

Généralisation de la méthode Nitsche XFEM pour la discrétisation de problèmes d'interface elliptiques

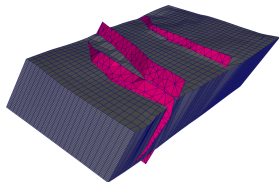
Nelly BARRAU

sous la direction de R. Luce et E. Dubach
Université de Pau et des Pays de l'Adour,
Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Pau,
U.M.R. C.N.R.S. 5142.

Pau, le 10 octobre 2013

Motivations et Objectifs

Outils pour la capture et le traitement d'interfaces.



- 2D - 3D,
- $\mathbb{P}^k - \mathbb{Q}^k$,
- Différents types d'éléments finis,
- Différents types d'équations.

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Robustesse
- 3 Extensions
- 4 Applications
- 5 Perspectives

Introduction

- 1 Illustration du principe de Nitsche
- 2 Principe de la méthode NXFEM

Laplacien avec condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit $V = H^1(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Laplacien avec condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit $V = H^1(\Omega)$.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial n} u \right) ds = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial n} g \right) ds.$$

↪ Symétrisation

Laplacien avec condition de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

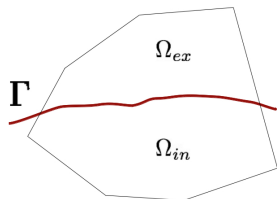
Soit $V = H^1(\Omega)$.

On obtient la formulation variationnelle pour $u \in V$ et pour tout $v \in V$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial n} u + \gamma uv \right) ds = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial n} g + \gamma gv \right) ds.$$

↪ Symétrisation ↪ Stabilisation

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\mathfrak{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = g_D & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathfrak{K}\nabla_n u] = g_N & \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1)$$



$$[u](x) := u|_{\Gamma}^{\text{in}}(x) - u|_{\Gamma}^{\text{ex}}(x), \quad \{u\}_{\kappa}(x) := \kappa_{\text{in}} u|_{\Gamma}^{\text{in}}(x) + \kappa_{\text{ex}} u|_{\Gamma}^{\text{ex}}(x).$$

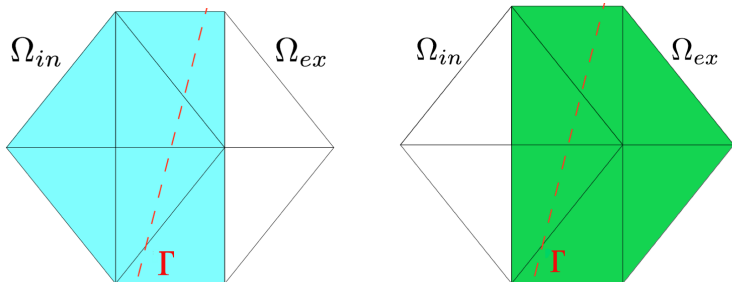
La méthode NXFEM est définie par la formulation variationnelle discrète suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tel que :} \\ a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \end{array} \right. \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \quad (2)$$

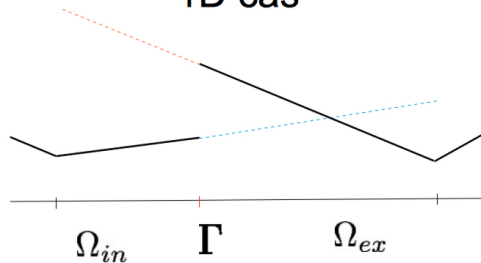


A. Hansbo and P. Hansbo; *An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems*; 2002.

$$\mathbb{V}_h = \mathbb{V}_h^{in} \times \mathbb{V}_h^{ex} \text{ et } \mathbb{V}_h^i := \{ \phi_i \in H^1(\Omega_i) : \phi_i|_{\kappa_i} \text{ linéaire}, \phi_i|_{\partial\Omega} = 0 \}$$



1D cas



La forme bilinéaire s'écrit

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \{\partial_{n, \mathfrak{K}} u_h\}_\kappa [v_h] \, ds \quad (3)$$

et la forme linéaire :

$$l(v_h) := \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} g_N \{v_h\}_{\hat{\kappa}} \, ds \quad (4)$$

où $\partial_{n, \mathfrak{K}} \bullet := \mathfrak{K} \frac{\partial \bullet}{\partial n}$

La forme bilinéaire s'écrit

$$\begin{aligned}
 a_h(u_h, v_h) &:= \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \{\partial_{n, \mathfrak{K}} u_h\}_\kappa [v_h] \, ds \\
 &\quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S ([u_h] \{\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h\}_\kappa) \, ds,
 \end{aligned} \tag{3}$$

et la forme linéaire :

$$l(v_h) := \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{S_h^\Gamma} g_N \{v_h\}_{\hat{\kappa}} \, ds - \int_{S_h^\Gamma} g_D (\{\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h\}_\kappa) \, ds \tag{4}$$

où $\partial_{n, \mathfrak{K}} \bullet := \mathfrak{K} \frac{\partial \bullet}{\partial n}$

La forme bilinéaire s'écrit

$$\begin{aligned}
 a_h(u_h, v_h) &:= \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \{\partial_{n, \mathfrak{K}} u_h\}_\kappa [v_h] \, ds \\
 &\quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S ([u_h] \{\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h\}_\kappa - \gamma [u_h] [v_h]) \, ds,
 \end{aligned} \tag{3}$$

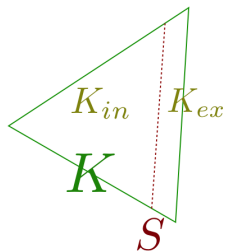
et la forme linéaire :

$$l(v_h) := \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{S_h^\Gamma} g_N \{v_h\}_{\hat{\mathfrak{K}}} \, ds - \int_{S_h^\Gamma} g_D (\{\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h\}_\kappa - \gamma [v_h]) \, ds \tag{4}$$

où $\partial_{n, \mathfrak{K}} \bullet := \mathfrak{K} \frac{\partial \bullet}{\partial n}$

Choix de paramètres

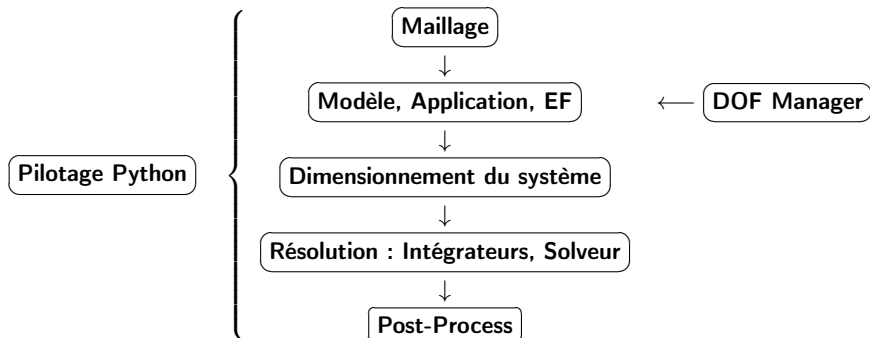
$$\kappa_{\text{in}} = \frac{|K_{\text{in}}|}{|K|}, \quad \kappa_{\text{ex}} = \frac{|K_{\text{ex}}|}{|K|}, \quad \gamma := \frac{4C \max\{\mathfrak{K}_{\text{in}}, \mathfrak{K}_{\text{ex}}\}}{|K|} \quad (C > 0)$$



Quelques propriétés importantes :

- Coercivité de a_h ,
- Formulation consistante,
- Orthogonalité de Galerkin,
- Estimations d'erreur.

Librairie C++ Concha



Principes

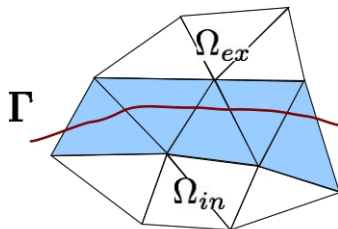
Aspects géométriques :

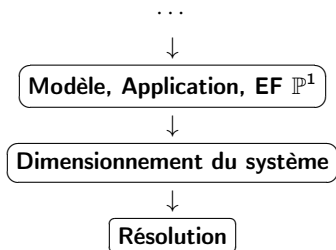
- repérage des cellules coupées,
- identification sous-domaines, caractéristiques,

Maillage



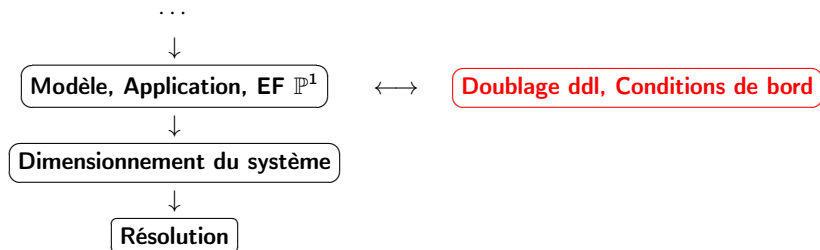
...





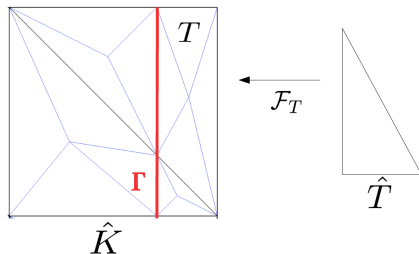
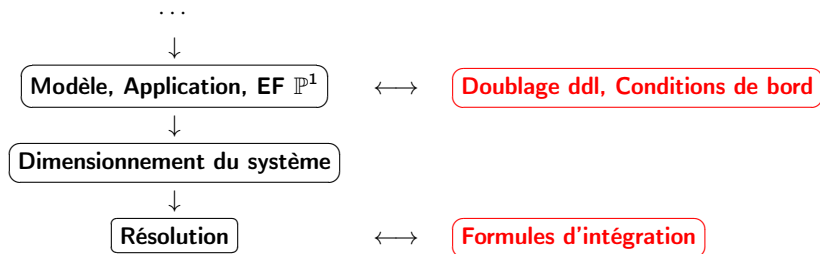
Aspects numériques :

- doublage des degrés de liberté,
- conditions de bord,



Aspects numériques :

- doublage des degrés de liberté,
- conditions de bord,

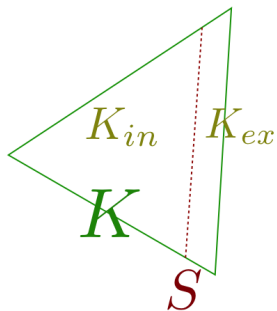


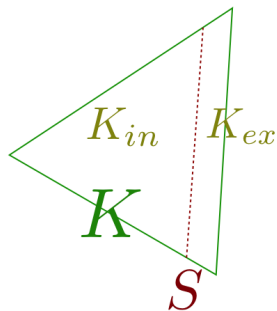
Aspects numériques :

- doublage des degrés de liberté,
- conditions de bord,
- construction de formules d'intégration.

Robustesse

- 1 Robustesse,
- 2 Estimation d'erreur *a priori*,
- 3 Estimation d'erreur *a posteriori*.





Choix de paramètres

$$\kappa_{in} = \frac{\mathfrak{K}_{ex}|K_{in}|}{\mathfrak{K}_{ex}|K_{in}| + \mathfrak{K}_{in}|K_{ex}|}, \quad \kappa_{ex} = \frac{\mathfrak{K}_{in}|K_{ex}|}{\mathfrak{K}_{ex}|K_{in}| + \mathfrak{K}_{in}|K_{ex}|}$$

$$\gamma := C \frac{\mathfrak{K}_{in}\mathfrak{K}_{ex}|S|}{\mathfrak{K}_{ex}|K_{in}| + \mathfrak{K}_{in}|K_{ex}|} \quad (C > 0)$$

Robustesse \mathbb{P}^1

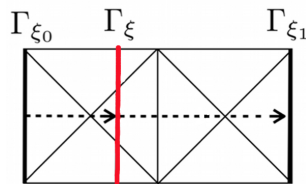
Considérons le problème (1), avec $g_D = g_N = 0$:

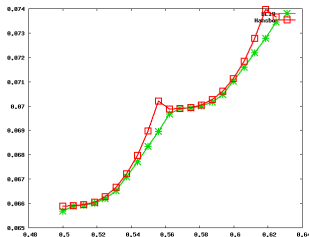
- $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$
- $\Gamma_\xi := \xi \times [0, 1], \xi \in \mathbb{R}.$
- $\kappa_{\text{in}} = 0.1, \kappa_{\text{ex}} = 10000$.

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\kappa_{\text{in}}} \\ \frac{x^2 - \xi^2}{\kappa_{\text{ex}}} + \frac{\xi^2}{\kappa_{\text{in}}} \end{cases}$$

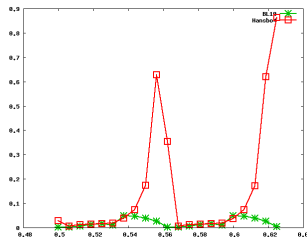
pour $x \leq \xi$

pour $x > \xi,$

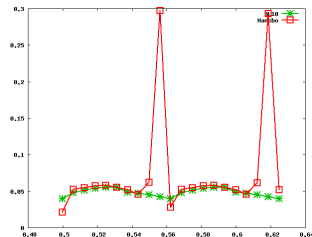


Norme \uparrow Position de Γ 

Norme énergie

Norme- $L^2(\Gamma)$ dans flux reconstitué

$$\|\partial_{n,\mathfrak{K}} u - \partial_{n,\mathfrak{K}}^* u_h\|_{\Gamma}$$



Saut du flux discret

$$\|[\partial_{n,\mathfrak{K}} u_h]\|_{\Gamma}$$

où $\partial_{n,\mathfrak{K}}^* \bullet := \{\partial_{n,\mathfrak{K}} \bullet\}_{\mathfrak{K}} - \gamma [\bullet]$.

Estimation d'erreur a priori

Pour u_h solution du problème discret (2) et u solution du problème continu (1), on obtient les estimations d'erreur a priori suivantes :

$$\|u - u_h\| \leq Cd_h \|u\|_{2, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} \quad (5)$$

et

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq Cd_h^2 \|u\|_{2, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}} \quad (6)$$

où

$$\|\phi\|^2 := \|\nabla \phi\|_{0, \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}}^2 + \|\{\nabla_n \phi\}\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 + \|\phi\|_{1/2, h, \Gamma_h}^2,$$

avec

$$\|\phi\|_{-1/2, h, \Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\phi\|_{0, \Gamma_h}^2, \quad \|\phi\|_{1/2, h, \Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \frac{1}{d_K} \|\phi\|_{0, \Gamma_h}^2.$$

Considérons le problème (1), avec $g_D = g_N = 0$ et avec une interface rectiligne/plane Γ .

Norme énergie

$$\| \| u - u_h \| \|_h^2 := \| \mathfrak{K}^{1/2} \nabla (u - u_h) \|^2 + \sum_{s \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \gamma \| [u - u_h] \|^2$$

Estimation d'erreur *a posteriori*

Il existe une constante C indépendante du maillage et des coefficients $\mathfrak{K}_{\text{in/ex}}$, telle que

$$\| \| u - u_h \| \| \leq C \eta_h. \quad (7)$$

Estimateur d'erreur

$$\eta_h^2 := \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \eta_M^2 + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}} \cup \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \eta_S^2 + \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \zeta_S^2. \quad (8)$$

avec

$$\eta_M^2 := \frac{d_K^2}{\mathfrak{K}} \|f + \text{div}(\mathfrak{K} \nabla u_h)\|_M^2, \quad \eta_S^2 := d_S \left\| \mathfrak{K} \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right\|_S^2, \quad \zeta_S^2 := C \| [u_h] \|_S^2, \quad (9)$$

et

$$d_S := \begin{cases} \frac{d_K}{\mathfrak{K}} & \text{si } S \cap \Gamma = \emptyset, \\ \frac{|S|}{|\hat{S}| \min\{\mathfrak{K}_{\text{in}}, \mathfrak{K}_{\text{ex}}\}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Procédure adaptative

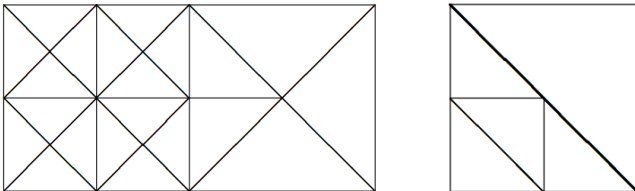
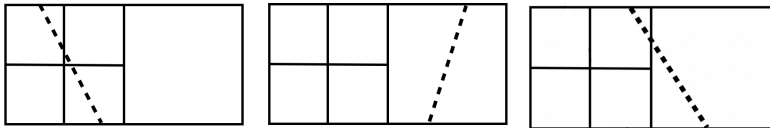


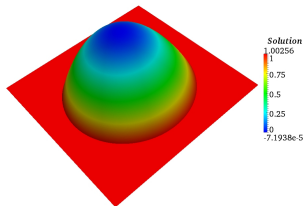
Figure: *Raffinement d'un maillage CC*

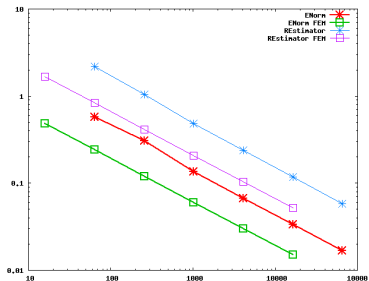


La solution exacte est donnée par

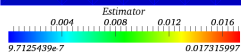
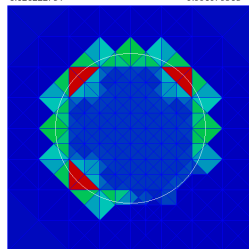
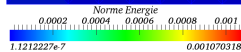
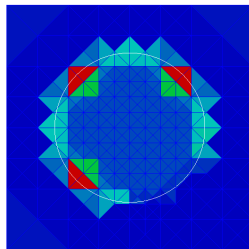
$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^2 - r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{r_0^2}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (10)$$

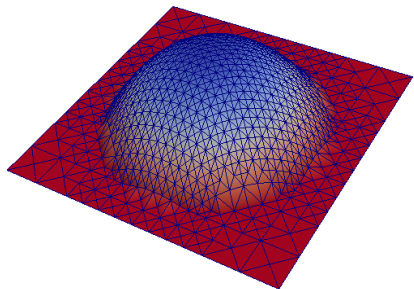
- $\Omega =]-1, 1[^2$,
- $r := \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_0 = 0.78$,
- $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$ et $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$.



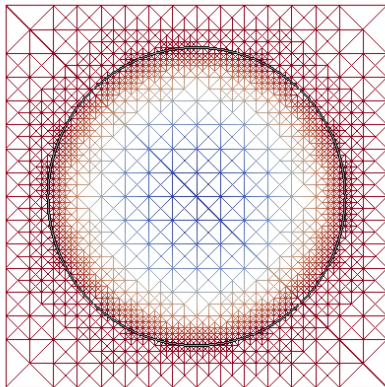


Raffinement uniforme





Avec NXFEM



FEM classique

Extensions

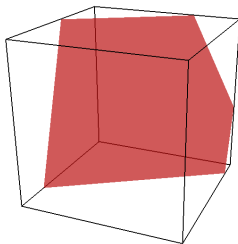
Prise en compte de la dimension N , du degré d'approximation k , d'une interface quelconque :

- 1 Éléments finis CG,
- 2 Éléments finis DG,
- 3 Éléments finis NC.

Prise en compte de la dimension N , du degré d'approximation k , d'une interface quelconque :

Aspects géométriques :

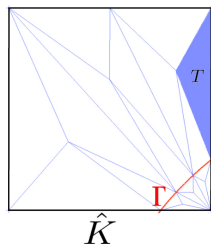
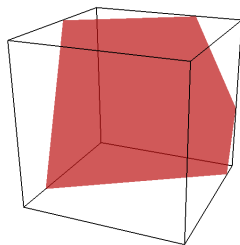
- repérage des cellules coupées,
- identification sous-domaines, caractéristiques,



Prise en compte de la dimension N , du degré d'approximation k , d'une interface quelconque :

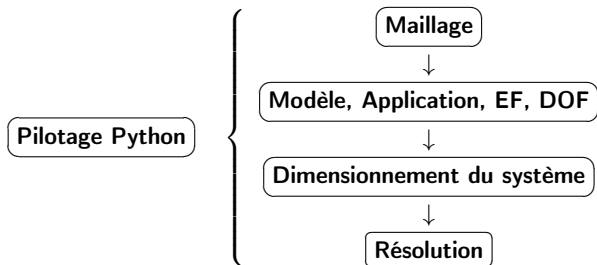
Aspects géométriques :

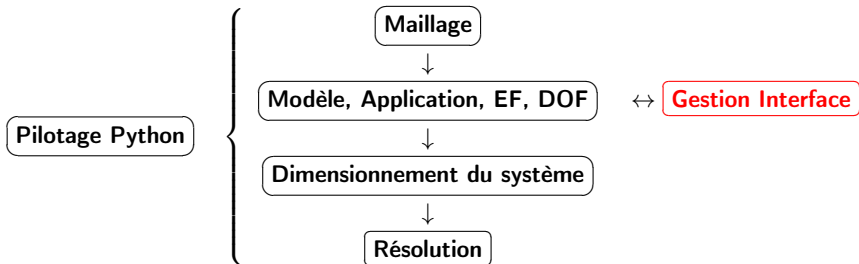
- repérage des cellules coupées,
- identification sous-domaines, caractéristiques,



Aspects numériques :

- doublage des ddl,
- condition de bord,
- construction de formules d'intégration,

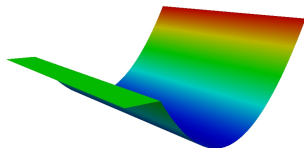




Interface rectiligne/plane

Considérons le problème (1), avec $g_D = g_N = 0$ et une interface rectiligne/plane Γ .

$$u(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \frac{x_1^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } x_1 \leq x_0 \\ \frac{x_1^{2k} - x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases}$$



- $\Omega =]0, 1[^N$,
- $x_0 = 0.71$,
- $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$, $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$.

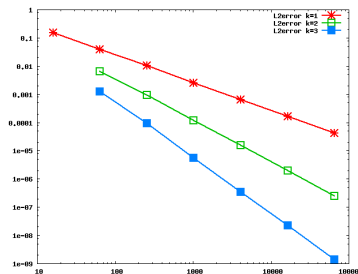
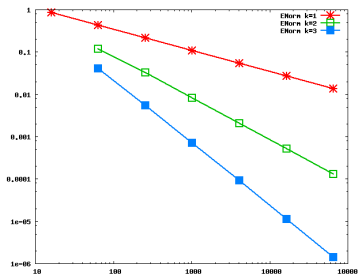


Figure: Norme énergie (gauche) et Erreur L^2 (droite) sur un maillage triangulaire

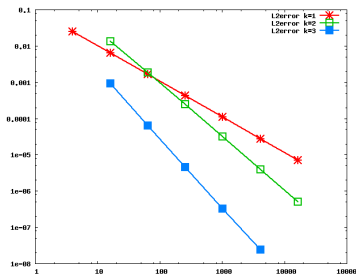
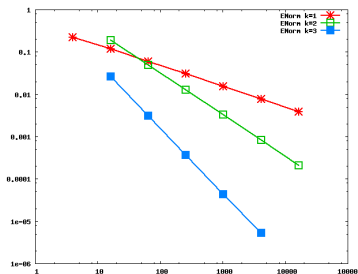


Figure: Norme énergie (gauche) et Erreur L^2 (droite) sur un maillage quadrangulaire

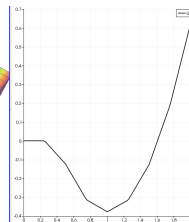
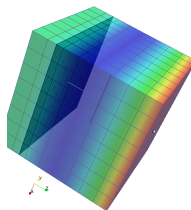
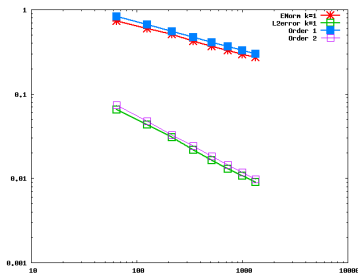
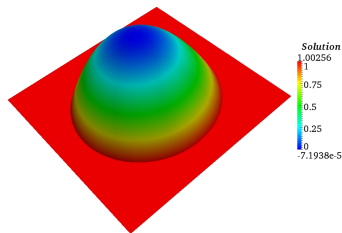


Figure: Norme énergie/Erreur L^2 (gauche) et coupe de la solution (droite) sur un maillage hexaédrique

Interface courbe

Considérons le problème (1), avec $g_D = g_N = 0$ et avec une interface Γ courbe.

$$u(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \frac{r^4}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^4 - r_0^4}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{r_0^4}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases}$$



- $\Omega =]-1, 1[^N$,
- $r := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$, $r_0 = 0.74$,
- $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$ et $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$.

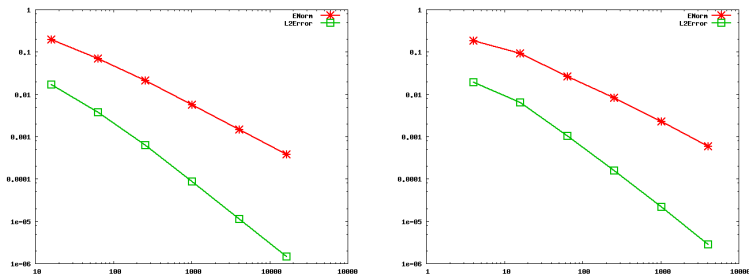


Figure: \mathbb{P}^2 sur maillage CC - \mathbb{Q}^2 sur maillage quadrangulaire

Analyse pour interface rectiligne/plane

$$CG_h := \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}), v_h|_K \circ \mathcal{F}_K \in R^k(K) \forall K \in \mathcal{K}_h \right\},$$

et

$$\mathbb{V}_h := \{v_h|_{\Omega_{\text{in}}} + w_h|_{\Omega_{\text{ex}}}, v_h, w_h \in CG_h\}.$$

Pour $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$, on définit la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \mathfrak{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S \{\partial_{n, \mathfrak{K}} u_h\}_\kappa [v_h] \, ds \\ &\quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^\Gamma} \int_S [u_h] (\{\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h\}_\kappa - \gamma [v_h]) \, ds, \end{aligned}$$

et la forme linéaire :

$$l(v_h) = \int_\Omega f v_h \, dx + \int_{\mathcal{S}_h^\Gamma} (g_N \{v_h\}_{\hat{\kappa}} - g_D (\{\partial_{n, \mathfrak{K}} v_h\}_\kappa - \gamma [v_h])) \, ds.$$

Coercivité de a_h

Pour γ_S pris suffisamment grand, la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est coercive

$$a_h(v_h, v_h) \geq C \|v_h\|^2, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h, \quad (11)$$

dans l'espace discret \mathbb{V}_h muni de la $\|\cdot\|$ -norme suivante :

$$\|\phi\|^2 := \|\nabla\phi\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2 + \|\{\nabla_n\phi\}\|_{-1/2,h,\Gamma_h}^2 + \|\llbracket\phi\rrbracket\|_{1/2,h,\Gamma_h}^2, \quad (12)$$

avec $\|\phi\|_{-1/2,h,\Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} d_K \|\phi\|_{0,\Gamma_h}^2$, $\|\phi\|_{1/2,h,\Gamma_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{K}_h^{\text{cut}}} \frac{1}{d_K} \|\phi\|_{0,\Gamma_h}^2$.

Pour conserver la stabilité et la robustesse de notre méthode, cette constante C doit être indépendante de la géométrie employée et de la position de l'interface.

Inégalité inverse

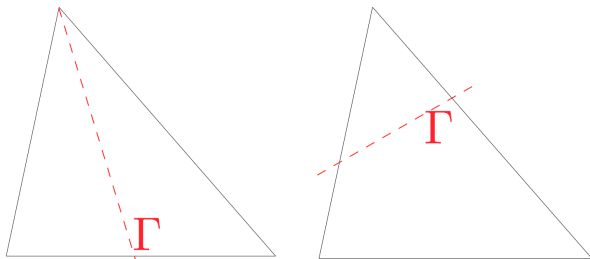
Il existe $C_I > 0$ telle que pour tout $v_h \in \mathbb{V}_h$, nous avons :

$$\|\{\nabla_n v_h\}\|_{-1/2,h,\Gamma_h}^2 \leq C_I \|\nabla v_h\|_{0,\Omega_{\text{in}}\cup\Omega_{\text{ex}}}^2. \quad (13)$$

Inégalité inverse pour un N-simplexe

Soit D un N-simplexe, S l'un de ces bords. On a $\forall u \in \mathbb{P}_N^k(D)$:

$$\|u\|_S \leq \sqrt{\frac{(k+1)(k+N)}{N}} \frac{|S|}{|D|} \|u\|_D$$

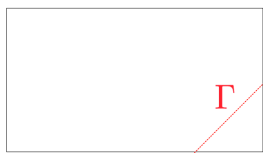
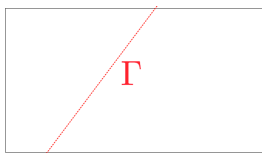
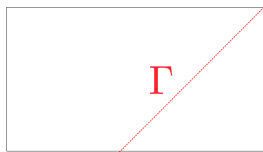
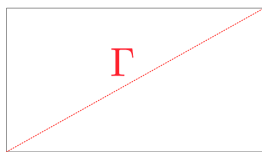


T. Warburton and J. S. Hesthaven ; *On the constants in hp-finite element trace inverse inequalities* ; 2003.

Inégalité inverse pour un N-simplexe

Soit D un N -simplexe, S l'un de ces bords. On a $\forall u \in \mathbb{Q}_N^k(D)$:

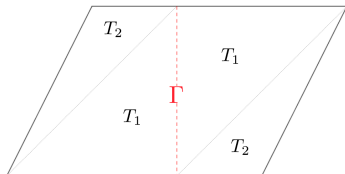
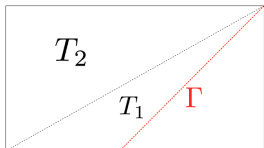
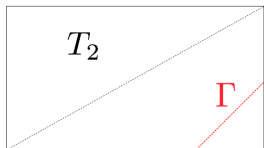
$$\|u\|_S \leq \sqrt{\frac{(N \times k + 1)(N \times k + N)}{N}} \frac{|S|}{|D|} \|u\|_D$$

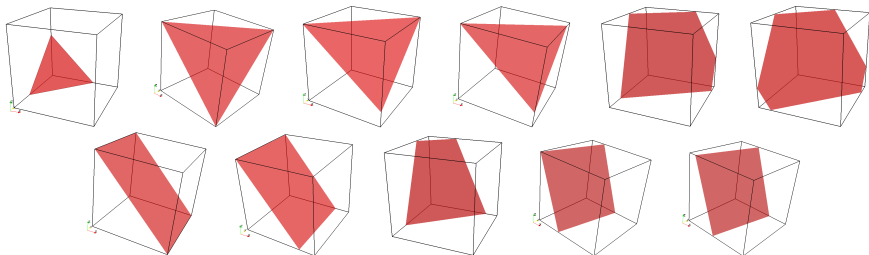
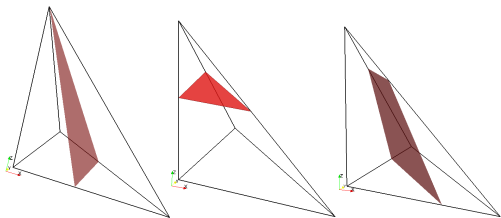


- ↪ Retour à l'élément de référence,
- ↪ Équivalence de normes :

$$\exists c(k, \hat{K}) : \|\hat{p}_h\|_{\infty, \hat{K}}^2 \leq c(k, \hat{K}) \|\hat{p}_h\|_{0, \hat{K}}^2.$$

- ↪ But : Triangulation de \hat{K}_i telle que $|\hat{K}_i| \leq C \times |\hat{T}_i| \leq |\hat{K}|$.
- ↪ Hypothèses de régularité du maillage et de l'interface $|\Gamma_h| \leq d_K$ et $|K| \geq Cd_K^2$





Élément d'analyse en bord courbe

Hypothèse

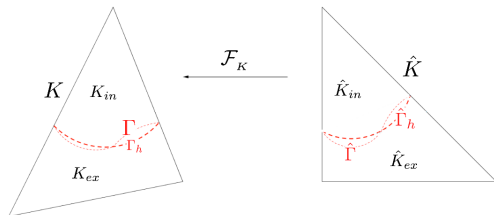
Soit Γ une interface régulière. Pour tout $K \in \mathcal{K}_h$, on note $\hat{\Gamma}$

$$\hat{\Gamma} = (F_K)^{-1}(\Gamma).$$

$\hat{\Gamma}_h$ est l'approximation de degré k de $\hat{\Gamma}$. Enfin, Γ_h est définie par

$$\Gamma_h = F_K(\hat{\Gamma}_h).$$

Ex. Soit Γ une discontinuité régulière, et $k = 2$.



Inégalité inverse pour un (polytope) convexe

Soit D un (polytope) convexe en dimension N et S l'un de ces bords. Soit $p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme de degré inférieur ou égal à k . Alors

$$\|p\|_{0,S} \leq C_1 \frac{|S|^{1/2}}{|D|^{1/2}} \|p\|_{0,D}, \quad (14)$$

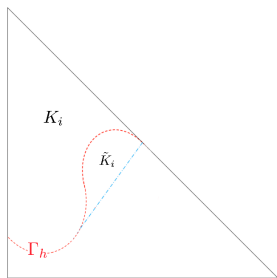
où $C_1 > 0$ dépend seulement du degré k et de la dimension N .

- K_i^\sharp l'enveloppe convexe de K_i ,
- $\tilde{K}_i := K_i^\sharp \setminus K_i$.

Hypothèse sur \tilde{K}_i

On suppose qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\forall h > 0$ et $\forall K \in \mathcal{K}_h^{cut}$:

$$\frac{|\tilde{K}_i|}{|K_i^\sharp|} \leq \frac{\alpha}{C_1^2}, \quad i = in/ex.$$



Sans interface

Problème modèle DG

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\mathcal{K}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (15)$$

Soit DG_h défini par

$$DG_h := \left\{ v_h \in L^2(\Omega), v_h|_K \circ \mathcal{F}_K \in R^k(K), \forall K \in \mathcal{K}_h \right\}. \quad (16)$$

La formulation variationnelle discrète de (15) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in DG_h \text{ tel que :} \\ a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in DG_h \quad (17)$$

Pour $u_h, v_h \in DG_h$, on définit la forme bilinéaire par :

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \mathfrak{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx$$

$$- \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{int}} \int_S ([u_h] \{ \partial_{n, \mathfrak{K}} v_h \} + \{ \partial_{n, \mathfrak{K}} u_h \} [v_h] - \gamma_{int} [u_h] [v_h]) \, ds,$$

et la forme linéaire par

$$l(v_h) := \int_{\Omega} f v_h \, dx.$$

NXFEM

Reprenons le problème modèle (1).

La méthode NXFEM est définie par la formulation variationnelle discrète suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathbb{V}_h \text{ tel que :} \\ a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \end{cases} \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h \quad (18)$$

où

$$\mathbb{V}_h := \{v_h|_{\Omega_{\text{in}}} + w_h|_{\Omega_{\text{ex}}}, v_h, w_h \in DG_h\}.$$

Pour $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$, on définit la forme bilinéaire par :

$$\begin{aligned}
 a_h(u_h, v_h) &:= \sum_{M \in \mathcal{K}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{K}_h^{\text{ex}}} \int_M \hat{\kappa} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx \\
 &\quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\text{in}} \cup \mathcal{S}_h^{\text{ex}}} \int_S ([u_h] \{\partial_{n, \hat{\kappa}} v_h\} + \{\partial_{n, \hat{\kappa}} u_h\} [v_h] - \gamma_{\text{int}} [u_h] [v_h]) \, ds \\
 &\quad - \sum_{S \in \mathcal{S}_h^{\Gamma}} \int_S ([u_h] \{\partial_{n, \hat{\kappa}} v_h\}_{\kappa} + \{\partial_{n, \hat{\kappa}} u_h\}_{\kappa} [v_h] - \gamma [u_h] [v_h]) \, ds,
 \end{aligned} \tag{19}$$

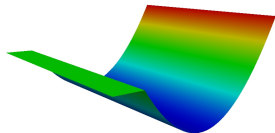
et la forme linéaire :

$$l(v_h) := \int_{\Omega} f v_h \, dx + \int_{\mathcal{S}_h^{\Gamma}} g_N \{v_h\}_{\hat{\kappa}} \, ds - \int_{\mathcal{S}_h^{\Gamma}} g_D (\{\partial_{n, \hat{\kappa}} v_h\}_{\kappa} - \gamma [v_h]) \, ds \tag{20}$$

Résultats numériques

Considérons le problème (1), avec $g_D = g_N = 0$ et avec une interface rectiligne/plane Γ .

$$u(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \frac{x_1^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{si } x_1 \leq x_0 \\ \frac{x_1^{2k} - x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{ex}}} + \frac{x_0^{2k}}{\mathfrak{K}_{\text{in}}} & \text{sinon,} \end{cases}$$



- $\Omega =]0, 1[^N$,
- $x_0 = 0.71$,
- $\mathfrak{K}_{\text{in}} = 1$, $\mathfrak{K}_{\text{ex}} = 1000$.

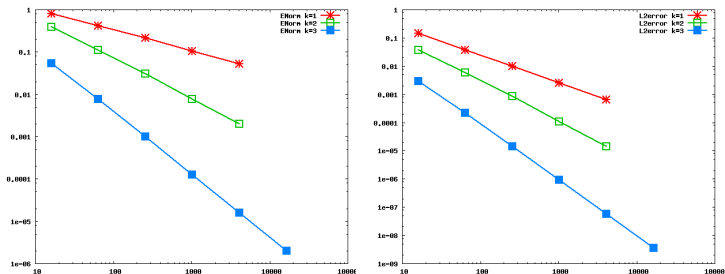


Figure: Norme énergie (gauche) et Erreur L^2 (droite) pour des éléments fins DG \mathbb{P}^k sur un maillage CC

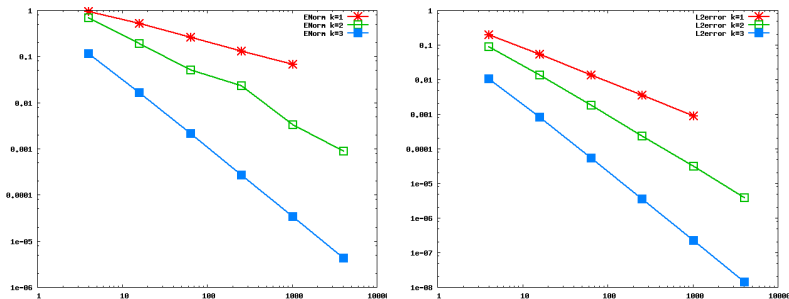


Figure: Norme énergie (gauche) et Erreur L^2 (droite) pour des éléments finis DG \mathbb{Q}^k sur un maillage quadrangulaire

Applications

- 1 Prise en compte de plusieurs interfaces,
- 2 Problème asymptotique,
- 3 Problème instationnaire (interface fixe),
- 4 Problème de diffusion-convection.

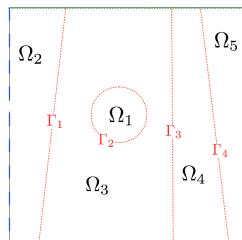
Implémentation

- ① Gestion des interfaces : Aspects géométriques et numériques individuellement,
- ② Identification globale des sous-domaines :

Implémentation

- ① Gestion des interfaces : Aspects géométriques et numériques individuellement,
- ② Identification globale des sous-domaines :

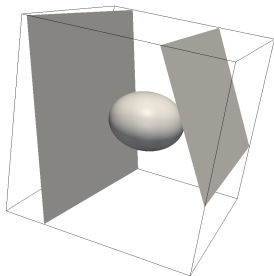
- n_{disc} nombre de discontinuités,
- f_{disc} description implicite de Γ_{disc} ,
- $(f_{n_{disc}}(M), \dots, f_0(M))$ n_{disc} -uplet de valeurs 0 ou 1.



Résultats numériques

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\kappa \nabla u) = 0 & \text{dans } \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_d, \\ \kappa \nabla_n u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_n, \\ [u] = 0 & \text{sur } \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i, \\ [\kappa \nabla_n u] = 0 & \text{sur } \bigcup_{i=1}^3 \Gamma_i \end{array} \right.$$

avec



$$\Omega =]-1; +1[^3, \quad \kappa = \begin{cases} 1000 & \text{sur } \Omega_1, \\ 10000 & \text{sur } \Omega_2, \\ 1 & \text{sur } \Omega_3, \\ 10 & \text{sur } \Omega_4. \end{cases}$$

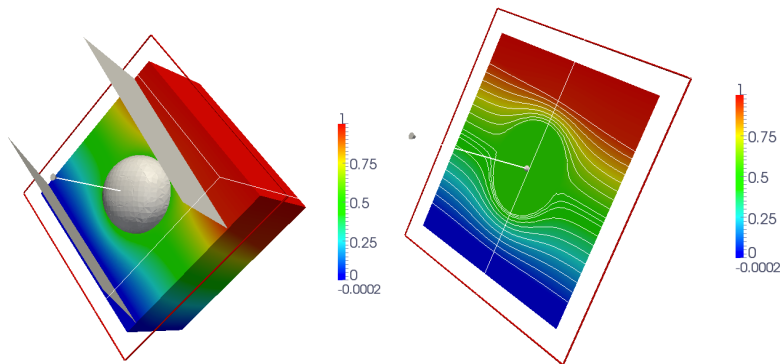


Figure: *Tranche de la solution et des interfaces (gauche) et Coupe (droite)*

Problème modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathfrak{K} \nabla u) = f & \text{dans } \Omega^T := (\Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}) \times]0; T[, \\ u(t, \cdot) = 0 & \text{sur } \Sigma^T := \partial\Omega \times]0; T[, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma^T := \Gamma \times]0; T[, \\ [\mathfrak{K} \nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma^T, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{ex}}. \end{array} \right. \quad (21)$$

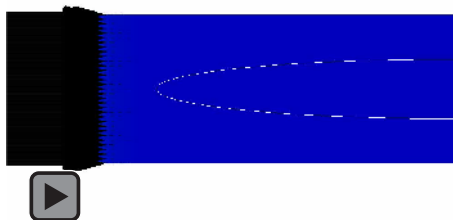
Pour $u_h, v_h \in \mathbb{V}_h$, on définit la forme bilinéaire par :

$$a_h^t(u_h, v_h) := \int_{\Omega} \Phi \frac{u_h^{n+1}}{\Delta t} v_h \, dx + a_h(u_h^{n+1}, v_h), \quad (22)$$

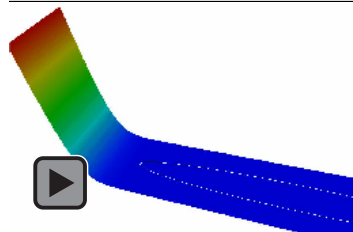
et la forme linéaire s'écrira :

$$l^t(v_h) := \int_{\Omega} \Phi \frac{u_h^n v_h}{\Delta t} \, dx + l(v_h), \quad (23)$$

Résultats Numériques

 Ω_{ex}
 Ω_{in}


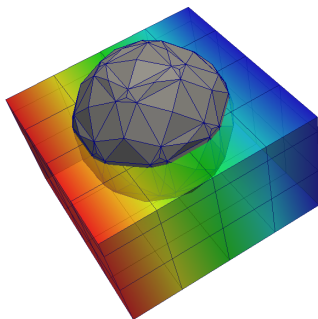
Paramètres	Ω_{ex}	Ω_{in}
\Re	10	1
Φ	0.5	0.3



Perspectives

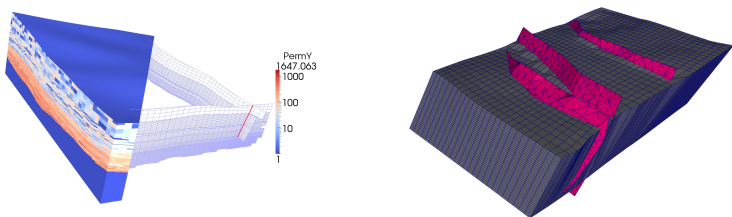
- 1 Approfondissement de l'analyse
- 2 Développement d'outils et d'applications

- Estimateur d'erreur *a posteriori* : démonstration, optimisation, extensions...
- \mathfrak{K} matriciel.



- Analyse en NC.

NXFEM en milieu poreux : *écoulements multiphasiques, réservoirs fracturés*
 Slit problème, problèmes avec croisements d'interfaces, volumes finis (NXFV)



NXFEM en biologie : *modélisation de globules rouges*
 équations de Navier-Stokes, problèmes avec *interfaces mobiles*, éléments finis /
 modèles différents sur chaque domaine

Merci pour votre attention