



**HAL**  
open science

# Sur la gestion des bandes de localisations dans les composites stratifiés avec un modèle d'endommagement à taux limité

Camille Le Mauff

► **To cite this version:**

Camille Le Mauff. Sur la gestion des bandes de localisations dans les composites stratifiés avec un modèle d'endommagement à taux limité. Autre. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2013. Français. NNT : 2012DENS0005 . tel-00920317

**HAL Id: tel-00920317**

**<https://theses.hal.science/tel-00920317>**

Submitted on 18 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT  
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Camille Le Mauff**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine

**MECANIQUE - GENIE MECANIQUE - GENIE CIVIL**

Sujet de la thèse

**Sur la gestion des bandes de localisation dans les  
composites stratifiés avec un modèle d'endommagement à  
taux limité**

Thèse soutenue à Cachan le 16 janvier 2012 devant le jury composé de :

Dominique Leguillon	UPMC, Paris 6	Président
Frédéric Feyel	ONERA	Rapporteur
Christian Hochard	LMA	Rapporteur
Philippe Jetteur	LMS SAMTECH	Examineur
Pierre Ladevèze	ENS de Cachan	Directeur de thèse
Federica Daghia	ENS de Cachan	Co-encadrante

**LMT-Cachan**

ENS Cachan / CNRS / UPMC / PRES UniverSud Paris  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France



Je souhaite rappeler que cette thèse a été réalisée sous la direction de Pierre Ladevèze au Laboratoire de Mécanique et Technologie de l'École Normale Supérieure de Cachan. Je tiens tout d'abord à le remercier pour m'avoir proposé ce sujet, mais aussi pour m'avoir fait profiter de sa large expérience de la mécanique numérique. Je remercie aussi chaleureusement Federica Daghia et Gilles Lubineau pour m'avoir co-encadré chacun à leur tour.

Un immense merci aux membres du jury qui ont eu la gentillesse de m'offrir un peu de leur temps : Dominique Leguillon qui a accepté de présider le jury, Frédérique Feyel et Christian Hochard qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse, et Philippe Jeteur pour avoir été examinateur de ce mémoire et de cette soutenance.



Vallée de Wakhan — Août 2010

Les remerciements ne s'arrêtent bien évidemment pas là, les suivants vont d'abord à ma famille et mes amis de longue date qui m'ont entouré en dehors du cadre académique pendant ces années de doctorat : Manu, Elen, Olivier et Camille.

La suite est forcément associée au laboratoire et au DGM, et j'y remercie l'ensemble des membres, plus particulièrement Lydia, Danielle qui savent rendre nos vies plus simples. L'ambiance du laboratoire est quelque chose de mémorable, Frisou par ses mots très touchants, ainsi que Xavier et Boubou y sont pour quelque chose, mais aussi le bar et mes acolytes dans la gestion de celui-ci : Thomas et Grégory.

Mes années de doctorat se sont partagées avec une petite charge d'enseignement qui m'a permis de progresser fortement sur les bases de la mécanique, mais aussi de structurer mon temps au laboratoire en me permettant de traiter d'autres sujets. Je remercie tout particulièrement Eric, Farid et Julien W. pour les échanges en MMC, Pierrot et Jean-Luc pour ceux en transmission de puissance hydraulique, et enfin Florent pour les méthodes numériques.

Je remercie chaleureusement mes collègues de bureau, ceux de la 211, puis bien évidemment Jorge, Alain et tout particulièrement Augustin au bureau des artistes invités. Mon début au laboratoire m'amène à dire plus particulièrement merci à Felipe pour son prix éponyme, à Etienne pour son énergie dans sa participation au dit prix, à Juju pour m'avoir fait partager sa passion pour la photographie et à René pour m'avoir introduit à l'équitation. Je remercie enfin les couples inoubliables : Loulou et Bibou, et bien évidemment Pierrounet et M. Zèbre.

Merci à tous ceux que j'ai dû oublier mais qui comptent au moins autant pour moi.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Modélisation d'une structure composite stratifiée pour la simulation numérique de son comportement jusqu'à la ruine</b>	<b>5</b>
<b>1 Modélisation du matériau et des dégradations</b>	<b>7</b>
1 Modélisation des structures composites stratifiées . . . . .	8
1.1 Description du matériau . . . . .	8
1.2 Description des principaux mécanismes de dégradation . . . . .	8
2 Méso-modèle d'endommagement des composites stratifiés . . . . .	10
2.1 Structure stratifiée et échelle de modélisation . . . . .	10
2.2 Cadre thermodynamique pour la mécanique de l'endommagement	10
2.3 Modèle de pli standard . . . . .	12
2.4 Modèle d'interface standard . . . . .	15
2.5 Méso-modèle amélioré - Pont micro-méso . . . . .	18
3 Limites du mésomodèle . . . . .	19
<b>2 Utilisation d'un modèle d'endommagement pour simuler l'évolution des dégradations jusqu'à la ruine</b>	<b>21</b>
1 Mise en évidence des difficultés numériques sur la simulation du délaminage en mode I . . . . .	22
1.1 Description du phénomène et présentation de l'éprouvette et de l'essai . . . . .	22
1.2 Modélisation unidimensionnelle et mise en lumière du phénomène	23
2 Gestion des grandes valeurs de déformations . . . . .	25
2.1 Présentation de la méthode de Newton modifié . . . . .	25
2.2 Résultats de la méthode . . . . .	26
2.3 Difficultés numériques associés aux hauts niveaux d'endommagement . . . . .	26

3	Extension au cas tridimensionnel . . . . .	28
<b>II Gestion de l'énergie dissipée avec un modèle d'endommagement à effet retard</b>		<b>31</b>
<b>3</b>	<b>Gestion de la localisation</b>	<b>33</b>
1	Présentation du phénomène de localisation . . . . .	35
1.1	Observation expérimentales . . . . .	35
1.2	Problème d'unicité et de stabilité . . . . .	35
1.3	Illustration sur une barre en traction . . . . .	38
2	Limiteurs de localisation . . . . .	42
2.1	Modèles à conservation de l'énergie de fissuration . . . . .	42
2.2	Modèles continus généralisés basés sur les modèles de Cosserat . . . . .	44
2.3	Modèles non locaux . . . . .	45
2.4	Modèles avec effet de vitesse . . . . .	47
3	Modèle choisi : modèle à taux limité ou à effet retard . . . . .	47
3.1	Présentation . . . . .	47
3.2	Unicité et stabilité . . . . .	48
3.3	Exemples d'utilisation unidimensionnel . . . . .	49
3.4	Bilan et limites . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Effet retard, vers une régularisation en accord avec la mécanique de la rupture</b>	<b>61</b>
1	Définition d'un problème de référence . . . . .	63
1.1	Description de l'éprouvette . . . . .	63
1.2	Description du modèle utilisé . . . . .	63
1.3	Vérification de l'indépendance de la solution au maillage . . . . .	64
1.4	Influence des paramètres . . . . .	70
1.5	Bilan et limites . . . . .	75
2	Lien entre endommagement et rupture . . . . .	76
2.1	Rappels sur la mécanique de la rupture . . . . .	76
2.2	Calcul de l'énergie dissipée . . . . .	80
2.3	Calcul du taux de restitution d'énergie . . . . .	82
3	Taux de restitution d'énergie et effet retard . . . . .	83
3.1	Influence de $\tau_c$ . . . . .	83
3.2	Influence de la vitesse de chargement . . . . .	84
3.3	Influence de $Y_c$ . . . . .	85
3.4	Identification d'une loi reliant $G$ , $\tau_c$ et $Y_c$ . . . . .	87
3.5	Résultats et bilan . . . . .	88

<b>III</b>	<b>Extension aux composites stratifiés</b>	<b>93</b>
<b>5</b>	<b>Spécialisation de l'approche au cas des structures composites stratifiées</b>	<b>95</b>
1	Présentation de la méthode . . . . .	96
2	Calcul de l'énergie de fissuration . . . . .	96
2.1	Expression du taux de restitution d'énergie . . . . .	96
2.2	Vision continue d'une fissure . . . . .	97
2.3	Calcul de l'énergie dissipée . . . . .	99
3	Prise en compte du taux de restitution d'énergie . . . . .	101
3.1	Description de l'algorithme . . . . .	101
3.2	Etude sur le choix de $\tilde{\gamma}$ . . . . .	102
4	Description de la méthode . . . . .	104
4.1	Prise en compte de l'initialisation de la « process zone » . . . . .	104
4.2	Zone de modification de $Y_c$ . . . . .	105
5	Implémentation . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Exemple d'application</b>	<b>109</b>
1	Introduction à l'exemple d'application . . . . .	110
1.1	Présentation des méthodes existantes . . . . .	110
1.2	Description de l'éprouvette . . . . .	110
1.3	Utilisation de la version initiale du mésomodèle d'endommagement . . . . .	112
2	Utilisation de la méthode . . . . .	119
2.1	Détermination d'une première valeur de $\tilde{Y}_c$ pour la propagation . . . . .	119
2.2	Première modification du paramètre $\tilde{Y}_c$ . . . . .	122
2.3	Adaptation de l'énergie dissipée par la propagation du split . . . . .	127
2.4	Influence du split sur la structure . . . . .	128
2.5	Bilan et limites de la méthode proposée . . . . .	133
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>



# Table des figures

1.1	Structure d'un composite stratifié à fibres longues . . . . .	8
1.2	Mécanismes de dégradation . . . . .	9
1.3	Fissuration transverse dans une éprouvette carbone-époxy . . . . .	9
1.4	Méso-constituants d'une structure composite stratifiée . . . . .	11
1.5	Directions d'orthotropie . . . . .	13
1.6	Base de l'interface . . . . .	16
1.7	Equivalence énergétique entre micromécanique et mésomécanique . . . . .	18
2.1	Description de l'éprouvette DCB . . . . .	22
2.2	Saut de déplacement de l'interface dans la « process-zone » . . . . .	23
2.3	Force en fonction du saut de déplacement $[[u_d]]$ . . . . .	24
2.4	Longueur de fissure en fonction du saut de déplacement $[[u_d]]$ . . . . .	25
2.5	Force en fonction du saut de déplacement $[[u_d]]$ . . . . .	27
2.6	Longueur de fissure en fonction du saut de déplacement $[[u_d]]$ . . . . .	27
2.7	Nombre d'itérations de la méthode de Newton . . . . .	28
3.1	Bande de cisaillement dans un sable lors d'un essai triaxial . . . . .	35
3.2	Barre en traction . . . . .	39
3.3	Comportement local de la barre . . . . .	39
3.4	Enveloppe de réponses possible de la barre en traction . . . . .	41
3.5	Modèle de Barenblatt . . . . .	43
3.6	Contrainte dans la process zone . . . . .	44
3.7	$\dot{d}$ en fonction de $\omega(Y, d)$ . . . . .	48
3.8	$\sigma$ en fonction de $\varepsilon$ pour différentes valeurs de $\dot{\varepsilon}$ . . . . .	50
3.9	Description du chargement imposé dans [Allix et Deü, 1997] . . . . .	50
3.10	Barre soumise à un chargement dynamique sans effet retard . . . . .	51
3.11	Barre soumise à un chargement dynamique avec effet retard . . . . .	51
3.12	Schéma de la géométrie et du chargement . . . . .	52
3.13	Réponse globale sans effet retard (100 éléments) . . . . .	53
3.14	Endommagement en fonction du temps sans effet retard . . . . .	54
3.15	Endommagement dans les éléments de la poutre (sans effet retard) . . . . .	54
3.16	Déformation dans les éléments de la poutre (sans effet retard) . . . . .	55
3.17	Réponse globale avec effet retard (100 éléments - $\tau_c = 0.2s$ ) . . . . .	55

3.18	Endommagement en fonction du temps avec effet retard . . . . .	56
3.19	Energies en fonction du temps avec effet retard . . . . .	56
3.20	Endommagement dans les éléments de la poutre ( $\tau_c = 0.2s$ ) . . . . .	57
3.21	Solutions pour 3 tailles de mailles différentes ( $\tau_c = 0.2s$ ) . . . . .	57
3.22	Force en fonction du déplacement imposé pour 3 valeurs de $\tau_c$ . . . . .	58
3.23	Endommagement en fonction du temps pour 3 valeurs de $\tau_c$ . . . . .	58
3.24	Energie dissipée pour 3 valeurs de $\tau_c$ . . . . .	59
3.25	Contrainte à rupture en fonction du temps de chargement . . . . .	59
4.1	Eprouvette de l'étude . . . . .	63
4.2	Carte d'endommagement sans effet retard - Maillage grossier . . . . .	65
4.3	Carte d'endommagement sans effet retard - Maillage fin . . . . .	65
4.4	Carte d'endommagement sans effet retard - Zoom . . . . .	66
4.5	Tracé de la force en fonction du déplacement . . . . .	67
4.6	Tracé de l'énergie dissipée en fonction du déplacement . . . . .	67
4.7	Carte d'endommagement avec effet retard - Maillage grossier . . . . .	68
4.8	Carte d'endommagement avec effet retard - Maillage fin . . . . .	69
4.9	Tracé de la force en fonction du déplacement . . . . .	69
4.10	Tracé de l'énergie dissipée en fonction du déplacement . . . . .	70
4.11	Force en fonction du déplacement pour deux valeurs de $\tau_c$ . . . . .	71
4.12	Energie dissipée en fonction du déplacement pour deux valeurs de $\tau_c$ . . . . .	72
4.13	Cartographie de l'endommagement pour $\tau_c = 0.005s$ . . . . .	73
4.14	Cartographie de l'endommagement pour $\tau_c = 0.002s$ . . . . .	73
4.15	Endommagement en fonction de l'abscisse $x$ . . . . .	74
4.16	Schéma du calcul de l'énergie volumique dissipée . . . . .	81
4.17	Schéma du calcul de l'énergie dissipée . . . . .	83
4.18	Taux de restitution d'énergie en fonction de $\tau_c$ . . . . .	84
4.19	Taux de restitution d'énergie pour différentes vitesses de chargement . . . . .	85
4.20	Energie volumique dissipée si la loi statique est utilisée . . . . .	86
4.21	Taux de restitution d'énergie en fonction de $Y_c$ . . . . .	86
4.22	Taux de restitution d'énergie en fonction de $\tau_c$ . . . . .	87
4.23	Taux de restitution d'énergie en fonction de $Y_c$ . . . . .	88
4.24	Rapport $G/G_c$ en fonction du rapport $Y_c/Y_{cref}$ . . . . .	89
4.25	Taux de restitution d'énergie en fonction de $\tau_c$ . . . . .	90
4.26	Force en fonction du déplacement pour $\tau_c = 2.10^{-3} s$ . . . . .	90
4.27	Energie dissipée en fonction du déplacement pour $\tau_c = 2.10^{-3} s$ . . . . .	91
4.28	Force en fonction du déplacement pour les valeurs $Y_c$ calculées . . . . .	92
4.29	Energie dissipée en fonction du déplacement pour les valeurs $Y_c$ calculées . . . . .	92
5.1	Endommagement en fonction de l'abscisse dans la direction de la fissure . . . . .	98
5.2	Courbe théorique d'endommagement . . . . .	99
5.3	Fissure équivalente . . . . .	100
5.4	Courbes caractéristiques du point fixe pour $\tilde{\gamma} \leq \gamma$ . . . . .	103

5.5	Courbes caractéristiques du point fixe pour $\tilde{\gamma} \geq \gamma$ . . . . .	104
5.6	Energie potentielle en fonction de la longueur de fissure . . . . .	105
5.7	Zone de modification du paramètre $Y_c$ . . . . .	106
6.1	Description de la géométrie de la plaque trouée . . . . .	111
6.2	Résultats d'expérience (Rayons X) et de simulation . . . . .	113
6.3	Cartographie de $d$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_b$ . . . . .	114
6.4	Contrainte $\sigma_{12}$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_b$ . . . . .	114
6.5	Cartographie de $d$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c$ . . . . .	114
6.6	Contrainte $\sigma_{12}$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c$ . . . . .	115
6.7	Cartographie de $d'$ dans le pli central orienté à $90^\circ$ pour $\varepsilon_c$ . . . . .	115
6.8	Longueur de fissure avec la version initiale du modèle . . . . .	116
6.9	Energie dissipée avec la version initiale du modèle . . . . .	117
6.10	Cartographie de $d$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c$ et $\tau_c = 0.01$ s . . . . .	117
6.11	Longueur de fissure pour $\tau_c = 0.01$ s . . . . .	118
6.12	Energie dissipée pour $\tau_c = 0.01$ s . . . . .	119
6.13	Taux de restitution d'énergie $G$ pour $\tau_c = 0.01$ s . . . . .	120
6.14	Energie volumique dissipée en fonction du produit $\tau_c \times \dot{\varepsilon}_{12}$ . . . . .	121
6.15	Cartographie de $d$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_b - \tau_c = 0.02$ s . . . . .	123
6.16	Cartographie de $d$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s . . . . .	123
6.17	Contrainte $\sigma_{12}$ dans le pli supérieur orienté à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s . . . . .	124
6.18	Longueur de fissure - $\tau_c = 0.02$ s . . . . .	125
6.19	Energie dissipée - $\tau_c = 0.02$ s . . . . .	125
6.20	Longueur de fissure - $\tau_c = 0.01$ s . . . . .	126
6.21	Energie dissipée - $\tau_c = 0.01$ s - $\tilde{Y}_c = 6.6$ MPa . . . . .	126
6.22	Energie dissipée - $\tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	127
6.23	Longueur de fissure - $\tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	128
6.24	Energie dissipée - $\tau_c = 0.01$ s - $\tilde{Y}_c = 4.5$ MPa . . . . .	129
6.25	Longueur de fissure - $\tau_c = 0.01$ s - $\tilde{Y}_c = 4.5$ MPa . . . . .	129
6.26	Cartographie de $d$ dans le pli à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	130
6.27	Cartographie de $d$ dans le pli à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	130
6.28	Contrainte $\sigma_{11}$ dans le pli à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	131
6.29	Contrainte $\sigma_{12}$ dans le pli à $0^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	131
6.30	Contrainte $\sigma_{12}$ dans le pli à $90^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	132
6.31	Contrainte $\sigma_{22}$ dans le pli à $90^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	132
6.32	Cartographie de $d'$ dans le pli à $90^\circ$ pour $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$ s - $\tilde{Y}_c = 3.3$ MPa . . . . .	133



# Introduction

Dans une logique de réduction des coûts et d'amélioration des performances, les matériaux composites sont sujets à prendre une part de plus en plus importante dans les matériaux utilisés dans l'industrie aéronautique. Les composites stratifiés à fibres de carbone sont caractérisés par une grande rigidité et une haute résistance à la fatigue. Ceci leur donne un avantage décisif pour réduire la masse des avions et ainsi diminuer leur consommation de carburant. Outre ces deux caractéristiques, ils permettent de créer des pièces aux formes complexes, intégrant de nombreuses fonctionnalités, permettant de réduire le nombre d'éléments et d'assemblages.

Ces avantages font que les composites comptent aujourd'hui pour 30% de la masse d'un avion de ligne, 50% d'un avion de chasse et près de 70% d'un hélicoptère. L'A380 d'Airbus en bénéficie même pour des pièces structurelles essentielles comme son caisson central ; les prochains long courriers auront un fuselage en stratifiés.

Bien qu'utilisés dans l'aéronautique depuis une trentaine d'années, les composites ne sont pas aussi bien maîtrisés que les matériaux métalliques, et demandent encore un nombre important d'essais physiques sur des pièces complexes afin de les certifier. Dans une optique de « Virtual Testing » on cherche à diminuer la part de ces essais et favoriser l'utilisation de simulations numériques qui permettent des économies de temps et d'argent.

Comme tous les matériaux, les composites stratifiés sont susceptibles de se dégrader, et être capable de prédire objectivement ces dégradations est un sujet de recherche en cours de transfert vers l'industrie. A cette fin ces matériaux ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche pour mieux comprendre leur comportement. Les mécanismes de dégradation sont donc aujourd'hui très bien connus, cependant la simulation des stratifiés jusqu'à rupture reste un objectif majeur et nécessite encore de nouvelles études.

La simulation d'une expérimentation sur des éprouvettes simples, dans toutes les phases de chargement, est toujours un enjeu scientifique. Lors du chargement on observe une première phase de charge qui met en lumière le comportement non-linéaire du matériau avec création de fissures diffuses à petite échelle et, pour certains empilements, des déformations anélastiques. On voit ensuite apparaître des « process zones » dans lesquelles les fissures diffuses se concentrent. Les déformations se localisent alors pour donner naissance à des macro-fissures caractérisées par des surfaces libres qui ne permettent plus de transmettre les efforts. Ces macro-fissures se développent et mènent à

la ruine de l'éprouvette.

La première phase est aujourd'hui relativement bien maîtrisée. Deux grandes familles de modélisations se distinguent pour prendre en compte ces dégradations dans les stratifiés.

L'une, basée sur une échelle microscopique, cherche à refléter la morphologie des dégradations observées expérimentalement en utilisant une modélisation discrète [Garrett et Bailey, 1977, Highsmith et Reifsnider, 1982, Flaggs et Kural, 1982, Crossman et Wang, 1982, Hashin, 1985, Laws et Dvorak, 1988, Nairn et Hu, 1994]. Ces modèles apportent une compréhension forte des mécanismes de dégradation mais ne permettent pas de faire des calculs sur des structures complexes. Récemment, l'utilisation d'un modèle micro hybride a permis d'intégrer ces scénarios de dégradations sous forme discrète en calcul des structures [Ladevèze, 2005] mais le coût de calcul d'un tel modèle limite la taille de structure simulable et laisse hors de portée d'une utilisation industrielle [Violeau *et al.*, 2009].

L'autre grande famille est basée sur une échelle mésoscopique, qui prend en compte les dégradations à l'échelle du pli, échelle intermédiaire entre la taille de la fibre et la taille de la structure [Ladevèze, 1986, Maire et Chaboche, 1997, Hochard *et al.*, 2001, Laurin *et al.*, 2007]. Dans ces modèles, des variables continues d'endommagement (sous forme scalaire ou tensorielle) sont utilisées afin de prendre en compte les dégradations. Initié au LMT-Cachan, le mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés [Ladevèze, 1986, Ladevèze et Le Dantec, 1992, Allix et Ladevèze, 1992] introduit cette approche et postule qu'un composite stratifié est composé de plis et d'interfaces. Ces deux entités prennent en compte les dégradations à l'échelle du pli en intégrant la micro-mécanique sous forme homogénéisée par l'intermédiaire de la mécanique de l'endommagement. Les travaux de Ladevèze, Lubineau et Marsal [Ladevèze et Lubineau, 2002, Ladevèze *et al.*, 2006] ont permis de réaliser un pont entre les approches microscopiques et le mésomodèle d'endommagement pour donner naissance à un mésomodèle amélioré [Ladevèze, 2005, Lubineau et Ladevèze, 2008].

Les phases suivantes, concernant l'apparition de macro fissures menant à la rupture finale, mettent en évidence les limites de ces précédents modèles. La micromodélisation fixe toujours un cadre à la taille de la structure pouvant être simulée bien que des stratégies multiéchelles permettent de le dépasser quelque peu. La mécanique de la rupture classique amène une bonne gestion de la propagation de la macrofissure mais ne permet pas de traiter l'initiation de celle-ci. Les approches mésomécaniques utilisant la mécanique de l'endommagement classique montrent des résultats en accord avec l'expérience tant que des zones d'endommagement macroscopiques n'apparaissent pas. Au-delà, ces derniers font apparaître une non-objectivité de la solution due à la localisation des déformations.

Plusieurs idées ont alors émergé pour traiter ce problème et ont ainsi permis d'obtenir une solution unique quel que soit le maillage choisi. La famille des modèles non-locaux [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987, de Borst *et al.*, 1993, Frémond et Nedjar, 1996, Peerlings *et al.*, 1996], en introduisant d'une longueur caractéristique, impose une taille à la

zone localisée. Cependant, ils augmentent le coût de calcul car la variable d'endommagement n'est plus calculée localement en un point, mais dépend des points voisins ; de plus, la prise en compte des bords de la structure est encore aujourd'hui un sujet de recherche. Une autre famille de modèles, basée sur un effet de vitesse [Needleman, 1988, Ladevèze, 1991], rajoute un terme de viscosité qui peut s'apparenter à un temps caractéristique. Celui-ci peut alors être relié à une longueur par l'intermédiaire de la célérité des ondes dans le milieu considéré, et peut ainsi définir une largeur à la zone où se concentre l'endommagement. Ces modèles ont l'avantage d'être locaux, ce qui facilite leur implémentation.

Toutefois, ces deux familles de méthodes de régularisation, bien que s'attachant à obtenir une solution indépendante de la discrétisation, font face à un autre problème : l'énergie dissipée par la propagation de cette zone endommagée n'est pas forcément en accord avec la mécanique de la rupture. Le paramètre caractéristique du modèle régularisé est donc choisi afin de résoudre ce problème.

L'approche introduite au LMT-Cachan consiste dans le cas d'une approche en dynamique à utiliser un modèle avec endommagement retardé [Ladevèze, 1991]. Elle est basée sur le fait qu'une fissure ne peut pas apparaître instantanément. Ce modèle donne d'excellents résultats en restant dans le cadre de la dynamique [Allix et Deü, 1997, Ladevèze *et al.*, 2000]. Cependant il requiert une discrétisation temporelle de la taille du temps caractéristique de l'effet retard (de l'ordre d'une micro seconde), qui le rend inexploitable pour des simulations de chargement en quasi-statique.

L'objectif de ce travail est de simuler la phase finale de rupture consécutive à la localisation des variables d'endommagement et des déformations lors d'un chargement quasi-statique. L'approche développée ici propose d'étendre le domaine d'utilisation du modèle d'endommagement retardé pour répondre à deux problèmes dans le cas de chargements quasi-statiques afin de reproduire la physique lors de la propagation de macro fissures :

- maintenir l'objectivité de la solution ;
- adapter l'énergie dissipée à la mécanique de la rupture.

Afin de répondre à cet objectif, ce travail présente de façon progressive une démarche menant de la prise en compte des fortes valeurs d'endommagement, caractéristiques des zones de localisation, à la gestion de l'énergie dissipée lors de la propagation d'une fissure dans les composites stratifiés. Ce mémoire est structuré en trois parties de deux chapitres chacune, qui permettent de suivre cette démarche.

La première partie s'attache à présenter le modèle d'endommagement choisi. On décrit les mécanismes de dégradations que l'on cherche à prendre en compte dans une structure composite stratifiée, pour ensuite justifier le choix du méso-modèle d'endommagement au regard de l'échelle de modélisation adaptée à la simulation numérique. On s'intéresse ensuite à la capacité de l'implémentation numérique du modèle à gérer les zones d'endommagement ayant pour valeur  $d = 1$ , et qui suppose que les contraintes ne transitent plus par les macro-fissures.

La seconde partie traite de la localisation de l'endommagement et des déformations. On expose tout d'abord le phénomène et ses critères d'apparition, pour ensuite présenter

les différents limiteurs de localisation qui sont utilisés pour pallier le problème de dépendance à la discrétisation inhérent au phénomène. L'accent est mis sur le modèle d'endommagement avec effet retard, pour lequel on montre sa capacité à rendre la solution indépendante du maillage, aussi bien lors d'une approche en dynamique que lors d'une approche en quasi-statique. Cependant, l'utilisation de ce modèle pour une approche en quasi-statique, impose que le temps caractéristique utilisé soit très supérieur à la valeur identifiable par des essais afin de rendre le temps de simulation acceptable. Ce temps n'est donc plus un paramètre matériau, il dépend des discrétisations temporelle et spatiale. Par conséquent, l'énergie dissipée par unité de surface lors de la propagation d'une macro-fissure n'est plus en accord avec la valeur physique du taux de restitution d'énergie, critère énergétique privilégié par la mécanique de la rupture. L'identification des paramètres matériaux de la loi d'évolution est alors revisitée pour retrouver une équivalence énergétique entre simulation et essai dans le cas d'un modèle d'endommagement isotrope. On cherche alors à adapter l'énergie dissipée étalée par l'effet retard en ajustant le paramètre matériau qui lui est associée. Cette approche s'inspire des modèles à conservation d'énergie de fissuration [Hillerborg *et al.*, 1976, Bazant et Oh, 1983], tout en cherchant à s'affranchir de la sensibilité qu'il pourrait y avoir à l'orientation du maillage. On identifie alors une loi reliant le taux de restitution d'énergie aux paramètres de la loi d'évolution retardée sur un exemple simple d'ouverture. On montre ainsi que l'on peut adapter l'énergie dissipée dans la bande représentant la fissure au paramètre temporel caractéristique du modèle à effet retard, afin de respecter le taux de restitution d'énergie critique du matériau.

La dernière partie s'intéresse au cas des structures en composites stratifiés. Pour ces structures, il n'est pas possible d'identifier aussi aisément une loi comme dans la partie précédente. On propose donc une démarche générique basée sur une méthode de prédiction correction qui permet de venir adapter les paramètres de la loi d'évolution dans les zones fortement endommagées au fur et à mesure des incréments de temps. Cette démarche permet de traiter la propagation de macro fissures après leur initiation en continuant à utiliser la mécanique de l'endommagement tout en respectant le critère de Griffith [Griffith, 1920], et ce sans être dépendant du maillage. Enfin, le dernier chapitre permet de montrer des résultats de la procédure utilisée. Des simulations numériques mettant en évidence le caractère régularisant de la méthode et la concordance des résultats avec la mécanique de la rupture pour des éprouvettes trouées sont présentées. Ces simulations ont été réalisées avec le logiciel Coffee, pour lequel des modifications ont été apportées afin de réduire fortement les temps de calcul et permettre la prise en compte de la méthode proposée.

## **Première partie**

# **Modélisation d'une structure composite stratifiée pour la simulation numérique de son comportement jusqu'à la ruine**



# Chapitre 1

## Modélisation du matériau et des dégradations

*On présente ici la modélisation utilisée pour les structures composites stratifiées. Le choix est plus précisément porté sur le méso-modèle d'endommagement des composites, qui permet de prendre en compte de façon homogénéisée l'évolution des dégradations du matériau à l'échelle d'une couche élémentaire.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Modélisation des structures composites stratifiées</b>	<b>8</b>
1.1	Description du matériau	8
1.2	Description des principaux mécanismes de dégradation	8
<b>2</b>	<b>Méso-modèle d'endommagement des composites stratifiés</b>	<b>10</b>
2.1	Structure stratifiée et échelle de modélisation	10
2.2	Cadre thermodynamique pour la mécanique de l'endommagement	10
2.3	Modèle de pli standard	12
2.4	Modèle d'interface standard	15
2.5	Mésomodèle amélioré - Pont micro-méso	18
<b>3</b>	<b>Limites du mésomodèle</b>	<b>19</b>

---

# 1 Modélisation des structures composites stratifiées

## 1.1 Description du matériau

Les structures composites stratifiées à fibres longues permettent de diminuer le poids d'une structure tout en maintenant ses caractéristiques mécaniques en adaptant la structure du matériau au chargement que subit la pièce mécanique. Les fibres, de très grande rigidité, sont liées par un matrice polymère pour former une couche. Une couche bénéficie de la rigidité de la fibre suivant sa direction longitudinale, mais a la rigidité limitante de la matrice dans les autres directions. Afin d'obtenir un matériau avec une meilleure rigidité dans les autres directions, on assemble plusieurs couches unidirectionnelles entre elles en changeant la direction des fibres de chaque couche pour former un empilement. Le choix de la structure de l'empilement est dicté par les sollicitations auxquelles la structure est soumise. On obtient ainsi un matériau qui, bien que fortement anisotrope, profite avantageusement des caractéristiques mécaniques des fibres tout en ayant un poids réduit.

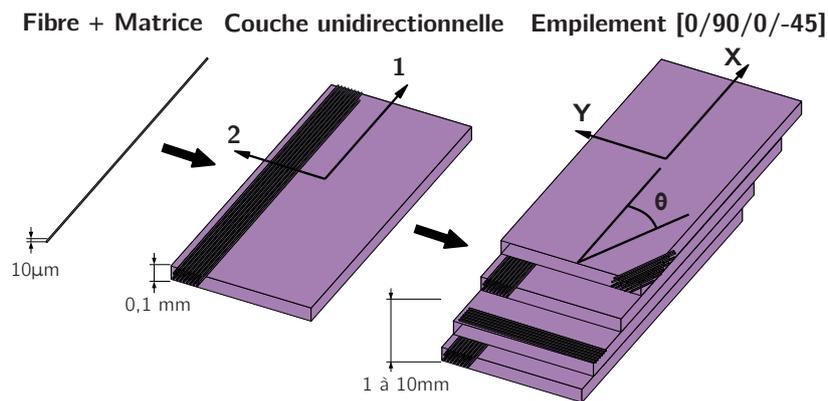
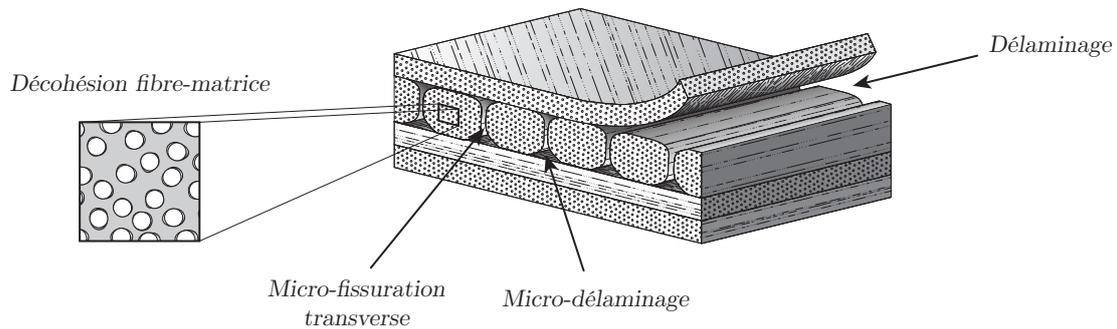


FIGURE 1.1 – Structure d'un composite stratifié à fibres longues [Marsal, 2005]

## 1.2 Description des principaux mécanismes de dégradation

D'un point de vue micro, à l'échelle de la fibre, il existe principalement quatre scénarii différents de dégradation (FIG. 1.2). Le premier est caractérisé par des décohésions entre les fibres et la matrice, il a lieu soit à l'intérieur d'une couche, soit à l'interface entre deux couches. Le second rend compte de la microfissuration transverse, c'est à dire des fissures qui viennent de la coalescence des décohésions fibre-matrice dans l'épaisseur d'une couche de fibres unidirectionnelles. Le troisième scénario est défini par les micro-délaminages en pointe des microfissures transverses et les délaminages globaux. Le dernier scénario correspond à la rupture des fibres.

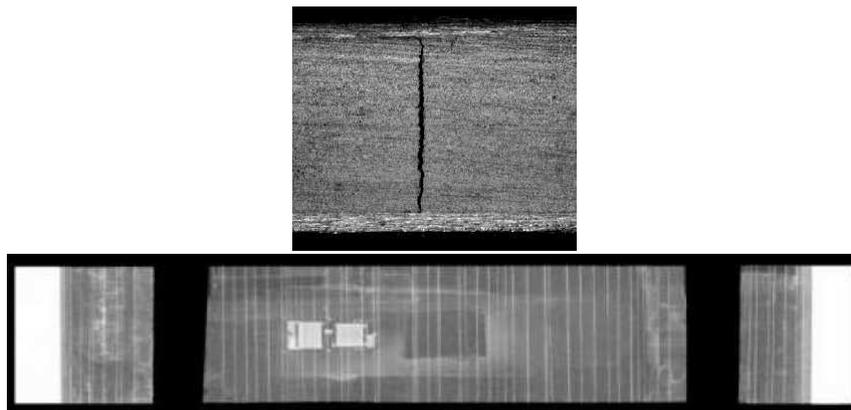
Lors d'un chargement de structure composite, on voit apparaître dans un premier temps des décohésions fibre-matrice diffuses, s'ensuit le phénomène de percolation de



**FIGURE 1.2** – Mécanismes de dégradation d'un composite stratifié [Ladevèze *et al.*, 2006]

ces décohésions pour former des microfissures transverses. Des micro délaminages en pointe des fissures se développent. A partir de cette étape, la microfissuration atteint sa limite. La ruine de la structure est alors engendrée par l'augmentation du délaminage qui perd sa dimension locale, et par la rupture de fibres qui n'autorise plus le transit des flux d'efforts par celles-ci.

On arrive à observer les phénomènes venant de la micromécanique à l'aide de radiographies aux rayons X (FIG. 1.3). Les barres blanches verticales correspondent aux microfissures transverses.



**FIGURE 1.3** – Fissuration transverse dans une éprouvette carbone-époxy [0/90<sub>4</sub>]<sub>s</sub> [Lubineau, 2002]

## 2 Méso-modèle d'endommagement des composites stratifiés

### 2.1 Structure stratifiée et échelle de modélisation

Afin de simuler le comportement de structures composites stratifiées, un choix doit être effectué quant à l'échelle de la modélisation. Trois solutions différentes sont habituellement utilisées :

- l'échelle microscopique qui est associée à la dimension du diamètre de la fibre ;
- l'échelle macroscopique qui est celle correspondant à la structure complète, de l'ordre du centimètre au mètre ;
- l'échelle mésoscopique qui s'insère entre les deux premières et a pour dimension caractéristique l'épaisseur d'un pli.

A cause de l'homogénéisation de l'empilement, l'échelle macroscopique ne permet pas d'avoir accès aux dégradations de chaque couche séparément. Les observations présentées sur les dégradations du matériau nous amènent à privilégier l'échelle à laquelle elles apparaissent. La plus petite dégradation décrite est la décohésion fibre/matrice. Une modélisation permettant d'observer le comportement des deux matériaux, et de prendre en compte de façon discrète leur décohésion, est à l'heure actuelle inadaptée au cadre industriel si l'objectif final est de simuler le comportement d'un empilement de couches unidirectionnelles. L'échelle microscopique, de par sa taille caractéristique, laisse hors de portée le calcul sur une structure complexe de grande taille. Le choix est donc fait de modéliser le comportement de structures composites stratifiées à l'échelle mésoscopique, où la dimension caractéristique correspond à l'épaisseur d'un pli de la structure. C'est un choix proposé par [Ladevèze, 1986, Ladevèze, 1989], et que partagent plusieurs auteurs, tant pour les empilements de plis unidirectionnels [Laurin *et al.*, 2007, Huchette *et al.*, 2009, Marcin *et al.*, 2010] que pour les matériaux tissés [Hochard *et al.*, 2006, Hochard *et al.*, 2007, Hochard *et al.*, 2009].

Le mésomodèle stipule qu'une structure composite stratifiée est vue, à l'échelle mésoscopique, comme un assemblage de deux constituants, des plis et des interfaces (FIG. 1.4). Un pli correspond à une couche élémentaire qui contient des fibres ayant la même orientation. Une interface se situe entre deux couches élémentaires d'orientations différentes, elle est caractérisée par une entité surfacique et permet de décrire le délaminage entre les plis. Les dégradations à l'intérieur de ces constituants seront prises en compte par l'intermédiaire de la mécanique de l'endommagement.

### 2.2 Cadre thermodynamique pour la mécanique de l'endommagement

On peut définir l'état d'un système à tout instant à partir de ses variables d'état. La mécanique de l'endommagement, initiée par Katchanov [Kachanov, 1958] et Rabotnov

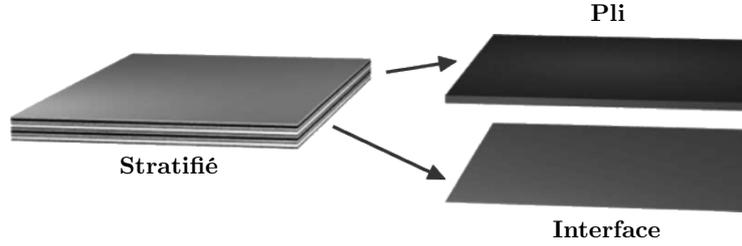


FIGURE 1.4 – Mésomodèles d'une structure composite stratifiée [Ladevèze *et al.*, 2006]

[Rabotnov, 1968], permet de prendre en compte sous forme homogénéisée les dégradations du matériau par l'intermédiaire de nouvelles variables d'état  $d_i$ . Dans le cas de la thermoélasticité endommageable, les variables d'état du matériaux sont la déformation  $\varepsilon$ , la température  $T$  et la variable d'endommagement  $d$  (si une seule variable d'endommagement est utilisée pour caractériser les dégradations du matériau).

Soit le potentiel énergie libre :

$$\rho\psi = \rho(e - Ts) \quad (1.1)$$

avec  $e$  l'énergie interne spécifique, et  $s$  l'entropie spécifique.

L'inégalité de Clausius-Duhem, obtenue à partir du second principe de la thermodynamique, nous donne dans l'hypothèse des petites perturbations :

$$\sigma : \varepsilon - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \underline{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (1.2)$$

avec  $\sigma$  la contrainte,  $\varepsilon$  la déformation et  $\underline{q}$  le flux de chaleur.

Or  $\psi = \psi(\varepsilon, T, d)$  car l'énergie libre de Helmholtz dépend des variables d'état, d'où :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \quad (1.3)$$

On obtient donc :

$$\left( \sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \rho \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} - \underline{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (1.4)$$

Les expressions suivantes définissent les lois de la thermoélasticité :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (1.5)$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (1.6)$$

La dissipation devient donc :

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} - \underline{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (1.7)$$

Dans le cadre de ces travaux, on se limitera au cas isotherme. La dissipation ne comprend donc plus que la dissipation intrinsèque :

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (1.8)$$

Soit  $Y$ , la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement défini par :

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \quad (1.9)$$

La dissipation devient :

$$Y \dot{d} \geq 0 \quad (1.10)$$

L'énergie libre  $\psi$  diminuant lorsque l'endommagement  $d$  augmente, la force thermodynamique  $Y$  est donc positive. Le second principe de la thermodynamique impose alors  $\dot{d} \geq 0$ . L'endommagement ne peut donc que stagner ou augmenter dans la structure.

### 2.3 Modèle de pli standard

Les dégradations de la couche unidirectionnelle sont prises en compte sous forme homogénéisée par la mécanique de l'endommagement. L'état du pli est donc décrit à l'aide d'un certain nombre de variables internes ou d'état. Chaque pli élémentaire est supposé avoir un comportement orthotrope. La direction principale  $\underline{e}_1$  est la direction des fibres, les directions  $\underline{e}_2$  et  $\underline{e}_3$  sont dites transverses (FIG. 1.5).

L'endommagement est considéré homogène dans l'épaisseur du pli [Ladevèze, 1986]. De plus, le modèle de comportement du pli doit vérifier les constatations expérimentales suivantes [Ladevèze, 1992] :

- le comportement est différent lorsque le matériau est en traction ou en compression, correspondant au cas d'ouverture ou de fermeture de fissures à l'échelle micro ;
- les rapports  $\nu_{ij}/E_i$  sont quasi-constants, où  $\nu_{ij}$  est un coefficient de poisson et  $E_i$  un module d'Young.

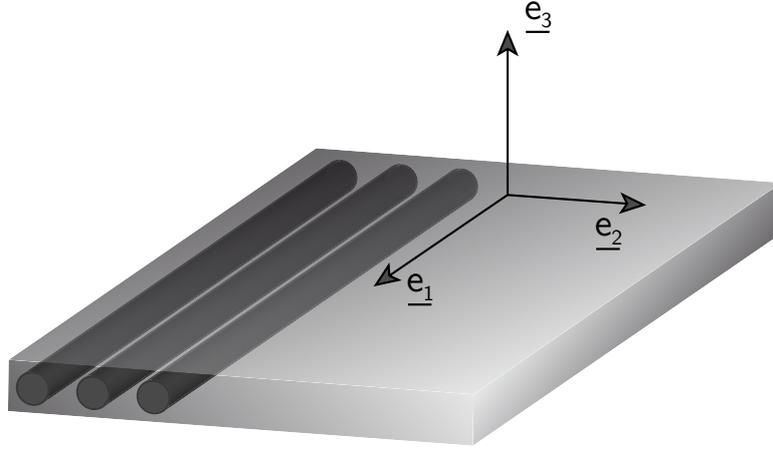


FIGURE 1.5 – Directions d'orthotropie

On définit alors l'énergie de déformation élastique du matériau endommagé par :

$$2e_d = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^0(1-d_f)} & -\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} & -\frac{\nu_{13}^0}{E_1^0} \\ -\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} & \frac{1}{E_2^0(1-[\sigma_{22}]_+d')} & -\frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} \\ -\frac{\nu_{13}^0}{E_1^0} & -\frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} & \frac{1}{E_2^0(1-[\sigma_{33}]_+d')} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0(1-d)} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0(1-d)} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0(1-d_{23})} \quad (1.11)$$

où  $[x]_+$  est la fonction de Heaviside qui permet de différencier le comportement fissures ouvertes du comportement fissures fermées.

Les dégradations diffuses dues à la décohésion fibre-matrice sont prises en compte par l'intermédiaire de deux variables d'endommagement :  $d'$  est associée à la fissuration transverse et  $d$  aux dégradations de cisaillement. L'augmentation de ces variables d'endommagement peut être vue comme une perte de rigidité du matériau. La variable  $d_f$  est associée à la rupture fragile des fibres.

A l'état sain, on considère le matériau comme isotrope transverse. On définit donc  $G_{23}^0$  tel que :

$$G_{23}^0 = \frac{E_2^0}{2(1+\nu_{23}^0)} \quad (1.12)$$

or en cours d'endommagement  $E_2 = E_2^0(1-d')$  et  $\nu_{23} = \nu_{23}^0(1-d')$ . On introduit donc une variable  $d_{23}$  dépendant de  $d'$  telle que :

$$G_{23} = G_{23}^0(1-d_{23}) \quad (1.13)$$

avec

$$d_{23} = 1 - \frac{1 - d'}{1 - \frac{v_{23}^0}{1+v_{23}^0}d'} \quad (1.14)$$

Afin de prendre en compte le comportement en compression des fibres, un comportement élastique non-linéaire peut-être ajouté qui vient modifier la raideur dans le sens de la fibre [Allix *et al.*, 1994].

Les forces thermodynamiques, associées aux variables d'endommagement, permettent de piloter l'évolution de l'endommagement. Elles dérivent du potentiel d'état et sont définies par :

$$Y_{d_f} = \left\langle \left\langle \frac{\partial e_d}{\partial d_f} \middle| \sigma \right\rangle \right\rangle = \frac{\langle \sigma_{11}^2 \rangle}{2E_1^0 (1 - d_f)^2} \quad (1.15)$$

$$Y_d = \left\langle \left\langle \frac{\partial e_d}{\partial d} \middle| \sigma \right\rangle \right\rangle = \frac{\langle \sigma_{12}^2 \rangle}{2G_{12}^0 (1 - d)^2} + \frac{\langle \sigma_{13}^2 \rangle}{2G_{13}^0 (1 - d)^2} \quad (1.16)$$

$$Y_{d'} = \left\langle \left\langle \frac{\partial e_d}{\partial d'} \middle| \sigma \right\rangle \right\rangle = \frac{\langle \langle \sigma_{22} \rangle_+^2 \rangle}{2E_2^0 (1 - d')^2} + \frac{\langle \langle \sigma_{33} \rangle_+^2 \rangle}{2E_2^0 (1 - d')^2} + \frac{1 - \frac{v_{23}^0}{1+v_{23}^0}}{\left(1 - \frac{v_{23}^0}{1+v_{23}^0}d'\right)^2} \frac{\langle \sigma_{23}^2 \rangle}{2G_{23}^0 (1 - d_{23})^2} \quad (1.17)$$

où  $\langle \langle x \rangle \rangle$  désigne la valeur moyenne de  $x$  dans l'épaisseur d'un pli, et  $\langle y \rangle_+$  désigne la partie positive de  $y$ .

Les lois d'évolution sont identifiées à partir d'essais quasi-statiques. La loi d'évolution de la variable  $d_f$ , variable d'endommagement dans le sens fibre, est une loi fragile définie par :

$$w = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_{d_f} < Y_{d_f}^T \text{ et } Y_{d_f} < Y_{d_f}^C \\ \frac{Y_{d_f}}{Y_{d_f}^T} & \text{si } Y_{d_f} \geq Y_{d_f}^T \text{ et } \sigma_{11} > 0 \text{ (traction)} \\ \frac{Y_{d_f}}{Y_{d_f}^C} & \text{si } Y_{d_f} \geq Y_{d_f}^C \text{ et } \sigma_{11} < 0 \text{ (compression)} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$d_f = \begin{cases} w & \text{si } d_f \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.19)$$

De plus, l'endommagement ne peut que croître, donc on impose :

$$\dot{d}_f \geq 0 \quad (1.20)$$

Un couplage entre les énergies transverses et de cisaillement est introduit par l'intermédiaire d'un paramètre  $b_y$  qui s'explique par le fait que le même réseau de fissures intervient dans les deux types d'endommagement. L'évolution des variables  $d$  et  $d'$  est alors pilotée par :

$$w = \frac{\langle \sqrt{Y_d + b_y Y_{d'}} - \sqrt{Y_0} \rangle_+}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \quad (1.21)$$

Les variables d'endommagement diffus sont alors :

$$d = \begin{cases} w & \text{si } d < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.22)$$

$$d' = \begin{cases} bd & \text{si } d < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.23)$$

en leur imposant de vérifier le second principe :

$$\dot{d} \geq 0 \quad (1.24)$$

$$\dot{d}' \geq 0 \quad (1.25)$$

L'endommagement s'initie à un seuil  $Y_0$  puis évolue de façon progressive jusqu'à sa valeur maximale 1.

Ce modèle peut être complété par un modèle de plasticité qui permet de prendre en compte les déformations anélastiques pouvant être observées sous forme de déformations résiduelles après un essai de charge-décharge [Ladevèze, 1994]. L'identification des paramètres du modèle nécessite un nombre restreint d'essais prédéfinis sur des éprouvettes d'orientations variées [Ladevèze et Le Dantec, 1992].

La version actuelle de ce modèle utilise une loi avec effet retard [Allix et Deü, 1997] qui modifie l'expression de la loi d'évolution comme suit :

$$\dot{d}_i = \frac{1}{\tau_c} \{1 - \exp(-a \langle w_i - d_i \rangle_+)\} \quad (1.26)$$

Les raisons, avantages et les limites de cette loi seront traités dans les chapitres suivants de ce manuscrit.

## 2.4 Modèle d'interface standard

L'interface est une entité surfacique comprise entre deux plis, elle correspond à la fine épaisseur de matrice qui se trouve à cette jonction. Elle assure le transfert des contraintes hors plan entre les plis et permet de prendre en compte les effets du délaminage [Allix et Ladevèze, 1992]. Elle a sa propre base et son orientation est définie par la bissectrice des orientations des plis adjacents (FIG. 1.6).

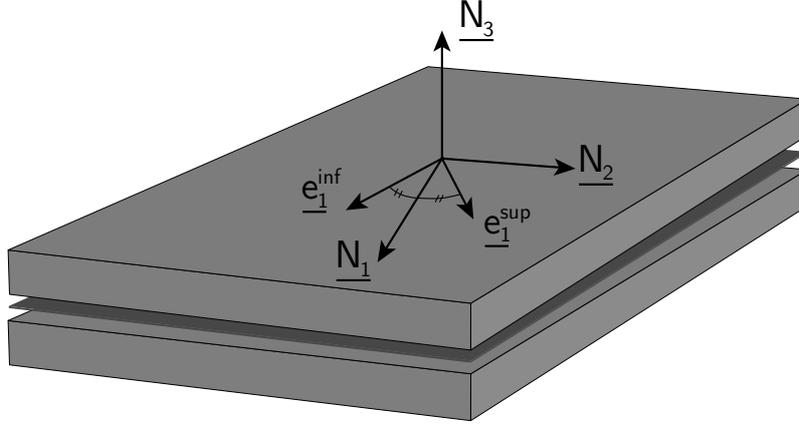


FIGURE 1.6 – Base de l'interface

Physiquement, l'épaisseur de matrice  $e$  étant très faible devant les longueurs caractéristiques des autres dimensions, un développement asymptotique du champ de déformation est fait en ne conservant que le premier ordre :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{u}) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{u_{x,z}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{u_{y,z}}{2} \\ \frac{u_{x,z}}{2} & \frac{u_{y,z}}{2} & u_{z,z} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

avec :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} \approx \frac{[[\underline{u}]]}{e} = \frac{\underline{u}^+ - \underline{u}^-}{e} \quad (1.28)$$

où  $[[\cdot]]$  est l'opérateur saut entre la surface supérieure et la surface inférieure de l'interface.

On note par la suite le saut de déplacement dans la base de l'interface :

$$[[\underline{u}]] = [[u_1]]\underline{N}_1 + [[u_2]]\underline{N}_2 + [[u_3]]\underline{N}_3 \quad (1.29)$$

L'énergie de déformation surfacique d'une interface non endommagée est alors :

$$e_d = \frac{k_{13}^0}{2} [[u_1]]^2 + \frac{k_{23}^0}{2} [[u_2]]^2 + \frac{k_{33}^0}{2} [[u_3]]^2 = \frac{\sigma_{13}^2}{2k_{13}^0} + \frac{\sigma_{23}^2}{2k_{23}^0} + \frac{\sigma_{33}^2}{2k_{33}^0} \quad (1.30)$$

où les  $\sigma_{i3}$  sont les contraintes dans la base de l'interface, et les  $k_{i3}^0$  sont les paramètres matériaux de l'interface saine. Ces paramètres matériaux sont exprimés en fonction des modules de la matrice pure  $E_m$  et  $G_m$  ainsi que de l'épaisseur de l'interface  $e$  :

$$k_{13}^0 = \frac{G_m}{e}, \quad k_{23}^0 = \frac{G_m}{e}, \quad k_{33}^0 = \frac{E_m}{e} \quad (1.31)$$

Le modèle d'interface permet de prendre en compte les dégradations intralaminaires par l'intermédiaire de trois variables d'endommagement introduites pour traduire les diminutions des modules de rigidité. La variable  $d_{33}$  est associée à un mode d'ouverture aussi appelé mode I, elle n'est active que lorsque la fissure est ouverte ( $[\sigma_{33}]_+ = 1$ ). Les variables  $d_{13}$  et  $d_{23}$  sont associées à des modes de cisaillement, ou mode II. L'énergie de déformation surfacique s'écrit donc :

$$e_d = \frac{\sigma_{13}^2}{2k_{13}^0 (1 - d_{13})} + \frac{\sigma_{23}^2}{2k_{23}^0 (1 - d_{23})} + \frac{\sigma_{33}^2}{2k_{33}^0 (1 - [\sigma_{33}]_+ d_{33})} \quad (1.32)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement s'écrivent :

$$Y_{d_{13}} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{13}} \right|_{\sigma_{13}} = \frac{\sigma_{13}^2}{2k_{13}^0 (1 - d_{13})^2} \quad (1.33)$$

$$Y_{d_{23}} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{23}} \right|_{\sigma_{23}} = \frac{\sigma_{23}^2}{2k_{23}^0 (1 - d_{23})^2} \quad (1.34)$$

$$Y_{d_{33}} = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d_{33}} \right|_{\sigma_{33}} = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2k_{33}^0 (1 - d_{33})^2} \quad (1.35)$$

Il reste alors à définir les lois d'évolutions reliant ces forces thermodynamiques aux variables d'endommagement. Dans [Allix et Corigliano, 1996] le choix est d'utiliser une loi d'évolution « isotrope » de l'endommagement gouvernée par une unique force d'endommagement équivalente (1.36).

$$Y_{eq} = ((Y_{d_{33}})^\alpha + (\gamma_1 Y_{d_{13}})^\alpha + (\gamma_2 Y_{d_{23}})^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.36)$$

$$w = \left( \frac{n}{n+1} \frac{Y_{eq}}{Y_c} \right)^n \quad (1.37)$$

$$d_{13} = d_{23} = d_{33} = \begin{cases} w & \text{si } d_{i3} < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.38)$$

tout en respectant le Second Principe de la Thermodynamique qui impose que l'endommagement ne peut que croître :

$$\dot{d}_{13} \geq 0 \quad , \quad \dot{d}_{23} \geq 0 \quad , \quad \dot{d}_{33} \geq 0 \quad (1.39)$$

Les six paramètres  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\alpha$ ,  $Y_c$  et  $n$  sont identifiés expérimentalement par des essais DCB, ENF et MMF [Allix *et al.*, 1998].

## 2.5 Méso-modèle amélioré - Pont entre micromécanique et mésomécanique

Les travaux de Ladevèze, Lubineau et Marsal [Ladevèze et Lubineau, 2002, Ladevèze et Lubineau, 2003b, Ladevèze et Lubineau, 2003a, Ladevèze *et al.*, 2006] ont permis de réaliser un pont relativement complet entre l'approche micromécanique, qui quantifie la dégradation via des indicateurs physiques (taux de microfissuration, taux de délaminage), et l'approche de type méso-modèle, basée sur la théorie de l'endommagement.

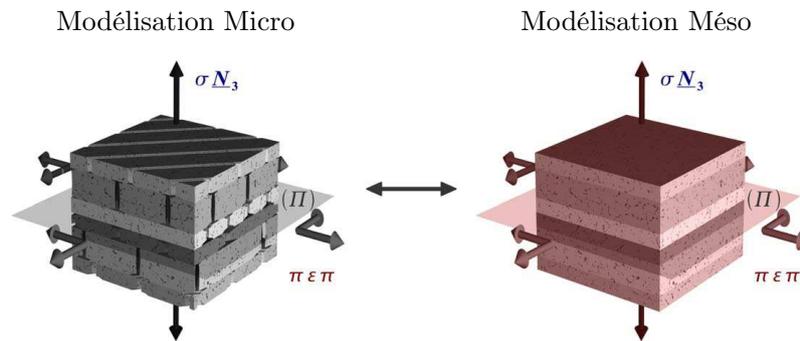


FIGURE 1.7 – Equivalence énergétique entre micromécanique et mésomécanique [Ladevèze *et al.*, 2006]

Ce pont consiste à réaliser une homogénéisation au moyen d'une équivalence énergétique. L'énergie potentielle est déterminée pour une cellule élémentaire microfissurée et une cellule homogène endommagée (FIG. 1.7). On cherche alors à résoudre deux problèmes, l'un associé à l'échelle microscopique et l'autre associé à l'échelle mésoscopique. On en déduit alors des lois reliant les quantités discrètes définissant le réseau de microfissures aux variables d'endommagement continues.

La version améliorée du méso-modèle intègre de nouvelles variables d'endommagement. Leur évolution est pilotée par l'évolution du taux de microfissuration qui caractérise de façon continue le réseau de microfissures transverses discrètes présent dans la structure. Ce modèle apporte une amélioration qui permet de traiter le cas des structures contenant un réseau de fissures globalement périodiques.

Une implémentation a été réalisée dans le code industriel Abaqus. Des résultats de ce modèle, limités au cas intralaminare, peuvent être trouvés dans [Lubineau et Ladevèze, 2008], pour le cas d'une plaque trouée. L'information qu'apporte cette amélioration du modèle sur le taux de microfissuration dans le pli à 90° est pertinente.

Le modèle d'interface profite de ces améliorations et prend en compte le couplage de son comportement avec celui du pli en utilisant le taux de microfissuration des plis

adjacents. On trouvera prochainement un descriptif de la loi de couplage entre les deux méso-constituants dans [Ladevèze *et al.*, ].

### 3 Limites du mésomodèle

Tant que les niveaux d'endommagement restent raisonnables (inférieurs à 0.5 pour le pli), le mésomodèle donne des résultats qui sont pertinents et en accord avec l'expérience. Il permet donc d'obtenir une réponse globale de la structure ainsi que la position et le niveau des dégradations dans celle-ci. Il met en lumière les mécanismes de ruine complexes avec reprise de charge par d'autres plis.

Cependant, au-delà de ces niveaux d'endommagement pour le pli, le modèle présente une dépendance au maillage intrinsèque à la mécanique de l'endommagement sur laquelle il est basé. Cette dépendance au maillage est aussi caractérisée par une mauvaise estimation de l'énergie dissipée. L'ajout de l'effet retard, qui fait partie du mésomodèle standard, a permis de rendre les simulations indépendantes du maillage choisi, mais la question de l'énergie dissipée n'est pas résolue dans le cas d'un chargement quasi-statique.

La version améliorée du mésomodèle montre aussi ses limites. Elle ne permet pas de représenter une unique fissure transverse qui se propagerait comme on peut le voir pour le splitting dans les cas de plaques trouées ou entaillées.

Le modèle micro [Violeau *et al.*, 2009, Trovalet, 2011] qui intègre les micro-fissures transverses et le délaminage de façon discrète fournit d'excellents résultats mais ne peut pas s'appliquer à des structures de grande taille. En effet, la puissance de calcul nécessaire pour le solveur linéaire laisse hors de portée ce genre de structures. La simulation numérique d'éprouvettes telles que les plaques trouées fixe une limite de taille à l'utilisation du modèle micro. Au delà une modélisation multi-échelle serait nécessaire.

On se propose, en utilisant la version standard du mésomodèle, de travailler sur l'effet retard afin qu'il donne une solution pertinente au regard de l'énergie dissipée pour la simulation de la propagation d'une fissure transverse dans le pli. Néanmoins, la fissure, zone dégradée ne permettant plus de transmettre de contrainte, présente des difficultés numériques de traitement. Une attention toute particulière doit être portée pour prendre en compte la valeur de l'endommagement est  $d = 1$ , caractéristique de cette zone fissurée.



## Chapitre 2

# Utilisation d'un modèle d'endommagement pour simuler l'évolution des dégradations jusqu'à la ruine

*On présente ici la méthode de Newton qu'il faut utiliser pour prendre correctement en compte la valeur d'endommagement critique  $d = 1$  correspondant à la perte complète de la capacité de la matière à transmettre les efforts. La simulation d'un essai DCB permet de mettre en lumière la difficulté de la prise en compte de cette valeur et ses conséquences.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Mise en évidence des difficultés numériques sur la simulation du délaminage en mode I . . . . .</b>	<b>22</b>
1.1	Description du phénomène et présentation de l'éprouvette et de l'essai	22
1.2	Modélisation unidimensionnelle et mise en lumière du phénomène .	23
<b>2</b>	<b>Gestion des grandes valeurs de déformations . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1	Présentation de la méthode de Newton modifié . . . . .	25
2.2	Résultats de la méthode . . . . .	26
2.3	Difficultés numériques associés aux hauts niveaux d'endommagement	26
<b>3</b>	<b>Extension au cas tridimensionnel . . . . .</b>	<b>28</b>

---

# 1 Mise en évidence des difficultés numériques sur la simulation du délaminage en mode I

## 1.1 Description du phénomène et présentation de l'éprouvette et de l'essai

Lors de simulations, les fortes valeurs des variables d'endommagement (proches de la valeur 1) posent des problèmes numériques [Peerlings *et al.*, 2002]. Pour une valeur d'endommagement de 1, la rigidité du matériau dans la direction associée à la variable d'endommagement est nulle. Ceci introduit un pivot nul dans le système matriciel à résoudre. Il est alors courant de définir une valeur maximale de variable d'endommagement légèrement plus faible que 1 pour rendre le système matriciel inversible numériquement (généralement 0.999999).

Cette modification n'a qu'un impact limité sur la solution car la contrainte qui transite par cet élément complètement endommagé est très faible par rapport à l'ordre de grandeur de la contrainte dans le reste de la structure. Cependant, dans les cas pathologiques où la zone complètement endommagée subit une déformation très importante, la contrainte dans ces éléments ne peut plus être négligée.

Le cas de l'éprouvette DCB (Double Cantilever Beam), permet de mettre facilement en lumière ce phénomène numérique. Cette éprouvette permet de faire propager une fissure de délaminage en mode I entre les plis en appliquant un saut de déplacement imposé  $[[u_d]]$  entre les deux bras de l'éprouvette (FIG. 2.1). Cet essai est en général utilisé afin de déterminer expérimentalement le taux de restitution d'énergie en mode d'ouverture, pour ensuite utiliser la valeur dans les modèles.

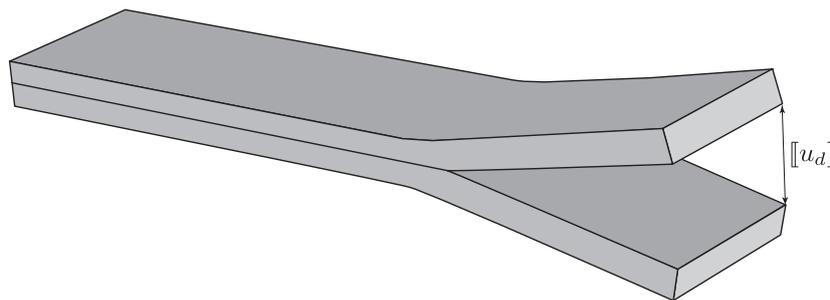


FIGURE 2.1 – Description de l'éprouvette DCB

On se basera sur un essai effectué par EADS pour le matériau T700/M21. L'éprouvette a une largeur de 25 mm, une épaisseur de 4.4 mm pour un empilement  $[0_{32}]$ . La pré-fissure obtenue en laissant un film de Teflon mesure 37.27 mm. Le module d'Young dans la direction des fibres est de 116470 MPa.

## 1.2 Modélisation unidimensionnelle et mise en lumière du phénomène

En se basant sur les travaux d'Allix, Ladevèze et Corigliano [Allix *et al.*, 1995], on choisit d'utiliser une modélisation unidimensionnelle de type poutre Euler-Bernoulli. Grâce à la symétrie, on ne traite qu'un seul des deux bras. L'interface centrale est modélisée par un appui élastique endommageable de raideur linéique initiale  $5.79 \cdot 10^5 \text{ N.mm}^{-3}$  correspondant au modèle d'interface présenté au chapitre précédent, avec  $Y_c = 0.275 \text{ N.mm}^{-1}$  et  $n = 0.5$ .

Cette modélisation fait apparaître des oscillations du saut de déplacement  $[[u_3]]$  et du champ de contrainte  $\sigma_{33}$  dans l'interface. Celles-ci sont évanescentes en partant de la pointe de fissure. Leur longueur d'onde peut être calculée analytiquement dans le cas non endommageable. On adapte donc la taille de maille afin de prendre correctement en compte ce phénomène dans la « process-zone » (FIG. 2.2).

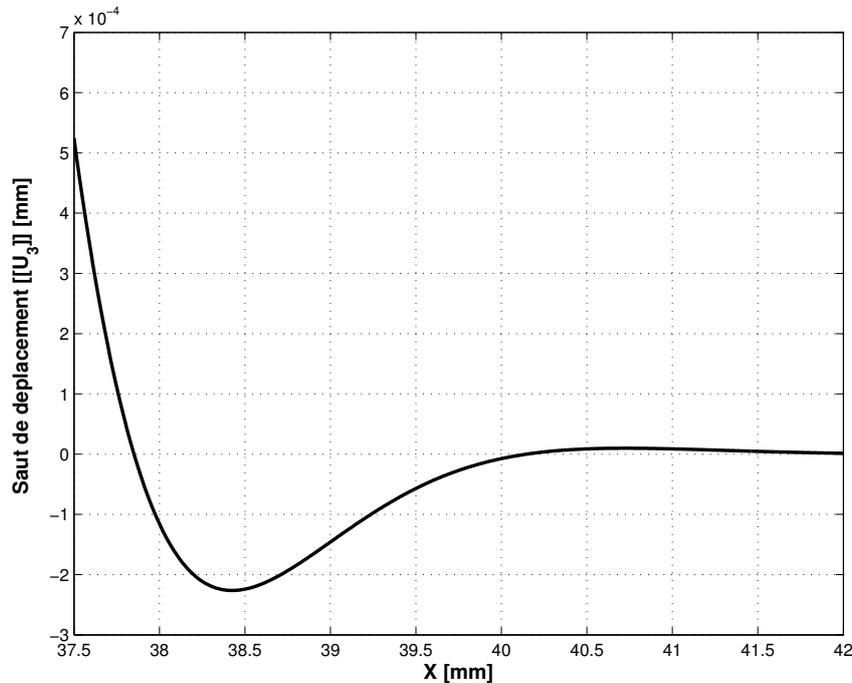


FIGURE 2.2 – Saut de déplacement de l'interface dans la « process-zone » pour une pointe de fissure en  $x = 37,27 \text{ mm}$

La propagation de fissure est stable dans cette éprouvette. La mécanique de la rupture nous permet de déterminer la courbe de réponse force-déplacement théorique lors de la propagation de fissure pour un taux de restitution d'énergie  $G_c$  fixé ( $G_c = Y_c$ ) :

$$F_{th} = \sqrt{\frac{2\sqrt{l^3 G_c^3 EI}}{3[[u_3]]}} \quad (2.1)$$

On utilise une valeur maximale d'endommagement de 0.999999 pour mettre en lumière le problème mentionné par Peerlings [Peerlings *et al.*, 2002]. On trace la courbe force-déplacement obtenue en trait fort, la courbe théorique en trait pointillé, et des étoiles pour les points venant des essais EADS (FIG. 2.3).

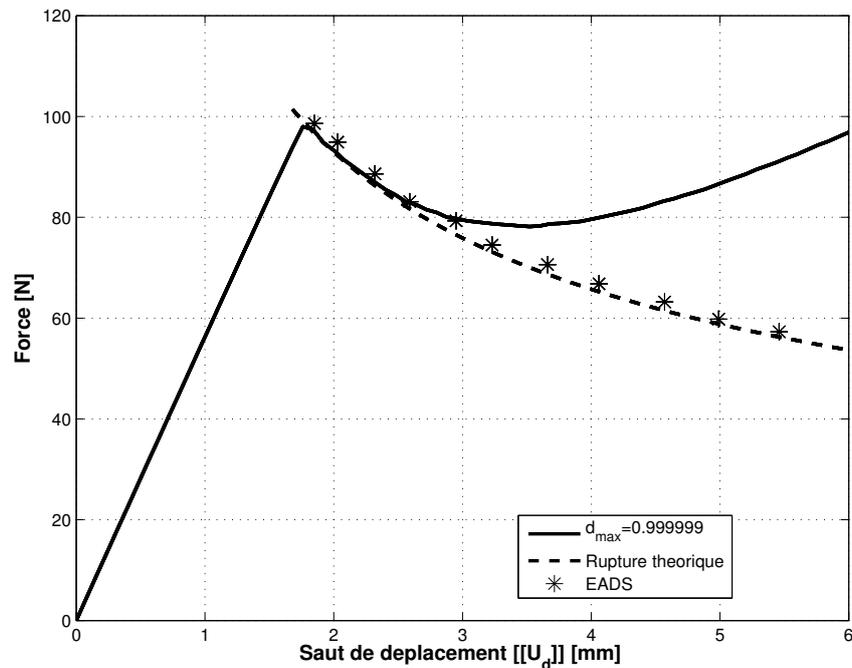


FIGURE 2.3 – Force en fonction du saut de déplacement  $[[u_d]]$

On remarque que la courbe force-déplacement obtenue par le modèle 1D donne un résultat proche de la courbe théorique pour  $[[u_d]] < 2.5$ . Au-delà, le résultat obtenu s'écarte pour tendre vers une asymptote correspondant à une réponse élastique. Ce phénomène est aussi visible sur le tracé de la longueur de fissure en fonction du saut de déplacement imposé (FIG. 2.4). Pour  $[[u_d]] > 2.5$ , la longueur de fissure obtenue avec une valeur d'endommagement maximale de 0.999999 est sous-estimée en comparaison des résultats expérimentaux et théoriques.

Les éléments d'interface déjà cassés continuent d'emmagasiner de l'énergie de déformation à cause de cette valeur maximale d'endommagement différente de 1. Avec l'accroissement de la longueur de fissure, le saut de déplacement entre les deux bras augmente. La déformation des éléments d'interface déjà cassés devient très importante. L'énergie de déformation emmagasinée dans ces éléments devient alors du même ordre de grandeur que l'énergie de déformation du reste de la structure. Ceci a pour conséquence un ralentissement tendant vers un arrêt de la propagation de la fissure.

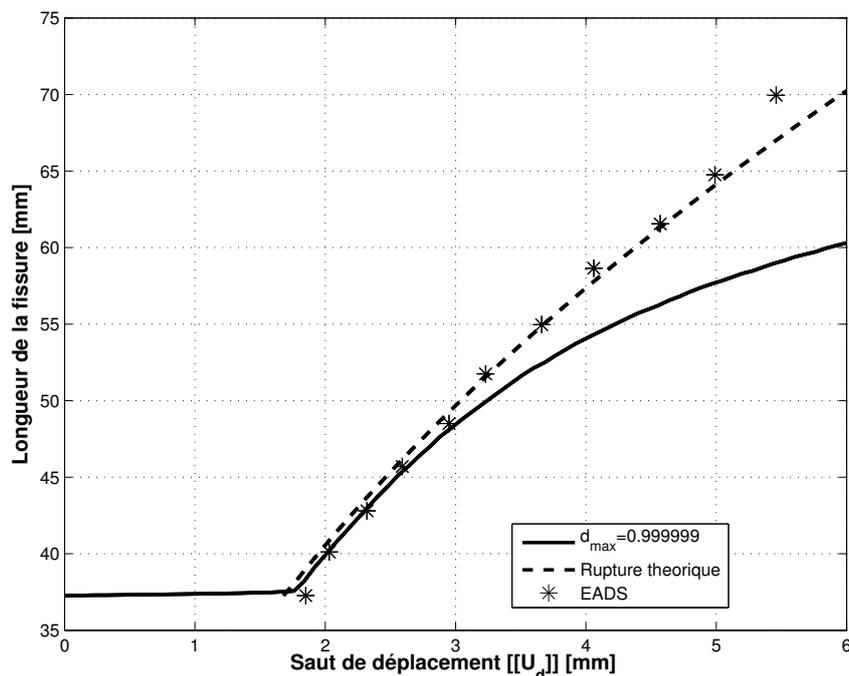


FIGURE 2.4 – Longueur de fissure en fonction du saut de déplacement  $[[u_d]]$

## 2 Gestion des grandes valeurs de déformations

### 2.1 Présentation de la méthode de Newton modifié

Afin de pallier ce problème, on propose de revoir la méthode de Newton implémentée. On cherche à résoudre :

$$f(\underline{u}) = \underline{0} \quad (2.2)$$

avec

$$f(\underline{u}) = K \cdot \underline{u} - \underline{f} \quad (2.3)$$

La méthode de Newton revient à calculer itérativement  $\underline{u}^{i+1} = \underline{\Delta u}^{i+1} + \underline{u}^i$  tel que :

$$K_T^i \cdot \underline{\Delta u}^{i+1} = \underline{r}^i \quad (2.4)$$

pour

$$\underline{r}^i = \underline{f} - K^i \cdot \underline{u}^i \quad (2.5)$$

La méthode que nous utilisons est un Newton modifié, pour lequel la direction choisie est la raideur élastique du modèle une fois l'endommagement mis à jour. Ce choix était justifié par la capacité de cette méthode à passer le pic d'effort caractérisé par une tangente nulle. On n'utilise donc pas la raideur tangente  $K_T$  mais la raideur élastique  $K_E$ .

Le système à résoudre nécessite que  $K_E$  soit inversible. Il est alors courant d'utiliser une valeur d'endommagement légèrement inférieure à 1 qui permet de conserver une

certaine raideur. Or si l'on utilise ce même opérateur pour calculer le résidu par simplicité, on commet une petite erreur. A priori, les points de Gauss complètement endommagés servant à l'intégration et l'assemblage de l'opérateur  $K_E$  n'emmagasinent que très peu d'énergie de déformation, et cette erreur est acceptable ( $\llbracket u_d \rrbracket < 2.5$ , FIG. 2.3). Cependant, lorsque le saut de déplacement  $\llbracket u_3 \rrbracket$  de ces points de Gauss devient plus important, l'erreur dans le calcul du résidu  $\underline{r}$  n'est plus négligeable.

Il convient donc de calculer le résidu  $\underline{r}$  en utilisant la raideur exacte  $K_R$  associée aux points de Gauss considérés, pour lesquels la valeur maximale d'endommagement est celle définie dans le modèle ( $d_{max}^R = 1$ ). L'opérateur  $K_E$  devant rester inversible, une valeur maximale d'endommagement sera utilisée pour lui seul ( $d_{max}^E = 0.999999$ ). On résoudra alors itérativement :

$$K_E^i \cdot \underline{\Delta u}^{i+1} = \underline{r}^i \quad (2.6)$$

avec

$$\underline{r}^i = \underline{f} - K_R^i \cdot \underline{u}^i \quad (2.7)$$

## 2.2 Résultats de la méthode

En utilisant cette version de la méthode de Newton modifiée, on reprend le cas de l'éprouvette DCB traité précédemment, pour lequel la valeur d'endommagement maximale est maintenant prise égale à 1. La courbe de réponse force-déplacement obtenue est maintenant très proche de la courbe théorique associée à la mécanique de la rupture, et ce quelque soit le saut de déplacement imposé  $\llbracket u_d \rrbracket$  (FIG. 2.5).

Il en est de même pour le tracé de la longueur de fissure en fonction du saut de déplacement imposé (FIG. 2.6). Le fait de prendre correctement en compte la valeur d'endommagement maximale permet donc de simuler correctement l'avancée de la fissure, et donne des résultats qui concordent avec l'expérience réalisée par EADS.

Cette méthode permet donc d'éviter d'opter pour une méthode communément utilisée : la suppression des éléments endommagés (qui n'est pas implantée pour tous les types d'éléments et tous les comportements matériaux dans les codes industriels). Ce faisant, on conserve le caractère unilatéral du comportement, et les chargements complexes qui imposeraient une refermeture de la fissure peuvent être simulés car les éléments sont toujours présents au cours de la simulation.

## 2.3 Difficultés numériques associés aux hauts niveaux d'endommagement

La vitesse d'avancée du front de fissure en fonction du saut de déplacement imposé est importante. Plusieurs éléments peuvent être complètement endommagés entre deux pas de chargement, et donc le chargement local change fortement entre deux itérations, d'autant plus en prenant en compte les oscillations du saut de déplacement de l'interface et du champ de contrainte. Le problème est donc fortement non-linéaire. On comprend donc

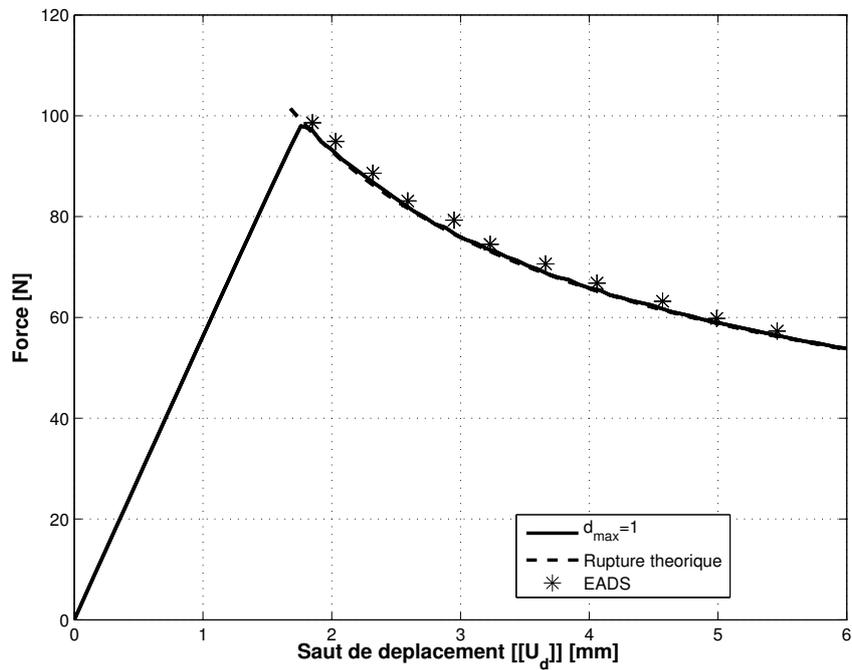


FIGURE 2.5 – Force en fonction du saut de déplacement  $[[u_d]]$

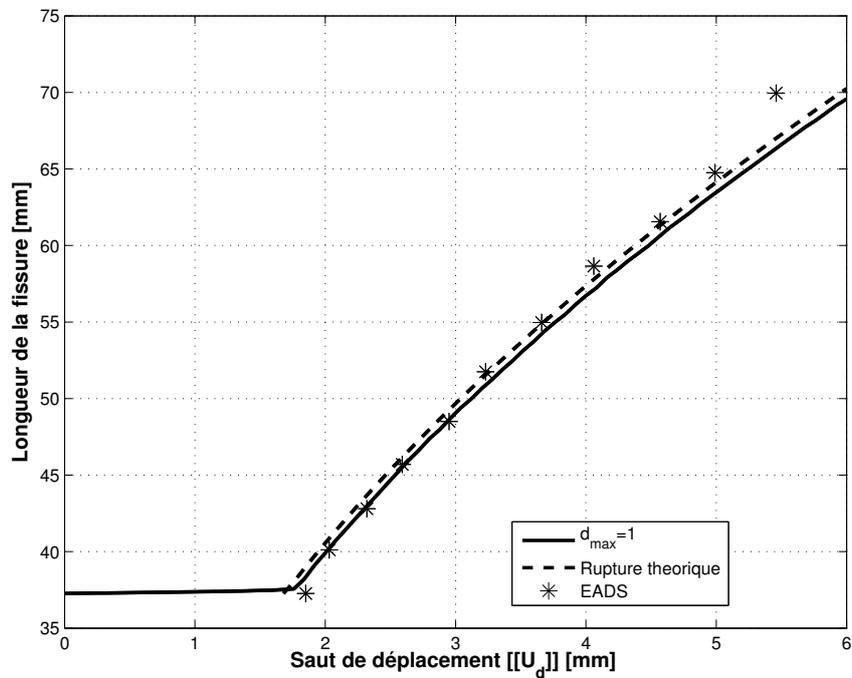


FIGURE 2.6 – Longueur de fissure en fonction du saut de déplacement  $[[u_d]]$

que la simulation de la propagation du délaminage dans l'éprouvette DCB est numériquement difficile. Ceci s'observe sur le nombre d'itérations de la méthode de Newton, qui dépasse souvent les 300 itérations pour un pas de chargement (FIG. 2.7).

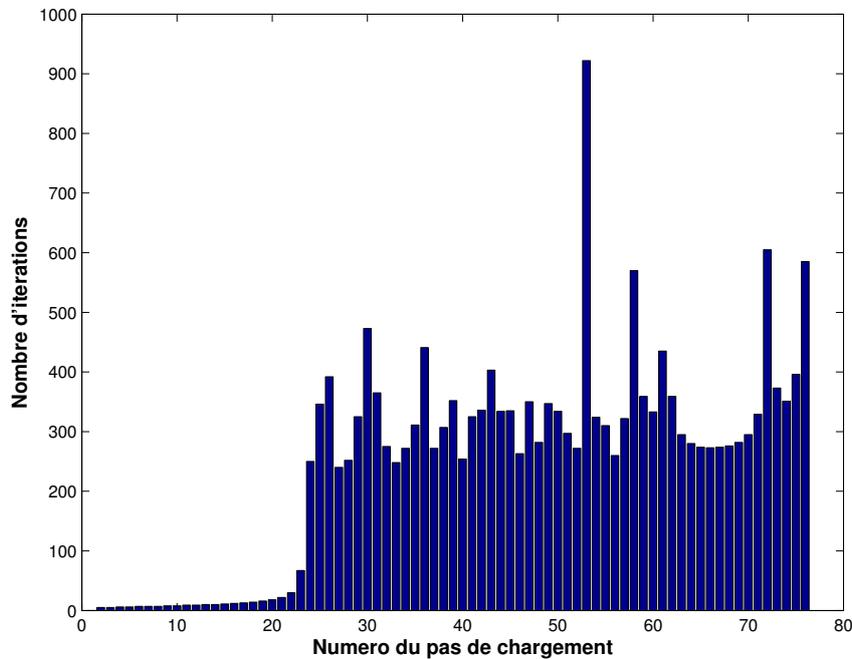


FIGURE 2.7 – Nombre d'itérations de la méthode de Newton en fonction du numéro du pas de chargement

Le modèle de comportement endommageable amène donc des difficultés dues au fait que l'endommagement de parties de structure change le chargement local et le transit des flux d'efforts au court du chargement. Une attention particulière doit donc être portée au choix du nombre maximal d'itérations de la méthode de Newton utilisé dans les codes de calculs pour définir la non-convergence de la solution.

### 3 Extension au cas tridimensionnel

Bien que l'exemple d'une éprouvette DCB ne fasse pas apparaître de pivot nul dans l'opérateur de rigidité, car le modèle d'endommagement est utilisé sur une entité surfacique, l'implémentation du cas tridimensionnel nécessite la gestion correcte de la valeur d'endommagement  $d = 1$ .

Le passage de l'appui élastique au cas tridimensionnel peut ne pas être aisé. Le calcul du résidu  $\underline{r}$  de la méthode de Newton fait intervenir  $K_R \cdot \underline{u}$ . Ce dernier terme est souvent calculé à partir du champ de contrainte aux points de Gauss. Ceci implique que le champ de contrainte doit être calculé exactement, en prenant en compte la valeur d'endommagement maximale 1.

Cette contrainte est calculée à partir du champ de déformation  $\varepsilon$  et de l'opérateur Hooke. Or pour certains modèles d'endommagement, l'opérateur de Hooke est calculé numériquement en inversant l'opérateur de souplesse dans lequel apparaît les différentes variables d'endommagement. En général, si une variable d'endommagement est égale à 1, l'opérateur de souplesse tend vers  $+\infty$ , et il n'est alors plus possible de l'inverser pour obtenir l'opérateur de Hooke.

Pour éviter cette singularité, il est commun de prendre une valeur d'endommagement maximale très proche de 1 permettant de calculer l'opérateur de Hooke pour obtenir la contrainte. Ce faisant, on revient au problème de départ, c'est à dire un mauvais calcul du résidu de la méthode de Newton.

La solution consiste ici à inverser analytiquement l'opérateur de souplesse pour avoir une expression analytique de l'opérateur de Hooke. Une valeur d'endommagement égale à 1 dans cet opérateur implique alors qu'au moins une de ses composantes est égale à zéro. De cette façon, la contrainte peut être nulle et il n'y a plus de contribution à la rigidité dans la direction associée à la variable d'endommagement lorsqu'un point de Gauss est complètement endommagé.

On vient donc laisser une rigidité très faible pour la résolution du système linéaire, tout en prenant correctement en compte les points de Gauss complètement endommagés dans le calcul du résidu. Cependant, si plusieurs éléments accolés sont complètement endommagés, il peut y avoir des oscillations numériques au cours des itérations. La méthode de Newton modifiée doit donc être utilisée avec de la relaxation pour filtrer ces modes oscillants. Tout ceci augmente le temps de simulation. Il est conseillé d'utiliser cette variante uniquement lorsque des éléments très fortement endommagés emmagasinent une quantité d'énergie de déformation qui n'est plus négligeable.



## **Deuxième partie**

# **Gestion de l'énergie dissipée avec un modèle d'endommagement à effet retard**



# Chapitre 3

## Gestion de la localisation

*Ce chapitre traite du phénomène de localisation, des problèmes mis en avant par les modèles continus et de leurs implications dans les implémentations numériques. Une synthèse bibliographique est proposée pour les limiteurs de localisations usuels. On traite enfin plus particulièrement le modèle « à effet retard » dit aussi « à taux limité » qui est utilisé dans toute la suite de ce travail.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation du phénomène de localisation</b>	<b>35</b>
1.1	Observation expérimentales	35
1.2	Problème d'unicité et de stabilité	35
1.3	Illustration sur une barre en traction	38
<b>2</b>	<b>Limiteurs de localisation</b>	<b>42</b>
2.1	Modèles à conservation de l'énergie de fissuration	42
2.2	Modèles continus généralisés basés sur les modèles de Cosserat	44
2.3	Modèles non locaux	45
2.4	Modèles avec effet de vitesse	47
<b>3</b>	<b>Modèle choisi : modèle à taux limité ou à effet retard</b>	<b>47</b>
3.1	Présentation	47
3.2	Unicité et stabilité	48
3.3	Exemples d'utilisation unidimensionnel	49

3.4	Bilan et limites . . . . .	57
-----	----------------------------	----

---

# 1 Présentation du phénomène de localisation

## 1.1 Observation expérimentales

Peu avant la rupture d'une éprouvette, on observe fréquemment l'apparition de zones de faible épaisseur dans lesquelles se concentrent les déformations. Les conditions aux limites, le chargement et les défauts ou hétérogénéités du matériau conditionnent les endroits où apparaissent ces zones. Dans le cas de matériaux métalliques élasto-plastiques ou des milieux granulaires, ces zones sont appelées bandes de cisaillement. Dans le cas des matériaux fragiles comme les matériaux composites, les bétons ou les roches, on parle de bandes de localisation. Dans ce dernier cas, la phase où la bande de localisation apparaît correspond à la coalescence des micro-fissures, ce qui aboutit à la formation d'une macro-fissure responsable de la ruine de l'éprouvette.



**FIGURE 3.1** – Bande de cisaillement dans un sable lors d'un essai triaxial - [Colliat-Dangus, 1986] d'après [Desrues et Chambon, 2002]

Pour des réalisations différentes d'une même expérience, on observe des solutions différentes, tant pour le champ de déplacement que pour le lieu de rupture. L'exemple type étant une éprouvette de traction pour laquelle la position de la fissure dans la zone utile n'est pas la même pour chaque essai.

La localisation des déformations se caractérise par un passage d'un état de déformation homogène vers un état localisé. Les déformations se concentrent dans des bandes de faible épaisseur alors que dans le reste de l'éprouvette elles évoluent peu, voire diminuent dans certains cas. Un problème de stabilité apparaît donc au moment où l'état localisé survient.

## 1.2 Problème d'unicité et de stabilité

Les modèles utilisés pour prendre en compte les dégradations reproduisent eux aussi le phénomène de localisation. Celui-ci apparaît car la solution du problème n'est pas unique

et présente des instabilités. On cherche donc ici à recenser les conditions d'unicité et de stabilité utilisées généralement dans la littérature.

### 1.2.1 Condition d'unicité de la solution

On peut traiter la problématique de l'unicité de la solution en faisant un raisonnement considérant qu'il existe deux solutions à un même problème. On utilise une approche en vitesse qui revient à écrire, sous l'hypothèse des petites perturbations, le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \underline{f}_d = 0 & \text{équilibre dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{u}^t}{\partial x} \right) & \\ \underline{\dot{u}} = \underline{\dot{u}}_d & \text{sur } \partial\Omega_U \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \underline{n} = \underline{F}_d & \text{sur } \partial\Omega_F \end{cases} \quad (3.1)$$

Une solution du problème vérifie donc, quel que soit  $\underline{v}^*$  cinématiquement admissible à zéro :

$$\int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}^*) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \cdot \underline{v}^* \, dS + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{v}^* \, d\Omega \quad (3.2)$$

Supposons que le problème puisse avoir deux solutions distinctes notées  $\cdot^1$  et  $\cdot^2$ . En faisant la soustraction des équations 3.2 pour chaque solution soumise au même chargement virtuel, on obtient :

$$\int_{\Omega} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^1 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^2) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v}^*) \, d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

En choisissant le champ de vitesse virtuel  $\underline{v}^*$  tel que  $\underline{v}^* = \underline{\dot{u}}^1 - \underline{\dot{u}}^2$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^1 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^2) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}^1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}^2)) \, d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Il y a donc perte d'unicité si :

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

pour  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ , où  $\Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^1 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^2$  et  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}^1) - \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\dot{u}}^2)$ .

Dans [Hill, 1958], Hill propose la condition suffisante d'unicité suivante :

$$I(\Delta \underline{\dot{u}}) = \int_{\Omega} \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega > 0 \quad (3.6)$$

En considérant un solide linéaire de comparaison, pour lequel le matériau se charge uniformément avec le module tangent  $H$  (la décharge élastique n'est pas permise) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = H : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.7)$$

Hill propose une condition plus-que-suffisante d'unicité dans [Hill, 1958] :

$$H(\Delta \underline{u}) = \int_{\Omega} \Delta \dot{\epsilon} : H : \Delta \dot{\epsilon} d\Omega > 0 \quad (3.8)$$

Pour le cas d'un solide linéaire de comparaison, une condition locale suffisante d'unicité est alors :

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} > 0 \quad (3.9)$$

Cette condition est aussi appelée condition de positivité du travail du second ordre [Forest et Lorentz, 2004].

En considérant le comportement tangent (3.7), ceci est équivalent à imposer au tenseur du quatrième ordre  $H^s$  d'être défini positif, où  $H^s$  est la partie positive de  $H$  telle que :

$$H_{ijkl}^s = \frac{1}{2} (H_{ijkl} + H_{klij}) \quad (3.10)$$

Une condition nécessaire de perte d'unicité locale est donc :

$$\det(H^s) = 0 \quad (3.11)$$

La littérature propose donc plusieurs conditions d'unicité. Les formes intégrales de Hill sont difficilement utilisables. La condition de positivité du travail (3.9) est donc généralement préférée car elle est locale. Elle est cependant plus conservative que la condition de Hill, et la bifurcation peut n'apparaître que plus tard.

### 1.2.2 Condition de stabilité

D'après [de Borst *et al.*, 1993], le phénomène de localisation est généré par une instabilité au niveau du matériau. Celle-ci a lieu lorsque le critère de stabilité défini dans [Hill, 1958, Maier et Hueckel, 1979] est violé, c'est à dire lorsque la relation suivante n'est plus vérifiée :

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} > 0 \quad (3.12)$$

Ce critère est équivalent au critère de perte d'unicité défini par

$$\dot{\epsilon} : H : \dot{\epsilon} > 0 \quad (3.13)$$

L'instabilité matérielle est donc associée au fait que l'opérateur tangent  $H$  n'est plus défini positif. Elle peut alors mener à une instabilité structurelle pour laquelle le critère stabilité de Hill [Hill, 1958] est le suivant :

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma} : \dot{\epsilon} d\Omega > 0 \quad (3.14)$$

Une méthode pratique, généralement utilisée pour déterminer le moment d'apparition d'une bande de localisation ou de cisaillement consiste à raisonner en considérant un mode localisé. Le saut du gradient des vitesses associé au mode localisé vérifie :

$$\llbracket \underline{\underline{\text{grad}}}(v) \rrbracket = \underline{m} \otimes \underline{n} \quad (3.15)$$

où  $\underline{n}$  est la normale à la surface de discontinuité et  $\underline{m}$  est un vecteur non nul . Si  $\underline{m}$  est colinéaire à  $\underline{n}$ , on parle de mode d'ouverture ; s'il lui est orthogonal, il s'agit d'une bande de cisaillement.

Le saut du taux de déformation associé au mode localisé vérifie en notations indicielles :

$$\llbracket \dot{\epsilon}_{ij} \rrbracket = \frac{1}{2} (n_i m_j + n_j m_i) \quad (3.16)$$

Les conditions de compatibilité du taux de contrainte à travers la surface de discontinuité de normale  $\underline{n}$  s'écrivent en notations indicielles :

$$n_i \llbracket \dot{\sigma}_{ij} \rrbracket = 0 \quad (3.17)$$

En considérant le solide linéaire de comparaison, la relation reliant le taux de déformation au taux de contrainte fait apparaître le module tangent  $H$  tel que :

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.18)$$

En combinant les équations (3.17), (3.18) et (3.16), et en utilisant la petite symétrie  $H_{ijkl} = H_{ijlk}$ , on obtient la condition d'apparition d'une bande de localisation :

$$n_i H_{ijkl} m_k n_l = 0 \quad (3.19)$$

où  $n_i H_{ijkl} n_l$  est le tenseur acoustique pour le solide linéaire de comparaison.

La condition est équivalente à la condition de perte d'ellipticité des équations d'équilibres :

$$\det(\underline{n} H \underline{n}) = 0 \quad (3.20)$$

Si le tenseur acoustique est singulier, la condition de stabilité (3.12) n'est plus vérifiée. De plus, dans le cas du solide linéaire de comparaison, la condition d'unicité (3.8) n'est plus vérifiée non-plus.

### 1.3 Illustration sur une barre en traction

Considérons une poutre de section constante  $S$  et de longueur  $L$  soumise à un déplacement imposé en  $x = L$  et encadrée en  $x = 0$  comme schématisé sur la figure (FIG. 3.2).

Soit  $d$  la variable d'endommagement et  $Y$  sa force thermodynamique associée. L'évolution de l'endommagement est pilotée par  $Y$  et ne peut que croître ( $\dot{d} \geq 0$ ). La variable d'endommagement est bornée ( $d \in [0; 1]$ ). Le comportement est défini par les équations suivantes :

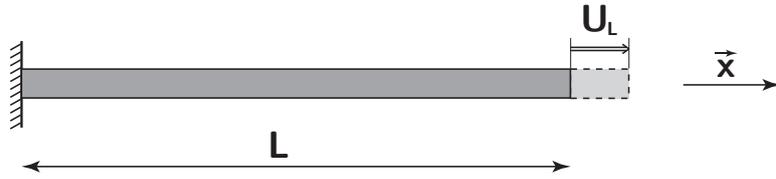


FIGURE 3.2 – Barre en traction

$$\begin{cases} e_d = \frac{1}{2} (1 - d) E \varepsilon \varepsilon \\ \sigma = \frac{\partial e_d}{\partial \varepsilon} \Big|_d = (1 - d) E \varepsilon \\ Y = - \frac{\partial e_d}{\partial d} \Big|_{\varepsilon} = \frac{1}{2} E \varepsilon \varepsilon \\ d = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} = \frac{\varepsilon \sqrt{\frac{E}{2}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \end{cases} \quad (3.21)$$

en faisant l'hypothèse que la déformation  $\varepsilon$  ne peut être que positive. La figure suivante (FIG. 3.3) permet de visualiser le comportement.

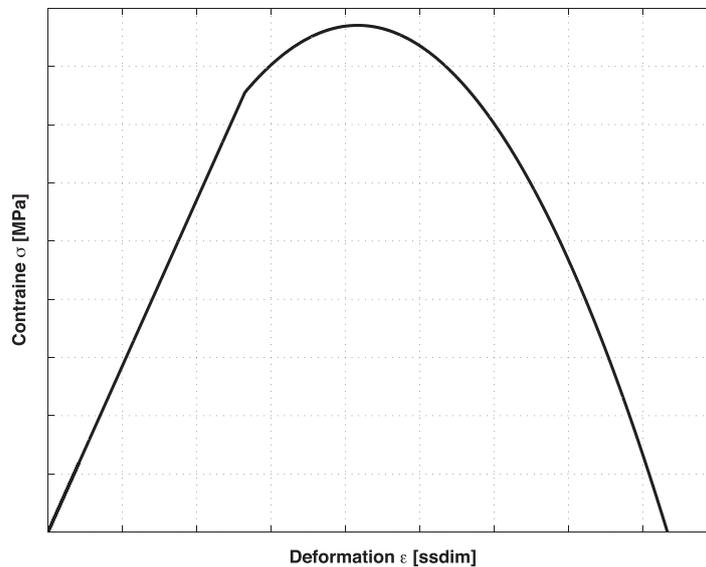


FIGURE 3.3 – Comportement local de la barre

Le reste des équations définissant l'équilibre, la compatibilité et les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = U_L(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

### 1.3.1 Mise en évidence de la perte d'ellipticité des équations

La poutre ayant une section  $S$  constante, le critère de stabilité défini par l'équation (3.12) coïncide avec le critère d'unicité de l'équation (3.9), car toute la poutre est soumise à la même contrainte. Une zone de localisation apparaît donc lorsque :

$$\dot{\sigma} : \dot{\varepsilon} > 0 \quad (3.23)$$

Dans notre cas, on détermine le module tangent par :

$$\frac{d\sigma}{dt} = (1-d)E \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{dd}{dt} E \varepsilon \quad (3.24)$$

$$= \left( 1-d - \frac{\varepsilon \sqrt{\frac{E}{2}}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right) E \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.25)$$

$$H = \frac{\sqrt{Y_c} - \varepsilon \sqrt{\frac{E}{2}}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \quad (3.26)$$

Il existe donc une déformation à partir de laquelle le module tangent n'est plus positif :

$$H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{Y_c}{2E}} \quad (3.27)$$

Ce point correspond au maximum de la courbe contrainte-déformation que l'on peut voir sur la figure (FIG. 3.3). Dans le cas où  $Y_0 = 0$ , la variable  $d$  est égale à 0.5 au moment où il y a perte d'unicité de la solution.

Au delà de cette déformation, la solution n'est plus unique dans la poutre. Une partie de la poutre continue à s'endommager, alors que le reste de la poutre suit une décharge élastique. La longueur de la partie de la poutre qui continue à s'endommager n'est pas définie et il peut donc y avoir une infinité de solutions (FIG. 3.4) comprises entre les deux cas extrêmes :

- toute la poutre continue à s'endommager de façon homogène ;
- seul un point continue de se charger et le reste de la poutre suit une décharge élastique.

De plus, chaque solution  $(\underline{u}, \sigma)$  a une énergie dissipée qui lui est propre. Donc à ce spectre de solutions possibles, il y a un spectre d'énergies dissipées associé.

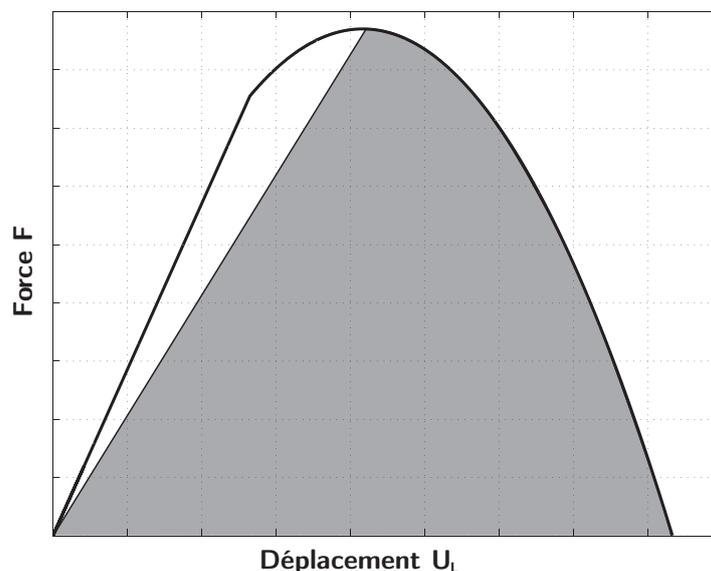


FIGURE 3.4 – Enveloppe de réponses possible de la barre en traction en terme de force-déplacement

### 1.3.2 Non-objectivité de la solution lors de la résolution numérique

Une méthode de résolution numérique généralement admise pour ce genre de problème consiste à utiliser d'une part la méthode des éléments finis associée à une résolution incrémentale et d'autre part une méthode de Newton-Raphson pour gérer la non-linéarité. Jusqu'au « pic » de contrainte, le résultat numérique donne une solution correcte du problème (aux imprécisions numériques près). Au-delà, il n'y a plus unicité. La méthode des éléments finis impose un choix de solution, qui dépend de la discrétisation spatiale, et qui influence donc le résultat.

Une erreur d'arrondi, équivalente à l'ajout d'un défaut dans la poutre, mène alors au phénomène suivant : un seul des éléments de la poutre continue de se charger jusqu'à s'endommager complètement tandis que le reste des éléments se décharge élastiquement depuis le pic de contrainte sans que leur variable d'endommagement ne continue d'évoluer. La position de l'élément qui continue de s'endommager dépend de la position de ce petit défaut. Si aucun défaut n'est rajouté, le solveur définit arbitrairement la position de cet élément sur cette erreur d'arrondi.

Si l'on effectuait deux simulations de ce même problème avec deux tailles de maille différentes pour la discrétisation spatiale tout en imposant un léger défaut au centre de la poutre (module d'Young  $E$  quelque peu inférieur), dans les deux cas, ce serait dans cet élément central, comportant le défaut, que les déformations et l'endommagement se localiseraient. Cependant, l'énergie dissipée serait différente dans les deux cas. L'élément central du maillage le plus grossier dissiperait plus d'énergie que l'élément central du maillage fin, et donc la dissipation totale (en prenant en compte la phase pre-pic) pour

arriver à rupture de la barre serait différente pour les deux maillages. Il en serait de même pour les courbes force-déplacement. En imaginant que l'on fait tendre la taille de maille vers zéro, l'énergie dissipée dans la phase post pic étant proportionnelle à la taille de l'élément contenant le défaut, cette énergie tendrait alors vers zéro. On pourrait donc avoir rupture de la poutre sans dissipation d'énergie après le pic de de contrainte.

## 2 Limiteurs de localisation

Les constatations précédentes confirment que les modèles classiques d'endommagement présentent de sérieuses lacunes. Les conditions de localisation, bien que largement étudiées pour les comportements élasto-plastiques ou endommageables [Bažant et Belytschko, 1985, Ortiz, 1987, Benallal *et al.*, 1993, Rizzi *et al.*, 1995], fournissent seulement des critères définissant le moment où l'on ne peut plus simuler de manière objective le comportement. Dans ce cas, une nouvelle difficulté se présente : doit-on interrompre un calcul lorsque qu'un point de la structure atteint ces critères ?

Au-delà, la solution est très fortement dépendante du maillage, tant de part sa taille de maille, que de son orientation ou du type d'éléments utilisé [Tvergaard et Needleman, 1984, Sluys, 1992, Besson *et al.*, 2001], et il est donc difficile d'obtenir des résultats significatifs.

Le défaut des modèles adoucissants émane du fait que l'énergie dissipée se localise dans une bande dont la largeur tend vers zéro. Dans le cas des bétons, la zone où se concentre l'endommagement, et donc l'énergie dissipée, a une certaine largeur qui est approximativement de la taille de trois agrégats [Bazant et Oh, 1983]. Par conséquent il manque une longueur caractéristique dans le modèle qui permettrait de contrôler le comportement post-pic. Dans le cas d'une résolution numérique par éléments finis, cette longueur est introduite intrinsèquement par la discrétisation et le procédé d'intégration. Ainsi l'énergie dissipée a une certaine valeur qui dépend de la taille de maille. Un changement de maillage implique alors un changement de résultat et donc une perte d'objectivité de la solution.

Afin de régulariser ce problème et ainsi d'obtenir une solution objective, indépendante du maillage, plusieurs familles de limiteurs de localisation ont vu le jour. Ils permettent de traiter la rupture à la même échelle que le reste de la structure tout en restant dans le cadre de la mécanique des milieux continus. D'autres approches, non présentées ici, cherchent à répondre à ce problème en se focalisant à l'échelle de la microstructure, qui de par son hétérogénéité ou son anisotropie guide l'apparition de la discontinuité.

### 2.1 Modèles à conservation de l'énergie de fissuration

Le modèle de Dugdale [Dugdale, 1960] définit une zone plastique en amont de la pointe de fissure. Cette zone plastique permet de faire la transition entre la partie élastique et la vraie fissure (où la contrainte est nulle sur les lèvres) en y imposant une contrainte normale égale la limite d'élasticité  $\sigma_y$ . De façon similaire, Barenblatt [Barenblatt, 1962]

introduit une « process zone », mais dans laquelle la contrainte varie (FIG. 3.5).

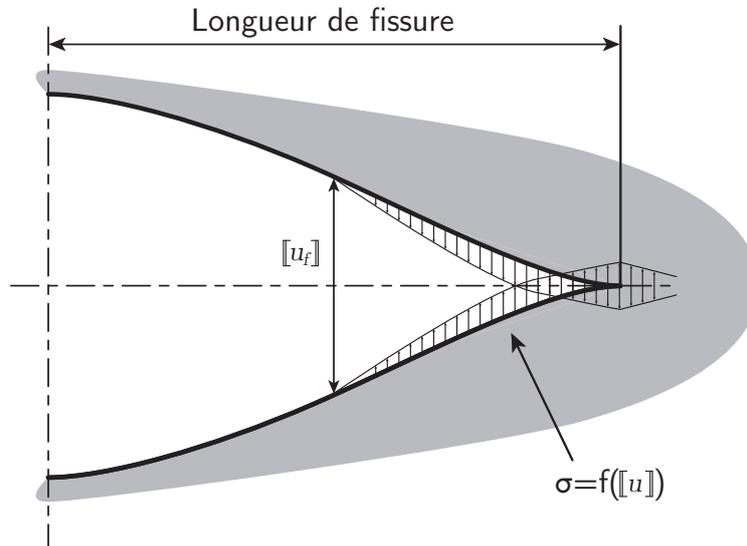


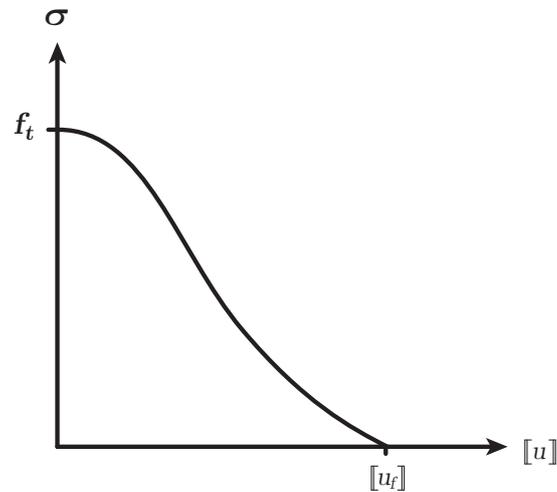
FIGURE 3.5 – Modèle de Barenblatt

En se basant sur cette idée de process zone, Hillerborg adapte la loi reliant la contrainte au saut de déplacement de la process zone (FIG. 3.6) pour que l'énergie surfacique libérée par la création de la surface de la fissure soit égale à  $G_c$ , le taux de restitution d'énergie critique du matériau [Hillerborg *et al.*, 1976] :

$$\int_0^{[[u_f]]} \sigma d[[u]] = G_c \tag{3.28}$$

Cette approche a mené à l'utilisation d'interfaces cohésives permettant de gérer ce comportement sur le trajet de la fissure et d'introduire une discontinuité dans le champ de déplacement au bord des éléments. Dans le cas des matériaux composites stratifiés, les fissures se développent généralement à l'interface entre les plis et donc cette technique est privilégiée pour ce mode de dégradation [Allix et Ladevèze, 1992]. Si le trajet de la fissure n'est pas connu à l'avance, il faut soit introduire des éléments cohésifs dans tout le modèle pour ne pas avoir à changer la table de connectivité, soit en rajouter au fur et à mesure de la propagation de cette fissure. D'autres techniques permettent cependant d'introduire une discontinuité du champ de déplacement à l'intérieur des éléments telles que la méthode X-FEM [Moës et Belytschko, 2002] et la SDA [Oliver *et al.*, 2002] pour ne citer que celles-ci. Dans tous ces cas, l'entité fissurée est une surface.

Bazant et Oh portent cette approche énergétique au cas volumique avec le « crack-band model » [Bazant et Oh, 1983], pour lequel on peut assimiler la bande de localisation à une fissure. Dans le cas d'une modélisation éléments finis, le choix d'un espace continu pour les champs de déplacement et de déformations à l'intérieur des éléments influence



**FIGURE 3.6** – Loi reliant la contrainte à la déformation dans la process zone

fortement les résultats pour des modèles continus locaux de comportements adoucissant. Les discontinuités du champ de déformations ne peuvent avoir lieu à l'intérieur d'un élément et sont donc repoussées sur les bords des éléments. Ceci fait alors apparaître une distance caractéristique, associée à cette discontinuité, qui est égale à la taille de l'élément. En connaissant la taille de cet élément, ils proposent d'adapter l'énergie volumique dissipée  $g_c$  à cette longueur et l'énergie de fissuration du matériau  $G_c$ . Cette méthode est presque équivalente à celle de Hillerborg : si on intègre la déformation suivant la largeur de l'élément localisé, on obtient le saut de déplacement.

Les résultats imposent cependant un maillage orienté dans la direction de la fissure. Pour pallier ces problèmes d'orientation, [Rots *et al.*, 1985] et [Oliver, 1989] adaptent la longueur caractéristique à prendre en compte dans les cas où la fissure n'est pas parallèle au maillage. Cette approche a l'avantage de respecter la contrainte à rupture, de donner une solution énergétique satisfaisante au regard de la mécanique de la rupture, mais impose un traitement numérique particulier pour chaque élément. Des exemples d'utilisation peuvent être trouvés dans [Needleman, 1987, Markeset et Hillerborg, 1995].

Ce type de régularisation vient donc modifier la loi de comportement pour l'adapter à la méthode de résolution éléments finis en cherchant à obtenir la bonne énergie dissipée. En revanche la zone localisée a toujours la largeur d'un élément.

## 2.2 Modèles continus généralisés basés sur les modèles de Cosserat

Cette approche est basée sur le travail des frères Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]. Ceux-ci introduisent des quantités statiques et cinématiques supplémentaires qui sont appelées, dans [de Borst *et al.*, 1993], les contraintes couples et les micro-courbures, dé-

rivées des micro-rotations. Du fait de ces contraintes couples, l'équilibre d'un cube de matière n'impose plus un tenseur des contraintes symétrique. Muhlaus et Vardoulakis ont montré que cette approche introduisait une longueur caractéristique dans le modèle [Muhlhaus et Vardoulakis, 1987]. Cependant, cette méthode ne permet pas de traiter les cas de localisation dus à un mode d'ouverture (mode I) et doit se limiter aux cas de cisaillement (mode II), c'est pourquoi elle a été utilisée dans le cas de matériaux à comportement élasto-plastique. Dans le cas où il n'y a pas de cisaillement pur, Sluys a montré que la solution reste unique seulement au regard de la taille de maille, mais dépend de l'orientation du maillage ([Sluys, 1992] d'après [de Borst *et al.*, 1993]). Un autre désavantage de cette méthode est que le nombre de degrés de liberté du système augmente.

## 2.3 Modèles non locaux

### 2.3.1 Approche intégrale

Développée initialement pour des modèles d'endommagement [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987, Pijaudier-Cabot et Bazant, 1988], cette approche est aujourd'hui largement utilisée tant pour des matériaux endommageables [Hochard *et al.*, 2009, Miot *et al.*, 2010] que pour des matériaux élasto-plastiques [Bažant et Jirásek, 2002]. Elle consiste à remplacer une variable locale du modèle  $a$  par sa moyenne  $\bar{a}$  sur le voisinage du point considéré :

$$\bar{a}(\underline{x}) = \frac{\int_{\Omega} \omega(\underline{x}, \underline{y}) a(\underline{y}) d\underline{y}}{\int_{\Omega} \omega(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}} \quad (3.29)$$

où  $\omega$  est une fonction de pondération qui détermine l'influence du point  $\underline{y}$  sur le point d'intérêt  $\underline{x}$ . Cette fonction de pondération est souvent une gaussienne :

$$\omega(\underline{x}, \underline{y}) = \exp\left(-\frac{\|\underline{x} - \underline{y}\|^2}{2l^2}\right) \quad (3.30)$$

Le paramètre  $l$  correspond à la longueur caractéristique introduite par le modèle non local.

Cette méthode impose des changements lourds dans les codes et pose des difficultés pour les points proches des bords pour les lesquels le domaine d'intégration sort du domaine du solide. De plus un traitement particulier de la zone fissurée doit être fait car, dans le cas où la variable d'intérêt n'est pas bornée (un indicateur scalaire de la déformation est souvent utilisé), celle-ci peut avoir une valeur énorme qui continue d'augmenter dans la zone fissurée (pour des ouvertures de fissure importantes, la déformation dépasse de loin les quelques pourcents), ceci implique donc une augmentation de la variable non-locale proche de la zone fissurée et donc une diffusion de l'endommagement. On peut aussi noter une autre difficulté qui vient du fait que les points de chaque côté d'une zone déjà fissurée continuent à interagir les uns avec les autres alors que la fissure devrait physiquement les en empêcher [Peerlings *et al.*, 2002].

### 2.3.2 Approche différentielle

Cette approche est basée sur un enrichissement du modèle continu en faisant intervenir des termes dérivés d'ordre supérieur, soit au niveau des déformations, soit au niveau des variables internes. Initialement utilisée pour des matériaux élasto-plastiques [Aifantis, 1984, Lasry et Belytschko, 1988, de Borst et Muhlhaus, 1992], cette approche a été étendue aux matériaux endommageables [Peerlings *et al.*, 1996, Frémond et Nedjar, 1996]. Deux alternatives coexistent, l'une basée sur un gradient explicite, l'autre basée sur un gradient implicite .

- Gradient explicite :

$$\bar{a} = a + c\nabla^2 a \quad (3.31)$$

La variable non-locale étant définie explicitement, ce modèle à gradient est dit explicite. La longueur interne du modèle est introduite par le paramètre  $c$ .

Dans le cas où la variable non locale est la déformation  $\tilde{\varepsilon}$  (telle que  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_i \rangle^2}$ ), le paramètre  $c$  peut être lié à la longueur  $l$  de l'approche intégrale pour une fonction de pondération gaussienne [Peerlings *et al.*, 2002] :

$$c = \frac{l^2}{2} \quad (3.32)$$

Cette méthode est cependant dite faiblement non-locale car la valeur de la variable non-locale en un point ne dépend que de la valeur locale de cette variable et de ses dérivées en ce même point.

- Gradient implicite :

$$\bar{a} + c\nabla^2 \bar{a} = a \quad (3.33)$$

Ici la variable non locale est définie implicitement, et on parle donc de modèle à gradient implicite. La version implicite offre plus de robustesse que la version explicite. De plus, elle se rapproche beaucoup d'une approche intégrale dans le cas où la fonction de pondération serait une fonction de Green [Peerlings *et al.*, 2001], raison pour laquelle cette méthode est définie comme fortement non-locale. La résolution d'un problème à l'aide d'un modèle à gradient implicite impose cependant l'ajout d'une équation différentielle supplémentaire dans le système et donc augment le nombre de degrés de liberté, de plus l'opérateur à inverser perd sa symétrie. Des conditions aux limites supplémentaires doivent être imposées, il est habituellement choisi d'imposer un flux nul sur le bord du domaine, bien que ce choix ne permette pas de traiter le cas d'un chargement homogène. Lorentz et Benallal rajoutent un solide rigide dans le prolongement du domaine afin de traiter les conditions d'encastrement [Lorentz et Benallal, 2005]. Les cas de comportements anisotropes posent quant à eux quelques difficultés, tant au niveau de ces nouvelles conditions aux limites à imposer qu'au choix d'une longueur caractéristique unique pour toutes les directions. Face à ce dernier point, Germain, Besson et Feyel proposent d'utiliser

dans le cas de composites stratifiés plusieurs paramètres caractéristiques, chacun associé à une direction d'orthotropie [Germain *et al.*, 2007a].

Les méthodes non-locales offrent l'avantage d'obtenir un résultat indépendant de la taille de maille, elles présentent donc un réel intérêt pour traiter l'initiation de la fissure. Pour ce qui est de la gestion de la propagation, l'identification des paramètres n'est pas forcément aisée. Les travaux récents de Lorentz, Cuvilliez et Kazymyrenko mettent en lumière un modèle à gradient implicite pour lequel les paramètres sont directement identifiables à partir des valeurs matériaux et permettent donc d'être directement en accord avec la mécanique de la rupture [Lorentz *et al.*, 2011]. Ces méthodes permettent de traiter le problème numériques associés à la non-unicité de la solution, mais ne résolvent pas les difficultés numériques liées à l'instabilité de la solution. A cette fin, des algorithmes à longueur d'arc sont souvent utilisés pour passer les instabilités [Crisfield, 1981, Gutiérrez, 2004, Germain *et al.*, 2007b].

## 2.4 Modèles avec effet de vitesse

Un autre type d'approche est basé sur les modèles de comportement avec effet de vitesse. Initialement proposée par Needleman pour un comportement élasto-plastique [Needleman, 1988], cette méthode introduit un terme de viscosité dans la loi de comportement. Cette loi est alors écrite en vitesse et Needleman définit ces matériaux comme *rate dependent materials*. Il montre qu'à l'inverse des matériaux sans dépendance à la vitesse (*rate independent materials*), l'objectivité de la solution peut être retrouvée, aussi bien en dynamique qu'en quasi-statique.

Ce type de modèle a majoritairement été utilisé pour traiter des comportements en dynamique transitoire. En étudiant la propagation d'une onde de perturbation dans une poutre monodimensionnelle, on peut relier la taille de la zone localisée à la viscosité et la célérité des ondes dans le milieu considéré après une étude sur [Sluys et de Borst, 1992, Dubé *et al.*, 1996]. Ce type d'approche est cependant aussi utilisé pour des chargement quasi-statiques [Van Der Meer et Sluys, 2009], car elle est locale en espace, ce qui rend son intégration plus aisée dans un code de calcul. On peut aussi noter que l'ajout artificiel de viscosité au niveau de la loi d'évolution est utilisé pour améliorer la stabilité des simulations numériques [Maimi *et al.*, 2007, Lapczyk et Hurtado, 2007].

# 3 Modèle choisi : modèle à taux limité ou à effet retard

## 3.1 Présentation

Dans la lignée des modèles à effet de vitesse, on trouve pour les approches en dynamique le modèle dit « à effet retard ». Introduit par Ladevèze dans [Ladevèze, 1991] pour sa première version, ce modèle a ensuite évolué vers le modèle dit « à taux limité » [Allix et Deü, 1997]. Ce modèle se base sur une considération physique forte : une fissure ne peut pas apparaître et se propager instantanément dans une structure. Ceci nécessite

l'écoulement d'un certain laps de temps. Une viscosité est donc introduite dans la loi d'évolution de l'endommagement par l'intermédiaire d'un temps caractéristique qui permet de retarder le pic d'endommagement en fixant une vitesse maximale à la variable d'endommagement, d'où son nom de modèle à taux limité, et plus communément de modèle à effet retard. Comparé aux autres modèles avec effet de vitesse, celui-ci a l'avantage de fixer une borne maximale à la vitesse d'endommagement lui permettant de régulariser le problème quelle que soit la vitesse de déformation.

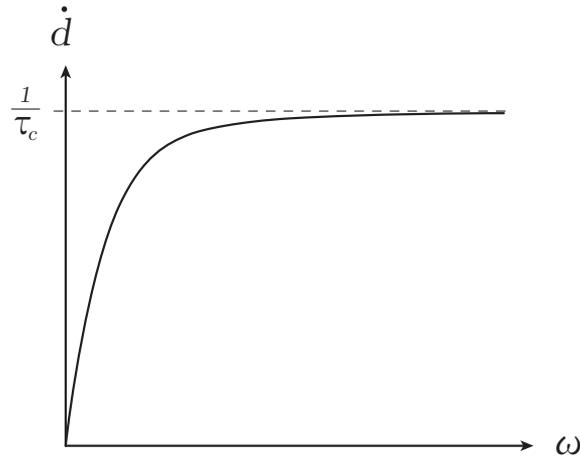


FIGURE 3.7 –  $\dot{d}$  en fonction de  $\omega(Y, d)$

La loi d'évolution est donc modifiée pour être écrite en vitesse :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \{1 - \exp[-\omega(Y, d)]\} \quad (3.34)$$

où  $\tau_c$  est le temps caractéristique qui borne la vitesse d'endommagement (FIG. 3.7). La fonction  $\omega$  est définie par :

$$\omega(Y, d) = a \langle d_s(Y) - d \rangle_+ \quad (3.35)$$

Le second paramètre de la méthode est  $a$ .  $d$  est la valeur de la variable d'endommagement, et  $d_s$  est la valeur qu'elle aurait si l'effet retard n'était pas utilisé (elle correspond à l'ancienne façon de calculer  $d$ ).

### 3.2 Unicité et stabilité

On vérifie que le modèle avec effet retard permet d'obtenir une solution unique en reprenant l'exemple de la barre 1D, et en se basant sur le critère d'unicité de Hill (3.6). On cherche donc localement à vérifier :

$$\Delta \dot{\sigma} \Delta \dot{\epsilon} > 0 \quad (3.36)$$

Le comportement endommageable de la barre est défini par :

$$\sigma = (1 - d) E \varepsilon \quad (3.37)$$

$$\dot{\sigma} = (1 - d) E \dot{\varepsilon} - \dot{d} E \varepsilon \quad (3.38)$$

Les deux solutions  $(\dot{\sigma}_1, \dot{\varepsilon}_1, \dot{d}_1)$  et  $(\dot{\sigma}_2, \dot{\varepsilon}_2, \dot{d}_2)$  sont telles que :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \\ d_1 = d_2 = d \end{cases} \quad (3.39)$$

Dans ce cas :

$$\Delta \dot{\sigma} \Delta \dot{\varepsilon} = (1 - d) E \Delta \dot{\varepsilon}^2 - \Delta \dot{d} E \varepsilon \Delta \dot{\varepsilon} \quad (3.40)$$

Or  $\dot{d} = f(\varepsilon, d)$ , par conséquent

$$\Delta \dot{d} = 0 \quad (3.41)$$

donc comme  $d \in [0; 1]$  :

$$\Delta \dot{\sigma} \Delta \dot{\varepsilon} = (1 - d) E \Delta \dot{\varepsilon}^2 > 0 \quad (3.42)$$

Ce modèle permet donc d'obtenir une solution unique.

Si l'on souhaite la rupture de la barre, il faut forcément que la contrainte diminue à partir d'un certain certain seuil quand la déformation augmente. L'apparition d'une instabilité matériau est alors naturelle, le critère de stabilité (3.12) n'est donc pas vérifié.

La figure suivante (FIG. 3.8) montre les courbes de contrainte en fonction de la déformation pour différentes vitesse de déformation. Les parties de courbes ayant une tangente négative correspondent aux points ne vérifiant plus le critère de stabilité. On observe aussi que le modèle est dépendant de la vitesse de déformation, et plus la vitesse de déformation augmente, plus la contrainte maximale augmente.

Dans le cas dynamique, Deü montre, dans son manuscrit de thèse, qu'en considérant une discontinuité du champ d'accélération le modèle à effet retard permet d'obtenir une solution stable.

### 3.3 Exemples d'utilisation unidimensionnel

#### 3.3.1 Chargement dynamique

L'effet retard a initialement été utilisé pour des chargements en dynamique transitoire. On trouve dans [Allix et Deü, 1997] un exemple simple d'une barre en traction soumise à une vitesse imposée en ses deux extrémités (FIG. 3.9). Cet exemple permet de montrer l'apport de l'effet retard à la modélisation. Plusieurs discrétisations spatiales sont utilisées afin de comparer les résultats entre le modèle classique, sans effet retard, et la modélisation avec effet retard. Dans ces simulations numériques, l'endommagement se concentre au centre de la barre au moment où les ondes de tractions se croisent.

Pour le modèle classique, on remarque tout d'abord que le résultat est dépendant du maillage. Plus le maillage est fin, plus la taille de la zone rompue est petite (FIG. 3.10(a)).

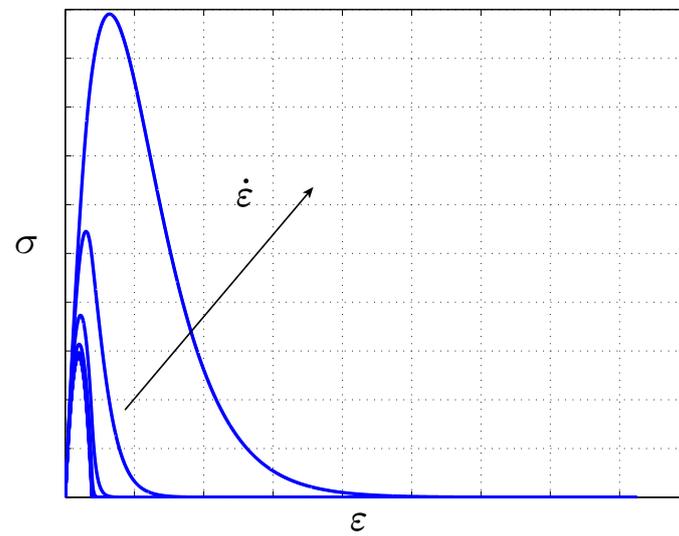


FIGURE 3.8 –  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  pour différentes valeurs de  $\dot{\varepsilon}$

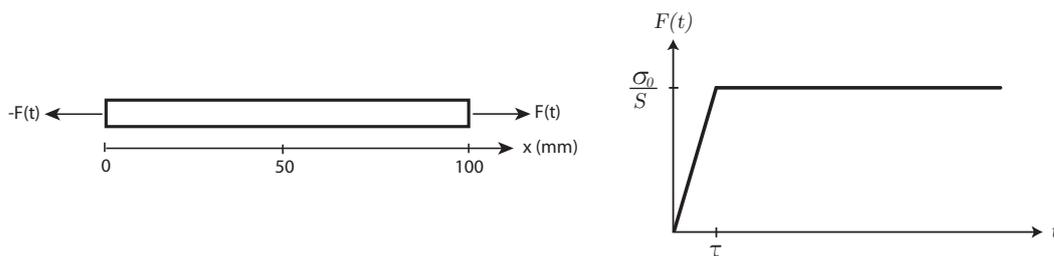
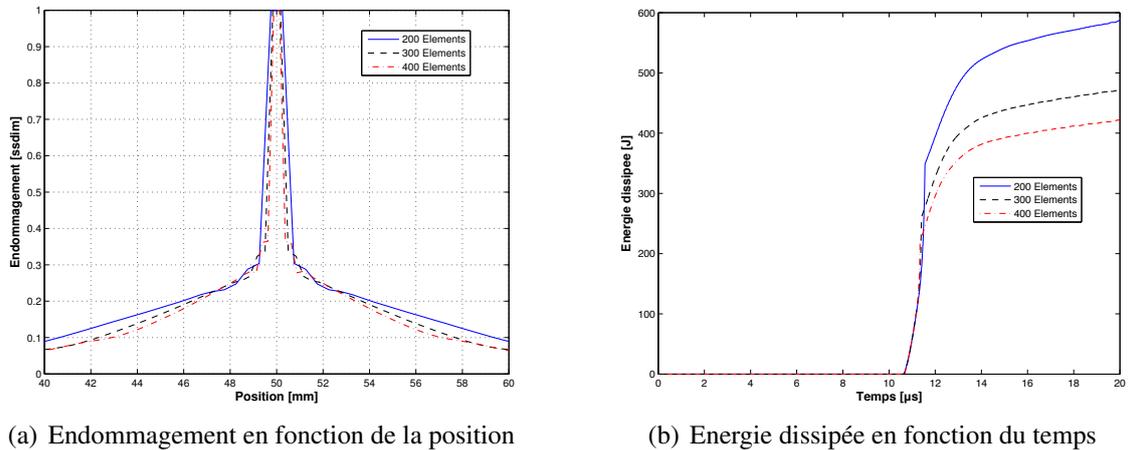


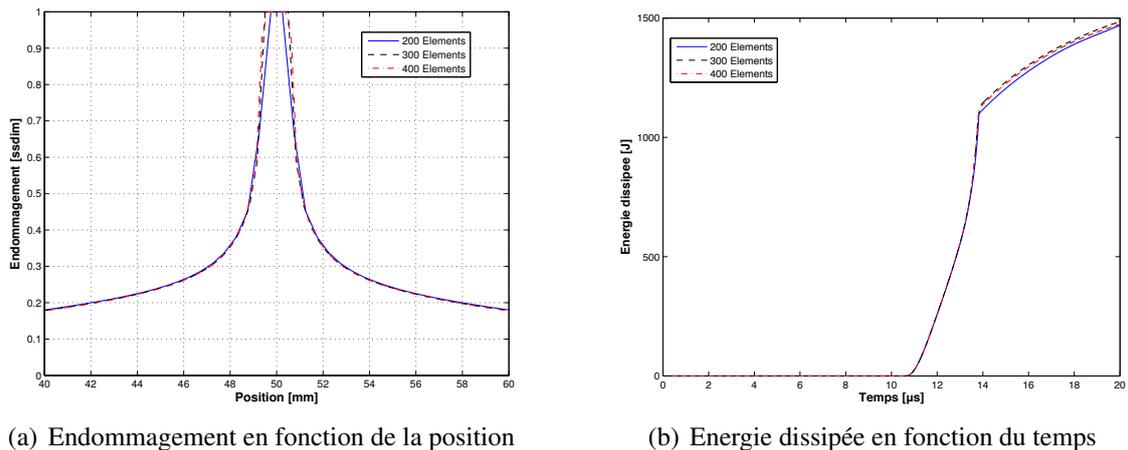
FIGURE 3.9 – Description du chargement imposé dans [Allix et Deü, 1997]

La différence entre les résultats est cependant plus nette lorsque l'on observe l'énergie dissipée en fonction du temps (FIG. 3.10(b)). Comme on pouvait s'y attendre, plus la taille de maille diminue, moins il y a d'énergie dissipée.



**FIGURE 3.10** – Barre soumise à un chargement dynamique sans effet retard

Lorsque que le modèle avec endommagement retardé est utilisé, les résultats des trois maillages convergent. L'endommagement dans la barre est sensiblement le même quelque soit le nombre d'éléments (FIG. 3.11(a)). Mais surtout, l'énergie dissipée ne change pas avec la taille de maille (FIG. 3.11(b)).



**FIGURE 3.11** – Barre soumise à un chargement dynamique avec effet retard

La modélisation avec endommagement retardé permet donc d'obtenir des résultats indépendant de la taille de maille pour des simulations de chargements dynamiques.

### 3.3.2 Chargement quasi-statique

Pour une barre de section constante chargée en traction de façon quasi-statique, l'effet retard permet de maintenir une solution homogène s'il n'y a pas de défaut dans la barre. Afin de traiter un cas simple unidimensionnel en quasi-statique faisant apparaître une zone rompue, il faut que la solution ne soit pas homogène. Une approche simple consiste à faire varier la section de la barre, ce qui permet d'avoir un champ de contrainte non-constant dans la structure. La géométrie choisie ici est la même que celle de l'exemple de Van Der Meer et Sluys, il s'agit d'une poutre en forme d'os (*bone-shaped specimen*) chargée en traction, pour laquelle la contrainte est maximale au centre [Van Der Meer et Sluys, 2009]. On peut encore simplifier le modèle en ne traitant que la moitié de la poutre pour utiliser la symétrie de la solution, la poutre de section variable  $S(x)$  est encadrée en  $x = 0$ , et est soumise à un déplacement imposé  $U_L$  en  $x = L$  (FIG. 3.12).

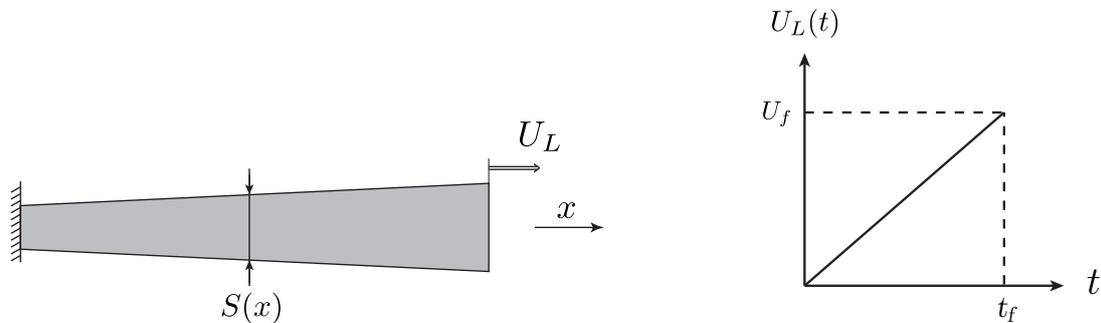


FIGURE 3.12 – Schéma de la géométrie et du chargement

$$S(x) = S_L - (S_L - S_0) \cos\left(\frac{x\Pi}{2L}\right) \quad (3.43)$$

Le comportement du matériau est le même que celui utilisé pour l'illustration de la perte d'unicité sur la barre en traction. Les différents paramètres utilisés pour les simulations numériques sont les suivant :

Géométrie	Chargement	Matériau
		$E = 8909 \text{ MPa}$
$L = 100 \text{ mm}$	$U_f = 3 \text{ mm}$	$Y_0 = 1 \text{ MPa}$
$S_0 = 10 \text{ mm}^2$	$t_f = 3 \text{ s}$	$Y_c = 6.8 \text{ MPa}$
$S_L = 1.6 \times S_0$		$a = 1$
		$\tau_c = 0.2 \text{ s}$

Sans effet retard, la courbe force déplacement (FIG. 3.13) présente un saut au moment où l'endommagement de l'élément 1 passe brutalement d'une valeur proche de 0.15 à 1

(FIG. 3.14). En observant l'endommagement des éléments de la poutre (FIG. 3.15) et la déformation dans les éléments de la poutre (FIG. 3.16) après rupture pour deux tailles de mailles différentes, on remarque comme prévu que plus le maillage est fin, plus la taille de la zone rompue est fine. C'est toujours l'élément 1, le plus chargé (à cause de sa section plus faible) qui dépasse seul le pic de contrainte en fonction de la déformation, et dans lequel la déformation et l'endommagement se localisent. Le calcul de l'énergie dissipée nécessiterait, du fait de l'instabilité, l'utilisation d'une méthode à longueur d'arc (Riks et Crisfield) afin de prendre en compte le snap-back de la réponse globale.

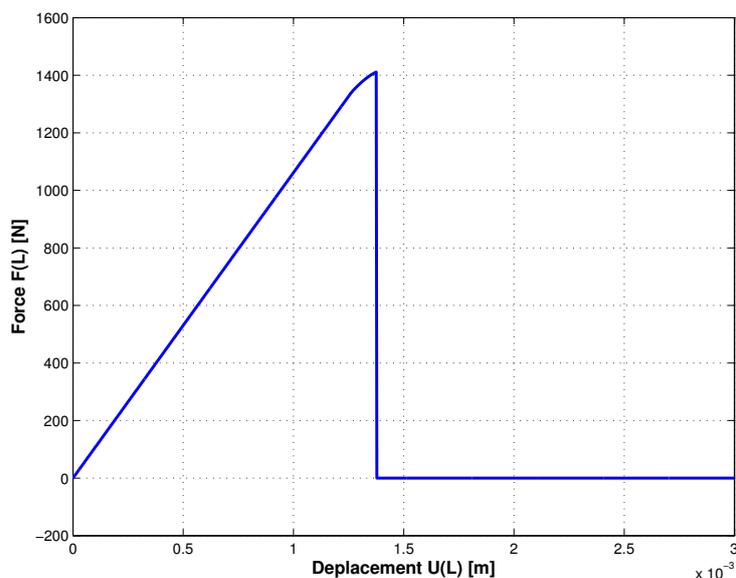


FIGURE 3.13 – Réponse globale sans effet retard (100 éléments)

Dans le cas où l'effet retard est utilisé, la viscosité ajoutée par le modèle permet de stabiliser la réponse (FIG. 3.17). L'endommagement évolue de façon continue au cours du temps (FIG. 3.20(b)), et une méthode de Newton-Raphson nous permet d'obtenir une solution pour laquelle on peut calculer les différentes énergies mises en jeu, notamment l'énergie dissipée (FIG. 3.19).

Le changement de la taille de maille n'affecte pas le résultat. Les courbes force-déplacement (FIG. 3.21(a)), endommagement en fonction du temps (FIG. 3.21(b)), et énergie dissipée en fonction du temps (FIG. 3.21(c)) sont superposées pour les trois tailles de maille utilisées (50, 100 et 200 éléments dans la longueur de la poutre). Le modèle avec taux limité est donc utile pour maintenir une solution indépendante du maillage, et ce même pour un chargement quasi-statique.

En revanche, le paramètre  $\tau_c$  introduit dans le modèle influence fortement la solution. Il retarde la rupture finale lorsqu'il augmente, et il fait augmenter la force maximale

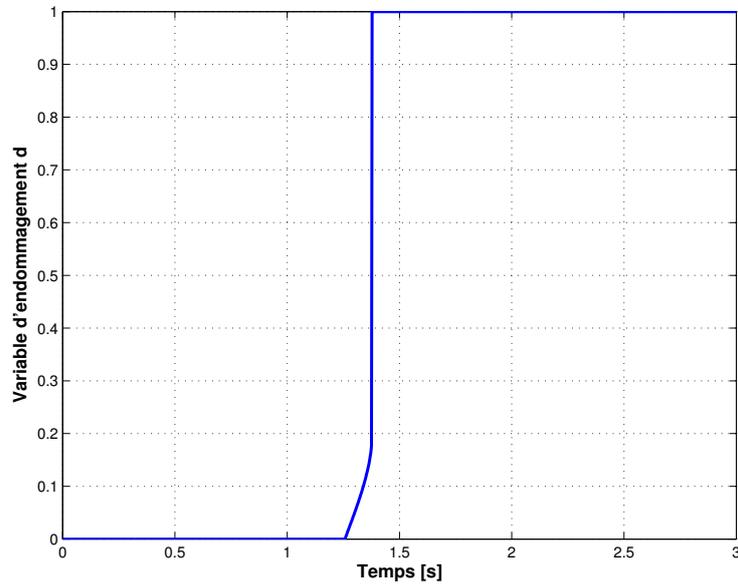
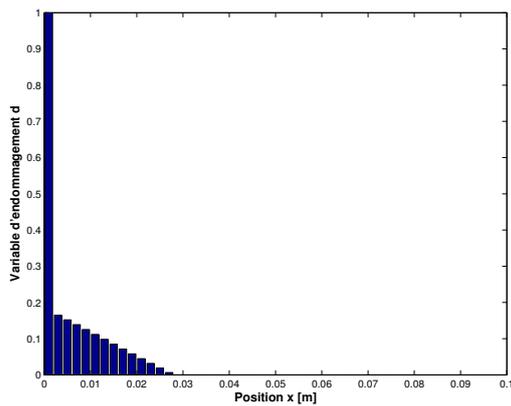
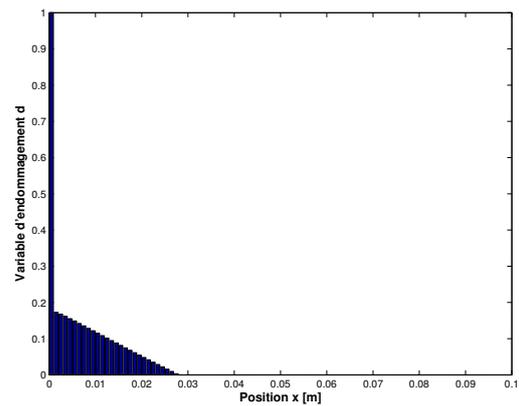


FIGURE 3.14 – Endommagement dans l'élément 1 en fonction du temps sans effet retard (100 éléments)



(a) 50 éléments



(b) 100 éléments

FIGURE 3.15 – Endommagement dans les éléments de la poutre à la fin du chargement (sans effet retard)

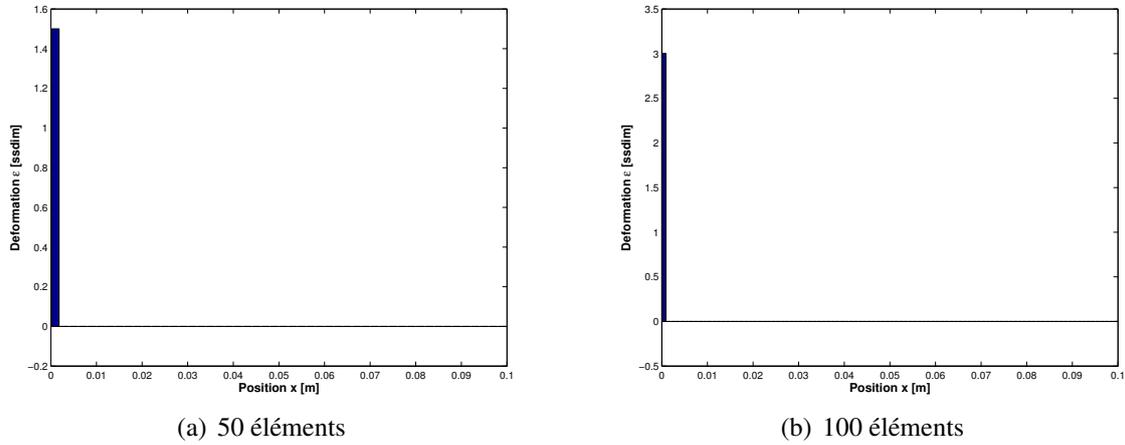


FIGURE 3.16 – Déformation dans les éléments de la poutre à la fin du chargement (sans effet retard)

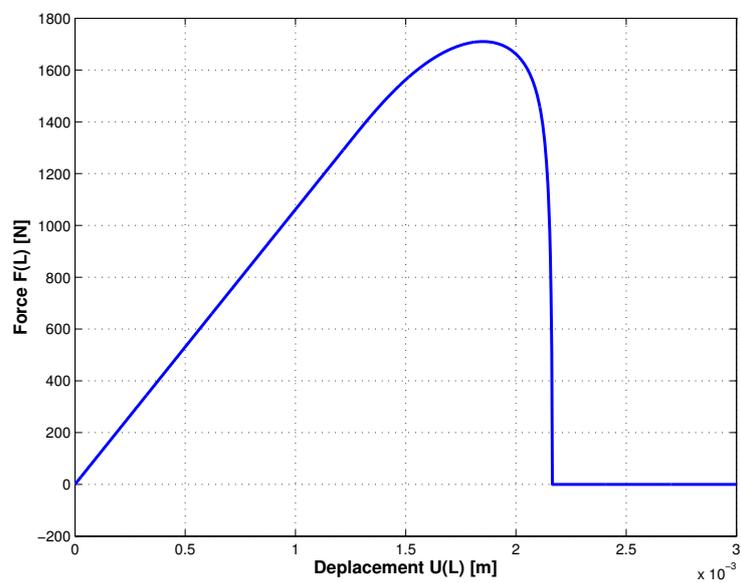


FIGURE 3.17 – Réponse globale avec effet retard (100 éléments -  $\tau_c = 0.2$  s)

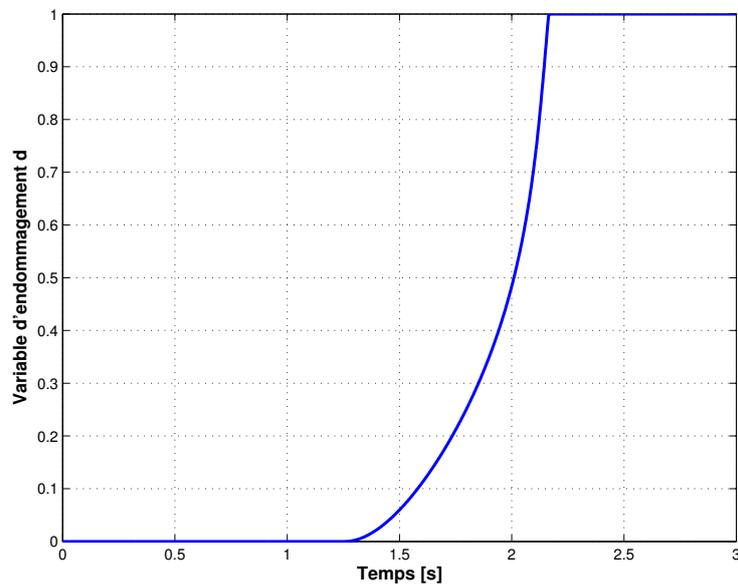


FIGURE 3.18 – Endommagement dans l'élément 1 en fonction du temps avec effet retard (100 éléments -  $\tau_c = 0.2$  s)

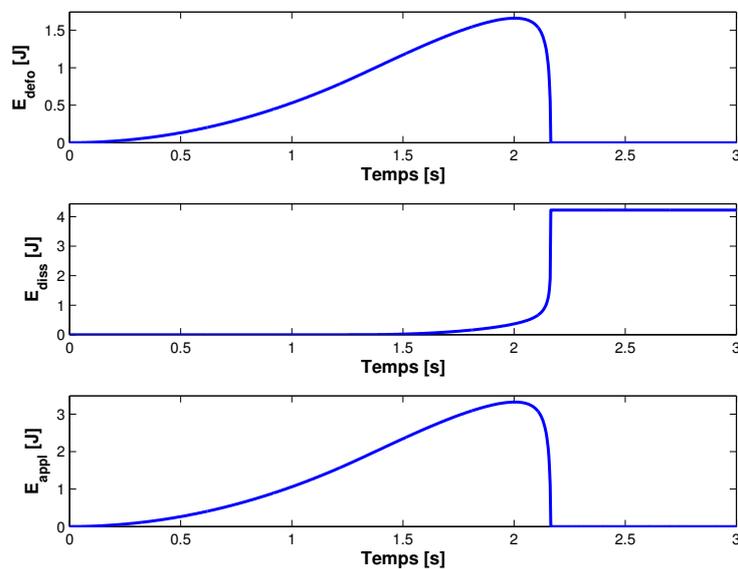


FIGURE 3.19 – Energies de déformation, dissipée et appliquée en fonction du temps avec effet retard (100 éléments -  $\tau_c = 0.2$  s)

(FIG. 3.22). Il modifie la taille de la zone rompue, zone qui peut être définie par l'ensemble des point pour lesquels l'endommagement dépasse 0.5 (FIG. 3.23). De même, l'énergie dissipée augmente lorsque que  $\tau_c$  augmente (FIG. 3.24).

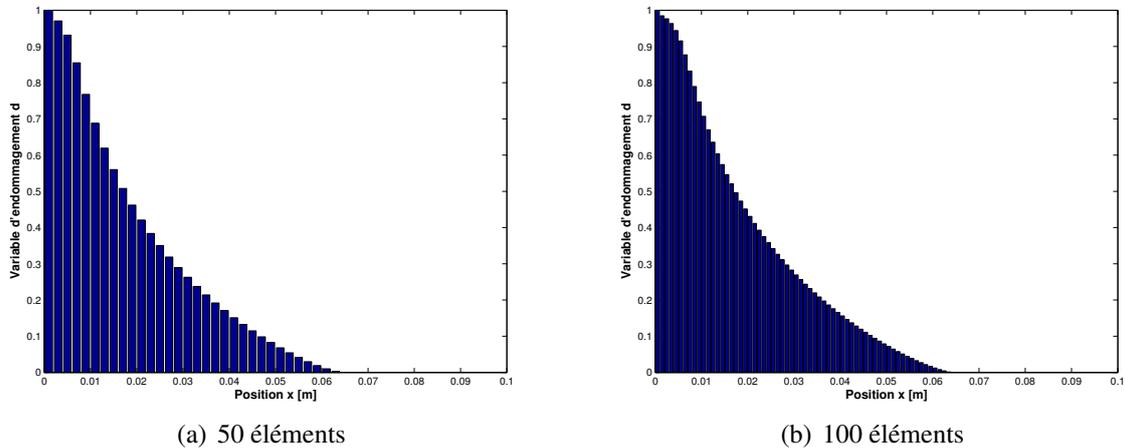


FIGURE 3.20 – Endommagement dans les éléments de la poutre à la fin du chargement ( $\tau_c = 0.2$  s)

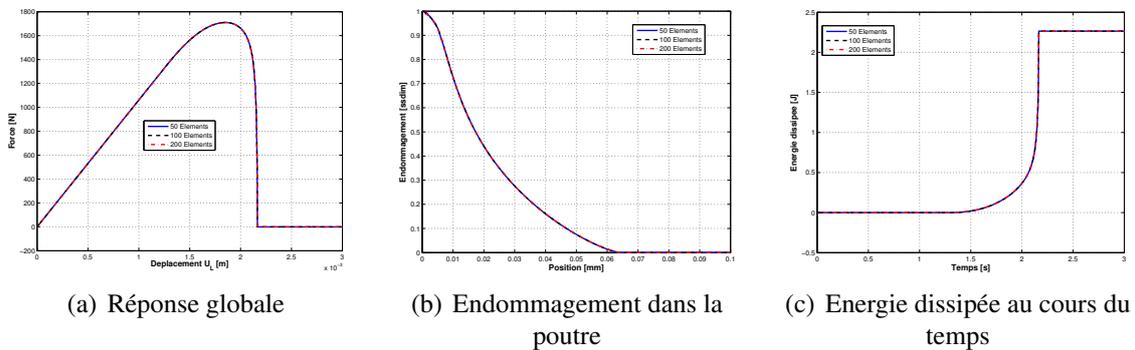


FIGURE 3.21 – Solutions pour 3 tailles de mailles différentes ( $\tau_c = 0.2$  s)

### 3.4 Bilan et limites

Initialement utilisé dans des cas de dynamique transitoire, l'effet retard permet d'obtenir dans ce cas une solution indépendante du maillage spatial choisi [Allix et Deü, 1997]. Cependant ce modèle rajoute deux paramètres :  $\tau_c$  et  $a$ . Ces paramètres trouvent une signification physique et peuvent être identifiés [Gupta *et al.*, 2005]. Le paramètre  $\tau_c$  impose un temps minimum de rupture. Pour un matériau composite il prend généralement une valeur de l'ordre de  $1 \mu s$ . Le paramètre  $a$  permet, lui, de gérer la transition entre l'asymptote statique et l'asymptote dynamique du comportement du matériau (FIG. 3.25), il a habituellement une valeur de l'ordre de 1 [Ladevèze *et al.*, 2000, Allix *et al.*, 2003].

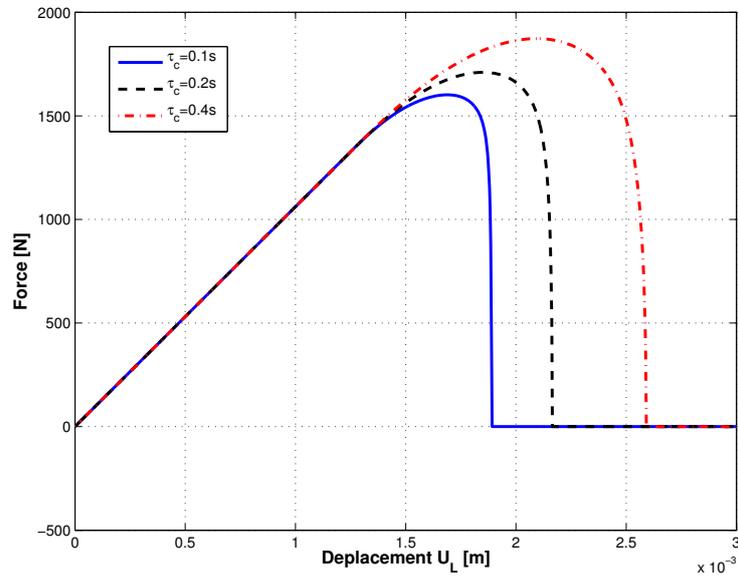


FIGURE 3.22 – Force en fonction du déplacement imposé pour 3 valeurs de  $\tau_c$

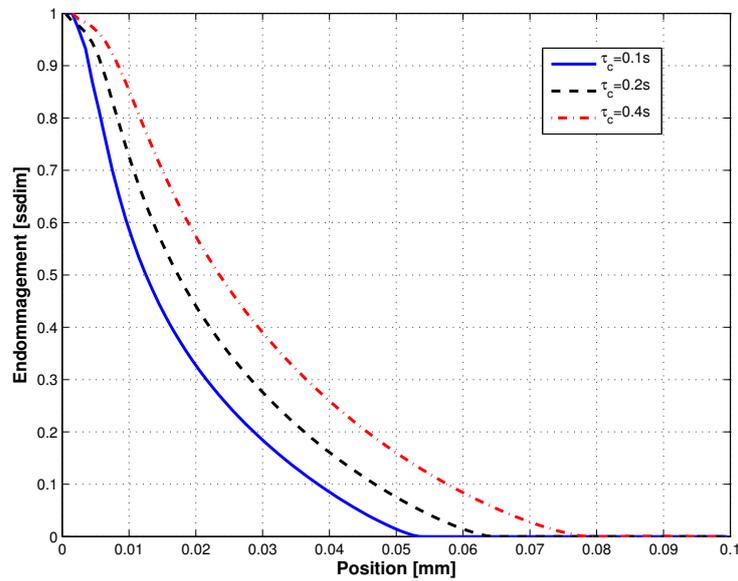


FIGURE 3.23 – Endommagement dans la poutre à la fin du chargement pour 3 valeurs de  $\tau_c$

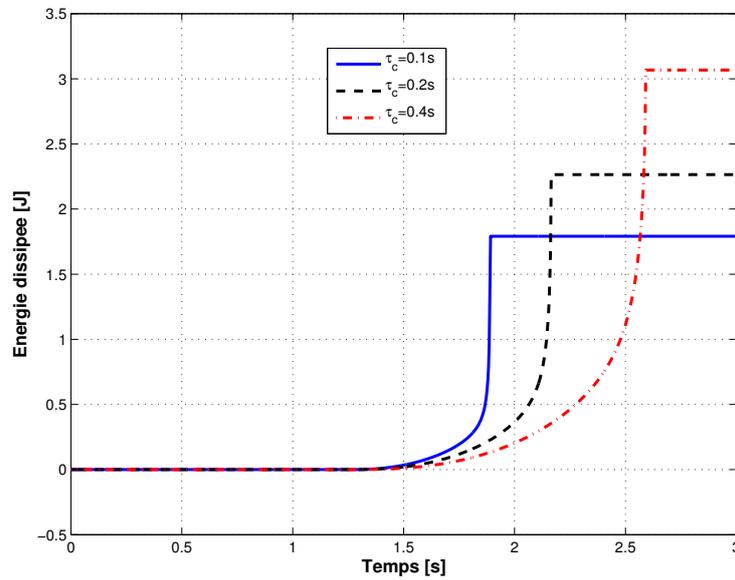


FIGURE 3.24 – Energie dissipée en fonction du temps pour 3 valeurs de  $\tau_c$ )

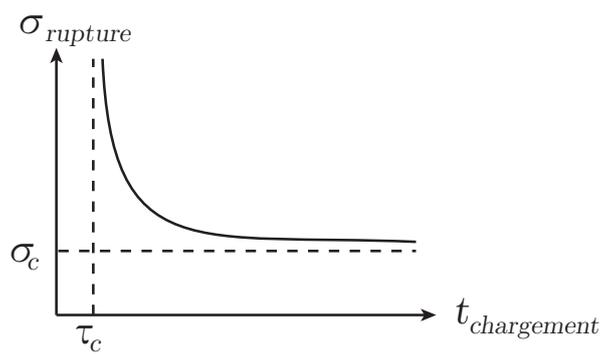


FIGURE 3.25 – Contrainte à rupture en fonction du temps de chargement

Dans le cas de chargements quasi-statiques, le temps de chargement est de l'ordre de la seconde. Lors de simulations de ce type de chargements, le pas de temps est communément choisi aux alentours du dixième de seconde. Pourtant, prendre en compte un paramètre temporel  $\tau_c$  de l'ordre de  $1 \mu s$  imposerait une discrétisation temporelle de ce même ordre de grandeur, et avec celle-ci une prise en compte des effets d'inertie. On voit donc apparaître un rapport 100 000 entre ces temps. La prise en compte de la valeur physique de  $\tau_c$  est donc hors de portée d'une simulation de structure complexe en quasi-statique.

Pourtant, les modèles à effet de vitesse sont aussi un moyen de régularisation du phénomène de localisation dans le cas de chargements quasi-statiques [Needleman, 1988]. Si on change la valeur du paramètre  $\tau_c$  pour une valeur de l'ordre de 0.1 s, les effets d'inertie ne sont plus à prendre en compte, et l'indépendance au maillage est maintenue comme on a pu le voir dans la sous-partie précédente.

Déjà utilisé pour des simulations de chargement quasi-statique sur des structures de type plaques trouées [Ladevèze *et al.*, 2000], l'utilisation du modèle à taux limité nous amène à nous poser la question de la validité du choix du paramètre  $\tau_c$  et de son influence sur l'énergie dissipée lors de la création de macro-fissure telle que le splitting.

## Chapitre 4

# Effet retard, vers une régularisation en accord avec la mécanique de la rupture

*On présente maintenant l'utilisation du modèle à taux d'endommagement limité, pour gérer la propagation d'une fissure dans une éprouvette CT. Une première partie présente la structure traitée et montre que le modèle permet de s'affranchir de la dépendance de la solution au maillage pour cette structure. On cherche ensuite à valider le modèle sur un critère énergétique en montrant que l'on peut étaler l'énergie dissipée afin de respecter le bon taux de restitution d'énergie lors de la propagation d'une fissure. Les simulations ont été effectuées avec le logiciel ABAQUS pour lequel une UMAT, ainsi qu'une routine permettant d'avoir accès à la longueur de fissure ont été programmées.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Définition d'un problème de référence . . . . .</b>	<b>63</b>
1.1	Description de l'éprouvette . . . . .	63
1.2	Description du modèle utilisé . . . . .	63
1.3	Vérification de l'indépendance de la solution au maillage . . . . .	64
1.4	Influence des paramètres . . . . .	70
1.5	Bilan et limites . . . . .	75

<b>2</b>	<b>Lien entre endommagement et rupture</b>	<b>76</b>
2.1	Rappels sur la mécanique de la rupture	76
2.2	Calcul de l'énergie dissipée	80
2.3	Calcul du taux de restitution d'énergie	82
<b>3</b>	<b>Taux de restitution d'énergie et effet retard</b>	<b>83</b>
3.1	Influence de $\tau_c$	83
3.2	Influence de la vitesse de chargement	84
3.3	Influence de $Y_c$	85
3.4	Identification d'une loi reliant $G$ , $\tau_c$ et $Y_c$	87
3.5	Résultats et bilan	88

---

## 1 Définition d'un problème de référence

Nous avons pu voir que la zone localisée correspond à l'endroit où l'on souhaiterait introduire une discontinuité du champ de déplacement, associée à une fissure. Nous avons aussi pu constater dans le chapitre précédent que l'effet retard permettait de régulariser le problème de localisation et ainsi d'obtenir une solution unique sur le cas simple d'une barre en traction pour un chargement quasi-statique. On va donc s'intéresser maintenant au cas d'une structure en deux dimensions que l'on va solliciter afin de créer et faire propager une fissure par la mécanique de l'endommagement.

### 1.1 Description de l'éprouvette

Pour appréhender le modèle et ses capacités à gérer la propagation de fissures, on se propose de traiter le cas d'une structure 2D basée sur une éprouvette CT (Compact Tension). Celle-ci a l'avantage de ne faire intervenir qu'une seule fissure, qui se propage en mode d'ouverture, et de façon stable si le chargement est imposé en déplacement.

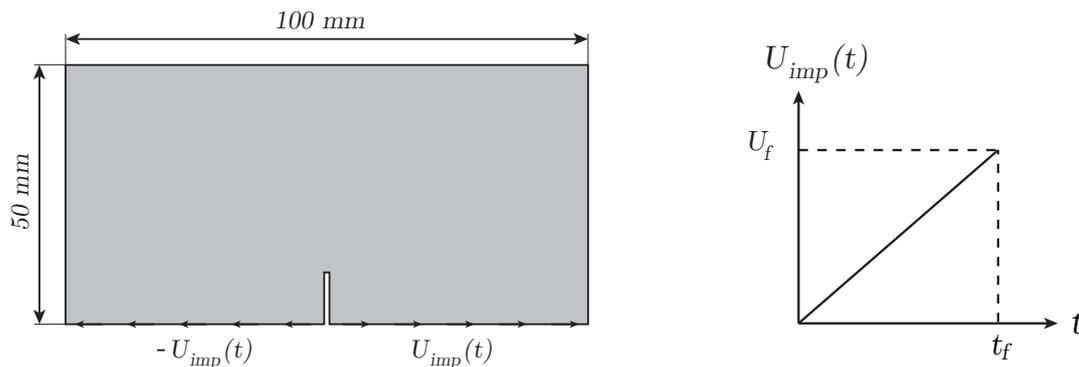


FIGURE 4.1 – Eprouvette de l'étude

On utilisera les paramètres matériaux suivant :  $E = 73100$  MPa,  $\nu = 0.33$ ,  $Y_c = 1184.2$  MPa et  $G_c = 14932$  J.m<sup>-2</sup>, correspondant à un aluminium AU4GT3.

### 1.2 Description du modèle utilisé

Au vu de la complexité du mésomodèle, il est choisi de prendre un modèle d'endommagement plus simple, sur lequel est ajouté l'effet retard. On utilise donc un modèle d'endommagement isotrope. Cependant, afin de ne pas endommager la partie supérieure de l'éprouvette qui est en compression, l'endommagement n'évolue qu'en traction.

L'énergie de déformation est :

$$e_d = \frac{1}{2(1 - d[\sigma_{11}]_+)} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{K}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.1)$$

où  $d$  est la variable d'endommagement.

Le lien entre contrainte et déformation est alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d[\boldsymbol{\sigma}_{11}]_+) \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.2)$$

La force thermodynamique associée à la variable d'endommagement est :

$$Y = \left. \frac{\partial e_d}{\partial d} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.3)$$

On définit alors la dissipation  $\omega$  par :

$$\omega = Y \dot{d} \quad (4.4)$$

D'après le second principe de la thermodynamique, la dissipation est positive. Ceci impose donc que  $\dot{d}$  soit positif ou nul car  $Y$  est une fonction quadratique en  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

L'évolution de la variable d'endommagement est pilotée par la force thermodynamique  $Y$  associée à  $d$ . On définit alors  $d_{stat}$  :

$$d_{stat} = \frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{Y_c}} \quad (4.5)$$

Sans effet retard,  $d = d_{stat}$ , sinon :

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \{1 - \exp[-a\langle d_{stat} - d \rangle_+]\} \quad (4.6)$$

On remarque que dans le cas avec effet retard, le second principe est vérifié car  $\dot{d} \geq 0$ .

Dans toute la suite, le paramètre  $a$  sera choisi égal à 1.

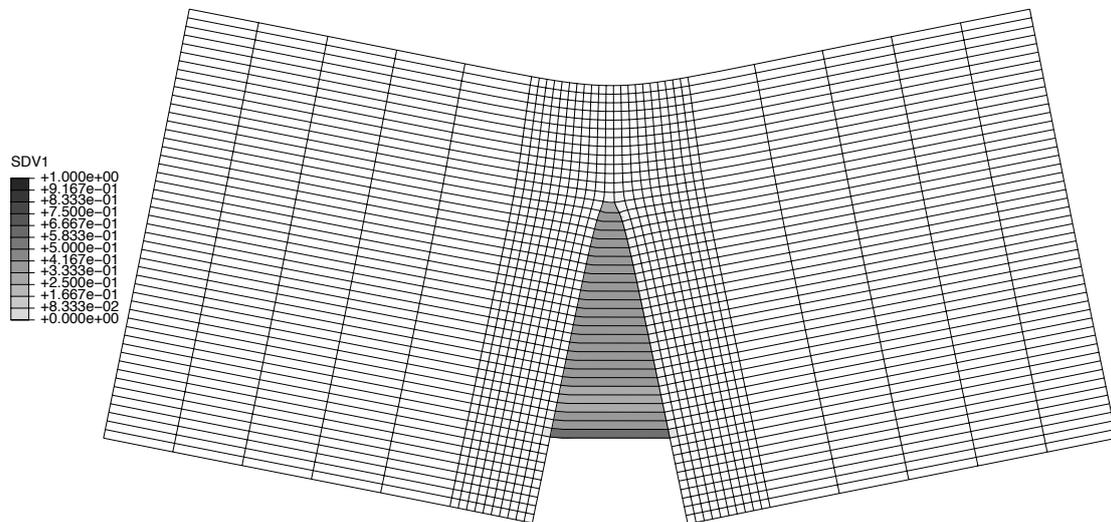
### 1.3 Vérification de l'indépendance de la solution au maillage

Afin de mettre en évidence l'apport de l'effet retard lors d'une propagation de fissure, des simulations numériques du chargement de l'éprouvette ont été effectuées pour deux maillages différents, avec et sans effet retard.

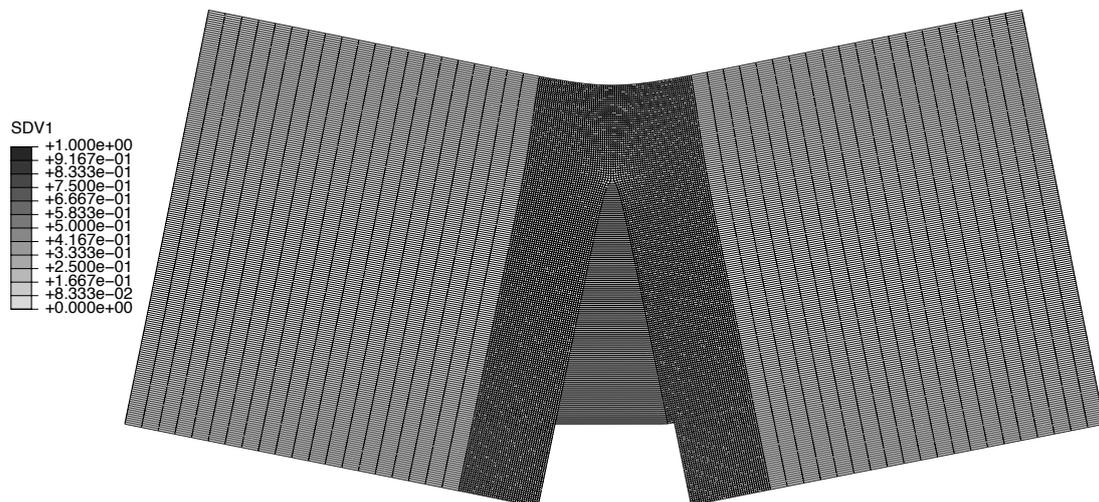
#### 1.3.1 Cas sans effet retard

La Figure 4.2 correspond à l'éprouvette CT maillée grossièrement. On y observe une cartographie de l'endommagement. En blanc, la valeur de l'endommagement est nulle, en noir elle est de 1. Comme on pouvait s'y attendre, une zone fortement endommagée au centre de l'éprouvette correspond à la fissure.

On remarque que seule une bande d'éléments est endommagée, et que la variable d'endommagement y vaut 1. Les déformations et l'endommagement sont localisés dans cette bande d'éléments. On est en présence du phénomène de localisation.



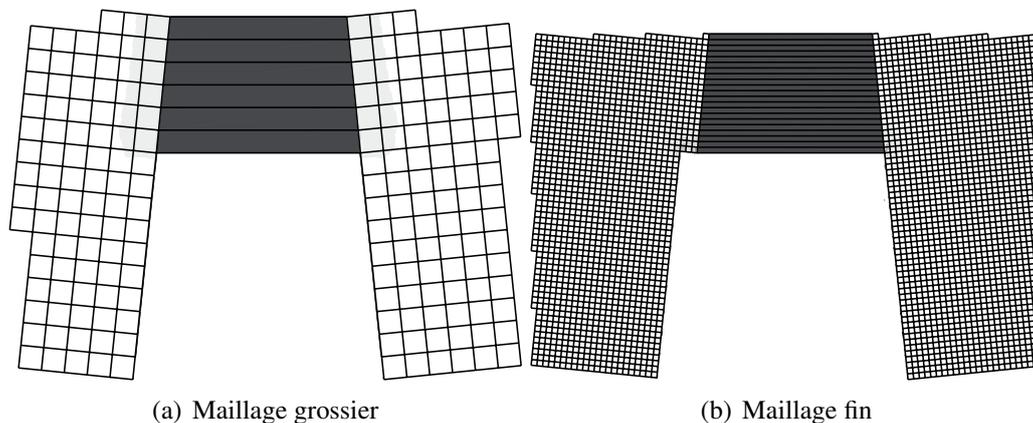
**FIGURE 4.2** – Carte de la moyenne de l'endommagement par élément sans effet retard -  
Maillage grossier



**FIGURE 4.3** – Carte de la moyenne de l'endommagement par élément sans effet retard -  
Maillage fin

Dans le cas où le maillage choisi est quatre fois plus fin (FIG. 4.3), on peut faire les mêmes constatations. L'endommagement et les déformations sont aussi localisés dans une bande d'éléments au centre de l'éprouvette. L'endommagement est quasi nul en dehors de cette bande d'éléments.

Si l'on agrandit sur la pointe de fissure (FIG. 4.4), on découvre que dans les deux cas cette bande d'éléments a une largeur d'un seul élément. Ce qui veut dire que la largeur de la bande localisée pour le maillage fin est quatre fois plus fine que celle pour le maillage grossier. La valeur d'endommagement affichée ici est une moyenne des valeurs aux points de Gauss. Si l'on pouvait visualiser l'informations de chaque point de Gauss, on remarquerait que seuls deux des quatre points d'un élément ont un endommagement égal à 1, la valeur des deux autres ne dépasse pas 0,5. Ces points de Gauss endommagés sont tous alignés dans la hauteur de l'éprouvette. L'endommagement se localise donc dans une bande de largeur égale à la moitié de la largeur d'un élément.



**FIGURE 4.4** – Carte de la moyenne de l'endommagement par élément sans effet retard - Zoom

Si l'on compare les courbes force-déplacement des deux maillages lorsque l'effet retard n'est pas utilisé (FIG. 4.5), on remarque que les deux courbes sont différentes. L'effort maximal pour le maillage grossier est de l'ordre de 5100 N tandis que pour le maillage fin il est de l'ordre de 3000 N. Le début de propagation de fissure n'a pas lieu pour le même déplacement imposé.

L'énergie dissipée par l'endommagement de la bande centrale est différente pour les deux maillages (FIG. 4.6). Le maillage fin admet une énergie dissipée en fonction du déplacement imposé bien inférieure au résultat du maillage grossier.

Sans effet retard, les déformations et l'endommagement se localisent dans une bande de la largeur d'un élément. A priori la courbe force-déplacement a une forme acceptable pour cette éprouvette, mais elle n'est pas identique lorsque la taille de maille est différente. De plus l'énergie dissipée dépend du maillage choisi.

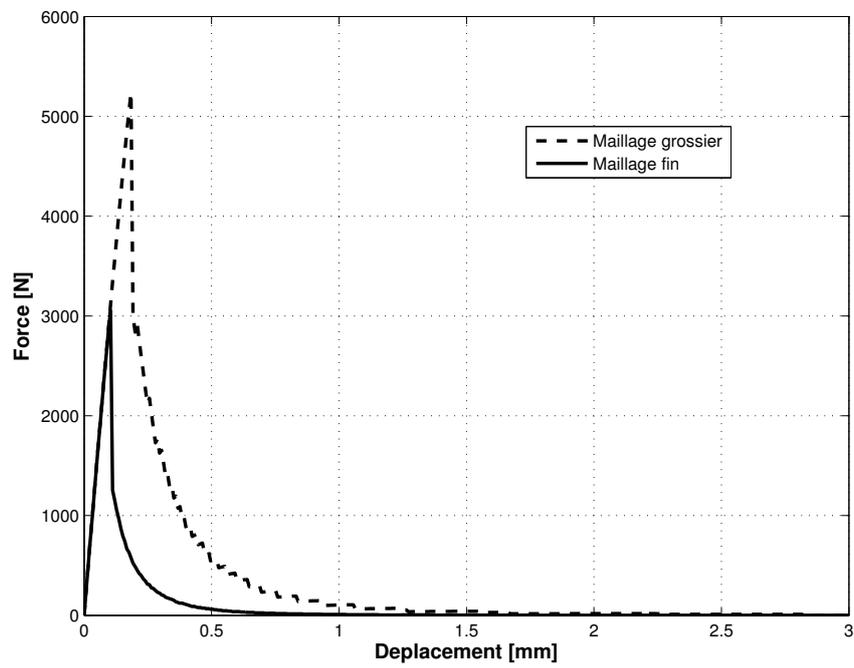


FIGURE 4.5 – Tracé de la force en fonction du déplacement

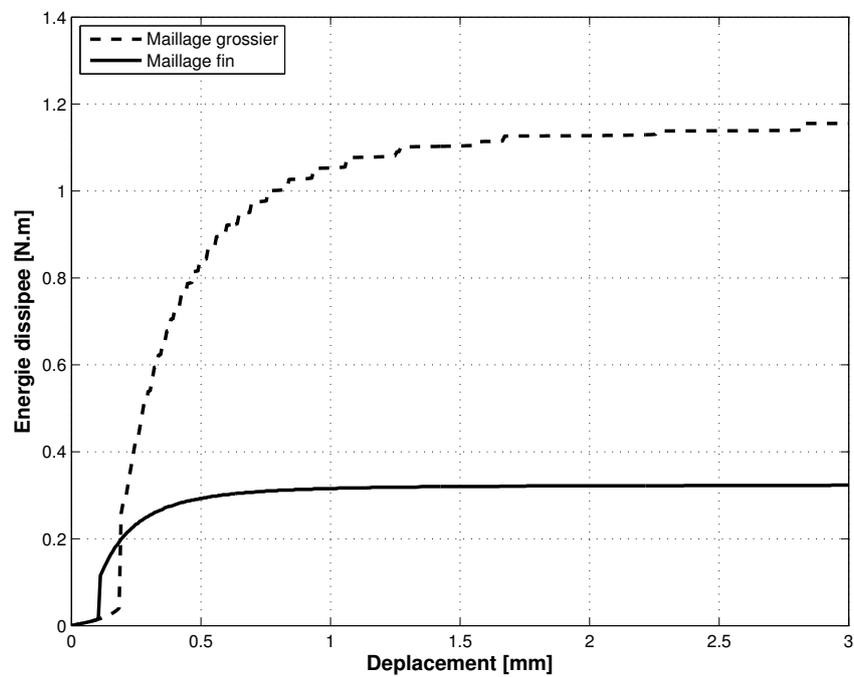
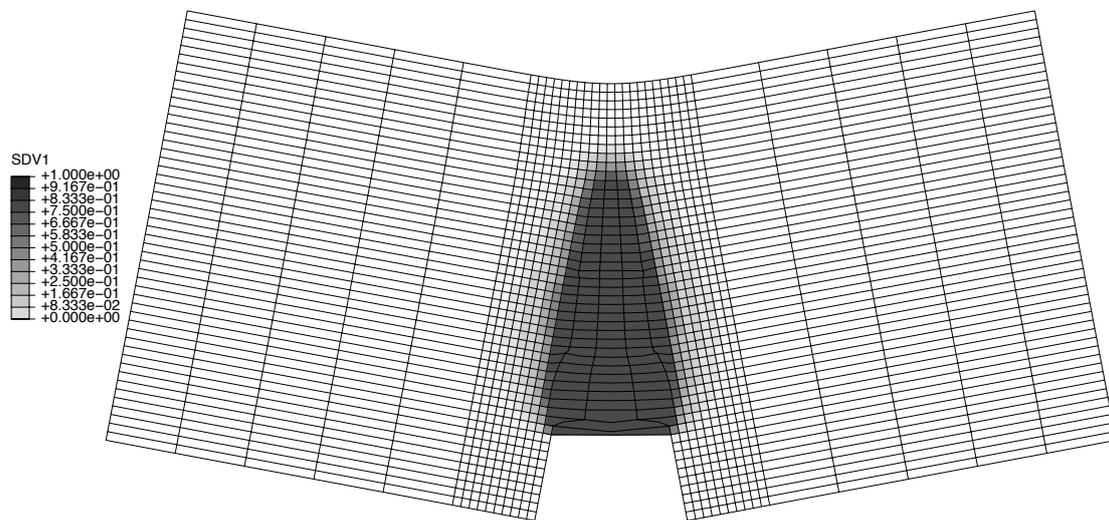


FIGURE 4.6 – Tracé de l'énergie dissipée en fonction du déplacement

### 1.3.2 Cas avec effet retard

On se propose ici de mettre en avant l'effet régularisant de l'effet retard. On compare donc les résultats liés au chargement de l'éprouvette CT pour les deux maillages utilisés précédemment. Sur les figures 4.7 et 4.8, on observe une cartographie de la moyenne de l'endommagement par élément dans l'éprouvette. En blanc, la valeur de la variable d'endommagement est nulle, et en noir elle est égale à 1. On observe toujours une bande d'éléments centrale où l'endommagement et les déformations se localisent, ce qui est normal pour cette éprouvette, mais elle n'a plus la largeur d'un seul élément. De plus, on remarque que les deux cartes d'endommagement sont superposables, la taille de maille n'a donc plus d'effet sur le champ d'endommagement.



**FIGURE 4.7** – Carte de la moyenne de l'endommagement par élément avec effet retard - Maillage grossier

Le fait de voir, dans la bande centrale, certains éléments distordus avec une déformation importante n'est pas problématique. Ceux-ci ayant un endommagement égal à 1, leur énergie de déformation est donc nulle, ils n'ont aucune influence sur le résultat.

Lorsque l'on compare les courbes force-déplacement des deux maillages (FIG. 4.9), on ne voit pas de différence. Dans les deux cas on atteint le même pic d'effort, les courbes se superposent.

Il en est de même pour l'énergie dissipée (FIG. 4.10), les deux courbes se superposent aussi.

Dans le cas de ces deux maillages, où seule la taille de maille a été changée, les solutions sont les mêmes. Il en serait de même si l'on changeait l'orientation des éléments ou leur type. L'effet retard, utilisé en quasi statique, offre donc une suppression de la dépendance de la solution au maillage due au phénomène de localisation.

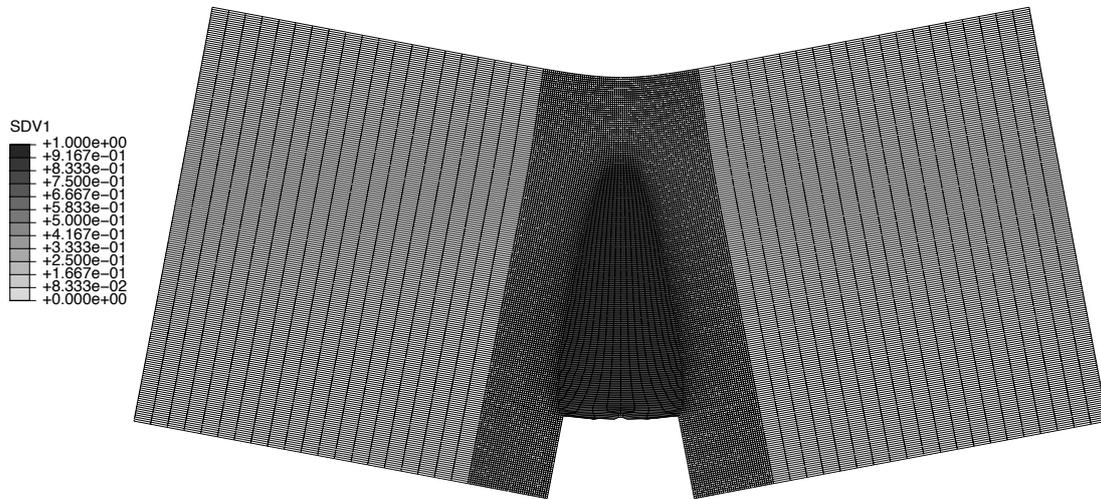


FIGURE 4.8 – Carte de la moyenne de l'endommagement par élément avec effet retard -  
Maillage fin

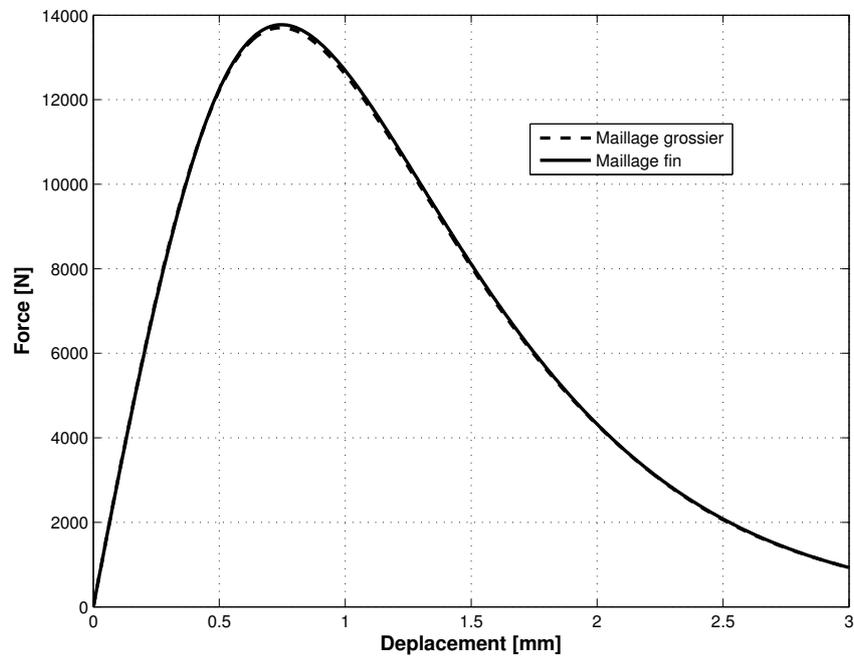


FIGURE 4.9 – Tracé de la force en fonction du déplacement

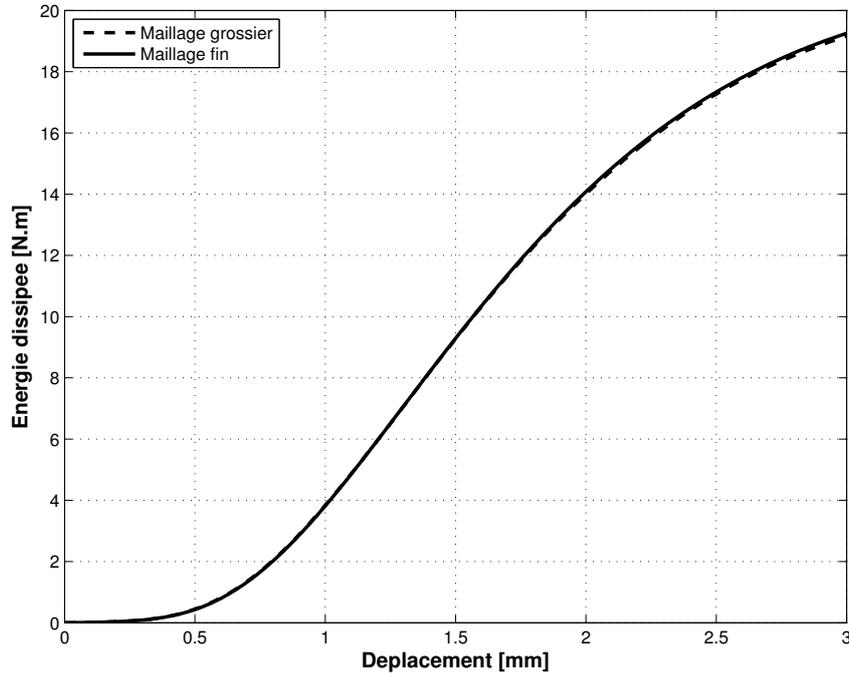


FIGURE 4.10 – Tracé de l'énergie dissipée en fonction du déplacement

## 1.4 Influence des paramètres

### 1.4.1 Pas de temps $\Delta t$

Afin de résoudre le problème sur tout le temps, une discrétisation temporelle est utilisée. Elle amène à résoudre un problème à chaque piquet de temps. Cette discrétisation fait intervenir un pas de temps qui sépare les différents instants auxquels une solution est recherchée. Ce pas de temps,  $\Delta t$ , est utilisé afin de déterminer la valeur de la variable d'endommagement  $d_{n+1}$  au piquet de temps  $t_{n+1}$ . Le schéma d'Euler implicite suivant est utilisé :

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t \times \dot{d}_{n+1} \quad (4.7)$$

Ce schéma d'intégration temporelle étant connu pour être inconditionnellement stable, aucune condition n'est donc à donner au pas de temps. A priori, lorsque l'on fait deux simulations en ne changeant que le pas de temps, on devrait n'observer aucune différence entre les résultats pour peu que celui-ci soit suffisamment petit.

Pourtant, pour des valeurs de pas de temps supérieures au paramètre  $\tau_c$ , des différences peuvent apparaître. Ceci est dû au fait que le modèle à effet retard impose une vitesse maximale d'endommagement  $\dot{d}_{max}$  :

$$\dot{d}_{max} = \frac{1}{\tau_c} \quad (4.8)$$

d'où :

$$d_{n+1} \leq d_n + \Delta t \times \dot{d}_{max} = d_n + \frac{\Delta t}{\tau_c} \quad (4.9)$$

Or la variable  $d$  est bornée entre 0 et 1. Donc dans ce cas limite, pour bien prendre en compte le taux limité d'endommagement dans l'intégration numérique et éviter de casser un point de gauss en un incrément, il faut :

$$\Delta t \leq \tau_c \quad (4.10)$$

On voit donc apparaître un pas de temps  $\Delta t$  maximum à prendre en compte lors des simulations qui est de l'ordre de la valeur du paramètre  $\tau_c$ .

#### 1.4.2 Paramètre $\tau_c$ de l'effet retard

L'utilisation de l'effet retard rajoute un paramètre :  $\tau_c$ . Afin d'observer son influence sur le résultat, on se propose de faire deux simulations pour deux valeurs de  $\tau_c$  différentes. En observant la courbe de réponse force-déplacement (FIG. 4.11) pour ces deux valeurs, on remarque que les résultats diffèrent. Une valeur de  $\tau_c$  plus grande a tendance à augmenter le pic d'effort, et donc l'énergie dissipée (FIG. 4.12).

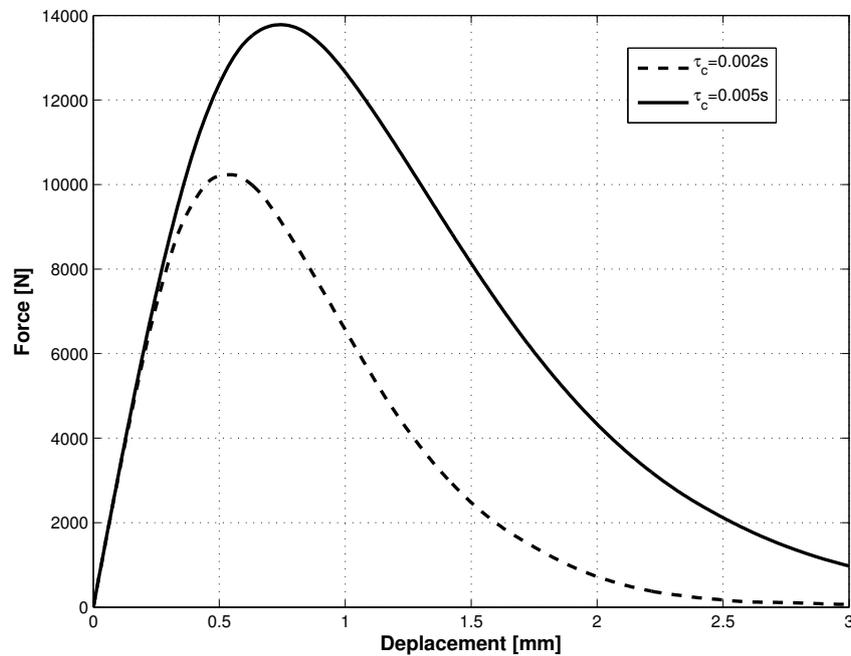


FIGURE 4.11 – Force en fonction du déplacement pour deux valeurs de  $\tau_c$

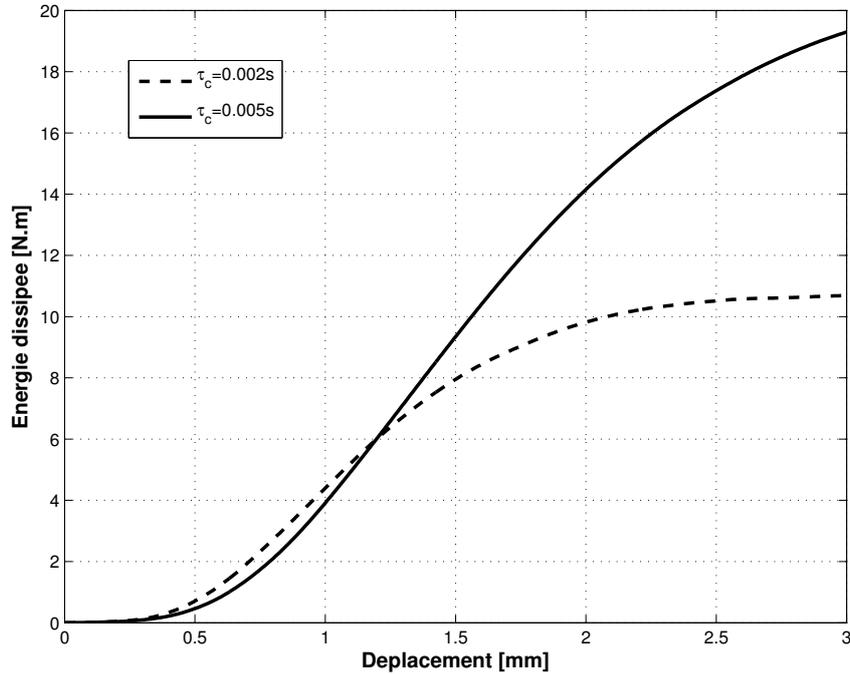


FIGURE 4.12 – Energie dissipée en fonction du déplacement pour deux valeurs de  $\tau_c$

Si on observe les cartes d'endommagement correspondant à ces deux simulations, lorsque leurs bandes endommagées qui représentent la fissure ont la même longueur (FIG. 4.14 et FIG. 4.13), on remarque que les deux cartographies sont différentes.

L'influence du paramètre  $\tau_c$  est très visible sur la largeur de la bande où l'endommagement se concentre. Il permet donc de changer la largeur de la bande endommagée. Si on augmente sa valeur, la largeur de cette bande augmente. La courbe représentant l'endommagement en fonction de sa coordonnée  $x$ , pour une coordonnée  $y$  prise au milieu de la fissure, nous permet de bien mettre en lumière cette différence (FIG. 4.15).

Comme la largeur de la bande endommagée diminue avec  $\tau_c$ , on doit utiliser une valeur de  $\tau_c$  suffisamment grande pour que la bande d'éléments fortement endommagés ait une largeur de plusieurs éléments. Ce paramètre doit donc être ajusté en fonction du maillage pour ne pas voir apparaître une localisation de l'endommagement et des déformations comme dans le cas sans endommagement retardé.

### 1.4.3 Vitesse de chargement

Soient  $\underline{u}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $d$  et  $Y$  les champs solutions dépendant du temps. On peut exprimer ces solutions en fonction du paramètre de chargement  $\lambda$  imposant les conditions aux limites :

$$\underline{u}_d(t) = \tilde{\underline{u}}_d(\lambda) \quad (4.11)$$

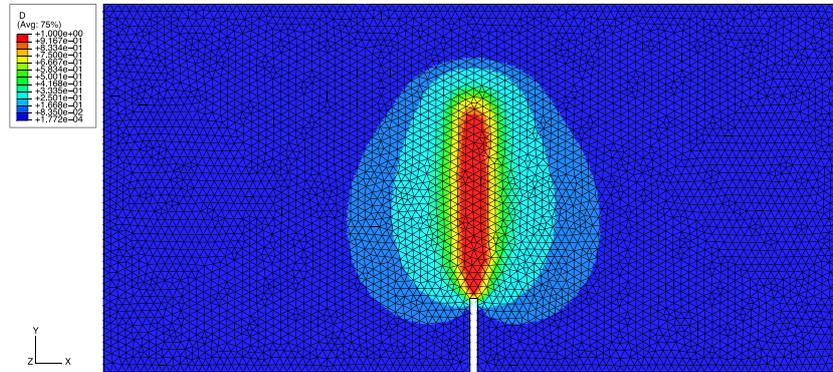


FIGURE 4.13 – Cartographie de l'endommagement pour  $\tau_c = 0.005s$

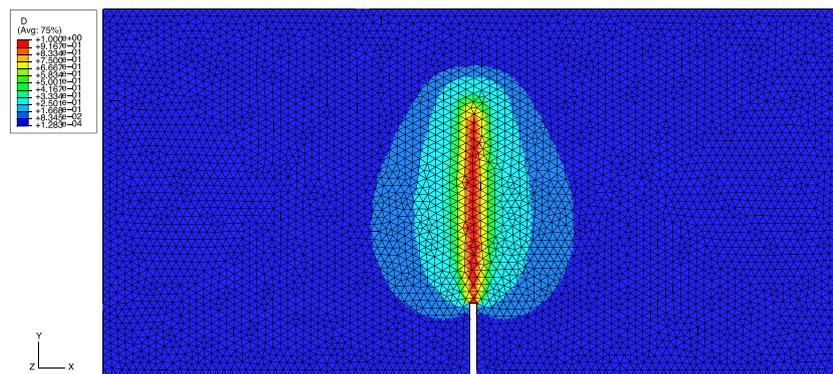


FIGURE 4.14 – Cartographie de l'endommagement pour  $\tau_c = 0.002s$

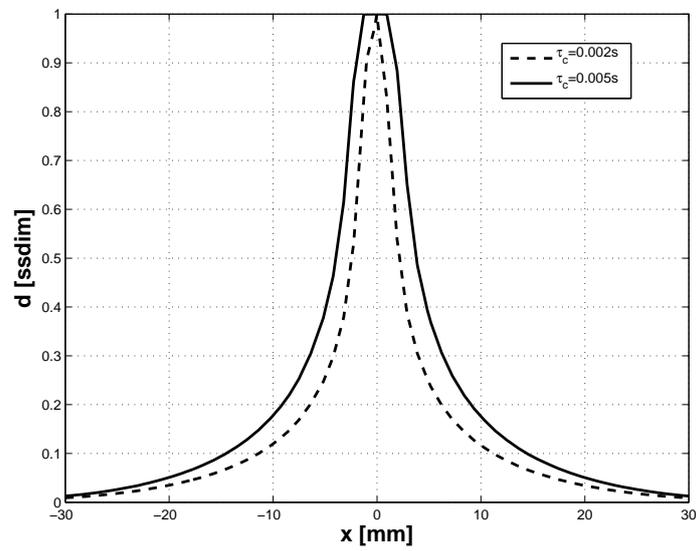


FIGURE 4.15 – Endommagement en fonction de l'abscisse  $x$  pour deux valeurs de  $\tau_c$

avec  $\lambda = Vt$ , où  $V$  est la vitesse de chargement. Les champs solutions en fonction de  $\lambda$  sont alors :

$$\tilde{Y}(\lambda) = Y(t) \quad (4.12)$$

$$\tilde{d}(\lambda) = d(t) \quad (4.13)$$

On en déduit donc que

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{d}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = V \frac{\partial \tilde{d}}{\partial \lambda} \quad (4.14)$$

Or la loi à taux limité est définie par :

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \frac{1}{\tau_c} f(Y(t), d(t)) \quad (4.15)$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \lambda} = \frac{1}{V\tau_c} f(Y(t), d(t)) \quad (4.16)$$

Cette loi à taux limité s'exprime alors en fonction du paramètre  $\lambda$  par :

$$\frac{\partial \tilde{d}}{\partial \lambda} = \frac{1}{V\tau_c} f(\tilde{Y}(\lambda), \tilde{d}(\lambda)) \quad (4.17)$$

Le résultat dépend donc de la vitesse de chargement et non simplement de la valeur du chargement  $\lambda$ . Pour deux vitesses de chargement différentes, on peut cependant obtenir le même résultat à la condition que le produit  $V\tau_c$  soit identique.

## 1.5 Bilan et limites

L'utilisation d'un modèle avec effet retard pour résoudre des problèmes possédant un chargement quasi-statique, permet d'obtenir une indépendance des résultats au maillage. Cependant, une précaution est à prendre quant au choix de la taille maximale de la maille et du pas de temps au regard du paramètre  $\tau_c$  utilisé et de la vitesse de chargement imposée afin d'éviter la localisation.

L'introduction du paramètre  $\tau_c$ , venant du modèle avec effet retard, pose la question de son identification. Sa valeur intrinsèque, de l'ordre de  $1\mu s$ , ne peut être utilisée. La valeur utilisée en quasi-statique n'a donc plus aucune signification physique. On observe des différences de résultats, que ce soit sur les cartographies d'endommagement, les courbes force-déplacement, ou les courbes d'énergie dissipée en fonction du déplacement imposé, lorsque les valeurs du paramètre  $\tau_c$  sont différentes.

## 2 Lien entre endommagement et rupture

On a pu voir que l'utilisation de la mécanique de l'endommagement associée à un modèle à effet retard permet de faire propager une zone fortement endommagée et déformée dans la structure. On peut assimiler cette zone à une fissure. Cependant, l'énergie dissipée lors de la propagation de cette fissure dépend du paramètre  $\tau_c$  de l'effet retard. On va donc chercher à comparer la propagation de cette fissure par la mécanique de l'endommagement à sa propagation par la mécanique de la rupture, cette dernière apportant un critère de propagation énergétique associée à un paramètre matériau  $G_c$ . Cette approche est dérivée des travaux de Hillerborg [Hillerborg *et al.*, 1976]. Elle a été très utilisée pour recalibrer les modèles permettant de gérer la localisation et permet de faire un pont entre endommagement et rupture [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1996].

### 2.1 Rappels sur la mécanique de la rupture

Griffith a été le premier à considérer la rupture comme un processus physique qui nécessite de l'énergie pour accroître la taille de la surface fissurée. Nous ferons donc un premier rappel sur la théorie de Griffith d'après l'approche de Bui et Ehrlicher [Bui, 2006], puis nous proposerons un cadre thermodynamique basé sur les notes de cours de Leblond et Marigo nous permettant de faire figurer l'énergie dissipée. Cette dernière quantité nous servira dans la suite pour faire un lien entre une modélisation par la mécanique de la rupture et une modélisation par la mécanique de l'endommagement, sous la condition que la variation d'aire fissurée soit la même.

#### 2.1.1 Théorie de Griffith, approche de Bui et Ehrlicher

On considère la propagation d'une fissure de façon quasi-statique dans un milieu élastique sous chargement constant. Durant l'accroissement d'une aire fissurée  $\delta S$ , l'énergie nécessaire pour la rupture est  $\delta W_S$ . La variation d'énergie élastique emmagasinée est  $\delta W_{elas}$ , celle de l'énergie cinétique est  $\delta W_{cin}$ , et celle du travail des forces extérieures est  $\delta W_{ext}$ . Griffith a postulé que  $\delta W_S = 2\gamma\delta S$ , et que l'énergie totale se conserve [Griffith, 1920] :

$$\delta W_{tot} = \delta W_{elas} + \delta W_{cin} - \delta W_{ext} + \delta W_S = 0 \quad (4.18)$$

Supposons un état d'équilibre pour une fissure stationnaire ( $\delta W_{cin} = 0$ ) :

$$\delta W_{elas} - \delta W_{ext} + 2\gamma\delta S = 0 \quad (4.19)$$

Le critère de propagation de fissure à l'équilibre est défini par :

$$-\frac{\delta}{\delta S}(W_{elas} - W_{ext}) = 2\gamma \quad (4.20)$$

On définit alors le taux de restitution d'énergie  $G$  :

$$G = -\frac{\delta}{\delta S}(W_{elas} - W_{ext}) \quad (4.21)$$

On a donc propagation de la fissure (dite stable) si :

$$G = 2\gamma \quad (4.22)$$

$\gamma$  correspond à l'énergie surfacique qu'il faut apporter pour créer une surface. Le 2 vient du fait que deux surfaces sont créées lorsque la fissure se propage.

### 2.1.2 Approche thermodynamique de la mécanique de la rupture

Dans l'approche de Griffith, le bilan d'énergie peut être interprété comme l'écriture du Premier Principe de la Thermodynamique. L'énergie de liaison  $2\gamma$  serait donc associée à un processus réversible, et donc  $\delta S$  pourrait être négatif. Afin de prendre en compte le fait que la propagation de la fissure est un processus irréversible, on va l'introduire grâce au Second Principe de la Thermodynamique par l'intermédiaire de la puissance dissipée par la création de cette surface fissurée.

On fait l'hypothèse que le trajet de fissure existe et est connu à l'avance. On prend une fissure de largeur  $h$  fixe. On fait l'hypothèse que la température est uniforme et constante, que l'énergie cinétique, les forces volumiques et le frottement sont négligeables, et que le matériau est élastique. On considérera l'hypothèse des petites perturbations vérifiée.

D'après le Second Principe de la Thermodynamique :

$$\dot{S} \geq \frac{Q}{T} \quad (4.23)$$

avec  $S$  l'entropie,  $Q$  la quantité de chaleur reçue par le système, et  $T$  la température supposée uniforme. On introduit alors une puissance dissipée positive telle que :

$$T\dot{S} = Q + P_{diss} \quad (4.24)$$

On pose que le processus de création de fissure dissipe une certaine énergie proportionnelle à la surface créée :

$$P_{diss} = G_c \dot{A} \quad (4.25)$$

où  $G_c$  est la puissance dissipée par unité de surface créée.

D'après le Premier Principe de la thermodynamique :

$$\dot{E} + \dot{E}_c = P_{ext} + Q \quad (4.26)$$

où  $E$  est l'énergie interne,  $E_c$  l'énergie cinétique et  $P_{ext}$  la puissance des efforts extérieurs. En négligeant  $E_c$  et en combinant les équation (4.24) et (4.26), on obtient :

$$T\dot{S} = \dot{E} - P_{ext} + P_{diss} \quad (4.27)$$

Soit  $\Psi$  l'énergie libre telle que  $\Psi = E - TS$ . On obtient dans le cas isotherme :

$$\dot{\Psi} = \dot{E} - T\dot{S} - S\dot{T} = \dot{E} - T\dot{S} \quad (4.28)$$

$$P_{diss} = -\dot{\Psi} + P_{ext} \quad (4.29)$$

On considère que l'état de la structure est défini par deux variables : le paramètre de chargement  $\lambda$  et la longueur de fissure  $l$ . L'énergie libre et le déplacement  $\underline{u}$  dépendent donc de ces deux quantités :

$$\Psi = \Psi(\lambda, l) = \Psi(\lambda(t), l(t)) \quad (4.30)$$

$$\underline{u} = \underline{u}(\lambda(t), l(t)) \quad (4.31)$$

Donc :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial\Psi}{\partial l}\dot{l} \quad (4.32)$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial\underline{u}}{\partial\lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial\underline{u}}{\partial l}\dot{l} \quad (4.33)$$

On exprime la puissance des efforts intérieurs (en l'absence de force volumique) :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma n} \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} dS = \left( \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma n} \cdot \frac{\partial\underline{u}}{\partial\lambda} dS \right) \dot{\lambda} + \left( \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma n} \cdot \frac{\partial\underline{u}}{\partial l} dS \right) \dot{l} \quad (4.34)$$

Or la dérivée partielle de  $\underline{u}$  par rapport à  $l$  sur le bord  $\partial\Omega_U$  (bord sur lequel on applique des déplacements imposés) est faite à chargement constant, elle est donc nulle :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma n} \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} dS = \left( \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma n} \cdot \frac{\partial\underline{u}}{\partial\lambda} dS \right) \dot{\lambda} + \left( \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \cdot \frac{\partial\underline{u}}{\partial l} dS \right) \dot{l} \quad (4.35)$$

(4.29) devient alors :

$$P_{diss} = - \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} - \int_{\partial\Omega} \underline{\sigma n} \cdot \frac{\partial\underline{u}}{\partial\lambda} dS \right) \dot{\lambda} - \left( \frac{\partial\Psi}{\partial l} - \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \cdot \frac{\partial\underline{u}}{\partial l} dS \right) \dot{l} \quad (4.36)$$

Le matériau étant élastique :

$$\Psi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} K : \varepsilon : \varepsilon dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon dV \quad (4.37)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda} \int_{\Omega} \frac{1}{2} K : \varepsilon : \varepsilon dV = \int_{\Omega} K : \varepsilon : \frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda} dV = \int_{\Omega} \sigma : \frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda} dV \quad (4.38)$$

Or d'après le Principe des Puissances Virtuelles :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \lambda} dV - \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\sigma} \underline{n} \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial \lambda} dS = 0 \quad (4.39)$$

Donc

$$P_{diss} = - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial l} - \int_{\partial \Omega_F} \underline{F}_d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial l} dS \right) i \quad (4.40)$$

La dissipation est donc uniquement due à l'accroissement de fissure.

Comme la surface fissurée est soit libre, soit en contact sans frottement, les techniques de prise en compte de singularités mobiles induisent à :

$$\int_{\partial \Omega_F} \underline{F}_d \cdot \frac{\partial \underline{u}}{\partial l} dS = \frac{\partial}{\partial l} \int_{\partial \Omega_F} \underline{F}_d \cdot \underline{u} dS \quad (4.41)$$

D'où

$$P_{diss} = - \frac{\partial}{\partial l} \left( \Psi - \int_{\partial \Omega_F} \underline{F}_d \cdot \underline{u} dS \right) i \quad (4.42)$$

On voit donc apparaître l'énergie potentielle  $E_p$  :

$$E_p = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\partial \Omega} \boldsymbol{\sigma} \underline{n} \cdot \underline{u} dS \quad (4.43)$$

Sachant que l'on considère une surface fissurée  $S$  de largeur  $h$  constante ( $\dot{h} = \dot{A}$ ) :

$$P_{diss} = - \frac{\partial E_p}{\partial A} \dot{A} \quad (4.44)$$

On pose  $G$  le taux de restitution d'énergie tel que :

$$G = - \frac{\partial E_p}{\partial A} \quad (4.45)$$

En introduisant la puissance dissipée  $P_{diss}$  sous la forme  $P_{diss} = G_c \dot{A}$ , les équations des deux Principes de la Thermodynamique s'écrivent donc :

$$\begin{cases} (G_c - G) \dot{A} = 0 \\ G_c \dot{A} \geq 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

La seconde équation, avec  $G_c$  positif, impose  $\dot{A} \geq 0$ . La première équation impose alors  $G = G_c$  si  $\dot{A} \neq 0$ .

## 2.2 Calcul de l'énergie dissipée

Si l'on veut comparer notre approche utilisant la mécanique de l'endommagement à ce que l'on obtiendrait en utilisant la mécanique de la rupture, pour traiter de la propagation de fissure, il faut utiliser une quantité comparable dans les deux cas. La mécanique de la rupture gère la propagation de la fissure avec un critère énergétique : le taux de restitution d'énergie. Donc si l'on souhaite utiliser la mécanique de l'endommagement pour faire propager une fissure, il faut utiliser ce même critère énergétique. Celui-ci fait intervenir l'énergie dissipée et la longueur de fissure.

### 2.2.1 Cas de la mécanique de la rupture

Si l'on utilise la mécanique de la rupture, la puissance dissipée s'exprime par :

$$G_c \dot{A} \quad (4.47)$$

avec  $G$  le taux de restitution d'énergie et  $A$  l'aire de la fissure.

L'énergie dissipée entre un instant  $t_0$  et un instant  $t_1$  fait intervenir cette dissipation :

$$E_{diss}^f = \int_{t_0}^{t_1} G_c \dot{A} dt \quad (4.48)$$

ou encore :

$$E_{diss}^f = \int_{A(t_0)}^{A(t_1)} G_c dA \quad (4.49)$$

L'exposant  $f$  sera ici associé à la mécanique de la rupture (Fracture), et l'exposant  $d$  sera associée à la mécanique de l'endommagement (Damage).

### 2.2.2 Cas de la mécanique de l'endommagement

Pour la mécanique de l'endommagement, le calcul de l'énergie dissipée entre un instant  $t_0$  et un instant  $t_1$  fait aussi intervenir la dissipation. Soit  $\omega$  la dissipation volumique dans le cas où on utilise seule la mécanique de l'endommagement :

$$\omega = Y \dot{d} \quad (4.50)$$

L'énergie dissipée volumique est donc :

$$e_{diss}^d = \int_{t_0}^{t_1} \omega dt = \int_{t_0}^{t_1} Y \dot{d} dt \quad (4.51)$$

Sachant que le potentiel thermodynamique est égal dans notre cas à l'énergie de déformation  $e_d$  :

$$\rho \Psi_e = \frac{1}{2} (1-d) \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = e_d \quad (4.52)$$

Les variables internes sont  $d$  et  $\varepsilon$ . En dérivant, on obtient :

$$\dot{e}_d = \frac{\partial e_d}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial e_d}{\partial d} \dot{d} \quad (4.53)$$

En identifiant le tenseur des contraintes et la force thermodynamique :

$$\dot{e}_d = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} - Y \dot{d} \quad (4.54)$$

D'où l'énergie volumique dissipée :

$$e_{diss}^d = \int_{t_0}^{t_1} Y \dot{d} dt = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{e}_d dt \quad (4.55)$$

Par conséquent :

$$e_{diss}^d = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} dt + e_d(t_0) - e_d(t_1) \quad (4.56)$$

Le schéma (FIG. 4.16) permet d'expliciter le calcul précédent.

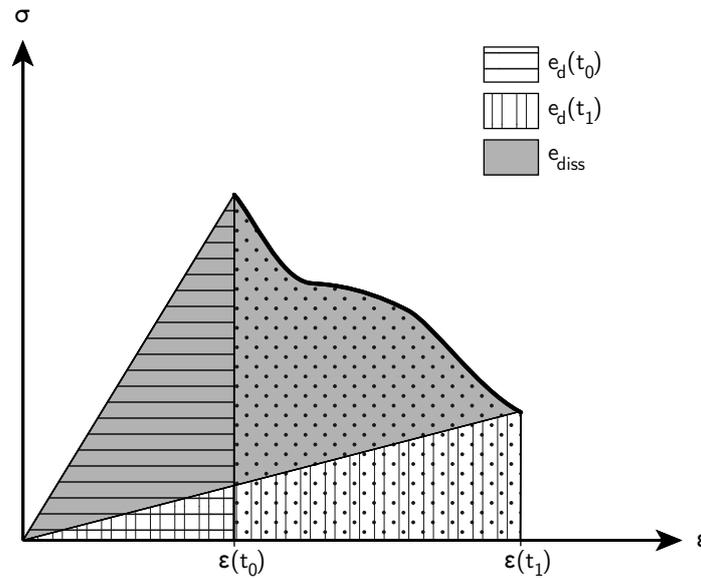


FIGURE 4.16 – Schéma du calcul de l'énergie volumique dissipée

En intégrant sur l'éprouvette, on obtient l'énergie dissipée  $E_{diss}$  :

$$E_{diss}^d = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} dt d\Omega + \int_{\Omega} e_d(t_0) d\Omega - \int_{\Omega} e_d(t_1) d\Omega \quad (4.57)$$

*Sur la gestion des bandes de localisation dans les composites stratifiés*

Ce qui donne en changeant l'ordre d'intégration :

$$E_{diss}^d = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \, dt + E_d(t_0) - E_d(t_1) \quad (4.58)$$

En appliquant le Principe des Puissances Virtuelles au champ de vitesse réelle, en négligeant les effets inertiels pour se placer dans le cadre défini par Griffith :

$$- \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} \, dS + \int_{\partial\Omega_U} \boldsymbol{\sigma} \underline{n} \cdot \frac{d\underline{u}_d}{dt} \, dS = 0 \quad (4.59)$$

On obtient donc en intégrant entre deux instants et en inversant l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \, dt = \\ \int_{\Omega} \int_{\underline{u}(t_0)}^{\underline{u}(t_1)} \underline{f}_d \cdot d\underline{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \int_{\underline{u}(t_0)}^{\underline{u}(t_1)} \underline{F}_d \cdot d\underline{u} \, dS + \int_{\partial\Omega_U} \int_{\underline{u}_d(t_0)}^{\underline{u}_d(t_1)} \boldsymbol{\sigma} \underline{n} \cdot d\underline{u}_d \, dS \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} E_{diss}^d = E_d(t_0) - E_d(t_1) \\ + \int_{\Omega} \int_{\underline{u}(t_0)}^{\underline{u}(t_1)} \underline{f}_d \cdot d\underline{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \int_{\underline{u}(t_0)}^{\underline{u}(t_1)} \underline{F}_d \cdot d\underline{u} \, dS + \int_{\partial\Omega_U} \int_{\underline{u}_d(t_0)}^{\underline{u}_d(t_1)} \boldsymbol{\sigma} \underline{n} \cdot d\underline{u}_d \, dS \end{aligned} \quad (4.61)$$

S'il n'y a pas de forces volumiques, le calcul de l'énergie dissipée est simplifié, car il n'y a besoin de connaître que les déplacements et leurs efforts associés au niveau des surfaces où les conditions aux limites sont non nulles. Dans le cas traité, on impose seulement un déplacement, les autres surfaces sont libres d'effort. Le schéma de la figure 4.17 permet de visualiser le calcul effectué.

### 2.3 Calcul du taux de restitution d'énergie

La mécanique de la rupture gère la propagation de la fissure avec un critère énergétique : le taux de restitution d'énergie. Si l'on souhaite utiliser la mécanique de l'endommagement pour faire propager une fissure, il faut comparer ses résultats sur ce même critère énergétique. On calcule donc un taux de restitution d'énergie associé à la propagation de la zone endommagée en égalisant les énergies dissipées, par l'endommagement et par la mécanique de la rupture en considérant que l'accroissement de fissure est le même pour les deux modèles.

$$E_{diss}^d = E_{diss}^f \quad (4.62)$$

On fait alors apparaître le taux de restitution d'énergie et l'aire de fissure dans l'énergie dissipée par le modèle endommageable :

$$E_{diss}^d = \int_{A(t_0)}^{A(t_1)} G \, dA \quad (4.63)$$

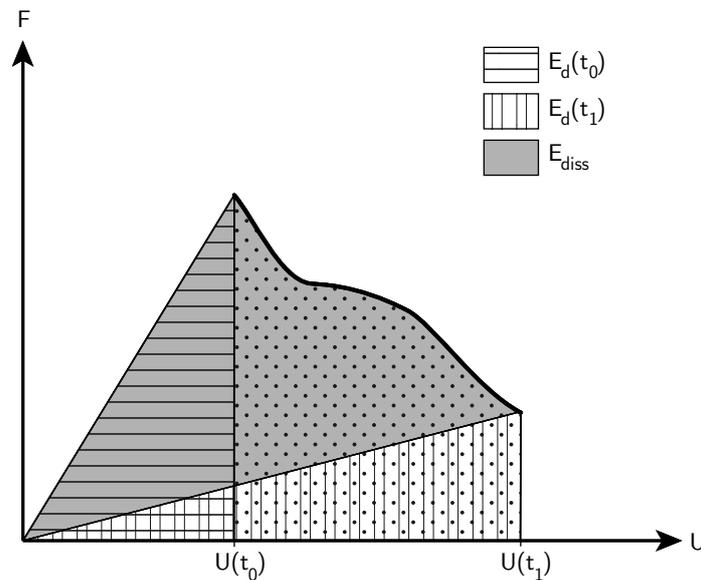


FIGURE 4.17 – Schéma du calcul de l'énergie dissipée pour l'éprouvette CT

En considérant deux instants très proches, on peut alors calculer  $G$  à partir de l'accroissement de l'énergie dissipée et de la variation de l'aire fissurée :

$$G = \frac{\Delta E_{diss}^d}{\Delta A} \quad (4.64)$$

On cherche maintenant à vérifier que le taux de restitution d'énergie du modèle endommageable  $G$  et le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  du matériau sont égaux.

### 3 Taux de restitution d'énergie et effet retard

#### 3.1 Influence de $\tau_c$

Nous avons vu que le paramètre  $\tau_c$  était lié à la largeur de la zone endommagée, mais aussi à l'énergie dissipée. Plus  $\tau_c$  est grand, plus la largeur de la bande endommagée est grande, et donc plus il y a d'énergie dissipée lors de l'avancée de la zone endommagée. Par conséquent le taux de restitution d'énergie augmente avec  $\tau_c$  (FIG. 4.18).

Cependant, pour des valeurs de  $\tau_c$  petites, la largeur de la bande endommagée devrait être plus petite que la taille de la maille. L'endommagement et les déformations se localisent alors dans une bande de la largeur d'un élément, et le taux de restitution d'énergie est bloqué à une valeur minimale qui dépend de la taille du maillage. Le même problème peut apparaître pour des modèles non-locaux si la longueur caractéristique introduite est plus fine que la dimension de la maille. Pour éviter cela, il faut prendre un

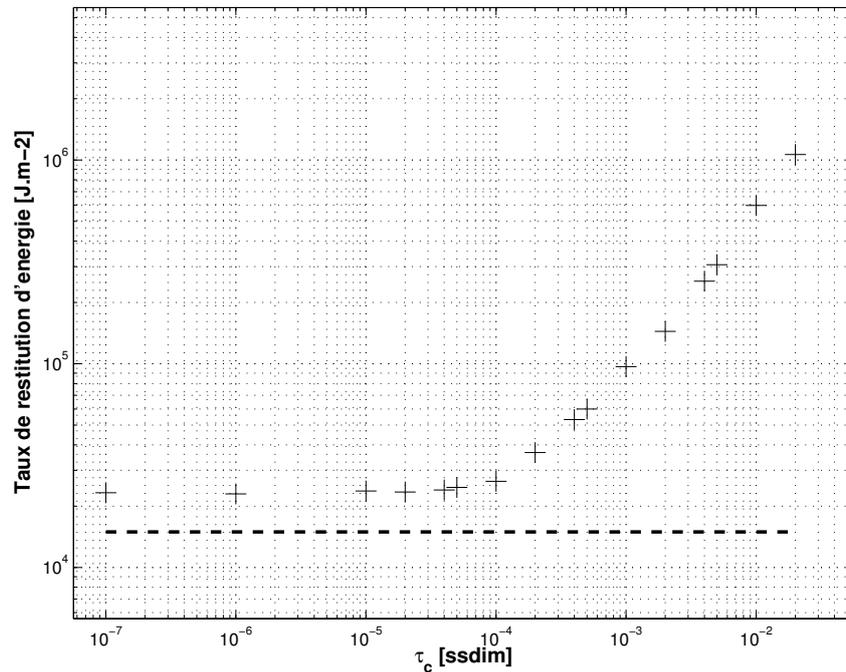


FIGURE 4.18 – Taux de restitution d'énergie en fonction de  $\tau_c$

maillage beaucoup plus fin qui permette de représenter la zone endommagée à sa vraie taille caractéristique de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$  au lieu de  $1 \text{ mm}$  pris ici. On voit donc apparaître l'autre limite imposée aux simulations numériques pour respecter l'énergie dissipée : la taille de maille qui doit être extrêmement fine, en plus d'un maillage temporel très fin. Ces deux limites ne peuvent cependant être respectée en raison de leur coût de calcul prohibitif. Par la suite, les valeurs du paramètres  $\tau_c$  sont prises pour que la zone localisée ait une largeur supérieure à la taille de maille.

Le trait pointillé représente la valeur de  $G_c$  du matériau considéré. On voit donc que cette valeur est hors de portée à moins d'avoir un maillage extrêmement fin pour que l'énergie ne soit dissipée que sur une largeur très petite.

### 3.2 Influence de la vitesse de chargement

On a vu précédemment que la vitesse de chargement avait une influence lorsque l'on utilise un modèle d'endommagement à effet retard. On peut donc observer que le taux de restitution d'énergie est lui aussi dépendant de la vitesse de chargement utilisée (FIG. 4.19).

On retrouve alors le fait que pour deux vitesses de chargement différentes, le taux de restitution d'énergie est le même à condition que le produit  $V\tau_c$  soit identique.

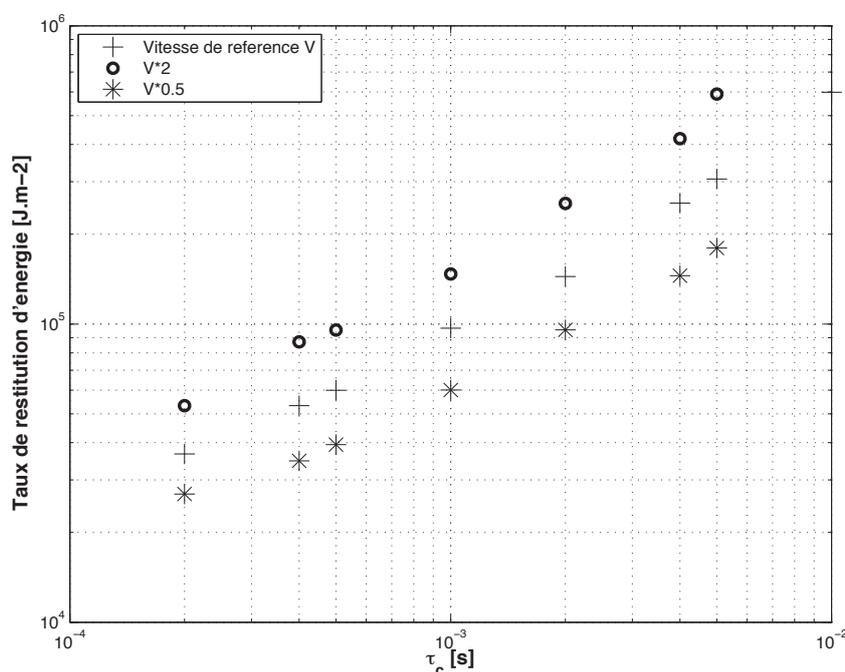


FIGURE 4.19 – Taux de restitution d'énergie pour différentes vitesses de chargement

### 3.3 Influence de $Y_c$

Puisque l'on cherche à faire une équivalence énergétique, l'autre paramètre majeur est le paramètre  $Y_c$  de la loi statique, car celui-ci est directement lié à l'énergie volumique dissipée (FIG. 4.20).

Dans le cas où l'effet retard n'est pas utilisé, l'énergie volumique dissipée peut être calculée analytiquement. Le paramètre  $Y_c$  apparaît alors explicitement, et l'énergie volumique dissipée dépend uniquement de ce paramètre :

$$e_{diss} = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_{rupt}} \sigma \, d\varepsilon = \frac{Y_c}{3} \quad (4.65)$$

L'éprouvette CT ne faisant apparaître qu'une zone endommagée centrée et verticale, on peut se permettre, pour cette éprouvette, de modifier dans toute la structure le paramètre  $Y_c$  afin de modifier l'énergie dissipée dans la zone localisée car le reste de la structure ne lui est pas sensible. Intéressons-nous donc maintenant au tracé du taux de restitution d'énergie en fonction du paramètre  $Y_c$ , défini comme homogène pour toute l'éprouvette (FIG. 4.21).

On remarque que lorsque  $Y_c$  augmente, le taux de restitution d'énergie augmente. Le trait pointillé représente la valeur de  $G_c$  du matériau considéré. Donc si le taux de restitution d'énergie est surestimé par l'utilisation de l'effet retard, on peut modifier l'énergie dissipée étalée dans la zone endommagée en réduisant le paramètre  $Y_c$ .

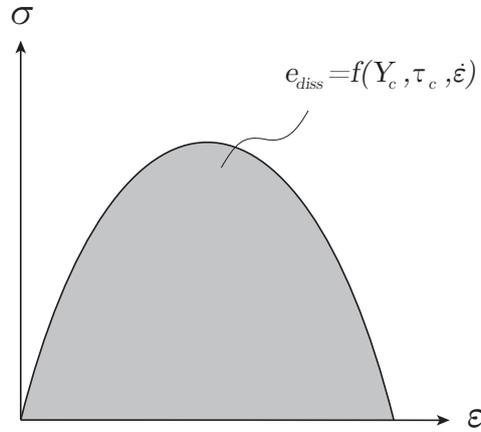


FIGURE 4.20 – Energie volumique dissipée si la loi statique est utilisée

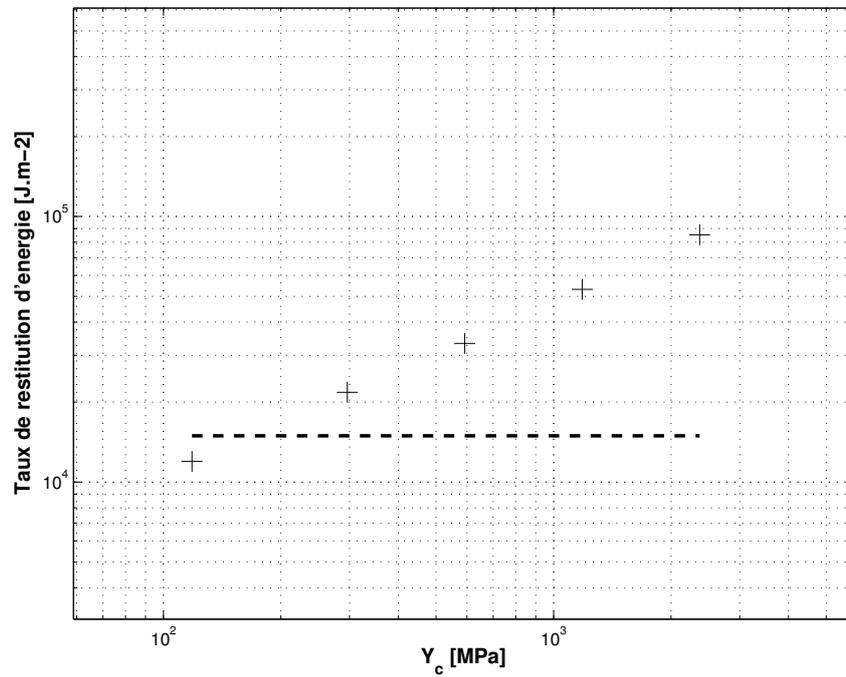


FIGURE 4.21 – Taux de restitution d'énergie en fonction de  $Y_c$  ( $\tau_c = 4.10^{-4}$  s)

### 3.4 Identification d'une loi reliant $G$ , $\tau_c$ et $Y_c$

Sachant que les paramètres  $\tau_c$  et  $Y_c$  ont une influence directe sur le taux de restitution d'énergie, on cherche ici à identifier une loi permettant d'exprimer  $G$  en fonction de ceux-ci.

On cherche dans un premier temps à observer l'influence de  $\tau_c$  sur  $G$  (FIG. 4.22). Les croix correspondent à des taux de restitution d'énergie pour différentes valeurs de  $\tau_c$  pour lesquelles le paramètre  $Y_c$  est pris égal à sa valeur initiale de référence. On remarque que dans ce diagramme log-log ces deux quantités sont reliées linéairement. Les ronds utilisés sur le graphique pour représenter le taux de restitution d'énergie sont obtenus pour différentes valeurs de  $Y_c$  ( $\tau_c$  est pris égal à  $4.10^{-4}s$ ). Le paramètre  $Y_c$  a donc tendance à décaler verticalement la droite couplant  $G$  à  $\tau_c$ .

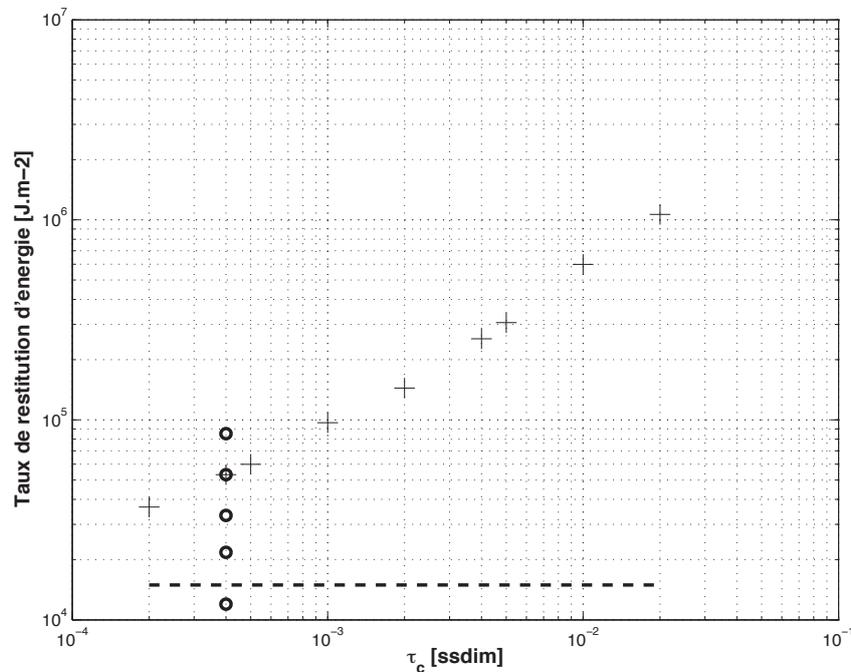


FIGURE 4.22 – Taux de restitution d'énergie en fonction de  $\tau_c$  ( $Y_c = Y_{cref}$ )

Une approximation de  $G$  serait alors :

$$G = b_{\tau}(Y_c) \times (\tau_c)^{a_{\tau}} \quad (4.66)$$

Dans un second temps, on cherche à observer l'influence de  $Y_c$  sur  $G$  (FIG. 4.23). Les ronds correspondent à des taux de restitution d'énergie pour différentes valeurs de  $Y_c$  pour lesquelles le paramètre  $\tau_c$  est constant ( $\tau_c = 4.10^{-4}s$ ). On remarque que dans ce

diagramme log-log ces deux quantités sont reliées linéairement. Les croix utilisées sur le graphique pour représenter le taux de restitution d'énergie sont obtenues pour différentes valeurs de  $\tau_c$  ( $Y_c$  est pris égal à sa valeur de référence  $Y_{cref}$ ). Le paramètre  $\tau_c$  a donc tendance à décaler verticalement la droite couplant  $G$  à  $Y_c$ .

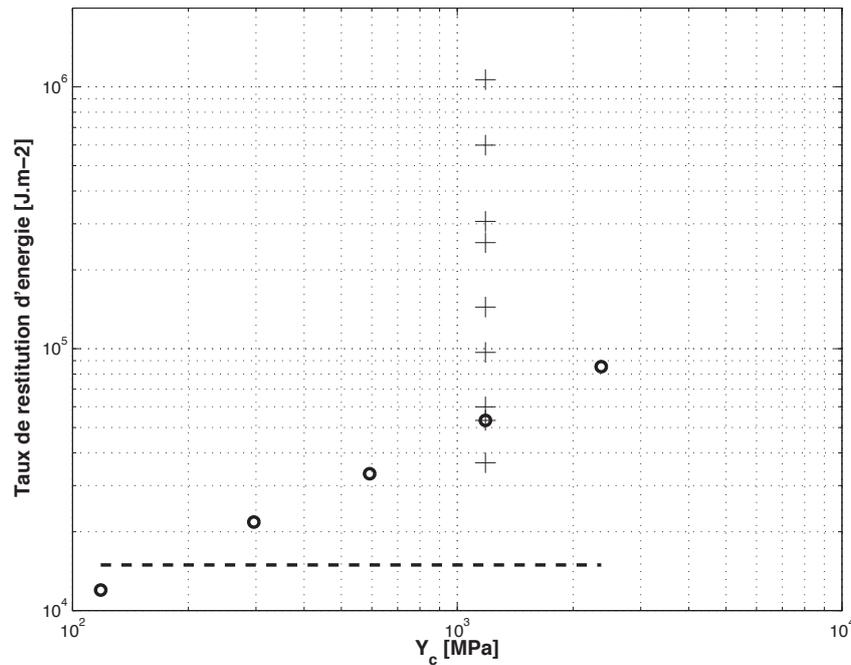


FIGURE 4.23 – Taux de restitution d'énergie en fonction de  $Y_c$  ( $\tau_c = 4.10^{-4}$  s)

Une approximation de  $G$  serait ici :

$$G = b_Y (\tau_c) \times (Y_c)^{a_Y} \quad (4.67)$$

En combinant les deux formes de  $G$  précédentes, on obtient :

$$G = b \times (\tau_c)^{a_\tau} \times (Y_c)^{a_Y} \quad (4.68)$$

On identifie alors les paramètres  $a_\tau$ ,  $a_Y$  et  $b$  par une méthode des moindres carrés à partir des simulations effectuées. La figure suivante permet d'observer le tracé de cette fonction par rapport aux résultats issus des simulations (FIG. 4.24). La forme de  $G$  choisie donne donc une bonne approximation du taux de restitution d'énergie pour ce cas test.

### 3.5 Résultats et bilan

On s'intéresse maintenant à faire une simulation avec le modèle d'endommagement à effet retard qui soit en accord avec la mécanique de la rupture quelle que soit la valeur

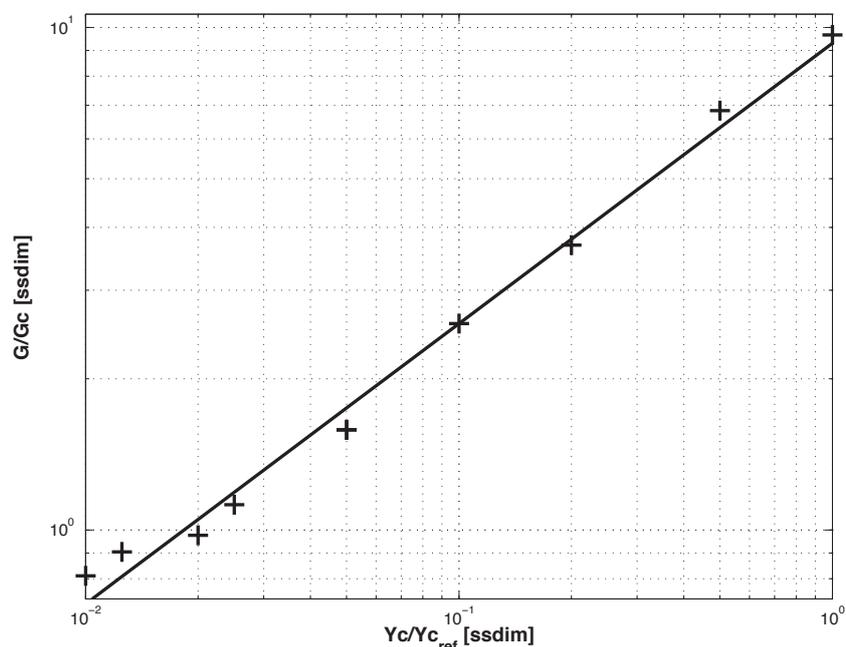


FIGURE 4.24 – Rapport  $\frac{G}{G_c}$  en fonction du rapport  $\frac{Y_c}{Y_{cref}}$  ( $\tau_c = 2.10^{-3}$  s)

de  $\tau_c$ . La formule de l'approximation de  $G$  identifiée précédemment nous permet donc de supposer qu'il existe une valeur de  $Y_c$  qui permette de trouver  $G = G_c$  à  $\tau_c$  imposé. On propose donc de calculer  $Y_c$  tel que :

$$Y_c = \alpha \times (\tau_c)^\beta \times (G_c)^\gamma \quad (4.69)$$

où  $\alpha = b^{-\frac{1}{a_Y}}$ ,  $\beta = -\frac{a_\tau}{a_Y}$  et  $\gamma = \frac{1}{a_Y}$  avec  $a_\tau$ ,  $a_Y$  et  $b$  identifiés précédemment.

On calcule alors les taux de restitution d'énergie associés aux nouveaux couples de paramètres  $Y_c/\tau_c$ . Ces derniers résultats prennent la forme d'une étoile sur le diagramme log-log représentant le taux de restitution d'énergie  $G$  en fonction du paramètre  $\tau_c$  (FIG. 4.25). Le trait pointillé représente la valeur de  $G_c$  du matériau considéré, les croix et les ronds sont les résultats précédents.

Ces nouvelles valeurs du taux de restitution d'énergie sont donc très proche de la valeur cible qu'est le taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  gérant la propagation de fissure en mécanique de la rupture. On visualise alors les différences entre les courbes force-déplacement et énergie dissipée-déplacement pour les résultats associés à la valeur  $\tau_c = 2.10^{-3}$  s (FIG. 4.26 et FIG. 4.27). La courbe en traits pointillés correspond au résultat initial avec  $Y_c = 1184.2$  MPa, et la courbe en trait plein correspond au résultat avec la nouvelle valeur  $Y_c = 29.631$  MPa.

On peut ensuite comparer les courbes force-déplacement et énergie dissipée-dépla-

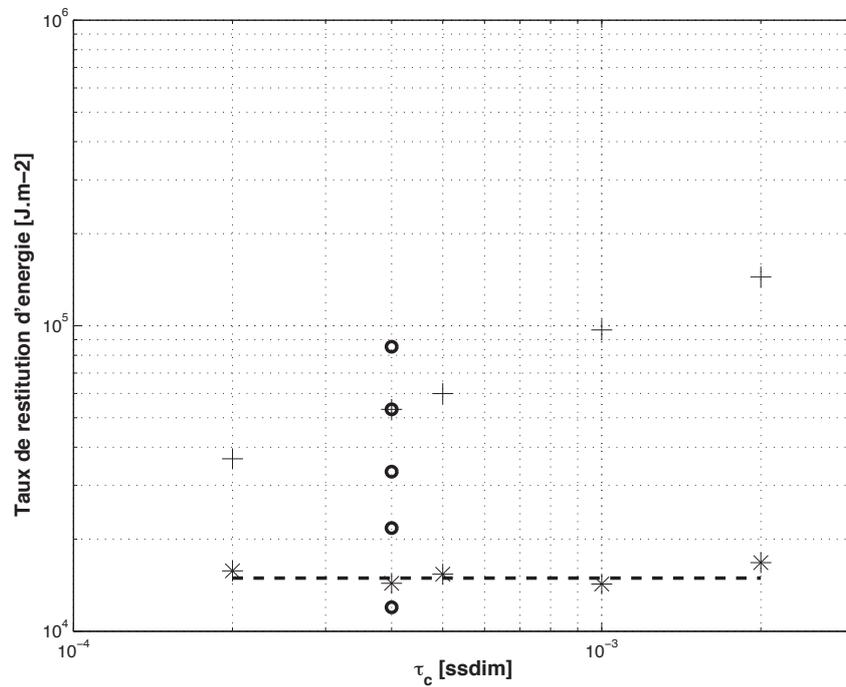


FIGURE 4.25 – Taux de restitution d'énergie en fonction de  $\tau_c$

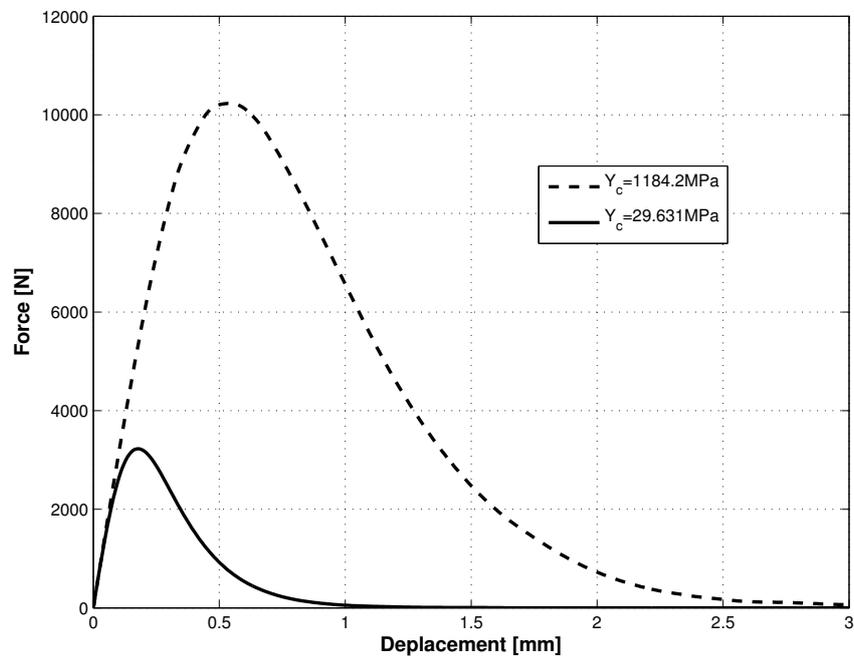


FIGURE 4.26 – Force en fonction du déplacement pour les valeurs initiale et calculée de  $Y_c$  pour  $\tau_c = 2.10^{-3}$  s

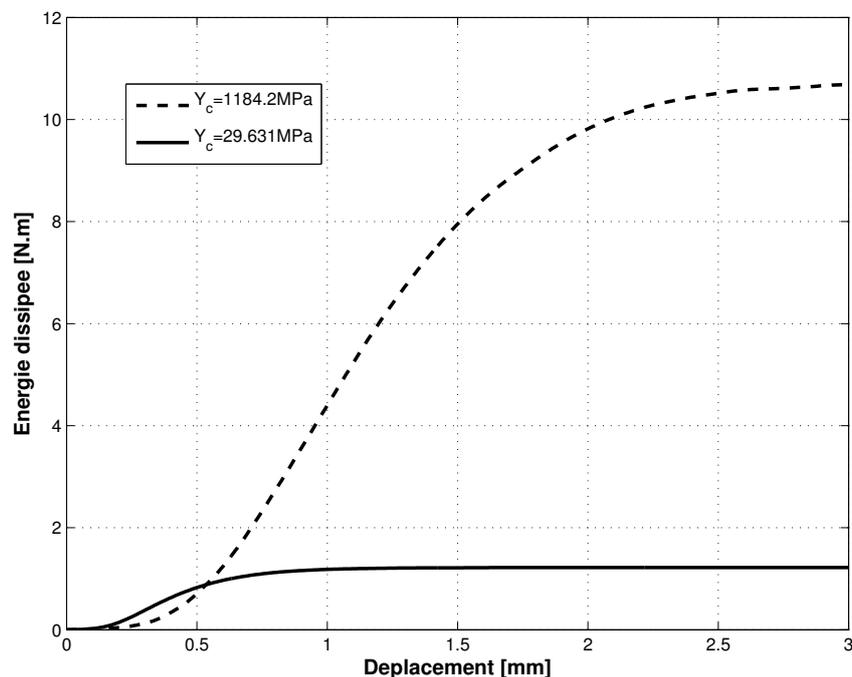


FIGURE 4.27 – Energie dissipée en fonction du déplacement pour les valeurs initiale et calculée de  $Y_c$  pour  $\tau_c = 2.10^{-3} \text{ s}$

cement pour différentes valeurs de  $\tau_c$  associées au nouvelles valeurs de  $Y_c$  calculées (FIG. 4.28 et FIG. 4.29). On remarque que ces courbes sont très proches les unes des autres en comparaison de ce que pouvait être le résultat avec la valeur initiale de  $Y_c$  (FIG. 4.26 et FIG. 4.27). On remarque aussi que le pic d'effort n'est pas exactement le même dans ces trois cas. Ceci peut s'expliquer par le fait que la formule utilisée pour déterminer la nouvelle valeur de  $Y_c$  est basée sur le calcul du taux de restitution d'énergie obtenu par des simulations numériques. Le nouveau taux de restitution d'énergie n'est pas exactement égal à  $G_c$ .

En conclusion, en adaptant l'énergie dissipée étalée dans la zone endommagée avec le paramètre  $Y_c$ , on est donc capable de faire des simulations de propagations de fissures en quasi-statique avec un modèle d'endommagement retardé qui sont en accord avec le critère de propagation de la mécanique de la rupture.

On peut cependant se poser la question de la capacité de la méthode à représenter correctement le pic d'effort qui correspond à la phase de création d'une « process-zone » avant la propagation de la zone où se localise l'endommagement et les déformations.

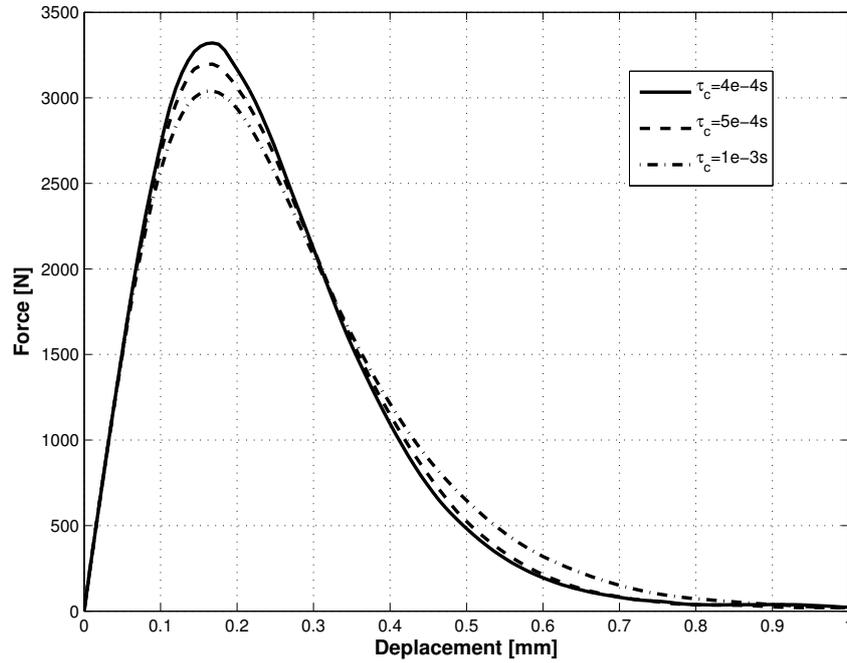


FIGURE 4.28 – Force en fonction du déplacement pour les valeurs calculées de  $Y_c$  associées à différentes valeurs de  $\tau_c$

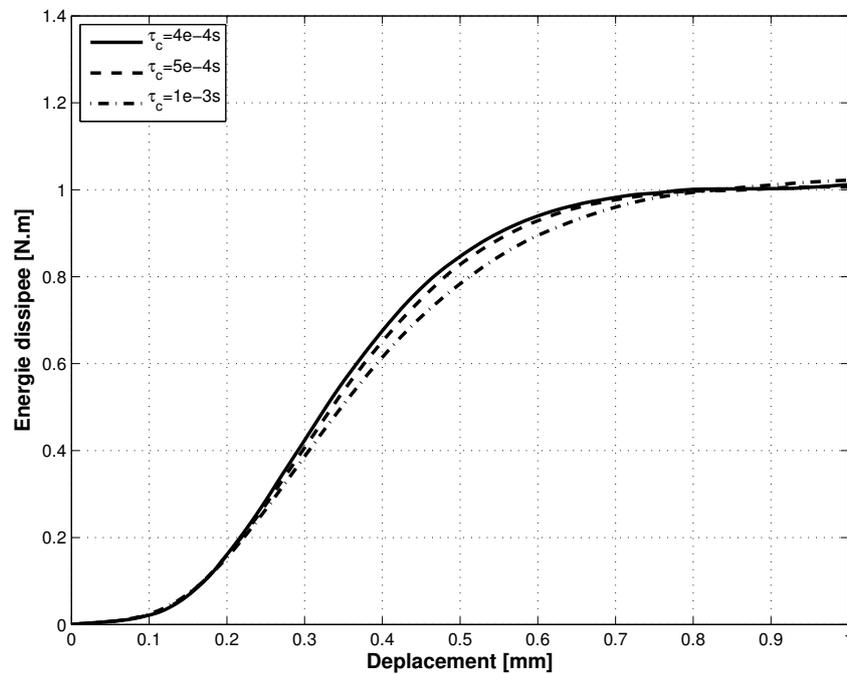


FIGURE 4.29 – Energie dissipée en fonction du déplacement pour les valeurs calculées de  $Y_c$  associées à différentes valeurs de  $\tau_c$

# **Troisième partie**

## **Extension aux composites stratifiés**

*Sur la gestion des bandes de localisation dans les composites stratifiés*



## Chapitre 5

# Spécialisation de l'approche au cas des structures composites stratifiées

*On décrit ici la méthode utilisée pour les structures composites stratifiées. On parle plus spécifiquement de la méthode de calcul du taux de restitution d'énergie, du calcul de l'accroissement de la longueur de la zone endommagée et de l'algorithme qui est employé.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation de la méthode</b>	<b>96</b>
<b>2</b>	<b>Calcul de l'énergie de fissuration</b>	<b>96</b>
2.1	Expression du taux de restitution d'énergie	96
2.2	Vision continue d'une fissure	97
2.3	Calcul de l'énergie dissipée	99
<b>3</b>	<b>Prise en compte du taux de restitution d'énergie</b>	<b>101</b>
3.1	Description de l'algorithme	101
3.2	Etude sur le choix de $\tilde{\gamma}$	102
<b>4</b>	<b>Description de la méthode</b>	<b>104</b>
4.1	Prise en compte de l'initialisation de la « process zone »	104
4.2	Zone de modification de $Y_c$	105
<b>5</b>	<b>Implémentation</b>	<b>106</b>

---

## 1 Présentation de la méthode

L'objectif est d'être capable, dans le cas d'un composite stratifié, de maintenir un taux de restitution égal à sa valeur critique  $G_c$ , lors d'une propagation stable de fissure à l'intérieur de la structure. L'étude préliminaire du chapitre précédent a permis de montrer que l'on pouvait modifier la valeur de  $Y_c$  pour obtenir le taux de restitution d'énergie souhaité, après identification des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  de l'équation (4.69). La valeur de ces paramètres n'est cependant valable que dans le cas particulier traité : une géométrie d'éprouvette CT qui active un mode d'ouverture associée à un modèle d'endommagement isotrope. Le paramètre  $Y_c$  qui était alors obtenu était utilisé homogène dans toute la structure pour que la propagation de la fissure puisse se faire à un taux de restitution défini, et n'avait plus de valeur quant à sa capacité à refléter les non-linéarités associées aux faibles niveaux d'endommagement dans la structure. Le passage à un matériau composite, dont la structure est beaucoup plus complexe rend hors de portée une identification de loi et de paramètres comme dans le cas traité précédemment.

On choisit donc de tirer partie de la loi trouvée précédemment pour adapter le taux de restitution d'énergie par le choix d'une valeur de  $Y_c$  calculée à chaque accroissement de fissure qui n'est modifiée que dans la zone endommagée associée à la zone fissurée. Le modèle matériau utilisé sera le mésomodèle dans sa version standard, qui intègre les phénomènes diffus et la microfissuration transverse dans la même variable d'endommagement. Deux difficultés se posent alors :

- Comment calculer le taux de restitution d'énergie pour le mode de dégradation choisit (afin de ne pas prendre en compte les autres phénomènes dissipatifs dans la structure) ?
- Comment définir une nouvelle valeur de  $Y_c$  pour obtenir  $G = G_c$  ?

## 2 Calcul de l'énergie de fissuration

### 2.1 Expression du taux de restitution d'énergie

Dans ce que nous avons vu au chapitre précédant (CHAP. 4), la fissure est caractérisée par une aire  $A$ , et par un taux de restitution d'énergie  $G$  associé à l'aire fissurée. Par définition,

$$G = - \left. \frac{dE_p}{dA} \right|_{\underline{u}_d} \quad (5.1)$$

que l'on peut écrire en considérant un incrément fini d'aire fissurée :

$$G = - \left. \frac{\Delta E_p}{\Delta A} \right|_{\underline{u}_d} \quad (5.2)$$

Dans le cas des composites stratifiés, bien que le matériau soit fragile, cette formule ne peut être directement utilisée car elle prend en compte les phénomènes de dissipation dans toute la structure, c'est à dire la fissure principale ainsi que l'endommagement

dans d'autres régions. Afin de se focaliser sur un phénomène particulier, il est préférable d'utiliser la relation suivante :

$$G = \frac{\Delta E_{diss}}{\Delta A} \Big|_{u_d} \quad (5.3)$$

venant du fait que la puissance dissipée par la propagation de la fissure est liée à  $A$ , la variable définissant la fissure, et  $G$ , sa force associée :

$$P_{diss} = G \dot{A} \quad (5.4)$$

L'énergie dissipée  $E_{diss}$  correspond alors uniquement à un mode de fissuration particulier. Elle est calculée dans la région où la fissure est située afin de prendre uniquement en compte les variables d'endommagement considérées pour ce mode de fissuration. Dans le cas des composites stratifiés, l'endommagement est choisi homogène dans l'épaisseur du pli, ce qui implique que la fissure traverse l'épaisseur d'un pli. Le taux de restitution d'énergie  $G$  devient donc :

$$G = \frac{\Delta E_{diss}}{h * \Delta l} \Big|_{u_d} \quad (5.5)$$

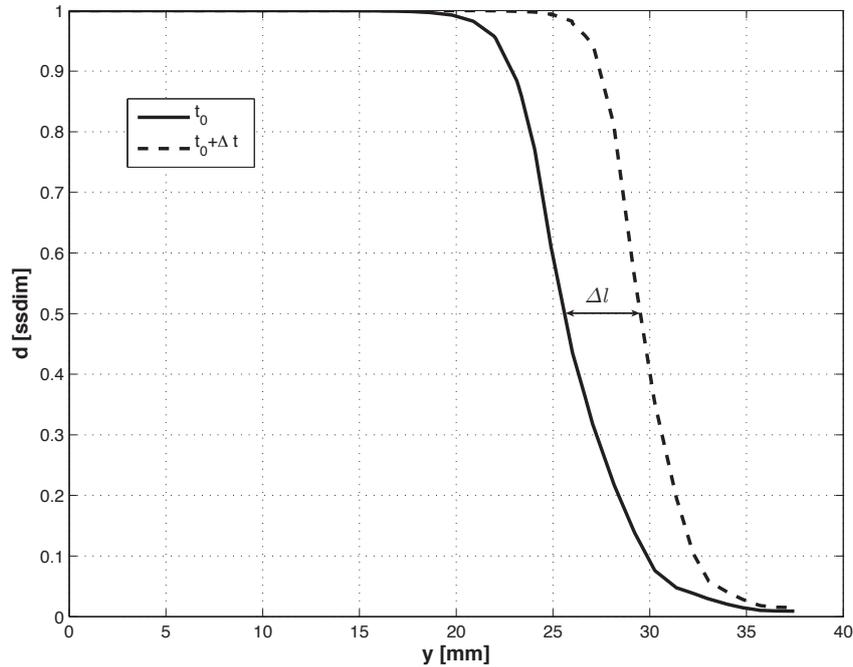
avec  $h$  l'épaisseur d'un pli et  $l$  la longueur de fissure.

## 2.2 Vision continue d'une fissure

Lorsque l'on utilise la mécanique de la rupture, il est simple de définir ce qu'est une fissure : c'est un couple de surfaces qui permet d'introduire une discontinuité du champ de déplacement. Quand on cherche à utiliser la mécanique de l'endommagement pour traiter la propagation de fissures, il est beaucoup moins aisé de définir une fissure car il n'y a plus de discontinuité du champ de déplacement. Si l'on voit une fissure comme une entité permettant un contact unilatéral (bord libre en traction et contact glissant/frottant en compression), alors on peut trouver une équivalence avec la mécanique de l'endommagement lorsque que la variable interne d'endommagement est égale à 1. Ceci correspond à une perte de rigidité complète du matériau, par conséquent aucun effort n'est transmis à travers la zone endommagée, c'est donc l'équivalent d'une surface/zone libre d'effort. On pourrait donc définir une fissure par la zone pour laquelle la valeur de l'endommagement est égale à 1.

Numériquement, il est difficile de calculer exactement une longueur de fissure résultant de l'utilisation de la mécanique de l'endommagement. On peut cependant se contenter de calculer un accroissement de fissure, car c'est ce dont nous avons besoin pour calculer le taux de restitution d'énergie. Pour ce faire, intéressons-nous maintenant au tracé de la valeur de l'endommagement en fonction de l'abscisse du point considéré dans la direction de propagation de la fissure.

On observe ici deux courbes (FIG. 5.1), associées à deux instants différents, issues des résultats d'une simulation de l'éprouvette CT (CHAP. 4). La variable nommée  $y$  correspond



**FIGURE 5.1** – Endommagement en fonction de l'abscisse dans la direction de la fissure à deux instant

à l'abscisse du point considéré dans la direction de propagation de la fissure. On peut globalement dire que la courbe en traits pointillés est le translaté de la courbe en trait continu. La distance séparant ces deux courbes est égale à l'accroissement de la longueur de la zone endommagée. On remarque qu'il est difficile d'avoir précisément la valeur de l'abscisse maximale pour laquelle la valeur de l'endommagement est égale à 1. Par contre, on voit très clairement la distance entre les deux courbes lorsque  $d$  est compris entre 0.1 et 0.9. Ceci est dû au fait que la pente des courbes est très marquée entre ces valeurs, il y est donc aisé de calculer la distance entre les deux courbes tracées pour une valeur d'endommagement définie. Il suffit maintenant de définir la valeur d'endommagement à utiliser pour calculer un accroissement de la longueur de la zone endommagée.

Si aucun limiteur de localisation n'est utilisé, la localisation de l'endommagement apparaît dès que l'on dépasse le point critique de la courbe contrainte-déformation (FIG. 5.2) défini par (5.6). C'est à dire qu'au delà de ce point critique (où  $d$  vaut 0.5 pour les lois d'endommagement utilisées, et sans plasticité), la valeur de  $d$  passe directement à 1 si l'effet retard n'est pas utilisé.

$$\left| \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right| = 0 \quad (5.6)$$

Si l'effet retard est utilisé, il faut un certain temps avant que la valeur de la variable d'endommagement soit égale à 1 dans la zone où les déformations se concentrent. Il est

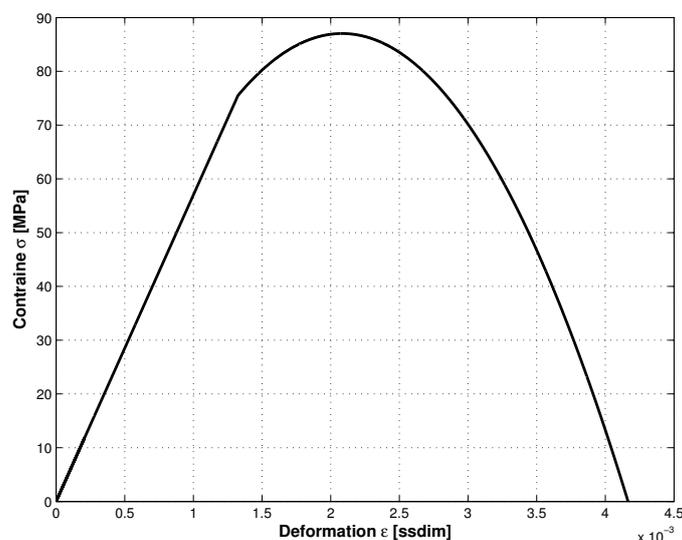


FIGURE 5.2 – Courbe théorique d'endommagement

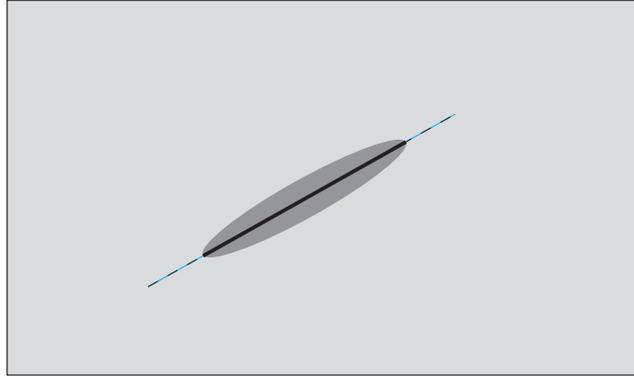
donc plus pratique de définir la zone fissurée comme la zone où l'endommagement dépasse la valeur critique définie par (5.6). Pour des valeurs d'endommagement inférieures à 0.5, il est difficile de faire la différence entre un point de la « process zone » et un point qui en est complètement extérieur et qui ne dépassera pas cet endommagement critique. On choisit donc de calculer l'accroissement de la zone endommagée entre les points dont l'endommagement vaut  $d = 0.5$ .

Il reste cependant à définir la direction principale de la fissure. Pour une fissure rectiligne, on peut utiliser une méthode basée sur l'analyse en composante principale afin de définir l'axe suivant lequel se dirige la fissure et la longueur de celle-ci. Dans le cas des composites stratifiés, la fissure se propage en général de façon rectiligne dans une direction qui dépend de l'orientation des fibres. On peut alors définir une fissure équivalente à la zone fortement endommagée par la projection des points, qui ont dépassé la valeur critique d'endommagement, sur un axe défini par le centre ces points et sa direction principale (FIG. 5.3). La zone en gris foncé, où  $d$  dépasse 0.5, est traitée pour déterminer la direction principale de la zone endommagée (le trait pointillé fin). Le trait fort correspond à la fissure équivalente. En gris clair, le reste du domaine où  $d < 0.5$  qui n'est pas pris en compte pour la recherche de fissure équivalente.

Il est alors aisé de calculer un accroissement de longueur de la fissure en comparant entre deux instants les projections sur l'axe de la fissure.

### 2.3 Calcul de l'énergie dissipée

L'énergie volumique dissipée est l'intégrale sur le temps de la dissipation  $\omega$  entre deux instants. Dans notre cas, ces deux instants correspondent à un instant  $t$  de référence et un



**FIGURE 5.3** – Fissure équivalente à une zone fortement endommagée

instant  $t + \Delta t_{fiss}$  lorsque la fissure s'est propagée.

$$\Delta e_{diss} = \int_t^{t+\Delta t_{fiss}} \omega dt \quad (5.7)$$

On intègre alors cette énergie volumique sur le volume considéré comme une fissure afin de ne pas prendre en compte les autres zones de la structure qui peuvent dissiper de l'énergie pour d'autres raisons.

$$\Delta E_{diss} = \int_{\Omega_{fiss}} e_{diss} d\Omega_{fiss} \quad (5.8)$$

On obtient donc l'énergie dissipée pour propager une fissure dans le cas d'une seule variable d'endommagement :

$$\Delta E_{diss} = \int_{\Omega_{fiss}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t_{fiss}} Y_d d dt \right\} d\Omega_{fiss} \quad (5.9)$$

Dans le cas des composites stratifiés, la structure du matériau donne une direction privilégiée de propagation de macro-fissures. Comme les propriétés de rupture du matériau sont anisotropes, le processus de fissuration peut donner lieu à l'apparition de branches collatérales à la fissure principale [Leguillon, 1991]. Nous ferons cependant le choix de n'étudier qu'une fissure principale qui se propage de façon régulière (avec tangente). Le mésomodèle d'endommagement permet alors de prendre en compte le comportement anisotrope des dégradations du matériau, et on peut distinguer deux cas :

- la rupture des fibres ;
- la fissuration du pli entre les fibres ;

Dans le mésomodèle standard, ce dernier cas est traité à l'aide des variables d'endommagement  $d'$  (associée au mode d'ouverture) et  $d$  (associée au mode de cisaillement) qui

sont pilotées par la même quantité, définie à partir des forces thermodynamiques qui leurs sont respectivement associées.

On exprime donc l'énergie dissipée dans le cas de la rupture des fibres par :

$$\int_{\Omega_{fiss}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t_{fiss}} Y_{d_f} \dot{d}_f dt \right\} d\Omega_{fiss} \quad (5.10)$$

L'énergie dissipée dans le cas d'une fissure se propageant dans la direction parallèle aux fibres est alors définie par :

$$\int_{\Omega_{fiss}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t_{fiss}} (Y_d \dot{d} + Y_{d'} \dot{d}') dt \right\} d\Omega_{fiss} \quad (5.11)$$

### 3 Prise en compte du taux de restitution d'énergie

#### 3.1 Description de l'algorithme

Il a été montré, dans le cas particulier de l'éprouvette CT faite d'un matériau isotrope (CHAP. 4), que pour avoir un taux de restitution d'énergie proche de la valeur cible  $G_c$  il fallait prendre  $Y_c$  tel que :

$$Y_c = \alpha \times (\tau_c)^\beta \times (G_c)^\gamma \quad (5.12)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres liés au matériau.

Le cas des composites stratifiés est beaucoup plus complexe et une identification est loin d'être généralisable. De plus, la vitesse de chargement locale influe sur le taux de restitution d'énergie, donc on ne peut pas identifier  $Y_c$  une fois pour toutes.

On choisit donc de profiter de l'étude du chapitre précédent, et d'adapter la valeur du paramètre  $Y_c$  afin de maintenir le taux de restitution  $G$  égal à  $G_c$  au cours des incréments de temps. A cette fin nous proposons une méthode itérative pour corriger  $Y_c$  vers une valeur qui maintienne une différence entre  $G$  et  $G_c$  acceptable. Pour éviter que la méthode ne soit trop coûteuse en temps de calcul, nous choisissons un algorithme explicite.

Le paramètre  $\tau_c$ , fortement lié à la largeur de la fissure, n'est pas changé au cours du calcul. Il est choisi en adéquation avec la taille de maille afin que la zone où l'endommagement se concentre ait une largeur de plusieurs éléments. On définit donc un nouveau  $Y_c$  à chaque accroissement de fissure tel que :

$$Y_c^{t+1} = Y_c^t \times \left( \frac{G_c}{G^t} \right)^{\tilde{\gamma}} \quad (5.13)$$

où  $\tilde{\gamma}$  est un paramètre de la méthode.

Plusieurs pas de temps sont parfois nécessaires pour détecter une propagation de la fissure. On prend donc en compte les pas de temps entre deux accroissements de fissure pour calculer l'énergie dissipée.

### 3.2 Etude sur le choix de $\tilde{\gamma}$

La méthode proposée fait intervenir un nouveau paramètre  $\tilde{\gamma}$ . On se propose de chercher les conditions à respecter par  $\tilde{\gamma}$  pour qu'une méthode de point fixe, implicite, puisse converger. On choisira alors  $\tilde{\gamma}$ , permettant de faire converger cette méthode de point fixe, comme paramètre dans notre méthode explicite en supposant que le pas de temps est suffisamment fin.

La méthode de point fixe associée serait basée sur l'algorithme suivant :

$$Y_c^{\tilde{i}+1} = Y_c^{\tilde{i}} \times \left( \frac{G_c}{G^{\tilde{i}}} \right)^{\tilde{\gamma}} \quad (5.14)$$

où l'indice  $\tilde{i}$  correspond aux itérations de la méthode.

Afin que cette méthode de point fixe converge, certaines conditions sont à respecter. Dans notre cas, on cherche à trouver  $Y_c$  solution de :

$$f(Y_c) = Y_c \quad (5.15)$$

Une des conditions pour que la méthode converge vers un point attractif  $Y_c^{sol}$  est que :

$$\left| \frac{df}{dY_c}(Y_c^{sol}) \right| < 1 \quad (5.16)$$

Dans la relation utilisée dans l'algorithme itératif (5.14), on voit apparaître  $G^i$ , le taux de restitution d'énergie lors de l'itération de la méthode de point fixe. Celui-ci dépend de  $\tau_c$ ,  $G_c$ , du matériau, de la géométrie et du chargement. On ne peut donc pas exprimer  $G^i$  explicitement.

Afin d'avoir une idée de l'influence du paramètre  $\tilde{\gamma}$ , on se place dans le cas de l'éprouvette CT (CHAP. 4), où il a été montré que l'on pouvait avoir une valeur relativement bonne de  $G$  en utilisant la relation (5.12) comme suit :

$$G = \alpha^{-\frac{1}{\gamma}} \times \tau_c^{-\frac{\beta}{\gamma}} \times Y_c^{\frac{1}{\gamma}} \quad (5.17)$$

après avoir identifié les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

La fonction  $f$  devient alors :

$$f(Y_c) = Y_c \times \left( \frac{G_c}{G} \right)^{\tilde{\gamma}} = \left( G_c \times \left( \alpha \times \tau_c^\beta \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\tilde{\gamma}} \times Y_c^{1-\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma}} \quad (5.18)$$

La méthode converge vers  $Y_c^{sol}$  si :

$$\left| 1 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \right| < 1 \quad (5.19)$$

ce qui équivaut à prendre  $\tilde{\gamma}$  tel que :

$$0 < \tilde{\gamma} < 2\gamma \quad (5.20)$$

Sur les figures 5.4 et 5.5, on observe le tracé des courbes caractéristiques du point fixe  $f(Y_c)$  en trait plein pour différentes valeurs de  $\tilde{\gamma}$ . Les traits en pointillés correspondent aux deux bornes définies par (5.16). Si la tangente des courbes est comprise entre les deux secteurs angulaires définis par les traits pointillés, alors le point recherché est attractif. De plus, pour qu'il y ait convergence de la méthode, quelle que soit la valeur de  $Y_c$  prise au départ, il faut que les courbes  $f(Y_c)$  restent dans ces secteurs angulaires. On peut donc dissocier deux cas :  $\tilde{\gamma} \leq \gamma$  et  $\tilde{\gamma} \geq \gamma$ .

Le premier cas (FIG. 5.4), correspondant à  $\tilde{\gamma} \leq \gamma$ , converge quelque soit la valeur de  $\tilde{\gamma}$ . Dans le cas particulier où  $\tilde{\gamma} = \gamma$ , une seule itération suffit pour atteindre la valeur de  $Y_c$  qui permet d'avoir le taux de restitution d'énergie choisi.

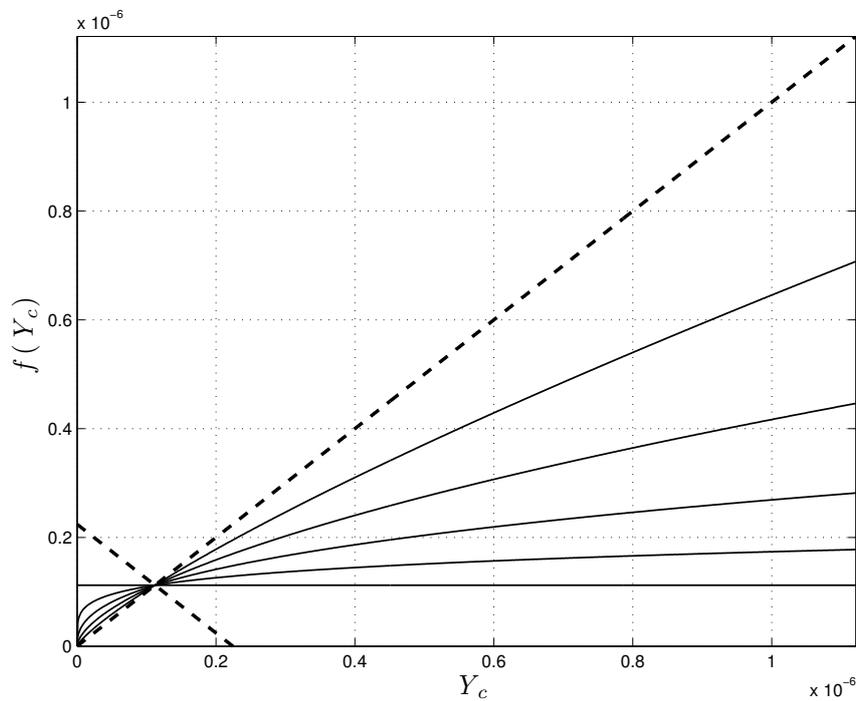


FIGURE 5.4 – Courbes caractéristiques du point fixe pour  $\tilde{\gamma} \in \{0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.\} \times \gamma$

Pour le deuxième cas (FIG. 5.5), correspondant à  $\tilde{\gamma} \geq \gamma$ , les courbes  $f(Y_c)$  sortent du secteur angulaire  $[\frac{3\Pi}{4}; \frac{5\Pi}{4}]$ . Ceci implique que pour des valeurs initiales de  $\tilde{\gamma}$  très grandes, et de mauvaises initialisations de  $Y_c$ , la méthode diverge. On peut remarquer que l'ordre de grandeur de  $Y_c^{sol}$  est de  $10^{-6}$  alors qu'une valeur initiale de  $Y_c$  est en général de l'ordre de 1. Il est donc préférable d'éviter d'utiliser une valeur de  $\tilde{\gamma}$  supérieure à  $\gamma$ .

L'étude préliminaire nous avait permis d'identifier la valeur de  $\gamma$  ( $\gamma \approx 1.4$ ). Il est donc judicieux d'utiliser une valeur plus petite que elle-ci. De plus, ce critère de convergence est associé à une méthode de point fixe et non à la méthode explicite que l'on va utiliser. On choisira donc une valeur suffisamment conservative :  $\tilde{\gamma} = 1$ .

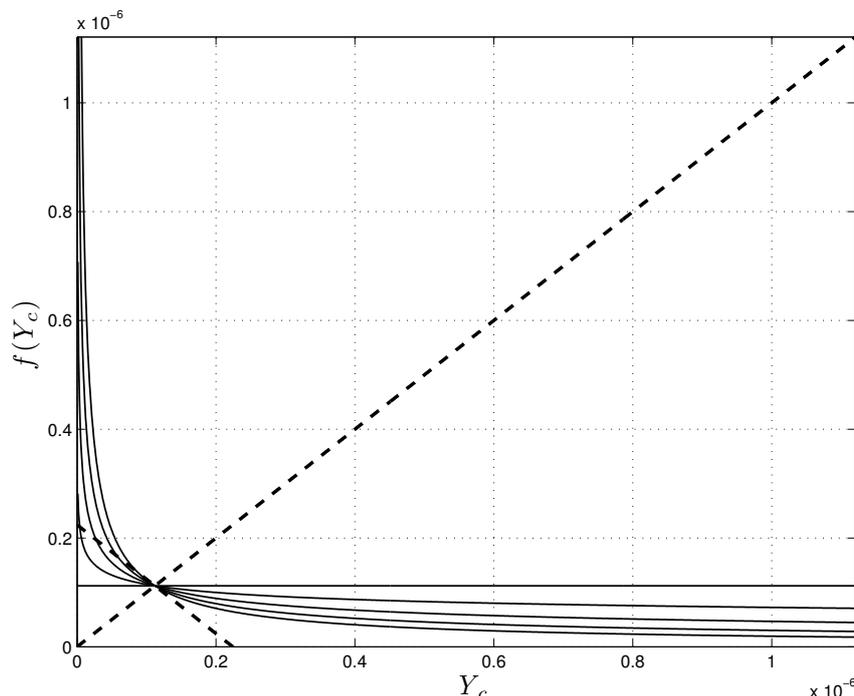


FIGURE 5.5 – Courbes caractéristiques du point fixe pour  $\tilde{\gamma} \in \{1.; 1.2; 1.4; 1.6; 1.8\} \times \gamma$

## 4 Description de la méthode

### 4.1 Prise en compte de l'initialisation de la « process zone »

La remarque de la fin du Chapitre 4 évoque le problème de la capture du pic de la courbe effort-déplacement et de la gestion de l'initiation. La modification du paramètre  $Y_c$  n'est effectuée que pour respecter la bonne énergie dissipée lors de la propagation de la fissure. Aucun traitement n'a été apporté à l'initiation pour prendre en compte la bonne valeur de  $Y_c$  permettant de gérer correctement le comportement avec la loi d'évolution pour  $d < 0.5$ . Si l'on trace l'énergie potentielle en fonction de la longueur de fissure pour une des simulations du chargement de l'éprouvette CT (FIG. 5.6), on est capable d'avoir accès au taux de restitution d'énergie qui est l'opposé de la pente de cette courbe. La courbe en trait plein correspond au résultat d'une simulation, tandis que la courbe en trait pointillé correspond à une régression linéaire de la première courbe effectuée sur des valeurs après le pic effort-déplacement. Lorsque la longueur de fissure est suffisamment grande, la propagation de la zone fissurée s'effectue avec une taille de « process zone » qui n'évolue plus beaucoup. On remarque donc que la courbe et le trait pointillé se juxtaposent à partir de ce moment là. La pente du trait pointillé correspond au taux de restitution d'énergie  $G$ , on a donc un taux de restitution d'énergie quasi-constant une fois que la « process zone » est créée. Pour une longueur de fissure plus faible, la courbe et le trait pointillé ne coïncident plus. La dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la longueur

de fissure est ici plus faible. Le taux de restitution d'énergie dans la phase où l'on est encore en train de créer la « process zone » est donc plus faible.

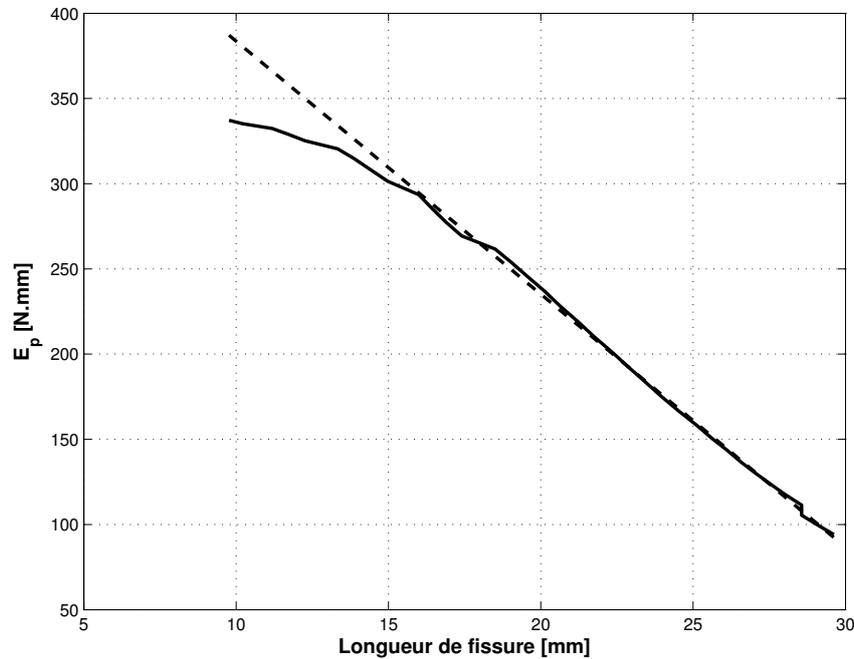


FIGURE 5.6 – Energie potentielle en fonction de la longueur de fissure

Comme on ne surestime pas le taux de restitution d'énergie lors de la création de la « process zone », on choisit de ne modifier  $Y_c$  pour étaler la bonne énergie dissipée que pour des valeurs de  $G$  supérieures à  $G_c$ . De cette façon, on ne modifie pas la loi d'évolution de l'endommagement pour les faibles valeurs de  $d$ .

L'algorithme devient donc :

$$Y_c^{t+1} = \min \left( Y_c^t * \left( \frac{G_c}{G^t} \right)^{\tilde{\gamma}}, Y_c^{ini} \right) \quad (5.21)$$

où  $Y_c^{ini}$  est la valeur identifiée pour la loi d'évolution de l'endommagement associée à des valeurs de  $d$  inférieures à 0.5.

## 4.2 Zone de modification de $Y_c$

Dans les simulations effectuées sur la géométrie de l'éprouvette CT, le paramètre  $Y_c$  était choisi homogène dans toute l'éprouvette. Nous avons pu voir qu'en le modifiant, nous étions capable de modifier le taux de restitution d'énergie pour que  $G$  soit égal à  $G_c$  lors de la propagation de fissure. Or, la valeur de ce paramètre est a priori définie lors de l'identification de la loi d'évolution de l'endommagement. Ceci veut dire que la valeur

initiale qui est donnée à  $Y_c$  permet de prendre en compte des niveaux d'endommagement qui restent faibles (inférieurs à 0.5). La fissure n'apparaissant pas dans toute l'éprouvette, il n'y a pas lieu de modifier ce paramètre en dehors de la zone où va se localiser l'endommagement pour ne pas modifier le comportement du reste de la structure.

On va donc étaler l'énergie dissipée dans une zone de taille définie en  $y$  adaptant le paramètre  $Y_c$  (FIG. 5.7). La largeur de cette zone sera fixe, égale à la largeur de la zone où se localise l'endommagement lorsque le nouveau  $Y_c^t$  proposé est inférieur à  $Y_c^{ini}$ . La longueur de la zone de modification de  $Y_c$  (le rectangle en pointillé) sera égale à la longueur de la zone où  $d$  dépasse 0.5 majorée d'une certaine distance permettant de prendre en compte la « process zone » avec  $d < 0.5$ .

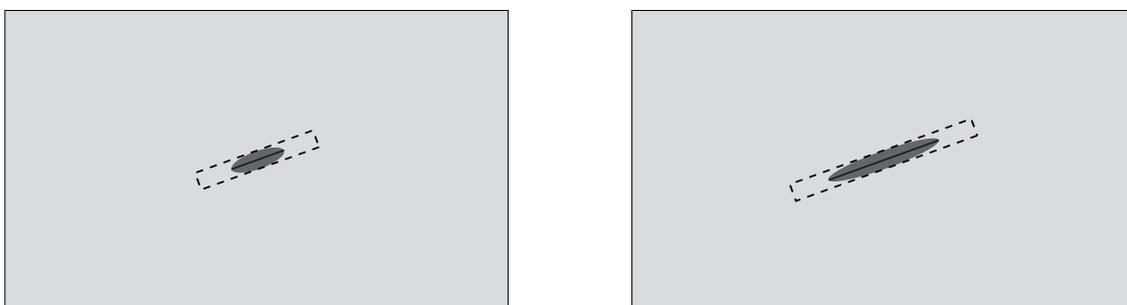


FIGURE 5.7 – Zone de modification du paramètre  $Y_c$

De cette façon, le reste de la structure continuera à évoluer en accord avec la loi d'endommagement initiale, avec effet retard (celui-ci n'agissant que pour des vitesses de chargement locales importantes). La zone où l'endommagement se localise sera, elle, traitée afin qu'elle se propage avec une énergie dissipée en accord avec la mécanique de la rupture, tout en ayant une initiation définie avec la valeur de  $Y_c$  initiale.

## 5 Implémentation

La méthode proposée a été implémentée dans Coffee, un code de calcul développé par Felipe Bordeu qui est basé sur la plateforme de développement LMTpp utilisée au sein du laboratoire.

Diverses modifications du code ont été nécessaires pour permettre à la routine d'avoir accès à certaines quantités locales, ainsi que des modifications de différentes classes pour permettre de changer les attributs des objets à la volée pendant l'exécution du code et plus uniquement à l'initialisation. La prise en compte des éléments Wedge, Wedge\_15 et Hexa\_20 a été améliorée dans Coffee en accord avec les modifications apportées sur les points de Gauss dans LMTpp. Des changements dans les critères d'erreurs et dans le calcul du résidu ont été apportés à l'implémentation de la méthode de Newton-Raphson proposée initialement par Martin Genet. De plus, la gestion des pas de temps a été revue

afin de gérer un pas de temps ayant la possibilité de se réduire automatiquement en cas de non convergence de l'algorithme de Newton. Ceci a ainsi permis de faciliter la convergence de l'algorithme, et rendu plus aisée l'utilisation du code Coffee qui imposait un pas de temps unique par étape de chargement, défini a priori lors de la création du fichier d'entrée.

Afin d'améliorer la vitesse d'exécution, la prise en compte du comportement matériau a été mise au propre et quelques boucles ont été réadaptées, ce qui a permis de gagner un facteur 3 sur le temps d'exécution. En plus de cela, le code a été « multithreadé » pour profiter du nombre grandissant de cœur sur les machines de calcul disponibles dans le laboratoire, et le solveur linéaire a été changé pour tirer partie des performances d'un solveur Cholesky « multithreadé » (utilisation de Cholmod). Ces deux dernières modifications ont permis de réduire encore d'un facteur 5 le temps d'un calcul sur une machine possédant 8 cœurs.



# Chapitre 6

## Exemple d'application

*On présente ici un exemple d'utilisation de la méthode. Le choix est porté sur la simulation du splitting : la propagation d'un macro-fissure dans une direction parallèle aux fibres. On traitera l'exemple d'une plaque trouée d'un empilement croisé qui met en lumière ce splitting dans le pli orienté à 0°. Une comparaison est effectuée avec des expériences pour lesquelles des clichés RX ont été pris [Yashiro et al., 2007].*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction à l'exemple d'application</b>	<b>110</b>
1.1	Présentation des méthodes existantes	110
1.2	Description de l'éprouvette	110
1.3	Utilisation de la version initiale du mésomodèle d'endommagement	112
<b>2</b>	<b>Utilisation de la méthode</b>	<b>119</b>
2.1	Détermination d'une première valeur de $\tilde{Y}_c$ pour la propagation	119
2.2	Première modification du paramètre $\tilde{Y}_c$	122
2.3	Adaptation de l'énergie dissipée par la propagation du split	127
2.4	Influence du split sur la structure	128
2.5	Bilan et limites de la méthode proposée	133

---

# 1 Introduction à l'exemple d'application

## 1.1 Présentation des méthodes existantes

Les structures composites stratifiées ont des modes de ruine complexes. Il est choisi ici de traiter un exemple de structure qui met en exergue la propagation d'une fissure parallèle aux fibres. Dans le cas des éprouvettes entaillées ou des plaques trouées, on parle généralement de *splitting* pour nommer ces fissures dans les plis orientés à  $0^\circ$  [Hallett et Wisnom, 2006, O'Higgins *et al.*, 2008].

Afin de prendre en compte la propagation de ces fissures, deux solutions sont majoritairement utilisées dans la communauté composite. Une approche micro, où les surfaces potentielles de rupture sont traitées par la mécanique de la rupture [Violeau *et al.*, 2009], permet de prendre en compte les fissures transverses dans les autres plis mais souffre d'un coût de calcul élevé. L'autre approche est basée sur l'utilisation de zones cohésives positionnées a priori dans le maillage pour être en accord avec l'expérience. Celles-ci sont modélisées soit par des éléments d'interface placés entre les autres éléments [Yashiro *et al.*, 2007, Hallett *et al.*, 2009b, Hallett *et al.*, 2009a, Hallett *et al.*, 2009a], soit en prenant en compte la discontinuité au sein de l'élément [Van Der Meer *et al.*, 2010]. Ces approches définissent toutes deux a priori l'emplacement de la zone fissurée, et en général il n'est pas porté attention à la prise en compte des autres non-linéarités dans les plis.

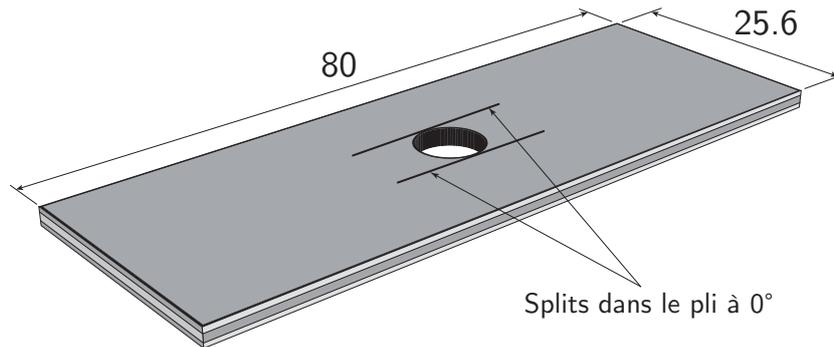
La version initiale du mésomodèle ne permet pas de gérer correctement la phase localisée si aucun traitement n'est fait pour conserver une énergie dissipée en accord avec la mécanique de la rupture, et doit donc se contenter de traiter le cas de structures où le niveau de l'endommagement diffus n'est pas trop important. Le mésomodèle amélioré [Ladevèze *et al.*, 2006] intègre la fissuration transverse sous une forme homogénéisée grâce à de nouvelles variables d'endommagement associées à des lois d'évolution découlant de la mécanique de la rupture. Cependant, ce modèle doit être utilisé lorsque le réseau de fissures est suffisamment périodique, pour respecter le cadre donné par l'homogénéisation effectuée.

On propose donc d'utiliser le modèle présenté dans le chapitre précédent pour permettre d'une part de prendre en compte les non-linéarités dans les plis associés à des niveaux d'endommagement relativement faibles, et d'autre part de gérer la propagation d'une macro-fissure avec la mécanique de l'endommagement en dissipant une énergie surfacique en accord avec la mécanique de la rupture, sans toutefois définir a priori l'endroit où va se développer cette fissure.

## 1.2 Description de l'éprouvette

Afin de profiter des avantages du modèle que nous présentons, nous choisissons de simuler le chargement d'une plaque trouée. Ce type d'éprouvette permet de faire apparaître des splits partant du bord du trou, et affiche des non-linéarités qui ne sont pas homogènes à cause de la singularité apportée par le trou [Lubineau et Ladevèze, 2008]. L'éprouvette choisie est une plaque trouée pour laquelle une expérimentation a été menée [Yashiro

*et al.*, 2007]. L'empilement de cette plaque est  $[0_2, 90_2]_s$ . La largeur de la plaque est de 25.6 mm, l'épaisseur des plis unitaires est de 0.125 mm, le diamètre du trou est de 5 mm, et la longueur choisie pour la simulation est de 80 mm (FIG. 6.1). On profitera des différentes symétries pour ne traiter qu'un huitième de la plaque trouée et utiliser ainsi un maillage plus fin. La vitesse de chargement appliquée au huitième de plaque a été choisie arbitrairement à 2 mm/s.



**FIGURE 6.1** – Description de la géométrie de la plaque trouée

Les paramètres matériaux utilisés pour le pli sont issus de [Yashiro *et al.*, 2007, Lubineau et Ladevèze, 2008] :

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = 148 \text{ GPa} & Y_0 = 0 \text{ MPa} \\
 E_2 = E_3 = 95.7 \text{ GPa} & Y_c^{ini} = 15 \text{ MPa} \\
 G_{12} = G_{13} = G_{23} = 4500 \text{ MPa} & b_y = 2 \\
 \nu_{12} = \nu_{13} = 0.356 & b = 1 \\
 \nu_{23} = 0.49 & \tau_c = 0.02 \text{ s} \\
 Y_{df}^T = 10 \text{ MPa} & a = 1 \\
 Y_{df}^C = 100 \text{ MPa} & G_c^{II} = 1100 \text{ J.m}^{-2}
 \end{array}$$

Pour l'interface, les paramètres utilisés sont identifiés à partir de [Yashiro *et al.*, 2007] :

$$\begin{array}{ll}
 k_{33} = 48000 \text{ MPa.mm}^{-1} & k_{13} = k_{23} = 24000 \text{ MPa.mm}^{-1} \\
 \alpha = 1 & \gamma_1 = \gamma_2 = 0.3909 \\
 n = 0.5 & Y_c = 0.43 \text{ MPa.mm}
 \end{array}$$

L'expérimentation menée permet d'avoir des informations sur la longueur des splits, sur la position et la densité approximative des fissures transverses dans les plis orientés à 90° ainsi que sur la surface délaminée entre les plis (FIG. 6.2). Ces différentes quantités sont visibles grâce à des micrographies aux rayons X. Celles-ci sont données pour

quatre instants de chargement correspondant, à l'éprouvette avant l'essai dans le cas (a), à l'éprouvette soumise à une déformation  $\varepsilon_b = 0.58\%$  dans le cas (b), à l'éprouvette soumise à une déformation  $\varepsilon_c = 0.77\%$  dans le cas (c), et enfin à l'éprouvette soumise à une déformation de  $\varepsilon_d = 1.07\%$  dans le cas (d). Accolés à chacune de ces images, sont présentés les résultats de la simulation faite dans [Yashiro *et al.*, 2007] en utilisant des éléments cohésifs pour modéliser la fissuration.

Les micrographies nous permettent de voir qu'au fur et à mesure que le chargement augmente, la longueur des splits, la densité de fissures transverses et l'aire délaminée augmentent. On peut mesurer les différentes longueurs des splits. Pour  $\varepsilon_b = 0.58\%$ , la longueur du split est  $l_b = 7.5$  mm, pour  $\varepsilon_c = 0.77\%$  l'expérience donne  $l_c = 15.7$  mm, et pour  $\varepsilon_d = 1.07\%$ , on a  $l_d = 28.6$  mm. Les résultats de la simulation accolés aux micrographies suivent la même tendance d'augmentation des dégradations. Le réseau de fissures transverses est proche de l'expérience, mais les splits ne sont pas superposables, les tailles des splits calculés sont légèrement surestimées en comparaison de l'expérimentation.

### 1.3 Utilisation de la version initiale du mésomodèle d'endommagement

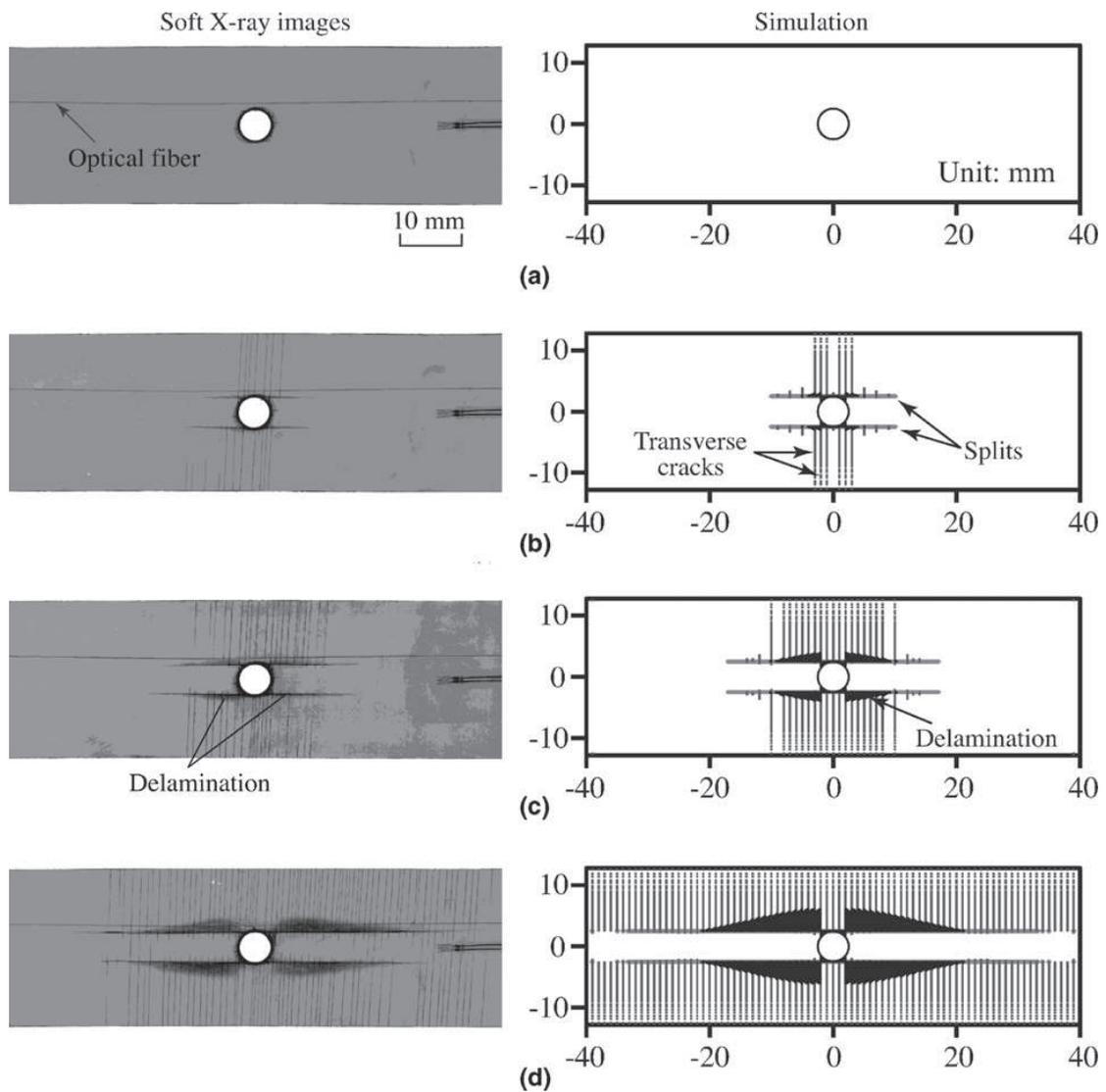
Afin de pouvoir mettre en avant l'apport de la méthode, on présente ici les résultats que l'on obtient si l'on utilise la version initiale du mésomodèle d'endommagement pour les composites stratifiés (sans la routine « calc-fiss »). A cause de non-convergence de l'algorithme pour des pas de chargement postérieurs à  $\varepsilon_c$  dans certains cas, il est choisi d'arrêter les simulations à ce chargement.

En observant pour le chargement  $\varepsilon_b$  la cartographie de l'endommagement dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  (FIG. 6.3), on remarque que la longueur de la zone fortement endommagée ( $d > 0.5$ ) obtenue par la simulation numérique effectuée avec Coffee n'est pas en accord avec l'expérimentation menée dans l'article [Yashiro *et al.*, 2007], elle ne mesure ici que 1.44 mm au lieu de 7.5 mm. La contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  est quasi nulle dans cette zone (FIG. 6.4), ce qui permet de comparer cette zone à un split qui impose que le flux d'effort ne puisse plus transiter par la zone fissurée. Dans le reste du pli, l'endommagement est négligeable.

Pour le chargement  $\varepsilon_c$ , la zone fortement endommagée s'est allongée et mesure 4.7 mm comme on peut le voir sur la cartographie de l'endommagement à cet instant de chargement (FIG. 6.5). Cependant la longueur de cette zone est là encore sous-estimée comparée à  $l_c = 15.7$  mm. Là encore la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  est nulle lorsque la variable d'endommagement  $d$  est égale à 1 (FIG. 6.6).

Pour ce qui est du pli orienté à  $90^\circ$ , l'endommagement se concentre sous la zone dégradée du pli supérieur comme on peut le voir sur la cartographie de la variable d'endommagement  $d'$  pour le chargement  $\varepsilon_c$  (FIG. 6.7). La valeur de  $d'$  est de 0.21 en dehors de cette zone, ce qui laisse supposer la présence d'un réseau périodique de micro-fissures transverses.

En comparant les longueurs de fissure en fonction du temps de chargement (FIG. 6.8), obtenues d'une part par la simulation, en trait fort, et d'autre part par l'expérience, les



**FIGURE 6.2** – Résultats d'expérience (Rayons X) et de simulation (éléments cohésifs) d'après [Yashiro *et al.*, 2007]



FIGURE 6.3 – Cartographie de la variable d'endommagement  $d$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_b$

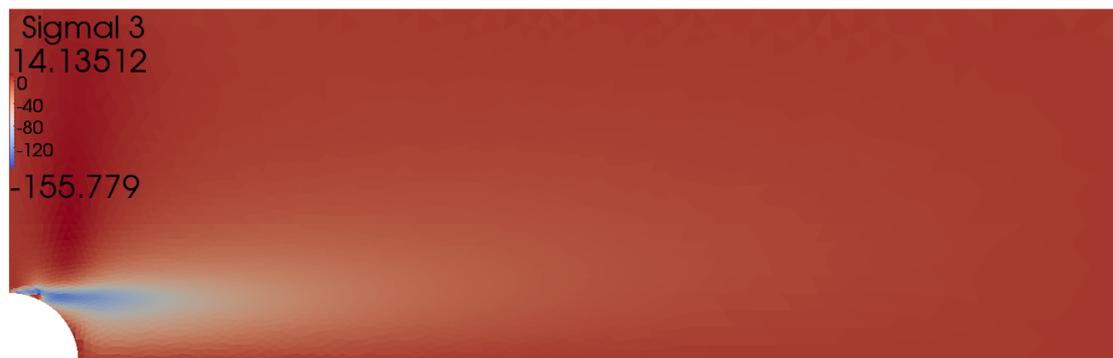


FIGURE 6.4 – Contrainte  $\sigma_{12}$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_b$



FIGURE 6.5 – Cartographie de la variable d'endommagement  $d$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_c$

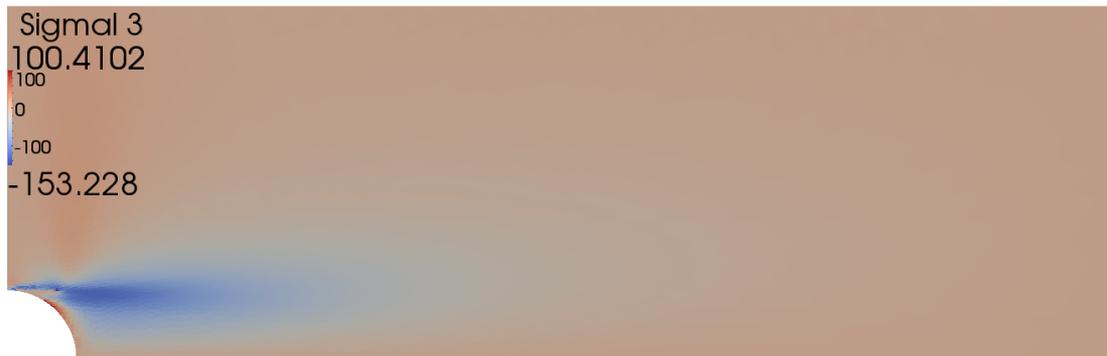
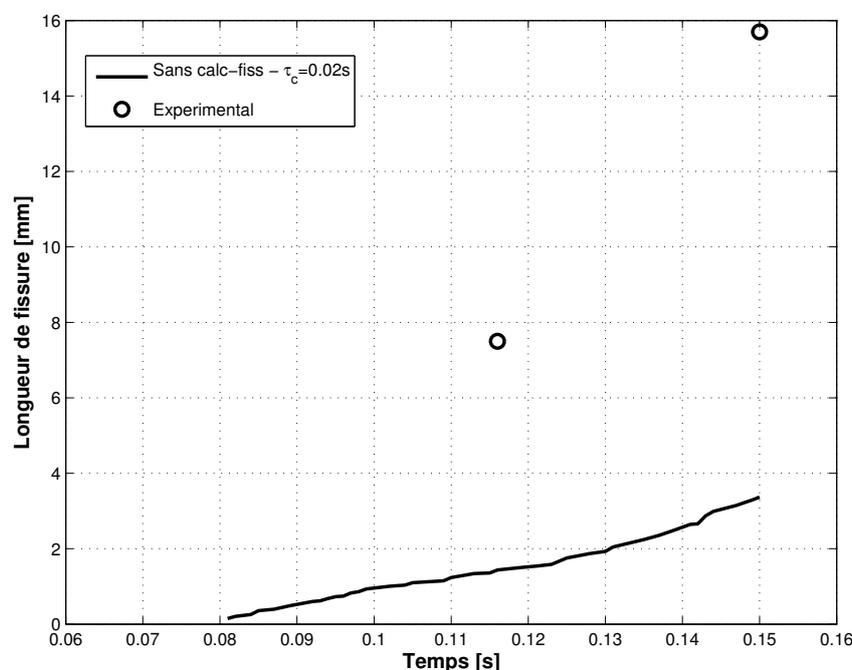


FIGURE 6.6 – Contrainte  $\sigma_{12}$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\epsilon_c$



FIGURE 6.7 – Cartographie de la variable d'endommagement  $d'$  dans le pli central orienté à  $90^\circ$  pour  $\epsilon_c$

marqueurs ronds, on remarque que celles-ci sont très loin l'une de l'autre. La simulation sous estime complètement l'avancée de la zone fissurée.



**FIGURE 6.8** – Longueur de fissure en fonction du temps lors de l'utilisation de la version initiale du modèle d'endommagement retardé

Si l'on observe maintenant l'énergie dissipée par la création de la zone endommagée dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  en fonction de la longueur de fissure (FIG. 6.9), on peut avoir une idée du taux de restitution d'énergie, au facteur de l'épaisseur du pli près, en regardant la pente de la tangente à la courbe. Une fois la phase d'initiation passée, on entre dans la phase de propagation. Celle-ci se caractérise par une augmentation de l'énergie dissipée lors de l'accroissement de la longueur de la zone endommagée. La pente de la courbe augmente alors très légèrement, et donne un taux de restitution d'énergie moyen de  $1.4 \cdot 10^3 \text{ J.m}^{-2}$ .

En changeant la valeur du paramètre  $\tau_c$  par une valeur deux fois plus petite ( $\tau_c = 0.01 \text{ s}$ ), les résultats sont modifiés. Comme on peut le voir sur la cartographie de la variable d'endommagement  $d$  pour le chargement  $\varepsilon_c$  (FIG. 6.10), la largeur de la bande fissurée est différente.

Du fait de la moindre viscosité matériau associée à un temps caractéristique  $\tau_c$  plus faible, la longueur de fissure a cru plus vite (FIG. 6.11). Pour le chargement  $\varepsilon_c$ , on obtient une longueur de fissure égale à 4.5 mm.

Le taux de restitution d'énergie moyen, donné par la pente de la courbe de l'énergie dissipée en fonction de la longueur de fissure (en prenant l'épaisseur du pli en compte) est

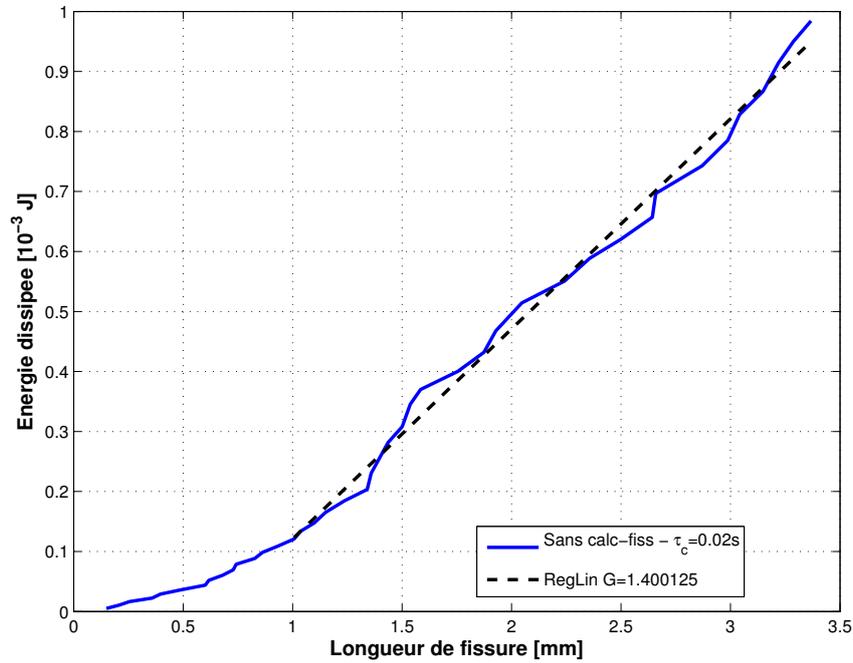
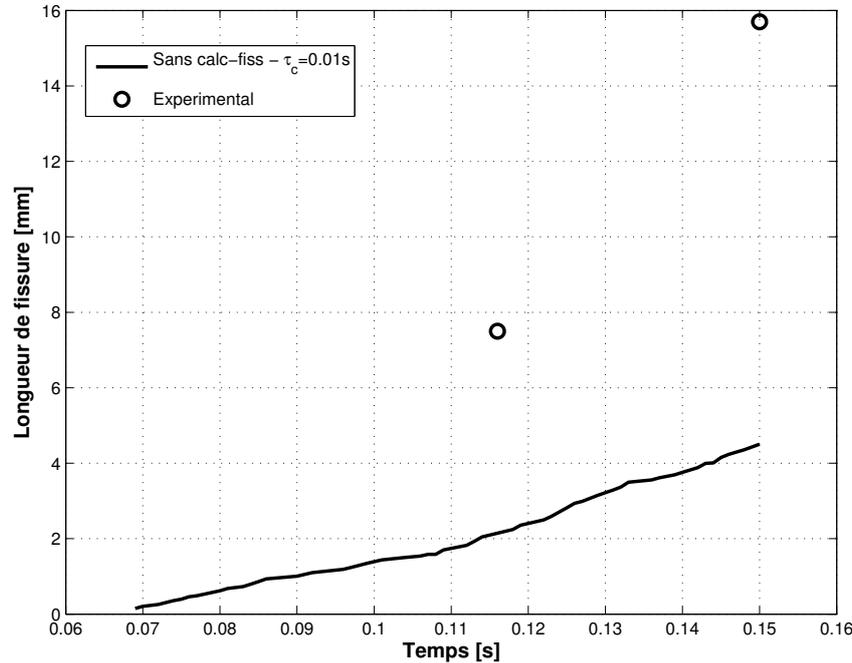


FIGURE 6.9 – Energie dissipée en fonction de la longueur de fissure lors de l'utilisation de la version initiale du modèle d'endommagement retardé



FIGURE 6.10 – Cartographie de la variable d'endommagement  $d$  dans le pli supérieur orienté à 0° pour  $\varepsilon_c$  et  $\tau_c = 0.01$  s



**FIGURE 6.11** – Longueur de fissure en fonction du temps lors de l'utilisation de la version initiale du modèle d'endommagement retardé pour  $\tau_c = 0.01$  s

de  $1.32 \cdot 10^3 \text{ J.m}^{-2}$  (FIG. 6.12). Cette pente n'est pas constante durant la propagation de la zone fissurée, elle croît.

Le tracé du taux de restitution d'énergie  $G$  en fonction de la longueur est obtenu par des régressions linéaires successives afin d'obtenir une dérivée numérique suffisamment précise de la courbe précédente (FIG. 6.13). Le tracé en pointillé correspond au taux de restitution d'énergie critique du matériau  $G_c = 1.1 \cdot 10^3 \text{ J.m}^{-2}$ . On confirme ici le fait que le taux de restitution d'énergie augmente avec la longueur de fissure, pour atteindre presque  $2.1 \cdot 10^3 \text{ J.m}^{-2}$  à  $\varepsilon_c$ , ce qui est bien supérieur à  $G_c$ .

Sans traitement particulier, l'utilisation d'un modèle d'endommagement retardé permet de voir apparaître une zone où l'endommagement dû au cisaillement se localise. Cette zone est située à l'emplacement d'un split lors de l'expérimentation. Cependant, la longueur de cette zone endommagée n'est pas en accord avec la longueur expérimentale du split, la simulation numérique effectuée a tendance à sous-estimer la longueur de la fissure. Si l'on utilisait la mécanique de la rupture linéaire élastique (LEFM), la propagation de cette fissure serait gérée suivant un critère énergétique : le taux de restitution d'énergie. La longueur du split dépendrait donc de celui-ci, et un taux de restitution d'énergie critique  $G_c$  plus grand serait associé à un split de longueur plus faible. Dans notre cas, le taux de restitution d'énergie  $G$ , calculé à partir de l'énergie dissipée et la longueur de la zone endommagée, est supérieur à  $G_c$ . Il est alors normal que cette longueur soit plus faible que celle obtenue par l'expérimentation [Yashiro *et al.*, 2007]. De plus, un chan-

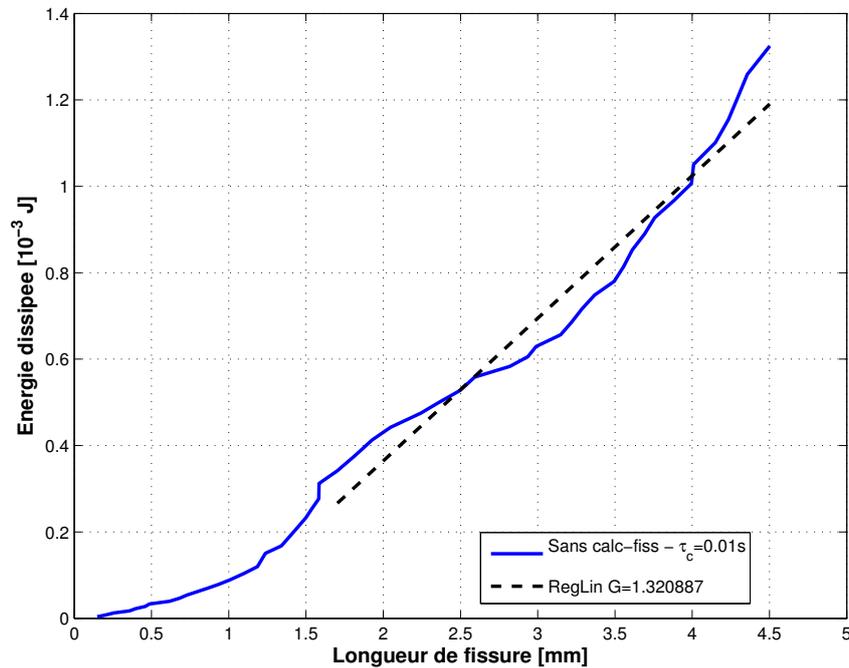


FIGURE 6.12 – Energie dissipée en fonction de la longueur de fissure lors de l'utilisation de la version initiale du modèle d'endommagement retardé pour  $\tau_c = 0.01$  s

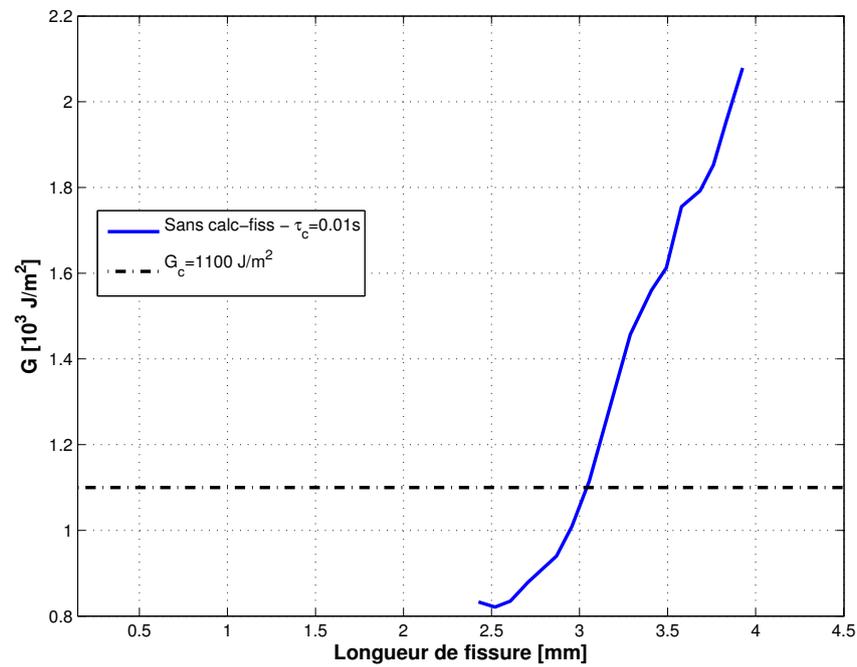
gement du temps caractéristique amène à des changements dans les résultats au niveau de la taille du split et de l'énergie dissipée lors de sa propagation. On comprend donc l'intérêt d'utiliser une méthode qui permet de gérer la propagation de la fissure sur un critère énergétique. Le modèle initial permet cependant de bien prendre en compte les autres dégradations qui ont lieu dans le reste de la structure.

## 2 Utilisation de la méthode

### 2.1 Détermination d'une première valeur de $\tilde{Y}_c$ pour la propagation

En utilisant la méthode présentée au précédent chapitre (nommée « Avec calc-fiss » sur les prochaines figures), on vient modifier la valeur du paramètre  $Y_c$  dans une démarche de prédiction correction pour étaler l'énergie de fissuration dans une bande endommagée. On notera  $\tilde{Y}_c$  le paramètre  $Y_c$  dans la bande endommagée associée à la fissure afin de ne pas le confondre avec sa signification dans le reste de la structure. La position de cette bande et son épaisseur sont trouvées automatiquement par l'algorithme.

L'épaisseur de cette bande reste alors fixe. On peut donc considérer en première approximation que lors de l'avancée du front de fissure, tous les points dans l'épaisseur de la bande fissurée vont subir le même trajet de chargement, et vont donc dissiper la même énergie volumique  $g$  pour s'endommager complètement. Soit  $e$  l'épaisseur de cette bande,



**FIGURE 6.13** – Taux de restitution d'énergie  $G$  en fonction de la longueur de fissure lors de l'utilisation de la version initiale du modèle d'endommagement retardé pour  $\tau_c = 0.01 \text{ s}$

on peut alors définir le taux de restitution d'énergie par :

$$G = e \times g \quad (6.1)$$

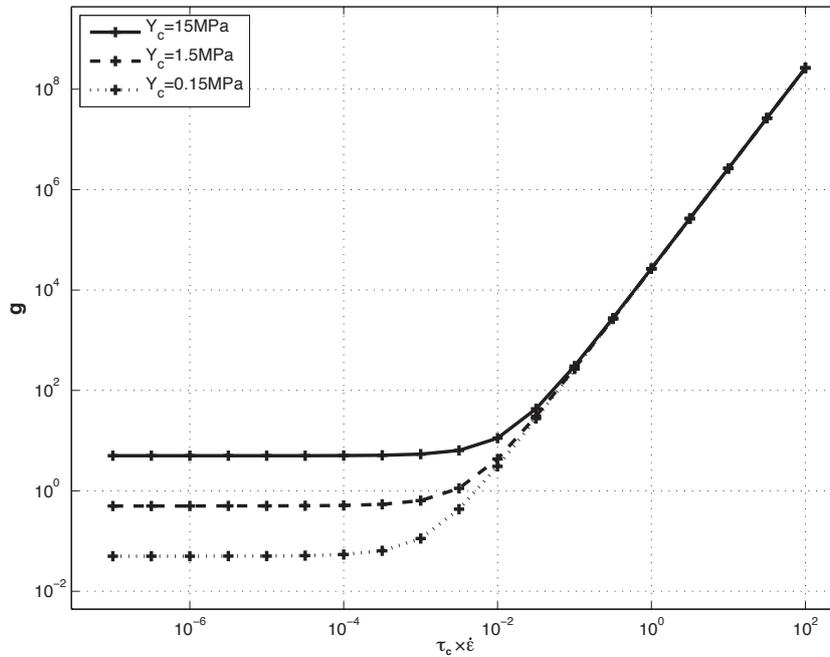


FIGURE 6.14 – Energie volumique dissipée en fonction du produit  $\tau_c \times \dot{\epsilon}_{12}$

Dans le cas d'un point matériel chargé uniquement en cisaillement et à vitesse de déformation constante, en utilisant la loi d'endommagement à effet retard, on obtiendrait un taux de restitution d'énergie volumique  $g$  (ou énergie volumique dissipée) qui dépend du produit  $\tau_c \times \dot{\epsilon}_{12}$  (FIG. 6.14). Celui-ci évolue entre deux asymptotes : l'asymptote statique pour des produits  $\tau_c \times \dot{\epsilon}_{12}$  faibles, et l'asymptote dynamique pour des produits  $\tau_c \times \dot{\epsilon}_{12}$  élevés. La valeur de  $g$  sur l'asymptote statique, notée  $g_s$ , peut être calculée en considérant une loi d'endommagement non-retardée, et donne dans le cas du cisaillement :

$$g_s = \frac{Y_c}{3} \quad (6.2)$$

L'asymptote dynamique peut être déterminée en considérant la vitesse d'endommagement maximale  $1/\tau_c$ . On définit alors  $g_d$  qui varie avec  $\tau_c \times \dot{\epsilon}_{12}$  :

$$g_d = \kappa \times (\tau_c \dot{\epsilon}_{12})^2 \quad (6.3)$$

où  $\kappa$  est un coefficient qui dépend du paramètre  $a$  de l'effet retard (pris dans notre cas égal à 1). Plus  $a$  est petit, plus  $\kappa$  tend vers 1 par valeur supérieure.

Un point matériel dans la bande fissurée n'est pas soumis à une vitesse de déformation constante. Son énergie volumique dissipée lors de son endommagement se situe alors entre ces deux asymptotes. Ceci nous permet toutefois de définir une borne inférieure à l'énergie volumique dissipée par ce point qui est associée à l'asymptote statique. On a donc  $g \geq g_s$ .

Or  $g_s$  est fonction de  $Y_c$ . On peut alors définir une valeur maximale à  $\tilde{Y}_c$  dans la bande fissurée, condition nécessaire pour obtenir  $G = G_c$  :

$$g \times e \geq g_s \times e \quad (6.4)$$

$$G_c \geq g_s \times e \quad (6.5)$$

D'où dans notre cas :

$$\tilde{Y}_c \leq 3 \frac{G_c}{e} \quad (6.6)$$

Dans le calcul du paragraphe précédent sur la plaque trouée pour  $\tau_c = 0.02$  s, la largeur de la bande endommagée lors de la phase de propagation est de 0.5 mm, et l'énergie de fissuration du matériau est  $G_c = 1.1 \times 10^3 \text{ J.m}^{-2} = 1.1 \text{ MPa.mm}$ . On obtient donc pour notre cas une valeur maximale de  $\tilde{Y}_c$  :

$$\tilde{Y}_c \leq 6.6 \text{ MPa} \quad (6.7)$$

On peut donc utiliser ce même raisonnement pour déterminer la valeur qui serait utilisée en premier lieu pour la propagation de la zone fissurée, afin de déterminer ensuite la valeur de  $\tilde{Y}_c$  adaptée à la valeur du paramètre  $\tau_c$  et au cas de chargement.

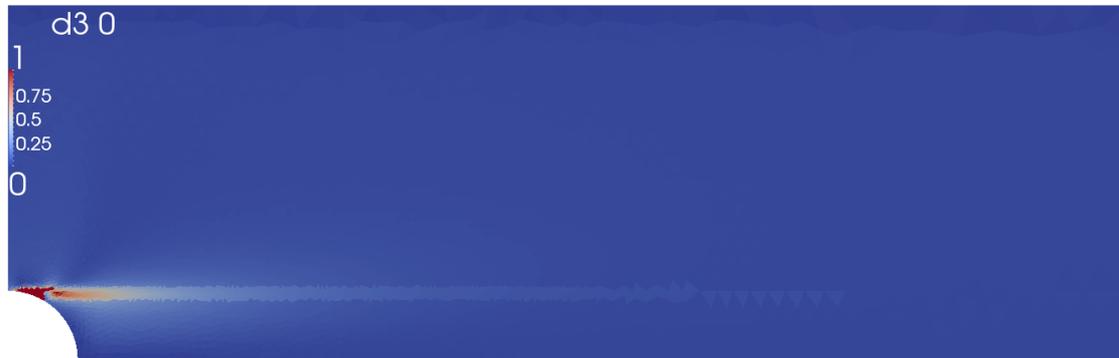
## 2.2 Première modification du paramètre $\tilde{Y}_c$

Dans le calcul de la plaque trouée pour  $\tau_c = 0.02$  s, la valeur maximale de  $\tilde{Y}_c$  imposée par la largeur de la zone endommagée est de 6.6 MPa, ce qui est bien inférieur à la valeur initiale de 15 MPa utilisée pour l'initiation. Si une fois la phase de propagation détectée on change la valeur de  $\tilde{Y}_c$  de 15 MPa à 6.6 MPa, la valeur de  $d_s(Y)$  qui pilote l'effet retard (3.35) est alors grandement modifiée au cours de ce pas de chargement. Plusieurs pas de chargement sont ainsi nécessaires pour récupérer une solution qui se propage de façon stable. Afin d'éviter ce phénomène, on se propose de faire une décharge élastique, puis on recommence le chargement. On différencie ainsi la phase d'initiation et la phase de propagation.

Pour ne s'intéresser qu'à la phase de propagation, on choisit de placer un défaut ( $d = 1$ ) en bord de trou à l'endroit où s'initierait la fissure. On évite ainsi d'avoir à faire un premier chargement suivi d'une décharge pour recharger ensuite. On vient alors effectuer une simulation avec  $\tilde{Y}_c = 6.6 \text{ MPa}$  dans une bande de largeur 0.5 mm en prolongement du défaut initié.

Sur la cartographie de l'endommagement pour le chargement  $\varepsilon_b = 0.58\%$  dans le pli orienté à  $0^\circ$  (FIG. 6.15), on observe très nettement la bande endommagée de largeur fixe

se démarquer. Le défaut initié est tout à gauche de la bande, suivit de la « process zone ». Le reste du pli a un endommagement qui est négligeable.



**FIGURE 6.15** – Cartographie de la variable d'endommagement  $d$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_b - \tau_c = 0.02$  s

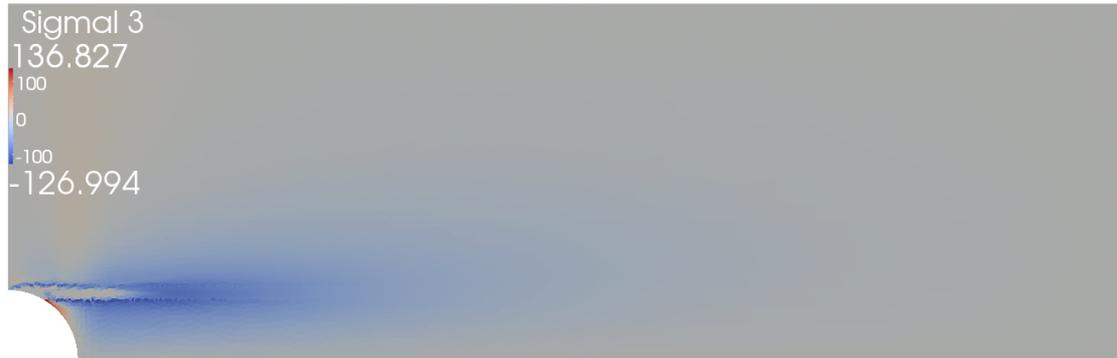
En observant la cartographie de l'endommagement pour le chargement  $\varepsilon_c$  dans le pli orienté à  $0^\circ$  (FIG. 6.16), on remarque que la « process zone » s'est déplacée de plusieurs millimètres. On voit donc une nette différence avec les résultats obtenus sans l'utilisation de la méthode mise en place.



**FIGURE 6.16** – Cartographie de la variable d'endommagement  $d$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$  s

La contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  est nulle dans les éléments complètement endommagés, et très importante dans la process-zone afin de faire avancer la zone endommagée (FIG. 6.17).

En comparant la longueur de la zone fortement endommagée avec cette valeur de  $\tilde{Y}_c$  (en trait fort, FIG. 6.18) à la longueur calculée avec l'ancienne méthode (en traits pointillés), on remarque que les résultats diffèrent. On observe très clairement une différence



**FIGURE 6.17** – Contrainte  $\sigma_{12}$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$  s

de vitesse de propagation de la zone assimilée à une fissure. Cependant, la longueur calculée à partir des simulations ne coïncide pas avec celle calculée à partir des micrographies expérimentales (les marqueurs ronds).

De plus, sur le tracé de l'énergie dissipée lors de la propagation en fonction de la longueur de la zone fissurée (FIG. 6.19), on peut observer deux phases. La première correspond à la création de la « process zone », et la seconde, pour une longueur de fissure supérieure à 5 mm, correspond à sa propagation. Dans cette seconde phase, le taux de restitution d'énergie moyen, associé à la pente de la courbe, est de  $1.81 \times 10^3 \text{ J.m}^{-2}$ .

On peut faire de même en réduisant le temps caractéristique de la loi à taux limité :  $\tau_c = 0.01$  s. Là encore, la fissure est initiée avec un défaut. On impose  $\tilde{Y}_c = 6.6$  MPa dans la bande de largeur 0.5 mm en prolongement du défaut. Sur le tracé de la longueur de fissure en fonction du temps (en trait fort, FIG. 6.20), l'instant de début d'accroissement de la zone endommagée arrive un peu plus tôt que pour  $\tau_c = 0.02$  s (FIG. 6.18), un temps caractéristique plus faible implique moins de retard.

Sur le tracé de l'énergie dissipée en fonction de la longueur de fissure (FIG. 6.21), on observe, une fois la « process zone » mise en place, que le taux de restitution d'énergie moyen est  $G = 1.66 \times 10^3 \text{ J.m}^{-2}$ . Cette valeur est inférieure au résultat obtenu pour  $\tau_c = 0.02$  s, mais est toujours supérieure à  $G_c = 1.1 \times 10^3 \text{ J.m}^{-2}$ .

Si l'on veut que le taux de restitution d'énergie  $G$  se rapproche de la valeur cible  $G_c$ , il faudrait encore diminuer  $\tau_c$ . Cependant, des valeurs de  $\tau_c$  plus faibles donnent des solutions numériques qui sont dépendantes du maillage choisi. On comprend donc que pour adapter l'énergie dissipée en conservant le maillage initial, il faut modifier le paramètre  $\tilde{Y}_c$ . On peut alors utiliser des valeurs de  $\tau_c$  qui ne sont pas dépendantes de la taille de maille, et trouver la valeur du paramètre  $\tilde{Y}_c$  qui leur est associée afin d'obtenir le taux de restitution d'énergie désiré.

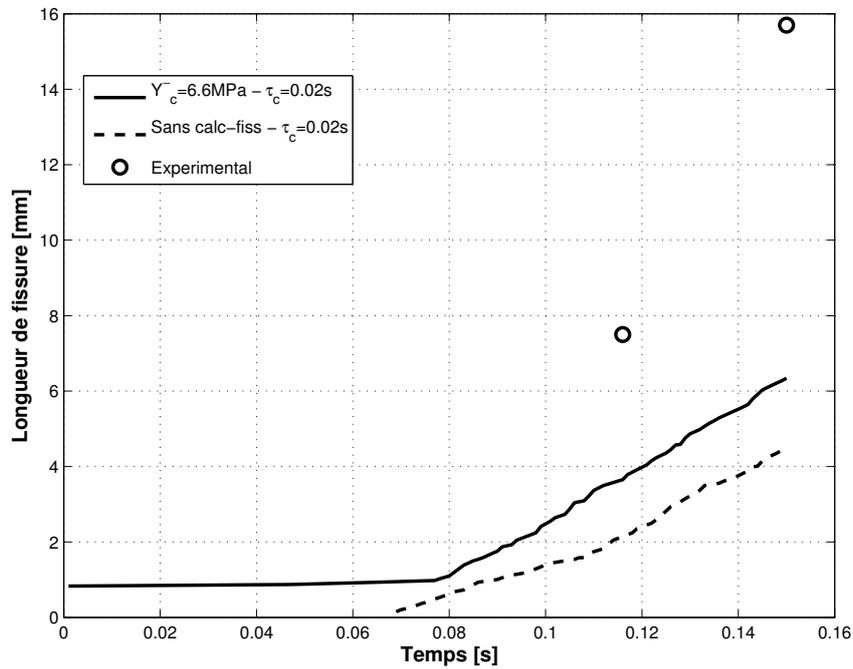


FIGURE 6.18 – Longueur de fissure en fonction du temps -  $\tau_c = 0.02 \text{ s}$

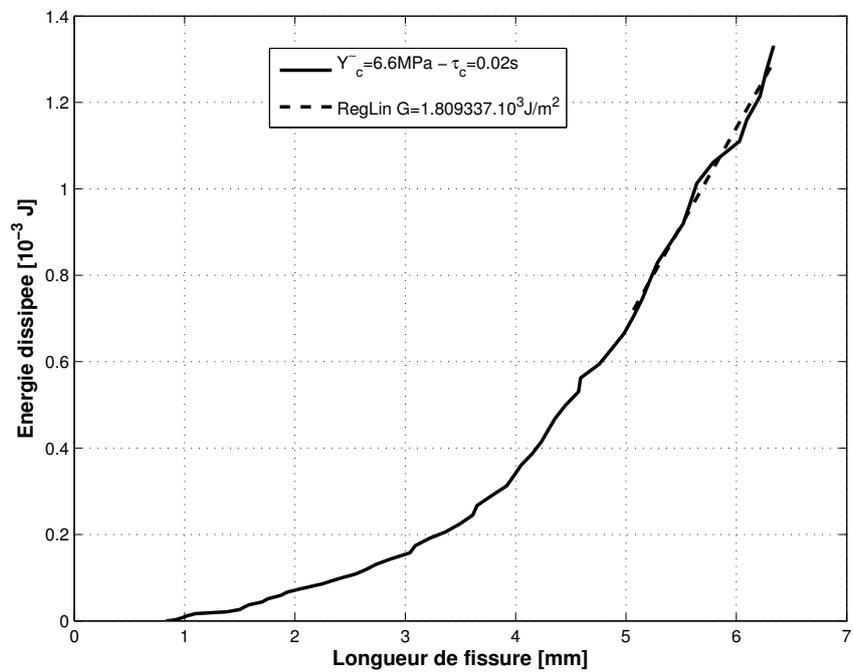


FIGURE 6.19 – Energie dissipée en fonction de la longueur de fissure -  $\tau_c = 0.02 \text{ s}$

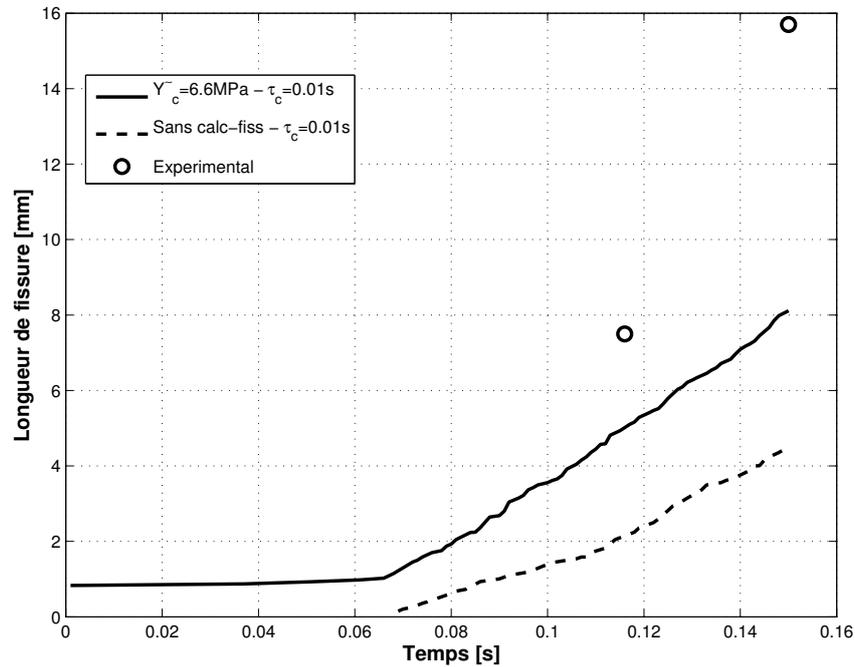


FIGURE 6.20 – Longueur de fissure en fonction du temps -  $\tau_c = 0.01 \text{ s}$

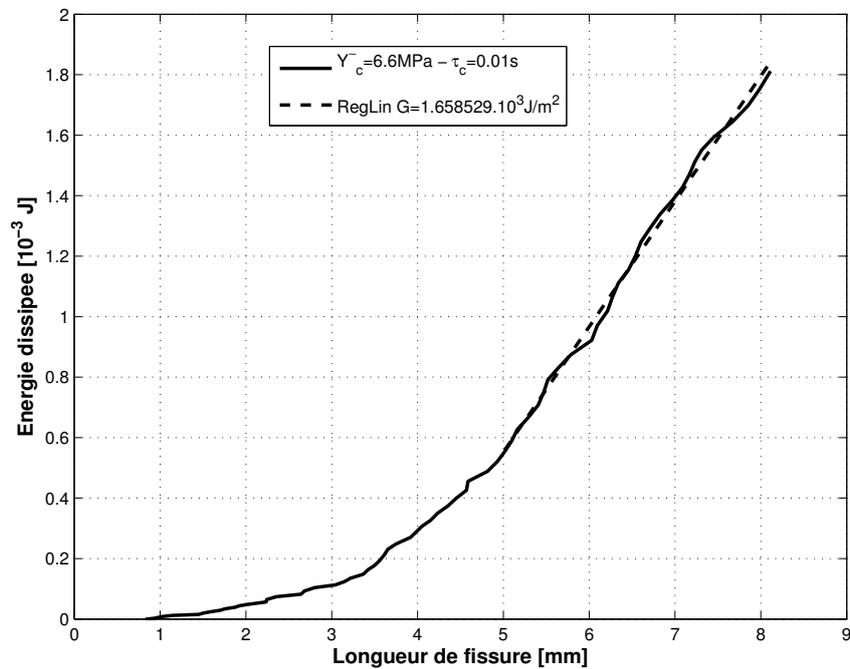


FIGURE 6.21 – Energie dissipée en fonction de la longueur de fissure -  $\tau_c = 0.01 \text{ s}$  -  $\tilde{Y}_c = 6.6 \text{ MPa}$

### 2.3 Adaptation de l'énergie dissipée par la propagation du split

On se propose donc de changer la valeur de  $\tilde{Y}_c$  pour permettre d'obtenir un taux de restitution d'énergie  $G$  qui soit plus proche de  $G_c$ . Plusieurs tentatives sont nécessaires pour obtenir une valeur qui permette de s'approcher de cet objectif. Dans le cas où le temps caractéristique de l'effet retard prend la valeur  $\tau_c = 0.02$  s, la valeur  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa permet de vérifier cela.

Sur le tracé de l'énergie dissipée en fonction de la longueur de fissure (FIG. 6.22), on remarque que dans la phase de propagation de la « process zone », la pente est presque constante, et peut être associée à un taux de restitution d'énergie  $G = 1.14 \times 10^3$  J.m<sup>-2</sup>. On atteint donc notre objectif d'obtenir un taux de restitution d'énergie proche du taux de restitution d'énergie critique du matériau  $G_c = 1.1 \times 10^3$  J.m<sup>-2</sup> lors de la propagation de la zone endommagée associée à une fissure.

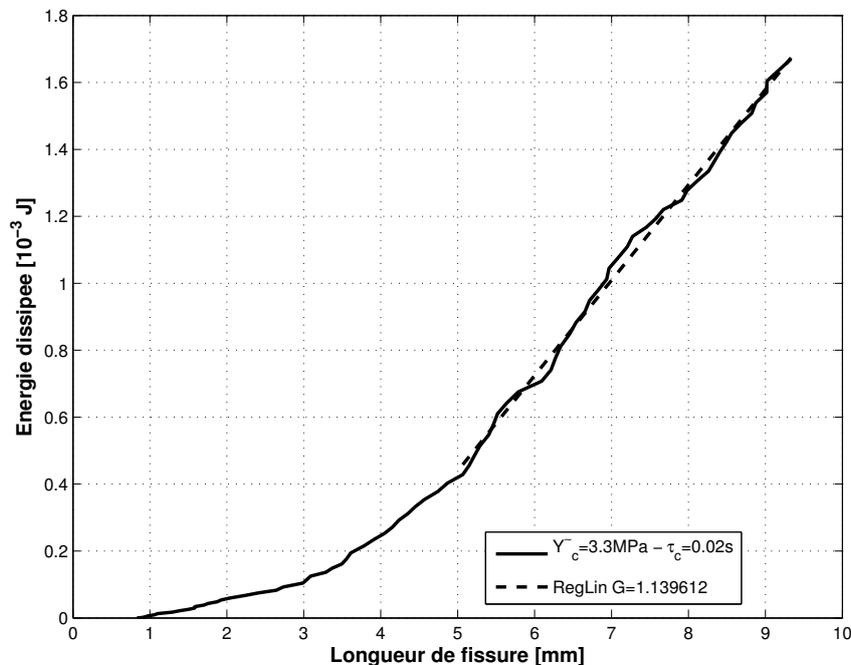


FIGURE 6.22 – Energie dissipée en fonction de la longueur de fissure -  $\tau_c = 0.02$  s -  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa

Cette valeur de taux de restitution d'énergie  $G$  étant plus faible que pour le cas  $\tilde{Y}_c = 6.6$  MPa, il est naturel de remarquer que la vitesse de propagation de la zone fissurée lui est supérieure (FIG. 6.23 et FIG. 6.19). Les longueurs de fissure sont quant à elles encore sous estimées : 6.1 mm pour le chargement  $\varepsilon_b$ , 9.3 mm pour le chargement  $\varepsilon_c$ .

Dans le cas où le temps caractéristique est  $\tau_c = 0.01$  s, la valeur de  $\tilde{Y}_c$  choisie est de 4.5 MPa. Le tracé de l'énergie dissipée en fonction de la longueur de fissure (FIG. 6.24)

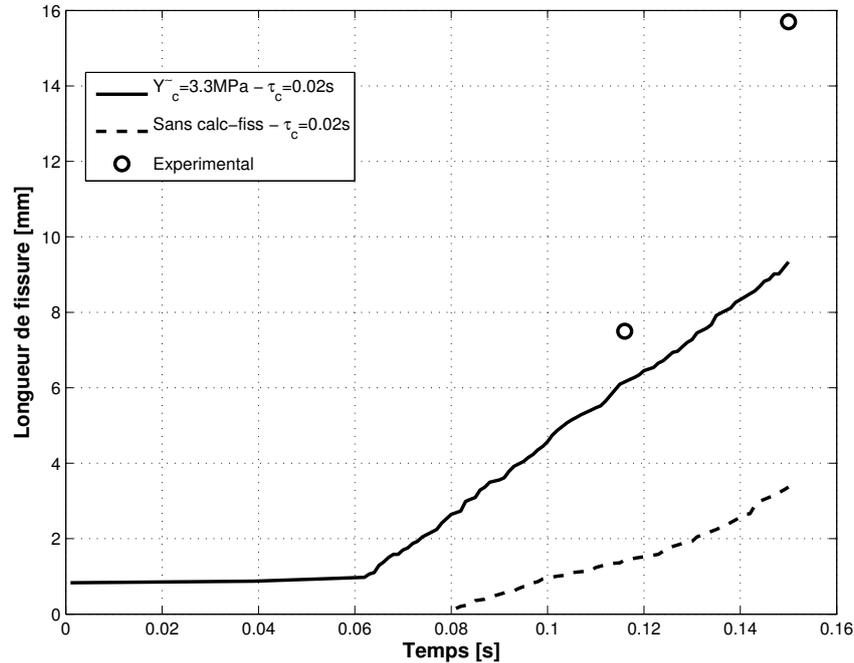


FIGURE 6.23 – Longueur de fissure en fonction du temps -  $\tau_c = 0.02$  s -  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa

nous permet de calculer le taux de restitution d'énergie moyen lors de la propagation :  $G = 1.00 \times 10^3 \text{ J.m}^{-2}$ .

Le tracé de la longueur de fissure en fonction du temps (FIG. 6.25) nous permet de voir que la vitesse de propagation de la fissure est supérieure au cas sans modification de la valeur  $Y_c$ . Les longueurs de fissure sont ici de 6.58 mm pour le chargement  $\varepsilon_b$ , 8.9 mm pour le chargement  $\varepsilon_c$ . Ces longueurs sont proches des résultats obtenus pour le couple de paramètres  $\tau_c = 0.02$  s et  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa.

On montre ainsi que pour un maillage spatial défini, en choisissant une valeur de  $\tau_c$  qui permette de maintenir une indépendance au maillage, on peut adapter le taux de restitution d'énergie afin de l'approcher d'une valeur cible  $G_c$  en modifiant le paramètre  $\tilde{Y}_c$  dans une bande.

## 2.4 Influence du split sur la structure

On peut profiter du résultat du paragraphe précédent pour regarder l'influence de la prise en compte de cette zone fissurée sur les autres variables de la structure pour le couple de paramètres  $\tau_c = 0.02$  s et  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa.

En observant la cartographie de l'endommagement pour  $\varepsilon_b$  dans le pli orienté à  $0^\circ$  (FIG. 6.26), on observe très nettement la bande endommagée de largeur fixe se démarquer. Le reste du pli a un endommagement qui est négligeable.

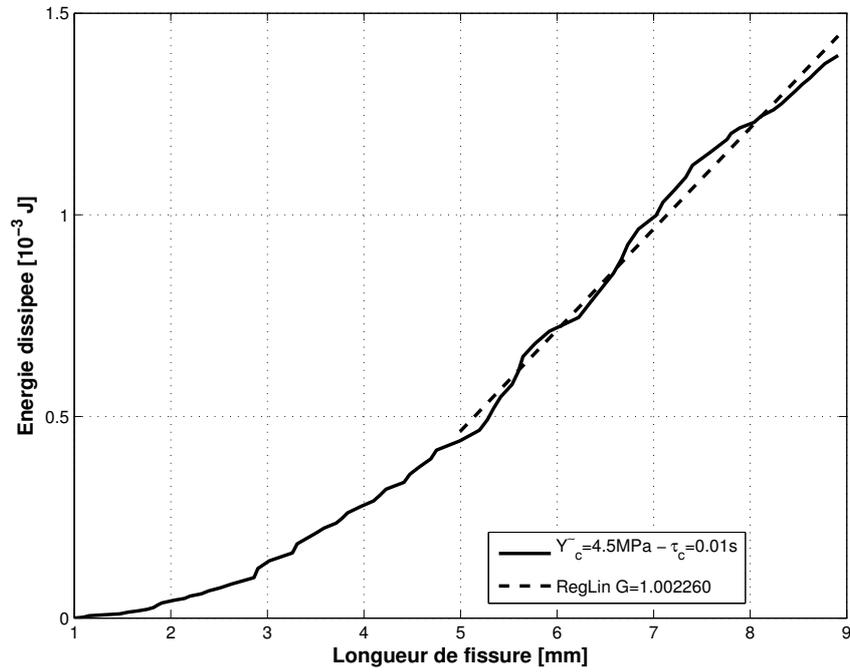


FIGURE 6.24 – Energie dissipée en fonction de la longueur de fissure -  $\tau_c = 0.01$  s -  $\tilde{Y}_c = 4.5$  MPa

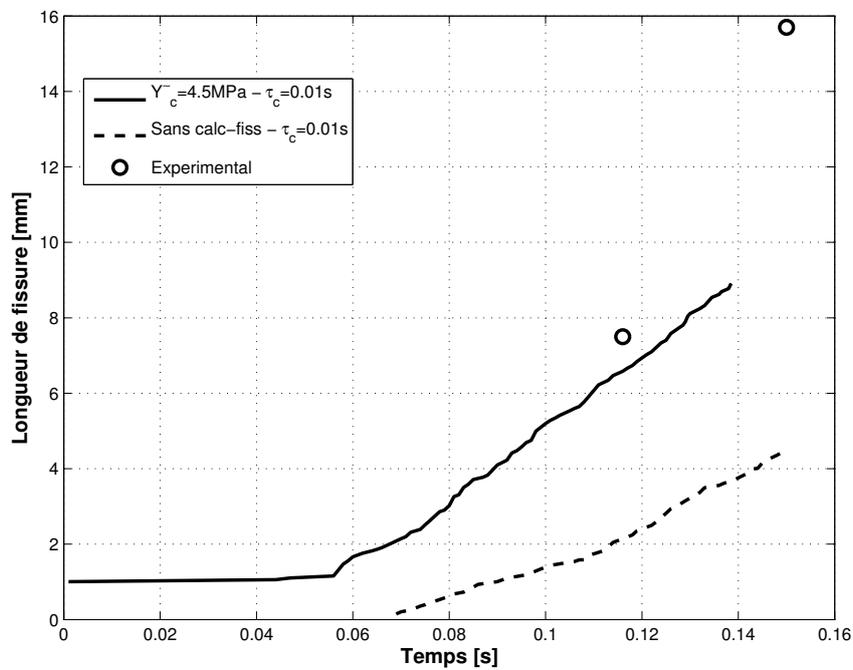


FIGURE 6.25 – Longueur de fissure en fonction du temps -  $\tau_c = 0.01$  s -  $\tilde{Y}_c = 4.5$  MPa



**FIGURE 6.26** – Cartographie de la variable d'endommagement  $d$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02 \text{ s} - \tilde{Y}_c = 3.3 \text{ MPa}$

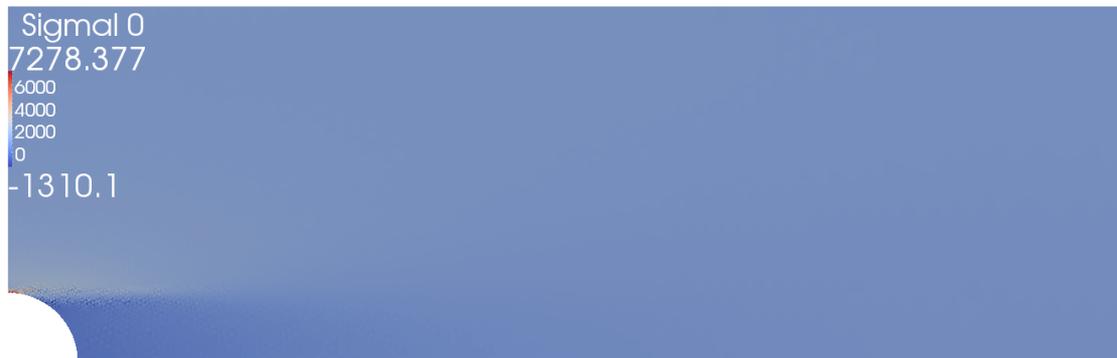
En observant la cartographie de l'endommagement pour  $\varepsilon_c$  dans le pli orienté à  $0^\circ$  (FIG. 6.27), on remarque que la bande qui concentre l'endommagement s'est allongée de plusieurs millimètres.



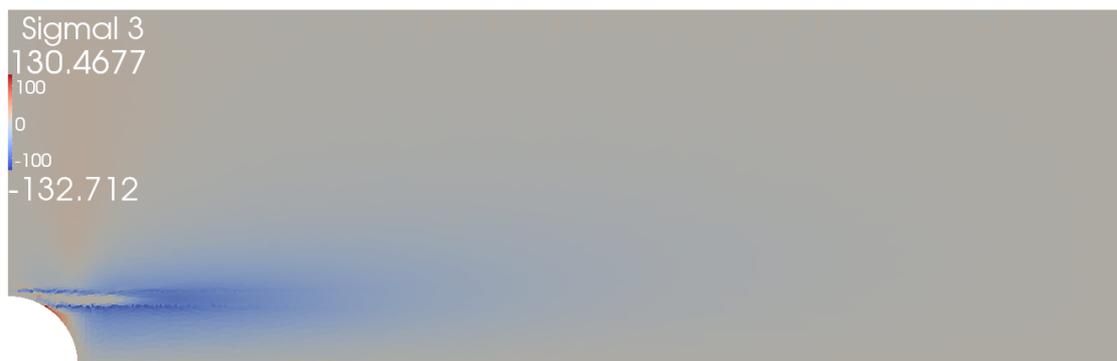
**FIGURE 6.27** – Cartographie de la variable d'endommagement  $d$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02 \text{ s} - \tilde{Y}_c = 3.3 \text{ MPa}$

Le split est une fissure qui apparaît à cause de la présence du trou. Au-dessus du trou, les fibres sont très chargées en traction alors qu'à droite du trou, les conditions de bord libre imposent que la contrainte dans le sens de la fibre soit nulle à proximité du trou et augmente jusqu'à atteindre le même niveau que le reste du pli une fois que l'on dépasse la process-zone (FIG. 6.28). Ceci induit un fort gradient dans la contrainte de cisaillement en haut du trou, et ainsi la bande endommagée s'initie avec l'augmentation du chargement. Lorsque cette zone endommagée avance, le champ de contrainte est fortement modifié. La contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  est nulle dans les éléments complètement endommagés, et très importante dans la process-zone afin de faire avancer la zone endommagée

(FIG. 6.29).



**FIGURE 6.28** – Contrainte  $\sigma_{11}$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$  s -  $\dot{\gamma}_c = 3.3$  MPa



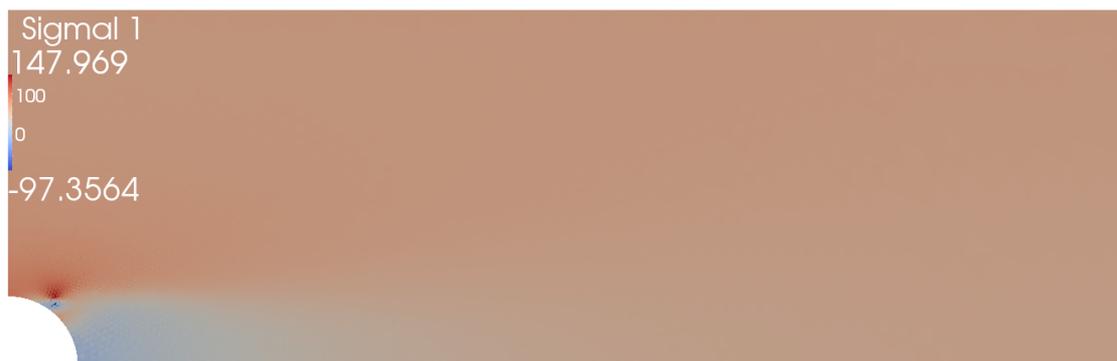
**FIGURE 6.29** – Contrainte  $\sigma_{12}$  dans le pli supérieur orienté à  $0^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$  s -  $\dot{\gamma}_c = 3.3$  MPa

Le pli central orienté à  $90^\circ$  n'est a priori pas très chargé car ses fibres sont orientées dans une direction orthogonale au chargement. Cependant, le gradient de déformation au niveau de la zone fissurée dans les plis orientés à  $0^\circ$  impose au pli central un champ de déformation similaire. Le champ de contraintes dans le pli central n'est donc ni négligeable, ni homogène. Il est donc naturel de trouver une contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  qui soit importante sous la zone endommagée représentant la fissure (FIG. 6.30).

En observant le champ de contrainte transverse  $\sigma_{22}$  dans le pli orienté à  $90^\circ$  (FIG. 6.31), on remarque que les fortes valeurs positives se situent au dessus la zone fissurée, et que sous la zone fissurée,  $\sigma_{22}$  est négatif. On comprend donc que le réseau périodique de micro-fissuration transverse se trouve au dessus du split dans les micrographies faites lors des expériences (FIG. 6.2).



**FIGURE 6.30** – Contrainte  $\sigma_{12}$  dans le pli central orienté à  $90^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$  s -  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa



**FIGURE 6.31** – Contrainte  $\sigma_{22}$  dans le pli central orienté à  $90^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$  s -  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa

Pourtant, la cartographie de la variable d'endommagement  $d'$  (qui est égale à  $d$  avec les paramètres choisis pour la simulation) pour le chargement  $\varepsilon_c$  ne correspond pas avec les résultats expérimentaux (FIG. 6.32). Il y a une zone où l'endommagement se concentre sous le split du pli orienté à  $0^\circ$ .



FIGURE 6.32 – Cartographie de la variable d'endommagement  $d'$  dans le pli central orienté à  $90^\circ$  pour  $\varepsilon_c - \tau_c = 0.02$  s -  $\tilde{Y}_c = 3.3$  MPa

## 2.5 Bilan et limites de la méthode proposée

Cette méthode permet donc d'adapter un taux de restitution d'énergie pour obtenir une valeur proche de la valeur cible lors de la propagation d'une fissure dans un pli de composite stratifié. La valeur initiale du paramètre  $Y_c$  est prise afin de gérer la phase d'initiation de la fissure. Une fois le taux de restitution d'énergie cible atteint, on vient modifier  $Y_c$  pour étaler la bonne énergie dissipée dans une zone où l'endommagement se concentre pour que la propagation de cette zone endommagée soit comparable sur le plan énergétique avec la mécanique de la rupture.

Le taux de restitution d'énergie étant globalement constant lors de la phase de propagation dans les simulations effectuées, la valeur de  $\tilde{Y}_c$  n'a pas été modifiée au cours du chargement, plusieurs essais ont cependant dû être menés afin d'en définir sa valeur. La démarche de prédiction/correction proposée au CHAP. 5, n'a donc pas eu besoin d'être utilisée pour le cas traité. Cependant, pour des longueurs de fissures plus grandes, les vitesses de déformation dans la « process-zone » pourraient être différentes, et nécessiter une autre valeur de  $\tilde{Y}_c$  à cause de la sensibilité du modèle d'endommagement à taux limité aux vitesses de déformations locales. De plus, le calcul du taux de restitution d'énergie, faisant intervenir une dérivée, nécessite de prendre en compte un nombre important de pas de chargement afin d'en avoir une approximation numérique qui soit fiable. On peut donc supposer qu'il serait judicieux d'utiliser une méthode implicite sur plusieurs pas de chargement pour déterminer la valeur de  $\tilde{Y}_c$  à utiliser pour une portion d'avancée de

fissure. Ceci nécessiterait néanmoins de pouvoir revenir en arrière sur plusieurs pas de chargement.

Les calculs de l'énergie dissipée et de l'accroissement de la zone endommagée nécessitent une taille de maille assez petite dans la bande endommagée associée à la fissure. Les simulations ont été effectuées avec un maillage prédéfini afin de répondre à ce problème. Il serait néanmoins intéressant d'utiliser un algorithme de remaillage adaptatif associé à l'évolution de l'endommagement dans la structure. On pourrait ainsi venir mailler finement la zone où l'endommagement évolue le plus vite, et ainsi traiter une bande où se concentre d'endommagement.

# Conclusion et perspectives

Dans l'objectif de prédire le comportement de composites stratifiés sous chargement quasi-statique jusqu'à rupture, ce travail propose d'améliorer la confiance envers les simulations numériques lorsque l'endommagement et les déformations se localisent, pour chercher à introduire une discontinuité dans le champ de déplacement correspondant à une fissure.

Le point essentiel réside dans la gestion de l'énergie dissipée lors de la propagation de la zone localisée, afin d'obtenir des résultats mieux en accord avec l'expérience. L'enjeu est donc dans l'utilisation d'un modèle permettant de propager une zone endommagée assimilable à une fissure en dissipant la bonne énergie, tout en s'affranchissant de la dépendance au maillage.

La démarche adoptée consiste à utiliser un limiteur de localisation local en espace, l'effet retard, et à adapter la loi d'évolution pour étaler l'énergie dissipée dans la zone où l'endommagement se concentre. De cette façon, la loi d'évolution et le comportement ne sont pas modifiés dans le reste de la structure pour continuer à prendre en compte de manière homogénéisée les dégradations qui sont globalement périodiques. Seule la zone qui regroupe les hauts niveaux d'endommagement subit une modification de son comportement pour le faire tendre vers un comportement similaire aux modèles de zones cohésives, sans avoir à définir a priori son emplacement dans la structure.

Dans la première partie, nous avons montré que pour pouvoir assimiler une zone endommagée à une surface fissurée ouverte, il faut que cette zone ne transmette plus de flux d'effort. Ceci impose que l'opérateur de Hooke soit calculé analytiquement lorsque la déformation de la zone endommagée n'est plus négligeable. De cette manière, le champ solution n'est pas modifié, et la vitesse de propagation de la zone endommagée n'est plus perturbée.

La deuxième partie du travail s'est attachée, dans un premier temps, à montrer la capacité d'un modèle d'endommagement à effet retard à s'affranchir de la dépendance au maillage pour une approche quasi-statique. Puis une loi reliant les paramètres de la loi d'évolution au taux de restitution d'énergie lors de la propagation d'une zone endommagée dans une éprouvette CT a été trouvée pour un modèle d'endommagement isotrope. Ceci a amené à proposer une stratégie permettant d'obtenir une énergie de fissuration désirée. On a ainsi pu identifier la valeur d'un des paramètres de la loi d'évolution pour obtenir un taux de restitution d'énergie choisi lorsque qu'un autre de ces paramètres, le temps caractéristique de l'effet retard, est imposé par la discrétisation temporelle et spa-

tiale.

Enfin, une démarche basée sur une méthode de prédiction correction a été proposée pour gérer la propagation d'une macro-fissure au sein d'un pli d'une structure composite stratifié décrite avec le mésomodèle d'endommagement. Celle-ci a été intégrée au programme Coffee, en retenant les modifications mises en lumière dans la première partie, et en ajoutant la prise en compte des capacités de multithreading des moyens de calculs récents pour améliorer grandement les temps de calcul sans pour autant utiliser une méthode de décomposition de domaine. Ces routines ont alors été utilisées pour simuler la propagation d'un split dans une plaque trouée en adaptant l'énergie dissipée par l'endommagement d'une bande d'éléments définie sur un maillage existant.

Les structures au sein desquelles des fissures non périodiques se propagent sont nombreuses. Les enjeux industriels associés au « Virtual Testing » rendent donc la prévision de la rupture importante. Ce travail introduit des perspectives à court, moyen et long termes pour chercher à donner plus de confiance dans les simulations numériques.

La démarche proposée vient déterminer automatiquement la position et l'orientation de l'apparition de la fissure. Une méthode permettant de remailler plus finement ces zones où la vitesse d'endommagement est la plus forte permettrait ainsi de mieux prendre en compte le passage de l'initiation à la propagation de la zone endommagée représentant la fissure. De plus, un raffinement du maillage aurait deux avantages : calculer plus finement l'énergie dissipée dans la zone fortement endommagée, et réduire encore la sensibilité du calcul à l'orientation du maillage.

Dans le cas de la plaque trouée, le taux de restitution d'énergie ne varie pas beaucoup lors de la phase de propagation jusqu'au chargement maximal utilisé, la valeur de  $\tilde{Y}_c$  à utiliser a ainsi été définie manuellement pour les simulations effectuées. Cependant, dans les cas où la vitesse d'avancée de la « process-zone » change au cours de la phase de propagation de la fissure, il faut réadapter la valeur de  $\tilde{Y}_c$  en amont de la zone fissurée. Un algorithme implicite permettant de reprendre la simulation plusieurs pas de chargement en arrière serait souhaitable pour profiter d'une évaluation numérique fiable du taux de restitution d'énergie. Ceci permettrait de rendre la démarche beaucoup plus automatique, et permettrait même de faire évoluer la direction de propagation de la fissure dans les cas où celle-ci change au cours du chargement.

La démarche suivie cherchait à utiliser un modèle à taux limité en restant dans un cadre quasi-statique. Ce modèle tire pourtant parti de la considération physique forte qu'une fissure nécessite un certain temps pour apparaître et se propager. C'est pourtant ce temps caractéristique qui devrait être utilisé dans le modèle. Une stratégie de calcul adaptée serait donc souhaitable pour prendre en compte ce temps bref et une largeur de bande endommagée fine dans des cas où la vitesse de chargement de la structure est très lente.

# Bibliographie

- [Aifantis, 1984] AIFANTIS, E. C. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 106(4):326–330.
- [Allix et Corigliano, 1996] ALLIX, O. et CORIGLIANO, A. (1996). Modeling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens. *International Journal of Fracture*, 77(2):111–140.
- [Allix et Deü, 1997] ALLIX, O. et DEÛ, J.-F. (1997). Delay-damage modeling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45:29–46.
- [Allix *et al.*, 2003] ALLIX, O., FEISSEL, P. et THÉVENET, P. (2003). A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers & Structures*, 81(12):1177–1191.
- [Allix et Ladevèze, 1992] ALLIX, O. et LADEVÈZE, P. (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22(4):235–242.
- [Allix *et al.*, 1995] ALLIX, O., LADEVÈZE, P. et CORIGLIANO, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1):61–74.
- [Allix *et al.*, 1994] ALLIX, O., LADEVÈZE, P. et VITTECOQ, E. (1994). Modeling and identification of the mechanical-behavior of composite laminates in compression. *Composites Science and Technology*, 51(1):35–42.
- [Allix *et al.*, 1998] ALLIX, O., LÉVÊQUE, D. et PERRET, L. (1998). Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology*, 58(5):671–678.
- [Barenblatt, 1962] BARENBLATT, G. I. (1962). *The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture*, volume Volume 7, pages 55–129. Elsevier.
- [Bažant et Belytschko, 1985] BAŽANT, Z. P. et BELYTSCHKO, T. (1985). Wave propagation in strain-softening bar : Exact solution. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(3):381–389.
- [Bažant et Jirásek, 2002] BAŽANT, Z. P. et JIRÁSEK, M. (2002). Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : Survey of progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(11):1119–1149.
- [Bazant et Oh, 1983] BAZANT, Z. P. et OH, B. H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16:155–177.

- [Benallal *et al.*, 1993] BENALLAL, A., BILLARDON, R. et GEYMONAT, G. (1993). Bifurcation and localization in rate-independent materials. some general considerations. In NGUYEN, Q. S., éditeur : *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*, pages 1–44. Springer-Verlag.
- [Besson *et al.*, 2001] BESSON, J., STEGLICH, D. et BROCKS, W. (2001). Modeling of crack growth in round bars and plane strain specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 38(46-47):8259–8284.
- [Bui, 2006] BUI, H. D. (2006). *Fracture Mechanics : Inverse Problems and Solutions*. Springer London.
- [Colliat-Dangus, 1986] COLLIAT-DANGUS, J. (1986). *Comportement des matériaux granulaires sous fortes contraintes*. Thèse de doctorat, USMG-INPG.
- [Cosserat et Cosserat, 1909] COSSERAT, E. et COSSERAT, F. (1909). *Théorie des corps déformables*. Hermann et fils.
- [Crisfield, 1981] CRISFIELD, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers & Structures*, 13(1-3):55–62.
- [Crossman et Wang, 1982] CROSSMAN, F. W. et WANG, A. S. D. (1982). The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates. In REIFSNIDER, K., éditeur : *Damage in composite materials*, volume 775, pages 118–139. ASTM STP.
- [de Borst et Muhlhaus, 1992] de BORST, R. et MUHLHAUS, H.-B. (1992). Gradient-dependent plasticity : Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:521–539.
- [de Borst *et al.*, 1993] de BORST, R., SLUYS, L. J., MUHLHAUS, H.-B. et PAMIN, J. (1993). Fundamental issues in finite element analyses of localisation of deformation. *Engineering Computation*, 10:99–121.
- [Desrues et Chambon, 2002] DESRUES, J. et CHAMBON, R. (2002). Shear band analysis and shear moduli calibration. *International Journal of Solids and Structures*, 39(13-14):3757–3776.
- [Dubé *et al.*, 1996] DUBÉ, J.-F., PIJAUDIERCABOT, G. et LABORDERIE, C. (1996). Rate dependent damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(10):939–947.
- [Dugdale, 1960] DUGDALE, D. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the mechanics and physics of solids*, 8(2):100–104.
- [Flaggs et Kural, 1982] FLAGGS, D. L. et KURAL, M. H. (1982). Experimental determination of the in situ transverse lamina strength in graphite/epoxy laminates. *Journal of Composite Materials*, 16(2):103–116.
- [Forest et Lorentz, 2004] FOREST, S. et LORENTZ, E. (2004). Localization and regularization. In BESSON, J., éditeur : *Local approach to fracture*, chapitre XI, pages 311–371. Les presses de l’Ecole des Mines.

- [Frémond et Nedjar, 1996] FRÉMOND, M. et NEDJAR, B. (1996). Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1083–1103.
- [Garrett et Bailey, 1977] GARRETT, K. W. et BAILEY, J. E. (1977). Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester. *Journal of Materials Science*, 12(1):157–168.
- [Germain *et al.*, 2007a] GERMAIN, N., BESSON, J. et FEYEL, F. (2007a). Composite layered materials : Anisotropic nonlocal damage models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44):4272–4282.
- [Germain *et al.*, 2007b] GERMAIN, N., BESSON, J., FEYEL, F. et GOSSELET, P. (2007b). High-performance parallel simulation of structure degradation using non-local damage models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(3):253–276.
- [Griffith, 1920] GRIFFITH, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flows in solids. *Philosophical transactions of the Royal society of London*, CCXXI-A:163–198.
- [Gupta *et al.*, 2005] GUPTA, J. S., ALLIX, O., BOUCARD, P. A., FANGET, A. et HÉREIL, P. L. (2005). Fracture prediction of a 3d c/c material under impact. *Composites Science and Technology*, 65(3-4):375–386.
- [Gutiérrez, 2004] GUTIÉRREZ, M. A. (2004). Energy release control for numerical simulations of failure in quasi-brittle solids. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 20(1):19–29.
- [Hallett *et al.*, 2009a] HALLETT, S., GREEN, B., JIANG, W. G., CHEUNG, K. et WISNOM, M. R. (2009a). The open hole tensile test : a challenge for virtual testing of composites. *International Journal of Fracture*, 158(2):169–181.
- [Hallett *et al.*, 2009b] HALLETT, S. R., GREEN, B. G., JIANG, W. G. et WISNOM, M. R. (2009b). An experimental and numerical investigation into the damage mechanisms in notched composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(5): 613–624.
- [Hallett et Wisnom, 2006] HALLETT, S. R. et WISNOM, M. R. (2006). Experimental investigation of progressive damage and the effect of layup in notched tensile tests. *Journal of Composite Materials*, 40(2):119–141.
- [Hashin, 1985] HASHIN, Z. (1985). Analysis of cracked laminates : a variational approach. *Mechanics of Materials*, 4(2):121–136.
- [Highsmith et Reifsnider, 1982] HIGHSMITH, A. et REIFSNIDER, K. (1982). Stiffness reduction mechanism in composite laminates. In REIFSNIDER, K., éditeur : *Damage in composite materials*, volume 775, pages 103–117. ASTM STP.
- [Hill, 1958] HILL, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastoplastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6:236–249.
- [Hillerborg *et al.*, 1976] HILLERBORG, A., MODÉER, M. et PETERSSON, P. E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773–781.

- [Hochard *et al.*, 2001] HOCHARD, C., AUBOURG, P. A. et CHARLES, J. P. (2001). Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2):221–230.
- [Hochard *et al.*, 2007] HOCHARD, C., LAHELLEC, N. et BORDREUIL, C. (2007). A ply scale non-local fibre rupture criterion for cfrp woven ply laminated structures. *Composite Structures*, 80:321–326.
- [Hochard *et al.*, 2009] HOCHARD, C., MIOT, S., LAHELLEC, N., MAZEROLLE, F., HERMAN, M. et CHARLES, J. P. (2009). Behaviour up to rupture of woven ply laminate structures under static loading conditions. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(8):1017–1023.
- [Hochard *et al.*, 2006] HOCHARD, C., PAYAN, J. et BORDREUIL, C. (2006). A progressive first ply failure model for woven ply cfrp laminates under static and fatigue loads. *International Journal of Fatigue*, 28(10):1270 – 1276. The Third International Conference on Fatigue of Composites.
- [Huchette *et al.*, 2009] HUCHETTE, C., VANDELLOS, T. et CARRÈRE, N. (2009). Identification et modélisation de l'influence de l'endommagement intralaminare sur la propagation de délaminage dans les matériaux composites. In *Comptes-rendus des JNC16*.
- [Kachanov, 1958] KACHANOV, L. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. *Izv Akad Nauk S.S.R. Otd Tech Nauk*, 8:26–31.
- [Ladevèze, 1986] LADEVÈZE, P. (1986). Sur la mécanique de l'endommagement des composites. In BATHIAS, C. et MENKÈS, D., éditeurs : *Comptes-rendus des JNC5*, pages 667–683, Paris. Éditions Pluralis.
- [Ladevèze, 1989] LADEVÈZE, P. (1989). About a damage mechanics approach. In BAPTISTE, D., éditeur : *Mechanics and mechanisms of damage in composites and multimatirials*, pages 119–142. Mechanical Engineering Publications Limited, London.
- [Ladevèze, 1991] LADEVÈZE, P. (1991). On a damage mechanics approach. In BAPTISTE, D., éditeur : *Mechanics and mechanisms of damage in composite and multimatirials*, pages 119–141. Mechanical Engineering Publications, London.
- [Ladevèze, 1992] LADEVÈZE, P. (1992). A damage computational method for composite structures. *Computers & Structures*, 44(1-2):79–87.
- [Ladevèze, 1994] LADEVÈZE, P. (1994). Inelastic strains and damage. In TALREJA, R., éditeur : *Damage Mechanics of Composite Materials*, pages 117–136. Elsevier.
- [Ladevèze, 2005] LADEVÈZE, P. (2005). Multiscale modelling of damage and fracture processes in composite materials. In SADOWSKY, T., éditeur : *Multiscale computational damage modelling of laminate composites*, numéro 474 de CISM International Centre for Mechanical Sciences, pages 171–212. Springer-Verlag.
- [Ladevèze *et al.*, 2000] LADEVÈZE, P., ALLIX, O., DEÛ, J.-F. et LÉVÊQUE, D. (2000). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2):105–122.

- [Ladevèze *et al.*, ] LADEVÈZE, P., DAGHIA, F., ABISSET, E. et LE MAUFF, C. On the intra/interlaminar coupling of laminated composites : modeling and identification. *Article en préparation*.
- [Ladevèze et Le Dantec, 1992] LADEVÈZE, P. et LE DANTEC, E. (1992). Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3):257–267.
- [Ladevèze et Lubineau, 2002] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2002). An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composites Science and Technology*, 62(4):533–541.
- [Ladevèze et Lubineau, 2003a] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2003a). On a damage mesomodel for laminates : micromechanics basis and improvement. *Mechanics of Materials*, 35(8):763–775.
- [Ladevèze et Lubineau, 2003b] LADEVÈZE, P. et LUBINEAU, G. (2003b). Pont entre les "micro" et "méso" mécaniques des composites stratifiés. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(8):537–544.
- [Ladevèze *et al.*, 2006] LADEVÈZE, P., LUBINEAU, G. et MARSAL, D. (2006). Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66(6):698–712.
- [Lapczyk et Hurtado, 2007] LAPCZYK, I. et HURTADO, J. A. (2007). Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(11):2333–2341.
- [Lasry et Belytschko, 1988] LASRY, D. et BELYTSCHKO, T. (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6):581–597.
- [Laurin *et al.*, 2007] LAURIN, F., CARRÈRE, N. et MAIRE, J.-F. (2007). A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38(1):198 – 209.
- [Laws et Dvorak, 1988] LAWS, N. et DVORAK, G. J. (1988). Progressive transverse cracking in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 22(10):900–916.
- [Leguillon, 1991] LEGUILLON, D. (1991). Rupture fragile anisotrope. micro-fissures collatérales a une fissure principale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313:139–144.
- [Lorentz et Benallal, 2005] LORENTZ, E. et BENALLAL, A. (2005). Gradient constitutive relations : numerical aspects and application to gradient damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(50-52):5191–5220.
- [Lorentz *et al.*, 2011] LORENTZ, E., CUVILLIEZ, S. et KAZYMYRENKO, K. (2011). Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(1):20–26.
- [Lubineau et Ladevèze, 2008] LUBINEAU, G. et LADEVÈZE, P. (2008). Construction of a micromechanics-based intralaminar mesomodel, and illustrations in abaqus/standard. *Computational Materials Science*, 43(1):137–145.

- [Maier et Hueckel, 1979] MAIER, G. et HUECKEL, T. (1979). Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 16(2):77–92.
- [Maimi *et al.*, 2007] MAIMI, P., CAMANHO, P. P., MAYUGO, J. A. et D-VILA, C. G. (2007). A continuum damage model for composite laminates : Part ii - computational implementation and validation. *Mechanics of Materials*, 39(10):909–919.
- [Maire et Chaboche, 1997] MAIRE, J. F. et CHABOCHE, J. L. (1997). A new formulation of continuum damage mechanics (cdm) for composite materials. *Aerospace Science and Technology*, 1(4):247–257.
- [Marcin *et al.*, 2010] MARCIN, L., MAIRE, J.-F., CARRERE, N. et MARTIN, E. (2010). Development of a macroscopic damage model for woven ceramic matrix composites. *International Journal of Damage Mechanics*, accepted manuscript.
- [Markeset et Hillerborg, 1995] MARKESSET, G. et HILLERBORG, A. (1995). Softening of concrete in compression – localization and size effects. *Cement and Concrete Research*, 25(4):702–708.
- [Mazars et Pijaudier-Cabot, 1996] MAZARS, J. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1996). From damage to fracture mechanics and conversely : A combined approach. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):3327–3342.
- [Miot *et al.*, 2010] MIOT, S., HOCHARD, C. et LAHELLEC, N. (2010). A non-local criterion for modelling unbalanced woven ply laminates with stress concentrations. *Composite Structures*, 92(7):1574–1580.
- [Moës et Belytschko, 2002] MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7):813–833.
- [Muhlhaus et Vardoulakis, 1987] MUHLHAUS, H.-B. et VARDOULAKIS, I. (1987). The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, 37(3):271–283.
- [Nairn et Hu, 1994] NAIRN, J. A. et HU, S. (1994). Matrix microcracking. In TALREJA, R., éditeur : *Damage Mechanics of Composite Materials*, volume 8, pages 187–243. Elsevier Science Publishers.
- [Needleman, 1987] NEEDLEMAN, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54(3):525–531.
- [Needleman, 1988] NEEDLEMAN, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1):69–85.
- [O’Higgins *et al.*, 2008] O’HIGGINS, R. M., MCCARTHY, M. A. et MCCARTHY, C. T. (2008). Comparison of open hole tension characteristics of high strength glass and carbon fibre-reinforced composite materials. *Composites Science and Technology*, 68(13):2770–2778.
- [Oliver, 1989] OLIVER, J. (1989). A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(2):461–474.

- [Oliver *et al.*, 2002] OLIVER, J., HUESPE, A. E., PULIDO, M. D. G. et CHAVES, E. (2002). From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2):113–136.
- [Ortiz, 1987] ORTIZ, M. (1987). An analytical study of the localized failure modes of concrete. *Mechanics of Materials*, 6(2):159–174.
- [Peerlings *et al.*, 1996] PEERLINGS, R. H. J., de BORST, R., BREKELMANS, W. A. M. et de VREE, J. H. P. (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19):3391–3403.
- [Peerlings *et al.*, 2002] PEERLINGS, R. H. J., de BORST, R., BREKELMANS, W. A. M. et GEERS, M. G. D. (2002). Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(2):175–189.
- [Peerlings *et al.*, 2001] PEERLINGS, R. H. J., GEERS, M. G. D., de BORST, R. et BREKELMANS, W. A. M. (2001). A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45):7723–7746.
- [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987] PIJAUDIER-CABOT, G. et BAZANT, Z. P. (1987). Non local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10):1512–1533.
- [Pijaudier-Cabot et Bazant, 1988] PIJAUDIER-CABOT, G. et BAZANT, Z. P. (1988). Dynamic stability analysis with nonlocal damage. *Computers & Structures*, 29(3):503–507.
- [Rabotnov, 1968] RABOTNOV (1968). Creep rupture. *In Proc. XII Int. Conf. Appl. Mech.* Stanford.
- [Rizzi *et al.*, 1995] RIZZI, E., CAROL, I. et WILLAM, K. (1995). Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(4):541–554.
- [Rots *et al.*, 1985] ROTS, J. G., NAUTA, P., KUSTER, G. M. A. et BLAAUWENDRAAD, J. (1985). Smeared crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, 30(1).
- [Sluys, 1992] SLUYS, L. J. (1992). *Wave propagation, localization and dispersion in softening solids*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Delft.
- [Sluys et de Borst, 1992] SLUYS, L. J. et de BORST, R. (1992). Wave propagation and localization in a rate-dependent cracked medium—model formulation and one-dimensional examples. *International Journal of Solids and Structures*, 29(23):2945–2958.
- [Trovalet, 2011] TROVALET, M. (2011). *Sur un modèle micro pour le calcul des structures en composites stratifiés*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
- [Tvergaard et Needleman, 1984] TVERGAARD, V. et NEEDLEMAN, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32(1):157–169.
- [Van Der Meer *et al.*, 2010] VAN DER MEER, F. P., OLIVER, C. et SLUYS, L. J. (2010). Computational analysis of progressive failure in a notched laminate including shear nonlinearity and fiber failure. *Composites Science and Technology*, 70(4):692–700.

- [Van Der Meer et Sluys, 2009] VAN DER MEER, F. P. et SLUYS, L. J. (2009). Continuum models for the analysis of progressive failure in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 43(20):2131–2156.
- [Violeau *et al.*, 2009] VIOLEAU, D., LADEVÉZE, P. et LUBINEAU, G. (2009). Micro-model-based simulations for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 69(9):1364–1371.
- [Yashiro *et al.*, 2007] YASHIRO, S., OKABE, T., TOYAMA, N. et TAKEDA, N. (2007). Monitoring damage in holed cfrp laminates using embedded chirped fbg sensors. *International Journal of Solids and Structures*, 44(2):603–613.