



HAL
open science

Etude de quelques problèmes de contrôle optimal issus des EDP et des EDO

Térence Bayen

► **To cite this version:**

Térence Bayen. Etude de quelques problèmes de contrôle optimal issus des EDP et des EDO. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2013. tel-00919030

HAL Id: tel-00919030

<https://theses.hal.science/tel-00919030>

Submitted on 16 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

Présentée à

l'Université Montpellier 2

Ecole Doctorale I2S

Spécialité: Contrôle Optimal et Optimisation

par

Térence Bayen

(Université Montpellier 2)

Etude de quelques problèmes de contrôle optimal
issus des EDP et des EDO

Soutenue à Montpellier le 9 décembre 2013 devant le jury composé de :

Hedy ATTOUCH	Professeur	Université Montpellier 2
Frédéric BONNANS	Directeur de Recherches	INRIA Saclay
Jean-Baptiste CAILLAU	Professeur	Université de Bourgogne
Alain RAPAPORT	Directeur de Recherches	INRA Montpellier
Lionel THIBAUT	Professeur	Université Montpellier 2
Emmanuel TRÉLAT	Professeur	Université Paris 6

après avis des rapporteurs

Jean-Baptiste CAILLAU	Professeur	Université de Bourgogne
Benedetto PICCOLI	Professeur	Rutgers University
Emmanuel TRÉLAT	Professeur	Université Paris 6

Remerciements

C'est avec plaisir que je profite de ces quelques lignes pour remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, de différentes manières, à ce travail.

Je souhaiterais remercier Jean-Baptiste Caillau, Benedetto Piccoli, Emmanuel Trélat pour avoir rapporté ce mémoire et avoir accepté cette tâche instantanément. Je remercie également Hedy Attouch, Alain Rapaport, et Lionel Thibault pour m'avoir fait l'honneur de faire partie de mon jury.

J'adresse un remerciement tout particulier à Alain Rapaport pour sa grande générosité, sa disponibilité, et pour avoir partagé de nombreuses discussions scientifiques variées ces dernières années. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés.

Je remercie Emmanuel Trélat avec qui j'ai eu des échanges précieux sur plusieurs de mes problèmes de contrôle optimal.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements au groupe d'analyse convexe de Montpellier pour son accueil chaleureux depuis mon arrivée à Montpellier en septembre 2008. J'exprime ma gratitude à Lionel Thibault qui m'a guidé pour mener à bien ce projet, et qui m'a également offert de nombreuses opportunités scientifiques.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes collaborateurs avec lesquels j'ai pu partager des idées et des connaissances ainsi que de longues séances de travail et qui m'ont permis d'acquérir de nouvelles techniques en optimisation et en contrôle optimal.

Je pense également à Thomas Lachand-Robert malheureusement disparu trop tôt, et qui a su me faire partager son enthousiasme pour la recherche.

Je suis aussi très reconnaissant à mes collègues français et étrangers, notamment Pedro Gajardo et Rafaël Correa pour leur invitation respective au Chili, et m'avoir permis de travailler une année au CMM. Je remercie aussi l'équipe-projet INRIA MODEMIC pour son accueil en délégation, ce qui m'a permis de dessiner de nouveaux contours en recherche.

Je remercie également Bernadette Lacan ainsi que le personnel administratif de l'Université Montpellier 2 qui m'ont beaucoup aidé notamment dans les différentes tâches précédant l'habilitation. En particulier, un grand merci à Eric Hugounenq pour sa disponibilité, et pour m'avoir permis de profiter plus régulièrement des Cévennes.

Un remerciement particulier à mes collègues de bureau avec lesquels j'ai partagé notamment mes expériences en enseignement, en recherches ou autres (Hélène, Allaedine, Thomas, et Céline), ainsi qu'avec mes amis comme Ioan avec qui j'ai pu passer quelques moments de détente.

Je remercie enfin ma famille pour son aide constante, notamment Claire pour sa patience et son soutien ces derniers mois, et à qui j'ai la plus grande pensée. Evidemment, je pense aussi à Marc et Gaëlle pour la joie qu'ils me procurent.

Résumé

Le premier chapitre de ce mémoire porte sur l'étude des minimum forts pour des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des EDP semi-linéaires elliptiques et paraboliques avec contraintes intégrales sur l'état final. Le second chapitre porte sur l'étude du problème de temps minimal pour un système de type chemostat en présence de points singuliers stationnaires. On y étudie également un problème de contrôle optimal pour un système chemostat avec deux espèces en compétition et qui comporte une courbe de non-contrôlabilité. Le troisième chapitre s'intéresse à la synthèse d'un contrôle optimal par retour d'état pour un problème de temps minimal issu d'un système fed-batch, notamment en présence d'un contrôle impulsionnel. Le quatrième chapitre étudie deux problèmes de contrôle optimal sous contraintes d'état périodiques. Enfin, le dernier chapitre traite de problèmes d'optimisation de forme géométriques sous contraintes de convexité. Cette dernière est formulée comme une contrainte semi-définie, ce qui permet ensuite d'utiliser la programmation SDP pour minimiser la fonction coût.

Abstract

The first part is devoted to the study of strong minima in the setting of optimal control problems governed by semi-linear elliptic and parabolic equations with integral constraints on the final state. The second part studies the minimum time problem for a system describing a chemostat model under a “triangle” inputs constraint on the control. An optimal control problem for a chemostat model with two competitive species is also studied. In the third part, we provide an optimal feedback control for a system describing a fed-batch bioreactor with impulsive control. A minimal time problem with a saturating singular arc is also investigated. The fourth part deals with two optimal control problems with periodic constraints on the state. The last chapter is devoted to geometric shape optimization problems under a convexity constraint. Thanks to positive polynomials that can be written as a sum of square, the convexity constraint is transformed into an SDP-constraint which allows to solve the problem using semi-definite optimization.

Table des matières

Introduction	9
1 Minimum forts en contrôle optimal des EDP	11
1.1 Introduction	11
1.2 Retour sur le calcul des variations	12
1.3 Contrôle optimal des EDP elliptiques	15
1.3.1 Présentation du problème de contrôle optimal	15
1.3.2 Principe de décomposition	17
1.3.3 Conditions du premier ordre (Pontryagin)	19
1.3.4 Conditions nécessaires du second ordre	20
1.3.5 Conditions suffisantes du second ordre	22
1.4 Contrôle optimal pour des EDP paraboliques	23
1.4.1 Introduction	23
1.4.2 Notations et hypothèses	24
1.4.3 Conditions nécessaires	26
1.4.4 Principe de décomposition et condition suffisante	29
2 Contrôle optimal pour des systèmes chemostat	31
2.1 Problème de contrôle avec contrainte triangle	31
2.1.1 Présentation du problème de contrôle	31
2.1.2 Optimalité dans l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$	34
2.1.3 Principe du maximum de Pontryagin	35
2.1.4 Synthèse optimale en dehors de $\mathcal{C}(\bar{s})$	38
2.1.5 Propriétés semi-perméables	39
2.1.6 Etude des arcs singuliers et simulations numériques	40
2.1.7 Conclusion	42
2.2 Sélection d'espèces compétitives	43
2.2.1 Présentation du problème	43
2.2.2 Synthèse optimale d'une commande feedback	45
2.2.3 Extensions à trois arcs singuliers et pour des conditions initiales en dehors de la variété invariante	47
3 Contrôle optimal pour des réacteurs fed-batch	51
3.1 Introduction générale	51
3.2 Présentation du système fed-batch	53
3.3 Etude d'un réacteur fed-batch en présence d'un inhibiteur	55
3.4 Synthèse avec arc singulier non contrôlable	58
3.5 Réacteurs fed-batch et contrôles impulsionsnels	61
3.5.1 Contrôle impulsionsnel	61

3.5.2	Prise en compte d'un facteur de mortalité	62
3.5.3	Stratégie optimal en présence de deux arcs singuliers	64
3.5.4	Simulations numériques	69
3.5.5	Conclusion de la comparaison entre les deux arcs singuliers	69
4	Contrôle optimal périodique	71
4.1	Etude d'un problème de contrôle périodique	71
4.1.1	Equations de Kolmogorov avec contrôle	71
4.1.2	Etude d'un problème avec une dynamique à deux phases	74
4.1.3	Principe du Maximum de Pontryagin et arc singulier	75
4.1.4	Résumé des trajectoires optimales	76
4.1.5	Discussions	78
4.2	Optimisation sous contraintes périodiques	80
4.2.1	Existence de solutions périodiques	82
4.2.2	Propriétés asymptotiques	83
4.2.3	Principe du Maximum de Pontryagin	84
4.2.4	Simulations numériques	87
4.2.5	Discontinuité de l'arc singulier	88
4.2.6	Optimisation en temps long	89
4.2.7	Optimisation par rapport au volume	91
5	Optimisation de forme et contraintes SDP	95
5.1	Introduction	95
5.2	Optimisation de forme et SDP	97
5.2.1	Paramétrage d'un corps convexe	97
5.2.2	Transformation en un problème SDP	99
5.2.3	Mise en place de la méthode	100
5.2.4	Simulations numériques	101
5.2.5	Preuve de la convergence de la méthode	103
5.3	Discussion du problème en dimension supérieure	103
5.3.1	Développement en harmoniques sphériques et convexité	106
5.3.2	Corps de largeur constante et harmoniques sphériques	108
5.3.3	Exemple de corps de largeur constante avec $N = 3$	109
5.3.4	Fonctionnelle et harmonique sphérique	109
5.3.5	Problème SDP	110
	Bibliographie	113

Introduction

Ce document a pour objectif de présenter un résumé des travaux de recherche que j'ai effectués depuis mon doctorat, et qui portent sur le contrôle optimal et l'optimisation de formes. Ces travaux sont classés selon cinq thèmes :

1. Propriétés des minimum forts pour des problèmes de contrôle optimal gouvernés par une EDP elliptique ou parabolique (articles : [1, 2], proceedings de conférence : [3]).
2. Etude de problèmes de contrôle optimal pour le système chemostat (articles [4, 5]).
3. Etude de problèmes de contrôle optimal pour le système fed-batch (articles : [6, 7, 8, 9], proceedings de conférences : [10, 11]).
4. Etude de problèmes de commande optimale périodiques (articles : [12, 13], proceedings de conférences : [14]).
5. Optimisation de formes et programmation semi-définie (articles : [15, 16, 17, 18], proceedings de conférences : [19]).

La partie 1 porte sur une extension au cadre des EDP de résultats classiques en calcul des variations qui sont la condition nécessaire d'Erdmann-Weierstrass (ou Pontryagin) pour les minimum forts, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes au second ordre. Nous avons étudié les propriétés des minimum forts pour des problèmes de commande optimale gouvernés par des EDP. Dans ce cadre, ces propriétés sont nouvelles. Les résultats présents dans la littérature sur ce sujet ont porté jusqu'à présent sur les propriétés des minimum faibles. L'étude des minimum forts est motivée par les méthodes numériques permettant de résoudre un problème de contrôle optimal (méthode de Newton, de descente...). La connaissance d'un minimum fort permet de garantir une meilleure convergence d'algorithmes de minimisation.

Les parties 2 et 3 portent sur des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des EDO. Ces problèmes sont pour une grande partie issus des bio-procédés ou sont fortement motivés par ces derniers. Ces travaux sont le fruit d'une année de délégation CNRS au Chili (2010-2011) pendant laquelle j'ai notamment travaillé avec une équipe associée INRA-INRIA (DYMECOS), et d'une année de délégation INRIA (équipe-projet INRA-INRIA Modemic, Montpellier). Ces travaux ont pour origine des problèmes concrets en ingénierie des bioprocédés (traitement des eaux usées en temps minimal, sélection d'espèces bactériennes en temps minimal). Notre objectif est de caractériser des contrôles par retour d'état cad en boucle fermée (feedback), ce qui est très utile en pratique. Ces problèmes sont souvent difficiles à résoudre à cause des contraintes issues de la modélisation et dont on ne saurait s'affranchir. Ils ne se situent pas nécessairement dans le cadre usuel où l'on peut appliquer la théorie du contrôle optimal, et leur étude nécessite de développer de nouveaux outils.

Les travaux [12, 13] de la partie 4 ont été réalisés durant la thèse de Matthieu Sebbah soutenue en juillet 2012 à l'Université Montpellier 2. Il s'agit d'étudier des problèmes de commande optimale périodique. L'existence de trajectoires périodiques est étudiée à

travers les équations de Kolmogorov périodiques, ce qui nous permet de généraliser cette notion à un système contrôlé. On s'intéresse ensuite à la détermination de commandes périodiques à l'aide notamment du principe du maximum de Pontryagin pour plusieurs systèmes.

Enfin, la partie 5 donne un aperçu des travaux [18, 16] sur des problèmes d'optimisation de forme, thématique issue de ma thèse de doctorat (2007). Dans [18], nous avons introduit une nouvelle méthode pour aborder des problèmes d'optimisation de formes sous contraintes convexes en utilisant la programmation semi-définie (contrairement à [15, 17] qui utilisent des techniques de calcul des variations et contrôle). L'originalité de ce travail est le couplage de problèmes d'optimisation de formes avec la programmation semi-définie, ce qui s'avère être le point de départ pour l'étude de nombreux autres problèmes d'optimisation de forme (comme par exemple le problème de Newton).

Liste des publications mentionnées ci-dessus (voir partie CV ou dans la bibliographie pour plus de détails) :

- Articles parus ou acceptés : [7],[8],[1],[18],[16],[15],[17], [6].
- Articles soumis : [13],[5],[9].
- Articles preprint : [12],[4].
- Articles en cours : [2].
- Actes de conférences (avec comité de Lecture) : [3],[10],[14],[11],[20],[19].

Chapitre 1

Minimum forts en contrôle optimal des EDP

Sommaire

1.1	Introduction	11
1.2	Retour sur le calcul des variations	12
1.3	Contrôle optimal des EDP elliptiques	15
1.3.1	Présentation du problème de contrôle optimal	15
1.3.2	Principe de décomposition	17
1.3.3	Conditions du premier ordre (Pontryagin)	19
1.3.4	Conditions nécessaires du second ordre	20
1.3.5	Conditions suffisantes du second ordre	22
1.4	Contrôle optimal pour des EDP paraboliques	23
1.4.1	Introduction	23
1.4.2	Notations et hypothèses	24
1.4.3	Conditions nécessaires	26
1.4.4	Principe de décomposition et condition suffisante	29

1.1 Introduction

L'étude des minimum faibles et forts en calcul des variations remonte aux travaux d'Euler, Legendre, Weierstrass, Jacobi, Erdmann où les premiers résultats (conditions d'optimalité du premier et second ordre) ont été obtenus sur des problèmes de calcul des variations. L'objet de ce chapitre est de présenter des résultats nouveaux sur la théorie des minimum fort dans le domaine du contrôle optimal des EDP (voir [1, 2]).

On parle de minimum faible lorsque les trajectoires du système sont considérées dans l'espace des fonctions Lipschitz, alors que pour les minimum forts, l'étude des trajectoires optimale s'effectue uniquement dans le cadre de la topologie uniforme. Ces deux notions sont clairement distinctes : des exemples très simples montrent que tout minimum fort est un minimum faible, mais le contraire n'est pas nécessairement vrai.

Un point essentiel en calcul des variations concerne les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. En effet, ces conditions fournissent des propriétés sur les minimum pour un grand nombre de problèmes d'optimisation (problèmes en mécanique, chaînette, problème de Didon...). Un minimum faible est caractérisé par l'équation d'Euler-Lagrange

avec une condition du second-ordre (condition de Legendre), et la condition suffisante utilise la notion de points conjugués. La caractérisation des minimum fort est différente. En effet, on montre qu'un minimum fort est caractérisé par la condition nécessaire de Weierstrass (qui est un cas particulier du principe du maximum de Pontryagin pour les équations différentielles ordinaires) et par une condition du second ordre qui porte sur ce qu'on appelle la fonction d'excès ("excess fonction"). Cette condition du second ordre pour un minimum fort revient à dire que la dérivée seconde du Lagrangien associé au problème est défini positif dans un voisinage de la trajectoire extrémale.

Il est important de noter qu'un minimum fort reste optimal sur un plus "grand voisinage" d'un point nominal qu'un minimum faible. La notion de minimum faible est moins large car elle nécessite de considérer les trajectoires pour la topologie de classe C^1 . Il est donc fondamental d'étudier la notion plus générale de minimum fort. Numériquement, un minimum fort reste optimal sur un "plus grand voisinage", ce qui constitue une motivation supplémentaire pour l'étude de ces minima. Cette information est intéressante pour l'initialisation de méthodes de descentes (Newton...) pour résoudre numériquement ces problèmes.

Ces deux type de minimum peuvent être considérés dans d'autres contextes comme celui des équations différentielles ordinaires (EDO) ou celui des équations aux dérivées partielles semi-linéaires elliptiques ou paraboliques. Les minimum forts pour des problèmes de contrôle gouvernés par des EDO ont été introduits par [21] et sont développés plus en détail dans [22]. Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en présence de contraintes sur l'état et le contrôle ont été récemment développées par [23, 24, 25, 26].

Dans le cadre des EDP semi-linéaires elliptiques, des conditions nécessaires du premier ordre pour les minimum forts (type Principe du Maximum de Pontryagin) ont été développées dans [27] et [28, 29]. Les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre pour les minimum faibles ont été également largement étudiés [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]. Pour ce qui est des conditions du second ordre pour les minimum forts dans ce cadre, les premiers résultats ont été obtenus dans [1]. Dans ce travail, on y expose une caractérisation des minimum forts qui satisfont une condition dite de croissance quadratique locale.

Pour ce qui est des EDP paraboliques, les conditions nécessaires du premier ordre (sous la forme d'un principe du maximum de Pontryagin) ont été largement développés, notamment dans [37]. Les conditions du second ordre pour les minimum faibles ont fait également l'objet de nombreux travaux (voir [38, 39]) et [40]. Nous donnerons quelques résultats sur les minimum fort dans le cadre des EDP parabolique dans la section 1.4.

1.2 Retour sur le calcul des variations

Afin d'introduire la notion de minimum fort pour des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des EDP semi-linéaires elliptiques et paraboliques, on rappelle brièvement quelques résultats dans le cadre standard des problèmes de calcul des variations. Ceci nous permettra de mieux situer les différences entre minimum faibles et forts.

Dans cette section, on considère un problème standard en calcul des variations qui est celui de minimiser un lagrangien qui dépend de la trajectoire et sa vitesse :

$$\begin{aligned} & \inf \int_a^b \ell(t, y(t), \dot{y}(t)) dt, \\ & \text{avec } y \in W^{1,\infty}([a, b]; \mathbb{R}^n), \\ & y(a) = \hat{y}_1, \quad y(b) = \hat{y}_2. \end{aligned}$$

Une autre façon d'écrire ce problème est la suivante :

$$\left. \begin{aligned} \inf J_1(u) &:= \int_a^b \ell(t, y[u](t), u(t)) dt, \\ \text{avec } u &\in L^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n), \\ y[u](b) &= \hat{y}_2, \end{aligned} \right\} \quad (P_1)$$

où la fonction $y[u]$ est définie par :

$$y[u](t) := \hat{y}_1 + \int_a^t u(t) dt, \quad \forall t \in (a, b).$$

On peut donc voir un problème de calcul des variations comme un problème de contrôle optimal gouverné par l'équation différentielle :

$$\dot{y} = u, \quad \text{p.p. dans } (a, b).$$

Fixons dorénavant un contrôle nominal $\bar{u} \in L^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n)$ et posons $\bar{y} := y[\bar{u}]$ l'état associé. Les notions de minimum faible et fort dépendent du voisinage sur lequel on se place autour du point (\bar{u}, \bar{y}) pour considérer des petites variations du coût. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 1.2.1. Soit $R > 0$. On dit que \bar{u} est un :

(i) *minimum local faible pour le problème (P_1) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$J_1(\bar{u}) \leq J_1(u) \quad \text{pour tout } u \text{ tel que } \|u - \bar{u}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(ii) *minimum local fort pour le problème (P_1) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$J_1(\bar{u}) \leq J_1(u) \quad \text{pour tout } u \text{ tel que } \|y[u] - \bar{y}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(iii) *R -minimum local fort pour le problème (P_1) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$J_1(\bar{u}) \leq J_1(u) \quad \text{pour tout } u \text{ tel que } \|u - \bar{u}\|_\infty \leq R, \text{ et } \|y[u] - \bar{y}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Un minimum fort est toujours un minimum faible alors que le contraire n'est en général pas vrai. Prenons par exemple le lagrangien $\ell(t, y, u) := u^2 - u^4$ et $(a, b) = (0, 1)$, $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (0, 0)$. On peut montrer que $\bar{y} \equiv 0$ est un minimum faible et non un fort (on peut construire une suite de fonctions aussi proche que l'on veut de \bar{y} avec une dérivée arbitrairement grande, ce qui contredira la définition d'un minimum fort).

Afin d'écrire les conditions d'optimalité pour les minimum forts, on définit le *Hamiltonien* $H : [a, b] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ associé à l'équation différentielle $\dot{y} = u$ (comme en contrôle optimal) par :

$$H(t, y, p, u) := \ell(t, y, u) + p^\top u.$$

On suppose pour simplifier que le Hamiltonien H est de class C^2 . En premier lieu, rappelons l'équation d'Euler-Lagrange.

Proposition 1.2.1. Soit \bar{u} un minimum faible solution de (P_1) . Alors, il satisfait l'équation d'Euler-Lagrange :

$$-\dot{\bar{p}}(t) = H_y(t, \bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) \quad \text{p.p. sur } (a, b), \quad (1.2.1)$$

où

$$\bar{p}(t) := -\ell_u(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \quad \text{p.p. sur } (a, b). \quad (1.2.2)$$

Notons que par définition de \bar{p} , on a :

$$H_u(t, \bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \text{p.p. sur } (a, b). \quad (1.2.3)$$

On s'intéresse maintenant aux conditions du second ordre.

Au vu de la condition nécessaire d'ordre 1, il est naturel de considérer la forme quadratique : $Q_1 : L^2([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$Q_1(v) := \int_a^b D_{(y,u)^2}^2 H(t, \bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t))(z[v], v)^2 dt,$$

où

$$z[v](t) := \int_a^t v(s) ds \quad \forall t \in (a, b).$$

On a alors la condition du second ordre suivante.

Théorème 1.2.1. *Supposons que \bar{u} soit un minimum local de (P_1) . Alors on a $Q_1(v) \geq 0$ pour tout v tel que $z[v](b) = 0$. Inversement, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $Q_1(v) \geq \alpha \|v\|_2^2$ pour tout v tel que $z[v](b) = 0$, alors \bar{u} est une solution faible de (P_1) .*

Nous allons voir maintenant la différence entre les conditions d'optimalité pour les minimum faibles et les minimum forts.

Proposition 1.2.2. *Soit \bar{u} un R -minimum local fort pour le problème (P_1) . Alors, il satisfait la condition de Weierstrass-Pontryagin :*

$$H(t, \bar{y}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) \leq H(t, \bar{y}(t), \bar{p}(t), v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.4)$$

On dit que la condition de Weierstrass-Pontryagin stricte est vérifiée en un point \bar{u} lorsque l'inégalité précédente est remplacée par une inégalité stricte. Il est important de souligner que la condition (1.2.4) est une condition plus forte que la condition (1.2.3). Enfin, on a une condition suffisante d'ordre 2 pour un R -minimum fort local du problème (P_1) .

Théorème 1.2.2. *On suppose que la fonction \bar{u} est continue et que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *On suppose que \bar{u} vérifie la condition de Weierstrass stricte.*

(ii) *On suppose de plus que si $z[v](b) = 0$, alors $Q(v) \geq \alpha \|v\|_2^2$.*

Alors, le point \bar{u} est un R -minimum fort local solution du problème (P_1) .

Remarque 1.2.1. *Une extension de ce résultat lorsque le point \bar{u} n'est plus supposé continue peut être trouvé dans [22].*

Cette présentation très succincte de quelques résultats en calcul des variations montre les différences entre minimum faibles et forts dans ce cadre, ainsi que le lien entre cette théorie et le contrôle optimal des EDO. Par ailleurs, nous avons introduit la condition de "Pontryagin stricte" qui s'étend sans peine dans le cadre EDP. On verra également le lien entre ces deux derniers résultats en calcul des variations, et ceux que nous avons obtenus dans [1].

1.3 Contrôle optimal des EDP elliptiques

Cette partie résume les résultats principaux de l'article [1] sur la caractérisation des minimum fort pour des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des EDP semi-linéaires elliptiques. Dans ce contexte, l'étude des minimum fort est plus délicate, néanmoins elle suit le même schéma (condition nécessaire du premier ordre, conditions nécessaires et suffisantes du second ordre).

1.3.1 Présentation du problème de contrôle optimal

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont la frontière est de class $C^{1,1}$. On considère l'équation semi-linéaire elliptique suivante avec condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta y + \varphi(x, y, u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Dans cette section, u représente un contrôle qui est distribué sur le domaine Ω et y est l'état associé.

Soit $a, b \in C(\overline{\Omega})$ deux fonctions telles que $a \leq b$ sur $\overline{\Omega}$. On considère désormais l'ensemble des contrôles admissibles suivant :

$$\mathcal{K}_1 = \{u \in L^\infty(\Omega) \mid a(x) \leq u(x) \leq b(x), \text{ p.p.}\}. \quad (1.3.2)$$

Soit $M := \max\{\|a\|_\infty, \|b\|_\infty\}$. On effectue les hypothèses suivantes

(H1) La fonction φ est continue et vérifie :

(i) Pour tout $x \in \overline{\Omega}$ la fonction $\varphi(x, \cdot, \cdot)$ est de classe C^1 . De plus, on suppose qu'uniformément par rapport à $x \in \overline{\Omega}$ les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i.1) $D_{(y,u)}\varphi(x, 0, 0)$ est bornée ;

(i.2) $D_{(y,u)}\varphi(x, \cdot, \cdot)$ est Lipschitz sur les ensembles bornés.

(ii) Pour tout $(x, y) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ et $|u| \leq M$, on a $\varphi_y(x, y, u) \geq 0$.

Remarque 1.3.1. *Un exemple pour lequel (H1) est vérifiée est le suivant. Considérons l'application φ définie par $\varphi(x, y, u) = g(y) + u + f(x)$, où $f \in C(\overline{\Omega})$, et $g \in C^2(\mathbb{R})$ vérifie $g_y \geq 0$.*

On vérifie d'abord que l'équation d'état est bien posée. Le résultat suivant est standard (voir par exemple [37, Chapitre 5, Proposition 1.1]).

Proposition 1.3.1. *On suppose que (H1) est vérifiée. Alors, pour tout $u \in \mathcal{K}$ et tout $s \in (n/2, \infty)$, l'équation (1.3.1) admet une unique solution forte $y_u \in W_0^{1,s}(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$. En particulier y_u est continue. De plus, il existe une constante C_s qui dépend de s et telle que :*

$$\|y_u\|_\infty + \|y_u\|_{2,s} \leq C_s, \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{K}. \quad (1.3.3)$$

On définit maintenant une fonction de coût $(x, y, u) \mapsto \ell(x, y, u)$ et qui satisfait des hypothèses de régularités standards (voir [1]) :

(H3) Pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $\psi = \varphi, \ell$, la fonction $\psi(x, \cdot, \cdot)$ est de classe C^2 . De plus pour tout $x \in \overline{\Omega}$ les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) $D_{(y,u)^2}^2\psi(x, 0, 0)$ est borné ; (ii) $D_{(y,u)^2}^2\psi(x, \cdot, \cdot)$ est localement Lipschitz.

On considère maintenant le critère suivant à minimiser :

$$J_2(u) := \int_{\Omega} \ell(x, y[u](x), u(x)) dx, \quad (1.3.4)$$

et on s'intéresse au problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J_2(u) \quad \text{t.q.} \quad u \in \mathcal{K}_1 \quad (\mathcal{CP}).$$

Un exemple standard est celui de la régulation de la chaleur d'un four. Il s'agit d'étudier le problème suivant :

$$\min J_2(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x) - y_d(x)|^2 + \frac{N}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

où la température est liée au contrôle par l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta y(x) = \beta(x)u(x) & \text{p.p. } x \text{ in } \Omega, \\ y(x) = 0 & \text{p.p. } x \text{ in } \partial\Omega, \end{cases}$$

les contrôles admissibles étant définis par :

$$a(x) \leq u(x) \leq b(x), \quad \text{p.p. } x \text{ in } \Omega.$$

Ainsi, le but est de trouver un profil de température le plus proche possible en norme $\|\cdot\|_2$ d'une donnée y_d (profil de température). Le contrôle u représente le flux de chaleur et agit sur tout le domaine (contrôle distribué).

Remarque 1.3.2. *L'existence d'un contrôle optimal dans ce cadre nécessite en général une structure particulière. Par exemple, si $v \mapsto \phi(x, y, v)$ est affine par rapport à v et si $v \mapsto \ell(x, y, v)$ est convexe continue, alors on peut montrer qu'il existe un minimum global du problème. Dans toute la suite, on supposera l'existence de minimum faibles et de minimum forts.*

On peut transposer les définitions de minimum faibles et forts vus en calcul des variations à ce cadre.

Définition 1.3.1. Soit $\bar{u} \in \mathcal{K}_1$ et $\bar{y} := y[\bar{u}]$ l'état associé. On dit que

(i) \bar{u} est un *minimum local faible* pour le problème (P_2) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$J_2(\bar{u}) \leq J_2(u) \quad \forall u \in \mathcal{K}_1 \quad \text{t.q.} \quad \|u - \bar{u}\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

(ii) \bar{u} est un *minimum local faible* dans L^s pour le problème (P_2) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$J_2(\bar{u}) \leq J_2(u) \quad \forall u \in \mathcal{K}_1 \quad \text{t.q.} \quad \|u - \bar{u}\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

(iii) \bar{u} est un *minimum local fort* pour le problème (P_2) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$J_2(\bar{u}) \leq J_2(u) \quad \forall u \in \mathcal{K}_1 \quad \text{t.q.} \quad \|y[u] - \bar{y}\|_p \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.3.3. *L'ensemble \mathcal{K} est borné dans L^{∞} . On peut donc simplifier ces définitions de la manière suivante :*

(i) *Si $1 \leq p < q < \infty$, les espaces $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ sont munis de la même topologie sur l'ensemble \mathcal{K} (car Ω est borné).*

(ii) *La notion de minimum faible dans L^s ne dépend donc pas de $s \in [1, \infty)$. Dans ce cas, on parle seulement de minimum faible dans L^1 .*

(iii) *Par des estimations standards issues des EDP linéaires elliptiques, on peut montrer une inégalité du type $\|y_u - y_{\bar{u}}\| = O(\|u - \bar{u}\|_s)$ pour $u, \bar{u} \in \mathcal{K}$ et $s \in (n/2, \infty)$. Ceci montre que tout minimum fort est bien un minimum faible dans L^s .*

On a une définition analogue pour la propriété de croissance quadratique locale.

Définition 1.3.2. On dit que :

(i) J_2 admet une croissance quadratique dans \mathcal{K}_1 au point \bar{u} au sens faible s'il existe $\alpha, \varepsilon > 0$ tel que :

$$J_2(\bar{u}) + \alpha \|u - \bar{u}\|_2^2 \leq J_2(u) \quad \forall u \in \mathcal{K}_1 \quad \text{t.q.} \quad \|u - \bar{u}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(ii) J_2 admet une croissance quadratique dans \mathcal{K}_1 au point \bar{u} au sens fort s'il existe $\alpha, \varepsilon > 0$ tel que :

$$J_2(\bar{u}) + \alpha \|u - \bar{u}\|_2^2 \leq J_2(u) \quad \forall u \in \mathcal{K}_1 \quad \text{t.q.} \quad \|y[u] - \bar{y}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

1.3.2 Principe de décomposition

Dans cette section, on présente un résultat fondamental appelé principe de décomposition et qui fournit un développement du critère au voisinage d'un point nominal (\bar{u}, \bar{y}) . Il permet entre autres de contrôler la variation du coût en terme du type de perturbation considéré, et il permet d'établir les conditions suffisantes au second ordre. Ce principe de décomposition a été introduit dans le cadre des EDO dans [23, 24], et ce travail en donne une extension à ce cadre.

Rappelons certaines injections de Sobolev utiles pour la preuve du principe de décomposition ([41], [42], [43]) :

$$W^{m,s}(\Omega) \subseteq \begin{cases} L^{q_1}(\Omega) & \text{avec } \frac{1}{q_1} = \frac{1}{s} - \frac{m}{n} \quad \text{si } s < \frac{n}{m}, \\ L^q(\Omega) & \text{avec } q \in [1, +\infty) \quad \text{si } s = \frac{n}{m}, \\ C^{m - \lfloor \frac{n}{s} \rfloor - 1, \gamma(n,s)}(\bar{\Omega}) & \text{si } s > \frac{n}{m}, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

où les injections sont continues et $\gamma(n, s)$ est défini par :

$$\gamma(n, s) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{s} \rfloor - \frac{n}{s} + 1, & \text{si } \frac{n}{s} \notin \mathbb{Z}, \\ \alpha \text{ quelconque } < 1 & \text{si } \frac{n}{s} \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.3.6)$$

On rappelle des estimations usuelles pour les EDP linéaires (voir [44, 43]) et qui seront essentielles pour démontrer le principe de décomposition.

Théorème 1.3.1. *Etant donné un réel $R > 0$, on considère le problème de Dirichlet suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta z + \alpha(x)z = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3.7)$$

où $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ vérifie $\alpha(x) \geq 0$ p.p. $x \in \Omega$, et $\|\alpha\|_\infty \leq R$. Alors pour tout $s \in (1, \infty)$ et tout $f \in L^s(\Omega)$, l'équation (1.3.7) admet une unique solution forte $z \in W^{2,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega)$ et il existe $c_s = c_s(R) > 0$ tel que pour tout $f \in L^s(\Omega)$, on ait :

$$\|z\|_{2,s} \leq c_s \|f\|_s. \quad (1.3.8)$$

De plus, il existe une constante $c_1 = c_1(R) > 0$ telle que l'on ait l'estimation suivante :

$$\|z\|_1 \leq c_1 \|f\|_1. \quad (1.3.9)$$

Remarque 1.3.4. *La preuve de (1.3.8) se trouve dans [43, Théorème 9.15 et Lemme 9.17] alors que (1.3.9) est un corollaire d'un résultat de Stampacchia [44] (voir aussi [45, Lemme 2.11] pour une preuve plus simple). Par les injections de Sobolev (1.3.5), l'inégalité (1.3.8) entraîne que si $s > n/2$ ($s = 2$ si $n \leq 3$), alors $z \in C(\bar{\Omega})$ et $\|z\|_\infty \leq c_s \|f\|_s$.*

On introduit maintenant le Hamiltonien $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ associé au système :

$$H(x, y, p, u) := \ell(x, y, u) - p\varphi(x, y, u). \quad (1.3.10)$$

L'état adjoint \bar{p} est défini comme l'unique solution de l'EDP linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta \bar{p} = H_y(\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \bar{p} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Le principe de décomposition va permettre d'écrire la variation du coût au second ordre comme la somme d'une perturbation faible en norme infini et d'une seconde éventuellement grande en norme infini mais petite en norme $\|\cdot\|_1$.

Fixons un contrôle \bar{u} nominal. Etant donnée une suite de contrôle u_k dans \mathcal{K} , on introduit maintenant les notations suivantes :

$$\delta_k u := u_k - \bar{u}, \quad y_k := y_{u_k}, \quad \delta_k y = y_k - \bar{y} \quad \text{et} \quad z_1^k := z_1[u_k]. \quad (1.3.12)$$

Soit $H(x) := H(x, \bar{y}(x), p(x), \bar{u}(x))$ le Hamiltonien évalué sur la trajectoire nominale. On pose également :

$$\delta H^k(x) = H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), u_k(x)) - H(x), \quad \delta H_y^k(x) = H_y(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), u_k(x)) - H_y(x) \quad (1.3.13)$$

avec des notations similaires pour $\delta \ell^k$, $\delta \varphi^k$ ainsi que leur dérivée.

On considère maintenant une suite de contrôle u_k telle que $\|\delta_k u\|_2 \rightarrow 0$ lorsque k tend vers l'infini, et on définit les ensembles A_k et B_k de la manière suivante :

$$|A_k \cup B_k| = |\Omega|, \quad |A_k \cap B_k| = 0 \quad \text{et} \quad |B_k| \rightarrow 0. \quad (1.3.14)$$

On décompose ensuite la suite u_k selon les ensembles A_k et B_k définis par :

$$\begin{cases} u_{A_k} = u_k & \text{sur } A_k, \quad u_{A_k} = \bar{u} & \text{sur } B_k, \\ u_{B_k} = \bar{u} & \text{sur } A_k, \quad u_{B_k} = u_k & \text{sur } B_k. \end{cases}$$

Dans les preuves des conditions suffisantes d'optimalité qui utilisent le principe de décomposition, on introduira par exemple les ensembles A_k et B_k suivants :

$$A_k := \left\{ x \in \Omega \mid |u_k(x) - \bar{u}(x)| \leq \sqrt{\|u_k - \bar{u}\|_1} \right\} \quad \text{et} \quad B_k := \Omega \setminus A_k. \quad (1.3.15)$$

Néanmoins, le principe de décomposition s'énonce avec seulement les hypothèses ci-dessus, cad (1.3.14). On pose maintenant :

$$\delta_{A_k} u := u_{A_k} - \bar{u}, \quad \delta_{B_k} u := u_{B_k} - \bar{u} \quad \delta_k u = \delta_{A_k} u + \delta_{B_k} u. \quad (1.3.16)$$

Posons $z_{A_k} := z_1[u_{A_k}]$ et $z_{B_k} := z_1[u_{B_k}]$. Puisque $|A_k \cap B_k| = 0$ on a donc (par unicité de l'équation elliptique linéaire avec conditions de Dirichlet) $z_1^k = z_{A_k} + z_{B_k}$. Par (1.3.8), on obtient les estimations suivantes.

$$\|z_{A_k}\|_{2,s} \leq c_s \|\delta_{A_k} u\|_s, \quad \|z_{B_k}\|_{2,s} \leq c_s \|\delta_{B_k} u\|_s \quad \text{pour tout } s \in (1, \infty). \quad (1.3.17)$$

Le principe de décomposition s'énonce ainsi. (voir les notations (1.3.12) et (1.3.13)) :

Théorème 1.3.2. *On suppose que les hypothèses (H1)-(H3) sont vérifiées et soit $\bar{u} \in \mathcal{K}$. Soit $u_k \in \mathcal{K}$ une suite de contrôles telle que $\|\delta_k u\|_2 \rightarrow 0$, et soit A_k, B_k et $\delta_{A_k} u, \delta_{B_k} u$ vérifiant (1.3.14) et (1.3.16). Si $\|\delta_{A_k} u\|_\infty \rightarrow 0$, alors le coût se décompose de la façon suivante :*

$$J(u_k) - J(\bar{u}) = \int_{B_k} \delta H^k(x) dx + \int_{A_k} H_u(x) \delta_{A_k} u \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [H_{uu}(x)(\delta_{A_k} u)^2 + 2H_{yu}(x)z_{A_k} \delta_{A_k} u + H_{yy}(x)(z_{A_k})^2] dx + o(\|\delta_k u\|_2^2). \quad (1.3.18)$$

La preuve est technique et utilise des injections de Sobolev et les estimations linéaires (qui remplacent le lemme de Gronwall dans les EDO) afin d'éliminer les termes croisés dans le développement du coût.

Une autre manière d'écrire le principe de décomposition est la suivante (c'est un corollaire immédiat du théorème précédent).

Corollaire 1.3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.2 on a*

$$J(u_k) - J(\bar{u}) = J(u_{B_k}) - J(\bar{u}) + J(u_{A_k}) - J(\bar{u}) + o(\|\delta_k u\|_2^2). \quad (1.3.19)$$

Pour étudier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, on introduit deux applications Q_1 et Q_2 (liés à l'énoncé des conditions d'optimalité). Soit $Q_1[\bar{u}] : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Q_1[\bar{u}]v := \int_{\Omega} H_u(x)v(x) dx, \quad (1.3.20)$$

et soit $Q_2[\bar{u}] : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$Q_2[\bar{u}](v) = \int_{\Omega} [H_{yy}(x)(\zeta[v])^2 + 2H_{yu}(x)\zeta[v]v + H_{uu}(x)v^2] dx, \quad (1.3.21)$$

où $\zeta[v]$ est l'unique solution dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ de l'équation d'état linéarisée autour du point nominal :

$$\begin{cases} -\Delta \zeta + \varphi_y(x)\zeta + \varphi_u(x)v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \zeta = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3.22)$$

Une autre manière d'écrire le principe de décomposition est la suivante.

Théorème 1.3.3. *Sous les hypothèses du théorème 1.3.2 on a :*

$$J(u_k) - J(\bar{u}) = \int_{B_k} \delta H^k(x) dx + Q_1[\bar{u}]\delta_{A_k} u + \frac{1}{2}Q_2[\bar{u}](\delta_{A_k} u) + o(\|\delta_k u\|_2^2). \quad (1.3.23)$$

1.3.3 Conditions du premier ordre (Pontryagin)

On s'intéresse d'abord aux conditions nécessaires du premier ordre (type Pontryagin). Rappelons la définition usuelle d'extrémale.

Définition 1.3.3. *Etant donnée une multi-application $U : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}$ à valeurs fermées et mesurables, on dit que $\bar{u} \in \mathcal{K}$ est une extrémale de Pontryagin sous forme intégrale si :*

$$\int_{\Omega} H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x)) dx \leq \int_{\Omega} H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), v(x)) dx, \quad \text{pour tout } v \in \text{select}(U), \quad (1.3.24)$$

et que c'est une extrémale de Pontryagin par rapport à U si pour tout $v \in U(x) :$

$$H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x)) \leq H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), v) \quad (1.3.25)$$

Si $U(x) = \mathcal{K}(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$, on appelle *extrémale de Pontryagin* une extrémale de Pontryagin par rapport à U . Par analogie avec les solutions faibles, si \bar{u} est une extrémale de Pontryagin par rapport à $U^\varepsilon(x) = [a(x), b(x)] \cap [\bar{u}(x) - \varepsilon, \bar{u}(x) + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, on dit que \bar{u} est une *extrémale faible de Pontryagin*. Une extrémale de Pontryagin est nécessairement une extrémale au sens intégral. Mais la réciproque est également vraie par la proposition suivante :

Proposition 1.3.2. *Soit $U : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}$ une multi-application à valeurs fermées, mesurables, $\bar{u} \in \text{select}(U)$, et soit $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que \bar{u} soit solution du problème :*

$$\text{Min}_u \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx \quad u \in \text{select}(U). \quad (1.3.26)$$

Alors, p.p. $x \in \Omega$, on a :

$$F(x, \bar{u}(x)) \leq F(x, v), \quad \text{pour tout } v \in U(x). \quad (1.3.27)$$

Il suffit en effet de poser $F(x, u) := H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), u)$ (voir [46, Théorème 3A]). Grâce à un argument de type variation en aiguille (comme dans la preuve usuelle du principe du maximum de Pontryagin), on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 1.3.3. *Soit $U : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}$ une multi-application à valeurs fermées et mesurable. On suppose que $\bar{u} \in \mathcal{K}$ vérifie :*

$$J(\bar{u}) \leq J(u), \quad \text{pour tout } u \in \text{select}(U). \quad (1.3.28)$$

Alors \bar{u} est une extrémale de Pontryagin par rapport à U .

On peut en déduire le principe de Pontryagin usuel suivant (voir [47, 29, 28, 27]).

Théorème 1.3.4. *Soit \bar{u} un minimum local faible dans L^1 (resp. dans L^∞) du problème (CP). Alors \bar{u} est une extrémale de Pontryagin (resp. extrémale de Pontryagin faible).*

On aura également besoin de la notion suivante (comme en calcul des variations).

Définition 1.3.4. *Soit \bar{u} une extrémale de Pontryagin. On dit que \bar{u} satisfait le principe de Pontryagin strict si pour tout $x \in \bar{\Omega}$, on a :*

$$H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x)) < H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), v), \quad \text{lorsque } v \neq \bar{u}(x), \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{K}(x). \quad (1.3.29)$$

Enfin, notons la propriété suivante de continuité sur le contrôle.

Lemme 1.3.1. *Une extrémale de Pontryagin qui satisfait le principe de Pontryagin strict appartient à $C(\bar{\Omega})$.*

1.3.4 Conditions nécessaires du second ordre

Les conditions nécessaires et suffisantes du 1er ordre et du second ordre pour un minimum faible \bar{u} se trouvent dans [31] et [30]. Pour ce qui est des conditions nécessaires pour les minimum fort, une condition du premier ordre sous la forme d'un principe du maximum de Pontryagin a été démontrée dans [27] et [29, 28] : si \bar{u} est un minimum fort du problème (P_2) , alors \bar{u} est une extrémale de Pontryagin.

Dans cette section, on donne des conditions nécessaires pour qu'une extrémale satisfasse une condition de croissance quadratique au sens L^1 . On introduit d'abord le cône tangent, le cône normal à l'ensemble \mathcal{K} au point \bar{u} .

Lemme 1.3.2. *On considère l'ensemble \mathcal{K} défini par (1.4.1) et soit $\bar{u} \in \mathcal{K}$. Alors, on a les propriétés suivantes :*

(i) *Le cône tangent à \mathcal{K} au point \bar{u} est donné par :*

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{K}}(\bar{u}) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid v(x) \in T_{\mathcal{K}(x)}(\bar{u}(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega\}, \\ &= \{v \in L^2(\Omega) \mid v(x) \geq 0 \text{ si } \bar{u}(x) = a(x), v(x) \leq 0 \text{ si } \bar{u}(x) = b(x) \\ &\quad \text{p.p. } \Omega\}. \end{aligned} \tag{1.3.30}$$

(ii) *Le cône normal à \mathcal{K} au point \bar{u} est donné par*

$$N_{\mathcal{K}}(\bar{u}) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v(x) \in N_{\mathcal{K}(x)}(\bar{u}(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega\}. \tag{1.3.31}$$

(iii) *Pour tout $q^* \in N_{\mathcal{K}}(\bar{u})$ on a*

$$T_{\mathcal{K}}(\bar{u}) \cap (q^*)^\perp = \{v \in T_{\mathcal{K}}(\bar{u}) \mid v(x)q^*(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}, \tag{1.3.32}$$

où $(q^*)^\perp$ est l'orthogonal (dans $L^2(\Omega)$) au vecteur q^* .

Soit \bar{u} une extrémale de Pontryagin. On définit le cône critique à \mathcal{K} au point \bar{u} par :

$$C_{\mathcal{K}}(\bar{u}) := T_{\mathcal{K}}(\bar{u}) \cap (Q_1[\bar{u}])^\perp, \tag{1.3.33}$$

Comme d'habitude en optimisation, l'ensemble $C_{\mathcal{K}}(\bar{u})$ coïncide avec l'ensemble des directions tangentes à l'ensemble admissible et pour lesquelles la fonction coût est inchangée au premier ordre. Cet ensemble est fondamental pour étudier les conditions du second ordre.

Rappelons d'abord la condition nécessaire usuel pour un minimum faible.

Théorème 1.3.5. *Soit \bar{u} un minimum faible pour le problème (CP). Alors on a :*

$$Q_2[\bar{u}](v) \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in C_{\mathcal{K}}(\bar{u}). \tag{1.3.34}$$

On s'intéresse maintenant à des propriétés de croissance quadratique globale pour le coût. Ainsi, on a besoin des définitions suivantes.

Définition 1.3.5. *Soit $\bar{u} \in \mathcal{K}$.*

(i) *On dit que le Hamiltonien vérifie localement une condition de croissance quadratique au point \bar{u} ssi il existe $\alpha, \varepsilon > 0$ tels que pour presque tout x dans Ω on a*

$$H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x)) + \alpha |v - \bar{u}(x)|^2 \leq H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), v) \quad \forall v \in \mathcal{K}(x) \text{ avec } |v - \bar{u}(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.3.35}$$

(ii) *On dit que le Hamiltonien vérifie une condition de croissance quadratique globale au point \bar{u} ssi il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \bar{\Omega}$ on ait :*

$$H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x)) + \alpha |v - \bar{u}(x)|^2 \leq H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), v) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{K}(x). \tag{1.3.36}$$

On conclue cette section en donnant un théorème qui donne des conditions nécessaires pour avoir la croissance quadratique sur \mathcal{K} .

Théorème 1.3.6. *On a les propriétés suivantes :*

(i) *Si J vérifie une condition de croissance quadratique sur \mathcal{K} au point \bar{u} au sens faible, alors le Hamiltonien vérifie une condition de croissance quadratique locale, et on a :*

$$Q_2[\bar{u}](v) \geq \alpha \|v\|_2^2, \quad \text{pour tout } v \in C_{\mathcal{K}}(\bar{u}). \tag{1.3.37}$$

(ii) *Si J vérifie une condition de croissance quadratique sur \mathcal{K} au point \bar{u} au sens L^1 -faible, alors le Hamiltonien vérifie une condition de croissance quadratique globale, et (1.3.37) est vérifiée. En particulier, le contrôle \bar{u} est continue.*

1.3.5 Conditions suffisantes du second ordre

Cette section utilise le principe de décomposition afin de montrer une condition suffisante pour obtenir un minimum fort. On donne trois résultats principaux : le premier résultat requiert une condition de type Legendre sur la forme quadratique Q_2 . Cette hypothèse se vérifie sur certains exemples de fonctionnelles. On donne un second résultat qui s'affranchit de cette hypothèse mais qui demande une condition suffisante sur un cône plus large que le cône critique usuel. Enfin, le dernier résultat donne un résultat analogue et s'affranchit de ces hypothèses supplémentaires.

Rappelons d'abord la définition d'une forme de Legendre voir [48]

Définition 1.3.6. *Soit X un espace de Hilbert, et soit $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur X . On dit que Q est une forme de Legendre si elle est semi-continue inférieurement et si lorsqu'une suite h_k converge faiblement vers h dans X et $Q(h_k) \rightarrow Q(h)$, alors h_k converge fortement vers h dans X .*

Rappelons la condition suffisante usuelle pour un minimum faible.

Théorème 1.3.7. *On suppose les hypothèses **(H1)**-**(H3)** vérifiées et soit $\bar{u} \in \mathcal{K}$. On suppose que \bar{u} vérifie $H_u(x)v \geq 0$ pour tout $v \in T_{\mathcal{K}(x)}(\bar{u}(x))$ p.p. sur Ω et que $Q_2[\bar{u}]$ est une forme de Legendre et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$Q_2[\bar{u}](v) \geq \alpha \|v\|_2^2, \quad \text{pour tout } v \in C_{\mathcal{K}}(\bar{u}). \quad (1.3.38)$$

Alors J a une croissance quadratique locale sur \mathcal{K} au point \bar{u} au sens faible.

Le théorème suivant fournit une première extension du résultat précédent pour les minimum forts et se montre en appliquant le principe de décomposition.

Théorème 1.3.8. *On suppose les hypothèses **(H1)**-**(H3)** vérifiées et soit $\bar{u} \in \mathcal{K}$. On suppose que \bar{u} vérifie l'inégalité de Pontryagin stricte et que $Q_2[\bar{u}]$ est une forme de Legendre et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$Q_2[\bar{u}](v) \geq \alpha \|v\|_2^2, \quad \text{pour tout } v \in C_{\mathcal{K}}(\bar{u}). \quad (1.3.39)$$

Alors J a une croissance quadratique locale sur \mathcal{K} au point \bar{u} au sens fort.

Un exemple pour lequel les conditions du théorème ci-dessus sont vérifiées est le suivant. On considère les données :

$$\ell(x, y, u) = \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}(y - y_d(x))^2, \quad \varphi(x, y, u) = g(y) + u + f. \quad (1.3.40)$$

Pour ce problème convexe, on peut montrer l'existence de contrôles optimaux et le fait que Q_2 soit une forme de Legendre.

Le second résultat principal est le suivant. On s'affranchit de l'hypothèse de forme de Legendre en remplaçant le cône critique à \mathcal{K} en \bar{u} par le suivant. Etant donné $\tau > 0$, on définit l'ensemble des contraintes strictement actives :

$$A^\tau(\bar{u}) := \{x \in \Omega \mid |H_u(x)| > \tau\}, \quad (1.3.41)$$

et le τ -critical cone

$$C_{\mathcal{K}}^\tau(\bar{u}) := \{v \in T_{\mathcal{K}}(\bar{u}) \mid v(x) = 0 \text{ for } x \in A^\tau(\bar{u})\}. \quad (1.3.42)$$

Les conditions au second ordre ont été développées dans le cas faible grâce à cette notion, voir par exemple [49].

Théorème 1.3.9. *On suppose les hypothèses (H1)-(H3) vérifiées et soit $\bar{u} \in \mathcal{K}$. On suppose que \bar{u} vérifie $v \in T_{\mathcal{K}(x)}(\bar{u}(x))$ p.p. sur Ω et qu'il existe $\tau > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :*

$$Q_2[\bar{u}](v) \geq \alpha \|v\|_2^2, \quad \text{pour tout } v \in C_{\mathcal{K}}^\tau(\bar{u}). \quad (1.3.43)$$

Alors J a une croissance quadratique locale sur \mathcal{K} au point \bar{u} au sens fort.

De même que pour le théorème précédent, on utilise le principe de décomposition. Le résultat principal de [1] est une caractérisation de la croissance quadratique locale de J au sens fort, qui se base sur une condition du second ordre.

Théorème 1.3.10. *La fonctionnelle de coût J vérifie une condition de croissance quadratique globale en \bar{u} au sens fort si et seulement si le Hamiltonien admet une croissance quadratique globale en $\bar{u} \in \mathcal{K}_1$ et s'il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$Q_2(v) \geq \alpha \|v\|_2^2 \quad \text{pour tout } v \in C_{\mathcal{K}_1}(\bar{u}).$$

Ce résultat se montre également grâce au principe de décomposition et au lemme d'Hoffman [50].

Il serait intéressant d'étudier une extension de ces travaux pour des problèmes avec des contraintes d'état (voir par exemple la partie suivante) et dans le cas où le contrôle n'est pas nécessairement continue, ce qui arrive fréquemment en théorie du contrôle (voir [22]). Il pourrait être également intéressant de prolonger l'étude des arcs singuliers voir [51] dans le cadre des problèmes de contrôle optimal gouvernés par des EDP.

1.4 Contrôle optimal pour des EDP paraboliques

1.4.1 Introduction

Cette partie résume les premiers résultats que nous avons obtenus dans [2] et qui portent sur les propriétés des minimum forts pour des problèmes de contrôle gouvernés par des EDP paraboliques avec contraintes intégrales sur l'état final. D'une part, la théorie classique en contrôle optimal pour des systèmes paraboliques utilise la notion de minimum faible. De plus, l'objectif est d'incorporer des contraintes intégrales sur l'état final. Pour l'obtention des conditions suffisantes, on s'appuiera sur un principe de décomposition (comme dans le cas elliptique) mais le critère sera remplacé par le Lagrangien du problème (pour prendre en compte les contraintes). Pour ce qui est de l'obtention des conditions nécessaires (second ordre), le cadre de travail n'est pas encore complètement fixé. On procède ici comme dans [52, 53] en étudiant un problème relaxé en introduisant une représentation de Castaing de la multi-application définissant les contraintes sur le contrôles. On peut ensuite appliquer sur ce nouveau problème la théorie usuelle (conditions nécessaires faible). On effectue ensuite un passage à la limite dans le cadre des EDP paraboliques afin d'en déduire une condition d'optimalité sur le problème initial. Ceci peut se faire grâce à un résultat de compacité de T. Aubin (voir [54, 55]). Néanmoins, il apparaît des difficultés sur le problème relaxé inhérentes au cadre des EDP qui est plus complexe que les EDO [52, 53]. Par conséquent, le présent rapport dresse un panorama des résultats que nous pensons pouvoir obtenir (au moins dans un cadre convexe). Il est à noter que les conditions nécessaires faibles dans ce cadre ne sont également pas connues.

On considère un ouvert non-vide $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) avec une frontière de classe $C^{1,1}$. On

se donne un nombre réel $T > 0$ et soit $Q = \Omega \times (0, T)$ et $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. On considère $a, b \in C(\bar{Q})$, et soit l'ensemble \mathcal{K} défini par :

$$\mathcal{K} := \{u \in L^\infty(Q) \mid a(t, x) \leq u(t, x) \leq b(t, x), \text{ p.p. } (t, x) \in Q\}. \quad (1.4.1)$$

On notera U la multi-application définie par $U(t, x) := [a(t, x), b(t, x)]$. On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} & \inf \int_Q \ell(t, x, y[u](t, x), u(t, x)) dt dx + \int_\Omega g_0(y(T, x)) dx, \\ & \text{où } u \in \mathcal{K}, \text{ et} \\ & \int_\Omega g_i^E(y[u](T, x)) dx = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_E, \\ & \int_\Omega g_j^I(y[u](T, x)) dx \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n_I, \end{aligned} \quad (P)$$

et $y[u]$ est l'unique solution de l'équation semi-linéaire parabolique :

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y + \varphi(t, x, y, u) &= 0 && \text{dans } Q, \\ y(\cdot, \cdot) &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ y(0, \cdot) &= y_0(\cdot) && \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

On précisera les données dans la section suivante. La théorie classique donne des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour des minimum faibles. Ici, notre but est de développer la théorie des minimum fort dans ce cadre.

Un exemple de problème de contrôle optimal parabolique est celui du contrôle optimal de la température d'une pièce métallique à l'aide d'un contrôle distribué sur tout le domaine. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert non-vide et $T > 0$, on pose $Q := \Omega \times [0, T]$, et soit $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère l'équation d'état :

$$\begin{aligned} \partial_t y &= \Delta y - f(y(t, x)) + u(t, x), && \text{dans } Q, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= 0, && \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

avec une condition initiale $y(0, x) = y_0(x)$. Ici le contrôle entre linéairement dans l'équation et il vérifie l'inégalité (contrôles bornés) :

$$0 \leq u(t, x) \leq R \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q.$$

On cherche par exemple un contrôle u qui réalise ces contraintes et de norme minimale dans $L^2(Q)$:

$$J(u) := \int_Q u(t, x)^2 dt dx \rightarrow \min.$$

1.4.2 Notations et hypothèses

La première étape consiste à montrer qu'étant donné un contrôle $u \in \mathcal{K}$, l'équation admet une seule et unique solution dans un espace de Banach à préciser. Pour cela, on introduit l'espace suivant :

$$\mathcal{V}^p := L^p([0, T]; W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,p}([0, T]; L^p(\Omega)). \quad (1.4.3)$$

On peut montrer que cet espace muni de la norme :

$$\|y\|_{\mathcal{V}^p(Q)} := \|y\|_{L^p(Q)} + \|\partial_t y\|_{L^p(Q)} + \|Dy\|_{L^p(Q)} + \|D^2 y\|_{L^p(Q)},$$

est un espace de Banach. De plus, on a les injections suivantes (voir par exemple [56]) :

Lemme 1.4.1. *Etant donné $1 < p \leq q_i < \infty$, $i = 1, 2$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *L'espace $\mathcal{V}^p(Q)$ s'injecte continûment dans l'espace $L^{q_1, q_2}(Q)$ si*

$$1/p - 1/q_1 + (n/2)(1/p - 1/q_2) \leq 1. \quad (1.4.4)$$

De plus, si l'inégalité (1.4.4) est stricte, alors l'injection est compacte. Si de plus

$$\left(1 + \frac{n}{2}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \leq 1, \quad (1.4.5)$$

alors l'espace $\mathcal{V}^p(Q)$ s'injecte continûment dans $L^q(Q)$ (avec injection compacte si l'inégalité est stricte).

(ii) *L'espace $\mathcal{V}^p(Q)$ s'injecte continûment dans $C(\bar{Q})$ si on a l'inégalité :*

$$\frac{n+2}{2p} < 1. \quad (1.4.6)$$

Soit maintenant $y_0 \in C(\bar{\Omega})$ et considérons une application $\varphi : \bar{Q} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose les conditions suivantes vérifiées :

- (i) Pour tout $(t, x) \in \bar{Q}$, φ est de classe C^1 .
 - (ii) $D_{(y,u)}\varphi(\cdot, \cdot, 0, 0)$ est bornée dans \bar{Q} .
 - (iii) L'application $D_{(y,u)}\varphi(t, x, \cdot, \cdot)$ est loc. Lipschitz unif. par rapport à $(t, x) \in \bar{Q}$.
 - (iv) On a $D_y\varphi(t, x, y, u) \geq 0 \quad \forall (t, x, y, u) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^2$.
- (A₀)

Sous ces hypothèses, on peut montrer le résultat d'existence et d'unicité suivant, voir par exemple [37, 49].

Théorème 1.4.1. *Pour tout contrôle $u \in L^\infty(Q)$, il existe une et une seule solution $y[u] \in \mathcal{V}^2(Q)$ de l'équation (1.4.2).*

On rappelle les estimations linéaires suivantes qui seront fondamentales pour démontrer un principe de décomposition du Lagrangien dans ce cadre.

Théorème 1.4.2. *Soit $p \in (1, \infty)$ et $f \in L^p(Q)$, $\alpha \in L^\infty(Q)$. Alors, le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{aligned} \partial_t z - \Delta z + \alpha z &= f && \text{in } Q, \\ z(0, \cdot) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ z &= 0 && \text{in } \Sigma, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

admet une unique solution forte $z[f] \in \mathcal{V}^p$ et il existe $c > 0$ tel que

$$\|z[f]\|_{\mathcal{V}^p(Q)} \leq c\|f\|_{L^p(Q)}.$$

On a également le résultat suivant.

Corollaire 1.4.1. *Si f_k converge faiblement dans L^2 vers \bar{f} , alors $z[f_k]$ converge fortement vers $z[\bar{f}]$ dans l'espace $C([0, T]; L^2(\Omega))$.*

Introduisons maintenant les contraintes d'égalité et d'inégalité. Soit $n_E \geq 1$ et $n_I \geq 1$ deux entiers. Soit $g_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_E}$, $g_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_I}$, $g_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe C^2 . Rappelons que l'on considère l'ensemble des contraintes suivantes :

$$\int_{\Omega} g_E^i(y_u(T, x)) dx = 0, \quad \int_{\Omega} g_I^j(y_u(T, x)) dx \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n_E, \quad 1 \leq j \leq n_I.$$

Dans la suite, on appelle $F(P)$ l'ensemble des solutions (y, u) qui satisfont ces contraintes, et on supposera dans toute la suite que cet ensemble est non-vide.

Définition 1.4.1. (i) On dit que \bar{u} est un minimum local faible pour le problème (P) ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $J(\bar{u}) \leq J(u)$ lorsque $\|u - \bar{u}\|_{\infty} \leq \varepsilon$ et $(y, u) \in F(P)$.

(ii) On dit que \bar{u} est un minimum local faible pour le problème (P) ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $J(\bar{u}) \leq J(u)$ pour tout contrôle u vérifiant $\|u\|_{\infty} \leq R$, $(y, u) \in F(P)$ et $\|y[u] - y[\bar{u}]\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

On a une définition similaire pour la propriété de croissance quadratique.

Définition 1.4.2. (i) On dit que J vérifie une propriété de croissance quadratique locale sur \mathcal{K} au point \bar{u} au sens faible ssi il existe $\varepsilon > 0, \alpha > 0$ tel que $J(u) \geq J(\bar{u}) + \alpha \|u - \bar{u}\|^2$ pour tout contrôle u vérifiant $(y, u) \in F(P)$ et $\|u - \bar{u}\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

(ii) On dit que J vérifie une propriété de croissance quadratique locale sur \mathcal{K} au point \bar{u} au sens fort ssi il existe $\varepsilon > 0, \alpha > 0$ tel que $J(u) \geq J(\bar{u}) + \alpha \|u - \bar{u}\|^2$ pour tout contrôle u tel que $(y, u) \in F(P)$ et $\|y[u] - y[\bar{u}]\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

On suppose dans toute la suite l'existence de minimum faibles et forts.

1.4.3 Conditions nécessaires

Pour établir une condition nécessaire du second ordre, on suit le principe de relaxation utilisé dans [25] et qui permet de traiter les problèmes de contrôle optimal des EDO avec contraintes à la fois sur l'état et le contrôle. Dans le cadre des EDP paraboliques, il faut prendre en compte l'appartenance des solutions à un espace de Sobolev (notamment pour la convergence de la suite des états adjoints).

On introduit tout d'abord le Lagrangien associé aux contraintes. Soit $E = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_E} \times \mathbb{R}_+^{n_I}$, on note un multiplicateur $\lambda \in E$ de la manière suivante : $\lambda = (\lambda^0, \lambda^E, \lambda^I)$. Soit la fonction :

$$\Phi[\lambda](y(T, x)) := \lambda_0 g_0(y(T, x)) + \sum_{i=1}^{n_E} \lambda_E^i g_E^i(y(T, x)) + \sum_{j=1}^{n_I} \lambda_I^j g_I^j(y(T, x)).$$

Le Lagrangien $\mathcal{L} : L^{\infty}(Q) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{n_E} \times \mathbb{R}_+^{n_I} \rightarrow \mathbb{R}$ associé au problème (P) s'écrit

$$\mathcal{L}[\lambda](u) := \lambda^0 \int_Q \ell(t, x, y, u) dt dx + \Phi[\lambda](y(T, \cdot)).$$

Le Hamiltonien associé au système s'écrit :

$$H[\lambda, p](t, x, y, u) = \lambda^0 \ell(t, x, y, u) - p \varphi(t, x, y, u).$$

L'état adjoint se définit comme suit :

Définition 1.4.3. L'état adjoint $p^\lambda \in \mathcal{V}^2$ associé au contrôle \bar{u} est défini comme l'unique solution de l'équation linéaire parabolique :

$$\begin{aligned} -\partial_t p - \Delta p &= D_y H[\lambda, p](t, x, \bar{y}, \bar{u}) && \text{dans } Q, \\ p(\cdot, \cdot) &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ p(T, \cdot) &= D_y \Phi[\lambda](\bar{y}(T, \cdot)) && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Notons que l'état adjoint dépend du multiplicateur λ . On introduit une représentation de Castaing de la multi-application $U : [0, T] \times \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par $U(t, x) := [a(t, x), b(t, x)]$ pour tout $(t, x) \in Q$. Par [57], on peut montrer l'existence d'une telle représentation pour U , et par conséquent, il existe une suite $(u_i(\cdot))_{i \geq 0} \in \mathcal{U}$ telle que $(u_i(t))_{i \geq 0}$ est une suite dense dans l'ensemble $U(t)$ p.p. $t \in [0, T]$. On définit également les multiplicateurs de Lagrange et Pontryagin pour le problème.

Définition 1.4.4. (i) L'ensemble des multiplicateurs de Lagrange pour le problème (P) au point \bar{u} est défini par :

$$\Lambda_L(\bar{u}) := \{\lambda \in E \mid \bar{u} \text{ satisfait (1.4.8) p.p. } (t, x) \in Q\}.$$

(ii) L'ensemble des multiplicateurs de Pontryagin pour le problème (P) au point \bar{u} est défini par :

$$\begin{aligned} \Lambda_P(\bar{u}) := \{\lambda \in \Lambda_L(\bar{u}) \mid H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x)) \leq H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{y}(t, x), v), \\ \forall v \in U(t, x), \text{ p.p. } (t, x) \in Q\}. \end{aligned}$$

(iii) Pour $N \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble des multiplicateurs de Pontryagin généralisés par :

$$\begin{aligned} \Lambda_P^N(\bar{u}) := \{\lambda \in \Lambda_L(\bar{u}) \mid H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x)) \leq H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{y}(t, x), u_i(t, x)), \\ 1 \leq i \leq N, \text{ p.p. } (t, x) \in Q\}. \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires faibles au premier ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} D_u H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{y}, \bar{u}) \geq 0 & \iff \bar{u}(t, x) = a(t, x), \\ D_u H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{y}, \bar{u}) = 0 & \iff \bar{u}(t, x) \in (a(t, x), b(t, x)), \\ D_u H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{y}, \bar{u}) \leq 0 & \iff \bar{u}(t, x) = b(t, x). \end{cases} \quad (1.4.8)$$

On supposera qu'en un point \bar{u} , le problème est qualifié. D'où la définition suivante.

Définition 1.4.5. On dit que le problème (P) est qualifié au point (\bar{u}, \bar{y}) ssi l'application

$$z \in L^\infty(\mathbb{R}^{N_E}) \longmapsto \int_\Omega Dg_E(\bar{y}(T, x))z(x)dx \in \mathbb{R}^{n_E} \quad (1.4.9)$$

est surjective et si pour tout $i \in I(\bar{u})$, il existe une application $w_i \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ vérifiant l'inégalité :

$$\int_\Omega (g_I^i)'(\bar{y}(T, x))w_i(x)dx < 0, \quad (1.4.10)$$

où $I(\bar{u}) := \{1 \leq i \leq n_I \mid \int_\Omega g_i^I(y(T, x))dx = 0\}$ est l'ensemble des indices des contraintes actives.

Ces hypothèses de qualification sont classiques (voir [48]). On pose dans la suite :

$$H_u[\lambda, p^\lambda](t, x) := H_u[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{u}(t, x), \bar{y}(t, x)),$$

et on définit l'application linéaire $Q_1[\bar{u}] : L^2(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$Q_1[\bar{u}](v) := \int_Q H_u[\lambda, p^\lambda](t, x) v(t, x) dx dt.$$

On définit également une forme quadratique sur $L^2(Q)$ par :

$$\begin{aligned} \Omega[\lambda](v, z_v) := & \int_Q D^2 H[\lambda, p^\lambda](t, x, \bar{u}, \bar{y})(v(t, x), z_v(t, x))^2 dt dx \\ & + \int_\Omega D^2 \phi[\lambda](\bar{y}(T, x))(z_v(T, x))^2 dx. \end{aligned}$$

où $v \in L^2(Q)$, $z_v \in \mathcal{V}_2(Q)$ est l'unique solution de l'équation semi-linéaire parabolique :

$$\begin{aligned} \partial_t z - \Delta z + \varphi(t, x, \bar{y}, \bar{u})z + \varphi(t, x, \bar{y}, \bar{u})v &= 0 & \text{in } Q, \\ z(\cdot, \cdot) &= 0 & \text{in } \Sigma, \\ z(0, \cdot) &= 0 & \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Enfin, on peut montrer que le cône critique s'écrit (voir [48] pour les contraintes polyédriques) : au point (\bar{u}, \bar{y}) :

$$C(\bar{u}) := T_{\mathcal{K}}(\bar{u}) \cap (Q_1[\bar{u}])^\perp, \tag{1.4.12}$$

où :

$$T_{\mathcal{K}}(\bar{u}) := \left\{ \begin{array}{l} v \in L^2(Q) \mid z_v \text{ satisfait (1.4.11),} \\ v(t, x) \geq 0 \iff \bar{u}(t, x) = a(t, x); \quad v(t, x) \leq 0 \iff \bar{u}(t, x) = b(t, x), \\ \int_\Omega Dg_E^i(\bar{y}(T, x))z_v(T, x)dx = 0, \quad 1 \leq i \leq n_E, \\ \int_\Omega Dg_I^j(\bar{y}(T, x))z_v(T, x)dx \leq 0, \quad j \in I(\bar{u}). \end{array} \right\} \tag{1.4.13}$$

La condition nécessaire du second ordre s'écrit ainsi :

Théorème 1.4.3. *Soit $v \in C(\bar{u})$. Alors il existe $\lambda \in \Lambda_P(\bar{u})$ tel que la condition du second ordre suivante soit vérifiée :*

$$\Omega[\lambda](v, z_v) \geq 0. \tag{1.4.14}$$

La preuve de ce résultat utilise les conditions nécessaires du second ordre faible (avec multiplicateurs de Lagrange) pour un problème relaxé. Rappelons un résultat général en optimisation, voir par exemple [48]. Soit X un espace de Hilbert, et considérons le problème suivant :

$$\inf_u J(u) \quad \text{t.q.} \quad G(u) \leq 0, \quad u \in C$$

où $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $G : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ est Fréchet différentiable et C est un ensemble convexe. Pour énoncer les conditions d'optimalité pour ce problème, on introduit le lagrangien \mathcal{L} associé au problème par : $\mathcal{L}(u, \lambda) := J(u) + \langle \lambda, G(u) \rangle$.

Théorème 1.4.4. *Si \bar{u} est une solution locale du problème et vérifie une condition de qualification, alors :*

(i) *Il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^{p*}$ associé à \bar{u} :*

$$\begin{cases} D_u \mathcal{L}(\bar{u}, \lambda^*)(u - \bar{u}) \geq 0, \quad \forall u \in C, \\ \langle \lambda^*, G(\bar{u}) \rangle = 0. \end{cases}$$

(ii) De plus, pour tout $v \in C(\bar{u})$, il existe un multiplicateur de lagrange λ^* vérifiant :

$$D_{uu}^2 \mathcal{L}(\bar{u}, \lambda^*)(v, v) \geq 0,$$

où $C(\bar{u}) := \{v \in X \mid DG(\bar{u})v = 0, DJ(\bar{u})v = 0\}$ est le cône critique à C en \bar{u} .

L'idée de la preuve consiste à introduire le problème de contrôle optimal relaxé qui suit en utilisant la représentation de Castaing de la multi-application U . Autrement dit, on considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \inf \int_Q \ell(t, x, y(t, x), u(t, x)) dt dx + \int_\Omega g_0(y(T, x)) dx, \\ & \text{t.q. } u \in \mathcal{K}, \alpha \in \mathcal{A}_N, \quad \alpha \geq 0, \\ & \int_\Omega g_E^i(y(T, x)) dx = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_E, \\ & \int_\Omega g_I^j(y(T, x)) dx \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n_I, \end{aligned} \tag{P_N}$$

où $N \geq 1$, et y est l'unique solution de l'équation parabolique :

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y + \left[1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i\right] \varphi(t, x, y, u) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(t, x, y, u_i) &= 0 & \text{dans } Q, \\ y(\cdot, \cdot) &= 0 & \text{dans } \Sigma, \\ y(0, \cdot) &= y_0(\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

Notons que l'on a deux contrôles $\alpha \in \mathcal{A}_N := L^\infty(Q, \mathbb{R}^N)$ et u . Un point difficile est de vérifier que le problème relaxé a bien une solution faible et qu'il est qualifié au point $(\bar{u}, \bar{\alpha})$, $\bar{\alpha} = 0$, ce qui provient des hypothèses faites sur le problème original (à savoir que \bar{u} est un minimum fort). Nous travaillons actuellement à la finalisation de ce point. On applique ensuite le théorème ci-dessus pour le problème (P_N) , ce qui permet de prouver l'existence de multiplicateurs de Pontryagin généralisés et d'obtenir une condition nécessaire du second ordre pour le problème relaxé (avec les multiplicateurs de Lagrange). Pour conclure quant à l'existence de multiplicateurs de Pontryagin pour le problème original, on passe à la limite par rapport à N en utilisant des résultats de compacité de [54].

1.4.4 Principe de décomposition et condition suffisante

L'idée du principe de décomposition est la même que dans les EDO ou dans le cas elliptique. On se place au voisinage d'un point nominal (\bar{u}, \bar{y}) , et on considère une suite u_k qui converge vers \bar{u} dans $L^2(Q)$. On décompose le Lagrangien comme la somme de deux termes : le premier terme est petit en norme infini, et le second n'est pas nécessairement petit en norme infini, mais l'est en norme $\|\cdot\|_1$. Ce principe de décomposition sert à démontrer une condition suffisante d'optimalité au second ordre.

Soit A_k et B_k une suite d'ensembles mesurables sur $[0, T] \times \Omega$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$|A_k \cup B_k| = T \times |\Omega|, \quad |B_k| \downarrow 0.$$

Soit maintenant une suite u_k de L^2 qui converge vers \bar{u} . On note

$$\delta_k u := u_k - \bar{u}, \quad \delta_{A_k} u := \bar{u} + \mathbb{1}_{A_k}(u_k - \bar{u}) \quad \text{et} \quad \delta_{B_k} u := \delta_k u - \delta_{A_k} u.$$

A l'aide de (1.4.2), on pose $z_k := z[\delta_k u]$, $z_{A_k} := z[\delta_{A_k} u]$, $z_{B_k} := z[\delta_{B_k} u]$. Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\delta_k H[\lambda, p(t, x)](t, x) := H[\lambda, p](t, x, \bar{y}(t, x), u_k(t, x)) - H[\lambda, p](t, x, \bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x)).$$

Le principe de décomposition s'écrit ainsi.

Théorème 1.4.5. *On suppose que la suite u_k vérifie les deux conditions suivantes : les suites $\|\delta_k u\|_2$ et $\|\delta_{A_k} u\|_\infty$ convergent vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Alors, on a le développement suivant du Lagrangien au second ordre :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda](y_k, u_k) - \mathcal{L}[\lambda](\bar{y}, \bar{u}) &= \int_{B_k} \delta_k H[\lambda, p(t, x)](t, x) dt dx + Q_1[\bar{u}, \lambda](\delta_{A_k} u) \\ &\quad + Q_2[\bar{u}, \lambda](\delta_{A_k} u) + o(\|\delta_k u\|_2^2). \end{aligned}$$

La preuve utilise fortement certaines estimations linéaires mentionnées en introduction, l'inégalité d'Hölder, et des injections de Sobolev. On introduit la définition suivante.

Définition 1.4.6. *On dit que le Hamiltonien vérifie une condition de croissance quadratique globale au point $\bar{u}, \bar{\lambda}$ ssi il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$H[\bar{\lambda}, p^{\bar{\lambda}}](t, x, \bar{u}(t, x), \bar{y}(t, x)) - H[\bar{\lambda}, p^{\bar{\lambda}}](t, x, v, \bar{y}(t, x)) \geq \alpha |v - \bar{u}(t, x)|^2.$$

Cette définition nous conduit au résultat principal de cette section et qui donne des conditions suffisantes pour un minimum fort.

Théorème 1.4.6. *Soit $(\bar{u}, \bar{y}) \in F(P)$. On suppose les hypothèses suivantes vérifiées :*

(i) $\Lambda_P(\bar{u}) \neq \emptyset$ et il existe $\bar{\lambda} \in \Lambda_P(\bar{u})$ pour lequel la condition de croissance quadratique globale du Hamiltonien est satisfaite en \bar{u} .

(ii) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in C_{\mathcal{K}}(\bar{u})$ il existe $\lambda \in \Lambda_P(\bar{u})$ tel que la forme quadratique Q_2 vérifie :

$$Q_2[\bar{u}, \lambda](v) \geq \alpha \|v\|_2^2.$$

(iii) Pour tout $\lambda \in \Lambda_P(\bar{u})$ la forme quadratique $Q_2[\bar{u}, \lambda]$ est une forme de Legendre.

Alors, il existe $\alpha', \varepsilon > 0$ tels que l'on ait :

$$J(u) \geq J(\bar{u}) + \alpha' \|u - \bar{u}\|_2^2, \quad \forall u \in \mathcal{K} \text{ t.q. } \|y_u - \bar{y}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ce résultat donne donc une caractérisation d'un minimum fort dans le cadre parabolique avec contraintes intégrales sur l'état final. La preuve de ce théorème suit la preuve du théorème 3.20 dans [1] en prenant en compte les contraintes intégrales sur l'état final (principe de décomposition pour le lagrangien). On utilise également des résultats de compacité [54].

Chapitre 2

Contrôle optimal pour des systèmes chemostat

Sommaire

2.1	Problème de contrôle avec contrainte triangle	31
2.1.1	Présentation du problème de contrôle	31
2.1.2	Optimalité dans l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$	34
2.1.3	Principe du maximum de Pontryagin	35
2.1.4	Synthèse optimale en dehors de $\mathcal{C}(\bar{s})$	38
2.1.5	Propriétés semi-perméables	39
2.1.6	Etude des arcs singuliers et simulations numériques	40
2.1.7	Conclusion	42
2.2	Sélection d'espèces compétitives	43
2.2.1	Présentation du problème	43
2.2.2	Synthèse optimale d'une commande feedback	45
2.2.3	Extensions à trois arcs singuliers et pour des conditions initiales en dehors de la variété invariante	47

Ce chapitre résume les deux articles [4, 5] :

- L'article [4] présente un résultat de synthèse optimale original. En effet, la contrainte dite "triangle" qui porte sur l'ensemble des contrôles admissibles entraîne un défaut de contrôlabilité pour le système. De plus, la courbe de non-contrôlabilité intersecte la courbe singulière (l'arc singulier). Ceci conduit à définir une courbe semi-perméable permettant d'obtenir la synthèse optimale.
- L'article [5] s'intéresse à un problème de contrôle optimal où la difficulté principale est l'existence d'une courbe de non-contrôlabilité. On fournit une stratégie optimale de type singulière qui n'a pas été mise en place auparavant. Par ailleurs, certaines extensions sont évoquées (cas de plusieurs arcs singuliers, étude en dehors de la variété attractivement stable).

2.1 Problème de contrôle avec contrainte triangle

2.1.1 Présentation du problème de contrôle

Cette partie résume le papier [4]. On s'intéresse à deux réacteurs continus en série (chemostat) avec une espèce et un substrat [58]. On modélise un tel système par les

équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\mu(s_1) - u_1]x_1, \\ \dot{s}_1 = -\mu(s_1)x_1 + u_1(s_{in} - s_1), \\ \dot{x}_2 = [\mu_2(s_2) - u_2]x_2, \\ \dot{s}_2 = -\mu(s_2)x_2 + u_2(s_1 - s_2). \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Ici, x_i (resp. s_i) désigne la concentration en micro-organismes (resp. substrat) dans le réacteur i , u_1 est le taux de dilution dans le premier réacteur, u_2 est le taux de dilution dans le second réacteur, et s_{in} est une constante donnée qui représente la concentration de substrat entrante (on peut normaliser cette constante). La fonction μ est appelé fonction de croissance (elle décrit la façon avec laquelle les micro-organismes réagissent avec le substrat), voir [58]. Il est à noter que les deux contrôles u_1 et u_2 prennent leur valeur dans l'ensemble :

$$U := \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq v_2 \leq v_1 \leq u_{max}\}, \quad (2.1.2)$$

où u_{max} est le taux de dilution maximal. Le fait de considérer deux contrôles provient du fait que l'on souhaite commander les deux réacteurs (deux contrôles). Plus précisément, il est intéressant de conduire chacun des deux réacteurs à un équilibre (correspondant à un état métabolique du système biologique), et si possible de pouvoir les maintenir une fois atteints.

Remarque 2.1.1. *Il existe de nombreuses motivations pour étudier de tels systèmes en cascade appelés parfois gradostat (pour la fermentation, pour modéliser un gradient de ressource). On se réfère à [4] pour plus de détails sur ces questions.*

Cette contrainte sur les deux contrôles constituera l'originalité et la difficulté de cette étude. En effet, cet ensemble n'est pas difféomorphe à la boule unité pour la norme ℓ_1 ou ℓ_2 . Or, on considère généralement le pavé $[-1, 1]^n$ comme ensemble admissible pour les contrôles lorsque l'on étudie des systèmes affines en la commande (voir par exemple [59]). En particulier, la contrainte (2.1.2) engendre des problèmes de contrôlabilité pour le système. Notre objectif est d'étudier un problème de temps minimal pour rejoindre une

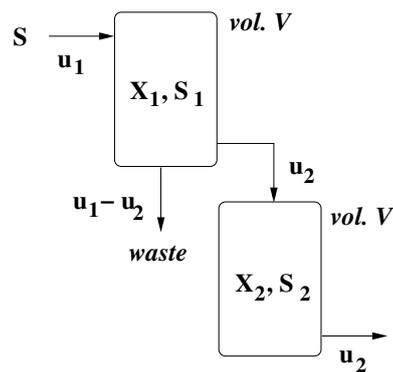


FIGURE 2.1 – Représentation de deux réacteurs continus en cascade. La concentration en substrat entrante dans le premier réacteur est $s_{in} > 0$.

cible ponctuelle. Afin de simplifier cette étude, nous supposons que le système a rejoint la variété invariante $x + s = s_{in}$ (attractivement stable) pour (2.1.1) dans chaque réacteur.

On se réfère à [58] pour cette propriété. Ainsi, le système peut se réécrire :

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -\mu(s_1)(s_{in} - s_1) + u_1(s_{in} - s_1), \\ \dot{s}_2 = -\mu(s_2)(s_{in} - s_2) + u_2(s_1 - s_2). \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Les conditions initiales pour le système (2.1.3) sont dans l'ensemble \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} := \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq s_{in}\}. \quad (2.1.4)$$

L'ensemble des contrôles admissibles pour ce problème est :

$$\mathcal{U} := \{u = (u_1, u_2) : [0, \infty) \rightarrow U \mid \text{meas.}\}. \quad (2.1.5)$$

En théorie des systèmes dynamiques, on choisit le vecteur $u = (u_1, u_2)$ constant de manière à ce que le système atteigne un équilibre souhaité (asymptotiquement). Afin d'optimiser de tels systèmes, on s'intéresse au problème de contrôle optimal suivant. Notre objectif est de trouver un contrôle optimal $u \in \mathcal{U}$ reliant un point $s_0 = (s_1^0, s_2^0) \in \mathcal{D}$ à une cible ponctuelle $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in \mathcal{D}$ en temps minimal :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} t_f(u) \text{ avec } s(t_f(u)) = \bar{s}, \quad (2.1.6)$$

où $s(\cdot)$ est l'unique solution de (2.1.3) avec un contrôle $u \in \mathcal{U}$, et $t_f(u) \in [0, +\infty]$ est le temps pour relier s_0 à la cible \bar{s} (éventuellement $+\infty$).

La contrainte $u_2 \leq u_1$ impose un problème de contrôlabilité pour le système (2.1.3) : en effet, en chaque point, le cône des vitesses admissibles pour le système (2.1.3) est strictement inclus dans \mathbb{R}^2 . Ainsi, il peut éventuellement exister des cibles qui ne sont pas atteignables pour une partie des conditions initiales (ce point sera traité précisément plus tard). On étudiera d'abord quelques propriétés de contrôlabilité du système avant d'utiliser le principe du maximum de Pontryagin pour caractériser les trajectoires optimales.

On effectue les hypothèses suivantes sur la fonction de croissance μ :

- (H1) $\mu(\cdot)$ est de classe C^2 on $[0, +\infty[$,
- (H2) $\mu(s) < 1$, pour tout $s \in [0, s_{in}[$ et $\mu(0) = 0$,
- (H3) $\mu(\cdot)$ est croissante sur $[0, s_{in}]$.

Ces hypothèses sont vérifiées pour des fonctions de type Monod $\mu_m(s) = \frac{\bar{\mu}s}{k+s}$, ou Hill $\mu(s) = \mu_m(s^\theta)$, $\theta > 0$ voir [58]. Dans la dernière partie de ce travail, nous montrons des simulations numériques dans le cas où μ est de type Monod ou linéaire.

On peut tout d'abord montrer le lemme suivant.

Lemme 2.1.1. *L'ensemble*

$$\mathcal{D} := \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq s_{in}\}, \quad (2.1.7)$$

est invariant par le système (2.1.3).

Dans la suite, on appelle $s(t, s_0, u)$ l'unique solution de (2.1.3) partant à l'instant 0 du point s_0 avec le contrôle u . On appelle également $s(-t, s_0, u)$ l'unique solution de (2.1.3) en temps rétrograde partant à l'instant 0 du point s_0 pour le contrôle u .

Le problème (2.1.6) va s'étudier en le décomposant en deux sous problèmes. On choisit une cible $\bar{s} \in \text{int } \mathcal{D}$ et on va définir un ensemble $\mathcal{C}(\bar{s}) \subset \mathcal{D}$ qui va satisfaire les propriétés suivantes :

- Le point \bar{s} vérifie $\bar{s} \in \mathcal{C}(\bar{s})$ et \bar{s} est atteignable depuis toute condition initiale dans $\mathcal{C}(\bar{s})$ et toute trajectoire optimale reste dans $\mathcal{C}(\bar{s})$,
- Etant donné s_0 à l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$, un contrôle optimal associé vérifie nécessairement $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout temps t .

Ainsi, on est amené à décomposer le problème de la façon suivante :

1. Définition de $\mathcal{C}(\bar{s})$, étude du problème avec deux contrôles pour les conditions initiales dans $\mathcal{C}(\bar{s})$, optimalité pour les conditions initiales dans $\mathcal{C}(\bar{s})$. On verra qu'il n'y a pas de problème de contrôlabilité dans $\mathcal{C}(\bar{s})$.
2. Etude du problème pour des conditions initiales en dehors de $\mathcal{C}(\bar{s})$ avec un seul contrôle (système affine mono-entrée) et avec des problèmes de contrôlabilité.

2.1.2 Optimalité dans l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$

Etant donnée une courbe paramétrée $p = (p_1, p_2) : [0, t_f] \rightarrow \mathcal{D}$ définie sur un intervalle $[0, t_f]$, avec $p_1 : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, on note p_{\geq} son épigraphe :

$$p_{\geq} := \{(s_1, s_2) \in \mathcal{D} \mid \exists t \in [0, t_f] \text{ t.q. } s_1 = p_1(t) \text{ et } s_2 \geq p_2(t)\}.$$

Soit $\bar{s} \in \text{int } \mathcal{D}$ et fixons le contrôle $u = (1, 1)$. On appelle $\tilde{s}(\cdot)$ la trajectoire rétrograde depuis \bar{s} . Soit $\tilde{t} \in [0, +\infty]$ son temps de sortie de l'ensemble \mathcal{D} .

(i) Si $\tilde{s}_1(\tilde{t}) = \tilde{s}_2(\tilde{t})$, on définit $p : [-\tilde{t}, +\infty[\rightarrow \mathcal{D}$ comme suit :

$$p(t) = \begin{cases} s(t, \bar{s}, (1, 1)), & \text{if } t \in [-\tilde{t}, 0[, \\ s(-t, \bar{s}, (0, 0)), & \text{if } t \in [0, \infty[. \end{cases}$$

(ii) Si $\tilde{s}_2(\tilde{t}) = 0$, on définit p par :

$p : [-(\tilde{t} + s_1(\tilde{t})), +\infty[\rightarrow \mathcal{D}$ par :

$$p(t) = \begin{cases} (t + (\tilde{t} + s_1(\tilde{t})), 0), & \text{if } t \in [-(\tilde{t} + s_1(\tilde{t})), -\tilde{t}], \\ s(t, \bar{s}, (1, 1)), & \text{if } t \in [-\tilde{t}, 0[, \\ s(-t, \bar{s}, (0, 0)), & \text{if } t \in [0, \infty[. \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$ (voir Figure 2.2) se définit dorénavant de la façon suivante :

$$\mathcal{C}(\bar{s}) := p_{\geq}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$ vérifie la propriété suivante.

Proposition 2.1.1. *L'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$ est exactement l'ensemble des conditions initiales de \mathcal{D} pour lesquelles on peut atteindre la cible en temps fini avec le contrôle u_1 constamment égal à 1 ou le contrôle u_2 constamment égal à 0.*

On peut montrer les deux propriétés qualitatives suivantes (lemmes 2.1.2, 2.1.3) qui portent sur la frontière de l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$

Lemme 2.1.2. *Soit $\tilde{s}(\cdot)$ la trajectoire rétrograde depuis \bar{s} avec le contrôle $u_1 = u_2 = 0$. Alors \tilde{s} vérifie :*

(i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{s}(t) = (s_{in}, s_{in})$.

(ii) Lorsque t converge vers $+\infty$, le rapport $\frac{s_{in} - \tilde{s}_2(t)}{s_{in} - \tilde{s}_1(t)}$ converge vers une valeur finie.

Lemme 2.1.3. *Soit $\hat{s}(\cdot)$ la solution de (2.1.3) partant \bar{s} avec le contrôle $u_1 = u_2 = 1$. Alors \hat{s} vérifie :*

(i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{s}(t) = (s_{in}, s_{in})$.

(ii) Lorsque t converge vers $+\infty$, le rapport $\frac{s_{in} - \hat{s}_2(t)}{s_{in} - \hat{s}_1(t)}$ converge vers l'infini.

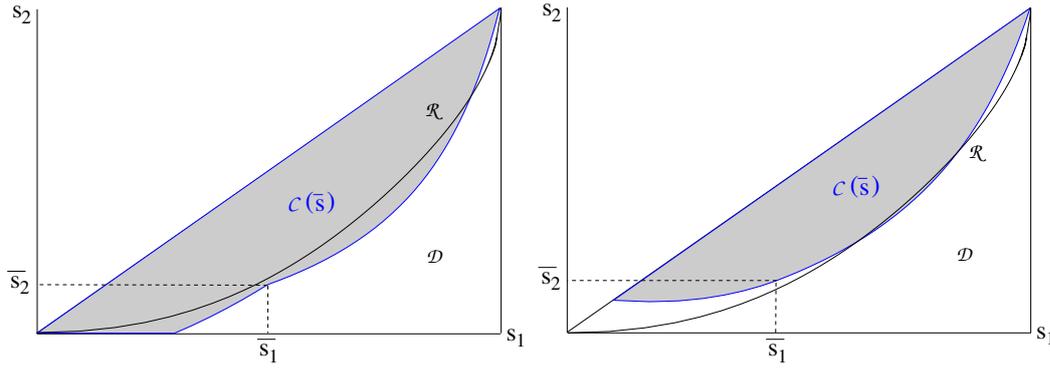


FIGURE 2.2 – Ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$ qui dépend de la façon avec laquelle $\tilde{s}(\cdot)$ quitte le domaine \mathcal{D} .

Ce dernier lemme se montre à l'aide de résultats sur les systèmes asymptotiquement autonomes. On utilise ces propriétés notamment pour caractériser les cibles qui peuvent être atteintes de tout point du domaine (voir la section 2.1.4) et pour exclure les trajectoires anormales qui ont plus d'une commutation.

Pour conclure sur la synthèse optimale dans l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$, on définit une courbe paramétrée $\Gamma \subset \mathcal{C}(\bar{s})$ de la manière suivante :

$$\Gamma := \{\sigma \in \mathcal{D} \mid \exists t \in [0, \tilde{t}] \sigma = s(-t, \bar{s}, (1, 0))\}.$$

où \tilde{t} est son temps de sortie de $t \mapsto s(-t, \bar{s}, (1, 0))$ de l'ensemble \mathcal{D} . La caractérisation des trajectoires optimales dans $\mathcal{C}(\bar{s})$ (voir Figure 2.3) s'effectue de la manière suivante.

Théorème 2.1.1. *Toute trajectoire qui reste dans l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$ au-dessus (resp. en dessous) de Γ et pour laquelle le contrôle $u = (u_1, u_2)$ vérifie $u_2 \equiv 0$ (resp. $u_1 \equiv 1$) atteint la cible \bar{s} en temps fini et est optimal. De plus, la fonction valeur dans $\mathcal{C}(\bar{s})$ s'écrit :*

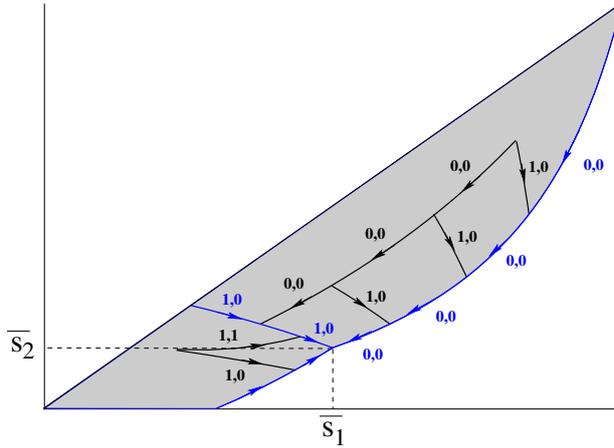
$$T(s^0) = \max \left\{ \int_{s_1^0}^{\bar{s}_1} \frac{d\sigma}{(1 - \mu(\sigma))(s_{in} - \sigma)}, \int_{s_2^0}^{\bar{s}_2} \frac{d\sigma}{-\mu(\sigma)(s_{in} - \sigma)} \right\}. \quad (2.1.8)$$

On peut utiliser l'équation d'Hamilton-Jacobi associée au problème de temps minimal, mais une difficulté provient du fait que V n'est pas C^1 sur la courbe Γ , ainsi il faut montrer l'équation au sens des viscosités. On peut également faire une preuve directe en montrant que $V(s)$ réalise effectivement le minimum par rapport à tout les autres contrôles, et en utilisant la proposition 2.1.1.

Remarque 2.1.2. *Prenons une condition initiale s_0 dans l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$. Comme par exemple dans l'étude des équations eikonales, il existe donc une infinité de trajectoires admissibles qui relie s_0 à \bar{s} par le théorème 2.1.1. Ces trajectoires possèdent toutes le même coût.*

2.1.3 Principe du maximum de Pontryagin

Dans cette section, on s'intéresse à des conditions initiales à l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$.


 FIGURE 2.3 – Exemple de trajectoires dans $\mathcal{C}(\bar{s})$.

On appelle $\mathcal{R}(\bar{s})$ l'ensemble des points de \mathcal{D} tels qu'il existe un contrôle admissible tel que la solution du système avec ce contrôle relie s_0 à la cible en temps fini :

$$\mathcal{R} := \{s^0 \in \mathcal{D} \mid T(s^0) < +\infty\}.$$

On rappelle brièvement le principe du maximum de Pontryagin appliqué dans ce cadre. Soit H le Hamiltonien associé au système :

$$H := \lambda_0 - \lambda_1 \mu(s_1)(s_{in} - s_1) - \lambda_2 \mu(s_2)(s_{in} - s_2) + \lambda_1(s_{in} - s_1)u_1 + \lambda_2(s_1 - s_2)u_2.$$

En prenant en compte la contrainte sur la commande u , la fonction de commutation est :

$$\phi_2 := \lambda_1(s_{in} - s_1) + \lambda_2(s_1 - s_2),$$

où $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot))$ est l'état adjoint associé à la trajectoire. Grâce au principe du maximum de Pontryagin, on peut montrer le lemme suivant.

Lemme 2.1.4. *Pour toute condition initiale $s_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}(\bar{s})$, un contrôle extrémal vérifie*

- (a) $\phi_2(t) > 0 \implies u(t) = (1, 1)$ et $\lambda_2(t) > 0$,
- (b) $\phi_2(t) = 0 \implies u_1(t) = u_2(t) \in [0, 1]$ and $\lambda_2(t) > 0$ (arc singulier),
- (c) $\phi_2(t) < 0 \implies u_1(t) = u_2(t) = 0$.

La proposition qui suit découle des lois de commande précédemment établie et est fondamentale dans notre étude.

Proposition 2.1.2. *Soit $s_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}(\bar{s})$ tel que $s_0 \in \mathcal{R}$. Alors, toute extrémale pour le problème (3.5.12) vérifie la propriété :*

$$u_1(t) = u_2(t), \quad \text{p.p. } t \in [0, t_f].$$

Pour une condition initiale en dehors de $\mathcal{C}(\bar{s})$, on peut donc ramener le système à un système affine en dimension 2 mono-entrée :

$$\dot{s} = f(s) + ug(s),$$

où les champs de vecteur f et g sont définies par

$$f(s) := - \begin{pmatrix} \gamma(s_1) \\ \gamma(s_2) \end{pmatrix}, \quad g(s) := \begin{pmatrix} s_{in} - s_1 \\ s_1 - s_2 \end{pmatrix},$$

avec $\gamma(s) := \mu(s)(s_{in} - s)$.

Afin d'étudier plus précisément les trajectoires optimales en dehors de l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$, on introduit les deux ensembles ci-dessous et qui sont fondamentaux dans cette étude. L'ensemble Δ_0 est l'ensemble dit de non-contrôlabilité :

$$\Delta_0 := \{(s_1, s_2) \in \text{int } \mathcal{D} \mid \det(f(s), g(s)) = 0\},$$

et l'ensemble Δ_{SA} est l'ensemble singulier.

$$\Delta_{SA} := \{(s_1, s_2) \in \mathcal{D} \mid \det(g(s), [f, g](s)) = 0\}.$$

On définit les deux sous-ensembles Δ_{SA}^+ (resp. Δ_{SA}^-) de \mathcal{D} comme l'ensemble des points s de \mathcal{D} vérifiant $\det(g(s), [f, g](s)) > 0$ (resp. $\det(g(s), [f, g](s)) < 0$), et de même on définit Δ_0^\pm .

A l'aide de ces deux sous-ensembles on peut définir une stratégie singulière qui consiste à rejoindre le plus rapidement possible l'arc singulier (appelé turnpike ou anti-turnpike, voir [59, 60]) : pour $s \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}(\bar{s})$, on considère la loi de commande en boucle fermée (i.e. le contrôle dépend de l'état et non du temps) :

$$u_1(s) = u_2(s) = \begin{cases} 1 & s \in \Delta_{SA}^-, \\ u_s(s) & s \in \Delta_{SA}, \\ 0 & s \in \Delta_{SA}^+, \end{cases}$$

où $u_s(\cdot)$ est un contrôle singulier qui permet au système de rester sur l'ensemble l'arc singulier Δ_{SA} tant que celui-ci est contrôlable (i.e. $u_s \in [0, 1]$). Les propriétés plus précises concernant l'arc singulier seront discutées dans les parties suivantes. On supposera ici que l'arc singulier est contrôlable i.e. $u_s \in [0, 1]$. Cette propriété est vérifiée dans le cas où μ est linéaire, mais cette question est en générale difficile à vérifier avec des hypothèses générales comme (H1) (voir la section suivante pour un exemple d'étude de synthèse optimale en présence d'un arc singulier non contrôlable). On peut le vérifier facilement numériquement.

Un élément fondamental dans l'étude des trajectoires optimales en dehors de $\mathcal{C}(\bar{s})$ est la présence de points singuliers stationnaires.

Définition 2.1.1. *On appelle point singulier stationnaire (voir [59]) tout point $s^* \in \mathcal{D} \setminus \{(s_{in}, s_{in})\}$ tel que*

$$s^* \in \Delta_0 \cap \Delta_{SA},$$

Si un tel point existe, alors l'arc singulier (s'il est contrôlable) met un temps infini pour rejoindre s^* : un tel point est alors un équilibre de la dynamique du système restreinte à l'arc singulier Δ_{SA} . En effet, le long de l'arc singulier, on a :

$$\lambda(t) \cdot f(s(t)) = 0, \quad \lambda(t) \cdot g(x(t)) = 1,$$

par conséquent une extrémale singulière ne peut rejoindre en temps finie la courbe Δ_0 .

Afin d'obtenir la synthèse optimale, on effectue l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.1.1. *Il existe un et un seul point singulier stationnaire dans l'intérieur de l'ensemble \mathcal{D} .*

Cette hypothèse est vérifiée dans le cas où μ est linéaire et dans le cas (Monod), voir la section sur le calcul explicite des arcs singuliers.

On peut montrer la proposition suivante à l'aide du principe du maximum de Pontryagin qui permet d'exclure les extrémales qui ont une commutation avant d'atteindre l'arc singulier (raisonnement sur ϕ et sa dérivée).

Proposition 2.1.3. *Supposons que s^* soit dans l'intérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$. Alors, pour tout $s_0 \in \mathcal{D}$ à l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$, la stratégie optimale est la stratégie singulière.*

On trouvera plus de détails sur ce résultat dans [4], notamment sur les propriétés dite *turnpike* ou *anti-turnpike* de l'arc singulier (afin de savoir s'il est maximisant ou minimisant). Notons que la preuve de cette proposition n'utilise pas le théorème de Green. En effet, il s'agirait alors de comparer des trajectoires globales pour relier s_0 à \bar{s} . Or la présence de la courbe Δ_0 empêche d'utiliser ce théorème.

Etant donnée une cible \bar{s} , on souhaiterait donc savoir si l'hypothèse $s^* \in \mathcal{C}(\bar{s})$ est vérifiée ou non. En effet : si ce n'est pas le cas, alors la stratégie singulière rencontre s^* en temps infini. Par conséquent, elle ne peut être optimale. De plus, dans ce cas, il est possible que la cible ne soit pas atteignable.

A ce stade, il est donc fondamental d'étudier la question suivante : soit $\bar{s} \in \mathcal{D}$. Est-ce que s^* appartient à $\mathcal{C}(\bar{s})$? Pour étudier cette question, on est amené à introduire une courbe semi-perméable qui permettra de distinguer deux cas :

- Si la cible est au-dessus de cette courbe, alors $s^* \notin \mathcal{C}(\bar{s})$, et $\mathcal{C}(\bar{s}) \subset \Delta_0^+$, et dans ce cas, la cible n'est jamais atteignable depuis un point s_0 situé à l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$.
- Si la cible est en-dessous de cette courbe, alors $s^* \in \mathcal{C}(\bar{s})$, et la stratégie singulière est optimale depuis l'extérieur de \mathcal{D} .

Pour introduire cette courbe, il faut étudier plus précisément la courbe Δ_0 et les trajectoires du système qui sont tangentes à Δ_0 .

2.1.4 Synthèse optimale en dehors de $\mathcal{C}(\bar{s})$

On rappelle le lemme suivant (voir [59]).

Lemme 2.1.5. *Considérons deux champs de vecteur $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ réguliers et un système affine mono-entrée dans \mathbb{R}^2 :*

$$\dot{s} = f(s) + ug(s), \quad u \in [-1, 1]. \quad (2.1.9)$$

Soit $\Delta_0 := \{(s_1, s_2) \in \text{int } \mathcal{D} \mid \det(f(s), g(s)) = 0\}$. Alors, l'ensemble des points singuliers stationnaires coïncide exactement avec l'ensemble des points de Δ_0 où la dynamique (2.1.9) est tangente à Δ_0 .

Ce lemme est fondamental pour notre étude car il permet de partitionner l'ensemble \mathcal{D} en exactement deux sous-ensembles (de par l'hypothèse que s^* est unique) où le système permet de traverser la courbe Δ_0 . On verra une preuve de ce lemme dans [4] différente de celle de [59]. On peut également décrire comment se comporte la dynamique le long de la courbe de non-contrôlabilité Δ_0 . Soit $\tau(s)$ le vecteur tangent à Δ_0 au point s .

Lemme 2.1.6. *Pour $s \in \Delta_0$, on a :*

$$s \in \Delta_{SA}^+ \Rightarrow \det(f(s), \tau(s)) > 0, \quad s \in \Delta_{SA}^- \Rightarrow \det(f(s), \tau(s)) < 0. \quad (2.1.10)$$

A l'aide des résultats précédents, on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 2.1.4. *Soit \bar{s} une cible dans l'intérieur du domaine \mathcal{D} . Alors, les deux seuls cas suivants sont possible :*

- Cas I : s^* est dans l'intérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$
- Cas II : s^* n'est pas dans $\mathcal{C}(\bar{s})$ et $\mathcal{C}(\bar{s}) \cap \Delta_0 = \emptyset$, $\mathcal{C}(\bar{s}) \subset \Delta_0^+$.

On peut alors démontrer la synthèse optimale ci-dessous.

Théorème 2.1.2. (i) *Dans le cas I, la stratégie optimale à l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$ est singulière.*

(ii) *Dans le cas II, la cible n'est pas atteignable depuis tout point $s_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}(\bar{s})$.*

Le théorème précédent fournit donc une synthèse optimale pour une cible quelconque $\bar{s} \in \mathcal{D}$. Néanmoins, il est fondamental de savoir si une cible donnée est dans le cas I ou le cas II. Pour étudier ce point, on introduit une courbe semi-perméable (voir [61, 62, 63]) définie à partir de s^* .

Remarque 2.1.3. *Les trajectoires anormales sont étudiées dans [4]. On montre qu'il existe deux trajectoires anormales optimales, à savoir les deux courbes qui forment la frontière de l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$. Par des raisonnements sur le signe de la fonction de commutation, on montre en effet qu'une trajectoire anormale qui possède au moins une commutation (nécessairement sur Δ_0) n'est pas optimale pour rejoindre la cible.*

2.1.5 Propriétés semi-perméables

On introduit la courbe suivante qui se définit à partir du point singulier stationnaire s^* .

Définition 2.1.2. *Soit la courbe paramétrée*

$$c : \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \rightarrow \mathcal{D},$$

$$t \mapsto \begin{cases} s(-t, s^*, (0, 0)), & \forall t \in]-\infty, 0[, \\ s(t, s^*, (1, 1)), & \forall t \in]0, +\infty[, \\ s(-\infty) = (0, 0), \\ s(+\infty) = (s_i, s_i), \end{cases}$$

et soit $A := c_{\geq}$ l'épigraphe de c dans \mathcal{D} .

La proposition suivante va être fondamentale pour répondre à la question ci-dessus.

Proposition 2.1.5. *On a :*

$$A \setminus \{(0, 0), s^*, (s_{in}, s_{in})\} \subseteq \Delta_0^+.$$

Elle se montre par le théorème de Cauchy-Lipschitz et le lemme 2.1.5 (voir [59]). On peut alors montrer le résultat principal de cette étude et qui conclue l'étude de l'optimalité.

Théorème 2.1.3. (i) *Si $\bar{s} \notin A$ alors on est dans le cas I. La fonction valeur est $V(s)$ dans $\mathcal{C}(\bar{s})$ et la stratégie optimale est singulière à l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$.*

(ii) *Si $\bar{s} \in A$, alors on est dans le cas II. La fonction valeur est $V(s)$ dans $\mathcal{C}(\bar{s})$ et vaut $+\infty$ à l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$ i.e. la cible n'est pas atteignable depuis $s_0 \notin \mathcal{C}(\bar{s})$.*

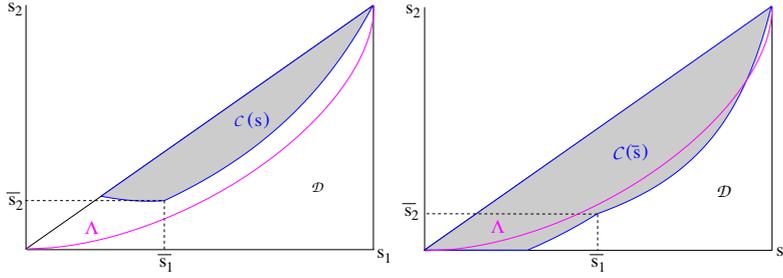


FIGURE 2.4 – A gauche, la cible \bar{s} est dans A et on a $C(\bar{s}) \subset \Delta_0^+$. A droite, la cible \bar{s} est dans B, et s^* est dans $C(\bar{s})$.

La frontière de A délimite exactement l'ensemble des cibles pour lesquelles on est soit dans le cas I ou le cas II, voir Fig. 2.4.

L'origine de cette propriété sur A provient de la propriété de semi-perméabilité de ∂A . Rappelons tout d'abord la définition de courbe semi-perméable. Pour ce faire, considérons plus généralement une inclusion différentielle

$$\dot{s} \in F(s), \quad (2.1.11)$$

où la multi-application F est à valeur convexes, compactes et est Lipschitz.

Définition 2.1.3. *Un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^2$ admet une frontière semi-perméable pour le système (2.1.11) dans un voisinage d'un point $\bar{s} \in \partial C$, s'il existe un voisinage V de \bar{s} tel que :*

$$\forall s \in \text{bdy } C \cap V, \quad \forall p \in N_C(s), \quad \inf_{v \in F(s)} \langle v, p \rangle = 0,$$

On a maintenant la propriété suivante sur la courbe qui définit l'ensemble A.

Proposition 2.1.6. *La courbe $\text{gph } c$ est semi-perméable pour le système initial.*

On peut également montrer la propriété suivante qui met en lumière d'une façon différente le cas (ii) du théorème 2.1.3.

Proposition 2.1.7. *La frontière de $C(\bar{s})$ est semi-perméable.*

2.1.6 Etude des arcs singuliers et simulations numériques

Dans cette partie, on dérive l'expression générale de l'arc singulier, et on illustre les résultats de synthèse optimale sur le cas où la fonction μ est linéaire. L'ensemble Δ_{SA} coïncide exactement avec l'ensemble des points s de \mathcal{D} qui vérifient $\psi(s) = 0$ où l'on a posé :

$$\psi(s_1, s_2) := [\mu(s_2) - \mu(s_1) - \mu'(s_1)(s_1 - s_2)](s_{in} - s_1) + \mu'(s_2)(s_{in} - s_2)(s_1 - s_2). \quad (2.1.12)$$

Le contrôle singulier s'écrit de façon usuelle comme feedback de l'état :

$$u_s[s] = - \frac{\langle \lambda, [f, [f, g]](s) \rangle}{\langle \lambda, [g, [f, g]](s) \rangle}, \quad (2.1.13)$$

avec le vecteur adjoint $\lambda = - \frac{-g(s)^\perp}{\text{get}(f(s), g(s))}$.

Etude où μ est linéaire.

Examinons le cas où μ est linéaire i.e. $\mu(s) = \alpha s$. On peut montrer que le couple arc singulier / contrôle singulier s'écrit :

$$s_2 = 2s_1 - s_{in}, \quad u_s = 2\alpha(s_{in} - s).$$

Il vient que l'arc singulier est contrôlable i.e. $u_s < 1$ (car $s \in [s_{in}/2, s_{in}]$ pour l'arc singulier.) Rappelons que Δ_0 est l'ensemble des points de \mathcal{D} vérifiant :

$$\mu(s_1)(s_1 - s_2) - \mu(s_2)(s_{in} - s_2) = 0.$$

Dans ce cas on vérifie qu'il existe un seul et unique point d'équilibre singulier s^* et on a :

$$s^* = \left(\frac{s_{in}}{3}, \frac{s_{in}}{3} \right),$$

ce qui répond bien à la question précédemment posée sur l'existence et l'unicité de d'un tel point. Enfin, on peut montrer la propriété suivante sur le sens de parcours de l'arc singulier :

- Si $s_1 > s_1^*$, alors $\dot{s}_1|_{u=u_s} < 0$: dans cette partie l'arc singulier est maximisant (il n'est localement pas optimal).
- Si $s_1 < s_1^*$, alors $\dot{s}_1|_{u=u_s} > 0$: dans cette partie l'arc singulier est minimisant (il est localement optimal).

Ces deux points se montrent grâce à la propriété dite *clock form* [64] qui peut s'appliquer localement. Les figures suivantes présentent les différentes trajectoires optimales lorsque la cible varie dans le domaine \mathcal{D} .

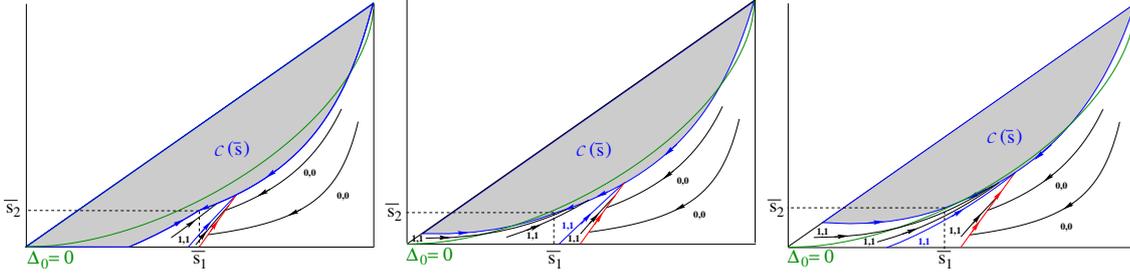


FIGURE 2.5 – Quelques trajectoires optimales dans $\mathcal{D} \setminus \mathcal{C}(\bar{s})$ lorsque $\bar{s} \in \Delta_{SA}^-$. La cible est dans Δ_0^- (figure de gauche et du milieu) et dans Δ_0^+ (figure de droite). La courbe verte représente Δ_0 et la courbe rouge l'arc singulier Δ_{SA} .

Etude où μ est de type Monod.

On étudie maintenant le cas où la fonction de croissance est de type Monod :

$$\mu(s) = \frac{\bar{\mu}s}{k+s}.$$

Le calcul de l'arc singulier et de la courbe Δ_0 est résumé par la proposition ci-dessous (on a utilisé un logiciel de calcul formel pour vérifier les expressions).

Proposition 2.1.8. (i) Il existe $\check{s}_1 \in (0, s_{in})$ ainsi qu'une application $F_{AS} : [\check{s}_1, s_{in}) \rightarrow [0, s_{in})$ de classe C^1 qui est croissante et telle que : $(s_1, s_2) \in \mathcal{D}$ vérifie $\psi(s_1, s_2) \geq 0$ ssi $s_2 \geq F_{AS}(s_1)$, où :

$$F_{AS}(s_1) := \frac{1}{2(s_{in} - s)} \left[-s_{in}s_1 - k^2 + ks_1 - 3ks_{in} + \sqrt{(k+s_1)^2(s_{in}+k)(5s_{in}+k-4s_1)} \right], \quad (2.1.14)$$

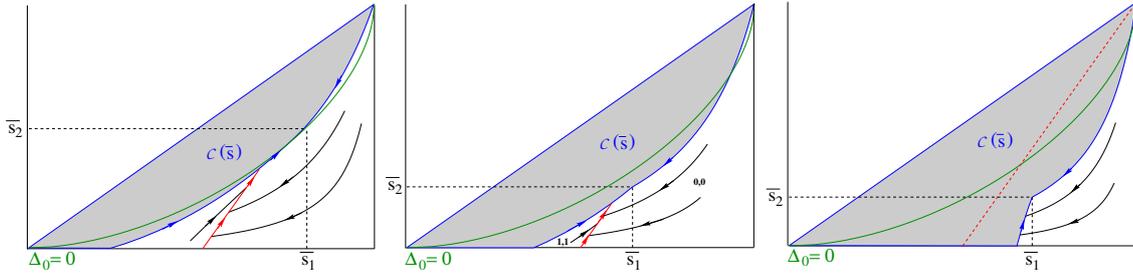


FIGURE 2.6 – Quelques trajectoires optimales dans $\mathcal{D} \setminus \mathcal{C}(\bar{s})$ lorsque $\bar{s} \in \Delta_{SA}^+$. La cible est dans Δ_0^+ (figure gauche), Δ_0^- (figure du milieu), et l'arc singulier n'est pas atteint (figure droite) : $\Delta_{SA} \notin \mathcal{C}(\bar{s})$. La courbe verte représente Δ_0 et la courbe rouge l'arc singulier Δ_{SA} .

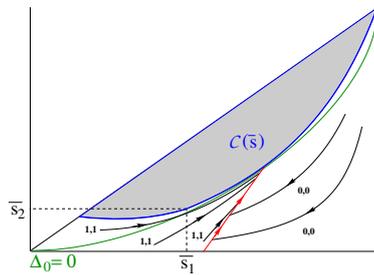


FIGURE 2.7 – Exemple où la cible \bar{s} n'est pas atteignable depuis $\mathcal{D} \setminus \mathcal{C}(\bar{s})$: ici on a $\mathcal{C}(\bar{s}) \subset \Delta_0^+$. La courbe verte représente Δ_0 et la courbe rouge l'arc singulier Δ_{SA} .

et on a :

$$\check{s}_1 := \frac{-2k - s_{in} + k\sqrt{4k^2 + 8ks_{in} + 5s_{in}^2}}{2(s_{in} + k)}.$$

(ii) Il existe une fonction continue $F_0 : [0, s_{in}] \rightarrow [0, s_{in}]$ telle que $(s_1, s_2) \in \Delta_0^+$ ssi $s_2 \geq F_0(s_1)$, et on a pour $s_1 \in (0, s_{in})$:

$$F_0(s_1) = -\frac{1}{2k} \left[s_1^2 - ks_1 - ks_{in} - s_{in}s_1 + \sqrt{(s_{in} - s_1)(ks_{in} + s_{in}s_1 - s_1^2 + 3ks_1)} \right]. \quad (2.1.15)$$

A l'aide de ces expressions, on montre qu'il existe un seul et unique point d'équilibre singulier et que l'arc singulier vérifie : $\dot{s}_1 > 0$ (resp. $\dot{s}_2 < 0$) ssi $s_1 < s_1^*$ (resp. $s_1 > s_1^*$), et $\dot{s}_2 > 0$ (resp. $\dot{s}_2 < 0$) ssi $s_2 < s_2^*$ (resp. $s_2 > s_2^*$). Il est à noter que lorsque μ est de type Monod, on ne sait pas montrer théoriquement que l'arc singulier est contrôlable sur la partie où il est localement optimal. Il faut donc rajouter cette hypothèse. Dans le cas la fonction de croissance μ est de type Monod, on a donc essentiellement les mêmes propriétés que dans le cas linéaire

2.1.7 Conclusion

Cette étude d'un système avec une contrainte sur les contrôles atypique $u_2 \leq u_1$ a mise en évidence les points suivants :

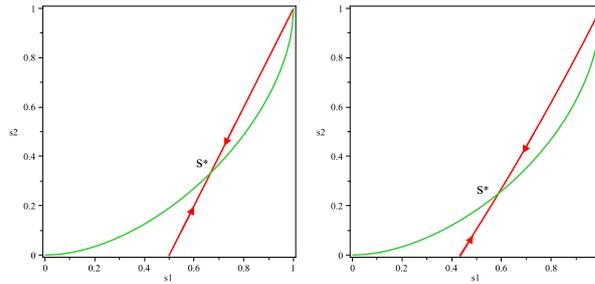


FIGURE 2.8 – *Figure gauche* : Arc singulier Δ_{SA} en rouge et courbe Δ_0 (en vert) dans le cas où $\mu(s) = s$, $s_{in} = 10$. *Figure droite* : Arc singulier Δ_{SA} en rouge et courbe Δ_0 (en vert) dans le cas Monod : $\mu(s) = \frac{s}{5+s}$, $s_{in} = 10$.

- Dans l'ensemble $\mathcal{C}(\bar{s})$, il existe une infinité de trajectoires optimales qui ont le même coût. Par ailleurs, la cible est atteignable depuis tout point de $\mathcal{C}(\bar{s})$.
- A l'extérieur de $\mathcal{C}(\bar{s})$, le système possède un défaut de contrôlabilité, et il existe des points d'arrêts (points singuliers stationnaire). La recherche d'une synthèse globale en présence de tels points est délicate et nécessite une étude approfondie des courbes singulières et de non-contrôlabilité.

Nous pensons que ce type de méthodes qui consiste à séparer le problème en plusieurs sous problèmes pourrait s'adapter à un cadre plus général : recherche d'un ensemble où le système est complètement contrôlable de façon analogue à celle effectuée dans le cas présent ; puis étude du système sur l'ensemble complémentaire. On pourrait étudier par exemple une classe de systèmes du type :

$$\dot{s}_i = \nu_i(s) + u_i[s_{i-1} - s_i], \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \geq 2,$$

avec la convention $s_0 = 1$, $s = (s_1, \dots, s_n)$. La partie non-contrôlée (terme de dérive) peut représenter une dynamique biologique. La seconde partie avec le contrôle représente un terme de flux. On peut imaginer que chaque s_i correspond à la valeur d'une même ressource dans une zone i (discrétisation spatiale d'une ressource donnée). Ce type de systèmes est utilisé par exemple pour décrire l'évolution au cours du temps d'une population de poisson. La partie contrôlée correspond à des prélèvements de la ressource (pêche).

2.2 Sélection d'espèces compétitives

2.2.1 Présentation du problème

Cette partie est consacrée au papier [5]. On étudie un modèle de chemostat continue avec deux espèces qui croissent sur un seul substrat. L'objectif est de sélectionner une des deux espèces, çad d'atteindre un état où par exemple la proportion d'espèce 1 est dominante dans le réacteur. Dans le cas où les fonctions de croissance sont de type Monod, on réalise cet objectif en réglant le tau de dilution de façon adéquate. La théorie des systèmes dynamiques montre que l'on arrive asymptotiquement à l'extinction d'une des deux espèces (voir [58]). On observe également la coexistence en pratique, et on peut montrer que la coexistence est possible en théorie dans certains cas bien précis [58].

L'approche que nous avons développé est différente car on souhaite atteindre cet objectif en temps fini. On définit une cible par un certain ratio des concentrations des deux

espèces, et l'on souhaite l'atteindre en temps minimal. Autrement dit, on cherche un contrôle qui minimise le temps pour rejoindre cette cible.

Le système est modélisé par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\mu_1(s) - u]x_1, \\ \dot{x}_2 = [\mu_2(s) - u]x_2, \\ \dot{s} = -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + u[s_{in} - s]. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Ici, x_i est la concentration d'espèces i , s est la concentration en substrat, $\mu_i(s)$ est la fonction de croissance de l'espèces i , $s_{in} > 0$ est la concentration en substrat entrant, et u est le taux de dilution.

Hypothèse 2.2.1. *On suppose que les fonctions de croissance des deux espèces vérifient (voir Fig. 2.9) :*

- Il existe un unique $\hat{s} > 0$ tel que $\mu_1(\hat{s}) = \mu_2(\hat{s})$
- l'application $s \mapsto \mu_1(s) - \mu_2(s)$ est croissante sur $(0, \bar{s})$, et décroissante sur $(\bar{s}, +\infty)$, avec $\bar{s} < \hat{s}$.

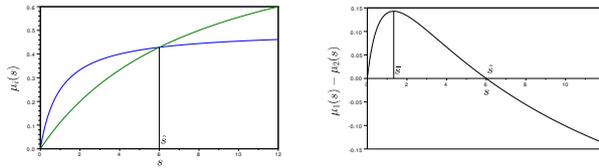


FIGURE 2.9 – Figure gauche : fonction de croissance μ_1 (en bleu) et μ_2 (en vert) qui satisfont l’hypothèse 2.2.1. Figure droite : représentation de la fonction $s \mapsto \mu_1(s) - \mu_2(s)$.

Notre objectif est d’optimiser la sélection d’une seule des deux espèces. Dans cette perspective, rappelons le principe d’exclusion compétitive qui est classique pour les systèmes chemostat (voir [58]). Considérons que les deux espèces ont des fonctions de croissance de type Monod. On fixe un taux de dilution D , et on appelle break-even concentration la concentration de substrat qui vérifie $\mu(s) = D$. Alors, l’espèce qui a la plus petite “break-even concentration” survit, tandis que l’autre disparaît.

Théorème 2.2.1. *Supposons que $u < \max(\mu_1(s_{in}), \mu_2(s_{in}))$ et on suppose que l’hypothèse (2.2.1) est vérifiée. Alors, étant donné un quelconque état initial $x_i(0) > 0$, $i = 1, 2$, le système (3.2.1) vérifie la propriété suivante :*

(i) *Si $u < \mu_1(\hat{s})$, et λ_1 vérifie $\mu_1(\lambda_1) = u$, alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lambda_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = s_{in} - \lambda_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0.$$

(ii) *Si $u > \mu_1(\hat{s})$, et λ_2 vérifie $\mu_2(\lambda_2) = u$, then :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lambda_2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = s_{in} - \lambda_2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0.$$

Cette approche peut être utilisée afin de sélectionner une des deux espèces (en choisissant le taux de dilution de façon adéquate).

Dans ce papier, on propose une autre approche pour atteindre cet objectif en temps fini à “ ε près”. Pour cela, on se fixe une cible pour laquelle la concentration d’une des deux espèces est très inférieure à l’autre :

$$\mathcal{T}_1 := \{(x_1, x_2) \in E \mid x_2 \leq \varepsilon x_1\},$$

où $0 < \varepsilon < 1$ est un seuil fixé. On considère alors le problème de contrôle qui consiste à rejoindre en temps minimal cette cible :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} t(u) \text{ t.q. } x(t(u)) \in \mathcal{T}, \quad (2.2.2)$$

où $t(u)$ désigne le temps pour rejoindre la cible depuis une condition initiale avec le contrôle u . On suppose en outre que μ_1 et μ_2 vérifient :

Hypothèse 2.2.2.

$$\max_{s \in [0, s_{in}]} (\mu_1(s), \mu_2(s)) < 1. \quad (2.2.3)$$

et que

$$s_{in} > \hat{s}.$$

L’hypothèse (2.2.2) est standard afin d’assurer la contrôlabilité du système initial. L’hypothèse $s_{in} > \hat{s}$ signifie que la concentration en substrat entrante est suffisamment grande pour permettre la compétition entre les deux espèces, voir [58].

L’existence d’un contrôle optimal est standard, la cible étant atteignable par le principe d’exclusion compétitive par exemple (théorème de Fillipov) La première partie de cette étude porte sur une réduction du système (2.2.1) au cas où $x_1 + x_2 + s = s_{in}$ (variété invariante et attractive du système (2.2.1)). Par suite, le problème de temps minimal se plonge dans \mathbb{R}^2 .

2.2.2 Synthèse optimale d’une commande feedback

En appliquant le principe du maximum de Pontryagin au système, on peut montrer que l’arc singulier est un segment du plan :

$$\Delta_{SA} := \{(x_1, x_2) \in E \mid x_1 + x_2 = \bar{x}\},$$

où $\bar{x} := s_{in} - \bar{s} > \hat{x}$, et l’ensemble Δ_0 est :

$$\Delta_0 := \{(x_1, x_2) \in E \mid x_1 + x_2 = \hat{x}\},$$

où $\hat{x} := s_{in} - \hat{s}$. On voit donc qu’on ne peut appliquer le théorème de Green à ce système car les trajectoires extrémales peuvent croiser Δ_0 . Ce point rend l’étude du problème intéressante mathématiquement. On peut néanmoins complètement caractériser les trajectoires optimales du système grâce au PMP.

On définit d’abord une stratégie singulière (une loi de commande en boucle fermée) par :

$$\begin{cases} u = 1 & \iff s_0 < \bar{s}, \\ u = 0 & \iff s_0 > \bar{s}, \\ u = u_{\bar{s}} & \iff s_0 = \bar{s}, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

où $u_{\bar{s}}$ est le contrôle singulier (voir [5] pour son expression).

Remarque 2.2.1. Ce type de stratégies singulières est du même type que celle dans [7, 65] pour les réacteurs de type fed-batch. Le fait de conduire le chemostat à la concentration $s = \bar{s}$ permet de maximiser la fonction $\mu_1 - \mu_2$, ce qui intuitivement paraît le plus judicieux pour atteindre l'objectif de maximiser la première espèce et minimiser la seconde.

Théorème 2.2.2. On suppose que les hypothèses précédentes sont vérifiées. Alors pour toute condition initiale $(x_1^0, x_2^0) \in E$, la stratégie optimale qui relie (x_1^0, x_2^0) à la cible est la loi de commande donnée par (2.2.4) (voir Fig. 2.10).

La preuve de ce théorème repose sur l'exclusion de trajectoires extrémales en analysant le signe de la dérivée de la fonction de commutation à un switch, et la décomposition du domaine d'étude en plusieurs zones. Le système adjoint étant *coopératif*, on peut donner des propriétés de signe sur l'adjoint (permettant de définir la fonction de commutation), qui conduisent à l'exclusion d'extrémales non optimales. Soulignons qu'une difficulté de cette étude est l'existence d'un ensemble Δ_0 inclu dans le domaine invariant.

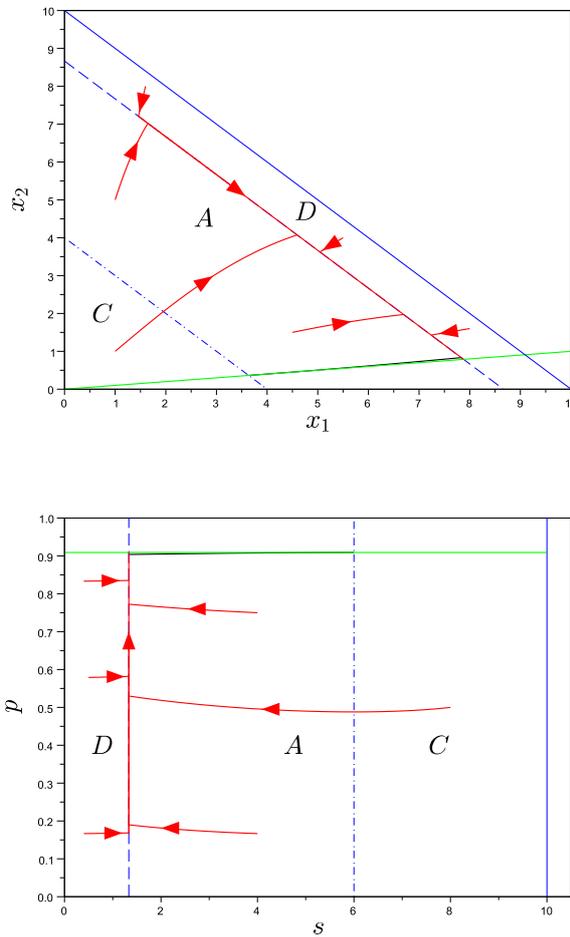


FIGURE 2.10 – Trajectoires optimales en rouge pour rejoindre la cible \mathcal{T} pour des fonctions de croissance qui satisfont l'hypothèse 2.2.1 : on a représenté celles-ci dans le plan (x_1, x_2) et dans le plan (s, p) où $p = x_1/(x_1 + x_2)$. En pointillé, on a représenté l'arc singulier $s = \bar{s}$.

2.2.3 Extensions à trois arcs singuliers et pour des conditions initiales en dehors de la variété invariante

Cette partie résume trois extensions possibles de l'étude précédente :

- Etude du problème de synthèse optimale en présence de trois arcs singuliers (voir [5]).
- Etude du problème en dehors de la variété invariante (voir [5]).
- Etude du problème initial avec $n \geq 3$ espèces (problème ouvert à part le calcul de l'arc singulier).

On s'est intéressé à un cas plus général en considérant l'hypothèse suivante (on prend par exemple des fonctions de croissance de type Haldane pour les espèces, ce qui arrive très souvent en pratique).

Hypothèse 2.2.3. *Les fonctions de croissance vérifient les hypothèses suivantes : (voir Fig. 2.11) :*

- il existe $\hat{s}_2 > \hat{s}_1 > 0$ tel que $\mu_1(\hat{s}_i) = \mu_2(\hat{s}_i)$, $i = 1, 2$.
- la fonction $s \mapsto \mu_1(s) - \mu_2(s)$ admet deux maxima pour $s = \bar{s}_1$ et $s = \bar{s}_2$, et un minimum pour $s = \underline{s}$, avec $\bar{s}_1 < \hat{s}_1 < \underline{s} < \hat{s}_2 < \bar{s}_2$.

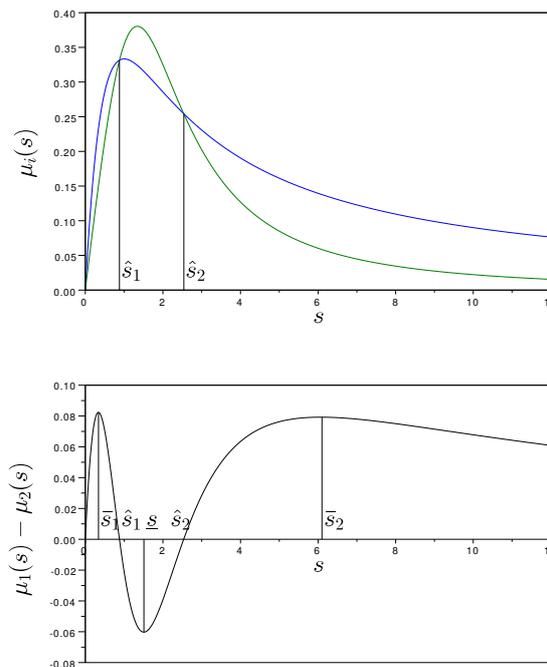


FIGURE 2.11 – Figure en haut : tracé des fonctions de croissance μ_1 (en bleu) et de μ_2 (en vert) qui satisfont l'hypothèse 2.2.3. En bas : tracé de l'application $s \mapsto \mu_1(s) - \mu_2(s)$.

On peut définir trois arcs singuliers associés à \bar{s}_1 , \bar{s}_2 et \underline{s} . Pour caractériser la stratégie optimale pour rejoindre la cible \mathcal{T} , on a le choix entre la stratégie singulière SAS_1 (correspondant à \bar{s}_1) ou SAS_2 (correspondant à \bar{s}_2). L'arc singulier correspondant au minimum local de $\mu_1 - \mu_2$ n'est pas localement optimal pour rejoindre la cible. Il faut donc déterminer quelle est la stratégie optimale en présence des deux autres arcs singuliers en compétition.

Un tel problème a été étudié dans [7, 66] pour le réacteur fed-batch. On peut conjecturer que les trajectoires optimales ne sautent pas d'un arc singulier à l'autre. Néanmoins, le problème de déterminer quelle stratégie singulière est optimale est délicat dans ce cadre car la fonction de commutation est plus difficile à manipuler que dans le cadre impulsionnel [7]. Il serait intéressant de pouvoir utiliser l'équation d'Hamilton-Jacobi en étudiant le minimum des fonctions valeurs associées aux deux arcs singuliers (voir chapitre suivant pour l'étude de cette question). Comme, on ne sait pas bien caractériser l'ensemble des points où les deux stratégies sont égales, l'usage de cette méthode paraît délicate malgré son attractivité.

Conjecture 2.2.1. *Sous les hypothèses 2.2.2-2.2.3 et $s_{in} > \max(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, le système (3.3.1) vérifie la propriété suivante. Pour toute condition initiale $(x_1^0, x_2^0) \in E$, la stratégie optimale pour rejoindre la cible \mathcal{T} depuis (x_1^0, x_2^0) est soit la stratégie singulière $SAS_{\bar{s}_1}$ soit la stratégie singulière $SAS_{\bar{s}_2}$.*

On a comparé numériquement le temps nécessaire pour rejoindre la cible avec ces deux stratégies $SAS_{\bar{s}_1}$ and $SAS_{\bar{s}_2}$. On peut donc définir la courbe d'égalité des temps (voir Fig. 2.12). Celle-ci définit deux régions dans lesquelles chaque arc singulier est meilleur que l'autre. Néanmoins, cette information n'est pas suffisante pour conclure quant à la nature d'un contrôle optimal.

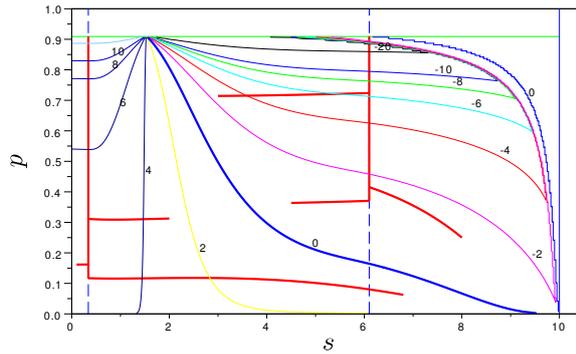


FIGURE 2.12 – Trajectoires optimales en rouge pour rejoindre la cible \mathcal{T}_1 (ligne verte) dans le plan (s, p) , $p = x_1/(x_1 + x_2)$ pour des fonctions de croissance vérifiant l'hypothèse 2.2.3. Ligne en pointillée : arc singulier Δ_{SA_i} (i.e. $s = \bar{s}_i$). Les courbes de niveau représentent la différence des temps entre les deux stratégies $SAS_{\bar{s}_i}$: $100 \frac{t_1 - t_2}{\max(t_1, t_2)}$ où t_i désigne le temps pour rejoindre la cible avec la stratégie $SAS_{\bar{s}_i}$.

Un autre aspect que nous avons développé dans le papier [5] est l'étude du cas général en dehors de la variété invariante. Ceci conduit à un système état-adjoint en dimension 6 plus délicat à étudier :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\mu_1(s) - u]x_1, \\ \dot{x}_2 = [\mu_2(s) - u]x_2, \\ \dot{s} = -\mu_1(s)x_1 - \mu_2(s)x_2 + u[s_{in} - s], \\ \dot{\lambda}_1 = -[(\lambda_1 - \lambda_s)\mu_1(s) - \lambda_1 u], \\ \dot{\lambda}_2 = -[(\lambda_2 - \lambda_s)\mu_2(s) - \lambda_2 u], \\ \dot{\lambda}_s = -[(\lambda_1 - \lambda_s)x_1\mu_1'(s) + (\lambda_2 - \lambda_s)x_2\mu_2'(s) - u\lambda_s]. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

On peut caractériser de la même manière l'arc singulier, mais le système étant dans \mathbb{R}^3 , l'exclusion des trajectoires extrémales non optimales par le PMP est plus délicate. En effet, dans \mathbb{R}^2 , le signe de la fonction de commutation peut se trouver grâce aux deux adjoints. Nous avons confirmé numériquement (par `bocop`) que la stratégie singulière précédente restait optimale dans ce cadre.

Enfin, on peut également montrer que le calcul de l'arc singulier reste identique pour un système avec n espèces (en dérivant n fois la fonction de commutation), ce qui témoigne de son importance dans la synthèse optimale. Néanmoins, la détermination d'une stratégie optimale en dimension quelconque est un problème difficile.

Chapitre 3

Contrôle optimal pour des réacteurs fed-batch

Sommaire

3.1	Introduction générale	51
3.2	Présentation du système fed-batch	53
3.3	Etude d'un réacteur fed-batch en présence d'un inhibiteur . . .	55
3.4	Synthèse avec arc singulier non contrôlable	58
3.5	Réacteurs fed-batch et contrôles impulsionnels	61
3.5.1	Contrôle impulsionnel	61
3.5.2	Prise en compte d'un facteur de mortalité	62
3.5.3	Stratégie optimal en présence de deux arcs singuliers	64
3.5.4	Simulations numériques	69
3.5.5	Conclusion de la comparaison entre les deux arcs singuliers . . .	69

Cette partie résume les travaux [6, 7, 8, 9] qui portent sur le problème de temps minimal pour atteindre une cible pour des systèmes de type fed-batch. A l'inverse des systèmes type chemostat (réacteurs continus) étudiés dans le chapitre 2, le volume est variable pour ce type de réacteurs. Ce chapitre s'organise de la façon suivante :

- Le travail [8] étend le résultat de [65] au cas où il existe un produit qui inhibe la réaction entre les espèces. Ceci conduit à une synthèse optimale en présence d'un arc singulier avec une partie minimisante et maximisante.
- Le travail [9] étudie un problème de synthèse optimale (issu de [65]) en présence d'un arc singulier qui possède un point de saturation [67, 68, 69]. Pour obtenir la synthèse optimale, on montre une propriété contre-intuitive, à savoir que l'arc singulier est quitté avant le point de saturation.
- Les travaux [7, 6] s'appuient sur [70] pour étudier la fonction temps minimum dans un cadre impulsionnel en prenant en compte la mortalité des espèces et un terme de recyclage. L'article [6] étudie une synthèse optimale en présence de plusieurs arcs singuliers minimisants en compétition ([7]).

3.1 Introduction générale

Soit $n \geq 2$, $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteur réguliers. On considère le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \tag{3.1.1}$$

où u est un contrôle mesurable à valeurs dans $[-1, 1]$. Étant donnée une cible $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$, on s'intéresse au problème de temps minimal pour atteindre \mathcal{T} . Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et soit $t_{x_0}(u) \in [0, +\infty]$ le temps nécessaire depuis x_0 pour atteindre la cible \mathcal{T} avec le contrôle u . Notre objectif est de résoudre le problème suivant :

$$v(x_0) := \inf_u t_{x_0}(u). \quad (3.1.2)$$

La fonction $v(x_0)$ est appelée fonction valeur du problème et vérifie $v(x_0) = 0$ sur la cible. On se réfère à [71] pour des propriétés de cette fonction. Notre but est de déterminer une loi de commande par retour d'état i.e. on obtient un contrôle u qui dépend de l'état du système. De plus, on s'intéresse à la détermination de trajectoires globales cad pour toute condition initiale. Ces problèmes ont été largement étudiés dans [59] dans le cas plan. Dès que $n \geq 3$, obtenir une synthèse optimale est en général très difficile.

Il est utile de rappeler les points suivant pour les systèmes affines mono-entrée en dimension 2. Soit le système :

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad (3.1.3)$$

où f et g sont deux champs de vecteur sur \mathbb{R}^2 et u un contrôle dans $[-1, 1]$. Le problème de temps minimal pour une cible \mathcal{T} consiste donc à résoudre le problème suivant :

$$T(x_0) := \inf_u t_{x_0}(u),$$

où $x_0 \in \mathbb{R}^2$, x est la solution de (3.1.3) commençant au point x_0 , et $t_{x_0}(u) \in [0, +\infty]$ est le temps pour atteindre la cible \mathcal{T} depuis x_0 . Les deux ensembles suivants sont fondamentaux pour l'étude de ce problème :

$$\Delta_0 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \det(f(x), g(x)) = 0\}, \quad (3.1.4)$$

$$\Delta_{SA} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \det(g(x), [f, g](x)) = 0\}. \quad (3.1.5)$$

L'ensemble Δ_0 est l'ensemble de *non-contrôlabilité*, et l'ensemble Δ_{SA} est l'*arc singulier*. En appliquant le principe du maximum de Pontryagin, on peut montrer que l'état adjoint le long d'une trajectoire extrémale s'écrit :

$$\lambda(t) = \frac{-g(x(t))^\perp}{\det(f(x(t)), g(x(t)))}, \quad (3.1.6)$$

et le contrôle singulier :

$$u_s = \frac{\lambda(t) \cdot [f, [f, g]](x(t))}{\lambda(t) \cdot [g, [f, g]](x(t))}. \quad (3.1.7)$$

Le contrôle singulier peut s'écrire comme un feedback en fonction de l'état, ce qui représente des avantages en pratique pour l'implémentation. Étant donnée une cible à atteindre, on s'intéresse à la classification des trajectoires optimales. Grâce au PMP, le contrôle est soit bang-bang i.e. $u = \pm 1$, soit il est singulier i.e. $u = u_s$. Néanmoins, il faut signaler que (3.1.7) ne définit pas nécessairement un contrôle dans $[-1, 1]$. Nous étudierons un cas où cette condition n'est pas vérifiée (voir [5]). Par ailleurs, un arc singulier n'est pas nécessairement localement optimal. La condition de Legendre-Clebsch permet éventuellement d'invalider les arcs singuliers non-optimaux. Rappelons le théorème de Green dans ce cadre (clock form, voir [64]).

Théorème 3.1.1. *Soit x^1 et x^2 deux points du plan. Considérons deux trajectoires T_1 et T_2 reliant x^1 à x^2 en temps t_1 et t_2 . On suppose que ces deux trajectoires ne s'intersectent qu'en x^1 et x^2 . On appelle Γ la réunion de T_1 et T_2 positivement orientée. Soit Ω l'intérieur de Γ . Alors, si $\Omega \cap \Delta_0 = \emptyset$:*

$$t_1 - t_2 = \iint_{\Omega} \frac{\det(g(s), [f, g](s))}{\det(f(s), g(s))^2} ds_1 ds_2. \quad (3.1.8)$$

On voit en particulier que ce théorème ne peut s'appliquer lorsqu'une trajectoire coupe Δ_0 ou bien lorsque l'on ne maîtrise pas bien le signe de la fonction $\det(g(s), [f, g](s))$, ce qui peut être le cas en présence d'un ou plusieurs arcs singuliers (voir [8, 7]).

Un autre phénomène qui soulève beaucoup d'intérêt dans est la présence de plusieurs arcs singuliers minimisants Δ_{SA}^i . Cela permet de définir plusieurs stratégies dites singulières (voir [7, 9]) pour atteindre une cible. Il est alors naturel de séparer l'espace d'état en deux sous-ensembles E_i , $i = 1, 2$. Pour une condition initiale dans E_1 , la stratégie singulière sera meilleure que la stratégie singulière E_2 , et vice-versa. Dans la synthèse optimale du problème, ces deux stratégies sont admissibles, mais le principe du maximum de Pontryagin n'exclut pas des sauts d'un arc singulier à l'autre. Par conséquent, déterminer la synthèse optimale dans ce cadre est un problème difficile. Soit T_i la fonction valeur du problème en présence d'un seul arc singulier Δ_{SA}^i . Une approche directe consisterait à utiliser l'équation d'Hamilton-Jacobi afin de montrer que la fonction

$$\tilde{T}(x_0) := \min(T_1(x_0), T_2(x_0)),$$

est la fonction valeur du problème associée au problème. Malheureusement, \tilde{T} n'est souvent pas de classe C^1 , en particulier sur les sous-ensembles du plan où $T_1 = T_2$. Or, on ne sait en général pas bien caractériser l'ensemble des points où $T_1 = T_2$. Par conséquent, cette approche séduisante paraît incertaine. Ainsi, il faut utiliser d'autres outils pour déterminer les stratégies optimales.

Les articles que nous présentons dans cette section étudient des problèmes de contrôle optimal où plusieurs de ces situations sont présentes.

3.2 Présentation du système fed-batch

Afin de présenter les résultats [6, 7, 8, 9], nous effectuons un rappel du système fed-batch avec une espèce et un substrat. Considérons le système dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(\mu(s) - \frac{u}{v} \right), \\ \dot{s} = -\mu(s)x + \frac{u}{v}(s_{in} - s), \\ \dot{v} = u, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où x est la concentration de micro-organismes dans le réacteur, s le substrat pour être dégradé, et v le volume, et u le contrôle qui représente le tau de dilution. La concentration en substrat entrante est notée $s_{in} > 0$. La fonction $\mu(s)$ est la fonction de croissance (Monod ou Haldane, voir [58]). Il est important de noter que le volume est variable contrairement aux réacteurs continus étudiés dans le chapitre 2.

Le contrôle u appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{U} := \{u : [0, +\infty) \rightarrow [0, u_{max}] \mid u \text{ meas.}\}. \quad (3.2.2)$$

La paramètre u_{max} est le tau de dilution maximal. On considère la cible suivant :

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}_+^* \times [0, s_{ref}] \times \{v_m\}. \quad (3.2.3)$$

Ici $s_{ref} > 0$ est une constante fixée telle qu'en général $s_{ref} \ll s(0)$ pour les applications. Pour $u \in \mathcal{U}$, on appelle $t_{\xi_0}(u)$ le temps nécessaire à la solution de (3.2.1) pour atteindre la cible depuis $\xi_0 := (x_0, s_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, s_{in}] \times [0, v_m]$. Le problème de temps minimal est le suivant :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} t_{\xi_0}(u), \text{ s.t. } \xi(t(u)) \in \mathcal{T}, \quad (3.2.4)$$

où $\xi(\cdot)$ est l'unique solution de (3.2.1) pour le contrôle u et qui part de ξ_0 à l'instant $t = 0$. Un point essentiel est que la quantité

$$M := v(x + s - s_{in}) \quad (3.2.5)$$

est conservée le long de toute trajectoire de (3.2.1), par conséquent M est constant et vaut $v_0(x_0 + s_0 - s_{in})$. Par (3.2.5), on obtient donc :

$$x = \frac{M}{v} + s_{in} - s, \quad (3.2.6)$$

et le système (3.2.1) peut être ramené à un système affine en u dans le plan :

$$\begin{cases} \dot{s} = -\mu(s)\left(\frac{M}{v} + s_{in} - s\right) + \frac{u}{v}(s_{in} - s), \\ \dot{v} = u, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

On peut aisément montrer le lemme suivant.

Lemme 3.2.1. *L'ensemble $[0, s_{in}] \times \mathbb{R}_+^*$ est invariant par (3.2.7).*

Par suite, si on définit une variable x par l'égalité (3.2.6), x n'est pas nécessairement positif (par exemple si M est négatif). On considère donc des conditions initiales pour (3.2.7) dans le domaine \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} := \left\{ (s, v) \in [0, s_{in}] \times (0, v_m] \mid \frac{M}{v} + s_{in} - s > 0 \right\}. \quad (3.2.8)$$

Les résultats d'optimalité (voir [65]) peuvent se formuler comme suit. Dans le cas où la fonction de croissance est de type Monod, i.e. $\mu(s) = \frac{\bar{\mu}s}{k+s}$ où $\bar{\mu} > 0$ et $k > 0$, on a le résultat suivant.

Théorème 3.2.1. *On suppose que μ est de type Monod. Alors, le feedback optimal u_M est donné par :*

$$u_M(s, v) := \begin{cases} 1 & \text{si } v < v_m, \\ 0 & \text{si } v = v_m. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Lorsque l'on suppose que μ est de type Haldane, i.e. $\mu(s) = \frac{\bar{\mu}s}{gs^2+s+k}$, avec $\bar{\mu} > 0$, $g > 0$, et $k > 0$, alors il existe un arc singulier. On suppose que $\bar{s} > s_{ref}$.

Théorème 3.2.2. *On suppose que μ est de type Haldane et que*

$$\mu(\bar{s}) \left[\frac{M}{s_{in} - \bar{s}} + v_m \right] \leq 1. \quad (3.2.10)$$

Alors le contrôle optimal s'écrit :

$$u_H(s, v) := \begin{cases} 0 & \text{si } v = v_m \text{ ou } s > \bar{s}, \\ 1 & \text{si } s < \bar{s} \text{ et } v < v_m, \\ \bar{u}_s(v) & \text{si } s = \bar{s} \text{ et } v < v_m, \end{cases} \quad (3.2.11)$$

où

$$\bar{u}_s(v) := \mu(\bar{s}) \left[\frac{M}{s_{in} - \bar{s}} + v \right]. \quad (3.2.12)$$

Ces résultats peuvent s'établir grâce au théorème de Green qui ici peut s'appliquer sans difficulté (l'ensemble Δ_0 n'intervient pas dans le domaine invariant). L'hypothèse (3.2.10) est fondamentale car elle assure que l'arc singulier est contrôlable jusqu'à atteindre v_m . L'objectif de la section 3.4 est précisément de discuter la validité de cette hypothèse, voir [9]. Il peut en effet arriver que pour un certain choix de M et u_{max} , le contrôle u_s sature u_{max} pour certaines valeurs de v .

3.3 Etude d'un réacteur fed-batch en présence d'un inhibiteur

Cette partie résume l'article [8]. On considère une variante de (3.2.7) donnée par le système suivant dans \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\mu(s, p) - \frac{u}{v} \right) x, \\ \dot{s} = -\mu(s, p)x + \frac{u}{v}(s_{in} - s), \\ \dot{p} = \mu(s, p)x - \frac{u}{v}p, \\ \dot{v} = u. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

La nouveauté par rapport à (3.2.7) est la dépendance de μ par rapport à une variable p (produit) qui ralentit la consommation du substrat par les micro-organismes. L'objectif de ce travail est de résoudre le problème (3.5.12) et de trouver des lois de commande par retour d'état (feedback).

En utilisant les quantités conservées, on peut montrer que ce système se ramène à celui-ci :

$$\begin{cases} \dot{s} = -h(s, v) \left(\frac{M}{v} - s + s_{in} \right) + \frac{u}{v}(s_{in} - s), \\ \dot{v} = u, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

où $h(s, v) := \mu \left(s, \frac{N}{v} - s + s_{in} \right)$. La différence fondamentale est que la fonction de croissance $\mu(s)$ est remplacée par la fonction $h(s, v)$.

Par conséquent, il faudra identifier précisément la courbe décrivant l'arc singulier dans le plan (s, v) ainsi que son optimalité locale. Le résultat original que nous obtenons dans le cas où la fonction de croissance est donnée par (3.3.4) est que seul un sous-ensemble de l'arc singulier est optimal.

Il est intéressant de voir que le changement de la fonction $s \mapsto \mu(s)$ en $(s, v) \mapsto h(s, v)$ dans le système conduit à des arcs singuliers solution d'une équation implicite qui dépend de h et ses dérivées. On peut montrer que le contrôle singulier s'écrit.

$$\tilde{u}(s, v) = hx \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial v} - \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{s_{in} - s}{v} \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}}{\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + 2 \frac{(s_{in} - s)}{v} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial v} - \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial s} \right] + \frac{(s_{in} - s)^2}{v^2} \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}}. \quad (3.3.3)$$

Nous commençons l'étude du problème de synthèse optimale par des cas où la fonction h est monotone par rapport aux deux variables, ce qui conduit à des lois de commande de type bang-bang (voir [5] pour l'étude de ces cas).

Le résultat principal qui nous a intéressé et que l'on souligne ici est le cas où la fonction μ s'écrit :

$$\mu(s, p) = \mu_m \frac{s}{k_1 + s} e^{-k_2 p - k_3 s}. \quad (3.3.4)$$

Cette fonction de croissance porte le nom de Jin. Dans ce cas, l'arc singulier est décrit dans le plan (s, v) par une courbe d'équation :

$$\tilde{v}(s) = -N \frac{s(k_1 + s)k_2}{(s_{in} - s)[k_1 + s(k_1 + s)(k_2 - k_3)]}. \quad (3.3.5)$$

et on suppose par la suite qu'il est toujours contrôlable.

Remarque 3.3.1. *Nous étudions la validité de cette hypothèse plus en détail dans le papier [8].*

On définit ensuite une constante \bar{s} (voir [8]) et on examine plusieurs cas en fonction des paramètres.

- Cas 1 : $N < 0$,
- Cas 2 : $N > 0$ et $k_2 - k_3 > 0$,
- Cas 3 : $N > 0$, $k_2 - k_3 < 0$, et $\bar{s} \geq s_{in}$,
- Cas 4 : $N > 0$, $k_2 - k_3 < 0$, et $\bar{s} < s_{in}$.

Proposition 3.3.1. *Dans le cas 1, la stratégie optimale est la stratégie singulière $\tilde{v}(s)$ dont le feedback est donné par : (voir Fig. 3.1) :*

- si $s > \tilde{v}^{-1}(v)$ ou $v = v_m$, alors $u = 0$.
- si $v = \tilde{v}(s)$ et $v < v_m$, alors $u = \tilde{u}(s)$.
- si $s < \tilde{v}^{-1}(v)$ et $v < v_m$, alors $u = 1$.

Dans les cas 2 et 3, l'arc singulier n'est pas optimal.

Proposition 3.3.2. *Pour les cas 2 et 3, la stratégie optimale est bang-bang (ou Fill and Wait) i.e. on applique la commande feedback u_M donnée par (3.2.9).*

Pour étudier le cas 4 qui est le plus complexe, on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. *Pour tout $v \in (v_d, v_m)$, on a $\frac{d\hat{s}(v)}{dv} > \frac{s_{in} - \hat{s}(v)}{v}$.*

Cette hypothèse est vérifiée numériquement dans [8] et constitue une hypothèse de contrôlabilité sur l'arc singulier. On définit ensuite une partition de l'ensemble invariant qui conduit au résultat de synthèse optimale suivant (voir Fig. 3.2 et [8] pour la définition explicite des ensembles et des courbes mises en jeu, notamment L_2).

Proposition 3.3.3. *Sous l'hypothèse 1, on a :*

- (i). *Si $(s_0, v_0) \in A \cup B \cup E$, la stratégie optimale est singulière $\tilde{v}(s)$:*
 - Si $(s_0, v_0) \in A \cup E$, alors $u = 0$.
 - Si $v_0 = \tilde{v}(s_0)$ avec $s_0 \leq s_d$, alors $u = \tilde{u}$.
 - Si $(s_0, v_0) \in B$, alors $u = 1$.
- (ii). *Si $(s_0, v_0) \in C$, la stratégie optimale est $u = 1$ jusqu'à L_2 , et ensuite la stratégie est singulière $\tilde{v}(s)$.*
- (iii). *Si $(s_0, v_0) \in D$, la stratégie optimale est bang-bang.*

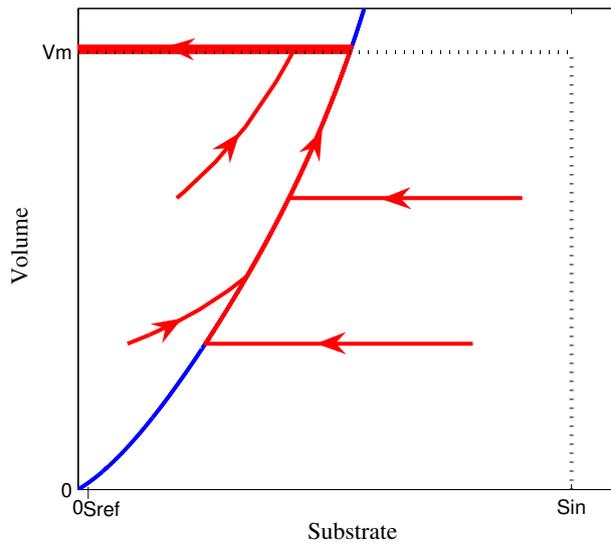


FIGURE 3.1 – Trajectoires optimales (en rouge) pour différentes conditions initiales pour la fonction de croissance de J_{in} (cas 1). En bleu, la courbe singulière $s \mapsto \tilde{v}(s)$

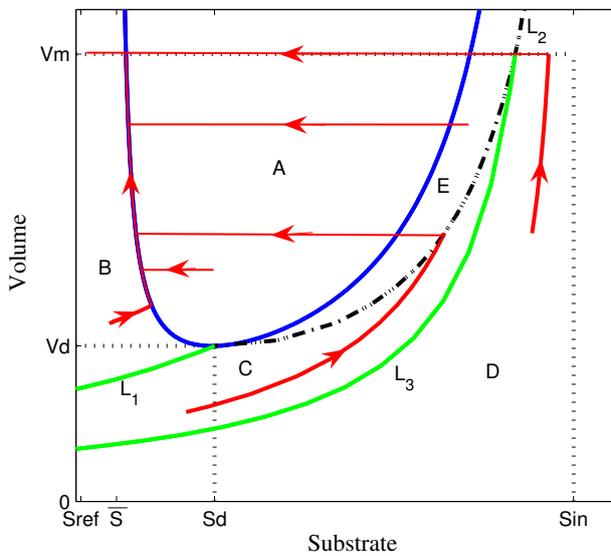


FIGURE 3.2 – Trajectoires optimales en rouge pour différentes conditions initiales dans le cas où la fonction μ est celle de J_{in} , cas 4. En bleu, la courbe singulière $\tilde{v}(s)$

Ces propriétés se montrent en étudiant la fonction de commutation et sa dérivée en un point de commutation. On exclut de cette manière les trajectoires extrémales qui ne sont pas optimales. Il est intéressant de noter que sous les hypothèses du problème, l'arc singulier est optimal seulement dans une partie : sur l'ensemble $\{s \leq s_d\}$ (resp. $\{s \geq s_d\}$), l'arc singulier est minimisant (resp. maximisant).

3.4 Synthèse avec arc singulier non contrôlable

Le but de cette section est de présenter les résultats obtenus dans [9]. On s'intéresse à une synthèse optimale pour un problème de temps minimal où l'arc singulier n'est plus nécessairement contrôlable : étant donné un système affine avec une entrée u dans le plan :

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \quad |u| \leq 1,$$

on se pose la question suivante. Quelle est la synthèse optimale en présence d'arcs singuliers minimisants lorsque le contrôle singulier u_s ne vérifie plus nécessairement la contrainte $|u_s| \leq 1$ le long de l'arc singulier ? Cette hypothèse est très souvent utilisée en contrôle optimal, voir [59], mais il peut arriver qu'elle ne soit pas satisfaite en pratique.

Lorsque le contrôle singulier sature, on parle d'arc singulier saturant voir [68, 69, 67]. Il existe un sous-ensemble de l'ensemble singulier (arc singulier) sur lequel le contrôle sature i.e. $u_s = 1$. Lorsqu'il sature, le contrôle optimal prend alors les valeurs extrémales par le principe de Pontryagin, l'arc singulier n'étant plus admissible. Cependant, la synthèse optimale globale est modifiée par rapport au cas où l'arc singulier serait toujours contrôlable. En effet, d'une part, il apparaît des courbes de commutation (où le contrôle bascule d'une valeur extrême à l'autre). D'autre part, en faible dimension, il arrive que l'arc singulier soit "quitté" avant que le contrôle sature, ce qui est contre-intuitif (voir par exemple [68, 69, 67]). C'est précisément cette propriété que nous allons mettre en évidence.

Dans cette section, on étudie précisément cette problématique à travers le système (3.2.7). On suppose donc que l'arc singulier n'est pas nécessairement contrôlable jusqu'à $v = v_m$. Posons :

$$\eta(s) := \frac{1}{\mu(s)} - \frac{M}{s_{in} - s}, \quad (3.4.1)$$

et soit $v^* := \eta(\bar{s})$. L'arc singulier est contrôlable si et seulement si $v^* \geq v_m$. Ainsi, on suppose dans cette section que v^* vérifie :

$$v^* < v_m. \quad (3.4.2)$$

Dans l'espace d'état, le point (\bar{s}, v^*) est appelé point saturant. En effet, comme l'arc singulier est une variété de dimension 1, il est admissible pour $v \leq v^*$.

Pour étudier correctement la synthèse optimale, on introduit les courbes suivantes qui permettent de délimiter des zones où les trajectoires optimales vont commuter. On appelle $\hat{\gamma}$ (resp. $\tilde{\gamma}$) l'unique solution de l'EDO :

$$\frac{ds}{dv} = \mu(s) \left[\frac{M}{v} + s_{in} - s \right] - \frac{s_{in} - s}{v}, \quad (3.4.3)$$

qui passe par (\bar{s}, v_m) (resp. (\bar{s}, v^*)).

L'étude de ces courbes est fondamentale pour les résultats de synthèse optimale. En effet, ces courbes permettront de délimiter des zones où le contrôle a une commutation. Il est à noter que ces courbes sont solutions rétrogrades du système initial avec $u = 1$. Or le système rétrograde n'étant pas invariant, il faut calculer la limite de ces trajectoires à la frontière du domaine d'étude $\mathcal{D} = [0, s_{in}] \times (0, v_m]$ pour bien connaître ces courbes. On peut montrer que l'étude de ces deux courbes se ramène à l'étude d'un système dynamique dans le plan qui dépend d'un paramètre $M \in \mathbb{R}$ (définie par les conditions initiales). Pour étudier la limite de ces courbes sur la frontière du domaine, il faut donc étudier en fonction de M si les conditions initiales (\bar{s}, v_m) (resp. (\bar{s}, v^*)) appartiennent à la variété stable ou instable du système. Cette étude est délicate et est détaillée dans [9].

Lorsque l'arc singulier n'est jamais contrôlable, on peut montrer le résultat suivant (voir Fig. 3.3).

Proposition 3.4.1. *On suppose que $v^* \leq 0$. Alors, la synthèse optimale s'écrit :*

- Si $s_0 \leq \bar{s}$, alors il existe $t_0 \geq 0$ tel que l'on ait $u = 1$ sur $[0, t_0]$, $u = 0$ sur $[t_0, t_f]$ avec $v(t_0) = v_m$ et $s(t_f) = s_{ref}$.
- Si $\bar{s} < s_0 < \hat{\gamma}(v_0)$, alors il existe $0 \leq t_0 < t_1$ tels que l'on ait $u = 0$ sur $[0, t_0]$, $u = 1$ sur $[t_0, t_1]$, $u = 0$ sur $[t_1, t_f]$ où $t_0 \geq 0$, $\bar{s} < s(t_0) < \hat{\gamma}(v_0)$, $v(t_1) = v_m$, et $s(t_f) = s_{ref}$.
- Si $s_0 \geq \hat{\gamma}(v_0)$, alors il existe $t_0 \geq 0$ tel que l'on ait $u = 0$ sur $[0, t_0]$, $u = 1$ sur $[t_0, t_1]$, $u = 0$ sur $[t_1, t_f]$ avec $t_0 > 0$, $\bar{s} < s(t_0) < \hat{\gamma}(v_0)$, $v(t_1) = v_m$, et $s(t_f) = s_{ref}$.

On s'intéresse maintenant au cas où l'arc singulier est contrôlable seulement sur une partie de $[0, v^*]$ de l'intervalle $[0, v_m]$. Lorsque $v_0 \geq v^*$, la synthèse optimale est donnée par la proposition 3.4.1. En effet, comme $\dot{v} \geq 0$, l'arc singulier n'est jamais contrôlable pour ces conditions initiales. Par conséquent, nous avons détaillé seulement le cas où la condition initiale vérifie l'inégalité $v_0 < v^*$, voir Fig. 3.3.

Proposition 3.4.2. *Supposons que $v_0 < v^*$ et qu'il existe $0 < v_* < v^*$ tel que $\hat{\gamma}(v_*) = \bar{s}$. Alors on a le résultat suivant :*

- Si $s_0 \leq \hat{\gamma}(v_0)$, alors on a $u = 1$ sur $[0, t_0]$, $u = 0$ sur $[t_0, t_f]$ où t_0 est tel que $v(t_0) = v_m$.
- Si $\hat{\gamma}(v_0) < s_0 < \hat{\gamma}(v_0)$ et $s_0 \leq \bar{s}$, alors on a $u = 1$ sur $[0, t_0]$, $u = \bar{u}_s$ sur $[t_0, t_1]$, $u = 1$ sur $[t_1, t_2]$, $u = 0$ on $[t_2, t_f]$, où $s(t_0) = \bar{s}$, $t_1 - t_0 \geq 0$, $v(t_1) < v^*$, et $v(t_2) = v_m$.
- Si $\hat{\gamma}(v_0) \leq s_0 < \bar{s}$, alors on a $u = 1$ on $[0, t_0]$, $u = \bar{u}_s$ on $[t_0, t_1]$, $u = 1$ on $[t_1, t_2]$, $u = 0$ sur $[t_2, t_f]$ où $s(t_0) = \bar{s}$, $v(t_1) \in (v_*, v^*)$, $v(t_2) = v_m$.
- Si $s_0 \geq \bar{s}$ et $v_0 \leq v_*$, alors on a $u = 0$ on $[0, t_0]$, $u = \bar{u}_s$ on $[t_0, t_1]$, $u = 1$ sur $[t_1, t_2]$, $u = 0$ sur $[t_2, t_f]$ où $s(t_0) = \bar{s}$, $v(t_1) \in (v_*, v^*)$, et $v(t_2) = v_m$.
- Si $s_0 \geq \bar{s}$, et $v_0 > v_*$, alors le contrôle optimal vérifie :
 - soit $u = 0$ sur $[0, t_0]$, $u = \bar{u}_s$ sur $[t_0, t_1]$, $u = 1$ sur $[t_1, t_2]$, $u = 0$ sur $[t_2, t_f]$ où $s(t_0) = \bar{s}$, $t_1 - t_0 \geq 0$, $v(t_2) = v_m$,
 - soit $u = 0$ sur $[0, t_0]$, $u = 1$ sur $[t_0, t_1]$, $u = 0$ on $[t_1, t_f]$ où $t_0 \geq 0$, $\bar{s} < s(t_0) < \hat{\gamma}(v_0)$, $v(t_1) = v_m$.

Certaines trajectoires optimales sont représentées sur la figure 3.3. Cette étude couplée à des simulations numériques (voir Fig. 3.3 et 3.4) a permis de mettre en avant le point suivant qui est contraire à l'intuition :

- l'arc singulier n'est pas optimal jusqu'à $v = v^*$, la valeur maximale où il est contrôlable, mais seulement jusqu'à une valeur $v_a < v^*$. Dans le cas où l'arc singulier est toujours contrôlable [65], alors, le feedback optimal est $u = u_s$ jusqu'à $v = v_m$ lorsque l'on a $s = \bar{s}$.
- La valeur de v_a à partir de laquelle les extrémales singulières ne sont plus optimales peut se calculer numériquement (voir [9] et Fig. 3.4).

On fournit dans [9] une méthode pour calculer précisément la valeur v_a à partir duquel il n'est plus optimal de rester sur l'arc singulier. Les deux points principaux mis en avant par cette étude sont les suivants.

- Il existe une valeur $v_a < v^*$ à partir de laquelle l'arc singulier n'est plus optimal (l'arc singulier reste admissible sur $[v_a, v^*]$). Ce résultat est contre-intuitif.
- Il existe une courbe de commutation pour $v > v_a$ que l'on peut calculer numériquement, voir [9].

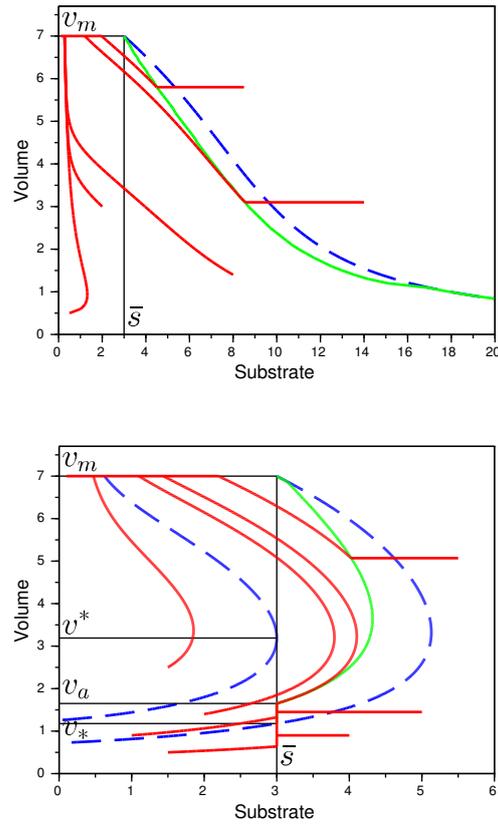


FIGURE 3.3 – Trajectoires optimales en rouge sans hypothèse de contrôlabilité pour l’arc singulier. Figure gauche : trajectoires pour $v^* \leq 0$ (voir Proposition 3.4.1). Figure droite : le cas $0 < v^* < v_m$, voir Proposition 3.4.2. En bleu, on a représenté les courbes $\hat{\mathcal{C}}$ et $\check{\mathcal{C}}$ qui passent par les points (\bar{s}, v^*) et (\bar{s}, v_m) . En vert, on a représenté les courbes de commutation calculées numériquement.

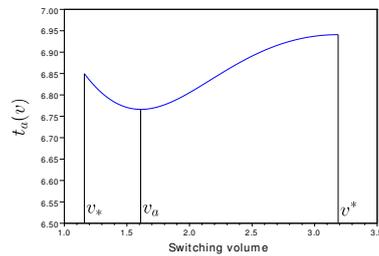


FIGURE 3.4 – Temps $t_a(v)$ pour rejoindre la cible depuis le point un point (\bar{s}, v_*) avec la stratégie : arc singulier jusqu’au volume v , puis $u = 1$ jusqu’à atteindre $v = v_m$, puis $u = 0$ jusqu’à atteindre $s = s_{ref}$. On trouve que $t_a(v)$ admet un unique minimum en un point $v = v_a$

A l'aide de ces deux remarques, on peut fournir une loi de commande feedback du type

$$u[s, v] := \begin{cases} 0 & \text{si } s > s_b(v), \quad v \geq v_a, \\ 1 & \text{si } s \leq s_b(v), \quad v_m > v \geq v_a, \\ 0 & \text{si } s > \bar{s}, \quad v < v_a, \\ 1 & \text{si } s < \bar{s}, \quad v < v_a, \\ u_s[v] & \text{si } s = \bar{s}, \quad v < v_a. \end{cases}$$

et qui généralise à ce cas celle développée dans [65]. La courbe $v \mapsto s_b(v)$, $v \in [v_a, v_m]$ est la courbe de commutation du contrôle. Afin de démontrer l'optimalité de ce feedback, on a besoin d'hypothèse d'unicité sur v_a et la courbe de commutation (du type unicité d'une trajectoire optimale), voir [6]. La condition que nous donnons dans [6] a l'avantage qu'elle peut être vérifiée numériquement. Nous pensons pouvoir affiner cette étude par un calcul de point conjugué sur l'arc singulier en suivant par exemple [72].

3.5 Réacteurs fed-batch et contrôles impulsionsnels

Les deux articles [7, 6] utilisent une formulation impulsionsnelle du problème issu de [65]. Cette formulation permet de traiter des cas plus complexes. En effet, dans ce cadre, les deux outils essentiels sont les suivants. D'une part, on peut obtenir des informations qualitatives sur fonctions de commutation, ce qui donne des informations sur les commutations des trajectoires extrémales. Par ailleurs, le calcul de la fonction valeur pour ces stratégies est simplifié, ce qui permet également l'utilisation de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

3.5.1 Contrôle impulsionsnel

On rappelle brièvement une formulation impulsionsnelle du problème de commande optimale fed-batch traité dans les parties précédentes du même chapitre. Cette formulation est motivée par le fait que l'on peut obtenir une dilution instantanée des concentrations par un rajout très rapide d'au dans un réacteur. Rappelons brièvement la reformulation d'un problème de contrôle impulsionsnel en un problème de contrôle usuel (i.e. avec des contrôles mesurables bornés).

On considère le système de contrôle suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\dot{u}, \quad x(0) = x_0.$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux champs de vecteur, et u est une fonction BV. Dans ce cadre, on s'intéresse au problème de temps minimal pour rejoindre une cible \mathcal{T} :

$$\inf_u t_{x_0}(u), \quad \text{s.t. } x(t_{x_0}(u)) \in \mathcal{T}. \quad (3.5.1)$$

Ce cadre est intéressant car il permet à la trajectoire d'avoir des sauts lorsque le contrôle a une impulsion. Il faut noter que l'on sort du cadre usuel (dynamique de carathéodory, Lipschitz par rapport à l'état), et donc se pose le problème de la définition d'une solution d'un tel système. Pour cela, on utilise par exemple la notion de complétion de graphes qui a été introduite notamment par Bressan et Rampazzo (voir par exemple [73, 74]).

Par la complétion de graphes, on est amené à reformuler le problème de la manière suivante. On introduit un nouveau contrôle issu du changement de variable suivant (on

considère un nouveau temps afin de “compléter” les solutions lors d’un saut) :

$$r(\tau) = \begin{cases} 0, & u(t) \text{ pas absolument continue en } t(\tau), \\ 1, & u(t) \text{ absolument continue en } t(\tau). \end{cases}$$

On peut alors montrer que le problème (3.5.2) est équivalent au problème suivant avec deux contrôles (r, v) :

$$\inf_{(r,v)} \int_0^{\tau_{x_0}(r,u)} r(\tau) d\tau, \quad \frac{dx}{d\tau} = rf(x) + vg(x), \quad x(0) = x_0, \quad (3.5.2)$$

où l’ensemble des contrôles admissibles $\mathbf{u} := (r, v)$ est défini par :

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{u} = (r, v) : [0, \infty[\rightarrow [0, 1] \times \{0, 1\} \mid \text{mesurable}\}.$$

Cette formulation peut offrir deux avantages. D’une part, elle ramène un problème de contrôle impulsionnel à un problème classique. D’autre part, les deux contrôles r et v sont découplés ce qui peut avoir des avantages dans l’utilisation de l’équation d’Hamilton-Jacobi avec un découplage en deux inéquations variationnelles (3.5.7), voir [70, 6] et dans le calcul des fonctions de commutation (voir [7]).

Notons également que l’existence d’une commande optimale n’est pas assurée avec le contrôle (r, u) car l’ensemble \mathcal{U} n’est pas convexe (le théorème de Fillipov exige un ensemble convexe pour les contrôles). Dans la suite on travaillera donc avec le convexifié de \mathcal{U} , et on montrera qu’une trajectoire optimale est telle que r sature i.e. $r = 1$ p.p.

3.5.2 Prise en compte d’un facteur de mortalité

Cette partie résume le papier [6]. On s’intéresse dans cette partie au système dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} \dot{x} = (r[\mu(s) - k] - \frac{u}{v})x, \\ \dot{s} = -r\mu(s)x + \frac{u}{v}(s_{in} - s), \\ \dot{v} = u. \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Il s’agit d’une version impulsionnelle du système (3.2.7). La nouveauté dans cette étude est l’introduction des paramètres $k > 0$ (mortalité) et k' (recyclage) avec $0 < k' := \varepsilon k < k$, $\varepsilon < 1$. On peut voir que la quantité $M := v(x + s - s_{in})$ n’est plus décroissante :

$$\dot{M} = -k(1 - \varepsilon)xv.$$

Ainsi on ne peut plus utiliser la théorie dans le cas plan. Cette différence représente l’enjeu majeur de cette étude et la différence par rapport aux autres travaux sur les réacteurs fed-batch (le système reste dans \mathbb{R}^3). Le problème de contrôle optimal consiste à rejoindre la cible $\mathcal{T} := \mathbb{R}_+^* \times [0, s_{ref}] \times \{v_m\}$ en temps minimal :

$$\inf_{(r,u)} \int_0^{t_{\xi_0}(r,u)} r(\tau) d\tau, \quad \text{t.q.} \quad \xi(\tau(r, u)) \in \mathcal{T}, \quad (3.5.4)$$

où ξ est l’unique solution de (3.5.3) avec le contrôle (r, u) . On note E l’espace des états qui est un ensemble invariant de la forme $E = \mathbb{R}_+^* \times [s_1, s_2] \times \mathbb{R}_+^*$ (voir [6] pour plus

de détails sur la définition de l'ensemble invariant par le système). Dérivons l'équation d'Hamilton-Jacobi associée au problème :

$$\min \left(0, 1 + x_0(\mu(s_0) - k) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_0} - x_0 \mu(s_0) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_0} \right) + \min \left(0, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v_0} + \frac{s_{in} - s_0}{v_0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_0} - \frac{x_0}{v_0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_0} \right) = 0, \quad (3.5.5)$$

On pose :

$$\begin{cases} H_1^\omega(x_0, s_0, v_0) := 1 + x_0(\mu(s_0) - k) \frac{\partial \omega}{\partial x_0}(x_0, s_0, v_0) - x_0 \mu(s_0) \frac{\partial \omega}{\partial s_0}(x_0, s_0, v_0), \\ H_2^\omega(x_0, s_0, v_0) := \frac{\partial \omega}{\partial v_0}(x_0, s_0, v_0) + \frac{s_{in} - s_0}{v_0} \frac{\partial \omega}{\partial s_0}(x_0, s_0, v_0) - \frac{x_0}{v_0} \frac{\partial \omega}{\partial x_0}(x_0, s_0, v_0), \end{cases} \quad (3.5.6)$$

ainsi (3.5.5) équivaut aux deux inéquations variationnelles :

$$\begin{cases} H_1^Y(x_0, s_0, v_0) \geq 0, \\ H_2^Y(x_0, s_0, v_0) \geq 0, \end{cases} \quad (3.5.7)$$

pour tout $(x_0, s_0, v_0) \in E$. Grâce à l'équation d'Hamilton-Jacobi et le principe du maximum de Pontryagin, on a pu complètement caractériser les stratégies optimales d'une manière similaire à [65] dans ce cadre.

Supposons d'abord que μ est de type Monod i.e. $\mu(s) = \bar{\mu}s/(k + s)$ et définissons un contrôle feedback de la façon suivante.

Définition 3.5.1. *Etant donné $(x_0, s_0, v_0) \in E$, la stratégie FW (Fill and Wait) est donnée par $r = 0$ jusqu'à $v = v_m$, puis $u = 0$ jusqu'à $s \leq s_{ref}$ lorsque $s'_0 > s_{ref}$. le coût w associé à cette stratégie est :*

- (i) Si $v_0 \geq \gamma_0(s_0)$, alors $w(x_0, s_0, v_0) = 0$.
- (ii) Si $v_0 < \gamma_0(s_0)$, alors $w(x_0, s_0, v_0) = \int_{s'_0}^{s_{ref}} - \frac{ds}{\mu(s)[x'_0 + s'_0 - s + k \int_{s'_0}^s \frac{d\sigma}{\mu(\sigma)}]}$.

On a alors le résultat d'optimalité suivant.

Théorème 3.5.1.

$$\mathbf{u}_{FW}(s_0, x_0, v_0) := \begin{cases} (0, u), & \text{si } v_0 < v_m, \\ (1, 0), & \text{si } v_0 = v_m \text{ et } s_0 > s_{ref}, \end{cases} \quad (3.5.8)$$

et la fonction valeur satisfait : $\mathbf{v} = w$.

Lorsque μ est de type Haldane, on définit la stratégie singulière suivante.

Définition 3.5.2. *Soit $(x_0, s_0, v_0) \in E$.*

- (i) Si $v_0 \geq \gamma_1(s_0)$, la stratégie optimale coïncide avec la stratégie FW.
- (ii) Si $s_0 \leq \bar{s}$, et $v_0 < \gamma_1(s_0)$, la stratégie optimale consiste en un saut de s_0 jusqu'à \bar{s} , puis d'un arc singulier jusqu'à $v = v_m$ et enfin $u = 0$ jusqu'à s_{ref} .
- (iii) Si $s_0 \geq \bar{s}$, la stratégie optimale consiste à faire $u = 0$ jusqu'à \bar{s} , un arc singulier jusqu'à $v = v_m$ et enfin un arc $u = 0$ jusqu'à s_{ref} .

Notons que cette définition nécessite une vérification des arcs singuliers dans ce cadre, voir [6]. On supposera de plus que l'arc singulier est contrôlable. On a alors le résultat d'optimalité suivant.

Théorème 3.5.2. *Pour tout triplet $(x_0, s_0, v_0) \in E$, la stratégie optimale est la stratégie singulière.*

Le coût de la stratégie singulière peut s'écrire comme suit :

$$\omega(x_0, s_0, v_0) = \begin{cases} w(x_0, s_0, v_0), & \text{si } v_0 \geq \gamma_1(s_0), \\ \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{x'_0 v'_0 + \bar{x}(v_m - v'_0)}{x_0 v_0} \right) + \int_{\bar{s}}^{s_{ref}} \frac{-ds}{\mu(s)[x''_0 + \int_{\bar{s}}^s \frac{k - \mu(\sigma)}{\mu(\sigma)} d\sigma]}, & \text{si } v_0 < \gamma_1(s_0), \\ \int_{s_0}^{\bar{s}} \frac{-ds}{\mu(s)[x_0 + s_0 - s + k \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{\mu(\sigma)}]} + \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{\tilde{x}'_0 v_0 + \bar{x}(v_m - v_0)}{\tilde{x}'_0 v_0} \right] \\ \quad + \int_{\bar{s}}^{s_{ref}} \frac{-ds}{\mu(s)[\tilde{x}''_0 + \int_{\bar{s}}^s \frac{k - \mu(\sigma)}{\mu(\sigma)}]}, & \text{si } s_0 > \bar{s}. \end{cases} \quad (3.5.9)$$

Ainsi, le théorème 3.5.2 implique le résultat suivant.

Théorème 3.5.3. *Le contrôle optimal pour le problème est \mathbf{u}_{SA} défini par :*

$$\mathbf{u}_{SA}(s_0, x_0, v_0) := \begin{cases} (0, u), & \text{si } s_0 < \bar{s}, v_0 < v_m, \\ (1, u_s(v)), & \text{si } s = \bar{s}, v_0 < v_m, \\ (1, 0), & \text{si } v_0 = v_m \text{ or } s_0 > \bar{s}, \end{cases} \quad (3.5.10)$$

La fonction valeur associée au problème $\mathbf{v} = \omega$

La preuve de ce résultat repose sur des propriétés des fonctions de commutation. Grâce à celles-ci, on arrive à montrer que toute extrémale qui a un switch avant d'atteindre l'arc singulier (sauf dans le cas (i) de la définition 3.5.2) n'est pas optimal. On montre en particulier qu'il n'est pas optimal de quitter l'arc singulier avant d'atteindre $v = v_m$. La difficulté a résidé dans le fait que le système état-adjoint est en dimension 6.

Remarque 3.5.1. *Lorsque les paramètres k et k' tendent vers zéro, on peut montrer la convergence de la fonction valeur du problème (3.5.2) vers la fonction valeur du problème sans mortalité. Néanmoins, cela ne donne à priori pas d'information sur la nature des feedback optimaux pour le problème avec mortalité.*

Ce cadre impulsionnel offre l'avantage de découpler la partie biologique (incluant les termes avec $\mu(s)$) et la partie dilution (termes sans $\mu(s)$). Il pourra être intéressant d'étudier le comportement de la fonction valeur de ce problème par rapport à celle du problème original en prenant $u \in [0, 1/\varepsilon]$ (sans contrôle impulsionnel) et faire tendre ε vers zéro. Cela permettra de justifier que les deux problèmes (avec et sans impulsion) sont proches.

3.5.3 Stratégie optimal en présence de deux arcs singuliers

Cette partie est consacrée à [7]. Comme dans la partie précédente, on utilise une formulation impulsionnelle du problème. Le but est de déterminer un contrôle optimal pour le problème (3.5.12) en présence de deux arcs singuliers. Nous verrons qu'il n'y a pas de bridge entre arcs singulier [75] (i.e. de saut entre les deux arcs singuliers). On considère le système suivant dans \mathbb{R}^3 avec deux entrées :

$$\begin{cases} \dot{x} = (r\mu(s) - \frac{u}{v})x, \\ \dot{s} = -r\mu(s)x + \frac{u}{v}(s_{in} - s), \\ \dot{v} = u, \end{cases} \quad (3.5.11)$$

et on note $\xi(\cdot)$ la solution de ce système partant d'une condition initiale ξ_0 . L'objectif est de résoudre le problème suivant :

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \int_0^{t_{\xi_0}(\mathbf{u})} r(\tau) d\tau, \text{ t.q. } (x(0), s(0), v(0)) = \xi_0. \quad (3.5.12)$$

où la cible est :

$$\mathcal{T} := \{\xi = (x, s, v) \in E \mid 0 \leq s \leq s_{ref}, v = v_m\},$$

et l'ensemble des contrôles admissibles est :

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{u} = (r, u) : [0, \infty[\rightarrow (\{0, 1\} \times [0, 1]) \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{mes.}\}.$$

On s'intéresse donc à des fonctions de croissance comme dans la figure 3.5 avec deux maxima locaux et un minimum local. Les deux arcs singuliers minimisants correspondent à $s = s_i$, $i = 1, 2$ où s_i est le maximum local de μ . On peut facilement montrer (condition de Legendre-Clebsch) que l'arc singulier $s = s_m$ correspondant au minimum local de μ n'est pas minimisant.

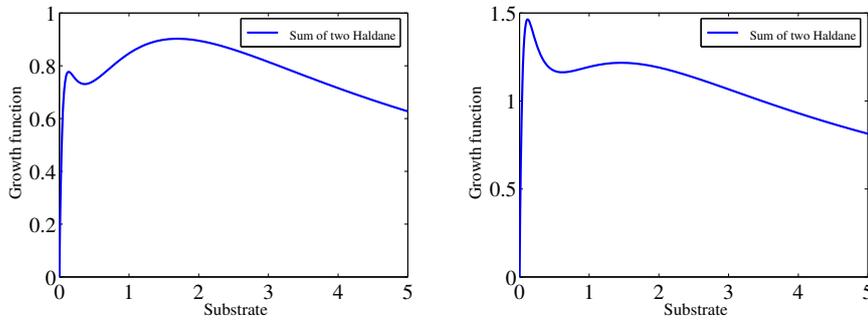


FIGURE 3.5 – *Figure gauche* : Exemple d'une fonction de croissance (cas A) qui est la somme de deux fonctions de croissance de type Haldane avec deux maxima locaux $s_1 < s_2$ tels que $\mu(s_1) < \mu(s_2)$. *Figure droite* : Exemple d'une fonction de croissance (cas B) qui est la somme de deux fonctions de croissance de type Haldane avec deux maxima locaux $s_1 < s_2$ tels que $\mu(s_1) > \mu(s_2)$.

Ce problème a été étudié numériquement dans [66]. L'objet du papier [7] est de caractériser un contrôle optimal. Notons que chaque arc singulier est localement optimal. Cependant, cette remarque ne permet pas de conclure quant à la détermination de la stratégie optimale d'un point de vue global (de même que le théorème de Green dans le cadre hors impulsion à cause du changement de signe de μ' au point s_m).

On va distinguer quatre cas selon le signe de la constante $M := v(x + s - s_{in})$ qui dépend des conditions initiales et selon que l'on a $\mu(s_1) < \mu(s_2)$ (cas A) ou $\mu(s_1) > \mu(s_2)$ (cas B). Cela donne quatre cas à traiter. Pour ces quatre cas, voici les résultats que nous avons obtenus.

- Cas A, $M \geq 0$: la synthèse optimale est fournie par le théorème 3.5.5.
- Cas A, $M < 0$: la synthèse optimale est fournie par le théorème 3.5.7 sous l'hypothèse 3.5.2.
- Cas B, $M \geq 0$: la synthèse optimale est fournie par le théorème Theorem 3.5.4.
- Cas B, $M < 0$: la synthèse optimale est fournie par le théorème 3.5.6 sous les hypothèses 3.5.1 et 3.5.2.

Il est à noter que lorsque M est positif, le résultat d'optimalité que nous avons obtenu ne nécessite pas d'hypothèses supplémentaires. A l'inverse, lorsque M est négatif, alors on a recours à deux hypothèses supplémentaires. Nous montrerons qu'elles sont vérifiées au moins quand $M < 0$ est suffisamment petit. Le cas $M < 0$ signifie que les conditions initiales sont faibles pas rapport à la concentration de substrats entrante. On peut donc penser que le système réagit moins bien dans ce cas (i.e. atteindre la cible demande plus de temps), ce qui expliquerait le fait que ce cas soit plus délicat à traiter que $M > 0$.

Avant de donner les résultats principaux de [7], rappelons quelques notations. On considère la courbe γ_0 définie par :

$$\gamma_0(s) := \min \left\{ v_m \left(\frac{s_{in} - s_{ref}}{s_{in} - s} \right), v_m \right\}, \quad s \in [0, s_{in}[. \quad (3.5.13)$$

On considèrera des conditions initiales pour le système (3.5.11) dans l'ensemble \mathcal{D} qui est défini par :

$$\mathcal{D} := \left\{ (s_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid s_0 \in (0, s_{in}), 0 < v_0 < \gamma_0(s_0), M + v_0(s_{in} - s_0) > 0 \right\}. \quad (3.5.14)$$

On peut montrer que le contrôle singulier s'écrit :

$$u_{s_i} = \mu(s_i) \left(v + \frac{M}{s_{in} - s_i} \right), \quad i = 1, 2. \quad (3.5.15)$$

On supposera dans la suite que $0 \leq u_{s_i} \leq 1$, $i = 1, 2$ dans le domaine \mathcal{D} , et que donc les deux arcs singuliers sont contrôlables. Enonçons d'abord les résultats d'optimalité dans le cas où $M \geq 0$.

Théorème 3.5.4. *Soit $(s_0, v_0) \in \mathcal{D}$. Pour le cas B avec $M \geq 0$, la stratégie optimale qui relie (s_0, v_0) à la cible est la stratégie singulière SAS_1 .*

Par conséquent, lorsque $\mu(s_1) > \mu(s_2)$ et $M \geq 0$, alors la stratégie optimale est toujours le premier arc singulier.

Remarque 3.5.2. *Ce résultat est en accord avec l'intuition suivante : comme $s_{ref} \leq s_1$, on peut penser qu'il est en effet meilleur de choisir l'arc singulier 1 pour rejoindre la cible car $\mu(s_1) > \mu(s_2)$, et il est probable que la vitesse de dégradation du substrat soit plus élevée pour $s = s_1$ que pour $s = s_2$.*

Lorsque $\mu(s_1) < \mu(s_2)$, on a le résultat suivant.

Théorème 3.5.5. *Soit $(s_0, v_0) \in \mathcal{D}$. Pour le cas A avec $M \geq 0$, la stratégie optimale qui relie (s_0, v_0) à la cible est la stratégie donnée par :*

- (i) Si $s_0 < s_1$, alors :
 - Si $(s_1, v_0 \frac{s_{in}-s_0}{s_{in}-s_1}) \in \mathcal{A}_1$, alors la stratégie optimale est SAS_1 .
 - Si $(s_1, v_0 \frac{s_{in}-s_0}{s_{in}-s_1}) \in \mathcal{A}_2$, alors la stratégie optimale est SAS_2 .
 - Si $f\left(v_0 \frac{s_{in}-s_0}{s_{in}-s_1}\right) = s_1$, alors la stratégie optimale est SAS_1 ou SAS_2 .
- (ii) Si $s_0 \in [s_1, s_2]$, alors :
 - Si $(s_0, v_0) \in \mathcal{A}_1$, alors la stratégie optimale est SAS_1 .
 - Si $(s_0, v_0) \in \mathcal{A}_2$, alors la stratégie optimale est SAS_2 .
 - Si $s_0 = f(v_0)$, alors la stratégie optimale est SAS_1 ou SAS_2 .
- (iii) Si $s_0 > s_2$, alors :

- Si $(s_2, v_0) \in \mathcal{A}_1$, alors la stratégie optimale est SAS_1 .
- Si $(s_2, v_0) \in \mathcal{A}_2$, alors la stratégie optimale est SAS_2 .
- Si $f(v_0) = s_2$, alors la stratégie optimale est SAS_1 ou SAS_2 .

Dans ce cas, l'espace d'état est divisé en deux zones \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 . Le sous-domaine \mathcal{A}_1 où l'arc singulier 1 est meilleur est optimal, et son complémentaire \mathcal{A}_2 est optimal pour l'arc singulier 2 (voir [7] pour une définition précise de ces deux sous-ensembles).

Ce théorème a exclu en particulier les commutations d'un arc singulier à l'autre que le principe du maximum de Pontryagin n'exclut pas a priori [75] (il a fallu faire des estimations du coût de ces trajectoires afin d'éliminer ces cas).

Lorsque $M \leq 0$, nous avons introduit les deux hypothèses suivantes qui nous ont permis d'exclure des trajectoires extrémales (typiquement une extrémale qui rejoint les deux arcs singuliers) en montrant l'existence d'autres trajectoires avec un coût inférieur. On note :

$$\psi_v(s) := \frac{s_{in} - s}{M + v(s_{in} - s)},$$

et on a supposé :

Hypothèse 3.5.1. Pour $v_0 > 0$ tel que $0 < v_0 < v_m$, on a :

$$\left(\frac{1}{\mu(s_m)} - \frac{1}{\mu(s_1)} \right) \psi_v(s_1) > \left(\frac{1}{\mu(s_m)} - \frac{1}{\mu(s_2)} \right) \psi_v(s_2),$$

pour tout $v \in [v_0, v_m)$.

Hypothèse 3.5.2. Pour tout $v \in (0, v_m)$, on a :

$$\int_{s_1}^{\tilde{s}(v)} \psi_v^2(s) \frac{\mu'(s)}{\mu^2(s)} ds - \psi_v(\tilde{s}(v)) \frac{(s_{in} - \tilde{s}(v))\mu'(\tilde{s}(v))}{v\mu^2(\tilde{s}(v))} < 0.$$

où $(\tilde{s}(v), v)$ est l'unique point tel que le temps de la stratégie pour SAS_1 est égale à celui pour SAS_2 depuis ce point.

Cette dernière hypothèse technique est vérifiée numériquement et est en lien avec la contrôlabilité du système. Elle signifie qu'au point $(\tilde{s}(v), v)$ la courbe de dilution qui passe par ce point a une plus grande pente que celle de l'application $v \mapsto \tilde{s}(v)$ (voir [7] pour plus de détails et la figure 3.6 pour sa vérification numérique). Lorsque $M < 0$, on a montré l'analogie des deux théorèmes précédents.

Théorème 3.5.6. Soit $(s_0, v_0) \in \mathcal{D}$. Pour le cas B avec $M < 0$ et sous les hypothèses (3.5.1) et (3.5.2), la stratégie optimale qui relie (s_0, v_0) à la cible est la stratégie singulière SAS_1 .

Théorème 3.5.7. Soit $(s_0, v_0) \in \mathcal{D}$. Pour le cas A avec $M < 0$ et sous les hypothèses (3.5.1) et (3.5.2), la stratégie optimale qui relie (s_0, v_0) à la cible est donnée par :

(i) Si $s_0 < s_1$, alors :

- Si $v_0 \frac{s_{in} - s_0}{s_{in} - s_1} > v_*$, alors la stratégie optimale est SAS_1 .
- Si $v_0 \frac{s_{in} - s_0}{s_{in} - s_1} = v_*$, alors la stratégie optimale est SAS_1 ou SAS_2 .
- Si $v_0 \frac{s_{in} - s_0}{s_{in} - s_1} < v_*$, alors la stratégie optimale est SAS_2 .

(ii) Si $s_0 \in [s_1, s'_2]$, alors :

- Si $(s_0, v_0) \in \mathcal{A}_1$, alors la stratégie optimale est SAS_1 .
- Si $(s_0, v_0) \in \mathcal{A}_2$, alors la stratégie optimale est SAS_2 .

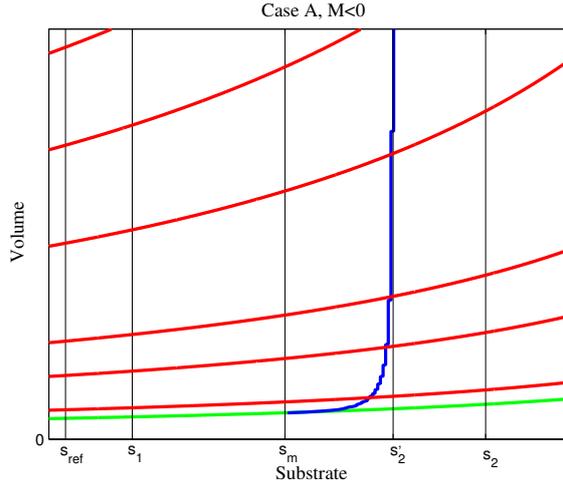


FIGURE 3.6 – vérification de l’hypothèse 3.5.2. Au point d’intersection des courbes de dilution (rouge) a une pente plus petite que celle de la courbe $\tilde{s}(v)$ (en bleu). La courbe verte délimite le domaine d’état \mathcal{D} .

- Si $s_0 = f(v_0)$, alors la stratégie optimale est SAS_1 or SAS_2 .
- (iii) Si $s_0 \geq s_2'$, alors la stratégie optimale est SAS_2 .

Les preuves de ces résultats reposent sur l’exclusion de trajectoires extrémales en étudiant des conditions nécessaires sur la fonction de commutation. En effet, on a pu donner des expressions simples des deux fonctions de commutation (celle par rapport au contrôle u et l’autre par rapport au contrôle r). Ces expressions permettent d’invalider certaines extrémales comme par exemple une extrémale qui posséderait une commutation avant d’atteindre un arc singulier ou bien une extrémale qui relierait les deux singuliers.

Citons deux lemmes clefs avec les expressions des fonctions de commutations et des deux adjoints (λ_s, λ_v) . La fonction de commutation pour le contrôle r est notée ϕ_1 et celle pour u est notée ϕ_2 .

Lemme 3.5.1. *On considère une trajectoire extrémale qui commence en un point $(s_0, v_0) \in \mathcal{D}$ avec $0 < v_0 < v_m$ à l’instant 0 avec le contrôle $r = 0$ sur un intervalle de temps $[0, t_0]$. Alors, pour $t \in [0, t_0]$ on a les expressions suivantes :*

$$\lambda_s(t) = \frac{\lambda_s(0)}{v_0}v(t), \quad \lambda_v(t) = \lambda_v(0) + \frac{\lambda_s(0)}{v_0}(s - s_0), \quad (3.5.16)$$

$$\phi_1(t) = -\lambda_s(0)x_0\mu(s(t)) - 1, \quad \phi_2(t) = \lambda_v(0) + \frac{\lambda_s(0)(s_{in} - s_0)}{v_0} = 0. \quad (3.5.17)$$

Ce lemme donne le résultat intéressant suivant le long d’un arc $(0, u)$.

Lemme 3.5.2. *Considérons une trajectoire extrémale qui commence en un point $(s_0, v_0) \in \mathcal{D}$ avec $0 < v_0 < v_m$ à l’instant 0 avec le contrôle $r = 0$ sur un intervalle de temps $[0, t_0]$. Supposons que l’on ait $\phi_1(t_0) = 0$. Alors, on a :*

$$\mu(s(t_0)) \geq \mu(s_0). \quad (3.5.18)$$

Cette inégalité qui porte sur la fonction μ permet d'invalider plusieurs extrémales non optimales. Enfin, pour la fonction de commutation ϕ_2 , on a l'expression suivante.

Lemme 3.5.3. *On considère une trajectoire extrémale qui commence en un point $(s_0, v_0) \in \mathcal{D}$ à l'instant 0 avec le contrôle $u = 0$ sur un intervalle de temps $[0, t_1]$. Alors, pour $t \in [0, t_1]$ on a les expressions suivantes :*

$$\lambda_s(t) = \frac{-v_0}{\mu(s(t))(M + v_0(s_{in} - s(t)))}, \quad \lambda_v(t) = \lambda_v(0) + \int_{s_0}^{s(t)} \frac{\psi'_{v_0}(s)}{\mu(s)} ds, \quad (3.5.19)$$

$$\phi_2(t) = \lambda_v(0) - \frac{\psi_{v_0}(s_0)}{\mu(s_0)} + \int_{s_0}^{s(t)} \psi_{v_0}(s) \frac{\mu'(s)}{\mu^2(s)} ds. \quad (3.5.20)$$

Comme on dispose de μ et ψ explicitement, l'expression de ϕ_2 ci-dessus permet d'invalider certaines extrémales.

3.5.4 Simulations numériques

Dans cette section, on illustre les résultats précédents. Les quatre figures correspondent aux quatre cas évoqués ci-dessus. On a représenté sur la figure la différence entre le temps mis par la stratégie SAS_1 et celui mis par la stratégie SAS_2 pour relier un point s_0 du domaine \mathcal{D} à la cible.

3.5.5 Conclusion de la comparaison entre les deux arcs singuliers

Le principe du maximum de Pontryagin permet donc de montrer que dans les quatre cas évoqués précédemment le feedback optimal correspond à l'une des deux stratégies singulières SAS_1 ou SAS_2 . Il exclut donc des sauts entre arcs singuliers appelés bridge qui peuvent avoir lieu (voir [75] pour un exemple où cette notion apparaît).

Par ailleurs, l'approche basée sur l'équation d'Hamilton-Jacobi et qui marche avec un seul arc singulier est difficile à mettre en place en présence de plusieurs arcs singuliers. Néanmoins, il serait intéressant d'approfondir cette voie qui pourrait permettre d'étudier d'autres problèmes de contrôle comportant plusieurs arcs singuliers.

Cette étude s'est révélée assez technique afin de donner un résultat d'optimalité pour un système qui présente deux arcs singuliers minimisants. Cela montre la difficulté que l'on peut rencontrer dans l'étude de ces systèmes.

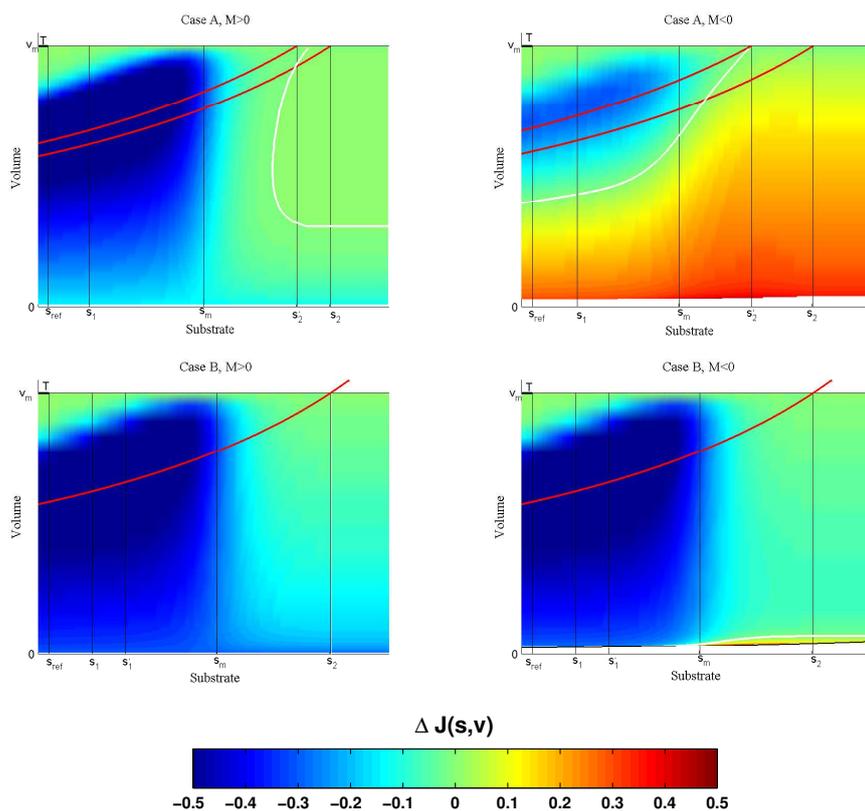


FIGURE 3.7 – Comparaison entre les stratégies SAS_i (coût J_i). *Figures en haut* : cas A, *Figures en bas* : cas B; à gauche : $M > 0$, à droite : $M < 0$. La courbe \bar{C} t.q. $J_1(s, v) = J_2(s, v)$ et les courbes de dilution sont en rouge. La couleur de fond représente $\Delta J(s, v) := \frac{J_1(s, v) - J_2(s, v)}{\max(J_1(s, v), J_2(s, v))}$.

Chapitre 4

Contrôle optimal périodique

Sommaire

4.1	Etude d'un problème de contrôle périodique	71
4.1.1	Equations de Kolmogorov avec contrôle	71
4.1.2	Etude d'un problème avec une dynamique à deux phases	74
4.1.3	Principe du Maximum de Pontryagin et arc singulier	75
4.1.4	Résumé des trajectoires optimales	76
4.1.5	Discussions	78
4.2	Optimisation sous contraintes périodiques	80
4.2.1	Existence de solutions périodiques	82
4.2.2	Propriétés asymptotiques	83
4.2.3	Principe du Maximum de Pontryagin	84
4.2.4	Simulations numériques	87
4.2.5	Discontinuité de l'arc singulier	88
4.2.6	Optimisation en temps long	89
4.2.7	Optimisation par rapport au volume	91

La première partie étudie un problème de contrôle optimal périodique gouverné par une équation de Kolmogorov [6]. On caractérise notamment l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles il existe une trajectoire périodique, ce qui sera utile notamment pour la seconde partie. La seconde partie étudie un problème de contrôle optimal périodique avec une discontinuité dans la partie non-autonome de la dynamique. On s'intéresse à des propriétés de l'arc singulier et à la structure du contrôle optimal au voisinage de cette discontinuité. On étudie également des propriétés d'attraction des trajectoires périodiques. On compare également la solution optimale du problème périodique (répétée sur n périodes) avec une solution optimale non-périodique calculée sur n périodes.

4.1 Etude d'un problème de contrôle périodique

4.1.1 Equations de Kolmogorov avec contrôle

Le but de cette partie est de présenter l'article [12]. Dans le cadre des équations différentielles ordinaires périodiques, les équations de Kolmogorov jouent un rôle central. Dans [12], on a introduit les équations différentielles de Kolmogorov avec contrôle, et on a caractérisé l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles il existe un contrôle admissible tel que la solution associée soit T -périodique (résultat de contrôlabilité). Nous étudions

ensuite un problème de contrôle optimal périodique de type Lagrange avec un critère quasi-convexe, et une dynamique de Kolmogorov à deux phases. Nous mettons en évidence la structure “turnpike périodique” ou MRAP des trajectoires optimales (Most Rapid Approach) (voir [60, 76]).

Soit $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction T -périodique par rapport à la variable t et bornée au voisinage de tout point $(t, 0)$. On dit que G est une équation de Kolmogorov si elle s'écrit :

$$\dot{x}_i = x_i G(t, x), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.1.1)$$

Ces équations laissant invariantes l'espace $(\mathbb{R}_+^*)^n$, elles sont couramment utilisées en modélisation. On s'intéresse maintenant à des propriétés des équations de Kolmogorov avec contrôle du type :

$$\dot{x} = x f(t, x, u), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.1.2)$$

où u est un contrôle. Dans la suite on supposera que $n = 1$ et que le contrôle u est scalaire. Notre objectif est d'étudier l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles il existe un contrôle admissible pour lequel la trajectoire est périodique. Rappelons tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Soit $G : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, et T périodique par rapport à t , localement Lipschitz par rapport à x . Supposons qu'il existe $M > 0$ et $s_0, s_1 \in [0, T]$, $s_0 < s_1$ tels que :*

$$(i) \int_0^T G(t, 0) dt > 0 > \int_0^T G(t, M) dt ;$$

(ii) pour tout $t \in [0, T]$, $G(t, \cdot)$ est décroissante

(iii) pour tout $t \in [s_0, s_1]$, $G(t, \cdot)$ est strictement croissante.

Alors (4.1.1) admet une unique solution T -périodique $\tilde{x}(\cdot)$, et si $t_0 \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$,

$$x_0 < \tilde{x}(t_0) \Rightarrow x(t_0 + T, t_0, x_0) > x_0; \quad (4.1.3)$$

$$x_0 > \tilde{x}(t_0) \Rightarrow x(t_0 + T, t_0, x_0) < x_0. \quad (4.1.4)$$

De plus, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| = 0. \quad (4.1.5)$$

Ce résultat est formulé de façon un peu plus générale que dans [77] car il formule explicitement les inégalités (4.1.6) et (4.1.7) qui seront fondamentales dans la suite. De plus, on a supposé la fonction g de Carathéodory (au lieu de continue), et a et b intégrables seulement.

Le résultat suivant est une application du théorème précédent pour des équations de Kolmogorov unidimensionnelles.

Théorème 4.1.2. *Soit $G : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, et T périodique par rapport à t , localement Lipschitz par rapport à x . Supposons qu'il existe $M > 0$ et $s_0, s_1 \in [0, T]$, $s_0 < s_1$ tels que :*

$$(i) \int_0^T G(t, 0) dt > 0 > \int_0^T G(t, M) dt ;$$

(ii) pour tout $t \in [0, T]$, $G(t, \cdot)$ est décroissante

(iii) pour tout $t \in [s_0, s_1]$, $G(t, \cdot)$ est strictement décroissante.

Alors (4.1.1) admet une unique solution T -périodique positive $\tilde{x}(\cdot)$, et pour $t_0 \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$,

$$x_0 < \tilde{x}(t_0) \Rightarrow x(t_0 + T, t_0, x_0) > x_0; \quad (4.1.6)$$

$$x_0 > \tilde{x}(t_0) \Rightarrow x(t_0 + T, t_0, x_0) < x_0. \quad (4.1.7)$$

De plus, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0) - \tilde{x}(t)| = 0. \quad (4.1.8)$$

Ce résultat est une adaptation de la Proposition 5 dans [77] au cadre mesurable. En particulier, on a supposé que $G(t, \cdot)$ est décroissante pour tout $s \in [s_0, s_1]$ (afin de prendre en compte le caractère mesurable par rapport au temps).

On passe maintenant à l'étude d'une équation de Kolmogorov avec contrôle. Etant donnée une fonction $F : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on considère l'équation :

$$\dot{x} = xF(t, x, u). \quad (4.1.9)$$

De plus, on appelle $\mathcal{U}_T^{a,b}$ l'ensemble des contrôles admissibles :

$$\mathcal{U}_T^{a,b} := \{u : \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \mid u \text{ mesu. et } T\text{-périodique}\},$$

où $0 < a < b$. Notons que lorsque u est un contrôle admissible fixé, alors l'application $t \mapsto F(t, x, u(t))$ est également T -périodique. Le résultat suivant permet de caractériser complètement l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles il existe un contrôle admissible tel que la solution associée de (4.1.9) soit T -périodique.

Théorème 4.1.3. *Soit $F : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable par rapport à (t, u) , localement Lipschitz continue par rapport à x , et T -périodique par rapport à t , décroissante par rapport à u . Supposons qu'il existe $M > 0$ et $s_0, s_1 \in [0, T]$, $s_0 < s_1$ tels que :*

$$(i) \int_0^T F(t, 0, b) dt > 0 > \int_0^T F(t, M, a) dt;$$

$$(ii) \forall t \in [0, T], \forall u \in [a, b], F(t, \cdot, u) \text{ est décroissante};$$

$$(iii) \forall t \in [s_0, s_1], \forall u \in [a, b], F(t, \cdot, u) \text{ est strictement décroissante.}$$

Alors, pour tout $u \in \mathcal{U}_T^{a,b}$, il existe une unique solution T -périodique \tilde{x}_u de l'équation (4.1.9) et pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_u(t, t_0, x_0) - \tilde{x}_u(t)| = 0. \quad (4.1.10)$$

De plus, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{C}(t_0) = [\tilde{x}_b(t_0), \tilde{x}_a(t_0)], \quad (4.1.11)$$

où $\tilde{x}_a(\cdot)$ (resp. $\tilde{x}_b(\cdot)$) est l'unique solution T -périodique de (4.1.9) avec un contrôle constant $u = a$ (resp. $u = b$).

La preuve repose sur la construction d'un contrôle qui permet de relier une condition initiale x_0 à elle-même en temps T . On considère pour cela des trajectoires forward et rétrogrades du système.

Remarque 4.1.1. (i) Le résultat principal est la caractérisation exacte de l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles l'équation admet une solution périodique.

(ii) La propriété d'attraction est particulièrement utile. En effet, si le contrôle périodique est issu d'un problème de minimisation, alors cette propriété montre qu'en cas d'incertitude sur le système (si on ne connaît pas bien la condition initiale), alors les trajectoires partant d'un autre point convergent vers la trajectoire optimale périodique.

(iii) Cette étude pourrait se généraliser en dimension supérieure en supposant en outre des propriétés de coopérativité sur le système. L'étude de la fonction de Poincaré (pour trouver une solution périodique) est plus difficile.

4.1.2 Etude d'un problème avec une dynamique à deux phases

Dans cette partie, on considère une équation de Kolmogorov contrôlée avec deux phases. Considérons deux fonctions $f_1, f_2 : [0, +\infty[\times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et pour $u \in \mathcal{U}_T^{a,b}$ on définit la dynamique :

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u(t)), \quad (4.1.12)$$

où $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f(t, x, u) = xF(t, x, u)$, et F est la fonction T -périodique définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\times [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, u) &\mapsto \begin{cases} f_1(x, u) & \text{if } t \in [0, \bar{T}[\\ f_2(x, u) & \text{if } t \in [\bar{T}, T[\end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Etant donné une fonction $\ell : [0, T] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, on considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min_{u \in \mathcal{U}_T^{a,b}} J(u) := \int_0^T \ell(t, \tilde{x}_u(t)) dt, \quad (4.1.14)$$

où \tilde{x}_u est l'unique solution positive T -périodique de (4.1.12) pour le contrôle u . On suppose dans la suite que le système vérifie les hypothèses suivantes.

Hypothèse 4.1.1. Les fonctions f_1, f_2 sont continues sur $[0, +\infty[\times [a, b]$ et de classe C^1 par rapport à x .

Hypothèse 4.1.2. Les fonctions f_i sont strictement décroissantes par rapport à x et u .

Hypothèse 4.1.3. L'inégalité suivante est vérifiée :

$$\bar{T}(f_1(0, b) - f_2(0, b)) + Tf_2(0, b) > 0, \quad (4.1.15)$$

Hypothèse 4.1.4. Pour $i \in \{1, 2\}$, il existe $x_i^- \in [0, +\infty[$ tel que :

$$f_i(x_i^-, a) < 0. \quad (4.1.16)$$

Hypothèse 4.1.5. Le Lagrangien ℓ est continue sur $[0, \bar{T}[\times [0, +\infty[$ et sur $[\bar{T}, T] \times [0, +\infty[$ et peut être étendue continûment sur $[0, \bar{T}] \times [0, +\infty[$ et sur $[\bar{T}, T] \times [0, +\infty[$, et il est de classe C^1 par rapport à x .

Hypothèse 4.1.6. On suppose qu'il existe un seul et unique point $x_\sigma \in [0, +\infty[$ tel que pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in [0, +\infty[$, on ait :

$$\ell(t, x_\sigma) \leq \ell(t, x), \quad \begin{cases} x > x_\sigma \Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial x}(t, x) > 0, \\ x < x_\sigma \Rightarrow \frac{\partial \ell}{\partial x}(t, x) < 0, \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Remarque 4.1.2. (i) Les quatre premières hypothèses concernent les hypothèses du théorème 4.1.3 traduites avec une dynamique à deux phases.

(ii) L'hypothèse (4.1.5) avec les hypothèses de classe C^1 sur les fonctions f_i est nécessaire pour assurer l'existence d'un contrôle optimal. Pour montrer l'existence d'un contrôle optimal (voir [78]) dans ce cadre, on peut augmenter la dynamique pour la rendre continue par rapport à t .

(iii) L'hypothèse (4.1.6) qui porte sur des propriétés du Lagrangien du système est fondamentale pour étudier la structure d'un contrôle optimal.

L'hypothèse (4.1.4) permet d'assurer l'existence d'équilibres pour l'équation :

$$\dot{x} = x f_i(x, u),$$

pour $i \in \{1, 2\}$ et $u \in \{a, b\}$. D'où la définition suivante.

Définition 4.1.1. Il existe $x_a^1, x_a^2, x_b^1, x_b^2 \in [0, +\infty[$ tels que pour $i \in \{1, 2\}$, et $u \in \{a, b\}$ et tout $x > 0$ on a :

$$\begin{cases} x < x_u^i \Rightarrow f_i(x, u) > 0, \\ x = x_u^i \Rightarrow f_i(x, u) = 0, \\ x > x_u^i \Rightarrow f_i(x, u) < 0, \end{cases} \quad (4.1.18)$$

De plus, on a :

$$x_b^1 \leq x_a^1 \quad \text{et} \quad x_b^2 \leq x_a^2. \quad (4.1.19)$$

4.1.3 Principe du Maximum de Pontryagin et arc singulier

Dans cette partie, on résume l'application du principe du maximum de Pontryagin au système. Le Hamiltonien $H := H(t, x, \lambda, \lambda_0, u)$ associé au système s'écrit :

$$H := \lambda f(t, x, u) + \lambda_0 \ell(t, x). \quad (4.1.20)$$

Soit u^* un contrôle optimal et x^* la trajectoire T périodique associée à u^* , Alors, il existe $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue et il existe $\lambda_0 \leq 0$ tel que $(\lambda(\cdot), \lambda_0)$ soit non trivial de sorte que l'équation adjointe soit satisfaite : $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t))$ i.e. :

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)) - \lambda_0 \frac{\partial \ell}{\partial x}(t, x^*(t)), \quad (4.1.21)$$

et on a la condition de maximisation :

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t), \lambda_0) = \max_{v \in [a, b]} H(t, x^*(t), v, \lambda(t), \lambda_0), \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (4.1.22)$$

avec la condition de transversalité (adjoint périodique) :

$$\lambda(0) = \lambda(T). \quad (4.1.23)$$

On appelle trajectoire extrémale un quadruplet $(x^*, \lambda, \lambda_0, u^*)$ qui satisfait (4.1.12)-(4.1.21)-(4.1.22)-(4.1.23). Si $\lambda_0 \neq 0$ (resp. $\lambda_0 = 0$), on dit que l'extrémale est *normale* (resp. *anormale*).

Comme ℓ ne dépend pas de u et que $u \mapsto f(t, x, u)$ est décroissante, la fonction λ est la fonction de commutation associée au contrôle u . D'où la loi de commande en utilisant (4.1.22) :

$$\begin{cases} \lambda(t) > 0 \Rightarrow u^*(t) = a, \\ \lambda(t) < 0 \Rightarrow u^*(t) = b. \end{cases} \quad (4.1.24)$$

Lorsque $\lambda = 0$ sur un intervalle $I := [t_1, t_2]$, on dit que la trajectoire contient un arc singulier. Par (4.1.21), un arc singulier est caractérisé par $x(t) = x_\sigma$ pour tout $t \in I$. L'arc singulier est *contrôlable* si il existe $u_\sigma \in [a, b]$ tel que la trajectoire x reste constante égale à x_σ sur I . Cette condition équivaut à l'existence de $u_\sigma^i \in [a, b]$ tel que

$$f_i(x_\sigma, u_\sigma^i) = 0. \quad (4.1.25)$$

Notons que par l'hypothèse 4.1.2, l'équation (4.1.25) équivaut à :

$$\begin{cases} x_\sigma f_i(x_\sigma, a) \geq x_\sigma f_i(x_\sigma, x_\sigma) = 0, \\ x_\sigma f_i(x_\sigma, b) \leq x_\sigma f_i(x_\sigma, x_\sigma) = 0. \end{cases}$$

Par la définition 4.1.1, l'équation (4.1.25) devient

$$x_\sigma \in [x_b^i, x_a^i]. \quad (4.1.26)$$

La contrôlabilité de l'arc singulier dépend des propriétés de la dynamique. On introduit donc la définition suivante.

Définition 4.1.2. (i) On dit que l'arc singulier est toujours contrôlable lorsque

$$x_\sigma \in [x_b^1, x_a^1] \cap [x_b^2, x_a^2].$$

(ii) On dit que l'arc singulier est contrôlable sur la première phase resp. la seconde phase lorsque :

$$(x_\sigma \in [x_b^1, x_a^1] \text{ et } x_\sigma < x_b^2) \quad \text{ou} \quad (x_\sigma \in [x_b^1, x_a^1] \text{ et } x_\sigma > x_a^2),$$

resp.

$$(x_\sigma \in [x_b^2, x_a^2] \text{ et } x_\sigma < x_b^1) \quad \text{ou} \quad (x_\sigma \in [x_b^2, x_a^2] \text{ et } x_\sigma > x_a^1).$$

(iii) L'arc singulier n'est jamais contrôlable lorsque

$$(x_\sigma > x_a^1 \text{ or } x_\sigma < x_b^1) \quad \text{et} \quad (x_\sigma > x_a^2 \text{ or } x_\sigma < x_b^2).$$

Enfin, on peut intégrer l'équation adjointe (4.1.21), ce qui donne

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)) ds} - \lambda_0 \int_{t_0}^t \frac{\partial \ell}{\partial x}(s, x^*(s)) e^{-\int_s^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, x^*(\tau), u^*(\tau)) d\tau} ds. \quad (4.1.27)$$

Cette expression est utile pour éliminer certaines trajectoires extrémales qui ont un nombre élevé de commutation (et qui donc ne sont pas optimales). Par ailleurs, si $\lambda_0 = 0$, on doit avoir $\lambda(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ (sinon, on aurait $(\lambda(\cdot), \lambda_0) = 0$ ce qui n'est pas possible). Les trajectoires anormales correspondent donc à celles obtenues avec le contrôle constant $u = a$ et $u = b$.

4.1.4 Résumé des trajectoires optimales

Nous donnons ci-dessous les principaux résultats qui portent sur la structure du contrôle optimal. Etudions d'abord le cas où l'arc singulier est contrôlable sur une seule phase, et où

l'on montre que la structure du contrôle est bang-singulier-bang. On est amené à étudier les trois cas suivants.

$$x_\sigma \in [x_b^1, x_a^1] \text{ et } x_\sigma < x_b^2; \quad (\text{cas I})$$

$$x_\sigma \in [x_b^1, x_a^1] \text{ et } x_\sigma > x_a^2; \quad (\text{cas II})$$

$$x_\sigma \in [x_b^2, x_a^2] \text{ et } x_\sigma < x_b^1. \quad (\text{cas III})$$

Dans les cas cas I et cas II sont vérifiées, l'arc singulier est contrôlable sur la phase 1 seulement. Dans le cas cas III, l'arc singulier est contrôlable sur la seconde phase seulement. Les trois théorèmes suivants donnent la structure du contrôle optimal pour chacun des trois cas.

Théorème 4.1.4. *On se place dans le cas I. Alors $x^*(0) \geq x_\sigma$ et $x_b(\bar{T}, T, x^*(0)) < x_\sigma$, et si on définit $t_1 \in [0, \bar{T}[$, resp. $t_0 \in [0, t_1]$, par $x_b(t_1, T, x^*(0)) = x_\sigma$, resp. $x_b(t_0, 0, x^*(0)) = x_\sigma$, alors le contrôle optimal s'écrit :*

$$u_{b,\sigma,b}(t) = \begin{cases} b, & \text{si } t \in [0, t_0[, \\ u_\sigma^1 & \text{si } t \in [t_0, t_1[, \\ b, & \text{si } t \in [t_1, T]. \end{cases} \quad (4.1.28)$$

Théorème 4.1.5. *On se place dans le cas II. Alors $x^*(0) \leq x_\sigma$ et $x_a(\bar{T}, T, x^*(0)) > x_\sigma$, et si on définit $t_1 \in [0, \bar{T}[$, resp. $t_0 \in [0, t_1]$, par $x_a(t_1, T, x^*(0)) = x_\sigma$, resp. $x_a(t_0, 0, x^*(0)) = x_\sigma$, alors le contrôle optimal s'écrit :*

$$u_{a,\sigma,a}(t) = \begin{cases} a, & \text{si } t \in [0, t_0[, \\ u_\sigma^1 & \text{si } t \in [t_0, t_1[, \\ a, & \text{si } t \in [t_1, T]. \end{cases} \quad (4.1.29)$$

Théorème 4.1.6. *On se place dans le cas III. Alors $x^*(0) \leq x_\sigma$ et $x_b(\bar{T}, 0, x^*(0)) \geq x_\sigma$, et si on définit $t_0 \in [\bar{T}, T[$, resp. $t_1 \in [t_0, T]$, par $x_b(t_0, T, x^*(0)) = x_\sigma$, resp. $x_b(t_1, T, x^*(0)) = x_\sigma$, alors le contrôle optimal s'écrit :*

$$u_{b,\sigma,b}(t) = \begin{cases} b, & \text{si } t \in [0, t_0[, \\ u_\sigma^2 & \text{si } t \in [t_0, t_1[, \\ b, & \text{si } t \in [t_1, T]. \end{cases} \quad (4.1.30)$$

Remarque 4.1.3. (i) *Dans les cas I, II et III, les résultats ci-dessus montrent que la solution optimale est de type MRAP soit depuis x_0 avec le système forward, soit depuis $x(T) = x_0$ avec le système backward, pour atteindre un turnpike arc singulier voir [60, 76]. La trajectoire doit quitter l'arc singulier pour satisfaire la contrainte de périodicité $x(0) = x(T)$ avec le même contrôle en $t = 0$ et $t = T$ (car l'adjoint est périodique). Ces résultats donnent également une manière de calculer les instants de commutation.*

(iii) *Dans les résultats précédents, on peut avoir $t_0 = t_1$. Par conséquent $u \equiv a$ resp. $u \equiv b$ peut être optimal (cela dépend de la position du minimum du Lagrangien ℓ).*

On se place maintenant dans le cas où l'arc singulier n'est jamais contrôlable. On peut se ramener au cas suivant :

$$x_a^2 < x_\sigma < x_b^1. \quad (\text{cas IV})$$

On notera u_a , resp. u_b le contrôle constant égal à a , resp. b .

Théorème 4.1.7. *On se place dans le cas IV. Alors on a $x^*(0) \leq x_\sigma$ et :*

- (1) *Si $x^*(0) = x_\sigma$, alors $\lambda(0) > 0$ et le contrôle u_a est optimal.*
 (2) *Si $x^*(0) < x_\sigma$ avec $\lambda(0) = 0$, alors $x_b(\bar{T}, 0, x^*(0)) > x_\sigma$ et $x_a(\bar{T}, T, x^*(0)) > x_\sigma$, et il existe $t_0 \in (0, T)$ tel que :*

$$u_{b,a}(t) := \begin{cases} b, & \text{si } t \in [0, t_0[, \\ a, & \text{si } t \in [t_0, T]. \end{cases} \quad (4.1.31)$$

- (3) *Si $x^*(0) < x_\sigma$ avec $\lambda(0) > 0$ alors $x_a(\bar{T}, T, x^*(0)) > x_\sigma$, et soit u_a est optimal ou il existe $x_0 \in]x^*(0), x_\sigma[$ tel que $x_b(T, 0, x_0) < x^*(0)$ et $x_b(\bar{T}, 0, x_0) > x_\sigma$, et il existe $t_0 < t_1$ tels que le contrôle optimal soit donné par :*

$$u_{a,b,a}(t) := \begin{cases} a, & \text{si } t \in [0, t_0[, \\ b, & \text{si } t \in [t_0, t_1[, \\ a, & \text{si } t \in [t_1, T]. \end{cases} \quad (4.1.32)$$

- (4) *Si $x^*(0) < x_\sigma$ avec $\lambda(0) < 0$ alors $x_b(\bar{T}, 0, x^*(0)) \geq x_\sigma$, et soit u_b est optimal ou, $x_b(\bar{T}, 0, x^*(0)) > x_\sigma$ et il existe $x_0 \in]x^*(0), x_\sigma[$ tel que $x_a(0, T, x_0) < x^*(0)$ et $x_a(\bar{T}, T, x^*(0)) > x_\sigma$, et il existe $t_0 < t_1$ tels que le contrôle optimal est donné par :*

$$u_{b,a,b}(t) := \begin{cases} b, & \text{si } t \in [0, t_0[, \\ a, & \text{si } t \in [t_0, t_1[, \\ b, & \text{si } t \in [t_1, T]. \end{cases} \quad (4.1.33)$$

Cette caractérisation du contrôle optimal permet ensuite d'accéder à une solution optimale en optimisant le système par rapport au degrés de liberté qui définissent les solutions (temps de commutation par exemple).

Remarque 4.1.4. (i) *De même que dans les cas I, II et III, on a une description précise des temps de commutation.*

(ii) *Lorsque $\lambda(0) = 0$, la condition de transversalité n'implique pas que les contrôles sont égaux en $t = 0$ et $t = T$, d'où la structure différente du contrôle dans ce cas.*

(iii) *Hormis les cas dégénérés correspondant au contrôle $u = u_a$, $u = u_b$ et à $\lambda(0) = 0$, ce théorème fournit essentiellement deux candidats pour l'optimalité $u_{a,b,a}$ et $u_{b,a,b}$ avec deux commutations. Il est probable que l'un des deux ne minimise pas le critère, mais rappelons que le principe du maximum ne fournit qu'une condition nécessaire d'ordre 1. Par conséquent, il faudrait utiliser l'équation d'Hamilton-Jacobi, une condition d'ordre 2 ou bien des simulations numériques afin de conclure sur l'optimalité de l'un des deux contrôles.*

4.1.5 Discussions

Les résultats ci-dessus sont résumés dans le tableau ci-dessous qui donne la structure générale du contrôle en fonction des différents cas du système.

Il est intéressant de noter que dans le premier cas ci-dessus, alors la structure est bang-singulier-bang. Pour caractériser complètement la trajectoire on a besoin d'un seul paramètre x_0 (la condition initiale). Ceci permet de trouver numériquement la condition initiale optimale pour lequel $J(x_0)$ est minimal.

Dans le second cas, on peut noter que l'on a deux inconnues t_0 et t_1 (les deux temps de commutation). Par suite, la recherche de l'optimum nécessite de minimiser une fonction de deux variables. Nous donnons ci-dessous deux exemples correspondant à ces deux cas et pour lesquels nous avons recherché la valeur des paramètres optimaux.

TABLE 4.1 – Structure du contrôle optimal en fonction des cas

position de x_σ	contrôlabilité de x_σ	cas	condition initiale	structure du contrôle
$x_\sigma \notin]m_1, m_2[$		$x_\sigma \geq \max_t \tilde{x}_a(t)$	$x^*(0) = \tilde{x}_a(0)$	a
		$x_\sigma \leq \min_t tx_b(t)$	$x^*(0) = \tilde{x}_b(0)$	b
$x_\sigma \in]m_1, m_2[$	toujours	$x_\sigma \in [x_b^1, x_a^1] \cap [x_b^2, x_a^1]$	$x^*(0) = x_\sigma$	$u_\sigma^1 - u_\sigma^2$ (sing.)
	seulement sur une phase	$x^*(0) \geq x_\sigma$	$b - (u_\sigma^1) - b$ (b-s-b)	$b - (u_\sigma^1) - b$ (b-s-b)
		(cas II)	$x^*(0) \leq x_\sigma$	$a - (u_\sigma^1) - a$ (b-s-b)
		(cas III)	$x^*(0) < x_\sigma$	$b - (u_\sigma^2) - b$ (b-s-b)
jamais	(cas IV)	$x^*(0) \leq x_\sigma$	$b - a$ (b-b) or $b - (a) - b$ (b-b) or $a - (b) - a$ (b-b)	

Exemple 1 : simulation numérique des trajectoires optimales pour le cas bang-singulier-bang.

On s'intéresse à un chemostat forcé périodiquement, autrement dit on considère une fonction de croissance du type $(t, s) \mapsto \mu(t, s)$ T -périodique par rapport à la variable t . Le système que l'on considère s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(t, s)x - ux, \\ \dot{s} = -\mu(t, s)x + u(s_{in} - s), \end{cases} \quad (4.1.34)$$

où la fonction de croissance μ vérifie :

$$\mu(t, s) = \begin{cases} \bar{\mu} \frac{s}{s+c}, & \text{si } t \in [0, \frac{T}{2}[, \\ \varepsilon \frac{s}{s+c}, & \text{si } t \in [\frac{T}{2}, T[, \end{cases}$$

avec $0 < \varepsilon < \bar{\mu}$ et $0 < T$ et $c > 0$. Le tau de dilution u est la variable de contrôle et prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et $s_{in} > 0$ représente la concentration de substrat entrante. On s'intéresse à maximiser la production de biomasse sur une période $[0, T]$ sous contraintes périodiques pour l'état :

$$\max_{u(\cdot) \in [0, 1]} \int_0^T u(t)x(t)dt, \quad \text{avec } x(0) = x(T) \text{ et } s(0) = s(T). \quad (4.1.35)$$

En posant $M = x + s$, on remarque que $\dot{M} + uM = us_{in}$. Par conséquent, la dynamique équivalente est donnée par :

$$\dot{x} = (\mu(t, si - x) - u)x.$$

On peut montrer que la stratégie optimale est du type $b - u_{\sigma_2} - b$ (i.e. bang-singular-bang). On a tracé le coût extrémal $J(x_0)$ par rapport à la condition initiale x_0 , ce qui nous permet de trouver numériquement la valeur du minimum, voir Fig. 4.1.

Exemple 2 : simulation numérique des trajectoires optimales dans le cas IV.

Soit $0 < \bar{T} < T$ données, et on considère la dynamique donnée par :

$$\dot{x} = xF(t, x, u), \quad \text{avec } F(t, x, u) := \begin{cases} f_1(x, u) := \alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_1 u, & \text{si } t \in [0, \bar{T}[, \\ f_2(x, u) := \alpha_2 - \beta_2 x - \gamma_2 u, & \text{si } t \in [\bar{T}, T[. \end{cases}$$

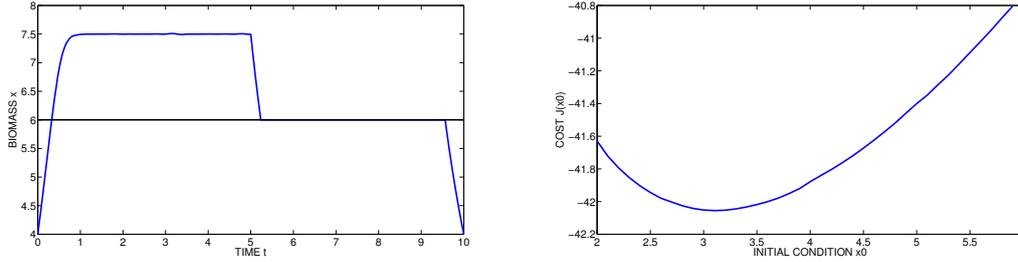


FIGURE 4.1 – Figure gauche : graphe de la solution optimale $x_{u^*}(\cdot, 0, x_0)$ pour $x_0 = 4$. La ligne horizontale représente l’arc singulier x_σ . Figure droite : tracé du coût en fonction de la condition initiale.

Notre objectif est de minimiser le critère suivant

$$\min_{u(\cdot) \in [0,1]} \int_0^T \ell(x(t)) dt, \quad (4.1.36)$$

où $\ell(x) := \frac{1}{2}(x - x_\sigma)^2$, avec $x_\sigma \in \mathbb{R}$ donné. Par les résultats précédents, on peut montrer que la structure est du type $u_{a,b,a}$, et en minimisant la fonction coût par rapport aux deux inconnues $x^*(0)$ et x_0 , on trouve la solution optimale.

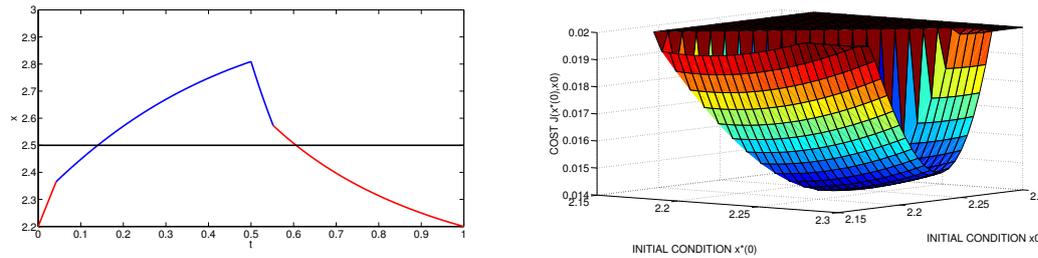


FIGURE 4.2 – Figure gauche : tracé d’une solution extrémale correspondant au contrôle $a - b - a$. Figure droite : tracé du critère J en fonction de la condition initiale $x^*(0)$ et x_0 .

4.2 Optimisation sous contraintes périodiques

Le but de cette partie est de présenter quelques résultats obtenus dans [13]. Nous avons étudié le couplage de deux réacteurs biologiques. Le premier contient des micro-algues et le second fonctionne en chemostat usuel. Les micro-algues qui sont contenues dans le premier réacteur fonctionnent en mode jour-nuit i.e. leur croissance dépend de la lumière du jour. Par ailleurs, ces micro-algues servent de substrat entrant dans le second réacteur dans lequel on souhaite recueillir du bio-gaz. Le système s’écrit :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{\mu(t)y}{1+y} - ry - uy, \\ \frac{ds}{dt} = u\beta(\gamma y - s) - \mu_2(s)x, \\ \frac{dx}{dt} = (\mu_2(s) - u\beta)x. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Ici, y est la concentration de micro-algues qui joue le rôle de “substrat entrant”, s est la concentration de substrat dans le second réacteur, et x la concentration de micro-organismes dans le second réacteur. Le tau de dilution est u qui est la variable de contrôle.

La lumière du jour est modélisée par la fonction $t \mapsto \mu(t)$, et on a utilisé la dynamique [79] pour son évolution en fonction du temps. La fonction μ_2 est la fonction de croissance dans le second réacteur.

L'originalité de ce système est le couplage de l'équation en y (voir [79]) avec celle d'un chemostat. La variable y sert d'entrée dans les deux autres équations, et dépend du contrôle de façon complexe, ce qui aura pour conséquence de rendre délicate l'étude des trajectoires optimales.

On pourra utiliser des résultats de [6] pour étudier l'équation en y . L'exemple typique pour l'entrée $t \mapsto \mu(t)$ est le suivant :

$$\mu_0(t) := \begin{cases} \bar{\mu}, & t \in [0, \bar{T}], \\ 0, & t \in (\bar{T}, T), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Nous considérerons également une régularisation de la fonction μ_0 (régularisation continue et de classe C^1) afin de discuter les propriétés de l'arc singulier en présence de discontinuité dans la dynamique (discontinuité de $t \mapsto \mu(t)$). Nous verrons plus précisément comment la classe de la fonction μ influe sur l'arc singulier et la structure du contrôle. On montrera aussi des simulations numériques réalisées dans le cas où l'entrée μ est donnée par :

$$\mu(t) = \bar{\mu} \max \left(0, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right)^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.2.3)$$

L'objectif de cette étude est de trouver comment maximiser la production de bio-gaz sur une période de plusieurs semaines. Pour cela, on est amené à étudier le problème de contrôle optimal suivant. Fixons d'abord l'ensemble des contrôles admissibles :

$$\mathcal{U}_n := \{u : [0, nT] \rightarrow [0, 1] \mid \text{mesu.}\}.$$

où n désigne le nombre de périodes sur lequel le problème est étudié. Ainsi, le problème de contrôle se reformule ainsi :

$$\max_{u \in \mathcal{U}_n} J_n(u) := \int_0^{nT} \mu_2(s_u(t)) x_u(t) dt,$$

Afin de simplifier l'étude, nous proposons la démarche suivante. On se propose d'abord d'étudier le problème avec $n = 1$ sur une seule période et sous contraintes d'état périodique :

$$y_u(0) = y_u(T), \quad s_u(0) = s_u(T), \quad x_u(0) = x_u(T). \quad (4.2.4)$$

Le fait d'imposer la contrainte de périodicité est très utile en pratique afin de répéter le processus n jours. Ensuite, on comparera la répétition de la solution optimale sur n période avec une solution optimale du problème sur n périodes. L'étude qui suit se décompose ainsi :

- On prouve l'existence de solutions périodiques et l'attraction de ces solutions.
- On étudie le problème de contrôle optimal sur une seule période avec contraintes périodiques (calcul des arcs singuliers, méthode directe, méthode indirecte).
- On compare la solution optimale calculée sur une période avec une solution optimale moyennée calculée sur n périodes.

4.2.1 Existence de solutions périodiques

Pour démontrer l'existence d'une solution périodique pour le système tri-dimensionnel, nous procédons en trois étapes. D'abord, nous montrons que y admet une solution périodique. Ensuite nous montrons que la fonction $\psi := x + s$ admet une solution périodique. Enfin, nous démontrons que x admet une solution périodique.

Examinons d'abord l'équation vérifiée par y . On peut réécrire l'équation vérifiée par y comme suit :

$$\dot{y} = yF(t, y, u(t)), \quad (4.2.5)$$

avec

$$F(t, y, u) := \frac{\mu(t)}{1+y} - (r+u), \quad (4.2.6)$$

Par suite, il s'agit d'une équation de Kolmogorov, et on peut appliquer [6] afin de caractériser complètement les solutions périodiques pour y . L'hypothèse suivante est nécessaire pour démontrer l'existence de solutions.

Hypothèse 4.2.1. *La propriété suivante est vérifiée :*

$$\int_0^T \mu(t) dt > (r+1)T. \quad (4.2.7)$$

D'où le résultat suivant dont les ingrédients principaux se trouvent dans [6].

Proposition 4.2.1. *On suppose que (4.2.7) est vérifiée. Alors :*

- (i) *Pour tout $u \in \mathcal{U}$, il existe une unique solution \tilde{y}_u de (4.2.5) qui est T -périodique et positive.*
- (ii) *L'ensemble des conditions initiales pour lesquelles (4.2.5) est périodique est exactement l'intervalle $[z_0, z_1]$, où z_1 (resp. z_0) est l'unique condition initiale périodique pour le contrôle constant $u = 1$ (resp. $u = 0$).*

Par suite, la fonction ψ vérifie l'équation suivante :

$$\dot{\psi} = \beta u(\gamma \tilde{y}_u - \psi). \quad (4.2.8)$$

Par un calcul immédiat, on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 4.2.2. *Pour tout $u \in \mathcal{U}$, l'équation (4.2.8) admet une unique solution T -périodique $\tilde{\psi}_u$.*

Lorsque $u \neq 0$, la solution $\tilde{\psi}_u$ s'écrit :

$$\tilde{\psi}_u(t) := \beta\gamma \int_0^t u(s)\tilde{y}_u(s)e^{\int_t^s \beta u(\sigma)d\sigma} ds + \beta\gamma \frac{\int_0^T u(s)\tilde{y}_u(s)e^{\int_T^s \beta u(\sigma)d\sigma} ds}{1 - e^{-\int_0^T \beta u(s)ds}} e^{-\int_0^t \beta u(s)ds}. \quad (4.2.9)$$

On montre maintenant que l'on peut trouver une solution périodique pour x . Or, x vérifie également une équation de type Kolmogorov :

$$\dot{x} = x[\mu_2(\tilde{\psi}_u(t) - x) - \beta u(t)], \quad (4.2.10)$$

Ainsi, on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 4.2.3. *Si $u \in \mathcal{U}$ vérifie $\|u\|_1 \neq 0$ ainsi que l'inégalité*

$$\|u\|_1 < \frac{1}{\beta} \int_0^T \mu_2(\tilde{\psi}_u(t)) dt, \quad (4.2.11)$$

alors, il existe une solution périodique \tilde{x}_u de (4.2.10).

L'inégalité (4.2.11) n'est pas explicite car les deux membres de l'inégalité dépendent du contrôle u . Il est nécessaire de reformuler cette contrainte sur le contrôle de manière plus simple. Soit z_1^- le minimum de la fonction y_1 sur $[0, T]$. Alors, on a le résultat suivant qui fournit une inégalité explicite sur le contrôle u pour que le système initial ait une solution périodique.

Théorème 4.2.1. *On suppose que le système vérifie (4.2.1). Alors, pour tout contrôle $u \in \mathcal{U}$ avec $\|u\|_1 \neq 0$ et tel que :*

$$\|u\|_1 < \frac{T}{\beta} \mu_2(\gamma z_1^-), \quad (4.2.12)$$

il existe une solution T -périodique $(\tilde{y}_u(\cdot), \tilde{s}_u(\cdot), \tilde{x}_u(\cdot))$ de l'équation (4.2.1).

Dans [13], nous discutons l'hypothèse (4.2.12) qui peut être considérée restrictive d'un point de vue pratique, et nous démontrons un résultat d'existence dans un cadre plus général.

4.2.2 Propriétés asymptotiques

Dans cette partie, on étudie les propriétés asymptotiques des solutions périodiques. Plus précisément, on fixe un contrôle u admissible, et on suppose qu'il existe une solution périodique du système initial $(\tilde{y}_u(\cdot), \tilde{s}_u(\cdot), \tilde{x}_u(\cdot))$ (voir théorème 4.2.1). On montre que les solutions périodiques sont attractives au sens suivant.

Théorème 4.2.2. *On suppose que le système vérifie l'hypothèse 4.2.1 et (4.2.12). Soit $u \in \mathcal{U}$ un contrôle fixé, $\zeta_0 := (y_0, s_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^*$ un triplet de conditions initiales fixées, et soit (y, s, x) l'unique solution de (4.2.1) partant depuis ζ_0 . Alors, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - \tilde{y}_u(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |s(t) - \tilde{s}_u(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \tilde{x}_u(t)| = 0,$$

où $(\tilde{y}_u, \tilde{s}_u, \tilde{x}_u)$ est l'unique solution T -périodique de (4.2.1) associée au contrôle u .

Ces propriétés sont illustrées sur la figure 4.3. De même que pour démontrer la périodicité, on fonctionne en trois étapes. Montrer la propriété sur y est aisée compte tenu des propriétés de l'équation de Kolmogorov. Ensuite, on montre la propriété sur $x + s$, ce qui relativement aisée compte tenu des expressions explicites pour les fonctions ψ et $\tilde{\psi}_u$. La difficulté réside en la preuve de la convergence pour x . En effet, on ne peut plus appliquer le résultat d'attraction de Kolmogorov car l'équation vérifiée par x est perturbée par rapport à l'équation en \tilde{x} .

La preuve de la périodicité pour x amène donc naturellement à se poser la question suivante : soit deux applications $F, F_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto F_0(t, x)$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ telles que F_0 est T -périodique par rapport à t . On suppose que lorsque t tend vers l'infini, on a :

$$F(t, x) - F_0(t, x) \rightarrow 0,$$

uniformément par rapport à x . Supposons que F_0 ait une solution T -périodique \tilde{x} . Les solutions du système

$$\dot{x} = F(t, x),$$

convergent-elles vers \tilde{x} ? Il existe de nombreuses références dans la littérature sur les systèmes asymptotiquement autonomes [80], ce qui est lié à cette question car on peut ramener un système périodique en temps à un système autonome. Nous avons fait la preuve dans ce cadre car nous n'avons pas trouvé de référence exacte sur ce point précis.

Remarque 4.2.1. *Supposons que u soit un contrôle optimal. Ainsi, si on applique le même contrôle au système avec une condition initiale différente, la trajectoire associée converge vers la trajectoire optimale. Ceci peut s'avérer très utile en pratique.*

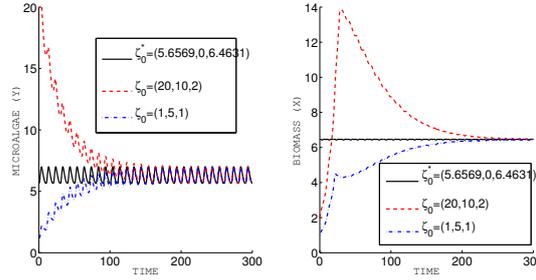


FIGURE 4.3 – Attraction des trajectoires périodiques (représentation de y et x).

4.2.3 Principe du Maximum de Pontryagin

Dans cette section, on applique le principe de Pontryagin dans la perspective de caractériser les trajectoires périodiques optimales. Le point important ici est le calcul explicite des arcs singuliers. En effet, on a recours dans la partie suivante à un couplage entre méthode directe et méthode de tir afin d'affiner la recherche des solutions optimales. De plus, le cadre usuel pour le calcul des arcs singuliers est le cas autonome (bien que la théorie existe aussi pour le cas non-autonome). Cependant, le système initial n'admet pas une dépendance continue en temps (selon le type de fonction $\mu(t)$ que l'on considère). Par conséquent, l'étude des arcs singuliers nécessite une analyse précise.

Soit $z := (y, x, u)$ et $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ l'état adjoint. On définit le Hamiltonien associé au système par $H := H(z, \lambda, \lambda_0, u)$:

$$H := \lambda_1 \left[\mu \frac{y}{1+y} - ry \right] + (\lambda_3 - \lambda_2) \mu_2(s)x + u(-\lambda_1 y + \lambda_2 \beta (\gamma y - s) - \lambda_3 \beta x + \lambda_0 x).$$

Soit u un contrôle optimal et $z_u := (y_u(\cdot), x_u(\cdot), s_u(\cdot))$ la trajectoire T -périodique associée. Alors, il existe $\lambda_0 \leq 0$ et une application absolument continue $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}(z_u(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t))$ cad :

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \left(-\frac{\mu}{(1+y)^2} + r + u \right) \lambda_1 - u \lambda_2 \beta \gamma, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = x (\lambda_2 - \lambda_3) \mu_2'(s) + u \lambda_2 \beta, \\ \frac{d\lambda_3}{dt} = (\lambda_2 - \lambda_3) \mu_2(s) + u \lambda_3 \beta + \lambda_0 u. \end{cases}$$

Comme l'état est T -périodique, l'état adjoint λ vérifie également cette condition de périodicité (condition de transversalité) :

$$\lambda(0) = \lambda(T).$$

Enfin, on a la condition de maximisation suivante : pour presque tout t on a :

$$v \mapsto H(t, z(t), \lambda(t), \lambda_0, v). \quad (4.2.13)$$

Il peut exister des trajectoires anormales i.e. $\lambda_0 = 0$ (cad indépendantes du coût), néanmoins nous supposons que ce cas dégénéré n'arrive pas ici. Par conséquent, on prend $\lambda_0 = -1$. La fonction de commutation s'écrit :

$$\phi := -\lambda_1 y + \lambda_2 \beta (\gamma y - s) - \lambda_3 \beta x + x,$$

et elle est T -périodique. Par (4.2.13), on a donc la loi de commande suivante sur le contrôle optimal :

$$\begin{cases} u = 1 & \iff \phi > 0, \\ u = 0 & \iff \phi < 0, \end{cases}$$

Lorsque $u = 1$ (resp. $u = 0$) sur un interval de temps, on dit que la trajectoire a un arc $Bang_+$ (resp. $Bang_-$). On écrira également B_\pm an arc $Bang_+$ or $Bang_-$. Si ϕ vaut zéro sur un interval de temps, alors on dit que ϕ possède un *arc singulier*. On appelle point de commutation tout point t_0 où le contrôle n'est pas constant dans tout voisinage de t_0 . Pour un tel point on a nécessairement $\phi(t_0) = 0$.

On peut voir directement sur le système que les contrôles $u = 0$ et $u = 1$ ne sont pas solution du problème (les trajectoires associées ne sont pas périodiques). Par conséquent, la trajectoire possède nécessairement un switch ou un arc singulier. De plus, on a la propriété suivante :

- Si $\phi(0) > 0$, alors le contrôle vérifie $u = 0$ on $[0, t_0] \cup [t_1, T]$ où $0 < t_0 < t_1 < T$. De plus, la trajectoire possède au moins un point de commutation.
- Si $\phi(0) < 0$, alors le contrôle vérifie $u = 1$ on $[0, t'_0] \cup [t'_1, T]$ où $0 < t'_0 < t'_1 < T$. De plus, la trajectoire possède au moins un point de commutation.

Il est donc important de noter que la trajectoire a la même structure au début de l'intervalle et à la fin de l'intervalle. Calculons maintenant les arcs singuliers. Soit $[t_1, t_2]$ un intervalle de temps où la solution est singulière :

$$\phi(t) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (4.2.14)$$

Pour calculer le contrôle singulier, on dérive la fonction de commutation ϕ par rapport au temps : Il vient :

$$\dot{\phi}(t) = (\gamma y - s)(\lambda_2 - \lambda_3)\beta x \mu'_2(s) + \mu_2(s)x + y \left[-\lambda_1 y \frac{\mu(t)}{(1+y)^2} + \lambda_2 \beta \gamma \frac{\mu(t)}{1+y} - r\beta \gamma \lambda_2 \right]. \quad (4.2.15)$$

Lorsque $\mu(t)$ est donnée par (4.2.2), alors ϕ' n'est pas nécessairement continue par (4.2.15) car le système est autonome sur chaque phase $[0, \bar{T}]$ et $(\bar{T}, T]$. Par conséquent, on obtient sa dérivée sur chacun des deux intervalles respectifs. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on peut trouver l'expression de la dérivée de $\dot{\phi}$:

$$\ddot{\phi}(t) = A_\mu(z(t), \lambda(t)) + u(t)B_\mu(z(t), \lambda(t)),$$

où A_μ and B_μ dépendent de l'état et de son adjoint. Pour faire le calcul, on suppose d'abord μ constante, et on pose m_1, m_2, m_3 :

$$\begin{cases} m_1 := \beta(\gamma y - s)(\lambda_2 - \lambda_3)x\mu'_2(s), \\ m_2 := \mu_2(s)x, \\ m_3 := y \left[-\lambda_1 y \frac{\mu(t)}{(1+y)^2} + \lambda_2 \beta \gamma \left(\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right) \right]. \end{cases}$$

En dérivant, on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= x\beta(\lambda_2 - \lambda_3)[(\gamma y - s)\{x[\mu'_2(s)^2 - \mu_2(s)\mu''_2(s)] + \mu''_2(s)\beta(\gamma y - s)u - \beta\mu'_2(s)u\} \\ &\quad + \mu'_2(s)\{\gamma y[\frac{\mu(t)}{1+y} - (r+u)] + \mu_2(s)x\}] + x\beta\mu'_2(s)(\gamma y - s)u, \end{aligned}$$

$$\dot{m}_2 = (\mu_2(s) - u\beta)x\mu_2(s) + x\mu'_2(s)[- \mu_2(s)x + u\beta(\gamma y - s)],$$

$$\begin{aligned} \dot{m}_3 &= y \left\{ \beta \gamma \left(\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right) [x(\lambda_2 - \lambda_3)\mu'_2(s) + u\lambda_2\beta] \right\} + y \left[\frac{\mu(t)}{1+y} - (r+u) \right] \times \\ &\quad \left[-\lambda_1 y \frac{\mu(t)}{(1+y)^2} + \lambda_2 \beta \gamma \left(\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right) \right] - y \left(\frac{\beta \gamma \mu(t)}{(1+y)^2} \lambda_2 + \frac{\mu(t)(1-y)}{(1+y)^3} \lambda_1 \right) \left[\frac{\mu(t)y}{1+y} - (r+u)y \right] \\ &\quad - y \left\{ \frac{y\mu(t)}{(1+y)^2} \left(\left[-\frac{\mu(t)}{(1+y)^2} + r + u \right] \lambda_1 - \lambda_2 \beta \gamma u \right) \right\}. \end{aligned}$$

Il vient donc : $\ddot{\phi}(t) = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3$, où :

$$\begin{aligned} A_\mu(z, \lambda) &= x\mu_2(s)(\mu_2(s) - x\mu'_2(s)) + x\beta(\lambda_2 - \lambda_3) [x(\gamma y - s)(\mu'_2(s)^2 - \mu_2(s)\mu''_2(s))] \\ &\quad - \frac{y^2\mu(t)}{(1+y)^2} \left[-\frac{\mu(t)}{(1+y)^2} + r \right] \lambda_1 + x\beta(\lambda_2 - \lambda_3)\mu'_2(s) \left(\gamma y \left(\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right) + \mu_2(s)x \right) \\ &\quad + y \left[\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right] \left[-\lambda_1 y \frac{\mu(t)}{(1+y)^2} + \lambda_2 \beta \gamma \left(\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right) \right] \\ &\quad + y\beta \gamma \left(\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right) x(\lambda_2 - \lambda_3)\mu'_2(s) - y \left(\frac{\beta \gamma \mu(t)}{(1+y)^2} \lambda_2 + \frac{\mu(t)(1-y)}{(1+y)^3} \lambda_1 \right) \left[\frac{\mu(t)y}{1+y} - ry \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\mu(z, \lambda) &= x\beta[-\mu_2(s) + \mu'_2(s)(\gamma y - s)] + x\beta\mu'_2(s)(\gamma y - s) + x\beta^2(\lambda_2 - \lambda_3)(\gamma y - s) \times \\ &\quad [\mu''_2(s)(\gamma y - s) - \mu'_2(s)] - x\beta(\lambda_2 - \lambda_3)\mu'_2(s)\gamma y - y \left[-\lambda_1 y \frac{\mu(t)}{(1+y)^2} + \lambda_2 \beta \gamma \left(\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right) \right] \\ &\quad + y\beta^2 \lambda_2 \gamma \left[\frac{\mu(t)}{1+y} - r \right] + y^2 \left(\frac{\beta \gamma \mu(t)}{(1+y)^2} \lambda_2 + \frac{\mu(t)(1-y)}{(1+y)^3} \lambda_1 \right) - \frac{\mu(t)y^2}{(1+y)^2} (\lambda_1 - \lambda_2 \beta \gamma). \end{aligned}$$

Lorsque μ dépend du temps et est dérivable, on doit prendre en compte sa dérivée dans le terme m_3 . Ainsi, on peut montrer que A_μ est remplacé par \tilde{A}_μ où :

$$\tilde{A}_\mu(z, \lambda) := A_\mu(z, \lambda) + y \left[\frac{-\lambda_1 y}{(1+y)^2} + \frac{\lambda_2 \beta \gamma}{1+y} \right] \mu'(t).$$

Ainsi, on a l'expression générale des arcs singuliers :

$$\ddot{\phi}(t) = \tilde{A}_\mu(z(t), \lambda(t)) + u(t)B_\mu(z(t), \lambda(t)).$$

Rappelons la condition de Legendre-Clebsch. Considérons un arc singulier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$: si l'arc singulier est optimal, alors on doit avoir :

$$B_\mu(z(t), \lambda(t)) \geq 0, \quad (4.2.16)$$

voir par exemple [81]. De plus, si $B_\mu(z(t), \lambda(t)) > 0$, alors le *contrôle singulier* u_s est donné par :

$$u_s(t) := -\frac{A_\mu(z(t), \lambda(t))}{B_\mu(z(t), \lambda(t))}. \quad (4.2.17)$$

De plus, lorsque (4.2.17) définit un contrôle dans $[0, 1]$, on dit que l'arc singulier est *contrôlable*.

4.2.4 Simulations numériques

Dans la perspective de trouver la synthèse d'un contrôle optimal, on a procédé en deux étapes :

- Simulation à l'aide de `bocop` (méthode directe). Le problème de contrôle optimal est discrétisé et il est résolu par algorithme de points intérieurs. Le logiciel transforme le problème de contrôle en problème discret, puis il est ensuite optimisé par des solveurs publics.
- Simulation par méthode de tir. On utilise le principe de Pontryagin pour trouver la structure d'un contrôle. On calcule ensuite la fonction de tir pour résoudre le système état-adjoint. Enfin, on utilise un algorithme de descente ou quasi-Newton afin de trouver un zéro de cette fonction.

Il faut noter que la méthode directe permet en général de trouver une structure pour le contrôle (nombre de commutation, présence d'arcs singuliers...). Une fois cette structure mise en place, la solution par méthode indirecte permet de valider l'optimalité du contrôle. D'une manière générale, il est intéressant de coupler plusieurs méthodes (directe, indirecte, LMI,...) afin de confirmer la structure d'un contrôle candidat pour l'optimalité.

a) Lumière discontinue. Si μ est discontinue, il y a un saut sur $\dot{\phi}$. Comme on doit avoir $\phi = \dot{\phi} = 0$ le long d'un arc singulier, ce dernier ne peut franchir la discontinuité à l'instant $t = \bar{T}$. On observe un petit arc bang $u = 1$ au voisinage de la discontinuité de μ qui permet de relier les deux arcs singuliers (sur la partie $[0, \bar{T}]$ et sur la partie $[\bar{T}, T]$).

b) Lumière continue. Lorsque μ est continue mais pas C^1 , l'arc singulier peut traverser la singularité à l'instant $t = \bar{T}$ où μ n'est pas C^1 car $\dot{\phi}$ peut rester égale à zéro (la régularité de $\dot{\phi}$ dépend de celle de μ). Cependant $\ddot{\phi}$ est discontinue, donc le contrôle singulier est aussi discontinu.

c) Lumière de classe C^1 . Lorsque μ est de classe C^1 , alors $\ddot{\phi}$ est continue. On observe que l'arc singulier traverse la discontinuité, et que le contrôle singulier est continu. Cependant, le contrôle singulier n'est pas C^1 car μ n'est pas C^2 .

On constate que les méthodes directes et indirectes fournissent des solutions très proches, voir figure 4.2 et les valeurs numériques obtenues dans le tableau 4.2. En particulier, l'arc singulier obtenu par la méthode indirecte coïncide avec la solution par méthode directe. Les figures 4.4, 4.5, et 4.6 montrent les différents types de solution.

Dans ces trois cas, on constate que la structure est $B_- - S - B_-$ (sauf pour le modèle discontinu où s'intercale un arc bang B_+). Cette structure répond à la contrainte périodique du système (qui impose que l'adjoint et la fonction de commutation soient périodiques).

De plus, on peut considérer la partie singulière comme étant un turnpike i.e. un régime où le critère est maximisé. Par conséquent, le système optimisé cherche à s'en approcher tout en respectant les contraintes périodiques.

4.2.5 Discontinuité de l'arc singulier

La première propriété que nous avons mise en évidence est l'incidence sur la structure du contrôle optimal d'une entrée constante par morceaux pour la fonction $\mu(t)$:

Un point intéressant et inhabituel qui est soulevé par les simulations numériques est le suivant. Considérons le modèle de lumière $\mu(t) = \mu_0(t)$. Un arc singulier continue peut-il exister dans un voisinage de $t = \bar{T}$? Afin d'étudier cette question, écrivons le système (4.2.1) de la façon suivante :

$$\dot{z} = f_i(z) + ug(z), \quad i = 1, 2, \quad (4.2.18)$$

où $z = (y, s, x)$ et les champs de vecteur f_i et g sont donnés par la dynamique. On suppose que la discontinuité entre les deux champs de vecteur f_1 et f_2 se fait en $t = \bar{T}$. Supposons que l'on souhaite minimiser un critère du type :

$$J(u) := \int_0^T \ell(z_u(t)) dt,$$

où z_u est l'unique solution T -périodique de (4.2.18) pour le contrôle u . Lorsque le système est autonome, le Hamiltonien est conservé le long d'une trajectoire extrémale. Notons $[f_i, g]$ le crochet de Lie entre f_i et g . On a le résultat suivant.

Proposition 4.2.4. *Supposons qu'un arc singulier soit continu à l'instant $t = \bar{T}$, soit λ l'état adjoint associé à l'extrémale. Alors les cinq conditions suivantes doivent être vérifiées à l'instant $t = \bar{T}$:*

$$\begin{cases} \lambda(\bar{T}) \cdot g(z(\bar{T})) = 0, \\ \lambda(\bar{T}) \cdot f_1(z(\bar{T})) = H_1, \\ \lambda(\bar{T}) \cdot f_2(z(\bar{T})) = H_2, \\ \lambda(\bar{T}) \cdot [f_1, g](z(\bar{T})) = -\nabla \ell(z(\bar{T})) \cdot g(z(\bar{T})), \\ \lambda(\bar{T}) \cdot [f_2, g](z(\bar{T})) = -\nabla \ell(z(\bar{T})) \cdot g(z(\bar{T})). \end{cases} \quad (4.2.19)$$

où H_i , $i = 1, 2$ est le Hamiltonien associé au système.

La première condition provient du fait qu'en $t = \bar{T}$, la trajectoire est singulière. La seconde et troisième condition sont issues de la conservation du Hamiltonien le long des trajectoires extrémales. On peut également montrer que $\dot{\phi}(t) = [f_i, g](z(t)) + \nabla \ell(z(t)) \cdot g(z(t))$. Ainsi, on obtient les deux autres conditions en utilisant que $\dot{\phi}(t) = 0$ sur chaque phase.

Si ces cinq conditions ne sont pas satisfaites, alors l'arc singulier ne peut pas traverser la singularité au temps $t = \bar{T}$. On a vérifié dans ce cadre que ces conditions n'étaient pas vérifiées en approchant l'adjoint par les multiplicateurs de Lagrange (méthode directe). Par conséquent, il existe un arc Bang B_{\pm} afin de relier l'arc singulier sur la première phase à l'arc singulier sur la seconde phase. Nous pensons que pour un système du type (4.2.18), ces conditions ne sont pas satisfaites génériquement. Ainsi, il doit exister un arc bang $u = 0$ ou $u = 1$ au point de discontinuité de la dynamique afin de connecter les deux arcs singuliers sur chaque phase.

La discontinuité sur l'entrée $t \mapsto \mu(t)$ induit donc une structure plus complexe pour la commande optimale avec cinq arcs : $B_-S - B_+S - B_-$.

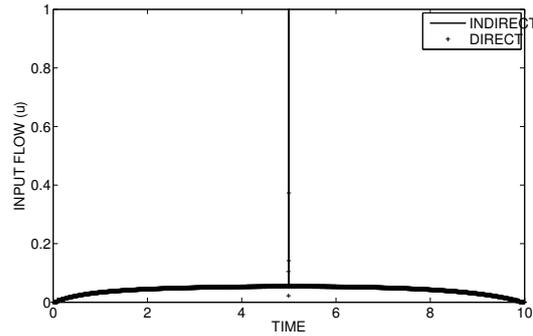


FIGURE 4.4 – Représentation du contrôle optimal par méthode directe et indirecte. On voit un artefact en $t = \bar{T}$ qui correspond à l’arc bang $u = 1$ en $t = \bar{T}$.

TABLE 4.2 – Comparaison entre méthode directe et indirecte.

Méthode	Critère	$y(0)$	$s(0)$	$x(0)$
Direct	4.03635	8.46848	2.812E-04	9.7109
Indirect	4.036346	8.467771	2.829097E-04	9.710909

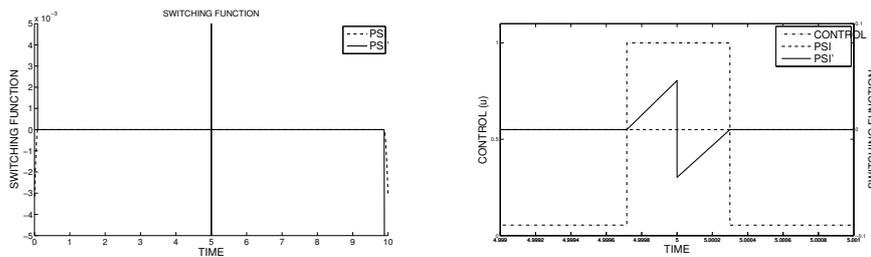


FIGURE 4.5 – Fonction de commutation et sa dérivée.

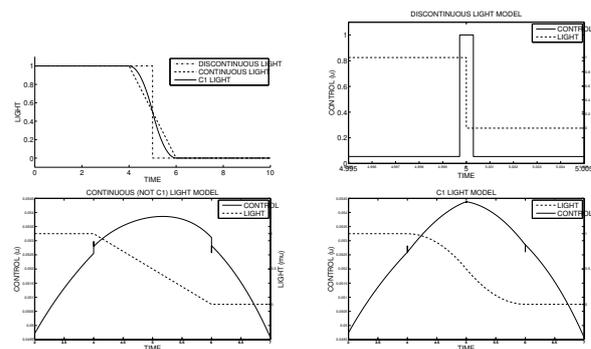


FIGURE 4.6 – Les trois modèles de lumière et le contrôle singulier.

4.2.6 Optimisation en temps long

D’un point de vue pratique, il est intéressant d’optimiser le système sur un temps long (qui en pratique correspondrait à plusieurs semaines). Optimiser sur une longue période est possible, néanmoins, il est plus pratique d’avoir une stratégie sur une période d’un jour qui induise la périodicité sur le système, et de la répéter sur n jours. D’où les deux

questions naturelles :

- Est-il meilleur d’optimiser le système sur n jours sans périodicité ou bien de répéter la solution optimale sur une période n fois ?
- Une solution optimale du problème initiale sur un intervalle de temps $[0, nT]$ est-elle T -périodique (sachant que la partie non-autonome de la dynamique est T -périodique) ?

Nous allons répondre essentiellement à la première question de façon numérique. La seconde question pourra faire l’objet de travaux futurs et dépasse le cadre du papier.

Remarque 4.2.2. (i) Pour étudier les problèmes de contrôle optimal périodique avec période non fixée, il existe des outils comme le π -criterion.

(ii) Lorsque la période est libre le principe de Pontryagin fournit une condition de transversalité supplémentaire dans les conditions d’optimalité du premier ordre. La différence ici est qu’il faudrait optimiser par rapport à un entier n , ce qui est différent. Toutefois, on pourrait s’intéresser au problème où l’on relâche cette contrainte, et optimiser par rapport à une période quelconque.

Une différence avec le problème d’optimisation précédent posé sur une période est qu’on impose aux conditions initiales les contraintes suivantes : $y(0) \in [0.05, 0.25]$, $s(0) \in [0.5, 5]$ and $x(0) \in [0.5, 3]$. En effet, les conditions initiales étant des inconnues du problème, on doit nécessairement borner ces ensembles pour que le problème de contrôle optimal soit bien posé (absence de contraintes périodiques).

Sur la figure 4.7, on a représenté les solutions optimales sur 300 jours. On peut noter que d’autres périodes donnent une structure analogue. Par ailleurs, le nombre de pas de temps pour résoudre le problème a été augmenté en conséquence (environ 15000).

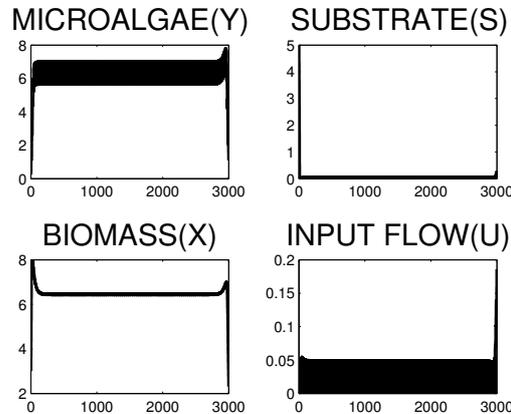


FIGURE 4.7 – Système optimisé sur 300 jours sans contrainte périodique.

On observe que les conditions initiales optimales saturent toujours la borne supérieure i.e. $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$, ce qui revient à dire que les réacteurs sont remplis avec les concentrations maximales. Ensuite, on remarque que la structure des solutions est divisée en trois parties. Pendant les premiers jours, on constate une phase de croissance où les réacteurs fonctionnent avec le contrôle $u = 0$ (batch), et les concentrations en micro-algues et en biomasse sont croissantes jusqu’à ce qu’elles rejoignent les valeurs correspondant au cycle optimal sur 1 jour. La seconde phase occupe la majeure partie de la période des 300 jours. Durant cette seconde phase, on constate une suite de cycles périodiques identiques à la

solution optimale sur une journée (on rappelle qu'aucune contrainte périodique n'a été imposée dans cette partie). Pendant la dernière phase, on constate que le contrôle optimal croît, ce qui permet d'avoir un petit pic de production à la fin de la longue période. Toutes les micro-algues passent dans le second réacteur (afin que la production à la fin du cycle soit maximale). Cette dernière partie provient du fait que l'on n'a pas imposé de conditions finales (pas de périodicité).

On peut comparer l'optimisation sur 300 jours avec la stratégie qui consiste à appliquer chaque jour le même contrôle trouvé en optimisant le système périodique sur une période. On considère donc la même condition initiale $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$, et on observe bien la propriété d'attraction : la trajectoire (y, x, s) converge vers la trajectoire périodique, voir la figure 4.8.

La valeur du critère calculée pour la répétition de cette solution est très proche de celle calculée en optimisant le système sur 300 jours, voir tableau 4.3 et figure 4.8. Ceci confirme notre intuition (voir les deux questions posées au début de cette partie), à savoir que la répétition du cycle périodique fournit une approximation raisonnable du coût optimal sur une longue période. On peut répéter ce type d'optimisation sur d'autres périodes que 300 jours.

Il est probable que le gain pour le problème "longue période" par rapport au problème périodique provienne du régime transitoire où il est possible de gagner en productivité en lessivant le premier réacteur (le système s'arrête ensuite).

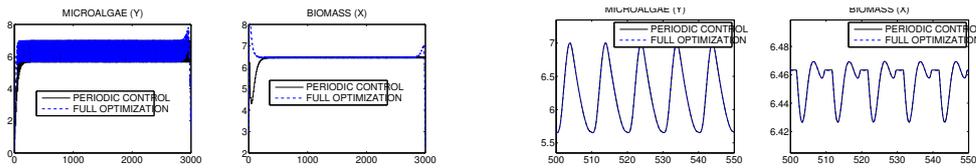


FIGURE 4.8 – Comparaison entre la répétition du cycle 1-jour et la solution optimale sur 300 jours

TABLE 4.3 – Comparaison du coût pour une optimisation sur 1 jour et $n = 300$ jours.

type d'optimisation	t_f (n jours)	Production J_n	J_n/t_f
cycle 1 jour, conditions initiales libres ζ_0	1	0.921	0.921
n jours, $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$	300	277.336	0.925
répétition du cycle, $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$	300	274.848	0.916

4.2.7 Optimisation par rapport au volume

On a supposé jusqu'ici que le paramètre β valait 1. ce paramètre correspond au ratio entre les deux réacteurs. On s'intéresse maintenant à optimiser le système par rapport à β . On supposera que $\beta \in [0.1, 10]$.

On commence d'abord à optimiser le système sur 1 jour en rajoutant β comme variable. La solution obtenue est visible sur la figure 4.9, et la valeur optimale du ratio est $\beta_{1day}^* = 5.427$. On constate que la structure de la solution est uniquement singulière (pas d'arcs bang) et que la production est meilleure dans ce cas (1.430 contre 0.921). Compte tenu des contraintes périodiques, on a vu précédemment que la solution optimale contenait des arcs bang $u = 0$ au début et à la fin du cycle, mais ces derniers limitent la production

dans le second réacteur. On voit qu'en choisissant judicieusement ce ratio, on limite ces arcs. Par conséquent, on peut se poser la question de l'existence d'une valeur de β pour laquelle la solution optimale périodique serait complètement singulière. La question de l'existence de solutions périodiques complètement singulières pour des systèmes de contrôle semble intéressante, et pourrait faire l'objet de travaux futurs.

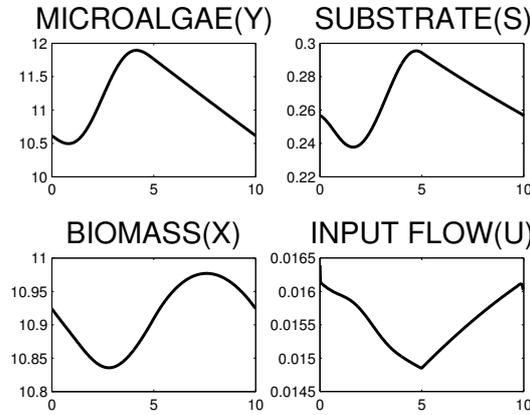


FIGURE 4.9 – Solution with optimal volume ratio - 1-day periodic cycle.

On cherche maintenant à optimiser le système par rapport à β mais sur un intervalle de temps long 300 jours. On observe la même structure de solution que précédemment (avec les trois phases). Les solutions sont représentées sur la figure 4.10, on trouve une valeur optimale pour β qui vaut : $\beta_{300days}^* = 5.194$. Pour conclure sur cette étude, on donne un

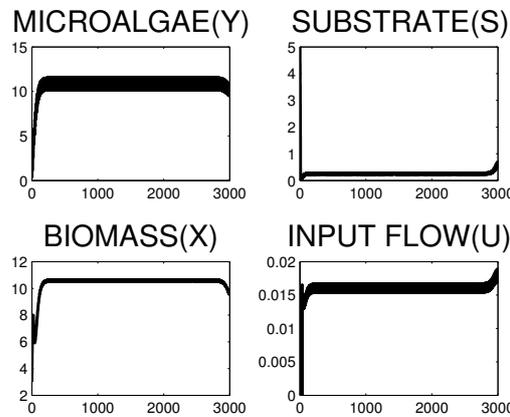


FIGURE 4.10 – Solution with optimal volume ratio - 300 days.

autre lien une entre la solution sur N jours et la répétition du cycle sur 1 jour. On observe que la valeur optimale du paramètre β n'est pas la même pour le problème sur 300 jours que sur le problème sur 1 jour répété 300 fois. Afin de comprendre cette différence, on a représenté la valeur du paramètre β pour différentes périodes. Il est intéressant de noter que cette valeur converge vers la valeur optimale pour le cycle $[0, T]$, voir la figure 4.11 et le tableau 4.4. On observe le même phénomène pour la production journalière. Ceci n'est pas surprenant au vue de la solution optimale sur 300 jours qui est quasiment périodique (les deux phases transitoires initiales et finales étant négligeables). On voit donc que lorsque

l'on augmente le nombre de périodes, la solution optimale sur la période se rapproche de la solution optimale sur 1 période répétée (pour la production et le ratio optimal). Ceci semble donc valider le choix d'optimiser le système sur un seul cycle.

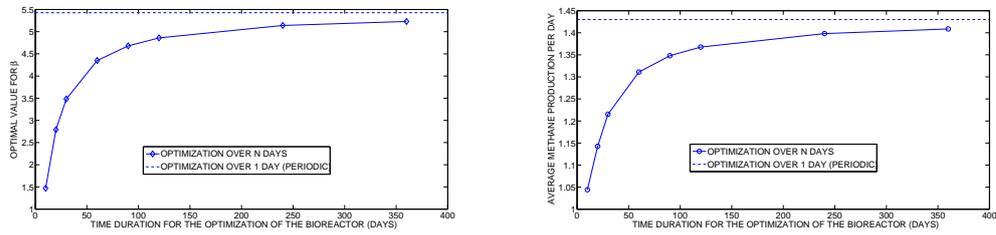


FIGURE 4.11 – Valeur optimale du ratio β et production

TABLE 4.4 – Comparaison du critère pour diverses périodes (avec un volume libre β).

Optimisation	t_f (n jours)	Production J_n	J_n/t_f	paramètre β
Full optimization, $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$	10	10.444	1.044	1.467
Full optimization, $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$	20	22.850	1.143	2.792
Full optimization, $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$	30	36.463	1.215	3.480
Full optimization, $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$	90	121.322	1.348	4.682
Full optimization, $\zeta_0 = (0.25, 5, 3)$	360	597.108	1.409	5.232
Optimisation sur 1 jour, conditions initiales libres ζ_0	1	1.430	1.430	5.427

Chapitre 5

Optimisation de forme et contraintes SDP

Sommaire

5.1	Introduction	95
5.2	Optimisation de forme et SDP	97
5.2.1	Paramétrage d'un corps convexe	97
5.2.2	Transformation en un problème SDP	99
5.2.3	Mise en place de la méthode	100
5.2.4	Simulations numériques	101
5.2.5	Preuve de la convergence de la méthode	103
5.3	Discussion du problème en dimension supérieure	103
5.3.1	Développement en harmoniques sphériques et convexité	106
5.3.2	Corps de largeur constante et harmoniques sphériques	108
5.3.3	Exemple de corps de largeur constante avec $N = 3$	109
5.3.4	Fonctionnelle et harmonique sphérique	109
5.3.5	Problème SDP	110

Cette partie porte sur les articles [18, 16, 15, 17]. Nous développerons essentiellement [18] ainsi que des extensions de ce travail en dimension 3.

5.1 Introduction

Une motivation de ces travaux est le problème de Meissner suivant (toujours ouvert depuis 1934). On considère dans l'espace la classe des corps convexes de largeur constante $\alpha > 0$ donnée, et on s'intéresse à la question suivante : parmi ces corps de largeur constante, lequel possède un volume minimal ? Ce type de questions a fait l'objet de nombreux travaux géométriques au début du 20ème siècle. Les outils d'analyse comme le contrôle optimal ou le calcul des variations ont permis de donner plus récemment de nouveaux horizons à ces problèmes très simples à poser (mais sans doute très difficiles).

Afin de mieux comprendre le problème de Meissner, commençons par un bref rappel de quelques propriétés des corps de largeur constante. Rappelons que la largeur d'un corps convexe K dans une direction de l'espace est la largeur entre les deux hyperplans d'appui à K (distincts) orthogonaux à cette direction. On peut montrer que cette classe est non-vide et contient une infinité de corps de largeur constante autres que la boule de rayon $\alpha/2$. Leur description se fait par exemple à l'aide de leur fonction d'appui. On peut en montrer

que celle-ci est de classe $C^{1,1}$, voir [17, 82] et sa décomposition en harmoniques sphériques ne possède que des coefficients impairs (de par la contrainte de largeur). Ceci permet de donner une bijection entre les corps de largeur constante tri-dimensionnel et un sous-ensemble convexe de l'espace $C^{1,1}$, voir [17]. On obtient ainsi une représentation analytique de ces corps par leur fonction d'appui paramétrée sur la sphère par homogénéité.

Meissner a introduit en 1934 un corps convexe de largeur constante appelé volume de Meissner. Celui-ci est candidat pour être de volume minimal (conjecture de Meissner). Afin de comprendre sa construction, on rappelle quelques propriétés des corps de largeur constante plan.

Dans le plan, on peut construire une famille de corps de largeur constante de la façon suivante. On considère un polygone à n côtés, $n = 2p + 1$, $p \geq 1$ et dont le côté a pour longueur $a = 2\alpha \cos(\frac{\pi}{2n})$, $\alpha > 0$. On considère l'intersection des n cercles centrés sur les n côtés du polygone, et qui rejoignent les deux sommets opposés. On construit ainsi un polygone de Reuleaux. Pour $n = 3$, il s'agit du triangle de Reuleaux (dont la figure géométrique a donné lieu à de inventions industrielles comme le moteur Wankel).

Etant donnée une largeur $\alpha > 0$, il est très facile de montrer que les corps de largeur constante dans le plan ont tous le même périmètre, et que celui d'aire maximale est le disque de rayon $\alpha/2$. Il a été démontré par Blaschke-Lebesgue (dans les années 1920) que celui d'aire minimale (à largeur donnée) est le triangle de Reuleaux. A largeur donnée, la variation d'aire entre le triangle de Reuleaux et la boule est d'environ 10%. La suite des aires des polygones de Reuleaux est croissante par rapport à n . La preuve originale de ce résultat est géométrique, et il existe d'autres preuves par le calcul des variations ou le contrôle optimal.

Dans l'espace, l'idée a été de construire l'analogue du triangle de Reuleaux en intersectant les quatre sphères centrées sur un tétraèdre régulier. Néanmoins, le corps convexe ainsi obtenu n'est pas de largeur constante car il existe des directions de l'espace où sa largeur vaut $\sim 1.02\alpha$ (entre les milieux des trois couples de deux arêtes sphériques opposées). En effectuant un "rabotement symétrique" de trois de ses six arêtes sphériques, Meissner a obtenu un corps de largeur constante α (on appelle ces parties des parties toroïdales) dont on conjecture qu'il est de volume minimal. Une description exacte de sa fonction d'appui se trouve dans [17].

On s'aperçoit que les méthodes purement géométriques ne fonctionnent plus pour étudier ce type de problèmes d'optimisation de formes, par conséquent il est intéressant d'aborder ces problèmes par des outils d'analyse (calcul des variation, optimisation, analyse non-lisse, contrôle optimal). En effet, plusieurs difficultés apparaissent pour ces problèmes :

- les corps convexes en jeu sont non lisses (ce qui n'est pas simple à gérer dans les problèmes d'optimisation de formes dans \mathbb{R}^3 par exemple)
- les fonctionnelles qui entrent en jeu ne sont pas convexes. Par exemple, le volume dans le problème de Meissner est une fonctionnelle concave par rapport à l'addition de Minkowski de corps convexes.

A titre d'exemple, le problème de Newton (qui consiste à trouver la forme géométrique d'un corps concave qui tombe le plus rapidement dans l'air) a fait l'objet de nombreux travaux utilisant des outils d'analyse, [83, 84].

Dans la perspective d'étudier de tels problèmes d'optimisation de formes (plan, espace, dimension n), il est intéressant de développer des recherches dans deux directions :

- Recherche de méthodes numériques adéquates afin de valider ou invalider un résultat.
- Preuve de résultats nouveaux ou existants par des techniques modernes (analyse) afin de tester leur efficacité.

Dans ce chapitre, nous développerons essentiellement le papier [18] qui fourni une méthode

nouvelle (basée sur la programmation SDP) pour étudier ce type de problèmes d'optimisation de formes où apparaît une contrainte de convexité. Nous terminerons ce chapitre par une discussion en évoquant une extension de cette méthode en dimension 3 avec les harmoniques sphériques.

Le papier [16] fait un résumé des propriétés principales satisfaites par la fonction d'appui ainsi que pour les corps de largeur constante comme par exemple :

- Description du sous-différentiel de la fonction d'appui paramétrée dans le cas plan.
- Liens entre une fonction d'appui et une fonction sous-sinusoidale. Régularité de la fonction d'appui pour les corps de largeur constante.
- Théorème de Blaschke-Lebesgue et Théorème de Blaschke dans l'espace. Théorème de Blaschke et Nakajima.
- Etat de l'art pour les conditions nécessaires pour le problème de Meissner.

5.2 Optimisation de forme et SDP

Le but de cette partie est de résumer [18] qui propose une méthode pour résoudre numériquement des problèmes d'optimisation de forme sous contraintes de convexité.

5.2.1 Paramétrage d'un corps convexe

Soi K un corps convexe de \mathbb{R}^n (i.e. un convexe compact non-vide). Sa fonction d'appui est définie par :

$$u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \sigma(u) = \max_{x \in K} x \cdot u. \quad (5.2.1)$$

On peut la définir par homogénéité sur la sphère unité. La fonction d'appui est de classe C^1 si et seulement si le corps K est strictement convexe (voir [85]). Dans le plan, il est judicieux d'utiliser la fonction d'appui paramétrée, autrement dit on décrit le corps K par la fonction

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto p(\theta) = \sigma(\cos \theta, \sin \theta),$$

qui, par extension, portera également le nom de fonction d'appui. Lorsque K est strictement convexe, sa frontière peut être décrite par :

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \sin \theta, \\ y(\theta) = p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Afin de traiter des problèmes d'optimisation posés sur les corps convexes, il est intéressant de se poser la question réciproque : étant donnée une fonction $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sous quelles conditions la fonction $\tilde{\sigma}$ est-elle la fonction d'appui d'un corps convexe à rotation et translation près ?

Dans le cas de la dimension 3, l'article [17] fournit des conditions nécessaires et suffisantes sur une fonction h pour être la fonction d'appui d'un corps convexe à translation et rotation près. Dans la perspective de [18], nous rappellerons essentiellement le cas plan. Etant donné un corps convexe K avec sa fonction d'appui p , il existe une mesure de Radon $\tilde{\rho}$ [86] appelée distribution radiale de K et telle que l'on ait :

$$p(\theta) = \int_0^\theta \sin(\theta - t) \tilde{\rho}(dt) + p(0) \cos \theta + p'(0) \sin \theta.$$

Lorsque celle-ci est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on peut écrire $\tilde{\rho}(dt) = \rho(t)dt$ où ρ est le rayon de courbure de la frontière de K .

Si la fonction d'appui d'un corps convexe est de classe $C^{1,1}$, alors on peut écrire par le théorème de Rademacher $\rho = p + p''$ et la contrainte d'être un corps convexe s'écrit :

$$\rho = p + p'' \geq 0. \quad (5.2.3)$$

En dérivant, il vient la formule suivante :

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\rho(\theta) \sin \theta, \\ y'(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta. \end{cases}$$

Si p est de classe C^1 , l'inégalité (5.2.3) s'interprète au sens des distributions : $\int_0^{2\pi} (p+p'')\phi \geq 0$ pour toute fonction test $\phi \geq 0$ in $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R})$.

Inversement, on se donne une application $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $p + p'' \geq 0$ au sens des distributions, alors il existe un unique corps K strictement convexe dont la fonction d'appui est p (à translation près), voir [15, 86]. Dans ce travail, on s'intéressera essentiellement à des corps convexes dont la fonction d'appui est de classe $C^{1,1}$ de sorte que l'égalité $\rho = p + p''$ a lieu presque partout. En particulier, ces corps sont convexes, mais peuvent être non lisses (i.e. leur frontière possède un sous-différentiel non réduit à un élément).

Lorsque p est un polynôme trigonométrique ou bien pour des corps de largeur constante ou des rotors, la fonction d'appui est bien de classe $C^{1,1}$. Ainsi, l'inégalité (5.2.3) aura lieu au sens usuel.

Remarque 5.2.1. *Il existe d'autres paramétrages d'un corps convexe comme celui par le rayon polaire. Pour traiter des problèmes où des contraintes de largeur apparaissent, il est plus judicieux d'utiliser la fonction d'appui pour exprimer ces contraintes. Celle-ci jouit en effet de nombreuses propriétés en analyse convexe. Il peut être judicieux d'utiliser par exemple le rayon polaire pour traiter d'autres types de contraintes.*

En dimension 2, l'expression de l'aire et du périmètre est très simple. L'aire s'exprime par une fonction quadratique en p :

$$A(p) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2(\theta) - p'^2(\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\theta)(p(\theta) + p''(\theta)) d\theta, \quad (5.2.4)$$

expression bien défini pour tout corps convexe K de classe C^1 . On peut l'étendre pour des corps non strictement convexes (en utilisant l'expression $\bar{\rho}$) Le périmètre de K est une fonctionnelle linéaire en p :

$$P(p) = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta. \quad (5.2.5)$$

Une façon de représenter p consiste à la développer en série de Fourier :

$$p(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ik\theta}, \quad (5.2.6)$$

où les coefficients p_k sont complexes :

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = a_k - ib_k, \quad a_k = \operatorname{Re} p_k, \quad b_k = \operatorname{Im} p_k,$$

et on a $\bar{p}_k = p_{-k}$, ainsi on peut également écrire :

$$p(\theta) = p_0 + \sum_{k \geq 1} 2\operatorname{Re}(p_k e^{ik\theta}) = a_0 + 2 \sum_{k \geq 1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Ainsi, on a $p_0 = a_0$, et l'égalité de Parseval entraîne l'expression suivante pour l'aire.

$$A(p) = \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 - k^2) |p_k|^2 = \pi a_0^2 + 2\pi \sum_{k \geq 2} (1 - k^2) (a_k^2 + b_k^2), \quad (5.2.7)$$

et le périmètre de K devient $P(p) = 2\pi a_0$. Ces deux expressions ne dépendent pas de p_1 qui peut être choisi arbitrairement par translation.

Pour le cas des corps de largeur constante ou des rotors, le coefficient de Fourier d'ordre 0 est fixé. Par suite, minimiser l'aire dans cette classe revient à minimiser une fonction quadratique strictement concave. Une des difficultés que l'on retrouve aussi bien au niveau théorique (caractérisation de l'optimum pour le problème de Reuleaux ou Meissner) que numérique est la concavité de la fonctionnelle, ce qui peut donner lieu à de nombreux minima locaux sur le bord des contraintes.

5.2.2 Transformation en un problème SDP

On s'intéresse à l'étude de problèmes d'optimisation de forme dans le plan sous contraintes convexes, et on suppose que la fonction d'appui de ces corps est polynomiale. Plus précisément, on se fixe un entier $N \geq 1$, et on considère l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus N . Nous allons montrer alors que la contrainte de convexité sur le corps K est équivalent à une contrainte SDP. Fixons quelques notations.

- Soit $z(\theta) = (1, e^{i\theta}, \dots, e^{im\theta}) \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
- Soit $0 \leq k \leq m$ and $T_k \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$ la matrice de Toeplitz avec des 1 sur la k -ième sous-diagonale et zéro ailleurs. De manière analogue, on défini T_{-k} comme la transposée de T_k et T_0 est la matrice identité.
- A^* est la transconjuguée de la matrice A .
- La notation $A \succeq 0$ signifie que A^* est hermitienne positive semidéfinie i.e. elle possède des valeurs propres réelles positives.
- On appelle $A \cdot B$ le product scalaire de deux matrices A et B de même taille, cad la trace du produit de A^* par B .

Considérons l'ensemble des corps convexes dont la fonction d'appui est polynôme trigonométrique de degré au plus m :

$$p(\theta) := \sum_{k=-m}^m p_k e^{ik\theta}. \quad (5.2.8)$$

Etant donnée une matrice $Q \in \mathbb{C}^{(m+1) \times (m+1)}$, on défini une fonction q par :

$$q(\theta) = z^*(\theta) Q z(\theta) = \sum_{k=-m}^m q_k e^{ik\theta}. \quad (5.2.9)$$

Autrement dit, cette fonction qui est un polynôme trigonométrique de degré m est la valeur de la forme quadratique associée à Q évaluée sur le vecteur $z(\theta)$.

On a le résultat suivant entre la matrice Q et les coefficients q_k (voir [87]).

Lemme 5.2.1. *La matrice Q et la fonction $q(\theta)$ vérifient la relation (5.2.9) si et seulement si :*

$$q_k = T_k \cdot Q, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (5.2.10)$$

Par conséquent, on peut montrer le résultat suivant qui précise le lien entre contraintes SDP et contraintes de convexité.

Théorème 5.2.1. *Soit K un corps convexe avec une fonction d'appui polynomiale (5.2.8). Alors, il existe une matrice $Q \in \mathbb{C}^{(m+1) \times (m+1)}$ telle que*

$$Q \succeq 0, \quad (1 - k^2)p_k = T_k \cdot Q, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (5.2.11)$$

Inversement, tout polynôme (5.2.8) qui vérifie (5.2.11) pour une matrice Q donnée, et la fonction d'appui d'un corps convexe K .

Pour le problème de minimiser l'aire sous la contrainte de largeur constante 1, il y a deux contraintes à prendre en compte. La première est celle de convexité du corps (encodé par la matrice $Q \succeq 0$) et la seconde est celle de largeur. Or, étant donné un corps convexe K dont la fonction d'appui est p , sa largeur est donnée par :

$$w(\theta) = p(\theta) + p(\theta + \pi).$$

Ainsi K est de largeur constante α si et seulement si $p_0 = \frac{\alpha}{2}$ et $p_{2k} = 0$ pour tout $k \geq 1$. Fixons un entier $N \geq 1$ et considérons la classe des polynômes trigonométriques de degré au plus $2N + 1$. La contrainte d'être de largeur constante s'écrit :

$$T_0 \cdot Q = \frac{1}{2}, \quad T_1 \cdot Q = 0, \quad T_{2k} \cdot Q = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.2.12)$$

Par ailleurs, avec cette transformation, l'aire du corps K dont la fonction d'appui est p s'écrit :

$$\mathcal{A}(Q) = \frac{\pi}{4} + 2\pi \sum_{k=1}^N (1 - (2k+1)^2) ((T_{2k+1} + T_{2k+1}^*) \cdot Q)^2 + ((T_{2k+1} - T_{2k+1}^*) \cdot Q)^2. \quad (5.2.13)$$

On déduit le résultat suivant :

Proposition 5.2.1. *Minimiser l'aire dans la classe des corps de largeur constante dont la fonction d'appui est un polynôme de degré au plus $2N + 1$ est équivalent au problème de programmation semi-définie suivant :*

$$\begin{aligned} \min_Q \quad & \mathcal{A}(Q) \\ \text{s.t.} \quad & Q \succeq 0 \text{ and (5.2.12)} \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Il s'agit d'un problème où la fonctionnelle objectif est quadratique concave et l'ensemble des contraintes est convexe.

5.2.3 Mise en place de la méthode

Pour résoudre numériquement ce type de problème, on peut utiliser le solveur PENBMI, qui est une implémentation d'une méthode de Lagrangien augmenté avec pénalisation qui peut prendre en compte des problèmes quadratiques concaves semi-définis,

A notre connaissance, il s'agit d'un des seuls solveur public qui permette de traiter de tels problèmes d'optimisation. On utilise également YALMIP voir [88] comme interface Matlab.

L'algorithme PENBMI [89] permet l'obtention d'un minimum local qui satisfait typiquement une condition du premier ordre. Il n'y a aucun certificat d'optimalité globale à moins que le problème soit convexe, ce qui n'est pas le cas ici. Comme la fonctionnelle est strictement concave, on s'attend à plusieurs minima locaux sur la frontière de l'ensemble des contraintes. Afin d'éviter au mieux ce problème, on utilise l'algorithme une dizaine de fois avec des initialisations aléatoires. Notons que PENBMI utilise des variables réelles, et que le problème initial a été réécrit avec des notations réelles. Les simulations mettent en général 5 secondes sur un PC standard pour un degré pour les polynômes de l'ordre de $N = 33$.

5.2.4 Simulations numériques

Afin de valider la méthode, on étudie d'abord le cas des corps de largeur constante dans le plan.

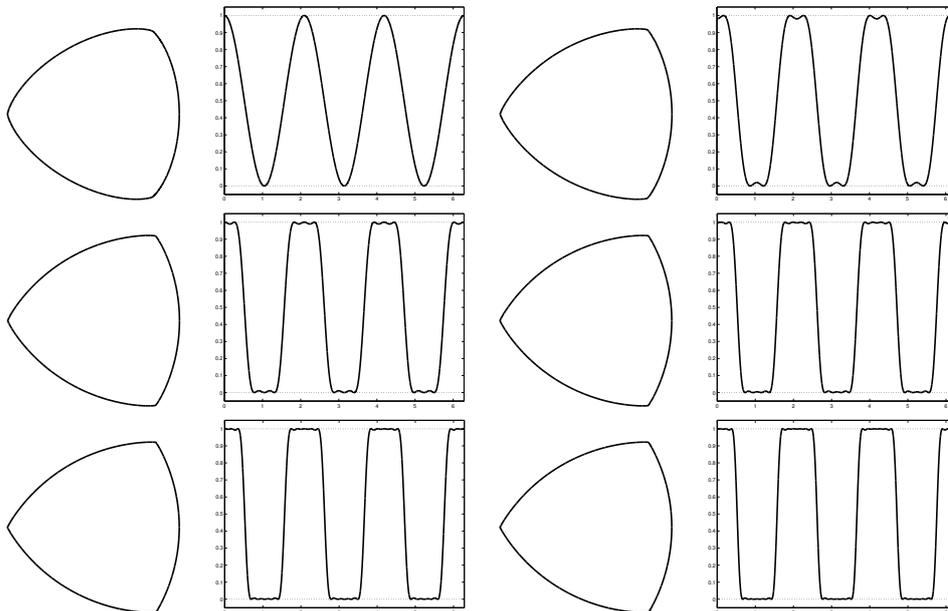


FIGURE 5.1 – Minimum et rayon de courbure correspondant pour $N = 3, 9, 15, 21, 27, 33$.

degré	Coefficients de Fourier
3	$a_0 = 0.500, a_3 = -0.0313$
9	$a_0 = 0.500, a_3 = -0.0361, a_5 = 5.52 \cdot 10^{-14}, a_7 = -1.23 \cdot 10^{-14}, a_9 = 6.06 \cdot 10^{-4}$
15	$a_0 = 0.500, a_3 = -0.0377, a_5 = 9.15 \cdot 10^{-12}, a_7 = 2.86 \cdot 10^{-12}, a_9 = 8.81 \cdot 10^{-4}, a_{11} = -2.33 \cdot 10^{-12}, a_{13} = -1.13 \cdot 10^{-12}, a_{15} = -8.34 \cdot 10^{-5}$
21	$a_0 = 0.500, a_3 = -0.0385, a_5 = 1.02 \cdot 10^{-13}, a_7 = 1.60 \cdot 10^{-14}, a_9 = 1.02 \cdot 10^{-3}, a_{11} = -2.70 \cdot 10^{-14}, a_{13} = -9.51 \cdot 10^{-15}, a_{15} = -1.39 \cdot 10^{-4}, a_{17} = 7.08 \cdot 10^{-15}, a_{19} = 3.70 \cdot 10^{-15}, a_{21} = 2.11 \cdot 10^{-5}$

TABLE 5.1 – Coefficients de Fourier pour les degré 3, 9, 15, 21.

La méthode fonctionne très bien sur le problème des corps de largeur constante dans le plan, voir Fig. 5.1 et tableau 5.1. On obtient bien numériquement la série de Fourier lacunaire (avec des coefficients de Fourier non-nuls tous les multiples de 6) et qui décrit le rayon de courbure du triangle de Reuleaux :

$$\rho_R(\theta) = p_R(\theta) + p_R''(\theta) = \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[} + \mathbb{I}_{[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}[} + \mathbb{I}_{[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}[} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(6k+3)\theta, \quad (5.2.15)$$

On a également testé la méthode sur plusieurs autres problèmes standards : minimisation de l'aire dans la classe des rotors ou celle des corps de largeur constante tridimensionnels à symétrie de révolution.

Les problèmes suivants ont été examinés et sont plus délicats car les minimum présentent des bords plats (i.e. rayon de de courbure infini). On s'intéresse à minimiser ou à maximiser

ser l'aire ou le périmètre lorsque la contrainte de largeur est "relaxée" i.e. on autorise la largeur à prendre ses valeurs entre deux bornes tout en imposant que ces dernières soient atteintes. Le problème de minimisation de l'aire est le plus délicat car la fonctionnelle est concave. Dans le cas où l'on cherche à minimiser l'aire d'un corps convexe sous les contraintes ci-dessus, le problème devient le suivant :

$$\min_p \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p^2(\theta) - p'^2(\theta)] d\theta,$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} w_1 \leq p(\theta) + p(\theta + \pi) \leq w_2, \forall \theta \in \mathbb{R}, \\ \exists \theta_1 \in [0, 2\pi], p(\theta_1) + p(\theta_1 + \pi) = w_1, \\ \exists \theta_2 \in [0, 2\pi], p(\theta_2) + p(\theta_2 + \pi) = w_2, \\ p + p'' \geq 0, \text{ a.e.} \end{cases} \quad (5.2.16)$$

Dans (5.2.16), w_1 désigne la plus petite largeur, w_2 la plus grande, et ces deux largeurs sont atteintes. Les simulations numériques obtenues sont représentées sur la Figure 5.2.4.

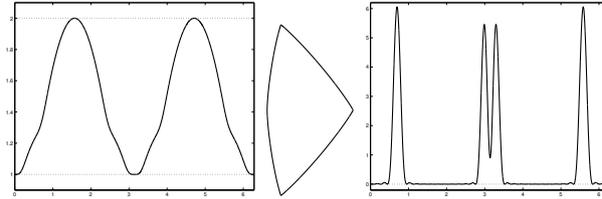


FIGURE 5.2 – Simulation numérique du problème de la minimisation de l'aire pour $N = 30$: largeur, corps et rayon de courbure.

degré	3-4	5	6	7	8-9	10	11
aire	1.4726	1.4081	1.3937	1.3349	1.3091	1.3060*	1.2563
degré	12	13	14	15	16	17	18
aire	1.2562	1.2319	1.2243	1.2299*	1.2246*	1.1978*	1.1966
degré	19	20	21	22	23	24	25
aire	1.1936	1.1783*	1.1659*	1.1636	1.1484*	1.1640*	1.1465*
degré	26	27	28	29	30		
aire	1.1325	1.1319	1.1353*	1.1281*	1.1271*		

TABLE 5.2 – Solutions numériques du problème de minimisation de l'aire. Il peut arriver que PENBMI ne garantisse pas une convergence (le point noté avec une * est réalisable mais pas nécessairement un minimum local).

On voit apparaître des pics correspondants à des mesure de dirac. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où de nombreux problèmes isopérimétriques ont pour solution des polygones. Pour étudier de tels problèmes, il pourrait être intéressant de coupler cette méthode avec une approche par moments qui consiste à travailler avec la mesure d'aire uniquement (représentée par ses moments, voir [90]). Il faut noter qu'une telle approche permettrait d'autoriser des polygones, ce que ne permet pas cette méthode (car la fonction

d'appui est lisse). En effet, la mesure d'aire pour un polygone se représente par une somme de mesures de Dirac. Néanmoins, il se pose alors la reconstruction du corps convexe lorsque l'on connaît ses moments. Cette question a plusieurs réponses dans la littérature (voir par exemple [91]), néanmoins ces méthodes théoriques n'ont pas fait l'objet d'implémentation numérique. Cette dernière approche donnerait donc lieu à deux problèmes d'optimisation (minimisation SDP et reconstruction du corps convexe en connaissant les moments de sa mesure d'aire) et potentiellement à plus d'erreurs numériques alors que notre méthode utilise un seul problème d'optimisation. Il serait donc intéressant dans le futur d'examiner cette piste (qui fait l'objet de discussions en cours avec D. Henrion qui seront présentées à SIOPT 2014). A titre d'exemple, il est bien connu que le problème de Newton revient à minimiser le moment d'ordre 3 de la fonctionnelle de surface, voir [91, 83]. Cette propriété remarquable motive beaucoup cette approche. Mais, une difficulté consiste à trouver la fonction d'appui du corps une fois les moments de cette mesure connus (par optimisation numérique par exemple). Nous étudions actuellement cette approche.

5.2.5 Preuve de la convergence de la méthode

Dans le cas où la contrainte est de type largeur (corps de largeur constante ou rotor), on peut démontrer la convergence de la méthode. On considère le problème suivant :

$$\min_p J(p) := \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [p^2(\theta) - p'^2(\theta)] d\theta, \quad (P)$$

où p vérifie la contrainte "rotor" qui généralise celle de largeur constante (obtenue ci-dessous avec $n = 4$) :

$$\begin{cases} p(\theta) - 2 \cos \delta p(\theta + \delta) + p(\theta + 2\delta) = 1, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \\ p + p'' \geq 0 \text{ a.e.}, \end{cases} \quad (5.2.17)$$

On considère le problème (P_N) qui consiste à minimiser $J(p)$ où p est un polynôme trigonométrique de degré au plus $2N+1$ et qui vérifie (5.2.17). Ici, l'espace H^1 est l'ensemble des fonctions 2π périodiques sur \mathbb{R} qui sont dérivables au sens des distributions avec $p' \in L^2(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble compact quelconque de \mathbb{R} .

Théorème 5.2.2. *Soit p_N un minimum du problème d'optimisation \mathcal{P}_N . Alors, il existe \bar{p} vérifiant (5.2.17) solution du problème (P) tel qu'à une sous suite près, p_N converge vers \bar{p} dans H^1 , et de plus on a $J(p_N) \rightarrow J(\bar{p})$ lorsque N tend vers l'infini.*

La preuve utilise des approximations successives des rayons de courbure constant par morceaux par des polynômes trigonométriques choisis judicieusement.

Remarque 5.2.2. *Il existe des contraintes un peu plus générales que celle donnée par (5.2.17) et pour lesquelles certaines problèmes d'optimisation de forme dans le plan (minimisation de la surface, périmètre) sont ouverts.*

5.3 Discussion du problème en dimension supérieure

Cette partie constitue une extension de la méthode précédente en dimension 3 où les harmoniques sphériques remplacent les séries de Fourier. Les résultats qui suivent ont été présentés à la conférence AFG2011. Il s'est à noter que la mise en place de la programmation SDP dans ce cadre est possible, mais relativement lourde (polynômes

bivariés positifs). Les résultats numériques auxquels nous sommes parvenus n'ont pas permis de trouver une meilleure borne inférieure pour le problème de Meissner (ce qui veut aussi dire que Meissner reste un bon candidat pour l'optimalité). Par ailleurs, nous avons décrit un procédé qui permet de construire des corps convexes de largeur constante avec des harmoniques sphériques dépendant de θ et φ , ce qui en dimension 3 n'est pas nécessairement une chose aisée.

Nous cherchons actuellement à raffiner cette méthode par une meilleure implémentation, et également en utilisant une autre approche type moment.

Dans cette partie, on s'intéresse donc au développement d'une méthode numérique basée sur la SDP en dimension 3 dans la perspective d'approcher le problème de Meissner. On montrera brièvement comment on peut paramétrer un corps convexe dans \mathbb{R}^3 par [17]. Nous introduirons les harmoniques sphériques qui permettent de décomposer la fonction d'appui sur la sphère \mathcal{S}^2 (voir aussi [92]). Ce paramétrage est très naturel et est beaucoup utilisé en physique, mais il est également "très coûteux". En effet, le nombre de coefficients et d'harmoniques d'ordre inférieur à n devient vite très grand. Nous exprimerons ensuite le problème de minimiser la surface dans la classe des corps de largeur constante de \mathbb{R}^3 avec fonction d'appui polynomiale comme un problème avec critère quadratique concave et contraintes SDP. Nous présenterons une simulation numérique obtenue en considérant les harmoniques sphériques d'ordre inférieur à 3.

Une différence fondamentale avec le cas plan est que les polynômes bivariés à plusieurs variables ne sont pas nécessairement des sommes de carré, voir [87]. Ainsi, en reformulant la contrainte de convexité comme un polynôme bivarié positif, on commet une erreur en remplaçant celle-ci par une somme de carrés (dans le but d'utiliser la programmation SDP pour résoudre numériquement le problème). Néanmoins, le "gap" entre les polynômes positifs et les sommes de carré peut être quantifié, voir [90].

On énonce d'abord des conditions nécessaires et suffisantes (adaptées au cadre C^2) pour qu'une fonction définie sur la sphère \mathcal{S}^2 soit la fonction d'appui d'un corps convexe de \mathbb{R}^3 voir [17]. Nous obtenons ainsi une description des corps de largeur constante dans l'espace (avec fonction d'appui polynomiale) en terme d'harmoniques sphériques, ce qui constitue notre résultat principal.

En dimension 3, la fonction d'appui d'un corps convexe K s'écrit : $h = h(\theta, \varphi)$, $\theta \in [0, \pi]$ (angle polaire), $\varphi \in [0, 2\pi]$ (angle équatorial). On rappelle que K est strictement convexe si et seulement si h est de classe C^1 . On notera $\Omega = (0, \pi) \times [0, 2\pi]$. On considère le repère orthonormé :

$$u = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{vmatrix} \quad v = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{vmatrix} \quad w = \begin{vmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Dans la suite, nous supposons $h \in C^2$ et donc K est strictement convexe. On note $X = X(\theta, \varphi)$ un paramétrage du bord de K privé de deux points (correspondant à $\theta = 0, \pi$). Par définition de la fonction d'appui, on peut écrire :

$$X(\theta, \varphi) = hu + h_\theta v + \frac{1}{\sin \theta} h_\varphi w, \quad (5.3.1)$$

qui est de classe C^1 sur Ω . Ce paramétrage analogue à celui utilisé dans [17] permet dans

la suite d'utiliser les harmoniques sphériques. Le gradient de X s'écrit sur Ω :

$$\nabla X = \begin{pmatrix} X_\theta \\ X_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{M_1} \begin{pmatrix} \partial_\theta u \\ \partial_\varphi u \end{pmatrix} \quad (5.3.2)$$

avec

$$\alpha = h + h_{\theta\theta}, \quad (5.3.3)$$

$$\beta = \frac{1}{\sin^2 \theta} (h_{\theta\varphi} - \cot \theta h_\varphi), \quad (5.3.4)$$

$$\gamma = h_{\theta\varphi} - \cot \theta h_\varphi = \sin^2 \theta \beta, \quad (5.3.5)$$

$$\delta = \frac{1}{\sin \theta} \left(h \sin \theta + h_\theta \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta} h_{\varphi\varphi} \right). \quad (5.3.6)$$

Par définition, les courbures principales de la surface paramétrée $X(\theta, \varphi)$ sont les valeurs propres de la matrice M_1^{-1} . Les rayons de courbure de cette surface sont donc les valeurs propres de la matrice de M_1 (voir [17]). Considérons la matrice symétrique définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \delta \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.3.7)$$

Lemme 5.3.1. *La matrice M_2 est symétrique positive si et seulement si la matrice M_1 admet deux valeurs propres positives.*

Remarque 5.3.1. *Soit K un corps strictement convexe et h sa fonction d'appui supposée C^2 et \mathcal{M} la surface décrite par $X(\theta, \varphi)$ sur Ω . Alors (5.3.1) entraîne que pour $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$:*

$$h(\theta_0, \varphi) \equiv \text{cst} \quad (5.3.8)$$

Donc $h_\varphi(\theta_0, \varphi) = h_{\varphi\varphi}(\theta_0, \varphi) = 0$. Puis on a :

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{h_\varphi(\theta, \varphi) - h_\varphi(\theta_0, \varphi)}{\sin \theta - \sin \theta_0} = h_{\theta, \varphi}(\theta_0, \varphi).$$

Donc les applications $(\theta, \varphi) \mapsto \cot \theta h_\varphi$ et $(\theta, \varphi) \mapsto h_\varphi / \sin \theta$ se prolongent par continuité lorsque $\theta \rightarrow \theta_0$.

Soit K un corps convexe et h sa fonction d'appui supposée de classe C^2 , et \mathcal{M} la surface dont un paramétrage est donné par $X(\theta, \varphi)$, $(\theta, \varphi) \in \Omega$. L'application $X(\theta, \varphi)$ se prolonge continuellement sur $\bar{\Omega}$ par la remarque précédente, et donc il existe deux points $P_\pm \in \mathbb{R}^3$ (correspondant aux deux hyperplans d'appui $\theta_0 = 0$ et $\theta_0 = \pi$) tels que la surface $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \{P_\pm\}$ soit fermée et d'intérieur convexe. La convexité de K entraîne que les inverses des deux courbures principales sont positives. Ainsi, par le lemme précédent et la remarque précédente, on a donc sur $\bar{\Omega}$:

$$\begin{cases} h + h_{\theta\theta} \geq 0, \\ (h + h_{\theta\theta})(h \sin^2 \theta + h_\theta \cos \theta \sin \theta + h_{\varphi\varphi}) - (h_{\theta\varphi} - \cot \theta h_\varphi)^2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.9)$$

Réciproquement, soit h une fonction définie sur Ω de classe C^2 vérifiant (5.3.8)-(5.3.9). Alors, le paramétrage $X(\theta, \varphi)$ donné par (5.3.1) définit une surface \mathcal{M} . Par la remarque précédente, l'application $X(\theta, \varphi)$ se prolonge à $\bar{\Omega}$, et il existe deux points de \mathbb{R}^3 , P_- et P_+ tels que $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \{P_\pm\}$ soit une surface fermée. De plus, l'intérieur de $\tilde{\mathcal{M}}$ est convexe par (5.3.9). On peut donc énoncer le théorème :

Théorème 5.3.1. (i). Soit K un corps convexe tri-dimensionnel et h sa fonction d'appui supposée de classe C^2 . Alors h vérifie (5.3.8)-(5.3.9) sur $\bar{\Omega}$.

(ii). Soit h une fonction définie sur $\bar{\Omega}$ de classe C^2 vérifiant (5.3.9). Alors il existe un corps K dont la surface extérieure est définie par \tilde{M} et dont l'intérieur est convexe.

5.3.1 Développement en harmoniques sphériques et convexité

Les harmoniques sphériques permettent de développer une fonction définie sur \mathcal{S}^2 comme les séries de Fourier pour elles fonctions définies sur \mathcal{S}^1 . Rappelons d'abord la définition des fonctions de Legendre associées. On introduit d'abord les *polynômes de Legendre* usuels P_l (formule de Rodrigues) :

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Lorsque l est pair, P_l est pair, et lorsque l est impair, P_l est impair. Les fonctions de Legendre associées notés P_l^m se définissent par les polynômes de Legendre par :

$$P_l^m(u) = (-1)^m (1 - u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{du^m} P_l = \frac{1}{2^l l!} (u^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} (u^2 - 1)^l, \quad m \in \mathbb{N}.$$

On a : $P_l^m = 0$ si $m > l$, ainsi on peut considérer les fonctions P_l^m pour $0 \leq m \leq l$. Lorsque m est pair, P_l^m est un polynôme. Pour $m < 0$, on définit $P_l^m(u)$ par :

$$P_l^m(u) = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^{-m}(u), \quad 0 \leq -m \leq l.$$

Ces fonctions ont les parités suivantes $P_{2k}^{2k'}$ est pair, $P_{2k}^{2k'+1}$ est impair, $P_{2k+1}^{2k'}$ est impair, $P_{2k+1}^{2k'+1}$ est pair. Il existe de nombreuses autres propriétés des ces fonctions dans la littérature (différentielles...). On définit maintenant les *harmoniques sphériques* de la façon suivante :

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad 0 \leq |m| \leq l.$$

Il est à noter que les harmoniques sphériques sont les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ sur \mathcal{S}^2 :

$$\begin{cases} -\Delta Y_{l,m} := \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \varphi^2} = l(l+1) Y_{l,m}, \\ Y_{l,m}(\theta, \varphi + 2\pi) = Y_{l,m}(\theta, \varphi). \end{cases}$$

Une fonction $\sigma \in L^2(\mathcal{S}^2, \mathbb{R})$ peut se décomposer sur la sphère. Il est plus commode d'utiliser la fonction h définie par : $h(\theta, \varphi) := \sigma(u(\theta, \varphi))$. On a :

$$\begin{aligned} h(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} a_{l,0} P_l(\cos \theta) + \sum_{1 \leq m \leq l} P_l^m(\cos \theta) (a_{l,m} \cos m\varphi + b_{l,m} \sin m\varphi) \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{-l \leq m \leq l} c_{l,m} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

où les "coefficients de Fourier sphériques" sont données par :

$$c_{l,m} = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} d\varphi \int_0^\pi h(\theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

pour $l \geq 0$, $0 \leq m \leq l$, avec $c_{l,m} = \overline{c_{l,-m}}$ et $c_{l,m} = \frac{1}{2}(a_{l,m} - ib_{l,m})$. Exprimons maintenant la contrainte de convexité. On suppose que la fonction h possède un nombre fini de coefficients de Fourier.

$$h(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^N \sum_{-l \leq m \leq l} c_{l,m} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (5.3.10)$$

Afin de savoir si h est la fonction d'appui paramétrée d'un corps convexe, il nous faut vérifier la contrainte de convexité. Grâce aux expressions de la seconde forme fondamentale, on a les expressions suivantes :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(P_l^m(\cos \theta)) + P_l^m(\cos \theta) = \cos \theta P'_{lm}(\cos \theta) + \left(1 - l(l+1) + \frac{m}{\sin^2 \theta}\right) P_{lm}(\cos \theta),$$

Donc :

$$h + h_{\theta\theta} = \sum_{l=0}^N \sum_{-l \leq m \leq l} c_{l,m} \underbrace{\left(\cos \theta P'_{lm}(\cos \theta) + \left(1 - l(l+1) + \frac{m}{\sin^2 \theta}\right) P_{lm}(\cos \theta) \right)}_{Q_{lm}(\theta)/\sin^2 \theta} e^{im\varphi}. \quad (5.3.11)$$

De même en remarquant que $\sigma = \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h_\varphi}{\sin \theta} \right)$, on a :

$$h_{\theta\varphi} - \cot \theta h_\varphi = \sum_{l=0}^N \sum_{-l \leq m \leq l} c_{l,m} \underbrace{im \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{P_{lm}(\cos \theta)}{\sin \theta} \right)}_{R_{lm}(\theta)/\sin \theta} e^{im\varphi}. \quad (5.3.12)$$

Puis :

$$h \sin^2 \theta + h_\theta \cos \theta \sin \theta + h_{\varphi\varphi} = \sum_{l=0}^N \sum_{-l \leq m \leq l} c_{l,m} \underbrace{\left((\sin^2 \theta - m^2) P_{lm} - \sin^2 \theta \cos \theta P'_{lm} \right)}_{S_{lm}(\theta)} e^{im\varphi}. \quad (5.3.13)$$

Ainsi, on peut énoncer le résultat :

Proposition 5.3.1. *Supposons qu'il existe des coefficients $c_{l,m}$ $0 \leq l \leq N$, $-l \leq m \leq l$ tels que pour tout $\theta \in (0, \pi)$, pour tout $\varphi \in [0, 2\pi]$, la matrice*

$$M_2(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^N \sum_{-l \leq m \leq l} c_{l,m} \begin{pmatrix} Q_{lm}(\theta) & R_{lm}(\theta) \sin \theta \\ R_{lm}(\theta) \sin \theta & S_{lm}(\theta) \sin^2 \theta \end{pmatrix} e^{im\varphi}. \quad (5.3.14)$$

soit hermitienne positive. Alors, tout corps K dont la fonction d'appui est donnée par (5.3.10) est strictement convexe.

Par linéarisation, on peut décomposer les polynômes trigonométriques $Q_{lm}(\theta)$, $R_{lm}(\theta) \sin \theta$, $S_{lm}(\theta) \sin^2 \theta$ sur la base $e^{ik\theta}$, $k \geq 0$:

$$\begin{cases} Q_{lm}(\theta) = \sum_{k \in I} q_k^{lm} e^{ik\theta}, \\ R_{lm}(\theta) \sin \theta = \sum_{k \in I} r_k^{lm} e^{ik\theta}, \\ S_{lm}(\theta) \sin^2 \theta = \sum_{k \in I} s_k^{lm} e^{ik\theta}, \end{cases} \quad (5.3.15)$$

où $I \subset \mathbb{Z}$. Ainsi la matrice M_2 se réécrit :

$$M_2(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^N \sum_{-l \leq m \leq l} \sum_{k \in I} c_{l,m} \begin{pmatrix} q_k^{lm} & r_k^{lm} \\ r_k^{lm} & s_k^{lm} \end{pmatrix} e^{ik\theta} e^{im\varphi}. \quad (5.3.16)$$

On rappelle le résultat voir [87] p.101.

Proposition 5.3.2. *Soit R un polynôme à d variables :*

$$R(z) = \sum_{-n \leq k \leq n} R_k \mathbf{z}^{-k}, \quad R_k \in \mathbb{C}^{\kappa, \kappa}, \quad R_k = R_{-k}^*,$$

vérifiant $R(e^{i\omega}) > 0, \forall \omega$. Alors R est une somme de carrés si et seulement si il existe une matrice hermitienne positive $Q \in \mathbb{C}^{N\kappa \times N\kappa}$ telle que :

$$R_k = \text{Tr}(\Theta_{\kappa, k} \cdot Q), \quad (5.3.17)$$

où $\Theta_{\kappa, k} = \Theta_{\kappa, k_1} \otimes \cdots \otimes \Theta_{\kappa, k_d}$

On peut donc interpréter la contrainte de convexité comme un polynôme trigonométrique positif de deux variables (θ, φ) à coefficients dans $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Corollaire 5.3.1. *Soit $N \geq 2$ fixé. Supposons qu'il existe des coefficients $c_{l,m}, 0 \leq l \leq N, -l \leq m \leq l$ tels que le polynôme bivarié M_2 donné par (5.3.16) soit strictement positif pour tout $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Alors, M_2 est une somme de carré au sens de la proposition 5.3.2.*

5.3.2 Corps de largeur constante et harmoniques sphériques

Un corps de largeur constante 1 en dimension 3 vérifie par définition :

$$\sigma(u) + \sigma(-u) = 1, \quad \forall u \in \mathcal{S}^2,$$

où $h(\theta, \varphi) = \sigma(u)$. Ainsi la fonction d'appui d'un corps de largeur constante vérifie :

$$h(\theta, \varphi) + h(\pi - \theta, \varphi + \pi) = 1, \quad \forall \theta \in [0, \pi], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (5.3.18)$$

Soit h la fonction d'appui d'un corps de largeur constante 1 donnée par (5.3.10). On peut écrire :

$$h(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^N \left\{ \frac{1}{2} a_{l,0} P_l(\cos \theta) + \sum_{1 \leq m \leq l} P_l^m(\cos \theta) (a_{l,m} \cos m\varphi + b_{l,m} \sin m\varphi) \right\}.$$

En utilisant la relation (5.3.18) et la parité des fonctions de Legendre associées, on déduit que :

$$a_{2k,m} = b_{2k,m} = 0, \quad 0 \leq 2k \leq N, \quad 1 \leq m \leq 2k.$$

Ainsi la classe des corps de largeur constante dans l'espace dont la fonction d'appui est polynomiale de degré plus petit que $2N + 1$ peut être décrite par l'ensemble des fonctions h qui vérifient :

$$h(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^N \left\{ \frac{1}{2} a_{2l+1,0} P_{2l+1}(\cos \theta) + \sum_{1 \leq m \leq l} P_{2l+1}^m(\cos \theta) (a_{2l+1,m} \cos m\varphi + b_{2l+1,m} \sin m\varphi) \right\}, \quad (5.3.19)$$

ainsi que la contrainte 5.3.14.

5.3.3 Exemple de corps de largeur constante avec $N = 3$

Soit h la fonction définie par :

$$\begin{aligned} h(\theta, \varphi) = & a_{0,0} + a_{1,0}P_{1,0} + a_{1,1}P_{1,1} \cos \varphi + a_{1,-1}P_{1,-1} \cos \varphi \\ & + a_{3,0}P_{3,0} + a_{3,1}P_{3,1} \cos \varphi + a_{3,2}P_{3,2} \cos(2\varphi) + a_{3,3}P_{3,3} \cos(3\varphi) \\ & + a_{3,-1}P_{3,-1} \cos(\varphi) + a_{3,-2}P_{3,-2} \cos(2\varphi) + a_{3,-3}P_{3,-3} \cos(3\varphi), \end{aligned}$$

avec $a_{0,0} = 1/2$. On peut supposer que les coefficients $a_{1,0}$, $a_{1,1}$ et $a_{1,-1}$ sont nuls par la remarque 5.3.8. Ainsi h est la fonction d'appui d'un corps de largeur constante 1 pourvu que les coefficients $a_{3,0}$, $a_{3,1}$, $a_{3,2}$, $a_{3,3}$, $a_{3,-1}$, $a_{3,-2}$, $a_{3,-3}$ soient suffisamment petits par rapport à $a_{0,0} = 1/2$ pour respecter la contrainte de convexité (5.3.9). La figure 5.3 montre un corps de largeur constante dans \mathbb{R}^3 dont la fonction d'appui contient des harmoniques de degré 5 (sans symétrie sphérique i.e. la fonction d'appui dépend de θ et φ).

Pour réduire le nombre de variables de décision, on peut poser :

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_{3,0}, \\ \alpha_1 = a_{3,2} - \frac{1}{12}a_{3,-1}, \\ \alpha_2 = a_{3,2} + \frac{1}{120}a_{3,-2}, \alpha_3 = a_{3,3} - \frac{1}{720}a_{3,-3}, \end{cases}$$

et écrire h sous la forme :

$$h(\theta) = \frac{1}{2} + \alpha_0 P_{3,0}(\cos \theta) + \alpha_1 P_{3,1}(\cos \theta) \cos \varphi + \alpha_2 P_{3,2}(\cos \theta) \cos 2\varphi + \alpha_3 P_{3,3}(\cos \theta) \cos 3\varphi. \quad (5.3.20)$$

On peut ainsi considérer l'ensemble E_3 défini par :

$$\{h \in C^2(\overline{\Omega}) \mid h \text{ satisfait (5.3.9) - (5.3.20)}\}, \quad (5.3.21)$$

cad, l'ensemble des corps de largeur constante 1 dont la fonction d'appui admet un développement en harmoniques sphériques de degré inférieur ou égal à 3.

5.3.4 Fonctionnelle et harmonique sphérique

Rappelons le résultat suivant (voir [85, 17]).

Proposition 5.3.3. *Soit h la fonction d'appui d'un corps strictement convexe K . Alors, l'aire surfacique de K s'écrit :*

$$S(h) = \int_{\Omega} \sin \theta \left(h^2 - \frac{1}{2}h_{\theta}^2 - \frac{1}{2\sin^2 \theta}h_{\varphi}^2 \right) d\theta d\varphi \quad (5.3.22)$$

Il est à noter que dans \mathbb{R}^3 , minimiser le volume ou la surface dans la classe des corps de largeur constante 1 sont deux problèmes équivalents (par le théorème de Blaschke). D'où le choix de la surface (fonctionnelle quadratique en h).

Remarquons que si $h = 1/2$ est constant, on retrouve bien l'aire surfacique d'une sphère de rayon $1/2$. Par ailleurs, comme dans le cas plan, les coefficients d'ordre 1 agissent par des translations sur le corps convexe (ainsi, on ne les considère pas dans le problème d'optimisation).

Proposition 5.3.4. *Soit K un corps convexe dont la fonction d'appui est donnée par (5.3.10) avec $N \geq 2$. Alors $S(h)$ est quadratique et s'écrit :*

$$S(h) = \pi a_{00}^2 - \pi \sum_{l=2}^N \sum_{-l \leq m \leq l} (l+2)(l-1) \frac{(l+m)!}{(l-m)!} |c_{l,m}|^2. \quad (5.3.23)$$

Remarque 5.3.2. Si on pose $\gamma_{l,m} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} c_{l,m}$, alors on peut écrire :

$$S(h) = \pi a_{00}^2 - \pi \sum_{l=2}^N (l+2)(l-1) \sum_{-l \leq m \leq l} |\gamma_{l,m}|^2. \quad (5.3.24)$$

5.3.5 Problème SDP

On s'intéresse au problème de minimiser l'aire surfacique dans la classe des corps de largeur constante 1 dont la fonction d'appui est donnée par (5.3.10). Pour $N = 3$, ce problème s'écrit :

$$\min_{h \in E_3} S(h)$$

Pour N quelconque, ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_h \quad & S(h) \\ \text{t.q.} \quad & h \text{ (5.3.10) - (5.3.9) - (5.3.18),} \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Contrairement à la dimension 1, il n'y a pas équivalence entre les polynômes trigonométriques bivariés et les sommes de carrés (voir [87]). Soit $d = 2$ et $s(d) = C_{N+1}^d$ la dimension de $\mathbb{R}[X]_d$ (notations, voir [90]). Pour approcher (5.3.25), on considère Λ_N l'ensemble des matrices $Q \in \mathbb{C}^{s(d) \times s(d)}$ hermitiennes positives pour lesquelles l'expression (5.3.17) donne des coefficients $c_{2l,m} = 0$, $2 \leq 2l \leq N$. Soit $J(Q)$ l'expression de $S(h)$ où on utilise (5.3.17) pour remplacer les variables $c_{l,m}$ par les coefficients $R_k = \text{Tr}(\Theta_{\kappa,k} \cdot Q)$. Pour approcher (5.3.25), on considère le problème (5.3.26) :

$$\begin{aligned} \min_Q \quad & J(Q) \\ \text{t.q.} \quad & Q \in \Lambda_N \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

On a testé numériquement ce problème pour $N = 3$. Il est à noter que le nombre de coefficients réels est vite très important dès que $N = 3$. Par conséquent, l'utilisation de cette méthode se révèle assez coûteuse en temps de calcul, et notamment la décomposition en sommes de carrés de la contrainte de convexité. Le minimum que nous avons trouvé est représenté sur la figure 5.3 et sa fonction d'appui est :

$$\begin{aligned} h(\theta, \varphi) = & a_{0,0} + a_{3,0}P_{3,0} + a_{3,1}P_{3,1} \cos \varphi + a_{3,2}P_{3,2} \cos(2\varphi) + a_{3,3}P_{3,3} \cos(3\varphi) \\ & + b_{3,-1}P_{3,-1} \cos(\varphi) + b_{3,-2}P_{3,-2} \cos(2\varphi) + b_{3,-3}P_{3,-3} \cos(3\varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{3,0} = -1.3220 \times 10^{-5}, & a_{3,1} := -6.7811 \times 10^{-3}, & a_{3,2} := 2.2100 \times 10^{-6}, & a_{3,3} := 1.9447 \times 10^{-3}, \\ b_{3,1} := -3.7274 \times 10^{-2}, & b_{3,2} := 6.2699e \times 10^{-6}, & b_{3,2} := 3.2448 \times 10^{-3}. \end{cases}$$

Par ailleurs, on peut aisément vérifier la convexité du corps correspondant. La surface est de l'ordre de 3,01, ce qui est supérieur au volume de Meissner (2,98).

Bien qu'assez directe, cette méthode pour étudier des problèmes de minimisation dans \mathbb{R}^3 sous contraintes convexe est assez lourde à mettre en place contrairement au cas plan, à cause du nombre élevé de coefficients de Fourier. Nous pensons qu'une méthode basée sur les moments pourrait être plus efficace malgré le problème posé par la reconstruction du corps une fois connus les moments de la mesure de surface.

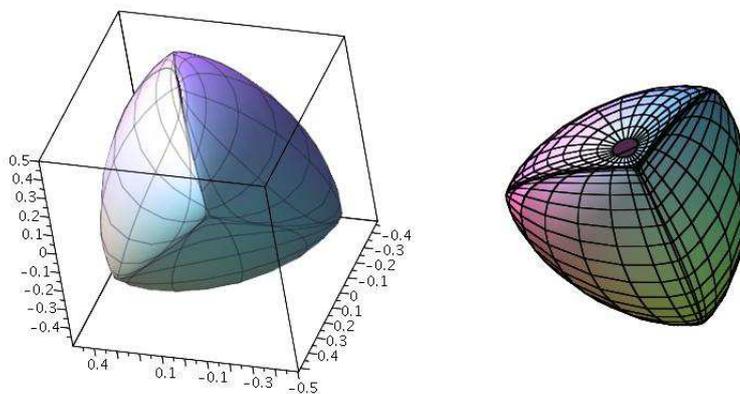


FIGURE 5.3 – *Figure de gauche* : exemple de corps convexe de largeur constante décrit par (5.3.19) avec $N = 2$. *Figure de droite* : représentation du corps convexe de surface minimale dans la classe E_3 .

Bibliographie

- [1] T. Bayen, F.J. Bonnans, and F.J. Silva. Characterization of local quadratic growth for strong minima in the optimal control of semi-linear elliptic equations. *to appear in Trans. Amer. Math. Soc.*, 2013.
- [2] T. Bayen and F.J. Silva. Characterization of local quadratic growth for strong minima in the optimal control of semi-linear parabolic equations. *In progress*, 2013.
- [3] T. Bayen and F.J. Silva. Weak and strong minima : from calculus of variation toward pde optimization. 1st IFAC Workshop on Control of Systems Modeled by Partial Differential Equations, September 25-27 Paris.
- [4] T. Bayen, M. Sebbah, and A. Rapaport. Minimal time control of the two tanks gradostat model under a cascade inputs constraint. *Preprint*, 2013.
- [5] T. Bayen and F. Mairet. Optimization of the separation of two species in a chemostat. *Submitted*, 2013.
- [6] T. Bayen, F. Mairet, and M. Mazade. Optimal feeding strategy for the minimal time problem of a fed-batch bioreactor with mortality rate. *Accepted in Optimal Control and Application Methods*, 2012.
- [7] T. Bayen, P. Gajardo, and F. Mairet. Optimal synthesis for the minimum time control problems of fed-batch bioprocesses for growth functions with two maxima. *Journal of Optim. Theory and Applications*, 158 :521–553, 2013.
- [8] T. Bayen and F. Mairet. Minimal time control of fed-batch bioreactor with product inhibition. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, 36 :1485–1496, 2013.
- [9] T. Bayen and F. Mairet. Analysis of an optimal control problem connected to bioprocesses involving a saturated singular arc. *Submitted*, 2013.
- [10] T. Bayen, F. Mairet, and M. Mazade. Fed-batch bioreactor with mortality rate. 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2013), Toulouse, France, September 4-6, 2013.
- [11] T. Bayen, F. Mairet, and P. Gajardo. Minimal time control of fed-batch bioreactor with product inhibition. 20th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2012, Barcelona.
- [12] T. Bayen, F. Mairet, and M. Sebbah. Optimal control problem connected to a one-dimensional kolmogorov equation. *Preprint*, 2013.
- [13] T. Bayen, F. Mairet, F. Martinon, and M. Sebbah. Optimizing the anaerobic digestion of microalgae in a coupled process. *Submitted*, 2013.
- [14] T. Bayen, F. Mairet, F. Martinon, and M. Mazade. Optimizing the anaerobic digestion of microalgae in a coupled process. European Control Conference 2013, ECC13, Zurich, 17-19 july 2013.

- [15] T. Bayen. Analytical parameterization of rotors and proof of a goldberg conjecture by optimal control theory. *SIAM, Journal on Control and Optimization*, 47 :3007–3036, 2009.
- [16] T. Bayen and J.B. Hiriart-Urruty. Objets convexes de largeur constante (en 2d) ou d'épaisseur constante (en 3d) : du neuf avec du vieux. *Ann. Sci. Math. Quebec*, 36 :17–42, 2012.
- [17] T. Bayen, T. Lachand-Robert, and E. Oudet. Analytic parametrization of three dimensional bodies of constant width. *Archive Rational Mechanics Analysis*, 2 :225–249, 2007.
- [18] T. Bayen and D. Henrion. Semidefinite programming for optimizing convex bodies under width constraints. *Optimization Methods and Software*, 27-6 :1073–1099, 2012.
- [19] T. Bayen. Parametrization of a convex optimization problem by optimal control theory and proof of a goldberg conjecture. 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, 2009.
- [20] T. Bayen, Y. Chitour, F. Jean, and P. Mason. Asymptotic analysis of an optimal control problem connected to the human locomotion. 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, 2009.
- [21] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko. *Mathematical theory of optimal processes*. The Macmillan Company, 1964.
- [22] A. Milyutin and N. Osmolovskii. *Calculus of Variations and Optimal Control*. AMS., 1998. Systems and Control : Foundations and Applications.
- [23] J.F. Bonnans and N.P. Osmolovskii. Second-order analysis of optimal control problems with control and initial-final state constraints. *Journal of Convex Analysis*, 17(3) :885–913, 2010.
- [24] J.F. Bonnans and N.P. Osmolovskii. Characterization of a local quadratic growth of the hamiltonian for control constrained optimal control problems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, special issue dedicated to the memory of Professor Arie Leizarowitz*, 19(1-2) :1–16, 2011.
- [25] J.F. Bonnans, X. Dupuis, and L. Pfeiffer. Second-order necessary conditions in pontryagin form for optimal control problems. *Inria Research Report No. 8306*, 2013.
- [26] J.F. Bonnans, X. Dupuis, and L. Pfeiffer. Second-order sufficient conditions for strong solutions to optimal control problems. *ESAIM-COCV, to appear*, 2013.
- [27] U. E. Raitums. The maximum principle in optimal control problems for an elliptic equation. *Z. Anal. Anwendungen*, 5(4) :291–306, 1986.
- [28] J.F. Bonnans and E. Casas. Maximum principles in the optimal control of semilinear elliptic systems. *5th IFAC Conference on Distributed Parameter Systems, A. El Jai ed. (Perpignan), Pergamon Press*, 33-1 :274–298, 1989.
- [29] J.F. Bonnans and E. Casas. Un principe de Pontryagin pour le contrôle des systèmes semilinéaires elliptiques. *Journal of Differential Equations*, 90 :288–303, 1991.
- [30] E. Casas, F. Troeltzsch, and A. Unger. Second order sufficient optimality conditions for a nonlinear elliptic control problem. *Journal for Analysis and its Applications*, 15 :687–707, 1996.
- [31] J. F. Bonnans. Second order analysis for control constrained optimal control problems of semilinear elliptic systems. *Appl. Math. Optim.*, 38-3 :303–325, 1998.

- [32] J.F. Bonnans and H. Zidani. Optimal control problems with partially polyhedral constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 37(6) :1726–1741 (electronic), 1999.
- [33] E. Casas and F. Troeltzsch. Second order necessary optimality conditions for some state-constrained control problems of semilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 39 :211–228, 1999.
- [34] E. Casas and F. Troeltzsch. Second order necessary and sufficient optimality conditions for optimization problems and applications to control theory. *SIAM J. Optim.*, 13 :406–431, 2002.
- [35] E. Casas and F. Troeltzsch. First- and second-order optimality conditions for a class of optimal control problems with quasilinear elliptic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 48-2 :688–718, 2009.
- [36] E. Casas, J.C. de Los Reyes, and F. Troeltzsch. Sufficient second-order optimality conditions for semilinear control problems with pointwise state constraints. *SIAM J. Optim.*, 19-2 :616–643, 2008.
- [37] X. Li and J. Yong. *Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser, 1994. Systems and Control : Foundations and Applications.
- [38] H. Goldberg and F. Troeltzsch. Second order sufficient optimality conditions for a class of non-linear parabolic boundary control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 31 :1007–1025, 1993.
- [39] J.P. Raymond and F. Troeltzsch. Second order sufficient optimality conditions for nonlinear parabolic control problems with state constraints. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 6 :431–450, 2000.
- [40] A. Rösch and F. Troeltzsch. Sufficient second order optimality conditions for a parabolic optimal control problem with pointwise control-state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 42 :138–154, 2003.
- [41] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [42] L.C. Evans. *Partial differential equations*. Amer. Math Soc., Providence, RI, 1998. Graduate Studies in Mathematics 19.
- [43] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order, 2nd edition*. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [44] G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 15 :189–258, 1965.
- [45] J.F. Bonnans and F.J. Silva. Asymptotic expansion for the solutions of control constrained semilinear elliptic problems with interior penalties. *SIAM J. on Control and Optimization*, 49 :2494–2517, 2011.
- [46] R. T. Rockafellar. Integral functionals, normal integrands and measurable selections. In *Nonlinear operators and the calculus of variations (Summer School, Univ. Libre Bruxelles, Brussels, 1975)*, pages 157–207. Lecture Notes in Math., Vol. 543. Springer, Berlin, 1976.
- [47] J. F. Bonnans. Pontryagin’s principle for the optimal control of semilinear elliptic systems with state constraints. *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, Brighthelm, England*, December 1991.
- [48] J.F. Bonnans and A. Shapiro. *Perturbation analysis of optimization problems*. Springer-Verlag, New York, 2000.

- [49] F. Tröltzsch. *Optimal Control of Partial Differential Equations - Theory, Methods and Applications*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 112. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
- [50] A. Hoffman. On approximate solutions of systems of linear inequalities. *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Section B, Mathematical Sciences*, 49 :263–265, 1952.
- [51] J. F. Bonnans. Optimal control of a semilinear parabolic equation with singular arcs. *Optim. Meth. and Software (to appear)*.
- [52] J. F. Bonnans, X. Dupuis, and L. Pfeiffer. Second-order necessary conditions in pontryagin form for optimal control problems. *Submitted. Inria Research Report No. 8306*, 2013.
- [53] J. F. Bonnans, X. Dupuis, and L. Pfeiffer. Second-order sufficient conditions for strong solutions to optimal control problems. *ESAIM-COCV, to appear*.
- [54] T. Aubin. Un théorème de compacité. *CRAS*, 256 :5042–5044, 1963.
- [55] J. Simon. Compact sets in $L^p(0, T; B)$. *Annali Mat. Pura appl. (IV)*, CXLVI :65–96, 1987.
- [56] O.V. Besov, V.P. Il'in, and S.M. Nikol'skii. *Integral representations of functions and imbedding theorems*. "Nauka", Moscow, 1979.
- [57] M. Valadier C. Castaing. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Lecture Notes in Math., no. 580, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York,, 1977.
- [58] H. L. Smith and P. Waltman. *The Theory of the Chemostat, Dynamics of Microbial Competition*, volume 13 of Cambridge Studies in Mathematical Biology. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [59] Ugo Boscain and Benedetto Piccoli. *Optimal syntheses for control systems on 2-D manifolds*, volume 43 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [60] D. A. Carlson and A. Haurie. *Infinite horizon optimal control*, volume 290 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Theory and applications.
- [61] Pierre Cardaliaguet. On the regularity of semipermeable surfaces in control theory with application to the optimal exit-time problem. I. *SIAM J. Control Optim.*, 35(5) :1638–1652, 1997.
- [62] Pierre Cardaliaguet. On the regularity of semipermeable surfaces in control theory with application to the optimal exit-time problem. II. *SIAM J. Control Optim.*, 35(5) :1653–1671, 1997.
- [63] Marc Quincampoix. Differential inclusions and target problems. *SIAM J. Control Optim.*, 30(2) :324–335, 1992.
- [64] B. Bonnard and M. Chyba. *Singular Trajectories and their role in Control Theory*, volume 40. Springer SMAI, 2002.
- [65] Jaime Moreno. Optimal time control of bioreactors for the wastewater treatment. *Optimal Control Appl. Methods*, 20(3) :145–164, 1999.
- [66] D. Dochain and A. Rapaport. Minimal time control of fed-batch processes with growth functions having several maxima. *IEEE Trans. Automat. Control*, 56(11) :2671–2676, 2011.

- [67] B. Bonnard, M. Chyba, and D. Sugny. Time-minimal control of dissipative two-level quantum systems : The generic case. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 54(11) :2598–2610, 2009.
- [68] H. Schaettler and U. Ledzewicz. Anti-angiogenic therapy in cancer treatment as an optimal control problem. *SIAM J. on Control and Optimization*, 46(3) :1052–1079, 2007.
- [69] H. Schaettler and Jankovic M. A synthesis of time-optimal controls in the presence of saturated singular arcs. *Forum Mathematicum*, 5(5) :203–241, 2009.
- [70] P. Gajardo, H. Ramírez C., and A. Rapaport. Minimal time sequential batch reactors with bounded and impulse controls for one or more species. *SIAM J. Control Optim.*, 47(6) :2827–2856, 2008.
- [71] Italo Capuzzo Dolcetta. Hamilton-Jacobi-Bellman equations and optimal control. In *Variational calculus, optimal control and applications (Trassenheide, 1996)*, volume 124 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 121–132. Birkhäuser, Basel, 1998.
- [72] E. Trélat B. Bonnard, J.-B. Caillau. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 13(2) :207–236, 2007.
- [73] F. Rampazzo A. Bressan. Impulsive control systems with commutative vector fields. *Journal of Optim. Theory and Applications*, 71(2) :67–83, 1991.
- [74] R. W. Rishel. An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control*, 3 :191–205, 1965.
- [75] A. Jaquemard J. Marriott B. Bonnard, M. Chyba. *Mathematical Control and Related Fields*, 3(4) :397–432, 2013.
- [76] P. Cartigny and A. Rapaport. Turnpike theorems in infinite horizon by a value function approach. *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations (COCV)*, 10 :123–141, 2004.
- [77] F. Zanolin. Continuation theorems for the periodic problem via the translation operator. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 54(1), 1996.
- [78] L. Cesari. *Optimization—Theory and Applications, Problems with Ordinary Differential Equations*, volume 17 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [79] A. Akhmetzhanov, O. Bernard, F. Grogard, and P. Masci. Optimization of a photobioreactor biomass production using natural light. 49th CDC conference, 2010.
- [80] K. Mischaikow, H.L. Smith, and H. Thieme. Asymptotically autonomous semiflows : chain recurrence and liapunov functions. *Trans. Amer. Math. Soc*, 347 :1669–1685, 1995.
- [81] H. M. Robbins. A generalized Legendre-Clebsch condition for the singular cases of optimal control. *IBM J. of Research and Development*, 11 :361–372, 1967.
- [82] R. Howard. Convex bodies of constant width and constant brightness. *Advances in Mathematics*, pages 241–261, 2006.
- [83] T. Lachand-Robert and M. A. Peletier. Newton’s problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions. *Math. Nachr.*, 226 :153–176, 2001.
- [84] T. Lachand-Robert and M. A. Peletier. An example of non-convex minimization and an application to Newton’s problem of the body of least resistance. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18(2) :179–198, 2001.

- [85] Rolf Schneider. *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [86] D. E. McClure and R. A. Vitale. Polygonal approximation of plane convex bodies. *J. Math. Anal. Appl.*, 51 :326–358, 1975.
- [87] Bogdan Dumitrescu. *Positive trigonometric polynomials and signal processing applications*. Signals and Communication Technology. Springer, Dordrecht, 2007.
- [88] J. Löfberg. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. *Proc. IEEE Symp. on Computer-Aided Control System Design*, 2004.
- [89] M. Kočvara M. Sting D. Henrion, J. Löfberg. Solving polynomial static output feedback problems with penbmi. *Proc. of joint IEEE Conf. on Decision and Control and Europ. Control Conf.*, Seville, 2005.
- [90] Jean Bernard Lasserre. *Moments, positive polynomials and their applications*, volume 1 of *Imperial College Press Optimization Series*. Imperial College Press, London, 2010.
- [91] G. Carlier. On a theorem of Alexandrov. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 5(1) :49–58, 2004.
- [92] B. Juttler Z. Sir, J. Gravesen. Curves and surfaces represented by polynomial support functions. *Theoretical Computer Sciences*, 392 :141–157, 2008.