}_h^\Gamma$ , les dérivées discrètes  $\partial_{n, \mathfrak{K}}^*$  sont données dans 3.6.

La démonstration de la coercivité de la forme bilinéaire (6.4) est une étape importante de l'analyse. Celle-ci nous permet de prouver et justifier la convergence de notre méthode. (On rappelle que cette démonstration est donnée en Annexe B dans le cas de maillage triangulaire, pour des éléments finis  $\mathbb{P}^1$ ). Elle doit donc être adaptée pour tout polynômes de degré  $k$ ,  $k \geq 1$ .

**Lemme 6.1. Coercivité de  $a_h$**  - Pour  $\gamma_S$  pris suffisamment grand, la forme bilinéaire  $a_h(\cdot, \cdot)$  est coercive

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \| \| v_h \| \|^2, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (6.6)$$

dans l'espace discret  $\mathbb{V}_h$  muni de la  $\| \| \cdot \| \|$ -norme suivante :

$$\| \| \phi \| \|^2 := \|\nabla \phi\|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 + \|\{\nabla_n \phi\}\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 + \|\llbracket \phi \rrbracket\|_{1/2, h, \Gamma_h}^2, \quad (6.7)$$

avec

$$\|\phi\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\phi\|_{0, \Gamma_h}^2, \quad \|\phi\|_{1/2, h, \Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \frac{1}{d_K} \|\phi\|_{0, \Gamma_h}^2. \quad (6.8)$$

Dans cette généralisation à l'ordre  $k$ , nous devons faire attention aux dépendances de la constante de coercivité  $C$ . En effet, pour conserver la stabilité et la robustesse de notre méthode, cette constante  $C$  doit être indépendante de la géométrie employée et de la position de l'interface. En adaptant la démonstration donnée en Annexe B, il vient que l'expression de cette constante  $C$  est entièrement liée à l'utilisation d'une inégalité inverse. Il nous faut donc adapter et démontrer l'inégalité inverse suivante pour tout élément fini de type  $\mathbb{P}^k - \mathbb{Q}^k$  (avec  $k \geq 1$ ).

**Lemme 6.2. Inégalité inverse** - Il existe  $C_I > 0$  telle que pour tout  $v_h \in \mathbb{V}_h$ , nous avons :

$$\|\{\nabla_n v_h\}\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 \leq C_I \|\nabla v_h\|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2. \quad (6.9)$$

Les dépendances de la constante de coercivité  $C$  sont alors liées à celles de la constante  $C_I$ . Dans notre situation, nous avons en particuliers :

$$\begin{aligned} \|\{\nabla_n v_h\}\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\{\nabla_n v_h\}\|_{0, \Gamma_h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\kappa_{\text{in}} \nabla_n v_h^{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}} \nabla_n v_h^{\text{ex}}\|_{0, \Gamma_h}^2 \\ &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \left( \|\kappa_{\text{in}} \nabla_n v_h^{\text{in}}\|_{0, \Gamma_h}^2 + \|\kappa_{\text{ex}} \nabla_n v_h^{\text{ex}}\|_{0, \Gamma_h}^2 \right) \end{aligned}$$

Il nous faut donc traiter des termes de la forme

$$d_K \kappa_{\text{in/ex}}^2 \|\nabla_n v_h^{\text{in/ex}}\|_{0,\Gamma_h}^2 = d_K \kappa_{\text{in/ex}}^2 \left\| \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_h^{\text{in/ex}}}{\partial x_i} n_i \right\|_{0,\Gamma_h}^2. \quad (6.10)$$

Par souci de clarté dans les démonstrations qui vont suivre, nous notons  $p_h$  l'une des dérivées  $\frac{\partial v_h^{\text{in/ex}}}{\partial x_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Nous allons établir une inégalité inverse pour les termes de la forme 6.10 sur chaque sous-domaine et pour lesquels nous détaillerons les dépendances de la constante  $C_I^{\text{in/ex}}$  qu'elle fait intervenir. Puis, pour obtenir la démonstration de la coercivité de la forme bilinéaire 6.6, nous sommerons chacune de ces deux contributions afin d'avoir une inégalité inverse sur l'intégralité d'une cellule coupée. Les dépendances de la constante de coercivité  $C$  seront alors justifiées par celles des constantes inverses  $C_I^{\text{in/ex}}$  obtenues sur chaque sous-domaine.

Les travaux pourtant sur les inégalités de traces sont nombreux, mais rares sont ceux qui détaillent les dépendances de la constante  $C$ . On notera que C. Schwab expose ces inégalités inverses pour des ordres et des géométries généraux dans [75], tout en laissant la question des dépendances par rapport à la géométrie du domaine. Or cette dépendance est primordiale si l'on souhaite une méthode robuste par rapport à la position de l'interface à l'intérieur des mailles.

Nous distinguerons deux grandes classes de maillages : les  $N$ -simplexes et les éléments parallélotopes. Les  $N$ -simplexes sont composés de triangles en 2D et de tétraèdres en 3D. Pour ces deux types de maillages, des éléments finis  $\mathbb{P}^k$  sont employés et Warburton-Hesthaven ont démontré des inégalités inverses dans leurs travaux [79]. Nous rappelons ici le résultat que nous allons utiliser :

**Lemme 6.3. Inégalité inverse pour un  $N$ -simplexe**

Soit  $D$  un  $N$ -simplexe,  $S$  l'un de ces bords. On a  $\forall u \in \mathbb{P}_N^k(D)$  :

$$\|u\|_S \leq \sqrt{\frac{(k+1)(k+N)}{N} \frac{|S|}{|D|}} \|u\|_D \quad (6.11)$$

Par référence à ce lemme, nous montrerons que la constante  $C_I$  dépendra seulement du degré polynomial  $k$ , de la dimension  $N$ .

Nous nous appuyerons sur ce Lemme 6.3 en l'adaptant en fonction des intersections particulières entre l'interface et une cellule simplexe. Puis nous le généraliserons ensuite à des intersections entre l'interface et des mailles parallélépipédiques.

Pour l'ensemble de cette section :

- Nous notons par  $\mathcal{H}$  une famille de maillage  $h$  uniforme et régulière au sens de Ciarlet [25], dont nous préciserons la nature en fonction des cas étudiés.

- Nous supposons que l'interface  $\Gamma$  est rectiligne/plane par maille.  
Les hypothèses d'intersections entre l'interface et le maillage, faites en introduction, sont vérifiées dans cette situation.

On note :

- $K$  l'élément physique,
- $\hat{K}$  l'élément de référence,
- $\mathcal{F}_K$  une  $R^1$ -transformation<sup>1</sup> bijective telle que  $\mathcal{F}_K(\hat{K}) = K$ .

**Remarque 6.1.** Une transformation  $\mathbb{Q}^1$  est bilinéaire. Mais sur des parallélogrammes/parallélépipèdes, elle devient affine.

De la remarque 6.1, nous avons la propriété suivante.

**Propriété 6.4.** Soit  $\kappa = (\kappa_{\text{in}}, \kappa_{\text{ex}})$  les poids définis sur l'élément physique coupé pour la formule de la moyenne (1.3). Soit  $\hat{\kappa} = (\hat{\kappa}_{\text{in}}, \hat{\kappa}_{\text{ex}})$  ce même poids établi sur l'élément de référence coupé. On a dans le cas où  $\mathcal{F}_K$  est affine :

$$\kappa = \hat{\kappa}. \quad (6.12)$$

On rappelle que  $\kappa_{\text{in/ex}} = \frac{|K_{\text{in/ex}}|}{|K|}$  (choix de Hansbo-Hansbo). On pose alors  $\hat{\kappa}_{\text{in/ex}} = \mathcal{F}_K^{-1}(\kappa_{\text{in/ex}})$ , puis  $\hat{\kappa}_{\text{in/ex}} = \frac{|\hat{K}_{\text{in/ex}}|}{|\hat{K}|}$ .

## 6.1 Maillages de N-simplexes

L'intersection entre l'interface  $\Gamma$  et une cellule  $K$  triangulaire (respectivement tétraédrique) donne deux parties polygonales (respectivement polyédriques). L'objectif est d'obtenir une inégalité inverse de type (6.36) sur chacune des deux parties.

Si l'une ou l'autre des parties est un N-simplexe, nous nous référons au Lemme 6.3 pour parvenir à une inégalité inverse sur cette partie avec des éléments finis  $\mathbb{P}^k$ , et connaître ainsi les dépendances de la constante inverse  $C_I$ .

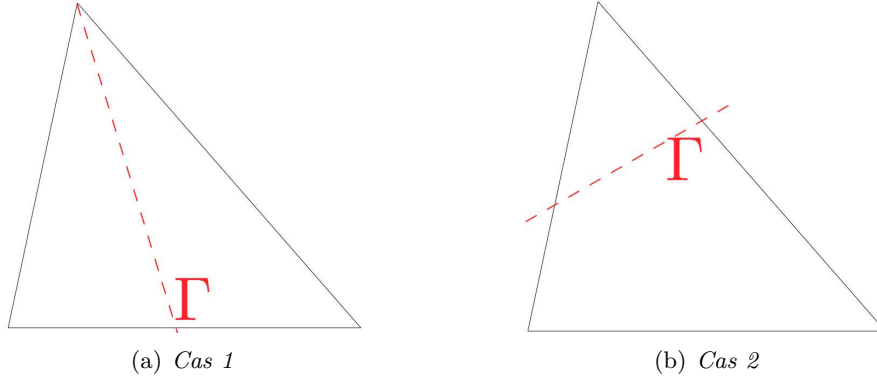
Nous proposons donc dans la suite de traiter uniquement les parties polygonales (respectivement polyédriques), autres que les N-simplexes.

### 6.1.1 Maillage triangulaire

$\mathcal{H}$  est ici une famille régulière de maillages  $\mathcal{K}_h$  constituée de triangles. Nous distinguons deux intersections possibles entre l'interface plane  $\Gamma$  et une cellule triangulaire  $K$  (Figure 6.2).

---

1.  $\mathbb{P}^1$ -transformation pour les triangles/tétraèdres,  $\mathbb{Q}^1$ -transformation pour les quadrangles/hexaèdres

FIGURE 6.1 – Intersection entre  $\Gamma$  et une cellule triangulaire  $K$ 

### Cas 1 : Deux triangles

Considérons le **Cas 1** (Figure 6.1(a)).  $K_{\text{in}}$  et  $K_{\text{ex}}$  sont alors deux triangles. Nous obtenons les dépendances de la constante inverse  $C_I$  sur chaque sous-domaine au moyen du Lemme 6.3. En effet :

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c(k, N) \frac{|\Gamma_h|}{|K_{\text{in}}|} \|p_h\|_{0,K_{\text{in}}}^2.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} d_K \kappa_{\text{in}}^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 &\leq c(k, N) d_K \kappa_{\text{in}}^2 \frac{|\Gamma_h|}{|K_{\text{in}}|} \|p_h\|_{0,K_{\text{in}}}^2 \leq c(k, N) d_K \frac{|K_{\text{in}}|^2}{|K|^2} \frac{|\Gamma_h|}{|K_{\text{in}}|} \|p_h\|_{0,K_i}^2 \\ &\leq c(k, N) d_K \frac{|\Gamma_h|}{|K|} \|p_h\|_{0,K_{\text{in}}}^2 \leq c(k, N) d_K \|p_h\|_{0,K_{\text{in}}}^2. \end{aligned}$$

En prenant  $p_h = \frac{\partial v_h^{\text{in}}}{\partial x}$  puis  $p_h = \frac{\partial v_h^{\text{in}}}{\partial y}$ , et en procédant de la même manière sur  $K_{\text{ex}}$ , on obtient le résultat avec  $C_I = c(k, N)$ .

### Cas 2 : Triangle - Quadrilatère

Considérons le **Cas 2** (Figure 6.1(b)). nous obtenons deux parties polygonales : un triangle  $K_{\text{in}}$  et un quadrilatère  $K_{\text{ex}}$ , et nous distinguons deux nouvelles situations :

- **Première Situation** - Figure 6.2(a) : au moins l'un des milieux des arêtes coupées est du côté de  $K_{\text{ex}}$ ,
- **Seconde Situation** - Figure 6.2(b) : les milieux des arêtes coupées sont tous deux du côté du triangle.

Dans les deux situations,  $K_{\text{in}}$  peut être traitée comme précédemment. Intéressons-nous à la partie  $K_{\text{ex}}$ .

#### Première Situation

Plaçons-nous dans la première configuration (Figure 6.2(a)). Sur  $K_{\text{in}}$ , nous appliquons le Lemme 6.3. Détaillons la partie quadrangulaire .

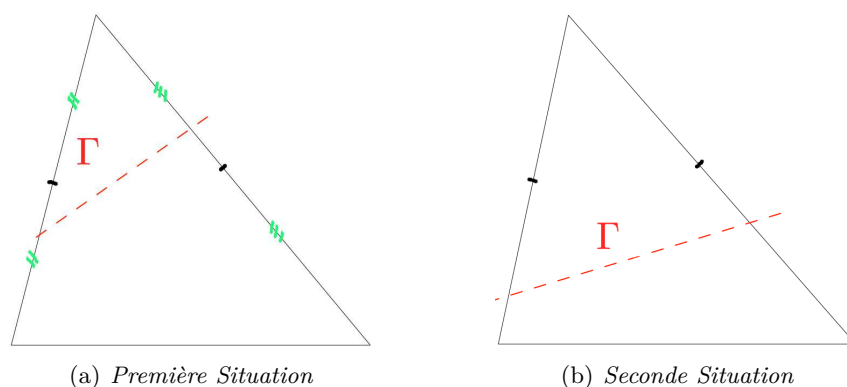


FIGURE 6.2 – Cas 2 : Découpage en un triangle et un quadrilatère

Nous redécoupons  $K_{\text{ex}}$ , que nous noterons  $K_i$  dans la suite, en deux triangles. On considère l'arête coupée dont le milieu est dans  $K_{\text{ex}}$ , on construit alors la médiane de  $K$  issue de ce milieu. Il apparaît  $T_1$  et  $T_2$  (Figure 6.3 - gauche), et respectivement sur l'élément de référence (Figure 6.3 - droite).

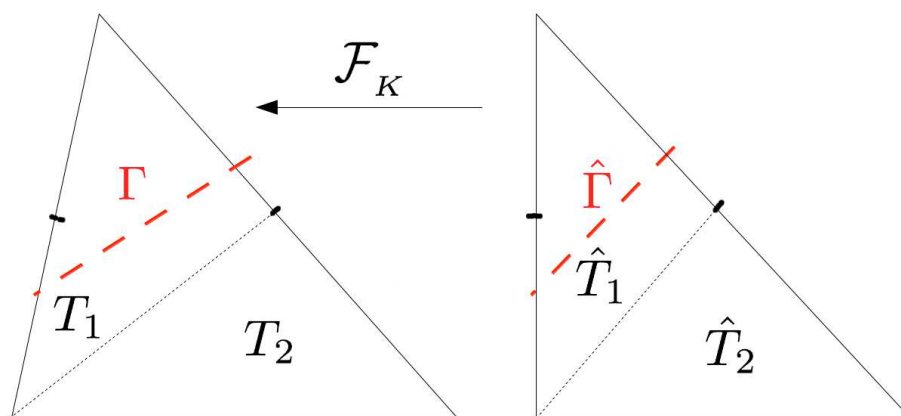


FIGURE 6.3 – Cas 2 - Première Situation - Découpage et notations

Soit  $p_h$  un polynôme de degré  $k - 1$ . On a par passage à l'élément de référence

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c |\Gamma_h| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}}^2$$

avec  $\hat{\Gamma} = \mathcal{F}_K^{-1}(\Gamma)$  et  $\hat{p}_h = p_h \circ \mathcal{F}_K$ . D'après le Théorème de la moyenne, nous savons que

$$\exists \hat{a} \in \hat{\Gamma} : (\hat{p}_h(\hat{a}))^2 = \frac{1}{|\hat{\Gamma}|} \int_{\hat{\Gamma}} (\hat{p}_h)^2(\hat{x}) d\hat{s}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 &\leq c |\Gamma_h| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}}^2 \leq c |\Gamma_h| |\hat{\Gamma}| (\hat{p}_h(\hat{a}))^2, \\ &\leq c |\Gamma_h| |\hat{\Gamma}| \left( \max_{\hat{K}_i} |\hat{p}_h(\hat{x})| \right)^2 \leq c |\Gamma_h| |\hat{\Gamma}| \|\hat{p}_h\|_{\infty,\hat{K}_i}^2 \leq c |\Gamma_h| |\hat{\Gamma}| \|\hat{p}_h\|_{\infty,\hat{K}}^2. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\hat{K}$  est le triangle de référence, et que nous travaillons avec des polynômes de degré fini  $k$  dans un espace de dimension finie ( $N = 2$ ) sur  $\hat{K}$  : toutes les normes sont équivalentes. On a donc  $\exists c(k, \hat{K})$  telle que

$$\|\hat{p}_h\|_{\infty,\hat{K}}^2 \leq c(k, \hat{K}) \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}}^2,$$

et on a  $\exists c(k, \hat{K}, \hat{T}_2) > 0$  telle que

$$\|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}}^2 \leq c(k, \hat{K}, \hat{T}_2) \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_2}^2.$$

De plus,  $|\hat{K}_i| \leq 2 \times |\hat{T}_2|$ . Nous pouvons alors écrire

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c |\Gamma_h| |\hat{\Gamma}| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}}^2 \leq c |\Gamma_h| |\hat{\Gamma}| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_2}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h| |\hat{\Gamma}|}{|T_2|} \|p_h\|_{0,T_2}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h| |\hat{\Gamma}|}{|K_i|} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

On obtient

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \kappa_i^2 \frac{|\Gamma_h| |\hat{\Gamma}|}{|K_i|} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Avec le choix de Hansbo-Hansbo (2.16)  $\kappa_i = \frac{|K_i|}{|K|}$ . De plus,  $|\hat{\Gamma}| \leq \sqrt{2}$ .

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \frac{|K_i|}{|K|} \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|} \frac{|\Gamma_h|}{|K_i|} \|p_h\|_{0,K_i}^2 \leq c d_K \frac{|\Gamma_h|}{|K|} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Grâce aux hypothèses de régularité du maillage et de l'interface  $|\Gamma_h| \leq d_K$  et  $|K| \geq C d_K^2$ , nous obtenons finalement l'inégalité inverse souhaitée :

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq C \|p_h\|_{0,K_i}^2$$

où  $C$  dépend seulement du degré polynomial  $k$  et du triangle de référence  $\hat{K}$ .

**Remarque 6.2.** *Par souci de simplicité, nous avons choisi ici d'utiliser les poids de la moyenne proposée par Hansbo-Hansbo (2.16). Cette démonstration s'adapte facilement nous utilisons les poids (3.11) proposés dans la Section 3.1.*

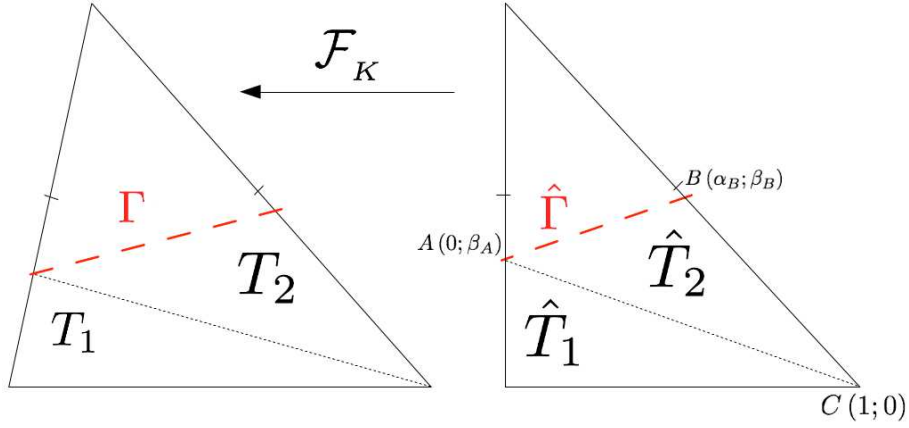


FIGURE 6.4 – Case 2 - Seconde Situation - Découpage et notations

### Seconde Situation

Considérons à présent la seconde configuration (Figure 6.2(b)). Sur  $K_{\text{in}}$ , nous appliquons le Lemme 6.3. Détaillons la partie quadrangulaire  $K_{\text{ex}}$ , notée  $K_i$  dans la suite.

Nous redécoupons  $K_i$  en deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  (comme sur les Figures 6.4 - gauche), respectivement sur l'élément de référence (Figure 6.4 - droite). Sur  $\hat{K}$ , on note A et B les points d'intersection de  $\hat{\Gamma}$  avec les arêtes de  $\hat{K}$ , B étant le point de plus grande ordonnée (on peut toujours supposer que les arêtes coupées sont celles de la Figure 6.4 - droite et que A et B sont dans cet ordre).

**Remarque 6.3.** Contrairement à la Première Situation,  $\hat{T}_2$  n'est pas un triangle fixe, il dépend ici de la position de l'interface. Afin d'utiliser les mêmes arguments et la même démonstration que dans la situation précédente, nous avons besoin de montrer que  $T_2$  vérifie  $|T_2| \geq c|K_i|$  avec  $c$  constante positive indépendante de la position de l'interface.

*Démonstration.* Pour faciliter la démonstration de l'existence d'un tel  $T_2$ , plaçons-nous sur l'élément de référence, avec  $A(\alpha_A, \beta_A)$  et  $B(\alpha_B, \beta_B)$ .

En utilisant les notations fournies dans la Figure 6.4 (droite), nous avons :

- $\beta_B > \beta_A$  et  $|\hat{T}_1| = \frac{\beta_A \times 1}{2}$ ,
- $\alpha_B > \frac{1}{2}$  (B est en-dessous du milieu de l'hypoténuse),
- $\overrightarrow{AB} = (\alpha_B; \beta_B - \beta_A)$  et  $\overrightarrow{AC} = (1; -\beta_A)$ .

Ainsi

$$|\hat{T}_2| = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha_B & \beta_B - \beta_A \\ 1 & -\beta_A \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} (-\alpha_B \times \beta_A + \beta_A - \beta_B) = \frac{1}{2} (\beta_B - \beta_A + \alpha_B \beta_A).$$



Or  $\beta_B > \beta_A$ , donc  $|\hat{T}_2| \geq \frac{1}{2}\alpha_B\beta_A$ .  $B$  est en-dessous du milieu de l'hypoténuse, nous pouvons en déduire que  $|\hat{T}_2| \geq \frac{1}{4}\beta_A = \frac{1}{2}|\hat{T}_1|$ . Nous pouvons ainsi écrire que  $2|\hat{T}_2| \geq |\hat{T}_1|$ . De plus,  $|\hat{K}_i| = |\hat{T}_1 \cup \hat{T}_2| = |\hat{T}_1| + |\hat{T}_2|$ . On obtient  $|\hat{K}_i| \leq 2|\hat{T}_2| + |\hat{T}_2|$ , ie  $|\hat{T}_2| \geq \frac{1}{3}|\hat{K}_i|$ .

Par transformation affine, on aboutit sur  $K$  à la même conclusion :

$$|T_2| \geq \frac{1}{3}|K_i|.$$

□

Enfin, d'après le Lemme 6.3 de Warburton-Hesthaven :

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h|}{|T_2|} \|p_h\|_{0,T_2}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h|}{|T_2|} \|p_h\|_{0,K_i}^2 \leq 3c \frac{|\Gamma_h|}{|K_i|} \|p_h\|_{0,K_i}^2,$$

et on conclut, comme précédemment.

### 6.1.2 Maillage tétraédrique

$\mathcal{H}$  est une famille régulière de maillages  $\mathcal{K}_h$ , constituée de tétraèdres. Nous distinguons trois intersections possibles entre l'interface plane  $\Gamma$  et une cellule  $K$  tétraédrique (Figure 6.5).

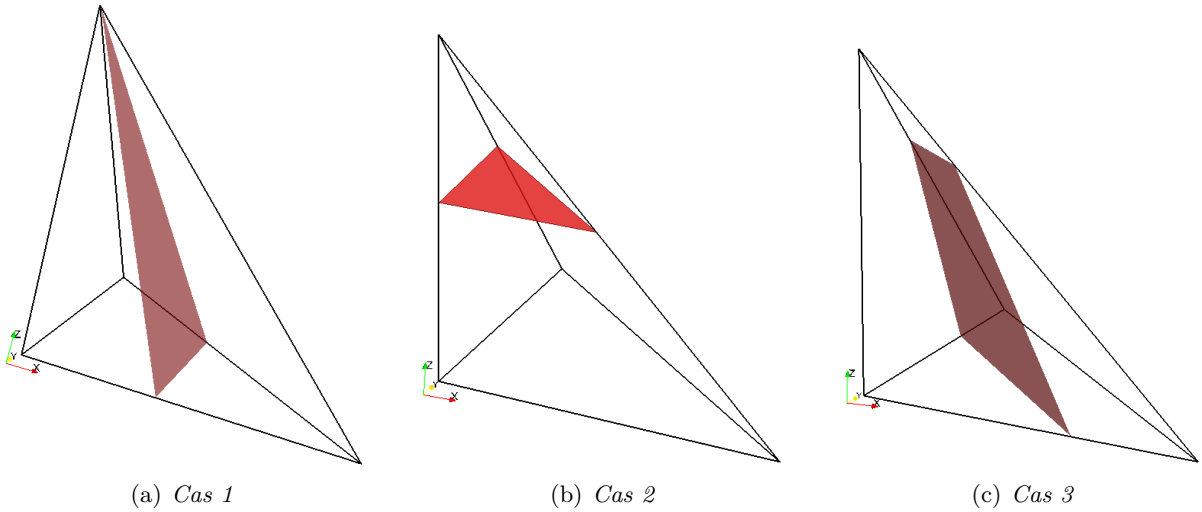


FIGURE 6.5 – Intersections entre une interface plane et une cellule tétraédrique

#### Cas 1 : Tétraèdre - Pyramide

Considérons le **Cas 1** (Figure 6.5(a)) :  $\Gamma$  est un triangle qui passe toujours par un ou deux sommets.  $K_{\text{in}}$  la partie tétraédrique, et pour lequel nous appliquons le Lemme 6.3 ; et  $K_{\text{ex}}$ , noté  $K_i$  dans la suite, est un polyèdre dont le nombre de sommets est toujours quatre ou cinq (selon le nombre de points d'intersection de l'interface coïncidant avec les sommets du tétraèdre  $K$ ).

S'il s'agit d'un volume à quatre sommets, nous sommes en présence d'un tétraèdre (et nous appliquons le Lemme 6.3). Nous traiterons donc l'autre configuration, c'est-à-dire le cas où  $K_{\text{ex}}$  n'est autre qu'une pyramide.

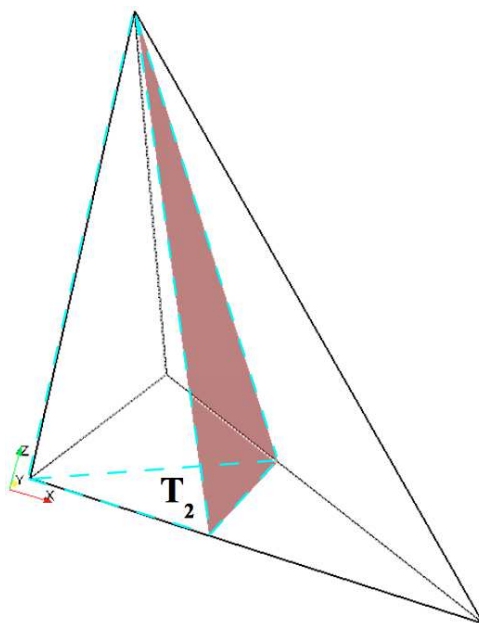


FIGURE 6.6 – Cas 1 - Découpage et notations

Plaçons-nous sur l'élément de référence (Figure 6.6) : cette pyramide  $\hat{K}_i$  a pour base le quadrilatère  $\hat{S}_i$ , dont nous avons vu dans le *Cas Triangulaire 2 - Seconde Situation* qu'il existe le triangle  $\hat{T}_2$  dans cette face  $\hat{S}_i$  tel que

$$|\hat{T}_2| \geq \frac{1}{3}|\hat{S}_i|.$$

Dans le tétraèdre de référence, la hauteur vaut 1. Ainsi le tétraèdre  $\hat{T}$ , ayant pour faces ce triangle  $\hat{T}_2$  et  $\hat{\Gamma}$ , est tel que

$$|\hat{T}| \geq \frac{1}{3}|\hat{K}_i|.$$

Par transformation affine, on a de même

$$|T| \geq \frac{1}{3}|K_i|,$$

où  $T = \mathcal{F}_K(\hat{T})$ .

On conclut comme précédemment.

### Cas 2 : Tétraèdre - Polyèdre

Considérons le **Cas 2** (Figure 6.5(b)) :  $\Gamma$  est un triangle qui ne passe par aucun sommet de  $K$ .  $K_{\text{in}}$  est toujours un tétraèdre et nous appliquons le Lemme 6.3 ; et  $K_{\text{ex}}$ , noté  $K_i$  dans la suite, est un polyèdre à six sommets.

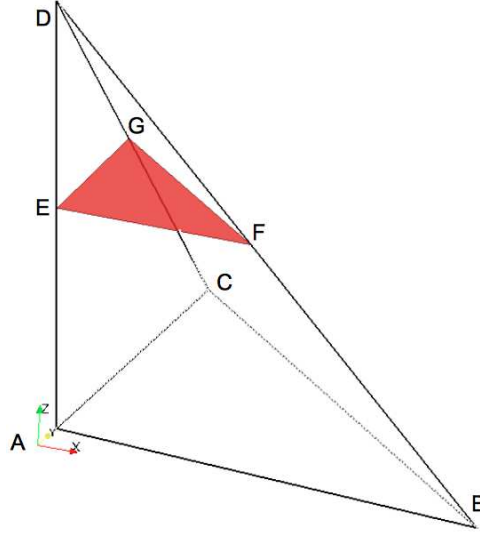


FIGURE 6.7 – Cas 2 - Notations

Comme pour le *Cas Triangulaire 2*, nous distinguons deux situations que nous décrivons dans l'élément de référence. On peut toujours supposer que les trois points d'intersection ne sont pas dans le plan  $\hat{z} = 0$ . La Première Situation correspond au cas où le point d'intersection le plus haut  $\hat{M}(\hat{x}_M, \hat{y}_M, \hat{z}_M)$  vérifie  $\hat{z}_M \geq 1/2$ . La Seconde Situation correspond au cas contraire. Dans les deux situations, nous utiliserons les notations définies dans la Figure 6.7.

### Première Situation

Dans la **Première Situation**, nous allons nous aider des raisonnements fournis dans le *Cas Triangulaire 2 - Première Situation* : dans le tétraèdre de référence, nous pouvons considérer le tétraèdre  $\hat{T}$  dans  $\hat{K}_i$  (composé des sommets A, B, C et le milieu de l'arête coupée se situant dans  $K_i$ ).

Ce tétraèdre est tel que

$$|\hat{T}| = \frac{1}{2}|\hat{K}| > \frac{1}{2}|K_i|.$$

Par transformation affine, on a donc

$$|T| \geq c|K_i|,$$

où  $T = \mathcal{F}_K(\hat{T})$ . Enfin, nous pouvons appliquer la démonstration du *Cas triangulaire Situation 1* pour terminer celle-ci. La constante  $C$  dépendra seulement du degré polynomial  $k$  ainsi que du tétraèdre de référence  $\hat{K}$ .

### Seconde Situation

Pour cette **Seconde Situation**, on rappelle que les trois points d'intersection vérifient sur  $\hat{K}$  :  $\hat{z}_E < 1/2$ ,  $\hat{z}_F < 1/2$  et  $\hat{z}_G < 1/2$ . On suppose que la transformation  $\mathcal{F}_K$  est choisie de manière que  $z_F \geq z_E \geq z_G$ .

Nous avons besoin de prouver qu'il existe un tétraèdre  $\hat{T}$  dans  $\hat{K}_i$  tel que

$$|\hat{T}| \geq c|\hat{K}_i|,$$

avec  $c > 0$  indépendante de la position de l'interface.

*Démonstration.* Posons :

$$|\hat{K}_i| = |\hat{T}_1| + |\hat{T}_2| + |\hat{T}_3|,$$

avec (Figure 6.7)

$$\hat{T}_1 = AEF G \quad \hat{T}_2 = ABC F \quad \hat{T}_3 = AGFC.$$

Dans la face  $ABFE$ ,  $AEF = B_1$  et  $AFB = B'_1$ . Dans la face  $ACGE$ ,  $AEG = B_2$  et  $AGC = B'_2$ .

Comme  $z_F \geq z_E \geq z_G$ , on a vu au paragraphe précédent (cas triangulaire) que  $\frac{|B'_1|}{3} < |B_1|$  et  $\frac{|B'_2|}{3} < |B_2|$ .

On a également  $E(0; 0; \hat{z}_E)$ ,  $F(1 - \hat{z}_F; 0; \hat{z}_F)$ ,  $G(0; 1 - \hat{z}_G; \hat{z}_G)$ , en remarquant que  $1 - \hat{z}_F \geq \frac{1}{2}$  et  $1 - \hat{z}_G \geq \frac{1}{2}$ .

Il vient alors

$$\begin{aligned} |\hat{T}_1| &= \frac{B_2 \times (1 - \hat{z}_F)}{3} = \frac{B_1 \times (1 - \hat{z}_G)}{3}, \\ |\hat{T}_2| &= \frac{B'_1}{3} \leq B_1 \leq 2 \times B_1 \times (1 - \hat{z}_G) \leq \frac{6 \times B_1 \times (1 - \hat{z}_G)}{3} \leq 6|\hat{T}_1|, \\ |\hat{T}_3| &= \frac{B'_2 \times (1 - \hat{z}_F)}{3} \leq B_2 \times (1 - \hat{z}_F) \leq \frac{3 \times B_2 \times (1 - \hat{z}_F)}{3} \leq 3|\hat{T}_1|, \end{aligned}$$

Finalement, on aboutit à

$$|\hat{K}_i| = |\hat{T}_1| + |\hat{T}_2| + |\hat{T}_3| \leq |\hat{T}_1| + 6|\hat{T}_1| + 3|\hat{T}_1| \leq 10|\hat{T}_1|.$$

□

Par retour à l'élément courant, en posant  $T_1 = \mathcal{F}_K(\hat{T}_1)$ , nous obtenons un tétraèdre  $T_1$  dans  $K_i$  pour lequel

$$|T_1| \geq \frac{1}{10}|K_i|.$$

De nouveau, nous pouvons appliquer le raisonnement du cas triangulaire - Seconde Situation pour terminer cette démonstration. Là encore, la constante  $C$  dépendra seulement du degré polynomial  $k$  ainsi que du tétraèdre de référence  $\hat{K}$ .

### Cas 3 : Deux polyèdres

Considérons le **Cas 3** (Figure 6.5(c)) où l'interface est un quadrilatère.  $K_{\text{in}}$  et  $K_{\text{ex}}$  sont alors deux polyèdres comportant chacun six sommets (deux provenant de la cellule  $K$ , quatre provenant de l'interface). Nous détaillons les calculs seulement sur l'un des polyèdres que nous notons  $K_i$  dans la suite.

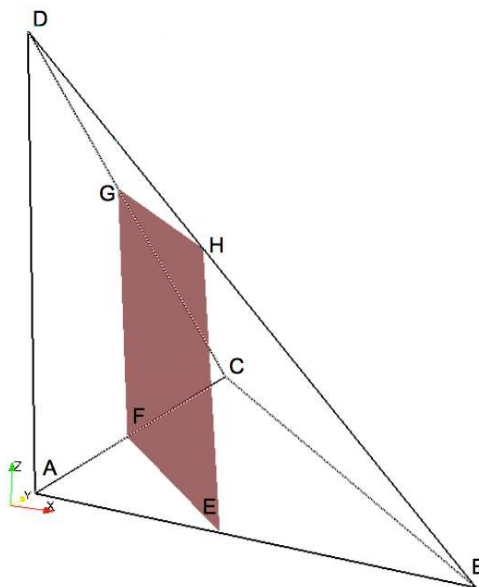


FIGURE 6.8 – Cas 3 - Découpage et notations

Tout d'abord, établissons et démontrons le Lemme suivant.

**Lemme 6.5.** Soit  $K$  un polyèdre à faces planes. Notons :

- $d_K := \max_{x,y \in K} d(x,y)$  le diamètre de  $K$ ,
- $F$  une face quelconque de  $K$ ,
- $a_1, \dots, a_n$  les sommets de  $K$ ,
- $h_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} d(a_i, F)$ .

On a :

$$|K| \leq \pi d_K^2 \times h_{max}. \quad (6.13)$$

*Démonstration.* Onote  $\mathcal{P}$  le plan défini par  $F$ , et  $\Pi_{\mathcal{P}}$  la projection orthogonale de  $K$  sur  $\mathcal{P}$ . Soit  $M \in F$  et por tout  $N \in \Pi_{\mathcal{P}}$ , on a

$$d(M, N) \leq d_K.$$

Notons  $D$  le disque dans  $P$  de centre  $M$  et de rayon  $d_K$ . On a donc  $\Pi_{\mathcal{P}} \subset D$ .

Soit  $a_{i_0}$  le sommet de  $\hat{K}_i$  ayant la plus grande distance au plan  $P$  défini par  $\hat{\Gamma}$ . On a donc  $a_{i_0} = A$  ou  $D$ . On note  $d(a_{i_0}, P) = h_{max}$ .

On considère  $\mathcal{C}$  le cylindre de base  $D$  et de hauteur  $h_{max}$  dans la direction normale à  $P$  et dans le sens de  $K$ . On a  $K \subset \mathcal{C}$ . Il vient :

$$|K| \leq |\mathcal{C}| = |D| \times h_{max} = \pi d_K^2 \times h_{max}.$$

□

Aux vues des raisonnements effectués dans les *Cas* précédents, nous allons découper  $\Gamma$  en deux triangles et construire deux tétraèdres ayant pour bases ces deux triangles. Pour faciliter la démonstration, plaçons-nous sur l'élément de référence  $\hat{K}$  (Figure 6.8) :  $\hat{K}_i = \mathcal{F}_K^{-1}(K_i)$  (formé des sommets  $\Lambda := \{a_1 = A, a_2 = E, a_3 = F, a_4 = G, a_5 = H, a_6 = D\}$ ) est un polyèdre à faces planes dont  $\hat{\Gamma}$  est une de ses faces.

Posons alors

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2,$$

où  $\hat{\Gamma}_1$  et  $\hat{\Gamma}_2$  sont deux triangles disjoints ( $\hat{\Gamma}_1 = FGH$ ,  $\hat{\Gamma}_2 = FEH$ ). Nous définissons  $\hat{T}_1$  par la base  $\hat{\Gamma}_1$  et le sommet  $a_{i_0}$ .

De même, nous définissons  $\hat{T}_2$  par la base  $\hat{\Gamma}_2$  et le même sommet  $a_i$ .

Ainsi :

$$|\hat{T}_1| = \frac{h_{max} \times |\hat{\Gamma}_1|}{3}, \quad |\hat{T}_2| = \frac{h_{max} \times |\hat{\Gamma}_2|}{3}.$$

Il vient alors

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c |\Gamma_h| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}}^2 = c |\Gamma_h| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2}^2 = c |\Gamma_h| \left( \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_1}^2 + \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_2}^2 \right) \leq c |\Gamma_h| \left( \frac{|\hat{\Gamma}_1|}{|\hat{T}_1|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_1}^2 + \frac{|\hat{\Gamma}_2|}{|\hat{T}_2|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_2}^2 \right).$$

c'est-à-dire

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c |\Gamma_h| \left( \frac{3}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_1}^2 + \frac{3}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_2}^2 \right) \leq c \frac{|\Gamma_h|}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_1 \cup \hat{T}_2}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h|}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}_i}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h|}{|K_i| h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Ainsi, il vient, en se souvenant que  $\frac{|K_i|}{|K|} = \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|}$  :

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \frac{|K_i|}{|K|} \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|} \frac{|\Gamma_h|}{|K_i| h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2 \leq c d_K \frac{|K_i|}{|K|} \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|} \frac{|\Gamma_h|}{|K_i| h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

On rappelle que  $|\hat{K}| = \frac{1}{6}$ , donc

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \frac{|\Gamma_h|}{|K|} \frac{|\hat{K}_i|}{h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Or, d'après le Lemme 6.5 :

$$|\hat{K}_i| \leq \pi d_{\hat{K}_i}^2 \times h_{max},$$

avec  $d_{\hat{K}_i} \leq \sqrt{2}$ , ie  $\frac{|\hat{K}_i|}{h_{max}} \leq 2\pi$ . Ainsi, il vient :

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \frac{|\Gamma_h|}{|K|} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Grâce aux hypothèses de régularité du maillage, on obtient finalement

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq C \|p_h\|_{0,K_i}^2$$

où  $C$  dépend seulement du degré polynomial  $k$  ainsi que du tétraèdre de référence  $\hat{K}$ .

## 6.2 Maillages parallélotopes 2D-3D

L'intersection entre une interface rectiligne/plane  $\Gamma$  et une cellule  $K$  rectangulaire (respectivement hexaédrique) donne deux parties polygonales (respectivement polyédrales). On rappelle que l'objectif est d'obtenir une inégalité inverse sur chacune des deux parties, puis d'additionner chaque contribution afin d'aboutir à une inégalité inverse sur la cellule coupée.

Contrairement à la Section 6.1, si l'une des parties est un  $N$ -simplexe, nous ne pouvons plus citer directement les travaux de Warburton-Hesthaven [79] pour obtenir une inégalité inverse puisque dans cette section, nous emploierons seulement des éléments finis  $\mathbb{Q}^k$ . Nous pourrions néanmoins exploiter leurs résultats grâce à la remarque 6.4 suivante.

**Remarque 6.4.**

$$\mathbb{P}^k \subset \mathbb{Q}^k \subset \mathbb{P}^{Nk}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (6.14)$$

où  $N$  est la dimension de l'espace et  $k$  le degré polynomial.

**Remarque 6.5.** En dimension 1 :  $\mathbb{P}^k = \mathbb{Q}^k$ .

Nous utiliserons donc le Lemme suivant :

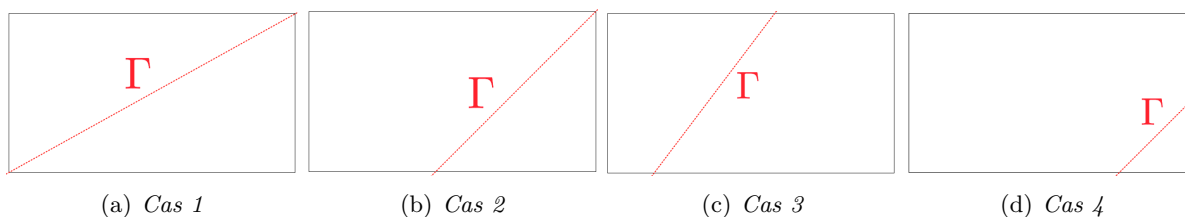
**Lemme 6.6. Inégalité inverse**

Soit  $D$  un  $N$ -simplexe,  $S$  l'une de ses arêtes/faces. On a  $\forall u \in \mathbb{Q}_N^k(D)$  :

$$\|u\|_S \leq \sqrt{\frac{(N \times k + 1)(N \times k + N)}{N} \frac{|S|}{|D|}} \|u\|_D \quad (6.15)$$

À chaque référence à ce Lemme 6.6, nous pouvons affirmer que la constante  $C_I$  dépendra alors du degré polynomial  $k$ , de la dimension  $N$ , ainsi que de l'élément  $D$  sur lequel est établi l'inégalité.

Dans cette partie, nous nous appuyerons et nous adapterons ce Lemme 6.6 aux intersections particulières entre l'interface et une cellule parallélotope.

FIGURE 6.9 – Intersections entre  $\Gamma$  et une cellule quadrangulaire

### 6.2.1 Maillage quadrangulaire

$\mathcal{H}$  est une famille régulière de maillages  $\mathcal{K}_h$ , constituée de quadrilatères. Nous distinguons quatre intersections possibles entre une interface plane  $\Gamma$  et une cellule rectangulaire (Figure 6.9)

#### Cas 1 : Deux triangles

Ce **Cas 1** (Figure 6.9(a)) ressemble un peu au *Cas Triangulaire 1* (Figure 6.1(a)) dans sa configuration.

$K_{\text{in}}$  et  $K_{\text{ex}}$  sont alors deux triangles. On rappelle que l'on utilise des éléments finis  $\mathbb{Q}^k$  en dimension  $N = 2$ . Ainsi en utilisant la remarque 6.4, nous obtenons dans notre cas

$$\mathbb{Q}^k \subset \mathbb{P}^{2k},$$

et nous pouvons ainsi nous référer aux résultats du Lemme 6.6 afin d'établir une inégalité inverse sur chacun des sous-domaines. Plus précisément, la constante de l'inégalité inverse  $C_I$  va dépendre du degré polynomial  $k$ , de la dimension  $N$ , ainsi que de l'élément de référence  $\hat{K}$ .

#### Cas 2 : Triangle - Quadrilatère

Le **Cas 2** (Figure 6.9(b)) possède une partie triangulaire  $K_{\text{in}}$  et une partie rectangulaire  $K_{\text{ex}}$ .

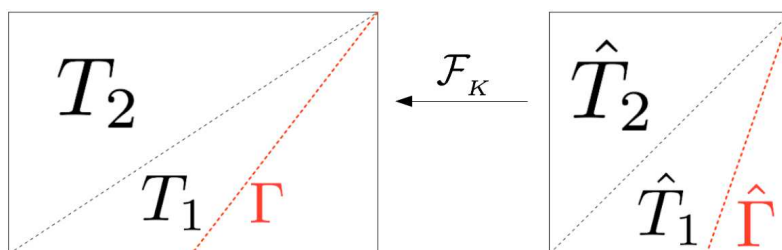


FIGURE 6.10 – Cas 2 - Découpage

Dans la partie quadrangulaire  $K_{\text{ex}}$ , notée  $K_i$  dans ce qui suit, nous pouvons fixer le triangle  $T_2$  indépendant de la position de l'interface et de sorte que (Figure 6.10)

$$2|\hat{T}_2| \geq |\hat{K}_{\text{ex}}|.$$



Nous pouvons ainsi appliquer les raisonnements et les démonstrations établies dans le *Cas Triangulaire 2 - Première Situation*.

Pour la partie triangulaire  $K_{\text{in}}$ , nous utilisons la remarque 6.4 (avec  $N = 2$ ) et nous pouvons ainsi nous référer aux résultats du Lemme 6.3 afin d'établir une inégalité inverse sur la partie triangulaire  $K_{\text{in}}$ .

### Cas 3 : Deux quadrilatères

Le **Cas 3** possède deux parties quadrangulaires (Figure 6.9(c)). Nous ne traiterons qu'un seul des deux, qui sera noté  $K_{\text{ex}}$  de manière arbitraire.

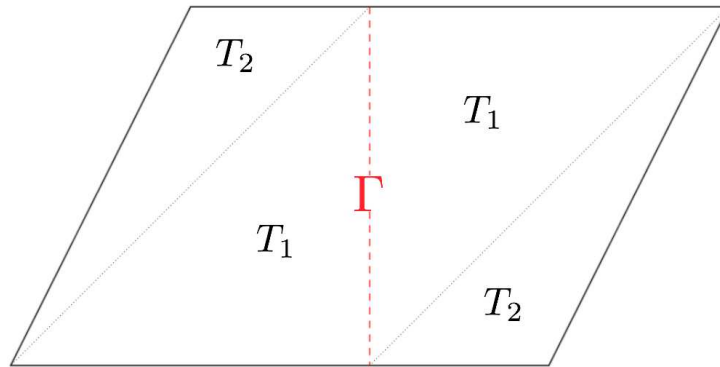


FIGURE 6.11 – Découpage de chaque quadrilatère en deux triangles

Sur  $\hat{K}$ ,  $\hat{K}_{\text{ex}} = \mathcal{F}_K^{-1}(K_{\text{ex}})$  est décomposé en deux triangles  $\hat{T}_1$  et  $\hat{T}_2$  disjoints. Pour cela, on définit  $\hat{T}_1$  en considérant pour côté du triangle  $\hat{\Gamma}$  et la plus grande des arêtes coupées dans  $\hat{K}_{\text{ex}}$ .  $\hat{T}_2$  est le complémentaire dans  $\hat{K}_{\text{ex}}$  (Figure 6.11). De manière évidente  $|\hat{T}_1| \geq |\hat{T}_2|$  et

$$|\hat{K}_{\text{ex}}| = |\hat{T}_1| + |\hat{T}_2| \leq 2|\hat{T}_1|.$$

Si on pose  $T_1 = \mathcal{F}_K(\hat{T}_1)$ , on obtient

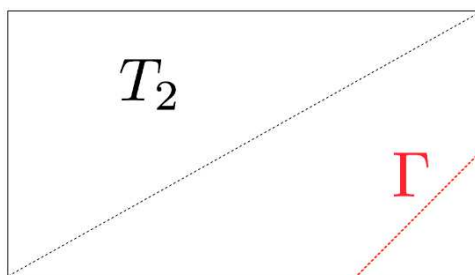
$$|K_{\text{ex}}| \leq 2|T_1|.$$

On conclut par le Lemme 6.6 et l'inégalité ci-dessus.

### Cas 4 : Triangle - Pentagone

Le **Cas 4** possède une partie triangulaire  $K_{\text{in}}$  et une partie pentagonale  $K_{\text{ex}}$  (Figure 6.9(d)).

Le traitement de la partie triangulaire  $K_{\text{in}}$  utilise la remarque 6.4 et le Lemme 6.6 afin d'aboutir à une inégalité inverse.

FIGURE 6.12 – Définition de  $T_2$  dans la partie pentagonale

Quant à la partie pentagonale  $K_{\text{ex}}$ , nous pouvons toujours en extraire le triangle  $T_2$ , fixe et indépendant de la position de l'interface (Figure 6.12), en utilisant les arêtes non-coupées de  $K_{\text{ex}}$ . Notons que la partie  $\hat{K}_{\text{ex}}$  du carré de référence  $\hat{K}$  présente lui-aussi cette extraction.

Ce triangle est  $\hat{T}_2$  est tel que :

$$|\hat{K}| = 2 \times |\hat{T}_2| > |\hat{K}_{\text{ex}}|.$$

On utilise là encore des arguments d'équivalence de normes en dimension finie sur des domaines fixes qui ne dépendent pas de  $\Gamma$ .

### 6.2.2 Maillage hexaédrique

$\mathcal{H}$  est une famille régulière de maillages  $\mathcal{K}_h$ , composée d'héxaèdres. Nous distinguons quatre intersections possibles entre l'interface plane  $\Gamma$  et une cellule hexaédrique (Figure 6.13).

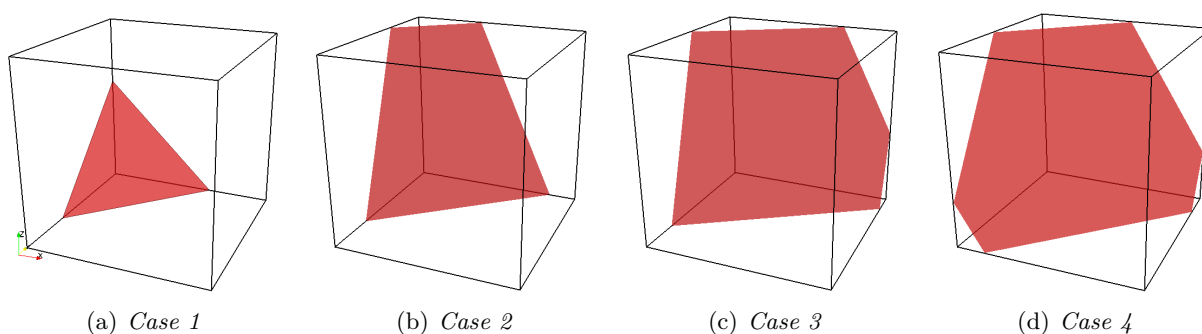


FIGURE 6.13 – Intersection entre un plan et un hexaèdre

#### Cas 1 : Intersection triangulaire

Considérons le **Cas 1** (Figure 6.13(a)) :  $K_{\text{in}}$  est toujours un tétraèdre (quatre sommets) et  $K_{\text{ex}}$  est un polyèdre dont le nombre de sommets varie toujours entre sept et dix (Figure 6.14), en

fonction du nombre de sommets de  $K$  se trouvant sur  $\Gamma$ .

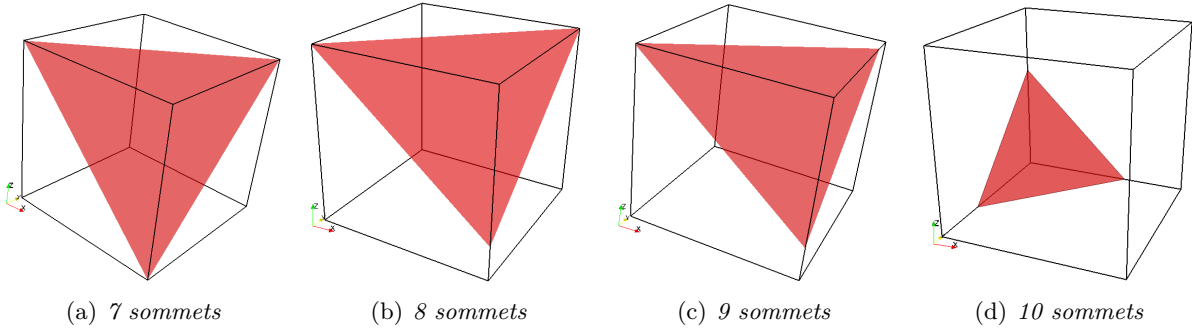


FIGURE 6.14 – Intersections triangulaires possibles

Pour la partie tétraédrale  $K_{\text{in}}$ , nous pouvons utiliser la remarque 6.4 en dimension  $N = 3$  :

$$\mathbb{Q}^k \subset \mathbb{P}^{3k}.$$

Cette propriété nous permet de nous référer au Lemme 6.6 afin d'établir une inégalité inverse sur la partie triangulaire  $K_{\text{in}}$ . Les dépendances de la constante  $C_I$  sont alors liées au degré polynomial  $k$ , à la dimension  $N$ , ainsi qu'à de l'élément de référence  $\hat{K}$ .

Le polyèdre  $K_{\text{ex}}$  pour cette démonstration, est composé au minimum de sept sommets dont toujours quatre appartiennent à la cellule hexaédrique  $K$  (Figure 6.14(a)) et sont non coplanaires. Nous pouvons donc définir le tétraèdre  $T$  avec ces quatres sommets de sorte que :

$$|T| = \frac{1}{6}|K| \geq \frac{1}{6}|K_{\text{ex}}|.$$

On utilise alors l'équivalence de normes en dimension finie, sur des domaines ne dépendant pas de  $\Gamma$ , pour conclure.

## Cas 2 : Intersection quadrangulaire

Considérons le **Cas 2** (Figure 6.13(b)), les volumes obtenus sont des deux polyèdres dont le nombre de sommets de chacun varie entre six et dix (Figure 6.15).

Dans un premier temps, nous pouvons déjà résoudre le cas du polyèdre  $K_{\text{ex}}$  à dix sommets de la Figure 6.15(c). Il correspond à un cas déjà rencontré : quatre de ses sommets appartiennent à la cellule hexaédrique  $K$  et sont non-coplanaires. Nous pouvons donc fixer le tétraèdre  $T$ , indépendamment de la position de l'interface, tel que

$$|T| = \frac{1}{3}|K| \geq \frac{1}{3}|K_{\text{ex}}|$$

En reprenant les démonstrations précédentes, nous aboutissons rapidement à l'existence d'une inégalité inverse, dont la constante  $C$  ne dépend que du degré polynomial  $k$  ainsi que du cube de

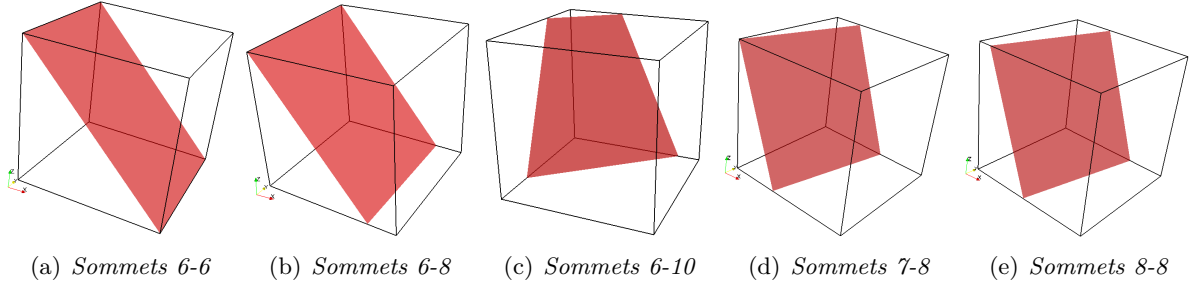


FIGURE 6.15 – Polyèdres possibles

référence  $\hat{K}$ .

Pour tous les autres volumes polyédriques  $K_i$ ,  $i = \{in, ex\}$ , présentés de la Figure 6.15, nous ne pouvons pas procéder de cette façon.

Nous allons alors utiliser le Lemme 6.5<sup>2</sup> et que nous rappelons ici :

**Lemme.** Soit  $K$  un polyèdre à faces planes. Notons :

- $d_K := \max_{x,y \in K} d(x,y)$  le diamètre de  $K$ ,
- $F$  une face quelconque de  $K$ ,
- $a_1, \dots, a_n$  les sommets de  $K$ ,
- $h_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} d(a_i, F)$ .

On a :

$$|K| \leq \pi d_K^2 \times h_{max}.$$

et nous allons reprendre les raisonnements effectués dans le *Cas Tétraédrique 3*.

Plaçons-nous sur le cube de référence pour simplifier certains calculs : chaque  $\hat{K}_i$ ,  $i = \{in, ex\}$ , (formé des  $n$  sommets  $\Lambda := \{a_1, \dots, a_n\}$ ) est un polyèdre à faces planes dont  $\hat{\Gamma}$  est l'une d'entre elles. Considérons deux triangles disjoints sur  $\hat{\Gamma}$  tels que

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2,$$

Nous définissons le tétraèdre  $\hat{T}_1$  par la base  $\hat{\Gamma}_1$  et le sommet  $a_{j_0}$  vérifiant  $d(a_{j_0}, P) = h_{max}$  où  $P$  est le plan défini par  $\hat{\Gamma}$ .

De même, nous définissons  $\hat{T}_2$  par la base  $\hat{\Gamma}_2$  et le même sommet  $a_{j_0}$ .

Ainsi :

$$|\hat{T}_1| = \frac{h_{max} \times |\hat{\Gamma}_1|}{3}, \quad |\hat{T}_2| = \frac{h_{max} \times |\hat{\Gamma}_2|}{3}.$$

Il vient alors

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c |\Gamma_h| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}}^2 \leq c |\Gamma_h| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2}^2 \leq c |\Gamma_h| \left( \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_1}^2 + \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_2}^2 \right) \leq c |\Gamma_h| \left( \frac{|\hat{\Gamma}_1|}{|\hat{T}_1|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_1}^2 + \frac{|\hat{\Gamma}_2|}{|\hat{T}_2|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_2}^2 \right).$$

2. La démonstration de ce Lemme a été présentée en Section 6.1.2 - Cas 3

c'est-à-dire

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c |\Gamma_h| \left( \frac{3}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_1}^2 + \frac{3}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_2}^2 \right) \leq c \frac{|\Gamma_h|}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{T}_1 \cup \hat{T}_2}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h|}{h_{max}} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}_i}^2 \leq c \frac{|\Gamma_h|}{|K_i| h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Ainsi, en utilisant que  $\kappa_i = \frac{|K_i|}{|K|} = \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|}$ , il vient

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \frac{|K_i|}{|K|} \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|} \frac{|\Gamma_h|}{|K_i| h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2 \leq c d_K \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|} \frac{|\Gamma_h|}{h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

On rappelle que  $|\hat{K}| = 1$ , donc

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \frac{|\Gamma_h|}{|K|} \frac{|\hat{K}_i|}{h_{max}} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Or, d'après le Lemme 6.5 :

$$|\hat{K}_i| \leq \pi d_{\hat{K}_i}^2 \times h_{max},$$

avec  $d_{\hat{K}_i} \leq \sqrt{3}$ , ie  $\frac{|\hat{K}_i|}{h_{max}} \leq 3\pi$ . Ainsi, il vient :

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K \frac{|\Gamma_h|}{|K|} \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Grâce aux hypothèses de régularité du maillage, on obtient finalement

$$d_K \kappa_i^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq C \|p_h\|_{0,K_i}^2$$

où  $C$  dépend seulement du degré polynomial  $k$  ainsi que du cube de référence  $\hat{K}$ .

### Cas 3 : Intersection pentagone

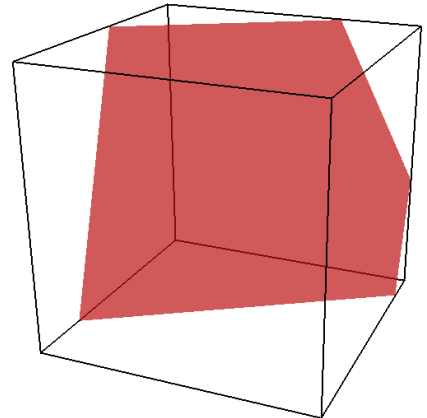
Considérons le **Cas 3** (Figure 6.13(c), rappelé également ci-dessous). Les volumes obtenus sont deux polyèdres :  $K_{in}$  avec huit sommets et  $K_{ex}$  avec dix sommets.

Sur les dix sommets de  $K_{ex}$ , cinq appartiennent toujours à la cellule hexaédrique  $K$  et sont naturellement non coplanaires : nous pouvons donc construire un tétraèdre  $T$ , indépendamment de la position de l'interface.

Ce tétraèdre  $T$  est tel que

$$|T| = \frac{1}{6}|K| \geq \frac{1}{6}|K_{ex}|.$$

En reprenant la démonstration du *Cas 1*, nous aboutissons rapidement à l'existence d'une inégalité inverse sur  $K_{ex}$ , dont la constante  $C_I$  dépend seulement du degré polynomial  $k$  ainsi que du cube de référence

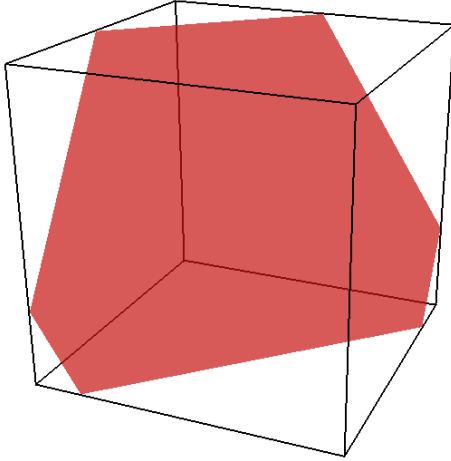


$\hat{K}$ .

Quant à la partie  $K_{in}$ , en nous aidant du Lemme 6.5 ainsi que de la procédure utilisée dans le *Cas 2* précédent, nous aboutissons en découpant  $\Gamma$  en un nombre fixé de triangles, à l'existence d'une inégalité inverse sur  $K_{in}$ , dont les dépendances de la constante  $C_I$  sont elle-aussi liées au degré polynomial  $k$  ainsi qu'au cube de référence  $\hat{K}$

#### Cas 4 : Intersection hexagonale

Considérons le **Cas 4** (Figure 6.13(d), rappelé également ci-dessous). Les volumes obtenus sont deux polyèdres à dix sommets.



Dans chaque polyèdre, quatre de leurs sommets appartiennent toujours à la cellule hexaédrique  $K$  et sont toujours non coplanaires : nous pouvons donc fixer un tétraèdre  $T$ , indépendamment de la position de l'interface et tel que

$$|T| = \frac{1}{6}|K| \geq \frac{1}{6}|K_i|.$$

En reprenant la démonstration du *Cas 1*, nous aboutissons à l'existence d'une inégalité inverse sur chaque sous-domaine  $K_i, i = \{in, ex\}$  dont les constantes  $C_I$  dépendent seulement du degré polynomial  $k$  et du cube de référence  $\hat{K}$ .

### 6.3 Maillages non parallélotopiques

Nous nous intéressons dans cette partie à la configuration précédente prise sur des maillages non parallélotopiques. Pour ce faire, nous nous appuyerons sur les travaux d'HDR de R. Luce [61] et par souci de clarté, nous expliquerons les étapes seulement en 2D (ie  $N = 2$ ) avec des éléments finis  $Q^1$ . L'interface  $\Gamma$  est toujours supposée rectiligne.

Nous avons jusqu'à présent uniquement traité le cas où les transformations, permettant de passer à l'élément de référence, étaient affines. Dans ce cas, les rapports d'aires  $\kappa_{in/ex} = \frac{|K_{in/ex}|}{|K|}$  et  $\hat{\kappa}_{in/ex} = \frac{|\hat{K}_{in/ex}|}{|\hat{K}|}$  sont égaux. Cela n'est pas le cas lorsque les transformations ne sont plus affines.

Dans le cas d'un maillage déformé, une hypothèse de régularité (Hypothèse 6.9) garantit que ces rapports restent proportionnels avec des constantes de proportionnalité indépendantes de la position de l'interface. A l'aide de trois exemples, nous étudions ce que peuvent devenir ces rapports dans le cas où cette hypothèse de régularité n'est pas vérifiée.

### 6.3.1 Distorsion de parallélogrammes

Un quadrilatère non-parallélogramme  $K$ , non-dégénéré de  $\mathbb{R}^2$  (remplissant toujours les conditions de Ciarlet [25]) résulte de la distorsion d'un parallélogramme  $K^\sharp$ .

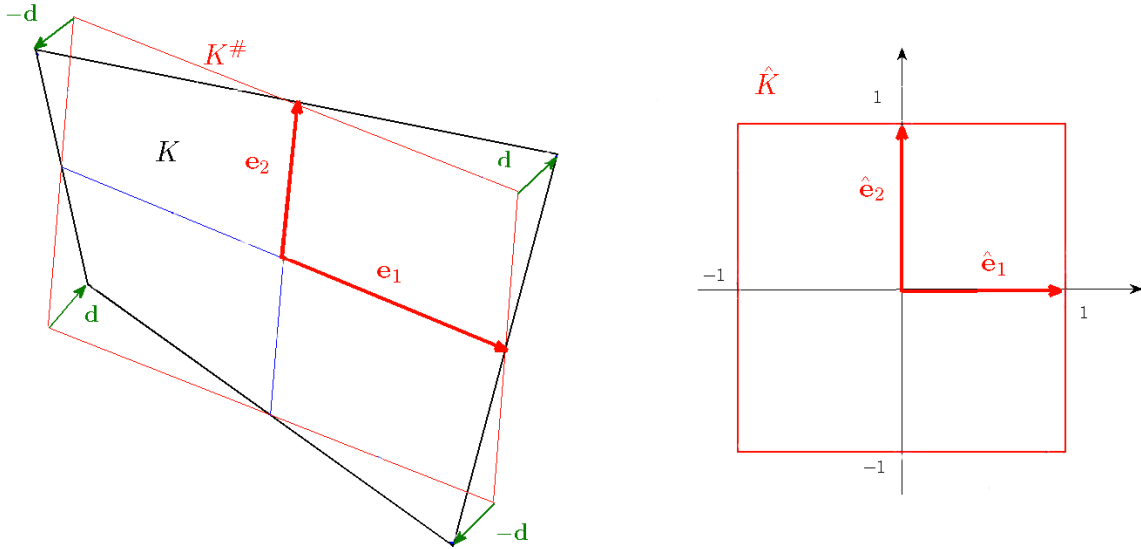


FIGURE 6.16 – Distorsion d'un quadrilatère

Détaillons un instant les notations que nous allons utiliser en s'aidant de la Figure 6.16.

- $\hat{K} = [-1; +1]^2$  le carré de référence,
- $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2$  un élément de  $\hat{K}$ ,
- $\mathcal{F}_K$  une transformation bilinéaire bijective telle  $\mathcal{F}_K(\hat{K}) = K$ ,
- $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

La transformation  $\mathcal{F}_K$  est bilinéaire et s'écrit :

$$\mathcal{F}_K(\hat{x}) = a_0 + B_K \hat{x} + \hat{x}_1 \hat{x}_2 \vec{d}.$$

avec

- $a_0$  le centre (isobarycentre) de  $K$ ,
- $\vec{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$  le vecteur de distorsion, de paramètres de distorsion  $d_1$  et  $d_2$ ,
- $B_K$  est la partie linéaire  $\mathcal{F}_K$  et on pose  $B_K(\hat{e}_i) = e_i$ ,  $i = 1, 2$ .  $(e_1, e_2)$  est une nouvelle base de  $\mathbb{R}^2$ , et  $B_K$  est la matrice de changement de base associée.

La partie  $\mathcal{F}_K^\sharp = a_0 + B_K \hat{x}$  est une application affine et inversible. Elle est une bijection de  $\hat{K}$  dans son image

$$K^\sharp = \mathcal{F}_K^\sharp(\hat{K}).$$

On pose également

$$\vec{d}^\vee = (B_K)^{-1} \vec{d}. \quad (6.16)$$

**Remarque 6.6.** On rappelle que dans nos hypothèses maillage-interface, nous travaillons avec des domaines (cellules) convexes. Cette propriété est conservée sous la condition suivante

$$\sum_{i=1}^2 |\vec{d}_i^\vee| < 1, \quad (6.17)$$

(voir [61]).

En tant qu'image du carré de référence par une bijection affine,  $K^\sharp$  est un parallélogramme.

**Remarque 6.7.** Le parallélogramme associé à  $K$  étant par définition le parallélogramme ayant les mêmes milieux de côtés que  $K$ , on a donc que  $K^\sharp$  est le parallélogramme associé à  $K$  et on a le résultat suivant :  $K^\sharp = K$  si et seulement si  $K$  est un parallélogramme.

$\mathcal{F}_K^\sharp$  préserve les aires. Nous pouvons donc supposer dans cette partie explicative qu'elle vaut l'identité. On s'intéresse alors à :

$$\mathcal{F}_K(\hat{x}) = \hat{x} + \hat{x}_1 \hat{x}_2 \vec{d}. \quad (6.18)$$

Tout point  $x \in K$  peut être exprimé comme suit

$$x = \begin{pmatrix} x_1(\hat{x}) \\ x_2(\hat{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 + \hat{x}_1 \hat{x}_2 d_1 \\ \hat{x}_2 + \hat{x}_1 \hat{x}_2 d_2 \end{pmatrix}$$

On note  $\hat{\Gamma}_h$  l'approximation rectiligne de  $\mathcal{F}_K^{-1}(\Gamma_K)$  coïncidant avec  $\mathcal{F}_K^{-1}(\Gamma_K)$  aux intersections avec les arêtes de  $\hat{K}$ .

Comment peut-on décrire  $\hat{\Gamma}_h$  et son image  $\Gamma_h$  par la transformation  $\mathcal{F}_K$ ? Comme précédemment,  $\hat{\Gamma}_h$  est une droite, que l'on peut paramétrer pour  $s \in [0; 1]$  comme suit

$$\hat{x}_1 = \alpha_1 + s \beta_1, \quad \hat{x}_2 = \alpha_2 + s \beta_2.$$

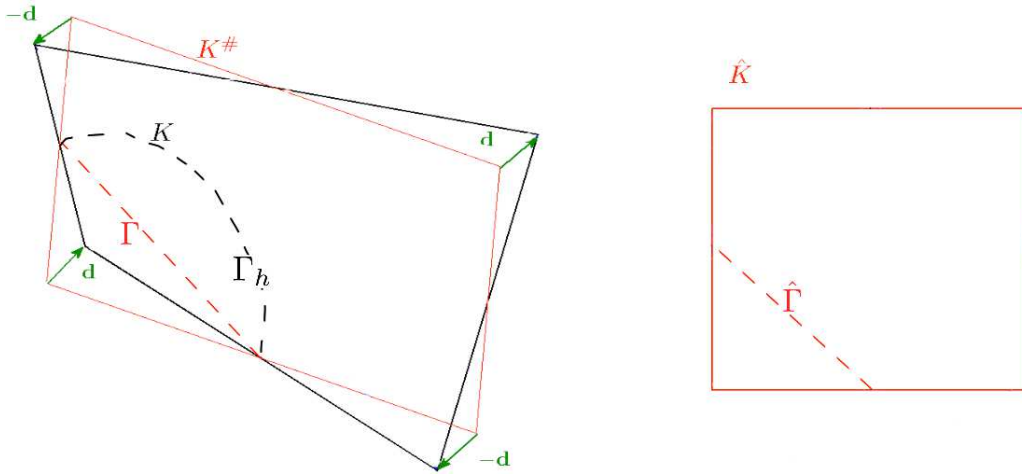
L'image par  $\mathcal{F}_K$  de  $\hat{\Gamma}_h$  est

$$x_1(s) = (\alpha_1 + s \beta_1) + (\alpha_1 + s \beta_1) \times (\alpha_2 + s \beta_2) \times d_1,$$

$$x_2(s) = (\alpha_2 + s \beta_2) + (\alpha_1 + s \beta_1) \times (\alpha_2 + s \beta_2) \times d_2.$$

L'image de la droite  $\hat{\Gamma}_h$  par  $\mathcal{F}_K$  est donc la courbe  $\Gamma_h$ , fonction du paramètre de distorsion  $\vec{d}$ .



FIGURE 6.17 – Distorsion de l'interface  $\Gamma_h$ 

### 6.3.2 Distorsion sur l'interface

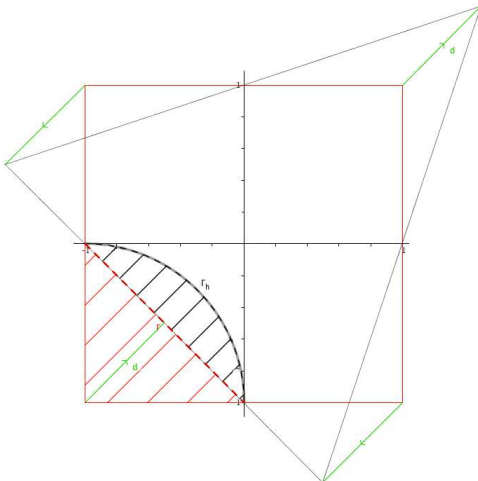
La courbure de l'interface  $\Gamma_h$  étant liée à la distorsion  $d$  du maillage, nous proposons dans cette partie d'étudier quelques situations particulières et d'observer certains comportements entre l'interface rectiligne  $\Gamma$  (dont nous avons fait l'étude au début de chapitre) et son approximation  $\Gamma_h$ .

Dans la suite, plaçons-nous sur  $K^\sharp = \mathcal{F}_K^\sharp([-1; +1]) = [-1; +1]$  dans la Figure 6.17, car  $\mathcal{F}_K^\sharp$  est l'identité. Si on s'affranchit de l'hypothèse de régularité du maillage, certaines mailles peuvent tendre vers l'une des deux premières situations étudiées ci-dessous.

**Remarque 6.8.**  $\mathcal{F}_K^\sharp$  est l'identité : toutes les géométries sont conservées.

La partie affine de la transformation conservant les rapports d'aire, on ne s'intéresse qu'à la partie bilinéaire en supposant que  $\mathcal{F}_K^\sharp = Id$ .

#### Première situation



Pour cette première situation, supposons que  $\Gamma$  est la droite passant par les points  $x_1(-1; 0)$  et  $x_2(0; -1)$ . Alors  $\Gamma$  coupe  $K^\sharp$  en un triangle  $T^\sharp$  et un quadrilatère;  $\Gamma_h$  coupe  $K$  en un arc  $T$  et un autre domaine (voir Figure 6.18). Prenons

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

$\hat{\Gamma}_h$  est la droite, paramétrée pour  $s \in [0; 1]$  par

$$\hat{x}_1 = s - 1, \quad \hat{x}_2 = -s.$$

FIGURE 6.18 – Première situation

L'image par  $\mathcal{F}_K$  (6.18) de  $\hat{\Gamma}_h$  est

$$x_1(s) = (s-1) + \frac{1}{2} \times (s-1) \times (-s) = -\frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{2}s - 1,$$

$$x_2(s) = (-s) + \frac{1}{2} \times (s-1) \times (-s) = -\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s.$$

**Remarque 6.9.** En particuliers, le milieu de  $\hat{\Gamma}$  est transformé en  $(-\frac{3}{8}; -\frac{3}{8})$ .

Ainsi

$$|T^\sharp| + |T| = 1 - \int_0^1 x_1(s) x_2'(s) ds = \frac{2}{3},$$

et en particuliers,  $|T|$  vaut :

$$|T| = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi  $\frac{|T|}{|K|} = \frac{1/6}{4} = \frac{1}{24}$  et  $\frac{|\hat{T}|}{|\hat{K}|} = \frac{1/2}{4} = \frac{1}{8}$ .

### Seconde situation

Supposons que  $\Gamma$  est la droite passant par les points  $x_1(-1; 0)$  et  $x_2(0; -1)$ .  $\Gamma$  coupe  $K^\sharp$  en un triangle  $T^\sharp$  et un quadrilatère ;  $\Gamma_h$  coupe  $K$  en un arc  $T$  et un autre domaine (voir Figure 6.19).

Prenons

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

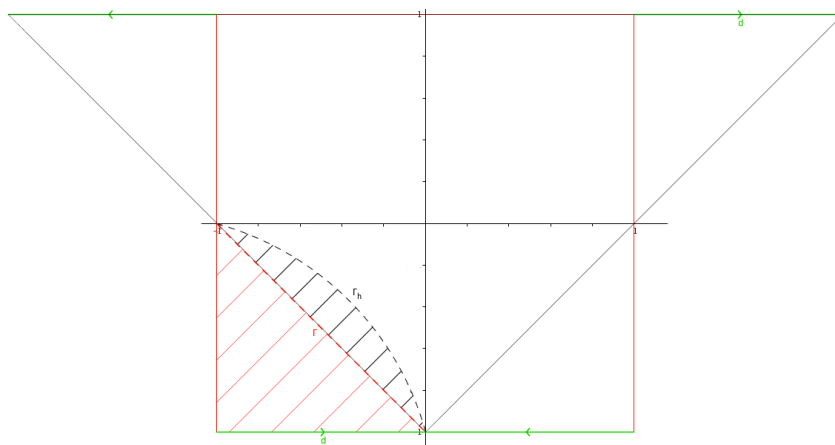


FIGURE 6.19 – Seconde situation

$\hat{\Gamma}_h$  est la droite, paramétrée pour  $s \in [0; 1]$  par

$$\hat{x}_1 = s - 1, \quad \hat{x}_2 = -s.$$

L'image par  $\mathcal{F}_K$  (6.18) de  $\hat{\Gamma}_h$  est

$$x_1(s) = (s-1) + 1 \times (s-1) \times (-s) = -s^2 + 2s - 1,$$

$$x_2(s) = (-s) + 0 \times (s-1) \times (-s) = -s.$$

**Remarque 6.10.** En particuliers, le milieu de  $\hat{\Gamma}_h$  est transformé en  $(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2})$ .

Ainsi

$$|T| + |T^\sharp| = 1 - \int_0^1 x_1(s) x_2'(s) ds = \frac{2}{3},$$

et en particuliers,  $|T|$  vaut :

$$|T| = \frac{1}{6}.$$

On a là encore  $\frac{|T|}{|K|} = \frac{1}{24}$  et  $\frac{|\hat{T}|}{|\hat{K}|} = \frac{1}{8}$ .

### Troisième situation

Cette fois-ci, supposons que  $\Gamma$  est la droite d'équation  $x = -1 + \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .  $\Gamma$  coupe  $K^\sharp$  en un petit rectangle  $T^\sharp$  et un grand rectangle;  $\Gamma_h$  coupe  $K$  en un petit trapèze  $T$  et un grand trapèze (voir Figure 6.20). Prenons

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \beta \end{pmatrix},$$

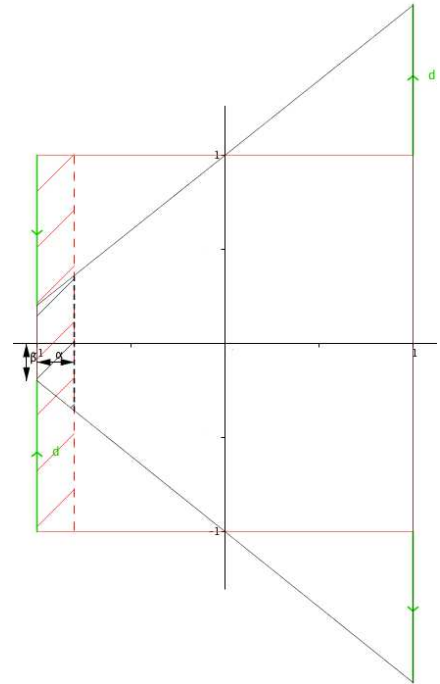
avec  $0 < \beta < 1$ .

On a ici  $\Gamma = \hat{\Gamma}$ , de pour points d'intersection

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'image par  $\mathcal{F}_K$  (6.18) de  $\hat{\Gamma}$  est

$$a = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \\ \beta + \alpha - \alpha\beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \\ -\alpha - \beta + \alpha\beta \end{pmatrix}.$$



**Remarque 6.11.** En particuliers, le milieu de  $\hat{\Gamma}$  est transformé en  $(-1 + \alpha; 0)$ .

FIGURE 6.20 – Troisième situation

L'image par  $\mathcal{F}_K$  de  $\hat{\Gamma}$  est donc une droite, d'équation  $s = -1 + \alpha$ .  $\Gamma_h$  coupe  $K$  en un petit trapèze  $T$  et un grand trapèze (Figure 6.20).

Ainsi

$$|T^\sharp| = 2\alpha, \quad |T| = \frac{\alpha \times (2\beta + 2(\alpha + \beta - \alpha\beta))}{2} = \alpha(\alpha + 2\beta - \alpha\beta).$$

Par exemple, pour  $\beta = \alpha$ , on a :

$$|T^\sharp| = |\hat{T}| = 2\alpha, \quad |T| = 3\alpha^2 - \alpha^3.$$

Cette situation illustre que les rapports  $\kappa_i = \frac{|K_i|}{|K|}$  et  $\hat{\kappa}_i = \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|}$  ne sont plus du même ordre en  $\alpha$ . Il devient alors impossible par passage à l'élément de référence d'obtenir une constante  $C_I$  dans l'inégalité inverse, indépendante de la position de l'interface.

### 6.3.3 Éléments d'analyse

Soient  $\mathcal{H}$  une famille régulière de maillages quadrangulaires déformés, et  $\Gamma$  une interface rectiligne sur chaque maille quadrangulaire déformée  $K$ ,  $\hat{\Gamma}$  est courbe, approchée par  $\hat{\Gamma}_h$  rectiligne sur  $\hat{K}$ .  $\Gamma_h$ , l'image de  $\hat{\Gamma}_h$  par  $\mathcal{F}_K$ , est courbe.

Dans cette nouvelle généralisation, on rappelle que notre but est d'établir la coercivité de la forme bilinéaire 6.4 pour la norme 6.7, en faisant attention aux dépendances de la constante de coercivité  $C$ . En effet, afin de conserver la stabilité et la robustesse de notre méthode, cette constante  $C$  doit être indépendante de la géométrie employée et de la position de l'interface. L'expression de cette constante  $C$  est entièrement liée à l'utilisation d'une inégalité inverse. Il nous faut donc adapter et démontrer l'inégalité inverse 6.2 à cette nouvelle configuration.

Commençons tout d'abord par adapter les hypothèses établies en Introduction de ce Chapitre 6 à notre configuration : celles-ci ne sont appropriées puisque l'interface  $\Gamma_h$  est courbe.

En premier lieu, nous rappelons les hypothèses suivantes concernant la distorsion  $d$  :

**Hypothèse 6.7.** Soit  $d \in \mathbb{R}^2$  le vecteur de distorsion.

On définit  $\vec{d}^\vee$  par l'équation (6.16) et vérifie la condition (6.17).

**Remarque 6.12.** L'hypothèse

$$\|d\| = O(d_K^2), \tag{6.19}$$

est une hypothèse classique lors des études de maillages déformés (voir [25]), elle revient à dire que le maillage tend vers des parallélogrammes quand  $h \rightarrow 0$  et la transformation tend à devenir affine.

Nous préférons nous intéresser quand  $h \rightarrow 0$  à des quadrangles déformés, avec conservation de la distorsion et de la bilinéarité de transformation à chaque niveau de raffinement. De ce fait, nous

ne posons pas l'hypothèse 6.19. Néanmoins, on notera que la distorsion  $d$  est toujours au moins en  $O(d_K)$ .

Nous venons de voir que les rapports  $\kappa_i$  et  $\hat{\kappa}_i$  ne sont plus égaux, alors qu'ils étaient un point important dans nos précédentes démonstrations de l'inégalité inverse. Ce changement provient de la bilinéarité de transformation et plus précisément de sa Jacobienne. En effet, si la Jacobienne  $J_K$  est constante, on a :

$$|K| = \int_K 1 dx = \int_{\hat{K}} |J_K| d\hat{x} = |J_K| \times |\hat{K}|,$$

ce qui nous permet d'obtenir  $|J_K| = \frac{|K|}{|\hat{K}|}$ . De plus

$$|K_i| = \int_{K_i} 1 dx = \int_{\hat{K}_i} |J_K| d\hat{x} = |J_K| \times |\hat{K}_i| = \frac{|K|}{|\hat{K}|} |\hat{K}_i|.$$

D'où

$$\frac{|K_i|}{|K|} = \kappa_i = \frac{|\hat{K}_i|}{|\hat{K}|} = \hat{\kappa}_i.$$

En revanche, si  $J_K$  n'est pas constante, on a en général  $\kappa_i \neq \hat{\kappa}_i$ .

Néanmoins, Ciarlet a établi dans [25] que pour  $\mathcal{H}$  une famille de maillages quadrangulaires régulière :

**Hypothèse 6.8. Hypothèse de régularité**

$\exists c > 0, \forall h > 0, \forall K \in \mathcal{K}_h :$

$$\max_{\hat{K}} |J_K| < c d_K^2, \quad \max_K |J_K^{-1}| \leq \frac{c}{d_K^2}, \quad (6.20)$$

avec  $c$  indépendante du maillage.

En particuliers, nous utilisons le lemme 6.8 pour lier  $\kappa_i$  et  $\hat{\kappa}_i$  de la manière suivante :

**Lemme 6.9.** *Si la famille de maillage  $\mathcal{H}$  est régulière au sens ci-dessus, alors  $\exists c_1, c_2 > 0, \forall K \in \mathcal{K}_h :$*

$$c_1 \hat{\kappa}_i \leq \kappa_i \leq c_2 \hat{\kappa}_i, \quad (6.21)$$

avec  $c_1, c_2$  indépendantes du maillage.

*Démonstration.* On sait que :

$$|\hat{K}| = \int_{\hat{K}} 1 d\hat{x} = \int_K |J_K^{-1}| dx \leq \frac{c}{d_K^2} \times |K|$$

et

$$|K_i| = \int_{K_i} 1 dx = \int_{\hat{K}_i} |J_K| d\hat{x} \leq c d_K^2 \times |\hat{K}_i| \leq c d_K^2 \times \hat{\kappa}_i |\hat{K}|.$$

Ainsi  $\frac{|K_i|}{|K|} \leq c \hat{\kappa}_i$ .

L'autre côté de l'inégalité 6.21 est obtenue de manière similaire.  $\square$

Notons que les résultats de Warburton-Hesthaven généralisé dans le lemme 6.6 ne s'appliquent qu'à des interfaces rectilignes ce qui est encore le cas puisque nous l'utilisons sur l'élément de référence sur lequel l'interface approchée  $\hat{\Gamma}_h$  est rectiligne.

Nous proposons de démontrer l'inégalité inverse 6.2 dans la configuration présentée à la Figure 6.21. On rappelle que l'on utilise des éléments finis  $\mathbb{Q}^1$  ( $k = 1$ ) en dimension  $N = 2$ . Cette situation permet une approximation rectiligne de  $\hat{\Gamma}$ , sans perte d'ordre de convergence. Nous présenterons cette méthode de manière plus générale dans la Section 6.5 suivante.

Plaçons-nous dans la configuration 6.21.  $\hat{K}_{in}$  et  $\hat{K}_{ex}$  sont des triangles à bords droits tandis que  $K_{in}$  et  $K_{ex}$  sont des triangles dont un bord est courbe, à savoir  $\Gamma_h$ .

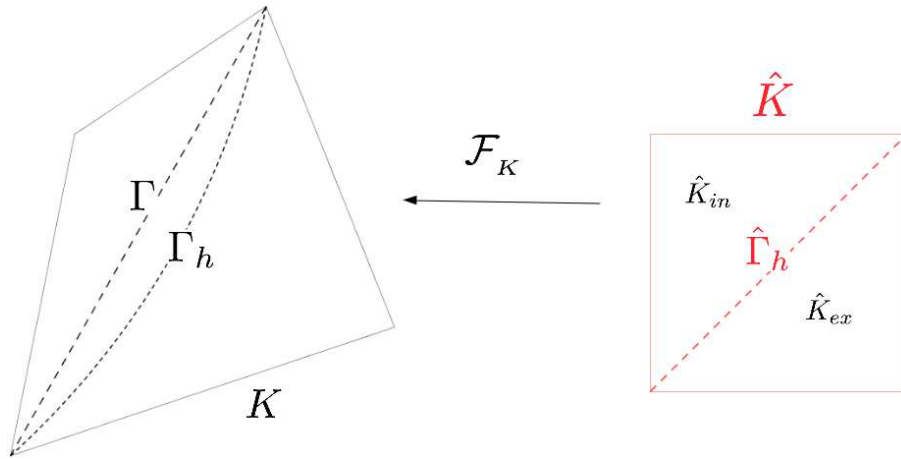


FIGURE 6.21 – Intersections entre  $\Gamma$  et une cellule quadrangulaire déformée  $K$

**Remarque 6.13.** On rappelle que dans cette étude, l'objet  $\hat{\Gamma}_h$  n'est qu'une approximation de  $\hat{\Gamma}$

$$\hat{\Gamma} = (\mathcal{F}_K)^{-1}(\Gamma),$$

et  $\hat{\Gamma}_h$  est son approximation affine, qui coïncide avec  $\hat{\Gamma}$  aux deux extrémités (en  $k + 1$  points). On a alors par définition

$$\Gamma_h = (\mathcal{F}_K)(\hat{\Gamma}_h),$$

qui n'est pas rectiligne car  $\mathcal{F}_K$  est bilinéaire (sauf bien sûr, cas particuliers).

Commençons par la partie  $K_{in}$  : Soit  $p_h$  un polynôme de degré  $k - 1$ . On a par passage à l'élément de référence

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c |\Gamma_h| \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_h}^2,$$

avec  $\hat{\Gamma}_h = \mathcal{F}_K^{-1}(\Gamma_h)$  et  $\hat{p}_h = p_h \circ \mathcal{F}_K$ . D'après le Lemme 6.6, on a :

$$\|\hat{p}_h\|_{0,\hat{\Gamma}_h}^2 \leq c \frac{|\hat{\Gamma}_h|}{|\hat{K}_{\text{in}}|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}_{\text{in}}}^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} d_K \kappa_{\text{in}}^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 &\leq c d_K \kappa_{\text{in}}^2 |\Gamma_h| \frac{|\hat{\Gamma}_h|}{|\hat{K}_{\text{in}}|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}_{\text{in}}}^2 \leq c d_K |\Gamma_h| \kappa_{\text{in}} \hat{\kappa}_{\text{in}} \frac{|\hat{\Gamma}_h|}{|\hat{K}_{\text{in}}|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}_{\text{in}}}^2 \\ &\leq c d_K |\Gamma_h| \frac{|K_{\text{in}}|}{|K|} \frac{|\hat{\Gamma}_h|}{|\hat{K}|} \|\hat{p}_h\|_{0,\hat{K}_{\text{in}}}^2, \end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 6.9. Or  $|\hat{K}| = 1$ , et  $|\hat{\Gamma}_h| < \sqrt{2}$ . Par hypothèse de régularité du maillage (Lemme 6.8), il vient

$$d_K \kappa_{\text{in}}^2 \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq c d_K |\Gamma_h| \frac{|K_{\text{in}}|}{|K|} \frac{1}{|K_{\text{in}}|} \|p_h\|_{0,K_{\text{in}}}^2 \leq c \frac{d_K |\Gamma_h|}{|K|} \|p_h\|_{0,K_{\text{in}}}^2 \leq c \|p_h\|_{0,K_{\text{in}}}^2.$$

En prenant  $p_h = \frac{\partial v_h^{\text{in}}}{\partial x}$  puis  $p_h = \frac{\partial v_h^{\text{in}}}{\partial y}$ , et en procédant de la même manière sur  $K_{\text{ex}}$ , on obtient le résultat avec  $C_I$  qui ne dépend que de l'espace d'approximation ( $\mathbb{Q}^1$  ici), de la dimension d'espace ( $N = 2$  ici) et de  $\hat{K}$ .

On retiendra de cette étude sur un maillage non-parallélépipédique, que l'on pourra utiliser les découpages et démonstrations effectués dans la Section 6.2 précédente. Les arguments employés restent les mêmes sauf celui de l'approximation de  $\hat{\Gamma}$  et celui sur les poids  $\kappa_i$ .

Dans cette généralisation, la remarque 6.13 devient une hypothèse de départ, et nous substituons la propriété  $\kappa_i = \hat{\kappa}_i$  par l'hypothèse 6.9.

## 6.4 Résultats numériques

Avant de présenter des simulations numériques, détaillons la procédure de calculs pour des éléments finis  $\mathbb{Q}^1$  sur des maillages en quadrilatères, comme cela a été fait pour les éléments finis  $\mathbb{P}^1$  sur des maillages triangulaires dans la Section 4.1.

### 6.4.1 Détail de la mise en œuvre en $\mathbb{Q}^1$

Nous avons choisi d'expliquer ces calculs pour une approximation  $\mathbb{Q}^1$  avec des maillages en quadrilatères, par souci de clarté. Cette procédure a été généralisée aux éléments finis  $\mathbb{P}^k - \mathbb{Q}^k$  pour les maillages 2D et 3D.

On note (Figure 6.22) :

- $K$  l'élément courant,
- $\hat{K} = [0, 1]^2$  l'élément de référence,

–  $\mathcal{F}_K$  une  $Q^1$ -transformation bijective telle que  $\mathcal{F}_K(\hat{K}) = K$ .

De plus,  $\forall M \subset K$ , on note :

- $\hat{M} = \mathcal{F}_K^{-1}(M)$ ,
- et  $\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_K|_{\hat{M}}$ .

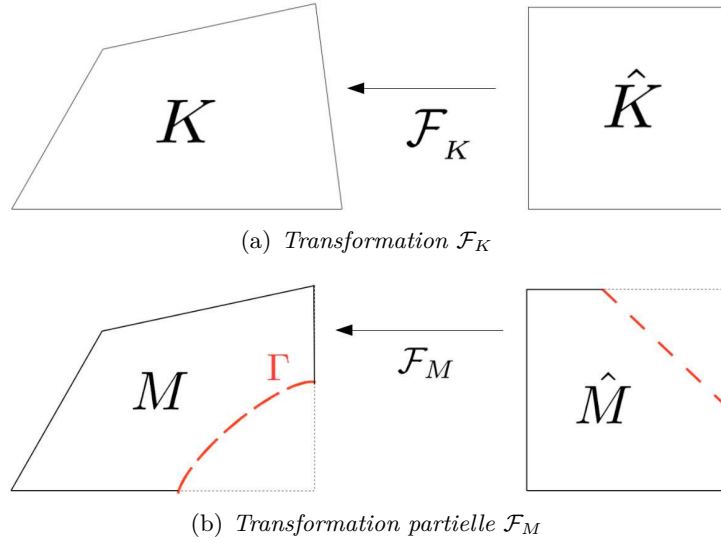


FIGURE 6.22 – Transformation pour maillages quadrangulaires

Nous travaillons dans les espaces éléments finis suivants :

$$CG_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}), v_h|_K \circ \mathcal{F}_K \in \mathbb{Q}^1(\hat{K}) \forall K \in \mathcal{K}_h\}, \quad (6.22)$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$  le degré du polynôme, et

$$\mathbb{V}_h := \{v_h|_{\Omega_{\text{in}}} + w_h|_{\Omega_{\text{ex}}}, \forall v_h, w_h \in CG_h\}. \quad (6.23)$$

Une base élément fini de l'espace  $\mathbb{V}_h$  est obtenue à partir des restrictions à  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\Omega_{\text{ex}}$  d'une base élément fini de  $CG_h$ . Ainsi toute fonction de base de  $CG_h$ , dont le support contient une maille coupée, définit deux nouvelles fonctions de base de  $\mathbb{V}_h$  à savoir ses restrictions à  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\Omega_{\text{ex}}$  : toute maille coupée par la discontinuité devient un support de huit fonctions de base (pour une approximation  $\mathbb{Q}^1$ ).

La première étape de la mise en œuvre est donc de déterminer l'ensemble des quadrangles traversés par  $\Gamma$ . Nous avons supposé qu'une cellule coupée  $K$  était divisée par  $\Gamma$  en deux polygones.

Pour déterminer l'approximation  $\Gamma_h$  de  $\Gamma$  (Figure 6.23) sur un élément coupé  $K$ , nous suivons les étapes suivantes :

1. On détermine  $\Gamma \cap \partial K = \{a_1, a_2\}$ ,
2. Sur  $\hat{K}$ , on a alors  $a_i = \mathcal{F}_K(\hat{a}_i)$ , pour  $i = \{1, 2\}$ ,



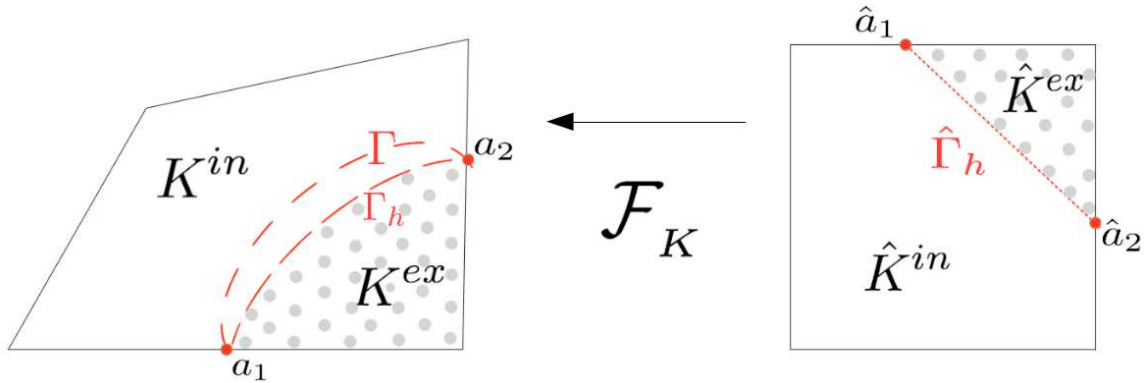


FIGURE 6.23 – Transformation et notations

3. On définit l'approximation rectiligne sur  $\hat{K}$  de  $\mathcal{F}_K^{-1}(\Gamma_K) : \hat{\Gamma}_h = [\hat{a}_1, \hat{a}_2]$ ,
4. On pose  $\Gamma_h = \mathcal{F}_K(\hat{\Gamma}_{K,h})$

La principale difficulté dans cette approche réside dans l'évaluation numérique des intégrales des formes bilinéaire (2.14) et linéaire (2.15) sur les éléments coupés ainsi que le long de la discontinuité. Pour cela, nous avons construit des formules d'intégration numérique sur chaque polygone et sur l'interface. Ce processus nous permet ainsi d'utiliser les techniques d'assemblage classiques des méthodes des éléments finis.

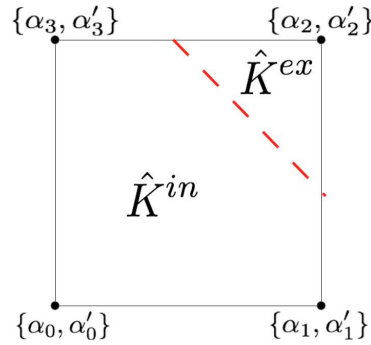


FIGURE 6.24 – Répartition des ddl

Pour tout  $v_h \in \mathbb{V}_h$ ,  $v_h|_{\Omega_{in}}$  est décomposée en utilisant les fonctions de base dont le support est dans  $\Omega_{in}$ , et respectivement  $v_h|_{\Omega_{ex}}$  est décrite en utilisant celles dont le support est dans  $\Omega_{ex}$ . Dans un élément coupé  $K$ ,  $v_h$  peut être exprimée comme suit :

$$v_h|_{K^{in}} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi_i|_{K^{in}}, \quad v_h|_{K^{ex}} = \sum_{i=1}^4 \alpha'_i \varphi_i|_{K^{ex}}, \quad (6.24)$$

où  $\varphi_i$  pour  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  sont les fonctions de bases de  $CG_h$  dont le support contient  $K$ . De ce fait, afin de définir  $v_h$  sur une cellule coupée, nous avons besoin de huit degrés de liberté

$\alpha_i$  et  $\alpha'_i$  pour  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  (Figure 6.24).

Afin d'obtenir une formule d'intégration sur chacun des polygones de  $\hat{K}$ , chacun d'entre eux a été découpé en triangles (Figure 6.25).

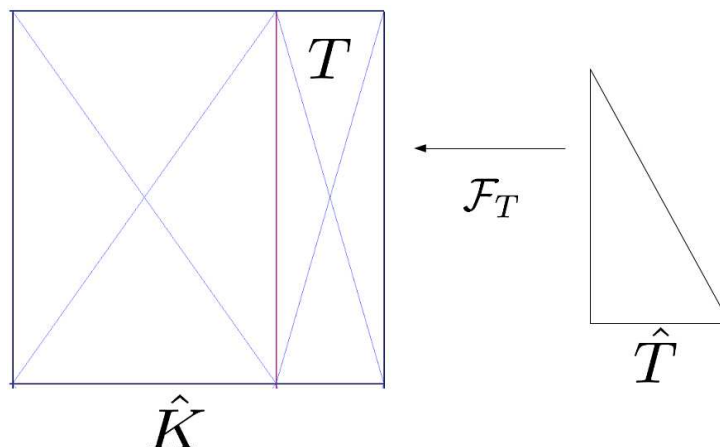


FIGURE 6.25 – Redécoupage en triangles

Nous avons ensuite utilisé une formule de quadrature pour évaluer toutes les intégrales sur le triangle de référence  $\hat{T}$ . Quant aux intégrales d'interface, nous avons utilisé des quadratures de Gauss.

Cette procédure est généralisée pour une interface courbe  $\Gamma$ , et pour des éléments finis d'ordre  $k$  quelconque.

### Maillage adaptatif et nœuds suspendus

Considérons à présent  $\mathcal{H}$  une famille régulière de maillages de quadrilatères localement raffinée et présentant des nœuds suspendus (*Hanging Node*).

Nous rappelons que nous avons imposé aux algorithmes de raffinement la condition qu'au plus un nœud suspendu est présent sur chaque bord (voir Section 1.2.3). Nous pouvons toujours nous ramener à cette situation, sans détruire la complexité linéaire global de l'algorithme de raffinement (voir [16]).

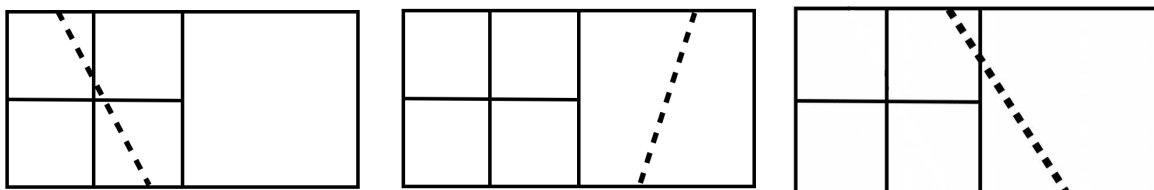


FIGURE 6.26 – Cellule quadrangulaire avec nœuds suspendus

La définition de  $\mathbb{V}_h$  (6.23) implique une certaine prudence sur la mise en œuvre dans le cas des cellules coupées voisines d'un nœud suspendu (voir Figure 6.26). Dans le premier cas du schéma 6.26, l'interface traverse un quadrilatère raffiné, dans le second cas, un voisin grossier d'un quadrilatère raffiné, et un quadrilatère raffiné avec son voisin grossier dans le dernier cas (Figure 6.26).

Afin de garantir la continuité de chaque fonction  $v_h$  de  $\mathbb{V}_h$  sur  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\Omega_{\text{ex}}$ , nous utilisons une interpolation linéaire pour les nœuds suspendus.

Pour déterminer la valeur au nœud suspendu, selon sa position dans  $\Omega$ , nous utilisons seulement les degrés de liberté des  $v_h$  associés au même sous-domaine. Pour la résolution en  $\mathbb{Q}^1$  (ou  $\mathbb{P}^1$ ), il n'y a qu'une seule contrainte à imposer pour chaque face contenant un nœud suspendu : celle du raccord continu en ce nœud. Selon la configuration (Figure 6.26), un nœud suspendu peut être doublé. Une contrainte doit être également imposée sur ce dernier, en adéquation avec le raccord continu le long de la face auquel il appartient.

Le nombre de contraintes à imposer augmente avec l'ordre d'approximation  $k$  et varie selon le type d'approximation. De manière générale, ces contraintes sont imposées via une matrice d'interpolation générique.

En ce qui concerne l'estimateur d'erreur *a posteriori* est identique à celui obtenu dans le cas de maillages triangulaires 3.17. De plus, le théorème 3.2 reste vrai.

### Implémentation à l'ordre $k$ et implémentation 3D

Sur des maillages N-simplexes et parallélotopes, les outils et raisonnements développés pour la montée en ordre sont identiques à ceux exposés précédemment.

Concernant l'implémentation du 3D, on précisera d'ailleurs qu'une très grande partie du code est commune en 2D et 3D. Par exemple, les aspects géométriques (tracé de la discontinuité, marquage des cellules coupées, doublage des degrés de liberté, ...) ainsi que les intégrateurs sont génériques et s'adaptent à la dimension, tout comme les formules d'intégration sur les volumes  $K_{\text{in}}$  et  $K_{\text{ex}}$ . En revanche, pour le traitement de la discontinuité, il a fallu redécouper en triangles le polygone d'intersection de la discontinuité avec chaque hexaèdre (à noter que les sommets de ce polygone ne sont pas coplanaires)...

La procédure de raffinement local des mailles 3D (indépendamment de la méthode NXFEM) est longue et complexe : choix de la re-numérotation des cellules, des faces et des arêtes, gestion des voisins à gauche, à droite ... À ce jour, nous n'avons pas encore fini de l'implémenter et nous ne sommes donc pas en mesure de vous proposer de tests numériques pour ces maillages hexaédriques localement raffinés.

#### 6.4.2 Maillages N-simpliciaux et parallélotopes

Nous proposons dans cette partie

- Un test de comparaison, basé sur une généralisation du test de validation utilisé dans la Partie I - Section 4.2, pris cette fois-ci pour tout polynôme de degré  $k$  en dimension 2 et 3,
- Un test de l'estimateur d'erreur, basé sur une généralisation du test de l'estimateur d'erreur utilisé dans la Partie I - Section 4.4, pris cette fois-ci sur un maillage quadrangulaire en  $\mathbb{Q}^1$ .

### Tests de comparaisons

Considérons le problème (1.1) avec une interface plane  $\Gamma$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.25)$$

Les données sont choisies de sorte que la fonction définie par

$$u(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \frac{x_1^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } x_1 \leq x_0 \\ \frac{x_1^{2k} - x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.26)$$

soit une solution exacte pour tout choix du degré  $k$  du polynôme d'approximation,  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ .

Nous fixons  $x_0 = 0.71$  sur  $\Omega = ]0, 1[^N$  ( $N = 2$  en 2D,  $N = 3$  en 3D),  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$ . Les conditions de bord sont de type Dirichlet, traitées toujours de manière faible dans la formulation, le second membre de 10.15 est  $f = -4$ .

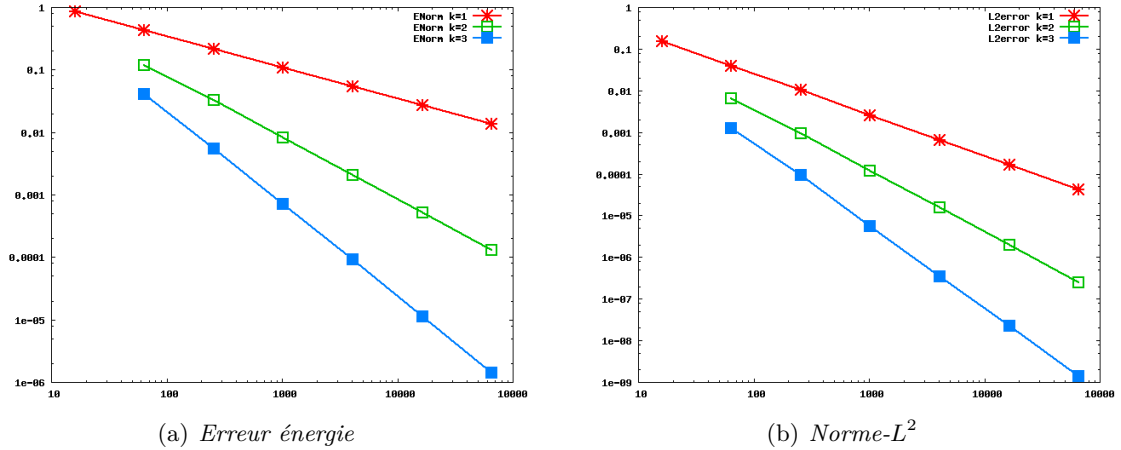
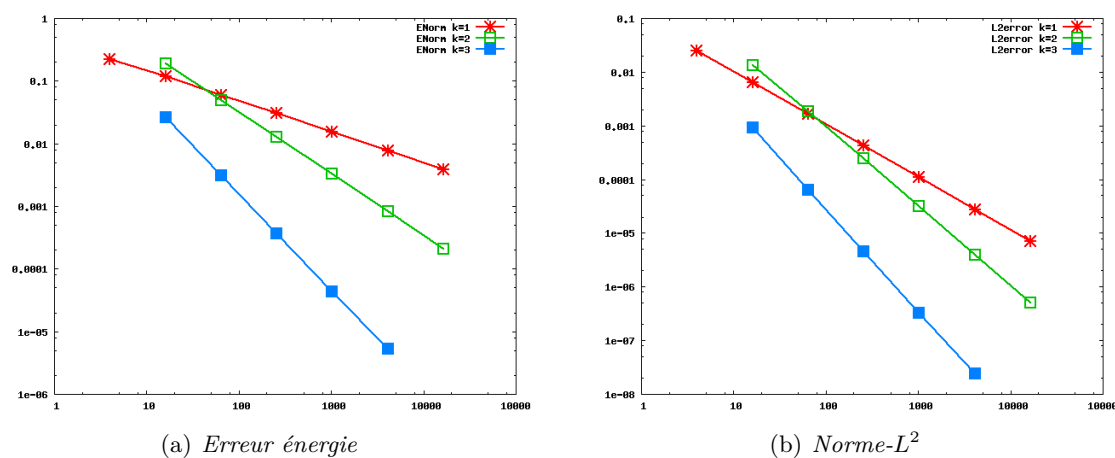
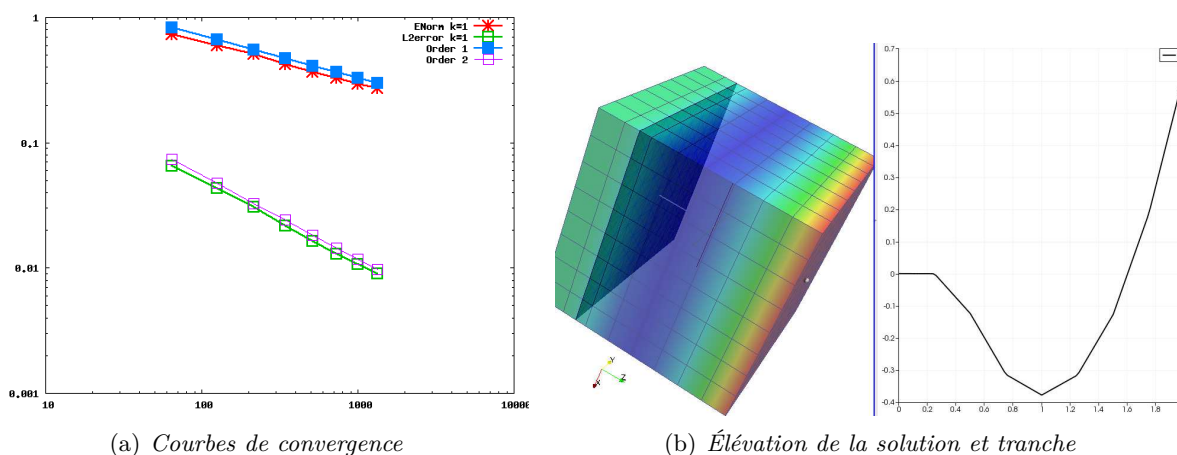


FIGURE 6.27 – Courbes de convergence en  $\mathbb{P}^k$  pour maillage CC

Comme précédemment, nous proposons de comparer la norme énergie (3.12) ainsi que la norme- $L^2$  au moyen de leurs courbes de convergence, représentées ci-après pour chaque degré polynomial  $k$ , sur un maillage CC (Figure 6.27), sur un maillage quadrangulaire cartésien (Figure 6.28) et sur un maillage hexaédrique (Figure 6.29), tous uniformément raffinés. Les simulations suivantes ont été effectuées en utilisant la formulation (3.11) pour les paramètres de stabilisation et les  $\kappa_{\text{in/ex}}$ .

FIGURE 6.28 – Courbes de convergence en  $\mathbb{Q}^k$  pour maillage quadrangulaireFIGURE 6.29 – Résolution en  $\mathbb{Q}^k$  pour maillage hexaédrique

Nous avons également utilisé le problème 10.15 pour tester la robustesse en fonction de la position de l'interface, sur des géométries déformées et pour différents degrés de polynômes  $k$ . Nous sommes arrivés aux mêmes analyses et conclusions que celles obtenues pour le  $\mathbb{P}^1$ .

### Test de l'estimateur d'erreur

Reprenons le problème modèle 6.25, ainsi que la solution exacte 7.8 précédents.

Nous avons testé cette simulation pour les maillages triangulaires (en Section 4.4), nous la généralisons ici en proposant de comparer le comportement de l'erreur énergie et celui de l'estimateur sur un raffinement global et uniforme d'un maillage quadrangulaire. Puis à partir d'une procédure adaptative, nous comparons la répartition des cellules en fonction de la méthode utilisée (méthode élément fini classique, méthode NXFEM).

Nous utiliserons pour ce test des méthodes éléments finis de degré 1.

### Raffinement uniforme

Pour un raffinement uniforme d'un maillage en quadrilatères (les choix de procédure de raffinement de tels maillages sont détaillés en Introduction - voir 1.2.3), nous remarquons que le comportement de convergence de l'estimateur est similaire à celui de l'erreur énergie, comme le montre la Figure 6.30.

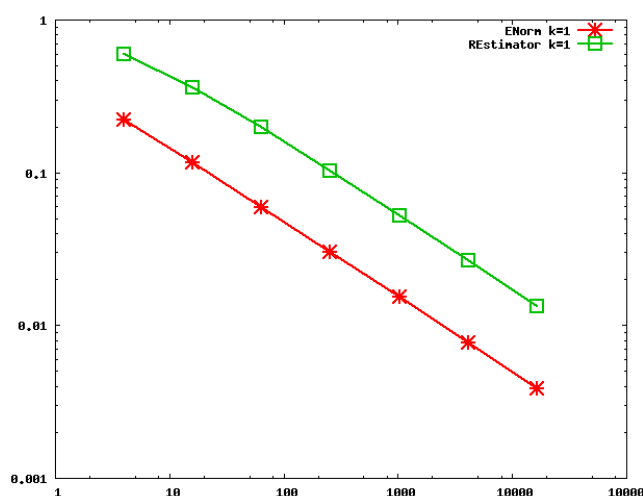


FIGURE 6.30 – Courbes de convergence pour un maillage quadrangulaire uniformément raffiné

### Raffinement adaptatif

La solution du problème 6.25 ne comporte pas de singularité en dehors de  $\Gamma$ . Ainsi, si la singularité le long de  $\Gamma$  est bien prise en compte, l'estimateur doit marquer et raffiner seulement les cellules du maillage pour lesquelles la solution présente le plus de variations (la solution étant régulière sur  $\Omega_{in}$  et  $\Omega_{ex}$ ).

Pour une méthode EF classique, la singularité le long de  $\Gamma$  engendre un nombre de raffinements suivant la discontinuité.

Nous aboutissons aux mêmes conclusions que pour les simulations  $\mathbb{P}^1$  de la Section 4.4.2 : les Figures 6.31 présente un raffinement adaptatif d'un maillage quadrangulaire cartésien, utilisant une méthode élément fini classique. On remarque que la procédure concentre le raffinement autour de la discontinuité (Figure 6.31(a)). En effet, la solution n'est pas dans  $H^2(K)$  pour les mailles  $K$  coupées, cela engendre des discontinuités du gradient qui ne sont pas correctement approchées sur les cellules coupées. Les courbes de convergence 6.31(b) confirment cette analyse. La référence [55] présente cette même simulation avec la méthode XFEM.

En revanche, en utilisant la méthode NXFEM ainsi que l'estimateur (3.17) pour adapter le maillage, les dérivées normales sont correctement approchées sur les éléments coupés, amenant

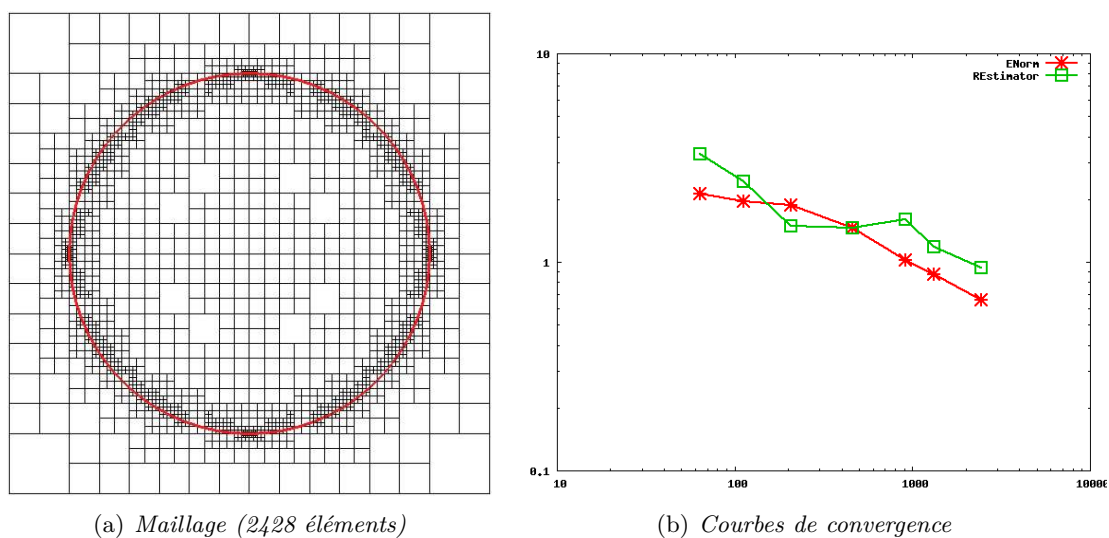


FIGURE 6.31 – Raffinement adaptatif avec une méthode EF classique

ainsi le maillage à être uniformément raffiné dans  $\Omega_{\text{in}}$  (comme le montre la Figure 6.32(a)). Nous retrouvons les mêmes ordres de convergence (Figure 6.32(b)) que pour le raffinement uniforme des maillage triangulaires et quadrangulaires, et que pour le raffinement adaptatif des maillages triangulaires [6]. s

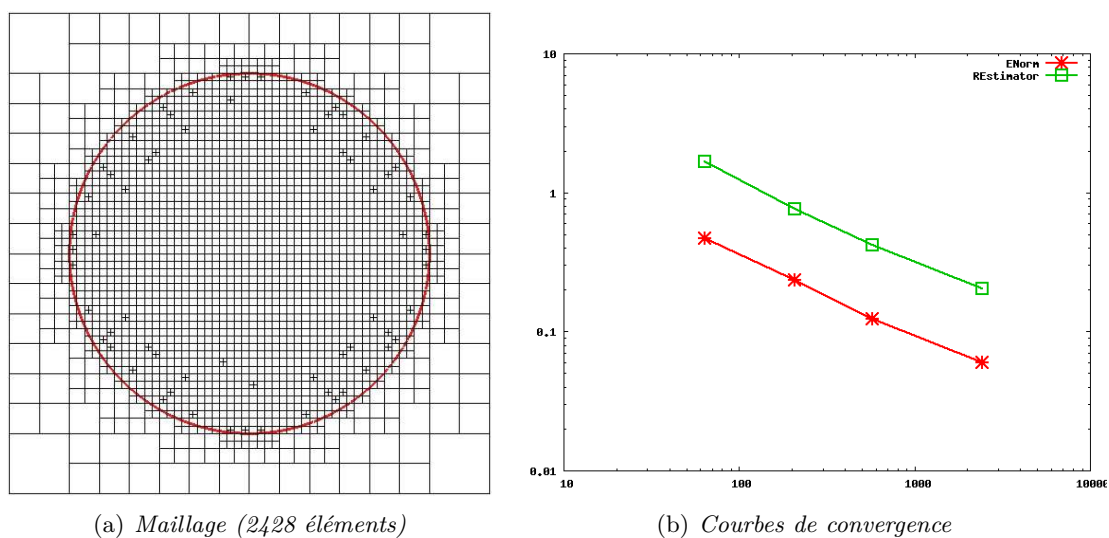


FIGURE 6.32 – Raffinement adaptatif avec NXFEM

### 6.4.3 Maillages non parallélotopiques

La robustesse de la formule 3.11 que nous avons proposée a été testée pour des maillages triangulaires, sur lequel nous avons fait varier la position de l'interface (Section 4.3). Nous avons

ainsi illustré que notre formulation demeurerait robuste par rapport à la géométrie et au paramètre de diffusion. Ce même test a également été réalisé avec des éléments finis  $\mathbb{P}^k$ - $\mathbb{Q}^k$  continus avec une interface plane dans la Section 6.4. Nous avons abouti aux mêmes conclusions.

Nous proposons ici de renforcer les analyses précédentes au moyen d'un test effectué avec des éléments finis  $\mathbb{Q}^1$  mais sur des maillages quadrangulaires "déformés" (voir 1.2.3), afin de mettre en évidence la bonne prise en compte de la bilinéarité des transformations  $\mathcal{F}_K$  sur des cellules coupées.

### Tests de robustesse

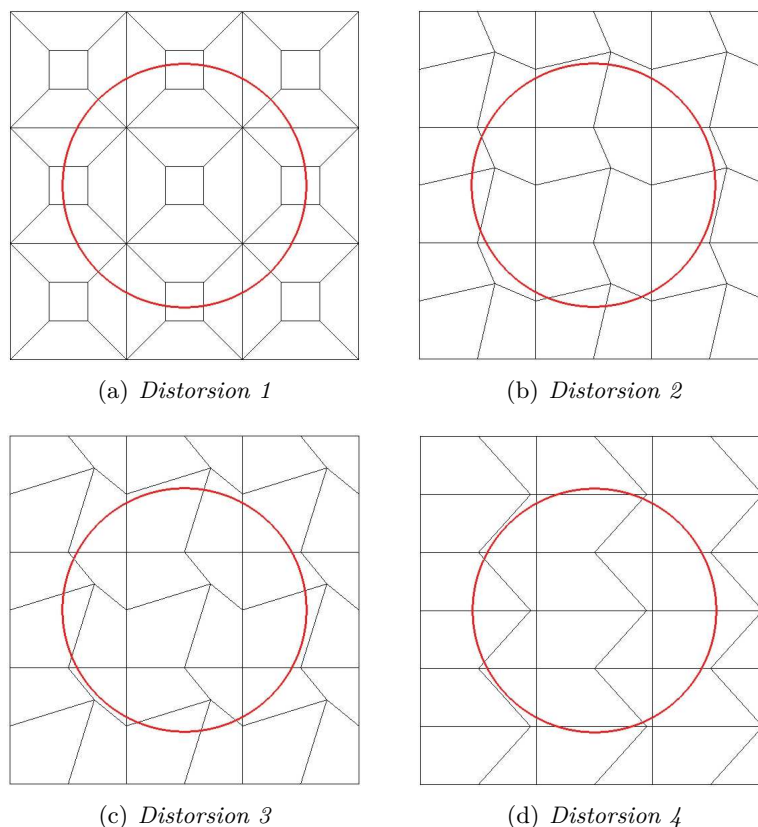


FIGURE 6.33 – Maillages quadrangulaires déformés

Reprenons l'exemple 2D issu de l'article [53] dont la solution exacte est donnée par :

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^2 - r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.27)$$

avec  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ , plaçons-nous sur le domaine  $\Omega = ]-1, 1[^2$ , fixons  $r_0 = 0.75$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et



$\mathfrak{R}_{\text{ex}} = 1000$ . Les conditions de bord sont de type Dirichlet, le second membre vaut  $f = -4$ .

Les maillages utilisés dans ces essais ont été présentés en Introduction (Figure 6.22). La Figure 6.33 illustre la superposition de la discontinuité sur ces maillages déformés.

**Remarque 6.14.** *Notons que la procédure de raffinement uniforme standard - qui consiste à raffiner en se joignant au milieu des côtés - crée des maillages successifs dans lesquels tous les éléments tendent à devenir des parallélogrammes. La transformation  $\mathcal{F}_K$  tend alors à devenir affine. Afin de maintenir la déformation des mailles quadrangulaires à chaque niveau de raffinement, nous avons reproduit le même motif à des échelles différentes.*

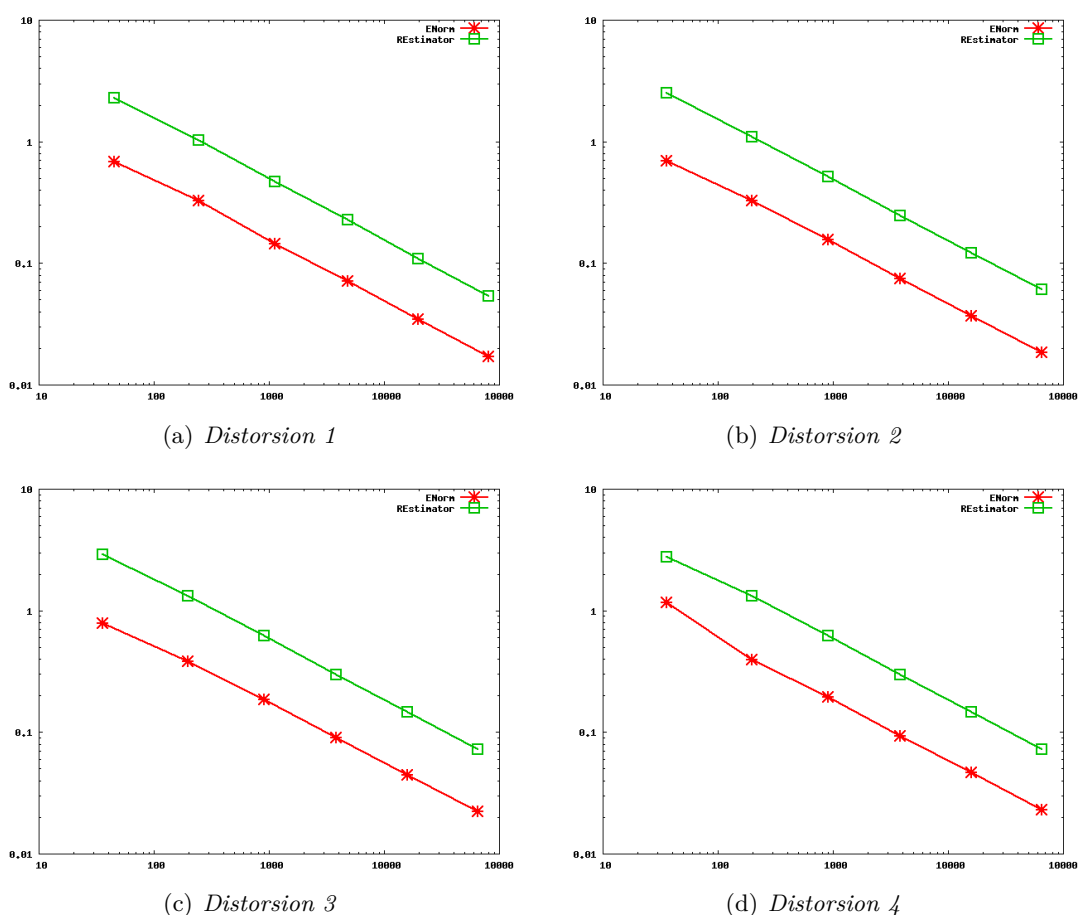


FIGURE 6.34 – Courbes de convergence sur les maillages déformés uniformément raffinés

Les courbes de convergences de l'estimateur  $REstimator$  (équation de  $\eta_h$  3.17) et de l'erreur énergie  $ENorm$  (équation de  $e_h$  3.12) sont présentées dans la Figure 6.34. Celles-ci confirment nos précédentes conclusions : la solution que nous avons choisie présente un raccord de la solution et de son flux le long de l'interface. De plus, la discontinuité est correctement approchée. De ce fait, nous devons retrouver l'ordre de convergence optimal, à savoir celui que l'on obtient

avec une méthode éléments finis classique (ordre 1 pour la norme énergie  $ENorm$ ). L'estimateur  $REstimator$  a le même comportement que la norme énergie.

**Remarque 6.15.** *L'erreur- $L^2$  a également été calculée, et nous retrouvons l'ordre de convergence optimal (ordre 2).*

#### 6.4.4 Interface courbe

Précisons que d'un point de vue programmation, la prise en compte d'une interface courbe et d'une interface rectiligne/plane s'effectue de manière identique : les aspects géométriques (tracé de la discontinuité, marquage des cellules coupées, doublage des degrés de liberté, ...) ainsi que les intégrateurs ont été conçus de manière générique, et seules les formules d'intégration sur les sous-domaines et le long de l'interface sont spécifiques et adaptées à chaque cas

Pour confirmer nos hypothèses, nous avons généralisé le cas-test proposé par Hansbo-Hansbo [53]. Les données sont choisies de sorte que la fonction définie par :

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^4}{\kappa_{\text{in}}} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^4 - r_0^4}{\kappa_{\text{ex}}} + \frac{r_0^4}{\kappa_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.28)$$

soit une solution exacte pour un degré 2 du polynôme d'approximation. Nous fixons  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $\Gamma$  est un cercle),  $r_0 = 0.74$ ,  $\kappa_{\text{in}} = 1$  et  $\kappa_{\text{ex}} = 1000$  et plaçons-nous sur le domaine  $\Omega = ]-1, 1[^2$ . Les conditions de bord sont de type Dirichlet, le second membre vaut  $f = -4$ .

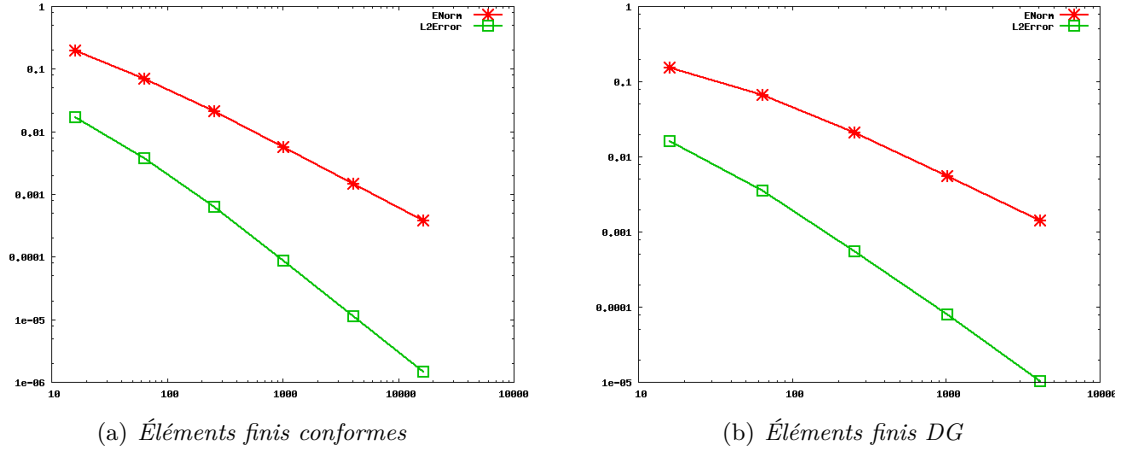
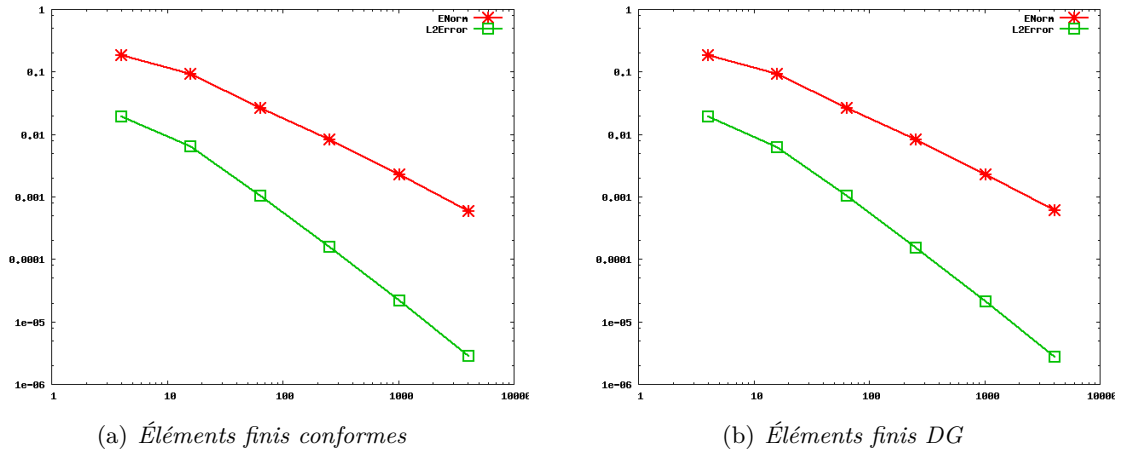
Une élévation de la solution a déjà été proposée dans la Figure 4.14(b).

Nous effectuons les simulations suivantes pour des éléments finis  $\mathbb{P}^2 - \mathbb{Q}^2$  conformes et Galerkin discontinus, sur des maillages triangulaires et quadrangulaires.

Les comportements de la norme énergie (3.12) ainsi que la norme- $L^2$  sont illustrés au moyen de leurs courbes de convergence, représentées sur un maillage CC (Figure 6.35(a) pour des éléments finis CG - Figure 6.35(b) pour des éléments finis DG), et sur un maillage quadrangulaire cartésien (Figure 6.36(a) pour des éléments finis CG - Figure 6.36(b) pour des éléments finis DG), tous uniformément raffinés. Les simulations suivantes ont été effectuées en utilisant la formulation (3.11) pour les paramètres de stabilisation et les  $\kappa_{\text{in/ex}}$ .

## 6.5 Éléments d'analyse pour une interface courbe

Si les aspects numériques d'une interface plane et courbe sont sensiblement les mêmes, il n'en est rien de l'analyse théorique et l'obtention d'une inégalité inverse indépendante de la position

FIGURE 6.35 – Courbes de convergence en  $\mathbb{P}^2$  sur un maillage CCFIGURE 6.36 – Courbes de convergence en  $\mathbb{Q}^2$  sur un maillage quadrangulaire

de l'interface. Nous exposons ici quelques éléments d'analyse.

Nous souhaitons donc étendre la méthode NXFEM précédente à l'ordre supérieur avec une interface  $\Gamma$  courbe. Conservons notre problème modèle 6.1.

Nous travaillons dans les mêmes espaces éléments finis :

$$CG_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}), v_h|_K \circ \mathcal{F}_K \in R^k(K) \forall K \in \mathcal{K}_h\}, \quad (6.29)$$

où  $R^k$  est l'ensemble des polynômes ( $\mathbb{P}^k$  ou  $\mathbb{Q}^k$ ),  $k \in \mathbb{N}^*$  le degré du polynôme, et

$$\mathbb{V}_h := \{v_h|_{\Omega_{\text{in}}} + w_h|_{\Omega_{\text{ex}}}, \forall v_h, w_h \in CG_h\}. \quad (6.30)$$

La formulation variationnelle discrète du problème (6.1) est la même que pour la méthode

précédente, à savoir : Pour  $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$ , on définit la forme bilinéaire :

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{R} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S ([u_h] \partial_{n, \mathfrak{R}}^* v_h + \{\partial_{n, \mathfrak{R}} u_h\}_\kappa [v_h]) \, ds, \quad (6.31)$$

ainsi que la forme linéaire :

$$l(v_h) := \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} g_N \{v_h\} \, ds - \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} g_D \partial_{n, \mathfrak{R}}^* v_h \, ds \quad (6.32)$$

Comme pour la cas d'une interface rectiligne/place, le but de cette étude est d'adapter la démonstration de la coercivité, afin de prouver la convergence de notre méthode pour tout polynômes de degré  $k$ ,  $k \geq 1$ , pour une interface courbe.

**Lemme 6.10.** *La forme bilinéaire  $a_h(\cdot, \cdot)$  est coercive*

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \| \|v_h\| \|^2, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (6.33)$$

dans l'espace discret  $\mathbb{V}_h$  muni de la  $\| \| \cdot \| \|$ -norme suivante :

$$\| \| \phi \| \| ^2 := \|\nabla \phi\|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 + \|\{\nabla_n \phi\}\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 + \|\phi\|_{1/2, h, \Gamma_h}^2, \quad (6.34)$$

pour  $\gamma$  pris suffisamment grand, avec

$$\|\phi\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\phi\|_{0, \Gamma_h}^2, \quad \|\phi\|_{1/2, h, \Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \frac{1}{d_K} \|\phi\|_{0, \Gamma_h}^2. \quad (6.35)$$

L'utilisation d'une inégalité inverse est toujours aussi cruciale dans la preuve de (6.33), et les dépendances de la constante positive  $C_I$  nous intéressent fortement.

**Lemme 6.11. Inégalité inverse**

Pour tout  $v_h \in \mathbb{V}_h$ , nous avons :

$$\|\{\nabla_n v_h\}\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 \leq C_I \|\nabla v_h\|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2. \quad (6.36)$$

Dans cette étude, le maillage sera formé dans un premier temps de triangles réguliers, à arêtes rectilignes.

**Hypothèse 6.12.** *Soit  $\Gamma$  une interface régulière. On note  $\hat{\Gamma}$  pour tout  $K \in \mathcal{K}_h$*

$$\hat{\Gamma}_K = (F_K)^{-1}(\Gamma).$$

$\hat{\Gamma}_h$  est l'approximation de degré  $k$  de  $\hat{\Gamma}$ . Elle coïncide avec  $\hat{\Gamma}$  en  $k+1$  points. Enfin,  $\Gamma_h$  est définie par

$$\Gamma_h = F_K(\hat{\Gamma}_h).$$

$\Gamma_h$  coïncide avec  $\Gamma$  en  $k+1$  points.

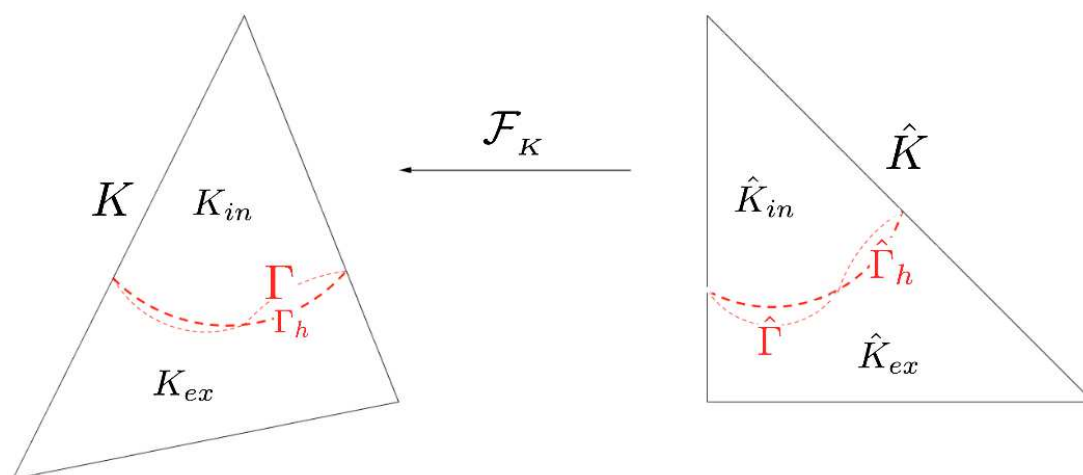


FIGURE 6.37 – Notations

**Exemple 6.1.** Soit  $\Gamma$  une discontinuité régulière, et  $k = 2$ .  
L'Hypothèse 6.12 est illustrée dans la Figure 6.37.

L'une des principales difficultés du traitement de bords courbes réside dans la transformation. On peut être tenté de transformer les sous-domaines  $K_{in/ex}$  en polygones de référence, afin d'appliquer les résultats précédents. Hélas, ce genre de transformation peut ne pas être inversible.

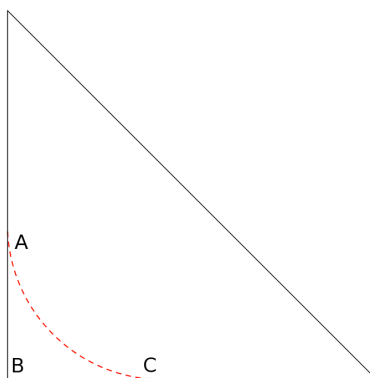


FIGURE 6.38 – Transformation non inversible

Prenons le cas suivant schématisé dans la Figure 6.38 : le sous-domaine  $ABC$  présente un bord courbe obtenu par approximation d'ordre 2 de l'interface. Pour simplifier, supposons  $[AB] = [BC]$ . On montre que toute  $\mathbb{P}^2$ -transformation ramenant  $ABC$  sur le triangle de référence est non inversible en  $\hat{A}$  et  $\hat{C}$  dès que  $[AB]$  et  $[BC]$  sont tangents à la parabole joignant  $A$  et  $C$ .

**Remarque 6.16.** Cette approche peut sans doute être explorée, en s'aidant peut être des récents hypothèses et résultats de Dalík [29].

Dans cette suite, nous allons nous appuyer sur les raisonnements que nous avons effectués dans la partie concernant une interface rectiligne/plane. Notons que suite à une remarque de Alexei Lozinski, les différentes situations étudiées précédemment peuvent être réunies et traitées au moyen du théorème suivant :

**Théorème 6.13.** *Soit  $D$  un polytope convexe en dimension  $N$  et  $S$  l'un de ces bords. Soit  $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ . Alors*

$$\|p\|_{0,S} \leq C \frac{|S|^{1/2}}{|D|^{1/2}} \|p\|_{0,D}, \quad (6.37)$$

où  $C > 0$  est une constante dépendant seulement du degré  $k$  et de la dimension  $N$ .

La démonstration de ce théorème est donnée en Annexe C.

**Remarque 6.17.** *Le théorème 6.13 se généralise à tout domaine  $D$  convexe.*

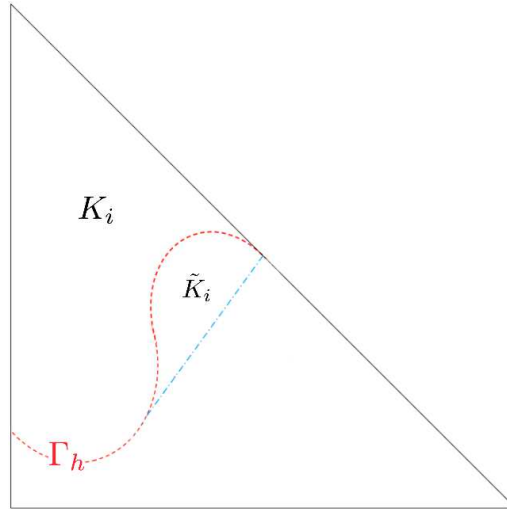


FIGURE 6.39 – Interface courbe sur une cellule triangulaire

Comme précédemment,  $\Gamma_h$  (respectivement  $\hat{\Gamma}_h$ ) divise une cellule coupée  $K$  (respectivement  $\hat{K}$ ) en deux sous-domaines.

Pour chaque sous-domaine  $K_i$ , on pose :

- $K_i^\#$  l'enveloppe convexe de  $K_i$ ,
- $\tilde{K}_i := K_i^\# \setminus K_i$  (illustration en Figure 6.39).

**Remarque 6.18.** *Si  $K_i = K_i^\#$ , alors  $K_i$  est convexe et nous pouvons établir une inégalité inverse et connaître le détail des dépendances de la constante  $C_I$ , au moyen du Théorème 6.13.*

Pour tout sous-domaine non convexe, on procède comme suit : soit  $p_h$  un polynôme de degré  $k - 1$ . On a d'après le Théorème 6.13 :

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq C_1 \frac{|\Gamma_h|}{|K_i^\sharp|} \|p_h\|_{0,K_i^\sharp}^2,$$

où  $C$  dépend seulement du degré  $k$  et de la dimension  $N$ . Comme  $K_i \subset K_i^\sharp$ , il vient

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq C_1 \frac{|\Gamma_h|}{|K_i|} \|p_h\|_{0,K_i^\sharp}^2.$$

Or

$$\|p_h\|_{0,K_i^\sharp}^2 = \|p_h\|_{0,K_i}^2 + \|p_h\|_{0,\tilde{K}_i}^2.$$

En utilisant le fait que  $\tilde{K}_i \subset K_i^\sharp$  et le Lemme C.3 (utilisé dans la démonstration du Théorème 6.13 en Annexe C), on a alors

$$\|p_h\|_{0,\tilde{K}_i}^2 \leq |\tilde{K}_i| \|p_h\|_{\infty,\tilde{K}_i}^2 \leq C_1^2 \frac{|\tilde{K}_i|}{|K_i^\sharp|} \|p_h\|_{0,K_i^\sharp}^2,$$

ie

$$\left(1 - C_1^2 \frac{|\tilde{K}_i|}{|K_i^\sharp|}\right) \|p_h\|_{0,K_i^\sharp}^2 \leq \|p_h\|_{0,K_i}^2.$$

Pour pouvoir continuer cette démonstration, nous avons besoin de l'Hypothèse suivante :

**Hypothèse 6.14.** *On suppose qu'il existe  $0 < \alpha < 1$  tel que  $\forall h > 0$  et  $\forall K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}$  :*

$$\frac{|\tilde{K}_i|}{|K_i^\sharp|} \leq \frac{\alpha}{C_1^2}, \quad i = in/ex.$$

L'Hypothèse 6.14 permet d'obtenir :

$$\|p_h\|_{0,K_i^\sharp}^2 \leq \frac{1}{1 - \alpha} \|p_h\|_{0,K_i}^2,$$

de sorte que

$$\|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \leq C_I \frac{|\Gamma_h|}{|K_i|} \|p_h\|_{0,K_i}^2,$$

où  $C_I$  dépend du degré  $k$ , de la dimension  $N$ , ainsi que de la constante  $\alpha$ .

**Remarque 6.19.** *Nous sommes conscients que l'Hypothèse 6.14 est une hypothèse très forte, et que son impact sur la constante  $C_I$  ne la rend pas optimale. Une perspective possible serait d'affaiblir l'Hypothèse 6.14.*





# Résolution en non conforme et Galerkin Discontinue

## Sommaire

---

Introduction . . . . .	107
7.1 Approximation Galerkin Discontinu . . . . .	108
7.2 Approximation non conforme . . . . .	108
7.3 Résultats numériques . . . . .	109

---

## Introduction

Nous mettons en œuvre dans cette partie la méthode NXFEM dans le cas d'approximations de type non conforme (notée NC par la suite) et de type Galerkin Discontinue (notée DG par la suite). Pour cela, considérons le problème modèle 6.1 précédent :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = g_D & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = g_N & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (7.1)$$

Nous définissons les espaces d'approximation suivants :

$$NC_h := \left\{ v_h \in L^2(\Omega), v_h|_K \circ \mathcal{F}_K \in R^k(K), \forall K \in \mathcal{K}_h \text{ et } \int_s [v_h] ds = 0 \forall s \in \mathcal{S}_h \right\}, \quad (7.2)$$

et

$$DG_h := \{ v_h \in L^2(\Omega), v_h|_K \circ \mathcal{F}_K \in R^k(K), \forall K \in \mathcal{K}_h \}, \quad (7.3)$$

où  $R^k$  est l'ensemble des polynômes  $\mathbb{P}^k$  ou  $\mathbb{Q}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  le degré du polynôme, et

$$V_h := \{ v_h|_{\Omega_{\text{in}}} + w_h|_{\Omega_{\text{ex}}}, v_h, w_h \in V_h \}. \quad (7.4)$$

où  $V_h$  est l'espace  $NC_h$  ou  $DG_h$ .

La formulation variationnelle continue du problème 7.1 reste inchangée (voir 2.6). Seules la formulation discrète diffère selon l'approximation que l'on utilise.

## 7.1 Approximation Galerkin Discontinu

L'approximation Galerkin Discontinue est basée sur l'utilisation d'éléments finis totalement discontinus et sur l'ajout d'un terme de stabilisation sur les arêtes assurant la coercivité discrète. Un des principaux avantages de cette méthode est sa facilité d'implémentation et sa flexibilité, elle est idéale pour la prise en compte des chocs, des discontinuités, mais également pour des couplages et des géométries de domaines complexes. Cependant, même pour un degré polynomial bas, elle n'en reste pas moins très coûteuse (nombre d'inconnues, couplage de matrice...). On note également l'importance de la dépendance par rapport au paramètre de stabilisation.

De nombreuses études ont été faites sur les méthodes DG dans le cas elliptique, nous nous référons aux travaux d'Arnold-Brezzi-Cockburn-Marini [2] pour une présentation générale. La méthode symétrique avec pénalisation interne (*Interior Penalty*) a été initialement introduite pour le laplacien par Arnold [1]. La discrétisation ainsi obtenue est bien posée et des estimations d'erreur *a priori* optimales ont été obtenues. Nous partirons donc de cette méthode de pénalisation interne que nous généraliserons dans le cas de problèmes d'interface elliptiques.

Signalons un travail récent sur NXFEM, discrétisé en DG sur des maillages triangulaire [64].

La formulation variationnelle discrète du problème (6.1) est la suivante :  
Pour  $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$ , on définit la forme bilinéaire par :

$$a_h^{DG}(u_h, v_h) := a_h(u_h, v_h) - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}}} \int_S ([u_h] \{\mathfrak{K} \nabla_n v_h\} + \{\mathfrak{K} \nabla_n u_h\} [v_h] - \gamma_{\text{int}} [u_h] [v_h]) ds, \quad (7.5)$$

où  $a_h(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire 6.4 et  $\gamma_{\text{int}}$  est appelé coefficient de pénalisation interne,  $\mathcal{S}_h^{\text{in}}$  et  $\mathcal{S}_h^{\text{ex}}$  ont été définis dans (3.14).

Dans cette nouvelle forme bilinéaire, les termes ajoutés sont de même forme et de mêmes natures que ceux écrits le long de l'interface  $\Gamma$ . De ce fait, les travaux de généralisation à l'ordre supérieur et pour les bords courbes (réalisés dans les Chapitres 6 et 6.5) peuvent également s'appliquer pour ces éléments finis.

## 7.2 Approximation non conforme

L'approximation de type non conforme propose des fonctions discrètes continues au sens faible (par exemple, on impose la continuité de leur moyenne sur chaque arête du maillage), présentant ainsi une certaine souplesse et robustesse par rapport aux paramètres physiques. De plus, le stencil de la matrice de rigidité est connu et plus petit que dans le cas conforme.

Les exemples d'approximation non conforme les plus connus sont les éléments finis de Crouzeix-Raviart ([28], de Raviart-Thomas [74], de Brezzi-Douglas-Marini [20], ou encore de Brezzi-Douglas-Fortin-Marini [21] pour des éléments finis mixtes) pour les maillages triangulaires, de Han [51] et de Rannacher-Turek [71] pour les maillages en quadrilatères.

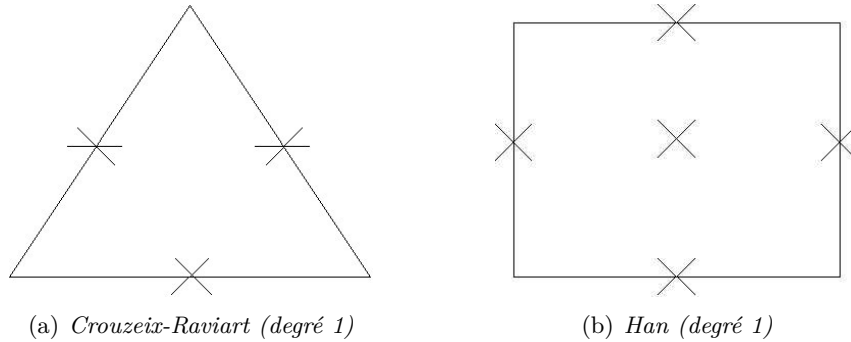


FIGURE 7.1 – Degrés de liberté pour les approximations non conformes de bas degré

Les formulations et schémas numériques développés dans cette section sont basés sur des éléments finis de Crouzeix-Raviart [28] pour les maillages N-simplexes et les éléments finis de Han [51] d'ordre 1 pour les quadrilatères et hexaèdres (Figure 7.1). Ces espaces éléments finis sont de bas ordre. Ils sont donc bien adaptés pour de futurs couplages avec d'autres équations (remplissent la condition discrète de stabilité de Babuška-Brezzi), ainsi que pour une généralisation en volumes finis.

La formulation variationnelle discrète du problème (7.1) est la suivante :  
Pour  $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$ , on définit la forme bilinéaire par :

$$a_h^{NC}(u_h, v_h) := a_h(u_h, v_h) - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{in, cut} \cup \mathcal{S}_h^{ex, cut}} \int_S ([u_h] \{\mathfrak{R} \nabla_n v_h\} + \{\mathfrak{R} \nabla_n u_h\} [v_h] - \gamma_{int} [u_h] [v_h]) ds, \quad (7.6)$$

où  $a_h(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire 6.4,  $\gamma_{int}$  est appelé coefficient de pénalisation interne et  $\mathcal{S}_h^{in, cut}$  (respectivement  $\mathcal{S}_h^{ex, cut}$ ) est l'ensemble des arêtes intérieures coupées dans  $\Omega_{in}$  (respectivement dans  $\Omega_{ex}$ ).

De nouveau, les termes ajoutés sont de même forme et de mêmes natures que ceux écrits le long de l'interface  $\Gamma$ . De ce fait, les travaux de généralisation à l'ordre supérieur et pour les interfaces courbes (réalisés dans les Chapitres 6 et 6.5) peuvent également s'appliquer pour ces éléments finis.

Les simulations qui suivent ont toutes été réalisés sur des maillages uniformément raffinés.

## 7.3 Résultats numériques

Nous proposons comme tests de comparaison une généralisation du test de validation utilisé dans la Partie I - Section 4.2, pris cette fois-ci pour tout polynôme de degré  $k$ .

Considérons le problème (1.1) avec une interface rectiligne/plane  $\Gamma$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{in } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{on } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (7.7)$$

Les données sont choisies de sorte que la fonction définie par

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} & \text{si } x \leq x_0 \\ \frac{x^{2k} - x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} + \frac{x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (7.8)$$

soit une solution exacte pour chaque choix du degré  $k$  du polynôme d'approximation.

Nous fixons  $x_0 = 0.71$  sur  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$ . Les conditions de bord sont de type Dirichlet, le second membre pour obtenir cette solution exacte est  $f = -4$ .

Comme précédemment, nous proposons de comparer la norme énergie (3.12) ainsi que la norme- $L^2$  au moyen de leurs courbes de convergence, représentées ci-après pour chaque degré polynomial  $k$ . Les simulations suivantes ont été effectuées en utilisant notre formulation robuste (3.11).

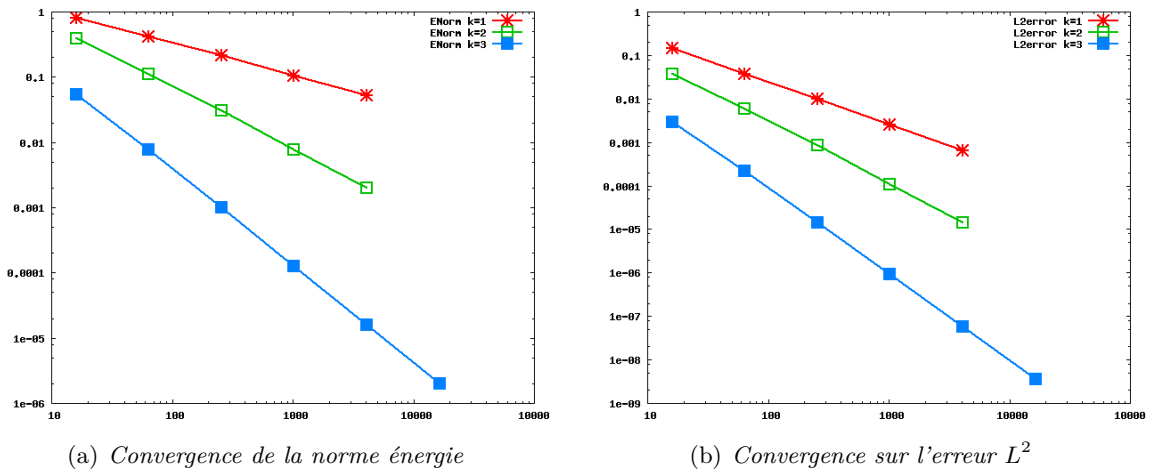
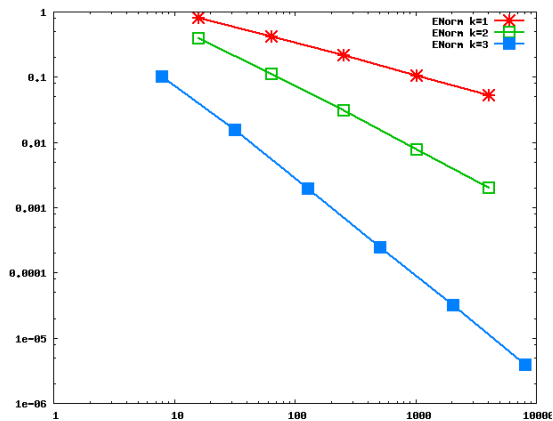
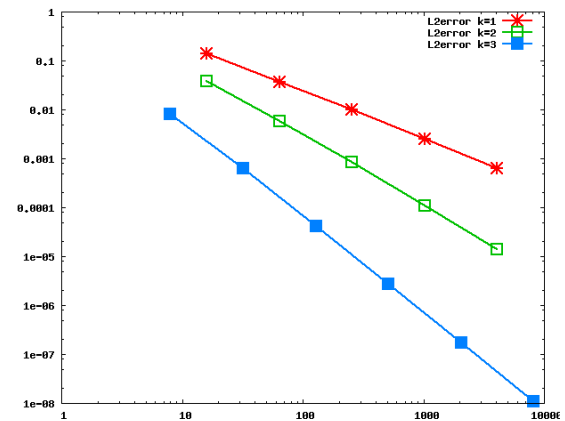
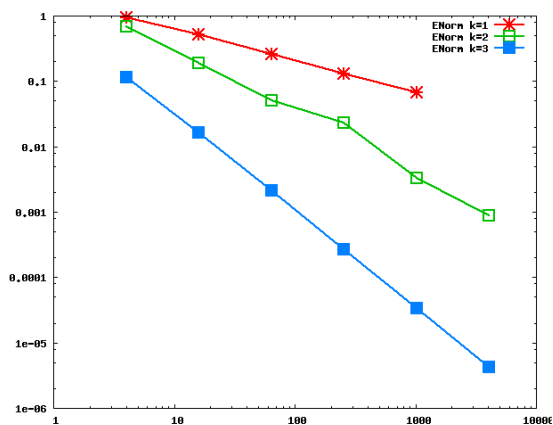


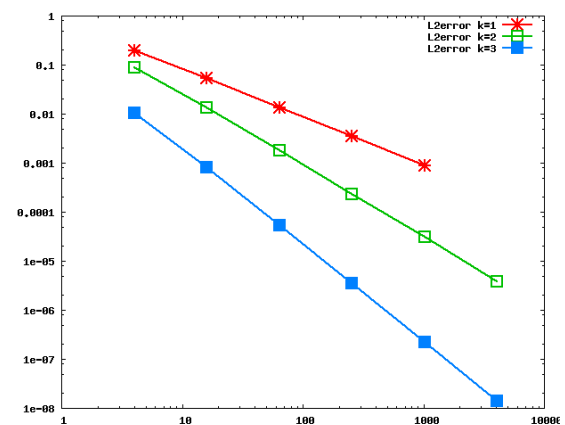
FIGURE 7.2 – Courbes de convergence pour des éléments finis DG  $\mathbb{P}^k$  sur un maillage CC

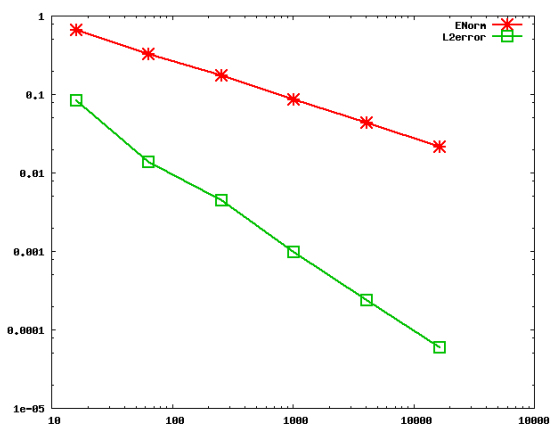


(a) Convergence de la norme énergie

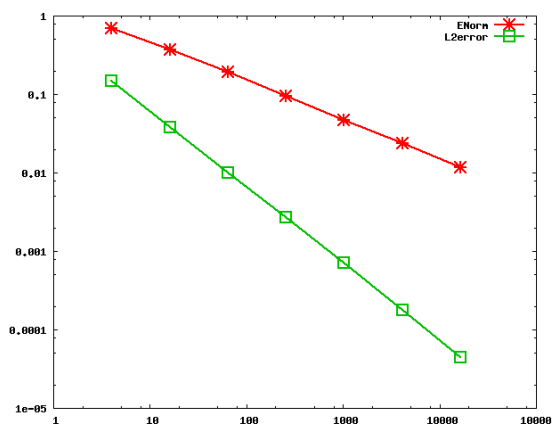
(b) Convergence sur l'erreur  $L^2$ FIGURE 7.3 – Courbes de convergence pour des éléments finis  $DG \mathbb{P}^k$  sur un maillage TC

(a) Convergence de la norme énergie

(b) Convergence sur l'erreur  $L^2$ FIGURE 7.4 – Courbes de convergence pour des éléments finis  $DG \mathbb{Q}^k$  sur un maillage quadrangulaire



(a) Convergence sur un maillage CC



(b) Convergence sur un maillage quadrangulaire

FIGURE 7.5 – Courbes de convergence pour des éléments finis NC de degré 1

# Perspectives

↻ A court terme, il vient naturellement l'implémentation les éléments finis manquants tels que les non conformes pour  $k \geq 1$  pour tout type de maillage ; les conformes, non conformes et Galerkin discontinus pour les maillages hexaédriques, configurer des tétraèdres et développer leurs éléments finis ...

↻ Approfondir l'analyse mathématique pour une interface courbe et son approximation de degré  $k$  est un point essentiel, l'implémentation étant en grande partie déjà réalisée. Il y a l'écriture des inégalités inverses pour les différentes intersections maillages-interface courbe. Il y a également l'analyse de l'erreur d'approximation (en se basant peut-être sur l'analyse en bord courbe ...).

↻ Je souhaiterai également adapter l'estimateur d'erreur  $\eta$  (équation 3.17 que nous avons développé dans la première Partie) pour des éléments finis d'ordre  $k$ , en conformes, non conformes et Galerkin discontinus.

D'un point de vue numérique, j'aimerais également le tester sur des domaines présentant une singularité (comme le domaine en "L", le Slit ...). Son rôle serait mis en valeur et nous permettrait sans doute de valider plus confortablement son travail.





## Troisième partie

# AUTRES PROBLÈMES ÉTUDIÉS LIÉS AUX ÉCOULEMENTS EN MILIEUX POREUX FRACTURÉS.

*Nous avons souhaité orienter les applications de la méthode NXFEM vers des problèmes d'écoulements en milieux poreux fracturés. Evidemment, le chemin est encore long pour arriver à simuler un réservoir pétrolier, il nous faut développer certains outils et c'est tout l'objet de cette partie. Nous commencerons par introduire quelques rappels sur les écoulements en milieu poreux ; puis le deuxième chapitre détaillera la méthode NXFEM pour la résolution d'un modèle asymptotique de failles ; nous porterons notre attention dans le chapitre trois sur des problèmes instationnaires et plus précisément nous l'exposerons dans le cadre d'un problème d'écoulement monophasique ; nous nous intéresserons également à l'expression de la méthode NXFEM pour des problèmes de diffusion-convection dans le quatrième chapitre ; quelques simulations sur des domaines multi-fracturés sont proposées dans le chapitre cinq ; enfin, nous conclurons cette partie par quelques perspectives et réflexions en cours, à court et long terme.*



# Introduction aux écoulements en milieux poreux

## Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Contexte et rappels</b>	<b>117</b>
9.1.1	Notion de porosité	117
9.1.2	Notion de saturation	118
9.1.3	Loi de Darcy	118
<b>9.2</b>	<b>Le modèle Black-Oil</b>	<b>120</b>

---

Notre objectif à court terme est de pouvoir résoudre des écoulements en milieux poreux en utilisant la méthode NXFEM pour la prise en compte des failles. Parmi les différents modèles plus ou moins complexes que l'on rencontre dans la littérature, nous avons retenu le modèle Black-Oil qui reste relativement simple et prend en compte de possibles changements de phases. J'ai eu l'opportunité durant cette thèse de m'investir dans le développement d'un outil de traitement des failles dans un simulateur de réservoir. Cet outil nommé Metagrid permet de localiser les failles et détermine les transmissibilités (informations géométriques et géologiques nécessaires aux schémas de type Volume Fini) entre les failles et les mailles du réservoir. Mon intervention dans cette étude s'est faite dans le cadre d'un contrat "Doctorant-Conseil".

Dans cette partie, nous ne développerons que le vocabulaire et les outils nécessaires pour comprendre l'origine des équations en milieu poreux. Néanmoins, les références [9, 70, 45, 22] pourront compléter mes rappels, mécaniquement et [49] mathématiquement parlant.

## 9.1 Contexte et rappels

### 9.1.1 Notion de porosité

Chaque roche constituant un sous-sol est composée d'un réseau de pores. A leur échelle, ces pores sont trop petits pour être convenablement modéliser pour la résolution de problèmes. On résout donc à une échelle bien plus grande (mailles de quelques mètres à quelques centaines de mètres).

On note  $\phi$  le pourcentage du volume des pores par rapport au volume total de la roche.  $\phi$  est appelée **porosité**, c'est une quantité **connue et donnée**, en général constante par maille ou dépendante de la pression (voir du temps).

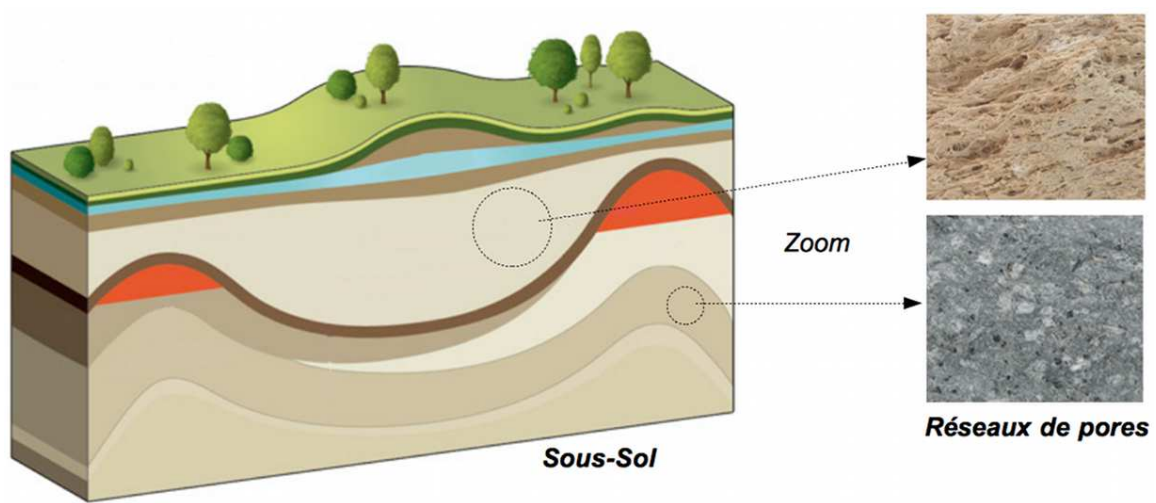


FIGURE 9.1 – Illustration de la porosité

### 9.1.2 Notion de saturation

Considérons le cas d'un écoulement d'un fluide triphasique, composé de trois phases : eau (W), huile (O) et gaz (G). Considérons un volume de pores  $V_p$  est rempli par :

- un volume d'eau  $V_W$ ,
- un volume d'huile  $V_O$ ,
- un volume de gaz  $V_G$ ,

on a :

$$V_p = V_W + V_O + V_G$$

c'est-à-dire

$$1 = \frac{V_W}{V_p} + \frac{V_O}{V_p} + \frac{V_G}{V_p}$$

On pose

$$S_W = \frac{V_W}{V_p}, \quad S_O = \frac{V_O}{V_p}, \quad S_G = \frac{V_G}{V_p}$$

et on a :

$$1 = S_W + S_O + S_G$$

$S_I$  est appelée **saturation de la phase I**, pour  $I = W, O, G$ . Il s'agit d'**inconnues du problème**, représentant le pourcentage du volume de chaque phase dans le volume poreux.

### 9.1.3 Loi de Darcy

La perméabilité d'un milieu poreux est l'aptitude de la roche à laisser circuler un fluide à travers ses pores. Il s'agit d'une propriété intrinsèque à chaque roche. Elle est évaluée expérimentalement par carottage.

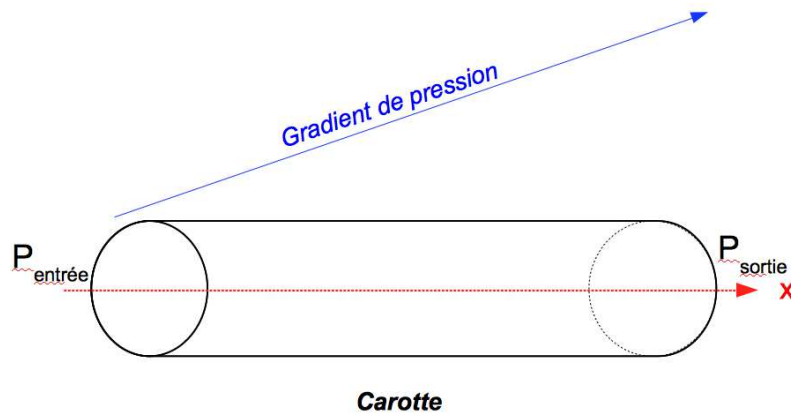


FIGURE 9.2 – Illustration du carottage

On calcule la perméabilité de la sorte : on sait que :

$$Q = A \times \frac{K}{\mu} \times \frac{\partial P}{\partial x}$$

avec

- $A$  : section de la carotte,
- $Q$  : débit de sortie (mesuré),
- $K$  : perméabilité de la roche (on parle aussi de perméabilité absolue),
- $\mu$  : viscosité du fluide injecté.

En mesurant  $Q$ , on trouve  $K$ .

Par carottage dans les trois directions d'espace, la perméabilité  $\underline{\mathfrak{K}}$  devient un tenseur de perméabilité :

$$\underline{\mathfrak{K}} = \begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{pmatrix}$$

La loi de Darcy, dans le cas monophasique, est alors donnée par :

$$\vec{v} = -\frac{\underline{\mathfrak{K}}}{\mu} (\overrightarrow{\text{grad}}P - \rho \vec{g}) \quad (9.1)$$

où

- $\vec{v}$  est la vitesse volumétrique,
- $P$  la pression,

- $\tilde{\mathbf{g}}$  le vecteur gravitationnel constant (dirigé vers le bas dans la direction  $z$ ),
- $\rho$  la masse volumique (de la phase).

La présence de plusieurs phases dans un même milieu a un effet sur les vitesses de filtration. La loi de Darcy se généralise alors par :

$$\vec{v}_I = -\frac{k_{r,I}}{\mu_I} \left( \overrightarrow{\text{grad}} P_I - \rho_I \tilde{\mathbf{g}} \right) \quad (9.2)$$

où

- $I$  est une phase (eau, huile, gaz ...),
- $k_{r,I}$  est la perméabilité relative de la phase  $I$ .

La vitesse de filtration d'une phase en présence d'une autre phase est plus petite que si elle était seule. On a donc  $0 \leq k_{r,I} \leq 1$ .

Il s'agit de **fonctions connues des saturations**.

La pression capillaire est la différence de pression entre deux phases. Elle va nous permettre d'exprimer la pression de chaque phase à l'aide de celle d'une phase donnée.

On a par exemple,

$$P_w = P_o - P_{c,o,w}.$$

$P_{c,o,w}$  est une **fonction connue des saturations**. On peut donc exprimer toutes les pressions de phases à l'aide d'une seule.

## 9.2 Le modèle Black-Oil

Plaçons nous toujours dans la cas d'un écoulement tri-phasique avec une phase **W**, une phase **O**, et une phase **G**.

Chaque phase peut avoir un ou plusieurs constituants. Dans notre cas, nous supposons que :

- la phase **W** est constituée seulement du constituant Eau, noté **e**,
- de même, la phase **G** n'est composée que du constituant Gaz, noté **g**,
- enfin, la phase **O** est constituée de deux constituants : de l'Huile (noté **h**) et du Gaz.

Attention à ne pas confondre phase et constituant ! Chaque phase peut être constituée d'un ou de plusieurs constituants.

Le loi de Darcy (9.1) s'écrit pour chaque phase :

$$\vec{v}_O = -\underline{\mathfrak{K}} \frac{k_{r,O}}{\mu_O} \left( \overrightarrow{\text{grad}} P_O - \rho_O \tilde{\mathfrak{g}} \right) \quad (9.3)$$

$$\vec{v}_G = -\underline{\mathfrak{K}} \frac{k_{r,G}}{\mu_G} \left( \overrightarrow{\text{grad}} P_G - \rho_G \tilde{\mathfrak{g}} \right) \quad (9.4)$$

$$\vec{v}_W = -\underline{\mathfrak{K}} \frac{k_{r,W}}{\mu_W} \left( \overrightarrow{\text{grad}} P_W - \rho_W \tilde{\mathfrak{g}} \right) \quad (9.5)$$

On écrit ensuite la conservation de la masse de chaque constituant :

– le constituant Eau (dans la phase W) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_e S_e) + \text{div} (\rho_e \vec{v}_W) = f_e \quad (9.6)$$

– le constituant Huile (dans la phase O) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_h S_h) + \text{div} (\rho_h \vec{v}_O) = f_h \quad (9.7)$$

– le constituant Gaz (dans la phase G et dans la phase O) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_{g,G} S_{g,G} + \phi \rho_{g,O} S_{g,O}) + \text{div} (\rho_{g,G} \vec{v}_G + \rho_{g,O} \vec{v}_O) = f_g \quad (9.8)$$

où :

– les termes  $f_i$ ,  $i = e, h, g$  sont des termes sources externes,

–  $\rho_i$  (ou  $\rho_{i,I}$ ) est la masse volumique du constituant  $i$  par unité de volume de la phase  $I$ .

On élimine bien sûr  $\vec{v}_O$ ,  $\vec{v}_G$ ,  $\vec{v}_W$  en utilisant les expressions (9.3), (9.4) et (9.5).

Finalement, on résout (9.6), (9.7) et (9.8) (en utilisant les pressions relatives, capillaires, et également quelques relations de thermodynamique), dont les inconnues sont  $S_O$ ,  $S_G$  et  $P_O$ .

**Remarque 9.1.** *Cette méthode, basée sur les saturations, est celle que l'on rencontre le plus souvent. Mais il existe également une autre approche, qui tient naturellement compte des changements de phase. On travaille alors pour cela non plus en saturation mais en masse de constituant par unité de volume.*

Les saturations ont un comportement hyperbolique, avec des fronts transportés par le gradient de pression, ou plus exactement par les vitesses de filtration de Darcy. Les pressions ont quant à elles un comportement hyperbolique.

Nous proposons dans ce qui suit de mettre en place les premiers outils pour la résolution de ce système. Le problème étant instationnaire, nous développerons des schémas en temps pour une équation parabolique où le terme en dérivée temporelle présente un coefficient discontinu le long de la discontinuité  $\Gamma$  : la porosité  $\Phi$ . Nous nous intéresserons également à la résolution de problème de transport linéaire par NXFEM.

De plus, nous espérons pouvoir prendre en compte des réservoirs fracturés. Les failles nécessitent un traitement particuliers car celles-ci ne sont pas seulement des interfaces de discontinuité de coefficients des équations, mais possèdent une épaisseur (même si elle n'est pas toujours prise en compte) dans laquelle les écoulements sont très différents du reste du domaine. Dans le chapitre suivant, nous proposons une approche possible pour le traitement de ces failles.



# NXFEM pour la résolution d'un modèle asymptotique de faille

## Sommaire

---

10.1 Présentation du problème . . . . .	123
10.2 Etude asymptotique sur un problème modèle . . . . .	125
10.3 Interfaces courbes . . . . .	129
10.4 Approximation du type NXFEM pour la résolution du modèle asymptotique . . . . .	130
10.5 Résultats numériques . . . . .	130
10.5.1 Test de validation . . . . .	130
10.5.2 Tests de comparaisons . . . . .	133

---

Les milieux géologiques utilisés dans la simulation des réservoirs pétroliers sont des milieux poreux fracturés. L'épaisseur de ces fractures est souvent très petite au regard de la taille du réservoir mais elle joue un rôle très important pour la circulation des différents fluides. La position et les caractéristiques géologiques de ces failles doivent donc être prises en compte lors de la résolution des équations de Darcy. Même si les capacités de résolution des ordinateurs est en constante progression, il n'est pas envisageable de mailler finement les failles.

Plusieurs approches existent pour prendre en compte ces failles. Schématiquement, la première consiste à décomposer la solution dans l'épaisseur de la faille dans une base de petite dimension ([48, 47]), une possibilité étant de choisir une base élément finis en prenant une maille dans l'épaisseur de la faille. Une autre approche consiste à faire un développement asymptotique de la solution en fonction de l'épaisseur de la faille et de chercher les équations vérifiées par les différents termes du développement asymptotique. Cette approche a été largement utilisée en élasticité ([26]) et pour la prise en compte de couche mince ([31, 73]). Il est difficile de dire si une approche doit être privilégiée, mais pour notre part nous sommes intéressés à l'approche asymptotique parce qu'elle fournit un système d'équations à résoudre bien adapté à la méthode NXFEM.

## 10.1 Présentation du problème

On considère un domaine  $\Omega^\varepsilon$  borné régulier fracturé, c'est-à-dire  $\Omega^\varepsilon = \Omega_{\text{in}}^\varepsilon \cup \Omega_0^\varepsilon \cup \Omega_{\text{ex}}^\varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un petit paramètre représentant l'épaisseur de la faille (pas forcément constant).

Les tenseurs de diffusion dans les trois sous-domaines peuvent prendre des valeurs très différentes. On suppose que le  $\Omega_0^\varepsilon$  peut être décrit à partir d'une frontière "moyenne"  $\Gamma$  régulière

comme suit :

$$\Omega_0^\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, x = \xi + tn(\xi); \xi \in \Gamma \text{ et } -\frac{\varepsilon}{2}h(\xi) < t < \frac{\varepsilon}{2}h(\xi) \right\}$$

où  $n$  est la normale à  $\Gamma$  et la fonction épaisseur  $h$  définie sur  $\bar{\Gamma}$  est régulière et bornée.

Le problème de Darcy, noté  $(P)$ , dans le domaine  $\Omega$  se pose de la manière suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{sur } \Omega_{in}^\varepsilon \cup \Omega_0^\varepsilon \cup \Omega_{ex}^\varepsilon, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_d^\varepsilon, \\ \mathfrak{K}\nabla_n u = g & \text{sur } \partial\Omega_n^\varepsilon, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{ex}^\varepsilon, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma_{in}^\varepsilon \cup \Gamma_{ex}^\varepsilon. \end{cases} \quad (10.1)$$

où

$$\mathfrak{K} = \begin{cases} \mathfrak{K}_{in} & \text{si } (x, y) \in \Omega_{in}^\varepsilon, \\ \mathfrak{K}_0^\varepsilon & \text{si } (x, y) \in \Omega_0^\varepsilon, \\ \mathfrak{K}_{ex} & \text{si } (x, y) \in \Omega_{ex}^\varepsilon, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_{in} & \text{si } (x, y) \in \Omega_{in}^\varepsilon, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Omega_0^\varepsilon, \\ f_{ex} & \text{si } (x, y) \in \Omega_{ex}^\varepsilon. \end{cases}$$

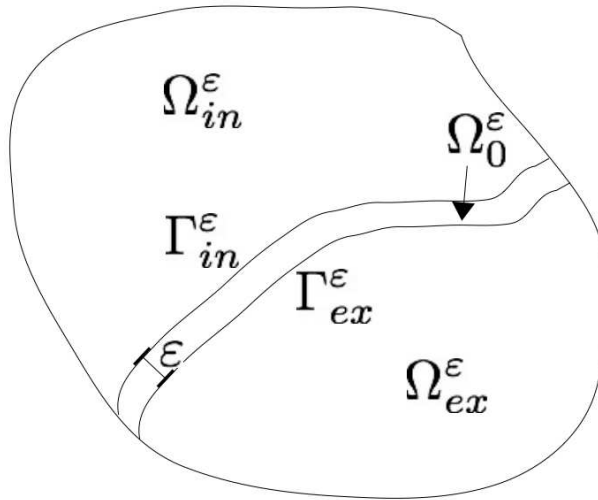


FIGURE 10.1 – Un domaine fracturé

On suppose que les composantes des tenseurs de diffusion  $\mathfrak{K}$  sont à valeurs dans  $L^\infty$  et que les tenseurs vérifient les conditions d'ellipticité suivantes :

$$\begin{aligned} \exists \alpha_{in} > 0, \quad & \mathfrak{K}_{in}(x)y \cdot y \geq \alpha_{in}|y|; \forall y \in (R)^2; p.p. \text{ en } x \in \Omega_{in}^\varepsilon, \\ \exists \alpha_{ex} > 0, \quad & \mathfrak{K}_{ex}(x)y \cdot y \geq \alpha_{ex}|y|; \forall y \in (R)^2; p.p. \text{ en } x \in \Omega_{ex}^\varepsilon, \\ \exists \alpha_0 > 0, \quad & \varepsilon \mathfrak{K}_0^\varepsilon(x)y \cdot y \geq \alpha_0|y|; \forall y \in (R)^2; p.p. \text{ en } x \in \Omega_0^\varepsilon, \end{aligned}$$

et on note

$$\mathfrak{K}_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \mathfrak{K}_0^\varepsilon.$$

On désigne par

$$V^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon; v = 0 \text{ sur } \Omega_d^\varepsilon)\}$$

et

$$a^{in}(\varepsilon; u, v) = \int_{\Omega_{in}^\varepsilon} \mathfrak{K}_{in} \nabla u \nabla v \, dx, \quad a^0(\varepsilon; u, v) = \int_{\Omega_0^\varepsilon} \mathfrak{K}_0^\varepsilon \nabla u \nabla v \, dx, \quad a^{ex}(\varepsilon; u, v) = \int_{\Omega_{ex}^\varepsilon} \mathfrak{K}_{ex} \nabla u \nabla v \, dx.$$

De façon évidente  $a(\varepsilon; u, v) = a^{in}(\varepsilon; u, v) + a^0(\varepsilon; u, v) + a^{ex}(\varepsilon; u, v)$  est une forme bilinéaire coercive sur  $V$ , de constante  $\alpha$  indépendante de  $\varepsilon$ .

On associe au problème  $(P)$  le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \text{ tel que} \\ a(\varepsilon; u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f v \, dx + \int_{\partial\Omega_n^\varepsilon} g v \, d\sigma, \quad \forall v \in V^\varepsilon, \end{array} \right. \quad (10.2)$$

qui admet une solution unique pour des données suffisamment régulières.

## 10.2 Etude asymptotique sur un problème modèle

Afin de simplifier l'exposé, nous allons dans ce paragraphe construire un modèle asymptotique sur pour un problème  $(P)$  modèle. Nous donnerons ensuite les éléments qui permettent de généraliser les résultats. La principale simplification va essentiellement porter sur la faille que l'on va supposer rectiligne.

Considérons le domaine

$$\Omega^\varepsilon = ]-1, -\varepsilon/2[ \times ]0, 1[ \cup ]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[ \times ]0, 1[ \cup ]\varepsilon/2, 1[ \times ]0, 1[$$

et le problème  $(P)$  avec des conditions de Dirichlet homogène ( $\Omega_n^\varepsilon = \emptyset$ ).

Faisons les changements de variables pour que chaque sous-domaine soit indépendant de  $\varepsilon$ . Notons  $\tilde{v}$  et  $\nabla_{t,s}^\varepsilon \tilde{v}$  la variable  $v$  et son gradient exprimés dans ce nouveau repère et  $P$  la Jacobienne du changement de variable. On a  $\nabla v = P^\varepsilon \nabla_{t,s} \tilde{v}$ .

Domaine	Limite	Element	Jacobienne
$\Omega_{in}^\varepsilon$	$\rightarrow \Omega_{in} = ]-1; 0[ \times ]0; 1[$	$x = (1 - \frac{\varepsilon}{2})t - \frac{\varepsilon}{2}, \quad y = s$	$P_{in}^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \varepsilon/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Omega_0^\varepsilon$	$\rightarrow \Omega_0 = ]0; 1[ \times ]0; 1[$	$x = \varepsilon t - \frac{\varepsilon}{2}, \quad y = s$	$P_0^\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Omega_{ex}^\varepsilon$	$\rightarrow \Omega_{ex} = ]1; 2[ \times ]0; 1[$	$x = (1 - \frac{\varepsilon}{2})t - 1 + \varepsilon, \quad y = s$	$P_{ex}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \varepsilon/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans la suite, pour alléger les notations, on posera  $v = \tilde{v}$ .

On obtient alors

$$a^{in}(\varepsilon; u, v) = \int_{\Omega_{in}} P_{in}^{\varepsilon T} \mathfrak{K}_{in} P_{in}^\varepsilon \nabla_{t,s} u \nabla_{t,s} v (1 - \varepsilon/2) dt ds,$$

$$a^0(\varepsilon; u, v) = \int_{\Omega_0} P_0^{\varepsilon T} \mathfrak{K}_0^\varepsilon P_0^\varepsilon \nabla_{t,s} u \nabla_{t,s} v \varepsilon dt ds,$$

$$a^{ex}(\varepsilon; u, v) = \int_{\Omega_{ex}} P_{ex}^{\varepsilon T} \mathfrak{K}_{ex} P_{ex}^\varepsilon \nabla_{t,s} u \nabla_{t,s} v (1 - \varepsilon/2) dt ds,$$

On note

$$V = \{v = (v_{in}, v_0, v_{ex}) \in H^1(\Omega_{in}) \times H^1(\Omega_0) \times H^1(\Omega_{ex}); \\ v_{in} = v_0 \text{ sur } \Gamma_{in}, v_{ex} = v_0 \text{ sur } \Gamma_{ex} \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et on considère le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in V \\ a(\varepsilon; u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_{in}} f_{in} v_{in} (1 - \frac{\varepsilon}{2}) dt ds + \int_{\Omega_{ex}} f_{ex} v_{ex} (1 - \frac{\varepsilon}{2}) dt ds, \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (10.3)$$

De manière classique, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit on a :

$$\alpha \|u^\varepsilon\|_V^2 \leq a(\varepsilon; u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq c (\|f_{in}\|_{0, \Omega_{in}} + \|f_{ex}\|_{0, \Omega_{ex}}) \|u^\varepsilon\|_V, \quad (10.4)$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$  et donc

$$\|u^\varepsilon\|_V^2 \leq \frac{c}{\alpha} (\|f_{in}\|_{0, \Omega_{in}} + \|f_{ex}\|_{0, \Omega_{ex}}). \quad (10.5)$$

**Proposition 10.1.**

$$\exists c > 0; \|\partial_t u^\varepsilon\|_{0, \Omega_0} \leq c \varepsilon (\|f_{in}\|_{0, \Omega_{in}} + \|f_{ex}\|_{0, \Omega_{ex}})$$

*Démonstration.* En utilisant (10.4) et (10.5) on déduit qu'il existe  $c > 0$  telle que

$$a(\varepsilon; u^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq c (\|f_{in}\|_{0, \Omega_{in}} + \|f_{ex}\|_{0, \Omega_{ex}})^2.$$

D'autre part, en utilisant la coercivité de  $a_0$  on a

$$\frac{\alpha_0}{\varepsilon^2} \int_{\Omega_0} |\partial_t u_0^\varepsilon|^2 dt ds \leq a_0(\varepsilon; u_0^\varepsilon, u_0^\varepsilon) \leq c (\|f_{in}\|_{0, \Omega_{in}} + \|f_{ex}\|_{0, \Omega_{ex}})^2,$$

d'où le résultat annoncé.  $\square$

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 10.2.**  $\exists u^0 \in V$  tel que :

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^\varepsilon = u_0^0$  dans  $V$ -faible,
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_t u_0^\varepsilon = 0$  dans  $L^2(\Omega_0)$  fort,
- $\exists \omega_0 \in L^2(\Omega_0)$  tel que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \partial_t u_0^\varepsilon = \omega_0$ .

De plus, nous allons montrer que cette limite  $\omega_0$  peut être identifiée.

**Proposition 10.3.**

$$\omega_0(t, s) = -\frac{a_{2,1}(t, s)}{a_{11}(t, s)} \partial_s u_0^0(0, s), \quad \forall (t, s) \in \Omega_0.$$

Montrons d'abord le lemme suivant :

**Lemme 10.4.** Soit  $\lambda \in L^2(\Omega_0)$  et  $W_0 = \{v \in H^1(\Omega_0); v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{in}\}$  :

$$\forall v \in W_0, \quad \int_{\Omega_0} \lambda \partial_t v \, dt ds = 0 \Rightarrow \lambda = 0. \quad (10.6)$$

*Démonstration.* Comme on a (10.6)  $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega_0)$ , on en déduit que  $\partial_t \lambda = 0$  au sens des distributions :  $\lambda$  ne dépend donc que de la variable  $t$  (i.e.  $\lambda = \lambda(s)$ ).

Considérons maintenant  $\tilde{W}_0 = \{v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_0); v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{in}\}$  qui est dense dans  $W_0$ . Soit  $\lambda \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ , pour tout  $v \in \tilde{W}_0$  on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \lambda \partial_t v \, dt ds &= \int_0^1 \lambda(s) \int_0^1 \partial_t v(t, s) \, dt ds \\ &= \int_0^1 \lambda(s) (v(1, s) - v(0, s)) \, ds \\ &= - \int_0^1 \lambda(s) v(0, s) \, ds. \end{aligned}$$

Par densité cette relation reste vraie pour  $v \in W_0$ . Considérons maintenant l'application qui  $v \in W_0$  associe sa trace sur  $\Gamma_{in}$  :

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_{in}) \\ v &\longmapsto v|_{\Gamma_{in}} \end{aligned}$$

Cette application est linéaire, continue et surjective. Donc pour tout  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{in})$  et pour  $\lambda \in \mathcal{D}(]0, 1[)$  on a

$$- \int_0^1 \lambda(s) \mu(s) \, ds = - \int_0^1 \lambda(s) v(0, s) \, ds = \int_{\Omega_0} \lambda \partial_t v \, dt ds. \quad (10.7)$$

Donc

$$\left| \int_0^1 \lambda(s) \mu(s) ds \right| \leq \|\lambda\|_{L^2(\Omega_0)} \|v\|_{W_0} \leq c \|\lambda\|_{L^2(\Omega_0)} \|\mu\|_{H_{00}^{1/2}},$$

et par conséquent (10.7) peut être étendue à  $\lambda \in L^2(\Omega_0)$ . Et la nullité de (10.7) pour tout  $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_{in})$  entraîne la nullité de  $\lambda$ .  $\square$

*Démonstration.* Démonstration de la proposition (10.3) :

Remarquons que  $a_0$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} a^0(\varepsilon; u^\varepsilon, v) &= \int_{\Omega_0} \left( \mathfrak{K}_0^\varepsilon(1, 1) \left( \frac{1}{\varepsilon} \partial_t u_0^\varepsilon \right) \partial_t v_0 + \varepsilon \mathfrak{K}_0^\varepsilon(1, 2) \left( \frac{1}{\varepsilon} \partial_t u_0^\varepsilon \right) \partial_s v_0 \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{K}_0^\varepsilon(2, 1) \partial_s u_0^\varepsilon \partial_t v_0 + \varepsilon \mathfrak{K}_0^\varepsilon(2, 2) \partial_s u_0^\varepsilon \partial_s v_0 \right) dt ds, \end{aligned}$$

puis multiplions la formulation variationnelle par  $\varepsilon$  et passons à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0. On obtient alors  $\forall v \in V$  :

$$\int_{\Omega_0} \left( \mathfrak{K}_0(1, 1) \omega_0 \partial_t v_0 + \mathfrak{K}_0(2, 1) \partial_s u_0^0 \partial_t v_0 \right) dt ds = 0.$$

On pose ensuite  $\lambda = \mathfrak{K}_0(1, 1) \omega_0 + \mathfrak{K}_0(2, 1) \partial_s u_0^0$  et on applique le lemme 10.4.  $\square$

On peut maintenant établir le problème limite vérifié par  $u^0$ .

On note  $V_0 = \{v \in V; \partial_t v_0 = 0 \text{ dans } \Omega_0\}$ .

Remarquons que pour tout  $v \in V_0$  on a  $v_0(t, s) = v_0(0, s)$  et donc  $\partial_s v_0(t, s) = \partial_s v_0(0, s)$ . De plus,  $v_0 \in H^1(\Omega_0)$ ,  $v_0|_{\Gamma_{in}}$  et  $\partial_s v_0|_{\Gamma_{in}}$  sont  $L^2(\Gamma_{in})$ , donc  $v_0|_{\Gamma_{in}}$  appartient à  $H_0^1(\Gamma_{in})$ .

$\forall v \in V_0$  on a

$$a^0(\varepsilon, u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_0} \left( \varepsilon \mathfrak{K}_0^\varepsilon(1, 2) \left( \frac{1}{\varepsilon} \partial_t u_0^\varepsilon \right) \partial_s v_0 + \varepsilon \mathfrak{K}_0^\varepsilon(2, 2) \partial_s u_0^\varepsilon \partial_s v_0 \right) dt ds.$$

En passant à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  on obtient :

$$a^0(0, u^0, v) = \int_{\Omega_0} \left( \mathfrak{K}_0(1, 2) w_0 \partial_s v_0 + \mathfrak{K}_0(2, 2) \partial_s u_0^0 \partial_s v_0 \right) dt ds.$$

En tenant compte que  $w_0$ ,  $u_0^0$  et  $v_0$  ne dépendent pas de  $t$  sur  $\Omega_0$  et en notant

$$\alpha_0(s) = \int_0^1 \left( \mathfrak{K}_0(2, 2)(t, s) - \frac{\mathfrak{K}_0(2, 1)(t, s)}{\mathfrak{K}_0(1, 1)(s, t)} \right) dt,$$

on en déduit

$$a^0(0, u^0, v) = \int_{\Gamma_{in}} \alpha_0(s) \partial_s u_0^0 \partial_s v_0 ds. \quad (10.8)$$

Le passage à la limite dans  $a^{in}$  et  $a^{ex}$  ne pose aucun problème (on pose simplement  $\varepsilon = 0$ ). On identifie ensuite  $\Gamma_{in} = \Gamma_{ex} = \Gamma$ . Et on introduit l'espace de Hilbert  $V_a$  ([57]) :

$$V_a = \{v \in H^1(\Omega_{in}) \times H^1(\Omega_{ex}), v|_{\Gamma} \in H_0^1(\Gamma), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\|v\|_{V_a}^2 = \|\nabla v\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2 + \|\partial_s v\|_{0,\Gamma}^2.$$

On obtient la formulation variationnelle limite suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V_a \\ a^{\text{in}}(0, u, v) + a^{\text{ex}}(0, u, v) + a^V(u, v) = \int_{\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}} f v \, dt ds, \quad \forall v \in V_a, \end{array} \right. \quad (10.9)$$

où

$$a^V(u, v) = \int_{\Gamma} \alpha_0(s) \partial_s u \partial_s v \, ds.$$

On peut réinterpréter cette formulation en terme d'équation aux dérivées partielles (que l'on appellera modèle asymptotique) en intégrant par partie dans  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\Omega_{\text{ex}}$  et sur  $\Gamma$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{sur } \Omega = \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] - \partial_s(\alpha_0(s)\partial_s u) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (10.10)$$

On obtient sur  $\Gamma$  une équation de type Ventcel.

### 10.3 Interfaces courbes

Pour simplifier, on a supposé ici que l'épaisseur de la faille était constante dans le sens de la normale. Moyennant un changement de variable dans l'épaisseur  $\Omega_0^\varepsilon$  peut se réécrire comme suit :

$$\Omega_0^\varepsilon = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \mathbf{x} = \xi + \frac{\varepsilon}{2} t n(\xi), \xi \in \Gamma, t \in [-1, 1] \right\}$$

Pour un point  $x_i$  de  $\Gamma$ , on désigne par  $s$  son abscisse curviligne, croissante dans le sens direct par rapport à  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\tau$  le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  orienté dans le sens des  $s$  croissant. On a

$$\partial_s \xi = \tau \quad \text{et} \quad \partial_s n = \frac{\tau}{R},$$

où  $R$  est le rayon de courbure de  $\Gamma$  au point  $\xi$ .

Réécrivons les opérateurs de dérivation dans le repère local  $(n, \tau)$  :

$$\partial_s \tilde{v} = \partial_s \mathbf{x} \cdot \nabla v = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2R} t\right) \tau \cdot \nabla v, \quad \partial_t \tilde{v} = \partial_t \mathbf{x} \cdot \nabla v = \frac{\varepsilon}{2} n \cdot \nabla v.$$

En notant  $M$  la matrice de passage de la base  $(n, \tau)$  à la base canonique on obtient que

$$\nabla v = M P^\varepsilon \nabla_{s,t} \tilde{v}, \quad (10.11)$$

où

$$P^\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{2}{\varepsilon} & 0 \\ \varepsilon & 1 \\ 0 & \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2R} t} \end{pmatrix}.$$

L'analyse asymptotique faite au paragraphe précédant en utilisant (10.11) reste valable et on peut remarquer que lors du passage à la limite la courbure  $R$  n'apparaît pas dans le modèle asymptotique qui reste décrit par (10.10). En fait, il faudrait considérer le terme suivant dans le développement asymptotique pour voir apparaître explicitement le terme de courbure.

## 10.4 Approximation du type NXFEM pour la résolution du modèle asymptotique

La formulation variationnelle (10.9) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_a \\ a(u, v) + a^V(u, v) = L(v), \end{cases} \quad \forall v \in V_a,$$

où  $a(u, v)$  et  $L(v)$  sont la forme bilinéaire et la forme linéaire du problème modèle.

La formulation de ce problème en tant que problème d'interface est très proche de celle présentée sur le problème elliptique initial (2.1). En effet le terme sur  $\Gamma$   $[\mathfrak{K}\partial_n u] = g_N$  est remplacé par  $[\mathfrak{K}\partial_n u] - \partial_s(\alpha_0(s)\partial_s u) = 0$ . La méthode NXFEM pour la formulation variationnelle de (10.10) va donc s'écrire :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \\ a_h(u_h, v_h) + a_h^V(u_h, v_h) = L(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (10.12)$$

où

$$a_h^V(u_h, v_h) = \int_{\Gamma} \alpha_0(s) \{\partial_s u_h\} \{\partial_s v_h\} ds.$$

Ce terme est consistant et "renforce" la coercivité du problème. Donc l'analyse de la robustesse de la méthode faite sur le problème modèle reste vraie.

## 10.5 Résultats numériques

### 10.5.1 Test de validation

Ce test consiste d'un point de vue numérique à valider la prise en compte de saut ( $[u]$ ,  $[\mathfrak{K}\nabla_n u]$  ...) le long d'une interface rectiligne, dépourvue d'épaisseur. Comme précédemment, la position de l'interface est indépendante de celle du maillage, celle-ci peut ou non coïncider avec des lignes du maillage.

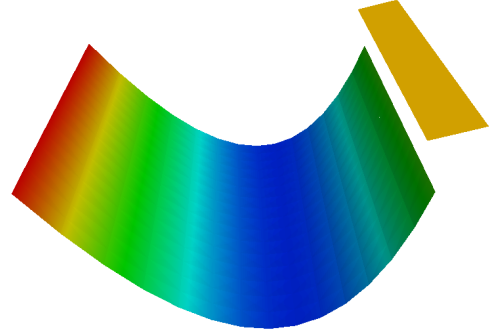
Pour cela, nous reprenons le test de validation précédent : Considérons le problème (1.1), avec  $g_D = -0.25$  et  $g_N = 0$  :

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = -0.25 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \end{cases} \quad (10.13)$$

Les données choisies sont de telle sorte que la fonction définie par



$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} & \text{pour } x \leq \xi_0 \\ \frac{x^2 - \xi_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} + \frac{\xi_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + 0.25 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (10.14)$$



est une solution linéaire, donc exacte pour des polynômes de degré 1.

Plaçons-nous sur le domaine  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$ . Prenons  $\xi_0 = 0.74$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$ . Les conditions de bord sont de type Dirichlet. Enfin, le second membre de cette solution exacte est  $f = -4$ .

FIGURE 10.2 – Illustration

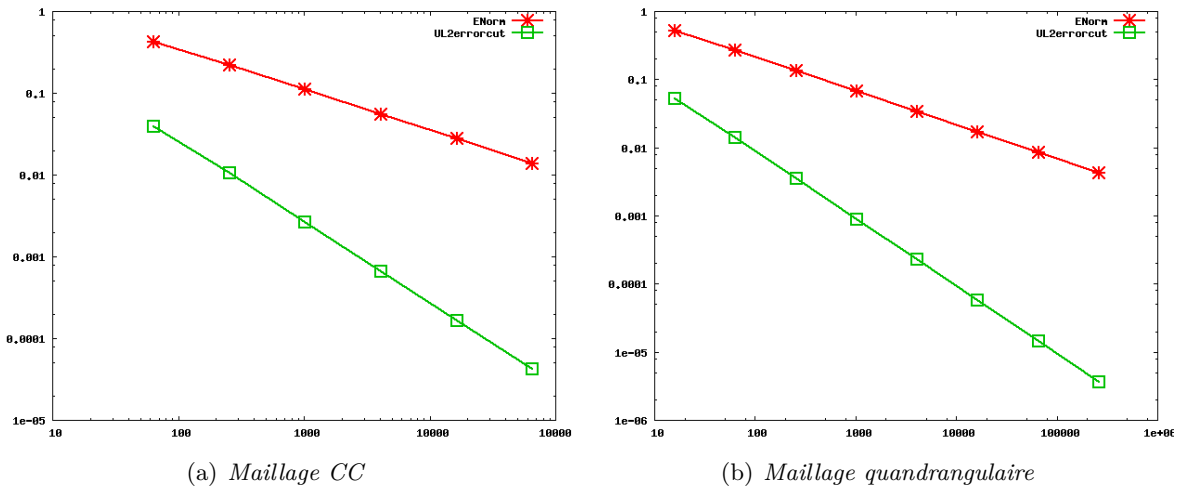


FIGURE 10.3 – Courbes de convergences pour des éléments finis de degré 1

Les courbes de convergence de la Figure 10.3 confirment le bon traitement de la condition  $g_D = -0.25$ . On retrouve les ordres de convergence précédemment étudiés.

Considérons à présent le problème (1.1), avec  $g_D = 0$  et  $g_N = 0.25$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0.25 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (10.15)$$

Les données choisies sont

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} & \text{pour } x \leq \xi_0 \\ \frac{x^2 - \xi_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} + \frac{\xi_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{0.25(x - \xi_0)}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (10.16)$$

est une solution linéaire, donc exacte pour des polynômes de degré 1.

Comme précédemment,  $\Omega = ]-1, 1[ \times ]-1, 1[$ ,  $\xi_0 = 0.74$ ,  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$  et  $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$ . Les conditions de bord sont de type Dirichlet. Le second membre de cette solution exacte vaut  $f = -4$ .

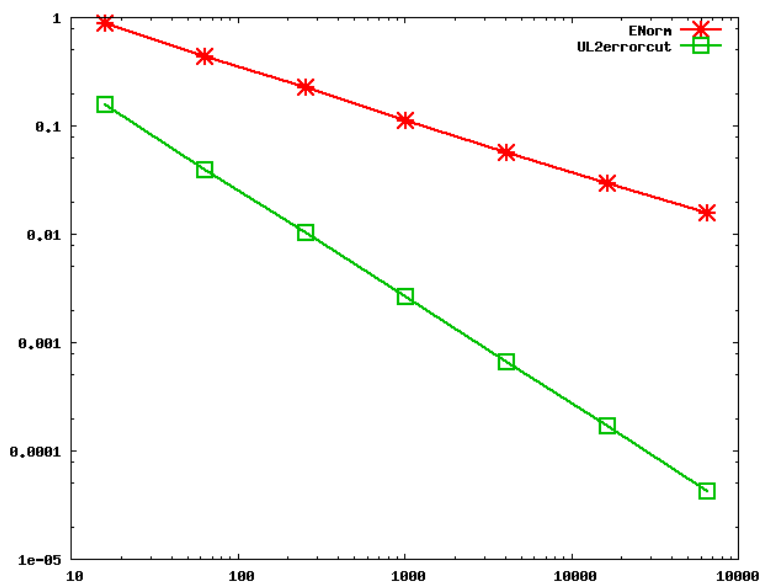


FIGURE 10.4 – Courbes de convergences en  $\mathbb{P}^1$  pour un maillage  $CC$

La conditions  $[\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0.25$  est correctement prise en compte, comme le montre la Figure 10.4.

**Remarque 10.1.** Ces deux simulations ont également été effectuées pour des éléments finis de degré 2 et 3, conformes et Galerkin discontinus, pour des maillages en triangles et en quadrilatères. Leurs résultats confortent nos analyses.

### 10.5.2 Tests de comparaisons

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{sur } \Omega_{\text{in}}^\varepsilon \cup \Omega_0^\varepsilon \cup \Omega_{\text{ex}}^\varepsilon, \\ u = g_d & \text{sur } \partial\Omega_d^\varepsilon, \\ \mathfrak{K}\nabla_n u = g_n & \text{sur } \partial\Omega_n^\varepsilon, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{in}}^\varepsilon \cup \Gamma_{\text{ex}}^\varepsilon, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{in}}^\varepsilon \cup \Gamma_{\text{ex}}^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (10.17)$$

avec pour domaine  $\Omega$  et pour coefficient  $\mathfrak{K}$

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_{\text{in}}^\varepsilon & = ]-1; 0[ \times ]0; 1[, \\ \Omega_0^\varepsilon & = ]0; 1[ \times ]0; 1[, \\ \Omega_{\text{ex}}^\varepsilon & = ]1; 2[ \times ]0; 1[, \end{cases} \quad \mathfrak{K} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega_{\text{in}}^\varepsilon, \\ 2000 & \text{si } (x, y) \in \Omega_0^\varepsilon, \\ 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega_{\text{ex}}^\varepsilon, \end{cases}$$

$f = 0$  sur  $\Omega_{\text{in}}^\varepsilon \cup \Omega_0^\varepsilon \cup \Omega_{\text{ex}}^\varepsilon$ ,  $\Gamma_{\text{in}}^\varepsilon$  a pour équation  $x = 0$  et  $\Gamma_{\text{ex}}^\varepsilon$  a pour équation  $x = 1$ . Les conditions de bord  $g_d, g_n$  sont illustrées dans la Figure 10.5.

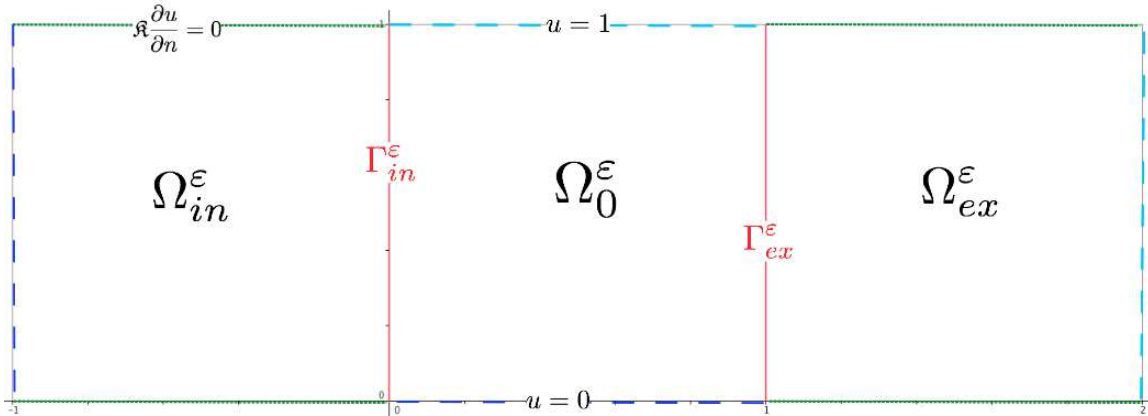


FIGURE 10.5 – *Domaine décomposé*

**Remarque 10.2.** *Pour la réalisation de ce test, nous avons utilisé deux discontinuités. La gestion et l'implémentation de plusieurs discontinuités sont abordés dans le Chapitre 13.*

Analysons un instant les données : si  $u$  représente la pression dans le problème (10.17), alors  $-\mathfrak{K}\nabla u$  en est la vitesse de Darcy (vitesse de filtration).

La perméabilité dans les sous-domaines  $\Omega_{\text{in}}^\varepsilon$  et  $\Omega_0^\varepsilon$  est scalaire avec  $\mathfrak{K}_{\text{in}}^\varepsilon = \mathfrak{K}_{\text{ex}}^\varepsilon = 1$ , les hauts et les bas des deux sous-domaines sont imperméables ( $u.n = 0$ ), et il y a une chute de pression ( $u = 0$ ) du côté droit du domaine vers le côté gauche du domaine ( $u = 1$ ) (voir Figures 10.5 et 10.6).

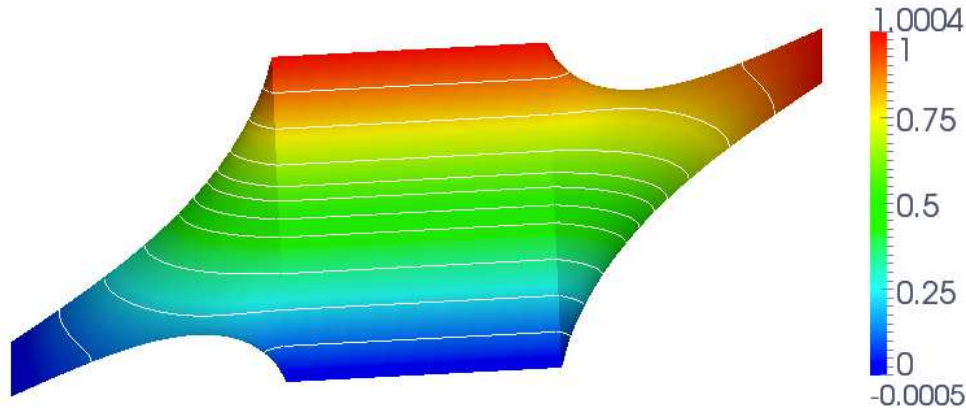


FIGURE 10.6 – Solution sur le domaine décomposé

La fracture  $\Omega_0^\varepsilon$  est très perméable ( $\mathfrak{K}_0 = 2000$ , elle se laisse très facilement traverser). Une chute de pression est imposée du haut vers le bas de la fracture (condition de Dirichlet), de sorte que le fluide s'écoule le long de la faille, ainsi que de droite à gauche (Figure 10.6).

Quand  $\varepsilon$  tend vers 0, le problème (10.17) tend vers l'un des cas-tests proposé par Frih-Martin-Roberts-Saada dans [47] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{sur } \Omega = \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = g_d & \text{sur } \partial\Omega_d, \\ u = g_n & \text{sur } \partial\Omega_n, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] - \partial_s(\alpha_0(s)\partial_s u) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (10.18)$$

avec pour domaine

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_{\text{in}} = ]-1; 0[ \times ]0; 1[, \\ \Omega_{\text{ex}} = ]0; 1[ \times ]0; 1[, \end{cases}$$

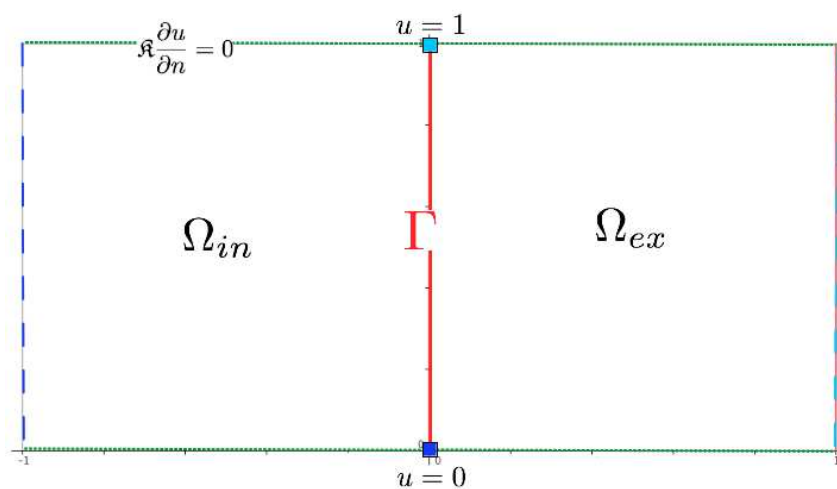
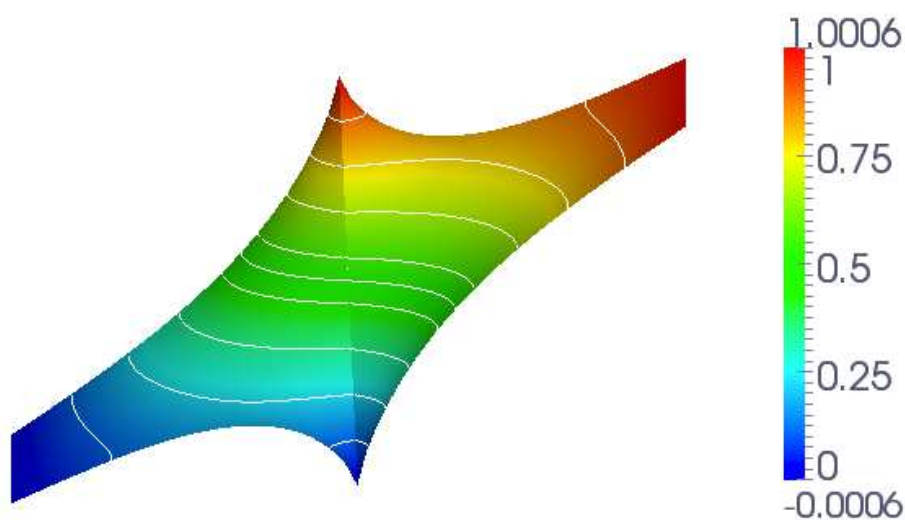
et pour coefficient  $\mathfrak{K}_{\text{in}} = \mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1$ ,  $f = 0$  sur  $\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}$ .

$\Gamma$  a pour équation  $x = 0$ , son épaisseur  $d$  est de 0.001, et sa perméabilité  $\mathfrak{K}_0$  vaut 2000.

Comme précédemment, les hauts et les bas des deux sous-domaines sont imperméables, et il y a une chute de pression du côté droit du domaine vers le côté gauche du domaine (Figure 10.7). Les conditions aux bord  $g_d$  et  $g_n$  sont détaillées dans la Figure 10.7.

Les conditions de Dirichlet de la fracture sont imposées ponctuellement : il y a une chute de pression du point supérieur de la fracture au point inférieur. Ainsi, le fluide a tendance à s'écouler de droite à gauche et de circuler rapidement le long de la fracture (très perméable) de haut en bas (Figure 10.8).

Il existe un échange de fluide entre la fracture et les sous-domaines : le fluide présent dans la fracture entre dans  $\Omega_{\text{in}}$  par la partie supérieure de la faille, et le fluide provenant de  $\Omega_{\text{ex}}$  pénètre dans la fracture à proximité du fond. La vitesse normale est discontinue à travers la fracture.

FIGURE 10.7 – *Domaine réduit*FIGURE 10.8 – *Solution sur le domaine réduit*

**Remarque 10.3.** Dans la situation exposée dans l'article [47], les auteurs se sont placés dans le cas où l'interface coïncide avec les lignes du maillage. Nous avons repris cette situation pour être au plus près de leur configuration, et ainsi valider notre test de comparaison. Nous avons également testé cette configuration lorsque  $\Gamma$  est indépendante de la position du maillage. Nous avons aboutis aux mêmes résultats.



# Problème instationnaire

## Sommaire

---

11.1 Problème modèle et formulation NXFEM . . . . .	138
11.2 Résultats numériques . . . . .	139

---

Pour traiter les dérivées en temps de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t},$$

il existe de nombreux schémas : Euler implicite, Euler explicite, Crank-Nicholson, différentiation rétrograde (*Backward Differential Formula*) d'ordre 2, d'ordre 3 ...

Les schémas d'Euler et Crank-Nicholson sont courants, nous proposons d'expliquer brièvement le principe de la méthode *BDF* d'ordre 2.

L'équation étudiée prend la variable  $u$  à l'instant  $n + 1$  et utilise un schéma décentré vers l'arrière pour approcher la dérivée en temps. Ce schéma fait intervenir deux pas de temps précédents :

$$(1) : u^n = u^{n+1} - \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3),$$

$$(2) : u^{n-1} = u^{n+1} - 2 \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + 2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3).$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps considéré et  $u^n = u(n \times \Delta t)$ . On combine ensuite les deux expressions précédentes afin de faire disparaître les termes d'ordre 2, il vient alors :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2} u^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2} u^{n-1} \right) + O(\Delta t^2). \quad (11.1)$$

L'erreur commise est donc en  $O(\Delta t^2)$ .

Les schémas d'Euler implicite et BDF2 ont été mis en œuvre.

Bien que le schéma BDF2 soit reconnu pour sa robustesse, nous préférons choisir un schéma d'Euler implicite pour simplifier la rédaction. Ce dernier fait intervenir seulement un pas de temps précédent, ce qui limite les données stockées, devient alors un avantage, et est plus simple à écrire.

Nous travaillerons avec une approximation conforme, en nous basant sur les travaux réalisés dans les chapitres précédents.

## 11.1 Problème modèle et formulation NXFEM

Considérons le problème (11.2) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathfrak{K} \nabla u) = f & \text{dans } \Omega^T, \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{sur } \Sigma^T, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma^T, \\ [\mathfrak{K} \nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma^T, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}. \end{array} \right. \quad (11.2)$$

Pour  $T > 0$  fixé,

$$\Omega^T := (\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}) \times ]0; T[,$$

$$\Sigma^T := \partial\Omega \times ]0; T[,$$

et

$$\Gamma^T := \Gamma \times ]0; T].$$

Divisons l'intervalle  $]0; T[$  en  $M$  sous-intervalles et posons

$$\Delta t = \frac{T}{M}.$$

Nous pouvons par exemple assimiler ces équations à un problème d'écoulement monophasique (une phase, un constituant) dans deux milieux différent. Le coefficient de perméabilité  $\mathfrak{K}$  serait discontinu le long d'une interface  $\Gamma$ , tout comme  $\Phi$  le coefficient de porosité du milieu. Ce dernier sera positif et constant par sous-domaine, et prendra respectivement les valeurs  $\Phi_{\text{in}}$  et  $\Phi_{\text{ex}}$  sur chaque sous-domaine  $\Omega_{\text{in}}$  et  $\Omega_{\text{ex}}$ .

À l'instant  $n + 1$ , la formulation variationnelle discrète du problème (11.2) est la suivante : Pour  $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$ , on définit la forme bilinéaire par :

$$a_h^T(u_h, v_h) := \int_{\Omega} \Phi \frac{u_h}{\Delta t} v_h \, dx + a_h(u_h^{n+1}, v_h), \quad (11.3)$$

où  $a_h(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire (6.4), et pour  $v_h \in \mathbb{V}_h$ , la forme linéaire s'écrira :

$$l^T(v_h) := \int_{\Omega} \Phi \frac{u_h^n v_h}{\Delta t} + l(v_h), \quad (11.4)$$

où  $l(\cdot)$  est la forme linéaire (6.5) avec  $f$  pris à l'instant  $n + 1$ .

On cherchera  $u_h \in \mathbb{V}_h$  tel que

$$a_h^T(u_h, v_h) = l^T(v_h).$$

$u_h$  sera alors une approximation de  $u((n + 1)\delta t; \cdot)$ .



## 11.2 Résultats numériques

Considérons le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u) = f & \text{dans } (\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}) \times [0; T], \\ u(t, \cdot) = u_D & \text{sur } \partial\Omega_{\text{ex}} \times ]0; T[, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma^T, \\ [\mathfrak{K} \nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma^T, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}. \end{array} \right. \quad (11.5)$$

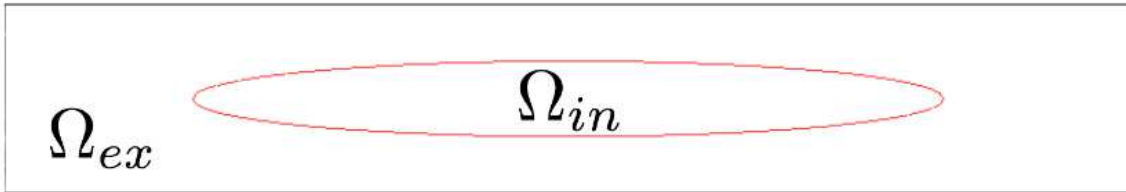


FIGURE 11.1 – *Domaine de simulation*

Nous travaillons sur le domaine fixe  $\Omega = [0; 300] \times [0; 50]$  (voir Figure 11.1), l'interface  $\Gamma$  est une ellipse, indépendante du temps et est décrite par l'équation :

$$(\Gamma) : \frac{(x - 150)^2}{100^2} + \frac{(y - 25)^2}{10^2} - 1 = 0.$$

Nous fixons :

Paramètres	$\Omega_{\text{ex}}$	$\Omega_{\text{in}}$
$\mathfrak{K}$	10	1
$\Phi$	0.5	0.3

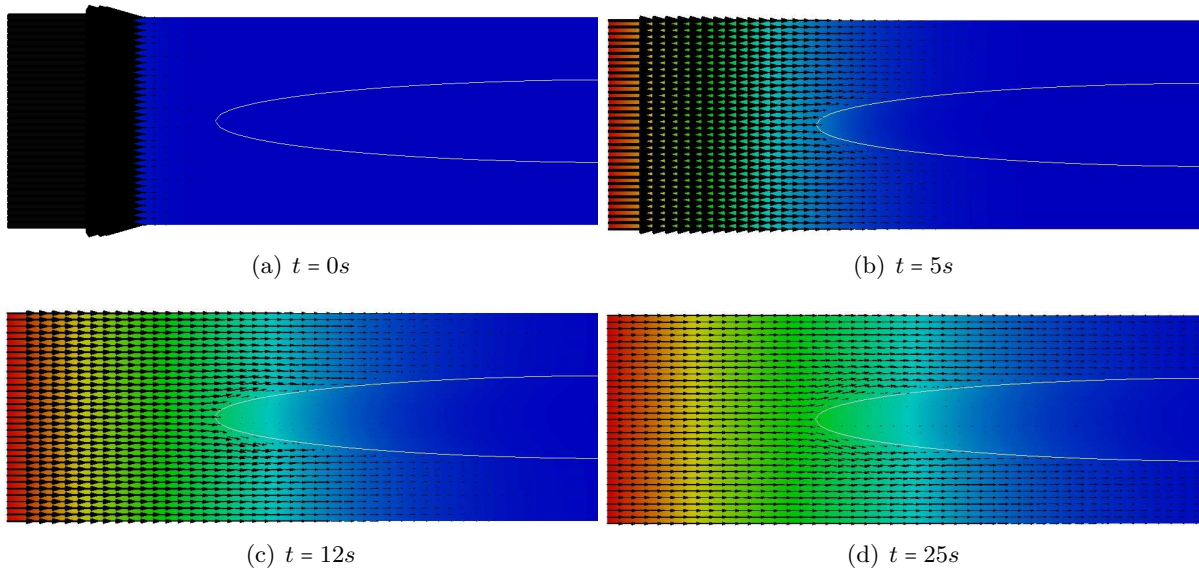
TABLE 11.1: *Données du problème 11.2*

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet en  $x = 0$  et  $x = 300$  :

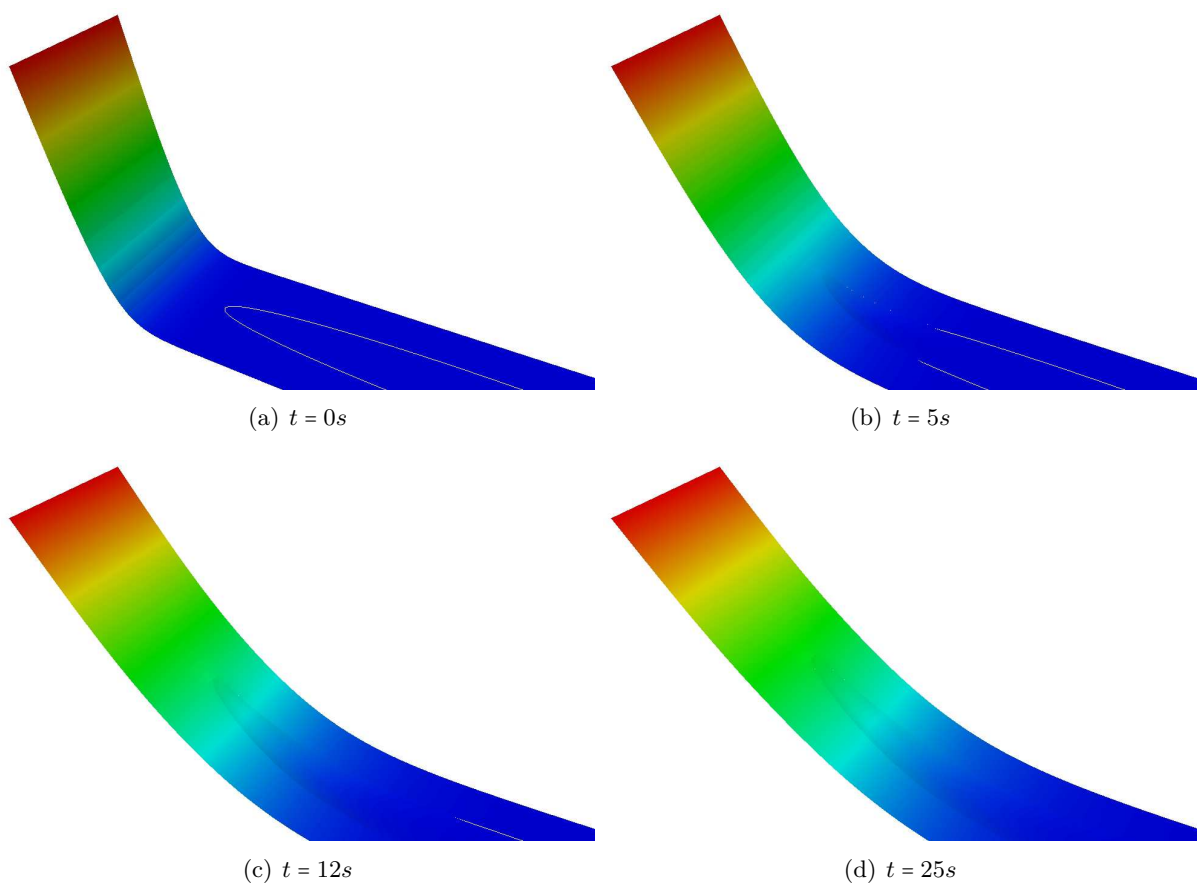
$$\begin{cases} u(t, x = 0) & = 100, \\ u(t, x = 300) & = 0, \end{cases}$$

et de type Neumann en  $y = 0$  et  $y = 50$ , pour  $t \in ]0; T[$ . La condition initiale est donnée par  $u_0 = 0$ .

Les données nous indiquent que le domaine  $\Omega_{\text{ex}}$  est plus perméable et plus poreux que le domaine  $\Omega_{\text{in}}$ . Le fluide doit donc s'y déplacer plus rapidement. Compte tenu de la forte perméabilité de  $\Omega_{\text{in}}$ , la plus grande partie du fluide contournera ce domaine .

FIGURE 11.2 – *Vitesse de filtration au cours du temps*

La Figure 11.2 illustre les propos précédents, en montrant les vitesses de filtration  $(-\mathfrak{K}u)$ . La Figure 11.3 propose les variations du champ de "pression" au cours du temps.

FIGURE 11.3 – *Variation du champs de pression*



# Problème de diffusion-convection

## Sommaire

---

12.1 Étude préliminaire et choix d'approximation . . . . .	143
12.2 Problème modèle et formulation NXFEM . . . . .	145
12.3 Résultats numériques . . . . .	147
12.3.1 Test de validation et de comparaison . . . . .	147

---

Le terme de convection intervient dans de nombreux problèmes comme celui de Navier-Stokes, sous la forme

$$u \cdot \nabla u,$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse.

Ce terme dégénère rapidement et il nécessite une stabilisation indépendamment des autres termes. Il existe une littérature abondante sur les diverses méthodes de stabilisation (SUPG, Godunov, ...), néanmoins cela reste un sujet de recherche très actif.

Pour mieux comprendre le comportement de ce terme en vue de l'adapter en domaine fracturé, nous proposons de l'étudier sous la forme simple

$$\beta \cdot \nabla u,$$

où  $\beta$  est connu, constant, et représente la vitesse de transport, dans l'équation de diffusion-convection suivante, à convection dominante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\kappa \Delta u + \beta \cdot \nabla u = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

## 12.1 Étude préliminaire et choix d'approximation

On rappelle par un exemple simple le comportement de quelques méthodes de résolution, indépendamment de toutes interfaces. Considérons un problème de transport pur (12.1), illustré par la Figure 12.1 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta \cdot \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ u = 1 & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (12.1)$$

où  $\beta = (1, -1)$ ,  $\Omega$  est le carré unité, et

$$\Gamma_1 = \{0\} \times \left] \frac{1}{2}; 1 \right[ \cup [-1; 1] \times \{1\}, \quad \Gamma_2 = \{0\} \times \left[ 0; \frac{1}{2} \right].$$

On définit la frontière entrante  $\partial\Omega^-$  par

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega; \beta \cdot \mathbf{n}(x) < 0\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

et sortante

$$\partial\Omega^+ := \{x \in \partial\Omega; \beta \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\}.$$

Les conditions aux limites sont imposées seulement sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega^-$ .

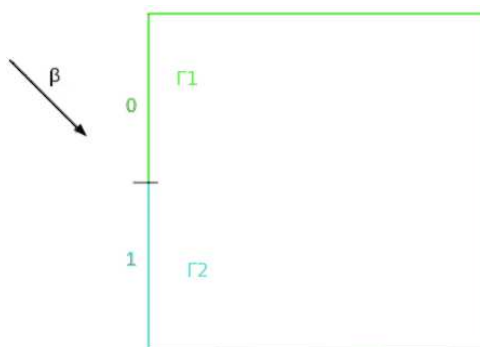


FIGURE 12.1 – *Illustration*

Nous souhaitons observer comment les valeurs de  $u$  sont transportées par  $\beta$ . Quelle méthode d'approximation élément fini est la mieux adaptée à notre problème ?

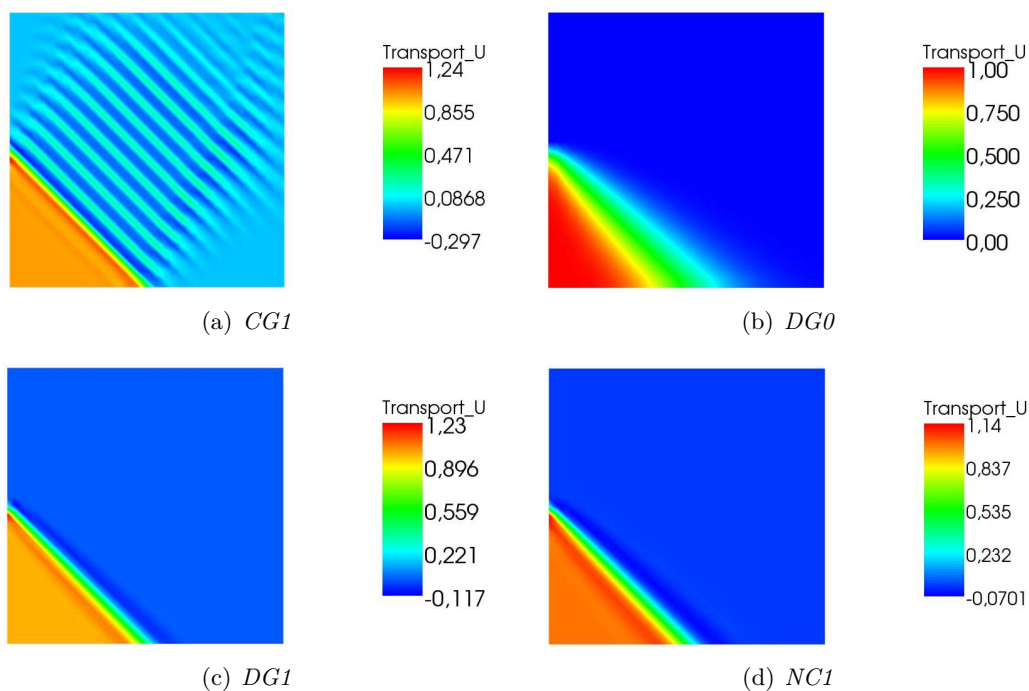


FIGURE 12.2 – *Comparaison des approximations éléments finis sur le terme convectif  $\beta \cdot \nabla u$*

Sans stabilisation supplémentaire, l'approximation *conforme* (Figure 12.2(a)) présente de fortes oscillations et les valeurs de  $u$  varient au-delà de 0 et de 1 (le principe du maximum n'est pas vérifié). Cette méthode nécessite d'être stabilisée pour donner des résultats acceptables.

L'approximation *Galerkin Discontinue de degré 0* (Figure 12.2(b)) est simple à mettre en oeuvre et aboutit à un schéma monotone ce qui assure le respect du principe du maximum. On observe néanmoins une forte diffusion vers la fin du mouvement.

La méthode *Galerkin Discontinue de degré 1* (Figure 12.2(c)) est moins diffuse mais viole du principe du maximum. On ajoute souvent des limiteurs de pente pour corriger ce défaut qui peut le rendre instable. Mais cette correction n'est pas facile à mettre en oeuvre et dégrade l'ordre du schéma.

De même, l'approximation *non-conforme* (Figure 12.2(d)) présente des similitudes avec la méthode précédente. Remarquons néanmoins que les valeurs 0 et 1 sont légèrement dépassées mais bien moins qu'en  $DG_1$ .

L'idée de cette section est de mettre en place une interface modélisant la position du choc, et de la traiter par une formulation de type NXFEM. Ainsi, nous espérons corriger les défauts précédemment cités et améliorer les résultats.

## 12.2 Problème modèle et formulation NXFEM

Considérons le problème de transport (12.5) suivant :

$$\begin{cases} \beta \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega^-, \\ [\beta \cdot n u] = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (12.2)$$

où  $\beta$  est un vecteur régulier.

On pose

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega; \beta \cdot n(x) < 0\}$$

l'ensemble des éléments du bord où le flux est entrant et

$$\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega; \beta \cdot n(x) \geq 0\}$$

l'ensemble des éléments du bord où le flux est sortant, et on rappelle que  $n$  est la normale unitaire extérieure au bord du domaine, ou bien la normale unitaire le long de l'interface  $\Gamma$  dirigée de  $\Omega_{\text{in}}$  vers  $\Omega_{\text{ex}}$ .

On définit l'espace d'approximation

$$V_h = \{v_h \in L^2(\Omega), v_h|_K \in R^k(K), \forall K \in \mathcal{K}_h\}, \quad (12.3)$$

où  $R^k$  est l'ensemble des polynômes  $\mathbb{P}^k$  ou  $\mathbb{Q}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  le degré du polynôme, et

$$\mathbb{V}_h := \{v_h|_{\Omega_{\text{in}}} + w_h|_{\Omega_{\text{ex}}}, v_h, w_h \in V_h\}. \quad (12.4)$$

On utilisera les notations classiques :

$$\varphi^+ = \begin{cases} \varphi & \text{si } \varphi > 0, \\ 0 & \text{si } \varphi \leq 0, \end{cases} \quad \varphi^- = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \geq 0, \\ \varphi & \text{si } \varphi < 0. \end{cases}$$

On propose de donner une formulation faible de ce problème, avec une méthode de stabilisation décentrée, qui peut se généraliser au cas d'un beta non-constant (basée sur l'idée de Lesaint-Raviart [58]). Décrivons le schéma proposé sur une maille  $K$  quelconque.

La formulation discrète que nous proposons est la suivante :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \frac{1}{2} (\beta \cdot \nabla u_h v_h + u_h \beta \cdot \nabla v_h) dx + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\partial\Omega^+}} \int_S \frac{1}{2} (\beta \cdot n) u_h v_h ds \\ &+ \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}}} \int_S \frac{1}{2} ((\beta \cdot n_S)^+ u_h^{\text{in}} + (\beta \cdot n_S)^- u_h^{\text{ex}}) [v_h] ds \\ &+ \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \frac{1}{2} (\{\beta \cdot n_S\} u_h^{\text{in}} + \{\beta \cdot n_S\} u_h^{\text{ex}}) [v_h] ds, \end{aligned}$$

et

$$l(v_h) = - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K f v_h dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\partial\Omega^-}} \int_S \frac{1}{2} (\beta \cdot n) g v_h ds.$$

**Remarque 12.1.**  $F(u_h, n_S, \beta) = ((\beta \cdot n_S)^+ u_h^{\text{in}} + (\beta \cdot n_S)^- u_h^{\text{ex}})$  est appelé **flux numérique**. Celui-ci remplace le terme  $\beta \cdot n_S [u_h v_h]$  (appelé **flux physique**) provenant directement de l'intégration par partie. Or ce terme n'est pas consistant, on le change donc arbitrairement par le flux numérique.

Sur les arêtes intérieures non-coupées  $\mathcal{S}_h^{\text{int}}$  et sur les arêtes intérieures coupées  $\mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}}$ , nous utilisons un flux numérique de *Steger-Warming* [77].

Nous ajoutons de plus des termes de stabilisation pour aboutir à :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \left( \frac{1}{2} (\beta \cdot \nabla u_h v_h + u_h \beta \cdot \nabla v_h) + \gamma (\beta \cdot \nabla u_h) (\beta \cdot \nabla v_h) \right) dx \\ &+ \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\partial\Omega^+}} \int_S \frac{1}{2} (\beta \cdot n) u_h v_h ds \\ &+ \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{int}}} \int_S \frac{1}{2} \left( ((\beta \cdot n_S) u_h^{\text{in}} + (\beta \cdot n_S) u_h^{\text{ex}}) [v_h] + \frac{1}{2} |\beta \cdot n_S| [u_h] [v_h] \right) ds, \\ &+ \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \frac{1}{2} \left( (\{\beta \cdot n_S\} u_h^{\text{in}} + \{\beta \cdot n_S\} u_h^{\text{ex}}) [v_h] + \frac{1}{2} |\beta \cdot n_S| [u_h] [v_h] \right) ds, \end{aligned}$$



Notons qu'il existe d'autres schémas pour le flux numérique (*Godunov, Lax-Friedrich*), et pour la stabilisation (*Edge stabilization, LPS, CIP*).

Lax-Friedrich, hll, hllc sont mis en oeuvre dans Concha, ainsi que les quatres stabilisations.

## 12.3 Résultats numériques

### 12.3.1 Test de validation et de comparaison

Considérons le problème (12.5) muni des données suivantes (Figure 12.3) :

$$\begin{cases} \beta \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega_{in} \cup \Omega_{ex}, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega^-, \\ [\beta \cdot n u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (12.5)$$

où  $\Gamma : x - y + 0.5 = 0$ ,  $\Omega = [0; 1]^2$ ,  $\vec{\beta} = (1; 1)$ ,  $g = \begin{cases} 2 & \text{sur } \partial\Omega_{in}^-, \\ 1 & \text{sur } \partial\Omega_{ex}^-. \end{cases}$

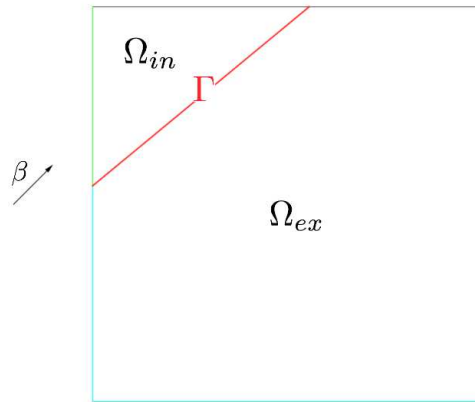
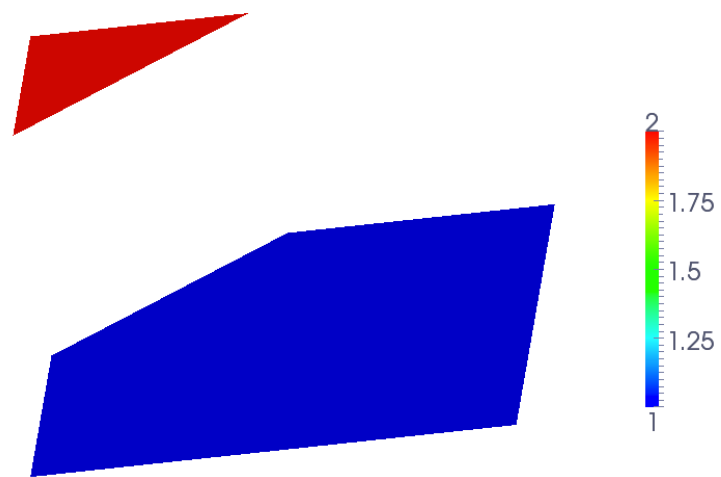


FIGURE 12.3 – Configuration

Les éléments finis choisis pour cette simulation sont de type conformes et de degré 1. Nous avons vu dans l'étude préliminaire que ce choix n'était pas adapté, car il présente de fortes oscillations et que le principe du maximum n'est pas conservé (voir Section 12.1). Avec le traitement que nous avons proposé, nous retrouvons une solution régulière (Figure 12.4).

**Remarque 12.2.** *Les simulations d'ordre supérieur, en conformes et Galerkin discontinues, sont en cours de validation.*

FIGURE 12.4 – *Élévation de la solution*

# Prise en compte de plusieurs interfaces

## Sommaire

---

<b>13.1</b>	<b>Détail de la mise en œuvre</b>	<b>149</b>
<b>13.2</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>150</b>
13.2.1	Test de validation	150
13.2.2	Transport 2D	150
13.2.3	Autres simulations	151

---

Les réservoirs ne comportent que très rarement une seule faille ([59], [67]), c'est même tout le contraire : il y en a plusieurs qui cohabitent ensemble, qui s'intersectent, de longueurs et d'épaisseurs différentes ...

Nous présentons ici par le biais de quelques tests, les outils mis en place pour la prise en compte d'un ensemble d'interfaces.

## 13.1 Détail de la mise en œuvre

La prise en compte d'une discontinuité sur un maillage triangulaire a été abordée dans la Section 4.1, celle sur un maillage de quadrangulaires dans la Section 6.4.1.

Dans un premier temps, nous supposons que :

- Les discontinuités présentes sur le domaine sont chacune indépendantes de la position du maillage,
- Une cellule du maillage ne peut contenir au plus qu'une interface (en particulier, le croisement d'interface n'est pas admissible pour le moment),
- Deux cellules voisines du maillage ne peuvent pas être coupées par des discontinuités différentes.

Chaque discontinuité va être traitée géométriquement de la même manière que précédemment. Néanmoins, chacune d'entre elle ne voit que les deux sous-domaines qu'elle génère : la difficulté principale réside donc dans la localisation et la séparation de tous les sous-domaines, en fonction du nombre et de la position des interfaces.

Soit  $ndisc$  le nombre de discontinuités. Considérons un point  $M$  dans un des sous-domaines noté  $\Omega_i$ , avec  $i = 0, \dots, ndisc$ . Pour trouver le domaine  $\Omega_i$  auquel le point  $M$  appartient, on cherche le signe de  $f_{idisc}(M)$ , où  $f_{idisc}$  est la description implicite de la discontinuité de numéro  $idisc$ , et ceci pour les  $ndisc$  discontinuités.

On obtient un  $ndisc$ -uplet  $(f_{ndisc}(M), \dots, f_0(M))$  de valeurs 0 ou 1 : 0 lorsque  $f_{ndisc}(M) < 0$  et 1 si  $f_{ndisc}(M) > 0$ .

Le  $n$ -uplet obtenu est vu comme un nombre écrit en base 2, que l'on convertit en base 10. On ordonne finalement tous les conversions obtenues pour chaque sous-domaines, on trouve ainsi le numéro  $i$  comme étant le  $i$ -ème dans la suite des nombres ordonnés.

**Exemple 13.1.** *Pour 3 discontinuités (ne se croisant pas), on a 4 domaines. On aura donc 4 triplets de la forme*

$$(0, 0, 0) \quad (0, 0, 1) \quad (0, 1, 1) \quad (1, 1, 1).$$

*Le triplet  $(0, 1, 1)$  se traduira par  $f_0(M) > 0$ ,  $f_1(M) > 0$ ,  $f_2(M) < 0$ .*

*Ce  $ndisc$ -uplet, vu en base 2, est converti de la manière suivante :*

$$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 = 3.$$

*Ce triplet donne 3 en base 10. Or, en base 10, les quatres triplets donnent les codes ordonnés 0, 1, 3 et 8.*

*Le code 3 correspond donc au domaine  $\Omega_3$ , le code 8 au domaine  $\Omega_4$ .*

## 13.2 Résultats numériques

### 13.2.1 Test de validation

Le test de validation de cette partie n'est autre que celui que nous avons utilisé dans l'étude du modèle asymptotique de failles (voir Section 10.5.2).

### 13.2.2 Transport 2D

Dans cet essai numérique, nous allons valider notre code au moyen du test "Rotating Cone". Il s'agit d'un problème de convection dans un anneau dont nous n'en considérerons que le quart supérieur.

Le problème modèle utilisé pour cette simulation est le suivant :

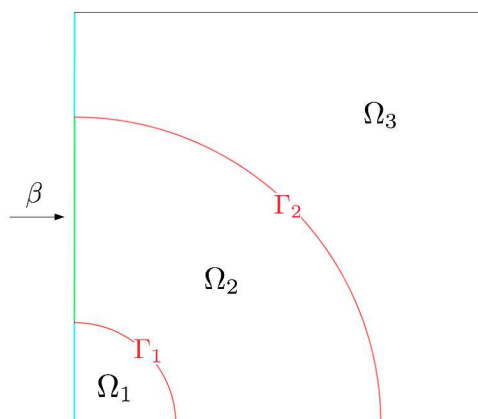
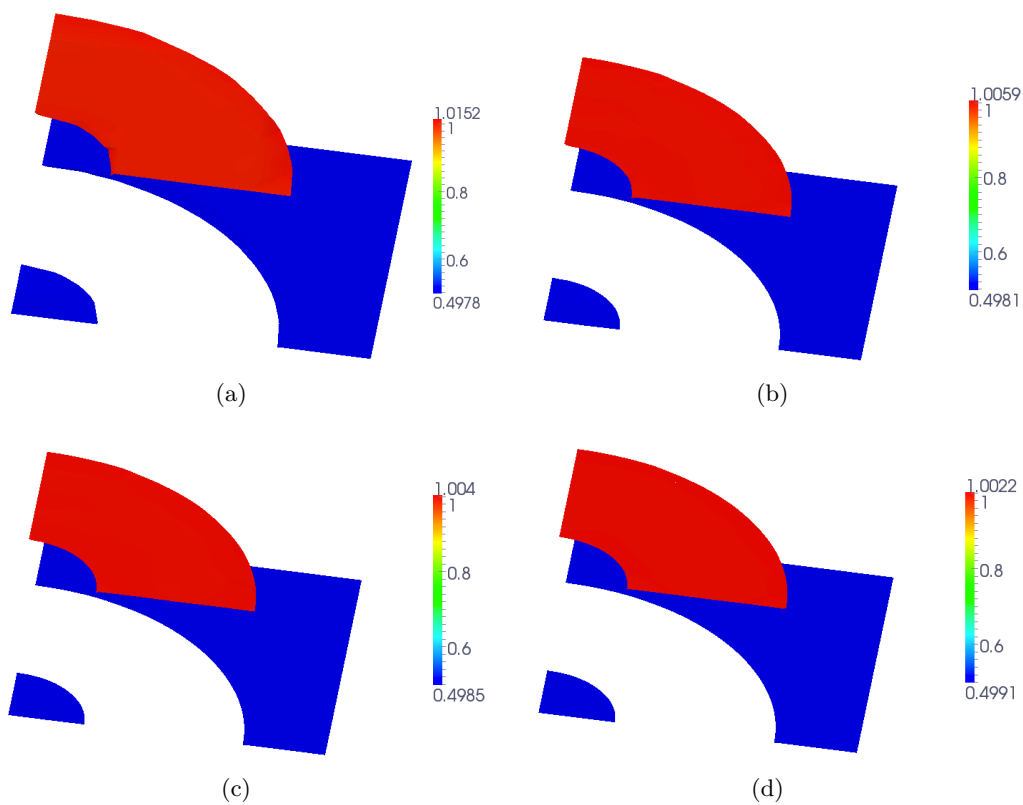
$$\begin{cases} \beta \cdot \nabla u = f & \text{dans } \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega^-, \\ [\beta \cdot n u] = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \end{cases} \quad (13.1)$$

où  $\Omega = ]0; 1[{}^2$ ,  $\vec{\beta}(x, y) = (y; -x)$ ,  $g = \begin{cases} 1 & \text{sur } \partial\Omega_2^-, \\ 0.5 & \text{sur } \partial\Omega_1^- \cup \Omega_3^- \end{cases}$ .

Les interfaces  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  ont pour équations respectives

$$x^2 + y^2 - 0.24^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 0.74^2 = 0.$$

Les simulations sont effectuées avec une méthode éléments finis conformes, de degré 1. Les Figures 13.2 montrent quatres simulations sur un maillage uniformément raffiné. Pour l'ensemble des simulations, la solution est globalement harmonieuse. On observe néanmoins un peu de diffusion le long de  $\Gamma_1$  sur les Figures 13.2(a) et 13.2(a). Le principe du maximum n'est pas jamais vérifié, mais tend à l'être lorsque le maillage devient de plus en plus fin.

FIGURE 13.1 – *Configuration*FIGURE 13.2 – *Validation : Rotating Cone sur maillage CC*

### 13.2.3 Autres simulations

Les simulations sont effectuées avec une méthode éléments finis conformes, de degré 1.

**En 2D**

Le problème modèle utilisé pour cette simulation est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \bigcup_{i=1}^5 \Omega_i, \\ u = g_d & \text{sur } \partial\Omega_d, \\ \mathfrak{K}\nabla_n u = g_n & \text{sur } \partial\Omega_n, \\ [u] = 0 & \text{sur } \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i, \end{array} \right. \quad (13.2)$$

où  $\Omega = [0; 1]^2$ ,  $f = 0$ ,  $g_n = 0$  sur  $y = \{0; 1\}$  et

$$\mathfrak{K} = \begin{cases} 10^6 & \text{sur } \Omega_1, \\ 1 & \text{sur } \Omega_2 \cup \Omega_5, \\ 2 & \text{sur } \Omega_3, \\ 10^3 & \text{sur } \Omega_4, \end{cases} \quad g_d = \begin{cases} 0 & \text{sur } x = 0, \\ 1 & \text{sur } x = 1. \end{cases}$$

Les interfaces ont pour équations (voir Figure 13.3) :

$$\Gamma_1 : x - 0.1251y + 0.6252 = 0, \quad \Gamma_2 : x^2 + y^2 - 0.251^2 = 0, \quad \Gamma_3 : x - 0.41 = 0, \quad \Gamma_4 : x + 0.15y - 0.751 = 0.$$

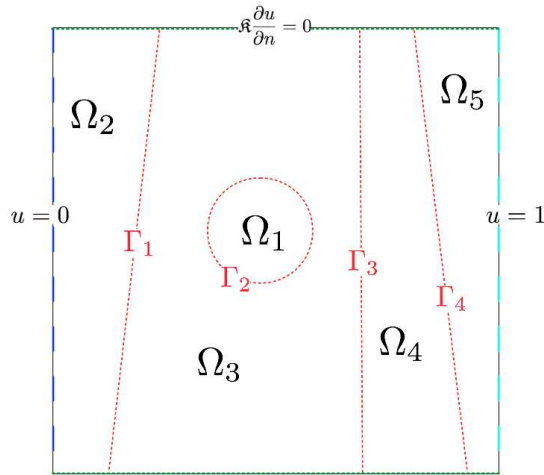


FIGURE 13.3 – Configuration

Une dernière simulation 2D, avec cette fois-ci quelques courbes de convergence pour  $k = 1$ . Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (13.3)$$

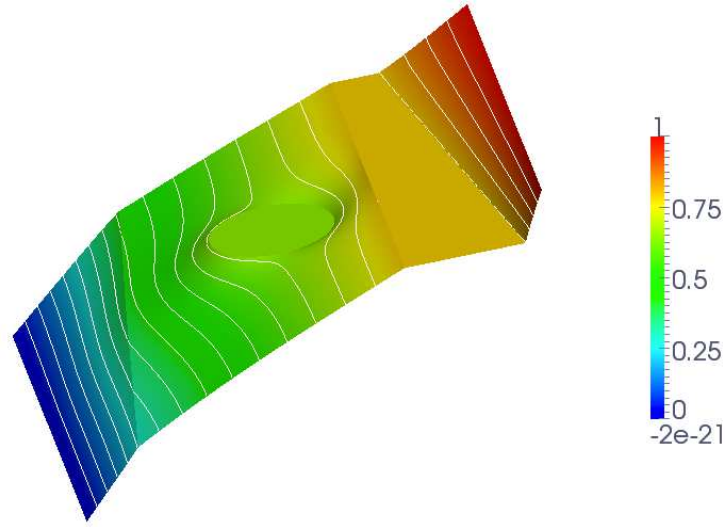


FIGURE 13.4 – Élévation de la solution

Les données sont choisies de sorte que la fonction définie par

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^2}{\mathfrak{K}_0} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^2 - r_0^2}{\mathfrak{K}_1} + \frac{r_0^2}{\mathfrak{K}_0} & \text{si } r_0 < r \leq r_1, \\ \frac{r^2 - r_1^2}{\mathfrak{K}_2} + \frac{r_1^2}{\mathfrak{K}_1} - \frac{r_0^2}{\mathfrak{K}_1} + \frac{r_0^2}{\mathfrak{K}_0} & \text{si } r > r_1, \end{cases} \quad (13.4)$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , nous fixons  $r_0 = 0.349$  et  $r_1 = 0.749$  sur  $\Omega = ]0, 1]^2$ ,

$$\mathfrak{K} = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega_1, \\ 10 & \text{sur } \Omega_2, \\ 100 & \text{sur } \Omega_3. \end{cases}$$

Les conditions de bord sont de type Dirichlet. Le second membre de cette solution exacte est  $f = -4$ .

Les interfaces ont pour équations (Figure 13.5(a)) :

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 - r_0^2 = 0, \quad \Gamma_2 : x^2 + y^2 - r_1^2 = 0.$$

La Figure 13.5(b) présente une élévation de la solution ainsi que la position des interfaces. Celle-ci nous permet de confirmer le comportement attendu de la solution dans les différents sous-domaines.

La Figure 13.6 expose les courbes de convergences de la norme énergie, de la norme- $L^2$  ainsi que de l'estimateur d'erreur, obtenus pour cette simulation. Nous retrouvons les ordres de convergence optimaux pour chacun d'entre eux.

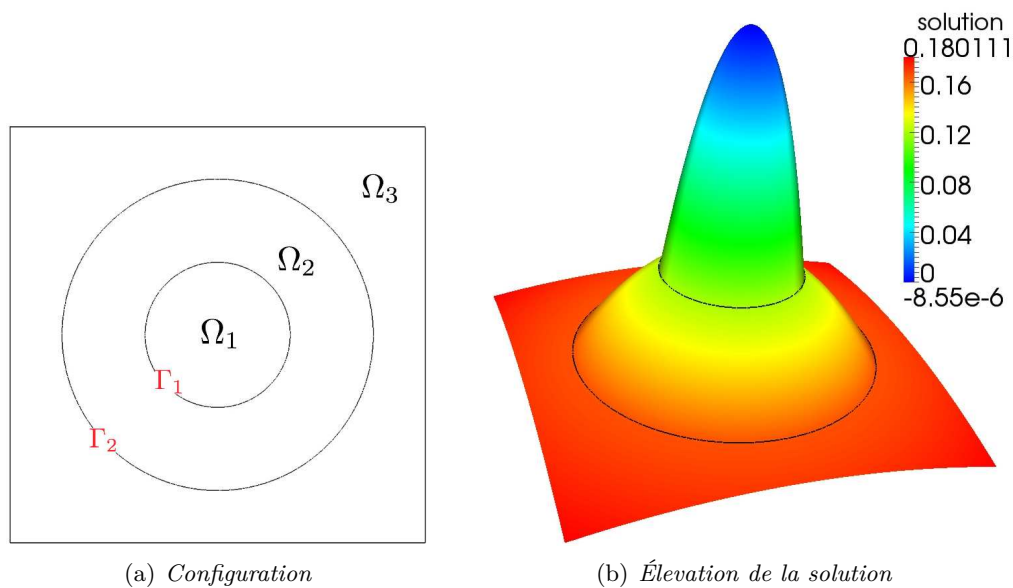


FIGURE 13.5 – Visualisation de la solution et des interfaces

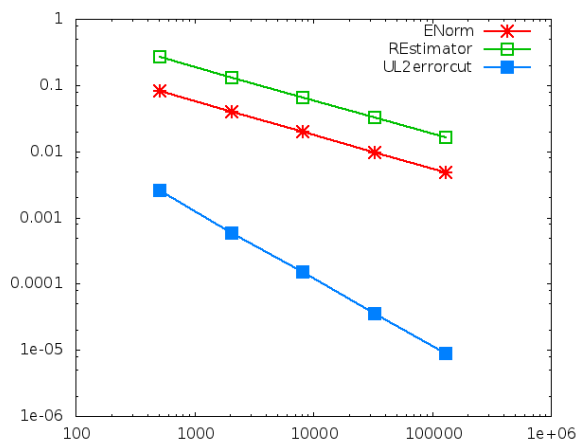


FIGURE 13.6 – Courbes de convergences

### En 3D

Le problème modèle utilisé pour cette simulation est une généralisation 3D du précédent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i, \\ u = g_d & \text{sur } \partial\Omega_d, \\ \mathfrak{K}\nabla_n u = g_n & \text{sur } \partial\Omega_n, \\ [u] = 0 & \text{sur } \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = 0 & \text{sur } \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i \end{array} \right. \quad (13.5)$$



où  $\Omega = [-1; +1]^3$ ,  $f = 0$ , et

$$\mathfrak{K} = \begin{cases} 1000 & \text{sur } \Omega_1, \\ 10000 & \text{sur } \Omega_2, \\ 1 & \text{sur } \Omega_3, \\ 10 & \text{sur } \Omega_4. \end{cases}$$

Les conditions de bord  $g_d$  et  $g_n$  sont de même nature que dans la (première) simulation précédente.

Les interfaces ont pour équations (Figure 13.7) :

$$\Gamma_1 : \frac{x^2}{0.41^2} + \frac{y^2}{0.41^2} + \frac{z^2}{0.31^2} - 1.0 = 0, \quad \Gamma_2 : x + 0.1y + 0.2z - 0.6511 = 0, \quad \Gamma_3 : x + 0.5z + 0.8511 = 0.$$

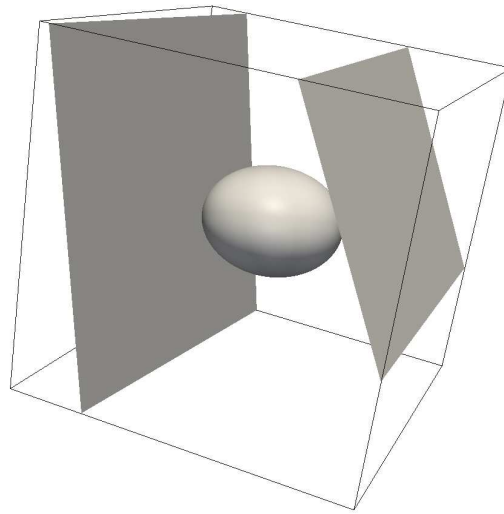
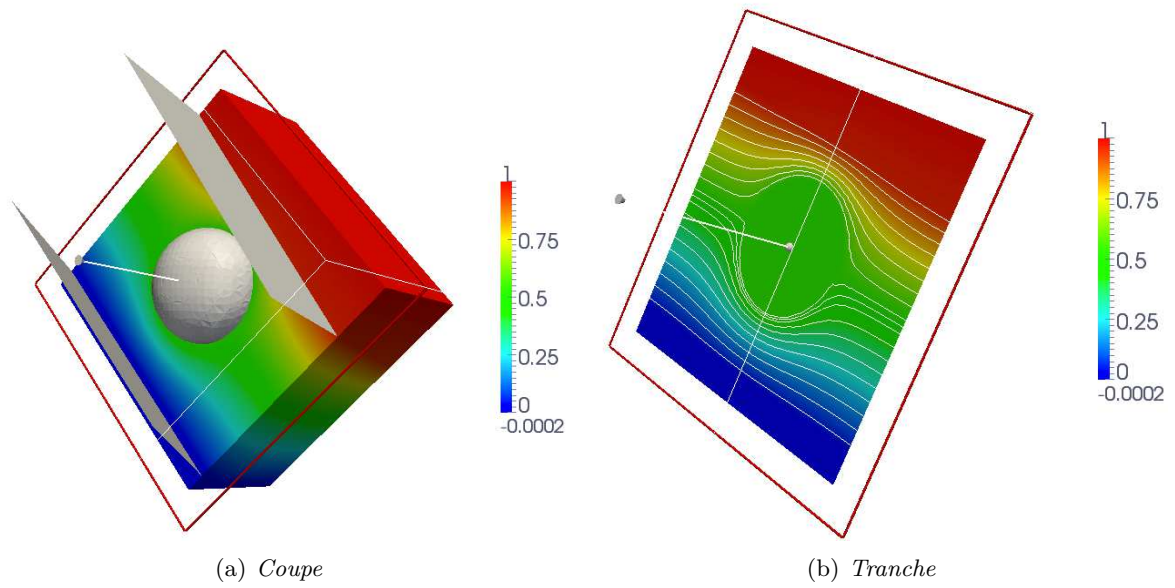
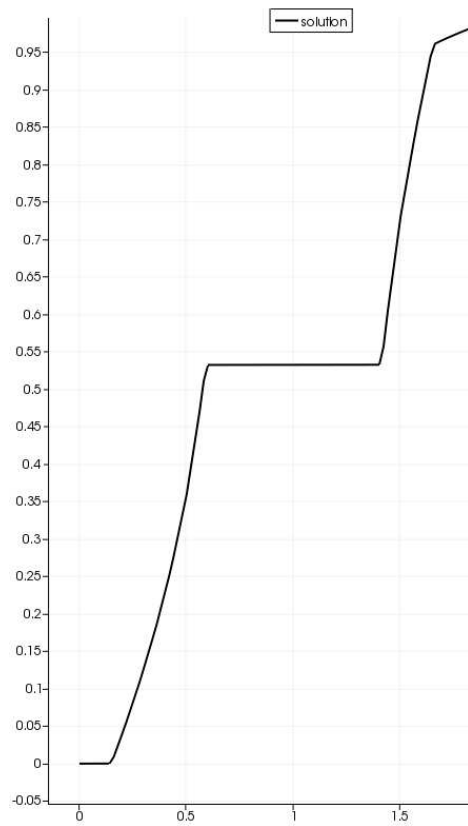


FIGURE 13.7 – Configuration

La Figure 13.8(a) présente une coupe de la solution et des interfaces suivant le vecteur  $(0, 0, 1)$  et passant par  $(0, 0, 0)$ . La Figure 13.8(b) montre une tranche de la solution dans les différents domaines, suivant le vecteur  $(0, 0, 1)$  passant par  $(0, 0, 0)$ .

La Figure 13.9 est une courbe obtenue à l'aide d'une coupe le long de la droite transversale passant par les points  $(-1, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  (*Plot over line*). Cette dernière nous permet de confirmer le comportement attendu de la solution dans les différents sous-domaines.

FIGURE 13.8 – *Visualisation de la solution et des interfaces*FIGURE 13.9 – *Plot Over Line*

# Perspectives

↪ Une première phase consisterait à améliorer l'étude du problème de transport, tant dans son développement propre que dans l'évolution des problèmes (advection-convection, en instationnaire). Ces problèmes ont été étudiés avec la méthode XFEM (voir par exemple [56]) et il serait intéressant de comparer les deux méthodes.

↪ Toujours en vue de comparer nos travaux à la méthode XFEM, l'étude d'un problème où l'interface s'arrêterait en plein milieu du domaine est un joli défi. Elle pourrait avoir ou non une épaisseur, créant ainsi une singularité.

Une première idée consisterait à prolonger la discontinuité (si cela est possible) afin de se ramener à un cas déjà étudié. Sur la partie prolongée, imposer des conditions de raccord pour la foudre dans le domaine. Sur la partie discontinue, écrire une formulation de Nitsche. Quant au point singulier (limite entre la partie discontinue et la partie prolongée), l'idée de fait varier linéaire le coefficient  $\mathfrak{K}$  autour de la singularité serait peut-être une piste à développer ...

↪ A ce stade, j'aimerais également étudier et adapter la méthode NXFEM aux équations de Darcy et de Navier-Stokes. Pour cela, il est important de voir les couplages qu'il existe entre les différentes variables, les choix judicieux à faire concernant les éléments finis, et écrire soigneusement la formulation de Nitsche pour ces équations.

↪ Autre point sur lequel j'aimerais me pencher, c'est celui des interfaces mobiles! On les retrouve dans les problèmes de surfaces libres (air-eau), de propagation d'ondes, dans les progressions de failles au sein d'un milieu (fissuration du béton), dans les déformations ou les déplacements d'objets.

↪ Il y a également un joli intérêt à adapter le principe de la méthode NXFEM en volumes finis. Notons que l'appellation FEM n'aurait plus vraiment de sens, on parlerait sans doute de NXFVM : Nitsche eXtended Finite Volume Methods ...

La méthode volumes finis est la plus utilisée dans le milieu pétrolier, elle est confortable pour la simulation d'écoulement dans des réservoirs de plusieurs  $\text{km}^3$  de dimensions. En revanche, pour la prise en compte des failles, il leur faut raffiner énormément pour que son épaisseur coïncide avec une ou plusieurs cellules du maillage. Ce processus tend à transformer les maillages, ils en

sont déstructurés, non conformes, déformés.

Adapter la méthode NXFEM permettrait d'utiliser des maillages cartésiens, de ne plus avoir à raffiner énormément et je pense même qu'en généralisant l'étude faite sur les problèmes asymptotiques (voir Chapitre 10), il y aurait un joli potentiel à exploiter.

Nous commencerions par un modèle un peu plus simple que celui du Black-Oil : Modèle Dead-Oil. Il s'agit d'un modèle où un fluide diphasique Eau-Huile immiscible et incompressible s'écoule au travers d'un milieu poreux isotrope<sup>1</sup>  $\Omega$ .

La géométrie du domaine est fixe au cours du temps, et l'immiscibilité de l'Eau et l'Huile forme une interface  $\Gamma$ . La porosité et la perméabilité du milieu ne dépendent que de la variable d'espace et nous notons  $T$  la durée de l'écoulement.

Dans le prolongement des raisonnements que nous avons effectué au cours de ce manuscrit, il nous faudra dans un premier temps établir des hypothèses et des conditions entre le maillage et l'interface. Les travaux de Eymard-Gallouet-Herbin [46] et de Chernogorova-Ewing-Iliev-Lazarov en 2002 [24] pourront sans doute nous aider à poser une discrétisation admissible.

---

1. Milieu dans lequel les propriétés physiques (indice de réfraction, élasticité, ...) et chimiques (densité, concentration...) sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace.

# Annexes



# Maillage, Notations et éléments finis

Afin d'aspirer à une bonne lecture de ce manuscrit, nous proposons dans cette annexe quelques rappels et outils élémentaires sur les notions de maillage et raffinement de maillages, ainsi que d'éléments finis dont nous avons besoin.

Les références [42, 43, 32, 41] compléteront confortablement ces rappels.

## A.1 Notations liées au maillage

Nous rappelons ici le cadre et les définitions liés au maillage.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , polyédrique, et on considère  $\mathcal{H}$  une famille de maillage.

### Définition A.1. *Maillage*

Un maillage particulier est un élément  $h \in \mathcal{H}$ .

Un maillage  $h$  de  $\Omega$  est une décomposition finie de  $\Omega$  en sous-domaine  $K$ , polyédriques, de formes simples.

Un maillage consiste en :

- un ensemble de cellules (cell)  $\mathcal{K}_h$  ( $K \in \mathcal{K}_h$ ),
- un ensemble de noeuds (nodes)  $\mathcal{N}_h$  ( $P \in \mathcal{N}_h$ ),
- un ensemble de côtés/faces (sides)  $\mathcal{S}_h$  ( $S \in \mathcal{S}_h$ ),

tels que :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_h} K.$$

**Remarque A.1.** En 3D, on complète le maillage  $h$  d'un ensemble de côtés (d'arêtes - edges)  $\mathcal{E}_h$  ( $E \in \mathcal{E}_h$ ).

$\mathcal{E}_h$  et  $\mathcal{S}_h$  désignent les mêmes objets en 2D.

Pour tout  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_h$ , on ait soit :

- $K_1 \cap K_2 = K_1$ ,
- $K_1 \cap K_2 = K_2$ ,
- $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{S}_h$ ,
- $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{E}_h$ ,
- $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{N}_h$ ,
- $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ .

### Définition A.2. *Maillage conforme*

Un maillage est dit conforme si :

$$S_1, S_2 \in \mathcal{S}_h, \quad S_1 \subset S_2 \implies S_1 = S_2.$$

$\mathcal{S}_h^\partial$	ensemble des faces du bord
$\mathcal{S}_h^{int}$	ensemble des faces intérieures
$\mathcal{E}_h^\partial$	ensemble des arêtes du bord
$\mathcal{E}_h^{int}$	ensemble des arêtes intérieurs

Dans ce manuscrit, on ne travaille que sur des maillages conformes.

On complète les notations précédentes :

La géométrie d'une cellule  $K \in \mathcal{K}_h$  nous permet de décrire le maillage  $h$  :

**Définition A.3. Diamètre**

$$d_K = \text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|$$

On note :

$$d_h = \max_{K \in \mathcal{K}_h} d_K$$

$d_h$  caractérise la finesse du maillage.

**Remarque A.2.**  $d_h$  est noté parfois par  $h$ .

**Définition A.4. Rondeur**

$$\rho_k = \max_{B \subset K} \text{diam}(B)$$

Dans ce manuscrit, on ne travaille qu'avec des familles de maillages régulière.

**Définition A.5. Famille de maillages régulière**

Une famille de maillages  $\mathcal{H}$  est dite régulière si :

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \max_{K \in \mathcal{K}_h} \frac{d_K}{\rho_K} < \infty$$

ie  $\exists \sigma > 0, \forall h \in \mathcal{H} : \frac{d_K}{\rho_K} \leq \sigma, \forall K \in \mathcal{K}_h$

## A.2 Éléments Finis

Pour tout rappel sur les éléments finis, nous proposons de vous référer aux livres [42, 41].



# Démonstrations des principaux résultats NXFEM

Dans cette annexe, on rappelle que l'on travaille avec le problème (2.1) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = g_N & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

et  $a_h$  est de la forme : pour  $i = in, ex$

Trouver  $u_h \in \mathbb{V}_h$  tel que  $\forall v_h \in \mathbb{V}_h$  :

$$a_h(u_h, v_h) = (\mathfrak{K}_i \nabla u_h^i, \nabla v_h^i)_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} - ([u_h], \{\mathfrak{K}\nabla_n v_h\})_{\Gamma} - (\{\mathfrak{K}\nabla_n u_h\}, [v_h])_{\Gamma} + (\gamma [u_h], [v_h])_{\Gamma} \quad (\text{B.2})$$

et

$$L(v_h) = (f, v_h)_{\Omega} + (\kappa_{\text{ex}} g_N, v_h^{\text{in}})_{\Gamma} + (\kappa_{\text{in}} g_N, v_h^{\text{ex}})_{\Gamma}. \quad (\text{B.3})$$

avec  $\mathbb{V}_h = \mathbb{V}_h^{\text{in}} \times \mathbb{V}_h^{\text{ex}}$  :

$$\mathbb{V}_h^i := \{\phi_i \in H^1(\Omega_i) : \phi_i|_{K_i} \text{ est linéaire}, \phi_i|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad i = \{in, ex\}.$$

## B.1 Coercivité de $a_h$

**Lemme B.1. Coercivité de  $a_h$**

La forme discrète  $a_h(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $\mathbb{V}_h$  :

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \|v_h\|, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (\text{B.4})$$

sous réserve que  $\gamma$  soit pris suffisamment grand. On a également continuité :

$$a_h(u, v) \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V, \quad (\text{B.5})$$

avec

$$- \|\phi\|_{1/2, h, \Gamma}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \frac{1}{d_K} \|\phi\|_{0, \Gamma_K}^2$$

$$- \|\phi\|_{-1/2, h, \Gamma}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\phi\|_{0, \Gamma_K}^2$$

$$- \|\phi\|^2 := \|\nabla \phi\|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 + \|\{\nabla_n \phi\}\|_{-1/2, h, \Gamma}^2 + \|[ \phi ]\|_{1/2, h, \Gamma}^2$$

**Remarque B.1.**  $(u, \phi)_\Gamma \leq \|\phi\|_{1/2,h,\Gamma}^2 \|\phi\|_{-1/2,h,\Gamma}^2$

Avant d'établir la preuve de ce Lemme, nous avons besoin de l'inégalité suivante :

**Lemme B.2. Inégalité inverse**

Pour  $v_h \in \mathbb{V}_h$ , on a l'inégalité inverse suivante :

$$\|\{\nabla_n v_h\}\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 \leq C_I \|\nabla v_h\|_{0,\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2$$

*Démonstration. Inégalité inverse*

On rappelle que le maillage considéré est une famille de triangulations et ue nous travaillons avec des éléments finis de degré 1. De plus, la transformation (qui permet de passer de l'élément de référence à l'élément physique) est linéaire. Dans cette configuration, les équivalences de normes peuvent être calculées sur l'élément de référence (ce qui se fait d'ordinaire) ou directement sur l'élément physique. Les calculs qui vont suivre sont effectués directement sur l'élément physique.

D'après les définitions ci-dessus, on sait que :

$$\|\{\nabla_n v_h\}\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\{\nabla_n v_h\}\|_{0,\Gamma_K}^2$$

et

$$d_K \|\{\nabla_n v_h\}\|_{0,\Gamma_K}^2 \leq d_K \|\kappa_{\text{in}} \nabla_n v_h^{\text{in}}\|_{0,\Gamma_K}^2 + d_K \|\kappa_{\text{ex}} \nabla_n v_h^{\text{ex}}\|_{0,\Gamma_K}^2$$

Ainsi, puisque  $v_h \in \mathbb{V}_h$  est linéaire sur chaque sous-partie  $K_i$ ,  $i = \{\text{in}, \text{ex}\}$ , nous avons :

$$d_K \|\kappa_i \nabla_n v_h^i\|_{0,\Gamma_K}^2 \leq d_K \kappa_i^2 |\Gamma_K| \|\nabla v_h^i\|^2$$

or

$$\begin{aligned} d_K \kappa_i^2 |\Gamma_K| \|\nabla v_h^i\|^2 &= d_K \kappa_i^2 \frac{|\Gamma_K|}{|K_i|} \|\nabla v_h^i\|_{0,K_i}^2 \\ &= d_K \frac{|K_i|^2}{|K|^2} \frac{|\Gamma_K|}{|K_i|} \|\nabla v_h^i\|_{0,K_i}^2 \\ &= d_K \frac{|\Gamma_K| |K_i|}{|K|^2} \|\nabla v_h^i\|_{0,K_i}^2 \end{aligned}$$

En utilisant les arguments suivants :

$$|\Gamma_K| \leq d_K, \quad |K_i| \leq d_K^2, \quad |K| \geq C d_K^2 \quad \text{pour un maillage non-dégénéré,}$$

on obtient :

$$d_K \kappa_i^2 |\Gamma_K| \|\nabla v_h^i\|^2 \leq C \|\nabla v_h^i\|_{0,K_i}^2$$

Enfin, en sommant sur tous les éléments, il vient :

$$\| \{ \nabla_n v_h \} \|_{-1/2, h, \Gamma}^2 \leq C_I \| \nabla v_h \|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2, \quad v_h \in \mathbb{V}_h$$

□

*Démonstration. Coercivité de  $a_h$*

La continuité de  $a_h$  ((2.19) et (B.5)) découle directement des définitions.

Pour prouver la coercivité, par définition de  $a_h$  (2.14) et  $\forall v_h \in \mathbb{V}_h$  on a :

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &= (\mathfrak{K} \nabla v_h^i, \nabla v_h^i)_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} - ([v_h], \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \})_{\Gamma} - (\{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \}, [v_h])_{\Gamma} + (\gamma [v_h], [v_h])_{\Gamma}, \\ &= \| \mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h \|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 - 2 ([v_h], \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \})_{\Gamma} + \| \gamma^{1/2} [v_h] \|_{0, \Gamma}^2. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz [19] et les définitions précédentes des normes, on obtient :

$$a_h(v_h, v_h) \geq \| \mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h \|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 - 2 \| [v_h] \|_{1/2, h, \Gamma} \| \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \} \|_{-1/2, h, \Gamma} + \| \gamma^{1/2} [v_h] \|_{0, \Gamma}^2$$

En utilisant l'inégalité de Young<sup>1</sup>, on a pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$a_h(v_h, v_h) \geq \| \mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h \|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 - \frac{1}{\epsilon} \| \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \} \|_{-1/2, h, \Gamma}^2 - \epsilon \| [v_h] \|_{1/2, h, \Gamma}^2 + \| \gamma^{1/2} [v_h] \|_{0, \Gamma}^2$$

Par définition de  $\| \cdot \|_{1/2, h, \Gamma}^2$  et  $\| \cdot \|_{0, \Gamma}^2$ , il vient :

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &\geq \| \mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h \|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 - \frac{1}{\epsilon} \| \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \} \|_{-1/2, h, \Gamma}^2 - \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \frac{\epsilon}{d_K} \| [v_h] \|_{0, \Gamma_K}^2 + \| \gamma^{1/2} [v_h] \|_{0, \Gamma}^2 \\ &\geq \| \mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h \|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 - \frac{1}{\epsilon} \| \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \} \|_{-1/2, h, \Gamma}^2 - \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \frac{\epsilon}{d_K} \| [v_h] \|_{0, \Gamma_K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \gamma \| [v_h] \|_{0, \Gamma_K}^2 \\ &\geq \| \mathfrak{K}^{1/2} \nabla v_h \|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 - \frac{1}{\epsilon} \| \{ \mathfrak{K} \nabla_n v_h \} \|_{-1/2, h, \Gamma}^2 + \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \left( \gamma - \frac{\epsilon}{d_K} \right) \| [v_h] \|_{0, \Gamma_K}^2 \end{aligned}$$

---

1.  $\forall \epsilon > 0 : ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}$

En appliquant le Lemme B.2 avec  $\phi = \mathfrak{K}v_h$  :

$$\begin{aligned}
a_h(v_h, v_h) &\geq \|\mathfrak{K}^{1/2}\nabla v_h\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2 + \left(-\frac{2}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}\right) \|\{\mathfrak{K}\nabla_n v_h\}\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 + \sum_{K\in\mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \left(\gamma - \frac{\epsilon}{d_K}\right) \|[v_h]\|_{0,\Gamma_K}^2 \\
&\geq \|\mathfrak{K}^{1/2}\nabla v_h\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2 - \frac{2C_I \max\{\mathfrak{K}_{\text{in/ex}}\}}{\epsilon} \|k^{1/2}\nabla v_h\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\{\mathfrak{K}\nabla_n v_h\}\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \left(\gamma - \frac{\epsilon}{d_K}\right) \|[v_h]\|_{0,\Gamma_K}^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \|\mathfrak{K}^{1/2}\nabla v_h\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2C_I \max\{\mathfrak{K}_{\text{in/ex}}\}}{\epsilon}\right) \|k^{1/2}\nabla v_h\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\{\mathfrak{K}\nabla_n v_h\}\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 \\
&\quad + \sum_{K\in\mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \left(\gamma - \frac{\epsilon}{d_K}\right) \|[v_h]\|_{0,\Gamma_K}^2
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant  $\epsilon = 4C_I \max\{\mathfrak{K}_{\text{in/ex}}\}$ , la coercivité est assurée si  $\gamma|_K = \frac{\epsilon}{d_K}$  avec  $\epsilon > \epsilon$ .  $\square$

## B.2 Consistance

### Lemme B.3. Consistance

Le problème discret (2.13) est consistant, dans le sens où :

$$\begin{cases} \text{pour } u \text{ solution de (2.1) :} \\ a_h(u, v_h) = L(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$$

*Démonstration. Consistance*

Pour  $u$  solution de (2.1), on remarque que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}
g_N - \{\mathfrak{K}\nabla_n u\} &= (\kappa_{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}}) g_N - \{\mathfrak{K}\nabla_n u\} - \kappa_{\text{in}} (g_N - [\mathfrak{K}\nabla_n u]) \\
&= \cancel{\kappa_{\text{in}} g_N} + \kappa_{\text{ex}} g_N - \{\mathfrak{K}\nabla_n u\} - \cancel{\kappa_{\text{in}} g_N} + \kappa_{\text{in}} [\mathfrak{K}\nabla_n u] \\
&= \kappa_{\text{ex}} g_N - \cancel{\kappa_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla_n u^{\text{in}}} - \cancel{\kappa_{\text{ex}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla_n u^{\text{ex}}} + \cancel{\kappa_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla_n u^{\text{in}}} - \kappa_{\text{in}} \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla_n u^{\text{ex}} \\
&= \kappa_{\text{ex}} g_N - (\kappa_{\text{ex}} + \kappa_{\text{in}}) \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla_n u^{\text{ex}} \\
&= \kappa_{\text{ex}} g_N - \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla_n u^{\text{ex}}. \quad (1)
\end{aligned}$$

ainsi que, avec les mêmes arguments :

$$\begin{aligned}
g_N - \{\mathfrak{K}\nabla_n u\} &= (\kappa_{\text{in}} + \kappa_{\text{ex}}) g_N - \{\mathfrak{K}\nabla_n u\} + \kappa_{\text{ex}} (g_N - [\mathfrak{K}\nabla_n u]) \\
&= (1 + \kappa_{\text{ex}}) g_N - \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla_n u^{\text{in}} \quad (2)
\end{aligned}$$

On peut alors exprimer  $\{\mathfrak{K}\nabla_n u\}$  de la sorte :

$$\{\mathfrak{K}\nabla_n u\} = \kappa_{\text{in}} g_N + \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla_n u^{\text{ex}} \quad (1)$$

$$= \mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla_n u^{\text{in}} - \kappa_{\text{ex}} g_N \quad (2)$$

(B.6)

De plus, comme  $[u] = 0$ , en utilisant B.6 il vient :

$$\begin{aligned}
a_h(u, v_h) &= (\mathfrak{K}\nabla u, \nabla v_h)_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} - \cancel{([u], \{\mathfrak{K}\nabla_n v_h\})_{\Gamma}} - (\{\mathfrak{K}\nabla_n u\}, [v_h])_{\Gamma} + \cancel{(\gamma[u], [v_h])_{\Gamma}} \\
&= (\mathfrak{K}\nabla u, \nabla v_h)_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} - (\{\mathfrak{K}\nabla_n u\}, v_h^{\text{in}} - v_h^{\text{ex}})_{\Gamma} \\
&= (\mathfrak{K}\nabla u, \nabla v_h)_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} - (\mathfrak{K}_{\text{in}} \nabla_n u^{\text{in}} - \kappa_{\text{ex}} g_N, v_h^{\text{in}})_{\Gamma} + (\kappa_{\text{in}} g_N + \mathfrak{K}_{\text{ex}} \nabla_n u^{\text{ex}}, v_h^{\text{ex}})_{\Gamma}
\end{aligned}$$

Finalement appliquant la formule de Green, on obtient le résultat annoncé :

$$\begin{aligned}
a_h(u, v_h) &= -(\nabla \cdot (\mathfrak{K}\nabla u), v_h)_{\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} + (\kappa_{\text{ex}} g_N, v_h^{\text{in}})_{\Gamma} + (\kappa_{\text{in}} g_N, v_h^{\text{ex}})_{\Gamma} \\
&= (f, v_h)_{\Omega} + (\kappa_{\text{ex}} g_N, v_h^{\text{in}})_{\Gamma} + (\kappa_{\text{in}} g_N, v_h^{\text{ex}})_{\Gamma} \\
&= L(v_h)
\end{aligned}$$

□



# Analogie du lemme de Warburton-Hesthaven

UNE généralisation du lemme de Warburton-Hesthaven a été donnée dans la Partie 2. Cette annexe propose d'énoncer un résultat plus général, pour tous polytopes convexes.

Les théorèmes suivants ont été écrits et démontrés par Alexei Lozinski, Professeur de Mathématiques à l'Université de Franche-Comté et rapporteur de ce manuscrit.

**Théorème C.1.** *Soit  $D$  un polytope convexe en dimension  $N$  et  $S$  l'un de ces bords. Soit  $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ . Alors*

$$\|p\|_{0,S} \leq C \frac{|S|^{1/2}}{|D|^{1/2}} \|p\|_{0,D}, \quad (\text{C.1})$$

où  $C > 0$  est une constante dépendant seulement du degré  $k$  et de la dimension  $N$ .

La démonstration de ce théorème est présentée comme une série de petits Lemmes :

**Lemme C.2.** *Soient  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $L > 0$ . Alors*

$$p^2(0) \leq C \frac{\int_0^L x^{N-1} p^2(x) dx}{L^N}, \quad (\text{C.2})$$

où  $C > 0$  est une constante dépendant seulement du degré  $k$  et de la dimension  $N$ .

*Démonstration.* Démonstration de Lemme C.2.

Posons  $q(x) = p(Lx)$ . Comme toutes les normes sur  $\mathbb{P}^k$  (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$ ) sont équivalentes, on a

$$\|q\|_{L^\infty(0,1)} \leq C \|x^{\frac{N-1}{2}} q\|_{L^2(0,1)},$$

avec  $C$  constante dépendant de  $k$  et  $N$ . En posant le changement de variable  $x = Ly$ , il vient

$$p^2(x) = q^2(0) \leq \|q\|_{L^\infty(0,1)} \leq C^2 \int_0^1 y^{N-1} q^2(y) dy = C^2 \frac{\int_0^L x^{N-1} p^2(x) dx}{L^N}.$$

□

**Lemme C.3.** *Soient  $D$  un polytope convexe en dimension  $N$  et  $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$ . Alors*

$$\|p\|_{\infty,D} \leq C \frac{\|p\|_{0,D}}{|D|^{1/2}}, \quad (\text{C.3})$$

où  $C > 0$  est une constante dépendant seulement du degré  $k$  et de la dimension  $N$ .

*Démonstration.* Démonstration de Lemme C.3.

Soit un point  $x^*$  le maximum de  $|p|$  atteint sur  $D$ . Sans perdre en généralité, on peut supposer que  $x^* = 0$ . Tout point  $x \in \mathbb{R}^N$  peut être représenté comme  $x = r\sigma$  où  $r = |x|$  et  $\sigma$  un point situé sur la sphère unité  $S$ .  $r$  et  $\sigma$  peuvent être assimilées aux coordonnées polaires généralisées d'un point  $x$ .

Comme  $D$  est convexe et  $x^* = 0$  appartient à  $D$ , le polytope peut être représenté par

$$D = \langle x = r\sigma : \sigma \in S_D \text{ et } r \in [0, L_\sigma] \rangle,$$

où  $S_D$  est une partie de la sphère unité et  $L_\sigma$  est un nombre positif ou nul pour tout  $\sigma \in S_D$ . La formule d'un élément de volume en coordonnées polaires est donnée par :

$$dx = r^{N-1} dr d\sigma,$$

où  $d\sigma$  correspond à l'élément de surface sur la sphère unité. Ainsi

$$|D| = \int_{S_D} \int_0^{L_\sigma} r^{N-1} dr d\sigma = \int_{S_D} \frac{L_\sigma^N}{N} d\sigma.$$

Posons  $p_\sigma(r) = p(r\sigma)$  pour tout  $\sigma \in S$ .  $p_\sigma$  est un polynôme d'une variable de degré inférieur ou égal à  $k$  et nous avons grâce au Lemme C.2

$$p_\sigma^2(0) L_\sigma^N \leq C \int_{S_D} \int_0^{L_\sigma} p^2(r\sigma) r^{N-1} dr d\sigma = C \int_D p^2(x) dx.$$

Le premier terme de l'expression ci-dessus est aussi égal à  $p^2(0) N |D|$  et  $p^2(0) = \|p\|_{\infty, D}$ , ce qui permet de démontrer le Lemme.

□

En utilisant les Lemmes précédents, on obtient

$$\|p\|_{0, S} \leq C |S|^{1/2} \|p\|_{\infty, D}, \leq C \frac{|S|^{1/2}}{|D|^{1/2}} \|p\|_{0, D},$$

correspondant au Théorème 6.13.



# Rappels utiles

## D.1 Opérateurs différentiels

Cette annexe a pour but de rappeler les définitions des principaux opérateurs différentiels employés dans ce manuscrit.

Pour une dimension  $N$ , soient  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)^t \in \mathbb{R}^N$  la normale, on a :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^t, \quad \nabla_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla = \partial_n$$

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) = \nabla^2 \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

## D.2 Espaces fonctionnels

Nous rappelons ici les espaces qui ont été systématiquement utilisés dans ce manuscrit [72, 30].

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$  de frontière régulière  $\partial\Omega$ . On note :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left( u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \right), \\ H^2(\Omega) &= \left( u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), i, j = 1, 2 \right), \\ H^2(\Omega) &= \left( u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), i, j = 1, 2 \right), \end{aligned}$$

## D.3 Un exemple classique d'estimateur d'erreur par résidu

Considérons le cas classique d'élément finis conforme pour l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

de formulation faible standard :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Supposons  $f \in L^2(\Omega)$ . Soit  $h$  un maillage triangulaire régulier, et  $k \geq 1$  un entier donné. L'espace classique élément fini conforme est défini par :

$$\mathbb{V}_h := \{v_h \in V : v_h|_K \in P^k(\mathbb{R}^2), \forall K \in \mathcal{K}_h\}. \quad (\text{D.3})$$

où  $P^k(\mathbb{R}^2)$  est l'espace des polynomes de degré maximal  $k$  en dimension 2.

La formulation discrète s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \end{array} \right. \quad (\text{D.4})$$

Soit  $v \in V$ . On a pour n'importe quel  $v_h \in \mathbb{V}_h$  :

$$\begin{aligned} \langle \nabla(u - u_h), \nabla v \rangle &= \langle \nabla(u - u_h), \nabla(v - v_h) \rangle \\ &= \langle f, v - v_h \rangle - \langle \nabla u_h, \nabla(v - v_h) \rangle \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \left( \int_K (f + \Delta u_h)(v - v_h) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (v - v_h) \, ds \right) \end{aligned}$$

On constate deux types de résidus :

- $f + \Delta u_h$  est un résidu ponctuel,
- $\left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right]$  est une mesure de la régularité de la solution discrète.

Une estimation d'erreur a posteriori a pour but de borner

$$\sum_{K \in \mathcal{K}_h} \left( \int_K (f + \Delta u_h)(v - v_h) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial K \setminus \partial \Omega} \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] (v - v_h) \, ds \right) \quad (\text{D.5})$$

par une expression du type

$$\langle \nabla(u - u_h), \nabla v \rangle \leq C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2} \|\nabla v\|.$$

En prenant  $v = u - u_h$ , on obtient une **borne supérieure**

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq C_1 \eta_h^2, \quad \eta_h^2 = \left( \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{D.6})$$

Le moyen le plus simple pour obtenir le résultat (D.6) est d'utiliser les inégalités triangulaires et de Cauchy-Schwarz pour borner par les termes de (D.5). En choisissant  $v_h$  comme l'interpolé

de Clément [27] de  $v$  (notons qu'il n'est pas possible d'utiliser l'opérateur d'interpolation naturel), on obtient :

$$\eta_K := \left( d_K^2 \|f + \Delta u_h\|_K^2 + \frac{d_K}{4} \left\| \left[ \frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \right\|_{\partial K \setminus \partial \Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{D.7})$$

La constante  $C_1$  est alors liée aux constantes dans l'estimation d'erreur d'interpolation de l'opérateur de Clément.

Cette estimation a été introduite dans [5] et a été généralisée à d'autres équations dans [36, 37, 38, 39, 40]. Il s'agit de l'estimateur utilisé dans la plupart des travaux sur la convergence et l'optimalité.



# Bibliographie



# Bibliographie

- [1] ARNOLD D.-N. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. SIAM Journal on Numerical Analysis, 19(4) :742–760, 1982. [108](#)
- [2] ARNOLD D.-N., BREZZI F., COCKBURN B. AND MARINI L. D. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. SIAM Journal on Numerical Analysis, 39(5) :1749–1779, 2002. [108](#)
- [3] BABUŠKA I. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients. Computing (Arch. Elektron. Rechnen), 5 :207–213, 1970. [2](#)
- [4] BABUŠKA I. AND MELENK J.M. . The partition of unity method. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 40(4) :727–758, 1997. [3](#)
- [5] BABUŠKA I. AND RHEINBOLDT W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM J. Numer. Anal., 15(4) :736–754, 1978. [173](#)
- [6] BARRAU N., BECKER R., DUBACH E. AND LUCE R. An adaptive NXFEM for the interface problem on locally refined triangular and quadrilateral meshes. Proceedings in European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), 2012. [29](#), [97](#)
- [7] BARRAU N., BECKER R., DUBACH E. AND LUCE R. A robust variant of NXFEM for the interface problem. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 350(15-16) :789–792, 2012. [29](#)
- [8] BARRETT J.W. AND ELLIOTT C.M. Fitted and unfitted finite-element methods for elliptic equations with smooth interfaces. IMA J. Numer. Anal., 7(3) :283–300, 1987. [3](#)
- [9] BEAR J. Dynamics of Fluids in Porous Media. Dover, New York, elsevier edition, 1972. [117](#)
- [10] BECHET E., MOES N. AND WOHLMUTH B. A stable Lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 78 :931–954, 2009. [4](#)
- [11] BECKER R. AND RANNACHER R. A feed-back approach to error control in finite element methods : basic analysis and examples. East-West J. Numer. Math., 4(4) :237–264, 1996. [27](#)
- [12] BECKER R. AND TRUJILLO D. Concepts of the finite element library Concha. Proceedings in Eleventh international conference Zaragoza-Pau on applied mathematics and statistics, 37 :59–67, 2011. [15](#)
- [13] BECKER R., BURMAN E. AND HANSBO P. A Nitsche extended finite element method for incompressible elasticity with discontinuous modulus of elasticity. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 198(41-44) :3352–3360, 2009. [4](#)

- [14] BECKER R., BURMAN E. AND HANSBO P. A hierarchical NXFEM for fictitious domain simulations. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 86(4-5) :549–559, 2011. [4](#)
- [15] BELYTSCHKO T., MOËS N., USUI S. AND PARIMI C. Arbitrary discontinuities in finite elements. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 50 :993–1013, 2001. [4](#)
- [16] BONITO A. AND NOCHETTO R.H. Quasi-optimal convergence rate of an adaptive discontinuous galerkin method. SIAM J. Numer. Anal., 48(2) :734–771, 2010. [92](#)
- [17] BRAESS D., DAHMEN W. AND WIENERS C. A multigrid algorithm for the mortar finite element method. SIAM J. Numer. Anal., 37(1) :48–69, 1999. [36](#)
- [18] BRAMBLE J.H. AND KING J.T. A finite element method for interface problems in domains with smooth boundaries and interfaces. Adv. Comput. Math., 6(2) :109–138 (1997), 1996. [3](#)
- [19] BREZIS H. Analyse fonctionnelle : théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Paris Dunod edition, 1999. [165](#)
- [20] BREZZI F., DOUGLAS J. AND MARINI L.D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. Numer. Math., 47 :217–235, 1985. [108](#)
- [21] BREZZI F., DOUGLAS J., FORTIN M. AND MARINI L.D. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three variables. RAIRO Modèle Math. Anal. Numer., 21 :581–604, 1987. [108](#)
- [22] CHEN Z. Formulations and numerical methods for the black oil model in porous media. SIAM J. Numer. Anal., 38(2) :489–514, 2000. [117](#)
- [23] CHEN Z. AND ZOU J. Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems. Numer. Math., 79(2) :175–202, 1998. [21](#)
- [24] CHERNOGOROVA T., EWING R., ILIEV O. AND LAZAROV R. On finite volume discretization of elliptic interface problems. In Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles, 2002), pages 287–294. Hermes Sci. Publ., Paris, 2002. [158](#)
- [25] CIARLET PHILIPPE G. The finite element method for elliptic problems. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. [7](#), [36](#), [61](#), [81](#), [86](#), [87](#)
- [26] CIARLET PHILIPPE G. Mathematical Elasticity. North-Holland, Amsterdam, 1988. [123](#)
- [27] CLÉMENT P. Approximation by finite element functions using local regularization. R.A.I.R.O. Analyse Numérique, 9(R-2) :77–84, 1975. [173](#)
- [28] CROUZEIX M. AND RAVIART P.A. Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary stokes equations. RAIRO Anal. Num., 7 :33–76, 1973. [108](#), [109](#)
- [29] DALÍK J. The invertibility of the isoparametric mappings for triangular quadratic Lagrange finite elements. Appl. Math., 57(5) :445–462, 2012. [103](#)
- [30] DEMENGEL F. AND DEMENGEL G. Éspaces Fonctionnels - Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles. Collection Savoirs Actuels, EDP Sciences / CNRS edition, 2007. [171](#)
- [31] DESTUYNDER P.A. Une étude asymptotique de plaques minces en élasticité linéaire. Collection RMA, Masson edition, 1986. [123](#)



- [32] DHATT G., TOUZOT G. AND LEFRANÇOIS E. Méthode des éléments finis. Hermès - Lavoisier edition, 2005. [161](#)
- [33] DOLBOW J., MOËS N. AND BELYTSCHKO T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190(51-52) :6825–6846, 2001. [4](#)
- [34] DUBACH E., LUCE R. AND THOMAS J.-M. Pseudo-conform polynomial Lagrange finite elements on quadrilaterals and hexahedra. Commun. Pure Appl. Anal., 8(1) :237–254, 2009. [2](#)
- [35] DUBACH E., LUCE R. AND THOMAS J.-M. Pseudo-conforming polynomial finite elements on quadrilaterals. Int. J. Comput. Math., 86(10-11) :1798–1816, 2009. [2](#)
- [36] ERIKSSON K. AND JOHNSON C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. SIAM J. Numer. Anal., 28(1) :43–77, 1991. [173](#)
- [37] ERIKSSON K. AND JOHNSON C. Adaptive streamline diffusion finite element methods for stationary convection-diffusion problems. Math. Comp., 60(201) :167–188, S1–S2, 1993. [173](#)
- [38] ERIKSSON K. AND JOHNSON C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. II. Optimal error estimates in  $L_\infty L_2$  and  $L_\infty L_\infty$ . SIAM J. Numer. Anal., 32(3) :706–740, 1995. [173](#)
- [39] ERIKSSON K. AND JOHNSON C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. IV. Nonlinear problems. SIAM J. Numer. Anal., 32(6) :1729–1749, 1995. [173](#)
- [40] ERIKSSON K. AND JOHNSON C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. V. Long-time integration. SIAM J. Numer. Anal., 32(6) :1750–1763, 1995. [173](#)
- [41] ERN A. Aide-mémoire des éléments finis. Aide-mémoire de l'ingénieur, L'Usine Nouvelle / Dunod edition, 2013. [161](#), [162](#)
- [42] ERN A. AND GUERMOND J.-L. Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre, volume 36. SMAI Mathématiques et Applications, Heidelberg Springer edition, 2002. [161](#), [162](#)
- [43] ERN A. AND GUERMOND J.-L. Theory and Practice of Finite Elements, volume 159. Applied Mathematical Series, New York Springer edition, 2002. [161](#)
- [44] ERN A., STEPHANSEN A.F. AND ZUNINO P. A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity. IMA J. Numer. Anal., 29(2) :235–256, 2009. [32](#)
- [45] EWING, RICHARD E., editor. The mathematics of reservoir simulation, volume 1 of Frontiers in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1983. [117](#)
- [46] EYMARD R., GALLOUËT T. AND HERBIN R. The finite volume method. North Holland, p. Ciarlet J.L. Lions edition, 200. [158](#)
- [47] FRIH N., MARTIN V., ROBERTS J.E. AND SAADA A. Modeling fractures as interfaces with nonmatching grids. Comput. Geosci., 16 :1043–1060, 2012. [123](#), [134](#), [135](#)
- [48] FRIH N., ROBERTS J.E. AND SAADA A. Modeling fractures as interfaces : a model for forchheimer fractures. Comput. Geosci., 12 :91–104, 2008. [123](#)

- [49] GAGNEUX G. AND MADAUNE-TORT M. Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière, volume 22 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]. Springer-Verlag, Berlin, 1996. 117
- [50] GRAVOUIL A., MOËS N. AND BELYTSCHKO T. Non-planar 3d crack growth with the extended finite element and level sets – part1 : Mechanical model. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 53(11) :2549–2568, 2002. 4
- [51] HAN H.D. Nonconforming elements in the mixed finite element method. J. Comput. Math., 2(3) :223–233, 1984. 2, 108, 109
- [52] HAN H.D. An analysis of penalty-nonconforming finite element method for Stokes equations. J. Comput. Math., 4(2) :164–172, 1986. 2
- [53] HANSBO A. AND HANSBO P. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191(47-48) :5537–5552, 2002. 2, 4, 12, 19, 21, 26, 28, 32, 34, 44, 45, 47, 50, 98, 100
- [54] HUGHES THOMAS J. R. The finite element method. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987. Linear static and dynamic finite element analysis, With the collaboration of Robert M. Ferencz and Arthur M. Raefsky. 10
- [55] LEGRAIN G., CHEVAUGEON N. AND DRÉAU, K. High order X-FEM and levelsets for complex microstructures : uncoupling geometry and approximation. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 241/244 :172–189, 2012. 96
- [56] LEHRENFELD C. AND REUSKEN A. Nitsche-XFEM with streamline diffusion stabilization for a two-phase mass transport problem. SIAM J. Sci. Comput., 34(5) :A2740–A2759, 2012. 157
- [57] LEMRABET K. Régularité d'un problème de transmission. J. Maths Pures et Appl., 56 :1–38, 1977. 128
- [58] LESAIN P. AND RAVIART P.-A. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis.), pages 89–123. Publication No. 33. Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Academic Press, New York, 1974. 146
- [59] LIYONG L. AND SEONG H. LEE. Efficient Field-Scale Simulation of Black Oil in a Naturally Fractured Reservoir Through Discrete Fracture Networks and Homogenized Media. SPE Reservoir Evaluation and Engineering, 11(4) :750–758, 2008. 149
- [60] LI Z., LIN T. AND WU X. New Cartesian grid methods for interface problems using the finite element formulation. Numer. Math., 96(1) :61–98, 2003. 12, 45
- [61] LUCE R. Modélisations et Simulations numériques. Éléments finis Pseudo-conformes pour quadrilatères et hexaèdres. Mémoire des travaux scientifiques pour une demande d'inscription à l'Habilitation à Diriger des Recherches, université de pau et des pays de l'adour edition, 2009. 80, 82
- [62] MACKINNON R.J. AND CAREY G.F. Treatment of material discontinuities in finite element computations. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 24 :393–417, 1987. 3
- [63] MAO S., CHEN S. AND SHI D. Convergence and superconvergence of a nonconforming finite element on anisotropic meshes. Int. J. Numer. Anal. Model., 4(1) :16–38, 2007. 2

- [64] MASSJUNG R. An Unfitted Discontinuous Galerkin Method Applied to Elliptic Interface Problems. SIAM J. Numer. Anal., 50(6) :3134–3162, 2012. 4, 108
- [65] MATTHIES G. AND SCHIEWECK F. Nonconforming finite elements of higher order satisfying a new compatibility condition. J. Numer. Math., 16(1) :23–50, 2008. 2
- [66] MOËS N., DOLBOW J. AND BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 46 :131–150, 1999. 3
- [67] MOINFAR A., VARAVEI A., SEPEHRNOORI K. AND JOHNS RUSSELL T. Development of a Novel and Computationally-Efficient Discrete-Fracture Model to Study IOR Processes in Naturally Fractured Reservoirs. SPE Improved Oil Recovery Symposium, 2012. 149
- [68] NITSCHKE J. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 36 :9–15, 1971. Collection of articles dedicated to Lothar Collatz on his sixtieth birthday. 24
- [69] OSHER S. AND SETHIAN J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. J. Comput. Phys., 79(1) :12–49, 1988. 2
- [70] PEACEMAN D.W. Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. The Netherlands, elsevier scientific publishing company edition, 1977. 117
- [71] RANNACHER R. AND TUREK S. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element. Numer. Methods Partial Differential Equations, 8(2) :97–111, 1992. 2, 108
- [72] RAVIART P.-A. AND THOMAS J.-M. Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Paris Masson edition, 1983. 171
- [73] RAYNAUD N. Approximation par méthode d’éléments finis de problèmes de transmission raides. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l’Adour, 1994. 123
- [74] ROBERTS J.-E. AND THOMAS J.-M. Mixed and hybrid finite element methods, volume II of Handbook of Numerical Analysis, Finite Element Methods (part I). North-Holland, Amsterdam, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions edition, 1989. 108
- [75] SCHWAB CH.  $p$ - and  $hp$ -finite element methods. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Theory and applications in solid and fluid mechanics. 61
- [76] SCOTT L. RIDGWAY AND ZHANG S. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. Math. Comp., 54(190) :483–493, 1990. 34
- [77] STEGER JOSEPH L. AND WARMING R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. J. Comput. Phys., 40(2) :263–293, 1981. 146
- [78] SUKUMAR N., CHOPP D. L., MOËS N. AND BELYTSCHKO T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190(46-47) :6183–6200, 2001. 3
- [79] WARBURTON T. AND HESTHAVEN J. S. On the constants in  $hp$ -finite element trace inverse inequalities. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 192(25) :2765–2773, 2003. 61, 73





---

*Généralisation de la méthode Nitsche XFEM  
pour la discrétisation de problèmes d'interface elliptiques*

Cette thèse porte sur la généralisation de la méthode NXFEM proposée par A. et P. Hansbo pour le problème d'interface elliptique.

La modélisation et simulation numérique d'écoulements dans des domaines fracturés sont au coeur de nombreuses applications, telles que le milieu pétrolier (modélisation de réservoirs, présence de failles, propagation d'un signal, repérage de couches), l'aérospatiale (problème de chocs, de rupture), en génie civil (fissuration du béton), mais également dans la biologie cellulaire (déformation des globules rouges). En outre, de nombreux projets de recherche nécessitent le développement des méthodes robustes pour la prise en compte de singularités, ce qui fait partie des motivations et des objectifs de l'équipe Concha, ainsi que de cette thèse.

Une modification de cette méthode a tout d'abord été proposée afin d'obtenir la robustesse à la fois par rapport à la géométrie du maillage coupé par l'interface et par rapport aux paramètres de diffusion. Nous nous sommes ensuite intéressés à sa généralisation à tout type de maillages 2D-3D (triangles, quadrilatères, tétraèdres, hexaèdres), et pour tout type d'éléments finis (conformes, non conformes, Galerkin discontinus) pour des interfaces planes et courbes. Les applications ont été orientées vers des problèmes d'écoulements en milieux poreux fracturés : adaptation de la méthode NXFEM à la résolution d'un modèle asymptotique de failles, à des problèmes instationnaires, de transports, ou encore à des domaines multi-fracturés.

**Mots clés** : NXFEM, Généralisation à l'ordre supérieur, Maillages 2D-3D, méthodes adaptatives.

**AMS-Code** : 65N30, 65N50, 76M10.

---

---

*Nitsche XFEM generalization  
for elliptic interface problems discretization*

This thesis focuses on the generalization of the NXFEM method proposed by A. and P. Hansbo for elliptic interface problem.

Numerical modeling and simulation of flow in fractured media are at the heart of many applications, such as petroleum and porous media (reservoir modeling, presence of faults, signal propagation, identification of layers ...), aerospace (problems of shock, rupture), civil engineering (concrete cracking), but also in cell biology (deformation of red blood cells). In addition, many research projects require the development of robust methods for the consideration of singularities, which is one of the motivations and objectives of the Concha team and of this thesis.

First a modification of this method was proposed to obtain a robust method not only with respect to the mesh-interface geometry, but also with respect to the diffusion parameters. We then looked to its generalization to any type of 2D-3D meshes (triangles, quadrilaterals, tetrahedra, hexahedra), and for any type of finites elements (conforming, nonconforming, Galerkin discontinuous) for plane and curved interfaces. The applications have been referred to the flow problems in fractured porous media : adaptation of NXFEM method to solve an asymptotic model of faults, to unsteady problems, transport problems, or to multi-fractured domains.

**Keywords** : NXFEM, high-order generalization, 2D-3D meshes, adaptive methods.

**AMS-Code** : 65N30, 65N50, 76M10.

---

---

Nelly BARRAU

sous la direction de LUCE Robertet DUBACH Éric

Équipe CONCHA - Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau  
Bâtiment IPRA, Avenue de l'Université, 64013 Pau Cedex, France

---