

---

## Résumé long

**Introduction.** Dans cette thèse, nous nous intéressons à la mécanique statistique d'une classe d'écoulements "quasi-bidimensionnels". Nous nous penchons plus particulièrement sur le cas des écoulements tri-dimensionnels axi-symétriques, bidimensionnels stratifiés et bidimensionnels magnéto hydrodynamiques. La dynamique de ces écoulements est génériquement décrite par les équations d'évolution d'un champ de vitesses incompressible bidimensionnel, couplées à une équation d'évolution d'un champ scalaire. Ce dernier représente tantôt une température, tantôt un courant électrique, tantôt un mouvement tourbillonnaire transverse. Ces écoulements ont un intérêt géophysique ou astrophysique : ils peuvent être utilisés pour modéliser grossièrement les ouragans, les courants océaniques à l'échelle planétaire, les taches solaires, etc. Ils ont aussi un intérêt plus fondamental. Malgré leur géométrie bidimensionnelle intrinsèque, les écoulements "2D3C" peuvent être en effet tri-dimensionnellement connotés. Dans les cas que l'on regarde, la vorticité n'est pas seulement transportée : elle est aussi étirée. Il n'est ainsi pas évident de savoir si la tendance naturelle des écoulements 2D3C est de s'organiser en structures cohérentes énergétiques à grande échelle comme en deux dimensions, ou plutôt de répartir leur énergie sur les petites échelles comme en trois dimensions. Il n'est a priori pas clair non plus de savoir si une forme d'énergie (cinétique ou magnétique/tourbillonnaire) y est privilégiée aux dépens de l'autre.

Le manuscrit se scinde en deux grandes parties. Dans la première, nous étudions et décrivons la mécanique statistique d'équilibre des écoulements 2D3C sus-mentionnés, en nous plaçant d'abord dans le cadre des "ensembles d'équilibre absolu" considérés par Robert Kraichnan à la fin des années 1960, puis dans le cadre plus moderne des "mesures microcanoniques stationnaires" introduites par Raoul Robert, Jonathan Miller et Joël Sommeria pour les fluides bidimensionnels au début des années 1990. La seconde partie du manuscrit est plus pratique, et également plus spéculative. Nous nous servons d'outils de la mécanique statistique d'équilibre pour interpréter des données turbulentes expérimentales provenant d'expériences de type Von Kármán. Nous utilisons ensuite des résultats récents de théorie de probabilité pour montrer que des régimes de turbulence quasi-bidimensionnelle (turbulence tri-dimensionnelle avec rotation, turbulence dans des couches savonneuses) ont des propriétés d'invariance conforme statistique, analogues à celles observées dans des systèmes de spins ferromagnétiques au point critique.

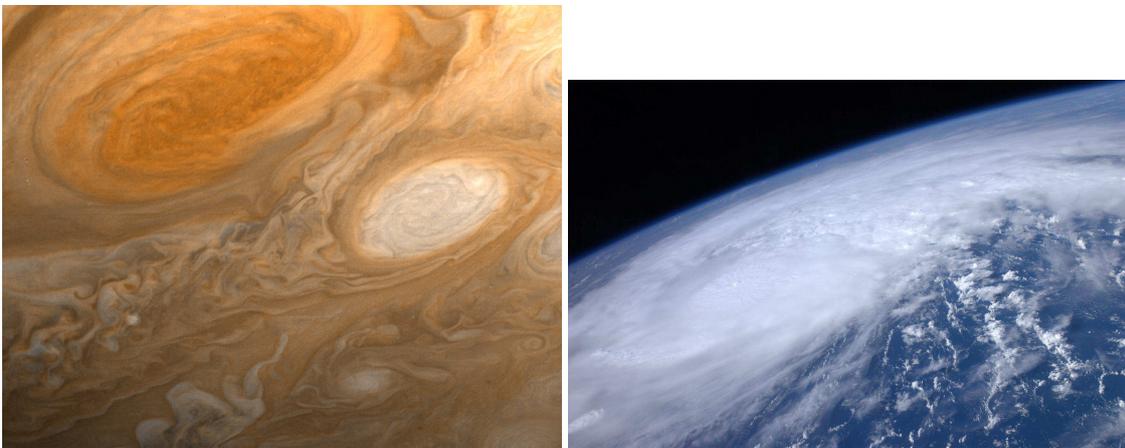
Afin de donner une vue d'ensemble des travaux décrits dans le manuscrit de manière succincte, je m'éloignerai quelque peu du plan général du manuscrit. Je commencerai par expliquer les enjeux qui existent à décrire des écoulements turbulents par une mécanique statistique à l'équilibre. Puis, je décrirai les apports théoriques de cette thèse concernant la description des équilibres des écoulements 2D3C en prenant l'exemple des équilibres axi-symétriques. Enfin, une discussion portera sur une expérience dite de Von Kármán.

**Degrés de liberté et Navier-Stokes.** Le point de départ de cette thèse sont les équations de Navier-Stokes, qui dans leur forme la plus standard, décrivent l'évolution d'un champ

de vitesse tri-dimensionnel, incompressible, soumis à un forçage  $F$  et à une dissipation. Sous une forme non-dimensionnelle, ces équations s'écrivent en fonction d'un nombre sans paramètre, le nombre de Reynolds  $Re = UL/\nu$  –  $U$ ,  $L$  sont la vitesse et la longueur caractéristique de l'écoulement,  $\nu$  est la viscosité du fluide :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + F + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Un argument standard indique que pour caractériser entièrement un écoulement tri-dimensionnel, dont la dynamique est donnée par les équations de Navier-Stokes (2), lorsque le nombre de Reynolds est très grand ( $Re \gg 1$ ), le nombre de degrés de liberté (par exemple le nombre de modes) à spécifier croît avec la puissance 9/4 du nombre de Reynolds. Dans des écoulements atmosphériques, observés à la surface de planètes, le nombre de Reynolds est de l'ordre de  $10^{12}$  à  $10^{20}$  et le nombre de degrés de liberté à spécifier peut donc être de l'ordre de  $10^{33}$ , ce qui est "très grand" par rapport par exemple au nombre d'Avogadro. Il est pourtant bien connu, que de nombreux écoulements atmosphériques, océaniques à la surface des planètes ont tendance à s'organiser en structures cohérentes, à très grande échelle et qui persistent sur des temps très grands. En astrophysique, l'exemple le plus marquant est sans doute la "tache rouge de Jupiter", observée en depuis des siècles et dont le rayon est de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers de kilomètres (figure 1). La question que l'on se pose est donc la suivante : peut-on utiliser la mécanique statistique pour comprendre la formation de ces structures à grandes échelles ? Peut-on le faire rigoureusement ?



**Figure 1:** Deux exemples d'écoulements planétaires turbulents organisés à grande échelle. À gauche, la tache rouge de Jupiter depuis Voyager 1 en 1979; à droite un cliché de l'ouragan Irène en 2011, depuis la station spatiale internationale [nasa.gov, 2013].

**Le problème de l'équilibre.** S'il semble naturel de tenter de décrire ces structures par des méthodes de mécanique statistique, il est ardu de le faire à partir des équations de Navier-Stokes, incluant forçage et dissipation. Considérons par exemple, le cas des équations de Navier-Stokes tri-dimensionnelles, forcées et dissipées, dont la phénoménologie est bien connue. Si des écoulements à  $Re \gg 1$  décrits par ces équations étaient "à l'équilibre", on pourrait penser que le forçage et la dissipation agissent sur l'espace des

modes comme un thermostat, et définissent ainsi une température  $1/\beta$ . Une telle interprétation donne un spectre d'énergie d'équipartition entre les modes  $E(k) \propto 4\pi k^2 \beta^{-1}$ . Ce qui est évidemment très différent spectre du spectres  $E(k) \propto k^{-5/3}$  prédits par la phénoménologie de Kolmogorov et communément observés, dans des expériences de souffleries, des simulations numériques, etc, quelque soit le nombre de Reynolds, dès lors que celui-ci est suffisamment grand. En 3D, la mécanique statistique d'équilibre semble à la fois vague et peu précise, si ce n'est qu'elle semble indiquer que l'énergie doit se répartir sur toutes les échelles, donc ne pas se condenser sur les grandes.

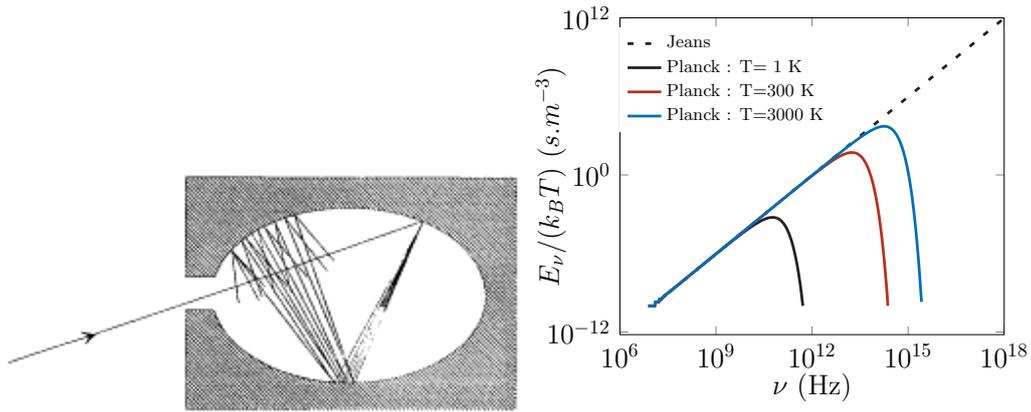
**Euler.** Les équations d'Euler fournissent un cadre plus naturel pour la mécanique statistique, du moins d'un point de vue formel. Ces équations décrivent la dynamique d'un fluide "idéal", c'est à dire à viscosité nulle (ou à un nombre de Reynolds infini), qui n'est soumis à aucune force extérieur. Pour un fluide incompressible, elles s'écrivent

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Il est désormais connu que les équations d'Euler ont une structure hamiltonienne [Morrison, 1998]. Cette structure hamiltonienne est un peu particulière, puisque i) elle décrit l'évolution non pas d'un nombre fini de degrés de liberté mais d'un champ continu et ii) elle est "non-canonique". L'important est que l'existence de cette structure Hamiltonienne garantit l'existence d'un espace des phases naturel, dont le volume est préservé par la dynamique. En d'autre termes, elle garantit l'existence d'un "théorème de Liouville formel", qui est une généralisation en dimension infinie du théorème de Liouville standard. Ce théorème de Liouville formel est présenté dans le Chapitre 2, de même que les références qui s'y rapportent. D'un point de vue technique cependant, il reste difficile d'écrire une mécanique statistique pour un champ continu. Une manière de simplifier encore le problème est de considérer non pas les équations d'Euler en tant que telles, mais d'introduire une échelle de coupure  $1/k_c$  et de considérer des équations d'Euler tronquées, dans lesquelles seule la dynamique d'un nombre fini de modes est considérée. Les équations d'Euler tronquées ne sont en général pas hamiltoniennes, mais un théorème de Liouville est généralement encore vérifié (Voir Chapitre 2). Le spectre d'équipartition  $E(k) \propto 4\pi k^2 \beta^{-1}$  est alors rigoureux. La température inverse  $\beta$  peut être interprété comme un multiplicateur de Lagrange associée à la conservation par les équations tronquées de l'énergie. Ces spectres sont observés dans des simulations numériques des équations d'Euler tronquées. Le problème est qu'à énergie fixée, un spectre d'équipartition conduit à une catastrophe ultraviolette dans la limite  $k_c \rightarrow \infty$ , donnant une énergie soit nulle soit infinie.

Trois grandes questions émergent alors: i) Les équilibres des équations de type Euler sont-ils nécessairement des équilibres catastrophiques ? ii) Sont-ils pertinents pour décrire le comportement à temps long des équations d'Euler ? iii) Et en présence de forçage et de dissipation ?

**Catastrophe Ultra-violette.** Une catastrophe ultra-violette n'est pas une curiosité de la physique. On peut penser à l'exemple historique du corps noir, à la fin du 19<sup>e</sup> siècle, à la



**Figure 2:** A gauche, un exemple d'un corps noir expérimental [Darrigol, 1992]. A droite, les distributions spectrales classiques (Jeans) et quantiques (Planck) pour l'énergie du corps noir.

frontière de la mécanique classique et de la mécanique quantique. Un corps noir idéal est un système qui absorbe toutes les radiations et dont le spectre d'émission ne dépend que de la température [Darrigol, 1992]. Dans la description classique, le spectre en fréquence d'un corps noir à l'équilibre avec son environnement à la température  $T$  est donnée par la loi de Jeans qui décrit un spectre d'équipartition  $E(f) \propto f^2/\beta$ . L'énergie totale d'un tel système s'écrit  $E = \int_0^\infty E(f)df$ . Elle est donc ou nulle (si  $T = 0$ ) ou infinie (si  $T \neq 0$ ). La catastrophe ultraviolette disparaît dans la description quantique du corps noir. A cause de la présence d'un quantum d'énergie dans la description quantique, les fréquences les plus élevées sont gelées, ce qui conduit à la loi de Planck  $E(\nu) \propto h\nu^3 (e^{\beta h\nu} - 1)^{-1}$  et à des énergies totales non nécessairement nulles ni infinies pour une valeur quelconque de la température (Figure 2). Dans le cas des fluides idéaux, les objets qui empêchent l'énergie de s'équi-répartir ne sont pas des éléments d'action mais des invariants de la dynamique idéale, présents en sus de l'énergie. Ces invariants sont appelés des "Casimirs".

**Turbulence 2D.** Le Casimir le plus célèbre est peut être l'enstrophie,  $G = \int_D \omega^2$ , préservé par les équations d'Euler bi-dimensionnelles, tronquées et non-tronquées. Ici  $\omega$  désigne le champ de vortacité (scalaire). L'existence de cet invariant supplémentaire est connu depuis les années 1950. Son rôle dans le cadre d'une mécanique statistique rigoureuse des équations d'Euler 2D tronquées a été initialement développé dans les travaux de Kraichnan, à la fin des années 1960 [Kraichnan, 1967]. La stratégie proposée par Kraichnan est la suivante :

- i) Considérer les équations 2D tronquées pour le champ de vortacité scalaire  $\omega = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{z}}$ , décomposé et tronqué sur une base de fonctions propres orthonormée du Laplacien :  $\omega = \sum_{|\mathbf{k}| < k_c} \omega_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}$ .

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sum_{|\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < k_c} A_{\mathbf{k} \mathbf{l} \mathbf{m}} \omega_{\mathbf{l}} \omega_{\mathbf{m}}. \quad (3)$$

- ii) Remarquer qu'un théorème de Liouville (détaillé) est vérifié pour la dynamique (3)

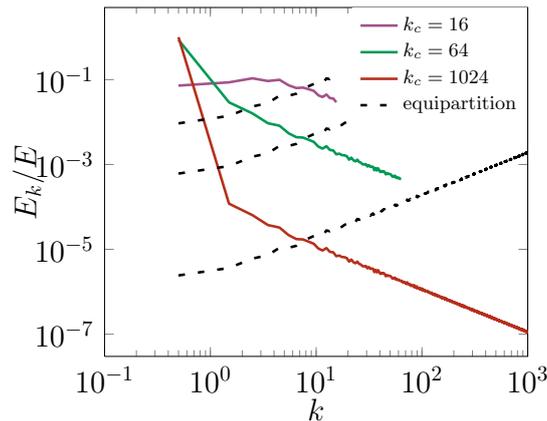
$$: \frac{\partial \dot{\omega}_{\mathbf{k}}}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} = 0.$$

iii) Remarquer que la dynamique tronquée (3) conserve deux invariants, à savoir l'énergie  $E = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 k^{-2}$  et l'énstrophie  $G = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2$ .

iv) Introduire deux températures inverses,  $\alpha$  et  $\beta$ , respectivement associées à l'énstrophie, et à l'énergie. En déduire une fonction de partition canonique  $\mathcal{Z}_N = \prod_{\mathbf{k}} \mathcal{Z}_{N,\mathbf{k}}$  avec  $\mathcal{Z}_{N,\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{R}} d\omega_{\mathbf{k}} e^{(\beta/k^2 + \alpha)\omega_{\mathbf{k}}^2/2}$ . Puis des valeurs moyennes canoniques de l'énergie et de l'énstrophie par mode :  $\langle E_{\mathbf{k}} \rangle_N = k^{-2} \langle G_{\mathbf{k}} \rangle_N = \frac{1}{2(\beta + \alpha k^2)}$ .

v) Considérer la limite  $k_c \rightarrow \infty$  (ie  $N \rightarrow \infty$ ) des moyennes  $\langle \rangle_N$  avec des valeurs prescrites pour E et G.

Dans le cas 2D, on obtient ainsi une limite thermodynamique non triviale, qui décrit une condensation de l'énergie sur le mode le plus petit (Figure 3). L'énstrophie, en contraignant l'espace des phases, fait disparaître la catastrophe ultra-violette et prédit un spectre d'équilibre non triviale.



**Figure 3:** Spectres d'équilibre canoniques dans le cas 2D, obtenus pour différentes coupures  $k_c$  à  $E$  et  $G$  constants. Les lignes pointillées correspondent au régime d'équipartition de l'énergie.

La présence de cette condensation entropique de l'énergie à grande échelle dans le cas idéal est compatible avec la présence d'une cascade inverse d'énergie dans le cas forcé-dissipé. En un certain sens, elle la préfigure. Par ailleurs, dans le cas 2D, il existe des résultats mathématiques et numériques, qui établissent que sous certaines conditions (forçage stochastique, conditions aux limites de Navier...), les solutions des équations de Navier Stokes restent proches des solutions des équations d'Euler. L'étude des solutions statistiques des équations d'Euler 2D est donc particulièrement justifié (voir l'Introduction du manuscrit).

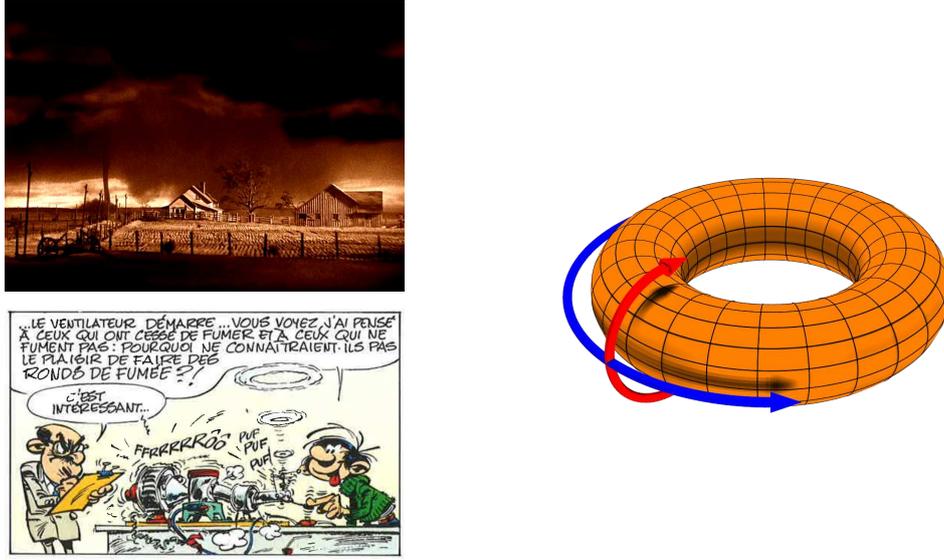
**Turbulence à deux-dimensions et demi.** A ce stade, la situation est donc la suivante. En 2D, les équilibres statistiques sont non triviaux, décrivent une condensation de l'énergie à grande échelle et peuvent être pertinents pour décrire de la vraie turbulence sous des

“bonnes” conditions de forçage et de dissipation. En 3D, la situation est radicalement opposé. Les équilibres statistiques sont “catastrophiques” et dégénérés. Au mieux, ils donnent l’indication que dans le cas forcé-dissipé, l’énergie se répartit sur les petites échelles. Qu’en est il dans des situations intermédiaires, dont on pourrait dire qu’elles sont à “deux dimension et demi” ? Il faut là préciser ce que l’on entend par deux-dimensions et demi. Les écoulements naturels sont bien entendus tri-dimensionnels. Mais ils sont souvent très anisotrope, se stratifiant naturellement suivant une direction donnée. Cette bi-dimensionnalisation peut être causée par la géométrie du domaine, la présence de force volumique (gravité, rotation), le présence de symétrie dans le forçage, etc.

Ces écoulements à deux dimensions et demis, peuvent souvent être modélisés par des dynamiques à “deux dimensions et trois composantes” (“2D3C”) qui incluent par exemple les équations magneto-hydrodynamiques bidimensionnelles (“2DMHD”), les écoulements bidimensionnels de type Boussinesq, les équations de Saint-Venant (“Shallow water”), la dynamique de solutions symétriques des équations de Navier Stokes – symétrie axiale, translationnelle, hélicoidale ... Comme les équations d’Euler 2D, ce type d’écoulements est caractérisé par la présence d’un nombre infini d’invariants de type Casimir; à la différence des équations d’Euler 2D, i) il ne s’agit pas simplement de décrire l’échelle typique de l’énergie mais aussi sa nature parallèle/perpendiculaire, poloidale/toroidale, cinétique/magnétique, cinétique/potentielle, etc. ii) le champ de vorticité (ou son analogue) n’est pas seulement auto-advect  : le champ additionnel peut agir comme un terme source. Une conséquence du point 2 est que l’on peut s’attendre à ce que les Casimirs de ces modèles 2D3C soient moins contraignants que les Casimirs bi-dimensionnels. Le cas des équations dites “axi-symétriques” en est une parfaite illustration.

**Les écoulements “axi-symétriques”.** Les écoulements axi-symétriques sont décrits par les solutions tri-dimensionnelles des équations de Navier-Stokes (2) qui ne dépendent que des deux coordonnées spatiales (cylindriques)  $r$  et  $z$  :  $\mathbf{v} = (v_r(r, z), v_\theta(r, z), v_z(r, z))$ . Il est commode de caractériser les écoulements axi-symétriques en termes d’un champ poloidal  $\xi(r, z) = \hat{\theta} \cdot r^{-1} \nabla \times \mathbf{v}$ , d’un champ toroidal  $\sigma(r, z) = r \hat{\theta} \cdot \mathbf{v}$  et d’une fonction de courant (poloidale) déterminée par  $\psi = -\Delta_\star^{-1} \xi$  (plus des conditions aux limites) : voir la figure 4. D’un point de vue de la mécanique statistique, les champs poloidaux et toroidaux sont des champs naturels à considérer : ils satisfont à un théorème de Liouville formel (voir le Chapitre 2) d’une part; l’énergie totale ainsi que les Casimirs s’écrivent aisément en termes de ces deux champs d’autre part [Szeri and Holmes, 1988, Leprovost et al., 2006]. L’énergie totale s’écrit  $E = \int_\sigma^2 / 4r^2 + \int \xi \psi / 2$ . Quant aux Casimirs, il en existe deux familles : des Casimirs “toroidaux”  $C_f = \int_{\mathcal{D}} d^3 \mathbf{x} f(\sigma)$  et des Casimirs “h licaux”  $H_g = \int_{\mathcal{D}} \xi g(\sigma)$  où  $f$  et  $g$  désignent n’importe quelle fonction suffisamment régulière. On peut observer qu’il existe une correspondance évidente entre les invariants idéaux des modèles 2D MHD, Boussinesq 2D, axi-symétrique et dans une certaine mesure du modèle Shallow-Water (voir le tableau 1). Les équations axi-symétriques sont donc un cas générique de modèle 2D3C.

Les invariants axi-symétriques génèrent ils des  tats d’équilibre catastrophiques? Pour le savoir, on peut comme décrit précédemment, utiliser la stratégie à la Kraichnan,  



**Figure 4:** A gauche, deux exemples d'écoulements naturels présentant une symétrie axiale. A droite, la visualisation des champs poloidaux (bleu) et toroidaux (en rouge).

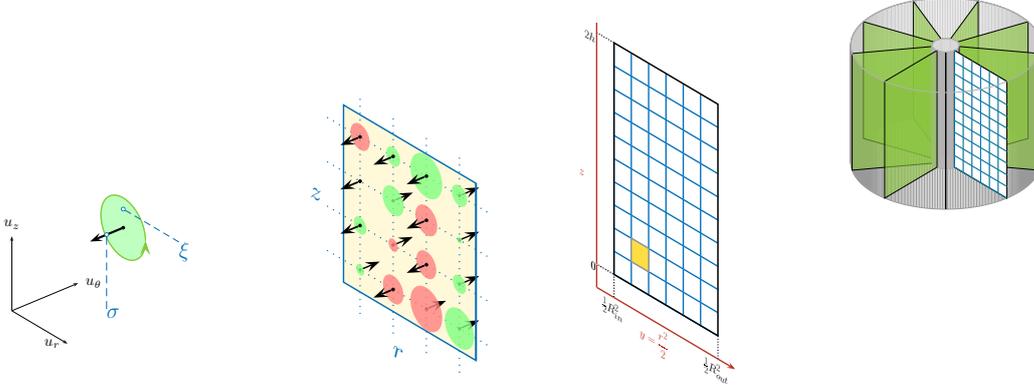
Flow	2D Hydro	3D Axisymmetric	2D Boussinesq	2D Magneto-Hydro	Shallow-Water
Fields	$\omega (= -\Delta\psi)$	$\xi (= -\Delta_*\psi)$	$\omega (= -\Delta\psi)$	$\omega (= -\Delta\psi)$	$q = \omega/h$ (pot.vorticity)
		$\sigma$	$\theta$	$A (= -\Delta^{-1}j)$	$h$ (height)
Energy	$E = E_{\text{kin}}$ $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \omega\psi$	$E = E_{\text{tor}} + E_{\text{pol}}$ $E_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \xi\psi$ $E_{\text{tor}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\sigma^2}{r^2}$	$E = E_{\text{buoy}} + E_{\text{kin}}$ $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \omega\psi$ $E_{\text{buoy}} = \int_{\mathcal{D}} \theta y$	$E = E_{\text{mag}} + E_{\text{kin}}$ $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \omega\psi$ $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} jA$	$E = E_{\text{kin}} + E_g$ $E_{\text{kin}} = \int_{\mathcal{D}} h\mathbf{v}^2$ $E_g = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} gh^2$
Casimirs	$C_F = \int_{\mathcal{D}} F(\omega)$	$C_F = \int_{\mathcal{D}} F(\sigma)$ $H_G = \int_{\mathcal{D}} \xi G(\sigma)$	$C_F = \int_{\mathcal{D}} F(\theta)$ $H_G = \int_{\mathcal{D}} \omega G(\theta)$	$C_F = \int_{\mathcal{D}} F(A)$ $H_G = \int_{\mathcal{D}} \omega G(A)$	$H_G = \int_{\mathcal{D}} hG(q)$

**Table 1:** Des invariants idéaux 2D2C et 2D3C.

savoir discrétiser les champs sur une bases de modes propres du (pseudo) Laplacien  $\Delta_*$ , tronquer la dynamique, et écrire une théorie Gaussienne en ne gardant que les invariants conservés rigoureusement par la dynamique tronquée. Dans le cas axi-symétrique, cette approche n'est pas très fructueuse. Le problème vient de ce que il n'existe pas de base naturelle dans lesquelles à la fois l'énergie toroidale et le Casimir toroidal  $\int_{\mathcal{D}} \sigma^2$  sont conservés rigoureusement. Une discussion détaillée de l'approche à la Kraichnan de modèles 2D3C se trouve dans le chapitre 2 du manuscrit.

Une autre manière d'écrire une mécanique statistique pour des écoulements idéaux est de suivre une approche à la Robert-Miller-Sommeria [Miller, 1990, Robert and Sommeria, 1991]. Dans cette approche, l'espace dans lequel on travaille n'est plus l'espace des

modes, mais l'espace physique d'une part, *tous* les invariants peuvent être aisément pris en compte. L'idée est de construire une mesure (canonique, microcanonique) qui sera une mesure invariante des équations d'Euler, par analogie avec la limite thermodynamique d'un modèle bien choisi de type spin sur réseau, dont les interactions sont prescrites naturellement par les Casimirs. Dans le cas 2D, cette approche a permis de construire des mesures invariantes des équations d'Euler 2D (voir par exemple [Bouchet and Venaille, 2011]). Dans le cas axi-symétrique, pour construire un modèle de spins pertinents, on se place sur un plan méridien, et on considère une tranche de fluide, que l'on discrétise sur un réseau régulier de taille  $N$  par  $N$ . Sur chaque noeud du réseau, on place un spin, qui consiste en la donnée de deux degrés de liberté. L'un de ces degrés est "toroidal", et on peut considérer, sans nuire à la généralité qu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de  $K$  valeurs discrètes. L'autre est "poloidal", et prend ses valeurs continuellement dans  $\mathbb{R}$  (voir la figure 5).



**Figure 5:** De gauche à droite, une vue illustrée de la discrétisation d'un champ axi-symétrique en une assemblée de spins de Beltrami. Les degrés de liberté discrets toroidaux sont figurés par des flèches  $\uparrow\downarrow$ , les degrés de liberté poloidaux sont figurés par des cercles.

Les contraintes dynamiques se transposent en des contraintes en termes d'ensembles de spins. Chaque configuration de spins  $\mathcal{C}_N = (\sigma_N, \xi_N)$  est ainsi caractérisée par

- a) Son énergie  $\mathcal{E}[\mathcal{C}_N] = \mathcal{E}_{\text{tor}}[\mathcal{C}] + \mathcal{E}_{\text{pol}}[\mathcal{C}]$ , avec

$$\mathcal{E}_{\text{tor}}[\mathcal{C}] = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \sum \frac{\sigma_{N,ij}}{4r^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\text{pol}}[\mathcal{C}] = \frac{|\mathcal{D}|}{N^4} \sum \xi_{N,ij} G_{ijij} \xi_{N,ij}, \quad (4)$$

où  $G$  dénote une fonction de Green discrétisée sur le réseau;

- b) les "aires" occupées par chacun de ses  $K$  niveaux toroidaux  $\sigma_1 \dots \sigma_k \dots \sigma_K$  :

$$\mathcal{A}_k[\mathcal{C}] = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \sum \mathbf{1}_{\sigma_{N,ij} \sigma_k}; \quad (5)$$

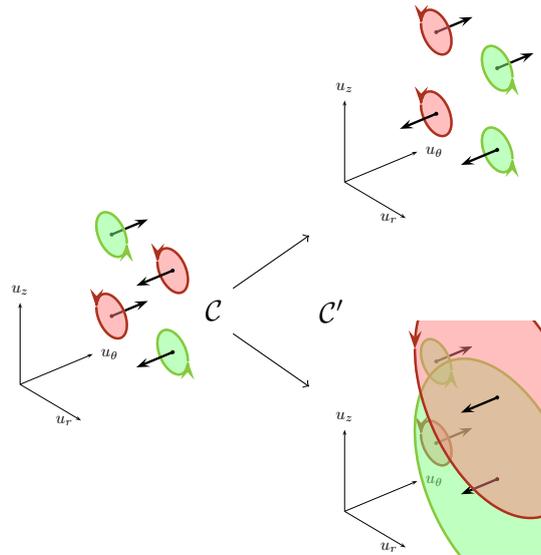
- c) les circulations poloidales, conditionnés sur chacun des  $k$  niveaux toroidaux :

$$\mathcal{X}_k[\mathcal{C}] = \frac{|\mathcal{D}|}{N^2} \sum \xi_{N,ij} \mathbf{1}_{\sigma_{N,ij} \sigma_k}$$

A partir d'un jeu de  $2K + 1$  contraintes  $A_k, X_k, E$  que l'on prescrit, il est alors standard de définir formellement une mesure microcanonique  $\langle \rangle$ . Celle-ci n'est autre que la limite asymptotique (" $N \rightarrow \infty$ ") de la mesure uniforme  $\langle \rangle_N$ , définie sur l'ensemble des configurations  $\mathcal{G}_N(A_k, X_k, E)$  qui satisfont les contraintes. Si l'on se contente de cette construction, on se heurte à un problème. En effet, le volume  $\Omega_N$  (au sens de la mesure de Lebesgue) de chacun des ensembles  $\mathcal{G}_N(A_k, X_k, E)$  est infini, à cause des degrés de liberté poloidaux, ce qui rend la mesure microcanonique ainsi définie triviale. Pour pallier à ce problème, il faut introduire une "normalisation" des mesures uniformes. Une manière de faire est d'introduire une coupure – disons " $M$ " – afin de borner artificiellement les degrés de liberté poloidaux. Ce faisant, on définit des mesures uniformes  $\langle \rangle_{M,N}$  sur l'ensemble des configurations qui satisfont les contraintes et dont les degrés de liberté poloidaux sont bornés. *A priori*, la coupure n'est pas prescrite physiquement par les équations d'Euler. Il semble naturelle de définir la mesure microcanonique comme la double limite  $\langle \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \rangle_{M,N}$ . Cette limite est une limite naturelle, que l'on peut appeler limite idéale. Pour mieux comprendre l'effet de la coupure, la limite en quelque sorte antagoniste est aussi intéressante à étudier. Il s'agit de la limite  $\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \rangle_{M,N}$ , que l'on peut décrire comme une limite où les degrés de liberté poloidaux sont gelés.

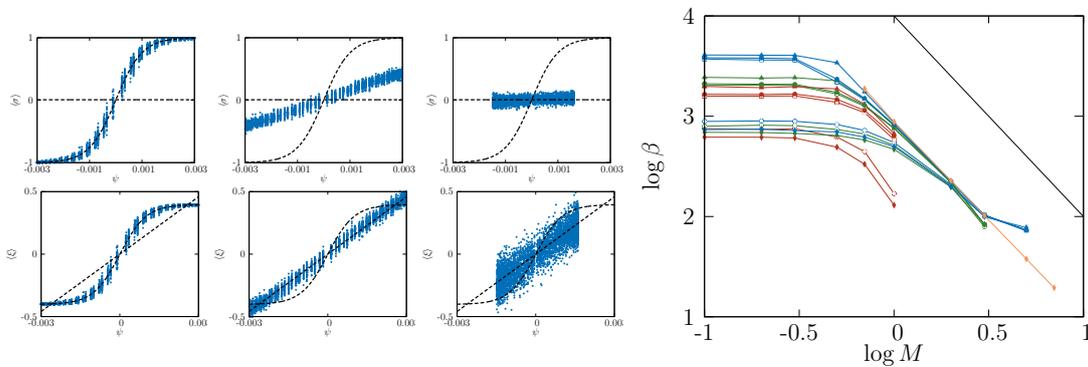
**Simulations Monte-Carlo.** La définition de la mesure microcanonique n'est pas seulement formelle; elle est aussi pratique. En utilisant des algorithmes de type Markov Chain Monte Carlo (MCMC), il n'est pas difficile de simuler un système de spin de Beltrami, afin d'estimer les moyennes microcanoniques et de se faire une intuition quant au rôle des fluctuations poloidales. Pour se faire, nous avons utilisé un algorithme de type Creutz [Creutz, 1983], qui nous a permis d'estimer les moyennes microcanoniques d'observables importantes : champs typiques, fluctuations, corrélations, etc. L'idée est d'effectuer une marche aléatoire biaisée sur l'espace des configurations (à  $N, M$  fixés) qui satisfont les contraintes sur les aires toroidales et les circulations partielles (voir la figure 6, et dont les énergies sont comprises entre  $E$  et  $E + \delta E$ ). L'algorithme permet également d'estimer numériquement une température microcanonique  $\beta^{-1}$  à partir des fluctuations de l'énergie.

Dans le cas simplifié où l'on ne considère que deux niveaux toroidaux symétriques disons  $\pm 1$  occupant chacun la même aire  $A_{\pm} = 1/2$ , et où les circulations partielles sont opposés  $X_{\pm} = \pm 1$ , les deux limites  $M \rightarrow 0$  et  $M \rightarrow \infty$  se visualisent explicitement et le rôle des fluctuations poloidales apparaît clairement (voir la figure 7). Lorsque l'on se contente de permuter des spins de Beltrami pour explorer l'espace des configurations et que l'on ne prend pas en compte les fluctuations des degrés poloidaux (cas " $M=0$ "), les champs moyens toroidaux et poloidaux, tracés en fonction de la fonction de courant moyenne  $\psi$ , se caractérisent par une loi de type tanh Poisson. Lorsque les degrés de liberté poloidaux sont autorisés à fluctuer, cette loi disparaît et les champs toroidaux et poloidaux se découplent. Le champ toroidal s'uniformise. Le champ poloidal s'aligne avec la fonction de courant. Par ailleurs, la température inverse  $\beta^{-1}$  semble suivre une loi d'échelle en  $M^{-2}$ . Les détails de l'étude numérique se trouvent dans le chapitre 4 du



**Figure 6:** Illustration de la marche aléatoire sur l’espace des configurations de spins de Beltrami. A partir d’une configuration  $\mathcal{C}$ , une configuration  $\mathcal{C}'$  est générée en tirant deux positions au hasard, puis en permutant les spins de Beltrami s’y trouvant (haut), ou bien en actualisant les degrés de libertés poloidaux en respectant la conservation des circulations partielles (bas). Si son énergie est comprise entre  $E$  et  $E + \delta E$ , la nouvelle configuration est acceptée, sinon elle est rejetée.

manuscrit.



**Figure 7:** Gauche : Relations  $\langle \sigma \rangle - \langle \psi \rangle$  (en haut) et  $\langle \xi \rangle - \langle \psi \rangle$  (en bas) dans le cas de patches toroidaux symétriques, et estimées avec un algorithme de Creutz pour  $M = 0, 1$  et  $3$  de gauche à droite. A droite, la température inverse  $\beta$  en fonction de la coupure pour différentes résolutions et conditions initiales. En noir, une pente en  $M^{-2}$ .

**Théorie.** Il se trouve que chacune des deux limites ( $M \rightarrow 0$ ) et ( $M \rightarrow \infty$ ) se prête à une description analytique. Dans le cas “ $M = 0$ ”, où les degrés poloidaux sont en un sens gelés aux degrés de liberté toroidaux, les équations champs moyens s’obtiennent explicitement en comptant les configurations microscopiques accessibles en termes de “macro-états”. La théorie prédit les champs moyens suivant – dans le cas simplifié à

deux niveaux toroidaux :

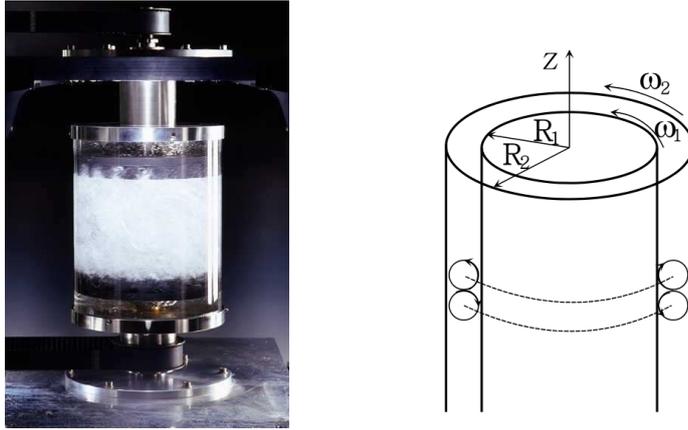
$$\langle \sigma \rangle = \frac{\sum_{\pm} \sigma_{\pm} e^{\alpha_{\pm} - \beta \psi \xi_{\pm} / 2}}{\sum_{\pm} e^{\alpha_{\pm} - \beta \psi \xi_{\pm} / 2}} \quad \text{et} \quad \langle \xi \rangle = \frac{\sum_{\pm} \xi_{\pm} e^{\alpha_{\pm} - \beta \psi \xi_{\pm} / 2}}{\sum_{\pm} e^{\alpha_{\pm} - \beta \psi \xi_{\pm} / 2}} = -\Delta_{\star} \psi. \quad (6)$$

Ici,  $\xi_{\pm}$  désignent les moyennes des degrés poloidales –prescrites –conditionnées sur chacun des deux patches toroidaux. L'équation poloidale est en fait bien connue, elle ressemble trait pour trait à l'équation auto-consistante sur la vorticité moyenne obtenue dans le cas 2D hydrodynamique – si ce n'est que dans le cas 2D strict, l'opérateur  $\Delta_{\star}$  est un "vrai" Laplacien   2D [Miller et al., 1992]. Ces équations sont compliquées mais ont été résolues dans le cas 2D dans la limite des faibles énergies dans les années 1990 [Chavanis and Sommeria, 1996]. Dans le cas présent, elles décrivent donc un champ poloidal à grande échelle et un champ toroidal qui lui est assujetti.

L'autre limite  $M \rightarrow \infty$  se résout aussi exactement et explicitement. Le calcul se fait en deux temps. Comme dans le cas " $M = 0$ ", la limite  $N \rightarrow \infty$  s'obtient en comptant les configurations microscopiques en termes de macro- tats. Ce faisant, on trouve que les distributions micro-canoniques s'écrivent aisément en termes de distribution gibbsiennes qui dépendent des multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des quantités conservées (aires, circulations, énergie). Le point clef pour calculer la limite  $M \rightarrow \infty$  est de remettre à l'échelle les multiplicateurs de Lagrange. Après des calculs longs mais qui ne présentent pas de difficultés conceptuelles particulière, on obtient explicitement les équilibres micro-canoniques. Ceux-ci sont en un sens extrêmes. Pour des faibles valeurs de l'énergie, le champ toroidal est stratifié radialement, la fonction de courant poloidale est nulle, et toute l'énergie est toroidale. Lorsque l'énergie est plus grande qu'une valeur seuil  $E_{\star}$  – qui dépend de la répartition des aires toroidales et des niveaux toroidaux –, l'énergie en excès  $E - E_{\star}$  est poloidale. Les équilibres décrivent un champ toroidal compl tement mélangé, uniforme, et un champ poloidal extrêmement fluctuant mais dont l'organisation typique est à grande échelle. Dans la limite  $M \rightarrow \infty$ , les équilibres ne sont plus gibbsiens. Les champs toroidaux et poloidaux se découplent : les contraintes sur les circulations partielles n'influent pas sur l'organisation à grande échelle des champs hydrodynamiques. Le calcul explicite de ces  tats d'équilibre est mené en détails dans le Chapitre 4 du manuscrit. Il a fait l'objet d'un article, accepté pour publication dans *Journal of Statistical Mechanics*.

L'originalité de notre approche vient de la prise en compte des fluctuations poloidales, dans une description entièrement microcanonique, ce qui n'était pas le cas dans des travaux antérieurs [Lim, 2003, Leprovost et al., 2006, Naso et al., 2010]. Notre travail montre que les équilibres axi-symétriques ne sont pas catastrophiques. A cause de la présence de fluctuations poloidales potentiellement infinies, les équilibres sont extrêmes mais non triviaux. Ils sont en tous les cas très différents des équilibres 2D. On peut noter que les équilibres 2D Boussinesq et 2D MHD peuvent se construire formellement et traiter de manière quasi analogue au cas axi-symétrique (voir le Chapitre 5).

**L'expérience Von Kármán.** D'un point de vue théorique, les équilibres axi-symétriques que nous avons construits et décrits semblent satisfaisant. Sont-ils pertinents pour décrire

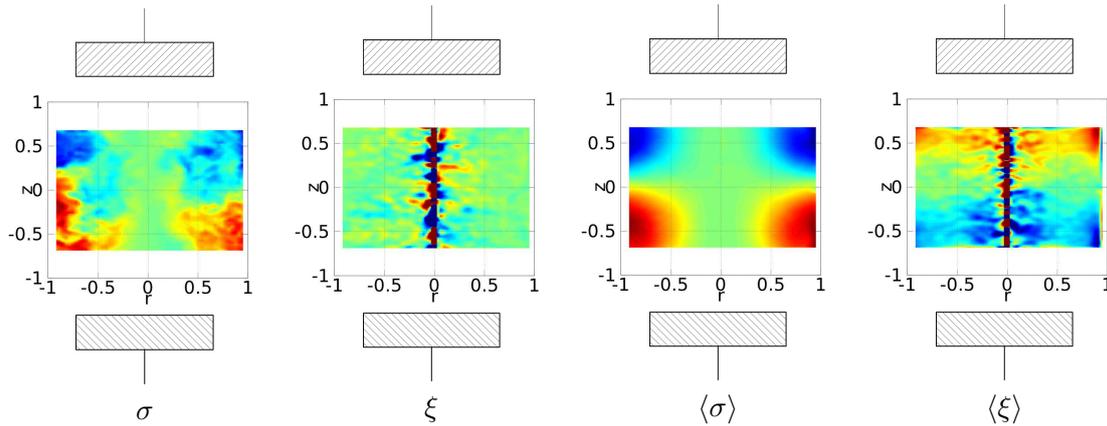


**Figure 8:** A gauche, un montage de type Von Kármán . A droite, le schéma d’une expérience de type Taylor-Couette []

les structures à grande échelle d’écoulements turbulents “réels”, non idéaux ? Cette question fait l’objet du Chapitre 6 du manuscrit.

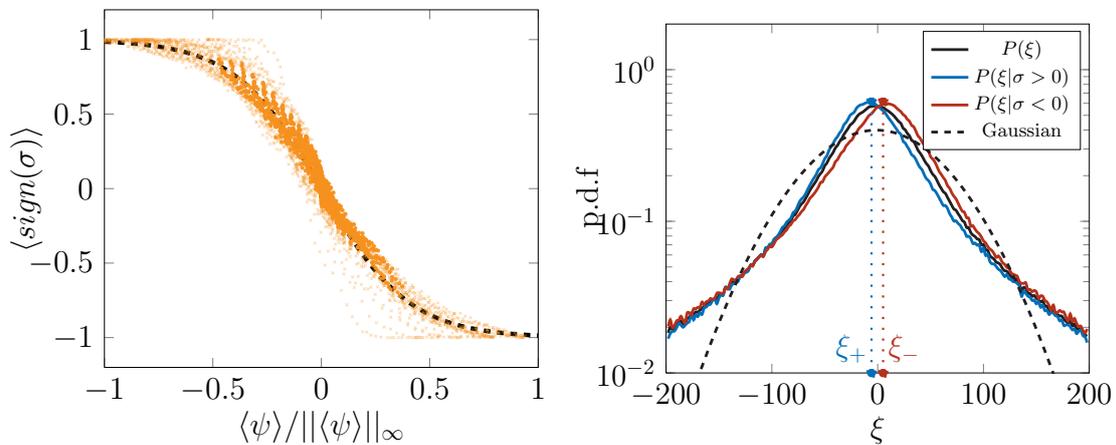
Les écoulements rigoureusement axi-symétriques n’existent pas dans la nature. Mais d’un point de vue pratique, on peut penser que les équations axi-symétriques peuvent être utiles pour rendre compte de la dynamique d’écoulements générés dans des systèmes de type Taylor-Couette ou Von Kármán (Figure 8). Dans des expériences de type Von Kármán , un fluide à l’intérieur d’une cuve cylindrique est forcé par deux pales tournant en contra-rotation situées à chacune des deux extrémités de la cuve [Ravelet, 2005, Monchaux, 2007, Saint-Michel, 2013]. En première approximation, la turbulence ainsi générée est caractérisée par deux paramètres : le nombre de Reynolds, construit à partir des fréquences de rotation  $f_{1,2}$ , du rayon  $R$  des pales et de la viscosité  $\nu$  du fluide :  $Re = \pi(f_1 + f_2)R^2\nu^{-1}$  ainsi que l’asymétrie du forçage  $\theta = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$ . Si l’on regarde plus en détails les écoulements de type Von Kármán , dans le cas où l’asymétrie du forçage est nulle, et où le nombre de Reynolds est élevé ( $Re \gtrsim 10^4$ ) on note et ce n’est finalement pas vraiment une surprise que les écoulements instantanés visualisés sur un plan méridien par des techniques de *Particle Image Velocimetry* (PIV) ne sont pas axi-symétriques. En revanche, les écoulements moyennés temporellement le sont (voir la figure 9). Sont-ils pour autant décrits par des équilibres statistiques ?

Chacun des deux champs moyens poloidaux et toroidaux est caractérisé par la présence de deux cellules de recirculation à grande échelle, chacune occupant la moitié de la cuve. Ces champs moyennés ne sont pas ceux décrits par les équilibres statistiques formels décrits pour les équations axi-symétriques (“ $M \rightarrow \infty$ ” : chacun des deux champs poloidaux et toroidaux présente en effet une structure à grande échelle, non uniforme et non triviales. Ce n’est pas tellement surprenant. Si les écoulements moyens sont axi-symétriques, leur dynamique n’est pas forcément régie par les équations de Navier Stokes axi-symétriques. Par ailleurs, dans un écoulement de Von Kármán , le forçage se fait à grande échelle. La condition de séparation d’échelle nécessaire à l’émergence de structures d’équilibre à grande échelle n’est donc pas vérifiée.



**Figure 9:** A gauche, les champs instantanés typiquement observés dans un plan azimuthal. A droite, les champs moyennés.

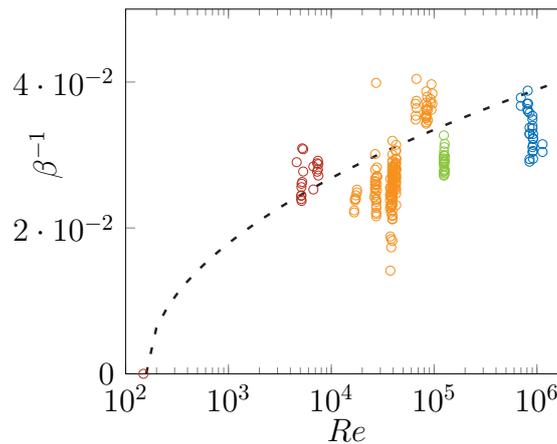
Toutefois, en regardant la statistique des signes du champ toroidal, tracés en regard de la fonction de courant, une loi en  $\tanh$  apparaît, réminiscente de la loi en  $\tanh$  observée dans les simulations Monte-Carlo dans le cas où les degrés de liberté poloidaux sont gelés aux degrés toroidaux (voir la figure 10). Cette observation est empirique. Néanmoins, elle indique que d'un point de vue phénoménologique, les structures à grande échelle peuvent être interprétées comme des structures d'entropie maximale. L'effet du forçage est alors de créer des corrélations entre les degrés toroidaux et poloidaux, empêchant ces derniers de fluctuer librement et indépendamment du champ toroidal. La loi en  $\tanh$  est visible pour une large gamme de nombre de Reynolds allant de  $10^4$  à  $10^6$



**Figure 10:** A gauche, le signe toroidal moyen tracé en regard de la fonction de courant à  $Re \simeq 10^4$ . A droite, distributions du champ poloidal conditionnés sur les patches toroidaux.

La loi en “ $\tanh$ -Poisson”, couplée à la mesure des distributions poloidales conditionnées sur les patches toroidaux permet d'associer une *température* à cette classe d'écoulements de Von Kármán, caractérisant leurs grandes échelles. Cette température  $\beta^{-1}$  s'obtient tout simplement en ajustant la relation de champ moyen  $\langle \text{sign}(\sigma) \rangle - \psi$  via la relation champ moyen sur le champ toroidal obtenue dans le cas  $M = 0$  avec deux niveaux toroidaux symétriques : “ $\langle \text{sign}(\sigma) \rangle = \tanh(\beta(\xi_+ - \xi_-)\psi$ ”.

Cette température, qui peut être interprétée en tant que température microcanonique, et dont l'origine est statistique, varie peu en fonction du nombre de Reynolds dès lors que celui-ci est suffisamment élevé. Elle donne cependant l'image d'une turbulence développée "chaude", à température finie (Figure 11). On peut remarquer que notre caractérisation thermique de la turbulence, basée sur la statistique des grandes échelles, est très différente de la définition proposée par B. Castaing dans [Castaing, 1996], qui obtenait une température de la turbulence  $T \propto \log Re)^{-1}$  à partir d'arguments "hors-équilibre" basés sur la statistique des petites échelles et des arguments d'auto-similarité dans la statistique des incréments de vitesse.



**Figure 11:** La température de la turbulence Von Kármán . Les pointillés ne sont qu'indicatifs.

**Conclusions et ouvertures.** A travers l'exemple des écoulements axi-symétriques, nous avons donc pu voir que les écoulements 2D3C, s'ils sont moins contraints que les écoulements 2D hydrodynamiques se prêtent à une mécanique statistique. Deux stratégies permettent d'éviter l'apparition d'une catastrophe ultraviolette. La première phénoménologique est de négliger les fluctuations "gênantes", non sévèrement contraintes par les Casimirs (fluctuations poloidales dans le cas axisymétrique, fluctuations cinétiques dans le cas MHD) et de calquer la mécanique statistique des écoulements 2D3C sur le cas 2D hydrodynamique. L'autre stratégie, plus formelle, est de normaliser l'espace des phases, et de définir les équilibres en deux temps. Cette seconde approche est plus naturelle et satisfaisante d'un point de vue formel : elle conduit à des équilibres extrêmes mais non triviaux et donne une manière systématique de construire une mécanique statistique d'équilibre d'écoulements idéaux, que l'on peut peut-être étendre à des écoulements moins symétriques que ceux traités ici et éventuellement tri-dimensionnels (3D3C) : 3D MHD, 3D Euler, etc.

Nous avons pu voir les limites d'une telle description formelle. Utiliser des arguments de mécanique statistique d'équilibre pour caractériser des écoulements 3D turbulents n'est en général pas naturel, sauf à prendre le parti d'une description au moins en partie phénoménologique, basée sur des observations plutôt que sur des équations. Un certain nombre de théories statistiques ayant trait à la turbulence incluent de manière très efficace des hypothèses ad-hoc, comme l'inclusion de contraintes additionnelles [Verkley,

], la paramétrisation du forçage à petite échelle par des distributions canoniques [Chavanis, 2008], ou l'utilisation de fonction de partitions réduites [Herbert, 2013] pour rendre compte de la perte d'ergodicité due à la présence de forçage et de dissipation.

De nombreux phénomènes observés dans des écoulements turbulents semblent avoir une explication ancrée dans la mécanique statistique : l'invariance conforme dans des cascades inverses en 2D [Bernard et al., 2006], la trace de celle-ci dans des écoulements 2D3C (Chapitre 7), la dynamique chaotique de structures cohérentes [Saint-Michel, 2013], des transitions de phase à Reynolds fini [Cortet et al., 2010], etc. Une compréhension détaillée de ces phénomènes nécessite vraisemblablement d'aller au-delà des idées idéales discutées dans ce manuscrit.



# Bibliography

- [Bernard et al., 2006] Bernard, D., Boffetta, G., Celani, A., and Falkovich, G. (2006). Conformal invariance in two-dimensional turbulence. Nature Physics, 2(2):124–128.
- [Bouchet and Venaille, 2011] Bouchet, F. and Venaille, A. (2011). Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows. Arxiv preprint arXiv:1110.6245.
- [Castaing, 1996] Castaing, B. (1996). The temperature of turbulent flows. Journal de Physique II, 6(1):105–114.
- [Chavanis and Sommeria, 1996] Chavanis, P. and Sommeria, J. (1996). Classification of self-organized vortices in two-dimensional turbulence: the case of a bounded domain. Journal of Fluid Mechanics, 314:267–298.
- [Chavanis, 2008] Chavanis, P.-H. (2008). Statistical mechanics of 2d turbulence with a prior vorticity distribution. Physica D: Nonlinear Phenomena, 237(14):1998–2002.
- [Cortet et al., 2010] Cortet, P.-P., Chiffaudel, A., Daviaud, F., and Dubrulle, B. (2010). Experimental evidence of a phase transition in a closed turbulent flow. Physical review letters, 105(21):214501.
- [Creutz, 1983] Creutz, M. (1983). Microcanonical Monte Carlo simulation. Physical Review Letters, 50(19):1411–1414.
- [Darrigol, 1992] Darrigol, O. (1992). From c-numbers to q-numbers [electronic resource]: the classical analogy in the history of quantum theory. University of California Pr.
- [Herbert, 2013] Herbert, C. (2013). Restricted partition functions and dual energy cascade in parity symmetry breaking flows. to appear.
- [Kraichnan, 1967] Kraichnan, R. H. (1967). Inertial ranges in two-dimensional turbulence. Physics of fluids, 10:1417.
- [Leprovost et al., 2006] Leprovost, N., Dubrulle, B., and Chavanis, P.-H. (2006). Dynamics and thermodynamics of axisymmetric flows: Theory. Physical Review E, 73(4):046308.
- [Lim, 2003] Lim, C. C. (2003). Coherent structures in an energy-entropy theory for axisymmetric flows. Physics of Fluids, 15:478.
- [Miller, 1990] Miller, J. (1990). Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions. Physical review letters, 65(17):2137.

- [Miller et al., 1992] Miller, J., Weichman, P. B., and Cross, M. (1992). Statistical mechanics, Euler's equation, and Jupiter's red spot. Physical Review A, 45(4):2328.
- [Monchaux, 2007] Monchaux, R. (2007). Mécanique statistique et effet dynamo dans un écoulement de von Kármán turbulent. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII.
- [Morrison, 1998] Morrison, P. (1998). Hamiltonian description of the ideal fluid. Reviews of Modern Physics, 70(2):467.
- [nasa.gov, 2013] nasa.gov (2013).
- [Naso et al., 2010] Naso, A., Monchaux, R., Chavanis, P.-H., and Dubrulle, B. (2010). Statistical mechanics of Beltrami flows in axisymmetric geometry: Theory reexamined. Physical Review E, 81(6):066318.
- [Ravelet, 2005] Ravelet, F. (2005). Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Kármán turbulent. PhD thesis, CEA.
- [Robert and Sommeria, 1991] Robert, R. and Sommeria, J. (1991). Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. J. Fluid Mech, 229(29):1–3.
- [Saint-Michel, 2013] Saint-Michel, B. (2013). L'expérience von Kármán comme paradigme de la mécanique statistique hors équilibre. PhD thesis, Université Paris-Diderot-Paris VII.
- [Szeri and Holmes, 1988] Szeri, A. and Holmes, P. (1988). Nonlinear stability of axisymmetric swirling flows. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 326(1590):327–354.
- [Verkley, ] Verkley, W. The statistical mechanics of turbulent flows.