



**HAL**  
open science

# Sur la contrôlabilité et son coût pour quelques équations aux dérivées partielles

Pierre Lissy

► **To cite this version:**

Pierre Lissy. Sur la contrôlabilité et son coût pour quelques équations aux dérivées partielles. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. Français. NNT : . tel-00918763

**HAL Id: tel-00918763**

**<https://theses.hal.science/tel-00918763>**

Submitted on 14 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

**Mathématiques Appliquées**

Présentée par

**Pierre LISSY**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

**Sur la contrôlabilité et son coût pour quelques équations  
aux dérivées partielles**

soutenue publiquement le 11/12/2013

devant le jury composé de :

M. Jean-Michel CORON	Directeur de thèse
M. Enrique FERNÁNDEZ-CARA	Rapporteur
M. Olivier GLASS	Examinateur
M. Sergio GUERRERO	Examinateur
M. Jean-Pierre PUEL	Rapporteur
M. Jean-Pierre RAYMOND	Examinateur
M. Marius TUCSNAK	Examinateur
M. Enrique ZUAZUA	Examinateur





# Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse Jean-Michel Coron. J'ai pleinement conscience de l'immense chance que j'ai eue d'avoir pu effectuer une thèse sous sa direction, et ceci d'autant plus que nos premiers contacts sont le fruit du hasard. Pendant ma thèse, j'ai bénéficié à la fois d'un encadrement d'une excellente qualité et d'une très grande liberté de choix dans les sujets que je souhaitais aborder ainsi qu'une souplesse importante dans la conduite de mes recherches, ce qui est une marque de confiance qui m'a particulièrement touché. Il est évident que la réussite de cette thèse est en grande partie tributaire des qualités scientifiques exceptionnelles de Jean-Michel, mais aussi de ses qualités humaines qui ne le sont pas moins : attention, patience, optimisme, un intérêt et des encouragements constants pour mon travail et surtout une extrême délicatesse qui en font pour moi un modèle à suivre. Enfin, j'ai eu l'opportunité de partir souvent en conférence en France ou à l'étranger, ce qui m'a beaucoup apporté d'un point de vue professionnel et personnel. Cher Jean-Michel, je te remercie infiniment pour tout !

Je souhaite ensuite remercier vivement Enrique Fernandez-Cara et Jean-Pierre Puel pour avoir accepté de rapporter cette thèse dans un délai court, de leur intérêt pour mon travail et les discussions que nous avons pu avoir à ce sujet, ainsi que pour leurs remarques positives et encourageantes.

Je remercie également Sergio Guerrero, Olivier Glass, Jean-Pierre Raymond, Marius Tucsnak et Enrique Zuazua, pour lesquels j'ai beaucoup d'estime, de me faire l'honneur d'être membres de mon jury. Je profite de cette occasion pour remercier Sergio de son aide à Benasque et les jours suivants, qui a permis que je puisse déposer ce manuscrit en temps et en heure.

Je souhaite remercier particulièrement Matthieu Léautaud pour avoir pris le temps de relire en détail l'introduction. Ses remarques de fond et de forme ont fortement contribué à améliorer de manière substantielle celle-ci. Je remercie aussi beaucoup Maxime Chupin de m'avoir aidé à mettre en forme cette thèse, notamment en se démenant pour trouver des solutions aux détails de style les plus pointus, voire pointilleux.

Je veux aussi souligner ici la chance que j'ai eue d'effectuer ma thèse au laboratoire Jacques-Louis Lions pour l'ambiance très agréable qui y règne. Merci d'abord à Mme Boulic et Mme Ruprecht, Florence, Catherine, Nadine et Salima, pour leur efficacité, leur dévouement et leur bonne humeur. Je remercie aussi très chaleureusement Christian, qui va malheureusement nous quitter prochainement, pour sa générosité et sa serviabilité, ainsi que pour la flexibilité dont il a fait preuve concernant l'impression de cette ultime thèse. Son départ va laisser un gros vide dans le laboratoire. Je souhaite également remercier Khashayar pour son aide précieuse en informatique (ainsi que pour m'avoir ouvert les yeux sur les conditions d'exercices difficiles du métier de portier). Je souhaite ensuite remercier mes collègues de bureau (anciens et actuels) Annegret, Jan, Jean-Philippe, Matthieu (dont j'espère qu'il fera la connaissance de Hamster II un jour), Maxime (le Rouge et le Noir), Nastasia (imbattable à la coinche), Pierre J. (et

son talent incroyable de grimpeur urbain), Sarah et Thibault L. (les ours qui se baladent dans Tokyo, c'est quand même bien plus intéressant que des sentinelles). Merci aussi beaucoup pour tous les bons moments passés (et plutôt concentrés à un moment précis de la semaine) à Charles (et son sens de l'orientation comparable au mien), Nicole (toujours partante pour le japonais canonique), Malik (pour l'invention du chocolat chaud de 23h), Eugénie l'ingénue, Jean-Paul l'incorruptible (sauf au mois de juillet), Vincent (notre maître à tous et leader incontestable), ainsi qu'à Ange, Yannick D., Benjamin, Florent, Oana, Lise-Marie, Thibault B., Peipei, Juliette, Ludovick, Giacomo, Nicolas C., Casimir, Anne-Claire, Camille, Ivonne et tous les autres thésards ou postdocs que je n'ai pu citer, en espérant qu'ils ne m'en tiennent pas rigueur. Mention spéciale à Mamadou (et à ses talents de négociateur) pour réussir à supporter mon caractère buté en tant que collaborateur. Je souhaite aussi remercier Antoine, Ayman, Clément, Fabrice, Franck, Kaber, Laurent, Marie P., Nicolas V., Jannick, Emmanuel et enfin Myriam pour sa gentillesse et pour m'avoir donné la possibilité d'effectuer mon monitorat à Polytech'UPMC.

J'adresse aussi mes remerciements aux membres de la très sympathique communauté du contrôle (au sens large) que j'ai eu le plaisir de rencontrer à diverses occasions pendant ma thèse, notamment Fatiha, Julien L., Julien S., Julie, Karine, Maya, Roberto, Romain, et Sylvain (pour la Transmutation).

Je souhaite remercier aussi toutes les personnes extérieures aux maths que j'ai connues ces trois dernières années et ont donc participé d'une certaine manière à la réussite de cette thèse, notamment les membres des PAM. Je remercie particulièrement Baptiste (pour l'invention de son point), Benjamin, Cécile, Clélia, Émilien, Florent (et ses dégustations de mets fins à Leipzig), Guilhem (et son "good stuff" écossais), Grégoire (et son répertoire incroyable de chansons), Lapinou (et ses talents d'herboriste), MaM le fan d'accordéon (cela me rappelle d'ailleurs...), Mathias, Nathanaël le moine chartreux balèze (et son melon), Mélanie, Noémie, Pascal, Pat, Pierre G., Rémi, Sylvain l'électron libre, et Tom.

Je n'oublie évidemment pas tous les gens qui continuent de m'accompagner depuis longtemps, notamment Jean (pour son soutien moral et parfois physique), Jules (pour les vacances en Bretagne), Christopher (et les cartes géantes), Antoine (pour le troisième jeudi de novembre enchanté), Arthur (et les nombreux dîners dans un restaurant réputé du 14ème), Morgan (qui m'a initié à la meilleure manière de consommer les baies de genièvre), Alice (pour ses invitations dans le Sud), Hoël (et ses questions pertinentes de topologie en cours d'intégration), Florent (et Sherlock Holmes), Cricri (et Maya), Sarah (c'est promis, on le fera un jour ce shabadabada), Xan, Irene et tous les autres Cachanais, ainsi que ceux qui m'accompagnent depuis encore plus longtemps : Beubeu (et nos échecs en forêt de Fontainebleau), Estelle, et toute la bande des Bofs (Bambi, Clément, Gus, Pupupe, Raphi, Toto, Iris, Zoé) pour tout ce qu'on a vécu ensemble.

Mes derniers remerciements vont à ma famille, et plus particulièrement à mes parents et à ma soeur pour leur affection et leur soutien pendant ces longues années d'études, et sans qui rien de tout ceci n'aurait été possible.

*Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées, c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir. Et, de toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure.*

**Jacques-Louis Lions**



*À mes parents et grands-parents,*





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>	
1	Considérations générales sur les équations aux dérivées partielles d'évolution et leur contrôle. . . . .	5
1.1	Présentation . . . . .	5
1.2	Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes . . . . .	7
1.3	Résolution algébrique de systèmes différentiels et lien avec la théorie du contrôle . . . . .	17
1.4	Équations non linéaires : linéarisation et méthode du retour . . . . .	21
1.5	Problématique de la thèse . . . . .	23
2	L'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle avec contrôle distribué scalaire . . . . .	24
2.1	Présentation . . . . .	24
2.2	Les résultats antérieurs . . . . .	25
2.3	Résultats obtenus et méthodes utilisées . . . . .	25
2.4	Remarques additionnelles et perspectives . . . . .	31
3	Contrôlabilité uniforme d'une équation de transport-diffusion en limite de viscosité évanescence . . . . .	32
3.1	Présentation . . . . .	32
3.2	Les résultats antérieurs . . . . .	34
3.3	Résultats obtenus et méthodes utilisées . . . . .	37
3.4	Remarques additionnelles et perspectives . . . . .	39
4	Contrôlabilité uniforme d'une équation de transport-diffusion avec transport dégénéré . . . . .	39
4.1	Présentation . . . . .	39
4.2	Les résultats antérieurs . . . . .	40
4.3	Résultats obtenus et méthodes utilisées . . . . .	41
4.4	Remarques additionnelles et perspectives . . . . .	44
5	Coût des contrôles rapides pour certaines familles d'équations paraboliques ou dispersives . . . . .	44
5.1	Présentation . . . . .	44
5.2	Les résultats antérieurs . . . . .	45
5.3	Résultats obtenus et méthodes utilisées . . . . .	45
5.4	Remarques additionnelles et perspectives . . . . .	53
<b>I</b>	<b>Contrôle indirect de systèmes non linéaires</b>	<b>55</b>
1	L'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle avec contrôle distribué scalaire	57
1.1	Introduction . . . . .	57

1.1.1	Notations and statement of the theorem . . . . .	57
1.1.2	Some previous results . . . . .	59
1.1.3	The linear test . . . . .	59
1.1.4	Structure of the article and sketch of the proof of Theorem 1.1.1 . . . . .	60
1.2	Constructing a relevant trajectory . . . . .	63
1.3	A controllability result on the linearized system . . . . .	64
1.3.1	Definitions and notations . . . . .	64
1.3.2	Algebraic solvability of (1.3.4) . . . . .	68
1.3.3	Controllability of the linear control system (1.3.6) . . . . .	79
1.3.4	Null-controllability of (1.3.1) . . . . .	86
1.4	Proof of Theorem 1.1.1 . . . . .	88
1.5	Annexe : explication détaillée de la partie informatique . . . . .	91
<b>II Coût du contrôle en temps petit ou en viscosité évanescence</b>		<b>97</b>
<b>2</b>	<b>Un lien entre le contrôle rapide pour la chaleur et la conjecture de Coron et Guerrero</b>	<b>99</b>
2.1	Introduction . . . . .	101
2.2	Proof of Theorem 2.1.1 . . . . .	102
2.2.1	Case $M > 0$ . . . . .	103
2.2.2	Case $M < 0$ . . . . .	104
2.3	Additional comments . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Application d'une conjecture de Ervedoza et Zuazua à la conjecture de Coron et Guerrero</b>	<b>105</b>
3.1	Introduction . . . . .	105
3.2	Proof of Theorem 3.1.1 . . . . .	110
3.3	Further remarks . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Contrôlabilité uniforme d'une équation de transport-diffusion dégénérée</b>	<b>113</b>
4.1	A degenerate transport equation . . . . .	113
4.2	Convergence of the parabolic system . . . . .	119
4.3	A consequence for the uniform controllability in small time . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Coût des contrôles rapides pour certaines familles d'équations paraboliques ou dispersives</b>	<b>123</b>
5.1	Introduction . . . . .	123
5.1.1	Presentation of the problem . . . . .	123
5.1.2	State of the art . . . . .	125
5.1.3	Some definitions and notations . . . . .	126
5.2	Proofs of Theorems 5.1.1-5.1.3 . . . . .	127
5.2.1	Proof of Theorem 5.1.1 . . . . .	127
5.2.2	Proof of Theorem 5.1.2 . . . . .	137
5.2.3	Proof of Theorem 5.1.3 . . . . .	139
5.3	Applications . . . . .	141
5.3.1	Linear KdV equations controlled on the boundary: the case of periodic boundary conditions with a boundary control on the derivative of the state . . . . .	141

5.3.2	Linear KdV equations controlled on the boundary: the case of Dirichlet boundary conditions with a boundary control on the derivative of the state . . . . .	142
5.3.3	Anomalous diffusion equation in one dimension . . . . .	144
5.3.4	Fractional Schrödinger equation in one dimension . . . . .	145
<b>Bibliographie</b>		<b>145</b>



# Introduction

## 1 Considérations générales sur les équations aux dérivées partielles d'évolution et leur contrôle.

### 1.1 Présentation

De manière générale, les équations aux dérivées partielles d'évolution peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \\ \text{conditions au bord,} \\ \text{condition initiale,} \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $y$  représente l'état (température, vitesse, position, etc.) d'un système (d'origine essentiellement physique dans ce qui suit) évoluant au cours du temps. D'un point de vue mathématique, la première question que l'on se pose est la suivante : comment résoudre une équation comme (1) ? La principale difficulté consiste à trouver (lorsque c'est possible) un cadre fonctionnel satisfaisant qui permette de donner un sens à l'équation et d'assurer l'existence et l'unicité des solutions ainsi que leur dépendance continue par rapport aux données initiales (on dit alors que le système est *bien posé* au sens de Hadamard), et ceci au moins localement en temps. Le comportement d'un tel système est entièrement déterminé par la donnée de la condition initiale. Nous n'avons donc aucun moyen d'action sur notre système.

L'objet de la théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles d'évolution est de s'intéresser à la manière d'agir sur de tels systèmes dynamiques. En général, on ne va pas chercher à prescrire en tout temps un comportement bien déterminé à la solution (ce serait le plus souvent impossible) mais plutôt à se donner un état initial  $y^0$  (choisi quelconque dans une certaine classe de fonctions) et à s'imposer un état final  $y^F$  (choisi lui aussi dans une certaine classe de fonctions pouvant être éventuellement réduite à un élément comme pour la contrôlabilité à 0) que l'on cherche à atteindre en un temps fini ou de manière asymptotique au moyen d'une commande  $u$  bien choisie. Cet état final peut notamment être un état d'équilibre du système ; dans ce cas, si le système est bien posé, une fois cet état atteint on y restera indéfiniment.

On peut séparer les problématiques en théorie du contrôle en deux catégories :

1. Le contrôle en boucle ouverte, appelé la "contrôlabilité" : le système qui nous intéresse s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), u(t)), \\ \text{conditions au bord,} \\ \text{condition initiale,} \\ \text{condition finale,} \end{array} \right. \quad (2)$$

le paramètre  $u$  étant appelé contrôle ou commande, évoluant au cours du temps mais ne dépendant pas directement de l'état  $y$  du système, et que l'on peut choisir à notre gré pour amener le système dans l'état souhaité. Le cas  $u = 0$  correspond le plus souvent au cas où on laisse le système évoluer librement comme dans l'équation (1). En général, on essaie d'atteindre  $y^F$  en un temps fini mais ce n'est pas nécessairement toujours le cas : on pourrait tout aussi bien imaginer que l'on souhaite contrôler le système en horizon de temps infini.

2. Le contrôle en boucle fermé, appelé la "stabilisation" : le système qui nous intéresse s'écrit alors sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), u(t, y(t))), \\ \text{conditions au bord,} \\ \text{condition initiale,} \\ \text{condition finale.} \end{array} \right. \quad (3)$$

La commande  $u$  dépend maintenant non seulement du temps mais aussi de l'état actuel du système : l'effet (i.e. l'action que l'on effectue) est relié à la cause (i.e. l'état du système), on a donc une boucle de causes et d'effets imbriqués que l'on nommera boucle de rétroaction ou "feedback". En général, on essaie d'atteindre un état d'équilibre du système en temps infini, mais ce n'est pas nécessairement toujours le cas : on pourrait très bien imaginer faire de la stabilisation en temps fini.

Un des avantages du contrôle en boucle ouverte est l'absence de rétroaction qui facilite l'étude mathématique du système : il suffit par exemple de trouver un bon cadre fonctionnel pour  $y$  et  $u$  qui assure à tout  $u$  fixé dans une certaine classe de fonctions le caractère bien posé (ou au minimum l'existence de solutions) du système. Son principal inconvénient est l'absence de robustesse : si jamais tout ne se passe pas exactement comme prévu (autrement dit si une petite perturbation vient modifier la dynamique du système), étant donné que le contrôle ne se préoccupe pas de l'état du système pour agir sur celui-ci, il se peut que l'état dans lequel on arrive soit très différent de celui souhaité. Pourtant, d'un point de vue pratique la notion de contrôlabilité peut aussi avoir son intérêt, notamment si le fait de mesurer l'état du système risque de le modifier d'une manière qu'on ne peut pas maîtriser et qui rend de ce fait caduque la mesure (on peut penser à des particules quantiques par exemple).

Le principal atout du contrôle en boucle fermée est la robustesse : comme la boucle dépend de l'état du système, toute perturbation suffisamment petite de la dynamique peut être prise en compte par la commande  $u$  qui pourra rectifier son action pour arriver à stabiliser tout de même le système. Au contraire, si la perturbation est trop grande, on peut avoir un effet boule de neige et un emballement du système qui risque d'être amplifié par le feedback, et donc aboutir à des grosses oscillations voire même à une explosion en temps fini des solutions (ce qui est le comportement opposé de celui souhaité). De plus, l'étude mathématique sera nécessairement plus compliquée, notamment pour trouver un cadre fonctionnel adéquat du fait de la réintroduction de l'état du système  $y$  dans l'équation.

Dans cette thèse, on s'intéressera exclusivement aux propriétés de contrôlabilité d'un certain nombre de systèmes linéaires ou non linéaires d'équations aux dérivées partielles d'évolution, et plus particulièrement aux questions suivantes : est-il possible d'agir sur le système en contrôlant seulement un nombre restreint d'équations du système (2) ? Combien cela coûte-t-il d'énergie à l'utilisateur de contrôler le système (2) ? Comment évolue ce coût quand le temps dont on dispose pour contrôler le système devient de plus en plus petit ? Quelle est la dépendance de ce coût vis-à-vis de certains paramètres de l'équation ?

Nous allons commencer par exposer quelques notions générales liées à la contrôlabilité de systèmes linéaires et non linéaires qui rendent plus précises les problématiques énoncées précédemment. Nous expliquerons ensuite les résultats obtenus dans cette thèse concernant la contrôlabilité interne du système de Navier-Stokes tridimensionnel, la contrôlabilité frontière uniforme de certaines équations de transport-diffusion et le coût du contrôle frontière en temps petit pour des équations dissipatives ou dispersives.

## 1.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Dans cette section, nous allons développer un cadre abstrait assez général qui permet de mettre en avant un certain nombre de notions et d'idées importantes en théorie du contrôle, et utilisant la théorie des semi-groupes (cf. notamment les articles [DR77], [CP78], [Sal87], [Wei89],[CW89], et les livres [KL05] et [TW09]). Ce cadre est intéressant car il permet d'obtenir une vision assez unifiée, même si l'on verra que l'on ne pourra pas nécessairement faire rentrer toutes les équations étudiées dans cette thèse dans ce cadre. Pour une introduction générale à la théorie des semi-groupes, on pourra consulter [Paz83].

### 1.2.i Le cadre abstrait

Dans ce paragraphe, on suit la présentation effectuée dans [Cor07, Section 2.3]. On considère un espace de Hilbert (réel ou complexe)  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ , que l'on appelle espace des états et correspondant à l'endroit où vit la solution de notre système dynamique, ainsi qu'un autre espace de Hilbert (réel ou complexe)  $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$ , que l'on appelle espace des contrôles et correspondant à l'endroit où vit la commande d'action sur notre système. Dans toute la suite,  $H$  sera pris comme "espace pivot" et donc systématiquement identifié à son dual (ce qui interdira d'identifier à leur duaux d'éventuels sous-espaces de  $H$  munis d'une topologie différente de celle de  $H$ ). On pourrait développer une théorie semblable dans des espaces de Banach mais cela compliquerait la présentation, et l'on verra que l'on peut en général dans la suite du manuscrit se limiter au cas des espaces de Hilbert. Dans tout ce qui suit, si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés,  $\mathcal{L}_c(E, F)$  désigne l'espace des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ .

On considère un opérateur non-borné  $(A, \mathcal{D}(A))$ , fermé, à domaine d'opérateur dense dans  $H$ . On munit  $\mathcal{D}(A)$  de la norme (équivalente à la norme du graphe) issue du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{D}(A)} := \langle u, v \rangle_H + \langle Au, Av \rangle_H.$$

$A$  peut alors être alternativement vu comme un opérateur borné de  $\mathcal{D}(A)$  dans  $H$ . On supposera que  $A$  est dissipatif, i.e.

$$\operatorname{Re} \langle Ay, y \rangle_H \leq 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}(A),$$

et on supposera aussi qu'il existe une certaine constante  $\tilde{\lambda} > 0$  telle que  $\tilde{\lambda}Id - A$  soit surjectif. C'est notamment le cas si  $A^*$  est lui-même supposé être dissipatif (cf. [Paz83, Preuve du Corollaire 4.4]). On se placera dorénavant dans ce dernier cas. Dans ces conditions on a le théorème de Lummer-Phillips (cf. [Paz83, Théorème 4.3]) :  $A$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur  $H$ , noté  $S(t)_{t \geq 0}$ . De plus, si l'on regarde le semi-groupe adjoint  $S(t)^*$ , on peut démontrer que c'est bien un semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal  $A^*$  (cf. [Paz83, Théorème 10.4]).

Intéressons-nous au problème suivant :

$$y' = Ay + Bu, \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

où  $B$  est un opérateur linéaire qui décrit la manière dont le contrôle  $u$  agit sur le système et  $T \in (0, \infty)$  est un temps final, avec donnée initiale  $y^0 \in H$ . Une première question à se poser est :



comment choisir  $B$  pour assurer le caractère bien posé du problème ? De manière habituelle, quand on veut résoudre un problème inhomogène, on applique la formule de Duhamel. Ici on obtiendrait

$$y(t) = S(t)y^0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds. \quad (5)$$

A priori, ceci nécessiterait donc qu'en tout temps on ait  $Bu \in H$ . Imposer cette condition serait trop restrictif (on ne pourrait pas traiter le cas des contrôles frontières utilisés dans la suite par exemple), il faut donc trouver un cadre abstrait plus large.

Une idée peut être de procéder un peu comme pour la définition des solutions par transposition des équations aux dérivées partielles. On part de (5) et on prend le produit scalaire avec un certain  $z \in H$ . On obtient

$$\langle y(t), z \rangle_H = \langle S(t)y^0, z \rangle_H + \int_0^t \langle S(t-s)Bu(s), z \rangle_H ds.$$

En considérant le propagateur adjoint  $S^*(t)$  associé à  $A^*$ , on a de manière formelle

$$\langle y(t), z \rangle_H = \langle y^0, S^*(t)z \rangle_H + \int_0^t \langle u(s), B^*S^*(t-s)z \rangle_U ds. \quad (6)$$

On remarque que cette expression a un sens en particulier dès que les conditions suivantes sont réunies simultanément :

1.  $z \in \mathcal{D}(A^*)$ ,
2.  $B^* \in \mathcal{L}_c(\mathcal{D}(A^*), U)$ , ce qui est équivalent à  $B \in \mathcal{L}_c(U, \mathcal{D}(A^*)')$ , (on a donc bien un cadre plus large que celui où  $B \in \mathcal{L}_c(U, H)$  puisque  $H \subset \mathcal{D}(A^*)'$ ).
3.  $\forall t \in [0, T]$ ,  $B^*S^*(\cdot) \in \mathcal{L}_c(\mathcal{D}(A^*), L^2((0, t), U))$  avec  $\mathcal{D}(A^*)$  muni ici de la topologie de  $H$ , i.e.  $\forall t \in [0, T], \exists C(t) > 0$  tel que

$$\int_0^t \|B^*S^*(\cdot)z\|_U^2 \leq C(t)\|z\|_H^2, \quad \forall z \in \mathcal{D}(A^*)'. \quad (7)$$

(Il suffit pour ceci d'utiliser deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intérieur de la partie intégrale de (6))

De plus, si jamais ces conditions sont vérifiées, l'inégalité (7) permet de prolonger  $B^*S^*$  en une application linéaire continue de  $H$  dans  $U$ , que l'on notera toujours  $B^*S^*$ , de telle sorte que (6) ait maintenant un sens dès que  $z \in H$ . L'inégalité (7) est appelée *condition d'admissibilité*, et un opérateur  $B$  vérifiant (7) est dit *admissible* pour le semi-groupe  $S(t)_{t \geq 0}$ . Elle assure que le contrôle qu'on tente de définir a bien un sens (et s'apparente souvent par exemple pour les contrôles frontières à un résultat de trace ou de régularité cachée). De plus, on peut démontrer qu'il suffit de vérifier l'inégalité (7) en un certain temps  $T_0 > 0$  (elle sera alors automatiquement vérifiée en tout temps  $t \geq 0$ ).

On pose donc ceci comme définition des solutions de (4) :

**Définition 1.** Une solution de (4) avec condition initiale  $y^0 \in H$  est une fonction  $y$  appartenant à  $C^0([0, T], H)$  vérifiant  $y(0) = y^0$  et l'identité suivante pour tout  $\tau$  dans  $[0, T]$  et tout  $z^\tau$  dans  $H$  :

$$\langle y(\tau), z^\tau \rangle_H - \langle y^0, S(\tau)^* z^\tau \rangle_H = \int_0^\tau \langle u(t), B^*S^*(\tau-t)z^\tau \rangle_U dt. \quad (8)$$

On a alors le théorème suivant (cf. [Wei89]) :

**Théorème 1.** *On suppose  $B$  admissible. Pour tout  $y^0$  dans  $H$  et tout  $u$  dans  $L^2((0, T), U)$ , Le système (4) avec condition initiale  $y^0$  a une unique solution  $y \in C^0([0, T], H)$ . De plus, il existe une constante  $C(T)$  (indépendante de  $y^0$  et  $u$  mais dépendant des opérateurs  $A$  et  $B$ ) telle que*

$$\|y\|_{C^0((0, T), H)} \leq C(T)(\|y^0\|_H + \|u\|_{L^2((0, T), U)}). \quad (9)$$

### 1.2.ii Contrôlabilité et observabilité

Nous allons maintenant définir deux définitions de contrôlabilité qui seront utilisées dans la suite.

**Définition 2.** Le système de contrôle (4) est *exactement contrôlable en temps  $T$*  si et seulement si pour tout  $y^0$  dans  $H$  et tout  $y^T$  dans  $H$ , il existe un contrôle  $u$  dans  $L^2((0, T), U)$  tel que la solution de (4) avec condition initiale  $y^0 \in H$  satisfasse  $y(T) = y^T$ .

Le système de contrôle (4) est *contrôlable à 0 en temps  $T$*  si et seulement si pour tout  $y^0$  dans  $H$ , il existe un contrôle  $u$  dans  $L^2((0, T), U)$  tel que la solution de (4) avec condition initiale  $y^0 \in H$  satisfasse  $y(T) = 0$ .

Le système (4) étant linéaire, quitte à retrancher à  $y$  une solution particulière du système non contrôlé, la contrôlabilité à 0 est équivalente à amener n'importe quelle condition initiale à n'importe quelle extrémité de trajectoire libre (c'est ce qu'on appelle la *contrôlabilité aux trajectoires*), ce qui confère donc une généralité à la contrôlabilité à 0 plus importante qu'initialement visible. Signalons que cette équivalence n'est pas vérifiée en général pour les systèmes non linéaires, comme par exemple le système de Navier-Stokes que l'on étudiera plus loin. Il est immédiat sur la Définition 2 que la contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité à 0, mais la réciproque est fautive en général. On démontre toutefois que ces notions sont équivalentes si le semi-groupe généré par  $A$  est en fait un groupe, autrement dit si le système est réversible en temps. Dans la suite de la thèse, on ne considérera plus que des systèmes paraboliques (pour lesquels la notion de contrôlabilité exacte n'est pas pertinente car on a un fort effet régularisant qui interdit de pouvoir atteindre n'importe quel état de  $H$ ) ou des systèmes réversibles en temps (pour lesquels la contrôlabilité exacte est équivalente à la contrôlabilité à 0, et où les coûts des contrôles sont identiques en un certain sens défini au Paragraphe 1.2.v). Ceci justifie que nous oublierons dorénavant la notion de contrôlabilité exacte et nous nous concentrerons sur la notion de contrôlabilité à 0.

On remarque qu'il n'y a aucune raison d'avoir unicité du contrôle amenant  $y^0$  à l'état final 0. Malgré tout, l'ensemble des contrôles formant dans ce cadre un convexe fermé d'un espace de Hilbert (c'est même un sous-espace vectoriel fermé), on peut choisir de manière naturelle un contrôle comme étant la projection de 0 sur ce convexe qui sera alors de norme  $L^2((0, T), U)$  minimale. On obtient un contrôle optimal (au sens où sa norme  $L^2((0, T), U)$  est minimale) noté  $u_{opt}(y^0)$ . On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 1.** *L'application  $y^0 \mapsto u_{opt}(y^0)$  est linéaire continue, de norme d'opérateur notée  $C_{opt}(T)$  et appelée coût du contrôle.  $C_{opt}(T)$  est la plus petite constante  $C > 0$  telle que pour tout  $y^0 \in H$ , il existe un certain  $u \in L^2((0, T), U)$  tel que*

$$\|u\|_{L^2((0, T), U)} \leq C\|y^0\|_H.$$

La constante  $C_{opt}(T)$  dépend aussi de l'opérateur  $A$  et du contrôle  $B$ , mais on choisit de l'indexer seulement par  $T$  dans cette partie (dans la suite, on pourra raffiner les dépendances

de  $C_{opt}(T)$  notamment quand on s'intéressera à des résultats de contrôlabilité uniforme). La notion de coût du contrôle et son comportement vis à vis de  $T$  (ou éventuellement de certains paramètres) aura une importance fondamentale dans ce qui suit.

À ce stade, il peut sembler difficile d'établir des résultats de contrôlabilité puisqu'il faut essayer de prouver l'existence d'un objet mathématique, ce qui revient très souvent à le construire explicitement. S'il existe quelques méthodes efficaces permettant de créer des contrôles (notamment la méthode des moments, qui sera présentée au Paragraphe 1.2.iv et concerne le cas de la dimension 1), un des outils principalement utilisé reste la dualité observabilité-contrôlabilité qui permet de se ramener à un problème mathématique plus "simple", en tout cas plus pratique (démontrer des inégalités). Commençons par préciser ce qu'on appelle un système observable.

**Définition 3.** Soit  $D$  un opérateur non-borné fermé à domaine dense dissipatif d'adjoint dissipatif sur  $H$  et  $O \in \mathcal{L}_c(\mathcal{D}(D), U)$ . On dit que le système rétrograde

$$\begin{cases} -z' = Dz, & t \in (0, T), \\ v = Oz, & t \in (0, T), \end{cases} \quad (10)$$

est *faiblement observable* au temps  $T > 0$  si et seulement si il existe une constante  $C(T) > 0$  telle que pour toute solution  $z$  de (10) avec donnée finale  $z^T$  dans  $H$ ,

$$\|z(0)\|_H^2 \leq C^2 \int_0^T \|v(t)\|_U^2 dt (= C^2 \int_0^T \|Oz(t)\|_U^2 dt). \quad (11)$$

On appelle constante d'observabilité (que l'on note  $C_{obs}(T)$ ) la borne inférieure (dont on montre qu'elle est atteinte) des constantes  $C > 0$  vérifiant (11).

Cette inégalité signifie exactement que la donnée de l'observation  $\int_0^T \|Oz(t)\|_U^2 dt$  permet de retrouver l'énergie "finale" (le système est rétrograde) de  $z$ , l'application qui à l'observation associe l'état final étant de plus continue. Le lien avec la contrôlabilité à 0 est le suivant (cf. [DR77] et [Lio88a]) :

**Théorème 2.** L'équation (4) est contrôlable à 0 en temps  $T$  si et seulement si l'équation

$$\begin{cases} -z' = A^*z, & t \in (0, T), \\ v = B^*z, & t \in (0, T) \end{cases} \quad (12)$$

est *faiblement observable en temps  $T$* . De plus, dans ce cas,  $C_{opt}(T) = C_{obs}(T)$ .

Le sens utilisé en pratique est celui observabilité  $\Rightarrow$  contrôlabilité car il permet de passer d'un problème d'existence à celui de démontrer une inégalité sur le système adjoint. De plus, pour les opérateurs différentiels, l'adjoint de l'opérateur n'est en général pas fondamentalement très différent de l'opérateur lui-même, ce qui peut faciliter l'étude de l'équation adjointe. Évidemment, ce théorème ne fournit aucune manière de démontrer effectivement une telle inégalité d'observabilité, c'est donc un outil fondamental mais l'essentiel du travail est encore à faire.

Signalons ici une des manières de démontrer l'implication observabilité  $\Rightarrow$  contrôlabilité comme présentée dans [Lio88a] sous le nom de méthode HUM pour "Hilbert Uniqueness Method". Fixons un certain  $y^0 \in H$ . Compte tenu de l'expression (8), une idée est de s'intéresser au problème suivant : trouver  $z^T \in H$  tel que

$$a(z^T, \tilde{z}^T) = l(\tilde{z}^T), \quad \forall \tilde{z}^T \in H, \quad (13)$$

où

$$a(z^T, \tilde{z}^T) = \int_0^T \langle v(t), \tilde{v}(t) \rangle_U dt$$

et

$$l(\tilde{z}^T) = \langle y^0, \tilde{z}(0) \rangle_H,$$

( $z, v$ ) (resp.  $\tilde{z}, \tilde{v}$ ) étant la solution de (12) avec condition finale  $z^T \in H$  (resp.  $\tilde{z}^T \in H$ ). On vérifie que la continuité de  $a$  provient de l'inégalité d'admissibilité (7) et celle de  $l$  provient du caractère bien posé du problème rétrograde (plus particulièrement de l'équivalent de l'inégalité (9) puisque l'équation rétrograde est non contrôlée). Il peut cependant arriver que  $a$  ne soit pas coercive et le théorème de Lax-Milgram peut ne pas s'appliquer en général. Néanmoins, si l'on ajoute au système une propriété d'*unicité rétrograde*, alors  $a$  devient un produit scalaire sur  $H$  (car l'inégalité d'observabilité implique que  $z(0) = 0$  et l'unicité rétrograde donne alors  $z^T = 0$ ). Soulignons que cette propriété n'est pas indispensable pour démontrer l'implication observabilité  $\Rightarrow$  contrôlabilité (cf. [Cor07, Preuve du Théorème 2.44]) mais elle est nécessaire pour la méthode HUM, et elle est en pratique quasiment toujours vérifiée (une inégalité de Carleman permet entre autres d'obtenir en général l'unicité rétrograde par exemple). On appelle  $\overline{H}$  le complété de  $H$  pour ce produit scalaire et on munit dorénavant  $\overline{H}$  du produit scalaire  $a$ . On remarque que l'inégalité d'observabilité (11) implique que

$$\|l(\tilde{z}^T)\| \leq C_{obs} \|y^0\|_H \sqrt{a(\tilde{z}^T, \tilde{z}^T)} = C_{obs} \|y^0\|_H \|\tilde{z}^T\|_{\overline{H}}$$

et donne la continuité de l'application linéaire  $l$  sur  $H$  muni de la topologie induite par  $\overline{H}$ .  $H$  étant dense dans  $\overline{H}$  par définition, le théorème de prolongement des applications uniformément continues nous assure que  $l$  se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur  $\overline{H}$  de même norme d'opérateur que  $l$  (et que nous nommerons encore  $l$ ). Le théorème de Riesz assure alors l'existence et l'unicité de  $z^T \in \overline{H}$  tel que l'égalité (13) ait lieu pour tout  $\tilde{z}^T \in \overline{H}$ . On pose alors  $u(t) := v = B^* S^*(T-t)z^T$  (on peut étendre  $B^* S^*$  de manière unique en une application linéaire continue de  $\overline{H}$  dans  $U$  grâce aux inégalités (7) et (11)), et on vérifie que la solution  $y$  de (4) avec condition initiale  $y^0$  et contrôle  $u$  satisfait bien  $y(T) = 0$ . De plus, on peut démontrer que  $u$  est bien le contrôle optimal en norme  $L^2((0, T), U)$ .

Cette méthode a l'avantage d'être assez flexible car elle peut se généraliser au cas où on aurait plus d'informations qu'une simple inégalité d'observabilité "ponctuelle" en  $t = 0$  comme dans (11) mais plutôt une inégalité intégrale à poids sur tout l'intervalle  $(0, T)$  (telle que donnée par des inégalités de Carleman par exemple), on étudierait alors un problème ressemblant à (13) où les inconnues seraient les fonctions  $z$  et  $\tilde{z}$  elles-mêmes et plus seulement leurs données finales, comme fait par exemple dans [FI96a, Preuve du Théorème 2.1] ou dans [FCGIP04, Preuve de la Proposition 2] (on pourra aussi consulter [Fur00]). Procéder ainsi changera nécessairement le contrôle et celui-ci ne sera plus nécessairement le contrôle optimal en norme  $L^2((0, T), U)$  (mais il sera optimal en un certain sens qui ne nous intéresse en général pas et est donc oublié comme expliqué dans [FI96b, Page 1364] : la variable  $z$  peut être vue comme la variable duale d'un problème d'optimisation mais on peut en général complètement oublier le problème d'optimisation sous-jacent et se concentrer sur l'étude de  $z$ ). Ce raffinement de la méthode HUM est crucial en vue d'étudier les systèmes non linéaires car on obtiendra alors des résultats de contrôlabilité dans des espaces à poids qui permettront de revenir au cas non linéaire si les poids ont été choisis correctement.

### 1.2.iii Le cas des opérateurs diagonaux et des contrôles scalaires

Ce paragraphe est inspiré de [HR83] et [Wei88] (on pourra aussi consulter [TW09]) et vise à exprimer de manière plus simple l'équation (4) et la condition d'admissibilité (7) sous certaines

conditions sur  $H$  et  $A$ . Pour simplifier, on se place dans le cas où l'espace de Hilbert  $H$  est séparable et où l'opérateur  $A$  est autoadjoint ou anti-autoadjoint à résolvante compacte (on pourrait généraliser ceci à des opérateurs diagonaux dans des espaces de Banach, pourvu que la base de vecteurs propres soit une base de Riesz, et à des contrôles à valeur dans un espace vectoriel de dimension finie) et où  $U = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'opérateur de contrôle se réécrit alors sous la forme d'un produit  $Bu = bu$ , avec  $b \in D(A)'$  et  $u \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $A$  soit autoadjoint (on pourrait faire exactement la même chose avec  $A$  anti-autoadjoint). On a alors une base hilbertienne de vecteurs propres notés  $e_j$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) et on appelle  $-\lambda_j$  la valeur propre associée à  $e_j$ . Dans ce cas

$$\|f\|_H^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\langle f, e_j \rangle_H|^2.$$

On suppose que

$$\inf_{k \in \mathbb{N}^*} \lambda_k > -\infty,$$

(cette condition est supprimée dans les cas des opérateurs anti-autoadjoints) de telle sorte que quitte à remplacer  $A$  par  $A - \lambda Id$  avec  $\lambda \geq 0$ , on supposera

$$\inf_{k \in \mathbb{N}^*} \lambda_k > 0.$$

On introduit ainsi les espaces abstraits suivants, pour  $\gamma \geq 0$  :

$$X_\gamma := \mathcal{D}((-A)^\gamma),$$

et  $X_{-\gamma}$  son dual avec espace pivot  $H$ . On peut munir  $X_\gamma$  de la norme

$$\|f\|_{X_\gamma}^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} (1 + \lambda_j^\gamma) |\langle f, e_j \rangle_H|^2,$$

et  $X_{-\gamma}$  de la norme

$$\|f\|_{X_{-\gamma}}^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1 + \lambda_j^\gamma} |\langle f, e_j \rangle_H|^2.$$

On observe que  $X_1$  s'identifie à  $\mathcal{D}(A)$  (et donc  $X_{-1}$  s'identifie à  $\mathcal{D}(A)'$ ).

On peut aussi décomposer  $b$  sur les  $e_k$  et on pose

$$b_k := \langle b, e_k \rangle_{\mathcal{D}(A)', \mathcal{D}(A)}.$$

Décomposons la condition initiale sous la forme

$$y^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x),$$

avec  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ . Compte tenu de l'expression (8), définir les solutions de (4) revient maintenant à avoir pour tout  $k$  et tout  $t \in (0, T)$

$$\langle y(t, x), e_k \rangle_H = a_k e^{-\lambda_k t} + b_k \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} u(s) ds, \quad (14)$$

ce qui définit de manière unique  $y$ .

On connaît une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'admissibilité de  $b$  pour le semi-groupe engendré par  $A$ , qui est basé sur le concept de *mesure de Carleson* (voir [HR83] et [Wei88]). Nous n'avons néanmoins pas vraiment besoin dans ce qui suit d'introduire ce concept et on peut se contenter de la condition suffisante suivante, qui est une conséquence du critère donné dans [HR83] :

**Théorème 3.** *On suppose que la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est régulière au sens que*

$$\gamma((\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) := \inf_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n| > 0. \quad (15)$$

*Si  $\|(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}\|_\infty < +\infty$ , alors  $b$  est admissible.*

### 1.2.iv Équations en dimension 1 : méthode des moments

La méthode des moments est une méthode spécifique au cas où la dimension d'espace est égale à 1 (on peut aussi considérer des systèmes d'équations unidimensionnelles comme dans [AKBGBdT11a] par exemple). On s'inspire ici des présentations faites dans [FR71] et [TT07]. Pour des développements plus complets sur cette méthode, on pourra lire [KL05] ou [AI95].

On reprend les notations du Paragraphe 1.2.iii. Par l'égalité (14), on observe qu'imposer  $y(T, x) = 0$  revient à imposer en pour tout  $k$  que

$$a_k e^{-\lambda_k T} + b_k \int_0^T e^{-\lambda_k(T-t)} u(t) dt = 0.$$

Ceci nécessite que l'on doive faire en sorte que chacun des  $b_k$  soit différent de 0 (ou alors on ne pourra pas partir de conditions initiales telles que  $a_k \neq 0$ ) et que pour tout  $k$  on ait

$$\int_0^T e^{\lambda_k t} u(t) dt = -\frac{a_k}{b_k}. \quad (16)$$

Si l'on suppose que l'on arrive à créer une famille biorthogonale à la famille d'exponentielles  $\{t \mapsto e^{\lambda_n t}\}$  dans  $L^2(0, T)$ , i.e. une famille  $\{\psi_m\}_{m \in \mathbb{N}^*}$  telle que pour tout  $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$  on ait

$$\langle e^{\lambda_k t}, \psi_l \rangle_{L^2(0, T)} = \delta_{kl}, \quad (17)$$

alors il suffira de poser comme contrôle

$$u(t) := - \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{a_k}{b_k} \psi_k(t),$$

pour peu que cette série ait un sens, ce qui est notamment le cas si les  $|b_k|$  sont minorés par un nombre strictement positif. Il est connu (cf. [AI95]) qu'une condition suffisante abstraite pour qu'une telle famille existe est que la famille  $\{t \mapsto e^{\lambda_n t}\}$  soit une *base de Riesz* de  $L^2(0, T)$ . D'un point de vue plus concret, une manière de procéder est d'utiliser le théorème de Paley-Wiener (voir [PW87], [Sch52] ou [Hör76]). En effet, on peut remarquer que l'égalité (17) revient à démontrer que  $\mathcal{F}(\psi_j)(-i\lambda_k) = \delta_{jk}$ , (où  $\mathcal{F}$  est l'opérateur de transformation de Fourier) pourvu que le support de  $\psi_j$  soit inclus dans  $(0, T)$ . Or il est très simple de trouver des fonctions  $J_k$  telles que  $J_k(-i\lambda_j) = \delta_{kj}$  : il suffit de poser

$$J_k(z) := \frac{\Psi(z)}{\Psi'(-i\lambda_k)(z + i\lambda_k)}, \quad (18)$$

où  $\Psi$  est n'importe quelle fonction admettant les  $-i\lambda_j$  comme racines simples, par exemple un produit de Weierstrass de la forme

$$\Psi(z) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - iz/\lambda_k).$$

On vérifie que sous des hypothèses raisonnables sur les  $\lambda_k$ , les fonctions  $J_k$  vérifient bien une hypothèse de croissance exponentielle assurant que la transformée de Fourier inverse  $\mathcal{F}^{-1}(J_k)$

est à support compact (il suffit alors de faire une transformation affine pour remettre le support sur  $(0, T)$ ). Pourtant, en général cette transformée de Fourier inverse ne sera qu'une mesure (ou une distribution) à support compact et non une fonction car  $J_k$  n'a pas de propriétés d'intégrabilité suffisantes sur la droite réelle. Cette fonction  $J_k$  seule ne va donc pas suffire pour conclure, l'idée est donc de multiplier  $J_k$  par une certaine fonction  $M_k$  (appelé multiplicateur) ayant un comportement asymptotique assurant que le produit  $M_k J_k$  reste de type exponentiel, a les mêmes racines que  $J_k$  et a un comportement suffisamment agréable sur la droite réelle, puis de considérer  $\mathcal{F}^{-1}(J_k M_k)$ . Notamment, si l'on souhaite appliquer la version du théorème de Paley-Wiener donnée dans [Rud66, Théorème 19.3], il est suffisant d'imposer  $M_k J_k \in L^2(\mathbb{R})$  (en plus de l'inégalité de type exponentielle).

### 1.2.v Le coût du contrôle en temps petit

Une question souvent intéressante est de considérer le comportement du coût du contrôle  $C_{opt}(T)$  quand  $T$  tend vers 0 pour les systèmes contrôlables en temps arbitrairement petit. Il est assez naturel de s'attendre à ce que ce coût explose puisqu'il sera de plus en plus difficile d'amener rapidement une donnée initiale non nulle à 0. On peut se demander à quelle vitesse ce coût explose. Cette question a été totalement résolue dans le cas des EDO où l'explosion est peu violente, de la forme  $T^{-\gamma}$  pour un certain  $\gamma > 0$  relié à l'exposant minimum nécessaire pour satisfaire le critère de Kalman (cf. [Sei88] et [SY96]). En ce qui concerne les EDP, cette question est moins bien comprise, et il n'y a pas vraiment de cas où le comportement exact de  $C_{opt}(T)$  est connu. Néanmoins, on dispose d'un certain nombre de résultats pour les équations paraboliques ou de Schrödinger avec des contrôles distribués ou au bord.

Intéressons-nous pour commencer à l'équation de la chaleur scalaire sur un intervalle  $(0, L)$  avec  $L > 0$  avec un contrôle sur le bord gauche

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ z(\cdot, 0) = w(t) & \text{dans } (0, T), \\ z(\cdot, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \end{cases} \quad (19)$$

avec condition initiale  $z(0, \cdot) = z^0 \in H^{-1}(0, L)$  et contrôle  $w \in L^2(0, T)$  (on verra au Paragraphe 5.3.i que ce type de contrôle est bien admissible pour le semi-groupe généré par le Laplacien sur  $H^{-1}(0, L)$ ). Il est connu depuis longtemps (cf. [FR71] pour le cas unidimensionnel et plus récemment [LR95], [FI96a] et [Léa10] pour des résultats en dimension quelconque et avec des termes d'ordre 0 ou 1) qu'une telle équation est contrôlable à zéro en temps arbitrairement petit. On appelle  $C_H(T, L)$  le coût du contrôle (la longueur est une donnée géométrique qui interviendra de manière importante ici).

Dans tout ce qui suit,  $f(x) \lesssim g(x)$  (avec  $f$  et  $g$  des fonctions à valeurs complexes ayant pour variable un certain  $x$  dans un certain ensemble  $\mathcal{S}$ ) signifie qu'il existe une certaine constante  $C > 0$  indépendante de  $x$  (mais dépendant éventuellement d'autres paramètres) telle que pour tout  $x \in \mathcal{S}$ , on ait

$$|f(x)| \leq C|g(x)|. \quad (20)$$

Un tel  $C$  est appelé une constante implicite dans l'inégalité  $f(x) \lesssim g(x)$ . De plus,  $f(x) \simeq g(x)$  signifie qu'on a simultanément  $f(x) \lesssim g(x)$  et  $g(x) \lesssim f(x)$ . La notation  $f(x) \lesssim g(x, A^+)$  signifie que pour tout  $K > A$ , il existe une constante  $C(K)$  telle que

$$|f(x)| \leq C(K)g(x, K).$$

(dans ce cas, la constante  $C(K)$  devant  $g$  peut éventuellement exploser au fur et à mesure que  $K$  se rapproche de  $A$ ) On introduit

$$\alpha^* := \limsup_{T \rightarrow 0} T \frac{\ln(C_H(T, L))}{L^2}$$

et

$$\alpha_* := \liminf_{T \rightarrow 0} T \frac{\ln(C_H(T, L))}{L^2}.$$

$\alpha^*$  et  $\alpha_*$  sont bien les bonnes quantités à considérer car il a été démontré que  $\alpha_* > 0$  dans [Güi85] et que  $\alpha^* < +\infty$  dans [Sei84]. Un argument de changement d'échelle permet d'observer que  $\alpha^*$  et  $\alpha_*$  sont des constantes numériques ne dépendant pas de  $L$  et  $T$ . Ces résultats ont été raffinés par la suite : on a en fait nécessairement  $\alpha_* \geq 1/4$  (cf. [Mil04b] ou [TT07]), autrement dit que pour  $T$  suffisamment petit  $e^{L^2/(4T)} \lesssim C_H(T, L)$ , ce qui peut se démontrer en utilisant des solutions très singulières de l'équation de la chaleur et une formule de Varadhan sur le noyau de la chaleur (cf. [Var67]). En ce qui concerne les bornes supérieures, [Sei84] donne  $\alpha^* < 171$ , ce qui peut être amélioré en  $\alpha^* < 33$  grâce aux résultats sur les sommes d'exponentielles de [Sei86]. Ceci a été amélioré en  $\alpha^* \leq 2(36/37)^2$  dans [Mil04a] et la meilleure borne supérieure connue à ce jour est  $\alpha^* \leq 3/4$  dans [TT07].

En fait il est conjecturé (notamment dans [Mil04a] et [EZ11b]) que

**Conjecture 1.**  $\alpha^* = 1/4 = \alpha_*$ , i.e. pour  $T$  suffisamment petit  $C_H(T, L) \lesssim e^{(L^2/4)^+/T}$ .

En utilisant la dualité contrôlabilité-observabilité du Théorème 2, on peut aussi s'intéresser de manière équivalente à l'inégalité

$$\int_0^L |\varphi(T, x)|^2 \leq C_H(T, L)^2 \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2, \quad (21)$$

où  $\varphi$  satisfait l'équation directe

$$\begin{cases} \varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ \varphi(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ \varphi(\cdot, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ \varphi(0, \cdot) = \varphi^0 & \text{dans } (0, L), \end{cases} \quad (22)$$

avec  $\varphi^0 \in H_0^1(0, L)$ . Dans le Théorème 2, l'inégalité du type de (21) concernait le problème adjoint de (3.1.1) mais on peut aussi choisir de considérer une équation dans le sens direct en remplaçant  $t$  par  $T - t$ . Pour obtenir des inégalités d'observabilité du type de (21), un des outils principaux est les *inégalités de Carleman paraboliques* telles qu'utilisées dans [FI96a] pour démontrer des résultats de contrôlabilité pour les systèmes paraboliques d'ordre 2 en dimension quelconque. De telles inégalités permettent d'obtenir des inégalités intégrales à poids singulier en temps  $t = 0$  (cette singularité est indispensable à cause du caractère irréversible du semi-groupe de la chaleur) sur une solution  $\varphi$  de l'équation (22) sous les formes suivantes :

$$\int_0^T e^{-\frac{C_1(L)}{t}} |\varphi(t, x)|^2 dt \leq C_2(T, L) \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dx \quad (23)$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-\frac{C_3(L)}{t}} |\varphi(t, x)|^2 dt \leq C_4(L) \int_0^\infty |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dx, \quad (24)$$

pour certaines constantes  $C_1(L)$ ,  $C_2(L)$ ,  $C_3(L)$  et  $C_4(L)$ . Les liens entre les inégalités (21), (23) et (24) ont été étudiés dans [Mil06b].



Le fait que l'inégalité (23) permette de donner une inégalité d'observabilité provient essentiellement du caractère dissipatif de l'équation de la chaleur. En effet, supposons qu'on se fixe un certain  $0 < r < 1$ . La décroissance en norme  $L^2(0, L)$  au cours du temps des solutions de l'équation (22) permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L e^{-\frac{C_1(L)}{t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt &\geq e^{-\frac{C_1(L)}{rT}} \int_{rT}^T \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt \\ &\geq (1-r)T e^{-\frac{C_1(L)}{rT}} \int_0^L |\varphi(T, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité d'observabilité

$$\int_0^L |\varphi(T, x)|^2 dx \leq C_2(T, L) \frac{e^{\frac{C_1(L)}{rT}}}{T(1-r)} \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt, \quad (25)$$

qui implique en outre que

$$C_H(T, L)^2 \leq C_2(T, L) \frac{e^{\frac{C_1(L)}{rT}}}{T(1-r)},$$

ce qui implique (puisque  $r$  est arbitrairement proche de 1)

$$C_H(T, L)^2 \lesssim C_2(T, L) e^{\frac{C_1(L)^+}{T}}. \quad (26)$$

Du fait de la manière dont sont généralement démontrées les inégalités de Carleman paraboliques (cf. [FI96a]), celles-ci ne sont pas toujours adaptées au problème de l'estimation précise du coût du contrôle, car les constantes  $C_1$  et  $C_2(T)$  sont en général loin d'être optimales, voire pas nécessairement explicitement connues, et la majoration (26) sera alors peu intéressante. Toutefois, il est démontré dans [EZ11b] (en utilisant une méthode originale de transmutation des solutions de l'équation des ondes en solutions de l'équation de la chaleur) l'inégalité suivante :

$$\int_0^\infty \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \leq C(L) \int_0^\infty |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt, \quad (27)$$

(où  $C(L)$  peut dépendre de  $L$  mais pas de  $T$ ), qui est optimale (cf. [FR71]). On peut alors déduire de l'inégalité (27) l'estimation en temps fini suivante :

$$\int_0^\infty \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \leq C_{int}(T, L) \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt, \quad (28)$$

où  $C_{int}(T, L)$  dépend de  $T$  et de  $L$ . Malheureusement, dans [EZ11b] l'inégalité (28) est démontrée en utilisant un raisonnement par l'absurde, ce qui ne permet pas de donner une estimation précise de  $C_{int}(T, L)$ .

Une conjecture naturelle (cf. [EZ11b, Section 1.2, Section 3.2, Section 5]) serait que la constante  $C_{int}(T, L)$  n'explose pas de façon trop violente, au sens suivant :

**Conjecture 2.** *Soit  $\delta > 0$  et  $L > 0$ . On peut choisir  $C_{int}(T, L)$  de telle sorte que*

$$C_{int}(T, L) = O_{T \rightarrow 0} (e^{\frac{\delta}{T}}).$$

En utilisant des calculs similaires à ceux que nous avons fait pour passer de (23) à (26), on peut démontrer :

**Proposition 2.** *La Conjecture 2 implique la Conjecture 1.*

Intéressons-nous maintenant à des résultats du même type pour l'équation de Schrödinger contrôlée sur le bord gauche :

$$\begin{cases} iz_t + z_{xx} = 0 & \text{dans } Q, \\ z(\cdot, 0) = w(t) & \text{dans } (0, T), \\ z(\cdot, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \end{cases} \quad (29)$$

avec condition initiale  $z(0, \cdot) = z^0 \in H^{-1}(0, L)$  et contrôle  $w \in L^2(0, T)$ , dont on sait qu'elle est exactement contrôlable en temps arbitrairement petit (cf. [Leb92] et [LT92] qui donnent des résultats beaucoup plus généraux en dimension quelconque). Examinons le lien entre la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité à 0. Appelons  $C_S(T, L)$  le coût du contrôle à 0. Soient maintenant  $y^0 \in H$  et  $y^1 \in H$ . Appelons  $S$  le propagateur du semi-groupe associé à l'équation. En reprenant ce qui est fait dans [Cor07, Section 2.3, Théorème 2.41], on pose  $\tilde{y}^0 := y^0 - S(-T)y^1$ . On considère un contrôle  $u$  qui envoie  $\tilde{y}^0$  à 0 et tel que

$$\|u\|_{L^2((0,T),U)} \leq C_S(T, L) \|\tilde{y}^0\|_{H^{-1}(0,L)}. \quad (30)$$

Alors on voit par linéarité de l'équation que ce contrôle envoie  $y^0$  sur  $y^1$  en temps  $T$ . De plus, de (30) on déduit (en utilisant la conservation de la norme  $H^{-1}$ )

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0,T)} &\leq C_S(T, L) (\|y^0\|_{H^{-1}(0,L)} + \|y^1\|_{H^{-1}(0,L)}) \\ &\leq 2C_S(T, L) \max(\|y^0\|_{H^{-1}(0,L)}, \|y^1\|_{H^{-1}(0,L)}). \end{aligned} \quad (31)$$

Finalement, envoyer  $y^0$  sur  $y^1$  ne coûte (à une constante multiplicative près) pas plus cher que d'envoyer l'élément parmi  $y^0$  et  $y^1$  de plus grande norme à 0, et ceci justifie que l'on ne s'intéresse plus qu'à la contrôlabilité à 0 de cette équation.

On peut introduire pour cette équation les mêmes quantités  $\alpha^*$  et  $\alpha_*$  (en remplaçant  $C_H(T, L)$  par  $C_S(T, L)$ ), telles que  $\alpha_* \geq 1/4$  et  $\alpha^* \leq 4(36/37)^2$  (cf. [Mil04b]). La borne supérieure a été améliorée dans [TT07] en  $\alpha^* \leq 3/2$  et on a exactement la même conjecture que pour l'équation de la chaleur.

Signalons que l'étude spécifique de la dimension 1 est en partie justifiée par la méthode de transmutation qui a été introduite dans [Phu01] puis développée plus systématiquement dans [Mil06a], en effet n'importe quel résultat sur les contrôles rapides en dimension 1 sur une équation de type chaleur ou Schrödinger fournira de manière quasi-automatique un résultat en dimension quelconque (comme par exemple dans [TT07]), toutefois sous des restrictions géométriques techniques sur le domaine de contrôle inhérentes à la méthode (on doit passer par l'intermédiaire du contrôle de l'équation des ondes, et on doit donc supposer que le domaine de contrôle vérifie la condition de contrôle géométrique appelée GCC, cf. [BLR92] et [BG97]).

### 1.3 Résolution algébrique de systèmes différentiels et lien avec la théorie du contrôle

Les idées que nous utilisons ici sont inspirées de [Gro86, Section 2.3.8]. Elles visent à expliquer comment contrôler des systèmes d'équations avec un contrôle ayant moins de composantes que le nombre total d'équations. Ceci est d'un intérêt aussi théorique que pratique, le coût de la fabrication d'un système de contrôle pour un industriel étant d'autant moins élevé que le nombre d'actionneurs à utiliser sera bas. Évidemment, si les équations sont découplées, il n'y aura aucune chance d'espérer diminuer le nombre de contrôles, on ne peut donc s'intéresser qu'à des systèmes couplés, le contrôle sur les équations non contrôlées se

faisant de manière *indirecte* via les termes de couplage. La réduction du nombre de contrôles pour les systèmes couplés hyperboliques ou paraboliques est un sujet d'étude extrêmement vivant dans lequel la littérature s'est beaucoup enrichie ces dernières années (cf. par exemple [AKBDGB09], [AKBGBdT11a] ou [Mau13] pour les systèmes paraboliques couplés, [CG09a] et [CG13a] pour des systèmes de type Navier-Stokes linéarisés, [ABL13] et [RdT11] pour les systèmes hyperboliques couplés), mais où il reste aussi beaucoup de points non compris. On pourra notamment lire [AKBGBdT11c] pour un aperçu des problématiques actuelles en ce qui concerne les systèmes paraboliques couplés.

Présentons ici une manière originale de procéder que nous avons développée dans [CL12]. On suppose que l'on dispose d'un résultat de contrôle du système quand on contrôle toutes les équations, puis on essaie de "supprimer" des contrôles de manière algébrique. Pour ce faire, introduisons la notion de systèmes différentiels algébriquement résolubles.

Considérons  $Q_0$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ), des entiers naturels  $k, m, p, s$ , et deux opérateurs différentiels  $\mathcal{L} : C^\infty(Q_0)^m \rightarrow C^\infty(Q_0)^s$  et  $\mathcal{B} : C^\infty(Q_0)^k \rightarrow C^\infty(Q_0)^s$ . On considère un certain  $f \in C^\infty(Q_0)^s$  et l'équation

$$\mathcal{L}y = \mathcal{B}f, \quad (32)$$

où l'inconnue est  $y$ .

**Définition 4.** L'équation (32) est *algébriquement résoluble* si et seulement si il existe un opérateur différentiel  $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^p \rightarrow C^\infty(Q_0)^m$  tel que, pour tout  $f \in C^\infty(Q_0)^k$ ,  $\mathcal{M}f$  soit solution de (32), i.e. tel que

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \mathcal{B}. \quad (33)$$

L'égalité (33) fait bien mieux que résoudre le système (32), elle réalise en fait une factorisation à droite de l'opérateur  $\mathcal{B}$  à l'aide de  $\mathcal{M}$ , qui est lui-même un opérateur différentiel, et est donc notamment un opérateur local conservant le support des fonctions, ce qui va se révéler déterminant par la suite. On observe que l'équation (33) équivaut à

$$\mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = \mathcal{B}^*, \quad (34)$$

en notant  $\mathcal{O}^*$  l'adjoint formel d'un opérateur  $\mathcal{O}$ .

Expliquons la méthode algébrique sur un exemple simple pour bien faire comprendre l'idée.

**Exemple 1.** Soient  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  des nombres réels. On désire trouver  $x_1, x_2$  aussi dans  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  vérifiant

$$a_1x_1 - a_2x_1' + a_3x_1'' + b_1x_2 - b_2x_2' + b_3x_2'' = f. \quad (35)$$

C'est un système analytiquement sous-déterminé (il y a plus d'inconnues (2) que d'équations (1)), on a donc une chance de trouver de tels  $x_1, x_2$ . On peut écrire (35) sous la forme  $\mathcal{L}(x_1, x_2) = \mathcal{B}f$  avec  $\mathcal{B} = Id_{C^\infty(\mathbb{R})}$  et

$$\mathcal{L} = (a_1 - a_2\partial_t + a_3\partial_{tt}, b_1 - b_2\partial_t + b_3\partial_{tt}).$$

Pour chercher une solution à ce problème, on peut essayer de trouver un opérateur différentiel  $\mathcal{M}$  tel que  $\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = Id$ . En passant à l'adjoint, ceci équivaut à trouver  $\mathcal{M}^*$  tel que  $\mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = Id$ . Notamment nécessairement

$$\mathcal{L}^*x = 0 \Rightarrow x (= \mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^*x) = 0.$$

Calculons

$$\mathcal{L}^* = \begin{pmatrix} a_1 + a_2\partial_t + a_3\partial_{tt} \\ b_1 + b_2\partial_t + b_3\partial_{tt} \end{pmatrix}.$$

Réolvons  $\mathcal{L}^*x = 0$ . Ce système est maintenant sur-déterminé analytiquement, mais d'un point de vue algébrique, si l'on considère  $x, x', x''$  comme des inconnues algébriques indépendantes (autrement dit si l'on "oublie" que  $x'$  est la dérivée de  $x$  et que  $x''$  est la dérivée seconde de  $x$ ), il est sous-déterminé car il y a seulement 2 équations et 3 inconnues.

On est amené à résoudre

$$\begin{cases} a_1x + a_2x' + a_3x'' = 0, \\ b_1x + b_2x' + b_3x'' = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Pour rendre ce système déterminé algébriquement, dérivons ces deux équations. On obtient

$$\begin{cases} a_1x' + a_2x'' + a_3x''' = 0, \\ b_1x' + b_2x'' + b_3x''' = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Si l'on s'intéresse au caractère purement algébrique du système formé par les équations de (36) et (37), on obtient un système linéaire de 4 équations à 4 "inconnues" (alors qu'au départ on a seulement 2 équations et 3 "inconnues"), que l'on peut écrire sous la forme  $C(x, x', x'', x''') = 0$  avec

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que sous une certaine condition sur les coefficients (le déterminant de  $C$  est non nul, i.e.  $C$  est inversible), nécessairement  $x \equiv 0$ . De plus, on peut alors alternativement voir  $C^{-1}$  comme un opérateur différentiel  $\mathcal{N}$ . L'égalité  $C^{-1}C = \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$  peut alors se réécrire sous forme différentielle  $\mathcal{N} \circ \mathcal{L}^*x = x$  de telle sorte que  $\mathcal{M} = \mathcal{N}^*$  convienne pour obtenir  $\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \text{Id}$ . Plus précisément, si on suppose  $C$  inversible et que l'on écrit  $C^{-1}$  sous la forme

$$C^{-1} := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix},$$

On a alors

$$C^{-1}C \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ x''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ x''' \end{pmatrix},$$

et donc en regardant la première ligne de cette équation on obtient

$$x = c_{11}(a_1x + a_2x' + a_3x'') + c_{12}(b_1x + b_2x' + b_3x'') + c_{13}(a_1x' + a_2x'' + a_3x''') + c_{14}(b_1x' + b_2x'' + b_3x''').$$

On veut écrire ceci sous la forme  $\mathcal{N}(\mathcal{L}^*x) = x$  avec

$$\mathcal{L}^*x = \begin{pmatrix} a_1x + a_2x' + a_3x'' \\ b_1x + b_2x' + b_3x'' \end{pmatrix},$$

on choisit donc

$$\mathcal{N} := (c_{11}\text{Id} + c_{13}\partial_t, c_{12}\text{Id} + c_{14}\partial_t),$$

de telle sorte que

$$\mathcal{N}^* = \mathcal{M} = \begin{pmatrix} c_{11}Id - c_{13}\partial_t \\ c_{12}Id - c_{14}\partial_t \end{pmatrix}$$

convient. On dira qu'on a résolu de manière algébrique le système différentiel  $\mathcal{L}(x_1, x_2) = \mathcal{B}f$ .

On peut généraliser le procédé précédent à n'importe quelle équation sous-déterminée analytiquement. Notamment, si l'on s'intéresse à un système de contrôle du type de (4) (pourvu que  $A$  soit un opérateur différentiel) et que l'on suppose à  $u$  fixé le système bien posé, alors en considérant maintenant

$$y' = Ay + Bu + f, \quad t \in [0, T], \quad (38)$$

(où  $f$  est un terme source) comme un système en  $(y, u)$ , ce système est nécessairement sous-déterminé analytiquement, de telle sorte que si l'on a suffisamment de régularité on peut dériver (38) par rapport au temps et à toutes les variables apparaissant dans l'opérateur différentiel  $A$  et tenter d'appliquer la méthode précédente. L'adjoint est sur-déterminé analytiquement mais en général, si l'on considère les composantes de la solution du système adjoint et de ses dérivées comme des inconnues algébriques indépendantes, il sera sous-déterminé algébriquement comme vu dans l'exemple précédent. Néanmoins, en dérivant, il finira nécessairement toujours par y avoir autant (ou plus) d'inconnues "algébriques" que d'équations, et de manière générique (cf. [Gro86, Section 2.3.8]), on pourra comme dans l'exemple précédent inverser l'opérateur algébrique crée en dérivant les équations. D'un point de vue du contrôle, la résolution algébrique peut être intéressante pour supprimer des composantes du contrôle grâce à la proposition "heuristique" suivante (pour une version plus détaillée, voir la Proposition 1.3.1 du Chapitre 1) :

**Proposition 3.** Soit  $T > 0$  un temps final, soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $Q_0 := (0, T) \times \Omega$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C^\infty(Q_0)^m &\rightarrow C^\infty(Q_0)^s, \\ \mathcal{B} : C^\infty(Q_0)^k &\rightarrow C^\infty(Q_0)^s \end{aligned}$$

des opérateurs différentiels (où  $\mathcal{L}$  est supposé représenter une équation d'évolution), et soit  $m < s$ . Considérons un système de contrôle de la forme

$$\mathcal{L}y = (f^1, f^2, \dots, f^m, 0, \dots, 0), \quad (39)$$

où on agit uniquement sur les  $m$  premières équations. On introduit aussi le système de contrôle suivant, où l'on contrôle à priori toutes les équations dans l'image de  $\mathcal{B}$  (le contrôle est  $g$ ) :

$$\mathcal{L}y = \mathcal{B}g. \quad (40)$$

Enfin, on introduit aussi le système différentiel (à inconnue  $y, f^1, \dots, f^m$  et à donnée  $g$ ) :

$$\tilde{\mathcal{L}}(y, f^1, \dots, f^m) = \mathcal{B}g, \quad (41)$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}(y, f^1, \dots, f^m) = \mathcal{L}y - (f^1, f^2, \dots, f^m, 0, \dots, 0).$$

On suppose que :

1. Le système (41) est algébriquement résoluble.
2. L'on sait contrôler (40) à 0, dans le sens que pour toute donnée initiale  $y^0$ , il existe une trajectoire  $(y, g)$  de (40) vérifiant  $y(0) = y^0$  et  $y(T, \cdot) = 0$  où le contrôle  $g$  (ayant toutes ses composantes) peut être choisi à support compact en temps.

Alors on sait contrôler notre système avec seulement  $m$  composantes (i.e. on sait contrôler (39).)

En effet, si l'on contrôle avec toutes les composantes dans l'image de  $\mathcal{B}$  le système (40), on va trouver un certain  $g$  à support compact en temps et une certaine trajectoire  $\hat{y}$  tels que  $\mathcal{L}\hat{y} = \mathcal{B}g$  et envoyant  $y^0$  sur 0 en temps  $T$ . Algébriquement on trouve un certain  $(\tilde{y}, f^1, \dots, f^m) (= \mathcal{M}g)$  solution de (41), de telle sorte que

$$\mathcal{L}\tilde{y} = (f^1, f^2, \dots, f^m, 0, \dots, 0) + \mathcal{B}g.$$

$\tilde{y}$  et les  $f_i$  sont alors à support compact en temps. On pose pour conclure  $y = \hat{y} - \tilde{y}$ . Alors  $y$  vérifie (39) (les contrôles sont les  $f_i$ , et ils sont bien présents uniquement sur les  $m$  premières composantes car on a fait en sorte que le terme en  $\mathcal{B}g$  disparaisse) et envoie bien  $y^0$  sur 0 en temps  $T$  (car  $\tilde{y}$  est nul en  $t = 0$  et  $t = T$ ).

Ainsi, grâce à cette proposition, on peut supprimer de manière algébrique des contrôles, pourvu que l'on dispose déjà d'un résultat de contrôle adapté avec plus de contrôles et que l'on prouve un résultat de résolution algébrique pour un système sous-déterminé, que l'on peut ramener grâce à la méthode décrite dans l'exemple précédent à l'étude un système sur-déterminé en passant à l'adjoint. On a donc deux parties distinctes : une partie d'analyse où on doit démontrer un résultat de contrôle dans des bons espaces et avec suffisamment de régularité pour pouvoir dériver après, puis une partie purement algébrique de résolution de systèmes linéaires de grande dimension.

#### 1.4 Équations non linéaires : linéarisation et méthode du retour

Dans cette section, nous allons expliquer différentes manières d'aborder les systèmes non linéaires dans des problèmes de contrôle. Considérons 3 espaces de Hilbert  $U, H, E$ . On considère une équation aux dérivées partielles non linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), u(t)), \\ \text{conditions au bord,} \end{cases} \quad (42)$$

telle que pour tout  $u$  choisi dans  $U$ , ce système admette au moins une solution dans l'espace  $E$  pour toute condition initiale  $y^0 \in H$ . En plus des notions globales de contrôlabilité présentées précédemment, on a la définition locale suivante :

**Définition 5.** Le système de contrôle (42) est *localement contrôlable en temps petit* le long de la trajectoire (ou autour de l'équilibre si la trajectoire est un point d'équilibre)  $(\bar{y}, \bar{u})$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $y^0 \in B(\bar{y}(0), \eta)$ , il existe une trajectoire  $(y, u)$  de (42) telle que  $y(0) = y^0$  et pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $\|\bar{u} - u\|_U + \|\bar{y} - y\|_E \leq \varepsilon$ ,  $y(0) = y^0$  et  $y(\varepsilon) = \bar{y}(\varepsilon)$ .

Comme souvent dans l'étude de systèmes non linéaires, il peut être intéressant de linéariser le système, au sens suivant :

**Définition 6.** Soit  $(\bar{y}, \bar{u})$  une trajectoire de (42). Le *système de contrôle linéarisé* le long de la trajectoire (ou autour de l'équilibre)  $(\bar{y}, \bar{u})$  est le système linéaire

$$\dot{y} = df_y(\bar{y}, \bar{u})y + df_u(\bar{y}, \bar{u})u. \quad (43)$$

Dans le cas où (42) est en fait une équation différentielle ordinaire et où  $f$  est de classe  $C^1$ , on a le théorème suivant (cf. [Cor07, Chapitre 6]) :

**Théorème 4.** *On suppose que (42) représente une EDO et que  $f$  est de classe  $C^1$ . Soit  $(\bar{y}, \bar{u})$  une trajectoire de (42). Si le système (43) est contrôlable à 0, alors le système (42) est localement contrôlable le long de  $(\bar{y}, \bar{u})$ .*

Ce théorème ne possède pas vraiment de généralisation évidente aux EDP d'évolution "clé en main", à cause notamment de problèmes d'espaces ou de régularité qui n'apparaissent pas en dimension finie. Il fournit cependant une idée de méthode assez générale que l'on peut résumer ainsi de manière heuristique :

Résultat de contrôlabilité sur le linéarisé + procédé permettant de passer du linéaire au non linéaire = résultat local sur le non linéaire.

Pour les EDP non linéaires, il faut donc procéder au cas par cas. On commencera donc en général par démontrer un résultat sur le système linéaire pour lequel on peut appliquer un certain nombre de techniques usuelles, puis on tentera de revenir au non linéaire (cette dernière étape n'est en général pas délicate si tout a été fait de manière adéquate au niveau du système linéaire). Les outils les plus classiques pour effectuer cette dernière étape sont : des théorèmes d'inversion locale à droite du type de celui présenté dans [ATF87, Section 2.3] (cf. par exemple [FI98], [Ima98a], [CG09a], [Gue13], etc.), ou des théorèmes de point fixes (de Banach dans [Ros97], de Schauder dans [Zua91] ou [FI96a, Chapitre 1, Section 3] et de Kakutani dans [FCGIP06] ou [Gue06] par exemple). Toutefois, il faut signaler ici qu'en général, tenter de démontrer une inégalité d'observabilité du type de (11) sera insuffisant pour repasser au cadre non linéaire. Il faudra démontrer des inégalités bien plus précises (comme les inégalités de Carleman) en ajoutant un terme source dans l'équation et exploiter de manière plus profonde ce que donnent ces inégalités par la méthode de dualité présentée à la fin du Paragraphe 1.2.ii. Ainsi, l'étude des systèmes non linéaires n'est pas en général une simple application de résultats connus sur les systèmes linéaires et nécessite vraiment une étude plus poussée des systèmes linéarisés associés. Il y a donc une réelle plus-value à apporter pour résoudre des problèmes non linéaires, même dans le cas où le linéarisé est contrôlable.

Dans un certain nombre de cas, il se peut que le linéarisé autour de la trajectoire ou de l'équilibre autour duquel on souhaite contrôler le système linéaire ne soit pas contrôlable, et la méthode de linéarisation échoue. On peut alors utiliser ce qu'on appelle la *méthode du retour* qui a été introduite par Jean-Michel Coron pour étudier la stabilisation de systèmes affines avec dérive dans [Cor92], puis pour la contrôlabilité de l'équation d'Euler bidimensionnelle dans [Cor93] et [Cor96]. Elle a depuis été utilisée avec succès dans un certain nombre de problèmes variés (par exemple pour les équations de la mécanique des fluides dans [Cor02], [Hor98], [Gla00] ou [CG09a], en contrôle quantique dans [Bea05], [BC06] et [Mor13], ou pour des équations hyperboliques dans [Gla03] et [CGW10]). Soulignons que cette méthode peut aussi permettre de démontrer des résultats de contrôlabilité globale pour des équations non linéaires (cf. notamment [Cor96], [CF96], [Cha09c], [Cha09a] ou [Cha09b]).

Dans la suite, on supposera que  $(0, 0)$  est un point d'équilibre du système dynamique (42). Toutes les idées de la méthode du retour sont synthétisées dans la Figure 1. On cherche en fait à prouver un résultat de contrôlabilité locale de (42) autour du point d'équilibre  $(0, 0)$ . Malheureusement, le système linéarisé autour de  $(0, 0)$  s'avère non contrôlable. On va donc contourner cette difficulté en ne linéarisant non pas notre système autour de  $(0, 0)$  mais autour d'une trajectoire contrôlée  $(\bar{y}^r, \bar{u}^r)$  partant en temps  $t = 0$  du point  $(0, 0)$  et revenant en temps  $t = T$  à  $(0, 0)$ . En effet, si l'on part non plus de  $(0, 0)$  mais d'un petit voisinage de  $(0, 0)$  au départ, en appliquant un théorème d'inversion locale ou de point fixe on arrivera à contrôler localement autour de  $(0, 0)$  pour peu que la trajectoire  $(\bar{y}^r, \bar{u}^r)$  ne soit "pas trop loin" de  $(0, 0)$ . On a donc deux difficultés à surmonter :

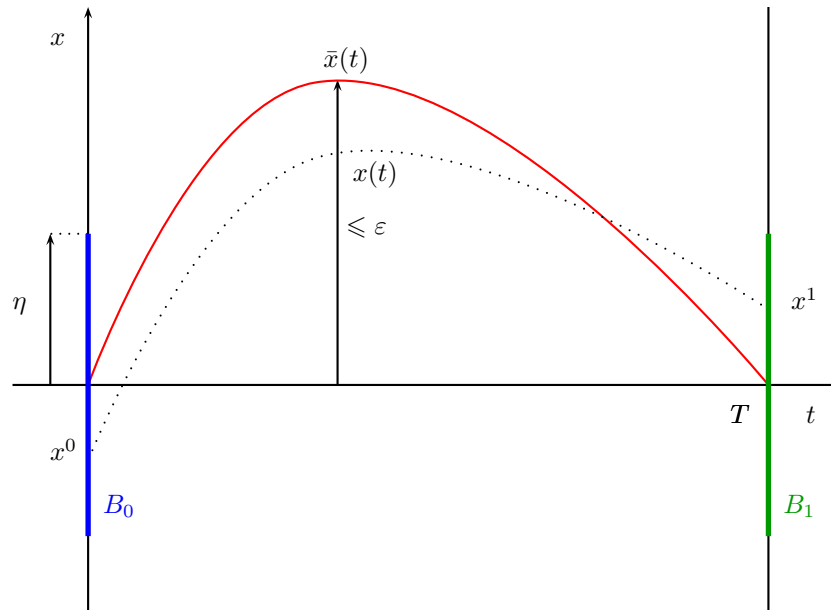


FIGURE 1 – La méthode du retour (dessin de J.M. Coron)

1. Trouver une (ou des) trajectoire(s) contrôlée(s) allant de  $(0, 0)$  à  $(0, 0)$ . C'est une étape délicate car il n'est pas forcément évident de construire de manière explicite de telles trajectoires particulières, d'autant plus que rien n'assure qu'une telle trajectoire allant de  $(0, 0)$  à  $(0, 0)$  permettra d'obtenir le résultat de contrôlabilité souhaité. Il faut donc aussi choisir ces trajectoires de manière pertinente.
2. Trouver une manière de démontrer que le linéarisé autour de cette trajectoire est contrôlable, sachant qu'une des méthodes principales (les inégalités de Carleman) ne pourra pas être utilisée ici puisqu'en général ces inégalités absorbent les termes d'ordre inférieur au terme principal qui seront le plus souvent les seuls affectés par la linéarisation (la contrôlabilité du linéarisé autour de 0 étant supposée ne pas avoir lieu, l'inégalité de Carleman non plus car elle impliquerait l'observabilité du linéarisé autour de 0).

## 1.5 Problématique de la thèse

Cette thèse est organisée en deux parties bien distinctes, la première étant résumée à la Section 2 de l'introduction et la deuxième étant résumée aux Sections 3, 4 et 5.

On s'intéresse dans la Partie I au contrôle indirect d'un système non linéaire, à savoir le système de Navier-Stokes tridimensionnel. Cette partie correspond au Chapitre 1 de la thèse. Nous y démontrons un résultat de contrôlabilité locale à 0 pour le système de Navier-Stokes avec condition au bord de Dirichlet et contrôle distribué sur une seule des trois équations. Les principaux outils utilisés sont la méthode du retour présentée au Paragraphe 1.4, la méthode novatrice que nous avons mise au point et présentée dans le Paragraphe 1.3 ainsi qu'une inégalité de Carleman bien adaptée au problème.

La Partie II concerne le coût du contrôle en temps petit ou en viscosité évanescence pour un certain nombre d'équations scalaires, ainsi que le lien qui peut exister entre ces deux problèmes. Plus précisément, dans les Chapitres 2 et 3, nous expliquons comment on peut exploiter les résultats et conjectures concernant le coût du contrôle en temps petit pour l'équation de la chaleur présentés au Paragraphe 1.2.v à l'aide d'un changement d'inconnues qui permet



d'améliorer les résultats précédemment connus concernant le problème de la contrôlabilité uniforme pour l'équation de transport-diffusion unidimensionnelle à coefficients constants contrôlée sur le bord gauche. Le Chapitre 4 présente un problème de contrôlabilité pour une équation de transport-diffusion dont le terme de transport dépend de la variable d'espace et dégénère. Nous donnons un sens aux solutions du problème de transport associé à l'aide de la méthode des caractéristiques et nous y obtenons un résultat de non-contrôlabilité uniforme en temps suffisamment petit. Pour finir, le Chapitre 5 présente une extension des résultats présentés dans le Paragraphe 1.2.v au cas de familles d'équations scalaires paraboliques ou dispersives contrôlées par le bord plus générales que les équations de la chaleur et de Schrödinger. Nous donnons des estimations précises du coût du contrôle pour ces classes d'équations, en utilisant entre autres la méthode des moments présentée dans le Paragraphe 1.2.iv. Nous appliquons les résultats obtenus à des équations linéaires de type KdV, chaleur fractionnaire et Schrödinger fractionnaire.

Le Chapitre 1, présenté dans la Section 2, reprend l'article [CL12], en collaboration avec Jean-Michel Coron. Les Chapitres 2 et 3, présentés dans la Section 3, reprennent respectivement les articles [Lis12] et [Lis13a]. Le Chapitre 4, présenté dans la Section 4, correspond à la partie mathématiquement achevée (et pour le moment non soumise) d'un travail en cours avec Mamadou Gueye ([GL13]). Enfin, le Chapitre 5, présenté dans la Section 5, reprend l'article [Lis13b].

## 2 L'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle avec contrôle distribué scalaire

### 2.1 Présentation

Nous allons présenter dans cette section les résultats obtenus durant la thèse concernant la contrôlabilité locale à 0 en temps arbitrairement petit de l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle avec contrôle distribué n'agissant que sur une seule des trois équations.

Soit  $\Omega$  un domaine borné régulier de  $\mathbb{R}^3$  et  $\omega$  un sous-ouvert de  $\Omega$ . Soit un temps  $T > 0$ . On pose

$$Q := [0, T] \times \Omega,$$

$$\Sigma := [0, T] \times \partial\Omega,$$

$$V := \{y \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot y = 0\},$$

$$H := \{y \in L^2(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot y = 0, y \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Dorénavant la  $i$ -ième composante d'un champ de vecteur  $f$  sera notée  $f^i$  et sa dérivée par rapport à la  $j$ -ième variable sera notée  $f_j$ .

Soient  $v \in L^2(\Omega)$  et  $y_0 \in V$ . On s'intéresse à l'équation de Navier-Stokes contrôlée avec un contrôle ayant une seule composante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = (0, 0, v1_\omega) & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{dans } \Omega, \\ y \equiv 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (44)$$

## 2.2 Les résultats antérieurs

La contrôlabilité des équations de Navier-Stokes en dimension 2 ou 3 a été étudiée dans de nombreux articles et dans de nombreux cas différents (contrôlabilité frontière ou interne, contrôlabilité à zéro, aux trajectoires ou approchée, contrôlabilité locale ou globale, ...). La littérature étant très vaste, on se contentera ici de présenter les principales avancées en ce qui concerne la contrôlabilité à 0 ou la contrôlabilité aux trajectoires avec des contrôles distribués. Parmi les articles pionniers en dimension 2, on peut citer [CF96] qui prouve un résultat de contrôlabilité globale exacte aux trajectoires (pourvu qu'elles soient suffisamment régulières) avec des contrôles internes sur une variété sans bord. Ensuite, dans [Ima98b], [FI99a], et [Ima01], des résultats de contrôlabilité exacte locale aux trajectoires pour le système de Navier-Stokes avec conditions de Dirichlet ou de Navier sont établies sous des conditions techniques d'abord assez restrictives au niveau de la géométrie du domaine, de la forme des trajectoires autour desquelles on contrôle et de la régularité des conditions initiales, qui sont au fur et à mesure affaiblies. Dans [FCGIP04], les auteurs prouvent un résultat de contrôlabilité exacte locale aux trajectoires sans restriction géométrique sur le domaine (autres que celle qu'il soit connexe et de classe  $C^2$ , ce qui est naturel), avec des conditions initiales ayant quasiment la régularité naturelle, et des trajectoires assez peu régulières. Dans cet article, les auteurs ont également prouvé des résultats de contrôlabilité exacte pour les systèmes de Navier-Stokes linéarisés, avec des conditions de régularité très faibles.

L'équation de Navier-Stokes couplant fortement les composantes de  $y$ , il peut être intéressant de se demander si mettre un contrôle sur chaque équation n'est pas superflu, et si on ne peut pas se contenter de deux composantes ou d'une composante pour contrôler le système. Les mêmes auteurs ont prouvé dans [FCGIP06] la contrôlabilité exacte locale avec un contrôle ayant une composante en moins, à condition que l'ouvert de contrôle "touche" la frontière du domaine  $\Omega$  en un certain sens. Cette restriction géométrique a été levée dans [CG13a], au moins dans le cas de la contrôlabilité à 0 du système de Navier-Stokes. Dans tous ces articles, les principaux points de la preuve consistent à établir d'abord la contrôlabilité du système linéarisé autour de la trajectoire de la cible grâce à des inégalités de Carleman sur l'adjoint de l'équation linéarisée, puis d'utiliser un théorème d'inversion locale ou un théorème de point fixe pour revenir au système non linéaire. Cette stratégie ne peut être valable que si le linéarisé autour de la trajectoire en question est lui-même contrôlable, sinon il n'y a strictement aucun espoir de pouvoir démontrer une inégalité de Carleman sur le système linéaire.

On peut donc se poser la question naturelle de savoir si en dimension 3 on peut encore enlever une composante de plus au contrôle et garder la propriété de contrôlabilité locale à 0.

## 2.3 Résultats obtenus et méthodes utilisées

On s'intéresse à la contrôlabilité à 0 en temps arbitrairement petit de (44). Le théorème principal obtenu est le suivant :

**Théorème 5.** [CL12] *Pour tout  $T > 0$  et tout  $r > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $y^0 \in V$  vérifiant  $\|y^0\|_{H^1(\Omega)^3} \leq \eta$ , il existe un contrôle scalaire  $v \in L^2(Q)$  et une solution  $(y, p) \in L^2((0, T), H^2(\Omega)^3 \cap V) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3 \cap V) \times L^2(Q)$  de (44) tels que*

$$\begin{aligned} y(T, \cdot) &= 0, \\ \|v\|_{L^2(Q)^3} &\leq r, \\ \|y\|_{L^2((0, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3)} &\leq r. \end{aligned}$$

Conformément à ce qui a été décrit dans la Section 1.4, la première chose à faire est donc de s'intéresser au linéarisé autour de 0 pour voir si il est contrôlable. On considère donc le système de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + \nabla p = (0, 0, v1_\omega) & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y(0, \cdot) = y_0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (45)$$

Malheureusement, on sait qu'il existe des géométries pour lesquelles (45) n'est pas approximativement contrôlable (et donc ne peut être contrôlable à 0 en temps arbitrairement petit, cf. [Cor07, Théorème 2.45 et Remarque 2.50]), comme montré dans [LZ96] (on a aussi un contre-exemple similaire dans [DF97] mais pour des conditions au bord différentes).

Pour surmonter cette difficulté, nous allons utiliser la méthode du retour décrite à la Section 1.4, et nous commençons par trouver une famille de trajectoires particulières de (44) partant de 0 et allant à 0. Appelons  $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Sans perte de généralité, on peut translater  $\Omega$  pour que l'on ait  $0 \in \omega$ . Soit alors  $r_1 > 0$  suffisamment petit pour avoir

$$\mathcal{C}_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; r \leq r_1, |x_3| \leq r_1\} \subset \omega. \quad (46)$$

On pose alors

$$\bar{y}(t, x) := \begin{pmatrix} \varepsilon a(t) b(r^2) c'(x_3) x_1 \\ \varepsilon a(t) b(r^2) c'(x_3) x_2 \\ \varepsilon a(t) (b(r^2) + r^2 b'(r^2)) c(x_3) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

où  $\varepsilon > 0$  est un paramètre que nous choisirons suffisamment petit dans la suite. On choisit  $a$  tel que

$$\text{Supp}(a) \subset [T/4, T] \text{ et } a(t) = e^{\frac{-\nu}{(T-t)^5}} \text{ sur } [T/2, T],$$

( $\nu > 0$  est un paramètre que nous choisirons à notre convenance plus tard),  $b$  tel que

$$\text{Supp}(b) \subset (-\infty, r_1^2] \text{ et } b(w) = w, \text{ sur } (-\infty, r_1^2/4],$$

et  $c$  tel que

$$\text{Supp}(c) \subset (-r_1, r_1) \text{ et } c(x_3) = x_3^2 \text{ sur } [-r_1/2, r_1/2].$$

Les composantes de  $\bar{y}$  sont donc polynomiales (de petit degré) en espace sur un sous-cylindre de  $\omega$  (ce qui va simplifier beaucoup les calculs et la programmation sur ordinateur qui suivra) et ont un support inclus dans  $\omega$ . On démontre qu'on a alors bien pour une certaine pression  $\bar{p}$  et un certain contrôle  $\bar{v}$  une trajectoire contrôlée de (44).

Le but est maintenant de contrôler l'équation linéarisée autour de cette trajectoire, le support du contrôle étant un certain ouvert  $\omega_0$  non vide à choisir à l'intérieur de

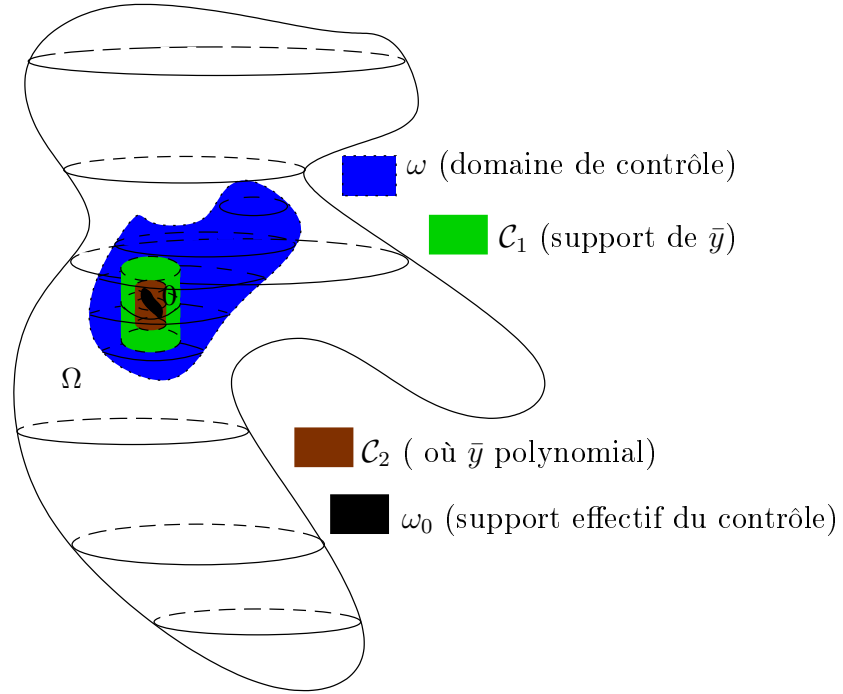
$$\mathcal{C}_2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3); r < \frac{r_1}{2}, |x_3| < \frac{r_1}{2} \right\},$$

car c'est à cet endroit que la forme du linéarisé est la plus simple.

La Figure 2 résume les différents rôles joués par les ensembles introduits.

L'équation linéarisée qui nous intéresse dorénavant est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) \bar{y} + \nabla p = f + (0, 0, 1_{\omega_0} v) & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (48)$$

FIGURE 2 – Les ouverts  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \omega_0, \omega$ .

Pour mettre ceci sous le formalisme de la Section 1.2, on introduit le projecteur de Leray  $\mathcal{P}$  et on réécrit (48) sous la forme  $y_t = Ay + Bv$  avec

$$A = \mathcal{P}(\Delta y - (\bar{y} \cdot \nabla)y - (y \cdot \nabla)\bar{y}),$$

avec espace d'état  $H$  et domaine d'opérateur  $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap V$ . Exprimons l'opérateur de contrôle  $B$ . On considère  $U = H$  et

$$B : v \in H \mapsto (\varphi \in D(A^*) \mapsto \int_{\omega} \varphi v).$$

Le problème est que l'opérateur  $A$  dépend en fait aussi du temps et on ne peut donc pas se placer tout à fait dans le cadre abstrait défini précédemment. Cependant, sous un certain nombre d'hypothèses raisonnables qui sont vérifiées ici (voir par exemple [Kat53] ou [Tem82]), il est possible de démontrer que l'on peut appliquer les résultats de la Section 1.2.

Nous allons chercher à obtenir le résultat de contrôlabilité à 0 suivant :

**Proposition 4.** *Pour tout  $T > 0$  suffisamment petit, pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ , il existe  $r_0 \in (0, 1)$  tel que pour tout  $r \in (r_0, 1)$ , il existe  $C_1 > 0$  telle que pour tout  $K_1 > C_1$ , pour tout  $f$  tel que  $e^{\frac{K_1}{2r(T-t)^5}} f \in L^2(Q)^3$  et pour tout  $y^0 \in V$ , si l'on pose*

$$v = \frac{1-r}{r} K_1,$$

alors il existe une solution  $(y, p, v)$  du système (48) telle que

$$e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} y \in L^2((0, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3),$$

$$e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} v \in L^2(Q).$$

Remarquons que la singularité du poids  $e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}}$  en  $t = T$  implique que  $y(T, \cdot) = 0$ , il s'agit donc bien d'un résultat de contrôlabilité à 0. Une fois ce résultat obtenu, il suffira d'utiliser le théorème d'inversion locale à droite de [ATF87, Section 2.3] pour revenir sans difficulté au système non linéaire (ceci est classique et ne sera pas détaillé dans la suite).

Il reste pour démontrer la Proposition 4 à :

1. Trouver  $\mathcal{B}$  tel que l'on puisse résoudre algébriquement localement (44) (en  $y, p, v$ ) avec un second membre dans l'image de  $\mathcal{B}$ . C'est une partie essentiellement algébrique et formelle et se fera sur le modèle de ce qui a été expliqué dans la Section 1.3.
2. Contrôler dans l'image de  $\mathcal{B}$ , avec des contrôles suffisamment réguliers (il va falloir dériver les contrôles puisque  $\mathcal{M}$  est un opérateur différentiel). Pour pouvoir faire ceci, le plus simple est de démontrer une inégalité d'observabilité avec observation  $\mathcal{B}^*$ , que l'on peut obtenir à l'aide d'une inégalité de Carleman bien choisie.

### 2.3.i Résolution algébrique

On travaille dorénavant sur  $Q_0 := (T/2, T) \times \omega_0$ , où  $\omega_0$  est un ouvert à choisir à l'intérieur de  $\mathcal{C}_2$ . On définit  $\mathcal{L} : C^\infty(Q_0)^5 \rightarrow C^\infty(Q_0)^4$  par

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} y \\ p \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + p_1 \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + p_2 \\ y_t^3 - \Delta y^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^3 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^3 + p_3 - v \\ \nabla \cdot y \end{pmatrix}, \quad (49)$$

pour  $y = (y^1, y^2, y^3) \in C^\infty(Q_0)^3$ ,  $p \in C^\infty(Q_0)$  et  $v \in C^\infty(Q_0)$ .

On choisit  $\mathcal{B}$  de la manière suivante :

$$\mathcal{B}(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7) := \begin{pmatrix} f_1^1 + f_2^2 + f_3^3 \\ f_1^4 + f_2^5 + f_3^6 \\ f^7 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

En fait, en posant

$$\mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + p_1 \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + p_2 \\ \nabla \cdot y \end{pmatrix} \quad (51)$$

et

$$\mathcal{B}_0(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) := \begin{pmatrix} f_1^1 + f_2^2 + f_3^3 \\ f_1^4 + f_2^5 + f_3^6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

on démontre que chercher  $\mathcal{M}$  tel que (33) soit vraie revient en fait à chercher  $\mathcal{M}_0 : C^\infty(Q_0)^6 \rightarrow C^\infty(Q_0)^4$  tel que

$$\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{M}_0 = \mathcal{B}_0, \quad (53)$$

et donc à chercher  $\mathcal{N}$  tel que

$$\mathcal{N} \circ \mathcal{L}_0^* = \mathcal{B}_0^*. \quad (54)$$

On vérifie par des calculs directs que

$$\mathcal{L}_0^* \begin{pmatrix} z \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_t^1 - \Delta z^1 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^1 + \bar{y}_1^1 z^1 + \bar{y}_1^2 z^2 - \pi_1 \\ -z_t^2 - \Delta z^2 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^2 + \bar{y}_2^1 z^1 + \bar{y}_2^2 z^2 - \pi_2 \\ \bar{y}_3^1 z^1 + \bar{y}_3^2 z^2 - \pi_3 \\ -z_1^1 - z_2^2 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$$\mathcal{B}_0^* \begin{pmatrix} z \\ \pi \end{pmatrix} = (-z_1^1, -z_2^1, -z_3^1, -z_1^2, -z_2^2, -z_3^2). \quad (56)$$

On se ramène donc à prouver ce qui suit :

pour tout  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4) \in C^\infty(Q_0)^4$ , si  $(z^1, z^2, \pi) \in C^\infty(Q_0)^3$  est une solution de l'équation

$$\begin{cases} -z_t^1 - \Delta z^1 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^1 + \bar{y}_1^1 z^1 + \bar{y}_1^2 z^2 - \pi_1 = \varphi^1, \\ -z_t^2 - \Delta z^2 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^2 + \bar{y}_2^1 z^1 + \bar{y}_2^2 z^2 - \pi_2 = \varphi^2, \\ \bar{y}_3^1 z^1 + \bar{y}_3^2 z^2 - \pi_3 = \varphi^3, \\ -z_1^1 - z_2^2 = \varphi^4, \end{cases} \quad (57)$$

alors  $(-z_1^1, -z_2^1, -z_3^1, -z_1^2, -z_2^2, -z_3^2) = \mathcal{N}\varphi$ . On démontre que l'on peut se débarrasser de la pression et qu'on se ramène à étudier le système sur-déterminé

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t)(-4x_1^3 - 4x_1x_2^2)\varepsilon z_1^1 + a(t)(-2x_1^2x_2 - 2x_2^3)\varepsilon z_2^1 \\ + a(t)(14x_1^2x_3 + 10x_2^2x_3)\varepsilon z_3^1 + a(t)(-2x_1^2x_2 - 2x_2^3)\varepsilon z_1^2 + 4a(t)x_1x_2x_3\varepsilon z_3^2 \\ + a(t)(-2x_1^3x_3 - 2x_1x_2^2x_3)\varepsilon z_{13}^1 + a(t)(-2x_1^2x_2x_3 - 2x_2^3x_3)\varepsilon z_{23}^1 \\ + a(t)(4x_1^2x_3^2 + 4x_2^2x_3^2)\varepsilon z_{33}^1 - z_{3t}^1 - z_{113}^1 - z_{223}^1 - z_{333}^1 = \varphi_3^1 - \varphi_1^3, \\ \\ a(t)(-2x_1^3 - 2x_1x_2^2)\varepsilon z_2^1 + a(t)4x_1x_2x_3\varepsilon z_3^1 + a(t)(-2x_1^3 - 2x_1x_2^2)\varepsilon z_1^2 \\ + a(t)(-4x_1^2x_2 - 4x_2^3)\varepsilon z_2^2 + a(t)(10x_1^2x_3 + 14x_2^2x_3)\varepsilon z_3^2 \\ + a(t)(-2x_1^3x_3 - 2x_1x_2^2x_3)\varepsilon z_{13}^2 + a(t)(-2x_1^2x_2x_3 - 2x_2^3x_3)\varepsilon z_{23}^2 \\ + a(t)(4x_1^2x_3^2 + 4x_2^2x_3^2)\varepsilon z_{33}^2 - z_{3t}^2 - z_{113}^2 - z_{223}^2 - z_{333}^2 = \varphi_3^2 - \varphi_2^3, \\ \\ -z_1^1 - z_2^2 = \varphi^4. \end{array} \right. \quad (58)$$

Ce qu'il nous reste à faire est donc de dériver suffisamment de fois les équations de (58) jusqu'à obtenir autant (ou plus) d'inconnues que d'équations. On vérifie que ceci est vrai dès que l'on a dérivé 19 fois les équations par rapport à chacune des 4 variables, ce qui conduit à 30360 équations et 29900 inconnues au maximum (si on dérivait seulement 18 fois, on n'obtiendrait que 25256 équations et 25300 inconnues au maximum, ce qui n'est pas suffisant en théorie). On obtient un système que l'on écrit de manière purement algébrique sous la forme

$$L_0(t, x)Z = \Phi,$$

avec  $L_0 \in C^\infty(Q_0; \mathcal{M}_{30360 \times 29900}(\mathbb{R}))$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{29900}$  ( $Z$  contient les dérivées de  $z^1$  et  $z^2$  jusqu'à l'ordre 19, et on fait en sorte que les 6 premières colonnes correspondent à  $z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_1^2, z_2^2, z_3^2$  pris dans cet ordre) et  $\Phi \in \mathbb{R}^{30360}$  ( $\Phi$  contient les dérivées de  $\varphi$  jusqu'à l'ordre 19). Si l'on arrive à extraire de  $L_0$  une matrice de rang maximal, alors on pourra trouver une certaine matrice  $N$  (que l'on pourra voir comme un opérateur différentiel) telle que

$$N(t, x)L_0(t, x)Z = (Z^1, Z^2, Z^3, Z^4, Z^5, Z^6), \quad \forall(t, x) \in Q_0, \quad \forall Z \in \mathbb{R}^{29900}. \quad (59)$$

On restreint  $Z$  à ces 6 premières composantes car c'est ici que se trouvent les inconnues  $z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_1^2, z_2^2, z_3^2$ .

Il est évidemment inenvisageable (contrairement à ce qui a été fait dans l'exemple simple (1)) de calculer à la main ces équations dérivées. En fait, il est même impossible d'espérer stocker et exploiter la matrice  $L_0$  dans son ensemble d'autant plus que chaque coefficient de  $L_0$  est lui-même une fonction, et on ne connaît pas vraiment de méthodes qui permettrait de montrer que la matrice obtenue soit de rang maximal à l'aide d'un ordinateur car celui-ci ne pourrait pas calculer de manière abstraite le rang de la matrice pour un certain  $(x_1, x_2, x_3, t)$  général. On montre donc grâce à un changement d'inconnues judicieux et des arguments d'analyticité que l'on peut effectuer les simplifications suivantes :

1. On peut fixer  $\varepsilon = 1$ .
2. On peut remplacer  $a(t)$  par 1 (ceci simplifie la programmation du dérivateur formel dont nous aurons besoin dans la suite).
3. On peut démontrer l'existence de  $N$  en un point précis  $\xi^0 := (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t^0)$  (ici, on prendra  $\xi^0 := (1.1, 1.2, 1.3, 0)$ , pourvu que ce point ne soit une racine d'aucun des coefficients non identiquement nuls de  $L_0$  (ceci sera vérifié). On appellera dorénavant  $L_0^0 := L_0(\xi^0)$ .

La description précise du programme qui a permis de réaliser le calcul de la matrice  $L_0^0$  et d'en extraire une matrice de rang maximal est faite en annexe du Chapitre 1. On remarque que l'opérateur différentiel  $\mathcal{M}$  tel que l'égalité (33) soit vérifiée sur un certain  $\omega_0$  est d'ordre 17.

### 2.3.ii Construction de contrôles réguliers en forme de combinaison linéaire de dérivées

La construction de tels contrôles repose sur l'inégalité de Carleman suivante :

**Lemme 1.** *Soit  $\theta : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction semi-continue inférieurement, non identiquement nulle et positive, et soit  $r \in (0, 1)$ . Il existe  $C_1 > 0$  tel que pour tout  $K_1 > C_1$  et tout  $\nu \geq K_1(1/r - 1)$ , il existe  $\varepsilon^0$  tel que pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $g$  tel que  $e^{-\frac{K_1}{2(T-t)^5}} g \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$  et pour toute solution  $z \in L^2((0, T), H) \cap L^\infty((0, T), V)$  du système de Navier-Stokes linéarisé adjoint suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -z_t - \Delta z - (\bar{y} \cdot \nabla^{tr})z - (z \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla\pi = g & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } Q, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(T, \cdot) = z^T \in V & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (60)$$

on ait

$$\begin{aligned} & \|e^{-\frac{K_1}{2r(T-t)^5}} z\|_{L^2((T/2, T), H^1(\Omega)^3)}^2 + \|z(T/2, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \\ & \leq C \left( \int_{(T/2, T) \times \Omega} \theta e^{-\frac{K_1}{(T-t)^5}} |\nabla \wedge z|^2 + \int_{(T/2, T) \times \Omega} e^{-\frac{K_1}{(T-t)^5}} |g|^2 \right). \end{aligned} \quad (61)$$

Cette inégalité est analogue à celles de [Gue07, Lemme 5] et [Gue13, Proposition 3.1] qui concernaient le système de Stokes (sans ou avec terme source). Pour la démontrer, il suffit de partir de l'inégalité de [Gue13] en prenant comme terme source  $f$  et les termes d'ordres

inférieurs que nous avons ici, de changer un tout petit peu les fonctions poids utilisées en rajoutant un paramètre, puis de prendre  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour absorber ces termes d'ordre inférieur dans le membre de gauche. Le fait d'observer au moyen du rotationnel est crucial car cela assurera l'existence d'un contrôle qui sera le rotationnel d'une fonction, et notamment qui sera une combinaison linéaire de dérivées spatiales d'ordre 1 d'une certaine fonction, et donc assurera que l'on tombe dans l'image de  $\mathcal{B}$  au vue de (52) qui fait intervenir des dérivées spatiales d'ordre 1.

La deuxième étape est alors d'appliquer la méthode de dualité HUM pour construire un contrôle en forme de rotationnel et régulier. Le résultat obtenu est le suivant :

**Proposition 5.** *On reprend les notations du Lemme 1. Soit  $f \in L^2(Q)^3$  tel que*

$$e^{K_1/(2r(T-t)^5)} f \in L^2(Q)^3.$$

*Considérons le système de Navier-Stokes linéarisé*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p = f + \nabla \wedge ((\nabla \wedge v)\widehat{\mathbf{1}}_{\omega_0}) & \text{dans } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases} \quad (62)$$

*où le contrôle est  $v$ . Alors, pour tout  $y_0 \in V$ , il existe une solution  $(y, p, v)$  de (62) telle que  $y(0, \cdot) = y^0$  et pour tout  $\tilde{K}_1$  vérifiant  $0 < \tilde{K}_1 < K_1$ ,*

$$\begin{aligned} e^{\tilde{K}_1(2-1/r)/2(T-t)^5} (\nabla \wedge v)\widehat{\mathbf{1}}_{\omega_0} &\in L^2((0, T), H^{53}(\Omega)^3) \cap H^{27}((0, T), H^{-1}(\Omega)^3), \\ e^{\tilde{K}_1/2(T-t)^5} y &\in L^2((0, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3). \end{aligned}$$

Pour le démontrer, on laisse d'abord évoluer le système de manière libre de telle sorte que la solution devienne très régulière. On utilise alors la méthode usuelle de dualité (HUM) mais en affaiblissant la norme de l'observation à droite de l'inégalité (61) et en la remplaçant par une norme dans un espace de Sobolev d'ordre plus grand. On résout alors un problème de type de (13) dans des espaces de Sobolev d'ordre élevé. Par dualité, ceci a pour conséquence de créer des solutions de (62) en un sens très faible, dont on peut démontrer qu'elles sont en fait des solutions faibles classiques. On en déduit alors la régularité souhaitée des contrôles grâce à l'effet régularisant des équations du type Navier-Stokes linéarisé .

On applique pour conclure la preuve de la Proposition 4 la méthode décrite dans la preuve de la Proposition 3 : on crée un contrôle régulier  $\hat{u}$  envoyant  $y^0$  à 0 par la Proposition 5 (la trajectoire correspondante étant appelée  $(\hat{y}, \hat{p})$ ), on applique un résultat d'interpolation du type de ceux de [LM68, Chapitre 1] pour en déduire que les contrôles créés à la Proposition 5 sont suffisamment réguliers pour que leur appliquer l'opérateur différentiel crée à la section précédente ait un sens. On pose alors  $(\tilde{y}, \tilde{p}, v) = \mathcal{M}\hat{u}$ . On effectue maintenant la soustraction des deux solutions  $(\hat{y} - \tilde{y}, \hat{p} - \tilde{p})$  pour arriver à la Proposition 4.

## 2.4 Remarques additionnelles et perspectives

1. On dispose ici seulement d'un résultat de contrôlabilité locale. Il serait donc intéressant de se demander si l'on peut aboutir à un résultat de contrôlabilité globale en utilisant la méthode du retour. De même, on ne s'intéresse qu'à la contrôlabilité à 0. On pourrait donc essayer d'étendre ceci au contrôle le long d'une trajectoire quelconque de l'équation de Navier-Stokes, ce qui ne semble pas pouvoir se faire avec la méthode développée ici à cause de la partie informatique qui nécessite des linéarisés explicites.



2. La méthode énoncée ici fonctionne bien grâce à l'effet régularisant des équations de Navier-Stokes linéarisées qui nous permet de construire des contrôles aussi réguliers que l'on veut pour un terme source et une condition initiale beaucoup moins réguliers. Ceci ne serait notamment pas possible dans le cas de systèmes hyperboliques du type équations d'ondes non linéaires couplées, car pour obtenir des contrôles réguliers sur le linéarisé il faudrait avoir des conditions initiales régulières (cf. [DL09] ou [EZ10]). Dans ce cas, en appliquant la méthode précédente, on obtiendrait un analogue de la Proposition 4 avec des données initiales très régulières et des contrôles beaucoup moins réguliers, de telle sorte que la méthode d'inversion locale échouerait. Il serait donc intéressant de trouver un moyen de remédier à ce problème dans le cas de systèmes hyperboliques, peut-être en remplaçant l'argument d'inversion locale usuel par un argument de type théorème de Nash-Moser tel que présenté dans [Gro86, Section 2.3.2].
3. Il pourrait être intéressant de se demander si l'on peut étendre ce résultat au cas du contrôle insensibilisant de l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle avec un seul contrôle scalaire, ce qui étendrait les résultats de [CG13b] où un résultat de contrôle insensibilisant de Navier-Stokes avec un contrôle ayant 2 composantes est démontré.

### 3 Contrôlabilité uniforme d'une équation de transport-diffusion en limite de viscosité évanescence

#### 3.1 Présentation

##### 3.1.i Équation de transport-diffusion

Nous nous intéressons ici à la contrôlabilité uniforme d'une famille d'équations de transport-diffusion unidimensionnelles.

Soient  $L > 0$  et  $T > 0$ . Soient  $M \neq 0$  et  $\varepsilon > 0$ . On considère l'équation de transport-diffusion contrôlée sur le bord gauche suivante :

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + My_x = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(., 0) = v(t) & \text{dans } (0, T), \\ y(., L) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y(0, .) = y^0 & \text{dans } (0, L). \end{cases} \quad (63)$$

On pose  $A = \varepsilon y_{xx} - My_x$ , avec  $\mathcal{D}(A) = H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$  et  $H = L^2(0, L)$ . On a  $A^* = \varepsilon y_{xx} + My_x$  et  $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$ . On démontre que les opérateurs  $A$  et  $A^*$  sont (éventuellement après ajout d'un certain  $\lambda Id$  avec  $\lambda < 0$ ) dissipatifs, de telle sorte que l'on rentre dans le cadre de la Section 1.2.

Cherchons quel opérateur  $B$  convient pour rentrer dans le formalisme de la Section 1.2. Pour cela, on va identifier  $B^*$  dans (6) et revenir après à  $B$ . On choisit ici  $U = \mathbb{R}$ . Une manière de procéder est la suivante. Considérons un certain  $z^\tau \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$  et une certaine solution forte  $y \in C^0([0, T], H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \cap C^1([0, T], L^2(0, L))$  de (63) (pour un certain  $y^0$  et un certain  $u$  suffisamment réguliers). On a alors en multipliant  $(y_t - Ay)$  par un  $\varphi \in C^0([0, T], H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \cap C^1([0, T], L^2(0, L))$  et en intégrant par parties que

$$0 = - \int_0^\tau \int_0^L y(-\varphi_t - A^* \varphi) + \int_0^L y(\tau, x) \varphi(\tau, x) dx - \varepsilon \int_0^L y(0, x) \varphi(0, x) dx - \int_0^\tau u(t) \varphi_x(t, 0) dt.$$

Ainsi, si l'on choisit  $\varphi$  solution de  $-\varphi_t - A^*\varphi = 0$  avec condition finale  $z^\tau$  et condition de Dirichlet au bord, on a

$$\int_0^L y(\tau, x)\varphi(\tau, x)dx = \int_0^L y(0, x)\varphi(0, x)dx + \int_0^\tau u(t)\varphi_x(t, 0)dt.$$

On a donc en comparant avec l'expression (8) que nécessairement

$$B^* : \varphi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \mapsto \varepsilon\varphi_x(0),$$

i.e.

$$B : u \in \mathbb{R} \mapsto \varepsilon u(\varphi \mapsto \varphi_x(0)) = -\varepsilon u \delta'_0.$$

On observe que l'on a bien  $B \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, D(A^*))$ . Reste à voir si cet opérateur de contrôle est admissible pour le semi-groupe. Malheureusement, on peut démontrer (cf. par exemple [HR83, Page 22]) que cet opérateur n'est pas admissible. En fait, une manière de procéder pour le rendre admissible serait de considérer des contrôles plus réguliers (par exemple  $u \in H^1(0, T)$ ) ou alors des conditions initiales moins régulières (par exemple  $y^0 \in H^{-1}(0, L)$ ). Dans ce dernier cas, comme on change d'espace pivot et de produit scalaire,  $B$  sera modifié (tout comme  $A^*$ ). On peut démontrer que dans ce cas  $B$  s'écrirait sous la forme  $u \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi \in \mathcal{D}(A) \mapsto \varepsilon u(\Delta^{-1}\varphi)_x(0))$  ( $\Delta^{-1}$  désignera l'inverse du laplacien Dirichlet dans tout ce qui suit), pourvu que l'on munisse  $H^{-1}(0, L)$  d'un produit scalaire adéquat (cf. [Cor07, Section 2.7]). En fait, comme remarqué dans [Cor07, Remarque 2.98], on peut quand même s'intéresser à des conditions initiales  $L^2$  et des contrôles  $L^2$ , ainsi qu'au coût correspondant, qui sera bien défini correctement comme à la Proposition 1. On peut donc sous certaines conditions se passer de l'admissibilité, notamment quand l'espace des conditions initiales est "trop régulier" par rapport à l'opérateur  $B$ . Si  $y^0 \in L^2(0, L)$ , la théorie des semi-groupes nous dit qu'on aura existence et unicité d'une solution  $y$  vérifiant seulement  $y \in C^0([0, T], H^{-1}(0, L))$ , mais on peut montrer par des estimations a priori qu'en fait un tel  $y$  sera dans  $L^2((0, T) \times (0, L))$  comme dans [CG05, Appendice A] par exemple.

Comme expliqué au début du Paragraphe 1.2.v, on sait que cette équation est contrôlable à 0 en temps arbitrairement petit. Toutefois, elle ne peut pas être exactement contrôlable car pour tout  $t > 0$ , à l'intérieur du segment  $(0, L)$ , toute solution de (63) est de classe  $C^\infty$  quel que soit le contrôle  $u \in L^2(0, T)$  choisi. Nous allons nous intéresser ici à un problème de *contrôlabilité uniforme* vis-à-vis du paramètre de viscosité  $\varepsilon$  quand celui-ci tend vers 0, autrement dit nous allons étudier le comportement du coût du contrôle non plus en fonction de  $T$  mais en fonction de  $\varepsilon$  à un temps  $T > 0$  fixé (le comportement du coût pouvant être éventuellement différent selon le temps où l'on se place). Ces problématiques ont été introduites dans [Lio88b, Chapitre 3]. Il s'agit d'une question pertinente dans le sens où une manière usuelle de définir les solutions d'équations (ou de systèmes) de lois de conservation ou d'équations de Hamilton-Jacobi est de les définir comme limites quand la viscosité tend vers 0 de systèmes paraboliques comme expliqué dans [Kru70] ou [Lio82] (ce n'est évidemment pas nécessaire dans le cadre de cette partie puisque l'équation que l'on obtient en prenant  $\varepsilon = 0$  dans (63) est une équation de transport linéaire que l'on peut résoudre par exemple par la méthode des caractéristiques). Il est donc naturel lorsque l'on s'intéresse aux propriétés de contrôlabilité de lois de conservation de considérer aussi la contrôlabilité du système faiblement perturbé par de la viscosité et le comportement des (éventuels) contrôles quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , comme dans [GG07] ou [Léa12].

Ainsi, si l'on est incapable de comprendre précisément ce qui se passe déjà dans le cas de l'équation (63) qui est la plus simple possible, il serait illusoire de vouloir en déduire le même type de résultats sur des équations plus compliquées, ce qui justifie l'étude de (63). Ce problème a été posé dans [CG05] et est toujours partiellement ouvert, malgré la simplicité de l'équation et du problème posé.

### 3.2 Les résultats antérieurs

Pour comprendre le comportement des solutions de (63), il est raisonnable de commencer par chercher à savoir si les solutions de (63) convergent quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers les solutions d'une équation de transport où le terme de diffusion aurait disparu, dans l'espoir de pouvoir en déduire (ou au moins d'avoir une intuition de) ce qui se passera. C'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 6.** [CG05, Proposition 1] Soit  $y^0 \in L^2(0, L)$ . Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement positive de nombres tendant vers 0. Soient  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^2(0, T)$  et  $v \in L^2(0, T)$  telles que  $v_n \rightharpoonup v$  (pour la topologie  $L^2$ ). A  $n$  fixé, on note  $y_n$  l'unique solution du problème

$$\begin{cases} y_{nt} - \varepsilon_n y_{nxx} + M y_{nx} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y_n(\cdot, 0) = v_n(t) & \text{dans } (0, T), \\ y_n(\cdot, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans } (0, L). \end{cases} \quad (64)$$

Alors  $y_n \in L^2((0, T) \times (0, L))$  et  $y_n \rightharpoonup y \in L^2((0, T) \times (0, L))$ , où  $y$  est la solution de :

$$1. \quad \begin{cases} y_t + M y_x = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(\cdot, 0) = v(t) & \text{dans } (0, T), \\ y_n(\cdot, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans } (0, L), \end{cases} \quad (65)$$

pour  $M > 0$ .

$$2. \quad \begin{cases} y_t + M y_x = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y(\cdot, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans } (0, L), \end{cases} \quad (66)$$

pour  $M < 0$ .

Intéressons-nous donc maintenant aux propriétés de contrôlabilité à 0 des équations de transport (65) et (66). Supposons dans un premier temps  $M > 0$ . On remarque que l'on peut écrire de manière explicite les solutions de (65) sous la forme

$$y(t, x) = y^0(x - Mt) + v(t - x/M).$$

Les caractéristiques de l'équation de transport à vitesse constante  $M > 0$  sont représentées sur la Figure 3.

On a dessiné en vert la partie de la solution qui dépend exclusivement de la donnée initiale et en bleu celle qui dépend exclusivement de la donnée au bord. On voit grâce à cette figure que si le temps de contrôle  $T$  est trop petit ( $T < L/M$ ), il n'y a strictement aucune chance d'espérer obtenir en général  $y(T, \cdot) \equiv 0$  (il suffit pour cela de considérer une condition initiale  $y^0$  qui n'est pas identiquement nulle au voisinage gauche de  $L - MT$ ). L'équation est donc non contrôlable à 0 pour  $T < L/M$  et on dira que le coût du contrôle est infini. Inversement, dès que  $T \geq L/M$ , la condition initiale est sortie de l'intervalle  $(0, L)$  et la solution ne dépend plus que de la donnée au bord que l'on peut choisir à notre guise. Il suffit alors de poser  $v(t) = 0$  en tout temps pour assurer que  $y(T, \cdot) \equiv 0$ . De plus, le coût du contrôle est alors

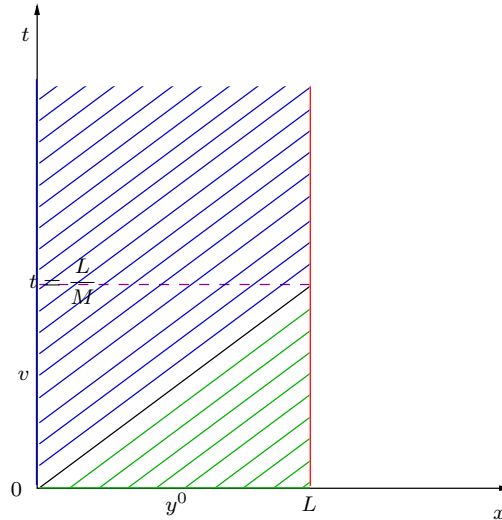


FIGURE 3 – Les caractéristiques de l'équation de transport à vitesse strictement positive et constante.

nul. Pour  $M < 0$ , on peut faire un raisonnement quasiment identique (et même plus simple puisqu'en fait on n'agit pas du tout sur l'équation ici) et aboutir aux mêmes conclusions. Ceci a une conséquence importante au niveau du coût des contrôles, comme nous allons le voir. On notera dorénavant  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M)$  le coût de la contrôlabilité (pour des données initiales  $L^2$  et des contrôles  $L^2$ , mais on pourrait tout aussi bien prendre des données initiales  $H^{-1}$ , cf. Section 3.4) de l'équation (63).

**Corollaire 1.**  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \rightarrow +\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si  $T < L/M$ .

Expliquons rapidement l'argument qui permet de démontrer ceci. Supposons que

$$C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \not\rightarrow +\infty.$$

Il existe alors une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 telle que  $(C_{TD}(\varepsilon_n, T, L, M))_{n \in \mathbb{N}}$  soit une suite bornée. Soit  $y^0 \in L^2(0, L)$  et soit  $v_n$  le contrôle optimal envoyant  $y^0$  à 0 dans l'équation (64). Soit  $T_0 \in (T, L/M)$ . On étend chacun des  $y_n$  et  $v_n$  par 0 sur  $(T, T_0)$  et on note encore  $y_n$  et  $v_n$  l'extension obtenue. Elle vérifie clairement l'équation (64) sur l'intervalle de temps  $(0, T_0)$  (car 0 est un point d'équilibre du système non contrôlé).

D'après l'inégalité

$$\|v_n\|_{L^2(0, T)} \leq C_{TD}(\varepsilon_n) \|y^0\|_{L^2(0, T)},$$

$(\|v_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  forme une suite bornée de  $L^2(0, T_0)$  de laquelle on peut extraire une sous-suite faiblement convergente (que nous noterons encore  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) vers un certain  $v \in L^2(0, T_0)$ .

D'après le Théorème 6,  $y_n \rightarrow y$  solution de (65) ou (66) selon le signe de  $M$ . Dans tous les cas, nécessairement  $y \equiv 0$  sur  $(T, T_0) \times (0, L)$  (puisque c'est le cas pour chacun des  $y_n$ ), ce qui est absurde (il suffit de choisir  $y^0$  non identiquement nul sur un voisinage gauche de  $L - MT_0$ ).

Par contre, le résultat de convergence énoncé dans le Théorème 6 ne permet d'obtenir aucun résultat positif. Il est néanmoins naturel de conjecturer que  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dès que  $T > L/|M|$ . Ceci est au moins partiellement faux à cause du résultat suivant :

**Théorème 7.** [CG05] *Il existe une constante  $C$  telle que  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \geq Ce^{\frac{C}{\varepsilon}}$  dès que  $T < L/M$  pour  $M > 0$  et  $T < 2L/|M|$  pour  $M < 0$ .*

Ce résultat est très surprenant à cause du facteur 2 pour le cas  $M < 0$ , dont l'origine n'est pas encore très bien comprise. Cela permet de reformuler la conjecture naturelle précédente sous la forme suivante :

**Conjecture 3.** [CG05]

1. Si  $M > 0$ , alors  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour  $T \geq L/|M|$ .
2. Si  $M < 0$ , alors  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour  $T \geq 2L/|M|$ .

A ce jour, cette conjecture demeure un problème ouvert. On peut néanmoins démontrer qu'en temps suffisamment grand, on a bien uniforme contrôlabilité (et même décroissance exponentielle du coût du contrôle) :

**Théorème 8.** [CG05]

1. Si  $M > 0$ , alors  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \leq Ce^{-\frac{C}{\varepsilon}}$  quand  $\varepsilon$  est petit pour  $T \geq 4.3L/|M|$ .
2. Si  $M < 0$ , alors  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \leq Ce^{-\frac{C}{\varepsilon}}$  quand  $\varepsilon$  est petit pour  $T \geq 57.2L/|M|$ .

On remarque que ce résultat est assez loin (notamment pour  $M < 0$ ) de ce que qui est conjecturé. Cela vient des techniques utilisées pour démontrer ces résultats, à savoir les inégalités de Carleman : celles-ci sont très utiles pour démontrer des résultats de contrôlabilité mais elles ne sont pas vraiment adaptées pour estimer précisément des constantes intervenant dans le coût du contrôle.

Ces résultats ont été améliorés par la suite :

**Théorème 9.** [Gla10]

1. Si  $M > 0$ , alors  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \leq Ce^{-\frac{C}{\varepsilon}}$  quand  $\varepsilon$  est petit pour  $T \geq 4.2L/|M|$ .
2. Si  $M < 0$ , alors  $C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \leq Ce^{-\frac{C}{\varepsilon}}$  quand  $\varepsilon$  est petit pour  $T \geq 6.1L/|M|$ .

La technique utilisée est similaire à la méthode des moments (mais appliquée à l'adjoint plutôt qu'au système lui-même). On peut aussi signaler une généralisation de ces résultats en dimension supérieure et pour des champs de vitesses dépendant du temps et de l'espace dans [GL07] (mais sans estimation précise sur le temps à partir duquel on a contrôlabilité uniforme), ainsi que [GG08] et [GG09] qui s'intéressent respectivement à un problème de dispersion évanescence et simultanément de diffusion et dispersion évanescence.

### 3.3 Résultats obtenus et méthodes utilisées

J'ai démontré le résultat suivant :

**Théorème 10.** [Lis12]

1. On se place dans le cas où  $M > 0$ . On suppose

$$T > \frac{2\sqrt{3}L}{M}.$$

Il existe alors des constantes  $C, K > 0$  (dépendant éventuellement de  $T, M$  et  $L$ ) telles que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,

$$C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \leq C e^{-\frac{K}{\varepsilon}}.$$

De plus, si l'on suppose que la Conjecture 1 est vérifiée, alors on a le même résultat dès que

$$T > \frac{2L}{M}.$$

2. On se place dans le cas où  $M < 0$ . On suppose

$$T > \frac{(2\sqrt{3} + 2)L}{|M|}.$$

Il existe alors des constantes  $C, K > 0$  (dépendant éventuellement de  $T, M$  et  $L$ ) telles que, pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,

$$C_{TD}(\varepsilon, T, L, M) \leq C e^{-\frac{K}{\varepsilon}}.$$

De plus, si l'on suppose que Conjecture 1 est vérifiée, alors on a le même résultat dès que

$$T > \frac{4L}{|M|}.$$

Ce résultat est une conséquence de la remarque suivante :

**Proposition 6.** On considère

$$u(t, x) := e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon^2} - \frac{Mx}{2\varepsilon}} y\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right),$$

avec  $y$  vérifiant (63).  $u$  est défini sur  $(0, \varepsilon T) \times (0, L)$  et vérifie alors (19) sur  $(0, \varepsilon T) \times (0, L)$  avec condition initiale  $u^0(x) := e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}} y^0(x)$  et contrôle  $w(t) := e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon^2}} v(t/\varepsilon)$ .

On voit donc qu'on peut à l'aide de cette transformation ramener le problème de contrôlabilité uniforme précédent à un problème de contrôlabilité en temps petit pour l'équation de la chaleur (on a amené la dépendance en  $\varepsilon$  de l'équation (63) dans la variable de temps). On peut donc appliquer à  $u$  les résultats décrits dans la Section 1.2, et notamment l'inégalité  $\alpha^* \leq 3/4$ , et à partir de là estimer  $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon)$  à l'aide de  $C_D(\varepsilon(T - T_0), L)$  pour tout  $T_0 \in (0, T)$ , en laissant évoluer le système librement jusqu'à un certain temps  $T_0$ , à l'aide du lemme suivant :

**Lemme 2.** *Pour tout  $T_0 < T$ , on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq \frac{e^{-\frac{M^2 T_0}{4\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} C_D(\varepsilon(T - T_0), L) \text{ si } M > 0, \\ C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq \frac{e^{-\frac{M^2 T_0}{4\varepsilon} + \frac{|M|L}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} C_D(\varepsilon(T - T_0), L) \text{ si } M < 0. \end{array} \right. \quad (67)$$

En optimisant le placement de ce  $T_0$  sur l'intervalle  $(0, T)$ , on obtient le Théorème 10 en distinguant les cas  $M > 0$  et  $M < 0$ .

En utilisant la Proposition 6, on peut en fait aller beaucoup plus loin et aussi faire un lien entre la Conjecture 2 et la Conjecture 3, comme expliqué dans [Lis13a] :

**Théorème 11.** [Lis13a] *On suppose que la Conjecture 3.1.2 est vérifiée. Alors il existe des constantes  $C, K > 0$  (de dépendant pas de  $\varepsilon$  mais dépendant éventuellement de  $T, M$  et  $L$ ) telles que pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,*

$$C_{TD}(T, L, \varepsilon, M) \leq C e^{-\frac{K}{\varepsilon}}$$

dès que

1.  $T > L/M$  si  $M > 0$ ,
2.  $T > (1 + \sqrt{2})L/|M|$  si  $M < 0$ .

Le Théorème 11 est plutôt surprenant car si on le compare avec le Théorème 10, il semble indiquer que la Conjecture 2 est beaucoup plus forte que la Conjecture 1. Ceci n'est pas très intuitif car on pourrait penser que le caractère dissipatif du système implique que la contribution de l'intégrale entre  $T$  et  $+\infty$  est négligeable par rapport à celle de l'intégrale entre 0 et  $T$ . De plus, le Théorème 11 est intéressant dans la mesure où il permet de voir que démontrer la Conjecture 2 résoudra simultanément la Conjecture 1 (cf. Proposition 2) et la Conjecture 3 au moins pour  $M > 0$ . Ce théorème suggère donc qu'il est plus intéressant de s'attaquer directement à la Conjecture 2.

Pour démontrer le Théorème 11, on commence par effectuer un changement d'inconnues semblable à celui de la Proposition 6. On considère  $\psi^0 \in H_0^1(0, L)$  et  $\psi$  une solution du problème adjoint :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_t - \varepsilon \psi_{xx} - M \psi_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ \psi(\cdot, 0) = 0 & \text{in } (0, T), \\ \psi(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \\ \psi(0, \cdot) = \psi^0 & \text{in } (0, T). \end{array} \right.$$

On appelle

$$\varphi(t, x) := e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon^2} + \frac{Mx}{2\varepsilon}} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right).$$

$\varphi$  est maintenant solution de l'équation (22) sur l'intervalle  $(0, \varepsilon T)$ . On applique à  $\varphi$  l'inégalité (28). On restreint l'intégrale à gauche de l'inégalité (28) à un certain intervalle  $(\varepsilon a T, \varepsilon T)$  avec  $a \in (0, 1)$  proche de 1 et à droite sur un intervalle  $(0, \varepsilon b T)$  avec  $b > 0$  proche de 0 puis on applique une égalité de dissipation de l'énergie pour les solutions de (22). On remplace ensuite  $\varphi$  par ce que cela vaut en fonction de  $\psi$  dans l'équation, on utilise la Conjecture 2, puis on distingue les cas  $M > 0$  et  $M < 0$  pour conclure.

### 3.4 Remarques additionnelles et perspectives

1. Dans les Théorèmes 10 et 11, on peut en réalité choisir des conditions initiales dans  $H^{-1}(0, L)$ .
2. Grâce au lien fait entre la Conjecture 1 et la Conjecture 3, n'importe quelle nouvelle majoration de  $\alpha^*$  fournira automatiquement un temps plus petit pour lequel la décroissance exponentielle du coût du contrôle est vérifiée. Cependant, on ne pourra jamais réussir à aller jusqu'à la Conjecture 3. A priori, on n'a aucune raison de penser à l'issue de ce travail que la Conjecture 3 pourrait être fausse car le fait de laisser le système évoluer librement pendant un certain temps a peu de chances d'être optimal, et ceci d'autant plus que les résultats numériques présentés dans [Sal09] semblent indiquer qu'au moins dans le cas  $M > 0$ , la constante  $\alpha^*$  ne peut excéder 1.6.
3. La Proposition 6 ne semble pas pouvoir se généraliser de manière évidente au cas où la vitesse dépendrait du temps et/ou de l'espace, et pas non plus en dimension supérieure.
4. Pour établir le Théorème 10, on n'agit pas pendant un certain laps de temps. Une idée d'amélioration serait donc de trouver une manière d'agir (par exemple pour accélérer la décroissance de la solution au début du processus) qui ne coûte pas trop cher pour ne pas trop changer le coût du contrôle dans les inégalités (67).
5. Il pourrait être intéressant de voir si le même genre de méthode permettrait par exemple de déduire de résultats de contrôlabilité en temps petit pour des équations de type KdV linéaire des résultats pour des équations de type KdV linéaire en dispersion (ou diffusion-dispersion) évanescence, à l'aide des résultats sur le coût des contrôles rapides pour de telles équations donnés dans la Section 5.
6. Le Théorème 11 permet de retrouver la Conjecture 3 pour  $M > 0$ . Cela peut laisser penser que la Conjecture 3 n'est pas la bonne dans le cas  $M < 0$  et qu'elle pourrait éventuellement être remplacée par ce qui est trouvé dans le Théorème 11, à savoir  $T > (1 + \sqrt{2})L/|M|$  pour  $M < 0$ .

## 4 Contrôlabilité uniforme d'une équation de transport-diffusion avec transport dégénéré

### 4.1 Présentation

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un problème analogue à celui de la Section 3, mais avec une vitesse de transport variable en espace et dégénérant sur le bord gauche de l'intervalle d'espace. Soient  $L > 0$ ,  $T > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . On considère  $\alpha \in (0, 1)$  ( $\alpha = 0$  correspond à ce qui a été fait dans la Section 3, et le cas  $\alpha \geq 1$  est trop dégénéré) et on s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + x^\alpha y_x = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{dans } (0, T). \end{cases} \quad (68)$$

avec condition initiale  $y^0 \in L^\infty(0, L)$  et contrôle  $u \in L^\infty(0, L)$ . Contrairement à ce qui a été fait dans les sections précédentes, l'espace d'état et l'espace de contrôle ne sont pas des espaces de Hilbert. On admet ici que l'on peut développer une théorie semblable à ce qui est fait dans



la Section 1.2 et que l'on a notamment un équivalent de la dualité observabilité-contrôlabilité du Théorème 2.

La fonction  $x \mapsto x^\alpha$  étant dans  $L^\infty(0, L)$ , on peut démontrer le caractère bien posé de ce système (on peut par exemple consulter [Lie96]). De plus, comme précisé dans la Section 3, on sait en utilisant les résultats de [FI96a] qu'à  $\varepsilon$  fixé ce système est contrôlable à 0 en temps arbitrairement petit pour des données initiales  $L^2(0, L)$  et des contrôles  $H^1(0, T)$ , ce qui implique a fortiori que l'on peut contrôler des conditions initiales  $L^\infty(0, L)$  par des contrôles  $L^\infty(0, L)$ . Comme dans la section précédente, nous allons nous intéresser à la contrôlabilité uniforme quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  de cette famille d'équations. On note  $C_{TDdeg}(\varepsilon, T, L)$  le coût du contrôle. Ce problème est plus complexe que le précédent et soulève de nombreuses autres questions mathématiques intéressantes.

Considérons pour commencer le système limite

$$\begin{cases} y_t + x^\alpha y_x = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{dans } (0, T). \end{cases} \quad (69)$$

Il s'agit d'une équation de transport non conservative à vitesse  $x^\alpha$ . Il n'est pas clair que ce système est bien posé pour deux raisons.

1. La première raison provient de la régularité du terme de vitesse  $b(x) := x^\alpha$ . Pour résoudre ce type d'équations, on peut commencer par tenter d'appliquer la méthode des caractéristiques. En général cette méthode nécessite des régularités sur le terme de vitesse  $b$  (à savoir que  $b$  doit être une fonction lipschitzienne, cf. par exemple [Per10, Annexe A] où une étude auto-contenue et relativement complète de ce type d'équations est menée) qui ne sont pas satisfaites ici.
2. La deuxième raison est que l'on place la condition au bord  $u$  à l'endroit où la vitesse  $b$  dégénère, ce qui n'est pas usuel. Il y a tout de même un espoir de pouvoir propager cette condition au bord à l'intérieur du domaine, car même si la vitesse  $b$  est nulle en  $x = 0$ , l'accélération  $b'$  en  $x = 0$  est infinie.

Nous devons donc avant tout redéfinir une notion de solution faible pour (69) et démontrer que de telles solutions sont uniques.

Un autre problème réside dans la convergence du problème parabolique (68) vers le problème de transport (69). En effet, à cause de l'effet régularisant des équations paraboliques, les solutions de (68) sont bien plus régulières que celles de (69) et on peut observer que l'on perd nécessairement la condition au bord en passant à la limite. Nous verrons plus tard comment remédier à ce problème. Une fois ces problèmes réglés, on pourra s'intéresser au problème de contrôlabilité.

## 4.2 Les résultats antérieurs

On a dans la Section 3 développé les résultats connus pour l'équation de transport-diffusion à coefficients constants et pour les limites évanescents de lois de conservations. Le problème de la contrôlabilité uniforme d'équations de transport-diffusion avec coefficient de transport non constant n'a à ma connaissance été étudié que dans l'article [GL07], où les auteurs considèrent une équation posée sur un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  avec contrôle interne ou frontière, la vitesse de propagation pouvant dépendre simultanément des variables de temps et d'espace. Le résultat obtenu par les auteurs est le suivant : si le temps de contrôle est petit (assez petit pour qu'il existe une caractéristique qui n'intersecte pas le domaine de contrôle et ne sorte pas de  $\Omega$ ),

on a explosion exponentielle du coût du contrôle quand la viscosité tend vers 0. Inversement, en temps grand (plus grand qu'un multiple du temps de sortie des caractéristiques), on aura décroissance exponentielle du coût du contrôle quand la viscosité tend vers 0. Malheureusement, les régularités exigées pour appliquer les résultats de cet article ne permettent pas de s'en servir dans notre cas.

### 4.3 Résultats obtenus et méthodes utilisées

Comme cela a été expliqué dans la Section 3, il paraît raisonnable de commencer par comprendre en quel sens les solutions de (68) convergent vers celles de (69). Pour ce faire, il faut commencer par donner un sens aux solutions de (69). On définit pour commencer un espace de solutions régulières

$$C_\alpha([0, T] \times [0, L]) := \{g \in C^0([0, T] \times [0, L]) | g_t \in C^0([0, T] \times [0, L]), x^\alpha g_x \in C^0([0, T] \times [0, L])\} \quad (70)$$

et un espace de fonctions tests

$$S_\alpha((0, T) \times (0, L)) := W^{1,1}((0, T), L^1(0, L)) \cap L^1((0, T), W_\alpha^1(0, L)), \quad (71)$$

où

$$W_\alpha^1(0, L) := \{\varphi \in L^1(0, L) | (x^\alpha \varphi)_x \in L^1(0, L)\}.$$

Les fonctions  $g$  appartenant à  $S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  vérifient notamment que

$$x^\alpha g \in C^0([0, L], L^1(0, T)), \quad (72)$$

$$g \in C^0([0, T], L^1(0, L)), \quad (73)$$

de telle sorte que  $x^\alpha g(t, x)$  a un sens dans  $L^1(0, T)$  à  $x$  fixé dans  $[0, L]$  et que  $g(t, x)$  a un sens dans  $L^1(0, L)$  à  $t$  fixé dans  $[0, T]$ . Si  $y \in C_\alpha([0, T] \times [0, L])$  et vérifie (69) avec  $y^0 \in C^0([0, L])$  et  $u \in C^0([0, T])$ , alors pour tout  $\varphi \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$ , en utilisant des intégrations par parties, on a

$$-\int_0^T \int_0^L y(\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) + \int_0^T y(t, L) L^\alpha \varphi(t, L) dt - \int_0^T u(t) (x^\alpha \varphi(t, x))|_{x=0} dt \quad (74)$$

$$+ \int_0^L y(T, x) \varphi(T, x) dx - \int_0^L y^0(x) \varphi(0, x) dx = 0. \quad (75)$$

Ceci justifie la définition suivante des solutions faibles :

**Définition 7.** [GL13] Une *solution faible* du problème de Cauchy (69) est une fonction  $y \in L^\infty((0, T) \times (0, L))$  telle que, pour tout  $\varphi \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  vérifiant

$$\varphi(\cdot, L) = 0 \text{ dans } (0, T), \quad (76)$$

$$\varphi(T, \cdot) = 0 \text{ dans } (0, L), \quad (77)$$

on ait

$$-\int_0^T \int_0^L y(\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) - \int_0^T u(t) (x^\alpha \varphi(t, x))|_{x=0} dt - \int_0^L y^0(x) \varphi(0, x) dx = 0. \quad (78)$$

On peut vérifier que les solutions dites régulières vérifient bien l'équation (69) de manière classique. Ceci est justifié par la proposition suivante :

**Proposition 7.** [GL13] On suppose que  $y$  est une solution faible de (69) vérifiant de plus  $y \in C_\alpha([0, T] \times [0, L])$ . Alors on a

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t + x^\alpha y_x = 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y^0 \in C^0([0, L]), \\ u \in C^0([0, T]), \\ y(0, x) = y^0(x), \quad \forall x \in (0, L), \\ y(t, 0) = u(t), \quad \forall t \in (0, T). \end{array} \right.$$

On s'intéresse maintenant aux courbes caractéristiques de l'équation. Celles-ci peuvent se calculer de manière explicite, et sont représentées sur la Figure 4.3.

**Proposition 8.** Soit  $x_0 \in (0, L)$ . Les solutions de l'EDO

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x^\alpha, \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

sont définies de la manière suivante pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$x(t) = (x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t > -\frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad (79)$$

$$x(t) = 0, \quad t \leq -\frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (80)$$

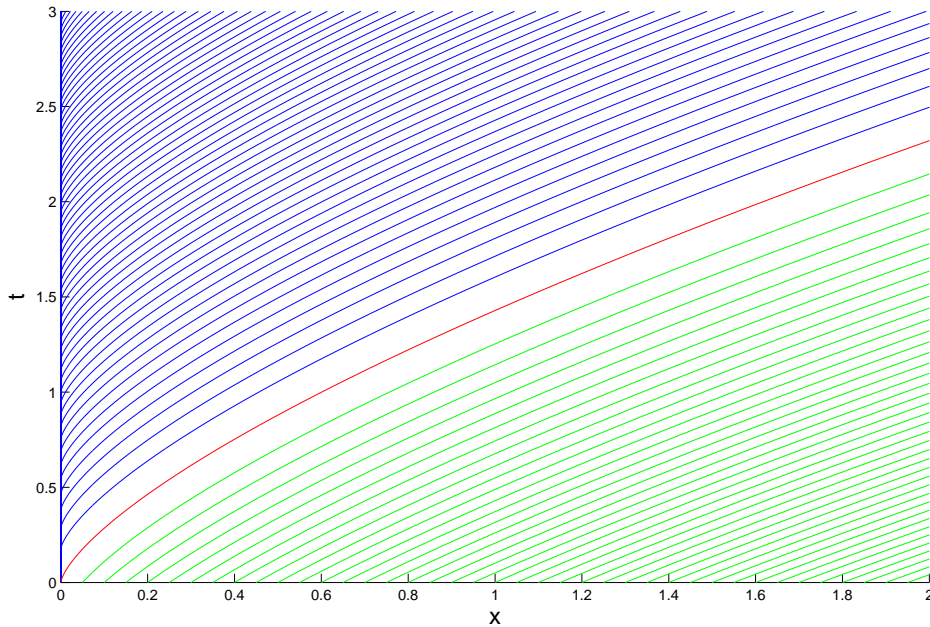


FIGURE 4 – Quelques caractéristiques pour  $\alpha = 1/3$  et  $L = 2$ .

On voit que les caractéristiques s'intersectent et sont même confondues, mais ce phénomène ne peut arriver qu'en  $x = 0$ . En fait, pour tout point dans  $(0, T) \times (0, L)$ , il existe une unique caractéristique passant par ce point. Ceci laisse donc espérer de pouvoir définir les solutions par la méthode des caractéristiques. C'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 12.** [GL13] On suppose que  $y^0 \in L^\infty(0, L)$  et de  $u \in L^\infty(0, T)$ . Le problème de Cauchy (69) admet une unique solution faible donnée par

$$y(t, x) := y^0((x^{1-\alpha} - t(1-\alpha))^{1-\alpha}) + u(t - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}). \quad (81)$$

De plus,  $y \in L^\infty((0, T) \times (0, L))$ , vérifie

$$\|y\|_{L^\infty((0, T) \times (0, L))} \leq \max(\|y^0\|_{L^\infty(0, L)}, \|u\|_{L^\infty(0, L)}) \quad (82)$$

et

$$y \in C^0([0, T], L^p(0, L)),$$

pour tout  $p \in [1, \infty)$ .

On voit notamment que comme dans le cas de l'équation de transport à coefficients constants, on a grâce à l'expression (81) deux zones distinctes dans  $(0, T) \times (0, L)$  :

1. La zone au-dessous de la caractéristique partant de  $x = 0$  (en vert sur la Figure 4.3), où la solution dépend uniquement de la condition initiale  $y^0$ . On introduit la notation correspondante

$$\Gamma^+(T) := \{(t, x) \in [0, T] \times [0, L] | x^{1-\alpha} > (1-\alpha)t\}.$$

2. La zone au-dessus de la caractéristique partant de  $x = 0$  (en vert sur la Figure 4.3), où la solution dépend uniquement de la condition au bord  $u$ . On introduit la notation correspondante

$$\Gamma^-(T) := \{(t, x) \in [0, T] \times [0, L] | x^{1-\alpha} < (1-\alpha)t\}.$$

On déduit de cette remarque le résultat suivant :

**Corollaire 2.** 1. On suppose  $T < \frac{L^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ . Alors l'équation (69) n'est pas contrôlable à 0.

2. On suppose  $T \geq \frac{L^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ . Alors pour  $u = 0$ ,  $y$  est identiquement nulle sur  $(0, T) \times (0, L)$ , donc l'équation (69) est contrôlable à 0 et le coût du contrôle est nul.

De manière analogue à ce qui a été expliqué dans la Section 3, on s'attend donc à ce que l'on ait  $C_{TDdeg}(\varepsilon, T, L) \rightarrow \infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dès que  $T < L^{1-\alpha}/(1-\alpha)$  et  $C_{TDdeg}(\varepsilon, T, L) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dès que  $T \geq L^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ . Pour démontrer la premier point, on peut s'inspirer de ce qui a été présenté dans la preuve de la Proposition 1. Dans cette preuve, on remarque qu'il n'est pas vraiment indispensable que les solutions de (68) convergent vers celles de (69) sur  $\Gamma^-(T)$  mais qu'il suffit de le faire sur  $\Gamma^+(T)$ . En fait, il est impossible de faire converger une solution de (68) vers celle de (69) sur tout  $(0, T) \times (0, L)$  comme expliqué à la fin du Paragraphe 4.1.

Nous avons démontré le résultat suivant :

**Proposition 9.** [GL13] Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^{+*}$  qui converge vers 0. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $L^\infty(0, T)$  convergeant vers un certain  $u \in L^\infty(0, T)$  pour la topologie \*-faible. Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $L^\infty((0, T) \times (0, L))$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{nt} - \varepsilon_n y_{nxx} + x^\alpha y_{nx} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } (0, L), \\ y(t, 0) = u_n(t) & \text{dans } (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{dans } (0, L). \end{array} \right. \quad (83)$$

Alors à une sous-suite près on a sur  $\Gamma^+(T)$  que

$$y_n \xrightarrow{*} y^0((x^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}) \in L^\infty(\Gamma^+(T)).$$

On en déduit par une preuve analogue à celle de la Proposition 1 le résultat suivant :

**Corollaire 3.** [GL13] On Suppose  $T < L^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ . Alors

$$C_{TDdeg}(\varepsilon, T, L) \rightarrow \infty$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### 4.4 Remarques additionnelles et perspectives

1. Ici, nous avons choisi par simplicité de prendre des conditions initiales et des contrôles essentiellement bornés. Il pourrait être intéressant de se poser la question de la contrôlabilité uniforme pour  $y^0 \in L^2(0, L)$  et pour  $u \in L^2(0, T)$ . Le problème se situe dans ce cas au niveau de l'équation de transport ; en effet, si l'on définit la solution par la méthode des caractéristiques, on peut observer que  $y \notin L^2((0, T) \times (0, L))$ , autrement dit on a une perte d'intégrabilité de la fonction par rapport à la condition initiale (cela provient du caractère non conservatif de l'équation). Il n'est alors pas du tout évident de comprendre de quelle manière le problème (68) converge vers le problème (69) et on ne peut donc pas donner un analogue de (3). De plus, si l'on n'a pas convergence du problème parabolique vers le problème de transport, l'étude de la contrôlabilité uniforme perd un peu de son intérêt.

2. Comme pour la Section 3, on a la conjecture naturelle suivante :

**Conjecture 4.**  $C_{TDdeg}(\varepsilon, T) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour  $T \geq L^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ .

Espérer démontrer cette conjecture serait un peu ambitieux, on peut plutôt essayer dans un premier temps comme à la Section 3 de trouver une certaine constante numérique  $C_{num}$  pour laquelle on ait  $C_{TDdeg}(\varepsilon, T) \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour  $T \geq C_{num}L^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ . Ce travail est en cours avec Mamadou Gueye. Plusieurs pistes sont envisageables : tenter la même méthode que les articles [CG05] et [GL07], ou alors celle de [Gla10]. La première méthode semble difficilement s'appliquer à cause du manque de régularité de la vitesse qui empêche de trouver une estimée de dissipation adaptée comme donnée dans [Dan97]. La deuxième méthode est plus prometteuse mais nécessiterait une étude précise du spectre de l'opérateur autoadjoint (obtenu à partir de l'équation de départ en conjuguant par un poids bien choisi)

$$-\varepsilon \partial_{xx}^2 + \left( \frac{x^{2\alpha}}{4\varepsilon} - \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{2} \right) Id,$$

au moins pour  $\varepsilon$  assez petit. Cette question semble difficile car le potentiel  $(\frac{x^{2\alpha}}{4\varepsilon} - \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{2})$  dépend de  $\varepsilon$  et n'est pas très régulier (il est un petit peu mieux que  $L^1$ ). Notamment, la méthode de tir expliquée dans [PT87] ne semble pas permettre d'obtenir des estimations assez précises en fonction du paramètre  $\varepsilon$  et les méthodes variationnelles non plus.

## 5 Coût des contrôles rapides pour certaines familles d'équations paraboliques ou dispersives

### 5.1 Présentation

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'évolution du coût du contrôle en temps petit pour un certain nombre d'équations paraboliques ou dispersives. On se replace dans le

formalisme de la Section 1.2 et plus particulièrement du Paragraphe 1.2.iii. On considère un opérateur autoadjoint  $A$  à résolvante compacte et deux équations, une de type dissipatif et une de type conservatif :

$$y_t = -Ay + Bu \quad (84)$$

et

$$y_t = -iAy + Bu. \quad (85)$$

Le but de l'article [Lis13b] est de généraliser les résultats décrits dans le Paragraphe 1.2.v au cas où les valeurs propres  $\lambda_k$  de  $A$  ne se comportent pas nécessairement asymptotiquement comme  $k^2$  mais comme  $k^\alpha$  avec  $\alpha \geq 2$ , et notamment à estimer de manière la plus précise possible le coût du contrôle. On verra que celui-ci s'écrira nécessairement sous la forme  $e^{C/T^\beta}$  avec un certain  $\beta$  à déterminer en fonction de  $\alpha$  et une constante  $C$  dépendant de la géométrie. On donne un majorant explicite du coût et on montre que la puissance de  $1/T$  à l'intérieur de l'exponentielle est optimale. On applique ensuite ces résultats à un certain nombre d'équations paraboliques ou dispersives (équations de type KdV linéaires, équations de la chaleur ou de Schrödinger fractionnaires).

## 5.2 Les résultats antérieurs

On a déjà exposé dans le Paragraphe 1.2.v les principaux résultats connus en ce qui concerne le coût du contrôle en temps petit des équations de la chaleur et de Schrödinger contrôlées par le bord. Les articles [MZ06a] et [Mil06c] se sont essentiellement intéressés au coût des contrôles rapides pour des équations de type chaleur avec Laplacien fractionnaire et contrôles distribués, tandis que [Mil10] et [TT11] font un lien entre le coût des contrôles rapides et les inégalités spectrales de type Lebeau-Robbiano pour des opérateurs assez généraux (cf. [LR95], [JL99] et [LZ98]). Toutefois, tous ces articles semblent plutôt se concentrer sur le cas des contrôles distribués et ne donnent pas de constantes explicites en fonction de la géométrie. De plus, les exemples d'applications des résultats se concentrent généralement sur le Laplacien fractionnaire. Ceci justifie l'intérêt de s'intéresser au coût de la contrôlabilité frontière pour des classes d'équations abstraites de la forme (84) ou (85) plus larges que l'équation de la chaleur ou de Schrödinger.

## 5.3 Résultats obtenus et méthodes utilisées

On considère dans un premier temps que  $A$  est un opérateur défini positif. On rappelle que les notations  $\lesssim$  et  $\simeq$  ont été définies au début du Paragraphe 1.2.v et on reprend les notations et définitions des Paragraphes 1.2.iii et 1.2.iv. On a le résultat suivant.

**Théorème 13.** [Lis13b]

1. On suppose que  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est une suite régulière (au sens de (15)) de réels vérifiant de plus qu'il existe  $\alpha \geq 2$  et  $R > 0$  tels que

$$\lambda_n = Rn^\alpha + O_{n \rightarrow \infty}(n^{\alpha-1}), \quad (86)$$

et on suppose  $b_k \simeq 1$  (au sens où la suite  $(|b_k|)_{k \in \mathbb{N}}$  est minorée et majorée par des constantes strictement positives). Alors le système (85) est contrôlable à 0, de plus le coût du contrôle  $C_T$  vérifie

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{(RT)^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ pour tout } K > \frac{2^{1/(\alpha-1)} 3(\alpha-1) \pi^{\alpha/(\alpha-1)}}{((\alpha \sin(\pi/(\alpha)))^{\alpha/(\alpha-1)})}. \quad (87)$$

2. On suppose que  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  est une suite régulière de nombres vérifiant de plus qu'il existe  $\alpha \geq 2$  et  $R > 0$  tels que (86) est vérifié. On suppose que  $b_k \simeq 1$ . Alors le système (84) est contrôlable à 0, de plus le contrôle peut être choisi dans l'espace  $C^0([0, T])$  et le coût du contrôle  $C_T$  (en norme  $L^\infty(0, T)$ , et donc aussi en norme  $L^2(0, T)$ ) vérifie

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{(RT)^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ pour tout } K > \frac{2^{1/(\alpha-1)} \mathfrak{Z}(\alpha-1) \pi^{\alpha/(\alpha-1)}}{(2\alpha \sin(\pi/(2\alpha)))^{\alpha/(\alpha-1)}} \quad (88)$$

(la constante implicite dans les inégalités précédentes peut dépendre de  $\alpha$  ou  $R$  mais pas de  $T$ )

On étend ce résultat dans le cas conservatif au cas où  $A$  est toujours à résolvante compacte mais pas nécessairement positif.

**Théorème 14.** [Lis13b] On suppose que la suite  $(\lambda_n)_{(n \in \mathbb{Z})^*}$  est une suite régulière croissante de nombres non nuls vérifiant de plus que qu'il existe  $\alpha \geq 2$  et  $R > 0$  tels que

$$\begin{cases} \lambda_n = Rn^\alpha + O_{n \rightarrow \infty}(n^{\alpha-1}), \\ \lambda_{-n} = -Rn^\alpha + O_{n \rightarrow \infty}(n^{\alpha-1}), \\ \operatorname{sgn}(\lambda_n) = \operatorname{sgn}(n), \end{cases} \quad (89)$$

et on suppose  $b_k \simeq 1$ . Alors le système (85) est contrôlable à 0 et le coût du contrôle  $C_T$  satisfait

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{(RT)^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ pour tout } K > \frac{2^{(\alpha+1)/(\alpha-1)} \mathfrak{Z}(\alpha-1) \pi^{\alpha/(\alpha-1)}}{((\alpha \sin(\pi/(\alpha)))^{\alpha/(\alpha-1)})}.$$

(la constante implicite dans l'inégalité précédente peut dépendre de  $\alpha$  ou  $R$  mais pas de  $T$ ).

On dispose aussi d'un résultat sous forme de borne inférieure qui montre l'optimalité de la puissance de  $T$  :

**Théorème 15.** [Lis13b] Avec les mêmes notations et sous les mêmes hypothèses que celles des Théorèmes 13 et 14, la puissance de  $1/T$  impliquée dans l'exponentielle est optimale au sens où il existe une certaine constance  $C > 0$  telle que l'on ait

$$e^{\frac{C}{T^{1/(\alpha-1)}}} \lesssim C_T. \quad (90)$$

(la constante implicite dans les inégalités précédentes peut dépendre de  $\alpha$  mais pas de  $T$ ).

La preuve des Théorèmes 13, 14 et 15 repose sur la méthode des moments. Comme expliqué au Paragraphe 1.2.iv, on doit d'abord s'intéresser à la fonction  $J_k$  définie en (18) et démontrer des estimées précises sur cette fonction, puis doit construire un multiplicateur qui convient. En fait, pour traiter simultanément le cas parabolique et conservatif, on définit plutôt par commodité (cf. [TT07])

$$\Phi_k(z) := \prod_{j \neq k} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j - \lambda_k}\right).$$

On peut faire le lien avec la définition donnée en (18) de la manière suivante :

1. Si on s'intéresse au cas parabolique (les valeurs propres sont les  $\lambda_k$ ), on observe que  $J_k(z) = \Phi_k(-iz - \lambda_k)$ .

2. Si on s'intéresse au cas conservatif (les valeurs propres de  $A$  sont les  $i\lambda_k$ , donc  $\lambda_k$  est remplacé par  $i\lambda_k$  dans (18) ici), on observe que  $J_k(z) = \Phi_k(z - \lambda_k)$ .

On suppose dorénavant sans perte de généralité de  $R = 1$  (on peut revenir au cas général avec un argument de changement d'échelle).

On démontre les estimations suivantes pour les fonctions  $\Phi_n$  dans le cas des hypothèses du Théorème 13 :

**Lemme 3.** *On suppose que  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite régulière croissante de nombres strictement positifs telle qu'il existe un certain  $\alpha \geq 2$  et un certain  $R > 0$  tels que (86) est vérifiée. Alors*

1. Pour  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\Phi_n(z) \lesssim e^{\frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}|z|^{\frac{1}{\alpha}}} P(|z|), \quad (91)$$

où  $P$  est un polynôme.

2. Si  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi_n(-ix - \lambda_n) \lesssim e^{\frac{\pi}{2\sin(\pi/2\alpha)}|x|^{\frac{1}{\alpha}}} \bar{P}(\lambda_n, |x|), \quad (92)$$

où  $\bar{P}$  est un polynôme.

(la constante implicite dans les inégalités précédentes peut dépendre de  $\alpha$  mais pas de  $z$ ,  $x$  ou  $n$ ).

L'idée de la preuve de (91) repose essentiellement sur la méthode de [TT07] : on majore  $\Phi_n$  par

$$\ln|\Phi_n(z)| \leq \int_0^{|z|} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{L_n(s)}{(t+s)^2} ds dt, \quad (93)$$

avec

$$L_n(s) := \#\{k \mid |\lambda_k - \lambda_n| \leq s\}. \quad (94)$$

On doit alors estimer  $L_n$  puis se ramener grâce à (93) à des estimations sur des intégrales à paramètres qui pour certaines peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions hypergéométriques et pour d'autres ne s'expriment pas en fonction des fonctions usuelles. Pour (92), les calculs sont nettement plus explicites, et on observe que

$$|\ln\Psi_n(z)| \lesssim B_n \int_0^{|x|^2/\lambda_1^2} \frac{M(t)}{1+t} dt, \quad (95)$$

où

$$M(t) := \sum_{\lambda_k \leq |x|/\sqrt{t}} 1$$

et  $B_n$  est polynomial en  $\lambda_n$ . L'estimation de  $M$  aboutit à un calcul d'intégrale classique et on obtient le résultat voulu.

Il reste à définir un multiplicateur adéquat. On reprend en fait quasiment le même que dans [TT07]. On considère  $\nu > 0$  et  $\beta > 0$  reliés par la relation

$$\beta\nu^{\alpha-1} = (4(\alpha-1))^{\alpha-1} \left( \frac{\pi + \delta}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \right)^{\alpha}, \quad (96)$$



où  $\delta > 0$  est un petit paramètre.

On appelle

$$\sigma_\nu(t) := e^{-\frac{\nu}{1-t^2}},$$

que l'on prolonge par 0 en dehors de  $(-1, 1)$ . On pose

$$H_\beta(z) := C_\nu \int_{-1}^1 \sigma_\nu(t) e^{-i\beta tz} dt,$$

où

$$C_\nu := 1/\|\sigma_\nu\|_1.$$

On démontre alors que l'on a

$$H_\beta(0) = 1, \tag{97}$$

$$H_\beta(ix) \gtrsim \frac{e^{\beta|x|/(2\sqrt{\nu+1})}}{\sqrt{\nu+1}}, \tag{98}$$

$$\frac{1}{2}e^\nu \leq C_\nu \leq \frac{3}{2}\sqrt{\nu+1}e^\nu, \tag{99}$$

$$|H_\beta(z)| \leq e^{\beta|\operatorname{Im}(z)|}. \tag{100}$$

La seule estimation qui n'est pas une conséquence immédiate de celles de [TT07] est la suivante :

**Lemme 4.** *Si  $x \in \mathbb{R}$ , on a*

$$H_\beta(x) \lesssim \sqrt{\nu+1} e^{3\nu/4 - (\pi+\delta/2)|x|^{1/\alpha}}.$$

(La constante implicite peut éventuellement dépendre de  $\alpha$ )

Cette estimation se démontre comme dans [TT07] en utilisant la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes et le fait que  $\sigma_\nu$  est à support compact, ce qui permet d'obtenir une majoration de  $H_\beta$  en fonction de la norme infinie de n'importe quelle dérivée de  $\sigma_\nu$ . En optimisant le choix de cette dérivée, on aboutit à (4).

Il reste alors à appliquer la méthode des moments comme décrite au Paragraphe 1.2.iv. On se place dans le cas de l'équation (85). On pose

$$g_n(z) := \Phi_n(-z - \lambda_n) H_\beta(z + \lambda_n). \tag{101}$$

Toutes les estimations précédentes permettent entre autres de démontrer que  $g_n$  est la transformée de Fourier d'une fonction  $f_n \in L^2(\mathbb{R})$  à support compact dans  $[-T/2, T/2]$  pour un choix adéquat de  $\beta$ . De plus, par construction  $\{f_n\}$  est biorthogonale à la famille des  $\{e^{i\lambda_n t}\}$ . Soit alors  $y^0 = \sum a_k e_k$  une condition initiale. On appelle

$$u(t) := - \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k/b_k) e^{-iT\lambda_k/2} f_k(t - T/2). \tag{102}$$

Un tel contrôle envoie bien  $y^0$  à 0 par construction. On se sert des estimations précédentes pour majorer le coût du contrôle de manière précise, et on aboutit au Théorème 13 dans le cas dispersif.

Pour le cas de l'équation (84), on pose

$$h_n(z) := \frac{\Phi_n(-iz - \lambda_n) H_\beta(z \sin(\pi/\alpha)^\alpha / (2 \sin(\pi/(2\alpha))^\alpha))}{H_\beta(i\lambda_n \sin(\pi/\alpha)^\alpha / (2 \sin(\pi/(2\alpha))^\alpha))}. \tag{103}$$

$h_n$  est la transformée de Fourier d'une fonction  $w_n \in L^2(\mathbb{R})$  à support compact dans  $[-T/2, T/2]$  pour un choix adéquat de  $\beta$ . De plus, par construction  $\{w_n\}$  est biorthogonale à la famille des  $\{e^{-\lambda_n t}\}$ . Soit alors  $y^0 = \sum a_k e_k$  une condition initiale. On appelle

$$u(t) := - \sum (a_k/b_k) e^{-T\lambda_k/2} w_k(t - T/2). \quad (104)$$

Un tel contrôle envoie bien  $y^0$  à 0 par construction. On se sert des estimations précédentes pour majorer le coût du contrôle de manière précise, et on aboutit au Théorème 13 dans le cas dissipatif.

En ce qui concerne la preuve du Théorème 14, on observe qu'elle se ramène à démontrer l'analogie suivant du Lemme 3 :

**Lemme 5.** *On suppose que  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite régulière croissante de nombres non nuls telle qu'il existe un certain  $\alpha \geq 2$  et un certain  $R > 0$  tels que (89) soit vérifiée. On définit  $\Phi_n$  par :*

$$\Phi_n(z) := \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k - \lambda_n}\right).$$

Alors

$$\Phi_n(z) \lesssim e^{\frac{2\pi}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})}|z|^{\frac{1}{\alpha}}} P(|z|), \quad (105)$$

où  $P$  est polynomial en  $|z|$ . (La constante implicite peut éventuellement dépendre de  $\alpha$ )

Pour démontrer cette estimation, il suffit de reprendre la même stratégie que pour prouver la première partie du Lemme 3. Le terme supplémentaire qui apparaît dans l'estimation  $L_n(s)$  fait apparaître une intégrale à paramètre qui peut se calculer explicitement.

En ce qui concerne la borne inférieure donnée par le Théorème 15, la preuve repose essentiellement sur la méthode de [Güi85]. On traite simultanément le cas parabolique et dispersif en posant  $(\mu_n) := (\lambda_n)$  dans le cas de l'équation (84) où  $(\mu_n) := (-i\lambda_n)$  dans le cas de l'équation (85). On appelle

$$E(T) := \overline{\text{span}(\{e^{-\mu_n t} | n \in \mathbb{N}\})}^{L^2(0,T)},$$

$$E_m(T) := \overline{\text{span}(\{e^{-\mu_n t} | n \neq m\})}^{L^2(0,T)}.$$

En utilisant les résultats de [Sch43b] pour le cas parabolique et de [Sch43a] pour le cas dispersif, si la suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie (86), alors  $E(T)$  est un sous-espace strict de  $L^2(0, T)$  et  $e^{-\mu_m t} \notin E_m(T)$ . De plus, si on appelle  $d_m(T)$  la distance entre le vecteur  $e^{-\mu_m t}$  et le sous-espace  $E_m(T)$  et  $r_m$  la projection orthogonale de  $e^{-\mu_m t}$  sur  $E_m(T)$ , alors la famille  $\{\psi_m\}$  définie par

$$\psi_m(t) := \frac{e^{-\mu_m t} - r_m(t)}{d_m(T)^2}$$

est biorthogonale à la famille d'exponentielles  $\{e^{-\mu_m t}\}$  (on pourra consulter [FR71],[Güi85] ou [KL05]). De plus,

$$\|\psi_m\|_{L^2(0,T)} = \frac{1}{d_m(T)}. \quad (106)$$

Si on se donne une condition  $y^0 := \sum a_k e_k$ , un contrôle envoyant  $y^0$  à 0 est donné par

$$u(t) := - \sum a_k/b_k e^{-T\mu_k/2} f_k(t - T/2) \quad (107)$$

et on peut démontrer qu'il est optimal en norme  $L^2(0, T)$ . Pour minorer le coût du contrôle, il suffit donc de majorer  $d_m(T)$  d'après (106). On a le lemme suivant :

**Lemme 6.** *Il existe des constantes  $a(m)$  et  $C(m)$  telles que*

$$d_m(T) \leq C(m)T^{1/2}(j!)^{\alpha-1}(a(m)T)^j \quad (108)$$

soit vérifiée pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tout  $T > 0$ .

Ce lemme se démontre comme dans [Güi85] estimant des produits de la forme

$$\prod_{r=1}^{m-1} |\lambda_r - \lambda_m| \prod_{r=m}^j |\lambda_{r+1} - \lambda_m|.$$

Il suffit alors de prendre

$$j := \lceil (1/(a(m)T))^{\frac{1}{\alpha-1}} \rceil$$

dans l'égalité (108) et d'effectuer quelques calculs simples pour obtenir la borne (90).

### 5.3.i Application aux équations de type chaleur ou de Schrödinger avec laplacien fractionnaire en dimension 1

Soit  $L > 0$ . Intéressons nous à l'opérateur  $-\Delta$  sur  $L^2(0, L)$  à domaine  $H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ , qui est à résolvante compacte et est autoadjoint défini positif. On a alors une base hilbertienne de vecteurs propres notés  $e_j$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\lambda_j$  est la valeur propre associée à  $e_j$  (on fait en sorte que les  $\lambda_j$  soient ordonnés de manière croissante). On connaît en fait explicitement les vecteurs propres et valeurs propres :

$$e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(2k\pi x/L)$$

et

$$\lambda_k = \frac{4k^2\pi^2}{L^2}.$$

Dans ce cas, on a

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\langle f, e_j \rangle_{L^2(0,L)}|^2.$$

On peut voir l'espace de Sobolev  $H_0^1(0, L)$  comme la complétion de  $C_0^\infty(\Omega)$  pour la norme

$$\|f\|_{H_0^1(0,L)}^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} (1 + \lambda_j) |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

De même, on peut voir le dual de  $H_0^1(\Omega)$  avec espace pivot  $L^2(\Omega)$  (i.e.  $H^{-1}(0, L)$ ) comme la complétion (dans  $\mathcal{S}'(0, L)$ ) de  $C_0^\infty(0, L)$  pour la norme

$$\|f\|_{H^{-1}(0,L)}^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{|\langle f, e_j \rangle|^2}{1 + \lambda_j}.$$

Une base hilbertienne de  $H^{-1}(0, L)$  (muni de cette norme) naturelle est donc

$$(\sqrt{1 + \lambda_j} e_j)_{j \in \mathbb{N}^*}.$$

On note dorénavant  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(0,L)}$  le produit scalaire associé à la norme précédemment définie sur  $H^{-1}(0, L)$ . Intéressons-nous maintenant au laplacien vu comme opérateur non borné à domaine d'opérateur  $H_0^1(\Omega)$  et à espace d'état  $H^{-1}(0, L)$ . C'est maintenant  $H^{-1}(0, L)$  qui est pris comme espace pivot. On introduit ainsi les espaces abstraits suivants, pour  $\gamma > 0$  :

$$X_\gamma(0, L) := \mathcal{D}((-\Delta)^\gamma),$$

et  $X_{-\gamma}(0, L)$  son dual avec espace pivot  $H^{-1}(0, L)$ . On peut aussi voir  $X_\gamma(0, L)$  comme la complétion de  $C_0^\infty(\Omega)$  pour la norme

$$\|f\|_{X_\gamma(0, L)} := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} (1 + \lambda_j^{\gamma-1}) |\langle f, e_j \rangle_{L^2(0, L)}|^2,$$

et  $X_{-\gamma}(0, L)$  comme la complétion de  $\mathcal{S}'(0, L)$  pour la norme

$$\|f\|_{X_{-\gamma}(0, L)} := \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1 + \lambda_j^{\gamma-1}} |\langle f, e_j \rangle_{H^{-1}(0, L)}|^2.$$

On munit pour le reste de ce paragraphe  $X_\gamma(0, L)$  et  $X_{-\gamma}(0, L)$  de ces normes. Dans toute la suite, on notera  $\Delta^\gamma$  l'opérateur  $-(-\Delta)^\gamma$ . Considérons une équation parabolique de la forme

$$\begin{cases} y_t = \Delta^\gamma y + bu & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans } (0, L), \end{cases} \quad (109)$$

pour un certain  $\gamma \geq 1$ , avec  $b := \delta'_0 \circ \Delta^{-1}$ , de telle sorte que

$$|b_k| = |\langle b, 1 + \sqrt{\lambda_k} e_k \rangle_{\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(A)}| = (1 + \sqrt{\lambda_k}) |e'_k(0)| / (1 + \lambda_k). \quad (110)$$

On peut voir ce système comme l'analogie d'un contrôle frontière (dans le cas où  $\gamma$  est entier, on montre en utilisant des intégrations par parties que cela revient à placer un contrôle à gauche sur la  $(\gamma - 1)$ -ième dérivée), même si dans le cas où  $\gamma$  n'est pas entier, on ne peut pas identifier ceci à un contrôle frontière (le système avec contrôle frontière ne serait pas nécessairement bien posé, cf. par exemple [GM05]) et le sens à donner à ce système est moins clair. Ce genre de contrôles a déjà été considéré dans [Mil06c] (mais pour le laplacien fractionnaire avec conditions de Neumann). On pose  $A = -\Delta^\gamma$ , avec  $H = H^{-1}(0, L)$  et  $\mathcal{D}(A) = X_\gamma$  muni de la norme définie précédemment.

On peut démontrer en utilisant les critères adaptés aux opérateurs diagonaux et aux contrôles scalaires du Théorème 3 que cet opérateur de contrôle est bien admissible : la condition (15) est vérifiée au vue de l'expression explicite des valeurs propres. Quant aux  $b_k$ , on démontre grâce à l'expression (110) que  $|b_k| \simeq 1$ , ce qui implique notamment qu'ils forment le terme général d'une suite bornée. Le Théorème 3 s'applique.

On peut appliquer les Théorèmes 13 et 15 qui donnent immédiatement

**Théorème 16.** *On suppose  $\gamma \geq 1$ . L'équation (109) est contrôlable à 0 avec des contrôles continus. De plus, le coût du contrôle en norme  $L^\infty$  (que l'on notera encore  $C_T$ ), est tel que*

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(2\gamma-1)}}} \text{ pour tout } K > 3(\alpha - 1)2^{1/(2\gamma-1)} L^{2\gamma/(2\gamma-1)} / ((4\gamma \sin(\pi/(4\gamma)))^{2\gamma/(2\gamma-1)}). \quad (111)$$

*De plus, la puissance de  $1/T$  à l'intérieur de l'exponentielle est optimale.*

On obtient exactement le même type de résultats pour les équations de Schrödinger fractionnaires de la forme

$$\begin{cases} y_t = -i\Delta^\gamma y + bu & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{dans } (0, L). \end{cases} \quad (112)$$

pour le même  $b$  que précédemment. L'application du Théorème 13 donne alors

**Théorème 17.** *On suppose  $\gamma \geq 1$ . L'équation (112) est contrôlable à 0, de plus le coût du contrôle  $C_T$  est tel que*

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(2\gamma-1)}}} \text{ pour tout } K > 3(\alpha - 1)2^{1/(2\gamma-1)}L^{2\gamma/(2\gamma-1)} / ((2\gamma \sin(\pi/(2\gamma)))^{2\gamma/(2\gamma-1)}).$$

*De plus, la puissance de  $1/T$  à l'intérieur de l'exponentielle est optimale.*

Évidemment, comme l'équation est réversible en temps on obtient aussi la contrôlabilité exacte dans  $H^{-1}(0, L)$  (et une estimation sur le coût de la contrôlabilité exacte en temps petit comme donnée dans (31)).

### 5.3.ii Équations de Korteweg-de-Vries linéarisées

On va considérer ici deux équations de type KdV linéaire avec deux conditions aux bord différentes. Soit  $L > 0$ . Posons d'abord la définition des espaces de Sobolev périodiques suivants :

$$H_p^k := \{y \in H^k(0, L) \mid u^{(j)}(0) = u^{(j)}(L), j = 0 \dots k - 1\}.$$

On pose  $H = (H_p^1)'$ . On considère dans un premier temps l'équation suivante :

$$\begin{cases} y_t + y_{xxx} = 0 \text{ dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) \text{ dans } (0, L), \\ y_x(t, 0) = y_x(t, L) + u(t) \text{ dans } (0, L), \\ y_{xx}(t, 0) = y_{xx}(t, L) \text{ dans } (0, T), \end{cases} \quad (113)$$

avec condition initiale  $y^0 \in (H_p^1)'$  et contrôle  $u \in L^2(0, T)$ .

On considère  $A = \partial_{xxx}^3$  avec domaine

$$\mathcal{D}(A) := H_p^2(0, L).$$

On peut démontrer (cf. [Cor07, Section 2.7 page 101], les calculs sont exactement les mêmes) que

$$B : u \mapsto -u\delta'_0 \circ \Delta^{-1}$$

convient. De plus, on peut démontrer que cet opérateur est bien admissible en appliquant une fois de plus le critère donné au Théorème 3 (une manière alternative de voir les choses est donnée dans [Ros97, Proposition 2.2]). En effet, on remarque que l'opérateur  $A$  est anti-autoadjoint de valeurs propres  $8ik^3\pi^3/L^3$  et de vecteur propre (normé dans  $(H_p^1)'$ )

$$e_k(x) := \frac{(1 + 2k\pi/L)}{\sqrt{L}} e^{\frac{2ik\pi}{L}}.$$

La condition (15) est donc bien vérifiée et on voit que

$$b_k = \frac{(1 + 2k\pi/L)e'_k(0)}{1 + 4k^2\pi^2/L^2} \simeq 1.$$

Signalons qu'il est démontré dans [Ros97] que (113) est exactement contrôlable. En appliquant les Théorèmes 14 et 15, on obtient

**Théorème 18.** *L'équation (113) est contrôlable à 0 et le coût du contrôle  $C_T$  vérifie*

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{\sqrt{T}}}$$

*pour tout  $K > 8/3^{5/4}L^{3/2}$ . De plus, la puissance de  $1/T$  à l'intérieur de l'exponentielle est optimale.*

Considérons maintenant l'équation

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y_x(t, L) = u(t) + y_x(t, 0) & \text{dans } (0, L), \end{cases} \quad (114)$$

avec condition initiale  $y^0 \in H^{-1}(0, L)$  et contrôle  $u \in L^2(0, T)$ .

On considère  $\mathcal{A} = \partial_x + \partial_{xxx}^3$  avec domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{y \in H^3(0, L) \mid y(0) = y(L) = 0, y'(0) = 0\}.$$

On peut démontrer en effectuant des intégrations par parties que

$$B : u \mapsto u - \delta'_0 \circ \Delta^{-1}$$

convient. De plus, ce contrôle est bien admissible et est tel que  $b_k \simeq 1$  comme démontré dans [CC09]. On obtient alors le théorème suivant :

**Théorème 19.** *L'équation (114) est contrôlable à 0 et le coût du contrôle  $C_T$  vérifie*

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{\sqrt{T}}}$$

pour tout  $K > 8/3^{5/4}L^{3/2}$ . De plus, la puissance de  $1/T$  à l'intérieur de l'exponentielle est optimale.

#### 5.4 Remarques additionnelles et perspectives

1. Normalement, on devrait pouvoir être capable d'obtenir le même genre de résultats pour le contrôle en temps petit des systèmes (84) et (85) quand (86) (ou (89) pour le cas dispersif) est vérifié pour  $\alpha \in (1, 2)$ . Deux obstacles n'ont cependant pas pu être surmontés : d'abord (91) devient fautive (alors que (92) reste juste), mais on démontre que l'on peut rectifier la majoration (91) pour la rendre juste en rajoutant un facteur  $2^{1/\alpha}$  à l'intérieur de l'exponentielle (ce qui n'est pas optimal d'un point de vue numérique et donc donnerait des constantes moins bonnes que dans le Théorème 13 mais n'empêche pas de poursuivre la preuve à ce stade). Le problème principal vient du multiplicateur qui ne convient plus ici car l'estimation (4) ne sera plus valable. Malheureusement, je n'ai pas trouvé de multiplicateurs qui serait adéquat dans ce cas-là. De même, il n'est pas possible à l'aide de la preuve proposée d'étendre (90) au cas  $\alpha \in (1, 2)$ . Il serait intéressant d'essayer d'autres moyens d'obtenir des résultats dans ce cas-là car dans le cas des équations de Schrödinger et de la chaleur fractionnaires, c'est le cas  $\gamma \in (1/2, 1)$  qui correspondent le plus aux situations rencontrées en physique (cf. par exemple [MK04] et [GX06]).
2. Compte tenu du travail présenté ici, il n'y a pas vraiment de manière naturelle d'étendre la Conjecture 1 (et son équivalent pour l'équation de Schrödinger) dans le cas  $\alpha \geq 2$ . Il semble (vu que les estimations (91) et (92) sont optimales) que  $1/\sin(\pi/\alpha)$  ait un rôle à jouer, mais c'est à peu près tout ce que l'on peut déduire. Cela provient du fait que pour trouver des bornes inférieures on a utilisé le raisonnement de [Güi85] qui ne donne pas d'estimations précises, et non des raisonnements comme ceux de [Mil04b], [Mil04a] ou [TT07] qui donnent une borne inférieure explicite mais ne semblent pas pouvoir être adaptés ici. Il pourrait être intéressant de tenter d'avoir une borne inférieure raisonnable qui permette de généraliser la Conjecture 1 (et son équivalent pour l'équation de Schrödinger).

3. Il y a de grandes chances que les résultats précédents puissent se généraliser au cas où les  $b_k$  ne vérifient pas nécessairement  $b_k \simeq 1$ . En effet, si l'on regarde bien les calculs, tant que les  $b_k$  ont un comportement "raisonnable", i.e. tant qu'on est sûr que  $b_k \neq 0$  pour tout  $k$  et que  $b_k \simeq k^\beta$  pour un certain  $\beta \in \mathbb{R}$ , alors on peut absorber les  $b_k$  à l'aide des termes exponentiels décroissants qui apparaissent. Cela couvrirait donc éventuellement les cas où l'opérateur  $B$  est non admissible (par exemple, dans tous les exemples présentés précédemment, on pourrait remplacer l'espace d'état  $H^{-1}$  par l'espace d'état  $L^2$  et garder des contrôles  $L^2$ ).
4. Comme expliqué dans le Paragraphe 3.4, une fois ces résultats connus, il pourrait être intéressant d'en déduire des résultats en dispersion évanescence ou en dispersion-viscosité évanescence pour des équations du type de celle étudiée dans [GG08] ou [GG09].
5. Dans [Ros97], l'équation de type KdV linéarisée principalement étudiée est

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t + y_x + y_{xxx} = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{dans } (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t) & \text{dans } (0, L), \end{array} \right.$$

qui diffère de (114) par la condition au bord sur la dérivée. Pour ces conditions au bord, l'opérateur  $-\partial_{xxx}^3 - \partial_x$  n'est ni autoadjoint ni anti-autoadjoint (et même peut-être non diagonalisable), ce qui interdit d'utiliser les Théorèmes 13, 14 et 15. Il n'y a pas vraiment de raisons que le comportement en temps petit du contrôle soit différent de ce qu'il est pour (113) ou (114), mais je ne suis pas parvenu à le démontrer en tentant par exemple d'utiliser le système (114).

Première partie

Contrôle indirect de systèmes non  
linéaires





# Chapitre 1

## Contrôlabilité à 0 locale de l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle avec un contrôle distribué ayant deux composantes nulles

### Abstract

In this paper, we prove a local null controllability result for the three-dimensional Navier-Stokes equations on a (smooth) bounded domain of  $\mathbb{R}^3$  with null Dirichlet boundary conditions. The control is distributed in an arbitrarily small nonempty open subset and has two vanishing components. J.-L. Lions and E. Zuazua proved that the linearized system is not necessarily null controllable even if the control is distributed on the entire domain, hence the standard linearization method fails. We use the return method together with a new algebraic method inspired by the works of M. Gromov and previous results by M. Gueye.

**Keywords:** Navier-Stokes System; Null controllability; Return method.

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Notations and statement of the theorem

Let  $T > 0$ , let  $\Omega$  be a nonempty bounded domain of  $\mathbb{R}^3$  of class  $C^\infty$  and let  $\omega$  be a nonempty open subset of  $\Omega$ . We define  $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  by

$$Q := (0, T) \times \Omega = \{(t, x) \mid t \in (0, T) \text{ and } x \in \Omega\}$$

and we call

$$\Sigma := [0, T] \times \partial\Omega.$$

The current point  $x \in \mathbb{R}^3$  is  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . The  $i$ -th component of a vector (or a vector field)  $f$  is denoted  $f^i$ . The control is  $u = (u^1, u^2, u^3) \in L^2(Q)^3$ . We require that the support of  $u$  is included in  $\omega$ , which is our control domain. We impose that two components of  $u$  vanish, for example the first two:

$$u^1 = 0 \text{ and } u^2 = 0 \text{ in } Q, \quad (1.1.1)$$

so that  $u$  will be written under the form  $(0, 0, 1_\omega v)$  with  $v \in L^2(Q)$  from now on, where  $1_\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is the characteristic function of  $\omega$ :

$$1_\omega = 1 \text{ in } \omega, \quad 1_\omega = 0 \text{ in } \Omega \setminus \omega.$$

Let us define

$$V := \{y \in H_0^1(\Omega)^3 \mid \nabla \cdot y = 0\}.$$

The space  $V$  is equipped with the  $H_0^1$ -norm. Let us denote by  $H$  the closure of  $V$  in  $L^2(\Omega)^3$ . The space  $H$  is equipped with the  $L^2$ -norm.

We are interested in the following Navier-Stokes control system:

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + \nabla p = (0, 0, 1_\omega v) & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

From [Tem79, Theorem 3.1, p. 282], we have the following existence result: For every  $y^0 \in H$ , there exist  $y \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H)$  and  $p \in L^2(Q)$  satisfying

$$y(0, \cdot) = y^0 \text{ in } \Omega \quad (1.1.3)$$

such that (1.1.2) holds.

Our main result is the following theorem, which expresses the small-time local null controllability of (1.1.2):

**Theorem 1.1.1.** *For every  $T > 0$  and for every  $r > 0$ , there exists  $\eta > 0$  such that, for every  $y^0 \in V$  verifying  $\|y^0\|_{H_0^1(\Omega)^3} \leq \eta$ , there exist  $v \in L^2(Q)$  and a solution  $(y, p) \in L^2((0, T), H^2(\Omega)^3 \cap V) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3 \cap V) \times L^2(Q)$  of (1.1.2)-(1.1.3) such that*

$$y(T, \cdot) = 0, \quad (1.1.4)$$

$$\|v\|_{L^2(Q)^3} \leq r, \quad (1.1.5)$$

$$\|y\|_{L^2((0, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega)^3)} \leq r. \quad (1.1.6)$$

*Remark 1.1.1.* Once a control  $v \in L^2(Q)$  is given, the corresponding solution  $(y, p)$  of (1.1.2), (1.1.3) and (1.1.6) given by Theorem 1.1.1 is unique (recall that for the Navier-Stokes system, the uniqueness of  $(y, p)$  means that  $y$  is unique and  $p$  is unique up to a constant depending on the time). This comes from the uniqueness result given in [Tem79, Theorem 3.4, p. 297]: One has

$$L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3) \subset L^8((0, T), H^1(\Omega)^3) \subset L^8((0, T), L^4(\Omega)^3)$$

thanks to a classical Sobolev embedding, and there is at most one solution  $(y, p)$  of (1.1.2) and (1.1.3) in the space

$$L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H) \cap L^8((0, T), L^4(\Omega)^3) \times L^2(Q).$$

*Remark 1.1.2.* One observes that in Theorem 1.1.1 the initial condition  $y^0$  is more regular than usual ( $y^0 \in H$ ). In fact, using the same arguments as in [FCGIP04] and [FCGIP06] (see also [CG13a, Remark 1]), one can easily extend the previous theorem to small initial data in  $H \cap L^4(\Omega)^3$  with a solution  $(y, p) \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H) \times L^2(Q)$ . In this case, Remark 1.1.1 is no longer true and there might possibly exist many solutions  $(y, p)$  verifying (1.1.2) and (1.1.3) once  $v$  is given.

### 1.1.2 Some previous results

The controllability of the two or three-dimensional Navier-Stokes equations with a distributed control has been studied in numerous papers. In general, for Navier-Stokes equations, it is relevant to consider the approximate controllability, the null controllability or the exact controllability to the trajectories, the second one being a particular case of the third one.

In [Ima98b], a first result of local exact controllability to the trajectories was established under technical conditions:  $\Omega$  had to be homeomorphic to a ball, the control had to be supported in a nonempty open subset whose closure is included in  $\Omega$ , and the target trajectory had to be a stationary solution of the Navier-Stokes equation. Moreover, there were some technical regularity conditions for these stationary solutions. A similar result for the linearized Navier-Stokes equations was established but with the same strong conditions. Many of these hypotheses were removed in [Ima01].

Then, it was proved in [FCGIP04] the local exact controllability to the trajectories with regularity conditions that were weaker and more suitable for the study of the Navier-Stokes equations. In this article, the authors also proved some exact controllability results for linearized Navier-Stokes systems, with very weak regularity conditions. The same authors proved in [FCGIP06] the local exact controllability to the trajectories with a control having one vanishing component, provided that  $\omega$  “touches” the boundary of the domain  $\Omega$  in some sense. Later on it was proved in [CG09b] a local null controllability result for the Stokes system with a control having a vanishing component without the geometrical condition on  $\omega$ , but the authors were not able to extend it to the nonlinear Navier-Stokes system. A recent work ([CG13a]) improved the previous one and proved the local null controllability of the Stokes system with an additional source member by means of a control having a vanishing component, which enabled the authors to prove the local null controllability of the Navier-Stokes system for a control having a vanishing component. In all these articles, the main points of the proof were to establish first the controllability of the linearized control system around the target trajectory thanks to Carleman estimates on the adjoint of the linearized equation, and then to use an inverse mapping theorem or a fixed-point theorem to deal with the nonlinear system.

The natural question is then: Can we remove another component of the control, which would be an optimal result with respect to the number of controls? Reducing the number of components of the control is important for applications, and have already been studied many times for linear or parabolic systems of second order (that are quite similar to linearized Navier-Stokes systems), see for example [AKBGBdT11a], where a necessary and sufficient condition to control a system of coupled parabolic equations with constant coefficients and with less controls than equations is given, or [AKBDGB09, Mau13] for time-dependent coefficients. If the coefficients depend on the time and the space, there are no general results, in particular if we consider two coupled parabolic systems where the coupling region and the control region do not intersect (a partial result under the Geometric Control Condition is given in [ABL13]). For a recent survey on the controllability of coupled linear parabolic equations, see [AKBGBdT11c].

### 1.1.3 The linear test

To obtain Theorem 1.1.1, the first natural idea is to linearize the system around 0, i.e. to consider the Stokes control system

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + \nabla p = (0, 0, v1_\omega) & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma. \end{array} \right. \quad (1.1.7)$$

It is well-known (see for example [FCGIP06], or [Ima01]) that if this linear system were null controllable (with, in addition, an arbitrary source term in a suitable space), then applying an inverse mapping theorem (for example the one presented in [ATF87]) in some relevant weighted spaces, we would obtain that (1.1.2) is locally null controllable around 0. However, the linear control system (1.1.7) is in general not null controllable and not approximately controllable: In [LZ96], it is proved that this is for example the case if  $\Omega$  is a cylinder with a circular generating set and with an axis parallel to  $e_3$ , even if we control on the entire cylinder (the approximate controllability property holds “generically” with respect to the generating set of the cylinder as explained in [LZ96] though).

Since linearizing around 0 is not relevant, we are going to use the return method, which consists in linearizing system (1.1.2) around a particular trajectory  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  (that we construct explicitly) verifying  $\bar{y}(0, \cdot) = \bar{y}(T, \cdot) = 0$ , proving that the linearized system (with a source term  $f$  verifying an exponential decrease condition at time  $t = T$ ) is null controllable, and then concluding by a usual inverse mapping argument that our system is locally null controllable. This method was introduced in [Cor92] for a stabilization problem concerning nonlinear ordinary differential equations and first used in the context of partial differential equations in [Cor93]. The return method was already successfully used in [Cor96, CF96, FI99b] to obtain global controllability results for the Navier-Stokes equations and in [CG09a] to prove the local null controllability for the Navier-Stokes equations on the torus  $\mathbb{T}_2$  when the control has one vanishing component. For more explanations about the return method and other examples of applications, see [Cor07, Chapter 6].

#### 1.1.4 Structure of the article and sketch of the proof of Theorem 1.1.1

The paper is organized as follows.

- In Section 1.2, according to what was explained at the end of Subsection 1.1.3, we construct a family of explicit particular trajectories  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  of the controlled Navier-Stokes system (1.1.2) going from 0 at time  $t = 0$  to 0 at time  $t = T$ . These trajectories are compactly supported in  $[T/4, T] \times \omega$  and vanish exponentially at time  $t = T$ . Moreover, they are polynomials in space on some subcylinder of  $\omega$  denoted  $\mathcal{C}_2$ , and they can be arbitrarily small. We then linearize (1.1.2) around  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  and study the linearized equation

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p = f^1 & \text{in } Q, \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p = f^2 & \text{in } Q, \\ y_t^3 - \Delta y^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^3 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} p = 1_\omega v + f^3 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \end{array} \right. \quad (1.1.8)$$

where  $f$  is some source term in an appropriate space.

- Section 1.3 is devoted to proving that (1.1.8) is indeed null controllable (Proposition 1.3.5). Subsection 1.3.1 is dedicated to introducing some useful notations and the crucial Proposition 1.3.1. This proposition explains that we can split up our proof of the null controllability of the linearized equations with a scalar control into two parts:

- Firstly, we control the following linearized Navier-Stokes system:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t^{*1} - \Delta y^{*1} + (\bar{y} \cdot \nabla) y^{*1} + (y^* \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p^* = \mathcal{B}^1 u^* + f^1 & \text{in } Q, \\ y_t^{*2} - \Delta y^{*2} + (\bar{y} \cdot \nabla) y^{*2} + (y^* \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p^* = \mathcal{B}^2 u^* + f^2 & \text{in } Q, \\ y_t^{*3} - \Delta y^{*3} + (\bar{y} \cdot \nabla) y^{*3} + (y^* \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} p^* = \mathcal{B}^3 u^* + f^3 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y^* = 0 & \text{in } Q, \\ y^* = 0 & \text{on } \Sigma, \end{array} \right. \quad (1.1.9)$$

where  $\mathcal{B}$  is some suitable local control operator that acts on each equation. This is the purpose of Subsection 1.3.3, where the controllability of System (1.1.9) is proved thanks to the usual HUM method. More precisely, we prove an appropriate Carleman estimate with observation  $\mathcal{B}^*$  on the adjoint equation of (1.1.9) (Lemma 1.3.3), so that we create controls in the image of  $\mathcal{B}$  thanks to the study of an appropriate Lax-Milgram type problem, which also enables us to obtain controls that are very regular in the sense that they are in weighted Sobolev spaces of high order in space and time (Proposition 1.3.4). Let  $(y^*, p^*, u^*)$  be a trajectory of (1.1.9) that brings the initial condition  $y^0$  to 0 at time  $T$ , with a very regular  $u^*$  compactly supported in space at each time in some open subset  $\omega_0$  of  $\mathcal{C}_2$  to be chosen later, and that decreases exponentially at time  $t = T$ . We emphasize that  $(y^*, p^*)$  is less regular than  $\mathcal{B}u^*$  (however, it is in some weighted Sobolev space of small order) because the source term  $f$  is not as regular as  $\mathcal{B}u^*$ .

- Secondly, we study in Subsection 1.3.2 the following system locally on  $Q_0 := [T/2, T] \times \omega_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{y}_t^1 - \Delta \tilde{y}^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{y}^1 + (\tilde{y} \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} \tilde{p} = -\mathcal{B}^1 u^* & \text{in } Q_0, \\ \tilde{y}_t^2 - \Delta \tilde{y}^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{y}^2 + (\tilde{y} \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} \tilde{p} = -\mathcal{B}^2 u^* & \text{in } Q_0, \\ \tilde{y}_t^3 - \Delta \tilde{y}^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{y}^3 + (\tilde{y} \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} \tilde{p} = -\mathcal{B}^3 u^* + \tilde{v} & \text{in } Q_0, \\ \nabla \cdot \tilde{y} = 0 & \text{in } Q_0, \end{array} \right. \quad (1.1.10)$$

where  $u^*$  has been introduced above, and where the unknowns are  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$ . We want to prove that there exists a solution  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$  of (1.1.10) (extended by 0 on  $[T/2, T] \times \Omega$ ) which has the same support as  $u^*$ . This seems reasonable because System (1.1.10) is analytically underdetermined: we have 5 unknowns (the 3 components of  $\tilde{y}$ , the pressure  $\tilde{p}$  and the scalar control  $\tilde{v}$ ) and only 4 equations. In fact, we prove in Proposition 1.3.2 that it is possible to find such a  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$  which can moreover be expressed as a linear combination of  $u^*$  and some of its derivatives up to a certain order. This explains why we need  $u^*$  to be very regular. Since  $u^*$  decreases exponentially at time  $T$ , this is also the case for  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$ . The main idea behind the proof of the existence of such a  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$  is to consider the adjoint system of (1.1.10) and to differentiate the equations appearing in this system until we get more equations than “unknowns”, the “unknowns” being there the functions and all their derivatives appearing in the equations of the adjoint system. Since Subsection 1.3.2 is the most innovative, important, and difficult part of the article, we give some further details.

1. In Paragraph 1.3.2.i, we make a choice for operator  $\mathcal{B}$  and we prove that the existence of  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$  can be reduced to proving the following property: There exists some  $\omega_0$  and a linear partial differential operator  $\mathcal{N} : C^\infty(Q_0)^4 \rightarrow C^\infty(Q_0)^6$  such that for every  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4) \in C^\infty(Q_0)^4$ , if  $(z^1, z^2, \pi) \in C^\infty(Q_0)^3$  is a solution

of

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\partial_{x_3}\bar{y}^1\partial_{x_1}z^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^2\partial_{x_2}z^1 + (\partial_{x_1}\bar{y}^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^3)\partial_{x_3}z^1 - \bar{y}^1\partial_{x_1x_3}^2z^1 \\ \quad -\bar{y}^2\partial_{x_2x_3}^2z^1 - \bar{y}^3\partial_{x_3x_3}^2z^1 - \partial_{x_3t}^2z^1 - \Delta\partial_{x_3}z^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^2\partial_{x_1}z^2 \\ \quad \quad \quad + \partial_{x_1}\bar{y}^2\partial_{x_3}z^2 = \partial_{x_3}\varphi^1 - \partial_{x_1}\varphi^3, \\ -\partial_{x_3}\bar{y}^1\partial_{x_2}z^1 + \partial_{x_2}\bar{y}^1\partial_{x_3}z^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^1\partial_{x_1}z^2 - \bar{y}^1\partial_{x_1x_3}^2z^2 - 2\partial_{x_3}\bar{y}^2\partial_{x_2}z^2 \\ \quad -\bar{y}^2\partial_{x_2x_3}^2z^2 + (\partial_{x_2}\bar{y}^2 - \partial_{x_3}\bar{y}^3)\partial_{x_3}z^2 - \bar{y}^3\partial_{x_3x_3}^2z^2 - \partial_{x_3t}^2z^2 - \Delta\partial_{x_3}z^2 \\ \quad \quad \quad = \partial_{x_3}\varphi^2 - \partial_{x_2}\varphi^3, \\ \quad \quad \quad -\partial_{x_1}z^1 - \partial_{x_2}z^2 = \varphi^4. \end{array} \right. \quad (1.1.11)$$

then  $(-\partial_{x_1}z^1, -\partial_{x_2}z^1, -\partial_{x_3}z^1, -\partial_{x_1}z^2, -\partial_{x_2}z^2, -\partial_{x_3}z^2) = \mathcal{N}\varphi$ .

2. In Paragraph 1.3.2.ii we study the overdetermined system (1.1.11). If we consider  $z^1, z^2$ , and all their derivatives at every order as *independent algebraic unknowns* (i.e. we forget that  $\partial_{x_1}z^1, \dots$  are derivatives of  $z^1$  and consider them as unknowns of System (1.1.11)), we obtain a system of 3 equations with 20 unknowns. However, we can prove that if we differentiate the equations of System (1.1.11) enough times, one can obtain more equations than unknowns. In particular, if the two first equations of (1.1.11) are differentiated 19 times and if the last equation of (1.1.11) is differentiated 21 times, then we get 30360 equations and 29900 unknowns. We can write the big system describing these equations as follows:

$$L_0(t, x)Z = \Phi,$$

where  $L_0 \in C^\infty(Q_0; \mathcal{M}_{30360 \times 29900}(\mathbb{R}))$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{29900}$  contains the derivatives of  $z^1$  and  $z^2$  up to the order 22 and  $\Phi \in \mathbb{R}^{30360}$  contains the derivatives of  $\varphi$  up to the order 21. If we are able to find a suitable submatrix of  $L_0$  (denoted  $P$ ) that is invertible, then roughly the matrix  $P^{-1}$  (seen as a differential operator) will be a good candidate for  $\mathcal{N}$ .

3. In Paragraph 1.3.2.iii, we describe how we created a program that enables us to differentiate the equations of system (1.1.11) and that finds a proper matrix  $P$ . Of course it cannot be done by hand, we have to use a computer. Let us point out that in the computer part of the proof, we only use *symbolic computations*, so that *no approximations* are made by the computer.

We first prove (cf. Lemma 1.3.2) that it is enough to find a suitable matrix  $P$  which is invertible at some precise point  $\xi^0$ , i.e. it is enough to consider  $L_0(\xi^0)$  for some well-chosen  $\xi^0$ . We explain in Lemma 1.3.1 how we found  $P(\xi^0)$  thanks to a suitable reordering of matrix  $L_0(\xi^0)$  given by the Dulmage-Mendelsohn decomposition of  $L_0(\xi^0)$ .

- We now remark that  $(y^* + \tilde{y}, p^* + \tilde{p}, \tilde{v})$  is a trajectory of (1.1.8) (see (1.1.9) and (1.1.10)) that brings the initial condition  $y^0$  to 0 at time  $T$ . We then prove in Subsection 1.3.4 that  $(y^* + \tilde{y}, p^* + \tilde{p}, \tilde{v})$  is in some appropriate weighted Sobolev space (Proposition 1.3.5).
- To conclude, in Section 1.4, we explain how the suitable functional setting we obtained for the solutions  $(y, p, v)$  of System (1.1.8) enables us to go back to the local null controllability of (1.1.2) thanks to a usual argument of inverse mapping theorem.

## 1.2 Constructing a relevant trajectory

In this subsection, we construct explicit particular trajectories  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  going from 0 to 0 so that, as it will be shown in section 1.3, the linearized control system around them is null controllable.

Without loss of generality we may assume that  $0 \in \omega$ . Let  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,

$$g : (t, w, x_3) \mapsto g(t, w, x_3),$$

and  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,

$$h : (t, w, x_3) \mapsto h(t, w, x_3).$$

For  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , let  $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . We define  $\bar{y} \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$  by

$$\bar{y}(t, x) := \begin{pmatrix} g(t, r^2, x_3)x_1 \\ g(t, r^2, x_3)x_2 \\ h(t, r^2, x_3) \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (1.2.1)$$

Let  $r_1 > 0$  be small enough so that

$$\mathcal{C}_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; r \leq r_1, |x_3| \leq r_1\} \subset \omega. \quad (1.2.2)$$

On the functions  $g$  and  $h$ , we also require that

$$\text{Supp}(g) \subset [T/4, T] \times (-\infty, r_1^2] \times [-r_1, r_1], \quad (1.2.3)$$

$$\text{Supp}(h) \subset [T/4, T] \times (-\infty, r_1^2] \times [-r_1, r_1]. \quad (1.2.4)$$

In (1.2.3), (1.2.4) and in the following,  $\text{Supp}(f)$  denotes the support of the function  $f$ . From (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3) and (1.2.4), one obtains

$$\text{Supp}(\bar{y}) \subset [T/4, T] \times \mathcal{C}_1 \subset (0, T] \times \omega \subset (0, T] \times \Omega, \quad (1.2.5)$$

which implies in particular that  $\bar{y}$  has null trace on  $\Sigma$ . Let  $\hat{p} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  be defined by

$$\begin{aligned} \hat{p}(t, w, x_3) := & \frac{1}{2} \int_w^{r_1^2} (\partial_t g - (4w' \partial_{ww}^2 g + 8\partial_w g + \partial_{x_3 x_3}^2 g) + 2w' g \partial_w g + g^2 \\ & + h \partial_{x_3} g)(t, w', x_3) dw'. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Let  $\bar{p} \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$  be defined by

$$\bar{p}(t, x_1, x_2, x_3) := \hat{p}(t, r^2, x_3). \quad (1.2.7)$$

From (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4), (1.2.6) and (1.2.7), it follows that

$$\text{Supp}(\bar{p}) \subset [T/4, T] \times \mathcal{C}_1 \subset [T/4, T] \times \omega \subset (0, T] \times \Omega. \quad (1.2.8)$$

From (1.2.1), (1.2.6) and (1.2.7), one obtains

$$\bar{y}_t^1 - \Delta \bar{y}^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} \bar{p} = 0, \quad (1.2.9)$$

$$\bar{y}_t^2 - \Delta \bar{y}^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} \bar{p} = 0. \quad (1.2.10)$$

Let  $\bar{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^4)^3$  be defined by

$$\bar{u} := (0, 0, \bar{y}_t^3 - \Delta \bar{y}^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} \bar{p}). \quad (1.2.11)$$



From (1.2.11), one obtains (1.1.1). From (1.2.5), (1.2.8) and (1.2.11), we have

$$\text{Supp}(\bar{u}) \subset (0, T] \times \omega. \quad (1.2.12)$$

From (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11) and (1.2.12), we have

$$\bar{y}_t - \Delta \bar{y} + (\bar{y} \cdot \nabla) \bar{y} + \nabla \bar{p} = 1_\omega \bar{u}. \quad (1.2.13)$$

Finally, in order to have

$$\text{div } \bar{y} = 0, \quad (1.2.14)$$

it suffices to impose

$$\partial_{x_3} h = -2(g + w \partial_w g). \quad (1.2.15)$$

Let  $\nu$  be a positive numerical constant which will be chosen later. Let  $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $b \in C^\infty(\mathbb{R})$  and  $c \in C^\infty(\mathbb{R})$  be such that

$$\text{Supp}(a) \subset [T/4, T] \text{ and } a(t) = e^{\frac{-\nu}{(T-t)^5}} \text{ in } [T/2, T], \quad (1.2.16)$$

$$\text{Supp}(b) \subset (-\infty, r_1^2) \text{ and } b(w) = w, \forall s \in (-\infty, r_1^2/4], \quad (1.2.17)$$

$$\text{Supp}(c) \subset (-r_1, r_1) \text{ and } c(x_3) = x_3^2 \text{ in } [-r_1/2, r_1/2]. \quad (1.2.18)$$

We then set

$$g(t, w, x_3) = \varepsilon a(t) b(w) c'(x_3) \quad (1.2.19)$$

and

$$h(t, w, x_3) = -2\varepsilon a(t) (b(w) + w b'(w)) c(x_3), \quad (1.2.20)$$

where  $\varepsilon > 0$  (which will be chosen small enough later). From (1.2.19) and (1.2.20), one obtains (1.2.15).

In the next section, we prove that, for every small enough  $T$ , for every small enough  $\varepsilon > 0$  and for a well-chosen  $\nu$ , the linearized control system around the trajectory  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  is controllable.

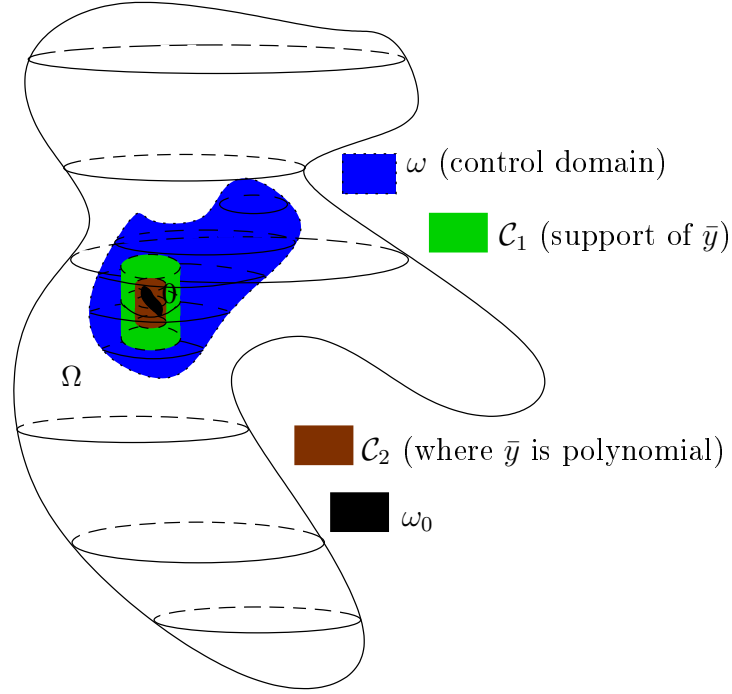
## 1.3 A controllability result on the linearized system

### 1.3.1 Definitions and notations

The linearized control system around the trajectory  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  is the linear control system

$$\begin{cases} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p = f^1 & \text{in } Q, \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p = f^2 & \text{in } Q, \\ y_t^3 - \Delta y^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^3 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} p = 1_\omega v + f^3 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

where the state is  $y : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$  is a source term (it will be specified later in which space exactly it shall be) and the control is  $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$ . In all what follows, in order to lighten


 Figure 1.1: The open subsets  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \omega_0, \omega$ .

the notations, we will write  $\bar{y}$  as a function of  $t$  and  $x$  only, but one has to remember that  $\bar{y}$  also depends on  $\varepsilon$  and  $\nu$ . Let  $\omega_0$  be a nonempty open subset of

$$\mathcal{C}_2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3); r < \frac{r_1}{2}, |x_3| < \frac{r_1}{2} \right\}, \quad (1.3.2)$$

which will be chosen more precisely in the next section. Let  $Q_0 := (T/2, T) \times \omega_0$ . The following figure summarizes the different roles of each open subset of  $\Omega$  we introduced up to now.

Let  $\mathcal{L} : C^\infty(Q_0)^5 \rightarrow C^\infty(Q_0)^4$  be defined by

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} y \\ p \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p \\ y_t^3 - \Delta y^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^3 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} p - v \\ \nabla \cdot y \end{pmatrix}, \quad (1.3.3)$$

for every  $y = (y^1, y^2, y^3) \in C^\infty(Q_0)^3$ , for every  $p \in C^\infty(Q_0)$  and for every  $v \in C^\infty(Q_0)$ . Let us denote by

$$\xi := (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x_1, x_2, x_3) = (t, x)$$

the current point in  $Q_0$ . For  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^4$  and  $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\partial^\alpha \varphi$ , denotes, as usual,

$$\partial_{t^{\alpha_0}}^{\alpha_0} \partial_{x_1^{\alpha_1}}^{\alpha_1} \partial_{x_2^{\alpha_2}}^{\alpha_2} \partial_{x_3^{\alpha_3}}^{\alpha_3} \varphi.$$

Let  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l)$  be the set of linear maps from  $\mathbb{R}^k$  into  $\mathbb{R}^l$  and  $\mathcal{M}_{k,l}(\mathcal{R})$  be the set of matrices of size  $k \times l$  with values in the ring  $\mathcal{R}$ .

As usual, in the inequalities written in this article  $C$  denotes a constant (depending in general only on  $\omega, \Omega, T$ ) that may change from one line to another.

Let us give some other definitions.

**Definition 1.3.1.** A linear map  $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^k \rightarrow C^\infty(Q_0)^l$  is called a *linear partial differential operator of order  $m$*  if, for every  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^4$  with  $|\alpha| := \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq m$ , there exists  $A_\alpha \in C^\infty(Q_0; \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^l))$  such that

$$(\mathcal{M}\varphi)(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(\xi) \partial^\alpha \varphi(\xi), \quad \forall \xi \in Q_0, \quad \forall \varphi \in C^\infty(Q_0)^k.$$

A linear map  $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^k \rightarrow C^\infty(Q_0)^l$  is called a *linear partial differential operator* if there exists  $m \in \mathbb{N}$  such that  $\mathcal{M}$  is a linear partial differential operator of order  $m$ .

Let  $k$  be a positive integer and let  $\mathcal{B} := (\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3) : C^\infty(Q_0)^k \rightarrow C^\infty(Q_0)^3$  be a linear partial differential operator. Let us consider the linear equation

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} y \\ p \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^1 u \\ \mathcal{B}^2 u \\ \mathcal{B}^3 u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.4)$$

where the data is  $u \in C^\infty(Q_0)^k$  and the unknown is  $(y, p, v) \in C^\infty(Q_0)^5$ . Following [Gro86, p. 148], we adopt the following definition.

**Definition 1.3.2.** The linear equation (1.3.4) is *algebraically solvable* if there exists a linear partial differential operator  $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^k \rightarrow C^\infty(Q_0)^5$  such that, for every  $u \in C^\infty(Q_0)^k$ ,  $\mathcal{M}u$  is a solution of (1.3.4), i.e. such that

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = (\mathcal{B}, 0). \quad (1.3.5)$$

In the following, every function  $\varphi \in C^\infty(Q_0)^l$  with a compact support included in  $Q_0$  is extended by 0 in  $Q \setminus Q_0$  and we still denote this extension by  $\varphi$ .

The next proposition explains how the notion of “algebraic solvability” can be useful to reduce the number of controls as soon as a controllability result is already known for a large number of controls. In fact, the question of the null-controllability of (1.3.1) can be split up into two distinct problems: One “algebraic” part (solving system(1.3.5)) and one “analytic” part (finding controls which are in the image of  $\mathcal{B}$ , the control acting possibly on all the equations and not only on the third one). This proposition has a very general scope and could be formulated for more general control systems. It is inspired by techniques used in the control of ordinary differential equations (see, in particular, [Cor07, Chapter 1, pages 13-15]).

**Proposition 1.3.1.** *Let us consider the linear control system*

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p = \mathcal{B}^1 u + f^1 & \text{in } Q, \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p = \mathcal{B}^2 u + f^2 & \text{in } Q, \\ y_t^3 - \Delta y^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^3 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} p = \mathcal{B}^3 u + f^3 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.3.6)$$

where the state is  $y : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ , the control is  $u \in C^\infty(Q)^k$ , which is required to have a support in  $Q_0$ , and  $f := (f^1, f^2, f^3) \in C^\infty(Q)^3$  is a source term. Let us assume that:

$\mathcal{A}_1$ . The linear control system (1.3.6) is null controllable during the interval of time  $[0, T]$  in the sense that for every  $y^0 \in V$  and for every  $f \in C^\infty(Q)$  such that

$$\text{there exists } \delta > 0 \text{ such that } f = 0 \text{ on } [T - \delta, T] \times \Omega, \quad (1.3.7)$$

there exists  $u \in C^\infty(Q)^k$  with a compact support included in  $Q_0$  such that the solution  $(y, p)$  of (1.3.6) with initial condition  $y(0, \cdot) = y^0$  satisfies  $y(T, \cdot) = 0$ .

$\mathcal{A}_2$ .

$$(1.3.4) \text{ is algebraically solvable.} \quad (1.3.8)$$

Then, the linear control system (1.3.1) is null controllable during the interval of time  $[0, T]$ : For every  $y^0 \in V$  and for every  $f \in C^\infty(Q)$  satisfying (1.3.7), there exists  $v \in C^\infty(Q)$  with a compact support included in  $Q_0$  such that the the solution  $(y, p)$  of (1.3.1) with initial condition  $y(0, \cdot) = y^0$  satisfies  $y(T, \cdot) = 0$ .

### Proof of Proposition 1.3.1.

First of all, we use the null-controllability of (1.3.6) with controls in the image of  $\mathcal{B}$  (Assumption  $\mathcal{A}_1$ ) with source term  $f$ : let  $y^0 \in V$  and let  $u^* \in C^\infty(Q_0)^k$  with compact supported included in some open subset  $Q^* \subset\subset Q_0$  included in  $Q_0$  such that the solution  $(y^*, p^*)$  of the following equation:

$$\begin{cases} y_t^{*1} - \Delta y^{*1} + (\bar{y} \cdot \nabla) y^{*1} + (y^* \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p = \mathcal{B}^1 u^* + f^1 & \text{in } Q, \\ y_t^{*2} - \Delta y^{*2} + (\bar{y} \cdot \nabla) y^{*2} + (y^* \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p = \mathcal{B}^2 u^* + f^2 & \text{in } Q, \\ y_t^{*3} - \Delta y^{*3} + (\bar{y} \cdot \nabla) y^{*3} + (y^* \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} p = \mathcal{B}^3 u^* + f^3 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y^* = 0 & \text{in } Q, \\ y^* = 0 & \text{on } \Sigma, \end{cases} \quad (1.3.9)$$

with initial condition  $y^*(0, \cdot) = y^0$  satisfies  $y^*(T, \cdot) = 0$ . Let us remark that  $\mathcal{B}$  is a local operator, which implies that  $\mathcal{B}u^*_{|_{Q_0}}$  still has a compact support included in  $Q^*$ . Now we use the algebraic solvability of (1.3.4) (Assumption  $\mathcal{A}_2$ ). Let  $\mathcal{M}$  be as in Definition 1.3.2. For a map  $h \in C^\infty(Q)^k$  with a support included in  $Q_0$ , we denote by  $\mathcal{M}$  the map from  $Q$  into  $\mathbb{R}^5$  defined by

$$\mathcal{M}h = 0 \text{ in } Q \setminus Q_0, \mathcal{M}h = \mathcal{M}(h|_{Q_0}) \text{ in } Q_0. \quad (1.3.10)$$

We shall use this slight abuse of notation until the end of the paper. Note that, for every  $h \in C^\infty(Q)^k$  with a support included in  $Q_0$ ,  $\mathcal{M}h \in C^\infty(Q)^5$  and has a support included in  $Q_0$  (because  $\mathcal{M}$  is a local operator). Let us call

$$(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v}) := -\mathcal{M}u^*,$$

so that  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$  verifies the following linearized Navier-Stokes equation:

$$\begin{cases} \tilde{y}_t^1 - \Delta \tilde{y}^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{y}^1 + (\tilde{y} \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} \tilde{p} = -\mathcal{B}^1 u^* & \text{in } Q, \\ \tilde{y}_t^2 - \Delta \tilde{y}^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{y}^2 + (\tilde{y} \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} \tilde{p} = -\mathcal{B}^2 u^* & \text{in } Q, \\ \tilde{y}_t^3 - \Delta \tilde{y}^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) \tilde{y}^3 + (\tilde{y} \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} \tilde{p} = \tilde{v} - \mathcal{B}^3 u^* & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot \tilde{y} = 0 & \text{in } Q, \\ \tilde{y} = 0 & \text{on } \Sigma. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

One observes that the support of  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$  is still included in  $Q^*$  (which is strongly included in  $Q_0$ ). In particular  $\tilde{y}(0, \cdot) = 0$  and  $\tilde{y}(T, \cdot) = 0$ . Let

$$(y, p, v) := (y^* + \tilde{y}, p^* + \tilde{p}, \tilde{v}).$$

Note that  $(y, p)$  is different from  $(y^*, p^*)$  only on  $Q^*$ . In particular one has  $y(0, \cdot) = y^0$  and  $y(T, \cdot) = 0$ . Moreover, from (1.3.9) and (1.3.11), we obtain that  $(y, p, v)$  verifies the equation

$$\begin{cases} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p = f^1 & \text{in } Q, \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p = f^2 & \text{in } Q, \\ y_t^3 - \Delta y^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^3 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_{x_3} p = 1_{\omega^*} v + f^3 & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

which shows that the linear control system (1.3.1) is indeed null controllable during the interval of time  $[0, T]$  and concludes the proof of Proposition 1.3.1.  $\blacksquare$

*Remark 1.3.1.* For the sake of simplicity, we have formulated Proposition 1.3.1 in a  $C^\infty$  setting. Let us assume that the control  $u$  coming from Assumption  $\mathcal{A}_1$  is not of class  $C^\infty$ , but is less regular (one sees that the regularities of  $y^*$ ,  $p^*$  and  $f$  does not matter for the proof of Proposition 1.3.1 since only  $u^*$  is differentiated by the linear partial differential operator  $\mathcal{M}$ ). For example, assume that  $u^* \in H_1$  where  $H_1$  is a functional space (for example a weighted Sobolev space), and assume that  $\mathcal{M}$  can be extended on  $H_1$ ,  $\mathcal{M}u^*$  being then in another functional space  $H_2$  (for example another weighted Sobolev space of order less than  $H_1$  in order to take into account that  $\mathcal{M}$  is a linear partial differential operator). Then one easily verifies that Proposition 1.3.1 remains true as soon as every function of  $H_1$  (and its derivatives until the order at least the order of  $\mathcal{M}$ ) vanishes at time  $t = T$ , the first Assumption  $\mathcal{A}_1$  being changed as the following: the linear control system (1.3.6) is null controllable during the interval of time  $[0, T]$ , i.e. for every  $y^0 \in V$  and for every  $f \in L^2(Q)$  satisfying (1.3.7) there exists  $u \in H_1$  with support included in  $Q_0$  such that the solution  $(y, p)$  of (1.3.6) satisfying the initial condition  $y(0, \cdot) = y^0$  satisfies  $y(T, \cdot) = 0$ . Note that the scalar control  $v$  is now only in  $H_2$ . Similarly, we will need to relax property (1.3.7) by replacing it with a suitable decay rate near  $t = T$ . This will be detailed in Subsection 1.3.4.

It remains to deal, for a suitable choice of  $\mathcal{B}$ , with Assumption  $\mathcal{A}_2$  (we shall do it in Subsection 1.3.2) and with Assumption  $\mathcal{A}_1$ , i.e. with the null controllability of the linear control system (1.3.6) in suitable spaces (we shall do it in Subsection 1.3.3).

### 1.3.2 Algebraic solvability of (1.3.4)

We choose  $k = 7$  and define  $\mathcal{B}$  by

$$\mathcal{B}(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f^1 + \partial_{x_2} f^2 + \partial_{x_3} f^3 \\ \partial_{x_1} f^4 + \partial_{x_2} f^5 + \partial_{x_3} f^6 \\ f^7 \end{pmatrix}. \quad (1.3.13)$$

The main result of this subsection is the following proposition.

**Proposition 1.3.2.** *There exists  $\varepsilon^* > 0$ , there exists  $T^* > 0$  such that, for every  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , there exists a nonempty open subset  $\omega_0$  of  $\mathcal{C}_2$  such that Assumption  $\mathcal{A}_2$  holds for every  $T < T^*$ : There exists a linear partial differential operator  $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^7 \rightarrow C^\infty(Q_0)^5$  such that (1.3.5) holds.*

### 1.3.2.i The adjoint problem

Let  $\mathcal{L}_0 : C^\infty(Q_0)^4 \rightarrow C^\infty(Q_0)^3$  be the linear partial differential operator defined by

$$\mathcal{L}_0 \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_t^1 - \Delta y^1 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^1 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^1 + \partial_{x_1} p \\ y_t^2 - \Delta y^2 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^2 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^2 + \partial_{x_2} p \\ \nabla \cdot y \end{pmatrix}, \quad (1.3.14)$$

for every  $y = (y^1, y^2, y^3) \in C^\infty(Q_0)^3$ , and every  $p \in C^\infty(Q_0)$ .

Let  $\mathcal{B}_0 : C^\infty(Q_0)^6 \rightarrow C^\infty(Q_0)^3$  be the linear partial differential operator defined by

$$\mathcal{B}_0(f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f^1 + \partial_{x_2} f^2 + \partial_{x_3} f^3 \\ \partial_{x_1} f^4 + \partial_{x_2} f^5 + \partial_{x_3} f^6 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.15)$$

Note that the third equation of (1.3.4) can be read as

$$v = y_t^3 - \Delta y^3 + (\bar{y} \cdot \nabla) y^3 + (y \cdot \nabla) \bar{y}^3 + \partial_3 p - f^7.$$

Hence, one easily sees that Assumption  $\mathcal{A}_2$  is equivalent to the existence of a linear partial differential operator  $\mathcal{M}_0 : C^\infty(Q_0)^6 \rightarrow C^\infty(Q_0)^4$  such that

$$\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{M}_0 = \mathcal{B}_0. \quad (1.3.16)$$

As in [Gro86, p. 157], we study (1.3.16) by looking at the ‘‘adjoint equation’’. For every linear partial differential operator  $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^k \rightarrow C^\infty(Q_0)^l$ ,  $\mathcal{M} = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \partial^\alpha$ , we associate its (formal) adjoint

$$\mathcal{M}^* : C^\infty(Q_0)^l \rightarrow C^\infty(Q_0)^k$$

defined by

$$\mathcal{M}^* \psi := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (A_\alpha^T \psi), \quad \forall \psi \in C^\infty(Q_0)^l, \quad (1.3.17)$$

where  $A_\alpha^T(\xi)$  is the transpose of the matrix  $A_\alpha(\xi)$ . (Definition (1.3.17) makes sense since

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \partial^\alpha = 0$$

implies that the  $A_\alpha$  are all equal to 0.) One has  $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}$  and, if  $\mathcal{M} : C^\infty(Q_0)^k \rightarrow C^\infty(Q_0)^l$  and  $\mathcal{N} : C^\infty(Q_0)^l \rightarrow C^\infty(Q_0)^m$  are two linear partial differential operators, then  $(\mathcal{N} \circ \mathcal{M})^* = \mathcal{M}^* \circ \mathcal{N}^*$ .

Hence, (1.3.16) is equivalent to

$$\mathcal{M}_0^* \circ \mathcal{L}_0^* = \mathcal{B}_0^*. \quad (1.3.18)$$

Direct computations, together with (1.2.14), show that, for every  $z = (z^1, z^2) \in C^\infty(Q_0)^2$  and for every  $\pi \in C^\infty(Q_0)$ ,

$$\mathcal{L}_0^* \begin{pmatrix} z \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_t^1 - \Delta z^1 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^1 + \partial_{x_1} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_1} \bar{y}^2 z^2 - \partial_{x_1} \pi \\ -z_t^2 - \Delta z^2 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^2 + \partial_{x_2} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_2} \bar{y}^2 z^2 - \partial_{x_2} \pi \\ \partial_{x_3} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_3} \bar{y}^2 z^2 - \partial_{x_3} \pi \\ -\partial_{x_1} z^1 - \partial_{x_2} z^2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.19)$$

$$\mathcal{B}_0^* \begin{pmatrix} z \\ \pi \end{pmatrix} = (-\partial_{x_1} z^1, -\partial_{x_2} z^1, -\partial_{x_3} z^1, -\partial_{x_1} z^2, -\partial_{x_2} z^2, -\partial_{x_3} z^2). \quad (1.3.20)$$

Assumption  $\mathcal{A}_2$  is now equivalent to the following property: There exists a linear partial differential operator  $\mathcal{N}(= \mathcal{M}_0^*) : C^\infty(Q_0)^4 \rightarrow C^\infty(Q_0)^6$  such that for every  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4) \in C^\infty(Q_0)^4$ , if  $(z^1, z^2, \pi) \in C^\infty(Q_0)^3$  is a solution of

$$\begin{cases} -z_t^1 - \Delta z^1 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^1 + \partial_{x_1} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_1} \bar{y}^2 z^2 - \partial_{x_1} \pi = \varphi^1, \\ -z_t^2 - \Delta z^2 - (\bar{y} \cdot \nabla) z^2 + \partial_{x_2} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_2} \bar{y}^2 z^2 - \partial_{x_2} \pi = \varphi^2, \\ \partial_{x_3} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_3} \bar{y}^2 z^2 - \partial_{x_3} \pi = \varphi^3, \\ -\partial_{x_1} z^1 - \partial_{x_2} z^2 = \varphi^4, \end{cases} \quad (1.3.21)$$

then  $(-\partial_{x_1} z^1, -\partial_{x_2} z^1, -\partial_{x_3} z^1, -\partial_{x_1} z^2, -\partial_{x_2} z^2, -\partial_{x_3} z^2) = \mathcal{N}\varphi$ .

*Remark 1.3.2.* The most natural linear partial differential operator  $\mathcal{B}$  to try first would have been  $\mathcal{B} : C^\infty(Q_0)^3 \rightarrow C^\infty(Q_0)^3$  defined by

$$\mathcal{B}f := \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}, \quad \forall f = (f^1, f^2, f^3) \in C^\infty(Q_0)^3. \quad (1.3.22)$$

Unfortunately, Proposition 1.3.2 does not hold with this  $\mathcal{B}$ . Indeed, in this case  $\mathcal{B}_0^* : C^\infty(Q_0)^3 \rightarrow C^\infty(Q_0)^2$  would be now (compare with (1.3.20)) such that, for every  $z = (z^1, z^2) \in C^\infty(Q_0)^2$  and for every  $\pi \in C^\infty(Q_0)$ ,

$$\mathcal{B}_0^*(z, \pi) = (z^1, z^2). \quad (1.3.23)$$

Let  $F_1 \in C^\infty(T/2, T)$  and let  $F_2 \in C^\infty(T/2, T)$ . We define  $z = (z^1, z^2) \in C^\infty(Q_0; \mathbb{R}^2)$  and  $\pi \in C^\infty(Q_0)$  by

$$z^1(t, x) := F_1(t), \quad (1.3.24)$$

$$z^2(t, x) := F_2(t), \quad (1.3.25)$$

$$\pi(t, x) := -F_1'(t)x_1 - F_2'(t)x_2 + F_1(t)\bar{y}^1 + F_2(t)\bar{y}^2. \quad (1.3.26)$$

Then  $\mathcal{L}_0^*(z, \pi) = 0$ . However, if  $(F_1, F_2) \neq (0, 0)$ , then  $\mathcal{B}_0^*(z, \pi) \neq 0$ . Hence, in this case, (1.3.18) does not hold whatever the linear partial differential operator  $\mathcal{M}_0$  is and whatever the trajectory  $(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u})$  is.

### 1.3.2.ii Number of variables and equations

Let us give some algebraic results about the number of derivatives of a certain order.

**Definition 1.3.3.** Consider a scalar PDE with a smooth (enough) variable  $z$  depending on 4 variables  $x_0, x_1, x_2, x_3$ . We call *equations of level  $n$*  all the different equations we obtain by differentiating the PDE with respect to all the possible multi-integers of length  $n$ . The number of “distinct” equations of level  $n$  is denoted  $E(n)$ , and the number of “distinct” equations of a level less than or equal to  $n$  is denoted  $F(n)$ .

*Remark 1.3.3.* Clearly,  $E(n)$  is also the distinct number of derivatives of order  $n$  for (smooth enough) functions having 4 variables, and  $F(n)$  is also the distinct number of derivatives of an order less or equal than  $n$  for (smooth enough) functions having 4 variables. Moreover, if we consider a scalar PDE with many variables  $z^1, \dots, z^k$  depending on  $x_0, x_1, x_2, x_3$  containing derivatives of  $z^1, \dots, z^k$  of order  $m$  at most, the maximum number of derivatives of  $z^1, \dots, z^k$  we may expect in the equations of a level less than or equal to  $n$  is  $kF(n + m)$ .

We want to compute  $E$  and  $F$  precisely. One has

$$E(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}, \quad (1.3.27)$$

$$F(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}. \quad (1.3.28)$$

Indeed

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mapsto \{\alpha_0 + 1, \alpha_0 + \alpha_1 + 2, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 3, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\}$$

defines a bijection between the set of  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^4$  such that  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq n$  and the set of subsets of  $\{1, 2, \dots, n+4\}$  having 4 elements. Hence,  $F(n)$  being the number of  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^4$  such that  $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq n$ , we have (1.3.28). In order to obtain (1.3.27), it suffices to notice that

$$\begin{aligned} E(n) &= F(n) - F(n-1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}. \end{aligned}$$

### 1.3.2.iii A related overdetermined system

Let us now study the equation (1.3.21), where the data is  $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4) \in C^\infty(Q_0)^4$  and the unknown is  $(z^1, z^2, \pi) \in C^\infty(Q_0)^3$ .

Let us explain the idea behind the reasoning we are going to develop in this subsection. Equation (1.3.21) is “analytically” overdetermined, since we have more equations (4) than unknowns (3). However, if we see (1.3.21) as a linear system of algebraic unknowns (the unknowns being  $z^1, z^2, \pi$  and their derivatives) the system is now “algebraically” underdetermined: We have 4 equations and 19 unknowns. But it is easy to obtain as many new equations as we want: It suffices to differentiate (1.3.21) enough times. Some new “algebraic unknowns” (the derivatives of  $z^1, z^2, \pi$ ) appear, but since the system was “analytically” overdetermined, one can hope that they are not “too many” new unknowns appearing. Notably, one can hope that, after differentiating a sufficient number of times, we obtain more equations than “algebraic unknowns”. We would then deduce Assumption  $\mathcal{A}_2$  by “inverting” in some sense this well-posed linear system (this will be explained in detail later).

We first eliminate  $\pi$  in our equation (1.3.21). To reach this goal, in (1.3.21), we apply  $\partial_3$  to the first and second lines, and use the third line. We obtain the following equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\partial_{x_3}\bar{y}^1\partial_{x_1}z^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^2\partial_{x_2}z^1 + (\partial_{x_1}\bar{y}^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^3)\partial_{x_3}z^1 - \bar{y}^1\partial_{x_1x_3}^2z^1 \\ -\bar{y}^2\partial_{x_2x_3}^2z^1 - \bar{y}^3\partial_{x_3x_3}^2z^1 - \partial_{x_3t}^2z^1 - \Delta\partial_{x_3}z^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^2\partial_{x_1}z^2 + \partial_{x_1}\bar{y}^2\partial_{x_3}z^2 \\ \qquad \qquad \qquad = \partial_{x_3}\varphi^1 - \partial_{x_1}\varphi^3, \\ -\partial_{x_3}\bar{y}^1\partial_{x_2}z^1 + \partial_{x_2}\bar{y}^1\partial_{x_3}z^1 - \partial_{x_3}\bar{y}^1\partial_{x_1}z^2 - \bar{y}^1\partial_{x_1x_3}^2z^2 - 2\partial_{x_3}\bar{y}^2\partial_{x_2}z^2 \\ -\bar{y}^2\partial_{x_2x_3}^2z^2 + (\partial_{x_2}\bar{y}^2 - \partial_{x_3}\bar{y}^3)\partial_{x_3}z^2 - \bar{y}^3\partial_{x_3x_3}^2z^2 - \partial_{x_3t}^2z^2 - \Delta\partial_{x_3}z^2 \\ \qquad \qquad \qquad = \partial_{x_3}\varphi^2 - \partial_{x_2}\varphi^3, \\ -\partial_{x_1}z^1 - \partial_{x_2}z^2 = \varphi^4. \end{array} \right. \quad (1.3.29)$$

The first and second equation of (1.3.29) contain derivatives of  $z^1$  and  $z^2$  up to order 3 and the third equation derivatives up to order 1. We would like to have the same maximal order of derivatives appearing in the three equations in order to be sure that the derivatives of maximal order appearing in the first and second equation might also appear in the third one. Hence



we are going to differentiate the last equation 2 more times than the others. If we count the maximum number of derivatives of  $z^1$  and  $z^2$  we create by differentiating  $n$  times the first and second equation and  $n + 2$  times the third one, we obtain

$$H(n) = 2F(n + 3) = \frac{(n + 4)(n + 5)(n + 6)(n + 7)}{12} \quad (1.3.30)$$

different derivatives. The number  $G(n)$  of equations we obtain is then

$$\begin{aligned} G(n) &= 2F(n) + F(n + 2) \\ &= \frac{(3 + n)(4 + n)(34 + 17n + 3n^2)}{24}. \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

From (1.3.30) and (1.3.31), one sees that  $G(n) - H(n)$  is increasing with respect to  $n$  and that

$$G(18) - H(18) = -44 < 0 \text{ and } G(19) - H(19) = 460 > 0. \quad (1.3.32)$$

Hence, in order to have more equations than unknowns and as few equations as possible, we choose  $n = 19$ . We have  $G(19) = 30360$  equations and  $H(19) = 29900$  unknowns. We can see this system of 30360 partial differential equations as a linear system

$$L_0(t, x)Z = \Phi,$$

where  $L_0 \in C^\infty(Q_0; \mathcal{M}_{30360 \times 29900}(\mathbb{R}))$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{29900}$  ( $Z$  contains the derivatives of  $z^1$  and  $z^2$  up to the order 19) and  $\Phi \in \mathbb{R}^{30360}$  ( $\Phi$  contains the derivatives of  $\varphi$  up to the order 19). Note that  $L_0$  also depends on  $\varepsilon$  and  $\nu$ , but this does not need to be emphasized in what follows. Hence, in order to lighten the notations, we will only see  $L_0$  as a function of  $t$  and  $x$  (as for  $\tilde{L}_0, N, \dots$  that are to be introduced later). We order the 29900 lines of  $Z$  so that

$$Z^1 = \partial_{x_1} z^1, Z^2 = \partial_{x_2} z^1, Z^3 = \partial_{x_3} z^1, Z^4 = \partial_{x_1} z^2, Z^5 = \partial_{x_2} z^2, Z^6 = \partial_{x_3} z^2. \quad (1.3.33)$$

Assumption  $\mathcal{A}_2$  can then be written as follows: Prove the existence of a nonempty open subset  $\omega_0$  of  $\mathcal{C}_2$  and of a map  $N \in C^\infty(Q_0; \mathcal{M}_{6 \times 30360}(\mathbb{R}))$  ( $N$  is the algebraic version of the linear partial differential operator  $\mathcal{N}$  introduced in Subsection 1.3.2, every linear partial differential operator can be alternatively considered as a matrix acting on the derivatives of the input functions) such that

$$N(t, x)L_0(t, x)Z = (Z^1, Z^2, Z^3, Z^4, Z^5, Z^6), \forall (t, x) \in Q_0, \forall Z \in \mathbb{R}^{29900}. \quad (1.3.34)$$

Since the size of the matrix  $L_0(t, x)$  is very large, it is impossible to find some  $N$  verifying System (1.3.34) by hand and we will have to do computations on a computer. Notably, it would be more convenient to make  $L_0$  be a sparse matrix in order to use relevant tools adapted to the study of big sparse linear systems. This is the reason for our simple choices for  $a, b$  and  $c$  given in (1.2.16), (1.2.17) and (1.2.18) (polynomials of small order do not create too many non zero coefficients in  $L_0$  when they are differentiated). Using (1.2.1), (1.2.16), (1.2.17), (1.2.18),

(1.2.19) and (1.2.20), System (1.3.29) becomes simply, in  $Q_0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t)(-4x_1^3 - 4x_1x_2^2)\varepsilon\partial_{x_1}z^1 + a(t)(-2x_1^2x_2 - 2x_2^3)\varepsilon\partial_{x_2}z^1 + a(t)(14x_1^2x_3 \\ + 10x_2^2x_3)\varepsilon\partial_{x_3}z^1 + a(t)(-2x_1^2x_2 - 2x_2^3)\varepsilon\partial_{x_1}z^2 + 4a(t)x_1x_2x_3\varepsilon\partial_{x_3}z^2 + a(t) \\ (-2x_1^3x_3 - 2x_1x_2^2x_3)\varepsilon\partial_{x_1x_3}^2z^1 + a(t)(-2x_1^2x_2x_3 - 2x_2^3x_3)\varepsilon\partial_{x_2x_3}^2z^1 + a(t) \\ (4x_1^2x_3^2 + 4x_2^2x_3^2)\varepsilon\partial_{x_3x_3}^2z^1 - \partial_{x_3t}^3z^1 - \partial_{x_1x_3x_3}^3z^1 - \partial_{x_2x_2x_3}^3z^1 - \partial_{x_3x_3x_3}^3z^1 \\ = \partial_{x_3}\varphi^1 - \partial_{x_1}\varphi^3, \\ a(t)(-2x_1^3 - 2x_1x_2^2)\varepsilon\partial_{x_2}z^1 + a(t)4x_1x_2x_3\varepsilon\partial_{x_3}z^1 + a(t)(-2x_1^3 - 2x_1x_2^2) \\ \varepsilon\partial_{x_1}z^2 + a(t)(-4x_1^2x_2 - 4x_2^3)\varepsilon\partial_{x_2}z^2 + a(t)(10x_1^2x_3 + 14x_2^2x_3)\varepsilon\partial_{x_3}z^2 \\ + a(t)(-2x_1^3x_3 - 2x_1x_2^2x_3)\varepsilon\partial_{x_1x_3}^2z^2 + a(t)(-2x_1^2x_2x_3 - 2x_2^3x_3)\varepsilon\partial_{x_2x_3}^2z^2 \\ + a(t)(4x_1^2x_3^2 + 4x_2^2x_3^2)\partial_{x_3x_3}^2z^2 - \partial_{x_3t}^2z^2 - \partial_{x_1x_1x_3}^3z^2 - \partial_{x_2x_2x_3}^3z^2 - \partial_{x_3x_3x_3}^3z^2 \\ = \partial_{x_3}\varphi^2 - \partial_{x_2}\varphi^3, \\ -\partial_{x_1}z^1 - \partial_{x_2}z^2 = \varphi^4. \end{array} \right. \quad (1.3.35)$$

Let us consider the change of variables

$$s := \varepsilon a(t)$$

and

$$e := \frac{1}{T-t}.$$

( $e$  appears when we differentiate  $t \mapsto a(t)$  on  $Q_0$ ). Let  $\mathbb{R}[E, S, X]$  be the set of polynomials in the variables  $e, s, x_1, x_2, x_3$ , with real coefficients. The  $30360 \times 29900$  entries of  $L_0$  can alternatively be seen as functions depending on  $(t, x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$  or as elements of  $\mathbb{R}[E, S, X]$  and, from now on, we consider  $L_0$  as an element of  $\mathcal{M}_{30360 \times 29900}(\mathbb{R}[E, S, X])$ . As we will see after, it turns out that many of the entries of  $L_0$  are the 0 polynomial.

For a positive integer  $k$ , let us denote by  $\mathfrak{S}_k$  the set of permutations of  $\{1, \dots, k\}$ . To each  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ , we associate the matrix  $S_\sigma \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$  defined by

$$\begin{aligned} S_{\sigma(i)i} &= 1, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \\ S_{ji} &= 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{\sigma(i)\}. \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

For two positive integers  $k$  and  $l$ , let us denote by  $0_{k \times l}$  the null matrix of  $\mathcal{M}_{k \times l}(\mathbb{R})$  (which is included in  $\mathcal{M}_{k \times l}(\mathbb{R}[E, S, X])$ ). The following lemma is a key step for the proof of Proposition 1.3.2.

**Lemma 1.3.1.** *There exist*

$$\xi^0 := (e^0, s^0, x^0) \in \mathbb{R}^5,$$

$$\sigma \in \mathfrak{S}_{29900},$$

$$\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_{30360},$$

$$P \in \mathcal{M}_{7321 \times 7321}(\mathbb{R}[E, S, X]),$$

$$Q \in \mathcal{M}_{23039 \times 7321}(\mathbb{R}[E, S, X])$$

and

$$R \in \mathcal{M}_{23039 \times 22579}(\mathbb{R}[E, S, X])$$

such that

$$\sigma(i) = i, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad (1.3.37)$$

$$S_{\bar{\sigma}} L_0 S_{\sigma} = \begin{pmatrix} P & 0_{7321, 22579} \\ Q & R \end{pmatrix}, \quad (1.3.38)$$

$$\text{the rank of } P(\xi^0) \text{ is } 7321. \quad (1.3.39)$$

Let us assume for the moment that this lemma holds and end the proof of Proposition 1.3.2. A consequence of Lemma 1.3.1 is the following:

**Lemma 1.3.2.** *There exists a nonempty open subset  $\omega_0$  of  $\mathcal{C}_2$ ,  $T^* > 0$  and  $\varepsilon^* > 0$ , such that*

$$\det P\left(\frac{1}{T-t}, \varepsilon a(t), x\right) \neq 0, \forall T \in (0, T^*), \forall t \in [T/2, T), \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \forall x \in \omega_0. \quad (1.3.40)$$

**Proof of Lemma 1.3.2.**

Let us first point out that  $\det P \in \mathbb{R}[E, S, X]$  and, by (1.3.39), this polynomial is not the 0 polynomial. Hence there exist a nonnegative integer  $m$  and a polynomial  $\tilde{P} \in \mathbb{R}[E, S, X]$  such that

$$\det P(E, S, X) = S^m \tilde{P}(E, S, X), \quad (1.3.41)$$

$$\tilde{P}(E, 0, X) \in \mathbb{R}[E, X] \text{ is not the 0 polynomial.} \quad (1.3.42)$$

By (1.3.42), there exist  $\delta > 0$ ,  $C' > 0$  and a nonempty open subset  $\omega_0$  of  $\mathcal{C}_2$  such that

$$|\tilde{P}(e, 0, x)| \geq 2\delta, \forall e \in [C', +\infty), \forall x \in \omega_0. \quad (1.3.43)$$

By the mean value theorem, there exist a positive integer  $l$  and a positive real number  $C^*$  such that

$$|\tilde{P}(e, s, x) - \tilde{P}(e, 0, x)| \leq C^* |s| \left( |e|^l + |s|^l + 1 \right), \forall e \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in \omega_0. \quad (1.3.44)$$

By (1.2.16), there exists  $\varepsilon^*$  such that

$$\varepsilon^* |a(t)| \left( (T-t)^{-l} + \varepsilon^{*l} |a(t)|^l + 1 \right) \leq \frac{\delta}{C^*}, \forall T \in (0, 2/C'], \forall t \in [T/2, T). \quad (1.3.45)$$

From (1.3.43), (1.3.44) and (1.3.45), we obtain that

$$|\tilde{P}((T-t)^{-1}, \varepsilon a(t), x)| \geq \delta, \forall (T, t, \varepsilon, x) \in (0, 2/C'] \times [T/2, T) \times (0, \varepsilon^*] \times \omega_0, \quad (1.3.46)$$

which concludes the proof of Lemma 1.3.2. ■

Let us now go back to the proof of Proposition 1.3.2. For every positive integer  $l$ , we denote by  $\text{Id}_l$  the identity matrix of  $\mathbb{R}^l$ . By (1.3.40), there exists  $U \in C^\infty(Q_0; \mathcal{M}_{7321 \times 7321}(\mathbb{R}))$  such that

$$U(t, x)P(t, x, \varepsilon) = \text{Id}_{7321}, \forall x \in \omega_0. \quad (1.3.47)$$

Let  $\tilde{U} \in C^\infty(Q_0; \mathcal{M}_{7321 \times 30360}(\mathbb{R}))$  be defined by

$$\tilde{U}(t, x) := (U(t, x) \ 0_{7321, 23039}), \forall x \in \omega_0. \quad (1.3.48)$$

From (1.3.38), (1.3.47) and (1.3.48), one has

$$\tilde{U}(t, x) S_{\bar{\sigma}} L_0(t, x) = (\text{Id}_{7321} \ 0_{7321, 22579}) S_{\sigma}^{-1}, \forall x \in \omega_0. \quad (1.3.49)$$

Let  $K \in \mathcal{M}_{6,7321}(\mathbb{R})$  be defined by

$$K := (\text{Id}_6 \ 0_{6,7315}). \quad (1.3.50)$$

From (1.3.37), (1.3.49) and (1.3.50), one has

$$K\tilde{U}(t, x)S_{\bar{\sigma}}L_0(t, x) = (\text{Id}_6 \ 0_{6,29894})S_{\bar{\sigma}}^{-1} = (\text{Id}_6 \ 0_{6,29894}), \forall x \in \omega_0, \quad (1.3.51)$$

which shows that (1.3.34) holds with  $N(t, x) := K\tilde{U}(t, x)S_{\bar{\sigma}}$ , and ends the proof of Proposition 1.3.2. ■

To finish the proof of Proposition 1.3.2, it suffices to prove Lemma 1.3.1.

**Proof of Lemma 1.3.1.**

The fact that the dependence of  $\bar{y}$  and its derivatives in the time variable is quite complicated (it is both exponential and fractional) compared to the dependence in the space variable (which is polynomial) is problematic, because it is not very convenient to use for computations on a computer. In the previous proof we have seen  $\det P$  as a polynomial in  $s = \varepsilon a(t)$ ,  $e = \frac{1}{T-t}$  (which corresponds to terms appearing when we differentiate  $t \mapsto a(t)$ ) and  $x$ . Assume that we fix  $e = 0$ : This is equivalent to do “as if” the derivatives of  $a$  were all identically the null function, i.e. to do as if the function  $t \mapsto a(t)$  were replaced by a constant function, which is simpler than our original function  $a$ . We will then impose  $e^0 = 0$  for our computations. Let us set  $\xi^0 := (e^0, s^0, x^0)$  with  $e^0 = 0$ ,  $s^0 = 1$  and  $x^0 = (1.1, 1.2, 1.3)$ .

First of all, let us prove that one can decompose  $M$  as in (1.3.38) at least at point  $\xi^0$ . We present in the Appendix 1.4 how we computed the matrix

$$L_0^0 := L_0(\xi^0) \in \mathcal{M}_{30360 \times 29900}(\mathbb{R})$$

thanks to a  $C^{++}$  program.

From now on we assume that we have matrix  $L_0^0$  at our disposal and we are going to explain how to exploit it in order to obtain Lemma 1.3.1.

We begin with reordering the columns so that the null columns of  $L_0^0$  are moved to the last columns. One verifies for example thanks to Matlab that there are exactly 140 such columns. There exist  $\bar{\sigma} \in \mathfrak{S}_{29900}$  and  $N^0 \in \mathcal{M}_{30360 \times 29760}(\mathbb{R})$  such that

$$L_0^0 S_{\bar{\sigma}} = (N^0 \ 0_{30360 \times 140}). \quad (1.3.52)$$

One problem is that it could happen that some columns of  $L_0^0$  are equal to 0 but the corresponding columns of  $L_0$  are not identically null. However, we check that it is not the case (thanks to the evaluation function described in Appendix 1.4).

Let us recall that our goal is to extract a well-chosen submatrix of  $L_0^0$  which is of maximal rank. A reasonable hope would have been that the matrix  $N^0$  (of size  $30360 \times 29760$ ) itself is of maximal rank 29760 (we would then have obtained something similar to Lemma 1.3.1 by choosing some squared extracted matrix of maximal rank  $P^0$  of  $N^0$ , which is always possible, the matrix  $P^0$  would then have been of size  $29760 \times 29760$  and the non-selected lines would be permuted to obtain matrices  $Q^0$  of size  $600 \times 29760$  and  $R^0$  of size  $600 \times 140$ ). However it turns out to be false, as we will see later.

Since computing the rank of  $L_0^0$  on a computer is too long because of its size, we introduce the notion of structural rank.

**Definition 1.3.4.** Let  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  and  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . We say that  $A$  and  $B$  are structurally equivalent if the following property is verified:

$$A_{ij} = 0 \Leftrightarrow B_{ij} = 0.$$

This is an equivalence relation on  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ , and we call  $Cl(A)$  the equivalence class of  $A$ . The structural rank of a matrix  $A$  (denoted  $\mathbf{sprank}(A)$  in the following) is the maximal rank of the elements of  $Cl(A)$ . Equivalently, if we fill randomly the nonzero coefficients of  $A$ , then, with probability 1, the rank of  $A$  is equal to the structural rank.

One sees that the structural rank does not depend on the coefficients of the matrix but only on the distribution of the zeros in the matrix and is never less than the rank. The advantage of the structural rank is that it can be computed fast (in a couple of seconds in our case), especially on sparse matrices. It corresponds to the function  $\mathbf{sprank}$  in Matlab.

Computing the structural rank of  $N^0$  thanks to Matlab we find that

$$\mathbf{sprank}(N^0) = 28654 < 29760,$$

hence there is no hope that the rank of  $N^0$  is maximal.

To extract a submatrix of  $N^0$  which is of maximal rank, we can, for example, begin with extracting a submatrix of  $P^0$  which is of maximal structural rank, and verify that it is of maximal rank too. The right way to do this is to explore more carefully how the structural rank is computed. In fact the key point is the existence of a decomposition in block triangular form (which is related to the Dulmage-Mendelsohn decomposition for the bipartite graph associated to any matrix, see [DM58] and [PF90]) of a matrix.

**Proposition 1.3.3.** *Let  $A$  be a matrix. Then one can permute the columns and the lines of  $A$  to obtain a matrix of the following form:*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad (1.3.53)$$

where:

1.  $(A_{11}, A_{12})$  is the underdetermined part of the matrix, it always has more columns than rows.
2.  $(A_{33}, A_{34})$  is the overdetermined part of the matrix, it always has more rows than columns.
3.  $A_{12}, A_{23}, A_{34}$  are square matrices with nonzero diagonals (in particular these matrices are of maximal structural rank)
4.  $A_{23}$  is the well-determined part of the matrix (if the matrix is square and non-singular, it is the entire matrix).

Moreover, one can permute rows and columns so that  $A_{23}$  is also block triangular. The decomposition obtained is called the block triangular form of matrix  $A$ . The structural rank of  $A$  is given by the sum of the structural ranks of  $A_{12}, A_{23}, A_{34}$ .

The block triangular form (1.3.53) (called the coarse decomposition) of the matrix is in fact given by the  $\mathbf{dmperm}$  function in Matlab, which also gives the permutation that makes the matrix be in the form of (1.3.53) and a block triangular form for the well-determined part

(which is called the fine decomposition). One easily understands how to obtain a matrix in the form of (1.3.38) thanks to this decomposition: One can (for instance) permute the blocks to obtain

$$\begin{pmatrix} A_{34} & 0 & 0 & 0 \\ A_{44} & 0 & 0 & 0 \\ A_{14} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{24} & 0 & 0 & A_{23} \end{pmatrix}, \quad (1.3.54)$$

from which we easily deduce decomposition (1.3.38).

To simplify the computations, we are not going to apply this block triangular decomposition directly to  $L_0^0$  but to a well-chosen submatrix  $\tilde{L}_0^0$ . First of all, we go back to  $L_0$  and select some equations and unknowns: There exist  $\sigma^0 \in \mathfrak{S}_{29900}$ ,  $\tilde{\sigma}^0 \in \mathfrak{S}_{30360}$ ,  $\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{16623 \times 14630}(\mathbb{R})$  and  $\tilde{R} \in \mathcal{M}_{16623 \times 15270}(\mathbb{R})$  such that (see (1.3.54))

$$S_{\tilde{\sigma}^0} L_0 S_{\sigma^0} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_0 & 0_{13737 \times 15270} \\ \tilde{Q} & \tilde{R} \end{pmatrix}, \quad (1.3.55)$$

where  $\tilde{L}_0$  corresponds to the equations we obtain by differentiating the two first equations of (1.3.29) 15 times and the last equation 17 times, so that  $\tilde{L}_0$  is of size  $(G(15), H(15)) = (13737, 14630)$  (here there are more unknowns than equations but we will see that this will not be a problem).

Let us call

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0^0 &:= \tilde{L}_0(\xi^0), \\ \tilde{Q}^0 &:= \tilde{Q}(\xi^0), \\ \tilde{R}^0 &:= \tilde{R}(\xi^0). \end{aligned}$$

One has

$$S_{\tilde{\sigma}^0} L_0^0 S_{\sigma^0} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_0^0 & 0_{13737 \times 15270} \\ \tilde{Q}^0 & \tilde{R}^0 \end{pmatrix}.$$

Thanks to Matlab, we find the Dulmage-Mendelsohn decomposition of  $\tilde{L}_0^0$  and observe that there exists some permutations matrices  $\sigma^1$  and  $\tilde{\sigma}^1$  such that (see (1.3.54))

$$S_{\tilde{\sigma}^1} \tilde{L}_0^0 S_{\sigma^1} = \begin{pmatrix} \bar{L}_0^0 & 0_{9050 \times 5578} \\ \bar{Q}^0 & \bar{R}^0 \end{pmatrix},$$

with  $\bar{Q}^0 \in \mathcal{M}_{4687 \times 9050}(\mathbb{R})$ ,  $\bar{R}^0 \in \mathcal{M}_{4687 \times 5578}(\mathbb{R})$ , and  $\bar{L}_0^0 \in \mathcal{M}_{9050 \times 9050}(\mathbb{R})$  is of maximal structural rank and square (it corresponds to the block  $A_{34}$  in the block triangular decomposition). Applying the Dulmage-Mendelsohn algorithm now on  $\bar{L}_0^0$ , we can write  $\bar{L}_0^0$  in an (upper) block triangular form with 352 diagonal blocks, the first 351 of them being of “small” size and the latter one being of size 7321. Let us call  $\bar{L}_{0(i,j)}^0$  (with  $(i, j) \in \llbracket 1; 352 \rrbracket^2$ ) the blocks of  $\bar{L}_0^0$ .

Using this decomposition, one can see (using Matlab) that  $\bar{L}_0^0$  is not of maximal rank. However, by computing the rank of the block  $\bar{L}_{0(352,352)}^0$  thanks to Matlab, one sees that it is of maximal rank 7321. Moreover, we verify that

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{the columns corresponding to the unknowns } \partial_{x_1} z^1, \partial_{x_2} z^1, \partial_{x_3} z^1, \partial_{x_1} z^2, \\ \partial_{x_2} z^2, \partial_{x_3} z^2 \text{ appear in this block,} \end{array} \right. \quad (1.3.56)$$

by looking carefully on Matlab where the columns corresponding to these unknowns have been moved under the action of the permutation matrices  $S_{\sigma_0}$  and  $S_{\sigma_1}$ . More precisely,  $\partial_{x_i} z^1$  corresponds to the  $i$ -th column of  $\bar{L}_0^0(352,352)$  and  $\partial_{x_i} z^2$  to the  $(3632+i)$ -th column of  $\bar{L}_0^0(352,352)$ .

Let us call

$$P^0 := \bar{L}_{0352,352}^0.$$

There exist

$$\begin{aligned} \sigma &\in \mathfrak{S}_{29900}, \quad \tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_{30360}, \\ Q^0 &\in \mathcal{M}_{23039 \times 7321}(\mathbb{R}[E, S, X]) \end{aligned}$$

and

$$R^0 \in \mathcal{M}_{23039 \times 22579}(\mathbb{R}[E, S, X])$$

such that

$$S_{\tilde{\sigma}} \tilde{L}_0^0 S_{\sigma} = \begin{pmatrix} P^0 & 0_{7321 \times 22579} \\ Q^0 & R^0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.57)$$

the rank of the first block  $P^0$  being maximal. The distribution of the nonzero coefficients of  $P^0$  is given in Figure 2.

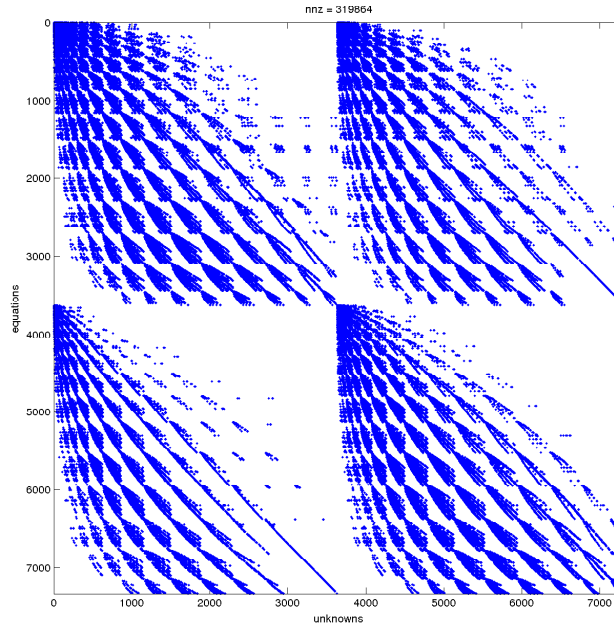


Figure 1.2: Distribution of the nonzero coefficients of  $P^0$ .

Now, we come back to the matrix  $L_0$  and we consider the following matrix:

$$\tilde{M}^0 := S_{\tilde{\sigma}} \tilde{L}^0 S_{\sigma},$$

where  $S_{\tilde{\sigma}}$  and  $S_{\sigma}$  are introduced in (1.3.57).

Let us call  $\Theta$  the set of all coefficients of  $L_0$  (considered as a polynomial in the variables  $E, S, X$ ) that are not identically zero, and  $\Theta^0$  the set of all coefficients of  $L_0^0$  that are not equal to 0. Clearly  $\Theta^0 \subset \Theta$  (in fact thanks to Matlab one can see that  $\Theta^0$  is much smaller than  $\Theta$ ),

moreover  $\Theta \setminus \Theta^0$  corresponds to the nonzero coefficients of the matrix that become identically null when we change  $a(t)$  into the function identically equal to 1 and apply it at point  $\xi^0$ . What could happen is that  $\tilde{M}^0$  is not of block triangular form as in (1.3.57) (the null block of the matrix  $\tilde{M}^0$  may contain some elements of  $\Theta \setminus \Theta^0$ ). However, since the only important thing is the location of the elements of  $\Theta \setminus \Theta^0$  and not their value, one can verify easily on Matlab that the coefficients of  $\Theta \setminus \Theta^0$  do not influence the block form (1.3.57) (by looking where the elements of  $\Theta \setminus \Theta^0$  are moved under the action of  $S_{\tilde{\sigma}}$  and  $S_{\sigma}$ ), i.e. the permutations  $S_{\tilde{\sigma}}$  and  $S_{\sigma}$  also give a decomposition as in (1.3.57) for  $\tilde{L}^0$ : There exists

$$\tilde{P} \in \mathcal{M}_{7321 \times 7321}(\mathbb{R}[E, S, X]),$$

$$\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{23039 \times 7321}(\mathbb{R}[E, S, X])$$

and

$$\tilde{R} \in \mathcal{M}_{23039 \times 22579}(\mathbb{R}[E, S, X])$$

such that

$$S_{\tilde{\sigma}} \tilde{L}^0 S_{\sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{P} & 0_{7321 \times 22579} \\ \tilde{Q} & \tilde{R} \end{pmatrix}, \quad (1.3.58)$$

with the relations  $P(\xi^0) = P^0, Q(\xi^0) = Q^0, R(\xi^0) = R^0$ .

Property (1.3.38) follows then directly from (1.3.55) and (1.3.58), (1.3.39) is a direct consequence of the above construction, and (1.3.37) can be easily deduced by permuting some lines and columns of  $S_{\tilde{\sigma}}$  and  $S_{\sigma}$  (thanks to Property (1.3.56)). Finally, Lemma 1.3.1 holds. ■

Consequently Proposition 1.3.2 holds. Moreover, one observes that the linear partial differential operator  $\mathcal{M}_0$  that we have just created so that (1.3.16) holds is exactly  $\mathcal{P}^*$ , (where  $\mathcal{P}$  is the differential version of the matrix  $P$  seen as a partial differential operator acting on  $(\partial_{x_1} z^1, \partial_{x_2} z^1, \partial_{x_3} z^1, \partial_{x_1} z^2, \partial_{x_2} z^2, \partial_{x_3} z^2)$ ) and is of order 17 (because we have differentiated the equations of (1.3.21) 16 times, and (1.3.29) was obtained by differentiating System (1.3.21) 1 time). Hence, the corresponding operator  $\mathcal{M}$  in equality (1.3.5) is also of order 17.

This concludes the proof of Proposition 1.3.2. ■

### 1.3.3 Controllability of the linear control system (1.3.6)

In this subsection, we prove some technical lemmas that imply the null controllability of (1.3.6) with controls which are derivatives of smooth enough functions having a small support. This is needed to ensure that the controls are in the image of  $\mathcal{B}$  (this is exactly Assumption  $\mathcal{A}_1$ ) and to take into account Remark 1.3.1.

The first lemma is the following one (remind that  $\bar{y}$  is one of the trajectories constructed in Section 1.2). It consists in a Carleman estimate with curl observation. We call  $D_{\bar{y}}$  the operator

$$D_{\bar{y}} z := (\bar{y} \cdot \nabla) z - \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_1} \bar{y}^2 z^2 + \partial_{x_1} \bar{y}^3 z^3 \\ \partial_{x_2} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_2} \bar{y}^2 z^2 + \partial_{x_2} \bar{y}^3 z^3 \\ \partial_{x_3} \bar{y}^1 z^1 + \partial_{x_3} \bar{y}^2 z^2 + \partial_{x_3} \bar{y}^3 z^3 \end{pmatrix}.$$

$D_{\bar{y}}$  is exactly the opposite of the adjoint operator of  $y \mapsto (\bar{y} \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) \bar{y}$  (because  $\bar{y}$  is divergence-free).

**Lemma 1.3.3.** *Let  $\theta : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  be a lower semi-continuous function which is not identically 0 and let  $r \in (0, 1)$ . There exists  $C_1 > 0$  such that, for every  $K_1 > C_1$ , every*



$\nu \geq K_1(1-r)/r$ , there exists  $\varepsilon^0$  such that for every  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ , there exists  $C > 0$  such that, for every  $g \in L^2((0, T) \times \Omega)^3$  and for every solution  $z \in L^2((0, T), V) \cap L^\infty((0, T), H)$  of the adjoint of the linearized Navier-Stokes system

$$\begin{cases} -z_t - \Delta z - D_{\bar{y}}z + \nabla \pi = g & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{in } Q, \\ z = 0 & \text{on } \Sigma, \\ z(T) = z^T & \in V, \end{cases} \quad (1.3.59)$$

one has

$$\begin{aligned} & \|e^{\frac{-K_1}{2r(T-t)^5}} z\|_{L^2((T/2, T), H^1(\Omega)^3)}^2 + \|z(T/2, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \\ & \leq C \left( \int_{(T/2, T) \times \Omega} \theta e^{-\frac{K_1}{(T-t)^5}} |\nabla \wedge z|^2 + \int_{(T/2, T) \times \Omega} e^{-\frac{K_1}{(T-t)^5}} |g|^2 \right). \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

### Proof of Lemma 1.3.3.

In this proof, our system, which is initially defined on  $(0, T)$ , will only be considered on the interval of time  $(T/2, T)$ . In fact, in the following, (see, in particular, the proof of Proposition 1.3.4), we will not act on the system on the interval  $(0, T/2)$ , hence we only need a Carleman estimate on  $(T/2, T)$ . For our proof, we need to use the particular form of our  $\bar{y}$  in time, in particular that (see (1.2.16))

$$|\bar{y}(t, x)| + |\nabla \bar{y}(t, x)| \leq C \varepsilon e^{\frac{-\nu}{(T-t)^5}}, \quad \forall (t, x) \in (T/2, T) \times \Omega. \quad (1.3.61)$$

Without loss of generality, we may assume that there exists a nonempty open subset  $\omega^*$  of  $\Omega$  such that  $\theta = 1_{\omega^*}$ . Let us now give some other notations. Let  $\eta^0 \in C^2(\bar{\Omega})$  such that  $\eta > 0$  and  $|\nabla \eta^0| > 0$  in  $\bar{\Omega} \setminus \omega^*$  and  $\eta^0 = 0$  on  $\partial\Omega$ . For the existence of  $\eta^0$ , see [FI96a, Lemma 1.1, p. 4]. Let us call

$$\alpha(t, x) := \frac{e^{12\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{(t - T/2)^5(T - t)^5}, \quad \xi(t, x) := \frac{e^{\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{(t - T/2)^5(T - t)^5}$$

and

$$\alpha^*(t) := \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(t, x).$$

We call  $Q_{/2} := (T/2, T) \times \Omega$ . Using (1.3.61) and [Gue13, Proposition 3.1, p. 6] on the adjoint system (1.3.59) (where we see the first and zero order terms of this equation as a second member, because Proposition 3.1 of [Gue13] concerns only the Stokes system), one has, for some  $C$  large enough,  $\lambda \geq C$  and  $s \geq C$ ,

$$\begin{aligned} & s^3 \lambda^4 \int_{Q_{/2}} e^{-2s\alpha - 2s\alpha^*} \xi^3 |\nabla \wedge z|^2 + s \lambda^2 \int_{Q_{/2}} e^{-2s\alpha - 2s\alpha^*} \xi |\nabla(\nabla \wedge z)|^2 \\ & \leq C \left( s^3 \lambda^4 \int_{(T/2, T) \times \omega^*} e^{-2s\alpha - 2s\alpha^*} \xi^3 |\nabla \wedge z|^2 + \varepsilon^2 \int_{Q_{/2}} e^{-2s\alpha^*} e^{-\frac{2\nu}{(T-t)^5}} (|z|^2 \right. \\ & \quad \left. + |\nabla z|^2) + \int_{Q_{/2}} e^{-2s\alpha^*} |g|^2 \right). \end{aligned} \quad (1.3.62)$$

In fact, looking carefully at the proof of Proposition 3.1 of [Gue13], one remarks (just by changing the weight  $\rho(t) := e^{-s\alpha^*}$  by  $\rho(t) := e^{-\mu s\alpha^*}$  where  $\mu > 1$  is a parameter that can be chosen as large as we wish) that the previous inequality can be improved in the following way, as soon as  $s$  is large enough, for every  $\mu > 1$  (the constant  $C$  depends on  $\mu$ ):

$$\begin{aligned} & s^3 \lambda^4 \int_{Q_{/2}} e^{-2s\alpha - 2\mu s\alpha^*} \xi^3 |\nabla \wedge z|^2 + s\lambda^2 \int_{Q_{/2}} e^{-2s\alpha - 2\mu s\alpha^*} \xi |\nabla(\nabla \wedge z)|^2 \\ & \leq C \left( s^3 \lambda^4 \int_{(T/2, T) \times \omega^*} e^{-2s\alpha - 2\mu s\alpha^*} \xi^3 |\nabla \wedge z|^2 + \varepsilon^2 \int_{Q_{/2}} e^{-2\mu s\alpha^*} e^{-\frac{2\nu}{(T-t)^5}} (|z|^2 \right. \\ & \quad \left. + |\nabla z|^2) + \int_{Q_{/2}} e^{-2\mu s\alpha^*} |g|^2 \right). \end{aligned} \quad (1.3.63)$$

As usual, we now change our weights so that they do not vanish at time  $t = T/2$ . Let us call  $l : [T/2, T] \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $l(t) = T^2/16$  on  $[T/2, 3T/4]$  and  $l(t) = (t - T/2)(T - t)$  on  $[3T/4, T]$ . Next, we define

$$\begin{aligned} \beta(t, x) &:= \frac{e^{12\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{l^5(t)}, \quad \gamma(t, x) := \frac{e^{\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))}}{l^5(t)}, \\ \beta^*(t) &:= \max_{x \in \Omega} \beta(t, x), \quad \gamma^*(t) := \max_{x \in \Omega} \gamma(t, x). \end{aligned}$$

Clearly, the functions  $\alpha$  and  $\beta$  coincide on  $[3T/4, T]$ , as well as the functions  $\xi$  and  $\gamma$ . Using classical energy arguments, we deduce the existence of  $C$  (depending now on  $s, \lambda$ , which are assumed to be large enough and fixed from now on, and  $\mu$ ) such that

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{/2}} e^{-2(1+\mu)s\beta^*} |\nabla \wedge z|^2 + \int_{Q_{/2}} e^{-2(1+\mu)s\beta^*} |\nabla(\nabla \wedge z)|^2 \\ & \leq C \left( \int_{(T/2, T) \times \omega^*} e^{-2\mu s\beta^*} \gamma^{*3} |\nabla \wedge z|^2 + \varepsilon^2 \int_{Q_{/2}} e^{-2\mu s\beta^*} e^{-\frac{2\nu}{(T-t)^5}} (|z|^2 + |\nabla z|^2) \right. \\ & \quad \left. + \int_{Q_{/2}} e^{-2\mu s\beta^*} |g|^2 \right). \end{aligned} \quad (1.3.64)$$

One remarks that, since  $\nabla \cdot z = 0$  in  $Q$  and  $z = 0$  on  $(0, T) \times \partial\Omega$ , one has

$$C \|e^{-(1+\mu)s\beta^*} \nabla \wedge z\|_{L^2(Q_{/2})}^2 \geq \|e^{-(1+\mu)s\beta^*} \nabla z\|_{L^2(Q_{/2})}^2. \quad (1.3.65)$$

Using Poincaré's inequality, we also have

$$C \|e^{-(1+\mu)s\beta^*} \nabla z\|_{L^2(Q_{/2})}^2 \geq \|e^{-(1+\mu)s\beta^*} z\|_{L^2(Q_{/2})}^2. \quad (1.3.66)$$

Putting this into (1.3.64), one obtains

$$\begin{aligned} & \int_{Q_{/2}} e^{-2(1+\mu)s\beta^*} |\nabla z|^2 + \int_{Q_{/2}} e^{-2(1+\mu)s\beta^*} |z|^2 \\ & \leq C \left( \int_{(T/2, T) \times \omega^*} e^{-2\mu s\beta^*} \gamma^{*3} |\nabla \wedge z|^2 + \varepsilon \int_{Q_{/2}} e^{-2\mu s\beta^*} e^{-\frac{2\nu}{(T-t)^5}} (|z|^2 + |\nabla z|^2) \right. \\ & \quad \left. + \int_{Q_{/2}} e^{-2\mu s\beta^*} |g|^2 \right). \end{aligned} \quad (1.3.67)$$

Let us define, for  $\mu > 1$ ,

$$K_0 := 2^6(1 + \mu + \sqrt{\mu})s \frac{e^{12\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{10\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{T^5}, \quad (1.3.68)$$

$$K_1 := 2^6(\mu - \sqrt{\mu})s \frac{e^{12\lambda\|\eta^0\|_\infty} - e^{10\lambda\|\eta^0\|_\infty}}{T^5}. \quad (1.3.69)$$

From equality (1.3.69), one deduces the existence of  $C^* > 0$  (depending on  $\mu > 1$ ,  $\lambda \gg 1$  and  $s \gg 1$ ) such that

$$e^{-2\mu s \beta^*(t)} \gamma^{*3}(t) \leq C^* e^{\frac{-K_1}{(T-t)^5}}, \quad \forall t \in (T/2, T). \quad (1.3.70)$$

Moreover, from equality (1.3.68), there exists  $\widehat{C} > 0$  (depending on  $\mu > 1$ ,  $\lambda \gg 1$  and  $s \gg 1$ ) such that

$$e^{-\frac{K_0}{(T-t)^5}} \leq \widehat{C} e^{-2(1+\mu)s\beta^*}, \quad \forall t \in (T/2, T). \quad (1.3.71)$$

Fixing  $s, \lambda$  and making  $\mu \rightarrow +\infty$ , one easily sees that  $K_0/K_1 = \frac{1+\mu+\sqrt{\mu}}{\mu-\sqrt{\mu}} \rightarrow 1^+$  so that for every  $r \in (0, 1)$ , we have for  $\mu$  large enough,  $K_0 < K_1/r$ . For  $\varepsilon > 0$  small enough and for  $\nu$  large enough ( $\nu \geq K_0 - K_1$ ), one can absorb the undesired terms  $\varepsilon^2 \int_{Q/2} e^{-2\mu s \beta^*} e^{-\frac{2\nu}{(T-t)^5}} (|z|^2 + |\nabla z|^2)$  from the right-hand side of (1.3.67). Then using some classical energy estimates together with (1.3.70) and (1.3.71), one obtains (1.3.60).  $\blacksquare$

From now on, we set

$$\rho_r(t) := e^{r\frac{-K_1}{(T-t)^5}}, \quad \rho_1(t) := e^{\frac{-K_1}{(T-t)^5}}. \quad (1.3.72)$$

Let us now derive from this Carleman inequality a result of null-controllability with controls which are derivatives of smooth functions. Let  $\widehat{1}_{\omega_0} : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1]$  be a function of class  $C^\infty$  which is not identically equal to 0 and having a support included in  $\omega_0$ , where  $\omega_0$  was introduced in Lemma 1.3.2. We apply Lemma 1.3.3 with  $\theta = \widehat{1}_{\omega_0}$ . One has the following proposition.

**Proposition 1.3.4.** *With the notations of Lemma 1.3.3, let  $f \in L^2(Q)^3$  be such that  $\rho_r^{-1/2}f \in L^2(Q)^3$  and let us consider the following linearized Navier-Stokes control system*

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p = f + \nabla \wedge ((\nabla \wedge v)\widehat{1}_{\omega_0}) & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \end{cases} \quad (1.3.73)$$

where the control is  $v$ . Then, for every  $y_0 \in V$ , there exists a solution  $(y, p, v)$  of (1.3.73) such that  $y(0, \cdot) = y_0$  and for every  $\tilde{K}_1$  verifying  $0 < \tilde{K}_1 < K_1$ ,

$$e^{\frac{\tilde{K}_1(2-1/r)}{2(T-t)^5}} (\nabla \wedge v)\widehat{1}_{\omega_0} \in L^2((0, T), H^{53}(\Omega)^3) \cap H^{27}((0, T), H^{-1}(\Omega)^3), \quad (1.3.74)$$

$$e^{\frac{\tilde{K}_1}{2(T-t)^5}} y \in L^2((0, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3). \quad (1.3.75)$$

*Remark 1.3.4.* What is important in the previous proposition is the fact the controls are very regular (which is quite new and interesting in itself) and that the controls are derivatives (in fact curls) of functions, as in [Gue07]. In the following, it is enough to obtain a regularity  $L^2((0, T), H^{53}(\Omega)^3) \cap H^{27}((0, T), H^{-1}(\Omega)^3)$  for  $e^{\frac{\tilde{K}_1(2-1/r)}{2(T-t)^5}} (\nabla \wedge v)\widehat{1}_{\omega_0}$  but the following proof can be easily adapted to deduce controls  $v$  with

$$e^{\frac{\tilde{K}_1(2-1/r)}{2(T-t)^5}} (\nabla \wedge v)\widehat{1}_{\omega_0} \in L^2((0, T), H^{2m+1}(\Omega)^3) \cap H^{m+1}((0, T), H^{-1}(\Omega)^3)$$

for every given  $m$  as large as one wants.

**Proof of Proposition 1.3.4.**

In the following, we only control on the interval of time  $(T/2, T)$ , i.e. we set  $v = 0$  on  $(0, T/2)$  and let the corresponding solution  $(y, p)$  of (1.3.73) on  $(0, T/2)$  evolve naturally until time  $T/2$ . Let  $y^{T/2} = y(T/2, \cdot)$ .

Let  $P : L^2(0, L)^3 \rightarrow L^2(0, L)^3$  be the Leray projector  $P\varphi := \varphi - \nabla p$ , where  $\Delta p = \operatorname{div} \varphi$  in  $\Omega$  and  $\partial p / \partial n = \varphi \cdot n$  on  $\partial\Omega$ , ( $n$  is the unit outward normal vector on  $\partial\Omega$ ). Since  $P\Delta\varphi = \Delta P\varphi$  for every  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^3$ ,  $P$  can be extended as a continuous linear map from  $H^{-1}(\Omega)^3$  to  $H^{-2}(\Omega)^3$ . We still denote by  $P$  this extension. Let  $S : \mathcal{D}'((T/2, T), H_0^1(\Omega)^3) \rightarrow \mathcal{D}'((T/2, T), H^{-2}(\Omega)^3)$  and  $S^* : \mathcal{D}'((T/2, T); H_0^1(\Omega)^3) \rightarrow \mathcal{D}'((T/2, T), H^{-2}(\Omega)^3)$  be defined by

$$Sz := -z_t - P(\Delta z + D_{\bar{y}}z), \quad (1.3.76)$$

$$S^*z := z_t - P(\Delta z - (\bar{y} \cdot \nabla)z - (z \cdot \nabla)\bar{y}). \quad (1.3.77)$$

( $S^*$  corresponds to the linearized time-dependent Navier-Stokes operator and, formally,  $S$  is the adjoint of  $S^*$ ).

Since  $y^{T/2}$  is regular enough, one can assume from now on without loss of generality that  $y^{T/2} = 0$  by adding some suitable term in the source term  $f$  (that we still call  $f$ ) that still satisfies  $\rho_r^{-1/2}f \in L^2(Q)^3$ , and one can always assume that  $Pf = f$  by changing the pressure. We define a closed linear unbounded operator  $\mathcal{S} : L^2(Q/2)^3 \rightarrow L^2(Q/2)^3$  by

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}) := \{z \in L^2((T/2, T), H_0^1 \cap H^2(\Omega)^3) \cap H^1((T/2, T), L^2(\Omega)^3) | z(T, \cdot) = 0\}, \quad (1.3.78)$$

$$Sz := -z_t - P(\Delta z + D_{\bar{y}}z). \quad (1.3.79)$$

We call

$$X_m := \mathcal{D}(\mathcal{S}^m)$$

and

$$X_{-m} := X'_m,$$

where the pivot space is  $L^2(Q/2)^3$ . For every  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  such that  $k \leq l$ , one has

$$X_l \subset X_k.$$

Moreover  $X_m$  is an Hilbert space for the scalar product

$$\langle z_1, z_2 \rangle_{X_m} := \langle \mathcal{S}^m z_1, \mathcal{S}^m z_2 \rangle_{L^2(Q/2)^3}.$$

The associated norm is denoted  $\|\cdot\|_{X_m}$ . For  $m \in \mathbb{N}$ , one can define  $\mathcal{S}^*$  as an operator from  $X_{-m}$  into  $X_{-m-1}$  by setting, for every  $z_1 \in X_{-m-1}$  and  $z_2 \in X_{m+1}$ ,

$$\langle \mathcal{S}^* z_1, z_2 \rangle_{X_{-m-1}, X_{m+1}} := \langle z_1, \mathcal{S} z_2 \rangle_{X_{-m}, X_m}. \quad (1.3.80)$$

(One easily checks that this definition is consistent: it gives the same image if  $z_1$  is also in  $X_{-m'}$  for some  $m' \in \mathbb{N}$ ). This implies in particular that, for every  $z_1 \in L^2(Q/2)^3$  and for every  $z_2 \in X_m$ , one has, for every  $0 \leq j \leq l$ ,

$$\langle (\mathcal{S}^*)^l z_1, z_2 \rangle_{X_{-l}, X_l} = \langle (\mathcal{S}^*)^{l-j} z_1, (\mathcal{S})^j z_2 \rangle_{X_{j-l}, X_{l-j}}. \quad (1.3.81)$$

Let  $\mathcal{H}_0$  be the set of  $z \in H^1((T/2, T), L^2(\Omega)^3) \cap L^2((T/2, T), H^2(\Omega) \cap V)$  such that

$$\sqrt{\rho_1} Sz \in X_{26}, \quad (1.3.82)$$

$$\sqrt{\widehat{1}_{\omega_0} \rho_1} (\nabla \wedge z) \in L^2(Q/2)^3. \quad (1.3.83)$$

Let  $a$  be the following bilinear form defined on  $\mathcal{H}_0$ :

$$a(z, w) := \langle \sqrt{\rho_1} S z, \sqrt{\rho_1} S w \rangle_{X_{26}} + \int_{Q_{/2}} \widehat{1}_{\omega_0} \rho_1 (\nabla \wedge z) \cdot (\nabla \wedge w).$$

From (1.3.60), we deduce that  $a$  is a scalar product on  $\mathcal{H}_0$ . Let  $\mathcal{H}$  be the completion of  $\mathcal{H}_0$  for this scalar product. Note that, still from (1.3.60) and also from the definition of  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}$  is a subspace of  $L^2_{loc}([T/2, T], H^1_0(\Omega)^3)$  and, for every  $z \in \mathcal{H}$ , one has (1.3.82), (1.3.83) and

$$\|\rho_r^{1/2} z\|_{L^2((T/2, T), H^1(\Omega)^3)} \leq C \sqrt{a(z, z)}, \quad \forall z \in \mathcal{H}. \quad (1.3.84)$$

Let us now consider the linear form  $l$  defined on  $\mathcal{H}$  by

$$l(w) := \int_{Q_{/2}} f w.$$

The linear form  $l$  is well-defined and continuous on  $\mathcal{H}$  since, by the Cauchy-Schwarz inequality together with (1.3.84), one has, for every  $w \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{cases} \int_{Q_{/2}} |f w| \leq \|\rho_r^{-1/2} f\|_{L^2(Q_{/2})^3} \|\rho_r^{1/2} w\|_{L^2(Q_{/2})^3} \\ \leq C \|\rho_r^{-1/2} f\|_{L^2(Q_{/2})^3} \sqrt{a(w, w)}. \end{cases} \quad (1.3.85)$$

Applying the Riesz representation theorem, there exists a unique

$$\widehat{z} \in \mathcal{H} \quad (1.3.86)$$

verifying, for every  $w \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle \mathcal{S}^{26}(\sqrt{\rho_1} S \widehat{z}), \mathcal{S}^{26}(\sqrt{\rho_1} S w) \rangle_{L^2(Q_{/2})^3} - \int_{Q_{/2}} \widehat{u} w = \int_{Q_{/2}} f w, \quad (1.3.87)$$

with

$$\widehat{u} := -\rho_1 \nabla \wedge (\widehat{1}_{\omega_0} \nabla \wedge \widehat{z}). \quad (1.3.88)$$

We then set

$$\tilde{y} := (\mathcal{S}^*)^{26} \mathcal{S}^{26}(\sqrt{\rho_1} S \widehat{z}) \in X_{-26}. \quad (1.3.89)$$

We want to gain regularity on  $\tilde{y}$  (by accepting to have a weaker exponential decay rate for  $\tilde{y}$  when  $t$  is close to  $T$ ). Let  $\psi \in C^\infty([T/2, T])$  and  $y \in X_{-1}$ . One can define  $\psi y \in X_{-1}$  by the following way. Since  $\mathcal{S}^* : X_0 \rightarrow X_{-1}$  is onto, there exists  $h \in X_0$  such that  $\mathcal{S}^* h = y$ . We define  $\psi y$  by

$$\psi y = \psi \mathcal{S}^* h := \psi' h - \mathcal{S}^*(\psi h). \quad (1.3.90)$$

This definition is compatible with the usual definition of  $\psi y$  if  $y \in X_0$ . We can then define by induction on  $m$   $\psi y \in X_{-m}$  for  $\psi \in C^\infty([T/2, T])$  and  $y \in X_{-m}$  in the same way. Using (1.3.89), this allows us to define

$$\widehat{y} := \sqrt{\rho_1} \tilde{y} \in X_{-26}. \quad (1.3.91)$$

From (1.3.87), (1.3.88), (1.3.89) and (1.3.91), one gets

$$\mathcal{S}^* \hat{y} = f + \hat{u} \text{ in } X_{-27}. \quad (1.3.92)$$

Let  $\tilde{K}_1 \in (0, K_1)$  and  $\tilde{\rho}_1 := e^{-\tilde{K}_1/(T-t)^5}$ . Using (1.3.88), (1.3.89) and (1.3.92), one has

$$\mathcal{S}^* \left( \left( \sqrt{\rho_1} / \sqrt{\tilde{\rho}_1} \right) \tilde{y} \right) = \left( 1 / \sqrt{\tilde{\rho}_1} \right)' \sqrt{\rho_1} \tilde{y} + \left( 1 / \sqrt{\tilde{\rho}_1} \right) (f + \hat{u}) \in X_{-26}. \quad (1.3.93)$$

We want to deduce from (1.3.93) that  $\tilde{y}$  is more regular. This can be achieved thanks to the following lemma:

**Lemma 1.3.4.** *Let  $m \in \mathbb{N}$ . If  $y \in X_{-m}$  and  $\mathcal{S}^* y \in X_{-m}$ , then  $y \in X_{-m+1}$ .*

**Proof of Lemma 1.3.4.**

If  $m = 0$ , Lemma 1.3.4 follows from usual estimates on usual regularity property of solutions of the linearized Navier-Stokes system. From now on, we assume that  $m \in \mathbb{N}^*$ . Let  $h \in X_m$ . Since  $\mathcal{S}$  is an operator from  $X_{m+1}$  onto  $X_m$ , there exists  $\alpha \in X_{m+1}$  such that  $\mathcal{S}\alpha = h$ . Thanks to (1.3.80), one has

$$\langle y, h \rangle_{X_{-m}, X_m} = \langle \mathcal{S}^* y, \alpha \rangle_{X_{-m-1}, X_{m+1}} = \langle \mathcal{S}^* y, \alpha \rangle_{X_{-m}, X_m}, \quad (1.3.94)$$

the last equality coming from the fact that  $\mathcal{S}^* y \in X_{-m}$ . We deduce from (1.3.94) that there exists some constant  $C > 0$  such that for every  $h \in X_m$ ,

$$|\langle y, h \rangle_{X_{-m}, X_m}| \leq C \|\alpha\|_{X_m} = C \|h\|_{X_{m-1}}, \quad (1.3.95)$$

which shows that  $y \in X_{1-m}$ . This concludes the proof of Lemma 1.3.4. ■

From (1.3.93) and Lemma 1.3.4, one gets that

$$\left( \sqrt{\rho_1} / \sqrt{\tilde{\rho}_1} \right) \tilde{y} \in X_{-25}, \forall \tilde{K}_1 \in (0, K_1).$$

Using an easy induction argument together with Lemma 1.3.4 (and the fact that one can choose  $\tilde{K}_1 < K_1$  arbitrarily close to  $K_1$ ), we deduce that, for every  $\tilde{K}_1 \in (0, K_1)$ ,  $\left( \sqrt{\rho_1} / \sqrt{\tilde{\rho}_1} \right) \tilde{y} \in X_0$ .

Let us now focus on  $\hat{u}$ . Let us call  $v := \rho_1 \hat{z}$ . Using (1.3.84), one gets that

$$\rho_1^{-1} \rho_r^{1/2} v \in L^2(Q_{/2}). \quad (1.3.96)$$

Using (1.3.86) together with regularity results for  $S$  applied on  $\tilde{\rho}_1^{-1} \rho_r^{1/2} v \in L^2(Q_{/2})$  and, as above for the proof of (1.3.96), a bootstrap argument (together with the fact that one can choose  $\tilde{K}_1 \in (0, K_1)$  arbitrarily close to  $K_1$ ), one obtains that

$$\tilde{\rho}_1^{-1} \rho_r^{1/2} v \in X_{27}, \forall \tilde{K}_1 \in (0, K_1). \quad (1.3.97)$$

From (1.3.97) and (1.3.92), we deduce (by looking the equation verified by  $(1/\sqrt{\tilde{\rho}_1})\hat{y}$  and using usual regularity results for linearized Navier-Stokes system) that

$$\left( 1 / \sqrt{\tilde{\rho}_1} \right) \hat{y} \in L^2((T/2, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((T/2, T), H_0^1(\Omega)^3), \forall \tilde{K}_1 \in (0, K_1). \quad (1.3.98)$$

Proposition 1.3.4 follows from (1.3.92), (1.3.98) and (1.3.97). ■

### 1.3.4 Null-controllability of (1.3.1)

To finish, one can gather the results of Subsection 1.3.2 and Subsection 1.3.3 in order to apply Proposition 1.3.1 and obtain a controllability result on (1.3.1). However, we cannot work in the  $C^\infty$  setting of Proposition 1.3.1, so we need to take into account Remark 1.3.1 and to be careful concerning the spaces we are working with.

**Proposition 1.3.5.** *For every  $T > 0$  small enough, for every  $\alpha \in (0, 1)$ , there exists  $r_0 \in (0, 1)$  such that for every  $r \in (r_0, 1)$ , there exists  $C_1 > 0$  such that for every  $K_1 > C_1$ , for every  $f \in L^2(Q)$  be such that  $e^{\frac{K_1}{2r(T-t)^5}} f \in L^2(Q)^3$  and for every  $y^0 \in V$ , if*

$$\nu = \frac{1-r}{r} K_1, \quad (1.3.99)$$

there exists a solution  $(y, p, v)$  of the following linearized Navier-Stokes control system

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla) y + (y \cdot \nabla) \bar{y} + \nabla p = f + (0, 0, 1_{\omega_0} v) & \text{in } Q, \\ \nabla \cdot y = 0 & \text{in } Q, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma, \end{cases} \quad (1.3.100)$$

such that

$$e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} y \in L^2((0, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega)^3), \quad (1.3.101)$$

$$p \in L^2((0, T), H^1(\Omega)), \quad e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} v \in L^2(Q). \quad (1.3.102)$$

#### Proof of Proposition 1.3.5.

We want to apply Proposition 1.3.1. First of all, we deal with Assumption  $\mathcal{A}_1$ . We apply Proposition 1.3.4: There exists a solution  $(y^*, p^*, v^*)$  of (1.3.73) such that  $y^*(0, \cdot) = y^0$  and, for every  $\tilde{K}_1$  verifying  $0 < \tilde{K}_1 < K_1$ ,

$$e^{\frac{\tilde{K}_1(2-1/r)}{2(T-t)^5}} \widehat{1}_{\omega_0} (\nabla \wedge v^*) \in L^2((T/2, T), H^{53}(\Omega)^3) \cap H^{27}((T/2, T), H^{-1}(\Omega)^3), \quad (1.3.103)$$

$$e^{\frac{\tilde{K}_1}{2(T-t)^5}} y^* \in L^2((T/2, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((T/2, T), H^1(\Omega)^3). \quad (1.3.104)$$

Using well-known interpolation results (see for example [LM68, Section 13.2, p. 96]) and setting  $n := 27$ , we obtain that

$$e^{\frac{\tilde{K}_1(2-1/r)}{2(T-t)^5}} \widehat{1}_{\omega_0} (\nabla \wedge v^*) \in H^{2n/3}(Q_0) \subset H^{17}(Q_0).$$

Let us call  $w := \widehat{1}_{\omega_0} (\nabla \wedge v^*)$ , which is supported in  $Q_0$ . One observes that

$$\nabla \wedge w = \begin{pmatrix} \partial_{x_3} w^2 - \partial_{x_2} w^3 \\ \partial_{x_3} w^1 - \partial_{x_1} w^3 \\ \partial_{x_2} w^1 - \partial_{x_1} w^2 \end{pmatrix}.$$

Hence in view of equality (1.3.13) and setting

$$f^1 = 0, f^2 = -w^3, f^3 = w^2, f^4 = -w^3, f^5 = 0, f^6 = w^1, f^7 = \partial_{x_2} w^1 - \partial_{x_1} w^2,$$

one has  $\nabla \wedge w \in \text{Im}(\mathcal{B})$  and Assumption  $\mathcal{A}_1$  holds.

Now, we observe that Assumption  $\mathcal{A}_2$  follows from Proposition 1.3.2. Let  $(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v})$  be defined by

$$(\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{v}) := -\mathcal{M}w,$$

where  $\mathcal{M}$  is as in (the proof of) Proposition 1.3.2. It makes sense to apply  $\mathcal{M}$  to  $w$  because  $\mathcal{M}$  is a partial differential operator of order 17 and  $w \in H^{17}(Q_0)$ .

Using the fact that the operator  $\mathcal{M}$  is a partial differential operator of order 17 and that the coefficients of  $\mathcal{M}$  explode at time  $t = T$  at rate at most  $e^{\frac{7321\nu}{(T-t)^5}}$ , as it follows from the construction of  $\bar{y}$  given in Section 1.2 (see in particular (1.2.16)) and the construction of  $M$  given in the proof of Proposition 1.3.2, one has

$$e^{\frac{K_2}{2(T-t)^5}} \tilde{v} \in L^2(Q), \quad (1.3.105)$$

$$e^{\frac{K_2}{2(T-t)^5}} \tilde{y} \in L^2(Q), \quad (1.3.106)$$

for every  $K_2 < K_1(2 - 1/r) - 7321\nu$ . In order to be obtain  $\tilde{y}(T, \cdot) = 0$ , it is enough to have an exponential decay for  $y$  at time  $T$ , i.e. to impose

$$K_1(2 - 1/r) - 7321\nu > 0,$$

which, with (1.3.99), is equivalent to

$$r > \frac{7322}{7323},$$

which can be ensured since  $r$  can be arbitrarily chosen close to 1. Let  $\alpha \in (0, 1)$ . We set

$$r_0 := \frac{7322}{7323 - \alpha}. \quad (1.3.107)$$

Then, if  $r \in (r_0, 1)$ , one has

$$\alpha K_1 < K_1 - 7321K_1 \frac{1-r}{r}. \quad (1.3.108)$$

By (1.3.108), there exists  $K_2$  such that

$$\alpha K_1 < K_2 < K_1 - 7321K_1 \frac{1-r}{r} = K_1 - 7321\nu. \quad (1.3.109)$$

Finally, one can apply (the proof of) Proposition 1.3.1 and we set

$$(y, p, v) := (y^* + \tilde{y}, p^* + \tilde{p}, v^* + \tilde{v}).$$

Thanks to (1.3.103), (1.3.104), (1.3.105) and (1.3.106), one has

$$e^{\frac{K_2}{2(T-t)^5}} v \in L^2(Q), \quad (1.3.110)$$

$$e^{\frac{K_2}{2(T-t)^5}} y \in L^2(Q). \quad (1.3.111)$$

Then, using usual regularity results for the linearized Navier-Stokes operators on  $e^{\frac{K_2}{2(T-t)^5}} y$  (now considered on the entire time interval  $(0, T)$ ), we obtain

$$e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} y \in L^2((0, T), H^2(\Omega)^3) \cap L^\infty((0, T), L^2(\Omega)^3),$$

as soon as  $y^0 \in V$ . The proof of Proposition 1.3.5 is completed.  $\blacksquare$



## 1.4 Proof of Theorem 1.1.1

To conclude, we are going to apply an inverse mapping theorem to go back to the nonlinear system, which is the following (see [ATF87, Chapter 2, Section 2.3]):

**Proposition 1.4.1.** *Let  $E$  and  $F$  be two Banach spaces. Let  $e_0 \in E$  and  $\mathcal{F} : E \rightarrow F$  which is of class  $C^1$  in a neighborhood of  $e_0$ . Assume that the operator  $d\mathcal{F}(e_0) \in \mathcal{L}_c(E, F)$  is onto. Then there exist  $\eta > 0$  and  $C > 0$  such that for every  $g \in F$  verifying  $\|g - \mathcal{F}(e_0)\| < \eta$ , there exists  $e \in E$  such that*

1.  $\mathcal{F}(e) = g$ ,
2.  $\|e - e_0\|_E \leq C\|g - \mathcal{F}(e_0)\|_F$ .

We are going to use the same techniques as in [CG09a]. Let  $\alpha \in (0, 1)$ , and let us consider some  $r \in (r_0, 1)$  where  $r_0$  verifies (1.3.107). We apply Proposition 1.4.1 with  $E$  and  $F$  defined in the following way. Let  $E$  be the space of the functions

$$(y, p, v) \in L^2(Q)^3 \times L^2(Q) \times L^2(Q)$$

such that

1.  $e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} y \in L^\infty((0, T), V)^3 \cap L^2((0, T), H^2(\Omega)^3 \cap V)$ ,
2.  $\nabla p \in L^2(Q)$ ,
3.  $e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} v \in L^2(Q)^3$  and the support of  $v$  is included in  $Q_0$ ,
4.  $e^{\frac{K_1}{2r(T-t)^5}} (y_t - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p - (0, 0, v)) \in L^2(Q)^3$ ,
5.  $y(0, \cdot) \in V$ ,

equipped with the following norm which makes it a Banach space:

$$\begin{aligned} \|(y, p, v)\|_E := & \|e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} y\|_{L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega)^3) \cap L^2((0, T), H^2(\Omega)^3)} \\ & + \|p\|_{L^2((0, T), H^1(\Omega))} + \|e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} v\|_{L^2(Q)^3} \\ & + \|e^{\frac{K_1}{2r(T-t)^5}} (y_t - \Delta + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p - (0, 0, v))\|_{L^2(Q)^3} \\ & + \|y(0, \cdot)\|_{H_0^1(\Omega)^3}. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Let  $F$  be the space of the functions  $(h, y^0) \in L^2(Q)^3 \times V$  such that

$$e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} h \in L^2(Q)^3,$$

equipped with the following scalar product which makes it a Hilbert space:

$$((h, y^0)|(k, z^0)) = (e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} h | e^{\frac{\alpha K_1}{2(T-t)^5}} k)_{L^2(Q)^3} + (y^0 | z^0)_{H_0^1(Q)^3}.$$

We define

$$\mathcal{F}(y, p, v) = (y_t - \Delta y + (y \cdot \nabla)y + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p - (0, 0, v), y(0, \cdot)).$$

To apply the previous inverse mapping theorem, we first show the following lemma.

**Lemma 1.4.1.** *The map  $\mathcal{F}$  has its image included in  $F$  and is of class  $C^1$  on  $E$ .*

*Proof.* We see that  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$  with

$$\mathcal{F}_1(y, p, v) := (y_t - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p - (0, 0, v), y(0, \cdot)).$$

and

$$\mathcal{F}_2(y, p, v) := ((y \cdot \nabla)y, 0).$$

Thanks to the construction of  $E$  and  $F$  we have  $\mathcal{F}_1 : E \rightarrow F$  and  $\mathcal{F}_1$  is continuous, so, since  $\mathcal{F}_1$  is linear,  $\mathcal{F}_1$  is of class  $C^1$ . The map  $\mathcal{F}_2$  is a quadratic form, hence to prove that it maps  $E$  into  $F$  and is of class  $C^1$ , it is sufficient to prove that it is continuous, i.e. to prove that

$$\|e^{\frac{K_1}{2r(T-t)^5}} (y \cdot \nabla)y\|_{L^2(Q)^3} \leq C\|(y, p, v)\|_E^2. \quad (1.4.2)$$

We choose  $r$  and  $\alpha$  so that

$$\frac{K_1}{r} < 2\alpha K_1. \quad (1.4.3)$$

(One can take for example  $\alpha = 3/4$  and  $r \in (0, 1)$  close enough to 1) Let us call

$$\tilde{y}(t, x) := e^{\frac{K_1}{4r(T-t)^5}} y. \quad (1.4.4)$$

This definition of  $\tilde{y}$  and inequality (1.4.3) imply that

$$\|\tilde{y}\|_{L^\infty((0,T), H^1(\Omega)^3)} \leq C\|(y, p, v)\|_E,$$

which gives that

$$\|\nabla \tilde{y}\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega)^9)} \leq C\|(y, p, v)\|_E. \quad (1.4.5)$$

We also have

$$\|\tilde{y}\|_{L^2((0,T), H^2(\Omega)^3)} \leq C\|(y, p, v)\|_E. \quad (1.4.6)$$

A classical Sobolev embedding in dimension 3 together with (1.4.6) imply that

$$\|\tilde{y}\|_{L^2((0,T), L^\infty(\Omega)^3)} \leq C\|(y, p, v)\|_E. \quad (1.4.7)$$

Direct computations imply that

$$\|(\tilde{y} \cdot \nabla)\tilde{y}\|_{L^2((0,T), L^2(\Omega)^3)} \leq \|\nabla \tilde{y}\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega)^9)} \|\tilde{y}\|_{L^2((0,T), L^\infty(\Omega)^3)}. \quad (1.4.8)$$

From (1.4.5), (1.4.7) and (1.4.8), we obtain

$$\|(\tilde{y} \cdot \nabla)\tilde{y}\|_{L^2((0,T), L^2(\Omega)^3)} \leq C\|(y, p, v)\|_E^2,$$

which, together with (1.4.4), gives (1.4.2).  $\square$

We now consider the element  $e_0 = (0, 0, 0)$  and we compute

$$d\mathcal{F}(e_0)(y, q, v) = y_t - \Delta y + (\bar{y} \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)\bar{y} + \nabla p - (0, 0, v).$$

Proposition 1.3.5 implies that this application is onto. Hence, taking  $g = (0, y^0)$  and applying Proposition 1.4.1, Theorem 1.1.1 easily follows (in particular because the trajectory  $\bar{y}$  can be chosen as small as we want since  $\varepsilon$  can be arbitrarily small).

## Acknowledgments

The authors would like to thank Sergio Guerrero for fruitful discussions concerning Proposition 1.3.4.

## Appendix: Creation of the matrix $L_0$

In this appendix, we explain how the matrix  $L_0$  at point  $\xi^0$  (which represents all the differentiated equations of System (1.3.35) up to the order 19) was created. The program is written in  $C^{++}$ , using the library uBLAS which is well-adapted to the manipulation of sparse matrices. It is a parallel openMP algorithm, using 8 cores. We are not going to give all the technical details but just explain rapidly the spirit of the algorithm. To simplify, we will assume that the following “black boxes” (that had to be created) are at our disposal:

1. An evaluation function `ep` which evaluates a polynomial (represented by a vector) at  $\xi^0$ . This evaluation function can be created so that it can verify that  $\xi^0$  is not a root of the polynomial  $P(0, \cdot, \cdot)$ . (one just has to see if the evaluation is equal to 0 whereas the polynomial has nonzero coefficients).
2. A derivation function `deqex` which differentiates an equation of level  $m$  with respect to  $x_1, x_2, x_3$  or  $t$ .

A partial differential equation which is a derivative of order  $m$  of some of the equations of (1.3.35) will be represented in a matricial form in the following way: We know that there are at most  $F(m+3)$  derivatives appearing, and we observe that the coefficients are polynomials in  $(x_1, x_2, x_3)$  of an order less than 4 (it is a vector space of dimension 35). Hence an equation of order  $m$  is represented by a matrix with  $F(m+3)$  lines and 35 columns, where on each line one can find the coefficient of the partial derivatives of  $z^1$  (or  $z^2$  appearing) corresponding to the number of this line, thanks to the natural bijection between  $\mathbb{N}^4$  and  $\mathbb{N}$ . Since we have 3 equations in (1.3.35) and 2 unknowns ( $z^1$  and  $z^2$ ), one can write the matrix  $M$  in the following way:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix}. \quad (1.4.9)$$

For  $i = 1, 2, 3$ ,  $A_i$  represents the derivatives of  $z^1$  appearing in the derivatives of the  $i$ -th equation of (1.3.35) and  $B_i$  those of  $z^2$ . Hence, we can compute these  $A_i$  and  $B_i$  separately and then gather them to obtain  $L_0^0$ .

The algorithm is the following. We explain it for the first equation of (1.3.35) and for the unknown  $z^1$  (i.e. for  $A_1$ , but it is the same for the other matrices).

1. We create a matrix  $e$  that represents the equation. We use `ep` to fill the line of  $L_0^0$  corresponding to the equation in a .txt file under the form  $i \ j \ A_1(i, j)$ . We create a matrix  $h$  which is empty for the moment. In fact in  $e$  we will keep the equations of level  $m-1$  and in  $h$  we will fill the equations of level  $m$ .
2. We create a “for” loop on  $m$  which will represent the level of equations we are creating. The integer  $m$  goes from 1 to 19 since we differentiate 19 times at most.
3. We create a second “for” loop in the interior of the first loop on a number  $n$  which represents one of the equations of level  $m$ . Thanks to the definition of the function  $F$

given in Subsection 1.3.2.ii, we have  $F(m - 1) + 1 \leq n \leq F(m)$ . If  $m = 1$ , then  $n$  goes from  $F(0) + 1 = 2$  to  $F(1) = 5$  ( $n$  represents  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  or  $\partial_t$ ). If  $m = 2$ , then  $n$  goes from  $F(1) + 1 = 6$  to  $F(2) = 15$  ( $n$  represents  $\partial_{11}^2, \partial_{12}^2, \partial_{13}^2, \partial_{1t}^2, \partial_{22}^2, \partial_{23}^2, \partial_{2t}^2, \partial_{33}^2, \partial_{3t}^2$  or  $\partial_{tt}^2$ ), etc. This loop is parallelized on our 8 cores. In this loop, we want to create the  $n$ -th equation denoted  $E_n$ , which is of level  $m$ . Hence we take a suitable equation of level  $m - 1$  denoted  $E_r$  which is so that if we differentiate  $E_r$  with respect to 1, 2, 3 or  $t$ , we obtain  $E_n$ . For example, if we consider  $m = 2$  and if we want to obtain the first equation of (1.3.35) differentiated two times with respect to 1, then we consider the equation  $E_r$  to be the first equation of (1.3.35) differentiated one time with respect to 1 and differentiated with respect to 1 to obtain  $E_n$ .

4. Once the loop on  $n$  is ended, we have in our matrix  $e$  all the equations of level  $m - 1$  and in  $h$  we have just created all the equations of level  $m$ . Now we just have to use our evaluation function  $ep$  on  $h$  to obtain the coefficients of the lines of  $A_1$  corresponding to the equations that are of level  $m$ , i.e. the equations numbered from  $F(m - 1) + 1$  to  $F(m)$ . We write these coefficients in our .txt file under the form  $i j A_1(i, j)$ .
5. We update now  $e$ , take  $e = h$ , we empty  $h$  and we can go to the following loop  $m + 1$ .

At the end we have created a file containing the coefficients of a sparse matrix  $A_1$  of size (8855, 14950). Using the same program with  $z^2$  and the two others equation we obtain five other files representing five matrices that we gather as in (1.4.9) to obtain the matrix  $L_0(\xi^0) = L_0^0$ . Our matrix  $L_0^0$ , which represents all the equations, is of size (30360, 29900) and has 651128 nonzero coefficients. Only 0.07% of the coefficients are different from 0, with an average of 21.44 nonzero coefficients on each row, which is logical since we are working with coefficients that are polynomials of small degree, so we do not create many terms on each line when we differentiate the equations. In the following figure, one can observe how the nonzero coefficients of  $L_0^0$  are distributed.

## 1.5 Annexe : explication détaillée de la partie informatique

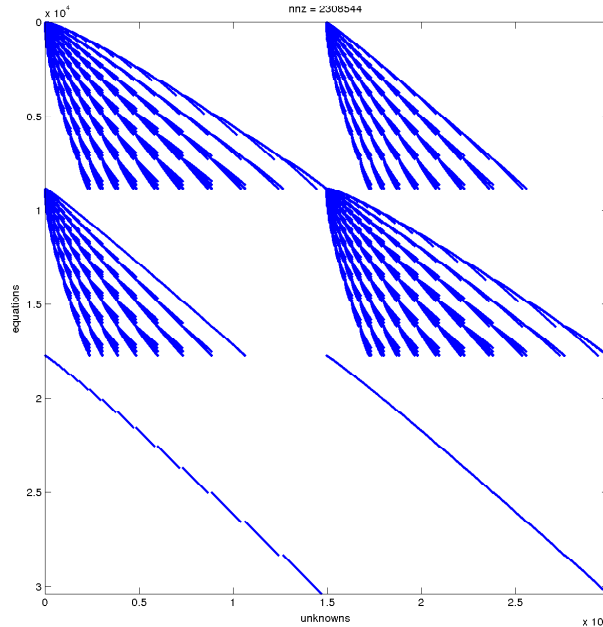
Dans cette partie, je vais décrire la manière dont j'ai calculé la matrice  $L_0^0$  puis la manière dont je l'ai exploitée pour en déduire une sous-matrice adéquate de rang maximal. Le code complet peut être trouvé à l'adresse suivante :

<http://www.ann.jussieu.fr/~lissy/NS3D/index.html> .

Même si il occupe une place mineure de l'article [CL12], ce travail a constitué une part très importante de la thèse, notamment à cause de nombreuses difficultés qui sont apparues dans la programmation. Dans tout ce qui suit, on reprendra les notations de l'article [CL12].

Au niveau du calcul de  $L_0^0$ , après des tentatives infructueuses en Maple et Mathematica (les calculs devenaient vite trop longs et il y avait vite trop de données à stocker), je me suis orienté vers un programme en C++, codé pour fonctionner sur 8 processeurs en parallèle, où j'ai utilisé la librairie uBLAS, bien adaptée aux manipulations de matrices creuses. J'ai choisi de procéder de la manière suivante : dans chacune des 3 équations du système (58), j'ai séparé les inconnues en  $z^1$  et  $z^2$ . Je me retrouve donc à faire 6 calculs (et donc 6 programmes) distincts, que je recolle le moment venu de manière adéquate. Intéressons-nous par exemple à la première équation du système (58) et à  $z^1$  et ses dérivées. Dans notre programme, on crée un certain nombre de fonctions auxiliaires qui sont les suivantes :

- on crée d'abord une fonction d'évaluation  $ep$  qui évalue un polynôme  $P$  (représenté par un vecteur) au point  $\xi^0$ . Cette fonction d'évaluation peut être créée afin qu'elle puisse

Figure 1.3: Distribution of the nonzero coefficients of  $L_0^0$ .

vérifier que  $\xi^0$  n'est pas une racine du polynôme  $P$ . (Il suffit pour cela de tester si l'évaluation est égale à 0 alors que le polynôme n'est pas identiquement nul, et de faire apparaître un message dans les logs du programme si c'est le cas).

- On crée ensuite une fonction de dérivation formelle d'un polynôme `deq`. Il faut faire juste à la dépendance en temps : d'après les simplifications qui ont été effectuées dans la dépendance en temps (le poids en temps est devenu  $t \mapsto e^t$ ), si l'on dérive par rapport au temps, il suffit de reporter le même polynôme.
- On crée ensuite un certain nombre de fonctions purement techniques dont le but va être de nous aider à compter les différentes dérivées de manière linéaire. Autrement dit, on crée par la manière habituelle une fonction bijective qui à un vecteur de  $\mathbb{N}^4$  (le  $i$ -ième coefficient correspondant au nombre de fois où on dérive par rapport à la  $i$ -ième variable) associe un entier (on réindexe donc les multi-indices de dérivées de manière linéaire). On appellera `convert` la bijection de  $\mathbb{N}^4$  dans  $\mathbb{N}$  et `convertinv` sa réciproque.
- On crée une fonction de dérivation `deqex` qui différencie une équation de niveau  $m$  par rapport à  $x_1, x_2, x_3$  ou  $t$ . Une équation aux dérivées partielles contenant seulement les inconnues  $z^1$  qui est une dérivée à l'ordre  $m$  de la première équation de (58) (où on a gardé seulement les dérivées de  $z^1$ ) sera représentée sous une forme matricielle de la façon suivante : nous savons qu'il y a au plus  $F(m+3)$  dérivées de  $z^1$  qui peuvent apparaître au maximum (puisque dans la première équation de (58), il y a des dérivées de  $z^1$  à l'ordre au plus 3), et nous constatons que les coefficients sont des polynômes en  $(x_1, x_2, x_3)$  (dépendant du temps) d'ordre global au plus 4 (ce qui forme un espace vectoriel de dimension 35). On représente donc une telle équation par une matrice à  $F(m+3)$  lignes et 35 colonnes, où sur chaque ligne apparaît le polynôme coefficient de la dérivée de  $z^1$  correspondant à cette ligne. Par contre, l'équation dérivée devra elle

être représentée par une matrice à  $F(m + 4)$  lignes et 35 colonnes. Une des difficultés est donc d'être très attentif à l'indexation qu'on utilise pour ces lignes. Pour dériver une telle équation, c'est très simple : on commence par dériver les coefficients à l'aide de la fonction `deq`, puis l'on remplit les mêmes numéros de lignes puisque l'on ne dérive pas les inconnues (i.e. les dérivées). Ensuite, on garde les coefficients intacts et on remplit les lignes qui correspondent aux inconnues que l'on a dérivées une fois (on change donc numéro de ligne mais pas de coefficients ce coup-ci). On fait aussi bien attention à ne pas effacer l'équation d'entrée, on stocke donc le résultat à un autre endroit.

- On passe à la fonction principale.
  1. Nous créons une matrice  $e$  qui représente d'abord la partie en  $z^1$  de la première équation de (58). Nous utilisons `ep` pour remplir la ligne de  $L_0^0$  correspondant à l'équation dans un fichier `.txt` nommé `A1`, sous la forme  $i\ j\ A1(i, j)$  sur chaque ligne. Nous créons une matrice  $h$  qui est vide pour le moment. En fait, dans  $e$ , nous allons stocker les équations correspondant à un niveau donné que nous allons dériver, et dans  $h$ , nous allons mettre toutes les équations du niveau suivant provenant de celles de  $e$  que nous aurons dérivées par rapport à chacune des variables.
  2. Nous créons une boucle "for" sur un certain entier  $m$  qui représente le niveau des équations que nous créons. L'entier  $m$  va de 1 à 19 puisque nous dérivons 19 fois au plus pour assurer d'avoir plus d'équations que d'inconnues.
  3. Nous créons une deuxième boucle "for" à l'intérieur de la première boucle sur un certain nombre  $n$ , ce qui représente l'une des équations de niveau  $m$  ( $n$  est la réindexation linéaire du multi-indice correspondant au nombre de fois où on a dérivé par rapport à chaque variable l'équation de départ). En utilisant la fonction  $F$ , pour obtenir toutes les équations dérivées de niveau  $m$  nous devons prendre tous les  $n$  entre  $F(m - 1) + 1$  et  $F(m)$ . Si  $m = 1$ , alors  $n$  varie de 2 à 5 ( $n$  représente  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  ou  $\partial_t$ ). Si  $m = 2$ , alors  $n$  varie de 6 à 15, etc. Cette boucle est parallélisée sur les 8 processeurs. Pour éviter les problèmes d'écriture multiple sur une même matrice, on crée donc 8 copies de nos matrices  $e$  et  $h$  (notées  $e(1), e(2), \dots$  etc.), chaque copie étant assignée à un processeur et un seul. Pour savoir si une équation se trouve sur le processeur, j'ai choisi de créer une case supplémentaire dans ce qui représente les coefficients (les matrices  $e(i)$  et  $h(i)$  auront donc 36 colonnes et non plus 35), la convention choisie étant la suivante : il y a un 1 dans la case correspondant à la toute première ligne de l'équation d'entrée si et seulement si cette équation est bien stockée dans le  $e(i)$  dans lequel on se trouve. Si l'on travaille actuellement sur le processeur numéro  $j$ , il faut donc aller chercher dans quel  $e(i)$  se trouve l'équation qu'on veut dériver, écrire le résultat de la dérivation dans  $h(j)$  et penser à mettre à 1 le dernier coefficient de la première ligne pour signifier que l'équation est bien stockée dans cette matrice.
 

Dans cette boucle, nous voulons créer la  $n$ -ième équation notée  $E_n$ , qui est de niveau  $m$ . Par conséquent, nous prenons une équation appropriée de niveau  $m - 1$  notée  $E_r$ , qui est choisie de telle sorte que  $E_n$  soit la dérivée de l'équation  $E_r$  par rapport à  $x_1, x_2, x_3$  ou  $t$ . Par exemple, si l'on considère  $m = 2$  et si l'on souhaite obtenir la première équation de (58) dérivée deux fois par rapport à  $x_1$ , nous allons chercher comme équation  $E_r$  l'équation de niveau 1 qui correspond à l'équation de départ de (58) dérivée une fois par rapport à  $x_1$  puis nous la dérivons de nouveau par rapport à  $x_1$ .
  4. Une fois que l'on a fini notre boucle sur  $n$ , nous avons dans nos copies de matrices  $e(i)$  toutes les équations de niveau  $m - 1$  et dans nos  $h(i)$  toutes les équations

de niveau  $m$ . Maintenant nous devons juste utiliser notre fonction d'évaluation  $ep$  sur les  $h(i)$  pour obtenir les coefficients des lignes de  $L_0^0$ . Nous écrivons ces coefficients dans notre fichier .txt, et encore une fois pour éviter les problèmes d'écriture multiple, on crée un fichier texte par processeur.

5. Pour finir, on met à jour les  $e(i)$  en remplaçant chaque  $e(i)$  par  $h(i)$ , on vide les  $h(i)$  et on passe au niveau suivant dans la boucle sur  $m$ .

Nous passons à la description de la partie “Matlab” du programme permettant de valider la méthode de l'article. Dans cette partie, on suppose que l'on a à notre disposition les résultats donnés par nos 6 codes en  $C^{++}$ . Nous souhaitons maintenant reconstruire la matrice  $L_0^0$  et l'exploiter comme expliqué précédemment pour en extraire une sous-matrice inversible ayant un certain nombre de propriétés. Nous avons à notre disposition pour le moment exactement 48 matrices :

1. Les  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) correspondent aux coefficients de la variable  $z^1$  et de ses dérivées dans la première équation de (58).
2. Les  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) correspondent aux coefficients de la variable  $z^2$  et de ses dérivées dans la première équation de (58).
3. Les  $U_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) correspondent aux coefficients de la variable  $z^1$  et de ses dérivées dans la deuxième équation de (58).
4. Les  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) correspondent aux coefficients de la variable  $z^2$  et de ses dérivées dans la deuxième équation de (58).
5. Les  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) correspondent aux coefficients de la variable  $z^1$  et de ses dérivées dans la troisième équation de (58).
6. Les  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) correspondent aux coefficients de la variable  $z^2$  et de ses dérivées dans la troisième équation de (58).

La première étape consiste à traduire les fichiers textes dont chaque ligne est sous la forme  $i j A(i, j)$  en une matrice creuse en Matlab. Une fois ceci fait, on ajoute d'abord les  $A_i$  pour former une matrice  $A$ , on ajoute de même les  $B_i$  pour former une matrice  $B$ , etc.

La matrice  $L_0^0$  peut alors être définie par blocs de la manière suivante :

$$L_0^0 = \begin{pmatrix} A & B \\ U & V \\ C & D \end{pmatrix}.$$

A partir de là, on peut exploiter  $L_0^0$ . Calculer le rang d'une matrice de cette taille-là est très long, voire impossible sur un ordinateur de bureau, pour des raisons de mémoire, la première idée que nous avons eu a été d'introduire la notion de *rang structurel*.

**Définition 8.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont structurellement équivalentes si la propriété suivante est vérifiée :

$$A_{ij} = 0 \Leftrightarrow B_{ij} = 0.$$

C'est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . On appellera  $Cl(A)$  la classe d'équivalence d'une matrice  $A$ . Le rang structurel de  $A$  (noté dorénavant  $\mathbf{sprank}(A)$ ) est le rang maximal des éléments de  $Cl(A)$ . De manière équivalente, si l'on remplit de manière aléatoire les coefficients de  $A$  qui sont non nuls, le rang de  $A$  vaut le rang structurel de  $A$  avec probabilité 1.

L'avantage du rang structurel par rapport au rang est que c'est une notion qui ne dépend que de la structure de la matrice (de ses coefficients nuls ou non nuls) et pas de la valeur des coefficients. C'est donc une quantité beaucoup plus rapide à calculer que le rang. De plus, c'est un majorant du rang. En calculant le rang structurel de la matrice  $L_0^0$ , on se rend compte qu'il n'est pas maximal, ce qui implique que le rang de  $L_0^0$  n'est pas maximal. Cela peut sembler problématique à première vue ; pourtant, si on réfléchit bien, cela n'est pas si grave car la seule chose que l'on souhaite finalement, c'est de conserver assez d'équations contenant les inconnues  $z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_1^2, z_2^2, z_3^2$ . Le but du jeu va donc être de sélectionner les bonnes équations qui donnent un système de rang maximal et d'"isoler" les inconnues et équations qui posent problème (autrement dit qui empêchent la matrice d'être de rang maximal). De fait, il existe un algorithme assez puissant qui permet non seulement de calculer le rang structurel, mais aussi d'effectuer des permutations sur les lignes et les colonnes pour isoler la partie "bien structurée" de la matrice des parties sur-déterminées et sous-déterminées : la décomposition de Dulmage-Mendelsohn.

**Proposition 10.** *Soit  $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . Alors on peut permuer les lignes et les colonnes de  $A$  de telle sorte de la mettre sous forme triangulaire par blocs*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

avec :

1.  $(A_{11}, A_{12})$  qui est la partie structurellement sous-déterminée de la matrice, comportant nécessairement plus de colonnes que de lignes.
2.  $(A_{33}, A_{34})$  qui est la partie structurellement sur-déterminée de la matrice, comportant nécessairement plus de lignes que de colonnes.
3.  $A_{12}, A_{23}, A_{34}$  qui sont des matrices carrées dont les coefficients diagonaux sont non nuls (ce qui implique qu'elles sont de rang structurel maximum).
4.  $A_{23}$  qui est la partie structurellement bien déterminée de la matrice (notamment, si la matrice était au départ carré et de rang structurel maximal, ce bloc sera la matrice tout entière).

De plus, on peut aussi rendre aussi  $A_{23}$  triangulaire par blocs.

On applique donc cet algorithme à notre matrice  $L_0^0$  et on regarde dans quel bloc ont été déplacées nos inconnues  $z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_1^2, z_2^2, z_3^2$ . On remarque qu'elles sont toutes déplacées dans un même bloc de la nouvelle matrice, on sélectionne donc toutes les lignes correspondant au bloc de la décomposition de Dulmage-Mendelsohn. Attention, on est obligé de conserver des lignes entières, car il faut garder à l'esprit qu'une ligne correspond à une équation. On peut donc juste supprimer les colonnes identiquement nulles si il y en a. On obtient une matrice carré de taille  $9050 \times 9050$ . On remarque que la matrice obtenue est de rang structurel maximal, néanmoins, pour réduire au plus les calculs, on applique de nouveau l'algorithme de Dulmage-Mendelsohn à la nouvelle matrice obtenue et on retourne chercher le bloc contenant nos inconnues. On obtient une matrice de taille  $7321 \times 7321$  de rang structurel maximal, dont on vérifie qu'elle est aussi de rang maximal à l'aide de Matlab, ce qui conclut la partie informatique de la preuve.





## Deuxième partie

# Coût du contrôle en temps petit ou en viscosité évanescence



## Chapitre 2

# Un lien entre le coût des contrôles rapides pour l'équation de la chaleur 1-D et l'uniforme contrôlabilité d'une équation de transport-diffusion 1-D

### Abstract

In this note, we explain how results on the cost of the null-controllability of the one-dimensional heat equation in small time can be used to bound from above the cost of the null-controllability of a one-dimensional transport-diffusion equation in the vanishing viscosity limit. We improve previous results about the minimal time needed to obtain the exponential decrease of the cost of the control and explain what would provide the usual conjecture concerning the cost of fast controls for the heat equation.

### Résumé

**Un lien entre le coût des contrôles rapides pour l'équation de la chaleur 1-D et l'uniforme contrôlabilité d'une équation de transport-diffusion 1-D**

Dans cette note, on explique comment des résultats sur le coût de la contrôlabilité à 0 de l'équation de la chaleur en temps petit peuvent être utilisés pour majorer le coût de la contrôlabilité à 0 d'une équation unidimensionnelle de transport-diffusion dans la limite de viscosité évanescence. On améliore des résultats précédemment connus concernant le temps minimal nécessaire pour obtenir la décroissance exponentielle du coût du contrôle et on explique ce que donnerait en plus la conjecture habituelle concernant le coût du contrôle en temps petit de l'équation de la chaleur.

**Keywords :** Transport-diffusion equation ; Null controllability ; Vanishing viscosity limit.

## Version française abrégée

Dans cette note, nous nous intéresserons principalement à l'équation de transport-diffusion contrôlée sur le bord gauche (2.1.1), où  $T > 0$ ,  $M \neq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $L > 0$ , la condition initiale  $y^0$  étant dans  $L^2(0, L)$  et le contrôle  $v$  dans  $L^2(0, T)$ . Cette équation est unidimensionnelle et parabolique, sa contrôlabilité à zéro est donc connue depuis longtemps (cf. [FR71], ou plus récemment [FI96a] et [LR95] pour des résultats en dimension supérieure). Quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  nous obtenons une équation de transport à vitesse constante  $M$ , qui est contrôlable à 0 si et seulement si  $T \geq L/|M|$ , le contrôle optimal en norme  $L^2$  étant alors la fonction nulle. Il serait donc naturel de penser que pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , le coût  $L^2$  du contrôle (défini à la deuxième ligne de (2.2.1)) explose si  $T < L/|M|$  et tend vers 0 quand  $T \geq L/|M|$ . Pourtant, dans [CG05] il est démontré que si  $M > 0$  le coût du contrôle explose bien dès que  $T < L/M$ , mais si  $M < 0$  alors le contrôle explose dès que  $T < 2L/|M|$ , ce qui est plus surprenant. Dans le même article, les auteurs ont prouvé que le coût du contrôle tendait exponentiellement vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  pour  $T > 4.3L/M$  si  $M > 0$  et  $T > 57.2L/|M|$  si  $M < 0$ . Les principales techniques utilisées dans ce papier sont d'une part des résultats sur les zéros des fonctions entières, d'autre part une inégalité de type Carleman sur le système adjoint ainsi qu'une inégalité de dissipation d'énergie spécifique à cette équation. Les constantes 4.3 et 57.2 ont été améliorées dans [Gla10] en respectivement 4.2 et 6.1 en utilisant une méthode semblable à la méthode des moments (avec un multiplicateur complexe bien choisi). On conjecture de manière naturelle que les constantes optimales sont respectivement 1 et 2.

D'un autre côté, on s'intéresse à l'équation de la chaleur contrôlée au bord (2.1.2), avec les mêmes notations. Appelons  $\tilde{\gamma}$  la plus petite constante telle que le coût  $L^2$  du contrôle de (2.1.2) (défini à la première ligne de (2.2.1)) sur  $(0, T)$  soit majoré par  $C(L)e^{\frac{\tilde{\gamma}^+}{2T}}$  pour  $T$  assez petit et pour une certaine constante  $C(L)$  ne dépendant pas de  $T$ , la notation  $\tilde{\gamma}^+$  signifiant que l'on peut prendre n'importe quelle constante  $\gamma > \tilde{\gamma}$ , aussi proche de  $\tilde{\gamma}$  que l'on veut (la constante  $C(L)$  explosant au fur et à mesure que l'on s'approche de  $\tilde{\gamma}$ ). On sait que nécessairement  $\tilde{\gamma} \geq L^2/2$  (cf. [Mil04a]) et la meilleure majoration obtenue sur  $\tilde{\gamma}$  à ce jour est  $\tilde{\gamma} \leq 3L^2/2$  (cf. [TT07]). Il est en fait conjecturé (cf. par exemple [EZ11b]) que nous avons exactement  $\tilde{\gamma} = L^2/2$ . Le but de ce papier est de montrer que l'on peut relier le coût quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  de la contrôlabilité de (2.1.1) en temps grand avec le coût de la contrôlabilité de (2.1.2) cette fois-ci en temps petit. Le résultat principal est le suivant.

**Théorème .** *On suppose*

$$T > \frac{(2\sqrt{3} + 1 - \text{sign}(M))L}{|M|}.$$

*Il existe alors une certaine constante  $K > 0$  (dépendant uniquement de  $|M|$  et  $L$ ) et une certaine constante  $C > 0$  (dépendant des mêmes variables) telles que, pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, et tout  $y^0 \in L^2(0, L)$ , il existe une solution  $(y_\varepsilon, v_\varepsilon)$  du problème de contrôle (2.1.1) vérifiant  $y_\varepsilon(T, \cdot) = 0$  et*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T)} \leq Ce^{-\frac{K}{\varepsilon}} \|y^0\|_{L^2(0, L)}.$$

*De plus, si l'on suppose que  $\tilde{\gamma} = L^2/2$ , alors on a le même résultat dès que*

$$T > \frac{(3 - \text{sign}(M))L}{|M|}.$$

Le principal argument est de remarquer que l'on peut passer d'une solution de (2.1.1) à une solution de (2.1.2) (sur un intervalle de temps  $\varepsilon T$  qui tend maintenant vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) grâce au changement d'inconnues suivant :

$$u(t, x) = e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon^2} - \frac{Mx}{2\varepsilon}} y\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right).$$

Des calculs élémentaires permettent alors de majorer le coût du contrôle de (2.1.1) en fonction de celui de (2.1.2). On conclut ensuite en utilisant le résultat précédemment cité de [TT07] et en regardant l'influence de la conjecture  $\tilde{\gamma} = L^2/2$  sur les calculs.

## 2.1 Introduction

We consider some time  $T > 0$ , some speed  $M \neq 0$ , some diffusion coefficient  $\varepsilon > 0$  and some length  $L > 0$ . We are interested in the following controlled transport-diffusion equation on  $[0, T] \times [0, L]$ , with initial condition  $y^0 \in L^2(0, L)$  and with control  $v \in L^2(0, T)$  at the left side of the boundary :

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(\cdot, 0) = v(t) & \text{in } (0, T), \\ y(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

This equation is a one-dimensional parabolic equation, whose null-controllability in small time has been known since a long time (see [FR71], or more recently [FI96a] and [LR95] for results in any space dimension). If  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  we obtain a transport equation at constant speed  $M$ , which is null controllable if and only if  $T \geq L/|M|$ , the optimal control in  $L^2$ -norm being the null function. It is then natural to expect that the cost of the control blows up as soon as  $T \leq L/|M|$  and tends to 0 when  $T > L/|M|$ . However, it was shown in [CG05] that if  $M > 0$  then the control blows up as soon as  $T < L/M$ , but if  $M < 0$  then the control blows up as soon as  $T < 2L/|M|$ , which is more surprising. In the same paper, the authors proved the exponential decay of the cost of the control (which is defined at the first line of (2.2.1)) when  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  as soon as  $T > 4.3L/M$  if  $M > 0$  and  $T > 57.2L/|M|$  if  $M < 0$ . The main tools are on the one hand results on the roots of entire functions and on the other hand a Carleman estimate for solutions of the adjoint equation and a suitable dissipation estimate. The authors also raised the following natural conjecture :

**Conjecture 2.1.1.** *The cost of the control of (2.1.1) tends to 0 as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  as soon as*

$$T > \frac{(3 - \text{sign}(M))L}{2|M|}.$$

This result was extended in several dimensions in [GL07] (with a speed  $M$  depending on the space and the time variables) for large enough times. The most recent result available comes from [Gla10]. The author improved the constant 4.3 and 57.2 of [CG05] to respectively 4.2 and 6.1 by using an approach which is similar to the momentum method : an inequality observability is proved by constructing a bi-orthogonal family (thanks to the Paley-Wiener theorem) to the family of exponentials appearing in the expression of the solution of (2.1.1) when it is decomposed on some appropriate orthogonal basis. The key point is the construction of a suitable complex multiplier.

On the other hand, let us recall some results concerning the following heat equation controlled on the left side

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ u(\cdot, 0) = w(t) & \text{in } (0, T), \\ u(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

with initial condition  $u(0, \cdot) = u^0 \in L^2(0, L)$ .

Let us call  $\tilde{\gamma}$  the best (that is to say the smallest) constant such that the  $L^2$  cost of the control of (2.1.2) on  $(0, T)$  (which is defined at the first line of (2.2.1)) is under the form  $C(L)e^{\frac{\tilde{\gamma}^+}{2T}}$  for some  $C(L)$  depending only on  $L$  and for  $T > 0$  small enough, the notation  $\tilde{\gamma}^+$  meaning that we can choose any constant  $\gamma > \tilde{\gamma}$  as close as  $\tilde{\gamma}$  as we want (the constant  $C(L)$  explodes when  $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma}$ ). It is known that we have (see [Mil04a])  $\tilde{\gamma} \geq L^2/2$  and the best upper bound on  $\tilde{\gamma}$  obtained for the time being is (see [TT07])  $\tilde{\gamma} \leq 3L^2/2$ . However, it is conjectured (see for example [EZ11b]) that

**Conjecture 2.1.2.**  $\tilde{\gamma} = L^2/2$ .

We are now going to present the main result of this note.

**Theorem 2.1.1.** *Assume that*

$$T > \frac{(2\sqrt{3} + 1 - \text{sign}(M))L}{|M|}.$$

*Then there exists some constant  $K > 0$  depending only on  $|M|$  and  $L$ , there exists some constant  $C > 0$  (depending on the same variables) such that, for all  $\varepsilon > 0$  and all  $y^0 \in L^2(0, L)$ , there exists a solution  $(y_\varepsilon, v_\varepsilon)$  of the control problem (2.1.1) verifying  $y_\varepsilon(T, \cdot) = 0$  and*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T)} \leq C e^{-\frac{K}{\varepsilon}} \|y^0\|_{L^2(0, L)}.$$

*Moreover, if we assume that the conjecture  $\tilde{\gamma} = L^2/2$  is verified, then one can state the same result as soon as*

$$T > \frac{(3 - \text{sign}(M))L}{|M|}.$$

## 2.2 Proof of Theorem 2.1.1

From now on, let us call  $C_D(T, L)$  the cost of the control of (2.1.2), and  $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon)$  the cost of the control of (2.1.1), that is to say

$$\begin{cases} C_D(T, L) = \sup_{u^0 \in L^2(0, L)} \inf_{(u, w) \text{ verifies (2.1.2) and } u(T, \cdot) = 0} \frac{\|w\|_{L^2(0, T)}}{\|u^0\|_{L^2(0, T)}}, \\ C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) = \sup_{y^0 \in L^2(0, L)} \inf_{(y, v) \text{ verifies (2.1.1) and } y(T, \cdot) = 0} \frac{\|v\|_{L^2(0, T)}}{\|y^0\|_{L^2(0, T)}}. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

We give a lemma that enable us to link these quantities.

**Lemma 2.2.1.** *For all  $T_0 < T$ , one has*

$$\begin{cases} C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq \frac{e^{-\frac{M^2 T_0}{4\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} C_D(\varepsilon(T - T_0), L) \text{ if } M > 0, \\ C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq \frac{e^{-\frac{M^2 T_0}{4\varepsilon} + \frac{|M|L}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} C_D(\varepsilon(T - T_0), L) \text{ if } M < 0. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

### Proof of Lemma 2.2.1

We consider the following function :

$$u(t, x) := e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon^2} - \frac{Mx}{2\varepsilon}} y\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right),$$

where  $y$  verifies (2.1.1). The function  $u$  is defined on  $[0, \varepsilon T] \times [0, L]$ . Moreover

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon^2} - \frac{Mx}{2\varepsilon}} \left( \frac{M^2}{4\varepsilon^2} y + \frac{y_t}{\varepsilon} - \frac{M^2}{4\varepsilon^2} y - y_{xx} + \frac{M}{\varepsilon} y_x \right) = 0,$$

where  $y$  is considered in the previous inequality at point  $(\frac{t}{\varepsilon}, x)$ . Finally  $u$  verifies (2.1.2) (the final time  $T$  being replaced by  $\varepsilon T$ ) with initial condition  $u^0(x) := e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}} y^0(x)$  and control  $w(t) := e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon^2}} v(t/\varepsilon)$ .

Let us from now on call  $S := \varepsilon T$  and  $S_0 := \varepsilon T_0$ . We can control (2.1.2) with  $w$  acting only on  $(S_0, S)$  (i.e. we impose the control to vanish on  $(0, S_0)$ ) at optimal cost  $C_D(S - S_0, L)$ . Calling  $v(t) := e^{-\frac{M^2 t}{4\varepsilon}} w(\varepsilon t)$ , we obtain

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L^2(S_0, S)} &= \sqrt{\varepsilon} \|e^{\frac{M^2 t}{4\varepsilon}} v(t)\|_{L^2(T_0, T)} \\ &\leq C_D(S - S_0, L) \|u(S_0, x)\|_{L^2(0, L)} \\ &\leq C_D(S - S_0, L) \|u^0\|_{L^2(0, L)}. \end{aligned}$$

(the last inequality holds because  $u$  verifies the heat equation with null Dirichlet boundary conditions on  $(0, S_0)$  since we do not act on  $(0, S_0)$ ). This notably implies

$$\|v(t)\|_{L^2(T_0, T)} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{M^2 T_0}{4\varepsilon}} C_D(S - S_0, L) \|u^0\|_{L^2(0, L)}. \quad (2.2.3)$$

Using now  $e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}} \leq 1$  for  $M > 0$  and  $e^{-\frac{Mx}{2\varepsilon}} \leq e^{\frac{|M|L}{2\varepsilon}}$  for  $M < 0$ , one easily deduces (2.2.2) from (2.2.3).  $\blacksquare$

We can now prove Theorem 2.1.1. Let us introduce a (numerical) constant  $a$  such that  $T = aL/|M|$  which will be chosen large enough to obtain the uniform controllability, and  $s \leq 1$  such that  $S_0 = \varepsilon saL/|M|$ . We have  $S = \varepsilon aL/|M|$ . We then call  $T_0 := S_0/\varepsilon = saL/|M|$ .

#### 2.2.1 Case $M > 0$

Thanks to Lemma 2.2.1, one has

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq \frac{e^{-\frac{aMLs}{4\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} C_D(S - S_0, L).$$

Let us assume that  $C_D(S) \leq C(L)e^{\frac{b^+L^2}{S}}$  for some  $b > 0$  and  $S$  small enough (the constant  $C(L)$  does not depend on  $\varepsilon$  because  $\varepsilon$  appears now only in the time variable). We have then for  $\varepsilon$  small enough

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq \frac{C(L)}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{asML}{4\varepsilon} + \frac{bLM}{\varepsilon(1-s)a}}.$$

If we want to obtain a decrease rate in  $\varepsilon$  under the form  $e^{-\frac{K}{\varepsilon}}$ , for some  $K > 0$ , it is sufficient to have  $-sMLa/4\varepsilon + bLM/\varepsilon(1-s)a < 0$ , i.e.  $b/(1-s)a < as/4$ , i.e.  $4b < a^2s(1-s)$ . One chooses  $s = 1/2$  so that  $s(1-s) = 1/4$  is maximum. We obtain  $a > 4\sqrt{b}$ . As explained in the introduction, the best upper bound on  $\tilde{\gamma}$  (see [TT07]) is  $\tilde{\gamma} \leq 3L^2/2$ , which corresponds to  $b \leq 3/4$ . Hence we may take any  $a > 2\sqrt{3}$ .

The hypothesis  $\tilde{\gamma} = L^2/2$  corresponds to  $b = 1/4$ , which implies  $a > 2$ . Theorem 1.1 is proved in the case  $M > 0$ .



### 2.2.2 Case $M < 0$

Thanks to Lemma 2.2.1, one has

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq e^{-\frac{a|M|Ls}{4\varepsilon} + \frac{|M|L}{2\varepsilon}} C_D(S - S_0, L).$$

Finally, using the same notations as in the previous subsection

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \leq e^{-\frac{as|M|L}{4\varepsilon} + \frac{bL|M|}{\varepsilon(1-s)a} + \frac{|M|L}{2\varepsilon}}.$$

One has  $-as|M|L/4\varepsilon + bL|M|/\varepsilon(1-s)a + |M|L/2\varepsilon < 0$  as soon as  $b/(1-s)a < sa - 1/2$ , i.e.  $b/a^2 < s(1-s)/4 - (1-s)/2a$ . Optimizing  $s$  in order to maximize the right-hand side gives us  $s = 1/2 + 1/a$ . Since  $s \geq 1$  we should have  $a \geq 2$  (which will be verified at the end of the proof). We obtain that it is sufficient to have  $b/a^2 < (2-a)^2/16a^2$ , i.e.  $a > 4\sqrt{b} + 2$ . We know that  $b \leq 3/4$ , hence we may take any  $a > 2\sqrt{3} + 2 (> 2)$ .

The hypothesis  $b = 1/4$  would imply  $a > 4 (> 2)$ , and the proof of Theorem 1.1 is completed. ■

## 2.3 Additional comments

1. One sees here that any new upper bound of  $\tilde{\gamma}$  would automatically provide an improvement in our problem concerning (2.1.1) : our proof provides that if  $\tilde{\gamma} \leq 2b/L^2$  (the  $b$  being the same as in the previous section) then one would obtain the exponential decay of the cost of the control of (2.1.1) for  $T > (4\sqrt{b} + 1 - \text{sign}(M))L/|M|$ .
2. The strategy we propose (which consists in doing nothing on some interval of time  $(0, T_0)$ ) does not seem to be optimal. This may explain that our strategy cannot enable us to deduce Conjecture 2.1.1 from Conjecture 2.1.2. Moreover, some numerical evidences (see [Sal09]) seem to indicate that if  $M > 0$  then the optimal constant is between 1 and 1.6 and cannot be as big as 2. The conclusion that may be drawn is that our work does not question Conjecture 2.1.1, and that trying to compare (2.1.1) and (2.1.2) can only improve existing results but we “lose” too much informations in our transformation to hope to obtain an optimal result.
3. We used a transformation which changed a solution  $y$  of (2.1.1) into a solution  $z$  of (2.1.2) and that put all the dependence to  $\varepsilon$  in the time variable. One can easily verify that the changing of unknowns we propose is the only one that can achieve simultaneously these two goals. One could find other changes of unknowns where the length of the interval depends on  $\varepsilon$ , but they cannot be used because we do not know precisely enough how the constants in the inequality observability for the heat equation depends on the geometry of the problem. Notably, one cannot use [TT07], which considers only the dependence of the constants in the time variable when it tends to 0.

## Chapitre 3

# Application d'une conjecture de Ervedoza et Zuazua à la conjecture de Coron et Guerrero

### Abstract

The aim of this short paper is to explore a new connection between a conjecture concerning sharp boundary observability estimates for the 1-D heat equation in small time and a conjecture concerning the cost of null-controllability for a 1-D convection-diffusion equation with constant coefficients controlled on the boundary in the vanishing viscosity limit, in the spirit of what is done in [Pierre Lissy, A link between the cost of fast controls for the 1-D heat equation and the uniform controllability of a 1-D transport-diffusion equation, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Volume 352, 2012]. We notably establish that the first conjecture implies the second one as soon as the speed of the transport part is non-negative in the transport-diffusion equation.

**Keywords:** Transport-diffusion equation; Null controllability; Vanishing viscosity limit.

### 3.1 Introduction

Let us consider some  $T > 0$ ,  $L > 0$ , and the following one-dimensional heat equation with boundary control at the left side of the boundary:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(\cdot, 0) = u(t) & \text{in } (0, T), \\ y(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

with initial condition  $y(0, \cdot) = y^0 \in H^{-1}(0, L)$  and control  $u \in L^2(0, T)$ . It is well-known that this control operator is admissible for initial data in  $H^{-1}(0, L)$  and that equation (3.1.1) is null-controllable in arbitrary small time, thanks (notably) to the infinite speed of propagation

of the information (see [FR71] for the one-dimensional case, or more recently [FI96a], [LR95] and [Léa10] for results in any space dimension with in addition terms of order 0 and 1 in the equation). A more challenging (and still widely open, especially in the multi-dimensional case) question is what is usually called *the cost of fast controls*, i.e. what is the energy required to steer the system to 0 at time  $T$  when  $T \rightarrow 0$ . More precisely, let us call

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_D(y^0, T) := & \{(y, u) \in C^0([0, T], H^{-1}(0, L)) \times L^2(0, T) \\ & |(y, u) \text{ verifies (3.1.1), } y(0, \cdot) = y^0 \text{ and } y(T, \cdot) = 0\} \end{aligned}$$

and

$$C_D(T, L) = \sup_{y^0 \in H^{-1}(0, L)} \inf_{(y, u) \in \mathcal{T}_D(y^0, T)} \frac{\|u\|_{L^2(0, T)}}{\|y^0\|_{H^{-1}(0, L)}}.$$

One can prove (see for example [Cor07, Section 2.3]) that  $C_D(T, L)$  is always finite. Moreover, for every  $y^0 \in H^{-1}(0, L)$ , the infimum is always reached at a unique  $u_{opt}$ , which corresponds to the  $L^2(0, T)$ -projection of the vector 0 on the subspace of all the controls  $u$  that steer  $y^0$  to 0 at time  $T$  (i.e.  $u_{opt}$  is the control having the smallest norm, which justifies the expression “cost of the control” for the quantity  $C_D(T, L)$ ).  $C_D(T, L)$  can be seen as the smallest constant  $C > 0$  such that for every  $y^0 \in H^{-1}(0, L)$ , there exists some control  $u$  such that the corresponding solution  $y$  of (3.1.1) with initial condition  $y^0$  verifies  $y(T) = 0$  and

$$\|u\|_{L^2(0, T)} \leq C \|y^0\|_{H^{-1}(0, L)}. \quad (3.1.2)$$

Let us call

$$\beta^* := \limsup_{T \rightarrow 0} T \ln(C_D(T, L))$$

and

$$\beta_* := \liminf_{T \rightarrow 0} T \ln(C_D(T, L)).$$

It is proved in [Güi85] that  $\beta_* > 0$  and in [Sei84] that  $\beta^* < +\infty$ . This means that  $C_D(T, L)$  behaves roughly like  $e^{\frac{K}{T}}$  for small enough  $T$ , where  $K$  is independent of  $T$ . These results have been made more precise later: One has  $\beta_* \geq L^2/4$  (see [Mil04b]), which can be notably proved by constructing a singular solution of the heat equation and using a formula of Varadhan concerning the heat kernel in small time (cf. [Var67]). The question of upper bounds for  $\beta^*$  has also been studied by numerous authors (see notably [Sei84], [Sei86], [Mil04a] or [Sei08]) and the best upper bound known is  $\beta^* \leq 3L^2/4$  as obtained in [TT07]. Let us mention here that thanks to the *transmutation* of solutions of wave-type equations into solutions of heat-type equations studied systematically in [Mil06a], a result for the cost of fast controls in one space dimension for boundary or distributed controls gives a corresponding result in the multi-dimensional case in a (smooth enough) bounded domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) with control domain  $\omega$  which can be either a subset of  $\partial\Omega$  or distributed into  $\Omega$  verifying the geometric control condition GCC of [BLR92], which justifies the specific study of the one-dimensional case. However, it is not natural to impose GCC for the control domain  $\omega$  in the case of parabolic systems. Moreover, in this case one can bound  $\beta^*$  from above by a multiple of the length of the longest geodesic of  $\bar{\Omega}$  not intersecting  $\omega$ , which is not natural for heat-type equations (one expects  $\beta^*$  to be some multiple of  $\sup_{y \in \Omega} d(y, \omega)$  according for example to [Mil04a, Theorem 2.1]). Using the transmutation method for control domains not verifying GCC is possible (see [EZ11a]), unfortunately it does not seem to provide precise estimates on  $C_D(T, L)$ .

In fact, it is conjectured (notably in [Mil04a] and [EZ11b]) that in the one-dimensional case one has exactly

**Conjecture 3.1.1.**  $\beta^* = L^2/4 = \beta_*$ , i.e. for every  $L > 0$ , for every  $K > L^2/4$ , there exists some  $C(K) > 0$  such that for every  $T$  small enough,

$$C_D(T, L) \leq C(K)e^{\frac{K}{T}}.$$

For corresponding conjectures in the multi-dimensional case, see [Mil04a] or [EZ11b, Section 5].

It is well-known, using the duality between observability and controllability (see for example [DR77]), that the null-controllability of equation (3.1.1) with cost  $C_D(T, L)$  is exactly equivalent to proving the following inequality, called *observability inequality*:

$$\int_0^L |\varphi(T, x)|^2 dx \leq C_D(T, L)^2 \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt, \quad (3.1.3)$$

for every  $\varphi$  satisfying

$$\begin{cases} \varphi_t - \varphi_{xx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ \varphi(\cdot, 0) = 0 & \text{in } (0, T), \\ \varphi(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \\ \varphi(0, \cdot) = \varphi^0 & \text{in } (0, L), \end{cases} \quad (3.1.4)$$

with  $\varphi^0 \in H_0^1(0, L)$ . Inequality (3.1.3) is in general set for the adjoint problem of (3.1.1) but one can consider instead the forward problem (3.1.4) by changing  $t$  into  $T - t$ . A classical tool to obtain (3.1.3) is to use *parabolic Carleman estimates* as in [FI96a] (another possible strategy is to use elliptic Carleman estimates and the FBI transform as in [LR95]). Such inequalities provide integral estimates in finite or infinite time with singular weight at time  $t = 0$  (because of the irreversibility of the heat semigroup) on a solution  $\varphi$  of (3.1.4) under the form

$$\int_0^T \int_0^L e^{-\frac{C(L)}{t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \leq C_1(T, L) \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt \quad (3.1.5)$$

or

$$\int_0^\infty \int_0^L e^{-\frac{C_\infty(L)}{t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \leq C_2(L) \int_0^\infty |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt, \quad (3.1.6)$$

for some constants  $C(L)$ ,  $C_\infty(L)$  (not depending on  $T$ ) and some constants  $C_1(T, L)$ ,  $C_2(L)$ . The links between estimates of the form (3.1.3), (3.1.5) and (3.1.6) has been carefully studied in [Mil06b] (it is also worth mentioning here [Mil10] which concentrates on the link between (3.1.3) and spectral inequalities coming from the Lebeau-Robbiano strategy).

The main problem of Carleman estimates is that they are not really adapted to the context of the cost of fast controls because they are in general not precise enough to ensure that the constant  $C$  and  $C_\infty$  appearing in such estimates are optimal. It is proved in the very nice paper [EZ11b] (using a kind of reverse transmutation method where the solutions of some wave equation are written in terms of solutions of the corresponding heat equation) that the following estimate in infinite-time horizon holds:

$$\int_0^\infty \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \leq C(L) \int_0^\infty |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt, \quad (3.1.7)$$

where  $C(L)$  might depend on  $L$ . Moreover, this estimate is sharp in the one-dimensional case (as proved in [FR71]) and characterizes the reachable states of equation (3.1.1). The authors are then able to derive from inequality (3.1.7) the following estimate in finite time:

$$\int_0^\infty \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \leq C_{int}(T, L) \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt, \quad (3.1.8)$$

where  $C_{int}(T, L)$  is a constant that depends on  $T$  and  $L$ . Unfortunately, since (3.1.8) is obtained by using a reasoning by contradiction, the authors were unable to estimate precisely the constant  $C_{int}(T, L)$ .

A very natural conjecture (cf. [EZ11b, Section 1.2, Section 3.2, Section 5]) would be that the constant  $C_{int}(T, L)$  does not blow up in a too violent way, in the following sense:

**Conjecture 3.1.2.** *For every  $\delta > 0$  and  $L > 0$ , one can choose  $C_{int}(T, L)$  such that*

$$C_{int}(T, L) = O_{T \rightarrow 0}(e^{\frac{\delta}{T}}).$$

Conjecture 3.1.2 would notably be true if for example  $C_{int}(T, L)$  is some fraction of (some power of)  $T$ .

Let us mention here the well-known fact that the dissipative character of the parabolic systems implies the following result:

**Proposition 3.1.1.** *Conjecture 3.1.2 is stronger than Conjecture 3.1.1.*

For the sake of clarity, we recall here briefly a possible proof, without claim of originality (this is very similar to the proof of the fact that Carleman estimate  $\Rightarrow$  observability).

**Proof of Proposition 3.1.1.**

Let us consider some  $0 < r < 1$  (which is destined to be close to 1). Using the fact that the  $L^2$ -norm of the solution of (3.1.4) is non-increasing, we obtain

$$\int_0^T \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \geq e^{-\frac{L^2}{2T}} \int_r^T \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt \geq (1-r)T e^{-\frac{L^2}{2rT}} \int_0^L |\varphi(T, x)|^2 dx.$$

For a given  $K > L^2/4$ , thanks to Conjecture 3.1.2, there exists some constant  $C > 0$  and some  $r < 1$  (that might depend on  $L$  but not on  $T$ ) such that for every  $T > 0$  small enough one has

$$\frac{e^{\frac{L^2}{2rT}}}{T(1-r)} C_{int}(T, L) \leq C e^{\frac{2K}{T}}.$$

We deduce that

$$\int_0^L |\varphi(T, x)|^2 dx \leq C e^{\frac{2K}{T}} \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt,$$

which gives exactly Conjecture 3.1.1. ■

The goal of what follows is to explain how Conjecture 3.1.2 can be linked to another famous conjecture stated in [CG05] concerning the uniform controllability of a transport-diffusion equation in one space dimension with constant coefficients in the vanishing viscosity limit, in the spirit of what was done by the author in [Lis12].

Let us consider some constant  $M \neq 0$  (supposed to be independent of  $x$  and  $t$ ) and some viscosity coefficient  $\varepsilon \in (0, 1)$  (which is destined to tend to 0). We are interested in the following family of transport-diffusion equations

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(\cdot, 0) = v(t) & \text{in } (0, T), \\ y(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \end{cases} \quad (3.1.9)$$

with initial condition  $y^0 \in H^{-1}(0, L)$  and control  $v \in L^2(0, T)$  and  $\varepsilon \in (0, 1)$ . If  $\varepsilon$  is taken equal to 0 and if the initial condition  $y^0$  is taken in  $L^2(0, T)$ , we obtain a transport equation at constant speed  $M$

$$\begin{cases} y_t + M y_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(\cdot, 0) = v(t) & \text{in } (0, T), \\ y(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \end{cases} \quad (3.1.10)$$

which is known to be null-controllable if and only if  $T \geq L/|M|$ , the optimal control in  $L^2$ -norm is in this case the null function (see for example [Cor07, Section 2.1]). Let us define

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{TD}(y^0, T) &:= \{(y, u) \in C^0([0, T], H^{-1}(0, L)) \times L^2(0, T) \\ &|(y, u) \text{ verifies (3.1.9), } y(0, \cdot) = y^0 \text{ and } y(T, \cdot) = 0\} \end{aligned}$$

and

$$C_{TD}(T, L) = \sup_{y^0 \in H^{-1}(0, L)} \inf_{(y, u) \in \mathcal{T}_{TD}(y^0, T)} \frac{\|u\|_{L^2(0, T)}}{\|y^0\|_{H^{-1}(0, L)}}.$$

Since one can prove (see [CG05, Appendix A]) that the solution of (3.1.9) with initial condition  $y^0 \in L^2(0, L)$  converges in some sense to the one of (3.1.10) when  $\varepsilon \rightarrow 0$ , one might reasonably expect that  $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \rightarrow +\infty$  for  $T < L/|M|$  and  $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \rightarrow 0$  for  $T > L/|M|$ .

However, it is proved in [CG05], as expected, that one has

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \geq C e^{\frac{K}{\varepsilon}}$$

for some constants  $C, K$  independent of  $\varepsilon$  if  $T < L/M$  for  $M > 0$ , but what is unexpected is that

$$C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \geq C e^{\frac{K}{\varepsilon}}$$

for some  $C, K$  independent of  $\varepsilon$  if  $T < 2L/|M|$  for  $M < 0$ . This surprising result led the authors to make the following conjecture concerning positive results for the uniform controllability of the family of equations (3.1.9) in large time, which is still not decided to be true or false:

**Conjecture 3.1.3.** *Let  $T > 0$ ,  $L > 0$  and  $M \neq 0$  be given. Then  $C_{TD}(T, L, M, \varepsilon) \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  as soon as  $T > L/M$  for  $M > 0$  and  $T > 2L/|M|$  for  $M < 0$ .*

In [CG05], it is proved the exponential decay of the cost of the control when  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  for sufficiently large times, namely  $T > 4.3L/M$  (resp.  $T > 57.2L/|M|$ ) if  $M > 0$  (resp.  $M < 0$ ), which was extended to varying in time and space (and regular enough) speed  $M$  and arbitrary space dimension in [GL07]. In both articles [CG05] and [GL07], the strategy is to derive a Carleman estimate which takes into account the transport term and then use dissipation result adapted to the equation similar to what is done in [Dan97]. In [GL07], the authors also obtained an exponential growth of the cost of the control as  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  for small times.

The upper bounds concerning the uniform controllability of equation (3.1.9) have been improved in [Gla10] which proved the uniform controllability for  $T > 4.2L/M$  (resp.  $T > 6.1L/|M|$ ) if  $M > 0$  (resp.  $M < 0$ ) by using a method similar to the moment method on the adjoint system of (3.1.9) with a well-chosen complex multiplier. The latest improvement were done by the author in [Lis12], where the uniform controllability is proved for  $T > 2\sqrt{3}L/M > 3.45L/M$  (resp.  $T > (2\sqrt{3} + 2) > 5.45L/|M|$ ) if  $M > 0$  (resp.  $M < 0$ ), which is still quite far from Conjecture 3.1.3. However, it is also given a strategy to improve the critical times up to  $T > 2$  (resp.  $T > 4$ ) if  $M > 0$  (resp.  $M < 0$ ) by finding a link between this problem of uniform controllability and Conjecture 3.1.1 for the heat equation (3.1.1) in small time.

We now state our result.

**Theorem 3.1.1.** *Let  $T > 0$ ,  $L > 0$  and  $M > 0$  be fixed. Assume that Conjecture 3.1.2 is verified. Then there exists some constants  $C, K > 0$  (independent of  $\varepsilon$  but depending possibly on  $T > 0$ ,  $L > 0$  and  $M > 0$ ) such that for every  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,*

$$C_{TD}(T, L, \varepsilon, M) \leq C e^{-\frac{K}{\varepsilon}}$$

as soon as

1.  $T > L/M$  for  $M > 0$ ,
2.  $T > (1 + \sqrt{2})L/|M|$  for  $M < 0$ .

Theorem 3.1.1 is quite surprising, because it seems to indicate that Conjecture 3.1.2 is much stronger than Conjecture 3.1.1, which is unexpected because one may think that what happens near  $t = +\infty$  is quite negligible compared to what happens near  $t = T$ . Moreover, we think that Theorem 3.1.1 is of interest because it will enable people to solve both Conjecture 3.1.1 and Conjecture 3.1.3 in the case  $M > 0$  simultaneously. Theorem 3.1.1 suggests that it is worth trying to concentrate on proving Conjecture 3.1.3 instead of proving Conjecture 3.1.1.

### 3.2 Proof of Theorem 3.1.1

Let  $\psi^0 \in H_0^1(0, L)$  and let  $\psi$  be the solution of the following forward problem:

$$\begin{cases} \psi_t - \varepsilon\psi_{xx} - M\psi_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ \psi(\cdot, 0) = 0 & \text{in } (0, T), \\ \psi(\cdot, L) = 0 & \text{in } (0, T), \\ \psi(0, \cdot) = \psi^0 & \text{in } (0, T). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

We use the same kind of transformation than in [Lis12, Proof of Lemma 2.1], and we call

$$\varphi(t, x) := e^{\frac{M^2t}{4\varepsilon^2} + \frac{Mx}{2\varepsilon}} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right). \quad (3.2.2)$$

Then

$$\varphi_t(t, x) - \varphi_{xx}(t, x) = e^{\frac{M^2t}{4\varepsilon^2} + \frac{Mx}{2\varepsilon}} \left( \frac{M^2}{4\varepsilon^2} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + \frac{\psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)}{\varepsilon} - \frac{M^2}{4\varepsilon^2} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) - \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) - \frac{M}{\varepsilon} \psi_x\right) = 0.$$

Hence  $\varphi$  is a solution of (3.1.4) on the interval  $(0, \varepsilon T) \times (0, L)$ , with initial data  $\varphi^0(x) = e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}} \psi^0(x)$ . Since  $\varepsilon \rightarrow 0$ , this means that we now work in small time and the dependance in  $\varepsilon$  now only appears in the time variable. Moreover, one has

$$\partial_x \varphi(t, 0) = \frac{M}{2\varepsilon} e^{\frac{M^2t}{4\varepsilon^2}} \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, 0\right) + e^{\frac{M^2t}{4\varepsilon^2}} \partial_x \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, 0\right) = e^{\frac{M^2t}{4\varepsilon^2}} \partial_x \psi\left(\frac{t}{\varepsilon}, 0\right). \quad (3.2.3)$$

Let us consider some  $0 < a < 1$  (which is destined to be close to 1). The map  $t \mapsto e^{-\frac{L^2}{2t}}$  is increasing on  $(0, \infty)$ , so we deduce that

$$\begin{aligned} e^{-\frac{L^2}{2a\varepsilon T}} \int_{\varepsilon a T}^{\varepsilon T} \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt &\leq \int_{\varepsilon a T}^{\varepsilon T} \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Since  $\varphi$  is a solution of (3.1.4),  $t \geq 0 \mapsto \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^2(0, L)}^2$  is decreasing so

$$(1 - a)\varepsilon T \int_0^L |\varphi(\varepsilon T, x)|^2 dx \leq \int_{\varepsilon a T}^{\varepsilon T} \int_0^L |\varphi(t, x)|^2 dx dt. \quad (3.2.5)$$

Using (3.2.4) and (3.2.5), we obtain

$$(1-a)\varepsilon T e^{-\frac{L^2}{2a\varepsilon T}} \int_0^L |\varphi(\varepsilon T, x)|^2 dx \leq \int_0^{+\infty} \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt. \quad (3.2.6)$$

Applying inequality (3.1.8) at time  $b\varepsilon T$  with some  $b > 0$  (which is destined to be close to 0) and inequality (3.2.6), we deduce

$$(1-a)T e^{-\frac{L^2}{2a\varepsilon T}} \int_0^L |\varphi(\varepsilon T, x)|^2 dx \leq C_{int}(\varepsilon b T) \varepsilon e^{\frac{bM^2 T}{2\varepsilon}} \int_0^{b\varepsilon T} |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt. \quad (3.2.7)$$

We now use equalities (3.2.2) and (3.2.3) together with inequality (3.2.7) to obtain

$$e^{-\frac{L^2}{2a\varepsilon T} + \frac{M^2 T}{2\varepsilon}} \int_0^L e^{\frac{Mx}{\varepsilon}} |\psi(T, x)|^2 dx \leq C_{int}(\varepsilon b T, L) \int_0^{\varepsilon b T} e^{\frac{M^2 t}{2\varepsilon^2}} |\partial_x \psi(\frac{t}{\varepsilon}, 0)|^2 dt. \quad (3.2.8)$$

From (3.2.8) we deduce by changing  $t$  into  $\varepsilon t$  in the integral appearing in the right-hand side

$$e^{-\frac{L^2}{2a\varepsilon T} + \frac{M^2 a T}{2\varepsilon}} \varepsilon (1-a) T \int_0^L |e^{\frac{Mx}{2\varepsilon}} \psi(T, x)|^2 dx dt \leq C_{int}(\varepsilon b T) \varepsilon e^{\frac{bM^2 T}{2\varepsilon}} \int_0^{bT} |\partial_x \psi(t, 0)|^2 dt. \quad (3.2.9)$$

Let us treat separately the cases  $M > 0$  and  $M < 0$ .

1. Assume that  $M > 0$ . In this case, inequality (3.2.9) provides

$$\int_0^L |\psi(T, x)|^2 dx dt \leq \frac{e^{\frac{L^2}{2a\varepsilon T} - \frac{M^2 T}{2\varepsilon} + \frac{bM^2 T}{2\varepsilon}}}{(1-a)T} C_{int}(\varepsilon b T, L) \int_0^T |\partial_x \psi(t, 0)|^2 dt. \quad (3.2.10)$$

Assume now that  $T > 0$ ,  $L > 0$  and  $M > 0$  are such that  $T > L/M$ . Then one obtains

$$\frac{L^2}{2aT} - \frac{M^2 T}{2} + \frac{bM^2 T}{2} < 0 \quad (3.2.11)$$

as soon as  $b$  is chosen close enough to 0 and  $a$  is chosen close enough to 1: The roots of the polynomial (in the variable  $T$ )

$$\frac{L^2}{a} + (b-1)M^2 T^2$$

converge when  $a \rightarrow 1^-$  and  $b \rightarrow 0^+$  to the roots of the polynomial

$$L^2 - M^2 T^2,$$

which are precisely  $-L/M$  and  $L/M$ . Thanks to (3.2.10), (3.2.11) and Conjecture 3.1.2, one deduces that there exists some constants  $C, K > 0$  independent of  $\varepsilon$  (but depending possibly on  $L, T$  and  $M$ ) such that

$$C_{TD}(T, L, \varepsilon, M) \leq C e^{-\frac{K}{\varepsilon}}.$$

The first part of Theorem 3.1.1 is proved.



2. Assume now that  $M < 0$ . In this case, (3.2.9) becomes

$$\int_0^L |\psi(T, x)|^2 dx dt \leq \frac{e^{\frac{L^2}{2a\varepsilon T} - \frac{M^2 T}{2\varepsilon} + \frac{bM^2 T}{2\varepsilon} + \frac{|M|L}{\varepsilon}}}{(1-a)T} C_{int}(\varepsilon b T, L) \int_0^T |\partial_x \psi(t, 0)|^2 dt. \quad (3.2.12)$$

Assume now that  $T > 0$ ,  $L > 0$  and  $M < 0$  are such that  $T > (1 + \sqrt{2})L/|M|$ . Then one obtains

$$\frac{L^2}{2aT} - \frac{M^2 T}{2} + \frac{bM^2 T}{2} + |M|L < 0 \quad (3.2.13)$$

as soon as  $b$  is chosen close enough to 0 and  $a$  is chosen close enough to 1: The roots of the polynomial (in the variable  $T$ )

$$\frac{L^2}{a} + (b-1)M^2 T^2 + 2b|M|LT$$

converge when  $a \rightarrow 1^-$  and  $b \rightarrow 0^+$  to the roots of the polynomial

$$L^2 - M^2 T^2 + 2|M|LT,$$

which are precisely  $(1 - \sqrt{2})L/|M|$  and  $(1 + \sqrt{2})L/|M|$ .

Thanks to (3.2.12), (3.2.13) and Conjecture 3.1.2, one deduces that there exists some constants  $C, K > 0$  independent of  $\varepsilon$  (but depending possibly on  $L, T$  and  $M$ ) such that

$$C_{TD}(T, L, \varepsilon, M) \leq C e^{-\frac{K}{\varepsilon}},$$

which ends the proof of Theorem 3.1.1. ■

### 3.3 Further remarks

1. Since one can recover Conjecture 3.1.3 from Conjecture 3.1.2 for  $M > 0$ , maybe  $T > 2L/|M|$  is not the right conjecture for the minimal time ensuring the uniform controllability for  $M < 0$  and might be replaced by what is found in Theorem 3.1.1, i.e.  $T > (1 + \sqrt{2})L/|M|$ .
2. The fact that the integral is on  $(0, \infty)$  in the left-hand side of (3.1.8) is crucial in our proof, because it enables us to consider larger times in the left-side ( $a$  close to 1) than in the right-hand side ( $b$  close to 0). Another possible conjecture (weaker than Conjecture 3.1.2) would be the following. Let  $\delta > 0$  and  $L > 0$ . One can find  $C_{fin}(T, L)$  such that

$$C_{fin}(T, L) = O_{T \rightarrow 0}(e^{\frac{\delta}{T}})$$

and

$$\int_0^T \int_0^L e^{-\frac{L^2}{2t}} |\varphi(t, x)|^2 dx dt \leq C_{fin}(T, L) \int_0^T |\partial_x \varphi(t, 0)|^2 dt. \quad (3.3.1)$$

However, one can verify that we exactly recover the results of [Lis12] and notably we do not find constants as good as in Theorem 3.1.1. This is consistent with the fact that (3.3.1) is roughly equivalent to (3.1.3), as explained in [Mil06b].

## Chapter 4

# Contrôlabilité uniforme d'une équation de transport-diffusion dégénérée

### 4.1 A degenerate transport equation

Let  $T > 0$  and  $L > 0$ . We consider the following equation posed on  $(0, T) \times (0, L)$ :

$$\begin{cases} y_t + x^\alpha y_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{in } (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{in } (0, T), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

with given  $y^0, u$  (in some spaces that will be precised later) and  $\alpha \in (0, 1)$ . We call  $Q$  the cylinder  $(0, T) \times (0, L)$ . In all what follows, a function defined on some subset of  $\mathbb{R}$  will always be extended on  $\mathbb{R}$  by 0.

Because of the degeneracy of the transport term at  $x = 0$  and the fact that  $x \mapsto x^\alpha$  is not a Lipschitz function, we cannot use the standard theory for transport equations. Moreover, it is not clear at all how one can define correctly the solutions of this equation: if we assume for example that  $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$  is a “classical” solution of (4.1.1), then necessarily at length  $x = 0$  one has  $y_t = 0$  so  $y(t, 0) = u(t)$  has to be constant with respect to  $t$ , so that (4.1.1) may have no solutions.

We define the following regular functions space and test functions space

$$C_\alpha([0, T] \times [0, L]) := \{g \in C^0([0, T] \times [0, L]) \mid g_t \in C^0([0, T] \times [0, L]), x^\alpha g_x \in C^0([0, T] \times [0, L])\} \quad (4.1.2)$$

and

$$S_\alpha((0, T) \times (0, L)) := W^{1,1}((0, T), L^1(0, L)) \cap L^1((0, T), W_\alpha^1(0, L)), \quad (4.1.3)$$

where

$$W_\alpha^1(0, L) := \{\varphi \in L^1(0, L) \mid (x^\alpha \varphi)_x \in L^1(0, L)\}.$$

One observes that functions  $g \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  are notably such that

$$x^\alpha g \in C^0([0, L], L^1(0, T)), \quad (4.1.4)$$

$$g \in C^0([0, T], L^1(0, L)). \quad (4.1.5)$$

We will assume from now on that

$$\begin{aligned} y^0 &\in L^\infty(0, L), \\ u &\in L^\infty(0, T). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

If  $y \in C_\alpha([0, T] \times [0, L])$  and verifies (4.1.1) everywhere, then necessarily  $y^0 \in C^0([0, L])$ ,  $u \in C^0([0, T])$  and  $y^0(0) = u(0)$ . Then, for every  $\varphi \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$ , one has, using integrations by parts and (4.1.6),

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_0^L y(\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) dx dt + \int_0^T y(t, L) L^\alpha \varphi(t, L) dt - \int_0^T u(t) (x^\alpha \varphi(t, x))|_{x=0} dt \\ + \int_0^L y(T, x) \varphi(T, x) dx - \int_0^L y^0(x) \varphi(0, x) dx = 0. \end{aligned}$$

This computation justifies the following definition:

**Definition 4.1.1.** A *weak solution* of the Cauchy problem (4.1.1) is a function  $y \in L^\infty((0, T) \times (0, L))$  such that, for every  $\varphi \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  verifying moreover

$$\varphi(\cdot, L) = 0 \text{ in } (0, T), \quad (4.1.7)$$

$$\varphi(T, \cdot) = 0 \text{ in } (0, L), \quad (4.1.8)$$

one has

$$- \int_0^T \int_0^L (\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) y dx dt - \int_0^T u(t) (x^\alpha \varphi(t, x))|_{x=0} dt - \int_0^L y^0(x) \varphi(0, x) dx = 0. \quad (4.1.9)$$

The link with classical solutions is the following:

**Proposition 4.1.1.** Assume that  $y$  is a weak solution of the Cauchy problem (4.1.1) verifying moreover  $y \in C_\alpha([0, T] \times [0, L])$ . Then one has

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t + x^\alpha y_x = 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times (0, L), \\ y^0 \in C^0([0, L]), \\ u \in C^0([0, T]), \\ y(0, x) = y^0(x) \quad \forall x \in (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) \quad \forall t \in (0, T). \end{array} \right.$$

**Proof of Proposition 4.1.1.**

Let  $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times [0, L])$ . Using (4.1.9), one has

$$- \int_0^T \int_0^L (\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) y dx dt = 0.$$

Since  $y$  is regular enough, one can integrate by parts and obtain

$$\int_0^T \int_0^L (y_t + x^\alpha y_x) \varphi dx dt = 0.$$

But  $y_t + x^\alpha y_x \in C^0([0, T] \times [0, L]) \subset L^1((0, T) \times (0, L))$  so one can use the fundamental lemma of calculus of variations and conclude that  $y_t + x^\alpha y_x = 0$  everywhere on  $[0, T] \times [0, L]$ . Let us now consider some  $\varphi \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  verifying moreover (4.1.7) and (4.1.8). Using (4.1.9) and integrations by parts, one obtains

$$\int_0^T (y(t, 0) - u(t)) (x^\alpha \varphi(t, x))|_{x=0} dt + \int_0^L (y(0, x) - y^0(x)) \varphi(0, x) dx = 0.$$

One remarks that for every  $t \in (0, T)$  and every  $x \in (0, L)$ ,

$$\{\varphi(t, \cdot) | \varphi(\cdot, \cdot) \in S_\alpha((0, T) \times (0, L)) \supset C_0^\infty(0, L)\}$$

and

$$\{x^\alpha \varphi(\cdot, x) | \varphi(\cdot, \cdot) \in S_\alpha((0, T) \times (0, L)) \supset C_0^\infty(0, T)\},$$

so an easy density argument (smooth functions with compact support are dense in  $L^\infty$  for the weak-\* topology) allows us to conclude the proof of Proposition 4.1.1.  $\blacksquare$

One can compute explicitly the characteristic curves of (4.1.1):

**Proposition 4.1.2.** *Let  $x_0 \in (0, L)$ . The solutions of the ordinary differential equation*

$$\begin{cases} x' = x^\alpha, \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

are defined in the following way for every  $t \in \mathbb{R}$ :

$$x(t) = (x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t > -\frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad (4.1.10)$$

$$x(t) = 0, \quad t \leq -\frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (4.1.11)$$

■

As shown in Figure 4.1, the characteristic curves intersect (and are even mixed up), but only for  $x = 0$ . There is some hope to use these characteristic curves to exhibit some solutions in a suitable functional setting because for every point in  $(0, T) \times (0, L)$ , there exists a unique characteristic curve coming to that point.

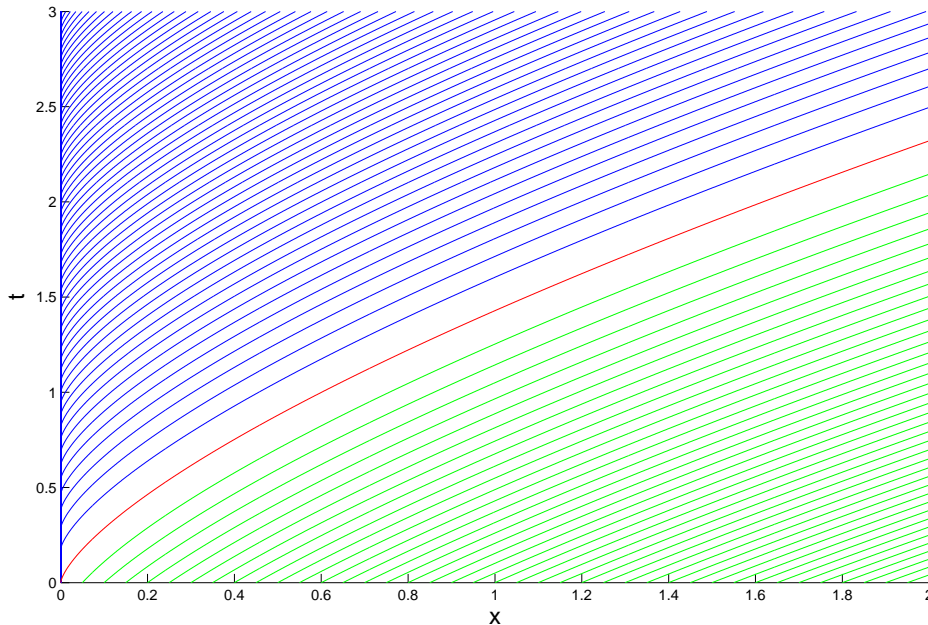


Figure 4.1: Some characteristic curves for  $\alpha = 1/3$  and  $L = 2$ .

We are now going to prove the following well-posedness result for the Cauchy problem (4.1.1):

**Theorem 4.1.1.** *The Cauchy Problem (4.1.1) has a unique weak solution verifying moreover*

$$\|y\|_{L^\infty((0,T) \times (0,L))} \leq \max(\|y^0\|_{L^\infty(0,L)}, \|u\|_{L^\infty(0,L)}) \quad (4.1.12)$$

and

$$y \in C^0([0, T], L^p(0, L)),$$

for every  $p \in [1, \infty)$ .

**Proof of Theorem 4.1.1.**

1. Existence: let us define the solutions of (4.1.1) using the method of characteristics. We consider

$$y(t, x) := y^0((x^{1-\alpha} - t(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}) + u(t - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}). \quad (4.1.13)$$

One readily verifies that  $y \in L^\infty((0, T) \times (0, L))$  and  $y$  verifies (4.1.12). Let us prove that  $y \in C^0([0, T], L^p(0, L))$ . We call

$$\Omega_1(t) := \{x \in (0, L) | (1-\alpha)t \leq x^{1-\alpha} \leq L^{1-\alpha} + (1-\alpha)t\}$$

and

$$\Omega_2(t) := \{x \in (0, L) | 0 \leq x^{1-\alpha} \leq (1-\alpha)t\}.$$

One have then

$$\int_0^L y^p(t, x) dx \quad (4.1.14)$$

$$= \int_{\Omega_1(t)} (y^0)^p((x^{1-\alpha} - t(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dx \quad (4.1.15)$$

$$+ \int_{\Omega_2(t)} u^p(t - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} dx \quad (4.1.16)$$

$$=: I_1(t) + I_2(t). \quad (4.1.17)$$

First we are going to prove that for every  $t \in (0, T)$ , one has  $I_1(t) < +\infty$ . We use the change of variables

$$x := (s^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

One has

$$dx = \frac{(s^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{s^\alpha} ds.$$

We deduce

$$I_1(t) = \int_{s=0}^{s=(L^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{(s^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{s^\alpha} (y^0)^p(s) ds, \quad (4.1.18)$$

which is finite because

$$y^0 \in L^\infty(0, L),$$

$$s \mapsto (s^{1-\alpha} + (1-\alpha)t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \in L^\infty(0, (L^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}})$$

and

$$s \mapsto \frac{1}{s^\alpha} \in L^1(0, (L^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}).$$

We are now interested in  $I_2$ . We use the change of variables

$$x = ((1-\alpha)(t-s))^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

We have

$$dx = -((1 - \alpha)(t - s))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

We deduce

$$I_2(t) = \int_{s=0}^{s=t} ((1 - \alpha)(t - s))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} u^p(s) ds < \infty. \quad (4.1.19)$$

We deduce from (4.1.18) and (4.1.19) that  $t \mapsto I_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) is continuous, so  $y \in C^0([0, T], L^p(0, L))$ .

Let us now introduce  $(y_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequence of functions in  $C_0^1([0, L])$  converging to  $y^0$  in  $L^\infty(0, L)$  for the weak-\* topology and  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sequence of functions in  $C_0^1([0, T])$  converging to  $u$  in  $L^\infty(0, T)$  for the weak-\* topology. Let

$$y_n(t, x) := y_n^0((x^{1-\alpha} - t(1 - \alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}) + u_n(t - \frac{x^{1-\alpha}}{1 - \alpha}). \quad (4.1.20)$$

$y_n$  is differentiable with respect to  $t$ ,  $x^\alpha \partial_x y_n$  has a meaning at every point  $(t, x)$ , and one has

$$\begin{aligned} \partial_t y_n(t, x) &= -(x^{1-\alpha} + (1 - \alpha)t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y_n^{0'}((x^{1-\alpha} - t(1 - \alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}) + u_n'(t - \frac{x^{1-\alpha}}{1 - \alpha}) \\ &= -x^\alpha \partial_x y_n(t, x). \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$(4.1.22)$$

This implies that  $y_n$  satisfies (4.1.1) in the classical sense and one verifies that  $y \in C_\alpha([0, T] \times [0, L])$ . From equality (4.1.20), we obtain

$$\|y_n\|_{L^\infty((0, T) \times (0, L))} \leq \max(\|y_n^0\|_{L^\infty(0, L)}, \|u_n\|_{L^\infty(0, T)}).$$

Since the sequences  $(y_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge for weak-\*  $L^\infty$ -topology, these sequences are bounded for the strong  $L^\infty$ -topology. This implies that  $(y_n)$  is bounded in  $L^\infty((0, T) \times (0, L))$ , hence using the Banach-Alaoglu-Bourbaki theorem, up to some subsequence  $y_n \rightharpoonup^* y$  in the weak-\*  $L^\infty$ -topology.

The only thing that remains to prove is that  $y$  is a weak solution of (4.1.1). Using that for all  $n$ ,  $y_n$  is a weak solution of (4.1.1), we obtain that for every  $\varphi \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  verifying moreover (4.1.7) and (4.1.8),

$$-\int_0^T \int_0^L (\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) y_n dx dt - \int_0^T u_n(t) (x^\alpha \varphi(t, x))|_{x=0} dt - \int_0^L y_n^0(x) \varphi(0, x) = 0.$$

One can make  $n \rightarrow \infty$  in this equality (see notably (4.1.4)). We obtain that  $y$  is a weak solution of (4.1.1).

2. Uniqueness: Let  $y_1$  and  $y_2$  be two solutions of (4.1.1) (with initial condition  $y^0$  and boundary condition  $u$ ) and let us consider  $y := y_1 - y_2$ .  $y$  is a weak solution of

$$\begin{cases} y_t + x^\alpha y_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, x) = 0 & \text{in } (0, L), \\ y(t, 0) = 0 & \text{in } (0, T). \end{cases} \quad (4.1.23)$$

We want to prove that necessarily  $y \equiv 0$ . Using (4.1.23) and (4.1.9), necessarily for every  $\varphi \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  verifying (4.1.7) and (4.1.8),

$$-\int_0^T \int_0^L (\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) y dx dt = 0. \quad (4.1.24)$$

Let us consider some  $\Phi \in C_0^\infty((0, T) \times (0, L))$ . We want to solve the following backward problem:

$$\begin{cases} z_t + (x^\alpha z)_x = \Phi & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ z(T, x) = 0 & \text{in } (0, L), \\ z(t, L) = 0 & \text{in } (0, T). \end{cases} \quad (4.1.25)$$

We define a solution of (4.1.25) in the following way:

$$\begin{aligned} mbox z(t, x) = & - \int_0^{T-t} \frac{(x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}}{x^\alpha} \Phi(T-r, (x^{1-\alpha} \\ & + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dr. \end{aligned}$$

One readily verifies that  $z$  verifies (4.1.7) and (4.1.8). What is not clear is whether  $z \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$ . One has for every  $t$  and  $x$

$$|z(t, x)| \leq \frac{C(T, L) \|\Phi\|_\infty}{x^\alpha},$$

which implies that  $z \in L^1((0, T) \times (0, L))$ . Since  $\Phi \in C_0^\infty((0, T) \times (0, L))$  and  $z$  verifies (4.1.25) in  $\mathcal{D}'((0, T) \times (0, L))$ , as soon as  $(x^\alpha z)_x \in L^1((0, T) \times (0, L))$ , we will have  $z_t \in L^1((0, T) \times (0, L))$ . Let us compute

$$\begin{aligned} (x^\alpha z)_x(t, x) = & - \int_0^{T-t} \alpha x^{-\alpha} (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} \Phi(T-r, (x^{1-\alpha} \\ & + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dr - \int_0^{T-t} x^{-\alpha} (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \\ & \Phi_x(T-r, (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dr. \end{aligned}$$

For  $\alpha \geq 1/2$  we have

$$\begin{aligned} & \left| - \int_0^{T-t} \alpha x^{-\alpha} (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} \Phi(T-r, (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t- \\ & mbox - r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dr \right| \leq C(T, L) \|\Phi\|_\infty x^{-\alpha}, \end{aligned}$$

and for  $\alpha \leq 1/2$  we have

$$\begin{aligned} & \left| - \int_0^{T-t} \alpha x^{-\alpha} (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} \Phi(T-r, (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t- \\ & - r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dr \right| \leq C(T, L) \|\Phi\|_\infty x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

We also have

$$\begin{aligned} & \left| - \int_0^{T-t} x^{-\alpha} (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \Phi_x(T-r, (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-tr))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dr \right| \\ & mbox \leq C(T, L) \|\Phi_x\|_\infty x^{-\alpha}, \end{aligned}$$

so that  $(x^\alpha z)_x \in L^1(0, T)$ . We deduce that in both cases  $(x^\alpha z)_x \in L^1((0, T) \times (0, L))$ . We deduce that  $z \in S_\alpha((0, T) \times (0, L))$  as wanted. ■

This result has a very important consequence:

**Corollaire 4.1.1.** *1. Let  $T \geq \frac{L^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ . Then equation (4.1.1) is null controllable and the cost of the control is 0 (i.e. 0 is a control that steers every initial condition  $y^0$  to 0).*

*2. Let  $T < \frac{L^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ . Then equation (4.1.1) is not null controllable.*

## 4.2 Convergence of the parabolic system

Let us prove a result of convergence for the parabolic equation

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + x^\alpha y_x = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{in } (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{in } (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{in } (0, L) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

to the transport equation (4.1.1). It is well-known that for every  $y^0 \in L^\infty(0, L)$  and every  $u \in L^\infty(0, T)$ , there exists a unique weak solution of (4.2.1) in  $L^\infty((0, T) \times (0, L))$ . Moreover, thanks to some maximum principle (see [Lie96]), one can prove that there exists some  $C(T)$  (independent of  $\varepsilon$ ) such that

$$\|y\|_{L^\infty((0, T) \times (0, L))} \leq C(T)(\|u\|_{L^\infty(0, T)} + \|y^0\|_{L^\infty(0, L)}). \quad (4.2.2)$$

The problem is that we are not able to prove that the solutions of the parabolic system converge in some sense to the solutions of the hyperbolic system, because of the boundary terms arising at length  $L = 0$ . However, thanks to the explicit form of the solutions given by formula (4.1.13), we can see that there are 2 distinct zones:

$$\Gamma^+(T) := \{(t, x) \in [0, T] \times [0, L] | x^{1-\alpha} > (1-\alpha)t\},$$

which is the part of  $[0, T] \times [0, L]$  which is under the characteristic curve coming from  $x = 0$  and is only influenced by the initial condition  $y^0$  (the green curves on Figure 4.1) and

$$\Gamma^-(T) := \{(t, x) \in [0, T] \times [0, L] | x^{1-\alpha} < (1-\alpha)t\},$$

which is the part of  $[0, T] \times [0, L]$  which is over the characteristic curve coming from  $x = 0$  and is only influenced by the boundary condition  $u$  (the blue curves on Figure 4.1). Clearly  $\Gamma^+(T) \cap \Gamma^-(T) = \emptyset$  and  $\Gamma^+(T) \cup \Gamma^-(T)$  is of full measure in  $[0, T] \times [0, L]$ . We are going to prove a partial result of convergence of the parabolic system on  $\Gamma^+(T)$ .

To prove this, we introduce

$$\mathcal{T}((0, T) \times (0, L)) := \{\varphi \in C^\infty([0, T] \times [0, L]) | \forall t \in [0, T], \varphi(t, \cdot) \in C_0^\infty(0, L)\}. \quad (4.2.3)$$

We have the following Lemma:



**Lemma 4.2.1.** *Consider some  $y \in L^\infty((0, T) \times (0, L))$  verifying that for every  $\varphi \in \mathcal{T}((0, T) \times (0, L))$ ,*

$$-\int_0^T \int_0^L (\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) y dx dt - \int_0^L y^0(x) \varphi(0, x) dx = 0. \quad (4.2.4)$$

*Then necessarily on  $\Gamma^+(T)$  one has*

$$y(t, x) = y^0((x^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}).$$

**Proof of Lemma 4.2.1.**

We set

$$\tilde{y}(t, x) := y(t, x) - y^0((x^{1-\alpha} - t(1-\alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}}).$$

One has for every  $\varphi \in \mathcal{T}([0, T] \times [0, L])$  verifying (4.1.7)

$$\int_0^T \int_0^L (\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) \tilde{y} dx dt = 0.$$

Let  $\Phi$  be a smooth function with support included in  $\Gamma^+(T)$ . Notably, one can find some  $\eta > 0$  such that  $\Phi \equiv 0$  as soon as  $x^{1-\alpha} < (1-\alpha)t + \eta$  and as soon as  $x \geq x_0$  for some  $x_0$ . As before we call

$$z(t, x) := - \int_0^{T-t} \frac{(x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{x^\alpha} \Phi(T-r, (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) dr.$$

$z$  verifies (4.1.25) and (4.1.8). The only point is to verify that  $z \in \mathcal{T}((0, T) \times (0, L))$ . One observes that  $z \in C^\infty((0, T) \times (0, L))$ . We just need to see if it is compactly supported in space for all time. One has

$$\Phi(T-r, (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) = 0$$

for every  $r \in (0, T-t)$  as soon as

$$x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r) < (1-\alpha)(T-r) + \eta,$$

i.e.  $x^{1-\alpha} < (1-\alpha)t + \eta$  for all  $r \in (0, T-t)$ . If  $x$  is small enough ( $x < \eta^{1/(1-\alpha)}$  for example) this is automatically verified whatever  $t$  is. One also has

$$\Phi(T-r, (x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1}{1-\alpha}}) = 0$$

forevery  $r \in (0, T-t)$  as soon as

$$(x^{1-\alpha} + (1-\alpha)(T-t-r))^{\frac{1}{1-\alpha}} > x_0$$

for every  $r \in (0, T-t)$ , which is ensured as soon as  $x > x_0$ . We deduce as we wanted that  $z \in \mathcal{T}((0, T) \times (0, L))$ . The fundamental lemma of calculus of variation makes us conclude that  $\tilde{y} = 0$  on  $\Gamma^+(T)$  as wanted.  $\blacksquare$

One can deduce from Lemma 4.2.1 the following result of convergence on  $\Gamma^+(T)$ :

**Proposition 4.2.1.** *Let  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $\mathbb{R}^{+*}$  converging to 0. Let  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $L^\infty(0, T)$  converging for the weak-\* topology to some  $u \in L^\infty(0, T)$ . Let  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $L^\infty((0, T) \times (0, L))$  of solutions of*

$$\begin{cases} y_{nt} - \varepsilon_n y_{nxx} + x^\alpha y_{nx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{in } (0, L), \\ y(t, 0) = u_n(t) & \text{in } (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{in } (0, L) \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Then up to a subsequence one has on  $\Gamma^+(T)$ ,

$$y_n \overset{*}{\rightharpoonup} y^0((x^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}) \in L^\infty(\Gamma^+(T)).$$

**Proof of Proposition 4.2.1.**

Thanks to inequality (4.2.2),  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded in  $L^\infty((0, T) \times (0, L))$ , and then and up to some subsequence  $y_n \overset{*}{\rightharpoonup} y \in L^\infty((0, T) \times (0, L))$ . Let  $\varphi \in \mathcal{T}((0, T) \times (0, L))$ . Let us multiply  $y_n$  by  $\varphi$  and integrate by parts. We obtain

$$-\int_0^T \int_0^L y_n(\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) - \varepsilon_n \int_0^T \int_0^L y_n \varphi_{xx} - \int_0^L y^0(x) \varphi(0, x) dx = 0.$$

The first integral converges to  $-\int_0^T \int_0^L y(\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x)$ . The second converges to 0 since  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded. Hence  $y$  verifies

$$\int_0^T \int_0^L y(\varphi_t + (x^\alpha \varphi)_x) + \int_0^L y^0(x) \varphi(0, x) dx = 0,$$

for every  $\varphi \in \mathcal{T}((0, T) \times (0, L))$ , so Lemma 4.2.1 can be applied and the conclusion follows. ■

### 4.3 A consequence for the uniform controllability in small time

Let us consider the problem of null controllability of (4.2.1) with initial condition in  $L^\infty(0, L)$  and control in  $L^\infty(0, T)$ . Thanks to [FR71], we know that (4.2.1) is null controllable in the sense that there exists  $C > 0$  such that for all  $y^0 \in L^2(0, L)$ , there exists a control  $u \in H^1(0, T)$  such that the corresponding solution  $y$  of (4.2.1) verifies  $y(T, \cdot) = 0$  and

$$\|u\|_{H^1(0, T)} \leq C \|y^0\|_{L^2(0, L)}. \quad (4.3.1)$$

We know that in dimension 1,  $H^1(0, T) \subset L^\infty(0, T)$  with continuous embedding (we also have obviously  $L^\infty(0, T) \subset L^2(0, L)$  with continuous embedding), hence we deduce (for some  $\tilde{C}$ )

$$\|u\|_{L^\infty(0, T)} \leq \tilde{C} \|y^0\|_{L^\infty}. \quad (4.3.2)$$

Hence, one can control  $L^\infty$  initial condition with  $L^\infty$  controls. Moreover, we can define the cost of the control  $C_\infty(\varepsilon, T, L)$  as the infimum of the constant  $\tilde{C}$  such that for all  $y^0 \in L^\infty(0, L)$ , one can find some  $u \in L^\infty(0, T)$  and some solution  $y$  of (4.2.1) verifying  $y(T, \cdot) = 0$  and (4.3.2).

We are going to prove that  $C_\infty(\varepsilon, T)$  explodes as  $\varepsilon \rightarrow 0$  if the time is too small (i.e. we do not have uniform controllability).

**Corollaire 4.3.1.** *Assume that*

$$T < \frac{L^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

*Then*

$$C_\infty(\varepsilon, T, L) \rightarrow \infty$$

*as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**Proof of Corollary 4.3.1.**

Assume that  $C_\infty(\varepsilon, T, L) \not\rightarrow \infty$ . There exists some sequence  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that  $C_\infty(\varepsilon_n, T, L)$  remains bounded. Let us consider some  $r > 0$  small enough such that  $T + r < \frac{L^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ . Let  $y^0 \in L^\infty(0, L)$  some initial condition, supposed to be not identically equal to 0 on  $(0, (L^{1-\alpha} - (1-\alpha)(T+r))^{1/(1-\alpha)})$ . Thanks to the definition of  $C_\infty(\varepsilon, T, L)$ , for all  $n$ , there exists some control  $u_n$  such that the corresponding solution of (4.2.1) (with  $\varepsilon$  replaced by  $\varepsilon_n$ ) verifies  $y(T, \cdot) = 0$  and

$$\|u\|_{L^\infty(0, T)} \leq (C_\infty(\varepsilon_n, T, L) + r) \|y^0\|_{L^\infty(0, T)}. \quad (4.3.3)$$

Since  $(C_\infty(\varepsilon_n, T, L))_{n \in \mathbb{N}}$  is bounded, thanks to (4.3.3), one can extract some subsequence still denoted  $u_n$  of controls such that there exists  $u \in L^\infty(0, L)$  verifying  $u_n \xrightarrow{*} u$ . We extend  $y_n$  by 0 on  $(T, T+r)$  and  $u$  by 0 on  $(T, T+r)$  to obtain a weak solution of (4.2.1) on  $(0, T+r) \times (0, L)$ .

Thanks to Proposition 4.2.1, up to a subsequence  $y_n \xrightarrow{*} y \in L^\infty((0, T+r) \times (0, L))$ . Moreover, since  $y_n \equiv 0$  on  $(T, T+r)$ , necessarily  $y \equiv 0$  on  $(T, T+r)$ . But thanks to Proposition 4.2.1, on  $\Gamma^+(T+r)$  one has

$$y(t, x) = y^0((x^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}).$$

So one has

$$y^0((x^{1-\alpha} - (1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}) = 0$$

for every  $t \in (T, T+r)$  and almost every  $x \in (0, L)$ , so notably  $y^0(s) = 0$  for  $s \in (0, (L^{1-\alpha} - (1-\alpha)(T+r))^{1/(1-\alpha)})$ , which is impossible because of the way we chosed  $y^0$ . ■

## Chapitre 5

# Coût des contrôles rapides pour certaines familles d'équations paraboliques ou dispersives

### Abstract

In this paper, we consider the cost of null controllability for a large class of linear equations of parabolic or dispersive type in one space dimension in small time. By extending the work of Tenenbaum and Tucsnak in *New blow-up rates for fast controls of Schrödinger and heat equations*, we are able to give precise upper bounds on the time-dependance of the cost of fast controls when the time of control  $T$  tends to 0. We also give a lower bound of the cost of fast controls for the same class of equations, which proves the optimality of the power of  $T$  involved in the cost of the control. These general results are then applied to treat notably the case of linear KdV equations and fractional heat or Schrödinger equations.

**Keywords:** Moment method; Fast controls; Linear dispersive and parabolic equations.

## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Presentation of the problem

This paper is devoted to studying fast boundary controls for some evolution equations of parabolic or dispersive type, with the spatial derivative not necessarily of second order.

Let  $H$  be an Hilbert space (the state space) and  $U$  be another Hilbert space (the control space). Let  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow H$  be a self-adjoint operator with compact resolvent, the eigenvalues (which can be assumed to be different from 0 without loss of generality) are called  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ , the eigenvector corresponding to the eigenvalue  $\lambda_k$  is called  $e_k$ . We assume that  $-A$  generates on  $H$  a strongly continuous semigroup  $S : t \mapsto S(t) = e^{-tA}$ . The Hilbert space  $D(A^*)' (= D(A)')$

is from now on equipped with the norm

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A)'}^2 = \sum \frac{\langle x, e_k \rangle_H^2}{\lambda_k^2}.$$

We call  $B \in \mathcal{L}_c(U, \mathcal{D}(A)')$  an admissible control operator for this semigroup, i.e. such that there exists some time  $T_0 > 0$ , there exists some constant  $C > 0$  such that for every  $z \in \mathcal{D}(A)$ , one has

$$\int_0^{T_0} \|B^*S(t)^*z\|_U^2 \leq C\|z\|_H^2.$$

We recall that if  $B$  is admissible, then necessarily the previous inequality holds at every time, that is to say for every time  $T > 0$ , there exists some constant  $C(T) > 0$  such that for every  $z \in \mathcal{D}(A)$ , one has

$$\int_0^T \|B^*S(t)^*z\|_U^2 \leq C(T)\|z\|_H^2.$$

From now on, we consider control systems of the following form:

$$y_t + Ay = Bu \tag{5.1.1}$$

or

$$y_t + iAy = Bu, \tag{5.1.2}$$

where  $A$  will always be supposed to be positive in the parabolic case (i.e. for Equation (5.1.1)). Then, it is well-known (see for example [Cor07, Chapter 2, Section 2.3], the operators  $-A$  or  $-iA$  generates a strongly continuous semigroup under the hypothesis given before thanks due to the Lummer-Phillips or Stone theorems) that if  $u \in L^2((0, T), U)$ , System (5.1.1) or (5.1.2) with initial condition  $y^0 \in H$  has a unique solution satisfying  $y \in \mathcal{C}^0([0, T], H)$ . Moreover, if the system is null controllable at some time  $T_0$  (i.e. for every  $y^0 \in H$ , there exists some control  $u \in L^2((0, T_0), U)$  such that  $y(T_0, \cdot) \equiv 0$ ), then there exists a unique optimal (for the  $L^2((0, T_0), U)$ -norm) control  $u_{opt} \in L^2((0, T_0), U)$ , the map  $y^0 \mapsto u_{opt}$  is then linear continuous (see for example [Cor07, Chapter 2, Section 2.3]). The norm of this operator is called the optimal null control cost at time  $T_0$  (or in a more concise form the cost of the control) and denoted  $C_{T_0}$ , which is also the smallest constant  $C > 0$  such that for every  $y^0 \in H$ , there exists some control  $u$  driving  $y^0$  to 0 at time  $T_0$  with

$$\|u\|_{L^2((0, T_0), U)} \leq C\|y^0\|_H.$$

Concerning (5.1.2), it can be shown (see for example [Cor07, Chapter 2, Section 2.3, Theorem 2.41]) that this system is null controllable if and only if it is exactly controllable; moreover, in this case, it is easy to prove that the cost of exact controllability has the same behavior in small time as the cost of null controllability; hence, even for conservative systems, we will only be interested in null controllability.

Our goal in this work is to estimate precisely the cost of the control  $C_T$  when the time  $T \rightarrow 0$  for some families of operators  $A$  which are null controllable in arbitrary small time, and notably to find lower and upper bounds on  $C_T$ . Understanding the behavior of fast controls is of great interest in itself but it may also be applied to study the uniform controllability of transport-diffusion in the vanishing viscosity limit as explained in [Lis12]. (the strategy described in [Lis12] might probably be extended to the study of other problems of uniform controllability, for example in zero dispersion limit or in zero diffusion-dispersion limit as in [GG08] or [GG09]) It is obvious that  $C_T$  must tend to  $\infty$  when  $T \rightarrow 0$ .

### 5.1.2 State of the art

In all what follows,  $f \lesssim g$  (with  $f$  and  $g$  some complex valued functions depending on some variable  $x$  in some set  $\mathcal{S}$ ) means that there exists some constant  $C > 0$  (possibly depending on other parameters) such that for every  $x \in \mathcal{S}$ , one has  $|f(x)| \leq C|g(x)|$ , (such a  $C$  is called an implicit constant in the inequality  $f \lesssim g$ ), and  $f \simeq g$  means that we have both  $f \lesssim g$  and  $g \lesssim f$ . Sometimes, when it is needed, we might detail the dependance of the implicit constant with respect to some parameters. We also might write  $g \gtrsim f$  when  $f \lesssim g$ . The set  $\mathcal{S}$  will not be explicitly given, it will in general correspond to all the variables appearing explicitly in the inequality.

As far as we know, results concerning the cost of fast boundary controls have been obtained essentially in the case of heat and Schrödinger equations. It is known for a long time that for the one-dimensional heat equation posed on a time-space cylinder  $(0, T) \times (0, L)$  with boundary control on one side, the time-dependence of the cost of the boundary control is  $\simeq e^{\frac{\alpha^+}{T}}$  for some constant  $\alpha > 0$  (see [Güi85] and [Sei84]), where the notation  $\alpha^+$  means that we simultaneously have that the cost of the control is  $\gtrsim e^{\frac{\alpha}{T}}$  and  $\lesssim e^{\frac{K}{T}}$  for every  $K > \alpha$  as close as  $\alpha$  as we want (the implicit constant in front of the exponential might possibly explode when we get closer to  $\alpha$ ). The constant  $\alpha$  verifies

$$L^2/4 \leq \alpha \leq 3L^2/4.$$

The upper bound is obtained in [TT07] and the lower bound in [Mil04a] (it is the best bounds obtained until now). For the Schrödinger equation posed on a time-space cylinder  $(0, T) \times (0, L)$  with boundary control on one side, one also has that the dependence in time of the cost of the boundary control is under the form  $\simeq e^{\frac{\tilde{\alpha}^+}{T}}$  for some constant  $\tilde{\alpha} > 0$ . The constant  $\tilde{\alpha}$  verifies

$$L^2/4 \leq \tilde{\alpha} \leq 3L^2/2.$$

The upper bound is obtained in [TT07] and the lower bound in [Mil04b] (it is the bounds obtained until now). In both cases, it is conjectured that the lower bound is optimal, i.e. that one can choose

$$\alpha = \tilde{\alpha} = L^2/4.$$

Our goal is to extend this results to other first-order time evolution equations with spatial operators that are self-adjoint or skew-adjoint with eigenvalues  $\lambda_k$  or  $i\lambda_k$  that do not necessarily behave as  $k^2$  or  $ik^2$ , for example linear KdV equations, anomalous diffusion equations or fractional Schrödinger equations. Our main tool is the *moment method* which was introduced in [FR71] for the study of heat-like equations in one space dimension (and more generally for parabolic systems with eigenvalues having a behavior as in equation (5.1.3) for some  $\alpha > 1$ ) and used successfully many times notably to prove the controllability or uniform controllability of parabolic systems or equations or to study the behavior of the cost of the control (see for example [CG05], [TT07], [Gla10] or [AKBGBdT11b]). We first prove some general theorems about the cost of controls for operators  $A$  having eigenvalues which behave asymptotically as  $k^\alpha$  for some  $\alpha \geq 2$ , and give precise upper bounds concerning  $C_T$ . Concerning lower bounds, we also prove that  $\limsup_{T \rightarrow 0} T^{1/(\alpha-1)} \ln(C_T) > 0$  as soon as  $\alpha > 1$ . These main theorems are then applied to some families of equations, as described further. However, since our work is mainly an extension of [TT07], we are not going to improve any existing upper bounds in the case of heat or Schrödinger equations.

Concerning linear dispersive equations of KdV type, the controllability has been widely studied with different boundary conditions and different boundary controls (see, in particular, [RZ93], [RZ96], [Ros97], [Ros04], [GG09], [GG08] or [GG10]), in general in order to prove a result of controllability for the corresponding nonlinear KdV equation. According to the result

given in [GG08, Proposition 3.1], one should expect that for such equations involving space derivatives until the order 3, the cost of fast controls is bounded by  $Ce^{\frac{C}{\sqrt{T}}}$  because of the weights used in the Carleman estimates. We give a precise estimate of  $C$  and prove that this power of  $T$  is optimal.

The cost of fast controls for anomalous diffusion equations has been studied notably in [Mil06c] and [MZ06b], the results are improved in [Mil10, Section 4.1], the latter article gives the optimal power of  $1/T$  involved (see also [TT11]), but the techniques (spectral inequalities and the Lebeau-Robbiano method) are very different from what we are going to do in this article. In all these articles, the authors were interested in distributed controls in a (small) open subset of the space domain. We consider here only boundary controls, which implies that we will have to make some restrictions on the powers of the Laplace operator we consider.

Our last example concerns the control of fractional Schrödinger equations. As far as we know, the question of the control of such equations was never studied. As before, we are able to derive a precise upper bound on  $C_T$ .

### 5.1.3 Some definitions and notations

**Definition 5.1.1.** Let  $\mathcal{C}$  be a countable set. We say that a sequence of real numbers  $(\lambda_n)_{n \in \mathcal{C}}$  is *regular* if

$$\gamma((\lambda_n)_{n \in \mathcal{C}}) := \inf_{m \neq n} |\lambda_m - \lambda_n| > 0.$$

From now on, we assume that  $B$  is a control of the form

$$Bu = bu,$$

where  $b \in \mathcal{D}(A)'$  ( $U$  is here  $\mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$ ), and we call

$$b_k = \langle b, e_k \rangle_{(D(A)', D(A))},$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(D(A)', D(A))}$  is here the duality product between  $\mathcal{D}(A)'$  and  $\mathcal{D}(A)$  with pivot space  $H$ . It is well-known (see [HR83] and [Wei88]) that if  $\|(b_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_\infty < +\infty$  and if  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  is regular, then  $B$  is an admissible control operator. From now on, we will always assume that  $T$  is small enough (for example  $T \in (0, 1)$ ). In the case where  $A$  is positive, our main result is the following:

#### Theorem 5.1.1.

1. Assume that  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  is a regular increasing sequence of strictly positive numbers verifying moreover that there exist some  $\alpha \geq 2$  and some  $R > 0$  such that

$$\lambda_n = Rn^\alpha + O(n^{\alpha-1}), \quad (5.1.3)$$

and assume that  $b_k \simeq 1$  (in the sense that the sequence  $(|b_k|)_{k \in \mathbb{N}}$  is bounded from below and above by strictly positive constants). Then system (5.1.2) is null controllable. Moreover, the cost of the control verifies

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{(RT)^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ for every } K > \frac{2^{1/(\alpha-1)} 3(\alpha-1)\pi^{\alpha/(\alpha-1)}}{((\alpha \sin(\pi/\alpha))^{\alpha/(\alpha-1)})}. \quad (5.1.4)$$

2. Assume that  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  is a regular increasing sequence of strictly positive numbers verifying moreover that there exists some  $\alpha > 1$  and some constant  $R > 0$  such that (5.1.3) holds. Assume that  $b_k \simeq 1$ . Then system (5.1.1) is null controllable. Moreover, the control can

be chosen in the space  $C^0([0, T], U)$  and the cost of the control (in norm  $L^\infty(0, T)$ , so this is also true in  $L^2(0, T)$ ) verifies

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{(RT)^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ for every } K > \frac{2^{1/(\alpha-1)}\mathfrak{z}(\alpha-1)\pi^{\alpha/(\alpha-1)}}{(2\alpha \sin(\pi/(2\alpha)))^{\alpha/(\alpha-1)}}. \quad (5.1.5)$$

(the implicit constant in the previous inequalities might depend on  $\alpha$  but not on  $T$ ).

*Remark 5.1.1.* In the case  $\alpha = 2$ , we obtain exactly the results of [TT07].

As we will see, we will need for applications in the dispersive case to consider operators  $A$  that are not necessarily positive. In the following theorem, we assume that  $A$  is self-adjoint with compact resolvent (but not necessarily positive) with a family of eigenvalues  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  verifying that  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  as  $n \rightarrow +\infty$  and  $\lambda_n \rightarrow -\infty$  as  $n \rightarrow -\infty$ , and we consider the corresponding dispersive system (5.1.2) (of course, the corresponding “parabolic” system (5.1.1) cannot be considered).

**Theorem 5.1.2.** *Assume that the sequence of increasing eigenvalues  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  of  $A$  is a regular sequence of non-zero numbers verifying moreover that there exist some  $\alpha > 1$  and some constant  $R > 0$  such that*

$$\begin{cases} \lambda_n = Rn^\alpha + \underset{n \rightarrow \infty}{O}(n^{\alpha-1}), & n > 0, \\ \lambda_{-n} = -Rn^\alpha + \underset{n \rightarrow \infty}{O}(n^{\alpha-1}), & n < 0, \\ \operatorname{sgn}(\lambda_n) = \operatorname{sgn}(n), \end{cases} \quad (5.1.6)$$

and assume that  $b_k \simeq 1$ . Then system (5.1.2) is null controllable. Moreover, the cost of the control verifies

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{(RT)^{1/(\alpha-1)}}}, \text{ for every } K > \frac{2^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}\mathfrak{z}(\alpha-1)\pi^{\alpha/(\alpha-1)}}{((\alpha \sin(\pi/(\alpha)))^{\alpha/(\alpha-1)})}.$$

(the implicit constant in the previous inequalities might depend on  $\alpha$  but not on  $T$ )

We are also going to prove that the power of  $1/T$  involved in the expression of the cost is optimal in the following sense:

**Theorem 5.1.3.** *With the same notations and under the same hypothesis as in Theorems 5.1.1 and 5.1.2, the power of  $1/T$  involved in the exponential is optimal, in the sense that there exists some constant  $C > 0$  such that in both cases of (5.1.1) and (5.1.2) one has*

$$e^{\frac{C}{T^{1/(\alpha-1)}}} \lesssim C_T. \quad (5.1.7)$$

(the implicit constant in the previous inequality might depend on  $\alpha$  but not on  $T$ )

## 5.2 Proofs of Theorems 5.1.1-5.1.3

### 5.2.1 Proof of Theorem 5.1.1

The following lemma is a refinement of the estimates proved in [FR71, Lemma 3.1] and is strongly inspired by [TT07, Lemma 4.1].



**Lemma 5.2.1.** *Let  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  be a regular increasing sequence of strictly positive numbers verifying moreover that there exists some  $\alpha \geq 2$  and some constant  $R > 0$  such that (5.1.3) holds.*

Let  $\Phi_n$  be defined as follows:

$$\Phi_n(z) := \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k - \lambda_n}\right).$$

Then

1. If  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\Phi_n(z) \lesssim e^{\frac{\pi}{\sqrt{R} \sin(\pi/\alpha)} |z|^{\frac{1}{\alpha}}} P(|z|), \quad (5.2.1)$$

where  $P$  is a polynomial.

2. If  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi_n(-ix - \lambda_n) \lesssim e^{\frac{\pi}{2\sqrt{R} \sin(\pi/2\alpha)} |x|^{\frac{1}{\alpha}}} \bar{P}(\lambda_n, |x|), \quad (5.2.2)$$

where  $\bar{P}$  is a polynomial.

(In the previous inequalities, the implicit constant may depend on  $\alpha$  but not on  $z$ ,  $x$  or  $n$ )

*Remark 5.2.1.* One can see numerically that inequalities (5.2.1) and (5.2.2) are optimal for  $\alpha \geq 2$ , but are false for  $\alpha \in (1, 2)$  (but one could find a less precise estimate).

**Proof of Lemma 5.2.1.** Without loss of generality, we can assume that  $R = 1$  (one can go back to the general case by an easy scaling argument). We have then the existence of some constant  $C > 0$  such that  $|\lambda_n - n^\alpha| \leq Cn^{\alpha-1}$ . From now on we call  $\gamma := \gamma((\lambda_n)_{n \geq 1})$ . As in [TT07, Page 81], one has

$$\ln |\Phi_n(z)| \leq \int_0^{|z|} \int_\gamma^\infty \frac{L_n(s)}{(t+s)^2} ds dt, \quad (5.2.3)$$

where

$$L_n(s) := \#\{k \mid |\lambda_k - \lambda_n| \leq s\}.$$

Let us estimate precisely  $L_n(s)$ .

One has

$$|\lambda_k - \lambda_n| \leq s$$

if and only if

$$\lambda_k - \lambda_n \leq s \quad (5.2.4)$$

and

$$\lambda_n - \lambda_k \leq s. \quad (5.2.5)$$

1. Assume that (5.2.4) holds. Then

$$k^{\alpha-1}(k - C) \leq \lambda_n + s.$$

Let

$$\bar{R}(X) = X^{\alpha-1}(X - C).$$

We call  $D = \lambda_n + s$ . By studying function  $\bar{R}$ , we see that  $\bar{R}(0) = 0$ ,  $\bar{R}(+\infty) = +\infty$  and that  $\bar{R}$  is strictly decreasing on  $[0, C(1 - 1/\alpha)]$  and then strictly increasing on  $[C(1 - 1/\alpha), \infty)$ . Hence the equation  $\bar{R}(X) = D$  has a unique solution  $\tilde{X}$  for  $n$  sufficiently large and the inequality  $\bar{R}(X) \leq D$  is equivalent to  $0 \leq X \leq \tilde{X}$ . Moreover,

$$\bar{R}(D^{\frac{1}{\alpha}}) - D = -CD^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} < 0$$

and

$$\bar{R}(D^{\frac{1}{\alpha}} + C) - D = (D^{\frac{1}{\alpha}} + C)^{\alpha-1}D^{\frac{1}{\alpha}} - D = D((1 + CD^{-\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1} - 1) > 0.$$

So  $\tilde{X} \in [D^{1/\alpha}, D^{1/\alpha} + C]$  and

$$0 \leq k \leq \tilde{X}$$

implies

$$k \leq (\lambda_n + s)^{\frac{1}{\alpha}} + C. \quad (5.2.6)$$

2. Assume now that (5.2.5) holds.

$$\lambda_n - s \leq k^{\alpha-1}(k + C). \quad (5.2.7)$$

We call  $E = \lambda_n - s$ . If  $\lambda_n - s < 0$  then inequality (5.2.7) is always true. If  $\lambda_n - s \geq 0$ , we introduce

$$\tilde{R}(X) = X^{\alpha-1}(X + C).$$

By studying function  $\tilde{R}$ , we see that  $\tilde{R}(0) = 0$ ,  $\tilde{R}(+\infty) = +\infty$  and that  $\tilde{R}$  is strictly increasing on  $[0, \infty)$ . Hence the equation  $\tilde{R}(X) = E$  has a unique solution  $\bar{X} \in [0, \infty)$  and the inequality  $\tilde{R}(X) \geq E$  is equivalent to  $X \geq \bar{X}$ . Moreover,

$$\tilde{R}(E^{\frac{1}{\alpha}}) - E = CE^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} > 0$$

and

$$\tilde{R}((E^{\frac{1}{\alpha}} - C)^+) - E = ((E^{\frac{1}{\alpha}} - C)^+)^{\alpha-1}E^{\frac{1}{\alpha}} - E = E(((1 - CE^{-\frac{1}{\alpha}})^+)^{\alpha-1} - 1) < 0.$$

So

$$\bar{X} \in [E^{1/\alpha} - C, E^{1/\alpha}]$$

and  $k \geq \bar{X}$  implies

$$k \geq ((\lambda_n - s)^{\frac{1}{\alpha}} - C)^+ \geq ((\lambda_n - s)^{\frac{1}{\alpha}} - C). \quad (5.2.8)$$

Finally, if we have simultaneously the conditions (5.2.4) and (5.2.5), then combining inequalities (5.2.6) and (5.2.8) necessarily

$$k \in [((\lambda_n - s)^+)^{\frac{1}{\alpha}} - C, (\lambda_n + s)^{\frac{1}{\alpha}} + C]$$

and

$$L_n(s) \leq (\lambda_n + s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((\lambda_n - s)^+)^{\frac{1}{\alpha}} + 2C. \quad (5.2.9)$$

Finally, from (5.2.3) and (5.2.9),

$$|\Phi_n(z)| \lesssim (1 + |z|/\gamma)^{2C} e^{\int_0^{|z|} \int_\gamma^\infty \frac{(\lambda_n+s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((\lambda_n-s)^+)^{\frac{1}{\alpha}}}{(t+s)^2} ds dt}. \quad (5.2.10)$$

One has (using the change of variables  $v = s/\lambda_n$  for the last inequality)

$$\begin{aligned} \int_0^{|z|} \int_\gamma^\infty \frac{(\lambda_n+s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((\lambda_n-s)^+)^{\frac{1}{\alpha}}}{(t+s)^2} ds dt &\leq |z| \int_\gamma^\infty \frac{(\lambda_n+s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((\lambda_n-s)^+)^{\frac{1}{\alpha}}}{s(s+|z|)} ds \\ &\leq \frac{|z|}{\lambda_n^{1-\frac{1}{\alpha}}} (U(\frac{|z|}{\lambda_n}) + V(\frac{|z|}{\lambda_n})), \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

where

$$U(x) := \int_0^1 \frac{(1+v)^{\frac{1}{\alpha}} - (1-v)^{\frac{1}{\alpha}}}{v(v+x)} dv \quad (5.2.12)$$

and

$$V(x) := \int_1^\infty \frac{(v+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{v(v+x)} dv. \quad (5.2.13)$$

To prove inequality (5.2.1), in view of (5.2.10) and (5.2.11) it is now enough to prove

$$x^{1-\frac{1}{\alpha}} (U(x) + V(x)) \leq \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{\alpha})} \quad (5.2.14)$$

for every  $x \geq 0$ .

Let us now prove inequality (5.2.14). Let us first study  $x^{1-1/\alpha}V(x)$ . We remark that

$$x^{1-1/\alpha}V(x) = x^{1-1/\alpha} \int_1^\infty \frac{(v+1)^{\frac{1}{\alpha}}}{v(v+x)} dv = \int_1^\infty \frac{(v/x + 1/x)^{\frac{1}{\alpha}}}{v(v/x + 1)} dv.$$

By considering the change of variables  $t = x/v$ , we obtain

$$x^{1-1/\alpha}V(x) = \int_0^x \frac{(1/t + 1/x)^{\frac{1}{\alpha}}}{1+t} dt. \quad (5.2.15)$$

Similarly one has

$$x^{1-1/\alpha}U(x) = \int_x^\infty \frac{(1/t + 1/x)^{\frac{1}{\alpha}} - (1/x - 1/t)^{\frac{1}{\alpha}}}{1+t} dt. \quad (5.2.16)$$

Using the dominated convergence Theorem, one proves easily that

$$x^{1-1/\alpha}V(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{1}{\alpha}}(1+t)}$$

and

$$x^{1-1/\alpha}U(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Let us call

$$I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{1}{\alpha}}(1+t)}.$$

One can compute explicitly this integral.

**Lemma 5.2.2.** *Let  $x > 1$ . Then*

$$I(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi/x)}.$$

**Proof of Lemma 5.2.2.** We remind the following Definition of the Euler Beta function  $B$  (see [OLBC10, Page 142, 5.12.3]):

$$B(x, y) := \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt.$$

We then have

$$I(x) = B(1 - 1/x, 1/x). \quad (5.2.17)$$

Using the link between the  $B$  function and the  $\Gamma$  function, we obtain

$$B(1 - 1/x, 1/x) = \frac{\Gamma(1 - 1/x)\Gamma(1/x)}{\Gamma(1 - 1/x + 1/x)} = \Gamma(1 - 1/x)\Gamma(1/x). \quad (5.2.18)$$

Using the Euler reflection formula (which can be applied here because  $1/x \in (0, 1)$ ), we obtain the desired result.  $\blacksquare$

We will prove that for every  $x > 0$  one has

$$x^{1-\frac{1}{\alpha}}(U(x) + V(x)) \leq I(\alpha). \quad (5.2.19)$$

Let us remark that one can compute explicitly  $V$  in terms of linear combining of hypergeometric functions: one can use for example Mathematica to check that

$$\begin{aligned} x^{1-1/\alpha}V(x) &= -\alpha x^{-1/\alpha} {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, -1) \\ &\quad + \alpha(1 + 1/x)^{1/\alpha} {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, (x - 1)/(x + 1)), \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

where  ${}_2F_1$  is the ordinary hypergeometric function. It is then easy to prove that for every  $\alpha \geq 2$ ,  $x \mapsto x^{1-1/\alpha}V$  is increasing by differentiating (5.2.20) with respect to  $x$ . Let us consider two different cases:

1. Assume  $x < 1$ . In this case,

$$x^{1-1/\alpha}V(x) \leq -\alpha {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, -1) + \alpha 2^{1/\alpha}. \quad (5.2.21)$$

We remark (by differentiating  $x^{1-1/\alpha}U(x)$  with respect to  $\alpha$  in expression (5.2.16)) that  $\alpha \mapsto x^{1-1/\alpha}U(x)$  is increasing, so

$$x^{1-1/\alpha}U(x) \leq \sqrt{x} \int_0^1 \frac{(1+v)^{\frac{1}{2}} - (1-v)^{\frac{1}{2}}}{v(v+x)} dv \leq 1. \quad (5.2.22)$$

(the last inequality in (5.2.22) can be checked numerically for  $x \in [0, 1]$ )

We also have (the function  $\alpha \mapsto {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, -1)$  is increasing)

$$-\alpha {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, -1) \leq -\alpha {}_2F_1(-1/2, -1/2, 1 - 1/2, -1) \leq -0.52\alpha. \quad (5.2.23)$$

Combining (5.2.21), (5.2.22) and (5.2.23), we deduce

$$x^{1-1/\alpha}(U(x) + V(x)) \leq 1 + \alpha 2^{1/\alpha} - 0.52\alpha.$$

We just have to prove that

$$1 - 0.52\alpha + \alpha 2^{1/\alpha} \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}. \quad (5.2.24)$$

One verifies numerically that (5.2.24) it is true for  $\alpha \in [2, 3]$ , and one verifies easily by differentiating the expression with respect to  $\alpha$  that  $\alpha \mapsto 1 - 0.52\alpha + \alpha 2^{1/\alpha} - \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}$  is decreasing at least on  $(3, \infty)$ . Inequality (5.2.19) is proved at least for  $x < 1$ .

2. Assume  $x \geq 1$ . We have (the equality can be easily obtained thanks to Mathematica for example)

$$\begin{aligned} x^{1-1/\alpha}U(x) &\leq x^{-1/\alpha} \int_0^1 \frac{(1+v)^{\frac{1}{\alpha}} - (1-v)^{\frac{1}{\alpha}}}{v} dv \\ &= x^{-1/\alpha}(H_{1/\alpha} + {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, -1)), \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

where we call  $H_{1/\alpha}$  the (generalized) harmonic number of order  $1/\alpha$ . We have

$$H_{1/\alpha} \leq H_{1/2} \leq 0.62. \quad (5.2.26)$$

Using (5.2.20), (5.2.25) and (5.2.26), we deduce

$$x^{1-1/\alpha}(U(x) + V(x)) \leq x^{-1/\alpha}A(\alpha) + B(x) \quad (5.2.27)$$

with

$$A(\alpha) = (0.62 - \alpha) {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, -1)$$

and

$$B(x) = \alpha(1 + 1/x)^{1/\alpha} {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, (x-1)/(x+1)).$$

One has  $A(\alpha) < 0$ , moreover, one easily proves that  $B$  is increasing with respect to  $x$  and tends to  $\alpha {}_2F_1(-1/\alpha, -1/\alpha, 1 - 1/\alpha, 1) = I(\alpha)$ . Hence inequality (5.2.27) implies that inequality (5.2.19) is also proved for  $x \geq 1$  and finally (5.2.14) is proved.  $\blacksquare$

Inequality (5.2.2) is easier to prove. Doing as in [TT07, Page 83], we have

$$|\Phi_n(-ix - \lambda_n)|^2 = \prod_{k \neq n} \frac{|1 + ix/\lambda_k|^2}{(1 - \lambda_n/\lambda_k)^2} = B_n^2 \prod_{k \neq n} |1 + x^2/\lambda_k^2| \quad (5.2.28)$$

where

$$B_n := \prod_{k \neq n} (1 - \lambda_n/\lambda_k)^{-1}.$$

Let us remark that

$$\sum_{k \geq 1} \ln(1 + x^2/\lambda_k^2) = \int_0^{|x|^2/\lambda_1^2} \frac{M(t)}{1+t} dt, \quad (5.2.29)$$

where

$$M(t) := \sum_{\lambda_k \leq |x|/\sqrt{t}} 1.$$

One easily observe using same computations as before that

$$M(t) \leq |x|^{\frac{1}{\alpha}} t^{-1/(2\alpha)} + C. \quad (5.2.30)$$

We then obtain, using (5.2.29) and (5.2.30),

$$\sum_{k \geq 1} \ln(1+x^2/\lambda_k^2) \leq C \ln(1+|x|^2/\lambda_1^2) + |x|^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1/(2\alpha)}(1+t)} dt \leq C \ln(1+|x|^2/\lambda_1^2) + |x|^{\frac{1}{\alpha}} I(2\alpha).$$

We deduce by Lemma 5.2.2 and (5.2.28) that

$$\Phi_n(-ix - \lambda_n) \lesssim B_n(1 + |x|^2/\lambda_1^2)^{C/2} e^{\pi|x|^{\frac{1}{\alpha}}/(2\sin(\pi/(2\alpha)))}$$

and it can be proved that  $B_n$  is at most polynomial in  $\lambda_n$  (the computations are the same as in [TT07, Pages 83-84]) as wished. This proves inequality (5.2.2).  $\blacksquare$

Now, we study the multiplier, which is very similar to the one studied in [TT07]. Let  $\nu > 0$  and  $\beta > 0$  be linked by the following relation:

$$\beta\nu^{\alpha-1} = (4(\alpha-1))^{\alpha-1} \left( \frac{\pi + \delta}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \right)^\alpha, \quad (5.2.31)$$

where  $\delta > 0$  is a small parameter.

We call

$$\sigma_\nu(t) := \exp\left(-\frac{\nu}{(1-t^2)}\right)$$

prolonged by 0 outside  $(-1; 1)$ .  $\sigma_\nu$  is analytic on  $B(0, 1)$ . We call

$$H_\beta(z) := C_\nu \int_{-1}^1 \sigma_\nu(t) e^{-i\beta tz} dt,$$

where

$$C_\nu := 1/\|\sigma_\nu\|_1.$$

Thanks to [TT07, Lemma 4.3], we have

$$H_\beta(0) = 1, \quad (5.2.32)$$

$$H_\beta(ix) \gtrsim \frac{e^{\beta|x|/(2\sqrt{\nu+1})}}{\sqrt{\nu+1}}, \quad (5.2.33)$$

$$\frac{1}{2}e^\nu \leq C_\nu \leq \frac{3}{2}\sqrt{\nu+1}e^\nu, \quad (5.2.34)$$

$$|H_\beta(z)| \leq e^{\beta|Im(z)|}. \quad (5.2.35)$$

The main estimate is the following:

**Lemma 5.2.3.** *For  $x \in \mathbb{R}$ , we have*

$$H_\beta(x) \lesssim \sqrt{\nu+1} e^{3\nu/4 - ((\pi+\delta/2)|x|^{\frac{1}{\alpha}})/(\sin(\pi/\alpha))}.$$

(The implicit constant may depend on  $\alpha$ )

*Remark 5.2.2.* Lemma 5.2.3 is false for  $\alpha \in (1, 2)$ . This explains why we were not able to extend Theorem 5.1.1 to the case where  $\alpha \in (1, 2)$ . However, we know that systems like (5.1.1) and (5.1.2) are null controllable as soon as  $\alpha > 1$ , so one can conjecture that there is a way to extend the previous estimates for  $\alpha \in (1, 2)$ .

**Proof of Lemma 5.2.3.** First of all, consider some  $t \in [0, 1)$  and  $\theta \in (-\pi, \pi)$ . We call  $\rho := 1 - t$  and  $z := t + \rho e^{i\theta}$ . One has (see [TT07, Page 85])

$$\operatorname{Re} \frac{1}{1 - z^2} \geq \frac{1}{4\rho} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4\rho^{1/(\alpha-1)}} + \frac{1}{4},$$

because  $\rho \leq 1$  and  $\alpha \geq 2$ . So, doing as in [TT07], we obtain by applying the Cauchy formula for holomorphic functions

$$|\sigma_\nu^{(j)}(t)| \leq j! e^{-\frac{\nu}{4}} \sup_{\rho > 0} \frac{e^{-\frac{1}{4\rho^{1/(\alpha-1)}}}}{\rho^j}.$$

Computing the supremum on  $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ , we obtain

$$|\sigma_\nu^{(j)}(t)| \leq j! e^{-\frac{\nu}{4}} e^{-(\alpha-1)j} \left( \frac{4(\alpha-1)j}{\nu} \right)^{(\alpha-1)j}, \quad t \in [0, 1). \quad (5.2.36)$$

Using the fact that  $\sigma_\nu$  is even, inequality (5.2.36) is true for every  $t \in (-1, 1)$ . Using inequality  $j! > j^j e^{-j}$  in (5.2.36), we obtain

$$|\sigma_\nu^{(j)}(t)| \leq (j!)^\alpha e^{-\frac{\nu}{4}} \left( \frac{4(\alpha-1)}{\nu} \right)^{(\alpha-1)j}. \quad (5.2.37)$$

Since all derivatives of  $\sigma_\nu$  vanish at  $t = -1$  and  $t = 1$ , we have

$$|H_\beta(x)| \leq \frac{2C_\nu \|\sigma_\nu^{(j)}\|_\infty}{(\beta x)^j}, \quad (5.2.38)$$

for every  $x > 0$  and  $j \in \mathbb{N}$ . Combining (5.2.37), (5.2.38) and (5.2.34), we deduce that

$$|H_\beta(x)| \lesssim \sqrt{\nu+1} (j!)^\alpha e^{\frac{3\nu}{4}} \frac{(4(\alpha-1))^{(\alpha-1)j}}{(\beta x)^j}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5.2.39)$$

We set

$$j := \lfloor (1/a)(\beta x)^{1/\gamma} \rfloor \quad (5.2.40)$$

with some constants  $a$  and  $\gamma$  which will be chosen correctly soon. Then we have

$$\beta x \geq (aj)^\gamma. \quad (5.2.41)$$

Using (5.2.41) and (5.2.39) we obtain

$$|H_\beta(x)| \lesssim \sqrt{\nu+1} (j!)^\alpha e^{\frac{3\nu}{4}} \frac{4^{(\alpha-1)j}}{(aj)^{\gamma j}}. \quad (5.2.42)$$

We choose  $\gamma = \alpha$  and  $a = (4(\alpha-1))^{1-1/\alpha}$ . Combining (5.2.42), (5.2.40), (5.2.31) and inequality

$$(j!)^\alpha \lesssim j^{\alpha/2} j^{\alpha j} e^{-\alpha j}, \quad (5.2.43)$$

we deduce

$$|H_\beta(x)| \lesssim \sqrt{\nu+1} e^{\frac{3\nu}{4}} e^{-\alpha j} j^{\alpha/2} \leq \sqrt{\nu+1} e^{\frac{3\nu}{4}} e^{-(\pi+\delta/2)/(\sin(\pi/\alpha))|x|^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

■

**Proof of Theorem 5.1.1.**

The proof follows the proof of [TT07, Theorem 3.1 and 3.4]. We still assume without loss of generality that  $R = 1$ . Let us first consider the dispersive case (Equation (5.1.2)). We call

$$g_n(z) := \Phi_n(-z - \lambda_n)H_\beta(z + \lambda_n). \quad (5.2.44)$$

We want to apply at the end the Paley-Wiener Theorem (see estimate (5.2.35)) in an optimal way, so we want  $\beta$  to be close to  $T/2$ . Assume that  $\beta < T/2$  and close to  $T/2$ , for example

$$\beta = \frac{T(1 - \delta)}{2}. \quad (5.2.45)$$

One has  $g_n(-\lambda_k) = \delta_{kn}$ . Moreover, thanks to (5.2.44), (5.2.1), Lemma 5.2.3, (5.2.31) and (5.2.45)

$$|g_n(x)| \lesssim e^{\frac{3\nu}{4} + \pi/\sin(\pi/\alpha)|x+\lambda_n|^{\frac{1}{\alpha}} - (\pi+\delta/2)/\sin(\pi/\alpha)|x+\lambda_n|^{\frac{1}{\alpha}}} P(|x + \lambda_n|) \quad (5.2.46)$$

$$\lesssim e^{\frac{3\nu}{4} - \delta/(2\sin(\pi/\alpha))|x+\lambda_n|^{\frac{1}{\alpha}}} P(|x + \lambda_n|) \quad (5.2.47)$$

$$\lesssim \frac{e^{3(\alpha-1)(\pi+\delta)^{\alpha/(\alpha-1)}/((\alpha\sin(\pi/\alpha))^{\alpha/(\alpha-1)}\beta^{1/(\alpha-1)})}}{1 + (x + \lambda_n)^2} \quad (5.2.48)$$

$$\lesssim \frac{e^{2^{1/(\alpha-1)}3(\alpha-1)(\pi+\delta)^{\alpha/(\alpha-1)}/((\alpha\sin(\pi/\alpha))^{\alpha/(\alpha-1)}(T(1-\delta))^{1/(\alpha-1)})}}{1 + (x + \lambda_n)^2}. \quad (5.2.49)$$

Let us fix some

$$K > 3(\alpha - 1)2^{1/(\alpha-1)}\pi^{\alpha/(\alpha-1)}/(\alpha\sin(\pi/\alpha))^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Considering  $\delta$  as close as 0 as needed, we deduce that

$$|g_n(x)| \lesssim \frac{e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}}}{1 + (x + \lambda_n)^2} \quad (5.2.50)$$

This notably proves that  $g_n \in L^2(\mathbb{R})$ . Moreover, using (5.2.1), (5.2.44), (5.2.45) and (5.2.35), we obtain

$$|g_n(z)| \lesssim e^{T|z|/2}.$$

Hence, using the Paley-Wiener Theorem,  $g_n$  is the Fourier transform of a function  $f_n \in L^2(\mathbb{R})$  with compact support  $[-T/2, T/2]$ . Moreover, by construction  $\{f_n\}$  is biorthogonal to the family  $\{e^{i\lambda_n t}\}$ . Then, one can create the control thanks to the family  $\{f_n\}$ . Let us consider  $y^0 = \sum a_k e_k$  the initial condition, we call

$$u(t) := - \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k/b_k) e^{-iT\lambda_k/2} f_k(t - T/2). \quad (5.2.51)$$

This expression is meaningful since  $b_k \simeq 1$ , moreover the corresponding solution  $y$  of (5.1.2) verifies  $y(T, \cdot) \equiv 0$ . Using the Minkovski inequality, Parseval equality, (5.2.51),  $b_k \simeq 1$  and (5.2.50), we obtain

$$\|u(t)\|_{L^2(0,T)} \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}} \left( \sum |a_k|^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1 + (x + \lambda_n)^2)^2} \right)^{1/2} \right) \quad (5.2.52)$$

$$\lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}} (\pi/2 \sum |a_k|^2)^{1/2} \quad (5.2.53)$$

$$\lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}} \|y^0\|_H. \quad (5.2.54)$$



We now consider the parabolic case (Equation (5.1.1)). We call

$$h_n(z) := \frac{\Phi_n(-iz - \lambda_n)H_\beta(z \sin(\pi/\alpha)^\alpha/(2 \sin(\pi/(2\alpha))^\alpha))}{H_\beta(i\lambda_n \sin(\pi/\alpha)^\alpha/(2 \sin(\pi/(2\alpha))^\alpha))}. \quad (5.2.55)$$

Assume that

$$\beta < \frac{T(2 \sin(\pi/2\alpha))^\alpha}{2 \sin(\pi/(\alpha))^\alpha}$$

and close to

$$\frac{T(2 \sin(\pi/2\alpha))^\alpha}{2(\sin(\pi/(\alpha))^\alpha)},$$

for example

$$\beta = \frac{(1 - \delta)T(2 \sin(\pi/2\alpha))^\alpha}{2 \sin(\pi/(\alpha))^\alpha}. \quad (5.2.56)$$

One has  $h_n(i\lambda_k) = \delta_{kn}$ . Moreover, thanks to (5.2.55), (5.2.2), (5.2.33), Lemma 5.2.3, (5.2.31) and (5.2.56), one has

$$|h_n(x)| \lesssim (\nu + 1)e^{\frac{3}{4}\nu + \pi/(2 \sin(\pi/2\alpha))|x|^{\frac{1}{\alpha}} - ((\pi + \delta/2)/(2 \sin(\pi/2\alpha))|x|^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\beta|\lambda_n|}{2\sqrt{\nu+1}})} \overline{P}(|x|, |\lambda_n|) \quad (5.2.57)$$

$$\lesssim (\nu + 1)e^{\frac{3}{4}\nu - \delta/(2 \sin(\pi/2\alpha))|x|^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\beta\lambda_n}{2\sqrt{\nu+1}}} P(|x|, \lambda_n) \quad (5.2.58)$$

$$\lesssim (\nu + 1) \frac{e^{3(\alpha-1)(\pi+\delta)^{\alpha/(\alpha-1)}/((2\alpha \sin(\pi/\alpha))^{\alpha/(\alpha-1)}\beta^{1/(\alpha-1)})}}{(1 + (x + \lambda_n)^2)} \quad (5.2.59)$$

$$\lesssim (\nu + 1) \frac{e^{3(\alpha-1)2^{1/(\alpha-1)}(\pi+\delta)^{\alpha/(\alpha-1)}/((2\alpha \sin(\pi/(2\alpha)))^{\alpha/(\alpha-1)}(T(1-\delta))^{1/(\alpha-1)})}}{(1 + (x + \lambda_n)^2)}. \quad (5.2.60)$$

Let us fix some

$$K > 3(\alpha - 1)2^{1/(\alpha-1)}\pi^{\alpha/(\alpha-1)}/((2\alpha \sin(\pi/(2\alpha)))^{\alpha/(\alpha-1)}).$$

Considering  $\delta$  as close as 0 as needed, we deduce that

$$|h_n(x)| \lesssim \frac{e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}}}{(1 + (x + \lambda_n)^2)}, \quad (5.2.61)$$

This notably implies that  $h_n(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  and

$$\|h_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}}. \quad (5.2.62)$$

Moreover, using (5.2.2), (5.2.55), (5.2.35) and (5.2.56)

$$|h_n(z)| \lesssim e^{T|z|/2},$$

so using the Paley-Wiener Theorem,  $h_n$  is the Fourier transform of a function  $w_n \in L^2(\mathbb{R})$  with compact support  $[-T/2, T/2]$ . Moreover, by construction  $\{w_n\}$  is biorthogonal to the family  $\{e^{-\lambda_n t}\}$ . Then, one can create the control thanks to the family  $\{h_n\}$ . Let us consider  $y^0 = \sum a_k e_k$  the initial condition, we call

$$u(t) := - \sum (a_k/b_k) e^{-T\lambda_k/2} w_k(t - T/2), \quad (5.2.63)$$

This expression is meaningful since  $b_k \simeq 1$ , moreover the corresponding solution  $y$  of (5.1.1) verifies  $y(T, \cdot) \equiv 0$ . One easily verifies that  $u \in C^0([0, T], \mathbb{R})$ . Using (5.2.63),  $|b_k| \simeq 1$  and inequality (5.2.62), we obtain

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0, T)} \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}} \sum |a_k| e^{-T\lambda_k/2}.$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality, one deduces

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0, T)} \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(\alpha-1)}}} \|y^0\|_H.$$

■

## 5.2.2 Proof of Theorem 5.1.2

We will not give the details of the proof of Theorem 5.1.2 because it is exactly the same as the one of Theorem 5.1.1. We just explain in details the modifications appearing in Lemma 5.2.1.

**Lemma 5.2.4.** *Let  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  be a regular increasing sequence of non-zeros numbers verifying moreover that there exists some  $\alpha \geq 2$  and some constant  $R > 0$  such that (5.1.6) holds. Let  $\Phi_n$  be defined as follows:*

$$\Phi_n(z) := \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k - \lambda_n}\right),$$

then

$$\Phi_n(z) \lesssim e^{\frac{2\pi}{\sqrt{R} \sin(\frac{\pi}{\alpha})} |z|^{\frac{1}{\alpha}}} P(|z|), \quad (5.2.64)$$

where  $P$  is a polynomial in  $|z|$ . (In the previous inequality, the implicit constant may depend on  $\alpha$  but not on  $z$  or  $n$ .)

**Proof of Lemma 5.2.4.** We use the same notations as in the proof of Lemma 5.2.1 and assume without loss of generality that  $R = 1$ . Let us give a new upper bound for  $L_n(s)$ .

Let  $s \geq 0$  and let us estimate  $\#\{k \mid |\lambda_k - \lambda_n| \leq s\}$ . If  $k$  and  $n$  have the same sign, we have necessarily (see the proof of Lemma 5.2.1 and (5.1.6))

$$\#\{k \mid |\lambda_k - \lambda_n| \leq s, \operatorname{sgn}(k) = \operatorname{sgn}(n)\} \leq (|\lambda_n| + s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((|\lambda_n| - s)^+)^{\frac{1}{\alpha}} + 2C. \quad (5.2.65)$$

If  $k$  and  $n$  have different sign, one can assume without loss of generality that  $k > 0$ , so that one has  $\lambda_k > 0$  and  $\lambda_n < 0$  (see (5.1.6)). If  $|\lambda_k - \lambda_n| \leq s$ , then necessarily  $\lambda_k \leq (s - |\lambda_n|)^+$ , i.e.

$$k^\alpha - Ck^{\alpha-1} \leq D,$$

with  $D = s - |\lambda_n|$ . Using the same reasoning as in the proof of Lemma 5.2.1, this implies that

$$k \leq ((|\lambda_n| - s)^+)^{\frac{1}{\alpha}} + C. \quad (5.2.66)$$

Finally, combining (5.2.65) and (5.2.66), we obtain

$$L_n(s) \leq (|\lambda_n| + s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((|\lambda_n| - s)^+)^{\frac{1}{\alpha}} + ((s - |\lambda_n|)^+)^{\frac{1}{\alpha}} + 3C. \quad (5.2.67)$$

We then have using (5.2.3) and (5.2.67)

$$|\Phi_n(z)| \lesssim (1 + |z|/\delta)^{3C} e^{\int_0^{|z|} \int_{\gamma((|\lambda_n|)_{n \geq 1})}^\infty \frac{((|\lambda_n| + s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((|\lambda_n| - s)^+)^{\frac{1}{\alpha}} + ((s - |\lambda_n|)^+)^{\frac{1}{\alpha}})}{(t+s)^2} ds dt}.$$

One has

$$\begin{aligned} & \int_0^{|z|} \int_\gamma^\infty \frac{(|\lambda_n| + s)^{\frac{1}{\alpha}} - ((|\lambda_n| - s)^+)^{\frac{1}{\alpha}} + ((s - |\lambda_n|)^+)^{\frac{1}{\alpha}}}{(t + s)^2} ds dt \\ & \leq \frac{|z|}{|\lambda_n|^{1-\frac{1}{\alpha}}} (U(\frac{|z|}{|\lambda_n|}) + V(\frac{|z|}{|\lambda_n|}) + W(\frac{|z|}{|\lambda_n|})), \end{aligned}$$

where  $U$  and  $V$  have already been defined in (5.2.12) and (5.2.13), and where

$$W(x) := \int_1^\infty \frac{(u-1)^{1/\alpha}}{u(u+x)} du.$$

Since we already proved by Lemma 5.2.2 and (5.2.19) that

$$x^{1-\frac{1}{\alpha}}(U(x) + V(x)) \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)},$$

Lemma 5.2.4 will be proved as soon as

$$x^{1-\frac{1}{\alpha}}W(x) \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}. \quad (5.2.68)$$

Using the change of variable  $u = 1/s$ , we obtain

$$W(x) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{1/\alpha}}{s^{1/\alpha}(1+sx)} ds = \int_0^1 \frac{(1-s)^{1/\alpha-1}}{s^{1/\alpha}} \frac{1-s}{1+sx} ds. \quad (5.2.69)$$

One has the equality

$$\frac{1-s}{1+sx} = \frac{1+x}{x(1+sx)} - \frac{1}{x}. \quad (5.2.70)$$

Replacing (5.2.70) in (5.2.69), we deduce

$$W(x) = \frac{1+x}{x} \int_0^1 \frac{(1-s)^{1/\alpha-1}}{s^{1/\alpha}(1+sx)} ds - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{(1-s)^{1/\alpha-1}}{s^{1/\alpha}} ds. \quad (5.2.71)$$

The usual definition of  $B$  (see [OLBC10, Page 142, 5.12.1]) gives

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{1/\alpha}}{s^{1/\alpha}} ds = B(1-1/\alpha, 1/\alpha). \quad (5.2.72)$$

Using Lemma 5.2.2, (5.2.19), (5.2.71), (5.2.72) and the symmetry of the  $B$  function, we deduce

$$W(x) = \frac{1+x}{x} \int_0^1 \frac{(1-s)^{1/\alpha-1}}{s^{1/\alpha}(1+sx)} ds - \frac{\pi}{x \sin(\pi/\alpha)}. \quad (5.2.73)$$

Using the change of variables  $u = 1/s$ , we have

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^{1/\alpha-1}}{s^{1/\alpha}(1+sx)} dt = \int_1^\infty \frac{(u-1)^{1/\alpha-1}}{(u+x)} du. \quad (5.2.74)$$

Using the change of variables  $s = u/(1+x)$ , Lemma 5.2.2, (5.2.19), and the symmetry of the Beta function, we obtain

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{(u-1)^{1/\alpha-1}}{u+x} du &= \int_0^\infty \frac{u^{1/\alpha-1}}{u+1+x} du = (1+x)^{1/\alpha-1} B(1/\alpha, 1-1/\alpha) \\ &= (1+x)^{1/\alpha-1} \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)}. \end{aligned} \quad (5.2.75)$$

Going back to (5.2.73) and using (5.2.74) and (5.2.75), we deduce

$$W(x) = \frac{\pi((x+1)^{\frac{1}{\alpha}} - 1)}{x \sin(\pi/\alpha)}.$$

Then, using also the inequality (true for  $x \geq 0$  and  $\alpha \geq 1$ )

$$(x+1)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \leq x^{\frac{1}{\alpha}},$$

we obtain (5.2.68). ■

### 5.2.3 Proof of Theorem 5.1.3

We follow the strategy given in [Güi85]. Without loss of generality we can assume that  $R = 1$  in (5.1.3) and (5.1.6). Looking carefully at this article, one observes that one could adapt the reasoning to equations (5.1.1) and (5.1.2). We treat the case of real or pure imaginary eigenvalues (of  $A$  or  $iA$ , see equations (5.1.1) and (5.1.2))  $\lambda_n$  or  $i\lambda_n$  with  $\lambda_n$  verifying (5.1.3) (one could easily adapt the reasoning to obtain the same results in the dispersive case with  $\lambda_n$  verifying (5.1.6)). We introduce  $(\mu_n) := (\lambda_n)$  in the parabolic case and  $(\mu_n) := (-i\lambda_n)$  in the dispersive case. We call

$$E(T) := \overline{\text{span}(\{e^{-\mu_n t} | n \in \mathbb{N}\})}^{L^2(0,T)},$$

$$E_m(T) := \overline{\text{span}(\{e^{-\mu_n t} | n \neq m\})}^{L^2(0,T)}.$$

We remark that using the results of [Sch43b] for the parabolic case and [Sch43a] for the dispersive case, if the sequence  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  verifies (5.1.3), then  $E(T)$  is a proper subspace of  $L^2(0, T)$  and  $e^{-\mu_m t} \notin E_m(T)$ . Moreover, if we call  $d_m(T)$  the distance between  $e^{-\mu_m t}$  and  $E_m(T)$  and  $r_m$  the orthogonal projection of  $e^{-\mu_m t}$  over  $E_m(T)$ , then the family  $\{\psi_m\}$  defined by

$$\psi_m(t) := \frac{e^{-\mu_m t} - r_m(t)}{d_m(T)^2}$$

is biorthogonal to the family of exponentials  $\{e^{-\mu_m t}\}$  (see [FR71] or [Güi85]), this can be easily generalized in the case of purely imaginary eigenvalues). One also has

$$\|\psi_m\|_{L^2(0,T)} = \frac{1}{d_m(T)}. \quad (5.2.76)$$

If  $y^0 := \sum a_k e_k$ , then the control  $u$  is given by

$$u(t) := - \sum a_k / b_k \psi_k(T - t) \quad (5.2.77)$$

and one can easily prove that this control is optimal in  $L^2(0, T)$ . We are now going to give an upper bound on  $d_m(T)$ , which would provide a lower bound on  $C_T$ . In all what follows,  $C(m)$  denotes some constant depending only on the integer  $m$  (and possibly on  $\alpha$ ) that may change from one line to another.

**Lemma 5.2.5.** *For every  $m \in \mathbb{N}$ , there exists some numerical constant  $a(m)$  and some constant  $C(m)$  such that*

$$d_m(T) \leq C(m) T^{1/2} (j!)^{\alpha-1} (a(m)T)^j \quad (5.2.78)$$

holds for  $j \in \mathbb{N}$  and  $T > 0$ .

*Remark 5.2.3.* As before, we are not able to extend this Lemma to the case where  $\alpha \in (1, 2)$  (precisely because of estimate (5.2.86) which is false in this case), and hence we are not able to extend Theorem 5.1.3 to this case.

**Proof of Lemma 5.3.2.** Following [Güi85], we only treat the case  $j \geq m$  (inequality (5.2.78) has only an interest for large  $j$  because if we prove it for  $j \geq m$  then it is automatically true for  $j < m$  by increasing the constant  $C(m)$  in front of the right-hand side if necessary). One can prove (by considering a finite number of modes, see (4.9) in [Güi85]) that for every  $j \geq 1$  one has

$$d_m(T) \leq \frac{T^{j+\frac{1}{2}}}{j! \sqrt{2j+1}} \prod_{r=1}^{m-1} |\lambda_r - \lambda_m| \prod_{r=m}^j |\lambda_{r+1} - \lambda_m|. \quad (5.2.79)$$

For  $k, l \in \mathbb{N}$  one has

$$|\lambda_k - \lambda_l| \leq |k^\alpha - l^\alpha| + C(k^{\alpha-1} + l^{\alpha-1}). \quad (5.2.80)$$

We deduce from (5.2.80) that

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^{m-1} |\lambda_r - \lambda_m| \prod_{r=m}^j |\lambda_{r+1} - \lambda_m| \\ \leq & \prod_{r=1}^{m-1} |r^\alpha - m^\alpha| \left(1 + C \frac{(r^{\alpha-1} + m^{\alpha-1})}{r^\alpha - m^\alpha}\right) \prod_{r=m}^j |(r+1)^\alpha - m^\alpha| \left(1 + C \frac{((r+1)^{\alpha-1} + m^{\alpha-1})}{(r+1)^\alpha - m^\alpha}\right). \end{aligned} \quad (5.2.81)$$

For every  $m \in \mathbb{N}$ , there exists some  $C(m) > 0$  such that for every  $j \neq m$ ,

$$1 + C \frac{(j^{\alpha-1} + m^{\alpha-1})}{j^\alpha - m^\alpha} \leq 1 + \frac{C(m)}{j}. \quad (5.2.82)$$

Using (5.2.79), (5.2.80), (5.2.81) and (5.2.82), we deduce that

$$d_m(T) \leq C(m) \frac{T^{j+\frac{1}{2}}}{j! \sqrt{2j+1}} \prod_{r=m}^j (1 + C(m)/r) |(r+1)^\alpha - m^\alpha|. \quad (5.2.83)$$

One has  $\sum_{r=m}^j \ln(1 + C(m)/r) \sim C(m) \ln(j)$  as  $j \rightarrow \infty$  so

$$\prod_{r=m}^j (1 + C(m)/r) \lesssim j^{C(m)}. \quad (5.2.84)$$

Let us study the quantities of the form  $k^\alpha - l^\alpha$  with  $k \geq l$ .

$$|k^\alpha - l^\alpha| = k^\alpha \left|1 - \frac{l^\alpha}{k^\alpha}\right|. \quad (5.2.85)$$

One easily verifies that the following inequality holds for  $\alpha \geq 2$  and  $x \in [0, 1]$ :

$$1 - x^\alpha \leq (1+x)^{\alpha-1} (1-x). \quad (5.2.86)$$

We deduce from (5.2.85) and (5.2.86) (the constant  $C(m)$  may change from one line to another)

$$\prod_{r=m}^j |(r+1)^\alpha - m^\alpha| \quad (5.2.87)$$

$$\leq \prod_{r=m}^j (r+1-m)(r+1+m)^{\alpha-1} \quad (5.2.88)$$

$$\leq C(m)(j+1-m)!((j+1+m)!)^{\alpha-1}. \quad (5.2.89)$$

Using the computations above, inequality (true for  $j \geq m$ )

$$(j+1+m)! \leq C(m)j^{C(m)}j!,$$

(5.2.83) and (5.2.84), we deduce that

$$d_m(T) \leq C(m)j^{C(m)}(j!)^{\alpha-1}T^{j+\frac{1}{2}},$$

so that (5.2.78) holds if we choose  $a(m) > 0$  large enough such that  $j^{C(m)} \leq a(m)^j$ . ■

We deduce, using (5.2.76) and (5.2.78), that for every  $j \in \mathbb{N}$  one has

$$\|\psi_m\|_{L^2(0,T)} \geq \frac{1}{C(m)T^{1/2}(j!)^{\alpha-1}(a(m)T)^j}. \quad (5.2.90)$$

Using equality (5.2.77) with initial condition eigenvector  $e_m$  and the following inequality true for  $j$  large enough

$$j! \leq j^j e^{-j/2},$$

and choosing (with  $T$  small enough)

$$j := \lceil (1/(a(m)T))^{\frac{1}{\alpha-1}} \rceil,$$

one easily proves using inequality (5.2.90) that (5.1.7) holds. ■

## 5.3 Applications

### 5.3.1 Linear KdV equations controlled on the boundary: the case of periodic boundary conditions with a boundary control on the derivative of the state

In this section, we consider the following controlled linearized KdV equation posed on  $(0, T) \times (0, L)$  (this is the first example studied in [Ros97]). Let us first introduce the following family of periodic Sobolev spaces (endowed with the usual Sobolev norm)

$$H_p^k := \{y \in H^k(0, L) | u^{(j)}(0) = u^{(j)}(L), j = 0 \dots k-1\}.$$

We consider the following equation:

$$\begin{cases} y_t + y_{xxx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) & \text{in } (0, T), \\ y_x(t, 0) = y_x(t, L) + u(t) & \text{in } (0, L), \\ y_{xx}(t, 0) = y_{xx}(t, L) & \text{in } (0, L), \end{cases} \quad (5.3.1)$$

with initial condition  $y^0 \in H := (H_p^1)'$  and control  $u \in L^2(0, T)$ . This system was first studied in [RZ93] where the authors proved a result of exact controllability under the technical condition that the integral in space of the initial state had to be equal to the one of the final state. This result was improved later in [Ros97]. We know (see [Ros97, Remark 2.3]) that in this case there exists a unique solution  $y \in C^0([0, T], (H_p^1)')$  to (5.3.1). Moreover, it is explained in [Ros97, Remark 2.3] that this equation is exactly controllable (and then null controllable) at all time  $T > 0$  for every length  $L > 0$  (in fact the case which is treated in [Ros97] is  $L = 2\pi$  but it can be easily extended to all  $L$ ). We call  $\mathcal{A}$  the operator  $\partial_{xxx}^3$  with domain  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := H_p^2(0, L)$ . This operator is skew-adjoint, the eigenvalues are  $i\lambda_k := 8i\pi^3 k^3 / L^3$  for  $k \in \mathbb{Z}$ , the corresponding eigenfunction is (normed in  $(H_p^1)'$ )

$$e_k : x \mapsto \frac{(1 + 4\pi^2 k^2 / L^2)^{1/2} e^{\frac{i2\pi kx}{L}}}{\sqrt{L}}.$$

If  $y^0 \in (H_p^1)'$  is written under the form  $y^0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k(x)$ , then the solution  $y$  of (5.3.1) can be written under the form

$$y(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i\lambda_k t} e_k(x).$$

One easily proves (using integrations by parts, see for example [Cor07, Section 2.7, page 101]) that for every  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ,

$$b(\varphi) = -(\Delta^{-1}\varphi)'(0),$$

so that

$$b = \delta'_L \circ \Delta^{-1},$$

where  $\Delta^{-1} := -(-\Delta^{-1})$  is the inverse of the Dirichlet-Laplace operator. We have

$$|b_k| = |e'_k(L)|/k^2 \simeq 1.$$

One can apply directly Theorem 5.1.2 and Theorem 5.1.3 with  $k = 3$  and  $R = \frac{8\pi^3}{L^3}$  to obtain:

**Theorem 5.3.1.** *Equation (5.3.1) is null controllable and the cost of fast controls  $C_T$  verifies*

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{\sqrt{T}}}$$

for every  $K > \frac{8}{3^{5/4}} L^{3/2}$ . Moreover, the power of  $1/T$  involved in the exponential is optimal.

### 5.3.2 Linear KdV equations controlled on the boundary: the case of Dirichlet boundary conditions with a boundary control on the derivative of the state

In this section, we consider the following controlled linearized KdV equation posed on  $(0, T) \times (0, L)$ :

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0 & \text{in } (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{in } (0, T), \\ y_x(t, L) = u(t) + y_x(t, 0) & \text{in } (0, L), \end{cases} \quad (5.3.2)$$

with initial condition  $y^0 \in H := H^{-1}(0, L)$  and control  $u \in L^2(0, T)$ . We call  $A$  the operator  $\partial_{xxx}^3 + \partial_x$  with domain

$$\mathcal{D}(A) := \{y \in H^2(0, L) \mid y(0) = y(L) = 0, y'(0) = y'(L)\}.$$

The eigenvalues are denoted  $(i\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  with  $\lambda_n \in \mathbb{R}$ .

This equation describes the propagation of water waves in a uniform channel where  $(x, y)$  represents the horizontal and vertical coordinates of the level of water (see for example [BW83]). We know (see [CC09]) that in this case there exists a unique mild solution  $y \in C^0([0, T], H^{-1}(0, L))$ . Moreover, it is proved in [CC09] that this equation is exactly controllable (and then null controllable) at all time as soon as  $L \notin \mathcal{N}$  where

$$\mathcal{N} := \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + kl + l^2}{3}} \mid (k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}.$$

The original system studied in [Ros97] was

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0 & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = 0 & \text{in } (0, T), \\ y(t, L) = 0 & \text{in } (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t) & \text{in } (0, L), \end{cases} \quad (5.3.3)$$

with initial condition  $y^0 \in L^2(0, L)$  and control  $h \in L^2(0, T)$ .

However, the problem is that the steady-state operator associated to (5.3.3) with the given boundary condition is neither self-adjoint nor skew-adjoint, so we cannot apply directly the results presented before. That is why we have to change a little bit the boundary condition so that the associated steady-state operator becomes skew-adjoint by using the system (5.3.2) studied in [CC09].

To be able to apply Theorem 5.1.1 or Theorem 5.1.2, we have to study the sequence of eigenvalues  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ . One has the following result:

**Lemma 5.3.1.**  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  is regular and one has

$$\lambda_n = \frac{8\pi^3 n^3}{L^3} + O(n^2) \quad (5.3.4)$$

as  $n \rightarrow \pm\infty$ .

**Proof of Lemma 5.3.1.** This is an immediate consequence of [CC09, Proposition 1], which gives exactly (5.3.4) and proves that each eigenspace is of dimension 1, which implies the regularity of  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  because of the asymptotic behavior given by (5.3.4). ■

From now on, we call  $e_k$  one of the unitary eigenvector (for the  $H^{-1}$ -norm) corresponding to the eigenvalue  $i\lambda_k$ . We fix an initial condition  $y^0 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e_k \in H^{-1}(0, L)$ . As in the previous Subsection, we have for every  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ ,

$$b(\varphi) = -(\Delta^{-1}\varphi)'(0),$$

so that

$$b = \delta'_L \circ \Delta^{-1},$$

and

$$|b_k| = |e'_k(L)|/k^2.$$

To apply Theorem 5.1.1, we just need to ensure that



**Lemma 5.3.2.**

$$b_k \simeq 1.$$

**Proof of Lemma 5.3.2.**  $b_k \neq 0$  is a consequence of [Ros97, Lemma 3.5] (because  $L \notin \mathcal{N}$ ) and [CC09, Lemma 3.1] gives immediately that  $|e'_k(0)|$  is equivalent as  $k \rightarrow \infty$  to  $2\pi\sqrt{3}k^2/L^{3/2}$  (because in Lemma 3.1 of [CC09] the eigenvectors are normalized in the  $L^2$ -norm and here in the  $H^{-1}$ -norm so the behavior of their norm as  $k \rightarrow \infty$  has to be multiplied by  $k$ ), so we finally have  $b_k \simeq 1$ . ■

Applying Theorem 5.1.2, we obtain directly the following Theorem:

**Theorem 5.3.2.** *Let  $L \notin \mathcal{N}$ . Then equation (5.3.2) is null controllable and the cost of fast controls  $C_T$  verifies*

$$C_T \leq e^{\frac{K}{\sqrt{T}}}$$

for every  $K > \frac{8}{3^{5/4}}L^{3/2}$ . Moreover, the power of  $1/T$  involved in the exponential is optimal.

*Remark 5.3.1.* Using [GG09, Remark 1.3], one can also add a term of diffusion  $-y_{xx}$  in equation (5.3.2) and obtain the same upper bound as in Theorem 5.3.2.

**5.3.3 Anomalous diffusion equation in one dimension**

Let us first consider the 1-D Laplace operator  $\Delta$  in the domain  $D(\Delta) := H_0^1(0, L)$  with state space  $H := H^{-1}(0, L)$ . It is well-known that  $-\Delta : D(\Delta) \rightarrow H^{-1}(0, L)$  is a definite positive operator with compact resolvent, the  $k$ -th eigenvalue is

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L},$$

one of the corresponding normed (in  $H$ ) is

$$e_k(x) := \frac{\sqrt{2}(1 + k\pi/L) \sin(k\pi x/L)}{\sqrt{L}}.$$

Thanks to the continuous functional calculus for positive self-adjoint operators, one can define any positive power of  $-\Delta$ . Let us consider here some  $\gamma > 1/2$  and let us call  $\Delta^\gamma := -(-\Delta)^\gamma$ . The domain of  $\Delta^\gamma$ , that we denote  $H_\gamma$ , is the completion of  $C_0^\infty(0, L)$  for the norm

$$\|\psi\|_\gamma := \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (1 + \lambda_k^\gamma) |\langle e_k, \psi \rangle_H|^2 \right)^{1/2}.$$

We now consider the following equation on  $(0, T) \times (0, L)$ :

$$\begin{cases} y_t = \Delta^\gamma y & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } (0, L). \end{cases} \quad (5.3.5)$$

This kind of equation can modelize anomaly fast or slow diffusion (see for example [MK04]).

We now consider the following controlled equation on  $(0, T) \times (0, L)$ , that we write under the abstract form

$$\begin{cases} y_t = \Delta^\gamma y + bu & \text{in } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } (0, L), \end{cases} \quad (5.3.6)$$

where for every  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ ,

$$b(\varphi) = -(\Delta^{-1}\varphi)'(0),$$

i.e.

$$b := \delta'_0 \circ \Delta^{-1} \in D((-\Delta)^\gamma)'$$

and  $u \in L^2(0, T)$ . If  $\gamma \in \mathbb{N}^*$ , one can observe, using integrations by parts, that  $b$  corresponds to a boundary control on the left side on the  $\gamma - 1$ -th derivative of  $y$ , so that  $b$  can be considered as a natural extension of the boundary control in the case of non-entire  $\gamma$  (this kind of controls has already been introduced in [Mil06c, Section 3.3] to give some negative results about the control of fractional diffusion equations with  $\gamma \leq 1/2$ ).

We see that

$$b_k = |e'_k(L)|/k^2 \simeq 1.$$

If  $y^0 \in H$ , then there exists a unique solution of (5.3.6) in the space  $C^0([0, T], H)$  (because  $b$  is admissible for the semigroup). To our knowledge, the controllability of anomalous diffusion equations with such a control operator and  $\gamma \geq 1$  has never been studied before.

Applying directly Theorem 5.1.1 and Theorem 5.1.3, we obtain:

**Theorem 5.3.3.** *Assume  $\gamma \geq 1$ . Then Equation (5.3.6) is null controllable with continuous controls. Moreover, the cost of the control in  $L^\infty$  norm, still denoted  $C_T$  here, is such that*

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(2\gamma-1)}}} \text{ for every } K > 3(\alpha - 1)2^{1/(2\gamma-1)}L^{2\gamma/(2\gamma-1)} / ((4\gamma \sin(\pi/(4\gamma)))^{2\gamma/(2\gamma-1)}).$$

Moreover, the power of  $1/T$  involved in the exponential is optimal.

### 5.3.4 Fractional Schrödinger equation in one dimension

We keep the notations of the previous subsection. Let us consider the following fractional Schrödinger equation defined on  $(0, T) \times (0, L)$  controlled on one side:

$$\begin{cases} y_t = i\Delta^\gamma y + bu \text{ in } (0, T) \times (0, L), \\ y(0, \cdot) = y^0 \text{ in } (0, L), \end{cases} \quad (5.3.7)$$

with initial condition  $y^0 \in H$ ,  $\gamma > 3/4$  and (as in the previous subsection)  $b := \delta'_0 \circ \Delta^{-1}$ . The  $1 - D$  Laplace operator  $\partial_{xx}$  is considered in the domain  $D(\partial_{xx}) := H_0^1(0, L)$ . Equation (5.3.6) has a unique solution in  $C^0([0, T], H)$  with  $H = H^{-1}(0, L)$ . This equation has a physical meaning and can be used to study the energy spectrum of a  $1 - D$  fractional oscillator or for some fractional Bohr atoms, see for [Las00],[Las02] or [GX06]. As far as we know, the control of this kind of equations has never been studied. As before,  $|b_k| = |e'_k(0)|/k^2 \simeq 1$ . Applying directly Theorem 5.1.1, we obtain:

**Theorem 5.3.4.** *Assume  $\gamma \geq 1$ . Then Equation (5.3.7) is null controllable. Moreover, the cost of the control  $C_T$  is such that*

$$C_T \lesssim e^{\frac{K}{T^{1/(2\gamma-1)}}} \text{ for every } K > 3(\alpha - 1)2^{1/(2\gamma-1)}L^{2\gamma/(2\gamma-1)} / ((2\gamma \sin(\pi/(2\gamma)))^{2\gamma/(2\gamma-1)}).$$

Moreover, the power of  $1/T$  involved in the exponential is optimal.

### Acknowledgments

The author would like to thank Professor Jean-Michel Coron for having attracted his interest on this problem and Ivonne Rivas for corrections and remarks that improved significantly the paper.



# Bibliographie

- [ABL13] Fatiha Alabau-Boussouira and Matthieu Léautaud. Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 99(5) :544–576, 2013.
- [AI95] Sergei A. Avdonin and Sergei A. Ivanov. *Families of exponentials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems, Translated from the Russian and revised by the authors.
- [AKBDGB09] Farid Ammar-Khodja, Assia Benabdallah, Cédric Dupaix, and Manuel González-Burgos. A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems. *Differ. Equ. Appl.*, 1(3) :427–457, 2009.
- [AKBGBdT11a] Farid Ammar-Khodja, Assia Benabdallah, Manuel González-Burgos, and Luz de Teresa. The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 96(6) :555 – 590, 2011.
- [AKBGBdT11b] Farid Ammar-Khodja, Assia Benabdallah, Manuel González-Burgos, and Luz de Teresa. The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 96(6) :555–590, 2011.
- [AKBGBdT11c] Farid Ammar-Khodja, Assia Benabdallah, Manuel González-Burgos, and Luz de Teresa. Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : A survey. *Mathematical Control and Related Fields*, 1(3) :267–306, 2011.
- [ATF87] Vladimir M. Alekseev, Vladimir M. Tikhomirov, and Sergej V. Fomin. *Optimal control*. Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau, New York, 1987. Translated from the Russian by V. M. Volosov.
- [BC06] Karine Beauchard and Jean-Michel Coron. Controllability of a quantum particle in a moving potential well. *J. Funct. Anal.*, 232(2) :328–389, 2006.
- [Bea05] Karine Beauchard. Local controllability of a 1-D Schrödinger equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(7) :851–956, 2005.
- [BG97] Nicolas Burq and Patrick Gérard. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(7) :749–752, 1997.

- [BLR92] Claude Bardos, Gilles Lebeau, and Jeffrey Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30(5) :1024–1065, 1992.
- [BW83] Jerry Bona and Ragnar Winther. The Korteweg-de Vries equation, posed in a quarter-plane. *SIAM J. Math. Anal.*, 14(6) :1056–1106, 1983.
- [CC09] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau. Rapid exponential stabilization for a linear Korteweg-de Vries equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 11(3) :655–668, 2009.
- [CF96] Jean-Michel Coron and Andrei V. Fursikov. Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian J. Math. Phys.*, 4(4) :429–448, 1996.
- [CG05] Jean-Michel Coron and Sergio Guerrero. Singular optimal control : a linear 1-D parabolic-hyperbolic example. *Asymptot. Anal.*, 44(3-4) :237–257, 2005.
- [CG09a] Jean-Michel Coron and Sergio Guerrero. Local null controllability of the two-dimensional Navier-Stokes system in the torus with a control force having a vanishing component. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 92(5) :528–545, 2009.
- [CG09b] Jean-Michel Coron and Sergio Guerrero. Null controllability of the  $N$ -dimensional Stokes system with  $N - 1$  scalar controls. *J. Differential Equations*, 246(7) :2908–2921, 2009.
- [CG13a] Nicolas Carreño and Sergio Guerrero. Local null controllability of the  $N$ -dimensional Navier-Stokes system with  $N - 1$  scalar controls in an arbitrary control domain. *J. Math. Fluid Mech.*, 15(1) :139–153, 2013.
- [CG13b] Nicolás Carreño and Mamadou Gueye. Insensitizing controls having one vanishing component for the Navier-Stokes system. *To appear in J. Math. Pures Appl.*, 2013.
- [CGW10] Jean-Michel Coron, Oliver Glass, and Zhiqiang Wang. Exact boundary controllability for 1-D quasilinear hyperbolic systems with a vanishing characteristic speed. *SIAM J. Control Optim.*, 48(5) :3105–3122, 2009/10.
- [Cha09a] Marianne Chapouly. Global controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation. *Commun. Contemp. Math.*, 11(3) :495–521, 2009.
- [Cha09b] Marianne Chapouly. Global controllability of nonviscous and viscous Burgers-type equations. *SIAM J. Control Optim.*, 48(3) :1567–1599, 2009.
- [Cha09c] Marianne Chapouly. On the global null controllability of a Navier-Stokes system with Navier slip boundary conditions. *J. Differential Equations*, 247(7) :2094–2123, 2009.
- [CL12] Jean-Michel Coron and Pierre Lissy. Local null controllability of the three-dimensional navier-stokes system with a distributed control having two vanishing components. *Prépublication*, 2012.
- [Cor92] Jean-Michel Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3) :295–312, 1992.

- [Cor93] Jean-Michel Coron. Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(3) :271–276, 1993.
- [Cor96] Jean-Michel Coron. On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 75(2) :155–188, 1996.
- [Cor02] Jean-Michel Coron. Local controllability of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 :513–554, 2002. A tribute to J. L. Lions.
- [Cor07] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [Cor96] Jean-Michel Coron. On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 1 :35–75 (electronic), 1995/96.
- [CP78] Ruth F. Curtain and Anthony J. Pritchard. *Infinite dimensional linear systems theory*, volume 8 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [CW89] Ruth F. Curtain and George Weiss. Well posedness of triples of operators (in the sense of linear systems theory). In *Control and estimation of distributed parameter systems (Vorau, 1988)*, volume 91 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 41–59. Birkhäuser, Basel, 1989.
- [Dan97] Raphaël Danchin. Poches de tourbillon visqueuses. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 76(7) :609–647, 1997.
- [DF97] Jesus Idelfonso Díaz and Andrei V. Fursikov. Approximate controllability of the Stokes system on cylinders by external unidirectional forces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 76(4) :353–375, 1997.
- [DL09] Belhassen Dehman and Gilles Lebeau. Analysis of the HUM control operator and exact controllability for semilinear waves in uniform time. *SIAM J. Control Optim.*, 48(2) :521–550, 2009.
- [DM58] Andrew L. Dulmage and Nathan S. Mendelsohn. Coverings of bipartite graphs. *Canad. J. Math.*, 10 :517–534, 1958.
- [DR77] Szymon Dolecki and David L. Russell. A general theory of observation and control. *SIAM J. Control Optimization*, 15(2) :185–220, 1977.
- [EZ10] Sylvain Ervedoza and Enrique Zuazua. A systematic method for building smooth controls for smooth data. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(4) :1375–1401, 2010.
- [EZ11a] Sylvain Ervedoza and Enrique Zuazua. Observability of heat processes by transmutation without geometric restrictions. *Math. Control Relat. Fields*, 1(2) :177–187, 2011.

- [EZ11b] Sylvain Ervedoza and Enrique Zuazua. Sharp observability estimates for heat equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 202 :975–1017, 2011. 10.1007/s00205-011-0445-8.
- [FCGIP04] Enrique Fernández-Cara, Sergio Guerrero, Oleg Y. Imanuvilov, and Jean-Pierre Puel. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(12) :1501–1542, 2004.
- [FCGIP06] Enrique Fernández-Cara, Sergio Guerrero, Oleg Y. Imanuvilov, and Jean-Pierre Puel. Some controllability results for the  $N$ -dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with  $N - 1$  scalar controls. *SIAM J. Control Optim.*, 45(1) :146–173 (electronic), 2006.
- [FI96a] Andrei V. Fursikov and Oleg Y. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [FI96b] Andrei V. Fursikov and Oleg Y. Imanuvilov. Local exact controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations. *Sbornik Math.*, 187(9) :1355–1390, 1996.
- [FI98] Andrei V. Fursikov and Oleg Y. Imanuvilov. Local exact boundary controllability of the Boussinesq equation. *SIAM J. Control Optim.*, 36(2) :391–421, 1998.
- [FI99a] Andrei V. Fursikov and Oleg Y. Imanuvilov. Exact controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 54(3(327)) :93–146, 1999.
- [FI99b] Andrei V. Fursikov and Oleg Y. Imanuvilov. Exact controllability of the Navier-Stokes and Boussinesq equations. *Russian Math. Surveys*, 54 :565–618, 1999.
- [FR71] Hector O. Fattorini and David L. Russell. Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43 :272–292, 1971.
- [Fur00] Andrei V. Fursikov. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, volume 187 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. Translated from the 1999 Russian original by Tamara Rozhkovskaya.
- [GG07] Olivier Glass and Sergio Guerrero. On the uniform controllability of the Burgers equation. *SIAM J. Control Optim.*, 46(4) :1211–1238, 2007.
- [GG08] Olivier Glass and Sergio Guerrero. Some exact controllability results for the linear KdV equation and uniform controllability in the zero-dispersion limit. *Asymptot. Anal.*, 60(1-2) :61–100, 2008.
- [GG09] Olivier Glass and Sergio Guerrero. Uniform controllability of a transport equation in zero diffusion-dispersion limit. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 19(9) :1567–1601, 2009.

- [GG10] Olivier Glass and Sergio Guerrero. Controllability of the Korteweg-de Vries equation from the right Dirichlet boundary condition. *Systems Control Lett.*, 59(7) :390–395, 2010.
- [GL07] Sergio Guerrero and Gilles Lebeau. Singular optimal control for a transport-diffusion equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 32(10-12) :1813–1836, 2007.
- [GL13] Mamadou Gueye and Pierre Lissy. On the uniform controllability of a convection-diffusion equation with a non-homogeneous speed degenerating on the boundary. *En préparation*, 2013.
- [Gla00] Olivier Glass. Exact boundary controllability of 3-D Euler equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5 :1–44 (electronic), 2000.
- [Gla03] Olivier Glass. On the controllability of the Vlasov-Poisson system. *J. Differential Equations*, 195(2) :332–379, 2003.
- [Gla10] Olivier Glass. A complex-analytic approach to the problem of uniform controllability of a transport equation in the vanishing viscosity limit. *J. Funct. Anal.*, 258(3) :852–868, 2010.
- [GM05] Qing-Yang Guan and Zhi-Ming Ma. Boundary problems for fractional Laplacians. *Stoch. Dyn.*, 5(3) :385–424, 2005.
- [Gro86] Mikhael Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Gue06] Sergio Guerrero. Local exact controllability to the trajectories of the Navier-Stokes system with nonlinear Navier-slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3) :484–544 (electronic), 2006.
- [Gue07] Sergio Guerrero. Controllability of systems of Stokes equations with one control force : existence of insensitizing controls. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 24(6) :1029–1054, 2007.
- [Gue13] Mamadou Gueye. Insensitizing controls for the Navier-Stokes equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 30(5) :825–844, 2013.
- [Güi85] Edgardo N. Güichal. A lower bound of the norm of the control operator for the heat equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 110(2) :519–527, 1985.
- [GX06] Xiaoyi Guo and Mingyu Xu. Some physical applications of fractional Schrödinger equation. *J. Math. Phys.*, 47(8) :082104, 9, 2006.
- [Hör76] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [Hor98] Thierry Horsin. On the controllability of the Burgers equation. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3 :83–95 (electronic), 1998.
- [HR83] Lop F. Ho and David L. Russell. Admissible input elements for systems in Hilbert space and a Carleson measure criterion. *SIAM J. Control Optim.*, 21(4) :614–640, 1983.



- [Ima98a] Oleg Y. Imanuvilov. On exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3 :97–131, 1998.
- [Ima98b] Oleg Y. Imanuvilov. On exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 3 :97–131 (electronic), 1998.
- [Ima01] Oleg Y. Imanuvilov. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6 :39–72 (electronic), 2001.
- [JL99] David Jerison and Gilles Lebeau. Nodal sets of sums of eigenfunctions. In *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)*, Chicago Lectures in Math., pages 223–239. Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [Kat53] Tosio Kato. Integration of the equation of evolution in a Banach space. *J. Math. Soc. Japan*, 5 :208–234, 1953.
- [KL05] Vilmos Komornik and Paola Loreti. *Fourier series in control theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Kru70] Stanislav N. Kružkov. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81 (123) :228–255, 1970.
- [Las00] Nikolai Laskin. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals. *Phys. Lett. A*, 268(4-6) :298–305, 2000.
- [Las02] Nikolai Laskin. Fractional Schrödinger equation. *Phys. Rev. E (3)*, 66(5) :056108, 7, 2002.
- [Léa10] Matthieu Léautaud. Spectral inequalities for non-selfadjoint elliptic operators and application to the null-controllability of parabolic systems. *J. Funct. Anal.*, 258(8) :2739–2778, 2010.
- [Léa12] Matthieu Léautaud. Uniform controllability of scalar conservation laws in the vanishing viscosity limit. *SIAM J. Control Optim.*, 50(3) :1661–1699, 2012.
- [Leb92] Gilles Lebeau. Contrôle de l'équation de Schrödinger. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 71(3) :267–291, 1992.
- [Lie96] Gary M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [Lio82] Pierre-Louis Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, volume 69 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982.
- [Lio88a] Jacques-Louis Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1988. Contrôlabilité exacte. [Exact controllability], With appendices by E. Zuazua, C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch.

- [Lio88b] Jacques-Louis Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, volume 9 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1988. Perturbations. [Perturbations].
- [Lis12] Pierre Lissy. A link between the cost of fast controls for the 1-D heat equation and the uniform controllability of a 1-D transport-diffusion equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(11-12) :591–595, 2012.
- [Lis13a] Pierre Lissy. An application of a conjecture due to Ervedoza and Zuazua concerning the observability of the heat equation in small time to a conjecture due to Coron and Guerrero concerning the uniform controllability of a convection-diffusion equation in the vanishing viscosity limit. *Prépublication*, 2013.
- [Lis13b] Pierre Lissy. On the cost of fast controls for some families of dispersive or parabolic equations in one space dimension. *Prépublication*, 2013.
- [LM68] Jacques-Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [LR95] Gilles Lebeau and Luc Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(1-2) :335–356, 1995.
- [LT92] Irena Lasiecka and Roberto Triggiani. Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equations with Dirichlet control. *Differential Integral Equations*, 5(3) :521–535, 1992.
- [LZ96] Jacques-Louis Lions and Enrique Zuazua. A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences. In *Partial differential equations and applications*, volume 177 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 221–235. Dekker, New York, 1996.
- [LZ98] Gilles Lebeau and Enrique Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141(4) :297–329, 1998.
- [Mau13] Karine Mauffrey. On the null controllability of a  $3 \times 3$  parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 99(2) :187–210, 2013.
- [Mil04a] Luc Miller. Geometric bounds on the growth rate of null-controllability cost for the heat equation in small time. *J. Differential Equations*, 204(1) :202–226, 2004.
- [Mil04b] Luc Miller. How violent are fast controls for Schrödinger and plate vibrations? *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 172(3) :429–456, 2004.
- [Mil06a] Luc Miller. The control transmutation method and the cost of fast controls. *SIAM J. Control Optim.*, 45(2) :762–772 (electronic), 2006.
- [Mil06b] Luc Miller. On exponential observability estimates for the heat semigroup with explicit rates. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 17(4) :351–366, 2006.

- [Mil06c] Luc Miller. On the controllability of anomalous diffusions generated by the fractional Laplacian. *Math. Control Signals Systems*, 18(3) :260–271, 2006.
- [Mil10] Luc Miller. A direct Lebeau-Robbiano strategy for the observability of heat-like semigroups. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(4) :1465–1485, 2010.
- [MK04] Ralf Metzler and Joseph Klafter. The restaurant at the end of the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *J. Phys. A*, 37(31) :R161–R208, 2004.
- [Mor13] Morgan Morancey. Simultaneous local exact controllability of 1d bilinear schrödinger equations. *To appear at Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 2013.
- [MZ06a] Sorin Micu and Enrique Zuazua. On the controllability of a fractional order parabolic equation. *SIAM J. Control Optim.*, 44(6) :1950–1972, (electronic), 2006.
- [MZ06b] Sorin Micu and Enrique Zuazua. On the controllability of a fractional order parabolic equation. *SIAM J. Control Optim.*, 44(6) :1950–1972 (electronic), 2006.
- [OLBC10] Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, and Charles W. Clark, editors. *NIST handbook of mathematical functions*. U.S. Department of Commerce National Institute of Standards and Technology, Washington, DC, 2010. With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).
- [Paz83] Amnon Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Per10] Vincent Perrollaz. Initial boundary value problem and asymptotic stabilization of the Camassa-Holm equation on an interval. *J. Funct. Anal.*, 259(9) :2333–2365, 2010.
- [PF90] Alex Pothén and Chin-Ju Fan. Computing the block triangular form of a sparse matrix. *ACM Trans. Math. Software*, 16(4) :303–324, 1990.
- [Phu01] Kim Dang Phung. Observability and control of Schrödinger equations. *SIAM J. Control Optim.*, 40(1) :211–230 (electronic), 2001.
- [PT87] Jürgen Pöschel and Eugene Trubowitz. *Inverse spectral theory*, volume 130 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.
- [PW87] Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener. *Fourier transforms in the complex domain*, volume 19 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987. Reprint of the 1934 original.
- [RdT11] Lionel Rosier and Luz de Teresa. Exact controllability of a cascade system of conservative equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(5-6) :291–296, 2011.

- [Ros97] Lionel Rosier. Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2 :33–55 (electronic), 1997.
- [Ros04] Lionel Rosier. Control of the surface of a fluid by a wavemaker. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(3) :346–380 (electronic), 2004.
- [Rud66] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [RZ93] David L. Russell and Bing Yu Zhang. Controllability and stabilizability of the third-order linear dispersion equation on a periodic domain. *SIAM J. Control Optim.*, 31(3) :659–676, 1993.
- [RZ96] David L. Russell and Bing Yu Zhang. Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(9) :3643–3672, 1996.
- [Sal87] Dietmar Salamon. Infinite-dimensional linear systems with unbounded control and observation : a functional analytic approach. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 300(2) :383–431, 1987.
- [Sal09] Ali Salem. A numerical study of the null boundary controllability of a convection diffusion equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(15-16) :927–932, 2009.
- [Sch43a] Laurent Schwartz. Approximation d’une fonction quelconque par des sommes d’exponentielles imaginaires. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (4)*, 6 :111–176, 1943.
- [Sch43b] Laurent Schwartz. *Étude des sommes d’exponentielles réelles*. Actualités Sci. Ind., no. 959. Hermann et Cie., Paris, 1943.
- [Sch52] Laurent Schwartz. Transformation de Laplace des distributions. *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]*, 1952(Tome Supplémentaire) :196–206, 1952.
- [Sei84] Thomas I. Seidman. Two results on exact boundary control of parabolic equations. *Appl. Math. Optim.*, 11(2) :145–152, 1984.
- [Sei86] Thomas I. Seidman. The coefficient map for certain exponential sums. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 48(4) :463–478, 1986.
- [Sei88] Thomas I. Seidman. How violent are fast controls? *Math. Control Signals Systems*, 1(1) :89–95, 1988.
- [Sei08] Thomas I. Seidman. How violent are fast controls. III. *J. Math. Anal. Appl.*, 339(1) :461–468, 2008.
- [SY96] Thomas I. Seidman and Jiongmin Yong. How violent are fast controls? II. *Math. Control Signals Systems*, 9(4) :327–340, 1996.
- [Tem79] Roger Temam. *Navier-Stokes equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, revised edition, 1979. Theory and numerical analysis, With an appendix by F. Thomasset.

- [Tem82] Roger Temam. Behaviour at time  $t = 0$  of the solutions of semilinear evolution equations. *J. Differential Equations*, 43(1) :73–92, 1982.
- [TT07] Gérald Tenenbaum and Marius Tucsnak. New blow-up rates for fast controls of Schrödinger and heat equations. *J. Differential Equations*, 243(1) :70–100, 2007.
- [TT11] Gérald Tenenbaum and Marius Tucsnak. On the null-controllability of diffusion equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 17(4) :1088–1100, 2011.
- [TW09] Marius Tucsnak and George Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Var67] Sathamangalam R. Srinivasa Varadhan. On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 :431–455, 1967.
- [Wei88] George Weiss. Admissibility of input elements for diagonal semigroups on  $l^2$ . *Systems Control Lett.*, 10(1) :79–82, 1988.
- [Wei89] George Weiss. Admissibility of unbounded control operators. *SIAM J. Control Optim.*, 27(3) :527–545, 1989.
- [Zua91] Enrique Zuazua. Exact boundary controllability for the semilinear wave equation. In Haïm Brezis and Jacques-Louis Lions, editors, *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. X (Paris, 1987–1988)*, volume 220 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 357–391. Longman Sci. Tech., Harlow, 1991.

# Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à la contrôlabilité et son coût pour un certain nombre d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires issues de la physique.

La première partie de la thèse concerne la contrôlabilité à zéro de l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle avec conditions au bord de Dirichlet et contrôle interne distribué sur un sous-ouvert de domaine de définition n'agissant que sur une seule des trois équations. La preuve repose sur la méthode du retour ainsi que sur une méthode originale de résolution algébrique de systèmes différentiels inspirée de travaux de Gromov.

La deuxième partie de la thèse concerne le coût du contrôle en temps petit ou en viscosité évanescence d'équations linéaires unidimensionnelles. Dans un premier temps, on montre que l'on peut, dans certains cas, faire un lien entre ces deux problèmes. Notamment il est possible d'obtenir des résultats de contrôlabilité uniforme de l'équation de transport-diffusion unidimensionnelle à coefficients constants contrôlée sur le bord gauche à l'aide de résultats déjà connus sur le contrôle de l'équation de la chaleur. Dans un second temps, on s'intéresse au coût du contrôle frontière en temps petit d'un certain nombre d'équations pour lesquelles l'opérateur spatial associé est autoadjoint ou anti-autoadjoint à résolvante compacte et ayant des valeurs propres se comportant de manière polynomiale, en utilisant la méthode des moments. On en déduit des résultats pour des équations de type Korteweg-de-Vries linéarisées, diffusion fractionnaire et Schrödinger fractionnaire.

**Mots-clés :** systèmes non linéaires couplés ; contrôle indirect ; méthode du retour ; équations linéaires paraboliques ou dispersives ; coût du contrôle en temps petit ; viscosité évanescence ; méthode des moments.



# Abstract

In this work, we focus on the controllability and its cost for some linear or nonlinear partial differential equations coming from physics.

The first part of the thesis deals with the null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions and internal control distributed on a subdomain acting only one of the three equations. The proof is based on the return method as well as an original method of algebraic solvability of differential systems inspired by the works of Gromov.

The second part of the thesis concerns the cost of control in small time or in the vanishing viscosity limit for linear unidimensional equations. At first, we show that we can in some cases make a link between these two issues, notably that it is possible to obtain results of uniform controllability for the transport-diffusion equation with constant coefficients controlled on the left side from known results concerning the heat equation. In a second step, we look at the cost of boundary control in small time for some equations for which the associated spatial operator is self-adjoint or skew-adjoint with compact resolvent and having eigenvalues that behaves asymptotically as a polynomial, using the method of moments. We deduce results for linearized Korteweg-de-Vries equation, fractional diffusion equation and fractional Schrödinger equation.

**Keywords :** nonlinear coupled systems ; indirect control ; return method ; linear parabolic or dispersive equations ; cost of the control in small time ; vanishing viscosity ; moment method.