HAL
open science

Contributions à l'estimation paramétrique des modèles décrits par les équations aux dérivées partielles

Julien Schorsch

To cite this version:

Julien Schorsch. Contributions à l'estimation paramétrique des modèles décrits par les équations aux dérivées partielles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lorraine, 2013. Français. NNT : . tel-00913579

HAL Id: tel-00913579

https://theses.hal.science/tel-00913579v1

Submitted on 4 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale IAEM Lorraine

Contributions à l'estimation paramétrique des modèles décrits par les équations aux dérivées partielles

Thèse présentée et soutenue publiquement le 25 Novembre 2013 pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

Mention Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique

par

Julien SCHORSCH

Composition du jury

Président :	MILLERIOUX Gilles	Professeur Université de Lorraine
Rapporteurs :	GIRI Fouad	Professeur Université de Caen
	MALTI Rachid	Maître de Conférences habilité Université de Bordeaux
Examinateurs :	REMOND Didier	Professeur Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
Co-directeur :	GILSON Marion	Maître de Conférences habilité Université de Lorraine
Directeur :	GARNIER Hugues	Professeur Université de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Université de Lorraine - CNRS
2 rue Jean Lamour, F-54519 Vandoeuvre-les-Nancy, France

École doctorale IAEM Lorraine

Contributions à l'estimation paramétrique des modèles décrits par les équations aux dérivées partielles

Thèse présentée et soutenue publiquement le 25 Novembre 2013 pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

Mention Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique

par

Julien SCHORSCH

Composition du jury

Président :	MILLERIOUX Gilles	Professeur Université de Lorraine
Rapporteurs :	GIRI Fouad	Professeur Université de Caen
	MALTI Rachid	Maître de Conférences habilité Université de Bordeaux
Examinateurs :	REMOND Didier	Professeur Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
Co-directeur :	GILSON Marion	Maître de Conférences habilité Université de Lorraine
Directeur :	GARNIER Hugues	Professeur Université de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Université de Lorraine - CNRS
2 rue Jean Lamour, F-54519 Vandoeuvre-les-Nancy, France

Table des matières

Table des figures **V**

Liste des tableaux **VII**

Liste des abbréviations **IX**

Liste des symboles **XI**

1 Motivations et organisation **1**
1.1 Introduction générale . . . 1
1.2 Les équations aux dérivées partielles et leurs challenges . . . 2
1.2.1 Systèmes dynamiques . . . 2
1.2.2 Les équations différentielles ordinaires . . . 3
1.2.3 Les équations aux dérivées partielles . . . 3
1.2.3.1 Conditions aux limites . . . 4
1.2.3.2 Les équations linéaires . . . 5
1.2.3.3 Les équations non linéaires . . . 5
1.2.3.4 Les équations linéaires à paramètres variants . . . 6
1.2.3.5 Les EDP stochastiques . . . 7
1.3 Identification paramètrique des EDP . . . 8
1.3.1 Les problèmes inverses . . . 8
1.3.2 Identification des systèmes . . . 9
1.3.3 Modèles d'estimation . . . 10
1.4 Minimisation de l'erreur de prédiction . . . 11
1.4.1 Les modèles de bruit continu . . . 12
1.4.1.1 Modèle CARX . . . 12
1.4.1.2 Modèle COE . . . 13
1.4.2 EDP et fonction de transfert . . . 14
1.4.2.1 Fonction de transfert . . . 14
1.4.2.2 Modèles à dimension infinie . . . 15
1.4.2.3 Modèles à dimension finie . . . 16
1.4.3 Systèmes hybrides . . . 18
1.4.3.1 Modèle de type Box-Jenkins hybride . . . 18
1.4.3.2 Modèle BJ complet . . . 19
1.4.3.3 Méthode PEM . . . 20
1.5 Les méthodes de variable instrumentale . . . 21
1.5.1 Variable instrumentale élémentaire . . . 21
1.5.2 Conditions de convergence . . . 21
1.6 Problématique et organisation . . . 22
1.7 Liste des travaux . . . 23

1.7.1 Travaux publiés 23
1.7.2 Travaux en cours de soumission 24

2 Identification des EDP linéaires 25
2.1 Identification des EDP non homogènes 25
2.1.1 Introduction et méthodes d'estimation 25
2.1.1.1 Les méthodes indirectes 26
2.1.1.2 Les méthodes directes 27
2.1.1.3 Estimateur de la variable instrumentale 28
2.1.1.4 Organisation 29
2.1.2 Formulation du problème 29
2.1.2.1 Système de génération de données 29
2.1.2.2 Modèle considéré 30
2.1.2.3 Problématique 32
2.1.3 Méthode des moindres carrés et filtres SVF 32
2.1.3.1 Méthode des filtres à variable d'état 32
2.1.3.2 Estimateur LSSVF-EDP 33
2.1.4 Variable instrumentale et filtre SVF 34
2.1.4.1 Rappel du principe général des méthodes de IV simples 34
2.1.4.2 Estimateur IVSVF à entrée seule 34
2.1.4.3 Estimateur IVSVF à modèle auxiliaire 35
2.1.5 Variable instrumentale raffinée 36
2.1.5.1 Estimateur optimal SRIVC pour les modèles EDO 36
2.1.5.2 SRIVC-EDP : estimateur SRIVC pour les modèles EDP linéaires . 37
2.1.5.3 Minimisation de l'erreur de prédiction 38
2.1.5.4 Algorithme SRIVC-EDP 39
2.1.6 Exemples numériques 41
2.1.6.1 Cas d'un bruit blanc 44
2.1.6.2 Cas d'un bruit coloré 44
2.1.7 Bilan 45
2.2 Identification des EDP linéaires homogènes 46
2.2.1 Formulation du problème 47
2.2.1.1 Système considéré 47
2.2.1.2 Modèle considéré 49
2.2.1.3 Problématique 49
2.2.2 Exemples numériques 49
2.2.2.1 Cas de données échantillonnées uniformément 51
2.2.2.2 Cas de données échantillonnées non-uniformément 52
2.2.3 Bilan 53
2.3 Conclusion 54

3 Identification des EDP à paramètres variants 57
3.1 Introduction 57
3.2 Formulation du problème 59
3.2.1 Système considéré 59
3.2.1.1 Système déterministe 59
3.2.1.2 Système de bruit 60
3.2.1.3 Système générant les données complet 61
3.2.2 Modèle considéré 61
3.2.2.1 Modèle du processus 61

3.2.2.2 Modèle de bruit . . . 63
3.2.2.3 Modèle complet . . . 63
3.3 Prédiction et erreur de prédiction . . . 64
3.3.1 Critère de minimisation de l'erreur . . . 64
3.3.2 Reformulation du modèle . . . 65
3.3.3 Formulation du modèle linéaire en les paramètres . . . 66
3.3.4 Modèle de l'erreur de prédiction . . . 67
3.3.5 Minimisation de l'erreur de prédiction . . . 68
3.4 Formulation du problème d'identification . . . 68
3.5 Modèle linéaire en les paramètres . . . 68
3.6 Méthode des moindres carrés itératifs . . . 70
3.6.1 Estimateur LS-EDP-LPV . . . 70
3.6.2 Estimateur ILS-EDP-LPV . . . 71
3.7 Méthode de variable instrumentale raffinée . . . 73
3.7.1 Estimateur RIV-EDP-LPV . . . 73
3.7.2 Algorithme RIVC-EDP-LPV . . . 73
3.8 Exemples numériques . . . 76
3.8.1 Cas $\mathcal{S}_{\mathrm{ADE}} \in \tilde{\mathcal{M}}$ . . . 79
3.8.2 Cas $\mathcal{S}_{\mathrm{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$ . . . 79
3.8.3 Cas $\mathcal{S}_{\mathrm{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$ et échantillonnage spatial moins rapide . . . 80
3.9 Conclusion . . . 83

4 Conclusion générale **85**
4.1 Conclusion . . . 85
4.2 Perspectives . . . 87

Annexes **89**

A Méthode de discrétisation des EDP et produit de convolution **89**
A.1 Méthodes de discrétisation . . . 89
A.1.1 Différences finies et séries de Taylor de degré 2 . . . 90
A.1.2 Exemple : discrétisation de l'équation de la chaleur . . . 91
A.1.2.1 Etude de la consistance . . . 92
A.1.2.2 Etude de la stabilité . . . 92
A.2 Fonction de transfert de l'équation de la chaleur . . . 93

B Estimateurs pour l'identification de l'équation advection-diffusion **95**
B.1 Estimateur LSSVF-EAD . . . 95
B.2 Estimateur SRIVC-EAD . . . 96

C Discrétisation de l'équation d'advection-diffusion **99**
C.1 Rappel : équation d'advection-diffusion complète . . . 99
C.2 Différences finies pour l'équation d'advection-diffusion . . . 100
C.3 Discrétisation de l'EAD . . . 100
C.4 Consistance et stabilité . . . 101

Bibliographie **103**

Table des figures

1.1 Système déterministe 2
1.2 Vecteur normal unité orienté vers l'extérieur 4
1.3 Système de génération de données 8
1.4 Procédure itérative d'identification des systèmes 10
1.5 Filtrage des données 17

2.1 Classification des procédures d'identification pour les EDP linéaires 26
2.2 Classification des transformations linéaires 27
2.3 Exemple 2.1 : partie des signaux d'entrée/sortie bruités et non bruités 42
2.4 Exemple 2.1 : signaux de sortie non bruités 43
2.5 Positions des capteurs et périodes d'échantillonnage 48
2.6 Exemples 2.3 et 2.4 : signal d'entrée / condition de bord 50
2.7 Exemple 2.3 : signaux de sortie non bruités (échantillonnage uniforme) 51
2.8 Exemple 2.4 : distribution des capteurs 52
2.9 Exemple 2.4 : signaux de sortie non bruités (échantillonnage non uniforme) 52

3.1 Exemples 3.1, 3.2 et 3.3 : données de débit et signaux de sortie non bruitées 77
3.2 Exemples 3.1, 3.2 et 3.3 : partie des signaux de sortie non bruitée et bruitées . . . 77
3.3 Exemples 3.1, 3.2 et 3.3 : signal d'entrée 78
3.4 Exemple 3.3 : erreur de la sortie simulée (méthode SILS-EDP-LPV) 81
3.5 Exemple 3.3 : partie des signaux de la sortie simulée (méthode SILS-EDP-LPV) . 81
3.6 Exemple 3.3 : erreur de la sortie simulée (méthode SRIVC-EDP-LPV) 82
3.7 Exemple 3.3 : partie des signaux de la sortie simulée (méthode SRIVC-EDP-LPV) 82

A.1 Discrétisation du domaine 90
A.2 Fonction de transfert discrète 94

Liste des tableaux

2.1 Exemple 2.1 : comparaison des méthodes LSSVF, IVSVF-U, IVSVF-MA et SRIVC-EDP (bruits blancs) 44
2.2 Exemple 2.2 : comparaison des méthodes LSSVF, IVSVF-U, IVSVF-MA et SRIVC-EDP (bruits colorés) 44
2.3 Exemple 2.3 : comparaison des méthodes LSSVF-EAD et SRIVC-EAD (échantillonnage uniforme) 51
2.4 Exemple 2.4 : comparaison des méthodes LSSVF-EAD et SRIVC-EAD (échantillonnage non-uniforme) 52

3.1 Exemple 3.1 : comparaison des méthodes ILS-EDP-LPV et RIVC-EDP-LPV ($\mathcal{S}_{\mathrm{ADE}} \in \tilde{\mathcal{M}}$) 79
3.2 Exemple 3.2 : comparaison des méthodes SILS-EDP-LPV et SRIVC-EDP-LPV ($\mathcal{S}_{\mathrm{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$) 80
3.3 Exemple 3.3 : comparaison des méthodes SILS-EDP-LPV et SRIVC-EDP-LPV (données manquantes et bruits colorés) 80

Liste des abbréviations

ARX	AutoRegressive model with eXternal inputs : modèle auto-régressif avec entrée exogène
ARMA	AutoRegressive Moving Average : modèle auto-régressif à moyenne ajustée
BJ	Box-Jenkins
CARX	Continuous AutoRegressive model with eXternal inputs : modèle auto-régressif continu avec entrée exogène
COE	Continuous Output error : modèle continu erreur de sortie
EAD	Equation d'advection diffusion
EDP	Equation aux dérivées partielles
EDO	Equation différentielle ordinaire
IV	Variable instrumentale
IVSVF-MA	Méthode de variable instrumentale à modèle auxiliaire
IVSVF-U	Méthode de variable instrumentale à entrée seule
LPV	Linear parameter varying : modèle linéaire à paramètres variants
LTI	Linear time-invariant : linéaire à temps invariant
LTSI	Linear time-space-invariant : linéaire à temps et espace invariant
LS	Least-squares : moindres carrés
LSI-EDP-LPV	Moindres carrés itératifs pour les modèles d'équations aux dérivées partielles à paramètre variant linéairement
LSIS-EDP-LPV	Moindres carrés itératifs simplifiés pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à paramètre variant linéairement
LSSVF-EDP	Méthode des moindres carrés fondée sur les filtres SVF pour les modèles EDP
MISO	Multi-Input Single-Output : plusieurs entrées et une seule sortie
OE	Output error : erreur de sortie
PEM	Prediction error minimization : minimisation de l'erreur de prédiction
RI	Réponse impulsionnelle
RIV	Refined instrumental variable : variable instrumentale raffinée
RIVC	Refined instrumental variable for continuous-time : variable instrumentale raffinée pour les modèles à temps continu
RIVC-EDP	Refined instrumental variable for partial differential equation : variable instrumentale raffinée pour les modèles décrits par les équations aux dérivées partielles
RIVC-EDP-LPV	Variable instrumentale raffinée pour les modèles régis par les équations aux dérivées partielles à paramètres variants
SISO	Single-Input Single-Output : une seule entrée et une seule sortie
RSB	rapport signal sur bruit

SRIV	Simplified Refined instrumental variable : variable instrumentale raffinée simplifiée
SRIVC	Simplified refined instrumental variable for continuous time system : variable instrumentale raffinée simplifiée pour les modèles à temps continu
SRIVC-EDP-LPV	Variable instrumentale raffinée simplifiée pour les modèles linéaires d'équations aux dérivées partielles à paramètre variant
SVF	State variable filter : Filtre à variables d'état
TEC	Temps et espace continus

Liste des symboles

t	Variable temporelle
T_e	Période d'échantillonnage temporelle
t_k	Temps échantillonné
N	Nombre d'échantillons temporel
x	Variable spatiale
x_ℓ	Espace échantillonné
h	Période d'échantillonnage spatiale
L	Nombre d'échantillons spatial
u	Signal d'éntrée
$\mathring{\chi}$	Signal de sortie non bruité
$\mathring{\chi}_0$	Condition initiale
$\mathring{u}_{\partial\Omega}$	Conditions aux limites
y	Signal de sortie bruité
ρ	Variable extérieure de séquencement supposée déterministe
Z	Jeux de données
$y^{(n_t,n_x)}$	Dérivée temporelle d'ordre n_t et spatiale d'ordre n_x du signal y
y_ℓ^k	Approximation numérique de $y(t_k, x_\ell)$
y_{f}	Signal y filtré
Ω	Domaine de définition
$\partial\Omega$	Bord du domaine de définition
θ	Vecteur paramètre utilisé pour les modèles du processus
η	Vecteur paramètre utilisé pour les modèles de bruit
$\hat{\theta}$	Estimée du vecteur de paramètres à partir du jeu de données disponible
$\hat{\theta}^{iter}$	Estimée du vecteur de paramètres à l'itération $iter$
θ_{o}	Vecteur de paramètres vrais du système déterministe
η_{o}	Vecteur de paramètres vrais du système de bruit
Θ_{o}	Vecteur des paramètres vrais
φ	Vecteur de régression
ζ	Instrument ou variable instrumentale

e_{o}	Bruit blanc additif à la sortie
v_{o}	Bruit coloré additif à la sortie
∂	Opérateur différentiel partiel
$\tilde{\partial}$	Opérateur différentiel partiel approché
q_t	Opérateur de décalage temporel
q_x	Opérateur de décalage spatial
$\mathcal{S}_{\mathrm{o}}$	Système déterministe générant les données
$\mathcal{H}_{\mathrm{o}}$	Système de bruit vrai
$\tilde{\mathcal{G}}$	Ensemble des modèles paramétrés lié au processus
$\tilde{\mathcal{M}}$	Ensemble de modèles, comprenant le modèle du processus et le modèle de bruit
$\mathcal{S}_{\mathrm{EC}}$	Système «vrai», de l'équation de la chaleur générant les données
$\mathcal{S}_{\mathrm{EAD}}$	Système «vrai», de l'équation d'advection-diffusion générant les données
$\tilde{\mathcal{G}}_{\mathrm{EAD}}$	Ensemble des modèles paramétrés lié au système de l'équation d'advection-diffusion
$\tilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{EAD}}$	Ensemble des modèles de l'équation d'advection-diffusion, comprenant les modèles du processus et du bruit
$\mathcal{O}$	Erreur de troncature
$(.)^{\mathrm{T}}$	Matrice transposée
$*$	Produit de convolution

Chapitre 1

Motivations et organisation

1.1 Introduction générale

Les travaux présentés dans cette thèse concernent le développement d'estimateurs pour l'identification des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles. Ces travaux s'inscrivent dans la suite logique de ceux déjà réalisés au sein du laboratoire du CRAN et du département *Contrôle Identification Diagnostic* (CID) et plus particulièrement au sein de l'équipe *Identification et Modélisation des systèmes dynamiques* (iModel). Les méthodes préalablement développées sont fondées sur l'estimation paramétrique des équations différentielles ordinaires à temps continu ou discret par des techniques de variable instrumentale. Elles vont de l'identification des systèmes en boucle ouverte, aux systèmes en boucle fermée, en passant par les systèmes non linéaires ou avec des erreurs en les variables [GGdH04, GVdH05, GGYdH08, TGG08, GW08, LGGY08, LTGG11, WG12]. De plus, toutes ces techniques ont contribué au développement et à l'extension de la boîte à outils CONTSID de l'anglais CONtinuous-Time System IDentification. Cette boîte à outils, disponible pour MATLAB, permet l'identification directe de modèles linéaires et non linéaires à temps continu, à partir des données échantillonnées avec une période d'échantillonnage uniforme ou non-uniforme, sans nécessiter la détermination de modèles à temps discret [GM99, GM00, HGRY02, GGH03, GGR06, GGL09].

La majorité des méthodes d'identification développées au cours de ces trois ans porte sur l'identification des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles. Ces systèmes multidimensionnels sont un prolongement des systèmes aux équations différentielles ordinaires qui ne dépendent que de la variable temporelle. Ainsi, les estimateurs proposés dans ce mémoire peuvent être vus comme des extensions des méthodes développées par le passé pour l'identification des modèles décrits par les équations différentielles continues linéaires et non linéaires. Les techniques de variable instrumentale dont dépendent ces méthodes présentent l'avantage d'estimer correctement les paramètres des modèles continus, et ce, sans avoir de connaissance *a priori* très précise sur les bruits de mesures additifs dont sont entachées les données acquises lors des expériences. Dans un même temps, les équations aux dérivées partielles apparaissent dans tous les domaines d'études, de la dynamique des structures à la théorie relativiste de la gravitation. Aussi, il est important de considérer de nombreuses structures d'équations afin de modéliser un grand nombre de phénomènes.

Il existe un vaste panel de problématiques liées à l'identification des équations aux dérivées partielles continues. Un premier problème concerne la structure du bruit. L'équation de départ étant continue, mais les données étant échantillonnées, doit-on alors choisir une structure de bruit continue ou discrète ? Un deuxième problème concerne l'approximation des dérivées partielles.

Quels sont les meilleurs filtrages à appliquer pour approcher au mieux les dérivées tout en réduisant l'influence du bruit additif sur les données de sortie ? De plus, les données étant généralement acquises lors d'expériences, peut-on supposer que l'on dispose d'une quantité non négligeable de capteurs ? et que ces capteurs sont distribués à pas constant ? Ce ne sont que les prémices d'une longue liste de questions auxquelles on est confronté lorsque l'on traite de l'identification des systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles.

Les travaux résumés ont été effectués dans l'optique d'envisager tous ces aspects. Ainsi, dans ce premier chapitre, une description détaillée des différentes classes de systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles est réalisée. Puis, après une présentation rapide des problèmes inverses liés à ces systèmes, les différentes étapes attachées aux problèmes d'identification paramétrique sont mis en exergue. Enfin, le critère de minimisation appliqué pour l'estimation des paramètres associés aux équations aux dérivées partielles est présenté pour différentes structures de bruit.

1.2 Les équations aux dérivées partielles et leurs challenges

Cette première partie établit les pré-requis essentiels à la compréhension du document. Après une définition sommaire des systèmes dynamiques, les principaux systèmes sont étudiés afin d'en dégager différentes problématiques.

1.2.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps. Ainsi contrairement aux systèmes dit statiques qui ne dépendent que du présent, ces systèmes suivent plusieurs postulats :

- causal, l'évolution du système dépend à la fois du passé et du présent ;
- déterministe, une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible ; prédiction parfaite des réponses futures si l'on connait les entrées.

Une large variété de phénomènes physiques et environnementaux est décrite par ces systèmes dynamiques, généralement reliés par deux signaux ; le signal d'excitation u qui est l'entrée du système et le signal de sortie $\mathring{\chi}$ généré par le système à partir de l'entrée. Ils peuvent être conceptualisés suivant la Figure 1.1.

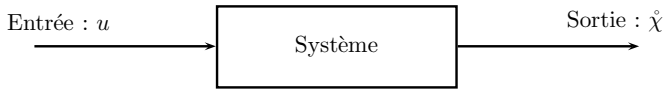

FIGURE 1.1 – Système déterministe reliant l'entrée u à la sortie $\mathring{\chi}$

Dans la majorité des cas, les systèmes dynamiques sont représentés mathématiquement à l'aide d'équations différentielles. Ces équations sont ainsi appelées car elles mettent en relation une ou plusieurs fonctions inconnues avec leurs dérivées. Elles sont, par ailleurs, divisées en deux grandes classes : les *équations différentielles ordinaires* (EDO) et les *équations aux dérivées partielles* (EDP).

1.2.2 Les équations différentielles ordinaires

Les EDO sont utilisées dans de nombreux contextes. On les trouve aussi bien en mathématiques, que dans l'étude des populations, dans les problèmes de géologie, en modélisation météorologique, en économie, en automatique et dans bien d'autres disciplines encore. Ces équations sont reconnaissables par le fait que les fonctions impliquées ne dépendent que d'une seule variable, et que leurs dérivées sont symbolisées par un "d" droit.

Exemple

Un exemple souvent utilisé est le système de Volterra-Lotka aussi connu sous le nom de système proie-prédateur (voir par exemple [LK01]). Ce système de deux équations différentielles est couramment employé pour reproduire la dynamique de deux populations : les proies et les prédateurs.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathring{\chi}_1(t)}{dt} = \mathring{\chi}_1(t)(a - b\mathring{\chi}_2(t)) \\ \\ \dfrac{d\mathring{\chi}_2(t)}{dt} = \mathring{\chi}_2(t)(-c + d\mathring{\chi}_1(t)) \end{cases} \tag{1.1}$$

- $\mathring{\chi}_1(t)$ est le nombre de prédateurs à l'instant t ;
- $\mathring{\chi}_2(t)$ est le nombre de proies à l'instant t ;
- a et b représentent respectivement les taux de reproduction et de mortalité des prédateurs ;
- c et d représentent respectivement les taux de reproduction et de mortalité des proies.

On peut noter que les dérivées représentent ici la variation des populations au cours du temps. Pour obtenir une formulation complète de (1.1), il est important de définir une condition initiale qui décrit la situation au temps $t = 0$ et conditionne toute la dynamique du système lorsque $t > 0$. Cette condition est donc essentielle à la détermination de la solution complète.

Au delà des EDO qui dépendent majoritairement de la seule variable temporelle, de nombreux systèmes industriels et environnementaux impliquent des comportements liés à la fois à l'espace et au temps ou bien encore à d'autres facteurs. Les systèmes dynamiques décrits par les EDO sont donc inutilisables dans ces conditions. Par exemple, la modélisation de la propagation d'un polluant le long d'une rivière ne peut se faire que si l'on connait l'évolution du polluant suivant la localisation spatiale. Il est donc nécessaire de considérer une deuxième classe de systèmes prenant en compte, en plus de la variable temporelle habituellement considérée, des variables dépendantes de plusieurs composantes. Cette classe de systèmes fait appel aux EDP.

1.2.3 Les équations aux dérivées partielles

De la même manière que les EDO, les EDP décrivent un large éventail de comportements : physiques, mécaniques, chimiques (modélisation des réactions), environnementaux, ou bien encore certains enjeux financiers dans le monde de l'économie. Les applications sont toutes aussi larges allant de la modélisation de l'état de charge et de santé des batteries [MCK12] à des problèmes de plus grande envergure comme la simulation de l'évolution de la température de la glace de la mer Arctique [FWFL11], la description de la propagation de la chaleur [CN47] ou la modélisation d'une onde se propageant à la surface de l'eau.
Mais contrairement aux EDO, ces équations ont la particularité d'introduire des dérivées partielles par rapport à chaque composante. Ces dérivées partielles, dont l'opérateur associé est noté ∂, décrivent généralement des comportements bien spécifiques aux phénomènes étudiés.

Par exemple :
- les dérivées partielles spatiales d'ordre un sont usuellement utilisées pour simuler le transport d'un objet le long de la dimension x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f; \tag{1.2}$$

- celles du second ordre représentent la diffusion d'une quantité physique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_x^2 f. \tag{1.3}$$

En plus de différer des EDO par leurs dérivées partielles, il est souvent nécessaire de caractériser un ensemble de conditions supplémentaires afin d'étudier les EDP. Ces conditions sont appelées conditions de bord ou aux limites car elles caractérisent le comportement du phénomène décrit par l'EDP sur l'ensemble des bords du domaine étudié.

1.2.3.1 Conditions aux limites

Il est important de définir aux EDP des conditions aux limites. Contrairement aux EDO qui ne dépendent la plupart du temps que de la variable temporelle, les EDP sont définies sur un espace physique Ω qui est le plus souvent borné.

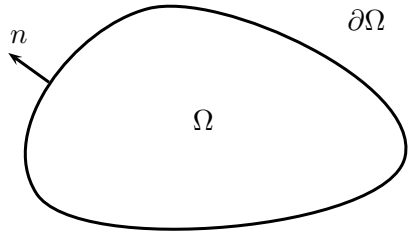

FIGURE 1.2 – Vecteur normal unité orienté vers l'extérieur

Les conditions initiales ne suffisent donc plus à assurer l'existence et la régularité de la solution. Il est alors nécessaire d'ajouter une relation appelée condition aux limites qui indique ce qu'il se passe à la frontière ou au bord du domaine noté $\partial\Omega$. Cette condition dépend du contexte physique et des conditions expérimentales. Il existe donc une multitude de conditions [Bre10]. Les plus connues sont les conditions de Dirichlet et Neumann :
- condition de Dirichlet : on suppose que la sortie est nulle au bord du domaine

$$\mathring{\chi}(t,x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0; \tag{1.4}$$

- condition de Neumann : le flux sortant du bord est supposé nul

$$\frac{\partial \mathring{\chi}}{\partial n}(t,x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et } t > 0, \tag{1.5}$$

  n est la normale extérieure au domaine (Figure 1.2).

Ainsi, dans le cadre d'une modélisation mathématique construite à partir d'EDP, il est important de définir un ensemble de conditions tirées des observations du phénomène étudié. Ces conditions doivent être définies quelle que soit la structure du système EDP considéré.
De plus, il existe un nombre non négligeable de phénomènes pouvant être simulés et expliqués par les EDP. Malheureusement tous les phénomènes ne sont pas susceptibles d'être représentés par une unique équation. Aussi, il est nécessaire pour modéliser le plus grand nombre possible de comportements de considérer plusieurs classes d'EDP.

1.2.3.2 Les équations linéaires

Les EDP les plus courantes sont appelées EDP linéaires. Elles ne font intervenir que des combinaisons linéaires de dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions indépendantes de la solution cherchée. Les plus représentatives pour la simulation de phénomènes sont celles du second ordre :

$$a\partial_t^2\mathring{\chi}(t,x) + b\partial_{tx}^2\mathring{\chi}(t,x) + c\partial_x^2\mathring{\chi}(t,x) + d\partial_t\mathring{\chi}(t,x) + e\partial_x\mathring{\chi}(t,x) + f\mathring{\chi}(t,x) = u(t,x) \tag{1.6}$$

où a, b, c, d, e et f sont des fonctions réelles constantes ou dépendantes seulement des variables x et t.

Comme exemple, l'équation linéaire de la chaleur, aussi appelée équation de diffusion, est souvent utilisée pour décrire le phénomène physique de la distribution de la température dans un domaine Ω (voir par exemple [Can84]). Elle est décrite par l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \partial_t\mathring{\chi}(t,x) - K\partial_x^2\mathring{\chi}(t,x) = u(t,x) & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\Omega \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) & \text{sur} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

- x est la variable d'espace, c'est-à-dire un point de Ω ;
- t est la variable de temps ;
- K est la conductivité thermique qui caractérise la propagation de la chaleur dans le matériau donné ;
- la fonction $\mathring{\chi}(t,x)$ représente la chaleur de sortie ;
- la fonction d'entrée $u(t,x)$ représente les sources de chaleur généralement une densité de flux par unité de mesure.

Comme pour les EDO, la condition initiale est ici définie par la fonction $\mathring{\chi}_0(x)$ qui décrit le comportement du système au repos ($t = 0$).

Remarques :

- il doit être noté que de manière générale, si le second membre $u(t,x)$ est nul, l'EDP est dite homogène, sinon elle est dite non homogène ;
- les équations linéaires du second ordre (1.6) peuvent également être classées en sous-catégories : elliptique (si $b^2 - 4ac < 0$), parabolique (si $b^2 - 4ac = 0$) et hyperbolique (si $b^2 - 4ac > 0$). Cette terminologie se justifie par la forme des polynômes apparaissant après l'application de la transformation de Fourier.

Les EDP linéaires décrivent donc une classe de phénomènes dont les comportements physiques ne varient pas. Cette classe d'EDP ne suffisant pas à elle seule pour modéliser l'ensemble des phénomènes, une deuxième classe d'EDP doit donc être considérée.

1.2.3.3 Les équations non linéaires

Contrairement aux équations linéaires, les équations non-linéaires ne peuvent pas être définies de manière générale. En dehors des critères vus précédemment, on considèrera les EDP comme non-linéaires, c'est-à-dire que la relation entre les dérivées partielles est non linéaire.

Un exemple connu est l'équation de Burgers qui modélise la dynamique du trafic routier [MH78] :

$$\begin{cases} \partial_t \mathring{\chi}(t,x) + V(\mathring{\chi},x)\mathring{\chi}(t,x)\partial_x \mathring{\chi}(t,x) = 0 & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\Omega \\ \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) & \text{sur} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.8}$$

- $\mathring{\chi}(t,x)$ symbolise le nombre de véhicules à l'instant t et au point x ;
- $\mathring{\chi}_0(x)$ le nombre initial de véhicules répartis sur Ω.

Le trafic routier dépend d'un grand nombre de paramètres comme les heures de pointe, les feux rouges ou encore les accidents causant un amoncellement de véhicules. On dit que ces paramètres sont non-linéaires car le nombre de voitures accumulées peut devenir très important en un temps très court. Cette croissance rapide provoque alors des discontinuités dans l'écoulement du nombre de voitures $\mathring{\chi}(t,x)$. Le paramètre V de l'équation (1.8) dépend donc à la fois du nombre de voitures présentes à l'instant t et des contraintes extérieures.

D'autres exemples d'EDP non linéaires sont étudiés dans [Ame72], [LQ11] et [GE10].

Les EDP non linéaires décrivent une très grande classe de phénomènes physiques. Cependant les EDP intervenant dans cette famille sont complexes à interpréter et à modéliser, il est donc difficile d'en faire une étude mathématique. Une troisième classe d'EDP doit être instaurée afin de compenser le manque de non-linéarité des EDP linéaires et palier la complexité des EDP non-linéaires, il s'agit de la classe des EDP linéaires à paramètres variants.

1.2.3.4 Les équations linéaires à paramètres variants

De nombreux types de modèles doivent être élaborés afin de couvrir une large gamme de systèmes. Ainsi, une étape intermédiaire entre les systèmes linéaires invariants dans le temps et dans l'espace (en anglais *Linear Time-Space-Invariant* (LTSI)) et les systèmes non-linéaires est enfin étudiée : la classe de modèles des systèmes *linéaires à paramètres variant*, plus communément connue sous l'acronyme anglais LPV pour *Linear Parameter-Varying* [Tót10].
Dans les systèmes LPV les relations entre les dérivées sont considérées linéaires comme dans le cas LTSI, néanmoins les paramètres sont supposés être les fonctions d'un signal mesurable en temps et en espace. Ce signal est souvent représenté par la variable de séquencement ρ qui dépend elle-même des variables temporelle et spatiale. Les systèmes LPV, en plus de représenter une multitude de processus physiques, ont les atouts suivants :

- ils proposent une large classe de systèmes aux comportements non-linéaires ;
- ce sont des modèles très intuitifs grâce à leurs formulations semblables à celles des systèmes linéaires.

Pour illustrer ces propos, on peut se fonder sur l'exemple de la dispersion des pucerons dans la nature [CPDP13]. Généralement cette propagation est soumise à plusieurs variables comme le vent, la température et les conditions météorologiques. Les paramètres du modèle EDP dépendent donc de fonctions mesurables qui interviennent dans le déplacement des pucerons.

Une formulation simplifiée est

$$\begin{cases} \partial_t \mathring{\chi}(t,x_1,x_2) = D(\rho)\Delta_x^2 \mathring{\chi}(t,x_1,x_2) + M(\rho)\mathring{\chi}(t,x_1,x_2) + R(\rho)u(t,x,y) \ \text{ sur } \ ]0,+\infty[\times\Omega \\ \mathring{\chi}(0,x_1,x_2) = \mathring{\chi}_0(x_1,x_2) \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \mathring{\chi}(t,x_1,x_2) = 0 \text{ sur } \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

- $\Delta_x^2 = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$;
- $\mathring{\chi}(t,x_1,x_2)$ représente le nombre de pucerons à l'instant t dans le repère (x_1,x_2).

Dans l'étude réalisée dans [CPDP13], les pucerons sont supposés évoluer dans une plaine (Ω) pouvant être délimitée par une chaîne de montagnes ($\partial\Omega$).
Sous cette condition que le terrain d'étude est limité par une chaîne de montagnes, les conditions de bord de type Dirichlet sont alors appropriées. Celles-ci impliquent que les pucerons ne peuvent pas sortir du domaine Ω.
Les signaux sont dépendants de la variable temporelle t ainsi que de deux coordonnées d'espace x_1 et x_2.
Les paramètres D, M et R représentent des comportements physiques :

- respectivement la dispersion des pucerons, leur taux de mortalité et leur taux de reproduction ;
- ces comportements physiques dépendent directement des fluctuations de l'environnement avoisinant représentés par ρ.

Les EDP LPV représentent finalement une classe d'EDP dont les comportements peuvent être linéaires et/ou non-linéaires. La structure de ces EDP ressemblant à celle des EDP linéaires simplifie les problèmes de modélisation tout en conservant la complexité du phénomène observé. Cependant, les systèmes EDP sont généralement construits à partir d'observations qui sont souvent corrompues par des bruits de mesures. Une sur-classe d'EDP recouvrant l'ensemble des classes précédemment présentées émerge enfin pour considérer l'influence des différentes perturbations.

1.2.3.5 Les EDP stochastiques

Une dernière classe d'EDP considérée dans ce document et associée aux classes vues ci-dessus est celle des EDP stochastiques. Ces systèmes sont une généralisation des EDP prenant en compte un terme de bruit aléatoire (voir par exemple [Øks03], [Wal86]). Ce terme de bruit peut être considéré soit comme le signal d'excitation u à l'entrée du système, soit comme un bruit additionnel sur les variables qui sont soumis à des effets environnementaux aléatoires. Néanmoins, les EDP stochastiques les plus répandues dans le domaine du traitement du signal sont celles où la sortie est corrompue par un bruit de mesure additif. Les résultats expérimentaux que l'on cherche à obtenir sont idéalement non bruités, cependant lorsque l'on réalise des mesures, on observe l'apparition de signaux parasites qui viennent se superposer au signal dit utile. Ces signaux parasites sont une gêne pour la compréhension de l'information que le signal utile transporte. On supposera donc, à cause des inexactitudes des mesures, que la mesure $\mathring{\chi}(t,x)$ n'est pas disponible mais seulement sa version perturbée :

$$y(t,x) = \mathring{\chi}(t,x) + v_{\mathrm{o}}(t,x) \tag{1.10}$$

où $y(t,x)$ représente la sortie bruitée observée et $v_{\mathrm{o}}(t,x)$ le bruit.

Le bruit est un objet mal-défini car il est non seulement très difficile d'en connaître l'origine, mais également de le caractériser et de le mesurer. Cependant, l'étude des bruits a permis d'en définir plusieurs modèles : continus, discrets, blancs, colorés ou autres.

Dans la théorie des systèmes, le bruit est majoritairement représenté par un bruit blanc discret. Par similitude avec la lumière blanche qui contient toutes les fréquences lumineuses avec la même intensité, le bruit blanc est un processus stochastique (aléatoire) dont la densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences. Bien que le bruit blanc soit un signal aléatoire, il a les propriétés statistiques suivantes :

- son espérance mathématique est nulle ;
- sa variance est non nulle ;
- toutes les mesures sont indépendantes les unes des autres.

Les bruits colorés sont aussi régulièrement utilisés car ils représentent un plus large ensemble de bruits susceptibles de corrompre les données mesurées. Ils sont généralement obtenus par transformation linéaire d'un bruit blanc.

Finalement, lorsque l'on traite des EDP, il est important de définir les conditions essentielles à l'existence de la solution (nature de l'entrée, conditions initiales et limites, influence du bruit, ...).

Une schématisation de ces conditions est donnée dans la Figure 1.3.

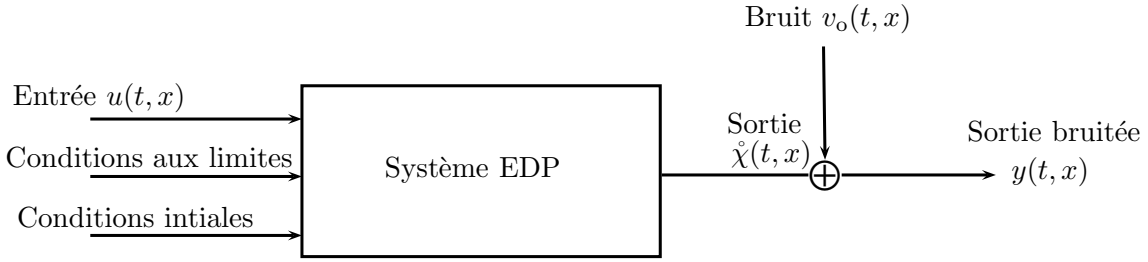

FIGURE 1.3 – Système générant les données

A partir de la Figure 1.3, on peut donc distinguer plusieurs problématiques. La détermination des conditions initiales connaissant le système et les données d'entrée/sortie, ou encore l'estimation du système connaissant l'entrée, les conditions de bord et la sortie... Tous ces problèmes sont appelés problèmes inverses ou plus communément, problèmes d'identification.

1.3 Identification paramètrique des EDP

Après une définition de la notion de problème inverse lié aux EDP, une description des différentes problématiques est établie. Enfin, une liste des différents modèles découlant d'une problématique émergente est proposée.

1.3.1 Les problèmes inverses

La dénomination "problème inverse" est un terme vaste regroupant de nombreuses problématiques. D'une façon simplifiée, un problème inverse consiste à déterminer les "causes" connaissant les "effets". Ce problème est en opposition avec les problèmes directs habituellement rencontrés qui consistent à rechercher les "effets" à partir des "causes".

Il existe quatre catégories de problèmes inverses :
- **Identification des données initiales :** ce problème consiste à déterminer ce qu'il se passe au temps initial $t = 0$ d'après des observations à l'instant t_k. Il joue un rôle important dans le traitement d'images et dans le domaine médical pour la restauration d'images floues [Thi05, HSB13].
- **Identification des sources :** l'objectif de ce problème est de récupérer un terme source à partir d'observations [Isa90, HM13]. On retrouve, par exemple, cette approche en sismologie pour l'identification du foyer lors de tremblements de terre.
- **Identification géométrique :** le but de l'identification géométrique est de délimiter la forme de l'objet sur lequel l'EDP est définie. Ce type de problème est bien connu dans le domaine de l'électromagnétisme et de la reconnaissance radar pour déterminer le relief d'un terrain à partir de l'onde radar réfléchie par la cible.
- **Identification des paramètres :** l'identification des paramètres sert à évaluer les coefficients de l'EDP à partir d'observations. Dans le cas de l'équation (1.7), le problème associé peut être formulé comme suit : à partir des connaissances sur la fonction $\mathring{\chi}(t, x)$ solution de (1.7), l'objectif est de déterminer la fonction de conductivité K.

Parmi toutes les problématiques exposées, le sujet d'étude présenté dans cette thèse se focalise sur l'identification des paramètres pour les systèmes régis par les EDP. Cette problématique est une cible grandissante car elle est primordiale pour l'élaboration de nouveaux systèmes et permet de mieux comprendre et simuler les phénomènes qui régissent notre quotidien.

1.3.2 Identification des systèmes

L'estimation paramétrique des systèmes est le champ de la modélisation des systèmes dynamiques à partir de données expérimentales. Contrairement à la modélisation mathématique et physique, l'identification des systèmes est une approche expérimentale où un modèle issu de connaissances *a priori* est construit à partir de données enregistrées. Ce modèle a donc pour objectif de représenter le mieux possible le comportement du système.

La procédure itérative est résumée sur la Figure 1.4 [Eyk74, Lju99].
Quatre étapes essentielles peuvent être distinguées :
- définition du protocole d'expérimentation (choix de l'entrée, de la période d'échantillonnage, du nombre de capteurs, ...) ;
- définition d'une structure de modèle dans laquelle il existe un modèle candidat qui approche suffisamment près la vraie nature du système ;
- estimation des paramètres du modèle ;
- validation du modèle obtenu.

Le travail présenté dans ce document se concentre plus précisément sur la partie centrale de la Figure 1.4. Après avoir choisi ou déterminé une structure de modèle et sélectionné un critère de minimisation, l'objectif de cette thèse est de développer de nouveaux estimateurs pour l'estimation des paramètres du modèle retenu. Ainsi, la prochaine section porte sur le choix du modèle d'estimation et du critère de minimisation ainsi que des problèmes rencontrés lors de leur établissement. Enfin, un aperçu des méthodes d'estimation développées est donné.

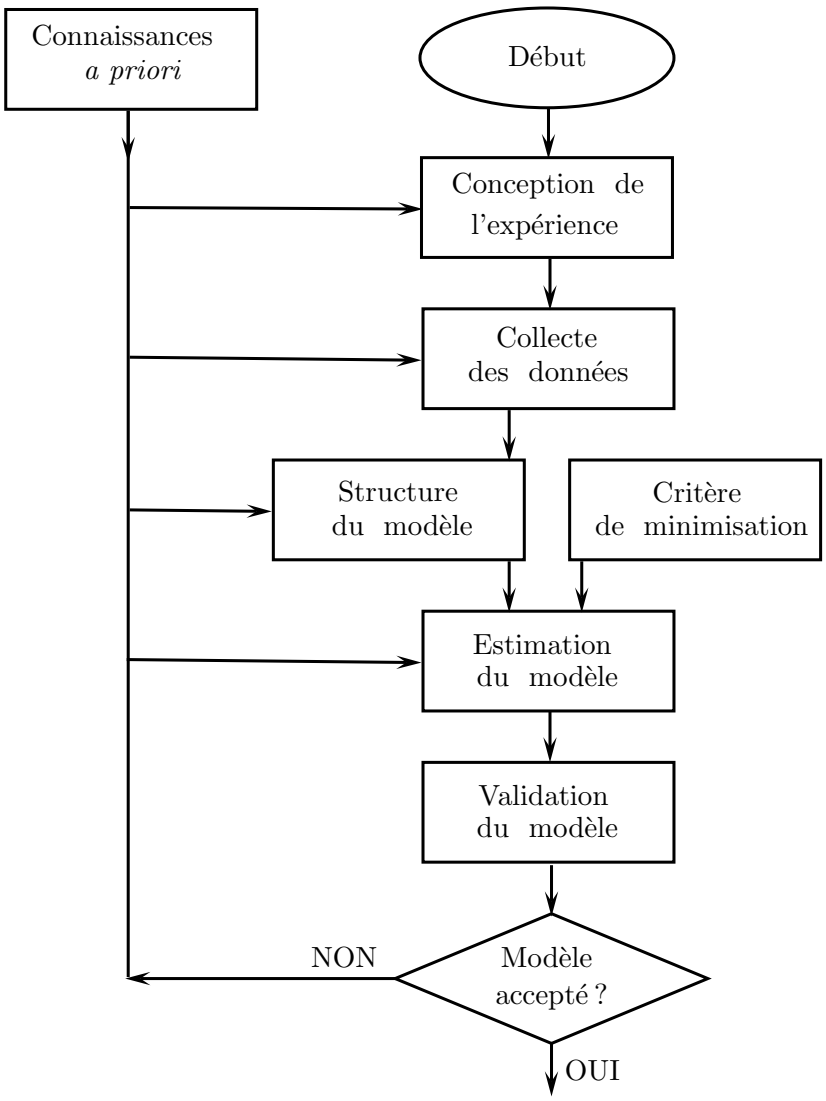

FIGURE 1.4 – Procédure itérative d'identification des systèmes

1.3.3 Modèles d'estimation

Il peut être vu dans la Figure 1.4 que la conception de méthodes d'estimation doit être en mesure de faire face à différents protocoles expérimentaux. En plus de la structure de modèle étudiée, le critère de minimisation et la méthode d'estimation associée doivent être choisis en accord avec l'objectif visé et les connaissances *a priori* disponibles. Une grande majorité des méthodes développées dans le passé est dédiée aux applications industrielles pour le contrôle. Toutefois, les systèmes dynamiques ne sont pas limités aux systèmes contrôlés ou surveillés et sont souvent un choix naturel pour la description des systèmes environnementaux par exemple.
Ces systèmes présentent quelques caractéristiques complexes comme :

- des comportements non-linéaires ;
- des mesures en nombre limité ;
- un échantillonnage des données à pas non constant.

Les modèles théoriques issus des lois physiques décrivent bien le comportement des systèmes à identifier, cependant ces modèles souffrent usuellement de problèmes d'identifiabilité [Per09]. De plus, l'identification des systèmes est un challenge en terme de choix, de structure de modèle et de méthode d'estimation.

Il existe trois grandes familles de modèles :
- les modèles de type *boîte blanche* sont obtenus à partir des équations différentielles. En plus de servir à des fins de simulation, elles permettent de mieux comprendre physiquement le comportement du système. Les paramètres ont alors une signification physique ;
- les modèles de comportement aussi appelés *boîte noire* ont pour but de reproduire le comportement du système. Les paramètres n'ont plus de signification physique, mais permettent la reconstruction des signaux ;
- les modèles de type *boîte grise* permettent quant à eux d'intégrer aux modèles de type boîte noire des connaissances *a priori* obtenues du système. Une construction des modèles mathématiques est alors possible en combinant la modélisation physique aux données expérimentales. Ainsi, on peut retrouver à la fois des paramètres physiques et des paramètres sans rôle explicatif.

Remarque

Dans les travaux proposés, le problème d'identifiabilité ne se posera pas. C'est un problème à part entière qui dépend du système utilisé. Deux approches sont souvent utilisées : une approche spectrale (voir par exemple [Nak93] et [GL55]) et une autre reposant sur les inégalités de Carleman (voir [Car39] pour l'étude des premières inégalités des EDP et [Kli92] pour l'identifiabilité). On assumera donc que tous les systèmes considérés sont identifiables, c'est-à-dire que le problème est bien posé au sens de Hadamard [Had23] : une solution unique au problème existe et cette solution dépend de façon continue des données dans le cadre d'une topologie raisonnable.

La description des phénomènes physiques se faisant en premier lieu par l'observation, il est donc possible de proposer la structure du modèle d'EDP, en particulier l'ordre des dérivées, pouvant correspondre au système dynamique concerné. Dans cette thèse on s'intéressera à l'estimation des paramètres des modèles de type boîte grise.

1.4 Minimisation de l'erreur de prédiction

Une fois la structure de modèle définie, un critère de minimisation doit être mis en place. Quand la structure du modèle est connue, la sortie prédite peut être calculée à partir de la dynamique du modèle EDP et par conséquent les paramètres du système sont estimés par minimisation de l'erreur entre les mesures et les prédictions, c'est la méthode de minimisation de l'erreur de prédiction [Lju99]. Cette section décrit brièvement l'idée principale de cette méthode pour les EDP linéaires et sera étendue plus tard aux modèles EDP-LPV.

Soit le système défini par

$$\mathcal{S}_{\mathrm{o}} \begin{cases} A_{\mathrm{o}}(\partial)\mathring{\chi}(t,x) = B_{\mathrm{o}}(\partial)u(t,x) \text{ sur }]0,+\infty[\times\Omega \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur } \Omega \\ y(t,x) = \mathring{\chi}(t,x) + v_{\mathrm{o}}(t,x) \end{cases} \tag{1.11}$$

– où $\partial = (\partial_t, \partial_x)$ et

$$\begin{cases} A_{\mathrm{o}}(\partial) = \displaystyle\sum_{i_x=0}^{n_x} \sum_{i_t=0}^{n_t} \mathring{a}_{i_x,i_t} \partial_x^{i_x} \partial_t^{i_t} & (1.12a) \\ B_{\mathrm{o}}(\partial) = \displaystyle\sum_{i_x=0}^{m_x} \sum_{i_t=0}^{m_t} \mathring{b}_{i_x,i_t} \partial_x^{i_x} \partial_t^{i_t}; & (1.12b) \end{cases}$$

– $\partial_t^{i_t} = \dfrac{\partial^{i_t}}{\partial t^{i_t}}$ est la i_t-ème dérivée partielle en temps ;
– $\partial_x^{i_x} = \dfrac{\partial^{i_x}}{\partial x^{i_x}}$ est la i_x-ème dérivée partielle en espace ;
– (n_x, n_t) sont les ordres du système ;
– $\mathring{a}_{i_x,i_t}$ et $\mathring{b}_{i_x,i_t}$ les paramètres vrais du système.

Dans le cadre de la minimisation de l'erreur de prédiction, le critère de minimisation est conditionné par le modèle définissant le bruit $v_{\mathrm{o}}(t,x)$. Les EDP étant par définition des objets mathématiques continus, il est logique, dans un premier temps, de considérer le bruit comme un élément continu multi-dimensionnel. Cependant, les méthodes classiques de filtrage utilisées pour blanchir le bruit ne sont pas adaptées pour l'estimation des EDP. Ainsi, de nouvelles formulations du bruit adaptées au cas de l'estimation d'EDP sont proposées.

1.4.1 Les modèles de bruit continu

Les modèles de bruit présentés ici sont des extensions de ceux couramment développés pour les systèmes régis par les EDO.

1.4.1.1 Modèle CARX

Un premier modèle est le modèle CARX (*Continuous Auto Regressive model with eXternal inputs*). Celui-ci est assez restrictif car le bruit est supposé suivre la même dynamique que le système $\mathcal{S}_{\mathrm{o}}$. Il est défini par

$$\mathcal{H} : A(\partial)v(t,x) = e(t,x), \tag{1.13}$$

où $e(t,x)$ est un bruit blanc continu bidimensionnel.

Le modèle associé au système (1.11) prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} A(\partial)\mathring{\chi}(t,x) = B(\partial)u(t,x) \text{ sur }]0,+\infty[\times\Omega \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur } \Omega \\ A(\partial)y(t,x) = B(\partial)u(t,x) + e(t,x). \end{cases} \tag{1.14}$$

En utilisant le modèle de bruit et le système (1.11), il est naturel d'écrire le système EDP-CARX sous la forme d'une régression linéaire :

$$y^{(n_t,n_x)}(t,x) = \varphi^{\mathrm{T}}(t,x)\theta + e(t,x) \tag{1.15}$$

– $y^{(i_t,i_x)}$ est la dérivée temporelle d'ordre i_t et dérivée spatiale d'ordre i_x ;
– θ est le vecteur composé des paramètres du processus ;
– $\varphi(t,x)$ est le vecteur contenant toutes les dérivées partielles des différents signaux :

$$\varphi^{\mathrm{T}}(t,x) = \left[-y(t,x)\cdots - y^{(n_t,n_x-1)}(t,x) \;\; - y^{(n_t-1,n_x)}(t,x) \quad u(t,x) \;\cdots\; u^{(m_t,m_x)}(t,x)\right]. \tag{1.16}$$

On peut noter que les dérivées contenues dans (1.16) ne sont pas connues *a priori*.

Par conséquent, dans ce cas, la minimisation de l'erreur de prédiction correspond à minimiser la norme L^2 de $e(t,x)$ soit à minimser

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left| y^{(n_t,n_x)}(t,x) - \varphi^{\mathrm{T}}(t,x)\alpha \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

Compte tenu de la paramétrisation précédente, ce problème peut être résolu par une approche traditionnelle des moindres carrés :

$$\hat{\theta} = \left[\int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \varphi(t,x)^{\top}\varphi(t,x)dtdx \right]^{-1} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \varphi(t,x)^{\top} y^{(n_t,n_x)}(t,x)dtdx. \tag{1.18}$$

Dans la situation où le système de bruit est représenté par un système CARX, les régressions linéaires peuvent être directement appliquées, évitant ainsi les problèmes d'estimation des filtres pour blanchir le bruit. Cependant ces modèles CARX ne constituent pas une bonne représentation des systèmes de bruit physiquement rencontrés.

1.4.1.2 Modèle COE

En pratique le cas le plus représentatif est assumé quand le bruit associé aux mesures de sortie $\mathring{\chi}(t,x)$ a une densité spectrale qui s'exprime sous la forme d'une fonction rationnelle sans relation avec la dynamique du processus de $\mathcal{S}_{\mathrm{o}}$. Une autre possibilité est donc de modéliser le bruit indépendamment du processus en utilisant une structure continue d'erreur de sortie (COE) (de l'anglais *Continuous Output-Error*).

$$\mathcal{H} : v(t,x) = e(t,x) \tag{1.19}$$

Avec cette hypothèse, le modèle EDP-COE peut être écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} A(\partial)\mathring{\chi}(t,x) = B(\partial)u(t,x) \text{ sur }]0,+\infty[\times\Omega \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur } \Omega \\ y(t,x) = \mathring{\chi}(t,x) + e(t,x) \end{cases} \tag{1.20}$$

et sous la forme de régression linéaire :

$$y^{(n_t,n_x)}(t,x) = \varphi(t,x)\theta + A(\partial)e(t,x). \tag{1.21}$$

Pour minimiser l'erreur de prédiction, on remarque que le filtre inverse de $A(\partial)$ est requis :

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left| y_f^{(n_t,n_x)}(t,x) - \varphi_f(t,x)\alpha \right|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.22}$$

où

$$y_f^{(n_t,n_x)}(t,x) = \frac{1}{A(\partial)} y^{(n_t,n_x)}(t,x) \quad \text{et} \quad \varphi_f(t,x) = \frac{1}{A(\partial)}\varphi(t,x). \tag{1.23}$$

Remarque :

- on peut noter qu'en plus de blanchir le bruit, comme pour le cas des EDO, le filtre $\frac{1}{A(\partial)}$ pourrait aussi être utilisé pour approcher les dérivées partielles qui ne sont généralement pas mesurables.

Cependant, les équations (1.23) sont écrites par abus d'écriture car l'existence de l'inverse de $A(\partial)$ n'est pas garantie dans le cas des EDP.
Lorsque l'on traite des EDO, avant de filtrer les données, il est impératif de passer dans le domaine fréquentiel en utilisant la transformée de Laplace. Les opérations de filtrage sont permises et se font alors par produit de convolution en passant par une fonction de transfert. Dans le cas des EDP, ce passage est plus compliqué puisqu'elles sont représentées par des systèmes à dimension infinie et que leurs fonctions de transfert associées, quand elles existent, sont le plus souvent irrationnelles.

1.4.2 EDP et fonction de transfert

Dans le domaine du traitement du signal, un filtre est un dispositif ou un procédé qui élimine à partir d'un signal certaines de ces composantes. La caractéristique déterminante des filtres est la suppression totale ou partielle de certains aspects du signal. Le plus souvent, cela signifie éliminer certaines fréquences, afin de supprimer les signaux parasites et réduire le bruit de fond. Appliqué au problème d'identification, le filtrage permet ainsi de supprimer le bruit additif sur les mesures de sortie.

Il existe plusieurs types de filtres :
- linéaire ou non linéaire ;
- variant temporellement ou non ;
- causal ou non causal ;
- discret ou continu...

Néanmoins, même si tous ces filtres font appel à des notions différentes, leur point commun est de pouvoir s'écrire sous la forme d'une fonction de transfert.

1.4.2.1 Fonction de transfert

La notion de fonction de transfert joue un rôle important dans la théorie des systèmes et de l'identification (voir par exemple [SP91] ou [Lju99]). En plus d'une écriture simplifiée des systèmes qui en lie l'entrée à la sortie, elle permet d'étudier le comportement fréquentiel du système considéré. Cette relation est appelée opérateur de convolution et son noyau est la réponse impulsionnelle du système. Par définition, on dit que la réponse impulsionnelle est la sortie obtenue lorsque l'entrée est une impulsion, c'est-à-dire une variation soudaine et brève du signal.

Dans le cadre des EDO linéaires, les systèmes peuvent toujours être écrits sous forme d'une fonction de transfert en utilisant la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{B(s)}{A(s)}\mathcal{L}\{u(t)\}(s), \tag{1.24}$$

où s est la variable de Laplace, et $A(s)$ et $B(s)$ sont des polynômes de la variable s.

Comme cette fonction de transfert est obtenue dans le domaine de Laplace, les dérivées d'ordre α peuvent être approchées par filtrage du signal en utilisant le produit de convolution des données avec la fonction de transfert inverse de Laplace

$$D_t^{\alpha} y_{\mathrm{f}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha}}{A(s)}\right\}(t) * y(t), \tag{1.25}$$

où $*$ est le symbole du produit de convolution.

Si l'on suit cette logique, dans le cas des EDP, le produit de convolution peut être exprimé comme

$$f(t,x) * g(t,x) = \mathcal{T}^{-1}\left\{\mathcal{T}(f(t,x)).\mathcal{T}(g(t,x))\right\}, \tag{1.26}$$

où f est le signal filtré et g est le filtre. $\mathcal{T}$ représente la transformée de Laplace ou de Fourier.

Il existe plusieurs manières d'écrire les EDP comme des fonctions de transfert. Un état de l'art décrivant les différents types de fonctions de transfert continues est proposé dans la suite de ce manuscrit. Cependant, ces fonctions de transfert ne sont pas adaptées au cas de l'identification des paramètres de l'EDP. Après exposition de la solution proposée, un exemple sera considéré afin de mieux comprendre l'approche.

1.4.2.2 Modèles à dimension infinie

Du fait de leur espace d'état de dimension infinie (voir par exemple [CZ91] ou [BK92]), il est compliqué d'écrire les systèmes EDP comme des fonctions de transfert entre le signal d'excitation et la sortie. Néanmoins, quelques approches ont été développées pour des cas particuliers.

Une première méthode développée dans [CM09] consiste à utiliser la transformée de Laplace par rapport à la variable temporelle t et de l'appliquer au système ainsi qu'à ses conditions de bord. Les EDP sont alors récrites sous la forme d'une fonction de transfert irrationnelle qui peut être développée comme une série de fonctions de dimension infinie. Il en résulte que les fonctions de transfert considérées dépendent alors des conditions de bord, ce qui rend l'analyse des systèmes EDP assez fastidieuse.
Par exemple, l'équation de la chaleur homogène associée à l'équation (1.7) donnée par

$$\partial_t \mathring{\chi} = K \partial_x^2 \mathring{\chi}, \qquad x \in (0, L), \qquad t > 0, \tag{1.27}$$

dont les conditions de bord sont définies par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{\chi}}{\partial x}(t,0) = 0 \\[2ex] K\dfrac{\partial \mathring{\chi}}{\partial x}(t,L) = u(t) \end{cases} \tag{1.28}$$

peut être récrite sous la forme d'une fonction de transfert (voir [CM09])

$$\mathcal{L}\{\mathring{\chi}(.\ ,\ x)\}(s) = \frac{\sqrt{K}\cosh(\frac{\sqrt{s}x}{\sqrt{K}})}{K\sqrt{s}\sinh(\frac{\sqrt{s}L}{\sqrt{K}})}\mathcal{L}\{u(.)\}(s). \tag{1.29}$$

On remarque que la fonction de transfert (1.29) est considérée comme une fonction de s avec x un paramètre indiquant la dépendance de la fonction de transfert au choix du point d'observation.

De plus, comme énoncé plus haut, on remarque que cette fonction a une infinité de pôles, soit une infinité de paramètres à identifier.

Une solution différente consiste à utiliser des modèles dits fractionnaires, voir par exemple [BBL00], [MVNO07] ou [MASO06]. Les modèles fractionnaires sont des systèmes qui font intervenir des dérivées d'ordre non entier. Ces méthodes sont bien connues, par exemple, pour reproduire et identifier le comportement transitoire thermique décrit par l'équation de la chaleur.

Une autre solution consiste enfin à utiliser la transformée de Fourier par rapport à la variable spatiale x et de résoudre l'EDO temporelle résultante. Cette méthode est utilisée lorsque le domaine d'espace est supposé non borné et permet d'obtenir une solution analytique de l'EDP. Un exemple simple est de reconsidérer l'équation de la chaleur homogène associée à l'équation (1.7)

$$\begin{cases} \partial_t \mathring{\chi}(t,x) - \partial_x^2 \mathring{\chi}(t,x) = 0 \\ \\ \mathring{\chi}(0,x) = u(x) \end{cases} \tag{1.30}$$

laquelle peut être facilement écrite sous forme de la fonction de transfert suivante :

$$\begin{cases} \mathring{\chi}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\{G(t,\xi)\}(t,x) * u(x) \\ \\ \mathcal{F}^{-1}\{G(t,\xi)\}(t,x) = \dfrac{1}{4\pi t} e^{-\frac{||x||^2}{4t}} \end{cases} \tag{1.31}$$

où ξ est la variable de Fourier.

Cependant, cette solution est très limitée car elle ne considère que des cas particuliers où les EDP sont simples à exprimer. Les différentes solutions apportées dans la littérature pour la construction des fonctions de transfert ne sont pas généralisables à l'ensemble des classes d'EDP.

Il est donc proposé dans la suite de ce document de contourner les approches élaborées pour la construction de fonctions de transfert continue et de développer une méthode qui puisse être adaptée à la plupart des situations.

1.4.2.3 Modèles à dimension finie

La majorité des EDP ne peut pas être formulée sous la forme d'une solution analytique ou d'une fonction de transfert, en particulier dans le cas des EDP-LPV. En conséquence, la plupart des méthodes d'identification des EDP se fondent sur un modèle d'identification à temps et espace discrets. La principale méthode utilisée pour résoudre ce problème consiste à passer du modèle à dimension infinie à celui de dimension finie par une discrétisation le long de l'axe spatial, conduisant à ce que l'on appelle *des systèmes à paramètres distribués*. Le terme de système distribué de l'anglais *distributed system*, provient du fait que $\mathring{\chi}(t)$ est un état distribué sur le domaine Ω.

Par exemple, une approche proposée dans [CB02] consiste à réduire les systèmes de dimension infinie décrits par les EDP à un modèle de dimension finie. L'entrée et les observations de sortie sont utilisées pour construire une approximation par éléments finis de la sortie non bruitée.
Cependant, la discrétisation de tels modèles a de fortes conséquences sur leur complexité et les paramètres du modèle à identifier deviennent dépendants de la période d'échantillonnage. De plus, et spécialement dans le cas LPV, l'obtention d'un modèle discrétisé conduit à une augmentation importante du nombre de paramètres, il devient alors compliqué de trouver la forme du modèle

continu sans perdre la paramétrisation parcimonieuse [LTGG11].

L'idée développée dans ce mémoire, est de récrire le modèle sous une forme discrète tout en gardant la structure continue du système. Or, le système est en partie défini par l'opérateur différentiel ∂.

Ainsi, le premier problème à résoudre pour traiter le cas des EDP continues réside dans la définition de cet opérateur ∂ ou plus précisément dans l'absence de définition de l'inverse de cet opérateur continu.

Par conséquent, afin de définir un opérateur inverse $1/\partial$ et pour conserver une paramétrisation parcimonieuse du modèle continu, il est proposé ici d'utiliser la nature échantillonnée des données mesurées pour approcher l'opérateur continu ∂ aux points échantillonnés par convolution discrète d'un nouvel opérateur $\eth = (\eth_t, \eth_x)$:

$$\begin{cases} \partial_t = \eth_t + \mathcal{O}(T_e) \\ \\ \partial_x = \eth_x + \mathcal{O}(h) \end{cases} \tag{1.32}$$

où T_e et h sont les périodes d'échantillonnage en temps et en espace, et $\mathcal{O}(.)$ est l'erreur de troncature.

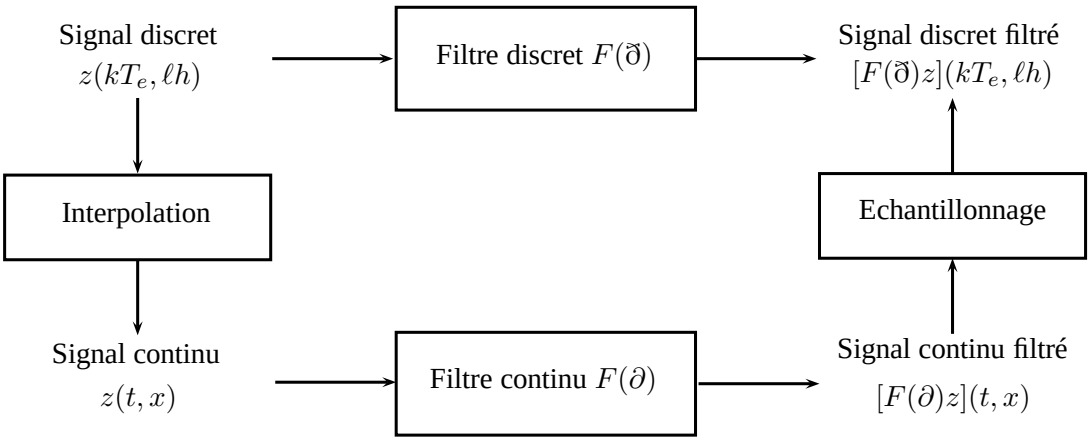

FIGURE 1.5 – Filtrage des données

La discrétisation des opérateurs différentiels permet de légitimer l'existence des filtres continus $F(\partial)$ en les transformant en des filtres discrets $F(\eth)$ sans pour autant perdre leur signification d'origine (voir figure 1.5). L'avantage de la discrétisation directe des opérateurs différentiels réside dans le fait que l'approximation des filtrages continus est directement exprimée par une convolution discrète et donc que les filtrages inverses sont transformés en un problème 2D de déconvolution classique, bien référencé dans la littérature de traitement d'image. De plus, les produits de convolution discrète satisfont les propriétés algébriques comme la commutativité, l'associativité et la distributivité, ainsi que l'inversibilité des filtres.

L'approche considérée peut être vue comme une extension des méthodes développées dans le cas des EDO (voir [SFCB97] et [GWY08]).

Néanmoins, il doit être noté que l'identification paramétrique peut être sensible à l'erreur de troncature quand celle-ci est significative. Pour le cas des EDO, une analyse est présentée dans [SFCB97] afin d'étudier les effets de l'approximation des dérivées sur le biais et la variance des paramètres estimés. Il est connu qu'une mauvaise approximation des dérivées peut causer une amplification du bruit et affecter l'estimation des paramètres.
Quelques méthodes ont été développées pour faire face à ce problème - [MBR05], [SFCB97] et leurs références.

Le passage en discret permet d'être en adéquation avec la nature des données échantillonnées qui sont disponibles. Aussi avec ces nouvelles considérations, il est justifié de supposer une structure de bruit discrète en temps et en espace.

Pour conclure, le filtre continu $\frac{1}{A_{\mathrm{o}}(\partial)}$ défini dans (1.23) peut être approché par son équivalent discret $\frac{1}{A(\delta)}$. Il est maintenant possible de se rattacher à la théorie de l'identification des systèmes [Lju99] et d'écrire le filtrage des données comme un produit de convolution. Il est important de noter que la structure du modèle définie dans (1.21) reste inchangée [CVJ99]. Les paramètres à identifier restent les paramètres du système continu.

Un exemple détaillé fondé sur l'équation de la chaleur est proposé dans la partie A.2 de l'annexe A.

1.4.3 Systèmes hybrides

Considérons alors le nouveau système hybride (processus modélisé en continu et bruit modélisé en discret) de génération de données :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{o}} \begin{cases} A_{\mathrm{o}}(\partial)\mathring{\chi}(t,x) = B_{\mathrm{o}}(\partial)u(t,x) \text{ sur }]0,+\infty[\times\Omega \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_{\mathrm{o}}(x) \text{ sur } \Omega \\ y(t_k,x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k,x_\ell) + v_{\mathrm{o}}(t_k,x_\ell) \end{cases} \tag{1.33}$$

où v_{o} est à présent un bruit discret en temps et en espace au point d'espace x_ℓ et au temps t_k.

A partir de cette description discrète du bruit, un critère de minimisation est proposé prenant en considération les filtrages discrets exposés précédemment.

1.4.3.1 Modèle de type Box-Jenkins hybride

Dans le cas d'un modèle de type Box-Jenkins (BJ) [BJ70] v est représenté par un modèle ARMA (*autoregressive moving average*) bidimensionnel.

$$\begin{cases} H(q_t,q_x) = \dfrac{C(q_t^{-1},q_x^{-1})}{D(q_t^{-1},q_x^{-1})} \\ v(t_k,x_\ell) = H(q_t,q_x)e(t_k,x_\ell), \end{cases} \tag{1.34}$$

- $e(t_k,x_\ell)$ est un bruit blanc discret ;
- q_t^{-1} et q_x^{-1} sont respectivement les opérateurs de retard temporel et décalage spatial, *i.e.* $q_t^{-i_t}q_x^{-j_x}u(t_k,x_\ell) = u(t_{k-i_t},x_{\ell-j_x})$;

– C et D sont des polynômes à deux variables unitaires avec des coefficients constants :

$$\begin{cases} C(q_t^{-1}, q_x^{-1}) = 1 + \sum_{j_t=1}^{c_t} \sum_{j_x=1}^{c_x} c_{j_t,j_x}\ q_t^{-j_t} q_x^{-j_x} \\ D(q_t^{-1}, q_x^{-1}) = 1 + \sum_{j_t=1}^{d_t} \sum_{j_x=1}^{d_x} dj_t, j_x\ q_t^{-j_t} q_x^{-j_x}. \end{cases} \tag{1.35}$$

Cependant, les capteurs n'étant pas censés interférer les uns avec les autres, la corrélation spatiale n'est alors pas justifiée. Enfin, seulement un bruit corrélé temporel est supposé dans le présent document, le modèle ARMA peut alors être récrit pour chaque point d'observation comme suit

$$\begin{cases} H(q_t) = \dfrac{C(q_t^{-1})}{D(q_t^{-1})} \\ v(t_k, x_\ell) = H(q_t) e(t_k, x_\ell), \end{cases} \tag{1.36}$$

où C et D sont maintenant des polynômes moniques à une dimension.

1.4.3.2 Modèle BJ complet

Finalement, le modèle associé au système (1.33) peut être donné par

$$\tilde{\mathcal{M}} \begin{cases} A(\eth, \theta)\chi(t_k, x_\ell) = B(\eth, \theta) u(t_k, x_\ell) \text{ sur }]0, +\infty] \times \Omega \\ \chi(0, x_\ell) = \chi_{\mathrm{o}}(x_\ell) \text{ sur } \Omega \\ v(t_k, x_\ell) = H(q_t, \eta) e(t_k, x_\ell) \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + v(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{1.37}$$

où η est le vecteur paramètre contenant les coefficients c_{j_t} et les d_{j_t}.

Il est important de noter que les structures déterministes du modèle discret (1.37) et du système continu (1.33) sont les mêmes.

Si le système étudié appartient à l'ensemble des modèles définies ($\mathcal{S}_{\mathrm{o}} \in \tilde{\mathcal{M}}$) et donc s'il existe un $\Theta_{\mathrm{o}} = colonne(\theta_{\mathrm{o}}, \eta_{\mathrm{o}})$ tel que $y_{\Theta_{\mathrm{o}}}(t_k, x_\ell) = y(t_k, x_\ell)$ et si $A(\eth, \theta)$ et $B(\eth, \theta)$ sont des polynômes de $\eth$ d'ordre (n_t, n_x) et (m_t, m_x) respectivement, alors le modèle correspondant au système peut être écrit sous la forme de régression linéaire suivante :

$$y^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) = \varphi^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell)\theta_{\mathrm{o}} + \tilde{v}(t_k, x_\ell), \tag{1.38}$$

où θ_{o} est le vecteur constitué des paramètres vrais.

Le régresseur φ est donné par

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) = \ & \Big[-y(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(n_t, n_x - 1)}(t_k, x_\ell)\ - y^{(n_t - 1, n_x)}(t_k, x_\ell) \\ & u(t_k, x_\ell)\ \cdots\ u^{(m_t, m_x)}(t_k, x_\ell)\Big] \end{aligned} \tag{1.39}$$

et le terme de bruit $\tilde{v}(t_k, x_\ell)$ par

$$\tilde{v}(t_k, x_\ell) = A(\eth, \theta_{\mathrm{o}}) H(q_t, \eta_{\mathrm{o}}) e(t_k, x_\ell). \tag{1.40}$$

1.4.3.3 Méthode PEM

Suivant l'approche conventionnelle de la minimisation de l'erreur de prédiction (PEM), l'erreur de prédiction $\epsilon_\Theta(t_k, x_\ell)$ de (1.38) associée au modèle (1.37) est donnée par

$$\epsilon_\Theta(t_k, x_\ell) = H^{-1}(q_t, \eta_\mathrm{o}) A^{-1}(\eth, \theta_\mathrm{o}) \left(A(\eth, \theta_\mathrm{o}) y^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) - B(\eth, \theta_\mathrm{o}) u(t_k, x_\ell) \right). \tag{1.41}$$

Les filtres discrets inverses de $H(q_t, \eta_\mathrm{o})$ et $A(\eth, \theta_\mathrm{o})$ existent et commutent.

$\epsilon_\Theta(t_k, x_\ell)$ est équivalent à l'erreur de fonction $\epsilon(t_k, x_\ell)$ suivante

$$\epsilon(t_k, x_\ell) = A(\eth, \theta_\mathrm{o}) y_\mathrm{f}^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) - B(\eth, \theta_\mathrm{o}) u_\mathrm{f}(t_k, x_\ell) \tag{1.42}$$

où

$$y_\mathrm{f}^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) = \frac{1}{A(\eth, \theta_\mathrm{o}) H(q_t, \eta_\mathrm{o})} y^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell), \tag{1.43}$$

et

$$u_\mathrm{f}(t_k, x_\ell) = \frac{1}{A(\eth, \theta_\mathrm{o}) H(q_t, \eta_\mathrm{o})} u(t_k, x_\ell). \tag{1.44}$$

Ainsi, l'équation (1.38) devient

$$y_\mathrm{f}^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) = \varphi_\mathrm{f}^\mathrm{T}(t_k, x_\ell) \theta_\mathrm{o} + \tilde{v}_\mathrm{f}(t_k, x_\ell), \tag{1.45}$$

avec

$$\tilde{v}_\mathrm{f}(t_k, x_\ell) = e(t_k, x_\ell). \tag{1.46}$$

Il peut être noté dans (1.46) que filtrer les données par $A^{-1}(\eth, \theta_\mathrm{o})$ et $H^{-1}(q_t, \eta_\mathrm{o})$ revient à transformer le modèle BJ défini dans (1.37) en un modèle ARX pour le récrire sous forme de régression linéaire.

Par conséquent, en supposant momentanément que les filtres $A(\eth, \theta_\mathrm{o})$ et $H(q_t, \eta_\mathrm{o})$ sont *a priori* connus, une estimation des paramètres peut être obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés (LS-EDP) de l'anglais *least-squares* :

$$\hat{\theta}_{\mathrm{LS-EDP}} = \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \varphi_\mathrm{f}(t_k, x_\ell) \varphi_\mathrm{f}^\mathrm{T}(t_k, x_\ell) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \varphi_\mathrm{f}(t_k, x_\ell) y_\mathrm{f}^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) \right], \tag{1.47}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_\mathrm{f}^\mathrm{T}(t_k, x_\ell) = \; & \Big[-y_\mathrm{f}(t_k, x_\ell) \cdots - y_\mathrm{f}^{(n_t, n_x - 1)}(t_k, x_\ell) \; - y_\mathrm{f}^{(n_t - 1, n_x)}(t_k, x_\ell) \\ & \qquad u_\mathrm{f}(t_k, x_\ell) \; \cdots \; u_\mathrm{f}^{(m_t, m_x)}(t_k, x_\ell) \Big]. \end{aligned} \tag{1.48}$$

La méthode des moindres carrés est connue pour délivrer des estimées optimales (non biaisées et à variance minimale) dans le cas $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ uniquement. Dans la pratique, il est envisageable de supposer que le processus appartient à l'ensemble des modèles définis. Cependant, en ce qui concerne le bruit, ceci est rarement le cas. Dans ces conditions, le blanchiment de l'erreur de prédiction par filtrage des données est approché. Il est aussi bien connu que dans ce cas, les estimées obtenues par la méthode des moindres carrés sont biaisées, même si la variance des estimations reste généralement faible. Par conséquent, il est important d'utiliser une méthode d'estimation susceptible de conduire à des estimées fiables même dans le cas où le modèle de bruit n'est pas correctement défini. Parmi les approches d'identification disponibles, les méthodes de variables instrumentales de l'anglais *instrumental variable* (IV) ont beaucoup attiré l'attention

par le passé (voir par exemple [Dur54, You66, May67, You76, YJ80, SS83, You11, WG12] et les références associées). Elles fournissent des estimées convergentes même si, comme dans de nombreuses applications pratiques, le bruit sur les données n'est pas conforme aux hypothèses standards. Les méthodes de IV élémentaires peuvent être vues comme des extensions de la méthode des moindres carrés. Elles consistent en l'introduction d'un nouveau vecteur régresseur ζ, lequel doit être corrélé avec la sortie non bruitée $\mathring{\chi}$ et l'entrée et non corrélé avec le bruit v_{o}.

1.5 Les méthodes de variable instrumentale

Après une définition des méthodes fondées sur la variable instrumentale, les conditions de convergence sont énoncées.

1.5.1 Variable instrumentale élémentaire

Les paramètres du modèle (1.37) peuvent être estimés en utilisant un estimateur fondé sur une méthode de variable instrumentale élémentaire [SS83] :

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IV}} = sol\left\{\frac{1}{NL}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L}\zeta(t_k,x_\ell)\left[y^{(n_t,n_x)}(t_k,x_\ell)-\varphi^{\mathrm{T}}(t_k,x_\ell)\theta\right]=0\right\}, \tag{1.49}$$

où N et L sont respectivement les nombres de données en temps et en espace et $\zeta(t_k,x_\ell)$ est l'instrument.

Il existe une très grande liberté dans le choix des instruments. Par exemple, l'instrument peut être construit essentiellement à partir des données d'entrée. Dans ce cas il n'est donc pas corrélé avec le bruit mais avec les données. Il est à noter que le choix de $\zeta(t_k,x_\ell)=\varphi(t_k,x_\ell)$ correspond à la solution des moindres carrés et que le choix de l'instrument joue un rôle important dans la variance des estimées. Cependant, l'instrument ne peut pas être choisi de façon aléatoire si l'on veut une convergence de la méthode.

1.5.2 Conditions de convergence

En insérant (1.37) dans (1.49), l'équation suivante est obtenue

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IV}} = \theta + \left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L}\zeta(t_k,x_\ell)\varphi^{\mathrm{T}}(t_k,x_\ell)\right]^{-1}\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L}\zeta(t_k,x_\ell)\tilde{v}(t_k,x_\ell)\right], \tag{1.50}$$

où φ^{T} et $\tilde{v}(t_k,x_\ell)$ sont respectivement donnés par (1.39) et (1.40).

Il peut être déduit de (1.50) que $\hat{\theta}_{\mathrm{IV}}$ est une estimée convergente et non biaisée de θ si :

$$\begin{cases} E[\zeta(x_\ell,t_k)\varphi^{\mathrm{T}}(x_\ell,t_k)] \text{ n'est pas singulier} & \text{(1.51a)} \\ E[\zeta(x_\ell,t_k)\tilde{v}(x_\ell,t_k)]=0, & \text{(1.51b)} \end{cases}$$

où $E[.]$ représente l'espérance mathématique.

1.6 Problématique et organisation

En résumé, une définition des systèmes dynamiques décrits par les équations aux dérivées partielles a été établie dans ce chapitre, une vision d'ensemble des différentes problématiques liées à ces équations a ensuite été proposée.
Avec les avancées technologiques dans le développement des capteurs et les nouvelles problématiques liées à l'environnement, la recherche de modèles d'équations aux dérivées partielles devient envisageable. L'identification des paramètres associés à ces équations étant un sujet en expansion, l'objectif de cette thèse est de développer de nouveaux estimateurs pour répondre efficacement à ce problème.
Cependant, les observations acquises lors d'expériences sont souvent bruitées, il est donc obligatoire de considérer les équations comme des équations stochastiques. Cette classe d'équation permet de prendre en compte le bruit additif sur la sortie mesurée.
Le bruit étant un objet difficile à définir, il est nécessaire d'émettre des hypothèses à son sujet pour le caractériser. Après une discussion sur les différentes structures de bruit, il a été choisi de ne considérer que des bruits discrets.
Ainsi, en plus de rester en adéquation avec les mesures qui sont généralement échantillonnées, les filtrages sont légitimés. En effet, les filtrages impliqués pour blanchir le bruit et approcher les dérivées (qui sont rarement mesurées) peuvent être écrits en tant que produit de convolution discret sous une forme de fonction de transfert.
Enfin, une méthode fondée sur la minimisation de l'erreur de prédiction est proposée pour estimer les paramètres.

Dans cette thèse, on s'appuiera sur les travaux développés dans le champ de l'estimation paramétrique des équations différentielles ordinaires pour développer ceux portant sur l'identification des équations aux dérivées partielles. Les méthodes utilisées sont fondées sur les méthodes de variable instrumentale bien connues dans la communauté automaticienne. De plus, ces méthodes ont été très peu exploitées par le passé pour l'estimation paramétrique des équations aux dérivées partielles.
Les méthodes de variable instrumentale présentent plusieurs intérêts. Elles permettent de fournir des estimations convergentes de systèmes complexes tout en se fondant sur des relations linéaires simples, et ce quel que soit le modèle de bruit considéré.
Cette thèse propose donc d'étendre à l'estimation des équations aux dérivées partielles les connaissances déjà acquises dans l'estimation des équations différentielles ordinaires par les méthodes de variable instrumentale. Dans cette optique on s'attachera à considérer deux structures de modèles, chacun faisant l'objet d'un chapitre : les modèles d'équations aux dérivées partielles linéaires homogènes et non homogènes dans un premier temps, puis les modèles d'équations aux dérivées partielles linéaires à paramètres variants dans un second temps.

En conséquence, le chapitre 2 se divisera en deux parties, se concentrant tout d'abord sur l'estimation paramétrique des équations aux dérivées partielles linéaires non homogènes pour ensuite s'intéresser aux équations aux dérivées partielles linéaires homogènes lorsque le pas de discrètisation est variable. Les estimations se feront en continu en utilisant des méthodes d'estimation directe fondées sur la variable instrumentale. Ce chapitre donnera donc un premier aperçu de l'efficacité des méthodes proposées pour l'identification des équations aux dérivées partielles. Une analyse des résultats obtenus par simulation de Monte Carlo sera présentée pour illustrer la supériorité de la méthode par rapport aux méthodes disponibles dans la littérature.

Le chapitre 3 portera sur l'identification des modèles linéaires à paramètres variants. Une identification directe des systèmes des équations aux dérivées partielles linéaires à paramètres variants continus dans le cadre de signaux d'entrée-sortie lorsque les mesures de sortie sont entachées de bruit sera premièrement investie. Le modèle linéaire à paramètres variants décrit sera d'abord récrit comme un système linéaire invariant à plusieurs entrées et une seule sortie. Puis, plusieurs méthodes d'estimation seront analysées : la méthode des moindres carrés itérative et la méthode de la variable instrumentale raffinée. Pour conclure, les performances des méthodes seront illustrées via un exemple de simulation représentatif fondé sur des mesures de débit de rivière.

Enfin un chapitre de conclusion viendra clore ce mémoire et résumer les principales contributions auxquels on est parvenu. Le sujet étant nouveau, plusieurs questions restent encore ouvertes. Des perspectives seront alors développées.

1.7 Liste des travaux

Afin d'avoir une présentation cohérente, il a été choisi de ne pas séparer les contributions de la thèse des parties plus bibliographiques. Elles sont donc disséminées au fil du document. Les travaux effectués lors de la thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

1.7.1 Travaux publiés

Revues internationales

J. Schorsch, H. Garnier, M. Gilson, and P. C. Young (2013).
Instrumental variable methods for identifying partial differential equation models,
International Journal of Control, in press,
DOI : 10.1080/00207179.2013.813690.

Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

J. Schorsch, H. Garnier, and M. Gilson (2012).
Instrumental variable methods for identifying partial differential equation models of distributed parameter systems,
IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2012), Brussels (Belgium), 840–845.

J. Schorsch, M. Gilson, H. Garnier (2013).
Identification of advection-diffusion equation from a limited number of spatial locations,
11th *IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP 2013)*, Caen (France).

J. Schorsch, M. Gilson, V. Laurain and H. Garnier (2013).
Identification of LPV partial differential equation models,
52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2013), accepted, Florence (Italy).

Congrès internationaux sans actes

J. Schorsch, M. Gilson, and H. Garnier (2013).
An IV-based identification method for LPV partial differential equations,
Workshop of the European Research Network on System Identification (ERNSI 2013),
Nancy (France).

1.7.2 Travaux en cours de soumission

Revues internationales

J. Schorsch, V. Laurain , M. Gilson and H. Garnier (2013).
Parameter estimation of LPV partial differential equation models,
Automatica, submitted.

Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

J. Schorsch, V. Laurain , M. Gilson and H. Garnier (2014).
Refined IV-based method for LPV partial differential equation model identification
13th European Control Conference (ECC 2014), submitted, Strasbourg (France).

Chapitre 2

Identification des EDP linéaires

Ce chapitre propose de développer plusieurs méthodes d'estimation paramétrique pour l'identification des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires. Deux types de systèmes sont proposés, les systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles non homogènes sont considérés dans une première partie, puis les systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles homogènes sont étudiés dans une deuxième partie.

2.1 Identification des EDP non homogènes

On s'intéresse tout d'abord à l'identification des équations aux dérivées partielles non homogènes. Après un bref tour d'horizon des différentes méthodes existantes, plusieurs méthodes fondées sur la variable instrumentale sont proposées, développées et comparées à l'aide d'un exemple illustratif.

2.1.1 Introduction et méthodes d'estimation

Plusieurs méthodes pour l'estimation paramétrique des modèles EDP à partir de données d'entrée/sortie échantillonnées en temps et en espace ont déjà été développées par le passé. Elles se divisent en deux principales catégories (cf Figure 2.1), chacune traitant le problème sous différentes conditions [Kub77] :

- les méthodes indirectes consistent en général à discrétiser en temps et/ou en espace l'EDP, puis à appliquer les méthodes d'estimation connues pour les EDO. Elles peuvent être elles-mêmes divisées en deux sous-catégories :
  - la réduction de l'EDP en plusieurs EDO continues ou discrètes en temps, les paramètres des EDO sont alors estimés,
  - la transformation de l'EDP continue en une EDP discrétisée, on estime les paramètres de la discrétisation ;

- les méthodes directes consistent à estimer directement les paramètres de l'EDP continue. En plus de limiter le nombre de paramètres à estimer, ces méthodes permettent de garder la signification physique de ces derniers.

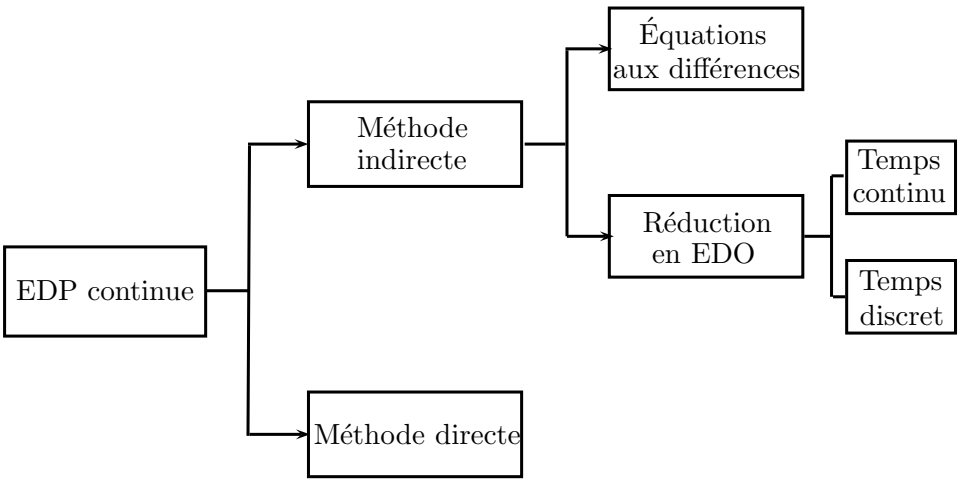

FIGURE 2.1 – Classification des procédures d'identification pour les EDP linéaires

Une description plus approfondie de ces deux approches est proposée dans les deux sous-parties suivantes.

2.1.1.1 Les méthodes indirectes

Les méthodes indirectes ont été les plus développées dans la communauté automaticienne.

Les principales méthodes proposent de transformer le modèle continu régi par l'EDP en un système discrétisé [AACW11, AAAW11, ACW10a, ACW10b]. L'identification porte alors sur les paramètres de l'EDP discrétisée qui dépendent des périodes d'échantillonnage.

D'autres méthodes consistent à écrire pour chaque point de l'espace un nouveau modèle d'EDO discrétisée ou continue, dépendant uniquement de la variable temporelle. L'EDP est alors décomposée en plusieurs EDO dont le nombre est équivalent au nombre de points spatiaux disponibles. Les paramètres de ces modèles EDO peuvent alors être reliés entre eux pour former un modèle EDO-LPV [BDG05], [PQE$^+$05]. Ces méthodes peuvent être très lourdes à implémenter car elles dépendent directement du nombre de points spatiaux et de l'ordre des EDO à identifier, impliquant donc un nombre important de paramètres à estimer.

Habituellement, ces méthodes sont adaptées à la nature des données qui sont généralement acquises de manière échantillonnée. De plus, elles permettent d'obtenir une bonne reconstruction des signaux de sortie [CB02]. Malheureusement, le modèle d'approximation étant souvent complexe, il est difficile de revenir à l'EDP continue et de retrouver les paramètres d'origine qui ont une signification physique. Une autre solution pour estimer les paramètres est donc d'utiliser une méthode dite directe.

2.1.1.2 Les méthodes directes

Dans beaucoup de domaines d'application, l'identification des modèles continus présente un certain nombres d'avantage pour l'identification des modèles discrets (voir par exemple [VM12], [GY12] et [GY13]). Contrairement aux méthodes indirectes qui sont caractérisées par au moins deux étapes (approximation et identification), les méthodes directes ne se déroulent qu'en une seule étape et ne s'intéressent qu'à l'identification. Néanmoins, l'une des principales contraintes de l'approche directe est l'absence de mesure des dérivées partielles.
Dans un contexte non bruité, les dérivées peuvent être évaluées par des méthodes numériques usuelles. Cependant, les signaux mesurés sont corrompus par des phénomènes difficilement mesurables comme le bruit. Calculer directement les dérivées partielles à partir des signaux obtenus des mesures n'est donc pas une solution appropriée. Une étape des plus importantes est alors d'approcher ces dérivées par des transformations linéaires. Dans le cas des méthodes directes, il faut noter que les techniques d'estimation paramétrique sont généralement appliquées à la suite d'approximations numériques, et ce pour amortir l'influence du bruit lors de l'approximation des dérivées. Dans ce sens, la majorité de ces techniques se place dans des espaces de dimension finie où une analyse des espaces à dimension infinie n'est donc *a priori* pas nécessaire. Parmi ces méthodes, on retrouve celles usuellement utilisées pour l'identification des EDO.

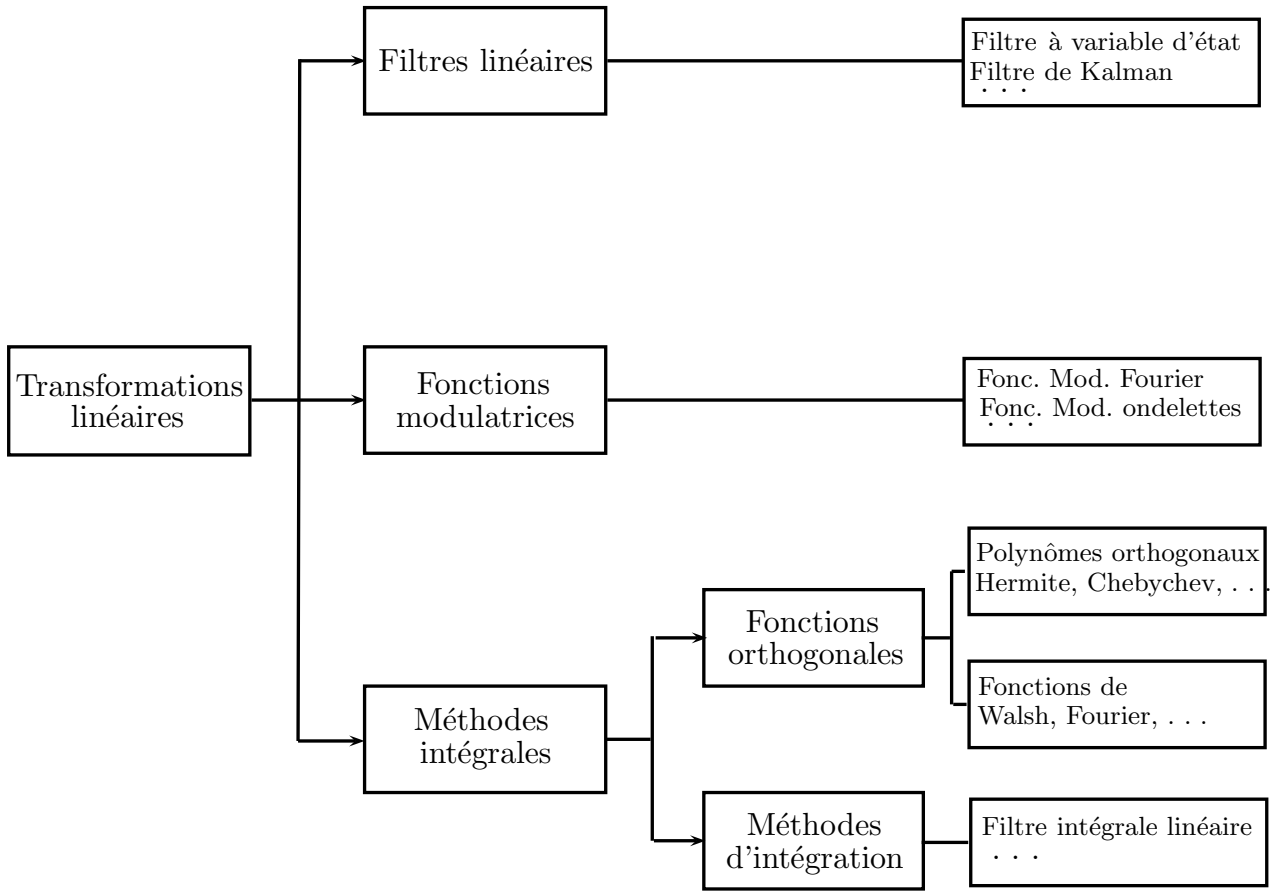

FIGURE 2.2 – Classification des transformations linéaires

Les transformations linéaires peuvent être catégorisées en trois classes (Figure 2.2) qui sont :

- les filtres linéaires : ces méthodes se fondent sur l'usage de filtres linéaires passe-bas, comme par exemple les filtres à variable d'état SVF (de l'anglais *State Variable Filter*), voir par exemple [SYW91], [SGG12] ou [SGGY13]. Ces filtres sont généralement du même ordre que les équations différentielles considérées. On retrouve également les filtres de Kalman [BN73] ;

- les fonctions de modulation : des fonctions particulières sont utilisées pour simplifier le calcul des intégrales des signaux. Les fonctions les plus couramment utilisées sont les ondelettes [GB08], [SSK08b], les fonctions modulatrices de Fourier [SSK08a], les splines, ... ;

- les méthodes intégrales : ces méthodes se divisent en plusieurs sous-classes :
  - les méthodes d'intégration numérique : ces méthodes consistent à approcher les dérivées par des méthodes classiques d'intégration, comme la méthode des rectangles, Simpson, Adams [GB06], ...
  - les fonctions orthogonales : le signal est décomposé en espace et en temps sur une base de fonctions orthogonales facilitant ainsi le calcul d'intégration (voir par exemple [LQ10, Liu05] et leurs références). Certains polynômes utilisés sont les polynômes de Chebytchev [CCR13] ou bien encore les polynômes de Walsh [Tza78]. D'autres méthodes plus difficiles à classer sont les méthodes LIF de l'anglais *Linear Integral Filter*, voir par exemple [SZW90] et [SZ90].

Les filtres développés dans cette thèse se situent dans la classe des filtres linéaires. Cette classe est bien adaptée pour l'identification des systèmes fondée sur la minimisation de l'erreur de prédiction car elle permet de transformer les systèmes modélisés par une structure *équation différentielle* en une structure du type *équation algébrique*. Lorsque le filtre concerné est bien choisi, il a plusieurs utilités : approximation des dérivées, blanchiment du bruit, ... Conjointement, des techniques d'estimation sont élaborées dans ce chapitre. Elles sont fondées sur les techniques de IV, connues pour donner des estimées convergentes quelle que soit la structure de bruit.

2.1.1.3 Estimateur de la variable instrumentale

Parmi les estimateurs de variable instrumentale disponibles, on retrouve la méthode SRIVC de l'anglais *Simplified Refined Instrumental Variable for Continuous-time systems* [YJ80, YGG08, You11]. Cette méthode a l'avantage de produire des estimées non biaisées et à variance minimale dans le cadre de l'estimation paramétrique des EDO à temps continu, en présence de bruit de mesure sur la sortie et robuste pour les applications pratiques ([GY12], [GY13]).

Le principal objectif dans ce chapitre est de développer une méthode SRIVC-EDP analogue pour l'identification des modèles EDP continus à partir de données spatio-temporelles échantillonnées.

2.1.1.4 Organisation

Pour ce faire, la première partie de ce chapitre est organisée comme suit. Dans un premier temps, la section (2.1.2) formule le problème d'estimation. Puis, la section (2.1.3) décrit l'approche de la méthode des moindres carrés où les techniques fondées sur les filtres à variable d'état sont utilisées pour traiter le manque de mesure des dérivées partielles. Après quoi, dans la section (2.1.4), deux estimateurs fondés sur la variable instrumentale élémentaire sont proposés. Enfin, l'algorithme principal SRIVC-EDP est développé dans le section (2.1.5). Un exemple de simulation numérique est ensuite décrit dans la section (2.1.6) afin d'illustrer l'efficacité de la méthode SRIV-EDP par comparaison à d'autres méthodes. Enfin, la section (2.1.7) présente les principales conclusions.

2.1.2 Formulation du problème

Le système considéré ainsi que la classe de modèles qui servira pour l'estimation du système sont ici développés. La problématique principale de cette première partie de chapitre sera alors élaborée.

2.1.2.1 Système de génération de données

Soit le système de deux dimensions à temps et espace continus défini par l'équation aux dérivées partielles linéaire de la forme

$$\sum_{i_t=0}^{n_t}\sum_{i_x=0}^{n_x} \mathring{a}_{i_t,i_x}\partial_t^{i_t}\partial_x^{i_x}\mathring{\chi}(t,x) = \sum_{i_t=0}^{m_t}\sum_{i_x=0}^{m_x} \mathring{b}_{i_t,i_x}\partial_t^{i_t}\partial_x^{i_x}u(t,x), \tag{2.1}$$

- $x \in \mathrm{R}$
- $u(t,x)$ représente la variable d'entrée au temps t et au point x ;

$$u: \quad \mathrm{R}\times\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$$

- $\mathring{\chi}(t,x)$ est la sortie non bruitée ;

$$\mathring{\chi}: \quad \mathrm{R}\times\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$$

- (n_t, n_x) sont les ordres du système (supposés connus).
  On considère que $n_t \geq m_t, m_x$; $n_x \geq m_t, m_x$; et $\mathring{a}_{n_t,n_x} = 1$;
- ∂_t et ∂_x sont les opérateurs différentiels en temps et en espace respectivement, *i.e.*,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.2}$$

L'équation (2.1) peut également être écrite sous la forme suivante

$$A_{\mathrm{o}}(\partial_t,\partial_x)\mathring{\chi}(t,x) = B_{\mathrm{o}}(\partial_t,\partial_x)u(t,x), \tag{2.3}$$

où la notation 'o' est utilisée ici pour noter le système vrai de génération des données.

Les polynômes A_{o} et B_{o} sont définis comme suit :

$$A_{\mathrm{o}}(\partial_t,\partial_x) = \sum_{i_t=0}^{n_t}\sum_{i_x=0}^{n_x} \mathring{a}_{i_t,i_x}\partial_t^{i_t}\partial_x^{i_x}, \;\; \mathring{a}_{n_t,n_x} = 1, \tag{2.4}$$

$$B_{\mathrm{o}}(\partial_t,\partial_x) = \sum_{i_t=0}^{m_t}\sum_{i_x=0}^{m_x} \mathring{b}_{i_t,i_x}\partial_t^{i_t}\partial_x^{i_x}. \tag{2.5}$$

Dans la plupart des situations, l'entrée $u(x,t)$ et la sortie $\mathring{\chi}(x,t)$ sont échantillonnées en temps et en espace. Soit l'ensemble des paramètres donné par
- T_e la période d'échantillonnage temporelle ;
- N le nombre d'instants d'échantillonnage temporel ;
- h la période d'échantillonnage entre deux points d'observation ;
- L le nombre d'emplacements pour l'observation spatiale.

Les signaux échantillonnés sont notés par $u(t_k, x_\ell)$ et $\mathring{\chi}(t_k, x_\ell)$.

Il est supposé que $y(t_k, x_\ell)$ représente la somme de la sortie non bruitée et non observée $\mathring{\chi}(t,x)$ ainsi que d'un bruit de mesure discret en temps et en espace. Le système générant les données noté $\mathcal{S}_\mathrm{o}$ prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{S}_\mathrm{o} : \begin{cases} A_\mathrm{o}(\partial_t, \partial_x)\mathring{\chi}(t,x) = B_\mathrm{o}(\partial_t, \partial_x)u(t,x) \\ \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + e_\mathrm{o}(t_k, x_\ell). \end{cases} \tag{2.6}$$

Ce système est une représentation correspondant à celle décrite dans le chapitre 1, section (1.4.3) lorsque $H_\mathrm{o} = 1$.

Le bruit additif e_o est supposé être une matrice aléatoire de taille $N \times L$, de moyenne nulle, sans corrélation temporelle ou spatiale (bruit bidimensionnel blanc). Cependant, dans la pratique, puisque les méthodes de IV sont utilisées pour l'identification, cette hypothèse peut être assouplie, le biais des estimées ne dépendant pas des modèles de bruit considérés.

De plus, l'EDP est sujette à des conditions initiales ainsi qu'à des conditions de bord. Ces dernières, dépendant uniquement du contexte de l'étude, ne sont pas définies pour le moment et feront l'objet de discussions dans la suite du document.

Une fois le système EDP linéaire générant les données défini, la classe de modèle utilisée doit être définie.

2.1.2.2 Modèle considéré

L'identification des systèmes se fait soit en temps (espace temporel), soit en fréquence (espace de Fourier). Cependant comme expliqué au chapitre précédent, dans le cadre des EDP, les modèles développés dans le domaine fréquentiel sont des modèles infinis, c'est-à-dire comportant une infinité de paramètres à estimer [CM09]. Cette approche ne constitue donc pas une solution satisfaisante pour l'estimation paramétrique des systèmes EDP. Une solution développée dans la section (1.4.2.1) propose de passer par une discrétisation des opérateurs différentiels et d'écrire les modèles sous forme discrète. Il faut néanmoins noter que, même si les opérateurs sont discrétisés, la structure discrète du modèle est équivalente à celle écrite en continue. L'approche d'estimation reste donc une approche directe et les paramètres à estimer sont ceux de l'EDP continue.
Ainsi, par la suite, on utilisera la variable ∂ pour la description du système et $\eth$ (l'approximation de ∂) pour celle du modèle.

Sous ces hypothèses, le modèle EDP est paramétré comme suit :

$$\tilde{\mathcal{G}}: \quad \{B(\eth_t, \eth_x, \theta), A(\eth_t, \eth_x, \theta)\}, \tag{2.7}$$

avec

$$A(\eth_t, \eth_x, \theta) = \sum_{i_t=0}^{n_t} \sum_{i_x=0}^{n_x} a_{i_t,i_x} \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x}, \;\; a_{n_x,n_t} = 1, \tag{2.8}$$

$$B(\eth_t, \eth_x, \theta) = \sum_{i_t=0}^{m_t} \sum_{i_x=0}^{m_x} b_{i_t,i_x} \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x}, \tag{2.9}$$

et les paramètres du modèle associé sont stockés dans le vecteur suivant

$$\theta = [a_{n_t n_x - 1} \cdots a_{n_t - 1 n_x} \cdots a_{n_t 0} \cdots a_{00} \; b_{m_t m_x} \cdots b_{m_t 0} \cdots b_{00}]^{\mathrm{T}}. \tag{2.10}$$

Ainsi l'ensemble de modèles $\tilde{\mathcal{M}}$ à estimer peut être écrit comme :

$$\tilde{\mathcal{M}}: \begin{cases} \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = \dfrac{B(\eth_t, \eth_x, \theta)}{A(\eth_t, \eth_x, \theta)} u(t_k, x_\ell) \\ \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + e(t_k, x_\ell). \end{cases} \tag{2.11}$$

Il est supposé que le signal d'entrée $\{u(t,x),\ t_1 < t < t_N,\ x_1 < x < x_L\}$ est appliqué au système, ce qui donne lieu à un signal de sortie unique, $\{\mathring{\chi}(t,x),\ t_1 < t < t_N,\ x_1 < x < x_L\}$.

Ainsi, le modèle choisi pour identifier ce type d'EDP non homogène correspond à celui décrit dans la section (1.4.3) du chapitre 1.

Remarque :

Les questions théoriques concernant la sélection des intervalles d'échantillonnage spatial et temporel, ainsi que celles concernant le traitement des données manquantes et des intervalles d'échantillonnage temporel non uniformes, ne sont pas abordées dans cette partie. Cependant, elles constituent un aspect important qui doit être pris en compte dans les recherches futures, car la stratégie d'échantillonnage est souvent limitée par des considérations pratiques lorsqu'il s'agit de systèmes spatio-temporels réels.

Dans cette partie, une structure de modèle a été proposée. Afin d'être en adéquation avec la théorie des systèmes et la structure du système défini dans (2.6), les opérateurs différentiels partiels ont été discrétisés impliquant un modèle discret, cette approche permet de conserver la condition $\mathcal{S} \in \tilde{\mathcal{M}}$ et d'adhérer à la nature échantillonnée des données. Dès lors, la problématique principale peut enfin être formulée.

2.1.2.3 Problématique

Le problème d'identification est établi comme suit :

> En supposant que n_x, n_t, m_x et m_t soient connus *a priori*, l'objectif de modélisation consiste à estimer les paramètres qui caractérisent cette structure directement à partir de l'entrée et des données de sortie échantillonnées $Z^{L\times 2N} = \{u(t_k, x_\ell), y(t_k, x_\ell)\}_{\ell=1,k=1}^{L,N}$.

Ainsi, à partir de la structure de modèles choisie, plusieurs estimateurs peuvent être développés. Les parties suivantes proposent ainsi d'élaborer plusieurs méthodes d'estimation pour les EDP linéaires non homogènes.

2.1.3 Méthode des moindres carrés et filtres SVF

La méthode des filtres de variables d'état [You69] est une des approches conventionnelles d'identification de modèles paramétriques en continu. Elle repose sur la minimisation de l'énergie de l'erreur d'équation et se décompose en deux étapes :

- la première consiste à appliquer un filtrage linéaire aux données échantillonnées afin de reconstruire les dérivées successives des signaux d'entrée/sortie. Cette étape est spécifique aux approches d'identification de modèles à temps continu de type erreur d'équation ;
- la seconde étape est dédiée à l'estimation paramétrique proprement dite, à l'aide de techniques d'estimation de type moindres carrés .

2.1.3.1 Méthode des filtres à variable d'état

Considérons tout d'abord le problème d'identification sans bruit. L'équation (2.11) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A(\eth_t, \eth_x, \theta)\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = B(\eth_t, \eth_x, \theta)u(t_k, x_\ell). \tag{2.12}$$

Soit $F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x)$ un filtre SVF bidimensionnel stable appliqué à l'équation (2.12), *i.e.*,

$$A(\eth_t, \eth_x, \theta)F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x)\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = B(\eth_t, \eth_x, \theta)F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x)u(t_k, x_\ell) \tag{2.13}$$

où l'ordre minimal du filtre SVF est typiquement choisi pour avoir la forme suivante

$$F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x) = \frac{1}{(\eth_t + \lambda_t)^{n_t}(\eth_x + \lambda_x)^{n_x}}, \tag{2.14}$$

où λ_t et λ_x sont les fréquences de coupure.

Ce filtre est d'ordre n_t en temps et d'ordre n_x en espace.

Pour $i_t = 0, 1, \cdots, n_t$ et $i_x = 0, 1, \cdots, n_x$, les dérivées temporelles filtrées d'ordre i_t et les dérivées spatiales filtrées d'ordre i_x du signal $\mathring{\chi}$ aux instants t_k et aux points x_ℓ sont notées par $\mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell)$, où :

$$\mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = \frac{1}{(\eth_t + \lambda_t)^{n_t}(\eth_x + \lambda_x)^{n_x}} \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x} \mathring{\chi}(t_k, x_\ell). \tag{2.15}$$

En utilisant les variables filtrées, le modèle (2.13) peut être récrit comme

$$\sum_{i_t=0}^{n_t} \sum_{i_x=0}^{n_x} a_{i_t,i_x} \mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = \sum_{i_t=0}^{m_t} \sum_{i_x=0}^{m_x} b_{i_t,i_x} u_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell). \tag{2.16}$$

Une fois le filtre choisi pour le filtrage des données, il est naturel de considérer l'estimateur traditionnel des moindres carrés (LS) (de l'anglais *least-squares*) pour la résolution du problème d'identification.

2.1.3.2 Estimateur LSSVF-EDP

Considérons maintenant la situation où la sortie est corrompue par un bruit additif à l'instant $t = t_k$ et au point d'observation $x = x_\ell$, le modèle (2.11) peut être récrit sous une forme de régression linéaire :

$$y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell) = \varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell)\theta + v_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell), \tag{2.17}$$

où

$$\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x)\varphi(t_k, x_\ell), \tag{2.18}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi(t_k, x_\ell) = \quad & \big[-y^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(n_t,0)}(t_k, x_\ell) \\ & -y^{(n_t-1,n_x)}(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \\ & u^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell) \quad \cdots \quad u^{(0,0)}(t_k, x_\ell)\big]^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

et

$$v_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x)A(\eth_t, \eth_x)e(t_k, x_\ell). \tag{2.20}$$

Les paramètres estimés par la méthode LS dans le cadre des EDP et des filtres SVF (LSSVF-EDP) sont calculés de manière habituelle c'est-à-dire par les équations normales associées à l'équation de régression (2.17) (voir par exemple [You11]), i.e.,

$$\hat{\theta}_{\mathrm{LSSVF-EDP}} = \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell)\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell)\right] \tag{2.21}$$

à condition que la matrice inverse existe.

Cependant, après le filtrage des données, le bruit blanc devient un bruit coloré (2.20). Il est bien connu que les estimées obtenues par la méthode des LS sont biaisées dans la situation générale où les mesures de sortie spatio-temporelles sont contaminées par un bruit de mesure.

Ainsi, dans les sections suivantes, de nouvelles méthodes fondées sur la variable instrumentale sont proposées. Ces méthodes, contrairement à celle LS, permettent d'obtenir des estimées non biaisées quel que soit le type du bruit considéré.

2.1.4 Variable instrumentale et filtre SVF

Une méthode traditionnelle pour éliminer le biais asymptotique de la méthode des LS est de modifier la solution (2.21) en utilisant les méthodes de *variable instrumentale* (voir par exemple pour les modèles à temps discret [SS83, You84] et [You11] pour les modèles à temps continu).

2.1.4.1 Rappel du principe général des méthodes de IV simples

Le principe de la méthode fondée sur la IV simple est de modifier les équations normales définies dans (2.21) afin qu'elles produisent des estimations convergentes pour un bruit additif arbitraire. Cela implique l'introduction d'un nouveau vecteur appelé instrument ou variable instrumentale $\zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ dont les éléments sont corrélés au vecteur de régression non bruité $\mathring{\varphi}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$, où

$$\mathring{\varphi}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x)\mathring{\varphi}(t_k, x_\ell), \tag{2.22}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathring{\varphi}(t_k, x_\ell) = \quad & \big[-\mathring{\chi}^{(n_t, n_x-1)}(t_k, x_\ell) \cdots - \mathring{\chi}^{(n_t,0)}(t_k, x_\ell) \\ & -\mathring{\chi}^{(n_t-1, n_x)}(t_k, x_\ell) \cdots - \mathring{\chi}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \\ & u^{(m_t, m_x)}(t_k, x_\ell) \quad \cdots \quad u^{(0,0)}(t_k, x_\ell)\big]^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{2.23}$$

mais non corrélé au bruit additif. Les estimées obtenues par méthode IV simple (notée IVSVF) sont alors données par les équations normales suivantes :

$$\hat{\theta}_{\mathrm{IVSVF-EDP}} = \left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell)\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y_{\mathrm{f}}^{(n_x, n_t)}(t_k, x_\ell)\right] \tag{2.24}$$

à condition que la matrice inverse existe.

Néanmoins, ces méthodes ne délivrent des estimées convergentes que sous certaines conditions, rappelées dans la section (1.5).

Respectant ces conditions, plusieurs méthodes fondées sur la variable instrumentale peuvent être élaborées. Ainsi, dans la suite, deux méthodes de variable instrumentale simples sont développées et une méthode plus complexe fondée sur un algorithme itératif est proposée.

2.1.4.2 Estimateur IVSVF à entrée seule

Une première solution fondée sur la IV pour l'estimation des modèles EDP a été présentée dans [SYW91]. Cette méthode implique la seule utilisation des dérivées partielles filtrées de l'entrée pour la construction de l'instrument utilisé dans (2.24). Cette approche appelée IVSVF à entrée seule est notée IVSVF-U et est donnée par :

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{IVSVF-U}}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t, \eth_x) \quad & \big[u^{(n_t, n_x-1)}(t_k, x_\ell) \cdots u^{(n_t,0)}(t_k, x_\ell) \\ & u^{(n_t-1, n_x)}(t_k, x_\ell) \cdots u^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \\ & u^{(m_t, m_x)}(t_k, x_\ell) \ \cdots \ u^{(0,0)}(t_k, x_\ell)\big]^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

L'instrument construit uniquement à partir des signaux d'entrée filtrés est par hypothèse et par construction non corrélé à la perturbation, la condition (1.51b) est donc satisfaite. En outre d'après (1.51a), les éléments inclus dans le vecteur IV doivent être corrélés à la sortie du système réel. Cet estimateur donne, en général, des estimées convergentes [SYW91]. Néanmoins, la variance des estimées dépend du choix sensible du signal d'excitation.

Une autre solution fondée sur la IV est développée dans la prochaine section. C'est une IV simple à mettre en place puisqu'elle découle directement du système à identifier.

2.1.4.3 Estimateur IVSVF à modèle auxiliaire

La méthode IVSVF à modèle auxiliaire, notée IVSVF-MA, consiste à utiliser un modèle auxiliaire pour construire l'instrument. Il est donné par

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{IVSVF-MA}}(t_k,x_\ell) = F_{\mathrm{SVF}}(\eth_t,\eth_x) \quad \Big[&-\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k,x_\ell)\cdots-\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t,0)}(t_k,x_\ell)\\ &-\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t-1,n_x)}(t_k,x_\ell)\cdots-\hat{\mathring{\chi}}^{(0,0)}(t_k,x_\ell)\\ &u^{(m_t,m_x)}(t_k,x_\ell)\quad\cdots\quad u^{(0,0)}(t_k,x_\ell)\Big]^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{2.26}$$

où $\hat{\mathring{\chi}}(t_k,x_\ell)$ représente une estimation de la sortie non bruitée. Cette dernière peut être obtenue à partir d'un modèle auxiliaire, par exemple à l'aide du modèle LSSVF-EDP (2.21) estimé :

$$\hat{\mathring{\chi}}(t_k,x_\ell) = \frac{B(\eth_t,\eth_x,\hat{\theta}_{\mathrm{LSSVF-EDP}})}{A(\eth_t,\eth_x,\hat{\theta}_{\mathrm{LSSVF-EDP}})}u(t_k,x_\ell). \tag{2.27}$$

Les deux estimateurs fondés sur la IVSVF nécessitent *a priori* le choix difficile des fréquences de coupures en temps et en espace. Ils peuvent également, dans certains cas, fournir des estimées avec une faible précision due à un mauvais conditionnement de la matrice à inverser (2.24) comme illustré dans l'exemple numérique présenté dans la section 2.1.6.

Aussi, une amélioration de cette technique, fondée sur une IV raffinée est proposée dans la section suivante.

Remarques

1. La mise en œuvre numérique des différentes opérations de filtrage en temps et en espace continus peut avoir un effet considérable sur la qualité des estimées. Les filtrages spatio-temporels peuvent être discrétisés en utilisant la méthode bilinéaire comme initialement proposé dans [SYW91], ou en utilisant des méthodes plus sophistiquées pour la simulation des EDO et des EDP si cela est jugé nécessaire.
2. Dans cette approche SVF standard, l'utilisateur doit fournir *a priori* les fréquences de coupures λ_t et λ_x des filtres SVF (2.14). Intuitivement, ils peuvent être choisis afin de mettre l'accent sur les bandes de fréquence d'intérêt, et devraient être normalement égaux ou plus larges que les bandes passantes du système à identifier. Si le filtre SVF bidimensionnel est discrétisé par une méthode d'Euler par exemple, une autre solution consiste à choisir les fréquences de coupures afin de garantir la stabilité du schéma de discrétisation.

3. Dans l'analyse ci-dessus, les conditions initiales et les conditions aux limites sont considérées comme nulles. Si ce n'est pas le cas, elles peuvent être prises en compte dans la procédure d'estimation, au prix de l'augmentation du nombre de paramètres à estimer. Cependant, lorsque le filtre SVF est implémenté par la méthode bilinéaire, puis appliqué à un large intervalle temporel T et pour un grand nombre de points d'observation spatiaux $[0, X]$, les modalités relatives aux conditions initiales et aux limites décroissent de manière exponentielle et deviennent négligeables assez rapidement, en fonction du comportement dynamique spatial et temporel du modèle et des filtres SVF. Pour des dynamiques raisonnablement rapides, ces termes peuvent être négligés après un temps $t_0 = k_0 T_e$ et un point $x_0 = \ell_0 h$. L'algorithme d'estimation est alors appliqué sur un intervalle plus restreint $[x_0, X] \times [t_0, T]$, où t_0 et x_0 ont été choisis comparables au temps d'établissement des filtres SVF. Cette approche SVF a été utilisée pendant de nombreuses années dans le cas des modèles EDO et constitue l'approche sous-jacente sur laquelle s'appuie cette partie du document. Cependant, comme il sera ultérieurement montré dans la partie (3.7.2), l'algorithme d'identification proposé exploite une approche de filtrage plus complexe que celle des filtres SVF.
4. Une autre approche permettant d'éliminer les problèmes liés aux conditions initiales et aux limites, est l'utilisation de méthodes fondées sur les *fonctions de modulation* (voir par exemple [SSK08b]). Le net avantage de cette approche réside dans le fait que grâce à ses propriétés, les effets des conditions initiales et aux limites disparaissent explicitement de l'équation du modèle d'estimation. Cependant, la difficulté associée à de telles approches est la sélection des fonctions de modulation et de leurs hyper paramètres qui sont beaucoup plus difficiles à définir *a priori*.

2.1.5 Variable instrumentale raffinée

Théoriquement, la méthode de IV corrige le biais de la solution des moindres carrés, mais sa mise en œuvre nécessite une méthode particulière pour générer un vecteur variable instrumentale qui satisfasse les conditions indiquées par (1.51a) et (1.51b). Plusieurs procédures différentes appliquées dans le cas des modèles EDO ont été proposées dans la littérature de la théorie des systèmes. Parmi celles-ci, une méthode efficace statistiquement est celle de l'algorithme SRIVC mentionné en début de chapitre. La section suivante présente le développement d'une telle méthode de IV raffinée dédiée à l'identification de modèles EDP linéaires.

2.1.5.1 Estimateur optimal SRIVC pour les modèles EDO

Dans le cas des modèles EDO, la IV optimale est proposée dans [YJ80, SS83, You84, YGG08, You11]. Les conditions pour obtenir des estimées optimales imposent :

$$\begin{cases} \zeta^{\mathrm{opt}}(t_k) = F^{\mathrm{opt}}(p_t)\mathring{\varphi}(t_k) & \text{(2.28a)} \\ F^{\mathrm{opt}}(p_t) = \dfrac{1}{A_{\mathrm{o}}(p_t)}, & \text{(2.28b)} \end{cases}$$

où p_t est l'opérateur de différentiation $p_t = \frac{d}{dt}$,
et $\mathring{\varphi}(t_k)$, l'équivalent uni-dimensionnel de $\mathring{\varphi}(t_k, x_\ell)$ vu dans l'équation (2.23), est défini à partir de l'entrée $u(t_k)$ et de la sortie déterministe non bruitée $\mathring{\chi}(t_k)$.

Il est à noter que l'instrument et le filtre se fondent sur la connaissance *a priori* du système vrai, et que de ce fait une procédure itérative doit être mise en place.

Comme on va le voir plus loin, l'estimateur optimal SRIVC représente une extension logique de l'estimateur IVSVF-MA.
Il nécessite la connaissance de plusieurs caractéristiques du système à identifier. En effet, ce dernier ne peut être obtenu que si les vrais modèles du système et du bruit sont connus ; l'optimalité ne peut donc pas être atteinte dans un cas pratique.

Dans l'approche SRIVC, où l'algorithme est implémenté de manière itérative, l'instrument est défini comme :

$$\zeta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SRIVC}}(t_k) = F_{\mathrm{SRIVC}}(p_t)\left[-\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t-1)}(t_k)\cdots-\hat{\mathring{\chi}}^{(0)}(t_k)\ u^{(m_t)}(t_k)\cdots u^{(0)}(t_k)\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.29}$$

et $\hat{\mathring{\chi}}(t_k)$ est la sortie du modèle auxiliaire [You70] de la forme :

$$\hat{\mathring{\chi}}(t_k) = \frac{B(p_t, \hat{\theta}_{\mathrm{SRIVC}}^{j-1})}{A(p_t, \hat{\theta}_{\mathrm{SRIVC}}^{j-1})}u(t_k). \tag{2.30}$$

Suivant l'équation (2.28b), les filtres sont également liés au modèle du système, et sont définis comme suit

$$F_{\mathrm{SRIVC}}(p_t) = \frac{1}{A(p_t, \hat{\theta}_{\mathrm{SRIVC}}^{j-1})}. \tag{2.31}$$

Dans l'équation ci-dessus, l'indice j indique la valeur du vecteur de paramètre estimé à l'itération j de l'algorithme itératif, lequel est initialisé avec les paramètres du modèle auxiliaire et des filtres définis par l'estimation des moindres carrés.
À l'itération j, les paramètres sont réactualisés en utilisant les estimées obtenues par IV aux itérations précédentes. Le processus itératif est dépendant du critère de convergence spécifié par l'utilisateur, mais la convergence est normalement achevée en quelques itérations.

En plus de produire des estimées qui sont non biaisées et à variance minimale dans le cas d'un bruit blanc de mesure, la technique SRIVC a l'avantage de ne pas requérir d'hyper-paramètres à choisir par l'utilisateur ni dans le modèle auxiliaire (2.30) et ni dans le filtre $F_{\mathrm{SRIVC}}(p_t)$, puisque ceux-ci sont automatiquement adaptés par l'algorithme à chaque itération.

Dans la sous-section suivante, cette méthode est étendue pour traiter le cas des équations aux dérivées partielles, où les filtres ci-dessus et le modèle auxiliaire prennent les formes bi-dimensionnelles requises.

2.1.5.2 SRIVC-EDP : estimateur SRIVC pour les modèles EDP linéaires

À partir de l'estimateur SRIVC pour les modèles EDO, tel que décrit dans la section précédente, il est possible d'étendre ce dernier pour estimer les modèles EDP linéaires. Le modèle d'estimation, le modèle auxiliaire et les filtres adaptatifs sont remplacés par leurs équivalents spatio-temporels. Les deux sous-sections suivantes présentent donc ces nouvelles formulations, en commençant par celle de l'erreur de prédiction.

2.1.5.3 Minimisation de l'erreur de prédiction

Considérant le modèle (2.11) et suivant l'approche classique de minimisation de l'erreur de prédiction, l'erreur de sortie appropriée $\varepsilon(t_k, x_\ell)$ est donnée par

$$\varepsilon(t_k, x_\ell) = y(t_k, x_\ell) - \frac{B(\eth_t, \eth_x, \theta)}{A(\eth_t, \eth_x, \theta)} u(t_k, x_\ell). \tag{2.32}$$

La minimisation d'un critère fondée sur $\varepsilon(t_k, x_\ell)$, fonction qui est non linéaire en les paramètres, conduit aux techniques de l'erreur de sortie qui font appel à des algorithmes d'optimisation non linéaires souvent lourd en termes de calcul et sujets aux problèmes de convergence vers des minima locaux.

Cependant $\varepsilon(t_k, x_\ell)$ peut être convertie en une erreur d'équation

$$\varepsilon(t_k, x_\ell) = \frac{1}{A(\eth_t, \eth_x, \theta)} \left(A(\eth_t, \eth_x, \theta) y(t_k, x_\ell) - B(\eth_t, \eth_x \theta) u(t_k, x_\ell) \right). \tag{2.33}$$

De plus, comme les opérateurs commutent dans ce cas linéaire en les entrées, le filtre

$$F_{\text{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x) = \frac{1}{A(\eth_t, \eth_x, \theta)}, \tag{2.34}$$

peut être injecté à l'intérieur des parenthèses pour donner

$$\varepsilon(t_k, x_\ell) = A(\eth_t, \eth_x, \theta) F_{\text{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x) y(t_k, x_\ell) - B(\eth_t, \eth_x, \theta) F_{\text{SRIVPDE}}(\eth_t, \eth_x) u(t_k, x_\ell), \tag{2.35}$$

ou encore

$$\varepsilon(t_k, x_\ell) = \sum_{i_t=0}^{n_t} \sum_{i_x=0}^{n_x} a_{i_t, i_x} y_{\text{f}}^{(i_x, i_t)}(t_k, x_\ell) - \sum_{i_t=0}^{m_t} \sum_{i_x=0}^{m_x} b_{i_t, i_x} u_{\text{f}}^{(i_t, i_x)}(t_k, x_\ell) \tag{2.36}$$

- l'exposant i_t représente la dérivée partielle temporelle filtrée ;
- l'exposant i_x représente la dérivée partielle spatiale filtrée.

Les signaux filtrés sont alors obtenus comme :

$$y_{\text{f}}^{(i_t, i_x)}(t_k, x_\ell) = F_{\text{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x) \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x} y(t_k, x_\ell). \tag{2.37}$$

Ainsi le modèle d'estimation peut être écrit sous une forme de régression pseudo-linéaire :

$$y_{\text{f}}^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) = \varphi_{\text{f}}^{\text{T}}(t_k, x_\ell) \theta + \tilde{v}_{\text{f}}(t_k, x_\ell), \tag{2.38}$$

où $\varphi_{\text{f}}^{\text{T}}(t_k, x_\ell)$ et θ sont définis respectivement comme dans (2.18) et (2.10) et

$$\tilde{v}_{\text{f}}(t_k, x_\ell) = A(\eth_t, \eth_x) e_{\text{f}}(t_k, x_\ell) = e(t_k, x_\ell). \tag{2.39}$$

A partir de la forme de régression linéaire obtenue en (2.38) et en s'inspirant du principe de la méthode SRIVC pour l'estimation des EDO, l'estimateur SRIVC pour les modèles EDP linéaires et non homogènes peut enfin être établi.

2.1.5.4 Algorithme SRIVC-EDP

Les conditions équivalentes à (2.28a) et (2.28b) pour le cas des modèles EDP sont les suivantes :

$$\begin{cases} \zeta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{opt}}(t_k, x_\ell) = F^{opt}(\eth_t, \eth_x)\mathring{\varphi}(t_k, x_\ell), & (2.40\mathrm{a}) \\ F^{\mathrm{opt}}(\eth_t, \eth_x) = \dfrac{1}{A(\eth_t, \eth_x)}, & (2.40\mathrm{b}) \end{cases}$$

où $\mathring{\varphi}(t_k, x_\ell)$ est construit comme

$$\mathring{\varphi}(t_k, x_\ell) = \left[\mathring{Y}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) \;\; U^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{2.41}$$

avec

$$\mathring{Y}(t_k, x_\ell) = \left[-\mathring{\chi}^{(n_t, n_x-1)}(t_k, x_\ell) \cdots - \mathring{\chi}^{(n_t-1, n_x)}(t_k, x_\ell) \cdots - \mathring{\chi}^{(0,0)}(t_k, x_\ell)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{2.42}$$

et

$$U(t_k, x_\ell) = \left[u^{(m_t, m_x)}(t_k, x_\ell) \cdots u^{(0,0)}(t_k, x_\ell)\right]^{\mathrm{T}}. \tag{2.43}$$

Comme dans le cas des modèles EDO, l'algorithme implique une procédure itérative dans laquelle, à chaque itération, le modèle auxiliaire utilisé pour générer la variable instrumentale et les filtres associés est adapté à partir des estimées obtenues à l'itération précédente.

Considérons la $j$ème itération pour laquelle nous avons accès aux estimées $\hat{\theta}^{j-1}$ obtenues à l'itération $j-1$. La sortie non bruitée peut être obtenue par simulation du modèle EDP auxiliaire,

$$\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell) = \frac{B(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1})}{A(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1})} u(t_k, x_\ell), \tag{2.44}$$

laquelle est filtrée de la même manière que les autres variables. Le vecteur IV associé $\zeta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SRIVCEDP}}(t_k, x_\ell)$, est alors une estimée de la version non bruitée du vecteur filtré $\mathring{\varphi}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ dans (2.18) et se définit comme suit

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{SRIVCEDP}}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) \quad & \Big[-\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t, n_x-1)}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}^{(n_t, 0)}(t_k, x_\ell) \\ & -\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t-1, n_x)}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \\ & u^{(m_t, m_x)}(t_k, x_\ell) \quad \cdots \quad u^{(0,0)}(t_k, x_\ell)\Big]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Suivant (2.40b), les filtres sont également liés au modèle du système et sont définis comme

$$F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) = \frac{1}{A(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1})}. \tag{2.46}$$

Ainsi, sur ces considérations, l'algorithme de l'estimateur SRIVC-EDP peut maintenant être résumé comme suit.

Algorithme SRIVC-EDP

(i) Initialisation
Estimation initiale des paramètres du modèle $\hat{\theta}^0$ en utilisant l'estimateur LSSVF-EDP. Cela implique le choix des hyper-paramètres du filtre SVF.

(ii) A toute itération j, calcul d'une estimation de la sortie sans bruit $\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell)$ par simulation du modèle auxiliaire

$$\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell) = \frac{B(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1})}{A(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1})} u(t_k, x_\ell), \tag{2.47}$$

fondée sur les estimées $\hat{\theta}^{j-1}$ obtenues à l'itération précédente.

(iii) Calcul

$$\begin{cases} \mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x} \hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell), \\ y_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x} y(t_k, x_\ell), \\ u_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x} u(t_k, x_\ell), \end{cases} \tag{2.48}$$

avec

$$F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) = \frac{1}{A(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1})}, \tag{2.49}$$

où $\mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell)$, $y_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell)$ et $u_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell)$ représentent les dérivées partielles temporelles d'ordre i_t et les dérivées partielles spatiales d'ordre i_x des signaux filtrés $\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell)$, $y(t_k, x_\ell)$ et $u(t_k, x_\ell)$ respectivement.

(iv) Construction du vecteur régresseur filtré

$$\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) \begin{bmatrix} -y^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(n_t,0)}(t_k, x_\ell) \\ -y^{(n_t-1,n_x)}(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \\ u^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell) \quad \cdots \quad u^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{2.50}$$

avec le vecteur instrument formé comme :

$$\zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVCEDP}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{j-1}) \begin{bmatrix} -\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}^{(n_t,0)}(t_k, x_\ell) \\ -\hat{\mathring{\chi}}^{(n_t-1,n_x)}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \\ u^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell) \quad \cdots \quad u^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{2.51}$$

(v) Calcul des estimées SRIVC-EDP $\hat{\theta}^j_{\mathrm{SRIVCEDP}}$ à la $j$ème itération :

$$\hat{\theta}^j_{\mathrm{SRIVEDP}} = \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell) \right] \tag{2.52}$$

(vi) Si la convergence se produit en fonction du critère de convergence défini par l'utilisateur ou si le nombre maximal d'itérations est atteint, alors arrêt de l'algorithme, sinon j augmente de 1 et retour à l'étape **(ii)**.

L'implémentation des filtres, ainsi que celui de la simulation du modèle auxiliaire, ne sont pas détaillés dans cette section. Une approche est proposée plus en détails dans l'annexe A.

Cette section a présenté la proposition d'une méthode bien adaptée pour l'identification des EDP linéaires non homogènes. L'algorithme est fondé sur l'utilisation d'une IV raffinée et présente l'avantage de fournir des estimations convergentes même dans le cas où le bruit additif sur la sortie n'est pas correctement modélisé (contrairement au cas des EDO, la convergence n'est pas formellement prouvé dans le cas des EDP). Enfin, les performances de l'estimateur SRIVC-EDP sont illustrées par plusieurs exemples de simulations numériques.

2.1.6 Exemples numériques

Dans cette section, plusieurs simulations de Monte Carlo pour 100 jeux de données sont réalisées afin d'illustrer et de comparer les performances des différentes approches pour l'identification des modèles d'EDP linéaires non homogènes mentionnées dans ce document. Ici, les paramètres sont estimés par trois méthodes d'estimation fondées sur les filtres SVF : la méthode des moindres carrés notée LSSVF ; la méthode de IVSVF qui utilise le signal d'entrée pour la construction de l'instrument notée IVSVF-U [SYW91] ; la méthode classique de IVSVF à modèle auxiliaire proposée et notée IVSVF-MA, ainsi que par la méthode proposée dans la section précédente notée SRIVC-EDP.

L'exemple porte sur la diffusion de la chaleur le long d'une barre de longueur $l = 10$cm, la température de la barre $\mathring{\chi}(t,x)$ constitue la sortie et la source de chaleur sous la forme $u(t,x)$ est l'entrée. La température initiale de la barre est considérée nulle. Le phénomène de diffusion de chaleur est conduit par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{EC}} : \begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{\chi}}{\partial t}(t,x) - 2\dfrac{\partial^2 \mathring{\chi}}{\partial x^2}(t,x) = 1u(t,x) \\ 0 \leq t \leq 10\mathrm{min} \quad 0 \leq x \leq 10\mathrm{cm} \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + e_{\mathrm{o}}(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{2.53}$$

avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$\mathring{\chi}(x, t=0) = 0, \qquad \mathring{\chi}(x=0,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathring{\chi}(x=10,t) = 0. \tag{2.54}$$

La barre est chauffée par un signal source placé au tiers de sa longueur ($x = 3.33$cm), sous forme d'impulsions carrées de durées variables. L'évolution temporelle de la source de chaleur est représentée dans la partie supérieure de la Figure 2.3. Les températures déterministe et bruitée (pour une réalisation de bruit corrélé correspondant au cas 2, voir ci-dessous) sont représentées sur la figure inférieure. La réponse spatio-temporelle non bruiteé sur l'ensemble de la barre, tracée sur la Figure 2.4, est obtenue par simulation de l'équation (2.53) en utilisant une méthode d'Euler explicite. Dans cette simulation, les périodes d'échantillonnage sont définies par

- la période d'échantillonnage temporel $T_e = 60$ ms ;
- la période d'échantillonnage spatial $h = 0,066$ cm.

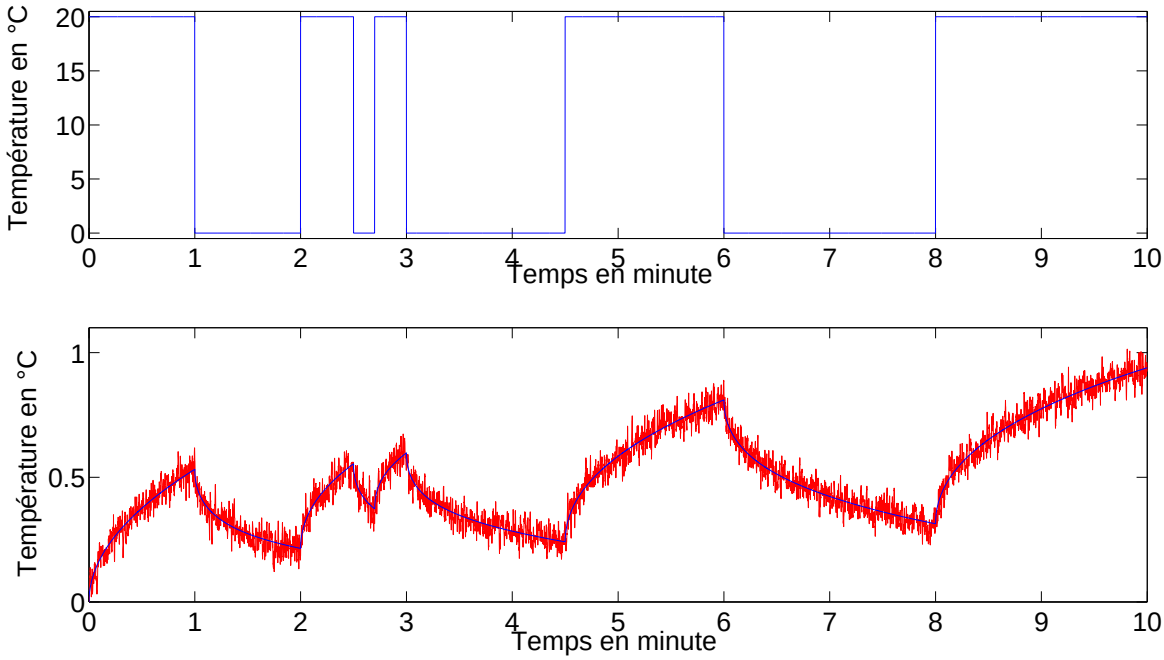

FIGURE 2.3 – Source de chaleur (partie supérieure) et température de la barre à $x = 3,33$ cm pour une réalisation de bruit coloré (partie inférieure), la courbe bleue correspond à la température déterministe et la courbe rouge à la température bruitée mesurée

La sortie est corrompue par un bruit à deux dimensions, de moyenne nulle, distribué normalement, discret en temps et en espace, avec un rapport signal sur bruit (RSB) de 10dB. Ce rapport est calculé lorsque la température atteint sa valeur maximale, pour $x = 3,33$ cm. La variance du bruit a été ajustée pour l'ensemble des valeurs mesurées en espace. Ici, RSB est défini comme

$$\mathrm{RSB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\mathring{\chi}}}{P_{e_o}} \right), \tag{2.55}$$

où P_{e_o} et $P_{\mathring{\chi}}$ sont respectivement les puissances moyennes du bruit et de la sortie déterministe.

Deux types de bruit de mesure (non coloré / coloré) sont considérés d'après les cas suivants :

– Cas 1 : un bruit non corrélé en temps et en espace est additionné à la sortie déterministe.

– Cas 2 : dans les situations pratiques, le bruit n'est jamais blanc. Ici, on considère un bruit coloré temporellement, obtenu à partir d'un bruit blanc à temps discret filtré par la fonction de transfert à temps discret suivante :

$$H(q_t^{-1}) = \frac{1}{1 - 1.2q_t^{-1} + 0.4q_t^{-2}}, \tag{2.56}$$

où q_t^{-1} est l'opérateur de retard, i.e., $q_t^{-1} e(t_k, x_\ell) = e(t_{k-1}, x_\ell)$.

Dans cette situation, il est supposé que les capteurs n'interfèrent pas entre eux, de sorte que pour chaque emplacement de l'espace, le bruit n'est pas corrélé.
Le système prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{EC}} : \begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{\chi}}{\partial t}(t,x) - 2\dfrac{\partial^2 \mathring{\chi}}{\partial x^2}(t,x) = 1u(t,x) \\ 0 \leq t \leq 10\mathrm{min} \quad 0 \leq x \leq 10\mathrm{cm} \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + H_{\mathrm{o}}(q_t^{-1}) e_{\mathrm{o}}(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{2.57}$$

avec des conditions initiales et aux limites nulles.
Pour ce cas, la condition $\mathcal{S} \in \tilde{\mathcal{M}}$ n'est pas respectée.

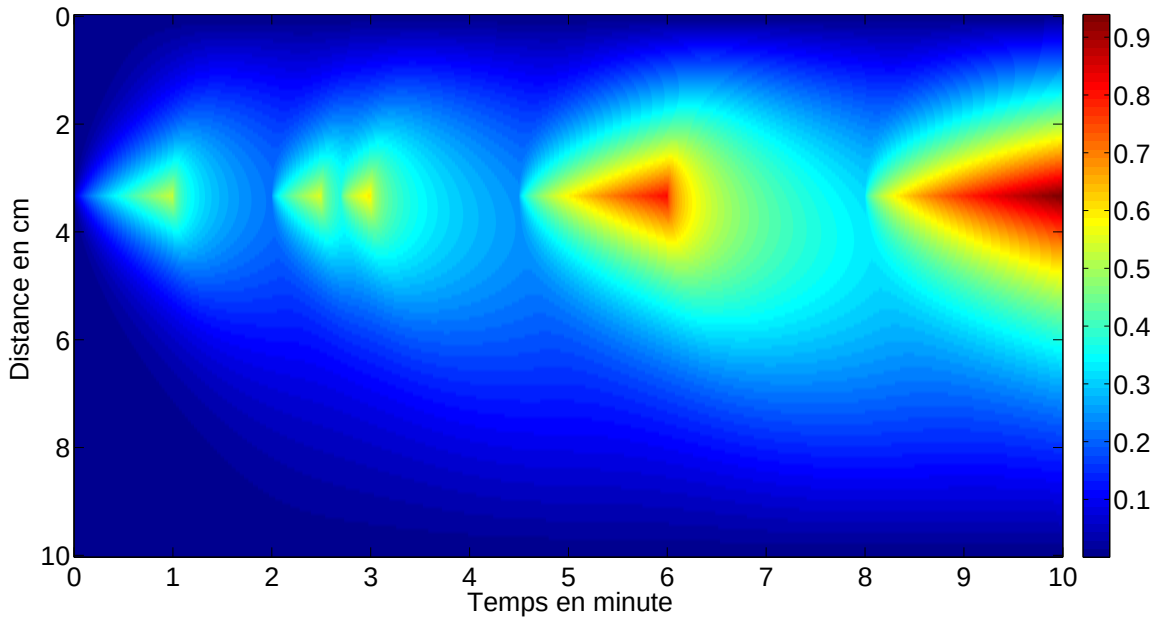

FIGURE 2.4 – Diffusion de la chaleur le long de la barre pour une source d'impulsions carrées variables à $x = 3,33$cm

Les résultats de simulation de Monte Carlo pour les deux types de bruit, sont présentés dans les Tables 2.1 et 2.2.

Dans le cas des algorithmes LSSVF, IVSVF-U et IVSVF-MA, après différents essais, les valeurs «optimales» des hyper-paramètres du filtre SVF sont obtenus pour $\lambda_t = 1$ et $\lambda_x = 1$. Le nombre d'itérations de la méthode SRIVC-EDP proposée est également fourni dans les Tables 2.1 et 2.2.

2.1.6.1 Cas d'un bruit blanc

Table 2.1 – Résultats de simulation de Monte Carlo, bruit blanc

		$\hat{a}_{20}$	$\hat{b}_{00}$	
Méthode	Valeur vraie	-2	1	# iter
LSSVF	moyenne	- 1.8476	0.9543	-
	écart-type	0.0678	0.0229	-
IVSVF-U	moyenne	-1.6297	0.8862	-
	écart-type	0.0563	0.0227	-
IVSVF-MA	moyenne	- 1.9914	0.9995	-
	écart-type	0.1007	0.038	-
SRIVC-EDP	moyenne	-2.0058	1.0024	6
	écart-type	0.0524	0.0211	-

A partir de la Table 2.1, il peut être noté que les estimées obtenues par la méthode LSSVF sont biaisées, comme attendu. En outre, l'estimateur IVSVF-U donne des estimées biaisées dans ce cas, probablement à cause du signal d'excitation qui n'est pas suffisamment riche en espace. Ce résultat confirme la nécessité d'avoir des conditions d'excitation plus fortes lorsque l'estimation des paramètres se fait par la méthode de IVSVF à entrée seule [SS83].

Les estimées obtenues par IVSVF-MA sont non biaisées, pouvant être encore améliorées par la méthode SRIVC-EDP proposée, qui produit clairement des estimées non biaisées avec un écart-type très faible.

2.1.6.2 Cas d'un bruit coloré

Table 2.2 – Résultats de simulation de Monte Carlo, bruit coloré

		$\hat{a}_{20}$	$\hat{b}_{00}$	
Méthode	Valeur vraie	-2	1	# iter
LSSVF	moyenne	- 1.7289	0.9162	-
	écart-type	0.0139	0.0043	-
IVSVF-U	moyenne	- 1.6036	0.8771	-
	écart-type	0.1514	0.0472	-
IVSVF-MA	moyenne	-1.8733	0.9614	-
	écart-type	0.0931	0.0288	-
SRIVC-EDP	moyenne	-1.9993	0.9996	7
	écart-type	0.0199	0.0076	-

Les performances des différents algorithmes présentés dans la Table 2.2 sont globalement similaires à celles montrées dans la Table 2.1 pour les méthodes LSSVF et IVSVF-U. Les estimées obtenues par l'estimateur IVSVF-MA ne sont pas satisfaisantes dans cette situation de bruit coloré ; tandis que les estimées acquises par la méthode SRIVC-EDP proposée sont toujours non biaisées avec un écart-type faible, ce qui suggère sa robustesse dans les applications pratiques où les hypothèses concernant les bruits de mesure sont rarement vérifiées.

2.1.7 Bilan

Cette première partie a décrit et évaluée l'algorithme itératif SRIVC-EDP, fondé sur la variable instrumentale. Celui-ci estime directement à partir de données échantillonnées bruitées, les paramètres des systèmes à paramètres distribués décrits par des modèles d'équations aux dérivées partielles non homogènes. Les estimées sont donc non biaisées quel que soit le bruit de mesure additif, blanc ou coloré.

La méthode SRIVC-EDP apporte une amélioration considérable en comparaison des algorithmes pré-existants, fondés sur la variable instrumentale simple. En particulier, les performances de l'estimateur SRIVC-EDP ne dépendent pas du choix des paramètres spécifiés par l'utilisateur. Ceux-ci sont automatiquement mis à jour lors de la mise en œuvre de l'algorithme itératif.

Il est évident que les performances de l'algorithme dépendent de l'implémentation numérique des opérations de filtrage qui interviennent pour estimer les dérivés temporelles et spatiales à partir des données spatio-temporelles échantillonnées. Ces simulations numériques peuvent être excellentes dans le cas de données échantillonnées avec un échantillonnage spatio-temporel uniforme de faible période, conditions possibles dans certaines situations de laboratoire. La simulation est cependant affectée dans d'autres cas, si l'échantillonnage est trop grossier et / ou non-uniforme.

La suite de ce chapitre traite de l'estimation paramétrique des équations aux dérivées partielles homogènes, et considère le cas où les données sont acquises avec des périodes d'échantillonnage non uniformes. Pour simplifier la démarche, on s'intéressera plus particulièrement à l'identification des équations d'advection-diffusion.

2.2 Identification des EDP linéaires homogènes

Cette deuxième partie présente des estimateurs pour l'identification des modèles régis par les équations aux dérivées partielles homogènes. Ici, on se penche plus particulièrement sur les *équations d'advection-diffusion* (EAD) en présence de bruit de mesure sur la sortie. Cette classe d'équations est souvent utilisée au cours de l'analyse de la qualité des ressources en eau, pour décrire le transport et la dispersion d'un soluté (pesticide, polluant, ...) dans les rivières (voir par exemple [MW03]).

Différentes techniques ont été proposées pour identifier les paramètres de ces modèles EAD (voir par exemple [KGM$^+$11], [IK00]). Une approche permettant de reproduire le comportement dynamique décrit par ces modèles a également été développée dans [TY12]. Pour chaque point de l'espace, un modèle continu temporellement est construit sur la base d'une fonction de transfert.

Cependant, dans les situations pratiques telles que celles rencontrées dans les sciences de l'environnement, les données mesurées ne sont continues ni dans le temps, ni dans l'espace. Les données échantillonnées sont en effet mesurées par des capteurs qui ne sont généralement pas uniformément placés, conduisant à une distribution non uniforme des données dans l'espace. En outre, en raison de pannes de capteurs ou d'erreurs de stockage, certaines données peuvent également être manquantes dans le temps. Les signaux mesurés sont donc échantillonnées à pas non constant en temps et en espace.

Quelques techniques d'identification des modèles EDP en présence de données manquantes ont déjà été proposées (voir par exemple [CB01]). Dans [HNBS12], un schéma itératif est utilisé pour estimer les données manquantes sur la base d'un modèle de prédiction multivariables, identifié à partir des mesures des capteurs voisins. Le problème d'identification en présence de données échantillonnées à pas non constant peut également être envisagé grâce à l'identification d'un modèle équivalent à temps discret, en utilisant une méthode où les paramètres varient linéairement et sont des fonctions dépendantes des périodes d'échantillonnage (voir par exemple [AAAW11]). Une autre approche est utilisée dans [WYB89], où un modèle de fonction de transfert à zones mortes agrégées (de l'anglais *Aggregated Dead Zone* (ADZ)) est utilisé pour caractériser le transport et la diffusion d'un polluant dans une rivière. En d'autres termes, ces modèles sont construits à partir de données manquantes dans certaines zones. La modélisation de type ADZ est aussi employée par [PYB$^+$99] pour modéliser la transmission de la chaleur dans une chambre ventilée ; et par [TYACW98] pour représenter le trafic automobile sur les autoroutes.

Cette section analyse deux méthodes pour l'identification des modèles EAD continus à partir d'un nombre limité de localisations spatiales distribué irrégulièrement et en utilisant une approche directe.
Les méthodes utilisées ici sont les méthodes LSSVF-EDP et SRIVC-EDP présentées dans la partie (2.1) (voir également [SGG12]). Pour éviter de se répéter, une version adaptée de ces estimateurs est détaillée dans l'annexe B.
En outre, cette étude démontre l'intérêt de la méthode SRIVC-EDP pour des cas particuliers d'EDP ou des situations réelles d'expérimentation.

Cette partie est organisée comme suit. La section (2.2.1) formule d'abord le problème d'identification. Après quoi, des exemples de simulation numérique sont utilisés dans la section (2.2.2) afin d'illustrer l'efficacité des méthodes proposées. Finalement la section (2.2.3) présente les principales conclusions.

2.2.1 Formulation du problème

Avant de se concentrer sur le problème d'estimation, les hypothèses définissant le système considéré sont mises en place. Puis, après une définition du système, le modèle d'estimation est développé pour aider à la formulation du problème.

2.2.1.1 Système considéré

Soit Ω un espace ouvert inclus dans $\mathbb{R}$ et soit $\partial\Omega$ la frontière de Ω, considérons le système continu en temps et en espace défini par l'EAD suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{\chi}(t,x)}{\partial t} & = \mathring{a}_{20}\dfrac{\partial^2 \mathring{\chi}(t,x)}{\partial x^2} - \mathring{a}_{10}\dfrac{\partial \mathring{\chi}(t,x)}{\partial x} \text{ sur }]0,T]\times\Omega \\ \mathring{\chi}(t,x) & = \mathring{u}_{\partial\Omega}(t,x) \text{ sur } [0,T]\times\partial\Omega \\ \mathring{\chi}(t=0,x) & = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases} \tag{2.58}$$

– $\mathring{\chi}(t,x)$ est une fonction continue en espace et en temps, définie comme suit

$$\mathring{\chi}(t,x) : [0,T]\times\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; \tag{2.59}$$

– $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$;
– $\mathring{\chi}_0(x)$ et $\mathring{u}_{\partial\Omega}(t,x)$ sont des fonctions données représentant respectivement les conditions initiales et les conditions de bord ;
– $x \in \bar{\Omega}$ est la variable spatiale ;
– $t \in [0,T]$ est la variable de temps ;
– $\mathring{a}_{20}$ représente le coefficient de dispersion ;
– $\mathring{a}_{10}$ représente la vitesse de propagation.

Le signal $\mathring{\chi}(t,x)$ est supposé échantillonné en temps et en espace. Il est donc nécessaire de mailler le domaine $]0,T]\times\Omega$ où l'équation EAD est définie. Pour représenter le cas le plus réaliste où les données ne sont pas uniformément mesurées, on considère un maillage non uniforme de $\bar{\Omega} = [0, x_{\mathrm{L}}]$ où x_{L} est la longueur du domaine. L'intervalle $[0, x_{\mathrm{L}}]$ est alors divisé en $L-1$ intervalles de différentes longueurs $h_\ell = x_\ell - x_{\ell-1}$ (voir Figure 2.5) avec $h_1 = 0$. h_ℓ peut être considéré comme la distance entre deux capteurs ou deux points d'observation le long du domaine d'étude.

La période d'échantillonnage temporel T_e est supposée constante :

$$t_k = (k-1)T_e \text{ pour } 1 \leq k \leq N, \text{ et } T_e = T/(N-1).$$

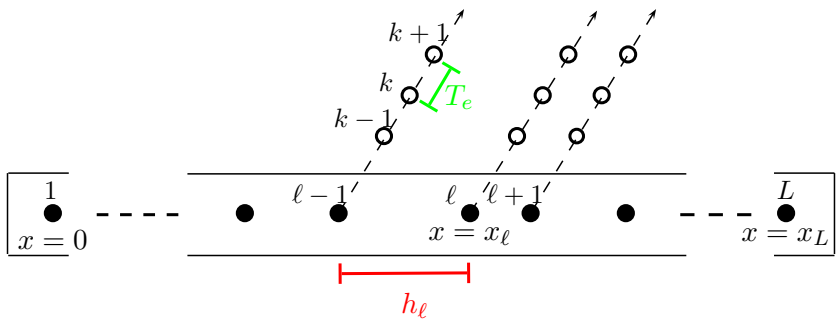

FIGURE 2.5 – Positions non uniformément réparties des capteurs (symbolisés par les points noirs)

Par conséquent, les échantillons sont définis comme

$$(t_k, x_\ell) = \left((k-1)T_e, \sum_{j=1}^{j=\ell} h_j \right) \tag{2.60}$$

pour $\ell \in \{1, \cdots, L\}$, $k \in \{1, \cdots, N\}$, et représentent les points où les signaux sont échantillonnés.

Ces derniers sont alors notés $\mathring{\chi}(t_k, x_\ell)$ et le système, pour la génération des données, prend la forme suivante

$$\mathcal{S}_{\text{EAD}} : \begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{\chi}(t,x)}{\partial t} & = \mathring{a}_{20} \dfrac{\partial^2 \mathring{\chi}(t,x)}{\partial x^2} - \mathring{a}_{10} \dfrac{\partial \mathring{\chi}(t,x)}{\partial x} \text{ sur }]0,T] \times \Omega \\ \mathring{\chi}(t,x) & = \mathring{u}_{\partial\Omega}(t,x) \text{ sur } [0,T] \times \partial\Omega \\ \mathring{\chi}(t=0,x) & = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur } \Omega \\ y(t_k, x_\ell) & = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + e_{\text{o}}(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{2.61}$$

où $\mathring{\chi}(t_k, x_\ell)$ est la sortie non bruitée échantillonnée du signal continu $\mathring{\chi}(t,x)$.
Le bruit additif $e_{\text{o}}(t_k, x_\ell)$ est supposé être un bruit blanc bidimensionnel.

La condition initiale est ici supposée nulle :

$$\mathring{\chi}_0(x) = 0 \text{ sur } \Omega. \tag{2.62}$$

Physiquement, cela implique qu'il n'y a pas de présence de polluant dans la rivière à l'instant t=0.
Les conditions aux limites sont définies par

$$\mathring{u}_{\partial\Omega}(t,x) = \begin{cases} \mathring{u}_{\partial\Omega_{\text{g}}}(t) = \mathring{u}(t) & \forall t \in [0,T] \text{ si } x = 0 \quad \text{(En amont)}, \\ \mathring{u}_{\partial\Omega_{\text{d}}}(t) = 0 & \forall t \in [0,T] \text{ si } x = x_{\text{L}} \quad \text{(En aval)}. \end{cases} \tag{2.63}$$

Ce qui signifie que l'on injecte en amont de la rivière un polluant, symbolisé par la variable $\mathring{u}(t)$. Ce polluant est supposé complètement se dissoudre dans l'eau après un certain laps de temps, ce qui explique des conditions de bord nulles en aval de la rivière.

A partir du système développé dans (2.61), le modèle utilisé pour l'estimation paramétrique de l'EAD peut être défini.

2.2.1.2 Modèle considéré

Le modèle à estimer prend la forme

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{EAD}} : \begin{cases} A(\eth_t, \eth_x, \theta)\,\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = 0 & \text{sur }]0, T] \times \Omega \\ \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) \quad = \mathring{u}_{\partial\Omega}(t_k, x_\ell) & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ \mathring{\chi}(0, x_\ell) \quad = 0 & \text{sur } \Omega \\ y(t_k, x_\ell) \quad = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + e(t_k, x_\ell) & \end{cases} \tag{2.64}$$

avec

$$A(\eth_t, \eth_x, \theta) = \eth_t - a_{20}\eth_x^2 + a_{10}\eth_x \tag{2.65}$$

où $\eth_t$ et $\eth_x$ sont respectivement les opérateurs différentiels discrétisés de ∂_t et ∂_x, et

$$\theta = [a_{20}\ a_{10}]^T \tag{2.66}$$

est le vecteur de paramètres qui caractérise le modèle.

2.2.1.3 Problématique

Finalement, l'objectif est d'estimer les deux paramètres contenus dans (2.66) du modèle (2.64) à partir des données échantillonnées non uniformément $Z^{L\times N} = \{y(x_\ell, t_k)\}_{\ell=1,k=1}^{L,N}$ et des connaissances *a priori* des conditions initiales et des conditions de bord.

2.2.2 Exemples numériques

Dans cette partie, le système d'EAD est utilisé comme exemple avec les mêmes conditions que celles élaborées dans la section précédente. Le signal d'excitation $\mathring{u}$ n'est pas distribué spatialement puisque qu'il correspond à une condition aux limites (voir Fig. 2.6), et représente l'évolution temporelle en amont de la concentration d'un bloc de polluant se diluant de manière constante.

Le signal $\mathring{\chi}(t_k, x_\ell)$ représente la propagation du polluant dans la rivière. On suppose que le signal de sortie est corrompu par un bruit blanc discret. Une discrétisation du système EAD à pas non constant est proposée dans l'annexe C.

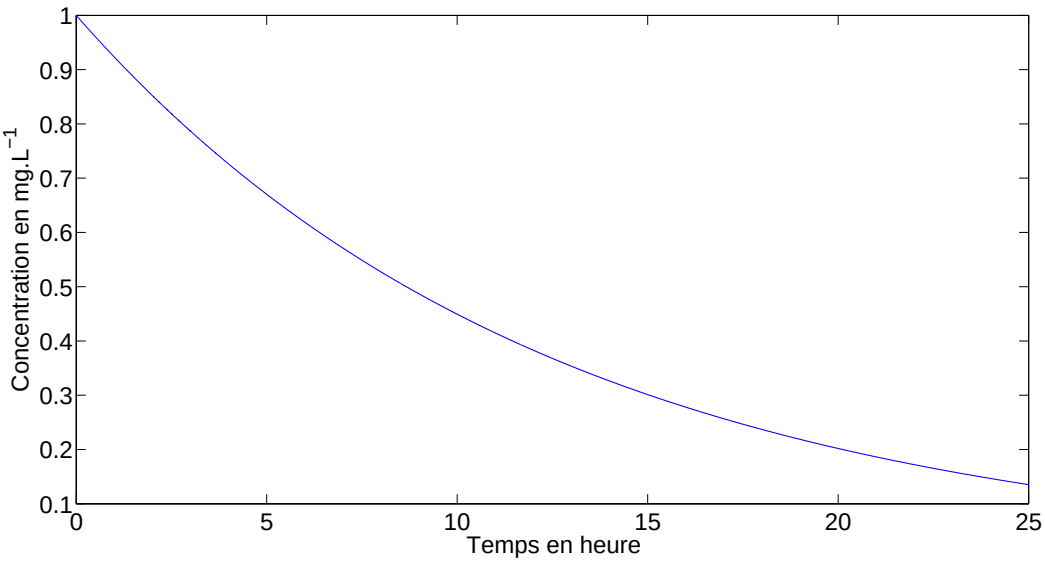

FIGURE 2.6 – Conditions de bord pour $x = 0$

Deux analyses de simulation de Monte Carlo sont utilisées pour illustrer et comparer les deux approches discutées pour l'identification des EAD.

- Dans le premier cas, on considère que les données sont acquises avec des périodes d'échantillonnage uniformes. Ce cas représente la situation idéale où les capteurs sont répartis de manière constante et où la période d'échantillonnage temporel reste constante pour tous les capteurs. On suppose donc que les données sont obtenues toutes les $T_e \approx 72$ secondes, à partir de 100 capteurs éloignés les uns des autres de $h_\ell \approx 7,5$ mètres.

- Dans le deuxième cas, plus représentatif de la réalité, les données sont supposées obtenues de façon non-uniforme à partir de seulement 20 capteurs disponibles placés aléatoirement, comme le montre la Figure 2.8. Ici, la période d'échantillonnage temporel est la même que dans le premier cas.

Afin de se placer dans des conditions d'identification optimales, il doit être noté que les données de sortie sont re-simulées pour chacun des cas. De plus, les paramètres inconnus $\mathring{a}_{20}$ et $\mathring{a}_{10}$ sont estimés par la méthode des moindres carrés LSSVF-EDP pour les modèles EAD, elle est notée LSSVF-EAD, et la méthode proposée SRIVC-EDP notée SRIVC-EAD.

Par ailleurs, on considère que les mesures de sortie sont corrompues par un bruit blanc dont le RSB est défini comme dans l'équation (2.55).

2.2.2.1 Cas de données échantillonnées uniformément

Dans la Figure 2.7, des données non bruitées sont montrées pour tous les points de l'espace. L'échelle de droite (et donc le code couleur) représente la quantité normalisée de polluant dans la rivière, en fonction de la distance et du temps.

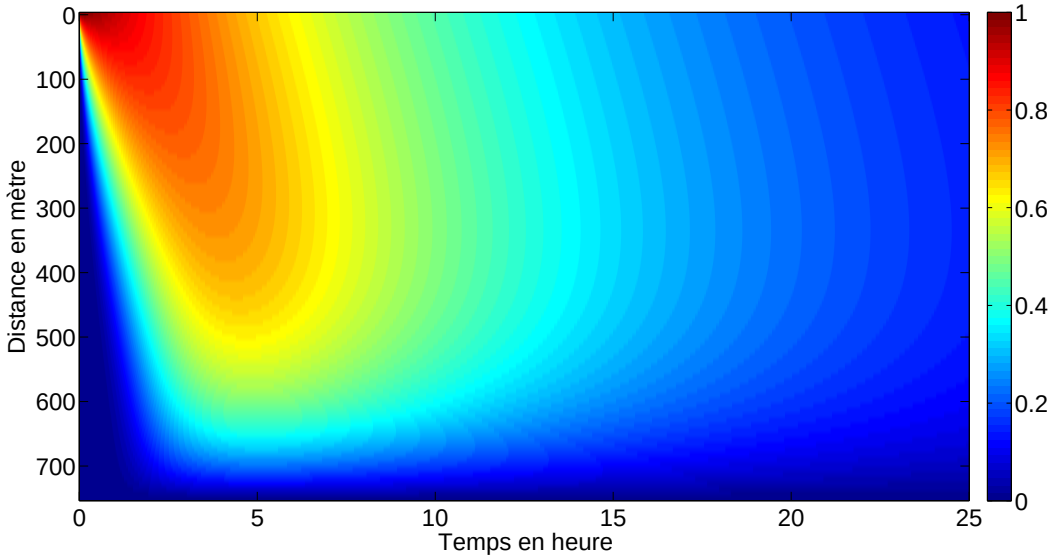

FIGURE 2.7 – Données non bruitées - échantillonnage uniforme (cas 1)

TABLE 2.3 – Résultat de Simulation de Monte Carlo, RSB=35dB (cas 1)

		$\hat{a}_{20}$	$\hat{a}_{10}$
Méthode	Valeur Vraie	0.26	- 0.001917
LSSVF-EAD	moyenne	0.092027	- 0.002429
	écart-type	0.011916	$3.6647 \cdot 10^{-5}$
SRIVC-EAD	moyenne	0.26001	- 0.001917
	écart-type	$8.8887 \cdot 10^{-5}$	$7.3084 \cdot 10^{-7}$

D'après le tableau 2.3, il apparaît clairement que la méthode LSSVF-EAD fournit, comme prévu, des estimées biaisées. Au contraire, la méthode SRIVC-EAD délivre des estimées non biaisées avec une faible variance. La méthode proposée surpasse clairement la méthode des LSSVF-EAD dans ce cas où le bruit est censé être blanc. Ces résultats illustrent le cas idéal où le nombre de données spatiales est relativement grand.

2.2.2.2 Cas de données échantillonnées non-uniformément

Dans ce cas, seulement 20 points non uniformément distribués en espace sont utilisés. La sortie déterministe est montrée dans la Figure 2.9.

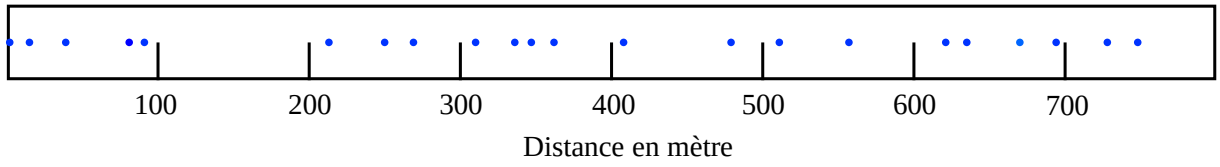

FIGURE 2.8 – Distribution des capteurs (cas 2)

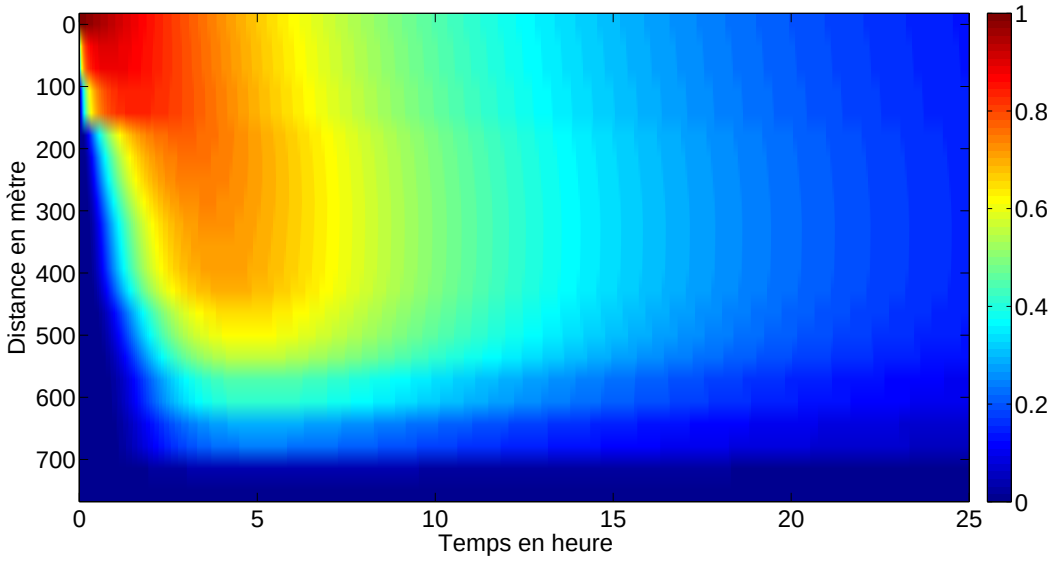

FIGURE 2.9 – Données non bruitées - échantillonnage non uniforme (cas 2)

TABLE 2.4 – Résultat de Simulation de Monte Carlo, RSB=25dB (cas 2)

		$\hat{a}_{20}$	$\hat{a}_{10}$
Méthode	Valeur vraie	0.26	- 0.001917
LSSVF-EAD	moyenne	0.16891	-0.002151
	écart-type	0.0423	$1.2486 \cdot 10^{-4}$
SRIVC-EAD	moyenne	0.2601	-0.001918
	écart-type	$8.9963 \cdot 10^{-4}$	$7.6603 \cdot 10^{-6}$

Les résultats de simulation de Monte Carlo présentés dans le tableau 2.4 montrent que, dans ce cas où l'échantillonnage spatial est plus grossier et non-uniforme, les estimées résultant de la méthode LSSVF-EAD sont de nouveau biaisées, alors que la méthode SRIVC-EAD délivre toujours des estimations non biaisées avec de faibles écarts-types. Il doit être noté que cette situation représente l'expérience proche du cas réel. En effet, l'obtention d'un grand nombre de données temporelles est assez facile compte tenu des capacités d'acquisition des capteurs. Néanmoins, le nombre de données spatiales c'est-à-dire le nombre de capteurs doit rester cohérent avec la réalité.

2.2.3 Bilan

Pour résumer, une méthode d'estimation paramétrique a été élaborée pour l'identification des équations d'advection-diffusion linéaires et homogènes, à partir de données spatialement non uniformément distribuées. Les méthodes directes étant bien adaptées dans les situations de données manquantes, une technique fondée sur la variable instrumentale a été proposée. La méthode développée est une extension de la méthode SRIVC-EDP qui a prouvée son efficacité pour l'identification des équations non homogènes. L'efficacité de la méthode SRIVC-ADE ainsi développée a été illustrée sur un exemple représentatif par comparaison à la méthode classique des moindres carrés. Encore une fois, la méthode SRIVC donne les meilleurs résultats.

2.3 Conclusion

Ce chapitre a donc traité de l'identification paramétrique directe des modèles décrits par les équations aux dérivées partielles linéaires.

Dans une première partie, nous nous sommes intéressés à l'estimation des équations les plus répandues, c'est-à-dire les équations non homogènes. Après un bref état de l'art des différentes méthodes déjà développées, plusieurs approches ont été présentées. La méthode classique des moindres carrés a d'abord été proposée. Malheureusement, en raison des filtres impliqués dans l'approximation des dérivées partielles qui provoquent une coloration du bruit additif sur la sortie, cette méthode procure des estimées biaisées. Aussi, plusieurs méthodes fondées sur les techniques de variable instrumentale ont ensuite été suggérées. Ces techniques sont bien connues de la communauté automaticienne car elles donnent des estimations non biaisées quelle que soit la structure du bruit additif. Cependant, les analyses comparatives des différents algorithmes ont permis de mettre en avant la méthode SRIVC-EDP qui a donné les meilleurs résultats en terme de biais et de variance.

Puis, une seconde partie est dédiée à l'estimation des équations linéaires homogènes. Pour simplifier les notations, on s'est plus particulièrement intéressé aux équations d'advection-diffusion. Ces équations permettent de décrire beaucoup de phénomènes physiques, comme la propagation d'un polluant dans une rivière. De plus, pour être en adéquation avec la réalité, on a considéré le cas où les données spatiales sont non uniformément distribuées et peu nombreuses. Les périodes d'échantillonnage étant non constantes dans cette situation, il est donc nécessaire de développer des estimateurs qui, en plus de donner des estimées non biaisées, permettent de passer outre les données manquantes. La méthode SRIVC-EDP ayant donné de bons résultats dans l'estimation paramétrique des équations non homogènes, elle a donc été modifiée pour répondre au nouveau cahier des charges. Comparé à la méthode des moindres carrés, la méthode SRIVC-EDP a encore une fois fourni les meilleurs résultats d'estimation.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont permis d'ouvrir de nombreuses perspectives, tout particulièrement pour l'identification des équations aux dérivées partielles non linéaires. Ces équations étant plus riches en terme de modélisation, elles permettent de simuler un plus grand nombre de phénomènes physiques ou environnementaux.

Cette partie du travail de thèse a fait l'objet de publications :

– pour une revue internationale :

J. Schorsch, H. Garnier, M. Gilson, and P. C. Young (2013).
Instrumental variable methods for identifying partial differential equation models,
International Journal of Control, in press.

– pour des congrès internationaux :

J. Schorsch, H. Garnier, and M. Gilson (2012).
Instrumental variable methods for identifying partial differential equation models
of distributed parameter systems,
IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2012), Brussels (Belgium), 840–845.

J. Schorsch, M. Gilson, H. Garnier (2013).
Identification of advection-diffusion equation from a limited number of spatial locations,
11th *IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP 2013)*, Caen (France).

Chapitre 3

Identification des EDP à paramètres variants

Ce chapitre traite de l'identification des systèmes linéaires à paramètres variants, décrits par les équations aux dérivées partielles. Ces systèmes, à temps et espace continus, sont étudiés pour des signaux d'entrée-sortie lorsqu'un bruit additif corrompt la sortie. Le système à une seule entrée et une seule sortie est tout d'abord écrit sous la forme d'un modèle à entrées multiples et une seule sortie de façon à ne faire intervenir que des EDP linéaires entre la sortie et les différentes entrées. Les approximations des dérivées partielles sont assurées par des opérations de filtrage qui présentent l'avantage de réduire l'influence du bruit. Deux méthodes itératives sont ensuite développées pour estimer les paramètres du modèle : un algorithme itératif des moindres carrés et un algorithme fondé sur la variable instrumentale raffinée. Pour conclure, les performances des méthodes proposées sont illustrées au travers d'un exemple de simulation représentatif, fondé sur des mesures de débit de rivière.

3.1 Introduction

Contrairement aux équations linéaires dont les paramètres sont habituellement des constantes physiques, les équations non linéaires considérées ici, comprennent des paramètres non linéaires. Ce chapitre étudie, au sein des équations non linéaires, le cas des EDP dont les paramètres linéaires variants (LPV) sont les fonctions d'un signal variant, en temps et en espace continus (TEC) et mesurable. Ce concept de modélisation permet de représenter un panel plus large de processus physiques que celui des EDP linéaires.

Ces systèmes sont utilisés, par exemple, pour décrire le transport de polluants le long d'une rivière. D'un point de vue conceptuel, il apparaît clairement que la vitesse de transport dépend directement du débit de la rivière ou de son profil, ce qui rend possible l'utilisation de modèles d'EDP-LPV pour décrire le fonctionnement de ce transport.

En ce qui concerne l'identification directe des modèles LPV à temps continu, seules quelques méthodes sont disponibles dans le cas des EDO. Et d'après l'état actuel des connaissances, peu de travaux spécifiques ont été développés dans le cas des EDP-LPV. Par conséquent, ce chapitre vise à identifier les systèmes EDP-LPV-TEC à partir de données échantillonnées sous certaines conditions réalistes de bruits et de mesures. Comme il est souligné dans [LTGG11], l'identification des systèmes LPV à temps continu, dont les paramètres ont une signification physique, nécessite l'utilisation de méthodes directes. Cependant, ce type d'approche génère des raisonnements

théoriques complexes dans ce contexte d'étude.

Les approches directes proposées ici utilisent des méthodes itératives fondées sur les MC et la VI. Habituellement, les filtres développés pour de telles méthodes suivent la même dynamique que le système. Il devrait en être de même dans le cas des EDP-LPV, cependant le filtre associé ici est dépendant d'une variable externe ρ. L'influence de cette dépendance est double. Premièrement, la dépendance est injectée dans le bruit filtré, diminuant considérablement la qualité (convergence, variance, ...) des paramètres estimés si celle-ci n'est pas prise en compte dans les opérations de filtrage. Deuxièmement, les propriétés algébriques des filtres comme la commutativité et l'associativité ne sont plus garanties. Ce problème a déjà été rencontré dans le passé pour l'identification des EDO-LPV à temps continu ainsi que pour celle des modèles discrets, et des solutions ont été apportées pour chacune de ces situations. Une reformulation des systèmes EDO-LPV a été proposée dans [LTGG11] afin d'appliquer la théorie des systèmes linéaires invariant dans le temps (LTI) (de l'anglais *linear time invariant*) au problème de l'identification LPV. Une reformulation du même type est proposée ici pour le cas des EDP-LPV, permettant l'application des méthodes classiques utilisées dans le cadre de la minimisation de l'erreur de prédiction. Elle implique l'utilisation d'un nouveau filtre qui ne soit plus dépendant de la variable ρ, et qui suive la partie linéaire invariant en temps et en espace du système (LTSI). Ce filtre satisfait alors les propriétés algébriques essentielles pour l'écriture de l'erreur de prédiction.

Ce chapitre est organisé comme suit. La section (3.2) introduit la classe générale des systèmes EDP-LPV-TEC dans une représentation d'entrée/sortie destinée à l'identification. Une reformulation du modèle est ensuite présentée dans la section (3.3), à partir de laquelle un critère de minimisation de l'erreur est développé. La section (3.4) pose ensuite le problème d'identification. Après quoi la section (3.5) récrit le problème sous une forme de régression linéaire incluant une description des filtres proposés. Puis, dans les sections (3.6) et (3.7) des méthodes itératives pour l'estimation paramétrique des EDP-LPV, fondées sur les LS et la IV, sont proposées. Enfin, la section (3.8) illustre l'analyse des méthodes par un exemple de simulation représentatif, avant de finalement présenter les principales conclusions dans la section (3.9).

3.2 Formulation du problème

Cette partie décrit la classe de système considérée dans ce chapitre. Après une description des modèles de processus et de bruit, le modèle complet est enfin développé.

3.2.1 Système considéré

Dans le but de représenter une large classe de systèmes, cette sous-section est divisée en trois parties. Dans la première partie, on considère une classe de systèmes décrivant les EDP-LPV dans un contexte non bruité. Puis, dans la seconde partie, on suppose que les données acquises lors d'expériences sont corrompues par un bruit. Enfin, dans la troisième partie, on développe le système complet combinant le système déterministe et le système de bruit.

3.2.1.1 Système déterministe

Soit Ω un domaine fermé de R et soit le système générant les données, décrit par l'EDP suivante :

$$\begin{cases} A_{\mathrm{o}}(\partial,\rho)\mathring{\chi}(t,x) = B_{\mathrm{o}}(\partial,\rho)u(t,x) \text{ sur }]0,+\infty[\times\Omega \\ \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

- $\mathring{\chi}(t,x)$ est la sortie déterministe du système ;
- $u(t,x)$ est l'entrée ;
- $\mathring{\chi}_0(x)$ est la condition initiale du système ;
- $x \in \Omega$ est la variable d'espace ;
- $t \in [0,T]$ est la variable de temps ;
- comme précisé dans le chapitre 1, section (1.4), ∂ représente l'opérateur différentiel partiel tel que
$$\partial^{i_t,i_x}\mathring{\chi}(t,x) = \partial_t^{i_t}\partial_x^{i_x}\mathring{\chi}(t,x) = \frac{\partial^{i_t+i_x}\mathring{\chi}(t,x)}{\partial t^{i_t}\partial x^{i_x}}; \tag{3.2}$$
- $\partial_t^{i_t} = \dfrac{\partial^{i_t}}{\partial t^{i_t}}$ est la i_t-ème dérivée partielle en temps ;
- $\partial_x^{i_x} = \dfrac{\partial^{i_x}}{\partial x^{i_x}}$ est la i_x-ème dérivée partielle en espace.

Pour un souci de clarté de la présentation, Ω est considéré comme un espace à une dimension, à savoir que x représente une variable unidirectionnelle tout au long du chapitre. Le cas n-dimensionnel est cependant une extension triviale. Pour compléter l'équation (3.1), des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ (correspondant à la frontière de Ω) peuvent être précisées. Un grand nombre de conditions aux limites peut être choisi, dépendant du contexte d'étude, du nombre de variables impliquées, et de la nature des équations (voir section (1.2.3.1)).

$A_{\mathrm{o}}(\partial,\rho)$ et $B_{\mathrm{o}}(\partial,\rho)$ sont des polynômes bi-variables dépendants de ∂ et ρ et de degrés n_t, n_x et m_t, m_x, respectivement :

$$\begin{cases} A_{\mathrm{o}}(\partial,\rho) = \partial^{n_t,n_x} + \displaystyle\sum_{i_t,i_x=0}^{\substack{n_t,n_x \\ (i_t,i_x)\neq(n_t,n_x)}} \mathring{a}_{i_t,i_x}(\rho)\partial^{i_t,i_x} & \text{(3.3a)} \\ \\ B_{\mathrm{o}}(\partial,\rho) = \displaystyle\sum_{j_t,j_x=0}^{m_t,m_x} \mathring{b}_{j_t,j_x}(\rho)\partial^{j_t,j_x}. & \text{(3.3b)} \end{cases}$$

Dans le but de représenter une large gamme de comportements, on suppose le système à paramètres variants. $\mathring{a}(\rho)$ et $\mathring{b}(\rho)$ sont des fonctions analytiques dépendantes du signal ρ au temps t et au point x. Pour plus de commodité dans la notation, $\rho(t,x) = \rho$. ρ est supposé être une variable de séquencement déterministe externe.
(n_t, n_x) sont les ordres du système (supposés connus). Dans ce chapitre, on suppose également que $n_x \geq m_x, m_t$; $n_t \geq m_x, m_t$; et que $A_{\mathrm{o}}(\partial, \rho)$ est un polynôme unitaire par rapport à la variable ∂.

3.2.1.2 Système de bruit

On considère que le système décrit dans (3.1) appartient à la classe des EDP stochastiques. Ces systèmes sont issus d'une généralisation des EDP prenant en compte un terme de bruit. On suppose ici que le bruit est un bruit de mesure additif à la sortie. La mesure des signaux $\mathring{\chi}(t,x)$ acquis lors d'expériences n'est donc pas disponible, uniquement une version perturbée de ceux-ci.

$$y(t,x) = \mathring{\chi}(t,x) + v_{\mathrm{o}}(t,x), \tag{3.4}$$

- $y(t,x)$ représente la sortie bruitée observée ;
- $v_{\mathrm{o}}(t,x)$ est un processus de bruit stochastique.

On peut remarquer que tout au long du document, comme une première étape vers la généralisation des hypothèses de bruit, ce dernier est censé être indépendant de ρ et de u.

Comme déjà référencé plusieurs fois dans les chapitres précédents, dans la majorité des expériences, les données ne sont pas mesurées en continu, mais sont acquises de manière échantillonnée. Afin, donc, d'éviter le problème mathématique complexe consistant à traiter les EDP stochastiques, il est proposé ici de ne considérer que les instants d'échantillonnage du bruit continu en temps et en espace (voir par exemple [Joh94], [PSR00]).

Ainsi, suivant ces considérations et les hypothèses développées dans la section (1.4.3), le bruit est donc représenté par un bruit coloré et discret. Toujours dans le but de représenter le plus grand ensemble, on considère les modèles ARMA dont la structure de bruit notée $\mathcal{H}_{\mathrm{o}}$ est représentée par :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{o}} \begin{cases} H_{\mathrm{o}}(q_t) = \dfrac{C_{\mathrm{o}}(q_t^{-1})}{D_{\mathrm{o}}(q_t^{-1})} \\ \\ v_{\mathrm{o}}(t_k, x_\ell) = H_{\mathrm{o}}(q_t) e_{\mathrm{o}}(t_k, x_\ell), \end{cases} \tag{3.5}$$

- $e_{\mathrm{o}}(t_k, x_\ell)$ est un bruit blanc bidimensionnel à temps et espace discrets ;
- C_{o} et D_{o} sont des polynômes unitaires avec des coefficients constants :

$$\begin{cases} C_{\mathrm{o}}(q_t^{-1}) = 1 + \displaystyle\sum_{j_t=1}^{c_t} \mathring{c}_{j_t}\ q_t^{-j_t} \\ \\ D_{\mathrm{o}}(q_t^{-1}) = 1 + \displaystyle\sum_{j_t=1}^{d_t} \mathring{d}_{j_t}\ q_t^{-j_t}, \end{cases} \tag{3.6}$$

- c_t et d_t sont respectivement les degrés des polynômes C_o et D_o ;
- q_t est l'opérateur de décalage temporel, *i.e.* $q_t^{-1}\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k - T_e, x_\ell)$;
- t_k est la variable d'échantillonnage temporel correspondant à l'instant $t = (k-1)T_e$;
- T_e est la période d'échantillonnage temporel ;
- x_ℓ est la variable d'échantillonnage spatial correspondant au point $x_\ell = (\ell - 1)h$;
- h est la période d'échantillonnage spatial.

Il est à noter que dans le cas où $C_\mathrm{o} = D_\mathrm{o} = 1$, le bruit additif est alors blanc.

3.2.1.3 Système générant les données complet

Finalement, le système complet noté $\mathcal{S}_\mathrm{o}$ peut être défini par la structure suivante :

$$\mathcal{S}_\mathrm{o} \begin{cases} A_\mathrm{o}(\partial, \rho)\mathring{\chi}(t,x) = B_\mathrm{o}(\partial, \rho)u(t,x) \text{ sur }]0,T] \times \Omega \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur } \Omega \\ v_\mathrm{o}(t_k, x_\ell) = H_\mathrm{o}(q_t)e_\mathrm{o}(t_k, x_\ell) \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + v_\mathrm{o}(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{3.7}$$

Ce système se décompose en deux parties distinctes : une partie déterministe qui est écrite à partir des signaux continus, et un système prenant en compte un terme de bruit qui est composé de signaux discrets. De ce fait, on qualifie ces systèmes d'hybrides. D'après cette formulation, la classe de modèles servant à l'identification peut être proposée.

3.2.2 Modèle considéré

Dans cette sous-section, on introduit une structure de modèles pour l'identification du système générant les données (3.7). Dans la structure de modèles choisie, le modèle de processus et le modèle de bruit sont paramétrés séparément.

3.2.2.1 Modèle du processus

Comme dans chaque problème d'identification, une classe de modèles représentant au plus près le comportement du système doit être définie. L'analyse du modèle de processus est pleinement caractérisée par la connaissance des fonctions $\mathring{a}_{i_t,i_x}(\rho)$ et $\mathring{b}_{j_t,j_x}(\rho)$. Or, l'une des principales difficultés est la caractérisation de ces fonctions non linéaires quand elles sont *a priori* inconnues. Dans le but de les évaluer, quelques travaux récents utilisent les techniques de machine d'apprentissage (de l'anglais *machine learning*), dans le domaine de l'identification non-paramétrique [TLZP11]. Ce travail, quant à lui, présente une paramétrisation de ces fonctions non linéaires en utilisant une somme de fonctions de bases *a priori* connues (voir par exemple [LTGG11] et [Tót10] pour le cas EDO).

D'après la section (1.4.2.1) développée dans le chapitre 1, il est important de considérer une version discrétisée de l'opérateur différentiel ∂ noté $\eth$, pour justifier l'existence des filtrages à venir.

En d'autres mots, ce chapitre se focalise sur l'hypothèse selon laquelle le modèle de processus noté par $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ est défini sous la forme suivante

$$\tilde{\mathcal{G}}_\theta : \qquad (A(\eth, \rho, \theta), B(\eth, \rho, \theta)) = (\mathcal{A}_\theta, \mathcal{B}_\theta) \tag{3.8}$$

où les polynômes A et B, dépendants de ρ, sont paramétrés comme

$$\mathcal{A}_\theta : \begin{cases} A(\eth, \rho, \theta) = \eth^{n_t, n_x} + \displaystyle\sum_{i_t, i_x = 0}^{\substack{n_t, n_x \\ (i_t, i_x) \neq (n_t, n_x)}} a_{i_t, i_x}(\rho) \eth^{i_t, i_x} \\ a_{i_t, i_x}(\rho) = a^0_{i_t, i_x} + \displaystyle\sum_{l=1}^{n_\alpha} a^l_{i_t, i_x} \mathrm{f}_l(\rho) \\ \qquad i_t = 0, \cdots, n_t \;\; i_x = 0, \cdots, n_x \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\mathcal{B}_\theta : \begin{cases} B(\eth, \rho, \theta) = \displaystyle\sum_{j_t, j_x = 0}^{m_t, m_x} b_{j_t, j_x}(\rho) \eth^{j_t, j_x} \\ b_{j_t, j_x}(\rho) = b^0_{j_t, j_x} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m_\beta} b^l_{j_t, j_x} \mathrm{g}_l(\rho) \\ \qquad j_t = 0, \cdots, m_t \;\; j_x = 0, \cdots, m_x \end{cases} \tag{3.10}$$

Dans cette paramétrisation, $\{\mathrm{f}_l\}_{l=1}^{n_\alpha}$ et $\{\mathrm{g}_l\}_{l=1}^{m_\beta}$ sont des fonctions méromorphes de ρ, avec une dépendance statique. Elles peuvent être choisies comme des fonctions linéaires indépendantes.

Le vecteur paramètre θ associé au modèle est défini par

$$\theta = [a_{0,0} \;\; \cdots \;\; a_{n_t, n_x - 1} \;\; b_{0,0} \;\; \cdots \;\; b_{m_t, m_x} \;\;]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_\theta} \tag{3.11}$$

où

$$a_{i_t, i_x} = \left[a^0_{i_t, i_x} \;\; a^1_{i_t, i_x} \;\; \cdots \;\; a^{n_\alpha}_{i_t, i_x} \right] \in \mathbb{R}^{n_\alpha + 1} \tag{3.12}$$

$$b_{j_t, j_x} = \left[b^0_{j_t, j_x} \;\; b^1_{j_t, j_x} \;\; \cdots \;\; b^{m_\beta}_{j_t, j_x} \right] \in \mathbb{R}^{m_\beta + 1} \tag{3.13}$$

et $n_\theta = ((n_t + 1)(n_x + 1) - 1)(n_\alpha + 1) + (m_t + 1)(m_x + 1)(m_\beta + 1)$.

On introduit également $\tilde{\mathcal{G}} = \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}^{n_\theta} \right\}$, comme une collection des modèles de processus de la forme de (3.8).

3.2.2.2 Modèle de bruit

On définit maintenant le modèle de bruit. Le modèle de bruit noté $\mathcal{H}$ est défini comme une fonction de transfert linéaire invariant dans le temps :

$$\mathcal{H}_\eta : (H(q_t, \eta)), \tag{3.14}$$

où H est une fonction rationnelle unitaire prenant la forme

$$H(q_t, \eta) = \frac{C(q_t^{-1}, \eta)}{D(q_t^{-1}, \eta)} = \frac{1 + c_1 q_t^{-1} + \cdots + c_{c_t} q_t^{-c_t}}{1 + d_1 q_t^{-1} + \cdots + d_{d_t} q_t^{-d_t}}. \tag{3.15}$$

Les paramètres associés au modèle de bruit sont stockés dans le vecteur η qui est défini comme

$$\eta = [c_1 \cdots c_{c_t} \ d_1 \cdots d_{d_t}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_\eta}, \tag{3.16}$$

où $n_\eta = c_t + d_t$.

De plus, on note $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_\eta | \eta \in \mathbb{R}^{n_\eta}\}$, la collection de tous les modèles de bruit suivant la forme de (3.14).

3.2.2.3 Modèle complet

Finalement, en considérant le modèle du processus et le modèle de bruit $(\tilde{\mathcal{G}}_\theta, \mathcal{H}_\eta)$, le modèle complet $\tilde{\mathcal{M}}_\Theta$ peut maintenant être défini comme suit.

$$\tilde{\mathcal{M}}_\Theta \begin{cases} A(\eth, \rho, \theta)\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = B(\eth, \rho, \theta)u(t_k, x_\ell) \text{ sur }]0, T] \times \Omega \\ \mathring{\chi}(0, x_\ell) = \mathring{\chi}_0(x_\ell) \text{ sur } \Omega \\ v(t_k, x_\ell) = H(q_t, \eta)e(t_k, x_\ell) \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + v(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{3.17}$$

où les paramètres sont collectés dans le vecteur Θ :

$$\Theta = [\theta^{\mathrm{T}} \quad \eta^{\mathrm{T}}]. \tag{3.18}$$

Fondée sur cette structure de modèles, la classe de modèles notée $\tilde{\mathcal{M}}$, comprenant le modèle de processus $(\tilde{\mathcal{G}}_\theta)$ et le modèle de bruit $(\mathcal{H}_\eta)$, paramétrés indépendamment, prend la forme

$$\tilde{\mathcal{M}} = \left\{ (\tilde{\mathcal{G}}_\theta, \mathcal{H}_\eta) | col(\theta, \eta) = \Theta \in \mathbb{R}^{n_\theta + n_\eta} \right\}. \tag{3.19}$$

A partir de la classe de modèles $\tilde{\mathcal{M}}$ développée, un critère de minimisation peut alors être choisi pour l'identification des modèles EDP-LPV-TEC.

3.3 Prédiction et erreur de prédiction

Cette partie étudie l'erreur de prédiction pour les modèles EDP-LPV-TEC. Les méthodes classiques habituellement utilisées pour minimiser l'erreur de prédiction ne peuvent pas être directement développées dans le cadre des paramètres LPV. Aussi, après une reformulation du modèle (3.17), un nouveau critère de minimisation de l'erreur de prédiction est élaboré.

3.3.1 Critère de minimisation de l'erreur

Comme expliqué dans le chapitre 1, la minimisation de l'erreur de prédiction est conditionnée par le modèle de bruit v. Dans la sous-partie (1.4.3.3) la minimisation de l'erreur de prédiction est appliquée aux EDP linéaires lorsque les coefficients sont constants. Il est maintenant essentiel d'analyser la manière dont la minimisation de l'erreur de prédiction peut être appliquée au contexte EDP-LPV-TEC.

Pour simplifier le problème d'identification dans cette sous-partie, on suppose que le modèle de bruit défini dans (3.17) est de type OE, *i.e.* $H(q_t, \eta) = 1$.

Le modèle du processus défini dans (3.17) est utilisé pour écrire le modèle LPV-EDP sous la forme d'une régression linéaire :

$$\tilde{\mathcal{M}}_\theta : y^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell) = \psi(t_k, x_\ell)\theta + \nu(\eth, \rho, t_k, x_\ell), \tag{3.20}$$

– où θ est défini dans (3.11) ;
– $\psi(t, x)$ contient toutes les dérivées partielles des signaux :

$$\begin{aligned}\psi(t_k, x_\ell) = \quad & \big[-\mathfrak{f}(\rho)y(t_k, x_\ell) \cdots - \mathfrak{f}(\rho)y^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & \mathfrak{g}(\rho)u(t_k, x_\ell) \ \cdots \ \mathfrak{g}(\rho)u^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell)\big] \,,\end{aligned} \tag{3.21}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(\rho) &= [1 \ \ \mathrm{f}_1(\rho) \cdots \mathrm{f}_{n_\alpha}(\rho)]^{\mathrm{T}} \\ \mathfrak{g}(\rho) &= \big[1 \ \ \mathrm{g}_1(\rho) \cdots \mathrm{g}_{m_\beta}(\rho)\big]^{\mathrm{T}} \,,\end{aligned} \tag{3.22}$$

– et

$$\nu(\eth, \rho, t_k, x_\ell) = A(\eth, \rho, \theta)e(t_k, x_\ell). \tag{3.23}$$

Dans ce cas, la minimisation de l'erreur de prédiction correspond à la minimisation de la norme l^2 de $\nu(\eth, \rho, t_k, x_\ell)$:

$$\hat{\theta} = \arg\min_\theta \left(\sum_{k,\ell=1}^{N,L} |\nu(\eth, \rho, t_k, x_\ell)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{3.24}$$

Cela revient donc à minimiser

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left(\sum_{k,\ell=1}^{N,L} |A(\eth, \rho, \theta) e(t_k, x_\ell)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.25}$$

On peut remarquer que l'inverse du filtre de $A(\eth, \rho, \theta)$ est nécessaire pour minimiser l'erreur de prédiction définie dans (3.24). Cette dernière correspond à la minimisation de :

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left(\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \left| y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell) - \psi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\theta \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.26}$$

où un signal γ_{f} est la sortie de l'opération de filtrage $\gamma_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = \dfrac{1}{A(\eth, \rho, \theta)} \gamma(t_k, x_\ell)$.

Idéalement, ce filtre passe-bas devrait être employé pour la minimisation de l'erreur de sortie et pour l'approximation des dérivées. Pourtant, il ne peut pas être utilisé car les propriétés algébriques des paramètres variants de $A(\eth, \rho, \theta)$, requis dans le cadre des systèmes linéaires, ne peuvent pas être prouvées dans le cas général des EDP-LPV. L'erreur de prédiction ne peut donc pas être directement appliquée pour ce problème d'identification.

Afin de satisfaire les conditions nécessaires au développement de l'erreur de prédiction, une reformulation du modèle (3.17) est proposée dans la partie suivante. Ce nouveau modèle permet de proposer un filtre qui ne soit plus dépendant de la variable externe ρ et qui satisfasse les propriétés algébriques requises pour la prédiction de l'erreur de minimisation.

3.3.2 Reformulation du modèle

Une méthode proposée pour les modèles EDO-LPV à temps discret consiste à utiliser une régression pseudo-linéaire où $\varphi(t, x)$ est une extension du vecteur de régression $\psi(t, x)$ incluant des termes de bruit (voir par exemple [LGTG10], [Lau10], ou [THdH12]). L'objectif ici, est de calquer le même schéma pour reformuler le modèle LPV (3.17) afin de l'exprimer sous une nouvelle forme d'équation de régression :

$$\tilde{\mathcal{M}} : y^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell) = \varphi(t_k, x_\ell)\theta + F(\eth, \theta) v(t_k, x_\ell), \tag{3.27}$$

et d'écrire directement le modèle LPV à une seule entrée et une seule sortie (SISO) (de l'anglais *single-input single-output*), en un modèle à plusieurs entrées et une seule sortie (MISO) (de l'anglais *multi-input single-output*), cela en séparant la partie linéaire en les paramètres et la partie à coefficients variants. Une telle reformulation de $\tilde{\mathcal{M}}_\theta$ peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathring{\chi}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell) + \sum_{\substack{i_t,i_x=0 \\ (i_t,i_x)\neq(n_t,n_x)}}^{n_t,n_x} a^0_{i_t,i_x} \mathring{\chi}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell)}_{F(\eth,\theta)\mathring{\chi}(t_k,x_\ell)} + \sum_{\substack{i_t,i_x=0 \\ (i_t,i_x)\neq(n_t,n_x)}}^{n_t,n_x} \sum_{l=1}^{n_\alpha} a^l_{i_t,i_x} \underbrace{\mathrm{f}_l(\rho)\mathring{\chi}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell)}_{\mathring{\chi}_l^{(i_t,i_x)}(t_k,x_\ell)} \\ = \sum_{j_t,j_x=0}^{m_t,m_x} \sum_{l=0}^{m_\beta} b^l_{j_t,j_x} \underbrace{\mathrm{g}_l(\rho) u^{(j_t,j_x)}(t_k, x_\ell)}_{u_l^{(j_t,j_x)}(t_k,x_\ell)}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

- où $\mathrm{g}_0(\rho) = 1$;
- les indices (j_t, j_x) pour un signal comme $u^{(j_t,j_x)}$, représentent la $j_t^{\text{ième}}$ dérivée partielle en temps et la $j_x^{\text{ième}}$ dérivée partielle en espace ;
- et

$$F(\eth, \theta) = \eth^{n_t,n_x} + \sum_{i_t,i_x=0}^{\substack{n_t,n_x \\ (i_t,i_x)\neq(n_t,n_x)}} a^0_{i_t,i_x} \eth^{i_t,i_x}. \tag{3.29}$$

L'intérêt principal de cette reformulation est de transposer la variation spatio-temporelle des coefficients sur les signaux désormais exprimés comme

$$\begin{cases} \mathring{\chi}_l^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = \mathrm{f}_l(\rho)\mathring{\chi}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell), & \text{(3.30a)} \\ \qquad \{i_t, i_x, l\} \in \{0 \cdots n_t, 0 \cdots n_x, 1 \cdots n_\alpha\}; & \\ \\ u_l^{(j_t,j_x)}(t_k, x_\ell) = \mathrm{g}_l(\rho) u^{(j_t,j_x)}(t_k, x_\ell), & \text{(3.30b)} \\ \qquad \{j_t, j_x, l\} \in \{0 \cdots m_t, 0 \cdots m_x, 0 \cdots m_\beta\}. & \end{cases}$$

Le modèle servant pour la minimisation de l'erreur de prédiction peut enfin être développé.

3.3.3 Formulation du modèle linéaire en les paramètres

Par conséquent, la partie de processus du modèle LPV est récrite comme un système MISO avec

$((n_t + 1)(n_x + 1) - 1)n_\alpha + (m_t + 1)(m_x + 1)(m_\beta + 1)$ entrées $\{\chi^l_{i_t,i_x}\}_{i_t=0,i_x=0,l=1}^{n_t,n_x,n_\alpha}$ et $\{u^l_{j_t,j_x}\}_{j_t=0,j_x=0,l=0}^{m_t,m_x,m_\beta}$.

En utilisant (3.28), (3.17) est récrit comme :

$$\tilde{\mathcal{M}}_\Theta \begin{cases} A(\eth, \rho, \theta)\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = B(\eth, \rho, \theta)u(t_k, x_\ell) \text{ sur }]0, T] \times \Omega \\ \\ \mathring{\chi}(0, x_\ell) = \mathring{\chi}_{\mathrm{o}}(x_\ell) \text{ sur } \Omega \\ \\ v(t_k, x_\ell) = H(q_t, \eta)e(t_k, x_\ell) \\ \\ F(\eth, \theta)y(t_k, x_\ell) = -\displaystyle\sum_{i_t,i_x=0}^{\substack{n_t,n_x \\ (i_t,i_x)\neq(n_t,n_x)}} \sum_{l=1}^{n_\alpha} a^l_{i_t,i_x} \mathring{\chi}_l^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j_t,j_x=0}^{m_t,m_x} \sum_{l=0}^{m_\beta} b^l_{j_t,j_x} u_l^{(j_t,j_x)}(t_k, x_\ell) + F(\eth, \theta)v(t_k, x_\ell). \end{cases} \tag{3.31}$$

En dépit de la complexité apparente de l'écriture, les équations (3.31) et (3.17) sont équivalentes. Le gain ici est la formulation linéaire en les paramètres du système EDP-LPV qui permet, par conséquent, l'utilisation de l'approche de minimisation de l'erreur de prédiction.

3.3.4 Modèle de l'erreur de prédiction

Sous l'hypothèse que $v(t_k, x_\ell) = H(q_t, \eta)e(t_k, x_\ell)$ et que $C(q_t^{-1}, \eta)$ est un polynôme unitaire, le modèle de bruit associé à (3.5) peut être récrit sous la forme suivante :

$$v(t_k, x_\ell) = e(t_k, x_\ell) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i e(t_{k-i}, x_\ell), \tag{3.32}$$

– g_i est la réponse impulsionnelle du filtre $H(q_t, \eta)$.

L'équation (3.32) garantit que la connaissance de $\{v(\tau, x_\ell)\}_{\tau \leq t_{k-1}}$ assure la connaissance de $\{e(\tau, x_\ell)\}_{\tau \leq t_{k-1}}$. De plus, en utilisant l'approche traditionnelle développée dans [Lju99], la prédiction $\hat{v}(t_k, x_\ell)$ de $v(t_k, x_\ell)$ est considérée comme l'espérance conditionnelle de $v(t_k, x_\ell)$ sachant $\{e(\tau, x_\ell)\}_{\tau \leq t_{k-1}}$ qui est fonction de (3.32) :

$$\hat{v}(t_k, x_\ell) = \mathbb{E}\left[v(t_k, x_\ell) | \{e(\tau, x_\ell)\}_{\tau \leq t_{k-1}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} g_i e(t_{k-i}, x_\ell) \tag{3.33}$$

où $\mathbb{E}$ représente l'opérateur d'espérance mathématique. Comme dans [Lju99], en utilisant l'hypothèse suivante $e(t_k, x_\ell) = H^{-1}(q_t, \eta)v(t_k, x_\ell)$, l'erreur de sortie peut être donnée par

$$\hat{v}(t_k, x_\ell) = v(t_k, x_\ell) - e(t_k, x_\ell) = (1 - H^{-1}(q_t, \eta))v(t_k, x_\ell). \tag{3.34}$$

En conséquence, pour le modèle EDP-LPV formulé dans l'équation (3.31), la sortie prédictive de $y(t_k, x_\ell)$ est donnée par

$$\hat{y}_\Theta(t_k, x_\ell) = \mathcal{F}(\mathring{\chi}, \theta, t_k, x_\ell) + \hat{v}(t_k, x_\ell), \tag{3.35}$$

où

$$\mathcal{F}(\mathring{\chi}, \theta, t_k, x_\ell) = -\sum_{i_t, i_x = 0}^{\substack{n_t, n_x \\ (i_t, i_x) \neq (n_t, n_x)}} \sum_{l=1}^{n_\alpha} \frac{a^l_{i_t, i_x}}{F(\eth, \theta)} \mathring{\chi}_l^{(i_t, i_x)}(t_k, x_\ell) + \sum_{j_t, j_x = 0}^{m_t, m_x} \sum_{l=0}^{m_\beta} \frac{b^l_{j_t, j_x}}{F(\eth, \theta)} u_l^{(j_t, j_x)}(t_k, x_\ell). \tag{3.36}$$

L'équation (3.35) peut être récrite comme :

$$\begin{aligned}
& \hat{y}_\Theta(t_k, x_\ell) &= \mathcal{F}(\mathring{\chi}, \theta, t_k, x_\ell) + (1 - H^{-1}(q_t, \eta))v(t_k, x_\ell) && (3.37)\\
\Leftrightarrow\ & \hat{y}_\Theta(t_k, x_\ell) &= \mathcal{F}(\mathring{\chi}, \theta, t_k, x_\ell) + (1 - H^{-1}(q_t, \eta))(y(t_k, x_\ell) - \mathcal{F}(\mathring{\chi}, \theta, t_k, x_\ell)) && (3.38)\\
\Leftrightarrow\ & \hat{y}_\Theta(t_k, x_\ell) &= H^{-1}(q_t, \eta)\mathcal{F}(\mathring{\chi}, \theta, t_k, x_\ell) + (1 - H^{-1}(q_t, \eta))y(t_k, x_\ell). && (3.39)
\end{aligned}$$

Finalement, la prédiction de la sortie $y(t_k, x_\ell)$ peut être évaluée par

$$\begin{aligned}\hat{y}_\Theta(t_k, x_\ell) = H^{-1}(q_t, \eta) \Bigg[&- \sum_{i_t, i_x = 0}^{\substack{n_t, n_x \\ (i_t, i_x) \neq (n_t, n_x)}} \sum_{l=1}^{n_\alpha} \frac{a^l_{i_t, i_x}}{F(\eth, \theta)} \mathring{\chi}_l^{(i_t, i_x)}(t_k, x_\ell) \\ &+ \sum_{j_t, j_x = 0}^{m_t, m_x} \sum_{l=0}^{m_\beta} \frac{b^l_{j_t, j_x}}{F(\eth, \theta)} u_l^{(j_t, j_x)}(t_k, x_\ell) \Bigg] + \big(1 - H^{-1}(q_t, \eta)\big)\, y(t_k, x_\ell).\end{aligned} \tag{3.40}$$

3.3.5 Minimisation de l'erreur de prédiction

L'erreur de prédiction peut alors être exprimée comme [Lju99] :

$$\varepsilon_\Theta(t_k, x_\ell) = y(t_k, x_\ell) - \hat{y}_\Theta(t_k, x_\ell). \tag{3.41}$$

Ainsi, la nouvelle minimisation de l'erreur de prédiction revient à la minimisation du critère des moindres carrés, telle que le vecteur des paramètres estimés soit défini par :

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta \in \mathbb{R}^{n_\theta + n_\eta}} \frac{1}{NL} \sum_{k, \ell = 1}^{N, L} \varepsilon^2_\Theta(t_k, x_\ell). \tag{3.42}$$

3.4 Formulation du problème d'identification

Fondé sur les hypothèses précédentes, le problème d'identification peut enfin être établi.

Soit le système $\mathcal{S}_\mathrm{o}$ décrivant une classe d'équations aux dérivées partielles à paramètres variants linéairement et générant les données, et soit $Z_{N,L}\{y(t_k, x_\ell), u(t_k, x_\ell), \rho(t_k, x_\ell)\}_{k,\ell=1}^{N,L}$ un jeu de données obtenu de $\mathcal{S}_\mathrm{o}$, fondé sur la structure de modèle $\tilde{\mathcal{M}}$, l'objectif est d'estimer directement le vecteur de paramètres Θ.

3.5 Modèle linéaire en les paramètres

En s'appuyant sur la formulation MISO (3.31), il devient possible de parvenir à une minimisation de l'erreur de prédiction en utilisant la régression linéaire :

$$y^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) = \varphi^\mathrm{T}(t_k, x_\ell)\theta + \tilde{v}(t_k, x_\ell), \tag{3.43}$$

où

$$\begin{aligned}\varphi(t_k, x_\ell) = \big[&-y(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(n_t, n_x - 1)}(t_k, x_\ell) \\ &-\mathring{\chi}_1^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots - \mathring{\chi}_{n_\alpha}^{(n_t, n_x - 1)}(t_k, x_\ell) \\ &u_0^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots u_{m_\beta}^{(m_t, m_x)}(t_k, x_\ell) \,\big]^\mathrm{T},\end{aligned} \tag{3.44}$$

et

$$\tilde{v}(t_k, x_\ell) = F(\eth, \theta)\frac{C(q_t^{-1}, \eta)}{D(q_t^{-1}, \eta)}e(t_k, x_\ell). \tag{3.45}$$

L'inconvénient évident est l'absence de mesure de la sortie déterministe et ses dérivées partielles $\mathring{\chi}^{(i_t,i_x)}$, contenues dans le vecteur de régression (3.44). Une solution pour faire face à ce problème est proposée dans les sections (3.6) et (3.7).
Cependant, en supposant momentanément que le signal de sortie $\mathring{\chi}$ soit *a priori* connu, l'approche conventionnelle de la minimisation de l'erreur de prédiction fondée sur (3.43) conduit à l'erreur de prédiction $\varepsilon_\Theta(t_k, x_\ell)$ donnée par

$$\begin{aligned}\varepsilon_\Theta(t_k, x_\ell) = \frac{D(q_t^{-1}, \eta)}{C(q_t^{-1}, \eta)F(\eth, \theta)}\,(F(\eth, \theta)y(t_k, x_\ell) - \\ \left[-\sum_{\substack{i_t,i_x=0\\(i_t,i_x)\neq(n_t,n_x)}}^{n_t,n_x}\sum_{l=1}^{n_\alpha} a^l_{i_t,i_x}\mathring{\chi}^{(i_t,i_x)}_l(t_k, x_\ell) + \sum_{j_t,j_x=0}^{m_t,m_x}\sum_{l=0}^{m_\beta} b^l_{j_t,j_x}u^{(j_t,j_x)}_l(t_k, x_\ell)\right]\Bigg).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Dans le contexte présent, contrairement à la formulation LPV où la dépendance LPV apparaît dans les définitions des signaux, les filtres $\frac{1}{F(\eth,\theta)}$ et $\frac{D(q_t^{-1},\eta)}{C(q_t^{-1},\eta)}$ commutent et permettent l'écriture de (3.46) comme suit.

$$\begin{aligned}\varepsilon_\Theta(t_k, x_\ell) = F(\eth, \theta)\; y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) - \\ \left[-\sum_{\substack{i_t,i_x=0\\(i_t,i_x)\neq(n_t,n_x)}}^{n_t,n_x}\sum_{l=1}^{n_\alpha} a^l_{i_t,i_x}\mathring{\chi}^{(i_t,i_x)}_{l,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) + \sum_{j_t,j_x=0}^{m_t,m_x}\sum_{l=0}^{m_\beta} b^l_{j_t,j_x}u^{(j_t,j_x)}_{l,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\right]\end{aligned} \tag{3.47}$$

où $y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$, $\chi^{(i_t,i_x)}_{l,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ et $u^{(j_t,j_x)}_{l,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ représentent les sorties des opérations de filtrage :

$$y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = \frac{D(q_t^{-1}, \eta)}{C(q_t^{-1}, \eta)}\left[\left(\frac{1}{F(\eth, \theta)}y\right)(t_k, x_\ell)\right]. \tag{3.48}$$

Fondé sur l'erreur de prédiction (3.47), le modèle linéaire en les paramètres associés prend la forme suivante :

$$y^{(n_t,n_x)}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = \varphi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\theta + \tilde{v}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \tag{3.49}$$

où

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = \big[&-y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\cdots - y^{(n_t,n_x-1)}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\\ &-\mathring{\chi}^{(0,0)}_{1,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\cdots - \mathring{\chi}^{(n_t,n_x-1)}_{n_\alpha,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\\ &u^{(0,0)}_{0,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\cdots u^{(m_t,m_x)}_{m_\beta,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\;\big]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3.50}$$

et

$$\tilde{v}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = \frac{D(q_t^{-1}, \eta)}{C(q_t^{-1}, \eta)} \left[\left(\frac{1}{F(\eth, \theta)} \tilde{v} \right) (t_k, x_\ell) \right] = e(t_k, x_\ell). \tag{3.51}$$

Il est à noter que le filtre $F^{-1}(\eth, \theta)$ et le filtre discret $H^{-1}(q_t, \eta)$ ont deux utilités.
Premièrement, ils sont employés pour filtrer les signaux d'entrée et de sortie utilisés pour l'identification, afin d'arriver à une équation de régression (3.17) écrite en terme de bruit blanc $e(t_k, x_\ell)$. En d'autres termes, $F^{-1}(\eth, \theta)$ et $H^{-1}(q_t, \eta)$ sont utilisés pour filtrer les données de façon à ce que l'estimateur des moindres carrés donne des estimées optimales statistiquement (sans biais et à variance minimale), sous la condition $\mathcal{S}_{\mathrm{o}} \in \tilde{\mathcal{M}}$.
Deuxièmement, une autre particularité de cette méthode est d'estimer directement un modèle TEC. Par conséquent, le vecteur de régression $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ (3.50) est construit à partir des dérivées partielles temporelles et spatiales des données (et non des versions retardées des données comme dans le cas discret). Néanmoins, le principal problème à résoudre reste que ces dérivées sont inconnues et doivent donc être estimées. C'est un problème bien connu et usuellement résolu en filtrant les données d'entrée et de sortie par un filtre passe-bas, comme le filtre SVF déjà développé dans le chapitre 1. Cependant ces filtres SVF présentent l'inconvénient de requérir le choix de paramètres utilisateurs. A l'inverse, l'approche développée dans ce chapitre présente l'avantage de pouvoir s'affranchir des paramètres utilisateurs, puisque le filtre $F^{-1}(\eth, \theta)$ est estimé de manière itérative.

A partir de cette formulation, deux nouveaux algorithmes sont proposés pour l'estimation paramètrique des EDP-LPV-TEC : la méthode des moindres carrés itératifs (section 3.6) et la méthode de la variable instrumentale raffinée (section 3.7).

3.6 Méthode des moindres carrés itératifs

Cette section présente un algorithme fondé sur la méthode des moindres carrés. Il s'agit d'un algorithme itératif où, à chaque itération, les filtres utilisés et les estimées sont recalculés.

3.6.1 Estimateur LS-EDP-LPV

Sous l'hypothèse que $F(\eth, \theta)$ et $\mathring{\chi}^{(i_t, i_x)}$ soient *a priori* connus, l'estimateur optimal au sens de la minimisation de l'erreur de prédiction est l'estimateur des moindres carrés (noté LS-EDP-LPV).

$$\hat{\theta}_{\mathrm{LS-EDP-LPV}} = \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y_{\mathrm{f}}^{(n_t, n_x)}(t_k, x_\ell) \right]. \tag{3.52}$$

Naturellement, les filtres $F(\eth, \theta)$ et $H^{-1}(q_t, \eta)$, et les signaux $\mathring{\chi}^{(i_t, i_x)}$ sont inconnus. Une procédure itérative est donc proposée pour palier ce manque, semblable aux approches développées pour les EDO [LW82], [DSC11] et [SM65] et les EDP linéaires [SGLG13].

A partir de l'équation (3.52), deux commentaires peuvent être formulés.
Le problème d'identification a été choisi pour être résolu par une méthode des MC itératifs. D'autres alternatives auraient pu être choisies, comme des méthodes PEM plus avancées [Lju99]. Toutefois, ces dernières nécessitent une initialisation robuste qui ne semble pas facile à manipuler dans ce cas d'identification des modèles EDP-LPV-TEC.

Par ailleurs, la solution itérative apparaît comme un choix naturel puisqu'à chaque itération, un modèle auxiliaire est utilisé pour générer non seulement une partie du vecteur de régression $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$, mais également les filtres associés. En conséquence, le vecteur de régression utilisé pour l'identification n'est pas seulement fondé sur les signaux reconstruits, mais également sur les signaux d'entrées et de sorties mesurés.

3.6.2 Estimateur ILS-EDP-LPV

L'algorithme ILS-EDP-LPV, pour *moindres carrés itératifs pour les systèmes EDP-LPV*, peut être résumé comme indiqué ci-dessous. Il est décomposé en plusieurs étapes, les trois premières étapes initialisent l'algorithme principal et les six dernières étapes sont utilisées pour estimer le filtre, les dérivées, et enfin, les paramètres du modèle.

Algorithme ILS-EDP-LPV

(i) Initialisation de θ^0 pour $l = 0$ seulement :

$$\hat{\theta}^0 = \left[\hat{a}^0_{0,0}\ 0\ \cdots 0\ \hat{a}^0_{1,0}\ 0\ \cdots 0\ \hat{a}^0_{n_t,n_x-1}\ 0\ \cdots\ 0\ \hat{b}^0_{0,0}\ 0\ \cdots 0\ \hat{b}^0_{1,0}\ 0 \cdots 0\ \hat{b}^0_{m_t,m_x}\ 0\ \cdots\ 0\right]^{\mathrm{T}}$$

utilisant la méthode LSSVF-EDP ou la méthode SRIVC-EDP proposées dans le chapitre 2. Dans cette première étape le système est considéré linéaire en temps et en espace.

(ii) Calcul d'une première estimation du filtre

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^0) = \frac{1}{F(\eth, \hat{\theta}^0)},$$

sur la base des estimations obtenues à l'étape **(i)**, où $F(\eth, \hat{\theta}^0)$ est donné par (3.29).

Utilisation du filtre afin de générer des estimations des dérivées

$$\{u^{(j_t,j_x)}_{l,\mathrm{f}}\}^{m_t,m_x,m_\beta}_{j_t=0,j_x=0,l=0} = \mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^0)\{u^{(j_t,j_x)}_{l}\}^{m_t,m_x,m_\beta}_{j_t=0,j_x=0,l=0}$$

$$\{y^{(i_t,i_x)}_{\mathrm{f}}\}^{n_t,n_x}_{i_t=0,i_x=0} = \mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^0)\{y^{(i_t,i_x)}\}^{n_t,n_x}_{i_t=0,i_x=0}$$

permettant de construire le vecteur de régression $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ uniquement à partir des signaux de sorties bruités et filtrés, et de l'entrée filtrée

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = \Big[&-y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(n_t,n_x-1)}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\\ &-y^{(0,0)}_{1,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(n_t,n_x-1)}_{n_\alpha,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\\ &u^{(0,0)}_{0,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots u^{(m_t,m_x)}_{m_\beta,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\ \Big]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

(iii) Calcul de la première estimation $\hat{\theta}^1$:

$$\hat{\theta}^1 = \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\varphi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y^{(n_t,n_x)}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\right].$$

Initialisation de $\hat{\eta}^1 = [1 \cdots 0\ 1 \cdots 0]^{\mathrm{T}}$ telle que

$$\mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^1) = \frac{D(q_t^{-1}, \hat{\eta}^1)}{C(q_t^{-1}, \hat{\eta}^1)} = 1.$$

En conséquence, l'estimation initiale proposée pour l'algorithme ILS-LPV-TEC est une estimation LS-EDP-LTSI du modèle $\tilde{\mathcal{M}}_\Theta$. Soit $\tau = 1$. [Fin de la partie d'initialisation.]

(iv) Pour chaque itération $\tau + 1$, calcul d'une estimation de la sortie non bruitée $\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell)$ via une approximation numérique de

$$A(\partial, \rho, \hat{\theta}^\tau)\hat{\mathring{\chi}}(t, x) = B(\partial, \rho, \hat{\theta}^\tau)u(t, x)$$

fondée sur les estimées $\hat{\theta}^\tau$ obtenues à l'itération précédente.

(v) Calcul d'une estimation des filtres

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^\tau) = \frac{1}{F(\eth, \hat{\theta}^\tau)}, \qquad \mathcal{Q}_d = \frac{D(q_t^{-1}, \hat{\eta}^\tau)}{C(q_t^{-1}, \hat{\eta}^\tau)}$$

et utilisation des filtres ainsi que de $\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell)$ pour générer les estimations des dérivées

$$\{\hat{\mathring{\chi}}_{l,\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}\} = \mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^\tau)\left[\mathcal{Q}_c(\eth, \hat{\theta}^\tau)\{\hat{\mathring{\chi}}_l^{(i_t,i_x)}\}\right]$$

pour $i_t = 0, \cdots, n_t$; $i_x = 0, \cdots, n_x$ et $l = 1, \cdots, n_\alpha$

$$\{u_{l,\mathrm{f}}^{(j_t,j_x)}\} = \mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^\tau)\left[\mathcal{Q}_c(\eth, \hat{\theta}^\tau)\{u_l^{(j_t,j_x)}\}\right]$$

pour $j_t = 0, \cdots, m_t$; $j_x = 0, \cdots, m_x$ et $l = 1, \cdots, m_\beta$

$$\{y_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}\} = \mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^\tau)\left[\mathcal{Q}_c(\eth, \hat{\theta}^\tau)\{y^{(i_t,i_x)}\}\right]$$

pour $i_t = 0, \cdots, n_t$ et $i_x = 0, \cdots, n_x$.

(vi) Construction d'une estimation du vecteur de régression filtré $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ comme :

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^\tau, \eta^\tau) = \quad & \Big[-y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots - y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & -\hat{\mathring{\chi}}_{1,\mathrm{f}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}_{n_\alpha,\mathrm{f}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & u_{0,\mathrm{f}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots u_{m_\beta,\mathrm{f}}^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell)\ \Big]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Le vecteur $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ est composé de la sortie bruitée filtrée, de l'estimation de la sortie non bruitée filtrée, et de l'entrée filtrée.

(vii) Calcul des estimées ILS-EDP-LPV $\hat{\theta}^{\tau+1}$ à l'itération $(\tau + 1)$:

$$\hat{\theta}^{\tau+1} = \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^\tau, \eta^\tau)\varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell, \theta^\tau, \eta^\tau)\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^\tau, \eta^\tau)y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell, \theta^\tau, \eta^\tau)\right]$$

(viii) Une estimation du signal de bruit v est obtenue par

$$\hat{v}(t_k, x_\ell) = y(t_k, x_\ell) - \hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell, \hat{\theta}^\tau).$$

Fondé sur $\hat{v}$, le vecteur des paramètres du modèle de bruit $\eta^{\tau+1}$ est estimé en utilisant un algorithme d'estimation ARMA.

(ix) Si $\hat{\theta}^{\tau+1}$ a convergé ou bien si le nombre d'itérations maximum est atteint, alors l'algorithme s'arrête, sinon τ augmente de 1 et retour à l'étape **(iv)**.

La méthode ci-dessus délivre des estimées biaisées dans la situation générale où la structure de bruit n'est pas connue ($\mathcal{S}_{\mathrm{o}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$). Il est alors nécessaire de développer un nouvel estimateur qui fournit des estimées non biaisées quel que soit le bruit. Puisqu'au cours de cette thèse, on a pu constater que l'estimateur fondé sur la variable instrumentale donne des estimées convergentes, on va donc dans la section suivante, développer un nouvel estimateur fondé sur la IV pour les systèmes EDP-LPV.

3.7 Méthode de variable instrumentale raffinée

Dans cette section, une méthode de IV est développée.

3.7.1 Estimateur RIV-EDP-LPV

L'algorithme associé repose sur les mêmes fondements que l'algorithme ILS-EDP-LPV, *i.e.* le procédé est itératif et les mêmes filtres sont utilisés pour approcher les dérivées partielles et blanchir le bruit. Cependant, même si ces deux algorithmes semblent très similaires, dans celui proposé ici, les estimées des paramètres $\hat{\theta}$ sont obtenues par une nouvelle équation fondée sur la IV.

$$\hat{\theta}_{\mathrm{VI}} = \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell) \right], \tag{3.53}$$

avec

$$\mathring{\varphi}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = H^{-1}(q_t, \eta) \left[F(\eth, \theta) \mathring{\varphi} \right](t_k, x_\ell), \tag{3.54}$$

et

$$\begin{aligned} \mathring{\varphi}(t_k, x_\ell) = \; & \big[-\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) \cdots - \mathring{\chi}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & -\mathring{\chi}_1^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots - \mathring{\chi}_{n_\alpha}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & u_0^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots u_{m_\beta}^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell) \, \big]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Les éléments du vecteur $\zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ sont corrélés au vecteur de régression non bruité $\mathring{\varphi}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ mais décorrélés au bruit additif ; les conditions (1.51a) et (1.51b), présentées dans la section (1.5), sont satisfaites.

3.7.2 Algorithme RIVC-EDP-LPV

L'algorithme RIVC-EDP-LPV, pour *variable instrumentale raffinée pour les systèmes EDP-LPV*, pour l'identification des modèles EDP-LPV peut être résumé comme ci-dessous. Il ressemble à l'algorithme des ILS-EDP-LPV développé dans la section (3.6) et se compose de deux parties, une partie d'initialisation (3 étapes) et une partie itérative (6 étapes).

Algorithme RIV-EDP-LPV

(i) Initialisation de θ^0 pour $l = 0$ seulement :

$$\hat{\theta}^0 = \left[\hat{a}^0_{0,0}\ 0\ \cdots 0\ \hat{a}^0_{1,0}\ 0\ \cdots 0\ \hat{a}^0_{n_t,n_x-1}\ 0\ \cdots\ 0\ \hat{b}^0_{0,0}\ 0\ \cdots 0\ \hat{b}^0_{1,0}\ 0 \cdots 0\ \hat{b}^0_{m_t,m_x}\ 0\ \cdots\ 0\right]^{\mathrm{T}}$$

utilisant la méthode LSSVF-EDP ou la méthode SRIVC-EDP proposées dans le chapitre 2. Dans cette première étape le système est considéré linéaire en temps et en espace.

(ii) Calcul d'une première estimation du filtre

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^0) = \frac{1}{F(\eth, \hat{\theta}^0)},$$

sur la base des estimations obtenues à l'étape **(i)**, où $F(\eth, \hat{\theta}^0)$ est donné par (3.29).

Utilisation du filtre afin de générer des estimations des dérivées

$$\{u^{(j_t,j_x)}_{l,\mathrm{f}}\}^{m_t,m_x,m_\beta}_{j_t=0,j_x=0,l=0} = \mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^0)\{u^{(j_t,j_x)}_{l}\}^{m_t,m_x,m_\beta}_{j_t=0,j_x=0,l=0}$$

$$\{y^{(i_t,i_x)}_{\mathrm{f}}\}^{n_t,n_x}_{i_t=0,i_x=0} = \mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^0)\{y^{(i_t,i_x)}\}^{n_t,n_x}_{i_t=0,i_x=0}$$

permettant de construire le vecteur de régression $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)$ uniquement à partir des signaux de sorties bruités et filtrés, et de l'entrée filtrée

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = \big[&-y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots - yf^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell)\\ &-y^{(0,0)}_{1,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots - y^{(n_t,n_x-1)}_{n_\alpha,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\\ &u^{(0,0)}_{0,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots u^{(m_t,m_x)}_{m_\beta,\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\ \big]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

(iii) Calcul de la première estimation $\hat{\theta}^1$:

$$\hat{\theta}^1 = \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\varphi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y^{(n_t,n_x)}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\right].$$

Initialisation de $\hat{\eta}^1 = [1 \cdots 0\ 1 \cdots 0]^{\mathrm{T}}$ telle que

$$\mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^1) = \frac{D(q_t^{-1}, \hat{\eta}^1)}{C(q_t^{-1}, \hat{\eta}^1)} = 1.$$

En conséquence, l'estimation initiale proposée pour l'algorithme RIVC-LPV-TEC est une estimation LS-EDP-LTSI du modèle $\tilde{\mathcal{M}}_\Theta$. Soit $\tau = 1$. [Fin de la partie d'initialisation.]

(iv) Pour chaque itération $\tau + 1$, calcul d'une estimation de la sortie non bruitée $\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell)$ via une approximation numérique de

$$A(\partial, \rho, \hat{\theta}^\tau)\hat{\mathring{\chi}}(t, x) = B(\partial, \rho, \hat{\theta}^\tau)u(t, x)$$

fondée sur les estimées $\hat{\theta}^\tau$ obtenues à l'itération précédente.

(v) Calcul d'une estimation des filtres

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{c}}(\eth, \hat{\theta}^{\tau}) = \frac{1}{F(\eth, \hat{\theta}^{\tau})}, \qquad \mathcal{Q}_d = \frac{D(q_t^{-1}, \hat{\eta}^{\tau})}{C(q_t^{-1}, \hat{\eta}^{\tau})}$$

et utilisation des filtres ainsi que de $\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell)$ pour générer des estimations des dérivées

$$\{\hat{\mathring{\chi}}_{l,\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}\} = \mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^{\tau}) \left[\mathcal{Q}_c(\eth, \hat{\theta}^{\tau})\{\hat{\mathring{\chi}}_l^{(i_t,i_x)}\}\right]$$

pour $i_t = 0, \cdots, n_t$; $i_x = 0, \cdots, n_x$ et $l = 1, \cdots, n_\alpha$

$$\{u_{l,\mathrm{f}}^{(j_t,j_x)}\} = \mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^{\tau}) \left[\mathcal{Q}_c(\eth, \hat{\theta}^{\tau})\{u_l^{(j_t,j_x)}\}\right]$$

pour $j_t = 0, \cdots, m_t$; $j_x = 0, \cdots, m_x$ et $l = 1, \cdots, m_\beta$

$$\{y_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}\} = \mathcal{Q}_d(q_t, \hat{\eta}^{\tau}) \left[\mathcal{Q}_c(\eth, \hat{\theta}^{\tau})\{y^{(i_t,i_x)}\}\right]$$

pour $i_t = 0, \cdots, n_t$ et $i_x = 0, \cdots, n_x$.

(vi) Construction d'une estimation du vecteur de régression filtré $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})$ comme :

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau}) = \quad & \Big[-y_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots - y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & -\hat{\mathring{\chi}}_{1,\mathrm{f}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}_{n_\alpha,\mathrm{f}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & u_{0,\mathrm{f}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots u_{m_\beta,\mathrm{f}}^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell)\ \Big]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Le vecteur $\varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})$ est composé de la sortie bruitée filtrée, de l'estimation de la sortie non bruitée filtrée, et de l'entrée filtrée.

Puis construction de l'instrument filtré $\zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})$:

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau}) = \quad & \Big[-\hat{\mathring{\chi}}_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & -\hat{\mathring{\chi}}_{1,\mathrm{f}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots - \hat{\mathring{\chi}}_{n_\alpha,\mathrm{f}}^{(n_t,n_x-1)}(t_k, x_\ell) \\ & u_{0,\mathrm{f}}^{(0,0)}(t_k, x_\ell) \cdots u_{m_\beta,\mathrm{f}}^{(m_t,m_x)}(t_k, x_\ell)\ \Big]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Le vecteur $\zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})$ est composé des estimations de la sortie non bruitée filtrée et de l'entrée filtrée.

(vii) Calcul des estimées RIVC-EDP-LPV $\hat{\theta}^{\tau+1}$ à l'itération $\tau + 1$:

$$\hat{\theta}^{\tau+1} = \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})\varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k,\ell=1}^{N,L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})y_{\mathrm{f}}^{(n_t,n_x)}(t_k, x_\ell, \theta^{\tau}, \eta^{\tau})\right].$$

(viii) Une estimation du signal de bruit v est obtenue par

$$\hat{v}(t_k, x_\ell) = y(t_k, x_\ell) - \hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell, \hat{\theta}^{\tau}).$$

Fondé sur $\hat{v}$, le vecteur paramètre du modèle de bruit $\eta^{\tau+1}$ est estimé en utilisant un algorithme d'estimation ARMA.

(ix) Si $\hat{\theta}^{\tau+1}$ a convergé ou que le nombre d'itérations maximum est atteint, alors l'algorithme s'arrête, sinon τ augmente de 1 et retour à l'étape **(iv)**.

Remarque :

On note que la formulation du problème d'estimation peut être simplifiée si on considère le bruit additif comme un bruit blanc, i.e. $C(q_t^{-1}, \eta) = D(q_t^{-1}, \eta) = 1$. Dans ce cas, les algorithmes développés SILS-EDP-LPV (*moindres carrés itératifs simplifiés pour les systèmes EDP-LPV*) et SRIVC-EDP-LPV (*variable instrumentale raffinée simplifiée pour les systèmes EDP-LPV*) impliquent seulement une opération de filtrage avec le filtre $\mathcal{Q}_c(\eth, \theta) = \frac{1}{F(\eth,\theta)}$.

Par la suite, plusieurs exemples sont proposés pour tester les performances des deux algorithmes développés. Plusieurs cas de figure sont ainsi proposés, comme l'estimation des paramètres lorsque la structure du bruit est connue et non connue, ou lorsque des données sont échantillonnées à pas non constant dans l'espace.

3.8 Exemples numériques

Un exemple représentatif est présenté dans cette section. Les paramètres inconnus sont estimés à partir des deux méthodes développées dans ce chapitre. Pour simplifier les notations, les deux estimateurs sont notés ILS (SILS) pour la méthode des moindres carrés itératifs (simplifiés) et RIVC (SRIVC) pour la méthode fondée sur la variable instrumentale raffinée (simplifiée).

L'exemple suivant a pour objectif de suivre l'évolution de la concentration d'un polluant le long d'une rivière. Cela consiste à injecter un élément chimique, d'effectuer des prélèvements réguliers le long du cours d'eau et d'analyser l'évolution de la concentration du produit [GTDB10].
Cet exemple peut être vu comme une extension de l'exemple développé dans le chapitre 2, où une proposition de l'équation d'advection-diffusion (EAD) a été suggérée. Cette équation est souvent utilisée pour décrire la propagation d'un polluant dans les rivières. Le système EAD est décrit ici comme suit.

$$\mathcal{S}_{\text{EAD}} \begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{\chi}(t,x)}{\partial t} = \mathring{a}_{02}(\rho(t)) \dfrac{\partial^2 \mathring{\chi}(t,x)}{\partial x^2} - \mathring{a}_{01}(\rho(t)) \dfrac{\partial \mathring{\chi}(t,x)}{\partial x} + \mathring{b}_{00}(\rho(t)) u(t,x) \\ \mathring{\chi}(t=0,x) = 0 \\ v_{\text{o}}(t_k, x_\ell) = H_{\text{o}}(q_t) e_{\text{o}}(t_k, x_\ell) \\ y(t_k, x_\ell) = \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + v_{\text{o}}(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{3.56}$$

Le traçage consiste à injecter un élément chimique représenté par $u(t,x)$ au point $x = 20$m. Il est injecté automatiquement de manière ponctuelle et peut être représenté par des impulsions, voir Figure 3.3.
Le signal non bruité $\mathring{\chi}(t_k, x_\ell)$ représente la concentration du polluant dans la rivière, obtenu grâce à la discrétisation du système par une méthode d'Euler, figure 3.1 (voir par exemple [MM05]). Lors de cette discrétisation, des conditions de bord de type Neumann ont été considérées.

Dans la partie inférieure de la figure 3.2 la concentration bruitée est tracée lorsqu'un bruit coloré corrompt les mesures.

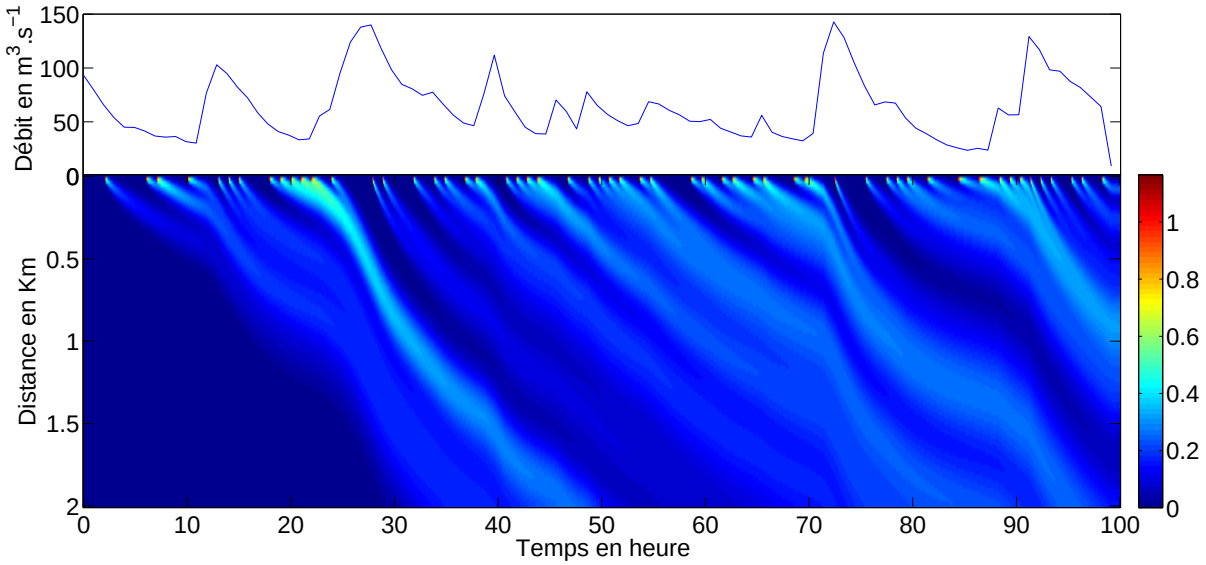

FIGURE 3.1 – Débit de la rivière $Q(t)$ (courbe bleue) et concentration bruitée $y(t, x)$

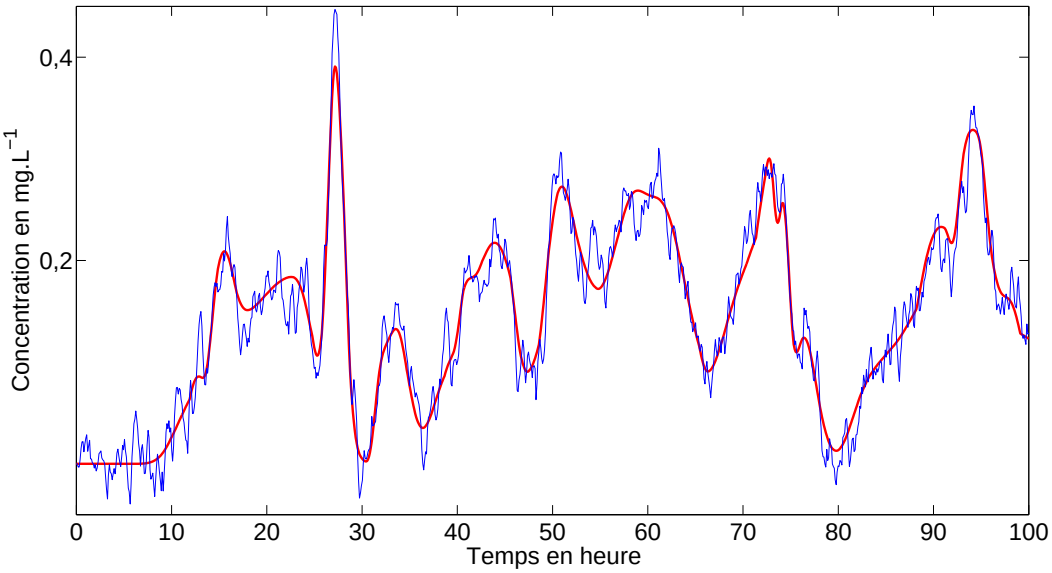

FIGURE 3.2 – Concentrations déterministe (courbe rouge) et bruitée (courbe bleue), $x = 0.5$km

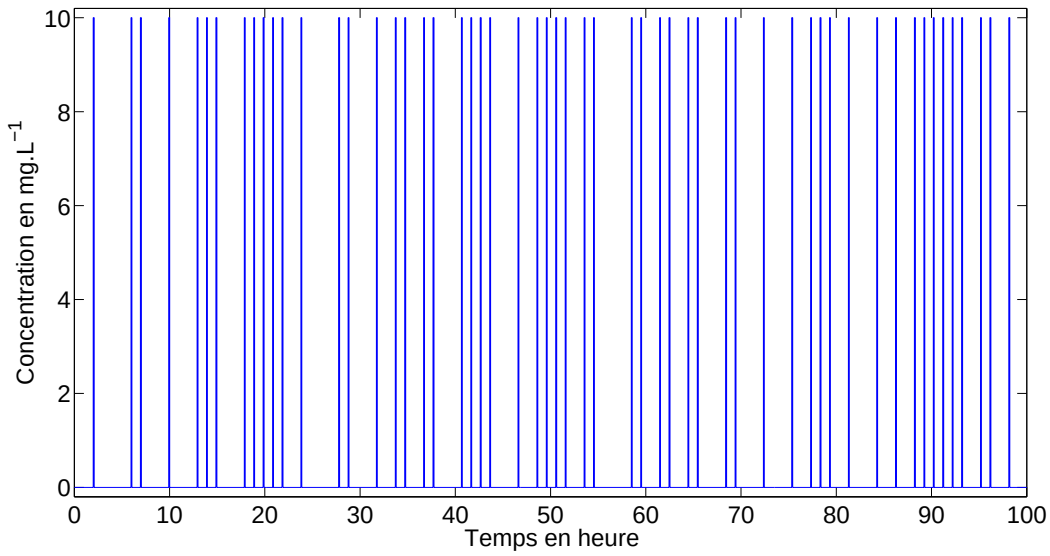

FIGURE 3.3 – Concentration de l'élément chimique injecté au point spatial $x = 20$m

De plus, l'opérateur différentiel associé à $\eth$, noté $\eth_{\text{EAD}}$, est obtenu :
- quand la période d'échantillonnage temporel est $T_e \approx 6$min pour $N = 1010$ points ;
- quand l'échantillonnage spatial est $h = 20$m pour $L = 100$ points d'observations. Ces 100 points peuvent représenter 100 capteurs distribués le long d'une rivière de 2 km. Les conditions initiales et les conditions de bord sont supposées nulles.

Dans des conditions de simulation réalistes, les coefficients de diffusion $a_{02}(\rho(t))$ et d'advection $a_{01}(\rho(t))$ dépendent du débit de la rivière $Q(t)$. Ce flux est représenté dans la partie supérieure de la figure 3.1. La variable externe ρ est alors définie par $\rho(t) = Q(t)$ et les coefficients $a_{02}(\rho(t))$, $a_{01}(\rho(t))$ et $b_{00}(\rho(t))$ sont donnés par

$$\mathring{a}_{02}(\rho(t)) = 63 + 1.3\rho(t), \tag{3.57}$$
$$\mathring{a}_{01}(\rho(t)) = 63 + \rho(t), \tag{3.58}$$
$$\mathring{b}_{00}(\rho(t)) = 1. \tag{3.59}$$

De plus, un modèle Box-Jenkins est considéré, *i.e.* les signaux de sortie sont supposés corrompus par un bruit coloré temporellement, obtenu comme un processus de bruit blanc, filtré par la fonction de transfert à temps discret suivante :

$$H(q_t^{-1}) = \frac{1}{1 - 1.2q_t^{-1} + 0.4q_t^{-2}}. \tag{3.60}$$

avec un RSB (*Ratio Signal sur Bruit*) défini par

$$\text{RSB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_{\mathring{\chi}}}{P_v}\right) \tag{3.61}$$

où P_v et $P_{\mathring{\chi}}$ sont respectivement les puissances moyennes du bruit et de la sortie déterministe.

Pour les besoins du modèle, l'opérateur différentiel associé est noté par $\eth_{\tilde{\mathcal{M}}}$. Trois types de modèles différents sont considérés, conduisant aux cas suivants :

- Cas 1 : le système appartient à la classe de modèle, *i.e.* $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \in \tilde{\mathcal{M}}$, avec RSB= 20dB et $\eth_{\mathcal{S}} = \eth_{\tilde{\mathcal{M}}}$; les méthodes utilisées pour l'estimation paramétrique sont ILS et RIVC ;
- Cas 2 : on suppose que le bruit est blanc lors de l'estimation des paramètres, *i.e.* $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$, avec RSB= 20dB et $\eth_{\mathcal{S}} = \eth_{\tilde{\mathcal{M}}}$; les méthodes utilisées pour l'estimation paramétrique sont SILS et SRIVC ;
- Cas 3 : on suppose que le bruit est blanc lors de l'estimation des paramètres, on suppose également que seul un capteur sur deux est fonctionnel, et donc que 50 capteurs sur les 100 sont disponibles : $\eth_{\mathcal{S}} \neq \eth_{\tilde{\mathcal{M}}}$, *i.e.* $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$, les méthodes utilisées pour l'estimation paramétrique sont SILS et SRIVC.

Une analyse de simulations de Monte Carlo pour 100 jeux de données est utilisée pour illustrer les performances des différentes approches. La moyenne et les écarts-types de ces 100 jeux de données générées pour les trois cas sont montrées respectivement dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3. Le nombre d'itérations des méthodes proposées est aussi précisé.

3.8.1 Cas $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \in \tilde{\mathcal{M}}$

Dans le premier cas présenté ici, il peut être vu dans le tableau 3.1 que les méthodes ILS et RIVC donnent des estimées non biaisées quand la sortie est corrompue par un bruit coloré et que la structure de ce bruit est bien connue. Il peut être également vu que les écarts-types de ces paramètres estimés sont très faibles.

TABLE 3.1 – Résultats de simulation de Monte Carlo, $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \in \tilde{\mathcal{M}}$

		$\hat{a}^0_{02}$	$\hat{a}^1_{02}$	$\hat{a}^0_{01}$	$\hat{a}^1_{01}$	$\hat{b}^0_{00}$	
Méthode	Valeur vraie	63	1.3	63	1	1	# iter
ILS	moyenne	63.19	1.31	62.99	0.99	0.99	25
	écart-type	1.21	0.07	0.04	0.01	0.01	-
RIVC	moyenne	63.19	1.31	62.99	0.99	0.99	28
	écart-type	1.22	0.07	0.04	0.01	0.01	-

3.8.2 Cas $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$

Les résultats de la simulation de Monte Carlo affichés dans le tableau 3.2 montrent que dans ce cas où la structure de bruit n'est pas connue, autrement dit que le système n'appartient pas à la classe de modèles considérés ($\mathcal{S}_{\text{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$), les estimées résultant de la méthode SILS sont biaisées, en particulier les paramètres $\hat{a}^1_{02}$ et $\hat{a}^0_{02}$ correspondant aux coefficients de diffusion. Ces résultats de faible qualité sont clairement dus à une mauvaise modélisation du bruit. Au contraire, malgré une structure de bruit différente de celle du système, la méthode fondée sur la IV délivre des estimés non biaisées avec de très faibles écarts-types.

En outre, on peut noter que le nombre d'itérations est identique pour les deux méthodes. De façon évidente, les méthodes fondées sur la IV présentent une bonne robustesse vis à vis des hypothèses concernant le bruit de mesure, contrairement aux méthodes fondées sur les LS qui sont sensibles à la structure de bruit.

TABLE 3.2 – Résultats de simulation de Monte Carlo, $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$

		$\hat{a}^0_{02}$	$\hat{a}^1_{02}$	$\hat{a}^0_{01}$	$\hat{a}^1_{01}$	$\hat{b}^0_{00}$	
Méthode	Valeur vraie	63	1.3	63	1	1	# iter
SILS	moyenne	-22.77	0.92	63.23	0.92	0.92	28
	écart-type	2.28	0.11	0.04	0.01	0.01	-
SRIVC	moyenne	63.17	1.31	62.99	0.99	0.99	26
	écart-type	2.31	0.11	0.04	0.01	0.01	-

3.8.3 Cas $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$ et échantillonnage spatial moins rapide

Dans cette situation, où l'on utilise les mêmes données de sortie que pour les cas 1 et 2, on suppose qu'un capteur sur deux seulement est disponible et donc que la sortie est corrompue par un bruit coloré.

L'objectif de ce contexte d'étude est de tester les performances des estimateurs dans une situation plus réaliste où l'échantillonnage spatial est plus dispersé. Ainsi, $\eth_{\tilde{\mathcal{M}}}$ est obtenu pour une période d'échantillonnage $h = 40m$, différente de celle ayant permis la génération des données de sortie initiales. Ce cas permet donc de se placer dans des conditions plus réaliste d'expérimentation. On remarque, d'après les résultats donnés au tableau 3.3, que les paramètres estimés sont biaisés pour les deux méthodes. Ce qui peut s'expliquer par la sensibilité des estimateurs vis-à-vis de la simulation des EDP (modèle auxiliaire) et des opérations de filtrage.
Ces résultats sont tout à fait prévisibles puisque l'hypothèse de départ supposant $\eth$ proche de ∂ n'est pas vérifiée. À partir de ces observations, plusieurs hypothèses peuvent être avancées :

- comme précédemment énoncé dans la sous-section (1.4.2.3) du chapitre 1, l'identification des paramètres peut être plus ou moins biaisée en fonction de l'erreur de troncature lors du filtrage et de la reconstruction signaux de sortie. Or, dans cet exemple, on augmente significativement cette erreur par l'augmentation de la période d'échantillonnage spatiale ;
- les coefficients de diffusion sont biaisés de façon plus importante, avec de plus grands écarts-types que les coefficients de dispersion. Ils peuvent alors être plus sensibles aux conditions de simulation et donc être plus difficiles à estimer ;
- le biais sur les paramètres permet de compenser l'augmentation de la période d'échantillonnage dans le schéma numérique pour la prédiction de la sortie non bruitée. On peut donc supposer que plusieurs jeux de paramètres peuvent répondre aux données.

Cette situation pouvant se rencontrer en pratique, il est alors intéressant d'analyser les capacités de prédiction du modèle estimé résultant.

TABLE 3.3 – Résultats de simulation de Monte Carlo, $\mathcal{S}_{\text{ADE}} \notin \tilde{\mathcal{M}}$ et échantillonnage spatial moins rapide

		$\hat{a}^0_{02}$	$\hat{a}^1_{02}$	$\hat{a}^0_{01}$	$\hat{a}^1_{01}$	$\hat{b}^0_{00}$	
Méthode	Valeur vraie	63	1.3	63	1	1	# iter
SILS	moyenne	-234.89	-0.47	31.76	0.23	0.28	44
	écart-type	6.39	0.27	0.57	0.06	0.01	-
SRIVC	moyenne	-157.14	-1.38	32.06	0.47	0.36	31
	écart-type	3.17	0.18	0.08	0.01	0.01	-

Les sorties simulées, affichées dans les figures 3.4 et 3.5, montrent que l'estimateur SILS délivre de mauvais résultats, la sortie est loin de la sortie réelle. Cette méthode n'est donc pas adaptée dans cette situation de données manquantes où $\eth_{\mathcal{S}} \neq \eth_{\tilde{\mathcal{M}}}$.
En revanche, contrairement à la méthode MCIS, les sorties simulées, obtenues par la méthode SRIV et affichées dans les figures 3.6 et 3.7, illustrent le bon comportement et les performances de l'approche. Même si, dans cette situation, les paramètres estimés sont biaisés, ils donnent de bons résultats pour la reconstruction de la sortie bruitée avec un faible écart-type dans ce cas où peu de données sont disponibles.

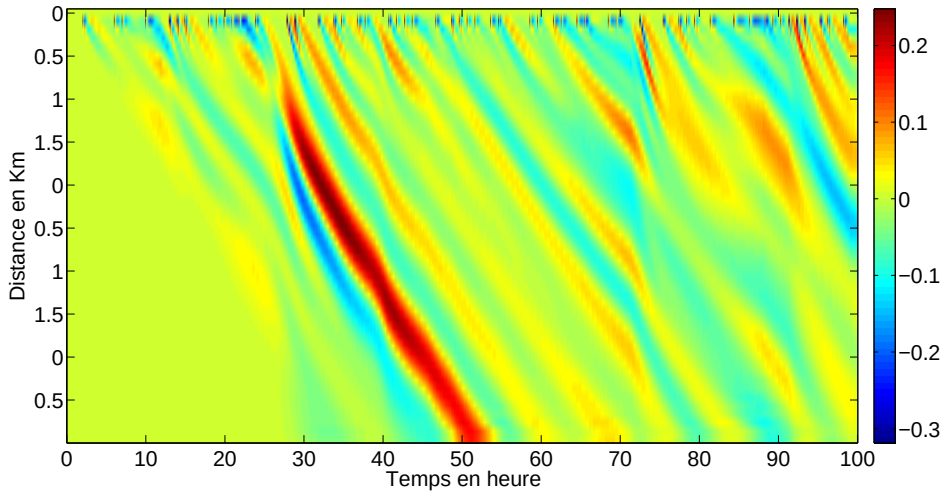

FIGURE 3.4 – Erreur entre la concentration déterministe et simulée du modèle pour la méthode SILS-EDP-LPV

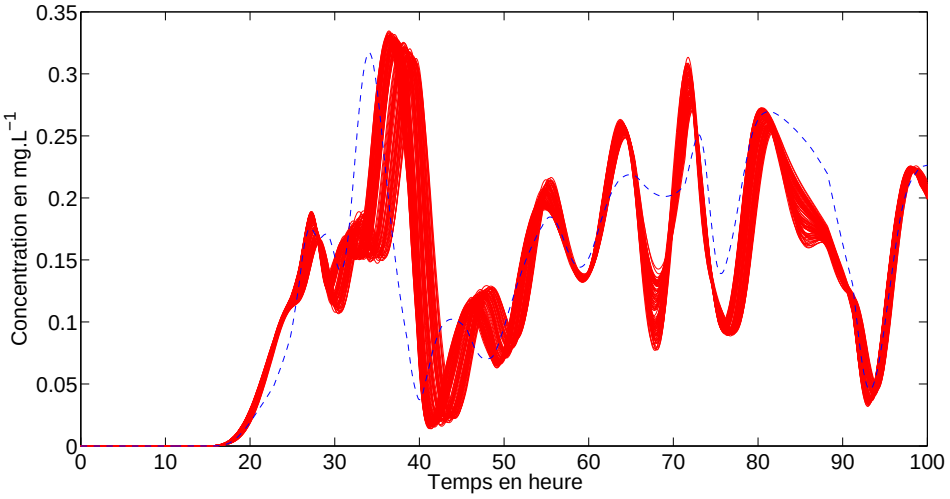

FIGURE 3.5 – Concentration prédite du modèle pour une simulation de Monte Carlo de 100 jeux de données (méthode SILS-EDP-LPV) pour $x = 1,2$km, les courbes rouges représentent les concentrations prédites, la courbe bleue représente la concentration déterministe

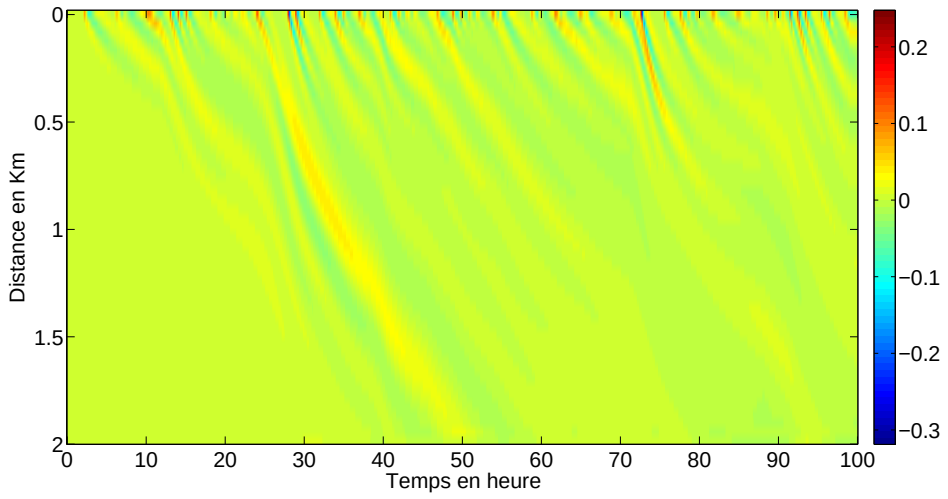

FIGURE 3.6 – Erreur entre la concentration déterministe et simulée du modèle pour la méthode SRIVC-EDP-LPV

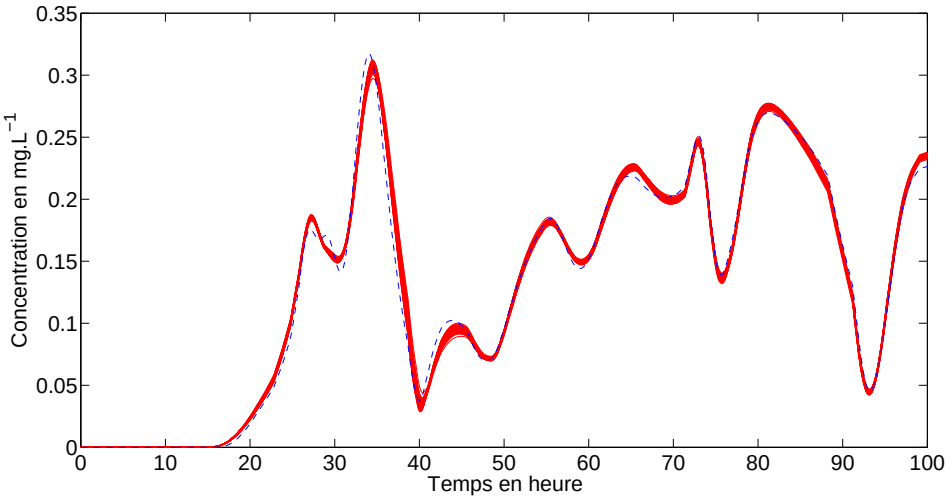

FIGURE 3.7 – Concentration prédite pour une simulation de Monte Carlo de 100 jeux de données (méthode SRIVC-EDP-LPV) pour $x = 1,2$km, les courbes rouges représentent les concentrations prédites, la courbe bleue représente la concentration déterministe

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre deux méthodes d'estimation directe ont été proposées pour identifier les modèles régis par les équations aux dérivées partielles linéaires à paramètres variants. Ces approches sont fondées sur une réécriture du système générant les données comme un système à multiples entrées pour une seule sortie. Les estimateurs émergeant de cette nouvelle formulation reposent sur une procédure itérative, et permettent d'obtenir des paramètres non biaisés dans ce cadre de la minimisation de l'erreur de prédiction. Un exemple réaliste, reposant sur des simulations de Monte Carlo, a été utilisé pour illustrer et comparer les performances des deux algorithmes proposés.

Comme premier estimateur, l'estimateur des moindres carrés itératif a été un choix naturel. Cette méthode est connue pour délivrer des estimées avec une variance minimale. Pourtant, comme illustré dans l'exemple développé, elle délivre des estimées biaisées lorsque la structure de bruit n'est pas connue ou en présence de données manquantes.

Finalement, un nouvel estimateur fondé sur la variable instrumentale raffinée a été développé, dans le but d'obtenir des estimées non biaisées, quelle que soit la structure de bruit. Cette méthode a prouvé sa supériorité pour l'estimation paramétrique des équations à paramètres variants et pour la reconstruction des signaux de sortie non bruités, même dans la situation où peu de données sont disponibles.

Cette partie du travail de thèse a fait l'objet d'une publication :
– pour un congrès international :

> **J. Schorsch**, M. Gilson, V. Laurain and H. Garnier (2013).
> Identification of LPV partial differential equation models,
> *52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2013), accepted*, Florence (Italy).

et d'une soumission en cours :
– pour une revue internationale :

> **J. Schorsch**, V. Laurain , M. Gilson and H. Garnier (2013).
> Parameter estimation of LPV-PDE models,
> *Automatica, submitted*.

Chapitre 4

Conclusion générale

Ce dernier chapitre rappelle, dans un premier temps, les différentes problématiques considérées dans la thèse, puis en donne les principales contributions, avant de détailler différentes perspectives de recherches.

4.1 Conclusion

Les systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles, également appelées systèmes à paramètres distribués, appartiennent à la classe des systèmes dynamiques impliquant des fonctions dépendantes de plusieurs variables dynamiques, comme le temps et l'espace. Déjà fortement répandus pour la modélisation mathématique de phénomènes physiques et environnementaux, ces systèmes ont un rôle toujours croissant dans les domaines de l'automatique et de la théorie des systèmes. Cette expansion, provoquée par les avancées technologiques (multiplications des capteurs, des données, ...) et par les nouveaux enjeux environnementaux, incite au développement et à la création de nouvelles thématiques de recherche. L'une de ces thématiques, appliquée à la théorie des systèmes, est l'étude des problèmes inverses et plus particulièrement l'identification paramétrique des équations aux dérivées partielles.

Par ailleurs, une multitude de méthodes est développée pour l'estimation paramétrique des équations différentielles ordinaires, contrairement aux équations aux dérivées partielles pour lesquelles très peu de méthodes d'identification sont disponibles.
Ayant pour objectif de contribuer activement au développement des méthodes d'estimation directes, ce manuscrit s'est concentré sur différentes classes de modèles régis par les équations aux dérivées partielles.

Pour ce faire, plusieurs éléments problématiques importants à prendre en compte, liés aux conditions d'expérimentation, à l'acquisition des données et aux développements mathématiques des estimateurs, ont été étudiés :

- les capteurs d'acquisition des données ne sont généralement pas placés selon des intervalles constants, les périodes d'échantillonnage associées sont donc généralement non uniformes ;
- les données acquises sont le plus souvent bruitées, il est donc important de développer des estimateurs robustes aux bruits ;
- la reconstruction des données de sortie non bruitées ;
- l'écriture des équations sous forme de fonctions de transfert ;
- l'estimation de modèles de bruits ;
- les paramètres peuvent varier au cours du temps selon une variable externe.

Cette thèse a donc apporté, de manière structurée, des solutions à chacun des problèmes précédemment énoncés.

Le chapitre 1 a d'abord décrit sommairement les équations aux dérivées partielles afin d'illustrer, grâce à des exemples explicatifs, les différentes classes régies par ces systèmes. Puis, les différentes problématiques liées à l'identification de ces équations ont été mises en exergue. Après une description détaillée des principales étapes de l'estimation paramétrique, une méthode a été proposée pour écrire les équations aux dérivées partielles sous forme de fonctions de transfert. Cette approche a reposé sur une discrétisation des opérateurs différentiels partiels, par des méthodes de discrétisation connues pour la modélisation mathématique des équations aux dérivées partielles. La réécriture obtenue a permis le rattachement à la théorie de l'estimation, très étendue dans le domaine des équations différentielles ordinaires, et a pu ainsi légitimer la suite de l'étude menée dans cette thèse.

Les équations aux dérivées partielles linéaires ont constitué un choix naturel pour l'étude des premiers estimateurs, menée dans le chapitre 2. Ces équations très répandues et simples à appréhender ont permis d'étendre des estimateurs classiques, développés en premier lieu dans le cadre des équations différentielles ordinaires, mais adaptés ici à l'estimation paramétrique des équations aux dérivées partielles.
L'identification des équations aux dérivées partielles non homogènes a d'abord été prise en compte dans un cadre d'entrée / sortie. Il a été considéré ici, que la sortie mesurée était corrompue par un bruit blanc, et que les signaux étaient acquis à partir d'un échantillonnage régulier. Plusieurs méthodes fondées sur la variable instrumentale dédiée aux équations non homogènes ont alors été proposées. L'estimateur de variable instrumentale raffinée pour les systèmes continus a fourni les meilleures estimées en termes de biais et de variance, même lorsque les hypothèses de bruits définies par le système n'étaient pas respectées.
Deux méthodes d'estimation pour l'identification des équations aux dérivées partielles homogènes ont ensuite été élaborées. Sous l'hypothèse d'une distribution non uniforme des capteurs, il a été supposé que les périodes d'échantillonnage spatial n'étaient pas constantes. La méthode fondée sur la variable instrumentale raffiné pour les systèmes continus a encore une fois montré sa supériorité.

Le chapitre 3 a ensuite traité de l'identification des équations aux dérivées partielles non linéaires, et plus particulièrement des équations à paramètres variants. Ces systèmes ayant l'avantage de prendre en compte les signaux extérieurs jouant un rôle dans leur dynamique, les équations associées présentent donc une structure simplifiée, tout en conservant la complexité de la dynamique observée. Les estimateurs développés dans le chapitre précédent n'ont pas pu être directement appliqués dans ce contexte où les paramètres varient au cours du temps et de l'espace. Une reformulation du modèle d'estimation a ainsi été proposée afin de se rattacher à un nouveau modèle linéaire en les paramètres. A partir de cette reformulation et du développement d'un critère de minimisation adapté, deux nouveaux estimateurs ont été proposés. Fondés sur les méthodes des moindres carrés et de la variable instrumentale, ils ont été construits à partir d'algorithmes itératifs, puis ont été comparés sur des signaux de sortie corrompus par un bruit coloré et pour différentes périodes d'échantillonnage (cas de données manquantes).

Les principales contributions de cette thèse sont les suivantes :
- la formulation des équations aux dérivées partielles sous forme de fonctions de transfert discrètes ;
- la proposition d'un estimateur fondé sur la variable instrumentale raffinée pour l'identification des modèles linéaires homogènes et non homogènes ;
- la prise en compte d'un maillage régulier et non régulier pouvant correspondre à une distribution uniforme et non uniforme des capteurs pour l'acquisition des données ;
- la proposition d'un estimateur fondé sur la variable instrumentale raffinée pour l'identification des modèles linéaires à paramètres variants et non homogènes ;
- la prise en compte des bruits de mesure lors de l'acquisition des données par des modèles Box-Jenkins et des modèles d'erreurs de sortie ;
- la reconstruction des données de sortie dans la situation où peu de données sont disponibles. Les périodes d'échantillonnage, pour la génération des signaux et pour l'estimation du modèle, ne sont pas identiques.

4.2 Perspectives

Cette thèse s'est focalisée sur le développement de méthodes d'estimation pour l'identification des équations aux dérivées partielles. Néanmoins, les travaux présentés constituent une base pour le développement de méthodes d'estimation dans les contextes suivants :
- lorsque quelques capteurs seulement sont disponibles. Dans cette thèse on s'est intéressé au cas où un nombre suffisant de capteurs était disponible, pour approcher correctement les dérivées ;
- le cas d'un algorithme itératif prenant en compte un choix adaptatif du maillage pour le filtrage des données ;
- le développement d'algorithme pour l'analyse de sensibilité des paramètres ;
- l'estimation des modèles linéaires à paramètres variants avec une structure de bruit également dépendante des signaux extérieurs ;
- amélioration de l'étape d'implémentation numérique pour la simulation des équations aux dérivées partielles ;
- identification de la non linéarité des modèles linéaires à paramètres variants ;
- effet de l'erreur d'approximation numérique ;
- convergence du processus itératif.

Finalement, les performances des méthodes développées durant cette thèse n'ont été illustrées que par des exemples de simulation. Ces exemples, même représentatifs, correspondent rarement aux conditions réelles observées lors des expériences. C'est pourquoi la prochaine étape de ce travail d'étude consistera à tester ces méthodes sur des données réelles, acquises au cours d'expériences empiriques.

Annexe A

Méthode de discrétisation des EDP et produit de convolution

Cet annexe a pour objectif de donner un exemple de formulation des EDP continues sous la forme d'un produit de convolution discret.

A.1 Méthodes de discrétisation

Les filtrages multidimensionnels impliqués dans les méthodes développées dans cette thèse, entraînent la résolution d'EDP. Cependant, comme précédemment établi dans la section (1.4.2.1), la plupart des EDP ne peuvent pas s'écrire sous une forme analytique. Une solution consiste à approcher les opérateurs différentiels en utilisant des méthodes numériques et d'écrire l'EDP sous forme discrète.
On trouve dans la littérature trois méthodes principales :

- la première méthode appelée *différences finies* (voir par exemple [MM05]) consiste à remplacer les dérivées partielles par un système de relations liant les valeurs des fonctions à dériver en certains points suffisamment proches les uns des autres. Cette méthode est simple à mettre en place avec des coûts de calcul modérés. Cependant, elle ne s'applique que lorsque le domaine d'étude est simple à mailler ;

- une seconde méthode, *les volumes finis* (voir par exemple [Lev02]) consiste à intégrer directement l'EDP sur le domaine d'étude. Cette méthode est très utile quand le maillage n'est pas structuré, cependant sa convergence et sa stabilité ne sont pas évidentes à prouver ;

- une troisième méthode, fondée sur la formulation variationnelle des EDP est la méthode des *éléments finis* (voir par exemple [Cla87]). Elle est adaptée pour la résolution des EDP quels que soient le domaine d'étude engagé et le maillage associé. Cependant, cette méthode est assez compliquée à mettre en œuvre et implique une grande charge de calcul.

La méthode des différences finies est choisie pour réaliser les opérations de filtrage. En plus d'être une technique simple d'utilisation, elle permet d'écrire les opérations sous une forme de fonction de transfert telle que décrite dans la section (1.4.2.1). Cette technique fondée sur l'utilisation des séries de Taylor permet d'approcher les dérivées partielles des fonctions considérées au point (t_k, x_ℓ).

A.1.1 Différences finies et séries de Taylor de degré 2

Après une discrétisation du domaine d'étude (voir figure A.1), les approximations polynomiales de Taylor du second ordre d'une fonction donnée f au voisinage du point $x = x_\ell$ sont définies comme

$$\begin{cases} f(x_\ell + h_{\ell+1}) &= f(x_\ell) + h_{\ell+1} f'(x_\ell) + \dfrac{h_{\ell+1}^2}{2} f''(x_\ell) + \mathcal{O}(h_{\ell+1}^2) \\ f(x_\ell - h_\ell) &= f(x_\ell) - h_\ell f'(x_\ell) + \dfrac{h_\ell^2}{2} f''(x_\ell) + \mathcal{O}(h_\ell^2) \end{cases} \tag{A.1}$$

où $\mathcal{O}(h_{\ell+1}^2)$ et $\mathcal{O}(h_\ell^2)$ sont les erreurs de troncatures locales, proportionnelles aux périodes d'échantillonnage.
Dans un souci de clarté, on se propose tout d'abord de considérer un échantillonnage constant en temps et en espace, *i.e.* $h_{\ell+1} = h_\ell$.

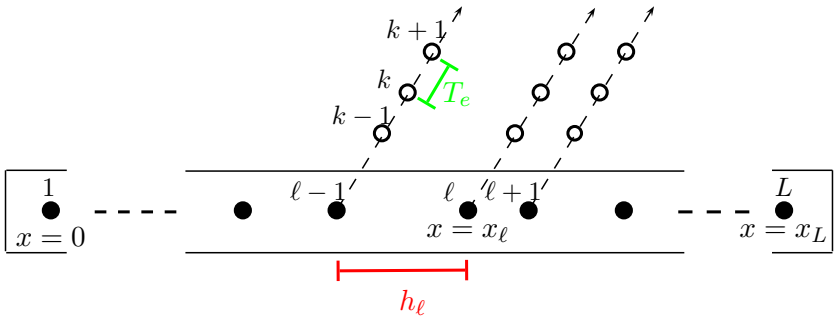

FIGURE A.1 – Discrétisation du domaine

Par manipulation algébrique, des schémas d'approximation d'Euler peuvent être élaborés pour approcher les dérivées d'ordre un :

$$\begin{cases} f'(x_\ell) &= \dfrac{f(x_\ell) - f(x_{\ell-1})}{h_\ell} + \mathcal{O}(h_\ell) & \text{schéma décentré à gauche ;} \\ f'(x_\ell) &= \dfrac{f(x_{\ell+1}) - f(x_\ell)}{h_\ell} + \mathcal{O}(h_\ell) & \text{schéma décentré à droite ;} \\ f'(x_\ell) &= \dfrac{f(x_{\ell+1}) - f(x_{\ell-1})}{2h_\ell} + \mathcal{O}(2h_\ell) & \text{schéma centré ;} \end{cases} \tag{A.2}$$

où $x_{\ell-1} = x_\ell - h_\ell$ et $x_{\ell+1} = x_\ell + h_\ell$.

De même, les dérivées d'ordre 2 peuvent être approchées par le schéma centré suivant :

$$f''(x_\ell) = \frac{f(x_{\ell-1}) - 2f(x_\ell) + f(x_{\ell+1})}{h_\ell^2} + \mathcal{O}(h_\ell^2). \tag{A.3}$$

A.1.2 Exemple : discrétisation de l'équation de la chaleur

On rappelle que l'équation de la chaleur continue s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \mathring{\chi}(t,x) - K\partial_x^2 \mathring{\chi}(t,x) = u(t,x), \\ \\ \mathring{\chi}(0,x) = \mathring{\chi}_0(x) \end{cases} \tag{A.4}$$

Cette équation contient deux termes dérivées, une dérivée partielle en temps d'ordre 1 et une dérivée partielle en espace d'ordre 2. On suppose que cette équation est soumise à des équations de bord de type Dirichlet, c'est-à-dire des conditions nulles au bord. À partir des versions discrétisées des dérivées établies précédemment, cette équation peut être récrite sous la forme discrète suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathring{\chi}(t_{k+1},x_l) - \mathring{\chi}(t_k,x_\ell)}{T_e} + \mathcal{O}(T_e) - K\left(\dfrac{\mathring{\chi}(t_k,x_{l-1}) - 2\mathring{\chi}(t_k,x_\ell) + \mathring{\chi}(t_k,x_{l+1})}{h_\ell^2} + \mathcal{O}(h_\ell^2)\right) = u(t_k,x_\ell), \\ \\ \mathring{\chi}(0,x_\ell) = \mathring{\chi}_0(x_\ell), \\ \\ \mathring{\chi}(t_k,0) = 0 \text{ et } \mathring{\chi}(t_k,L) = 0. \end{cases} \tag{A.5}$$

avec k un entier naturel appartenant à l'ensemble $\{1,\ 2,\cdots,\ N\}$ et ℓ un entier naturel appartenant à l'ensemble $\{1,\ 2,\cdots,\ L\}$.
Le schéma suivant consiste à approcher la suite $(\mathring{\chi}(t_k,x_\ell))_{1\le\ell\le L}^{1\le k\le N}$ (solution exacte inconnue) par la suite $(\mathring{\chi}_\ell^k)_{1\le\ell\le L}^{1\le k\le N}$ (solution approchée recherchée) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathring{\chi}_\ell^{k+1} - \mathring{\chi}_\ell^k}{T_e} - K\left(\dfrac{\mathring{\chi}_{\ell-1}^k - 2\mathring{\chi}_\ell^k + \mathring{\chi}_{\ell+1}^k}{h_\ell^2}\right) = u_\ell^k, \\ \\ \mathring{\chi}_\ell^0 = \mathring{\chi}_0(x_\ell), \\ \\ \mathring{\chi}(t_k,x_1) = 0 \text{ et } \mathring{\chi}(t_k,x_L) = 0. \end{cases} \tag{A.6}$$

Une fois l'équation discrétisée écrite, il est important de s'assurer de sa *stabilité*. Vérifier la stabilité de (A.6) revient à vérifier que le schéma suivant est stable :

$$\mathring{\chi}_\ell^{k+1} = \mathring{\chi}_\ell^k + K\frac{T_e}{h_\ell^2}\left(\mathring{\chi}_{\ell-1}^k - 2\mathring{\chi}_\ell^k + \mathring{\chi}_{\ell+1}^k\right) + T_e u_\ell^k. \tag{A.7}$$

La stabilité d'un schéma numérique traduit sa faculté à adopter un comportement régulier lors de l'introduction de toute perturbation due par exemple au mauvais calcul d'une condition aux limites ou d'une condition initiale. Autrement dit, le schéma est stable si toute perturbation d'origine numérique est amortie ou au mieux non amplifiée.

Néanmoins, la preuve de la stabilité d'un schéma numérique acquis par les différences finies n'est qu'une étape dans l'étude mathématique des EDP discrétisées servant à vérifier leur *convergence*, c'est-à-dire à s'assurer que la solution approchée tend vers la solution continue.

Il est donc également nécessaire de définir la *consistance* du schéma. Un schéma aux différences finies est consistant si l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque les périodes d'échantillonnage T_e et h tendent vers zéro indépendamment.

A.1.2.1 Etude de la consistance

En remplaçant dans l'équation (A.7) la solution approchée par la solution exacte, on fait apparaître l'erreur de troncature ϵ :

$$\epsilon_\ell^{k+1} = \frac{\mathring{\chi}(t_{k+1}, x_\ell) - \mathring{\chi}(t_k, x_\ell)}{T_e} - K\frac{\mathring{\chi}(t_k, x_{\ell+1}) - 2\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + \mathring{\chi}(t_k, x_{\ell-1})}{h_\ell^2} - u(t_k, x_\ell). \tag{A.8}$$

D'après les formules de Taylor (A.2)-(A.3)), on a :

$$\frac{\mathring{\chi}(t_{k+1}, x_\ell) - \mathring{\chi}(t_k, x_\ell)}{T_e} = \frac{\partial \mathring{\chi}}{\partial t}(t_k, x_\ell) + \mathcal{O}(T_e) \tag{A.9}$$

$$\frac{\mathring{\chi}(t_k, x_{\ell+1}) - 2\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) + \mathring{\chi}(t_k, x_{\ell-1})}{h_\ell^2} = \frac{\partial^2 \mathring{\chi}}{\partial x^2}(t_k, x_\ell) + \mathcal{O}(h_\ell^2) \tag{A.10}$$

pour tout $2 \leq \ell \leq L-1$, $1 \leq k \leq N-1$. Ainsi, on obtient :

$$\epsilon(t_{k+1}, x_\ell) = \mathcal{O}(T_e) + \mathcal{O}(h_\ell^2). \tag{A.11}$$

L'erreur de troncature du schéma discrétisé est définie par :

$$\epsilon := max\{|\epsilon_\ell^k|;\ 2 \leq \ell \leq L-1,\ 1 \leq k \leq N\}. \tag{A.12}$$

L'erreur de troncature diminuant avec les pas de discrétisation, le schéma (A.7) est dit consistant.

A.1.2.2 Etude de la stabilité

Pour étudier la stabilité, il est possible de passer par l'étude de l'énergie $\mathcal{E}$ (majoration de l'énergie, énergie discrète ou continue).
À partir de la définition donnée par

$$\mathcal{E}^k = \frac{h_\ell}{2}\sum_{\ell=1}^{L}(\mathring{\chi}_\ell^k)^2, \tag{A.13}$$

on a

$$\frac{2}{h_\ell}[\mathcal{E}^{k+1} - \mathcal{E}^k] = \sum_{\ell=2}^{L-1}\left(\mathring{\chi}_\ell^k + \frac{KT_e}{h_\ell^2}(\mathring{\chi}_{\ell+1}^k - 2\mathring{\chi}_\ell^k + \mathring{\chi}_{\ell-1}^k)\right)^2 - \sum_{\ell=2}^{L-1}(\mathring{\chi}_\ell^k)^2 \tag{A.14}$$

$$= 2\frac{KT_e}{h_\ell^2}\underbrace{\sum_{\ell=2}^{L-1}\mathring{\chi}_\ell^k(\mathring{\chi}_{\ell+1}^k - 2\mathring{\chi}_\ell^k + \mathring{\chi}_{\ell-1}^k)}_{A^k} + \frac{K^2T_e^2}{h_\ell^4}\underbrace{\sum_{\ell=2}^{L-1}(\mathring{\chi}_{\ell+1}^k - 2\mathring{\chi}_\ell^k + \mathring{\chi}_{\ell-1}^k)^2}_{B^k}, \tag{A.15}$$

soit,

$$\frac{2}{h}[\mathcal{E}^{k+1} - \mathcal{E}^k] = 2\frac{KT_e}{h_\ell^2}A^k + \frac{K^2T_e^2}{h_\ell^4}B^k. \tag{A.16}$$

Or,

$$A^k = -\sum_{\ell=2}^{L}(\mathring{\chi}_\ell^k - \mathring{\chi}_{\ell-1}^k)^2, \tag{A.17}$$

$$B^k \leq 4\sum_{\ell=2}^{L}(\mathring{\chi}_\ell^k - \mathring{\chi}_{\ell-1}^k)^2. \tag{A.18}$$

On a donc :

$$\frac{2}{h_\ell}[E^{n+1} - E^n] \leq \underbrace{\frac{2KT_e}{h_\ell^2}}_{\geq 0}[-1 + \frac{KT_e}{h_\ell^2}]\underbrace{\sum_{\ell=2}^{L}(\mathring{\chi}_\ell^k - \mathring{\chi}_{\ell-1}^k)^2}_{\geq 0}.$$

L'énergie décroît si $-1 + \frac{KT_e}{h_\ell^2} \leq 0$, impliquant la stabilité du schéma.
On appelle cette condition, la condition de CFL (Courant, Friedrichs, Lewy). La stabilité et la consistance impliquant la convergence de la solution approchée vers la solution exacte, on peut alors conclure que notre schéma est convergent.

Une autre solution pour satisfaire les conditions de stabilité du schéma est de vérifier que la combinaison de $\mathring{\chi}_\ell^k$, $\mathring{\chi}_{\ell+1}^k$ et $\mathring{\chi}_{\ell-1}^k$ soit convexe. Dans cet exemple, la combinaison de $\mathring{\chi}_\ell^k$, $\mathring{\chi}_{\ell+1}^k$ et $\mathring{\chi}_{\ell-1}^k$ est convexe si et seulement si :

1. $1 - 2\dfrac{KT_e}{h_\ell^2} \geq 0$;
2. $\dfrac{KT_e}{h_{\ell^2}} \geq 0$.

A.2 Fonction de transfert de l'équation de la chaleur

Soit l'équation (A.5), sous l'hypothèse que les périodes d'échantillonnage T_e et h_ℓ tendent simultanément vers zéro et que la solution exacte est connue, l'équation (A.4) peut être formulée par

$$\begin{cases} \eth_t\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) - K\eth_x^2\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = u(t_k, x_\ell), \\ \mathring{\chi}(0, x_\ell) = \mathring{\chi}_0(x_\ell) \end{cases} \tag{A.19}$$

soit

$$\begin{cases} (\eth_t - K\eth_x^2)\mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = u(t_k, x_\ell), \\ \mathring{\chi}(0, x_\ell) = \mathring{\chi}_0(x_\ell) \end{cases} \tag{A.20}$$

dont les opérateurs discrets aux dérivées partielles sont définis par

$$\begin{cases} \eth_t = \dfrac{1}{T_e} q_t^{+1} - \dfrac{1}{T_e} q_t^0 \\ \eth_x^2 = \dfrac{1}{h_\ell^2} q_x^{+1} - \dfrac{2}{h_\ell^2} q_x^0 + \dfrac{1}{h_\ell^2} q_x^{-1}. \end{cases} \tag{A.21}$$

Finalement, lorsque $h_\ell \to 0$ et $T_e \to 0$ simultanément et pour ℓ appartenant à $\{2,\ 3, \cdots,\ L-1\}$, l'équation A.4 peut s'écrire sous la forme d'une fonction de transfert à temps et espace discrets :

$$\begin{cases} \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = G_\ell(q_t, q_x) u(t_k, x_\ell) \\ \mathring{\chi}(0, x_\ell) = \mathring{\chi}_{\mathrm{o}}(x_\ell) \end{cases} \tag{A.22}$$

où $G_\ell(q_t, q_x)$ est une fonction de transfert causale en temps mais non causale en espace défini par

$$G_\ell(q_t, q_x) = \frac{T_e}{q_t^{+1} q_x^0 + \frac{KT_e}{h_\ell^2} q_t^0 q_x^{+1} + (1 - \frac{2KT_e}{h_\ell^2}) q_t^0 q_x^0 + \frac{KT_e}{h_\ell^2} q_t^0 q_x^{-1}}. \tag{A.23}$$

Cette fonction est stable sous la condition de CFL suivante :

$$-1 + \frac{kT_e}{h_\ell^2} \leq 0. \tag{A.24}$$

Pour $\ell = 1$ et $\ell = L$ (valeurs correspondantes aux conditions aux limites), la fonction de transfert associée dépend des conditions établies par l'utilisateur. Si celles-ci sont considérées nulles, les fonctions de transfert associées sont supposées nulles.
Ainsi, de manière générale, l'écriture d'une fonction de transfert $G(q_t, q_x)$ peut être schématisée par la figure A.2).

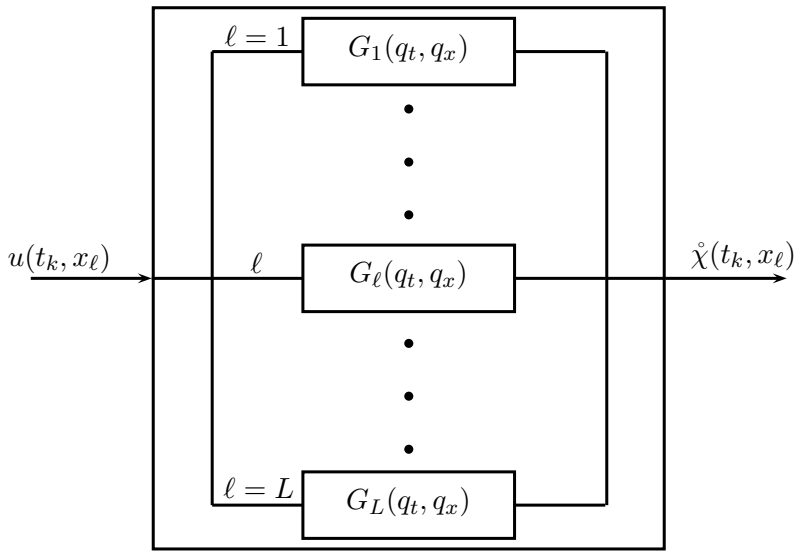

FIGURE A.2 – Schématisation d'une fonction de transfert discrète $G(q_t, q_x)$

Annexe B

Estimateurs pour l'identification de l'équation advection-diffusion

Cet annexe a pour objectif de développer les estimateurs LSSVF-EAD et SRIVC-EAD proposés dans la section 2.2.

B.1 Estimateur LSSVF-EAD

Considérons d'abord le problème d'identification dans un cas non bruité. L'EAD développée dans (2.64) prend la forme

$$\eth_t \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = a_{20} \eth_x^2 \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) - a_{10} \eth_x \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) \tag{B.1}$$

Soit $F(\eth_t, \eth_x)$ un filtre linéaire appliqué à (B.1),

$$\eth_t F(\eth_t, \eth_x) \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) = a_{20} \eth_x^2 F(\eth_t, \eth_x) \mathring{\chi}(t_k, x_\ell) - a_{10} \eth_x F(\eth_t, \eth_x) \mathring{\chi}(t_k, x_\ell), \tag{B.2}$$

et $F^{(i_t, i_x)}(\eth_t, \eth_x)$ pour $i_x = 0, 1, 2$ et $i_t = 0, 1$ un ensemble de filtres défini comme

$$F^{(i_t, i_x)}(\eth_t, \eth_x) = \eth_t^{i_t} \eth_x^{i_x} F(\eth_t, \eth_x). \tag{B.3}$$

En utilisant les filtres définis dans (B.3), (B.2) peut être écrit comme

$$\mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(0,1)}(t_k, x_\ell) = a_{20} \mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(2,0)}(t_k, x_\ell) - a_{10} \mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(1,0)}(t_k, x_\ell) \tag{B.4}$$

où

$$\mathring{\chi}_{\mathrm{f}}^{(i_t, i_x)}(t_k, x_\ell) = F^{(i_t, i_x)}(\eth_t, \eth_x) \mathring{\chi}(t_k, x_\ell). \tag{B.5}$$

Considérons maintenant la situation où un bruit additif corrompt la mesure de sortie, l'équation (B.4) peut être récrite sous forme de régression linéaire

$$y_{\mathrm{f}}^{(0,1)}(t_k, x_\ell) = \varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) \theta + v_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell), \tag{B.6}$$

avec

$$\varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) = \left[y_{\mathrm{f}}^{(2,0)}(t_k, x_\ell) \quad - y_{\mathrm{f}}^{(1,0)}(t_k, x_\ell) \right]. \tag{B.7}$$

et

$$v_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = A(\eth_t, \eth_x, \theta) F(\eth_t, \eth_x) e(t_k, x_\ell). \tag{B.8}$$

L'estimateur des LSSVF pour les modèles EAD (noté LSSVF-EAD dans la suite) peut être calculé à partir des estimations suivantes

$$\hat{\theta}_{\mathrm{LSSVF-EAD}} = \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) \varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \varphi_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y_{\mathrm{f}}^{(0,1)}(t_k, x_\ell) \right] \tag{B.9}$$

à condition que la matrice inverse existe.

Remarques :

- pour estimer au mieux les dérivées partielles lors du filtrage des données et éviter ainsi des perturbations liées aux conditions initiales, on considère les conditions aux limites initiales et aux limites nulles ;

Néanmoins, pour les mêmes raisons que l'estimateur LSSVF, les estimées obtenues par LSSVF-EAD sont biaisées dans la situation pratique où les mesures de sortie spatio-temporelles sont contaminées par un bruit de mesure.

Une méthode performante permettant d'éliminer le biais asymptotique des estimées par LS est donc d'utiliser une méthode fondée sur la IV vue dans la section (2.1).

B.2 Estimateur SRIVC-EAD

Suivant les conditions développées dans les sections (1.5) et (2.1.5.1) pour l'obtention d'estimées convergentes avec de faibles écarts-types, un estimateur noté SRIVC-EAD est proposé ici afin de traiter le cas de l'identification des modèles ADE. Les conditions pour obtenir des estimées non biaisées deviennent alors :

$$\begin{cases} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) = F(\eth_t, \eth_x) \mathring{\varphi}(t_k, x_\ell) & \text{(B.10a)} \\ F_{\mathrm{SRIVC-EAD}}(\eth_t, \eth_x) = \dfrac{1}{A(\eth_t, \eth_x)}. & \text{(B.10b)} \end{cases}$$

Le filtre $F_{\mathrm{SRIVC-EAD}}(\eth_t, \eth_x) = \frac{1}{A(\eth_t, \eth_x)}$ a deux utilités, il sert à la fois au filtrage des données pour l'approximation des dérivées partielles et au blanchiment du bruit défini dans (B.8).

Cependant, les filtres et les instruments exigent la connaissance *a priori* du modèle vrai. C'est un dilemme habituel rencontré dans les problèmes d'optimisation. Comme dans le cas de l'estimateur SRIV-EDP, la méthode de la VI raffinée proposée ici utilise une procédure itérative dans laquelle, à chaque itération, le modèle auxiliaire est utilisé pour générer la variable instrumentale et les filtres, à partir des paramètres obtenus à l'itération précédente.

Algorithme SRIVC-EAD

En tenant compte de ces considérations, l'algorithme d'identification SRIVC-EAD peut maintenant être résumé comme suit.

(i) Initialisation
Estimation initiale des paramètres $\hat{\theta}^0$ en utilisant les estimées obtenues par LSSVF-EAD.
Construction du filtre initial $\hat{F}_{\mathrm{SRIVC-EAD}}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^0) = \frac{1}{A(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}_{\mathrm{LSSVF-EAD}})}$, $iter = 1$.

(ii) Calcul d'une estimation de la sortie non filtrée $\hat{\mathring{\chi}}(t,x)$ par simulation du modèle auxiliaire

$$\hat{A}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{iter-1})\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell) = 0 \tag{B.11}$$

sujet aux conditions initiales et aux conditions de bord, et fondé sur les paramètres estimés $\hat{\theta}^{iter-1}$.

(iii) Calcul

$$\begin{cases} y_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVC-EAD}}^{(i_t,i_x)}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{iter-1})y(t_k, x_\ell) \\ \hat{\mathring{\chi}}_{\mathrm{f}}^{(i_t,i_x)}(t_k, x_\ell) = F_{\mathrm{SRIVC-EAD}}^{(i_t,i_x)}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{iter-1})\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell) \end{cases} \tag{B.12}$$

avec

$$F_{\mathrm{SRIVC-EAD}}^{(i_t,i_x)}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{iter-1}) = \frac{\eth_t^{i_t}\eth_x^{i_x}}{\hat{A}(\eth_t, \eth_x, \hat{\theta}^{iter-1})} \tag{B.13}$$

avec $i_x = 0, 1, 2$ et $i_t = 0, 1$.
Pré-filtrage de la sortie $y(t_k, x_\ell)$ et de la sortie non bruitée $\hat{\mathring{\chi}}(t_k, x_\ell)$ obtenue à partir du modèle auxiliaire par le filtre $F_{\mathrm{SRIVC-EAD}}^{(i_t,i_x)}$.

(iv) Construction du régresseur

$$\varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) = \left[y_{\mathrm{f}}^{(2,0)}(t_k, x_\ell) \quad - y_{\mathrm{f}}^{(1,0)}(t_k, x_\ell) \right], \tag{B.14}$$

ainsi que de l'instrument

$$\zeta_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) = \left[\hat{\mathring{\chi}}_{\mathrm{f}}^{(2,0)}(t_k, x_\ell) \quad - \hat{\mathring{\chi}}_{\mathrm{f}}^{(1,0)}(t_k, x_\ell) \right]. \tag{B.15}$$

Calcul de l'estimation par variable instrumentale

$$\hat{\theta}_{\mathrm{SRIVC-EAD}}^{iter} = \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell)\varphi_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}(t_k, x_\ell) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \zeta_{\mathrm{f}}(t_k, x_\ell) y_{\mathrm{f}}^{(0,1)}(t_k, x_\ell) \right] \tag{B.16}$$

où $\hat{\theta}_{\mathrm{SRIVC-EAD}}^{iter}$ est l'estimation de la IV à l'itération $iter$ fondée sur les données filtrées.
Répétition des étapes (2) à (4) jusqu'à ce que la variation relative sur les paramètres soit faible ou bien que le nombre d'itérations soit atteint.

L'algorithme proposé implique des opérations de filtrage. Cependant, ces filtrages sont supposés satisfaire les conditions d'un échantillonnage non uniforme en espace.

Annexe C

Discrétisation de l'équation d'advection-diffusion

Cet annexe a pour objectif de donner un exemple de schéma de discrétisation pour l'équation d'advection diffusion.

C.1 Rappel : équation d'advection-diffusion complète

Pour illustrer la méthode décrite ci-dessus, considérons l'équation (3.7)

$$\begin{cases} \partial_t \mathring{\chi}(t,x) & = \mathring{a}_{20}\partial_x^2 \mathring{\chi}(t,x) - \mathring{a}_{10}\partial_x \mathring{\chi}(t,x) \text{ sur }]0,T] \times]0,x_{\mathrm{L}}[\\ \mathring{\chi}(t,x) & = \mathring{u}_{\partial\Omega}(x,t) \text{ sur } [0,T] \times \{0,x_{\mathrm{L}}\} \\ \mathring{\chi}(0,x) & = \mathring{\chi}_0(x) \text{ sur }]0,x_{\mathrm{L}}[\end{cases} \tag{C.1}$$

avec $\partial\Omega = \{0, x_{\mathrm{L}}\}$ et $\Omega =]0, x_{\mathrm{L}}[$.

La condition initiale est supposée nulle :

$$\mathring{\chi}_0(x) = 0 \ \forall \ x \in]0, x_{\mathrm{L}}[\,. \tag{C.2}$$

Physiquement, cela implique qu'il n'y a pas de présence de polluant dans la rivière à l'instant $t = 0$.
Les conditions aux limites sont définies par

$$\mathring{u}_{\partial\Omega}(t,x) = \begin{cases} \mathring{u}_{\partial\Omega_{\mathrm{g}}}(t) = \mathring{u}(t) & \forall \ t \in [0,T] \text{ si } x = 0 \text{ (En amont)} \\ \mathring{u}_{\partial\Omega_{\mathrm{d}}}(t) = 0 & \forall \ t \in [0,T] \text{ si } x = x_{\mathrm{L}} \text{ (En aval).} \end{cases} \tag{C.3}$$

Ce qui signifie que l'on injecte en amont de la rivière un polluant, symbolisé par la variable $\mathring{u}(t)$. Ce polluant est supposé complètement se dissoudre dans l'eau après un certain laps de temps, ce qui explique des conditions de bord nulles en aval de la rivière.

C.2 Différences finies pour l'équation d'advection-diffusion

Sur le même principe des différences finies développées dans l'annexe A, les dérivées secondes sont approchées par les différences finies centrées :

$$f''(x_\ell) \approx \frac{f(x_{\ell+1}) - f(x_\ell)}{h_{\ell+1}^2} + \frac{f(x_{\ell-1}) - f(x_\ell)}{h_\ell^2} + \left(\frac{1}{h_\ell} - \frac{1}{h_{\ell+1}}\right) f'(x_\ell) \tag{C.4}$$

où $x_{\ell+1} = x_\ell + h_{\ell+1}$.

A partir de ces discrétisations simples, il est possible de définir des schémas de discrétisation pour approcher les équations aux dérivées partielles. Un exemple est proposé dans la suite.

Après une description complète de l'EAD, un schéma de discrétisation associé à l'équation est proposé. Pour une meilleure compréhension, on suppose que le système est utilisé pour reproduire le comportement de dispersion et de transport d'un polluant dans une rivière.

C.3 Discrétisation de l'EAD

En utilisant une différence finie décentrée à l'instant t_k et les approximations des dérivées définies dans (A.2) et (C.4), une équation de récurrence est proposée pour approcher l'EDP définie dans (C.1) :

$$\frac{\mathring{\chi}_\ell^{k+1} - \mathring{\chi}_\ell^k}{T_e} = \mathring{a}_{20}\left[\frac{\mathring{\chi}_{\ell+1}^k - \mathring{\chi}_\ell^k}{h_{\ell+1}^2} + \frac{\mathring{\chi}_{\ell-1}^k - \mathring{\chi}_\ell^k}{h_\ell^2} + \left(\frac{1}{h_\ell} - \frac{1}{h_{\ell+1}}\right)\left(\frac{\mathring{\chi}_\ell^k - \mathring{\chi}_{\ell-1}^k}{h_\ell}\right)\right] - \mathring{a}_{10}\frac{\mathring{\chi}_\ell^k - \mathring{\chi}_{\ell-1}^k}{h_\ell} \tag{C.5}$$

avec $k = \{1, \cdots, N-1\}$ et $\ell = \{2, \cdots, L-1\}$.
Les points $\mathring{\chi}_\ell^k$ représentent les approximations numériques de $\mathring{\chi}(t_k, x_\ell)$.

Indépendamment, les conditions aux limites et les conditions initiales sont discrétisées par :

$$\begin{cases} \mathring{u}_{\partial\Omega_\mathrm{g}}(t_k) = u^k & \forall\ k \in \{1, \cdots, N\} \quad \text{pour } x = 0; \\ \mathring{u}_{\partial\Omega_\mathrm{d}}(t_k) = 0 & \forall\ k \in \{1, \cdots, N\} \quad \text{pour } x = x_\mathrm{L}; \\ \mathring{\chi}_0(x_\ell) = 0 & \forall\ \ell \in \{1, \cdots, L\} \quad \text{pour } t = 0. \end{cases} \tag{C.6}$$

Finalement, le schéma (C.5) peut être récrit comme suit :

$$\mathring{\chi}_\ell^{k+1} = \alpha_{-1}(h_\ell, h_{\ell-1})\mathring{\chi}_{\ell-1}^k + \alpha_0(h_\ell, h_{\ell-1})\mathring{\chi}_\ell^k + \alpha_1(h_\ell, h_{\ell-1})\mathring{\chi}_{\ell+1}^k \tag{C.7}$$

où α_{-1}, α_0 et α_1 sont des coefficients variants, dépendant des périodes d'échantillonnage :

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= \mathring{a}_{20}T_e\left[\frac{1}{h_\ell^2} - \left(\frac{1}{h_\ell} - \frac{1}{h_{\ell+1}}\right)\frac{1}{h_\ell}\right] + \frac{\mathring{a}_{10}T_e}{h_\ell}; \\ \alpha_0 &= 1 - \mathring{a}_{20}T_e\left[\left(\frac{1}{h_\ell^2} + \frac{1}{h_{\ell+1}}\right) - \left(\frac{1}{h_\ell} - \frac{1}{h_{\ell+1}}\right)\frac{1}{h_\ell}\right] - \frac{\mathring{a}_{10}T_e}{h_\ell}; \\ \alpha_1 &= \frac{\mathring{a}_{20}T_e}{h_{\ell+1}^2}. \end{aligned} \tag{C.8}$$

C.4 Consistance et stabilité

Consistance

Par une étude similaire que celle développée dans l'annexe A, le schéma (C.5) est consistant d'ordre $\mathcal{O}(T_e, \max_\ell(h_\ell))$.

Stabilité

Le schéma (C.5) est stable si et seulement si la combinaison de $\mathring{\chi}_\ell^k$, $\mathring{\chi}_{\ell+1}^k$ et $\mathring{\chi}_{\ell-1}^k$ est convexe, soit si :

1. $\alpha_{-1} \geq 0$;
2. $\alpha_0 \geq 0$;
3. $\alpha_1 \geq 0$.

De toute évidence, les coefficients α_{-1} et α_1 sont toujours positifs. La condition de stabilité dépend donc de la positivité du coefficient α_0.

$$\alpha_0 \geq 0 \tag{C.9}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathring{a}_{20} T_e \left[\left(\frac{1}{h_\ell^2} + \frac{1}{h_{\ell+1}} \right) - \left(\frac{1}{h_\ell} - \frac{1}{h_{\ell+1}} \right) \frac{1}{h_\ell} \right] - \frac{\mathring{a}_{10} T_e}{h_\ell} \geq 0 \tag{C.10}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathring{a}_{20} T_e \left(\frac{1}{h_{\ell+1}} + \frac{1}{h_\ell h_{\ell+1}} \right) - \frac{\mathring{a}_{10} T_e}{h_\ell} \geq 0 \tag{C.11}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathring{a}_{20} T_e \left(\frac{1}{h_{\ell+1}} + \frac{1}{h_\ell h_{\ell+1}} \right) + \frac{\mathring{a}_{10} T_e}{h_\ell} \leq 1 \tag{C.12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathring{a}_{20}}{\min\limits_\ell h_\ell} + \frac{\mathring{a}_{20}}{(\min\limits_\ell h_\ell)^2} + \frac{\mathring{a}_{10}}{\min\limits_\ell h_\ell} \leq \frac{1}{T_e} \tag{C.13}$$

Ainsi sous la condition de CFL définie dans (C.13), le schéma numérique (C.5) est stable.

Bibliographie

[AAAW11] M. Ali, A. Ali, H. Abbas, and H. Werner. Identification of Box-Jenkins models for parameter-varying spatially interconnected systems. *American Control Conference (ACC), San Francisco (USA)*, pages 145–150, 2011.

[AACW11] M. Ali, A. Ali, S. S. Chughtai, and H. Werner. Consistent identification of spatially interconnected systems. In *American Control Conference (ACC)*, pages 3583 – 3588, San Francisco, CA, USA, June 29-July 1 2011.

[ACW10a] M. Ali, S. S. Chughtai, and H. Werner. Consistent identification of two-dimensional systems. In *American Control Conference Baltimore USA*, pages 3464–3469, June 30 - July 02 2010.

[ACW10b] M. Ali, S. S. Chughtai, and H. Werner. Identification of LPV models for spatially varying interconnected systems. *Proc. of American Control Conference*, pages 3889–3894, 2010.

[Ame72] A. F. Ames. *Nonlinear partial differential equations in engineering*. Mathematics in science and engineering : a series in monographs and textbooks. Elsevier Science & Technology, Burlington, 1972.

[BBL00] J.L. Battaglia, J. Ch. Batsale, and L. Le Lay. Heat flux estimation through inverted non-integer identification models. *International Journal of Thermal Sciences*, 39(3) :374–389, 2000.

[BDG05] G. Belforte, F. Dabbene, and P. Gay. LPV approximation of distributed parameter systems in environmental modelling. *Environmental Modelling and Software*, 20 :1063–1070, 2005.

[BJ70] G.E.P. Box and G.M. Jenkins. *Time series analysis forecasting and control*. Holden-Day, San Francisco, 1970.

[BK92] H.T. Banks and K. Kunisch. *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems*. Birkhauser Boston Inc, 1992.

[BN73] B.K. Bhagavan and L.R. Nardizzi. Parameter identification in linear distributed systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-18(6) :677–679, 1973.

[Bre10] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

[Can84] J.R. Cannon. *The one-dimensional heat equation*, volume 23. Cambridge University Press, 1984.

[Car39] T. Carleman. Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Almqvist & Wiksell*, 1939.

[CB01] D. Coca and S.A. Billings. Identification of coupled map lattice models of complex spatio-temporal patterns. *Physics Letters A*, 287 :65–73, 2001.

[CB02] D. Coca and S. A. Billings. Identification of finite dimensional models of infinite dimensional dynamical systems. *Automatica*, 38 :1851–1865, may 2002.

[CCR13] C. Chochol, S. Chesne, and D. Remond. An original differentiation tool for identification on continuous structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(13) :3338–3350, 2013.

[Cla87] J. Claes. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987.

[CM09] R. F. Curtain and K. Morris. Transfer function of distributed parameter systems : A tutorial. *Automatica*, 45 :1101–1116, 2009.

[CN47] J. Crank and P. Nicolson. A practical method for numerical evaluation of solutions partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43 :50–67, 1947.

[CPDP13] M. Ciss, N. Parisey, C.-A. Dedryver, and J.-S. Pierre. Understanding flying insect dispersion : Multiscale analyses of fragmented landscapes. *Ecological Informatics*, In press, 2013.

[CVJ99] C.T. Chou, M. Verhaegen, and R. Johansson. Continuous-time identification of SISO systems using Laguerre functions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(2) :349–362, 1999.

[CZ91] R. F. Curtain and H. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Mathematics Subject Classifications. Springer-Verlag New York, 1991.

[DSC11] F. Ding, Y. Shi, and T. Chen. Auxiliary model-based least-squares identification methods for Hammerstein output-error systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 62 :4015–4020, 2011.

[Dur54] J. Durbin. Errors in variables. *Review of the international statistical institute*, 22 :23–32, 1954.

[Eyk74] P. Eykhoff. *System identification - Parameter and state estimation*. John Wiley and Sons, 1974.

[FWFL11] H. Fang, J. Wang, E. Feng, and Z. Li. Parameter identification and application of a distributed parameter coupled system with a movable inner boundary. *Computers and Mathematics with Applications*, 62 :4015–4020, 2011.

[GB06] L. Guo and S. A. Billings. Identification of partial differential equation models for continuous spatio-temporal dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 53(8) :657–661, August 2006.

[GB08] L.Z. Guo and S. A. Billings. Identification and analysis of spatio-temporal dynamical systems using wavelets. *International Journal of Systems Science*, 39(3) :315–334, March 2008.

[GE10] F. Giri and E. W. Bai (Eds.). *Block-oriented nonlinear system identification*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[GGdH04] M. Gilson, H. Garnier, and P. Van den Hof. Instrumental variable methods for continuous-time model identification in closed-loop. In *American Control Conference (ACC'2004)*, Boston, MA (USA), June 2004.

[GGH03] H. Garnier, M. Gilson, and E. Huselsein. Developments for the Matlab CONTSID toolbox. In *13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID'2003)*, pages 1007–1012, Rotterdam (The Netherlands), August 2003.

[GGL09] H. Garnier, M. Gilson, and V. Laurain. The CONTSID toolbox for Matlab : extensions and latest developments. *15th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2009), Saint-Malo, France*, July 2009.

[GGR06] H. Garnier, M. Gilson, and A. Richard. CONTSID : a Matlab toolbox for direct continuous-time model identification from sampled data. Angers (France), mars 2006.

[GGYdH08] M. Gilson, H. Garnier, P.C. Young, and P. Van den Hof. Instrumental variable methods for closed-loop continuous-time model identification. *Identification of continuous-time models from sampled data, H. Garnier and L. Wang (Eds.)*, London : Springer-Verlag :133–160, 2008.

[GL55] I. M. Gel'Fand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Amer. Math. Soc. Transl*, 1 :253–304, 1955.

[GM99] H. Garnier and M. Mensler. CONTSID : a continuous-time system identification toolbox for Matlab. In *5th European Control Conference (ECC'99)*, Karlsruhe (Germany), September 1999.

[GM00] H. Garnier and M. Mensler. The CONTSID toolbox : a Matlab toolbox for CONtinuous-Time System IDentification. In *12th IFAC Symposium on System Identification (SYSID'2000)*, Santa Barbara (USA), June 2000.

[GTDB10] J. Guilloux, T. Toilliez, T. Devillard, and P. Battaglia. Modélisation du transfert d'un polluant conservatif dans un ruisseau périurbain : comparaisons et mises en oeuvre de différents modèles, 2010.

[GVdH05] M. Gilson and P. Van den Hof. Instrumental variable methods for closed-loop system identification. *Automatica*, 41(2) :241–249, February 2005.

[GW08] H. Garnier and L. Wang (Eds.). *Identification of continuous-time models from sampled data*. Springer-Verlag London, 2008.

[GWY08] H. Garnier, L. Wang, and P.C. Young. *Identification of continuous-time models from sampled data*, chapter Direct identification of continuous-time models from sampled data : issues, basic solutions and relevance, pages 1–30. Springer-Verlag, London, H. Garnier and L. Wang (Eds.) edition, 2008.

[GY12] H. Garnier and P.C. Young. What does continuous-time model identification have to offer ? In *16th IFAC Symposium on System Identification*, pages 810–815, Brussels (Belgium), 2012.

[GY13] H. Garnier and P.C. Young. The advantages of directly identifying continuous-time transfer function models. *International Journal of Control, special issue on Applications of Continuous-Time Model Identification and Estimation*, In press, 2013.

[Had23] J. Hadamard. *lectures on Cauchy's problems in linear partial differential equations*. Yale University Press, 1923.

[HGRY02] E. Huselstein, H. Garnier, A. Richard, and P.C. Young. La boîte à outils CONTSID d'identification de modèles à temps continu - Extensions récentes. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'2002)*, Nantes (France), 8-10 juillet 2002.

[HM13] A. Hamdi and I. Mahfoudhi. Inverse source problem in a one-dimensional evolution linear transport equation with spatially varying coefficients : application to surface water pollution. *Inverse Problems in Science and Engineering*, In press, 2013.

[HNBS12] Z. Hidayat, A. Núñez, R. Babušk, and B. De Schutter. Identification of distributed-parameter systems with missing data. *IEEE International Conference on Control Applications, Part of 2012 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pages 1014–1019, Dubrovnik, Croatia 2012.

[HSB13] S. Henrot, C. Soussen, and D. Brie. Fast positive deconvolution of hyperspectral images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(2) :828–833, 2013.

[IK00] V. Isakov and S. Kindermann. Identification of the diffusion coefficient in a one-dimensional parabolic equation. *Inverse problems*, 16 :665–680, 2000.

[Isa90] V. Isakov. *Inverse source problems*, volume 34. AMS Bookstore, 1990.

[Joh94] R. Johansson. Identification of continuous-time models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(4) :887–896, 1994.

[KGM+11] M. Karalashvili, S. Grob, W. Marquardt, A. Mhandi, and A. Reusken. Identification of transport coefficient models in convection-diffusion equations. *Siam J. Sci. Comput.*, 33 :303–327, 2011.

[Kli92] M.V. Klibanov. Inverse problems and carleman estimates. *Inverse problems*, 8(4) :575–596, 1992.

[Kub77] C. S. Kubrusly. Distributed parameter system identification-A survey. *International Journal of Control*, 26(4) :509–535, 1977.

[Lau10] V. Laurain. *Contributions à l'identification de modèles paramétriques non linéaires. Application à la modélisation de bassins versants ruraux.* PhD thesis, Université Henri Poincaré, UFR-Faculté des sciences et technologies Ecole Doctorale IAEM Lorraine, Octobre 2010.

[Lev02] R. J. Leveque. *Finite volume methods for hyperbolic problems.* Cambridge University Press, 2002.

[LGGY08] V. Laurain, M. Gilson, H. Garnier, and P.C. Young. Refined instrumental variable methods for identification of Hammerstein continuous-time Box-Jenkins models. In *47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'2008)*, Cancun (Mexico), December 2008.

[LGTG10] V. Laurain, M. Gilson, R. Tóth, and H. Garnier. Refined instrumental variable methods for identification of LPV Box-Jenkins models. *Automatica*, 46 :959–967, 2010.

[Liu05] Y. Liu. *Grey-box Identification of Distributed Parameter Systems.* PhD thesis, Automatic Control, Royal Institute of Technology Stockholm, Sweden, 2005.

[Lju99] L. Ljung. *System Identification, Theory for the user.* Prentice Hall, Upper Saddle River, 2nd edition, 1999.

[LK01] Y. Li and Y. Kuang. Periodic solutions of periodic delay lotka–volterra equations and systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 255(1) :260–280, 2001.

[LQ10] H. X. Li and C. Qi. Modeling of distributed parameter systems for applications-A synthesized review from time-space separation. *Journal of Process Control*, 20 :891–901, 2010.

[LQ11] H. X. Li and C. Qi. *Spatio-Temporal Modeling of Nonlinear Distributer Parameter Systems*, volume 50 of *Intelligent Systems, Control and Automation : Science and Engineering.* Springer Netherlands, 2011.

[LTGG11] V. Laurain, R. Tóth, M. Gilson, and H. Garnier. Direct identification of continuous-time linear parameter-varying input/output models. *IET Control Theory & Applications*, 5(7) :878–888, 2011.

[LW82] P. Lohnberg and G. H. J. Wisselink. Iterative least-squares parameter estimation for arma pulse response and output disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(6) :1252–1255, 1982.

[MASO06] R. Malti, M. Aoun, J. Sabatier, and A. Oustaloup. Tutorial on system identification using fractional differentiation models. *In 14th IFAC Symposium on System Identification*, pages 606–611, 2006.

[May67] D.Q. Mayne. A method for estimating discrete-time transfer functions. *In Advances in Computer Control, Second UKAC Control Convention*, Universityof Bristol, 1967.

[MBR05] S. Moussaoui, D. Brie, and A. Richard. Regularisation aspects in continuous-time model identification. *Automatica*, 41 :197–208, 2005.

[MCK12] S. J. Moura, N. A. Chaturvedi, and M. Krstić. Pde estimation techniques for advanced battery management systems - part i : Soc estimation. *Proceedings of the American Control Conference, Montreal (QC)*, pages 559 – 565, 2012.

[MH78] T. Musha and H. Higuchi. Traffic current fluctuation and the burgers equation. *Japanese Journal of Applied Physics*, 17(5) :811–816, 1978.

[MM05] K. W. Morton and D. F. Mayers. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2005.

[MVNO07] R. Malti, S. Victor, O. Nicolas, and A. Oustaloup. System identification using fractional models : State of the art. *Proc. of ASME*, pages 1–10, 2007.

[MW03] C. J. Martinez and W. R. Wise. Analysis of constructed treatment wetland hydraulics with the transient storage model otis. *Ecological Engineering*, 20 :211–222, 2003.

[Nak93] S. Nakagiri. Reviw of japanese work of the last ten years on identifiabilty in distributed parameter systems. *Inverse problems*, 9 :143–191, 1993.

[Øks03] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[Per09] A. Perasso. *Identifiabilté de paramètres pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Application à la dynamique des populations*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, Faculté des sciences d'Orsay, 2009.

[PQE+05] V. Puig, J. Quevedo, T. Escobet, P. Charbonnaud, and E. Duviella. Identification and control of an open-flow canal using LPV models. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, Seville (spain) :1893–1898, 2005.

[PSR00] R. Pintelon, J. Schoukens, and Y. Rolain. Box-Jenkins continuous-time modeling. *Automatica*, 36(7) :983–991, 2000.

[PYB+99] L. Price, P.C. Young, D. Berckmans, K. Janssens, and J. Taylor. Data-based mechanistic modelling and control of mass and energy transfer in agricultural buildings. *Annual reviews in Control*, 23 :71–82, 1999.

[SFCB97] T. Söderström, H. Fan, B. Carlsson, and S. Bigi. Least squares parameter estimation of continuous-time ARX models from discrete-time data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5) :659–673, 1997.

[SGG12] J. Schorsch, H. Garnier, and M. Gilson. Instrumental variable methods for identifying partial differential equation models of distributed parameter systems. In *IFAC Symposium on System Identification*, pages 840–845, Brussels (Belgium), 2012.

[SGGY13] J. Schorsch, H. Garnier, M. Gilson, and P. C. Young. Instrumental variable methods for identifying partial differential equation models. *International Journal of Control*, In press, 2013.

[SGLG13] J. Schorsch, M. Gilson, V. Laurain, and H. Garnier. Identification of LPV partial differential equation models. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, accepted, 2013.

[SM65] K. Steiglitz and L. E. McBride. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 10 :461–464, October 1965.

[SP91] J. Schoukens and R. Pintelon. *Identification of linear systems. A practical guideline to accurate modeling*. Pergamon Press, 1991.

[SS83] T. Söderström and P. Stoica. *Instrumental Variable Methods for System Identification.* Springer Verlag, New York, 1983.

[SSK08a] M. S. Sadabadi, M. Shafiee, and M. Karrari. Parameter estimation of two-dimensional linear differential systems via Fourier based modulation function. *World IFAC Congress, Seoul South-Korea*, 17(1) :14385–14390, July 2008.

[SSK08b] M. S. Sadabadi, M. Shafiee, and M. Karrari. System identification of two-dimensional continuous-time systems using wavelets as modulating functions. *ISA Transactions*, 47 :256–266, 2008.

[SYW91] S. Sagara, Z. J. Yang, and K. Wada. Parameter identification of distributed-parameter systems in the presence of measurement noise. *Int. Journal of Systems Science*, 22, No. 8 :1391–1401, 1991.

[SZ90] S. Sagara and Zhen-Yu Zhao. Identification of system parameters in distributed parameter systems. *World IFAC congress, Tallinn (USSR)*, 3, 1990.

[SZW90] S. Sagara, Z. Y. Zhao, and K. Wada. Parameter estimation of distributed-parameter systems under noisy measurements. *Systems Science*, 16(4) :57–70, 1990.

[TGG08] S. Thil, M. Gilson, and H. Garnier. On some instrumental variable-based methods for errors-in-variables model identification. In *17th Triennial World IFAC Congress on Automatic Control*, Seoul, Korea, July 2008.

[THdH12] R. Tóth, P. S. C. Heuberger, and P. M. J. Van den Hof. Prediction error identification of LPV systems : present and beyond in : J. Mohammadpour and C. W. Scherer (Eds.). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, pages 27–60, 2012.

[Thi05] E. Thiébaut. Introduction to image reconstruction and inverse problems. *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Optics in Astrophysics*, 2005.

[TLZP11] R. Tóth, V. Laurain, W-X. Zheng, and K. Poolla. Model structure learning : A support vector machine approach for lpv linear-regression models. *Proc. of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA :3192–3197, 2011.

[Tót10] R. Tóth. *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*, volume 403. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2010.

[TY12] W. Tych and P.C. Young. A Matlab software framework for dynamic model emulation. *Environmental Modelling and Software*, 34 :19–29, 2012.

[TYACW98] C. J. Taylor, P. C. Young, A. A. Chotai, and J. Whittaker. Non-minimal state space approach to multivariable ramp metering control of motorway bottlenecks. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Control Theory and Applications*, 145 :568–574., 1998.

[Tza78] S.G. Tzafestas. Walsh series approach to lumped and distributed system identification. *Journal of the Franklin Institute*, 305(4) :199–220, 1978.

[VM12] M. Vaughan and N. McIntyre. An assessment of DBM flood forecasting models. *Proceedings of the ICE - Water Management*, 165 :105–120, 2012.

[Wal86] J.B. Walsh. *An introduction to stochastic partial differential equations.* Springer Berlin Heidelberg, 1986.

[WG12] L. Wang and H. Garnier (Eds.). *System Identification, Environmental Modelling and Control System Design.* Springer-Verlag London, 2012.

[WYB89] S. G. Wallis, P. C. Young, and K. J. Beven. Experimental investigation of the aggregated dead zone model for longitudinal solute transport in stream channels. *Proc. Inst. of Civil Engrs, Part 2*, 87 :1–22, 1989.

[YGG08] P.C. Young, H. Garnier, and M. Gilson. *Identification of continuous-time models from sampled data*, chapter Refined instrumental variable identification of continuous-time hybrid Box-Jenkins models, pages 91–132. Springer-Verlag, London, H. Garnier and L. Wang (Eds.) edition, 2008.

[YJ80] P.C. Young and A.J. Jakeman. Refined instrumental variable methods of time-series analysis : Part III, extensions. *International Journal of Control*, 31 :741–764, 1980.

[You66] P.C. Young. Process parameter estimation and self adaptative control. In P.H. Hammond (Ed.). *Theory of Self Adaptive Control Systems*, Plenum Press : New York, 1966.

[You69] P.C. Young. Applying parameter estimation to dynamic systems : Part II - applications. *Control Engineering*, 16(11) :118–124, 1969.

[You70] P.C. Young. An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica*, 6 :271–287, 1970.

[You76] P.C. Young. Some observations on instrumental variable methods of time-series analysis. *International Journal of Control*, 23 :593–612, 1976.

[You84] P.C. Young. *Recursive estimation and time-series analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[You11] P.C. Young. *Recursive Estimation and Time-series Analysis : An Introduction for the Student and Practitioner*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2011.

Les systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles, appartiennent à la classe des systèmes dynamiques impliquant des fonctions dépendantes de plusieurs variables, comme le temps et l'espace. Déjà fortement répandus pour la modélisation mathématique de phénomènes physiques et environnementaux, ces systèmes ont un rôle croissant dans les domaines de l'automatique. Cette expansion, provoquée par les avancées technologiques au niveau des capteurs facilitant l'acquisition de données et par les nouveaux enjeux environnementaux, incite au développement de nouvelles thématiques de recherche. L'une de ces thématiques, est l'étude des problèmes inverses et plus particulièrement l'identification paramétrique des équations aux dérivées partielles.
Tout abord, une description détaillée des différentes classes de systèmes décrits par ces équations est présentée puis les problèmes d'identification qui leur sont associés sont soulevés. L'accent est mis sur l'estimation paramétrique des équations linéaires, homogènes ou non, et sur les équations linéaires à paramètres variant. Un point commun à ces problèmes d'identification réside dans le caractère bruité et échantillonné des mesures de la sortie.
Pour ce faire, deux types d'outils principaux ont été élaborés. Certaines techniques de discrétisation spatio-temporelle ont été utilisées pour faire face au caractère échantillonné des données ; les méthodes de variable instrumentale, pour traiter le problème lié à la présence de bruit de mesure. Les performances de ces méthodes ont été évaluées selon des protocoles de simulation numérique reproduisant des situations réalistes de phénomènes physique et environnementaux, comme la diffusion de polluant dans une rivière.

Mots clés : équations aux dérivées partielles, problème inverse, identification de systèmes, modèle linéaire à paramètres variant, diffusion de polluant.

A large variety of natural, industrial, and environmental systems involves phenomena that are continuous functions not only of time, but also of other independent variables, such as space coordinates. Typical examples are transportation phenomena of mass or energy, such as heat transmission and/or exchange, humidity diffusion or concentration distributions. These systems are intrinsically distributed parameter systems whose description usually requires the introduction of partial differential equations.
There is a significant number of phenomena that can be simulated and explained by partial differential equations. Unfortunately all phenomena are not likely to be represented by a single equation. Also, it is necessary to model the largest possible number of behaviors to consider several classes of partial differential equations. The most common are linear equations, but the most representative are non-linear equations. The nonlinear equations can be formulated in many different ways, the interest in nonlinear equations with linear parameters varying is studied.
The aim of the thesis is to develop new estimators to identify the systems described by these partial differential equations. These estimators must be adapted with the actual data obtained in experiments. It is therefore necessary to develop estimators that provide convergent estimates when one is in the presence of missing data and are robust to measurement noise.
In this thesis, identification methods are proposed for partial differential equation parameter estimation. These methods involve the introduction of estimators based on the instrumental variable technique.

Key works : partial differential equation, inverse problem, system identification, linear parameter varying