



**HAL**  
open science

# Analyse et adaptation de maillage pour des schémas non-oscillatoires d'ordre élevé

Alexandre Carabias

► **To cite this version:**

Alexandre Carabias. Analyse et adaptation de maillage pour des schémas non-oscillatoires d'ordre élevé. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2013. Français. NNT : 2013NICE4128 . tel-00914214v2

**HAL Id: tel-00914214**

**<https://theses.hal.science/tel-00914214v2>**

Submitted on 20 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR  
Sciences**

**École Doctorale en Sciences Fondamentales et Appliquées de l'Université de  
Nice - Sophia Antipolis**

**T H E S E**

Pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

de l'UNIVERSITÉ de Nice-Sophia Antipolis

**Spécialité: MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

Présentée et soutenue par

Alexandre CARABIAS

**Analyse et adaptation de maillage pour des schémas  
non-oscillatoires d'ordre élevé**

Thèse dirigée par ALAIN DERVIEUX

soutenue le 12 DÉCEMBRE 2013

**JURY:**

M. PASCAL FREY	-	Professeur HDR à l'Université Pierre et Marie Curie
M. GILBERT ROGÉ	-	Ingénieur à Dassault-Aviation
M. BONIFACE NKONGA	-	Professeur HDR à l'Université de Nice
M. THIERRY COUPEZ	-	Professeur HDR à l'ENSMP
M. OLIVIER ALLAIN	-	Ingénieur en chef société LEMMA
M. ADRIEN LOSEILLE	-	Chargé de recherche à INRIA



# Contenu

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.0.1	Problématique . . . . .	9
1.0.2	Approximation de phénomènes propagatifs par un schéma d'ordre élevé . . . . .	10
1.0.3	Adaptation anisotrope pour un schéma d'ordre élevé . . . . .	11
1.0.4	Organisation de la thèse . . . . .	11
1.0.5	Communications scientifiques . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Rappels</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Génération de maillage basé-métrique</b>	<b>15</b>
2.1	Résumé . . . . .	15
2.2	Introduction . . . . .	15
2.3	Notion de métrique riemannienne . . . . .	17
2.4	Génération de maillages anisotropes: maillage unité . . . . .	18
2.4.1	Élément unité . . . . .	19
2.4.2	Maillage unité . . . . .	20
2.5	Opérations élémentaires sur les métriques . . . . .	21
2.5.1	Intersection de métriques . . . . .	21
2.5.2	Interpolation de métriques . . . . .	22
2.6	Quantifier l'anisotropie du maillage . . . . .	24
2.7	Conclusion . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Interpolation et reconstruction d'ordre élevé</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction à l'interpolation d'ordre élevé . . . . .	27
3.1.1	Motivation . . . . .	27
3.1.2	État de l'art . . . . .	28
3.2	Approximation d'une fonction à plusieurs variables . . . . .	29
3.2.1	Formule de Taylor . . . . .	29
3.2.2	Interpolation de Lagrange . . . . .	29
3.2.3	Reconstruction basée Taylor . . . . .	31
3.2.4	Deuxième analyse . . . . .	32
3.3	Calcul d'un pseudo-hessien autour d'un nœud . . . . .	33
3.4	Conclusion . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Résolution des équations d'Euler compressibles</b>	<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	35
4.2	Résolution numérique des équations d'Euler 3D . . . . .	36
4.2.1	Modèle mathématique des équations d'Euler . . . . .	36

4.2.2	Une formulation éléments-finis P1 Galerkin . . . . .	38
4.2.3	Formulation mixte éléments-volumes finis: équivalence . . . . .	38
4.2.4	Calcul des flux . . . . .	40
4.3	Vers des schémas d'ordre élevé . . . . .	42
4.3.1	Le schéma MUSCL de second ordre . . . . .	42
4.3.2	Schéma spatial LV6 d'ordre élevé . . . . .	44
4.3.3	Avancement en temps . . . . .	45
4.3.4	Conclusion sur les schémas superconvergents . . . . .	45
 <b>III Schéma d'ordre 3</b>		<b>47</b>
<b>5</b>	<b>Présentation du schéma CENO en 1D</b>	<b>49</b>
5.1	Introduction . . . . .	50
5.2	Étude d'un schéma à reconstruction quadratique en dimension 1 . . . . .	50
5.2.1	Schéma de base . . . . .	50
5.2.2	Évaluation des coefficients de la reconstruction polynômiale quadratique . . . . .	53
5.2.3	Évaluation des flux par la reconstruction polynômiale quadratique . . . . .	56
5.2.4	Approximation des flux quadratiques par les formules de Taylor . . . . .	56
5.2.5	Tests numériques . . . . .	59
5.2.6	Conclusion . . . . .	67
5.3	Étude d'un schéma à reconstruction quadratique et interpolation de degré 3 en 1D . . . . .	68
5.3.1	Objectif du problème . . . . .	68
5.3.2	Évaluation des termes de degré 3 sur les cellules . . . . .	68
5.3.3	Calcul des flux par la reconstruction polynômiale pseudo-cubique . . . . .	71
5.3.4	Tests numériques . . . . .	73
5.3.5	Conclusion . . . . .	77
5.4	Prolongement de l'erreur de troncature dans l'équation équivalente . . . . .	78
5.4.1	Développements de Taylor prolongés . . . . .	78
5.4.2	Calcul des flux par la reconstruction polynômiale quadratique . . . . .	79
5.4.3	Calcul des flux par la reconstruction polynômiale pseudo-cubique . . . . .	80
5.4.4	Conclusion . . . . .	82
5.5	Étude d'un schéma à reconstruction pseudo-cubique et interpolation de degré 4, en 1D . . . . .	83
5.5.1	Objectif du problème . . . . .	83
5.5.2	Calcul des flux par une reconstruction pseudo-quadrique . . . . .	83
5.5.3	Approximation par Taylor de flux pseudo-quadriques . . . . .	86
5.5.4	Tests numériques . . . . .	88
5.5.5	Conclusion . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Présentation du schéma CENO en 2D scalaire</b>	<b>95</b>
6.1	Introduction . . . . .	95
6.2	Position du problème 2D . . . . .	96
6.3	Évaluation des coefficients pour une reconstruction polynômiale quadratique . . . . .	98

6.4	Évaluation des flux . . . . .	105
6.5	Évolution en temps . . . . .	107
6.6	Tests numériques . . . . .	107
6.6.1	Cas du schéma quadratique . . . . .	110
6.6.2	Cas du schéma linéaire . . . . .	112
6.6.3	Cas du schéma double-linéaire . . . . .	114
6.6.4	Comparaison double-linéaire et quadratique . . . . .	116
6.6.5	Conclusion . . . . .	118
6.7	Évaluation des coefficients de la reconstruction polynômiale cubique . . . . .	119
6.8	Évaluation des flux . . . . .	125
6.9	Évolution en temps . . . . .	126
6.10	Amélioration du schéma CENO . . . . .	128
6.10.1	Position du problème . . . . .	128
6.10.2	Précision sur la phase itérative du code Fortran95 . . . . .	131
6.10.3	Tests numériques . . . . .	134
6.10.4	Conclusion . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Présentation du schéma CENO 2D pour les équations d'Euler bidimensionnelle</b>	<b>147</b>
7.1	Introduction . . . . .	147
7.2	Extension du schéma quadratique CENO aux équations d'Euler bidimensionnelles	148
7.2.1	Évaluation des coefficients de la reconstruction quadratique . . . . .	148
7.2.2	Évaluation des flux . . . . .	151
7.2.3	Implémentation des corrections antidispersive et diffusive . . . . .	153
7.3	Tests numériques . . . . .	157
7.3.1	Cas-test numéro 1 : advection d'une densité de gaussienne . . . . .	158
7.3.2	Cas-test numéro 2 : un vortex statique . . . . .	167
7.3.3	Cas-test numéro 3 : un vortex advecté . . . . .	176
7.3.4	Cas-test numéro 4 : test du schéma CENO-QV6 . . . . .	184
7.4	Conclusion . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Limiteurs pour le schéma CENO</b>	<b>189</b>
8.1	Introduction . . . . .	189
8.2	Schéma positif et schéma LED pour des lois de conservations scalaires non-linéaires	190
8.2.1	Critère de positivité/LED pour des volume-finis . . . . .	191
8.2.2	Schéma volumes-finis d'ordre un . . . . .	192
8.2.3	Limiteurs pour les schémas MEV et CENO . . . . .	193
8.2.4	Le principe du maximum pour le schéma CENO-POS . . . . .	197
8.3	Schéma CENO-POS à masse volumique positive . . . . .	199
8.4	Calcul des flux décentrés avec les limiteurs CENO d'ordre élevé . . . . .	200
8.5	Applications . . . . .	201
8.6	Conclusion . . . . .	208

<b>IV</b>	<b>Adaptation de maillage</b>	<b>209</b>
<b>9</b>	<b>Adaptation en multi-échelle</b>	<b>211</b>
9.1	Introduction . . . . .	211
9.2	Optimisation de l'erreur d'interpolation . . . . .	212
9.3	Implémentation numérique . . . . .	214
9.4	Tests numériques . . . . .	217
9.4.1	Un cas-test acoustique : propagation d'une onde . . . . .	217
9.4.2	Un cas-test instationnaire : le scramjet . . . . .	221
9.5	Conclusion . . . . .	225
<b>V</b>	<b>Adaptation en Goal-oriented</b>	<b>227</b>
<b>10</b>	<b>Adaptation de maillage anisotrope orientée fonctionnelle pour un modèle d'Euler précis à l'ordre trois</b>	<b>229</b>
10.1	Introduction . . . . .	229
10.2	Approximation numérique de l'EDP . . . . .	230
10.2.1	Modèle . . . . .	230
10.2.2	Formulation CENO . . . . .	230
10.3	Analyse d'erreur . . . . .	232
10.4	De la théorie à la pratique . . . . .	235
10.4.1	Choix de la métrique orientée fonctionnelle . . . . .	236
10.4.2	L'algorithme de point-fixe global . . . . .	236
10.4.3	Calcul de la métrique orientée fonctionnelle . . . . .	237
10.5	Tests numériques . . . . .	238
10.5.1	Un cas-test acoustique : propagation d'une onde avec un mur antibruit . . . . .	238
10.5.2	Un cas-test acoustique : propagation d'une onde dans une boîte acoustique . . . . .	258
10.6	Conclusion . . . . .	262
<b>VI</b>	<b>Conclusion</b>	<b>263</b>
<b>11</b>	<b>Conclusion</b>	<b>265</b>
11.0.1	Notre contribution . . . . .	265
11.0.2	Avantages, inconvénients, difficultés rencontrées . . . . .	267
11.0.3	Perspectives . . . . .	267
	<b>Bibliographie</b>	<b>271</b>

# Résumé

---

## Analyse et adaptation de maillage pour des schémas non-oscillatoires d'ordre élevé

---

### Résumé:

Cette thèse présente un ensemble de travaux consacrés à l'étude d'un schéma ENO centré-sommet (CENO) d'ordre élevé ainsi qu'à l'adaptation de maillage anisotrope pour des calculs de Mécaniques des Fluides précis à l'ordre 3. La première partie des travaux de cette thèse est consacrée à une analyse approfondie de la précision du schéma CENO et à la création de termes correcteurs pour améliorer ses propriétés dispersives et dissipatives en une et deux dimensions. On propose un schéma CENO quadratique précis à l'ordre 3, puis cubique précis à l'ordre 4, pour les équations d'Euler des gaz compressibles, ainsi qu'une première version du schéma avec capture de choc monotone. La deuxième partie des travaux est consacrée à la mise au point d'une plateforme numérique d'adaptation de maillage anisotrope multi-échelle et basée fonctionnelle intégrant le schéma CENO. Nous proposons un nouvel estimateur d'ordre 3 du schéma quadratique basé sur une reconstruction de hessien équivalent et son application à des simulations d'acoustiques instationnaire et de Scramjet stationnaire utilisant nos limiteurs.

---

## Analysis and mesh adaptation for high order non-oscillatory schemes

---

### Abstract:

This thesis presents to an assembly of work dedicated to the study of high order vertex-centred ENO scheme (CENO) and to anisotropic mesh adaptation for third-order accurate Fluid Mechanics problems.

The thesis is structured in two parts. The first part is devoted to a thorough analysis of the CENO scheme accuracy and to the construction of some corrector terms meant for improving the dissipative and dispersive properties for 1D and 2D numerical problems. We proposed a quadratic third-order accurate CENO scheme, then a cubic fourth-order accurate one, applied to Euler equations for compressible flows. A first monotone, shock capturing version of these scheme is also introduced in the first part.

The second part of the thesis focuses on the implementation of a numerical platform for anisotropic multi-scale and goal-oriented mesh adaptivity involving the CENO scheme. A new third-order error estimator for the quadratic scheme is proposed, here based on a reconstruction of the Hessian. Numerical examples for unsteady acoustic problems and a steady Scramjet problem computed with monotony preserving limiters are presented for validation of the theoretical results.





# Remerciements

Lorsqu'on écrit des remerciements, on voudrait remercier tout le monde distinctement et n'oublier personne, mais il faudrait pas dépasser une page (sinon personne ne va lire cette partie ou au mieux s'endormir dessus, bien que cete page de prose soit, à mon point de vue, émotionnellement la partie la plus importante de la thèse car elle clôt trois années inoubliables de notre vie et reflète par écrit trois années d'émotions et de ressenti qu'on a envie de faire partager en quelques lignes). Je vais essayer de faire une partie de remerciements ciblée pour les personnes qui ont été les plus proches de moi pendant ces trois années de thèse, et une partie de remerciements en masse quand j'aurais plus la place d'écrire (ou que j'aurais mal aux doigts).

Tout d'abord, ayant passé deux années de thèse au sein de l'équipe Ecuador sur INRIA Sophia-Antipolis et une année de thèse dans l'équipe Gamma3 à INRIA Rocquencourt, j'ai pu faire beaucoup de rencontres au travers des deux équipes et j'ai passé tout plein d'agréables moments avec de nombreuses personnes. En tout cas j'espère oublier personne, dans le cas contraire la seule solution envisageable serait de refaire une thèse et de remercier ces personnes oubliées dans un autre manuscrit, ce qui prendrait un peu de temps et je m'en excuse donc d'avance.

Mon premier grand et éternel remerciement va directement à mon directeur de thèse, Alain Dervieux, qui m'a tout appris durant ces trois années, autant du point de vue scientifique que humain, je pense avoir acquis grâce à lui maturité et sagesse, qualités (que je n'avais pas et) qui reflètent totalement sa personne, et je ne le remercierai jamais assez pour ça. Alain a toujours été là pour moi lorsque j'avais besoin de lui, et travailler (pour) avec lui a été pur bonheur pendant ces trois ans (j'aurai bien passé 40 ans de plus à travailler avec lui mais on m'a dit que c'était pas possible). Merci encore pour ces trois années que je n'oublierais jamais. Je remercie au passage Françoise, l'épouse de Alain, pour tous les bons repas que j'ai dévoré sans modération chez eux.

Mon deuxième remerciement est adressé à mon épouse Anca, ancienne doctorante d'Alain et maintenant maître de conférence à l'université Pierre et Marie Curie. Merci de m'avoir apporté courage, soutien, bonheur, amour (et des bons petits plats maison) depuis sept ans maintenant. Sans elle je ne serais pas aujourd'hui en train d'écrire ces lignes (et j'aurais aussi dix kilos de moins mais ça c'est une autre histoire).

Mon troisième remerciement va au reste de l'équipe Ecuador de Sophia : merci à Steve Wornom pour son soutien et pour avoir mangé tous les matins mes Quatre-Quarts durant deux ans, merci à Valérie Pascual pour sa bonne humeur et d'avoir réglé toutes les pannes informatiques et merci à Laurent Hascoet d'avoir suivi mes blagues pas drôles tous les midis ! Merci encore à vous trois c'était vraiment bien le quotidien avec vous!

Mon quatrième remerciement va aux personnes de l'équipe Gamma3 qui m'ont accueilli sur

Paris (à bras ouvert!) pour ma troisième année de thèse : merci à Paul-Louis Georges pour m'avoir donné un bureau à moi tout seul (comme les chefs!), merci à Adrien Loseille pour tous ses conseils et sa bonne humeur quotidienne, merci à Nicolas Barral pour ses brownies fait maison que j'ai mangé sans retenue, merci à Victorien Menier pour toutes les capsules de café que je lui ai volé, merci à Estelle Mbinky pour son sourire quotidien, merci à Loïc Maréchal pour alimenter le coin café de ses gâteaux (cachés dans le petit tiroir du haut de son bureau mais on gardera le secret), merci à Patrick Laug et Houman Borouchaki pour nos échanges très plaisants tous les midis et enfin merci à Frédéric Alauzet pour son code WOLF sur lequel j'y ai laissé quelques dents, mais c'est grâce à ça que j'ai appris pleins de choses.

Mon cinquième remerciement va aux rapporteurs de ma thèse, Pascal Frey et Gilbert Rogé, qui ont pris le temps de lire mon manuscrit et d'y apporter des critiques constructives. Je remercie aussi mon Jury de thèse d'avoir pris le temps d'assister à ma soutenance et pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon travail de recherche.

Mon sixième remerciement va à toute l'équipe de la société LEMMA qui m'a accueilli pendant six mois de stage juste avant ma thèse, pour m'avoir fait découvrir le monde de la Mécanique des Fluides Numériques, et qui m'a mis en relation avec Alain Dervieux pendant le stage. Merci pour votre accueil et de m'avoir fait confiance pour mener à bien ce projet d'étude. Merci tout particulièrement à Olivier Allain qui m'a beaucoup appris et qui partage patiemment toute sa connaissance de la CDF industrielle, et merci à Charles Leca de m'avoir accueilli dans sa société LEMMA.

Mon septième remerciement, et bien sûr d'une ampleur toute aussi grande que le premier (et que tous les autres aussi !) va à toute ma famille, ma mère, mon père et mon frère, qui me soutiennent depuis toujours et qui ont toujours été présent même même quand ils étaient pas là.'

Mon huitième remerciement va à l'institut INRIA qui m'a permis de faire une thèse dans les meilleures conditions de travail possible, ce fut un grand bonheur de travailler dans des locaux et dans un environnement aussi plaisant (et la cantine est bonne et pas chère!).

Enfin tous mes derniers remerciements vont à toutes les personnes, doctorants, chercheurs, personnels administratifs, personnels d'entretien ou de cuisine que j'ai rencontré sur les sites INRIA de Sophia et de Rocquencourt ou dans des conférences. C'est toujours un plaisir de partager des expériences scientifiques ou humaines avec d'autres personnes, les rencontres forment la sagesse !

Bref merci à tous, c'est grâce aux milliers de moments passés avec vous tous et accumulés les un après les autres que j'en suis là aujourd'hui ! (Et on a dépassé une page mais on s'en fout !)

En toutes amitiés, Petit scarabé.

Partie I

Introduction



# Introduction

## Contents

1.0.1	Problématique . . . . .	9
1.0.2	Approximation de phénomènes propagatifs par un schéma d'ordre élevé . . .	10
1.0.3	Adaptation anisotrope pour un schéma d'ordre élevé . . . . .	11
1.0.4	Organisation de la thèse . . . . .	11
1.0.5	Communications scientifiques . . . . .	12

## Introduction

L'acoustique est la science du son, ce qui inclut sa production, sa transmission, sa réception et ses effets, et son contrôle. Elle fait notamment appel à des notions de mécanique des fluides, de mécanique vibratoire, de mécanique du solide déformable et de thermodynamique. Le mot acoustique englobe en physique toutes les ondes mécaniques au sein des gaz, des liquides, mais également au sein des solides, et ce quelle que soit la plage de fréquences considérée (les infrasons, les sons et les ultrasons). Dès le IV<sup>ème</sup> siècle av. J.-C., Aristote anticipa correctement que le son se générait de la mise en mouvement de l'air par une source « poussant vers l'avant l'air contigu de telle manière que le son voyage ». Son hypothèse était basée sur la philosophie plus que sur la physique expérimentale. D'ailleurs, il suggéra de manière erronée que les hautes fréquences se propageaient plus rapidement que les basses fréquences, erreur qui perdura plusieurs siècles. Un premier résultat expérimental important fut obtenu au début du XVII<sup>ème</sup> siècle, par Marin Mersenne et par Galileo Galilei : le mouvement de l'air généré par un corps vibrant à une certaine fréquence est aussi un mouvement vibratoire de fréquence identique à la fréquence de vibration du corps vibrant. De nos jours, le domaine de l'acoustique théorique détermine les principes de la génération et de la propagation des sons et en développe le formalisme mathématique. Comme la physique théorique, elle constitue un champ d'études intermédiaire entre l'acoustique expérimentale et les mathématiques, au développement desquelles elle a également contribué. Les trois lois fondamentales de l'acoustique en milieu gazeux sont exprimées par les équations d'Euler. Ce système d'équations met en relation les champs caractérisant le fluide, tels que la pression, la masse volumique et la vitesse. Lorsque ce système d'équations est manipulé afin d'éliminer deux de ces trois champs, on aboutit à l'équation des ondes, qui régit la propagation du son en milieu gazeux immobile.

Les intérêts d'une étude sur les ondes acoustiques peuvent-être multiples, mais une importante classe d'applications concerne les problèmes de pollution sonore. La notion de pollution

sonore regroupe généralement des nuisances sonores, et des pollutions induites par le son devenu dans certaines circonstances un altéragène physique. Elles peuvent être provoquées par diverses sources et les conséquences peuvent aller d'une gêne passagère à des répercussions graves sur la santé et la qualité de vie chez l'homme, et, en altérant le fonctionnement des écosystèmes, peuvent aller jusqu'à tuer des animaux, ou empêcher leur reproduction normale. Outre une législation sur les sources de bruit émises par les matériels mis en vente, une directive du 25 juin 2002 de l'Union Européenne impose aux États et à certaines grandes collectivités et aéroports d'élaborer des cartes et des plans de prévention du bruit dans l'environnement de manière à évaluer l'exposition au bruit et la limiter par des plans de lutte contre les nuisances sonores. Le 31 mai 2013 La Commission Européenne a mis en demeure la France d'y répondre (elle a 6 ans de retard dans la cartographie stratégique du bruit et pour les plans d'actions contre le bruit qui devraient en découler dans le cadre du Plan national d'actions contre le bruit élaboré en 2003). La France risque une amende et des pénalités journalières pour un total de plusieurs millions d'euros. Notre recherche est donc motivée par des considérations tout autant vitales que financières.

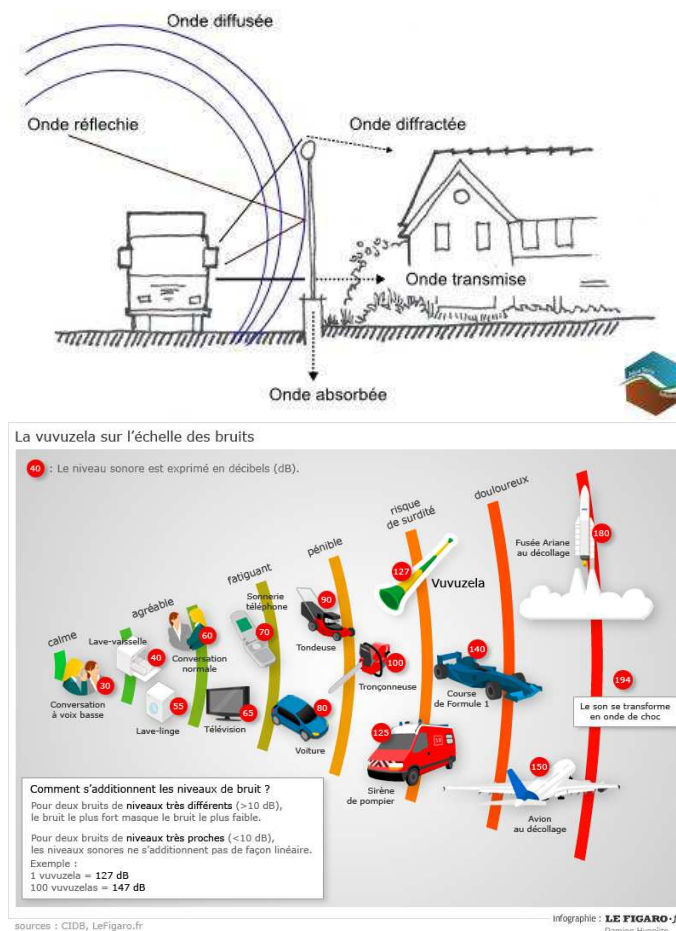


Figure 1.1: Croquis d'un mur antibruit (en haut) et d'une échelle de pollution sonore (en bas).

### 1.0.1 Problématique

La problématique principale dans la simulation d'une propagation d'onde acoustique est le coût CPU pour atteindre une certaine précision afin que le calcul soit utilisable. C'est pour cela que l'on définit ici cinq critères qui permettent d'évaluer la précision fournie par une méthode de résolution numérique.

- Le premier critère est l'ordre de convergence asymptotique suivant lequel on dira qu'un schéma est d'ordre  $\alpha$ , si à partir d'une finesse suffisante du maillage, c'est-à-dire en pratique un grand nombre de points de discrétisation, en divisant uniformément par deux la taille de maille, on obtiendra alors une erreur numérique divisée par  $2^\alpha$ .

Une remarque importante est que lorsque l'on divise la taille de maillage par deux, le coût de calcul est multiplié par quatre en une dimension, par huit en deux dimensions et par seize en trois dimensions, car le pas de temps aussi devient deux fois plus petit. On peut donc obtenir potentiellement une estimation du coût pour avoir une certaine précision de calcul.

La plupart des schémas existants sont analysables au moins sur des maillages réguliers, la précision asymptotique de la quasi totalité de ces schémas a été analysée et considérée comme un critère primordial dans la qualité du schéma. Cependant l'information fournie n'est vraie que pour des maillages suffisamment fins et on ne sait pas "combien" fins. En pratique, et notamment pour la propagation d'onde, ce critère n'est pas suffisant.

- Le deuxième critère est le comportement qualitatif du schéma advectif : il s'agit d'un comportement asymptotique analysable en maillage régulier. On distingue la dissipation qui va amortir l'amplitude du signal. Asymptotiquement, on s'intéresse au premier terme de dissipation qui s'apparente à un terme de dérivée paire parasitant le modèle mathématique initial dans l'équation équivalente. On distingue aussi la dispersion, ou erreur de phase, qui va séparer certains composants de l'onde en les faisant voyager à des vitesses différentes. Dans l'analyse par l'équation équivalente, ces termes sont des dérivées d'ordre impair. Une remarque importante est que pour la propagation d'onde, il a été constaté que les erreurs de dispersion avaient un impact important et cela aboutit à des schémas à dispersion réduite, quitte à avoir un ordre de précision asymptotique moins bon. C'est le cas du schéma DRP (Dispersion Relation Preserving) de Christopher Tam, cf.[[Tam 1992](#)].

- Le troisième critère est le comportement du schéma en maillage non-asymptotique, c'est-à-dire en fonction du nombre de mailles (c'est à dire de points) par longueur d'onde. C'est une propriété difficile à analyser mais mesurée par l'expérience, et cruciale dans l'advection et l'acoustique. Typiquement, on veut une bonne précision en ayant six à douze mailles par longueur d'onde. Une remarque importante est que l'analyse par l'équation équivalente ne s'applique pas de manière simple dans la mesure où l'influence de tous les termes d'erreur d'ordre différent est difficile à évaluer.

- Le quatrième critère est le comportement (asymptotique ou non) en maillage irrégulier et non structuré. En maillage irrégulier, voir non structuré, il n'est plus possible d'analyser la



dissipation et la dispersion, bien que ces effets soient encore distinguables sur les solutions obtenues. Du point de vue asymptotique, il est possible d'énoncer une convergence d'ordre  $\alpha$ .

- Le cinquième critère est le comportement du schéma sur des solutions singulières : dans le cas de solutions comportant des singularités ou des détails trop petits pour la taille de maille, de nombreux schémas numériques vont produire des oscillations et donc des solutions de mauvaise qualité. Le premier critère inventé pour traiter ce type d'incident est le schéma monotone. Mais les premiers schémas monotones étaient d'ordre un, donc il a fallu inventer les schémas monotones non-linéaires tel que les schémas TVD pour obtenir des schémas d'ordre deux, hormis au voisinage des singularités.

Malgré tous les progrès sur les schémas, leur précision sur des solutions présentant des échelles grandes ou petites, ou des singularités, est souvent réduite à l'unité, c'est-à-dire à une mauvaise efficacité ou une mauvaise précision. Pour proposer des solutions d'ordre élevé sur des phénomènes multi-échelle ou singuliers, on a proposé des approches de maillages adaptatifs.

La problématique de l'adaptation de maillage a mis très longtemps à trouver une formulation intégralement mathématique du problème. Avec les méthodes Goal-Oriented (ou "orientée fonctionnelle") basées sur des métriques anisotropes, on sait définir le problème de maillage adaptatif comme un problème d'optimisation de la métrique décrivant le maillage, pour minimiser une fonctionnelle d'erreur bien définie.

Ce tour d'horizon fait donc apparaître deux thématiques intéressantes : la thématique touchant à la qualité du schéma numérique, et la thématique touchant à l'adaptation du maillage pour un schéma donné.

## 1.0.2 Approximation de phénomènes propagatifs par un schéma d'ordre élevé

### 1.0.2.1 État de l'art

Restreignons-nous aux modèles applicables aux écoulements compressibles. Ces écoulements ont été calculés par des schémas d'ordre deux dans les dernières décennies. Au tournant du XXème siècle, la communauté de la Mécanique des Fluides Numérique s'est concentrée sur la recherche de méthodes d'approximation d'ordre élevé applicables à des maillages non structurés type éléments-finis. Parmi les voies suivies on distingue les éléments finis stabilisés [Hughes 1986], les méthodes de distribution de résidu [Abgrall 2006a], des méthodes de volumes-finis avec reconstruction [Abgrall 1994] et des méthodes de Galerkin Discontinues [Cockburn 2003].

### 1.0.2.2 Notre Approche

Notre approche a été influencée par le schéma utilisé dans les codes des équipes Gamma3 et Ecuador. Il s'agit d'un schéma MUSCL "centré sommet", c'est à dire défini sur des cellules

duales volumes-finis de maillages formés de triangles. Nous avons développé des schémas de volumes finis utilisant des reconstructions sur les mêmes cellules duales. Les versions à l'ordre un spatial des deux méthodes sont identiques ce qui permet d'utiliser les mêmes limiteurs, des termes de dissipations voisins, et à terme le même préconditionnement implicite.

### 1.0.2.3 Ma contribution

Ma contribution a été d'étudier un schéma advectif Central-ENO centré sommet (CENO). J'ai analysé sa précision, y compris en maillage non-asymptotique, et j'ai proposé des termes correcteurs en 1D et 2D pour améliorer ses propriétés dispersives et dissipatives. J'ai proposé un schéma CENO quadratique précis à l'ordre 3, puis cubique précis à l'ordre 4, pour les équations d'Euler des gaz compressibles.

## 1.0.3 Adaptation anisotrope pour un schéma d'ordre élevé

### 1.0.3.1 État de l'art

Les schémas d'ordre élevé ont donné lieu à des méthodes d'adaptation essentiellement basées sur des estimations *a posteriori*, qui ne permettaient pas jusqu'à maintenant de prendre en compte de manière anisotrope l'erreur. Dans le cas des schémas d'ordre deux, une estimation *a posteriori anisotrope* a été proposé par [Yano 2011]. Dans le cadre des estimations *a priori*, notre équipe a proposé plusieurs avancées importantes en multi-échelle [Alauzet 2003a] et en orientée fonctionnelle [Loseille 2008a], puis en orientée fonctionnelle instationnaire [Belme 2011].

### 1.0.3.2 Notre Approche

Notre approche est une analyse *a priori* faisant apparaître comme dans les analyses précédentes des erreurs d'interpolation et de reconstruction des fonctions, et ceci aussi bien en multi-échelle qu'en orientée fonctionnelle. On propose une première méthode pour exploiter des termes en dérivées troisièmes afin d'en tirer des métriques optimales. La définition d'une méthode plus sophistiquée par la décomposition de Sylvester pour cette dernière étape est réalisée dans le cadre d'une thèse déroulée simultanément et préparée par Estelle Mbinky [Mbinky 2013].

### 1.0.3.3 Ma contribution

Mon travail dans les équipes Ecuador et Gamma3 a été de mettre au point les deux approches multi-échelle et orientée fonctionnelle sur la base d'une reconstruction de hessien équivalent par Moindres Carrés adaptée à notre schéma CENO, et à intégrer ces méthodes avec notre schéma CENO dans les boucles d'adaptation stationnaire et instationnaire.

## 1.0.4 Organisation de la thèse

- Chapitre I : ce chapitre est un rappel de la notion essentielle de nos techniques de paramétrage de maillage, la métrique riemannienne, et quelques opérations élémentaires sur ces métriques.

- Chapitre II : ce chapitre rappelle quelques caractéristiques sur les interpolations d'ordre élevé.
- Chapitre III : ce chapitre présente le modèle d'équations aux dérivées partielles utilisé dans cette thèse : il s'agit des équations d'Euler pour la dynamique des gaz compressible. On présente aussi la méthode de discrétisation utilisée pour ces équations par les deux équipes Ecuador et Gamma3. Cette discrétisation servira de référence pour des comparaisons avec le nouveau schéma.
- Chapitre IV : ce chapitre introduit, analyse et améliore le schéma CENO en une dimension pour le modèle de l'advection monodimensionnelle.
- Chapitre V : ce chapitre introduit plusieurs versions du schéma CENO en deux dimensions pour le modèle de l'advection bidimensionnelle.
- Chapitre VI : ce chapitre propose la nouvelle formulation CENO 2D pour les équations d'Euler compressibles, et des améliorations sous la forme d'un schéma CENO-QV6.
- Chapitre VII : ce chapitre propose une première version avec capture de choc monotone des schémas précédents.
- Chapitre VIII : ce chapitre formule l'adaptation de maillage en multi-échelle.
- Chapitre IX : ce chapitre propose une analyse *a priori* de l'erreur commise avec un schéma de reconstruction quadratique et en déduit une formulation orientée fonctionnelle.

Ces deux derniers chapitres sont complétés par une description de la plateforme numérique développée et notamment par la présentation de cas-tests pour la propagation d'ondes.

### 1.0.5 Communications scientifiques

- "A priori-based mesh adaptation for third-order accurate Euler simulation", HONOM 2013, the European Workshop on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: Theory and Applications, Bordeaux, France, March 18-22, 2013 (Oral).
- "Anisotropic Goal-oriented estimate for a third-order accurate Euler model", ECCOMAS 2012, the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Vienna, Austria, September 10-14 2012 (Oral).
- "Mesh adaptation for a third-order accurate Euler model", Colloque des Doctorants 2012 de l'Université des Sciences de Nice, Nice, 15 Mai 2012 (Poster).
- "Dissipation and dispersion control of a quadratic-reconstruction advection scheme", HONOM 2011, the European Workshop on High Order Nonlinear Numerical Methods for Evolutionary PDEs: Theory and Applications, Trento, Italy, April 11-15, 2011 (Oral).
- "Analyse et amélioration d'un schéma à reconstruction quadratique sur maillage non-structuré", Congrès SMAI 2011, 5e Biennale Française des Mathématiques Appliquées, Guidel, France, 23-27 Mai 2011 (Poster).

Partie II

Rappels



# Modèle continu de maillage: notion de métrique riemannienne

---

## Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Résumé</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2.3</b>	<b>Notion de métrique riemannienne</b>	<b>17</b>
<b>2.4</b>	<b>Génération de maillages anisotropes: maillage unité</b>	<b>18</b>
2.4.1	Élément unité	19
2.4.2	Maillage unité	20
<b>2.5</b>	<b>Opérations élémentaires sur les métriques</b>	<b>21</b>
2.5.1	Intersection de métriques	21
2.5.2	Interpolation de métriques	22
<b>2.6</b>	<b>Quantifier l'anisotropie du maillage</b>	<b>24</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>

---

## 2.1 Résumé

Ce chapitre est un rappel des techniques d'adaptation de maillage anisotrope basées sur le calcul de métriques riemanniennes. Nous exposons notre motivation pour ce choix de générateur de maillage dans l'introduction suivante, puis nous présentons brièvement la notion de métrique riemannienne et les principales opérations concernant ces métriques. Nous évoquons aussi les notions d'élément unité et de maillage unité, qui sont des notions essentielles dans le processus de génération de maillage.

## 2.2 Introduction

Avec l'essor de la simulation et de la modélisation numérique dans l'ingénierie industrielle, le besoin de précision dans la prédiction des phénomènes physiques pour un moindre coût a pris de plus en plus d'importance. De nombreuses recherches sur cet aspect ont été entreprises et continuent de progresser. Les principales difficultés dans ces recherches sont liées au caractère tridimensionnel et instationnaire des problèmes réels, modélisés souvent par des EDP non-linéaires sur des géométries complexes. Pour atteindre la précision souhaitée, un nombre

important de degrés de liberté est nécessaire, et souvent cette solution n'est pas envisageable car cela entraîne un coût en calcul non négligeable voir inabordable.

Une méthode qui peut diminuer l'impact de tous ces inconvénients, qui permet d'accroître la précision de la solution numérique et aussi de réduire le coût de calcul, est l'adaptation de maillage. Le but des méthodes d'adaptation de maillage est de contrôler la précision de la solution numérique en changeant la discrétisation du domaine de calcul considéré, selon des directions et des dimensions bien définies. En effet, un estimateur d'erreur (généralement local), qui définira le critère d'adaptation de maillage,  $y$  est défini.

Les méthodes pour définir un maillage sont multiples. Elles sont toutes liées à une application spécifique et dépendent du type de maillage désiré: uniforme, isotrope ou anisotrope. Les algorithmes les plus connus sont basés souvent sur le raffinement (ou le découpage) local. Cependant ce type de méthode ne permet pas d'adapter les maillages de manière anisotrope. En effet, les méthodes d'adaptation de maillage ont été traditionnellement concentrées sur des maillages isotropes, où les éléments du maillage ont été ajustés selon le critère de l'estimateur d'erreur et leur forme gardée quasi-équilatérale. Mais les méthodes d'adaptations isotropes ont tendance à utiliser trop d'éléments dans les zones où le raffinement en maillage doit devenir plus important. Ceci est particulièrement vrai pour des problèmes à caractère anisotrope, où les changements de la solution selon les différentes directions sont significatifs. Afin de mieux profiter de l'adaptation de maillage, un ajustement de la forme, de la taille et de l'orientation des éléments du maillage suivant le comportement de la solution physique est souhaitable, ce qui conduit à utiliser un maillage anisotrope. Les méthodes d'adaptation anisotrope permettent (i) de capturer de manière automatique le comportement anisotrope des phénomènes physiques, (ii) de réduire considérablement le nombre de degré de liberté, ayant ainsi un impact favorable sur le temps CPU, et (iii) d'atteindre un ordre élevé de convergence asymptotique.

Une méthode pour définir ces maillages anisotropes consiste à générer un maillage suivant une métrique qui spécifie le calcul des distances dans le générateur de maillage. Les premiers fondements théoriques ont d'abord été proposés par [Vallet 1992] pour le cas anisotrope. La mise en œuvre pratique dans le cadre de la génération de maillage est due à [H. Borouchaki 1997].

Cette technique est couplée au contrôle de l'erreur d'interpolation [M. J. Castro-Diaz 1997], en introduisant le hessien de la solution qui est ensuite utilisé comme une métrique. Leservoisier et Dervieux [Leservoisier 2001] ont prolongé cette étude en étudiant l'erreur d'interpolation directement avec la métrique et non plus avec le hessien. Cette vision semble la plus naturelle car elle généralise le cas isotrope uniforme. En effet, un générateur de maillages adaptés est un générateur de maillages uniformes classique mais dont le calcul de longueur d'arête est défini par la métrique.

Dans cette thèse, le maillage discret est donc modélisé par un objet mathématique continu, la métrique riemannienne. L'intérêt d'utiliser des métriques consiste, d'une part dans le fait de contrôler le maillage indépendamment de l'algorithme de génération utilisé, et d'autre part, de disposer naturellement d'outils d'analyse qui n'existent pas sur l'espace des métriques discrètes: différentiation, optimisation, calcul de variations, etc.... Le but final est de considérer

dans toute analyse le maillage comme une donnée ou une inconnue d'un problème continu. L'utilisation simultanée d'une formulation continue, à la fois pour le maillage et pour le problème sous-jacent (estimation d'erreur, minimisation de fonctionnelles), permet alors de dériver le maillage continu adapté à notre problème. Localement, ces espaces se comportent dans leur plan tangent comme des espaces métriques euclidiens. On utilise ces derniers pour modéliser les éléments discrets. On montre que l'orientation et les ratios d'anisotropie sont des informations naturellement présentes dans la notion d'espace métrique. On utilise le concept d'élément unité [Frey 2000] afin de lier le maillage continu à ses représentations discrètes.

Dans ce chapitre nous rappelons les notions de métrique riemannienne et de maillage unité, ainsi que les quelques opérations élémentaires sur les métriques. Le présent chapitre est organisé comme suit: dans la section 2.3 la notion d'espace et métrique riemannienne est définie, puis dans la section 2.4 la notion de maillage unité est rappelée, suivie par des rappels sur des opérations élémentaires d'intersection et d'interpolation des métriques dans la section 2.5.

## 2.3 Notion de métrique riemannienne

Les variétés munies d'une structure riemannienne, ou variétés riemanniennes, sont des outils classiques de la géométrie différentielle. Elles apparaissent dans de nombreux contextes pour compenser l'insuffisance de la géométrie euclidienne, par exemple pour le calcul de la longueur d'un chemin sur une sphère. En effet, on peut affirmer que la géométrie euclidienne s'occupe de l'étude des espaces plats, c'est-à-dire tel que les objets géométriques peuvent être représentés sur une feuille de papier et entre deux points de la surface existe un unique segment trajectoire, qui représente le chemin de plus court entre ces points. La structure riemannienne, elle, repose sur des métriques riemanniennes qui courbent l'espace en redéfinissant la notion de distance classique. Dans le domaine de la génération de maillage adaptatif, cette structure est pour l'instant le seul moyen de prescrire des tailles de maille dans toutes les directions partout dans le domaine. C'est l'outil fondamental pour l'adaptation de maillage non structuré et anisotrope.

Définissons ce qu'est un **espace métrique riemannien** :

**DÉFINITION 1.** *On appelle variété riemannienne ou espace métrique riemannien, une variété continue  $\omega \subset \mathcal{R}^n$  munie d'une métrique  $\mathcal{M}(\cdot)$ . On la note  $(\mathbf{x}, \mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ . La restriction de la métrique en un point  $\mathbf{x}$  de la variété définit un produit scalaire sur l'espace tangent  $T_{\mathbf{x}}\Omega$  (le plus souvent égal à  $\Omega$  pour nos applications). Muni de cette structure, l'espace tangent a une structure d'espace métrique euclidien.*

Les notions élémentaires de distance, de volume et d'angle pour la métrique riemannienne sont définies. Il s'agira de calculer la longueur du trajet entre ces deux points définis par une paramétrisation de cette distance, i.e. le segment représentant la longueur entre ces deux points dans l'espace paramétrique représenté par notre domaine de calcul.

**DÉFINITION 2.** *Dans un espace métrique riemannien  $(\mathbf{x}, \mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ , la longueur d'une arête*



$\mathbf{ab}$  est calculée en utilisant la paramétrisation  $\gamma(t) = \mathbf{a} + t \mathbf{ab}$ , ou  $t \in [0, 1]$ :

$$\ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{M}} dt = \int_0^1 \sqrt{t \mathbf{ab} \mathcal{M}(\mathbf{a} + t \mathbf{ab}) \mathbf{ab}} dt. \quad (2.1)$$

On introduit ensuite les notions de volume et d'angle dans cet espace de métriques riemanniennes.

**DÉFINITION 3.** Soit un sous-ensemble borné  $K$  de  $\Omega$ , le **volume** de  $K$  dans l'espace  $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$  est défini par:

$$|K|_{\mathcal{M}} = \int_K \sqrt{\det \mathcal{M}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Dans l'espace riemannien, l'angle entre deux courbes est l'angle entre les vecteurs tangents au point d'intersection dans le plan tangent. Pour notre cas, l'arête et le vecteur tangent coïncident, donc on a:

**DÉFINITION 4.** Dans un espace de métrique riemannienne  $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ , l'**angle** décrit par deux arêtes  $\mathbf{pq}$  et  $\mathbf{pr}$  de  $\Omega$  est définie par l'unique réel  $\theta \in [0, \pi]$  qui vérifie:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{pq}, \mathbf{pr} \rangle_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}}{\|\mathbf{pq}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p})} \|\mathbf{pr}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p})}}. \quad (2.3)$$

En trois dimensions, le calcul de l'angle diédral, c'est-à-dire l'angle entre deux plans, nécessite une formulation intégrale car cet angle varie selon la position sur l'arête commune à deux faces.

**DÉFINITION 5.** Dans un espace de métrique riemannienne  $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ , l'**angle diédral** entre deux faces  $[\mathbf{pqr}]$  et  $[\mathbf{sqp}]$  de  $\Omega$  partageant l'arête  $\mathbf{pq}$  est défini par l'unique réel  $\theta \in [0, \pi]$  qui vérifie:

$$\cos(\theta) = \int_0^1 \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathbf{pqr}}, \mathbf{n}_{\mathbf{sqp}} \rangle_{\mathcal{M}(\mathbf{p} + t \mathbf{pq})}}{\|\mathbf{n}_{\mathbf{pqr}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p} + t \mathbf{pq})} \|\mathbf{n}_{\mathbf{sqp}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{p} + t \mathbf{pq})}} dt, \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{p} + t \mathbf{pq}$  avec  $t \in [0, 1]$  est la paramétrisation de l'arête  $\mathbf{pq}$  dans le domaine  $\Omega$  et  $\mathbf{n}_{\mathbf{pqr}}$  et  $\mathbf{n}_{\mathbf{sqp}}$  représentent les normales sortantes de  $[\mathbf{pqr}]$  et  $[\mathbf{sqp}]$  respectivement.

## 2.4 Génération de maillages anisotropes: maillage unité

La génération d'un maillage anisotrope se résume à des changements de tailles et d'orientations des éléments composants le maillage, pour chacun des points du domaine de calcul. On a vu précédemment les notions de longueur, de volume et d'angle dans l'espace des métriques riemanniennes. Leur prescription sera transmise au générateur anisotrope de maillage, qui fournira le meilleur ajustement possible.

Tel qu'introduit dans [George 1991], l'idée de base pour les méthodes d'adaptation basées-métrique est de générer un **maillage unité** dans l'espace des métriques riemanniennes prescrit.

Ainsi, les définitions d'élément unité et respectivement de maillage unité seront présentées dans ce qui suit.

### 2.4.1 Élément unité

**DÉFINITION 6.** *Un élément  $K$  est **unité** dans l'espace métrique riemannien défini par la métrique  $\mathcal{M}$  si toutes ces arêtes sont de longueur unité par rapport à la métrique  $\mathcal{M}$  considérée.*

Concrètement, un tétraèdre  $K$  défini par sa liste des arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1..6}$  est dit unité par rapport à la métrique  $\mathcal{M}$  si:

$$\forall i = 1, \dots, 6, \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}_i) = 1,$$

et respectivement son volume est défini par:  $|K|_{\mathcal{M}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ . Dans la Figure 2.1 on peut voir deux exemples d'éléments unité pour deux tenseurs de métrique distincts.

Pour un tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  il existe un ensemble non-vide d'éléments unités définis par rapport à  $\mathcal{M}$ , tel qu'on l'illustre dans la figure 2.2. A l'opposé, étant donné un élément  $K$  tel que  $|K|_{\mathcal{I}_n} \neq 0$ , il existe un unique tenseur de métrique  $\mathcal{M}$  pour rapport auquel l'élément  $K$  est unité.

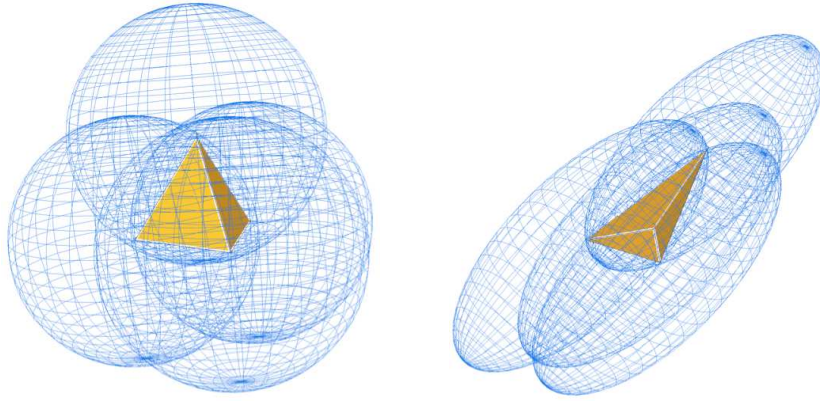


Figure 2.1: Exemple 3D d'élément unité décrit par la métrique isotrope  $\mathcal{I}_3$  (image à gauche) et par une métrique anisotrope  $\mathcal{M}$  (image à droite). Pour chaque élément la boule unité de la métrique pour chaque nœud est affiché.

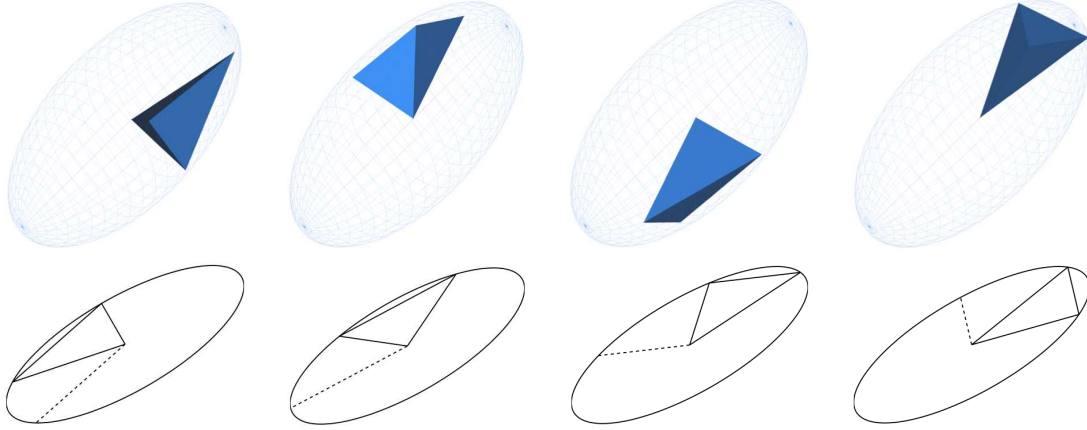


Figure 2.2: Eléments unités par rapport à des tenseurs de métriques 2D et 3D.

### 2.4.2 Maillage unité

**DÉFINITION 7.** *Par maillage unité on entend un maillage défini uniquement par des éléments unités (par rapport à un tenseur de métrique riemannienne).*

Bien évidemment, pouvoir générer ce type de maillage idéal n'est pas toujours garanti. Ainsi, on introduit notre définition, plus réaliste, de la notion de maillage unité :

**DÉFINITION 8.** *Un maillage discret  $\mathcal{H}$  d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dit **unité** pour un espace de métrique riemannienne  $(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$  si chacun de ces éléments est quasi-unité.*

Par élément quasi-unité on entend des éléments qui ont les longueurs de chaque arête  $l_{\mathcal{M}}$  comprises dans un intervalle dit de valeurs admissibles de la forme  $[\frac{1}{\alpha}, \alpha]$  avec  $\alpha > 0$  (voir [Frey 2001]). De manière générale on prend  $\alpha = \sqrt{2}$ . Par conséquent, un tétraèdre  $K$  défini par sa liste des arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1..6}$  est dit quasi-unité si  $\forall i \in [1, 6], l_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}_i) \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$ . Le problème d'existence de ce type de maillage a été étudié dans [Sommerville 1923] et [Goldberg 1974].

Néanmoins, cette contrainte sur les arêtes peut conduire à des éléments de volumes nuls. C'est pour cette raison qu'un critère supplémentaire est nécessaire, un critère lié à la *qualité de l'élément*. La notion de qualité de l'élément est une contrainte sur le volume de l'élément définie par :

$$Q_{\mathcal{M}}(K) = \frac{36}{3^{\frac{1}{3}} \sum_{i=1}^6 \ell_{\mathcal{M}}^2(\mathbf{e}_i)} |K|_{\mathcal{M}}^{\frac{2}{3}} \in [0, 1]. \quad (2.5)$$

Pour un tétraèdre régulier, peu importe les longueurs de ces arêtes, la fonction qualité  $Q_{\mathcal{M}}(K)$  est égale à 1.  $Q_{\mathcal{M}}$  est égale à 0 pour un tétraèdre de volume nul. On peut dire ainsi que la qualité de l'élément,  $Q_{\mathcal{M}}$ , mesure la déviation par rapport au tétraèdre régulier.

Avec ces remarques on peut enrichir la notion d'élément unité, définition également utilisée par les générateurs de maillage :

**DÉFINITION 9.** *Un tétraèdre  $K$  défini par ses arêtes  $(\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 6}$  est dit **quasi-unité** pour la métrique  $\mathcal{M}$  si*

$$\forall i \in [1, 6], \quad \ell_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}_i) \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right] \quad \text{and} \quad Q_{\mathcal{M}}(K) \in [\alpha, 1] \quad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

Pour notre étude la valeur  $\alpha = 0.8$  a été considérée.

## 2.5 Opérations élémentaires sur les métriques

Le principal avantage quand on travaille avec l'espace des métriques riemanniennes est la capacité d'effectuer des opérations élémentaires d'intersection et d'interpolation. Dans cette section on va revoir les opérations les plus essentielles dans l'adaptation de maillage: l'intersection et l'interpolation des métriques. En effet, ces opérations ont une interprétation géométrique en considérant l'ellipsoïde associée à la métrique.

### 2.5.1 Intersection de métriques

Quand plusieurs métriques sont associées à un même point du domaine de calcul, un choix doit être fait afin que le générateur de maillage puisse générer le maillage désiré. L'**intersection de métriques** est une opération qui consiste à choisir, pour chaque direction, les dimensions les plus restrictives imposées par le champ des métriques.

Plus précisément, soit  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  deux tenseurs de métriques associés à un point. Le tenseur de métrique  $\mathcal{M}_{1 \cap 2}$  qui correspond à l'intersection de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  est décrit par la plus grande taille sous la contrainte que la taille dans chacune des directions est toujours plus petite que les tailles prescrites par  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

D'un point de vue géométrique, les tenseurs de métriques sont représentés par des ellipses en 2D et ellipsoïdes en 3D, mais l'intersection de ces objets géométriques ne garde pas leur topologie. Autrement dit, l'intersection de deux ellipsoïdes ne donne pas un ellipsoïde. De ce fait, l'opération d'intersection des métriques est interprétée différemment. Dans la Figure 2.3 (image de gauche) une illustration de l'opération d'intersection de métriques est représentée. On cherche le plus grand ellipsoïde représentant  $\mathcal{M}_{1 \cap 2}$ , inclut dans l'intersection géométrique des ellipsoïdes associée à  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  respectivement. L'ellipsoïde vérifiant cette propriété est obtenu en utilisant une méthode de réduction simultanée des deux métriques.

*Réduction simultanée.* La réduction simultanée consiste à trouver une base commune  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  tel que  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont congrues avec une matrice diagonale dans cette base, et ensuite de déduire la métrique intersectée. On introduit la matrice  $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2$ , avec  $\mathcal{N}$  diagonalisable avec des vecteurs propres réels. Les vecteurs propres normalisés  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  de  $\mathcal{N}$  constituent une base commune de diagonalisation pour les métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Les éléments des matrices diagonales associées aux métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  dans cette base sont obtenus en utilisant la

formulation de Rayleigh <sup>1</sup>:

$$\lambda_i = {}^t\mathbf{e}_i\mathcal{M}_1\mathbf{e}_i \quad \text{and} \quad \mu_i = {}^t\mathbf{e}_i\mathcal{M}_2\mathbf{e}_i, \quad \text{for } i = 1 \dots 3.$$

Soit  $\mathcal{P} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)$  la matrice avec les éléments colonnes constituées des vecteurs propres de  $\mathcal{N}$ :  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1\dots 3}$ . La matrice  $\mathcal{P}$  est inversible car  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  forment une base dans  $\mathbb{R}^3$ . On a ainsi:

$$\mathcal{M}_1 = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_2 = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1}.$$

*Calcul de la métrique intersectée.* La métrique intersectée  $\mathcal{M}_{1\cap 2}$  est alors défini analytiquement par:

$$\mathcal{M}_{1\cap 2} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) & 0 \\ 0 & 0 & \max(\lambda_3, \mu_3) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1}.$$

L'ellipsoïde associée au  $\mathcal{M}_{1\cap 2}$  est la plus grande ellipsoïde inclut dans la région de l'intersection géométrique des ellipsoïdes définis par  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Une démonstration et une description plus détaillée de ce résultat est présentée dans [Alauzet 2003b].

Numériquement, dans le calcul de  $\mathcal{M}_{1\cap 2}$ , on commence par l'évaluation des valeurs propres de  $\mathcal{N}$  en utilisant un algorithme de Newton. Ensuite, les vecteurs propres de  $\mathcal{N}$ , qui décrivent la matrice  $\mathcal{P}$  sont calculés en utilisant des notions d'algèbre, d'image et de noyau.

**REMARQUE 1.** *L'opération d'intersection de métrique n'est pas une opération commutative. Par conséquent, quand on intersecte trois métriques ou plus, le résultat de l'opération dépendra de l'ordre de l'opération. De ce fait, le résultat n'est pas optimal. Une méthode, dite de l'ellipsoïde de John, qui nécessite la résolution d'un problème d'optimisation, est proposée dans [Loseille 2008b] pour l'opération d'intersection d'un nombre de métriques  $> 2$ .*

## 2.5.2 Interpolation de métriques

Une autre opération élémentaire qui nécessite une réinterprétation dans l'espace de métrique riemannienne est l'**interpolation de métriques**. En effet, la métrique est un champ discret défini pour chaque nœud. L'interpolation est donc nécessaire pour un calcul de la métrique sur chaque point du domaine de calcul. Cela nous permet en effet de définir un champ de métrique continu sur tout le domaine de calcul. Prenons par exemple le calcul du volume d'un élément en utilisant la définition (2.2). Le calcul des métriques interpolées pour des points à l'intérieur de l'élément est donc nécessaire.

Dans [Alauzet 2003b], plusieurs schémas d'interpolations basés sur la réduction spontanée ont été proposés. Comme pour l'opération d'intersection, le principal inconvénient de ces schémas

<sup>1</sup> $\lambda_i$  et  $\mu_i$  ne sont pas les valeurs propres de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Ils sont de valeurs spectrales associées aux bases  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ .

est la non-commutativité, le résultat de l'interpolation étant donc dépendant de l'ordre des métriques. De plus, ces schémas d'interpolation ne vérifient pas des propriétés utiles tel que le principe de maximum. Par conséquent, dans cette thèse on se base sur le cadre log-Euclidean introduit dans [Arsigny 2006].

*Cadre général de Log-Euclidean.* Nous commençons par introduire les notions de logarithme de métrique et d'exponentielle d'une matrice, ainsi que les opérations mathématiques correspondantes.

Soit le tenseur de métrique  $\mathcal{M} = \mathcal{R}\Lambda^t\mathcal{R}$ . Le **logarithme de la métrique**  $\mathcal{M}$  se définit par:

$$\ln(\mathcal{M}) := \mathcal{R} \ln(\Lambda)^t \mathcal{R},$$

avec  $\ln(\Lambda) = \text{diag}(\ln(\lambda_i))$ . Soit maintenant une matrice symétrique  $\mathcal{S} = \mathcal{Q}\Xi^t\mathcal{Q}$ . L'**exponentielle de la matrice**  $\mathcal{S}$  se définit par:

$$\exp(\mathcal{S}) := \mathcal{Q} \exp(\Xi)^t \mathcal{Q},$$

avec  $\exp(\Xi) = \text{diag}(\exp(\xi_i))$ . Les opérations logarithmiques d'**addition**  $\oplus$  et de **multiplication scalaire**  $\odot$  se définissent par:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 &:= \exp(\ln(\mathcal{M}_1) + \ln(\mathcal{M}_2)) \\ \alpha \odot \mathcal{M} &:= \exp(\alpha \cdot \ln(\mathcal{M})) = \mathcal{M}^\alpha. \end{aligned}$$

L'addition logarithmique est une opération commutative et coïncide avec la multiplication matricielle si les métriques  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  commutent au sens matricielle. L'ensemble des tenseurs de métriques équipé des opérations d'addition logarithmique  $\oplus$  et de multiplication  $\odot$  est un espace vectoriel.

*L'interpolation des métriques dans le cadre log-Euclidean.*

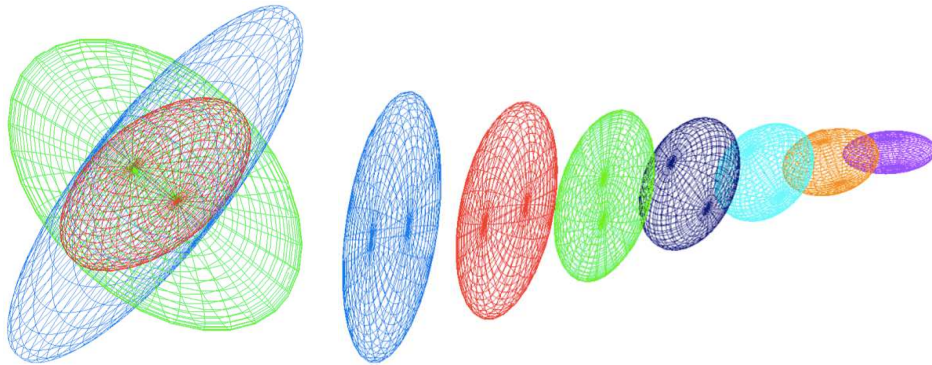


Figure 2.3: À gauche, une vue illustrant la procédure d'intersection de métriques avec la réduction simultanée en trois dimensions. En rouge, la métrique résultant de l'intersection des métriques bleue et verte. À droite, l'interpolation de la métrique le long d'un segment où les extrémités des métriques sont en bleu et en violet.

Soit  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots k}$  un ensemble de nœuds et  $(\mathcal{M}(\mathbf{x}_i))_{i=1\dots k}$  les métriques associées. Pour chaque point  $\mathbf{x}$  du domaine tel que:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \mathbf{x}_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1,$$

la métrique interpolée se définit par:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i \odot \mathcal{M}(\mathbf{x}_i) = \exp \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \ln(\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)) \right). \quad (2.6)$$

Cette opération est commutative mais son principal inconvénient vient du coût en calcul pour les opérations logarithmiques et exponentielles, mais aussi des  $k$  diagonalisations nécessaires. Néanmoins, cette procédure est essentielle pour définir un champ continu de métrique sur l'ensemble du domaine de définition. De plus, dans [Arsigny 2006] il a été démontré que cette opération d'interpolation conserve le principe de maximum, *i.e.*, pour une arête  $\mathbf{pq}$  avec les métriques associées aux deux extrémités  $\mathcal{M}(\mathbf{p})$  et  $\mathcal{M}(\mathbf{q})$  tel que  $\det(\mathcal{M}(\mathbf{p})) < \det(\mathcal{M}(\mathbf{q}))$ , on a  $\det(\mathcal{M}(\mathbf{p})) < \det(\mathcal{M}(\mathbf{p} + t\mathbf{pq})) < \det(\mathcal{M}(\mathbf{q}))$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Un exemple d'interpolation de métrique pour une arête est illustré dans la Figure 2.3.

**REMARQUE 2.** Si toutes les métriques commutent, alors la formule d'interpolation (2.6) se réduit à :

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^k \mathcal{M}(\mathbf{x}_i)^{\alpha_i},$$

Par conséquent, une moyenne arithmétique dans le cadre log-Euclidean peut-être interprétée comme une moyenne géométrique dans l'espace des tenseurs de métriques.

## 2.6 Quantifier l'anisotropie du maillage

Pour les problèmes à deux dimensions, l'anisotropie du maillage peut-être quantifiée à travers deux notions:

- le **ratio d'anisotropie**, et
- le **quotient d'anisotropie**.

Afin de rappeler la définition de ces notions, on part toujours de l'hypothèse qu'il existe un unique tenseur de métrique par rapport auquel l'élément  $K$  est unité. Le calcul de  $\mathcal{M}_K$ , le tenseur de métrique associé à l'élément  $K$ , est fourni par la solution du système linéaire (S) suivant:

$$(S) \quad \begin{cases} \ell_{\mathcal{M}_K}^2(\mathbf{e}_1) = 1 \\ \vdots \\ \ell_{\mathcal{M}_K}^2(\mathbf{e}_6) = 1, \end{cases}$$

où  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,6}$  représente la liste des arêtes de  $K$  et  $\ell_{\mathcal{M}_K}^2(\mathbf{e}_i) = {}^t\mathbf{e}_i \mathcal{M}_K \mathbf{e}_i$ . Le système admet une solution unique à condition que le volume de  $K$  soit non nul. Ainsi, le ratio d'anisotropie et le

quotient d'anisotropie associés à l'élément  $K$  sont calculés par les expressions:

$$\text{ratio} = \sqrt{\frac{\min_i \lambda_i}{\max_i \lambda_i}} = \frac{\max_i h_i}{\min_i h_i}, \quad \text{et} \quad \text{quo} = \frac{\max_i h_i^3}{h_1 h_2 h_3},$$

où  $(\lambda_i)_{i=1,3}$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{M}_K$  et  $(h_i)_{i=1,3}$  sont les tailles correspondantes. Le ratio d'anisotropie se définit par l'étirement maximal d'un tétraèdre en comparant deux directions. Le quotient d'anisotropie représente le ratio d'anisotropie total quand on prend en compte toutes les directions possibles. Ceci peut également être interprété comme le taux général de gain en trois dimensions pour les maillages adaptés anisotropes par rapport aux maillages isotropes. Ce gain est évidemment encore plus important en comparaison avec le cas des maillages uniformes.

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre a rappelé les principales techniques liées au maillage continu. Une fois la métrique connue, une classe de maillages unité peut être définie, et (au moins) un maillage adapté est construit par *le générateur de maillage contrôlé*.

Bien évidemment, un pré-requis est la spécification de la métrique par un estimateur d'erreur. Cette spécification sera abordée dans le Chapitre 3.





# Interpolation et reconstruction d'ordre élevé

---

## Contents

<b>3.1</b>	<b>Introduction à l'interpolation d'ordre élevé</b>	<b>27</b>
3.1.1	Motivation	27
3.1.2	État de l'art	28
<b>3.2</b>	<b>Approximation d'une fonction à plusieurs variables</b>	<b>29</b>
3.2.1	Formule de Taylor	29
3.2.2	Interpolation de Lagrange	29
3.2.3	Reconstruction basée Taylor	31
3.2.4	Deuxième analyse	32
<b>3.3</b>	<b>Calcul d'un pseudo-hessien autour d'un nœud</b>	<b>33</b>
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>34</b>

---

## 3.1 Introduction à l'interpolation d'ordre élevé

### 3.1.1 Motivation

Dans les méthodes d'adaptation de maillage basées-hessien, l'erreur d'interpolation est approchée par le hessien de l'interpolé. En particulier, les méthodes multi-échelles reposent sur la norme  $L^p$  de l'erreur d'interpolation de l'inconnue, estimée d'après son hessien. Leur application en association avec un schéma précis à l'ordre deux constitue un outil puissant pour la construction de maillages anisotropes assurant une convergence rapidement d'ordre deux vers la solution continue. Des investigations théoriques [Courty 2006] suggèrent que ces propriétés de convergence peuvent s'étendre à des ordres élevés, sous la condition que l'on ait un schéma et une estimation d'erreur cohérents.

Avec l'essor des schémas d'ordre élevé, tel que les schémas Galerkin Discontinu (DG) [G. Karniadakis 2000, Shu 2001, Cockburn 2001, Bassi 1997], les schémas ENO [Engquist 1986, Lafon 1993, Barth 1990, Groth 2011] ou les schémas Residual Distribution (RD) [Abgrall 2006b], l'intérêt de prendre en compte des interpolations ou reconstructions

d'ordre élevé dans une boucle d'adaptation de maillage s'est trouvé renforcé. Il existe cependant peu de travaux à la fois théoriques et pratiques sur les erreurs d'interpolations ou de reconstruction d'ordre élevé. Une raison en est probablement la difficulté de générer en pratique des maillages curvilignes, ceux-ci sont indispensables pour profiter de tous les avantages de l'ordre élevé en présence de frontières courbes. Nous ne nous intéresserons pas à cet aspect dans ce mémoire, mais concentrons notre analyse sur les erreurs commises à l'intérieur du domaine de calcul.

### 3.1.2 État de l'art

Les analyses d'erreur qui nous intéressent remontent, pour faire court, à des principes de type Bramble-Hilbert qui expriment l'inférence suivant laquelle ce qui est exact pour des polynômes de degré  $k$  ne produit que des erreurs de degré  $k + 1$ . Ces analyses d'erreur sont démontrées principalement dans un important papier de Ciarlet et Raviart [Ciarlet 1972]. Plus tard, lors des premiers papiers sur les schémas à reconstruction [Engquist 1986, Harten 1991], les auteurs se réfèrent directement à la formule de Taylor. Une deuxième analyse dans [Abgrall 1992] fait le lien avec [Ciarlet 1972]. La théorie de l'interpolation pour des méthodes utilisant des éléments finis a inspiré divers auteurs intéressés par les estimations d'erreur. Huang [Huang 2005] dans ses études théoriques s'en est servi pour construire des estimations génériques pour le contrôle de l'erreur d'interpolation. Néanmoins, ces approches théoriques sont souvent difficiles à implémenter en pratique. En effet, la métrique utilisée est déduite des hessiens de chaque dérivée partielle. À chaque dérivée partielle on associe une métrique partielle et la métrique globale est générée par un procédé d'intersection de toutes ces métriques. Une idée similaire se retrouve dans les travaux de Hecht [Hecht 2008] pour des interpolations lagrangiennes d'ordre deux, dans lesquels on contrôle l'erreur qui correspond à chaque dérivée partielle. Dans le procédé d'intersection des métriques, l'unicité de la métrique intersection n'est pas garantie notamment quand on utilise des procédés d'intersection basés sur la réduction simultanée. De plus la métrique résultante est souvent quasi-isotrope, faisant perdre l'intérêt de l'option anisotrope.

Cao a proposé un développement analytique de l'erreur en 2D. Il généralise son étude de l'interpolation linéaire [Cao 2005] à un l'ordre plus élevé [Cao 2008]. On peut également citer les travaux de Mirebeau [Mirebeau 2010] pour des idées similaires.

Mbinky s'est intéressée au cours de sa thèse [Mbinky 2013] aux interpolations d'ordre élevé en gardant le contexte d'adaptation de maillage basé hessien. Elle utilise pour revenir à une matrice de type hessien la décomposition en valeur singulière de type Sylvester.

Dans l'approche proposée dans ce mémoire, nous rassembleront des éléments permettant de représenter l'erreur sous la forme d'un terme de série de Taylor à l'ordre trois. Puis, de manière similaire à l'approche de Mbinky, nous passerons à une formulation en pseudo-hessien. Nous utiliserons un artifice numérique, une approche aux Moindre Carrés, pour transformer en chaque nœud le terme d'ordre trois en une puissance d'un terme d'ordre deux de type hessien.

Mais tout d'abord nous allons rappeler les bases des estimations d'erreur d'interpolation et reconstruction en en tirant les informations qui nous ont conduit à une première formulation, cubique, de la partie principale de l'erreur.

## 3.2 Approximation d'une fonction à plusieurs variables

Soit  $u$  une fonction régulière de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ . Plusieurs méthodes permettent de l'approcher par un polynôme.

### 3.2.1 Formule de Taylor

Le théorème de Taylor pour  $u$  s'écrit:

$$u(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{1}{k!} D^k u(\mathbf{x})(\delta\mathbf{x})^k + R_{k+1} \quad \text{with} \quad \|R_{k+1}\| = O(\|\delta\mathbf{x}\|^{k+1}).$$

Dans cette équation, la dérivée de Fréchet  $D^k u(\mathbf{x})$  de  $u$  au point  $\mathbf{x}$  est un tenseur ou application multi-linéaire, ou encore un élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^p)$ . En vertu du théorème de Leibnitz,  $D^k u(\mathbf{x})$  est un tenseur symétrique au sens suivant:

$$D^k u(\mathbf{x}) \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = D^k u(\mathbf{x}) \cdot (\xi_{\sigma_1}, \xi_{\sigma_2}, \dots, \xi_{\sigma_k})$$

pour toute permutation  $\sigma : i \mapsto \sigma_i$  de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Dans le cas où le vecteur  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  a ses composantes identiques, c'est à dire que  $\xi_i = \xi$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ , on écrit simplement:

$$D^k u(\mathbf{x}) \cdot (\xi, \xi, \dots, \xi) = D^k u(\mathbf{x}) \cdot (\xi)^k.$$

Par exemple pour  $n = 2, p = 1$  :

$$D^2 u(\mathbf{x})(\delta\mathbf{x})^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \delta x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \delta x_1 \delta x_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \delta x_2^2$$

$$D^3 u(\mathbf{x})(\delta\mathbf{x})^3 = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \delta x_1^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} \delta x_1^2 \delta x_2 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} \delta x_1 \delta x_2^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} \delta x_2^3.$$

La norme de  $D^k u(\mathbf{x})$  est définie par

$$\|D^k u(\mathbf{x})\| = \sup\{|D^k u(\mathbf{x}) \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)|; \|\xi_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq k\}.$$

Pour  $p = 1$  une estimation de  $R_{k+1}$  peut-être précisée en utilisant l'expression du terme général:

$$R_{k+1} \preceq \left| \frac{1}{k!} D^{k+1} u(\mathbf{x})(\delta\mathbf{x})^{(k+1)} \right|$$

où  $\preceq$  signifie que l'inégalité est vraie pour  $|\delta\mathbf{x}|$  suffisamment petit.

### 3.2.2 Interpolation de Lagrange

Étant donné un entier  $k \geq 1$ , en notant  $P_k$  l'espace des polynômes de degré  $\leq k$  définis sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit  $N = N(k) = \dim P_k$ . Un ensemble  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$  de  $N$  points distincts  $a_i$  dans  $\mathbb{R}^n$  forme un *ensemble  $k$ -unisolvant* si, étant donnés des nombres réels  $\alpha_i, 1 \leq i \leq N$ , il existe un et un seul polynôme  $p \in P_k$  tel que

$$p(a_i) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Plusieurs notions introduites dans [Ciarlet 1972] peuvent être reliées à l'anisotropie. Étant donné un ensemble  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$ , on note  $K(\Sigma)$  l'enveloppe convexe fermée de  $\Sigma$ . À  $K(\Sigma)$  nous associons deux paramètres géométriques :

$$h = h(\Sigma) = \text{diamètre de } K(\Sigma), \quad (3.1)$$

$$\rho = \rho(\Sigma) = \sup\{\text{diamètre de la sphère contenue dans } K(\Sigma)\} \quad (3.2)$$

Si  $\Sigma$  est un ensemble unisolvant avec  $k \leq 1$  son intérieur est non-vidé et  $\rho(\Sigma)$  est strictement positif. Soient  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$  et  $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^N$  deux ensembles de points dans  $\mathbb{R}^n$ . On dira qu'ils sont *équivalents* si et seulement si existe une transformation inversible  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$a_i = B\hat{a}_i + b, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Si  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$  est unisolvant il en est de même pour  $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^N$ . Dans [Ciarlet 1972], les auteurs montrent que pour un tel couple d'ensembles  $k$ -unisolvants, on a :

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}} \quad \text{et} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho}.$$

Dans l'examen des métriques anisotropes, nous serons plus particulièrement intéressés par le cas d'une transformation  $B$  symétrique :

$$B = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} {}^t\mathcal{R}. \quad (3.3)$$

Il est dans ce cas possible de mesurer l'impact de la transformation  $B$  par l'effet de l'étirement appliqué  $(\beta_1, \beta_2)$  sur les coefficients de forme  $(h, \rho)$  :

$$h \leq \max(\beta_1, \beta_2)\hat{h} \quad ; \quad \rho \leq \min(\beta_1, \beta_2)\hat{\rho}.$$

Étant donné une fonction  $u$  définie sur un ensemble  $k$ -unisolvant  $\Sigma$ , le polynôme  $\tilde{u}$  est le *polynôme interpolant* de  $u$  si il est l'unique polynôme de degré  $\leq k$  vérifiant :

$$\tilde{u}(a_i) = u(a_i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Une estimation de l'erreur de l'interpolation de Lagrange est établie dans [Ciarlet 1972] :

**Théorème 1:** Soit  $k$  un entier fixé  $\geq 1$ , et soit  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$  un ensemble  $k$ -unisolvant de points dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $\Sigma$ -admissible, et  $u \in \mathcal{C}^{k+1}(K)$ . Alors, pour tout point  $x \in K$  et pour tout entier  $m$  avec  $0 \leq m \leq k$ , on a :

$$D^m \tilde{u}(\mathbf{x}) = D^m u(\mathbf{x}) + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i=1}^N \{D^{k+1} u(\eta_i(\mathbf{x})) \cdot (a_i - \mathbf{x})^{k+1}\} D^m p_i(\mathbf{x})$$

où les  $p_i$  sont les seuls polynômes de degré  $\leq k$  tels que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

et  $\eta_i(\mathbf{x}) = \theta_i \mathbf{x} + (1 - \theta_i) a_i$ .

**Théorème 2:** Soit  $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$  un ensemble  $k$ -unisolvant de points de  $\mathbb{R}^n$ , et  $h$  et  $\rho$  définis comme en (3.1)(3.2). Soit  $u \in C^{k+1}(K)$  donné tel que

$$M_{k+1} = \sup \|D^{k+1}u(x)\|; x \in K < \infty.$$

Si  $\bar{u}$  est l'unique polynôme de degré  $\leq k$  interpolant  $u$ , on a pour tout entier  $m$  tel que  $0 \leq m \leq k$  l'estimation

$$\sup \|D^m u(x) - D^m \bar{u}(x)\|; x \in K \leq C M_{k+1} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} \leq C' M_{k+1} \frac{\max(\beta_1, \beta_2)^k}{\min(\beta_1, \beta_2)^m},$$

pour des constantes

$$C = C(n, k, m, \hat{\Sigma}) \quad , \quad C' = C'(n, k, m, \hat{\Sigma})$$

qui restent les mêmes pour tout ensemble  $k$ -unisolvant et qui peuvent être calculées une fois pour toutes pour un  $\hat{\Sigma}$  fixé.

### 3.2.3 Reconstruction basée Taylor

Nous reproduisons l'argument de Harten et Chakravarthy dans [Harten 1991]. Étant donné une fonction  $u$  dont on connaît les moyennes par cellules  $\bar{u} = \{\bar{u}_i\}$ . On s'intéresse à un polynôme  $R_i(x, \bar{u})$  de degré  $r-1$  construit pour la cellule  $i$ . Nous l'écrivons sous la forme de son développement de Taylor:

$$R_i(x, \bar{u}) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k} \sum_{|\ell|=k} (x - c_i)^\ell D_\ell u, x \in C_i.$$

où  $\ell$  est un multi-indice. Par comparaison avec le développement de Taylor de  $u(x)$  au voisinage de  $c_i$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k} \sum_{|\ell|=k} (x - c_i)^\ell \frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell} + \frac{1}{r!} \sum_{|\ell|=r} (x - c_i)^\ell \frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell} + O(h^{r+1})$$

On a le lemme ([Harten 1991]):

**Lemme :** Pour un voisinage assez grand  $J(i)$  de cellules autour de  $i$  et si  $R_i(x, \bar{u})$  est construit de telle sorte que:

$$\int_{\text{Cell}_j} R_i(x, \bar{u}) dV = \bar{u}_j, \quad \forall j \in J(i)$$

alors on a:

$$D_\ell = \frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell}(c_i) + O(h^{r-|\ell|})$$

$$R_i(x, \bar{u}) = u(x) + O(h^r). \square$$

Une manière d'obtenir une estimation plus précise est d'abandonner le dernier terme de la reconstruction:

$$\hat{R}_i(x, \bar{u}) = \sum_{k=0}^{r-2} \frac{1}{k!} \sum_{|\ell|=k} (x - c_i)^\ell D_\ell.$$

Alors on a :

$$|\bar{R}_i(x, \bar{u}) - u(x)| \leq \frac{1}{(r-1)!} \sum_{|\ell|=r-1} |(x - c_i)^\ell D_\ell| + O(h^r).$$

En conclusion les estimations de Harten-Chakravarthy en  $O(h^r)$  c'est à dire en  $Kh^r$  nous renseignent insuffisamment sur la constante  $K$  et ne sont donc rigoureusement exploitables qu'en abandonnant les termes d'ordre supérieur de la reconstruction. Dans le cas où nous souhaitons un schéma advectif d'ordre trois, il nous faudrait, au lieu d'une reconstruction quadratique, mettre en œuvre une reconstruction cubique plus coûteuse, puis abandonner les termes cubiques dans le reste de la mise en œuvre du schéma. Ces termes cubiques représentent fidèlement le premier terme d'erreur et on pourra donc les utiliser pour l'analyse d'erreur et l'adaptation du maillage. À noter que si nous avons dans le modèle continu des termes de diffusion, par exemple avec un Navier-Stokes à la place du Euler, une reconstruction cubique est réputée nécessaire pour intégrer les flux visqueux si on veut conserver l'ordre trois. L'évaluation de la composante de l'erreur liée aux termes visqueux composé de dérivées quatrièmes devient "le maillon faible".

### 3.2.4 Deuxième analyse

Dans [Abgrall 1992], Abgrall utilise une analyse de Ciarlet et Raviart ([Ciarlet 1972]) qui apporte une information supplémentaire. L'hypothèse est à nouveau que le polynôme est obtenu par une reconstruction  $k$ -exacte, c'est à dire exacte pour tout polynôme de degré  $k$ . On note  $W^{k+1,p}(\Omega)$  l'espace de Sobolev équipé de la norme usuelle  $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ .

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left( \sum_{l=0}^m \|D^l u\|_{p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}} ; \quad |u|_{m,p,\Omega} = \|D^m u\|_{p,\Omega} ; \quad \|D^m u\|_{p,\Omega} = \left( \|D^l u(x)\|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}.$$

L'interpolation de Lagrange aussi bien que la reconstruction ENO conservative jouissent toutes deux de la linéarité et de la  $k$ -exactitude, qui sont précisément les principales hypothèses d'un second théorème de Ciarlet et Raviart:

**Théorème 3:** Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  limité par une frontière continue. Soit  $p, 1 \leq p \leq \infty, k \geq 0$  un entier,  $m$  un second entier tel que  $0 \leq m \leq k + 1$ .

Soit  $\Pi$  une application de  $\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega); W^{m,p}(\Omega))$  vérifiant la propriété de  $k$ -exactitude :

$$\Pi u = u \quad \forall \quad u \in P_k.$$

Alors pour tout  $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$  et pour  $h$  assez petit on a :

$$\|u - \Pi u\|_{m,p,\Omega} \leq C |u|_{k+1,p,\Omega} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} \leq C' |u|_{k+1,p,\Omega} \frac{\max(\beta_1, \beta_2)^k}{\min(\beta_1, \beta_2)^m},$$

pour des constantes

$$C = C(n, k, p, \hat{\Omega}, \hat{\Pi}) \quad ; \quad C' = C'(n, k, p, \hat{\Omega}, \hat{\Pi})$$

qui restent les mêmes pour tous les domaines équivalents  $\Omega$  et qui peuvent être calculées une fois pour toutes dans un domaine  $\hat{\Omega}$  équivalent à  $\Omega$ .

L'intérêt de ce résultat est de faire apparaître (à travers la norme de Sobolev) la dérivée troisième de  $u$  dans le cas  $k = 2$ .

### 3.3 Calcul d'un pseudo-hessien autour d'un nœud

Compte tenu des informations précédentes, notre modèle de l'erreur de reconstruction quadratique prendra la forme suivante

$$|u(\mathbf{x}) - \pi_2 u(\mathbf{x})| \preceq \sup_{\delta \mathbf{x}} |D^3 u(\delta \mathbf{x})^3|.$$

où  $\pi_2$  est l'opérateur de reconstruction quadratique et où les  $\delta \mathbf{x}$  décrivent les tailles de maille locales dans toutes les directions. Dans le but de trouver une métrique optimale, on se propose de trouver un pseudo-hessien  $\tilde{H}_i$  en chaque sommet  $i$  tel qu'à l'intérieur de la cellule  $i$  on ait :

$$|u(\mathbf{x}_i) - \pi_2 u(\mathbf{x}_i)| \preceq \left( \sup_{\delta \mathbf{x}} |\tilde{H}_i| (\delta \mathbf{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

ce qui en termes de métrique s'écrira:

$$|u(\mathbf{x}_i) - \pi_2 u(\mathbf{x}_i)| \preceq \left( \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} |\tilde{H}_i| \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nous proposons de réaliser ce programme en ajustant le terme cubique de la formule de Taylor avec la puissance 3/2 du terme quadratique en pseudo-hessien sur chaque arête  $ij$  autour de  $i$ .

Pour une arête  $ij$  donnée, le terme cubique s'écrit :

$$T_{ij} = \frac{1}{3!} D^3 u(\mathbf{ij})^3$$

où  $D^3 u$  est évalué dans la cellule  $i$ , et

$$\mathbf{ij} = (x_j - x_i, y_j - y_i) = (x_{ij}, y_{ij}).$$

Le terme au second ordre équivalent s'écrirait:

$$D_{ij} = \frac{1}{2!} \tilde{H}_i(\mathbf{ij})^2$$

et idéalement on voudrait trouver  $\tilde{H}_i$  satisfaisant à (en n'écrivant pas les constantes multiplicatives) :

$$\tilde{H}_i(\mathbf{ij})^2 = (D^3 u(\mathbf{ij})^3)^{2/3}$$

Puisque seulement trois coefficients de  $H_i$  sont à choisir, pour un nombre *a priori* plus grand  $N(i)$  d'arêtes voisines de  $i$ , nous appliquons une formulation en Moindres Carrés :

$$\tilde{H}_i = \underset{j=1}{\text{Argmin}} \sum^{N(i)} \left( \tilde{H}_i(\mathbf{ij})^2 - (D^3 u(\mathbf{ij})^3)^{2/3} \right)^2.$$



On peut décrire plus en détails les différents termes du problème aux Moindres Carrés :

$$\tilde{H}_{u_i} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b_i & c_i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}_{u_i}(\mathbf{ij})^2 = a_i x_{ij}^2 + 2b_i x_{ij} y_{ij} + c_i y_{ij}^2$$

$$D^3 u(\mathbf{ij})^3 = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} x_{ij}^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 y} x_{ij}^2 y_{ij} + \frac{\partial^3 u}{\partial x y^2} x_{ij} y_{ij}^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} y_{ij}^3.$$

Les conditions d'optimalité définissant les coefficients  $(a_i, b_i, c_i)$  du pseudo-hessien en  $i$  prennent la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \sum x_{ij}^4 & 2 \sum x_{ij}^3 y_{ij} & \sum x_{ij}^2 y_{ij}^2 \\ 2 \sum x_{ij}^3 y_{ij} & 4 \sum x_{ij}^2 y_{ij}^2 & 2 \sum x_{ij} y_{ij}^3 \\ \sum x_{ij}^2 y_{ij}^2 & 2 \sum x_{ij} y_{ij}^3 & \sum y_{ij}^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D^3 u(\mathbf{ij})^3)^{2/3} \sum x_{ij}^2 \\ 2(D^3 u(\mathbf{ij})^3)^{2/3} \sum x_{ij} y_{ij} \\ (D^3 u(\mathbf{ij})^3)^{2/3} \sum y_{ij}^2 \end{pmatrix}$$

où les sommes sont prises pour les sommets  $j$  voisins de  $i$ . Ces formules seront mises en application dans les chapitres 8 et 9 du mémoire.

### 3.4 Conclusion

Évaluer une erreur de reconstruction est encore un problème relativement ouvert. Nous avons exhibé une estimation à une constante près. Nous avons exhibé un contexte dans lequel le composant différentiel de la constante -une dérivée troisième- aussi était identifié. Ces remarques font du terme cubique un modèle d'erreur de reconstruction raisonnable. Comme dans toute démarche d'erreur a priori, l'approximation de l'erreur d'approximation via la solution discrète reste une importante difficulté, que nous n'avons pas résolue théoriquement dans ce mémoire.

Une fois fixé notre modèle cubique d'erreur, nous transformons ce terme en la puissance  $3/2$  d'un terme quadratique. À cet effet nous appliquons une approximation par Moindres Carrés. La qualité de cette approximation sera évaluée dans les deux derniers chapitres de ce mémoire qui mettent en œuvre une boucle d'adaptation.

# Résolution numérique des équations d'Euler compressibles

---

## Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>Résolution numérique des équations d'Euler 3D</b>	<b>36</b>
4.2.1	Modèle mathématique des équations d'Euler	36
4.2.2	Une formulation éléments-finis P1 Galerkin	38
4.2.3	Formulation mixte éléments-volumes finis: équivalence	38
4.2.4	Calcul des flux	40
<b>4.3</b>	<b>Vers des schémas d'ordre élevé</b>	<b>42</b>
4.3.1	Le schéma MUSCL de second ordre	42
4.3.2	Schéma spatial LV6 d'ordre élevé	44
4.3.3	Avancement en temps	45
4.3.4	Conclusion sur les schémas superconvergents	45

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de rappeler les principaux ingrédients dans la résolution numérique des EDP de la Mécanique des Fluides compressibles: les équations d'Euler et de Navier-Stokes. Le schéma numérique présenté sera utilisé tout au long de cette thèse à titre de schéma de référence pour comparaison avec les nouveaux schémas introduits.

On s'intéresse ici à des schémas numériques adaptés pour l'aérodynamique non-linéaire, où les écoulements sont dominés par la convection et par la présence de chocs. Ces schémas sont centrés-sommets, dissipatifs, précis au second ordre sur des maillages formés de tétraèdres et non-structurés, et d'ordre élevé (jusqu'à six) sur des maillages cartésiens. De plus, une faible dissipation rend ces schémas bien adaptés à des écoulements complexes, turbulents, ou modélisés par des modèles de turbulence, par exemple pour des cas "Large Eddy Simulation" (LES).

Le présent chapitre est organisé en trois sections. Les principaux aspects numériques dans la résolution spatiale du modèle simplifié des équations d'Euler sont présentés en section 4.2. Dans

la seconde section, section 4.3, on va se focaliser sur des représentations d'ordre élevé pour la résolution spatiale. Ce chapitre sera clos par l'extension des schémas présentés dans la section 4.3 pour des écoulements visqueux modélisés par les équations de Navier-Stokes en compressible.

## 4.2 Résolution numérique des équations d'Euler 3D

### 4.2.1 Modèle mathématique des équations d'Euler

Le système des équations d'Euler instationnaire, représenté par la conservation de la masse, du moment et de l'énergie pour un gaz parfait non-visqueux, est donné sous forme conservative par la formulation suivante:

$$\Psi(W) = \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.1)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  représente le domaine de calcul,  $W = {}^t(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)$  est le vecteur de variables conservatives,  $\frac{\partial W}{\partial t}$  est la dérivée partielle par rapport au temps (parfois noté:  $W_t$ ), et  $\mathcal{F}$  est le flux convectif  $\mathcal{F}(W) = (\mathcal{F}_1(W), \mathcal{F}_2(W), \mathcal{F}_3(W))$  formé par les trois vecteurs:

$$\mathcal{F}_1(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E+p)u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E+p)v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_3(W) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E+p)w \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

avec  $\rho$ ,  $p$  et  $E$  la densité, pression thermodynamique et l'énergie totale par unité de masse respectivement. Les symboles  $u$ ,  $v$  et  $w$  représentent les composantes cartésiennes du vecteur vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ .

Pour un gaz parfait, la pression suit la loi:

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\right),$$

avec  $\gamma$  constante.

En supposant les conditions aux bords suivantes, par exemple de glissement sur la paroi  $\Gamma$ :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

où par  $\mathbf{n}$  on comprend la normale sortante de  $\Gamma$ , on fait également l'hypothèse d'écoulement uniforme pour les frontières limites  $\Gamma_\infty$ . On impose également la condition initiale:  $W(\mathbf{x}, 0) = W_0(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

Le système (4.1) est homogène, autrement dit les composantes du flux  $\mathcal{F}_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ , vérifient la relation d'homogénéité suivante:  $\mathcal{F}_i(\lambda W) = \lambda \mathcal{F}_i(W)$ . D'où il découle :  $\mathcal{F}_i(W) = \mathcal{F}'_i(W)W$ .

**DÉFINITION 10.** *Un système d'EDP tel que le système 4.1 est dit "hyperbolique dans la direction  $n = (n_1, n_2, n_3)$ " si la matrice caractéristique associée  $H$  (pour nous  $H = n_1 \mathcal{F}'_1 + n_2 \mathcal{F}'_2 + n_3 \mathcal{F}'_3$ ) est à valeurs propres réelles, et avec ses vecteurs propres associés linéairements indépendants pour chaque  $n_1, n_2, n_3$ .*

**PROPOSITION 1.** *Le système des équations d'Euler (4.1) (avec les conditions aux frontières et initiales associées) est un système **hyperbolique** pour la direction  $t$  dans le domaine de calcul  $\Omega$ .*

On rappelle que le système d'Euler (4.1) n'admet pas généralement une solution régulière, même si initialement la solution  $W_0(x)$  est régulière. Des discontinuités, par exemple des ondes de choc, peuvent se développer au cours du temps. On introduit alors la notion de solution faible.

La formulation faible du système (4.1) a pour écriture:

$$\begin{aligned} \forall \phi \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{R}^+), \quad (\Psi(W), \phi) &= \int_0^T \int_{\Omega} [-W \phi_t - \mathcal{F}(W) \nabla \phi] \, d\Omega dt \\ &+ \int_{\Omega} [\phi(T)W(T) - \phi(0)W(0)] \, d\Omega \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma} \phi(\hat{\mathcal{F}}(W) + \mathcal{F}(W)) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma dt = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $\hat{\mathcal{F}}(W) + \mathcal{F}(W)$  contient aussi les conditions aux bords et les flux aux bords.

**DÉFINITION 11. (La relation de Rankine-Hugoniot)** *Soit  $W$  une solution discontinue du système (4.1), pour toute couple  $(x, t)$  et avec le vecteur normal  $(-\sigma, \mathbf{n})$ . On note  $W_1$  et  $W_2$  deux solutions à gauche et à droite respectivement de la discontinuité. La relation de Rankine-Hugoniot, décrivant la relation entre ces états d'une part et de l'autre du choc, s'écrit:*

$$\|\mathcal{F}(W_1) - \mathcal{F}(W_2)\| \cdot \mathbf{n} = \sigma [W_1 - W_2]$$

où  $\mathbf{n}$  et  $\sigma$  sont respectivement la direction et la vitesse de propagation de la discontinuité (choc).

Il n'y a pas unicité pour la solution du système faible (4.3), mais toutes les solutions n'ont pas une interprétation physique. Un exemple de solution acceptée est défini par la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la solution visqueuse du système suivant:

$$W_t + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) = \varepsilon \Delta W, \quad \varepsilon > 0.$$

Dans un contexte simplifié, mono-dimensionnel, cela signifie que la solution faible doit satisfaire la condition d'entropie suivante:

**DÉFINITION 12.** *Une fonction convexe  $\eta$  est appelée l'**entropie** associée au système d'Euler (4.1) si les fonctions  $q_1, q_2, q_3$  existent (appelées aussi flux d'entropie) et tel que:*

$$\frac{d\eta(W)}{dW} \frac{dq_k(W)}{dW} = \frac{d\mathcal{F}_k(W)}{dW} \quad \text{for } k = 1, 2, 3.$$

Une solution faible  $W$  du système (4.1) est dite **solution d'entropie** si chaque entropie  $\eta$ , de flux  $q_1, q_2, q_3$  associés au (4.1), vérifie l'inégalité suivante:

$$\frac{\partial \eta(W)}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial q_k(W)}{\partial x_k} \leq 0.$$

En pratique, nos schémas numériques donnent une dissipation numérique qui sera suffisante pour approcher la solution d'entropie.

### 4.2.2 Une formulation éléments-finis P1 Galerkin

Soit  $\Omega_h$  un domaine polygonal approchant le domaine de calcul  $\Omega$ . On suppose une discrétisation de  $\Omega_h$  par une tétraédrisation  $\mathcal{T}_h$  admissible par la méthode des éléments-finis (MEF), autrement-dit l'intersection de deux tétraèdres est soit vide, soit un nœud, soit une arête ou soit une facette. On appellera  $\Omega_h$  le domaine discret de calcul, et  $\Gamma_h$  la frontière discrète associée. Les fonctions tests sont des éléments de l'ensemble  $V_h$  des fonctions linéaires, continues par morceaux, incluse dans  $V = [H^1(\Omega)]^5$ :

$$V_h = \left\{ \phi_h \mid \phi_h \text{ est continue et } \phi_h|_T \text{ est linéaire } \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Afin d'éviter les inconvénients des opérateurs d'interpolations applicables dans  $H^1$ , on va travailler avec les ensembles:

$$\bar{V} = [H^2(\Omega)]^5 \text{ et } \bar{V}_h = \bar{V} \cup V_h.$$

Ceci est utile pour l'utilisation de  $\Pi_h$ , l'opérateur standard  $P^1$  d'interpolation:

$$\begin{aligned} \Pi_h : \bar{V}_h &\longrightarrow V_h \\ \phi &\longmapsto \Pi_h \phi \quad \text{avec } \Pi_h \phi(i) = \phi(i) \quad \forall i \text{ vertex of } \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

On peut maintenant considérer une formulation discrète du problème (4.3):

$$\forall \phi_h \in V_h, \quad \int_{\Omega_h} (\phi_h W_{h,t} + \phi_h \nabla \cdot \mathcal{F}_h(W_h)) \, d\Omega_h - \int_{\Gamma_h} \phi_h \hat{\mathcal{F}}_h(W_h) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_h = 0, \quad (4.4)$$

où  $\mathcal{F}_h$  est par définition l'interpolant  $P^1$  de  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire:

$$\mathcal{F}_h(W) = \Pi_h \mathcal{F}(W) \text{ et } \mathcal{F}_h(W_h) = \Pi_h \mathcal{F}(W_h), \quad (4.5)$$

et, comme l'opérateur  $\mathcal{F}_h$  s'applique aux valeurs de  $W$  pour chaque nœud du maillage, on a:

$$\mathcal{F}_h(W) = \mathcal{F}_h(\Pi_h W) = \Pi_h \mathcal{F}(\Pi_h W). \quad (4.6)$$

On utilise les mêmes relations pour définir les flux aux bords  $\hat{\mathcal{F}}_h(W)$ :

$$\hat{\mathcal{F}}_h(W) = \Pi_h \hat{\mathcal{F}}(\Pi_h W) \text{ and } \hat{\mathcal{F}}_h(W_h) = \Pi_h \hat{\mathcal{F}}(W_h). \quad (4.7)$$

En pratique, cette définition de  $\mathcal{F}_h$  signifie que les flux nodaux de  $W$  sont d'abord évalués aux nœuds du maillage. Par conséquent, les flux discrets sont obtenus de ces valeurs nodales par une extrapolation  $P^1$  à l'intérieur de chaque élément.

### 4.2.3 Formulation mixte éléments-volumes finis: équivalence

La formulation discrète (4.4) peut-être transformée en un schéma volumes-finis centré et appliqué à une tétraédrisation non-structurée. Ceci est fait en utilisant la formulation mixte éléments-volumes finis de [Stoufflet 1996, Selmin 1998]. Une partition en cellules de contrôle  $C_i$  du domaine discret  $\Omega_h$  est considérée:

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{n_c} C_i, \quad (4.8)$$

où chaque cellule de contrôle est associée à un nœud  $i$  du maillage.

La cellule duale ou de contrôle est construite suivant la règle des médianes. En 2D, la cellule de contrôle est limitée par les segments de médianes réunissant les milieux des arêtes avec les centres de gravité, tel qu'on l'a illustré dans la Figure 4.1.

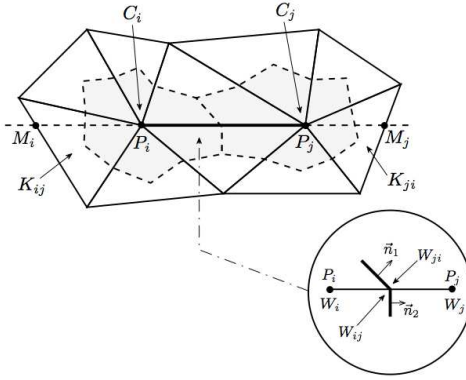


Figure 4.1: Illustration de la construction d'une cellule de contrôle, avec deux cellules voisines,  $C_i$  et  $C_j$  autour des nœuds  $i$  ( $P_i$  sur cette figure) et  $j$  ( $P_j$  sur cette figure) respectivement, et les triangles amont et aval associés à l'arête  $ij$ , i.e.  $K_{ij}$  et  $K_{ji}$ .

Les fonctions de base sont les fonctions caractéristiques, constantes par cellules:

$$\chi^i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Ainsi, la formulation faible des équations d'Euler (4.1) est intégrée dans cette nouvelle formulation, tel que, pour chaque nœud  $i$ , ou cellule de contrôle  $C_i$ :

$$\int_{C_i} W_t dC + \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W) \mathbf{n}_i d\sigma = 0 \quad (4.9)$$

Le flux volumes-finis à l'interface des cellules, associé aux nœuds  $i$  et  $j$ , est intégré sur la frontière commune  $\partial C_{ij}$  avec une valeur de  $\mathcal{F}_h$  égale à la moyenne de  $\mathcal{F}_h(W_i)$  et  $\mathcal{F}_h(W_j)$ :

$$\Phi_{ij}^{MEV} = \frac{\mathcal{F}_h(W_i) + \mathcal{F}_h(W_j)}{2} \cdot \nu_{ij}, \quad (4.10)$$

où  $\nu_{ij}$  représente l'intégrale de la normale  $\mathbf{n}_i$  sur la frontière commune aux cellules  $C_i$  et  $C_j$ ,

$$\nu_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}_i d\sigma$$

et  $W_i = W(i)$ . La formulation volumes-finis pour un nœud interne  $i$  s'écrit en additionnant les contributions des flux associés aux nœuds  $j$ , appartenant à  $V(i)$ , l'ensemble des nœuds voisins

au nœud  $i$ . En prenant en compte les flux de bord, le schéma discret (4.4) s'écrit:

$$\sum_{j \in V(i)} \Phi_{ij}^{MEV} - \int_{\Gamma \cap \partial C_i} \bar{\mathcal{F}}_h(W_h) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0. \quad (4.11)$$

On obtient ainsi une formulation volumes-finis centrée, qui est  $P^1$ -exacte par rapport à la fonction flux  $\mathcal{F}_h$ . Ce schéma présente la majorité des avantages de la précision des schémas Galerkin [Mer 1998], tel que l'ordre deux pour des modèles de diffusion-convection. Néanmoins, il manque de stabilité et ne peut pas être appliqué aux systèmes purement hyperboliques tel que le système d'Euler. Les méthodes basées sur des cellules médianes sont exactement le contrepoint des formulations éléments-finis  $P^1$  : elles sont bien adaptés aux maillages non-structurés non-étirés. Pour des maillages très étirés, les schémas volume-finis décentrés montrent une erreur de troncature qui croît avec le ratio d'étirement. Dans certain cas, des cellules avec une forme proche d'un rectangle peuvent permettre une meilleure précision. Barth [Barth 1994] a introduit des cellules basées sur l'intersection des médiatrices pour éviter ces problèmes. Une autre solution serait d'utiliser un barycentre afin de combiner des cellules médianes avec les cellules de Barth selon un critère de ratio d'étirement des éléments, mais cela n'est pas utilisé dans cette thèse.

#### 4.2.4 Calcul des flux

Maintenant que les cellules sont définies, la divergence spatiale  $\nabla \cdot \mathcal{F}$  peut-être transformée en intégrale des flux dans la direction de la normale  $\mathcal{F} \cdot \mathbf{n}$  via la formule de Stokes. Dans la famille de schéma qu'on propose, la précision de la quadrature géométrique de l'intégrale n'est pas cruciale. On propose une solution très simple: l'intégration par arête. Néanmoins, l'intégration du flux pose un problème importante lié à la stabilité du schéma. Les variables sont supposées constantes par cellule, et ainsi, on a une discontinuité des variables d'une cellule à ses cellules voisines. L'intégration décentrée des flux discontinus repose sur la méthode de Godunov basée sur les deux valeurs de notre inconnue des deux cotés de la discontinuité.

##### 4.2.4.1 Différentiation centrée

Le schéma volumes-finis à différentiation centrée pour les équations d'Euler sur un maillage non-structuré prend la formulation suivante:

$$\begin{aligned} \Psi_h(\gamma, W)_j &= 0, \quad \text{with} \\ \Psi_h(\gamma, W)_j &= \sum_{k \in V(j)} \Phi^{central}(W_j, W_k, \nu_{jk}) + \mathbf{B}_h(\gamma, W)_j \end{aligned} \quad (4.12)$$

où  $V(j)$  est l'ensemble des nœuds voisins au nœud  $j$ ,  $\nu_{jk}$  est l'intégrale du vecteur normal le long de l'interface entre les nœuds  $j$  et  $k$ . Les flux aux bords sont représentés par  $\mathbf{B}_h(\gamma, W)_j$ .

L'intégration centrée du flux élémentaire  $\Phi$  s'exprime par:

$$\Phi^{central}(W_j, W_k, \nu_{jk}) = 0.5(\mathcal{F}_j + \mathcal{F}_k) \cdot \nu_{jk} \quad (4.13)$$

où  $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}(W_j)$  sont les flux d'Euler calculés en  $W_j$ . Ceci est équivalent à introduire l'opérateur spatial discret  $\nabla_h^*$ :

$$\nabla_h^*(f)_j = \frac{1}{|C_j|} \sum_{k \in V(j)} (f_j + f_k)/2 \nu_{jk} \quad (4.14)$$

où  $|C_j|$  représente la mesure de la cellule  $C_j$ .

#### 4.2.4.2 Différentiation de Godunov

Les méthodes volumes-finis centrées sont numériquement instables. De manière générale, elles ne donnent pas une solution, et quand cela se produit, la solution ne satisfait pas toujours la condition d'entropie. À partir de la disponibilité des solutions analytiques du problème de Riemann, Godunov a proposé d'utiliser ces solutions analytiques et de les combiner avec la représentation discontinue de la solution.

Les méthodes de type Godunov reposent sur une représentation discontinue de l'inconnue et calculent des flux aux discontinuités en prenant en compte les valeurs à droite et à gauche de la discontinuité et en appliquant un solveur de Riemann exact ou approché. Ce processus introduit des termes de viscosité numérique très utiles pour la stabilisation des écoulements avec des chocs.

Un schéma précis au premier ordre de Godunov centré-sommet, pour les équations d'Euler, se présente sous la forme:

$$\Psi_h(\gamma, W)_j = \sum_{k \in V(j)} \Phi(W_j, W_k, \nu_{jk}) + \mathbf{B}_h(\gamma, W)_j. \quad (4.15)$$

Le symbole  $\Phi$  représente les flux décentrés de Roe. On a:

$$\Phi(W_j, W_k, \nu_{jk}) = 0.5(\mathcal{F}_j + \mathcal{F}_k) \cdot \nu_{jk} + 0.5|\mathcal{A}|(W_j - W_k) \quad (4.16)$$

où  $|\mathcal{A}|$  est la valeur absolue du jacobien du flux selon  $\nu_{jk}$ :

$$\mathcal{A} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial W}\right)_1(\nu_{jk})_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial W}\right)_2(\nu_{jk})_2$$

$$\mathcal{A} = T\Lambda T^{-1}, \quad \Lambda \text{ matrice diagonale,} \quad (4.17)$$

$$|\mathcal{A}| = T|\Lambda|T^{-1}.$$

Ces matrices sont assemblées aux valeurs intermédiaires  $\overline{W}_{jk}$  de  $W$ . Plus précisément:

$$\overline{W}_{jk} = \left(\rho_j^{\frac{1}{2}} W_j + \rho_k^{\frac{1}{2}} W_k\right) / (\rho_j^{\frac{1}{2}} \rho_k^{\frac{1}{2}})$$

et il en résulte la propriété suivante:

$$\mathcal{F}(W_j) - \mathcal{F}(W_k) = \mathcal{A}(\overline{W}_{jk})(W_j - W_k).$$



Dans des cas (fortement) supersoniques,  $\mathcal{A}(\overline{W}_{jk}) = |\mathcal{A}(\overline{W}_{jk})|$  ou  $\mathcal{A}(\overline{W}_{jk}) = -|\mathcal{A}(\overline{W}_{jk})|$  et le découplage des flux de Roe est fortement décentré. Par l'hypothèse de hyperbolicité, la matrice  $A$  peut-être diagonalisable. La valeur absolue  $|\mathcal{A}|$  s'écrit:

$$|\mathcal{A}(\overline{W}_{jk})| = T^{-1} \text{Diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|) T = \text{sign}(\mathcal{A}) \mathcal{A},$$

où

$$\text{sign}(\mathcal{A}) = T^{-1} \text{Diag}(\text{sign}(\lambda_1), \text{sign}(\lambda_2), \text{sign}(\lambda_3), \text{sign}(\lambda_4)) T. \quad (4.18)$$

Cette moyenne nous permet d'écrire une formulation équivalente:

$$(\mathcal{F}(W_j) + \mathcal{F}(W_k))/2 = \text{sign}(\mathcal{A}(\overline{W}_{jk}))(\mathcal{F}(W_R) - \mathcal{F}(W_L))/2. \quad (4.19)$$

où  $W_R$  et  $W_L$  sont les valeurs de l'inconnue à droite et à gauche respectivement de la discontinuité.

Ces schémas sont d'ordre un. On va maintenant voir d'autres schémas d'ordre spatial plus élevé.

### 4.3 Vers des schémas d'ordre élevé

Les schémas de Godunov d'ordre un présentent de nombreuses propriétés intéressantes et en particulier la monotonie ou, plus de manière plus ou moins équivalente, la positivité. Ces schémas peuvent être étendu à une précision du second ordre en appliquant la méthode MUSCL, qui sera présentée dans la sous-section suivante. Malheureusement, même pour un schéma de Godunov du second ordre, la dissipation introduite est souvent trop importante pour de nombreuses applications.

Dans la seconde sous-section on rappelle une méthode inspirée des techniques de "Simulation Directe" où des approximations d'ordre élevé non-dissipatives sont stabilisées grâce à des filtres qui reposent sur des dérivées paires d'ordre élevé. Cela conduit à des schémas d'advection superconvergentes qui sont plus précis pour une sous-classe d'applications, typiquement pour les systèmes hyperboliques linéaires résolus sur des maillages cartésiens.

#### 4.3.1 Le schéma MUSCL de second ordre

La méthode de Godunov consiste à construire les flux entre les cellules avec des inconnues constantes par cellules. Van Leer a proposé dans [Leer 1979, Leer 1977] une méthode qui consiste à reconstruire une interpolation linéaire des variables à l'intérieur de chaque cellule et d'introduire les valeurs aux bords de ces interpolations dans le solveur de Riemann. De plus, les pentes utilisées pour la reconstruction linéaire peuvent être limitées, évitant ainsi d'introduire de nouveaux extrema. La méthode MUSCL qui en résulte nous fournit des schémas précis au second ordre. Dans cette section on présente ce schéma MUSCL pour des maillages non structurés formés avec des cellules de contrôle. Les mêmes idées peuvent s'appliquer pour des reconstructions différentes pour chaque interface entre les cellules de contrôle, ou de chaque côté des arêtes.

Différentes pentes de la variable primitive (physique)  $U = (\rho, u, v, p)$  définies sur les deux extrémités  $i$  et  $j$  d'une arête  $ij$  seront considérées :

- Tout d'abord, le **gradient décentré**  $(\nabla U)_{ij}^c$  qui se définit par la formulation suivante:

$$(\nabla U)_{ij}^c \cdot \mathbf{ij} = U_j - U_i. \quad (4.20)$$

- Soit un couple de triangles, le premier ayant  $i$  comme sommet et le deuxième ayant un sommet  $j$ . En se référant à la figure 4.2, on définit  $\varepsilon_{ni}$ ,  $\varepsilon_{mi}$ ,  $\varepsilon_{jr}$  et  $\varepsilon_{js}$  comme les composantes du vecteur  $\mathbf{ji}$  (respectivement  $\mathbf{ij}$ ) dans le système oblique des axes  $(\mathbf{in}, \mathbf{im})$  (resp.  $(\mathbf{jr}, \mathbf{js})$ ):

$$\mathbf{ji} = \varepsilon_{ni} \mathbf{in} + \varepsilon_{mi} \mathbf{im},$$

$$\mathbf{ij} = \varepsilon_{jr} \mathbf{jr} + \varepsilon_{js} \mathbf{js}.$$

- On dit que  $T_{ij}$  et  $T_{ji}$  sont des éléments amont et aval à l'arête  $ij$  si les composantes  $\varepsilon_{ni}, \varepsilon_{mi}, \varepsilon_{jr}, \varepsilon_{js}$  ne sont pas négatives:

$$T_{ij} \text{ amont et } T_{ji} \text{ aval} \Leftrightarrow \text{Min}(\varepsilon_{ni}, \varepsilon_{mi}, \varepsilon_{jr}, \varepsilon_{js}) \geq 0.$$

Le *gradient upwind*  $(\nabla U)_{ij}^u$  est calculé par le calcul habituel éléments-finis sur  $T_{ij}$ , de même pour le *gradient downwind*  $(\nabla U)_{ij}^d$  sur  $T_{ji}$ . Autrement dit, on a :

$$(\nabla U)_{ij}^u = \nabla U|_{T_{ij}} \text{ et } (\nabla U)_{ij}^d = \nabla U|_{T_{ji}} \quad (4.21)$$

où  $\nabla U|_T = \sum_{k \in T} U_k \nabla \Phi_k|_T$  sont les gradients Galerkin-P1 sur le triangle  $T$ .

On présente maintenant la méthode de calcul des *pentés d'extrapolations*  $(\nabla U)_{ij}$  et  $(\nabla U)_{ji}$  :

$$(\nabla U)_{ij} \cdot \mathbf{ij} = (1 - \beta)(\nabla U)_{ij}^c \cdot \mathbf{ij} + \beta(\nabla U)_{ij}^u \cdot \mathbf{ij}. \quad (4.22)$$

Le calcul de  $U_{ji}$  est fait de manière analogue:

$$(\nabla U)_{ji} \cdot \mathbf{ij} = (1 - \beta)(\nabla U)_{ij}^c \cdot \mathbf{ij} + \beta(\nabla U)_{ij}^d \cdot \mathbf{ij}. \quad (4.23)$$

Le coefficient  $\beta$  est un paramètre de décentrage qui contrôle la combinaison des gradients upwind et downwind, et il est généralement égal à 1/3.

La description du schéma est complétée en combinant la formulation Godunov du premier ordre (4.15) avec le flux suivant:

$$\Psi_h(\gamma, U)_j = \sum_{k \in V(j)} \Phi(U_{jk}, U_{kj}, \nu_{jk}) + \mathbf{B}_h(\gamma, U)_j. \quad (4.24)$$

avec

$$U_{jk} = U_j + \frac{1}{2}(\nabla U)_{ij} \cdot \mathbf{ij}, \quad U_{kj} = U_k + \frac{1}{2}(\nabla U)_{ji} \cdot \mathbf{ji}.$$

Cette approximation est précise à l'ordre deux pour des maillages réguliers. Néanmoins, pour des maillages très irréguliers et pour des problèmes instationnaires, la précision se dégrade et décroît avec le temps. De plus, la méthode utilise les différences finies dans les reconstructions locales et les volumes-finis pour les flux. Par conséquent, améliorer la reconstruction par une interpolation d'ordre plus élevé ne garantit pas une meilleure précision. On va analyser par la suite comment cette reconstruction peut-être changée afin d'améliorer ce schéma.

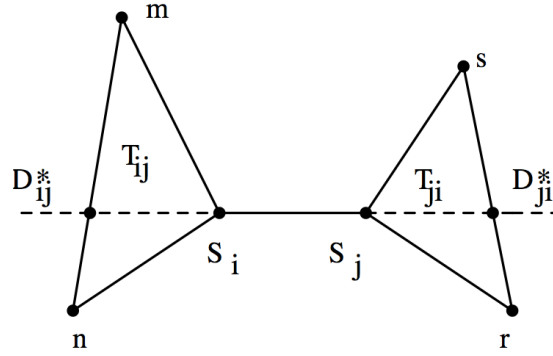


Figure 4.2: Localisation des points  $D_{ij}^*$  et  $D_{ji}^*$  d'extra-interpolation des gradients nodaux.

### 4.3.2 Schéma spatial LV6 d'ordre élevé

Dans cette section on rappelle une famille de schémas: les schémas V6 linéaires **LV6**, introduite dans [Debiez 1996a, Debiez 1999, Rogé 2004], dans lesquelles une *interpolation est appliquée pour les variables primitives*. On présente les différentes étapes dans la construction de ces schémas:

0. Une solution  $W = (\rho, \rho u, \rho v, E)$  pour chaque nœud du maillage est donnée.
1. On assemble les variables primitives  $U = (\rho, u, v, p)$  pour chaque nœud.
2. On calcule les gradients nodaux  $\nabla U$  :

$$(\nabla U)_i = \frac{1}{\text{meas}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \frac{\text{meas}(T)}{3} \sum_{k \in T} U_k \nabla \Phi_k^T. \quad (4.25)$$

3. On démarre la boucle d'assemblage par arête:

- Calcul des pentes d'extrapolation:

$$\begin{aligned} (\nabla U)_{ij}^{HO} \cdot \mathbf{ij} = & (1 - \beta)(\nabla U)_{ij}^c \cdot \mathbf{ij} + \beta(\nabla U)_{ij}^u \cdot \mathbf{ij} \\ & + \xi_c \left[ (\nabla U)_{ij}^u \cdot \mathbf{ij} - 2(\nabla U)_{ij}^c \cdot \mathbf{ij} + (\nabla U)_{ij}^d \cdot \mathbf{ij} \right] \\ & + \xi_d \left[ (\nabla U)_{D_{ij}^*} \cdot \mathbf{ij} - 2(\nabla U)_i \cdot \mathbf{ij} + (\nabla U)_j \cdot \mathbf{ij} \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

et pareil pour  $(\nabla U)_{ji}^{HO}$ .

- On définit les variables d'interpolation à gauche et à droite:

$$\begin{aligned} U_{ij} &= U_i + \nabla U_{ij} \\ U_{ji} &= U_j - \nabla U_{ji} \end{aligned}$$

et on retrouve les valeurs des variables conservatives à gauche et à droite:  $U_{ij}$  et  $U_{ji}$ .

Le flux décentré s'écrit alors:

$$\Phi_{ij} = \Phi^{Riemann}(U_{ij}, U_{ji}) \quad (4.27)$$

et on l'additionne (en fait on le soustrait) à l'assemblage des flux au nœud  $i$  (resp.  $j$ ).

### 4.3.3 Avancement en temps

Pour l'avancement explicite en temps, on considérera dans cette thèse des schémas de type Runge-Kutta.

### 4.3.4 Conclusion sur les schémas superconvercents

On a décrit une famille de schémas à dissipation numérique faible et associée aux équations d'Euler. Basés sur les schémas MUSCL, les schémas LV impliquent des reconstructions des variables primitives conçues pour réduire la dissipation grâce au modèle de dérivées sixièmes. Pour l'advection à vitesse uniforme, ces schémas présentent des propriétés de superconvergence, dans le sens que, appliqués aux maillages cartésiens, ces schémas de second ordre seront plus précis (jusqu'à l'ordre six).

En instationnaire, à cause du choix de la matrice de masse diagonalisée, la précision sur un maillage suffisamment régulier est d'ordre deux, alors que pour des maillages très irréguliers cette précision peut se dégrader progressivement et se situer entre deux et l'unité. Ce problème est la motivation principale pour la recherche d'un schéma d'ordre trois sur maillages quelconques.



## Partie III

# Schéma d'ordre 3



# Présentation du schéma CENO en 1D

---

## Contents

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>50</b>
<b>5.2</b>	<b>Étude d'un schéma à reconstruction quadratique en dimension 1</b>	<b>50</b>
5.2.1	Schéma de base	50
5.2.2	Évaluation des coefficients de la reconstruction polynômiale quadratique	53
5.2.3	Évaluation des flux par la reconstruction polynômiale quadratique	56
5.2.4	Approximation des flux quadratiques par les formules de Taylor	56
5.2.5	Tests numériques	59
5.2.6	Conclusion	67
<b>5.3</b>	<b>Étude d'un schéma à reconstruction quadratique et interpolation de degré 3 en 1D</b>	<b>68</b>
5.3.1	Objectif du problème	68
5.3.2	Évaluation des termes de degré 3 sur les cellules	68
5.3.3	Calcul des flux par la reconstruction polynômiale pseudo-cubique	71
5.3.4	Tests numériques	73
5.3.5	Conclusion	77
<b>5.4</b>	<b>Prolongement de l'erreur de troncature dans l'équation équivalente</b>	<b>78</b>
5.4.1	Développements de Taylor prolongés	78
5.4.2	Calcul des flux par la reconstruction polynômiale quadratique	79
5.4.3	Calcul des flux par la reconstruction polynômiale pseudo-cubique	80
5.4.4	Conclusion	82
<b>5.5</b>	<b>Étude d'un schéma à reconstruction pseudo-cubique et interpolation de degré 4, en 1D</b>	<b>83</b>
5.5.1	Objectif du problème	83
5.5.2	Calcul des flux par une reconstruction pseudo-quadratique	83
5.5.3	Approximation par Taylor de flux pseudo-quadratiques	86
5.5.4	Tests numériques	88
5.5.5	Conclusion	93

---



## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous analysons, développons et testons un schéma volumes-finis ENO centré-sommet d'ordre élevé en espace pour la résolution d'une équation d'advection en une dimension. Notre motivation est de définir un schéma aussi précis que possible aussi bien asymptotiquement (maillages fins) que sur maillage grossier pour des calculs de propagation d'ondes. La démarche de ce travail est de tout d'abord écrire proprement une analyse complète du schéma ENO en 1D, pour ensuite le tester sur des maillages réguliers. Les tests numériques montrent que le schéma ENO basique décentré comporte une forte dissipation. Sa version centrée (donc sans dissipation) est d'ordre 4 sur maillage régulier, mais elle est insuffisamment stable.

L'objectif de ce chapitre est de monter en précision sur cette base. Nous allons tout d'abord effectuer une correction sur la partie centrée des flux, cette correction supprimera l'erreur principale de troncature spatiale du schéma, qui est une dérivée cinquième de dispersion (qui peut être assimilée à une erreur de phase). Cette modification sur la partie centrée des flux nous donnera un schéma d'ordre 6 mais avec une absence de diffusion (qui peut être assimilée à une erreur d'amplitude et aussi à la stabilité du schéma).

L'objectif final du chapitre sera alors de refaire une correction sur les flux du schéma d'ordre 6, correction effectuée sur la partie stabilisante des flux, ceci permettra d'ajouter une stabilité du sixième ordre au schéma qui se traduit par une erreur principale de troncature spatiale égale à une dérivée sixième de dissipation, et au final nous obtiendrons un schéma stable, à faibles dissipation et dispersion, d'ordre 5 sur maillages réguliers.

## 5.2 Étude d'un schéma à reconstruction quadratique en dimension 1

### 5.2.1 Schéma de base

Considérons un schéma type volumes-finis avec reconstruction quadratique de la solution pour une équation de type hyperbolique 1D. L'assemblage se décompose en une étape de reconstruction, une étape d'intégration des flux convectifs et une étape d'avancement en temps.

On considère l'équation d'advection unidimensionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0,$$

où les conditions limites et initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, t) = \Phi(x, t) & \text{pour } x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

avec  $x \in \Omega$  avec  $\Omega \in [0;1]$ ,  $t \geq 0$ ,  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $c$  est la vitesse advective,  $c > 0$ .

Pour une meilleure lisibilité dans cette étude théorique, nous utilisons un maillage régulier et nous posons donc  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ ,  $\forall i = 1, \dots, N$ .

Le domaine spatial est divisé en cellules de contrôle  $C_i$  centrées aux nœuds  $i$  et défini par :

$$C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] , \text{ avec } x_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \text{ et } x_{i-1/2} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}.$$

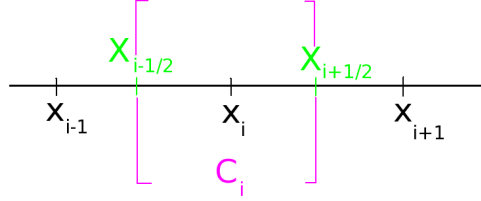


Figure 5.1: Définition d'un volume de contrôle  $C_i$ .

Les degrés de liberté de la discrétisation en volumes-finis sont des approximations des moyennes de l'inconnue par cellule :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t) dx.$$

On intègre l'équation sur la cellule  $C_i$  :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + c \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + c [u(x, t)]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx + \frac{1}{\Delta x} [\Phi_{x_{i+1/2}} - \Phi_{x_{i-1/2}}] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}_i + \frac{1}{\Delta x} [\Phi_{x_{i+1/2}} - \Phi_{x_{i-1/2}}]. \end{aligned}$$

On obtient alors une équation discrétisée en temps et en espace :

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^n - \Phi_{x_{i-1/2}}^n \right],$$

où les flux numériques sont définis par le schéma décentré de Roe :

$$\begin{cases} \Phi_{x_{i+1/2}} = \Phi(u_{i+1/2}^+, u_{i+1/2}^-) = c \frac{u_{i+1/2}^+ + u_{i+1/2}^-}{2} - |c| \frac{u_{i+1/2}^+ - u_{i+1/2}^-}{2}, \\ \Phi_{x_{i-1/2}} = \Phi(u_{i-1/2}^+, u_{i-1/2}^-) = c \frac{u_{i-1/2}^+ + u_{i-1/2}^-}{2} - |c| \frac{u_{i-1/2}^+ - u_{i-1/2}^-}{2}. \end{cases}$$

Pour évaluer l'inconnue sur les interfaces, on la reconstruit à partir de ses valeurs moyennes. Sur chaque cellule de contrôle  $C_i$  et à chaque pas de temps, on cherche donc à approximer la solution  $u(x, t^n) = u(x)^n$  en construisant un polynôme quadratique  $P_i^n$ . On appelle  $P_i(x) = c_i + b_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2$  le polynôme reconstruit dans la cellule  $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ .

On fait donc l'hypothèse que sur chaque cellule  $C_i$ ,  $u_i^n(x) \sim P_i^n(x - x_i)$ , et on définit alors :

$$\begin{cases} u_{i-1/2}^- = c_{i-1} + b_{i-1} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right) + a_{i-1} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^2, \\ u_{i-1/2}^+ = c_i - b_i \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right) + a_i \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^2, \\ u_{i+1/2}^- = c_i + b_i \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) + a_i \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2, \\ u_{i+1/2}^+ = c_{i+1} - b_{i+1} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) + a_{i+1} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2. \end{cases}$$

Ce qui donne avec un maillage uniforme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i-\frac{1}{2}}^- = c_{i-1} + b_{i-1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + a_{i-1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2, \\ u_{i-\frac{1}{2}}^+ = c_i - b_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + a_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2, \\ u_{i+\frac{1}{2}}^- = c_i + b_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + a_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2, \\ u_{i+\frac{1}{2}}^+ = c_{i+1} - b_{i+1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + a_{i+1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2. \end{array} \right.$$

Comme nous voulons étudier le schéma sans sa dissipation (option que nous corrigerons plus tard dans le chapitre en lui rajoutant ensuite de la stabilité à un ordre élevé), nous injectons cette reconstruction uniquement dans une intégration centrée des flux inter-cellule.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} = \Phi^{centre}(u_{i+\frac{1}{2}}^+, u_{i+\frac{1}{2}}^-) = c \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^+ + u_{i+\frac{1}{2}}^-}{2}, \\ \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} = \Phi^{centre}(u_{i-\frac{1}{2}}^+, u_{i-\frac{1}{2}}^-) = c \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^+ + u_{i-\frac{1}{2}}^-}{2}. \end{array} \right.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} &= \frac{c}{2} \left[ c_{i+1} - b_{i+1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + a_{i+1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 + c_i + b_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right) + a_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - c_{i-1} - b_{i-1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right) - a_{i-1} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 - c_i + b_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right) - a_i \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} = \frac{c}{2} \left[ (c_{i+1} - c_{i-1}) + \frac{\Delta x}{2} (-b_{i+1} + 2b_i - b_{i-1}) + \frac{\Delta x^2}{4} (a_{i+1} - a_{i-1}) \right].$$

### 5.2.2 Évaluation des coefficients de la reconstruction polynômiale quadratique

Les trois coefficients inconnus  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  de la reconstruction polynômiale quadratique associées à la cellule  $C_i$  sont déterminés par la méthode des Moindres Carrés, c'est-à-dire de telle sorte que la distance  $L^2$  entre la moyenne du polynôme sur la cellule  $C_i$  et la moyenne de la solution

$\bar{u}_i$  soit minimale.

Ceci conduit à minimiser la fonction suivante :

$$H_i = \sum_{j \in V(i)} \left( \bar{P}_i^j - \bar{u}_j \right)^2,$$

où  $V(i)$  sont les voisins du nœuds  $i$  et  $\bar{u}_j$  est la valeur moyenne de  $u$  sur la cellule  $C(j)$  :

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u(x) dx,$$

et  $\bar{P}_i^j$  est la valeur moyenne du polynôme  $P_i$  sur la cellule  $C_j$  :

$$\bar{P}_i^j = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} P_i(x) dx.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} \left( \bar{P}_i^j - \bar{u}_j \right)^2 &= \left[ \frac{1}{\Delta x} \int_{C_{i-1}} (c_i + b_i x + a_i x^2) dx - \bar{u}_{i-1} \right]^2 \\ &+ \left[ \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} (c_i + b_i x + a_i x^2) dx - \bar{u}_i \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta x} \int_{C_{i+1}} (c_i + b_i x + a_i x^2) dx - \bar{u}_{i+1} \right]^2. \end{aligned}$$

Nous devons alors calculer les valeurs moyennes  $\bar{P}_i^{i-1}$ ,  $\bar{P}_i^i$  et  $\bar{P}_i^{i+1}$ .

Le calcul de  $\bar{P}_i^{i-1}$ , valeur moyenne de  $P_i$  sur la cellule  $C_{i-1} = [x_{i-3/2}, x_{i-1/2}] = [-\frac{3\Delta x}{2}, -\frac{\Delta x}{2}]$  donne :

$$\bar{P}_i^{i-1} = c_i - b_i \Delta x + a_i \frac{13}{12} \Delta x^2.$$

Le calcul de  $\bar{P}_i^i$ , valeur moyenne de  $P_i$  sur la cellule  $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] = [-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}]$  donne :

$$\bar{P}_i^i = c_i + a_i \frac{1}{12} \Delta x^2.$$

Le calcul de  $\bar{P}_i^{i+1}$ , valeur moyenne de  $P_i$  sur la cellule  $C_{i+1} = [x_{i+1/2}, x_{i+3/2}] = [\frac{1}{2}\Delta x, \frac{3}{2}\Delta x]$  donne :

$$\bar{P}_i^{i+1} = c_i + b_i \Delta x + a_i \frac{13}{12} \Delta x^2.$$

La minimisation de la fonctionnelle  $H_i$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} \left( \bar{P}_i^j - \bar{u}_j \right)^2 &= 0 \\ &= \left[ c_i - b_i \Delta x + a_i \frac{13}{12} \Delta x^2 - \bar{u}_{i-1} \right]^2 + \left[ c_i + a_i \frac{1}{12} \Delta x^2 - \bar{u}_i \right]^2 \\ &+ \left[ c_i + b_i \Delta x + a_i \frac{13}{12} \Delta x^2 - \bar{u}_{i+1} \right]^2, \end{aligned}$$

est une somme nulle de trois carrés avec trois inconnues à déterminer, ce qui implique que chaque carré est nul, ce qui nous conduit à un système matriciel et on obtient après calcul :

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x^2} \\ \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x} \\ \frac{-\bar{u}_{i+1} + 2\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{24} + \bar{u}_i \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons alors que le coefficient  $a_i$  s'apparente à la moitié de la dérivée seconde de la valeur moyenne  $\bar{u}_i$  centrée en  $i$ , le coefficient  $b_i$  s'assimile à la dérivée première de  $\bar{u}_i$  et le coefficient  $c_i$  est une constante proche de la valeur moyenne  $\bar{u}_i$ .

### 5.2.3 Évaluation des flux par la reconstruction polynômiale quadratique

On revient maintenant au calcul de nos flux. La méthode des Moindres Carrés nous a donné une formulation explicite de chaque coefficient polynomial sur chaque cellule de contrôle. Nous pouvons alors injecter ces coefficients dans la formulation des flux centrés afin d'obtenir les flux en fonction des valeurs moyenne de la solution  $\bar{u}_i$  :

$$\frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = -\frac{1}{3} \frac{\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{4}{3} \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x}.$$

### 5.2.4 Approximation des flux quadratiques par les formules de Taylor

Nous avons obtenu une approximation par différences finis des flux avec les valeurs moyennes de la solution sur les cellules de contrôle  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . On va maintenant utiliser les formules de Taylor pour passer de valeurs moyennées à des valeurs exactes de  $u$ , pour ainsi obtenir les erreurs de troncature spatiale liées à nos approximations.

Par hypothèse on a :

$$\bar{u}(x_i) = \bar{u}_i = \frac{1}{\|C_i\|} \int_{C_i} u(x, t) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx.$$

Nous calculons les formules de Taylor de  $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$ ,  $\bar{u}_{i+2}$ ,  $\bar{u}_{i+1}$  et  $\bar{u}_{i-2}$ , au point d'origine  $x_i$ , et nous injecterons ses valeurs dans l'équation des flux centrés obtenue précédemment afin d'obtenir une équation équivalente du schéma en fonction de la solution  $u$  et non de ses valeurs moyennes  $\bar{u}_i$ .

- Taylor sur  $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$  :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = u'_i + u_i^{(3)} \frac{\Delta x^2}{24} + u_i^{(5)} \frac{\Delta x^4}{1920} + o(\Delta x^5).$$

- Taylor sur  $\bar{u}_{i+2}$  :

$$\bar{u}_{i+2} = u_i + u'_i 2\Delta x + u''_i \frac{49}{24} \Delta x^2 + u_i^{(3)} \frac{17}{12} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{1441}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(5)} \frac{931}{2880} \Delta x^5 + o(\Delta x^6).$$

- Taylor sur  $\bar{u}_{i-2}$  :

$$\bar{u}_{i-2} = u_i - u'_i 2\Delta x + u''_i \frac{49}{24} \Delta x^2 - u_i^{(3)} \frac{17}{12} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{1441}{1920} \Delta x^4 - u_i^{(5)} \frac{931}{2880} \Delta x^5 + o(\Delta x^6).$$

- Taylor sur  $\bar{u}_{i+1}$  :

$$\bar{u}_{i+1} = u_i + u'_i \Delta x + u''_i \frac{13}{24} \Delta x^2 + u_i^{(3)} \frac{5}{24} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{121}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(5)} \frac{91}{5760} \Delta x^5 + o(\Delta x^6).$$



- Taylor sur  $\bar{u}_{i-1}$  :

$$\bar{u}_{i-1} = u_i - u'_i \Delta x + u''_i \frac{13}{24} \Delta x^2 - u_i^{(3)} \frac{5}{24} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{121}{1920} \Delta x^4 - u_i^{(5)} \frac{91}{5760} \Delta x^5 + o(\Delta x^6).$$

Dès lors, on injectant les développements de Taylor dans l'égalité des flux centrés précédemment trouvée :

$$\frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = -\frac{1}{3} \frac{\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{4}{3} \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x},$$

on obtient :

$$\frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = u'_i - u_i^{(3)} \frac{1}{24} \Delta x^2 - u_i^{(5)} \frac{21}{640} \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

En conclusion, on trouve une équation équivalente pour notre équation hyperbolique 1D, qui traduit les erreurs de troncature spatiale de notre approximation, et qui s'écrit sous la forme :

$$-\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + \frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = -u_i^{(5)} \frac{1}{30} \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

Cette étude montre donc que notre approximation spatiale de l'équation hyperbolique par le schéma ENO, codé en tant que solveur volumes-finis centré avec une interpolation polynômiale d'ordre 2 de la solution par cellule  $C_i$  du maillage, conduit à une erreur principale de troncature d'ordre 4, qui est une dérivée cinquième de dispersion. Le schéma est donc pour l'instant entièrement dispersif, sans diffusion, et nous allons effectuer quelques cas-test numériques avant d'entreprendre son amélioration.

### 5.2.5 Tests numériques

Nous effectuons maintenant des tests numériques avec le schéma ENO centré développé précédemment pour la résolution d'une équation d'advection 1D. Le solveur numérique issu du schéma a été codé en Fortran 95.

Les hypothèses numériques sont :

- Le domaine est périodique :  $x_i = 1, \dots, Lx$  avec  $u(0) = u(Lx)$  et  $Lx = 2 * Pi$ .
- Condition initiale :  $u(x, t = 0) = \text{"valeur moyenne de sinus(x)"}$ .
- Le pas d'espace est :  $\Delta x = Lx/Ns$ ,  $Ns$  étant le nombre de points du maillage.
- Le pas de temps est :  $\Delta t = 0.5 * \Delta x/c$ ,  $c$  est la vitesse advective égale à 1.
- Le schéma en temps est un Runge Kutta 3 linéarisé.
- Le temps de simulation est de 200 secondes.

On veut donc résoudre le système :  $\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n \right]$ , où les flux numériques sont réduits aux flux centrés par la suppression de la dissipation du schéma.

On initialise la valeur moyenne du sinus pour manipuler uniquement des valeurs moyennes sur les cellules.

$$\text{Donc on a : } u(x, t = 0) = -\frac{1}{\Delta x} \left[ \cos(x_{i+1/2}) - \cos(x_{i-1/2}) \right].$$

Les flux calculés par la reconstruction quadratique 1D ont comme expression, d'après les calculs précédents :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n \right] = -\frac{1}{3} \frac{\bar{u}_{i+2}^n - \bar{u}_{i-2}^n}{4\Delta x} + \frac{4}{3} \frac{\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n}{2\Delta x}.$$

Nous implémentons ces flux dans le programme Fortran et nous allons effectuer 2 comparaisons dans nos tests numériques :

- Comparaison entre la valeur ponctuelle de notre reconstruction sur les nœuds  $x_i$  du maillage, qui n'est d'autre que la valeur du polynôme  $P_i(x - x_i)$  en  $x_i$ , c'est-à-dire le coefficient  $c_i$ , avec la valeur de la solution exacte du problème :  $\sin(x_i - c * t)$ .
- Comparaison de la valeur de la solution numérique  $\bar{u}_i^n$ , qui est une valeur moyenne, avec cette fois la valeur moyenne de la solution exacte :

$$\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) = -\frac{1}{\Delta x} \left[ \cos(x_{i+1/2} - c * t) - \cos(x_{i-1/2} - c * t) \right].$$

Nous voulons faire ces deux comparaisons pour étudier le comportement du polynôme quadratique reconstruit en tant que valeur ponctuelle et en tant que valeur moyenne, c'est-à-dire qu'il serait intéressant de savoir de quelle manière la reconstruction est la plus proche de la solution : l'erreur de reconstruction serait-elle plus faible par nœuds en comparaison avec la solution exacte aux nœuds, ou alors serait-ce le cas pour les valeurs moyennes du polynôme et de la solution sur les cellules duales du maillage ?

1. Nous calculons tout d'abord les erreurs  $L^1$  et  $L^2$  intégrées sur les valeurs ponctuelles aux sommets:

- Erreur  $L^1 = \sum_{i=1}^{imax} \left| \sin(x_i - c * t) - c_i \right| \Delta x$
- Erreur  $L^2 = \left( \sum_{i=1}^{imax} \left( \sin(x_i - c * t) - c_i \right)^2 \Delta x \right)^{1/2}$ .

Le temps  $t$  est fixé et  $c_i$  n'est autre que la valeur du polynome au sommet  $i$ :

$$P(x_i) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i.$$

Définissons l'égalité qui nous permettra de calculer l'ordre de convergence du schéma :

- **Ordre de convergence** = 
$$\frac{\log\left(\frac{\text{Erreur-L}^1 \text{ pour maillage } N^{\circ 1}}{\text{Erreur-L}^1 \text{ pour maillage } N^{\circ 2}}\right)}{\log\left(\frac{\text{nombre-noeuds-pour-maillage-N}^{\circ 1}(\text{Erreur-L}^1)^{\frac{1}{d}}}{\text{nombre-noeuds-pour-maillage-N}^{\circ 2}(\text{Erreur-L}^1)^{\frac{1}{d}}}\right)}$$

où  $d$  est la dimension de l'espace (donc dans le cas 1D,  $d = 1$ ).

s

**Nous utiliserons toujours dans ce rapport quelque soit le chapitre cette méthode de calcul pour l'ordre de convergence.**

On obtient alors les résultats suivant :

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Erreur $L^2$	Ordre de convergence $L^1$ et $L^2$
6	$1.9159 \cdot 10^{-2}$	$9.3614 \cdot 10^{-3}$	
12	$1.3546 \cdot 10^{-3}$	$6.1436 \cdot 10^{-4}$	3,82 et 3,92
24	$8.7223 \cdot 10^{-5}$	$3.8870 \cdot 10^{-5}$	3,96 et 3,98
48	$5.4934 \cdot 10^{-6}$	$2.4369 \cdot 10^{-6}$	3,99 et 3,99
96	$3.4480 \cdot 10^{-7}$	$1.5245 \cdot 10^{-7}$	3,99 et 3,99

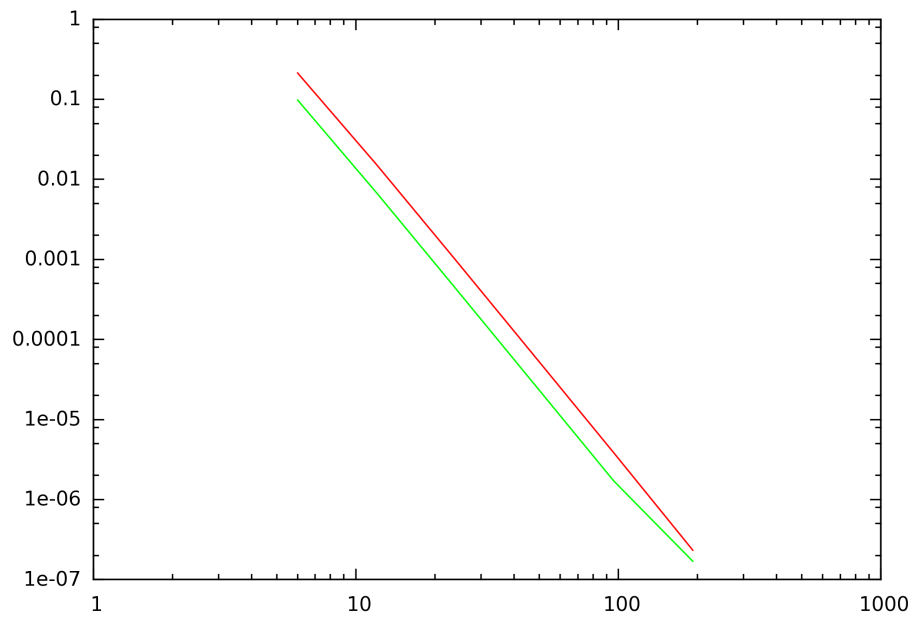


Figure 5.2: Schéma **CENO** centré 1D. Ordre de convergence pour les erreurs  $L^1$  (en rouge) et  $L^2$  (en vert) pour un maillage régulier en 1 dimension.

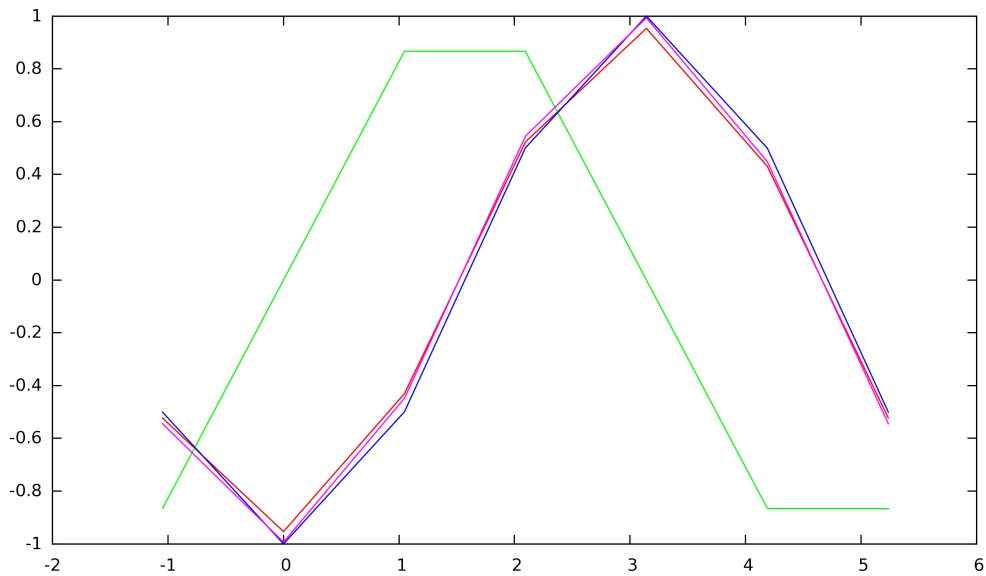


Figure 5.3: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sinus(x_i - c * t)$  (en bleu), de la fonction initiale  $\sinus(x)$  (en vert), de la solution moyenne numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en rouge) et de la reconstruction quadratique  $P(x - x_i)$  sur les nœuds  $x_i$  (en rose) pour un maillage régulier de 6 nœuds.

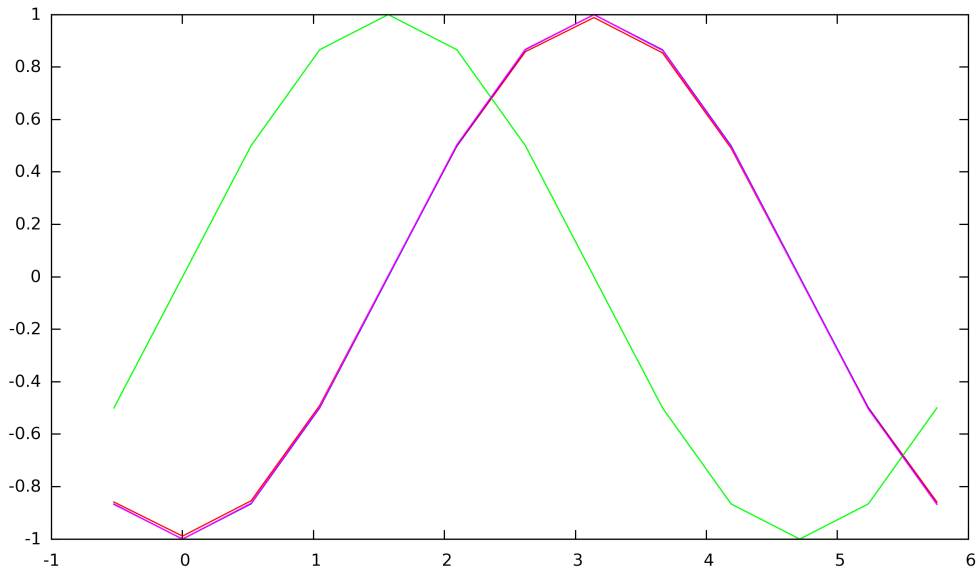


Figure 5.4: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sinus(x_i - c*t)$  (en bleu), de la fonction initiale  $\sinus(x)$  (en vert), de la solution moyenne numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en rouge) et de la reconstruction quadratique  $P(x - x_i)$  sur les nœuds  $x_i$  (en rose) pour un maillage régulier de 12 nœuds.

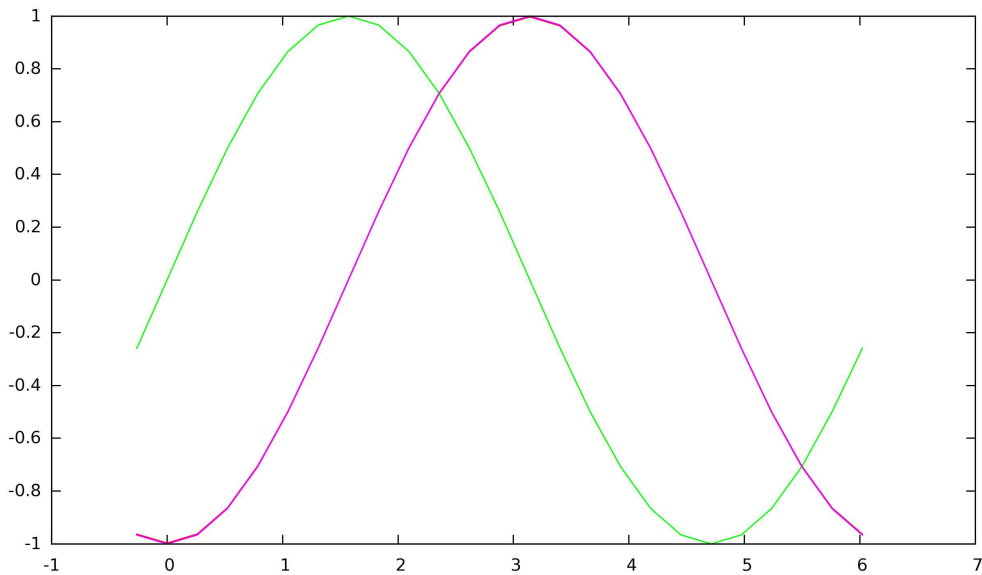


Figure 5.5: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sinus(x_i - c*t)$  (en bleu), de la fonction initiale  $\sinus(x)$  (en vert), de la solution moyenne numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en rouge) et de la reconstruction quadratique  $P(x - x_i)$  sur les nœuds  $x_i$  (en rose) pour un maillage régulier de 24 nœuds.

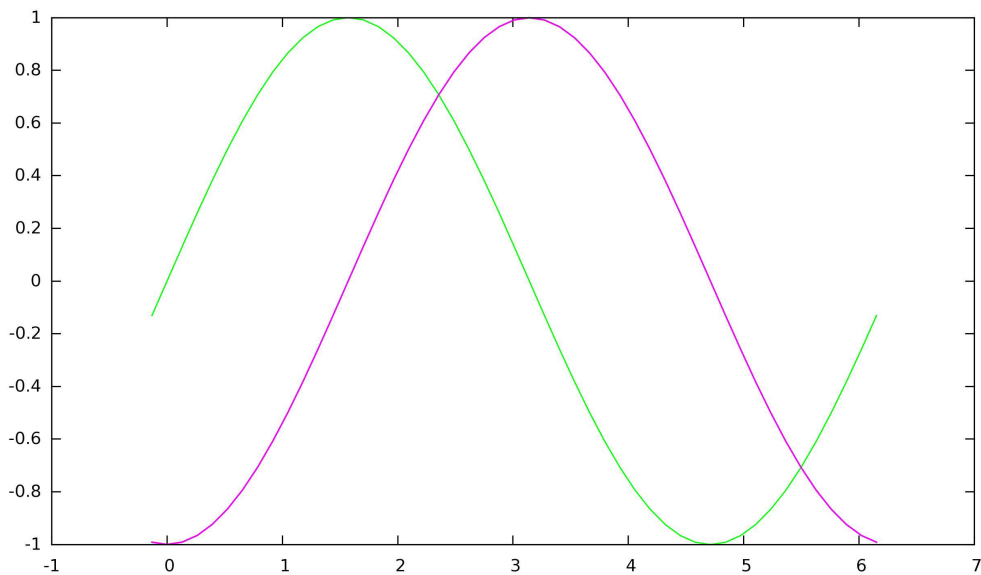


Figure 5.6: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sinus(x_i - c * t)$  (en bleu), de la fonction initiale  $\sinus(x)$  (en vert), de la solution moyenne numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en rouge) et de la reconstruction quadratique  $P(x - x_i)$  sur les nœuds  $x_i$  (en rose) pour un maillage régulier de 48 nœuds.

2. Nous calculons maintenant les erreurs  $L^1$  et  $L^2$  des valeurs moyennes suivantes :

- Erreur  $L^1 = \sum_{i=1}^{imax} \left| \sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) - \bar{u}_i^n \right| * \Delta x,$
- Erreur  $L^2 = \left( \sum_{i=1}^{imax} \left( \sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) - \bar{u}_i^n \right)^2 \Delta x \right)^{1/2} .$

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Erreur $L^2$	Ordre de convergence $L^1$ et $L^2$
6	0.1943	$9.3450.10^{-2}$	
12	$1.4719.10^{-2}$	$6.6708.10^{-3}$	3,72 et 3,81
24	$9.6709.10^{-4}$	$4.309.10^{-4}$	3,93 et 3,95
48	$6.1186.10^{-5}$	$2.7147.10^{-5}$	3,98 et 3,99
96	$3.8186.10^{-6}$	$1.6974.10^{-6}$	4,00 et 4,00

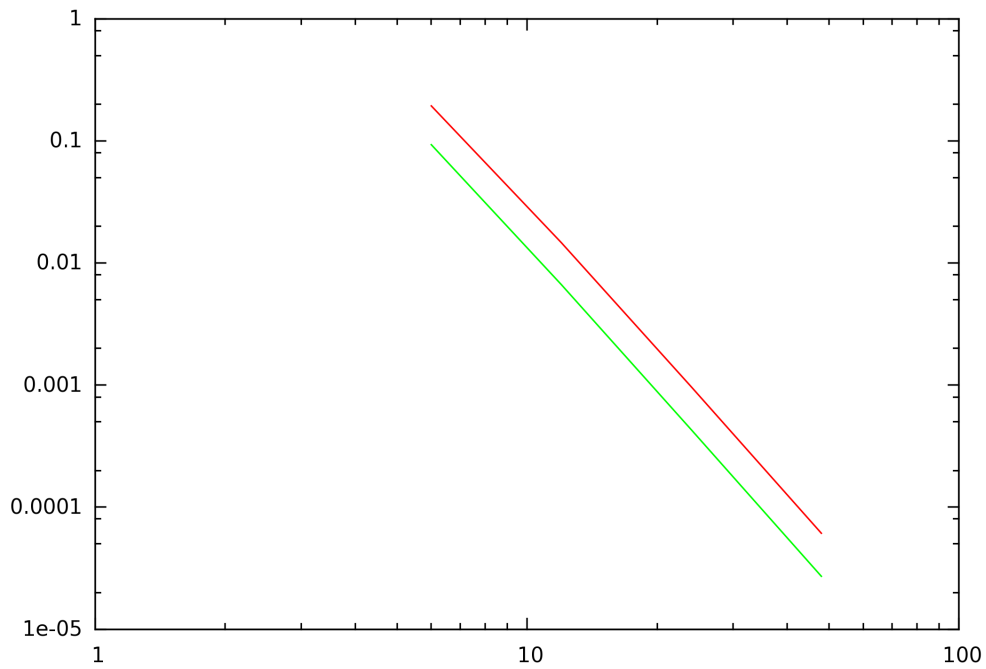


Figure 5.7: Schéma **CENO** centré 1D. Ordre de convergence pour les erreurs  $L^1$  (en rouge) et  $L^2$  (en vert) pour un maillage régulier en 1 dimension.

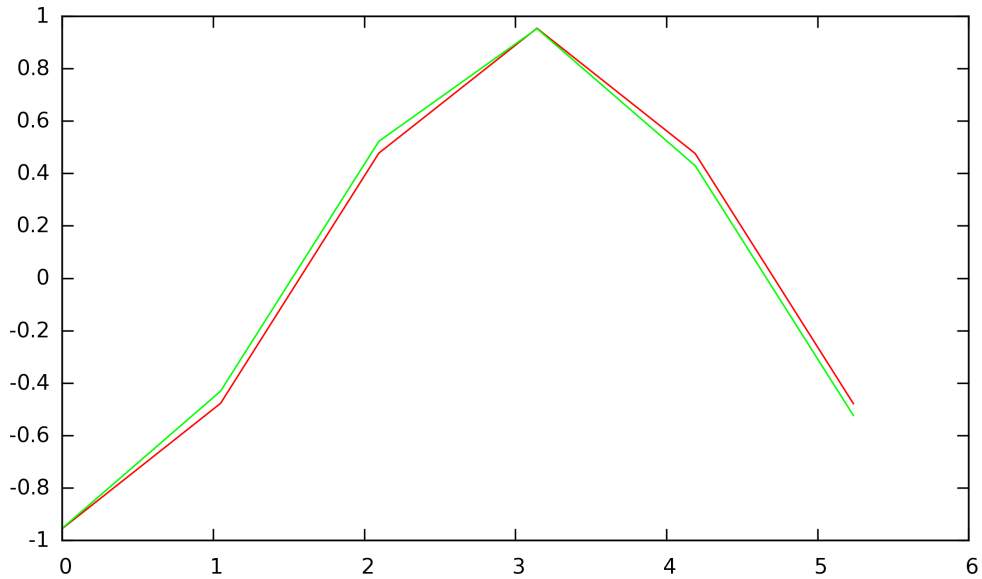


Figure 5.8: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 6 nœuds.

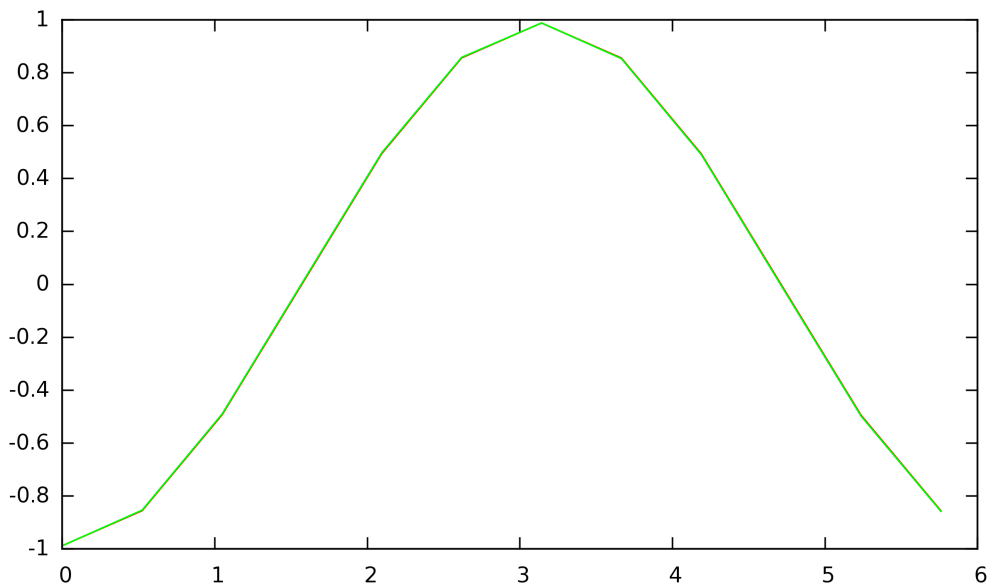


Figure 5.9: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 12 nœuds.



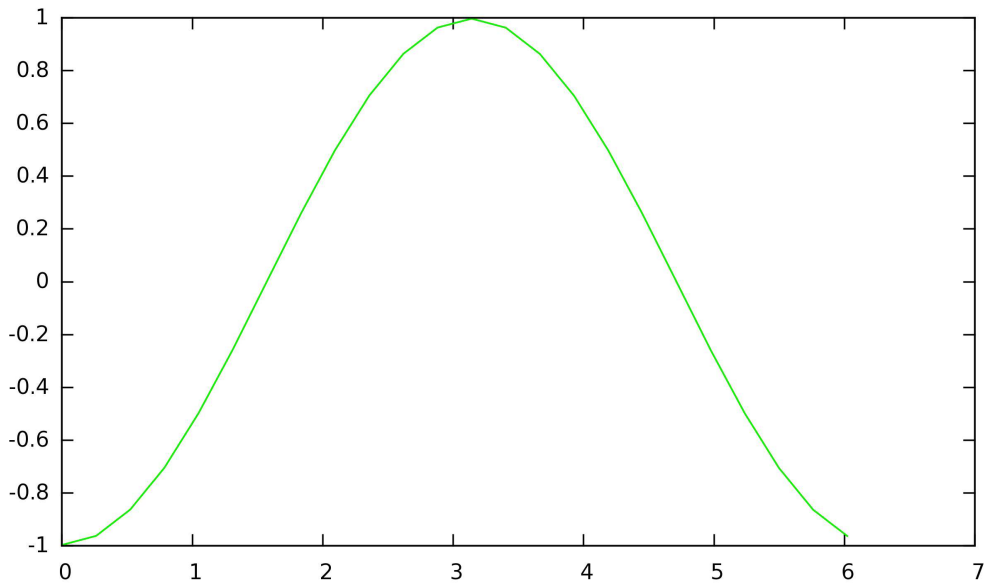


Figure 5.10: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 24 nœuds.

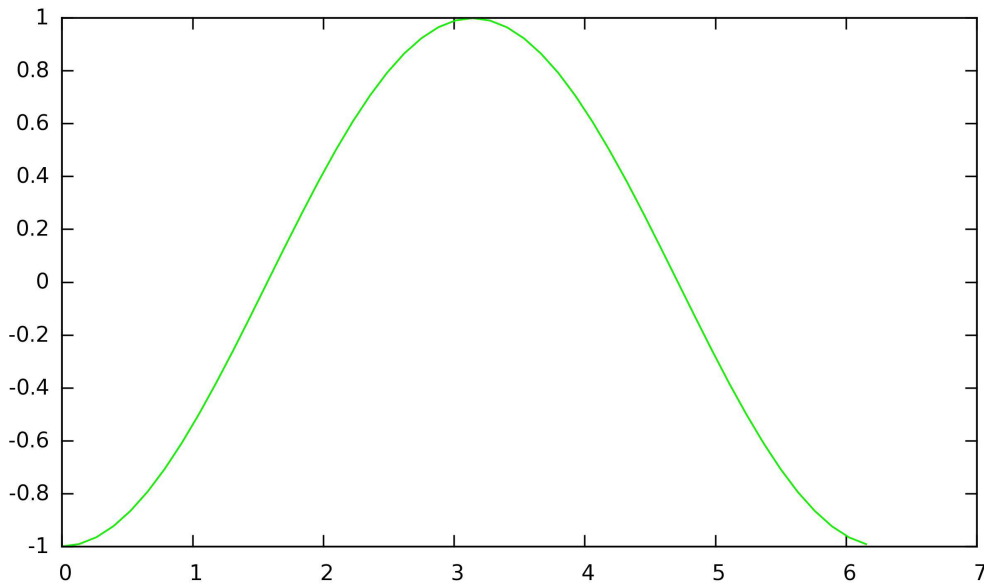


Figure 5.11: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 48 nœuds.

### 5.2.6 Conclusion

- Cette étude montre que notre schéma centré volumes-finis **CENO** avec reconstruction polynômiale quadratique de la solution est d'ordre 4 en maillage uniforme en une dimension, l'erreur principale de troncature est une dérivée cinquième de dispersion.
- Les tests numériques confirment l'ordre 4 du schéma. On remarque que plus le maillage est fin, plus la convergence se précise vers l'ordre 4. Les premières comparaisons numériques montrent que la valeur de la reconstruction quadratique  $P(x - x_i)$  sur le nœud  $x_i$  est plus proche de la solution exacte que la valeur moyenne de la solution elle-même, et les deuxièmes tests numériques montrent que l'erreur spatiale entre la solution exacte moyenne et la solution numérique moyenne restent d'ordre 4 au cours du temps.
- Maintenant, pour prolonger cette étude et améliorer la précision du schéma, c'est-à-dire pour passer à un ordre supérieur de précision numérique et donc obtenir une erreur principale de troncature spatiale d'un ordre supérieur, nous devons compenser cette dispersion d'ordre 4, c'est l'objectif des sections suivantes.

## 5.3 Étude d'un schéma à reconstruction quadratique et interpolation de degré 3 en 1D

### 5.3.1 Objectif du problème

Nous nous intéressons maintenant à une reconstruction "pseudo-cubique" de la solution par cellule de contrôle  $C_i$ , c'est-à-dire nous allons interpoler les dérivées troisièmes du polynôme reconstruit en  $C_i$  grâce à la connaissance sur chaque cellule voisine des dérivées secondes, et ainsi obtenir un terme de degré trois et donc une nouvelle expression du polynôme d'approximation. Notons que nous allons effectuer cette étude en partant d'un polynôme de degré 3, mais notre schéma gardera une reconstruction quadratique de l'inconnue et non cubique. Ce chapitre permettra de trouver les ingrédients nécessaires pour la modification des flux de notre schéma. Par contre pour savoir exactement quelles modifications nous devons apporter aux flux, il faut partir d'une nouvelle interpolation.

Pour simplifier les notations, nous appellerons aussi  $P_i$  le nouveau polynôme de degré trois reconstruit, qui est ni plus ni moins qu'une extension de l'ancien polynôme  $P_i$  de degré deux.

Nous parlons de reconstruction "pseudo-cubique" et non "cubique" car nous ne faisons pas une reconstruction polynomiale cubique où les coefficients seraient tous calculés par la méthode des Moindres Carrés. Nous profitons seulement de la précision de la reconstruction par Moindres Carrés afin de calculer les dérivées supérieures à moindre coût.

Le nouveau polynôme  $P_i$  reconstruit sur chaque cellule de contrôle  $C_i$  au nœud  $i$  du maillage s'écrit alors :

$$P_i(x - x_i) = c_i + b_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2 + \hat{\alpha}\alpha_i(x - x_i)^3,$$

où  $\hat{\alpha}$  est un coefficient à déterminer et qui nous permettrait de compenser la dispersion d'ordre 4 du schéma, et  $\alpha_i$  est la dérivée 3<sup>eme</sup> du polynôme sur la cellule  $C_i$ . Il nous faut donc calculer la dérivée troisième de  $P_i$  grâce à la connaissance des dérivées secondes de notre polynôme sur les cellules  $C_i$ .

### 5.3.2 Évaluation des termes de degré 3 sur les cellules

D'après précédemment, la dérivée seconde du polynôme  $P_i$  de degré 2 sur la cellule  $C_i$  s'écrit :

$$a_i = \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x^2}.$$

On calcul les dérivées troisièmes par différences finies c'est-à-dire la dérivée troisième  $\alpha_i$  du polynôme  $P_i$  sur la cellule  $C_i$  qui s'exprime par :

$$\alpha_i = \frac{\bar{a}_{i-1} - \bar{a}_{i-1}}{2\Delta x}.$$

- Dérivée troisième  $\alpha_i$  sur la cellule  $C_i$  :

$$\alpha_i = \frac{1}{3} \frac{\bar{u}_{i+2} - 2\bar{u}_{i+1} + 2\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i-2}}{4\Delta x^3}.$$

- Dérivée troisième  $\alpha_{i+1}$  sur la cellule  $C_{i+1}$  :

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{3} \frac{\bar{u}_{i+3} - 2\bar{u}_{i+2} + 2\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}}{4\Delta x^3}.$$

- Dérivée troisième  $\alpha_{i-1}$  sur la cellule  $C_{i-1}$  :

$$\alpha_{i-1} = \frac{1}{3} \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + 2\bar{u}_{i-2} - \bar{u}_{i-3}}{4\Delta x^3}.$$

Pour recalculer l'erreur de troncature spatiale avec notre nouveau polynôme de degré 3, nous devons exprimer les dérivées troisièmes  $\alpha_{i+1}$ ,  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i-1}$  en fonction de la solution exacte  $u$  et non en fonction de ses valeurs moyennes  $u_i$  sur les cellules  $C_i$  du maillage. Dès lors, on utilise les formules de Taylor précédemment calculées de  $\bar{u}_{i+2}$ ,  $\bar{u}_{i+1}$ ,  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{u}_{i-1}$  et  $\bar{u}_{i-2}$  :

1. On écrit la formule de Taylor de  $\alpha_i$  :

$$\alpha_i = u_i^{(3)} \frac{1}{6} + u_i^{(5)} \frac{7}{144} \Delta x^2 + o(\Delta x^3).$$

Ensuite, pour calculer les dérivées troisièmes  $\alpha_{i+1}$  et  $\alpha_{i-1}$ , nous avons besoin des développements de Taylor de  $\bar{u}_{i+3}$  et  $\bar{u}_{i-3}$  :

• Développement de Taylor de  $\bar{u}_{i+3}$  :

$$\bar{u}_{i+3} = u_i + u_i' 3\Delta x + u_i'' \frac{109}{24} \Delta x^2 + u_i^{(3)} \frac{37}{8} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{6841}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(5)} \frac{1417}{640} \Delta x^5 + o(\Delta x^6).$$

• Développement de Taylor de  $\bar{u}_{i-3}$  :

$$\bar{u}_{i-3} = u_i - u_i' 3\Delta x + u_i'' \frac{109}{24} \Delta x^2 - u_i^{(3)} \frac{37}{8} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{6841}{1920} \Delta x^4 - u_i^{(5)} \frac{1417}{640} \Delta x^5 + o(\Delta x^6).$$

On peut maintenant calculer les dérivées troisièmes :

2. On écrit la formule de Taylor de  $\alpha_{i+1}$  :

$$\alpha_{i+1} = u_i^{(3)} \frac{1}{6} + u_i^{(4)} \frac{1}{6} \Delta x + u_i^{(5)} \frac{19}{144} \Delta x^2 + o(\Delta x^3).$$

3. On écrit la formule de Taylor de  $\alpha_{i-1}$  :

$$\alpha_{i-1} = u_i^{(3)} \frac{1}{6} - u_i^{(4)} \frac{1}{6} \Delta x + u_i^{(5)} \frac{19}{144} \Delta x^2 + o(\Delta x^3).$$

Nous avons donc maintenant les expressions des dérivées troisièmes de notre polynôme  $P_i$  sur chaque cellule de contrôle  $C_i$  du maillage. Nous pouvons alors passer à l'étape suivante qui est le calcul des flux aux interfaces par notre reconstruction polynômiale pseudo-cubique.

### 5.3.3 Calcul des flux par la reconstruction polynômiale pseudo-cubique

À ce stade, nous avons un polynôme de degré trois  $P_i$ , et ses dérivées troisièmes en fonction des valeurs moyennes  $\bar{u}_i$  ainsi qu'en fonction des valeurs exactes  $u$ .

Dès lors, on peut réévaluer l'inconnue du problème initial en l'approximant avec le nouveau polynôme reconstruit. On revient alors aux calculs des flux centrés :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right],$$

où :

$$\begin{cases} \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} = \Phi^{centre}(u_{j+\frac{1}{2}}^+, u_{j+\frac{1}{2}}^-) = c \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^+ + u_{j+\frac{1}{2}}^-}{2}, \\ \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} = \Phi^{centre}(u_{j-\frac{1}{2}}^+, u_{j-\frac{1}{2}}^-) = c \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^+ + u_{j-\frac{1}{2}}^-}{2}. \end{cases}$$

Cette fois, on a une reconstruction pseudo-cubique de la solution sur les cellules  $C_i$ , approximée par le polynôme  $P_i(x - x_i) = c_i + b_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2 + \dot{\alpha}_i(x - x_i)^3$ .

On définit dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i-\frac{1}{2}}^- = c_{i-1} + b_{i-1} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right) + a_{i-1} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^2 + \dot{\alpha} \alpha_{i-1} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^3, \\ u_{i-\frac{1}{2}}^+ = c_i - b_i \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right) + a_i \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^2 - \dot{\alpha} \alpha_i \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^3, \\ u_{i+\frac{1}{2}}^- = c_i + b_i \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) + a_i \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2 + \dot{\alpha} \alpha_i \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^3, \\ u_{i+\frac{1}{2}}^+ = c_{i+1} - b_{i+1} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) + a_{i+1} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2 - \dot{\alpha} \alpha_{i+1} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^3. \end{array} \right.$$

Et on obtient alors en maillage uniforme :

$$\frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right] = u_i' + u_i^{(3)} \frac{1}{24} \Delta x^2 - u_i^{(5)} \left( \frac{21}{640} + \frac{\dot{\alpha}}{96} \right) \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

Précédemment on avait calculé :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = u_i' + u_i^{(3)} \frac{1}{24} \Delta x^2 + u_i^{(5)} \frac{1}{1920} \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

On trouve alors une équation équivalente pour une reconstruction polynômiale cubique de la solution par cellule :

$$\frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right] - \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = -u_i^{(5)} \left( \frac{\dot{\alpha}}{96} + \frac{1}{30} \right) \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

Nous constatons donc, que pour passer à un ordre supérieur, c'est-à-dire pour compenser la dispersion d'ordre 4 de l'erreur de troncature spatiale du schéma précédent avec la reconstruction quadratique, nous devons annuler le terme suivant :

$$\frac{\dot{\alpha}}{96} + \frac{1}{30} = 0 \iff \dot{\alpha} = -\frac{16}{5}.$$

Par conséquent, en rajoutant le coefficient  $-\frac{16}{5}$  au terme de degré 3 de notre polynôme pseudo-cubique, on supprime le terme de dispersion d'ordre 4 dans le schéma et on passe ainsi à une dispersion d'ordre 6. Nous obtenons alors une nouvelle expression des flux centrés, pour une interpolation de degré trois, en fonction des valeurs moyennes  $\bar{u}_i$  de la solution, qui s'écrit :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right] = \left( \frac{\dot{\alpha} - 4}{12} \right) \frac{\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i-2}}{4\Delta x} + \left( \frac{128 - 5\dot{\alpha}}{96} \right) \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x} - \left( \frac{\dot{\alpha}}{32} \right) \frac{\bar{u}_{i+3} - \bar{u}_{i-3}}{6\Delta x}.$$

### 5.3.4 Tests numériques

On revient maintenant à notre algorithme 1D et nous y implémentons les nouveaux flux ainsi calculés par l'interpolation pseudo-cubique, et en remplaçant la valeur du coefficient  $\dot{\alpha}$  par celle calculée précédemment afin de supprimer la dispersion d'ordre 4.

Les flux implémentés sont donc :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n \right] = -\frac{3}{5} \frac{\bar{u}_{i+2}^n - \bar{u}_{i-2}^n}{4\Delta x} + \frac{41}{30} \frac{\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{10} \frac{\bar{u}_{i+3}^n - \bar{u}_{i-3}^n}{6\Delta x}.$$

Dans les tests numériques suivant, nous prenons en compte seulement les valeurs moyennes de la solution exacte et de la solution numérique calculée, car les valeurs ponctuelles aux nœuds  $x_i$  de la solution exacte ainsi que du polynôme reconstruit, c'est-à-dire respectivement  $\sin(x_i - c * t)$  et  $c_i$ , restent inchangées des tests numériques précédents prenant en compte une reconstruction polynomiale de degré deux. Seules les valeurs moyennes, qui sont les réelles inconnues de notre problème, vont varier avec cette nouvelle reconstruction. Les hypothèses numériques de conditions initiales et limites sont les mêmes que précédemment.

Nous comparons donc la valeur de la solution numérique  $\bar{u}_i^n$ , qui est une valeur moyenne, avec la valeur moyenne de la solution exacte :

$$\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) = -\frac{1}{\Delta x} \left[ \cos(x_{i+1/2} - c * t) - \cos(x_{i-1/2} - c * t) \right].$$

Nous calculons les erreurs  $L^1$  et  $L^2$  des valeurs moyennes suivantes :



- Erreur  $L^1 = \sum_{i=1}^{imax} \left| \sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) - \bar{u}_i^n \right| * \Delta x$ ,
- Erreur  $L^2 = \left( \sum_{i=1}^{imax} \left( \sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) - \bar{u}_i^n \right)^2 \Delta x \right)^{1/2}$ .

On obtient alors :

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Erreur $L^2$	Ordre de convergence $L^1$ et $L^2$
6	$4.1094.10^{-2}$	$2.0065.10^{-2}$	
12	$8.3667.10^{-4}$	$3.7897.10^{-4}$	5,62 et 5,72
24	$1.3945.10^{-5}$	$6.2131.10^{-6}$	5,91 et 5,93
48	$2.2121.10^{-7}$	$9.8160.10^{-8}$	5,98 et 5,98
96	$3.4704.10^{-9}$	$1.5383.10^{-9}$	5,99 et 5,99

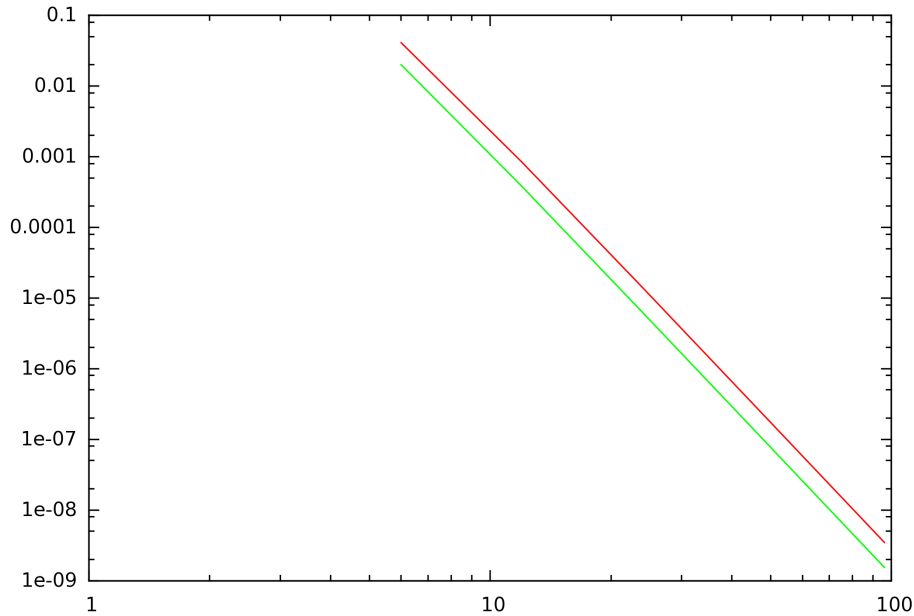


Figure 5.12: Schéma **CENO** centré 1D. Ordre de convergence pour les erreurs  $L^1$  (en rouge) et  $L^2$  (en vert) pour un maillage régulier en 1 dimension.

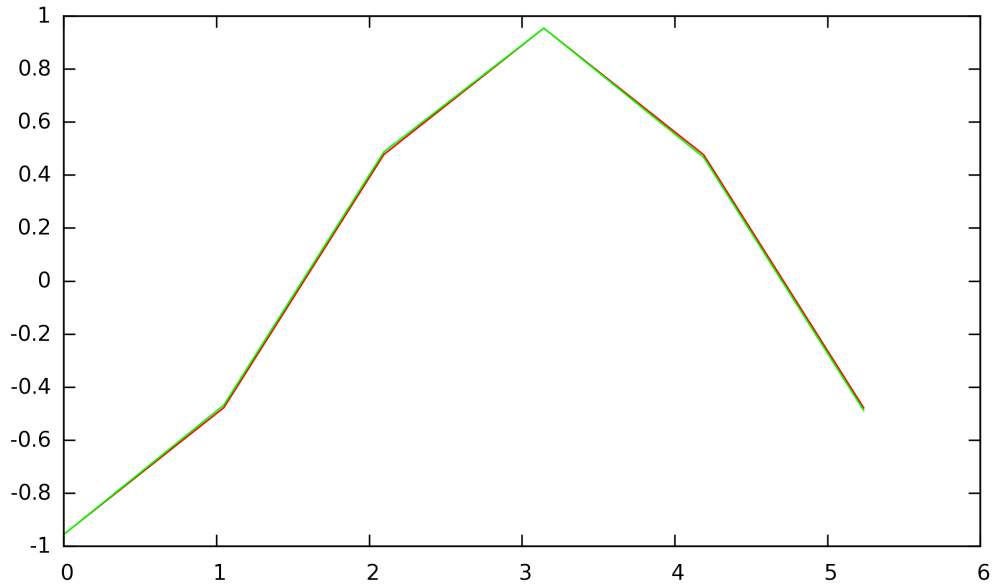


Figure 5.13: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 6 nœuds.

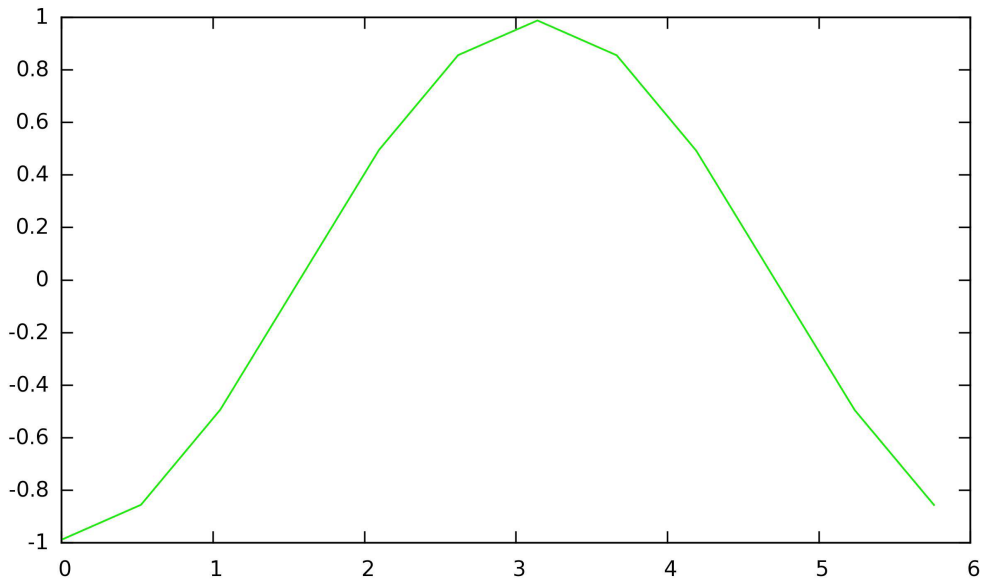


Figure 5.14: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 12 nœuds.

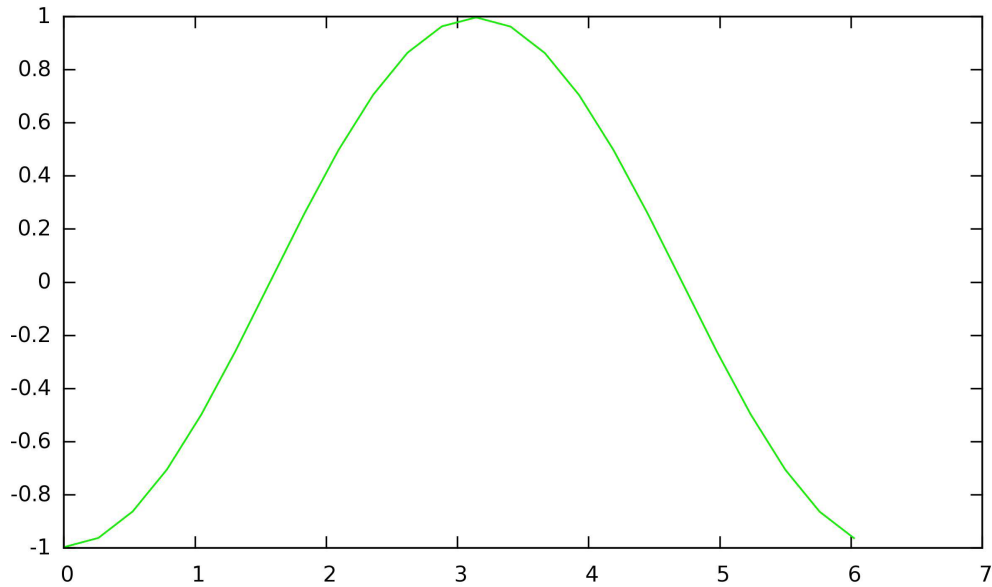


Figure 5.15: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 24 nœuds.

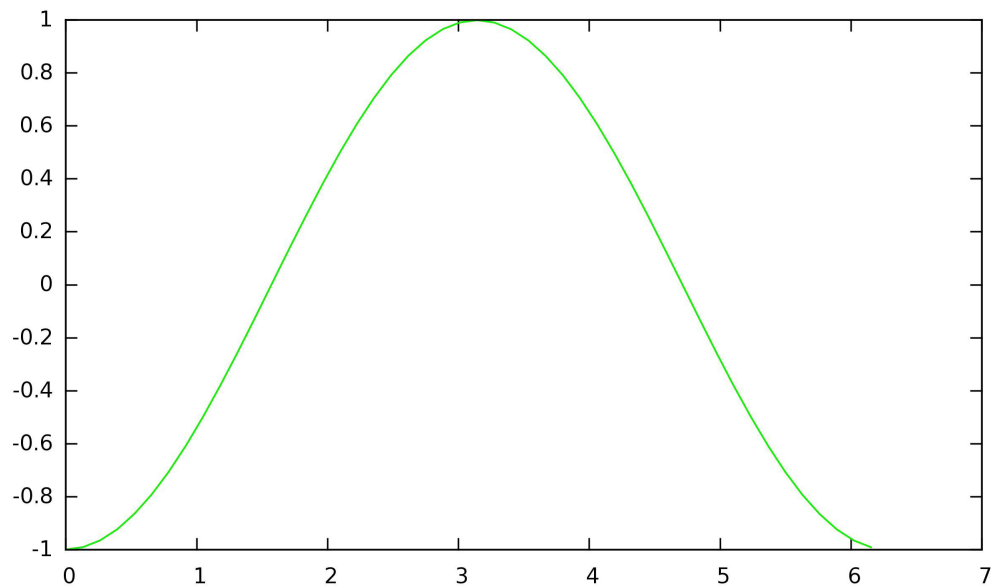


Figure 5.16: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 48 nœuds.

### 5.3.5 Conclusion

- Les tests numériques sont très concluants et nous confirment que le coefficient  $\hat{\alpha} = -\frac{16}{5}$  est le bon coefficient de la nouvelle interpolation polynômiale de degré trois qui supprime l'erreur principale de troncature spatiale d'ordre 4 précédemment obtenue par l'approximation quadratique.
- Notre schéma à reconstruction polynômiale pseudo-cubique est donc d'ordre 6 en maillage uniforme en dimension 1.
- Cet ordre 6 a été obtenu par une reconstruction quadratique de l'inconnue par cellule de contrôle  $C_i$  et par une correction du flux centré venant de l'étude d'une approximation par une reconstruction cubique. On a donc corrigé les flux et non la reconstruction de l'inconnue vis à vis du schéma quadratique d'origine.
- Ce schéma d'ordre 6 possède une dérivée septième de dispersion comme erreur principale de troncature. Nous allons par la suite faire une étude plus poussée des termes d'erreur de troncature afin de définir précisément les termes principaux d'erreur de cette nouvelle approximation.
- L'objectif de la section suivante est de réécrire les équations équivalentes spatiales du problème hyperbolique de départ, afin de continuer l'amélioration du schéma, qui se finalisera par l'insertion d'un terme de stabilité dans les flux numériques.

## 5.4 Prolongement de l'erreur de troncature dans l'équation équivalente

Maintenant, nous avons besoin d'écrire les développements de Taylor à un ordre supérieur afin de calculer les dérivées supérieures de dispersion et de diffusion de notre schéma par la pseudo approximation polynômiale de degré 3 :

### 5.4.1 Développements de Taylor prolongés

1. Développements de Taylor de  $\bar{u}_{i+1}$  :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i+1} &= u_i + u_i' \Delta x + u_i'' \frac{13}{24} \Delta x^2 + u_i^{(3)} \frac{5}{24} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{121}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(5)} \frac{91}{5760} \Delta x^5 \\ &+ u_i^{(6)} \frac{1093}{322560} \Delta x^6 + u_i^{(7)} \frac{41}{64512} \Delta x^7 + o(\Delta x^8).\end{aligned}$$

2. Développements de Taylor de  $\bar{u}_{i-1}$  :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i-1} &= u_i - u_i' \Delta x + u_i'' \frac{13}{24} \Delta x^2 - u_i^{(3)} \frac{5}{24} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{121}{1920} \Delta x^4 - u_i^{(5)} \frac{91}{5760} \Delta x^5 \\ &+ u_i^{(6)} \frac{1093}{322560} \Delta x^6 - u_i^{(7)} \frac{41}{64512} \Delta x^7 + o(\Delta x^8).\end{aligned}$$

3. Développements de Taylor de  $\bar{u}_{i+2}$  :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i+2} &= u_i + u_i' 2\Delta x + u_i'' \frac{49}{24} \Delta x^2 + u_i^{(3)} \frac{17}{12} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{1441}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(5)} \frac{931}{2880} \Delta x^5 \\ &+ u_i^{(6)} \frac{37969}{322560} \Delta x^6 + u_i^{(7)} \frac{6001}{161280} \Delta x^7 + o(\Delta x^8).\end{aligned}$$

4. Développements de Taylor de  $\bar{u}_{i-2}$  :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i-2} &= u_i - u_i' 2\Delta x + u_i'' \frac{49}{24} \Delta x^2 - u_i^{(3)} \frac{17}{12} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{1441}{1920} \Delta x^4 - u_i^{(5)} \frac{931}{2880} \Delta x^5 \\ &+ u_i^{(6)} \frac{37969}{322560} \Delta x^6 - u_i^{(7)} \frac{6001}{161280} \Delta x^7 + o(\Delta x^8).\end{aligned}$$

5. Développements de Taylor de  $\bar{u}_{i+3}$  :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i+3} &= u_i + u_i' 3\Delta x + u_i'' \frac{109}{24} \Delta x^2 + u_i^{(3)} \frac{37}{8} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{6841}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(5)} \frac{1417}{640} \Delta x^5 \\ &+ u_i^{(6)} \frac{372709}{322560} \Delta x^6 + u_i^{(7)} \frac{55981}{107520} \Delta x^7 + o(\Delta x^8).\end{aligned}$$

6. Développements de Taylor de  $\bar{u}_{i-3}$  :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i-3} &= u_i - u_i' 3\Delta x + u_i'' \frac{109}{24} \Delta x^2 - u_i^{(3)} \frac{37}{8} \Delta x^3 + u_i^{(4)} \frac{6841}{1920} \Delta x^4 - u_i^{(5)} \frac{1417}{640} \Delta x^5 \\ &+ u_i^{(6)} \frac{372709}{322560} \Delta x^6 - u_i^{(7)} \frac{55981}{107520} \Delta x^7 + o(\Delta x^8).\end{aligned}$$

#### 5.4.2 Calcul des flux par la reconstruction polynômiale quadratique

Les flux numériques centrés du schéma quadratique s'écrivent de façon "prolongée" par :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{i+1/2}^{centre} - \Phi_{i-1/2}^{centre} \right] = u_i' + u_i^{(3)} \frac{1}{24} \Delta x^2 - u_i^{(5)} \frac{21}{640} \Delta x^4 - u_i^{(7)} \frac{1727}{322560} \Delta x^6 + o(\Delta x^7).$$

Par ailleurs on a :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = u'_i + u^{(3)} \frac{1}{24} \Delta x^2 + u^{(5)} \frac{1}{1920} \Delta x^4 + u^{(7)} \frac{1}{322560} \Delta x^6 + o(\Delta x^7).$$

Nous pouvons alors écrire la formulation équivalente spatiale de l'équation hyperbolique du problème approximée par le schéma de base **ENO** centré et quadratique avec les développements prolongés de Taylor :

$$-\int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx + \frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{i+1/2}^{centre} - \Phi_{i-1/2}^{centre} \right] = -u^{(5)} \frac{1}{30} \Delta x^4 - u^{(7)} \frac{1}{560} \Delta x^6 + O(\Delta x^7).$$

### 5.4.3 Calcul des flux par la reconstruction polynômiale pseudo-cubique

On doit maintenant recalculer les coefficients  $\alpha_i$ ,  $\alpha_{i+1}$  et  $\alpha_{i-1}$  avec les nouveaux développements de Taylor prolongés de  $\bar{u}_{i+3}$ ,  $\bar{u}_{i+2}$ ,  $\bar{u}_{i+1}$ ,  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{u}_{i-1}$ ,  $\bar{u}_{i-2}$  et  $\bar{u}_{i-3}$ .

- Dérivée troisième  $\alpha_i$  prolongée :

$$\alpha_i = u^{(3)} \frac{1}{6} + u^{(5)} \frac{7}{144} \Delta x^2 + u^{(7)} \frac{23}{3840} \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

- Dérivée troisième  $\alpha_{i+1}$  prolongée :

$$\alpha_{i+1} = u^{(3)} \frac{1}{6} + u^{(4)} \frac{1}{6} \Delta x + u^{(5)} \frac{19}{144} \Delta x^2 + u^{(6)} \frac{11}{144} \Delta x^3 + u^{(7)} \frac{143}{3840} \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

- Dérivée troisième  $\alpha_{i-1}$  prolongée :

$$\alpha_{i-1} = u^{(3)} \frac{1}{6} - u^{(4)} \frac{1}{6} \Delta x + u^{(5)} \frac{19}{144} \Delta x^2 - u^{(6)} \frac{11}{144} \Delta x^3 + u^{(7)} \frac{143}{3840} \Delta x^4 + o(\Delta x^5).$$

On passe maintenant au calcul des flux. D'après précédemment on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right] &= \frac{c}{2\Delta x} \left[ (c_{i+1} - c_{i-1}) + \frac{\Delta x}{2} (-b_{i+1} + 2b_i - b_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta x^2}{4} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \left( -\frac{16}{5} \right) \frac{\Delta x^3}{8} (-\alpha_{i+1} + 2\alpha_i - \alpha_{i-1}) \right]. \end{aligned}$$

On obtient alors une nouvelle formulation "prolongée" pour les flux centrés corrigés par la reconstruction pseudo-cubique :

$$\frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right] = u'_i + u_i^{(3)} \frac{1}{24} \Delta x^2 + u_i^{(5)} \frac{1}{1920} \Delta x^4 - u_i^{(7)} \frac{461}{64512} \Delta x^6 + o(\Delta x^7).$$

Par ailleurs on a :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = u'_i + u^{(3)} \frac{1}{24} \Delta x^2 + u^{(5)} \frac{1}{1920} \Delta x^4 + u^{(7)} \frac{1}{322560} \Delta x^6 + o(\Delta x^7).$$

Nous pouvons alors écrire la formulation équivalente spatiale de l'équation hyperbolique du problème approximée par le schéma **ENO** centré et pseudo-cubique avec les développements prolongés de Taylor :

$$\frac{1}{c\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{centre} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{centre} \right] - \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx = -u_i^{(7)} \frac{1}{140} \Delta x^6 + O(\Delta x^7).$$



#### 5.4.4 Conclusion

- En compensant le terme d'ordre 4, c'est-à-dire la dérivée cinquième de dispersion dans l'erreur de troncature spatiale de la reconstruction pseudo-cubique, nous passons ainsi à deux ordres d'erreurs supérieurs de part la prise en compte seulement du terme centré dans les flux, qui contribuent uniquement à l'aspect dispersif du schéma.
- Pour l'interpolation pseudo-cubique, l'erreur principale de troncature du schéma est une dérivée septième de dispersion. Cela nous confirme ce que les test numériques avaient donné dans la section précédente : un schéma dispersif d'ordre 6.
- L'objectif suivant, étudié dans la section suivante, est d'ajouter au schéma dispersif d'ordre 6 un terme de stabilité, c'est-à-dire une dissipation d'ordre élevée.

## 5.5 Étude d'un schéma à reconstruction pseudo-cubique et interpolation de degré 4, en 1D

### 5.5.1 Objectif du problème

À ce stade, nous avons donc un schéma d'ordre 6, où l'erreur principale de troncature est une dérivée septième de dispersion, c'est-à-dire nous avons une équation équivalente spatiale du schéma de la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \sim k_6 \Delta x^6 \frac{\partial^7 u}{\partial x^7}(x, t) + o(\Delta x^7).$$

Nous allons maintenant nous intéresser à ajouter à notre schéma une diffusion d'ordre 5, c'est-à-dire une dérivée sixième de diffusion, dans le but d'introduire un minimum de stabilité dans notre schéma. Nous voulons donc obtenir une équation équivalente de la sorte :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \sim k_5 \Delta x^5 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x, t) + k_6 \Delta x^6 \frac{\partial^7 u}{\partial x^7}(x, t) + o(\Delta x^7).$$

Notre reconstruction polynômiale devient maintenant pseudo-quadrique, c'est-à-dire le polynôme  $P_i$  reconstruit sur la cellule  $C_i$  s'écrit :

$$P_i(x - x_i) = \frac{(x - x_i)^4}{4!} u_i^{(4)} - \frac{16}{5} \alpha_i (x - x_i)^3 + a_i (x - x_i)^2 + b_i (x - x_i) + c_i.$$

Nous allons réitérer l'étude précédente, mais cette fois nous allons injecter uniquement le terme de degré 4 du polynôme dans la partie décentrée des flux. Donc seulement la dérivée 4<sup>eme</sup> de la reconstruction polynômiale  $P_i$  contribue à la partie de stabilisation des flux.

### 5.5.2 Calcul des flux par une reconstruction pseudo-quadrique

Nous assimilons les flux avec leur partie stabilisante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{x_{i+1/2}}^{stab} = \Phi^{stab}(u_{i+1/2}^+, u_{i+1/2}^-) = -|c| \frac{u_{i+1/2}^+ - u_{i+1/2}^-}{2}, \\ \Phi_{x_{i-1/2}}^{stab} = \Phi^{stab}(u_{i-1/2}^+, u_{i-1/2}^-) = -|c| \frac{u_{i-1/2}^+ - u_{i-1/2}^-}{2}, \end{array} \right.$$

où seul le terme quadrique  $\frac{(x - x_i)^4}{4!} u_i^{(4)}$  est pris en compte dans ses flux de stabilisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1/2}^+ = \frac{1}{4!} \left( \frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right)^4 u_{i+1}^{(4)}, \\ u_{i+1/2}^- = \frac{1}{4!} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^4 u_i^{(4)}, \\ u_{i-1/2}^+ = \frac{1}{4!} \left( \frac{x_{i-1} - x_i}{2} \right)^4 u_i^{(4)}, \\ u_{i-1/2}^- = \frac{1}{4!} \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^4 u_{i-1}^{(4)}. \end{array} \right.$$

C'est-à-dire avec un maillage uniforme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1/2}^+ = \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^4 u_{i+1}^{(4)}, \\ u_{i+1/2}^- = \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^4 u_i^{(4)}, \\ u_{i-1/2}^+ = \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^4 u_i^{(4)}, \\ u_{i-1/2}^- = \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^4 u_{i-1}^{(4)}. \end{array} \right.$$

Les flux de stabilisation s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \Phi_{x_{i+1/2}}^{stab} = \Phi^{stab}(u_{i+\frac{1}{2}}^+, u_{i+\frac{1}{2}}^-) = -\frac{|c|}{2} \frac{1}{24} \frac{\Delta x^4}{16} \left( u_{i+1}^{(4)} - u_i^{(4)} \right), \\ \Phi_{x_{i-1/2}}^{stab} = \Phi^{stab}(u_{i-\frac{1}{2}}^+, u_{i-\frac{1}{2}}^-) = -\frac{|c|}{2} \frac{1}{24} \frac{\Delta x^4}{16} \left( u_i^{(4)} - u_{i-1}^{(4)} \right). \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\Phi_{x_{i+1/2}}^{stab} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{stab} = -\frac{|c|}{2} \frac{1}{24} \frac{\Delta x^4}{16} \left( u_{i+1}^{(4)} - 2u_i^{(4)} + u_{i-1}^{(4)} \right).$$

C'est-à-dire :

$$\Phi_{x_{i+1/2}}^{stab} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{stab} = -\frac{|c|}{768} \Delta x^6 \left( \frac{u_{i+1}^{(4)} - 2u_i^{(4)} + u_{i-1}^{(4)}}{\Delta x^2} \right).$$

On obtient donc les flux complets du schéma en combinant les flux centrés issus de la reconstruction pseudo-cubique et les flux décentrés issus du terme quadratique :

$$\frac{1}{|c|\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}} - \Phi_{x_{i-1/2}} \right] = -\frac{3}{5} \frac{\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{41}{30} \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{1}{10} \frac{\bar{u}_{i+3} - \bar{u}_{i-3}}{6\Delta x} - \frac{\Delta x^5}{768} \left( \frac{u_{i+1}^{(4)} - 2u_i^{(4)} + u_{i-1}^{(4)}}{\Delta x^2} \right).$$

On doit ensuite calculer la dérivée quatrième  $u_i^{(4)}$ . On définit  $u_i^{(4)}$  comme dérivée seconde de la dérivée seconde de notre reconstruction polynômiale quadratique  $P_i$  sur la cellule  $C_i$ , qui est le coefficient  $a_i$  de la reconstruction calculée précédemment.

On définit donc  $u_i^{(4)}$  par la relation :

$$u_i^{(4)} = \frac{a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}}{\Delta x^2}.$$

Les flux de stabilisation s'écrivent alors :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{stab} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{stab} \right] = -|c| \frac{\Delta x^5}{1536} \frac{\bar{u}_{i+3} - 5\bar{u}_{i+2} + 15\bar{u}_{i+1} - 20\bar{u}_i + 15\bar{u}_{i-1} - 6\bar{u}_{i-2} + \bar{u}_{i-3}}{\Delta x^6}.$$

Nous avons maintenant l'expression des flux décentrés du schéma avec la contribution du terme d'ordre 4 de l'approximation polynômiale pseudo-quadrique. Nous allons maintenant recalculer cette expression en fonction des valeurs exactes de  $u$  et non de ses valeurs moyennes  $\bar{u}_i$ , afin de retrouver l'erreur principale de troncature spatiale avec cette contribution de ses flux de stabilisation.

### 5.5.3 Approximation par Taylor de flux pseudo-quadriques

Pour obtenir une expression des flux en fonction de la solution  $u$  et non en fonction de  $\bar{u}$ , nous calculons les développements de Taylor de  $\bar{u}_{i+3} - \bar{u}_{i-3}$ ,  $\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i-2}$  et  $\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}$  :

$$\bar{u}_{i+3} - \bar{u}_{i-3} = 2 \left( u_i + u_i'' \frac{109}{24} \Delta x^2 + u_i^{(4)} \frac{6841}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(6)} \frac{372709}{322560} \Delta x^6 + o(\Delta x^8) \right).$$

$$\bar{u}_{i+2} - \bar{u}_{i-2} = 2 \left( u_i + u_i'' \frac{49}{24} \Delta x^2 + u_i^{(4)} \frac{1441}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(6)} \frac{37969}{322560} \Delta x^6 + o(\Delta x^8) \right).$$

$$\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1} = 2 \left( u_i + u_i'' \frac{13}{24} \Delta x^2 + u_i^{(4)} \frac{121}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(6)} \frac{1093}{322560} \Delta x^6 + o(\Delta x^8) \right).$$

$$\bar{u}_i = u_i + u_i'' \frac{1}{24} \Delta x^2 + u_i^{(4)} \frac{1}{1920} \Delta x^4 + u_i^{(6)} \frac{1}{322560} \Delta x^6 + o(\Delta x^8).$$

Ce qui donne une nouvelle formulation des flux de stabilisation :

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{x_{i+1/2}}^{stab} - \Phi_{x_{i-1/2}}^{stab} \right] = -|c| \frac{\Delta x^5}{1536} u_i^{(6)} + o(\Delta x^8).$$

On obtient comme attendu une erreur de troncature spatiale d'ordre 5, qui est une dérivée sixième de diffusion. La contribution du terme d'ordre 4 du polynôme pseudo-quadrique dans la partie décentrée des flux nous apporté un terme de stabilisation d'ordre 5 dans le schéma.

### 5.5.4 Tests numériques

On revient maintenant à notre algorithme 1D pour tester le schéma complet avec la diffusion rajoutée. Nous y implémentons les nouveaux flux corrigés avec le terme de stabilisation. Les conditions numériques du calcul sont les mêmes que précédemment.

Les flux pseudo-quadratiques sont calculés ici en considérant une reconstruction polynômiale pseudo-quadratique de la solution par cellule, c'est-à-dire les valeurs de la solution aux interfaces sont approximées sur la cellule  $C_i$  par le polynôme :

$$P_i(x) = \frac{(x - x_i)^4}{4!} u_i^{(4)} - \frac{16}{5} \alpha_i (x - x_i)^3 + a_i (x - x_i)^2 + b_i (x - x_i) + c_i.$$

Les flux pseudo-quadratiques s'expriment alors par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left[ \Phi_{i+1/2}^n - \Phi_{i-1/2}^n \right] = \\ & -\frac{3}{5} \frac{\bar{u}_{i+2}^n - \bar{u}_{i-2}^n}{4\Delta x} + \frac{41}{30} \frac{\bar{u}_{i+1}^n - \bar{u}_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{10} \frac{\bar{u}_{i+3}^n - \bar{u}_{i-3}^n}{6\Delta x} - \frac{\Delta x^5}{768} \left( \frac{u_{i+1}^{(4)} - 2u_i^{(4)} + u_{i-1}^{(4)}}{\Delta x^2} \right). \end{aligned}$$

Nous comparons toujours la valeur de la solution numérique  $\bar{u}_i^n$ , qui est une valeur moyenne, avec la valeur moyenne de la solution exacte :

$$\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) = -\frac{1}{\Delta x} \left[ \cos(x_{i+1/2} - c * t) - \cos(x_{i-1/2} - c * t) \right].$$

Nous calculons les erreurs  $L^1$  et  $L^2$  des valeurs moyennes suivantes :

- Erreur  $L^1 = \sum_{i=1}^{imax} \left| \sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) - \bar{u}_i^n \right| * \Delta x$ ,
- Erreur  $L^2 = \left( \sum_{i=1}^{imax} \left( \sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t) - \bar{u}_i^n \right)^2 \Delta x \right)^{1/2}$ .

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Erreur $L^2$	Ordre de convergence $L^1$ et $L^2$
6	$4.1991.10^{-2}$	$2.0070.10^{-2}$	
12	$8.5390.10^{-4}$	$3.8020.10^{-4}$	5,62 et 5,72
24	$1.4258.10^{-5}$	$6.3053.10^{-6}$	5,90 et 5,91
48	$2.3495.10^{-7}$	$1.0404.10^{-7}$	5,92 et 5,92
96	$4.2494.10^{-9}$	$1.8826.10^{-9}$	5,79 et 5,79
192	$9.3935.10^{-11}$	$4.1624.10^{-11}$	5,49 et 5,49
384	$2.5449.10^{-12}$	$1.1288.10^{-12}$	5,20 et 5,20

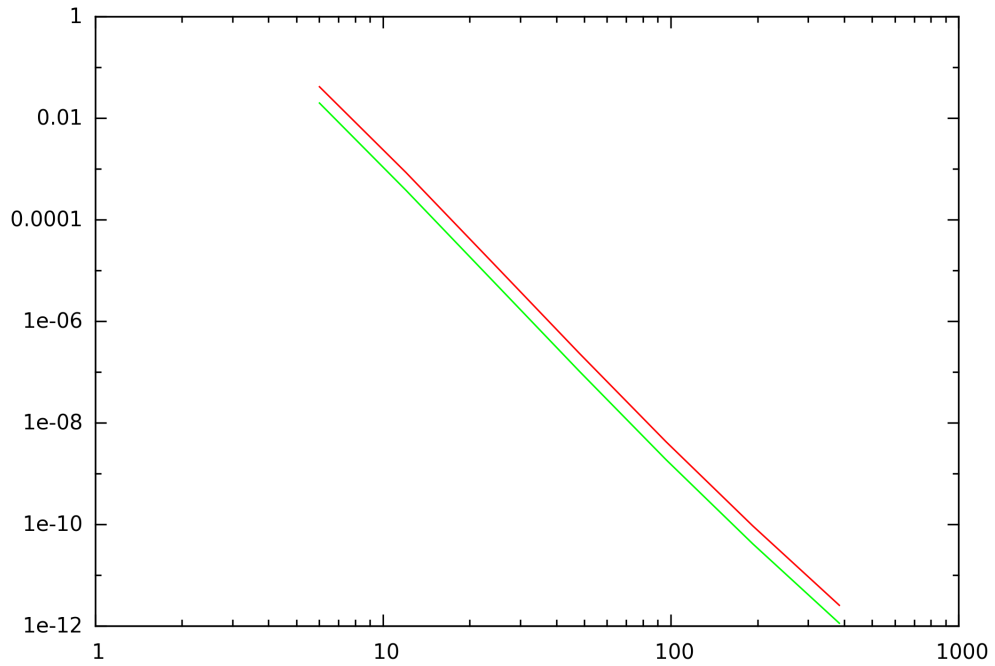


Figure 5.17: Schéma **CENO** décentré 1D. Ordre de convergence pour les erreurs  $L^1$  (en rouge) et  $L^2$  (en vert) pour un maillage régulier en 1 dimension.

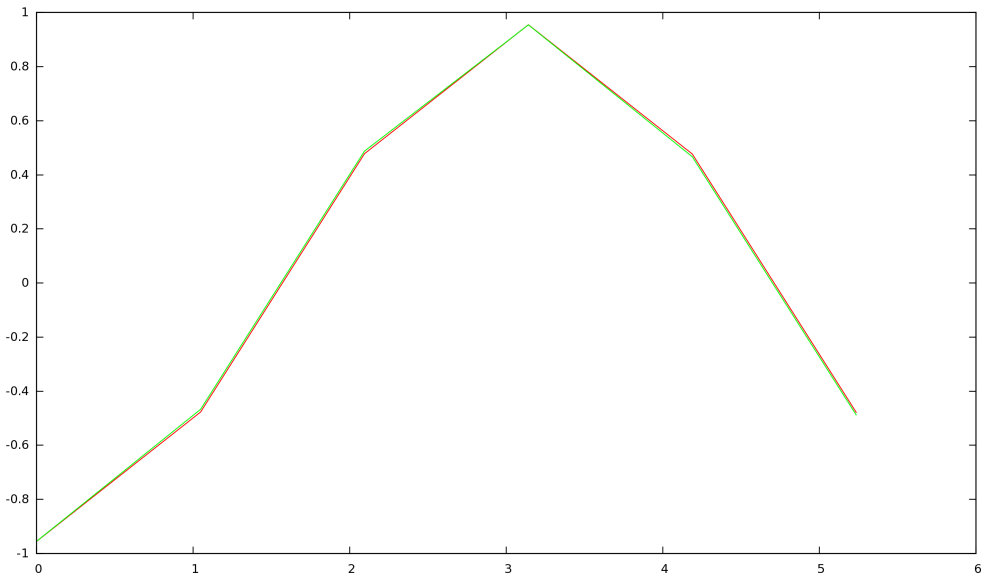


Figure 5.18: Schéma **CENO** décentré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c*t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 6 nœuds.



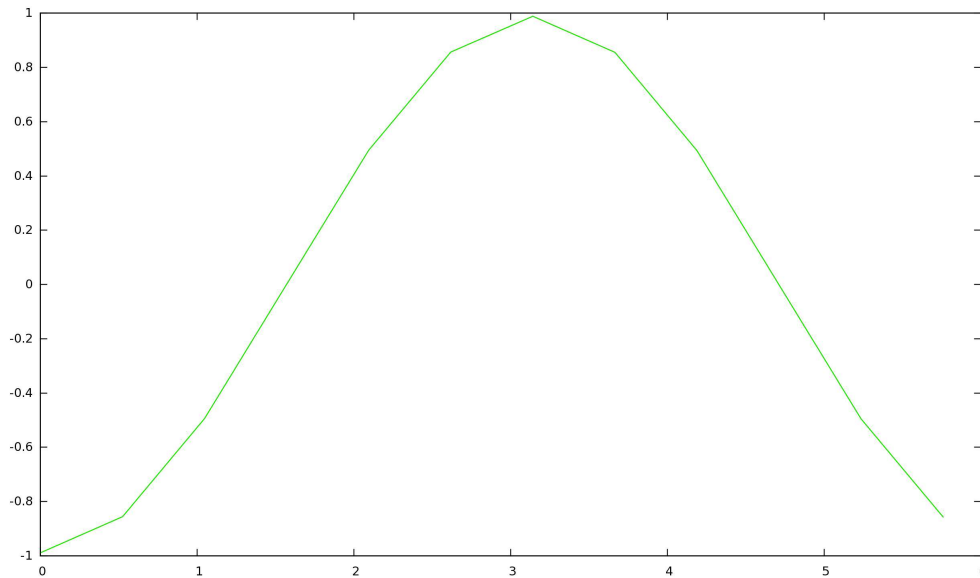


Figure 5.19: Schéma **CENO** décentré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 12 nœuds.

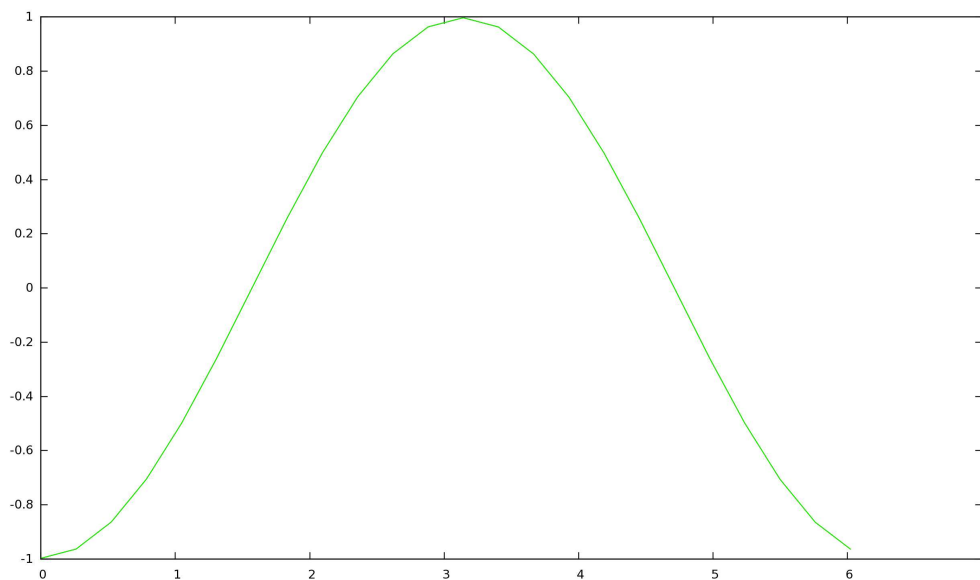


Figure 5.20: Schéma **CENO** décentré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 24 nœuds.

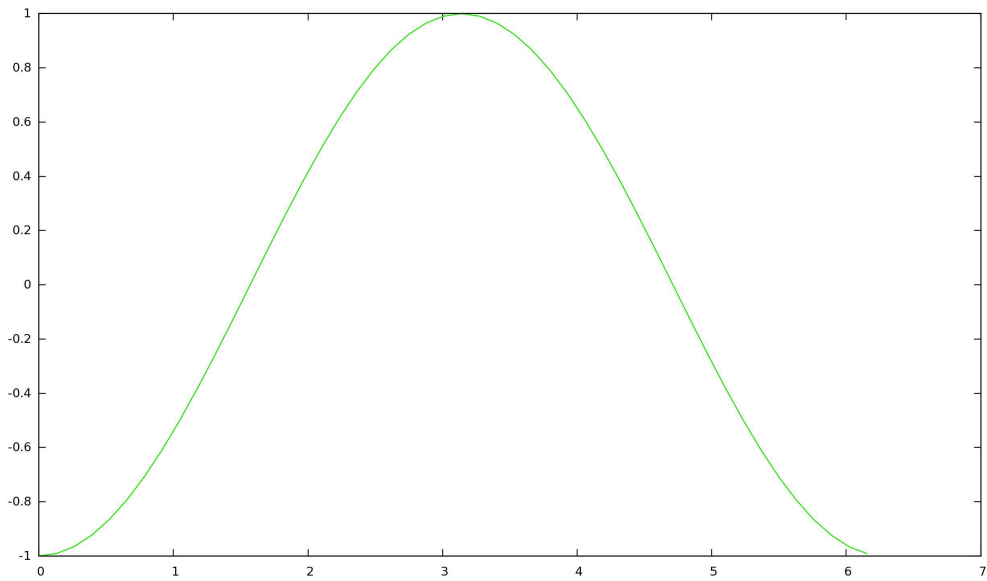


Figure 5.21: Schéma **CENO** décentré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 48 nœuds.

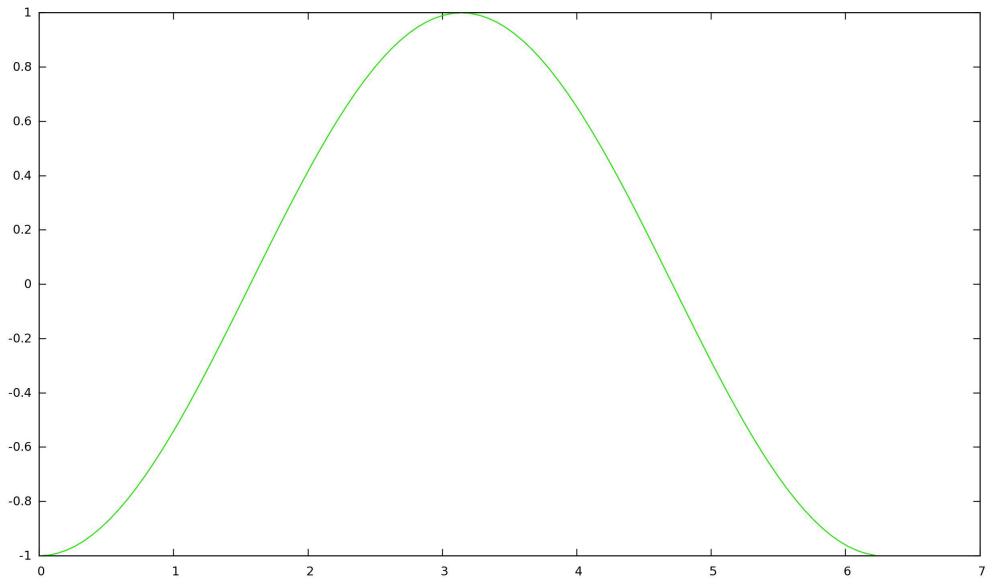


Figure 5.22: Schéma **CENO** décentré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 96 nœuds.

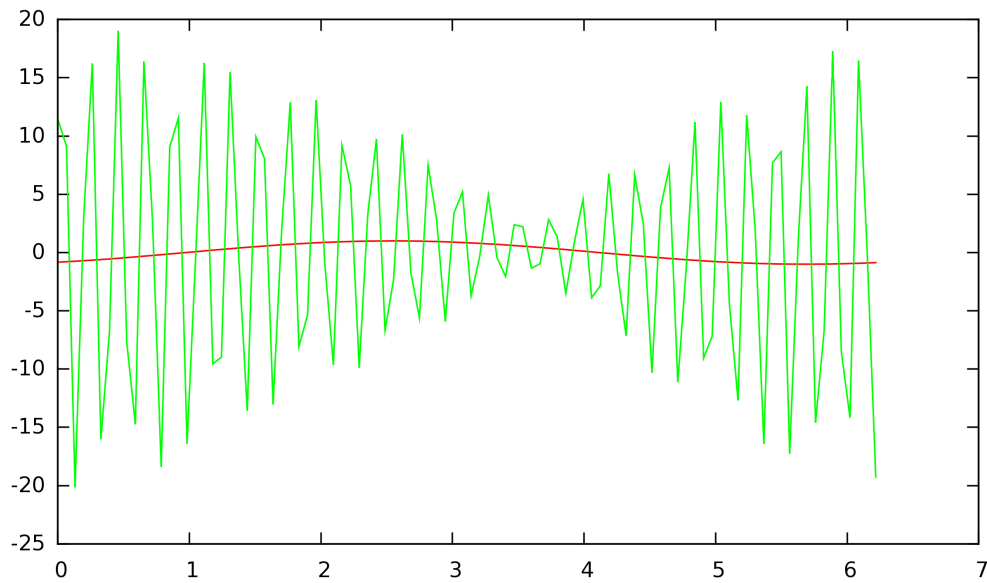


Figure 5.23: Schéma **CENO** centré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 96 nœuds pour un intervalle de temps max de 1000 secondes, **sans la diffusion d'ordre 5**.

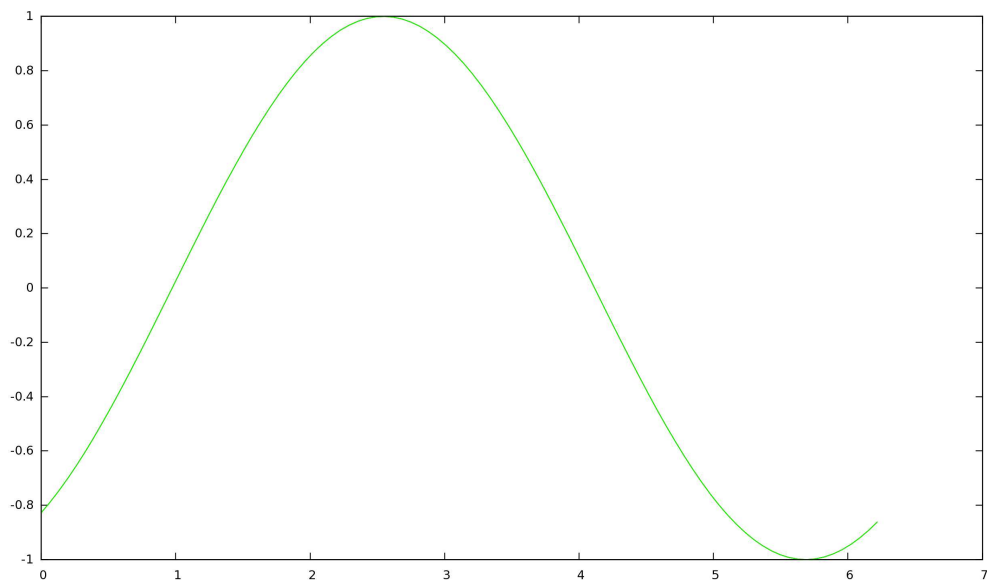


Figure 5.24: Schéma **CENO** décentré 1D. Courbes de la solution exacte  $\sin_{exact}^{moyenne}(x_i - c * t)$  (en rouge) et de la solution numérique calculée  $\bar{u}_i^n$  (en vert) pour un maillage régulier de 96 nœuds pour un intervalle de temps max de 1000 secondes, **avec ajout de la diffusion d'ordre 5**.

### 5.5.5 Conclusion

- Nous sommes partis d'un schéma à reconstruction polynômiale quadratique de la solution par cellule, où les coefficients du polynôme de degré 2 sont reconstruits par la méthode des Moindres Carrés.
- Par différences finies, nous avons calculé le coefficients d'ordre 3 de ce polynôme, et l'étude d'approximation spatiale a révélé un schéma dispersif d'ordre 6. Celui-ci est obtenu lorsque la reconstruction polynômiale d'ordre 3 ne contribue qu'à la partie centrée des flux, ou partie "dispersive", par abus de langage.
- Ensuite, toujours par différences finies, nous avons calculés le coefficient d'ordre 4 du polynôme, qui, en contribuant uniquement à la partie décentrée des flux, ou partie "dissipative", a fait apparaître une dérivée dissipative d'ordre 5 dans le calcul de l'erreur de troncature spatiale. De la même façon, seulement les flux ont été corrigés dans le solveur numérique.
- Les résultats numériques nous confirment l'ordre 5 (très proche de 6) du nouveau schéma avec la reconstruction polynômiale d'ordre 4 et les flux issus de cette reconstruction. Les figures 5.23 et 5.24 mettent en évidence l'importance de l'ajout de cette diffusion d'ordre 5.
- Notre étude en une dimension étant achevée, nous passons maintenant à l'étude en deux dimension du schéma quadratique. Nous allons essayer d'améliorer le schéma 2D en utilisant nos méthodes 1D transposées au 2D afin de monter en ordre de précision numérique de la même manière.



# Présentation du schéma CENO en 2D scalaire

## Contents

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>95</b>
<b>6.2</b>	<b>Position du problème 2D</b>	<b>96</b>
<b>6.3</b>	<b>Évaluation des coefficients pour une reconstruction polynômiale quadratique</b>	<b>98</b>
<b>6.4</b>	<b>Évaluation des flux</b>	<b>105</b>
<b>6.5</b>	<b>Évolution en temps</b>	<b>107</b>
<b>6.6</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>107</b>
6.6.1	Cas du schéma quadratique	110
6.6.2	Cas du schéma linéaire	112
6.6.3	Cas du schéma double-linéaire	114
6.6.4	Comparaison double-linéaire et quadratique	116
6.6.5	Conclusion	118
<b>6.7</b>	<b>Évaluation des coefficients de la reconstruction polynômiale cubique</b>	<b>119</b>
<b>6.8</b>	<b>Évaluation des flux</b>	<b>125</b>
<b>6.9</b>	<b>Évolution en temps</b>	<b>126</b>
<b>6.10</b>	<b>Amélioration du schéma CENO</b>	<b>128</b>
6.10.1	Position du problème	128
6.10.2	Précision sur la phase itérative du code Fortran95	131
6.10.3	Tests numériques	134
6.10.4	Conclusion	145

## 6.1 Introduction

Après l'analyse du code ENO centré-sommet (que nous appelons aussi CENO faisant référence à "Centré-ENO") d'ordre 5 à dissipation d'ordre élevé en une dimension et la mise au point d'une version à diffusion et dispersion réduite, l'objectif est de maintenant développer un code en deux dimension d'ordre élevé, avec les mêmes méthodes qu'en une dimension, c'est-à-dire en

faisant des corrections sur les flux 2D.

L'objectif de ce chapitre est de définir, d'analyser et d'évaluer un schéma de résolution CENO pour une équation d'advection 2D. L'assemblage se décompose en une étape de reconstruction, une étape d'intégration des flux convectifs et une étape d'avancement en temps, nous détaillons au mieux chaque étape du schéma. Puis nous testons le code CENO basique sur un cas-test d'advection d'une gaussienne, nous vérifions que le code de base a une convergence en maillage d'ordre 4 sur maillages réguliers et irréguliers.

Puis l'objectif suivant se traduira par la montée en ordre du schéma : nous montrerons que la correction antidispersive qui supprime l'erreur principale de dispersion du schéma, couplée avec l'ajout d'une dissipation du sixième ordre, donne un schéma toujours d'ordre 4 mais plus précis et notamment beaucoup moins dissipatif que le schéma CENO de base.

## 6.2 Position du problème 2D

Nous présentons un schéma volumes-finis avec une reconstruction quadratique de la solution pour une équation de type hyperbolique 2D et des maillages structurés et non-structurés formés de triangles. Ce schéma est une adaptation au contexte centré-sommet du schéma CENO de Groth [Groth 2011] inspiré lui-même par un schéma introduit par Barth [Barth 1994]. La présente étude fait suite à celle de Ouvrard [Ouvrard 2009]. Ces schémas centrés-sommets sont une simplification des schémas ENO à reconstructions multiples par cellule tel que ceux introduits dans [Abgrall 1997].

On considère l'équation hyperbolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + \nabla \cdot \mathbf{f}(u(x, y, t)) = 0,$$

où les conditions limites et initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \Phi(x, y, t) & \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

où  $(x, y) \in \Omega$  avec  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \geq 0$ ,  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{f}(u(x, t)) = (f_1(u(x, t)), f_2(u(x, t)))^t$  avec  $f_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Le domaine spatial est divisé en cellules de contrôle  $C_i$  centrées aux sommets  $i$ , construites en connectant les milieux des arêtes et les centres de gravités des triangles constituant le maillage qui ont pour sommet  $i$ , comme le montre la figure 6.1.

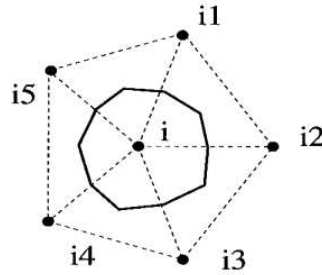


Figure 6.1: Construction de la cellule  $C_i$  centrée au nœud  $i$ .

Dès lors les nouveaux maillages considérés par le schéma, formés des cellules duales centrées-sommet, sont du type de ceux présentés dans les figures 6.2.

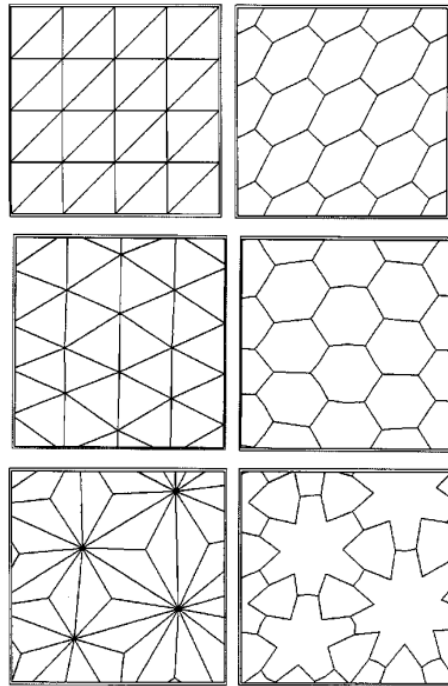


Figure 6.2: Maillages initiaux (à gauche) et leur maillages duaux respectifs (à droite). En pratique on évitera le troisième type de maillage.

On intègre l'équation hyperbolique sur le volume de contrôle  $C_i$  et on utilise la formule de Green :

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} u(x, y, t) dx dt + \int_{\partial C_i} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$



où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure locale de la cellule  $C_i$ .

La frontière de la cellule  $C_i$  est polygonale et peut-être décomposée :

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} u(x, y, t) dx dy + \sum_{k \in V(i)} \int_{\partial C_i \cap \partial C_k} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

où  $V(i)$  est l'ensemble des voisins du sommet  $i$ .

### 6.3 Évaluation des coefficients pour une reconstruction polynômiale quadratique

Sur chaque cellule de contrôle  $C_i$  et à chaque pas de temps, on cherche à approximer la solution  $u(x, y, t^n) = u(x, y)^n$  en construisant un polynôme quadratique  $P_i^n$ .

Il est nécessaire que les valeurs moyennes du polynôme  $P_i^n$  (que nous écrirons  $\bar{P}_i^{i,n}$ ) et les valeurs moyennes la solution (que nous écrirons  $\bar{u}^{i,n}$ ) sur la cellule  $C_i$  soient égales.

Cette condition s'écrit :  $\bar{P}_i^{i,n} = \bar{u}^{i,n}$ , avec :

$$\begin{cases} \bar{P}_i^{i,n} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} P_i^n(x, y) dx dy \\ \bar{u}^{i,n} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} u^n(x, y) dx dy \end{cases}$$

Le polynôme  $P_i^n$  à reconstruire sur la cellule duale  $C_i$  est défini par la relation suivante :

$$P_i^n = \bar{u}^{i,n} + \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n [(X - X_{o,i})^\alpha - \overline{(X - X_{o,i})}^{i,\alpha}]$$

avec :

### 6.3. Évaluation des coefficients pour une reconstruction polynômiale quadratique 99

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{(X - X_{o,i})}^{i,\alpha} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \\ I = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \in [1, 2] \quad \text{est l'ensemble des multi-indices} \\ (X - X_{o,i})^\alpha = (x - x_{o,i})^{\alpha_1} (y - y_{o,i})^{\alpha_2} \quad \text{où } (x_{o,i}, y_{o,i}) \text{ est le centre de gravité de } C_i \end{array} \right.$$

Pour construire le polynôme  $P_i^n$  sur la cellule  $C_i$ , on a besoin de définir le stencil  $S_i$  formé à partir des cellules voisines de  $C_i$ , de sorte de prendre assez de valeurs de la solution autour de  $i$  pour reconstruire les coefficients du polynôme.

La construction du stencil  $S_i$  dépend du nombre de voisins et de la condition frontière logique de  $i$ .  $S_i$  contient toujours les cellules  $C_k$  où  $k$  est un voisin de  $i$ . Pour calculer les 5 coefficients du polynôme, nous avons besoin d'au moins 5 nœuds voisins, c'est-à-dire 5 cellules voisines.

Considérons un sommet interne  $i$ . Si  $i$  a 5 ou plus de voisins, le stencil  $S_i$  est formé à partir des cellules centrées sur les voisins de  $i$ . Sinon le stencil  $S_i$  contient les cellules  $C_k$  et les cellules  $C_l$  aussi, où  $l$  est un voisin de  $k$  et  $k$  un voisin de  $i$ , comme le montre la figure 6.3.

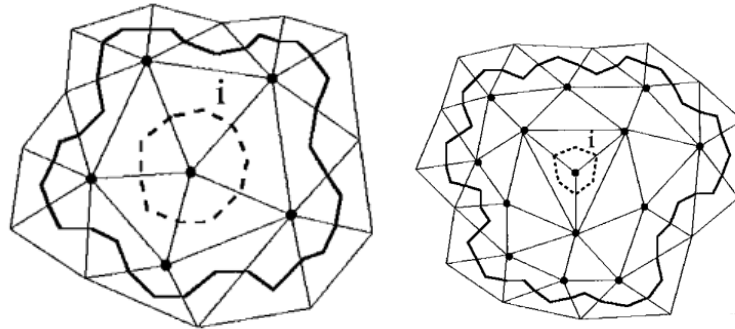


Figure 6.3: Construction de la molécule  $S_i$  centrée au nœud  $i$ . À gauche : cas où  $i$  a au plus cinq voisins, à droite : cas où  $i$  a moins de cinq voisins.

Les 5 coefficients inconnus  $c_{i,\alpha}^n$  de la reconstruction polynômiale sont calculés par la méthode des Moindres Carrés, c'est-à-dire telle que la distance  $L_2$  entre les moyennes sur les cellules  $C_k$ , du polynôme  $\bar{P}_i^{k,n}$  associé à la cellule  $C_i$ , et de la solution  $\bar{u}^{k,n}$ , soit minimale pour chaque sommet  $k$  inclus dans le stencil  $S_i$ .

Ceci conduit à minimiser la fonction suivante :

$$H_i = \sum_{k \in V(i)} (\bar{P}_i^{k,n} - \bar{u}^{k,n})^2,$$

où  $\bar{P}_i^{k,n}$  représente la moyenne du polynôme  $P_i^n$  sur la cellule  $C_k$  :

$$\bar{P}_i^{k,n} = \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \int_{C_k} P_i^n(x, y) dx dy.$$

Par la construction de  $C_k$ , on peut écrire :

$$H_i = \sum_{k \in V(i)} \left( \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T P_i^n(x, y) dx dy - \bar{u}^{k,n} \right)^2,$$

où  $T$  représente les triangles qui composent la cellule  $C_k$ , ou encore :

$$H_i = \sum_{k \in V(i)} \left[ \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T \left( \bar{u}^{i,n} + \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n \left[ (X - X_{o,i})^\alpha - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \right] \right) - \bar{u}^{k,n} \right]^2$$

La minimisation par les Moindres Carrés de  $H_i$  par rapport aux inconnues  $c_{i,\alpha}^n$  ( $\alpha \in I$ ), qui vont définir notre polynôme  $P_i^n$  sur la cellule  $C_i$ , s'écrit :

$$\frac{\delta H_i}{\delta c_{i,\alpha}^n} = 0, \alpha \in I.$$

De cette minimisation on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} * K_\alpha = 0 \end{array} \right.$$

### 6.3. Évaluation des coefficients pour une reconstruction polynômiale quadratique 101

où :

$$D_{i,k,p} = \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T (X - X_{o,i})^p dx dy - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T (X - X_{o,i})^p dx dy,$$

pour  $p \in [1, 2, 3, 4, 5]$ , et :

$$K_\alpha = \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T \left( \bar{u}^{i,n} + \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n \left[ (X - X_{o,i})^\alpha - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \right] \right) - \bar{u}^{k,n}.$$

En prenant en compte le fait que la valeur moyenne sur une cellule  $C_k$ , de la valeur moyenne d'une fonction  $u$  sur une cellule  $C_i$ , est égale à la valeur moyenne de  $u$  sur  $C_i$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\text{aire}(C_k)} \int_{C_k} \left[ \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} u^n(x, y) \right] = \bar{u}^{i,n}(x, y).$$

On obtient alors :

$$K_\alpha = \bar{u}^{i,n} + \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha dx dy - \bar{u}^{k,n}.$$

Dès lors en prenant par exemple le calcul de  $\sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} * K_\alpha = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \bar{u}^{i,n} \right] + \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha \right] \\ & - \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \right] - \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \bar{u}^{k,n} \right] = 0. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \right] \\
&= \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right].
\end{aligned}$$

Ou encore de manière un peu plus compactée et plus lisible :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha \in I} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \int_{C_k} (X - X_{o,i})^\alpha - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \right] c_{i,\alpha}^n \\
&= \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right].
\end{aligned}$$

On obtient alors un système global suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\sum_{q \in [1,2,3,4,5]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\
\sum_{q \in [1,2,3,4,5]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\
\sum_{q \in [1,2,3,4,5]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\
\sum_{q \in [1,2,3,4,5]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\
\sum_{q \in [1,2,3,4,5]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right]
\end{array} \right.$$

En prenant en compte le fait que pour  $(X - X_{o,i})^\alpha = (x - x_{o,i})^{\alpha_1} (y - y_{o,i})^{\alpha_2}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\alpha = 1 \longrightarrow (\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1) \\
\alpha = 2 \longrightarrow (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0) \\
\alpha = 3 \longrightarrow (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1) \\
\alpha = 4 \longrightarrow (\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2) \\
\alpha = 5 \longrightarrow (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0)
\end{array} \right.$$

### 6.3. Évaluation des coefficients pour une reconstruction polynômiale quadratique 103

On peut maintenant écrire notre système aux Moindres Carrés à résoudre :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} D_{i,k,5} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} D_{i,k,5} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} D_{i,k,5} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} D_{i,k,5} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} D_{i,k,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{i,(0,1)} \\ C_{i,(1,0)} \\ C_{i,(1,1)} \\ C_{i,(0,2)} \\ C_{i,(2,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} [\bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n}] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} [\bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n}] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} [\bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n}] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} [\bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n}] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} [\bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n}] \end{pmatrix}.$$

Ou encore sous forme compacte on a alors le système suivant :

$$M_i c_i^n = b_i^n,$$

où  $M_i$  est une matrice symétrique 5x5 défini par :

$$(M_i)_{1 \leq p, q \leq 5} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,p} D_{i,k,q},$$

et où  $c_i^n$  est le vecteur colonne des coefficients inconnus :

$$c_i^n = (c_{i,(0,1)}^n, c_{i,(1,0)}^n, c_{i,(1,1)}^n, c_{i,(0,2)}^n, c_{i,(2,0)}^n)^t.$$

Le terme de droite  $b_i^n$  est un vecteur colonne dépendant de la moyenne de la solution  $\bar{u}^{k,n}$  sur le voisinage  $V(i)$  du sommet  $i$  :

$$b_{i,p}^n = \sum_{k \in V(i)} (\bar{u}_k^n - \bar{u}_i^n) D_{i,k,p},$$

pour  $p = 1, \dots, 5$ .

Les intégrales des polynômes  $\int_T (X - X_{o,i})^\alpha$  contenues dans la matrice sont calculées par quadrature de Gauss.

En prenant comme référence le triangle formé par les nœuds  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,0)$ , la somme

pondérée sur les points  $(0, 1/2)$ ,  $(1/2, 0)$  et  $(1/2, 1/2)$  avec des poids égaux à  $1/3$ , donne une approximation exacte des monômes.

La transformation affine  $f$  qui transforme le triangle  $T_{ref}$  en un triangle  $T$  formé par le nœud  $N(x_1, y_1)$ , le point milieu  $M(x_2, y_2)$  du segment et le centre de gravité  $G(x_3, y_3)$  du triangle, est définie par :

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x', y') \\ f_2(x', y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_{o,i} \\ y_2 - y_{o,i} \end{pmatrix}$$

On obtient alors une nouvelle formulation sur le triangle de référence  $T_{ref}$  :

$$\int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy = 2 \times aire(T) \int_{T_{ref}} f_1(x', y')^{\alpha_1} f_2(x', y')^{\alpha_2} dx' dy'.$$

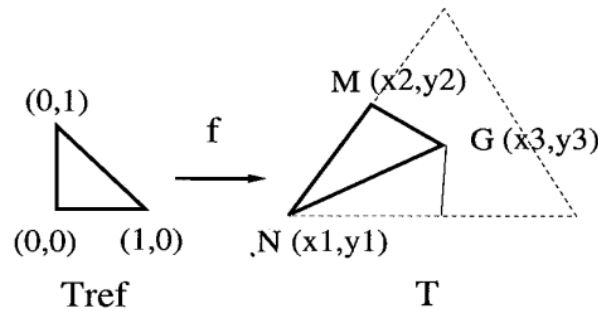


Figure 6.4: Transformation affine  $f$ .

On applique alors la quadrature de Gauss à 3 points et on obtient :

$$\int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy = 2 \times aire(T) \sum_{g=1}^3 \omega_g f_1(x'(g), y'(g))^{\alpha_1} f_2(x'(g), y'(g))^{\alpha_2},$$

où  $(x'(g), y'(g))$  sont les coordonnées des points de Gauss dans le triangle  $T$  pour  $g \in \{1, 2, 3\}$ .

De plus, comme le maillage non-structuré utilisé est fixe, la valeur des intégrales ne dépend pas du pas de temps et donc la matrice  $M_i$  doit être calculée une fois pour chaque nœud  $i$ . De façon à utiliser la symétrie, son inverse  $M_i^{-1}$  est calculé avec l'algorithme de Bunch-Kaufman au premier pas de temps et est stockée pour les étapes suivantes.

## 6.4 Évaluation des flux

L'objectif suivant est d'évaluer le flux à un temps  $t$  sur les interfaces entre la cellule  $C_i$  et ses voisins  $C_k$  pour tout  $k$  dans  $V(i)$ , en utilisant une quadrature de Gauss à 2 points.

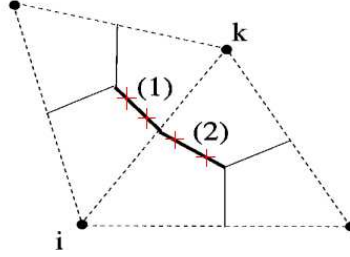


Figure 6.5: Interfaces entre  $C_i$  et  $C_k$  : (1) =  $\partial C_{ik}^{(1)}$  et (2) =  $\partial C_{ik}^{(2)}$ .

On rappelle que le flux sur la frontière d'une cellule peut s'écrire :

$$\int_{\partial C_i} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{k \in V(i)} \int_{\partial C_i \cap \partial C_k} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds.$$

Les interfaces  $\partial C_i \cap \partial C_k$  peuvent être décomposées en deux segments  $\partial C_{ik}^{(1)}$  et  $\partial C_{ik}^{(2)}$  :

$$\int_{\partial C_i \cap \partial C_k} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{l=1,2} \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds.$$

La solution  $u(x, y, t)$  sur la cellule  $C_i$  est approximée par le polynôme  $P_i$  construit dans la section précédente :

$$\int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}\left(P_i(x, y, t)\right) \cdot \mathbf{n} ds.$$

Dès lors, l'intégrale sur chaque segment  $\partial C_{ik}^{(l)}$  est évaluée par une quadrature de Gauss avec les deux points  $(x_{g_1, ik}^{(l)}, y_{g_1, ik}^{(l)})$  et  $(x_{g_2, ik}^{(l)}, y_{g_2, ik}^{(l)})$ .

Sur le segment de référence  $[-1, 1]$ , les points de Gauss situés à la distance  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  des



extrémités donne une approximation exacte d'un polynôme quadratique avec des poids  $\omega_{1,2} = \frac{1}{2}$ .

Après une transformation affine sur le segment de référence et après avoir appliqué la quadrature de Gauss à deux points, on obtient :

$$\int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}(P_i(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{m=1,2} \omega_m \mathbf{f} \left( P_i(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t) \right) \cdot \mathbf{v}_{ik}^{(l)},$$

avec  $\mathbf{v}_{ik}^{(l)} = \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{n}(x, y) ds$ .

Cependant, comme deux polynômes distincts  $P_i$  et  $P_k$  ont été construits de chaque côté de l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_k$ , la solution sur les points de Gauss sur la frontière n'est pas unique.

Par conséquent nous approximations le flux sur l'interface  $\partial C_{ik}^{(l)}$  par une fonction flux  $\Phi$  numérique :

$$\mathbf{f} \left( P_i(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t) \right) \cdot \mathbf{n} = \Phi \left( P_i(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t), P_k(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t), \mathbf{v}_{ik} \right),$$

où  $\mathbf{v}_{ik} = \int_{\partial C_{ik} \cap \partial C_k} \mathbf{n}(x) dx$  est un vecteur constant puisque le maillage est fixe.

Nous devons choisir le flux numérique  $\Phi$  tel que le schéma résultant soit stable, par exemple le schéma de Roe se définissant par la relation suivante :

$$\Phi(u_1, u_2, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{f}(u_1) + \mathbf{f}(u_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\gamma}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{u_1 + u_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (u_2 - u_1),$$

où  $\gamma \in [0, 1]$  est un paramètre pour contrôler la viscosité numérique.

## 6.5 Évolution en temps

La semi-discrétisation en espace de l'équation de départ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + \nabla \cdot \mathbf{f}(u(x, y, t)) = 0,$$

conduit au système d'ODE suivant :

$$\frac{du_i}{dt}(t) + \Psi_i(u(t)) = 0,$$

où la fonction  $\Psi_i(u(t))$  approxime  $\nabla \cdot \mathbf{f}(u(x, y, t))$  au point  $(x_i, y_i)$  et  $u(t)$  est l'ensemble des moyennes  $\bar{u}^{k,n}$  où  $k$  est dans un voisinage de  $i$ .

On choisit la méthode de Runge-Kutta explicite à 3-pas pour la discrétisation en temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(0)} = u_i^{(n)} \\ u_i^{(1)} = u_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-1} \Psi_i(u_i^{(0)}) \\ u_i^{(2)} = u_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-2} \Psi_i(u_i^{(1)}) \\ u_i^{(3)} = u_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-3} \Psi_i(u_i^{(2)}) \\ u_i^{(n+1)} = u_i^{(3)} \end{array} \right.$$

Ce schéma en temps est précis à l'ordre trois pour les équations linéaires.

## 6.6 Tests numériques

Nous passons maintenant aux tests numériques afin de tester notre schéma CENO 2D. Le solveur issu du schéma a été développé en Fortran 95, comme pour l'algorithme 1D. Le problème test consiste à translater une gaussienne et se définit de la façon suivante :

$$u_t(x, y, t) + \nabla \cdot (\mathbf{c}u(x, y, t)) = 0.$$

Les conditions limites et initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = 1 + \exp -75((x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2) \end{cases} \quad \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega$$

La solution initiale est donc une gaussienne initialisée (voir figure 6.6) à l'extrémité gauche de chaque maillage et elle est advectée avec une vitesse horizontale égale à 0,5 (la vitesse verticale est imposée nulle). Le temps de calcul varie de plusieurs milli-secondes à plusieurs secondes suivant le maillage, c'est-à-dire de plusieurs dizaines d'itérations en temps pour les maillages grossiers à plusieurs centaines d'itérations en temps pour les maillages les plus fins. De plus la gaussienne étant suffisamment éloignée du bord pour ne recevoir aucun impact des effets de bords, nous avons pas besoin d'appliquer un traitement sur les parois du domaine.

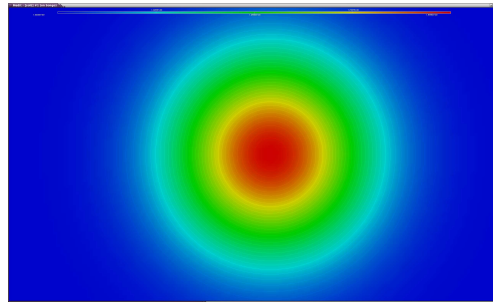


Figure 6.6: Gaussienne initiale.

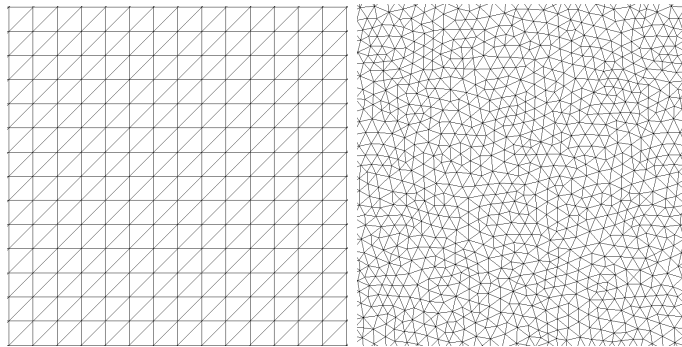


Figure 6.7: Types de maillages structurés et non-structurés utilisés dans ce cas-test.

Dans les tests numériques suivant, nous calculons les ordres de précision pour des viscosités numériques  $\gamma$  constante et variable en fonction de la taille de maille. Le fait de faire varier

cette viscosité numérique nous permet d'identifier l'impact de la partie diffusive de l'erreur de troncature du schéma sur l'ordre de convergence.

Nous insérons aussi les notions de reconstructions linéaire et "double-linéaire", qui signifient respectivement que l'on effectue une reconstruction polynômiale linéaire de la solution par cellule, et une double reconstruction linéaire, c'est-à-dire, là où on effectuait une boucle avec la méthode Moindres Carrés pour calculer les coefficients du polynôme quadratique, on effectue maintenant deux boucles Moindres Carrés d'itération linéaire afin de reconstruire les coefficients quadratiques: on calcule tout d'abord un polynôme linéaire issu de la solution initiale, puis nous effectuons une autre reconstruction linéaire mais cette fois non pas de la solution initiale, mais du polynôme linéaire reconstruit au départ. Nous calculons donc dans un premier temps les dérivées premières de l'inconnue. Puis nous calculons les dérivées premières de ses dérivées, qui sont donc les dérivées secondes de la solution initiale. Ceci nous permet d'alléger les données de stockage lors des étapes préliminaires de calcul et on espère être aussi précis que le quadratique.

Dans cette section nous exposons tout d'abord les résultats du schéma quadratique, puis du schéma linéaire et enfin double linéaire. Nous comparerons les ordres de précision de ces 3 types de reconstructions, sur maillages structurés et non-structurés, dans chaque sous-section. Nous voulons ainsi savoir quel est le schéma parmi les 3 qui aurait le plus de potentiel pour être le schéma à améliorer.

### 6.6.1 Cas du schéma quadratique

- Etude de la convergence en maillage pour la **reconstruction quadratique** en maillages structurés, et calcul de l'ordre de convergence :

Maillage (nœuds)	Gamma	Erreur L1	Ordre de convergence
5 * 5	1	$1,188.10^{-2}$	
10 * 10	1	$1,374.10^{-2}$	0,21
15 * 15	1	$6,781.10^{-3}$	1,74
20 * 20	1	$3,480.10^{-3}$	2,32
39 * 39	1	$6,257.10^{-4}$	2,57
77 * 77	1	$8,621.10^{-5}$	2,91
153 * 153	1	$1,106.10^{-5}$	2,99
5 * 5	1	$1,188.10^{-2}$	
10 * 10	1/2	$1,180.10^{-2}$	$6,27.10^{-3}$
15 * 15	1/4	$4,683.10^{-3}$	3,32
20 * 20	1/8	$1,733.10^{-3}$	3,45
39 * 39	1/16	$1,507.10^{-4}$	3,66
77 * 77	1/32	$1,044.10^{-5}$	3,92
153 * 153	1/64	$8,153.10^{-7}$	3,71

On remarque que pour le cas de la reconstruction quadratique, nous obtenons une convergence d'ordre 3 pour une viscosité  $\gamma$  constante et le passage à l'ordre 4 pour une viscosité  $\gamma$  de plus en plus petite.

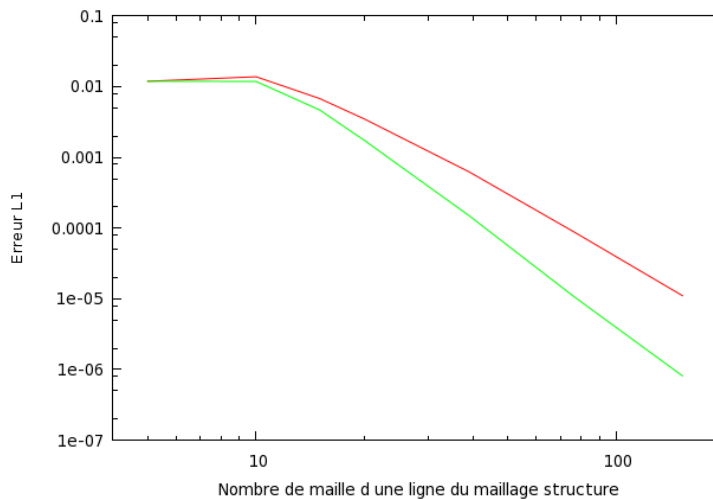


Figure 6.8: Courbes de convergence pour la reconstruction quadratique, avec une viscosité constante (courbe rouge) et une viscosité contrôlée (courbe verte).

- Etude de la convergence pour la **reconstruction quadratique** en maillages non-structurés, et calcul de l'ordre de convergence :

Maillage (nœuds)	Gamma	Erreur L1	Ordre de convergence
535	1	$2,030.10^{-3}$	
2057	1	$3,002.10^{-4}$	2,84
8065	1	$3,992.10^{-5}$	2,95
31937	1	$5,345.10^{-6}$	2,92
535	1	$2,030.10^{-3}$	
2057	1/2	$1,636.10^{-4}$	3,74
8065	1/4	$1,144.10^{-5}$	3,89
31937	1/8	$8,358.10^{-7}$	3,80

On obtient toujours une convergence d'ordre 3 en maillages non-structurés pour une viscosité constante et le passage à l'ordre 4 pour une viscosité contrôlée.

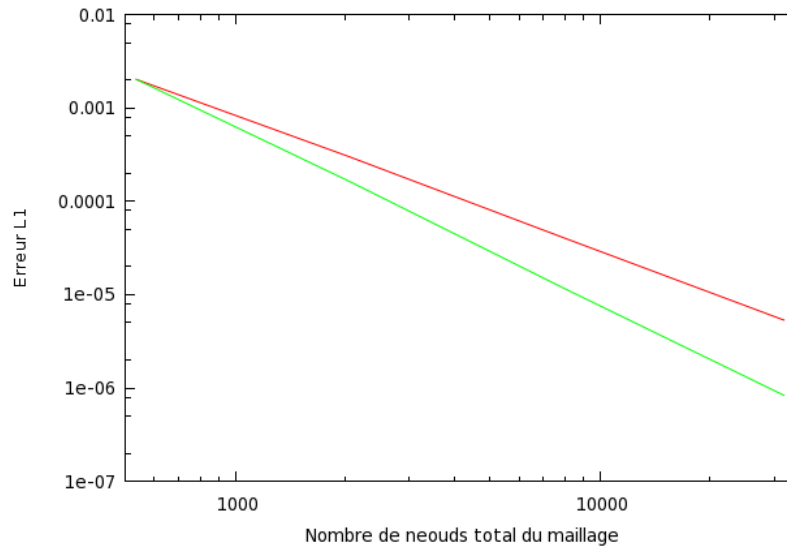


Figure 6.9: Convergence pour la reconstruction quadratique en maillages non-structurés, avec une viscosité constante (courbe rouge) et une viscosité contrôlée (courbe verte).

### 6.6.2 Cas du schéma linéaire

- Etude de la convergence pour la **reconstruction linéaire** en maillages structurés, et calcul de l'ordre de convergence :

Maillage (nœuds)	Gamma	Erreur L1	Ordre de convergence
5 * 5	1	$1,335.10^{-2}$	
10 * 10	1	$1,508.10^{-2}$	0,18
15 * 15	1	$7,998.10^{-3}$	1,56
20 * 20	1	$4,583.10^{-3}$	1,94
39 * 39	1	$1,042.10^{-3}$	2,21
77 * 77	1	$2,221.10^{-4}$	2,27
153 * 153	1	$5,222.10^{-5}$	2,11

5 * 5	1	$1,335.10^{-2}$	
10 * 10	1/2	$1,219.10^{-2}$	0,13
15 * 15	1/4	$4,207.10^{-3}$	2,62
20 * 20	1/8	$1,701.10^{-3}$	3,15
39 * 39	1/16	$6,297.10^{-4}$	1,49
77 * 77	1/32	$1,907.10^{-4}$	1,76
153 * 153	1/64	$5,023.10^{-5}$	1,94

On constate une convergence d'ordre 2 pour une viscosité constante ainsi que pour une viscosité contrôlée.

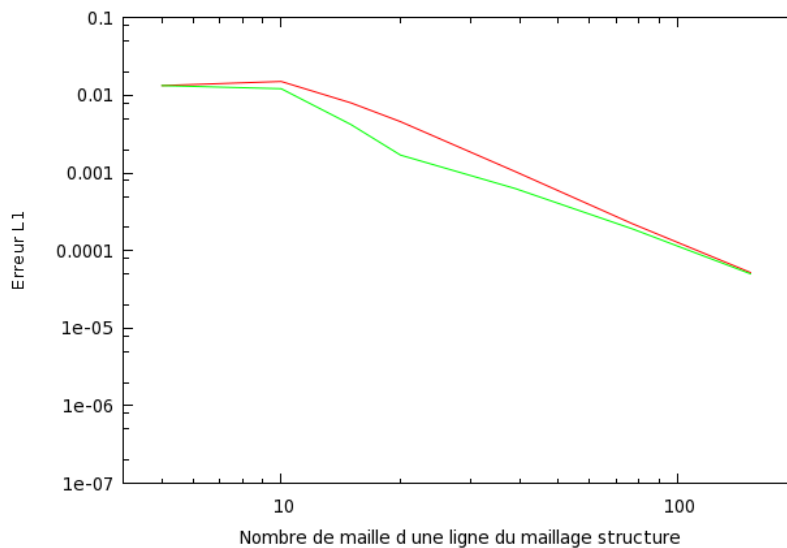


Figure 6.10: Courbes de convergence pour la reconstruction linéaire, avec une viscosité constante (courbe rouge) et une viscosité contrôlée (courbe verte).

- Etude de la convergence pour la **reconstruction linéaire** en maillages non-structurés, et calcul de l'ordre de convergence :

Maillage (nœuds)	Gamma	Erreur L1	Ordre de convergence
535	1	$2,812.10^{-3}$	
2057	1	$6,134.10^{-4}$	2,26
8065	1	$1,431.10^{-4}$	2,13
31937	1	$3,558.10^{-5}$	2,02
535	1	$2,812.10^{-3}$	
2057	1/2	$5,044.10^{-4}$	2,55
8065	1/4	$1,335.10^{-4}$	1,94
31937	1/8	$3,543.10^{-5}$	1,93

On remarque une convergence d'ordre 2 pour une viscosité constante ainsi que pour une viscosité contrôlée.

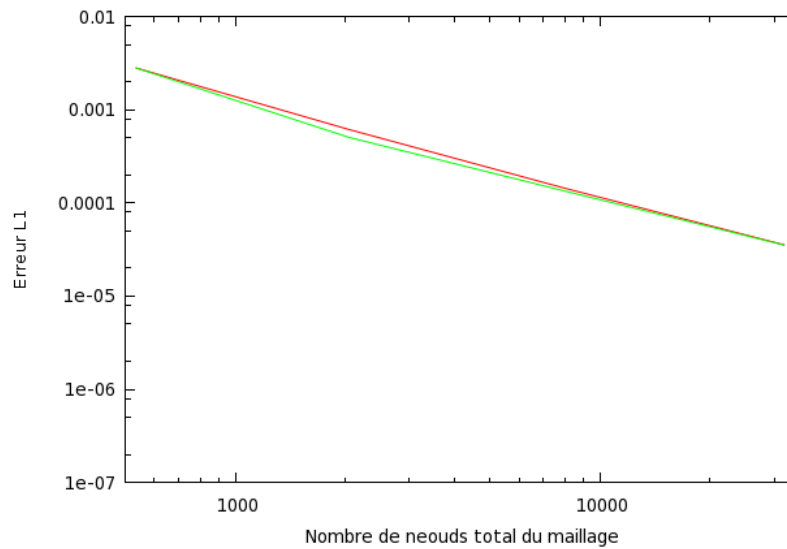


Figure 6.11: Convergence pour la reconstruction linéaire en maillages non-structurés, avec une viscosité constante (courbe rouge) et une viscosité contrôlée (courbe verte).



### 6.6.3 Cas du schéma double-linéaire

- Etude de la convergence pour la **reconstruction double-linéaire** en maillages structurés, et calcul de l'ordre de convergence :

Maillage (nœuds)	Gamma	Erreur L1	Ordre de convergence
5 * 5	1	$1,336 \cdot 10^{-2}$	
10 * 10	1	$1,457 \cdot 10^{-2}$	0,12
20 * 20	1	$3,724 \cdot 10^{-3}$	1,97
39 * 39	1	$6,448 \cdot 10^{-4}$	2,63
77 * 77	1	$8,708 \cdot 10^{-5}$	2,94
153 * 153	1	$1,107 \cdot 10^{-5}$	3
300 * 300	1	$1,558 \cdot 10^{-6}$	2,91

5 * 5	1	$1,336 \cdot 10^{-2}$	
10 * 10	1/2	$1,145 \cdot 10^{-2}$	0,22
20 * 20	1/8	$1,440 \cdot 10^{-3}$	2,99
39 * 39	1/16	$1,044 \cdot 10^{-4}$	3,9
77 * 77	1/32	$6,703 \cdot 10^{-6}$	4,03
153 * 153	1/64	$5,175 \cdot 10^{-7}$	3,73
300 * 300	1/128	$5,197 \cdot 10^{-8}$	3,41

On obtient une convergence d'ordre 3 pour une viscosité constante, et entre 3 et 4 pour une viscosité contrôlée.

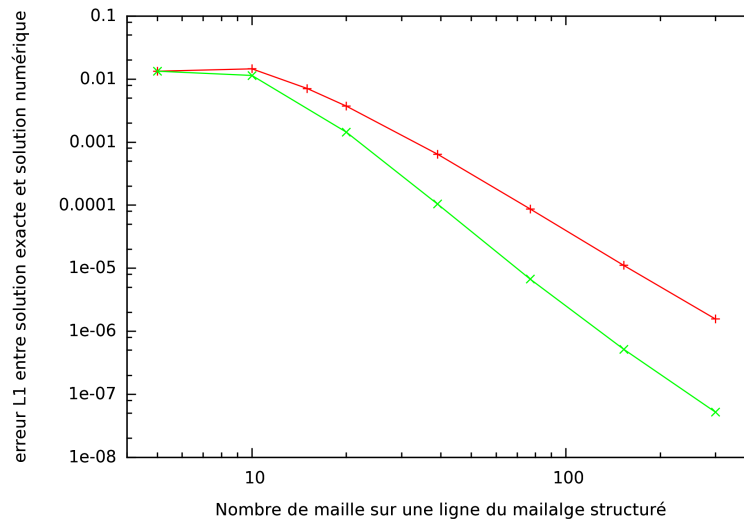


Figure 6.12: Courbe de convergence en maillage structuré pour la reconstruction double-linéaire, avec une viscosité constante (courbe rouge) et une viscosité contrôlée (courbe verte).

- Etude de la convergence pour la **reconstruction double-linéaire** en maillages non-structurés, et calcul de l'ordre de convergence :

Maillage (nœuds)	Gamma	Erreur L1	Ordre de convergence
535	1	$2,129.10^{-3}$	
2057	1	$3,307.10^{-4}$	2,76
8065	1	$6,661.10^{-5}$	2,35
31937	1	$1,477.10^{-5}$	2,19
535	1	$2,129.10^{-3}$	
2057	1/2	$1,947.10^{-4}$	3,55
8065	1/4	$3,425.10^{-5}$	2,54
31937	1/8	$6,577.10^{-6}$	2,40

De même pour des maillages non-structurés, on obtient une convergence d'ordre 3 pour une viscosité constante et aussi pour une viscosité contrôlée.

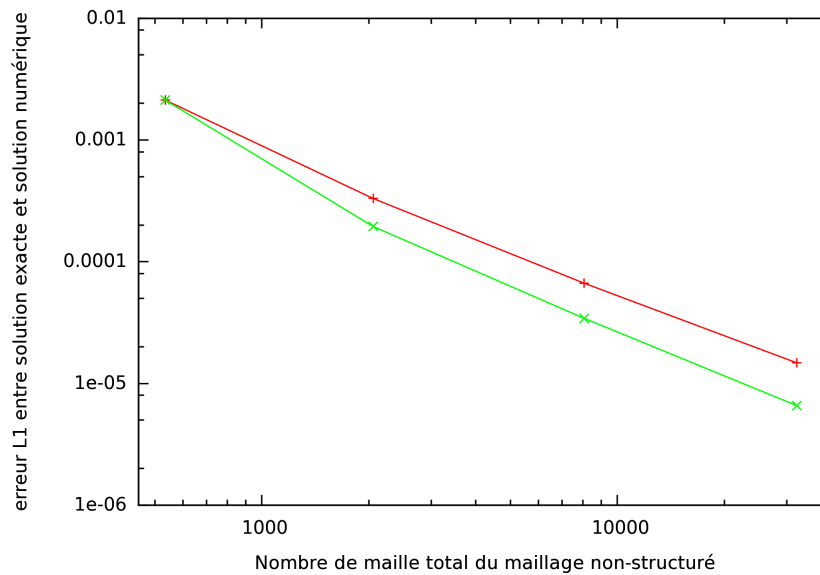


Figure 6.13: Courbe de convergence en maillage non-structure pour la reconstruction double-linéaire, avec une viscosité constante (courbe rouge) et une viscosité contrôlée (courbe verte).

### 6.6.4 Comparaison double-linéaire et quadratique

- Comparaison des ordres de convergence pour les **reconstructions quadratique et double-linéaire** en maillages structurés :

Maillage	Viscosité	Erreur (Quad)	Ordre (Quad)	Erreur (D-L)	Ordre (D-L)
5 * 5	1	$1,188.10^{-2}$		$1,336.10^{-2}$	
10 * 10	1	$1,374.10^{-2}$	0,21	$1,457.10^{-2}$	0,12
15 * 15	1	$6,781.10^{-3}$	1,74	$3,724.10^{-3}$	1,97
20 * 20	1	$3,480.10^{-3}$	2,32	$6,448.10^{-4}$	2,63
39 * 39	1	$6,257.10^{-4}$	2,57	$8,708.10^{-5}$	2,94
77 * 77	1	$8,621.10^{-5}$	2,91	$1,107.10^{-5}$	3,00
153 * 153	1	$1,106.10^{-5}$	2,99	$1,558.10^{-6}$	2,91
5 * 5	1	$1,188.10^{-2}$		$1,336.10^{-2}$	
10 * 10	1/2	$1,180.10^{-2}$	$6,27.10^{-3}$	$1,145.10^{-2}$	0,22
15 * 15	1/4	$4,683.10^{-3}$	3,32	$1,440.10^{-3}$	2,99
20 * 20	1/8	$1,733.10^{-3}$	3,45	$1,044.10^{-4}$	3,90
39 * 39	1/16	$1,507.10^{-4}$	3,66	$6,703.10^{-6}$	4,03
77 * 77	1/32	$1,044.10^{-5}$	3,92	$5,175.10^{-7}$	3,73
153 * 153	1/64	$8,153.10^{-7}$	3,71	$5,197.10^{-8}$	3,41

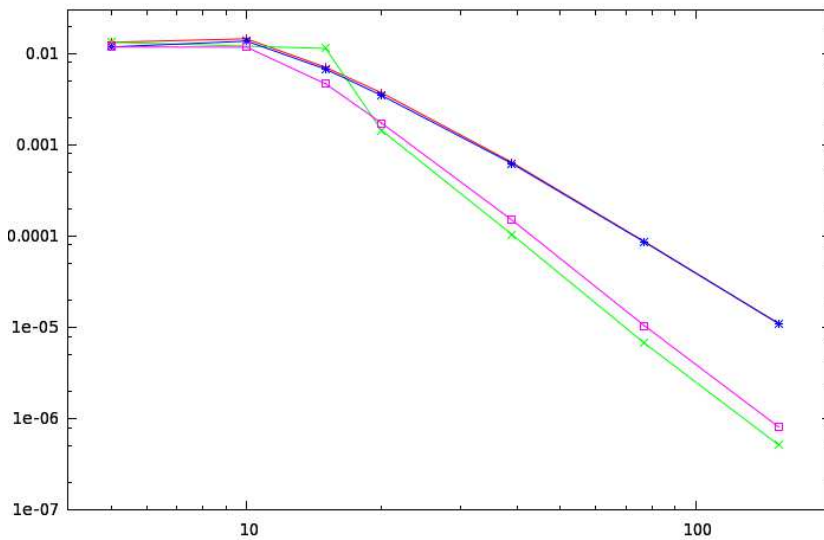


Figure 6.14: Comparaison des courbes de convergence pour les reconstructions double-linéaire avec viscosité constante (rouge) et qui varie (vert) et reconstruction quadratique avec viscosité constante (bleu) et qui varie (rose).

On constate que sur maillages réguliers, le schéma double-linéaire (D-L) se comporte aussi bien, voir mieux que le schéma quadratique (QUAD).

- Comparaison des ordres de convergence pour les **reconstructions quadratique et double-linéaire** en maillages non-structurés :

Maillage	Viscosité	Erreur (Quad)	Ordre (Quad)	Erreur (D-L)	Ordre (D-L)
535	1	$2,030.10^{-3}$		$2,129.10^{-3}$	
2057	1	$3,002.10^{-4}$	2,84	$3,307.10^{-4}$	2,76
8065	1	$3,992.10^{-5}$	2,95	$6,661.10^{-5}$	2,35
31937	1	$5,345.10^{-6}$	2,92	$1,447.10^{-5}$	2,19
535	1	$2,030.10^{-3}$		$2,129.10^{-3}$	
2057	1/2	$1,636.10^{-4}$	3,74	$1,947.10^{-4}$	3,55
8065	1/4	$1,144.10^{-5}$	3,89	$3,425.10^{-5}$	2,54
31937	1/8	$8,358.10^{-7}$	3,8	$6,577.10^{-6}$	2,40

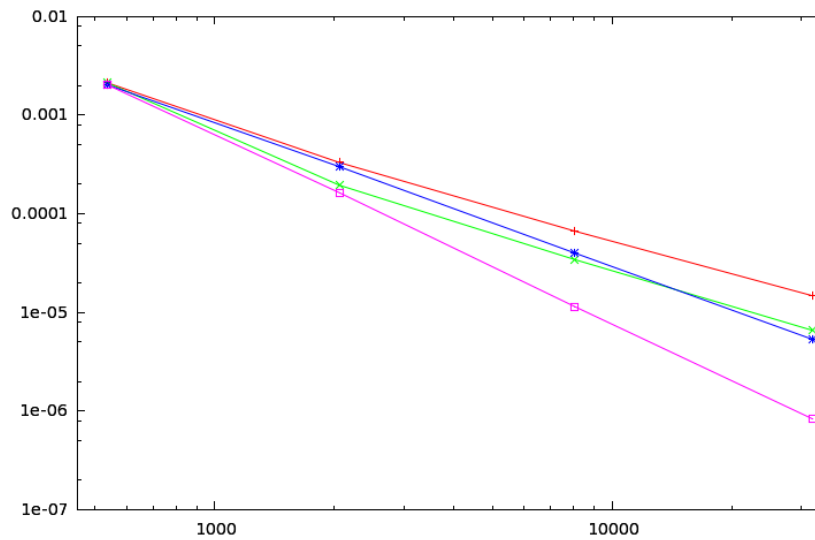


Figure 6.15: Comparaison des courbes de convergence pour les reconstructions double-linéaire avec viscosité constante (rouge), et qui varie (vert) et reconstruction quadratique avec viscosité constante (bleu) et qui varie (rose).

On constate que sur maillages non-réguliers, le schéma double-linéaire (D-L) se comporte moins bien que le schéma quadratique (QUAD).

### 6.6.5 Conclusion

- Le schéma de reconstruction linéaire est d'ordre 2 et on ne sait pas l'améliorer.
- La diminution progressive de la viscosité améliore l'ordre des schémas d'ordre supérieur à 2, qu'on soit en maillage structuré ou non-structuré. Mais cette approche simpliste n'améliore pas la précision sur maillage grossier.
- Le schéma de reconstruction quadratique est d'ordre 3 et en modifiant la viscosité, on peut passer à l'ordre 4.
- Cet effet est vrai sur des maillages structurés et semble encore vrai sur des maillages non-structurés.
- Le schéma de reconstruction double-linéaire est d'ordre 3 sur maillages structurés et d'ordre 2 sur maillages non-structurés.
- La diminution de la viscosité améliore l'ordre du schéma de reconstruction double-linéaire en maillages structurés, on passe à l'ordre 4, mais cela n'améliore pas l'ordre du schéma en maillages non-structurés.
- Le schéma de reconstruction quadratique reste donc meilleur en maillages non-structurés, car d'ordre 3 à viscosité constante, et d'ordre 4 lorsque l'on diminue la viscosité.

## 6.7 Évaluation des coefficients de la reconstruction polynômiale cubique

Dans nos recherches durant cette thèse, il est apparu indispensable de calculer avec la meilleure précision possible l'ensemble des dérivées troisièmes de l'inconnue. Pour cela, nous avons implémenté dans le code le calcul complet d'une reconstruction polynômiale cubique par la méthode des Moindres Carrés. Cette reconstruction cubique a été utilisée principalement dans le but d'obtenir les dérivées troisièmes pour nos recherches sur l'adaptation de maillage (voir les chapitres suivants).

Nous détaillons ainsi dans cette section la théorie sur le schéma **CENO** à reconstruction cubique.

Sur chaque cellule de contrôle  $C_i$  et à chaque pas de temps, on cherche à approximer la solution  $u(x, y, t^n) = u(x, y)^n$  en construisant un polynôme cubique  $Q_i^n$ .

Il est nécessaire que les valeurs moyennes du polynôme  $Q_i^n$  (que nous écrivons  $\bar{Q}_i^{i,n}$ ) et les valeurs moyennes la solution (que nous écrivons  $\bar{u}^{i,n}$ ) sur la cellule  $C_i$  doivent être égales.

Cette condition s'écrit :  $\bar{Q}_i^{i,n} = \bar{u}^{i,n}$ , avec :

$$\begin{cases} \bar{Q}_i^{i,n} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} Q_i^n(x, y) dx dy \\ \bar{u}^{i,n} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} u^n(x, y) dx dy \end{cases}$$

Le polynôme  $Q_i^{i,n}$  est défini par :

$$Q_i^n = \bar{u}^{i,n} + \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n [(X - X_{o,i})^\alpha - \overline{(X - X_{o,i})}^{i,\alpha}]$$

avec :

$$\begin{cases} \overline{(X - X_{o,i})}^{i,\alpha} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \\ I = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \in [1, 2, 3] & \text{est l'ensemble des multi-indices} \\ (X - X_{o,i})^\alpha = (x - x_{o,i})^{\alpha_1} (y - y_{o,i})^{\alpha_2} & \text{où } (x_{o,i}, y_{o,i}) \text{ est le centre de gravité de } C_i \end{cases}$$

Pour construire le polynôme  $Q_i^n$  sur la cellule  $C_i$ , on a besoin de définir le stencil  $S_i$  formé à partir des cellules voisines de  $C_i$ , de sorte de prendre assez de valeurs de la solution autour de  $i$  pour reconstruire les coefficients du polynôme.

La construction du stencil  $S_i$  dépend du nombre de voisins et de la condition frontière logique de  $i$ .  $S_i$  contient toujours les cellules  $C_k$  où  $k$  est un voisin de  $i$ . Pour calculer les 9 coefficients du polynôme, nous avons besoin d'au moins 9 nœuds voisins, c'est-à-dire 9 cellules voisines.

Considérons un sommet interne  $i$ . Si  $i$  a 9 ou plus de voisins, le stencil  $S_i$  est formé à partir des cellules centrées sur les voisins de  $i$ . Sinon le stencil  $S_i$  contient les cellules  $C_k$  et les cellules  $C_l$  aussi, où  $l$  est un voisin de  $k$  et  $k$  un voisin de  $i$ , comme le montre la figure 6.16.

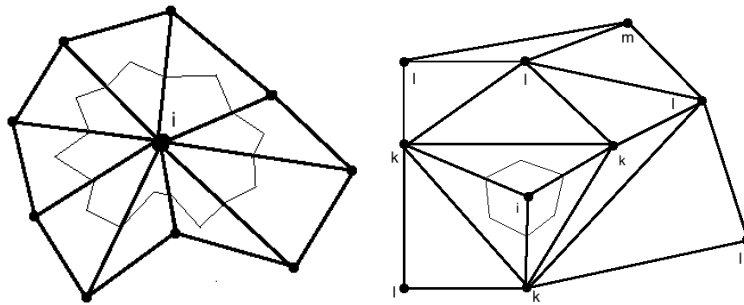


Figure 6.16: Construction de la molécule  $S_i$  centrée au nœud  $i$ . À gauche : cas où  $i$  a au plus neuf voisins, à droite : cas où  $i$  a moins de neuf voisins.

Les 9 coefficients inconnus  $c_{i,\alpha}^n$  de la reconstruction polynômiale cubique sont calculés par la méthode des Moindres Carrés, c'est-à-dire telle que la distance  $L_2$  entre les moyennes sur les cellules  $C_k$ , du polynôme  $\bar{Q}_i^{k,n}$  associé à la cellule  $C_i$ , et de la solution  $\bar{u}^{k,n}$ , soit minimale pour chaque sommet  $k$  inclus dans le stencil  $S_i$ .

Ceci conduit à minimiser la fonction suivante :

$$H_i = \sum_{k \in V(i)} (\bar{Q}_i^{k,n} - \bar{u}^{k,n})^2,$$

où  $\bar{Q}_i^{k,n}$  représente la moyenne du polynôme  $Q_i^n$  sur la cellule  $C_k$  :

$$\bar{Q}_i^{k,n} = \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \int_{C_k} Q_i^n(x,y) dx dy.$$

Par la construction de  $C_k$ , on peut écrire :

$$H_i = \sum_{k \in V(i)} \left( \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T Q_i^n(x, y) dx dy - \bar{u}^{k,n} \right)^2,$$

où  $T$  représente les triangles qui composent la cellule  $C_k$ , ou encore :

$$H_i = \sum_{k \in V(i)} \left[ \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T \left( \bar{u}^{i,n} + \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n \left[ (X - X_{o,i})^\alpha - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \right] \right) - \bar{u}^{k,n} \right]^2$$

La minimisation par les Moindres Carrés de  $H_i$  par rapport aux inconnues  $c_{i,\alpha}^n$  ( $\alpha \in I$ ), qui vont définir notre polynôme  $Q_i^n$  sur la cellule  $C_i$ , s'écrit :

$$\frac{\delta H_i}{\delta c_{i,\alpha}^n} = 0, \alpha \in I.$$

De cette minimisation on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,6} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,7} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,8} * K_\alpha = 0 \\ 2 * \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,9} * K_\alpha = 0 \end{array} \right.$$

où :



$$D_{i,k,p} = \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T (X - X_{o,i})^p dx dy - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T (X - X_{o,i})^p dx dy,$$

pour  $p \in [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ , et :

$$K_\alpha = \bar{u}^{i,n} + \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n (X - X_{o,i})^\alpha dx dy - \bar{u}^{k,n}.$$

On obtient alors un système global suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,6} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,6} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,7} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,7} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,8} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,8} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{q \in [1, \dots, 9]} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,9} * D_{i,k,q} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,9} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \end{array} \right.$$

En prenant en compte le fait que pour  $(X - X_{o,i})^\alpha = (x - x_{o,i})^{\alpha_1} (y - y_{o,i})^{\alpha_2}$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \longrightarrow (\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1) \\ \alpha = 2 \longrightarrow (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0) \\ \alpha = 3 \longrightarrow (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1) \\ \alpha = 4 \longrightarrow (\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2) \\ \alpha = 5 \longrightarrow (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0) \\ \alpha = 6 \longrightarrow (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2) \\ \alpha = 7 \longrightarrow (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1) \\ \alpha = 8 \longrightarrow (\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 3) \\ \alpha = 9 \longrightarrow (\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 0) \end{array} \right.$$

On peut maintenant écrire notre système aux Moindres Carrés à résoudre pour une reconstruction polynômiale cubique :

$$\left( \begin{array}{ccccccc} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,6} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,6} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,7} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,7} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,8} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,8} D_{i,k,9} \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,9} D_{i,k,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,9} D_{i,k,9} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} C_{i,(0,1)} \\ C_{i,(1,0)} \\ C_{i,(1,1)} \\ C_{i,(0,2)} \\ C_{i,(2,0)} \\ C_{i,(2,1)} \\ C_{i,(1,2)} \\ C_{i,(3,0)} \\ C_{i,(0,3)} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,1} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,2} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,3} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,4} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,5} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,6} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,7} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,8} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \\ \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,9} \left[ \bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{i,n} \right] \end{array} \right).$$

Ou encore sous forme compacte on a alors le système suivant :

$$M_i c_i^n = b_i^n,$$

où  $M_i$  est une matrice symétrique 9x9 définie par :

$$(M_i)_{1 \leq p, q \leq 9} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,p} D_{i,k,q},$$

et où  $c_i^n$  est le vecteur colonne des coefficients inconnus :

$$c_i^n = (c_{i,(0,1)}^n, c_{i,(1,0)}^n, c_{i,(1,1)}^n, c_{i,(0,2)}^n, c_{i,(2,0)}^n, c_{i,(2,1)}^n, c_{i,(1,2)}^n, c_{i,(0,3)}^n, c_{i,(3,0)}^n)^t.$$

Le terme de droite  $b_i^n$  est un vecteur colonne dépendant de la moyenne de la solution  $\bar{u}^{k,n}$  sur le voisinage  $V(i)$  du sommet  $i$  :

$$b_{i,p}^n = \sum_{k \in V(i)} \left( \bar{u}_k^n - \bar{u}_i^n \right) D_{i,k,p},$$

pour  $p = 1, \dots, 9$ .

Pour une reconstruction polynômiale cubique, les intégrales des polynômes  $\int_T (X - X_{o,i})^\alpha$  contenues dans la matrice sont calculées par quadrature de Gauss à 4 points afin d'obtenir une intégration exacte pour des polynômes de degré 3.

En prenant comme référence le triangle formé par les noeuds  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,0)$ , la somme pondérée sur les points  $(0.2, 0.6)$ ,  $(0.2, 0.2)$ ,  $(0.6, 0.2)$  ainsi que sur le centre de gravité du triangle, avec des poids égaux à  $-0.5625$  pour le centre de gravité et à  $0.520833$  pour les trois autres points, donne une approximation exacte des monômes.

$$\int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy = 2 \times \text{aire}(T) \sum_{g=1}^3 \omega_g f_1(x'(g), y'(g))^{\alpha_1} f_2(x'(g), y'(g))^{\alpha_2},$$

où  $(x'(g), y'(g))$  sont les coordonnées des points de Gauss dans le triangle  $T$  pour  $g \in (1, 2, 3)$ .

## 6.8 Évaluation des flux

L'objectif suivant est d'évaluer le flux à un temps  $t$  sur les interfaces entre la cellule  $C_i$  et ses voisins  $C_k$  pour tout  $k$  dans  $V(i)$ , en utilisant une quadrature de Gauss à trois points.

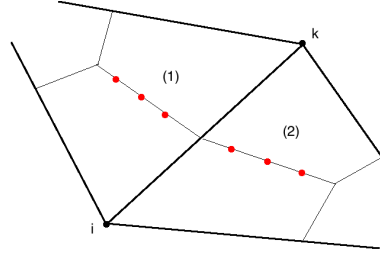


Figure 6.17: Interfaces entre  $C_i$  et  $C_k$  : (1) =  $\partial C_{ik}^{(1)}$  et (2) =  $\partial C_{ik}^{(2)}$ .

On rappelle que le flux sur la frontière d'une cellule peut s'écrire :

$$\int_{\partial C_i} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{k \in V(i)} \int_{\partial C_i \cap \partial C_k} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds.$$

Les interfaces  $\partial C_i \cap \partial C_k$  peuvent être décomposées en deux segments  $\partial C_{ik}^{(1)}$  et  $\partial C_{ik}^{(2)}$  :

$$\int_{\partial C_i \cap \partial C_k} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{l=1,2} \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds.$$

La solution  $u(x, y, t)$  sur la cellule  $C_i$  est approximée par le polynôme  $Q_i$  construit dans la section précédente :

$$\int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}(u(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}\left(Q_i(x, y, t)\right) \cdot \mathbf{n} ds.$$

Dès lors, l'intégrale sur chaque segment  $\partial C_{ik}^{(l)}$  est évaluée par une quadrature de Gauss avec les trois points  $(x_{g_1, ik}^{(l)}, y_{g_1, ik}^{(l)})$ ,  $(x_{g_2, ik}^{(l)}, y_{g_2, ik}^{(l)})$  et  $(x_{g_3, ik}^{(l)}, y_{g_3, ik}^{(l)})$ .

Sur le segment de référence  $[-1, 1]$ , les points de Gauss  $x_i = -\frac{3}{\sqrt{5}}, 0, \frac{3}{\sqrt{5}}$  et donne une

approximation exacte d'un polynôme cubique avec des poids  $\omega_i = \frac{5}{\sqrt{9}}, \frac{8}{\sqrt{9}}, \frac{5}{\sqrt{9}}$ .

Après une transformation affine sur le segment de référence et après avoir appliqué la quadrature de Gauss à trois points, on obtient :

$$\int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{f}(Q_i(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{m=1,2,3} \omega_m \mathbf{f} \left( Q_i(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t) \right) \cdot \mathbf{v}_{ik}^{(l)},$$

avec  $\mathbf{v}_{ik}^{(l)} = \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{n}(x, y) ds$ .

Comme deux polynômes distincts  $Q_i$  et  $Q_k$  ont été construits, la solution sur les points de Gauss sur la frontière n'est pas unique.

Donc le flux sur l'interface  $\partial C_{ik}^{(l)}$  est approximé par une fonction flux  $\Phi$  numérique :

$$\mathbf{f} \left( Q_i(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t) \right) \cdot \mathbf{n} = \Phi \left( Q_i(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t), Q_k(x_{g_m, ik}^{(l)}, y_{g_m, ik}^{(l)}, t), \mathbf{v}_{ik} \right),$$

où  $\mathbf{v}_{ik} = \int_{\partial C_{ik} \cap \partial C_k} \mathbf{n}(x) dx$  est un vecteur constant puisque le maillage est fixe.

Nous devons choisir le flux numérique  $\Phi$  tel que le schéma résultant soit stable, par exemple le schéma de Roe :

$$\Phi(u_1, u_2, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{f}(u_1) + \mathbf{f}(u_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\gamma}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{u_1 + u_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (u_2 - u_1),$$

où  $\gamma \in [0, 1]$  est un paramètre pour contrôler la viscosité numérique.

## 6.9 Évolution en temps

La semi-discrétisation en espace de l'équation de départ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + \nabla \cdot \mathbf{f}(u(x, y, t)) = 0,$$

conduit au système d'ODE suivant :

$$\frac{du_i}{dt}(t) + \Psi_i(u(t)) = 0,$$

où la fonction  $\Psi_i(u(t))$  approxime  $\nabla \cdot \mathbf{f}(u(x, y, t))$  au point  $(x_i, y_i)$  et  $u(t)$  est l'ensemble des moyennes  $\bar{u}^{k,n}$  où  $k$  est dans un voisinage de  $i$ .

On choisit la méthode de Runge-Kutta explicite à 4-pas pour la discrétisation en temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{(0)} = u_i^{(n)} \\ u_i^{(1)} = u_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-1} \Psi_i(u_i^{(0)}) \\ u_i^{(2)} = u_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-2} \Psi_i(u_i^{(1)}) \\ u_i^{(3)} = u_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-3} \Psi_i(u_i^{(2)}) \\ u_i^{(4)} = u_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-4} \Psi_i(u_i^{(3)}) \\ u_i^{(n+1)} = u_i^{(4)} \end{array} \right.$$

Ce schéma est précis à l'ordre 4 pour des systèmes linéaires.

#### Conclusion :

Nous avons donc défini une reconstruction cubique. Elle permet de définir un schéma d'ordre 4. Le schéma sera testé plus loin. La reconstruction elle-même sera utilisable pour construire des critères d'adaptation.

## 6.10 Amélioration du schéma CENO

### 6.10.1 Position du problème

Afin d'améliorer la précision de notre schéma quadratique 2D, nous allons nous inspirer des améliorations réalisées en 1D pour augmenter la précision numérique du schéma. Plus précisément, comme en une dimension, nous allons ajouter aux calculs des flux numériques du schéma quadratique, qui s'effectuent à l'origine sur les 4 points de Gauss sur une interface entre deux cellules, une contribution dans la partie centrée des flux et une contribution dans la partie de stabilisation des flux, mais pour des raisons d'efficacité (coût CPU), ces deux contributions s'effectueront sur le point d'intersection des demi-segments qui composent l'interface et non sur les points de Gauss eux-même. Nous appellerons ce point le point I :

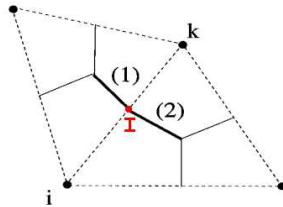


Figure 6.18: Représentation d'une interface et du point I.

Cette démarche d'amélioration de l'ordre du schéma est assimilée au cas 1D car nous allons projeter la correction suivante sur chaque segment, c'est-à-dire avec une structure par segment et selon les directions de chaque segment, afin de s'identifier à un pseudo-1D pour le calcul de ses flux.

Nous commençons tout d'abord par identifier sur un maillage, structuré ou non-structuré, les configurations que l'on appellera "butterfly" ou "nœud-papillon". Nous définissons, pour chaque segment constituant le maillage, leurs triangles amont et aval, c'est-à-dire pour tout segment  $[B_1B_2]$  du maillage, on identifie les points  $C_1, D_1, C_2, D_2$  suivant la configuration de la figure 6.19.

Nous calculons les coordonnées barycentriques des points d'intersection de  $[B_1B_2]$  avec les segments  $[C_1D_1]$  et  $[C_2D_2]$ , que l'on appellera respectivement  $E_1$  et  $E_2$ .

Les coordonnées barycentriques de  $E_1$  et  $E_2$  et la connaissance des valeurs de la reconstruction polynômiale quadratique en  $C_1, D_1, C_2, D_2$ , et plus précisément la connaissance du Hessien en ces points du polynôme reconstruit, permet de calculer par interpolation les valeurs des Hessiens aux points  $E_1$  et  $E_2$ .

Nous calculons ensuite les valeurs des Hessiens orientés selon la direction  $\overrightarrow{B_1B_2}$  aux points  $E_1, B_1, E_2$  et  $B_2$ .

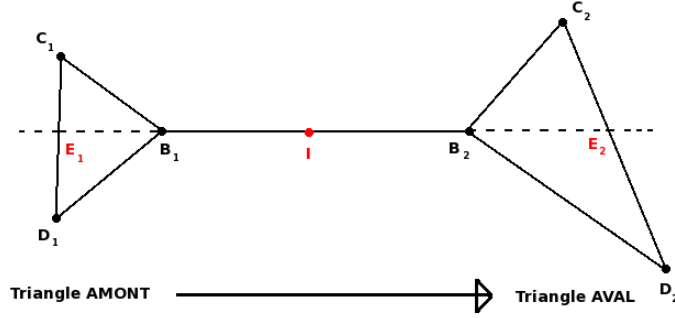


Figure 6.19: Représentation d’une molécule “nœud-papillon” et du point I milieu de l’arête  $B_1B_2$ .

Nous pouvons, alors grâce à la configuration nœud-papillon, s’assimiler au 1D et calculer comme dans la première partie de ce rapport les valeurs des termes de degrés 3 et 4 du polynôme quadratique par différences finies aux points  $B_1$  et  $B_2$ , c’est-à-dire les dérivées troisièmes et quatrièmes directionnelles en ces points.

En notant  $u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(M)$ ,  $u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(3)}(M)$  et  $u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(4)}(M)$  les valeurs respectives des dérivées secondes, troisièmes et quatrièmes selon la direction  $\overrightarrow{B_1B_2}$  au point  $M \in [B_1B_2]$ , les dérivées troisièmes et quatrièmes directionnelles s’approchent via les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(3)}(B_1) = \frac{u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(B_2) - u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(E_1)}{2\|\overrightarrow{B_1B_2}\|} \\ u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(3)}(B_2) = \frac{u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(E_2) - u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(B_1)}{2\|\overrightarrow{B_1B_2}\|} \\ u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(4)}(B_1) = \frac{u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(B_2) - 2u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(B_1) + u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(E_1)}{\|\overrightarrow{B_1B_2}\|^2} \\ u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(4)}(B_2) = \frac{u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(E_2) - 2u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(B_2) + u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(2)}(B_1)}{\|\overrightarrow{B_1B_2}\|^2} \end{array} \right.$$

Dès lors on a défini une nouvelle reconstruction polynômiale pseudo-quadratique  $P_i^{quadrique}$  au point  $i$  de notre configuration nœud-papillon :

$$P_i^{quadrique} = P_i^{quadratique} + \left( -\frac{16}{5} \frac{1}{3!} \frac{\|\overrightarrow{B_1B_2}\|^3}{2^3} u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(3)}(i) \right) + \left( \frac{1}{4!} \frac{\|\overrightarrow{B_1B_2}\|^4}{2^4} u_{\overrightarrow{B_1B_2}}^{(4)}(i) \right).$$



Et nous mettons en œuvre cette formule de la façon suivante :

- le polynôme  $P_i^{quadratique}$  est le polynôme reconstruit par le schéma quadratique initial, calculé sur les 4 points de Gauss situés sur les 2 demi-segments des interfaces et contribue à la partie centrée des flux. Les coefficients du polynôme sont calculés par Moindres Carrés.
- Le terme  $\left(-\frac{16}{5} \frac{1}{3!} \frac{\|B_1 B_2\|^3}{2^3} u_{B_1 B_2}^{(3)}(i)\right)$ , qui correspond à la matrice des dérivées partielles tierces du polynôme au point  $i$ , est calculée au point milieu I et contribue à la partie centrée des flux. L'ajout de ce terme dans les flux centrés, comme en 1D, nous donnera dans l'erreur de troncature spatiale du schéma la matrice des dérivées partielles cinquièmes de dispersion, et ainsi compensera, comme en 1D grâce au coefficient  $-\frac{16}{5}$ , l'erreur principal de troncature spatiale qui est la matrice des dérivées cinquième de dispersion du schéma d'origine.
- $\left(\frac{1}{4!} \frac{\|B_1 B_2\|^4}{2^4} u_{B_1 B_2}^{(4)}(i)\right)$ , qui correspond à la matrice des dérivées partielles quatrièmes du polynôme au point  $i$ , est calculé au point milieu I et contribue à la partie décentrée des flux. L'ajout de ce terme dans les flux décentrés, comme en 1D, nous donnera dans l'erreur de troncature spatiale du schéma la matrice des dérivées partielles sixièmes de diffusion, et ainsi ajoutera la stabilité nécessaire au schéma.

Remarque :

La compensation de la matrice des dérivées partielles cinquièmes de dispersion est exacte pour des maillages réguliers formés de rectangle. Dans l'autre cas, elle est approximative.

Synthèse descriptive du nouveau schéma :

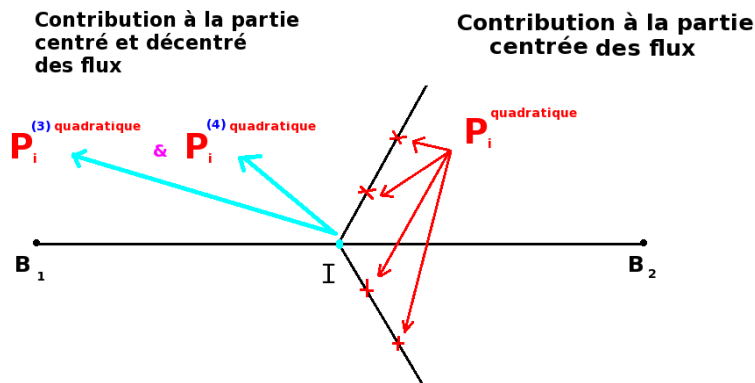


Figure 6.20: Contribution des flux sur les points de Gauss et le centre des demi-segments composants une interface.

### 6.10.2 Précision sur la phase itérative du code Fortran95

Dans cette sous-partie, par souci de clarté et pour mieux comprendre ce que l'on fait, nous détaillons les étapes de la phase itérative du code Fortran du schéma quadratique de base, modifié avec les corrections antidispersives et diffusives dans les flux.

Nous avons donc les phases successives suivantes :

#### 1. Calcul des coefficients polynômiaux :

La matrice symétrique 5x5 du système quadratique a été calculée dans une partie de "phase préparatoire" et est stockée pour tout le reste du calcul de la phase itérative : la matrice ne dépendant que des éléments du maillage, si le maillage reste fixe au cours du temps, la matrice ne change pas. Nous calculons et stockons donc les 15 termes différents de cette matrice symétrique. Son inverse est calculé par l'algorithme de Bunch-Kaufman incorporé dans la librairie *LLAPACK*, qui effectue une factorisation de la matrice suivie de l'inversion.

Nous entrons ensuite dans la boucle en temps de l'algorithme où le second membre puis les coefficients du polynôme, c'est-à-dire les dérivées premières et secondes, sont calculés en chaque point (sur chaque cellule duale plus précisément) du maillage et à chaque pas de temps.

#### 2. Orientations des dérivées secondes :

Nous calculons ensuite les valeurs en chaque point  $B_1$  et  $B_2$  d'un segment  $[B_1B_2]$  du maillage les dérivées troisièmes et quatrièmes selon la direction de  $B_1$  vers  $B_2$ . Par interpolation des dérivées secondes en  $C_i$  et  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) (voir figure 6.19), nous calculons les dérivées secondes en  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ), points d'intersections des segments  $[B_1B_2]$  et  $[C_iD_i]$ . Nous calculons ensuite le vecteur normalisé directionnel  $\mathbf{t}$ , où  $\vec{t} = \overrightarrow{B_1B_2} / (|\overrightarrow{B_1B_2}|)$ . Enfin le produit entre le vecteur  $\mathbf{t}$  et les matrices hessiennes en chaque point nous donne les dérivées secondes orientées selon la direction  $\mathbf{t}$  aux points  $E_i$  et  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ).

#### 3. Calcul des dérivées directionnelles d'ordre supérieur :

Maintenant nous nous ramenons à un calcul de dérivées en une dimension par différences finies dans la direction  $\mathbf{t}$ . Nous calculons les dérivées troisièmes directionnelles en  $B_1$  et  $B_2$  grâce respectivement à la connaissance des dérivées secondes orientées en  $B_2$  et  $E_1$  et en  $B_1$  et  $E_2$ .

Puis nous calculons les dérivées quatrièmes directionnelles en  $B_1$  et  $B_2$  grâce respectivement à la connaissance des dérivées secondes orientées en  $B_2$ ,  $B_1$  et  $E_1$ , et en  $E_2$ ,  $B_2$  et  $B_1$ .

#### 4. Calcul des flux :

Les flux de la reconstruction quadratique d'origine comprenaient quatre solveurs de Riemann sur les quatres points de Gauss d'une interface. En imposant une viscosité numérique nulle, nous supprimons la partie de stabilisation de ces flux pour ainsi obtenir seulement des flux centrés sur les points de Gauss  $G_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) :

$$Flux_{G_i}^{centres} = \frac{Reconst_{gauche}^{quadratique}(G_i) + Reconst_{droite}^{quadratique}(G_i)}{2} * \vec{n}_i * p,$$

où  $Reconst_{gauche/droite}^{quadratique}(G_i)$  sont les valeurs aux points  $G_i$  ( $i = 1, 2$ ) de la solution reconstruite par la reconstruction polynômiale de degré 2 aux cellules voisines gauche et droite de l'interface considérée,  $\vec{n}_i$  sont les vecteurs normaux à l'interface aux points  $G_i$  et  $p$  est le poids des points de Gauss sur le segment de référence ( $p = 0, 5$ ).

La correction antidispersif des flux, qui supprime la première erreur de troncature spatiale du schéma qui est une dérivée cinquième de dispersion, s'effectue en ajoutant dans les flux centrés du schéma les dérivées troisièmes directionnelles au point I milieu du segment de la façon suivante :

$$Flux_I^{antidispersif} = \frac{\left( -\frac{16}{5} \frac{1}{3!} \frac{\|\vec{B}_1 B_2\|^3}{2^3} * Drivee_{B_1}^{(3)} \right) + \left( -\frac{16}{5} \frac{1}{3!} \frac{\|\vec{B}_1 B_2\|^3}{2^3} * Drivee_{B_2}^{(3)} \right)}{2} \mathbf{m},$$

où  $Drivee_{B_1/B_2}^{(3)}$  désigne les dérivées troisièmes directionnelles calculées par différences finies aux points  $B_1$  et  $B_2$  et où  $\mathbf{m}$  est le vecteur normal au segment en  $I$ .

La correction diffusive des flux, qui permet d'insérer une partie de stabilisation dans le schéma, s'effectue en ajoutant dans la partie décentrés du solveur de Riemann les dérivées quatrièmes directionnelles au point I milieu du segment de la façon suivante :

$$Flux_I^{stabilisation} = \frac{\left( \frac{1}{4!} \frac{\|\vec{B}_1 B_2\|^3}{2^3} * Drivee_{B_2}^{(4)} \right) - \left( \frac{1}{4!} \frac{\|\vec{B}_1 B_2\|^3}{2^3} * Drivee_{B_1}^{(4)} \right)}{2} |\mathbf{m}|,$$

où  $Drivee_{B_1/B_2}^{(4)}$  désigne les dérivées quatrièmes directionnelles reconstruites aux points  $B_1$  et  $B_2$  et où  $\mathbf{m}$  est le vecteur normal au segment en  $I$ .

Enfin nous pouvons écrire le flux global sur une interface pour ce nouveaux schéma **CENO-QV6** :

$$Flux^{QV6} = \sum_i Flux_{G_i}^{centres} + Flux_I^{antidispersif} + Flux_I^{stabilisation}$$

Nous affichons ici un récapitulatif du fonctionnement de notre algorithme :

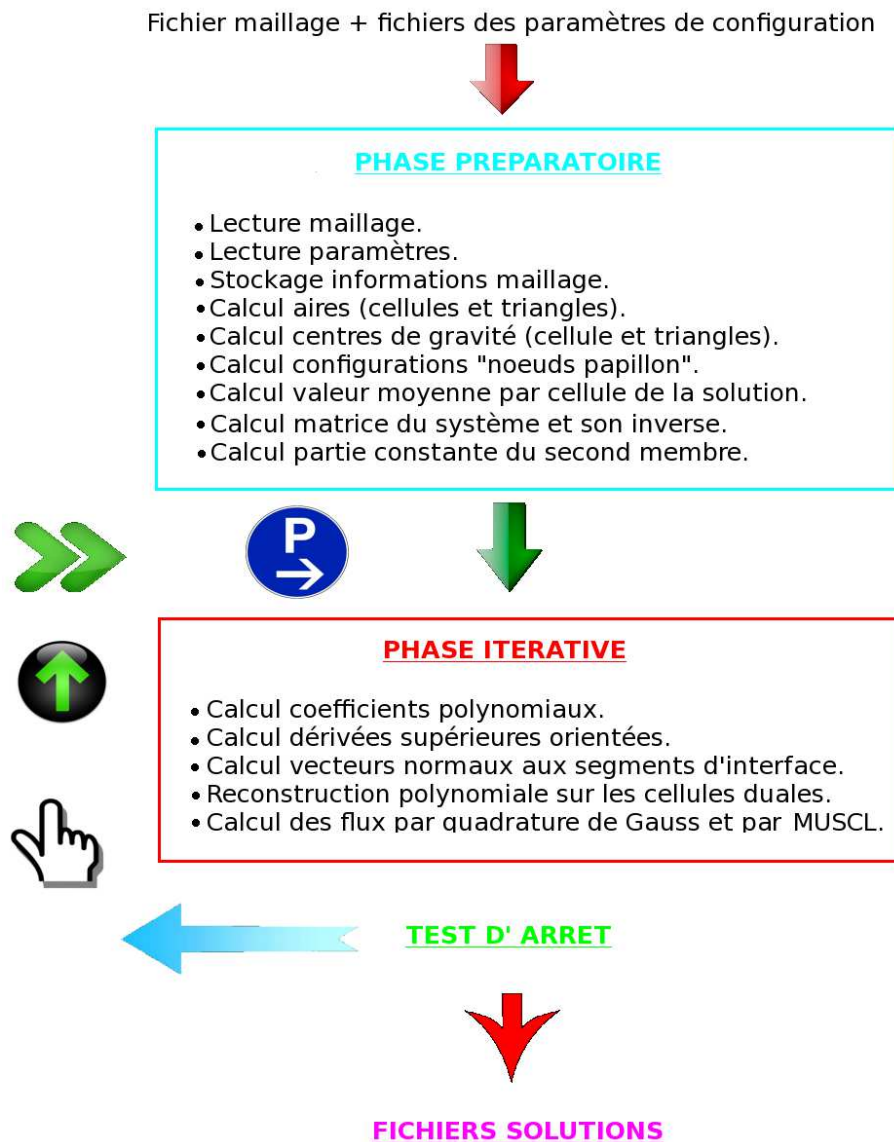


Figure 6.21: Algorithme du schéma CENO-QV6 présenté.

### 6.10.3 Tests numériques

#### 6.10.3.1 Translation d'un sinus

Pour un premier test numérique, pour vérifier que notre étude est correcte et que nous avons implémenté proprement la théorie dans l'algorithme 2D, nous effectuons le même cas-test que le 1D mais en 2D cette fois, pour comparer les résultats. Nous voulons voir les mêmes améliorations de la dispersion et de la diffusion sur un sinus advecté par le schéma 2D qu'avec le schéma 1D.

Le problème test est donc le même que le précédemment, consiste à traduire un sinus, et se définit de la façon suivante :

$$u_t(x, y, t) + \nabla \cdot (\mathbf{c}u(x, y, t)) = 0.$$

Les conditions limites et initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \sin(x) & \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = \sin(x) \end{cases}$$

Nous utilisons des maillages réguliers en forme de "Drapeau Anglais" de taille  $501 * 21$ ,  $1001 * 21$  et  $2001 * 21$  nœuds.

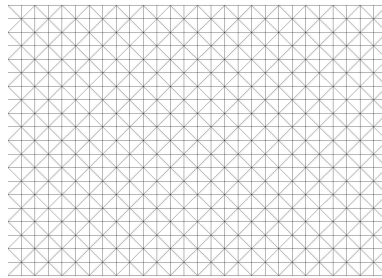


Figure 6.22: Structure des maillages drapeau anglais utilisés pour les différents tests.

Nous comparons ici plusieurs variantes du schéma, à savoir sa forme de base quadratique, puis sa forme sans diffusion (où la viscosité numérique est imposée nulle), puis on y ajoute seulement le terme correcteur de dissipation, et enfin sous sa configuration avec les deux correcteurs : antidispersif et dissipatif, c'est-à-dire on reconstruit les flux en combinant la contribution du polynôme quadratique sur les points de Gauss ainsi que les deux contributions des dérivées supérieures troisièmes et quatrièmes en I qui contribuent aux parties centrée et de stabilisation du schéma.

Le schéma en temps est toujours un Runge Kutta d'ordre 3 à 3 étages. Nous effectuons un voyage de 400 longueurs d'onde à  $CFL = 0.9$  et la discrétisation spatiale est de 6 nœuds par longueur d'onde. Pour supprimer les effets de bords, nous imposons la solution exacte translatée sur la paroi, c'est-à-dire au temps  $t$  nous imposons  $\sin(x - c*t)$  sur le bord du domaine.

Voici les résultats que nous obtenons :

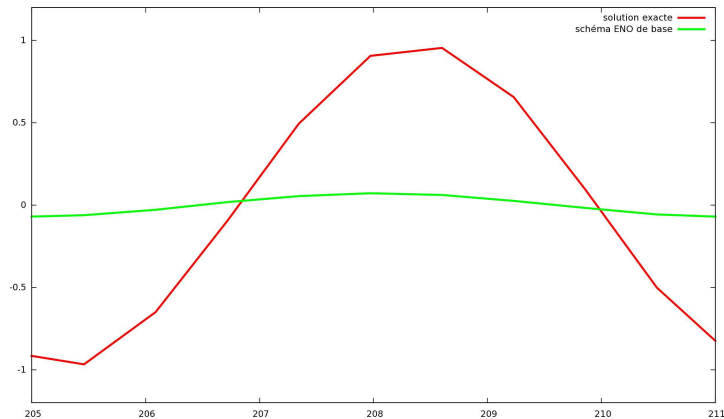


Figure 6.23: Valeurs moyennes du sinus exact (en rouge) et de la solution obtenue par le schéma quadratique de base (en vert) (six points par longueur d'onde).

La figure 6.23 nous montre clairement le caractère très diffusif du schéma **CENO** de base. L'erreur principale de troncature spatiale étant une dérivée quatrième de dissipation, cela se traduit par une erreur d'amplitude importante sur la solution.

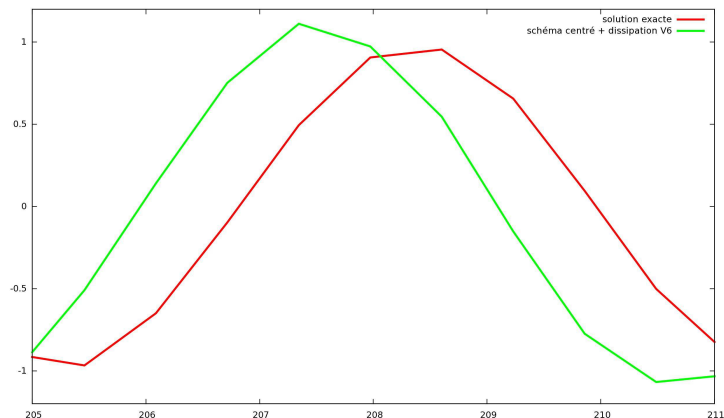


Figure 6.24: Valeurs moyennes du sinus exact (en rouge) et de la solution obtenue par le schéma quadratique de base avec la correction dissipative (en vert).

Nous remarquons avec la figure 6.24 qu'après la suppression de la viscosité numérique et l'ajout de notre correction dissipative du sixième ordre, l'erreur d'amplitude est beaucoup plus faible,

cette nouvelle dissipation a donc un meilleur impact sur le schéma.

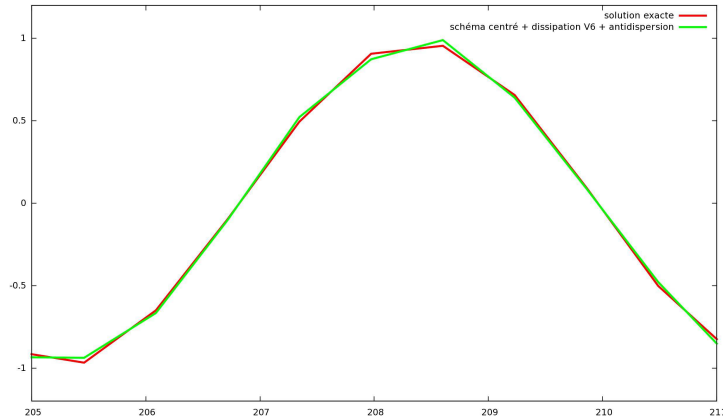


Figure 6.25: Valeurs moyennes du sinus exact (en rouge) et de la solution obtenue par le schéma quadratique de base avec les corrections dissipative et dispersive (en vert).

Enfin, après ajout du deuxième correcteur (antidispersif), la figure 6.25 montre une erreur de phase du schéma beaucoup plus faible et la précision s'améliore.

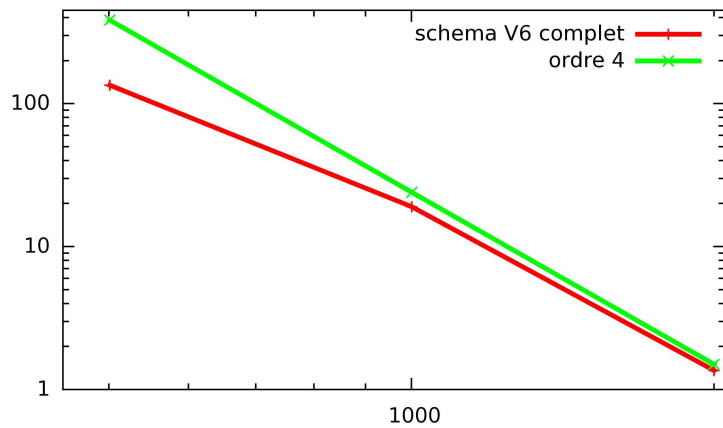


Figure 6.26: Courbes de convergence de la solution sinus exacte (en rouge) et de la solution reconstruite par le schéma quadratique avec les deux corrections dissipative et dispersive (en vert).

La figure 6.26 montre que le schéma ainsi amélioré avec les deux corrections reste d'ordre 4. A première vue on pouvait espérer que comme pour le 1D, la suppression de la diffusion d'ordre 4 ainsi que de la dispersion d'ordre 5, puis l'ajout d'une diffusion d'ordre 6 nous donnerait un schéma d'ordre 5 comme pour le 1D, mais les approximations qui ont été faites dans toute cette étude 2D ne permettent pas de supprimer la totalité de l'erreur d'ordre 4. La précision sur maillage grossier est en revanche fortement améliorée.

### 6.10.3.2 Translation d'une gaussienne (1)

Nous effectuons maintenant une étude de convergence en maillage pour le cas-test d'advection d'une gaussienne. Le problème test se définit de la façon suivante :

$$u_t(x, y, t) + \nabla \cdot (\mathbf{c}u(x, y, t)) = 0.$$

Les conditions limites et initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 1 & \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = 1 + e^{-75((x-1/2)^2+(y-1/2)^2)} \end{cases}$$

La solution initiale est donc une gaussienne initialisée (voir figure 6.27) à l'extrémité gauche de chaque maillage structuré et non-structuré. Elle est advectée avec une vitesse horizontale égale à 0,5 (la vitesse verticale est imposée nulle). Le temps de calcul varie de plusieurs milli-secondes à plusieurs secondes suivant le maillage, c'est-à-dire de plusieurs dizaines d'itérations en temps pour les maillages grossiers à plusieurs centaines d'itérations en temps pour les maillages les plus fins. De plus la gaussienne étant suffisamment éloignée du bord pour ne recevoir aucun impact des effets de bords, nous avons pas besoin d'appliquer un traitement sur les parois du domaine.

Dans les tests numériques suivant, nous calculons et comparons les ordres de précision pour le schéma quadratique d'origine (noté ici **QUAD**), ainsi que le schéma avec les deux corrections antidispersives et diffusive (noté ici **V6+antidisp**).

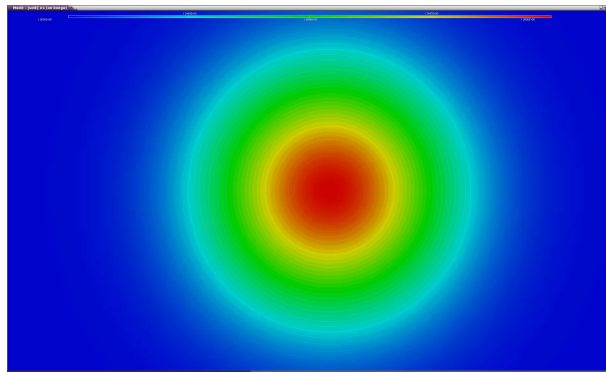


Figure 6.27: Gaussienne initiale.



- Comparaison des ordres de convergence pour la reconstruction quadratique et le schéma V6 antidispersif en maillages structurés :

Maillage	Erreur (Quad)	Ordre (Quad)	Erreur (V6+antidisp)	Ordre (V6+antidisp)
2 * 2	$1,706.10^{-2}$		$1,667.10^{-2}$	
3 * 3	$9,440.10^{-3}$	1,46	$9,446.10^{-3}$	1,40
4 * 4	$1,964.10^{-2}$	2,55	$1,945.10^{-2}$	2,51
5 * 5	$2,308.10^{-2}$	0,72	$2,345.10^{-2}$	0,84
6 * 6	$2,340.10^{-2}$	0,075	$2,339.10^{-2}$	0,014
7 * 7	$2,182.10^{-2}$	0,45	$2,160.10^{-2}$	0,52
8 * 8	$1,706.10^{-2}$	1,84	$1,667.10^{-2}$	1,94
9 * 9	$1,487.10^{-2}$	1,17	$1,436.10^{-2}$	1,27
10 * 10	$1,222.10^{-2}$	1,86	$1,170.10^{-2}$	1,94
12 * 12	$8,523.10^{-3}$	1,98	$7,892.10^{-3}$	2,16
15 * 15	$4,698.10^{-3}$	2,67	$4,131.10^{-3}$	2,90
20 * 20	$1,720.10^{-3}$	3,49	$1,347.10^{-3}$	3,89
39 * 39	$1,472.10^{-4}$	3,68	$9,272.10^{-5}$	4,00
77 * 77	$1,014.10^{-5}$	3,93	$5,903.10^{-6}$	4,05

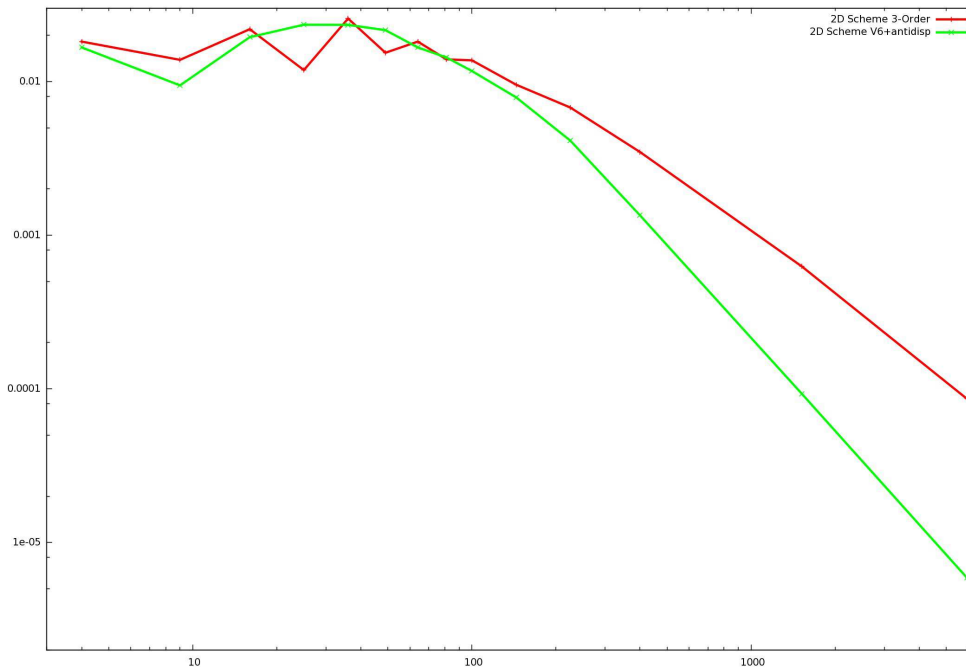


Figure 6.28: Comparaison des courbes de convergence pour les schémas **QUAD** (en rouge) et **V6+antidisp** (en vert).

- Comparaison des ordres de convergence pour la reconstruction quadratique et le schéma V6 antidispersif en maillages non-structurés :

Maillage	Erreur (Quad)	Ordre (Quad)	Erreur (V6+antidisp)	Ordre (V6+antidisp)
535	$3,708.10^{-3}$		$2,170.10^{-3}$	
2057	$5,747.10^{-4}$	2,77	$1,625.10^{-4}$	3,85
8065	$7,701.10^{-5}$	2,94	$1,405.10^{-5}$	3,58
31 937	$1,029.10^{-5}$	2,92	$1,628.10^{-6}$	3,13

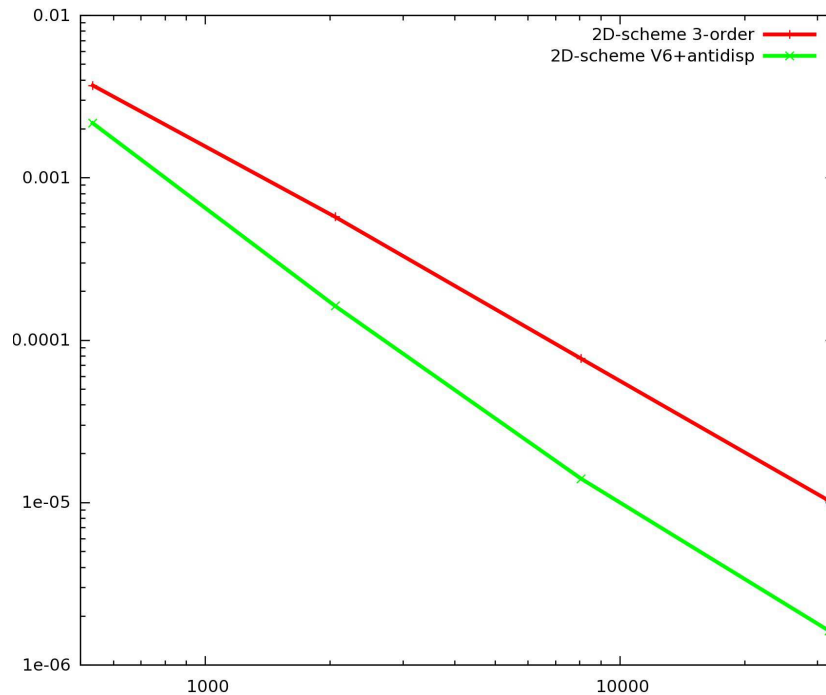


Figure 6.29: Comparaison des courbes de convergence pour les schémas **QUAD** (en rouge) et **V6+antidisp** (en vert).

Les figures 6.28 et 6.29 montrent clairement que le nouveau schéma **CENO-QV6** à une meilleure convergence en maillages structurés ou non-structurés que le schéma **CENO** d'origine. "Malheureusement", il reste en structuré d'ordre 4 et s'approche difficilement de l'ordre 5 comme le montre les tableaux des convergences, ceci est la conséquence des approximations 1D que nous avons faites dans notre étude 2D. Dans le cas non-structuré l'erreur est environ d'ordre 4. Les performances du nouveau schéma avec 6 nœuds par longueur d'onde sont très supérieures à celle du schéma quadratique initial.

### 6.10.3.3 Translation d'une gaussienne (2)

Nous effectuons ici la même étude que pour le sinus mais avec une gaussienne advectée le long d'un maillage structuré de 501x21 nœuds de domaine  $x \in [0 : 314.159]$ ,  $y \in [0 : 12.5413]$ , et nous montrons l'efficacité des corrections antidispersive et diffusive aussi sur cette gaussienne. Nous visualisons dans ce cas-test la solution numérique advectée ( $T=200s$ ,  $CFL=0.1$ ), ainsi que les valeurs d'une coupe du maillage faites pour  $y = \frac{Y_{min} + Y_{max}}{2}$  qui permet de mettre en valeur les changements appliqués par les différentes corrections faites aux schémas CENO de base.

Les conditions limites et initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = 1 + e^{-0.0625((x-X_{min}+X_{max})^2+(y-X_{min}+X_{max})^2)} \end{cases} \quad \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega$$

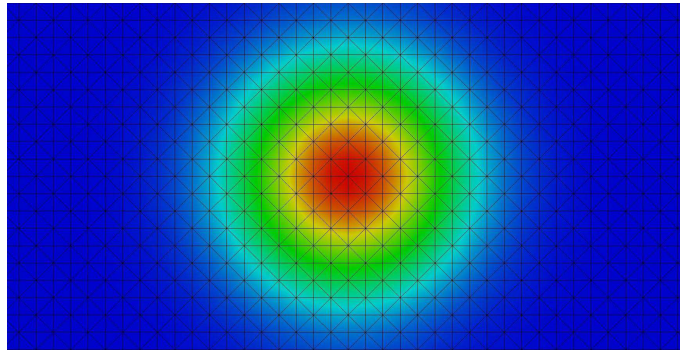


Figure 6.30: Condition initiale sur le maillage structuré ( $T=0s$ ).



Figure 6.31: Solution exacte à  $T=0s$  (à gauche) et à  $T=200s$  (à droite).

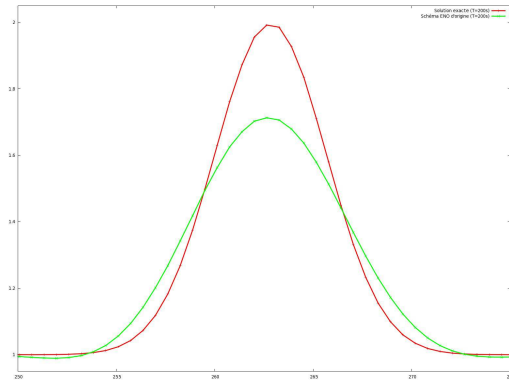


Figure 6.32: Schéma ENO d'origine. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). Nous remarquons facilement que la dissipation importante d'ordre 4 du schéma de base a un impact important sur la solution numérique.

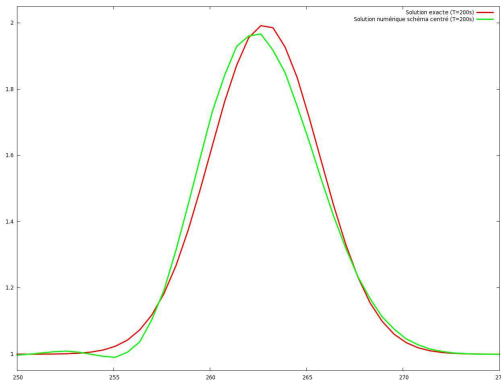


Figure 6.33: Schéma centré. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). Avec la suppression de la viscosité numérique du schéma, le terme de dissipation des flux est nul et le schéma est entièrement dispersif.

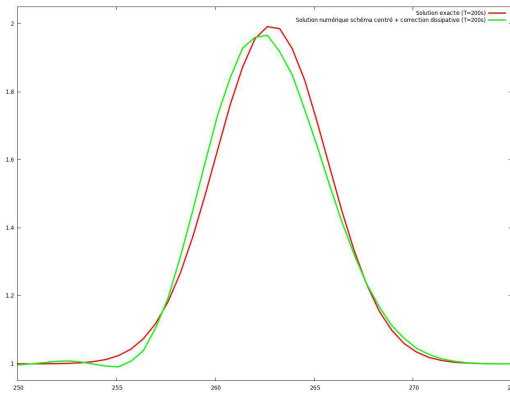


Figure 6.34: Schéma centré avec correction dissipative V6. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). Le correcteur diffusif du sixième ordre ajoute une stabilité au schéma sans introduire une importante erreur d'amplitude comme le fait la diffusion d'ordre 4.

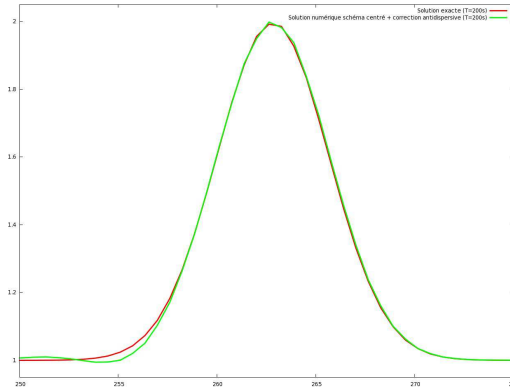


Figure 6.35: Schéma centré avec correction antidispersive. Nous remarquons que la correction dispersive améliore la dispersion du schéma et on obtient alors une erreur de phase moins important, donc une meilleure précision.

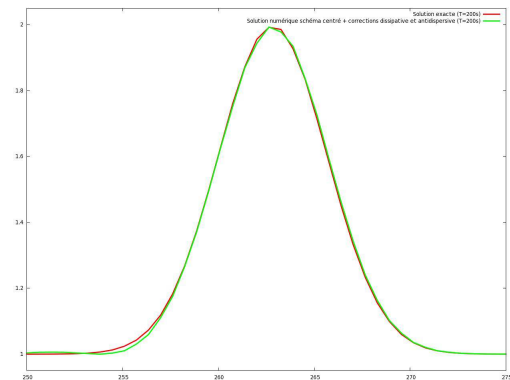


Figure 6.36: Schéma centré avec les deux corrections. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). Le schéma complet **CENO-QV6** avec ses deux corrections aux flux donne une meilleure précision et une dissipation plus contrôlée.

### 6.10.3.4 Translation d'une isovaleur d'une double gaussienne

Enfin, pour clore ce chapitre, nous effectuons un dernier test inspiré des méthodes "Level Set" où une interface est représentée par l'isovaleur de l'inconnue. Il consiste à traduire une isovaleur d'une double gaussienne, et comme précédemment, nous allons comparer l'évolution de cette isovaleur pour les deux schémas **CENO** et **CENO-QV6** sur un maillage structuré de  $21 * 21$  nœuds. L'isovaleur est advectée avec une vitesse horizontale égale à 0,5 (la vitesse verticale est imposée nulle). De plus la gaussienne étant suffisamment éloignée du bord pour ne recevoir aucun impact des effets de bords, nous n'avons pas besoin d'appliquer un traitement sur les parois du domaine.

Le problème se définit de la façon suivante :

$$u_t(x, y, t) + \nabla \cdot (\mathbf{c}u(x, y, t)) = 0.$$

Les conditions limites et initiales sont données par :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = 1 + e^{-75((x-1/2)^2+(y-0.7/2)^2)} + e^{-75((x-1/2)^2+(y-1.3/2)^2)} \end{cases} \quad \text{pour } (x, y) \in \partial\Omega$$

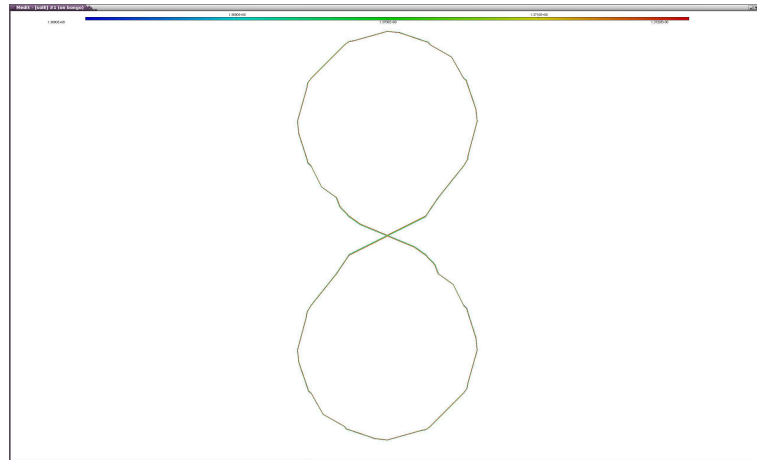


Figure 6.37: Représentation de la condition initiale sur un **maillage 21x21** structuré.

Ce cas-test nous montre toujours une meilleure précision du schéma **CENO-QV6** sur ce maillage très grossier. La figure 6.39 obtenue est bien plus proche de la condition initiale advectée que la figure 6.38. En effet le centre de l'isovaleur devrait être totalement fermé, nous devons obtenir exactement l'isovaleur initiale advectée le long du maillage. La solution a donc été très dégradée par le schéma **CENO** de base.

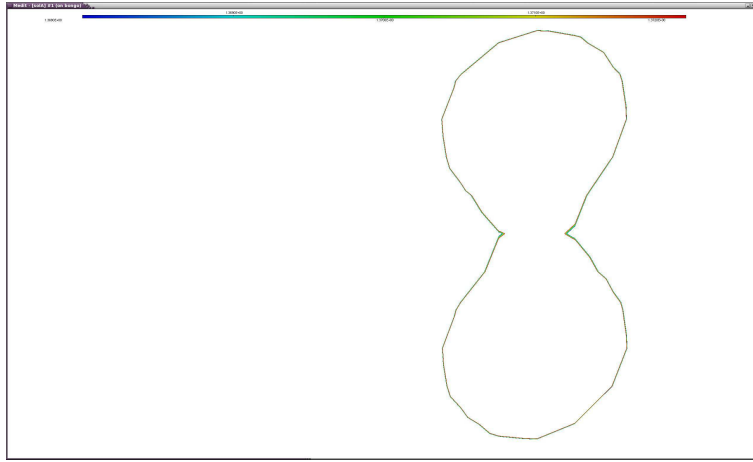


Figure 6.38: Représentation de la solution pour le schéma CENO sur un **maillage 21x21** structuré.

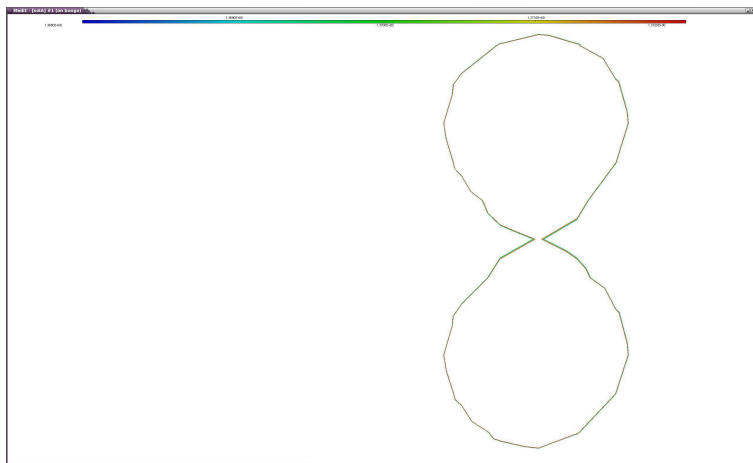


Figure 6.39: Représentation de la solution pour le schéma CENO-QV6 sur un **maillage 21x21** structuré.

#### 6.10.4 Conclusion

- D'après les premiers tests numériques, le schéma quadratique **CENO-QV6** 2D avec correcteur antidispersif et ajout de la dissipation d'ordre 5 se trouve être meilleur que le schéma quadratique d'origine, sur maillages structurés et sur maillages non structurés. Sur certains maillages, on gagne jusqu'à un ordre de précision numérique.
- Mais c'est surtout grâce aux deuxièmes tests numériques de la translation de la double gaussienne, que l'on observe la bien meilleure précision du schéma **CENO-QV6**.
- Le schéma ainsi amélioré est, comme le schéma d'origine, d'ordre 4 sur maillages structurés et d'ordre 3 sur maillages non-structurés, mais possède une précision supérieure au schéma d'origine, notamment sur des maillages grossiers, tels que ceux utilisables en acoustique. Le couplage des méthodes **CENO** et **MUSCL** a donc porté ses fruits.
- L'objectif suivant est d'implémenter le schéma **CENO** ainsi que son amélioration **CENO-QV6** pour la résolution des équations d'Euler en instationnaire.





# Présentation du schéma CENO 2D pour les équations d'Euler bidimensionnelle

---

## Contents

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>147</b>
<b>7.2</b>	<b>Extension du schéma quadratique CENO aux équations d'Euler bidimensionnelles</b>	<b>148</b>
7.2.1	Évaluation des coefficients de la reconstruction quadratique	148
7.2.2	Évaluation des flux	151
7.2.3	Implémentation des corrections antidispersive et diffusive	153
<b>7.3</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>157</b>
7.3.1	Cas-test numéro 1 : advection d'une densité de gaussienne	158
7.3.2	Cas-test numéro 2 : un vortex statique	167
7.3.3	Cas-test numéro 3 : un vortex advecté	176
7.3.4	Cas-test numéro 4 : test du schéma CENO-QV6	184
<b>7.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>188</b>

---

## 7.1 Introduction

La suite de notre étude concerne l'introduction du schéma CENO à reconstruction quadratique dans un solveur volumes-finis 3D appelé *Wolf*. Ce programme codé en langage C, est utilisé dans tout ce chapitre et dans toutes nos recherches à partir de maintenant. Il a été développé au sein du projet Gamma3 à INRIA Rocquencourt. Le schéma volumes-finis intégré dans le solveur *Wolf* est un schéma MUSCL, donc un schéma reposant sur une reconstruction linéaire non conservative de l'inconnue et qui est d'ordre deux dans sa forme de base. On souligne aussi que le solveur *Wolf* comprend des variantes comme le schéma MUSCL-V4 et MUSCL-V6 qui possèdent respectivement une dissipation du quatrième ordre et du sixième ordre. Ce sont des schémas d'ordre élevé sur maillages réguliers, mais qui peuvent vite baisser en ordre de précision sur des maillages irréguliers, ce qui est un problème non négligeable. Une qualité importante du code *Wolf* est qu'il peut effectuer de l'adaptation de maillage stationnaire ou instationnaire en utilisant des maillages irréguliers anisotropes. Une amélioration de la précision sur ce type

de maillage aurait des conséquences importantes sur leur fonctionnement en mode adaptatif, c'est la motivation principale de notre choix dans l'amélioration du code *Wolf* par notre schéma CENO.

Le premier objectif de cette recherche est d'incorporer le schéma CENO dans le solveur *Wolf* afin de faire tourner le solveur avec une reconstruction quadratique de l'inconnue au lieu d'une reconstruction linéaire du MUSCL pour les équations d'Euler bidimensionnelle. On se propose par la suite de faire des calculs adaptatifs avec un estimateur d'erreur d'ordre élevé (voir les chapitres suivant pour plus de précisions). Nous espérons que le schéma quadratique d'origine CENO (ou le schéma modifié avec les deux correcteurs CENO-QV6) sera d'une meilleure qualité que le schéma MUSCL-V4 (ou que le schéma MUSCL-V6) implémenté dans le code *Wolf*, notamment sur les maillages irréguliers.

## 7.2 Extension du schéma quadratique CENO aux équations d'Euler bidimensionnelles

Nous présentons un schéma volumes-finis avec reconstruction quadratique de la solution pour les équations d'Euler bidimensionnelles et pour des maillages structurés et non-structurés formés de triangles.

### 7.2.1 Évaluation des coefficients de la reconstruction quadratique

Résumons l'étape de reconstruction des coefficients du polynôme quadratique par la méthode des Moindres Carrés. La méthode est la même que pour le cas scalaire du chapitre précédent, sauf que le problème ne contient pas une inconnue mais quatre (en deux dimensions), qui sont les variables conservatives des équations d'Euler :  $(\rho, \rho u, \rho v, E)$ . On appellera  $W = {}^t(\rho, \rho u, \rho v, E)$  le vecteur des variables d'Euler en deux dimensions.

La reconstruction des variables se réalise de la manière suivante : sur chaque cellule de contrôle  $C_i$  du maillage et à chaque pas de temps, on cherche à approximer la solution  $W(x, y, t^n) = W(x, y)^n$  en construisant un polynôme quadratique  $P_i^n$ . C'est-à-dire que sur chaque cellule duale du maillage est définie la valeur moyenne de chaque variables conservatives des équations d'Euler, et pour chacune d'entre elles, nous construisons un polynôme quadratique. Sur chaque cellule duale du maillage, cinq polynômes quadratiques sont construits. Par contre, par souci de lisibilité, nous écrivons l'étude théorique de schéma CENO pour les équations d'Euler comme si nous reconstruisions le vecteur  $W$  avec seulement un polynôme, ce qui rendra les notations plus lisibles.

Dès lors comme précédemment, il est nécessaire que les valeurs moyennes du polynôme  $P_i^n$  (que nous écrivons  $\bar{P}_i^{i,n}$ ) et les valeurs moyennes de la solution (que nous noterons  $\bar{W}^{i,n}$ ) sur la cellule  $C_i$  soient égales.

Cette condition s'écrit :  $\bar{P}_{i,i}^n = \bar{W}^{i,n}$ , avec :

$$\begin{cases} \bar{P}_{i,i}^n = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} P_i^n(x,y) dx dy \\ \bar{W}^{i,n} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} W^n(x,y) dx dy \end{cases}$$

Le polynôme  $P_i^n$  à reconstruire sur la cellule duale  $C_i$  est défini par la relation suivante:

$$P_i^n = W_i^n + \sum_{\alpha \in I} c_{i,\alpha}^n [(X - X_{o,i})^\alpha - \overline{(X - X_{o,i})^\alpha}]$$

avec :

$$\begin{cases} \overline{(X - X_{o,i})^\alpha} = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \int_{C_i} (X - X_{o,i})^\alpha dx dy \\ I = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \in [1, 2] \quad \text{est l'ensemble des multi-indices} \\ (X - X_{o,i})^\alpha = (x - x_{o,i})^{\alpha_1} (y - y_{o,i})^{\alpha_2}, \end{cases}$$

où  $(x_{o,i}, y_{o,i})$  est la coordonnée du centre de gravité de la cellule  $C_i$ .

Les 5 coefficients inconnus  $c_{i,\alpha}^n$  de la reconstruction polynômiale sont calculés par la méthode des Moindres Carrés, c'est-à-dire telle que la distance  $L_2$  entre les moyennes sur les cellules  $C_k$ , du polynôme  $\bar{P}_i^{k,n}$  associé à la cellule  $C_i$ , et de la solution  $\bar{W}^{k,n}$ , soit minimale pour chaque sommet  $k$  inclus dans le stencil  $S_i$ .

Ceci conduit à minimiser la fonction suivante (pour tous les détails de calcul, voir le chapitre précédent) :

$$H_k = \sum_{k \in V(i)} (\bar{P}_{k,i}^n - \bar{W}^{k,n})^2,$$

où  $\bar{P}_i^{k,n}$  représente la moyenne du polynôme  $P_i^n$  sur la cellule  $C_k$  :

$$\bar{P}_{k,i}^n = \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \int_{C_k} P_i^n(x,y) dx dy.$$

Par la construction de  $C_k$ , on peut écrire :

$$H_k = \sum_{k \in V(i)} \left( \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T P_i^n(x,y) dx dy - \bar{W}^{k,n} \right)^2,$$

où  $T$  représente les triangles qui composent la cellule  $C_k$ .

La minimisation par les Moindres Carrés de  $H_k$  par rapport aux inconnues  $c_i$  s'écrit avec les équations suivantes :

$$\frac{\delta H_k}{\delta c_i} = 0, \forall i \in 1, 2, \dots, k$$

Ceci conduit alors au système suivant :

$$M_i c_i^n = b_i^n,$$

où  $M_i$  est une matrice symétrique 5x5 défini par :

$$(M_i)_{1 \leq p, q \leq 5} = \sum_{k \in V(i)} D_{i,k,p} D_{i,k,q},$$

où :

$$D_{i,k,\alpha} = \frac{1}{\text{aire}(C_k)} \sum_{T \in C_k} \int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy - \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \int_T (X - X_{o,i})^\alpha dx dy,$$

où  $c_i^n$  est le vecteur colonne des coefficients inconnus :  $c_i^n = (c_{i,(1,0)}^n, c_{i,(0,1)}^n, c_{i,(1,1)}^n, c_{i,(2,0)}^n, c_{i,(0,2)}^n)^t$ .

Le terme de droite  $b_i^n$  est un vecteur colonne dépendant de la moyenne de la solution  $\bar{W}^{k,n}$  sur le voisinage du sommet  $i$  :

$$b_{i,p}^n = \sum_{k \in V(i)} \left( \bar{W}^{k,n} - \bar{W}^{i,n} \right) D_{i,k,p},$$

pour  $p = 1, \dots, 5$ .

Les intégrales des polynômes  $\int_T (X - X_{o,i})^\alpha$  contenues dans la matrice sont calculées par quadrature de Gauss (voir chapitre précédent pour plus de détails sur la quadrature).

De plus, comme le maillage non-structuré utilisé est fixe, la valeur des intégrales ne dépend pas du pas de temps et donc la matrice  $M_i$  doit être calculée une fois pour chaque nœud  $i$ . Son inverse  $M_i^{-1}$  est calculé avec l'algorithme de Bunch-Kaufman au premier pas de temps et est stocké pour les étapes suivantes.

### 7.2.2 Évaluation des flux

L'objectif suivant est d'évaluer le flux à un temps  $t$  sur les interfaces entre la cellule  $C_i$  et ses voisins  $C_k$  pour tout  $k$  dans  $V(i)$ , en utilisant une quadrature de Gauss.

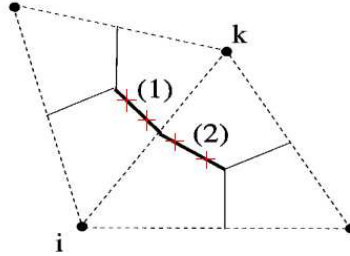


Figure 7.1: Interfaces entre  $C_i$  et  $C_k$  : (1) =  $\partial C_{ik}^{(1)}$  et (2) =  $\partial C_{ik}^{(2)}$ .

On rappelle que le flux sur la frontière d'une cellule peut s'écrire :

$$\int_{\partial C_i} F(W) \cdot \mathbf{n} d\gamma = \sum_{k \in V(i)} \int_{\partial C_i \cap \partial C_k} F(W) \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$

Les interfaces  $\partial C_i \cap \partial C_k$  peuvent être décomposées en deux segments  $\partial C_{ik}^{(1)}$  et  $\partial C_{ik}^{(2)}$  :

$$\int_{\partial C_i \cap \partial C_k} F(W) \cdot \mathbf{n} d\gamma = \sum_{l=1,2} \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} F(W) \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$

La solution  $W$  sur la cellule  $C_i$  est approximée par le polynôme  $P_i$  construit dans la section précédente :

$$\int_{\partial C_{ik}^{(l)}} F(W) \cdot \mathbf{n} d\gamma = \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} F\left(P_i(x, y, t)\right) \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$

Dès lors, l'intégrale sur chaque segment  $\partial C_{ik}^{(l)}$  est évalué par une quadrature de Gauss avec les deux points  $(x_{g_1,ik}^{(l)}, y_{g_1,ik}^{(l)})$  et  $(x_{g_2,ik}^{(l)}, y_{g_2,ik}^{(l)})$ .

Sur le segment de référence  $[-1, 1]$ , les points de Gauss  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  donne une approximation exacte d'un polynôme quadratique avec des poids  $\omega_{1,2} = \frac{1}{2}$ .

Après une transformation affine sur le segment de référence et après avoir appliqué la quadrature de Gauss à deux points, on obtient :

$$\int_{\partial C_{ik}^{(l)}} F(P_i(x, y, t)) \cdot \mathbf{n} d\gamma = \sum_{m=1,2} \omega_m F\left(P_i(x_{g_m,ik}^{(l)}, y_{g_m,ik}^{(l)}, t)\right) \cdot \mathbf{v}_{ik}^{(l)},$$

avec  $\mathbf{v}_{ik}^{(l)} = \int_{\partial C_{ik}^{(l)}} \mathbf{n}(x, y) d\gamma$ .

Comme deux polynômes distincts  $P_i$  et  $P_k$  ont été construits de chaque côté de l'interface, la valeur de la solution sur les points de Gauss sur l'interface n'est pas unique. Cela permet d'introduire un décentrage de type Godunov.

Le flux sur l'interface  $\partial C_{ik}^{(l)}$  est approximé par une fonction flux  $\Phi$  numérique :

$$F\left(P_i(x_{g_m,ik}^{(l)}, y_{g_m,ik}^{(l)}, t)\right) \cdot \mathbf{n} = \Phi\left(P_i(x_{g_m,ik}^{(l)}, y_{g_m,ik}^{(l)}, t), P_k(x_{g_m,ik}^{(l)}, y_{g_m,ik}^{(l)}, t), \mathbf{v}_{ik}^{(l)}\right),$$

où  $\mathbf{v}_{ik} = \int_{\partial C_{ik} \cap \partial C_k} \mathbf{n}(x) dx$  est un vecteur constant puisque le maillage est fixe.

Nous devons choisir le flux numérique  $\Phi$  de telle sorte que le schéma résultant soit stable, par exemple le schéma de Roe :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W_1 + W_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W_2 - W_1),$$

où  $\dot{\gamma} \in [0, 1]$  est un paramètre pour contrôler la viscosité numérique.

### 7.2.3 Implémentation des corrections antidispersive et diffusive

Dans cette section, nous détaillons l'implémentation du schéma CENO-QV6 dans le code C *WOLF*. Nous avons effectué un couplage Fortran95/C pour ne pas avoir à réécrire tout le code CENO en langage C, par souci de gain de temps. Par contre il a bien sûr été obligatoire de coder plusieurs centaines de lignes de code C pour réussir la fusion des deux codes, puis aussi pour y implémenter les améliorations qui ont suivi dans le code. Cette section est surtout destinée à toute personne : nouveau thésard, post-doctorant ou chercheur confirmé, qui voudrait utiliser le code *WOLF* couplé avec le schéma CENO, et qui voudrait comprendre le cheminement des calculs et retoucher le code pour y apporter des améliorations.

#### 1. Pré-processing :

Lors du calcul des données du maillage dans le solveur *WOLF*, nous appelons une subroutine Fortran appelée *preceno.f*, qui récupère en entrée des données du code *WOLF* telles que les nombres de sommet et de triangle du maillage, les coordonnées des nœuds ainsi que les numéros des nœuds qui composent chaque triangle. Cette routine *preceno.f* rend en sortie les deux centres de gravités des triangles ayant une même arête (car il a fallu garder une structure par segment dans l'algorithme), les numéros des segments selon notre propre numérotations du code *CENO* (afin de faire des validations de chaque étape de codage avec le code *CENO* Fortran, car en effet les codes *CENO* et *WOLF* ne renumérotent pas de la même façon les nœuds du maillage), puis la routine *preceno.f* rend aussi au code *WOLF* les centres de gravités des cellules duales, les intégrales des monômes faites par quadrature de Gauss sur chaque sous-triangle composant une cellule et enfin les aires des cellules. Toutes ses données de sortie de la routine *preceno.f* sont des données nécessaires au calcul de la matrice du système Moindres Carrés. Cette étape de pré-processing ne dépendant que du maillage, elle est effectuée une seule fois si le maillage est fixe au cours du temps.

#### 2. Calcul des gradients :

Lors du calcul des gradients dans le code *WOLF* dans la routine *solve.c*, nous appelons une routine Fortran appelée *reconstwolf.f* qui prend comme données d'entrée les quatre variables d'Euler sous forme conservative ( $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$ ,  $E$  en deux dimensions), et rend en sortie les coefficients reconstruits du polynôme quadratique calculés par Moindres Carrés (donc en sortie la routine rend les dérivées premières et secondes des quatre variables Euler), ainsi que les dérivées supérieures directionnelles troisièmes et quatrièmes calculées selon les directions des segments comme expliqué dans le chapitre précédent, grâce à la



configuration "butterfly".

3. Calcul des flux :

On présente ici la partie la plus délicate du solveur. Les flux sont calculés comme dans le code Fortran : on calcule tout d'abord les flux centrés sur les quatre points de Gauss sur chaque interface entre deux cellules, puis on ajoute à ces flux les flux d'antidispersion et de stabilisation calculés au point milieu I des segments, qui sont les deux flux correcteurs étudiés dans le chapitre précédent. Les solveurs de Riemann utilisés ici sont des solveurs de Roe ou HLLC (cf. [Toro 1999]).

La figure 7.2 montre les deux demi-segments  $[IG_1]$  et  $[IG_2]$  qui composent une interface entre deux cellules  $C_A$  et  $C_B$ . Nous représentons aussi les quatre points de Gauss  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$  où sont calculés les flux centrés par la reconstruction quadratique basique. Nous visualisons aussi le point I milieu du segment  $[AB]$  où les flux correcteurs seront calculés. Dans la subroutine "solve.c" du code WOLF, les flux par arête sont calculés dans la

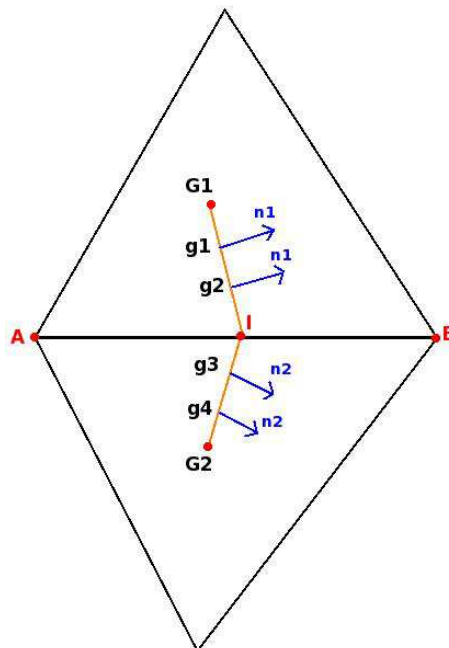


Figure 7.2: Représentation d'une interface entre deux cellules  $C_A$  et  $C_B$  pour le calcul des flux.

subroutine "EdgesFluxes". Nous appelons alors à l'intérieur de cette routine, une subroutine appelée "eno solveHLLC GaussPoint", où nous avons réécrit en langage C toute la partie du calcul de flux par le code CENO-QV6.

Cette subroutine a une structure par segment, c'est-à-dire nous calculons toutes les données requises pour les flux en une boucle sur les arêtes du maillage. Plus précisément, pour une arête donnée du maillage nous calculons : les coordonnées du milieu I de l'interface et des

deux centres de gravités  $G_1$  et  $G_2$ , les coordonnées des points de Gauss  $g_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) et les valeurs des normales sortantes  $n_1$  et  $n_2$ .

Nous transférons aussi dans cette subroutine les valeurs des dérivées premières, secondes, troisièmes et quatrièmes calculées dans la routine *"reconstwolf.f"*, pour ainsi pouvoir calculer les reconstructions polynômiales des variables d'Euler au point I et aux points de Gauss  $g_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), ces reconstructions venant de chaque côté de l'interface c'est-à-dire des cellules gauche  $C_A$  et droite  $C_B$ .

(a) Flux centrés sur les points de Gauss :

Pour calculer les flux centrés aux points de Gauss  $g_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sur l'interface, nous appelons la fonction *"getFluEulerConservative"* qui calculent les flux  $F(W) \cdot \mathbf{n}$  où  $W = (\rho, \rho u, \rho v, E)^t$  est le vecteur des variables conservatives et  $F$  est l'opérateur de convection  $F(W) = (F_1(W), F_2(W))$  avec :

$$F_1(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{pmatrix}, F_2(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vw \\ (E + p)v \end{pmatrix}.$$

Les flux centrés sur les points de Gauss sont alors calculés de la façon suivante:

$$\Phi_{g_i}^{centres} = \frac{F(W_{left}^{g_i}) \cdot \mathbf{n}_i + F(W_{right}^{g_i}) \cdot \mathbf{n}_i}{2},$$

où  $F(W_{left}^{g_i}) \cdot \mathbf{n}_i$  et  $F(W_{droite}^{g_i}) \cdot \mathbf{n}_i$  sont calculés respectivement avec les solutions reconstruites aux points de gauss  $g_i$  par la reconstruction polynômiale quadratique à gauche et à droite de l'interface et  $\mathbf{n}_i$  est le vecteur normal à l'interface au point  $g_i$ .

(b) Flux centrés au point I :

On calcule maintenant la correction antidispersive des flux. Pour cela, nous allons devoir calculer deux flux centrés et les soustraires :

- Nous calculons tout d'abord les flux centrés pour l'état corrigé au point I :  $W^I + \frac{\partial^{(3)}W^I}{\partial \mathbf{t}^{(3)}}$ ,  
où  $\mathbf{t}$  est le vecteur directionnel  $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|}$ .

Ces flux centrés sont alors calculés de la façon suivante :

$$\Phi_{(1)}^{centres} = \frac{F(W_{left}^I + \frac{\partial^{(3)}W_{left}^I}{\partial \mathbf{t}^{(3)}}) \cdot \mathbf{n}_I + F(W_{right}^I + \frac{\partial^{(3)}W_{right}^I}{\partial \mathbf{t}^{(3)}}) \cdot \mathbf{n}_I}{2},$$

où  $W_{left}^I$  et  $W_{right}^I$  sont les solutions reconstruites par la reconstruction polynômiale quadratique sur les cellules  $C_A$  (*left*) et  $C_B$  (*right*),  $\frac{\partial^{(3)}W_{left}^I}{\partial \mathbf{t}^{(3)}}$  et  $\frac{\partial^{(3)}W_{right}^I}{\partial \mathbf{t}^{(3)}}$  représentent respectivement les dérivées troisièmes directionnelles selon la direction  $\mathbf{t}$  calculées par différences finies au nœud A (*left*) et au nœud B (*right*) et  $\mathbf{n}_I$  est le vecteur normal au segment au point  $I$ .

- Nous calculons ensuite les flux sur l'état non corrigé toujours au point milieu I :

$$\Phi_{(2)}^{centres} = \frac{F(W_{left}^I) \cdot \mathbf{n}_I + F(W_{right}^I) \cdot \mathbf{n}_I}{2}.$$

- Enfin les flux centrés antidispersifs au point I s'écrivent :

$$\Phi_I^{antidispersif} = \Phi_{(1)}^{centres} - \Phi_{(2)}^{centres}.$$

(c) Flux décentrés au point I :

Pour calculer les flux de stabilisation au point I, nous devons calculer les flux centrés sur l'état corrigé par la dérivée quatrième directionnelle, et nous soustrairons ces flux au calcul des flux HLLC complet sur le même état corrigé :

- Nous calculons tout d'abord les flux centrés pour l'état corrigé au point  $I$  :  $W^I + \frac{\partial^{(4)}W^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}$ , où  $\mathbf{t}$  est le vecteur directionnel  $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ .

Ces flux centrés sont alors calculés de la façon suivante :

$$\Phi_{(3)}^{centres} = \frac{F(W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{left}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}) \cdot \mathbf{n}_I + F(W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{right}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}) \cdot \mathbf{n}_I}{2},$$

où  $W^I = \frac{W_{left}^I + W_{right}^I}{2}$  est la valeur moyenne en  $I$  des reconstructions quadratiques des solutions reconstruite sur les cellules duales  $C_A$  (*left*) et  $C_B$  (*right*),  $\frac{\partial^{(4)}W_{left}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}$  et  $\frac{\partial^{(4)}W_{right}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}$  représentent respectivement les dérivées quatrièmes directionnelles selon la direction  $\mathbf{t}$  calculées par différences finies au nœud A (*left*) et au nœud B (*right*) et  $\mathbf{n}_I$  est le vecteur normal au segment au point  $I$ .

- Nous calculons ensuite un solveur de Riemann de Roe (ou HLLC) au point  $I$  sur le même état corrigé. Ces flux décentrés s'expriment par :

$$\begin{aligned} \Phi_{Roe}^{decentres} &= \frac{F(W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{left}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}) \cdot \mathbf{n}_I + F(W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{right}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}) \cdot \mathbf{n}_I}{2} \\ &- \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{right}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}} + W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{left}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}}}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right. \\ &* \left. \left| W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{right}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}} - W^I + \frac{\partial^{(4)}W_{left}^I}{\partial \mathbf{t}^{(4)}} \right| \right. \end{aligned}$$

- Enfin les flux de stabilisation diffusifs au point  $I$  s'écrivent :

$$\Phi_I^{stabilisation} = \Phi_{Roe}^{decentres} - \Phi_{(3)}^{centres}.$$

Nous avons donc, par ce jeu de différences de flux centrés et décentrés, calculé les flux d'antidispersion et de stabilisation pour le schéma CENO-QV6.

### 7.3 Tests numériques

Nous passons maintenant aux tests numériques. Les trois premiers cas-tests consistent à valider si le schéma CENO a bien été implémenté dans le code *WOLF* pour la résolution des équations d'Euler bidimensionnelles. Nous advectons tout d'abord une densité définie en tant que gaussienne, puis nous continuons avec un cas-test de vortex statique puis nous ferons avancer le vortex dans un troisième cas-test. Pour chacune des expériences, nous calculons l'ordre de convergence en maillage pour les différents schémas CENO et MUSCL.

Enfin un dernier cas-test réalisé consiste à traduire une gaussienne sur un maillage structuré

afin de vérifier si les corrections antidispersive et diffusive du schéma CENO-QV6 ont bien été implémentées.

### 7.3.1 Cas-test numéro 1 : advection d'une densité de gaussienne

Nous advectionnons ici une gaussienne définie en tant que densité  $\rho$  des variables d'Euler. Les autres variables telles que la vitesse  $(\rho u, \rho v)$  et l'énergie  $E$  sont initialisées comme des constantes, mais varient au cours du temps : toutes les équations d'Euler sont ici prises en compte, on ne se ramène pas à seulement un cas scalaire en imposant la vitesse et l'énergie constante au cours du temps. Pour n'avoir aucune influence du bord, on impose à chaque pas de temps la solution exacte du problème sur les nœuds des parois.

La solution initiale est donnée par :

$$\begin{cases} \rho(x, y, 0) = 1 + \exp\left(-1\left(x - \frac{x_{min} + x_{max}}{4}\right)^2 - \left(y - \frac{y_{min} + y_{max}}{2}\right)^2\right) \\ u(x, y, t) = 0.5 \\ v(x, y, t) = 0 \\ P(x, y, t) = 50 \end{cases}$$

, avec  $(x_{min}, x_{max}) = (0, 10)$  et  $(y_{min}, y_{max}) = (-5, 5)$ .

Telle qu'utilisée dans tous les calculs de cette thèse, on redéfinit l'égalité que nous utilisons pour calculer l'ordre de convergence d'un schéma :

$$\text{Ordre de convergence} = \frac{\log\left(\frac{\text{Erreur-}L^1\text{ pour maillage } N^{\circ 1}}{\text{Erreur-}L^1\text{ pour maillage } N^{\circ 2}}\right)}{\log\left(\frac{\text{nombre-noeuds-pour-maillage-}N^{\circ 1}(Erreur-L^1)^{\frac{1}{d}}}{\text{nombre-noeuds-pour-maillage-}N^{\circ 2}(Erreur-L^1)^{\frac{1}{d}}}\right)}$$

où  $d$  est la dimension de l'espace.

Les conditions initiales et limites sont données par:

- La solution initiale est définie en tant que valeur moyenne par cellule duale du maillage.
- Le domaine est défini par  $x \in [0 : 10]$  et  $y \in [-5 : 5]$ .
- Le maillage est régulier et à une structure drapeau anglais.
- L'erreur  $L_1$  est mesurée sur le domaine  $3.66 < x < 6.66$  et  $-1.7 < y < 1.7$  pour ne pas prendre en compte des effets de bords qui pourraient s'imposer.
- On mesure l'erreur commise sur la densité pour valider l'ordre de convergence, les autres variables étant des constantes, leur erreur  $L_1$  respective est nulle.

- Le schéma en temps est un RK3 à 3 pas de Shu avec un CFL de 0,5.
- On applique sur les bords la solution exacte à chaque pas de temps, définie en tant que valeur moyenne par cellule, qui est donc la valeur moyenne par cellule de la gaussienne initiale translatée en temps, c'est-à-dire  $G(x - u.t, y - v.t, t)$  pour une vitesse égale à  $(u, v)$ .
- Le temps de simulation est de 8 secondes, la gaussienne parcourt ainsi tout le maillage.

Une remarque importante :

Lorsque l'on impose à chaque étage du Runge Kutta la pression exacte et la vitesse exacte sur tout le domaine, le cas-test peut-être assimilé à une simple advection scalaire, et dans ce cas nous obtenons par exemple sur le cas du maillage 101x101 nœuds une erreur identique (pour le schéma MUSCL-V6) jusqu'au cinquième digit.



Figure 7.3: Gaussienne initiale à gauche et après 8 secondes de calcul à droite (maillage 141x141).

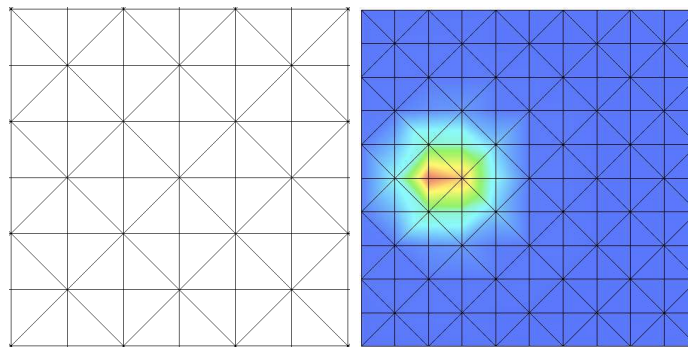


Figure 7.4: Maillage régulier utilisé à gauche et Gaussienne sur maillage 11x11 à droite.

Pour le schéma **CENO basique** :

Nous testons ici le schéma CENO basique : les flux sur une interface sont calculés par une quadrature de Gauss à 2 points sur les 2 segments qui composent cette interface. On applique donc 4 solveurs de Riemann sur les 4 points de Gauss  $g_i = (x_i, y_i)$  de l'interface entre 2 cellules, en utilisant les reconstructions  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  effectuées sur les 2 cellules de part et d'autres de l'interface. Les flux s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W_1 + W_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W_2 - W_1),$$

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$1.0779 \cdot 10^{-0}$	
31x31	$4.8786 \cdot 10^{-1}$	0.76
51x51	$2.1333 \cdot 10^{-1}$	1.66
71x71	$8.6786 \cdot 10^{-2}$	2.71
101x101	$3.2951 \cdot 10^{-2}$	2.75
141x141	$1.2991 \cdot 10^{-2}$	2.79
201x201	$4.5572 \cdot 10^{-3}$	2.95

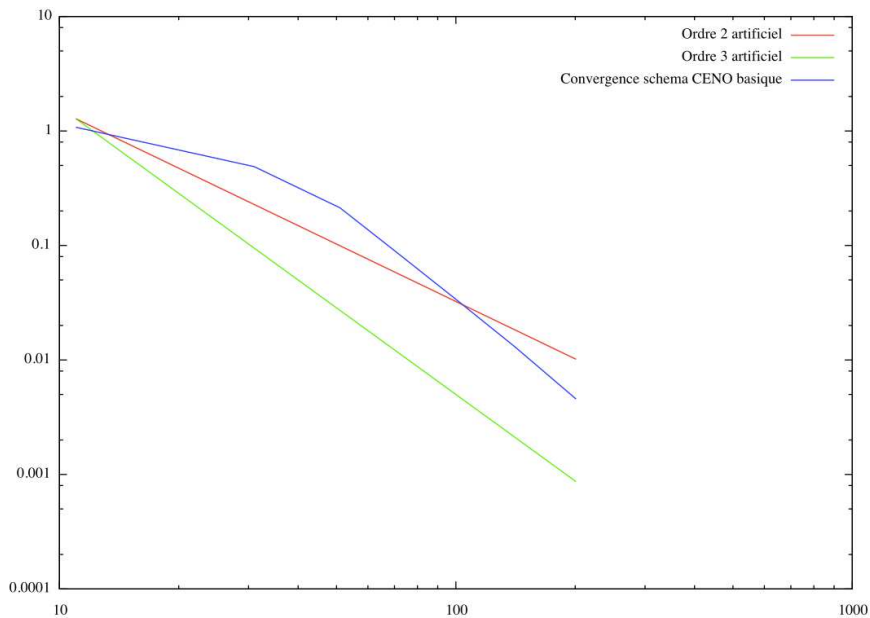


Figure 7.5: Convergence du schéma CENO : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma CENO de base. On remarque que la pente du schéma est d'ordre 3.

Pour le schéma bf CENO centré (donc sans dissipation) :

On impose ici  $\gamma = 0$  dans le solveur de Riemann donc les flux du schéma CENO deviennent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v},$$

où  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  sont les reconstructions quadratiques aux points de Gauss  $g_i$  issues des cellules gauche et droite

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$1.2711 \cdot 10^{-0}$	
31x31	$3.4469 \cdot 10^{-1}$	0.96
51x51	$5.3788 \cdot 10^{-2}$	3.73
71x71	$1.4284 \cdot 10^{-2}$	4.01
101x101	$4.2908 \cdot 10^{-3}$	3.12
141x141	$1.8153 \cdot 10^{-3}$	2.58
201x201	$9.1994 \cdot 10^{-4}$	1.92

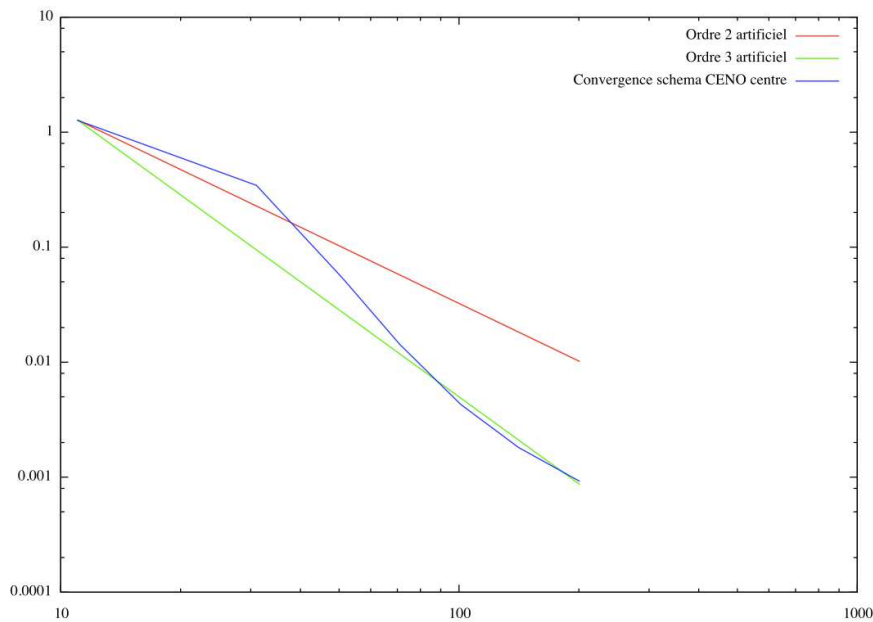


Figure 7.6: Convergence du schéma CENO centré : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma CENO centré. On remarque le manque de stabilité du schéma centré ainsi que sa pente très proche de l'ordre 3. La dégradation de l'ordre de convergence pour les maillages les plus fin est attribuable au défaut de dissipation du schéma qui laisse accroître les erreurs d'arrondis du calcul en virgule flottante.



Pour le schéma **CENO + MUSCL-V6** :

Dans ce test, nous combinons la partie du solveur de Riemann centré avec les reconstructions quadratiques CENO et la partie dissipative du solveur de Riemann calculée par le MUSCL-V6. Donc le solveur de Riemann de ce schéma hybride s'écrit :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W_1' + W_2'}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W_2' - W_1'),$$

où  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  sont les reconstructions quadratiques aux points de Gauss  $g_i$  issues des cellules gauche et droite,  $W_1' = Muscl.V6_{right}(I)$  et  $W_2' = Muscl.V6_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCL-V6 d'ordre élevé gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$1.1805 \cdot 10^{-0}$	
31x31	$3.1899 \cdot 10^{-1}$	1.26
51x51	$5.2723 \cdot 10^{-2}$	3.62
71x71	$1.3214 \cdot 10^{-2}$	4.18
101x101	$3.2631 \cdot 10^{-3}$	3.97
141x141	$9.8232 \cdot 10^{-3}$	3.30
201x201	$2.6538 \cdot 10^{-4}$	3.69

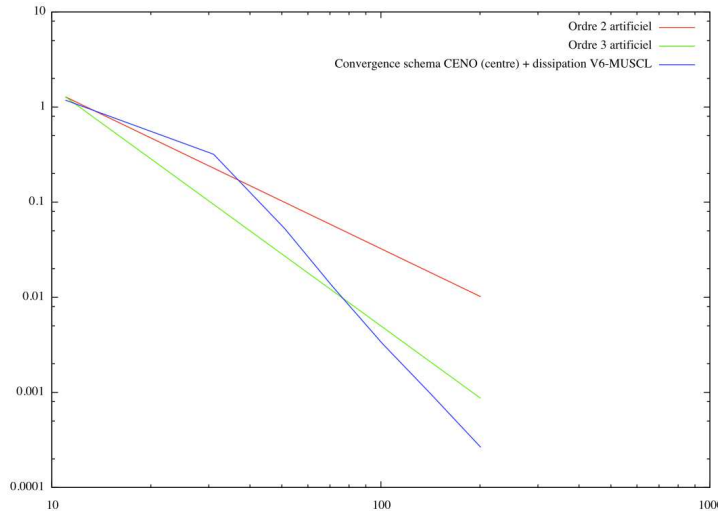


Figure 7.7: Convergence du schéma CENO + MUSCL-V6 : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma CENO + MUSCL-V6. On remarque que la pente du schéma est supérieure à l'ordre 3, on converge probablement vers un ordre 4.

Pour le schéma **MUSCL-V4** :

Nous utilisons ici le schéma MUSCL-V4 avec dissipation du quatrième ordre implémenté d'origine dans le code *WOLF*. Ce test est simplement pour comparer avec ces résultats avec le schéma CENO. Les flux du schéma MUSCL-V4 s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W'_1) + F(W'_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W'_1 + W'_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W'_2 - W'_1),$$

où  $W'_1 = Muscl.V4_{right}(I)$  et  $W'_2 = Muscl.V4_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCL-V4 gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$8.7342 \cdot 10^{-1}$	
31x31	$1.8481 \cdot 10^{-1}$	1.49
51x51	$6.1461 \cdot 10^{-2}$	2.21
71x71	$2.2789 \cdot 10^{-2}$	2.99
101x101	$8.2823 \cdot 10^{-3}$	2.87
141x141	$3.2200 \cdot 10^{-3}$	2.83
201x201	$1.1455 \cdot 10^{-3}$	2.91

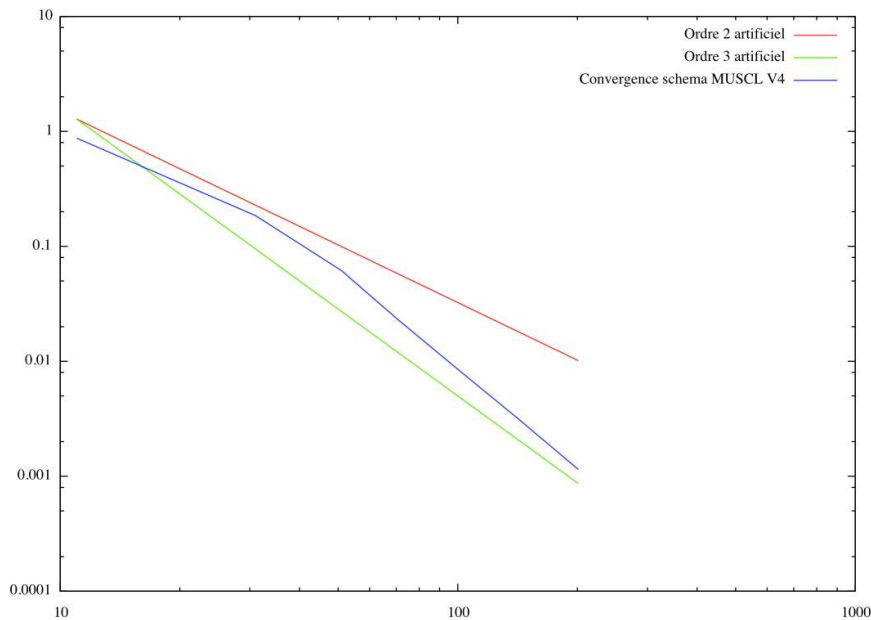


Figure 7.8: Convergence du schéma MUSCL-V4 : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma MUSCL-V4. On remarque que la pente du schéma est d'ordre 3 voire un peu supérieure à 3.

Pour le schéma **MUSCL-V6** :

Nous utilisons ici le schéma MUSCL-V6 avec dissipation du sixième ordre implémenté d'origine dans le code *WOLF*. Ce test est simplement pour comparer avec ces résultats avec le schéma CENO. Les flux du schéma MUSCL-V6 s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W'_1) + F(W'_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W'_1 + W'_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W'_2 - W'_1),$$

où  $W'_1 = Muscl.V6_{right}(I)$  et  $W'_2 = Muscl.V6_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCL-V6 d'ordre élevé gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$6.5982 \cdot 10^{-1}$	
31x31	$4.6402 \cdot 10^{-2}$	2.56
51x51	$6.5955 \cdot 10^{-3}$	3.91
71x71	$1.8053 \cdot 10^{-3}$	3.92
101x101	$8.1700 \cdot 10^{-4}$	2.25
141x141	$4.7066 \cdot 10^{-4}$	1.65
201x201	$2.6538 \cdot 10^{-4}$	1.62

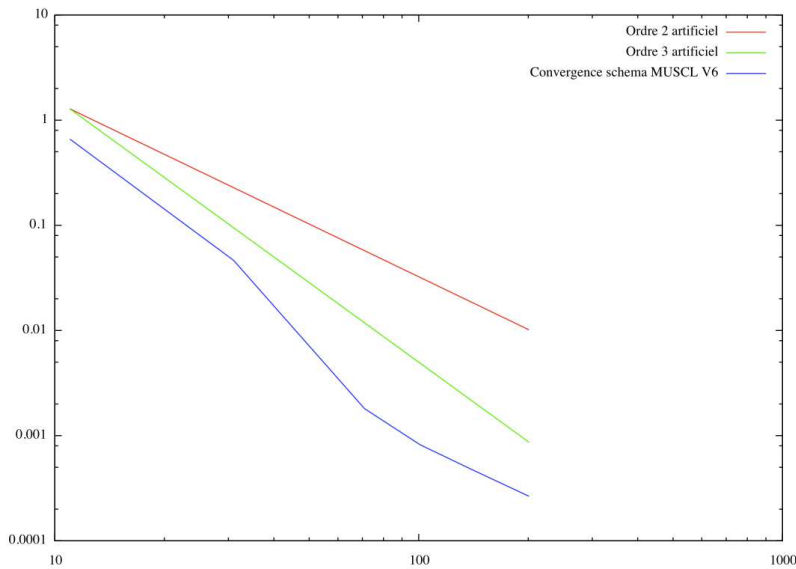


Figure 7.9: Convergence du schéma MUSCL-V6 : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma MUSCL-V6. On remarque que la pente du schéma oscille entre l'ordre 2 et l'ordre 3, peut-être cela est dû à un problème d'implémentation dans la dissipation V6 du schéma MUSCL du code d'origine.

Pour le schéma **MUSCL-V6** avec valeur aux nœuds sur le bord :

On impose cette fois au bord la valeur de la solution par nœuds et non plus la valeur moyenne par cellule, car le schéma MUSCL utilise à l'origine les valeurs par nœuds de la solution et non pas les valeurs moyennes par cellule volumes-finis comme le schéma CENO. Les flux MUSCL-V6 sont définis de la façon suivante:

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W'_1) + F(W'_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W'_1 + W'_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W'_2 - W'_1),$$

où  $W'_1 = Muscl.V6_{right}(I)$  et  $W'_2 = Muscl.V6_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCLV6 d'ordre élevé gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$6.5982 \cdot 10^{-1}$	
31x31	$4.6871 \cdot 10^{-2}$	2.55
51x51	$7.0560 \cdot 10^{-3}$	3.80
71x71	$1.8549 \cdot 10^{-3}$	4.03
101x101	$7.2222 \cdot 10^{-4}$	2.68
141x141	$3.8007 \cdot 10^{-4}$	1.92
201x201	$2.0973 \cdot 10^{-4}$	1.68

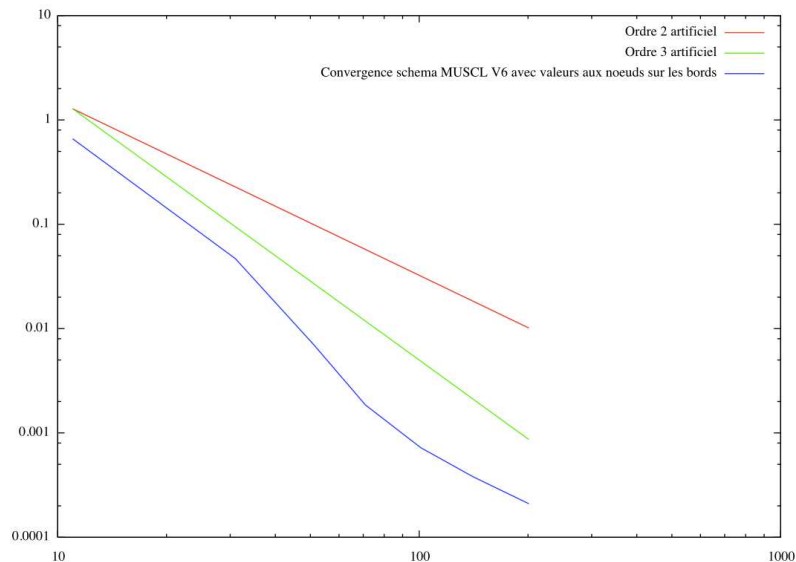


Figure 7.10: Convergence du schéma MUSCL-V6 : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma MUSCL-V6. Mêmes résultats que précédemment, on a un pic à l'ordre 4 puis l'ordre dégénère rapidement.

Voilà une image qui rassemble toutes les courbes des différents schémas, on peut voir :

- Le schéma MUSCL-V6 est le schéma qui a la meilleure précision générale, c'est-à-dire c'est le schéma qui donne les plus petites erreurs  $L_1$  entre la solution numérique et la solution exacte.
- C'est le schéma CENO avec les flux centré et la dissipation du schéma MUSCL-V6 qui donne le plus grand ordre de convergence en maillage (ordre 4).
- Un point mystérieux reste que dès que l'on dépasse les 10 000 nœuds en maillage, le schéma MUSCL devient moins bon en convergence.

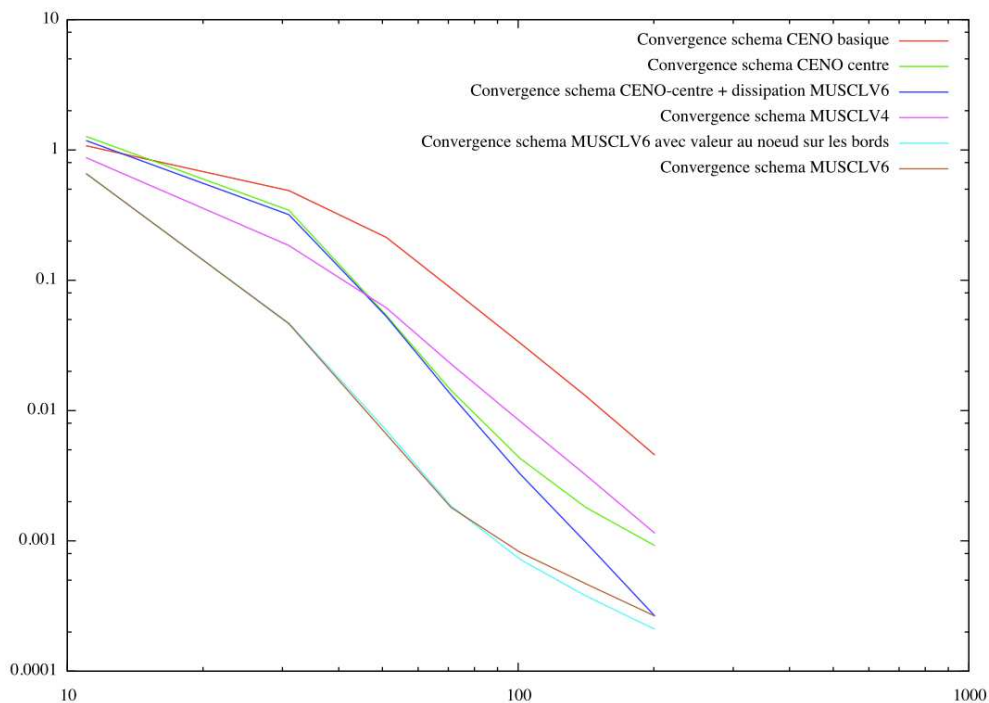


Figure 7.11: Convergence en maillage sur le cas-test d'une Gaussienne pour tous les schémas. En rouge le schéma CENO de base, en vert le schéma CENO centré, en bleu foncé le schéma CENO + MUSCL-V6, en violet le schéma MUSCL-V4, en bleu clair le schéma MUSCL-V6 avec valeurs aux nœuds et marron le schéma MUSCL-V6.

### 7.3.2 Cas-test numéro 2 : un vortex statique

Nous testons ici sur des maillages structurés en drapeau anglais les équations d'Euler en y implémentant les formulations d'un vortex statique. A noter que la littérature (Wiki, etc..) donne de nombreuses définitions du vortex, et ce n'est qu'au quatrième essai que nous avons enfin trouvé une définition viable de ce cas test. Nous utilisons ici les différentes formes des schémas CENO et MUSCL et nous imposons la solution exacte du vortex statique à chaque pas de temps sur les parois. Cette solution exacte est tout simplement le vortex statique d'origine avancé par le schéma en temps. On utilise le schéma en temps RK3 de Shu, un CFL de 0.5 et 8 secondes de temps physique de simulation. Comme précédemment, nous calculons les ordres de convergence en maillages pour les différents schémas et les comparons.

Le vortex statique se définit de cette façon dans le code, avec  $(x_0V, y_0V)$  les coordonnées du centre du vortex,  $r$  son rayon et  $X_{inf}$  signifie la valeur de la variable  $X$  à l'infini ( $X$  se définit ici comme la pression  $P$ , les vitesses  $U, V$ , la densité  $\rho$ , etc.):

```

xoV = 5.d0
yoV = 0.d0

Pi = 3.1415926535897932d0
r = ( (xch-xoV)**2 + (ych-yoV)**2 )**0.5

Rho_inf = 1.
P_inf = 1.
T_inf = 1.
Gama = 1.4
B_gam = 1.
R_crit = 1.
U_inf = 0.
V_inf = 0.

D_inf = 0.5*((B_gam/(2.*Pi))**2)*(Rho_inf/P_inf)

B_inf = 2.*R_crit**2 - D_inf*(Gama-1.)/Gama

E_inf = 4.*R_crit**4-B_inf**2

Fonc = (2.*D_inf)/(E_inf**0.5)
& *(ATAN((2.*r**2+B_inf)/E_inf**0.5)-Pi/2.)

H_inf = Gama/(Gama-1) * (P_inf/Rho_inf)

Pression = P_inf*exp(Fonc)

V_tet = B_gam/(2.*Pi*r)*(r**2/(r**2+R_crit**2))

Vitesse_U = U_inf - V_tet*((ych-yoV)/r)
Vitesse_V = V_inf + V_tet*((xch-xoV)/r)

Rho = Pression*(Gama/(Gama-1.))*(1./(H_inf-0.5*V_tet**2))

```

Figure 7.12: Algorithme du Vortex statique.

Les conditions initiales sont :

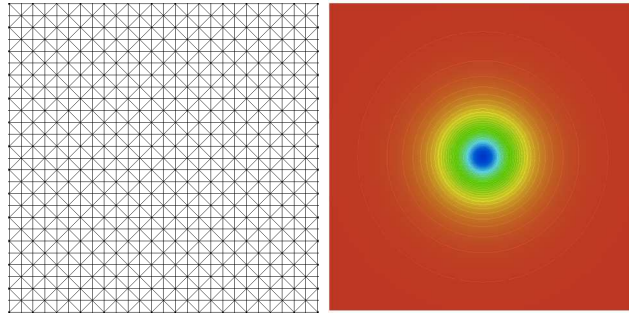


Figure 7.13: Maillage régulier utilisé dans ce cas-test à gauche et densité du vortex à droite.

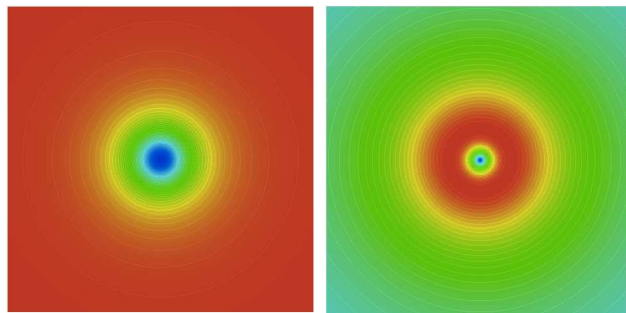


Figure 7.14: Pression du vortex à gauche et son nombre de Mach à droite.

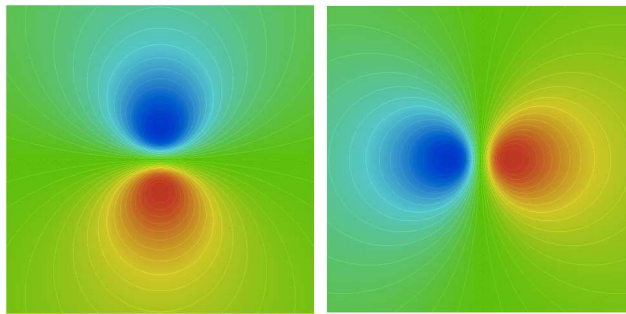


Figure 7.15: Vitesse verticale à gauche et horizontale à droite.

On redéfinit la formulation du calcul de l'ordre de convergence du schéma :

$$\text{Ordre de convergence} = \frac{\log\left(\frac{\text{Erreur-}L^1\text{pourmaillage}N^\circ 1}{\text{Erreur-}L^1\text{pourmaillage}N^\circ 2}\right)}{\log\left(\frac{\text{nombre-noeuds-pour-maillage-}N^\circ 1(\text{Erreur-}L^1)^{\frac{1}{d}}}{\text{nombre-noeuds-pour-maillage-}N^\circ 2(\text{Erreur-}L^1)^{\frac{1}{d}}}\right)}$$

où  $d$  est la dimension de l'espace.

Les hypothèses numériques sont :

- La solution initiale est définie par ses valeurs moyennes sur chaque cellule volume-fini du maillage.
- Le domaine est de longueur  $x \in [0 : 10]$  et  $y \in [-5 : 5]$ .
- Le maillage est régulier et a une structure en drapeau anglais.
- L'erreur  $L_1$  est mesurée sur le domaine  $3.66 < x < 6.66$  et  $-1.7 < y < 1.7$  pour ne pas prendre en compte des effets de bords qui pourraient dominer.
- On mesure l'erreur commise sur la densité pour valider l'ordre de convergence.
- Le schéma en temps est un RK3 à 3 pas de Shu avec un CFL de 0,5.



Pour le schéma **CENO** basique :

Nous testons ici le schéma CENO basique : les flux sur une interface sont calculés par une quadrature de Gauss à 2 points sur les 2 segments qui composent cette interface. On applique donc 4 solveurs de Riemann sur les 4 points de Gauss  $g_i = (x_i, y_i)$  de l'interface entre 2 cellules, en utilisant les reconstructions  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  effectuées sur les 2 cellules de part et d'autres de l'interface. Les flux s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W_1 + W_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W_2 - W_1).$$

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$1.6535 \cdot 10^{-2}$	
31x31	$4.3917 \cdot 10^{-3}$	0.94
51x51	$1.7624 \cdot 10^{-3}$	1.83
71x71	$8.0067 \cdot 10^{-4}$	2.38
101x101	$3.1547 \cdot 10^{-4}$	2.64
141x141	$1.2221 \cdot 10^{-4}$	2.84
201x201	$4.2984 \cdot 10^{-5}$	2.95

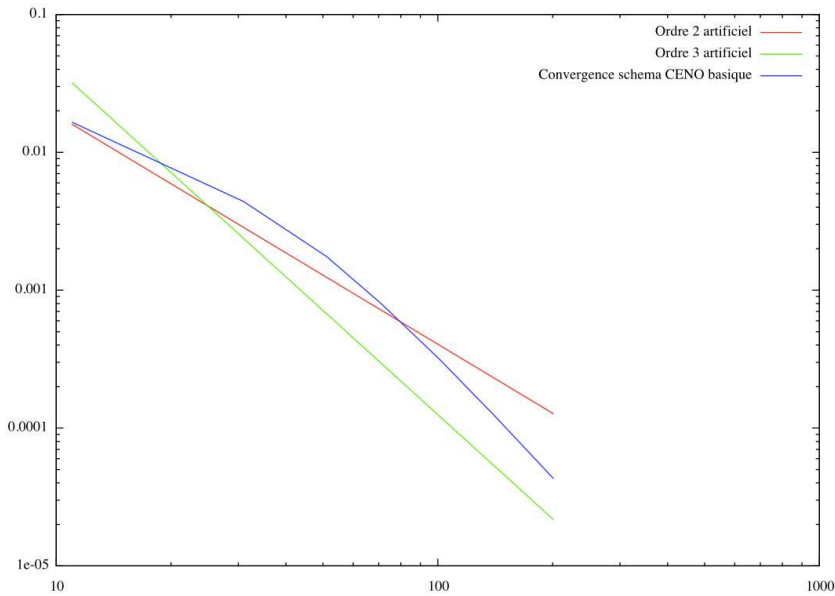


Figure 7.16: Convergence du schéma CENO : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma CENO de base. On remarque que la pente du schéma est d'ordre 3.

Pour le schéma **CENO** centré :

On impose ici  $\gamma = 0$  dans le solveur de Riemann donc les flux du schéma CENO deviennent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v},$$

où  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  sont les reconstructions quadratiques aux points de Gauss  $g_i$  issues des cellules gauche et droite.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$3.5783 \cdot 10^{-3}$	
31x31	$8.8941 \cdot 10^{-4}$	1.34
51x51	$3.2908 \cdot 10^{-4}$	1.99
71x71	$1.5825 \cdot 10^{-4}$	2.21
101x101	$8.0906 \cdot 10^{-5}$	1.90
141x141	$4.2854 \cdot 10^{-5}$	1.90
201x201	$2.1054 \cdot 10^{-5}$	2.00

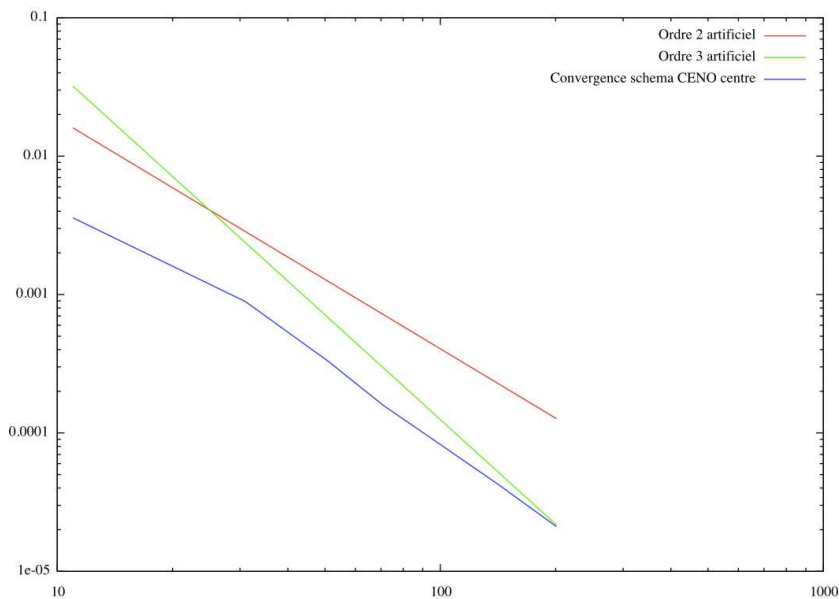


Figure 7.17: Convergence du schéma CENO centré : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma CENO centré. On remarque que sa pente est très proche de l'ordre 2. A nouveau l'ordre se détériore, sans doute en relation avec le manque de dissipation.

Pour le schéma **CENO + MUSCL-V6** :

Dans ce test, nous combinons la partie du solveur de Riemann centré calculée avec les reconstructions quadratique CENO et la partie dissipative du solveur de Riemann calculée par le MUSCL-V6. Donc le solveur de Riemann de ce schéma hybride s'écrit :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W_1' + W_2'}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W_2' - W_1'),$$

où  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  sont les reconstructions quadratiques aux points de Gauss  $g_i$  issues des cellules gauche et droite,  $W_1' = Muscl.V6_{right}(I)$  et  $W_2' = Muscl.V6_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCL-V6 d'ordre élevé gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$3.6038 \cdot 10^{-3}$	
31x31	$1.1972 \cdot 10^{-3}$	1.06
51x51	$3.8993 \cdot 10^{-4}$	2.25
71x71	$1.4639 \cdot 10^{-4}$	2.96
101x101	$5.2439 \cdot 10^{-5}$	3.62
141x141	$2.0106 \cdot 10^{-5}$	2.87
201x201	$7.1757 \cdot 10^{-6}$	2.90

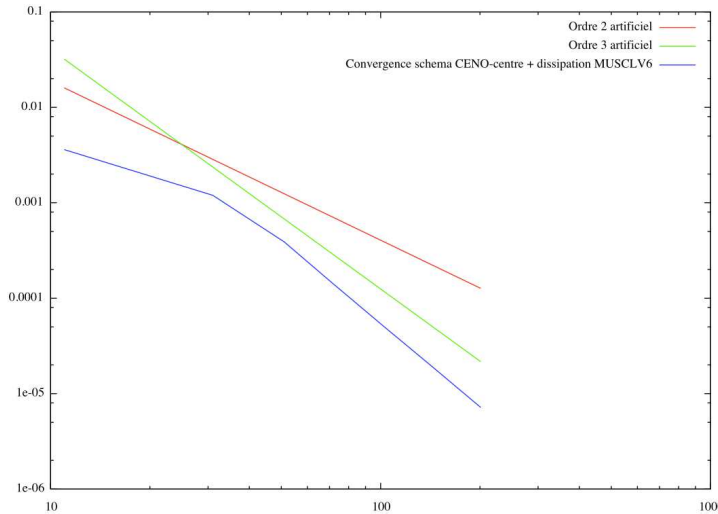


Figure 7.18: Convergence du schéma CENO + MUSCL-V6 : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma CENO + MUSCL-V6. On remarque que la convergence observée pour ce schéma est supérieure à l'ordre 3.

Pour le schéma **MUSCL-V4** :

Nous utilisons ici le schéma MUSCL-V4 avec dissipation du quatrième ordre implémenté d'origine dans le code *WOLF*. Ce test a pour but de comparer avec ces résultats avec le schéma CENO. Les flux du schéma MUSCL-V4 s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W'_1) + F(W'_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W'_1 + W'_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W'_2 - W'_1),$$

où  $W'_1 = Muscl.V4_{right}(I)$  et  $W'_2 = Muscl.V4_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCL-V4 gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$7.4322 \cdot 10^{-3}$	
31x31	$1.4026 \cdot 10^{-3}$	1.61
51x51	$4.1089 \cdot 10^{-4}$	2.47
71x71	$1.6261 \cdot 10^{-4}$	2.81
101x101	$5.8181 \cdot 10^{-5}$	2.92
141x141	$2.1715 \cdot 10^{-5}$	2.95
201x201	$7.5961 \cdot 10^{-6}$	2.96

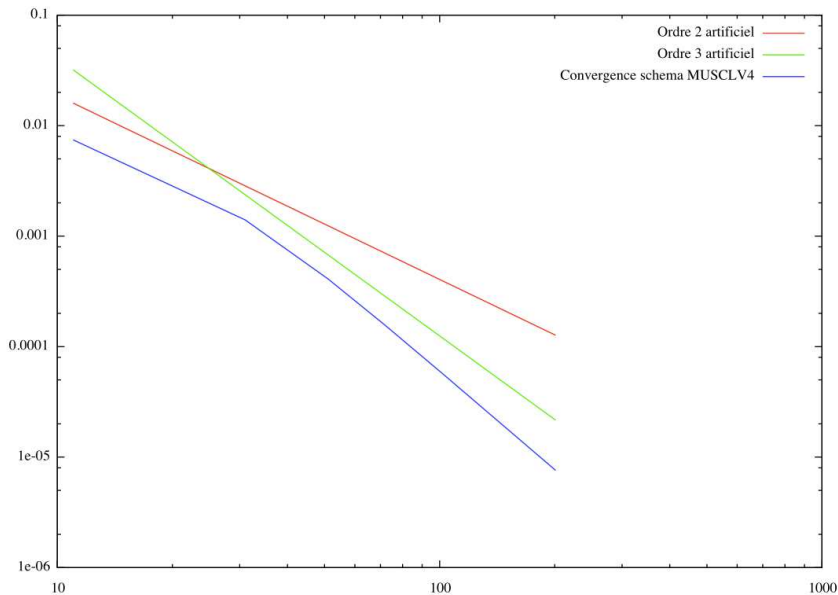


Figure 7.19: Convergence du schéma MUSCL-V4 : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma MUSCL-V4. On remarque que la pente du schéma est supérieure à l'ordre 3.

Pour le schéma MUSCL-V6 :

Nous utilisons ici le schéma MUSCL-V6 avec dissipation du sixième ordre implémenté d'origine dans le code *WOLF*. Ce test est simplement pour comparer avec ces résultats avec le schéma CENO. Les flux du schéma MUSCL-V6 s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W'_1) + F(W'_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W'_1 + W'_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W'_2 - W'_1),$$

où  $W'_1 = Muscl.V6_{right}(I)$  et  $W'_2 = Muscl.V4_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCLV6 d'ordre élevé gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$4.2920.10^{-3}$	
31x31	$3.7644.10^{-4}$	2.35
51x51	$1.0484.10^{-4}$	2.57
71x71	$4.0813.10^{-5}$	2.85
101x101	$1.6043.10^{-5}$	2.65
141x141	$7.3816.10^{-6}$	2.33
201x201	$3.2558.10^{-6}$	2.31

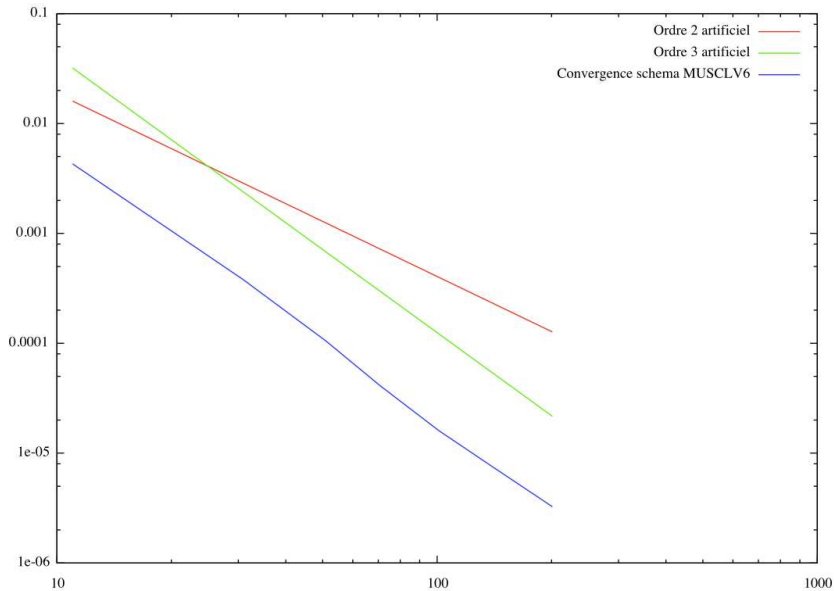


Figure 7.20: Convergence du schéma MUSCL-V6 : en rouge un ordre 2 artificiel, en vert un ordre 3 artificiel et en bleu le schéma MUSCL-V6. On remarque que la pente du schéma est proche de l'ordre 3 et surtout que ce schéma donne des erreurs  $L_1$  très petites par rapport aux autres schémas.

### Conclusion

Après avoir exposé tous les ordres de convergence en maillage des différents schémas pour ce cas-test de vortex statique, nous remarquons que même si les schémas MUSCL-V4 et MUSCL-V6 ont une précision meilleure que le schéma CENO, celui-ci donne un meilleur ordre de convergence.

Sur ce cas-test, le schéma CENO basique montre un ordre 3 qui tend parfois vers un ordre 4, avec une légère amélioration avec la dissipation V6 du schéma MUSCL, et les schémas MUSCL montrent un ordre 2 voir proche de 3 et avec une meilleure précision.

On remarque aussi que plus la taille de maille augmente, plus le schéma CENO donne de meilleurs résultats que les schémas MUSCL.

Dans la figure ci-dessous, on surperpose toutes les convergences de tous les schémas testés pour ce cas-test de vortex statique :

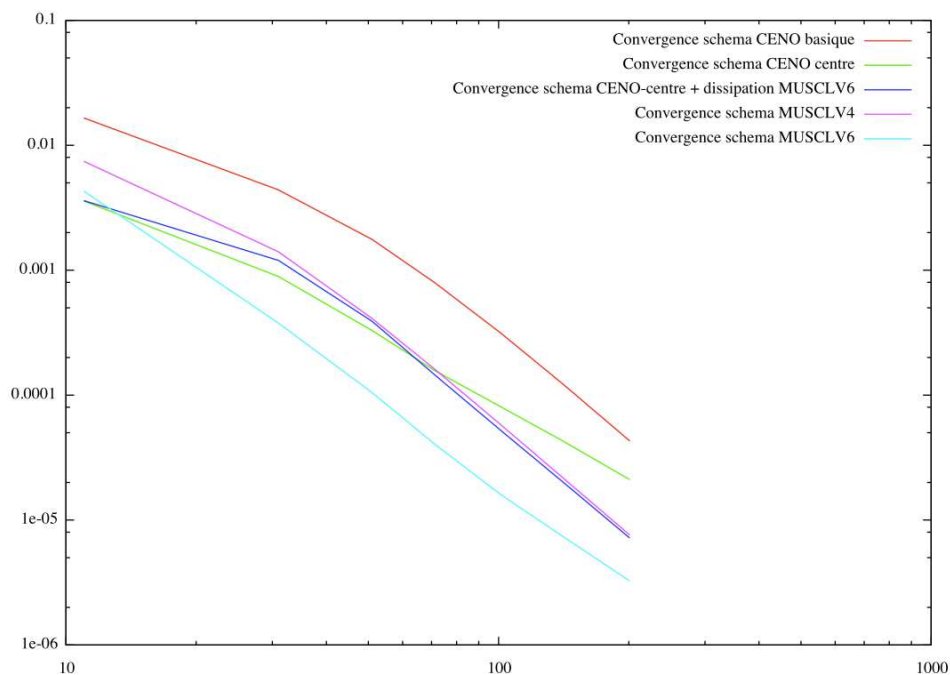


Figure 7.21: Convergence en maillage pour le vortex statique. En rouge pour le schéma CENO basique, en vert pour le schéma CENO centré, en bleu foncé le schéma CENO centré + dissipation MUSCL-V6, en violet le schéma MUSCL-V4 et en bleu clair le schéma MUSCL-V6.

### 7.3.3 Cas-test numéro 3 : un vortex advecté

Nous testons ici les équations d'Euler en implémentant l'advection d'un vortex sur des maillages réguliers en structure drapeaux anglais. Nous utilisons les différentes formes des schémas CENO et MUSCL. Nous reprenons donc le cas-test précédent sauf que la vitesse horizontale passe de 0 à 0,5, la vitesse verticale restant nulle. On utilise les mêmes paramètres que précédemment, à savoir du RK3 de Shu pour le schéma en temps avec un CFL de 0,5, et pour les conditions au bord nous appliquons la solution exacte à chaque pas de temps sur une petite épaisseur au bord, la solution exacte de vortex  $V(x, y, t)$  au temps  $t$  est donnée par  $V(x - 0.5 * t, y - 0.5 * t, t)$ . Nous advectons le vortex pendant **8 secondes** de temps physique.

Le vortex initial a l'allure suivante (maillage 101 \* 101) :

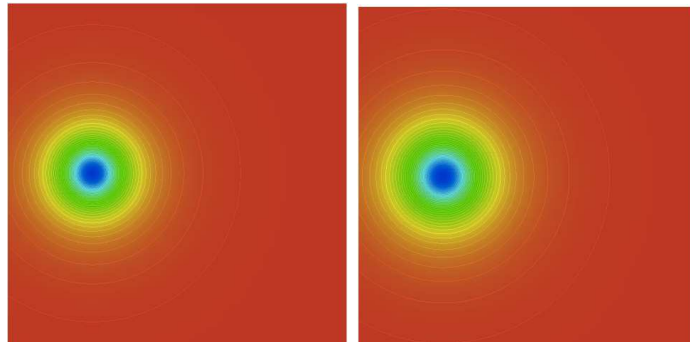


Figure 7.22: Densité initiale à gauche et pression initiale à droite.

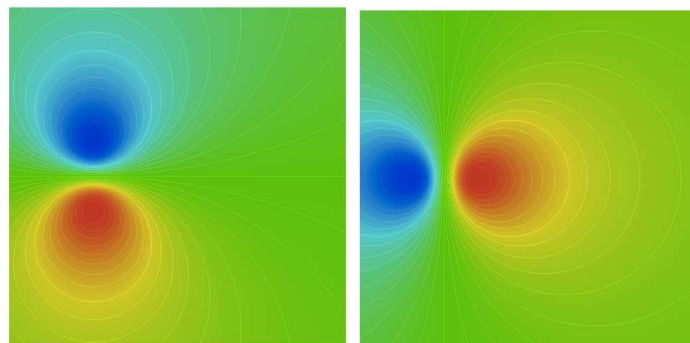


Figure 7.23: Vitesse horizontale à gauche et verticale à droite.

Le vortex après 8 secondes de simulation a l'allure suivante (maillage  $101 * 101$ ) :

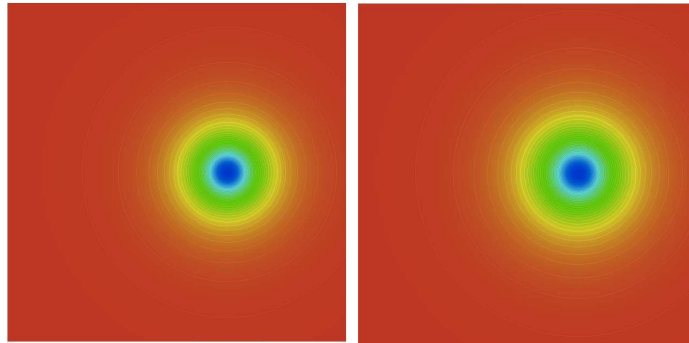


Figure 7.24: Densité à gauche et pression à droite au bout de 8 secondes de calcul.

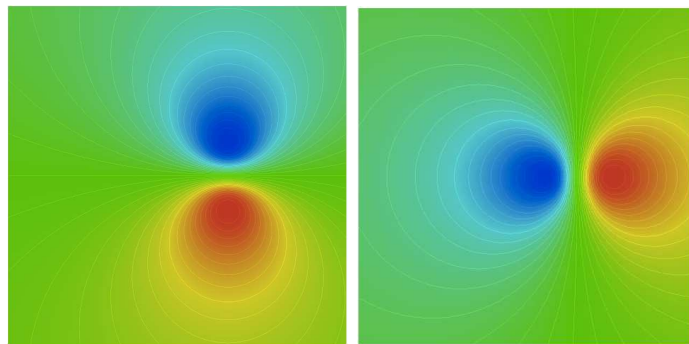


Figure 7.25: Vitesse horizontale à gauche et verticale à droite au bout de 8 secondes de calcul.



Pour le schéma CENO basique :

Nous testons ici le schéma CENO basique : les flux sur une interface sont calculés par une quadrature de Gauss à 2 points sur les 2 segments qui composent cette interface. On applique donc 4 solveurs de Riemann sur les 4 points de Gauss  $g_i = (x_i, y_i)$  de l'interface entre 2 cellules, en utilisant les reconstructions  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  effectuées sur les 2 cellules de part et d'autres de l'interface. Les flux s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W_1 + W_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W_2 - W_1),$$

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$1,0954 \cdot 10^{-2}$	
31x31	$3,4394 \cdot 10^{-3}$	1,12
51x51	$1,8384 \cdot 10^{-3}$	1,26
71x71	$8,2485 \cdot 10^{-4}$	2,41
101x101	$3,5525 \cdot 10^{-4}$	2,39
141x141	$1,5985 \cdot 10^{-4}$	2,39
201x201	$6,6373 \cdot 10^{-5}$	2,48

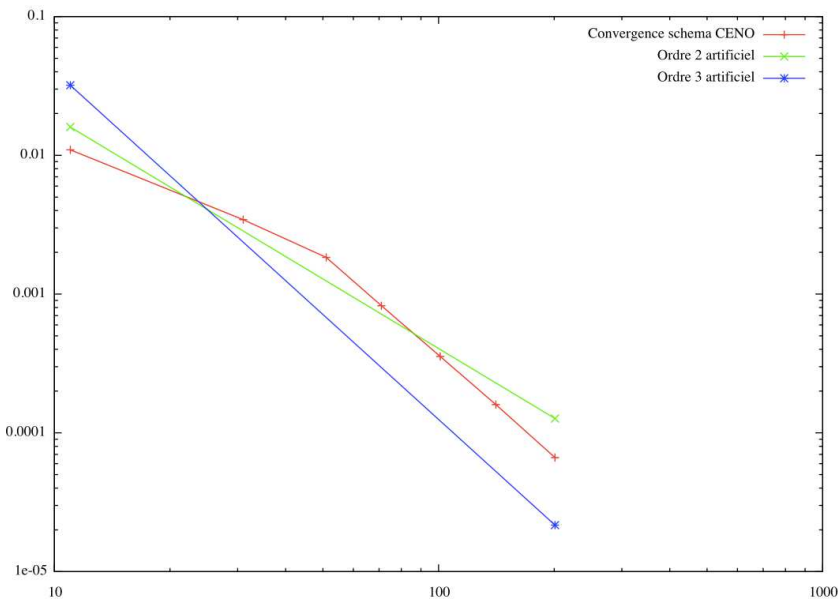


Figure 7.26: Convergence du schéma CENO : en vert un ordre 2 artificiel, en bleu un ordre 3 artificiel et en rouge le schéma CENO de base. On remarque que la pente du schéma est d'ordre 3.

Pour le schéma **CENO** centré (donc sans dissipation) :

On impose ici  $\gamma = 0$  dans le solveur de Riemann donc les flux du schéma CENO deviennent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v},$$

où  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  sont les reconstructions quadratiques aux points de Gauss  $g_i$  issues des cellules gauche et droite

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$3.3132 \cdot 10^{-2}$	
31x31	$1.7256 \cdot 10^{-2}$	0,64
51x51	$6.9764 \cdot 10^{-3}$	1,82
71x71	$3.0490 \cdot 10^{-3}$	2,50
101x101	$1.5001 \cdot 10^{-3}$	2,01
141x141	$8.1233 \cdot 10^{-4}$	1,84
201x201	$4.2052 \cdot 10^{-4}$	1,86

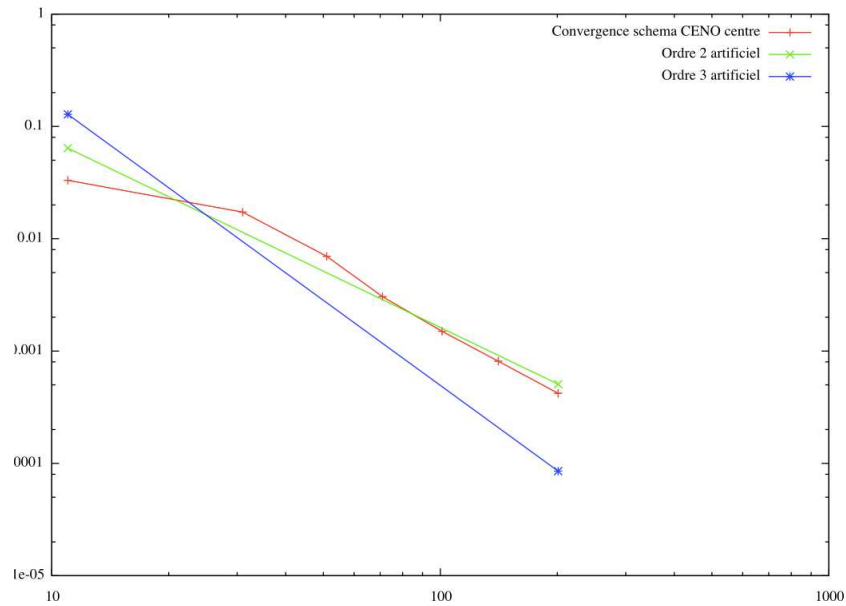


Figure 7.27: Convergence du schéma CENO centré : en vert un ordre 2 artificiel, en bleu un ordre 3 artificiel et en rouge le schéma CENO centré. On remarque le manque de stabilité du schéma centré ainsi que sa pente proche de l'ordre 2.

Pour le schéma **CENO + MUSCL-V6** :

Dans ce test, nous combinons la partie du solveur de Riemann centré calculé avec les reconstructions quadratiques CENO et la partie dissipative du solveur de Riemann calculée par le MUSCL-V6. Donc le solveur de Riemann de ce schéma hybride s'écrit :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W_1) + F(W_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W_1' + W_2'}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W_2' - W_1'),$$

où  $W_1 = P_{left}(g_i)$  et  $W_2 = P_{right}(g_i)$  sont les reconstructions quadratiques aux points de Gauss  $g_i$  issues des cellules gauche et droite,  $W_1' = Muscl.V6_{right}(I)$  et  $W_2' = Muscl.V6_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCL-V6 d'ordre élevé gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$8,6882 \cdot 10^{-3}$	
31x31	$2,2581 \cdot 10^{-3}$	1,30
51x51	$6,3910 \cdot 10^{-4}$	2,53
71x71	$2,0392 \cdot 10^{-4}$	3,45
101x101	$7,3094 \cdot 10^{-5}$	2,91
141x141	$3,8498 \cdot 10^{-5}$	1,92
201x201	$2.3809 \cdot 10^{-5}$	1,35

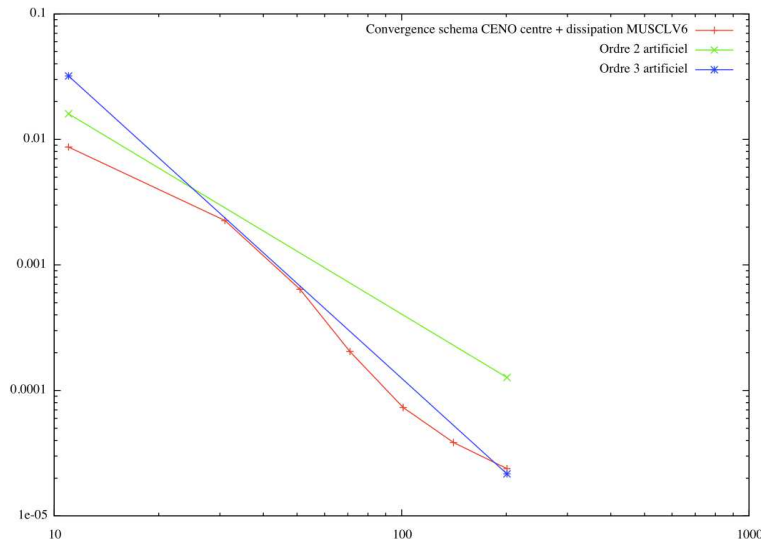


Figure 7.28: Convergence du schéma CENO + MUSCL-V6 : en vert un ordre 2 artificiel, en bleu un ordre 3 artificiel et en rouge le schéma CENO + MUSCL-V6. On remarque que le schéma est peu instable sur ce cas-test et on a du mal à identifier son ordre de convergence.

Pour le schéma **MUSCL-V4** :

Nous utilisons ici le schéma MUSCL-V4 avec dissipation du quatrième ordre implémenté d'origine dans le code *WOLF*. Ce test est simplement pour comparer avec ces résultats avec le schéma CENO. Les flux du schéma MUSCL-V4 s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W'_1) + F(W'_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W'_1 + W'_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W'_2 - W'_1),$$

où  $W'_1 = \text{Muscl.V4}_{right}(I)$  et  $W'_2 = \text{Muscl.V4}_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCLV4 gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$8.0496 \cdot 10^{-3}$	
31x31	$1.4807 \cdot 10^{-3}$	1,63
51x51	$6.6982 \cdot 10^{-4}$	1,59
71x71	$2,7898 \cdot 10^{-4}$	2,64
101x101	$1.2286 \cdot 10^{-4}$	2,32
141x141	$6.2209 \cdot 10^{-5}$	2,03
201x201	$3.2283 \cdot 10^{-5}$	1,85

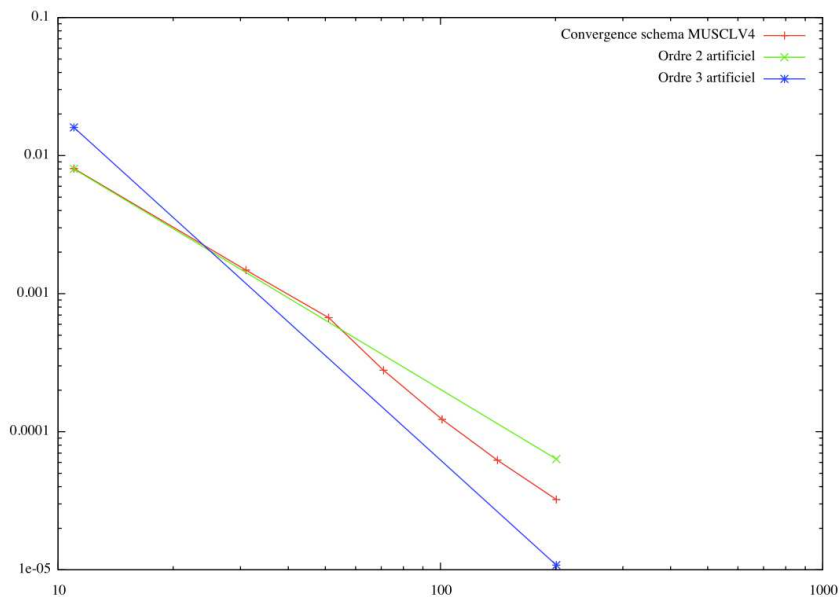


Figure 7.29: Convergence du schéma MUSCL-V4 : en vert un ordre 2 artificiel, en bleu un ordre 3 artificiel et en rouge le schéma MUSCL-V4. On remarque que la pente du schéma est entre l'ordre 2 et l'ordre 3.

Pour le schéma **MUSCL-V6** :

Nous utilisons ici le schéma MUSCL-V6 avec dissipation du sixième ordre implémenté d'origine dans le code *WOLF*. Ce test est simplement pour comparer avec ces résultats avec le schéma CENO. Les flux du schéma MUSCL-V6 s'écrivent :

$$\Phi(W_1, W_2, \mathbf{v}) = \frac{F(W'_1) + F(W'_2)}{2} \cdot \mathbf{v} - \frac{\dot{\gamma}}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{W'_1 + W'_2}{2} \right) \cdot \mathbf{v} \right| (W'_2 - W'_1),$$

où  $W'_1 = Muscl.V6_{right}(I)$  et  $W'_2 = Muscl.V6_{left}(I)$  sont les reconstructions MUSCL-V6 d'ordre élevé gauche et droite au point I milieu du segment.

Maillage (nœuds)	Erreur $L^1$	Ordre de convergence $L^1$
11x11	$4.6428 \cdot 10^{-3}$	
31x31	$5.3697 \cdot 10^{-4}$	2,08
51x51	$1.7677 \cdot 10^{-4}$	2,23
71x71	$8,7858 \cdot 10^{-5}$	2,11
101x101	$5,3913 \cdot 10^{-5}$	1,38
141x141	$3.6958 \cdot 10^{-5}$	1,13
201x201	$2.4492 \cdot 10^{-5}$	1,16

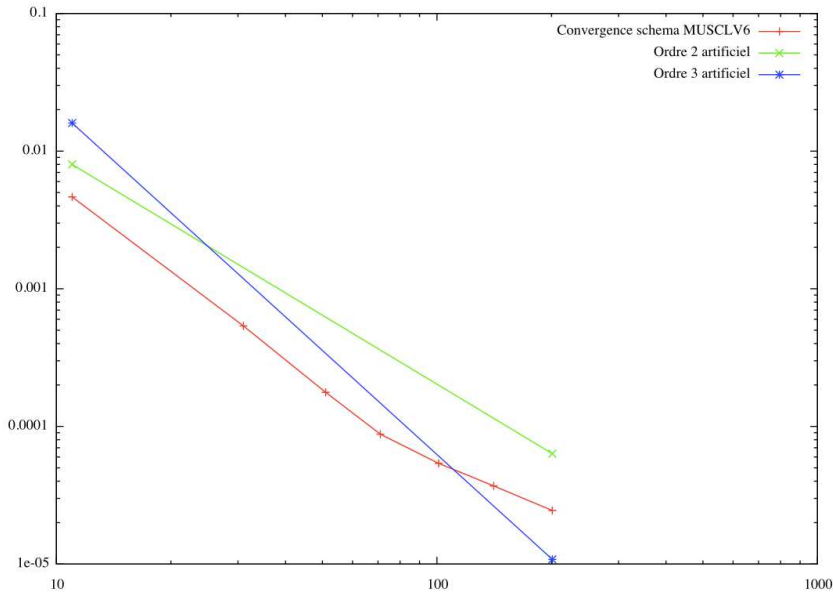


Figure 7.30: Convergence du schéma MUSCL-V6 : en vert un ordre 2 artificiel, en bleu un ordre 3 artificiel et en rouge le schéma MUSCL-V6. On remarque que le schéma est peu instable et on ne peut confirmer son ordre de convergence. L'instabilité vient sans doute de la dissipation V6 mal implémentée dans *WOLF*.

### Conclusion

Ce cas-test de vortex advecté donne des résultats assez différents du cas-test de vortex statique. On dirait bien que les schémas "souffrent" bien plus dès qu'on fait avancer le vortex.

Le schéma CENO reste difficilement à l'ordre 3 dans sa configuration de base, tandis que sa forme centré sans dissipation reste d'ordre 2. L'ajout de la dissipation du schéma MUSCL-V6 donne un schéma instable sur ce cas-test, tandis qu'avec le cas-test statique ce schéma hybride donnait de bons résultats.

Le schéma MUSCL avec dissipation V4 est d'ordre 2 et assez stable, tandis que le schéma avec dissipation V6 devient instable.

Dans la figure ci-dessous, on surperpose toutes les convergences de tous les schémas testés pour ce cas-test de vortex advecté :

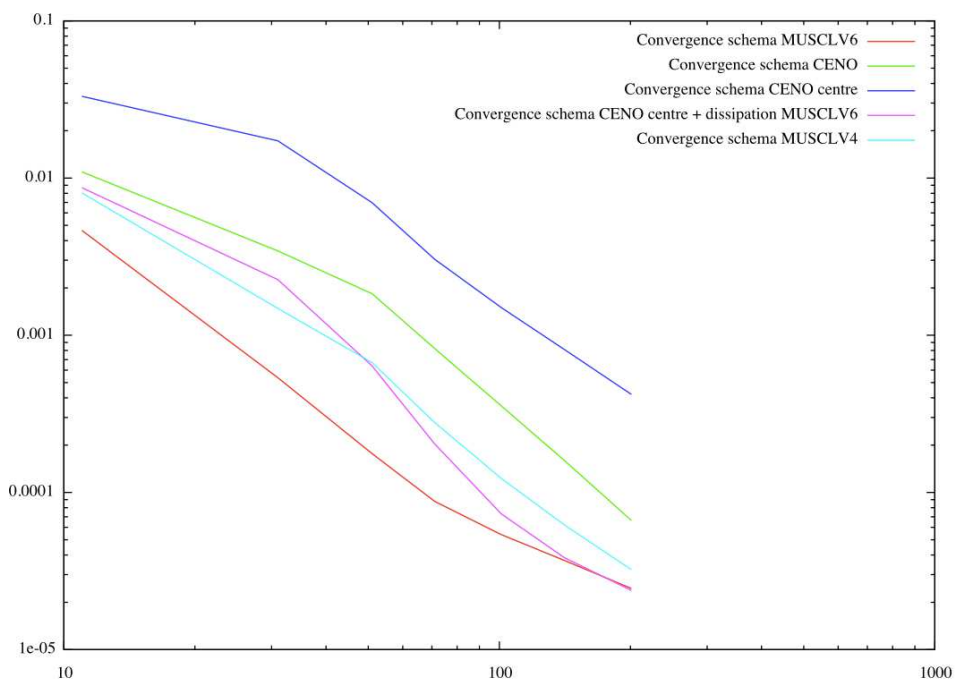


Figure 7.31: Convergence en maillage pour le vortex advecté. En rouge le schéma MUSCL-V6, en vert le schéma CENO basique, en bleu foncé le schéma CENO centré, en violet le schéma CENO centré avec la dissipation du MUSCL-V6 et en bleu clair le schéma MUSCL-V4.

### 7.3.4 Cas-test numéro 4 : test du schéma CENO-QV6

Pour clore ce chapitre, nous voulons tester le schéma CENO amélioré, c'est-à-dire sous sa forme CENO-QV6. Pour cela nous faisons le même test d'advection d'une gaussienne scalaire, en imposant la densité des variables d'Euler comme gaussienne et en fixant les vitesses et l'énergie constante. Fixer ces valeurs permettent de ramener les équations d'Euler à une simple équation d'avection à vitesse constante. On utilise un maillage régulier de  $501 * 21$  nœuds avec une viscosité numérique  $\hat{\gamma}$  fixée à 1.4. Le schéma en temps est un Runge Kutta d'ordre 3 à 3 étages, la condition CFL est fixée à 0.5.

Les conditions limites et initiales sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, y, 0) = \exp\left(-0.0625\left(x - \frac{x_{min} + x_{max}}{2}\right)^2 - 5\left(y - \frac{y_{min} + y_{max}}{2}\right)^2\right) \\ u(x, y, t) = 1 \\ v(x, y, t) = 0 \\ p(x, y, t) = 2,51 \end{array} \right.$$

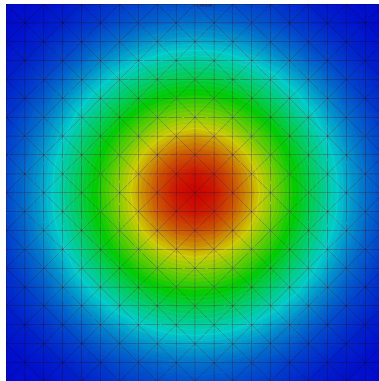


Figure 7.32: Condition initiale sur le maillage structuré  $501 * 21$  nœuds.

Nous effectuons les mêmes calculs que le cas-test scalaire avec le code CENO Fortran du chapitre précédent. Nous voulons ainsi valider une implémentation correcte du code CENO-QV6 dans le code *WOLF* et nous souhaitons voir que les corrections antidispersive et dissipative exercent les mêmes bonnes corrections dans le code *WOLF* que dans le code d'origine CENO Fortran.

Nous visualisons dans les figures suivantes la solution numérique advectée ( $T=200s$ ,  $CFL=0.5$ ), ainsi que les valeurs d'une coupe du maillage effectuée en  $y = \frac{Y_{min} + Y_{max}}{2}$  qui permet de mettre en valeur les changements appliqués par les différentes corrections.



Figure 7.33: Solution exacte à  $T=0s$  (à gauche) et à  $T=200s$  (à droite).

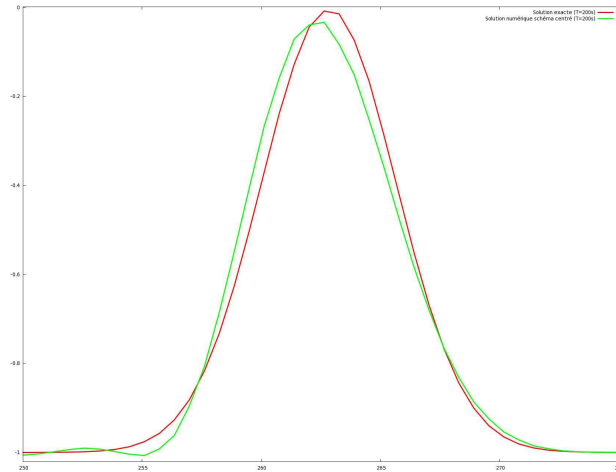


Figure 7.34: Schéma centré. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). Comme nous l'avons vu précédemment, le schéma de base est beaucoup trop dissipatif, dans cette figure nous avons supprimé la partie dissipative du schéma, nous obtenons donc une dissipation très faible de la solution en vert. Mais le schéma ici n'est pas un schéma stable car privé de diffusion.

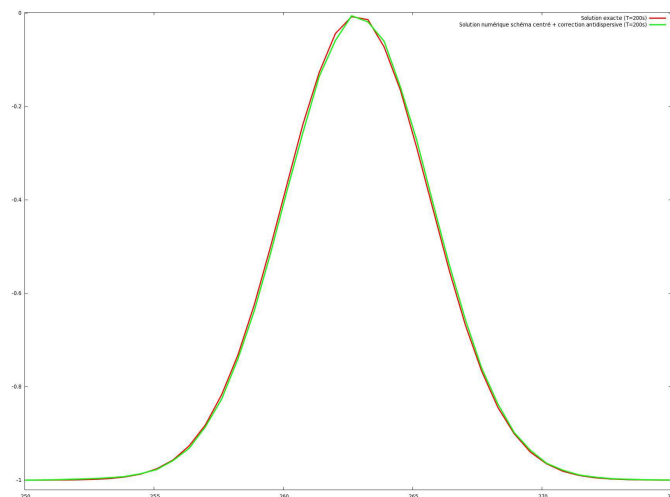


Figure 7.35: Schéma centré avec correction antidispersive. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). L'ajout de notre correcteur antidispersif donne une meilleure précision au schéma, par contre on est toujours privé de diffusion ici, donc de stabilité.



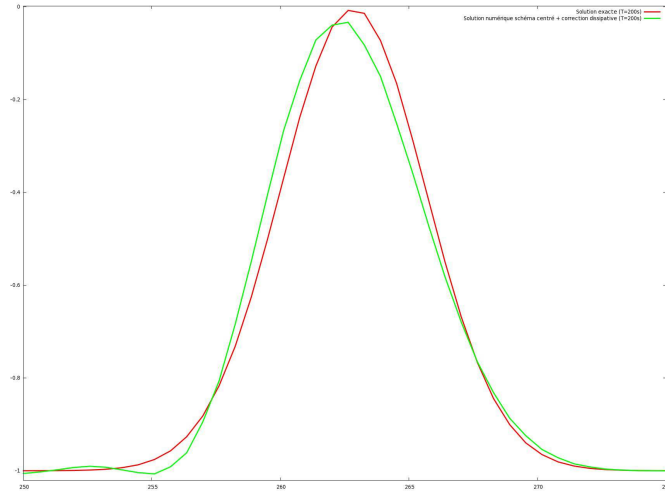


Figure 7.36: Schéma centré avec correction dissipative V6. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). Après la suppression de la viscosité numérique et l'ajout de notre correction dissipative du sixième ordre, l'erreur d'amplitude est beaucoup plus faible que le schéma de base, cette nouvelle dissipation a donc un meilleur impact sur le schéma.

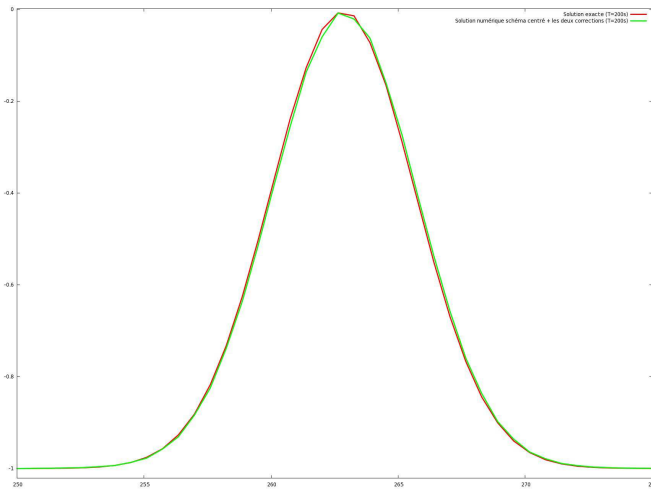


Figure 7.37: Schéma centré avec les deux corrections. Solution exacte (rouge) et numérique (vert). Cette figure montre clairement que les deux corrections faites sur les flux ont un bon impact sur la solution numérique, on a gagné en précision par le correcteur antidispersif et on a une meilleure amplitude par le correcteur diffusif.

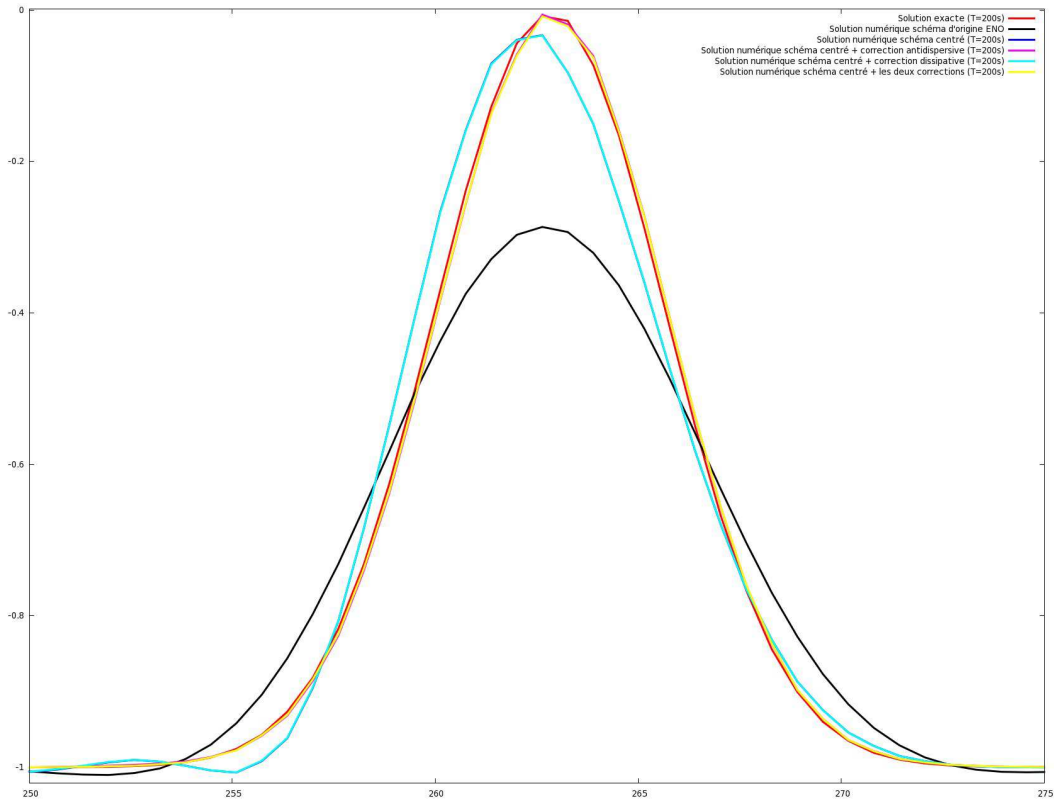


Figure 7.38: Superposition des coupes pour les différents schéma. En rouge la solution exacte, en noir la solution numérique pour le schéma d'origine CENO, en bleu foncé le schéma CENO centré, en violet le schéma centré avec la correction antidispersives, en bleu clair le schéma centré avec la correction dissipative et en jaune le schéma centré avec les deux correcteurs. On voit clairement que le schéma de base (en noir) est beaucoup trop dissipatif et moins précis que le nouveau schéma CENO-QV6 (en jaune) qui a une meilleure précision et un meilleur contrôle de sa dissipation, et qui donne une solution numérique beaucoup plus proche de la solution exacte.

## 7.4 Conclusion

- Dans ce chapitre, nous avons implémenté le schéma à reconstruction quadratique CENO dans le solveur numérique du code *WOLF* pour la résolution des équations d'Euler bidimensionnelles.
- Un premier cas-test sur l'advection d'une gaussienne en maillages structurés montre que le schéma CENO est d'ordre 3 et même d'ordre 4 lorsqu'on utilise la dissipation du sixième ordre du schéma MUSCL à la place de la dissipation du quatrième ordre du schéma CENO dans sa forme basique.
- Le deuxième cas-test sur un vortex statique en maillages structurés nous donne toujours un schéma quadratique d'ordre 3 qui tend vers l'ordre 4 sur certains calculs avec la dissipation V6 du schéma MUSCL.
- Le troisième cas-test sur le même vortex mais cette fois advecté donne un schéma CENO qui reste difficilement à l'ordre 3, tandis que l'utilisation de la dissipation V6 du MUSCL à la place de la dissipation V4 du CENO d'origine donne un schéma instable.
- Le dernier cas-test donne de bons espoirs pour l'implémentation du schéma CENO-QV6, avec dissipation du sixième ordre calculée avec les coefficients du polynôme quadratique, sur cette advection de gaussienne.
- L'objectif du chapitre suivant est la création et l'implémentation de limiteurs pour le schéma CENO afin de pouvoir effectuer des cas-tests qui contiennent des discontinuités et des chocs.

# Limiteurs pour le schéma CENO

---

## Contents

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>189</b>
<b>8.2</b>	<b>Schéma positif et schéma LED pour des lois de conservations scalaires non-linéaires</b>	<b>190</b>
8.2.1	Critère de positivité/LED pour des volume-finis	191
8.2.2	Schéma volumes-finis d'ordre un	192
8.2.3	Limiteurs pour les schémas MEV et CENO	193
8.2.4	Le principe du maximum pour le schéma CENO-POS	197
<b>8.3</b>	<b>Schéma CENO-POS à masse volumique positive</b>	<b>199</b>
<b>8.4</b>	<b>Calcul des flux décentrés avec les limiteurs CENO d'ordre élevé</b>	<b>200</b>
<b>8.5</b>	<b>Applications</b>	<b>201</b>
<b>8.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>208</b>

---

## 8.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de discuter de la formulation d'une version de notre schéma CENO centré-sommet préservant la positivité de la masse volumique. Pour cela nous utiliserons la méthode des limiteurs et la théorie TVD dont le développement initial remonte aux années 70 et 80. Pour les équations d'Euler, Perthame *et al.* ([Perthame 1992], [Perthame 1996]) ont proposé des schémas de second ordre qui conservent la positivité de la température et de la masse volumique. On peut citer également les travaux de [Linde 1998] et le workshop [Venkatakrishnan 1998]. Les schémas non-oscillatoires ([A. Harten 1987],[Cockburn 1989]) proposent des approximations d'ordre élevé applicables pour des nombreux problèmes. Néanmoins, ils ne satisfont pas strictement les propriétés de monotonie et de positivité, ce qui reste une limitation importante pour des simulations raides, plus particulièrement en relation avec des écoulements très hétérogènes (voir par exemple [Abgrall 1996], [Murrone 2005]).

Parmi les différentes modalités pour construire des schémas positifs de second ordre, la formulation MUSCL, introduite par Van Leer dans [Leer 1979] pour la méthode des volumes-finis, est particulièrement attractive. Elle est basée sur l'application des méthodes de Godunov aux valeurs de l'écoulement résultants d'une interpolation d'ordre élevé sur la cellule. De ce point de vue, le schéma MUSCL est une version préliminaire de la méthode ENO. L'avantage de la méthode MUSCL est sa modularité, et la possibilité d'augmenter la précision du schéma en

améliorant la reconstruction par cellule; il a été démontré qu'elle est TVD pour le cas linéaire 1D (voir [Sweby 1984]). Les dérivations du schéma MUSCL d'ordre deux centré-sommet appliquées aux maillages non-structurés sont apparues vers les années 80 (voir [Fezoui 1989b]). La positivité des versions d'ordre un pour des modèles d'advection remonte à [Baba 1981]. Les problématiques de robustesse pour les versions de second ordre n'ont pas été étudiées avant l'introduction de la "dérivée du triangle décentrée" par [B. Stoufflet 1996] qui a été appliquée avec succès pour le calcul des écoulements raides à grand nombre de Mach. Une analyse mathématique complète pour la problématique de robustesse a été formulée dans [Cournède 2006] (à voir aussi les discussions dans [Fezoui 1989a] et [Arminjon 1993]).

La positivité des schémas centrés-sommet a été étudiée par très peu d'auteurs. Considérant des schémas qui ne sont pas de type volumes-finis, une limitation basée-élément est introduite par Deconinck *et al.* [Deconinck 1993] pour des approximations MDHR (Multi-Dimensional High Resolution); ceci conduit à la positivité pour l'advection. La positivité d'une version triangulaire centrée-sommet du schéma de Nessyahu-Tadmor a été démontrée dans [Arminjon 1999]. Concernant les méthodes authentiques volumes-finis impliquant des interpolations par arête et des limitations, des améliorations pour des écoulements stationnaires avec démonstrations dans le cas linéaire strictement ont été proposées dans [Piperno 1998]. Dans [Jameson 1993], Jameson propose un schéma LED (Local Extremum Diminishing) basé sur la "dérivée du triangle décentrée".

Dans ce chapitre, nous adaptons les méthodes de [Cournède 2006] pour construire deux nouveaux schémas basés sur le schéma CENO étudié dans les chapitres précédents.

Le premier schéma noté CENO-LIM est quasi d'ordre trois dans la mesure où, dans les zones d'inactivité des limiteurs, il est identique à la version non-limité du schéma CENO précis à l'ordre trois. Nous n'avons pas de preuve que ce schéma satisfait à une condition de positivité mais son comportement en présence de discontinuités semble satisfaisant.

Nous spécifions un deuxième schéma noté CENO-POS qui sauvegarde la positivité de la masse volumique, héritant cette propriété du schéma MUSCL positif, mais de précision au mieux deux.

On va tout d'abord examiner le principe du maximum pour une loi de conservation scalaire résolue par le schéma CENO, ensuite nous introduirons une version du schéma CENO qui préserve la positivité de la masse volumique pour les équations d'Euler.

## 8.2 Schéma positif et schéma LED pour des lois de conservations scalaires non-linéaires

Cette section rappelle quelques résultats existants utiles. On garde le critère usuel TVD/LED préférablement à des critères de positivité plus faibles afin d'examiner également le principe du maximum.

Soit une loi de conservation scalaire non-linéaire sous forme d'Euler pour l'inconnue  $U(\mathbf{x}, t)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{F}(U(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (8.1)$$

où  $t$  symbolise le temps,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$  est la coordonnée spatiale et  $\mathcal{F}(U) = (F(U), G(U))^t$ . Sous certaines suppositions classiques [Godlewski 1996], la solution  $U$  satisfait le *principe du maximum* qui, pour simplifier, s'écrit sur la totalité de l'espace:

$$\min_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, 0) \leq U(\mathbf{x}, t) \leq \max_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}, 0) \quad (8.2)$$

### 8.2.1 Critère de positivité/LED pour des volume-finis

Le domaine de calcul est supposé partitionné en un nombre défini de cellules. La fonction  $U$  mentionnée précédemment est discrétisée sous forme d'une fonction constante par cellule, sa moyenne sur la cellule numéro  $i$  est noté  $U_i$ .

Supposant que les nœuds du maillage sont numérotés, on appelle  $U_i$  la valeur au nœud  $i$ . On rappelle maintenant la positivité pour un schéma explicite d'intégration temporelle (la démonstration est immédiate).

**LEMME 1.** *Un critère de positivité: Supposons qu'une intégration temporelle explicite de premier ordre pour l'équation (8.1) est de la forme suivante:*

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = b_{ii}U_i^n + \sum_{j \neq i} b_{ij}U_j^n, \quad (8.3)$$

où tous les  $b_{ij}$ ,  $j \neq i$ , sont non-négatifs et  $b_{ii} \in \mathbb{R}$ . Alors il peut-être démontré que le schéma explicite précédent préserve la positivité sous la condition suivante de pas de temps:  $\Delta t$ :  $b_{ii} + \frac{1}{\Delta t} \geq 0$ .

**Remarque:** Sous une restriction probablement différente sur  $\Delta t$ , une discrétisation temporelle explicite d'ordre élevé peut encore préserver la positivité, voir [Shu 1988].  $\square$

Une autre formulation du schéma reposant sur sa forme incrémentée remonte à Harten [Harten 1983]. Elle a été utilisé par Jameson dans [Jameson 1993] pour définir des schémas Local Extremum Diminishing (LED) (à voir aussi [Godlewski 1996]). On rappelle par la suite

la théorie introduite par Jameson sur les schémas LED dans le cas d'intégration temporelle explicite:

**LEMME 2.** *Un critère LED [Jameson 1993]: Supposons qu'une intégration temporelle explicite d'ordre un pour l'équation (8.1) s'exprime sous la forme:*

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \sum_{k \in V(i)} c_{ik}(U^n) (U_k^n - U_i^n). \quad (8.4)$$

avec  $c_{ik}(U^n) \geq 0$ , et où  $V(i)$  symbolise l'ensemble des voisins du nœud  $i$ . Alors le schéma précédent stipule qu'un maximum local ne peut augmenter et qu'un minimum local ne peut diminuer, et que sous certaines conditions du pas de temps la positivité et le principe du maximum sont conservés.

*Preuve:* Soit  $U_i^n$  un maximum local, on en déduit que  $(U_k^n - U_i^n) \leq 0$  pour tous  $k \in V(i)$ . Donc, (8.4) implique que  $\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \leq 0$ , et le maximum local ne peut pas augmenter. Pareillement, on peut démontrer que le minimum local ne peut pas diminuer. D'autre part, on peut facilement vérifier que la positivité et le principe du maximum sont conservés quand le pas de temps satisfait la relation:  $\frac{1}{\Delta t} - \sum_{k \in V(i)} c_{ik}(U^n) \geq 0$ .  $\square$

### 8.2.2 Schéma volumes-finis d'ordre un

Dans ce travail, on utilise une approximation volumes-finis centrée-sommet sur un maillage dual construit à partir d'une discrétisation éléments-finis du domaine de calcul 2D. Les cellules sont délimitées par les médianes des triangles (voir figure 8.1).

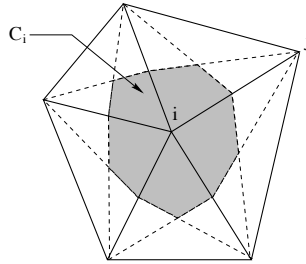


Figure 8.1: Cellule volume-finie  $\Omega_i$  (cas 2D)

En intégrant (8.1) sur la cellule  $\Omega_i$ , puis en utilisant une intégration par partie pour les flux convectifs et en utilisant une approximation conservative, nous obtenons la formulation semi-discrétisée de (8.1):

$$a_i \frac{dU_i}{dt} + \sum_{j \in V(i)} \Phi(U_i, U_j, \nu_{ij}) = 0 \quad (8.5)$$

où  $a_i$  est la mesure de la cellule  $\Omega_i$ ,  $V(i)$  est l'ensemble des nœuds connectés avec le nœud  $i$ , et  $\nu_{ij} = \int_{\partial\Omega_{ij}} \mu_{ij} ds$  où  $\mu_{ij}$  symbolise la normale unitaire à la frontière  $\partial\Omega_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$  partagée par les cellules  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ .

Dans la semi-discrétisation ci-dessus, les valeurs  $U_i$  et  $U_j$  correspondent à une interpolation constante par cellule de la variable  $U$ , et  $\Phi$  est une *fonction de flux numérique* telle que  $\Phi(U_i, U_j, \nu_{ij})$  approche  $\int_{\partial\Omega_{ij}} \mathcal{F}(U) \cdot \mu_{ij}(s) ds$ . En général la fonction de flux numérique  $\Phi : (u, v, \nu) \rightarrow \Phi(u, v, \nu)$  est supposée Lipschitz-continue, croissante monotone par rapport à  $u$ , décroissante monotone par rapport à  $v$ , et consistante:

$$\Phi(u, u, \nu) = \mathcal{F}(u) \cdot \nu . \tag{8.6}$$

### 8.2.3 Limiteurs pour les schémas MEV et CENO

Les schémas Mixed Element Volume (MEV) d'ordre élevé sont dérivés selon la méthode MUSCL de Van Leer [Leer 1979]. Dans cette approche, l'ordre de précision spatial est améliorée en substituant dans la fonction de flux numérique les valeurs  $U_i$  et  $U_j$  par des "meilleures" interpolations:  $U_{ij}$  et  $U_{ji}$  à l'interface  $\partial\Omega_{ij}$ .

Plus précisément, le schéma MEV d'ordre un devient:

$$a_i \frac{dU_i}{dt} + \sum_{j \in V(i)} \Phi(U_{ij}, U_{ji}, \nu_{ij}) = 0. \tag{8.7}$$

où  $U_{ij}$  et  $U_{ji}$  sont les valeurs de  $U$  à gauche et à droite de l'interface  $\partial\Omega_{ij}$  (voir la figure 8.2 pour le cas 2D) obtenues par interpolation. Afin de garder le schéma non-oscillatoire

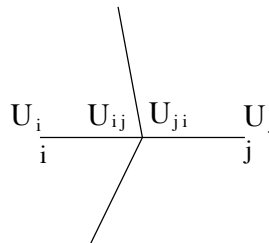


Figure 8.2: Les valeurs interface  $U_{ij}$  et  $U_{ji}$  entre les nœuds  $i$  et  $j$ .

et positif, on doit introduire des *limiteurs*. Il a été démontré que les schémas positifs d'ordre



élevé doivent nécessairement être construits avec un processus non-linéaire. Dans le cas des maillages non-structurés et des modèles scalaires, des schémas positifs d'ordre deux ont été dérivés par Jameson dans [Jameson 1993] en utilisant un limiteur symétrique à deux entrées. Dans les travaux de [Cournède 2006], au lieu d'utiliser un limiteur symétrique, on utilise une formulation de MUSCL (avec deux limiteurs par arête). On introduit des limiteurs à trois entrées, conformément à [Debiez 1996b]; ceci permet de définir un schéma positif, d'ordre trois (voir même d'ordre cinq) loin des extrêmes, là où  $U$  varie très peu.

Ainsi, l'équation (8.7) devient:

$$a_i \frac{dU_i}{dt} + \sum_{j \in V(i)} \Phi(U_i + \frac{1}{2}L_{ij}(U), U_j - \frac{1}{2}L_{ji}(U), \nu_{ij}) = 0, \quad (8.8)$$

Afin de définir  $L_{ij}(U)$  et  $L_{ji}(U)$  on utilise des triangles amont et aval,  $T_{ij}$  et  $T_{ji}$  (voir la figure 8.3), tels qu'introduits dans [Fezoui 1989a]. L'élément  $T_{ij}$  est *amont* au nœud  $i$  par rapport à l'arête  $ij$  si, pour un  $\eta$  suffisamment petit le vecteur  $-\eta \mathbf{ij}$  est situé à l'intérieur de  $T_{ij}$ . Symétriquement, l'élément  $T_{ji}$  est *aval* au nœud  $i$  par rapport à l'arête  $ij$  si pour un  $\eta$  petit le vecteur  $\eta \mathbf{ji}$  est situé à l'intérieur de  $T_{ji}$ . Soit  $\varepsilon_{ri}, \varepsilon_{si}, \varepsilon_{jn},$  et  $\varepsilon_{jp}$  les composantes du vecteur  $\mathbf{ji}$  (resp.  $\mathbf{ij}$ ) dans le système oblique des axes  $(\mathbf{ir}, \mathbf{is})$  (resp.  $\mathbf{jn}, \mathbf{jp}$ ):

$$\mathbf{ji} = \varepsilon_{ri} \mathbf{ir} + \varepsilon_{si} \mathbf{is}$$

$$\mathbf{ij} = \varepsilon_{jn} \mathbf{jn} + \varepsilon_{jp} \mathbf{jp}$$

Alors dire que  $T_{ij}$  et  $T_{ji}$  sont des triangles amont et aval signifie qu'ils ont été choisis tel que les composantes  $\varepsilon_{ri},$  etc.. sont toutes non-négatives:  $T_{ij}$  amont et  $T_{ji}$  aval  $\Leftrightarrow \varepsilon_{ri}, \varepsilon_{si}, \varepsilon_{jn}, \varepsilon_{jp}$  sont toutes non-négatives. Supposons les notations:

$$\Delta^- U_{ij} = \nabla U|_{T_{ij}} \cdot \mathbf{ij} \quad , \quad \Delta^0 U_{ij} = U_j - U_i \quad \text{and} \quad \Delta^- U_{ji} = \nabla U|_{T_{ji}} \cdot \mathbf{ij} ,$$

où les gradients sont calculés comme les gradients de la fonction  $U^{P_1}$  continue,  $P_1$  par triangle, qui prend au nœud  $i$  la valeur moyenne  $U_i$  de l'inconnue sur la cellule  $i$ :

$$U^{P_1}(\mathbf{x}(i)) = U_i.$$

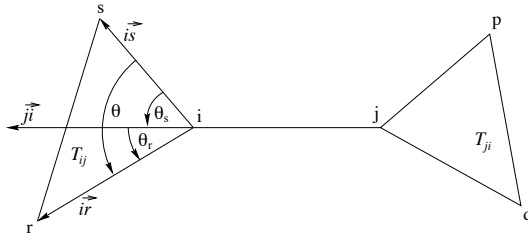


Figure 8.3: Les triangles amont et aval sont les triangles ayant resp.  $i$  et  $j$  comme nœud et tel que la ligne  $ij$  intersecte l'arête opposée.

Dans [Jameson 1993] Jameson a remarqué que:

$$\Delta^- U_{ij} = \varepsilon_{ri} (U_i - U_r) + \varepsilon_{si} (U_i - U_s),$$

et

$$\Delta^- U_{ji} = \varepsilon_{jp} (U_p - U_j) + \varepsilon_{jq} (U_q - U_j),$$

avec les mêmes  $\varepsilon_{ri}$ ,  $\varepsilon_{si}$ ,  $\varepsilon_{jn}$ , et  $\varepsilon_{jp}$  non-négatives. .

Introduisons maintenant une famille de limiteurs continues à trois entrées, satisfaisant:

$$(P1) \quad L(u, v, w) = L(v, u, w)$$

$$(P2) \quad L(\alpha u, \alpha v, \alpha w) = \alpha L(u, v, w)$$

$$(P3) \quad L(u, u, u) = u$$

$$(P4) \quad L(u, v, w) = 0 \text{ si } uv \leq 0$$

$$(P5) \quad 0 \leq \frac{L(u, v, w)}{v} \leq 2 \text{ si } v \neq 0.$$

Remarquons qu'il existe  $K^-$  et  $K^0$  dépendant de  $(u, v, w)$  tel que:

$$L(u, v, w) = K^- u = K^0 v, \text{ avec } 0 \leq K^- \leq 2, \quad 0 \leq K^0 \leq 2. \quad (8.9)$$

Une fonction satisfaisant (P1) - (P5) existe, et pour les exemples numériques, on va utiliser la version suivante de la méthode "Superbee" de Roe:

$$\begin{cases} L_{SB}(u, v, w) = 0 & \text{si } uv \leq 0 \\ & = \text{Sign}(u) \min(2|u|, 2|v|, |w|) \text{ sinon.} \end{cases} \quad (8.10)$$

On définit:

$$L_{ij}(U) = L(\Delta^- U_{ij}, \Delta^0 U_{ij}, \Delta^{HO} U_{ij}) ; \quad L_{ji}(U) = L(\Delta^- U_{ji}, \Delta^0 U_{ij}, \Delta^{HO} U_{ji}). \quad (8.11)$$

où  $\Delta^{HO} U_{ji}$  est une troisième façon d'évaluer les variations de  $U$  qui peut-être introduite pour incrémenter la précision du schéma résultant (voir la remarque qui suit).

**Remarque:** Supposons que l'option  $L_{ij}(U) = \Delta^{HO} U_{ij}$  nous donne une approximation d'ordre élevé  $\omega$ . Pour un  $U$  suffisamment lisse et supposant que la taille de maille est suffisamment petite par rapport à un  $\alpha$  (petit), il existe  $\varepsilon(\alpha)$  tel que, si  $\frac{|\nabla U \cdot \mathbf{ij}|}{\|\mathbf{ij}\|} > \varepsilon(\alpha)$  pour une arête  $ij$ , le limiteur  $L_{ij}$  n'est pas actif, *i.e.*  $L_{ij}(U) = \Delta^{HO} U_{ij}$ . Alors, le schéma est localement

d'ordre  $\omega$ .  $\square$

Le flux d'ordre élevé peut utiliser des données supplémentaires afin d'accroître la précision. La version MUSCL-V6 s'écrit:

$$\begin{aligned} \Delta^{HO5}U_{ij} &= \Delta^{HO3}U_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{30} [\Delta^-U_{ij} - 2\Delta^0U_{ij} + \Delta^-U_{ji}] \\ &\quad - \frac{2}{15} [(\nabla U)_M \cdot \mathbf{ij} - 2(\nabla U)_i \cdot \mathbf{ij} + (\nabla U)_j \cdot \mathbf{ij}] . \end{aligned} \quad (8.12)$$

Pour un nœud  $k$ , la notation  $(\nabla U)_k$  symbolise la moyenne suivante des gradients sur le tétraèdre  $T$  ayant le nœud  $k$  comme sommet:

$$(\nabla U)_k = - \frac{1}{Vol(C_k)} \sum_{T,k \in T} \frac{Vol(T)}{4} \nabla U|_T \quad (8.13)$$

Le terme  $(\nabla U)_M$  est le gradient au point  $M$ , situé à l'intersection de la droite  $ij$  avec la face de  $T_{ij}$  qui n'a pas le nœud  $i$  comme sommet. Il est calculé par interpolation linéaire des valeurs du gradient nodal aux sommets contenus dans la facette opposée à  $i$  dans le triangle amont  $T_{ij}$ .

Dans le cas du schéma CENO, on propose deux versions du schéma pour des problèmes ayant des discontinuités.

Le premier schéma est baptisé CENO-POS. Il est défini en posant:

$$\Delta^{CENO-POS}U_{ij} = U_i(I_{ij}) - U_i \quad (8.14)$$

où  $U_i(I_{ij})$  est la valeur prise au point milieu  $I_{ij}$  de  $ij$  par le polynome  $U_i$  d'interpolation CENO construit dans la cellule  $i$ .  $U_i$  est le degré de liberté en  $i$ , c'est-à-dire la valeur moyenne de l'inconnue.

On se propose de démontrer plus loin que ce schéma jouit des mêmes propriétés de positivité que le schéma MEV limité.

En revanche, le choix d'un point unique d'intégration nous fait perdre la précision au troisième ordre sur les solutions régulières. Notons  $\Phi_{4.pt.s.gauss}^{CENO}$  le flux d'interface du schéma CENO défini dans les chapitres précédents. Notons  $\Phi_I^{CENO}$  le flux d'interface avec un point

unique d'intégration, sans limiteur:

$$\Phi_{ij}^{CENO-I} = \Phi(U_i(I_{ij}), U_j(I_{ij}), \mathbf{n}_{ij}).$$

Et enfin notons  $\Phi^{CENO-POS}$  le flux d'interface du schéma CENO à un point d'intégration avec limiteur:

$$\Phi_{ij}^{CENO-POS} = \Phi(U_{ij}^{CENO-POS}, U_{ji}^{CENO-POS}, \mathbf{n}_{ij})$$

avec

$$U_{ij}^{CENO-POS} = U_i + L(\Delta^- U_{ij}, \Delta^0 U_{ij}, \Delta^{CENO-POS} U_{ij})$$

$$U_{ji}^{CENO-POS} = U_j - L(\Delta^- U_{ji}, \Delta^0 U_{ij}, \Delta^{CENO-POS} U_{ji})$$

La seconde version limitée CENO-LIM est définie comme suit:

$$\Phi_{ij}^{CENO-LIM} = \Phi_{ij}^{CENO-POS} + (\Phi_{4.pt.s.gauss_{ij}}^{CENO} - \Phi_{ij}^{CENO-I})$$

On note que lorsque le limiteur sera inactif, le flux  $\Phi^{CENO-POS}$  sera identique à  $\Phi^{CENO-I}$ , de sorte que ce dernier schéma CENO-LIM sera précis à l'ordre trois. En revanche on ne sait pas assurer la positivité du schéma CENO-LIM. En pratique nous préférons le schéma CENO-LIM.

### 8.2.4 Le principe du maximum pour le schéma CENO-POS

Une intégration temporelle explicite d'ordre un pour le schéma décentré d'ordre élevé donnée par l'équation (8.7) nous conduit à l'expression suivante:

$$\frac{a_i U_i^{n+1} - a_i U_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in V(i)} \Phi(U_{ij}^n, U_{ji}^n, \nu_{ij}) = 0. \quad (8.15)$$

**LEMME 3.** *Le schéma défini par (8.15), combiné avec (8.10), (8.11) et (8.14) satisfait le principe du maximum sous une contrainte d'une CFL appropriée.*

*Preuve:* Introduisons d'abord les coefficients suivants:

$$g_{ij} = - \frac{1}{a_i} \frac{1}{U_{ji}^n - U_i^n} (\Phi(U_{ij}^n, U_{ji}^n, \nu_{ij}) - \Phi(U_{ij}^n, U_i^n, \nu_{ij})) \quad (8.16)$$

$$h_{ij} = - \frac{1}{a_i} \frac{1}{U_{ij}^n - U_i^n} (\Phi(U_{ij}^n, U_i^n, \nu_{ij}) - \Phi(U_i^n, U_i^n, \nu_{ij})) \quad (8.17)$$

$$d_i = - \frac{1}{a_i} \frac{1}{U_i^n} \left( \sum_{j \in V(i)} \Phi(U_i^n, U_i^n, \nu_{ij}) \right). \quad (8.18)$$

Alors, le schéma (8.15) peut s'écrire comme:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \sum_{j \in V(i)} g_{ij} (U_{ji}^n - U_i^n) + \sum_{j \in V(i)} h_{ij} (U_{ij}^n - U_i^n) + d_i U_i^n \quad (8.19)$$

On peut remarquer que les coefficients  $g_{ij}$  et  $h_{ij}$  sont respectivement positifs et négatifs car la fonction de flux numérique  $\Phi$  est décroissante monotone par rapport à la première variable et croissante monotone par rapport à la seconde variable.

Le terme  $d_i$  disparaît car la fonction de flux numérique  $\Phi$  satisfait la condition de consistance (8.6) et les cellules volumes-finis  $\Omega_i$  sont fermées de sorte que  $\sum_j \nu_{ij} = 0$ . De l'autre côté, conformément à (8.9) et (8.11) on peut écrire  $L_{ij}(U^n)$  comme:

$$L_{ij}(U^n) = K_{ij}^- \Delta^- U_{ij}^n$$

où  $K_{ij}^-$  est une fonction positive de  $U^n$ , tel qu'on a:

$$U_{ij}^n - U_i^n = \frac{1}{2} L_{ij}(U^n) = \frac{1}{2} K_{ij}^- \left( \varepsilon_{ri}(U_i^n - U_r^n) + \varepsilon_{si}(U_i^n - U_s^n) \right). \quad (8.20)$$

Pareillement, à partir de (8.9) et (8.11) on peu écrire  $L_{ji}(U^n)$  sous la forme suivante:

$$L_{ji}(U^n) = K_{ji}^0 \Delta^0 U_{ij}^n$$

où  $K_{ji}^0$  est une fonction positive de  $U^n$  plus petite que 2, tel qu'on obtient:

$$U_{ji}^n - U_i^n = U_j^n - \frac{1}{2}L_{ji}(U^n) - U_i^n = \left(1 - \frac{K_{ji}^0}{2}\right)(U_j^n - U_i^n) \quad (8.21)$$

avec le coefficient  $1 - \frac{K_{ji}^0}{2}$  positif. Dans l'identité (8.19), on substitue  $U_{ij}^n - U_i^n$  et  $U_{ji}^n - U_i^n$  par les expressions données par (8.20) et (8.21) respectivement, tel qu'on puisse écrire le schéma décentré discret sous la forme:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \sum_{j \in V(i)} \alpha_{ij} \left(1 - \frac{K_{ji}^0}{2}\right) (U_j^n - U_i^n) + \sum_{j \in V(i)} \beta_{ij} (U_j^n - U_i^n) \quad (8.22)$$

où les coefficients  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  sont positifs, et donc ce schéma satisfait le principe du maximum sous une condition CFL spécifiée dans le Lemme 2.

### 8.3 Schéma CENO-POS à masse volumique positive

Dans [Cournède 2006] les auteurs étendent la théorie précédente à la construction de schémas pour les équations d'Euler respectant la positivité de la masse volumique. Bien que la positivité des pression et température ne soit pas garantie, les schémas à masse volumique positive permettent la plupart des calculs difficiles de l'aérodynamique, cf. [Cournède 2006] pour des exemples. Cette théorie s'étend aussi à une formulation de CENO-POS pour les équations d'Euler. Les reconstructions CENO et les limitations peuvent aussi bien être mises en œuvre avec les variables de conservation qu'avec les variables primitives  $(\rho, \mathbf{u}, P)$ . Dans les deux cas, il est indispensable d'utiliser un solveur de Riemann produisant une masse volumique positive. En pratique, nous avons utilisé le solveur HLLC. L'analyse du schéma ainsi construit est identique à celle de [Cournède 2006]. Elle se restreint à l'équation en masse volumique et permet d'établir le lemme suivant:

**LEMME 4.** *Tout schéma CENO-POS utilisant un solveur de Riemann  $\rho$ -positif et avançant en temps avec Euler progressif ("RK1") est  $\rho$ -positif sous une condition de Courant de type:*

$$\Delta t |V_{max}| \leq K \quad (8.23)$$

où  $K$  dépend du maillage et du solveur de Riemann choisi.

Pour plus de détails et pour une démonstration, voir [Cournède 2006].

## 8.4 Calcul des flux décentrés avec les limiteurs CENO d'ordre élevé

Dans cette section, on détaille l'implémentation des limiteurs dans le code *WOLF*. Cette théorie est surtout destinée aux futurs doctorants, post-doctorants, ou à toutes personnes qui voudraient reprendre le code *WOLF* avec le schéma CENO et utiliser ainsi ses nouveaux limiteurs.

On se concentre sur la partie limitée des flux décentrés, c'est-à-dire sur les flux qui recevront des valeurs de la solution qui seront passées par un filtre qui sont nos limiteurs d'ordre élevé.

Dans le code *Wolf*, la routine "MUSCLV6" calcule les gradients centrés, décentrés et d'ordre élevé par la méthode MUSCL et ses valeurs sont données en entrée aux limiteurs utilisés pour ce schéma. On les appellera  $Limiteur_{muscl}$  et on les définit de la façon suivante :

$$Limiteurs_{muscl} = Limiteurs (GOE,GC,GD)$$

où **GOE** contient les valeurs des Gradients d'Ordre Élevé, **GC** contient les valeurs des Gradients Centrés et **GD** contient les valeurs des Gradients Décentrés. Ces gradients sont calculés respectivement par les schéma MUSCL-V6 et MUSCL basique.

Ses limiteurs nous rendrons alors selon le cas, c'est-à-dire s'ils ont besoin de fonctionner ou pas, une de ses trois valeurs d'entrée pondérées par un coefficient avec le signe adéquat.

Pour le schéma CENO, nous avons fait la modification suivante : au lieu d'utiliser les gradients d'ordre élevé issus du schéma MUSCL, nous avons inséré à la place les reconstructions CENO au point I, milieu des interfaces entre deux cellules et aussi milieu des arêtes du maillage. Ces reconstructions sont corrigées par les valeurs de la solution sur chaque extrémité des segments, c'est-à-dire :

$$Limiteurs_{ceno} = Limiteurs \left( \mathbf{RQI-VE}, \mathbf{GC}, \mathbf{GD} \right)$$

où **RQI-VE** sont les valeurs des Reconstructions Quadratiques en I dans lesquelles on enlève les Valeurs aux Extrémités du segment, qui sont les valeurs moyennes sur les cellules centrées sur ces points extrémités, **GC** contient les valeurs des Gradients Centrés et **GD** contient les valeurs des Gradients Décentrés.

En d'autres termes, les différentes étapes dans la routine des limiteurs ont été codées de la manière suivante dans le code *WOLF* :

- 1) Calcul des reconstructions quadratiques en I milieu du segment,
- 2) Calcul des limiteurs CENO qui nous donne la solution corrigée,
- 3) Calcul des flux décentrés limités.

Et donc précisément on a :

$$\begin{aligned} Sol_{Lft+} &= 0.5 * Limiteurs(2 * Sol.I_{Lft} - 2 * Sol_{Lft}, GC, GD_{Lft}) \\ Sol_{Rgt-} &= 0.5 * Limiteurs(2 * Sol_{Rgt} - 2 * Sol.I_{Rgt}, GC, GD_{Rgt}) \end{aligned}$$

où  $Sol_{Lft}$  et  $Sol_{Rgt}$  représentent la reconstruction d'une variable d'Euler par les cellules gauche et droite du segment.  $Sol.I_{Lft}$  et  $Sol.I_{Rgt}$  représentent les reconstructions quadratiques au point I par les reconstructions sur les cellules gauche et droite du segment respectivement,  $GC$  contient les valeurs du gradient centré, et  $GD_{Lft}$  et  $GD_{Rgt}$  sont les gradients décentrés à gauche et à droite.

Dans le cas où les limiteurs n'ont pas besoin d'intervenir, on aura alors :

$$\begin{aligned} Sol_{Lft} &= Sol.I_{Lft} \\ Sol_{Rgt} &= Sol.I_{Rgt} \end{aligned}$$

Et on obtiendra des flux décentrés sur le point d'intégration I en guise de flux limités :

$$\Phi_{limites} = \Phi_I = \Phi \left( P_i(x_I, y_I, t), P_k(x_I, y_I, t), \mathbf{v}_{ik} \right)$$

Et donc le flux total s'écrira alors :

$$\Phi_{total} = (\Phi_{ceno}) + (\Phi_{limites}) = (\Phi_{gauss} - \Phi_I) + (\Phi_I) = \Phi_{gauss},$$

qui sont donc des flux d'ordre 3. Donc en conclusion, lorsque les limiteurs n'auront pas besoin de fonctionner car absence de chocs et de discontinuités, la valeur que le filtre nous donnera des flux d'ordre 3, et lorsque les limiteurs devront fonctionner, on devrait obtenir des flux d'ordre 1 dans les zones de chocs et de discontinuités.

## 8.5 Applications

Nous testons ici le schéma CENO avec limiteurs sur un tube à choc. Nous comparons différents schémas, à savoir le schéma CENO avec limiteur et 1 point d'intégration, puis le schéma MUSCLV6 avec limiteurs et 1 point d'intégration, et enfin le schéma CENO avec limiteurs et 5 points d'intégration.



- Condition initiale

La solution initiale pour ce cas-test de tube à choc est initialisée par ses moyennes conservatives sur chaque cellule du maillage. Nous l'écrivons en variables primitives pour plus de lisibilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, y, 0) = 0.125 \quad \text{pour } x < \frac{x_{min} + x_{max}}{2}, \text{ sinon } \rho(x, y, t = 0) = 1 \\ u(x, y, t = 0) = 0 \\ v(x, y, t = 0) = 0 \\ p(x, y, t = 0) = 2.51 \quad \text{pour } x < \frac{x_{min} + x_{max}}{2}, \text{ sinon } p(x, y, t = 0) = 2.5 \end{array} \right.$$

Le domaine est de taille  $x \in [0 : 10]$  et  $y \in [-5 : 5]$ . Il est discrétisé par un maillage structuré drapeau anglais de  $71 * 71$  nœuds. Le schéma en temps est un Runge Kutta à 3 étages de Shu et il sera utilisé avec un CFL de 0.1. Le temps physique sera de 1 seconde ce qui équivaut à 350 itérations en temps environ.

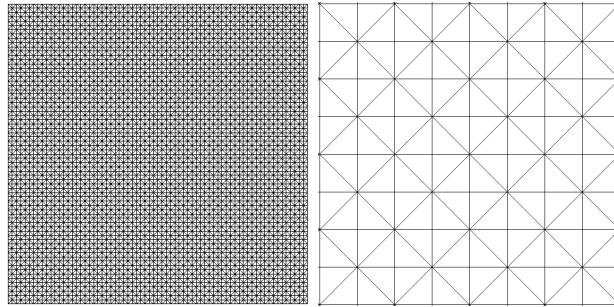


Figure 8.4: Maillage initiale à gauche avec un zoom à droite.

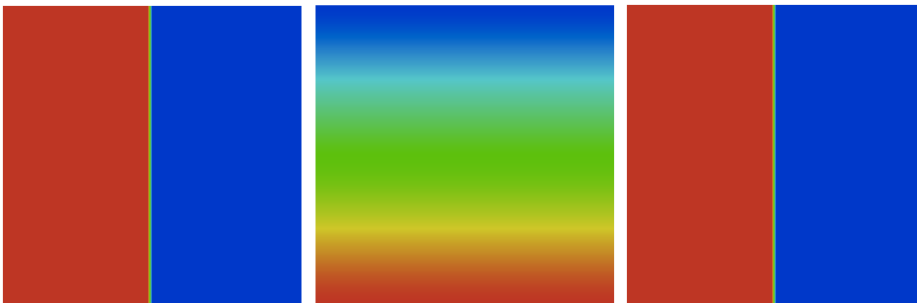


Figure 8.5: De gauche à droite : masse volumique, vitesse horizontale et pression initiales.

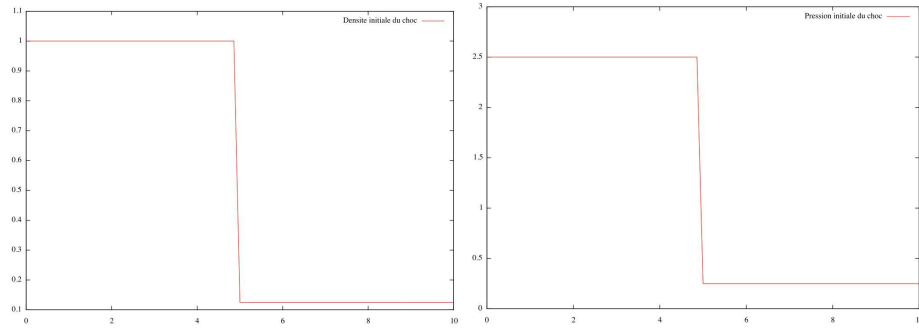


Figure 8.6: De gauche à droite : coupe de la densité initiale et coupe de la pression initiale.

### • Comparaison des schémas CENO avec 1 point d'intégration et MUSCL-V6

Nous lançons le cas-test ici pour les schémas MUSCL-V6 avec ses limiteurs "High Order" et CENO avec un seul point d'intégration (le point I milieu du segment) et les limiteurs CENO. Nous allons comparer le comportement des deux limiteurs issus des deux schémas sur ce cas-test de tube à choc.

Pour le schéma MUSCL-V6 les flux calculés au point I peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\Phi_I^{MUSCL-Limites} = \Phi \left( M_i(x_I, y_I, t), M_k(x_I, y_I, t), \mathbf{v}_{ik} \right),$$

où  $M_i(x_I, y_I, t)$  est la reconstruction MUSCL d'ordre élevée au point  $I$  par la solution sur la cellule  $C_i$ ,  $M_k(x_I, y_I, t)$  est la reconstruction MUSCL d'ordre élevée au point  $I$  par la solution sur la cellule voisine  $C_k$  et  $\mathbf{v}_{ik}$  est la normale sortante au point I.

Pour le schéma CENO à 1 point d'intégration, qui est le point I, les flux s'écrivent :

$$\Phi_I^{CENO-Limites} = \Phi \left( P_i(x_I, y_I, t), P_k(x_I, y_I, t), \mathbf{v}_{ik} \right),$$

où  $P_i(x_I, y_I, t)$  est la reconstruction quadratique CENO au point  $I$  par la solution sur la cellule  $C_i$  à l'instant  $t$ ,  $P_k(x_I, y_I, t)$  est la reconstruction quadratique CENO au point  $I$  par la solution sur la cellule  $C_k$  et  $\mathbf{v}_{ik}$  est la normale sortante au point I.

On obtient alors les résultats des figures 8.7 et 8.8 qui représentent respectivement des coupes horizontales au milieu du maillage de la densité et de la pression du choc. On

remarque clairement que les nouveaux limiteurs CENO à 1 point d'intégration font un aussi bon travail de stabilisation que les limiteurs du schéma MUSCL, même si les limiteurs MUSCL ont l'air d'être un peu plus précis. Les zones de choc sont assez bien capturées et seulement avec 1 point d'intégration nous arrivons quand même à un résultat satisfaisant. Nous passons maintenant aux schéma CENO avec limiteurs et 5 points d'intégration.

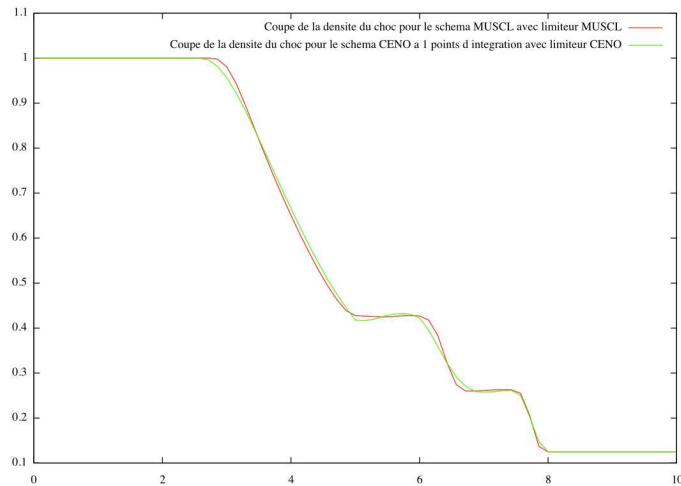


Figure 8.7: Coupe de la masse volumique pour le schéma CENO à 1 point d'intégration (en vert) et pour le schéma MUSCL-V6 (en rouge).

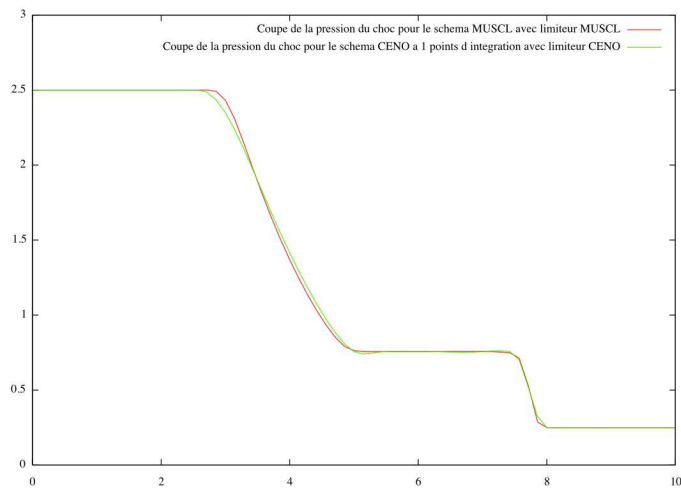


Figure 8.8: Coupe de la pression pour le schéma CENO à 1 point d'intégration (en vert) et pour le schéma MUSCL-V6 (en rouge).

- Comparaison avec le schéma CENO à 5 points d'intégration

On lance maintenant le même cas-test de tube à choc mais cette fois avec le nouveau schéma CENO à 5 points d'intégration, qui sont les 4 points d'intégration de Gauss sur les interfaces entre deux cellules couplés avec le milieu  $I$  du segment qui fait donc office de cinquième point d'intégration. Nous comparons les résultats des trois schémas CENO avec 1 point d'intégrations, CENO avec 5 points d'intégration et MUSCL-V6.

Pour le schéma CENO à 5 points d'intégration les flux s'écrivent :

$$\Phi_{5.pt.int}^{CENO} = \Phi_{4.pt.Gaus}^{CENO} - \Phi_I^{CENO} + \Phi_I^{CENO-Limites}.$$

On obtient alors les résultats suivants : les figures 8.9 et 8.10 montrent une coupe horizontale faite au milieu du domaine de calcul pour les trois différents limiteurs, les figures 8.11, 8.12, 8.13 et 8.14 sont des zooms des figures 8.9 et 8.10. Comme précédemment, les limiteurs CENO à 5 points d'intégration fonctionnent et font un travail satisfaisant. Ils sont légèrement meilleurs que les limiteurs CENO à 1 point d'intégration, mais les limiteurs MUSCL-V6 restent toujours les plus performants dans ce cas-test là.

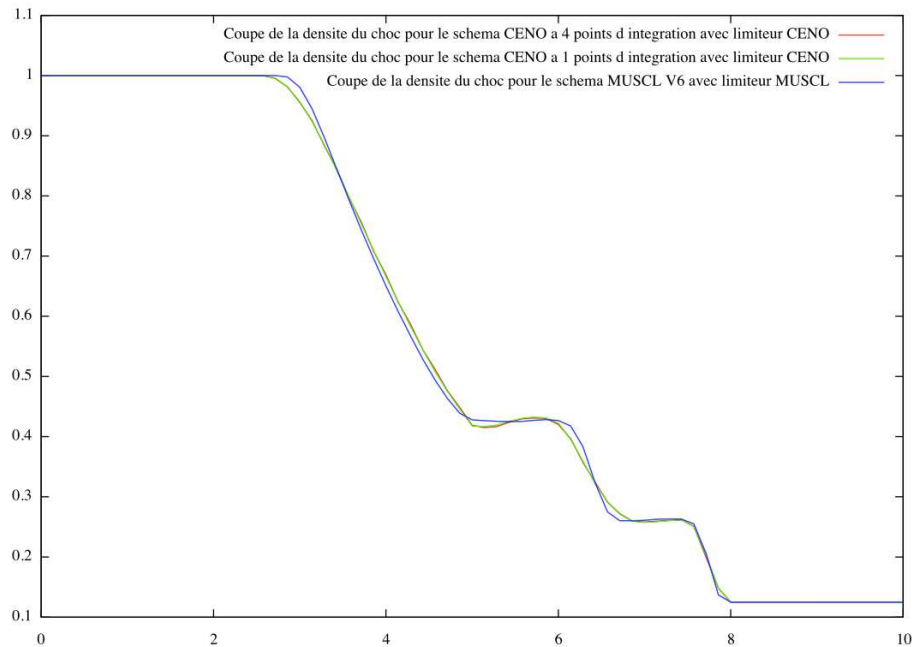


Figure 8.9: Coupe de la masse volumique pour les 3 schémas CENO à 5 points d'intégration (en rouge), CENO à 1 point d'intégration (en vert) et MUSCL-V6 (en bleu).

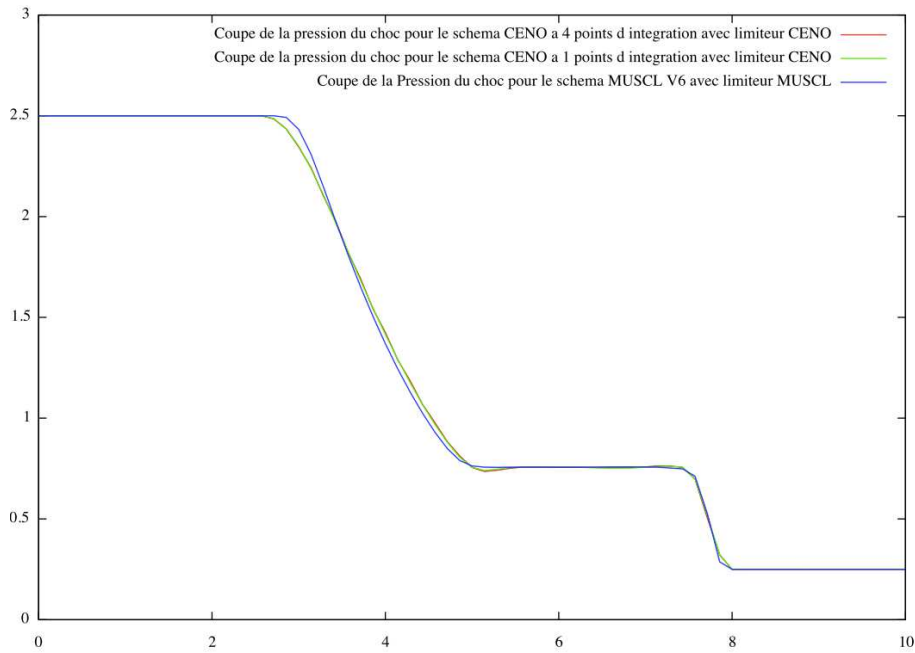


Figure 8.10: De gauche à droite : coupe de la pression pour les 3 schémas CENO à 5 points d'intégration (en rouge), CENO à 1 point d'intégration (en vert) et MUSCL-V6 (en bleu).

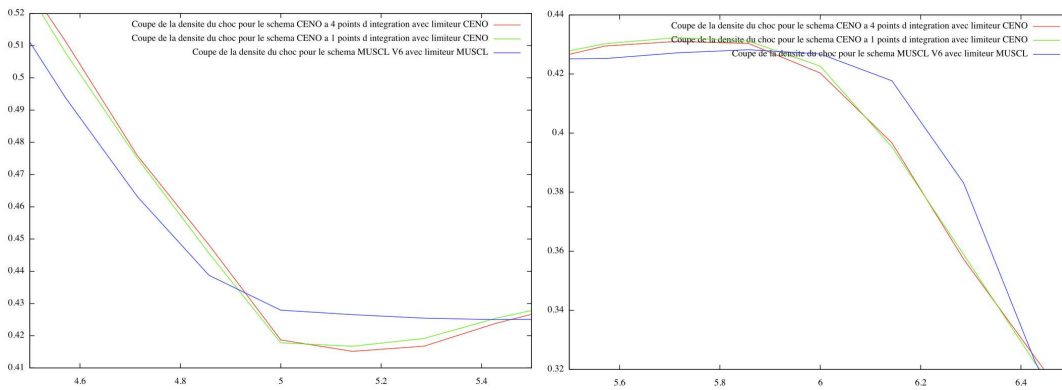


Figure 8.11: Zoom sur les coupes de la masse volumique pour les 3 schémas CENO à 5 points d'intégration (en rouge), CENO à 1 point d'intégration (en vert) et MUSCL-V6 (en bleu).

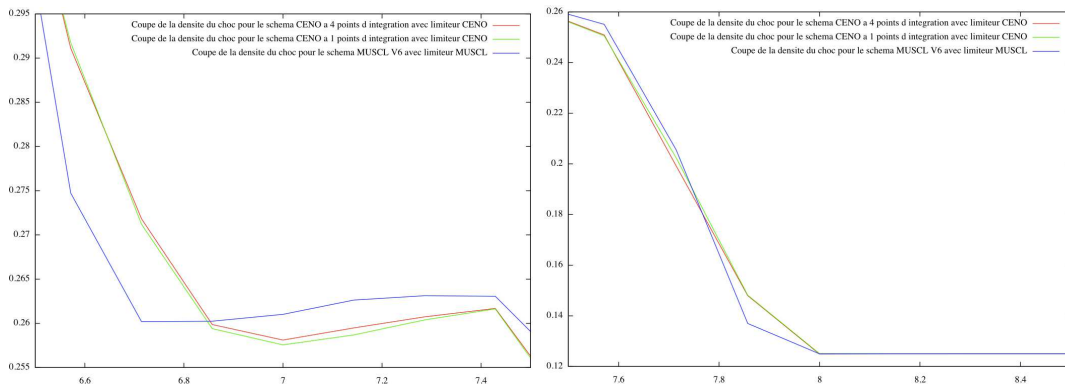


Figure 8.12: Zoom sur les coupes de la masse volumique pour les 3 schémas CENO à 5 points d'intégration (en rouge), CENO à 1 point d'intégration (en vert) et MUSCL-V6 (en bleu).

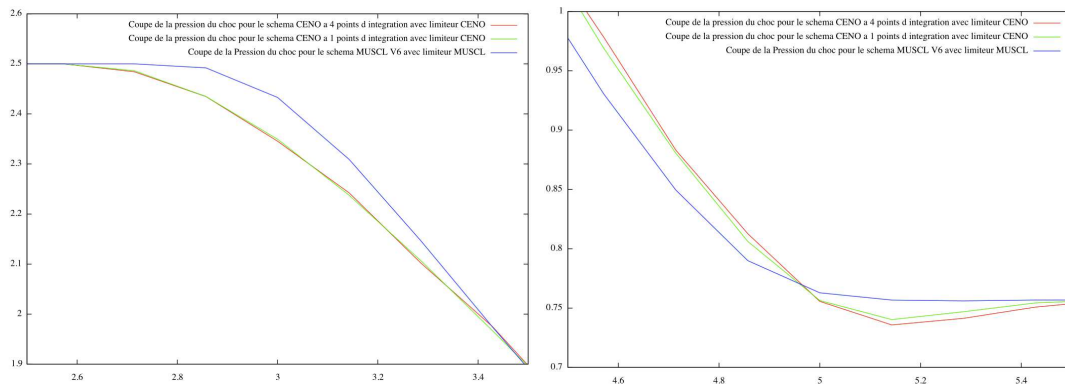


Figure 8.13: Zoom sur les coupes de la pression pour les 3 schémas CENO à 5 points d'intégration (en rouge), CENO à 1 point d'intégration (en vert) et MUSCL-V6 (en bleu).

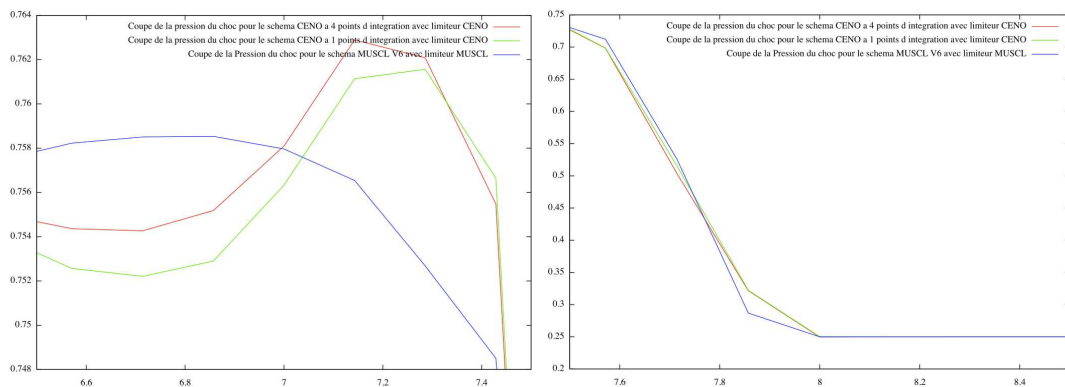


Figure 8.14: Zoom sur les coupes de la pression pour les 3 schémas CENO à 5 points d'intégration (en rouge), CENO à 1 point d'intégration (en vert) et MUSCL-V6 (en bleu).

## 8.6 Conclusion

Une application importante de l'Aérodynamique Numérique est le calcul d'écoulements présentant des discontinuités. Dans ce contexte, l'impact des méthodes d'adaptation peut être essentiel comme l'ont montré les études de bang sonique ([Loseille 2008b]).

Ce chapitre propose une rapide modification du schéma CENO qui permettrait de tels calculs. Il s'appuie sur les travaux passés de l'équipe, ce qui a permis de gagner du temps en développement et permet de travailler avec une technologie familière à l'équipe. Les deux schémas proposés sont utilisables comme le schéma non-limité, avec le confort d'éviter des divergences du calcul. De nombreux tests supplémentaires avec des maillages fins sont nécessaires pour délimiter dans quelles conditions des convergences à l'ordre trois pourront être obtenues en combinant limiteurs et adaptation.

- Nous avons donc maintenant un schéma précis d'ordre 3 pouvant utiliser des limiteurs. Ceci est une première approche d'utilisation du schéma CENO sur des simulations qui présentent des zones de chocs.
- Même si les limiteurs "High Order" du schéma MUSCL-V6 présentent une meilleure absorption des chocs, cette première approche de limiteurs CENO montre un bon traitement des chocs aussi.
- Une explication sur le fait que les limiteurs MUSCL-V6 soient meilleurs peut venir du fait que l'erreur principale de troncature pour le schéma CENO est une dérivée cinquième de dispersion, tandis que l'erreur principale de troncature pour le schéma MUSCL-V6 est une dérivée sixième de dissipation, donc un ordre de plus pour le schéma MUSCL-V6 ce qui peut lui donner une meilleure précision et expliquer les résultats.
- Par ailleurs, des limiteurs CENO plus performants peuvent être créés en appliquant des filtres sur les 4 points de Gauss des interfaces entre les cellules, car ici le traitement des chocs est appliqué seulement sur le point I milieu du segment et non pas sur tous les points d'intégration du schéma.
- Les prochaines étapes auront pour but de tester le schéma CENO sur des cas-tests de Bang ou de Scramjet 2D adaptatifs stationnaires.

## Partie IV

# Adaptation de maillage





# Adaptation en multi-échelle

---

## Contents

---

<b>9.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>211</b>
<b>9.2</b>	<b>Optimisation de l'erreur d'interpolation</b>	<b>212</b>
<b>9.3</b>	<b>Implémentation numérique</b>	<b>214</b>
<b>9.4</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>217</b>
9.4.1	Un cas-test acoustique : propagation d'une onde	217
9.4.2	Un cas-test instationnaire : le scramjet	221
<b>9.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>225</b>

---

Ce chapitre propose une méthode d'adaptation anisotrope basée-hessien pour le schéma CENO introduit dans les chapitres précédents. Un problème d'optimisation pour la métrique paramétrant le maillage est construit. Il est résolu analytiquement. Le système d'optimalité résultant est ensuite discrétisé et résolu à l'aide d'un algorithme de point fixe global comme dans la thèse de Géraldine Olivier [Olivier 2011]. Cette nouvelle méthode est appliquée à des cas tests de propagation acoustique et comparée à des approches adaptatives précises à l'ordre deux.

## 9.1 Introduction

L'adaptation basée hessien multi-échelle anisotrope repose sur la minimisation par rapport à une métrique paramétrant le maillage d'une erreur en norme  $L^p$  de l'interpolation d'une ou plusieurs variables d'une équation aux dérivées partielles. Ce type d'approche donne accès à des convergences à l'ordre deux sur des contextes singuliers ou comportant de très petites échelles. Ces convergences ont été obtenues par une approximation mixte éléments-volumes-finis de second ordre proche de la traditionnelle approximation éléments-finis  $\mathcal{P}^1$ . La théorie prédit également une convergence d'ordre élevé pour une interpolation d'ordre plus élevé. Une condition nécessaire est l'application d'une stratégie de remaillage anisotrope, guidé par une estimation d'erreur anisotrope. Dans ce chapitre, nous considérons l'approximation Central-ENO pour le système des équations d'Euler. Un problème d'optimisation d'erreur basé sur l'erreur d'interpolation et présenté en terme de métrique de maillage est obtenu et résolu analytiquement. Pour résoudre le système d'optimalité du maillage résultant, nous le discrétisons et appliquons l'algorithme de point fixe instationnaire global de [Alauzet 2011],[Olivier 2011]. La nouvelle méthode est appliquée à un test de propagation acoustique et est comparée avec les approches précédentes.

## 9.2 Optimisation de l'erreur d'interpolation

Comme proposé au chapitre 3, on suppose dans ce travail que l'erreur d'approximation est assimilable à une erreur d'interpolation d'ordre 2 sur l'inconnue. L'erreur d'interpolation  $\pi_2 u - u$  peut-être remplacé par une fonction lisse qui dépend de la dérivée troisième locale et de la taille locale de maille:

$$\pi_2 u - u \approx \sup_{\delta \mathbf{x}} \sup_{\mathbf{x}} |D^3 u(\mathbf{x})(\delta \mathbf{x})^3|, \quad \forall q = 1, 4,$$

On observe l'erreur exprimée en fonction du terme  $\delta \mathbf{x}$ , mesurant la taille de maille locale. Dans ce qui suit on cherche le maillage qui minimise cette erreur en se basant sur le concept de métrique optimale.

**Métrique Optimale** Soit une paramétrisation du maillage par la métrique Riemannienne, une matrice symétrique est définie dans chaque point  $\mathbf{x} = (x, y)$  du domaine de définition par:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = d \mathcal{R}(\mathbf{x}) \Lambda(\mathbf{x}) \mathcal{R}^t(\mathbf{x}).$$

La matrice de rotation  $\mathcal{R} = (\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta)$ , construite avec les vecteurs propres normalisés  $\mathbf{e}_\xi = (e_\xi^x, e_\xi^y)$  et  $\mathbf{e}_\eta = (e_\eta^x, e_\eta^y)$  de  $\mathcal{M}$ , va paramétriser les deux directions orthogonales d'étirement.

Avec  $m_\xi$  et  $m_\eta$  les deux dimensions locales de maille dans les directions (caractéristiques) d'étirement de  $\mathcal{M}$ , la densité de maillage est définie par  $d = (m_\xi m_\eta)^{-1}$ . La matrice  $\Lambda$  est une matrice diagonale de dimension  $2 \times 2$  avec les valeurs propres  $\lambda_1 = \frac{m_\xi}{m_\eta}$  et  $\lambda_2 = \frac{m_\eta}{m_\xi}$  et de déterminant unité, ce qui nous permet de définir la densité de maillage  $d$  uniquement comme fonction de  $\mathcal{M}$ . Il est également utile d'identifier les dimensions de maille  $(\delta x, \delta y)$  dans les directions cartésiennes:

$$\delta \mathbf{x}_\mathcal{M} = (\delta x_\mathcal{M}, \delta y_\mathcal{M}) \quad , \quad \delta x_\mathcal{M} = e_\xi^x m_\xi + e_\eta^x m_\eta \quad , \quad \delta y_\mathcal{M} = e_\xi^y m_\xi + e_\eta^y m_\eta .$$

Dans les méthodes de maillage continue (voir par exemple [Loseille ]) l'erreur dans l'interpolation linéaire a été modélisée (en négligeant les constantes) par:

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x}) - \pi_1^\mathcal{M} u(\mathbf{x})| &\approx \delta \mathbf{x}_\mathcal{M} |H_u| \delta \mathbf{x}_\mathcal{M} \\ &= \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} |H_u| \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (9.1)$$

où  $H_u$  représente la matrice Hessienne de  $u$ , qui est une matrice diagonalisable donc admettant la décomposition suivante:

$$H_u = \mathcal{R}_u(\mathbf{x}) \Lambda_u(\mathbf{x}) \mathcal{R}_u^t(\mathbf{x})$$

Un résultat central en multi-échelle est le suivant ([Loseille 2008b]):

**Theorème:**

Soit  $u$  un champ scalaire suffisamment lisse défini sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{dim}$ , avec  $|H_u|$  la valeur absolue de sa Hessienne, diagonalisée comme suit:

$$|H_u|(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(\mathbf{x}) |\Lambda_u(\mathbf{x})| \mathcal{R}_u(\mathbf{x})^t, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

La métrique optimale de  $N$  nœuds qui minimise l'erreur d'interpolation  $L^P$  est donnée par:

$$\mathcal{M}_{opt} = \bar{d}_u(\mathbf{x})\mathcal{R}_u(\mathbf{x})|\Lambda_u(\mathbf{x})|\mathcal{R}_u^t(\mathbf{x}) \quad (9.2)$$

avec le champ scalaire  $d_u$  défini via la Hessienne  $H_u$  de  $u$ , la dimension spatiale  $dim$  et l'indice de norme  $p$ , par la relation suivante:

$$\bar{d}_u = C_u(\det|H_u|)^{\frac{-1}{2p+dim}} \quad \text{avec} \quad C_u = N^{\frac{2}{dim}} \left( \int_{\Omega} (\det|H_u|)^{\frac{p}{2p+dim}} \right)^{-\frac{dim}{2}}.$$

Pour une interpolation quadratique on définit directement le modèle d'erreur comme suit:

$$|u(\mathbf{x}) - \pi_2 u(\mathbf{x})| \approx \left( \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}|\tilde{H}_u|\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{3}{2}}.$$

où le pseudo-Hessien  $\tilde{H}_u$  est déterminé numériquement à partir des dérivées troisièmes en appliquant l'approche aux Moindres Carrés décrite au chapitre 3.

On cherche à minimiser l'erreur suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int \left| \left( \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}|\tilde{H}_u|\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{3}{2}} \right| dx dy . \\ &\preceq \int \left( \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}|S|\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{3}{2}} dx dy . \end{aligned}$$

avec

$$S = |\tilde{H}_u|. \quad (9.3)$$

La matrice  $S(\mathbf{x})$  est une matrice symétrique, définie positive et diagonalisable tel que:

$$S(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_S(\mathbf{x})\Lambda_S(\mathbf{x})\mathcal{R}_S^t(\mathbf{x}).$$

**La Métrique Optimale** On identifie la métrique optimale  $\mathcal{M}^{opt} = \mathcal{M}^{opt}(N)$ , parmi les métriques ayant un nombre  $N$  de nœuds prescrit, et qui minimise l'erreur précédente.

**Lemme :**

La métrique optimale de  $N$  nœuds, qui minimise la norme  $L^1$  de l'erreur d'interpolation quadratique approchée par la formulation pseudo-Hessienne, est la métrique optimale pour l'erreur d'interpolation linéaire en  $L^{3/2}$  basée sur le pseudo-Hessien :

$$\mathcal{M}_{opt} = \bar{d}_S \mathcal{R}_S(\mathbf{x}) \Lambda_S(\mathbf{x}) \mathcal{R}_S^t(\mathbf{x})$$

avec

$$\bar{d}_S = C_S(\det|S|)^{\frac{-1}{3+dim}} \quad \text{avec} \quad C_S = N^{\frac{2}{dim}} \left( \int_{\Omega} (\det|S|)^{\frac{3}{6+2dim}} \right)^{-\frac{dim}{2}}.$$

Ce travail de thèse est concentré uniquement sur le cas bidimensionnel:

$$\bar{d}_S = C_S(\det|S|)^{-\frac{1}{5}} \quad \text{with} \quad C_S = N \left( \int_{\Omega} (\det|S|)^{\frac{3}{10}} \right)^{-1}. \quad (9.4)$$

### 9.3 Implémentation numérique

Les développements précédents s'appliquent aussi bien à l'adaptation pour les modèles stationnaires que pour l'adaptation, plus complexe pour les modèles instationnaires. Nous nous sommes d'emblée intéressés au cas instationnaire. Les options principales dans notre implémentation numérique de l'adaptation multi-échelle instationnaire s'inspirent de celles présentées dans [Olivier 2011] pour des minimisations de la norme temps-espace  $L^\infty - L^\infty$  de l'erreur, avec toutefois une norme  $L^\infty - L^1$  de l'erreur:  $L^\infty$  en temps,  $L^1$  en espace..

#### 9.3.0.1 L'algorithme de point-fixe $L^\infty - L^1$

Afin de contrôler les divers problèmes liés à l'adaptation, notamment pour le contrôle du nombre d'adaptations, une stratégie innovatrice basée sur un algorithme de point-fixe *local* a été initialement proposée par [Alauzet 2003a], puis développée dans [Alauzet 2007]. L'intervalle en temps est sub-divisé en un petit nombre  $n_{adap}$  de sous-intervalles durant lesquels le maillage ne change pas. Le point fixe réitère l'adaptation sur chaque sous-intervalle, successivement du premier au dernier en contrôlant l'erreur maximale sur chaque sous-intervalle. L'algorithme a été appliqué avec succès aux problèmes tridimensionnels de rupture de barrage dans [Guégan 2010] et d'explosion en géométrie urbaine dans [Alauzet 2003a, Alauzet 2007] pour une adaptation *isotrope*. Mais cette approche ne permet pas de contrôler le nombre total de nœuds au cours du temps.

Rappelons les caractéristique principales de la boucle d'adaptation globale, dans laquelle tout l'intervalle est calculé et leur métriques stockées avant de changer les  $n_{adap}$  maillages.

Dans les deux approches l'intervalle  $[0, T]$  est divisé en  $n_{adap}$  sous-intervalles de temps  $n_{adap}$ :

$$[0, T] = [0 = t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \dots \cup [t_{n_{adap}-1}, t_{n_{adap}}],$$

et il s'agira générer un maillage adapté pour chaque sous-intervalle. Ainsi, on va construire un maillage qui va contrôler l'erreur d'interpolation pour plusieurs pas de temps donnés dans un sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . À ce propos, une stratégie d'adaptation  $\mathbf{L}^\infty(t_i, t_{i+1}; \mathbf{L}^\infty(\Omega))$  espace-temps est présentée dans [Alauzet 2007]; elle consiste à imposer au maillage adapté de satisfaire une condition spécifique, un critère  $\varepsilon$  de l'erreur pour tout le sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . La méthode évolue vers un critère  $\mathbf{L}^\infty - \mathbf{L}^1$  dans [Guégan 2010]. L'appellation  $\mathbf{L}^\infty - \mathbf{L}^1$  est à comprendre comme suit:

1. Le  $\mathbf{L}^1$  signifie que l'erreur d'interpolation spatiale est contrôlée en norme  $\mathbf{L}^\infty$  pour chaque solution du sous-intervalle d'adaptation, *i.e.* la valeur maximale de l'erreur d'interpolation locale  $e^s(\mathbf{x}, t)$  sur  $\Omega$  est maîtrisée par::

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad e^s(t) = \int_{\Omega} |u(\mathbf{x}, t) - \Pi_h u(\mathbf{x}, t)| \leq \varepsilon,$$

2. Le  $\mathbf{L}^\infty$  réfère à la façon dont un seul maillage adapté contrôlera l'erreur d'interpolation spatiale sur un sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . Si une stratégie " $\mathbf{L}^\infty$ " est utilisée, cela signifie qu'on

choisit de contrôler la plus "mauvaise" des erreurs  $e_{max}^s(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ :

$$\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} e^s(t) = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} e^s(t) \leq \varepsilon.$$

**En pratique.** La solution est échantillonnée régulièrement entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . Dans le schéma décrivant l'algorithme, nous notons ces solutions échantillonnées par  $\{\mathcal{S}_{i,k}\}_{k=1, n_k}$  avec  $\mathcal{S}_{i,1} = u(\cdot, t_i)$  et  $\mathcal{S}_{i, n_k} = u(\cdot, t_{i+1})$ . Afin de s'assurer du contrôle  $\mathbf{L}^\infty$  de l'erreur d'interpolation spatiale tout au long d'un sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  en utilisant un seul maillage, ces métriques/hessiens sont intersectés par le procédé décrit dans le chapitre 1, et la métrique/hessien résultante est notée:

$$|H_{i, \max}| = \bigcap_{k=1}^{n_k} |H_{i,k}| = \bigcap_{k=1}^{n_k} |\mathcal{M}_{i,k}|.$$

Pour plus de clarté on a considéré un nombre de solutions échantillonnées  $n_k$  identique pour chaque sous-intervalle. La longueur des intervalles de temps entre deux échantillons est également constante et égale à  $\delta t$ . Ainsi, le temps du  $k^{eme}$  échantillonnage de la solution entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  est donné par:

$$t_{i,k} = t_i + (k - 1)\delta t.$$

Une normalisation est également appliquée afin de renforcer la contrainte sur la complexité spatiale  $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i) = N^{ptfx}$  pour chacun des  $n_{adap}$  maillages adaptés du point-fixe. Le maillage continu  $\mathbf{L}^\infty - \mathbf{L}^\infty$  pour un sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  est déduit notamment de (9.4):

$$\mathcal{M}_{i, \mathbf{L}^\infty - \mathbf{L}^1} = d_{\mathbf{L}^\infty \mathbf{L}^1} |H_{i, \max}| \quad (9.5)$$

$$\text{avec } d_{\mathbf{L}^\infty \mathbf{L}^1} = \left( N^{ptfx} \right) \left( \int_{\Omega} (\det |H_{i, \max}(\mathbf{x})|)^{\frac{3}{10}} d\mathbf{x} \right)^{-1} \quad (9.6)$$

$$\text{et } |H_{i, \max}(\mathbf{x})| = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |H_u(\mathbf{x}, t)|.$$

L'algorithme de point-fixe est représenté dans les Figures 9.1 et 9.2. La solution est calculée sur le sous-intervalle  $[t_0, t_1]$  puis la variable d'adaptation est échantillonnée à des intervalles de temps réguliers de longueur  $\delta t$ . On obtient ainsi  $n_k$  échantillons de la solution entre  $t_0$  et  $t_1$ . Le Hessien associé à chaque échantillon est calculé par la suite, on aura donc aussi  $n_k$  Hessiens. Ces champs de la matrice Hessienne  $\{|H_{0,k}|\}_{k=1, n_k}$  seront intersectés pour obtenir le Hessien maximal  $|H_{0, \max}|$  pour le sous-intervalle  $[t_0, t_1]$  et donc une seule métrique est calculée par la formulation (9.5). La métrique résultante prescrira pour chaque nœud les dimensions maximales garantissant le contrôle de l'erreur d'interpolation spatiale en norme  $\mathbf{L}^\infty$  sur ce premier sous-intervalle. Un nouveau maillage adapté pour ce sous-intervalle est généré puis on interpole la solution sur ce nouveau maillage adapté, on re-calcule la nouvelle solution et on reprend le procédé d'échantillonnage. On itère les étapes de calcul et d'adaptation sur les sous-intervalles jusqu'à ce que la solution et les maillages convergent.

**Boucle de point fixe:** convergence simultanée du maillage et de la solution

```

Pour j=1, ..., n_ptfx
Pour i=1, ..., n_adap
  •  $\mathcal{S}_{i,1}^j = \text{InterpolationSolution}(\mathcal{H}_{i-1}^j, \mathcal{S}_{i-1,n_k}^{j-1}, \mathcal{H}_i^j)$ 
  •  $\{\mathcal{S}_{i,k}^j\}_{k=1,n_k} = \text{ResolutionEtat}(\mathcal{H}^j, \mathcal{S}_{i,1}^j)$ 
  •  $\mathcal{M}_i^j = \text{CalculInstationnaireL}^\infty - \text{L}^1\text{Mtrique}(\{\mathcal{S}_{i,k}^j\}_{k=1,n_k})$ 
  •  $\mathcal{H}_i^{j+1} = \text{GenerationMaillageAdapt}(\mathcal{H}_i^j, \mathcal{M}_i^j)$ 

  fin pour
fin pour

```

Figure 9.1: L'algorithme de point-fixe  $\mathbf{L}^\infty - \mathbf{L}^1$ .

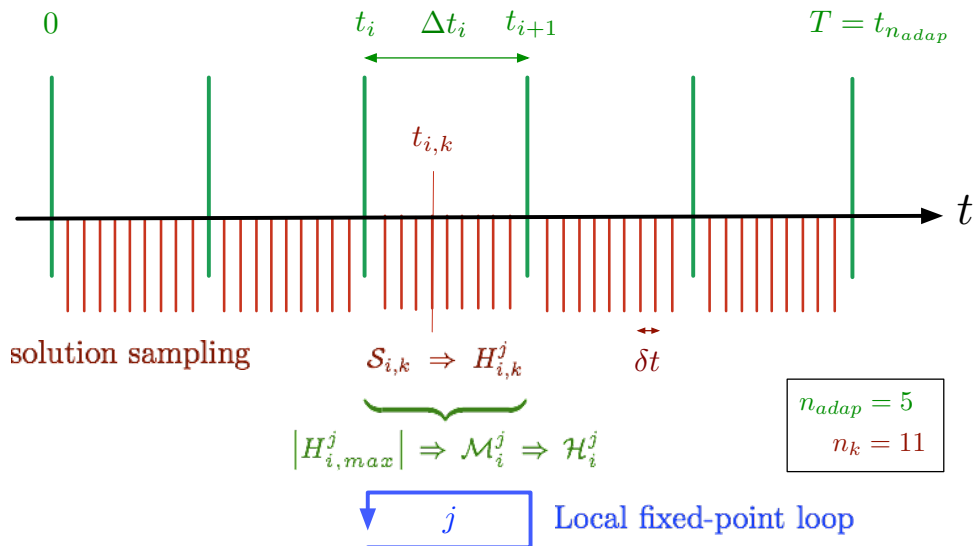


Figure 9.2: Echantillonnage de la solution sur chaque sous-intervalle d'adaptation et boucle de point-fixe.

## 9.4 Tests numériques

### 9.4.1 Un cas-test acoustique : propagation d'une onde

Nous présentons ici un cas-test d'acoustique avec adaptation de maillage Multi-échelle. L'adaptation multi-échelle s'effectue sur la minimisation de l'erreur d'interpolation de la variable pression sur tout le domaine. On considère une source sonore située au coin bas-gauche d'un domaine. Une source acoustique définie par  $f = (0, 0, 0, r)$ , où :

$$r = -A.exp(-B.ln(2)[x^2 + y^2])C.cos(2\Pi fr),$$

est ajoutée comme terme source sur le second membre des équations d'Euler compressibles instationnaires.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes telles que  $A = 0.01$ ,  $B = 256$  et  $C = 2.5$ , et  $fr = 2$  est la fréquence des ondes. Nous analysons le signal sonore émis par cette source sur tout le domaine durant une simulation physique de 20 secondes.

La simulation est divisée en 30 sous-intervalles et dans une première série de calculs une seule itération de point fixe est appliquée. Dans d'autres calculs on fera plus d'itérations de points fixe (3 ou 4) pour avoir une meilleure convergence en maillage pour ce problème. On utilise ici le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 MultiScale.

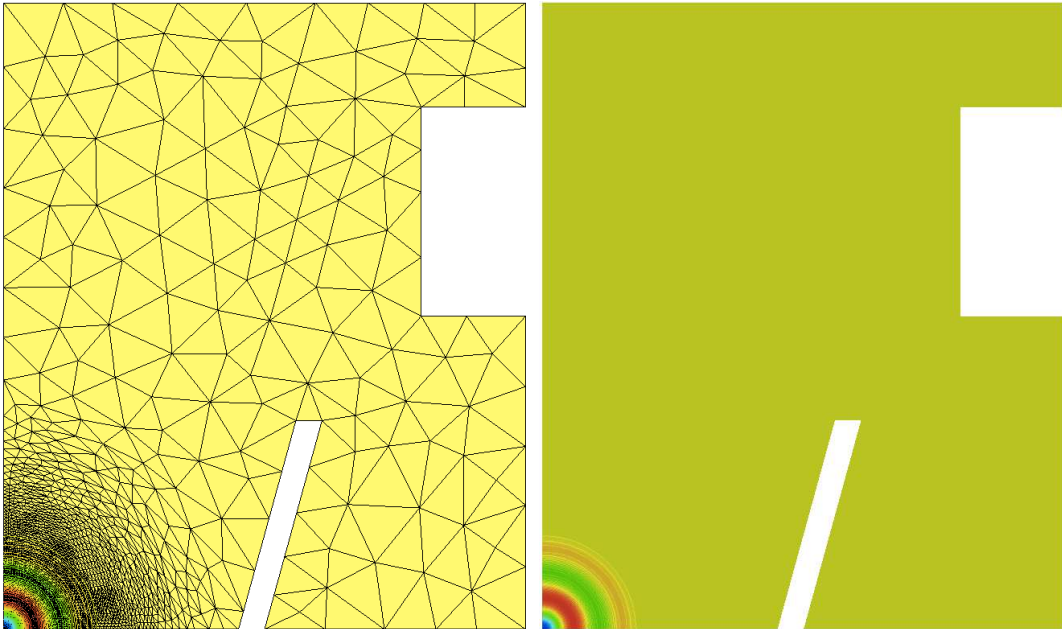


Figure 9.3: Adaptation de maillage MultiScale d'une propagation d'ondes acoustiques pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'erreur d'ordre 3, avec maillage (à gauche) et sans maillage avec la densité des ondes (à droite) : 1er maillage adapté.



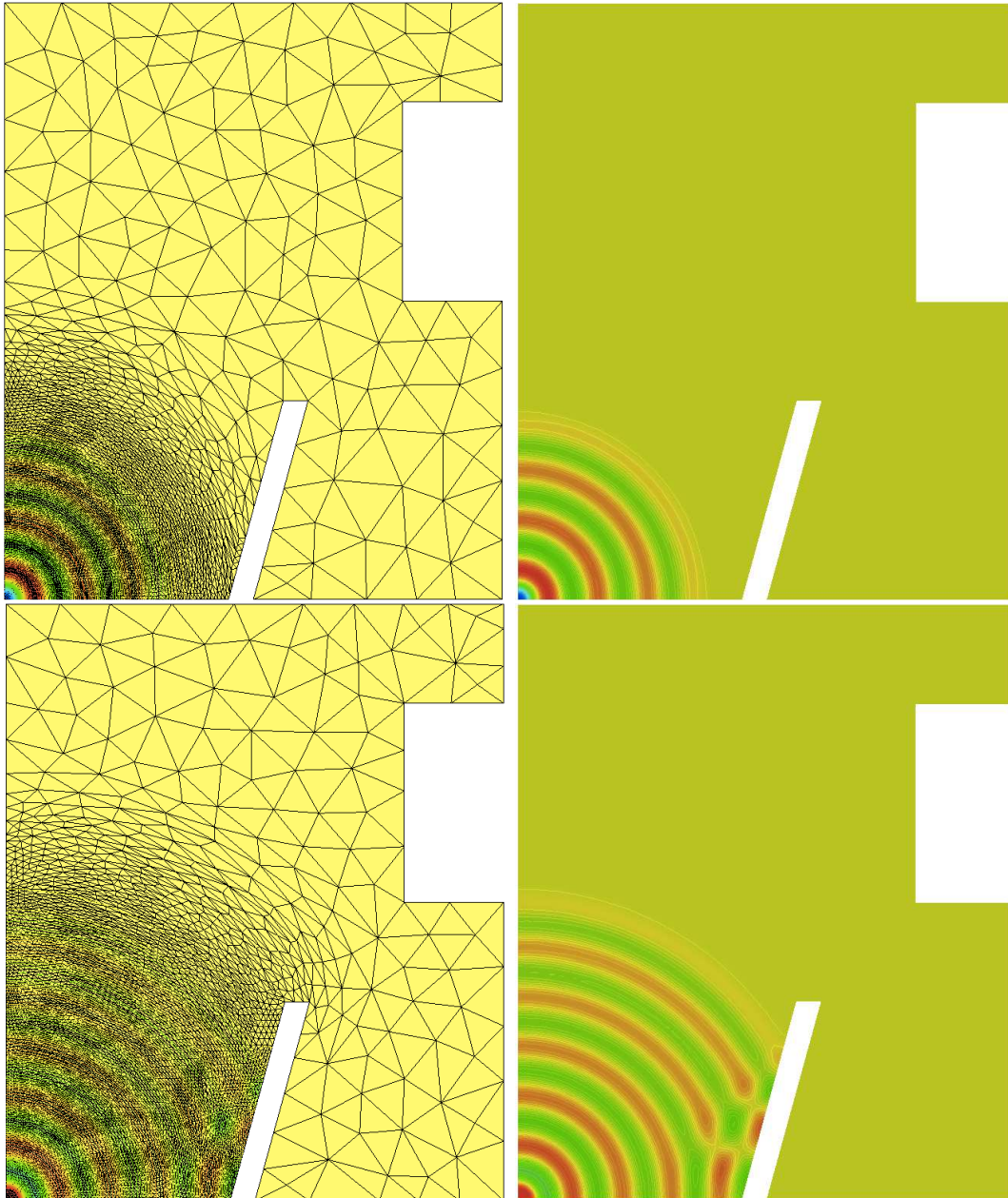


Figure 9.4: Adaptation de maillage MultiScale d'une propagation d'ondes acoustiques pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'erreur d'ordre 3, avec maillage (à gauche) et sans maillage avec la densité des ondes (à droite) : 5ème maillage adapté (en haut) et 10ème maillage adapté (en bas).

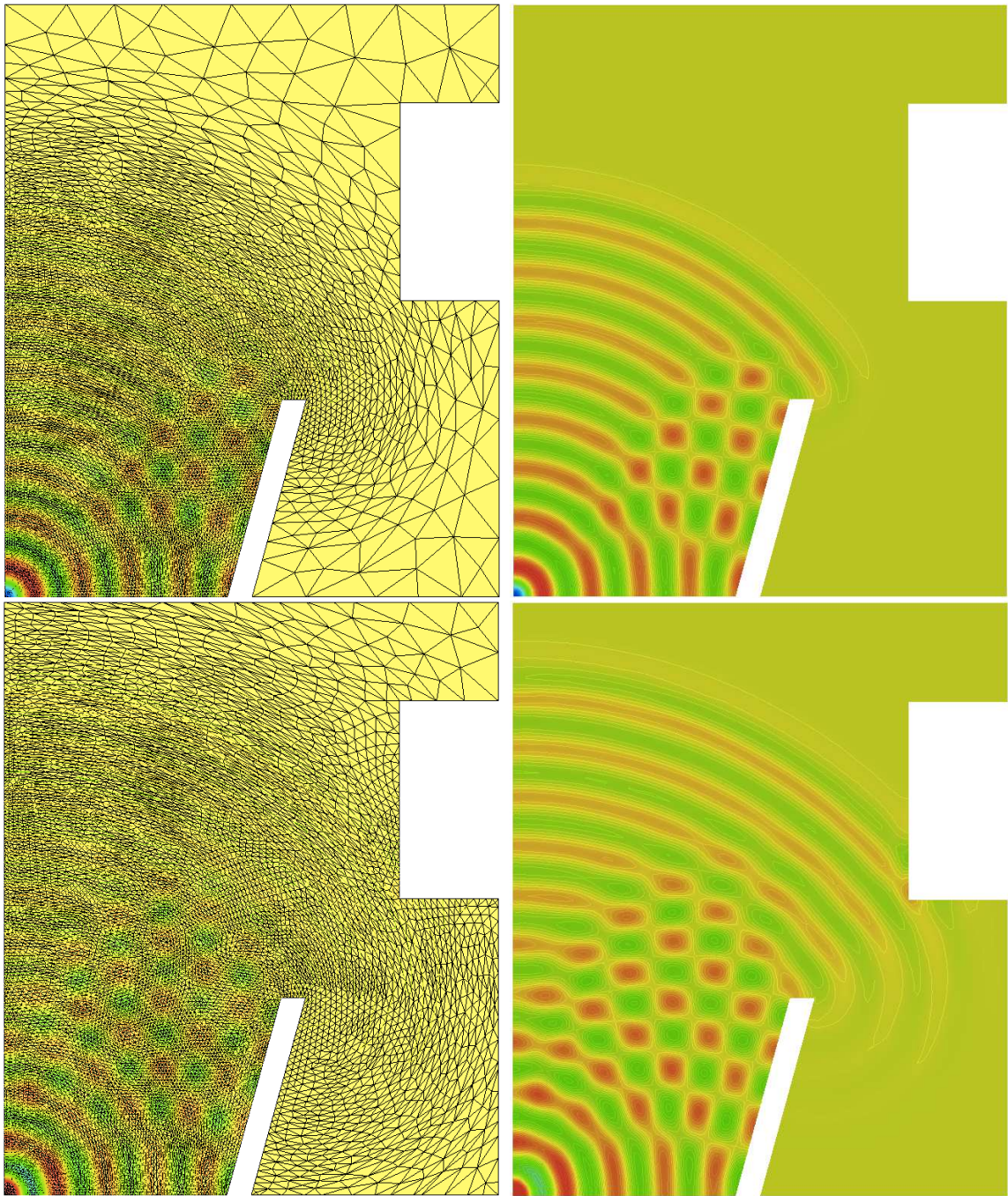


Figure 9.5: Adaptation de maillage MultiScale d'une propagation d'ondes acoustiques pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'erreur d'ordre 3, avec maillage (à gauche) et sans maillage avec la densité des ondes (à droite) : 15ème maillage adapté (en haut) et 20ème maillage adapté (en bas).

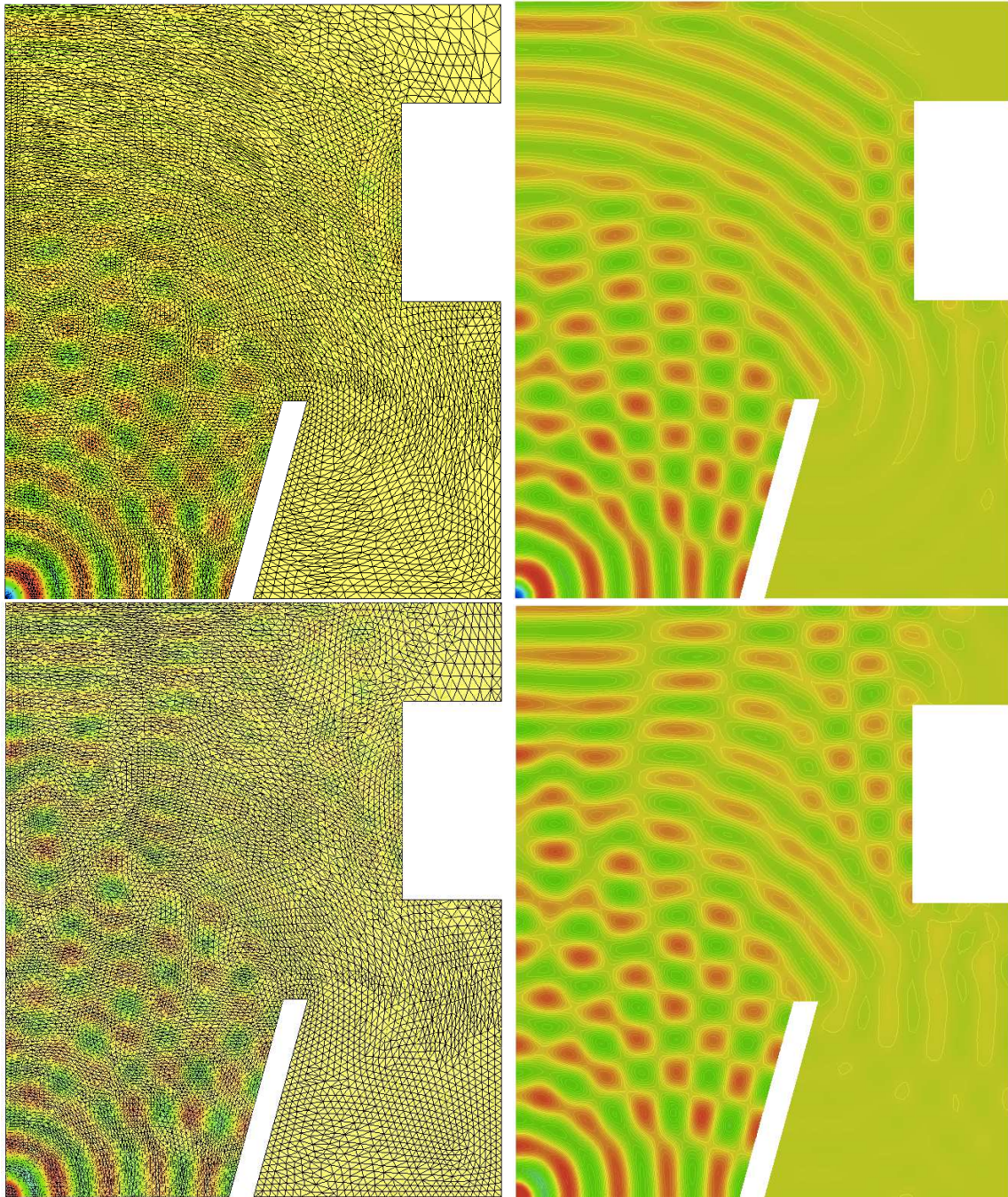


Figure 9.6: Adaptation de maillage MultiScale d'une propagation d'ondes acoustiques pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'erreur d'ordre 3, avec maillage (à gauche) et sans maillage avec la densité des ondes (à droite) : 25ème maillage adapté (en haut) et 30ème maillage adapté (en bas).

### 9.4.2 Un cas-test instationnaire : le scramjet

En demandant à notre algorithme de faire un cas stationnaire, nous avons appliqué notre méthode sur le cas-test suivant : nous considérons un écoulement supersonique à Mach 3 dans un scramjet qui est un réacteur sans pièce mobile et auto-alimenté (voir Figure 9.7). Ce cas-test est particulièrement représentatif des simulations en mécanique des fluides compressibles car il fait intervenir des phénomènes physiques de nature anisotrope, comme des chocs.

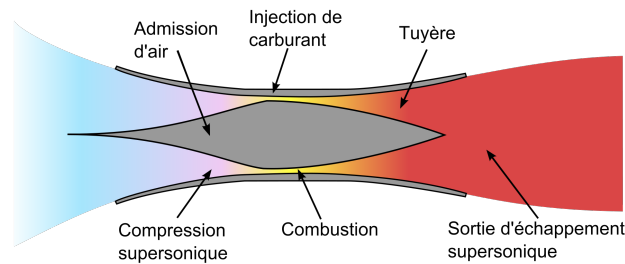


Figure 9.7: Schéma du fonctionnement d'un scramjet.

Nous utilisons dans ces calculs numériques le schéma CENO-V6 couplé avec les limiteurs à trois entrées présentés dans le chapitre 8. Afin de faire de l'adaptation de maillage sur ce cas-test de scramjet, nous avons développé une passerelle d'adaptation stationnaire sur l'estimateur d'ordre 3 basé hessien présenté dans ce chapitre. L'algorithme du point fixe local stationnaire utilisé se résume par les étapes suivantes :

- Boucle sur le nombre  $i$  de points fixes d'adaptation
- Boucle sur le nombre  $j$  de maillages adaptés
- 1) Calcul de la solution  $S_{0,j}^i$  jusqu'à convergence sur le maillage initiale  $M_{0,j}^i$
- 2) Calcul du pseudo-hessien  $H_{0,j}^i$  et de la métrique optimale associée  $Met_{0,j}^i$
- 3) Calcul du maillage adapté  $M_{1,j}^i$  et de la solution interpolée dessus  $S_{1,j}^i$
- Retour en 1) tant que  $j$  non satisfait
- Retour en 1) tant que  $i$  non satisfait

Avec cet algorithme de point fixe stationnaire, nous pouvons effectuer la simulation autant de temps et créer autant de maillages adaptés que l'on souhaite. Lorsque un maillage adapté est généré, la solution précédente est interpolée dessus et le calcul continue sur le nouveau maillage. Nous faisons un test d'arrêt sur le résidu de la solution, fixé à  $1.10^{-6}$  avant de générer un nouveau maillage. De cette façon nous obtenons une convergence en maillage adapté, c'est-à-dire des maillages de plus en plus raffinés dans les zones de chocs.

Dans notre cas-test nous testons plusieurs complexités de maillage de plus en plus grandes, ce

qui nous donnent des maillages adaptés de plus en plus fin, de 2500 nœuds à 32000 nœuds. Nous remarquons facilement que toute notre passerelle d'adaptation stationnaire anisotrope permet une capture des chocs précises et de plus en plus raffinée sur les discontinuités de la solution.

La Figure 9.8 présente le maillage initial grossier de 3900 nœuds et la solution convergée dessus à résidu  $1.10^{-6}$ . Initialiser notre passerelle d'adaptation stationnaire avec un maillage grossier permet de faire des calculs rapides à faible complexité. Les Figures 9.9, 9.10, 9.11, 9.12 et 9.13 présentent les différents maillages générés par l'algorithme de point fixe à différentes complexités d'adaptation ainsi qu'un zoom situé au même endroit pour chacun sur une discontinuité. On remarque aisément le caractère anisotrope de notre estimateur d'ordre 3 basé hessien qui devient de plus en plus anisotrope au fur et à mesure que la complexité d'adaptation augmente.

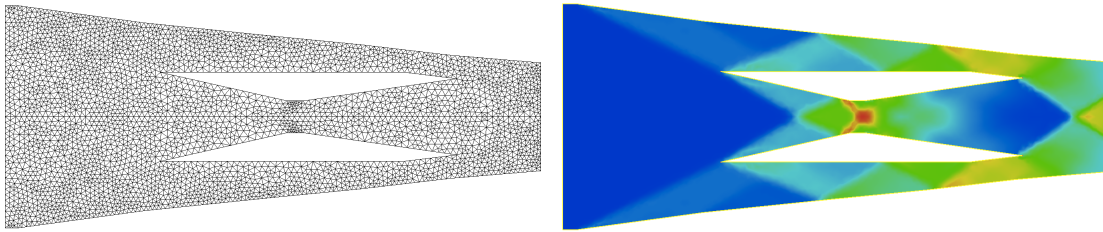


Figure 9.8: Maillage initiale du Scramjet 3903 points (à gauche) et solution convergée sur ce maillage (à droite).

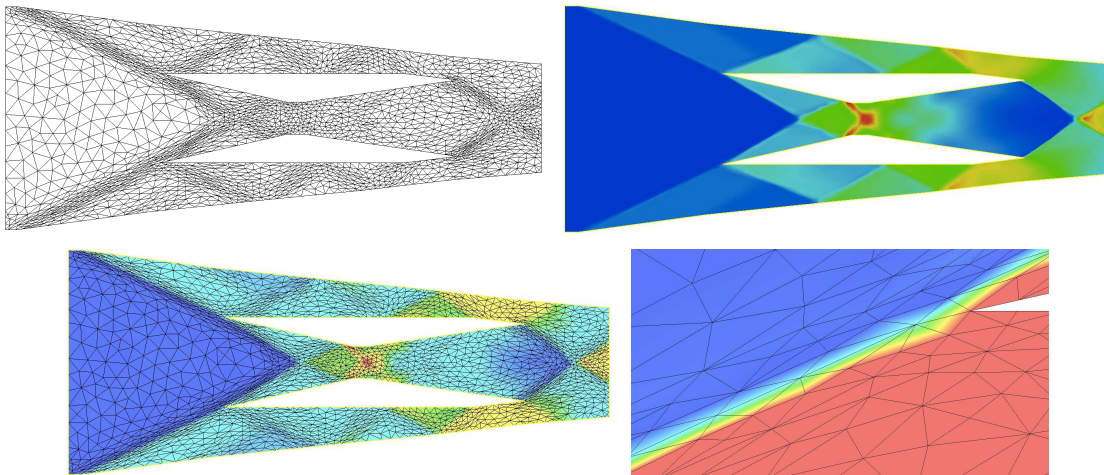


Figure 9.9: Scramjet adaptation sur le Mach basée hessien complexité 1500 (2310 nœuds - 13mn temps CPU).

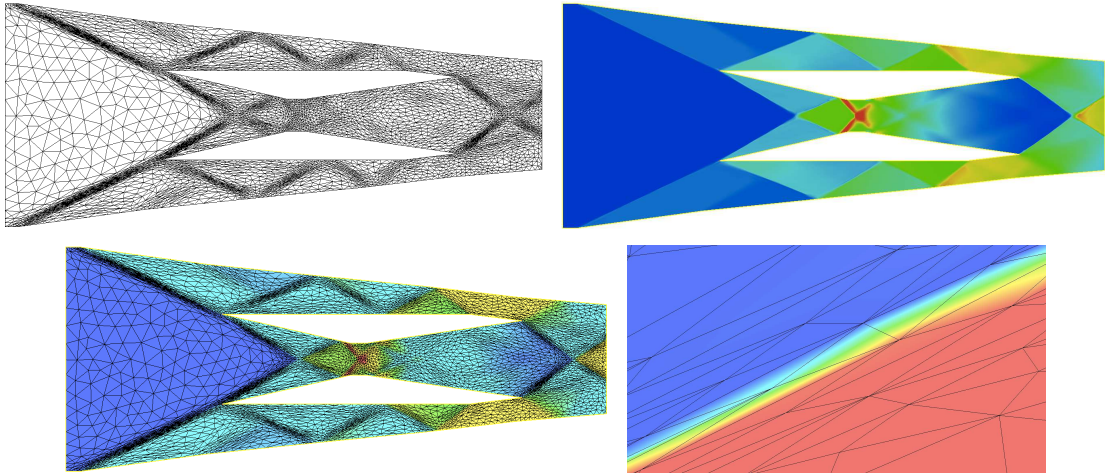


Figure 9.10: Scramjet adaptation sur le Mach basée hessien complexité 3000 (4313 nœuds - 29mn temps CPU).

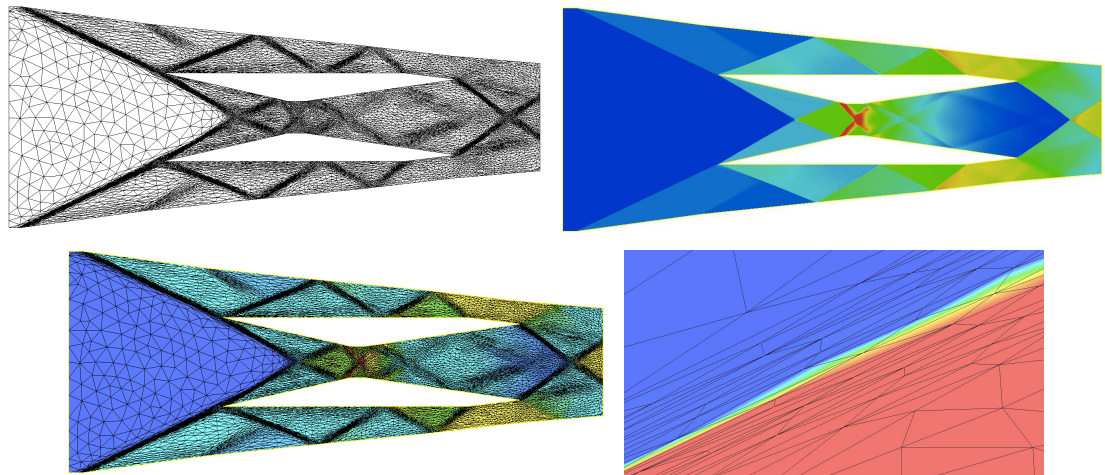


Figure 9.11: Scramjet adaptation sur le Mach basée hessien complexité 6000 (8299 nœuds - 2h40 temps CPU).

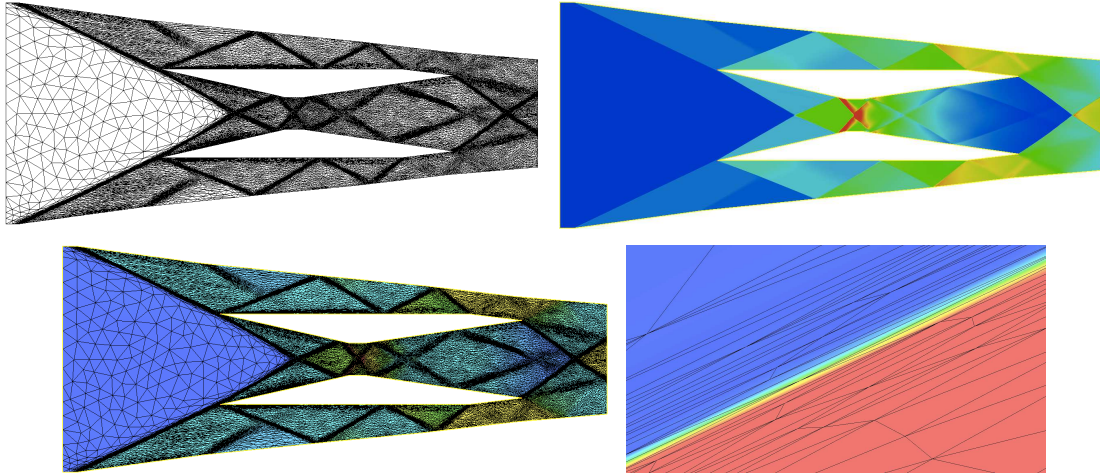


Figure 9.12: Scramjet adaptation sur le Mach basée hessien complexité 12000 (16089 nœuds - 3h20 temps CPU).

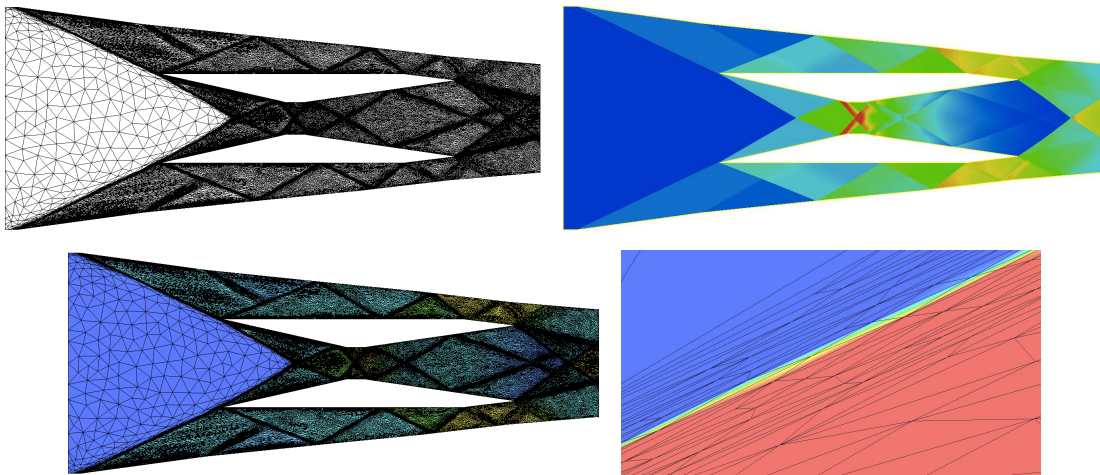


Figure 9.13: Scramjet adaptation sur le Mach basée hessien complexité 24000 (31460 nœuds - 18h30 temps CPU).

## 9.5 Conclusion

Le premier cas-test du mur antibruit montre que l'adaptation de maillage multi-échelle raffine toutes les zones du domaine où les ondes se propagent. Le nombre de points devient de plus en plus important du fait des réflexions et des diffractions qui créent des superpositions d'ondes réfléchies avec les ondes qui arrivent de la source, tout en restant loin du nombre de points d'un maillage uniforme aussi fin.

Le deuxième cas-test stationnaire du scramjet utilise nos limiteurs et montre une bonne aptitude par le code de calculer et adapter un écoulement supersonique présentant des chocs. L'estimateur d'ordre 3 basé hessien montre pleinement son caractère anisotrope sur les discontinuités de la solution sur ce cas-test et permet maintenant de faire des simulations complexes de l'ingénierie industrielle.

Ce chapitre démontre l'intérêt du point fixe global basé sur l'interpolation pour adapter un écoulement stationnaire ou instationnaire avec ou sans chocs. Dans le prochain chapitre on va introduire un critère prenant en compte la véritable erreur d'approximation au lieu d'une simple erreur d'interpolation.





Partie V

Adaptation en Goal-oriented



# Adaptation de maillage anisotrope orientée fonctionnelle pour un modèle d'Euler précis à l'ordre trois

---

## Contents

---

<b>10.1 Introduction</b> . . . . .	<b>229</b>
<b>10.2 Approximation numérique de l'EDP</b> . . . . .	<b>230</b>
10.2.1 Modèle . . . . .	230
10.2.2 Formulation CENO . . . . .	230
<b>10.3 Analyse d'erreur</b> . . . . .	<b>232</b>
<b>10.4 De la théorie à la pratique</b> . . . . .	<b>235</b>
10.4.1 Choix de la métrique orientée fonctionnelle . . . . .	236
10.4.2 L'algorithme de point-fixe global . . . . .	236
10.4.3 Calcul de la métrique orientée fonctionnelle . . . . .	237
<b>10.5 Tests numériques</b> . . . . .	<b>238</b>
10.5.1 Un cas-test acoustique : propagation d'une onde avec un mur antibruit . . . . .	238
10.5.2 Un cas-test acoustique : propagation d'une onde dans une boîte acoustique . . . . .	258
<b>10.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>262</b>

---

## 10.1 Introduction

Initialement restreints aux erreurs d'interpolations, les estimateurs d'erreurs anisotropes *a priori* sont maintenant accessibles pour les formulations orientées fonctionnelle (ou "goal-oriented") et sont devenus un outil efficace dans les problématiques d'adaptation de maillage pour des écoulements d'Euler stationnaires [Loseille 2007] [Rogé 2008], puis instationnaires [Belme 2010], et plus récemment pour des écoulements Navier-Stokes stationnaires et instationnaires [Belme 2012a]. Dans ces références bibliographiques, l'analyse d'erreur suit la méthode dites "d'estimation d'erreur implicite *a priori*", traitant un système discret inversible pour la déviation entre la solution discrète et une projection de la solution continue. De tels estimations *a priori* ont été obtenues pour une formulation mixte éléments-volumes finis proche de la formulation usuelle éléments finis  $\mathcal{P}^1$ . Les promesses théoriques ont été validées par des démonstrateurs numériques, montrant ainsi une convergence numérique à l'ordre deux pour

des problèmes à choc. La théorie prédit également un ordre plus élevé pour des interpolations d'ordre plus élevé sur des écoulements singuliers. Une condition nécessaire est l'application d'une stratégie anisotrope, en utilisant un estimateur d'erreur anisotrope.

Dans ce chapitre on considère une approximation **ENO**-centrée pour les équations d'Euler. Ce schéma est précis à l'ordre trois sur des maillages irréguliers. La méthode de l'erreur implicite est ainsi étendue pour ce nouveau contexte. L'analyse *a priori* résultante peut être vue comme le dual de l'analyse *a posteriori* de Barth et Larson [Barth 2002]. Ensuite un problème d'optimisation pour la métrique de maillage est formulé et analytiquement résolu. Afin de résoudre ce système d'optimalité on discrétise et on applique l'algorithme du point-fixe global de [Belme 2010, Belme 2012b].

La nouvelle méthode est appliquée aux problèmes de propagation d'ondes acoustiques et les résultats seront comparés aux approches précédentes.

## 10.2 Approximation numérique de l'EDP

### 10.2.1 Modèle

Soit les équations d'Euler bi-dimensionnelles définies sur un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ :

$$\text{Trouvez } u \in \mathcal{V} \text{ tel que } \int_{\Omega} v \nabla \cdot \mathcal{F}(u) \, d\Omega = \int_{\Gamma} v \mathcal{F}_{\Gamma}(u) \, d\Gamma \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (10.1)$$

La notation  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  correspond au vecteur des inconnues conservatives (masse volumique, moments, énergie) et on a noté  $\mathcal{F}$  les flux d'Euler usuels. En second membre on a une intégrale des différents flux au bord  $\mathcal{F}_{\Gamma}$  pour les différentes conditions limites, que l'on n'explique pas dans le cadre de cette étude.

Soit

$$B(u, v) = \int_{\Omega} v \nabla \cdot \mathcal{F}(u) \, d\Omega - \int_{\Gamma} v \mathcal{F}_{\Gamma}(u) \, d\Gamma,$$

On a donc la formulation variationnelle:

$$\text{Trouvez } u \in \mathcal{V} \text{ tel que } B(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (10.2)$$

### 10.2.2 Formulation CENO

On s'intéresse dans ce chapitre aux approximations par le schéma **CENO** qu'on a introduit dans les chapitres précédents. On rappelle par la suite très brièvement les principaux éléments de celui-ci.

Soit le domaine de calcul divisé en triangles puis en cellules duales, avec chaque cellule  $C_i$  étant construite autour de son centre, le noeud  $i$ , et délimitée par des sections de segments qui sont les médianes associés aux triangles partageant une arête avec le noeud  $i$ .

On définit l'espace discret  $\mathcal{V}_0$  des fonctions constantes sur chaque cellule duale  $C_i$ .

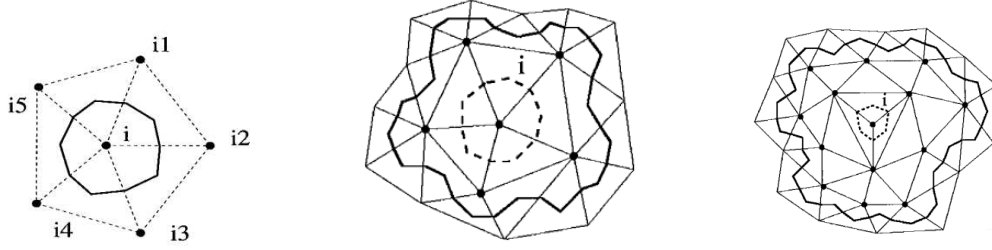


Figure 10.1: Cellule duale et deux molécules de reconstruction

On introduit un opérateur de reconstruction  $R_2^0$  qui reconstruit une fonction de l'ensemble  $\mathcal{V}_0$  sur chaque cellule duale  $C_i$  par un polynôme de degré deux:

$$R_2^0 u_0|_{C_i} = \mathcal{P}_i(X).$$

Étant données les moyennes  $(\overline{u_{0,i}}, i = 1, \dots)$  de  $u_0$  sur les cellules  $i$  de centre  $G_i$ , on cherche les coefficients  $c_{i,\alpha}$ ,  $|\alpha| \leq k$  tel que

$$\overline{\mathcal{P}_{i,i}} = \overline{u_{0,i}} \quad \sum_{j \in N(i)} (\overline{\mathcal{P}_{i,j}} - \overline{u_{0,j}})^2 = \text{Min}$$

avec

$$\mathcal{P}_i(x) = \overline{u_{0,i}} + \sum_{|\alpha| \leq k} c_{i,\alpha} [(X - G_i)^\alpha - \overline{(X - G_i)^\alpha}]$$

et où  $\overline{\mathcal{P}_{i,j}}$  symbolise la moyenne de  $\mathcal{P}_i(X)$  sur la cellule  $j$ .

Alors, pour le modèle d'Euler (10.2), le schéma **CENO** a pour formulation :

$$\text{Trouvez } u_0 \in \mathcal{V}_0 \text{ tel que } B(R_2^0 u_0, v_0) = 0 \quad \forall v_0 \in \mathcal{V}_0 \quad (10.3)$$

On observe que ceci produit une formulation volume finis

$$\forall C_i, \quad \int_{C_i} \nabla \cdot \mathcal{F}(R_2^0 u_0) d\Omega - \int_{\partial C_i \cap \Gamma} \mathcal{F}_\Gamma(R_2^0 u_0) d\Gamma = 0,$$

où :

$$\forall C_i, \quad \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(R_2^0 u_0) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\partial C_i \cap \Gamma} \mathcal{F}_\Gamma(R_2^0 u_0) d\Gamma = 0. \quad (10.4)$$

La connaissance de la reconstruction ne définit pas complètement l'approximation **CENO**. En effet, la reconstruction effectuée dans chaque cellule exhibe un champ global qui est généralement discontinu aux interfaces de la cellule. Afin de régler les problématiques liées à la valeur de l'intégration aux interfaces, on peut considérer une moyenne arithmétique des valeurs des flux pour les deux valeurs de la reconstruction:

$$\mathcal{F}(R_2^0 u_0)^{\text{quadrature}}|_{\partial C_i \cap \partial C_j} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(R_2^0 u_0)|_{\partial C_i} + \mathcal{F}(R_2^0 u_0)|_{\partial C_j}) \cdot \mathbf{n} \quad (10.5)$$

où  $(R_2^0 u_0)|_{\partial C_i}$  symbolise la valeur de la reconstruction  $R_2^0 u_0|_{C_i}$  sur la cellule  $C_i$  à l'interface de la cellule. La moyenne ci-dessus est appliquée sur des points d'une quadrature de Gauss (deux par segment d'interface). Cette formulation produit une approximation précise à l'ordre trois, mais elle ne peut pas être utilisée telle quelle pour des applications non-linéaires, à cause des problèmes de stabilité. Le schéma qu'on a considéré pour les applications non-linéaires sera donc le schéma centré **CENO** présenté en chapitre 4 avec deux termes supplémentaires: un premier terme qui compense partiellement l'erreur principale de dispersion; le second terme introduit une dissipation d'ordre six. Nous considérons que cette modification n'affecte pas le terme principal d'erreur dans notre approximation et donc n'influence pas sur notre analyse d'erreur.

### 10.3 Analyse d'erreur

Soit  $j(u) = (g, u)$  la fonctionnelle d'intérêt qu'on cherche à estimer le plus précisément possible, avec  $u$  la solution du système continue (10.2). On s'intéresse à diminuer, par l'adaptation de maillage, l'erreur suivante:

$$\delta j = (g, R_2^0 \pi_0 u - R_2^0 u_0),$$

où  $g$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  et  $u_0$  la solution discrète de (10.4). La projection  $\pi_0$  est définie par:

$$\begin{aligned} \pi_0 : (V) &\rightarrow (V_0), \\ v &\mapsto \pi_0 v \\ \forall C_i, \text{ cellule duale, } \pi_0 v|_{C_i} &= \int_{C_i} v dx. \end{aligned}$$

Soit l'état adjoint  $u_0^* \in \mathcal{V}_0$  solution de:

$$\frac{\partial B}{\partial u}(R_2^0 u_0)(R_2^0 v_0, u_0^*) = (g, R_2^0 v_0), \quad \forall v_0 \in \mathcal{V}_0. \quad (10.6)$$

On peut alors écrire successivement:

$$\begin{aligned} (g, R_2^0 \pi_0 u - R_2^0 u_0) &= \frac{\partial B}{\partial u}(R_2^0 u_0)(R_2^0 \pi_0 u - R_2^0 u_0, u_0^*) \quad (\text{eq. adjoint})(10.6) \\ &\approx B(R_2^0 \pi_0 u, u_0^*) - B(R_2^0 u_0, u_0^*) \end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned} (g, R_2^0 \pi_0 u - R_2^0 u_0) &\approx B(R_2^0 \pi_0 u, u_0^*) \quad (\text{eq. disc. état})(10.3)(10.5) \\ &\approx B(R_2^0 \pi_0 u, u_0^*) - B(u, u_0^*) \quad (\text{eq. cont. état})(10.2) \\ &\approx \frac{\partial B}{\partial u}(u)(R_2^0 \pi_0 u - u, u_0^*) \end{aligned}$$

Dans notre étude, *on ne considère pas l'adaptation du maillage frontière* donc, comme dans [Loseille 2007], on néglige par la suite les termes aux bords.

Pour les équations d'Euler on a alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial u}(u)(R_2^0 \pi_0 u - u, u_0^*) &= \sum_i \int_{C_i} u_0^* \nabla \cdot \mathcal{F}'(u)(R_2^0 \pi_0 u - u) dx - \int_{\partial C_i \cap \Gamma} u_0^* \mathcal{F}'_\Gamma(u)(R_2^0 \pi_0 u - u) d \Gamma \\ &\approx \sum_i \int_{C_i} u_0^* \nabla \cdot \mathcal{F}'(u)(R_2^0 \pi_0 u - u) dx, \end{aligned}$$

où la somme s'applique pour chaque cellule duale  $C_i$  de notre maillage. On constate que  $u_0$  est constant sur chaque cellule  $C_i$ , on peut donc transformer la relation précédente par une intégration par partie (avec les termes au bord  $\partial\Omega$  négligés):

$$\frac{\partial B}{\partial u}(u)(R_2^0\pi_0u - u, u_0^*) \approx - \sum_i \int_{\partial C_i} u_0^* \mathcal{F}'(R_2^0\pi_0u - u) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

On observe que deux intégrales seront calculées sur chaque interface  $C_{ij}$  des deux cellules voisines. On a donc:

$$\frac{\partial B}{\partial u}(u)(R_2^0\pi_0u - u, u_0^*) \approx - \sum_{C_{ij}} \int_{\partial C_i \cap \partial C_j} \left[ (u_0^* \mathcal{F}'(R_2^0\pi_0u - u))_{C_i} - (u_0^* \mathcal{F}'(R_2^0\pi_0u - u))_{C_j} \right] \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Même pour  $u_0^* \approx \pi_0 u^*$ , avec  $u^*$  suffisamment lisse, la discontinuité à l'interface de  $u_0^*$  est d'ordre 1. Par la construction d'une reconstruction d'ordre plus élevé, la discontinuité à l'interface pour  $R_2^0\pi_0u - u$  sera d'ordre plus élevé et pourra être négligée. Ainsi:

$$\begin{aligned} (u_0^* \mathcal{F}'(R_2^0\pi_0u - u))_{C_i} - (u_0^* \mathcal{F}'(R_2^0\pi_0u - u))_{C_j} &\approx \\ \frac{1}{2} [(u_0^*)_{C_i} - (u_0^*)_{C_j}] &\left[ (\mathcal{F}'(R_2^0\pi_0u - u))_{C_i} + (\mathcal{F}'(R_2^0\pi_0u - u))_{C_j} \right]. \end{aligned}$$

On suppose dans ce travail que  $R_2^0\pi_0u - u$  peut être remplacé par une fonction lisse des dérivées troisièmes locales et taille locale de maille:

$$R_2^0\pi_0u_q - u_q \approx \sup_{\delta\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{x}} |D^3u(\mathbf{x})(\delta\mathbf{x})^3|, \quad \forall q = 1, 4,$$

et pour chaque composantes ( $r = 1, 2$ )

$$\mathcal{F}'_r(R_2^0\pi_0u - u) \approx \sum_q \|\mathcal{F}'_{qr}\| (D^3u(\mathbf{x})(\delta\mathbf{x})^3).$$

D'un autre côté, le terme "jump"  $u_0^*|_{C_i} - u_0^*|_{C_j}$  est une dérivée première de  $u^*$  multipliée par la distance entre les centres de gravité des deux cellules, ou de manière équivalente (à l'ordre un), des nœuds  $i$  et  $j$ . L'intégration de ce terme sur la section d'interface  $\partial C_i \cap \partial C_j$  est essentiellement le (double de) l'aire des quatres triangles délimités par  $i$ ,  $j$  et les centres de gravité des triangles ayant  $ij$  pour arête/facette commune. L'ensemble de tous ces triangles représente une tessellation du domaine de calcul. Alors:

$$|\delta j| \approx \left| \frac{\partial B}{\partial u}(u)(R_2^0\pi_0u - u, u_0^*) \right| \approx 2 \sum_q \int_{\Omega} K_q(u, u^*) |D^3u(\delta\mathbf{x})^3| \, d\Omega$$

avec

$$K_q(u, u^*) = \sum_r |(\mathcal{F}'_{rq}(u))^*| \left| \frac{\partial u_q^*}{\partial x_r} \right|.$$

L'erreur est exprimée en fonction de  $\delta\mathbf{x}$ , la taille locale de maille. On cherche par la suite le maillage optimal qui minimise cette erreur.



### Métrieque optimale

On considère une paramétrisation du maillage par la métrieque Riemannienne tel qu'on l'a introduit dans les chapitres précédents:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = d \mathcal{R}(\mathbf{x}) \Lambda(\mathbf{x}) \mathcal{R}^t(\mathbf{x}).$$

De même, on définit le modèle de l'erreur de reconstruction pour une reconstruction quadratique (pour  $q = 1, 4$ ) de la manière suivante:

$$|u_q(\mathbf{x}) - \pi_2 u_q(\mathbf{x})| \approx \left( \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} |\tilde{H}_{u_q}| \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{3}{2}},$$

où le pseudo-Hessien  $\tilde{H}_{u_q}$  doit-être numériquement calculé à partir de la dérivée de troisième ordre. On doit donc minimiser l'erreur:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{q=1,4} \int K_q(u, u^*) \left( \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} |\tilde{H}_{u_q}| \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{3}{2}} dx dy. \\ &\preceq \int \left( \text{trace}(\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}} |S| \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{3}{2}} dx dy. \end{aligned}$$

avec

$$S = \sum_{q=1,4} K_q(u, u^*)^{\frac{2}{3}} |\tilde{H}_{u_q}|. \quad (10.7)$$

La matrice  $S(\mathbf{x})$  est une somme de matrices symétriques, définies positives, donc elle admet la diagonalisation:

$$S(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_S(\mathbf{x}) \Lambda_S(\mathbf{x}) \mathcal{R}_S^t(\mathbf{x}).$$

**Métrieque optimale.** On identifie la métrieque optimale,  $\mathcal{M}^{opt} = \mathcal{M}^{opt}(N)$ , parmi celles ayant un nombre prescrit  $N$  de nœuds, minimisant l'erreur ci-dessus. Similairement à l'analyse des chapitres précédents on a les résultats suivants:

**Lemme :**

*La métrieque optimale de  $N$  nœuds qui minimise la norme  $L^1$  de l'erreur quadratique d'interpolation approchée par la formulation pseudo-Hessien, est la métrieque optimale pour l'erreur d'interpolation linéaire basée sur le pseudo-hessien et mise à la puissance  $L^{3/2}$ , d'où:*

$$\mathcal{M}_{opt} = \bar{d}_S \mathcal{R}_S(\mathbf{x}) \Lambda_S(\mathbf{x}) \mathcal{R}_S^t(\mathbf{x})$$

avec

$$\bar{d}_S = C_S (\det|S|)^{\frac{-1}{3+dim}} \quad \text{avec} \quad C_S = N^{\frac{2}{dim}} \left( \int_{\Omega} (\det|H_S|)^{\frac{3}{6+2dim}} \right)^{-\frac{dim}{2}}.$$

Ce rapport se concentre sur le cas bidimensionnel:

$$\bar{d}_S = C_S (\det|S|)^{-\frac{1}{5}} \quad \text{with} \quad C_S = N \left( \int_{\Omega} (\det|H_S|)^{\frac{3}{10}} \right)^{-1}.$$

## 10.4 De la théorie à la pratique

Le problème continu d'adaptation de maillage s'exprime sous la forme de conditions continues d'optimalité de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 W \in \mathcal{V}, \forall \varphi \in \mathcal{V}, (\Psi(\mathcal{M}, W), \varphi) &= 0 && \text{“système d'Euler”} \\
 W^* \in \mathcal{V}, \forall \psi \in \mathcal{V}, \left( \frac{\partial \Psi}{\partial W}(\mathcal{M}, W) \psi, W^* \right) &= (g, \psi) && \text{“système adjoint”} \\
 \mathcal{M}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{M}_{go}(\mathbf{x}, t) && \text{“maillage adapté”}.
 \end{aligned}$$

En pratique ce système d'optimalité continue sera discrétisé. Ainsi, pour l'état et l'état adjoint on utilisera les schémas introduits précédemment qui sont des schémas Runge-Kutta d'avancement en temps explicite. Ces schémas discrets ont des propriétés de stabilité non-linéaire comme TVD qui sont particulièrement employés pour des systèmes hyperboliques ou des discontinuités apparaissent. Discrétiser la condition d'optimalité consiste à spécifier un maillage associé à la métrique discrète déduite des dérivées tierces des états discrets.

Afin de remédier aux diverses problématiques énoncées dans l'introduction et liées à l'adaptation de maillage pour des problèmes instationnaires, une stratégie innovatrice basée sur un algorithme de point-fixe a été initiée par Alauzet dans [Alauzet 2003c] puis de manière plus développée dans [Alauzet 2007]. L'approche point-fixe a été appliquée avec succès pour des problèmes tridimensionnelles bi-fluides ([Guégan 2010]), à une simulation d'explosion dans un milieu urbain [Alauzet 2007] et pour des simulations de corps en mouvement [Alauzet 2011]. Cet algorithme a été étendu aux problèmes instationnaires orientés fonctionnelle dans [Belme 2011].

L'algorithme de point-fixe vise à éviter de générer un nouveau maillage à chaque itération en temps du solveur. Cela causerait une forte augmentation en temps CPU mais également la dégradation de la solution due à des nombreuses modifications du maillage. Cet algorithme répond aussi aux problématiques de retard du maillage par rapport à la physique ou à la solution. Plus précisément, ce phénomène se manifeste quand, à partir de la solution associée à l'instant  $t^n$ , un nouveau maillage adapté est généré à ce niveau  $t^n$  afin de calculer la solution à l'instant  $t^{n+1}$ . Pour ce dernier cas, comme la solution n'est pas adaptée à l'évolution de la solution entre les deux instants/niveau  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , le maillage reste en retard par rapport à la physique.

L'idée de base consiste à diviser l'intervalle global de temps  $[0, T]$  en  $n_{adap}$  sous-intervalles d'adaptation:

$$[0, T] = [0 = t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \dots \cup [t_{n_{adap}-1}, t_{n_{adap}}],$$

le maillage adapté étant propre à un sous-intervalle. Par conséquent, la simulation instationnaire sera effectuée avec uniquement  $n_{adap}$  maillages adaptés de manière différentes. Le maillage généré pour chaque sous-intervalle est tel qu'il contrôle la précision de la solution de  $t_{i-1}$  à  $t_i$ . On examine par la suite comment cela peut être appliqué pour nos problèmes.

### 10.4.1 Choix de la métrique orientée fonctionnelle

Les maillages optimaux pour chaque sous-intervalle sont générés conformément à l'analyse du chapitre 1. Dans cette thèse on a fait le choix suivant:

- la métrique Hessienne pour le sous-intervalle  $i$  est basée sur un contrôle de l'erreur temporelle en norme  $\mathbf{L}^\infty$ :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{L}^\infty}^i(\mathbf{x}) = \Delta t_i \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \Delta t_i \mathbf{H}_{max}^i(\mathbf{x}),$$

- la fonction  $\tau : t \rightarrow \tau(t)$  est constante et égale à 1,
- tous les sous-intervalles ont la même longueur  $\Delta t$ .

La métrique goal-oriented optimale  $\mathbf{M}_{go} = \{\mathbf{M}_{go}^i\}_{i=1, \dots, n_{adap}}$  s'écrit:

$$\mathcal{M}_{go}^i(\mathbf{x}) = N_{st}^{\frac{2}{3}} \left( \sum_{i=1}^{n_{adap}} \left( \int_{\Omega} (\det \mathbf{H}_{max}^i(\mathbf{x}))^{\frac{1}{5}} dx \right) \right)^{-\frac{2}{3}} (\Delta t)^{\frac{1}{3}} (\det \mathbf{H}_{max}^i(\mathbf{x}))^{-\frac{1}{5}} \mathbf{H}_{max}^i(\mathbf{x}).$$

### 10.4.2 L'algorithme de point-fixe global

Afin de converger le problème non-linéaire d'adaptation de maillage, ou le couple maillage-solution, on propose d'utiliser un algorithme de point-fixe global. Le paramètre  $N_{st}$  représentant l'effort global de calcul est imposé par l'utilisateur et influera sur la dimension des maillages définis sur un sous-intervalle temporel. Autrement dit, pour calculer un champ de métriques  $\mathbf{M}_{go}^i$ , on doit évaluer un terme de normalisation globale qui nécessite les  $\mathbf{H}_{max}^i$ . Ainsi, la simulation de 0 à  $T$  doit être effectuée afin d'évaluer les métriques  $\mathbf{M}_{go}^i$ .

Une stratégie de point-fixe global similaire à [Alauzet 2011], couvrant l'intégralité de l'intervalle de temps  $[0, T]$  et également appelé *algorithme de point-fixe global*, sera considéré pour notre étude. :

```
//- Boucle de point-fixe global
Pour j=1, n_nptfx
  //- Résoudre l'état pour obtenir les checkpoints
  Pour i=1, n_adap
    •  $\mathcal{W}_{0,i}^j = \text{TransferConservatifDeLaSolution}(\mathcal{H}_{i-1}^j, \mathcal{W}_{i-1}^j, \mathcal{H}_i^j)$ 
    •  $\mathcal{W}_i^j = \text{ResolutiondeLEtat}(\mathcal{W}_{0,i}^j, \mathcal{H}_i^j)$ 
  Fin Pour
  //- Résoudre l'état et l'état adjoint à l'envers (boucle aller-retour)
  Pour i=n_adap, 1
    •  $(\mathcal{W}^*)_i^j = \text{TransferEtatAdjoint}(\mathcal{H}_{i+1}^j, (\mathcal{W}^*)_{i+1}^j, \mathcal{H}_i^j)$ 
    •  $\{\mathcal{W}_i^j(k), (\mathcal{W}^*)_i^j(k)\}_{k=1, n_k} = \text{ResoudEtatEtAdjointBackwardsinTime}(\mathcal{W}_{0,i}^j, (\mathcal{W}^*)_i^j, \mathcal{H}_i^j)$ 
    •  $|\mathbf{H}_{max}|_i^j = \text{CalculMetrriqueGoalOriented}(\mathcal{H}_i^j, \{\mathcal{W}_i^j(k), (\mathcal{W}^*)_i^j(k)\}_{k=1, n_k})$ 
```

*Fin pour*

- $\mathcal{C}^j = \text{CalculComplexiteEspaceTemps}(\{|\mathbf{H}_{max}|_i^j\}_{i=1, n_{adap}})$
- $\{\mathcal{M}_i^j\}_{i=1, n_{adap}} = \text{CalculMetriqueInstatGoalOriented}(\mathcal{C}^j, \{|\mathbf{H}_{max}|_i^j\}_{i=1, n_{adap}})$
- $\{\mathcal{H}_i^{j+1}\}_{i=1, n_{adap}} = \text{GenerationMaillageAdapt}(\{\mathcal{H}_i^j\}_{i=1, n_{adap}}, \{\mathcal{M}_i^j\}_{i=1, n_{adap}})$

*Fin pour*

Explicitons maintenant l'algorithme de la Figure 10.2. Il consiste à diviser l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $n_{adap}$  sous-intervalles d'adaptation:  $\{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=1, \dots, n_{adap}}$  avec  $t_0 = 0$  et  $t_{n_{adap}} = T$ . Sur chaque sous-intervalle un maillage différent sera utilisé. Un premier calcul de la solution est effectué avec un stockage de la solution en checkpoints, qui seront pris en  $\{\mathcal{W}_h(t_i)\}_{i=1, \dots, n_{adap}}$ . Après adaptation, la solution sur chaque sous-intervalle sera interpolée sur le nouveau maillage en utilisant l'interpolation conservative de [Alauzet 2010b]. Ensuite, à partir du dernier sous-intervalle et en reculant jusqu'au premier, on recalcule et stocke dans la mémoire les solutions intermédiaires entre deux checkpoints, autrement dit entre les deux extrémités d'un sous-intervalle. Ceci est nécessaire afin de calculer l'état adjoint qui a pour particularité de "reculer" en temps. On évalue ensuite les métriques hessiennes  $\mathbf{H}_{max}^i$  nécessaires pour la génération du nouveau maillage associé à chaque sous-intervalle. À ce point dans l'algorithme les  $n_k$  métriques hessiennes sont calculées sur chaque sous-intervalle puis intersectées [Alauzet 2007] pour obtenir  $\mathbf{H}_{max}^i$ . À la fin d'une boucle de point-fixe, la complexité espace-temps est évaluée, introduisant ainsi des poids pour les champs de la métrique goal-oriented pour chaque sous-intervalle. Pour finir, les nouveaux maillages adaptés conformément aux métriques prescrites seront générés pour chaque sous-intervalle. Ce processus est itéré un nombre de fois  $j$  dans une boucle  $j = 1, \dots, n_{ptfx}$ . De manière générale un nombre de 5 itérations de point fixe suffisent pour atteindre convergence.

### 10.4.3 Calcul de la métrique orientée fonctionnelle

La métrique goal-oriented optimale est une fonction de l'état adjoint, du gradient de l'adjoint, de la Hessienne de la dérivée en temps de l'état et la Hessienne des flux d'Euler. En pratique on va calculer une métrique optimale discrète associée aux états discrets, ou des méthodes de recouvrement de dérivées seront utilisées pour calculer les gradients et les hessiens.

L'adjoint discret  $W_h^*$  est l'approximation de l'adjoint continue  $W^*$ . Le gradient de l'adjoint  $\nabla W^*$  sera remplacé par  $\nabla_R W_h^*$  et le Hessien de chaque composante du vecteur flux  $H(\mathcal{F}_i(W))$  sera obtenu par  $H_R(\mathcal{F}_i(W_h))$ .  $\nabla_R$  (resp.  $H_R$ ) représente l'opérateur de recouvrement pour les dérivées première et seconde d'un champ initial de solution linéaire pas morceaux. Dans cette thèse la méthode de recouvrement est basée sur une projection  $\mathbf{L}^2$ . Les détails sur la méthode de recouvrement et la comparaison avec d'autres méthodes sont disponibles dans [Alauzet 2010a].

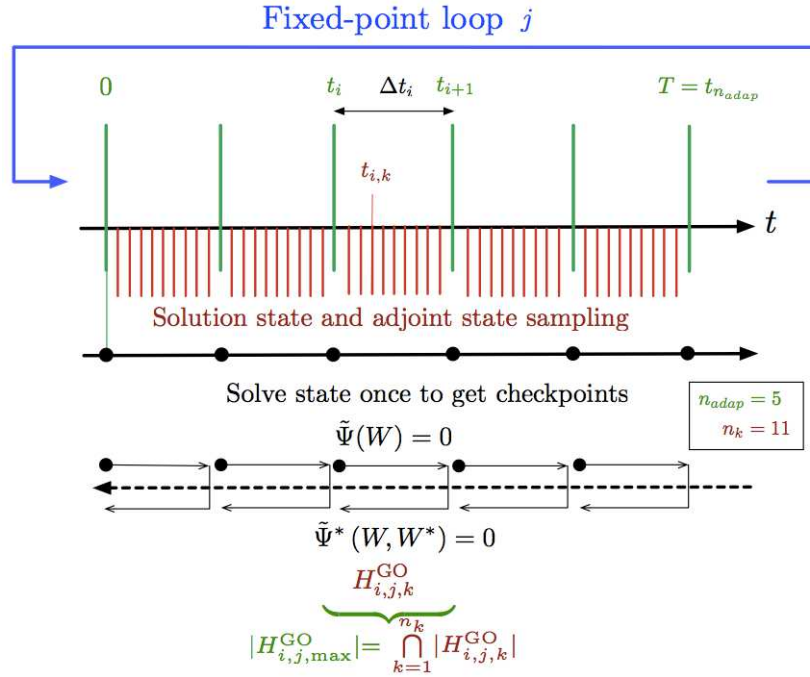


Figure 10.2: Algorithme goal-oriented de point-fixe global pour la génération de maillages anisotropes dans une simulation instationnaire.

## 10.5 Tests numériques

### 10.5.1 Un cas-test acoustique : propagation d'une onde avec un mur anti-bruit

Nous présentons ici un cas-test linéaire acoustique qui mesure l'écart de pression se propageant sur une longue distance. Les ondes acoustiques linéaires en générales se réfèrent soit à un train d'ondes de durée limitée soit à une vibration périodique permanente. Nous nous intéressons à l'effet d'un train d'onde sur un micro occupant une très petite partie de la région touchée par la perturbation de pression. Pour simplifier les choses, nous nous intéressons à une mesure scalaire unique de cet effet, par exemple l'énergie totale  $E_{totale}$  reçu par le capteur pendant un intervalle de temps donné. Si la perturbation de pression est émise à très longue distance dans un domaine ouvert et spatialement complexe, la simulation numérique de ce phénomène peut-être extrêmement coûteuse en maillage fixe, voir impossible. Le but de ce cas test est de démontrer l'aptitude du maillage adaptatif anisotrope à suivre la partie du train d'onde qui influencera effectivement la fonctionnelle.

Nous considérons donc une source sonore située au coin bas-gauche d'un domaine. Une source acoustique définie par  $f = (0, 0, 0, r)$ , où :

$$r = -A.exp(-B.ln(2)[x^2 + y^2])C.cos(2\Pi fr),$$

est ajoutée comme terme source sur le second membre des équations d'Euler compressibles instationnaires.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes telles que  $A = 0.01$ ,  $B = 256$  et  $C = 2.5$ , et  $fr = 2$  est la fréquence des ondes. Nous analysons le signal sonore émis par cette source sur un microphone  $M$  situé en haut à droite du domaine durant une simulation physique de 10 secondes.

L'adaptation de maillage Goal-Oriented considère la fonction coût suivante :

$$j(W) = \int_0^T \int_M \frac{1}{2} (p(\mathbf{x}, t) - p_0)^2 \, dM dt.$$

La simulation est divisée en 40 sous-intervalles (donc 40 checkpoints sont utilisés) et 1 seule itération de point fixe. A noté qu'on pourrait faire plus d'itération de point fixe (3 ou 4) pour avoir une meilleure convergence en maillage pour ce problème.

Comme attendu, on remarque que l'adaptation de maillage Goal-Oriented réduit autant que possible le raffinement de maillage dans tout le domaine de calcul où les ondes n'ont pas d'influence sur la micro. Seules les ondes qui vont avoir un impact sur le micro sont raffinées.

Nous exposons pour ce cas-test trois types de résultats :

- On effectue tout d'abord une analyse de convergence pour l'intégrande  $k(t)$  10.5.2 de la fonctionnelle  $j$  ainsi que pour la fonctionnelle elle-même, qui est donc l'intégrale en temps de l'intégrande  $k(t)$ . On montre que les valeurs de l'intégrande ne permettent pas de calculer une convergence en maillage satisfaisante, car cette convergence numérique se calculant ponctuellement, nous obtenons des résultats très différents suivant le point de la courbe choisi. Mais nous constatons que les valeurs (prises sur le deuxième maximum observé) montre une meilleure convergence pour le cas adaptatif que pour le cas uniforme : en effet les valeurs sont bien moins espacées entre elles pour le cas adaptatif (voir tableaux 10.1 et 10.2). Nous calculons ensuite l'intégrale en temps de  $k(t)$  et nous obtenons des valeurs (voir tableau 10.3) qui montrent de la même façon une meilleur convergence pour le cas adaptatif que pour le cas uniforme.
- On compare ensuite l'adaptation de maillage pour les trois schémas : MUSCL avec l'estimateur d'ordre 2, CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 2 et CENO-QV6 avec le nouvel estimateur d'ordre 3 sur les figures 10.6, 10.7, 10.8, 10.9 et 10.10.
- Enfin on compare le calcul d'adaptation de maillage avec le schéma **CENO-QV6** avec l'estimateur d'ordre 3, ceci avec 1 point fixe d'itération de maillage et 4 points fixes d'itération de maillage. Nous constatons facilement sur les figures 10.11, 10.12, 10.13, 10.14, 10.15, 10.16, 10.17, 10.18, 10.19, que la convergence en maillage de l'algorithme du point fixe donne de meilleurs maillages adaptés avec 4 points fixe, c'est-à-dire que le raffinement sur les ondes qui vont avoir un impact sur le micro est plus précis et plus concentré.

*Etude de convergence* On effectue une analyse de convergence de la méthode proposée pour l'intégrande  $k(t)$  sur le micro  $M$ :

$$k(t) = \int_M (p - p_0) dM,$$

pour différentes tailles de maillages adaptés et uniformes.

L'évolution de l'intégrande  $k(t)$  au cours du temps est illustrée dans les figures 10.1 et 10.2 pour différentes complexités de maillages adaptés et uniformes, autrement dit pour différentes tailles de maillages. Le temps initial qu'on considère dans cette image est le temps à partir duquel les ondes auront touché le micro, l'intégrande ayant une valeur nulle avant ce temps. À partir d'une complexité de 6000 on observe un comportement de convergence de l'intégrande.

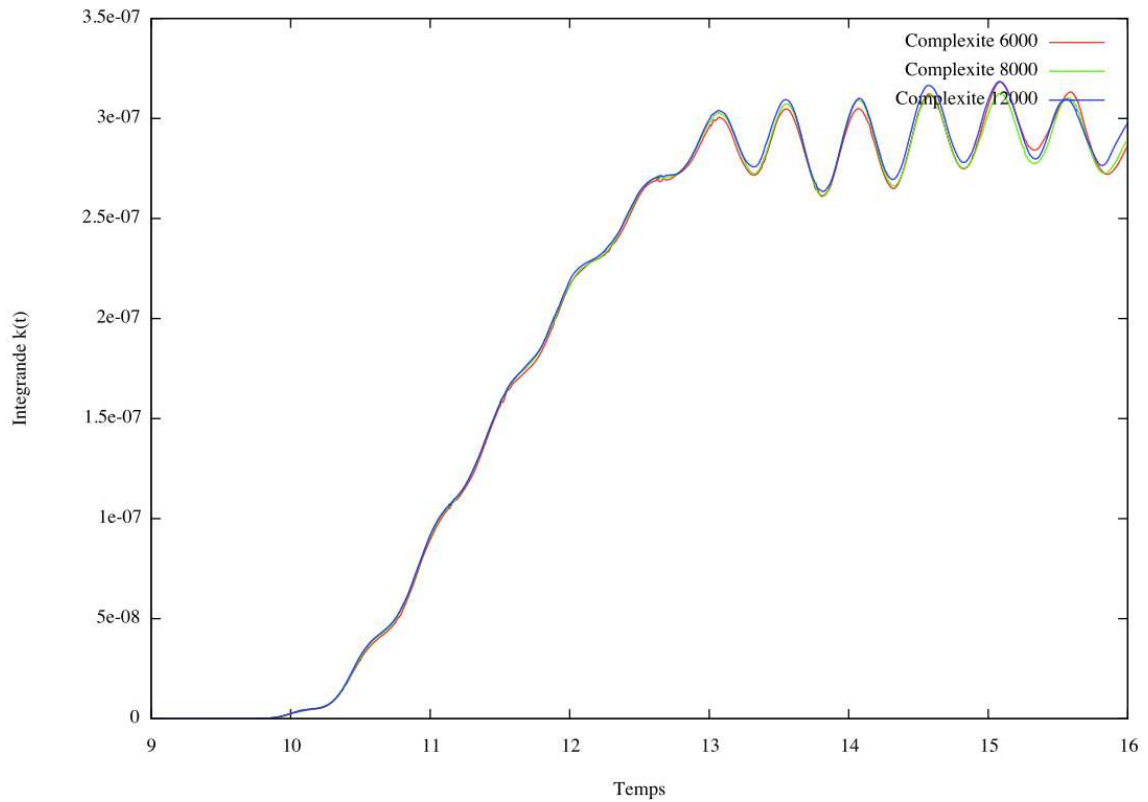


Figure 10.3: Intégrande en temps  $k(t)$  de la fonctionnelle sur une série de maillage adaptés avec 4 points fixes d’itération et avec un nombre moyen de nœuds de plus en plus grand. Pour des complexités de 6000 (en rouge), de 8000 (en vert), de 12000 (en bleu).

Maillage (et la complexité associée)	Deuxième maximum observé
Maillages adaptés 7945 nœuds en moyenne (6000)	$3.047438e - 07$
Maillages adaptés 10424 nœuds en moyenne (8000)	$3.073350e - 07$
Maillages adaptés 15730 nœuds en moyenne (12000)	$3.094078e - 07$

Tableau 10.1: Convergence en maillage pour l’intégrande instationnaire pour des maillages adaptés avec 4 points fixes.



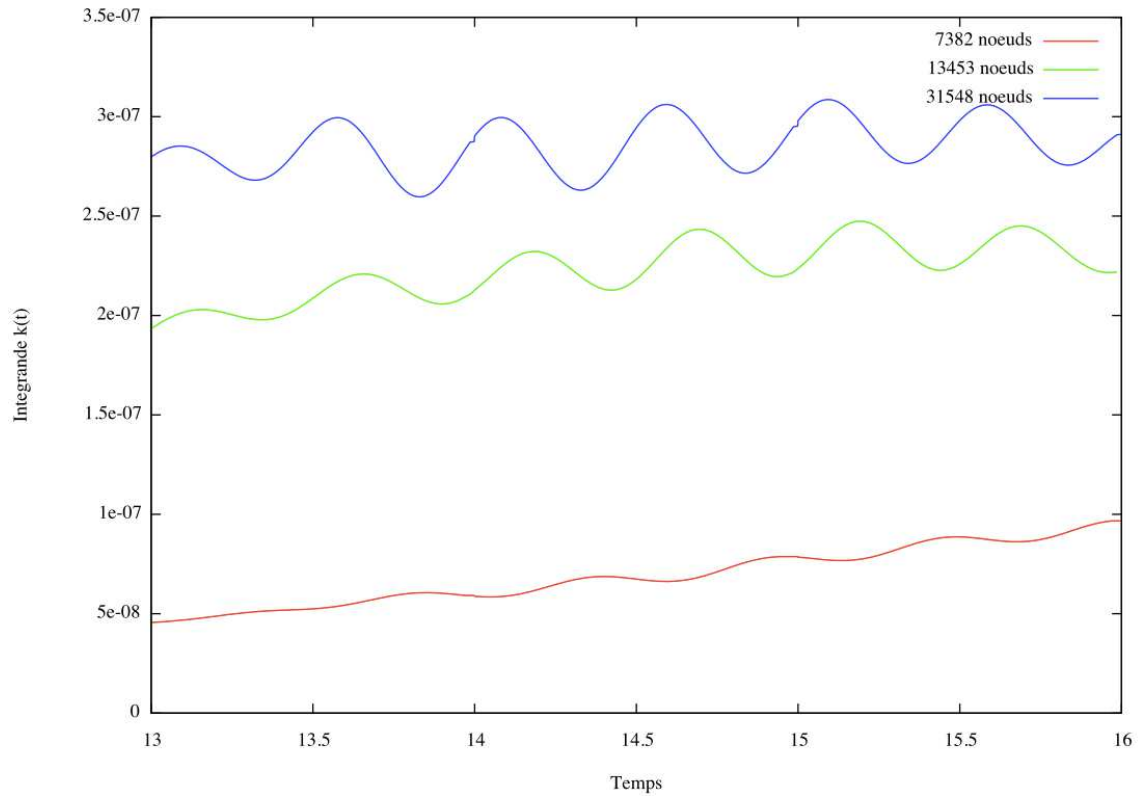
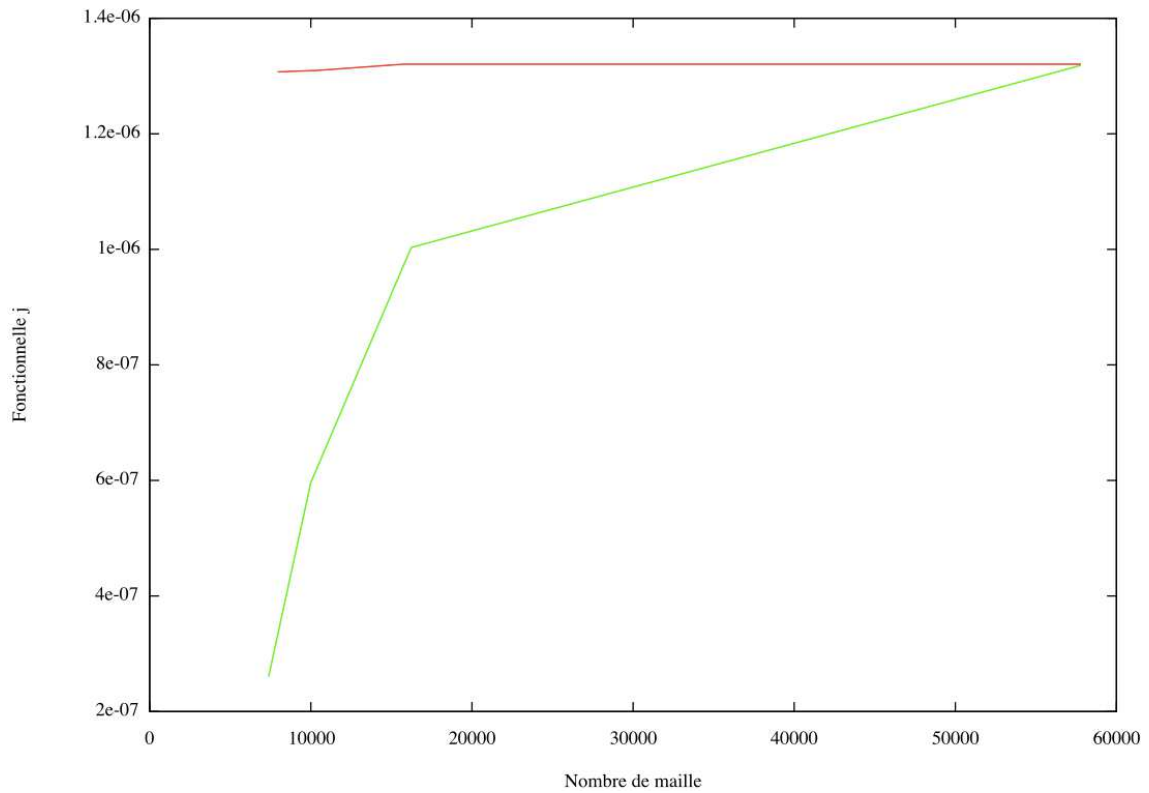


Figure 10.4: Intégrande en temps  $k(t)$  de la fonctionnelle sur une série de maillages uniformes des tailles de 7382 (en rouge), de 13453 (en vert), de 31548 (en bleu).

Maillage uniforme	Deuxième maximum observé
Maillages 7382 nœuds	$6.057708e - 08$
Maillages 10005 nœuds	$1.479405e - 07$
Maillages 16231 nœuds	$2.464657e - 07$

Tableau 10.2: Convergence en maillage pour l'intégrande instationnaire pour des maillages uniformes.

Figure 10.5: Fonctionnelle  $j$  sur une série de maillages uniformes (en vert) et adaptés (en rouge).

<b>Maillage (et la complexité associée)</b>	<b>Deuxième maximum observé</b>
Maillages adaptés 7945 nœuds en moyenne (6000)	$1.3072e - 06$
Maillages adaptés 10424 nœuds en moyenne (8000)	$1.3098e - 06$
Maillages adaptés 15730 nœuds en moyenne (12000)	$1.3205e - 06$
<b>Maillage uniforme</b>	<b>Deuxième maximum observé</b>
Maillages 7382 nœuds	$2.6048e - 07$
Maillages 10005 nœuds	$5.9667e - 07$
Maillages 16231 nœuds	$1.0033e - 06$
Maillages 57791 nœuds	$1.3187e - 06$

Tableau 10.3: Convergence en maillage pour la fonctionnelle  $j$  pour des maillages adaptés et uniformes.

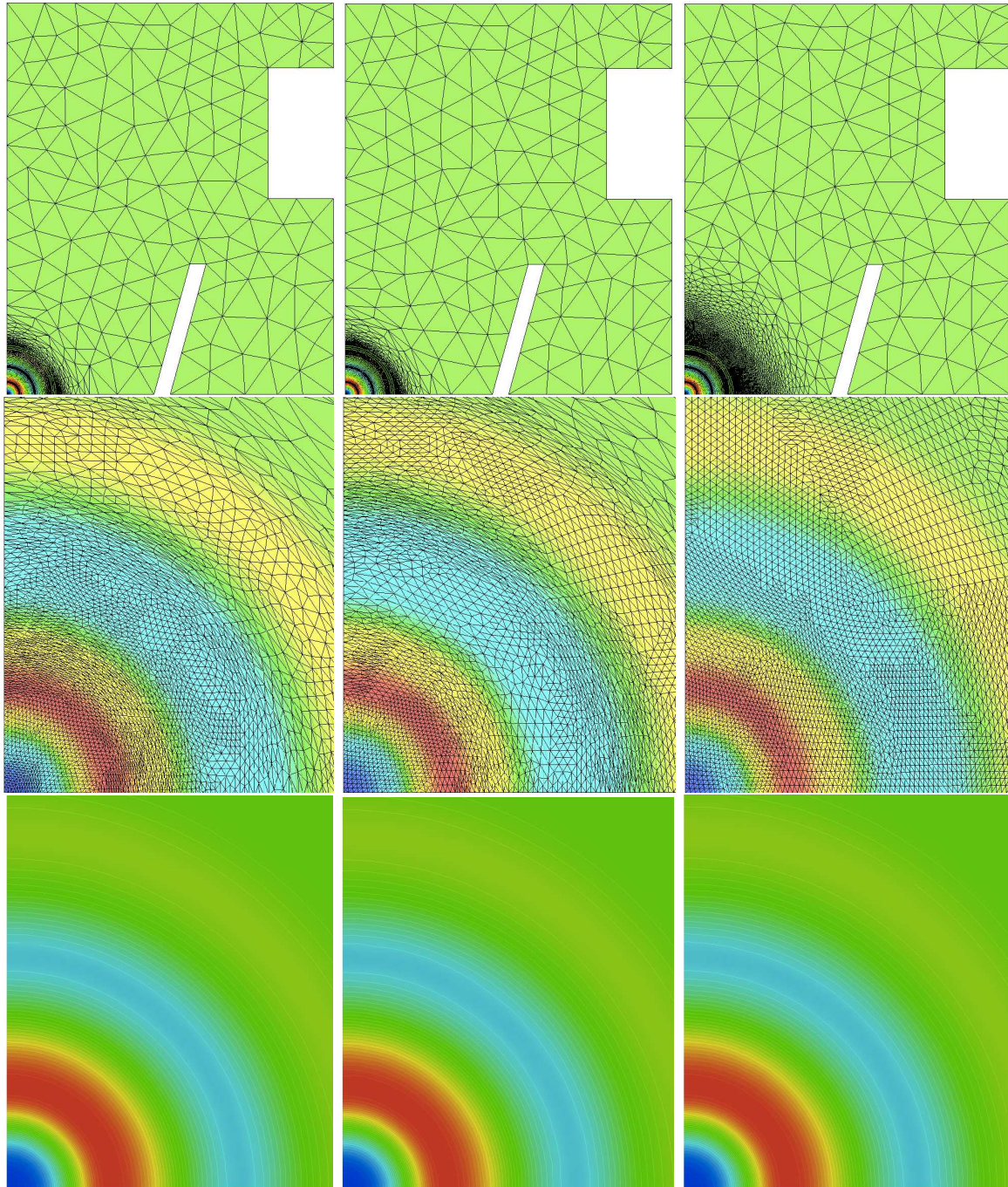


Figure 10.6: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour les schémas MUSCL avec l'estimateur d'ordre 2 (à gauche), CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 2 (au milieu) et CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 (à droite) pour 1 point fixe d'adaptation : 1er maillage adapté.

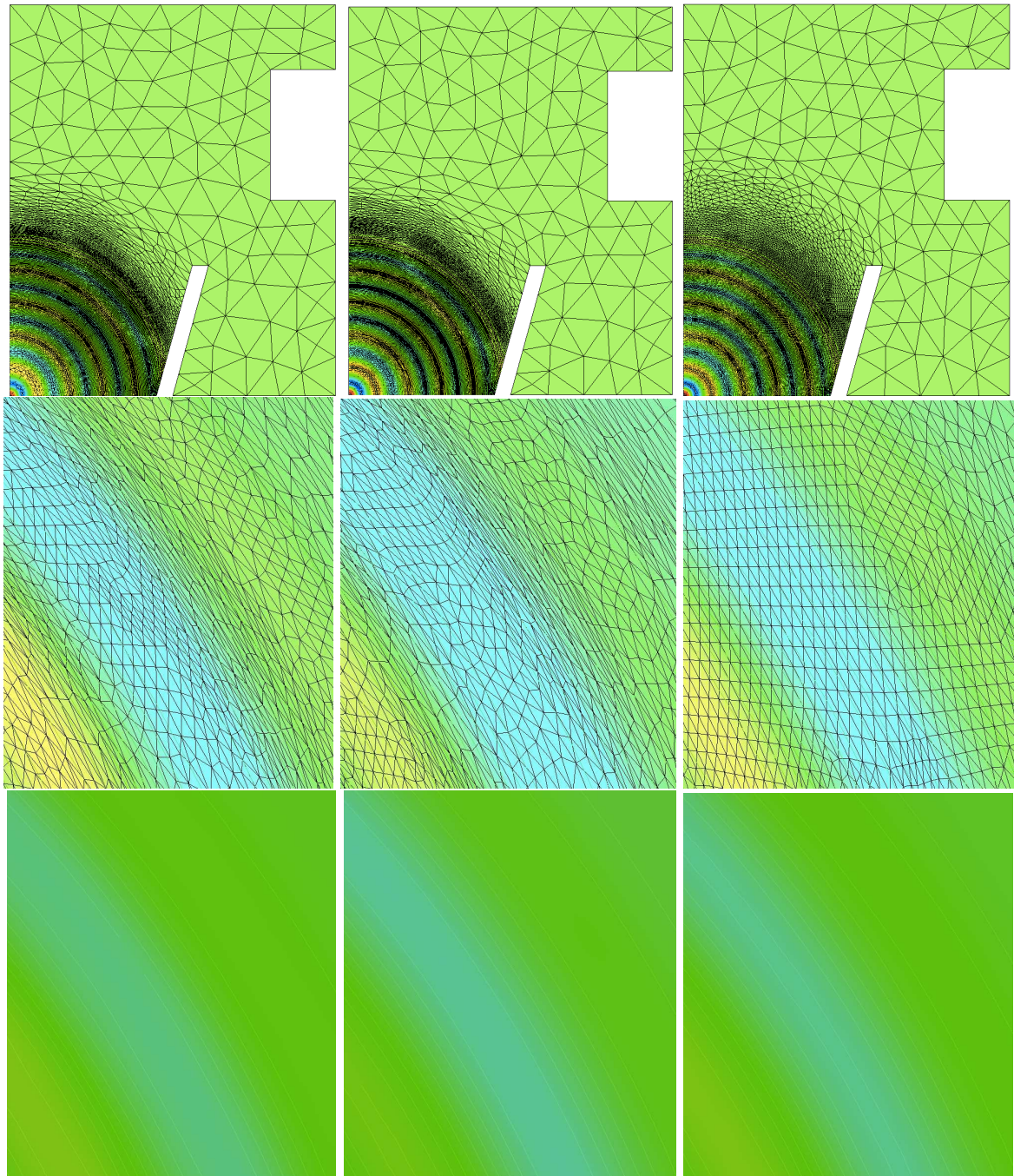


Figure 10.7: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour les schémas MUSCL avec l'estimateur d'ordre 2 (à gauche), CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 2 (au milieu) et CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 (à droite) pour 1 point fixe d'adaptation : zoom sur la densité du 15ème maillage adapté.

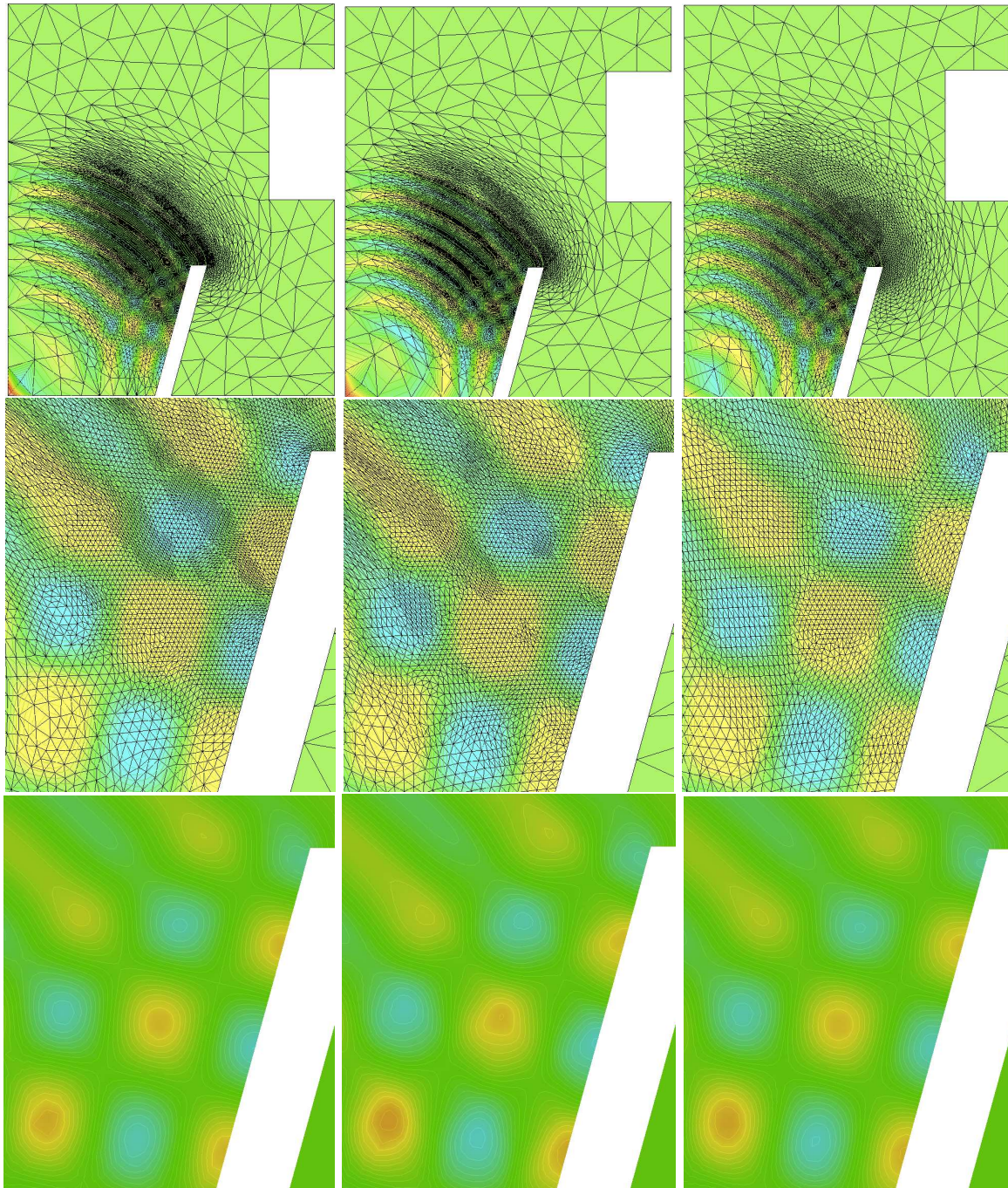


Figure 10.8: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour les schémas MUSCL avec l'estimateur d'ordre 2 (à gauche), CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 2 (au milieu) et CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 (à droite) pour 1 point fixe d'adaptation : zoom sur la densité du 25ème maillage adapté.

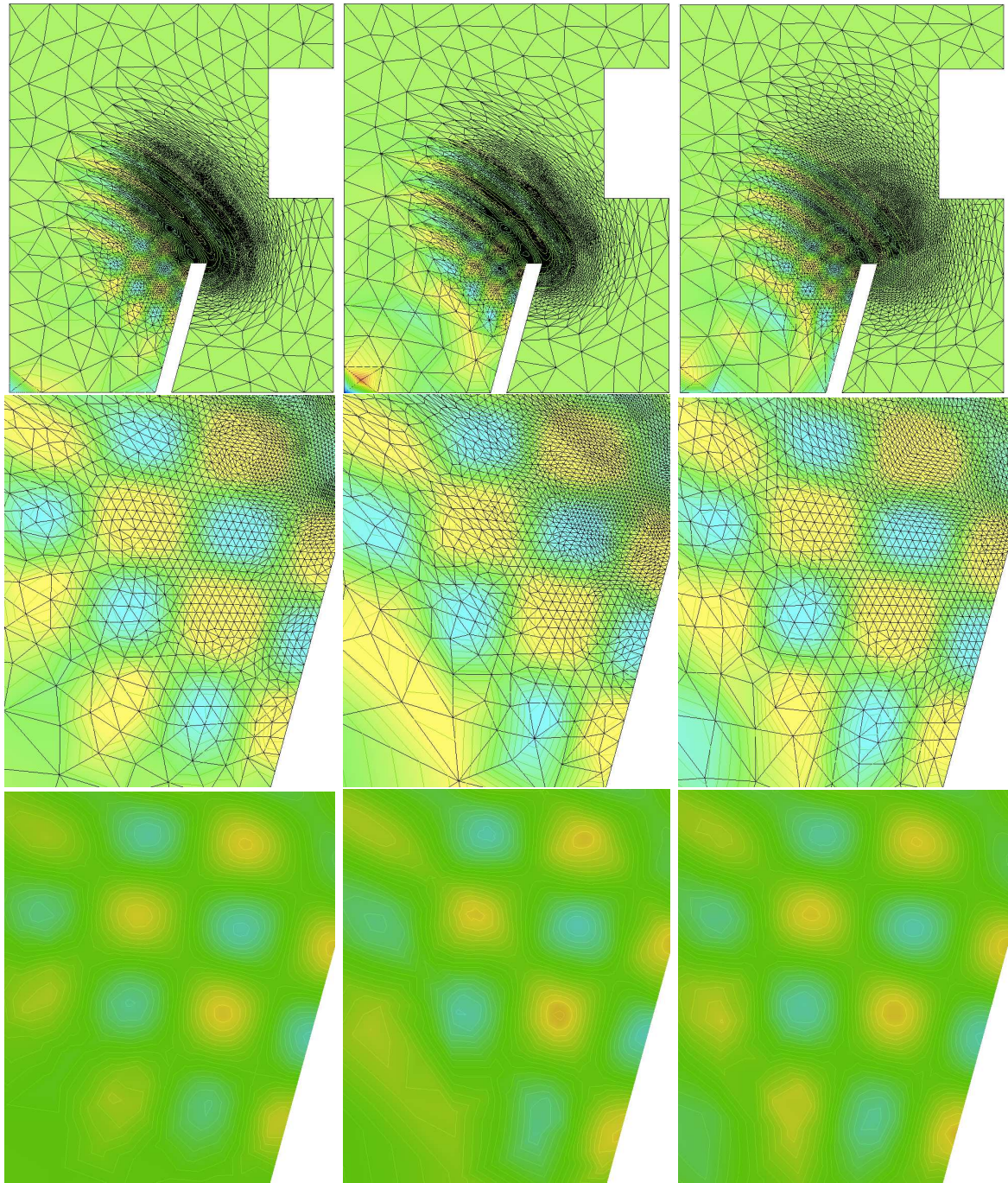


Figure 10.9: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour les schémas MUSCL avec l'estimateur d'ordre 2 (à gauche), CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 2 (au milieu) et CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 (à droite) pour 1 point fixe d'adaptation : zoom sur la densité du 25eme maillage adapté.

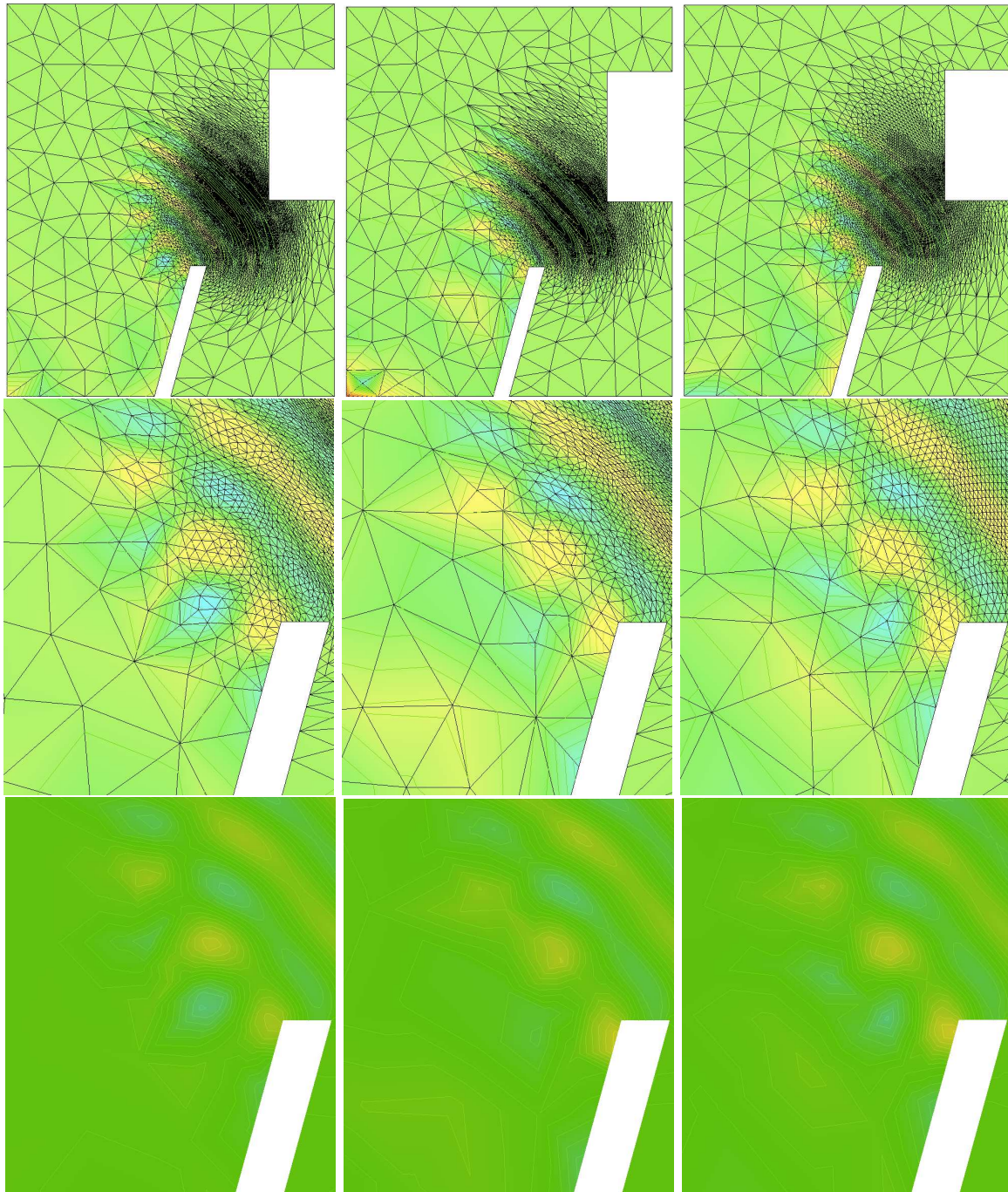


Figure 10.10: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour les schémas MUSCL avec l'estimateur d'ordre 2 (à gauche), CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 2 (au milieu) et CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 (à droite) pour 1 point fixe d'adaptation: zoom sur la densité du 35ème maillage adapté.

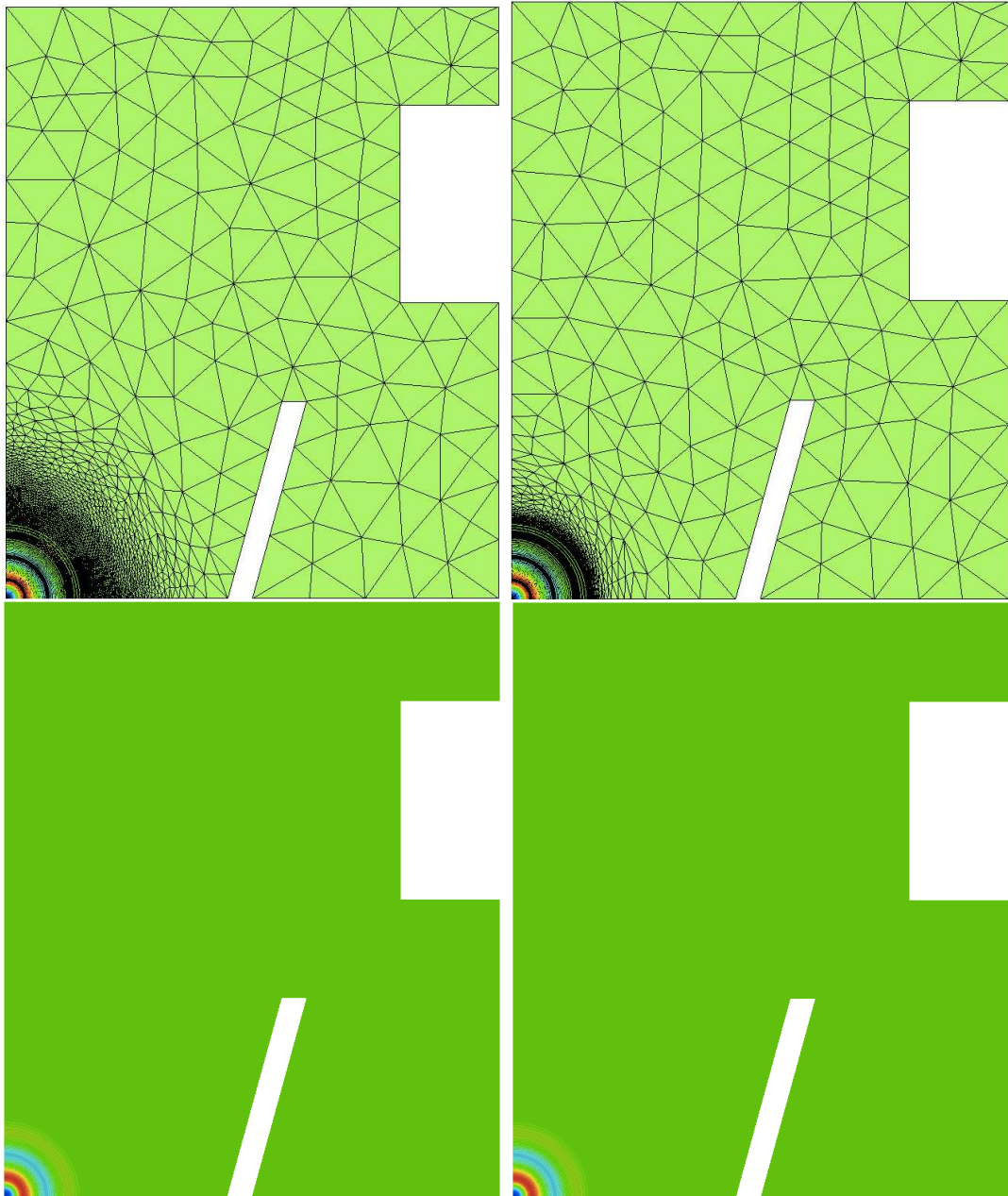


Figure 10.11: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 1er maillage adapté.



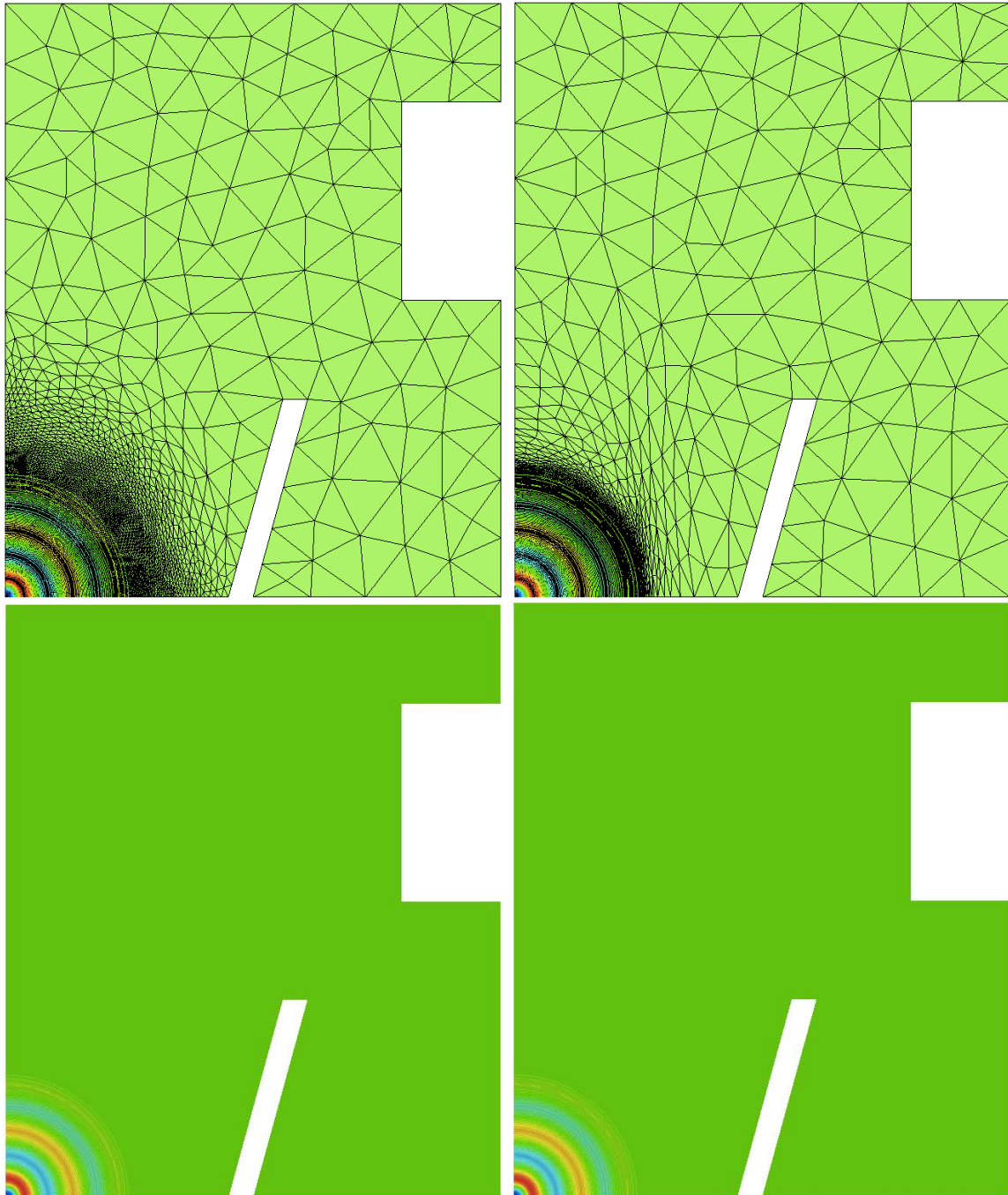


Figure 10.12: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 5ème maillage adapté.

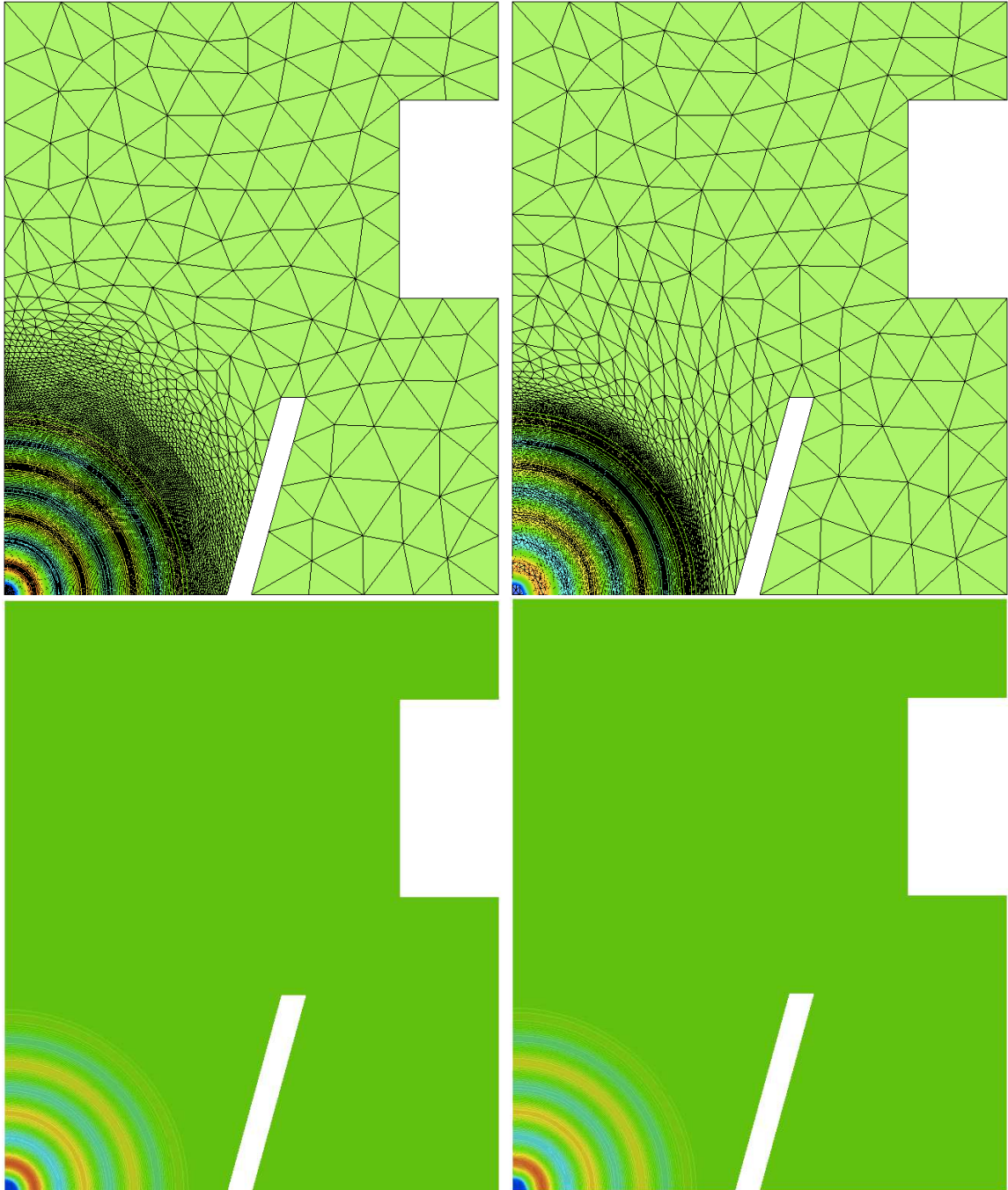


Figure 10.13: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 10<sup>ème</sup> maillage adapté.

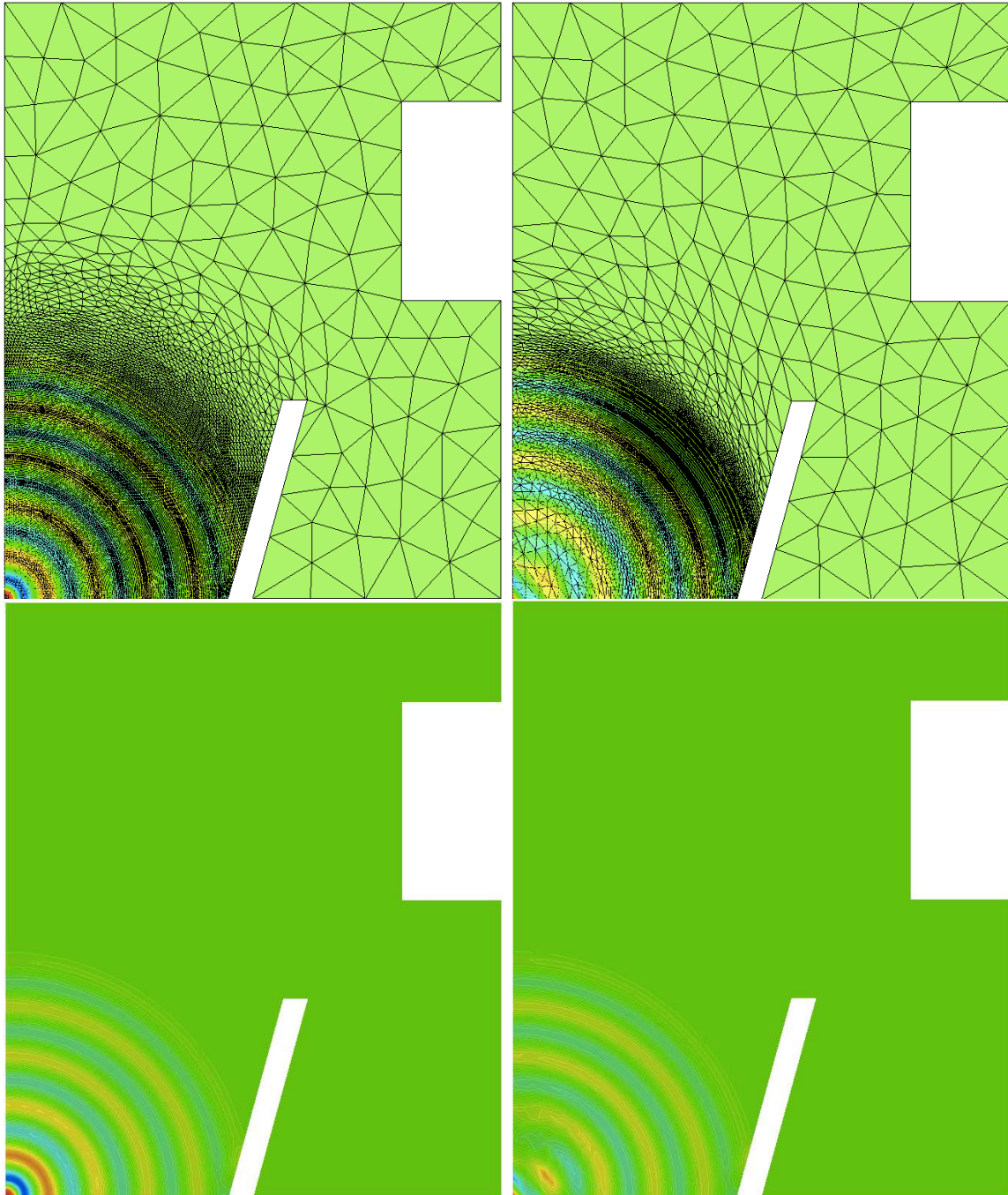


Figure 10.14: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 15ème maillage adapté.

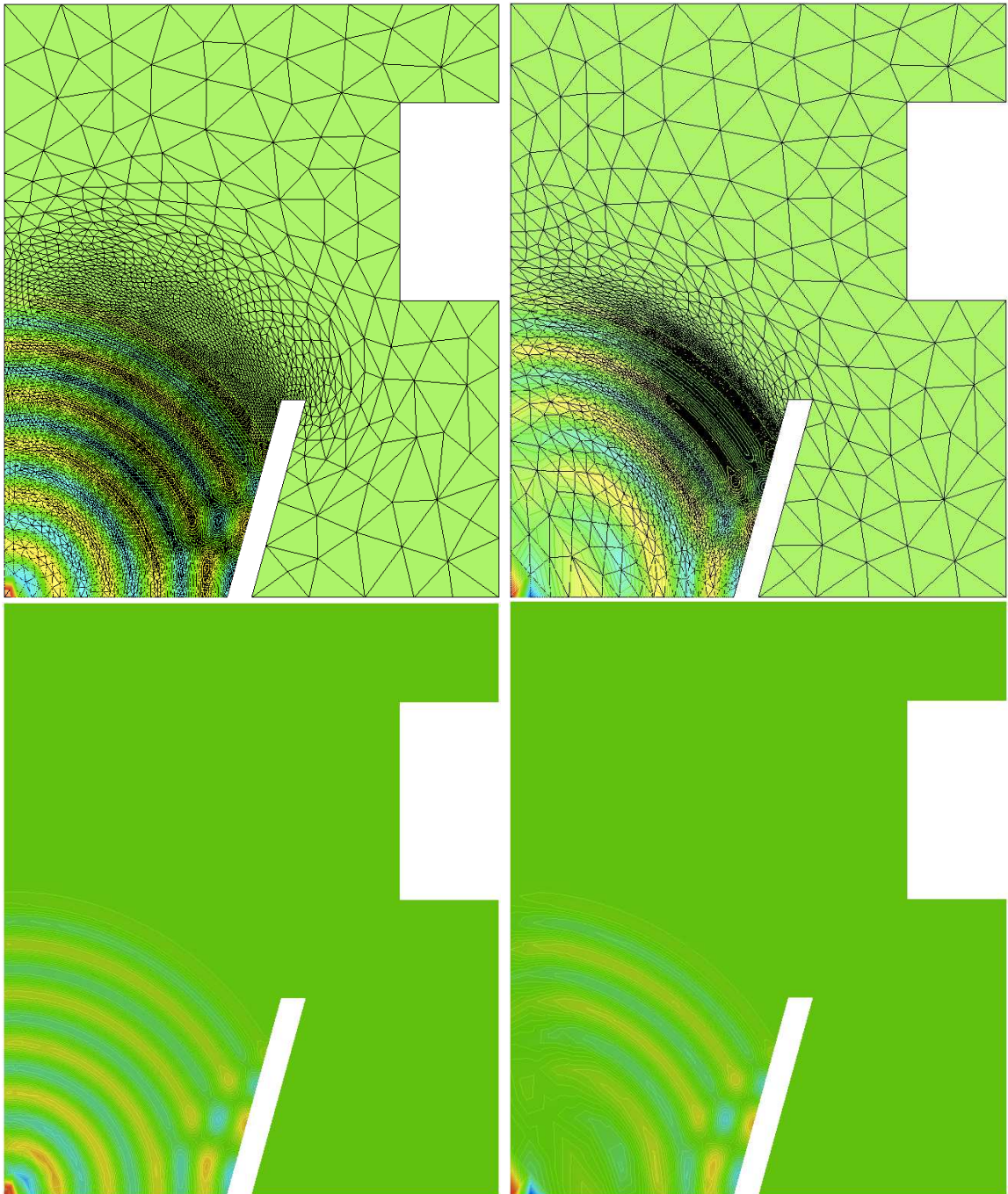


Figure 10.15: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 20<sup>ème</sup> maillage adapté.

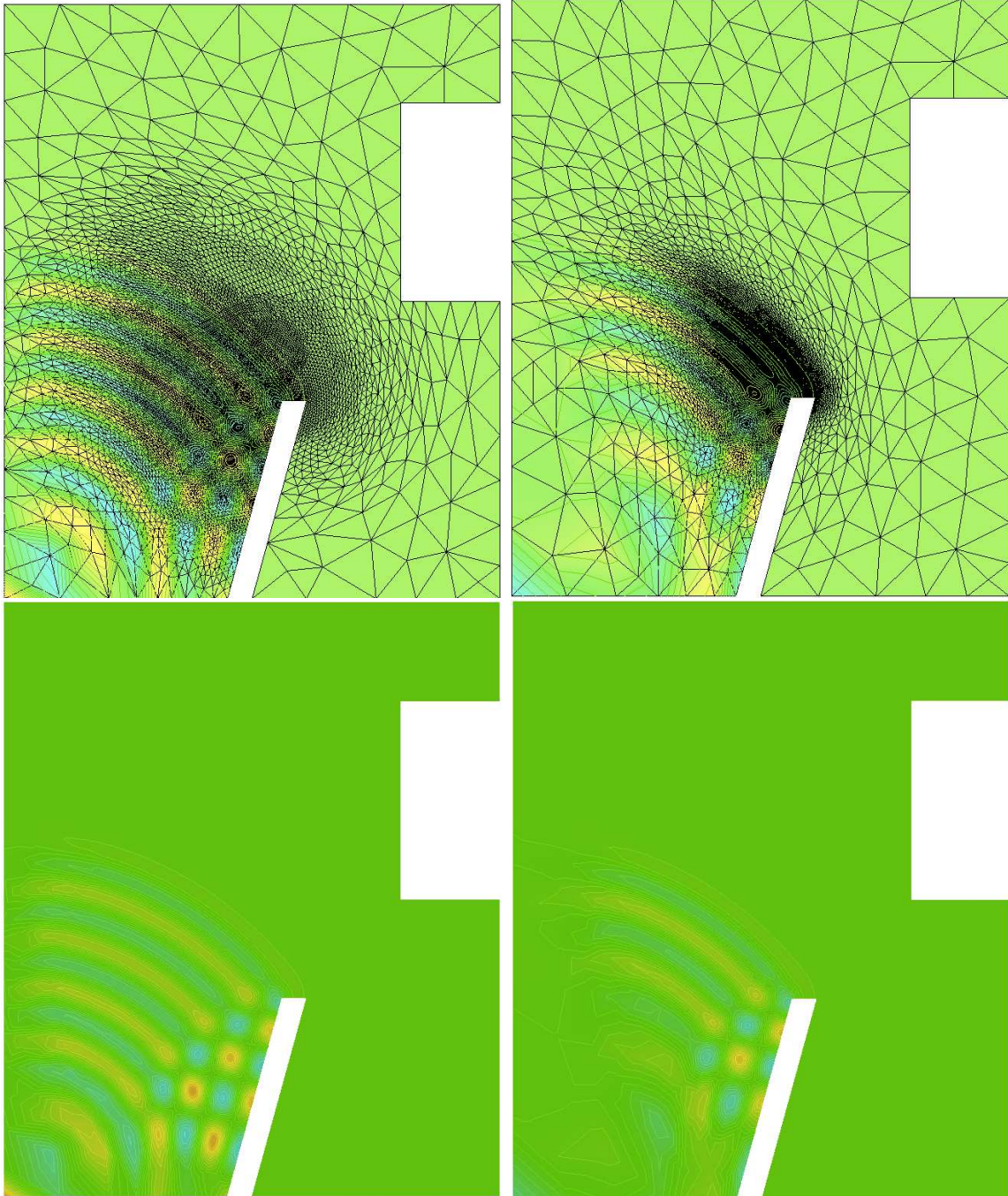


Figure 10.16: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 25ème maillage adapté.

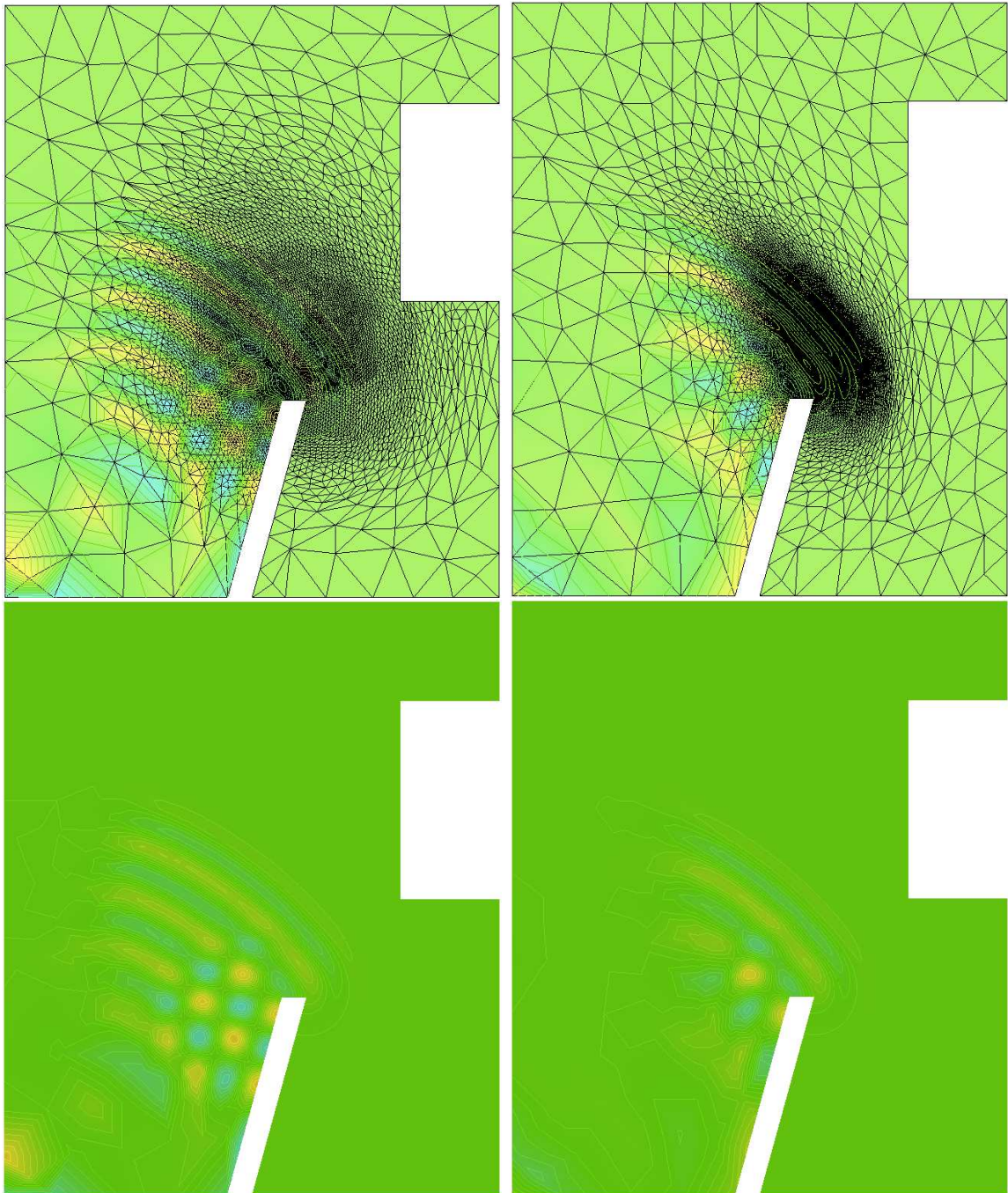


Figure 10.17: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 30ème maillage adapté.

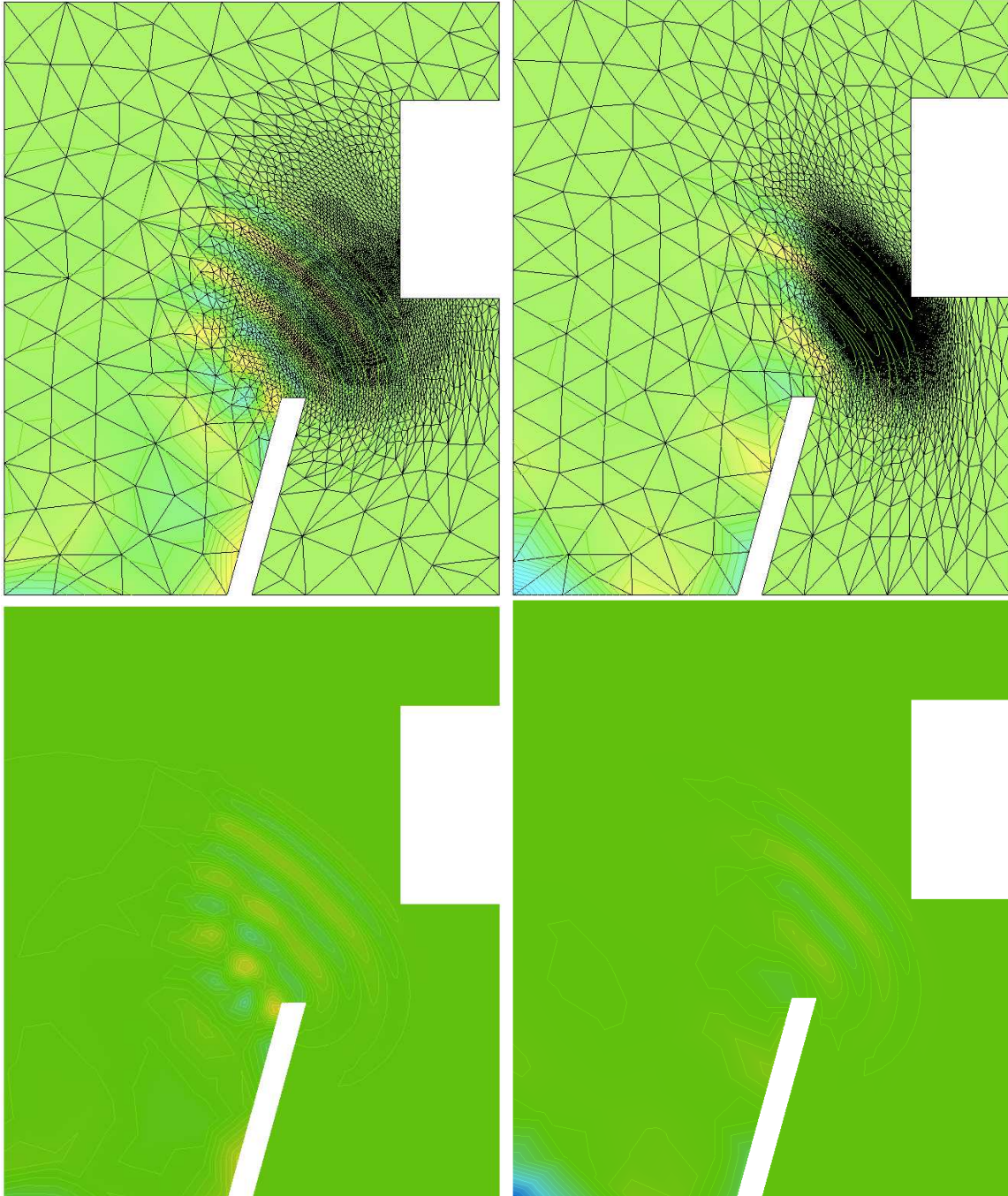


Figure 10.18: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 35ème maillage adapté.

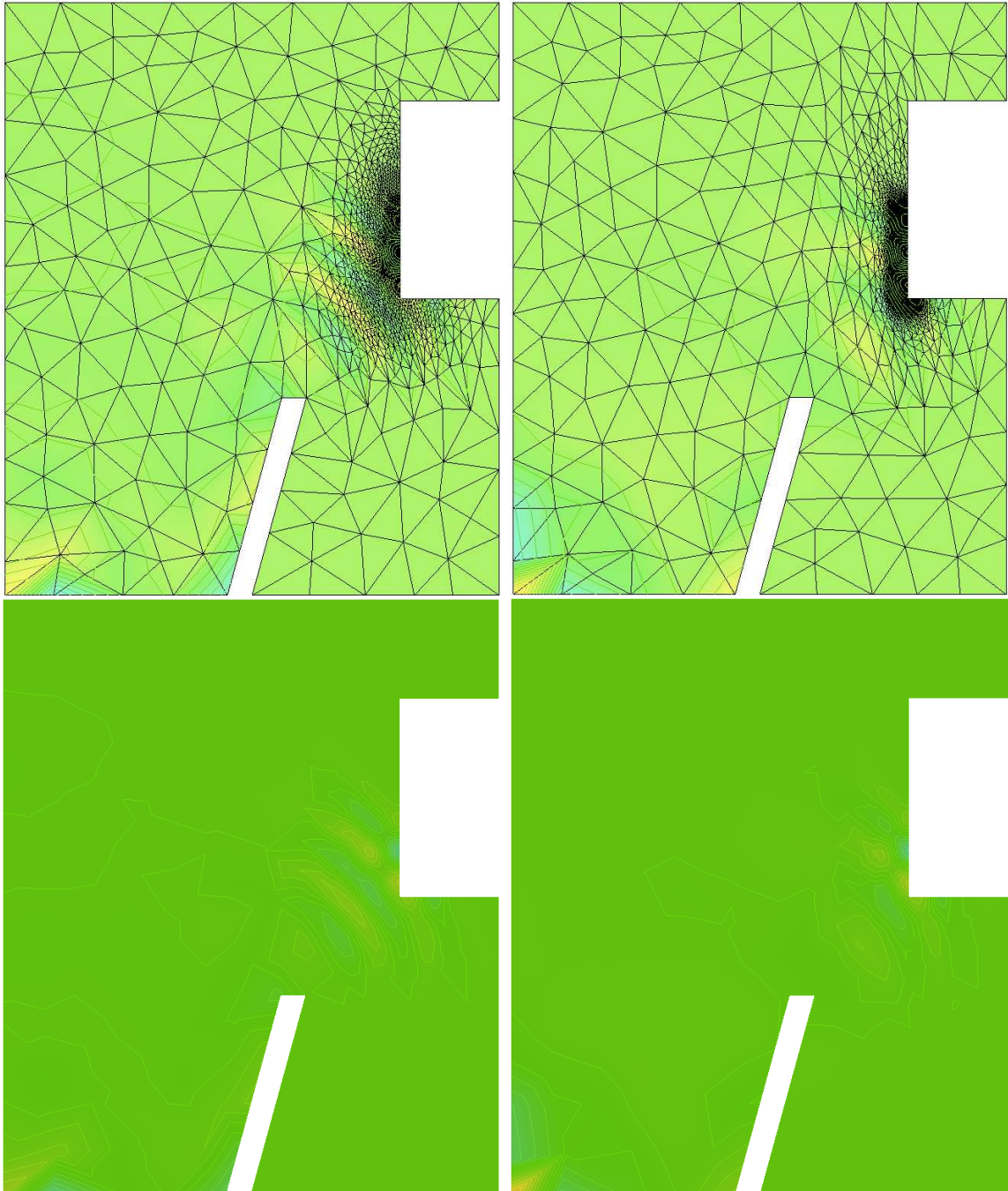


Figure 10.19: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 avec 1 point fixe d'itération de maillage (à gauche) et avec 4 points fixes d'itération de maillage : densité sur le 40ème maillage adapté.



### 10.5.2 Un cas-test acoustique : propagation d'une onde dans une boîte acoustique

On présente ici un cas-test de propagation d'onde acoustique avec une source sonore située au centre-bas d'un domaine comme le montre la Figure 10.20. La source acoustique définie par  $f = (0, 0, 0, r)$ , où :

$$r = -A.exp(-B.ln(2)[x^2 + y^2])C.cos(2\Pi fr),$$

est ajoutée comme terme source sur le second membre des équations d'Euler compressibles instationnaires.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes telles que  $A = 0.01$ ,  $B = 256$  et  $C = 2.5$ , et  $fr = 2$  est la fréquence des ondes. Nous analysons le signal sonore émis par cette source sur un microphone  $M$  situé en haut à droite du domaine durant une simulation physique de 11 secondes.

La fonctionnelle cible pour l'adaptation Goal-Oriented mesure comme précédemment l'écart de pression sur le microphone  $M$  :

$$j(W) = \int_0^T \int_M \frac{1}{2} (p(\mathbf{x}, t) - p_0)^2 dM dt.$$

Nous analysons le signal sonore émis par cette source sur le microphone situé sur le centre-haut du domaine.

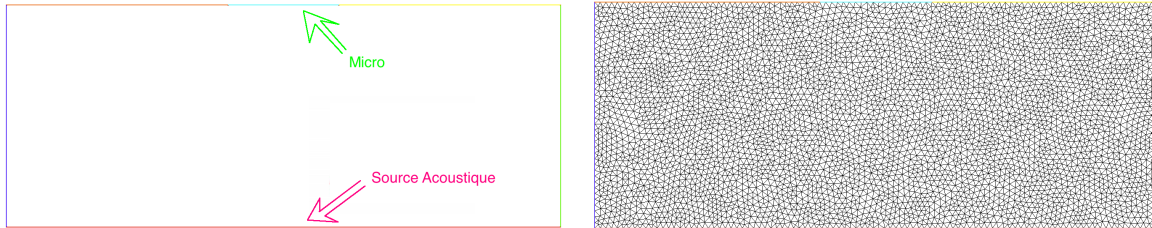


Figure 10.20: Solution initiale et maillage utilisé de 4700 nœuds.

Nous utilisons l'algorithme du point fixe Goal-Oriented présenté dans ce chapitre, avec 4 points fixes d'adaptation pour avoir une convergence en maillage suffisante et avec le nouveau schéma CENO-QV6. Les figures 10.21, 10.22, 10.23 et 10.24 montrent les résultats des calculs pour des complexités d'adaptation de 2000, 4000, 8000 et 16000 qui ont généré chacun 20 maillages adaptés qui possèdent respectivement un nombre moyen de nœuds de 2775, 5403, 10696 et 21566.

Comme attendu, l'adaptation Goal-Oriented raffine seulement les ondes qui vont avoir un impact sur le micro, le reste des ondes est dissipé par un raffinement insuffisant sur le maillage. Mais nous effectuons ce cas-test dans le but de faire une analyse de convergence en maillage. Le cas-test précédent n'ayant pas donné de résultats convaincants sur l'ordre de convergence, nous espérons obtenir un ordre proche de 3 pour ce plus simple cas-test de propagation dans une boîte acoustique.

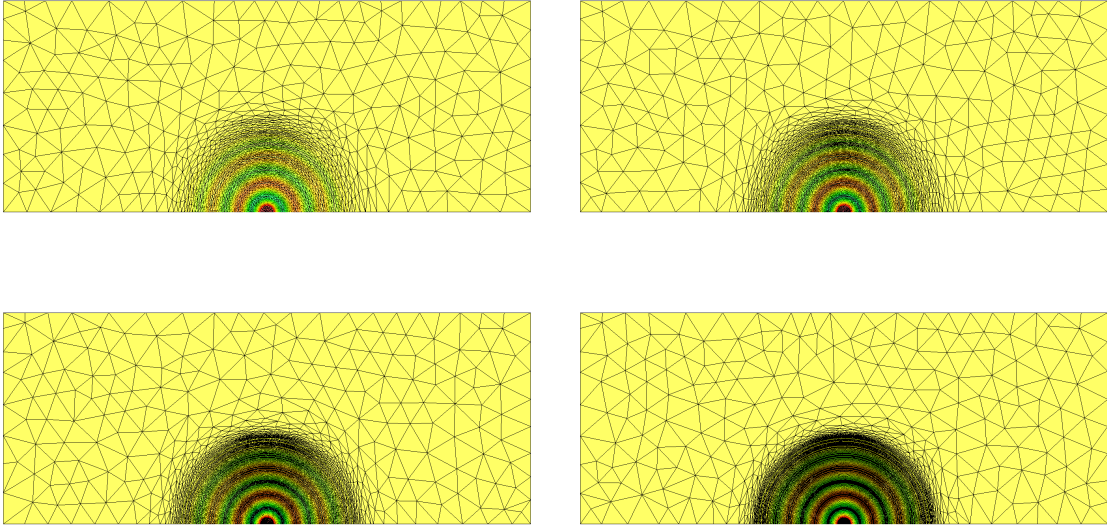


Figure 10.21: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 et 4 itérations de point fixe de maillage. Pour des complexité de 2000 (haut-gauche), 4000 (haut-droite), 8000 (bas-gauche) et 16000 (bas-droit) : 4ème maillage adapté.

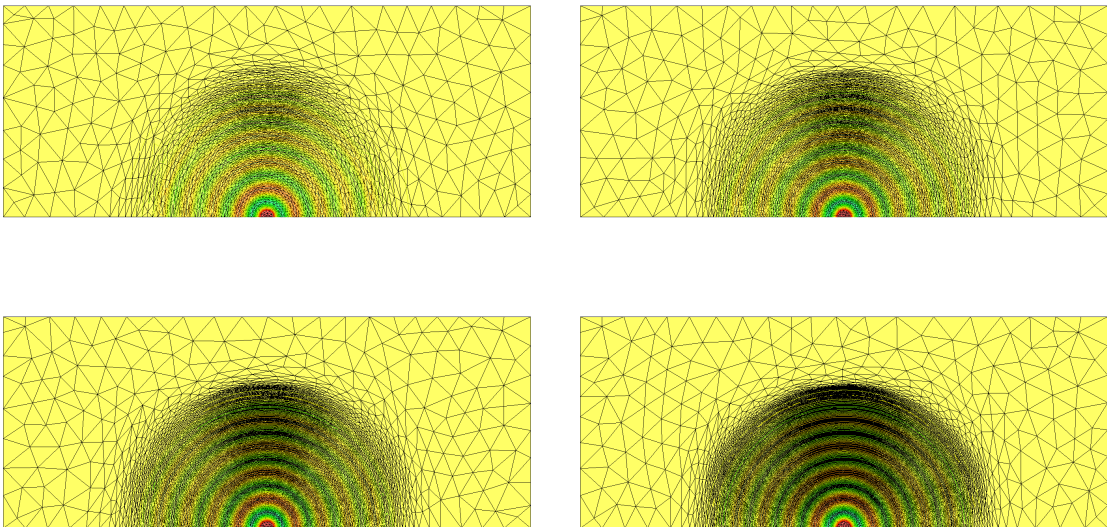


Figure 10.22: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 et 4 itérations de point fixe de maillage. Pour des complexité de 2000 (haut-gauche), 4000 (haut-droite), 8000 (bas-gauche) et 16000 (bas-droit) : 8ème maillage adapté.

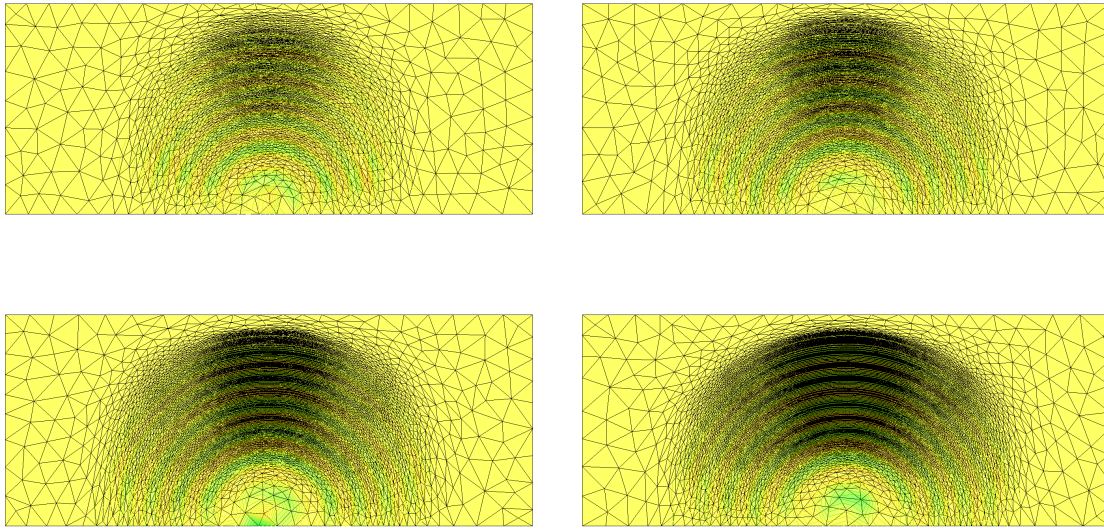


Figure 10.23: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 et 4 itérations de point fixe de maillage. Pour des complexité de 2000 (haut-gauche), 4000 (haut-droite), 8000 (bas-gauche) et 16000 (bas-droit) : 12ème maillage adapté.

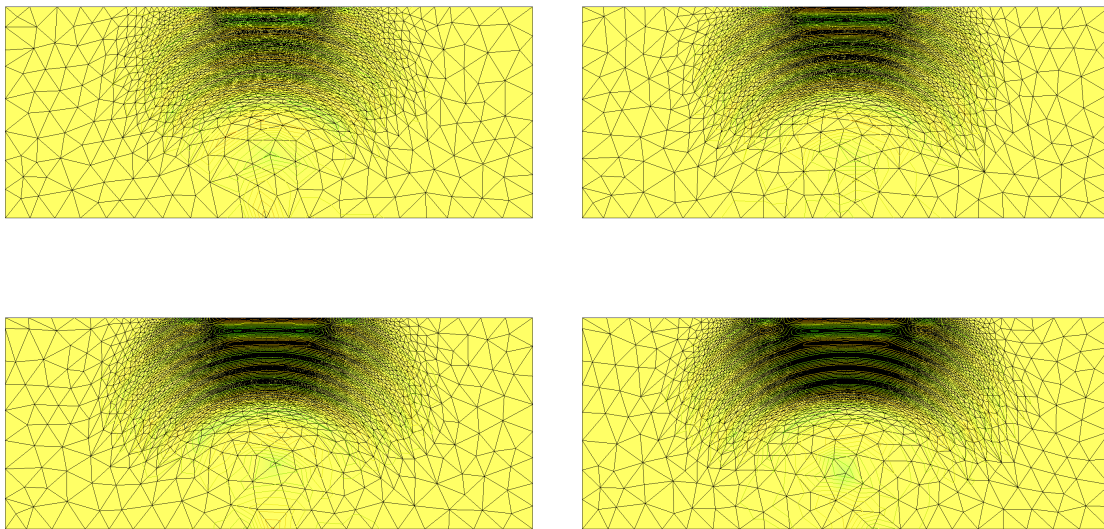
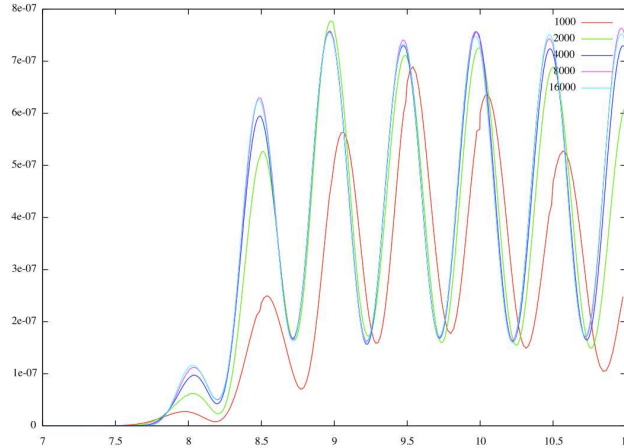


Figure 10.24: Adaptation de maillage Goal-Oriented pour le schéma CENO-QV6 avec l'estimateur d'ordre 3 et 4 itérations de point fixe de maillage. Pour des complexité de 2000 (haut-gauche), 4000 (haut-droite), 8000 (bas-gauche) et 16000 (bas-droit) : 16ème maillage adapté.

**Analyse de convergence numérique** On effectue une analyse de convergence pour l'intégrande  $k(t)$  sur le micro  $M$  pour la simulation précédemment décrite :

$$k(t) = \int_M (p - p_0) dM,$$

pour les différentes tailles de maillages adaptés. L'évolution de l'intégrande  $k(t)$  au cours du temps est illustrée dans la figure suivante :



Pour un maillage d'un nombre  $N$  de nœuds on note  $u_N$  et  $u_{exact}$  les solutions discrète et exacte respectivement. À convergence, on a la relation :

$$u_N(\mathbf{x}, t) = u_{exact}(\mathbf{x}, t) + N^{-\frac{\alpha}{d}} u_1(\mathbf{x}, t) + o(N^{-\frac{\alpha}{d}}),$$

avec  $d$  la dimension spatiale du problème,  $\alpha$  le paramètre de convergence à déterminer et  $u_1$  le premier terme de l'erreur normalisée. Comme  $\alpha$  ne peut pas être directement déterminé, une estimation sera considérée pour trois tailles de maillages:  $N_1$ ,  $N_2$  and  $N_3$ . Soit  $u_{N_1}$ ,  $u_{N_2}$  et  $u_{N_3}$  les solutions numériques associées à ces maillages. On cherche alors le  $\alpha$  tel que:

$$\frac{1 - \frac{N_2^{-\frac{\alpha}{d}}}{N_1^{-\frac{\alpha}{d}}}}{1 - \frac{N_3^{-\frac{\alpha}{d}}}{N_1^{-\frac{\alpha}{d}}}} \approx \frac{u_{N_1} - u_{N_2}}{u_{N_1} - u_{N_3}}, \quad (10.8)$$

avec  $d = 2$  car on est en bidimensionnel pour nos tests. De plus, on suppose que  $N_1$  représente le plus petit nombre de nœuds et  $N_3$  le plus grand.

On résout l'équation (10.8) grâce aux données des calculs en adaptation de maillage à complexités 4000, 8000 et 16000 comme le montre le tableau 10.5.2 pour le maximum d'onde à  $T = 10.5$  secondes. On trouve alors un ordre de convergence de 2.72.

Moyenne de nœuds et la complexité associée	Maximum observé pour T=10.5 s.
2775 (2000)	$6.893079 \cdot 10^{-07}$
5403 (4000)	$7.235717 \cdot 10^{-07}$
10696 (8000)	$7.431403 \cdot 10^{-07}$
21566 (16000)	$7.510065 \cdot 10^{-07}$

## 10.6 Conclusion

Ce chapitre complète la démarche principale de cette thèse, tendant à définir et démontrer un algorithme d'adaptation anisotrope orientée fonctionnelle en ordre trois. Une théorie et une méthodologie complètes nettement différentes du travail effectué en ordre deux ont été mises au point. La plate-forme numérique correspondante a été assemblée. Des premiers résultats sont proposés et comparés dans des conditions très voisines avec ceux obtenus en utilisant le meilleur algorithme adaptatif homologue en ordre deux. De nets progrès sont constatés et nos calculs vont continuer pour consolider ces premières observations.

Partie VI

Conclusion



# Conclusion

## Contents

11.0.1 Notre contribution . . . . .	265
11.0.2 Avantages, inconvénients, difficultés rencontrées . . . . .	267
11.0.3 Perspectives . . . . .	267

## Conclusion

### 11.0.1 Notre contribution

Au début de cette thèse se posaient deux questions importantes :

- la première question était : comment construire un bon schéma précis à l'ordre 3, meilleur que le schéma d'ordre 2 superconvergent en maillage régulier utilisé par l'équipe depuis des années. Il avait déjà été fait une première expérience de schéma d'ordre 3 pour remplacer le schéma d'ordre 2 de l'équipe, mais cette expérience n'avait pas été suffisamment positive, donc la question était : est-ce qu'on ne peut pas effectuer des modifications sur le schéma d'ordre 3 afin de le rendre meilleur et utilisable ?
- la deuxième question était : comment faire de l'adaptation de maillage anisotrope pour un schéma précis à l'ordre 3.

Pour répondre à la première question, on a commencé par une analyse très classique de la version monodimensionnelle du schéma CENO. Cette analyse a mis en évidence les caractéristiques de dissipation et de dispersion d'une onde simple propagée par le schéma CENO. La dissipation issue des décentrages qu'on met dans ce schéma est apparue comme la source principale d'erreur. La dispersion étant aussi une source importante de l'erreur numérique. La méthode de l'équation équivalente fait apparaître un terme d'erreur de dissipation qui est une dérivée quatrième de l'inconnue, pondéré par la taille de maille puissance trois, et la dispersion apparaît comme un terme de dérivée cinq de l'inconnue pondéré par une taille de maille à la puissance quatre. On a travaillé sur la version non décentrée du schéma CENO, laquelle ne comporte plus de dissipation. Nous avons pu vérifier que cette option n'a pas d'utilité en pratique car le schéma devient instable après un certain nombre d'itérations. Nous avons exploré plusieurs méthodes pour combiner cette version centrée avec des termes supplémentaires. Pour ce schéma monodimensionnel, on a proposé des corrections dissipatives dont le terme d'erreur équivalent se présente sous la forme d'une puissance cinq de la taille de maille multipliant une dérivée



sixième de l'inconnue. Ce terme dissipatif a rendu le schéma stable tout en conservant un très faible niveau de dissipation. On peut compenser la partie principale de la dispersion par un terme correcteur et dans ce cas nous avons obtenu un schéma dont le terme dispersif est en puissance six de la taille de maille multipliant une dérivée septième. L'application de ces correcteurs permet de passer facilement à un schéma d'ordre cinq sur maillage uniforme.

Ensuite en bidimensionnel, nous avons entrepris une première étude sur un modèle scalaire d'advection. Ce contexte permet encore une analyse des erreurs de dissipation et de dispersion sur maillage régulier, et nous avons projeté les améliorations et corrections analysées et effectuées en 1D, au cas 2D. Nous avons choisi pour ajouter des termes de corrections une méthode qui change la reconstruction dans chaque cellule de l'inconnue (plus précisément on ajoute des termes correcteurs lors du calcul du flux sur les interfaces entre deux cellules du maillage). Plusieurs solutions ont été proposées et nous avons obtenu de bons résultats en 2D, c'est-à-dire que le schéma CENO-QV6 avec les corrections est de bien meilleure précision que le schéma CENO basique. On obtenons une convergence d'ordre 4 sur maillage structuré et d'ordre 3 (voire proche de 4) sur maillage non structuré.

La suite naturelle de cette étude est l'extension au cas des équations d'Euler compressibles non linéaires et bidimensionnelles. Nous avons proposé un schéma CENO avec reconstruction des variables conservatives et avec des correcteurs de dissipation et de dispersion interférant avec le solveur de Riemann. Cette construction a été complétée par l'addition de limiteurs pour pouvoir calculer des écoulements avec discontinuités. En ce qui concerne le schéma amélioré CENO-QV6, la meilleure alternative est d'utiliser la dissipation du sixième ordre du schéma MUSCL implémentée dans le code. Cette approche a permis en plus de pouvoir utiliser les limiteurs d'ordre élevé associés au schéma MUSCL. Ce schéma CENO-QV6 pour les équations d'Euler bidimensionnelles a donc donné un schéma peu dissipatif et précis à l'ordre 3 sur maillage non structuré.

Pour répondre à la deuxième question posée, notre contribution sur l'adaptation de maillage avec un schéma du troisième ordre est constituée de deux volets.

D'une part on a considéré une adaptation anisotrope multi-échelle (ou MultiScale) qui repose sur l'évaluation d'une erreur d'interpolation d'une des inconnues. Le terme d'erreur est un tenseur d'ordre 3 s'appliquant à trois vecteurs arêtes. Nous proposons une méthode de Moindres Carrés pour transformer ce terme en l'application d'un pseudo hessien sur deux vecteurs arêtes. Ceci permet de trouver la métrique optimale minimisant l'erreur d'interpolation et de construire une méthode d'adaptation anisotrope. Nous avons construit une plateforme numérique de démonstration comportant le schéma numérique, le critère d'adaptation et le remaillage, qui démontre l'intérêt de cette approche.

D'autre part nous avons proposé une analyse *a priori* de l'erreur d'approximation du schéma CENO. Cette analyse s'insère dans une évaluation d'erreur orientée fonctionnelle (ou Goal-Oriented) qui permet l'identification d'une métrique anisotrope optimale minimisant un modèle d'erreur de la fonctionnelle. Cette dernière étape comprend à nouveau l'introduction d'un pseudo hessien calculé par Moindres Carrés. Une plateforme numérique calculant l'état, l'état adjoint, le critère et le maillage a été développée et démontre l'intérêt de cette deuxième

approche.

### 11.0.2 Avantages, inconvénients, difficultés rencontrées

Pour arriver à cette contribution, nous avons dû explorer plusieurs voies pour construire le schéma d'ordre 3 avec comme contrainte de produire un schéma supérieur au schéma MUSCL-V6 utilisé par l'équipe dont la précision, rappelons-le, peut monter jusqu'à l'ordre 5 sur maillage très régulier. Le schéma proposé fait une synthèse entre les techniques de dissipation du sixième ordre du schéma MUSCL-V6 d'une part, et les reconstructions précises à l'ordre 3 sur maillage quelconque pour le schéma CENO. Après un travail important, on a obtenu un schéma nettement plus attractif que MUSCL-V6, mais un peu plus coûteux. Pour arriver à une adaptation anisotrope en ordre 3, nous avons aussi expérimenté un assez grand nombre de méthodes en collaboration avec Estelle Mbinky et Adrien Loseille du projet GAMMA3 (INRIA Rocquencourt). La méthode choisie finalement est satisfaisante bien que peut-être pas encore assez anisotrope. En ce qui concerne l'anisotropie, même avec le schéma MUSCL-V6 on n'a pas une très grande anisotropie peut-être à cause du mailleur utilisé.

Une autre question importante est : comment se situent les méthodes proposées par rapport aux méthodes d'adaptation de la littérature?

Nous ne connaissons pas de contribution anisotrope à l'ordre 3 pour les équations d'Euler. Les conditions dans lesquelles nous atteignons notre objectif sont relativement raisonnables dans la mesure où les calculs supplémentaires pour adapter sont comparables à ceux nécessaires à l'adaptation à l'ordre 2. Une des limitations de l'analyse *a priori* actuelle est le fait que nous négligeons les problèmes de maillage sur les frontières. Ce point est abordé dans la thèse de Adrien Loseille et n'a pas beaucoup progressé depuis. Dans notre étude, comme dans les études précédentes, nous n'avons pas non plus cherché à adapter le pas de temps, imposé actuellement en fonction du pas d'espace via la contrainte de Courant. Il n'en demeure pas moins que l'algorithme que nous proposons fonctionne avec une bonne robustesse et une assez bonne efficacité. Un transfert industriel de cette méthode aussi bien que du schéma d'ordre 3 est en cours auprès de la société LEMMA.

### 11.0.3 Perspectives

C'est une banalité de dire que le débouché naturel de cette thèse est une extension à la dimension 3, ainsi qu'au modèle des écoulements visqueux. Faisons rapidement un état des lieux. La théorie et les expérimentations pour les écoulements visqueux ont été réalisées en deux dimensions et en trois dimensions pour le schéma d'ordre 2. La voie vers le visqueux est donc entr'ouverte. Le passage en dimension 3 pour le schéma d'ordre 3 va se trouver moins coûteux grâce au fait que la dernière version que nous proposons du schéma ne comporte qu'un seul solveur de Riemann par interface entre deux cellules. Cependant le nombre de points d'intégration va augmenter et les reconstructions en 3D vont coûter plus cher. Là encore, ce travail est prévu notamment dans un transfert vers l'industrie à très court terme.

De plus, les suites possibles à l'étude sur l'adaptation anisotrope dépendent du degré de généralité de cette méthode que nous avons employée. L'idée principale de l'analyse d'erreur elle-même, qui consiste à se ramener à une erreur d'interpolation ou de reconstruction, est une idée qui devrait se transposer facilement à la plupart des schémas d'ordre élevé en non structuré, et bien entendu au schéma Galerkin Continu et au schéma Galerkin Discontinu. Le deuxième point est le lien que nous avons construit entre erreur d'interpolation ou de reconstruction d'une part, et métrique d'autre part. La méthode des Moindres Carrés semble une méthode robuste et capable de s'étendre à des ordres supérieurs.





# Bibliographie

- [A. Harten 1987] S. Osher A. Harten B. Engquist and S. Chakravarthy. *Uniformly high-order accurate essentially non oscillatory schemes*. Journal of Computational Physics, vol. 71:231-303, 1987. 189
- [Abgrall 1992] R. Abgrall. *Design of an essentially non-oscillatory reconstruction procedure on finite-element type meshes*. Rapport technique 1584, INRIA, 1992. 28, 32
- [Abgrall 1994] R. Abgrall. *On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes, analysis and implementation*. J. Comp. Phys., vol. 114, pages 45–58, 1994. 10
- [Abgrall 1996] R. Abgrall. *How to prevent pressure oscillations in multicomponent flows: a quasi conservative approach*. J. Comp. Phys., vol. 125, pages 150–160, 1996. 189
- [Abgrall 1997] R. Abgrall and T. Sonar. *On the use of Muehlbach expansions in the recovery step of ENO methods*. Numer. Math., vol. 76(1), pages 1–25, 1997. 96
- [Abgrall 2006a] R. Abgrall. *Residual distribution schemes: current status and future trends*. Computer and Fluids, vol. 35, no. 7, pages 641–669, 2006. 10
- [Abgrall 2006b] R. Abgrall. *Residual distribution schemes: current status and future trends*. Computers and Fluids, no. 35, pages 641–669, 2006. 27
- [Alauzet 2003a] F. Alauzet. *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécanique des Fluides*. PhD thesis, Université Montpellier II, Montpellier, France, 2003. (in French). 11, 214
- [Alauzet 2003b] F. Alauzet and P.J. Frey. *Estimateur d'erreur géométrique et métrique anisotropes pour l'adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques*. RR-4759, INRIA, March 2003. (in French). 22
- [Alauzet 2003c] F. Alauzet, P.L. George, B. Mohammadi, P.J. Frey and H. Borouchaki. *Transient fixed point based unstructured mesh adaptation*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 43, no. 6-7, pages 729–745, 2003. 235
- [Alauzet 2007] F. Alauzet, P.J. Frey, P.-L. George and B. Mohammadi. *3D transient fixed point mesh adaptation for time-dependent problems: Application to CFD simulations*. J. Comp. Phys., vol. 222, pages 592–623, 2007. 214, 235, 237
- [Alauzet 2010a] F. Alauzet and A. Loseille. *High Order Sonic Boom Modeling by Adaptive Methods*. J. Comput. Phys., vol. 229, pages 561–593, 2010. 237
- [Alauzet 2010b] F. Alauzet and M. Mehrenberger. *P1-conservative solution interpolation on unstructured triangular meshes*. Int. J. Numer. Meth. Eng., 2010. Submitted. 237

- [Alauzet 2011] F. Alauzet and G. Olivier. *Extension of Metric-Based Anisotropic Mesh Adaptation to Time-Dependent Problems Involving Moving Geometries*. In 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA-2011-0896, Orlando, FL, USA, Jan 2011. 211, 235, 236
- [Arminjon 1993] P. Arminjon and A. Dervieux. *Construction of TVD-like artificial viscosities on two-dimensional arbitrary FEM grids*. J. Comp. Phys., vol. 106, pages 106, No 1, 176–198, 1993. 190
- [Arminjon 1999] P. Arminjon and M.C. Viallon. *Convergence of a finite volume extension of the Nessyahu-Tadmor scheme on unstructured grids for a two-dimensional linear hyperbolic equation*. SIAM J. Num. Analysis, vol. 36, no. 3, pages 738–771, 1999. 190
- [Arsigny 2006] V. Arsigny, P. Fillard, X. Pennec and N. Ayache. *Log-Euclidean Metrics for Fast and Simple Calculus on Diffusion Tensors*. Magn. Reson. Med., vol. 56, no. 2, pages 411–421, 2006. 23, 24
- [B. Stoufflet 1996] L. Fezoui B. Stoufflet J. Periaux and A. Dervieux. *3-d Hypersonic Euler Numerical Simulation around Space Vehicles using Adapted Finite Elements*. 25th AIAA Aerospace Meeting, vol. 86-0560, 1996. 190
- [Baba 1981] K. Baba and M. Tabata. *On a conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equations*. R.A.I.R.O Numer. Anal., vol. 15, pages 3–25, 1981. 190
- [Barth 1990] Timothy J. Barth and Paul O. Frederickson. *Higher order solution of the euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction*. AIAA-90-0013, 1990. 27
- [Barth 1994] T.J. Barth. *Aspects of Unstructured Grids and Finite Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes Equations*. Von Karman Institute Lecture Notes, 1994. 40, 96
- [Barth 2002] T.J. Barth and M.G. Larson. *A-posteriori error estimation for higher order Godunov finite volume methods on unstructured meshes*. In R. Herbin and D. Kröner, editeurs, Finite Volumes for Complex Applications III, pages 41–63. 41 63, 2002. 230
- [Bassi 1997] F. Bassi and S. Rebay. *High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations*. J. Comp. Phys., vol. 138, no. 2, pages 251–285, 1997. 27
- [Belme 2010] A. Belme, A. Dervieux and F. Alauzet. *A fully anisotropic goal-oriented mesh adaptation for unsteady flows*. In Proceedings of the V ECCOMAS CFD Conf., 2010. 229, 230
- [Belme 2011] A. Belme. *Aérodynamique instationnaire et méthode adjointe*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France, 2011. (in French). 11, 235
- [Belme 2012a] A. Belme, F. Alauzet and A. Dervieux. *A priori anisotropic Goal-Oriented Estimate and Mesh Adaptation for Viscous Compressible Flow*. Preprint, 2012. 229
- [Belme 2012b] A. Belme, A. Dervieux and F. Alauzet. *Time Accurate Anisotropic Goal-Oriented Mesh Adaptation for Unsteady Flows*. J. Comp. Phys., 2012. [http://www-sop.inria.fr/members/Alain.Dervieux/Adj-Insta-2011\\_10.pdf](http://www-sop.inria.fr/members/Alain.Dervieux/Adj-Insta-2011_10.pdf). 230

- [Cao 2005] W. Cao. *On the error of linear interpolation and the orientation, aspect ratio and internal angles of a triangle*. SIAM J. Numer. Anal., no. 43(1), pages 19–40, 2005. 28
- [Cao 2008] W. Cao. *An interpolation error estimate in  $R^2$  based on the anisotropic measures of higher derivatives*. Math. Comp., no. 77, pages 265–286, 2008. 28
- [Ciarlet 1972] P.G. Ciarlet and P.A. Raviart. *General Lagrange and Hermite interpolation in  $FRn$  with applications to finite element methods*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 46, pages 177–199, 1972. 28, 30, 32
- [Cockburn 1989] B. Cockburn and C.-W. Shu. *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: General framework*. Mathematics of Computation, vol. 52, pages 411–435, 1989. 189
- [Cockburn 2001] B. Cockburn. *Devising Discontinuous Galerkin methods for non-linear hyperbolic conservation laws*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 128(1-2), pages 187–204, 2001. 27
- [Cockburn 2003] B. Cockburn. *Discontinuous Galerkin methods*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 83, no. 11, pages 731–754, 2003. 10
- [Cournède 2006] P.-H. Cournède, B. Koobus and A. Dervieux. *Positivity statements for a Mixed-Element-Volume scheme on fixed and moving grids*. European Journal of Computational Mechanics, vol. 15, no. 7-8, pages 767–798, 2006. 190, 194, 199
- [Courty 2006] F. Courty, D. Leservoisier, P.-L. George and A. Dervieux. *Continuous metrics and mesh adaptation*. Applied Numerical Mathematics, vol. 56, no. 2, pages 117–145, 2006. 27
- [Debiez 1996a] C. Debiez. *Approximation et linéarisation d'écoulements aérodynamiques instationnaires*. PhD thesis, University of Nice, France (in French), 1996. 44
- [Debiez 1996b] Ch. Debiez. *Approximation et linéarisation d'écoulements aérodynamiques instationnaires*. PhD thesis, University of Nice, France, 1996. 194
- [Debiez 1999] C. Debiez and A. Dervieux. *Mixed Element Volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculation*. Computer and Fluids, vol. 29, pages 89–118, 1999. 44
- [Deconinck 1993] H. Deconinck, P.L. Roe and R. Struijs. *A Multidimensional Generalization of Roe's Flux Difference Splitter for the Euler Equations*. Computers and Fluids, vol. 22, no. 23, pages 215–222, 1993. 190
- [Engquist 1986] S. Engquist, B. Harten, A. Osher and S.R. Chakravarthy. *Some results on uniformly high-order accurate essentially non oscillatory schemes*. Appl. Numer. Math. 2(3-5):347-377, 1986. 27, 28



- [Fezoui 1989a] L. Fezoui and A. Dervieux. *Finite-element non oscillatory schemes for compressible flows*. Symposium on Computational Mathematics and Applications 730, Publications of university of Pavie (Italy), 1989. 190, 194
- [Fezoui 1989b] L. Fezoui and B. Stoufflet. *A class of implicit schemes for Euler simulations with unstructured meshes*. J. Comp. Phys., vol. 84, no. 1, pages 174–206, 1989. 190
- [Frey 2000] P.J. Frey and P.L. George. *Mesh generation. Application to finite elements*. 2000. 17
- [Frey 2001] P.J. Frey. *Yams, A fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure*. RT-0252, INRIA, nov 2001. 20
- [G. Karniadakis 2000] B. Cockburn G. Karniadakis and C.-W. Shu. *Discontinuous Galerkin methods: theory, computation and application*. Springer Verlag, Berlin, lecture notes in Comp. Science and Eng. edition, 2000. 27
- [George 1991] P.L. George, F. Hecht and M.G. Vallet. *Creation of internal points in Voronoi's type method. Control adaptation*. Adv. Eng. Software, vol. 13, no. 5-6, pages 303–312, 1991. 18
- [Godlewski 1996] E. Godlewski and P-A. Raviart. Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation law. Springer, 1996. 191
- [Goldberg 1974] M. Goldberg. *Three Infinite Families of Tetrahedral Space-Fillers*. J. Comb. Theory, Ser. A, vol. 16, no. 3, pages 348–354, 1974. 20
- [Groth 2011] C.P.T. Groth and L. Ivan. *High-order solution-adaptive central essentially non-oscillatory (CENO) method for viscous flows*. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition AIAA 2011-367 4 - 7 January 2011, Orlando, Florida, 2011. 27, 96
- [Guégan 2010] D. Guégan, O. Allain, A. Dervieux and F. Alauzet. *An  $L^\infty$ - $L^p$  mesh adaptive method for computing unsteady bi-fluid flows*. Int. J. Numer. Meth. Eng., 2010. to appear. 214, 235
- [H. Borouchaki 1997] F. Hecht P. Laug H. Borouchaki P. L. George and E. Saltel. *Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part 1 : Algorithms*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 25, 1997. 16
- [Harten 1983] A. Harten. *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*. Journal of Computational Physics, vol. 49:357-393, 1983. 191
- [Harten 1991] A. Harten and S. Chakravarthy. *Multidimensional ENO schemes for general geometries*. Rapport technique 91-76, NASA-ICASE, Langley Research Center, Hampton, 1991. 28, 31
- [Hecht 2008] F. Hecht. *Mesh generation and error indicator*. Summer School: more efficiency in finite element methods, 2008. 28

- [Huang 2005] W. Huang. *Metric tensors for anisotropic mesh generation*. J. Comp. Phys., no. 204(2), pages 633–665, 2005. 28
- [Hughes 1986] T.J.R. Hughes and M. Mallet. *A new finite element formulations for computational fluid dynamics: III*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 58, pages 329–336, 1986. 10
- [Jameson 1993] A. Jameson. *Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and their Effect on Accuracy and Multigrid Convergence in Transonic and Hypersonic Flows*. AIAA paper 93-3359, 1993. 190, 191, 192, 194, 195
- [Lafon 1993] F.C. Lafon and R. Abgrall. *Eno schemes on unstructured meshes*. Rapport INRIA 2099, Novembre 1993. 27
- [Leer 1977] B. Van Leer. *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme IV: A new approach to numerical convection*. J. Comp. Phys., vol. 23, pages 276–299, 1977. 42
- [Leer 1979] B. Van Leer. *Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V: A Second Order Sequel to Godunov’s Method*. J. Comp. Phys., vol. 32, pages 101–136, 1979. 42, 189, 193
- [Leservoisier 2001] D. Leservoisier, P.L. George and A. Dervieux. *Métrieque continue et optimisation de maillage (in french)*. Research report RR-4172, INRIA, 2001. 16
- [Linde 1998] T. Linde and Ph. Roe. *On multidimensional positively conservative high resolution schemes*. AIAA paper 97-2098, 1998. 189
- [Loseille ] A. Loseille and journal = SIAM in Numerical Analysis volume = 49 number = 1 year = 2011 F. Alauzet title = Continuous mesh framework, Part I: well-posed continuous interpolation error. 212
- [Loseille 2007] A. Loseille, A. Dervieux, P.J. Frey and F. Alauzet. *Achievement of global second-order mesh convergence for discontinuous flows with adapted unstructured meshes*. AIAA paper, vol. 2007-4186, 2007. 229, 232
- [Loseille 2008a] A. Loseille. *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. Phd Thesis, Université de Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2008. 11
- [Loseille 2008b] A. Loseille. *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides. Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2008. (in French). 22, 208, 212
- [M. J. Castro-Diaz 1997] B. Mohammadi M. J. Castro-Diaz F. Hecht and O. Pironneau. *Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 25, pages 475–491, 1997. 16

- [Mbinky 2013] Estelle Mbinky. *Adaptation de maillages pour des interpolations d'ordre très élevé*. Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2013. 11, 28
- [Mer 1998] K. Mer. *Variational analysis of a mixed element volume scheme with fourth-order viscosity on general triangulations*. *Comput. Methods Appl. Engrg.*, vol. 153, pages 45–62, 1998. 40
- [Mirebeau 2010] J-M. Mirebeau. *Optimal Meshes for finite elements of arbitrary order*. Springer Sciences + Business Media, LLC, 2010. 28
- [Murrone 2005] A. Murrone and H. Guillard. *A five equation model for compressible two-phase flow computations*. *J. Comp. Phys.*, vol. 202, no. 2, pages 664–698, 2005. 189
- [Olivier 2011] G. Olivier. *Anisotropic metric-based mesh adaptation for unsteady CFD simulation involving moving geometries*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 2011. 211, 214
- [Ouvrard 2009] H. Ouvrard. *Simulation numérique d'écoulements turbulents par les approches LES, VMS-LES et Hybride RANS/VMS-LES en maillages non-structurés*. PhD thesis, University of Montpellier II, France (in French), 2009. 96
- [Perthame 1992] B. Perthame and B. Khobalate. *Maximum Principle on the Entropy and Minimal Limitations for Kinetic Scheme*. Rapport de recherche INRIA, vol. 1628, 1992. 189
- [Perthame 1996] B. Perthame and C.W. Shu. *On positivity preserving finite-volume schemes for Euler equations*. *Numerical Mathematics*, vol. 73, pages 119–130, 1996. 189
- [Piperno 1998] S. Piperno and S. Depeyre. *Criteria for the Design of Limiters yielding efficient high resolution TVD schemes*. *Comput. & Fluids*, vol. 27, no. 2, pages 183–197, 1998. 190
- [Rogé 2004] G. Rogé, N. Gourvitch, T. Abalakin, A. Dervieux and T. Kozubskaya. *A tetrahedral-based superconvergent scheme for aeroacoustics*. RR-5212, INRIA, 2004. 44
- [Rogé 2008] G. Rogé and L. Martin. *Goal-oriented anisotropic grid adaptation* *Adaptation de maillage anisotrope orientée objectif*. *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 346, no. 19-20, pages 1109–1112, 2008. 229
- [Selmin 1998] V. Selmin and L. Formaggia. *Unified construction of finite element and finite volume discretizations for compressible flows*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, no. 1, pages 1–32, 1998. 38
- [Shu 1988] C.W. Shu and S. Osher. *Efficient Implementation of Essential Non-oscillatory Shock Capturing Schemes*. *J. Comp. Phys.*, vol. 77, pages 439–471, 1988. 191
- [Shu 2001] C.W. Shu and B. Cockburn. *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems*. *J. Sci. Comput.*, vol. 16(3), pages 173–261, 2001. 27

- [Sommerville 1923] D.Y.M. Sommerville. *Space-filling tetrahedra in Euclidean space*. In Proc. Edinburgh Math. Soc., volume 41, pages 49–57, 1923. 20
- [Stoufflet 1996] B. Stoufflet, J. Periaux, L. Fezoui and A. Dervieux. *3-D Hypersonic Euler Numerical Simulation around Space Vehicles using Adapted Finite Elements*. 25th AIAA Aerospace Meeting, Reno (1987), AIAA paper 86-0560, 1996. 38
- [Sweby 1984] P.K. Sweby. *High resolution schemes using limiters for hyperbolic conservation laws*. SIAM Journal in Numerical Analysis, vol. 21, pages 995–1011, 1984. 190
- [Tam 1992] Christopher K. W. Tam and Jay C. Webb. *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics*. Department of Mathematics, Florida University, Tallahassee, 1992. 9
- [Toro 1999] Eleuterio F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer Verlag, vol. ISBN 3-540-65966-8, 1999. 154
- [Vallet 1992] M.-G. Vallet. *Génération de maillages éléments finis anisotropes and adaptatifs*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Paris, France, 1992. 16
- [Venkatakrishnan 1998] V. Venkatakrishnan. *Barriers and Challenges in CFD*. ICASE Workshop, Kluwer Acad. Pub., ICASE/LaRC Interdisciplinary Series, vol. 6, pages 299–313, 1998. 189
- [Yano 2011] M. Yano and D.L. Darmofal. *An Optimization-based Framework for Controlling Discretization Error through Anisotropic h-Adaptation*. 16th International Conference on Finite Elements in Flow Problems, Munich, Germany, 2011. 11