Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématiques

Arbres et cartes aléatoires

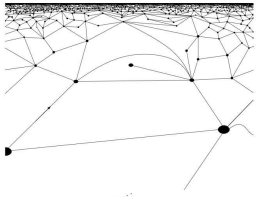
Nicolas Curien

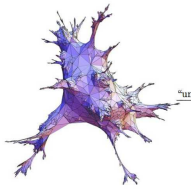
Rapporteurs :

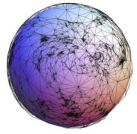
Pr.	Addario-Berry Louigi	University of McGill,
Pr.	Le Jan Yves	Université Paris Sud, Orsay,
Pr.	Marckert Jean-François	Université Bordeaux 1.

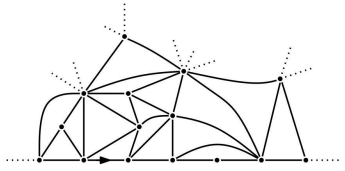
Soutenance publique le 6 décembre 2013, devant le jury composé de :

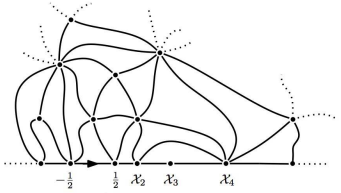
Pr.	Duquesne Thomas	Université Paris 6,
Pr.	Kozma Gady	Weizmann Institute,
Pr.	Le Gall Jean-François	Université Paris Sud, Orsay,
Pr.	Marckert Jean-François	Université Bordeaux 1,
Pr.	Miermont Grégory	ENS de Lyon.

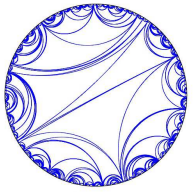


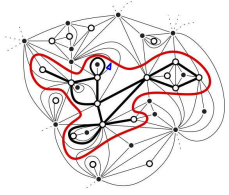

"uniformization"

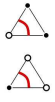


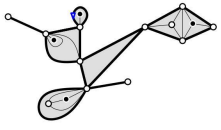


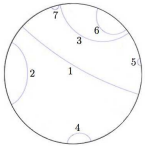

$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\mathcal{X}_2$
$\mathcal{X}_3$
$\mathcal{X}_4$

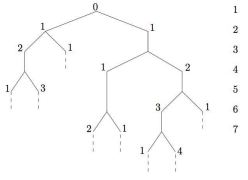


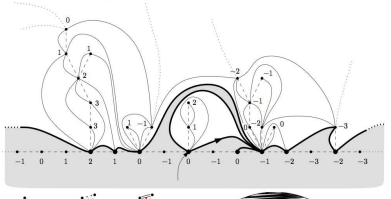


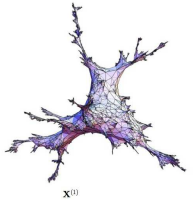


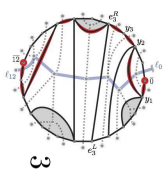


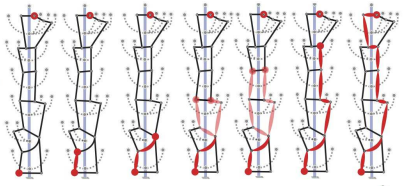


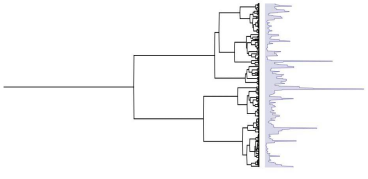


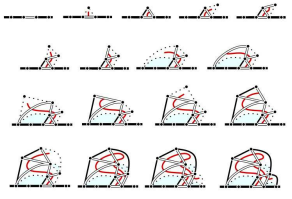


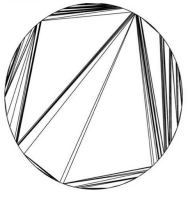


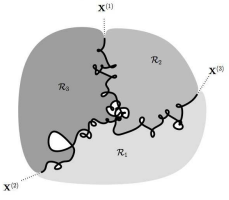

3

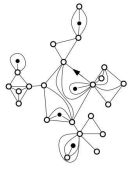


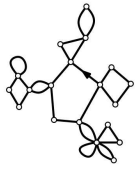


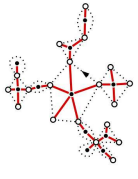


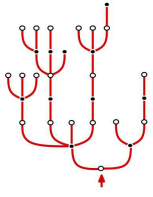


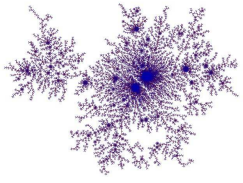

$\mathbf{X}^{(1)}$
$\mathbf{X}^{(2)}$
$\mathbf{X}^{(3)}$
$\mathcal{R}_1$
$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_3$

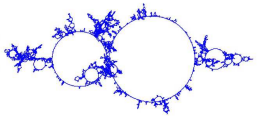


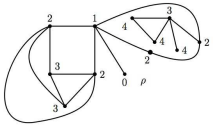


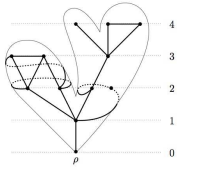


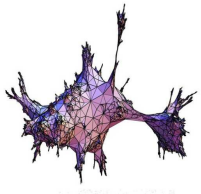


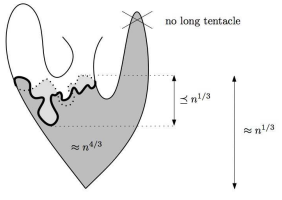


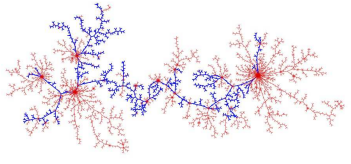


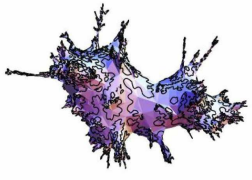

ρ

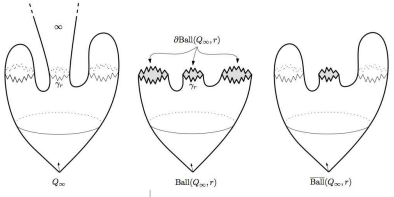

ρ

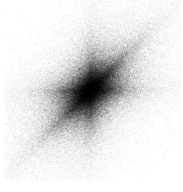


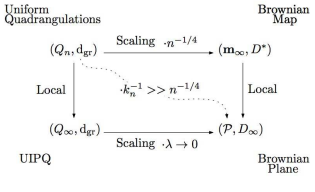

no long tentacle
$\asymp n^{1/3}$
$\approx n^{4/3}$
$\approx n^{1/3}$

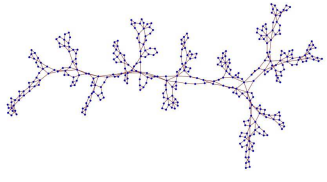


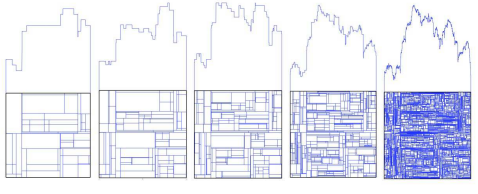


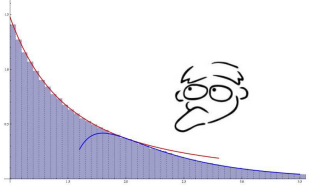

∞
$\partial\mathrm{Ball}(Q_\infty, r)$
Q_∞
$\mathrm{Ball}(Q_\infty, r)$
$\overline{\mathrm{Ball}}(Q_\infty, r)$




Uniform Quadrangulations
Brownian Map
$(Q_n, \mathrm{d}_{\mathrm{gr}})$
Scaling $\cdot n^{-1/4}$
$(\mathbf{m}_\infty, D^*)$
Local
$\cdot k_n^{-1} >> n^{-1/4}$
Local
$(Q_\infty, \mathrm{d}_{\mathrm{gr}})$
Scaling $\cdot \lambda \to 0$
$(\mathcal{P}, D_\infty)$
UIPQ
Brownian Plane







Résumé

Ce manuscrit est un document de synthèse et de présentation d'une majorité des travaux que j'ai effectués entre septembre 2008 et septembre 2013 (voir la liste des publications ci-dessous [1]). Les publications [**P1-6**] sont issues de la thèse ainsi qu'une grande partie de [**P11**]. Afin de présenter un document concis et cohérent nous avons choisi de ne pas traiter les publications [**P3**], [**P5**], [**P9**] et [**P10**]. Que mes co-auteurs m'excusent. Le document est construit autour de deux parties principales : les arbres aléatoires d'une part et les cartes planaires aléatoires d'autre part. Les contributions originales sont signalées par des théorèmes encadrés et sont numérotés $1, 2, 3, \ldots$.

Abstract

These pages summarize my research from September 2008 to September 2013 (see the publication list below ranked by chronological order on arXiv). The papers [**P1-6**] are extracted from my Ph.D thesis (june 2011) as well as the majority of [**P11**]. We chose not to present the results of [**P3**], [**P5**], [**P9**] and [**P10**]. May the concerned co-authors forgive me. This manuscript is made of two parts : random trees and random planar maps. The original results I obtained with my co-authors are highlighted by boxed theorems and are numbered $1, 2, 3, \ldots$. Apologizes are due to foreign readers but this is one of the few occasions I may write mathematics in French...

[**P1**] I. Benjamini and N. Curien. On limits of graphs sphere packed in Euclidean space and applications. *Electron. J. Combin.*, 32 :975–984, 2011.

[**P2**] N. Curien and J.-F. Le Gall. Random recursive triangulations of the disk *via* fragmentation theory. *Ann. Probab.*, 39(6) :2224–2270, 2011.

[**P3**] N. Curien and A. Joseph. Partial match queries in random quadtrees : A probabilistic approach. *Adv. in Appl. Probab.*, 43 :178–194, 2011.

[**P4**] I. Benjamini and N. Curien. Ergodic theory on stationary random graphs. *Electron. J. Probab.*, 17(93) :1–20, 2012.

[**P5**] N. Curien, J.-F. Le Gall, and G. Miermont. The Brownian cactus I. Scaling limits of discrete cactuses. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 49(2) :340–373, 2013.

[**P6**] N. Curien and Y. Peres. Random laminations and multitype branching processes. *Electron. Commun. Probab.*, 16 :435–446, 2011.

[**P7**] N. Curien and W. Werner. The Markovian hyperbolic triangulation. *J. Eur. Math. Soc.*, 15(4) :1309–1341, 2013.

[**P8**] I. Benjamini and N. Curien. Recurrence of the $\mathbb{Z}^d$-valued infinite snake *via* unimodularity. *Electron. Commun. Probab.*, 17 :1–10, 2012.

1. Toutes ces publications sont disponibles sur arXiv et sur ma page web (avec certaines différences par rapport aux versions publiées)

[**P9**] N. Curien. Strong convergence of partial match queries in random quadtrees. *Combin. Probab. Comput.*, 21(5) :683–694, 2012.

[**P10**] N. Curien and T. Konstantopoulos. Iterating Brownian motions, ad libitum. *J. Theoret. Probab.* (to appear).

[**P11**] N. Curien, L. Ménard, and G. Miermont. A view from infinity of the uniform infinite planar quadrangulation. *Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* (to appear).

[**P12**] N. Curien and I. Kortchemski. Random non-crossing plane configurations : a conditioned Galton-Watson tree approach. *Random Struct. & Algo.* (to appear).

[**P13**] N. Curien and G. Miermont. Uniform infinite planar quadrangulations with a boundary. *arXiv :1202.5452.*

[**P14**] I. Benjamini and N. Curien. Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation : Subdiffusivity *via* pioneer points. *Geom. Funct. Anal.*, 23(2) : 501–531, 2013.

[**P15**] I. Benjamini, N. Curien, and A. Georgakopoulos. The Liouville and the intersection properties are equivalent for planar graphs. *Electron. Commun. Probab.*, 17(42) :1–5, 2012.

[**P16**] N. Curien and J.-F. Le Gall. The Brownian plane. *J. Theoret. Probab.* (to appear).

[**P17**] N. Curien and B. Haas. The stable trees are nested. *Probab. Theory Related Fields (to appear).*

[**P18**] O. Angel and N. Curien. Percolations on infinite random maps I : half-plane models. *arXiv :1301.5311.*

[**P19**] N. Curien and I. Kortchemski. Random stable looptrees. *arXiv :1304.1044.*

[**P20**] N. Curien and J.-F. Le Gall. The harmonic measure of balls in random trees. *arXiv :1304.7190.*

[**P21**] N. Curien, B. Haas, and I. Kortchemski. The CRT is the scaling limit of random dissections. *arXiv :1305.3534.*

[**P22**] N. Curien and I. Kortchemski. Percolations on random triangulations and stable looptrees. *arXiv :1307.6818.*

[**P23**] N. Curien. A glimpse of the conformal structure of random planar maps. *arXiv :1307.6818.*



Remerciements

Ça, c'est fait ! Enfin, il reste encore à écrire la page des remerciements, sorte d'analogue de la page jeux du 20 minutes, de la page 3 du magazine "the Sun", ou encore de la rubrique gadget du Picsou magazine. Une majorité d'entre vous sont des habitués de la lecture des remerciements de thèse ou d'habilitation ce qui rend l'exercice périlleux. Pour les profanes, il faut savoir que l'écriture des remerciements est une figure imposée qui obéit à des règles très strictes bien qu'implicites :

1. On débute en fanfare par une pluie de mercis pour son ou ses patrons. C'est bien entendu le(s) directeur(s) dans le cas d'une thèse. C'est généralement moins clair dans le cas d'une habilitation, dans ce cas on définira comme "patron" toute personne qui est censée nous écrire des lettres de recommandation en béton armé. Vous comprenez donc l'importance de cette pole-position.
2. Place ensuite aux rapporteurs, c'est-à-dire à ceux qui ont dû lire le manuscrit (sans les remerciements !) et produire un avis sur le pré-habilité. On passe alors aux membres du jury qu'il convient d'oindre copieusement car ils sont chargés d'ici peu d'écrire le rapport de soutenance (qui est lui aussi codifié, mais je n'ai pas encore percé le chiffrage en entier).
3. On exprime ensuite sa gratitude envers les co-auteurs et les collègues de travail. Ici deux méthodes s'affrontent. La première (celle que j'adopte ici par fainéantise) consiste à rester vague et à ne citer personne explicitement quitte à échauffer légèrement tout le monde de manière uniforme. La seconde technique est un inventaire à la Prévert, étape délicate dans laquelle il ne faut oublier personne : de la méthode et une liste du département aident à s'acquitter de ce point.
4. À cette étape des remerciements, l'auteur s'accorde généralement une légère improvisation sur des thèmes annexes comme les amis d'enfance, les anciens profs, l'entraineur de tennis ou plus rarement sur la politique gouvernementale ouzbèque à propos de l'importation de farine de maïs transgénique.
5. La dernière partie est traditionnellement consacrée à la famille. Selon la pudeur de l'auteur on assiste quelques fois à des révélations croustillantes. La cerise sur le gâteau va de droit à la compagne ou au compagnon de l'auteur qui est le sujet des dernières lignes sans quoi l'impétrant passe un salle quart-d'heure de retour à la maison. En l'absence de cette dernière phrase, l'auteur peut être considéré comme célibataire, excitant non ?

Voilà donc pour la théorie. La page suivante est dédiée à la pratique.

Commençons donc par toi grand-chef (j'utilise ici ton pseudonyme habituel pour éviter la confusion entre les deux Jean-François). Avant de t'adresser de nouvelles louanges, j'ai effectué un travail de recherche bibliographique sur les remerciements des thèses que tu as encadrées. Sur les 11 remerciements que j'ai pu retrouver voici les résultats : 91% citent ta patience et ta disponibilité, 64% louent ta clarté, 54% glorifient ta rigueur intellectuelle. Tu es souvent pris pour un modèle, parfois qualifié de merveilleux ou de meilleur directeur de thèse ! Je plussois [2]. Je te remercie également pour ta gentillesse et pour l'œil attentif que tu gardes sur mon parcours.

Ma profonde gratitude va à Jean-François Marckert, Louigi Addario-Berry et Yves Le Jan, les très efficaces rapporteurs de cette habilitation. Merci beaucoup d'avoir accepté avec entrain cette tâche ! Merci également à vous Ô vénérables membres du jury ! À vrai dire, j'ai plus l'impression d'être entouré d'amis plutôt que de juges... Votre regard sur mon travail n'en est que plus important pour moi. Je vous suis à tous très reconnaissant pour avoir accepté de siéger ici aujourd'hui.

Chers co-auteurs, votre part dans ce manuscrit est considérable. Merci pour tous ces moments de recherche partagée. J'ai eu la chance d'avoir été abrité successivement dans deux laboratoires exceptionnels du point vue scientifique et humain. D'abord à l'École Normale (2008-2012) dont on ne sort jamais tout-à-fait, ne serait-ce que pour les livraisons de chocolats. J'atterris ensuite au laboratoire "historique" du LPMA (2012-?) augmentant du même coup mon trajet journalier de 3 minutes. Après quelques hésitations sur l'esthétique architecturale de Jussieu, je me suis immédiatement senti à la maison. Merci à tous ceux qui partagent les mathématiques, le café, les chocolats et le quotidien.

J'arrive ici après un parcours guidé par mes professeurs : Mr Lehman, Mr Haas, Serge, Mr Esperet et enfin Jean-François. Merci pour vos enseignements et pour m'avoir toujours poussé dans la bonne direction.

Étienne et Francine (mes parents n.d.l.r) ont bien vite arrêté de corriger mes exercices de mathématiques mais n'ont jamais cessé de veiller sur moi et de me soutenir. C'est une tautologie mais sans eux je n'en serais pas là. Merci à mes frères, Jean-Baptiste et Rémi pour avoir tracé une route qu'il me suffit désormais de suivre. Je souris à chaque fois que je pense à toute ma famille qui suit d'un oeil curieux mon périple de mathématicien en se demandant quand diable je commencerai à travailler "pour de vrai". Enfin, avec un frisson tout particulier, merci à la dernière venue dans cette famille, la rayonnante Marilyn.

2. les djeunes diront également "je like" 

Table des matières

1 Arboriculture **10**

1.1 Introduction . . . 10
1.1.1 Arbres de Galton–Watson . . . 10
1.1.2 Limite locale . . . 11
1.1.3 Limite d'échelle . . . 12
1.2 Résultats sur les arbres vus comme tels . . . 15
1.2.1 Récurrence du serpent critique [**P8**] . . . 15
1.2.2 Les poupées russes [**P17**] . . . 16
1.2.3 La mesure harmonique [**P20**] . . . 18
1.3 Laminations aléatoires . . . 22
1.3.1 La triangulation brownienne est universelle [**P12**] . . . 24
1.3.2 La triangulation récursive [**P2**] . . . 25
1.3.3 La triangulation hyperbolique markovienne [**P7**] . . . 28
1.4 Les looptrees . . . 30
1.4.1 Cas brownien [**P21**] . . . 30
1.4.2 Cas stable (looptrees) [**P19**] . . . 32

2 Cartomancie **34**

2.1 Introduction . . . 34
2.1.1 Cartes planaires et bijection CVS . . . 34
2.1.2 Limites des grandes triangulations/quadrangulations . . . 39
2.2 Constructions « à la Schaeffer » de l'UIPQ . . . 42
2.2.1 L'UIPQ vue de l'infini [**P11**] . . . 42
2.2.2 UIPQs à bord [**P13**] . . . 44
2.3 La percolation . . . 46
2.3.1 Avec des looptrees [**P22**] . . . 47
2.3.2 Avec du peeling [**P18**] . . . 49
2.4 La marche aléatoire simple sur l'UIPQ et ses avatars . . . 51
2.4.1 Benjamini–Schramm [22] en dimensions supérieures [**P1**] . . . 51
2.4.2 Invariance de long de la marche aléatoire [**P4**] . . . 53
2.4.3 Propriété d'intersection des graphes planaires [**P15**] . . . 54
2.4.4 L'UIPQ est sous-diffusive [**P14**] . . . 55
2.5 Limites de l'UIPQ . . . 56
2.5.1 Le plan brownien [**P16**] . . . 56
2.5.2 Structure conforme [**P23**] . . . 58

Partie I : Arboriculture

Ce mémoire est une escorte pour la lecture des articles $[\mathbf{P}i]_{i\in[\![1,23]\!]\setminus\{3,5,9,10\}}$ et n'a pas vocation à se substituer à leurs lectures. Le thème central est l'étude asymptotique de grands objets combinatoires aléatoires et de leurs limites. La première partie de ce manuscrit traite des propriétés des grands arbres de Galton–Watson critiques. Elle est divisée en quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons la définition des arbres de Galton–Watson et de leurs limites (la limite locale "Benjamini–Schramm" et la limite d'échelle au sens de Gromov–Hausdorff). Nous décrivons ensuite dans le deuxième chapitre les travaux **[P8]**,**[P18]** et **[P20]** qui traitent des arbres en tant que tels. Les deux chapitres suivants sont dédiés à l'étude des limites des grands arbres de Galton–Watson selon deux points de vue différents : le point de vue des laminations du disque et le point de vue des arbres à boucles.

1.1 Introduction

1.1.1 Arbres de Galton–Watson

Un arbre est un graphe sans cycle. Dans la suite, nous nous focaliserons sur les arbres plans, c'est-à-dire donnés avec une arête racine et une orientation cyclique des arêtes autour de chaque sommet. Ces arbres peuvent être vus comme des arbres généalogiques (l'arête racine relie l'ancêtre commun à son premier fils) et nous utiliserons intuitivement la notion d'ancêtre, enfant, frère... Le formalisme usuel (introduit dans [90]) identifie un arbre plan à une sous-partie τ de l'ensemble

$$\bigcup_{n\geqslant 1}(\mathbb{N}^*)^n \cup \{\varnothing\}$$

où $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'ancêtre commun $\varnothing$ appartient à τ,
- si $v \in \tau$ est la concaténation d'un mot u et d'une lettre $j \in \mathbb{N}$, alors $u \in \tau$,
- pour chaque $u \in \tau$, il existe un entier $k_u(\tau) \geqslant 0$ tel que les enfants de u dans τ soient exactement la concaténation du mot u et de la lettre j pour $1 \leqslant j \leqslant k_u(\tau)$.

Si $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ est une mesure de probabilité sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ telle que $\mu_0 + \mu_1 < 1$, un arbre de Galton–Watson de loi de reproduction μ (aussi appelé μ-arbre de Galton–Watson) est un arbre plan tel que tous les sommets de l'arbre ont un nombre d'enfants distribué selon μ indépendamment les uns des autres. On note GW_μ cette loi. Sous nos hypothèses, il est bien connu qu'un arbre de loi GW_μ est presque sûrement fini si et

seulement si

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mu_k \leqslant 1.$$

Le cas limite $\sum k\mu_k = 1$ est appelé le cas *critique*. Si la moyenne de μ est strictement plus grande (resp. strictement plus petite) que 1, la loi de reproduction est dite sur-critique (resp. sous-critique). Nous décrivons maintenant deux limites des grands arbres de Galton–Watson. Sauf mention contraire, nous supposerons dans la suite que μ est critique et que le pgcd du support de μ est 1. Pour $n \geqslant 0$ suffisamment grand (pour que la définition ait un sens) introduisons

$$\tau_n \qquad \text{et} \qquad \tau^{(n)}$$

respectivement des μ-arbres de Galton–Watson conditionnés à avoir exactement n sommets pour τ_n et une hauteur plus grande que n pour $\tau^{(n)}$.

1.1.2 Limite locale

Dans cette section nous introduisons la notion de convergence locale et l'appliquons au cas des grands arbres de Galton–Watson pour définir l'arbre de Galton–Watson conditionné à survivre. Cet arbre infini aléatoire est utilisé dans les publications **[P8]**,**[P11-14]**,**[P16]** et **[P21]**. La notion de convergence locale nous permettra dans la deuxième partie de ce manuscrit de définir la quadrangulation et la triangulation infinie uniforme du plan (et du demi-plan).

On considère l'ensemble $\mathcal{G}$ des graphes connexes localement finis (c'est-à-dire sans sommet de degré infini) orientés et enracinés, *i.e.* munis d'une arête orientée racine et d'une orientation cyclique des arêtes autour de chaque sommet. Deux graphes seront identifiés si il existe un isomorphisme de graphe entre eux préservant leurs racines et leurs orientations. L'ensemble [1] $\mathcal{G}$ peut être muni d'une distance (voir [22]) : si $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ on note

$$\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}(G_1, G_2) = \Big(1 + \sup\{r \geqslant 0 : B_r(G_1) = B_r(G_2)\}\Big)^{-1},$$

où $B_r(G)$ est le graphe (orienté et enraciné) obtenu en ne gardant que les arêtes de G dont tous les sommets sont à distance de graphe au plus r du sommet origine de l'arête racine de G. Il est facile de voir que $(\mathcal{G}, \mathrm{d}_{\mathrm{loc}})$ est un espace métrique séparable et complet. Si τ est un arbre plan, $B_r(\tau)$ représente simplement l'arbre des r premières générations de τ.

Théorème A (Kesten [63], voir aussi [1])**.** *On a la convergence en loi pour* $\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}$

$$\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \tau_\infty \qquad \textit{et} \qquad \tau^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \tau_\infty$$

où τ_∞ est un arbre plan infini aléatoire appelé le μ-arbre de Galton–Watson conditionné à survivre (la dépendance en μ est implicite).

1. plus précisément son quotient par l'identification introduite précédemment

Ce théorème reste vrai pour bien d'autres conditionnements, voir [1]. Ainsi τ_∞ décrit la structure locale "universelle" autour de la racine des grands μ-arbres de Galton–Watson. Donnons une description de τ_∞. L'arbre τ_∞ est composé d'un unique chemin infini partant de la racine, l'épine dorsale, sur laquelle sont branchés de part et d'autre des arbres finis. Plus précisément, introduisons $\mu^\star$ la loi μ biaisée définie par $\mu^\star_k = k\mu_k$ pour tout $k \geqslant 1$ (remarquez que $\mu^\star$ est bien une mesure de probabilité car μ est critique). Soit $(C_i)_{i\geqslant 0}$ une suite iid de variables distribuées selon $\mu^\star$ et conditionnellement à (C_i), soit $(V_i)_{i\geqslant 1}$ des variables indépendantes telles que V_k est uniforme sur $\{1, 2, \ldots, C_{k-1}\}$, pour tout $k \geqslant 1$. Pour finir, posons $W_0 = \varnothing$ et $W_k = V_1 V_2 \ldots V_k$ pour $k \geqslant 1$.

L'épine dorsale de τ_∞ est formée par le chemin $(W_0, W_1, W_2, \ldots)$ et pour $k \geqslant 0$, le sommet W_k a C_k enfants. Pour finir, conditionnellement à $(V_i)_{i\geqslant 1}$ et à $(C_i)_{i\geqslant 0}$, tous les enfants de W_k sauf W_{k+1} ont des descendances indépendantes données par des arbres de Galton–Watson avec loi de reproduction μ, voir Fig. 1.1.

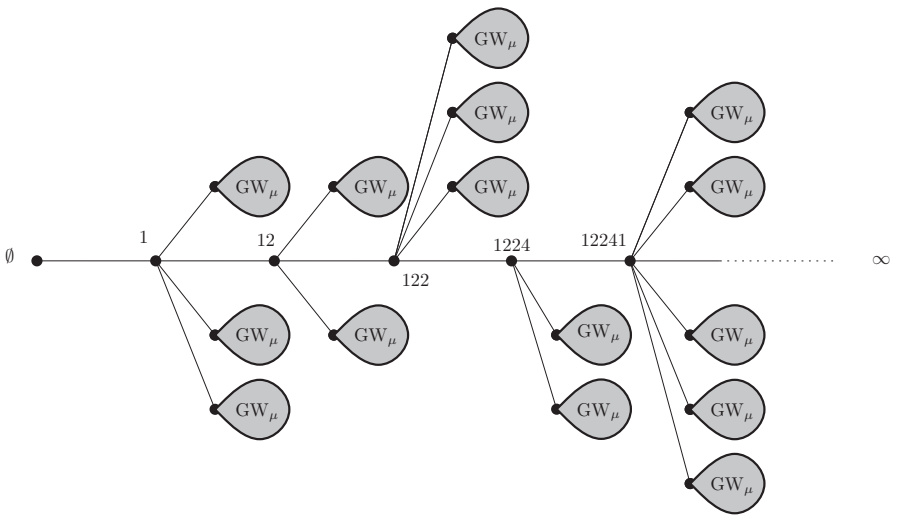


Figure 1.1 – Une représentation de l'arbre de Galton–Watson (critique) conditionné à survivre.

1.1.3 Limite d'échelle

Dans cette section nous introduisons la distance de Gromov–Hausdorff ainsi que les limites d'échelle des grands arbres de Galton–Watson : l'arbre brownien d'Aldous et les arbres stables de Le Gall & Le Jan.

Commençons par rappeler la définition de la distance de Hausdorff. Si A, B sont deux sous-ensembles fermés d'un espace métrique (E, d) alors la distance de Hausdorff entre A et B est

$$\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{E}(A, B) \quad = \quad \inf\{\varepsilon > 0\,,\ A \subset B^{\varepsilon} \text{ et } B \subset A^{\varepsilon}\},$$

où $X^\varepsilon = \{y \in E\,,\ \mathrm{d}(y, X) \leqslant \varepsilon\}$ est le ε-voisinage de l'ensemble X. Si maintenant (F, δ) et (F', δ') sont deux espaces métriques compacts abstraits, la distance de *Gromov–Hausdorff* entre eux est

$$\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}\left((F,\delta),(F',\delta')\right) \quad = \quad \inf\left\{\mathrm{d}_{\mathrm{H}}^{E}\left(\phi(F),\psi(F')\right)\right\}$$

où l'infimum est pris sur les tous les espaces métriques (E, d) et les plongements isométriques $\phi : F \to E$ et $\psi : F' \to E$. Cette définition fournit effectivement une métrique sur l'espace $\mathbb{K}$ des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts [30, Chapitre 7]. En outre $(\mathbb{K}, \mathrm{d}_{\mathrm{GH}})$ est un espace polonais. Si (E, d) est un espace métrique, on écrira $a \cdot E$ pour l'espace métrique $(E, a \cdot d)$.

> *Dans ce manuscrit, tous les graphes discrets (arbres, cartes, looptrees et dissections du polygone régulier) seront vus, sauf mention explicite, comme des espaces métriques : si G est un graphe, la notation $a \cdot G$ désignera l'ensemble des sommets de G muni de la distance de graphe remise à l'échelle par $a > 0$.*

Les limites au sens de Gromov–Hausdorff d'arbres discrets sont alors des arbres continus c'est-à-dire des espaces métriques compacts sans cycle dont toutes les géodésiques sont isométriques à des segments réels (voir [56, 73] pour plus de détails).

Arbre brownien. Rappelons que τ_n est un GW_μ conditionné à avoir exactement n sommets et que $n^{-1/2} \cdot \tau_n$ désigne l'espace métrique formé des sommets de τ_n équipé de la distance de graphe dans τ_n renormalisée par $n^{-1/2}$. Voici le prototype des résultats dans ce domaine (sous cette forme, le résultat est dû à Le Gall [73]) :

Théorème B (Aldous [3])**.** *Si μ est critique et a une variance finie $\sigma^2 = \sum k^2\mu_k - 1 > 0$ alors on a la convergence suivante en loi au sens de Gromov–Hausdorff*

$$n^{-1/2} \cdot \tau_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \frac{2}{\sigma} \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{e}},$$

où $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ est l'arbre aléatoire continu brownien d'Aldous.

La notation $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ provient du fait que l'arbre continu brownien d'Aldous peut être codé (voir [55]) à partir d'une excursion brownienne normalisée. Plus précisément, si $(\mathbf{e}_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ est une excursion brownienne normalisée, pour $s, t \in [0, 1]$ on note

$$\mathrm{d}_{\mathbf{e}}(s,t) \quad = \quad \mathbf{e}(s) + \mathbf{e}(t) - 2\min_{[s\wedge t, s\vee t]} \mathbf{e}. \tag{1.1}$$

Le quotient de $[0, 1]$ par la pseudo-distance $\mathrm{d}_{\mathbf{e}}$ est noté $(\mathcal{T}_{\mathbf{e}}, \mathrm{d}_{\mathbf{e}})$. Cet espace métrique aléatoire est presque sûrement un arbre continu et a la même loi que l'arbre continu brownien d'Aldous (à un facteur multiplicatif près), voir [2, 73] .

Arbres stables. Il existe une généralisation du théorème précédent quand μ a une variance infinie. Si μ est critique et satisfait [2] $\mu_k \sim Ck^{-1-\alpha}$ quand $k \to \infty$ avec $\alpha \in (1, 2)$ et $C > 0$ alors nous avons :

2. ou plus généralement soit dans le domaine d'attraction d'une loi stable (spectralement positive) d'indice $\alpha \in (1, 2)$

Théorème C (Duquesne [53])**.** *On a la convergence suivante en distribution au sens de Gromov–Hausdorff*

$$n^{-1+1/\alpha} \cdot \tau_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{C\Gamma(2-\alpha)}\right)^{1/\alpha} \cdot \mathcal{T}_\alpha,$$

où $\mathcal{T}_\alpha$ est un arbre continu aléatoire appelé arbre stable de paramètre $\alpha \in (1,2)$ et introduit par Le Gall & Le Jan dans [76].

L'arbre brownien est un cas limite des arbres stables quand $\alpha \to 2$ et avec ces normalisations, l'arbre 2-stable correspond à $\mathcal{T}_2 = \sqrt{2} \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{e}}$. Pour $\alpha \in (1,2)$ l'arbre $\mathcal{T}_\alpha$ peut être construit à partir de l'excursion normalisée du processus de Lévy α-stable spectralement positif, mais la construction est plus compliquée que dans le cas brownien et nous renvoyons le lecteur à [54] pour les détails.

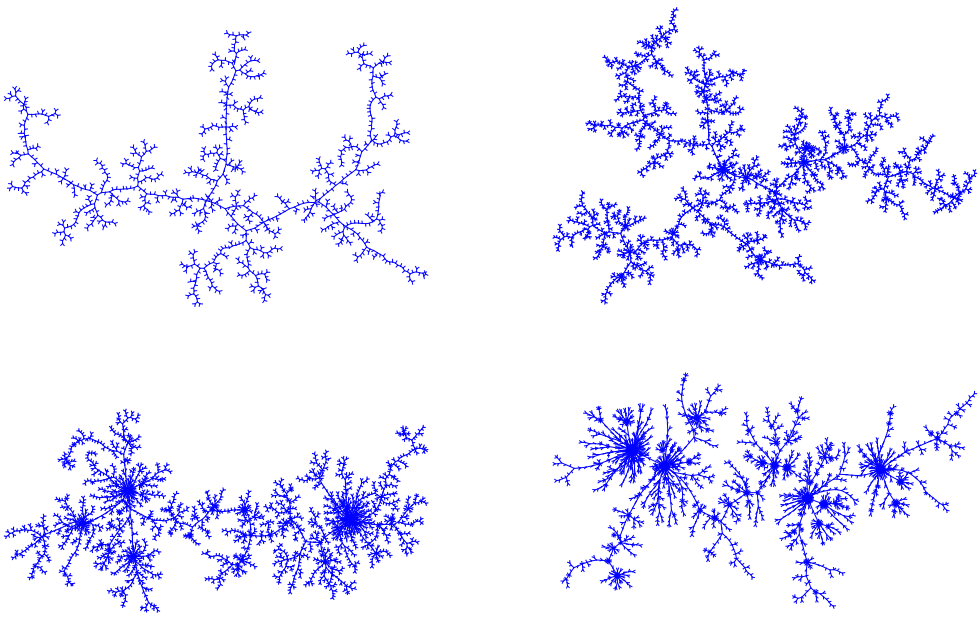


Figure 1.2 – Photo de famille. De haut en bas et de gauche à droite des simulations (approchées) de $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_{1.9}, \mathcal{T}_{1.5}$ et $\mathcal{T}_{1.2}$

Donnons quelques propriétés des arbres stables et de l'arbre brownien. Si $\mathcal{T}$ est un arbre continu, le degré d'un point $u \in \mathcal{T}$ est par définition le nombre de composantes connexes de $\mathcal{T}\backslash\{u\}$. Un point de degré 1 est appelé une feuille et un point de degré supérieur ou égal à 3 est un point de branchement.

L'arbre brownien est presque sûrement un arbre binaire au sens où les points de branchement sont au plus de degrée 3. En revanche, les points de branchement de $\mathcal{T}_\alpha$ sont p.s. tous de degré infini quand $\alpha \in (1,2)$ (voir Figure 1.2). Les arbres stables et l'arbre brownien sont également munis d'une mesure de probabilité qui ne charge que les feuilles que nous appellerons la mesure uniforme.

1.2 Résultats sur les arbres vus comme tels

1.2.1 Récurrence du serpent critique **[P8]**

Comme le lecteur le verra plus tard dans le manuscrit (Section 2.1.1), les marches aléatoires indexées par des arbres (ou encore arbres étiquetés) sont très importantes. Avec Itai Benjamini nous avons étudié dans la note **[P8]** la récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ indexée par un arbre de Galton–Watson critique géométrique conditionné à survivre, *i.e.* associé à la loi de reproduction critique $\mu_k = 2^{-k-1}$ pour $k \geqslant 0$.

Formellement si T est un arbre aléatoire, la marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ indexée par T est obtenue de la manière suivante : Conditionnellement à T, on considère une famille de variables i.i.d. indexées par les arêtes de l'arbre T et uniformément distribuées sur les $2d$ générateurs élémentaires $(\pm 1, 0, 0, \ldots), (0, \pm 1, 0, 0), \ldots$ de $\mathbb{Z}^d$. Pour chaque sommet v de l'arbre T, on forme la somme $\mathcal{S}_T(v)$ des variables portées par les arêtes de la géodésique allant de v à la racine de l'arbre. Ainsi, la fonction $\mathcal{S}_T$, appelée marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^d$ indexée par T, est définie sur les sommets de T et est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

Si T est un arbre de Galton–Watson sur-critique alors $\mathcal{S}_T$ est une marche aléatoire branchante et Biggins [25] a montré que $\mathcal{S}_T$ est presque-sûrement récurrente au sens où p.s. $\#\mathcal{S}_T^{-1}(\{0\}) = \infty$. Quand T est un arbre de Galton–Watson critique le processus obtenu est étroitement relié à la théorie du serpent brownien de Le Gall et des superprocessus, voir [72]. Si τ_∞ est l'arbre de Galton–Watson géométrique critique conditionné à survivre, nous avons prouvé :

Théorème 1 ([**P8**])**.** *On a*

$$\#\mathcal{S}_{\tau_\infty}^{-1}(\{0_{\mathbb{Z}^d}\}) = \infty \iff d \leqslant 4.$$

Le rôle critique de la dimension 4 est réminiscent de la théorie des superprocessus où l'analogue du théorème ci-dessus est connu [98]. Voici l'heuristique de la preuve : Si $\mathcal{S}_{\tau_\infty}$ n'est pas récurrente "alors" l'image par $\mathcal{S}_{\tau_\infty}$ de la boule $B_n(\tau_\infty)$ est de cardinal proportionnel à celui de $B_n(\tau_\infty)$. D'une part des estimées classiques sur les arbres de Galton–Watson montrent que $\#B_n(\tau_\infty) \approx n^2$ et d'autre part, par diffusivité de la marche nous avons $\mathcal{S}_{\tau_\infty}(B_n(\tau_\infty)) \subset B_{n^{1/2+o(1)}}(\mathbb{Z}^d)$. Ce qui conduit à

$$n^2 \approx \#\mathcal{S}_{\tau_\infty}(B_n(\tau_\infty)) \leqslant \#B_{n^{1/2+o(1)}}(\mathbb{Z}^d) \approx n^{d/2},$$

et implique que $d > 4$ (le cas critique $d = 4$ demande un peu plus de travail). La justification rigoureuse du "alors" utilise des propriétés d'invariance en loi par ré-enracinement de l'arbre τ_∞ qu'il est facile d'obtenir dans le cas géométrique (ce qui motive le choix de cette loi de reproduction).

1.2.2 Les poupées russes **[P17]**

Il est connu depuis Duquesne & Le Gall [55] et Haas & Miermont [59] que la dimension de Hausdorff de l'arbre α-stable est presque sûrement égale à $\alpha/(1-\alpha)$ pour $\alpha \in (1,2]$. Les arbres stables sont donc intuitivement "décroissants" en le paramètre α. Dans **[P17]**, avec Bénédicte Haas nous avons prouvé que c'est effectivement le cas et que les arbres stables peuvent être construits sur le même espace de probabilité emboités les uns dans les autres.

Pour ce faire, plutôt que de considérer la version standard des arbres stables nous utiliserons des versions remises à l'échelle aléatoirement afin que la hauteur des arbres obtenus soit stochastiquement constante. Plus précisément, pour $a > 0$ soit Γ_a une variable de densité $x^{a-1}e^{-x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ et posons

$$J_\alpha \overset{(d)}{=} \alpha \cdot \left(\Gamma_{2-1/\alpha}\right)^{1-1/\alpha}.$$

Cette variable a été construite de manière à ce que la hauteur d'un point uniforme dans $J_\alpha \cdot \mathcal{T}_\alpha$ (avec J_α indépendante de $\mathcal{T}_\alpha$) soit distribuée comme une loi Gamma de paramètre 2, et ce, pour tout $\alpha \in (1,2]$. Notre résultat est alors :

Théorème 2 ([**P17**])**.** *On peut construire sur le même espace de probabilité une famille* $(\mathscr{T}_\alpha, 1 < \alpha \leqslant 2)$ *d'arbres continus aléatoires telle que :*

- $\mathscr{T}_\alpha \overset{(d)}{=} J_\alpha \cdot \mathcal{T}_\alpha$, *où* J_α *est indépendante de* $\mathcal{T}_\alpha$, *pour tout* $\alpha \in (1,2]$,
- $\mathscr{T}_{\alpha'} \subset \mathscr{T}_\alpha$, *pour tous* $1 < \alpha \leqslant \alpha' \leqslant 2$.

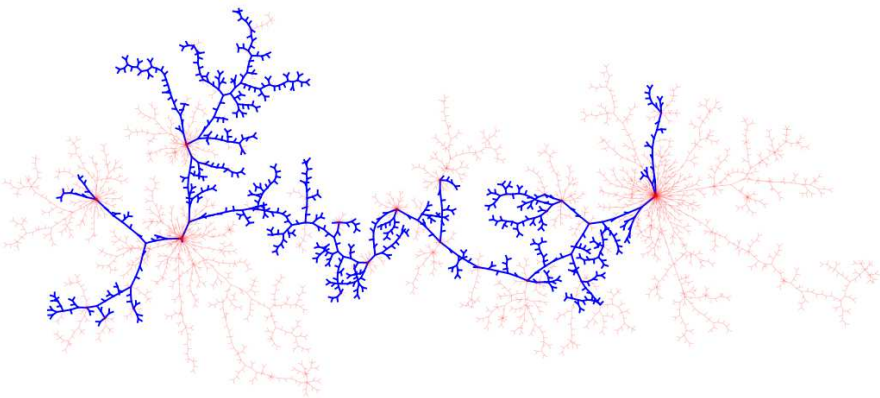


Figure 1.3 – Un arbre brownien caché dans un arbre stable de paramètre $3/2$.

Élagage. Nous donnons maintenant une construction explicite de $\mathscr{T}_{\alpha'}$ comme un sous arbre de $\mathscr{T}_\alpha$ quand $1 < \alpha < \alpha' \leqslant 2$. Le cas limite $\alpha' = 2$ est beaucoup plus simple que les autres et mérite donc une attention particulière.

Conditionnellement à l'arbre $\mathscr{T}_\alpha$, soit $(X_i)_{i\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de feuilles de $\mathscr{T}_\alpha$ distribuées selon la mesure uniforme (image de la mesure uniforme sur $\mathcal{T}_\alpha$ par la multiplication par J_α). On note $\mathfrak{t}_n$ le sous-arbre engendré par $X_0, X_1, \ldots, X_n$ dans $\mathscr{T}_\alpha$. Pour $d, d' \in \{0, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ avec $d \geqslant d'$ et $d \geqslant 2$, on introduit les probabilités de transition suivantes

$$p_{\alpha,\alpha',d,d'} \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si } d' = 0, \\ 1 & \text{si } d' = 2, \\ \dfrac{(d'-1-\alpha')(\alpha-1)}{(d-1-\alpha)(\alpha'-1)} & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \in [0,1],$$

à partir desquelles on construit par récurrence une suite de sous-arbres $A_n \subset \mathfrak{t}_n \subset \mathscr{T}_\alpha$ comme suit :

- $A_1 = \mathfrak{t}_1 = [\![X_0, X_1]\!]$ est le segment reliant X_0 à X_1 dans $\mathscr{T}_\alpha$,
- à l'étape $i \geqslant 2$, on écrit $\mathfrak{t}_i = \mathfrak{t}_{i-1} \cup [\![X_i, \Delta_i]\!]$, où $\Delta_i \in \mathfrak{t}_{i-1}$ et $[\![X_i, \Delta_i]\!]$ est la géodésique dans $\mathfrak{t}_i$ liant X_i à $\mathfrak{t}_{i-1}$. On note alors d_i le degré de Δ_i dans $\mathfrak{t}_{i-1}$ et d'_i son degré dans A_{i-1}, avec la convention $d'_i = 0$ si $\Delta_i \notin A_{i-1}$. Pour finir, on pose (voir Fig. 1.4)

$$\begin{aligned} A_i = A_{i-1} \cup [\![X_i, \Delta_i]\!] \quad & \text{avec probabilité } p_{\alpha,\alpha',d_i,d'_i}, \\ A_i = A_{i-1} \quad & \text{avec probabilité complémentaire.} \end{aligned}$$

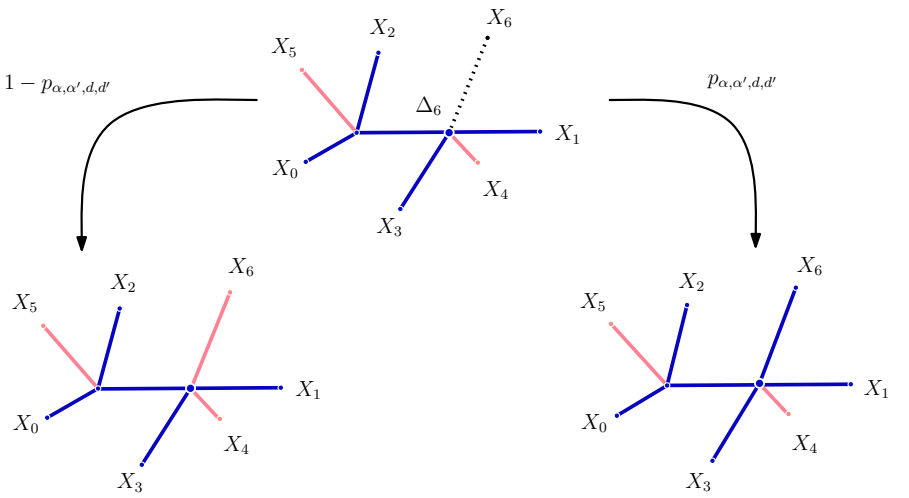


Figure 1.4 – Illustration de la procédure d'élagage. Ici $d' = 3$, $d = 4$ et les arbres A_5 et A_6 sont en bleu.

La suite (A_n) est clairement croissante dans $\mathscr{T}_\alpha$ et l'on note $\mathrm{Prun}_{\alpha,\alpha'}(\mathscr{T}_\alpha;(X_i)_{i\geqslant 0})$ la fermeture de cette union croissante. Alors, avec les notations du théorème précédent on peut choisir

$$\mathscr{T}_{\alpha'} = \mathrm{Prun}_{\alpha,\alpha'}(\mathscr{T}_\alpha;(X_i)_{i\geqslant 0}).$$

En particulier quand $\alpha' = 2$ on a $p_{\alpha,2,d,3} = 0$ et donc aucun point de branchement de degré plus grand ou égal à 4 n'est crée dans A_n. Ainsi, (A_n) est une suite croissante d'arbres continus binaires. Dans ce cas, la procédure d'élagage revient à ajouter les points X_{n+1} dont l'attachement laisse A_n binaire. La fonction $\mathrm{Prun}_{\alpha,2}(\mathscr{T}_\alpha;(X_i)_{i\geqslant 0})$ est donc déterministe de $\mathscr{T}_\alpha$ et des feuilles $X_i, i \geqslant 0$.

La majorité des preuves de **[P17]** sont fondées sur une approche discrète. En effet, dans [82] Philippe Marchal a introduit une chaîne de Markov croissante $(\mathbf{T}_\alpha(n), n \geqslant 1)$ à valeurs dans les arbres discrets étiquetés qui converge après renormalisation vers l'arbre stable $\mathcal{T}_\alpha$. Présentons rapidement la construction. Tout commence avec l'arbre $\mathbf{T}_\alpha(1)$ formé d'une unique arête reliant le sommet 0 au sommet 1. Par récurrence, à l'étape $n \geqslant 2$ on donne un poids $\alpha - 1$ à chaque arête de l'arbre $\mathbf{T}_\alpha(n)$ et un poids $d - 1 - \alpha$ à chaque sommet de degré $d \geqslant 3$. Une arête ou un sommet de $\mathbf{T}_\alpha(n)$ est alors sélectionné proportionnellement à son poids et une nouvelle arête est attachée directement sur le sommet choisi ou au milieu de l'arête sélectionnée. Dans le cas $\alpha = 2$ cette construction coïncide avec l'algorithme de Rémy [92] sur les arbres binaires. Nous avons alors prouvé la convergence presque sûre

$$n^{-1+1/\alpha} \cdot \mathbf{T}_\alpha(n) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \quad \alpha \cdot \mathcal{T}_\alpha,$$

au sens de Gromov–Hausdorff.

L'observation clé est alors la suivante : il est possible d'identifier dans la construction de $\mathbf{T}_\alpha(n)$ une "sous-chaîne" de Markov $\mathbf{T}_{\alpha,\alpha'}(n) \subset \mathbf{T}_\alpha(n)$ dont le mécanisme de grossissement est précisément l'algorithme de Marchal avec paramètre $\alpha' > \alpha$ à un changement de temps près. La limite d'échelle de la suite $(\mathbf{T}_{\alpha,\alpha'}(n), n \geqslant 1)$ nous fournit alors un arbre stable (à une renormalisation aléatoire près) inclus dans $\mathcal{T}_\alpha$.

1.2.3 La mesure harmonique **[P20]**

D'un point de vue probabiliste, la mesure harmonique d'un ensemble est la distribution du point d'entrée dans cet ensemble par une marche aléatoire dans le cas discret, ou par le mouvement brownien dans le cadre continu. C'est un concept extrêmement important et beaucoup étudié. Il a été observé dans plusieurs contextes que la mesure harmonique d'un ensemble fractal est supportée en grande partie par un sous-ensemble de dimension strictement plus petite. En particulier, le célèbre théorème de Makarov [81] montre que la mesure harmonique sur la frontière d'un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ est toujours supportée par un ensemble de dimension 1 (peu importe la dimension de la frontière), voir [27] pour des analogues en dimension supérieure.

Ce phénomène a également été prouvé par Lyons, Pemantle et Peres dans le cas de la mesure harmonique à l'infini pour des marches aléatoires sur des arbres de Galton–Watson sur-critiques, [79, 80]. Dans la pré-publication **[P20]** nous avons montré avec

Jean-François Le Gall un résultat similaire dans le cas bien différent des arbres de Galton–Watson *critiques*.

Soit μ une loi de reproduction critique et de variance finie. Sous la probabilité $\mathbb{P}$, on note $\tau^{(n)}$ un μ-arbre de Galton–Watson conditionné à atteindre la hauteur n. Conditionnellement à $\tau^{(n)}$ on considère une marche aléatoire simple sur $\tau^{(n)}$ partant de la racine de l'arbre et l'on note Σ_n le premier point à hauteur n de $\tau^{(n)}$ visité par la marche. La loi μ_n de Σ_n est donc une mesure de probabilité sur l'ensemble $\tau_n^{(n)}$ des sommets à hauteur n de $\tau^{(n)}$ appelée la mesure harmonique au niveau n. Il est bien connu que

$$\#\tau_n^{(n)} \approx n,$$

et nous prouvons qu'il existe une constante $\beta \approx 0,78\ldots$ qui ne dépend pas de μ et telle que la majorité de la masse de μ_n est concentrée sur approximativement n^β sommets de $\tau_n^{(n)}$. Plus précisément :

Théorème 3 ([**P22**])**.** *Pour tout $\delta > 0$ nous avons la convergence en probabilité*

$$\mu_n(\{v \in \tau_n^{(n)} : n^{-\beta-\delta} \leqslant \mu_n(v) \leqslant n^{-\beta+\delta}\}) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \quad 1.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe avec $\mathbb{P}$-probabilité tendant vers 1 quand $n \to \infty$, un sous-ensemble $A_{n,\varepsilon}$ de $\tau_n^{(n)}$ tel que $\#A_{n,\varepsilon} \leqslant n^{\beta+\delta}$ et $\mu_n(A_{n,\varepsilon}) \geqslant 1-\varepsilon$. Inversement, la plus grande μ_n-mesure d'un ensemble de cardinal inférieur à $n^{\beta-\delta}$ tend en probabilité vers 0 quand $n \to \infty$.

Le point de vue continu. L'ingrédient principal dans la preuve du théorème précédent est un résultat analogue dans le continu. En effet si $\tau^{(n)}$ est vu comme un espace métrique on a alors la convergence suivante

$$n^{-1} \cdot \tau^{(n)} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_{\mathbf{e}}^{(1)},$$

où $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}^{(1)}$ est l'arbre brownien d'Aldous conditionné à avoir une hauteur plus grande que 1. L'analogue continu de la mesure harmonique au niveau n de $\tau^{(n)}$ pour la marche aléatoire simple est donc la mesure harmonique au niveau 1 de $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}^{(1)}$ pour le mouvement brownien sur $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}^{(1)}$ démarré de la racine. Mais nous n'aurons pas besoin de cela.

Remarquez en effet que les propriétés de la mesure harmonique μ_n sur $\tau_n^{(n)}$ peuvent être déduites de l'arbre réduit τ^{*n} obtenu en ne gardant que les sommets de $\tau^{(n)}$ ayant une descendance au niveau n. On peut donc élaguer $\tau^{(n)}$ des branches n'atteignant pas le niveau n. La limite d'échelle Δ des arbres réduits est très simple à décrire : On démarre avec un segment orienté dont la longueur $U_\varnothing$ est uniformément distribuée sur $[0,1]$ et dont l'origine sera la racine de l'arbre. À l'autre extrémité de ce segment, on attache deux autres segments de longueur U_1 et U_2 où, conditionnellement à $U_\varnothing$, U_1 et U_2 sont indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1-U_\varnothing]$. On continue

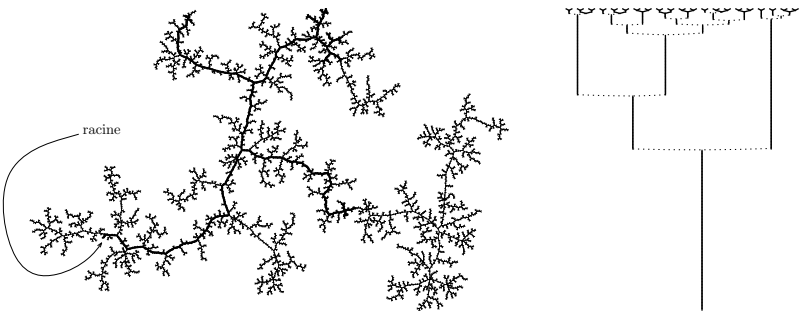


Figure 1.5 – Un grand arbre de Galton–Watson et son arbre réduit.

alors la construction par induction. On obtient à la fin un arbre continu aléatoire (non compact) dont la fermeture est noté Δ. On a alors la convergence suivante

$$n^{-1} \cdot \tau^{*n} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \Delta,$$

en loi au sens de Gromov–Hausdorff. La frontière $\partial\Delta$ de Δ est faite des points à hauteur 1. Il est facile de définir le mouvement brownien sur Δ démarré de la racine jusqu'au premier temps d'atteinte de $\partial\Delta$. La distribution (aléatoire) μ du point d'atteinte de $\partial\Delta$ par le mouvement brownien est la mesure harmonique (au niveau 1).

Théorème 4 ([**P22**])**.**
Avec la même constante β que précédemment, on a $\mathbb{P}$ p.s. $\mu(dx)$ p.p.,

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\log \mu(\mathscr{B}_\Delta(x,r))}{\log r} = \beta,$$

où $\mathscr{B}_\Delta(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r dans Δ. En particulier, la dimension de Hausdorff de μ est $\mathbb{P}$ p.s. égale à β (alors que la dimension de $\partial\Delta$ est égale à 1).

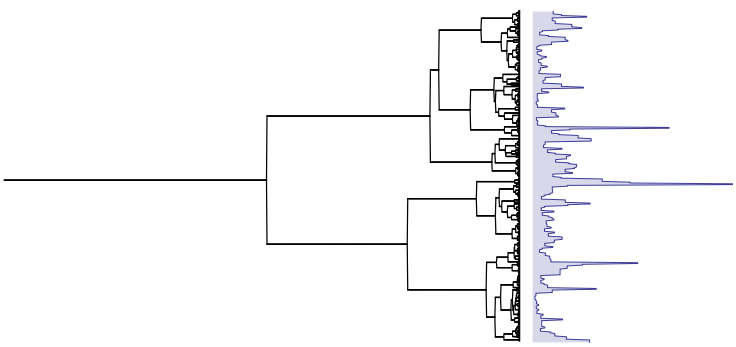


Figure 1.6 – Une simulation de Δ et de sa mesure harmonique au niveau 1. Clairement cette dernière n'est pas uniforme et a un comportement fractal.

Donnons quelques idées de la preuve de ce théorème. La première étape consiste à transformer l'arbre Δ en un objet stationnaire. De manière informelle, on considère l'arbre $f(\Delta)$ où un point à hauteur $u \in [0,1]$ dans Δ correspond à un point à hauteur

$$f(u) = -\log(1-u) \in [0,\infty)$$

dans $f(\Delta)$. L'arbre continu aléatoire obtenu est alors l'arbre de Yule (binaire dont chaque branche a une longueur exponentielle indépendantes les unes des autres). Une application de la formule d'Itô montre alors que le mouvement brownien sur Δ est transformé par f en (un changement de temps d') un mouvement brownien sur $f(\Delta)$ *avec une dérive* $1/2$ vers l'infini. Le théorème précédent consiste alors à comprendre la mesure harmonique sur la frontière à l'infini de $f(\Delta)$ pour un mouvement brownien avec dérive $1/2$. Pour ce faire, l'outil classique et de trouver "un environnement stationnaire" du point de vue de la particule (ici le mouvement brownien avec dérive) et d'appliquer des outils de théorie ergodique. Voir **[P22]** pour plus de détails.

La conductance limite. La constante β apparaissant dans les deux théorèmes précédents peut être exprimée en fonction de la conductance de Δ. De manière informelle, on peut voir Δ comme un réseau de résistances imaginaires d'un ohm par unité de longueur. La résistance équivalente entre la racine de Δ et $\partial\Delta$ est alors une variable aléatoire $\mathcal{C} \in [1,\infty)$. Cette conductance est également la limite en loi universelle des conductances (divisées par n) entre le niveau 0 et le niveau n dans τ^{*n}. Nous avons prouvé que $\mathcal{C}$ est caractérisée par l'équation en loi suivante :

$$\mathcal{C} \overset{(d)}{=} \Big(U + \frac{1-U}{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2}\Big)^{-1}, \tag{1.2}$$

où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux copies indépendantes de $\mathcal{C}$ aussi indépendantes de la variable U uniforme sur $[0,1]$. Malgré l'équation simple satisfaite par $\mathcal{C}$, sa loi n'est pas bien comprise. Bizarrement (ou pas), bien que $\mathcal{C}$ admette une densité sur $[1,\infty)$, celle-ci n'est pas deux fois continûment dérivable en 2!!! voir Fig. 1.7.

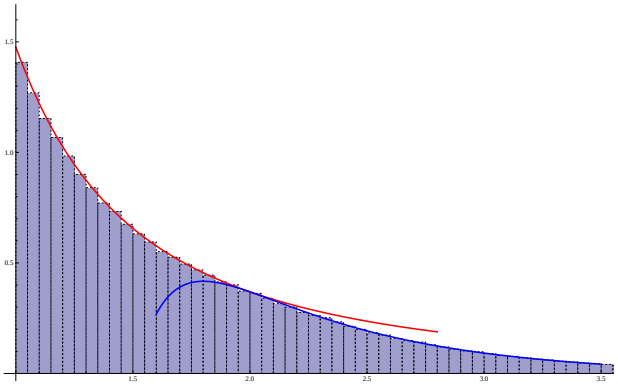


Figure 1.7 – Un histogramme de la distribution de $\mathcal{C}$ sur $(1,\infty)$. Notez le point d'inflexion de la densité en 2.

La mystérieuse constante universelle β est alors

$$\beta \;=\; 2\,\frac{E\left[\frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\mathcal{C}_3-1}\log\left(\frac{\mathcal{C}_2+\mathcal{C}_3}{\mathcal{C}_2}\right)\right]}{E\left[\frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2-1}\right]} = \frac{1}{2}\left(\frac{E[\mathcal{C}_1]^2}{E\left[\frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2}{\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2-1}\right]}-1\right)\approx 0,78\ldots,$$

où $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont des copies indépendantes de $\mathcal{C}$. Gloups.

1.3 Laminations aléatoires

Dans ce chapitre, nous étudions toujours des arbres aléatoires mais déguisés sous une autre forme. On utilise la notation $\mathcal{P}_n$ pour le polygone régulier à n côtés dont les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Une *dissection* de $\mathcal{P}_n$ est un graphe formé par l'union des côtés de $\mathcal{P}_n$ ainsi que de certaines de ses diagonales telle que deux diagonales de la dissection ne peuvent pas se croiser à l'intérieur du polygone (seulement aux sommets). C'est donc un cas particulier de configuration non-croisée du polygone [57]. On parlera de triangulation (ou plus généralement de p-angulation) de $\mathcal{P}_n$ si les faces internes de la dissection sont toutes des triangles (des p-gones).

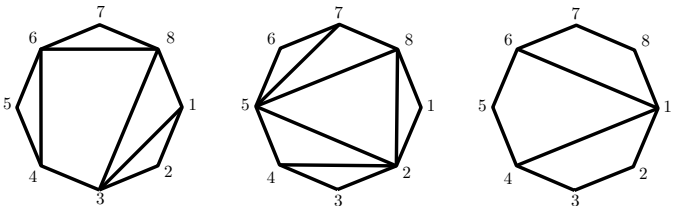


Figure 1.8 – Une dissection, triangulation et quadrangulation de l'octogone.

Le lecteur averti l'aura remarqué, ces objets ne sont que des arbres déguisés ! Plus précisément, on peut associer de manière univoque un arbre plan $\phi(\mathsf{D})$ à une dissection D. Pour cela on considère le "dual" de la dissection obtenu en plaçant un sommet dans chaque face interne de la dissection et en dehors de chaque côté de $\mathcal{P}_n$ et en les joignant par les arêtes duales de la dissection. La procédure est claire sur la figure ci-dessous. On retire alors l'arête duale au côté $(1, n)$ et l'on enracine l'arbre plan obtenu au coin laissé vacant.

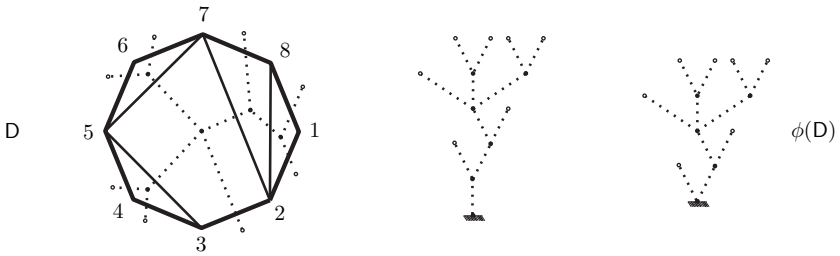


Figure 1.9 – L'arbre dual associé à une dissection.

Dans ce chapitre, une dissection de $\mathcal{P}_n$ sera considérée comme un ensemble fermé du disque. Le premier à avoir étudié les dissections aléatoires de ce point de vue géométrique est David Aldous dans [4, 5]. Soit T_n une triangulation de $\mathcal{P}_n$ choisie uniformément au hasard parmi toutes les triangulations de $\mathcal{P}_n$.

Théorème D (Aldous [5])**.** *En considérant* T_n *comme un sous-ensemble fermé de* $\overline{\mathbb{D}}$*, on a la convergence en distribution au sens de Hausdorff*

$$\mathsf{T}_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{L}_{\mathbf{e}},$$

où $\mathcal{L}_{\mathbf{e}}$ *est un fermé aléatoire du disque appelé* la triangulation brownienne.

La triangulation brownienne est une *lamination* de $\overline{\mathbb{D}}$, c'est-à-dire un ensemble fermé de $\overline{\mathbb{D}}$ qui peut s'écrire comme une union de cordes $[xy]$ avec $x, y \in \mathbb{S}_1$ qui ne s'intersectent pas dans $\mathbb{D}$. Ces objets sont les limites des dissections discrètes pour la distance de Hausdorff. De plus, $\mathcal{L}_{\mathbf{e}}$ est presque sûrement une triangulation continue, au sens où les composantes connexes du complémentaire de $\mathcal{L}_{\mathbf{e}}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$ sont toutes des triangles ouverts euclidiens [78]. Tout comme l'arbre brownien $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$, la triangulation brownienne $\mathcal{L}_{\mathbf{e}}$ peut être codée par l'excursion brownienne $\mathbf{e}$: avec les notations de (1.1) on peut écrire

$$\mathcal{L}_{\mathbf{e}} = \bigcup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ \mathrm{d}_{\mathbf{e}}(s,t)=0}} \left[e^{2\mathrm{i}\pi s}, e^{2\mathrm{i}\pi t}\right].$$

Comme tous les membres de la famille brownienne, $\mathcal{L}_{\mathbf{e}}$ est un objet fractal et Aldous [5] et Le Gall & Paulin [78] ont montré que presque sûrement $\dim(\mathcal{L}_{\mathbf{e}}) = \frac{3}{2}$. L'outil principal utilisé par Aldous est la dualité avec les arbres. En effet, il est facile de voir que le dual $\phi(\mathsf{T}_n)$ d'une triangulation uniforme de $\mathcal{P}_n$ est un arbre binaire uniforme à $2n-3$ sommets. Ce dernier est distribué comme un arbre de Galton–Watson de loi de reproduction critique $\mu_0 = \mu_2 = 1/2$ conditionné à avoir $2n-3$ sommets. On peut donc appliquer les résultats d'Aldous [3] et en déduire la convergence des fonctions de contour renormalisées associées aux arbres $\phi(\mathsf{T}_n)$ vers l'excursion brownienne. Avec un peu de travail le théorème précédent en découle.

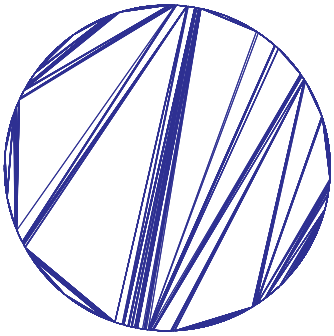


Figure 1.10 – Une simulation de la triangulation brownienne.

L'analgoue "stable" de la triangulation brownienne a été introduit par Igor Kortchemski dans [67]. Ces laminations aléatoires dites stables sont les limites d'échelle de certains modèles de dissections aléatoires avec des grandes faces (voir Section 1.4.2). À la limite, les faces de la lamination stable ne sont plus des triangles mais des polygones à un nombre infini de côtés.

1.3.1 La triangulation brownienne est universelle **[P12]**

Poursuivant l'approche d'Aldous, nous avons généralisé avec Igor Kortchemski le Théorème D à d'autres modèles de configurations non croisées aléatoires montrant ainsi l'universalité de la triangulation brownienne (voir aussi [66]). Par soucis de clarté, nous ne décrivons ici que le cas particulier des dissections uniformes, voir **[P12]** pour d'autres modèles. Pour $n \geqslant 3$, notons $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de toutes les dissections de $\mathcal{P}_n$ et soit D_n une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\mathcal{D}_n$.

Théorème 5 ([**P12**])**.** *On a la convergence suivante en distribution au sens de Hausdorff*

$$\mathsf{D}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{L}_{\mathbf{e}}.$$

La méthode est similaire à celle d'Aldous. Nous montrons d'abord que l'arbre dual d'une dissection uniforme peut être vu comme un arbre de Galton–Watson conditionné. Plus précisément introduisons la loi de reproduction μ donnée par

$$\mu_0 = \frac{1-2c}{1-c}, \qquad \mu_1 = 0, \qquad \mu_i = c^{i-1} \quad \text{pour } i \geqslant 2.$$

avec $c = 1 - 2^{-1/2}$. Il est facile de voir que la constante c a été choisie de façon à ce que μ soit critique. On peut alors montrer que $\phi(\mathsf{D}_n)$ a la même loi qu'un GW_μ conditionné à avoir $n-1$ feuilles. Ce type de conditionnement a été étudié dans [67, 94] et les fonctions de contours de $\phi(\mathsf{D}_n)$ convenablement renormalisées tendent vers l'excursion brownienne, voir [67]. La convergence vers la triangulation brownienne s'ensuit en utilisant des variations des arguments d'Aldous. Il est intéressant de noter au passage que nos techniques nous ont permis de retrouver l'asymptotique de $\#\mathcal{D}_n$ de façon probabiliste,

$$\#\mathcal{D}_n \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{4}\sqrt{\frac{99\sqrt{2}-140}{\pi}}\, n^{-3/2}(3+2\sqrt{2})^n.$$

Ce lien entre dissection uniforme et arbre de Galton–Watson nous a également permis de prouver plusieurs conjectures de [23] sur les degrés des sommets de D_n. En particulier, la loi limite du degré du sommet 1 dans D_n, trouvée dans [23], s'interprète aisément à l'aide du μ-arbre de Galton–Watson conditionné à survivre. D'autres modèles comme les arbres non-croisés [85] sont étudiés dans **[P12]**.

1.3.2 La triangulation récursive **[P2]**

Dans ce travail en collaboration avec Jean-François Le Gall, au lieu d'étudier des modèles de dissections/triangulations etc... uniformes, qui sont à la limite très intimement liés à l'arbre brownien, nous nous sommes intéressé à des modèles de laminations dites *récursives* qui exhibent un tout autre comportement. Décrivons un de ces modèles pour présenter nos résultats.

On considère une suite $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur le cercle $\mathbb{S}_1$. On construit ensuite par récurrence une suite de fermés $L_1, L_2, \dots$ du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$. On définit pour commencer $L_1 = [U_1V_1]$ la corde (euclidienne) d'extrémités U_1 et V_1. Pour $n \geqslant 2$ on distingue deux cas. Soit la corde $[U_nV_n]$ n'intersecte pas L_{n-1} et dans ce cas on pose $L_n = L_{n-1} \cup [U_nV_n]$, sinon on pose $L_n = L_{n-1}$. On vérifie aisément que L_n est une union disjointe de cordes. On note L_∞ la fermeture de l'union croissante des L_n.

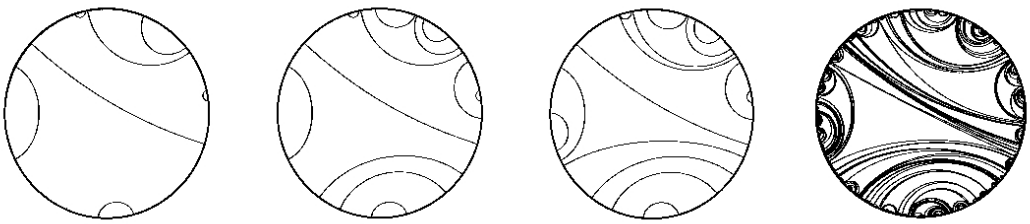


Figure 1.11 – Une illustration du processus $(L_n)_{n\geqslant 1}$. On a dessiné les cordes en géométrie hyperbolique pour des raisons esthétiques.

Théorème 6 ([**P2**])**.**
L'ensemble fermé aléatoire L_∞ est presque sûrement une triangulation du disque $\overline{\mathbb{D}}$ de dimension de Hausdorff

$$\dim(L_\infty) = 1 + \beta^*, \qquad \text{où} \quad \beta^* = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}.$$

Le théorème précédent a deux composantes essentiellement disjointes. La première consiste à établir que la dimension de Hausdorff de L_∞ est p.s. $1 + \beta^*$. Cela passe par l'étude d'un processus annexe et utilise la théorie des fragmentations. La deuxième partie, c'est-à-dire le fait que L_∞ soit une triangulation du disque, nécessite l'introduction et l'étude d'un analogue d'une marche branchante sur l'arbre binaire complet. Ce dernier point n'est pas anecdotique et est essentiel pour montrer la convergence d'autres modèles discrets vers l'objet L_∞, voir [**P2**].

Un fragment de L_n est par définition une composante connexe de $\overline{\mathbb{D}}\backslash L_n$ et sa masse est donnée par la mesure de Lebesgue normalisée de sa frontière en commun avec $\mathbb{S}_1$.

Ainsi, le processus $(L_n)_{n\geqslant 1}$ induit un processus de fragmentation où la particule initiale de masse 1 est divisée en plus petites particules par les cordes de L_n. Ce processus de fragmentation est conservatif car la somme des masses des fragments à un temps donné est égal à 1 (il n'y a pas de perte de masse). Cependant, il existe un autre processus de fragmentation caché dans la construction. En effet si U est un point uniforme sur $\mathbb{S}_1$ et indépendant de $(L_n)_{n\geqslant 0}$, nous avons montré que les masses des fragments qui intersectent la corde $[1U]$ forme un processus de fragmentation dissipatif (avec perte de masse) dont la mesure de dislocation ν_D est donnée par

$$\int_{[0,1]^2} \nu_D(ds_1, ds_2)\, F(s_1, s_2) = 2\int_0^1 du\, u^2 F(u,0) + 4\int_{1/2}^1 du\, u(1-u)F(u,1-u).$$

pour toute fonction borélienne F. On calcul aisément son exposant malthusien β^* définit par $\int \nu_D(ds_1, ds_2)(s_1^{\beta^*}+s_2^{\beta^*}) = 1$ et l'on trouve $\beta^* = \frac{\sqrt{17}-3}{2}$. Si $H_n(1,U)$ est le nombre de particules au temps n dans le processus précédent, on peut alors appliquer les résultats de Bertoin & Gnedin [24] pour obtenir l'existence d'une variable $\mathscr{M}_\infty(U)$ telle que

$$n^{-\beta^*/2} H_n(1,U) \xrightarrow[n\to\infty]{(\mathbb{P})} \mathscr{M}_\infty(U).$$

On obtient ensuite une version similaire de la convergence précédente quand U est remplacé par un $x \in \mathbb{S}_1$ fixé à l'aide d'un argument d'absolue continuité assez délicat. À l'aide d'estimées fines nous avons ensuite prouvé que la fonction $\mathscr{M}_\infty(.)$ est presque sûrement $(\beta-\varepsilon)$-Höldérienne pour tout $\varepsilon > 0$. Ce résultat est à la base de la première partie du théorème précédent.

Remarque : *Une approche différente aux résultats ci-dessus a été plus tard développée par Nicolas Broutin et Henning Sulzbach [29] en utilisant des idées reliées à la "méthode de contraction". L'utilisation de la théorie des fragmentations nous a également permis d'étudier le modèle du quadtree dans **[P3]** avec Adrien Joseph et dans **[P9]**. Nous ne développerons pas ce sujet dans ce manuscrit et le lecteur intéressé est prié de consulter **[P3]** et **[P9]**.*

L_∞ est une triangulation : un nouvel arbre critique **[P6]**

Les fragments de L_n ont une structure généalogique aisément descriptible. Le premier fragment est $\overline{\mathbb{D}}$ que l'on note $\varnothing$. Puis la première corde $[U_1V_1]$ découpe $\overline{\mathbb{D}}$ en deux fragments, qui sont vus comme les descendants de $\varnothing$. On les ordonne aléatoirement : avec probabilité $1/2$ le premier enfant de $\varnothing$, noté 1, est le plus grand fragment, et le second enfant, noté 0, est l'autre fragment. Avec probabilité $1/2$ c'est le contraire. On itère cette procédure et tous les fragments apparaissant dans le processus $(L_n)_{n\geqslant 1}$ sont étiquetés par un élément de l'arbre binaire complet

$$\mathbb{T}_2 = \bigcup_{n\geqslant 0} \{0,1\}^n \quad \text{où} \quad \{0,1\}^0 = \varnothing.$$

Si $\mathfrak{F}$ est un fragment, on appelle *bout* de $\mathfrak{F}$ toute composante connexe de $\mathfrak{F} \cap \mathbb{S}_1$. Par convention, $\overline{\mathbb{D}}$ est vu comme un fragment avec 0 bout. Ainsi, on peut associer à chaque élément $u \in \mathbb{T}_2$ un nombre $\ell_0(u) \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, qui correspond au nombre de bouts du fragment associé. On peut vérifier que l'étiquetage aléatoire ainsi obtenu sur $\mathbb{T}_2$ est décrit par le mécanisme de branchement suivant. Pour tout $u \in \mathbb{T}_2$ d'étiquette $m \geqslant 0$, on choisit uniformément $m_1 \in \{0, 1, \ldots, m\}$ et l'on étiquette ses deux enfants avec les valeurs $1 + m_1$ et $1 + m - m_1$.

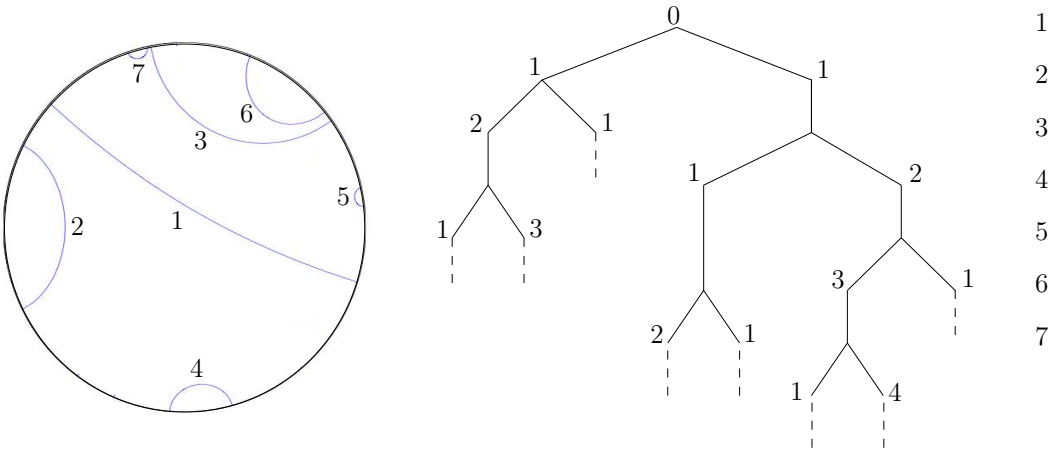


Figure 1.12 – Les 7 premières cordes gardés dans le processus $(L_n)_{n \geqslant 1}$ et l'étiquetage de l'arbre binaire complet associé.

On considère maintenant un étiquetage de $\mathbb{T}_2$ obtenu avec le mécanisme de branchement décrit ci-dessus mais en commençant avec la valeur 4 à l'origine $\varnothing$. On note $\mathbf{T}$ le sous arbre de $\mathbb{T}_2$ dont les sommets u sont reliés à l'origine par un chemin composé de sommets d'étiquette plus grande ou égale à 4. Cet arbre est donc un arbre aléatoire plan. Le fait que L_∞ soit une triangulation du disque est un corollaire [Lemma 5.5, **P2**] de

$$\#\mathbf{T} < \infty, \qquad p.s.$$

Avec Yuval Peres, nous avons poussé plus loin l'étude de $\mathbf{T}$ dans la note **[P6]** et obtenu une version quantitative du Lemme 5.5 de **[P2]** réminiscente des célèbres estimées de Kolmogorov sur les processus de Galton–Watson critiques de variance finie [65].

Théorème 7 (**[P6]**). *Soit G_n le nombre d'individus au niveau $n \geqslant 1$ dans $\mathbf{T}$. Il existe $c_1, c_2 > 0$ avec*

$$\mathbb{E}[G_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{e^2 - 1} \qquad et \qquad \frac{c_1}{n} \leqslant \mathbb{P}(G_n > 0) \leqslant \frac{c_2}{n}.$$

1.3.3 La triangulation hyperbolique markovienne **[P7]**

Nous terminons ce chapitre consacré aux dissections et aux laminations par la présentation de la triangulation hyperbolique markovienne. Contrairement aux autres laminations aléatoires décrites précédemment cet objet n'a pas (encore) de contrepartie discrète.

Dans cette section il est important de travailler avec la métrique hyperbolique dans le disque $\mathbb{D}$. La définition d'une lamination ou d'une triangulation continue est aisément adaptable en remplaçant les cordes euclidiennes par des lignes hyperboliques[3] et les triangles euclidiens par des triangles hyperboliques. Nous noterons les objets avec un symbole "h-" pour faire la distinction avec les modèles euclidiens.

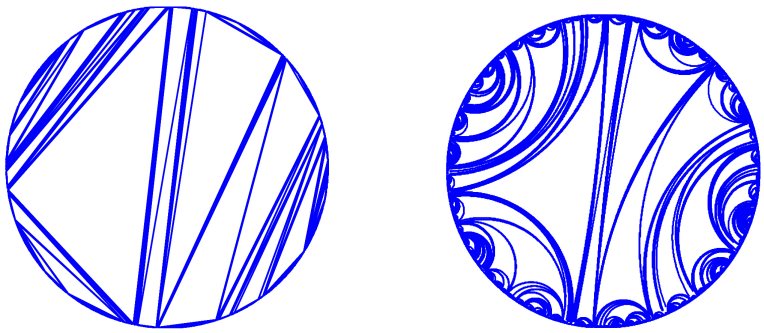


Figure 1.13 – Une triangulation (euclidienne) du disque et sa version hyperbolique. (Le lecteur averti aura reconnu la triangulation brownienne)

L'avantage de travailler avec des h-triangulations du disque (à part pour des raisons esthétiques évidentes) et qu'en géométrie hyperbolique tous les triangles dont les sommets sont situés sur $\mathbb{S}_1$ (aussi appelés triangles idéaux) sont isométriques. Plus précisément, le groupe Mob des isométries hyperboliques du disque $\mathbb{D}$ composé des transformations de Möbius

$$\phi_{z_0,\theta} : z \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_0)}{\overline{z_0} z - 1}, \quad \text{avec } z_0 \in \mathbb{D} \text{ et } \theta \in [0, 2\pi),$$

agit (librement et) transitivement sur les triangles idéaux. Ainsi, une h-triangulation peut être vue comme un pavage du plan hyperbolique dont les motifs sont tous identiques (en géométrie euclidienne de tels pavages sont très rigides).

Dans la suite nous nous intéresserons aux h-triangulations $\mathcal{H}$ aléatoires dont la loi est invariante sous l'action des isométries hyperboliques, c'est-à-dire $\phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ en loi pour tout $\phi \in$ Mob. De telles h-triangulations existent et il est facile d'en construire. Cependant, nous avons montré avec Wendelin Werner dans **[P7]** qu'il n'existe essentiellement qu'*une* h-triangulation qui satisfait une propriété de Markov naturelle :

3. ce sont des arcs de cercles perpendiculaires à $\mathbb{S}_1$

Propriété de Markov spatiale : Conditionnellement à un triangle $T = (abc)$ de la h-triangulation $\mathcal{H}$, la triangulation restreinte aux trois composantes du complémentaire de T dans $\mathbb{D}$ sont indépendantes et de plus la partie de l'autre côté de l'arc (bc) est indépendante de la position de a.

Théorème 8 ([**P7**])**.**
Il existe une unique (loi de) h-triangulation aléatoire $\mathcal{H}$ telle que

- *l'union des triangles de $\mathcal{H}$ soit de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{D}$,*
- *$\phi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ en loi pour tout $\phi \in \mathsf{Mob}$,*
- *$\mathcal{H}$ possède la propriété de Markov décrite ci-dessus.*

La h-triangulation $\mathcal{H}$ est construite par un procédé d'exploration. Donnons-nous un point de démarrage x à l'intérieur de $\mathbb{D}$ un point cible y sur $\mathbb{S}_1$ et explorons un à un tous les triangles intersectant la ligne hyperbolique (x, y). Ces triangles forment un "accordéon". De manière informelle, conditionnellement à une corde de l'accordéon, ce qui se passe de l'autre côté (celui qui reste à découvrir) est indépendant de ce qui a été découvert. Les triangles de l'accordéon (proprement normalisés) devraient donc en un certain sens former une suite i.i.d.

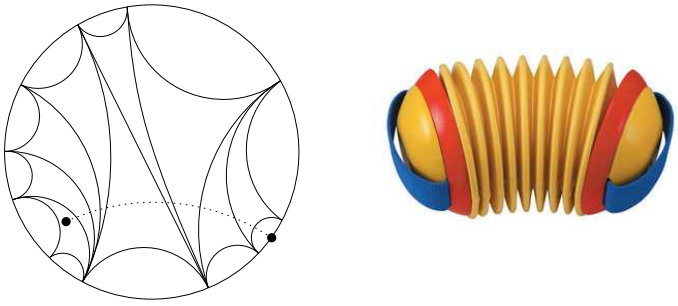


Figure 1.14 – Deux accordéons.

Hélas, deux triangles dans $\mathcal{H}$ ne sont jamais adjacents et l'accordéon ne peut pas être exploré triangle après triangle [4]. Néanmoins, en utilisant des processus de Poisson on peut rendre cette idée rigoureuse et construire $\mathcal{H}$ à l'aide d'une famille de subordinateurs. Nous prouvons aussi que cette triangulation est la plus "fine" de toutes les triangulations considérées dans ce chapitre car presque sûrement

$$\dim(\mathcal{H}) \quad = \quad 1.$$

4. Cela provient du fait qu'aucune mesure de masse *finie* non nulle sur les triangles idéaux n'est invariante sous l'action de Mob. Cependant il existe essentiellement une unique mesure infinie qui satisfait cette propriété.

1.4 Les looptrees

Dans ce chapitre nous continuons l'étude des dissections des polygones réguliers mais du point de vue métrique : au lieu de considérer une dissection D comme un sous-ensemble fermé du disque $\overline{\mathbb{D}}$ nous la verrons comme un espace métrique une fois munie de la distance de graphe. Le titre du chapitre est emprunté aux objets limites qui apparaissent lorsque les dissections ont des grandes faces (Section 1.4.2).

Introduisons tout d'abord les mesures de probabilités que nous utiliserons dans la suite. Soit $n \geqslant 3$. Rappelons que les faces d'une dissection D de $\mathcal{P}_n$ sont les composantes connexes du complémentaire de la dissection dans le polygone. Nous allons considérer des mesures de Boltzmann [66] sur l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des dissections de $\mathcal{P}_n$. Soit $\mu = (\mu_j)_{j\geqslant 0}$ une mesure de probabilité sur $\{0, 2, 3, 4, \ldots\}$ de moyenne 1 (critique), nous définissons une alors une mesure de probabilité $\mathbb{P}_n^\mu$ sur $\mathcal{D}_n$ en posant

$$\mathbb{P}_n^\mu(\mathsf{D}) = \frac{1}{Z_n} \prod_{f \text{ face de } \mathsf{D}} \mu_{\deg(f)-1}, \qquad \forall \mathsf{D} \in \mathcal{D}_n$$

où $\deg(f)$ est le degré de la face f dans D (c'est-à-dire le nombre de côtés sur le bord de f) et où Z_n est une constante normalisatrice. Sous de légères hypothèses sur μ, cette définition est valide pour tout $n \geqslant 0$ assez grand. On notera dans la suite D_n^μ pour une dissection aléatoire de $\mathcal{P}_n$ distribuée selon $\mathbb{P}_n^\mu$.

La remarque principale (et l'outil fondamental des deux sections suivantes) qui justifie l'introduction de ces mesures est que l'arbre dual $\phi(\mathsf{D}_n^\mu)$ est distribué comme un μ-arbre de Galton–Watson conditionné à avoir $n-1$ feuilles, voir [66].

1.4.1 Cas brownien **[P21]**

Avec Bénédicte Haas et Igor Kortchemski nous avons étudié la limite d'échelle de D_n^μ quand μ a des moments exponentiels. Sans grande surprise, cette limite est l'arbre continu brownien d'Aldous mais remis à l'échelle par une constante dont la dépendance en μ est loin d'être triviale.

Théorème 9 ([**P21**])**.** *On se place sous les hypothèses précédentes et l'on suppose de plus que* $\sum_{i\geqslant 0} e^{\lambda i}\mu_i < \infty$ *pour un* $\lambda > 0$*. On pose* $\mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \cdots = \mu_{2\mathbb{Z}_+}$ *et on note* $\sigma^2 \in (0, \infty)$ *pour la variance de* μ*. Finalement on introduit* $c(\mu) = c_{\text{tree}}(\mu) \cdot c_{\text{geo}}(\mu)$*, où*

$$c_{\text{tree}}(\mu) := \frac{2}{\sigma\sqrt{\mu_0}}, \qquad c_{\text{geo}}(\mu) := \frac{1}{4}\left(\sigma^2 + \frac{\mu_0\mu_{2\mathbb{Z}_+}}{2\mu_{2\mathbb{Z}_+} - \mu_0}\right).$$

Alors on a la convergence suivante en distribution au sens de Gromov–Hausdorff

$$n^{-1/2} \cdot \mathsf{D}_n^\mu \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad c(\mu) \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{e}}.$$

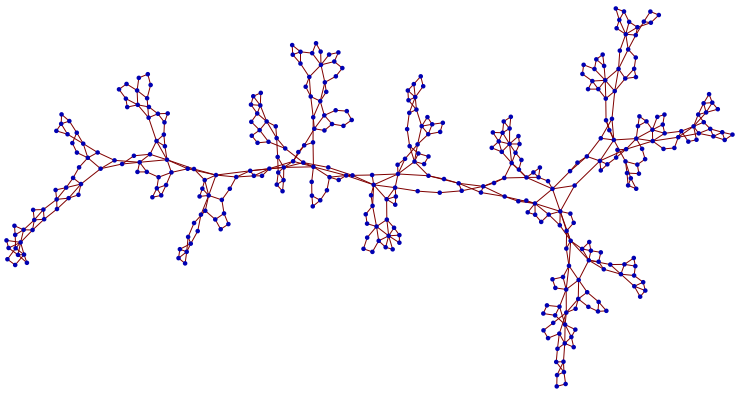


Figure 1.15 – Une dissection uniforme de $\mathcal{P}_{387}$ plongée non isométriquement dans le plan. La structure d'arbre apparaît clairement.

Les applications de ce théorème sont nombreuses : dissections uniformes, triangulations, p-angulations etc... et permettent d'unifier et d'étendre les résultats de [51] obtenus à l'aide de méthodes combinatoires.

Nous avons volontairement divisé la constante $c(\mu)$ apparaissant dans le théorème en deux parties qui reflètent les deux grandes étapes de la preuve.

Premièrement, d'après la remarque faite au début de ce chapitre, l'arbre dual $\phi(\mathsf{D}_n^\mu)$ associé à D_n^μ est un μ-arbre de Galton–Watson conditionné à avoir $n-1$ feuilles. Ce type de conditionnement a été étudié dans [67, 94] et l'analogue du Théorème B dans ce cas devient

$$n^{-1/2} \cdot \phi(\mathsf{D}_n^\mu) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad c_{\mathrm{tree}}(\mu) \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{e}}.$$

Dans la deuxième partie de la preuve nous montrons que les espaces métriques D_n^μ et $\phi(\mathsf{D}_n^\mu)$ sont à peu près proportionnels dans l'échelle $\sqrt{n}$, la constante de proportionnalité étant exactement $c_{\mathrm{geo}}(\mu)$. Pour cela, nous montrons que la longueur d'une géodésique dans D_n^μ démarrant de la racine et visant un point cible peut être décrite par un procédé d'exploration algorithmique indexé par la longueur de la géodésique dans l'arbre associé. Pour obtenir des informations sur ce procédé d'exploration, nous étudions d'abord le cas où l'arbre sous jacent est le μ-arbre de Galton–Watson conditionné à survire et où le point cible est à l'infini. Dans ce cas la longueur de la géodésique dans la "dissection" associée est une chaîne de Markov additive dont la moyenne de l'incrément (par rapport à sa distribution stationnaire) est $c_{\mathrm{geo}}(\mu)$. Nous transférons ensuite ces estimées au cas du Galton–Watson conditionné en utilisant des arguments de grandes déviations.

Les résultats de **[P21]** sont utilisés dans **[P22]** pour l'étude des clusters de percolation sous-critique sur des grandes triangulations aléatoires.

1.4.2 Cas stable (looptrees) **[P19]**

Dans cette section nous supposons toujours que μ est une loi sur $\{0, 2, 3, \ldots\}$ critique telle que le pgcd du support de μ est 1. Pour forcer l'apparition de grandes faces dans D_n^μ nous supposerons que μ n'a pas de variance et que

$$\mu([k, \infty)) \sim c \cdot k^{-\alpha}, \quad \text{quand } k \to \infty,$$

pour un $c > 0$ avec $\alpha \in (1, 2)$. Kortchemski [66] a déjà étudié les propriétés asymptotiques de D_n^μ vu comme un sous-ensemble fermé de $\overline{\mathbb{D}}$ et a introduit sa limite en loi au sens de Hausdorff : la lamination stable d'indice α. Si l'on considère maintenant D_n^μ comme un espace métrique une toute autre limite apparaît.

Théorème 10 ([**P19**]). *Sous les hypothèses précédentes, on a la convergence en loi au sens de Gromov–Hausdorff*

$$n^{-1/\alpha} \cdot \mathsf{D}_n^\mu \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(c\mu_0|\Gamma(1-\alpha)|\right)^{-1/\alpha} \cdot \mathscr{L}_\alpha,$$

où $\mathscr{L}_\alpha$ est un espace métrique compact aléatoire appelé le looptree (arbre à boucles) stable de paramètre $\alpha \in (1, 2)$.

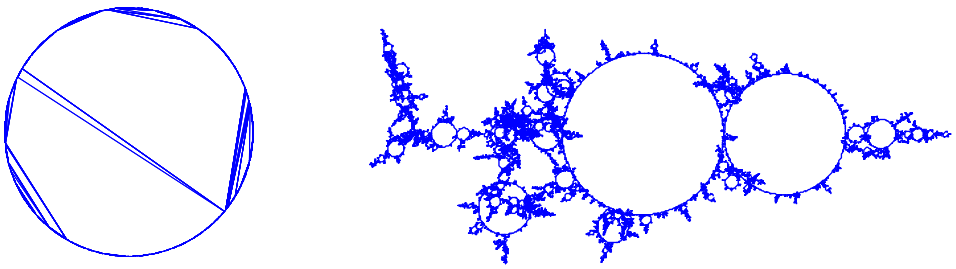


Figure 1.16 – Une grande dissection avec de larges faces et sa représentation métrique (non isométrique).

Le looptree $\mathscr{L}_\alpha$ peut, en un certain sens, être considéré comme le dual de l'arbre stable $\mathcal{T}_\alpha$ où les points de branchement de $\mathcal{T}_\alpha$ sont transformés en cycles collés les uns-aux-autres le long de la structure d'arbre. Plus formellement, $\mathscr{L}_\alpha$ est défini à partir de l'excursion normalisée du processus α-stable sans sauts négatifs, voir [**P19**] pour les détails. Le théorème précédent découle alors d'un principe d'invariance établi dans [**P19**]. Ces nouveaux espaces métriques aléatoires ont une structure fascinante que nous avons commencé à étudier. En particulier, il est possible de calculer leurs dimensions de Hausdorff et de montrer [**P19**] que presque sûrement

$$\dim(\mathscr{L}_\alpha) = \alpha \qquad \forall \alpha \in (1, 2).$$

Nous prouvons aussi que la famille des looptrees interpolent entre le cercle de longueur 1 noté $\mathcal{C}_1 = (2\pi)^{-1} \cdot \mathbb{S}_1$ et l'arbre brownien d'Aldous au sens où l'on a les convergences suivantes en loi au sens de Gromov–Hausdorff

$$(i) \quad \mathscr{L}_\alpha \quad \xrightarrow[\alpha\downarrow 1]{(d)} \quad \mathcal{C}_1, \qquad\qquad (ii) \quad \mathscr{L}_\alpha \quad \xrightarrow[\alpha\uparrow 2]{(d)} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{e}}.$$

La preuve de (i) est fondée sur un nouveau principe de "big-jump" pour l'excursion normalisée X^e_α du processus de Lévy α-stable standard sans sauts négatifs. Heuristiquement, nous montrons que X^e_α converge quand $\alpha \to 1$ vers la fonction $(1-x)\mathbf{1}_{0<x<1}$ (avec un saut de taille 1 en 0). Ce phénomène permet de comprendre en retour la structure des arbres stables quand $\alpha \to 1$. Nous ne détaillerons pas la preuve de (ii) ici et le lecteur est prié de consulter **[P19]** pour plus de détails.

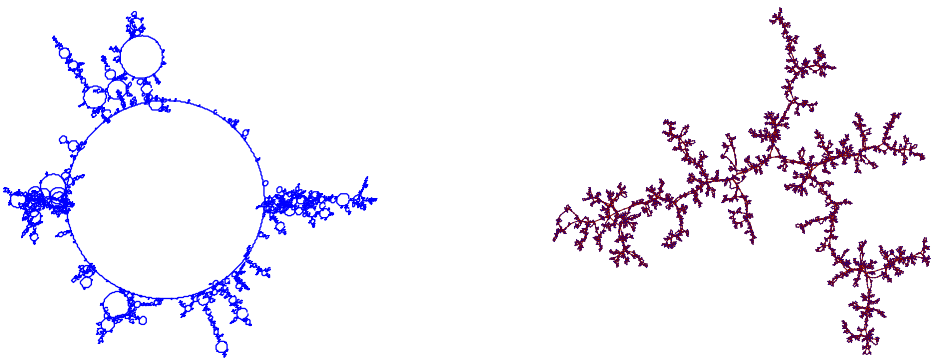


Figure 1.17 – Simulations de $\mathscr{L}_{1.01}$ (à gauche) et de $\mathscr{L}_{1.9}$ (à droite).

De manière peut-être surprenante, les looptrees apparaissent dans l'étude des cartes planaires aléatoires : en effet, le looptree de paramètre 3/2 décrit la limite d'échelle des frontières des amas de percolation critique sur les grandes triangulations aléatoires, voir Section 2.3.1. Un phénomène similaire devrait apparaître pour tous les looptrees $\mathscr{L}_\alpha$ pour $\alpha \in (1,2)$, voir **[P22]**.

Ceci constitue donc une agréable transition entre l'étude des arbres aléatoires et l'étude des cartes aléatoires !

Tournez la page S.V.P.

Partie II : Cartomancie

La seconde partie de ce manuscrit rassemble nos contributions à l'étude des cartes planaires aléatoires. Dans un chapitre introductif nous rappelons les définitions et les outils essentiels (en particulier la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer) nécessaires à l'étude des cartes planaires aléatoires. Nous travaillerons tantôt avec des triangulations tantôt avec des quadrangulations en choisissant à chaque fois le modèle le plus adapté à nos besoins, mais les résultats sont censés être "universels".

2.1 Introduction

2.1.1 Cartes planaires et bijection CVS

Le lecteur n'en aura sans doute pas besoin, mais rappelons tout de même la définition d'une carte planaire. Il existe de nombreuses définitions équivalentes mais présentons la plus "géométrique" :

Définition 1. *Une* carte planaire *est un plongement propre d'un graphe*[1] *(planaire) fini et connexe dans la sphère* $\mathbb{S}_2$ *, considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près.*

L'adjectif planaire réfère à la sphère $\mathbb{S}_2$ munie de son orientation. Il existe aussi une notion de carte de genre $g \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ qui sont des plongements propres de graphes dans le tore à g trous, vus à homéomorphisme préservant l'orientation près. Cependant nous nous concentrerons sur le cas planaire $g = 0$.
Si m est une carte planaire, nous noterons respectivement $\mathrm{V}(m)$, $\mathrm{E}(m)$ et $\mathrm{F}(m)$ l'ensemble de ses sommets, arêtes et faces. La célèbre formule d'Euler donne une relation très simple entre les cardinaux de ces ensembles dans le cas planaire :

$$\#\,\mathrm{V}(m) + \#\,\mathrm{F}(m) - \#\,\mathrm{E}(m) \quad = \quad 2. \tag{2.1}$$

Le degré $\deg(v)$ d'un sommet $v \in \mathrm{V}(m)$ est le nombre de demi-arêtes adjacentes à celui-ci et le degré $\deg(f)$ d'une face $f \in \mathrm{F}(m)$ est le nombre d'arêtes la bordant, avec la convention qu'une arête complètement incluse dans une face compte double. On notera également $\mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^m(u, v)$ la distance de graphe entre deux sommets $u, v \in \mathrm{V}(m)$, c'est-à-dire le nombre minimal d'arêtes d'un chemin reliant les deux points en question.

1. par graphe nous entendons ici multi-graphe c'est-à-dire que les arêtes multiples ou les boucles sont autorisées

À la vue de la Définition 1, il n'est pas évident, *a priori*, que le nombre de cartes planaires à n arêtes est fini. Pour s'en convaincre, il faut se persuader qu'une carte planaire peut-être caractérisée par sa structure de graphe, et par une orientation cohérente des arêtes autour de chaque sommet : c'est la définition par système de rotations (voir par exemple [70]). Une carte planaire contient donc plus d'informations que la structure de graphe planaire sous-jacente, et il est aisé de construire plusieurs cartes planaires différentes ayant la même structure de graphe. Cette structure supplémentaire va nous faciliter la vie :

> *« Paradoxalement en effet, les cartes, a priori plus complexes que les graphes, sont plus simples à bien des égards lorsqu'on s'intéresse à la planarité. Ce paradoxe n'en est d'ailleurs pas vraiment un, puisque les cartes planaires contiennent la description de leur planarité, par opposition aux graphes planaires, pour lesquels le plongement se contente d'exister. »* Gilles Schaeffer, [96, Introduction]

Nous considérerons dans la suite uniquement des cartes *enracinées*, c'est-à-dire munies d'une arête orientée distinguée, appelée la « racine » de la carte. Une carte enracinée n'a alors aucune symétrie non triviale.

Nos travaux se sont focalisés sur l'étude de deux classes particulières de cartes planaires : les *triangulations* dont les faces sont toutes de degré trois et les *quadrangulations* dont toutes les faces sont de degré quatre. Bien que les triangulations semblent *a priori* plus naturelles, les quadrangulations sont parfois beaucoup plus simples à manipuler. Par exemple, l'ensemble des cartes planaires à n arêtes est en bijection avec l'ensemble des quadrangulations à n faces : dans chaque face d'une carte générale, placez un point que vous reliez aux sommets adjacents de la carte. La carte ainsi construite est une quadrangulation, et ses faces correspondent aux arêtes de la carte originale.

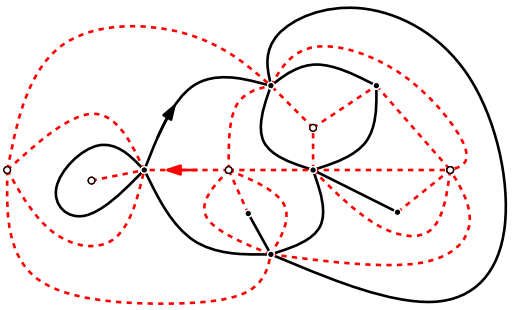


Figure 2.1 – Une carte générale et la quadrangulation associée.

Décompter les cartes. L'énumération des cartes a pour la première fois été abordée par Tutte dans les années 1960 (dans le but de prouver le théorème des quatre couleurs). Depuis la technique originale de Tutte fondée sur les fonctions génératrices, aux intégrales de matrices en passant par les techniques bijectives, il existe de nos jours

beaucoup de façons d'énumérer les cartes. En particulier si $\mathcal{Q}_n$ est l'ensemble des quadrangulations à n faces et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des cartes à n arêtes alors on a alors la jolie formule

$$\#\mathcal{Q}_n = \#\mathcal{M}_n = 3^n \frac{2}{n+2}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{2.2}$$

En plus de leur intérêt purement combinatoire et esthétique, les cartes planaires ont été considérées par certains physiciens théoriciens comme un modèle de géométrie aléatoire [7]. Leur motivation était d'étendre à la dimension deux les intégrales de chemins de Feynman, et ce, afin de développer la gravité quantique bidimensionelle. Ceci constitue la principale motivation pour l'étude de la géométrie des grandes cartes planaires aléatoires. Nous n'entrerons pas plus dans les détails et renvoyons à la Section 2.5.2 pour plus de détails sur les connexions supposées entre les cartes planaires et la gravité quantique en dimension 2.

Dans tout ce qui suit Q_n est une quadrangulation enracinée choisie uniformément parmi les quadrangulations enracinées à n faces et T_n est similairement une triangulation uniforme à n faces.

Bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer

L'outil principal pour l'étude des grandes cartes planaires aléatoires est la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer (CVS), [34, 96]. La forme la plus simple de cette bijection établit une correspondance entre, d'un côté, les quadrangulations enracinées et *pointées*, c'est-à-dire munies d'un sommet distingué ∂, et d'autre part, les arbres plans étiquetés. Un étiquetage d'un arbre τ est une fonction $\ell : \tau \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- l'étiquette de la racine est nulle, $\ell(\varnothing) = 0$,
- si u et v sont deux sommets voisins alors $|\ell(u) - \ell(v)| \leqslant 1$.

Remarquons qu'une fois l'arbre τ fixé, se donner un étiquetage de τ revient à se donner des étiquettes appartenant à $\{+1, 0, -1\}$ portées par les arêtes de τ qui représentent les variations des étiquettes le long de chaque arête. Il y a donc $3^n \operatorname{Cat}(n)$ arbres étiquetés différents avec n arêtes.

Théorème ([33, Theorem 4])**.** *Il y a une bijection entre les quadrangulations enracinées et pointées à n faces, et les couples formés d'un arbre étiqueté à n arêtes et d'un signe $+$ ou $-$. Si $\mathbf{q}$ est une quadrangulation enracinée et pointée associée à un couple $((\tau, (\ell_u)_{u\in\tau}), \pm)$, alors l'ensemble des sommets de la quadrangulation $\mathbf{q}$ est formé par l'ensemble des sommets de l'arbre τ et un sommet supplémentaire ∂ qui est le sommet distingué de la carte. De plus, pour tout sommet $u \in \tau$ on a*

$$\ell(u) - \min \ell + 1 \quad = \quad \mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^{\mathbf{q}}(u, \partial), \tag{2.3}$$

où $\mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^{\mathbf{q}}(.,.)$ est la distance de graphe sur la quadrangulation $\mathbf{q}$.

Remarque : *La formule d'Euler* (2.1) *implique que toute quadrangulation à n faces a exactement $n+2$ sommets. Ainsi le nombre de quadrangulations enracinées et pointées à n faces est $n+2$ fois le nombre de quadrangulations enracinées à n faces. Puisqu'il y a $3^n \operatorname{Cat}(n)$ arbres étiquetés à n arêtes, on en déduit* (2.2).

Nous décrivons le fonctionnement de la bijection uniquement dans le sens partant des arbres étiquetés vers les quadrangulations, sens le plus utile pour nos applications. Nous renvoyons à [33, 96] pour les preuves. Soit $(\tau, (\ell_u)_{u\in\tau})$ un arbre étiqueté. Rappelons que τ est un arbre planaire, c'est-à-dire qu'il est muni d'une racine et d'une orientation. On considère un plongement de τ dans le plan qui respecte l'orientation de τ. Un *coin* de ce plongement est un secteur angulaire formé par deux arêtes adjacentes. On peut alors vérifier que ce plongement a $2n$ coins si τ a n arêtes. On définit le *contour* du plongement de τ dans le sens des aiguilles d'une montre : on imagine que notre plongement est un mur et on le parcourt en plaquant sa main droite sur le mur et en avançant. Ce contour munit l'ensemble des coins d'une structure cyclique. La règle pour construire la quadrangulation associée à $(\tau, (\ell_u)_{u\in\tau})$ est la suivante :

> Chaque coin associé à un sommet d'étiquette i est relié au premier coin dans la suite du contour d'étiquette $i-1$.

Cette règle ne peut pas être appliquée aux coins associés aux sommets d'étiquette minimale et ceux-ci sont alors reliés à un sommet supplémentaire, placé en dehors du plongement de τ que l'on note ∂. Il est possible de dessiner toutes ces arêtes sans croisement, et après effacement du plongement de τ, le résultat est un plongement d'une quadrangulation q à n faces. Le sommet distingué de q est ∂ et l'arête racine est l'arête émergeant du coin racine de τ, son orientation étant prescrite par le signe $+$ ou $-$ donné en plus de l'arbre étiqueté. Voir Fig. 2.2

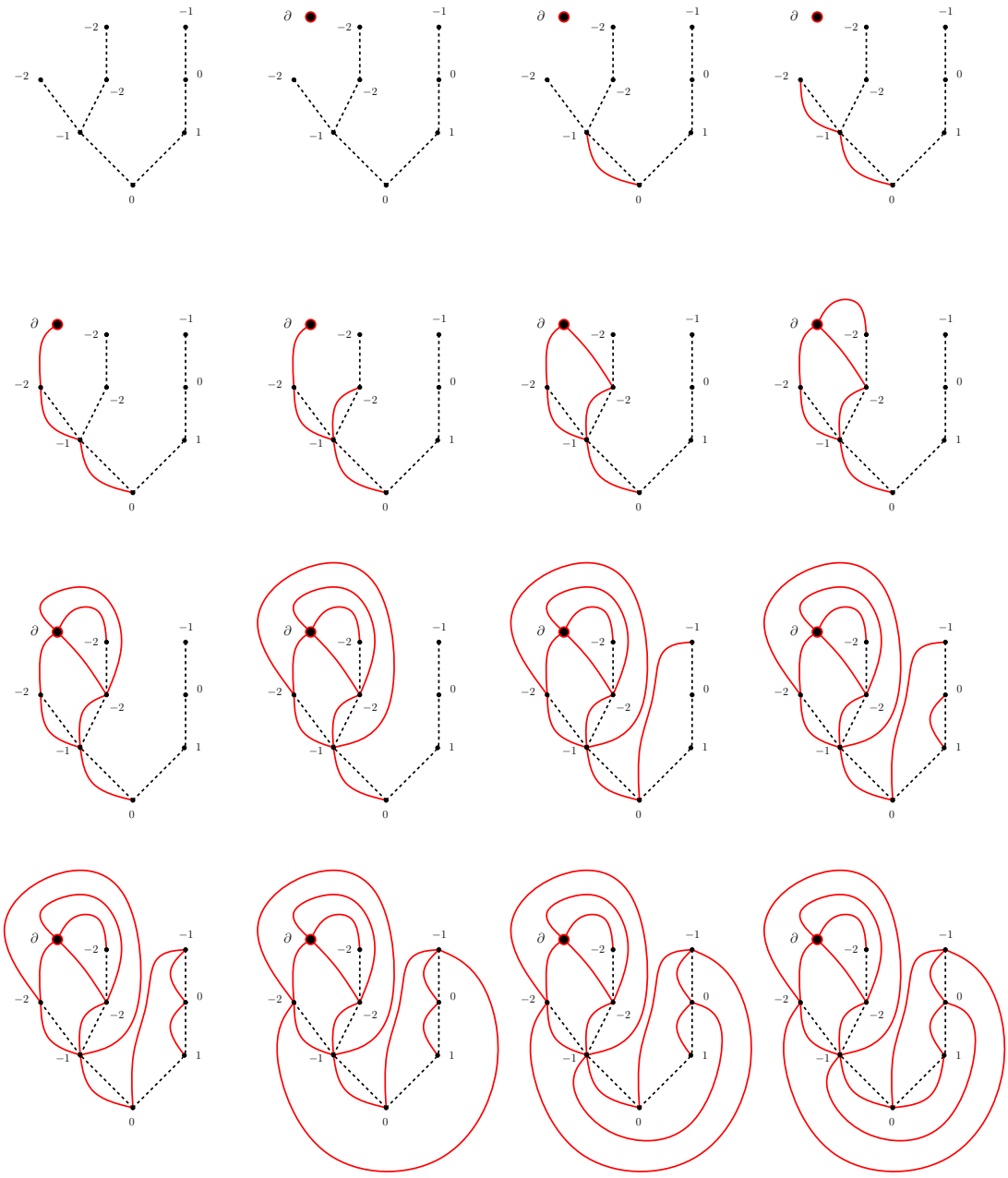


Figure 2.2 – Un arbre étiqueté et la quadrangulation associée : les 16 étapes de la construction. Notez que les étiquettes décalées par $-\min \ell + 1$ correspondent bien aux distances dans la carte depuis le sommet distingué ∂.

Variations

CVS positive. Il existe une autre version de la bijection Cori-Vauquelin-Schaeffer qui établit une correspondance entre les quadrangulations enracinées à n faces, et les arbres étiquetés à n arêtes dont toutes les étiquettes sont positives. Nous appellerons cette bijection la bijection CVS positive. Elle est déduite du cas précédent en se restreignant au cas où le point distingué de la quadrangulation coïncide avec l'origine de l'arête racine. D'après la formule (2.3) les étiquettes sont automatiquement positives et il n'y a plus besoin d'un signe pour spécifier l'orientation de l'arête racine, voir [96] pour plus de détails. L'avantage de cette construction est que les étiquettes représentent des distances à la racine de la carte, son inconvénient est que le conditionnement des étiquettes à rester positives rend sa structure probabiliste plus complexe [32, 77].

CVS pour quadrangulations à bord. Il existe également une extension des bijections précédentes au cas des quadrangulations à bord, c'est-à-dire aux cartes dont toutes les faces sont de degré 4 mis à part la face à droite de l'arête racine qui peut être de degré arbitraire. Cette extension a été introduite par Bouttier et Guitter comme une spécification de la bijection suivante. Voir Section 2.2.2 pour plus de détails.

BdFG. Bouttier, Di Francesco et Guitter ont étendu dans [28] la bijection CVS à toutes les cartes planaires sans restriction sur les degrés des faces. En particulier, il existe des bijections entre un certain type d'arbres étiquetés et les triangulations. Les arbres étiquetés mis en jeu ont dans ce cas quatre types de sommets jouant des rôles différents, mais le principe de la bijection est grosso-modo le même. Le cas des cartes biparties (où toutes les faces sont de degré pair) est beaucoup plus maniable que le cas général, voir [83].

Genre supérieure, multi-pointée ... Dans [31] Chapuy, Marcus et Schaeffer ont étendu la bijection CVS au cas des quadrangulations biparties de genre supérieur. Les objets étiquetés ne sont plus des arbres mais des cartes à une face en genre g appelés g-arbres. À noter également l'introduction par Grégory Miermont dans [88] d'une bijection « multi-pointée » entre, d'une part, les quadrangulations avec p points distingués et n faces, et d'autre part, des cartes à p faces et n arêtes.

2.1.2 Limites des grandes triangulations/quadrangulations

Uniform Infinite Planar Triangulation and Quadrangulation

Nous utilisons ici la topologie locale introduite en Section 1.1.2. En particulier si m est une carte planaire $B_r(m)$ est un graphe orienté enraciné formé par tous les sommets et arêtes de m à distance plus petite que r de l'origine de l'arête racine. Clairement $B_r(m)$ peut également être vu comme une carte planaire. Si G est un graphe infini orienté et enraciné pour lequel on peut plonger dans le plan tous les graphes $B_r(G)$ de façon cohérente pour $r \geqslant 0$ (l'orientation des graphes est celle du plan) et tel que l'union de ces plongements n'a pas de point d'accumulation pour les sommets, on dira que G est une carte infinie du plan. Rappelons que Q_n et T_n sont respectivement des quadrangulations et triangulations uniformes à n faces. On a alors le résultat suivant :

Théorème E ([11, 68])**.** *On a les convergences en loi au sens de* $\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}$

$$Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Q_\infty, \qquad \text{et} \qquad T_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} T_\infty,$$

où Q_∞ *est une quadrangulation infinie du plan aléatoire appelée UIPQ (pour Uniform Infinite Planar Quadrangulation) et* T_∞ *est similairement une triangulation infinie du plan aléatoire appelée UIPT.*

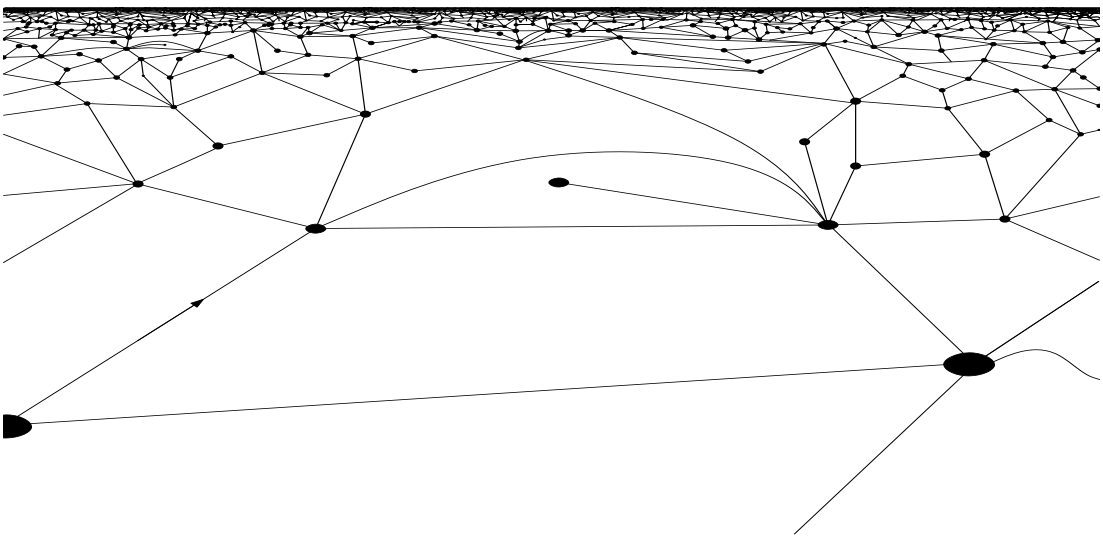


Figure 2.3 – Une représentation de l'UIPQ.

Le théorème précédent est une conséquence des formules énumératives exactes disponibles sur les triangulations et quadrangulations à bord. En effet si m_0 est une carte planaire fixe [2], en utilisant ces formules il est possible de donner une expression de

$$P(B_r(T_n) = m_0)$$

et de voir que cette dernière admet une limite explicite quand $n \to \infty$. Ce type d'argument combiné à une propriété de tension pour la métrique $\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}$ a permis à Angel & Schramm de définir l'UIPT (l'extension au cas des quadrangulations est similaire bien que Maxim Krikun [68] ait utilisé des arguments quelque peu différents).

Parallèlement, Chassaing & Durhuus [32] ont introduit une quadrangulation infinie aléatoire. Pour ce faire, ils prouvent d'abord que la distribution sur les arbres étiquetés positifs à n arêtes, associée à la probabilité uniforme sur $\mathcal{Q}_n$ par la bijection CVS positive vue en Section 2.1.1 admet une limite locale quand $n \to \infty$. Ils définissent ainsi un arbre aléatoire infini avec étiquettes positives et étendent la construction CVS positive à cet objet pour créer une quadrangulation infinie. Plus tard, Laurent Ménard [86] montre que l'objet défini par Chassaing & Durhuus est effectivement le même que l'UIPQ introduite par Krikun.

2. pour les puristes, m_0 doit être *rigide* au sens de [11]

Carte brownienne

Tout comme dans le cas des arbres, penchons-nous maintenant sur les limites d'échelles de Q_n et de T_n vus comme espaces métriques. Voici l'impressionnant résultat de Jean-François Le Gall et de Grégory Miermont :

Théorème F ([89] (*ii*), [71] (*i*) et (*ii*))**.** *On a les convergences en loi au sens de Gromov–Hausdorff*

$$(i)\quad n^{-1/4}\cdot Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \left(\frac{8}{9}\right)^{1/4}\cdot m_\infty, \qquad (ii)\quad n^{-1/4}\cdot T_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} 6^{-1/4}\cdot m_\infty,$$

où m_∞ est un espace métrique compact aléatoire appelé la carte brownienne.

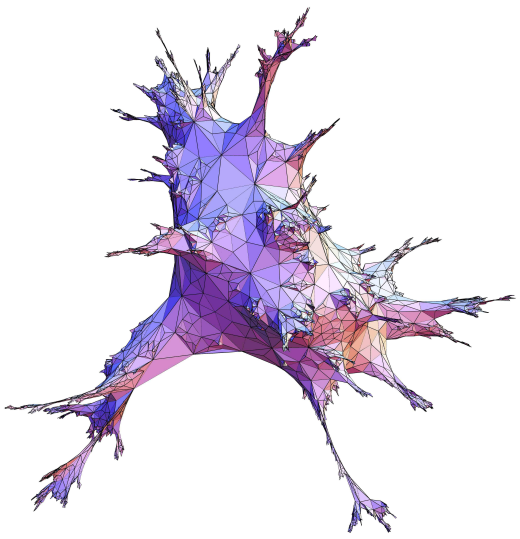


Figure 2.4 – Une grande triangulation aléatoire représentée non isométriquement dans l'espace.

La carte brownienne apparaît donc comme une limite universelle de grandes cartes planaires remises à l'échelle par le facteur $n^{1/4}$, et la convergence est même valable dans un cadre beaucoup plus général que ci-dessus, voir [71]. Il est connu que la carte brownienne m_∞ est presque sûrement homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$ [78] (voir aussi [87]) mais est de dimension de Hausdorff 4 [74].

La carte brownienne est construite dans le continu en "adaptant" la construction discrète CVS au cas de l'arbre brownien muni d'étiquettes browniennes (le serpent brownien de Le Gall), voir [84]. La preuve de la convergence des modèles discrets vers m_∞ était connue en partie depuis les travaux pionniers de Chassaing & Schaeffer [33] poursuivis plus tard par Le Gall [74, 78, 75]. Les deux preuves [71, 89] reposent sur la géométrie très particulière des géodésiques dans les grandes cartes planaires et dans la carte brownienne.

2.2 Constructions « à la Schaeffer » de l'UIPQ

2.2.1 L'UIPQ vue de l'infini **[P11]**

La base de ce travail en collaboration avec Laurent Ménard et Grégory Miermont est une construction de l'UIPQ à partir d'une extension de la bijection CVS au cas infini. Cette approche est différente de celle de Chassaing & Durhuus qui ont construit l'UIPQ en étendant la bijection CVS *positive* au cas infini [32]. Dans notre cas où les étiquettes peuvent être négatives, la description probabiliste est plus simple mais l'interprétation des étiquettes est plus ardue.

Soit $Q_n^\bullet$ une quadrangulation pointée uniforme à n faces. D'après la formule d'Euler toute quadrangulation a n faces possède exactement $n+2$ sommets et donc la quadrangulation Q_n obtenue à partir de $Q_n^\bullet$ en oubliant le sommet distingué est une quadrangulation uniforme à n faces. D'après la bijection CVS, $Q_n^\bullet$ peut être construite à partir d'un arbre étiqueté (τ_n, ℓ_n) uniforme à n arêtes (et d'un pile ou face pour l'orientation de l'arête racine). Puisque chaque arbre à n arêtes a 3^n étiquetages différents, il est facile de voir que la structure de τ_n est uniforme sur les arbres plans à n arêtes et que conditionnellement à τ_n les variations des étiquettes le long de chaque arête de l'arbre sont indépendantes et uniformes sur $\{-1, 0, +1\}$.

Il est classique (voir [73]) que l'arbre τ_n a la même loi qu'un arbre de Galton–Watson de loi de reproduction géométrique critique conditionné à avoir $n+1$ sommets. D'après le Théorème A, la limite locale de τ_n quand $n \to \infty$ est l'arbre critique géométrique conditionné à survivre que l'on note τ_∞. Conditionnellement à τ_∞ on considère un étiquetage aléatoire

$$\ell_\infty : \tau_\infty \longrightarrow \mathbb{Z},$$

obtenu en posant $\ell_\infty(\varnothing) = 0$ et tel que les différences d'étiquettes au travers de chaque arête de τ_∞ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{-1, 0, +1\}$. Il est alors clair que $(\tau_\infty, \ell_\infty)$ est la limite locale (avec étiquettes) de l'arbre étiqueté (τ_n, ℓ_n) quand $n \to \infty$.

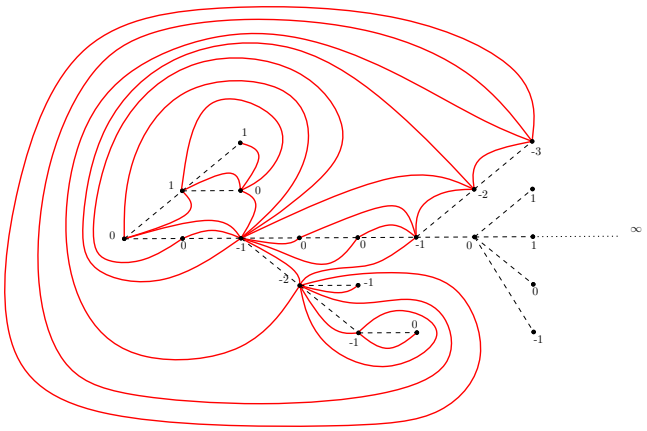


Figure 2.5 – Extension de la construction de CVS : on relie (arêtes pleines) chaque coin à son successeur dans le contour de l'arbre infini (en pointillés).

On étend ensuite la construction CVS à $(\tau_\infty, \ell_\infty)$ de manière évidente : chaque coin d'étiquette i est relié au premier coin d'étiquette $i-1$ rencontré dans la suite du contour de τ_∞ dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette construction est p.s. bien définie et fournit une quadrangulation infinie du plan aléatoire notée $\tilde{Q}_\infty$ que l'on enracine le long de l'arête émanant du coin racine orientée par une variable de Bernoulli indépendante de $(\tau_\infty, \ell_\infty)$. Notez que les sommets de $\tilde{Q}_\infty$ sont précisément ceux de τ_∞.

Théorème 11 ([**P11**]). *La quadrangulation $\tilde{Q}_\infty$ construite ci-dessus a la même loi que l'UIPQ. De plus, l'étiquetage ℓ_∞ peut être retrouvé à partir de $\tilde{Q}_\infty$ par la formule*

$$\ell_\infty(u) - \ell_\infty(v) \quad = \quad \lim_{z\to\infty} \left(\mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^{\tilde{Q}_\infty}(z,u) - \mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^{\tilde{Q}_\infty}(z,v) \right), \qquad \forall u, v \in \mathrm{V}(\tilde{Q}_\infty),$$

où $z \to \infty$ signifie que la distance entre z et la racine de $\tilde{Q}_\infty$ tend vers $+\infty$.

Ce théorème donne donc une troisième construction de la quadrangulation infinie uniforme après la construction de Krikun [68] et celle de Chassaing & Durhuus [32, 86]. Cette approche de l'UIPQ permet des calculs aisés sur la géométrie de Q_∞ et a été utilisée dans $[\mathbf{P}i]_{i\in\{13,14,16\}}$.

La première partie du théorème (à savoir que $\tilde{Q}_\infty = Q_\infty$ en loi) est une sorte de "continuité" de la construction CVS pour la topologie locale et n'est pas bien dure. La deuxième partie (l'identification des étiquettes en fonction de la carte) elle, est bien plus compliquée. Pour les experts, la fonction ℓ_∞ est alors l'unique fonction de Busemann de Q_∞ montrant ainsi que la frontière de Gromov de l'UIPQ est presque sûrement réduite à un point ! Le fait que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^{Q_\infty}(z,u) - \mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^{Q_\infty}(z,v)$$

admette une limite quand $z \to \infty$ p.s. pour tous sommets u, v de l'UIPQ a été prouvé par Krikun [69]. Cependant notre preuve est disjointe et repose sur un phénomène de coalescence des géodésiques, réminiscent du travail de Le Gall sur les géodésiques dans la carte brownienne [75]. Plus précisément, nous montrons que presque sûrement, pour tout sommet u de Q_∞, il existe un nombre infini de sommets $P_1^u, P_2^u, \ldots$ tels que toutes les géodésiques partant de u et allant à l'infini doivent passer par $P_1^u, P_2^u, \ldots$. En particulier deux telles géodésiques doivent se rencontrer infiniment souvent.

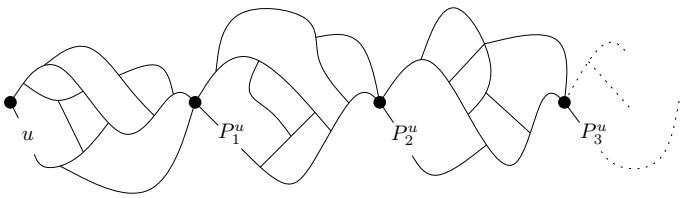


Figure 2.6 – L'ensemble des géodésiques émanant d'un point dans l'UIPQ ressemble à un chapelet de saucisses.

2.2.2 UIPQs à bord **[P13]**

Une quadrangulation à bord est une carte planaire dont toutes les faces sont de degré 4 mis à part la face à droite de l'arête racine appelée la face externe qui peut être de degré arbitraire. On dira que le bord est simple (ou par abus de langage la quadrangulation elle-même) si lors du contour de la face externe tous les sommets ne sont visités qu'une seule fois, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point de pincement dans la face externe. Voir Fig. 2.7.

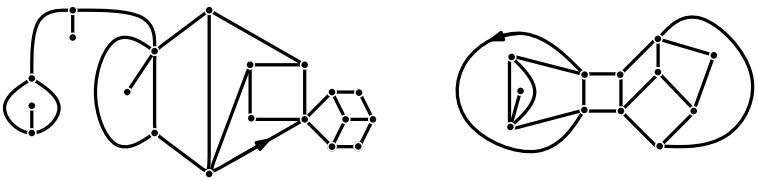


Figure 2.7 – Une quadrangulation à bord et une quadrangulation à bord simple

Le périmètre d'une quadrangulation à bord est le degré de sa face externe qui est forcément un nombre pair. On notera dans la suite $\mathcal{Q}_{n,p}$ l'ensemble des quadrangulations à bord de périmètre p ayant $n+1$ faces et $\widetilde{\mathcal{Q}}_{n,p}$ l'ensemble des quadrangulations à bord simple de périmètre p ayant $n+1$ faces. En utilisant des arguments de chirurgie, il est facile d'étendre la convergence vers l'UIPQ pour des quadrangulations à bord simple. Ainsi, si $\widetilde{Q}_{n,p}$ est uniformément distribuée sur $\widetilde{\mathcal{Q}}_{n,p}$ (avec pépère) alors les arguments de [11] s'appliquent et montrent

$$\widetilde{Q}_{n,p} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \widetilde{Q}_{\infty,p}$$

en distribution au sens de $\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}$. L'objet $\widetilde{Q}_{\infty,p}$ est une quadrangulation infinie du plan avec un bord simple de périmètre p appelée l'UIPQ du p-gon. En revanche cette approche ne permet pas de définir l'UIPQ avec bord général de périmètre p. Cependant si $Q_{n,p}$ est uniforme sur $\mathcal{Q}_{n,p}$ nous avons montré avec Grégory Miermont dans [**P13**] que l'on a

$$Q_{n,p} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad Q_{\infty,p}$$

en loi au sens de $\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}$ où $Q_{\infty,p}$ est l'UIPQ à bord de périmètre p. Cette quadrangulation infinie à bord est définie à partir d'une extension au cas infini de la construction CVS pour les quadrangulations à bord. Nous ne rentrerons pas dans les détails ce cette construction qui est très similaire à celle de [**P11**]. Nous nous sommes ensuite concentrés sur les propriétés du bord de $Q_{\infty,p}$. En effet, $Q_{\infty,p}$ est presque sûrement formée d'une unique composante simple infinie appelée le cœur et notée $\mathrm{Coeur}(Q_{\infty,p})$ sur laquelle sont greffées des quadrangulations finies à bord. Nous avons étudié le périmètre $\partial\mathrm{Coeur}(Q_{\infty,p})$ de ce cœur et montré :

Théorème 12 ([**P13**]).
Quand $p \to \infty$ le périmètre du cœur de $Q_{\infty,2p}$ est asymptotiquement équivalent à $2p/3$ et plus précisément

$$\frac{|\partial \mathrm{Coeur}(Q_{\infty,2p})| - 2p/3}{p^{2/3}} \quad \xrightarrow[p\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{Z}\,,$$

où $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire $3/2$-stable spectralement négative.

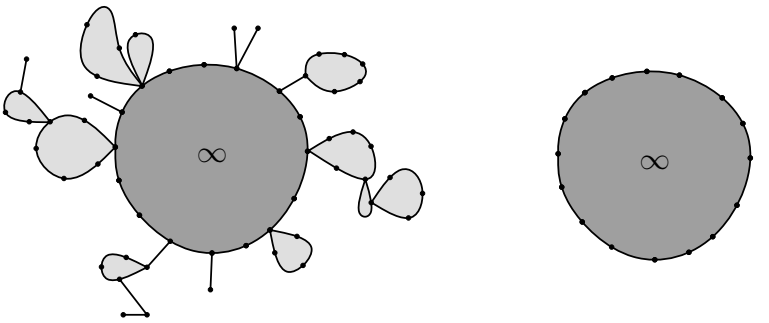


Figure 2.8 – L'UIPQ à bord et son cœur

De plus, conditionnellement à l'événement $\{\partial \mathrm{Coeur}(Q_{\infty,p}) = q\}$, le cœur de $Q_{\infty,p}$ a la même loi que l'UIPQ du q-gon. Cette propriété permet donc de transférer des propriétés de $Q_{\infty,\cdot}$ à $\widetilde{Q}_{\infty,\cdot}$ et vice-versa. Voici un exemple d'application : Si q est une quadrangulation à bord, on appelle l'ouverture de la carte la distance (de graphe) maximale entre deux points du bord de q et nous la notons $\mathrm{Ouv}(q)$. La construction de $Q_{\infty,p}$ via une variante de la construction CVS nous a permis d'estimer $\mathrm{Ouv}(Q_{\infty,p})$. Grâce aux remarques ci-dessus on peut "transférer" ce résultat sur les UIPQs à bord simple et obtenir le résultat suivant.

Théorème 13 ([**P13**]).
Il existe $c, c' > 0$ telles que pour tout $p \geqslant 1$ et tout $\lambda > 0$ on ait

$$P\left(\mathrm{Ouv}(\widetilde{Q}_{\infty,2p}) \geqslant \lambda\sqrt{p}\right) \quad \leqslant \quad c\, p^{2/3}\, \exp\big(-c'\lambda^{2/3}\big).$$

Ce résultat n'est pas anecdotique car il est d'une part au cœur de la preuve de la sous-diffusivité de la marche aléatoire simple sur l'UIPQ voir [**P14**] et montre d'autre part que la marche aléatoire auto-évitante[3] sur l'UIPQ est au plus diffusive (après n pas, la distance à l'origine est au plus $\sqrt{n}$). Nous renvoyons à [**P13**] pour plus de détails.

3. Une quadrangulation avec une marche auto-évitante de longueur p est transformée en une quadrangulation à bord simple de périmètre $2p$ en découpant le long de la marche

2.3 La percolation

Une manière d'étudier la géométrie de l'UIPQ et de l'UIPT est de comprendre le comportement de systèmes de mécanique statistique (au point critique) sur ces réseaux aléatoires. Dans ce chapitre nous rassemblons les résultats que nous avons obtenus dans le cas du plus simple de ces systèmes : la percolation.

Angel a le premier étudié la percolation par site sur l'UIPT : Conditionnellement à T_∞ on colorie indépendamment chaque sommet en blanc avec probabilité $p \in (0,1)$ ou noir avec probabilité $1-p$. La question classique de percolation est alors l'existence ou non d'un cluster infini blanc, c'est-à-dire d'un chemin infini ne passant que par des sommets blancs. En utilisant la technique du peeling (introduite par le physicien Watabiki [99] et rendu rigoureuse par Angel dans [9]), Omer Angel a prouvé que presque sûrement (en l'aléa de la carte)

$$\exists \text{ cluster blanc infini } \iff p > 1/2.$$

En d'autres termes, le paramètre critique de percolation est égal à $1/2$ et il n'y a pas percolation au point critique. La technique du peeling sera expliquée plus en détails dans la Section 2.3.2 dans le cas de l'UIPT du demi-plan.

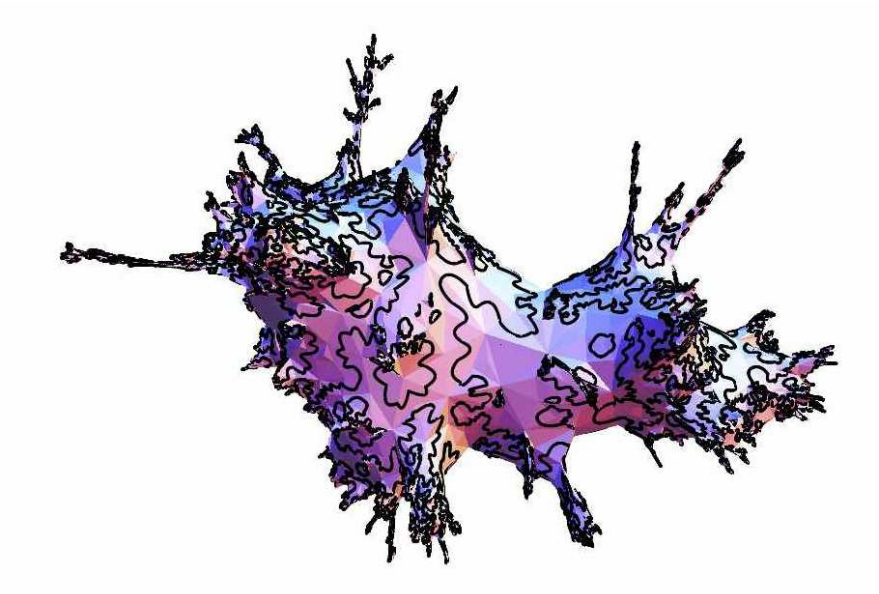


Figure 2.9 – Une grande triangulation percolée et les interfaces entre sommets blancs et noirs

2.3.1 Avec des looptrees **[P22]**

Dans ce travail récent, nous avons poursuivi l'analyse de la percolation par site sur l'UIPT et nous nous sommes intéressés avec Igor Kortchemski à la géométrie des bords des clusters de percolation.

Dans ce qui suit nous conditionnons la percolation sur l'UIPT sur l'événement $\{\circ \to \bullet\}$ où l'origine de l'arête racine est blanche et son extrémité est noire. Cela va nous permettre de définir sans ambiguité le cluster de l'origine. Plus précisément on note $\mathcal{H}_p^\circ$ le "hull" du cluster blanc de l'origine, c'est-à-dire la carte formée de tous les sommets blancs atteignables depuis l'origine à laquelle on rajoute les "trous" qui ne contiennent pas l'extrémité noire de l'arête racine. C'est donc une triangulation à bord.

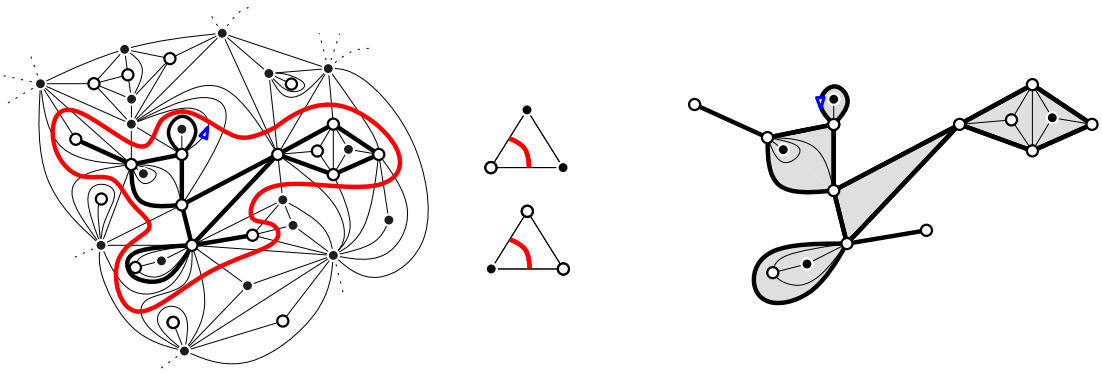


Figure 2.10 – Une partie de la percolation sur l'UIPT, l'interface passant par l'arête racine et le hull blanc de l'origine (son bord est en lignes épaisses).

Nous noterons $\partial\mathcal{H}_p^\circ$ pour le bord de ce hull, c'est-à-dire le graphe formé des arêtes et des sommets de $\mathcal{H}_p^\circ$ adjacents à la face extérieure. Le périmètre $\#\partial\mathcal{H}_p^\circ$ de ce graphe est le degré de la face externe de $\mathcal{H}_p^\circ$. Remarquez que $\partial\mathcal{H}_p^\circ$ est formé par des cycles discrets collés entre eux par des points de pincement. Dans **[P22]** nous donnons l'asymptotique de la probabilité au point critique pour que le périmètre du hull soit grand

$$P\left(\#\partial\mathcal{H}_{1/2}^\circ = n\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{2\cdot|\Gamma(-2/3)|^3}\cdot n^{-4/3},$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler. Notre principal résultat est l'étude des limites d'échelle de $\partial\mathcal{H}_p^\circ$ au sens de Gromov–Hausdorff selon les valeurs de p. On rappelle la notation $\mathcal{C}_1$ pour le cercle de longueur 1 et $\mathscr{L}_{3/2}$ pour le looptree de paramètre $3/2$ introduits en Section 1.4.2. Pour $n \geqslant 0$, on note $\partial\mathcal{H}_p^\circ(n)$ pour la variable $\partial\mathcal{H}_p^\circ$ conditionnée à l'événement $\{\#\partial\mathcal{H}_p^\circ = n\}$.

Théorème 14 ([**P22**]).
Pour des constantes $(C_p)_{p\in(0,1)}$ (explicites) nous avons les convergences suivantes en loi au sens de Gromov–Hausdorff

$$(i) \quad \text{quand } 1/2 < p < 1, \qquad n^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_p^\circ(n) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{C}_1,$$

$$(ii) \quad \text{quand } p = 1/2, \qquad n^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_p^\circ(n) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathscr{L}_{3/2},$$

$$(iii) \quad \text{quand } 0 < p < 1/2, \qquad n^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_p^\circ(n) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{T}_{\mathbf{e}}.$$

Pour établir ce résultat nous prouvons à l'aide d'une technique chirurgicale inspirée de Borot, Bouttier et Guitter [26] que la structure d'arbre naturellement associée à $\partial\mathcal{H}_p^\circ$ (voir Fig. 2.11) est celle d'un Galton–Watson bi-type (sous-critique, critique ou sur-critique dépendant de p) dont la loi de reproduction (sur deux générations) est dans le domaine d'attraction d'une loi stable de paramètre 3/2.

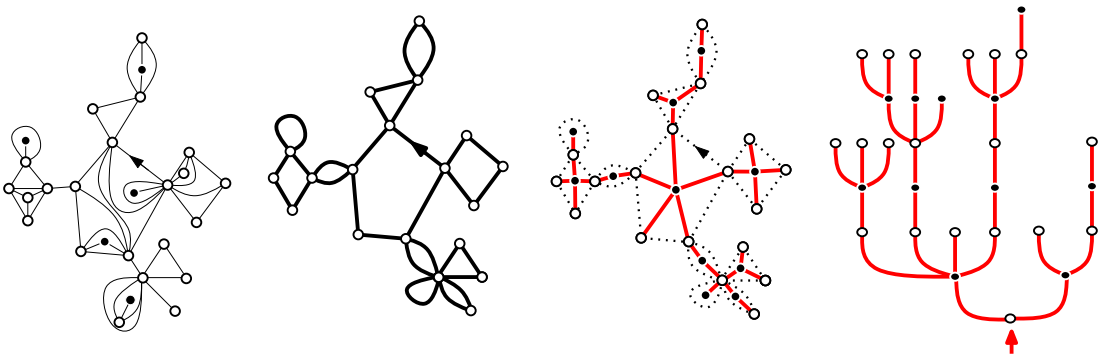


Figure 2.11 – Création d'un arbre bi-type à partir du hull de l'origine.

Donnons une justification heuristique du théorème précédent. Dans le cas sur-critique (i), dès que le hull de l'origine se met à construire des bras il est très probable qu'il devienne infini. Dès lors, la façon la plus simple pour lui d'avoir un grand périmètre tout en restant fini est d'adopter la forme qui minimise les bras : le cercle. Dans le cas sous-critique, chaque sommet blanc coûte cher, la façon la moins coûteuse pour avoir un grand périmètre est d'avoir la forme d'un arbre. Dans le cas critique ces effets sont balancés et l'on ne voit pas un arbre, ni une boucle mais un arbre à boucles !

Nos techniques nous permettent également d'avoir des expressions explicites des constantes C_p et en particulier on a les exposants presque-critiques suivants :

$$C_p \underset{p\downarrow 1/2}{\sim} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad C_p \underset{p\uparrow 1/2}{\sim} \frac{3^{3/4}}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} - p\right)^{-1/2}.$$

Pour finir, nous conjecturons dans [**P22**] que tous les looptrees $\mathscr{L}_\alpha$ pour $\alpha \in (1,2)$ peuvent être vus comme des limites d'échelle de bord de clusters critiques pour des modèles $O(N)$ sur des grandes triangulations aléatoires (modèle annealed).

2.3.2 Avec du peeling **[P18]**

Dans ce travail en commun avec Omer Angel, nous avons étudié les percolations par face ou par arête sur tout type de carte. Dans [**P18**] nous avons choisi de travailler sur les modèles de cartes du *demi-plan* où les calculs sont plus simples à mener grâce à une propriété de Markov spatiale particulièrement simple. Introduisons ces objets dans le cas triangulaire :

Peeling de l'UIPT du demi-plan. Dans la Section 2.2.2 nous avons défini l'UIPQ du p-gon $\widetilde{Q}_{\infty,p}$ comme la limite locale des quadrangulations uniformes du p-gon. Un objet similaire, l'UIPT du p-gon notée $\widetilde{T}_{\infty,p}$ est construit de la même façon (ici p n'est pas nécessairement pair). Angel [8] a alors montré la convergence suivante en distribution pour $\mathrm{d}_{\mathrm{loc}}$

$$\widetilde{T}_{\infty,p} \quad \xrightarrow[p\to\infty]{(d)} \quad T_{\infty,\infty}.$$

L' objet $T_{\infty,\infty}$ est une triangulation infinie avec un bord simple de périmètre infini appelée la triangulation infinie uniforme du demi-plan (UIHPT) (voir [**P14**] pour le cas quadrangulaire). L'UIHPT est particulièrement simple à manipuler grâce à sa propriété de Markov spatiale. Supposons que l'on "révèle" le triangle adjacent sur la gauche de l'arête racine de $T_{\infty,\infty}$ que l'on appelle triangle racine. Trois (deux par symétrie) cas de figure sont possibles :

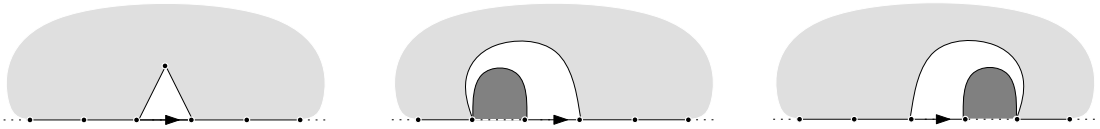


Figure 2.12 – Les différentes possibilités pour le triangle racine de $T_{\infty,\infty}$

1. Soit le triangle racine a un sommet inclus à l'intérieur de $T_{\infty,\infty}$, voir Fig. 2.12 gauche. Conditionnellement à cet événement (de probabilité explicite) la triangulation infinie (en gris sur la Fig. 2.12) obtenue en enlevant le triangle racine a la même loi que $T_{\infty,\infty}$.
2. Sinon, le triangle racine a ses trois sommets sur le bord de $T_{\infty,\infty}$ et le troisième sommet est soit $k \geqslant 0$ arêtes sur la gauche de l'arête racine soit $k \geqslant 0$ arêtes sur la droite de celle-ci (avec une loi explicite sur k). Le triangle englobe donc une triangulation aléatoire finie (en gris foncé sur la Fig. 2.12). Ici aussi conditionnellement à cet événement, la triangulation infinie à bord (en gris sur la Fig. 2.12) obtenue en enlevant le triangle racine ainsi que la triangulation englobée a la même loi que $T_{\infty,\infty}$.

Cette propriété de Markov spatiale permet de découvrir $T_{\infty,\infty}$ pas à pas en "épluchant" l'UIPT triangle après triangle en enlevant, le cas échéant, les parties finies en-

globées par les triangles découverts. Si l'on procède correctement [4] alors la partie non épluchée a toujours la loi de l'UIHPT et on peut continuer le processus à l'identique.

Dans **[P18]** nous avons généralisé les idées de [8] et réussi à adapter la technique d'exploration le long de l'interface de percolation dans le cas des percolations par arête et par face sur tout type de carte (seul le cas de la percolation par site sur les triangulations était connu auparavant [9, 8]). Notre résultat principal est l'obtention d'une expression explicite pour les paramètres critiques de percolation par face et par arête sur chaque modèle de carte. Ces expressions sont fonctions d'une quantité δ dépendant du modèle considéré et qui correspond au nombre moyen d'arêtes exposées de la face racine. Dans le cas triangulaire on a $\delta = 1/\sqrt{3}$, dans le cas triangulaire sans boucle $\delta = 2/3$ et dans le cas quadrangulaire $\delta = 1$.

Théorème 15 ([P18]). *Les paramètres critiques de percolation par face et par arête sur les modèles infinis uniformes du demi-plan existent et valent presque sûrement*

$$p_{c,\text{arête}} = \frac{\delta}{2+\delta} \qquad \textit{et} \qquad p_{c,\text{face}} = \frac{\delta+2}{2\delta+2}.$$

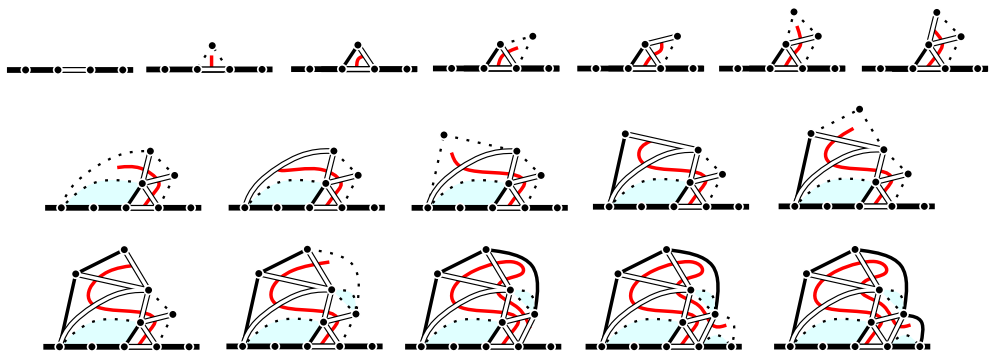


Figure 2.13 – Exploration de l'interface dans le cas de la percolation par arête sur $T_{\infty,\infty}$. Les arêtes dont le statu (ouverte/fermée) n'est pas révélé sont en pointillés.

Nous calculons aussi certains exposants critiques reliés à la géométrie des clusters de percolation. Par rapport à l'approche initiale d'Angel pour l'exploration des interfaces de percolation par site, l'idée principale qui permet d'explorer la percolation par arête est de ne pas révéler le statu (ouverte ou fermée) de toutes les arêtes explorées. En effet, il est profitable de laisser la majorité des arêtes explorées en statu "indéterminée" ce qui permet des calculs exacts.

4. c'est-à-dire si les triangles à éplucher sont choisis sans faire appel à l'information de la partie non explorée

2.4 La marche aléatoire simple sur l'UIPQ et ses avatars

Dans ce chapitre nous étudions la marche aléatoire simple sur des cartes aléatoires et certains concepts reliés. Ces travaux ont été motivés par le travail pionnier de Benjamini & Schramm [22] sur la récurrence des limites locales de cartes aléatoires de degrés bornés. La récurrence de l'UIPT/Q (conjecturée en 2002 par Angel, Benjamini & Schramm) n'a été prouvée que récemment par Gurel-Gurevich & Nachmias [58]. Cependant la marche aléatoire simple sur l'UIPQ/T reste encore bien mystérieuse !

2.4.1 Benjamini–Schramm [22] en dimensions supérieures **[P1]**

Présentons tout d'abord le résultat de [22]. On dira qu'une carte planaire aléatoire M est *uniformément enracinée* si M a la même loi que M ré-enracinée en $\vec{E}$ où conditionnellement à M, $\vec{E}$ est une arête orientée choisie uniformément parmi les arêtes orientées de M. Il est facile de voir que Q_n et T_n sont uniformément enracinées.

Théorème G ([22])**.** *Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de cartes planaires aléatoires uniformément enracinées dont les degrés des sommets sont uniformément bornés par $d \geqslant 0$. Alors toute limite de (M_n) pour $\mathrm{d_{loc}}$ est récurrente pour la marche aléatoire simple.*

La raison pour laquelle ce théorème ne peut pas s'appliquer [5] à l'UIPQ/T, est l'absence de borne sur les degrés. La preuve de ce théorème est très originale et mérite quelques explications. À son cœur réside la théorie des empilements de cercles.

Un empilement de cercles $\mathcal{P}$ est une collection de cercles du plan dont les disques sont d'intérieurs disjoints. On associe à $\mathcal{P}$ un graphe, appelé *graphe de tangence*, dont les sommets sont les centres des cercles de $\mathcal{P}$ et les arêtes correspondent à des cercles tangents, voir Fig. 2.14.

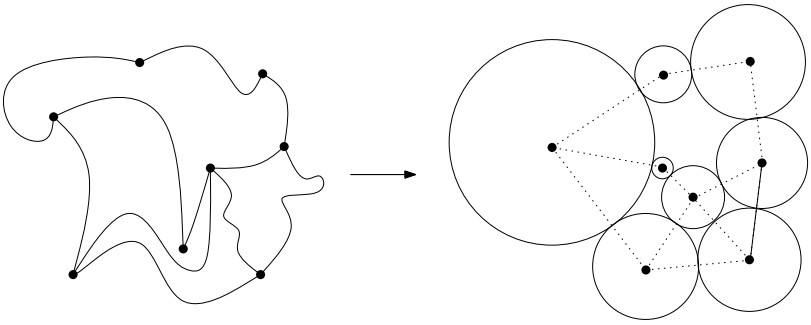


Figure 2.14 – Un graphe planaire et sa représentation en tant que graphe de tangence d'un empilement de cercles.

Le graphe obtenu est clairement planaire et n'a pas de boucles ni d'arêtes multiples (le graphe est dit *simple*). La réciproque est beaucoup plus surprenante et a été prouvée par Koebe puis redécouverte par Thurston comme un corollaire des travaux d'Andreev.

5. cependant, la preuve de Gurel-Gurevich & Nachmias [58] repose très fortement sur ce théorème

Théorème (Koebe-Andreev-Thurston)**.** *Tout graphe planaire fini simple peut être représenté comme graphe de tangence d'un empilement de cercles. Si le graphe est une triangulation, alors l'empilement est unique à transformation de Möbius près.*

On en déduit par exemple que tout graphe planaire simple peut être dessiné dans le plan avec des arêtes droites (théorème de Fáry). Nous renvoyons le lecteur intéressé par ce magnifique sujet à l'excellent article de survol [95]. Le théorème précédent peut être généralisé à des graphes planaires infinis où une dichotomie apparaît. Le *support* d'un empilement $\mathcal{P}$ est l'union des disques associés aux cercles de $\mathcal{P}$ et des interstices entre ces disques.

Théorème ([60])**.** *Soit T une triangulation infinie du plan, de deux choses l'une :*

(i) soit T admet un empilement de cercles $\mathcal{P}$ de support $\mathbb{D}$,

(ii) soit T admet un empilement de cercles $\mathcal{P}$ de support $\mathbb{C}$.

Dans le premier cas, on dit que la triangulation T est hyperbolique, et parabolique dans le second. À beaucoup d'égards, ce théorème peut être considéré comme un analogue discret du théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann. Par exemple, sous l'hypothèse d'une borne sur les degrés des sommets du graphe, la parabolicité est équivalente à la récurrence de la marche aléatoire simple. Ce lien profond entre empilements de cercles et récurrence/transience de la marche aléatoire est la charnière de [22] : il « suffit » de montrer que des limites au sens de $\mathrm{d_{loc}}$ de cartes planaires *uniformément enracinées* sont paraboliques. Ceci est loin d'être trivial et repose essentiellement sur la notion d'enracinement uniforme et sur le "Lemme magique" [22, Lemma 2.3].

Hélas, les graphes planaires sont exceptionnels [6] et la théorie analogue en dimension plus grande que trois est un sujet de recherche actuellement grandement ouvert. Par exemple, un des problèmes majeurs consiste à prouver que le nombre de tétraèdrangulations 3D (un simplexe de dimension trois homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_3$ de $\mathbb{R}^4$, dont tous les facettes sont des triangles et les simplexes de dimension trois des tétraèdres) à n arêtes croît au plus exponentiellement avec n, voir [14]. Cependant nous avons réussi à généraliser le résultat de [22] aux dimensions supérieures. Sans équivalent du théorème de Koebe−Andreev−Thurston, nous avons dû nous restreindre à des graphes dont on sait qu'il existe une représentation comme graphe de tangence d'un empilement de sphères en dimension d.

En outre, la connexion qui existe en dimension deux entre empilements de cercles et marches aléatoires se fait au travers de la théorie du potentiel ℓ^2 sur le graphe. La généralisation de cette théorie en dimension supérieure, la théorie du potentiel ℓ^d, n'a pas d'interprétation probabiliste aussi claire. Notre résultat principal n'est donc pas facile à exprimer et nous préfèrerons plutôt donner un de ses corollaires géométriques :

6. *http ://mathoverflow.net/questions/7114/why-are-planar-graphs-so-exceptional*

Théorème 16 ([**P1**])**.**
Soit G le graphe de tangence d'un empilement de sphères M-uniforme dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que G est infini, on a alors l'alternative suivante :

– *soit G a une constante de Cheeger positive i.e.*

$$\inf_{A\subset G}\left\{\frac{|\partial A|}{|A|},\ A\subset G,\ |A|<\infty\right\}>0$$

– *soit, pour tout $\varepsilon>0$, il existe des sous-graphes W de G de taille arbitrairement grande tels que*

$$|\partial W|\leqslant |W|^{\frac{d-1}{d}+\varepsilon}.$$

La condition M-uniforme est une condition locale de l'empilement de sphères, qui stipule que deux sphères tangentes ont un rapport de rayons plus petit que $M>0$.

2.4.2 Invariance de long de la marche aléatoire **[P4]**

Dans cette section, la planarité ne joue aucun rôle. Soit G un graphe aléatoire enraciné. Conditionnellement à G, on considère une marche aléatoire simple démarrant de l'extrémité de l'arête racine, et on note $(\vec{E}_i)_{i\geqslant 1}$ les arêtes orientées traversées par la marche aléatoire[7]. Le graphe G est dit *stationnaire* si pour tout $i\geqslant 1$, le graphe G re-enraciné en $\vec{E}_i$ a la même loi que G.

En particulier, tout graphe transitif enraciné est stationnaire. Il est également facile de voir que si (G_n) est une suite de graphes aléatoires enracinés et stationnaires convergeant vers G pour $\mathrm{d_{loc}}$, alors G est également stationnaire. En particulier, le graphe enraciné obtenu en oubliant la structure planaire de l'UIPQ ou de l'UIPT est stationnaire.

Théorème 2 ([**P4**])**.**
Soit G un graphe aléatoire stationnaire de croissance sous-exponentielle, c'est-à-dire,

$$n^{-1}\mathbb{E}\left[\log\left(\#B_n(G)\right)\right]\quad\xrightarrow[n\to\infty]{}\quad 0.$$

Alors G est presque sûrement Liouville.

On rappelle qu'un graphe a la *propriété de Liouville* s'il n'admet pas de fonction harmonique bornée non-constante. La preuve repose sur l'utilisation de la notion d'entropie de la marche aléatoire [12, 62]. Le théorème précédent est très robuste et permet, par exemple, de prouver que l'UIPT et l'UIPQ ont la propriété de Liouville. La publication [**P4**] contient aussi d'autres résultats sur les graphes stationnaires (et réversibles) et leurs liens avec la théorie ergodique, le « Mass-Transport Principle » [6, 20] ou les relations d'équivalences mesurées discrètes [91]. Nous laissons le lecteur curieux consulter directement [**P4**] pour plus de détails.

7. on imagine que la marche aléatoire traverse les arêtes du graphe, car on rappelle que les arêtes multiples et les boucles sont autorisées

2.4.3 Propriété d'intersection des graphes planaires **[P15]**

Dans la courte note **[P15]** écrite avec Itai Benjamini et Agelos Georgakopoulos, nous montrons que la propriété d'intersection pour les marches aléatoires *a priori* plus forte que la propriété de Liouville est en fait équivalente à cette dernière dans le cas des graphes planaires.

On dit qu'un graphe G a la *propriété d'intersection* si pour tous sommets x, y dans G, les trajectoires de deux marches aléatoires simples indépendantes sur G partant de x et y s'intersectent presque sûrement. On rappelle que le graphe a la propriété de Liouville s'il n'admet pas de fonction harmonique bornée non constante. C'est un exercice de voir que la propriété d'intersection implique la propriété de Liouville.

Théorème 17 ([**P15**])**.** *Si G est planaire et a la propriété de Liouville alors il possède la propriété d'intersection.*

Dans le cas des graphes planaires de degrés bornés, la propriété de Liouville est même équivalente à la récurrence de la marche aléatoire simple [21]. Le résultat n'a donc d'intérêt que dans le cas des graphes de degrés non bornés.

La preuve est très courte et simple à expliquer : On raisonne par l'absurde et l'on suppose que G n'a pas la propriété d'intersection. On considère alors les trajectoires de trois marches aléatoires simples indépendantes parties du même point. Puisque ces trajectoires ne s'intersectent qu'un nombre fini de fois, elles délimitent trois régions dans le graphe (voir figure ci-dessous). On peut donc parler de la probabilité $f(x)$ pour qu'une quatrième marche indépendante partie de x soit coincée à partir d'un certain rang dans une de ces trois régions (disons la région $\mathcal{R}_1$). Il est facile de voir alors que f est une fonction harmonique bornée non constante : contradiction ! Plus de détails sont disponibles dans **[P15]**.

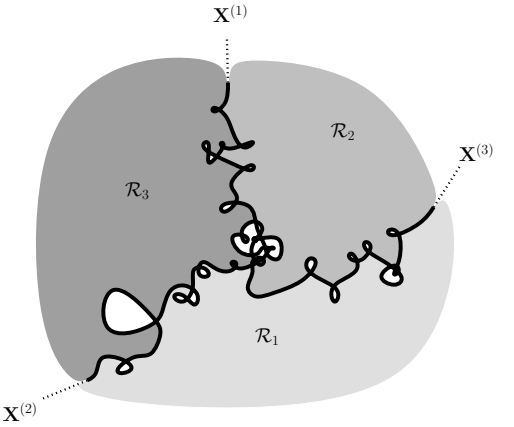


Figure 2.15 – Illustration de la preuve.

2.4.4 L'UIPQ est sous-diffusive **[P14]**

La géométrie de l'UIPQ est très intriguante. Par exemple, on a $\#B_r(Q_\infty) \approx r^4$ quand $r \to \infty$ (voir [9] dans le cas de T_∞ et [32, 77] pour Q_∞) cependant l'UIPQ possède des cycles séparants de taille linéaire à toutes les échelles. Ces inégalités isopérimétriques suggèrent que Q_∞ a des plis et des goulets d'étranglement à toutes les échelles dans lesquels la marche aléatoire simple peut être ralentie. C'est effectivement le cas et nous montrons dans **[P14]** avec Itai Benjamini que la marche aléatoire simple sur l'UIPQ est sous-diffusive au sens où elle se déplace beaucoup moins vite que le facteur habituel $\sqrt{n}$ sur les réseaux $\mathbb{Z}^d$. Plus précisément, conditionnellement à Q_∞ on considère une marche aléatoire simple $(X_n)_{n\geqslant 0}$ partie de l'origine, alors :

Théorème 18 ([**P14**])**.**
Il existe une constante $\kappa > 0$ telle que presque sûrement pour n suffisamment grand

$$\mathrm{d}_{\mathrm{gr}}^{Q_\infty}(X_0, X_n) \quad \leqslant \quad n^{1/3} \log^\kappa n.$$

Il est conjecturé que le 1/3 du théorème peut être remplacé par 1/4. Notre résultat est en fait plus précis. Si l'on note $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des faces adjacentes à $\{X_0, X_1, \ldots, X_k\}$, on dit qu'un temps $k \geqslant 0$ est pionnier (on dira alors que X_k est un point pionnier) si X_k est sur la frontière de la composante infinie de $Q_\infty \backslash \mathcal{R}_{k-1}$ (l'UIPQ a presque sûrement un seul bout [68]). Si $P_1, P_2, \ldots$ sont les points pionniers successifs de la marche alors nous montrons

$$\sup_{k\leqslant n} \mathrm{d}_{\mathrm{gr}}(P_1, P_k) \quad \approx \quad n^{1/3}.$$

La notation $\approx$ signifiant ici "à facteurs polylogarithmiques près". Le phénomène de sous-diffusivité pour la marche aléatoire simple dans un environnement aléatoire a été suggéré par Pierre-Gilles De Gennes [50] dans le cas des clusters de percolation critique. Depuis, ce phénomène a été en particulier établi dans le cas des arbres de Galton–Watson critiques [63, 13]. Notre preuve est cependant très différente des preuves "classiques" de sous-diffusivité et repose en grande partie sur la propriété de Markov spatiale de l'UIPQ.

L'idée clé est qu'il suffit de découvrir seulement la partie de l'UIPQ nécessaire pour que la marche se déplace. Grosso-modo chaque point pionnier nécessite de découvrir quelques nouvelles faces pour permettre à la marche de réaliser un pas supplémentaire. Nous adaptons alors un résultat d'Angel [9] (mais avec une preuve très différente) et montrons qu'après avoir exploré n faces de cette façon dans l'UIPQ, la quadrangulation à bord découverte autour de racine de Q_∞ a un périmètre de l'ordre de $n^{2/3}$ et une taille de l'ordre de $n^{4/3}$. De plus le complémentaire dans Q_∞ de cette partie explorée est distribué comme une UIPQ du p-gon avec $p \approx n^{2/3}$. En appliquant le Théorème 13, on en déduit qu'après avoir découvert n points pionniers le long de la marche dans l'UIPQ, les distances le long du bord dans la partie inexplorée sont d'ordre

$$\sqrt{n^{2/3}} = n^{1/3}.$$

C'est ainsi que l'exposant $1/3$ apparaît dans la preuve. Le papier **[P15]** contient en outre une multitude d'estimées nouvelles sur l'UIPQ ainsi qu'une vérification heuristique des relations KPZ dans le cas des exposants critiques reliés aux points pionniers.

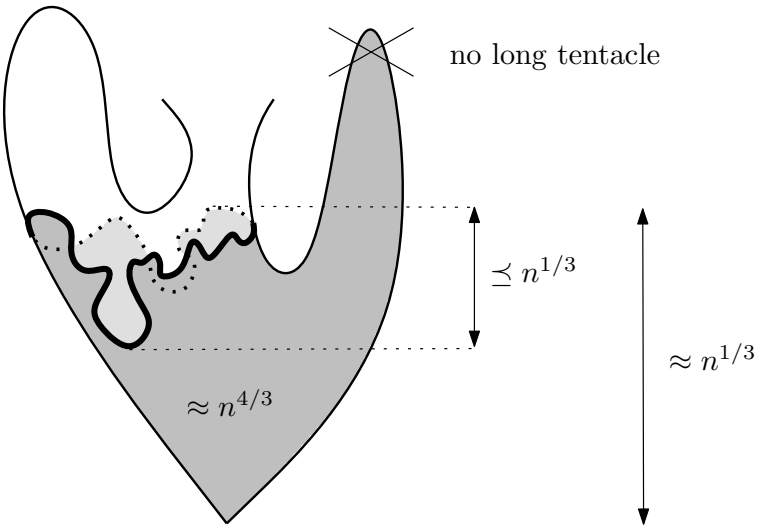


Figure 2.16 – Illustration de la preuve de la sous-diffusivité.

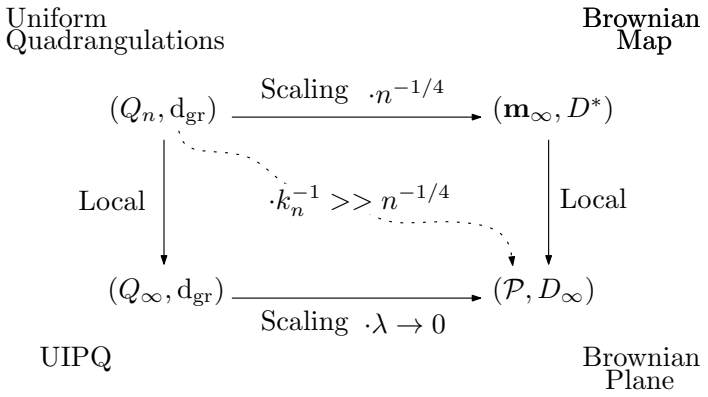
2.5 Limites de l'UIPQ

2.5.1 Le plan brownien **[P16]**

Intéressons nous maintenant à la structure métrique à grande échelle de l'UIPQ. Puisque Q_∞ est infinie son espace métrique associé n'est plus compact et la distance de Gromov–Hausdorff entre espaces compacts est inadaptée. Cependant il est possible de modifier la distance de Gromov–Hausdorff pour prendre en compte les espaces non bornés. Voici une définition possible. Soit $\mathbf{E}_1 = (E_1, d_1, \rho_1)$ et $\mathbf{E}_2 = (E_2, d_2, \rho_2)$ deux espaces métriques non compacts munis de deux points distingués $\rho_1 \in E_1$ et $\rho_2 \in E_2$. On suppose que toutes les boules fermées dans E_1 et E_2 sont compactes, et on définit alors la distance de Gromov–Hausdorff locale entre eux comme

$$\mathrm{d}_{\mathrm{LGH}}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \big(\mathrm{d}_{\mathrm{GH}}(B_k(\mathbf{E}_1), B_k(\mathbf{E}_2)) \wedge 1\big),$$

où $B_r(\mathbf{E})$ est la boule fermée de rayon r autour du point distingué de $\mathbf{E}$. Avec Jean-François Le Gall nous avons introduit un nouvel espace métrique aléatoire localement compact muni d'un point distingué $\boldsymbol{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, D_\infty, \rho)$ appelé le plan brownien qui apparaît de plusieurs façons comme la limite de cartes discrètes et de la carte brownienne. Les résultats principaux obtenus dans **[P16]** peuvent être résumés dans le diagramme commutatif suivant :



La flèche horizontale du haut est le résultat de Le Gall et de Miermont sur la convergence des grandes quadrangulations uniformes vers la carte brownienne. La flèche verticale gauche est la définition de l'UIPQ et est due à Krikun. Le plan brownien peut être vu comme la limite d'échelle de la quadrangulation infinie uniforme $\mathbf{Q}_\infty$ pointée en son origine au sens où

$$\lambda \cdot \mathbf{Q}_\infty \quad \xrightarrow[\lambda \to 0]{(d)} \quad \boldsymbol{\mathcal{P}},$$

en distribution au sens de Gromov–Hausdorff local. C'est la flèche horizontale en bas du diagramme. Le plan brownien est également le cône asymptotique de la carte brownienne (pointée) $\mathbf{m}_\infty = (m_\infty, D^*, \rho_\infty)$ c'est-à-dire

$$\Lambda \cdot \mathbf{m}_\infty \quad \xrightarrow[\Lambda \to \infty]{(d)} \quad \boldsymbol{\mathcal{P}},$$

dans le même sens que précédemment. C'est la flèche verticale droite. Pour finir, nous montrons que le plan brownien apparaît comme la limite de grandes quadrangulations uniformes dont le scaling est plus petit que $n^{1/4}$ (flèche diagonale). Il s'ensuit que le plan brownien est invariant (en loi) par dilatation de sa métrique, propriété que n'a pas la carte brownienne. Nous montrons également que le plan brownien est presque sûrement homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$ bien que de dimension de Hausdorff 4.

Les preuves reposent sur des couplages explicites entre d'une part le plan brownien et la carte brownienne et d'autre part entre les grandes quadrangulations et l'UIPQ. Par exemple, nous prouvons que l'on peut construire sur un même espace de probabilité la quadrangulation uniforme infinie Q_∞ et une grande quadrangulation uniforme Q_n de telle façon à ce que

$$B_k(Q_n) = B_k(Q_\infty)$$

avec très grande probabilité quand $k = o(n^{1/4})$. Ces couplages découlent de couplages analogues sur les arbres codant Q_n et Q_∞. Ces constructions permettent de transférer des propriétés entre la carte brownienne, le plan brownien et l'UIPQ. Nous résolvons par exemple (partiellement) une conjecture de Krikun sur les cycles séparants dans l'UIPQ comme un corollaire du théorème d'homéomorphisme de la carte brownienne obtenu dans [78].

2.5.2 Structure conforme **[P23]**

À quoi ressemble une métrique aléatoire typique Δ sur la sphère $\mathbb{S}_2$? Ce concept joue un rôle fondamental dans la théorie physique de la gravité quantique bi-dimensionnelle où les fameuses relations KPZ (pour Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov [64]) sont censées relier les dimensions de (certains) ensembles pour la métrique aléatoire Δ à la dimension de ces mêmes ensembles pour la métrique euclidienne. Il y a de nos jours deux approches pour construire cette métrique aléatoire $(\mathbb{S}_2, \Delta)$.

Cartes planaires aléatoires. La première approche et de considérer que les triangulations (ou quadrangulations...) aléatoires forment une discrétisation naturelle de cette hypothétique métrique aléatoire sur $\mathbb{S}_2$ [7]. Une fois renormalisées par $n^{-1/4}$, nous avons vu que ces triangulations convergent vers un espace métrique compact aléatoire : la carte brownienne [71]. La carte brownienne devrait donc capturer les propriétés métriques de $(\mathbb{S}_2, \Delta)$. Cependant, bien que la carte brownienne soit homéomorphe à la sphère [78], il n'existe pas de plongement canonique et donc la carte brownienne ne peut pas (encore) être vue comme une métrique aléatoire sur la sphère.

Champ libre gaussien. La seconde approche est basée sur le champ libre gaussien. C'est une distribution aléatoire h sur la sphère qui est invariante conforme, voir [97]. La métrique aléatoire sur $\mathbb{S}_2$ est alors formellement définie par

$$e^{\varrho h(z)} dz^2,$$

où $\varrho \geqslant 0$ est un paramètre. Cet objet serait facile à définir si h était une fonction régulière, hélas, jusqu'à maintenant aucune construction rigoureuse n'est connue. Cependant, on peut donner un sens à la dernière formule en termes de mesure aléatoire (voir Kahane [61]) et les relations KPZ ont été prouvées dans ce contexte, voir [52, 93].

Structure conforme des cartes planaires.

Bien que les deux approches n'aient pas encore réussi à construire une métrique aléatoire sur $\mathbb{S}_2$, elles ont des points faibles différents : la carte brownienne possède bien une métrique mais le plongement sur la sphère est manquant, tandis que dans l'approche avec le GFF la sphère est là mais la métrique nous échappe. Les deux théories sont censées converger et le lien réside dans la structure conforme des cartes planaires. Dans **[P23]** nous avons commencé à l'étudier.

Nous avons travaillé avec le modèle de l'UIHPT dont la propriété de Markov a été décrite en Section 2.3.2. On associe à $T_{\infty,\infty}$ une surface de Riemann formée en considérant chaque triangle de $T_{\infty,\infty}$ comme un triangle équilatéral et en les collant selon la structure de la carte. D'après le théorème d'uniformisation de Riemann, on peut représenter de façon unique cette surface de Riemann dans le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\,(z) > 0\}$ pourvu que l'on fixe les images de trois points : l'origine et l'extrémité de l'arête racine sont envoyées sur $-1/2$ et $1/2$ et l'infini de $T_{\infty,\infty}$ est envoyé sur l'infini de $\mathbb{H}$. Cela nous fournit donc une représentation "conforme" de l'UIHPT.

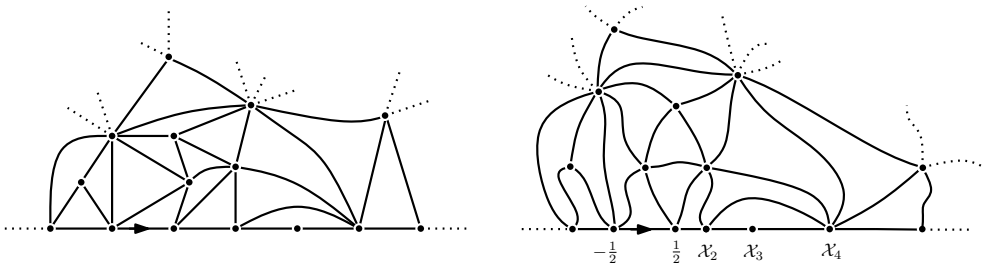


Figure 2.17 – Une partie de $T_{\infty,\infty}$ et sa représentation conforme.

Dans [**P23**] nous avons étudié la géométrie du bord de la représentation conforme de l'UIHPT. Plus précisément, pour $k \geqslant 0$ on note $\mathcal{X}_k$ la position du k-ième sommet à droite de la racine dans la représentation conforme de $T_{\infty,\infty}$. En particulier on a $\mathcal{X}_0 = -1/2$ et $\mathcal{X}_1 = 1/2$. Pour $n \geqslant 1$, on considère la mesure de probabilité aléatoire μ_n sur $[0,1]$ définie par

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\mathcal{X}_k/\mathcal{X}_n}.$$

Théorème 19 ([**P23**])**.**
On suppose $(*)$ *de* ***[P23]****. Alors de toute suite d'entiers tendant vers* $+\infty$ *on peut extraire une sous-suite* $n_k \to \infty$ *telle que* μ_{n_k} *converge en loi quand* $k \to \infty$ *vers une mesure de probabilité aléatoire* μ *qui satisfait*

- μ *n'a pas d'atome,*
- μ *a pour support topologique* $[0,1]$*,*
- *la dimension de Hausdorff de* μ *est* $1/3$*.*

La condition $(*)$ est une condition technique dans [**P23**] que nous n'avons hélas pas pu prouver mais qui a toutes les chances d'être vérifiée. L'idée pour établir ce théorème est d'explorer l'UIHPT le long d'un processus SLE_6 indépendant et d'utiliser la propriété de localité de ce dernier et la propriété de Markov spatiale de $T_{\infty,\infty}$. Ce résultat est le premier à notre connaissance sur la structure conforme des cartes planaires et conforte les prédictions physiques selon lesquelles la structure conforme des cartes planaires est reliée au champ libre gaussien. Pour plus de détails, consultez [**P23**].



Bibliographie

[1] R. Abraham and J.-F. Delmas. A note on conditioned Galton-Watson trees. *arXiv :1304.4035*.

[2] D. Aldous. The continuum random tree. II. An overview. In *Stochastic analysis (Durham, 1990)*, volume 167 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 23–70. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[3] D. Aldous. The continuum random tree III. *Ann. Probab.*, 21(1) :248–289, 1993.

[4] D. Aldous. Recursive self-similarity for random trees, random triangulations and Brownian excursion. *Ann. Probab.*, 22(2) :527–545, 1994.

[5] D. Aldous. Triangulating the circle, at random. *Amer. Math. Monthly*, 101(3), 1994.

[6] D. Aldous and R. Lyons. Processes on unimodular random networks. *Electron. J. Probab.*, 12 :no. 54, 1454–1508 (electronic), 2007.

[7] J. Ambjørn, B. Durhuus, and T. Jonsson. *Quantum geometry*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. A statistical field theory approach.

[8] O. Angel. Scaling of percolation on infinite planar maps, I. *arXiv :0501006*.

[9] O. Angel. Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation. *Geom. Funct. Anal.*, 13(5) :935–974, 2003.

[10] O. Angel and N. Curien. Percolations on infinite random maps, half-plane models. *arXiv :1301.5311*.

[11] O. Angel and O. Schramm. Uniform infinite planar triangulation. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3) :191–213, 2003.

[12] A. Avez. Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentielle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 279 :25–28, 1974.

[13] M. T. Barlow and T. Kumagai. Random walk on the incipient infinite cluster on trees. *Illinois J. Math.*, 50(1-4) :33–65 (electronic), 2006.

[14] B. Benedetti and G. M. Ziegler. On locally constructible spheres and balls. *Acta Math.*, 206(2) :205–243, 2011.

[15] I. Benjamini and N. Curien. On limits of graphs sphere packed in Euclidean space and applications. *Electron. J. Combin.*, 32 :975–984, 2011.

[16] I. Benjamini and N. Curien. Ergodic theory on stationary random graphs. *Electron. J. Probab.*, 17(93) :1–20, 2012.

[17] I. Benjamini and N. Curien. Recurrence of the $\mathbb{Z}^d$-valued infinite snake *via* unimodularity. *Electron. Commun. Probab.*, 17 :1–10, 2012.

[18] I. Benjamini and N. Curien. Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation : Subdiffusivity *via* pioneer points. *Geom. Funct. Anal.*, 23(2) :501–531, 2013.

[19] I. Benjamini, N. Curien, and A. Georgakopoulos. The Liouville and the intersection properties are equivalent for planar graphs. *Electron. Commun. Probab.*, 17(42) :1–5, 2012.

[20] I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres, and O. Schramm. Group-invariant percolation on graphs. *Geom. Funct. Anal.*, 9(1) :29–66, 1999.

[21] I. Benjamini and O. Schramm. Harmonic functions on planar and almost planar graphs and manifolds, via circle packings. *Invent. Math.*, 126(3) :565–587, 1996.

[22] I. Benjamini and O. Schramm. Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. *Electron. J. Probab.*, 6 :no. 23, 13 pp. (electronic), 2001.

[23] N. Bernasconi, K. Panagiotou, and A. Steger. On properties of random dissections and triangulations. In *Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 132–141, New York, 2008. ACM.

[24] J. Bertoin and A. Gnedin. Asymptotic laws for nonconservative self-similar fragmentations. *Electron. J. Probab.*, 9(19) :575–593, 2004.

[25] J. D. Biggins. Chernoff's theorem in the branching random walk. *J. Appl. Probability*, 14(3) :630–636, 1977.

[26] G. Borot, J. Bouttier, and E. Guitter. A recursive approach to the O(N) model on random maps via nested loops. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 45, 2012.

[27] J. Bourgain. On the Hausdorff dimension of harmonic measure in higher dimension. *Invent. Math.*, 87(3) :477–483, 1987.

[28] J. Bouttier, P. Di Francesco, and E. Guitter. Planar maps as labeled mobiles. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 69, 27 pp. (electronic), 2004.

[29] N. Broutin and H. Sulzbach. The dual tree of a recursive triangulation of the disk. 11 2012.

[30] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[31] G. Chapuy, M. Marcus, and G. Schaeffer. A bijection for rooted maps on orientable surfaces. *SIAM J. Discrete Math.*, 23(3) :1587–1611, 2009.

[32] P. Chassaing and B. Durhuus. Local limit of labeled trees and expected volume growth in a random quadrangulation. *Ann. Probab.*, 34(3) :879–917, 2006.

[33] P. Chassaing and G. Schaeffer. Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probab. Theory Related Fields*, 128(2) :161–212, 2004.

[34] R. Cori and B. Vauquelin. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5) :1023–1042, 1981.

[35] N. Curien. A glimpse of the conformal structure of random planar maps. *arXiv :1308.1807*.

[36] N. Curien. Strong convergence of partial match queries in random quadtrees. *Combin. Probab. Comput.*, 21(5) :683–694, 2012.

[37] N. Curien and B. Haas. The stable trees are nested. *Probab. Theory Related Fields (to appear)*, 07 2012.

[38] N. Curien, B. Haas, and I. Kortchemski. The CRT is the scaling limit of random dissections. *arXiv :1305.3534*.

[39] N. Curien and A. Joseph. Partial match queries in random quadtrees : A probabilistic approach. *Adv. in Appl. Probab.*, 43 :178–194, 2011.

[40] N. Curien and T. Konstantopoulos. Iterating Brownian motions, *ad libitum*. *J. Theoret. Probab.* (to appear).

[41] N. Curien and I. Kortchemski. Random stable looptrees. *arXiv :1304.1044*.

[42] N. Curien and J.-F. Le Gall. The Brownian plane. *J. Theoret. Probab.* (to appear).

[43] N. Curien and J.-F. Le Gall. The harmonic measure of balls in random trees. *arXiv :1304.7190*.

[44] N. Curien and J.-F. Le Gall. Random recursive triangulations of the disk *via* fragmentation theory. *Ann. Probab.*, 39(6) :2224–2270, 2011.

[45] N. Curien, J.-F. Le Gall, and G. Miermont. The Brownian cactus I. Scaling limits of discrete cactuses. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 49(2) :340–373, 2013.

[46] N. Curien, L. Ménard, and G. Miermont. A view from infinity of the uniform infinite planar quadrangulation. *Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. (to appear)*.

[47] N. Curien and G. Miermont. Uniform infinite planar quadrangulations with a boundary. *arXiv :1202.5452*.

[48] N. Curien and Y. Peres. Random laminations and multitype branching processes. *Electron. Commun. Probab.*, 16 :435–446, 2011.

[49] N. Curien and W. Werner. The Markovian hyperbolic triangulation. *J. Eur. Math. Soc.*, 15(4) :1309–1341, 2013.

[50] P. G. De Gennes. La percolation : un concept unificateur. *La Recherche*, 7 :919–927, 1976.

[51] M. Drmota, A. de Mier, and M. Noy. Extremal statistics on non-crossing configurations. *preprint.*

[52] B. Duplantier and S. Sheffield. Liouville quantum gravity and KPZ. *Invent. Math.*, 185(2) :333–393, 2011.

[53] T. Duquesne. A limit theorem for the contour process of conditioned Galton-Watson trees. *Ann. Probab.*, 31(2) :996–1027, 2003.

[54] T. Duquesne and J.-F. Le Gall. Random trees, Lévy processes and spatial branching processes. *Astérisque*, (281) :vi+147, 2002.

[55] T. Duquesne and J.-F. Le Gall. Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees. *Probab. Theory Related Fields*, 131(4) :553–603, 2005.

[56] S. N. Evans. *Probability and real trees*, volume 1920 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008. Lectures from the 35th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–23, 2005.

[57] P. Flajolet and M. Noy. Analytic combinatorics of non-crossing configurations. *Discrete Math.*, 204(1-3) :203–229, 1999.

[58] O. Gurel-Gurevich and A. Nachmias. Recurrence of planar graph limits. *Ann. Maths* (to appear), 2012.

[59] B. Haas and G. Miermont. The genealogy of self-similar fragmentations with negative index as a continuum random tree. *Electron. J. Probab.*, 9 :no. 4, 57–97 (electronic), 2004.

[60] Z.-X. He and O. Schramm. Hyperbolic and parabolic packings. *Discrete Comput. Geom.*, 14 :123–149, 1995.

[61] J.-P. Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, 9(2) :105–150, 1985.

[62] V. A. Kaimanovich and A. M. Vershik. Random walks on discrete groups : boundary and entropy. *Ann. Probab.*, 11(3) :457–490, 1983.

[63] H. Kesten. Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 22(4) :425–487, 1986.

[64] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Fractal structure of 2D-quantum gravity. *Modern Phys. Lett. A*, 3(8) :819–826, 1988.

[65] A. N. Kolmogorov. Zur lösung einer biologischen aufgabe [german : On the solution of a problem in biology]. *Izv. NII Matem. Mekh. Tomskogo Univ.*, 2 :7–12, 1938.

[66] I. Kortchemski. Random stable laminations of the disk. *Ann. Probab.* (to appear).

[67] I. Kortchemski. Invariance principles for Galton-Watson trees conditioned on the number of leaves. *Stoch. Proc. Appl.*, 122 :3126–3172, 2012.

[68] M. Krikun. Local structure of random quadrangulations. *arXiv :0512304.*

[69] M. Krikun. On one property of distances in the infinite random quadrangulation. *arXiv :0805.1907.*

[70] S. K. Lando and A. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications.* Springer-Verlag, 2004.

[71] J.-F. Le Gall. Uniqueness and universality of the Brownian map. *Ann. Probab.* (to appear).

[72] J.-F. Le Gall. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[73] J.-F. Le Gall. Random trees and applications. *Probability Surveys*, 2005.

[74] J.-F. Le Gall. The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Invent. Math.*, 169(3) :621–670, 2007.

[75] J.-F. Le Gall. Geodesics in large planar maps and in the Brownian map. *Acta Math.*, 205 :287–360, 2010.

[76] J.-F. Le Gall and Y. Le Jan. Branching processes in Lévy processes : the exploration process. *Ann. Probab.*, 26(1) :213–252, 1998.

[77] J.-F. Le Gall and L. Ménard. Scaling limits for the uniform infinite quadrangulation. *Illinois J. Math.*, 54(3) :1163–1203 (2012).

[78] J.-F. Le Gall and F. Paulin. Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geom. Funct. Anal.*, 18(3) :893–918, 2008.

[79] R. Lyons, R. Pemantle, and Y. Peres. Ergodic theory on Galton-Watson trees : speed of random walk and dimension of harmonic measure. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(3) :593–619, 1995.

[80] R. Lyons, R. Pemantle, and Y. Peres. Biased random walks on Galton-Watson trees. *Probab. Theory Related Fields*, 106(2) :249–264, 1996.

[81] N. G. Makarov. On the distortion of boundary sets under conformal mappings. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 51(2) :369–384, 1985.

[82] P. Marchal. A note on the fragmentation of a stable tree. In *Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AI, pages 489–499. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2008.

[83] J.-F. Marckert and G. Miermont. Invariance principles for random bipartite planar maps. *Ann. Probab.*, 35(5) :1642–1705, 2007.

[84] J.-F. Marckert and A. Mokkadem. Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map. *Ann. Probab.*, 34(6) :2144–2202, 2006.

[85] J.-F. Marckert and A. Panholzer. Noncrossing trees are almost conditioned Galton-Watson trees. *Random Structures Algorithms*, 20(1) :115–125, 2002.

[86] L. Ménard. The two uniform infinite quadrangulations of the plane have the same law. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 46(1) :190–208, 2010.

[87] G. Miermont. On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations. *Electron. Commun. Probab.*, 13 :248–257, 2008.

[88] G. Miermont. Tessellations of random maps of arbitrary genus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 42(5) :725–781, 2009.

[89] G. Miermont. The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations. *Acta Math.*, 210(2) :319–401, 2013.

[90] J. Neveu. Arbres et processus de Galton-Watson. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 22(2) :199–207, 1986.

[91] F. Paulin. Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. *Markov Process. Related Fields*, 5(2) :163–200, 1999.

[92] J.-L. Rémy. Un procédé itératif de dénombrement d'arbres binaires et son application à leur génération aléatoire. *RAIRO Inform. Théor.*, 19(2) :179–195, 1985.

[93] R. Rhodes and V. Vargas. KPZ formula for log-infinitely divisible multifractal random measures. *ESAIM Probab. Stat.*, 15 :358–371, 2011.

[94] D. Rizzolo. Scaling limits of Markov branching trees and Galton-Watson trees conditioned on the number of vertices with out-degree in a given set. *arXiv :1105.2528*, 05 2011.

[95] S. Rohde. Oded Schramm : From circle packing to SLE. *Ann. Probab.*, 39(5) :1621–1667, 2011.

[96] G. Schaeffer. Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires. PhD thesis. 1998.

[97] S. Sheffield. Gaussian free fields for mathematicians. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4) :521–541, 2007.

[98] A. Stoeckl and A. Wakolbinger. On clan-recurrence and -transience in time stationary branching Brownian particle systems. In *Measure-valued processes, stochastic partial differential equations, and interacting systems (Montreal, PQ, 1992)*, volume 5 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 213–219. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[99] Y. Watabiki. Construction of non-critical string field theory by transfer matrix formalism in dynamical triangulation. *Nuclear Phys. B*, 441(1-2) :119–163, 1995.